UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Trabajo Especial de Licenciatura en Matemática

G_2-estructuras con divergencia cero en grupos de Lie

Agustín Nicolás Garrone

Director: Dr. Jorge Lauret

Resumen

Considerar una G_2-estructura definida en una variedad diferenciable de dimensión siete. Hay múltiples maneras de hacerla evolucionar con el objeto de anular su torsión, facilitando la búsqueda de variedades riemannianas con holonomía igual al grupo de Lie excepcional G_2. Entre estas evoluciones, el así llamado flujo isométrico tiene la característica distintiva de preservar la métrica subyacente inducida por esta G_2-estructura. Dicho flujo está construido a partir de la divergencia del tensor de torsión total de la G_2-estructura en evolución de manera tal que sus puntos críticos son precisamente las G_2-estructuras con tensor de torsión total con divergencia cero. En este trabajo se estudian dos grandes familias de G_2-estructuras no cerradas no equivalentes definidas sobre grupos de Lie solubles simplemente conexos previamente analizados en [**KL21**] y se calcula la divergencia del tensor de torsión total de las mismas, hallándose en ambos casos que ésta es idénticamente nula.

Palabras clave— G_2-estructuras, divergencia, torsión, flujo isométrico, grupos de Lie

Abstract

Take a G_2-structure defined on a seven-dimensional manifold. There are many possible ways of making it evolve with the aim of making it torsion-free, easing in turn the search for Riemannian manifolds with holonomy equal to the exceptional Lie group G_2. Among those evolutions, the so-called isometric flow has the distinctive feature of preserving the underlying metric induced by that G_2-structure. This flow is built upon the divergence of the full torsion tensor of the flowing G_2-structures in such a way that its critical points are precisely G_2-structures with divergence-free full torsion tensor. In this work we study two large families of non-equivalent non-closed G_2-structures defined on simply connected solvable Lie groups previously scrutinized in [**KL21**] and compute the divergence of their full torsion tensor, finding that it is identically zero in both cases.

Keywords— G_2-structures, divergence, torsion, isometric flow, Lie groups

Introducción

Una G_2-estructura en una variedad diferenciable M de dimensión siete es una 3-forma suave $\varphi \in \Omega^3(M)$ *positiva*; es decir, tal que para todo $p \in M$ existe una base $\{e_1, \cdots, e_7\}$ de T_pM con respecto a la cual puede escribirse

$$\varphi_p = e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245}. \tag{1}$$

Las G_2-estructuras son tan antojadizas como aparentan, mas no por ello estériles o insignificantes. En primer lugar, están íntimamente relacionadas con el grupo de Lie excepcional de dimensión 14, tradicionalmente denominado G_2, que de hecho surge como el grupo de "simetrías" asociadas a φ en el sentido en que es el subgrupo de isotropía de la acción natural $\cdot : \mathrm{GL}(7,\mathbb{R}) \times \Omega^3(M) \to \Omega^3(M)$ dada por

$$h \cdot \eta_p(X_p, Y_p, Z_p) \equiv \eta_p(h^{-1}X_p, h^{-1}Y_p, h^{-1}Z_p) \;\; \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \tag{2}$$

tal y como se demuestra en [**Bry87**, Section 2, Theorem 1]. En segundo lugar, su existencia impone severas restricciones topológicas sobre M, más allá de su dimensión, como por ejemplo que M sea orientable y espín (ver [**Lau17**], [**Kar20**], [**Bry87**], o [**Joy00**, Proposition 10.1.6]). En tercer lugar, ponen en contacto objetos matemáticos a primera vista "distantes", como generalizaciones del producto cruz vectorial (ver [**Gra69**], [**FG82**]) o el álgebra de división normada de los octoniones (ver [**Lau17**, Section 2], [**Bae02**]), sin mencionar ya teorías físicas de gran calibre como la M-theory (ver [**Gri10**, Section 1]). Esta lista de razones dista mucho de ser exhaustiva.

La geometría realizada en presencia de G_2-estructuras es notable en buena medida debido a que φ por sí sola induce una métrica riemanniana g_φ y una forma de volumen vol_φ mediante

$$\frac{1}{6}\iota_X(\varphi) \wedge \iota_Y(\varphi) \wedge \varphi = g_\varphi(X,Y)\,\mathrm{vol}_\varphi \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{3}$$

donde $\iota_X : \Omega^3(M) \to \Omega^2(M)$ es el mapa dado por $\iota_X(\eta)(Y,Z) \equiv \eta(X,Y,Z)$, dando lugar en particular a un operador estrella de Hodge $\star_\varphi : \oplus_{n=1}^7 \Omega^k(M) \to \oplus_{n=1}^7 \Omega^k(M)$ en la variedad riemanniana orientada $(M, g_\varphi, \mathrm{vol}_\varphi)$. De especial interés es el caso en que φ satisface $\nabla_\varphi \varphi = 0$, donde ∇_φ es la derivada covariante de Levi-Civita inducida por g_φ; una G_2-estructura φ de este tipo se denomina *libre de torsión*. La importancia de esta clase de G_2-estructuras proviene en parte de que la holonomía de M respecto de g_φ está contenida en el grupo G_2 *precisamente* cuando dicha G_2-estructura es libre de torsión (ver [**Joy00**, Proposition 10.1.3]), en cuyo caso el par (M, φ) se denomina G_2-*variedad*. Este resultado es adecuadamente sopesado en relación al teorema de clasificación de Berger (ver [**Ber55**]), que lista todos los posibles grupos de holonomía de variedades riemannianas con restricciones genéricas[1], uno de los cuales es justamente el grupo G_2. Durante décadas se consideró que no existían variedades de este tipo con holonomía exactamente igual a G_2; no fue sino hasta los trabajos de R. Bryant en 1987 (ver [**Bry87**]) y D. Joyce en 1996 (ver

[1]Concretamente, el teorema refiere a variedades conexas simplemente conexas no localmente reducibles ni localmente simétricas.

[**Joy00**]) que se hallaron ejemplos tanto en el caso no compacto como compacto, respectivamente.

La producción de nuevos ejemplos de G_2-estructuras libres de torsión, si bien significativamente más refinada que un cuarto de siglo atrás, sigue siendo una tarea ardua; esto se debe principalmente a que la condición $\nabla_\varphi \varphi = 0$ resulta ser una ecuación no lineal en derivadas parciales de φ. El artículo [**Bry05**] de R. Bryant resultó ser seminal al sentar las bases de uno de los enfoques más populares y fructíferos para estudiar G_2-estructuras y producir nuevos ejemplos libres de torsión, que consiste en estudiar distintos *flujos geométricos* de G_2-estructuras. Resumidamente, este enfoque consiste en tomar una curva $t \to \varphi(t)$ de G_2-estructuras, normalmente imponiendo condiciones extra (e.g., siguiendo los pasos de R. Bryant en [**Bry05**], que satisfagan $d\varphi(t) = 0$ para todo t), e igualar la cantidad $\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}$ a alguna función de $\varphi(t)$, típicamente denotada por $q(\varphi(t))$, con el objeto de estudiar el siguiente problema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = q(\varphi(t)) \\ \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases} \tag{4}$$

Aquí, φ_0 es una G_2-estructura "inicial". En [**Bry05**], R. Bryant consideró[2] $q(\varphi(t)) = \Delta_{\varphi(t)}\varphi(t)$, donde $\Delta_{\varphi(t)} = d \star_{\varphi(t)} d \star_{\varphi(t)} - \star_{\varphi(t)} d \star_{\varphi(t)} d$ es el operador laplaciano de Hodge inducido por la G_2-estructura $\varphi(t)$, aunque otras elecciones ameritan atención (ver, por ejemplo, [**KMMP12**], [**Gri19**, Section 1], o [**Gri20p**]). El flujo geométrico de G_2-estructuras de mayor interés en el presente trabajo tiene la particularidad de permitir que la curva de G_2-estructuras $\varphi(t)$ evolucione de manera que la métrica subyacente $g_{\varphi(t)}$ se mantenga fija (ver [**Kar05**, Section 3]), razón por la cual dicho flujo toma el nombre de *flujo isométrico de* G_2*-estructuras* (ver [**Gri20p**]). Antes de explicitarlo, es preciso introducir dos nociones esenciales:

- El *tensor de torsión total* T_φ de una G_2-estructura φ es el único campo tensorial suave de tipo $(1,1)$ que satisface (ver [**Kar20**]).

$$(\nabla_\varphi)_X \varphi = \iota_{T_\varphi(X)}(\star_\varphi \varphi) \ \ \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{5}$$

- La *divergencia* del tensor de torsión total T_φ de una G_2-estructura φ es el campo vectorial suave $\operatorname{div} T_\varphi$ dado por

$$g_\varphi(\operatorname{div} T_\varphi, E_j) = \sum_{i=1}^{7} \nabla_{E_i} T_\varphi(E_i, E_j) \tag{6}$$

  para todo marco local $\{E_i \mid i = 1, \cdots, 7\}$ ortonormal respecto de la métrica g_φ inducida por φ.

El *flujo isométrico* de G_2-estructuras es entonces el problema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \iota_{\operatorname{div} T_{\varphi(t)}}(\star_{\varphi(t)} \varphi(t)) \\ \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases} \tag{7}$$

[2]En el mismo artículo, R. Bryant demuestra que si $d\varphi_0 = 0$ entonces el flujo dado por $q(\varphi(t)) = \Delta_{\varphi(t)}\varphi(t)$ preserva esta condición; i.e., que $d\varphi(t) = 0$ para todo $t > 0$.

Es claro que las G_2-estructuras con $\operatorname{div} T_\varphi = 0$ son los puntos críticos de (7); en este sentido, es sabido que $\operatorname{div} T_\varphi = 0$ si φ es *cerrada*; es decir, si $d\varphi = 0$ (ver [**Gri19**, Theorem 4.3]). Los puntos críticos de los diversos flujos geométricos son estructuras que *no evolucionan*, lo que les confiere interés intrínseco al tratarse de “patologías”.

El principal objetivo de este trabajo es, entonces, el de producir ejemplos no equivalentes de G_2-estructuras *no cerradas* cuyo tensor de torsión total tenga divergencia cero. Motivos prácticos, que incluyen facilidad de manipulación algebraica y consonancia con direcciones seguidas en la literatura, llevan a concentrar la búsqueda enteramente entre G_2-estructuras invariantes a izquierda definidas sobre grupos de Lie. En este sentido, se consideran los grupos de Lie conexos simplemente conexos $G_{A,B,C}$ cuya definición, formalizada en el principio del Capítulo 4, depende de la especificación de una terna de matrices A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ que conmutan dos a dos, sobre los cuales se define una G_2-estructura *canónica* que respeta la ecuación (1). Se analizan dos grandes casos: Aquellos en los que A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ son diagonales, y aquellos en los que A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ son *antidiagonales* (ver ecuación (58)). En [**KL21**, Lemma 4.5], enunciado aquí como Proposición 4.9, se demuestra que el caso diagonal cubre también la familia de ejemplos correspondiente con la elección de ternas A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ simétricas. El resultado principal puede enunciarse del siguiente modo:

Teorema 1.1. *Las* G_2*-estructuras invariantes a izquierda dadas por* (1) *definidas sobre los grupos de Lie* $G_{A,B,C}$ *con* A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ *o bien simétricas o bien antidiagonales tienen tensor de torsión total* T_φ *con divergencia cero.*

La certeza de que estos tipos de G_2-estructuras son no equivalentes en general proviene del invariante dado por la ecuación (37), tomado en consideración junto con los resultados resumidos en las ecuaciones (80) y (110). Una discusión un poco más minuciosa puede hallarse en la Observación 2, hacia el final del trabajo.

Se anticipa que el cálculo de la divergencia del tensor de torsión total de una G_2-estructura es laborioso y enrevesado. Esto conlleva a que en el Capítulo 4 se recojan algunos otros resultados sobre los grupos de Lie $G_{A,B,C}$, aunque notablemente de menor envergadura, como por ejemplo la determinación de la conexión de Levi-Civita o las así llamadas *formas de torsión* de la G_2-estructura, en ambos casos restringidos al álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ de $G_{A,B,C}$.

El trabajo está estructurado del siguiente modo: En el Capítulo 2 se fija notación y se presentan resultados preliminares. Dichos resultados incluyen nociones elementales de geometría diferencial (e.g., operadores estrella de Hodge, conexiones de Levi-Civita) y de teoría de Lie (consistiendo mayormente en lenguaje y nomenclatura). El Capítulo 3 contiene un resumen de conceptos y construcciones esenciales en la G_2-geometría relacionada con el objetivo principal, poniendo gran énfasis en cómo adaptar definiciones, fórmulas, y resultados en el contexto de grupos y álgebras de Lie. Por demás, en el Capítulo 4 se presentan y demuestran los resultados en el mayor detalle posible, considerando cada caso de estudio por separado.

Preliminares

Geometría diferencial

El propósito principal de esta sección es repasar formalmente las nociones de teoría de variedades diferenciables y de geometría riemanniana con mayor incidencia en el presente trabajo, remarcando especialmente las fórmulas que se usen más adelante. Se asume conocimiento elemental de ambas disciplinas, tomando como referencias principales a [**Lee97**] y [**War83**] para la teoría de variedades diferenciables, y a [**Lee00**] para geometría riemanniana.

2.1.1 Variedades diferenciables

En lo subsiguiente se denotará por $\mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$ a los campos tensoriales suaves de tipo (r, s) en una variedad diferenciable M. Similarmente, se denotará $\mathfrak{X}(M) \equiv \mathfrak{T}^{(0,1)}(M)$ al conjunto de campos vectoriales suaves y por $\Omega^k(M)$ al conjunto de k-formas suaves en una variedad diferenciable M. Asimismo, la evaluación de un campo tensorial $T \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$ en el punto $p \in M$ se denota simplemente por T_p.

A continuación se recuerda la noción de pullback para campos tensoriales. Como primer paso, se recuerdan los detalles de esta noción para campos vectoriales y campos covectoriales.

Definición 2.1. Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo entre dos variedades diferenciables M y N. Fijar $X \in \mathfrak{X}(N)$ y $\omega \in \Omega^1(N)$. Se define el *pullback de X por f* y el *pullback de ω por f*, denotados respectivamente por f^*X y $f^*\omega$, como

$$(f^*X)_p \equiv d(f^{-1})|_{f(p)}(X_{f(p)}) \ \ \forall p \in M. \tag{8}$$

$$(f^*\omega)_p(Y) \equiv \omega_{f(p)}((df)|_p\,(Y_p)) \ \ \forall Y \in \mathfrak{X}(M),\ \forall p \in M. \tag{9}$$

Es claro a partir de la definición que $f^*X \in \mathfrak{X}(M)$ y que $f^*\omega \in \Omega^1(M)$ para cualquier difeomorfismo $f : M \to N$.

Definición 2.2. Sean M y N dos variedades diferenciables difeomorfas, y sea $f : M \to N$ un difeomorfismo. Sea $T \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(N)$ un campo tensorial de tipo (r, s) en N. Se denomina *pullback de T por f* al campo tensorial $f^*T \in \mathfrak{T}^{(r,s)}$ definido por

$$(f^*T)_p(X_1, \cdots, X_r, \omega_1, \cdots, \omega_s) \equiv T_p((f^*X_1)_p, \cdots, (f^*X_r)_p, (f^*\omega_1)_p, \cdots, (f^*\omega_r)_p), \tag{10}$$

donde $X_1, \cdots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega_1, \cdots, \omega_s \in \Omega^1(M)$, y $p \in M$ son arbitrarios.

Se recuerda que es convencional definir $f^*h \equiv h \circ f$ donde $h \in C^\infty(N)$, en consistencia con las definiciones anteriores. Las propiedades elementales del pullback de campos tensoriales pueden hallarse en [**Lee97**, Proposition 8.8] y en [**Lee97**, Lemma 9.14].

Un objeto de interés en variedades diferenciables con protagonismo en el presente trabajo es el de conexión afín, que se recuerda en la siguiente definición.

Definición 2.3. Una *conexión afín* en una variedad diferenciable M es un mapa $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ denotado por $(X, Y) \to \nabla_X Y$ que cumple las siguientes propiedades:

- $\nabla_X Y$ es $C^\infty(M)$-lineal en X; es decir,

$$\nabla_{fX_1+X_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y \ \ \forall f \in C^\infty(M).$$

- $\nabla_X Y$ es $\mathbb{R}$-lineal en Y; es decir,

$$\nabla_X (aY_1 + Y_2) = a\nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2 \ \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

- ∇ satisface la siguiente regla del producto:

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y \ \ \forall f \in C^\infty(M).$$

El par (M, ∇) se denomina *variedad afín.*

Las conexiones afines permiten extender la noción de "derivada direccional" de un campo vectorial en variedades diferenciables. Esta idea puede generalizarse a campos tensoriales de tipo arbitrario; el proceso resultante adquiere la denominación de *derivada covariante.*

Definición 2.4. Sea (M, ∇) una variedad afín. La *derivada covariante* (respecto de ∇) de tensores de tipo (r, s) es el mapa $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{T}^{(r,s)}(M) \to \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$, denotado también por ∇, dado por

$$\begin{aligned}\nabla_X T(Y_1, \cdots, Y_r, \omega_1, \cdots, \omega_s) \equiv\ & X(T(Y_1, \cdots, Y_r, \omega_1, \cdots, \omega_s)) - \\ & - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1, \cdots, \nabla_X Y_i, \cdots, Y_r, \omega_1, \cdots, \omega_s) - \\ & - \sum_{j=1}^{l} T(Y_1, \cdots, Y_r, \omega_1, \cdots, \nabla_X \omega_j, \cdots, \omega_s),\end{aligned} \tag{11}$$

donde $Y_1, \cdots, Y_t \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega_1, \cdots, \omega_s \in \Omega^1(M)$. Se usa una notación semejante a la de conexiones afines, colocando el primer argumento como subíndice.

Es posible demostrar que la derivada covariante de campos tensoriales en una variedad afín (M, ∇) es el único mapa $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{T}^{(r,s)}(M) \to \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$ $C^\infty(M)$-lineal en el primer argumento y $\mathbb{R}$-lineal en el segundo con propiedades altamente deseables, entre las que se incluyen satisfacer una regla del producto análoga a la de la Definición 2.3, coincidir con la conexión afín al restringirse a campos tensoriales de tipo $(0, 1)$, y cumplir que $\nabla_X f = X(f)$ para todo $f \in C^\infty(M)$. Además, es posible ver que $\nabla_{(\cdot)} T \in \mathfrak{T}^{(r+1,s)}(M)$ para todo $T \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$ (ver [**Lee00**, Lemma 4.7]).

De gran interés es estudiar variedades afines (M, ∇) en las que vale que

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{12}$$

Las conexiones afines que satisfacen la condición impuesta por la ecuación (12) se denominan *libres de torsión.* Se desalienta interpretar esta elección de lenguaje de manera coloquial: el término *torsión* hace referencia a conceptos más avanzados, y tiene poco que ver con "torsiones" en un sentido cotidiano.

La diferenciación covariante adquiere mayor sencillez en presencia de una *métrica riemanniana*, simplificando notablemente su estudio.

2.1.2 Geometría riemanniana

DEFINICIÓN 2.5. Una *variedad riemanniana* es un par (M, g) en el que M es una variedad diferenciable y $g \in \mathfrak{T}^{(2,0)}(M)$ es un campo tensorial suave simétrico no degenerado de tipo $(2, 0)$ en M. Dicho mapa toma el nombre de *métrica riemanniana.*

Es importante destacar que una métrica riemanniana g en una variedad diferenciable M induce una métrica en $\mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$ para todo r, $s \in \mathbb{N}_0$, típicamente denotada también por g, de manera tal que si $\{\partial_i \,|\, i = 1, \cdots, n\}$ es un marco local *ortonormal* proveniente de un sistema coordenado $(U, \phi = (x^i))$ en M entonces

$$\{dx^{i_1}|_p \otimes \cdots \otimes dx^{i_r}|_p \otimes \partial_{j_1}|_p \otimes \cdots \otimes \partial_{j_s}|_p \,|\, 1 \leqslant i_1, \cdots, i_r \leqslant n, 1 \leqslant j_1, \cdots, j_s \leqslant n\}$$

es un marco local *ortonormal* de $\mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$.

DEFINICIÓN 2.6. Dos variedades riemannianas (M, g) y (M', g') se dicen *isométricas* si existe un difeomorfismo $f : M \to M'$ tal que $g = f^*g'$. Tal mapa f se denomina una *isometría.*

Similarmente al caso libre de torsión, en el contexto de variedades riemannianas es de gran interés estudiar conexiones afines ∇ en las que vale que

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \;\; \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{13}$$

Las conexiones afines que satisfacen la condición impuesta por la ecuación (13) se denominan *compatibles con g*. De acuerdo con la ecuación (11), una conexión afín ∇ es compatible con una métrica riemanniana g si y sólo si $\nabla g = 0$. Es usual llamar *paralelas* a esta clase de métricas.

El así llamado *teorema fundamental de la geometría riemanniana* establece que en toda variedad riemanniana existe una *única* conexión afín que satisface las ecuaciones (12) y (13).

TEOREMA 2.7. [**Lee00**, Theorem 5.4] *Toda variedad riemanniana (M, g) admite una única conexión ∇ libre de torsión y compatible con g. Dicha conexión está dada por*

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) =& \frac{1}{2}(X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - \\ & - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X]) + g(X, [Z, Y])) \;\; \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \end{aligned} \tag{14}$$

DEFINICIÓN 2.8. La única conexión ∇ libre de torsión y compatible con g en una variedad riemanniana (M, g) se denomina *conexión de Levi-Civita en* (M, g). La fórmula (14) toma el nombre de *identidad de Koszul.*

El siguiente resultado recoge una propiedad notable de la conexión de Levi-Civita, típicamente denominada *naturalidad*, que es enunciada para referenciar más adelante.

Proposición 2.9. *Sean $f : M \to M'$ una isometría entre dos variedades riemannianas, y ∇ y ∇' las respectivas conexiones de Levi-Civita en M y M'. Entonces*

$$(f^{-1})^*(\nabla_X(Y)) = \nabla'_{(f^{-1})^*(X)}((f^{-1})^*(Y)) \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{15}$$

Demostración. Es suficiente demostrar que el mapa $(f^{-1})^*\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$((f^{-1})^*\nabla)_X(Y) \equiv ((f^{-1})^*)^{-1} \circ (\nabla'_{(f^{-1})^*(X)})((f^{-1})^*(Y)).$$

satisface $f^*\nabla = \nabla$. Esto puede establecerse recurriendo a la unicidad de la conexión de Levi-Civita en M', lo cual supone un cuenterío sencillo pero extenso que justifica su omisión. $\square$

Las variedades diferenciables M *orientables* son aquellas en las que existe una *forma de volumen*; es decir, un elemento $\mathrm{vol} \in \Omega^n(M)$ no nulo, donde n es la dimensión de M, entendiéndose esto como que $\mathrm{vol}(E_1, \cdots, E_n) \neq 0$ para todo marco local $\{E_i \,|\, i = 1, \cdots, n\}$ en M. En presencia de una métrica riemanniana, las variedades orientables admiten un mapa privilegiado entre los espacios de k-formas que resulta ser de suma relevancia.

Definición 2.10. Sea (M, g) una variedad riemanniana orientable con forma de volumen vol. El *operador estrella de Hodge* es el único mapa lineal $\star : \oplus_{k=1}^n \Omega^k(M) \to \oplus_{k=1}^n \Omega^k(M)$ que a cada k-forma β asigna una $(n-k)$-forma $\star\beta$ de manera que

$$\alpha \wedge \star\beta = g(\alpha, \beta)\,\mathrm{vol} \ \ \forall \alpha \in \Omega^k(M). \tag{16}$$

Aquí, $\wedge$ denota el producto wedge de dos formas suaves.

Observar que en la definición anterior se hizo uso implícito de la métrica inducida en $\Omega^k(M)$, como se comentó hace algunos párrafos. Es común abusar del lenguaje y denotar por $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ a la restricción del mapa $\star$ a cada $\Omega^k(M)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, así como también denominarlo *operador estrella de Hodge*. El siguiente resultado recoge algunas propiedades básicas de este operador.

Lema 2.11. *Sea (M, g) una variedad riemanniana orientable con forma de volumen* vol. *El operador estrella de Hodge $\star : \oplus_{k=1}^n \Omega^k(M) \to \oplus_{k=1}^n$ de M satisface las siguientes propiedades:*

(i) *El mapa $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales para todo $0 \leqslant k \leqslant n$. En particular, el operador estrella de Hodge existe y es único (en el sentido que no hay otro mapa que satisfaga la ecuación* (16)*).*

(ii) *Fijar un marco ortonormal $\{E_i \,|\, i = 1, \cdots, n\}$ en M. Denotar $\langle n \rangle \equiv \{1, \cdots, n\}$. Para cada $I = \{i_1, \cdots, i_k\} \subseteq \langle n \rangle$ de cardinalidad $0 \leqslant k \leqslant n$, definir $E_I \equiv E_{i_1} \wedge \cdots \wedge E_{i_k}$. Entonces $\star E_I = \pm E_{\langle n \rangle - I}$.*

(iii) $\star 1 = \mathrm{vol}$, *donde $1 \in C^\infty(M)$ es la función constante idénticamente igual a uno.*

(iv) *El mapa $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ es una isometría con la métrica riemanniana inducida para todo $0 \leqslant k \leqslant n$.*

(v) $\star\star\,\eta = (-1)^{k(n-k)}\eta = (-1)^{k(n+1)}\eta$ *para todo $\eta \in \Omega^k(M)$ con $0 \leqslant k \leqslant n$. En particular, si* $\dim M$ *es impar entonces* $\star^2 = \mathrm{Id}$.

(vi) *El mapa* $\star^{-1} : \Omega^{n-k}(M) \to \Omega^k(M)$ *está dado por*

$$\star^{-1}(\eta) = (-1)^{k(n-k)} \star \eta = (-1)^{k(n+1)} \star \eta.$$

Demostración.

(i) Surge de observar que los mapas $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^{n-k}(M) \to \Omega^n(M)$ y $g : \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) \to \mathbb{R}$ son no degenerados para todo $0 \leqslant k \leqslant n$.

(ii) Notar que $\mathrm{vol} \in \{E_{\langle n\rangle}, -E_{\langle n\rangle}\}$, de manera que $\mathrm{vol} = \pm E_I \wedge E_{\langle n\rangle - I}$. La prueba finaliza al observar que si $J \subset \langle n\rangle$ tiene cardinal $n - |I|$ distinto de $\langle n\rangle - I$ entonces los campos tensoriales E_I y E_J poseen algún factor en común, y por lo tanto $E_J \wedge E_{\langle n\rangle - I} = 0$.

(iii) Es inmediato de (ii), siendo además que el signo apropiado se infiere enseguida.

(iv) Es inmediato de (iii) y de la definición de métricas inducidas.

(v) Se sigue del punto anterior que

$$\begin{aligned} g(\alpha, \beta)\,\mathrm{vol} = g(\star\alpha, \star\beta)\,\mathrm{vol} &= \star\alpha \wedge (\star\star\beta) = (-1)^{k(n-k)}(\star\star\beta) \wedge \star\alpha \\ &= (-1)^{k(n-k)} g(\star\star\beta, \alpha)\,\mathrm{vol} = g(\alpha, (-1)^{k(n-k)} \star\star\beta)\,\mathrm{vol}\,. \end{aligned}$$

La no degeneración de $\star$ asegura que $\beta = (-1)^{k(n-k)} \star\star\beta$. La otra igualdad surge de que $k(n-k)$ y $n(n+1)$ tienen la misma paridad.

(vi) Se deduce inmediatamente de (v). □

En lo que concierne al presente trabajo, el operador estrella de Hodge será poco más que una herramienta para efectuar cálculos sin mayor trascendencia. En este sentido, es posible dar con una expresión explícita para la fórmula en coordenadas de $\star\beta$ para toda $\beta \in \Omega^k(M)$; dicha expresión, sin embargo, es engorrosa e innecesaria: En general basta acudir a (ii) del Lema 2.11 e intentar determinar el signo a partir de la definición de $\star$.

Teoría de Lie

Similarmente al desarrollo de la Sección 2.1, el propósito principal de esta sección es definir formalmente las nociones de álgebras de Lie y de grupos de Lie con mayor incidencia en el presente trabajo. La principal motivación es, sucintamente, que la geometría realizada en grupos de Lie es mucho más *simple*, pues en ese contexto es posible convertir problemas geométricos en problemas de álgebra lineal. Se toman como referencias principales a [**Kna02**] para la teoría de álgebras de Lie, y a [**War83**] para la teoría de grupos de Lie. A mitad de la sección se incluye unos resultados técnicos de interés en lo posterior.

2.2.1 Álgebras de Lie

Definición 2.12. Un *álgebra de Lie* sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathfrak{g}$ munido con un producto bilineal anticonmutativo, denominado *corchete* y denotado por $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, que adicionalmente cumple la llamada *identidad de Jacobi*:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \ \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}. \tag{17}$$

Se trabajará exclusivamente con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, así como también en el caso en que $\dim \mathfrak{g} < \infty$ como espacio vectorial.

A pesar de no ser de dimensión finita, quizás el ejemplo de álgebra de Lie de mayor relevancia es el conjunto de campos vectoriales suaves $\mathfrak{X}(M)$ definidos sobre una variedad diferenciable M; de hecho, éste es el ejemplo que motiva la inclusión de álgebras de Lie en la presente monografía. Otra clase muy importante de ejemplos proviene de considerar el producto $[\cdot,\cdot] : A \times A \to A$ dado por $[a, b] \equiv a \star b - b \star a$ sobre un álgebra asociativa $(A, \star)$, que es claramente bilineal, anticonmutativo, y satisface la identidad de Jacobi. Entre esta última clases de ejemplos se encuentras las álgebras de Lie matriciales, como $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Definición 2.13. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ dos álgebras de Lie. Un mapa lineal $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ se dice un *homomorfismo de álgebras de Lie* si

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \;\; \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Un tal φ se dice un *isomorfismo* si es biyectivo. Si $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un isomorfismo entonces se dice que $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son *isomorfas* y se escribe $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$.

Los homomorfismos de álgebras de Lie son tan bien comportados como los de cualquier otra estructura algebraica. Se omite precisar el significado de esta oración, remitiéndose al estudio de [**Kna02**].

Definición 2.14. Una *representación* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, donde V es un espacio vectorial arbitrario, entendiendo que $\mathfrak{gl}(V)$ está munido con el conmutador de transformaciones lineales.

Al ser espacios vectoriales, toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite representaciones en sí misma. Quizás la más notable de todas ellas es la *representación adjunta*, que es el mapa lineal $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dado por

$$\mathrm{ad}(X)(Y) \equiv \mathrm{ad}_X(Y) \equiv [X, Y] \;\; \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{18}$$

Típicamente se denota $\mathrm{ad}(X)(Y) = \mathrm{ad}_X(Y)$. Notar que $X \to \mathrm{ad}_X$ es un mapa lineal como consecuencia de la bilinealidad del corchete $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, y es un homomorfismo de álgebras de Lie como consecuencia de la identidad de Jacobi. Un álgebra de Lie se dice *unimodular* si $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$; es decir, si $\mathrm{ad}_X \in \mathfrak{sl}(n)$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, donde $n = \dim \mathfrak{g}$.

Definición 2.15. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Si V, $W \subseteq \mathfrak{g}$ son dos subespacios vectoriales de $\mathfrak{g}$ entonces se define $[V, W] \equiv \mathrm{span}\{[v, w] \,|\, v \in V, w \in W\}$. Además,

- Un subespacio vectorial $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ se dice una *subálgebra* de $\mathfrak{g}$ si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$.
- Un subespacio vectorial $I \subseteq \mathfrak{g}$ se dice un *ideal* de $\mathfrak{g}$ si $[I, \mathfrak{g}] \subseteq I$.

Observar que los ideales de álgebras de Lie son también subálgebras de dicha álgebra de Lie. Adicionalmente, es claro que tanto las subálgebras como los ideales de un álgebra de Lie son álgebras de Lie en sí mismas.

Toda álgebra de Lie cuenta con ideales privilegiados.

Definición 2.16. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie.

- $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \equiv \{Z \in \mathfrak{g} \,|\, [Z, X] = 0 \; \forall X \in \mathfrak{g}\}$ se denomina *centro* de $\mathfrak{g}$.
- $\mathfrak{g}' \equiv [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ se denomina *álgebra derivada* de $\mathfrak{g}$.
- Si $D^1(\mathfrak{g}) \equiv \mathfrak{g}'$, $D^k(\mathfrak{g}) \equiv [D^{k-1}(\mathfrak{g}), D^{k-1}(\mathfrak{g})]$ es el k-ésimo elemento de la *serie derivada* de $\mathfrak{g}$ para $k \geqslant 2$.
- Si $C^1(\mathfrak{g}) \equiv \mathfrak{g}'$, $C^k(\mathfrak{g}) \equiv [\mathfrak{g}, C^{k-1}(\mathfrak{g})]$ es el k-ésimo elemento de la *serie central* de $\mathfrak{g}$ para $k \geqslant 2$.

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *abeliana* si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Por otra parte, un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *soluble* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $D^k(\mathfrak{g}) = 0$; similarmente, un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C^k(\mathfrak{g}) = 0$. En consonancia con lo que ocurre en otras estructuras algebraicas, un álgebra de Lie **no abeliana** sin ideales propios se denomina *simple*.

Es posible demostrar que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si $\mathrm{ad}_X \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ es un mapa lineal nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$; de hecho, éste es el afamado Teorema de Engel (ver [**Kna02**, Theorem 1.35] y [**Kna02**, Corollary 1.38]). No parece existir una caracterización semejante de las álgebras de Lie solubles. Sin embargo, las álgebras de Lie *completamente solubles*, que son aquellas de dimensión $\dim \mathfrak{g} = n < \infty$ para las cuales existen ideales $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_{n-1}, \mathfrak{g}_n$ de $\mathfrak{g}$ con $\mathfrak{g}_0 \equiv \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_n \equiv 0$ tales que $\mathfrak{g}_{i+1} \subsetneq \mathfrak{g}_i$ y $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 1$ para todo $i = 0, \cdots, n-1$, cumplen que $\mathrm{ad}_X \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ tiene autovalores reales para todo $X \in \mathfrak{g}$ (aunque no están caracterizadas por esta propiedad - ver [**Kna02**, Corollary 1.30]). No resulta sorprendente que las álgebras de Lie completamente solubles sean, en efecto, solubles, aunque este hecho no es trivial (ver [**Kna02**, Corollary 1.29]).

En álgebras de Lie de dimensión finita es posible hallar un único ideal soluble maximal, llamado *radical* de $\mathfrak{g}$ y denotado por $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ (ver [**Kna02**, Proposition 1.12]), así como también un único ideal nilpotente maximal, llamado *nilradical* de $\mathfrak{g}$ y denotado por $\mathrm{nil}(\mathfrak{g})$ (ver [**Kna02**, Corollary 1.41]).

2.2.2 Una representación útil

Se incluyen en esta sección algunos resultados de naturaleza técnica que serán referenciados más adelante.

Se ha observado previamente que $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, el conjunto de todas las matrices reales de tamaño $n \times n$, es un álgebra de Lie real con el anticonmutador de matrices. Dado V un espacio vectorial de dimensión $\dim V = n$ arbitrario, tiene sentido considerar el espacio $\Lambda^k(V^*)$ de todas las k-formas lineales en V. Es posible definir una representación de álgebras de Lie *natural* de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ en $\Lambda^k(V^*)$.

Definición 2.17. Sean V un espacio vectorial de dimensión $\dim V = n < \infty$, y $0 \leqslant k \leqslant n$ arbitrario. La representación natural de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ en $\Lambda^k(V^*)$ es el mapa $\theta : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{End}(\Lambda^k(V^*))$

dado por

$$\theta(D)(\psi)(v_1, \cdots, v_k) \equiv -\sum_{j=1}^{k} \psi(v_1, \cdots, Dv_j, \cdots, v_k) \;\; \forall v_1, \cdots, v_k \in V. \tag{19}$$

Dada una base $\{e_i \,|\, i = 1, \cdots, n\}$ de V, y denotando por $\{e^j \,|\, j = 1, \cdots, n\}$ la base dual de V^*, se sabe que $\{e^{i_1 \cdots i_k} \,|\, 1 \leqslant i_1, \cdots, i_k \leqslant n\}$, donde $e^{i_1 \cdots i_k} \equiv e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$, es una base de $\Lambda^k(V^*)$. Tiene sentido estudiar la representación dada por la ecuación (19) en el caso en que $\psi = e^{i_1 \cdots i_k}$. Sólo será necesario concentrarse en los casos $k = 1$ y $k = 2$.

LEMA 2.18. *Sea V un espacio vectorial de dimensión $\dim V = n < \infty$, y fijar una base $\{e_i \,|\, i = 1, \cdots, n\}$ de V. Entonces la representación natural de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ en $\Lambda^1(V^*) = V^*$ está dada por*

$$\theta(D)e^i = -\sum_k D_{ik} e^k \;\; \forall i = 1, \cdots, n, \tag{20}$$

con $D \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓN. Fijar $v \in V$ arbitrario. Para todo $D \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ se tiene que las componentes de $Dv \in V$ están dadas por $(Dv)_i = \sum_k D_{ik} v_k$. Así,

$$\begin{aligned}
(\theta(D)e^i)(v) &= -e^i(Dv) = -(Dv)_i = -\sum_k D_{ik} v_k \\
&= -\sum_k D_{ik} e^k(v) = \left(-\sum_k D_{ik} e^k\right)(v),
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

PROPOSICIÓN 2.19. *Sea V un espacio vectorial de dimensión $\dim V = n < \infty$, y fijar una base $\{e_i \,|\, i = 1, \cdots, n\}$ de V. Entonces la representación natural de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ en $\Lambda^2(V^*)$ está dada por*

$$\theta(D)e^{ij} = \sum_k (D_{ik} e^{kj} - D_{jk} e^{ki}) \;\; \forall i, j = 1, \cdots, n. \tag{21}$$

DEMOSTRACIÓN. Fijar v_1, $v_2 \in V$ arbitrarios. Se sigue de la definición de θ, de la definición de producto wedge, y del Lema 2.18 que

$$\begin{aligned}
\theta(D)(e^{ij})(v_1, v_2) &= -e^{ij}(Dv_1, v_2) - e^{ij}(v_1, Dv_2) \\
&= -(e^i(Dv_1)e^j(v_2) - e^i(v_2)e^j(Dv_1)) - (e^i(v_1)e^j(Dv_2) - e^i(Dv_2)e^j(v_1)) \\
&= e^i(v_2)e^j(Dv_1) - e^i(Dv_1)e^j(v_2) + e^i(Dv_2)e^j(v_1)) - e^i(v_1)e^j(Dv_2) \\
&= -\sum_k (e^i(v_2)D_{jk}e^k(v_1) - D_{ik}e^k(v_1)e^j(v_2) + D_{ik}e^k(v_2)e^j(v_1)) - e^i(v_1)D_{jk}e^k(Dv_2)) \\
&= \sum_k D_{ik}(e^k(v_1)e^j(v_2) - e^k(v_2)^j(v_1)) + \sum_k D_{jk}(e^k(v_1)e^i(v_2) - e^i(v_1)e^k(v_2)) \\
&= \sum_k (D_{ik}e^{kj}(v_1, v_2) - D_{jk}e^{ki}(v_1, v_2)) \\
&= \sum_k (D_{ik}e^{kj} - D_{jk}e^{ki})(v_1, v_2)
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Por supuesto, la restricción de θ a una subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ produce una representación de $\mathfrak{h}$ en $\Lambda^2(V^*)$, también denotada por θ. De especial interés en el presente trabajo se da en el caso $n = 4$ y $\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$.

2.2.3 Grupos de Lie

DEFINICIÓN 2.20. Un *grupo de Lie* G es una variedad diferenciable dotada adicionalmente de estructura de grupo en la que el mapa $G \times G \to G$ dado por $(a, b) \to ab^{-1}$ es suave, donde b^{-1} representa al inverso multiplicativo de G y la yuxtaposición de elementos de G representa la multiplicación de elementos de G.

DEFINICIÓN 2.21. Sean G y H dos grupos de Lie. Un mapa $\phi : G \to H$ se dice un *homomorfismo de grupos de Lie* si es un homomorfismo de grupos suave. Un tal ϕ se dice un *isomorfismo* si es un difeomorfismo. Si $\phi : G \to H$ es un isomorfismo entonces se dice que G y H son *isomorfos* y se escribe $G \cong H$.

La estrecha relación entre álgebra y geometría en el contexto de grupos de Lie da pie a estudiar mapas y estructuras que de algún modo sigan explorando la interacción entre ambas disciplinas.

DEFINICIÓN 2.22. Sea G un grupo de Lie. Dado $a \in G$, la *multiplicación (ó traslación) a izquierda por a* es el mapa $L_a : G \to G$ dado por $L_a(g) \equiv ag$.

Es inmediato a partir de la definición de grupo de Lie que L_a es un difeomorfismo para todo $a \in G$ con inversa $L_{a^{-1}}$. Ninguno de estos mapas es un homomorfismo de grupos de Lie.

DEFINICIÓN 2.23. Sea G un grupo de Lie. Un campo vectorial (no necesariamente suave) X en G se dice *invariante a izquierda* si $(L_a)^*X = X$ para todo $a \in G$.

Es posible demostrar que los campos vectoriales invariantes a izquierda son automáticamente suaves (ver [**War83**, Proposition 3.7b)]). El conjunto de campos invariantes a izquierda es un objeto de interés en sí mismo.

DEFINICIÓN 2.24. Sea G un grupo de Lie. Se define

$$\begin{aligned} \mathrm{Lie}(G) &\equiv \{X \in \mathfrak{X}(G) \,|\, (L_a)^*X = X \ \forall a \in G\} \\ &= \{X \in \mathfrak{X}(G) \,|\, (dL_b) \circ X = X \circ L_b \ \forall b \in G\}. \end{aligned} \tag{22}$$

PROPOSICIÓN 2.25. *Sea G un grupo de Lie. Entonces* $\mathrm{Lie}(G)$ *es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial isomorfo a T_eG; munido con el corchete de Lie de campos vectoriales,* $\mathrm{Lie}(G)$ *es además un álgebra de Lie real. En particular,* $\dim G = \dim \mathrm{Lie}(G)$.

DEMOSTRACIÓN. La $\mathbb{R}$-linealidad de pullback asegura que $\mathrm{Lie}(G)$ es un espacio vectorial real. Por otra parte, el isomorfismo $\mathrm{Lie}(G) \cong T_eG$ está proviene del mapa $\mathfrak{m} : \mathrm{Lie}(G) \to T_eG$ dado por $\mathfrak{m}(X) = X_e$. Dado que el corchete de Lie de campos vectoriales es un producto bilineal y anticonmutativo en $\mathrm{Lie}(G)$ que satisface la identidad de Jacobi, resta ver que $[\mathrm{Lie}(G), \mathrm{Lie}(G)] \subseteq \mathrm{Lie}(G)$; esto es consecuencia inmediata de que el corchete de Lie de campos vectoriales preserva la f-relación para todo difeomorfismo f, y dado que todo campo invariante a izquierda está L_a-relacionado consigo mismo para todo $a \in G$ por definición. $\square$

En virtud de la Proposición 2.25, es natural denominar *álgebra de Lie de G* a $\mathrm{Lie}(G)$. Se hace constar que los campos de la forma fX con $f \in C^{\infty}(G)$ y $X \in \mathfrak{g}$ no son en general invariantes a izquierda; sin embargo, es sencillo verificar que todo $X \in \mathrm{Lie}(G)$ es combinación $C^{\infty}(G)$-lineal de campos invariantes a izquierda.

La relación entre grupos de Lie y álgebras de Lie no acaba con la Proposición 2.25. En resumidas cuentas, se tiene que:

- Es posible asignar a toda álgebra de Lie real de dimensión finita $\mathfrak{g}$ un grupo de Lie conexo y simplemente conexo tal que $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. Éste resultado, conocido comúnmente como *Tercer teorema de Lie*, es una suerte de resultado "recíproco" de la Proposición 2.25.
- Existe un difeomorfismo local $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$, llamado *exponencial*, que cumple $\exp(0) = e$ y tal que $(d\exp)|_0 = T_0(\mathrm{Lie}(G)) \to T_eG$ es el mapa identidad bajo las identificaciones usuales $T_0(\mathrm{Lie}(G)) \cong \mathrm{Lie}(G) \cong T_eG$, la última de ellas dada por la Proposición 2.25 (ver [**War83**, Theorem 3.31d)]).
- Los homomorfismos de grupos de Lie $\phi : G \to H$ inducen homomorfismos de álgebras de Lie $\varphi : \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ tales que $\varphi = (d\phi)|_e$ (ver [**War83**, Theorem 3.14b)]). También vale el resultado recíproco (con unicidad añadida) si se imponen restricciones generales sobre G y H (ver [**War83**, Theorem 3.16] y [**War83**, Theorem 3.27]).
- Es posible poner en correspondencia las subálgebras y los ideales de $\mathrm{Lie}(G)$ con ciertos *subgrupos* (noción no definida) de G de manera que se preserven ciertas propiedades algebraicas (ver [**Kna02**, Theorem 3.19] y sus Corolarios a) y b), así como también [**War83**, Theorem 3.48]).

No es relevante para el presente trabajo enunciar con rigor estos resultados. El objetivo de esbozar su contenido es el de anticipar que, dicho laxamente, $\mathrm{Lie}(G)$ contiene "esencialmente" toda la información geométrica de G, y que por lo tanto no es sorpresivo que todo problema geométrico definido en grupos de Lie pueda "linealizarse" en un problema definido en su álgebra de Lie, como se mencionó al comenzar la sección. En este sentido, siempre que se trabaje con grupos de Lie **conexos**, se referirá a las propiedades del grupo G como si fueran las de su álgebra $\mathrm{Lie}(G)$; es decir, G será *soluble* (o *abeliano*, o *unimodular*, etc) si $\mathrm{Lie}(G)$ lo es, y lo mismo para el resto de propiedades definidas en la la Sección 2.2.1.

De manera análoga a lo mencionado en el párrafo anterior, y para complementar lo allí señalado, es posible fijar diversas estructuras geométricas en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entendidas normalmente como tensores del espacio vectorial subyacente $\mathfrak{g}$, asociar a $\mathfrak{g}$ un grupo de Lie conexo y simplemente conexo G tal que $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$, y *extender* las estructuras definidas en $\mathfrak{g}$ a estructuras en G invariantes a izquierda vía pullback por L_a, de manera análoga a como se definió campo invariante a izquierda y se demostró la Proposición 2.25. Se explorará esta idea en más detalle en la la Sección 2.3.

Grupos de Lie con estructuras invariantes a izquierda

Como se mencionó anteriormente, por "estructura" suele entenderse a la especificación de un campo tensorial privilegiado en una variedad diferenciable. En grupos de Lie, la noción de invarianza a izquierda se extiende de manera inmediata a estructuras arbitrarias.

Definición 2.26. Sea G un grupo de Lie. Un campo tensorial $T \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(G)$ se dice *invariante a izquierda* si $(L_a)^*T = T$ para todo $a \in G$.

Todo grupo de Lie G admite estructuras invariantes a izquierda de cualquier tipo: Basta escoger un tensor t del mismo tipo en el espacio vectorial $\mathrm{Lie}(G) \cong T_eG$ y extenderlo a todo G según $T_a = (L_a)^*t$ para todo $a \in G$, como se sugirió en el último párrafo de la la Sección 2.2.3. En el caso particular de métricas riemannianas, esto significa tomar un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathrm{Lie}(G)$ y definir g en G vía $g_a(\cdot,\cdot) = (L_a)^*\langle\cdot,\cdot\rangle$ para todo $a \in G$.

Los campos tensoriales de mayor relevancia en el presente trabajo son aquellos de tipo $(r,0)$; entre ellos, las k-formas y las métricas riemannianas. El siguiente resultado es una caracterización útil de la invariancia a izquierda de tensores de este tipo.

Lema 2.27. *Sea $T \in \mathfrak{T}^{(r,0)}(G)$ un campo tensorial de tipo $(r,0)$ en un grupo de Lie G. Entonces T es invariante a izquierda si y sólo si el mapa $p \to T_p((Y_1)_p, \cdots, (Y_r)_p)$ es constante para todo $Y_1, \cdots, Y_r \in \mathrm{Lie}(G)$.*

Demostración. Dado que $Y_1, \cdots, Y_r \in \mathrm{Lie}(G)$, se sigue que $(Y_j)_p = (L_p)^*(Y_j)_e$ para todo $p \in G$ y para todo $j = 1, \cdots, r$. Por lo tanto,

$$T_p((Y_1)_p, \cdots, (Y_r)_p) = T_p((L_p)^*((Y_1)_e), \cdots, (L_p)^*((Y_r)_e)) = (L_p)^*T_e((Y_1)_e, \cdots, (Y_r)_e).$$

para todo $p \in G$. Es claro entonces que T es invariante a izquierda si y sólo si

$$T_p((Y_1)_p, \cdots, (Y_r)_p) = T_e((Y_1)_e, \cdots, (Y_r)_e).$$

para todo $p \in G$, que es lo que se quería demostrar. $\square$

Siendo que un campo vectorial suave aplicado sobre una función constante se anula idénticamente, surge un corolario inmediato.

Corolario 2.28. *Sea $T \in \mathfrak{T}^{(r,0)}(G)$ un campo tensorial de tipo $(r,0)$ invariante a izquierda en un grupo de Lie G. Entonces $X(T(Y_1, \cdots, Y_r)) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(G)$ y para todo $Y_1, \cdots, Y_r \in \mathrm{Lie}(G)$.*

Como consecuencia del Corolario 2.28 aplicado a la ecuación (11), se obtiene una fórmula para la derivada covariante de campos tensoriales de tipo $(r,0)$ invariantes a izquierda.

Corolario 2.29. *Sea $T \in \mathfrak{T}^{(r,0)}(G)$ un campo tensorial de tipo $(r,0)$ invariante a izquierda en un grupo de Lie G sobre el que está definido una conexión afín ∇. Entonces*

$$\nabla_X T(Y_1, \cdots, Y_r) \equiv - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1, \cdots, \nabla_X Y_i, \cdots, Y_r) \tag{23}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(G)$ y para todo $Y_1, \cdots, Y_r \in \mathrm{Lie}(G)$.

Es ampliamente conocido que vale una fórmula similar a 11 para la derivada exterior en una variedad diferenciable. Se trata de (ver [**GHL04**, Corollary 1.122])

$$\begin{aligned}(d\omega)(Y_1, \cdots, Y_{k+1}) = & \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} Y_i(\omega(Y_1, \cdots, \hat{Y_i}, \cdots, Y_{k+1})) + \\ & + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k+1} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_1, \cdots, \hat{Y_i}, \cdots, \hat{Y_j}, \cdots, Y_{k+1}).\end{aligned} \tag{24}$$

para todo $Y_1, \cdots, Y_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$, donde el sombrero $\hat{}$ sobre el campo $Y_k \in \mathfrak{X}(M)$ indica que tal entrada debe omitirse. Se obtiene entonces otro resultado inmediato.

Corolario 2.30. *Sea $\omega \in \Omega^k(G)$ una k-forma invariante a izquierda en un grupo de Lie G. Entonces para todo $Y_1, \cdots, Y_{k+1} \in \mathrm{Lie}(G)$ vale que*

$$(d\omega)(Y_1, \cdots, Y_{k+1}) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k+1} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_1, \cdots, \hat{Y_i}, \cdots, \hat{Y_j}, \cdots, Y_{k+1}). \tag{25}$$

La fórmula anterior puede tomarse como *definición* de derivada exterior en álgebras de Lie. Los detalles de la ecuación (25) no son relevantes; el propósito de este resultado es el de otorgar significado a la derivación exterior de formas diferenciales en álgebras de Lie, cosa que será necesaria en el desarrollo del Capítulo 4.

Los siguientes resultados buscan afianzar la tendencia a "linealizar" métricas riemannianas invariantes a izquierda en grupos de Lie, extendiendo estas ideas a conexiones de Levi-Civita.

Lema 2.31. *Sea G un grupo de Lie munido con una métrica riemanniana invariante a izquierda g. Entonces $\nabla_X Y \in \mathrm{Lie}(G)$ para todo X, $Y \in \mathrm{Lie}(G)$.*

Demostración. La invariancia a izquierda de g asegura que L_a es una isometría de (G, g) para todo $a \in G$. Escogiendo X, $Y \in \mathrm{Lie}(G) \subseteq \mathfrak{X}(G)$ arbitrarios, se sigue de la Proposición 2.9 que

$$(L_a)^*(\nabla_X(Y)) = \nabla_{(L_a)^*(X)}((L_a)^*(Y)) = \nabla_X Y$$

para todo $a \in G$, donde la última igualdad vale precisamente pues X, $Y \in \mathrm{Lie}(G)$. □

Lema 2.32. *Sea G un grupo de Lie munido con una métrica riemanniana invariante a izquierda g. Entonces la restricción $\nabla|_{\mathrm{Lie}(G) \times \mathrm{Lie}(G)}$ de la conexión de Levi-Civita de (G, g) a $\mathrm{Lie}(G)$ determina unívocamente la conexión de Levi-Civita en (G, g).*

Demostración. Es consecuencia del Lema 2.31, de las propiedades definitorias de las conexiones afines, y del hecho de que todo campo vectorial suave en un grupo de Lie se escribe como combinación $C^\infty(G)$-lineal de campos suaves invariantes a izquierda, como se observó en la Sección 2.2.3. $\square$

Conviene mencionar que la determinación de ∇ a partir de $\nabla_{\mathrm{Lie}(G)\times\mathrm{Lie}(G)}$ no es lineal, en el sentido en que puede ocurrir que $\nabla_{\mathrm{Lie}(G)\times\mathrm{Lie}(G)} \equiv 0$ sin que ello implique que $\nabla \equiv 0$.

Es posible combinar el Corolario 2.28 con el Teorema 2.7.

COROLARIO 2.33. *Sea G un grupo de Lie munido con una métrica riemanniana invariante a izquierda g. Entonces la fórmula de Koszul para ∇ restringida a campos invariantes a izquierda es*

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\left(g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)\right) \quad \forall X, Y, Z \in \mathrm{Lie}(G). \tag{26}$$

Considerar el mapa $U : \mathrm{Lie}(G) \times \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)$ unívocamente determinado por

$$g(U(X,Y),Z) = \frac{1}{2}\left(g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X)\right) \quad \forall X, Y, Z \in \mathrm{Lie}(G). \tag{27}$$

Observar en particular que $U(X,Y) = U(Y,X)$ para todo X, $Y \in \mathrm{Lie}(G)$ como consecuencia de la anticonmutatividad del corchete. De esta manera, de la fórmula del Corolario 2.33 resulta que

$$\nabla_X Y = \frac{[X,Y]}{2} + U(X,Y) \quad \forall X, Y \in \mathrm{Lie}(G). \tag{28}$$

La ecuación (28) será de utilidad al calcular conexiones de Levi-Civita en álgebras de Lie en el Capítulo 4.

G_2-ESTRUCTURAS

Debajo se presentan las ideas esenciales sobre G_2-estructuras en variedades diferenciables (con énfasis en particular en álgebras de Lie). Por razones de espacio, los conceptos claves serán dramáticamente resumidos.

DEFINICIÓN 3.1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión siete. Una G_2-*estructura* en M es una 3-forma suave $\varphi \in \Omega^3(M)$ tal que para todo $p \in M$ existe una base $\{e_1, \cdots, e_7\}$ de T_pM con respecto a la cual

$$\varphi_p = e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245}. \tag{29}$$

Dichas 3-formas suaves se denominan *positivas*. El par (M, φ), donde φ es una 3-forma positiva en M, se denomina también una G_2-*estructura*.

Se enfatiza que no se requiere que φ adquiera la forma dada por la ecuación (29) con respecto a un marco local, sino que lo haga punto a punto. Por formalidad se menciona que otras definiciones de G_2-estructuras no son sólo posibles sino frecuentemente halladas en la literatura[3], siendo $\varphi_p = e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356}$ una de las alternativas más prominentes; dicha alternativa es usada en la mayoría de las referencias consultadas (e.g., [**Bry87**], [**Bry05**], [**Kar20**], [**Kar08**], [**Joy00**], entre otras).

La positividad de una 3-forma $\eta \in \Omega^3(M)$ en una variedad diferenciable de dimensión siete es equivalente a que η_p esté en la órbita $\mathrm{GL}(7,\mathbb{R}) \cdot \phi_0$ para todo $p \in M$, donde $\phi_0 \in \Omega^3(M)$ está dada por $\phi_0 \equiv e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245}$ y la acción $\cdot : \mathrm{GL}(7,\mathbb{R}) \times \Omega^3(M) \to \Omega^3(M)$ se define según

$$h \cdot \eta_p(X_p, Y_p, Z_p) \equiv \eta_p(h^{-1}X_p, h^{-1}Y_p, h^{-1}Z_p) \;\; \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{30}$$

Esta acción puede extenderse a campos tensoriales de tipo arbitrario de manera natural. Es sabido que el grupo $\{A \in \mathrm{GL}(7,\mathbb{R}) \mid A \cdot \phi_0 = \phi_0\}$ es isomorfo al único grupo de Lie excepcional de dimensión 14, típicamente denotado como G_2; este resultado es debido a R. Bryant y puede consultarse en [**Bry87**][4]. Así, G_2 es el "grupo de invariancias (o simetrías)" asociado a la G_2-geometría, lo cual explica la nomenclatura asociada a este tipo de estructuras. El grupo G_2 posee la estructura de variedad diferenciable heredada de $\mathrm{GL}(7,\mathbb{R})$; con dicha estructura, resulta ser conexo, simplemente conexo, compacto, (topológicamente) cerrado en $\mathrm{SO}(7)$, sin centro, simple, y de dimensión 14 (ver [**Bry87**, Theorem 1, Section 2]). El artículo [**Agr08**] contiene más información sobre la historia del grupo excepcional G_2, tanto como objeto algebraico como en relación a su uso en geometría diferencial.

[3] Increíblemente, este hecho guarda relación con la cantidad de maneras no equivalentes en las que se pueden definir productos vectoriales en $\mathbb{R}^7$, o incluso tablas de multiplicar de octoniones. Ver [**Kar20**], [**Bae02**].

[4] R. Bryant atribuye dicho resultdo al afamado É. Cartan. S. Karigiannis afirma en [**Kar20**] que el artículo [**Bry87**] de R. Bryant es la referencia más antigua rápidamente accesible del resultado anterior, y acusa a esta razón de justificar la eponimia.

Definición 3.2. Dos G_2-estructuras (M,φ) y (M',φ') se dicen *equivalentes* si existe un difeomorfismo $f : M \to M'$ tal que $\varphi = f^*\varphi'$. Tal mapa f se denomina una *equivalencia*.

En consonancia con lo convenido para otras estructuras geométricas, es común considerar que dos G_2-estructuras que difieren en un múltiplo escalar también son equivalentes.

Quizás el hecho más sorprendente de las G_2-estructuras es que inducen de manera canónica una métrica riemanniana y una forma de volumen sobre la variedad subyacente. Antes de enunciar este resultado, es preciso introducir una operación entre campos vectoriales y formas suaves que será de utilidad en lo subsiguiente.

Definición 3.3. Sea M una variedad diferenciable. Se denomina *contracción* a los mapas $\iota : \mathfrak{X}(M) \times \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ dados por

$$\iota(X,\eta)(Y_1,\cdots,Y_{k-1}) \equiv \eta(X,Y_1,\cdots,Y_{k-1}), \tag{31}$$

donde $Y_1,\cdots,Y_{k-1} \in \mathfrak{X}(M)$. Típicamente se denota $\iota(X,\eta) \equiv \iota_X(\eta)$. Con esta nomenclatura, el mapa $\eta \to \iota_X(\eta)$ se denomina *contracción por* $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Teorema 3.4. *Sea (M,φ) una G_2-estructura. Entonces $\iota_X(\varphi) \wedge \iota_Y(\varphi) \wedge \varphi$ es una 7-forma nunca nula para todo X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Más aún, existe una métrica riemanniana g_φ y una 7-forma nunca nula $\mathrm{vol}_\varphi \in \Omega^7(M)$ tales que*

$$\frac{1}{6}\iota_X(\varphi) \wedge \iota_Y(\varphi) \wedge \varphi = g_\varphi(X,Y)\,\mathrm{vol}_\varphi \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{32}$$

y tales que para todo $p \in M$ vale que la base $\{e_1,\cdots,e_7\}$ de T_pM en la que φ es como en la ecuación (29) es ortonormal y $(\mathrm{vol}_\varphi)_p = e^{1234567}$.

Demostración. Ver [**Kar05**, Proposition 2.3.1]; alternativamente, ver la prueba de [**Bry87**, Theorem 1, Section 2], o la prueba de [**Kar20**, Theorem 4.4]. □

Una consecuencia inmediata del Teorema 3.4 es que no toda variedad diferenciable M de dimensión siete admite G_2-estructuras, puesto que ésta al menos debe ser orientable[5]. Algunas condiciones equivalentes a la existencia de dichas estructuras son conocidas; por ejemplo, la existencia de marcos locales en M en los que los mapas de transición estén en G_2, o que M sea orientable y espín (esto se cita en [**Lau17**], [**Kar20**], [**Bry87**]; ver [**Joy00**, Proposition 10.1.6] para una demostración parcial). Estas caracterizaciones no son relevantes en el presente trabajo, y la mención de las mismas tiene como objetivo mostrar que la existencia de G_2-estructuras en una variedad diferenciable es enteramente una cuestión topológica.

En toda G_2-estructura (M,φ) se puede definir entonces un operador estrella de Hodge $\star_\varphi : \Omega^k(M) \to \Omega^{7-k}(M)$ para todo $0 \leqslant k \leqslant 7$. Notar en particular que $\star_\varphi^2 = \mathrm{Id}$ pues $\dim M = 7$ es impar, como consecuencia del Lema 2.11. Es razonable esperar que la 4-forma dual a φ, denominada

[5]Es ampliamente conocido, sin embargo, que toda variedad diferenciable admite una métrica riemanniana.

convencionalmente como $\psi \equiv \star_\varphi \varphi$, tenga relevancia en el estudio de las G_2-estructuras. Observar que la ecuación (29) asegura que para todo $p \in M$ existe una base $\{e_1, \cdots, e_7\}$ de T_pM tal que

$$\psi_p = e^{3456} + e^{1234} + e^{1256} + e^{2357} - e^{2467} + e^{1367} + e^{1457}. \tag{33}$$

Proposición 3.5. *Sea (M, φ) una G_2-estructura. Sea $\psi = \star_\varphi \varphi$ la 4-forma suave dual a φ. Entonces existen $\tau_0 \in \Omega^0(M)$, $\tau_1 \in \Omega^1(M)$, $\tau_2 \in \Omega^2(M)$, $\tau_3 \in \Omega^3(M)$ únicas tales que*

$$d\varphi = \tau_0 \psi + 3\tau_1 \wedge \varphi + \star_\varphi \tau_3, \tag{34}$$

$$d\psi = 4\tau_1 \wedge \psi + \star_\varphi \tau_2. \tag{35}$$

Demostración. Ver [**Kar08**, Theorem, 2.3], o [**Bry05**, Proposition 1, Section 3.3]. □

La Proposición 3.5 anticipa que las k-formas τ_k con $k = 0, 1, 2, 3$ son de gran relevancia, de manera que se les provee un nombre propio.

Definición 3.6. Sea (M, φ) una G_2-estructura. Las formas suaves τ_0, τ_1, τ_2, y τ_3 de la Proposición 3.5 se denominan *formas de torsión* de (M, φ).

Se desalienta interpretar a las formas de torsión de manera coloquial o asociada a alguna aplicación inmediata a la física, e incluso también con las "torsiones" de las teorías de grupos o módulos. Este concepto está relacionado con el de torsión de campos suaves en variedades diferenciables, y en última instancia proviene de la teoría de G-estructuras en variedades diferenciables.

Es difícil resaltar la importancia de la Proposición 3.5 sin caer en desvaríos. En un esfuerzo por ser breve (si acaso demasiado simplista): Es posible descomponer $\Omega^k(M)$ para todo $0 \leqslant k \leqslant 7$ en suma directa *ortogonal* (respecto de la métrica inducida por g_φ) de subespacios invariantes bajo la acción (30) por elementos de $\mathrm{G}_2 \cong \{A \in \mathrm{GL}(7, \mathbb{R}) \mid A \cdot \phi_0 = \phi_0\}$ de manera *irreducible*; es decir, de manera que no contengan subespacios propios que sean a su vez invariantes bajo esta acción. Estos subespacios toman el nombre de G_2-*submódulos*. Esta descomposición, que puede consultarse en gran detalle en [**Kar08**, Section 2.2] y un poco más resumidamente en [**Joy00**, Proposition 10.1.4], escapa ampliamente de los propósitos de este trabajo; sin embargo, permite deducir de manera casi transparente (aunque no trivial) las fórmulas (34) y (35). Sin duda, tener conocimiento sobre cómo G_2 actúa en campos tensoriales de una G_2-estructura es altamente deseable (la Proposición 3.5 y sus consecuencias son muestra de ello). Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.7. Sea (M, φ) una G_2-estructura. Un campo tensorial $T \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(M)$ se dice G_2-*invariante* si $A \cdot T = T$ para todo $A \in \mathrm{G}_2$.

En consonancia con la definición anterior y las observaciones del párrafo anterior, cada sumando de las ecuaciones (34) y (35) es G_2-invariante. Además, dado que $\mathrm{G}_2 \subseteq \mathrm{SO}(7)$, es inmediato que g_φ y vol_φ son G_2-invariantes, puesto que $A \cdot \mathrm{vol}_\varphi = \det\big(A^{-1}\big)\, \mathrm{vol}_\varphi$ y $A \cdot g_\varphi(\cdot, \cdot) = g_\varphi(A^{-1}\cdot, A^{-1}\cdot)$[6]; este hecho también puede deducirse de la ecuación (32) mediante cuentas directas (ver [**Nic18**, Lemma

[6]Ciertamente, la métrica riemanniana inducida por g_φ en $\Omega^k(M)$ para todo $0 \leqslant k \leqslant 7$ también es G_2-invariante.

2.1]). Abusando un poco de la terminología, $\star_\varphi$ es G_2-invariante en el sentido que $\star_\varphi = \star_{(A\cdot\varphi)}$ para todo $A \in \mathrm{G}_2$; en consecuencia, la 4-forma dual $\psi = \star_\varphi\varphi$ también es G_2-invariante.

Es posible, así como también inmensamente útil, dar con fórmulas para τ_k con $k = 0, 1, 2, 3$ en función de φ y $\psi = \star\varphi$. Esto puede hacerse "invirtiendo" las fórmulas de la Proposición 3.5.

Proposición 3.8. *Las formas de torsión τ_0, τ_1, τ_2, y τ_3 de una G_2-estructura (M, φ) satisfacen*

$$\tau_0 = \frac{1}{7} \star_\varphi (d\varphi \wedge \varphi), \tag{36}$$

$$\tau_1 = -\frac{1}{12} \star_\varphi (\star_\varphi d\varphi \wedge \varphi), \tag{37}$$

$$\tau_2 = - \star_\varphi d\psi + 4 \star_\varphi (\tau_1 \wedge \psi), \tag{38}$$

$$\tau_3 = \star_\varphi d\varphi - \tau_0\varphi - 3 \star_\varphi (\tau_1 \wedge \varphi), \tag{39}$$

Demostración. Las ecuaciones (36) y (37) se establecen a partir de las propiedades de la descomposición ortogonal de $\Omega^k(M)$ en G_2-submódulos irreducibles para todo $0 \leqslant k \leqslant 7$ y cuentas directas; el detalle fino puede consultarse en [**MOV20**] o en [**LMSES21**]. Por otra parte, las ecuaciones (38) y (39) se establecen despejando la correspondiente forma a partir de las ecuaciones (34) y (35), haciendo uso de que τ_0 y τ_1 son conocidas por (36) y (37). $\square$

La verdadera significancia de las formas de torsión intrínseca recae en cuándo algunas de ellas son nulas, ya que esto caracteriza el comportamiento de $d\varphi$ y $d\psi$, y por lo tanto el de la G_2-estructura (M, φ), de acuerdo con la Proposición 3.5. Dependiendo de qué formas se anulan, es posible distinguir entre dieciséis combinaciones posibles, cada una de las cuales se denomina *clases de Fernández-Gray* en la literatura (ver [**MOV20**]); sólo algunas de ellas tenen nombres propios.

Definición 3.9. Sea (M, φ) una G_2-estructura. (M, φ) se dice[7]

(i) *cerrada*, si $\tau_0 = \tau_1 = \tau_3 = 0$.
(ii) *cocerrada*, si $\tau_1 = \tau_2 = 0$.
(iii) *casi paralela*, si $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$.
(iv) *libre de torsión*, si $\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$.

El nombre *libre de torsión* se explica de inmediato. Una inspección rápida a las ecuaciones (34) y (35) revela el por qué de los nombres *cerrada* y *cocerrada*: Corresponden a cuando (M, φ) satisface $d\varphi = 0$ y $d\psi = 0$, respectivamente. Análogamente, el caso *casi paralelo* equivale a $d\varphi = \tau_0\psi$ y $d\psi = 0$ (y, en particular, implica que $d\tau_0 = 0$); la explicación de la elección de nomenclatura en este último caso deberá aguardar un poco.

Dado que toda G_2-estructura (M, φ) es también una variedad riemanniana con métrica g_φ, es posible construir una derivada covariante de Levi-Civita ∇_φ de campos tensoriales en M. Esta estructura permite recuperar la noción de campos tensoriales paralelos de la geometría riemanniana.

[7]Más información sobre el resto de clases de Fernández-Gray puede hallarse en [**Kar05**, Section 2.5], con un resumen en la Tabla 2.1 del mismo artículo.

LEMA 3.10. [**Kar20**, Theorem 4.44] *Sea* (M,φ) *una* G_2*-estructura. Entonces existe un campo tensorial* $T_\varphi \in \mathfrak{T}^{(1,1)}(M)$ *tal que para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *vale que* $(\nabla_\varphi)_X\varphi = \iota_{T_\varphi(X)}(\psi)$.

DEFINICIÓN 3.11. Sea (M,φ) una G_2-estructura. El campo tensorial $T_\varphi \in \mathfrak{T}^{(1,1)}(M)$ tal que $(\nabla_\varphi)_X\varphi = \iota_{T_\varphi(X)}(\psi)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se denomina *tensor de torsión total* de (M,φ). Correspondientemente, $\nabla_\varphi\varphi$ se denomina *torsión* de (M,φ).

Es sabido que T_φ está en correspondencia con un campo tensorial $\widetilde{T}_\varphi \in \mathfrak{T}^{(2,0)}(M)$ vía "bajar índices". Como dicta la convención estándar, se abusará de la notación y se denotará por T_φ a ambos campos tensoriales, relegando al contexto la correcta desambiguación.

La denominación de T_φ será explicada en el siguiente resultado. Antes de poder enunciarlo, es necesario introducir un concepto adicional.

DEFINICIÓN 3.12. Sea (M,φ) una G_2-estructura. Se define la *componente **27** simétrica sin traza* τ_{27} del tensor de torsión total T_φ de (M,φ) como

$$\tau_{27}(X,Y) = \star_\varphi(\iota_X(\varphi) \wedge \iota_Y(\varphi) \wedge \tau_3) \ \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{40}$$

La denominación y la notación asociadas con τ_{27} responden en última instancia a la ya mencionada descomposición ortogonal en G_2-submódulos irreducibles de $\Omega^k(M)$ para $0 \leqslant k \leqslant 7$ y no se la comentará más allá de eso. Se da un poco más de motivación en [**Gri20**, Section 1], [**Gri19**, Section 1], y [**Kar08**].

Al igual que como se hizo al identificar los campos tensoriales T_φ y $\widetilde{T}_\varphi$, es conveniente hacer un abuso de notación similar para la 1-forma de torsión τ_1, que es un tensor de tipo $(1,0)$, con su identificación en $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{T}^{(0,1)}(M)$. De esta manera, la expresión ι_{τ_1} cobra sentido como la contracción respecto del *campo vectorial* identificado con τ_1 "subiendo índices".

TEOREMA 3.13. [**Kar08**, Theorem 2.27] *El tensor de torsión total* T_φ *de una* G_2*-estructura* (M,φ) *satisface*

$$T_\varphi(X,Y) = \frac{1}{4}\tau_0 g_\varphi(X,Y) - \iota_{\tau_1}(\varphi)(X,Y) - \frac{1}{2}\tau_2(X,Y) - \tau_{27}(X,Y) \ \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{41}$$

La siguiente definición respeta la terminología usual en geometría riemanniana.

DEFINICIÓN 3.14. Una G_2-estructura (M,φ) se dice *paralela* si $\nabla_\varphi\varphi = 0$.

TEOREMA 3.15 (Fernández-Gray). *Una* G_2*-estructura* (M,φ) *es paralela si y sólo si es libre de torsión, o equivalentemente cerrada y cocerrada.*

DEMOSTRACIÓN. Es un resultado estándar de geometría riemanniana que la derivada exterior d y la *coderivada exterior* $\star d \star$ pueden ser escritas en función de la derivada covariante (e.g., [**GHL04**, Proposition 2.61]), de manera que es claro que si (M,φ) es paralela entonces es cerrada y cocerrada, y por lo tanto libre de torsión. Recíprocamente, Si (M,φ) es libre de torsión entonces el tensor de torsión total T_φ de (M,φ) es idénticamente nulo por el Teorema 3.13, de lo que se sigue por Lema 3.10 que φ es paralela. $\square$

Es en vistas del Teorema 3.15 que la nomenclatura *casi paralela* cobra sentido.

Ya que, como consecuencia del Teorema 3.4, en toda G_2-estructura subyace una variedad riemanniana orientada $(M, g_\varphi, \mathrm{vol}_\varphi)$. Sobre tales tipos de variedades es posible definir una familia de operadores $(\Delta_\varphi)_k : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$, con $0 \leqslant k \leqslant 7$, dada por

$$(\Delta_\varphi)_k = (-1)^{k+1}(\star_\varphi d \star_\varphi d - d \star_\varphi d \star_\varphi), \tag{42}$$

donde d es la derivada exterior. Dichos operadores se denotan colectivamente por Δ_φ y se denominan *operador laplaciano de Hodge* de $(M, g_\varphi, \mathrm{vol}_\varphi)$.

Definición 3.16. Una G_2-estructura (M, φ) se dice *armónica* si $\Delta_\varphi \varphi = 0$, donde Δ_φ es el operador laplaciano de Hodge de $(M, g_\varphi, \mathrm{vol}_\varphi)$.

Proposición 3.17. [**Kar20**, Remark 4.5][8] *Una* G_2*-estructura* (M, φ) *compacta es libre de torsión si y sólo si es armónica.*

Las G_2-estructuras armónicas siguen siendo estudiadas en el presente, notablemente en [**LMSES21**] y [**LSE19**, Part 2, Section 6].

El atractivo de las G_2-estructuras libres de torsión provienen tanto de su bondad como objetos matemáticos como de su gran relevancia histórica. En cuanto a lo primero, es posible demostrar que una G_2-estructura conexa y simplemente conexa es libre de torsión si y sólo si la holonomía de la métrica g_φ inducida por φ está contenida en G_2 (ver [**Joy00**, Proposition 10.1.3]), y que en el caso compacto la igualdad vale precisamente cuando el grupo fundamental $\pi_1(M)$ de M es finito (ver [**Joy00**, Proposition 10.2.2]), aunque existen también otras obstrucciones topológicas (ver [**Kar20**, Section 6.3]); en este caso, las G_2-estructuras toman el nombre de G_2*-variedades*. Las G_2-estructuras libres de torsión también son Ricci-flat (ver [**Joy00**, Proposition 10.1.5]); de hecho, no es difícil dar con una expresión para la curvatura de Ricci de una G_2-estructura arbitraria en función de su tensor de torsión total T_φ (ver [**Kar20**, Corollary 4.54]). En cuanto a lo segundo, las propiedades antes enunciadas sirvieron a R. Bryant para hallar los primeros ejemplos G_2-variedades no compactas en 1987 ([**Bry87**]), y a D. Joyce para hallar ejemplos de G_2-variedades compactas en 1996 ([**Joy00**]); la existencia de G_2-variedades era una de las grandes preguntas abiertas sugeridas por el renombrado Teorema de Clasificación de Berger sobre holonomía de variedades conexas simplemente conexas no localmente reducibles ni localmente simétricas hasta su resolución por R. Bryant. Desde entonces se han producido muchos más ejemplos (ver [**Kar20**, Section 6.2]). La producción de ejemplos de G_2-variedades es en general una tarea muy difícil, puesto que esencialmente incluye hallar soluciones de $\nabla_\varphi \varphi = 0$, que es en sí misma una ecuación diferencial en derivadas parciales *no lineal* en φ.

Una de las maneras más populares de sortear (parcialmente) el obstáculo de resolver la ecuación $\nabla_\varphi \varphi = 0$, introducida por R. Bryant en su artículo seminal [**Bry05**], es a través del estudio

[8] El autor del artículo citado afirma que “sale integrando por partes”.

de *flujos geométricos* de G_2-estructuras. La idea esencial detrás de este concepto es sencilla: Consiste en tomar una curva $t \to \gamma(t)$ de estructuras de relevancia (e.g., G_2-estructuras) cuyo valor inicial $\gamma(t) = \gamma_0$ es una estructura del mismo tipo pero "indeseable", y hacerla evolucionar de alguna manera en la que, al menos intuitivamente, pueda "mejorar" estas propiedades "si se le da suficiente tiempo"; esto significa igualar $\frac{\partial \gamma(t)}{\partial t}$ con alguna función $q(\gamma(t))$ cuidadosamente escogida, considerando así un problema de ecuaciones diferenciales. En el caso de G_2-estructuras, R. Bryant consideró $q(\varphi(t)) \equiv \Delta_{\varphi(t)}\varphi(t)$ (por primera vez en [**Bry05**]) bajo la restricción adicional de que $d\varphi(t) = 0$ para todo t[9], dando lugar al *flujo laplaciano de* G_2*-estructuras cerradas*; más adelante, S. Karigiannis, B. McKay, y M. Tsui consideraron $q(\varphi(t)) \equiv \Delta_{\varphi(t)} \star_{\varphi(t)} \varphi(t) = \Delta_{\varphi(t)}\psi(t)$ (por primera vez en [**KMMP12**]) bajo la restricción adicional de que $d\psi(t) = d \star_{\varphi(t)} \varphi(t) = 0$ para todo t[10], dando lugar al *coflujo laplaciano de* G_2*-estructuras cocerradas* [11]. Estos dos tipos de flujos poseen propiedades similares (notablemente, el de que sus puntos fijos sean precisamente G_2-estructuras libres de torsión -ver [**Gri19**, Section 1]-) pero marcadamente diferentes. Ambos flujos geométricos han sido (y siguen siendo) estudiados vastamente en la literatura. Consideraciones técnicas (que pueden consultarse resumidamente en [**Gri19**, Section 1]) condujeron finalmente al estudio del *flujo isométrico de* G_2*-estructuras*, definido por la ecuación (44), que esencialmente permite evolucionar una curva de G_2-estructuras $\varphi(t)$ de manera que la métrica subyacente $g_{\varphi(t)}$ se mantenga fija (ver [**Kar05**, Section 3]), una propiedad compartida con el flujo laplaciano de G_2-estructuras cerradas pero no con el coflujo laplaciano de G_2-estructuras cocerradas. Es necesario introducir el siguiente concepto a fines de poder entender el flujo isométrico de G_2-estructuras.

DEFINICIÓN 3.18. Sea (M, φ) una G_2-estructura. La *divergencia* del tensor de torsión total T_φ de φ es el campo vectorial suave $\operatorname{div} T_\varphi \in \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$(g_\varphi)(\operatorname{div} T_\varphi, E_j) = \sum_{i=1}^{7}((\nabla_\varphi)_{E_i} T_\varphi)(E_i, E_j) \tag{43}$$

para todo marco local $\{E_i \,|\, i = 1, \cdots, 7\}$ ortonormal respecto de la métrica g_φ inducida por φ. Normalmente se abusará del lenguaje y se dirá que $\operatorname{div} T_\varphi$ es simplemente la *divergencia de la* G_2*-estructura* (M, φ).

El *flujo isométrico* de G_2-estructuras está mediado por la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} &= \iota_{\operatorname{div} T_{\varphi(t)}}(\star_{\varphi(t)}\varphi(t)) \\ &= \iota_{\operatorname{div} T_{\varphi(t)}}(\psi(t)). \end{aligned} \tag{44}$$

Es claro que las G_2-estructuras con $\operatorname{div} T_\varphi = 0$ son los puntos críticos de (44). Es sabido que $\operatorname{div} T_\varphi = 0$ si $d\varphi = 0$ (ver [**Gri19**, Theorem 4.3]); en el Capítulo 4 se encuentran G_2-estructuras *no*

[9] En el mismo artículo se demuestra que el flujo laplaciano preserva la condición $d\varphi = 0$; es decir, si $d\varphi(0) = 0$ entonces $d\varphi(t) = 0$ para todo $t > 0$.

[10] En el mismo artículo se demuestra que el coflujo laplaciano preserva la condición $d\psi = 0$; es decir, si $d\psi(0) = 0$ entonces $d\psi(t) = 0$ para todo $t > 0$.

[11] El nombre de "coflujo" proviene de que se trabaja con $\frac{\partial \psi(t)}{\partial t}$ en lugar de $\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}$.

cerradas con divergencia cero, aunque uno de los ejemplos satisface las condiciones del Teorema previamente citado.

G_2-estructuras en álgebras de Lie

La noción de equivalencia entre dos G_2-estructuras puede ser refinada en el contexto de grupos de Lie.

Definición 3.19. Dos G_2-estructuras (G, φ) y (G', φ') invariantes a izquierda definidas en grupos de Lie G y G' se dicen *equivariantemente equivalentes* si existe un isomorfismo de grupos de Lie $f : G \to G'$ tal que $f^*\varphi' = \varphi$. Tal mapa f se denomina una *equivalencia equivariante*.

Al igual que como se hizo en la Sección 2.3 del Capítulo 2, si en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ real de dimensión siete se especifica una base $\{e_1, \cdots, e_7\}$ y se define

$$\varphi_0 \equiv e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245}, \tag{45}$$

φ_0 puede extenderse a una 3-forma suave positiva invariante a izquierda en cualquier grupo de Lie G tal que $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. Según la Proposición 3.4, una tal φ_0 induce sobre $\mathfrak{g}$ una orientación $\mathrm{vol}_{\varphi_0} = e^{1234567}$ y un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varphi_0}$ según la ecuación (32) que también pueden extenderse a estructuras invariantes a izquierda en G. Similares consideraciones aplican para el operador estrella de Hodge $\star_{\varphi_0} : \Lambda^k(\mathfrak{g}^*) \to \Lambda^{7-k}(\mathfrak{g}^*)$, la 4-forma dual ψ_0, las formas de torsión τ_k para $k = 0, 1, 2, 3$, y el tensor de torsión total T_φ. Por consiguiente, todos los resultados de la Sección 2.3 del Capítulo 2 siguen siendo válidos en el contexto del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, habiendo sólo que reemplazar $\Omega^k(M)$ por $\Lambda^k(\mathfrak{g}^*)$, evaluando en campos *invariantes a izquierda* en lugar de campos suaves genéricos, y reinterpretando la derivada exterior según lo establecido por la ecuación (25) cuando sea oportuno. En las mismas líneas que en la Sección 2.3 del Capítulo 2, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.20. *Sea* $(\mathfrak{g}, \varphi_0)$ *una* G_2*-estructura dada como en la ecuación* (45)*, y sea* $\{e_1, \cdots, e_7\}$ *una base de* $\mathfrak{g}$ *ortogonal respecto del producto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varphi_0}$ *inducido por* φ_0*. Entonces la divergencia de* $(\mathfrak{g}, \varphi_0)$ *está dada por*

$$\langle \mathrm{div}(T_{\varphi_0}), e_j \rangle_{\varphi_0} = -\sum_{i=1}^{7} T_{\varphi_0}(\nabla_{e_i} e_i, e_j) - \sum_{i=1}^{7} T_{\varphi_0}(e_i, \nabla_{e_i} e_j). \tag{46}$$

Demostración. Se sigue del Corolario 2.29 aplicado a la ecuación (43). $\square$

Las Álgebras $\mathfrak{g}_{A,B,C}$

El objetivo principal de este capítulo, motivado por la discusión precedente sobre flujos isométricos de G_2-estructuras, es el de estudiar la divergencia de G_2-estructuras *canónicas* definidas sobre las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ para ciertas elecciones particulares de A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$, definidas a continuación, así como también algunas propiedades generales de las mismas, como la conexión de Levi-Civita subyacente o las formas de torsión. Este estudio, que contiene resultados originales, está basado e inspirado fuertemente en el artículo [**KL21**], en donde se estudian las antedichas álgebras de Lie en mucho más detalle, en particular en el contexto del coflujo laplaciano (y una modificación del mismo) de G_2-estructuras canónicas cocerradas sobre ellas definidas. Satisfactoriamente, los (esencialmente) dos casos estudiados poseen divergencia cero.

Definición 4.1. Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ no nulas que conmutan dos a dos. Sobre un espacio vectorial real con base $\mathrm{B} \equiv \{e_1, \cdots, e_7\}$ denotado por $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ se hace $\mathfrak{a} \equiv \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_7\}$ y $\mathfrak{n} \equiv \operatorname{span}\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, y se define un producto $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}_{A,B,C} \times \mathfrak{g}_{A,B,C} \to \mathfrak{g}_{A,B,C}$ bilineal y anticonmutativo mediante $\operatorname{ad} e_7|_{\mathfrak{n}} = A$, $\operatorname{ad} e_1|_{\mathfrak{n}} = B$, y $\operatorname{ad} e_2|_{\mathfrak{n}} = C$ de manera que $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie real de dimensión siete.

Se insiste en que los únicos corchetes no nulos entre elementos de la base $\{e_1, \cdots, e_7\}$ de $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ son aquellos de la forma $[e_k, e_j]$ con $k = 1, 2, 7$ y $j = 3, 4, 5, 6$, que son iguales a De_j con $D = B, C, A$ dependiendo del valor de k. Como de costumbre, se abusará del lenguaje y se denotará al álgebra de Lie arriba definida simplemente por $\mathfrak{g}_{A,B,C}$.

Se observa que el hecho de que las matrices A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ conmuten dos a dos es equivalente a que $[\cdot,\cdot]$ satisfaga la identidad de Jacobi, de ahí que sea un requisito necesario en la definición de $\mathfrak{g}_{A,B,C}$. A lo largo del capítulo se trabajará exclusivamente con ternas A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ que conmuten dos a dos.

Es inmediato chequear a partir de la definición que $\mathfrak{a} = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_7\}$ es una subálgebra abeliana y $\mathfrak{n} = \operatorname{span}\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$ es un ideal nilpotente de $\mathfrak{g}_{A,B,C}$. Además, se hace notar que $\mathfrak{g}_{A,B,C} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ como espacios vectoriales mas no como álgebras de Lie, pues $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}]$ no es nulo. Es posible ver también que $\mathfrak{n}$ es el nilradical de $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ sólo si ninguna combinación lineal de A, B, C es una matriz nilpotente. Mucho más sencillo es verificar que $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ es un álgebra de Lie soluble y que, utilizando el hecho de que A, B, C tienen traza nula, que $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ es un álgebra de Lie unimodular; éstas dos últimas propiedades son explotada en el artículo [**KL21**] para determinar clases de equivalencia entre G_2-estructuras definidas en grupos de Lie con álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ y, en particular, para mostrar que hay múltiples ejemplos de G_2-estructuras no equivalentes con divergencia cero. El que A, B, C sean de traza nula cobra especial protagonismo en relación al Teorema 4.5.

En referencia al párrafo anterior, será de utilidad tener presente cuándo la terna A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ es linealmente independiente y diagonaliza simultáneamente sobre $\mathbb{R}$, caso en el cual la terna en cuestión se dice *compatible*. No se trabajará en general en este contexto, así que se tendrá cuidado en explicitar cuándo la terna A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ satisfaga dichas propiedades. Se hace constar que, en el caso compatible, todas las álgebras $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ son isomorfas (como álgebras de Lie) entre sí. En relación a lo anterior, las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ están asociadas (vía *Tercer teorema de Lie*) a grupos de Lie conexos, simplemente conexos, y solubles $G_{A,B,C}$; sólo en el caso en que la terna A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ sea compatible se tendrá que $G_{A,B,C}$ es isomorfo al grupo de Lie G_J, que es el único grupo de Lie completamente soluble y unimodular que aparece en la lista de clasificación dada en [**LN20**], así como también objeto de estudio del artículo [**KL21**] en el que se inspira este capítulo.

Siguiendo lo pautado por la Sección 2.3 del Capítulo 2, sobre $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ se considera la llamada G_2-estructura *canónica* φ respecto de la base $\{e_1, \cdots, e_7\}$, que es la 3-forma en $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ definida como

$$\varphi \equiv e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{235} - e^{246}. \tag{47}$$

Como se observó anteriormente, la 3-forma φ induce un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ y una orientación vol_φ en $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ según

$$g_\varphi(X, Y)\,\mathrm{vol}_\varphi = \frac{1}{6}\iota_X(\varphi) \wedge \iota_Y(\varphi) \wedge \varphi \;\; \forall X, Y \in \mathfrak{g}_{A,B,C}. \tag{48}$$

A diferencia de lo hecho en el Capítulo 3, en lo posterior se denotará simplemente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y vol sin que esto suponga riesgo de confusión, buscando dar con fórmulas en más legibles; lo mismo aplicará para otras estructuras inducidas por φ, como el tensor de torsión total T. Como φ fue definida en relación a la base canónica $\mathrm{B} \equiv \{e_1, \cdots, e_7\}$ de $\mathfrak{g}_{A,B,C}$, se tiene tanto que $\mathrm{vol} = e^{1234567}$ como que B es ortonormal respecto de g. De esta última observación se desprende en particular que $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{n}$ son ortogonales. Similarmente, se denotará el operador estrella de Hodge en $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ simplemente por $\star : \Lambda^k(\mathfrak{g}^*_{A,B,C}) \to \Lambda^{7-k}(\mathfrak{g}^*_{A,B,C})$; asimismo, la 4-forma dual de φ, $\psi = \star\varphi$, está dada por

$$\psi = e^{3456} + e^{1234} + e^{1256} + e^{2357} - e^{2467} + e^{1367} + e^{1457}. \tag{49}$$

Es de provecho introducir las 2-formas en $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ dadas por

$$\omega_7 \equiv e^{34} + e^{56}, \quad \omega_1 \equiv e^{35} - e^{46}, \quad \omega_2 \equiv -e^{36} - e^{45}, \tag{50}$$

$$\overline{\omega}_7 \equiv e^{34} - e^{56}, \quad \overline{\omega}_1 \equiv e^{35} + e^{46}, \quad \overline{\omega}_2 \equiv -e^{36} + e^{45}. \tag{51}$$

El siguiente resultado recoge los usos más inmediatos de las 2-formas dadas por las ecuaciones (50) y (51), pensados como elementos de $\Lambda^2(\mathfrak{n}^*)$, todos los cuales pueden establecerse de manera elemental (razón por la cual su demostración se omite). Previo a su enunciado, observar que sobre el ideal $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ puede inducirse una métrica $g_\mathfrak{n}$ y una orientación $\mathrm{vol}_\mathfrak{n}$ a partir de las correspondienes estructuras en $\mathfrak{g}_{A,B,C}$, y por lo tanto es posible definir un operador estrella de Hodge $\star_\mathfrak{n} : \Lambda^k(\mathfrak{n}^*) \to \Lambda^{4-k}(\mathfrak{n}^*)$.

Lema 4.2. *Sea $\mathfrak{n}$ el ideal nilpotente de $\mathfrak{g}_{A,B,C}$, cuya base canónica es $\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Considerar las 2-formas ω_7, ω_1, ω_2, $\overline{\omega}_7$, $\overline{\omega}_1$, y $\overline{\omega}_2 \in \Lambda^2(\mathfrak{n}^*)$ dadas por las ecuaciones* (50) *y* (51). *Entonces*

(i) $\varphi = e^{127} + \omega_7 \wedge e^7 + \omega_1 \wedge e^1 + \omega_2 \wedge e^2$.

(ii) $\psi = e^{3456} + \omega_7 \wedge e^{12} + \omega_1 \wedge e^{27} - \omega_2 \wedge e^{17}$.

(iii) $\star_{\mathfrak{n}}\omega_i = \omega_i$ *y* $\star_{\mathfrak{n}}\overline{\omega}_j = -\overline{\omega}_j$ *para todo* $i, j = 1, 2, 7$.

(iv) $\omega_i \wedge \omega_j = \omega_i \wedge \overline{\omega}_j = \overline{\omega}_i \wedge \overline{\omega}_j = 0$ *para todo* $i \neq j$.

(v) *valen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} \omega_7 \wedge \omega_7 = \omega_1 \wedge \omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_2 &= \quad 2e^{3456}, \\ \overline{\omega}_7 \wedge \overline{\omega}_7 = \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 \wedge \overline{\omega}_2 &= -2e^{3456}. \end{aligned}$$

(vi) *valen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} e^{34} &= \frac{\overline{\omega}_7 + \omega_7}{2}, \quad e^{35} = \frac{\overline{\omega}_1 + \omega_1}{2}, \quad e^{36} = -\frac{\overline{\omega}_2 + \omega_2}{2}, \\ e^{45} &= \frac{\overline{\omega}_2 - \omega_2}{2}, \quad e^{46} = \frac{\overline{\omega}_1 - \omega_1}{2}, \quad e^{56} = -\frac{\overline{\omega}_7 - \omega_7}{2}. \end{aligned}$$

(vii) $\mathfrak{B} \equiv \{\overline{\omega}_7, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \omega_7, \omega_1, \omega_2\}$ *es una base ortogonal de* $\Lambda^2(\mathfrak{n}^*)$ *con norma* $\sqrt{2}$ *respecto de la métrica inducida por* $g_{\mathfrak{n}}$.

En las Secciones 4.1 y 4.2 se hará amplio uso del Lema 4.2.

Considerando entonces sobre los grupos de Lie $G_{A,B,C}$ la G_2-estructura invariante a izquierda inducida por (47), en el caso compatible se tiene que $(G_{A,B,C}, \varphi)$ resulta ser equivariantemente equivalente a la G_2-estructura invariante en G_J definida por $h^*\varphi$, donde $h : G_J \to G_{A,B,C}$ es cualquier isomorfismo de grupos de Lie. En [**KL21**, Section 4.1] se estudia la equivalencia de G_2-estructuras en grupos de Lie con más detalle; en particular, se observa que las nociones de *equivalencia* y de *equivalencia equivariante* coinciden en la clase de G_2-estructuras invariantes a izquierdas definidas sobre grupos de Lie completamente solubles y unimodulares. En estas líneas, y adicionalmente, en [**KL21**, Section 4] se observa que lo que se explora al estudiar G_2-estructuras en álgebras de Lie $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ variando las ternas A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ en el caso compatible es una familia de G_2-estructuras definidas sobre G_J. Este enfoque, en el que se prioriza el variar el álgebra de Lie sin mover ni el grupo de Lie subyacente ni la estructura de interés, se conoce como *moving-bracket approach*, y es una técnica poderosa en el estudio de flujos geométricos definidos sobre grupos de Lie (ver, por ejemplo, [**Lau17**]).

El siguiente resultado ofrece fórmulas provechosas para las derivadas exteriores y sus respectivos duales de Hodge de la G_2-estructura canónica φ y su dual $\psi = \star\varphi$. Se hace constar que no se hacen suposiciones adicionales sobre las matrices A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ más allá de que conmuten dos a dos. Antes de enunciarlo, se recuerda que la representación natural de $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ en $\Lambda^2(\mathfrak{n}^*)$ es el mapa $\theta : \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}) \to \mathrm{End}(\Lambda^2(\mathfrak{n}^*))$ dado por

$$(\theta(D)\eta)(\cdot, \cdot) \equiv -\eta(D\cdot, \cdot) - \eta(\cdot, D\cdot). \tag{52}$$

Proposición 4.3. [**Nic21**, Theorem 2.3] *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ que conmutan dos a dos. Las derivadas exteriores y sus respectivos duales de Hodge de φ y $\psi = \star\varphi$ en la* G_2*-estructura* $(\mathfrak{g}_{A,B,C},\varphi)$ *están dadas por*

$$\begin{aligned} d\varphi =&(\theta(B)\omega_7 - \theta(A)\omega_1) \wedge e^{17} + (\theta(C)\omega_7 - \theta(A)\omega_2) \wedge e^{27} \\ &+ (\theta(B)\omega_2 - \theta(C)\omega_1) \wedge e^{12}, \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} \star d\varphi =&(\theta(B^{\intercal})\omega_7 - \theta(A^{\intercal})\omega_1) \wedge e^{2} - (\theta(C^{\intercal})\omega_7 - \theta(A^{\intercal})\omega_2) \wedge e^{1} \\ &- (\theta(B^{\intercal})\omega_2 - \theta(C^{\intercal})\omega_1) \wedge e^{7}, \end{aligned} \tag{54}$$

$$d\psi = (\theta(A)\omega_7 + \theta(B)\omega_1 + \theta(C)\omega_2) \wedge e^{127}, \tag{55}$$

$$\star d\psi = - (\theta(A^{\intercal})\omega_7 + \theta(B^{\intercal})\omega_1 + \theta(C^{\intercal})\omega_2). \tag{56}$$

Se nota en particular que la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C},\varphi)$ no es en general cerrada ni cocerrada, como muestran las ecuaciones (53) y (55). En [**KL21**] se estudian algunas elecciones A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ que resultan en alguno de esos dos subcasos, en el contexto de flujos geométricos definidos sobre $(\mathfrak{g}_{A,B,C},\varphi)$.

A partir de las fórmulas obtenidas en las Proposiciones 4.3 y 3.8 es posible dar una fórmula explícita para las formas de torsión τ_0, τ_1, τ_2, y τ_3 de la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C},\varphi)$; de modo similar, a partir de la Proposición 4.3 y del Teorema 3.13 es posible dar una fórmula explícita para el tensor de torsión total T de la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C},\varphi)$[12]. Ninguna de estas ideas produce fórmulas esclarecedoras, y es por ello que se omite llevarlas a cabo. Sin embargo, para elecciones particulares de matrices A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ se obtienen fórmulas un poco más amenas. Esto será explorado en más detalle en las secciones posteriores.

A pesar del desánimo general del párrafo anterior, sí es posible dar una fórmula explícita para la conexión de Levi-Civita de la variedad riemanniana subyacente a $(\mathfrak{g}_{A,B,C},\varphi)$ para cualquier elección de A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ que conmutan dos a dos. Antes de enunciar y demostrar el resultado correspondiente, es preciso introducir un poco de notación:

- Dado $Z \in \mathfrak{a}$ de la forma $Z = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_7 e_7$ para ciertos λ_1, λ_2, $\lambda_7 \in \mathbb{R}$, se denota por M_Z a la matriz real dada por $M_Z \equiv \lambda_1 B + \lambda_2 C + \lambda_7 A$. Observar en particular que si $Z \in \mathfrak{a}$ y $W \in \mathfrak{n}$ entonces $[Z, W] = M_Z W$.
- Dada $M \in \mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})$, se denota por $S(M)$ a la parte simétrica y por $A(M)$ a la parte antisimétrica de M; es decir, $S(M) \equiv \frac{M+M^{\intercal}}{2}$ y $A(M) \equiv \frac{M-M^{\intercal}}{2}$.

Se procura enunciar y demostrar el resultado anticipado con la mayor generalidad posible.

[12]Recordar que en este capítulo se está suprimiendo el subíndice φ de las estructuras inducidas por la G_2-estructura para aliviar notación.

Teorema 4.4. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ que conmutan dos a dos. Entonces la conexión de Levi-Civita ∇ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{A,B,C} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ respecto de un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que vuelve ortogonales a $\mathfrak{a}$ y a $\mathfrak{n}$ está dada por*

$$\nabla_X Y = \begin{cases} 0 & X \in \mathfrak{a},\ Y \in \mathfrak{a}. \\ A(M_X)Y & X \in \mathfrak{a},\ Y \in \mathfrak{n}. \\ -S(M_Y)X & X \in \mathfrak{n},\ Y \in \mathfrak{a}. \\ \langle S(B)X,Y\rangle e_1 + \langle S(C)X,Y\rangle e_2 + \langle S(A)X,Y\rangle e_7 & X \in \mathfrak{n},\ Y \in \mathfrak{n}. \end{cases} \tag{57}$$

Demostración. Deben considerarse los cuatro casos por separado.

Suponer que $X, Y \in \mathfrak{a}$. Observar primeramente que $[X,Y] = 0$ pues $\mathfrak{a}$ es una subálgebra abeliana. Como consecuencia de la ecuación (27), se sigue entonces que $U(X,Y)$ no tiene componentes en $\mathfrak{a}$. Adicionalmente, y por la misma razón, $U(X,Y)$ no tiene componentes en $\mathfrak{n}$; en efecto, si $Z \in \mathfrak{n}$ entonces $[Z,X] \in \mathfrak{n}$ y $[Z,Y] \in \mathfrak{n}$ pues $\mathfrak{n}$ es un ideal, y por lo tanto

$$2\langle U(X,Y),Z\rangle = \langle [Z,X],Y\rangle + \langle [Z,Y],X\rangle = 0,$$

donde la última igualdad vale pues $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{n}$ son complementos ortogonales en $\mathfrak{g}_{A,B,C}$. Se sigue de la ecuación (28) que $\nabla_X Y = 0$ si X, $Y \in \mathfrak{a}$.

Suponer que $X \in \mathfrak{a}$ y $Y \in \mathfrak{n}$. Dado que $\nabla_X Y = \frac{M_X Y}{2} + U(X,Y)$ por la ecuación (28), es suficiente ver que $U(X,Y) = -\frac{M_X^{\intercal} Y}{2}$. A tales fines, considerar $W \in \mathfrak{a}$ y $Z \in \mathfrak{n}$ arbitrarios. Observar que $[W,X] = 0$ y que $[Z,Y] = 0$ pues tanto $\mathfrak{a}$ como $\mathfrak{n}$ son abelianos. Además, como $[W,Y] \in \mathfrak{n}$ pues $\mathfrak{n}$ es un ideal, se sigue que $\langle [W,Y],X\rangle = 0$ pues $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{n}$ son complementos ortogonales en $\mathfrak{g}_{A,B,C}$. Así, la ecuación (27) asegura que

$$2\langle U(X,Y),W\rangle = \langle [W,X],Y\rangle + \langle [W,Y],X\rangle = 0;$$

esto muestra que $U(X,Y) \in \mathfrak{n}$. Adicionalmente, recordando que $[Z,X] = -M_X Z$, la misma ecuación asegura que

$$2\langle U(X,Y),Z\rangle = \langle [Z,X],Y\rangle + \langle [Z,Y],X\rangle = -\langle M_X Z,Y\rangle = -\langle M_X^{\intercal} Y,Z\rangle.$$

La última ecuación puede reescribirse como $\langle U(X,Y),Z\rangle = -\frac{\langle M_X^{\intercal} Y,Z\rangle}{2}$. Combinando los dos resultados anteriores, se obtiene que $U(X,Y) = -\frac{M_X^{\intercal} Y}{2}$, que es lo que se quería ver.

Suponer $X \in \mathfrak{n}$ y $Y \in \mathfrak{a}$. Se sigue de la ecuación (12) y de la fórmula hallada en el párrafo anterior que

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X,Y] = A(M_Y)X - M_Y X = -S(M_Y)X.$$

Suponer que $X, Y \in \mathfrak{n}$. Luego $[X,Y] = 0$ pues $\mathfrak{n}$ es un ideal abeliano. Como consecuencia de la ecuación (27), se sigue entonces que $U(X,Y)$ no tiene componentes en $\mathfrak{n}$. Sea entonces $Z \in \mathfrak{a}$, por ejemplo $Z = e_7$. Se sigue de la ecuación (27) que

$$2\langle U(X,Y),e_7\rangle = \langle [e_7,X],Y\rangle + \langle [e_7,Y],X\rangle = \langle AX,Y\rangle + \langle AY,X\rangle = \langle (A + A^{\intercal})X,Y\rangle;$$

es decir, que $\langle U(X,Y), e_7\rangle = \frac{\langle S(A)X,Y\rangle}{2}$. Haciendo lo mismo para $Z = e_1$ y $Z = e_2$, se encuentra que

$$U(X,Y) = \langle S(B)X, Y\rangle e_1 + \langle S(C)X, Y\rangle e_2 + \langle S(A)X, Y\rangle e_7. \qquad \square$$

El Teorema 4.4 es válido incluso cuando A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ no son linealmente independientes ni simultáneamente diagonalizables, de manera que la ecuación (57) puede usarse para dar con la fórmula de la conexión de Levi-Civita de grupos de Lie $G_{A,B,C}$ no necesariamente isomorfos a G_J. Lo mismo puede decirse del resto de los resultados de este capítulo.

Es ahora posible dar una fórmula más viable para la divergencia de la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ con A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ que conmutan dos a dos en función de su tensor de torsión total T. Conviene escribir de ahora en más que $D^l = B\delta_{l1} + C\delta_{l2} + A\delta_{l7}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker; notar que aquí **no** se está respetando la convención de índices sobre tensores ni se está efectuando suma alguna.

Teorema 4.5. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ que conmutan dos a dos. La divergencia* $\mathrm{div}(T)$ *del tensor de torsión total T de la* G_2*-estructura* $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ *satisface*

$$\langle \mathrm{div}(T), e_j\rangle = \begin{cases} \sum_{i=3,\cdots,6} T(e_i, S(D^j)e_i) & j = 1,2,7. \\ -\sum_{k=1,2,7}\Big(T(e_k, A(D^k)e_j) + \sum_{i=3,\cdots,6} S(D^k)_{ij} T(e_i, e_k)\Big) & j = 3,\cdots,6. \end{cases}$$

Demostración. Llamar

$$S_1 \equiv \sum_{i=1,\cdots,7} T(\nabla_{e_i} e_i, e_j),$$
$$S_2 \equiv \sum_{i=1,\cdots,7} T(e_i, \nabla_{e_i} e_j).$$

Combinando estas definiciones con el resultado de la Proposición 3.20, se sigue que

$$\langle \mathrm{div}(T), e_j\rangle = -S_1 - S_2.$$

El Teorema 4.4 y el hecho de que A, B, C tengan traza nula implica que $S_1 = 0$ para todo $j = 1,\cdots,7$, pues

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1,\cdots,7} T(\nabla_{e_i} e_i, e_j) = \sum_{i=3,\cdots,6} T(\nabla_{e_i} e_i, e_j) = \sum_{i=3,\cdots,6} T\left(\sum_{k=1,2,7} \langle S(D^k)e_i, e_i\rangle e_k, e_j\right) \\ &= \sum_{i=3,\cdots,6}\sum_{k=1,2,7} S(D^k)_{ii} T(e_k, e_j) = \sum_{k=1,2,7} \mathrm{tr}\Big(S(D^k)\Big) T(e_k, e_j) \\ &= \sum_{k=1,2,7} \mathrm{tr}\Big(D^k\Big) T(e_k, e_j) = \sum_{k=1,2,7} 0 \cdot T(e_k, e_j) = 0; \end{aligned}$$

por otra parte, si $j = 1,2,7$, se sigue del Teorema 4.4 que

$$S_2 = \sum_{i=1,\cdots,7} T(e_i, \nabla_{e_i} e_j) = \sum_{i=3,\cdots,6} T(e_i, \nabla_{e_i} e_j) = \sum_{i=3,\cdots,6} -T(e_i, S(D^j)e_i).$$

Además, si $j = 3, \cdots, 6$, se sigue del Teorema 4.4 que

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=1,\cdots,7} T(e_i, \nabla_{e_i} e_j) = \sum_{i=1,2,7} T(e_i, A(D^i)e_j) + \sum_{i=3,\cdots,6} T\left(e_i, \sum_{k=1,2,7} \langle S(D^k)e_i, e_j\rangle e_k\right) \\ &= \sum_{i=1,2,7} T(e_i, A(D^i)e_j) + \sum_{i=3,\cdots,6}\sum_{k=1,2,7} S(D^k)_{ij} T(e_i, e_k) \\ &= \sum_{k=1,2,7} \left(T(e_k, A(D^k)e_j) + \sum_{i=3,\cdots,6} S(D^k)_{ij} T(e_i, e_k)\right). \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. $\square$

No es claro a simple vista cuándo la divergencia de las G_2-estructuras $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ es nula a partir del Teorema 4.5, requiriéndose entonces de un poco de inventiva.

Dos elecciones generales de triples A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ serán estudiados en las Secciones 4.1 y 4.2: Por un lado, el caso con A, B, C diagonales (llamado simplemente *caso diagonal*), y el caso con A, B, C antidiagonales (llamado simplemente *caso antidiagonal*). A modo de recordatorio, una matriz $D \in \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ se dice *antidiagonal* si es decir, si es de la forma

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & D_{36} \\ 0 & 0 & D_{45} & 0 \\ 0 & D_{54} & 0 & 0 \\ D_{63} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{58}$$

con D_{36}, D_{45}, D_{54}, $D_{63} \in \mathbb{R}$. En este caso, es convencional escribir $D = \overline{\mathrm{diag}}(D_{36}, D_{45}, D_{54}, D_{63})$.

En las Secciones 4.1 y 4.2 se estudian algunas propiedades de las G_2-estructuras de la forma $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ con φ como en la ecuación (47) para los casos diagonal y antidiagonal no simétrico. En el proceso se demuestra que estas familias de G_2-estructuras son no equivalentes en general. Además, y considerablemente más importante, se calcula la divergencia de ambas G_2-estructuras; se anticipa que en ambos casos se obtiene divergencia cero, para gran satisfacción del autor. Antes de proceder, se enuncian tres resultados técnicos cuyas demostraciones se establecen vía cuentas directas a partir de la definición de producto wedge, que se omiten por no ser ilustrativas.

Lema 4.6. *Las siguientes fórmulas valen en cualquier* G_2*-estructura* $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ *en la que* φ *esté dada como en la ecuación* (47)*:*

$$\iota_{e_j}(\varphi) = \begin{cases} +e^{27} + e^{35} - e^{46}, & j = 1. \\ -e^{17} - e^{35} - e^{46}, & j = 2. \\ -e^{15} + e^{25} + e^{47}, & j = 3. \\ +e^{16} + e^{26} - e^{37}, & j = 4. \\ +e^{13} - e^{23} + e^{67}, & j = 5. \\ -e^{14} - e^{24} - e^{57}, & j = 6. \\ +e^{12} + e^{34} + e^{56}, & j = 7. \end{cases} \tag{59}$$

LEMA 4.7. *Las siguientes fórmulas valen en cualquier* G_2*-estructura* $(\mathfrak{g}_{A,B,C},\varphi)$ *en la que* φ *esté dada como en la ecuación* (47)*:*

$$\frac{1}{2}\iota_{e_i}(\varphi)\wedge\iota_{e_i}(\varphi)\begin{cases} +e^{2357}-e^{2467}+e^{3456}, & j=1.\\ +e^{1357}+e^{1467}-e^{3456}, & j=2.\\ +e^{1457}-e^{2457}, & j=3.\\ +e^{1367}+e^{2367}, & j=4.\\ +e^{1367}-e^{2367}, & j=5.\\ +e^{1457}+e^{2457}, & j=6.\\ +e^{1234}+e^{1256}+e^{3456}, & j=7.\end{cases} \tag{60}$$

$$\iota_{e_1}(\varphi)\wedge\iota_{e_j}(\varphi)=\iota_{e_j}(\varphi)\wedge\iota_{e_1}(\varphi)=\begin{cases} +e^{1257}-e^{3457}-e^{1456}+e^{2456}, & j=3.\\ -e^{1267}-e^{1356}+e^{2356}+e^{3467}, & j=4.\\ -e^{1237}+e^{3567}-e^{1346}+e^{2346}, & j=5.\\ +e^{1247}+e^{1345}+e^{2345}-e^{4567}, & j=6.\end{cases} \tag{61}$$

$$\iota_{e_2}(\varphi)\wedge\iota_{e_j}(\varphi)=\iota_{e_j}(\varphi)\wedge\iota_{e_2}(\varphi)=\begin{cases} -e^{1257}+e^{3457}-e^{1456}+e^{2456}, & j=3.\\ -e^{1267}-e^{1356}-e^{2356}+e^{3467}, & j=4.\\ +e^{1237}-e^{3567}-e^{1346}+e^{2346}, & j=5.\\ +e^{1247}-e^{1345}-e^{2345}-e^{4567}, & j=6.\end{cases} \tag{62}$$

$$\iota_{e_7}(\varphi)\wedge\iota_{e_j}(\varphi)=\iota_{e_j}(\varphi)\wedge\iota_{e_7}(\varphi)=\begin{cases} +e^{1247}-e^{1345}+e^{2345}+e^{4567}, & j=3.\\ -e^{1237}+e^{1346}+e^{2346}-e^{3567}, & j=4.\\ +e^{1267}+e^{3467}+e^{1356}-e^{2356}, & j=5.\\ -e^{1257}-e^{3457}-e^{1456}-e^{2456}, & j=6.\end{cases} \tag{63}$$

$$\iota_{e_{(9-j)}}(\varphi)\wedge\iota_{e_j}(\varphi)=\iota_{e_j}(\varphi)\wedge\iota_{e_{(9-j)}}(\varphi)=\begin{cases} 2e^{1245}, & j=3,6.\\ -2e^{1236}, & j=4,5.\end{cases} \tag{64}$$

LEMA 4.8. *En cualquier* G_2*-estructura* $(\mathfrak{g}_{A,B,C},\varphi)$ *en la que* φ *está dada como en la ecuación* (47) *vale que*

$$\iota_{e_i}(\varphi)\wedge\iota_{e_i}(\varphi)\wedge\chi=0,\quad i=1,\cdots,7 \tag{65}$$

$$\iota_{e_k}(\varphi)\wedge\iota_{e_j}(\varphi)\wedge\chi=0,\quad k=1,2,7\quad j=3,\cdots,6 \tag{66}$$

y

$$\iota_{e_l}(\varphi)\wedge\iota_{e_{(9-l)}}(\varphi)\wedge\chi=0,\quad l=3,\cdots,6 \tag{67}$$

para todo $\chi\in\mathfrak{S}$*, donde*

$$\mathfrak{S}:=\mathrm{span}\{e^{127},e^{134},e^{135},e^{136},e^{145},e^{146},e^{156},e^{234},e^{235},e^{246},e^{256},e^{347},e^{357},e^{367},e^{457},e^{467},e^{567}\}$$

En particular,

$$\iota_{e_k}(\varphi) \wedge \iota_{e_j}(\varphi) \wedge \varphi = 0, \quad k = 1,2,7 \quad j = 3,\cdots,6 \tag{68}$$

y

$$\iota_{e_l}(\varphi) \wedge \iota_{e_{(9-l)}}(\varphi) \wedge \varphi = 0, \quad l = 3,\cdots,6 \tag{69}$$

Caso diagonal

Este caso reviste especial interés debido en parte al siguiente resultado.

Proposición 4.9. [**KL21**, Lemma 4.5] *Dadas A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ simétricas y que conmutan dos a dos, existen A_0, B_0, $C_0 \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ diagonales tales que $(G_{A,B,C},\varphi)$ es equivariantemente equivalente a $(G_{A_0,B_0,C_0},\varphi)$, con φ dada como en la ecuación* (47).

De este modo, la Proposición 4.9 muestra que el estudio de las ternas A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ diagonales cubre todos los casos con A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ simétricas que conmutan dos a dos. Además, en [**KL21**, Remark 4.6] se muestra que cada clase de equivalencia en

$$\{(G_{A,B,C},\varphi) \mid A,B,C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}) \text{ son linealmente independientes y diagonales}\}$$

tiene una cantidad finita de elementos.

A continuación se adaptan los resultados de los Teoremas 4.4 y 4.5 al caso diagonal, sin hacer suposiciones adicionales sobre la elección de las ternas A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ (notando que el hecho de que estas matrices sean diagonales asegura inmediatamente que todas ellas conmuten dos a dos). Recordar que se escribe $D^l = B\delta_{l1} + C\delta_{l2} + A\delta_{l7}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, así como también que no se está respetando la convención de índices de tensores ni se está efectuando suma alguna.

Corolario 4.10. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ diagonales de la forma $D^l = \operatorname{diag}(d^l_3, d^l_4, d^l_5, d^l_6)$ donde $D^l = B\delta_{l1} + C\delta_{l2} + A\delta_{l7}$, y δ_{ij} denota la delta de Kronecker. Entonces la conexión de Levi-Civita ∇ en $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ respecto de un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que hace ortonormal a la base $\{e_1,\cdots,e_7\}$ de $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ está dada por*

$$\nabla_{e_i}e_j = \begin{cases} 0 & i,j = 1,2,7. \\ 0 & i = 1,2,7;\ j = 3,\cdots,6. \\ -d^j_i\, e_i & i = 3,\cdots,6;\ j = 1,2,7. \\ \sum_{k=1,2,7} d^k_i e_k & i,j = 3,\cdots,6 \textit{ con } i = j. \\ 0 & i,j = 3,\cdots,6 \textit{ con } i \neq j. \end{cases} \tag{70}$$

Demostración. Es inmediato que $\nabla_{e_i}e_j = 0$ para $i,j = 1,2,7$. Además, $\nabla_{e_i}e_j = 0$ para $i = 1,2,7$ y $j = 3,\cdots,6$ pues A, B, y C son simétricas. La misma simetría establece que $\nabla_{e_i}e_j = -d^j_i e_i$ para $i = 3,\cdots,6$ y $j = 1,2,7$, pues

$$\nabla_{e_i}e_j = -S(M_{e_j})e_i = -S(D^j)e_i = D^j e_i = d^j_i e_i,$$

donde la última igualdad vale por multiplicación usual de matrices. Finalmente, si $i, j = 3, \cdots, 6$ entonces es claro que $\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1,2,7} D_{ij}^k e_k$ pues $\langle M e_i, e_j \rangle = M_{ij}$ para toda matriz M ya que $\{e_1, \cdots, e_7\}$ es una base ortonormal respecto de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, así como también que A, B, y C son simétricas, y la distinción entre los casos $i = j$ y $i \neq j$ es inmediata. $\square$

Es necesario pasar por un resultado previo antes de enunciar la adaptación el Teorema 4.5 al caso diagonal.

LEMA 4.11. *El tensor de torsión total T de la* G_2*-estructura* $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ *con* A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ *diagonales satisface* $T(e_i, e_i) = \frac{\tau_0}{4}$, *donde* $\{e_1, \cdots, e_7\}$ *es la base ortonormal de la definición de* $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ *y* τ_0 *es la* 0*-forma de torsión de* $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$.

DEMOSTRACIÓN. Los términos $\iota_{\tau_1}(\varphi)$ y $\frac{1}{2}\tau_2$ de la definición del tensor de torsión total T, dada por en la ecuación (41), son antisimétricos en sus argumentos, y por lo tanto se anulan al evaluarse en (e_i, e_i) para $i = 1, \cdots, 7$. Teniendo en cuenta adicionalmente que $\{e_1, \cdots, e_7\}$ es una base ortonormal, se sigue que

$$T(e_i, e_i) = \frac{\tau_0}{4} + \tau_{27}(e_i, e_i). \tag{71}$$

La ecuación (71) es válida para cualquier elección de A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$. Bajo la asunció adicional de que éstas son diagonales, la definición (40) junto con el Lema 4.8 y el Corolario 4.15 (éste último independiente de los resultados de esta sección que se menciona en caso de que el resultado no sea inmediato) implican que $\tau_{27}(e_i, e_i) = 0$ en este caso, demostrando así la fórmula deseada. $\square$

COROLARIO 4.12. *Sean* A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ *diagonales de la forma* $D^l = \mathrm{diag}(d_3^l, d_4^l, d_5^l, d_6^l)$, *donde* $D^l = B\delta_{l1} + C\delta_{l2} + A\delta_{l7}$, *y* δ_{ij} *denota la delta de Kronecker. La divergencia* $\mathrm{div}(T)$ *de la* G_2*-estructura* $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ *está dada en función del tensor de torsión total* T *según*

$$\langle \mathrm{div}(T), e_j \rangle = \begin{cases} 0 & j = 1, 2, 7. \\ -\sum_{k=1,2,7} d_j^k T(e_j, e_k) & j = 3, \cdots, 6. \end{cases} \tag{72}$$

DEMOSTRACIÓN. Suponer $j = 1, 2, 7$. El Teorema 4.5 asegura entonces que

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{div}(T), e_j \rangle &= \sum_{i=3,\cdots,6} T(e_i, S(D^j) e_i) = \sum_{i=3,\cdots,6} T(e_i, D^j e_i) \\ &= \sum_{i=3,\cdots,6} d_i^j T(e_i, e_i) = \left(\sum_{i=3,\cdots,6} d_i^j \right) \frac{\tau_0}{4} = 0. \end{aligned}$$

Aquí, la segunda igualdad surge de que D^j es simétrica para todo $j = 1, 2, 7$, la anteúltima igualdad vale por Lema 4.11, y la última igualdad es consecuencia de que D^k tiene traza nula para todo $k = 1, 2, 7$.

Suponer $j = 3, \cdots, 6$. El Teorema 4.5 asegura entonces que

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{div}(T), e_j \rangle &= -\sum_{k=1,2,7} \left(T(e_i, A(D^k)e_j) + \sum_{i=3}^{6} S(D^k)_{ij} T(e_i, e_k) \right) \\ &= -\sum_{k=1,2,7} \sum_{i=3,\cdots,6} (D^k)_{ij} T(e_i, e_k) = -\sum_{k=1,2,7} d_j^k T(e_j, e_k).\end{aligned}$$

La primera igualdad surge de que D^k es simétrica para todo $k = 1, 2, 7$, mientras que la segunda se obtiene tras observar que D^k es diagonal para $k = 1, 2, 7$. □

Se enfatiza nuevamente que los Corolarios 4.10 y 4.12 son válidos incluso en el caso en que las matrices A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ no sean linealmente independientes.

La ecuación (72) deja patente que para poder determinar la divergencia de la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ en el caso diagonal basta con calcular $T(e_j, e_k)$ para $j = 3, \cdots, 6$ y $k = 1, 2, 7$. Ésta no es una tarea menor, si bien el procedimiento es tan sencillo como desentrañar definiciones y llevar a cabo laboriosas cuentas.

A continuación se estudia la imagen de matrices diagonales por la representación $\theta : \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R}) \to \Lambda^2(\mathfrak{n}^*)$.

Lema 4.13. *La representación natural de $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ en $\Lambda^2(\mathfrak{n}^*)$ satisface*

$$\theta(\operatorname{diag}(d_3, d_4, d_5, d_6)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_3+d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3+d_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3+d_6 \\ d_3+d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3+d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3+d_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{73}$$

para todo d_3, d_4, d_5, $d_6 \in \mathbb{R}$ tal que $d_3+d_4+d_5+d_6 = 0$ respecto de las bases ordenadas $\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$ y $\mathfrak{B} \equiv \{\overline{\omega}_7, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \omega_7, \omega_1, \omega_2\}$ de $\mathfrak{n}$ y de $\Lambda(\mathfrak{n}^*)$ respectivamente.

Demostración. Es la ecuación (27) de [**KL21**]. Se esboza aquí una prueba por formalidad. Dado que, por Proposición 2.19,

$$\theta(D)e^{ij} = \sum_k (D_{ik}e^{kj} - D_{jk}e^{ki}),$$

para toda matriz $D \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$, si $D = \operatorname{diag}(d_3, d_4, d_5, d_6)$ entonces

$$\theta(D)e^{ij} = D_{ii}e^{ij} - D_{jj}e^{ji} = (d_i + d_j)e^{ij}, \tag{74}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\theta(D)\overline{\omega}_7 &= \theta(D)e^{34} - \theta(D)e^{56} = (d_3 + d_4)e^{34} - (d_5 + d_6)e^{56} \\ &= \frac{d_3 + d_4}{2}(\overline{\omega}_7 + \omega_7) + \frac{d_5 + d_6}{2}(\overline{\omega}_7 - \omega_7) \\ &= \frac{d_3 + d_4 + d_5 + d_6}{2}\overline{\omega}_7 + \frac{d_3 + d_4 - d_5 - d_6}{2}\omega_7 \\ &= \frac{d_3 + d_4 + d_3 + d_4}{2}\omega_7 = (d_3 + d_4)\omega_7,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\theta(D)\overline{\omega}_1 &= \theta(D)e^{35} + \theta(D)e^{46} = (d_3+d_5)e^{35} + (d_4+d_6)e^{46} \\
&= \frac{d_3+d_5}{2}(\overline{\omega}_1+\omega_1) + \frac{d_4+d_6}{2}(\overline{\omega}_1-\omega_1) \\
&= \frac{d_3+d_5+d_4+d_6}{2}\overline{\omega}_1 + \frac{d_3+d_5-d_4-d_6}{2}\omega_1 \\
&= \frac{d_3+d_5+d_3+d_5}{2}\omega_1 = (d_3+d_5)\omega_1, \\
\theta(D)\overline{\omega}_2 &= -\theta(D)e^{36} + \theta(D)e^{45} = -(d_3+d_6)e^{36} + (d_4+d_5)e^{45} \\
&= \frac{d_3+d_6}{2}(\overline{\omega}_2+\omega_2) + \frac{d_4+d_5}{2}(\overline{\omega}_2-\omega_2) \\
&= \frac{d_3+d_6+d_4+d_5}{2}\overline{\omega}_2 + \frac{d_3+d_6-d_4-d_5}{2}\omega_2 \\
&= \frac{d_3+d_6+d_3+d_6}{2}\omega_2 = (d_3+d_6)\omega_2, \\
\theta(D)\omega_7 &= \theta(D)e^{34} + \theta(D)e^{56} = (d_3+d_4)e^{34} + (d_5+d_6)e^{56} \\
&= \frac{d_3+d_4}{2}(\overline{\omega}_7+\omega_7) - \frac{d_5+d_6}{2}(\overline{\omega}_7-\omega_7) \\
&= \frac{d_3+d_4-d_5-d_6}{2}\overline{\omega}_7 + \frac{d_3+d_4+d_5+d_6}{2}\omega_7 \\
&= \frac{d_3+d_4+d_3+d_4}{2}\overline{\omega}_7 = (d_3+d_4)\overline{\omega}_7, \\
\theta(D)\omega_1 &= \theta(D)e^{35} - \theta(D)e^{46} = (d_3+d_5)e^{35} - (d_4+d_6)e^{46} \\
&= \frac{d_3+d_5}{2}(\overline{\omega}_1+\omega_1) - \frac{d_4+d_6}{2}(\overline{\omega}_1-\omega_1) \\
&= \frac{d_3+d_5-d_4-d_6}{2}\overline{\omega}_1 + \frac{d_3+d_5+d_4+d_6}{2}\omega_1 \\
&= \frac{d_3+d_5+d_3+d_5}{2}\overline{\omega}_1 = (d_3+d_5)\overline{\omega}_1, \\
\theta(D)\omega_2 &= -\theta(D)e^{36} - \theta(D)e^{45} = -(d_3+d_6)e^{36} - (d_4+d_5)e^{45} \\
&= \frac{d_3+d_6}{2}(\overline{\omega}_2+\omega_2) - \frac{d_4+d_5}{2}(\overline{\omega}_2-\omega_2) \\
&= \frac{d_3+d_6-d_4-d_5}{2}\overline{\omega}_2 + \frac{d_3+d_6+d_4+d_5}{2}\omega_2 \\
&= \frac{d_3+d_6+d_3+d_6}{2}\overline{\omega}_2 = (d_3+d_6)\overline{\omega}_2.
\end{aligned}
$$

La expresión matricial para $\theta(D)$ se obtiene de manera inmediata. □

La siguiente es una adaptación de la Proposición 4.3 al caso diagonal.

PROPOSICIÓN 4.14. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ diagonales de la forma*

$$A = \operatorname{diag}(a_3,a_4,a_5,a_6), \quad B = \operatorname{diag}(b_3,b_4,b_5,b_6), \quad C = \operatorname{diag}(c_3,c_4,c_5,c_6).$$

Las derivadas exteriores y sus respectivos duales de Hodge de φ y $\psi = \star\varphi$ en la G_2*-estructura* $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ *están dadas por*

$$\begin{aligned} d\varphi =& ((a_3 + a_5)\overline{\omega}_1 - (b_3 + b_4)\overline{\omega}_7) \wedge e^{17} + ((a_3 + a_6)\overline{\omega}_2 - (c_3 + c_4)\overline{\omega}_7) \wedge e^{27} + \\ & + ((c_3 + c_5)\overline{\omega}_1 - (b_3 + b_6)\overline{\omega}_2) \wedge e^{12}, \end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned} \star d\varphi =& ((a_3 + a_5)\overline{\omega}_1 - (b_3 + b_4)\overline{\omega}_7) \wedge e^{2} + ((c_3 + c_4)\overline{\omega}_7 - (a_3 + a_6)\overline{\omega}_2) \wedge e^{1} \\ & + ((b_3 + b_6)\overline{\omega}_2 - (c_3 + c_5)\overline{\omega}_1) \wedge e^{7}, \end{aligned} \tag{76}$$

$$d\psi = -\big((a_3 + a_4)\overline{\omega}_7 + (b_3 + b_5)\overline{\omega}_1 + (c_3 + c_6)\overline{\omega}_2\big) \wedge e^{127}, \tag{77}$$

$$\star d\psi = \quad (a_3 + a_4)\overline{\omega}_7 + (b_3 + b_5)\overline{\omega}_1 + (c_3 + c_6)\overline{\omega}_2, \tag{78}$$

Demostración. Surge de reemplazar lo obtenido en el Lema 4.13 en las fórmulas de la Proposición 4.3. □

En una observación similar a una realizada anteriormente, se hace constar que las ecuaciones (75) y (77) muestran que ni siquiera en el caso diagonal se tiene que las G_2-estructuras $(g_{A,B,C}, \varphi)$ son necesariamente cerradas o cocerradas. A diferencia del caso general, ahora sí es posible construir ejemplos en los que se satisfagan alguna de estas dos condiciones de integrabilidad; esto es lo que se hace en [**KL21**, Section 4.4] y [**KL21**, Section 4.5].

El siguiente resultado surge como consecuencia inmediata de aplicar la Proposición 4.14 a las fórmulas halladas en la Proposición 3.8.

Corolario 4.15. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ diagonales. Entonces las formas de torsión τ_0, τ_1, τ_2, y τ_3 de la* G_2*-estructura* $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ *están dadas por*

$$\tau_0 = 0, \tag{79}$$

$$\tau_1 = 0, \tag{80}$$

$$\tau_2 = - \star d\psi, \tag{81}$$

$$\tau_3 = \quad \star d\varphi, \tag{82}$$

donde $\psi = \star\varphi$ es la 4-forma dual de φ.

Demostración. Es [**KL21**, Corollary 4.8]. Al ser breve, se esboza a continuación la prueba. Se hará uso de la fórmulas de la Proposición 3.8, así como también el Lema 4.2; en particular, que $\varphi = e^{127} + \omega_7 \wedge e^7 + \omega_1 \wedge e^1 + \omega_2 \wedge e^2$. Se sigue de la ecuación (75) que

$$\begin{aligned} d\varphi \wedge \varphi =& [-((a_3 + a_5)\overline{\omega}_1 - (b_3 + b_4)\overline{\omega}_7) \wedge \omega_2 + \\ & + ((a_3 + a_6)\overline{\omega}_2 - (c_3 + c_4)\overline{\omega}_7) \wedge \omega_1 + \\ & + ((c_3 + c_5)\overline{\omega}_1 - (b_3 + b_6)\overline{\omega}_2) \wedge \omega_7 \quad] \wedge e^{127} \\ & = [0] \wedge e^{127} = 0. \end{aligned}$$

Se sigue de la linealidad del operador estrella de Hodge que $\star(d\varphi \wedge \varphi) = 0$ y, por la ecuación (36), que $\tau_0 = 0$.

La demostración de que $\tau_1 = 0$ se omite al ser muy similar a la de que $\tau_0 = 0$. Finalmente, las fórmulas para τ_2 y τ_3 se deducen inmediatamente de las ecuaciones (38) y (39) y del hecho de que $\tau_0 = 0$ y $\tau_1 = 0$. $\square$

COROLARIO 4.16. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ diagonales. La 2-forma τ_{27} en $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ está dada por*

$$\tau_{27}(X, Y) = \star(\iota_X(\varphi) \wedge \iota_Y(\varphi) \wedge \star d\varphi) \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}_{A,B,C}. \tag{83}$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue inmediatamente de reemplazar la ecuación (82) de la definición de τ_{27}, dada por la ecuación (40). $\square$

En virtud de los Corolarios 4.15 y 4.16, el tensor de torsión total T de la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ con A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ diagonales es especialmente simple.

COROLARIO 4.17. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ diagonales. El tensor de torsión total T de la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ está dado por*

$$T(X, Y) = \frac{1}{2}(\star d\psi)(X, Y) - \star(\iota_X(\varphi) \wedge \iota_Y(\varphi) \wedge \star d\varphi) \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}_{A,B,C}, \tag{84}$$

donde $\psi = \star\varphi$ es la 4-forma dual de φ.

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia de reemplazar las fórmulas obtenidas en los Corolarios 4.15 y 4.16 en la ecuación (41). $\square$

Es posible ahora enunciar y demostrar el resultado principal de la sección.

TEOREMA 4.18. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ diagonales. Entonces la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ tiene divergencia cero.*

DEMOSTRACIÓN. Por Corolario 4.12, es suficiente verificar que $T(e_j, e_k) = 0$ para todo $k = 1, 2, 7$ y $j = 3, \cdots, 6$. El Corolario 4.17 muestra que es suficiente verificar que $(\star d\psi)(e_j, e_k) = 0$ y $\tau_{27}(e_j, e_k) = 0$ para todo $k = 1, 2, 7$ y $j = 3, \cdots, 6$.

Por un lado, la la ecuación (78), expandida adecuadamente a partir de las definiciones 50 y 51, asegura que

$$\begin{aligned} \star d\psi \in \operatorname{span}\{\overline{\omega}_7, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2\} &= \operatorname{span}\{e^{34} - e^{56}, e^{35} + e^{46}, -e^{36} + e^{45}\} \\ &\subseteq \operatorname{span}\{e^{34}, e^{35}, e^{36}, e^{45}, e^{46}, e^{56}\}, \end{aligned}$$

de manera que $(\star d\psi)(e_j, e_k) = 0$ para todo $j = 3, \cdots, 6$ y $k = 1, 2, 7$, anulando entonces el primer sumando de T.

Por otro lado, la ecuación (76), expandida adecuadamente a partir de las definiciones 50 y 51, asegura que

$$\begin{aligned}\star d\varphi &\in \operatorname{span}\{\overline{\omega}_1 \wedge e^2, \overline{\omega}_7 \wedge e^2, \overline{\omega}_7 \wedge e^1, \overline{\omega}_2 \wedge e^1, \overline{\omega}_2 \wedge e^7, \overline{\omega}_1 \wedge e^7\}\\ &= \operatorname{span}\{e^{235} + e^{246}, e^{234} - e^{256}, e^{134} - e^{156}, -e^{136} + e^{145}, -e^{367} + e^{457}, e^{357} + e^{467}\}\\ &\subseteq \operatorname{span}\{e^{134}, e^{136}, e^{145}, e^{156}, e^{234}, e^{235}, e^{246}, e^{256}, e^{357}, e^{367}, e^{457}, e^{467}\},\end{aligned}$$

de manera que el Lema 4.8 y la linealidad del operador estrella de Hodge aseguran entonces que

$$\tau_{27}(e_j, e_k) = \star(\iota_{e_j}(\varphi) \wedge \iota_{e_k}(\varphi) \wedge \star d\varphi) = 0,$$

anulando entonces el segundo sumando de T. Esto completa la demostración. $\square$

Volviendo a lo establecido en la Proposición 4.9, el Teorema 4.18 permite concluir que muchas más elecciones de ternas A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ resultan en G_2-estructuras $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ con divergencia cero, si bien esto no expande el conjunto de ejemplos no equivalentes.

Corolario 4.19. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ simétricas que conmutan dos a dos. Entonces la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ con $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ tiene divergencia cero.*

Demostración. Es inmediato de la Proposición 4.9 y del Teorema 4.18. $\square$

Observación 1. El Teorema 4.12 puede establecerse alternativamente acudiendo a [**Gri19**, Theorem 4.2] como consecuencia de la validez de las ecuaciones (79) y (80).

Caso antidiagonal

A diferencia de lo observado al comenzar la Sección 4.1, se desconoce si existe un resultado análogo al de la Proposición 4.9 para el caso antidiagonal. La principal motivación para estudiar este caso no surge entonces de teoremas profundos sino que responde meramente a que la elección de ternas A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ con abundancia de ceros vuelve las cuentas mucho más amenas y, como se observa en el Teorema 4.5, aumenta las chances de hallar ejemplos con divergencia cero. Se anticipa que, si bien este caso es tratable, las fórmulas halladas tienen mucho menor valor estético que las de la Sección 4.1.

La elección de una terna A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ de matrices antidiagonales no garantiza que éstas conmuten dos a dos. De hecho, si se toma A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ de la forma $D^l = \overline{\operatorname{diag}}(D^l_{36}, D^l_{45}, D^l_{54} D^l_{63})$, donde $D^l = B\delta_{1l} + C\delta_{2l} + A\delta_{7l}$ y δ_{ij} es la delta de Kronecker, se tiene que A, B, y C conmutan entre sí si y sólo si se cumplen todas las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
A_{63}B_{36} - A_{36}B_{63} &= 0,\\
A_{54}B_{45} - A_{45}B_{54} &= 0,\\
B_{63}C_{36} - B_{36}C_{63} &= 0,\\
B_{54}C_{45} - B_{45}C_{54} &= 0,\\
C_{63}A_{36} - C_{36}A_{63} &= 0,\\
C_{54}A_{45} - C_{45}A_{54} &= 0.
\end{aligned} \tag{85}$$

A pesar de imponer restricciones acerca de qué elecciones de ternas A, B, C son válidas, las fórmulas de la ecuación (85) serán de escasa utilidad en lo subsiguiente y se mencionan solamente por formalidad.

Debido a la Proposición 4.9, es preciso restringirse al caso *no* simétrico al lidiar con matrices antidiagonales si se espera producir ejemplos no tratados ya en la Sección 4.1. Resultados como los Corolarios 4.15 y 4.24, concretamente[13] las ecuaciones (80) y (110), muestran que, en general, las G_2-estructuras $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ con A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ antidiagonales no son equivalentes a las correspondientes con A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ diagonales, al no poseer en general invariantes equivalentes.

Al igual que antes, es conveniente adaptar los Teoremas 4.4 y 4.5 al caso antidiagonal. Nuevamente, no se hacen suposiciones adicionales sobre las matrices A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ más allá de que sean antidiagonales y conmuten dos a dos.

Corolario 4.20. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ que conmutan dos a dos, y que además son antidiagonales de la forma $D^l = \overline{\mathrm{diag}}(d^l_3, d^l_4, d^l_5, d^l_6)$, donde $D^l = B\delta_{1l} + C\delta_{2l} + A\delta_{7l}$ y δ_{ij} es la delta de Kronecker. Entonces la conexión de Levi-Civita ∇ en $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ respecto de un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que hace ortonormal a la base $\{e_1,\cdots,e_7\}$ satisface*

$$\nabla_{e_i}e_j = \begin{cases} 0 & i,j = 1,2,7.\\ \frac{d^i_{9-j}-d^i_j}{2}\, e_{(9-j)} & i = 1,2,7;\ j = 3,\cdots,6.\\ -\frac{d^j_{9-i}+d^j_i}{2}\, e_{(9-i)} & i = 3,\cdots,6;\ j = 1,2,7.\\ \sum_{k=1,2,7}\frac{d^k_i+d^k_{9-i}}{2} e_k & i,j = 3,\cdots,6 \text{ con } i+j = 9.\\ 0 & i,j = 3,\cdots,6 \text{ con } i+j \neq 9.\end{cases} \tag{86}$$

Demostración. Es inmediato que $\nabla_{e_i}e_j = 0$ para $i,j = 1,2,7$. Para $i = 1,2,7$ y $j = 3,\cdots,6$ se tiene que

$$\nabla_{e_i}e_j = A(M_{e_i})e_j = A(D^i)e_j = A(D^i)_{(9-j),j}e_{(9-j)},$$

donde la última igualdad vale pues la n-ésima componente de $A(D^i)e_j$ es

$$(A(D^i)e_j)_n = \sum_{k=3}^{6} A(D^i)_{nk}(e_j)_k = A(D^i)_{nj} \tag{87}$$

[13]Se trae a colación que, si bien las ecuaciones (79) y (109) indican la existencia de otro invariante no equivalente, esta disparidad desaparece con un cambio de escala adecuado, en relación con lo observado tras concluir Definición 3.2.

para todo $n = 3, \cdots, 6$, y este número es no nulo si y sólo si $n + j = 9$, y en este caso es igual a $\frac{d^i_{9-j} - d^i_j}{2}$. La misma razón establece que

$$\nabla_{e_i} e_j = -S(D^j)_{(9-i),i} e_{(9-i)} = \frac{d^j_{9-i} + d^j_i}{2} e_{(9-i)} \tag{88}$$

para $i = 3, \cdots, 6$ y $j = 1, 2, 7$. Finalmente, si $i, j = 3, \cdots, 6$ entonces es claro que $\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1,2,7} S(D^k_{ij}) e_k$ pues $\langle M e_i, e_j \rangle = M_{ij}$ para toda matriz M ya que $\{e_1, \cdots, e_7\}$ es una base ortonormal respecto de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y la distinción entre los casos $i + j = j$ y $i + j \neq 9$ es inmediata de la antidiagonalidad de A, B, y C. □

A diferencia de lo que ocurría en el caso diagonal, la divergencia de $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ para A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ antidiagonales que conmutan dos a dos no se simplifica dramáticamente respecto de lo enunciado en el Teorema 4.5.

Corolario 4.21. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ que conmutan dos a dos, y que además son antidiagonales de la forma $D^l = \overline{\mathrm{diag}}(d^l_3, d^l_4, d^l_5, d^l_6)$, donde $D^l = B\delta_{l1} + C\delta_{l2} + A\delta_{l7}$ y δ_{ij} es la delta de Kronecker. La divergencia* $\mathrm{div}(T)$ *de la* G_2*-estructura* $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ *está dada en función del tensor de torsión total T según*

$$\langle \mathrm{div}(T), e_j \rangle = \begin{cases} \sum_{i=3,\cdots,6} \; S(D^j)_{(9-i),i} T(e_i, e_{(9-i)}) & j = 1, 2, 7. \\ -\sum_{k=1,2,7} \left(A(D^k)_{(9-j),j} T(e_k, e_{(9-j)}) + S(D^k)_{(9-j),j} T(e_{(9-j)}, e_k) \right) & j = 3, \cdots, 6. \end{cases} \tag{89}$$

Demostración. Suponer $j = 1, 2, 7$. El Teorema 4.5 asegura entonces que

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{div}(T), e_j \rangle &= \sum_{i=3,\cdots,6} T(e_i, S(D^j) e_i) = \sum_{i=3,\cdots,6} T(e_i, S(D^j)_{(9-i),i} e_{(9-i)}) \\ &= \sum_{i=3,\cdots,6} S(D^j)_{(9-i),i} T(e_i, e_{(9-i)}). \end{aligned}$$

La segunda igualdad vale por multiplicación de matrices, como fue observado al demostrar las ecuaciones (87) y (88).

Suponer $j = 3, \cdots, 6$. El Teorema 4.5 asegura entonces que

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{div}(T), e_j \rangle &= -\sum_{k=1,2,7} \left(T(e_k, A(D^k) e_j) + \sum_{i=3,\cdots,6} S(D^k)_{ij} T(e_i, e_k) \right) \\ &= -\sum_{k=1,2,7} \left(T(e_k, A(D^k)_{(9-j),j} e_{(9-j)}) + S(D^k)_{(9-j),j} T(e_{(9-j)}, e_k) \right) \\ &= -\sum_{k=1,2,7} \left(A(D^k)_{(9-j),j} T(e_k, e_{(9-j)}) + S(D^k)_{(9-j),j} T(e_{(9-j)}, e_k) \right). \end{aligned}$$

La segunda igualdad vale por multiplicación de matrices, como fue observado al demostrar las ecuaciones (87) y (88); la última igualdad vale por bilinealidad de T. Eso completa la prueba. □

La ecuación (89), mucho más compleja que la ecuación (72), exhibe que para poder determinar la divergencia de la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ en el caso antidiagonal hay que determinar los valores de $T(e_i, e_{(9-i)})$ para $i = 3, \cdots, 6$, y de $T(e_k, e_{(9-j)})$ y $T(e_{(9-j)}, e_k)$ para $k = 1, 2, 7$ y $j = 3, \cdots, 6$.

El cálculo es similar en espíritu al realizado en el caso diagonal, si acaso un poco más extenso.

Como en la la Sección 4.1, el primer paso es estudiar la imagen de matrices antidiagonales por la representación $\theta : \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}) \to \Lambda^2(\mathfrak{n}^*)$.

Lema 4.22. *La representación natural de $\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ en $\Lambda^2(\mathfrak{n}^*)$ satisface*

$$\theta(\overline{\operatorname{diag}}(d_3,d_4,d_5,d_6)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & d_3-d_4+d_5-d_6 & 0 & 0 & d_3+d_4+d_5+d_6 & 0 \\ d_6-d_5+d_4-d_3 & 0 & 0 & d_4-d_3-d_6+d_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_4-d_3-d_6+d_5 & 0 & 0 & d_6+d_5-d_4-d_3 & 0 \\ d_3+d_4+d_5+d_6 & 0 & 0 & d_3+d_4-d_5-d_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{90}$$

para todo d_3, d_4, d_5, $d_6 \in \mathbb{R}$ respecto de las bases ordenadas $\{e_3,e_4,e_5,e_6\}$ y $\mathfrak{B} \equiv \{\overline{\omega}_7,\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2,\omega_7,\omega_1,\omega_2\}$ de $\mathfrak{n}$ y de $\Lambda(\mathfrak{n}^*)$ respectivamente.

Demostración. Dado que, por Proposición 2.19,

$$\theta(D)e^{ij} = \sum_k (D_{ik}e^{kj} - D_{jk}e^{ki}),$$

para toda matriz $D \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$, si $D = \overline{\operatorname{diag}}(D_{36},D_{45},D_{54},D_{63}) = \overline{\operatorname{diag}}(d_3,d_4,d_5,d_6)$ entonces

$$\theta(D)e^{ij} = D_{i,(9-i)}e^{(9-i),j} - D_{j,(9-j)}e^{(9-j),i}, \tag{91}$$

y por lo tanto

$$\theta(D)e^{34} = D_{36}e^{64} - D_{45}e^{53} = D_{45}e^{35} - D_{36}e^{46} = d_4e^{35} - d_3e^{46},$$

$$\theta(D)e^{35} = D_{36}e^{65} - D_{54}e^{43} = D_{54}e^{34} - D_{36}e^{56} = d_5e^{34} - d_3e^{56},$$

$$\theta(D)e^{36} = D_{36}e^{66} - D_{63}e^{33} = 0,$$

$$\theta(D)e^{45} = D_{45}e^{55} - D_{54}e^{44} = 0,$$

$$\theta(D)e^{46} = D_{45}e^{56} - D_{63}e^{34} = d_4e^{56} - d_6e^{34},$$

$$\theta(D)e^{56} = D_{54}e^{46} - D_{63}e^{35} = d_5e^{46} - d_6e^{35}.$$

Así, acudiendo al Lema 4.2,

$$\begin{aligned}
\theta(D)\overline{\omega}_7 &= \theta(D)e^{34} - \theta(D)e^{56} = (d_4e^{35} - d_3e^{46}) - (d_5e^{46} - d_6e^{35}) \\
&= (d_4+d_6)e^{35} - (d_3+d_5)e^{46} \\
&= \frac{(d_4+d_6)}{2}(\overline{\omega}_1 + \omega_1) - \frac{(d_3+d_5)}{2}(\overline{\omega}_1 - \omega_1) \\
&= \frac{d_6-d_5+d_4-d_3}{2}\overline{\omega}_1 + \frac{d_3+d_4+d_5+d_6}{2}\omega_1, \\
\theta(D)\overline{\omega}_1 &= \theta(D)e^{35} + \theta(D)e^{46} = (d_5e^{34} - d_3e^{56}) + (d_4e^{56} - d_6e^{34}) \\
&= (d_5-d_6)e^{34} + (d_4-d_3)e^{56} \\
&= \frac{(d_5-d_6)}{2}(\overline{\omega}_7 + \omega_7) - \frac{(d_4-d_3)}{2}(\overline{\omega}_7 - \omega_7) \\
&= \frac{d_3-d_4+d_5-d_6}{2}\overline{\omega}_7 + \frac{d_4-d_3+d_5-d_6}{2}\omega_7,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta(D)\overline{\omega}_2 &= -\theta(D)e^{36} + \theta(D)e^{45} = -(0) + (0) = 0,\\
\theta(D)\omega_7 &= \theta(D)e^{34} + \theta(D)e^{56} = (d_4e^{35} - d_3e^{46}) + (d_5e^{46} - d_6e^{35})\\
&= (d_4 - d_6)e^{35} + (d_5 - d_3)e^{46}\\
&= \frac{(d_4 - d_6)}{2}(\overline{\omega}_1 + \omega_1) + \frac{(d_5 - d_3)}{2}(\overline{\omega}_1 - \omega_1)\\
&= \frac{d_4 - d_3 + d_5 - d_6}{2}\overline{\omega}_1 + \frac{d_3 + d_4 - d_5 - d_6}{2}\omega_1,\\
\theta(D)\omega_1 &= \theta(D)e^{35} - \theta(D)e^{46} = (d_5e^{34} - d_3e^{56}) - (d_4e^{56} - d_6e^{34})\\
&= (d_5 + d_6)e^{34} + (d_3 + d_4)e^{56}\\
&= \frac{(d_5 + d_6)}{2}(\overline{\omega}_7 + \omega_7) + \frac{(d_3 + d_4)}{2}(\overline{\omega}_7 - \omega_7)\\
&= \frac{d_3 + d_4 + d_5 + d_6}{2}\overline{\omega}_7 + \frac{d_6 + d_5 - d_4 - d_3}{2}\omega_7,\\
\theta(D)\omega_2 &= -\theta(D)e^{36} - \theta(D)e^{45} = -(0) - (0) = 0.
\end{aligned}$$

La expresión matricial para $\theta(D)$ se obtiene de manera inmediata. $\square$

En el contexto del Lema 4.22, conviene llamar

$$\alpha(D) \equiv \frac{1}{2}(d_3 + d_4 + d_5 + d_6), \tag{92}$$

$$\beta(D) \equiv \frac{1}{2}(d_3 - d_4 + d_5 - d_6), \tag{93}$$

$$\gamma(D) \equiv \frac{1}{2}(d_3 + d_4 - d_5 - d_6), \tag{94}$$

$$\delta(D) \equiv \frac{1}{2}(d_3 - d_4 - d_5 + d_6), \tag{95}$$

donde $D = \overline{\mathrm{diag}}(d_3, d_4, d_5, d_6)$. Observar en particular que

$$\alpha(D^\intercal) \equiv \quad \alpha(D), \tag{96}$$

$$\beta(D^\intercal) \equiv -\beta(D), \tag{97}$$

$$\gamma(D^\intercal) \equiv -\gamma(D), \tag{98}$$

$$\delta(D^\intercal) \equiv \quad \delta(D), \tag{99}$$

donde $D = \overline{\mathrm{diag}}(d_3, d_4, d_5, d_6)$; en particular, $\beta(D)$ y $\gamma(D)$ se anulan si D es simétrica, pero no $\alpha(D)$ y $\delta(D)$. Además, con esta nomenclatura se obtiene

$$\theta(\overline{\mathrm{diag}}(d_3, d_4, d_5, d_6)) = \begin{pmatrix} 0 & \beta(D) & 0 & 0 & \alpha(D) & 0\\ -\beta(D) & 0 & 0 & -\delta(D) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\delta(D) & 0 & 0 & -\gamma(D) & 0\\ \alpha(D) & 0 & 0 & \gamma(D) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{100}$$

que significa que

$$\theta(D)\overline{\omega}_7 = -\beta(D)\overline{\omega}_1 + \alpha(D)\omega_1, \tag{101}$$

$$\theta(D)\overline{\omega}_1 = \quad \beta(D)\overline{\omega}_7 - \delta(D)\omega_7, \tag{102}$$

$$\theta(D)\omega_7 = -\delta(D)\overline{\omega}_1 + \gamma(D)\omega_1, \tag{103}$$

$$\theta(D)\omega_1 = \quad \alpha(D)\overline{\omega}_7 - \gamma(D)\omega_7. \tag{104}$$

Esta simplificación vendrá bien en el contexto del siguiente resultado, que es una adaptación de la Proposición 4.3 al caso antidiagonal.

PROPOSICIÓN 4.23. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ que conmutan dos a dos, y además son antidiagonales de la forma*

$$A = \overline{\mathrm{diag}}(a_3, a_4, a_5, a_6), \quad B = \overline{\mathrm{diag}}(b_3, b_4, b_5, b_6), \quad C = \overline{\mathrm{diag}}(c_3, c_4, c_5, c_6).$$

Las derivadas exteriores y sus respectivos duales de Hodge de φ y $\psi = \star\varphi$ en la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ están dadas por

$$\begin{aligned} d\varphi = &- (\delta(B)\overline{\omega}_1 - \gamma(B)\omega_1 + \alpha(A)\overline{\omega}_7 - \gamma(A)\omega_7) \wedge e^{17} - \\ &- (\delta(C)\overline{\omega}_1 - \gamma(C)\omega_1) \wedge e^{27} - (\alpha(C)\overline{\omega}_7 - \gamma(C)\omega_7) \wedge e^{12}, \end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned} \star d\varphi = &(\alpha(A)\overline{\omega}_7 + \gamma(A)\omega_7 - \delta(B)\overline{\omega}_1 - \gamma(B)\omega_1) \wedge e^{2} + \\ &+ (\delta(C)\overline{\omega}_1 + \gamma(C)\omega_1) \wedge e^{1} + (\alpha(C)\overline{\omega}_7 + \gamma(C)\omega_7) \wedge e^{7}, \end{aligned} \tag{106}$$

$$d\psi = (-\delta(A)\overline{\omega}_1 + \gamma(A)\omega_1 + \alpha(B)\overline{\omega}_7 - \gamma(B)\omega_7) \wedge e^{127}, \tag{107}$$

$$\star d\psi = \delta(A)\overline{\omega}_1 + \gamma(A)\omega_1 - \alpha(B)\overline{\omega}_7 - \gamma(B)\omega_7. \tag{108}$$

Aquí, $\alpha(D)$, $\gamma(D)$, y $\delta(D)$ con $D = A$, B, ó C según corresponda están dadas como en las ecuaciones (92), (94), *y* (95), *respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Surge de reemplazar lo obtenido en el Lema 4.22 en las fórmulas de la Proposición 4.3, y simplificando donde sea necesario según Ecuaciones 96 - 99. □

Nuevamente, se hace constar que la ecuación (105) y la ecuación (107) aseguran que las G_2-estructuras $(g_{A,B,C}, \varphi)$ con A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ antidiagonales que conmutan dos a dos, donde φ como en la ecuación (47), no son necesariamente cerradas ni cocerradas.

El siguiente resultado surge como consecuencia inmediata de la Proposición 4.23 así como también de la Proposición 3.8.

COROLARIO 4.24. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ que conmutan dos a dos, y además antidiagonales de la forma*

$$A = \overline{\mathrm{diag}}(a_3, a_4, a_5, a_6), \quad B = \overline{\mathrm{diag}}(b_3, b_4, b_5, b_6), \quad C = \overline{\mathrm{diag}}(c_3, c_4, c_5, c_6).$$

Las formas de torsión τ_0, τ_1, τ_2, y τ_3 de la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ están dadas por

$$\tau_0 = \frac{4}{7}\gamma(C), \tag{109}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{6}(\gamma(A)e^1 - \gamma(B)e^7), \tag{110}$$

$$\tau_2 = - \star d\psi + \frac{2}{3}(\gamma(A)(e^{27} - e^{46} + e^{35}) + \gamma(B)(e^{12} + e^{56} + e^{34})), \tag{111}$$

$$\tau_3 = \star d\varphi - \frac{4}{7}\gamma(C)\varphi + \frac{\gamma(A)}{2}(e^{256} + e^{234} + e^{457} - e^{367}) + \\ + \frac{\gamma(B)}{2}(e^{146} - e^{135} + e^{145} + e^{136}). \tag{112}$$

donde $\psi = \star\varphi$ es la 4-forma dual de φ y donde $\gamma(D) = d_3 + d_4 - d_5 - d_6$ con $D = A,\ B,$ ó C según corresponda.

Demostración. Se computa cada elemento de torsión por separado acudiendo a las ecuaciones (36) - (39) de la Proposición 3.8. Se trae a colación que $\varphi = e^{127} + \omega_7 \wedge e^7 + \omega_1 \wedge e^1 + \omega_2 \wedge e^2$ y que $\psi = e^{3456} + \omega_7 \wedge e^{12} + \omega_1 \wedge e^{27} - \omega_2 \wedge e^{17}$, como se observó en el Lema 4.2.

Recordar que $7\tau_0 = \star(d\varphi \wedge \varphi)$, por la ecuación (36). La ecuación (105) permite escribir $d\varphi = \kappa_1 \wedge e^{17} + \kappa_2 \wedge e^{27} + \kappa_3 \wedge e^{12}$ con $\kappa_i \in \operatorname{span}\{\overline{\omega}_7, \overline{\omega}_1, \omega_7, \omega_1\}$ para todo $i = 1, 2, 3$. Se sigue que

$$\begin{aligned} d\varphi \wedge \varphi &= (\kappa_1 \wedge e^{17}) \wedge (\omega_7 \wedge e^7) + (\kappa_2 \wedge e^{27}) \wedge (\omega_1 \wedge e^1) + (\kappa_3 \wedge e^{12}) \wedge (\omega_2 \wedge e^2) \\ &= (-\kappa_1 \wedge \omega_2 + \kappa_2 \wedge \omega_1 + \kappa_3 \wedge \omega_7) \wedge e^{127} \\ &= (\kappa_2 \wedge \omega_1 + \kappa_3 \wedge \omega_7) \wedge e^{127}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad vale pues $\kappa_1 \in \operatorname{span}\{\overline{\omega}_7, \overline{\omega}_1, \omega_7, \omega_1\}$ y como consecuencia del Lema 4.2. Explícitamente, la ecuación (105) asegura que

$$\kappa_2 = -\delta(C)\overline{\omega}_1 + \gamma(C)\omega_1,$$

$$\kappa_3 = -\alpha(C)\overline{\omega}_7 + \gamma(C)\omega_7;$$

por lo tanto, nuevamente por el Lema 4.2, se tiene que

$$\kappa_2 \wedge \omega_1 = \gamma(C)\omega_1 \wedge \omega_1 = 2\gamma(C)e^{3456},$$

$$\kappa_3 \wedge \omega_7 = \gamma(C)\omega_7 \wedge \omega_7 = 2\gamma(C)e^{3456}.$$

Es inmediato entonces que

$$\begin{aligned} 7\tau_0 &= \star(d\varphi \wedge \varphi) = \star(2\gamma(C)e^{3456} + 2\gamma(C)e^{3456}) \\ &= 4\gamma(C) \star (e^{3456} \wedge e^{127}) = 4\gamma(C) \star (e^{1234567}) \\ &= 4\gamma(C), \end{aligned}$$

que equivale a lo enunciado en la ecuación (109).

Recordar que $-12\tau_1 = \star(\star d\varphi \wedge \varphi)$, por la ecuación (37). La ecuación (106) permite escribir $\star d\varphi = \epsilon_1 \wedge e^2 + \epsilon_2 \wedge e^1 + \epsilon_3 \wedge e^7$ con $\epsilon_j \in \operatorname{span}\{\overline{\omega}_7, \overline{\omega}_1, \omega_7, \omega_1\}$ para todo $j = 1, 2, 3$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \star d\varphi \wedge \varphi =& (\epsilon_1 \wedge e^2) \wedge (\omega_7 \wedge e^7 + \omega_1 \wedge e^1) + (\epsilon_2 \wedge e^1) \wedge (\omega_7 \wedge e^7 + \omega_2 \wedge e^2) + \\ & + (\epsilon_3 \wedge e^7) \wedge (\omega_1 \wedge e^1 + \omega_2 \wedge e^2) \\ =& - (\epsilon_1 \wedge \omega_7 \wedge e^{27} - \epsilon_1 \wedge \omega_1 \wedge e^{12}) - (\epsilon_2 \wedge \omega_7 \wedge e^{17} + \epsilon_2 \wedge \omega_2 \wedge e^{12}) + \\ & + (\epsilon_3 \wedge \omega_1 \wedge e^{17} + \epsilon_3 \wedge \omega_2 \wedge e^{27}) \\ =& - (\epsilon_1 \wedge \omega_7 \wedge e^{27} - \epsilon_1 \wedge \omega_1 \wedge e^{12}) - (\epsilon_2 \wedge \omega_7 \wedge e^{17}) + (\epsilon_3 \wedge \omega_1 \wedge e^{17}), \end{aligned} \tag{113}$$

donde la última igualdad vale pues $\epsilon_i \in \mathrm{span}\{\overline{\omega}_7, \overline{\omega}_1, \omega_7, \omega_1\}$ para todo $i = 1, 2, 3$, y como consecuencia del Lema 4.2. Explícitamente, la ecuación (106) asegura que

$$\epsilon_1 = \alpha(A)\overline{\omega}_7 + \gamma(A)\omega_7 - \delta(B)\overline{\omega}_1 - \gamma(B)\omega_1,$$

$$\epsilon_2 = \delta(C)\overline{\omega}_1 + \gamma(C)\omega_1,$$

$$\epsilon_3 = \alpha(C)\overline{\omega}_7 + \gamma(C)\omega_7;$$

por lo tanto, nuevamente por el Lema 4.2, se tiene que

$$\epsilon_1 \wedge \omega_7 = \gamma(A)\omega_7 \wedge \omega_7 = 2\gamma(A)e^{3456},$$

$$\epsilon_1 \wedge \omega_1 = -\gamma(B)\omega_1 \wedge \omega_1 = 2\gamma(B)e^{3456},$$

$$\epsilon_2 \wedge \omega_7 = 0,$$

$$\epsilon_3 \wedge \omega_1 = 0.$$

Es inmediato entonces que

$$\begin{aligned}
-12\tau_1 = \star(\star d\varphi \wedge \varphi) &= \star(-(\epsilon_1 \wedge \omega_7 \wedge e^{27} - \epsilon_1 \wedge \omega_1 \wedge e^{12})) \\
&= -2 \star (\gamma(A)e^{3456} \wedge e^{27} - \gamma(B)e^{3456} \wedge e^{12})) \\
&= -2(\gamma(A) \star (e^{234567}) - \gamma(B) \star (e^{123456})) \\
&= -2(\gamma(A)e^1 - \gamma(B)e^7),
\end{aligned}$$

que equivale a lo enunciado en la ecuación (110).

Recordar que $\tau_2 = - \star d\psi + 4 \star (\tau_1 \wedge \psi)$, por la ecuación (38). Se halló hace instantes que $6\tau_1 = (\gamma(A)e^1 - \gamma(B)e^7)$, de manera que

$$\begin{aligned}
6\tau_1 \wedge \psi &= (\gamma(A)e^1 - \gamma(B)e^7) \wedge (e^{3456} + \omega_7 \wedge e^{12} + \omega_1 \wedge e^{27} - \omega_2 \wedge e^{17}) \\
&= (\gamma(A)e^1 - \gamma(B)e^7) \wedge e^{3456} + \gamma(A)e^1 \wedge \omega_1 \wedge e^{27} - \gamma(B)e^7 \wedge \omega_7 \wedge e^{12} \\
&= (\gamma(A)e^{13456} - \gamma(B)e^{34567}) + (\gamma(A)(e^{35} - e^{46}) - \gamma(B)(e^{34} + e^{56})) \wedge e^{127} \\
&= \gamma(A)(e^{13456} + e^{12357} - e^{12467}) + \gamma(B)(e^{34567} + e^{12347} + e^{12567}),
\end{aligned}$$

y por lo tanto que

$$\star(6\tau_1 \wedge \psi) = \gamma(A)(e^{27} - e^{46} + e^{35}) + \gamma(B)(e^{12} + e^{56} + e^{34});$$

esto equivale a lo enunciado en la ecuación (111).

Recordar que $\tau_3 = \star d\varphi - \tau_0\varphi - 3\star(\tau_1 \wedge \varphi)$, por la ecuación (39). Se halló hace instantes que $6\tau_1 = (\gamma(A)e^1 - \gamma(B)e^7)$, de manera que

$$\begin{aligned}
6\tau_1 \wedge \varphi &= (\gamma(A)e^1 - \gamma(B)e^7) \wedge (e^{127} + \omega_7 \wedge e^7 + \omega_1 \wedge e^1 + \omega_2 \wedge e^2) = \\
&= \gamma(A)e^1 \wedge (\omega_7 \wedge e^7 + \omega_2 \wedge e^2) - \gamma(B)e^7 \wedge (\omega_1 \wedge e^1 + \omega_2 \wedge e^2) \\
&= \gamma(A)((e^{34} + e^{56}) \wedge e^{17} - (e^{36} + e^{45}) \wedge e^{12}) + \gamma(B)((e^{35} - e^{46}) \wedge e^{17} - (e^{36} + e^{45}) \wedge e^{27}) \\
&= \gamma(A)(e^{1347} + e^{1567} - e^{1236} - e^{1245}) + \gamma(B)(e^{2357} - e^{2467} - e^{2367} - e^{2457}),
\end{aligned}$$

y por lo tanto que

$$\star(6\tau_1 \wedge \varphi) = \gamma(A)(-e^{256} - e^{234} - e^{457} + e^{367}) + \gamma(B)(-e^{146} + e^{135} - e^{145} - e^{136});$$

esto equivale a lo enunciado en la ecuación (112). □

Las ecuaciones (109) y (110) muestran que τ_0 y τ_1 no son nulas en general en el caso antidiagonal, a diferencia de lo indicado por las ecuaciones (79) y (80) en el caso diagonal. En particular, esto muestra que en general las G_2-estructuras $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ con A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ antidiagonales no son equivalentes a las correspondientes con A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ diagonales, como se notó anteriormente. Esto se discute en mayor detalle en la Observación 2, hacia el final del trabajo.

Al no anularse en general la forma de torsión τ_1 en el caso antidiagonal, surge la necesidad de calcular $\iota_{\tau_1}(\varphi)$; ése es el contenido del siguiente resultado.

Lema 4.25. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ que conmutan dos a dos, y además antidiagonales de la forma*

$$A = \overline{\mathrm{diag}}(a_3, a_4, a_5, a_6), \quad B = \overline{\mathrm{diag}}(b_3, b_4, b_5, b_6), \quad C = \overline{\mathrm{diag}}(c_3, c_4, c_5, c_6).$$

Entonces la contracción $\iota_{\tau_1}(\varphi)$ en la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ está dada por

$$\iota_{\tau_1}(\varphi) = \frac{\gamma(A)}{6}(e^{27} + \omega_1) - \frac{\gamma(B)}{6}(e^{12} + \omega_7), \tag{114}$$

donde $\gamma(D) = d_3 + d_4 - d_5 - d_6$ con $D = A$, B, ó C según corresponda.

Demostración. Fijar v, $w \in \mathfrak{g}_{A,B,C}$ arbitrarios. Es inmediato del Corolario 4.24 que

$$\iota_{\tau_1}(\varphi)(v,w) = \varphi(\tau_1, v, w) = \frac{\gamma(A)}{6}\varphi(e_1, v, w) - \frac{\gamma(B)}{6}\varphi(e_7, v, w).$$

El Lema 4.2 asegura que $\varphi = e^{127} + \omega_7 \wedge e^7 + \omega_1 \wedge e^1 + \omega_2 \wedge e^2$, de manera que

$$\varphi(e_1, v, w) = e^{127}(e_1, v, w) + (\omega_1 \wedge e^1)(e_1, v, w),$$

$$\varphi(e_7, v, w) = e^{127}(e_1, v, w) + (\omega_7 \wedge e^1)(e_7, v, w).$$

Es inmediato chequear por definición de producto wedge que $e^{127}(e_1, v, w) = e^{27}(v, w)$, $(\omega_1 \wedge e^1)(e_1, v, w) = \omega_1(v, w)$, $e^{127}(e_7, u, w) = e^{12}(u, w)$, y $(\omega_7 \wedge e^7)(e_7, v, w) = \omega_7(v, w)$, de manera que

$$\iota_{\tau_1}(\varphi)(v,w) = \varphi(\tau_1, v, w) = \frac{\gamma(A)}{6}(e^{27} + \omega_1)(v, w) - \frac{\gamma(B)}{6}(e^{12} + \omega_7)(v, w),$$

completando así la prueba. $\square$

Al igual que como se hizo en el caso diagonal, es posible dar una fórmula explícita del tensor de torsión total T de la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ con A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ antidiagonales que conmutan dos a dos a partir del Corolario 4.24. Se decide omitir este resultado por ser engorroso y poco esclarecedor, además de innecesario.

Es posible ahora enunciar y demostrar el resultado principal de la sección.

TEOREMA 4.26. *Sean A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ antidiagonales que conmutan dos a dos. Entonces la G_2-estructura $(\mathfrak{g}_{A,B,C}, \varphi)$ tiene divergencia cero.*

DEMOSTRACIÓN. Por Corolario 4.21, es suficiente verificar que

$$T(e_i, e_{(9-i)}) = T(e_k, e_{(9-j)}) = T(e_{(9-j)}, e_k) = 0$$

para todo $k = 1, 2, 7$ y para todo $i, j = 3, \cdots, 6$. Recordando que el tensor de torsión total T está dado por

$$T(X, Y) = \frac{1}{4}\tau_0\langle X, Y\rangle - \iota_{\tau_1}(\varphi)(X, Y) - \frac{1}{2}\tau_2(X, Y) - \tau_{27}(X, Y),$$

es suficiente ver que cada término se anula al evaluarse en los pares coordenados de interés.

Como $\{e_1, \cdots, e_7\}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, es inmediato que

$$\langle e_i, e_{(9-i)}\rangle = \langle e_k, e_{(9-j)}\rangle = \langle e_{(9-j)}, e_k\rangle = 0$$

para todo $k = 1, 2, 7$ y para todo $i, j = 3 \cdots, 6$. Esto muestra que el primer sumando de T se anula en los pares de interés.

Se sigue del Lema 4.25 que

$$\iota_{\tau_1}(\varphi) \in \operatorname{span}\{e^{27} + \omega_1, e^{12} + \omega_7\} \subseteq \operatorname{span}\{e^{12}, e^{27}, e^{34}, e^{35}, e^{46}, e^{56}\}.$$

Las 2-formas e^{12} y e^{27} se anulan en los pares de la forma $(e_i, e_{(9-i)})$ con $i = 3, \cdots, 6$ pues ninguno de estos posee una coordenada en la dirección $k = 1, 2, 7$; además, las 2-formas e^{34}, e^{35}, e^{46}, y e^{56} se anulan en dichos pares pues los índices de ninguno de ellos suman nueve, cuando los de los pares sí lo hacen. Por otra parte, las 2-formas e^{12} y e^{27} se anulan en los pares de la forma $(e_k, e_{(9-j)})$ ó $(e_{(9-j)}, e_k)$ con $k = 1, 2, 7$ y $j = 3, \cdots, 6$ pues una de las coordenadas de cada uno de estos pares tiene índice distinto a $1, 2, 7$; además, las 2-formas e^{34}, e^{35}, e^{46}, y e^{56} se anulan en dichos pares pues ninguna de ellas posee un índice igual a $1, 2, 7$. Así, $\iota_{\tau_1}(\varphi)$, el segundo sumando de T, se anula en todos los pares de interés.

La ecuación (111) asegura que

$$\tau_2 = - \star d\psi + \frac{2}{3}(\gamma(A)(e^{27} - e^{46} + e^{35}) + \gamma(B)(e^{12} + e^{56} + e^{34})).$$

Los sumandos segundo y tercero de τ_2 está contenido en $\operatorname{span}\{e^{12}, e^{27}, e^{34}, e^{35}, e^{46}, e^{56}\}$; el argumento del párrafo anterior muestra que éste se anula en los pares de interés. Por otra parte, la ecuación (108) asegura que

$$\begin{aligned}
-\star d\psi &= \delta(A)\overline{\omega}_1+\gamma(A)\omega_1-\alpha(B)\overline{\omega}_7-\gamma(B)\omega_7\\
&\in \operatorname{span}\{e^{34}-e^{56}, e^{35}+e^{46}, e^{34}+e^{56}, e^{35}-e^{46}\}\\
&\subseteq \operatorname{span}\{e^{34}, e^{35}, e^{46}, e^{56}\}\\
&\subseteq \operatorname{span}\{e^{12}, e^{27}, e^{34}, e^{35}, e^{46}, e^{56}\}.
\end{aligned}$$

Nuevamente, el argumento del párrafo anterior muestra que $-\star d\psi$ se anula en los pares de interés. Estas últimas dos observaciones aseguran que el segundo sumando de T se anula en dichos pares.

La ecuación (112) asegura que

$$\tau_3 = \star d\varphi - \tau_0\varphi + \frac{1}{2}(\gamma(A)(e^{256}+e^{234}+e^{457}-e^{367})+\gamma(B)(e^{146}-e^{135}+e^{145}+e^{136})),$$

y por lo tanto que

$$\begin{aligned}
\tau_{27}(X,Y) = \star\,(\iota_X(\varphi)\wedge\iota_Y(\varphi)\wedge\star d\varphi) &- \tau_0\star(\iota_X(\varphi)\wedge\iota_Y(\varphi)\wedge\varphi)+\\
&+\frac{\gamma(A)}{2}\star(\iota_X(\varphi)\wedge\iota_Y(\varphi)\wedge(e^{256}+e^{234}+e^{457}-e^{367}))+\\
&+\frac{\gamma(B)}{2}\star(\iota_X(\varphi)\wedge\iota_Y(\varphi)\wedge(e^{146}-e^{135}+e^{145}+e^{136})).
\end{aligned}$$

La ecuación (106) asegura que

$$\begin{aligned}
\star d\varphi =&(\alpha(A)\overline{\omega}_7+\gamma(A)\omega_7-\delta(B)\overline{\omega}_1-\gamma(B)\omega_1)\wedge e^2+\\
&+(\delta(C)\overline{\omega}_1+\gamma(C)\omega_1)\wedge e^1+(\alpha(C)\overline{\omega}_7+\gamma(C)\omega_7)\wedge e^7\\
&\in \operatorname{span}\{\overline{\omega}_7\wedge e^2, \overline{\omega}_1\wedge e^2, \omega_7\wedge e^2, \omega_1\wedge e^2, \overline{\omega}_1\wedge e^1, \omega_1\wedge e^1, \overline{\omega}_7\wedge e^7, \omega_7\wedge e^7\}\\
&=\operatorname{span}\{e^{234}-e^{256}, e^{235}+e^{246}, e^{234}+e^{256}, e^{235}-e^{246}, e^{135}+e^{146}, e^{135}-e^{146}, e^{347}-e^{567}, e^{347}+e^{567}\}\\
&\subseteq \operatorname{span}\{e^{135}, e^{146}, e^{234}, e^{235}, e^{246}, e^{256}, e^{347}, e^{567}\}\subseteq\mathfrak{S},
\end{aligned}$$

de manera que el Lema 4.8 asegura que

$$\iota_{e_i}(\varphi)\wedge\iota_{e_{(9-i)}}(\varphi)\wedge(\star d\varphi)=0,$$

para todo $k=1,2,7$ y $i,j=3,\cdots,6$, mostrando así que el primer sumando de τ_{27} se anula en todos los pares de interés. Por otra parte, al evaluarse en pares de la forma $(e_i, e_{(9-i)})$ con $i=3,\cdots,6$, o bien $(e_k, e_{(9-j)})$ y $(e_{(9-j)}, e_k)$ con $k=1,2,7$ y $j=3,\cdots,6$, el segundo sumado de τ_{27} se anula como consecuencia inmediata del Lema 4.8. Finalmente, los últimos dos sumandos de τ_{27} están contenidos en

$$\operatorname{span}\{e^{135}, e^{136}, e^{145}, e^{146}, e^{234}, e^{256}, e^{367}, e^{457}\}\subseteq\mathfrak{S};$$

como en el caso de $\star d\varphi$, el Lema 4.8 asegura entonces que el tercer sumando de τ_{27} se anula en los pares de interés, y por lo tanto también el cuarto y último sumando de T. Esto concluye la demostración. $\square$

Observación 2. Como se observó anteriormente, las G_2-estructuras $\mathfrak{g}_{A,B,C}$ con A, B, $C\in\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ antidiagonales no son equivalentes en general a las correspondientes con A, B, $C\in\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$

diagonales al poseer invariantes distintos; esto queda en evidencia al comparar la ecuación (80) y la ecuación (110), que exhiben lo señalado al menos para las elecciones de ternas A, B, $C \in \mathfrak{sl}(4,\mathbb{R})$ antidiagonales para las que $\tau_1 \neq 0$. A partir de la ecuación (92) y la ecuación (95), es inmediato notar que $\tau_1 = 0$ en el caso antidiagonal si y sólo si

$$0 = \gamma(A) = a_3 + a_4 - a_5 - a_6, \tag{115}$$

$$0 = \gamma(B) = b_3 + b_4 - b_5 - b_6, \tag{116}$$

simultáneamente. Más aún, en tal caso, las ecuaciones 109 - 112 son estructuralmente iguales a las ecuaciones (79) - (82) salvo por un factor de escala (mas no por ello ambas G_2-estructuras son equivalentes). La discusión precedente muestra que los Teoremas 4.18 y 4.26 no son redundantes, al referirse a G_2-estructuras no equivalentes en general, poniendo de manifiesto lo significativo de este último resultado.

Referencias

[Agr08] I. Agricola, Old and new on the exceptional group G2, *Not. Amer. Math. Soc.*, **55** (2008), 922–929.

[Bae02] J. Baez, The Octonions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (2002), 145–205.

[Ber55] M. Berger, Sur les groupes d'holonomie homogènes de variétés à connexion affine et des variétés Riemanniennes, *Bull. Soc. Math. de France*, Soc. Math. de France, **83** (1955), 279–330.

[Bry87] R. Bryant, Metrics with exceptional holonomy, *Ann. Math.*, **126** (1987), 525–576.

[Bry05] M. Bryant, Some remarks on G_2-structures, *Proc. Gökova Geom.-Topol. Conf.*, **126** (2005), 75–109.

[FG82] M. Fernández, A. Gray, Riemannian manifolds with structure group G_2, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **132** (1982), 19–45.

[GHL04] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 3rd edition (2004).

[Gra69] A. Gray, Vector cross products on manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **141** (1969), 465–504.

[Gri10] S. Grigorian, Moduli spaces of G_2-manifolds, *Rev. Math. Phys.*, **22** (2010), 1061-–1097.

[Gri19] S. Grigorian, Estimates and monotonicity for a heat flow of isometric G_2-structures, *Calc. Var. Partial Differ. Equ. 58*, **5** (2019), 1–37.

[Gri20] S. Grigorian, Flows of co-closed G_2-structures en *Lectures and Surveys on* G_2*-Manifolds and Related Topics*, Fields Institute Communications, Springer, **84** (2020), 271–286.

[Gri20p] S. Grigorian, Isometric flows of G_2-structures, (2020), preprint, arXiv:2008.06593

[Has88] S. Haslam, A general history of labyrinths, *Proc. Tlön, Uqbar, Orbis Tertius Math. Soc.*, **40** (1888), 606–660.

[Joy00] D. Joyce, *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press Inc, New York, 1st edition (2000).

[Kar05] S. Karigiannis, Deformations of G_2 and Spin(7)-structures, *Can. J. Math.* **57** (2005), 1012–1055.

[Kar08] S. Karigiannis, Flows of G_2-structures I, *Q. J. Math.* **60** (2008), 487–522.

[Kar20] S. Karigiannis, Introduction to G_2-geometry en Lectures and Surveys on G_2-Manifolds and Related Topics, Fields Institute Communications, Springer, **84** (2020), 3–50.

[KMMP12] S. Karigiannis, B. McKay, T. Mao-Pei, Soliton solutions for the Laplacian co-flow of some G_2-structures with symmetry, *Diff. Geom. Appl.*, **30** (2012), 318–333.

[KL21] I. Kath, J. Lauret, A new example of a compact ERP G_2-structure, *Bull. London Math. Soc.*, (2021), https://doi.org/10.1112/blms.12520.

[Kna02] A. Knapp, *Lie Groups Beyond an Introduction*, Progress in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2nd edition (2002).

[Lau17] J. Lauret, Laplacian flow of homogeneous G_2-structures and its solitons, *Proc. London Math. Soc.* **114** (2017), 527–560.

[LN20] J. Lauret, M. Nicolini, The classification of ERP G_2-structures on Lie groups, *Ann. Mat. Pura App*, **199**, (2020) 2489—2510 .

[Lee97] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 3rd edition (2000).

[Lee00] J. Lee, *Riemannian Manifolds, an Introduction to Curvature*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1st edition (1997).

[LSE19] E. Loubeau, H. Sá Earp, Harmonic flow of geometric structures, (2019), preprint, arXiv:1907.06072

[LMSES21] E. Loubeau, A. Moreno, H. Sá Earp, J. Saavedra, Harmonic Sp(2)-invariant G_2-structures on the 7-Sphere, preprint (2021), arXiv:2103.11552

[MOV20] V. Manero, A. Otal, R. Villacampa, Laplacian coflow for warped G_2-structures, *Diff. Geom. Appl.*, **69** (2020), 93–101.

[Nic18] M. Nicolini, Laplacian solitons on nilpotent Lie groups, *Bull. Belg.Math. Soc., Simon Stevin*, **25** (2018), 183–196

[Nic21] M. Nicolini, New examples of shrinking Laplacian solitons, *Q. J. Math.*, Oxford University Press, (2021), https://doi.org/10.1093/qmath/haab029

[War83] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1st edition (1983).