



Facultad  
de Matemática,  
Astronomía, Física  
y Computación

TESIS DE DOCTORADO

## **Estudio de la evolución de estados cuánticos entrelazados: una perspectiva entrópica**

por Lic. César Germán Maglione

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Física de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



©FaMAF - UNC, 1 de marzo 2021

Directora: Dra. Ana Paula Majtey



Estudio de la evolución de estados cuánticos entrelazados: una perspectiva entrópica. Por César Germán Maglione. Se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución - No Comercial - Compartir Igual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).



## Resumen

La *distinguibilidad* de los estados en la física cuántica es fundamental y tiene profundas consecuencias para la teoría. En esta Tesis introducimos una medida de la *cantidad de evolución cuántica*, que da cuenta de la distinción *promedio* entre pares de estados del sistema en diferentes momentos. Esta medida *complementa* la noción del tiempo necesario para que dos estados de un sistema cuántico en evolución sean completamente distinguibles. Investigamos sus propiedades y mostramos su relación con la entropía lineal de la distribución de energía del estado del sistema. Esto lleva a la formulación de un problema variacional entrópico que caracteriza los estados que más evolucionan con restricciones en el valor de la energía. Se establece una conexión dentro del formalismo de la dinámica cuántica conocido como *sin tiempo o timeless*, entre la distinción promedio entre los estados de un sistema cuántico y la cantidad de correlaciones cuánticas *–entrelazamiento–* en un sistema bipartito.

## Palabras claves

Evolución cuántica; distinguibilidad de estados cuánticos; entropía máxima; dinámica cuántica; entrelazamiento cuántico; evolución sin evolución.

## Números Pacs

02.40.Hw; 03.65.-w; 03.67.-a



*Al Universo, por dejarme disfrutar y explorar su belleza y sus misterios,  
... y al tiempo, por su pasado, su presente y su futuro.*



*Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes.*

Isaac Newton





---

## Resumen

Este trabajo de Tesis comienza explorando la relación entre el *entrelazamiento* cuántico y la evolución óptima a lo largo de *curvas geodésicas* obtenidas en el espacio proyectivo de Hilbert y que conectan estados cuánticos iniciales y finales de un sistema compuesto.

El concepto de *distinguibilidad* entre los estados en mecánica cuántica es fundamental y tiene profundas consecuencias en ramas como la computación e información cuántica. Este concepto permite formulaciones claras del principio de incertidumbre tiempo-energía. Además impone cotas al tiempo que necesita un sistema cuántico cerrado para evolucionar desde un estado inicial a un estado ortogonal completamente distinguible en términos de la energía (o su varianza) del sistema. En este trabajo nos centramos en una idea complementaria al tiempo necesario para que el estado de un sistema cuántico evolucione a un estado ortogonal. Introducimos una medida de cantidad de evolución cuántica  $\mathcal{D}[t_1, t_2]$ , aplicable a cualquier estado inicial que evoluciona, definida en términos de la distinguibilidad promedio entre pares de estados del sistema correspondientes a dos instantes diferentes de un intervalo  $[t_1, t_2]$ . Investigamos sus propiedades y mostramos su relación con la entropía lineal de la distribución de energía asociada con el estado cuántico del sistema. Esto nos permite formular un problema variacional entrópico, el cual caracteriza a los estados cuánticos que exhiben la mayor cantidad de evolución dinámica con restricciones para una energía dada.

A continuación establecemos una relación entre la cantidad de evolución que experimenta el sistema y las correlaciones cuánticas —*entrelazamiento*— dentro del formalismo de la dinámica cuántica conocido como sin tiempo o *timeless*, según el cual el entrelazamiento se constituye en un recurso esencial para comprender los orígenes mismos de la evolución dinámica y de la aparición del flujo del tiempo. Encontramos aquí que, el entrelazamiento del sistema compuesto llamado Universo  $U = R + C$ , donde  $R$  es el (sub)sistema resto del Universo y  $C$  es un reloj, está relacionado cuantitativamente con la distinguibilidad promedio entre los estados del sistema en diferentes instantes. Finalmente, extendemos el formalismo *timeless*, investigando los estados mixtos del sistema compuesto resto del Universo-reloj, centrándonos en las relaciones cuantitativas que vinculan el entrelazamiento (sub)sistema-reloj con la evolución dinámica emergente experimentada por el sistema.



---

## Abstract

This thesis work begins by exploring the relationship between quantum entanglement and optimal evolution along geodesic curves obtained in Hilbert projective space that connect initial and final quantum states of a composite system.

The concept of distinguishability between states in quantum mechanics is fundamental and has a profound consequences in areas such as quantum computation and quantum information. This concept allows clear formulations of the time-energy uncertainty principle. It also imposes bounds on the time needed for a closed quantum system to evolve from an initial state to a fully distinguishable orthogonal state in terms of the energy (or its variance) of the system. In this work we focus on a complementary idea to the time needed for the state of a quantum system to evolve into an orthogonal state. We introduce a measure of the amount of quantum evolution  $D[t_1, t_2]$ , applicable to any initial evolving state defined in terms of the average distinguishability between pairs of system states corresponding to two different instants of a time interval  $[t_1, t_2]$ . We investigate its properties and we show its relationship with the linear entropy of the energy distribution associated with the quantum state of the system. This allows us to formulate an entropic variational problem, which characterizes the quantum states that exhibit the larger amount of the dynamic evolution with restrictions for a given energy.

We then establish a connection between the amount of evolution experienced by the system and the quantum correlations —*entanglement*— within the formalism of quantum dynamics known as *timeless*, according to which entanglement is an essential resource for understanding the very origins of dynamic evolution and the appearance of the flow of time in a system. We find here that, the entanglement of the composite system call Universe,  $U = R + C$ , where  $R$  is the (sub)system rest of the Universe and  $C$  is a clock, is quantitatively related to the average distinguishability between the states of the system at different instants. Finally, we extend the *timeless* formalism, investigating mixed states of the composite system, rest of the Universe-clock, focusing on the quantitative relationships that connect the (sub)system-clock entanglement with the emergent dynamic evolution experienced by the system.



---

## Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Evolución en Mecánica Clásica y Cuántica . . . . .	1
1.1.1. La perspectiva clásica . . . . .	2
1.1.2. La perspectiva cuántica . . . . .	4
1.2. Dos postulados críticos y el <i>entrelazamiento</i> . . . . .	8
1.3. El entrelazamiento como recurso . . . . .	10
1.3.1. Geometría y Mecánica Cuántica . . . . .	13
1.4. Motivación y objetivos de la tesis . . . . .	14
1.4.1. Estructura de la tesis . . . . .	16
<b>2. Evoluciones geodésicas en espacios de Hilbert y entrelazamiento</b>	<b>19</b>
2.1. Introducción . . . . .	19
2.2. Estructura geométrica del espacio de estados cuántico . . . . .	21
2.2.1. Una métrica para el espacio proyectivo de Hilbert . . . . .	24
2.2.2. Curvas a partir de estados cuánticos . . . . .	26
2.2.3. Operadores naturales en $\mathcal{PH}$ . . . . .	27
2.3. Ecuación geodésica en el espacio proyectivo de Hilbert . . . . .	28

2.3.1.	Deducción de la ecuación geodésica . . . . .	28
2.3.2.	Geodésica horizontal . . . . .	30
2.3.3.	Geodésica no-horizontal . . . . .	31
2.4.	Entrelazamiento y curvas geodésicas . . . . .	35
2.5.	Conclusiones del capítulo . . . . .	37
<b>3.</b>	<b>Indicador de cantidad de evolución dinámica</b>	<b>39</b>
3.1.	Introducción . . . . .	39
3.2.	Medida cuantitativa para la cantidad de evolución cuántica . . . . .	41
3.2.1.	El valor límite asintótico de la cantidad de evolución . . . . .	42
3.3.	Comportamiento de la medida $\mathcal{D}$ para distintos sistemas . . . . .	44
3.3.1.	Un sistema de un qubit . . . . .	44
3.3.2.	Sistema de $d$ -niveles: el oscilador armónico . . . . .	45
3.3.3.	Un sistema de dos-qubit . . . . .	46
3.3.4.	Paquete gaussiano en un pozo infinito . . . . .	46
3.4.	La cantidad de evolución y el enfoque <i>timeless</i> . . . . .	48
3.5.	Conclusiones del capítulo . . . . .	50
<b>4.</b>	<b>Enfoque variacional entrópico para estados cuánticos</b>	<b>51</b>
4.1.	Introducción . . . . .	51
4.2.	Cantidad de evolución y entropía lineal . . . . .	52
4.3.	Estados óptimos . . . . .	53
4.4.	Interpretación estadística de los estados óptimos . . . . .	55
4.5.	Ejemplos . . . . .	58
4.6.	Conclusiones del capítulo . . . . .	59
<b>5.</b>	<b>Entrelazamiento y dinámica en un mundo cuántico sin tiempo</b>	<b>61</b>
5.1.	Introducción . . . . .	61
5.1.1.	El problema del tiempo . . . . .	61

5.1.2. La propuesta del entrelazamiento . . . . .	63
5.2. Indicador cuantitativo de entrelazamiento . . . . .	64
5.3. Entrelazamiento y la emergencia de la evolución . . . . .	67
5.4. Cuantificación del entrelazamiento entre el reloj $C$ y el resto del Universo $R$ . . . . .	72
5.5. Forma explícita del entrelazamiento entre $C$ y $R$ . . . . .	73
5.5.1. Entrelazamiento máximo y mínimo . . . . .	74
5.5.2. Medida de Entrelazamiento basada en la Entropía de von Neumann . . . . .	76
5.5.3. Entrelazamiento y fluctuaciones de la energía . . . . .	78
5.5.4. Ejemplo: El caso de un qubit . . . . .	79
5.6. Entrelazamiento y la geometría de la evolución cuántica . . . . .	81
5.7. Conclusiones del capítulo . . . . .	84
<b>6. Dinámica emergente de estados mixtos entrelazados.</b>	<b>85</b>
6.1. Introducción . . . . .	85
6.2. Evolución y entrelazamiento para estados mixtos del conjunto sistema-reloj . . . . .	87
6.2.1. Indicador de Entropía . . . . .	90
6.3. Límite superior y límite asintótico del indicador de entrelazamiento . . . . .	93
6.3.1. Entropía lineal para un sistema de $d$ -niveles . . . . .	94
6.3.2. Entropía lineal para una medida de energía no selectiva . . . . .	97
6.4. Relación entre el indicador de entrelazamiento y la dispersión de la energía. . . . .	102
6.5. Conclusiones del capítulo . . . . .	108
<b>7. Conclusiones</b>	<b>111</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>115</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>117</b>
<b>Apéndices</b>	<b>127</b>
<b>A. Complementos del Capítulo 2</b>	<b>127</b>

A.1. Complementos geométricos . . . . .	127
A.2. Enfoque alternativo del transporte paralelo . . . . .	129
A.3. Deducción de la ecuación de geodésica . . . . .	129
<b>B. Un aspecto del problema del tiempo</b>	<b>131</b>
B.1. El problema del modelo dinámico no relativista parametrizado . . . . .	131
B.2. Cuantización: Espacio de Hilbert extendido . . . . .	134
<b>C. Publicaciones y presentaciones en congresos</b>	<b>137</b>
<b>D. Agradecimientos...</b>	<b>139</b>



*“... the most elementary and valuable statement in science, the beginning of wisdom is: I do not know. And I do not know what that is, sir.”*

Lieutenant Commander Data<sup>1</sup>

### 1.1. Evolución en Mecánica Clásica y Cuántica

En el mundo macroscópico en el que vivimos, los fenómenos más interesantes implican *cam-bios*. En el mundo microscópico gobernado por la mecánica cuántica, la situación es similar. Ya sea en las fronteras de la Física, la Química o la Biología modernas, necesitamos comprender el *cambio*, la *evolución en el tiempo*, a nivel microscópico y por supuesto a nivel fundamental<sup>2</sup>.

La noción de *evolución* está íntimamente asociada al concepto del *tiempo*. No se puede entender el cambio o la evolución sin el sustrato del tiempo. Cabe advertir que, si bien es común asociar el mismo significado a estas dos palabras, *cambio no siempre implica evolución*. En efecto, existen transformaciones que modifican las características o propiedades de los sistemas, por ejemplo, rotaciones espaciales, cambios de estados, etc., que no implican necesariamente una dependencia con el parámetro que asociamos con el tiempo. Sin embargo, en esta tesis *cambio* y *evolución* serán usados como sinónimos, siempre que entendamos que lo que hay detrás de ambas expresiones es

---

<sup>1</sup>Star Trek: The Next Generation, season 2, episode 2: “Where Silence Has Lease”. Fragmento de un diálogo entre el capitán Picard y su comandante Data, mientras intentan comprender con sus instrumentos de medición un misterioso fenómeno del Universo y para el cual Data no tiene una respuesta certera:

Picard: *–That’s hardly a scientific observation, commander–.*

Data: *–Captain, the most elementary and valuable statement in science, the beginning of wisdom is: I do not know. And I do not know what that is, sir–.*

<sup>2</sup>Por tratarse de una tesis en Física, la noción de *evolución* está limitada solo a los aspectos físicos generales de los sistemas, sin entrar en conflicto con cuestiones o definiciones de este término encontradas por ejemplo en la Biología. Sin embargo, el concepto tratado aquí resulta transversal a todas las ciencias y es de carácter universal.

un parámetro que crece monótonamente y permite etiquetar o *distinguir* de manera *ordenada* los valores que toma una magnitud.

En esta tesis, abarcaremos en primer lugar un aspecto relacionado a la evolución en sistemas cuánticos desde una perspectiva distinta, la geométrica. Luego abordaremos la noción de distinguibilidad de estados cuánticos desde una perspectiva novedosa, para luego regresar al estudio de la evolución donde ampliaremos la perspectiva introducida en conexión con un rasgo intrigante de la física cuántica como lo es el entrelazamiento.

En este primer capítulo recogeremos primeramente lo que nos dice la perspectiva clásica y cuántica acerca de la evolución. Mencionaremos solo los fundamentos esenciales involucrados con la finalidad de generar un contraste entre ambos enfoques. Además, exploraremos algunas ideas de la física moderna que constituyen herramientas útiles para el desarrollo de esta tesis. Estas herramientas serán oportunamente introducidas y desarrolladas dentro del contexto que marque cada capítulo.

### 1.1.1. La perspectiva clásica

La evolución de un sistema físico<sup>3</sup> en el tiempo ocurre debido a la interacción de este sistema con una fuerza externa. Una primera expresión formal de esta interacción, y de allí del concepto de *cambio o evolución*, la encontramos en el legado de Newton. El enunciado de su ley de la dinámica,

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

constituye la piedra fundacional de la Mecánica Clásica (CM por sus siglas en inglés<sup>4</sup>) o también conocida como Dinámica Clásica. La arquitectura de la CM (desarrollada entre finales del siglo XVIII y la segunda mitad del siglo XIX) debe su forma actual, en gran parte, a los trabajos de Lagrange, Jacobi y Hamilton. Estas formulaciones permitieron profundizar el entendimiento del concepto de evolución y dar un significado único y universal a la palabra *dinámica*. Sin embargo, es destacable la riqueza de la formulación debida a Hamilton, que permitió a los físicos y matemáticos extender estas interpretaciones a otros campos de la Física como la mecánica estadística y la óptica, y abrió un camino a la fascinante e intrigante Mecánica Cuántica y consecuentemente a las Teorías Cuánticas de Campo.

Es bien conocido el marcado contraste que se observa al comparar la CM con la QM. La forma que tiene cada una de tratar a los sistemas físicos, en particular a los estados en que estos se encuentran en sus respectivos reinos, es bien diferente. Este marcado contraste se puede rastrear en los mismos postulados o principios que levantan el andamiaje teórico de cada una de estas dos formulaciones, y que son necesarios para entender las interacciones entre los sistemas, el cambio y la evolución de estos en cada teoría. El lector interesado en realizar una revisión de estos postulados puede encontrar apropiada estas referencias [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16].

#### ***Pero... ¿cómo se entiende el concepto de evolución en la CM?***

Es un hecho que los postulados de la CM a veces son asumidos implícitamente, quizá debido a nuestra inmersión en el mundo clásico y a la interacción que tenemos con él a través de nuestros

---

<sup>3</sup>Definimos un sistema físico  $S$  como un objeto o una colección de objetos (de alguna manera interrelacionados) con los que se puede experimentar directa o indirectamente a través de los sentidos humanos. Sus propiedades relevantes se pueden caracterizar mediante un conjunto de valores asignados a las variables físicas u observables que los describen.

<sup>4</sup>En esta tesis emplearemos las siglas tomadas del inglés, por ejemplo, usaremos QM para la Mecánica Cuántica con el fin de poder diferenciarla de sus siglas en español.

sentidos. Como una consecuencia de sus postulados, la CM se basa en el requisito del *determinismo* (un supuesto bastante complejo que está lejos de ser obvio). El determinismo se implementa asumiendo que el sistema físico satisface un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, conocidas como *ecuaciones de movimiento*:

$$\frac{d}{dt}\vec{S} = \mathbf{H}[\vec{S}(t)], \vec{S}(t_0), \quad (1.1)$$

donde  $\vec{S}(t)$  es un vector que colecciona las variables dinámicas relevantes que caracterizan al sistema y a su estado,  $\vec{S}(t_0)$  es el dato o estado inicial. Aquí  $t$  es un parámetro que en rigor lo que hace es etiquetar los distintos estados que el sistema ocupa. Se requiere que este parámetro  $t$  tenga la propiedad de aumentar monótonamente a medida que  $\vec{S}(t)$  toma valores sucesivamente. Este concepto de valores sucesivos es intuitivo en función de la capacidad de *distinguir* el orden en el que ocurren los eventos (o *estados*), es decir, entre el antes y el después. Para dos estados cualesquiera del sistema asumimos que no hay duda de cuál es el anterior: dados dos valores  $t_1$  y  $t_2$  de  $t$  tales que  $t_1 < t_2$ , el sistema ocupa el estado  $\vec{S}(t_2)$  después de ocupar  $\vec{S}(t_1)$ . Claramente  $t$  es una cuantificación de la idea intuitiva de tiempo y lo llamaremos, obviamente, “*tiempo*”.

En otras palabras, si conocemos el estado del sistema con sus variables dinámicas asumidas continuas (otro postulado de la CM) en un tiempo  $t_0$  y las fuerzas que actúan sobre el sistema, debería ser posible (al menos en principio) predecir con certeza<sup>5</sup> su evolución para tiempos  $t > t_0$ . Esto también dice que el futuro de un sistema clásico es único. Debido a la invariancia de las ecuaciones clásicas bajo la inversión temporal ( $t \rightarrow -t$ ), también el comportamiento pasado ( $t < t_0$ ) del sistema está perfectamente determinado y se puede conocer dado el estado actual. El determinismo permite así reconstruir la historia completa de una única manera, lo que llamamos la evolución del sistema.

Por otro lado, la evolución, puede entenderse como un efecto debido a las interacciones o fuerzas que impulsan a los sistemas hacia el cambio, caracterizada por la *energía* que posee el sistema. El enfoque de la CM debido a Hamilton nos brinda una descripción adecuada en este caso. Esta energía (un *observable* de la teoría) está representada por la función *Hamiltoniano*  $\mathcal{H}(q, p)$ , definido en el espacio de fases  $\Gamma(q, p)$  donde  $(q, p)$  son las coordenadas generalizadas y momentos canónicamente conjugados respectivamente. Cualquier estado del sistema queda representado por un punto  $(q, p)$  del espacio de fases, dotado de una estructura geométrica muy rica<sup>6</sup>. La información aportada por la función de Hamilton y el estado inicial  $(q_0, p_0)$  del sistema, junto con las ecuaciones canónicas de movimiento determinista, permiten obtener la evolución de las variables canónicas y de cualquier observable  $S$  asociado a ellas, ergo podemos reconstruir la historia del sistema<sup>7</sup>.

Sin embargo, existen sistemas como los encontrados en la mecánica estadística en donde no es posible determinar con precisión arbitraria la variables dinámicas de todos los componentes del sistema. En estos casos es útil recurrir al enfoque probabilístico, en donde el sistema se describe mediante una distribución de puntos en el espacio de fase, cuya densidad  $\rho$  en un punto determinado

<sup>5</sup>No debemos sin embargo olvidar la enseñanza de Bohr: *Es difícil hacer predicciones, especialmente sobre el futuro.*

<sup>6</sup>En esta oración podemos desmadejar dos principios claros de la CM: cada variable (observable) que describe  $\vec{S}$  tiene un valor definido en todo momento, y además todas las propiedades son perfectamente conocidas. Esto implica que los errores de medición pueden, al menos en principio, reducirse siempre por debajo de una cantidad arbitrariamente pequeña, hecho que no está de acuerdo con la evidencia experimental.

<sup>7</sup>Debemos remarcar algo importante aquí: todo sistema determinista de la forma (1.1) es un sistema dinámico, pero en general no es un sistema dinámico Hamiltoniano. Más aún, no todo movimiento sobre el espacio de fase es un sistema dinámico Hamiltoniano. Es indispensable para que sí lo sea la existencia de  $\mathcal{H} \in \Gamma$ . En tal caso  $\mathbf{H}$  se conoce como campo vectorial Hamiltoniano, de lo contrario es un campo vectorial dinámico.

$(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n) \equiv (q, p)$  mide la probabilidad de encontrar el sistema en ese estado. De ello se deduce que  $\rho$  es una cantidad real y positiva que nos da la probabilidad de encontrar el sistema en cada punto del espacio de fase, con lo cual se verifica que

$$\int d^n q \int d^n p \rho(q, p) = 1.$$

De esta manera, la dinámica de un ensamble de sistemas clásicos caracterizados por esta densidad  $\rho$  está gobernada por la ecuación de continuidad o de *Liouville*

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\},$$

una ecuación determinista, y establece que la densidad de puntos representativos en el espacio de fase es constante [1, 2, 3, 16]

### 1.1.2. La perspectiva cuántica

Un sistema cuántico queda identificado por un conjunto aislado de propiedades físicas al que tenemos acceso experimental y estamos tratando de describir. Por “estado” de un sistema tal, nos referimos a una colección de todo el conocimiento posible que podemos recopilar de él, y que en la práctica se logra mediante el estudio de la distribución de los resultados de las mediciones realizadas en el sistema [8]. Es importante saber qué propiedades son independientes entre sí, midiendo cuáles no interfieren entre sí.

El resultado de la medición podría ser una de muchas posibilidades, cada una de las cuales etiqueta un estado diferente. El conjunto de todos ellos forma el espacio de estados del sistema, el cual se construye apropiadamente sobre una estructura algebraica. En otras palabras, las propiedades de un estado cuántico están representadas por las de un vector en el sentido matemático, un miembro de un espacio vectorial complejo, con un producto interno definido en él. A este espacio vectorial se lo conoce como el espacio de estados del sistema o *espacio de Hilbert*.

El vector que describe el estado del sistema debe tener norma unitaria, ya que se le asocia una noción de probabilidad. El vector complejo también puede tener componentes imaginarias, esto representa un factor de fase general que si bien no tenemos medios para medirlo, no cambia la descripción del estado. Así, un estado es un vector unitario en un espacio complejo, módulo un factor de fase general. De esta manera toda la información del sistema cuántico está completamente contenida en su vector de estado<sup>8</sup>  $|\psi\rangle$ .

#### *¿Qué dice entonces la QM sobre la evolución?*

Bueno, en QM un sistema aislado evoluciona cuando su estado *cambia* con el tiempo. Hasta aquí la noción de evolución parece ajustarse a la visión clásica. Sin embargo, la diferencia radical se presenta en primer lugar en la formulación algebraica que tiene la QM, en donde el *cambio* de estado se produce (o al menos puede entenderse) mediante la acción que tiene un operador sobre él. Esta acción no puede sacarlo del espacio de Hilbert y debe preservar su norma. Concretamente, la evolución de un sistema cuántico cerrado es una *evolución unitaria*, implementada por una transformación unitaria, en donde el estado  $|\psi(t_0)\rangle$  del sistema en el momento  $t_0$  está relacionado con

<sup>8</sup>En esta tesis, en casi todas las expresiones, usaremos la notación debida a Dirac, [14, 16, 17, 18, 19, 107].

el estado  $|\psi(t)\rangle$  del sistema en el momento  $t$  por un operador unitario  $\hat{U}$  que depende solo de los tiempos  $t_0$  y  $t$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle. \quad (1.2)$$

Esta prescripción de evolución en QM es uno de los postulados sobre los que descansa el andamiaje de esta teoría. Una consecuencia clara de esta evolución unitaria es que es completamente reversible, lo que hace que la evolución cuántica de un sistema aislado sea reversible de la misma manera que en la CM. El elemento irreversible proviene, sin entrar en detalles, de las mediciones cuánticas y es un problema relacionado al colapso del estado en una medición de un observable, un aspecto de la teoría muy discutido en la comunidad y que no abordaremos en esta tesis.

En otras palabras, cualquier cambio que se produzca en un sistema cuántico que no sea una medida puede expresarse mediante la acción de una operación unitaria. Las mediciones son, en general, procesos irreversibles mediante los cuales se aprende cierta información sobre un sistema cuántico, que luego se pierde. Por otro lado, un sistema cuántico puede evolucionar reversiblemente a través de operaciones unitarias mediante las cuales no se gana ni se pierde información sobre el sistema, rasgo distintivo de una transformación de gauge.

### ***Evolución cuántica continua.***

La segunda diferencia radical, se encuentra en la propuesta dinámica de la mecánica ondulatoria realizada por Schrödinger en 1926. Esta propuesta da una interpretación de evolución más cercana al determinismo clásico, es decir que describe la evolución de un sistema cuántico en un tiempo continuo; pero su similitud es solo una apariencia formal, siendo su interpretación completamente distinta [16]. En efecto, desde un punto de vista dinámico las evoluciones en los sistemas son impulsadas por interacciones (fuerzas) ejercidas sobre estos. Estas interacciones en CM están bien caracterizadas por la función de Hamilton (la energía del sistema), mientras que en QM por el *operador Hamiltoniano*  $\hat{H}$ . Este operador es un observable del sistema (la energía), por lo tanto es hermitiano y generador del grupo de traslaciones temporales infinitesimales sobre los estados<sup>9</sup>. En otras palabras, permite escribir una versión diferencial del postulado de la evolución temporal para sistemas cuánticos cerrados, *la ecuación de Schrödinger*<sup>10</sup>:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle. \quad (1.3)$$

Por consiguiente, si conocemos el Hamiltoniano de un sistema, entonces entendemos su dinámica completamente<sup>11</sup>. La estructura de esta ecuación también es determinista, lo que implica que el conocimiento del vector de estado en un tiempo inicial  $t_0$  y del Hamiltoniano permite la determinación unívoca del estado en cualquier tiempo futuro (y pasado). Sin embargo, esto es profundamente diferente de lo que ocurre en la CM.

En la CM la evolución determinista *conciérne* a todas las propiedades del sistema, es decir, en cualquier instante  $t$  el valor de todo observable y por lo tanto el estado del sistema está perfectamente determinado (este es uno de los postulados de la CM). En la QM, por el contrario, el estado tiene una naturaleza intrínsecamente probabilística. Sin embargo, esto no significa que sea ontológicamente defectuoso: está exactamente tan determinado como debería estarlo, dado el vector de estado, el

<sup>9</sup>Técnicamente es el generador del grupo de Lie  $U(1) = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\theta}\}$  de transformaciones de gauge.

<sup>10</sup>Si bien en esta tesis estamos interesados en la evolución de los estados, también existe la formulación de Heisenberg, donde el foco está puesto en la evolución de los operadores como función del tiempo.

<sup>11</sup>Encontrar el Hamiltoniano necesario para describir un sistema físico en particular es, en general, un problema muy difícil. Solo existen casos particulares donde se puede encontrar el Hamiltoniano cuántico de su homólogo clásico. Generalmente, se requiere de un aporte sustancial del experimento para poder ser hallado [16, 107].

principio de superposición y las relaciones de incertidumbre<sup>12</sup>. La ecuación de Schrödinger nos da la evolución determinista de una amplitud de probabilidad y esta circunstancia también afecta las distribuciones de probabilidad de los observables. De hecho, después de un cierto tiempo de evolución, todavía habrá una cierta probabilidad de que un observable asuma un valor dado. En conclusión, aunque la ecuación fundamental de la evolución es determinista, la estructura de la teoría sigue siendo intrínsecamente probabilística.

Por supuesto que existe una relación bien definida entre la evolución cuántica establecida por la prescripción algebraica y la dinámica de la mecánica ondulatoria. La combinación de estas dos permite encontrar una ecuación para el operador unitario:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \hat{U}(t, t_0) = \mathbb{1}, \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0), \quad (1.4)$$

donde la forma final que adopta el operador  $U$  dependerá del comportamiento del Hamiltoniano del sistema [6, 8],

$$\hat{U}(t, t_0) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t') \hat{U}(t', t_0) dt'. \quad (1.5)$$

### ***Un escenario más realista...***

La descripción que hemos relatado hasta ahora, considera un escenario donde el estado del sistema cuántico está bien determinado por un vector del espacio de Hilbert. Sin embargo esta no es la situación más común. En la mayoría de los casos prácticos, solo tenemos un conocimiento incompleto del estado. Esto significa que el estado no es un estado propio de un observable, sino que consiste en una mezcla de estados propios con probabilidades clásicas de estar en cada estado. Debemos considerar entonces los *estados mixtos* de la teoría, aquellos que no se pueden representar por un vector de estado. Para esta situación contamos con la formulación debido a von Neumann [11], que emplea operadores o matrices de densidad de estados, matemáticamente equivalente al enfoque del vector de estado. El formalismo de matrices densidad, constituye una herramienta poderosa, que permite reformular toda la QM y proporciona un lenguaje mucho más conveniente para escenarios de la teoría más realistas. En general, el sistema cuántico se presenta compuesto de un número de estados puros  $|\psi_i\rangle$ , donde  $i$  es un índice con probabilidad clásica  $p_i : 0 \leq p_i \leq 1$  y  $\sum_i p_i = 1$ , siendo el conjunto  $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$  un *ensamble de estados puros*. El estado del sistema está determinado ahora por el *operador o matriz densidad*:

$$\hat{\rho} := \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.6)$$

donde el estado puro se obtiene de tomar  $p_i = 1$ .

### ***¿Cómo se describe la evolución de un sistema en esta formulación?***

La prescripción algebraica indica como siempre que la evolución de un sistema cuántico cerrado se lleva a cabo por un operador unitario  $\hat{U}$ . Si el sistema está inicialmente en  $t_0$  en el estado  $|\psi_i\rangle$  con probabilidad  $p_i$ , luego de evolucionar el sistema se encontrará al tiempo  $t$  en el estado  $\hat{U}|\psi_i\rangle$  con probabilidad  $p_i$ . Por consiguiente la evolución del ensamble  $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$  está formulada en términos

---

<sup>12</sup>La historia de la QM recoge intentos (muchos sin éxitos) por mejorar el conocimiento de los estados más allá del formalismo establecido. Un ejemplo de esto son las teorías de Variables Ocultas, algo sobre lo que comentaremos brevemente más adelante [16, 19].

de la matriz densidad  $\hat{\rho}$  como:

$$\hat{\rho}(t_0) := \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \xrightarrow{\hat{U}} \sum_i p_i \hat{U} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \hat{U}^\dagger = \hat{U} \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger = \hat{\rho}(t). \quad (1.7)$$

Por otro lado, la evolución dinámica se obtiene asumiendo un operador Hamiltoniano conocido  $\hat{H}(t)$ , el cual actúa sobre cada elemento del ensamble  $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$  de acuerdo a la ecuación de Schrödinger. Esto da como resultado la ecuación de von Neumann para el operador densidad<sup>13</sup>

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (1.8)$$

Resulta notable cómo el determinismo también está presente en esta formulación equivalente, conservando la naturaleza probabilística de la teoría capturado por la matriz densidad.

### *Escenarios un poco más realistas...*

No queremos dejar de comentar algunos aspectos interesantes sobre los cuales volveremos más adelante en esta tesis. En primer lugar, el postulado de evolución cuántica requiere que el sistema que se describe sea *cerrado*. Es decir, no está interaccionando de ninguna manera con otros sistemas. En realidad, por supuesto, todos los sistemas (excepto, hasta donde sabemos, nuestro Universo en su conjunto) interaccionan en alguna medida con otros sistemas. Sin embargo, hay sistemas interesantes que se pueden describir como cerrados y que evolucionan unitariamente con un buen grado de aproximación. Además, al menos en principio, todo sistema abierto puede describirse como parte de un sistema cerrado más grande (el Universo mismo) que está experimentando una evolución unitaria. En otras palabras, es imposible aislar el sistema de interés de algunas partes de su entorno, por lo que podemos considerarlo como una parte de uno más grande, digamos, un *sistema compuesto*: “*sistema + entorno*”. La QM da el marco apropiado para tratar estos escenarios y estudiar la evolución en ellos, tema sobre el cual volveremos oportunamente.

Para cerrar esta sección, vamos a señalar unas cuestiones interesantes que se encuentran presente en la CM y QM. En primer lugar, a pesar de que hemos dado una descripción del significado de la evolución en ambas teorías, todas las leyes dinámicas clásicas o cuánticas, están afectadas por un problema profundo: están formuladas en términos de un parámetro extrínseco a la dinámica del sistema, el *tiempo*. Parece fácil distinguir entre el pasado y el futuro: mientras que la memoria conserva huellas del primero, no sabemos a ciencia cierta qué sucederá en el porvenir. Esto es así porque el mundo intuitivamente percibido se extiende por el espacio y se *despliega* en el tiempo, asignamos significados especiales a un momento particular, el presente, al que consideramos como la cresta de una ola que transforma potencialidad en realidad de forma continua, dejando tras de sí un pasado inanimado.

Sin embargo, en estas dos teorías, el tiempo absoluto externo no es accesible experimentalmente. Más bien, el tiempo se mide mediante relojes, es decir, sistemas dinámicos cuya evolución se relaciona de manera sencilla con el tiempo absoluto externo. En la CM, la sustitución del tiempo externo absoluto por el tiempo del reloj es esencialmente solo un cambio de variables. En la literatura convencional de la QM, se introduce la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo como

<sup>13</sup>Tengamos en cuenta que (1.8) en realidad significa  $i\hbar(d\hat{\rho}/dt) = i\hbar(\partial\hat{\rho}/\partial t) + [\hat{H}, \hat{\rho}] = 0$ . Es decir,  $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = 0$ , que es la versión cuántica de la ecuación de Liouville presentada anteriormente. Si se define  $\hat{L}(\cdot) = [\hat{H}, \cdot]$  resulta  $\hat{L}\hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]$  y la ecuación de von Neumann toma la forma  $i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \hat{L}\hat{\rho}$  conocida como *ecuación de Liouville cuántica* [17].

un postulado clave de la teoría<sup>14</sup>, sin embargo, casi nunca se señala que el tiempo incorporado en  $\hat{H}(t)$  siempre surge del desarrollo del tiempo clásico. En este sentido, la ecuación de Schrödinger debería considerarse como una mezcla de ecuación *clásico-cuántica*, una interesante discusión y crítica se puede leer en [120]. Aunque esto es aceptable para todos los propósitos prácticos, es importante poder dar una descripción que incorpore al tiempo de una manera cuántica. Muchas de estas propuestas han aparecido en la literatura y serán recomendadas oportunamente<sup>15</sup>.

Otro asunto interesante lo encontramos en aquellos sistemas cuánticos en estados propios de energía que no evolucionan en el tiempo (salvo un factor de fase global sin significado). Si bien estos estados están “congelados” en el tiempo, pueden exhibir correlaciones entre grados internos de libertad de tal manera que uno de estos grados se comporta como una variable de reloj, y por lo tanto define un tiempo interno que parametriza la evolución de los otros grados de libertad. Este será un tema central para nuestra tesis que iremos desarrollando en los siguientes capítulos.

## 1.2. Dos postulados críticos y el *entrelazamiento*

Otro aspecto interesante que trataremos en esta tesis en conexión con la evolución o la llamada dinámica emergente está relacionado con una intrigante y misteriosa propiedad de la cuántica que ha desconcertado a físicos desde el nacimiento de la QM: el *entrelazamiento*. Esta propiedad de un sistema cuántico compuesto se basa en *correlaciones* que la física clásica no puede explicar y es un recurso clave en la computación cuántica y la teoría de la información cuántica.

Entre 1924 y 1927 Heisenberg desarrolla el primer formalismo matemático coherente para la QM e introduce su *principio de incertidumbre*, en donde establece una complementariedad entre los conceptos clásicos de la mecánica: es imposible medir tanto la posición como el momento de una partícula, contrariamente a lo estipulado por la CM. Por tanto, Heisenberg asumió que existe algún punto de corte entre los mundos clásico y cuántico. El descubrimiento de este principio generó una tensión en la comunidad científica, que se sumaba a la ya incómoda indeterminación asociada con la interpretación estadística de la función de onda de un *estado cuántico*.

Detrás de todo esto se encontraba otro importante principio de la CM asumido implícitamente y que estaba a punto de ser trastocado en los debates suscitados allá por 1930 en adelante, el *principio de separabilidad*. La separabilidad afirma que, dados dos o más sistemas físicos,  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$ , que no interactúan (entendiendo la interacción clásica como fuerzas de algún tipo), se los considera separados cuando todas sus propiedades físicas se pueden determinar independientemente. Dicho en otros términos, el resultado de una medición obtenida por experimentos realizados localmente en uno de ellos, digamos en  $\mathcal{S}_1$ , no puede depender (ni influir) de ninguna manera de las mediciones obtenidas en los experimentos realizados localmente en  $\mathcal{S}_2$ <sup>16</sup>. La QM, por su parte, admite que

<sup>14</sup>Si bien la ecuación independiente del tiempo se trata como un caso especial, la historia muestra que Schrödinger, mediante argumentos variacionales, derivó primero la ecuación independiente del tiempo [120].

<sup>15</sup>Como señala Jun John Sakurai [6]: “Irónicamente, en el desarrollo histórico de la mecánica ondulatoria tanto L. de Broglie como E. Schrödinger se guiaron por una especie de analogía covariante entre energía y tiempo por un lado y momento y posición (coordenada espacial) en el otro. Sin embargo, cuando miramos ahora la mecánica cuántica en su forma final, no hay rastro de un tratamiento simétrico entre el tiempo y el espacio. La teoría cuántica relativista de campos trata las coordenadas del tiempo y el espacio en la misma base, pero lo hace a expensas de degradar la posición del estado de ser un observable al de ser solo un parámetro”.

<sup>16</sup>El principio de separabilidad es el *principio de individuación* para los sistemas físicos [16]: identifica los términos aislado y dinámicamente independientes; en otras palabras, no reconoce otra forma de interdependencia entre sistemas que no sea la interacción dinámica local o causal. Por lo tanto, es importante distinguir cuidadosamente el problema de



puede haber una forma de interdependencia en ausencia de *interacción física*, incluso para sistemas que están espacialmente separados una gran distancia. Este tipo de correlación recibe el nombre de *entrelazamiento*<sup>17</sup>.

El punto de partida de la controversia acerca de la separabilidad de los sistemas físicos se inició en el artículo pionero de Einstein, Podolsky y Rosen (EPR) [21], que inauguraron una increíble serie de investigaciones teóricas y experimentales que hasta el día de hoy siguen confirmando las predicciones de la QM. La ironía de esta historia es EPR pretendían presentar una prueba definitiva de la inconsistencia de la QM en relación con la teoría física clásica y contrariamente a sus propósitos iniciaron uno de los campos más prolíficos de la ciencia moderna [22]. En su trabajo habían desarrollado un experimento mental, conocido después como “*la paradoja EPR*”, que consistía en demostrar lo que pensaban era una falta de completitud en la QM. Una falta de completitud significaría que hay algunas cosas en el mundo real que el formalismo cuántico no puede describir, lo que claramente significaría una muy mala noticia para la mecánica cuántica. La separabilidad de dos sistemas, entendida en términos de ausencia de interacciones entre ellos, llevó a EPR a concluir que si no se abandonaba a la Relatividad Especial (que limita la velocidad de las interacciones), la descripción cuántica de los dos sistemas es incompleta. La razón fue que aparentemente podemos determinar propiedades complementarias de una partícula (la posición y el momento, por ejemplo) al mismo tiempo, utilizando información de su socio entrelazado, incluso si este se encuentra a años luz de separación, algo contrario al principio de incertidumbre. Einstein llamó a este efecto cuántico de colapso instantáneo, “acción espeluznante a distancia”. No entraremos en los detalles de este argumento, ya que ha sido ampliamente debatido, tanto en la literatura técnica como en la popular, y tiene más valor histórico que útil para la comprensión actual del entrelazamiento [16, 22, 23, 24]<sup>18</sup>.

Señalemos que EPR no dudaban acerca de la correctitud de la QM, su artículo intentaba señalar que esta teoría era incompleta a la hora de describir la realidad física, incapaz de dar una explicación satisfactoria de entidades que se consideran fundamentales, en una palabra, su artículo es una “refutación” y no una prueba positiva<sup>19</sup>. Es decir, que la interpretación de Copenhague, no alcanzaba, la función de onda no es “la historia completa”, era necesaria alguna *otra* cantidad para caracterizar completamente el estado de un sistema. Estas cantidades que no eran accesibles al conocimiento teórico o experimental, se las denominaron por este motivo *variables ocultas*. La hipótesis de la variable oculta, permitiría ir más allá del principio de incertidumbre, sin embargo estaba llena de controversia. Fue entonces cuando Bell en 1964, propuso una prueba experimental que

---

la localidad, es decir, la existencia de límites en la transmisión de señales y efectos físicos, del de la separabilidad, que se refiere únicamente a la imposibilidad de una correlación entre sistemas separados sin conexiones dinámicas y/o causales.

<sup>17</sup>Algo más sorprendente aún son los desarrollos recientes que muestran que se pueden entrelazar incluso partículas que nunca han interactuado entre sí. Este hecho se conoce como intercambio de entrelazamiento [19].

<sup>18</sup>En ese momento, las fuentes ópticas modernas eran desconocidas, por lo que el ejemplo visualizado en su experimento mental era artificial, no obstante, era un estado entrelazado válido. Involucraba un par de partículas,  $A$  y  $B$ , en un estado propio de dos observables compatibles: su momento total  $P = p_1 + p_2$ , y su separación  $\Delta x = x_2 - x_1$ . EPR argumentaron que si se realiza una medición del impulso de  $A$  cuando  $A$  y  $B$  están fuera de contacto causal, el impulso de  $B$  se puede predecir con certeza como  $(P - p_1)$ . Alternativamente, midiendo la posición de  $A$  cuando  $A$  y  $B$  están fuera de contacto causal, la ubicación de  $B$  ( $x_1 + \Delta x$ ) se puede predecir con certeza. Por tanto, tanto el momento como las coordenadas de  $B$  deberían tener valores reales (definidos) en cualquier teoría completa. Sin embargo, la mecánica cuántica requiere que el producto de las precisiones para determinar el momento y la posición de  $B$  exceda  $\hbar$ . La inferencia que hicieron los autores fue que la mecánica cuántica era incompleta.

<sup>19</sup>En general, es imposible encontrar una prueba positiva de una teoría empírica, en cambio se puede acumular una cierta cantidad de evidencia a favor de ella. En particular, una prueba positiva de la completitud de una determinada teoría física requeriría un conocimiento total de la realidad y, como consecuencia, un tiempo infinito. Por otro lado, las teorías pueden ser refutadas por la experiencia y los experimentos (incluso mentales). Este tipo de epistemología es el llamado falsacionismo, y se debe a los aportes de Peirce y Popper [16, 25].

podría invalidar una hipótesis de variable oculta local<sup>20</sup>[13]. Bell encontró varias desigualdades que satisfaría una distribución de probabilidad y mostró que dos sistemas cuánticos entrelazados violarían estas desigualdades<sup>21</sup>. Se tuvo que aguardar hasta 1981 cuando Alain Aspect y colaboradores implementaran un delicado experimento [26, 27] que arrojaría luz a la discusión, mostrando que la interpretación de Copenhague seguía siendo la más adecuada para el reino microscópico<sup>22</sup>.

Contemporáneamente a EPR, Schrödinger escribió un par de artículos muy influyentes en los que señalaba que el entrelazamiento es la característica definitoria de la QM, pero que podría conducir a resultados muy contrarios a la intuición en el mundo macroscópico. El más famoso argumento de sus artículos es conocido como *la paradoja del gato de Schrödinger*, en donde describe la situación imaginaria de un gato (sistema macroscópico) entrelazado con un átomo (objeto microscópico) el cual decide el destino del estado del gato, el cual se encuentra en una superposición de estados vivo y muerto. Es un argumento que ha sido muy explotado en la literatura popular y películas o series de ciencia ficción, y todavía sigue generando debates animados.

Para terminar este brevísimo pasaje histórico del entrelazamiento, mencionaré dos aspectos también relevantes para el entrelazamiento y los fundamentos de la QM. El primero es una visión de la QM debida a von Neumann quien mostró que el entrelazamiento se puede utilizar para explicar las mediciones sin hacer referencia a la teoría de la probabilidad. La interpretación estándar de “Copenhague” de la QM dice que una medición colapsa un estado en la base de la medición con las probabilidades apropiadas. Von Neumann demostró que el colapso de la medición podría “explicarse” por el entrelazamiento del aparato de medición con el sistema que se está midiendo. Después de la medición, el aparato y el sistema se encuentran en una superposición entrelazada de todos los resultados posibles. El segundo aspecto, surge del trabajo de Everett [164], inspirado por las ideas de von Neumann publicado en 1957 *la interpretación de la QM de muchos mundos*, que dice que cuando se realiza una medición el Universo se “divide” en una superposición de todos los posibles resultados de medición, cada uno de los cuales es un Universo igualmente real por derecho propio<sup>23</sup>. Por lo tanto, según este punto de vista, todo el universo está gobernado por una dinámica unitaria y nunca hay colapso, y se excluye de la imagen cualquier aleatoriedad. El tercer postulado de la mecánica cuántica (que nos dice qué sucede cuando medimos), por lo tanto, sería superfluo.

### 1.3. El entrelazamiento como recurso

Como vimos, los debates iniciales sobre el entrelazamiento cuántico se centraron en las características cualitativas que lo distinguen de nuestra intuición clásica. Sin embargo, la claridad inicial aportada al debate por el trabajo de Bell hicieron que esta distinción fuera más cuantitativa, haciendo las características no locales de la teoría cuántica accesibles a la verificación experimental. Notablemente, en la época en que fueron publicadas, era casi inimaginable que tales correlaciones

---

<sup>20</sup>De nuevo el genio de von Neumann había demostrado años antes (aunque de manera muy restrictiva) que una teoría que tuviera variables ocultas sería incompatible con los postulados de la QM. Bell se da cuenta de esta restricción y de la falta de una prueba experimental y es así que decide revisar los fundamentos de este debate. Lamentablemente su publicación pasó inadvertida por la comunidad [12], de esta forma el debate seguía en el terreno de los gedankenexperiment.

<sup>21</sup>Al día de hoy se pueden encontrar hipótesis de "variables ocultas" pero de carácter global, la más conocida de ellas es debida a Bohm [9, 10].

<sup>22</sup>En palabras de Asher Peres: “quantum phenomena do not occur in a Hilbert space, they occur in a laboratory”.

<sup>23</sup>Por cada elección incorrecta que se ha hecho en este Universo, hay un Universo paralelo en el que ha hecho todas las elecciones correctas. En algún otro Universo tengo un buen sentido del humor y soy muy guapo, inteligente y rico. Además, el gato de Schrödinger realmente está vivo y muerto, ¡pero en diferentes universos!

cuánticas pudieran crearse en entornos bien controlados entre distintos sistemas, era solo una idea que se manejaba en pizarras de alguna oficina.

Sorprendentemente, y a pesar de tener aspectos desconcertantes e intrigantes, el progreso posterior muestra que ahora podemos preparar, manipular y medir coherentemente sistemas cuánticos individuales, así como crear correlaciones cuánticas controlables. Hoy este concepto constituye la base de desarrollos tecnológicos prometedores como la computación cuántica o la criptografía cuántica, y es un requisito en experimentos de teleportación cuántica. Esto ha sido posible también porque las correlaciones cuánticas, en particular el entrelazamiento, han llegado a interpretarse o reconocerse como un recurso novedoso que puede usarse para realizar procesos o tareas que son imposibles o muy ineficientes con los sistemas clásicos. Esta posibilidad es el núcleo de la ciencia de la información cuántica moderna<sup>24</sup>.

Dado este nuevo estatus del entrelazamiento pensado como un recurso aprovechable o incluso necesario para ciertas tareas, es bastante natural desarrollar un marco teórico para describirlo y cuantificarlo. Aunque esta no es una tarea trivial, y todavía sigue en desarrollo, contamos con un conjunto de definiciones y condiciones que una medida tiene que satisfacer para cuantificar el entrelazamiento. Estas están reunidas en lo que se conoce como *medidas de entrelazamiento*; una de las cuales es la *entropía de entrelazamiento* [19, 20, 107]. Si bien el significado de la entropía se estudia en contextos termodinámicos, el enfoque que usaremos en esta tesis será el que proviene de la teoría cuántica de la información.

Los principios de la entropía cuántica aplicados a la información fueron formulados originalmente por John von Neumann, en su famoso libro sobre los *Fundamentos matemáticos de la mecánica cuántica* [11]. En esta área, la *entropía cuántica* conocida como la entropía de von Neumann es la extensión al mundo cuántico de la entropía de información clásica propuesta por Claude Shannon [28]. Si bien su trabajo original estuvo relacionado con la formulación matemática de la teoría de comunicaciones, rápidamente sus ideas se incorporaron a otros ámbitos del conocimiento, como la Física, y en particular a la Mecánica Estadística, a finales de la década de 1950, en los trabajos de E.T. Jaynes [99, 100].

Pongamos en contexto brevemente el desarrollo detrás de estas ideas. A menudo se piensa en la información como una cantidad abstracta que no tiene nada que ver con el mundo físico. Sin embargo, la información nos llega a través de la interacción con el mundo exterior y se almacena y procesa en nuestro cerebro, que hasta donde sabemos, está totalmente sujeto a las leyes de la física. En otras palabras, cuando manipulamos sistemas físicos para diversos fines, esencialmente estamos codificando y decodificando el contenido de información en esos sistemas en términos definidos con precisión y adaptados a nuestro propósito. Cuando se menciona a la información, uno piensa en el “conocimiento nuevo” obtenido cuando se completa un proceso físico particular, como mirar televisión, leer un artículo o medir el voltaje de salida al final de un circuito. Cuando nos acostumbramos a la idea de que la información no es algo abstracto como el resultado de la cognición, sino que en realidad se transporta físicamente por el sistema que se observa o mide, estamos más cerca de una comprensión científica de la información.

Podemos extraer dos conceptos cruciales de esto: la información debe estar codificada en un sistema físico y además la información debe procesarse utilizando las leyes físicas de la dinámica.

---

<sup>24</sup>Esta ciencia se basa en la observación de que los estados cuánticos se interpretan como ladrillos de información de una manera diferente de la información clásica. Como consecuencia, la capacidad de manipular estados cuánticos se traduce en una nueva forma de procesamiento e intercambio de información, más rico que su análogo clásico. Esto ha contribuido a la comprensión de los estados cuánticos como una extensión del concepto clásico de estado.

Estas dos ideas, generalmente atribuidas a Landauer implican, de una forma u otra, que todas las limitaciones en el procesamiento de la información se derivan de las restricciones de las leyes físicas subyacentes [19].

En cuanto a la teoría de la información clásica, según Shannon la medida de la *información* asociada a los eventos está relacionada con su probabilidad de ocurrencia. En este sentido, por ejemplo, un mensaje representado por una variable aleatoria  $X$  escrito en algún alfabeto, es la ocurrencia de una cadena de eventos  $X$ : es la aparición de cada símbolo  $x$  del alfabeto, con su respectiva probabilidad  $p(x)$ , que constituye el mensaje (sin importar el significado). Entonces, la función entropía de información de Shannon mide la información total transportada por un mensaje como el promedio ponderado de todos los símbolos del mensaje. Formalmente se expresa por:

$$H(X) := -k \sum_x p(x) \log(p(x)). \quad (1.9)$$

La colección de eventos aleatorios  $x$  que ocurren con probabilidad  $p(x)$  recibe el nombre de ensamble  $X = \{x, p(x)\}$ , y el número  $k$  es una constante que depende de las unidades en las que se mide  $H$ . En otras palabras, es una medida de la incerteza promedio en la variable aleatoria; el valor de  $H(X)$  es el número promedio de bits necesarios para describir la variable  $X$ <sup>25</sup>. Justamente por su similitud con la magnitud termodinámica del mismo nombre, la función de información  $H(X)$  se ha denominado entropía del mensaje<sup>26</sup>.

Sabemos que la QM representa por ahora una descripción más precisa y diferente del mundo microscópico que la CM. Por lo tanto, la información cuántica y su procesamiento, que se rige por las leyes de la QM, también es una descripción más precisa y diferente de la teoría de la información clásica. Por supuesto, en un límite, la información cuántica se reduce a información clásica; de lo contrario, la información cuántica es un concepto mucho más general que permite protocolos de procesamiento de información que no tienen ningún análogo clásico.

Así como la entropía de Shannon mide la incertidumbre asociada con una distribución de probabilidad clásica, resulta que la entropía de von Neumann es una medida de la información transportada por los sistemas cuánticos, es decir, mide cuánta incertidumbre hay en el estado de un sistema físico. Como vimos anteriormente, los estados cuánticos se pueden describir con operadores de densidad de probabilidad  $\rho$  que reemplazan a las distribuciones de probabilidad clásicas, esto permite generalizar la definición de la entropía de Shannon para los estados cuánticos y conseguir la entropía de von Neumann:

$$S_{\text{vN}}(\rho) := -\text{Tr} \rho \log \rho. \quad (1.10)$$

Por lo tanto, la teoría de la información cuántica se ocupa en gran medida de la interpretación y los usos de la entropía de von Neumann, al igual que la teoría de la información clásica con la interpretación y los usos de la entropía de Shannon.

Las propiedades de esta función están bien establecidas y recopiladas en distintas literaturas ya

<sup>25</sup>La unidad bit es la que resulta de usar el logaritmo en base 2.

<sup>26</sup>Anecdóticamente fue von Neumann quien sugirió a Shannon que nombrara a su medida de información como “entropía” debido a que compartía las mismas propiedades. Para ver esto, basta recordar que en termodinámica estadística, se busca relacionar las propiedades macroscópicas del sistema con los microestados de sus constituyentes. Por otro lado, por ejemplo, la energía de un gas está relacionada con los momentos de sus moléculas constituyentes. Si el número de microestados compatible con un macroestado dado es  $\Omega$ , entonces la entropía de Boltzmann del sistema se define como:  $S = k_B \ln \Omega$  donde  $k_B$  es la constante de proporcionalidad de Boltzmann. Pensamos en los microestados como diminutas células imaginarias que dividen el volumen total ocupado por el gas. Si  $p_i$  es la probabilidad de que la  $i$ -ésima celda esté ocupada, la entropía de Boltzmann del gas resulta ser,  $S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i$ .

citadas, que permiten abordar tratamientos más profundos relacionados a la teoría cuántica de la información. El cuantificador de entrelazamiento dado por la entropía de von Neumann, en particular una expresión que se deriva de ella, la *entropía lineal* será nuestra herramienta principal en toda esta tesis y volveremos sobre ella en los siguientes capítulos. Por este motivo, oportunamente señalaremos las propiedades relevantes que posee y que justifica su uso en nuestros cálculos, aunque se pueden encontrar excelentes referencias como el libro de Barnett [29]. Los asuntos relacionados con la información cuántica se discuten en el trabajo de Mark Wilde [30] y en las notas de John Preskill [31], también los encontramos en [20, 32]. Una buena referencia general sobre las propiedades de la entropía de Shannon (y mucho más en la teoría de la información) son los capítulos 2 y 16 de Cover y Thomas [33]. Un completo artículo de revisión sobre la entropía de von Neumann es el artículo de Wehrl [165].

Por otro lado, es importante resaltar que el entrelazamiento interpretado como recurso físico está estrechamente relacionado con algunas características fundamentales de la dinámica de los sistemas cuánticos compuestos: Por ejemplo, el entrelazamiento cuántico mejora la “velocidad” de evolución de ciertos estados cuánticos, medida por el tiempo requerido para alcanzar un estado ortogonal. El concepto de “velocidad” de la evolución cuántica constituye un ingrediente importante en cualquier intento de determinar los límites fundamentales que imponen las leyes físicas básicas sobre la rapidez con que un sistema físico puede procesar o transmitir información; los trabajos desarrollados por ejemplo en [50, 79] dan cuenta de la importancia que tiene el estudio del entrelazamiento como recurso.

### 1.3.1. Geometría y Mecánica Cuántica

Paralelamente, existe otro aspecto interesante de la QM que se viene desarrollando con marcado interés en la comunidad de investigadores, y este tiene que ver con el enfoque geométrico de la QM, conocido como “Mecánica Cuántica Geométrica”. En efecto, no es difícil justificar este interés si reconocemos la transversalidad que tiene la geometría en casi todos los sistemas físicos. Por supuesto que la conexión entre la geometría y la física no es para nada una novedad. La formulación de los principios de mínima acción que conducen a las ecuaciones de movimiento clásicas, en particular las ecuaciones canónicas de Hamilton<sup>27</sup>, permite interpretar la evolución de los sistemas físicos en términos geométricos muy interesantes y robustos<sup>28</sup>. En particular, el importante papel que desempeñan las ideas geométricas en la teoría cuántica puede ilustrarse con ejemplos que comienzan con la creación de la propia teoría cuántica. Como es bien sabido, en esta creación jugó un papel importante la reformulación de la CM de Hamilton, que inspiró a De Broglie y Schrödinger al descubrir la dualidad onda-partícula y así a desarrollar la QM. Sin embargo, esto contrasta con la manera estándar en que se presenta a la QM, basada en métodos algebraicos y de análisis funcional, donde las ideas geométricas no son muy evidentes.

La aplicación de la geometría ha proporcionado nueva información reveladora sobre muchas teorías físicas. Un ejemplo radical y sólido de esto es la teoría de la Relatividad donde las estructuras geométricas están en correspondencia con los conceptos físicos que describen el Universo. La búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad, la Teoría de Supercuerdas y Gravedad Cuántica de Lazos son otros ejemplos. Los trabajos de Dirac sobre monopolos magnéticos, que conducen a la celebrada cuantización de la carga se encuentran relacionados con las propiedades geométricas de

<sup>27</sup>El principio de mínima acción permite también tener una formulación Lagrangiana de la QM muy interesante, algo que Richard Feynman supo explotar muy bien [35].

<sup>28</sup>Como lo dice V.I. Arnold, *la mecánica Hamiltoniana es geometría en el espacio de fases*.

la unidad de información cuántica, el qubit [36]. Otro ejemplo notable del avance de la geometría en la cuántica lo encontramos a principios de los años '80, especialmente desde el trabajo pionero de Berry [37], que dio origen a la investigación de la fase geométrica en sistemas cuánticos<sup>29</sup>. Impulsado por este descubrimiento, los conceptos de la topología y geometría diferencial como los espacios fibrados, entraron rápidamente en varios aspectos de la física de la materia condensada como, polarización eléctrica, efecto Hall cuántico, propiedades de transporte en superficies y dinámica de magnetización, entre otros. Más recientemente, el descubrimiento de aisladores de Chern topológicos y espontáneos, permitió una clasificación topológica de sólidos basada en cantidades derivadas de sus propiedades geométricas. Esto se ha convertido en una herramienta muy común en la caracterización de propiedades físicas de metales y aislantes, o el descubrimiento de transiciones de fase topológicas en la materia (Nobel de Física 2016).

No es difícil convencerse con estos ejemplos de que la geometría está presente a un nivel fundamental en la QM, dan lugar a la idea de que el mundo tiene una estructura geométrica rica e interesante, y que quizás podríamos considerar a la teoría cuántica como una teoría geométrica<sup>30</sup>.

La línea de investigación a la que nos referimos como “Mecánica Cuántica Geométrica”, tiene su origen en el trabajo de Kibble [34], quien mostró cómo la teoría cuántica podía formularse en el lenguaje de la dinámica de espacio de fase Hamiltoniano, donde el espacio de estados cuánticos está equipado con una estructura geométrica adecuada. Este fue un avance notable contraponiéndose a la idea anterior según la cual la estructura de espacio de fase Hamiltoniana natural de la CM debía ser cuantificada para producir el espacio de Hilbert correspondiente a observables físicos (cuantización canónica). Sin embargo, la mecánica cuántica geométrica no se ocupa del procedimiento de cuantización como tal, sino que acepta la teoría cuántica como dada. De hecho, desde una perspectiva moderna, la estrategia se ha invertido, y un objetivo principal es comprender cómo el mundo clásico emerge de la teoría cuántica. El enfoque de la mecánica cuántica a través de su geometría de espacio de fase natural iniciado por Kibble ofrece información sobre muchos de los aspectos más enigmáticos de la teoría: superposición lineal de estados, evolución de Schrödinger, entrelazamiento cuántico, leyes de probabilidad cuántica, relaciones de incertidumbre, fases geométricas, y el colapso de la función de onda.

## 1.4. Motivación y objetivos de la tesis

Motivados por el formalismo geométrico y su relación con el entrelazamiento, comenzamos esta tesis decididos a explorar un poco más esta conexión. Nuestro primer objetivo fue estudiar los aspectos cinemáticos de la evolución de los estados cuánticos lo que representa en otras palabras un *enfoque geométrico*. Seguido a esto exploramos la relación entre el entrelazamiento y la evolución óptima a lo largo de curvas geodésicas que conectan distintos estados. Mediante el enfoque geométrico reobtenemos los resultados que indican que el entrelazamiento es un recurso fundamental para implementar tales evoluciones.

---

<sup>29</sup>Es un factor de fase relacionado con el transporte adiabático dependiente de parámetros externos, como un campo magnético aplicado. Al realizar una trayectoria cerrada en el espacio de parámetros del Hamiltoniano, la función de onda de la partícula adquiere una fase debida únicamente a la trayectoria, de modo análogo al resultado de Aharanov y Bohm [38], que resulta ser una holonomía [39]. Una holonomía (o más bien, un grupo de holonomía) mide cómo el transporte paralelo de vectores (definidos en una variedad geométrica) alrededor de lazos cerrados no preserva los datos geométricos que se transportan. Un ejemplo concreto: el transporte de un vector, paralelo a sí mismo, a lo largo de un camino cerrado sobre una esfera.

<sup>30</sup>Esta es una afirmación que defiende el autor de esta tesis.

Si bien en el enfoque geométrico el concepto de *distancia* entre estados cuánticos tiene una formulación clara y formal, también lo encontramos relacionado al concepto de *distinguibilidad* física entre estados cuánticos. Se ha reconocido que la noción de distinguibilidad entre estados es fundamental para la física cuántica en particular, en la teoría de la información y computación cuántica, ya que permite tener más control sobre estos y así poder manipular la información disponible en el sistema que los soporta. La existencia de diferentes grados de distinción entre estados puros (descritos por vectores en un espacio de Hilbert) es la base de la mayoría de las características no clásicas de la mecánica cuántica. De hecho, la contraparte clásica de los estados puros (descritos por puntos en un espacio de fase clásico) son, en principio, siempre perfectamente distinguibles el uno del otro.

La distinguibilidad lleva naturalmente a la idea de un *tiempo de ortogonalidad*, que es el tiempo requerido para que un sistema cuántico evolucione a un estado que sea perfectamente distinguible del inicial. El tiempo de ortogonalidad, a su vez, tiene una gran importancia tanto desde el punto de vista fundamental como práctico. Entre sus múltiples aplicaciones, existe la posibilidad intrigante de caracterizar la *riqueza* de la evolución experimentada por un sistema cuántico utilizando el número total de estados ortogonales sucesivos visitados por el sistema en un intervalo de tiempo dado. Desde el punto de vista computacional, que interpreta los sistemas físicos como sistemas de procesamiento de información, dicho número puede considerarse como el número de pasos computacionales elementales realizados durante la evolución del sistema. En otras palabras, proporciona una estimación de la capacidad computacional del sistema. Esta es una forma interesante y potencialmente profunda de interpretar la evolución de un sistema físico. Sin embargo, este punto de vista no es aplicable en aquellos casos en que el sistema nunca alcanza un estado ortogonal.

Considerando esta limitación, nos preguntamos si sería posible contar con una medida que aprovechara la información brindada por todos los estados explorados por un sistema cuántico en evolución. Tratando de responder a esta pregunta, en la segunda etapa de la tesis proponemos y desarrollamos un enfoque alternativo y complementario el cual es posible aplicar a todos los estados iniciales, incluso a aquellos que no evolucionan a estados que son ortogonales al estado inicial. Nuestro enfoque se basa, de manera directa, en el hecho de que los estados puros admiten diferentes grados de distinción. En pocas palabras, proponemos, como complemento tanto del tiempo de ortogonalidad como del número total asociado de pasos computacionales, usar una medida de la cantidad de evolución de un sistema basada en la distinguibilidad promedio de los estados del sistema a medida que evoluciona. Esta distinción promedio proporciona una evaluación cuantitativa de *cuán diversos son los estados* que el sistema visita durante un intervalo de tiempo determinado. En otras palabras, proporciona una medida de la cantidad de evolución asociada con ese intervalo de tiempo. Otra cuestión que resultó interesante y natural al contar con esta medida, fue explorar aquellos estados que más evolucionan bajo ciertas restricciones, por ejemplo en el valor medio de la energía de un sistema cuántico. Este hecho está relacionado con los problemas típicos de optimización encontrados en la Física. Los resultados que obtuvimos nos permitieron dar una interpretación termoestadística asociada a nuestra medida.

Como argumentamos anteriormente, la investigación sobre el fenómeno del entrelazamiento cuántico ha dado lugar a conocimientos notables. Por ejemplo, el estudio del entrelazamiento aclaró el origen de los estados que describen los sistemas en equilibrio térmico con un baño de calor, sin necesidad de invocar a la distribución microcanónica para el compuesto sistema-baño [142, 143]. Por otro lado, la relevancia conceptual que ha adquirido el entrelazamiento en los desarrollos tecnológicos, está justificando los esfuerzos dedicados por la comunidad de físicos para incorporar las diversas facetas de este concepto a la enseñanza de la QM en las aulas [110, 111, 112, 113, 114,

115, 116, 117, 118, 119].

De manera más radical, el trabajo de investigación que gira en torno al entrelazamiento cuántico también proporcionó una explicación plausible de los orígenes de la evolución dinámica y el flujo del tiempo. Los argumentos concomitantes, según los cuales el tiempo y la dinámica son fenómenos emergentes que surgen de las correlaciones cuánticas, fueron articulados por primera vez por Page y Wootters (PW) con su formalismo *sin tiempo o timeless* [86, 87], aunque ideas relacionadas se habían propuesto previamente en el contexto de la teoría cuántica de la gravedad [122, 144]. Dentro de la imagen sin tiempo PW de la mecánica cuántica [86, 87], se supone que todo el Universo  $U$  está en un estado estacionario global, que es un autoestado del Hamiltoniano total con autovalor de energía cero. La evolución dinámica surge de este estado estático como resultado del entrelazamiento cuántico entre el grado de libertad de un subsistema apropiado, llamado *reloj*, y el *resto del Universo*. Según esta idea, el tiempo y la dinámica son características emergentes del Universo enraizado en el entrelazamiento entre los dos subsistemas. La ecuación independiente del tiempo de Schrödinger que describe el estado estacionario global del sistema compuesto  $R + C$  recuerda a la célebre ecuación de Wheeler-DeWitt en cosmología cuántica, que describe un estado estacionario con valor propio cero para la función de onda de todo el Universo (cerrado) [122, 144].

El enfoque *timeless* de la mecánica cuántica de PW se ha elaborado y ampliado en varias direcciones, tanto desde el punto de vista teórico como experimental [88, 89, 129, 130, 131, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 158]. La sana controversia que se puede ver en [88, 147] ha fortalecido la investigación sobre la propuesta de PW, estimulando la exploración de sus posibilidades. La imagen sin tiempo fue criticada por Albrecht e Iglesias [147], quienes señalaron aparentes ambigüedades con respecto a opciones no equivalentes para el subsistema del reloj. Los subsecuentes contra argumentos de Marletto y Vedral [88] demostraron que estas ambigüedades no surgen si se tienen en cuenta cuidadosamente las propiedades que necesita un subsistema para ser aceptable como reloj. El trabajo reciente informado en la literatura da cuenta de las profundas y múltiples implicaciones de la imagen sin tiempo de la mecánica cuántica. La investigación en este tema ha llevado a reconsiderar cuestiones fundamentales bien conocidas, como el famoso argumento de Pauli sobre la imposibilidad de un tiempo observable (dado por un operador temporal) en la mecánica cuántica [149]. Se han descubierto nuevas facetas del tiempo en la mecánica cuántica, como su conexión básica con la coherencia cuántica [150]. También se han realizado interesantes incursiones en escenarios relativistas, con la implementación del esquema PW para partículas de Dirac [151] y de escalares [152]. Un formalismo similar al que se esconde detrás de la imagen sin tiempo ha llevado al desarrollo de nuevas técnicas computacionales prácticas para problemas de dinámica cuántica, que se reformulan como problemas de valores propios del estado fundamental [153]. Más allá de las consideraciones teóricas, en los últimos años se han realizado con éxito experimentos concretos que ilustran la imagen sin tiempo [130, 154, 155].

A pesar de los recientes esfuerzos, muchos aspectos de este enfoque permanecen sin explorar. Motivados por esta interesante propuesta, nos dedicamos a investigar la conexión entre el entrelazamiento, el formalismo *timeless* y las ideas desarrolladas acerca de la distinguibilidad promedio entre los distintos estados (puros y mixtos) aplicadas al sistema compuesto reloj-resto del Universo.

#### 1.4.1. Estructura de la tesis

Los trabajos desarrollados durante esta carrera de doctorado, que incluyen revisión de literatura e investigación, sumado a los numerosos aciertos y desaciertos, nos han permitido generar un



volumen significativo de información. Para volcar todos estos contenidos al cuerpo de esta tesis, le hemos dado una estructura que intenta reflejar las distintas etapas de su evolución. Cada una de ellas se encuentra compilada y organizada en los distintos capítulos que el lector va recorrer.

En la primera parte de nuestro trabajo, Capítulo 2, establecemos algunos aspectos geométricos de los estados cuánticos, introducimos la definición del espacio proyectivo de Hilbert, la noción de distancia entre estados y el concepto de una curva de estados cuánticos dentro de este espacio. Relacionado a esto, nos enfocamos en cómo obtener una curva especial —*geodésica*—, que conecta distintos estados de un sistema. Exploramos luego la cantidad de entrelazamiento de un sistema bipartito cuando sus estados evolucionan geodésicamente.

Con el Capítulo 3 iniciamos la segunda etapa de la tesis. Introducimos aquí una medida complementaria al concepto de distinguibilidad de estados cuánticos —*indicador de cantidad de evolución*—, con la intención de estudiar la cantidad de evolución que exhiben los sistemas cuánticos durante un intervalo de tiempo. Investigamos algunas de sus propiedades y su comportamiento en distintos sistemas. Estudiamos brevemente una conexión entre esta medida y el entrelazamiento para sistemas bipartitos en estado puro, los resultados encontrados aquí son disparadores para la tercer y última etapa de la tesis. Exploramos a continuación, en el Capítulo 4, la relación de esta medida con la entropía lineal de la distribución de energía asociada con el estado cuántico (puro) del sistema. Esto nos permite luego estudiar un problema variacional entrópico que optimiza la medida introducida. Los trabajos que se describen en estos dos capítulos tienen resultados originales que dieron lugar a una publicación [156].

En la tercer etapa de la tesis que comienza con el Capítulo 5, retomamos los resultados encontrados en la última parte del Capítulo 3. Exploramos en primer lugar el papel del entrelazamiento dentro del intrigante formalismo *timeless* de la QM. Este enfoque intenta dar una explicación de la emergencia del tiempo en teorías con leyes dinámicas que, esencialmente en su formulación inicial, son estáticas o están caracterizadas por estados congelados. Este hecho conocido en la Física moderna como el *problema del tiempo*, es un campo activo de investigación y con interesantes aportes a la literatura. Vamos a describir brevemente en este capítulo solo una faceta del origen de este problema. Luego estudiamos, dentro de este enfoque, la conexión con nuestra medida y el entrelazamiento para estados puros de sistemas cuánticos bipartitos. Este trabajo contiene resultados originales que fueron publicados [157].

Finalizamos la tercer etapa mostrando los resultados logrados en el Capítulo 6. Aquí realizamos una investigación, extendiendo los resultados mostrados en el Capítulo 5, dentro del formalismo sin tiempo, pero esta vez involucrando los estados mixtos de un sistema cuántico compuesto. Nos focalizamos en la relaciones cuantitativas que vinculan el entrelazamiento del sistema compuesto con la evolución dinámica experimentada por el sistema. El aporte original de este capítulo fue publicado recientemente en [171].

Si bien al finalizar cada capítulo resaltamos las conclusiones parciales de nuestros resultados más significativos, el Capítulo 7 lo destinamos a exponer una conclusión general de estos trabajos, comentamos posibles desarrollos y damos así el cierre de esta tesis.



---

## Evoluciones geodésicas en espacios de Hilbert y entrelazamiento

---

*“Geometry is the gate of science, and the gate is so low and small that one can only enter it as a child.”*

William Kingdon Clifford

### 2.1. Introducción

El enfoque geométrico de la mecánica cuántica juega un papel fundamental no solo en cuestiones fundacionales sino también en las aplicaciones de la teoría; por ejemplo, en el procesamiento de información cuántica, solo por mencionar un tema muy relevante [40]. En este capítulo proporcionamos una investigación de la evolución óptima cuántica desde una perspectiva geométrica. Nuestra propuesta se inspira en el formalismo cinemático de Simon y Mukunda [41] presentado en sus investigaciones de la fase geométrica en el espacio de Hilbert.

Otra forma de analizar este tema se basa en el método de máxima entropía combinado con conceptos de geometría de la información que permiten modelar el espacio de estados físicos como una variedad estadística y aprovechar las estructuras geométricas subyacentes para describir las propiedades cinemáticas del espacio de estados [42, 43].

El conjunto de todas las configuraciones posibles de un sistema cuántico se encuentra embebido en una variedad<sup>1</sup> geométrica de Riemann [40]. Esto permite aprovechar la existencia de ciertos

---

<sup>1</sup>Técnicamente se dice que un conjunto  $M$  es una *variedad diferenciable* de dimensión  $m$  si: (i)  $M$  es un espacio topológico; (ii)  $M$  posee una familia de cartas o coordenadas  $\{(U_i, \phi)\}$  (un atlas); (iii)  $\{U_i\}$  es una familia de conjuntos abiertos que cubren a  $M$ ,  $\cup_i U_i = M$ .  $\phi$  es un homeomorfismo desde  $U_i$  hacia un abierto  $U'_i \subset \mathbb{R}^m$ ; y (iv) dado  $U_i, U_j / U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , el mapa  $\psi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$  desde  $\phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$  es infinitamente diferenciable. En otras palabras, es un conjunto abstracto que localmente se parece a  $\mathbb{R}^m$ . Un *homeomorfismo* es un mapa continuo, entre espacios topológicos, con inversa continua. Y finalmente, dado un conjunto  $X$ , un *espacio topológico*  $(X, \mathcal{T})$  es una colección  $\mathcal{T}$  de subconjuntos abiertos  $U_i$  de  $X$ , que satisfacen: (i) el  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ , (ii) la intersección de cualquier subcolección finita de conjuntos de  $\mathcal{T}$  está en  $\mathcal{T}$  y (iii) la unión de cualquier subcolección de conjuntos de  $\mathcal{T}$  está en  $\mathcal{T}$ .

cuantificadores geométricos para establecer restricciones en la evolución de un estado cuántico; por ejemplo, en el tiempo necesario para cambiar de un estado a otro. Esto es así porque existe una longitud finita (diferente de cero) que debe recorrerse en el espacio de estados. El tiempo total requerido también es una función de los procesos cuánticos asociados a la evolución dinámica. De hecho, la trayectoria en el espacio de estados y la velocidad de evolución instantánea están determinadas por procesos cuánticos. La trayectoria seguida por los estados cuánticos estará determinada en última instancia por los procesos cuánticos que a su vez determinan la evolución. Es oportuno observar que el problema del límite de la evolución temporal se puede enunciar en términos de la *distinguibilidad* de los estados cuánticos y, por lo tanto, en términos de distancias entre ellos.

El problema de la evolución temporal óptima en sistemas cuánticos ha suscitado un interés considerable por su relevancia tanto desde el punto de vista fundamental como práctico. Varios trabajos se centran en los límites impuestos por las leyes básicas de la mecánica cuántica sobre la velocidad de procesamiento y transmisión de información. La velocidad con la que se puede realizar una operación lógica está limitada por la dispersión de energía y por la energía media del sistema [44, 45]. Estos problemas se relacionan con la optimización del tiempo necesario para realizar un algoritmo cuántico. La manipulación óptima de sistemas cuánticos por un campo externo para lograr una tarea deseada [46] juega un papel clave en la computación cuántica y el procesamiento de información cuántica [107].

El formalismo de la braquistócrona cuántica (QB, por sus siglas en inglés) propuesto por Carlini et al [52] da una respuesta a cuál es el Hamiltoniano óptimo que, bajo determinadas restricciones, permite la evolución entre estados fijos inicial y final en el menor tiempo posible. Este formalismo se basa en un principio variacional que impone la evolución óptima en el tiempo de un sistema cuántico con un Hamiltoniano sujeto a restricciones. En este enfoque se define un problema de valor de frontera con estados cuánticos iniciales y finales fijos. Usando las propiedades de simetría del espacio de estados cuánticos y el conjunto idéntico de restricciones establecidas por Carlini y sus colaboradores, Brody y Hook [54] llegan a la misma solución para la evolución en el tiempo del estado óptimo y el Hamiltoniano óptimo. También se ha establecido recientemente la conexión entre el entrelazamiento y la evolución óptima en el tiempo del sistema [47, 48, 49, 51, 82]. En particular, en [51] se ha explorado la conexión entre la aceleración del entrelazamiento y la evolución de la QB de un estado inicial fijo a un estado final (ortogonal) en el menor tiempo posible con una adecuada restricción en el valor de la energía.

Los recientes desarrollos sobre la generalización del límite de velocidad cuántica (QSL, por sus siglas en inglés) para procesos físicos, principalmente para el campo de los sistemas cuánticos abiertos, han proporcionado nuevos conocimientos sobre el problema de QSL [55, 56, 79]. Se ha encontrado una familia de límites de velocidad cuántica válidos para evoluciones unitarias y no unitarias basadas en un formalismo geométrico de información [50].

En este capítulo daremos en primer lugar algunos conceptos utilizados en el enfoque geométrico de la mecánica cuántica, definiremos lo que es una curva en el espacio de estados cuánticos y en especial nos enfocaremos en las *curvas geodésicas*. En segundo lugar, utilizando este tratamiento geométrico vamos a calcular la cantidad de entrelazamiento involucrado cuando dos estados dados están conectados por una geodésica. Presentaremos este capítulo de la siguiente manera: en la sección 2.2 introducimos el formalismo necesario para caracterizar los estados de un sistema cuántico en forma geométrica. La sección 2.3 está dedicada a la derivación de la ecuación de la curva geodésica y a su solución. Debido al carácter técnico de algunos conceptos involucrados en esta sección, elaboramos un apéndice el cual complementa estos conceptos. Analizamos luego la canti-

dad de entrelazamiento involucrado en estas evoluciones geodésicas en la sección 2.4. Finalmente, abordaremos algunas conclusiones en la sección 2.5.

## 2.2. Estructura geométrica del espacio de estados cuántico

El enfoque usual de la mecánica cuántica es lineal y algebraico, de acuerdo con esto se describe un sistema cuántico en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Este espacio está equipado con una estructura geométrica rica originada en el producto interno hermitiano  $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ . Esto es, para dos estados  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ , podemos descomponer el producto en una parte real y una imaginaria<sup>2</sup>:

$$\langle \psi | \phi \rangle = G(|\psi\rangle, |\phi\rangle) + i\Omega(|\psi\rangle, |\phi\rangle). \quad (2.1)$$

Se puede verificar que  $G$  es un producto interno real, definido positivo en  $\mathcal{H}$ , en otras palabras,  $G(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \text{Re} \langle \psi | \phi \rangle$  es una métrica de Riemann que satisface  $G(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = G(|\phi\rangle, |\psi\rangle)$ . Además  $\Omega(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \text{Im} \langle \psi | \phi \rangle$ , es una forma simpléctica que satisface  $\Omega(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = -\Omega(|\phi\rangle, |\psi\rangle)$  y  $\Omega(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = G(|\psi\rangle, i|\phi\rangle)$ . Técnicamente, estas dos estructuras definen una estructura *Kähler* en  $\mathcal{H}$ . Por lo tanto, el espacio de Hilbert es un espacio *Kähler*.

Cualquier sistema físico en un *estado puro* esta representado por una función de onda o vector  $|\psi(x, t)\rangle$  que para cada valor de la variable  $x$  (continua o discreta) y cualquier valor del tiempo  $t$  pertenece a un espacio de Hilbert complejo  $\mathcal{H}$ . La representación del sistema y sus propiedades físicas para todo  $t$  mediante este vector de estado dependen a lo más de un factor de fase complejo. En otras palabras, el estado del sistema no solo está dado por  $|\psi(x, t)\rangle$  en sí mismo, sino por una clase de equivalencia módulo transformaciones de la forma:

$$|\psi'(x, t)\rangle = e^{i\alpha(t)} |\psi(x, t)\rangle, \quad (2.2)$$

para cualquier función real dependiente del tiempo  $\alpha(t)$ .

Por lo general, se suele restringir la atención al conjunto de vectores distintos de cero con norma unitaria, que denotaremos aquí por  $\mathcal{N}_0$ . Formalmente, este conjunto representa una esfera unitaria en  $\mathcal{H}$  definida por:

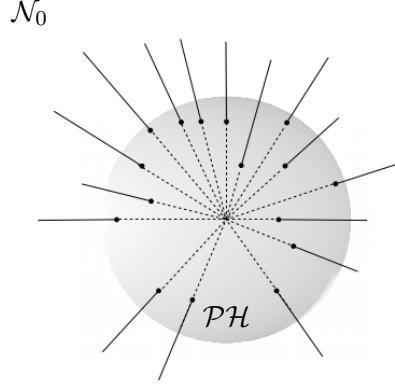
$$\mathcal{N}_0 \equiv S(\mathcal{H}) := \{|\psi\rangle \in \mathcal{H} : \langle \psi | \psi \rangle = 1\}. \quad (2.3)$$

Sin embargo, dado que cualesquiera dos estados normalizados que difieren en una fase representan el mismo estado físico, esto permite introducir una relación de equivalencia  $\sim$  dada por (2.2). Entonces, el verdadero espacio de estados del sistema cuántico viene dado por el espacio cociente de  $S$  por la acción del Grupo de Lie  $U(1) = \{g(t) \in \mathbb{C} : g(t) = e^{i\alpha(t)}, \alpha(t) \in \mathbb{R}\}$ . Este espacio es el espacio proyectivo de Hilbert  $\mathcal{PH}$  [40, 62]:

$$\mathcal{PH} = S(\mathcal{H}) / \sim \text{espacio de fase cuántico}. \quad (2.4)$$

En otras palabras, si  $|\psi\rangle \in S(\mathcal{H})$ , luego la clase de equivalencia  $[[\psi]] = \{e^{i\alpha} |\psi\rangle : 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$  representa un punto en  $\mathcal{PH}$ , esto es, un rayo uni-dimensional a través del origen en  $\mathcal{H}$  como se muestra en la figura 2.1. Por esta razón decimos simplemente que el estado del sistema está dado, en cualquier momento, por un “rayo” que pasa por el origen en  $\mathcal{H}$ . Todas las operaciones de la QM pueden referirse directamente al espacio  $\mathcal{PH}$ , sin considerar al propio  $\mathcal{H}$ .

<sup>2</sup>Referencias apropiadas para iniciarse en este tratamiento geométrico son: [34, 59, 60, 61, 65, 66, 67, 83].



**Figura 2.1:** Representación del espacio de fase cuántico o espacio proyectivo de Hilbert  $\mathcal{P}\mathcal{H}$ .

La clase de equivalencia  $[|\psi\rangle]$  nos permite definir este espacio proyectivo mediante el operador proyector uni-dimensional:

$$|\psi\rangle \longrightarrow \hat{P}_{|\psi\rangle} := |\psi\rangle\langle\psi| = \Pi, \quad (2.5)$$

el cual implica que  $\mathcal{P}\mathcal{H}$  es el espacio de los proyectores de dimensión 1 en  $\mathcal{H}$ . Técnicamente, esta construcción define el fibrado principal-  $U(1)$ :

$$U(1) \longrightarrow S(\mathcal{H}) \xrightarrow{\Pi} \mathcal{P}\mathcal{H} \quad (2.6)$$

sobre el espacio base  $\mathcal{P}\mathcal{H}$ . Así, para cualquier vector  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , la fibra correspondiente:

$$\Pi^{-1}([|\psi\rangle]) = \left\{ \frac{e^{i\alpha} |\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \in S(\mathcal{H}) \right\} \quad (2.7)$$

puede identificarse con el grupo de Lie  $U(1)$ . Podemos notar también que el conjunto  $\mathcal{N}_0$  define los estados cuánticos puros. Luego cada punto en  $\mathcal{P}\mathcal{H}$  obtenido por el proyector  $\Pi$  corresponde unívocamente a operadores de densidad de estados puros  $\rho$ . Esto es, para un dado estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{N}_0$ , el proyector canónico  $\Pi$  sobre  $\mathcal{P}\mathcal{H}$  es justamente el operador densidad para estados puros:

$$|\psi\rangle \in \mathcal{N}_0 : \Pi(|\psi\rangle) := \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (2.8)$$

Este operador satisface  $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ ,  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$  y  $\text{Tr}\hat{\rho} = 1$ .

Podemos considerar el formalismo anterior para un sistema cuántico de dimensión finita. En este caso, el espacio de Hilbert está dado por el espacio complejo de dimensión  $(n+1)$ ,  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{n+1}$ , el conjunto de estados unitarios está dado por  $\mathbb{S}^{2n+1}$ , y la esfera unitaria en  $\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$ . De esta manera podemos construir el siguiente fibrado principal:

$$U(1) \longrightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \xrightarrow{\Pi} \mathbb{C}P^n. \quad (2.9)$$

El espacio de fase cuántico  $\mathcal{P}\mathcal{H}$  es un espacio proyectivo complejo que corresponde al espacio cociente de la esfera  $\mathbb{S}^{2n+1}$  módulo la acción de  $U(1)$ :

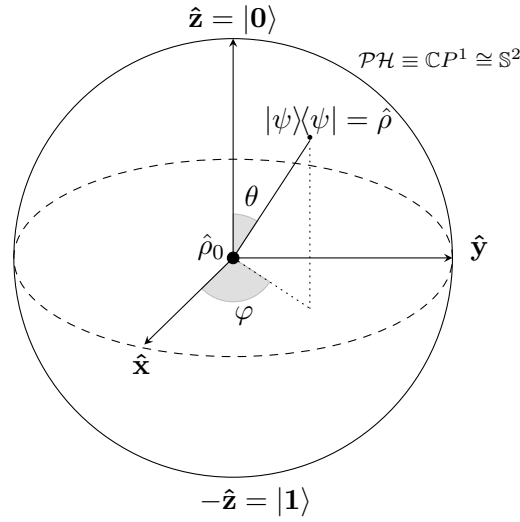
$$\mathbb{C}P^n = \mathbb{S}^{2n+1}/U(1). \quad (2.10)$$

Para dar un ejemplo simple de esta construcción, consideremos el espacio de estados cuánticos de un sistema de 2-niveles. En teoría clásica de información, la unidad de información básica es el *bit*,

una variable que puede tomar dos valores 0 o 1. En cuántica, su análogo es el bit cuántico o *qubit*, el cual es una superposición compleja (normalizada) de los valores 0 y 1. Por lo tanto, a diferencia del estado de un bit clásico (que solo puede tener dos valores diferentes), un estado  $|\psi\rangle$  de un qubit puede asumir infinitos valores diferentes de la forma:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = e^{i\gamma} \left( \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right), \quad (2.11)$$

donde  $\gamma, \phi \in \mathbb{R}$ . La fase global  $e^{i\gamma}$  no tiene efectos físicos observables y es eliminada al considerar el espacio cociente. En efecto, el estado  $|\psi\rangle$  está definido en  $S(\mathcal{H}) = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : |a| + |b| = 1\}$ . Los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  son autoestados del operador de Pauli adimensional  $\hat{\sigma}_z = \frac{2}{\hbar} \hat{S}_z$  y se conocen en información cuántica como los estados base computacional [14, 16, 17, 18, 19, 107]. En este caso simple tenemos que  $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{S}^3/U(1) \cong \mathbb{S}^2$ . Esta esfera, mostrada en la figura 2.2 y de dimensión dos, recibe el nombre de *esfera de Bloch* [18] y podemos decir que define un verdadero espacio de estados cuánticos.



**Figura 2.2:** Esfera de Bloch como representación del espacio proyectivo  $\mathcal{P}\mathcal{H} \equiv \mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{S}^2$

Luego, el mapa  $\Pi$  está definido por

$$\Pi(a, b) := x_i = \langle \psi | \hat{\sigma}_i | \psi \rangle = (a^*, b^*) \hat{\sigma}_i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

donde  $\hat{\sigma}_i, i = x, y, z$  son las matrices de Pauli.

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

El estado mixto más simple está definido por:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left( \mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\sigma}_i \right) = \begin{pmatrix} 1 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & 1 - x_3 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

con  $\mathbb{1}$  la matriz identidad  $2 \times 2$  y las coordenadas  $x_1 = \langle \psi | \hat{\sigma}_1 | \psi \rangle = 2\text{Re}(a^*b)$ ,  $x_2 = \langle \psi | \hat{\sigma}_2 | \psi \rangle = 2\text{Im}(a^*b)$  y  $x_3 = \langle \psi | \hat{\sigma}_3 | \psi \rangle = |a| - |b|$  con la restricción  $\det \hat{\rho} = 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \geq 0$  representan las componentes del vector de Bloch:

$$\hat{\rho} := \frac{1}{2} \left( \mathbb{1} + \vec{x} \cdot \vec{\hat{\sigma}} \right). \quad (2.15)$$

Para un estado puro tenemos  $\det \hat{\rho} = 0$ . Esto es, los estados puros de este sistema de dos niveles se encuentran en la frontera de  $\mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{S}^2$  y los estados máximamente mezclados  $\hat{\rho}_0 = \frac{1}{2}\mathbb{1}$  se encuentran en el centro.

Se puede demostrar que el producto interno (2.1) en  $\mathcal{H}$  induce en el espacio  $\mathcal{PH}$  una estructura de Kähler definida por el par  $(g, \omega)$ , donde  $g$  es una métrica de Riemann y  $\omega$  una 2-forma simpléctica. Una exposición detallada de estos temas se puede encontrar en [34, 58, 59, 60, 61, 65, 66, 67].

### 2.2.1. Una métrica para el espacio proyectivo de Hilbert

El papel de la métrica de Riemann  $g$  en  $\mathcal{PH}$  se puede aclarar fácilmente en términos de la probabilidad de transición entre dos estados  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle \in \mathcal{PH}$ . Es en este contexto probabilístico en el que surge el concepto de distancia entre dos estados [57]. La probabilidad de transición determina un ángulo  $\theta$  en  $\mathcal{PH}$ :  $|\langle \psi | \phi \rangle|^2 = \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$ . Si los estados coinciden,  $\theta = 0$ ; para estados ortogonales tenemos  $\theta = \pi$ , la distancia máxima. De otra manera, este ángulo define una *distancia geodésica* entre los estados  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle$  en  $\mathcal{PH}$  [58, 60], conocida como *distancia de Fubini-Study* ( $FS$ ):

$$|\langle \psi | \phi \rangle|^2 = \cos^2 \left( \frac{\theta_{FS}}{2} \right) = \frac{\langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle \langle \phi | \phi \rangle}. \quad (2.16)$$

Para determinar la métrica  $g$  que mide distancias en  $\mathcal{PH}$ ,<sup>3</sup> consideramos dos estados separados por una distancia infinitesimal  $ds$  en  $\mathcal{PH}$ ,  $|\psi\rangle$  y  $|\phi\rangle = |\psi\rangle + |d\psi\rangle$  y ponemos  $\theta_{FS} = ds_{FS}$  en la expresión de la probabilidad de transición (2.16). Un cálculo detallado a segundo orden, proporciona una hermosa correspondencia entre la separación de puntos en  $\mathcal{PH}$  y el módulo (cuadrado) del producto interno hermitiano en  $\mathcal{PH}$ , esto es:

$$\cos^2 \left( \frac{ds_{FS}}{2} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2!} \frac{ds_{FS}^2}{4} + \mathcal{O}(ds_{FS}^4) \right)^2 \simeq 1 - \frac{ds_{FS}^2}{4}, \quad (2.17)$$

teniendo en cuenta que la normalización de los estados implica:

$$2 \text{Re}(\langle \psi | d\psi \rangle) = - \langle d\psi | d\psi \rangle, \quad (2.18)$$

(expresión sobre la que volveremos más adelante), llevando estos resultados a (2.16) encontramos que la forma diferencial de la distancia está dada por:

$$ds_{FS}^2 = 4(\langle d\psi | d\psi \rangle - |\langle \psi | d\psi \rangle|^2). \quad (2.19)$$

<sup>3</sup>Técnicamente, el espacio de Hilbert  $(\mathcal{H}, G, \Omega)$  está dotado de una estructura Riemanniana ( $G$ ) y simpléctica ( $\Omega$ ). El conjunto  $S(\mathcal{H})$  hereda esta estructura  $(S, \tilde{G}, \tilde{\Omega})$ . Ahora, el mapa definido en (2.5),  $\Pi : S \rightarrow \mathcal{PH}$  induce naturalmente el mapa  $\Pi^*$  conocido como el *pull-back*, definido por su acción de “regresar la estructura” de  $\mathcal{PH}$  a  $S$ , esto es:  $\Pi^*\omega = \tilde{\Omega}$ , y  $\Pi^*g = \tilde{G}$ . La estructura en  $\mathcal{PH}$  resulta entonces:  $(\mathcal{PH}, g, w)$ . Se puede demostrar que el par  $(g, w)$  es compatible en el sentido de que define también una estructura de Kähler en  $\mathcal{PH}$ . Dado que el espacio de los estados cuánticos  $\mathcal{PH}$  es una variedad de Kähler, es, en particular, un espacio simpléctico y, por lo tanto, puede considerarse como un “espacio de fase (cuántico)”, terreno por donde los conceptos geométricos de la CM entran al reino de la QM [60, 61, 65, 66, 67].

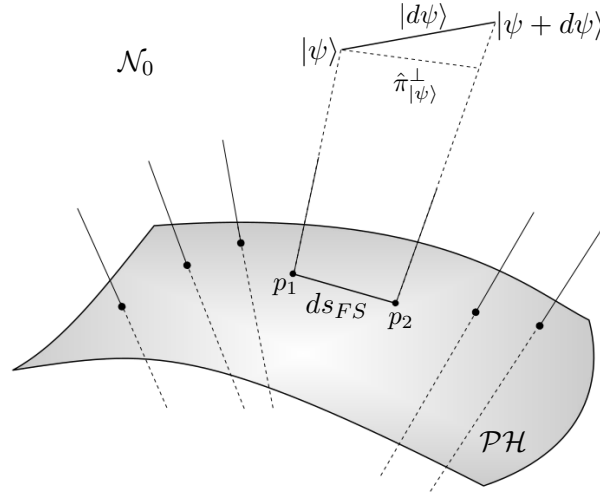


Esta expresión es la *métrica de Fubini-Study*, escrita de manera independiente de las coordenadas y está bien definida tanto en dimensión finita como infinita. Equivalentemente, si consideramos la componente ortogonal de  $|d\psi\rangle$  respecto del estado  $|\psi\rangle$ , como se indica en la figura 2.3, en otras palabras, si a  $|d\psi\rangle$  le restamos su proyección ortogonal sobre el estado  $|\psi\rangle$ , esto es:

$$|d\psi\rangle_{\perp} = |d\psi\rangle - |\psi\rangle (\langle\psi|d\psi\rangle), \quad (2.20)$$

la métrica de Fubini-Study se puede expresar como<sup>4</sup>:

$$ds_{FS}^2 = 4 \langle d\psi | d\psi \rangle_{\perp}. \quad (2.21)$$



**Figura 2.3:** Representación del elemento de arco dado por la métrica de Fubini-Study  $ds_{FS}$ . Se muestra el espacio  $\mathcal{N}_0$  y el espacio proyectivo de Hilbert  $\mathcal{PH}$ . Los puntos  $p_1, p_2 \in \mathcal{PH}$  indican las proyecciones respectivas de dos estados cercanos y normalizados  $|\psi\rangle$  y  $|\psi + d\psi\rangle$ . Se define el cuadrado de la distancia entre los puntos  $p_1$  y  $p_2$  como el cuadrado de la proyección de  $|d\psi\rangle$  sobre el subespacio ortogonal al estado  $|\psi\rangle$ , es decir, la proyección dada por el operador  $\hat{\pi}_{|\psi\rangle} = \mathbb{1} - |\psi\rangle\langle\psi|$ .

Una exposición detallada de esta métrica se puede encontrar en [66, 67] donde se estudia en el contexto de las variedades complejas, como por ejemplo, los espacios simétricos hermitianos y los espacio complejos de Grassmann y variedades Kähler, que son espacios proyectivos complejos de dimensión- $n$ .

Se puede demostrar que esta métrica es invariante bajo la acción  $U(1)$  (aun así es invariante bajo transformación antiunitaria) y por lo tanto es una isometría en  $\mathcal{PH}$ . Por tanto, la unitaridad dada por la ecuación de Schrödinger y todas las simetrías unitarias y antiunitarias en  $\mathcal{H}$  son isometrías en  $\mathcal{PH}$ . Cabe señalar que, si bien las simetrías como las rotaciones y las traslaciones de Galileo tienen una representación proyectiva en  $\mathcal{H}$ , siempre tienen una representación fiel en  $\mathcal{PH}$  [58].

Observemos que esta métrica, aunque escrita en términos de vectores, mide distancias solo en  $\mathcal{PH}$  y no en  $\mathcal{H}$ . Notemos además que para un sistema de 2 niveles (qubit) descrito en  $\mathbb{C}P^1$ , la métrica de Fubini-Study reproduce allí la métrica estándar de la esfera  $\mathbb{S}^2$ .

La formulación de la QM en forma geométrica y en particular el concepto de distancia entre estados dado por la métrica de Fubini-Study resaltan la conexión entre la noción de probabilidad y

<sup>4</sup>Las expresiones (2.19, 2.20, y 2.21) serán mencionadas nuevamente dentro de un enfoque cinemático.

distancia. Es decir, la distancia geodésica con respecto a la métrica de Fubini-Study determina la probabilidad de transición entre dos estados. A continuación, nos centraremos en las curvas geodésicas. Estas curvas se pueden derivar integrando la métrica de Fubini-Study y representan las curvas óptimas que minimizan la distancia entre dos estados en  $\mathcal{PH}$ .

### 2.2.2. Curvas a partir de estados cuánticos

Comencemos considerando un espacio de Hilbert complejo, finito o infinito  $\mathcal{H}$  y dos subconjuntos de  $\mathcal{H}$ . Como es usual, usaremos vectores normalizados del conjunto  $\mathcal{N}_0$  el cual es un subconjunto del conjunto de vectores no nulos  $\mathcal{N}$  del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , es decir,  $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ . Notemos que ni  $\mathcal{N}$  o  $\mathcal{N}_0$  son espacios lineales [41].

Podemos definir una curva monoparamétrica diferenciable  $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{N}_0$ , la cual consiste de una familia de vectores  $|\psi(t)\rangle$ , donde  $t \in I = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$  es el parámetro real de la curva. La curva  $\mathcal{C}_0$  definida de esta forma puede ser una porción de una curva suave más larga en  $\mathcal{N}_0$ , y esta puede ser abierta o cerrada. No haremos otras suposiciones acerca de las propiedades de esta curva, y la definimos como:

$$\mathcal{C}_0 = \{|\psi(t)\rangle \in \mathcal{N}_0 / t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}\} \subset \mathcal{N}_0. \quad (2.22)$$

De la condición de que el estado  $|\psi(t)\rangle$  es un vector unitario para todo valor del parámetro  $t$ , resultan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1 &\rightarrow \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \dot{\psi}(t) | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle \\ &= \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle^* + \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle \\ &= 2 \operatorname{Re}(\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle) = 0 \end{aligned}$$

esto es:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle) &= 0, \\ \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle &= i \operatorname{Im}(\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle), \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde  $|\dot{\psi}(t)\rangle = d|\psi(t)\rangle / dt := |u(t)\rangle$ .

La acción del grupo  $U(1)$  sobre los estados  $|\psi\rangle$  nos da la libertad de realizar un cambio suave sobre la fase del vector  $|\psi(t)\rangle$  en cada valor del parámetro  $t$ . Este cambio está definido por una función suave, real  $\alpha(t)$  y representa una *transformación de gauge*. Dicho de otra manera, la transformación de gauge es un mapa de la curva  $\mathcal{C}_0$  en la nueva curva  $\mathcal{C}'_0$

$$\mathcal{C}_0 \mapsto \mathcal{C}'_0 : |\psi'(t)\rangle = e^{i\alpha(t)} |\psi(t)\rangle, \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (2.24)$$

Bajo esta transformación de gauge, las relaciones dadas en (2.23) transforman como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\psi'(t)\rangle &= (i \dot{\alpha}(t) |\psi(t)\rangle + |\dot{\psi}(t)\rangle) e^{i\alpha(t)} \\ \langle \psi'(t) | \dot{\psi}'(t) \rangle &= \langle \psi(t) | (i \dot{\alpha}(t) |\psi(t)\rangle + |\dot{\psi}(t)\rangle) \\ &= i \dot{\alpha}(t) + \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle = i(\dot{\alpha}(t) + \operatorname{Im}(\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle)), \end{aligned} \quad (2.25)$$

es decir:

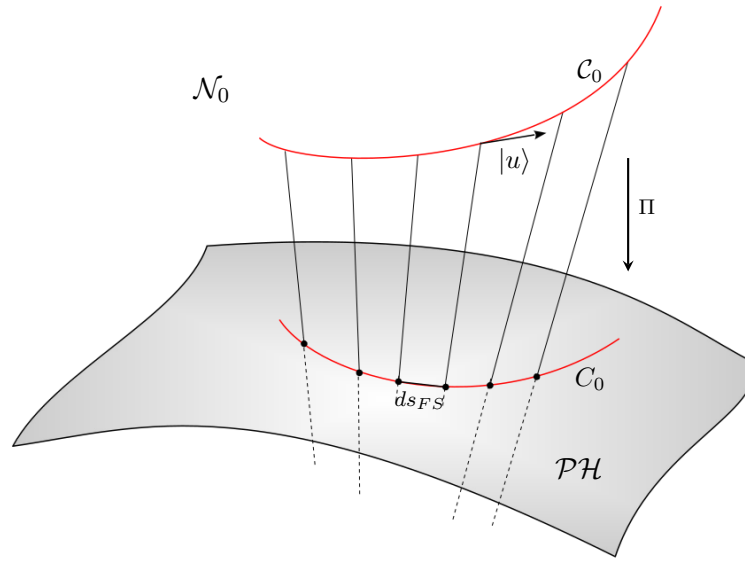
$$\operatorname{Im}(\langle \psi'(t) | \dot{\psi}'(t) \rangle) = \operatorname{Im}(\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle) + \dot{\alpha}(t). \quad (2.26)$$

Podemos dar una interpretación al resultado anterior considerando el espacio cociente de  $\mathcal{N}_0$  módulo  $U(1)$ . Consideremos el mapa  $\Pi$  que proyecta los estados según:

$$\begin{aligned}\Pi : \mathcal{N}_0 &\longmapsto \mathcal{N}_0/U(1) = \mathcal{PH}, \\ \Pi(\mathcal{N}_0) &= \mathcal{PH}, \\ \Pi(e^{i\alpha} |\psi\rangle) &= \Pi(|\psi\rangle) \in \mathcal{PH},\end{aligned}\tag{2.27}$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $|\psi\rangle \in \mathcal{N}_0$ . El mapa  $\Pi$  proyecta la curva  $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{N}_0$  sobre una curva suave  $C_0 \subset \mathcal{PH}$  como se indica en la figura 2.4. Dada la acción del grupo  $U(1)$  (2.24), la nueva curva  $\mathcal{C}'_0$  se proyecta sobre la misma curva imagen que  $\mathcal{C}_0$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{N}_0 &\rightarrow C_0 = \Pi(\mathcal{C}_0) \subset \mathcal{PH}; \\ \Pi(\mathcal{C}'_0) &= \Pi(\mathcal{C}_0).\end{aligned}\tag{2.28}$$



**Figura 2.4:** Representación geométrica de las expresiones (2.27 y 2.28). Se muestra la curva  $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{N}_0$  con su vector tangente, y la proyección  $\Pi(\mathcal{C}_0) = C_0 \subset \mathcal{PH}$ .

Otra propiedad destacable que tienen algunas curvas y que es importante mencionar tiene que ver con su *invariancia ante reparametrización*, esto es, cambiando el parámetro de la curva  $t$  por  $s$ , con  $s = s(t)$  una función uniforme y monótona creciente, obtenemos una curva recorrida con una velocidad diferente:  $\mathcal{C}_{0,s} = \{|\psi(s)\rangle \in \mathcal{N}_0 : s \in [s_1, s_2] \subset \mathbb{R}\}$ , es decir,  $|\psi(s(t))\rangle = |\psi(t)\rangle$ ,  $|\psi(s_1)\rangle = |\psi(t_1)\rangle$ ,  $|\psi(s_2)\rangle = |\psi(t_2)\rangle$ .

### 2.2.3. Operadores naturales en $\mathcal{PH}$

Vamos a mostrar aquí, en primer lugar, la forma que adopta una curva de estados en  $\mathcal{PH}$  y a continuación cómo definir (construir) un operador hermitiano, que funciona como un Hamiltoniano, en términos de los estados que generan la curva.

Para empezar, notemos que cada uno de los estados  $|\psi\rangle \in \mathcal{N}_0$  define un estado cuántico puro, entonces vía la proyección canónica (2.8) cada estado representa un punto en  $\mathcal{PH}$  y se corresponde

unívocamente con un operador densidad de estado puro, esto es:

$$|\psi\rangle \in \mathcal{N}_0 : \Pi(|\psi\rangle) = \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{PH} \quad (2.29)$$

Este operador posee todas las características que se demandan a un operador densidad: hermiticidad, definido positivo, idempotente y de traza unitaria. Recíprocamente, dado el operador  $\rho$  (un punto en  $\mathcal{PH}$ ), el vector  $|\psi\rangle \in \mathcal{PH}$  está determinado salvo una fase. Supongamos ahora que tenemos la curva  $\mathcal{C}_0 = |\psi(t)\rangle \subset \mathcal{N}_0$ . Su proyección  $\Pi(\mathcal{C}_0)$  (2.8) sobre  $\mathcal{PH}$  es la curva:

$$\mathcal{C}_0 = \hat{\rho}(t) \subset \mathcal{PH}, \quad \hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|. \quad (2.30)$$

Notemos que este operador es invariante ante transformaciones de gauge realizada sobre la curva  $\mathcal{N}_0$  (2.24).

#### *Familia monoparamétrica* $\hat{H}(t)$

Dada la curva  $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{N}_0$  podemos construir una familia monoparamétrica de operadores  $H(t)$  usando los estados de la curva y su rapidez. La forma más general que podemos construir, pidiendo que este operador sea lineal, hermitiano y reproduzca la ecuación de Schrödinger para el estado  $|\psi(t)\rangle$ , es

$$\hat{H}(t) := A|u(t)\rangle\langle\psi(t)| + B|\psi(t)\rangle\langle u(t)| + C\langle\psi(t)|u(t)\rangle\mathbf{1}, \quad (2.31)$$

con  $A, B, C \in \mathbb{C}$ . La condición de hermiticidad permite obtener  $B = A^*$  y  $C\langle\psi|u\rangle = C^*\langle u|\psi\rangle$ , de (2.23) resulta  $C = id, d \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Esto permite reescribir,

$$\hat{H}(t) := A \left[ |u(t)\rangle\langle\psi(t)| + \frac{A^*}{A} |\psi(t)\rangle\langle u(t)| + \frac{id}{A} \langle\psi(t)|u(t)\rangle\mathbf{1} \right]$$

Pidiendo ahora que el operador reproduzca la ecuación de movimiento  $\hat{H}(t)|\psi(t)\rangle = i|\dot{\psi}(t)\rangle$  ( $\hbar = 1$ ), y usando (2.23) se obtiene  $A = iA_y, A_y = -d$ , tomando  $A_y = 1$  se consigue:

$$\hat{H}(t) = i(|u(t)\rangle\langle\psi(t)| - |\psi(t)\rangle\langle u(t)| - \langle\psi(t)|u(t)\rangle\mathbf{1}). \quad (2.32)$$

El comportamiento de este operador permite reproducir una ecuación de movimiento para  $|\dot{\psi}(t)\rangle$  semejante a la ecuación de Schrödinger. Sin embargo, al realizar una transformación de gauge sobre la curva  $\mathcal{C}_0$  (2.24), se encuentra:

$$\hat{H}'(t) = \hat{H}(t) + (\mathbf{1} - 2\hat{\rho}(t))\dot{\alpha}(t). \quad (2.33)$$

Existen otros operadores que se pueden definir en este espacio de rayos que son invariantes de gauge y que resultan más apropiados para estudios de fases geométricas [41].

## 2.3. Ecuación geodésica en el espacio proyectivo de Hilbert

### 2.3.1. Deducción de la ecuación geodésica

En esta sección vamos a mostrar en primer lugar cómo deducir una ecuación geodésica en  $\mathcal{N}_0$  y en segundo lugar a considerar su solución más general. Para esto, nos enfocaremos en la curva (2.22), y denotemos por  $|u(t)\rangle$  el vector tangente a  $\mathcal{C}_0$  en  $|\psi(t)\rangle$  perteneciente a  $\mathcal{C}_0$ .

Este vector es un elemento del *espacio tangente*<sup>5</sup> a la curva en  $|\psi(t)\rangle$ , esto es

$$|u(t)\rangle \in T_{|\psi(t)\rangle}\mathcal{N}_0, \quad (2.34)$$

donde definimos el espacio tangente como:

$$|\psi\rangle \in \mathcal{N}_0 : T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0 = \{|\phi\rangle \in \mathcal{H} : \text{Re}(\langle\psi|\phi\rangle) = 0\}, \quad (2.35)$$

Notemos que  $T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$  es un espacio vectorial real. En este punto vamos a introducir por conveniencia un formalismo que nos ayudará a entender ciertos pasos. Para detalles complementarios se puede consultar el Apéndice A.1.

Sobre el espacio  $\mathcal{N}_0$  podemos definir una *conexión uno forma*  $A_{|\psi\rangle}$  para  $|\psi\rangle \in \mathcal{N}_0$ . La uno forma es un funcional perteneciente al espacio cotangente a  $\mathcal{N}_0$ ,  $A_{|\psi\rangle} \in T_{|\psi\rangle}^*\mathcal{N}_0$ . La acción de  $A_{|\psi\rangle}$  sobre  $\mathcal{N}_0$  se define para todo  $|\psi\rangle \in \mathcal{N}_0$  y  $|\phi\rangle \in T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$ , como:

$$|\psi\rangle \in \mathcal{N}_0, |\phi\rangle \in T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0 : A_{|\psi\rangle}(|\phi\rangle) = -i \langle\psi|\phi\rangle \equiv \text{Im}(\langle\psi|\phi\rangle) \in \mathbb{R}; \quad (2.36)$$

notemos que de acuerdo a la definición de  $\mathcal{N}_0$ ,  $A_{|\psi\rangle}$  es un funcional a valores reales sobre  $T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$ . Esta uno forma permite definir en cada  $|\psi\rangle \in T_{|\psi(t)\rangle}\mathcal{N}_0$  un nuevo espacio llamado el *espacio horizontal*,

$$\begin{aligned} H_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0 &= \{|\phi\rangle \in T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0 : A_{|\psi\rangle}(|\phi\rangle) = 0\} \\ &= \{|\phi\rangle \in \mathcal{H} : \langle\psi|\phi\rangle = 0\} \subset T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

En otras palabras, el (sub)espacio horizontal no es otra cosa que el núcleo de la uno forma  $A_{|\psi\rangle}$  encontrado en cada punto  $|\psi\rangle$  y define el complemento ortogonal de  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  y por causa de esto, un espacio lineal complejo.

Para comprender el papel de esta uno forma en esta estructura geométrica, pensemos en un estado arbitrario descompuesto según:  $|\phi\rangle = |\phi\rangle_{\parallel} + |\phi\rangle_{\perp} \in T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$ , donde cada componente indica su proyección según la dirección del rayo  $|\psi\rangle$ . Esta funcional selecciona de cada estado  $|\phi\rangle$  (que vive en el espacio tangente a  $|\psi\rangle$ ), las componentes que son ortogonales ( $|\phi\rangle_{\perp}$ ) a cada estado  $|\psi\rangle$ . La construcción del espacio horizontal es una formulación geométrica elegante y clara que permite reunir aquellos estados ortogonales a uno dado, es decir, aquellos que son distinguibles con un estado dado.

De acuerdo a lo definido arriba, tenemos entonces que la componente horizontal de  $|u(t)\rangle$  resulta ser su componente ortogonal a  $|\psi(t)\rangle$ <sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} |u(t)\rangle_{\perp} &= |u(t)\rangle - |\psi(t)\rangle (\langle\psi(t)|u(t)\rangle) \\ &= |u(t)\rangle - iA_{|\psi(t)\rangle}(|u(t)\rangle) |\psi(t)\rangle \in H_{|\psi(t)\rangle}\mathcal{N}_0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Realizando una transformación de gauge (2.24), sobre esta componente, podemos concluir que la componente horizontal del vector tangente tiene una ley de transformación lineal homogénea de la misma forma que  $|\psi\rangle$ , (ver (2.24), (2.25)):

$$\begin{aligned} |u'(t)\rangle &= e^{i\alpha(t)} (|u(t)\rangle + i\dot{\alpha}(t) |\psi(t)\rangle), \\ A_{|\psi'(t)\rangle}(|u'(t)\rangle) &= A_{|\psi(t)\rangle}(|u(t)\rangle) + \dot{\alpha}(t), \\ |u'(t)\rangle_{\perp} &= e^{i\alpha(t)} |u(t)\rangle_{\perp} \end{aligned} \quad (2.39)$$

<sup>5</sup>El espacio tangente de una variedad  $M$  en un punto  $p$  está formado por toda las clases de equivalencia de curvas en un punto  $p$  de la variedad  $M$  y se representa por  $\mathbf{T}_p M$ . En otras palabras es un espacio vectorial que reúne a todos los vectores que son tangentes en un punto de una variedad. Un excelente material de introducción a estos temas geométricos relacionados a la Física lo podemos encontrar en [67, 68, 69, 70].

<sup>6</sup>Esta es la misma construcción realizada en (2.20).

Esta invariancia de gauge manifestada por  $|u(t)\rangle_{\perp}$  nos permite definir una métrica no degenerada sobre  $\mathcal{PH}$  tomando el módulo de (2.38),  $\| |u(t)\rangle_{\perp} \|$ . Una cuenta directa nos permite observar que el cuadrado de esta métrica es análoga a la expresión de la métrica de Fubini-Study dada en (2.19, 2.21). Esta componente resulta adecuada para medir la separación entre estados próximos sobre  $\mathcal{PH}$  y dado que esta no distingue variaciones colineales de estados, esto es, estados que difieren solamente por un factor de normalización o fase global, permite construir una métrica bien adaptada al espacio proyectivo. Con esta métrica en mano podemos encontrar la separación entre estados en  $\mathcal{PH}$ , en otras palabras, podemos escribir una funcional asociada a la longitud de la curva  $C_0 \subset \mathcal{PH}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[C_0] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\langle u(t) | u(t) \rangle_{\perp}} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\langle u(t) | u(t) \rangle - \langle u(t) | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | u(t) \rangle}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Esta funcional tiene la propiedad de ser invariante de gauge (acción del grupo  $U(1)$ ) e invariante ante reparametrización. Como es habitual en el cálculo variacional, el siguiente paso consiste en buscar aquellos estados —las curvas  $C_0$ — que hacen estacionaria a esta funcional. Este paso nos permite encontrar la ecuación que satisface las geodésicas en  $\mathcal{PH}$ .

Siguiendo formalmente lo desarrollado en [41], la ecuación de geodésica se puede escribir en la forma<sup>7</sup>:

$$\left( \frac{d}{dt} - iA_{|\psi(t)\rangle} \right) \frac{|u(t)\rangle_{\perp}}{\| |u(t)\rangle_{\perp} \|} = f(t) |\psi\rangle, \quad f \text{ real.} \quad (2.41)$$

Revisemos un poco lo que hemos logrado hasta aquí. Comenzamos con una curva  $C_0 \subset \mathcal{N}_0$  y consideramos su proyección vía  $\Pi(C_0) = C_0 \subset \mathcal{PH}$ , y caracterizamos a esta última curva como una geodésica si se satisface (2.41). Observemos que la ecuación de geodésica está construida con cantidades definidas a lo largo de la curva  $C_0$ . La funcional  $\mathcal{L}[C_0]$  es invariante de gauge y ante reparametrizaciones, estas mismas propiedades se manifiestan de manera covariante en la ecuación de geodésica, es decir, si  $C_0$  satisface (2.41), entonces también lo hace cualquier transformación de gauge o reparametrización de  $C_0$ . Entonces, si  $C_0$  es una geodésica en  $\mathcal{PH}$ , luego cualquier versión reparametrizada también lo es, y cualquier levantamiento de  $C_0$  al espacio  $\mathcal{N}_0$ , como así también cualquier versión reparametrizada de este levantamiento será llamada una geodésica en  $\mathcal{N}_0$ .

### 2.3.2. Geodésica horizontal

Podemos obtener una versión más simple de la ecuación de geodésica si prestamos atención a las llamadas *elevaciones horizontales* o *curvas horizontales*. Para entender el significado de la elevación horizontal, consideremos el espacio nulo del funcional  $A_{|\psi\rangle}$  presentado anteriormente y que hemos denominado espacio horizontal. Este conjunto, formado por los vectores aniquilados por la acción del funcional  $A_{|\psi\rangle}$ ,  $A_{|\psi\rangle}(|\phi\rangle) = 0$ , con  $|\phi\rangle \in T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$  reúne a los vectores “*horizontales*” en el estado (punto)  $|\psi\rangle$ .

Entonces decimos que una curva  $C_0$  es una *curva horizontal* o un levantamiento horizontal, si la acción de la conexión  $A_{|\psi\rangle}$  se anula a lo largo de este levantamiento, o equivalentemente que en cada punto el vector tangente  $|u(t)\rangle$  es horizontal, formalmente:  $\langle \psi(t) | u(t) \rangle \equiv iA_{|\psi(t)\rangle}(|u(t)\rangle) = 0$ .

<sup>7</sup>El detalle de la deducción de esta cuenta se puede ver en el Apéndice A.3.

Si consideramos este significado, una curva geodésica horizontal  $C_0 \in \mathcal{N}_0$  satisface la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} A_{|\psi\rangle}(|u\rangle) &= 0, \quad |u\rangle_{\perp} = |u\rangle, \\ \frac{d}{dt} \frac{|u\rangle}{\| |u\rangle \|} &= f(t) |\psi\rangle, \quad f \text{ real.} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Podemos encontrar una solución para esta ecuación explotando las propiedades de horizontalidad e invariancia ante reparametrización. Observemos que en la elección de levantamientos horizontales de  $C_0$  el recurso de la transformación de gauge se ha agotado. Por otro lado, se puede usar la invariancia ante reparametrizaciones para lograr una curva  $C_0$  de rapidez  $\| |u\rangle \|$  constante. Reescribimos ahora (2.42) (recordar  $|u\rangle = |\dot{\psi}(t)\rangle$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} |\psi(t)\rangle &= f(t) |\psi(t)\rangle, \quad f(t) \text{ real,} \\ \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle &= 1, \quad \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle = 0, \quad \langle \dot{\psi}(t) | \dot{\psi}(t) \rangle = \text{constante} \end{aligned} \quad (2.43)$$

La ecuación dada en (2.43) se puede llevar a una forma más familiar, esto es, como un problema de valor de frontera en el punto inicial  $t = t_0$ , para esto necesitamos encontrar la forma que adopta  $f(t)$ . De la normalización del estado tenemos derivando dos veces:

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \rightarrow \langle \psi | \ddot{\psi} \rangle + 2\langle \dot{\psi} | \dot{\psi} \rangle + \langle \ddot{\psi} | \psi \rangle = 0 \rightarrow f = -\langle \dot{\psi} | \dot{\psi} \rangle. \quad (2.44)$$

De esta forma reescribimos (2.43) como:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} |\psi(t)\rangle &= -\langle \dot{\psi} | \dot{\psi} \rangle |\psi(t)\rangle, \\ \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle &= 1, \quad \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle = 0, \quad \text{en } t = t_0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Observando la expresión (2.45), vemos que representa la ecuación de movimiento de un oscilador armónico, su solución general representa la curva geodésica más general que se presenta en forma horizontal y con una parametrización afín; tomando  $t_0 = 0$  y  $\omega$  una constante, tenemos:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= |\psi(0)\rangle \cos(\omega t) + |\dot{\psi}(0)\rangle \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \\ \langle \psi(0) | \psi(0) \rangle &= 1, \quad \langle \psi(0) | \dot{\psi}(0) \rangle = 0, \quad \langle \dot{\psi}(0) | \dot{\psi}(0) \rangle = \omega^2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

### 2.3.3. Geodésica no-horizontal

El resultado mostrado en la sección anterior (2.46), muestra que dos estados ortogonales en  $\mathcal{N}_0$ ,  $|\phi_1\rangle = |\psi(0)\rangle$  y  $|\phi_2\rangle = |\dot{\psi}(0)\rangle/\omega$  están conectados por un arco de geodésica parametrizado por  $t$ . Podemos extender este resultado (2.46), mediante una transformación de gauge y así conectar por un arco de geodésica dos estados *no ortogonales* en  $\mathcal{N}_0$ . Sin embargo, la curva transformada, si bien es una geodésica, pierde su parametrización afín y su carácter horizontal, conocido también como la condición del *transporte paralelo* [41] (ver Apéndices A.1, A.2).

Veamos cómo se implementa este cambio de gauge. Tomemos los estados  $|\phi_i\rangle$ ,  $i = 1, 2$ , definidos arriba y por simplicidad  $\omega = 1$ , y reescribimos la ecuación (2.46) como:

$$|\psi(t)\rangle = |\phi_1\rangle \cos(t) + |\phi_2\rangle \sin(t). \quad (2.47)$$

Debemos observar aquí lo siguiente, si bien la curva (2.47) conecta dos estados inicialmente ortogonales ( $\langle \phi(0)_i | \phi_j(0) \rangle = \delta_{ij}$ ), los sucesivos estados que conforman la geodésica son no-ortogonales y están en fase. En efecto, considerando un valor  $t = \tau$  del parámetro:

$$\begin{aligned} \text{para } t = 0 &\longrightarrow |\psi(0)\rangle = |\phi_1\rangle, \text{ luego} \\ \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle_{|_{t=\tau}} &= \langle \phi_1 | (|\phi_1\rangle \cos(t) + |\phi_2\rangle \sin(t)) = \cos \tau. \end{aligned} \quad (2.48)$$

La estrategia para conectar dos estados  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ , de  $\mathcal{N}_0$  no ortogonales y fuera de fase,

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle &= \psi_{12} e^{i\beta}, \text{ con } \psi_{12} = |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle| \in [0, 1], \beta \in \mathbb{R}, \\ \text{i.e. } \psi_{12} &= \cos \tau, \tau \in (0, \pi/2) \end{aligned} \quad (2.49)$$

consistirá en llevar este problema mediante una transformación adecuada al caso anterior. Para esto, notemos que los estados  $|\psi_1\rangle$  y  $|\psi'_2\rangle = e^{-i\beta} |\psi_2\rangle$  sí están en fase:

$$\langle \psi_1 | \psi'_2 \rangle = \langle \psi'_2 | \psi_1 \rangle = e^{i\beta} \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \psi_{12} \quad (2.50)$$

Con esto en mano, construimos la curva que en  $t = \tau$  debe satisfacer:

$$|\phi_1\rangle \cos(t) + |\phi_2\rangle \sin(t) = |\tilde{\psi}(t)\rangle_{|_{t=\tau}} = |\psi'_2\rangle. \quad (2.51)$$

Para esto nos preguntamos qué tipo de transformación o identificación debemos realizar sobre los estados  $|\phi_1\rangle$  y  $|\phi_2\rangle$  presentes en (2.47). Si elegimos naturalmente  $|\phi_1\rangle = |\psi_1\rangle$ , i.e.  $|\tilde{\psi}(0)\rangle = |\psi_1\rangle$ , vemos que exigiendo  $|\tilde{\psi}(\tau)\rangle = |\psi'_2\rangle$ , resulta:

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(\tau)\rangle &= |\phi_1\rangle \cos \tau + |\phi_2\rangle \sin \tau = |\psi'_2\rangle \\ \Rightarrow |\phi_2\rangle &= (|\psi'_2\rangle - |\psi_1\rangle \cos \tau) / \sin \tau. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Notemos que si usamos (2.52) en (2.51) evaluada en  $t = \tau$ , obtenemos  $|\psi'_2\rangle$ .

De esta manera logramos que la curva obtenida  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ , conecta  $|\psi_1\rangle \longrightarrow |\psi'_2\rangle$ . Cómo conectar ahora los estados no-ortogonales  $|\psi_1\rangle$  y  $|\psi_2\rangle$ , para esto, implementamos una transformación que nos lleva del estado  $|\tilde{\psi}(t)\rangle \longrightarrow T_t |\tilde{\psi}(t)\rangle = |\psi(t)\rangle$  tal que:

$$T_0 |\tilde{\psi}(t)\rangle = |\psi_1\rangle, \quad T_\tau |\tilde{\psi}(\tau)\rangle = |\psi_2\rangle.$$

A partir de :

$$T_t |\tilde{\psi}(t)\rangle_{|_{t=\tau}} = T(t)_{|_{t=\tau}} |\psi'_2\rangle = T(t)_{|_{t=\tau}} e^{-i\beta} |\psi_2\rangle = |\psi_2\rangle,$$

resulta nuestra transformación de gauge:

$$T(t) = e^{i\beta t/\tau}. \quad (2.53)$$

Aplicando esta transformación de gauge sobre la curva (2.51) obtenemos:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{i\beta t/\tau} |\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{i\beta t/\tau} (|\phi_1\rangle \cos(t) + |\phi_2\rangle \sin(t)) \\ &= \frac{e^{i\beta t/\tau}}{\sin \tau} \left( |\psi_1\rangle \sin(\tau - t) + e^{-i\beta} \sin(t) |\psi_2\rangle \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

se puede verificar que esta curva efectivamente conecta estados no ortogonales de la forma (2.48). El parámetro  $t$  de la curva se puede interpretar como una medida de tiempo, cuya variación tiene lugar



en  $[0, \tau]$ . En tal caso,  $|\psi(0)\rangle = |\psi_1\rangle$ , es decir, representa el estado inicial o punto inicial de la curva, mientras que  $|\psi(\tau)\rangle = |\psi_2\rangle$  es el punto de la curva dado por el parámetro  $t = \tau$ . Por consiguiente definimos la curva geodésica más general  $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{N}_0$  conectando estados no ortogonales iniciales y finales,  $|\psi_I\rangle$  y  $|\psi_F\rangle$  como:

$$\mathcal{C}_0 \equiv |\psi(t)\rangle = \frac{e^{i\beta t/\tau}}{\sin \tau} \left( |\psi_I\rangle \sin(\tau - t) + e^{-i\beta} |\psi_F\rangle \sin t \right) \quad (2.55)$$

Esta curva como lo hemos señalado, tiene la propiedad de ser geodésica, sin embargo, la transformación de gauge implementada sobre ella rompe su característica de ser afín-parametrizada y su horizontalidad. Se puede verificar que dado dos estados ortogonales, estos se encuentran conectados por la curva anterior con tal de tomar  $\beta = 0, \tau = \pi/2$  en (2.55), en efecto, se reduce a las expresiones (2.46 o 2.47).

### **Familia monoparamétrica $\hat{H}(t)$**

Igual que antes, podemos asociar a esta curva geodésica (2.55) una familia monoparamétrica de operadores  $\hat{H}(t)$ . Recurriendo a la expresión encontrada en (2.32), y considerando nuevamente dos estados no ortogonales,  $|\psi_I\rangle, |\psi_F\rangle \in \mathcal{N}_0$  conectados por un arco de geodésica (2.55), vamos a deducir qué forma tienen estos operadores. Partiendo de (2.55), calculamos su velocidad:

$$|\dot{\psi}(t)\rangle = i\frac{\beta}{\tau} |\psi(t)\rangle - \frac{e^{i\beta t/\tau}}{\sin \tau} \left( |\psi_I\rangle \cos(\tau - t) - e^{-i\beta} |\psi_F\rangle \cos(t) \right).$$

Observemos también que el último término de (2.32) está relacionado con la condición de horizontalidad de la curva, y su valor es

$$\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle = i\frac{\beta}{\tau} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle - \frac{e^{i\beta t/\tau}}{\sin \tau} \left( \langle \psi(t) | \psi_I \rangle \cos(\tau - t) - e^{i\beta} \langle \psi(t) | \psi_F \rangle \cos t \right),$$

el primer término es proporcional a la norma del estado. Los siguientes términos contienen las proyecciones  $\langle \psi(t) | \psi_i \rangle$ , cuyos valores son

$$\langle \psi(t) | \psi_I \rangle = e^{-i\beta t/\tau} \cos(t), \quad \langle \psi(t) | \psi_F \rangle = e^{-i\beta t/\tau} e^{i\beta} \cos(\tau - t)$$

de esta forma la horizontalidad toma el valor:  $\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle = i\frac{\beta}{\tau}$ .

Veamos el cálculo de los primeros términos de  $H(t)$ . El primer término de esta expresión resulta de un cálculo directo:

$$|\dot{\psi}(t)\rangle \langle \psi(t)| = i\frac{\beta}{\tau} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| - \frac{e^{i\beta t/\tau}}{\sin(\tau)} \left( |\psi_I\rangle \langle \psi(t)| \cos(\tau - t) - e^{-i\beta} \cos(t) |\psi_F\rangle \langle \psi(t)| \right)$$

$$|\psi(t)\rangle \langle \dot{\psi}(t)| = (|\dot{\psi}(t)\rangle \langle \psi(t)|)^\dagger$$

restando estas dos expresiones tenemos:

$$\begin{aligned} |\dot{\psi}(t)\rangle \langle \psi(t)| - |\psi(t)\rangle \langle \dot{\psi}(t)| &= \frac{2i\beta}{\tau} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \\ &\quad - \frac{\cos(\tau - t)}{\sin(\tau)} \underbrace{\left[ e^{i\beta t/\tau} |\psi_I\rangle \langle \psi(t)| - e^{-i\beta t/\tau} |\psi(t)\rangle \langle \psi_I| \right]}_{\text{parte A}} \\ &\quad + \frac{\cos(t)}{\sin(\tau)} \underbrace{\left[ e^{i\beta(t/\tau-1)} |\psi_F\rangle \langle \psi(t)| - e^{-i\beta(t/\tau-1)} |\psi(t)\rangle \langle \psi_F| \right]}_{\text{parte B}} \end{aligned}$$

El primer término toma la forma:

$$|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = (|\psi_I\rangle\langle\psi_I| \sin^2(\tau - t) + \sin^2(t) |\psi_F\rangle\langle\psi_F| + \sin(t) \sin(\tau - t) e^{i\beta} |\psi_I\rangle\langle\psi_F| + \text{c.c.}) / \sin^2(\tau),$$

donde c.c. indica el complejo conjugado de los términos precedentes. Reduciendo las partes señaladas con  $A$  y  $B$ , tenemos, calculando previamente:

$$|\psi_I\rangle\langle\psi(t)| = (|\psi(t)\rangle\langle\psi_I|)^\dagger = \frac{e^{-i\beta t/\tau}}{\sin \tau} \left[ \sin(\tau - t) |\psi_I\rangle\langle\psi_I| + e^{i\beta} \sin(t) |\psi_I\rangle\langle\psi_F| \right],$$

$$|\psi_F\rangle\langle\psi(t)| = (|\psi(t)\rangle\langle\psi_F|)^\dagger = \frac{e^{-i\beta t/\tau}}{\sin \tau} \left[ \sin(\tau - t) |\psi_F\rangle\langle\psi_I| + e^{i\beta} \sin(t) |\psi_F\rangle\langle\psi_F| \right],$$

$$A = \frac{\sin(t)}{\sin(\tau)} \left[ e^{i\beta} |\psi_I\rangle\langle\psi_F| - e^{-i\beta} |\psi_F\rangle\langle\psi_I| \right],$$

$$B = -\frac{\sin(\tau - t)}{\sin(\tau)} \left[ e^{i\beta} |\psi_I\rangle\langle\psi_F| - e^{-i\beta} |\psi_F\rangle\langle\psi_I| \right].$$

Con esta reducción podemos factorizar los términos con [...] y usando la expresión para el seno de la suma de dos ángulos, escribimos los dos primeros términos de  $H(t)$  como:

$$|\dot{\psi}(t)\rangle\langle\psi(t)| - |\psi(t)\rangle\langle\dot{\psi}(t)| = \frac{2i\beta}{\tau} |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| - \frac{[e^{i\beta} |\psi_I\rangle\langle\psi_F| - e^{-i\beta} |\psi_F\rangle\langle\psi_I|]}{\sin \tau}. \quad (2.56)$$

Reuniendo todos estos resultados parciales, obtenemos la familia de operadores,

$$\hat{H}_g(t) = -\frac{[e^{i\beta} |\psi_I\rangle\langle\psi_F| - e^{-i\beta} |\psi_F\rangle\langle\psi_I|]}{\sin \tau} + \frac{2i\beta}{\tau} |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| - i\frac{\beta}{\tau} \mathbf{1}. \quad (2.57)$$

Notemos que para estados ortogonales, ( $\beta = 0$  y  $\tau = \pi/2$ ) el operador gauge-transformado,  $H_g$  se reduce a la forma

$$\hat{H}(t) = i[|\psi_F\rangle\langle\psi_I| - |\psi_I\rangle\langle\psi_F|], \quad (2.58)$$

que es la forma que se obtiene justamente de (2.32) calculado con la geodésica horizontal (2.46 o 2.47). En este punto, señalamos que estos resultados se pueden reducir a los encontrados en [54] donde se establece una derivación de un Hamiltoniano que implementa una evolución óptima entre estados cuánticos prescritos.

La derivación realizada en [54] tiene un carácter geométrico elemental que explota las propiedades de simetría del espacio de estados cuánticos sin hacer uso del cálculo variacional. Una inspección rápida muestra que la geodésica no horizontal dada por (2.55) y la expresión que describe el estado evolutivo óptimo (ecuación (11) de [54]) coinciden perfectamente al establecer  $\beta = 0$ , que corresponde a estados que están en fase, y haciendo las identificaciones  $2\tau = \theta$ , con  $\theta$  el ángulo de separación entre los estados, y  $\omega/\hbar = 1$ . Además, la expresión dada para el Hamiltoniano óptimo en [54] es análoga a la expresión (2.57), calculada con la geodésica no horizontal (2.55).

## 2.4. Entrelazamiento y curvas geodésicas

En esta sección vamos a investigar la cantidad de entrelazamiento asociado con una evolución geodésica la cual conecta dos estados de un sistema compuesto<sup>8</sup>. Mostramos que el entrelazamiento es un recurso fundamental para implementar tales evoluciones.

Para cuantificar el entrelazamiento involucrado en la evolución geodésica entre estados iniciales y finales fijos arbitrarios (ortogonales o no ortogonales) usamos la entropía lineal. Esta medida coincide con la concurrencia cuadrada para estados puros y viene dada por<sup>9</sup>:

$$\varepsilon[|\psi\rangle] = \frac{d_A}{d_A - 1} [1 - \text{Tr}(\rho_A^2)], \quad (2.59)$$

donde  $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho)$  es la matriz densidad reducida asociada con uno de los subsistemas, aquel con la dimensión del espacio de Hilbert más baja  $d_A$ . Además, calculamos el promedio temporal del entrelazamiento [53] a lo largo de la evolución:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \varepsilon(t) dt. \quad (2.60)$$

Aquí es importante señalar que nuestro enfoque es independiente de cualquier dinámica particular y, a diferencia del formalismo de la braquistócrona cuántica (QB, por sus siglas en inglés) propuesto por Carlini et al [52], no imponemos ninguna restricción. Simplemente calculamos el entrelazamiento involucrado en las curvas derivadas en la Sec.2.3.3.

Primero analizamos la cantidad de entrelazamiento involucrado en la conexión geodésica de un par de estados ortogonales (simétricos)  $|\psi_I\rangle \rightarrow |\psi_F\rangle$  estudiados en [51]:

- i)  $|00\rangle \rightarrow \frac{\cos \alpha}{2} \{|01\rangle + |10\rangle\} + \sin \alpha |11\rangle$ ,
- ii)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \{|01\rangle + |10\rangle\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \{|00\rangle + |11\rangle\}$ ,
- iii)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \{|00\rangle - i|11\rangle\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \{i|00\rangle - |11\rangle\}$

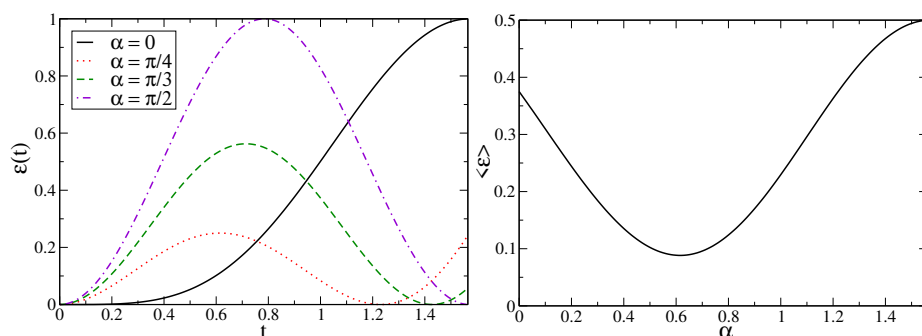
La evolución geodésica para estos tres casos corresponden a la curva dada por la expresión (2.55) donde se toma  $\tau = \pi/2$  y  $\beta = 0$ . También calculamos el entrelazamiento involucrado en la conexión geodésica del siguiente estado no ortogonal:

- iv)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \{|00\rangle + |11\rangle\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \{i|01\rangle + |11\rangle\}$

dado por la evolución geodésica (2.55) pero ahora tomando  $\tau = \pi/3$  y  $\beta = 0$ . Analizamos a

<sup>8</sup>La QM prescribe un espacio de Hilbert asociado a un sistema cuántico. Sin embargo, para sistemas cuánticos compuestos sus estados son elementos de un espacio de Hilbert más grande formado por el espacio producto directo de cada espacio de Hilbert asociado a cada subsistema. Formalmente, se construye con el *producto tensorial* de cada espacio asociado a cada subsistema. Para un sistema bipartito  $\mathcal{S} = A + B$ , el espacio de Hilbert es  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , cuya dimensión resulta ser  $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{H}_A)\dim(\mathcal{H}_B)$ . La base del espacio producto está inducida por las bases de cada espacio como  $|i_A, i_B\rangle = |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle = |i_A\rangle |i_B\rangle$ , donde cada  $|i_{A(B)}\rangle$  es una base de su respectivo espacio  $\mathcal{H}_{A(B)}$ . Cada par unipartito  $\{|\Psi_A\rangle, |\Psi_B\rangle\}$  corresponde a un estado bipartito  $|\Psi_{AB}\rangle = |\Psi_A\rangle |\Psi_B\rangle \in \mathcal{H}$  conocido como estado *factorizable o separable*. Sin embargo, hay elementos del espacio producto que no son factorizables, sino que son combinaciones lineales de los elementos de la base producto de la forma:  $|\Psi_{AB}\rangle = \sum_{ij} C_{ij} |i_A\rangle |i_B\rangle$ , los estados para los cuales al menos dos de los  $C_{ij} \neq 0$  se llaman entrelazados [14, 16, 17, 18, 19, 107].

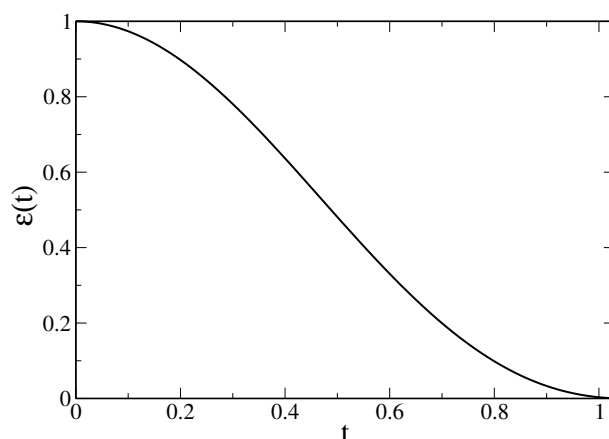
<sup>9</sup>Esta medida se obtiene a partir de la entropía de von Neumann escalada linealmente, de tal forma que tome valores entre 0 (estados puros) y 1 (estados máximamente mezclados). En la sección 3.4 volveremos sobre esta medida con más detalles.



**Figura 2.5:** Panel izquierdo: valor de  $\varepsilon[|\psi(t)\rangle]$  involucrado en la evolución geodésica conectando los estados del ejemplo i), para diferentes valores del parámetro  $\alpha$ . Panel derecho: el entrelazamiento promediado en el tiempo como función de  $\alpha$  para el mismo ejemplo.

continuación cada caso:

- i) Tenemos la evolución desde un estado separable  $\varepsilon[|\psi(0)\rangle] = 0$  hacia uno de los estados correspondientes a una familia monoparamétrica de estados entrelazados dado por el parámetro real  $\alpha$ . En la figura 2.5 mostramos el entrelazamiento involucrado en la evolución desde  $|\psi_I\rangle$  a  $|\psi_F\rangle$  para diferentes valores del parámetro  $\alpha$  a lo largo de la curva dada por (2.55) tomando  $\beta = 0$  y  $\tau = \pi/2$ . También mostramos (fig. 2.5) el promedio temporal de entrelazamiento como una función de  $\alpha$ .



**Figura 2.6:** Valor de  $\varepsilon[|\psi(t)\rangle]$  involucrado en la evolución geodésica conectando estados del ejemplo iv).

- ii) Este caso es un ejemplo de una evolución desde un estado máximamente entrelazado (*estado de Bell*) a otro estado máximamente entrelazado. Obtenemos aquí  $\varepsilon[|\psi(t)\rangle] = \cos^2(2t)$  y  $\langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{2}$ .
- iii) El entrelazamiento permanece máximo a lo largo de la evolución, es decir, el estado evolutivo es un estado máximamente entrelazado  $\varepsilon[|\psi(t)\rangle] = 1$ ,  $t \in [0, \pi/2]$  y  $\langle\varepsilon\rangle = 1$ .
- iv) Este caso corresponde a la evolución entre dos estados no ortogonales correspondientes a  $\beta = 0$  desde un estado máximamente entrelazado hacia un estado separable para  $\tau = \pi/3$ .

Obtenemos  $\varepsilon[|\psi(t)\rangle] = \left[ \frac{1+2\cos(2t)}{3} \right]^2$  y  $\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ . En la figura 2.6 representamos el entrelazamiento en función de  $t$ .

Nuestros resultados para la cantidad de entrelazamiento en los casos i-iii, coinciden con los resultados encontrados en [51], donde el entrelazamiento involucrado para la implementación de una evolución óptima (en el menor tiempo posible) entre estados ortogonales se calcula utilizando el formalismo de la QB. La evolución óptima para este formalismo QB se logra con restricciones en la diferencia entre las energías mínima y máxima del Hamiltoniano que genera la evolución.

## 2.5. Conclusiones del capítulo

La geometría juega un papel importante en los fundamentos de la QM y también lo hace en la información cuántica. En este capítulo revisamos algunos aspectos del formalismo geométrico aplicado a la QM mostrando su papel clave no solo en aspectos fundamentales como la definición de curvas de estados cuánticos sino también en aplicaciones del procesamiento de información cuántica como es el caso de la evolución óptima. Estudiamos el entrelazamiento involucrado a lo largo de las evoluciones geodésicas. Demostramos que los resultados derivados de la dinámica Hamiltoniana pueden recuperarse mediante un tratamiento dado por la geometría diferencial. Este enfoque no necesita, para un sistema dado, el análisis separado de la dinámica generada por diferentes Hamiltonianos posibles y, en este sentido, es similar al formalismo QB. Pero aún más, la derivación geométrica actual es independiente de cualquier dinámica que muestre que la relación entre el entrelazamiento (como recurso) y las evoluciones óptimas tiene conexiones con la estructura geométrica del espacio de estados cuánticos. Con el enfoque presentado en este capítulo creemos que también sería posible explorar el caso de evolución óptima basado en curvas geodésica entre estados mixtos. Si bien una formulación en esta dirección requiere de más estructura geométrica, la geometría de estados cuánticos mixtos representados por operadores de densidad todavía permanece abierta.



---

Indicador de cantidad de evolución dinámica

---

“Mide lo que es medible, y haz medible lo que no lo es.”

Galileo Galilei

### 3.1. Introducción

En un curso elemental de mecánica cuántica aprendemos que para los sistemas cuánticos descritos en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , el módulo cuadrado del producto interno definido entre dos estados puros que pertenecen a  $\mathcal{H}$ ,  $|\Phi_1\rangle$  y  $|\Phi_2\rangle$ , i.e.,  $|\langle\Phi_1|\Phi_2\rangle|^2$  constituye un *indicador cuantitativo* de cuán *indistinguibles* son esos dos estados. Cuando  $|\langle\Phi_1|\Phi_2\rangle|^2 = 0$ , los dos estados son perfectamente distinguibles; en la otra situación extrema, cuando  $|\langle\Phi_1|\Phi_2\rangle|^2 = 1$ , los dos estados son totalmente indistinguibles entre sí. En este último caso, los kets  $|\Phi_1\rangle$  y  $|\Phi_2\rangle$  en realidad representan el mismo estado físico del sistema. Este grado variable de distinción entre estados cuánticos tiene profundas consecuencias para la física cuántica. En particular, permite formulaciones físicamente atractivas y matemáticamente claras del principio de incertidumbre tiempo-energía. De hecho, impone límites inferiores, relacionados con la energía de un sistema cuántico cerrado, a el tiempo  $\tau$  que requiere el sistema evolucionar desde un estado inicial puro a un estado *ortogonal* al inicial, es decir completamente distinguible [73]. El tiempo  $\tau$  satisface la desigualdad  $\tau \geq \hbar\pi/\Delta E$ , donde  $\Delta E$  es la incertidumbre en el valor de la energía del sistema. Esta desigualdad, establecida por Mandelstam y Tamm [74] se puede considerar como una forma de la relación de incerteza del tipo “tiempo-energía”. Otro límite inferior para  $\tau$ , en términos del valor de expectación  $\langle\hat{H} - E_0\rangle$  (donde  $\hat{H}$  es el Hamiltoniano del sistema y  $E_0$  la energía del estado fundamental del sistema, fue estudiada por Margolus y Levitin [75].

En el contexto de la computación cuántica, el tiempo  $\tau$  que un sistema tarda en evolucionar hacia un estado ortogonal puede considerarse como el tiempo necesario para realizar un paso computacional elemental. Este tiempo de ortogonalidad está conectado con varios aspectos fundamenta-

les de la física cuántica, con importantes implicaciones para el campo de la información cuántica [76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83].

En otra línea, cuando se estudian problemas relacionados con la *velocidad de evolución cuántica* medida por  $\tau$  en sistemas que evolucionan continuamente en el tiempo, es imperativo tener en cuenta los siguientes puntos: *i*) la mayoría de los estados iniciales nunca evolucionan a un estado ortogonal. De hecho, los estados iniciales que evolucionan a un estado ortogonal constituyen un subconjunto de medida nula del espacio de todos los estados; *ii*) incluso para estados que evolucionan a un estado ortogonal, el número de veces que el sistema alcanza un estado ortogonal al inicial dentro de un intervalo  $[0, T]$  de duración finita es en sí mismo finito. De estas dos observaciones se deduce que el tiempo de ortogonalidad  $\tau$ , a pesar de su gran valor conceptual, no es directamente aplicable en muchas situaciones relevantes. Para la mayoría de los estados iniciales, el tiempo de ortogonalidad es infinito y, en consecuencia, no se puede utilizar para caracterizar la velocidad de la evolución de un estado cuántico. Un posible procedimiento alternativo consiste en estudiar el tiempo necesario para alcanzar un estado que tenga una cierta superposición que no se anule con el estado inicial. Sin embargo, y en contraste con la situación de solapamiento cero, no hay criterios físicos o matemáticos para elegir un valor de superposición que no se anule como más fundamental que otro. En consecuencia, tiene sentido explorar otros enfoques que tengan en cuenta democráticamente todos los valores posibles de superposición.

Motivado por los comentarios anteriores, en lugar de centrarnos en el tiempo  $\tau$  necesario para alcanzar la distinción completa entre dos estados de un sistema cuántico en evolución, nos centraremos en la distinción *promedio* entre pares de estados del sistema en diferentes momentos. Al hacerlo, propondremos una medida de *cantidad de evolución cuántica*, que es aplicable a cualquier estado inicial —ya sea que evolucione o no a un estado ortogonal—, y no privilegia ningún valor particular del solapamiento entre estados en diferentes momentos. Por lo tanto, vamos a considerar la *cantidad de evolución* exhibida durante un intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$ , y la interpretaremos como una medida  $\mathcal{D}[t_1, t_2]$  de cuán variada es la vida del sistema cuántico durante ese intervalo de tiempo. Investigamos luego las principales propiedades de la medida  $\mathcal{D}$ , establecemos sus límites relevantes y estudiamos en detalle su comportamiento para algunos sistemas cuánticos particulares. Cabe mencionar que no proponemos favorecer la medida  $\mathcal{D}$  sobre el tiempo de ortogonalidad  $\tau$ . Introducimos esta medida como un complemento del tiempo  $\tau$ , que puede ayudar a estudiar aspectos de la evolución de los sistemas cuánticos que no están totalmente capturados por el concepto de tiempo de ortogonalidad.

La estructura de este capítulo es la siguiente: en la sección 3.2 vamos a introducir la medida cuantitativa  $\mathcal{D}$  para la cantidad de evolución cuántica y estableceremos alguna de sus propiedades. En particular, investigaremos la dependencia de  $\mathcal{D}$  con la extensión  $T$  del intervalo temporal  $[t_1, t_2]$  y mostraremos que  $\mathcal{D}$  es siempre menor o igual que su valor límite asintótico  $\mathcal{D}_L = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{D}$ . Discutiremos las condiciones bajo las cuales  $\mathcal{D}$  realmente alcanza el valor  $\mathcal{D}_L$ . En la sección 3.3 vamos a estudiar en detalle el comportamiento de la medida  $\mathcal{D}$  para diferentes ejemplos de sistemas cuánticos. Mostraremos que para intervalos de tiempo con una duración dada por un número pequeño de pasos característicos  $T^c$  podemos aproximar de buena manera a la medida  $\mathcal{D}$  por su límite asintótico  $\mathcal{D}_L$ . A continuación, en la sección 3.4 presentamos una breve discusión de la medida de la cantidad de evolución en el marco teórico de la dinámica cuántica conocido como *sin tiempo o timeless*. Finalmente daremos una discusión y algunas observaciones finales en la sección 3.5.



## 3.2. Medida cuantitativa para la cantidad de evolución cuántica

Vamos a desarrollar y estudiar aquí las propiedades de una medida para la cantidad de evolución de un sistema cuántico durante un intervalo de tiempo dado. De acuerdo a lo comentado en la sección anterior, proponemos aquí un enfoque alternativo y *complementario* el cual se puede aplicar a todos los estados iniciales, incluso a aquellos que no evolucionan a estados que son ortogonales al estado inicial. Nuestro tratamiento se basa, de manera directa, en el hecho de que los estados puros admiten diferentes grados de distinguibilidad en un intervalo de tiempo. La distinguibilidad promedio de los estados del sistema a medida que evoluciona, proporciona una medida de la cantidad de evolución asociada a ese intervalo. En otras palabras, proporciona una evaluación cuantitativa de *cuán diversos son los estados* que el sistema visita durante su evolución. Como se mostrará a continuación, la medida que identificaremos con  $\mathcal{D}$  está bien definida, tiene un significado intuitivo transparente y tiene buenas propiedades matemáticas y físicas.

Como una medida cuantitativa de *cuánta evolución* experimenta un sistema cuántico durante el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  adoptamos el promedio temporal de la expresión<sup>1</sup>:

$$1 - |\langle \Phi_t | \Phi_{t'} \rangle|^2, \quad (3.1)$$

donde  $|\Phi_t\rangle$  y  $|\Phi_{t'}\rangle$  representan, respectivamente, los estados del sistema en los tiempos  $t$  y  $t'$ , con  $t, t' \in [t_1, t_2]^2$ . Por lo tanto, introducimos la medida  $\mathcal{D}$ , *cantidad de evolución cuántica* durante el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  como:

$$\mathcal{D}[t_1, t_2] = 1 - \frac{1}{T^2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} |\langle \Phi_t | \Phi_{t'} \rangle|^2 dt dt', \quad (3.2)$$

donde  $T = t_2 - t_1$ . El estado puro dependiente del tiempo  $|\Phi_t\rangle$  satisface la ecuación de Schrödinger  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi_t\rangle = \hat{H} |\Phi_t\rangle$ , aquí  $\hat{H}$  es el operador Hamiltoniano del sistema, el cual asumimos que es independiente del tiempo. El valor de  $|\langle \Phi_t | \Phi_{t'} \rangle|^2$  mide la indistinguibilidad entre los estados cuánticos en diferentes instantes: un valor cero para la medida de solapamiento corresponde a estados perfectamente distinguibles, mientras que un solapamiento igual a uno corresponde a estados idénticos —a menos de una fase global—. Esto justifica nuestra interpretación de la cantidad  $\mathcal{D}[t_1, t_2]$  como una medida del grado de variedad o de evolución del estado  $|\Phi_t\rangle$  durante el intervalo  $[t_1, t_2]$ . Los valores altos (cerca de 1) de  $\mathcal{D}[t_1, t_2]$  implican un estado altamente evolucionado, de modo que  $|\Phi_t\rangle$  es altamente distinguible de cualquier otro  $|\Phi_{t'}\rangle$ , mientras que los valores bajos de  $\mathcal{D}[t_1, t_2]$  reflejan una pequeña variación de  $|\Phi_t\rangle$  con respecto a  $|\Phi_{t'}\rangle$ .

Vamos a demostrar ahora una de las propiedades que caracterizan a esta medida. Por ejemplo, su invariancia ante traslaciones temporales, en otras palabras, veremos que esta medida solo depende de la extensión del intervalo  $T = t_2 - t_1$ . Para esto, consideremos la medida  $\mathcal{D}$  de la evolución cuántica correspondiente al intervalo de tiempo  $[t_1 + \Delta, t_2 + \Delta]$ , esto es:

$$\mathcal{D}[t_1 + \Delta, t_2 + \Delta] = 1 - \frac{1}{T^2} \int_{t_1 + \Delta}^{t_2 + \Delta} \int_{t_1 + \Delta}^{t_2 + \Delta} |\langle \Phi_t | \Phi_{t'} \rangle|^2 dt dt'. \quad (3.3)$$

<sup>1</sup>El solapamiento (*overlap*) indicado en (3.1) por el producto interno entre los estados al tiempo  $t$  y  $t' = 0$  se conoce también como la *función de autocorrelación*,  $A(t) \equiv \langle \Phi_t | \Phi_0 \rangle$ . Los valores altos que toma  $|A(t)|$  son indicadores de un *overlap* significativo entre la función de onda en tiempos posteriores al estado inicial. Retomaremos esta función en la sección 3.3.

<sup>2</sup>Esto es, todos los posibles pares de instantes  $(t, t')$  están representados por el rectángulo  $[t_1, t_2] \times [t_1, t_2]$ , es decir:  $(t, t') \in [t_1, t_2] \times [t_1, t_2]$ .

Realizando el cambio de variables de integración  $s = t - \Delta$  y  $s' = t' - \Delta$  (i.e.  $s(t) = t - \Delta$ ), se tiene  $ds = dt$  y los límites de integración toman la forma  $s_i = s(t_i + \Delta) = (t_i + \Delta) - \Delta = t_i$  ( $i = 1, 2$ ), por lo cual:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}[t_1 + \Delta, t_2 + \Delta] &= 1 - \frac{1}{T^2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{s_1}^{s_2} |\langle \Phi_{s+\Delta} | \Phi_{s'+\Delta} \rangle|^2 ds ds' \\ &= 1 - \frac{1}{T^2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} |\langle \Phi_{t+\Delta} | \Phi_{t'+\Delta} \rangle|^2 dt dt', \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde en la última línea volvemos a cambiar los nombres de las variables de integración (ficticias)  $(s, s') \rightarrow (t, t')$ . Para ver cómo depende la expresión anterior con la traslación, tomamos la derivada de  $\mathcal{D}[t_1 + \Delta, t_2 + \Delta]$  con respecto a  $\Delta$  y obtenemos:

$$\frac{d}{d\Delta} \mathcal{D}[t_1 + \Delta, t_2 + \Delta] = -\frac{1}{T^2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\Delta} [|\langle \Phi_{t+\Delta} | \Phi_{t'+\Delta} \rangle|^2] dt dt' = 0. \quad (3.5)$$

En el último paso usamos la relación:

$$\frac{d}{d\Delta} [|\langle \Phi_{t+\Delta} | \Phi_{t'+\Delta} \rangle|^2] = 0, \quad (3.6)$$

la cual no es otra cosa que una consecuencia del hecho de que la evolución cuántica unitaria conserva la superposición entre los estados. Se deduce así de la ecuación (3.5) que la medida  $\mathcal{D}$  satisface una simetría de traslación en el tiempo, i.e.:

$$\mathcal{D}[t_1 + \Delta, t_2 + \Delta] = \mathcal{D}[t_1, t_2], \quad (3.7)$$

y, en consecuencia, depende del intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  solo a través de su extensión (o duración)  $T = t_2 - t_1$ . Esto significa que siempre podemos referirnos al intervalo  $[0, T]$  sin pérdida de generalidad, y escribir  $\mathcal{D}[t_1, t_2]$  en la forma más sucinta  $\mathcal{D}(T)$ , enfatizando que  $\mathcal{D}$  es una función solamente de  $T$ .

### 3.2.1. El valor límite asintótico de la cantidad de evolución

Para estudiar el valor límite de la cantidad de evolución, conviene ver primero la forma explícita que adopta esta medida, por ejemplo, en términos de los estados de un sistema cuántico cuando estos son expresados en una base de autoestados del operador Hamiltoniano  $\hat{H}$  asociado al sistema.

Comenzamos representando un estado  $|\tilde{\Phi}_t\rangle$ , en una base adecuada del espacio de configuración  $\{|\mathbf{x}\rangle\}$  como:

$$|\tilde{\Phi}_t\rangle = \int \Psi(\mathbf{x}, t) |\mathbf{x}\rangle d\mathbf{x}. \quad (3.8)$$

El rótulo  $\mathbf{x}$  que aparece en los estados  $|\mathbf{x}\rangle$  designa a las coordenadas de un conjunto de partículas, o cualquier otro grado de libertad relevante que caracterice el sistema físico en consideración. La función de onda  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  evoluciona de acuerdo a la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = \hat{H} \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (3.9)$$

y se puede expandir en términos de las autofunciones ortonormales de  $\hat{H}$ , como por ejemplo  $\varphi_n(\mathbf{x})$ , con correspondientes autovalores  $E_n$ :

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(\mathbf{x}). \quad (3.10)$$

De acuerdo con la condición de normalización, tenemos  $\sum_n |c_n|^2 = 1$ . A lo largo del capítulo trataremos con los sistemas cuánticos que tienen espectros de energía discretos:  $E_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Sin embargo, nuestra discusión no se limita a sistemas discretos; se aplica también a sistemas con variables continuas que tienen espectros de energía discretos, como osciladores armónicos o, más generalmente, sistemas confinados de muchas partículas.

Las ecuaciones (3.8) y (3.10) nos permiten determinar el valor del solapamiento:

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_{t'} \rangle &= \int \Psi^*(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t') d\mathbf{x} \\
 &= \sum_{nm} c_n^* c_m e^{i(E_n t - E_m t')/\hbar} \int \varphi_n^*(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &= \sum_{nm} c_n^* c_m e^{\frac{i}{\hbar}(E_n t - E_m t')} \delta_{nm} \\
 &= \sum_n |c_n|^2 e^{\frac{i}{\hbar} E_n (t - t')}, \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

introduciendo ahora este valor de overlap en la medida definida en la ecuación (3.2), obtenemos el resultado:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(T) &= 1 - \frac{1}{T^2} \sum_{nm} |c_n c_m|^2 \int_0^T \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)(t - t')} dt dt' \\
 &= 1 - \sum_{nm} |c_n c_m|^2 \text{sinc}^2(\omega_{nm} T/2) \\
 &= \sum_{\substack{nm \\ (\omega_{nm} \neq 0)}} |c_n c_m|^2 \left[ 1 - \text{sinc}^2(\omega_{nm} T/2) \right], \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

donde definimos  $\omega_{nm} = |E_n - E_m|/\hbar$ . La ecuación (3.12) muestra la medida  $\mathcal{D}(T)$  explícitamente en términos de los coeficientes de expansión  $c_n$  del estado inicial  $|\tilde{\Phi}_0\rangle$ . Esto implica que, para todos los valores de  $T$ , uno tiene  $\mathcal{D}(T) \leq \mathcal{D}_L$ , donde  $\mathcal{D}_L$  representa el *valor asintótico*:

$$\mathcal{D}_L = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{D}(T) = \sum_{\substack{nm \\ (\omega_{nm} \neq 0)}} |c_n c_m|^2. \tag{3.13}$$

También se sigue de la expresión (3.13) que  $\mathcal{D}_L$  en realidad se alcanza para  $T$  finito siempre que el valor de  $\text{sinc}(\omega_{nm} T/2)$  se anule para todo  $n$  y  $m$ .

La magnitud de la desviación de  $\mathcal{D}(T)$  de su valor asintótico resulta ser:

$$|\mathcal{D} - \mathcal{D}_L| = \sum_{\substack{nm \\ (\omega_{nm} \neq 0)}} |c_n c_m|^2 \text{sinc}^2(\omega_{nm} T/2). \tag{3.14}$$

Para un valor de  $\omega_{nm}$  fijo (i.e., para cada término separado en la suma), la función  $\text{sinc}^2(\omega_{nm} T/2)$  decae muy rápidamente, su principal contribución radica en el intervalo  $0 \leq (\omega_{nm} T/2) < \pi$ , o equivalentemente en el intervalo  $0 \leq T < T_{nm}^c$ , donde  $T_{nm}^c = 2\pi\omega_{nm}^{-1}$  es el período natural (tiempo característico) correspondiente a la frecuencia  $\omega_{nm}$ . En consecuencia, después de algunos períodos naturales, el valor de  $\text{sinc}^2(\omega_{nm} T/2)$  se vuelve insignificante y para valores de:

$$T \gtrsim T^c \equiv \max\{T_{nm}^c\} = \frac{2\pi}{\min\{\omega_{nm}\}}, \tag{3.15}$$

la desviación (3.14) es básicamente cero, lo que significa que la evolución ha alcanzado efectivamente su valor asintótico, estacionario. En la siguiente sección vamos a calcular explícitamente la ecuación (3.13) y analizaremos su comportamiento para diferentes sistemas de interés.

### 3.3. Comportamiento de la medida $\mathcal{D}$ para distintos sistemas

Ahora consideraremos diferentes ejemplos ilustrativos de sistemas cuánticos, para tener una idea intuitiva del comportamiento de la medida de evolución  $\mathcal{D}(T)$ . Para esto, comparamos las escalas de tiempo asociada a  $\mathcal{D}(T)$  con otras escalas de tiempo relevantes de la dinámica de los sistemas cuánticos, caracterizadas por el comportamiento de la función de autocorrelación  $A(t)$  [84], la cual podemos expresar en términos de la expresión (3.11) como:

$$A(t) \equiv \langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_0 \rangle = \sum_n |c_n|^2 e^{iE_n t/\hbar}. \quad (3.16)$$

En particular, vamos a analizar: (i) un sistema de un qubit (dos niveles); (ii) un oscilador armónico (sistema de  $d$ -niveles); (iii) un sistema de dos qubits; y (iv) un paquete gaussiano en un potencial de pozo cuadrado infinito.

#### 3.3.1. Un sistema de un qubit

Consideremos un sistema de un qubit (dos niveles) con un espectro de energía dado por  $E_0$  y  $E_1$ , de modo que podemos escribir la función de onda de su estado general como:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = c_0 e^{-iE_0 t/\hbar} \varphi_0(\mathbf{x}) + c_1 e^{-iE_1 t/\hbar} \varphi_1(\mathbf{x}), \quad (3.17)$$

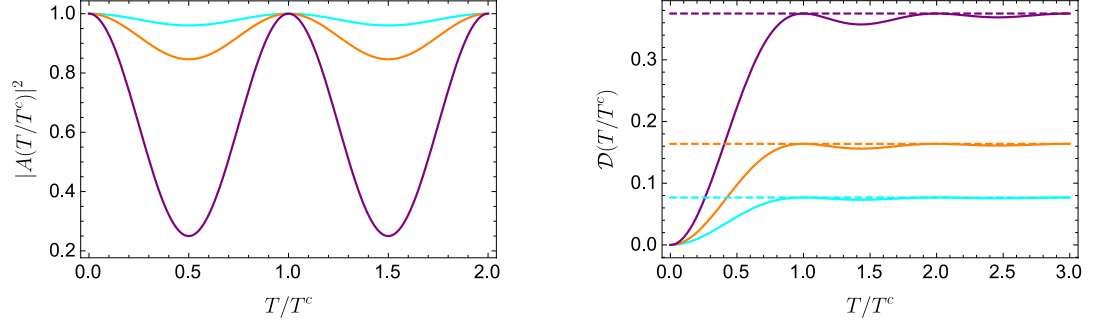
y su función de autocorrelación toma la forma:

$$A(t) = |c_0|^2 e^{iE_0 t/\hbar} + |c_1|^2 e^{iE_1 t/\hbar}. \quad (3.18)$$

Este sistema de dos niveles se caracteriza por tener *una sola* frecuencia de transición  $\omega_{nm} = \omega_{10} = |E_1 - E_0|/\hbar = \omega$ , de esta forma, la ecuación (3.12) se reduce a:

$$\mathcal{D}(T) = 2|c_0 c_1|^2 \left( 1 - \text{sinc}^2 \frac{\omega T}{2} \right). \quad (3.19)$$

De acuerdo con la discusión que dimos a continuación de la ecuación (3.14), a medida que el sistema evoluciona  $\mathcal{D}$  alcanza su valor asintótico  $\mathcal{D}_L$  en un tiempo  $T \sim T^c = 2\pi\omega^{-1}$ , esto es, en un tiempo del orden del período natural. Esto se puede confirmar mirando el comportamiento de estas funciones representadas en la figura 3.1, donde se muestra  $|A|^2$  y  $\mathcal{D}$  como funciones del tiempo adimensional  $T/T^c$ , para  $E_0 = 0$ ,  $E_1 = 1$ ,  $\hbar = 1$ , y diferentes valores de  $c_0$ . El valor asintótico de  $\mathcal{D}$  se alcanza rápidamente en todos los casos, en un tiempo que es aproximadamente el período de la función de autocorrelación.



**Figura 3.1:** Evolución de  $|A(T/T^c)|^2$  (panel izquierdo) y  $\mathcal{D}(T/T^c)$  (panel derecho) para un sistema de un qubit con energías  $E_0 = 0$  y  $E_1 = 1$ , y  $c_0 = 0.2$  (cian),  $0.3$  (naranja),  $0.5$  (púrpura). En el panel izquierdo (derecho), las curvas corresponden, de abajo a arriba, a valores decrecientes (crecientes) de  $c_0$ . El valor asintótico  $\mathcal{D}_L$  en cada caso está representado por la línea punteada correspondiente.

### 3.3.2. Sistema de $d$ -niveles: el oscilador armónico

A continuación describiremos el oscilador armónico de frecuencia  $\omega$  en el estado caracterizado por su función de onda:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(\mathbf{x}), \quad \text{con } E_n = \hbar\omega(n + 1/2). \quad (3.20)$$

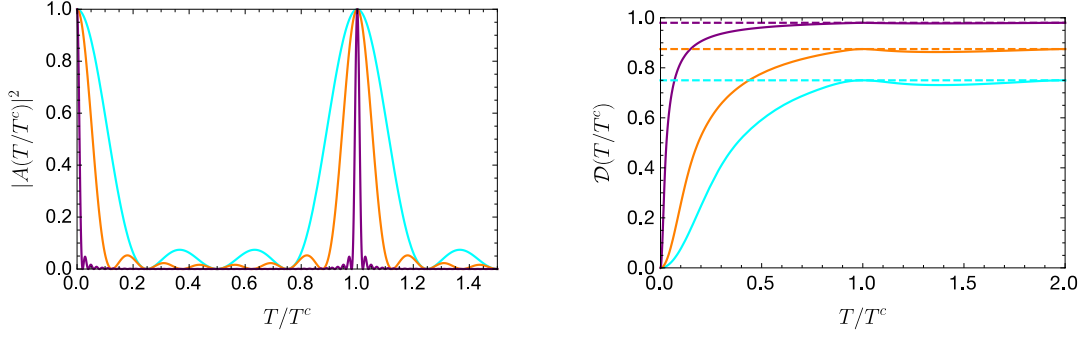
En este caso tenemos  $\omega_{nm} = \omega|n - m|$  y:

$$\mathcal{D}(T) = \frac{1}{d^2} \sum_{\substack{nm \\ (\omega_{nm} \neq 0)}} [1 - \text{sinc}^2(\omega|n - m|T/2)]. \quad (3.21)$$

Tomando  $\min\{\omega_{nm}\} = \omega$ , deducimos de la ecuación (3.15) que la evolución alcanza su valor asintótico  $\mathcal{D}_L$  en intervalos separados por  $T \sim T^c = 2\pi\omega^{-1}$ , y disminuye ligeramente entre estos tiempos. La figura 3.2 representa esto para los valores  $d = 4, 8, 50$ , igualmente ponderados y  $\hbar, \omega = 1$ , mostrando que en un período de la función de autocorrelación, la medida  $\mathcal{D}$  alcanza efectivamente su valor asintótico  $\mathcal{D}_L$ . Notemos que este último aumenta con el valor de  $d$ ; de hecho, la expresión general dada por la ecuación (3.13) es máxima en el caso igualmente ponderado, esto es, para el caso en el que los coeficientes  $c_n = 1/\sqrt{d}$ , con  $d$  el número de términos en la expansión (3.10). En este caso  $\mathcal{D}_L$  resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_L &= \sum_{\substack{nm \\ (\omega_{nm} \neq 0)}} |c_n c_m|^2 = \sum_{\substack{nm \\ (n \neq m)}} |c_n c_m|^2 = 2 \sum_{\substack{nm \\ (n < m)}} |c_n c_m|^2 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{d^2} \cdot \frac{d(d-1)}{2} = 1 - \frac{1}{d}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

aumentando así a medida que aumenta el número de términos (igualmente ponderados) en la expansión (3.10), o de manera equivalente, a medida que la información respecto al autoestado particular de energía disminuye.



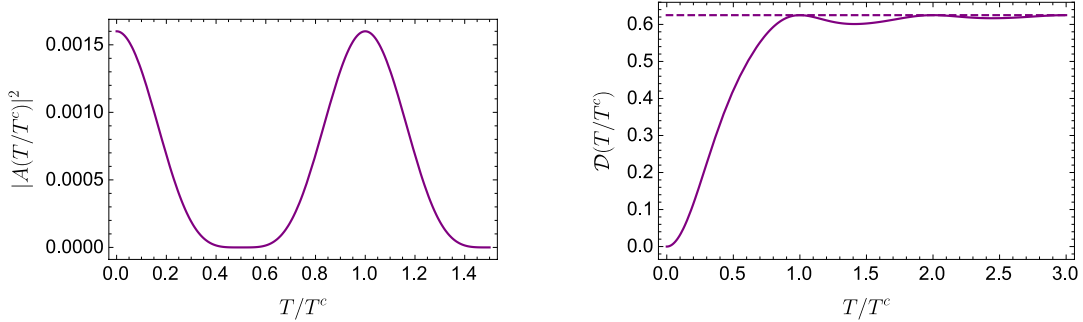
**Figura 3.2:** Evolución de  $|A(T/T^c)|^2$  (panel izquierdo) y  $\mathcal{D}(T/T^c)$  (panel derecho) para un sistema de  $d$ -niveles (igualmente ponderados), con  $d = 4$  (cian), 8 (anaranjado), 50 (púrpura). En el panel izquierdo (derecho), las curvas corresponden, de abajo hacia arriba, a valores decrecientes (crecientes) de  $d$ . El valor asintótico  $\mathcal{D}_L$  en cada caso está representado por la línea punteada correspondiente.

### 3.3.3. Un sistema de dos-qubit

Como siguiente ejemplo, consideremos ahora un sistema de dos qubits con un espectro de energía (degenerado) dado por  $E_{00} = 0$ ,  $E_{01} = E_{10} = E$ , y  $E_{11} = 2E$ . Su función de onda general se puede escribir como:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = c_{00}e^{-iE_{00}t/\hbar}\varphi_{00}(\mathbf{x}) + [c_{01}\varphi_{01}(\mathbf{x}) + c_{10}\varphi_{10}(\mathbf{x})]e^{-iE_{01}t/\hbar} + c_{11}e^{-iE_{11}t/\hbar}\varphi_{11}(\mathbf{x}). \quad (3.23)$$

Tomamos un estado balanceado, estableciendo  $c_{00} = c_{01} = c_{10} = c_{11} = 1/2$ . En la figura 3.3 representamos como antes  $|A|^2$  y  $\mathcal{D}$  en términos del tiempo adimensional  $T/T^c$ , nuevamente con  $\hbar = 1$ . Una vez más, el valor asintótico de  $\mathcal{D}$  se alcanza aproximadamente en un período de la función de autocorrelación.



**Figura 3.3:** Evolución de  $|A(T/T^c)|^2$  (panel izquierdo) y  $\mathcal{D}(T/T^c)$  (panel derecho) para un estado de dos-qubit igualmente ponderado con espectro:  $E_{00} = 0$ ,  $E_{01} = E_{10} = E$ , y  $E_{11} = 2E$  (se ha tomado  $E = 1$ ). El valor asintótico  $\mathcal{D}_L$  está representado por la línea punteada.

### 3.3.4. Paquete gaussiano en un pozo infinito

Para finalizar esta sección consideramos un paquete de onda en un pozo de potencial infinito unidimensional de ancho  $L$ . El estado correspondiente está dado por la ecuación (3.10) con autovalores  $E_n = n^2\hbar^2\pi^2/2mL^2$ , y  $\varphi_n(x)$  los correspondientes estados propios normalizados. Los coeficientes de la expansión  $\{c_n\}$  están determinados por la condición inicial, que aquí elegimos

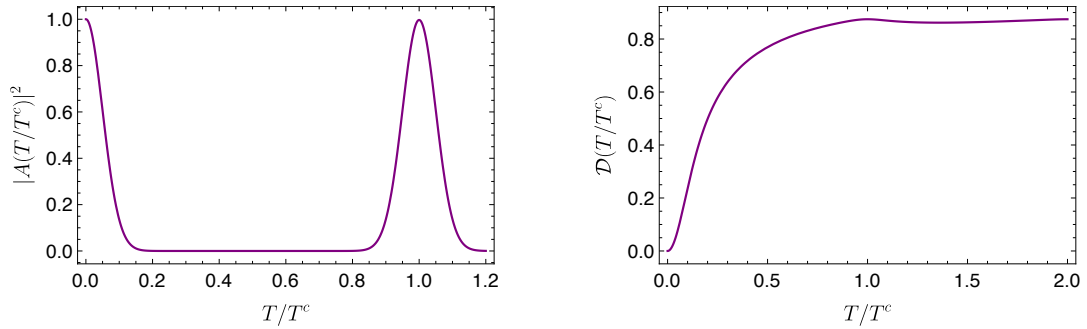
como un paquete de onda gaussiana centrado en  $x_0$ , con amplitud  $\sigma$  y momento  $p_0$ :

$$\Psi_G(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\hbar\sigma}\sqrt{\pi}} e^{-(x-x_0)^2/2\hbar^2\sigma^2} e^{ip_0(x-x_0)/\hbar}. \quad (3.24)$$

En este caso podemos aproximar analíticamente el coeficiente genérico  $c_n$  de la siguiente manera [84, 85]:

$$c_n = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{4\hbar\sigma\pi}{L\sqrt{\pi}}} \left[ e^{in\pi x_0/L} e^{-\hbar^2\sigma^2(p_0+n\pi\hbar/L)^2/2\hbar^2} - e^{-in\pi x_0/L} e^{-\hbar^2\sigma^2(p_0-n\pi\hbar/L)^2/2\hbar^2} \right]. \quad (3.25)$$

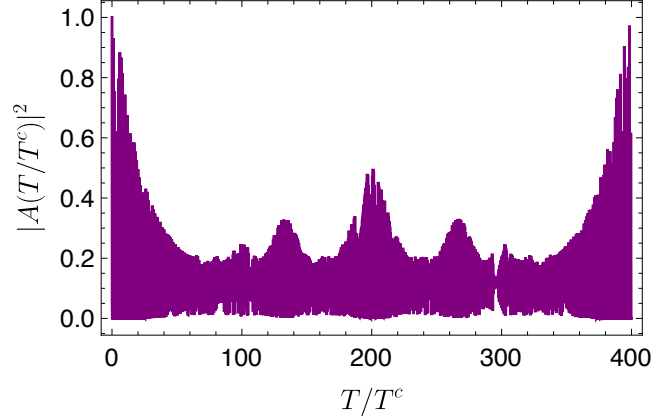
Si bien un análisis apropiado de las escalas de tiempo involucradas en este problema es más elaborado que en los ejemplos anteriores, para los propósitos actuales se considera el período clásico para este sistema, dado por  $T^c = 2\pi\hbar/|(dE_n/dn)_{n=n_0}|$ , donde  $p_0 = n_0\pi\hbar/L$  define el valor central de  $n_0$  usado en la expansión de autoestados [84]. En la figura 3.4 mostramos  $|A(T/T^c)|^2$  y  $\mathcal{D}(T/T^c)$  para un paquete de onda inicial con  $x_0 = 0.5$ ,  $p_0 = 400\pi$ ,  $\sigma = 1/10$  y (sin pérdida de generalidad)  $2m = \hbar = L = 1$ , así  $T^c = 1/(400\pi)$ .



**Figura 3.4:** Evolución de  $|A(T/T^c)|^2$  y  $\mathcal{D}(T/T^c)$  para un paquete de ondas gaussiano con  $x_0 = 0.5$ ,  $p_0 = 400\pi$ , y  $\sigma = 1/10$  en un pozo cuadrado infinito.

Algo que resulta pertinente de observar es que el sistema exhibe características ricas e interesantes, como resurgimientos (o como se lo conoce en la literatura *revivals*<sup>3</sup>), en tiempos más grandes que el tiempo requerido para que  $\mathcal{D}$  alcance su valor asintótico. Mostramos esto en la figura 3.5, en la cual se puede observar que  $\mathcal{D}$  alcanza el valor  $\mathcal{D}_L$  en un tiempo que es menor que el tiempo requerido para que la función de autocorrelación exhiba los *revivals* por un factor de 400. Por lo tanto, podemos afirmar con seguridad que cuando ocurren algunos aspectos relevantes de la dinámica del paquete de ondas, como los *revivals*, la cantidad de evolución ya está muy cerca de su valor asintótico.

<sup>3</sup>El fenómeno del resurgimiento de los paquetes de ondas, que ahora se ha observado en muchas situaciones experimentales, surge cuando se produce un paquete de ondas bien localizado que inicialmente exhibe una evolución temporal a corto plazo con una periodicidad casi clásica ( $T_{cl}$ ) y luego se propaga significativamente después de varias órbitas, entrando en una fase llamada colapsada, donde la probabilidad se distribuye (no uniformemente) alrededor de la trayectoria clásica. Sin embargo, en una escala de tiempo mucho más larga después de la excitación inicial, denominada tiempo de resurgimiento o *revival time* (con  $T_{rev} \gg T_{cl}$ ), el paquete se relocaliza, en forma de un resurgimiento cuántico, en la que la propagación se invierte y la periodicidad clásica vuelve a ser evidente. Un completo trabajo sobre este interesante tema se puede consultar en [84].



**Figura 3.5:** Evolución de  $|A(T/T^c)|^2$  y para un paquete de onda Gaussiano con  $x_0 = 0.5$ ,  $p_0 = 400\pi$ , y  $\sigma = 1/10$  en un pozo cuadrado infinito.

### 3.4. La cantidad de evolución y el enfoque *timeless*

En esta sección vamos a mostrar brevemente la relevancia que tiene la discusión que estamos dando dentro del marco teórico de la dinámica cuántica, conocido en la literatura como *sin tiempo* o *timeless* [87] y que hoy en día está bastante en boga (ver [88, 89] y referencias citadas ahí).

Básicamente, la imagen *timeless* considera un sistema bipartito cerrado compuesto por un sistema *reloj*, indicado como  $C$ , cuya autobase es  $|t\rangle$ , más un sistema  $R$  denominado como —el *resto del Universo*— cuyos grados de libertad están representados por  $\mathbf{x}$ . Se asume además que el sistema global  $R + C$  está en un *estado estacionario puro*, normalizado a 1 durante el intervalo de tiempo  $[0, T]$  y lo indicamos de la siguiente manera:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \Psi(\mathbf{x}, t) |\mathbf{x}\rangle |t\rangle d\mathbf{x} dt, \quad (3.26)$$

y consideramos a la función de onda  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  como el estado del sistema  $R$  cuando el sistema reloj, (es decir sus manecillas) registran el valor  $t$ . Así,  $R$  corresponde al sistema que se está estudiando.

Como el estado global  $|\Psi\rangle$  es puro, el grado de mezcla de la matriz densidad marginal o reducida  $\hat{\rho}_R$  que describe el sistema  $R$  constituye un indicador cuantitativo de la cantidad de correlaciones cuánticas entre  $C$  y  $R$ . Esta matriz densidad se calcula tomando la traza parcial del estado completo de la matriz de densidad  $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  sobre los grados de libertad del sistema reloj:  $\hat{\rho}_R = \text{Tr}_C(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$ .

**La entropía lineal**— Ahora bien, en mecánica cuántica el contenido de información (esto es, el grado de mezcla) representado por una matriz densidad  $\hat{\rho}$  viene expresado por la *entropía de von Neumann*, que no es otra cosa que la extensión cuántica de la entropía clásica de Gibbs y de la entropía de información de Shannon:

$$S_{\text{vN}} := -\text{Tr}(\hat{\rho} \log \hat{\rho}) = -\langle \log \hat{\rho} \rangle. \quad (3.27)$$

La entropía  $S[\hat{\rho}]$  cuantifica el apartamiento del sistema de un estado puro. En otras palabras, codifica el grado de mezcla del estado que describe un sistema finito dado. Sin embargo, en la literatura (información cuántica) se suele emplear un cuantificador basado en la *pureza* de un estado  $\text{Tr}\hat{\rho}^2$ .



Esta pureza toma el valor 1 para estados puros y  $1/N$  ( $N$  es la dimensión del espacio de Hilbert asociado al sistema descrito por  $\hat{\rho}$ ) para estados máximamente mezclados. De esta forma se define el cuantificador como la *entropía lineal* (o impureza):

$$S_L[\hat{\rho}] := 1 - \text{Tr}\hat{\rho}^2. \quad (3.28)$$

La entropía lineal toma valores comprendidos entre cero, correspondiente a un estado completamente puro, y  $(1 - 1/N)$  correspondiente a un estado completamente mixto. Si bien, la entropía lineal y la entropía de von Neumann son medidas similares de la mezcla de un estado, la entropía lineal tiene ventajas analíticas y numéricas porque no requiere la diagonalización de la matriz de densidad a la hora de evaluar la función del operador  $\ln \hat{\rho}$ . La entropía lineal se obtiene mediante la aproximación a primer orden de la entropía de von Neumann; explícitamente se expande el operador  $\ln \hat{\rho}$  alrededor de un estado puro  $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ , esto es, alrededor de la matriz no negativa  $1 - \hat{\rho}$ . Para ver esto recurrimos a la serie de Taylor para el logaritmo natural (conocida como la serie de Newton-Mercator):

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad \text{para } -1 < x \leq 1.$$

Entonces, eligiendo en (3.27)  $x := \hat{\rho} - \mathbb{1}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} -\langle \log \hat{\rho} \rangle &:= -\langle \log[\mathbb{1} + (\hat{\rho} - \mathbb{1})] \rangle \\ &\sim \langle \mathbb{1} - \hat{\rho} \rangle + \frac{\langle (\mathbb{1} - \hat{\rho})^2 \rangle}{2} + \frac{\langle (\mathbb{1} - \hat{\rho})^3 \rangle}{3} + \dots \end{aligned}$$

De esta manera a primer orden<sup>4</sup>:

$$-\text{Tr}(\hat{\rho} \log \hat{\rho}) \sim \langle \mathbb{1} - \hat{\rho} \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}(\mathbb{1} - \hat{\rho})] = \text{Tr}[\hat{\rho} - \hat{\rho}^2] = 1 - \text{Tr}[\hat{\rho}^2]. \quad (3.30)$$

Entonces,  $S_L$  constituye una buena medida del grado de mezcla y por lo tanto, el grado de mezcla de  $\hat{\rho}_R$ , medido por la entropía lineal  $S_L[\hat{\rho}_R] = 1 - \text{Tr}\hat{\rho}_R^2$  cuantifica las correlaciones cuánticas (entrelazamiento) entre el sistema y el reloj que se encuentran en un estado global puro<sup>5</sup>.

La entropía lineal  $S_L$  está dada por:

$$\begin{aligned} S_L[\hat{\rho}_R] &= 1 - \text{Tr}\hat{\rho}_R^2 \\ &= 1 - \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \left[ \int \int \Psi(\mathbf{x}, t) \Psi^*(\mathbf{x}, t') \Psi^*(\mathbf{x}', t) \Psi(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \right] dt dt' \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$= 1 - \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T |\langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_{t'} \rangle|^2 dt dt'. \quad (3.32)$$

Si comparamos la ecuación (3.32) con la ecuación (3.2) vemos que la medida  $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}[0, T]$  de la cantidad de evolución experimentada por un sistema cuántico en el intervalo de tiempo  $[0, T]$

<sup>4</sup>La versión linealmente escaleada se obtiene para  $0 \leq S(\hat{\rho}) \leq 1$  y resulta:

$$S[\hat{\rho}] = \frac{N}{N-1} (1 - \text{Tr}[\hat{\rho}^2]) \quad (3.29)$$

<sup>5</sup>Como se señala, se considera que el estado global es un estado puro, por lo que esto es cierto. Si el estado global es un estado mezcla, entonces el estado reducido a un subsistema podría tener solo correlaciones clásicas (como en el caso de un estado en equilibrio térmico). El entrelazamiento es, dentro de las correlaciones cuánticas, la más restrictiva. Para estos casos de estados mezclas globales, no es correcto asociar y cuantificar el grado de mezcla con el grado de entrelazamiento.

corresponde, dentro del enfoque *timeless*, a la cantidad de correlaciones cuánticas entre el reloj y el sistema. Además, (3.31) es una expresión similar a la que se ha utilizado para estudiar el entrelazamiento en sistemas continuos, como los sistemas atómicos (ver [90, 91] y referencias citadas ahí).

Debemos notar que la matriz densidad marginal  $\rho_R$  es en realidad el promedio temporal del estado  $|\Phi_t\rangle = \int \Psi(x, t)|x\rangle dx$ . Esto es,  $\rho_R = \frac{1}{T} \int |\Phi_t\rangle\langle\Phi_t| dt$ . En consecuencia, la medida  $\mathcal{D}$  es igual a la entropía lineal del estado cuántico promediado en el tiempo de el “resto del Universo”. Esto es consistente con la interpretación de  $\mathcal{D}$  como un indicador cuantitativo de cuán diversos son los estados que el sistema visita durante el intervalo de tiempo  $[0, T]$ .

Sin embargo, es conveniente mencionar que nuestros resultados indican que en la imagen *timeless*, a medida que aumenta la extensión  $T$  del intervalo de tiempo, la correlación cuántica entre el sistema y el reloj se acerca rápidamente al valor asintótico  $\mathcal{D}_L$ . Por lo tanto, para todos los efectos prácticos, podemos suponer que la cantidad de correlaciones cuánticas del conjunto sistema-reloj tiene el valor  $\mathcal{D}_L$ . Esta suposición es ineludible cuando el marco teórico *timeless* se adopta como una explicación fundamental de la naturaleza del tiempo [88] ya que, dentro del marco conceptual sin tiempo, se considera que el intervalo  $[0, T]$  cubre toda la historia del resto del Universo.

En los capítulos 5 y 6, seguiremos explorando el papel de las correlaciones cuánticas, esto es del entrelazamiento, en este formalismo de evolución *sin tiempo* de la mecánica cuántica.

### 3.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo hemos presentado e investigado una medida cuantitativa  $\mathcal{D}[t_1, t_2]$  de la *cantidad de evolución* experimentada por un estado puro dependiente del tiempo  $|\Phi_t\rangle$  de un sistema cuántico durante un intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$ . Esta medida viene dada por la distinguibilidad promedio entre los estados del sistema en diferentes instantes  $t, t' \in [t_1, t_2]$ . La medida está bien definida para sistemas que evolucionan bajo un Hamiltoniano *arbitrario*, que puede o no depender explícitamente del tiempo. Aquí nos centramos en los sistemas cuánticos gobernados por un Hamiltoniano independiente del tiempo; en este caso, encontramos que la medida  $\mathcal{D}[t_1, t_2]$  satisface una simetría de traslación en el tiempo:  $\mathcal{D}[t_1 + \Delta, t_2 + \Delta] = \mathcal{D}[t_1, t_2]$ , esto significa que  $\mathcal{D}$  depende del intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  solo a través de su duración  $T = t_2 - t_1$ . Además, para un estado inicial dado  $|\Phi_0\rangle$ , la medida  $\mathcal{D}$  resulta ser, para todos los intervalos de tiempo, siempre menor o igual a su valor límite asintótico  $\mathcal{D}_L = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{D}(T)$ . A medida que el valor de  $T$  se incrementa, la medida  $\mathcal{D}(T)$  alcanza rápidamente valores arbitrariamente cercanos al valor asintótico  $\mathcal{D}_L$ . En consecuencia, a excepción de intervalos de tiempo relativamente cortos, se puede suponer que la medida de la cantidad de evolución adquiere el valor  $\mathcal{D}_L$ , que puede considerarse como típico.

Este comportamiento asintótico también lo encontramos estudiando la medida  $\mathcal{D}$  dentro del enfoque *timeless* de la mecánica cuántica sobre el cual profundizaremos en el capítulo (5). Esto sucede pues aquí la medida de cantidad de evolución en el intervalo de tiempo  $[0, T]$  coincide con la cantidad de correlaciones cuánticas entre el reloj y el sistema. En otras palabras la medida  $\mathcal{D}$  resulta ser la entropía lineal del estado cuántico marginal del resto del universo, promediado en el tiempo. Este resultado está de acuerdo con la interpretación dada a  $\mathcal{D}$  como una medida de la diversidad de estados que el sistema visita entre  $[0, T]$ .

---

## Enfoque variacional entrópico para estados cuánticos

---

*“El crecimiento de entropía muestra una evolución espontánea. La entropía llega a ser así un indicador de evolución, y traduce la existencia en física de una flecha del tiempo: para todo sistema aislado el futuro está en la dirección en la cual la entropía aumenta.”*

Ilya Prigogine

### 4.1. Introducción

En este capítulo vamos a continuar estudiando nuestra medida de cantidad de evolución introducida anteriormente, la cual permite dar cuenta acerca de la cantidad de evolución que adquiere un sistema cuántico. Recordemos que nuestro enfoque se basó, de manera directa, en el hecho de que los estados puros admiten diferentes grados de distinguibilidad. Por esta razón, adoptamos un criterio que nos permitiera contemplar de una mejor manera, digamos más democrática, los distintos estados del sistema. El criterio de distinguibilidad promedio adoptado para estudiar los estados del sistema a medida que evoluciona, proporciona una evaluación cuantitativa de cuán diversos son los estados que adquiere el sistema en un intervalo de tiempo determinado. En otras palabras, estamos respondiendo a la pregunta *¿cuánto sucede?* en un sistema mientras este evoluciona.

Otra cuestión que resulta interesante explorar tiene que ver con reconocer la forma que tienen aquellos estados que más evolucionan bajo ciertas restricciones, por ejemplo en el valor medio de la energía. Esta cuestión está relacionada con los problemas típicos de *optimización* encontrados en la Física como lo es el caso de la optimización de la función entropía de Gibbs en los distintos ensambles de la termodinámica y mecánica estadística clásica y cuántica, donde se recurre al método de los multiplicadores de Lagrange.

En este capítulo vamos a abordar esta cuestión de dos maneras, por supuesto, equivalentes. En primer lugar mostraremos que existe una relación entre el valor asintótico de la cantidad de evolución  $\mathcal{D}$  y la entropía lineal asociada a la distribución de probabilidad de los estados de energía del

sistema. De esta forma en la sección 4.2 preparamos el terreno para el estudio de la optimización de la cantidad de evolución, bajo la restricción de una energía media fija. Luego, en la sección 4.3 investigamos aquellos estados cuánticos que optimizan la medida de la evolución. Aquí, nuestro primer enfoque será alternativo al variacional y nos concentraremos en la prueba directa de que una dada familia monoparamétrica de distribución de probabilidad de la energía optimiza nuestra medida. Esto nos permitirá en la sección 4.4, dar una interpretación termoestadística del parámetro involucrado. También mostraremos que el enfoque variacional usual introduciendo los multiplicadores de Lagrange conduce efectivamente a la misma optimización. Esto nos ayudará a interpretar la diferencia entre los dos abordajes que hacemos para la optimización y a extender el significado de la medida propuesta. Vamos a explorar en la sección 4.5, el comportamiento de la medida óptima  $\mathcal{D}_{\text{opt}}$  para los ejemplos estudiados en la sección 3.3 Finalmente daremos una discusión y algunas observaciones finales en la sección 4.6.

## 4.2. Cantidad de evolución y entropía lineal

Para poder realizar el estudio de los estados óptimos, primeramente vamos a establecer la relación que existe entre el valor asintótico de la cantidad de evolución  $\mathcal{D}_L$  y la entropía lineal asociada a la distribución de energía de un sistema cuántico. Comenzando entonces por la expresión del valor asintótico de  $\mathcal{D}(T)$  dada por la expresión (3.13) y escribiendo:

$$\mathcal{D}_L = \sum_{\substack{nm \\ (\omega_{nm} \neq 0)}} |c_n c_m|^2 = 1 - \sum_{\substack{nm \\ (\omega_{nm} = 0)}} |c_n c_m|^2 = 1 - \sum_{(E_n = E_m)} |c_n c_m|^2, \quad (4.1)$$

donde en la última igualdad se usa que la condición  $\omega_{nm} = 0$  es equivalente a  $E_n = E_m$ . Designamos con  $\{E^{(0)}, E^{(1)}, \dots\}$  a la sucesión, en orden creciente, de *diferentes* valores de energía que aparecen en el conjunto  $\{E_0, E_1, \dots\}$  de autovalores de energía. Notemos que, mientras algunos de los valores  $E_n$ 's pueden ser iguales debido a la degeneración, todos los  $E^{(i)}$ 's son diferentes y satisfacen las estrictas desigualdades,  $E^{(0)} < E^{(1)} < \dots$ . Además, en contraste con lo que sucede con los  $E_n$ 's, el índice  $i$  que aparece en  $E^{(i)}$  no hace referencia al autovalor del Hamiltoniano del  $i$ -ésimo autoestado, sino que etiqueta un valor particular en el conjunto de autovalores de energía, en otras palabras, genera un conjunto numerable (sucesión) de autoenergías. Esto es, por ejemplo, si consideramos un sistema con un Hamiltoniano que tiene cuatro autoestados con correspondiente autovalores  $E_0 = 0$ ,  $E_1 = E_2 = \epsilon$ , y  $E_3 = 2\epsilon$ , luego se tiene que  $E^{(0)} = 0$ ,  $E^{(1)} = \epsilon$ , y  $E^{(2)} = 2\epsilon$ .

Ahora, con esta notación, podemos reescribir la ecuación (4.1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_L &= 1 - \sum_{\substack{nm \\ (E_n = E_m)}} |c_n c_m|^2 \\ &= 1 - \sum_i \left( \sum_{\substack{n \\ (E_n = E^{(i)})}} |c_n|^2 \sum_{\substack{m \\ (E_m = E^{(i)})}} |c_m|^2 \right) \\ &= 1 - \sum_i P^2(E^{(i)}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde  $P(E^{(i)})$  está dado por

$$P(E^{(i)}) = \sum_{(E_m=E^{(i)})}^m |c_m|^2, \quad (4.3)$$

La cantidad  $P(E^{(i)})$  representa la probabilidad de obtener el valor particular  $E^{(i)}$  al medir la energía del sistema. Notar que  $P(E^{(i)})$  ya tiene en cuenta cualquier posible degeneración, de modo que  $P$  es una distribución de probabilidad de valores de energía, no una distribución de probabilidad de estados propios de energía.

Ahora, a la distribución de probabilidad  $P$  le corresponde una entropía lineal  $S_L[P]$  definida como:

$$S_L[P] = 1 - \sum_i P^2(E^{(i)}), \quad (4.4)$$

con esto, el valor asintótico dado en la expresión (4.2) nos permite escribir el siguiente resultado:

$$\mathcal{D}_L = S_L[P], \quad (4.5)$$

de modo que  $\mathcal{D} \approx \mathcal{D}_L = S_L[P(E^{(i)})]$ , lo que significa que la cantidad de evolución de un sistema cuántico coincide con la entropía lineal asociada a su distribución de energía.

Un párrafo aparte merece ser escrito para señalar que la entropía  $S_L$  coincide con la entropía no aditiva (o ley de potencia: *power-law non-additive entropy*)  $S_q$  que corresponde a  $q = 2$ . La entropía  $S_q$  de una distribución de probabilidad normalizada  $\{p_i\}$  se definen como  $S_q[p] = \frac{1}{q-1} (1 - \sum_i p_i^q)$  y constituye una herramienta útil para el análisis de diversos problemas tanto en física clásica como cuántica (para más detalles ver, por ejemplo, [92, 93, 94, 95, 96] y las referencias contenidas ahí). Debemos notar que en la aplicación presente de la entropía  $S_q$ , el valor particular  $q = 2$  es una consecuencia inevitable de la estructura del producto interno en el espacio de Hilbert, que proporciona una forma natural de evaluar la distinción entre estados cuánticos puros. El problema considerado en el presente trabajo ilustra el hecho de que las entropías no estándar o generalizadas [97, 98] surgen naturalmente en el estudio de sistemas o procesos físicos.

### 4.3. Estados óptimos

En este punto de nuestro camino, vamos a investigar aquellos estados cuánticos que optimizan la medida de la evolución para una dada energía media. Estos estados óptimos se pueden considerar como aquellos que más evolucionan bajo los recursos de energía dados y tienen una distribución de energía  $P_{\text{opt}}(E^{(i)})$  que maximiza el valor de la entropía lineal  $S_L[P(E^{(i)})]$ , bajo las restricciones impuestas por un valor fijo de energía media  $\langle \hat{H} \rangle = \langle E \rangle = \sum_i E^{(i)} P(E^{(i)})$  y la condición de normalización  $\sum_i P(E^{(i)}) = 1$ . Por lo general, la optimización restringida de la entropía  $S_q$  se realiza recurriendo al método de los multiplicadores de Lagrange [92]. En el presente caso ( $q = 2$ ), sin embargo, seguiremos un camino alternativo, que conducirá a una prueba directa de que una distribución de probabilidad particular es óptima. Como explicaremos más adelante, esta prueba directa tiene algunas ventajas, aunque su resultado final es, por supuesto, equivalente al obtenido con los multiplicadores de Lagrange.

Para analizar los estados que maximizan la medida  $\mathcal{D}_L = S_L[P(E^{(i)})]$ , comenzamos conside-

rando la distribución de probabilidad de energía:

$$P_{\text{opt}}(E^{(i)}) = a \left(1 - bE^{(i)}\right) \Theta\left(\frac{1}{b} - E^{(i)}\right), \quad (4.6)$$

con  $b$  un parámetro real cuya unidad es inversa a la de la energía,  $\Theta(x)$  es la función escalón de Heaviside:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

y  $a$  es un parámetro real y positivo de normalización:

$$a = \left[ \sum_{E^{(i)} \leq b^{-1}} \left(1 - bE^{(i)}\right) \right]^{-1} \quad (4.8)$$

que garantiza que  $\sum_i P_{\text{opt}}(E^{(i)}) = 1$ . La ecuación (4.6) define una familia monoparamétrica de distribución de probabilidades parametrizada por  $b$ . Recordar que  $P_{\text{opt}}(E^{(i)})$  es una probabilidad sobre los valores de energía y no sobre los autoestados del Hamiltoniano.

A continuación, demostramos que la distribución de probabilidad  $P_{\text{opt}}(E^{(i)})$  es la que maximiza la entropía  $S_L[P]$ , entre todas las distribuciones de probabilidad normalizadas  $P(E^{(i)})$  que conducen a la misma energía media que  $P_{\text{opt}}$ .

Consideremos entonces una distribución de probabilidad normalizada  $P(E^{(i)})$ , que permite obtener el mismo valor de  $\langle \hat{H} \rangle$  como lo hace  $P_{\text{opt}}$ , esto es:

$$\sum_i P(E^{(i)}) = \sum_i P_{\text{opt}}(E^{(i)}) = 1, \quad (4.9a)$$

$$\sum_i E^{(i)} P(E^{(i)}) = \sum_i E^{(i)} P_{\text{opt}}(E^{(i)}) = \langle E \rangle = \langle \hat{H} \rangle. \quad (4.9b)$$

Probaremos que:  $\sum_i P^2(E^{(i)}) \geq \sum_i P_{\text{opt}}^2(E^{(i)})$ . Sea  $\Delta_i = P(E^{(i)}) - P_{\text{opt}}(E^{(i)})$ . Luego,

$$\sum_i P^2(E^{(i)}) = \sum_i P_{\text{opt}}^2(E^{(i)}) + 2 \sum_i P_{\text{opt}}(E^{(i)}) \Delta_i + \sum_i \Delta_i^2. \quad (4.10)$$

Considerando el segundo término en el lado derecho de la ecuación dada arriba, y reescribiendo éste en la forma:

$$\begin{aligned} \sum_i P_{\text{opt}}(E^{(i)}) \Delta_i &= \sum_i a \left(1 - bE^{(i)}\right) \Theta\left(\frac{1}{b} - E^{(i)}\right) [P(E^{(i)}) - P_{\text{opt}}(E^{(i)})] \\ &= \sum_i a \left(1 - bE^{(i)}\right) \left[1 - \Theta\left(E^{(i)} - \frac{1}{b}\right)\right] [P(E^{(i)}) - P_{\text{opt}}(E^{(i)})] \\ &= \sum_i a \left(1 - bE^{(i)}\right) [P(E^{(i)}) - P_{\text{opt}}(E^{(i)})] \\ &\quad - \sum_i a \left(1 - bE^{(i)}\right) P(E^{(i)}) \Theta\left(E^{(i)} - \frac{1}{b}\right) \\ &\quad - \underbrace{\sum_i a \left(1 - bE^{(i)}\right) P_{\text{opt}}(E^{(i)}) \Theta\left(E^{(i)} - \frac{1}{b}\right)}_{=0}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Como podemos ver, en la segunda línea usamos el cambio de signo de la función escalón; en la tercera línea, usamos las ecuaciones (4.9) y así el primer sumando de la ecuación (4.11) se anula. De esta manera se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_i P_{\text{opt}}(E^{(i)}) \Delta_i &= \sum_i a (bE^{(i)} - 1) P(E^{(i)}) \Theta \left( E^{(i)} - \frac{1}{b} \right) \\ &= \sum_{E^{(i)} \geq b^{-1}} a (bE^{(i)} - 1) P(E^{(i)}) \geq 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

La última desigualdad en (4.12), junto con la ecuación (4.10), implica que:

$$\begin{aligned} \sum_i P^2(E^{(i)}) &\geq \sum_i P_{\text{opt}}^2(E^{(i)}) \text{ y, consecuentemente,} \\ \rightsquigarrow S_L[P_{\text{opt}}] &\geq S_L[P] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Esto significa que la distribución de probabilidad de energía  $P_{\text{opt}}(E^{(i)})$  dada por (4.6-4.8) representa la solución al problema variacional restringido para optimizar el funcional entrópico  $S_L[P]$  bajo las restricciones (4.9).

De la discusión anterior deducimos que, suponiendo que  $T$  sea lo suficientemente grande como para que  $\mathcal{D} \approx \mathcal{D}_L$ , los estados que maximizan la cantidad de evolución bajo la restricción de un valor fijo para  $\langle E \rangle$  son aquellos cuya distribución de energía tiene la forma dada por la ecuación (4.6). Estos son los estados que, para una dada energía media  $\langle \hat{H} \rangle$ , y sobre intervalos de tiempo suficientemente largos, maximizan la distinguibilidad promediada en el tiempo entre los estados del sistema en diferentes instantes. Se pueden considerar a estos estados óptimos como aquellos que exhiben la mayor cantidad de evolución dinámica para una dada energía media. Figurativamente, se puede decir que tales estados utilizan sus recursos energéticos de una manera óptima, en el sentido de *llevar la vida más variada posible* para un dado valor medio de energía. Esto es, aprovechan al máximo su energía.

#### 4.4. Interpretación estadística de los estados óptimos

La distribución de probabilidad de energía (4.6-4.8) asociada con los estados óptimos está determinada por un solo parámetro  $b$ , que determina la energía de corte  $E_c = 1/b$  (para energías  $E^{(i)} \geq E_c$  se tiene que  $P_{\text{opt}}(E^{(i)}) = 0$ ). El valor de expectación de la energía  $\langle \hat{H} \rangle$  y la medida de la cantidad de evolución  $\mathcal{D}$ , cuando se evalúa en los estados óptimos, se convierten en funciones del parámetro  $b$ , y están dados por:

$$\langle E \rangle(b) = \sum_i E^{(i)} P_{\text{opt}}(E^{(i)}) = \frac{\sum_{E^{(i)} \leq b^{-1}} E^{(i)} (1 - bE^{(i)})}{\sum_{E^{(i)} \leq b^{-1}} (1 - bE^{(i)})}, \quad (4.14)$$

y

$$\mathcal{D}_{\text{opt}}(b) = 1 - \sum_i P_{\text{opt}}^2(E^{(i)}) = 1 - \frac{\sum_{E^{(i)} \leq b^{-1}} (1 - bE^{(i)})^2}{\left[ \sum_{E^{(i)} \leq b^{-1}} (1 - bE^{(i)}) \right]^2}. \quad (4.15)$$

Notemos que las cantidades  $a(b)$ ,  $P_{\text{opt}}(E^{(i)})$ ,  $\langle E \rangle(b)$ , son todas funciones continuas del parámetro  $b$ . Las ecuaciones (4.14-4.15) determinan en forma paramétrica la función  $\mathcal{D}_{\text{opt}}(\langle E \rangle)$ , la cual es

también continua. Desafortunadamente, en general no es posible eliminar el parámetro  $b$  del par de ecuaciones (4.14-4.15), y expresar el valor óptimo  $\mathcal{D}_{\text{opt}}$  directamente en términos de  $\langle \hat{H} \rangle$ . Sin embargo, podemos calcular la derivada  $\mathcal{D}_{\text{opt}}$  con respecto a  $\langle \hat{H} \rangle$  como se muestra a continuación.

Según la forma en que se definió la sucesión  $\{E^{(k)}\}$ , es claro que  $E^{(k)} < E^{(k+1)}$ , y que en el intervalo de energía  $(E^{(k)}, E^{(k+1)})$  no hay autovalores de energía. En consecuencia, para los valores del parámetro  $b$  tales que  $E^{(k)} < b^{-1} < E^{(k+1)}$  las cantidades  $a(b)$ ,  $P_{\text{opt}}(E^{(i)})$ ,  $\langle E \rangle(b)$ , y  $\mathcal{D}_{\text{opt}}(b)$  no solo son continuas sino también funciones diferenciables del parámetro  $b$ . Luego, se consigue

$$\frac{d\langle E \rangle}{db} = \frac{d}{db} \sum_{E^{(i)} \leq b^{-1}}^k E^{(i)} P_{\text{opt}}(E^{(i)}) = \sum_{E^{(i)} \leq b^{-1}}^k E^{(i)} \frac{d}{db} \left[ a(b) (1 - bE^{(i)}) \right]. \quad (4.16)$$

Por otro lado, de la ecuación (4.15), tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{D}_{\text{opt}}}{db} &= -\frac{d}{db} \sum_{E^{(i)} \leq b^{-1}}^k P_{\text{opt}}^2(E^{(i)}) = -\frac{d}{db} \sum_{E^{(i)} \leq b^{-1}}^k \left[ a(b) (1 - bE^{(i)}) \right]^2 \\ &= -2a \sum_{E^{(i)} \leq b^{-1}}^k (1 - bE^{(i)}) \frac{d}{db} \left[ a(b) (1 - bE^{(i)}) \right] \\ &= -2a \sum_{E^{(i)} \leq b^{-1}}^k \frac{d}{db} \left[ a(b) (1 - bE^{(i)}) \right] + 2ab \sum_{E^{(i)} \leq b^{-1}}^k E^{(i)} \frac{d}{db} \left[ a(b) (1 - bE^{(i)}) \right] \\ &= -2a \frac{d}{db} \sum_{E^{(i)} \leq b^{-1}}^k P_{\text{opt}}(E^{(i)}) + 2ab \frac{d\langle E \rangle}{db} \\ &= 2ab \frac{d\langle E \rangle}{db}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde se ha usado la ecuación (4.16), y la condición de normalización. Esto finalmente da como resultado:

$$\frac{d\mathcal{D}_{\text{opt}}}{d\langle E \rangle} = 2ab. \quad (4.18)$$

Observemos que la ecuación (4.18) se cumple para todos los valores de  $b$  dentro de un intervalo de la forma  $\left( \frac{1}{E^{(k+1)}}, \frac{1}{E^{(k)}} \right)$ , correspondiente a la ventana de valores de energía  $(E^{(k)}, E^{(k+1)})$ . De hecho, la ecuación (4.18) se cumple para *todos* los intervalos sucesivos  $\left( \frac{1}{E^{(k+1)}}, \frac{1}{E^{(k)}} \right)$ . Además, debido a que la cantidad  $2a(b)b$  es una función continua de  $b$ , se sigue que el valor de  $d\mathcal{D}_{\text{opt}}/d\langle E \rangle$  al final de cada uno de esos intervalos coincide exactamente con su valor al comienzo del siguiente. En otras palabras, la ecuación (4.18) se cumple para todo el rango de valores de  $b$ . Siguiendo con esta ecuación, vemos que se asemeja a la conocida relación termodinámica  $dS/dE = \beta$  asociado con el ensamble canónico de Gibbs, que conecta la entropía, la energía y la temperatura (proporcional a  $\beta^{-1}$ ). Dentro de esta analogía termodinámica, la cantidad  $2ab$  desempeña el papel de una cantidad inversa a la temperatura.

Vale el esfuerzo discutir brevemente el enfoque de los multiplicadores de Lagrange para el problema variacional restringido para la optimización de la medida  $\mathcal{D}$ . Introduciendo los multiplicadores de Lagrange  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$ , correspondiendo, respectivamente, a las restricciones de la normalización



y la energía media, se obtiene el problema variacional:

$$\delta \left\{ \left[ 1 - \sum_i P^2(E^{(i)}) \right] + \alpha_0 \left[ \sum_i P(E^{(i)}) \right] - \alpha_1 \left[ \sum_i E^{(i)} P(E^{(i)}) \right] \right\} = 0, \quad (4.19)$$

cuya solución estacionaria tiene la forma:

$$P_{\text{opt}}(E^{(i)}) = \frac{1}{2} (\alpha_0 - \alpha_1 E^{(i)}). \quad (4.20)$$

Si se agrega al resultado anterior basado en Lagrange la prescripción de corte de Tsallis [92], es decir  $P(E^{(i)}) = 0$  si  $\alpha_0 - \alpha_1 E^{(i)} < 0$ , se puede ver fácilmente que (4.20) coincide con la expresión (4.6), si se hace la identificación:

$$\alpha_0 = 2a \quad \text{y} \quad \alpha_1 = 2ab. \quad (4.21)$$

Esto es consistente con nuestro hallazgo anterior de que  $\alpha_1 = 2ab$  formalmente juega un papel similar a una cantidad inversa a la temperatura, ya que es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de la energía, de manera similar a lo que sucede con la formulación de la máxima entropía de Jaynes de la mecánica estadística [99].

El enfoque de la optimización restringida de la medida  $\mathcal{D}$  discutido anteriormente produce, a diferencia del multiplicador de Lagrange, una prueba directa de que la distribución particular  $P_{\text{opt}}$ , con el límite de corte incluido explícitamente, maximiza la cantidad  $\mathcal{D} = S_L[P]$  bajo las restricciones relevantes. Por otro lado, la aplicación del método de multiplicadores de Lagrange a este problema en particular proporciona solo la estructura (4.20) de una solución estacionaria, sin indicar explícitamente el corte. Dentro del método de Lagrange, la prescripción de corte y la condición máxima son cuestiones que requieren ser discutidas y analizadas después de derivar la forma de  $P_{\text{opt}}$ .

Para obtener una comprensión intuitiva sobre la distribución máxima de entropía (4.6) es conveniente considerar el significado estadístico de la entropía lineal  $S_L$  dado por (4.4). Esta medida tiene una interpretación estadística clara: si uno mide la energía de dos copias de nuestro sistema preparadas de manera idéntica, la entropía lineal (4.4) es igual a la probabilidad de obtener resultados diferentes en estas dos mediciones. En este sentido,  $S_L$  puede considerarse como una medida de la *diversidad*: diversidad en la forma en que los diferentes valores propios de energía están representados en el estado cuántico en consideración. Podemos encontrar una analogía en esta interpretación en los estudios de biodiversidad realizados en biología, donde la entropía lineal se usa de hecho como uno de los llamados índices de diversidad de una comunidad, —conocido como el índice de diversidad de Gini-Simpson— cuya magnitud mide algún aspecto relacionado con la complejidad en la composición o en la estructura de las comunidades.

Esta interpretación de la entropía  $S_L$  tiene sentido físico en nuestro trabajo actual, ya que la situación de cero *diversidad energética* corresponde a un estado propio de energía, que es un estado que básicamente no evoluciona. Ahora podemos reconsiderar la distribución máxima de entropía (4.6). Esta resulta de un proceso de optimización que involucra dos requisitos en conflicto: hacer que la diversidad en la energía sea lo más grande posible, mientras se mantiene constante la energía media. Este problema tiene algunas similitudes matemáticas con el proceso de optimización de la entropía que conduce a la distribución canónica de Gibbs de la mecánica estadística, donde uno tiene que optimizar la entropía logarítmica estándar mientras se mantiene constante la energía promedio. En ambos casos, se obtiene un conjunto de probabilidades que son funciones decrecientes de la energía. Sin embargo, mientras que la distribución de Gibbs sigue una ley exponencial, la distribución (4.6) es lineal en la energía.

## 4.5. Ejemplos

En esta sección exploramos el comportamiento de  $\mathcal{D}_{\text{opt}}$  como una función de  $\langle \hat{H} \rangle$ , y otras características de los estados óptimos, para los ejemplos estudiados en el capítulo anterior, (sección 3.3). Todas las curvas obtenidas corresponden a los estados que más evolucionan (tienen el valor óptimo  $\mathcal{D}_{\text{opt}}$  de la medida  $\mathcal{D}$ ) para un valor dado de su correspondiente energía media  $\langle \hat{H} \rangle$ .

En el caso particular del sistema de un qubit con energías  $E^{(0)} = 0$  y  $E^{(1)} = E$ , la dependencia de  $\mathcal{D}_{\text{opt}}$  con  $\langle \hat{H} \rangle$  admite una expresión analítica explícita. Veamos cómo llegamos a ella. En este caso, recurriendo a la expresión (4.14), tenemos los valores:

$$\langle \hat{H} \rangle = \frac{E(1 - bE)}{(2 - bE)}$$

y

$$2ab = \frac{2b}{(2 - bE)}$$

para valores positivos de  $b$  en el rango  $0 \leq b \leq E^{-1}$  (todos los valores  $b > E^{-1}$  corresponden al estado fundamental, teniendo  $\langle \hat{H} \rangle = 0$ ). Estas expresiones conducen a:

$$b = \frac{2\langle \hat{H} \rangle - E}{E(\langle \hat{H} \rangle - E)} \quad (4.22)$$

y

$$\alpha_1 = 2ab = \frac{2(E - 2\langle \hat{H} \rangle)}{E^2} \quad (4.23)$$

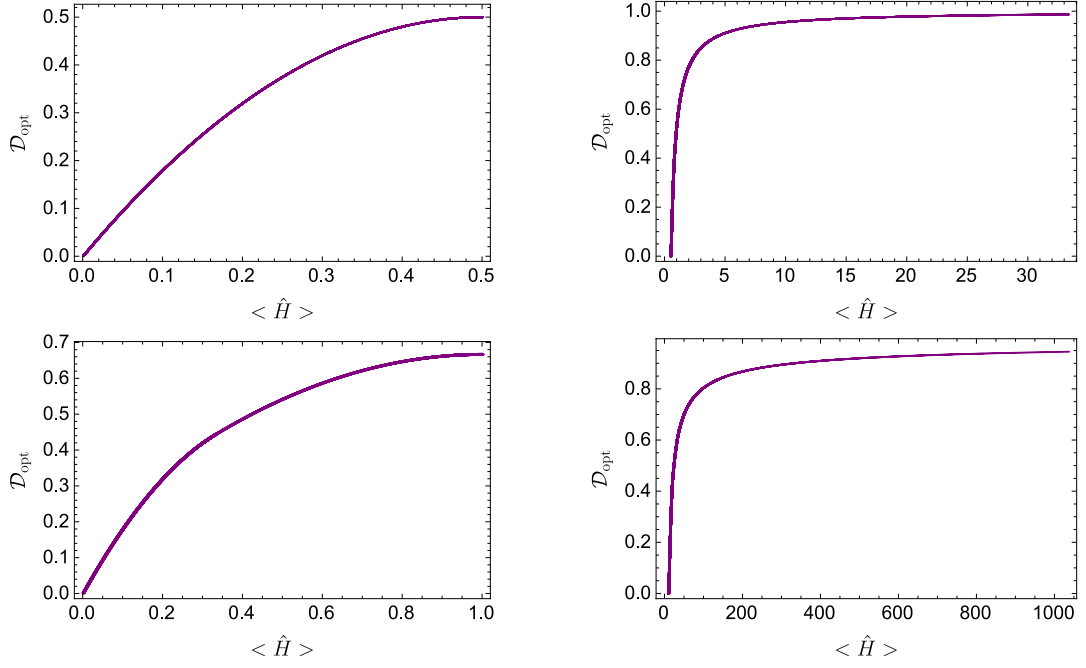
Recurriendo a la ecuación (4.18) expresada como  $d\mathcal{D}_{\text{opt}}/d\langle \hat{H} \rangle = 2ab$ , tenemos luego:

$$\mathcal{D}_{\text{opt}} = \frac{2\langle \hat{H} \rangle}{E} \left[ 1 - \frac{\langle \hat{H} \rangle}{E} \right], \quad (4.24)$$

donde, para  $b \geq 0$ , la energía media está dentro del rango  $0 \leq \langle \hat{H} \rangle \leq E/2$ . Este comportamiento se encuentra representado en el panel superior izquierdo de la figura 4.1 para  $E = 1$ .

Para los otros casos de estudio, no existe una expresión analítica para  $\mathcal{D}(\langle \hat{H} \rangle)$ , la dependencia de  $\mathcal{D}_{\text{opt}}$  con  $\langle \hat{H} \rangle$  se determina en forma paramétrica según las ecuaciones (4.14-4.15). Para el oscilador armónico con  $d$ -niveles de la subsección 3.3.2, los niveles de energía están dados por  $E_n = n + (1/2)$  (recordar que hemos tomado  $\hbar = \omega = 1$ ). El panel superior derecho de la figura 4.1 se obtiene considerando estados igualmente ponderados de la forma (3.20) para varios valores de la energía media (correspondiente a diferentes valores de  $d$ ). El caso de dos-qubit de la subsección 3.3.3, con energías  $E^0 = 0$ ,  $E^1 = E$ ,  $E^2 = 2E$ , conduce a la curva representada en el panel inferior izquierdo de la figura 4.1, tomando  $E = 1 (= \hbar)$ . Finalmente, el panel inferior derecho corresponde al paquete de ondas gaussianas de la subsección 3.3.4, con niveles de energía  $E_n = \pi^2 n^2$ .

Las curvas en la Figura 4.1 representan el valor mínimo de  $\langle \hat{H} \rangle$  requerido para lograr un valor dado de  $\mathcal{D}$ . Es decir, proporcionan información sobre los recursos mínimos de energía (según la evaluación de la energía media) necesarios para alcanzar una determinada cantidad de evolución cuántica. También ilustran el hecho intuitivamente atractivo de que un sistema físico necesita energía para llevar una vida llena de acontecimientos. Observemos además que las regiones del plano sobre las curvas representadas en la Figura 4.1 están prohibidas: no hay estados físicos representados allí.



**Figura 4.1:**  $\mathcal{D}_{\text{opt}}$  como una función de  $\langle \hat{H} \rangle$  para diferentes sistemas cuánticos. Los valores de las energías están adimensionalizados. Panel superior izquierdo: un sistema de un solo qubit con niveles de energía 0, 1; panel superior derecho: un oscilador armónico de  $d$ - niveles con niveles de energía  $E_n = n + (1/2)$ ; panel inferior izquierdo: un sistema de dos-qubit con energías accesibles 0, 1, 2; panel inferior derecho: un paquete de onda gaussiano en un pozo cuadrado infinito, con niveles de energía  $E_n = \pi^2 n^2$ . Todos estos sistemas se han estudiado en la Sección 3.3.

De los resultados de la Figura 4.1 se desprende que la dependencia detallada de  $\mathcal{D}_{\text{opt}}$  con  $\langle \hat{H} \rangle$  difiere para sistemas con diferentes espectros de energía. Sin embargo, se observa que para varios sistemas dicha dependencia exhibe las mismas características cualitativas generales. Por ejemplo, todas las curvas exhiben un comportamiento monótonamente creciente de  $\mathcal{D}_{\text{opt}}$  como una función de  $\langle \hat{H} \rangle$ , correspondiendo a un valor positivo de la cantidad similar a la temperatura  $(2ab)^{-1}$ . Las curvas representadas también tienen una concavidad definida. Esto implica que la cantidad de evolución y los recursos energéticos obedecen a una relación de rendimientos decrecientes: a medida que aumenta la energía media, los incrementos adicionales de los recursos energéticos se vuelven menos eficientes para incrementar la cantidad de evolución.

## 4.6. Conclusiones del capítulo

Comenzamos este capítulo buscando una relación entre el valor asintótico de la cantidad de evolución  $\mathcal{D}_L = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{D}(T)$ , y la entropía lineal de la distribución de probabilidad de la energía  $P(E)$ , que determina la probabilidad de obtener el valor  $E$  al medir la energía del estado  $|\Phi_0\rangle$ . Encontramos efectivamente que la cantidad de evolución de un sistema cuántico coincide con la entropía lineal asociada a su distribución de energía,  $\mathcal{D} \approx \mathcal{D}_L = S_L[P(E^{(i)})]$ .

Usando la aproximación  $\mathcal{D}_L$  para la cantidad de evolución, investigamos los estados cuánticos que más evolucionan bajo los recursos de energía dados. Es decir, investigamos los estados que optimizan  $\mathcal{D}$  bajo la restricción impuesta por el valor esperado de la energía. La distribución de probabilidad de la energía  $P(E)$  de los estados óptimos, que denominamos  $P_{\text{opt}}(E)$ , tiene una

forma de entropía máxima: maximiza la entropía lineal, que es la medida entrópica no aditiva de la ley de potencia  $S_q$  (para  $q = 2$ ), bajo las restricciones dadas por la normalización y el valor medio  $\langle \hat{H} \rangle$  de la energía. Esto implica que la cantidad óptima de evolución ( $\mathcal{D}_{\text{opt}}$ ) exhibido por los estados óptimos, está relacionado con su energía media  $\langle \hat{H} \rangle$  a través de un formalismo tipo termoestadístico.

El análisis de la medida  $\mathcal{D}$  de la cantidad de evolución cuántica nos condujo a un esquema de entropía máxima para determinar los estados puros que más evolucionan bajo los recursos energéticos dados. La medida entrópica concomitante se evalúa en una distribución de probabilidad basada en el cuadrado del módulo de los coeficientes obtenidos al expandir el estado en la auto-base de la energía (ecuación (4.3)). Los formalismos entrópicos para estados puros, basados en entropías evaluadas en el cuadrado del módulo de los coeficientes obtenidos al expandir los estados en alguna base particular de interés, se han considerado previamente en la literatura [101, 102, 103]. Este tipo de formalismo ha sido desarrollado, por ejemplo, en relación con la inferencia de estados puros a partir de información previa parcial [101] y para desarrollar una descripción tipo-termodinámica del estado fundamental de los sistemas cuánticos [102, 103]. Las entropías también se han asociado con estados puros en algunos enfoques de los fundamentos de la mecánica cuántica, ver por ejemplo [104].

Hay varias preguntas que se pueden hacer al analizar las limitaciones temporales asociadas con la evolución cuántica. Por ejemplo, surge la pregunta: *¿Cuánto tiempo hay que esperar para ver que algo sucede?* Esta es la pregunta básica abordada por los estudios sobre el límite de velocidad cuántica. Una pregunta alternativa y complementaria para hacer es: *¿Cuánto sucede durante una cierta cantidad de tiempo?* Esta es la pregunta principal abordada en este capítulo. Además de su interés intrínseco, las limitaciones de tiempo asociadas con la evolución cuántica también tienen implicaciones prácticas. En ese sentido, se espera que este desarrollo actual pueda ser relevante para la investigación de los límites impuestos por la Naturaleza al procesamiento de la información por parte de sistemas cuánticos.

---

## Entrelazamiento y dinámica en un mundo cuántico sin tiempo

---

*“¿Quid est ergo tempus? si nemo ex me quaerat, scio; si quaerenti explicare velim, nescio.”*

San Agustín de Hipona<sup>1</sup>

### 5.1. Introducción

#### 5.1.1. El problema del tiempo

El concepto de tiempo y su “paso”, es algo que ha intrigado y atrapado a grandes pensadores de la humanidad desde la edad antigua, manteniéndolos en marcadas disputas filosóficas. Se han destacado notables personajes como Heráclito de Éfeso (535-470 a.C.) quien abogó por un cambio perpetuo, el mundo es cambiante y no estático, *“Panta rei: todo fluye”*, oponiéndose a esta idea encontramos a Parménides de Elea (~(530-515)-V a.C.), sosteniendo que *no había tiempo ni movimiento*<sup>2</sup>. Otro influyente como Aristóteles (384-322 a.C.), afirmaba: *“el tiempo es la medida del cambio, si nada cambia, no hay tiempo, el tiempo no pasa. El tiempo es nuestra forma de situarnos con respecto al cambio de las cosas.* Luego encontramos a Titus Lucrecio Carus (99-55 a.C.), en su obra *“Dē rērum natūra: Sobre la naturaleza de las cosas”*, escribía: *...“el tiempo no existe por sí mismo. El tiempo obtiene significado de los objetos: del hecho de que los eventos están en el pasado, o están aquí ahora, o seguirán en el futuro. No es posible que alguien pueda medir el tiempo por sí mismo; solo puede medirse observando el movimiento de los objetos o su tranquilidad pacífica”*. Por último, (lo que no implica el fin de la lista de pensadores) encontramos a quien es considerado el padre de la Física clásica, Isaac Newton (1643-1727), quien afirmaba: *“hay un tiempo que discurre incluso cuando nada cambia”*.

---

<sup>1</sup> Algo así como: *“¿Qué es el tiempo? Si nadie me lo pregunta, lo sé; pero si quiero explicárselo al que me lo pregunta, no lo sé.”*

<sup>2</sup> Pocos pensadores tomarían en serio la tesis de Parménides hasta la llegada de la Física moderna

El llamado *problema del tiempo* hace referencia al hecho de que la introducción del tiempo constituye un problema a un nivel fundamental para cualquier teoría dotada de leyes dinámicas. Veamos por qué esto es así. Como es bien sabido, la mecánica clásica recurre a un parámetro  $t$  extrínseco y privilegiado, en palabras de Dirac, un número clásico (en inglés, *c-number*) en cuyo marco se formulan todas las ecuaciones de movimiento. Por otro lado, y en marcado contraste con este papel fundamental que juega  $t$ , desde el punto de vista práctico el parámetro  $t$  no es más que una coordenada externa que indica un puntero en un *reloj clásico apropiado en un laboratorio* (es decir,  $t$  representa la posición de las manecillas del reloj). Tal parámetro es extraño a la dinámica, sin embargo, es en términos de éste que ocurre la dinámica. La tensión entre estos dos aspectos del tiempo constituye parte del problema del tiempo y, como veremos, también apunta hacia una posible forma de resolverlo.

La llegada de la Física moderna, erguida en sus dos grandes pilares fundacionales, la teoría de la Relatividad de Einstein y la Física Cuántica, ha permitido que nuevos pensadores recojan aquellos pensamientos, reabriendo así esta vieja disputa, esta vez dentro de un adecuado formalismo teórico y experimental. Por un lado, las formulaciones de la Relatividad —Especial (RE) y General (RG)— modificaron sustancialmente la noción natural del tiempo. En esta teoría el tiempo absoluto o newtoniano pierde su carácter como tal y se suplanta por una idea más radical conocida como —*el espaciotiempo*—. La estructura de este espaciotiempo permite identificar diferentes nociones de tiempo dentro de la teoría. Encontramos un tiempo coordinado, fundido con las coordenadas espaciales, introduce un tiempo *dependiente del estado del observador* (actores importantes en la teoría). En la RG, el espaciotiempo es un objeto dinámico determinado por la distribución de masas de nuestro Universo. Por supuesto, cada una de estas nociones se reducen al tiempo estándar en límites apropiados de la teoría [105, 106].

Por otro lado, la mecánica cuántica también heredó de la mecánica clásica el problema del tiempo, aquí el tiempo es un elemento externo y absoluto, y no se describe por un operador. El tiempo se incorpora como un parámetro extrínseco en, por ejemplo, la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Esta forma *-ad-hoc-* de introducir el tiempo en las teorías físicas no solo ha inquietado, sino también incomodado a muchos físicos, principalmente porque coloca el tiempo como una variable inmutable e inexplicable. La incomodidad se acentúa particularmente cuando se trata de la mecánica cuántica, en donde las variables dinámicas, como la posición y el momento, se promueven en la cuantización canónica a operadores hermitianos (o *q-numbers*) en un espacio de Hilbert apropiado. El tiempo, por el contrario, no se considera un observable, y su significado dentro de la teoría cuántica es un asunto sutil [86, 87, 120, 121, 122].

Este problema a nivel fundamental para una teoría dinámica se manifiesta de manera fundacional y formalmente en el trabajo pionero de DeWitt [122, 123, 144]. Uno de los aspectos principales de este trabajo, hoy celebrado como el “*problema del tiempo*”, se centra en un intento de obtener una cuantización canónica de la Relatividad General, con un Hamiltoniano que queda expresado como una combinación lineal de vínculos de primera clase [124]. Este Hamiltoniano se anula idénticamente en las soluciones que preservan los vínculos de la teoría, dando lugar a la conocida ecuación de Wheeler-DeWitt, que predice un estado estacionario para la función de onda de un universo cerrado, algo que va en contra de nuestra noción de evolución.

Lejos de encontrar dentro de la Física moderna una respuesta a la vieja disputa, la situación se profundiza aún más, quedando todavía el significado del tiempo en un terreno ontológico. Problemas similares surgen también en otras teorías Hamiltonianas con vínculos de primera clase (teorías de gauge, Chern-Simons) o con escalas de tiempo arbitrarias, es decir, invariantes ante reparametrizaciones.

trizaciones [124, 125, 127]. En estas teorías las funciones del espacio de fases evolucionan por transformaciones de gauge, en un sentido físico real, son teorías esencialmente estáticas (estacionarias) [125, 127]. Esta es solo una faceta del problema del tiempo, y representa no solo una cuestión clave sino necesaria para dar respuesta a marcados y profundos problemas abiertos en mecánica cuántica, relatividad general y cosmología, en particular en la conexión entre las dos primeras.

### 5.1.2. La propuesta del entrelazamiento

El problema del tiempo, como lo mencionamos, es central para la Física moderna que, a pesar de no haber resuelto el dilema, ha permitido con su consolidado formalismo dar forma a una vieja e intrigante pregunta acerca de la naturaleza del tiempo. Por otro lado, la Física moderna reconoce al *entrelazamiento cuántico* como uno de los fenómenos físicos más intrigantes y significativos. Una vez circunscritas a las discusiones fundamentales de la mecánica cuántica, las aplicaciones del entrelazamiento se desarrollaron y expandieron en numerosas direcciones fructíferas, siendo las más espectaculares quizás las del ámbito de la información cuántica. En unas pocas décadas, el fenómeno del entrelazamiento evolucionó desde una manifestación desconcertante de la rareza de la mecánica cuántica hasta convertirse en un recurso útil en tecnologías cuánticas prometedoras y un fenómeno central para la comprensión de muchos aspectos del funcionamiento de la Naturaleza [107, 108, 109].

Señalamos por otra parte que existe un aspecto interesante de la teoría cuántica conocido como la *—imagen sin tiempo o timeless—* de la mecánica cuántica, en donde el entrelazamiento permite interpretar al tiempo como un *fenómeno emergente*, esto es, tanto la dinámica como el tiempo emergen de correlaciones no locales, y contrariamente a la mecánica newtoniana, el movimiento no se asume como un concepto primitivo, sino secundario [122]. Es una idea introducida por Page y Wootters [86, 87], en un intento por incorporar el tiempo en un contexto completamente cuántico. Está físicamente motivado por la observación de que la noción del tiempo, cuando es entendida como un parámetro que indica el estado de las manecillas del reloj, puede ser sustituida por la noción de correlaciones cuánticas entre un reloj ( $C$ ) y el sistema físico de interés ( $R$ ). De esta manera, la “evolución” de  $R$  simplemente refleja el hecho de que para diferentes estados de  $C$  corresponden diferentes estados de  $R$ , mientras que el conjunto  $U = R + C$  permanece en un solo estado estático.

En términos más formales, la propuesta sin tiempo considera todo el Universo  $U$  como un sistema cuántico cerrado compuesto, conformado por dos subsistemas que no interactúan: por un lado encontramos el *resto del Universo* ( $R$ ) y por el otro, el subsistema *reloj* ( $C$ ), así nuestro Universo es  $U = R + C$ . Este esquema supone además que el sistema global está en un estado estacionario  $|\Psi\rangle$ , esto es, en un estado propio del operador Hamiltoniano total  $\hat{H}_U$  con un correspondiente valor propio nulo de manera consistente con la ecuación de Wheeler-DeWitt [122, 128]<sup>3</sup>:

$$\hat{H}_U |\Psi\rangle = 0. \quad (5.1)$$

Para un observador interno del subsistema  $R$ , la noción del tiempo (o flujo temporal) emerge de este estado “congelado” como resultado del entrelazamiento cuántico entre los componentes  $C$  y  $R$ , y el parámetro  $t$  se *identifica* con los grados de libertad cuántico, es decir, con los valores de un observable apropiado del sistema reloj (por ejemplo, la posición de sus manecillas). Según

<sup>3</sup>En el Apéndice B, ampliamos el significado de esta ecuación; fundamentamos un poco más la raíz de este problema con un ejemplo unidimensional sencillo en un contexto clásico y luego comentamos la estructura extendida del espacio de Hilbert necesaria para la cuantización y que introduciremos más adelante.

esta idea, el tiempo (y la dinámica concomitante) sería una propiedad emergente arraigada en el entrelazamiento entre el sistema dinámico ( $R$ ) y el sistema reloj.

El formalismo sin tiempo reúne así la emergencia del tiempo —el parámetro que caracteriza la evolución y el cambio— y la noción de entrelazamiento, la característica más paradigmática de los sistemas cuánticos compuestos. Además, posiciona al entrelazamiento como el fenómeno fundamental que da lugar a la evolución cuántica. La imagen sin tiempo de la mecánica cuántica ha atraído considerable atención como puede verse en las siguientes referencias [88, 89, 129, 130, 131], constituyendo una línea de estudio intrigante dentro del campo activo de investigación dedicado al entrelazamiento cuántico, además de la relevancia científica, filosófica e histórica que presenta este tema.

En este capítulo vamos a retomar la discusión del tema introducido en la sección 3.4 del capítulo anterior. Basado en uno de los indicadores cuantitativos de entrelazamiento más utilizados, primero nos enfocaremos en el análisis del entrelazamiento entre el reloj y el subsistema restante. Luego prestaremos especial atención a la interpretación física de la “cantidad de entrelazamiento” como un indicador cuantitativo de la distinción promedio entre los estados que el sistema visita en diferentes momentos. Esta distinción promediada en el tiempo se calcula explícitamente para un estado general de un sistema con un espectro de energía discreto (aunque no necesariamente finito).

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la siguiente sección 5.2 revisamos algunas características básicas del indicador de entrelazamiento para estados *puros* de un sistema cuántico bipartito, introducido en la sección 3.4. En la sección 5.3 introducimos las principales suposiciones encontradas en el formalismo sin tiempo, y hacemos explícita la relación entre el entrelazamiento y la evolución. En la sección 5.4 aplicamos el indicador de entrelazamiento basado en la entropía lineal para evaluar el entrelazamiento entre el reloj  $C$  y el sistema  $R$ , y exploramos su conexión con la evolución temporal que emerge en  $R$ . Específicamente, mostramos que el entrelazamiento entre las componentes de nuestro Universo,  $R$  y  $C$ , está estrechamente relacionado con la distinción promedio de los estados de  $R$  en diferentes momentos. Dedicamos la sección 5.5 al cálculo explícito del entrelazamiento para un estado cuántico arbitrario, y a la discusión de algunos ejemplos relevantes. Finalmente, en la última sección 5.7 presentamos algunas conclusiones.

## 5.2. Indicador cuantitativo de entrelazamiento

Según la mecánica cuántica, el conocimiento máximo que la Naturaleza nos permite tener sobre el estado de un sistema físico está dado por un estado cuántico puro. Esto se representa matemáticamente por una función de onda o, más abstractamente, por un vector normalizado en un espacio de Hilbert apropiado. Una de las manifestaciones más contraintuitivas de la cuántica de los sistemas cuánticos compuestos es que es posible tener el máximo conocimiento de un sistema bipartito total sin tener un conocimiento máximo de sus partes [114]. Cuando este es el caso, decimos que el estado cuántico puro correspondiente del sistema bipartito está entrelazado: el sistema compuesto se describe globalmente mediante un estado puro, sin embargo, los estados de cualquiera de sus subsistemas no pueden ser puros, sino que se describen mediante estados mixtos. Como ya hemos mencionado, el grado de mezcla de estos estados marginales constituye, por lo tanto, un indicador del entrelazamiento del estado global puro. Por consiguiente, podemos recurrir a medidas que cuantifiquen tal grado de mezcla para construir indicadores cuantitativos de la cantidad de entrelazamiento en un estado puro (bipartito) [107]. Ahora, una medida conveniente para el grado de mezcla de los estados marginales de los subsistemas viene dada por la entropía lineal de las matri-



ces de densidad asociadas (ver [117] para una discusión didáctica). En lo que sigue, vamos a revisar brevemente este indicador cuantitativo de entrelazamiento para estados puros de sistemas cuánticos bipartitos.

Comencemos considerando un sistema cuántico compuesto  $A + B$  constituido por dos subsistemas,  $A$  y  $B$  y definamos su estado como:

$$|\Psi\rangle = \int \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) |\mathbf{x}_1\rangle |\mathbf{x}_2\rangle d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \quad (5.2)$$

esto es, un estado global y puro del sistema  $A + B$ . La expresión  $|\mathbf{x}_1\rangle \otimes |\mathbf{x}_2\rangle = |\mathbf{x}_1\rangle |\mathbf{x}_2\rangle = |\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle$  representa una base del espacio de Hilbert del sistema compuesto,  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , donde  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$  representan los espacios de Hilbert asociados a cada subsistema  $A$  y  $B$ , respectivamente, con sus correspondientes bases  $\{|\mathbf{x}_1\rangle\}$  y  $\{|\mathbf{x}_2\rangle\}$ . Cada miembro de esta base está caracterizado por etiquetas o índices continuos  $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{N_1}$  y  $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{N_2}$ , y satisfacen la condición de ortonormalidad estándar  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ . Los subsistemas  $A$  y  $B$  pueden ser, por ejemplo, dos partículas en movimiento, respectivamente, en sus correspondientes espacios de configuración de dimensión  $N_1$  y  $N_2$ . Como es usual, la función de onda  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \Psi \rangle$  está normalizada a la unidad, esto es,  $\langle \Psi | \Psi \rangle = \int |\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)|^2 d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = 1$ . En lugar de usar el ket  $|\Psi\rangle$  para describir un estado puro del sistema  $A + B$ , uno puede usar la descripción equivalente provista por la matriz densidad:

$$\begin{aligned} \rho &= |\Psi\rangle \langle \Psi| \\ &= \int |\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \Psi \rangle \langle \Psi | \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2 \rangle \langle \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2 | d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}'_2, \end{aligned} \quad (5.3)$$

con elementos de matriz:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \rho | \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2 \rangle &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \Psi \rangle \langle \Psi | \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2 \rangle \\ &= \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Psi^*(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Las matrices densidad marginales, esto es,  $\rho_A$  y  $\rho_B$  describen, respectivamente, los estados individuales de los subsistemas  $A$  y  $B$ , y vienen dadas por las expresiones:

$$\rho_{A(B)} = \text{Tr}_{B(A)} \rho = \text{Tr}_{B(A)} (|\Psi\rangle \langle \Psi|), \quad (5.5)$$

donde  $\text{Tr}_i$  denota la traza parcial tomada sobre los grados de libertad del subsistema  $i$ . Los elementos de matriz de las matrices marginales son:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_1 | \rho_A | \mathbf{x}'_1 \rangle &= \int \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \rho | \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_2 \rangle d\mathbf{x}_2 = \int \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Psi^*(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2, \\ \langle \mathbf{x}_2 | \rho_B | \mathbf{x}'_2 \rangle &= \int \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | \rho | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_2 \rangle d\mathbf{x}_1 = \int \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Psi^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_2) d\mathbf{x}_1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Un indicador cuantitativo  $\mathcal{E}[|\Psi\rangle]$  de la cantidad de entrelazamiento entre  $A$  y  $B$  cuando el sistema compuesto está en un estado puro  $|\Psi\rangle$ , está dado por el grado de mezcla exhibido por las matrices de densidad marginales  $\rho_{A(B)}$ . Tal grado de mezcla se puede cuantificar por la *entropía lineal*  $S_L$  de cualquiera de las dos matrices reducidas, y está dada por:

$$S_L[\rho_{A(B)}] = 1 - \text{Tr} \rho_{A(B)}^2. \quad (5.7)$$

Por lo tanto, podemos definir el siguiente indicador de entrelazamiento:

$$\mathcal{E}[|\Psi\rangle] := 1 - \text{Tr} \rho_A^2 \equiv 1 - \text{Tr} \rho_B^2. \quad (5.8)$$

Se puede obtener una expresión explícita de  $\mathcal{E}[|\Psi\rangle]$  en términos de la función de onda  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  calculando la traza indicada:

$$\begin{aligned}\text{Tr } \rho_A^2 &= \int \langle \mathbf{x}_1 | \rho_A^2 | \mathbf{x}_1 \rangle d\mathbf{x}_1 = \int \langle \mathbf{x}_1 | \rho_A | \mathbf{x}'_1 \rangle \langle \mathbf{x}'_1 | \rho_A | \mathbf{x}_1 \rangle d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}'_1 \\ &= \int |\langle \mathbf{x}_1 | \rho_A | \mathbf{x}'_1 \rangle|^2 d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}'_1.\end{aligned}\quad (5.9)$$

Finalmente, combinando las ecuaciones (5.6) y (5.9), se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[|\Psi\rangle] &= 1 - \text{Tr } \rho_A^2 \\ &= 1 - \int \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Psi^*(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}_2) \Psi^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_2) \Psi(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}'_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}'_2,\end{aligned}\quad (5.10)$$

que constituye la expresión deseada para la medida de entrelazamiento  $\mathcal{E}[|\Psi\rangle]$  en términos de la función de onda  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ .

Si la función de onda  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  está normalizada a 1 (como estamos asumiendo) tenemos  $\text{Tr } \rho_{A(B)}^2 \leq 1$ , donde la igualdad se satisface si y solo si las matrices marginales  $\rho_{A(B)}$  corresponden a estados puros y, consecuentemente, el estado global  $|\Psi\rangle$  es separable (eso es, no-entrelazado). De ello se deduce que la medida de entrelazamiento  $\mathcal{E}$  satisface la desigualdad

$$0 \leq \mathcal{E}[|\Psi\rangle] \leq 1, \quad (5.11)$$

y se anula si y solo si el estado  $|\Psi\rangle$  no está entrelazado. Debemos notar que aunque en las líneas de arriba consideramos sistemas con variables continuas, y expresamos  $\mathcal{E}[|\Psi\rangle]$  en términos de la función de onda  $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , la medida de entrelazamiento (5.8) también está bien definida —y satisface la desigualdad (5.11)— para estados puros de sistemas cuánticos bipartitos en los cuales  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$  tienen dimensiones finitas.

La cantidad  $\mathcal{E}[|\Psi\rangle]$  es una medida monótona de entrelazamiento (es decir, es no negativa y no aumenta, en promedio, bajo transformaciones locales [107]), se anula para estados puros separables y admite su valor más grande posible para estados puros máximamente entrelazados, es decir, estados con matrices marginales máximamente mixtas<sup>4</sup>. Así, cumple con los requisitos básicos que cualquier medida de entrelazamiento debe cumplir [107]. Debemos destacar aquí, sin embargo, que la entropía lineal proporciona solo *una manera* de cuantificar el entrelazamiento bipartito en un estado puro. Existen otras cantidades que sirven para el mismo propósito; una cantidad más fundamental y encontrada generalmente en la literatura, es la *entropía de von Neumann*, definida como:

$$S_{\text{vN}}[\rho_{A(B)}] = -\text{Tr} [\rho_{A(B)} \ln \rho_{A(B)}]. \quad (5.12)$$

Si expresamos el estado reducido, digamos  $\rho_A$ , en su forma diagonal  $\rho_A = \text{diag}(\{\lambda_\alpha\})$ , donde  $\{\lambda_\alpha\}$  son los autovalores reales de  $\rho_A$  y que satisfacen  $\sum_\alpha \lambda_\alpha = 1$ , podemos expresar la entropía de von Neumann como:

$$S_{\text{vN}}[\rho_A] = -\sum_\alpha \lambda_\alpha \ln \lambda_\alpha. \quad (5.13)$$

De la ecuación (5.13) se sigue que la entropía de von Neumann se anula si y solo si los estados reducidos  $\rho_{A(B)}$  son puros (uno de los  $\lambda_\alpha$  es igual a 1 y los restantes son iguales a 0), esto significa que los sistemas  $A$  y  $B$  no están entrelazados. Notablemente, la entropía de von Neumann

<sup>4</sup>Debemos recordar que si el estado global es un estado mezcla, cuando tomamos matrices marginales podemos obtener estados con máximas mezclas que son separables, como en el caso de estados en equilibrio térmico o en cuasiequilibrio. Por lo que pensar que existe entrelazamiento cuando un estado es mixto o mezcla es, por supuesto, falso.

se encuentra en la base del *entrelazamiento de formación*, una de las medidas más explotadas del entrelazamiento bipartito en general en los estados bipartitos (mixto). Sin embargo, a pesar de la importancia de  $S_{vN}$  en certificar y cuantificar entrelazamiento, como lo hemos indicado en la sección 3.4, el indicador  $\mathcal{E}[|\Psi\rangle]$ , basado en la entropía lineal, no requiere del cálculo de los valores propios de la matriz de densidad marginal  $\rho_{A(B)}$ . Además, ha sido extensivamente usado como una medida legítima de entrelazamiento, desempeñando en particular un papel destacado en la expresión del concepto llamado *conurrencia*, una medida ampliamente empleada de entrelazamiento bipartito (ver, por ejemplo, [132, 133, 136, 137, 138]). Por lo tanto, para nuestros propósitos actuales, el indicador cuantitativo de entrelazamiento basado en la entropía lineal es suficiente. Una introducción interesante al entrelazamiento en sistemas cuánticos compuestos con variables continuas, que considera la medida (5.10), se puede encontrar en [110].

Antes de finalizar esta sección, destacamos que, en términos más generales, para estados puros del sistema compuesto  $A + B$ , cualquier medida del grado de mezcla de cualquiera de los estados marginales (reducidos)  $\rho_A$  o  $\rho_B$ , proporciona un indicador cuantitativo de la cantidad de entrelazamiento entre  $A$  y  $B$ . Tales medidas de mezcla o entropías generalizadas pueden expresarse en la forma  $\text{Tr}[f(\rho_{A(B)})]$ , donde  $f(x)$  es cualquier función cóncava<sup>5</sup> (esto es  $f''(x) \leq 0$ ), tal que  $f(0) = f(1) = 0$ . Claramente, tanto la entropía de von Neumann como la entropía lineal tienen esta forma. En el primer caso tenemos  $f(x) = -x \ln x$ , mientras que en el segundo caso tenemos  $f(x) = x(1 - x)$ .

### 5.3. Entrelazamiento y la emergencia de la evolución

Como punto de partida, consideramos el Universo como un sistema cuántico bipartito conformado por un reloj ( $C$ ) y el resto ( $R$ ). Los espacios de Hilbert correspondientes son  $\mathcal{H}_C$  para el reloj,  $\mathcal{H}_R$  para el resto del Universo y el producto tensorial  $\mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}_C$  para el sistema total  $U = R + C$ . Expresaremos un estado puro de  $U$  en términos de una base producto  $\{|\mathbf{x}\rangle \otimes |t\rangle = |\mathbf{x}\rangle|t\rangle\}$ , donde  $\{|\mathbf{x}\rangle\}$  y  $\{|t\rangle\}$  son bases ortonormales de  $\mathcal{H}_R$  y  $\mathcal{H}_C$ , respectivamente. La etiqueta continua  $t \in \mathbb{R}$ , que caracteriza a los estados bases del reloj, corresponde a la posición de las manecillas de un reloj asociado a un observable  $\hat{T}$ , es decir,  $\hat{T}|t\rangle = t|t\rangle$ . Por otro lado, la etiqueta  $\mathbf{x}$ , que caracteriza a los estados base de  $\mathcal{H}_R$ , representa la posición, o cualquier otro grado de libertad de una o varias partículas, que conforman el resto del Universo  $R$ . En otras palabras, se puede considerar que  $\mathbf{x}$  describe un punto en el espacio de configuración asociado con el sistema  $R$  (a lo largo de este capítulo asumiremos que  $\mathbf{x}$  es una variable continua, pero también puede denotar una variable discreta si las integrales se sustituyen adecuadamente por sumas discretas).

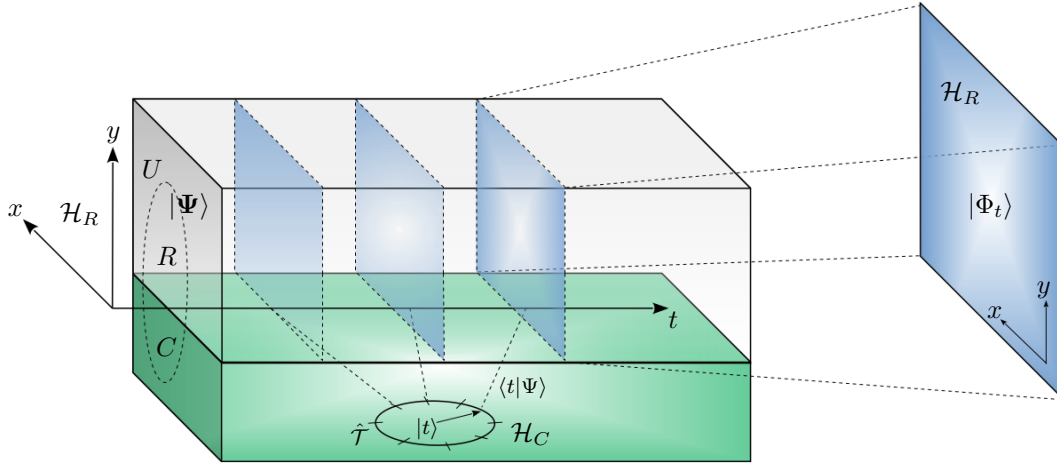
<sup>5</sup>Con un poco más de rigor, la función  $f$  se dice función *Schur cóncava*. Una función  $f$  es Schur cóncava si su negativa  $-f$  es *Schur convexa*. Esto es: una función Schur convexa es una función  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$  tal que si  $\mathbf{x}$  está mayorizado por  $\mathbf{y}$  ( $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ ), se tiene  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ . La *mayorización* es un *preorden*<sup>(\*)</sup> dentro de un conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^d$ , es decir, es un ordenamiento de vectores reales destinado a capturar la noción de que un vector está "más o menos desordenado que otro". Este preorden se establece mediante el mapa  $\downarrow: \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^\downarrow$ , que ordena las componentes del vector de manera descendente. Ejemplo, en  $\mathbb{R}^3$   $(1, 7, 3) \rightarrow (7, 3, 1)^\downarrow$ . Decimos entonces que  $\mathbf{x}$  está mayorizado por  $\mathbf{y}$  ( $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ ) si  $\sum_{i=1}^k x_i^\downarrow \leq \sum_{i=1}^k y_i^\downarrow$ , para  $k = 1, \dots, d$ , con igualdad si  $k = d$ . Entonces,  $f$  es Schur cóncava cuando  $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$  implica  $f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$ .

(\*) En matemáticas, dentro de la teoría de orden, un *preorden* o *cuasiorden* es una relación binaria reflexiva y transitiva, denotada con  $\leq$ , entre elementos  $a, b$  de un conjunto. Es un concepto que generaliza a las relaciones de equivalencia y a los ordenes parciales no estrictos, (casos especiales de un preorden). Esto es: un preorden simétrico es una relación de equivalencia, mientras que un preorden antisimétrico ( $a \leq b$  y  $a \neq b \Rightarrow b \not\leq a$  o equivalentemente,  $a \leq b$  y  $b \leq a \Rightarrow a = b$ ), es un orden parcial.

En línea con el formalismo sin tiempo, asumiremos que,  $\hat{H}_U |\Psi\rangle = 0$ , donde  $\hat{H}_U$  es el Hamiltoniano total  $\hat{H}_U = \hat{H}_R \otimes \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_R \otimes \hat{H}_C$ , donde  $\hat{H}_R$  es un Hamiltoniano arbitrario del resto del Universo  $R$ , y  $\hat{H}_C$  es el Hamiltoniano del sistema reloj. Además, se considerará que el observable reloj  $\hat{T}$  y el Hamiltoniano  $\hat{H}_C$  satisfacen la relación de conmutación:

$$[\hat{T}, \hat{H}_C] = i\hbar. \quad (5.14)$$

Esto equivale a decir que  $\hat{H}_C$  es el generador de desplazamientos temporales; esto es, para un desplazamiento infinitesimal  $dt$  se obtiene  $e^{-i\hat{H}_C dt/\hbar} |t\rangle = |t + dt\rangle$ , o equivalentemente, el estado  $|t\rangle$  satisface:  $i\hbar \frac{d|t\rangle}{dt} = \hat{H}_C |t\rangle$ . Ahora, el estado de  $R$  cuando el reloj marca  $t$ , esto es, su estado dado que el reloj está en  $|t\rangle$ , se obtiene proyectando el estado  $|\Psi\rangle$  sobre el ket  $|t\rangle$ , y lo indicamos como  $|\Phi_t\rangle = \langle t|\Psi\rangle$ . Bajo estas condiciones, conseguimos:



**Figura 5.1:** Representación del mecanismo PW y el significado del “flujo del tiempo”. Se muestra el Universo compuesto  $R + C$ . El espacio de Hilbert del resto del Universo  $\mathcal{H}_R$  está representado por los grados de libertad  $x, y$ . El espacio de Hilbert del reloj  $\mathcal{H}_C$  está representado por los distintos estados del observable  $\hat{T}$ . Notar cómo los grados de libertad del sistema reloj emergen en  $R$  vía la proyección  $\langle t|\Psi\rangle = |\Phi_t\rangle$ . En otras palabras los observadores internos a  $R$  recuperan la formulación convencional de la QM condicionando al estado  $|\Psi\rangle$  a tener el tiempo  $t$ . El “flujo” del tiempo consiste simplemente en la correlación (entrelazamiento) entre el grado de libertad cuántico de  $C$  y el resto  $R$ , una correlación presente en un estado global, independiente del tiempo  $|\Psi\rangle$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\Phi_t\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \langle t|\Psi\rangle \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle t| \right) |\Psi\rangle + \langle t| \left( \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle \right) \\ &= \left( \frac{d}{dt} \langle t| \right) |\Psi\rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle t| \hat{H}_C |\Psi\rangle. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Escribiendo  $\mathbb{1}_R \otimes \hat{H}_C = \hat{H}_U - \hat{H}_R \otimes \mathbb{1}_C$  y usando que  $\hat{H}_U |\Psi\rangle = 0$ , la ecuación (5.15) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\Phi_t\rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle t | \left( \hat{H}_U - \hat{H}_R \otimes \mathbb{1}_C \right) |\Psi\rangle \\ &= \frac{-i}{\hbar} \langle t | \hat{H}_R \otimes \mathbb{1}_C |\Psi\rangle \\ &= \frac{-i}{\hbar} \hat{H}_R \langle t | \Psi\rangle \\ &= \frac{-i}{\hbar} \hat{H}_R |\Phi_t\rangle, \end{aligned} \quad (5.16)$$

de donde el estado relativo  $|\Phi_t\rangle$  satisface:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Phi_t\rangle = \hat{H}_R |\Phi_t\rangle. \quad (5.17)$$

Es decir, encontramos que el estado relativo del resto del Universo satisface la habitual ecuación de Schrödinger (dependiente del tiempo). En otras palabras, el escenario dinámico habitual — incorporado en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo— se deriva de la imagen estática de los estados no evolucionados  $|\Psi\rangle$ .

Conviene aquí comentar un poco acerca del espectro de autovalores de los operadores  $\hat{T}$  y  $\hat{H}_C$ . Ambos observables tienen espectros continuos; sin embargo, dado que se supone que el sistema completo está en un estado propio de energía cero del Hamiltoniano total, si  $\hat{H}_R$  tiene valores propios discretos  $\{E_n\}$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$  (como se asumirá a continuación), entonces los valores propios permitidos de  $\hat{H}_C$  también forman un conjunto discreto, a saber  $\{-E_n\}$ , y los estados propios correspondientes son, por tanto,  $\{e^{-iE_n t/\hbar}\}$ . Esto significa que estamos trabajando realmente con un espacio de Hilbert discreto para el reloj, expandido por este conjunto de estados discretos. Observemos que esto es similar a lo que ocurre cuando se considera la posición y el momento de una partícula en una caja unidimensional. Los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  también satisfacen una relación de conmutación como la expresión (5.14) (son variables canónicas conjugadas), y al imponer las condiciones de contorno adecuadas en las paredes (impenetrables), los valores propios accesibles del momento forman un conjunto discreto,  $\{p_n\}$ , y las funciones propias que abarcan el espacio de Hilbert del sistema están dadas por  $\{e^{-ip_n x/\hbar}\}$ . Por supuesto, la similitud es solo formal, ya que en el presente caso los espectros discretos (efectivos) de  $\hat{H}_C$  no están determinados por ninguna condición de frontera, sino más bien por la condición de energía total cero del sistema compuesto  $R + C$ .

En lo que sigue, consideraremos el comportamiento del sistema durante un intervalo de tiempo finito  $[0, T]$  y asumiremos que el Universo  $U$  está en un estado puro que escribimos como:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int \Psi(\mathbf{x}, t) |\mathbf{x}\rangle |t\rangle d\mathbf{x} dt. \quad (5.18)$$

Este estado está correctamente normalizado, tanto espacial como temporalmente, es decir:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{\left( \int |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} \right)}_{=1} dt = 1. \quad (5.19)$$

El estado de  $R$  cuando el reloj marca  $t$ , esto es, su estado *dado* que el reloj está en  $|t\rangle$ , se obtiene proyectando  $|\Psi\rangle$  sobre  $|t\rangle$ :

$$|\Phi_t\rangle = \langle t | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int \Psi(\mathbf{x}, t) |\mathbf{x}\rangle d\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{T}} |\tilde{\Phi}_t\rangle, \quad (5.20)$$

donde se define

$$|\tilde{\Phi}_t\rangle = \sqrt{T} |\Phi_t\rangle = \int \Psi(\mathbf{x}, t) |\mathbf{x}\rangle d\mathbf{x}. \quad (5.21)$$

Por lo tanto,  $\frac{1}{\sqrt{T}}\Psi(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x} | \Phi_t \rangle$  es la función de onda (o amplitud de probabilidad) correspondiente al estado  $|\Phi_t\rangle$ , cuya norma está dada por:

$$\langle \Phi_t | \Phi_t \rangle = \frac{1}{T} \int |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = \frac{1}{T}, \quad (5.22)$$

de donde  $|\tilde{\Phi}_t\rangle$  representa el estado relativo *normalizado*, satisfaciendo:

$$\langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_t \rangle = T \langle \Phi_t | \Phi_t \rangle = 1. \quad (5.23)$$

Considerar los valores de  $t$  dentro de un intervalo finito  $[0, T]$  corresponde a estudiar una parte de la historia del Universo que, desde la perspectiva estándar basada en el tiempo, se percibe como si tuviera una duración finita  $T$ . Tener un rango finito de valores  $[0, T]$  para la posición del observable del reloj y tener la función de onda normalizada dentro de ese intervalo finito, se puede considerar como el resultado de haber medido el observable (proyector)  $\Pi = \int_0^T |t\rangle\langle t| dt$ , seleccionando después el resultado de la medición 1. En otras palabras, los estados normalizados dentro del rango finito  $[0, T]$  representan el resultado de proyectar el estado del Universo en el subespacio formado por los estados propios de  $\hat{T}$  con los valores propios  $t \in [0, T]$ .

En términos de la función de onda  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ , la ecuación (5.17) indica:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = \hat{H}_R \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (5.24)$$

por tanto, si la condición (5.22) se cumple durante un tiempo inicial  $t = 0$ , luego esta se mantendrá durante todo  $t$ . Ahora, de la ecuación (5.24) deducimos que si  $R$  y  $C$  no están entrelazados, de modo que  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  se puede escribir como un estado factorizable de la forma  $\Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi_R(\mathbf{x})\Psi_C(t)$ , entonces  $\Psi_R(\mathbf{x})$  es un autoestado de  $\hat{H}_R$ ; en consecuencia  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  es un estado estacionario y  $R$  no evoluciona. Así, el punto esencial que mostramos es que para que  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  evolucione, el resto del Universo y el reloj *deben estar entrelazados*, esto es — $\Psi(\mathbf{x}, t)$  debe ser una función no factorizable de las variables  $\mathbf{x}$  y  $t$ —, que a su vez requiere que el valor propio cero de  $\hat{H}_U$  sea degenerado (cuanto mayor sea la degeneración, más rica será la evolución). El objetivo de las siguientes secciones es investigar la relación cercana entre entrelazamiento y evolución temporal.

Ahora que hemos introducido los ingredientes principales de la imagen sin tiempo de la mecánica cuántica, podemos reconsiderar este enfoque desde un punto de vista intuitivo y cualitativo. Como ya hemos visto, en el enfoque sin tiempo, el sistema  $R$  en consideración y el reloj  $C$  están conjuntamente en un estado cuántico puro y estacionario descrito por la función de onda  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ . Esta función de onda describe de manera estática todo lo que le sucede a  $R$  y  $C$  en todo momento  $t$  y en cada ubicación  $\mathbf{x}$ . Es decir,  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  es un objeto matemático estático que codifica todo lo que sucede “en todas partes y en todo momento”. En este sentido, la imagen sin tiempo de la mecánica cuántica se puede considerar como una versión mecánico-cuántica de la concepción del tiempo en física clásica como “Universo bloque” [141]. Según este marco teórico, todo lo que sucedió en el pasado y todo lo que sucederá en el futuro existe en un universo bloque “congelado” que, junto con las coordenadas multidimensionales  $\mathbf{x}$  que describen el espacio de configuración del sistema  $R$ , incorpora una nueva dimensión  $t$ , asociada con el parámetro del tiempo.

En la imagen de la física cuántica sin tiempo, la magnitud  $t$  no se considera como un parámetro, sino como la coordenada describiendo el sistema reloj  $C$ . Como ya hemos mencionado, si percibimos (observamos) el sistema  $R$  en evolución, en el sentido habitual, entonces el estado puro en

conjunto que describe el sistema compuesto ( $R + C$ ) debe estar entrelazado. Esto significa que, si  $R$  evoluciona, entonces, desde el punto de vista sin tiempo, ninguno de los subsistemas  $R$  y  $C$  puede describirse por un estado puro. Observando el Universo bloque cuántico “desde afuera”, por así decirlo, no podemos asociar un estado puro a  $R$  o a  $C$ . En otras palabras, incluso si tuviéramos un conocimiento máximo sobre el estado del sistema total  $R + C$ , no podríamos tener un conocimiento completo sobre ninguna de las partes [114].

Para describir los subsistemas  $R$  y  $C$  necesitamos las matrices de densidad correspondientes  $\rho_R$  y  $\rho_C$ . La matriz de densidad marginal  $\rho_R$  tiene un significado intuitivo claro. Consideraremos que la función de onda global  $\Psi(x, t)$  se define en un intervalo de tiempo finito  $[0, T]$ . La matriz  $\rho_R$  resulta de trazar el estado global  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  sobre los grados de libertad del reloj  $C$ , esto es, sobre la coordenada  $t \in [0, T]$ :

$$\rho_R = \text{Tr}_C(\rho) = \int_0^T \langle t|\Psi\rangle\langle\Psi|t\rangle dt = \int_0^T |\Phi_t\rangle\langle\Phi_t| dt = \frac{1}{T} \int_0^T |\tilde{\Phi}_t\rangle\langle\tilde{\Phi}_t| dt. \quad (5.25)$$

Notemos que la ecuación (5.22) garantiza la condición de normalización  $\text{Tr}\rho_R = 1$ , requerida por cualquier matriz densidad que describe un estado físico.

La ecuación (5.25) muestra que la matriz densidad marginal  $\rho_R$  está dada por una mezcla estadística de todos los estados puros normalizados  $|\tilde{\Phi}_t\rangle$  que describen el sistema  $R$  a diferentes tiempos en el intervalo  $[0, T]$ . Esto es,  $\rho_R$  es igual al promedio temporal del estado en evolución  $|\tilde{\Phi}_t\rangle$  sobre el intervalo  $[0, T]$ . Este estado de cosas es esencialmente propio de la mecánica cuántica y no tiene una contraparte dentro de la imagen clásica del Universo bloque. Esto sugiere que la mecánica cuántica está quizás mejor adaptada al marco teórico del Universo bloque que la mecánica clásica. Ahora, el estado mixto descrito por  $\rho_R$  tiene un grado de mezcla que puede evaluarse cuantitativamente mediante varias medidas apropiadas. Estas medidas de mezcla también proporcionan indicadores del grado de entrelazamiento que existe entre el sistema  $R$  y el reloj  $C$ .

Las medidas del grado de mezcla de  $\rho_R$  están relacionadas con el número efectivo de estados puros distinguibles que contribuyen a  $\rho_R$ . Por ejemplo, el *índice de participación o número de Schmidt* de  $\rho_R$ , dado por  $1/\text{Tr}(\rho_R^2)$ , constituye una medida directa del número efectivo de estados distinguibles en  $\rho_R$ . Por otro lado, la entropía de von Neumann  $S_{\text{vN}}[\rho_R]$  puede interpretarse como un indicador efectivo del número (i.e.: su logaritmo) de estados distinguibles que entran en la descomposición de una mezcla estadística descrita por  $\rho_R$ . Otras medidas entrópicas evaluadas en  $\rho_R$  admiten interpretaciones similares. Por lo tanto, es intuitivamente claro que, dado que  $\rho_R$  coincide con el promedio temporal del estado en evolución  $|\tilde{\Phi}_t\rangle$ , las medidas del grado de mezcla de  $\rho_R$  nos da una estimación cuantitativa del grado de diversidad de (o cantidad de distinguibilidad entre) los diferentes estados que visita el sistema  $R$  durante el intervalo  $[0, T]$ .

En resumen, el grado de mezcla de  $\rho_R$ , medido por un conjunto de indicadores diferentes, incluida la entropía lineal o de von Neumann, nos da una estimación de dos cosas diferentes: la cantidad de entrelazamiento entre  $C$  y  $R$  y la distinción de los estados de  $R$  en diferentes momentos, durante el intervalo  $[0, T]$ . Por lo tanto, vemos que hay una estrecha conexión entre la evolución de  $R$  y el entrelazamiento entre  $C$  y  $R$ : ambos fenómenos tienen como consecuencia que el estado cuántico  $\rho_R$  del sistema  $R$  es un estado mixto. Cuanto mayor sea el grado de mezcla de  $\rho_R$ , mayor será la diversidad de estados que  $R$  visitará durante su evolución, y más entrelazado estará el resto del Universo,  $R$ , con el sistema reloj  $C$ .

## 5.4. Cuantificación del entrelazamiento entre el reloj $C$ y el resto del Universo $R$

Con el objetivo de exhibir la estrecha relación entre el entrelazamiento y la evolución, consideraremos, como antes, un intervalo de tiempo finito  $[0, T]$  durante el cual tiene lugar la evolución. Además, para analizar el entrelazamiento entre  $C$  y  $R$ , adoptamos el indicador de entrelazamiento discutido en la sección 5.2. Por lo tanto, en lo que sigue nos centraremos en la cantidad:

$$\mathcal{E} = 1 - \text{Tr} \rho_R^2, \quad (5.26)$$

con  $\rho_R$  la matriz densidad marginal de  $R$ . Los elementos de matriz de  $\rho_R$  están dados por:

$$\langle \mathbf{x} | \rho_R | \mathbf{x}' \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Psi(\mathbf{x}, t) \Psi^*(\mathbf{x}', t) dt. \quad (5.27)$$

que no es otra cosa que la expresión general (5.6), con  $A$  y  $B$  sustituidos por  $R$  y  $C$ , la base  $|\mathbf{x}_2\rangle$  sustituida por la base  $|t\rangle$  del reloj, y  $\Psi$  sustituida por la función global  $\frac{1}{\sqrt{T}}\Psi(\mathbf{x}, t)$ , propiamente normalizada en el espacio y en el tiempo durante el intervalo de tiempo escogido.

Recordemos que, de acuerdo a la ecuación (5.25), la matriz densidad marginal  $\rho_R$  se puede interpretar como el promedio temporal, sobre el intervalo  $[0, T]$ , de los estados normalizados  $|\tilde{\Phi}_t\rangle\langle\tilde{\Phi}_t|$ . Además,  $\rho_R$  es una superposición estadística (o incoherente) de los estados  $|\tilde{\Phi}_t\rangle\langle\tilde{\Phi}_t|$  correspondiente a diferentes valores de  $t$  (en oposición a las superposiciones cuánticas coherentes). También, conviene enfatizar que las matrices de densidad  $\rho_R$  y  $|\tilde{\Phi}_t\rangle\langle\tilde{\Phi}_t|$ , aunque ambas se refieren al sistema  $R$ , representan estados diferentes. Este último operador se obtiene mediante una operación proyectiva. Salvo un factor constante, este representa el estado de  $R$  condicionado al estado  $|t\rangle$  del reloj, y es un estado puro que evoluciona unitariamente a medida que fluye  $t$ . A su vez,  $\rho_R$  se obtiene vía una traza parcial. Esto representa un estado promediado en el tiempo (sobre el intervalo  $[0, T]$ ) y, en general, es un estado mixto que no evoluciona unitariamente con la marcha del reloj.

Por lo tanto, la medida de entrelazamiento (5.26) viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 1 - \text{Tr} \rho_R^2 \\ &= 1 - \frac{1}{T^2} \int_0^T dt \int_0^T dt' \int \Psi(\mathbf{x}, t) \Psi^*(\mathbf{x}', t) \Psi^*(\mathbf{x}, t') \Psi(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x} d\mathbf{x}', \end{aligned} \quad (5.28)$$

la cual constituye un ejemplo particular de la ecuación (5.10). La expresión (5.28) puede formularse de una forma más compacta de la siguiente manera:

$$\mathcal{E}(T) = 1 - \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T |\langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_{t'} \rangle|^2 dt dt'. \quad (5.29)$$

Conviene destacar que la dependencia del entrelazamiento  $\mathcal{E}$  con una *duración de tiempo*  $T$  (en lugar de un tiempo  $t$ ) se origina en la ecuación (5.25), donde la matriz densidad completa  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$  está trazada parcialmente sobre los grados de libertad del reloj, que adquieren valores precisamente en el intervalo  $[0, T]$ . De hecho, esta operación de traza parcial sobre el grado de libertad  $t$  implica que la matriz densidad reducida  $\rho_R$ , por consiguiente  $\mathcal{E}$ , no será una función de la variable  $t$ . Recordando que, como lo indicamos a continuación de la ecuación (5.27), la matriz densidad marginal  $\rho_R$  se puede interpretar como el estado *promediado* sobre el intervalo  $[0, T]$ , la cantidad  $\mathcal{E}(T)$  se puede interpretar entonces como el entrelazamiento *promedio* en dicho intervalo.



El segundo término en el lado derecho de la expresión dada en (5.29) es un promedio temporal, sobre el intervalo  $[0, T]$ , del solapamiento  $|\langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_{t'} \rangle|^2$  entre los estados  $|\tilde{\Phi}\rangle$  en diferentes instantes. Ahora, el solapamiento indica cuán indistinguible es el estado cuántico  $|\tilde{\Phi}_t\rangle$  del estado  $|\tilde{\Phi}_{t'}\rangle$  (un solapamiento nulo corresponde a estados perfectamente distinguibles, mientras que un solapamiento igual a la unidad corresponde a estados idénticos —a menos de una fase global—). En consecuencia, es intuitivamente claro que  $\mathcal{E}$  se puede interpretar como una medida cuantitativa de *cuán variada es la vida* del estado  $|\tilde{\Phi}_t\rangle$  (o equivalentemente, el estado no-normalizado  $|\Phi_t\rangle$ ) sobre el intervalo  $[0, T]$ . De hecho, nuestro significado de *una vida variada* es tal que cada momento es diferente (es decir, altamente distinguible) de cualquier otro momento. Eso corresponde a valores altos, i.e., cercanos a 1 de  $\mathcal{E}$ . Por el contrario, una *vida monótona* es aquella en la que cada momento es similar (poco distinguible) a cualquier otro momento, lo que conduce a un valor bajo de  $\mathcal{E}$ .

La cantidad representada en la expresión (5.29) provee, por lo tanto, una visualización directa de la íntima conexión entre la evolución temporal y el entrelazamiento. Por un lado, es un indicador cuantitativo del entrelazamiento entre el resto del Universo y el reloj, durante el intervalo de tiempo  $[0, T]$ . Por otro lado, constituye una medida cuantitativa del grado de variedad exhibido por el estado en evolución  $|\Phi_t\rangle$  durante ese mismo intervalo de tiempo. La interpretación del lado derecho de la ecuación (5.29) como una medida del grado de variedad de los estados del sistema sobre el intervalo de tiempo  $[0, T]$ , se encuentra justificada por su relación con el solapamiento medio (o fidelidad)  $|\langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_{t'} \rangle|^2$ , como se explica en el último párrafo, lo que implica que para valores altos de (5.29) el estado  $|\Phi_t\rangle$  es, en promedio, altamente distinguible de cualquier otro estado,  $|\tilde{\Phi}_{t'}\rangle$ , mientras que los valores bajos de (5.29) indican que  $|\tilde{\Phi}_t\rangle$ , en promedio, no difiere mucho de  $|\tilde{\Phi}_{t'}\rangle$ .

## 5.5. Forma explícita del entrelazamiento entre $C$ y $R$

Para poder analizar más a fondo el indicador de entrelazamiento  $\mathcal{E}$  necesitamos evaluar realmente esta medida en función de  $T$  en el caso general, en el que la función de onda  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  evoluciona de acuerdo con la ecuación (5.24). Para este propósito, comenzamos con la expresión (5.21) y calculamos el producto:

$$\langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_{t'} \rangle = \int \Psi^*(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t') d\mathbf{x}, \quad (5.30)$$

y expandimos la amplitud  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  en términos de los autoestados ortonormales del Hamiltoniano  $\hat{H}_R$ , i.e.,  $\hat{H}_R \varphi_n(\mathbf{x}) = E_n \varphi_n(\mathbf{x})$ , así tenemos:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(\mathbf{x}), \quad \text{con: } \sum_n |c_n|^2 = 1. \quad (5.31)$$

El *overlap* (5.30) se reescribe según la expansión anterior como:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_{t'} \rangle &= \sum_{nm} c_n^* c_m e^{i(E_n t - E_m t')/\hbar} \int \varphi_n^*(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{nm} c_n^* c_m e^{\frac{i}{\hbar}(E_n t - E_m t')} \delta_{nm} \\ &= \sum_n |c_n|^2 e^{\frac{i}{\hbar} E_n (t - t')}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

de donde la expresión (5.29) nos da:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(T) &= 1 - \frac{1}{T^2} \sum_{nm} |c_n c_m|^2 \int_0^T \int_0^T dt dt' e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)(t-t')} \\
 &= 1 - 2 \sum_{nm} |c_n c_m|^2 \frac{[1 - \cos(\omega_{nm}T)]}{(\omega_{nm}T)^2} \\
 &= 1 - \sum_{nm} |c_n c_m|^2 \text{sinc}^2(\omega_{nm}T/2), \tag{5.33}
 \end{aligned}$$

nuevamente definimos  $\omega_{nm} = |E_n - E_m|/\hbar$ .

Usando  $\sum_{nm} |c_n c_m|^2 = 1$  y separando la suma en aquellos términos para los cuales  $E_n = E_m$  (o  $\omega_{nm} = 0$ ), y aquellos que satisfacen  $E_n \neq E_m$  (o  $\omega_{nm} \neq 0$ ), llegamos a la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}(T) = \sum_{\substack{nm \\ (\omega_{nm} \neq 0)}} |c_n c_m|^2 \left[ 1 - \text{sinc}^2(\omega_{nm}T/2) \right], \tag{5.34}$$

la cual nos permite conocer el valor de  $\mathcal{E}(T)$  una vez que el estado inicial  $\Psi(\mathbf{x}, 0)$  (el cual determina los coeficientes de expansión  $c_n$ ) queda determinado<sup>6</sup>. La ecuación (5.34) muestra que el entrelazamiento no es una función monótona de  $T$ , en otras palabras, la vida de  $|\Phi_t\rangle$  en el intervalo  $[0, T]$  exhibe altibajos que están determinados no solo por  $T$ , sino también por las frecuencias de transición, o más bien por los estados accesibles que el sistema  $R$  puede visitar durante su evolución.

### 5.5.1. Entrelazamiento máximo y mínimo

Vamos a explorar a continuación los valores máximos y mínimos del indicador  $\mathcal{E}$  y sus implicaciones. De acuerdo a la ecuación (5.34), el valor máximo de  $\mathcal{E}$  es:

$$\mathcal{E}_{\max} = \sum_{\substack{nm \\ (\omega_{nm} \neq 0)}} |c_n c_m|^2 = 1 - \sum_{\substack{nm \\ (\omega_{nm} = 0)}} |c_n c_m|^2, \tag{5.35}$$

y se alcanza en los ceros de la función sinc  $(\omega_{nm}T/2)$ , que ocurre en el límite  $T \rightarrow \infty$ , o siempre que:

$$T = 2\pi \frac{l_{nm}}{\omega_{nm}}, \quad \text{con } l_{nm} = 1, 2, \dots \tag{5.36}$$

Debido a que, en general,  $\omega_{nm}$  varía término a término en la suma que aparece en la expresión (5.34) y mientras que  $T$  es una cantidad fija, podemos encontrar automáticamente la condición (5.36) (suponiendo que no hay degeneración) cuando:

<sup>6</sup>Recordemos que  $\mathcal{E}$ , no es una función de la variable  $t$  (ni de  $t'$ ) sino de la *duración de tiempo*  $T$ . Esto está justificado en el párrafo que sigue a la expresión (5.29). Como se indica ahí, la cantidad  $\mathcal{E}(T)$  se puede interpretar como el entrelazamiento *promedio* en dicho intervalo. Considerar por ejemplo un valor  $T = 0$  implica tomar una extensión nula del intervalo, donde el entrelazamiento promedio  $\mathcal{E}(T) = 0$ . En otras palabras, tenemos que el par de instantes  $(t, t') \in [0, 0] \times [0, 0]$  y por consiguiente, la medida de solapamiento  $|\langle \tilde{\Phi}_0 | \tilde{\Phi}_0 \rangle|^2 = 1$ , lo que representa el solapamiento solo en el instante inicial. Finalmente, dentro de este enfoque conceptual sin tiempo, se considera que el intervalo  $[0, T]$  cubre toda la historia del resto del Universo, por lo que preguntarse qué pasa para valores de  $T < 0$  equivale a preguntarse sobre el Universo antes de  $t = 0$ , algo que no es el objetivo de esta tesis y carece de sentido físico para esta medida de entrelazamiento.

- I) hay una sola frecuencia de transición  $\omega_{nm}$ , esto es, cuando la expansión (5.31) involucra solamente dos términos, así que el sistema es un *sistema de dos niveles*. En este caso  $l_{nm}$  puede ser cualquier entero positivo y  $T$  es un múltiplo del período de transición.
- II) el sistema es un oscilador armónico de frecuencia  $\omega_0$ , de modo que  $\omega_{nm} = \omega_0|n - m|$ . En este caso, tomando  $l_{nm} = l|n - m|$ , con  $l$  cualquier entero positivo, garantiza que el oscilador alcance el entrelazamiento máximo en un tiempo correspondiente a  $l$  períodos naturales.

Para los sistemas en los cuales la condición (5.36) no se encuentra, el entrelazamiento máximo se alcanza solamente en el límite  $T \rightarrow \infty$ .

Ahora, observando la primer suma en la ecuación (5.35) vemos que esta corre sobre todos los pares de índices  $(n, m)$  tal que  $\omega_{nm} \neq 0$ , esto es, tal que  $E_n \neq E_m$ . En el caso particular en el cual no hay degeneración, esto es lo mismo que sumar sobre todos los pares de índices  $(n, m)$  con  $n \neq m$ , de donde se puede escribir:

$$\mathcal{E}_{\max} = \sum_{\substack{nm \\ (n \neq m)}} |c_n c_m|^2 = 2 \sum_{\substack{nm \\ (n < m)}} |c_n c_m|^2. \quad (5.37)$$

Si además este particular espectro no degenerado es también finito, es intuitivamente claro que la ecuación (5.37) es máxima para  $c_n = 1/\sqrt{N}$  para todo  $n$ , donde  $N$  es el número de términos en la expansión de (5.31) (i.e., número de coeficientes no nulos). En este caso (igualmente ponderado) la ecuación (5.37) conduce al resultado:

$$\mathcal{E}_{\max} \Big|_{a_n^2=1/N} = 2 \frac{1}{N^2} \frac{N(N-1)}{2} = 1 - \frac{1}{N}. \quad (5.38)$$

Por lo tanto, el entrelazamiento máximo aumenta (tiende a 1) a medida que aumenta el número de términos en (5.31), mostrando que cuanto *menos información* tengamos sobre el particular auto estado de energía en la función de onda (5.31), *más entrelazado* está el sistema con el reloj y más variada será la evolución.

Consideremos la segunda igualdad en la ecuación (5.35) y la reescribamos en la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\max} &= 1 - \sum_{\substack{nm \\ (E_n=E_m)}} |c_n c_m|^2 \\ &= 1 - \sum_E \left( \sum_{\substack{n \\ (E_n=E)}} |c_n|^2 \right) \left( \sum_{\substack{m \\ (E_m=E)}} |c_m|^2 \right) \\ &= 1 - \sum_E P^2(E), \end{aligned} \quad (5.39)$$

donde en la última línea hemos introducido la distribución de probabilidad:

$$P(E) = \sum_{\substack{m \\ (E_m=E)}} |c_m|^2, \quad (5.40)$$

la cual da la probabilidad de obtener el valor  $E$  cuando se realiza una medición de energía (tomando en cuenta la degeneración). La suma en la expresión (5.39), realizada sobre todos los índices  $\{n\}$ ,

es por lo tanto equivalente a sumar sobre todas las energías  $E_n$  (nuevamente, tomando en cuenta degeneraciones) y la ecuación (5.39) se puede expresar entonces como:

$$\mathcal{E}_{\max} = 1 - \sum_E P^2(E) = S_L(E), \quad (5.41)$$

donde  $S_L(E)$  representa la entropía lineal asociada a la medición de la energía. Finalmente, esto nos permite deducir:

$$\mathcal{E}(T) \leq S_L(E), \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E}(T) = S_L(E), \quad (5.42)$$

la cual es una clase de relación de incerteza de “energía-evolución”.

Para un estado estacionario (esto es, un término único dada en la expansión (5.31)) se deduce inmediatamente que  $\mathcal{E}$  se anula, como debería esperarse. El otro mínimo (no trivial) de  $\mathcal{E}$  se alcanza, de acuerdo con la expresión (3.12), cuando cada término dado por  $\text{sinc}^2(\omega_{nm}T/2)$  alcanza su valor máximo. A su vez, esto ocurre en los máximos o mínimos locales de  $\text{sinc}(\omega_{nm}T/2)$ , que corresponden a aquellos puntos que satisfacen la condición  $\text{sinc}(\omega_{nm}T/2) = \cos(\omega_{nm}T/2)$ .

### 5.5.2. Medida de Entrelazamiento basada en la Entropía de von Neumann

Debido a la importancia de la entropía de von Neumann, señalada en la sección 5.2, resulta instructivo que analicemos aquí el indicador de entrelazamiento basado en  $S_{\text{vN}}$ , dado por (ver ecuación (5.12)):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{vN}} &\equiv S_{\text{vN}}[\rho_R] = -\text{Tr}[\rho_R \ln \rho_R] \\ &= S_{\text{vN}}[\rho_C] = -\text{Tr}[\rho_C \ln \rho_C]. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Para este propósito, primero vamos a obtener una expresión para  $\rho_C$ . De la ecuación (5.18) obtenemos la matriz densidad para el sistema completo de  $R + C$ :

$$\rho := |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{T} \int \Psi(\mathbf{x}, t) \Psi^*(\mathbf{x}', t') |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}'| |t\rangle\langle t'| d\mathbf{x} d\mathbf{x}' dt dt', \quad (5.44)$$

y, en consecuencia, la matriz densidad marginal o reducida del reloj la obtenemos trazando sobre los grados de libertad de  $R$ :

$$\begin{aligned} \rho_C &= \text{Tr}_R |\Psi\rangle\langle\Psi| \\ &= \int \langle\mathbf{x}''|\Psi\rangle\langle\Psi|\mathbf{x}''\rangle d\mathbf{x}'' \\ &= \frac{1}{T} \int \Psi(\mathbf{x}, t) \Psi^*(\mathbf{x}', t') \langle\mathbf{x}''|\mathbf{x}\rangle \langle\mathbf{x}'|\mathbf{x}''\rangle |t\rangle\langle t'| d\mathbf{x} d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' dt dt' \\ &= \frac{1}{T} \int \left[ \int \Psi(\mathbf{x}, t) \Psi^*(\mathbf{x}, t') d\mathbf{x} \right] |t\rangle\langle t'| dt dt' \\ &= \frac{1}{T} \int \langle\tilde{\Phi}_{t'}|\tilde{\Phi}_t\rangle |t\rangle\langle t'| dt dt', \end{aligned} \quad (5.45)$$

donde en la última línea se ha usado la ecuación (5.30). Recurriendo ahora a la ecuación (5.32) esto nos conduce a:

$$\rho_C = \sum_n |a_n|^2 |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n|, \quad (5.46)$$

con

$$|\alpha_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |t\rangle dt. \quad (5.47)$$

Notemos que los estados  $|\alpha_n\rangle$  están normalizados en el intervalo temporal  $[0, T]$ , sin embargo, no son necesariamente ortogonales entre sí. De hecho, se tiene<sup>7</sup>:

$$\langle \alpha_n | \alpha_{n'} \rangle = \frac{i\hbar}{T(E_{n'} - E_n)} \left[ e^{-i(E_{n'} - E_n)T/\hbar} - 1 \right], \quad (5.48)$$

entonces, en el límite  $T \rightarrow \infty$ , los estados  $|\alpha_n\rangle$  que corresponde a diferentes energías  $E_n$  resultan ortogonales entre sí. Es importante que notemos que, aunque los estados  $\{|\alpha_n\rangle\}$  no son ortogonales entre sí, pero sí son linealmente independientes.

A continuación, similarmente a la construcción que realizamos en la sección 4.2, denotemos con  $\{E^{(j)}\} = \{E^{(0)}, E^{(1)}, \dots\}$  a la sucesión, en orden creciente, de *diferentes* valores de energías que aparecen en el conjunto  $\{E_n\} = \{E_0, E_1, \dots\}$  de autovalores de energía. Recordemos que, mientras algunos de los valores  $E_n$ 's pueden ser iguales debido a la degeneración, todos los valores  $E^{(j)}$ 's son diferentes, y satisfacen las desigualdades estrictas,  $E^{(0)} < E^{(1)} < \dots$ . Además, en contraste con lo que sucede con los  $E_n$ 's, el índice  $j$  que aparece en  $E^{(j)}$  no se refiere al autovalor del autoestado  $j$ -ésimo del Hamiltoniano, sino que etiqueta a un valor particular de entre el conjunto de valores propios de energía. Esta notación permite escribir la suma (5.46) sobre los estados  $n$ , como una suma sobre los valores de energía  $E^{(j)}$  como se muestra a continuación. Primero descomponemos (5.46) en la forma:

$$\begin{aligned} \rho_C &= \sum_n |a_n|^2 |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n| \\ &= \sum_{\substack{m \\ (E_m=E^{(0)})}} |a_m|^2 |\alpha_m\rangle\langle\alpha_m| + \sum_{\substack{l \\ (E_l=E^{(1)})}} |a_l|^2 |\alpha_l\rangle\langle\alpha_l| + \dots \end{aligned} \quad (5.49)$$

Luego observamos que en cada suma (caracterizada por un valor dado de la energía), todos los  $|\alpha_n\rangle$ 's coinciden. Así, por ejemplo, en la primer suma tenemos que para todo valor de  $m$ ,  $E_m = E^{(0)}$ , de donde:

$$|\alpha_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int e^{-\frac{i}{\hbar} E_m t} |t\rangle dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int e^{-\frac{i}{\hbar} E^{(0)} t} |t\rangle dt \equiv |\alpha_{E^{(0)}}\rangle. \quad (5.50)$$

Esto nos da:

$$\begin{aligned} \rho_C &= \sum_{\substack{m \\ (E_m=E^{(0)})}} |a_m|^2 |\alpha_{E^{(0)}}\rangle\langle\alpha_{E^{(0)}}| + \sum_{\substack{l \\ (E_l=E^{(1)})}} |a_l|^2 |\alpha_{E^{(1)}}\rangle\langle\alpha_{E^{(1)}}| + \dots \\ &= \sum_{E^{(j)}} \sum_{\substack{n \\ (E_n=E^{(j)})}} |a_n|^2 |\alpha_{E^{(j)}}\rangle\langle\alpha_{E^{(j)}}| \\ &= \sum_{E^{(j)}} P(E^{(j)}) |\alpha_{E^{(j)}}\rangle\langle\alpha_{E^{(j)}}|. \end{aligned} \quad (5.51)$$

---

7

$$\langle \alpha_n | \alpha_{n'} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n'} t'} \langle t | t' \rangle dt dt' = \frac{1}{T} \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} dt \int_0^T e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n'} t'} \delta(t - t') dt' \dots$$

Finalmente, recurriendo a la ecuación (5.40), podemos ver que la expresión anterior equivale a:

$$\rho_C = \sum_E P(E) |\alpha_E\rangle\langle\alpha_E|, \quad (5.52)$$

donde la suma corre sobre todos los valores diferentes de la energía (hemos eliminado el superíndice ( $j$ ) en  $E^{(j)}$ ), y se ha tenido en cuenta cualquier posible degeneración. Por lo tanto, la matriz densidad marginal del reloj constituye una *mezcla estadística* de los estados puros  $|\alpha_E\rangle$ , con pesos estadísticos  $P(E)$ .

Ahora, en general, no es posible obtener una expresión cerrada para la entropía de von Neumann  $S_{\text{vN}}[\rho_C]$ , porque depende de la forma particular exhibida por el espectro energético del Hamiltoniano  $H_R$ . Sin embargo, podemos obtener un límite superior útil para  $S_{\text{vN}}[\rho_C]$ , si suponemos (como se hace aquí) que el espacio de Hilbert del sistema  $R$  tiene dimensión finita, entonces la suma en (5.52) también es finita. Además, se sabe que cuando uno tiene una combinación lineal convexa de matrices de densidad de un sistema cuántico de dimensión finita,  $\rho = \sum_i \lambda_i \rho_i$ , con  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  y  $\sum_i \lambda_i = 1$ , se tiene que  $S_{\text{vN}}[\rho] \leq \sum_i \lambda_i S_{\text{vN}}[\rho_i] - \sum_i \lambda_i \ln \lambda_i$ , [140]. Aplicando esta desigualdad a la expresión (5.52) conseguimos:

$$\mathcal{E}_{\text{vN}} = S_{\text{vN}}[\rho_C] \leq - \sum_E P(E) \ln P(E) = S(E), \quad (5.53)$$

donde hemos usado que la entropía de un estado puro se anula, de aquí que tengamos en la expresión de arriba  $S_{\text{vN}}[|\alpha_E\rangle\langle\alpha_E|] = 0$  y además denotamos con  $S(E)$  a la entropía de Shannon:

$$S(E) = - \sum_E P(E) \ln P(E),$$

de la distribución de probabilidad  $P(E)$  asociada con los posibles resultados de medir la energía del sistema  $R$ . La ecuación (5.53) muestra que el indicador de entrelazamiento  $\mathcal{E}_{\text{vN}}$  está acotado desde arriba por la entropía de Shannon, un límite superior similar al límite superior (5.42) asociado con la entropía lineal.

Como ya lo mencionamos, en el límite cuando  $T \rightarrow \infty$ , los estados  $|\alpha_E\rangle$  se vuelven ortogonales entre sí (ver (5.48 y 5.50)). Además, se sigue de la ecuación (5.52) que en aquel límite, los valores de  $P(E)$  coinciden con los autovalores<sup>8</sup> de  $\rho_C$ , y la desigualdad en (5.53) resulta en una igualdad (ver ecuación (5.13)). Por lo tanto, tenemos:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\text{vN}} = S(E). \quad (5.54)$$

Esto es, en el límite para  $T \rightarrow \infty$ , el entrelazamiento entre el reloj y el sistema  $R$  (medido por la entropía de von Neumann, ya sea de  $\rho_R$  o  $\rho_C$ ), es igual a la entropía de Shannon asociada con la medición de la energía del sistema  $R$ .

### 5.5.3. Entrelazamiento y fluctuaciones de la energía

Hemos visto anteriormente que en un estado estacionario, es decir, cuando la dispersión de energía:

$$\sigma_E^2 = \langle \Psi | \hat{H}_R^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | \hat{H}_R | \Psi \rangle^2 \quad (5.55)$$

<sup>8</sup>Esto es así porque en aquel límite,  $\rho_C$  queda diagonalizada en su base ortonormal.

se anula, el entrelazamiento  $\mathcal{E}$  también desaparece. Esto parece indicar que existe una relación entre  $\sigma_E^2$  y  $\mathcal{E}$ , que ahora exploraremos. Para esto expresemos la ecuación (5.55) en términos de la expansión del estado general dada en (5.31), de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\sigma_E^2 &= \sum_n |c_n|^2 E_n^2 - \left( \sum_n |c_n|^2 E_n \right)^2 \\ &= \sum_{nm} |c_n c_m|^2 E_n^2 - \sum_{nm} |c_n c_m|^2 E_n E_m \\ &= \sum_{nm} |c_n c_m|^2 E_n (E_n - E_m).\end{aligned}\quad (5.56)$$

Haciendo  $n \leftrightarrow m$  en la última línea<sup>9</sup> y combinando ambas expresiones podemos conseguir:

$$\begin{aligned}\sigma_E^2 &= \frac{1}{2} \sum_{nm} |c_n c_m|^2 (E_n - E_m)^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \sum_{\substack{nm \\ (\omega_{nm} \neq 0)}} |c_n c_m|^2 \omega_{nm}^2.\end{aligned}\quad (5.57)$$

Ahora, regresando a la ecuación (3.12), y recurriendo a la serie de Taylor de la función sinc:

$$\text{sinc}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l z^{2l}}{(2l+1)!}, \quad (5.58)$$

encontramos que al orden más bajo en  $T$ , el indicador  $\mathcal{E}$  se convierte en:

$$\mathcal{E}(T) = \frac{1}{3} \sum_{\substack{nm \\ (\omega_{nm} \neq 0)}} |c_n c_m|^2 (\omega_{nm} T/2)^2 = \frac{T^2}{6\hbar^2} \sigma_E^2, \quad (5.59)$$

esto es, la dispersión en la energía determina la tasa inicial de crecimiento del indicador  $\mathcal{E}$ .

#### 5.5.4. Ejemplo: El caso de un qubit

A modo de ejemplo y para mostrar nuestros resultados, nos enfocamos en un sistema de un qubit (sistema de dos niveles), considerando la expansión (5.31) solamente con dos términos:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = c_1 e^{-iE_1 t/\hbar} \varphi_1(\mathbf{x}) + c_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \varphi_2(\mathbf{x}). \quad (5.60)$$

Podemos calcular para este ejemplo la matriz densidad marginal del sistema  $R$ :

$$\rho_R = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & e^{-i\frac{(E_1-E_2)T}{2\hbar}} \text{sinc}\frac{(E_1-E_2)T}{2\hbar} c_1 c_2^* \\ e^{i\frac{(E_1-E_2)T}{2\hbar}} \text{sinc}\frac{(E_1-E_2)T}{2\hbar} c_1^* c_2 & |c_2|^2 \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

<sup>9</sup>

$$\sum_{nm} |c_n c_m|^2 E_n (E_n - E_m) + \sum_{nm} |c_m c_n|^2 E_m (E_m - E_n) = \sum_{nm} |c_n c_m|^2 (E_n - E_m)^2$$

sus autovalores son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 4|c_1 c_2|^2 \left( 1 - \text{sinc}^2 \left( \frac{(E_1 - E_2)T}{2\hbar} \right) \right)} \right]. \quad (5.62)$$

En este caso, la ecuación (3.12) se reduce a la siguiente expresión:

$$\mathcal{E}(T) = 2|c_1 c_2|^2 \left( 1 - \text{sinc}^2 \left( \frac{|E_1 - E_2|T}{2\hbar} \right) \right), \quad (5.63)$$

y la desviación estándar de la energía  $\sigma_E = \sqrt{\sigma_E^2}$  toma una forma simple (ver la ecuación (5.57)):

$$\sigma_E = |c_1 c_2| |E_1 - E_2|. \quad (5.64)$$

Esto nos permite expresar:

$$\mathcal{E}(T) = 2|c_1 c_2|^2 \left( 1 - \text{sinc}^2 \left( \frac{\sigma_E T}{2\hbar |c_1 c_2|} \right) \right). \quad (5.65)$$

Podemos ver entonces que cuando  $T\sigma_E/\hbar = 2\pi|c_1 c_2|l$ , con  $l = 1, 2, \dots$ , el indicador  $\mathcal{E}(T)$  alcanza su valor máximo  $\mathcal{E}_{\max} = 2|c_1 c_2|^2$  (esta condición es equivalente a la condición(5.36)). Además, si  $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$ ,  $\mathcal{E}(T)$  se transforma en:

$$\mathcal{E}(T) \Big|_{c_1^2=c_2^2=1/2} = \frac{1}{2} \left( 1 - \text{sinc}^2 \left( \frac{\sigma_E T}{\hbar} \right) \right), \quad (5.66)$$

y el valor máximo resulta ser  $\mathcal{E}_{\max} = 1/2$ . De esta manera, siempre que tengamos  $\sigma_E T = \hbar\pi l$ , el valor máximo de  $\mathcal{E}$  se logra para una superposición coherente y equilibrada de (dos) estados propios de energía del Hamiltoniano  $\hat{H}_R$ .

Resulta instructivo considerar aquí la entropía de von Neumann  $S_{vN}$ , o equivalentemente el indicador de entrelazamiento  $\mathcal{E}_{vN}$  (ver ecuación (5.43)), que en este caso se puede calcular directamente de la siguiente manera. Al combinar las ecuaciones (5.62) y (5.63) podemos conseguir:

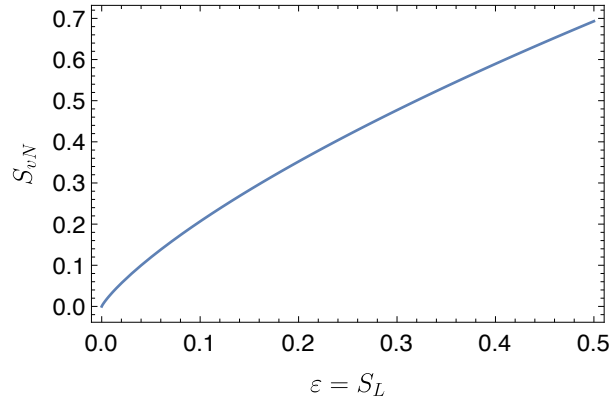
$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 2\mathcal{E}} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - 2\mathcal{E}} \right), \quad (5.67)$$

si ahora llevamos estos autovalores  $\lambda_{1,2}$  en la expresión para  $\mathcal{E}_{vN} = S_{vN} = -\lambda_1 \ln \lambda_1 - \lambda_2 \ln \lambda_2$  (ver ecuación (5.13)), obtenemos una expresión cerrada para  $\mathcal{E}_{vN}$  —que mide el entrelazamiento entre el sistema  $R$  (en este caso el qubit) y el reloj— como una función del indicador de entrelazamiento  $\mathcal{E}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{vN} = & - \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 2\mathcal{E}}) \ln \left( \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 2\mathcal{E}}) \right) - \\ & - \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 2\mathcal{E}}) \ln \left( \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - 2\mathcal{E}}) \right). \end{aligned} \quad (5.68)$$

En la figura 5.2 mostramos que  $S_{vN}$  (y, consecuentemente, también  $\mathcal{E}_{vN}$ ) es una función monótona creciente del indicador de entrelazamiento dado por la entropía lineal  $S_L$ , o equivalentemente del promedio de distinguibilidad discutido al final de la sección 5.4. Esto confirma la estrecha relación entre evolución y entrelazamiento, ya sea que este último se evalúe cuantitativamente utilizando la entropía lineal o la de von Neumann.





**Figura 5.2:** Entropía de von Neumann como una función de la entropía lineal para un sistema de un qubit en evolución.

Finalmente, comentemos un poco el aspecto geométrico de este ejemplo. En un sistema de dos niveles, la evolución tiene lugar sobre curvas geodésicas que son círculos máximos sobre la esfera de Bloch, esto es el espacio proyectivo de Hilbert  $\mathcal{PH}$  (Capítulo 2). De hecho, cualquier evolución Hamiltoniana de un qubit es localmente una rotación alrededor de un eje fijo y se encuentra en el ecuador en relación con dicho eje. Bajo evoluciones unitarias, los estados que obedecen estas condiciones son precisamente superposiciones igualmente ponderadas de los autoestados de energía. Por tanto, estas observaciones indican que (al menos en el caso del qubit), el entrelazamiento máximo se alcanza cuando el sistema evoluciona a lo largo de una curva geodésica, y sugieren analizar más a fondo la medida de entrelazamiento desde un enfoque geométrico. Este es el objetivo de la siguiente sección.

## 5.6. Entrelazamiento y la geometría de la evolución cuántica

En esta sección vamos a dar una interpretación geométrica de la medida de entrelazamiento  $\mathcal{E}$  en términos de un invariante relacionado a la longitud de una curva de estados  $\mathcal{C}$  en el espacio proyectivo de Hilbert  $\mathcal{PH}$ . Esta interpretación se basa en el trabajo de Anandan y Aharanov [83], en el cual muestran que en una evolución arbitraria de un sistema cuántico, la integral respecto al tiempo de la incerteza de energía  $\sigma_E$  del sistema es independiente del Hamiltoniano utilizado para transportar los estados del sistema a lo largo de una curva dada en el espacio proyectivo de Hilbert  $\mathcal{PH}$ .

Para ver esto, recurrimos a la variable  $\theta_{tt'}$  introducida en (2.16),

$$|\langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_{t'} \rangle|^2 = \cos^2 \left( \frac{\theta_{tt'}}{2} \right) \quad (5.69)$$

El valor de  $\theta_{tt'}$  también conocido como ángulo de Bargmann [41], corresponde a la distancia geodésica  $s \sim \theta$ , medida a lo largo de cualquier geodésica que conecta los estados o puntos  $\Pi(|\tilde{\Phi}_t\rangle)$  y  $\Pi(|\tilde{\Phi}_{t'}\rangle)$  que se encuentran en el espacio proyectivo  $\mathcal{PH}$  (sección 2.2).

Por lo tanto, cuando  $\theta_{tt'} \neq 0$  los estados expanden un subespacio de dimensión dos  $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{H}$ , el conjunto de rayos de  $\mathcal{N}_0$  es el espacio proyectivo complejo unidimensional  $\Pi(\mathcal{N}_0) = \mathcal{PH}$ , el cual es un espacio real dos dimensional, la esfera  $\mathbb{S}^2$ . Sobre esta esfera, la medida indicada para medir distancias viene dada por la métrica de Fubini-Study (2.19), que para dos estados muy próximos  $t$

y  $t' = t + dt$  el elemento de arco es, (equivalentemente  $ds \sim d\theta$  en (5.69)):

$$|\langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_{t+dt} \rangle| \rightsquigarrow ds^2 = 4 \left( 1 - |\langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_{t'} \rangle|^2 \right), \quad (5.70)$$

se puede mostrar que esta métrica en este caso es la métrica estándar sobre la esfera unitaria ([66, 67, 68, 69]).

Recordemos que toda geodésica que une los puntos en  $\mathcal{PH}$  es una proyección de una geodésica horizontal en  $\mathcal{N}_0$ . Si  $\theta \sim s \neq \pi$  encontramos exactamente dos geodésicas conectando los puntos  $\Pi(|\tilde{\Phi}_t\rangle)$  y  $\Pi(|\tilde{\Phi}_{t'}\rangle)$  que juntas forman un gran círculo sobre la esfera. Si  $\theta \sim s = \pi$  los estados  $|\tilde{\Phi}_t\rangle$  y  $|\tilde{\Phi}_{t'}\rangle$  son ortogonales, por supuesto que hay infinitas geodésicas con la misma longitud uniendo estos puntos diametralmente opuestos. Recordemos también que esta distancia  $\theta_{t't} \sim s$  está relacionada con la probabilidad de transición entre los estados conectados por la curva geodésica, como se indica en la expresión (5.69).

Vamos a mostrar ahora que existe una relación entre esta métrica o distancia  $s \sim \theta_{t't}$  definida sobre el espacio proyectivo  $\mathcal{PH}$  y una cantidad dinámica del sistema como lo es la incerteza en su energía  $\sigma_E$  (5.55).

Consideremos un estado cuántico de un sistema aislado cuya evolución está regida, dado un Hamiltoniano  $\hat{H}(t)$ , por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Phi}(t)\rangle = \hat{H}(t) |\tilde{\Phi}(t)\rangle, \quad (5.71)$$

Una condición necesaria y suficiente para que este sistema aislado evolucione en el espacio proyectivo  $\mathcal{PH}$  es que no se encuentre en un estado estacionario, es decir, tenga un valor de  $\sigma_E(t) \neq 0$ . Asumimos por ahora que  $\hat{H}(t)$  es una función de  $t$ . Consideremos un estado evolucionado infinitesimalmente  $t' = t + dt$  hasta segundo orden:

$$|\tilde{\Phi}_{(t+dt)}\rangle = |\tilde{\Phi}_t\rangle - \frac{idt}{2\hbar} \hat{H} |\tilde{\Phi}_t\rangle - \frac{dt^2}{2\hbar} \left( i \frac{d\hat{H}}{dt} |\tilde{\Phi}_t\rangle + \frac{1}{\hbar} \hat{H}^2 |\tilde{\Phi}_t\rangle \right) + \mathcal{O}(dt^3). \quad (5.72)$$

Calculando el cuadrado del módulo de su proyección sobre el estado al tiempo  $t$  y usando la definición de  $\sigma_E$  dada en (5.55),

$$|\langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_{(t+dt)} \rangle|^2 \equiv |\langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_{t'} \rangle|^2 = 1 - \frac{dt^2 \sigma_E^2}{\hbar^2} + \mathcal{O}(dt^3). \quad (5.73)$$

Un resultado notable es que la cantidad  $dt\sigma_E/\hbar$  es independiente de la fase de los estados  $|\tilde{\Phi}(t)\rangle$  y  $|\tilde{\Phi}(t+dt)\rangle$ , esto indica que la dinámica implementada por el Hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  transporta paralelamente los estados del sistema sobre la geodésica en el espacio proyectivo  $\mathcal{PH}$  (ver Apéndice A.2).

Otro resultado que surge inmediatamente de la expresión (5.73) al comparar con (5.70) es la relación anticipada entre la distancia geodésica  $s \sim \theta_{t't}$  y la dispersión de la energía  $\sigma_E$ ,

$$ds = 2 \frac{\sigma_E}{\hbar} dt. \quad (5.74)$$

Si bien existen infinitos Hamiltonianos que evolucionan el sistema a lo largo de una curva dada en el espacio proyectivo, dando lugar en general a diferentes fases para los estados vectoriales, todos estos

Hamiltonianos implementan una dinámica de transporte paralelo, en otras palabras, dejan invariante la medida (adimensional)

$$s = 2 \int \frac{\sigma_E(t)}{\hbar} dt. \quad (5.75)$$

Por consiguiente, la medida  $s$  que da la distancia entre estados cuánticos en  $\mathcal{PH}$ , construida a partir de la métrica de Fubini-Study, es una cantidad independiente de la dinámica  $\hat{H}(t)$  que transporta el sistema a lo largo de una curva dada  $\mathcal{C} \subset \mathcal{PH}$ . Resultado válido para espacios de Hilbert de dimensión finita e infinita [83]. Otro concepto interesante asociado a la incerteza en la energía de un sistema cuántico, se desprende de la relación (5.74) y está indicado por la relación:  $\frac{ds}{dt} = 2\sigma_E/\hbar$ , y se interpreta como la magnitud de la velocidad de evolución del sistema en el espacio proyectivo de Hilbert [83].

A continuación, vamos a expresar nuestra medida de entrelazamiento introducida en (5.29), en términos de la distancia geodésica  $\theta_{tt'} \sim s$ . Tenemos así, usando (5.69),

$$\mathcal{E} = 1 - \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \cos^2 \left( \frac{\theta_{tt'}}{2} \right) dt dt' \quad (5.76)$$

En principio podemos calcular esta integral en el caso particular en el cual la evolución del estado  $|\tilde{\Phi}_t\rangle$  siga una geodésica. Debido a que la distancia más corta posible entre dos estados ortogonales en una geodésica es  $s_0 = \pi$ , en general, la distancia sobre una curva, medida por (5.75) es  $s \geq \pi$ . Es decir, la desigualdad se satura si la longitud medida por (5.75) es la de una geodésica en  $\mathcal{PH}$  por donde evolucionan los estados.

Consideremos una evolución en  $\mathcal{PH}$ , en donde el invariante,

$$s(t) = 2 \int_0^t \frac{\sigma_E(t'')}{\hbar} dt'' \quad (5.77)$$

es la longitud de una curva medida por la métrica de Fubini-Study basada en un punto  $t = 0$ . Consideremos dos valores de longitud sobre la misma curva,  $s = s(t)$  y  $s' = s(t')$ ; de acuerdo a la discusión dada anteriormente, estos valores están asociados a dos estados,  $|\tilde{\Phi}_t\rangle$  y  $|\tilde{\Phi}_{t'}\rangle$  y además se tiene  $s_0 = \theta_{tt'} \leq |s' - s|$ , por lo tanto,  $\cos^2 \left( \frac{\theta_{tt'}}{2} \right) \geq \cos^2 \left( \frac{s' - s}{2} \right)$ , en el intervalo  $|s' - s| \leq \pi$  (región donde  $\cos^2(x/2)$  es una función decreciente). De estas consideraciones y asumiendo un valor constante para  $\sigma_E$  resulta finalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\leq 1 - \frac{1}{S^2} \int_0^S \int_0^S \cos^2 \left( \frac{s' - s}{2} \right) ds ds' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \left( \frac{S}{2} \right)}{S^2}, \\ \mathcal{E} &\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{sinc}^2 \frac{S}{2}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

expresión válida para  $S = \frac{2\sigma_E T}{\hbar} < \pi$ . Notemos que el límite superior de esta cota es igual al máximo entrelazamiento de un sistema de un qubit mostrado en la sección anterior 5.5.4 (5.66), esto está de acuerdo con lo comentado al final de la sección anterior ya que la evolución en el caso de un qubit tiene lugar a lo largo de una geodésica.

## 5.7. Conclusiones del capítulo

En este capítulo presentamos una discusión autocontenida del entrelazamiento dentro del enfoque sin tiempo de la mecánica cuántica. Este es un escenario en el que la evolución y el tiempo no son ingredientes primitivos de la descripción del mundo físico, sino más bien fenómenos emergentes. Se considera que el Universo consiste en un reloj  $C$  y un sistema  $R$  (el resto del Universo) que están conjuntamente en un estado estacionario. La noción de evolución temporal del sistema  $R$  surge del entrelazamiento cuántico entre el reloj  $C$  y  $R$ . Usando un mínimo de formalismo, demostramos que existe una relación directa y cuantitativa entre el entrelazamiento cuántico exhibido por el sistema compuesto  $R + C$  y la evolución dinámica experimentada por el sistema  $R$ . De hecho, el entrelazamiento entre el reloj y el sistema  $R$  está estrechamente relacionado con la distinción promedio entre los estados de  $R$  correspondientes a diferentes tiempos.

Finalmente, usando los argumentos geométricos introducidos en el Capítulo 2, logramos relacionar nuestra medida promedio de entrelazamiento con las distancias recorridas por los estados cuánticos sobre curvas del espacio proyectivo de Hilbert (medidas por la métrica de Fubini-Study).

---

Dinámica emergente de estados mixtos entrelazados.

---

*“Todas las cosas por un poder inmortal cerca o lejos ocultamente están unidas entre sí, por lazos invisibles, de tal modo que no puedes agitar una flor sin trastornar a una estrella.”*

Francis Thompson

## 6.1. Introducción

En el capítulo anterior hemos mostrado que el entrelazamiento del reloj del sistema es fundamental para el enfoque sin tiempo de la dinámica cuántica. Sin embargo, la relación cuantitativa entre las correlaciones cuánticas y los aspectos específicos relacionados con la dinámica del sistema  $R$  en evolución ha recibido relativamente poca atención por parte de los investigadores, y la mayoría de los esfuerzos se centran en escenarios en los que el compuesto *sistema-reloj* está en un estado puro [89, 131, 156]. Nuestro objetivo en este capítulo final es explorar la imagen sin tiempo de la dinámica cuántica para estados globales *mixtos* del sistema bipartito  $R + C$ .

Las motivaciones para estudiar estados mixtos dentro del contexto sin tiempo son múltiples. Primero, el sistema  $R$  puede ser, en general, compuesto en sí mismo. En circunstancias realistas, uno puede tener acceso solo a una parte de  $R$ , es decir, a un subsistema  $R_a$  de  $R$  que, aunque esté débilmente acoplado a otras partes de  $R$ , puede no obstante estar entrelazado con ellas y, en consecuencia, estar en un estado mixto [159]. En este escenario, el sistema  $R = R_a + R_b$  tiene un Hamiltoniano total  $\hat{H}_R \approx \hat{H}_{R_a} + \hat{H}_{R_b}$ , donde  $\hat{H}_{R_a}$  y  $\hat{H}_{R_b}$  son los Hamiltonianos de  $R_a$  y  $R_b$ , respectivamente. Si el estado de  $R$  es  $\rho_R$ , el subsistema  $R_a$  se describe mediante el estado marginal

reducido  $\rho_{R_a} = \text{Tr}_{R_b}[\rho_R]$  obedeciendo a la ecuación de von Neumann<sup>1</sup>:

$$\frac{d\rho_{R_a}}{dt} \approx \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_{R_a}, \rho_{R_a}]. \quad (6.1)$$

El subsistema  $R_a$  es entonces, a todos los efectos, nuestro “resto del Universo”. El enfoque PW, en su formulación estándar, estudia cómo la dinámica de un sistema aislado descrito por un estado puro y que obedece a la ecuación de Schrödinger se puede incorporar en un estado puro estacionario del sistema  $R + C$ . Es legítimo y pertinente investigar si la dinámica de un sistema  $R_a$  que evoluciona de acuerdo con la ecuación de von Neumann (6.1), que es la ecuación de movimiento más general para un sistema cuántico cerrado, puede integrarse de manera similar en un estado mixto estacionario de  $R_a + C$ . Al respecto, resulta sugerente que Marletto y Vedral [88] analicen la propuesta de PW refiriéndose explícitamente a un sistema que obedece a la ecuación de von Neumann, sin comprometerse con el grado de pureza del sistema, en otras palabras solo contemplan un estado puro del sistema compuesto sin tratar el estado mixto. Por supuesto, se puede eludir la necesidad de considerar estados mixtos implementando la versión de estado puro de la imagen PW para el sistema compuesto completo  $R_a + R_b + C$ , asumiendo que está en estado puro. Pero ese procedimiento implica cargar con el exceso de equipaje de describir todos los grados de libertad del subsistema  $R_b$ , que puede resultar inaccesible e irrelevante. Evitar esa carga adicional es la principal motivación para considerar el enfoque PW para estados mixtos, que, por cierto, coincide con la razón misma para usar la ecuación de von Neumann (6.1) para estudiar la dinámica de subsistemas entrelazados, pero dinámicamente aislados.

En un contexto cosmológico, la imagen explicada anteriormente es consistente con la presentada por Bunyi y Hsu en [159]. Según estos autores, el modelo cosmológico estándar del *Big Bang* implica que es probable que un subsistema dado  $R_a$  del Universo esté entrelazado con otros subsistemas con los que  $R_a$  no interacciona. Hasta ahora, nuestra discusión se centró en escenarios donde los estados mixtos describen subsistemas de un Universo cuántico compuesto que, en su conjunto, puede estar en un estado puro. Las motivaciones para desarrollar un enfoque de PW para estados mixtos no se limitan a esos escenarios. De hecho, el propio Universo (es decir, todo el sistema  $R + C$ ) puede concebirse en un estado mixto [160, 161]. Esta posibilidad fue considerada por Page en [160], donde se propuso una descripción cuántica del Universo que, en contraste con la célebre función de onda de Hartle-Hawking, corresponde a una matriz de densidad que describe un estado cuántico impuro. Los efectos físicos que dependen del grado de mezcla de la matriz de densidad del Universo fueron considerados por Gurzadyan y Kocharyan en [161]. En este trabajo, de acuerdo con la discusión anterior, la expresión “resto del Universo” puede referirse al “resto total”  $R$ , o a un subsistema apropiado  $R_a$ . En el último caso, eliminaremos el subíndice  $a$ .

Considerar el marco más general dado por los estados mixtos y la ecuación de von Neumann también puede ayudar a adaptar la imagen *timeless* de PW a extensiones o modificaciones de la mecánica cuántica motivadas por la investigación de la interfaz entre los fenómenos cuánticos y gravitacionales. En este sentido, podemos mencionar la propuesta de Deutch para una formulación de la mecánica cuántica en presencia de curvas cerradas temporales (o del inglés *timelike* tipo tiempo) (CTC), que explícitamente requiere matrices de densidad que describan estados mixtos, y no puede formularse en términos de funciones de onda [162]. Por último, el análisis de estados mixtos en relación con el enfoque *timeless* de la mecánica cuántica puede arrojar nueva luz sobre el pro-

<sup>1</sup>Escribimos esta ecuación de manera aproximada ( $\approx$ ) a raíz de nuestra suposición  $H_R \approx H_{R_a} + H_{R_b}$ ; la igualdad es estrictamente cierta si podemos descartar todo tipo de interacción entre  $R_a$  y  $R_b$ . Para lo que sigue en nuestro estudio, al considerar el sistema compuesto  $U = R + C$ , asumiremos efectivamente que no hay interacción alguna entre las partes  $R$  y  $C$ , por lo que podremos escribir  $\hat{H}_U = \hat{H}_R + \hat{H}_C$ , recordar Sección 5.3.

blema del estado ontológico de los estados mixtos [163]. Todas las motivaciones anteriores pueden ser englobadas por una sola: es deseable formular la imagen PW de una manera que incorpore la descripción más general de la dinámica de un sistema cuántico cerrado, que es la que da la ecuación de von Neumann para la evolución de estados mixtos dependientes del tiempo.

Por lo tanto, en el trabajo que se presenta a continuación, desarrollamos un escenario estático similar a PW que involucra estados globales mixtos del sistema compuesto  $R + C$ . Nuestra propuesta es compatible con estados mixtos generales dependientes del tiempo del sistema  $R$  en evolución, pero por lo demás mantiene los principales supuestos del escenario de PW. Esta versión de estado mixto del enfoque de PW constituye una prueba de principio que muestra que se puede desarrollar un escenario de PW de estado mixto consistente, y proporciona un campo de pruebas para explorar las posibles características físicas de dicho escenario, particularmente en conexión con el entrelazamiento cuántico.

Entonces, en este último capítulo vamos a analizar cuantitativamente para estados globales mixtos del sistema compuesto  $R + C$ , el entrelazamiento entre  $R$  y  $C$ , y su relación con la evolución temporal emergente experimentada por  $R$ . Introduciremos e investigaremos un indicador cuantitativo de entrelazamiento, basado en la comparación de una medida entrópica evaluada en el sistema global con la correspondiente medida entrópica evaluada en el estado reducido asociado a  $R$ . Usando este indicador de entrelazamiento demostramos que (bajo la restricción PW de una energía total definida de  $R + C$  igual a cero) el sistema compuesto  $R + C$  necesariamente tiene que estar entrelazado para que el sistema  $R$  presente una evolución dinámica, lo que significa que otras formas de correlaciones no clásicas por sí solas no son suficientes para que surjan la noción del tiempo y la evolución. Establecemos un límite superior, así como el valor asintótico, del indicador de entrelazamiento, expresando estas cantidades en términos de una medida entrópica de la dispersión de la distribución de probabilidad de energía asociada con el sistema  $R$ . También investigamos la conexión entre el entrelazamiento presente en el sistema compuesto  $R + C$ , y una medida de la incertidumbre de la energía del sistema  $R$ .

Este capítulo está estructurado de la siguiente manera. En la siguiente sección 6.2, analizamos la conexión entre la evolución en el tiempo y el entrelazamiento para los estados mixtos del sistema completo  $R + C$ , sobre la base de un indicador de entrelazamiento entrópico apropiado. Luego en la sección 6.3, discutimos un límite superior y el límite asintótico de esta cantidad. Su conexión con la dispersión de energía del sistema se investiga en la sección 6.4. Finalmente, en la sección 6.5 se dan algunos comentarios finales.

## 6.2. Evolución y entrelazamiento para estados mixtos del conjunto sistema-reloj

Para extender las ideas desarrolladas en el capítulo 5 más allá de los escenarios correspondientes a estados globales puros del sistema  $R + C$ , asumiremos ahora un estado global mixto  $\rho_U$  el cual es estacionario bajo la dinámica determinada por el Hamiltoniano total  $\hat{H}_U$ , y tiene una energía total definida igual a 0. Esto es, supondremos que  $\langle \hat{H}_U \rangle = \text{Tr}(\rho_U \hat{H}_U) = 0$  y  $\langle \hat{H}_U^2 \rangle - \langle \hat{H}_U \rangle^2 = \text{Tr}[\rho_U (\hat{H}_U - \langle \hat{H}_U \rangle)^2] = 0$ . De esta forma, describimos el estado universal como un estado de mezcla estadística o brevemente, *mixto*, de la forma:

$$\rho_U = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|, \quad (6.2)$$

donde  $p_i \geq 0$ ,  $\sum_i p_i = 1$  y los estados  $\{|\Psi_i\rangle\}$  forman un conjunto de estados estacionarios puros del sistema  $R + C$  tal que para todo  $i$  se satisface  $\hat{H}_U|\Psi_i\rangle = 0$ , es decir cada estado  $|\Psi_i\rangle$  es un autoestado de  $\hat{H}_U$  con autovalor cero. La matriz densidad indicada en la expresión (6.2) describe, como lo anticipamos, una mezcla estadística de estados puros  $|\Psi_i\rangle$  con probabilidad  $p_i$ .

Definimos entonces a cada estado  $|\Psi_i\rangle$  de la mezcla estadística como:

$$|\Psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int \Psi_i(\mathbf{x}, t) |\mathbf{x}\rangle |t\rangle d\mathbf{x} dt, \quad (6.3)$$

$$\text{donde } \Psi_i(\mathbf{x}, t) := \langle \mathbf{x} | \langle t | \Psi_i(\mathbf{x}, t) \rangle \equiv \Psi_{i,t} \quad (6.4)$$

y por otro lado, el estado relativo correspondiente, que se obtiene de proyectar el estado anterior sobre la base del espacio vectorial asociado al sistema reloj:

$$|\Phi_{i,t}\rangle = \langle t | \Psi_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int \Psi_i(\mathbf{x}, t) |\mathbf{x}\rangle d\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{T}} |\tilde{\Phi}_{i,t}\rangle, \quad (6.5)$$

donde  $|\tilde{\Phi}_{i,t}\rangle = \sqrt{T}|\Phi_{i,t}\rangle$  representa el estado relativo normalizado ( $\langle \tilde{\Phi}_{i,t} | \tilde{\Phi}_{i,t} \rangle = 1$ ).

Con estas definiciones podemos construir ahora el estado relativo de Everett, el cual describe el estado del sistema  $R$  cuando el sistema reloj se encuentra en el estado  $|t\rangle$ . Para esto, introducimos el operador proyector:

$$P_t^{(c)} := \mathbf{1}_R \otimes |t\rangle\langle t|. \quad (6.6)$$

Escribimos la expresión dada en (6.2) como:

$$\rho_U = \frac{1}{T} \sum_i p_i \int \Psi_{i,t} \Psi_{i,t'}^* [|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}'| \otimes |t\rangle\langle t'|] d\mathbf{x} d\mathbf{x}' dt dt', \quad (6.7)$$

y a continuación proyectamos:

$$\begin{aligned} P_t^{(c)} \rho_U &= \mathbf{1}_R \otimes |t\rangle\langle t| \rho_U = & (6.8) \\ &= \frac{1}{T} \sum_i p_i \int \underbrace{\Psi_{i,t} \Psi_{i,t'}^*}_{\alpha_i(t,t')} (\mathbf{1}_R \otimes |t\rangle\langle t|) [|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}'| \otimes |t\rangle\langle t'|] d\mathbf{x} d\mathbf{x}' dt dt' \\ &= \frac{1}{T} \sum_i p_i \int \alpha_i(t,t') [|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}'| \otimes \underbrace{|t\rangle\langle t'|}_{\delta(t''-t)}] d\mathbf{x} d\mathbf{x}' dt dt' \\ &= \frac{1}{T} \sum_i p_i \int \alpha_i(t,t') \delta(t''-t) [|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}'| \otimes |t''\rangle\langle t'|] d\mathbf{x} d\mathbf{x}' dt dt' \\ &= \frac{1}{T} \sum_i p_i \int \alpha_i(t'',t') [|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}'| \otimes |t''\rangle\langle t'|] d\mathbf{x} d\mathbf{x}' dt' \\ &= \frac{1}{T} \sum_i p_i \int \Psi_i(\mathbf{x}, t'') \Psi_i^*(\mathbf{x}', t') [|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}'| \otimes |t''\rangle\langle t'|] d\mathbf{x} d\mathbf{x}' dt'. & (6.9) \end{aligned}$$

Seguido a esto trazamos sobre el sistema reloj ( $C$ ):

$$\begin{aligned} \text{Tr}_C \{ P_t^{(c)} \rho_U \} &= \int_0^T dt \langle t | P_t^{(c)} \rho_U | t \rangle = \\ &= \frac{1}{T} \sum_i p_i \int \Psi_{i,t''} \Psi_{i,t'}^* [|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}'| \otimes \text{Tr}_C \{ |t''\rangle\langle t'| \}] d\mathbf{x} d\mathbf{x}' dt', & (6.10) \end{aligned}$$



evaluando la traza indicada en el integrando tenemos:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_C \{ |t''\rangle\langle t'| \} &= \int_0^T dt \langle t|t''\rangle\langle t'|t\rangle = \\ &= \int_0^T dt \delta(t-t'')\langle t'|t\rangle = \langle t'|t''\rangle = \delta(t'-t'').\end{aligned}\quad (6.11)$$

Esto permite avanzar con la cuenta de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_C \{ P_t^{(c)} \rho_U \} &= \frac{1}{T} \sum_i p_i \int \Psi_{i,t''} \Psi_{i,t'}^* [ |\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}'| ] \delta(t'-t'') d\mathbf{x} d\mathbf{x}' dt' \\ &= \frac{1}{T} \sum_i p_i \int \Psi_{i,t''} \Psi_{i,t'}^* |\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}'| d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{T} \sum_i p_i \int \Psi_i(\mathbf{x}, t'') \Psi_i^*(\mathbf{x}', t'') |\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}'| d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \\ &= \frac{1}{T} \sum_i p_i \underbrace{\int d\mathbf{x} \Psi_i(\mathbf{x}, t'') |\mathbf{x}\rangle}_{\sqrt{T}\langle t''|\Psi_i(x,t)\rangle = \sqrt{T}|\Phi_{i,t''}\rangle = |\tilde{\Phi}_{i,t''}\rangle} \underbrace{\int d\mathbf{x}' \Psi_i^*(\mathbf{x}', t'') \langle \mathbf{x}'|}_{\sqrt{T}\langle \Phi_{i,t''}|} \\ &= \sum_i p_i |\Phi_{i,t''}\rangle\langle \Phi_{i,t''}| = \frac{1}{T} \sum_i p_i |\tilde{\Phi}_{i,t}\rangle\langle \tilde{\Phi}_{i,t}|,\end{aligned}\quad (6.12)$$

donde hemos usado en el cuarto renglón, como se muestra, la definición dada en (6.5). Así llegamos al resultado:

$$\mathrm{Tr}_C \{ P_t^{(c)} \rho_U \} = \langle t|\rho_U|t\rangle. \quad (6.13)$$

El estado de Everett está definido mediante la expresión:

$$\varrho_{R,t} = \frac{\mathrm{Tr}_C \{ P_t^{(c)} \rho_U \}}{\mathrm{Tr} \{ P_t^{(c)} \rho_U \}}, \quad (6.14)$$

donde convenimos en definir el operador traza presente en el denominador como  $\mathrm{Tr} := \mathrm{Tr}_R \mathrm{Tr}_C$ . El denominador de la expresión anterior se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_R \{ \mathrm{Tr}_C \{ P_t^{(c)} \rho_U \} \} &= \mathrm{Tr}_R \{ \langle t|\rho_U|t\rangle \} \\ &= \int d\mathbf{x}'' \langle \mathbf{x}''| \mathrm{Tr}_C \{ P_t^{(c)} \rho_U \} |\mathbf{x}''\rangle \\ &= \frac{1}{T} \sum_i p_i \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \Psi_i(\mathbf{x}, t) \Psi_i^*(\mathbf{x}', t) \underbrace{\mathrm{Tr}_R \{ |\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}'| \}}_{\langle \mathbf{x}'|\mathbf{x}\rangle = \delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} \\ &= \frac{1}{T} \sum_i p_i \int d\mathbf{x} \Psi_i(\mathbf{x}, t) \Psi_i^*(\mathbf{x}, t) = T^{-1}.\end{aligned}\quad (6.15)$$

De esta forma podemos expresar el estado de Everett como:

$$\varrho_{R,t} := T \sum_i p_i |\Phi_{i,t}\rangle\langle \Phi_{i,t}| = \sum_i p_i |\tilde{\Phi}_{i,t}\rangle\langle \tilde{\Phi}_{i,t}| = T \langle t|\rho_U|t\rangle. \quad (6.16)$$

Esto representa una mezcla de estados  $|\Phi_{i,t}\rangle$ , donde cada uno evoluciona según la ecuación de Schrödinger, en otras palabras, estos estados representados por  $\varrho_{R,t}$  satisfacen la ecuación de von Neumann:

$$\frac{d}{dt}\varrho_{R,t} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_R, \varrho_{R,t}]. \quad (6.17)$$

De esta forma comprobamos que las ecuaciones de la dinámica cuántica del sistema  $R$  se recuperan también en el caso de estados mixtos.

Para investigar la relación entre la evolución y el entrelazamiento en este caso más general, recurrimos a un criterio de entrelazamiento basado en la matriz marginal o reducida,  $\rho_R$  del sistema  $R$ , la cual podemos obtener mediante la operación de la traza parcial sobre  $C$ , tomada sobre la matriz densidad universal, es decir, la matriz reducida del resto del Universo la obtenemos trazando sobre los grados de libertad del sistema reloj:

$$\begin{aligned} \rho_R &:= \text{Tr}_C \rho_U = \int_0^T \langle t | \rho_U | t \rangle dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \varrho_{R,t} dt = \bar{\varrho}_{R,t} \end{aligned} \quad (6.18)$$

donde indicamos con la notación  $\bar{(\cdot)}$  el promedio temporal  $\bar{(\cdot)} = \frac{1}{T} \int_0^T (\cdot) dt$ .

Es importante destacar que las matrices densidad  $\varrho_{R,t}$  y  $\rho_R$ , si bien ambos se refieren al sistema  $R$ , representan estados diferentes. El primero representa el estado de  $R$  condicionado al estado  $|t\rangle$  del reloj y es un estado mixto que evoluciona unitariamente en función del parámetro  $t$ . Por otro lado, el estado mixto (en general)  $\rho_R$  se obtiene tomando sobre el estado global del sistema compuesto  $R + C$ , la traza parcial sobre los grados de libertad de  $C$ , esto es, representa un estado promediado en el tiempo (durante el intervalo  $[0, T]$ ) y no depende de  $t$ .

### 6.2.1. Indicador de Entropía

Una vez definida la matriz densidad reducida  $\rho_R$  y su conexión con el estado de Everett, a continuación vamos a establecer un criterio de entrelazamiento –*un indicador*– basado en la matriz  $\rho_R$  del sistema  $R$ . Las entropías  $S[\rho_U]$  y  $S[\rho_R]$  de las matrices densidad universal ( $\rho_U$ ) y marginal ( $\rho_R$ ) respectivamente, proporcionan un criterio de entrelazamiento para el estado global y se expresa de la siguiente forma: (ver [166, 167] y referencias citadas ahí):

$$S[\rho_R] > S[\rho_U] \Rightarrow \rho_U \text{ está entrelazado.} \quad (6.19)$$

En palabras, si tenemos menos información sobre el subsistema  $R$  que información sobre el sistema compuesto  $R + C$ , entonces  $R$  y  $C$  están entrelazados. Este criterio de entrelazamiento entrópico puede implementarse *independientemente* de la medida entrópica particular utilizada. Por ejemplo, uno podría optar por emplear la medida dada por la entropía de von Neumann, o la *entropía lineal* definida para una matriz de densidad genérica  $\varrho$ :

$$S_L[\varrho] := 1 - \text{Tr} \varrho^2. \quad (6.20)$$

Nuevamente, debido a las ventajas de cómputo que presenta esta última expresión, la usaremos en nuestros cálculos para comparar  $S[\rho_U]$  y  $S[\rho_R]$ . Definimos a nuestro *indicador de entrelazamiento* como:

$$\Delta S := S_L[\rho_R] - S_L[\rho_U], \quad (6.21)$$

de esta manera el criterio de entrelazamiento queda expresado como:

$$\Delta S > 0 \Rightarrow \rho_U \text{ está entrelazado.} \quad (6.22)$$

### Entropía Lineal $S_L[\rho_U]$ y $S_L[\rho_R]$

Con el objetivo de determinar el valor del indicador dado por la expresión (6.21), vamos a determinar a continuación los valores de  $S_L[\rho_U]$  y  $S_L[\rho_R]$ . Comencemos primero por la entropía lineal del estado mixto universal  $\rho_U$ . A partir de la expresión del estado mixto dada en (6.2), calculamos el valor de  $\rho_U^2$ :

$$\rho_U^2 = \sum_{i,j} p_i p_j |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|\Psi_j\rangle\langle\Psi_j| = \sum_{i,j} p_i p_j \langle\Psi_i|\Psi_j\rangle |\Psi_i\rangle\langle\Psi_j| \quad (6.23)$$

Luego, el valor de su traza es:

$$\text{Tr}\rho_U^2 = \sum_{i,j} p_i p_j \langle\Psi_i|\Psi_j\rangle \underbrace{\text{Tr}\{|\Psi_i\rangle\langle\Psi_j|\}}_{=\langle\Psi_j|\Psi_i\rangle} = \sum_{i,j} p_i p_j |\langle\Psi_i|\Psi_j\rangle|^2, \quad (6.24)$$

observar que:

$$\begin{aligned} \langle\Psi_i|\Psi_j\rangle &= \frac{1}{T} \int \langle t'|\langle\mathbf{x}'|\Psi_j(\mathbf{x}, t)\mathbb{1}\Psi_i^*(\mathbf{x}', t')|\mathbf{x}\rangle|t\rangle d\mathbf{x} dt d\mathbf{x}' dt' \\ \text{con } \mathbb{1} &= \int dt'' |t''\rangle\langle t''|, \quad \text{resulta así:} \\ \langle\Psi_i|\Psi_j\rangle &= \int dt \langle\Psi_j|t\rangle\langle t|\Psi_i\rangle = \int dt \langle\Phi_{i,t}|\Phi_{j,t}\rangle, \end{aligned} \quad (6.25)$$

de esta manera obtenemos:

$$\text{Tr}\rho_U^2 = \sum_{i,j} p_i p_j \left| \int dt \langle\Phi_{i,t}|\Phi_{j,t}\rangle \right|^2 = \sum_{i,j} p_i p_j \left| \frac{1}{T} \int_0^T dt \langle\tilde{\Phi}_{i,t}|\tilde{\Phi}_{j,t}\rangle \right|^2. \quad (6.26)$$

Podemos reescribir esta última igualdad si usamos la propiedad de invariancia del producto escalar  $\langle\tilde{\Phi}_{i,t}|\tilde{\Phi}_{j,t}\rangle$  ante evoluciones unitarias determinadas por la ecuación de Schrödinger. Esto nos permite calcular el producto para cualquier valor de  $t$ , en particular vemos que el producto anterior

$\langle \tilde{\Phi}_{i,t} | \tilde{\Phi}_{j,t} \rangle = \langle \tilde{\Phi}_{i,0} | \tilde{\Phi}_{j,0} \rangle = \text{cte.}$ , con esto en mano, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} \rho_U^2 &= \sum_{ij} p_i p_j |\langle \tilde{\Phi}_{i,t} | \tilde{\Phi}_{j,t} \rangle|^2 = \sum_{ij} p_i p_j T^2 |\langle \Phi_{i,t} | \Phi_{j,t} \rangle|^2 \\
 &= \sum_{ij} p_i p_j T^2 \langle \Phi_{i,t} | \Phi_{j,t} \rangle \langle \Phi_{i,t} | \Phi_{j,t} \rangle^*, \\
 &\quad \text{y usando } \langle \Phi_{i,t} | \Phi_{j,t} \rangle^* = \langle \Phi_{j,t} | \Phi_{i,t} \rangle = \text{Tr} \{ |\Phi_{i,t}\rangle \langle \Phi_{j,t}| \}, \\
 &= \sum_{ij} p_i p_j T^2 \langle \Phi_{i,t} | \Phi_{j,t} \rangle \text{Tr} \{ |\Phi_{i,t}\rangle \langle \Phi_{j,t}| \} \\
 &= \text{Tr} \left\{ \sum_{ij} p_i p_j T^2 \langle \Phi_{i,t} | \Phi_{j,t} \rangle (|\Phi_{i,t}\rangle \langle \Phi_{j,t}|) \right\} \\
 &= \text{Tr} \left\{ \sum_{ij} p_i p_j T^2 |\Phi_{i,t}\rangle \langle \Phi_{i,t}| \langle \Phi_{j,t}| \langle \Phi_{j,t}| \right\} \\
 &= \text{Tr} \left\{ \sum_i p_i T |\Phi_{i,t}\rangle \langle \Phi_{i,t}| \sum_j p_j T |\Phi_{j,t}\rangle \langle \Phi_{j,t}| \right\} \\
 &= \text{Tr} \varrho_{R,t}^2.
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

De aquí obtenemos entonces que la entropía lineal para el estado mixto universal es:

$$\begin{aligned}
 S_L[\rho_U] &:= 1 - \text{Tr} \rho_U^2 = 1 - \text{Tr} \varrho_{R,t}^2 =: S_L[\varrho_{R,t}] \\
 \text{i.e. } S_L[\rho_U] &= S_L[\varrho_{R,t}] = \overline{S_L[\varrho_{R,t}]},
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

donde la última igualdad queda justificada por lo que se ha señalado más arriba respecto a la invariancia del producto escalar, resultando así que  $S_L[\varrho_{R,t}]$  es una cantidad independiente del tiempo.

En cuanto a la entropía lineal del estado marginal  $\rho_R$ , la expresión (6.18) permite escribir:

$$S_L[\rho_R] := 1 - \text{Tr}(\rho_R^2) = S_L[\bar{\varrho}_{R,t}]. \tag{6.29}$$

De esta manera el *indicador* dado por la expresión (6.21) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 \Delta S &:= S_L[\rho_R] - S_L[\rho_U] \equiv S_L[\bar{\varrho}_{R,t}] - S_L[\varrho_{R,t}] = \\
 &= S_L[\bar{\varrho}_{R,t}] - \overline{S_L[\varrho_{R,t}]}.
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Nos interesará luego estudiar el valor asintótico de este indicador:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta S. \tag{6.31}$$

De las expresiones anteriores deducimos que comparar las entropías de  $\rho_U$  y  $\rho_R$  equivale a comparar el promedio temporal de la entropía de  $\varrho_{R,t}$  con la entropía del promedio temporal de  $\varrho_{R,t}$ .

Ahora, dada una matriz de densidad dependiente del tiempo  $\varrho_t$  y una función cóncava  $f(x)$ , se cumple la siguiente desigualdad:

$$\text{Tr}[f(\bar{\varrho}_t)] \geq \overline{\text{Tr}[f(\varrho_t)]}, \tag{6.32}$$

donde la igualdad se satisface solo si  $\varrho_t$  es constante en el tiempo [165]. En particular, para una función  $f(x) = x - x^2$ , y  $\varrho_t$  se consigue:

$$\text{Tr}[f(\varrho_t)] = \text{Tr}[\varrho_t - \varrho_t^2] = 1 - \text{Tr}[\varrho_t^2] \equiv S_L[\varrho_t],$$

es decir:

$$\begin{aligned} S_L[\varrho_t] &= \text{Tr}[f(\varrho_t)] \quad \text{y de (6.32) se tiene,} \\ S_L[\bar{\varrho}_t] &\geq \overline{S_L[\varrho_t]}, \end{aligned} \quad (6.33)$$

por lo tanto, si tomamos  $\varrho_t := \varrho_{R,t}$  obtenemos de las expresiones (6.28-6.29):

$$S_L[\rho_R] \geq S_L[\rho_U]. \quad (6.34)$$

siendo las dos entropías que aparecen en la ecuación anterior iguales sólo si no hay evolución en el tiempo. En otras palabras,  $\Delta S$  se anula sólo si  $\varrho_{R,t}$  no evoluciona en el tiempo, es decir,  $\Delta S = 0 \Rightarrow$  no hay evolución temporal.

Dado que la ecuación (6.34) se cumple para todos los estados que pertenecen al subespacio expandido por los autoestados de energía cero del Hamiltoniano total  $\hat{H}_U$ , se deduce del criterio expresado en (6.22) que todos estos estados están entrelazados, siempre que  $\varrho_{R,t}$  evolucione en el tiempo. En otras palabras, si el estado (relativo) de  $R$  cambia con el tictac de las manecillas del reloj, entonces el subsistema  $R$  está necesariamente entrelazado con su complemento  $C$ . Dicho de otra manera y equivalentemente, en ausencia de entrelazamiento entre el reloj y el sistema  $R$ , el estado de  $R$  permanece independiente de  $t$  y no se produce ninguna evolución.

Esto significa que las correlaciones cuánticas distintas del entrelazamiento, que pueden estar presentes en estados mixtos, como la discordia cuántica, no son suficientes para que surja la dinámica y el flujo del tiempo. Por lo tanto, el estudio de los estados mixtos dentro del enfoque sin tiempo de la dinámica cuántica proporciona más evidencia del vínculo íntimo que existe entre el entrelazamiento y la evolución.

Finalmente, es interesante preguntarse si, para el tipo de matrices de densidad que surgen en el contexto actual de Page y Wootters, la condición  $\Delta S = 0$  implica que el entrelazamiento entre  $R$  y  $C$  desaparece o mejor se anula (esto equivaldría a afirmar que un estado entrelazado implica  $\Delta S > 0$ , y en consecuencia el criterio (6.22) no solo sería suficiente sino también necesario). Para el caso especial de estados puros del sistema  $R + C$ , la respuesta es sí. Para estados mixtos, la situación es más sutil. En tales casos, como acabamos de ver,  $\Delta S = 0$  implica que el estado relativo de  $R$  condicional a un valor dado de  $t$ , no depende de este valor de  $t$  (es decir,  $R$  no evoluciona). Sin embargo, esta condición no parece implicar que la matriz de densidad conjunta de  $R + C$  no esté entrelazada. Podría suceder que haya estados conjuntos entrelazados de  $R + C$  para los que  $R$  no evolucione. La existencia o no de tales estados sigue siendo una cuestión abierta, ciertamente digna de mayor investigación.

### 6.3. Límite superior y límite asintótico del indicador de entrelazamiento

En esta sección vamos a determinar los valores relevantes que adopta este indicador de entrelazamiento  $\Delta S$ , entre el sistema  $R$  y el reloj. Estos son su límite superior y su comportamiento

asintótico para intervalos  $[0, T]$  grandes, dentro del cual se define el estado conjunto del sistema-reloj. Nos valemos para ello de un sistema de  $d$ -niveles; seguido, daremos una aplicación para el caso de un qubit.

### 6.3.1. Entropía lineal para un sistema de $d$ -niveles

Consideremos el sistema  $R$  caracterizado por un Hamiltoniano cuyo espectro discreto consta de  $d$ -niveles:

$$\hat{H}_R|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad n = 0, \dots, d-1; \quad \text{con la base ortonormal: } \langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad (6.35)$$

y determinemos el valor de las entropías para los estados  $\rho_U, \varrho_{R,t}, \rho_R$  y  $\bar{\varrho}_{R,t}$ . Para esto debemos determinar primero sus elementos para poder trazar el cuadrado de cada matriz.

Comenzamos con el elemento de la matriz densidad relativa (estado de Everett) que, en la base ortonormal, queda representado como:

$$\begin{aligned} \varrho_{R,t} &\rightarrow [\varrho_{R,t}]_{nm} := \langle n|\varrho_{R,t}|m\rangle, \quad \text{y como } i\hbar\dot{\varrho}_{R,t} = [\hat{H}_R, \varrho_{R,t}], \\ \text{luego: } [\varrho_{R,t}]_{nm} &= e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} \langle n|\varrho_{R,0}|m\rangle = e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} [\varrho_0]_{nm}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Donde se introducen las definiciones de  $[\varrho_0]_{nm} := [\varrho_{R,0}]_{nm}$ , y  $\omega_{nm} := \frac{E_n - E_m}{\hbar}$ . Con este elemento de matriz y sabiendo que  $\varrho_{R,t} = \varrho_{R,t}^\dagger$ , podemos escribir inmediatamente el elemento de matriz para  $\varrho_{R,t}^2 = \varrho_{R,t}\varrho_{R,t} = \varrho_{R,t}\varrho_{R,t}^\dagger$ , es decir:

$$\begin{aligned} \varrho_{R,t}^2 &\rightarrow [\varrho_{R,t}^2]_{nm} = \sum_k [\varrho_{R,t}]_{nk} [\varrho_{R,t}]_{mk}^* \equiv \sum_k \langle n|\varrho_{R,t}|k\rangle \langle k|\varrho_{R,t}|m\rangle \\ &= \sum_k e^{i\omega_{nk}t} [\varrho_0]_{nk} e^{-i\omega_{mk}t} [\varrho_0]_{mk}^* \\ &= e^{i\omega_{nm}t} \sum_k [\varrho_0]_{nk} [\varrho_0]_{mk}^*. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Podemos determinar con esto el valor de la entropía lineal para este estado, que de acuerdo a la expresión (6.28) es:

$$S_L[\varrho_{R,t}] := 1 - \text{Tr}(\varrho_{R,t}^2) \equiv S_L[\rho_U], \quad (6.38)$$

donde el valor que toma la  $\text{Tr}(\varrho_{R,t}^2)$  resulta ser:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\varrho_{R,t}^2) &= \sum_{n,m,k} \langle n|m\rangle \langle m|\varrho_{R,t}|k\rangle \langle k|\varrho_{R,t}|n\rangle = \sum_n \langle n|\varrho_{R,t}^2|n\rangle \\ \text{con } \langle n|\varrho_{R,t}^2|n\rangle &\equiv \sum_k [\varrho_{R,t}]_{nk} [\varrho_{R,t}]_{nk}^*, \end{aligned} \quad (6.39)$$

de esta manera conseguimos:

$$S_L[\varrho_{R,t}] = 1 - \sum_{n,k} [\varrho_{R,t}]_{nk} [\varrho_{R,t}]_{nk}^* \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \sum_{n,k} [\varrho_0]_{nk} [\varrho_0]_{nk}^* = 1 - \sum_{n,k} [\varrho_0]_{nk} [\varrho_0]_{kn} \\ &= 1 - \sum_{n,k} |[\varrho_0]_{nk}|^2 \equiv S_L[\rho_U]. \end{aligned} \quad (6.41)$$

A continuación calculemos la entropía lineal asociada al estado  $\rho_R$ . Para esto, determinemos los elementos de matriz de este estado marginal; si recordamos que:

$$\begin{aligned} \rho_R &= \bar{\varrho}_{R,t} \rightarrow \langle n | \rho_R | m \rangle = \langle n | \bar{\varrho}_{R,t} | m \rangle \\ \text{y como } \langle n | \varrho_{R,t} | m \rangle &:= [\varrho_{R,t}]_{nm} = e^{i\omega_{nm}t} [\varrho_0]_{nm}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

luego, tomando el promedio temporal de estos elementos en un intervalo  $[0, T]$ :

$$\begin{aligned} [\bar{\varrho}_{R,t}]_{nm} &= \frac{1}{T} \int_0^T dt [\varrho_{R,t}]_{nm} \\ \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i\omega_{nm}t} &= \frac{1}{i\omega_{nm}T} e^{i\omega_{nm}t} \Big|_0^T = \frac{1}{i\omega_{nm}T} [e^{i\omega_{nm}T} - 1] \\ &= (i\omega_{nm}T)^{-1} e^{i\omega_{nm}T/2} \underbrace{[e^{i\omega_{nm}T/2} - e^{-i\omega_{nm}T/2}]}_{2i \operatorname{sen}(\omega_{nm}T/2)} \\ &= e^{i\omega_{nm}T/2} \frac{\operatorname{sen}(\omega_{nm}T/2)}{\omega_{nm}T/2} = e^{i\omega_{nm}T/2} \operatorname{sinc}(\omega_{nm}T/2); \end{aligned}$$

$$\text{conseguimos: } [\bar{\varrho}_{R,t}]_{nm} = e^{i\omega_{nm}T/2} \operatorname{sinc}(\omega_{nm}T/2) [\varrho_0]_{nm}, \quad (6.43)$$

encontramos así la expresión del elemento de matriz que necesitamos:

$$\langle n | \rho_R | m \rangle = \langle n | \bar{\varrho}_{R,t} | m \rangle \equiv [\bar{\varrho}_{R,t}]_{nm} = e^{i\omega_{nm}T/2} \operatorname{sinc}(\omega_{nm}T/2) [\varrho_0]_{nm}. \quad (6.44)$$

Con estos elementos, podemos determinar los elementos de matriz de  $\rho_R^2$  necesarios para calcular el valor de su traza. Sabiendo que  $\rho_R = \rho_R^\dagger$ , podemos escribir el elemento de matriz para  $\rho_R^2 = \rho_R \rho_R^\dagger$ ; si definimos por conveniencia,  $x_{nk} := \frac{\omega_{nm}T}{2} = \frac{E_n - E_m}{2\hbar} T$ , tendremos:

$$\begin{aligned} \rho_R^2 \rightsquigarrow \langle n | \rho_R^2 | m \rangle &:= [\rho_R^2]_{nm} = \sum_k [\rho_R]_{nk} [\rho_R]_{mk}^* \\ &= \sum_k [\bar{\varrho}_{R,t}]_{nk} [\bar{\varrho}_{R,t}]_{mk}^* = [\bar{\varrho}_{R,t}^2]_{nm} =: \langle n | \bar{\varrho}_{R,t}^2 | m \rangle \\ &\equiv \sum_k \langle n | \bar{\varrho}_{R,t} | k \rangle \langle k | \bar{\varrho}_{R,t} | m \rangle \\ &= \sum_k e^{ix_{nk}} \operatorname{sinc}(x_{nk}) [\varrho_0]_{nk} e^{-ix_{mk}} \operatorname{sinc}(x_{mk}) \underbrace{[\varrho_0]_{mk}^*}_{[\varrho_0]_{km}} \\ [\rho_R^2]_{nm} &= \sum_k e^{ix_{nk}} \operatorname{sinc}(x_{nk}) [\varrho_0]_{nk} e^{ix_{km}} \operatorname{sinc}(x_{km}) [\varrho_0]_{km} = [\bar{\varrho}_{R,t}^2]_{nm}. \end{aligned}$$

El valor de la entropía para el estado marginal  $\rho_R$ , es:

$$\begin{aligned} S_L[\rho_R] &= 1 - \operatorname{Tr}(\rho_R^2) \\ &= 1 - \operatorname{Tr}(\rho_R^2) = S_L[\bar{\varrho}_{R,t}], \end{aligned} \quad (6.45)$$

esto es:

$$\begin{aligned} S_L[\rho_R] &= 1 - \operatorname{Tr}(\rho_R^2) = 1 - \sum_{n,k} \langle n | \rho_R | k \rangle \langle k | \rho_R | n \rangle \\ &= 1 - \sum_n \langle n | \rho_R^2 | n \rangle \equiv 1 - \sum_n \langle n | \bar{\varrho}_{R,t}^2 | n \rangle. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Necesitamos entonces el elemento diagonal de  $\varrho_{R,t}^2$ , que lo tomamos de su elemento de matriz calculado arriba:

$$\begin{aligned}
 \langle n | \rho_R^2 | n \rangle &\equiv \langle n | \bar{\varrho}_{R,t}^2 | m \rangle \Big|_{n=m} \\
 &= \sum_k e^{ix_{nk}} \text{sinc}(x_{nk}) [\varrho_0]_{nk} e^{ix_{kn}} \text{sinc}(x_{kn}) [\varrho_0]_{kn} \\
 &= \sum_k \text{sinc}(x_{nk}) \underbrace{\text{sinc}(x_{kn})}_{=\text{sinc}(x_{nk})} [\varrho_0]_{nk} [\varrho_0]_{kn} \\
 &= \sum_k \text{sinc}^2(x_{nk}) [\varrho_0]_{nk} [\varrho_0]_{kn} = \sum_k \text{sinc}^2(x_{nk}) [\varrho_0]_{nk} [\varrho_0]_{nk}^* \\
 &= \sum_k \text{sinc}^2(x_{nk}) |[\varrho_0]_{nk}|^2.
 \end{aligned} \tag{6.47}$$

De esta forma la entropía del estado marginal que buscamos se expresa como:

$$S_L[\rho_R] = S_L[\bar{\varrho}_{R,t}] = 1 - \sum_{n,k} |[\varrho_0]_{nk}|^2 \text{sinc}^2(x_{nk}). \tag{6.48}$$

Podemos descomponer la suma de la expresión anterior en dos sumandos: uno el cual agrupa los términos con  $x_{nm} = 0$ , (i.e.  $\omega_{nm} = 0$ ) y el otro tendrá en cuenta aquellos con  $x_{nm} \neq 0$ , (i.e.  $\omega_{nm} \neq 0$ ), con esto la expresión se reescribe como:

$$\begin{aligned}
 S_L[\rho_R] &= S_L[\bar{\varrho}_{R,t}] \\
 &= 1 - \sum_{\substack{n,k \\ (x_{nk}=0)}} |[\varrho_0]_{nk}|^2 - \sum_{\substack{n,k \\ (x_{nk} \neq 0)}} \text{sinc}^2(x_{nk}) |[\varrho_0]_{nk}|^2
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

Una vez encontradas las entropías lineales asociadas a los estados  $\rho_U$  y  $\rho_R$ , podemos calcular el indicador de entropía  $\Delta S$  para este sistema de  $d$ -niveles y determinar los valores relevantes. Este indicador quedará expresado como:

$$\begin{aligned}
 \Delta S &:= S_L[\rho_R] - S_L[\rho_U] \equiv S_L[\bar{\varrho}_{R,t}] - \underbrace{S_L[\varrho_{R,t}]}_{=S_L[\varrho_{R,t}]} \\
 &= 1 - \sum_{\substack{n,k \\ (x_{nk}=0)}} |[\varrho_0]_{nk}|^2 - \sum_{\substack{n,k \\ (x_{nk} \neq 0)}} \text{sinc}^2(x_{nk}) |[\varrho_0]_{nk}|^2 \\
 &\quad - 1 + \sum_{\substack{n,k \\ (x_{nk} \neq 0)}} \underbrace{[\varrho_0]_{nk} [\varrho_0]_{nk}}_{=|[\varrho_0]_{nk}|^2} \\
 &= \sum_{\substack{n,k \\ (x_{nk} \neq 0)}} |[\varrho_0]_{nk}|^2 [1 - \text{sinc}^2(x_{nk})]
 \end{aligned} \tag{6.50}$$

$$\leq \sum_{\substack{n,k \\ (x_{nk} \neq 0)}} |[\varrho_0]_{nk}|^2. \tag{6.51}$$



El valor asintótico de este indicador, el cual coincide con su valor máximo, resulta de tomar el límite en el valor de  $T$  :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta S \rightarrow \Delta S_{\max} = \sum_{\substack{n,k \\ (x_{nk} \neq 0)}} |[\varrho_0]_{nk}|^2. \quad (6.52)$$

Observemos que la condición  $\omega_{nm} \neq 0$  introducida anteriormente no es necesariamente equivalente a  $n \neq m$ , debido a posibles degeneraciones de los valores propios de energía. Por lo tanto, debe entenderse que la etiqueta  $n$  representa un índice (posiblemente compuesto) que contiene todos los números cuánticos necesarios para caracterizar completamente los estados propios de  $\hat{H}_R$ . El conjunto de valores posibles de este índice (incluso si es compuesto) es como mucho numerable y, por lo tanto, puede considerarse ordenado en la secuencia  $n = 0, 1, \dots$

### 6.3.2. Entropía lineal para una medida de energía no selectiva

A continuación, vamos a considerar una medida no selectiva<sup>2</sup> de la energía del sistema  $R$ . Para esto, vamos a definir el operador densidad  $\varrho_{R|M}$  como el estado del sistema  $R$  el cual se obtiene cuando se realiza una medida no selectiva de la energía  $E$  en  $R$ :

$$\varrho_{R|M} := \sum_E p_E \varrho_{R|E} = \sum_E \Pi_E \varrho_{R,t} \Pi_E, \quad (6.53)$$

donde  $p_E := \text{Tr}(\Pi_E \varrho_{R,t})$  representa la probabilidad de obtener el resultado  $E$  cuando se mide la energía del sistema  $R$  en el estado  $\varrho_{R,t}$ , mientras que:

$$\varrho_{R|E} := \frac{\Pi_E \varrho_{R,t} \Pi_E}{p_E}, \quad (6.54)$$

es el estado (colapsado) del sistema  $R$ , el cual se obtiene cuando la medición de la energía arroja el resultado  $E$  y  $\Pi_E$  es el operador proyector ortogonal<sup>3</sup> sobre el subespacio expandido por los autoestados degenerados  $|n\rangle$  que corresponden al mismo valor propio de energía  $E$ :

$$\Pi_E := \sum_{\substack{n \\ (E_n = E)}} |n\rangle\langle n|. \quad (6.55)$$

Mostremos aquí algunas propiedades que se pueden deducir para los operadores,  $\Pi_E$  y  $\varrho_{R|E}$ . El operador proyector satisface claro está:  $\Pi_E = \Pi_E^\dagger$  y  $\Pi_E^2 = \Pi_E$ , es decir:

$$\begin{aligned} \Pi_E \Pi_{E'} &= \sum_{\substack{n,m \\ (E_n = E), (E_m = E')}} |n\rangle\langle n| |m\rangle\langle m| \\ &= \delta_{EE'} \sum_{\substack{n \\ (E_n = E)}} |n\rangle\langle n| = \delta_{EE'} \Pi_E. \end{aligned} \quad (6.56)$$

<sup>2</sup>El significado de este termino es "medir y no seleccionamos"; el estado luego de medir es una combinación convexa de todos los resultados posibles.

<sup>3</sup>Si los operadores de medición son ortoproyectores, la medida se llama *medición proyectiva o de von Neuman*.

Para el operador que representa al estado colapsado, encontramos:

$$\begin{aligned}
 \varrho_{R|E}\varrho_{R|E'} &= \frac{1}{p_E}\Pi_E\varrho_{R,t}\Pi_E\frac{1}{p_{E'}}\Pi_{E'}\varrho_{R,t}\Pi_{E'} \\
 &= \frac{1}{p_E p_{E'}}\left[\Pi_E\varrho_{R,t}\delta_{EE'}\Pi_E\varrho_{R,t}\Pi_{E'}\right] \\
 &= \frac{\delta_{EE'}}{p_E p_{E'}}\left[\Pi_E\varrho_{R,t}\Pi_E\varrho_{R,t}\Pi_{E'}\right] \quad (\text{usando } \Pi_E = \Pi_E^2) \\
 &= \varrho_{R|E}^2\delta_{EE'}.
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

Con estos resultados calculamos ahora la entropía lineal para esta medida no selectiva:

$$S_L[\varrho_{R|M}] = 1 - \text{Tr}(\varrho_{R|M}^2). \tag{6.58}$$

Vemos que:

$$\begin{aligned}
 \varrho_{R|M}^2 &= \sum_E p_E \varrho_{R|E} \sum_{E'} p_{E'} \varrho_{R|E'} = \sum_{EE'} \delta_{EE'} p_E p_{E'} \varrho_{R|E}^2 = \\
 &= \sum_E p_E^2 \varrho_{R|E}^2 = \sum_E \Pi_E \varrho_{R,t} \Pi_E \varrho_{R,t} \Pi_E.
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

La traza de este operador resulta:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\varrho_{R|M}^2) &:= \sum_E \text{Tr}(\Pi_E \varrho_{R,t} \Pi_E \varrho_{R,t} \Pi_E) = \\
 &= \sum_E \text{Tr} \left[ \sum_{\substack{n \\ (E_n=E)}} |n\rangle\langle n|_{\varrho_{R,t}} \sum_{\substack{m \\ (E_m=E)}} |m\rangle\langle m|_{\varrho_{R,t}} \sum_{\substack{k \\ (E_k=E)}} |k\rangle\langle k| \right] \\
 &= \sum_E \text{Tr} \left[ \sum_{n,m,k} |n\rangle\langle n|_{\varrho_{R,t}} |m\rangle\langle m|_{\varrho_{R,t}} |k\rangle\langle k| \right] \\
 &= \sum_E \text{Tr} \left[ \sum_{n,m,k} |n\rangle\langle n|_{\varrho_{R,t}} |m\rangle\langle m|_{\varrho_{R,t}} |k\rangle\langle k| \right] \\
 &= \sum_E \text{Tr} \left[ \sum_{n,m,k} [\varrho_{R,t}]_{nm} [\varrho_{R,t}]_{mk} |n\rangle\langle k| \right] \\
 &= \sum_E \left[ \sum_{i,n,m,k} [\varrho_{R,t}]_{nm} [\varrho_{R,t}]_{mk} \langle i|n\rangle \langle k|i \right] \\
 &= \sum_E \left[ \sum_{i,n,m,k} \delta_{in} \delta_{ki} [\varrho_{R,t}]_{nm} [\varrho_{R,t}]_{mk} \right] \\
 &= \sum_E \sum_{\substack{n,m \\ (E_n=E_m=E)}} [\varrho_{R,t}]_{nm} [\varrho_{R,t}]_{mn} \\
 &= \sum_E \sum_{\substack{n,m \\ (E_n=E_m=E)}} [\varrho_{R,t}]_{nm} [\varrho_{R,t}]_{nm}^*,
 \end{aligned}$$

es decir:

$$\text{Tr}(\varrho_{R|M}^2) = \sum_E \sum_{\substack{n,m \\ (E_n=E_m=E)}} |[\varrho_{R,t}]_{nm}|^2, \text{ con } [\varrho_{R,t}]_{nm} \text{ dado por (6.36)} \quad (6.60)$$

$$= \sum_E \sum_{\substack{n,m \\ (E_n=E_m=E)}} |[\varrho_0]_{nm}|^2. \quad (6.61)$$

Por lo que la entropía para este estado resulta ser:

$$\begin{aligned} S_L[\varrho_{R|M}] &:= 1 - \text{Tr}(\varrho_{R|M}^2) \\ &= 1 - \sum_E \sum_{\substack{n,m \\ (E_n=E_m=E)}} |[\varrho_{R,t}]_{nm}|^2 \\ &= 1 - \sum_E \sum_{\substack{n,m \\ (E_n=E_m=E)}} |[\varrho_0]_{nm}|^2 \\ &= 1 - \sum_{\substack{n,m \\ (w_{nm}=0)}} |[\varrho_0]_{nm}|^2. \end{aligned} \quad (6.62)$$

La expresión anterior se puede combinar con las encontradas en (6.41) y (6.52), para mostrar que el valor máximo del indicador de entropía es:

$$\Delta S_{\text{max}} = S_L[\varrho_{R|M}] - S_L[\varrho_{R,t}]. \quad (6.63)$$

En efecto tomando (6.41), tenemos:

$$\begin{aligned} S_L[\rho_U] \equiv S_L[\varrho_{R,t}] &= 1 - \text{Tr}(\varrho_{R,t}^2) \\ &= 1 - \sum_n \sum_k |[\varrho_{R,t}]_{nk}|^2, \text{ con } \varrho_{R,t} \sim e^{i\omega_{nm}t} [\varrho_0]_{nm} \\ &= 1 - \underbrace{\sum_{n,m} |[\varrho_0]_{nm}|^2}_{\sum_{\substack{n,m \\ (w_{nm}=0)}} + \sum_{\substack{n,m \\ (w_{nm} \neq 0)}}} \\ &= 1 - \underbrace{\sum_{\substack{n,m \\ (w_{nm}=0)}} |[\varrho_0]_{nm}|^2}_{=S_L[\varrho_{R|M}]} - \underbrace{\sum_{\substack{n,m \\ (w_{nm} \neq 0)}} |[\varrho_0]_{nm}|^2}_{\Delta S_{\text{max}}} \\ &= S_L[\varrho_{R|M}] - \Delta S_{\text{max}}. \end{aligned}$$

La relación (6.63) muestra que el valor asintótico del indicador de entrelazamiento viene dado por la diferencia entre la entropía del estado de  $R$  después y antes de que se realice una medición de energía no selectiva.

La entropía  $S_L[\varrho_{R|M}]$  contiene información sobre los posibles estados  $\varrho_{R|E}$  que se pueden obtener después de una medición de energía, y también sobre la distribución de probabilidad de energía  $\{p_E\}$ . Dicha información puede extraerse recurriendo a la primera igualdad en la ecuación (6.53) y (6.57), o bien, mediante el uso de la expresión:

$$\varrho_{R|M}^2 = \sum_E p_E^2 \varrho_{R|E}^2, \text{ se consigue}$$

$$\begin{aligned}
 S_L[\varrho_{R|M}] &:= 1 - \text{Tr}(\varrho_{R|M}^2) = 1 - \sum_E p_E^2 \underbrace{\text{Tr}(\varrho_{R|E}^2)}_{=1-S_L[\varrho_{R|E}]} \\
 &= 1 - \sum_E p_E^2 (1 - S_L[\varrho_{R|E}]) = \\
 &= 1 - \sum_E p_E^2 + \sum_E p_E^2 S_L[\varrho_{R|E}] = \\
 &= S_L\{p_E\} + \sum_E p_E^2 S_L[\varrho_{R|E}], \tag{6.64}
 \end{aligned}$$

donde se define:

$$S_L[\varrho_{R|E}] := 1 - \text{Tr}(\varrho_{R|E}^2), \tag{6.65}$$

como la entropía lineal asociada al estado  $S_L[\varrho_{R|E}]$  y  $S_L\{p_E\} = 1 - \sum_E p_E^2$  es la entropía lineal correspondiente a la distribución de probabilidad de energía  $\{p_E\}$ .

Señalamos a continuación algunas particularidades que muestra el comportamiento de la cota dada por la ecuación (6.63).

### Espectro de $\hat{H}_R$ no degenerado. Estado $\rho_U$ puro.

Un resultado que se desprende cuando el espectro de  $\hat{H}_R$  no presenta degeneración dice que  $S_L[\varrho_{R|E}] = 0$ . Para ver esto basta considerar  $\Pi_E = |n\rangle\langle n|$ , calcular  $p_E := \text{Tr}(\Pi_E \varrho_{R,t})$  y  $\text{Tr}(\varrho_{R|E}^2)$ , escribiendo  $\varrho_{R,t} = \sum_{i,j} [\varrho_{R,t}]_{ij} |i\rangle\langle j|$ :

$$\begin{aligned}
 \Pi_E \varrho_{R,t} &:= |n\rangle\langle n| \sum_{i,j} [\varrho_{R,t}]_{ij} |i\rangle\langle j| \tag{6.66} \\
 \text{Tr}(\Pi_E \varrho_{R,t}) &= \sum_k \langle k|n\rangle \langle n|\varrho_{R,t}|k\rangle = \sum_k \delta_{kn} \langle n|\varrho_{R,t}|k\rangle \\
 \rightsquigarrow \text{Tr}(\Pi_E \varrho_{R,t}) &= \langle n|\varrho_{R,t}|n\rangle = [\varrho_{R,t}]_{nn} := p_E.
 \end{aligned}$$

y para  $\varrho_{R|E}^2 = p_E^{-2} \Pi_E \varrho_{R,t} \Pi_E \varrho_{R,t} \Pi_E$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\varrho_{R|E}^2) &= p_E^{-2} \text{Tr}(\Pi_E \varrho_{R,t} \Pi_E \varrho_{R,t} \Pi_E) \\
 &= p_E^{-2} \text{Tr}(\Pi_E \varrho_{R,t} \Pi_E \varrho_{R,t}), \quad \text{usando (6.66)} \\
 &= p_E^{-2} \sum_m \langle m|n\rangle \langle n| \sum_{i,j} [\varrho_{R,t}]_{ij} |i\rangle\langle j| \langle n| \sum_{l,p} [\varrho_{R,t}]_{lp} |l\rangle\langle p|m\rangle \\
 &= p_E^{-2} \sum_{m,i,j,l,p} \delta_{mn} \delta_{ni} \delta_{jn} \delta_{nl} \delta_{pm} [\varrho_{R,t}]_{ij} [\varrho_{R,t}]_{lp} \\
 &= p_E^{-2} [\varrho_{R,t}]_{nn}^2 = p_E^{-2} p_E^2 = 1,
 \end{aligned}$$

luego:

$$S_L[\varrho_{R|E}] := 1 - \text{Tr}(\varrho_{R|E}^2) \Big|_{E:\text{no degenerado}} = 0. \tag{6.67}$$

Con este resultado tenemos que  $S_L[\varrho_{R|M}] = S_L\{p_E\}$  y el límite superior del indicador se reduce a lo siguiente:

$$(\Delta S_{\text{max}}) \Big|_{\text{no degenerado}} = S_L\{p_E\} - S_L[\varrho_{R,t}]. \tag{6.68}$$

También es interesante ver qué sucede si el estado global  $\rho_U$  es puro. En este caso se tendrá que  $S_L[\rho_U] = S_L[\varrho_{R,t}] = 0$  y también se verifica que  $\varrho_{R|E}$  es un estado puro, de donde  $S_L[\varrho_{R|E}] = 0$  y de nuevo tenemos  $S_L[\varrho_{R|M}] = S_L[\{p_E\}]$ . Consecuentemente, para estados puros, se recupera la expresión [156]:

$$(\Delta S_{\max})\Big|_{\text{puro}} = S_L[\{p_E\}], \quad (6.69)$$

lo que significa que el límite superior del indicador de entrelazamiento basado en la  $S_L$  viene dado por la distribución de probabilidad de energía  $p_E$ , medida por su entropía lineal. Esto no se verifica en el caso de los estados mixtos. En un caso extremo, por ejemplo, en el que  $\rho_U$  es diagonal en la base de autoestados de la energía, uno tiene  $[\varrho_0]_{nm} \sim \delta_{nm}$ , y la ecuación (6.52) conduce a:

$$(\Delta S_{\max})\Big|_{\text{diag.}} = 0, \quad (6.70)$$

significando que los estados diagonales no evolucionan en el tiempo. Ahora, cuando  $\rho$  es diagonal en la base de autoestados de la energía, toda la dispersión en la distribución de probabilidad de energía es puramente clásica, mientras que para los estados puros (que no son estados propios de la energía) toda la dispersión en la distribución de probabilidad de energía es de naturaleza cuántica. Estas observaciones, junto con las ecuaciones (6.69) y (6.70), indican que solo la componente cuántica de la dispersión en la distribución de probabilidad de la energía contribuye al límite superior del entrelazamiento del sistema-reloj.

### Ejemplo de un qubit

Mostramos a continuación una aplicación de los resultados anteriores para el caso de un sistema constituido por un qubit, esto es, un sistema de dos niveles, caracterizado por los autoestados del Hamiltoniano  $\hat{H}_R$ :  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , con sus respectivos autovalores de energía  $E_0$  y  $E_1$ . De la expresión dada en (6.36), el estado relativo  $\varrho_{R,t}$  en la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  resulta:

$$\varrho_{R,t} = \begin{pmatrix} [\varrho_0]_{00} & e^{i\epsilon t/\hbar} [\varrho_0]_{01} \\ e^{-i\epsilon t/\hbar} [\varrho_0]_{01}^* & 1 - [\varrho_0]_{11} \end{pmatrix}, \quad (6.71)$$

donde se define  $\epsilon := E_1 - E_0$ . La matriz densidad reducida  $\rho_R$  está expresada según (6.44), por:

$$\rho_R = \bar{\varrho}_{R,t} = \begin{pmatrix} [\varrho_0]_{00} & [\varrho_0]_{01} e^{ix} \text{sinc } x \\ [\varrho_0]_{01}^* e^{-ix} \text{sinc } x & 1 - [\varrho_0]_{11} \end{pmatrix}, \quad (6.72)$$

donde definimos  $x = \epsilon T/2\hbar$ .

Las entropías lineales correspondientes son de acuerdo a las expresiones obtenidas en (6.41) y (6.48):

$$\begin{aligned} S_L[\rho_U] &= S_L[\varrho_{R,t}] \\ &= 2\left\{[\varrho_0]_{00}[1 - [\varrho_0]_{00}] - |[\varrho_0]_{01}|^2\right\}. \end{aligned} \quad (6.73)$$

y

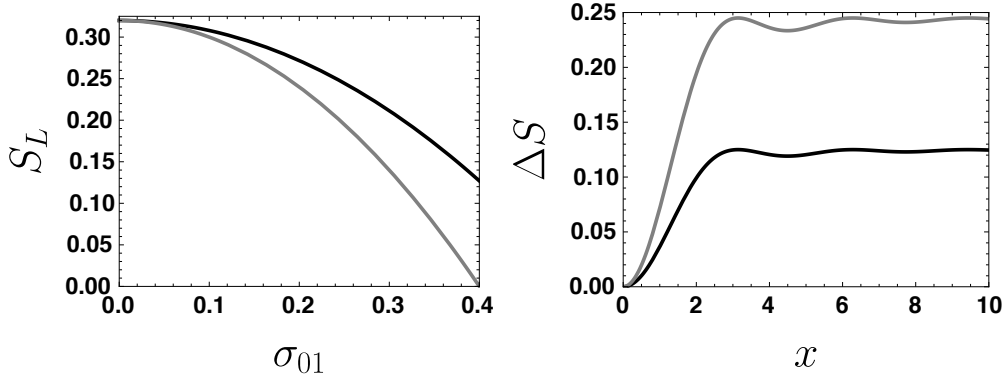
$$S_L[\rho_R] = 2\left\{[\varrho_0]_{00}[1 - [\varrho_0]_{00}] - |[\varrho_0]_{01}|^2 \text{sinc}^2 x\right\}, \quad (6.74)$$

El indicador de entropía queda expresado como:

$$\Delta S = 2|[\varrho_0]_{01}|^2(1 - \text{sinc}^2 x), \quad (6.75)$$

el cual es más grande que cero para  $x > 0$ , siempre que  $[\varrho_0]_{01} \neq 0$ . Esto es, para cualquier valor no nulo de  $T$ , la evolución del sistema  $R$  refleja su entrelazamiento con el sistema reloj.

Las características básicas de la conexión entre la evolución del qubit y su entrelazamiento con el reloj se pueden apreciar en la siguiente figura 6.1. La dependencia de las entropías  $S_L[\rho_R]$  y  $S_L[\rho_U]$  con el parámetro  $[\varrho_0]_{01}$  se representa en el panel izquierdo de la figura. Mostramos además el indicador de entrelazamiento  $\Delta S$  como una función de  $x = \epsilon T/2\hbar$  para dos valores del parámetro  $[\varrho_0]_{01}$ . Observar que el indicador de entrelazamiento  $\Delta S$  se acerca a su límite asintótico con bastante rapidez, acercándose a su límite superior ya en los valores de  $T$  correspondientes a  $\epsilon T/2\hbar \approx 2$ .



**Figura 6.1:** Figuras extraídas de [171]. Panel izquierdo:  $S_L[\rho_R]$  (curva negra) y  $S_L[\rho_U]$  (gris) como una función de  $\sigma_{01} := [\varrho_0]_{01}$  para el estado de un qubit; tomamos  $[\varrho_0]_{00} = 0.2$  y  $x = 1.2$ . Panel derecho:  $\Delta S$  como una función de  $x$ ; tomamos  $[\varrho_0]_{00} = 0.2$  y  $[\varrho_0]_{01} = 0.25$  (curva negra),  $0.35$  (curva gris).

## 6.4. Relación entre el indicador de entrelazamiento y la dispersión de la energía.

Como hemos visto en los apartados anteriores, el entrelazamiento entre el sistema  $R$  y el reloj  $C$  está vinculado a la evolución temporal de  $R$ . Por otra parte, la evolución de un sistema cuántico está estrechamente relacionada con la incertidumbre de la energía del sistema. En consecuencia, tiene que haber una conexión entre la incertidumbre energética de  $R$  y el entrelazamiento entre  $R$  y  $C$ . En esta sección investigaremos dicha conexión para los estados mixtos de  $R + C$ . En efecto, mostraremos la relación que existe entre el indicador de entropía definido anteriormente y la dispersión de la energía del sistema.

Para lograr este propósito consideremos la expresión del indicador de entropía para el sistema de  $d$ -niveles encontrado en la ecuación (6.50):

$$\Delta S = \sum_{\substack{n,k \\ (\omega_{nk} \neq 0)}} |[\varrho_0]_{nk}|^2 \left[ 1 - \text{sinc}^2(x_{nk}) \right], \quad \text{con } x_{nk} := \frac{E_n - E_k}{2\hbar} T, \quad (6.76)$$

y la expansión en serie de Taylor de la función  $\text{sinc } z$ , válida para  $z$  pequeño:

$$\text{sinc } z = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l z^{2l}}{(2l+1)!}. \quad (6.77)$$

Dentro del orden de validez de la expansión anterior, lo que implica considerar los ordenes más bajos en  $T$ , podemos expresar a el indicador del entrelazamiento  $\Delta S$  como:

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{T^2}{12\hbar^2} \sum_{nm} |[q_0]_{nm}|^2 (E_n - E_m)^2 \\ &= -\frac{T^2}{12\hbar^2} \text{Tr} \left( \left[ \hat{H}_R, \varrho_{R,t} \right]^2 \right).\end{aligned}\quad (6.78)$$

Aquí nos encontramos con una situación similar a la analizada en la sección anterior, pero ahora referida a la dispersión de la energía:

$$\begin{aligned}\sigma_E^2 &\equiv \langle \hat{H}_R^2 \rangle - \langle \hat{H}_R \rangle^2 \\ &= \text{Tr}(\hat{H}_R^2 \varrho_{R,t}) - \text{Tr}^2(\hat{H}_R \varrho_{R,t})\end{aligned}\quad (6.79)$$

en lugar de la dispersión en la distribución de probabilidad de la energía, medida por  $S_L[\{p_E\}]$ . Esto se puede ver de la siguiente manera; si consideramos estados puros,  $\varrho_{R,t} = |\tilde{\Phi}_t\rangle\langle\tilde{\Phi}_t|$  y calculamos la expresión:

$$\begin{aligned}\text{Tr} \left( \left[ \hat{H}_R, \varrho_{R,t} \right]^2 \right) &= \text{Tr} \left( \left[ \hat{H}_R, |\tilde{\Phi}_t\rangle\langle\tilde{\Phi}_t| \right]^2 \right) \\ &= 2 \left( \langle \tilde{\Phi}_t | \hat{H}_R | \tilde{\Phi}_t \rangle \right)^2 - 2 \langle \tilde{\Phi}_t | \hat{H}_R^2 | \tilde{\Phi}_t \rangle \\ &= -2\sigma_E^2,\end{aligned}\quad (6.80)$$

obtenemos la expresión:

$$(\Delta S) \Big|_{\text{puro}} = \frac{T^2}{6\hbar^2} \sigma_E^2 \quad (6.81)$$

que relaciona, para estados puros del sistema compuesto  $R + C$ , la expansión a orden más bajo del indicador del entrelazamiento basado en la entropía lineal  $S_L$  (que describe su comportamiento para intervalos de tiempo cortos), con la dispersión de la energía.

Si consideramos la otra situación extrema, esto es, para estados mixtos que son diagonales en la base de autovectores de  $\hat{H}_R$ , obtenemos de  $[\hat{H}_R, \varrho_{R,t}] = 0$  y de la ecuación (6.78) nos permite encontrar:

$$(\Delta S) \Big|_{\text{diagonal}} = 0. \quad (6.82)$$

Las ecuaciones (6.81) y (6.82) son análogas a las expresiones dadas en (6.69) y (6.70). Como sucede con la dispersión de la distribución de probabilidad de la energía, la dispersión de la energía tiene componentes clásicos y cuánticos. Para los estados puros, toda la dispersión de la energía es de naturaleza cuántica, mientras que para los estados mixtos que son diagonales en una base de autoestados de energía, esta dispersión es puramente clásica. Por lo tanto, a la cantidad:

$$\mathcal{D} \equiv -\text{Tr} \left( \left[ \hat{H}_R, \varrho_{R,t} \right]^2 \right) \quad (6.83)$$

podemos interpretarla como una medida de la contribución cuántica a la dispersión de energía del estado  $\varrho_{R,t}$ .

**Ejemplo: estado relativo  $\rho_{R,t}$  convexo**

Para ilustrar los resultados anteriores, vamos a definir el estado relativo  $\rho_{R,t}$  como una suma convexa entre un estado puro,  $|\tilde{\Phi}_t\rangle$  y un estado totalmente mezclado  $\rho_d := \frac{1}{d}\mathbb{1}_d$  (con  $\mathbb{1}_d$  la matriz identidad  $d \times d$ ); en otras palabras, tenemos estados puros perturbados por ruido blanco:

$$\rho_{R,t} := \lambda |\tilde{\Phi}_t\rangle\langle\tilde{\Phi}_t| + \frac{1-\lambda}{d}\mathbb{1}_d = \lambda\rho_t + f_\lambda\mathbb{1}_d, \quad (6.84)$$

donde  $\lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ ,  $f_\lambda := \frac{1-\lambda}{d}$ , y

$$\rho_t := |\tilde{\Phi}_t\rangle\langle\tilde{\Phi}_t|, \quad (6.85)$$

representa a la matriz densidad del estado puro, el cual lo definimos con la expresión:

$$|\tilde{\Phi}_t\rangle := \int \Psi(\mathbf{x}, t) |\mathbf{x}\rangle d\mathbf{x}. \quad (6.86)$$

La amplitud de probabilidad  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  la obtenemos como es usual proyectando el estado  $|\Psi(\mathbf{x}, t)\rangle$  sobre el estado base  $|\mathbf{x}\rangle$ :

$$\Psi(\mathbf{x}, t) := \langle\mathbf{x}|\Psi(\mathbf{x}, t)\rangle \equiv \sum_n c_n(t)\varphi_n(x), \quad (6.87)$$

donde  $\varphi_n(x)$  son los autoestados normalizados que satisfacen  $\hat{H}_R\varphi_n(x) = E_n\varphi_n(x)$  y los coeficientes  $c_n(t) := c_n e^{-iE_n t/\hbar}$ .

Con un poco más de formalidad:

$$\varphi_n(x) := \langle\mathbf{x}|\varphi_n\rangle \equiv \langle\mathbf{x}|n\rangle = \int dx' \xi_x(x')\varphi_n(x'), \quad (6.88)$$

y  $\xi_x(x') = \delta(x - x')$ . Podemos escribir entonces la expresión (6.86) en términos de los elementos de esta base como:

$$|\tilde{\Phi}_t\rangle := \int |\mathbf{x}\rangle dx \sum_n c_n(t)\varphi_n(x) = \int |\mathbf{x}\rangle dx \sum_n c_n(t) \langle\mathbf{x}|n\rangle = \quad (6.89)$$

$$= \sum_n c_n(t) \int dx |\mathbf{x}\rangle \langle\mathbf{x}|n\rangle = \sum_n c_n(t) |n\rangle, \quad \text{con } \langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad (6.90)$$

y también podemos expresar el estado puro dado por la ecuación (6.85) como:

$$\rho_t := |\tilde{\Phi}_t\rangle\langle\tilde{\Phi}_t| = \sum_{n,m} c_n(t)c_m^*(t) |n\rangle\langle m|. \quad (6.91)$$

El elemento de matriz se puede leer de la expresión anterior:

$$[\rho_t]_{nm} := \langle n|\rho_t|m\rangle = c_n(t)c_m^*(t) = \quad (6.92)$$

$$= c_n c_m^* e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} = [\rho_0]_{nm} e^{i\omega_{nm}t}, \quad (6.93)$$

donde convenimos en definir como antes:

$$[\rho_0]_{nm} = c_n(0)c_m^*(0) = c_n c_m^*, \quad \omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}. \quad (6.94)$$



Por otro lado, los elementos de matriz del estado relativo de Everett  $\varrho_{R,t} := \lambda\rho_t + f_\lambda\mathbb{1}_d$  se expresan de la siguiente forma:

$$[\varrho_{R,t}]_{nm} := \langle n | \varrho_{R,t} | m \rangle = \langle n | \lambda\rho_t + f_\lambda\mathbb{1}_d | m \rangle \quad (6.95)$$

$$\begin{aligned} &= \lambda[\rho_t]_{nm} + f_\lambda\delta_{nm} \\ &= \lambda c_n c_m^* e^{i\omega_{nm}t} + f_\lambda\delta_{nm} \\ &= \lambda[\rho_0]_{nm} e^{i\omega_{nm}t} + f_\lambda\delta_{nm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y } [\varrho_{R,0}]_{nm} &:= \lambda c_n c_m^* + f_\lambda\delta_{nm} \\ &= \lambda[\rho_0]_{nm} + f_\lambda\delta_{nm}. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Determinemos ahora  $\varrho_{R,t}^2$ . Como se cumple que  $\varrho_{R,t} = \varrho_{R,t}^\dagger \Rightarrow \varrho_{R,t}^2 = \varrho_{R,t}\varrho_{R,t}^\dagger$ , encontramos:

$$\varrho_{R,t}^2 = (\lambda\rho_t + f_\lambda\mathbb{1}_d)(\lambda\rho_t + f_\lambda\mathbb{1}_d)^\dagger = (\lambda\rho_t + f_\lambda\mathbb{1}_d)^2 \quad (6.97)$$

$$= \lambda^2\rho_t + 2\lambda f_\lambda\rho_t + f_\lambda^2\mathbb{1}_d, \quad (6.98)$$

donde se ha usado el hecho de que  $\rho_t$  es un proyector ortogonal,  $\rho_t = \rho_t^\dagger$  y  $\rho_t^2 = \rho_t$ . El elemento de matriz correspondiente es:

$$\begin{aligned} [\varrho_{R,t}^2]_{nm} &:= \langle n | \varrho_{R,t}^2 | m \rangle \equiv \sum_k [\varrho_{R,t}]_{nk} [\varrho_{R,t}]_{mk}^* \\ &= \sum_k (\lambda[\rho_t]_{nk} + f_\lambda\delta_{nk}) (\lambda[\rho_t]_{mk}^* + f_\lambda\delta_{mk}) \\ &= \sum_k \lambda^2 [\rho_t]_{nk} [\rho_t]_{mk}^* + \sum_k \left[ \lambda f_\lambda ([\rho_t]_{nk} \delta_{mk} + \delta_{nk} [\rho_t]_{mk}^*) + f_\lambda^2 \delta_{nk} \delta_{mk} \right] = \\ &= \sum_k \lambda^2 [\rho_t]_{nk} [\rho_t]_{mk}^* + \lambda f_\lambda \underbrace{([\rho_t]_{nm} + [\rho_t]_{mn}^*)}_{\rho_t = \rho_t^\dagger \Rightarrow [\rho_t]_{nm} = [\rho_t]_{mn}^*} + f_\lambda^2 \delta_{nm} = \\ &= \sum_k \lambda^2 [\rho_t]_{nk} [\rho_t]_{mk}^* + 2\lambda f_\lambda [\rho_t]_{nm} + f_\lambda^2 \delta_{nm}, \end{aligned} \quad (6.99)$$

usando la definición de  $[\rho_t]_{nm}$ , los términos indicados en el sumando se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} [\rho_t]_{nk} [\rho_t]_{mk}^* &= [\rho_0]_{nk} [\rho_0]_{mk}^* e^{i(\omega_{nk} - \omega_{mk})t} = \\ &= [\rho_0]_{nk} [\rho_0]_{mk}^* e^{i\omega_{nm}t} = c_n c_m^* |c_k|^2 e^{i\omega_{nm}t}. \end{aligned}$$

De esta forma obtenemos:

$$\begin{aligned} [\varrho_{R,t}^2]_{nm} &:= \lambda^2 e^{i\omega_{nm}t} \sum_k [\rho_0]_{nk} [\rho_0]_{mk}^* + 2\lambda f_\lambda [\rho_0]_{nm} e^{i\omega_{nm}t} + f_\lambda^2 \delta_{nm} \\ &= \lambda^2 e^{i\omega_{nm}t} c_n c_m^* \underbrace{\sum_k |c_k|^2}_{\langle \tilde{\Phi}_t | \tilde{\Phi}_t \rangle = 1} + 2\lambda f_\lambda c_n c_m^* e^{i\omega_{nm}t} + f_\lambda^2 \delta_{nm} \\ &= \lambda^2 c_n c_m^* e^{i\omega_{nm}t} + 2\lambda f_\lambda c_n c_m^* e^{i\omega_{nm}t} + f_\lambda^2 \delta_{nm} \\ &= (\lambda^2 + 2\lambda f_\lambda) c_n c_m^* e^{i\omega_{nm}t} + f_\lambda^2 \delta_{nm} \\ &= (\lambda^2 + 2\lambda f_\lambda) [\rho_0]_{nm} e^{i\omega_{nm}t} + f_\lambda^2 \delta_{nm} \\ &= (\lambda^2 + 2\lambda f_\lambda) [\rho_t]_{nm} + f_\lambda^2 \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (6.100)$$

El elemento diagonal toma la forma, ( $\omega_{nm} = 0$ ):

$$\begin{aligned} [\varrho_{R,t}^2]_{nn} &:= \langle n | \varrho_{R,t}^2 | n \rangle \\ &= (\lambda^2 + 2\lambda f_\lambda) [\rho_t]_{nn} + f_\lambda^2 \\ &= (\lambda^2 + 2\lambda f_\lambda) |c_n|^2 + f_\lambda^2. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Calculamos ahora la entropía lineal para el estado convexo  $\varrho_{R,t}$ :

$$S_L[\varrho_{R,t}] := 1 - \text{Tr}(\varrho_{R,t}^2), \quad (6.102)$$

donde:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\varrho_{R,t}^2) &:= \sum_n \langle n | \varrho_{R,t}^2 | n \rangle = \lambda^2 + 2\lambda f_\lambda + d f_\lambda^2 \\ &= \lambda^2 + \frac{1}{d}(1 - \lambda^2), \end{aligned} \quad (6.103)$$

un resultado esperado si recordamos que:

$$\varrho_{R,t}^2 = \lambda^2 \rho_t + 2\lambda f_\lambda \rho_t + f_\lambda^2 \mathbb{1}_d, \quad \text{Tr}(\rho_t) = 1 \quad \text{y} \quad \text{Tr}(\mathbb{1}_d) = d. \quad (6.104)$$

Luego resulta que la entropía lineal para el estado relativo de Everett toma el valor:

$$\begin{aligned} S_L[\varrho_{R,t}] &:= 1 - \text{Tr}(\varrho_{R,t}^2) \\ &= 1 - \left( \lambda^2 + \frac{1}{d}(1 - \lambda^2) \right) \\ &= (1 - \lambda^2) \left( 1 - \frac{1}{d} \right). \end{aligned} \quad (6.105)$$

Consideremos a continuación una medida no selectiva de la energía del sistema, y determinemos el valor que toma la entropía lineal  $S_L[\varrho_{R|M}]$ . Recordemos que esta entropía viene dada por la expresión (6.62):

$$\begin{aligned} S_L[\varrho_{R|M}] &:= 1 - \text{Tr}(\varrho_{R|M}^2) \\ &= 1 - \sum_E \sum_{\substack{n,m \\ (E_n=E_m=E)}} |[\varrho_{R,t}]_{nm}|^2, \end{aligned} \quad (6.106)$$

y el valor de  $\text{Tr}(\varrho_{R|M}^2)$  resulta ser:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\varrho_{R|M}^2) &= \sum_E \sum_{\substack{n,m \\ (E_n=E_m=E)}} |[\varrho_{R,t}]_{nm}|^2, \text{ con } [\varrho_{R,t}]_{nm} \text{ dado por (6.96)} \\
 &= \sum_E \sum_{\substack{n,m \\ (E_n=E_m=E)}} \left[ \lambda^2 |[\rho_0]_{nm}|^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda f_\lambda ([\rho_0]_{nm} \delta_{nm} e^{i\omega_{nm}t} + \delta_{nm} [\rho_0]_{nm}^* e^{-i\omega_{nm}t}) + f_\lambda^2 \delta_{nm} \right] \\
 &= \sum_E \left[ \sum_{\substack{n,m \\ (E_n=E_m=E)}} \lambda^2 |[\rho_0]_{nm}|^2 + \lambda f_\lambda \sum_{\substack{n \\ (E_n=E)}} ([\rho_0]_{nm} + [\rho_0]_{nm}^*) \right] + df_\lambda^2 \\
 &= \sum_E \left[ \sum_{\substack{n,m \\ (E_n=E_m=E)}} \lambda^2 |[\rho_0]_{nm}|^2 + 2\lambda f_\lambda \sum_{\substack{n \\ (E_n=E)}} [\rho_0]_{nm} \right] + df_\lambda^2 \\
 &= \sum_E \sum_{\substack{n,m \\ (E_n=E_m=E)}} \lambda^2 |c_n c_m^*|^2 + 2\lambda f_\lambda \sum_E \sum_{\substack{n \\ (E_n=E)}} |c_n|^2 + df_\lambda^2 \tag{6.107}
 \end{aligned}$$

introduciendo aquí la definición:

$$p_E := \sum_{\substack{n \\ (E_n=E)}} |c_n|^2,$$

encontramos:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\varrho_{R|M}^2) &= \sum_E \left[ \lambda^2 \sum_{\substack{n \\ (E_n=E)}} |c_n|^2 \sum_{\substack{m \\ (E_m=E)}} |c_m|^2 \right] + 2\lambda f_\lambda \underbrace{\sum_E p_E}_{=1} + df_\lambda^2 \\
 &= \sum_E [\lambda^2 p_E^2] + 2\lambda f_\lambda + df_\lambda^2 \\
 &= \sum_E [\lambda^2 p_E^2] + \frac{1}{d}(1 - \lambda)^2. \tag{6.108}
 \end{aligned}$$

Por consiguiente tenemos que la entropía lineal de la medida no selectiva toma la forma:

$$\begin{aligned}
 S_L[\varrho_{R|M}] &:= 1 - \text{Tr}(\varrho_{R|M}^2) \\
 &= 1 - \left( \sum_E [\lambda^2 p_E^2] + 2\lambda f_\lambda + df_\lambda^2 \right) \\
 &= S_L[\lambda p_E] - (2\lambda f_\lambda + df_\lambda^2) \\
 &= S_L[\lambda p_E] + S_L[\varrho_{R,t}] + (\lambda^2 - 1). \tag{6.109}
 \end{aligned}$$

Con estos resultados podemos calcular el valor máximo del indicador de entropía:

$$\begin{aligned}
\Delta S_{\max} &\equiv S_L[\varrho_{R|M}] - S_L[\varrho_{R,t}] = \text{Tr}(\varrho_{R,t}^2) - \text{Tr}(\varrho_{R|M}^2) \\
&= \underbrace{\sum_{n,k} |[\varrho_{R,t}]_{nk}|^2}_{\text{dada por (6.40)}} - \sum_E \sum_{\substack{n,m \\ (E_n=E_m=E)}} |[\varrho_{R,t}]_{nm}|^2 \\
&= S_L[\lambda p_E] + (\lambda^2 - 1) \\
&= \lambda^2 S_L[\{p_E\}], \tag{6.110}
\end{aligned}$$

notoriamente, para  $\lambda = 1$  recuperamos el caso puro contenido en la expresión (6.69).

Por otro lado, realizando cálculos directos llegamos al resultado:

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left( \left[ \hat{H}_R, \varrho_{R,t} \right]^2 \right) &= \lambda^2 \text{Tr} \left( \left[ \hat{H}_R, |\tilde{\Phi}_t\rangle\langle\tilde{\Phi}_t| \right]^2 \right) \\
&= -2\lambda^2 \sigma_E^2, \tag{6.111}
\end{aligned}$$

el cual se reduce inmediatamente, tomando  $\lambda = 1$ , con la expresión (6.80) para estados puros.

En resumen, el indicador entrópico  $\Delta S$  que detecta el entrelazamiento entre el sistema  $R$  y el reloj  $C$  está dado, al orden más bajo en la extensión  $T$  del intervalo dentro del cual se define el estado global  $R + C$ , por una cantidad que representa la contribución cuántica a la incertidumbre de la energía del sistema  $R$ .

## 6.5. Conclusiones del capítulo

La noción de evolución temporal requiere de un compuesto que consta de al menos dos partes: un sistema  $R$  donde se manifiesta la evolución, esto es, el paso del *tiempo* y un sistema  $C$ , el reloj, que registra o lleva la cuenta del *tiempo*. Todas las propiedades de la evolución dinámica de  $R$  pueden codificarse en las correlaciones (entrelazamiento) exhibidas por un estado cuántico estacionario que describe conjuntamente el sistema completo  $R + C$ . En este sentido, los orígenes de la dinámica y del flujo del tiempo son, quizás, los ejemplos más radicales del papel central que juega el entrelazamiento en la física de los sistemas cuánticos compuestos. Estas consideraciones constituyen la esencia de la imagen *sin tiempo* de la dinámica cuántica. Según este punto de vista, tiene que haber relaciones cuantitativas que conecten la cantidad de entrelazamiento entre el reloj y el sistema en evolución, por un lado, con las características específicas de la evolución dinámica del sistema, por el otro. En la presente contribución exploramos estas relaciones para una extensión de la propuesta de PW que, si bien permite estados cuánticos mixtos del compuesto  $R + C$ , mantiene el otro supuesto principal de PW, particularmente el relativo a una energía definida del sistema  $R + C$  igual a cero. Vimos que recurriendo a un indicador del entrelazamiento para el estado global  $R + C$ , se puede dilucidar cómo se relaciona el entrelazamiento con la evolución temporal del sistema  $R$ . Resulta que, en nuestra extensión del escenario de PW, el entrelazamiento es realmente necesario para que  $R$  muestre evolución. Es decir, otras formas moderadas de correlaciones cuánticas, como la discordia cuántica<sup>4</sup> sin entrelazamiento, no son suficientes para dar lugar a la noción de evolución

<sup>4</sup>Esta es otra medida (cuantificador) de correlaciones cuánticas sobre sistemas bipartitos. Introducida por Henderson y Vedral [168] y Ollivier y Zurek [169].

temporal y de aquí a la dinámica. Esta conclusión se deriva de un criterio entrópico suficiente para el entrelazamiento satisfecho por el estado (puro o mixto) de  $R+C$  siempre que el sistema  $R$  exhiba una evolución dinámica.

Es un hecho del mundo cuántico que la evolución dinámica siempre va acompañada de una incertidumbre en la energía. De manera consistente, el entrelazamiento del *sistema-reloj* también está relacionado con la incertidumbre de la energía. De hecho, el indicador de entrelazamiento antes mencionado para los estados globales de  $R + C$  admite un límite superior y un límite asintótico, ambos son expresables en términos de la dispersión de la distribución de probabilidad de energía asociada con el sistema  $R$ , registrada por una medida entrópica evaluada en esa distribución. Este indicador de entrelazamiento también está relacionado con la dispersión de energía del sistema  $R$ , de una manera que recuerda una relación de incertidumbre tiempo-energía.



---

## Conclusiones

---

*“... no tengo que tener una respuesta. No siento miedo por no saber cosas, estar perdido en este misterioso Universo sin tener un propósito, que es como en realidad es, hasta donde yo sé, posiblemente. Esto no me asusta.”*

Richard Phillips Feynman<sup>1</sup>

La trayectoria recorrida en estos capítulos refleja la cronología del desarrollo en etapas de esta Tesis, cada una de ellas se encuentra compilada y estructurada en los distintos capítulos que conforman este trabajo. Si bien en término de conclusiones en cada uno de los capítulos hemos analizado los resultados parciales más significativos de cada etapa, cabe resaltar que el aporte realizado en esta Tesis, y que se convirtió en el hilo conductor de cada etapa, fue la construcción de un indicador cuantitativo de *—cantidad de evolución—*.

En la primera etapa de esta tesis iniciamos nuestros estudios relacionados a la *evolución* cuántica desde un enfoque geométrico. Mostramos cómo la geometría diferencial nos da un marco teórico robusto para reinterpretar conceptos puramente cuánticos que son introducidos en la literatura convencional desde un enfoque algebraico. Justificamos que los verdaderos estados cuánticos están reunidos en el espacio proyectivo de Hilbert (espacio de rayos)  $\mathcal{PH}$ , el cual es una variedad geomé-

---

<sup>1</sup>Entrevista de la BBC (recomendada): “El placer de descubrir las cosas” (“The pleasure of finding things out”), 1981. Esto es un extracto de la entrevista titulado: “La Incertidumbre del Conocimiento” (“The Uncertainty of Knowledge”), sobre las religiones, la verdad, el conocimiento y las creencias.

La cita un poco más completa dice: “¿Cómo podemos saber si algo es verdad...? Entonces empiezas a preguntarte, y una vez que empiezas a dudar, lo que para mí es una parte fundamental de mi alma, el dudar y preguntar, cuando dudas y preguntas se hace un poco más difícil creer... Puedo vivir con dudas e incertidumbre y sin saber. Creo que es mucho más interesante vivir sin saber, que teniendo respuesta que podrían estar equivocadas. Yo tengo respuestas aproximadas, posibles creencias y diferentes grados de certeza sobre diferentes cosas. Pero no estoy absolutamente seguro de nada, y sobre muchas cosas no sé absolutamente nada. Pero no tengo que tener una respuesta. No siento miedo por no saber cosas, estar perdido en este misterioso Universo sin tener un propósito, que es como en realidad es, hasta donde yo sé, posiblemente. Esto no me asusta.”

trica genuina munida con dos estructuras geométricas: una métrica tipo Riemanniana (técnicamente la métrica de Fubini-Study) y una forma simpléctica, ambas son heredadas del producto interno en el espacio de Hilbert. Cuando la mecánica cuántica se expresa en términos de estructuras inherentes al espacio proyectivo de Hilbert, esta asume una forma intrínsecamente geométrica.

Vimos cómo una de las nociones fundamentales de la QM como la probabilidad de transición entre dos estados adquiere un carácter geométrico (más allá de la proyección ortogonal) que es aclarado por la métrica de Fubini-Study presente en la parte real del producto interno en  $\mathcal{PH}$ . Esencialmente esta probabilidad de transición (o colapso) está relacionada con la distancia geodésica entre dos estados en  $\mathcal{PH}$ . Por otro lado, la estructura simpléctica  $\omega$  asociada a las evoluciones unitarias, permite interpretar la fase relativa entre dos estados mediante el significado del transporte paralelo sobre una curva de estados. Esta separación de la dinámica es de considerable interés para el análisis del problema de medición. Motivados por esta conexión intrínseca entre la geometría en  $\mathcal{PH}$  y la QM exploramos una medida de entrelazamiento considerando una evolución geodésica que conecta dos estados de un sistema bipartito. Siguiendo el enfoque geométrico o cinemático impulsado por Simon y Mukunda, pudimos reproducir los resultados del formalismo de la QB. Mostramos que este enfoque cinemático caracterizado por “evoluciones geodésicas” se desacopla de la dinámica (Hamiltoniana) del sistema cuántico, y por tanto, las evoluciones al igual que los entrelazamientos también se pueden tratar como una propiedad de las curvas que conectan los vectores de estado.

En conexión con nuestro estudio sobre las evoluciones cuánticas, en la siguiente etapa, iniciada con el Capítulo 3, introdujimos un indicador, el cual da una medida de distinguibilidad promedio entre estados de un sistema cuántico en diferentes instantes y cuya finalidad, en principio, fue complementar las nociones encontradas en la literatura sobre la distinguibilidad de los estados puros de un sistema cuántico. Señalamos que la *distinguibilidad* de los estados cuánticos puros está relacionada con la medida del tiempo que necesita un sistema para alcanzar la *distinción completa* entre dos estados de un sistema cuántico en evolución. Apuntamos también que este concepto presenta limitaciones conceptuales para caracterizar la velocidad de evolución cuántica o no es aplicable en aquellos sistemas que, si bien evolucionan en el tiempo, no alcanzan estados completamente distinguibles del inicial. Vimos aquí la necesidad de complementar este concepto, en lugar de esperar que “*algo distinto suceda*”, preferimos preguntarnos “*cuánto sucede*” durante una cierta cantidad de tiempo. Esta fue la pregunta principal que se convirtió en nuestro hilo conductor y que respondimos con la medida propuesta.

Mostramos que se puede construir esta medida, la cual es aplicable a cualquier estado inicial que evolucione o no a un estado ortogonal y que no privilegie ningún valor de superposición entre estados en diferentes momentos. Sus propiedades y comportamiento, chequeado en los distintos ejemplos, la convirtieron en una medida apropiada para comprender, entre otros, lo variada que puede ser la vida de los estados cuánticos puros dentro de un intervalo de tiempo. La relación de los valores asintóticos de esta medida con la entropía lineal asociada a la distribución de probabilidad normalizada de la energía del sistema nos permitió realizar una optimización y encontrar los estados cuánticos óptimos que la maximizan bajo el vínculo de energía media fija. Vimos que el valor óptimo de esta cantidad de evolución está relacionada con la energía media del estado a través de un formalismo tipo termoestadístico. Concluimos así que los estados óptimos utilizan sus recursos energéticos aprovechando al máximo su energía, llevando una vida lo más variada posible para el valor medio de energía dado<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Esta es una enseñanza de la QM que deberíamos aprender a aplicar a nuestras vidas: *una vida variada es una vida en la que cada momento es diferente (es decir, muy distinguible) de cualquier otro momento. Por el contrario, una vida monótona es aquella en la que cada momento es similar (poco distinguible) a cualquier otro momento.*



Durante el estudio de esta medida de cantidad de evolución surgió una notable conexión (sección 3.4) con el formalismo *sin tiempo* —*timeless*— de la dinámica cuántica, en donde la evolución y el tiempo no son ingredientes primitivos de la descripción del mundo físico, sino más bien fenómenos emergentes. Esta conexión permitió extender la aplicación de la medida más allá de su interés inicial y fue el disparador de la tercer etapa de nuestra investigación desarrollada, en su comienzo, en el Capítulo 5.

En esta última etapa, comenzamos con una revisión del formalismo *sin tiempo* ampliando el escenario de ideas y contenidos adelantados en la sección 3.4 y dimos una discusión dentro de este marco del entrelazamiento. En este formalismo consideramos al Universo como un sistema bipartito  $U = R + C$ , formado por el sistema reloj  $C$  y el “resto del Universo”  $R$ , caracterizado por un estado puro global y estacionario. Decididos a explorar en un contexto más general la conexión entre la cantidad de evolución de un sistema cuántico y el entrelazamiento, encontramos que la medida de la cantidad de evolución experimentada por un sistema cuántico en el intervalo de tiempo  $[0, T]$  corresponde, en este enfoque, a la cantidad de correlaciones cuánticas entre el reloj y el sistema. Es decir, existe una relación directa y cuantitativa entre el entrelazamiento cuántico exhibido por el sistema compuesto  $R + C$  y la evolución dinámica experimentada por el sistema  $R$ . De hecho, el entrelazamiento entre el reloj y el sistema  $R$  está estrechamente relacionado con la distinción promedio entre los estados de  $R$  correspondientes a diferentes tiempos. En otras palabras, mostramos que la medida  $\mathcal{D}$  es igual a la entropía lineal del estado cuántico promediado en el tiempo del “resto del Universo” caracterizado por su matriz densidad marginal  $\rho_R$ . Esto es consistente con la interpretación de  $\mathcal{D}$ , dada en el Capítulo 3, como un indicador cuantitativo de cuán diversos son los estados que el sistema visita durante el intervalo de tiempo  $[0, T]$ . También pudimos ver que la dispersión en la energía determina la tasa inicial de crecimiento del indicador.

Como lo hemos destacado, en los Capítulos 3 y 5 nos enfocamos en estados globales puros de un sistema cuántico bipartito y mostramos que el entrelazamiento del reloj y el sistema es fundamental para el enfoque sin tiempo de la dinámica cuántica. Era natural que intentáramos generalizar los resultados hallados extendiendo nuestras ideas, dentro del enfoque *timeless*, pero considerando ahora estados cuánticos globales mixtos de sistemas compuestos. Esta extensión abrió las puertas para nuestro último trabajo, cerrando así la tercer etapa mostrada en el Capítulo 6. Eran varias las justificaciones que teníamos para estudiar estados mixtos dentro del contexto del enfoque sin tiempo. En un escenario más realista, el propio Universo considerado como el sistema cerrado bipartito  $R + C$  se puede pensar en un estado global mixto; sumado a esto, en general, el subsistema  $R$  es compuesto en sí mismo. Es decir, el sistema  $R$  puede pensarse como multipartito con entrelazamiento entre sus partes y a su vez en un estado mixto.

Con estos argumentos motivadores, analizamos cuantitativamente, para los estados globales mixtos del sistema compuesto  $R + C$ , el entrelazamiento entre sus partes  $R$  y  $C$  y su relación con la evolución temporal emergente experimentada por  $R$  (sección 6.2). Aplicamos el indicador cuantitativo de entrelazamiento  $\Delta S$ , basado en la comparación de una medida entrópica evaluada en el sistema global con la correspondiente medida entrópica evaluada en el estado reducido asociado a  $R$ . Usando este indicador de entrelazamiento demostramos que el sistema compuesto  $R + C$  necesariamente tiene que estar entrelazado para que el sistema  $R$  evolucione en el sentido dinámico. Lo que significa que, en ausencia de entrelazamiento, otras formas de correlaciones no clásicas no son suficientes para que se manifieste la noción del tiempo y de la evolución. Establecimos un límite superior, así como el valor asintótico, del indicador de entrelazamiento en el sistema compuesto y lo expresamos en términos de una medida entrópica de la dispersión de la distribución de probabilidad de energía asociada con el sistema  $R$ . Luego investigamos la conexión entre el entrelazamiento

presente en el sistema compuesto  $R + C$ , y una medida de la incertidumbre de la energía del sistema  $R$ . Vimos que estas cantidades se pueden expresar en términos de la dispersión de la distribución de probabilidad de energía asociada con el sistema  $R$ , registrada por una medida entrópica evaluada en esa distribución. Todas las propiedades de la evolución dinámica de  $R$  pueden codificarse en las correlaciones (entrelazamiento) exhibidas por un estado cuántico estacionario que describe conjuntamente el sistema completo  $R + C$ . En este sentido, los orígenes de la dinámica y del flujo del tiempo son, quizás, los ejemplos más radicales del papel central que juega el entrelazamiento en la física de los sistemas cuánticos compuestos. Estas consideraciones constituyen la esencia de la imagen *sin tiempo* de la dinámica cuántica.

Durante todo este camino recorrido hemos explorado profundamente un aspecto complementario de la distinguibilidad entre estados cuánticos. Esto nos permitió dar una respuesta a la pregunta *¿cuánto sucede* durante la evolución de un sistema cuántico? La conexión entre nuestro trabajo inicial y la formulación *sin tiempo* de la mecánica cuántica, nos permitió extender la respuesta que dimos a la pregunta inicial, considerando primeramente los estados cuánticos puros y finalmente considerando escenarios más realistas como los estados cuánticos mixtos en que podemos encontrar a los sistemas. Esto marca el punto final de esta Tesis, pero no de esta aventura intelectual.

*¿Cómo evoluciona esta aventura?*

La exploración geométrica de la Física es algo que fascina al autor de estas líneas. La conexión entre la geometría y la QM estudiada durante esta tesis y el descubrimiento de problemas abiertos relacionados, por ejemplo, a las evoluciones óptimas, los límites impuestos por la Naturaleza al procesamiento de la información por parte de sistemas cuánticos (*quantum speed limit*), entrelazamiento y evoluciones cinemáticas basadas en curvas geodésicas que conectan estados mixtos, entre otros, siguen aportando un inmenso terreno para sembrar.

Por otro lado, la relación de nuestra medida con el *dinámica cuántica emergente* nos permitió encontrar en la literatura una serie de problemas que todavía requieren soluciones y otros que suscitan debates candentes relacionados al *problema del tiempo*. Los resultados obtenidos en esta Tesis, aquellos que se han contado en los dos Capítulos finales, concernientes a estados mixtos dentro de la imagen sin tiempo de PW, pueden contribuir a dilucidar la forma en que el enfoque de PW se relaciona con la termodinámica cuántica y con la coherencia cuántica [150]. Nuestros desarrollos actuales sugieren también varias líneas posibles para investigar. Por ejemplo, sería interesante explorar las formulaciones de estados mixtos del enfoque *timeless* de PW para sistemas con un reloj que tiene un espacio de Hilbert discreto y finito. Para este tipo de sistemas, los escenarios sin tiempo de estados mixtos pueden ser susceptibles de implementación experimental, lo que lleva a extensiones de los trabajos reportados en [130, 155]. En este sentido, sería interesante explorar extensiones más generales de la formulación de PW, que permitan estados mixtos del sistema compuesto, reloj-sistema, que tengan una dispersión de la energía total que no se desvanezca. Estas líneas de investigación, a su vez, pueden enriquecerse al incluir efectos relativistas, en la línea pionera en [151, 152].

Otra línea interesante contempla escenarios cosmológicos relacionados no solo a la emergencia del tiempo en teorías dinámicas sino a la emergencia del espaciotiempo. La emergencia de espaciotiempos clásicamente conectados está relacionado con el entrelazamiento cuántico de grados de libertad en una descripción no perturbativa de la gravedad cuántica [170]. Desenredar los grados de libertad asociados con dos regiones del espaciotiempo da como resultado que estas regiones se separen de una manera que puede cuantificarse mediante medidas estándar de entrelazamiento.

*Sólo es cuestión de tiempo...*

---

## Índice de figuras

---

2.1. Representación del espacio de fase cuántico o espacio proyectivo de Hilbert $\mathcal{PH}$ . . .	22
2.2. Esfera de Bloch como representación del espacio proyectivo $\mathcal{PH} \equiv \mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{S}^2$ . . .	23
2.3. Representación del elemento de arco dado por la métrica de Fubini-Study $ds_{FS}$ . Se muestra el espacio $\mathcal{N}_0$ y el espacio proyectivo de Hilbert $\mathcal{PH}$ . Los puntos $p_1, p_2 \in \mathcal{PH}$ indican las proyecciones respectivas de dos estados cercanos y normalizados $ \psi\rangle$ y $ \psi + d\psi\rangle$ . Se define el cuadrado de la distancia entre los puntos $p_1$ y $p_2$ como el cuadrado de la proyección de $ d\psi\rangle$ sobre el subespacio ortogonal al estado $ \psi\rangle$ , es decir, la proyección dada por el operador $\hat{\pi}_{ \psi\rangle} = \mathbb{1} -  \psi\rangle\langle\psi $ . . . . .	25
2.4. Representación geométrica de las expresiones (2.27 y 2.28). Se muestra la curva $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{N}_0$ con su vector tangente, y la proyección $\Pi(\mathcal{C}_0) = C_0 \subset \mathcal{PH}$ . . . . .	27
2.5. Panel izquierdo: valor de $\varepsilon[ \psi(t)\rangle]$ involucrado en la evolución geodésica conectando los estados del ejemplo i), para diferentes valores del parámetro $\alpha$ . Panel derecho: el entrelazamiento promediado en el tiempo como función de $\alpha$ para el mismo ejemplo. . . . .	36
2.6. Valor de $\varepsilon[ \psi(t)\rangle]$ involucrado en la evolución geodésica conectando estados del ejemplo iv). . . . .	36
3.1. Evolución de $ A(T/T^c) ^2$ (panel izquierdo) y $\mathcal{D}(T/T^c)$ (panel derecho) para un sistema de un qubit con energías $E_0 = 0$ y $E_1 = 1$ , y $c_0 = 0.2$ (cian), $0.3$ (naranja), $0.5$ (púrpura). En el panel izquierdo (derecho), las curvas corresponden, de abajo a arriba, a valores decrecientes (crecientes) de $c_0$ . El valor asintótico $\mathcal{D}_L$ en cada caso está representado por la línea punteada correspondiente. . . . .	45

3.2.	Evolución de $ A(T/T^c) ^2$ (panel izquierdo) y $\mathcal{D}(T/T^c)$ (panel derecho) para un sistema de $d$ -niveles (igualmente ponderados), con $d = 4$ (cian), 8 (anaranjado), 50 (purpura). En el panel izquierdo (derecho), las curvas corresponden, de abajo hacia arriba, a valores decrecientes (crecientes) de $d$ . El valor asintótico $\mathcal{D}_L$ en cada caso está representado por la línea punteada correspondiente. . . . .	46
3.3.	Evolución de $ A(T/T^c) ^2$ (panel izquierdo) y $\mathcal{D}(T/T^c)$ (panel derecho) para un estado de dos-qubit igualmente ponderado con espectro: $E_{00} = 0$ , $E_{01} = E_{10} = E$ , y $E_{11} = 2E$ (se ha tomado $E = 1$ ). El valor asintótico $\mathcal{D}_L$ está representado por la línea punteada. . . . .	46
3.4.	Evolución de $ A(T/T^c) ^2$ y $\mathcal{D}(T/T^c)$ para un paquete de ondas gaussiano con $x_0 = 0.5$ , $p_0 = 400\pi$ , y $\sigma = 1/10$ en un pozo cuadrado infinito. . . . .	47
3.5.	Evolución de $ A(T/T^c) ^2$ y para un paquete de onda Gaussiano con $x_0 = 0.5$ , $p_0 = 400\pi$ , y $\sigma = 1/10$ en un pozo cuadrado infinito. . . . .	48
4.1.	$\mathcal{D}_{\text{opt}}$ como una función de $\langle \hat{H} \rangle$ para diferentes sistemas cuánticos. Los valores de las energías están adimensionalizados. Panel superior izquierdo: un sistema de un solo qubit con niveles de energía 0, 1; panel superior derecho: un oscilador armónico de $d$ - niveles con niveles de energía $E_n = n + (1/2)$ ; panel inferior izquierdo: un sistema de dos-qubit con energías accesibles 0, 1, 2; panel inferior derecho: un paquete de onda gaussiano en un pozo cuadrado infinito, con niveles de energía $E_n = \pi^2 n^2$ . Todos estos sistemas se han estudiado en la Sección 3.3. . . . .	59
5.1.	Representación del mecanismo PW y el significado del “flujo del tiempo”. Se muestra el Universo compuesto $R + C$ . El espacio de Hilbert del resto del Universo $\mathcal{H}_R$ está representado por los grados de libertad $x, y$ . El espacio de Hilbert del reloj $\mathcal{H}_C$ está representado por los distintos estados del observable $\hat{T}$ . Notar cómo los grados de libertad del sistema reloj emergen en $R$ vía la proyección $\langle t   \Psi \rangle =  \Phi_t\rangle$ . En otras palabras los observadores internos a $R$ recuperan la formulación convencional de la QM condicionando al estado $ \Psi\rangle$ a tener el tiempo $t$ . El “flujo” del tiempo consiste simplemente en la correlación (entrelazamiento) entre el grado de libertad cuántico de $C$ y el resto $R$ , una correlación presente en un estado global, independiente del tiempo $ \Psi\rangle$ . . . . .	68
5.2.	Entropía de von Neumann como una función de la entropía lineal para un sistema de un qubit en evolución. . . . .	81
A.1.	Esquema del espacio $\mathcal{N}_0$ , del espacio proyectivo de Hilbert $\mathcal{PH}$ y del fibrado principal $\Pi$ . Se muestra la descomposición del espacio tangente $T_{ \psi\rangle}\mathcal{N}_0$ ; el levantamiento de la curva $C_0$ y el significado del transporte paralelo. . . . .	128

---

## Bibliografía

---

- [1] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag, 2nd edition, 1989.
- [2] Goldstein, *Classical Mechanics*. Colección Ciencia y Técnica, Aguilar, 1977.
- [3] Jorge V. José, Eugene J. Saletan, *Classical Dynamics, a contemporary approach*. Cambridge University Press, 1998.
- [4] Ralph Abraham, Jerrold E. Marsden, Tudor Ratiu and Richard Cushman, *Foundation of Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, inc., second edition, 1987.
- [5] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloe, *Quantum Mechanics I*. Wiley-VCH Verlag GmbH, 2019.
- [6] J. J. Sakurai, Jim Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2020.
- [7] R. Shankar, *Principles of Quantum Mechanics*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2011.
- [8] Alberto Galindo, Pedro Pascual, *Quantum Mechanics I*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH and Co. KG, 2012.
- [9] David Bohm, *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I*. Physical Review, **85**, 2, (1952).
- [10] Detlef Dürr, Stefan Teufel, *Bohmian Mechanics: The Physics and Mathematics of Quantum Theory*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH and Co. K, 2009.
- [11] John Von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1996.
- [12] J. S. Bell, *ON THE EINSTEIN PODOLSKY ROSEN PARADOX*. Physics Vol.1, No. 3, pp. 195—200, 1964.
- [13] J. S. Bell, Introduction by Alain Aspect, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics: Collected Papers on Quantum Philosophy*. Cambridge University Press, 2015.

- [14] Moses Fayngold, Vadim Fayngold, *Quantum Mechanics and Quantum Information: A Guide through the Quantum World*. Wiley-VCH Verlag GmbH, 2013.
- [15] Chris J Isham, *Modern Differential Geometry For Physicists*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2nd Edition, 1999.
- [16] Gennaro Auletta, Mauro Fortunato, Giorgio Parisi, *Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2014.
- [17] Luis de la Peña, *Introducción a la Mecánica Cuántica*. Fondo de Cultura Económica, ediciones científicas universitarias, 2014.
- [18] Radhika Vathsan, *Introduction to Quantum Physics and Information Processing*. Apple Academic Press Inc., 2015.
- [19] Vlatko Vedral, *Introduction to Quantum Information Science*. Oxford University Press, 2007.
- [20] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin, and P. L. Knight, *Quantifying Entanglement*. Physical Review Letters **78**, 12, 2275, 1997
- [21] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Physical Review **47**, 777 (1935).
- [22] Amir D. Aczel, *Entanglement: the Greatest Mystery in Physics*. Four Walls Eight Windows, 2002.
- [23] David J. Griffiths, Darrell F. Schroeter, *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2018.
- [24] N. David Mermin, *Is the Moon There When Nobody Looks? Reality and the Quantum Theory*. Phys. Today **38**(4), 38 (1985); doi: 10.1063/1.880968.
- [25] Karl R. Popper, *The Logic of Scientific Discovery*. Martino Fine Books, 2014.
- [26] A. Aspect, Grangier, and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982).
- [27] G. Wihs, et al, Phys. Rev. Lett. **81**, 5039 (1998).
- [28] Claude E. Shannon. *A mathematical theory of communication*. The Bell System Technical Journal, 27:379423, 623656, 1948.
- [29] Stephen M. Barnett, *Quantum Information*. Oxford Master Series in Atomic, Optical and Laser Physics. Oxford University Press, 2009.
- [30] Mark Wilde, *From Classical to Quantum Shannon Theory*. Online under a Creative Commons License, 2012.
- [31] John Preskill, *Lecture notes for Physics 219: Quantum Computation*.
- [32] Vlatko Vedral, *Quantum entanglement*. NATURE PHYSICS | VOL **10**, 256, APRIL 2014.
- [33] T. M. Cover and J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley and Sons, New York, 1991.
- [34] Kibble, T. W. B. (1978) Commun. Math. Phys. 64, 73, Kibble, T. W. B. (1979) Commun. Math. Phys. 65, 189.

- [35] R. P. Feynmann and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*. Dover Publications Inc., 2010.
- [36] Dirac P. A. M. 1931 Proc. Roy. Soc. London A 133 60, Dirac P. A. M. 1948 Phys. Rev. **74** 817.
- [37] M. V. Berry, Proceedings of the Royal Society of London Series A, 392:45–57, March 1984.
- [38] Y. Aharonov and D. Bohm. Physical Review, 115:485–491, August 1959.
- [39] Barry Simon. Phys. Rev. Lett., **51** 2167–2170, Dec 1983.
- [40] Bengtsson I and Zyczkowski K 2006 *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement* (England, Cambridge: Cambridge University Press)
- [41] Mukunda N and Simon R 1993 Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism Annal of Physics **228** 205 (1993).
- [42] Caticha A 2015 AIP Conf. Proc. **1641** 15
- [43] Caticha A 2015 arXiv:1512.09076
- [44] Mandelstam L and Tamm I G 1945 The uncertainty relation between energy and time in non-relativistic quantum mechanics *J. Phys. USSR* **9** 249
- [45] Margolus N and Levitin L B 1998 The maximum speed of dynamical evolution *Physica D* **120** 188
- [46] Brif C, Chakrabarti R , and Rabitz H 2010 Control of quantum phenomena: past, present and future *New J. Phys.* **12** 075008  
(Cambridge, England: Cambridge University Press)
- [47] Giovannetti V, Lloyd S and Maccone L 2003 *Quantum limits to dynamical evolution*. Phys. Rev. A **67** 052109
- [48] Batle J, Casas M, Plastino A and Plastino A R 2005 *Connection between entanglement and the speed of quantum evolution*. Phys. Rev. A **72** 032337
- [49] Borrás A, Casas M, Plastino A R and Plastino A 2006 *Entanglement and the lower bounds on the speed of quantum evolution*. Phys. Rev. A **74** 022326
- [50] Pires D P, Cianciaruso M, Céleri L C, Adesso G, and Soares-Pinto D O 2016 *Generalized Geometric Quantum Speed Limits* Phys. Rev. X **6** 021031
- [51] Borrás A, Zander C, Plastino A R, Casas M, Plastino A 2008 *Entanglement and the quantum brachistochrone problem* Europhysics Letters **81** 30007
- [52] Carlini A, Hosoya A, Koike T, Okudaira Y 2006, *Time-Optimal Quantum Evolution*, Phys. Rev. Lett. **96** 060503
- [53] Verhulst T and Naudts J 2007, *Entanglement of a microcanonical ensemble*, Journal Physics A **40**, 2475.
- [54] Brody D C and Hook D W, 2006, *On optimum Hamiltonians for state transformations*. J. PHYS. A-MATH GEN Vol.( 39 ) No.( 11 ) pp L167 - L170, J. PHYS. A **40** 10949 (2007)(*Corrigendum*).

- [55] del Campo A, Egusquiza I L, Plenio M B and Huelga S F 2013, *Quantum Speed Limits in Open System Dynamics*, Phys. Rev. Lett. **110** 050403
- [56] Mirkin N, Toscano F and Wisniacki D A 2016, *Quantum-speed-limit bounds in an open quantum evolution*, Phys. Rev. A **94** 052125
- [57] Wootters W 1981 *Statistical distance and Hilbert space*. Physical Review D **23** 357.
- [58] Anandan J and Aharonov Y 1990, *Geometry of Quantum Evolution*. Phys. Rev. Lett. **65** 14 1697.
- [59] Anandan J 1991 *A Geometric Approach to Quantum Mechanics Foundations of Physics* vol 21 No. 11 1265.
- [60] Ashtekar A and Schilling T A 1995 *AIP Conf. Proc. Geometry of quantum mechanics* p 342
- [61] Schilling Troy A 1996 *Geometry of quantum mechanics*. A Thesis in Physics. The Pennsylvania State University
- [62] Dariusz Chruściński, *Geometric Aspects of Quantum Mechanics and Quantum Entanglement*, 2006 J. Phys.: Conf. Ser. **30** 002.
- [63] Majtey A, Lamberti P, Martin M. et al. 2005, *Wootters' distance revisited: a new distinguishability criterium Eur. Phys. J. D* **32** 413.
- [64] Brody D C and Huhston LP 2001, *Geometric quantum mechanics Journal of Geometry and Physics* **38** 1953
- [65] Heydari H 2016, *Geometric formulation of quantum mechanics*, arXiv:1503.00238v2 [quant-ph]
- [66] Kobayashi S and Nomizu K 1969 *Foundations of Differential Geometry* vol 2 (Ed. John Wiley)
- [67] Nakahara M 2003 *Geometry, Topology and Physics* (Second Edition. Graduate Student Series in Physics. Ed. Taylor and Francis)
- [68] Theodore Frankel, *The Geometry of Physics : An Introduction*. Cambridge University Press, 2018.
- [69] Sadri Hassani, *Mathematical Physics : A Modern Introduction to Its Foundations*. Springer International Publishing AG, 2013.
- [70] Bernard F. Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1980.
- [71] Bertlmann R A 1996 *Anomalies in Quantum Field Theory* (New York: Clarendon Press. Oxford University Press Inc)
- [72] Khoury A Z and Oxman L E 2014, *Topological phase structure of entangled qudits*. Physical Review A **89** 032106.
- [73] L.B. Levitin and T. Toffoli, “*Fundamental Limit on the Rate of Quantum Dynamics: The Unified Bound Is Tight*”, Phys. Rev. Lett. **103**, 160502 (2009).



- [74] L. Mandelstam and I. Tamm, “*The uncertainty relation between energy and time in nonrelativistic quantum mechanics*”, J. Phys. (USSR) **9**, 249 - 254 (1945).
- [75] “*The maximum speed of dynamical evolution*”, N. Margolus and L.B. Levitin, Physica D **120**, 188-195 (1998).
- [76] F. Campaioli, F.A. Pollock, F.C. Binder, and K. Modi, “*Tightening Quantum Speed Limits for Almost All States*”, Phys. Rev. Lett. **120**, 060409 (2018).
- [77] M.R. Frey, “*Quantum speed limits: primer, perspectives, and potential future directions*”, Quantum Information Processing **15**, 3919-3950 (2016).
- [78] C. Zander, A. Borras, A.R. Plastino, A. Plastino, and M. Casas, “*Entanglement and the speed of evolution of two interacting qubits*”, Journ. Phys. A: Math. Theor. **46**, 095302 (2013).
- [79] M.M. Taddei, B.M. Escher, L. Davidovich, R.L. de Matos Filho, “*Quantum Speed Limit for Physical Processes*”, Phys. Rev. Lett. **110**, 050402 (2013).
- [80] F. Frowis, “*Kind of entanglement that speeds up quantum evolution*”, Phys. Rev. A **85**, 052127 (2012).
- [81] C. Zander, A.R. Plastino, A. Plastino, and M. Casas, “*Entanglement and the speed of evolution of multi-partite quantum systems*”, Journ Phys A: Math. Theor. **40**, 2861-2872 (2007).
- [82] V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone, “*The role of entanglement in dynamical evolution*”, EPL **62**, 615-621 (2003).
- [83] J Anandan and Y. Aharonov, “*Geometry of quantum evolution*”. Phys. Rev. Lett. **65**, 1697-1700 (1990).
- [84] R.W. Robinett, *Quantum wave packet revivals*, Phys. Rep. **392**, 1-119 (2004)
- [85] E. Romera, F. de los Santos, “*Identifying Wave-Packet Fractional Revivals by Means of Information Entropy*”, Phys. Rev. Lett **99**, 263601-1-4 (2007).
- [86] D.N. Page and W.K. Wootters, *Evolution without Evolution: Dynamics Described by Stationary Observables* Phys. Rev. D **27**, 2885 (1983)
- [87] W. K. Wootters, “*Time replaced by quantum correlations*”, Int. J. Theor. Phys. **23**, 701-711 (1984).
- [88] C. Marletto and V. Vedral , “*Evolution Without Evolution and Without Ambiguities*”, Phys. Rev. D **95**, 043510-1-7 (2017).
- [89] A. Boette and R. Rossignoli, “*History states of systems and operators*”, Phys. Rev. A **98**, 032108-1-10 (2018).
- [90] P. A. Bouvrie, A. P. Majtey, A. R. Plastino, P. Sánchez-Moreno and J.S. Dehesa, “*Quantum entanglement in exactly soluble atomic models: the Moshinsky model with three electrons, and with two electrons in a uniform magnetic field*”, Eur. Phys. J. D **66**, 15-1-15 (2012).
- [91] P. A. Bouvrie, A. P. Majtey, M. C. Tichy, J. S. Dehesa and A. R. Plastino, “*Entanglement and the Born-Oppenheimer approximation in an exactly solvable quantum many-body system*”, Eur. Phys. J. D **68**, 346-1-13 (2014).

- [92] C. Tsallis, “*Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*”, Journ. Stat. Phys. **52**, 479-487 (1988).
- [93] C. Tsallis, “*The Nonadditive Entropy  $S_q$  and Its Applications in Physics and Elsewhere: Some Remarks*”, Entropy **13**, 1765-1804, (2011).
- [94] A.R. Plastino and R.S. Wedemann, “*Nonlinear Wave Equations Related to Nonextensive Thermostatistics*”, Entropy **19**, 60 (2017).
- [95] E. Curado, F. Nobre, and A. Plastino, “*Associating an Entropy with Power-Law Frequency of Events*”, Entropy **20**, 940 (2018).
- [96] A.P. Majtey, A.R. Plastino, and A. Plastino, “*New features of quantum discord uncovered by  $q$ -entropies*”, Physica A **391**, 2491-2499 (2012).
- [97] J.M. Amigo, S.G. Balogh, and S. Hernandez, “*A Brief Review of Generalized Entropies*”, Entropy **20**, 813 (2018).
- [98] M. Portesi, F. Holik, P.W. Lamberti, G.M. Bosyk, G. Bellomo, and S. Zozor, “*Generalized entropies in quantum and classical statistical theories*”, Eur. Phys. Journ. ST **227**, 344 (2018).
- [99] E.T. Jaynes. “*Information Theory and Statistical Mechanics*”. Physical Review, 106 **4**, 620–630 (1957).
- [100] E.T. Jaynes. “*Information Theory and Statistical Mechanics II*”. Physical Review, 108, **2** 171-190 (1957).
- [101] A.R. Plastino and A. Plastino, “*Maximum entropy and approximate descriptions of pure states*”, Phys. Lett. A **181**, 446-449 (1993).
- [102] A.M.C. Souza, “*Describing the ground state of quantum systems through statistical mechanics*”, Physica A **390**, 2686-2691 (2011).
- [103] A.M.C. Souza and F.D. Nobre, “*Thermodynamic framework for the ground state of a simple quantum system*”, Phys. Rev. E **95**, 012111 (2017).
- [104] A. Caticha, “*Entropic Dynamics*”, Entropy **17**, 6110-6128 (2015).
- [105] Carlo Rovelli, *Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 2008.
- [106] C. Kiefer, Int. Ser. Monogr. Phys. 136, 1 (2007).
- [107] N. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press, 2000).
- [108] J.C. Taylor, *Hidden Unity in Nature’s Laws* (Cambridge: Cambridge University Press, 2002).
- [109] C.J. Isham, *Lectures on Quantum Theory: Mathematical and Structural Foundations* (Imperial College Press, 1995).
- [110] D.V. Schroeder, *Entanglement isn’t just for spin*, Am. J. Phys. **85**, 812 (2017).
- [111] L. Davidovich, *The quantum of light and quantum optics*, Rev. Bras. Ensino Fis. **37**, 4205 (2015). pp.4205-1-4205-12. ISSN 1806-1117. <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11173732073>

- [112] A. Gomez-Rodríguez and J.-L. Aragon, *Teaching the mathematics of quantum entanglement using elementary mathematical tools*, Rev. Mex. de Física E **58**, 61 (2012).
- [113] R. Castellanos, R. Franco, and J. Silva-Valencia, *Calculation of concurrence to the Heisenberg model*, Rev. Bras. Ensino Fis **32**, 1 (2010). pp.1-7. ISSN 1806-1117.
- [114] R.Q. Odendaal and A.R. Plastino, *Entangled quantum particles in an infinite square well: knowledge of the whole versus knowledge of the parts* Eur. J. Phys. **31**, 193 (2010).
- [115] A.C. de la Torre, D. Goyeneche, and L. Leitao, *Entanglement for all quantum states* Eur. J. Phys. **31**, 325 (2010).
- [116] S. Curilef, C. Zander and A.R. Plastino, *Two particles in a double well: illustrating the connection between entanglement and the speed of quantum evolution* Eur. J. Phys. **27**, 1193 (2006).
- [117] G.B. Roston, M. Casas, A. Plastino and A.R. Plastino, *Quantum entanglement, spin1/2 and the Stern-Gerlach experiment* Eur. J. Phys. **26**, 657 (2005).
- [118] P. Tommasini, E. Timmermans and A.F.R. Toledo Piza, *The hydrogen atom as an entangled electron-proton system* Am. J. Phys. **66**, 881 (1998).
- [119] A. Ekert and P.L. Knight, *Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition* Am. J. Phys. **63**, 415 (1995).
- [120] John S. Briggs and Jan M. Rost, *On the Derivation of the Time-Dependent Equation of Schrödinger*, Foundations of Physics, Vol. **31**, No. 4, 2001.
- [121] P. Davies, *Quantum tunneling time*, Am. J. Phys. **73**, 23 (2005).
- [122] B.S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory* Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).
- [123] C. DeWitt-Morette, *The Pursuit of Quantum Gravity*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.
- [124] P.A.M. Dirac, *Lecture on Quantum mechanics*. Dover Publications, Inc, Mineola, New York, 1964.
- [125] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge System*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1991.
- [126] Rodolfo Gambini, Jorge Pullin, *A First Course in Loop Quantum Gravity*. Oxford University Press, 2011.
- [127] D. M. Gitman, I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer-Verlag, 1990.
- [128] D. Atkatz, *Quantum cosmology for pedestrians* Am. J. Phys. **62**, 619 (1994).
- [129] V. Giovannetti, S. Lloyd, and K. Maccone, *Quantum time* Phys.Rev. D **92**, 0450331 (2015).
- [130] S. Massar, P. Spindel, A.F. Varon and C. Wunderlich, *Investigating the emergence of time in stationary states with trapped ions* Phys. Rev. A **92**, 030102(R)1 (2015).

- [131] A. Boette, R. Rossignoli, N. Gigena and M Cerezo, *System-time entanglement in a discrete-time model*, Phys. Rev. A **93**, 0621271 (2016).
- [132] William K. Wootters, *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits*. Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
- [133] P. Rungta, V. Buzek, C.M. Caves, M. Hillery and G.J. Milburn, *Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions*. Phys. Rev. A **64**, 042315 (2001).
- [134] P. Zanardi, *Entanglement of quantum evolutions*, Phys. Rev. A **63**, 040304(R) (2001).
- [135] F. Buscemi, P. Bordone and A. Bertoni, *Linear entropy as an entanglement measure in two-fermion systems* Phys. Rev. A **75**, 032301 (2007).
- [136] M.C. Tichy, P.A. Bouvrie and K. Mølmer, *Collective Interference of Composite Two-Fermion Bosons*, Phys. Rev. Lett. **109**, 260403 (2012).
- [137] A.P. Majtey, P.A. Bouvrie, A. Valdes-Hernandez and A.R. Plastino, *Multipartite concurrence for identical-fermion systems*, Phys. Rev. A **93**, 032335 (2016).
- [138] A. Vidiella-Barranco, Phys. Lett. A **260**, 335 (1999).
- [139] L.C. Malacarne, R.S. Mendes and E.K. Lenzi, Pys. Rev. E **65**, 046131 (2002).
- [140] A. Wherl, *General properties of entropy*
- [141] N. Huggett, *Everywhere and Everywhen: Adventures in Physics and Philosophy* (Oxford: Oxford University Press, 2010).
- [142] S. Goldstein, J. L. Lebowitz, R. Tumulka and N. Zanghi, *Canonical typicality*, Phys. Rev. Lett. **96**, 050403 (2006).
- [143] S. Deffner and W. Zurek, *Foundations of statistical mechanics from symmetries of entanglement*, New J. Phys. **18** 063013 (2016).
- [144] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Wave function of the Universe*, Phys. Rev. D **28**, 2960 (1983).
- [145] C. Rovelli, *Quantum mechanics without time: A model*, Phy. Rev. D **42**, 8, 2638, (1990).
- [146] R. Gambini, R. A. Porto, J. Pullin, and S. Torterolo, *Conditional probabilities with Dirac observables and the problem of time in quantum gravity*, Phys. Rev. D **79**, 041501(R) (2009).
- [147] A. Albrecht and A. Iglesias, *Clock Ambiguity and the Emergence of Physical Laws*, Phys. Rev. D **77**, 063506 (2008).
- [148] V. Vedral, *Time, (Inverse) Temperature and Cosmological Inflation as Entanglement*, arXiv:1408.6965 (2014).
- [149] J. Leon and L. Maccone, *The Pauli Objection*, Found. Phys. **47**, 1597 (2017).
- [150] 0] L. R. Mendes and D. O. Soares-Pinto, *Time as a consequence of internal coherence*, Proc. Royal Soc. Lond A **475**, 20190470 (2019).
- [151] N. L. Diaz and R. Rossignoli, *History state formalism for Dirac's theory*, Phys. Rev. D **99**, 045008 (2019).

- [152] N. L. Diaz, J. M. Matera, and R. Rossignoli, *History state formalism for scalar particles*, Phys. Rev. D **100**, 125020 (2019).
- [153] J.R. McClean, J.A. Parkhill, and A. Aspuru-Guzik, *Feynman's clock, a new variational principle, and parallel-in-time quantum dynamics*, PNAS **110**, E3901 (2013).
- [154] E. Moreva, G. Brida, M. Gramegna, V. Giovannetti, L. Maccone, and M. Genovese, *Time from quantum entanglement: An experimental illustration*, Phys. Rev. A **89**, 052122 (2014).
- [155] D. Pabón, L. Rebón, S. Bordakevich, N. Gigena, A. Boette, C. Iemmi, R. Rossignoli, and S. Ledesma, *Parallel-in-time optical simulation of history states*, Phys. Rev. A **99**, 062333 (2019).
- [156] A. P. Majtey, A. Valdés-Hernández, C. G. Maglione and A. R. Plastino, *Entropic characterization of quantum states with maximal evolution under given energy constraints*, Entropy **21**, 770 (2019).
- [157] A. Valdés-Hernández, C. G. Maglione, A. P. Majtey, A. R. Plastino. *Entanglement and the ticking of the clock*, Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. **42**, e20190313 (2020).
- [158] A. Schild, *Time in quantum mechanics: A fresh look at the continuity equation*, Phys. Rev. A, **98**, 052113 (2018).
- [159] R. V. Buniy and S. D. H. Hsu, *Everything is entangled*, Phys. Lett. B **718**, 233 (2012).
- [160] D. N. Page, *Density matrix of the Universe*, Phys. Rev. D **34** (1968) 2267.
- [161] V. G. Gurzadyan and A. A. Kocharyan, *On pure and mixed quantum states of the Universe*, Mod. Phys. Lett. A **4** (1989) 507.
- [162] D. Deutsch, *Quantum mechanics near closed timelike lines*, Phys. Rev. D **44** (1991) 3197.
- [163] J. Anandan and Y. Aharonov, *Meaning of the Density Matrix*, Found. Phys. Lett. **12**, 571 (1999).
- [164] H. Everett III, *"Relative State" Formulation of Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **29**, 454 (1957). *The theory of the universal wavefunction, in The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, edited by B. DeWitt and N. Graham, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [165] A. Wehrl, *General properties of entropy*, Rev. Mod. Phys. **50**, 221 (1978).
- [166] M. A. Nielsen and J. Kempe, *Separable States Are More Disordered Globally than Locally*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5184 (2001).
- [167] J. Batle, A. R. Plastino, M. Casas and A. Plastino, *Conditional q-entropies and quantum separability: a numerical exploration*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 10311 (2002).
- [168] L. Henderson, and V. Vedral, *Classical, quantum and total correlations*. J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 6899–6905.
- [169] Harold Ollivier and Wojciech H. Zurek, *Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations*. Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001).

- [170] Mark Van Raamsdonk, *Building up spacetime with quantum entanglement*. Gen. Relativ. Gravit. (2010) 42:2323–2329. DOI 10.1007/s10714-010-1034-0.
- [171] A. Valdés-Hernández, C. G. Maglione, A. P. Majtey, and A. R. Plastino, *Emergent dynamics from entangled mixed states*. Phys. Rev. A **102**, 052417 (2020).

---

Complementos del Capítulo 2

---

### A.1. Complementos geométricos

Para comprender el significado del levantamiento horizontal de una curva, tenemos que recurrir a los conceptos técnicos del haz de fibras o como usualmente se lo conoce, *fibrados*. Un tratamiento riguroso y extenso de este tema se puede encontrar en [66, 67, 71]. Esta estructura consiste del fibrado principal- $U(1)$   $P(X, G) \equiv \mathcal{N}_0$ , donde  $X$  es el espacio base que nosotros identificamos con el espacio proyectivo de Hilbert  $\mathcal{PH} \equiv X$ , y la fibra se elige para que sea idéntica al grupo de estructura  $G = U(1)$ . En la parte superior de un punto base determinado  $\rho \in \mathcal{PH}$  hay un valor total de  $U(1)$  en puntos en  $\mathcal{N}_0$ , esto es, una fibra completa  $\Pi^{-1}([\psi]) \in \mathcal{N}_0$ , como se indica en la figura A.1. Todos estos puntos se proyectan sobre el punto base dado y  $U(1)$  actúa de manera transitiva sobre cada fibra. Se puede asignar a cada punto  $|\psi\rangle \in \mathcal{N}_0$  un espacio tangente. Cada vector en el espacio tangente es el vector tangente a una curva suave con parámetro  $s$ ,  $|\psi(s)\rangle$ , pasando por  $|\psi\rangle$  en  $s = 0$ . Toda la curva se encuentra en  $\mathcal{N}_0$ , por lo tanto, a lo largo de la curva, debe cumplirse la condición  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ .

Dado que  $s$  es real, los espacios tangentes deben considerarse naturalmente como espacios lineales reales. Entonces, encontramos para  $|\psi\rangle \in \mathcal{N}_0$

$$T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0 = \{|\phi\rangle \in \mathcal{H} : \langle\psi|\phi\rangle = \text{imaginario puro}\} = \text{espacio lineal real.} \quad (\text{A.1})$$

Dentro de cada espacio tangente, la acción  $U(1)$  define lo que se llama un subespacio vertical, definido por

$$V_{|\psi\rangle} := \{|\psi\rangle \in T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0 : \Pi_*(|\psi\rangle) = 0\}, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\Pi_*$  es un mapa inducido (la acción del pushforward).

Luego el complemento de  $V_{|\psi\rangle}$  en  $T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$  es el subespacio horizontal  $H_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$ . En esta configuración, es posible definir una *conexión* mediante la asignación suave de un subespacio horizontal del espacio tangente en cada punto de  $\mathcal{N}_0$ , obedeciendo ciertos requisitos:

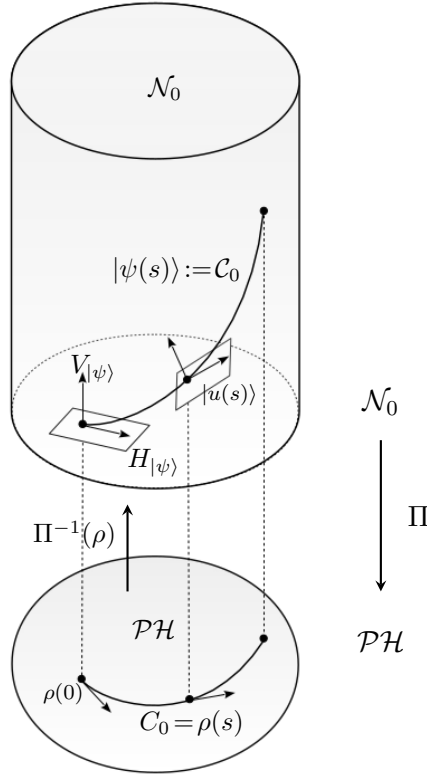
1.  $T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0 = V_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0 \oplus H_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$
2.  $H_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$  debe proyectarse uno a uno sobre el espacio tangente a  $\mathcal{PH}$  en  $\Pi(|\psi\rangle)$
3.  $e^{i\alpha} \in U(1), |\phi\rangle \in H_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0 \Rightarrow e^{i\alpha} |\phi\rangle \in H_{e^{i\alpha}|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$ .

La primera condición implica que cualquier estado  $|\psi\rangle \in T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$  se puede descomponer en una suma directa  $|\psi\rangle = |\psi^V\rangle + |\psi^H\rangle$  con  $|\psi^V\rangle \in V_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$  y  $|\psi^H\rangle \in H_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$ . La tercera condición significa que el subespacio horizontal  $H_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$  y  $H_{e^{i\alpha}|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$  sobre la misma fibra están conectados por la acción del grupo  $U(1)$ . Del proyector canónico  $\Pi : \mathcal{N}_0 \rightarrow \mathcal{PH}$  tenemos un mapa inducido  $\Pi_* : T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0 \rightarrow T_{\Pi(|\psi\rangle)}\mathcal{PH}$  donde  $\ker \Pi_* = V_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$ . Luego, este mapa inducido es un isomorfismo desde el subespacio horizontal hacia el espacio tangente  $\Pi_* : H_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0 \rightarrow T_{\Pi(|\psi\rangle)}\mathcal{PH}$ . Por esta razón cualquier vector tangente  $|\psi\rangle \in T_{|\psi\rangle}\mathcal{PH}$  puede **levantarse** desde la variedad base  $\mathcal{PH}$  a un único vector en el subespacio horizontal del fibrado,  $|\tilde{\psi}\rangle \in H_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$ . Decimos entonces que el vector  $|\tilde{\psi}\rangle$  es un **levantamiento horizontal** de  $|\psi\rangle$  si  $\Pi_*|\tilde{\psi}\rangle = |\psi\rangle$  y  $|\tilde{\psi}^V\rangle = 0$ . Como lo señalamos antes, se puede definir una conexión especificando un funcional lineal o *uno-forma*  $A_{|\psi\rangle}$ , esto es, una funcional lineal real sobre el espacio tangente tal que su espacio nulo (núcleo) en cada punto nos de el espacio horizontal en aquel punto. De esta manera, definimos la acción de  $A_{|\psi\rangle}$  sobre  $\mathcal{N}_0$  como

$$|\psi\rangle \in \mathcal{N}_0, |\phi\rangle \in T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0 : A_{|\psi\rangle}(|\phi\rangle) = -i \langle \psi | \phi \rangle, \tag{A.3}$$

y el subespacio horizontal como

$$H_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0 = \{|\phi\rangle \in T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0 : A_{|\psi\rangle}(|\phi\rangle) = 0\}. \tag{A.4}$$



**Figura A.1:** Esquema del espacio  $\mathcal{N}_0$ , del espacio proyectivo de Hilbert  $\mathcal{PH}$  y del fibrado principal  $\Pi$ . Se muestra la descomposición del espacio tangente  $T_{|\psi\rangle}\mathcal{N}_0$ ; el levantamiento de la curva  $C_0$  y el significado del transporte paralelo.



Una curva base  $C_0 \in \mathcal{PH}$ ,  $\rho(s) : s \in [0, 1] \rightarrow \mathcal{PH}$ , figura A.1, se dice que es “levantada horizontalmente” sobre la fibra  $\Pi^{-1}(|\psi\rangle) \equiv \Pi^{-1}(\rho) \in \mathcal{N}_0$ , si  $\Pi(C_0) = C_0$  y su vector tangente  $|u(s)\rangle$  a lo largo de la curva  $C_0$  verifica  $|u(s)\rangle \in H_{|\psi(s)\rangle}$ , equivalentemente  $A_{|\psi(s)\rangle}(|u(s)\rangle) = 0$ . Esto da a la funcional  $A_{|\psi\rangle}$  el significado de una verdadera conexión sobre el fibrado principal- $U(1)$ , y permite construir el significado de **transporte paralelo** sobre la fibra a lo largo de la curva base  $C_0$ . De esta forma, el concepto de transporte paralelo de un vector tangente  $|u(s)\rangle$  a  $C_0$  a lo largo de la curva base  $C_0 := \rho(s)$  es proporcionado por el levantamiento horizontal  $C_0$ .

## A.2. Enfoque alternativo del transporte paralelo

Consideremos una curva  $C_0$  de estados en  $\mathcal{PH}$ , parametrizada por  $s$ . Esto es,

$$\begin{aligned} C_0 \subset \mathcal{N}_0 &\rightarrow C_0 = \Pi(C_0) \subset \mathcal{PH}; \\ C_0 : s \in [s_1, s_2] &\rightarrow |\psi(s)\rangle\langle\psi(s)| =: \rho(s) \equiv C_0, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Asumimos que los estados  $|\psi(s)\rangle$  varían suavemente sobre la curva  $C_0$ . Una de las condiciones naturales para el transporte paralelo está representada por la constancia de la norma  $\langle\psi(s)|\psi(s)\rangle = \text{constante}$  y además, otra condición que se pide es que el estado  $|\psi(s)\rangle$  y un desplazamiento infinitesimal de este  $|\psi(s+ds)\rangle$  tengan la *misma fase*, es decir  $\langle\psi(s)|\psi(s+ds)\rangle \in \mathbb{R}^+$ .

Realizando una expansión a primer orden de  $\langle\psi(s)|\psi(s+ds)\rangle$  tenemos:

$$\langle\psi(s)|\psi(s+ds)\rangle = \langle\psi(s)|\psi(s)\rangle + \langle\psi(s)|\frac{d}{ds}|\psi(s)\rangle ds + \mathcal{O}(ds^2). \quad (\text{A.6})$$

la cual es real a primer orden si pedimos que

$$\text{Im}\langle\psi(s)|\frac{d}{ds}|\psi(s)\rangle = 0. \quad (\text{A.7})$$

En otras palabras, dos estados infinitesimalmente cercanos son paralelos si están en fase.

## A.3. Deducción de la ecuación de geodésica

En este apéndice vamos a derivar la ecuación de geodésica (2.41) presentada en la sección 2.3.1. Comencemos con la funcional que nos da la longitud de la curva de estados  $C_0 \subset \mathcal{PH}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[C_0] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\perp\langle u(t)|u(t)\rangle_{\perp}} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\langle u(t)|u(t)\rangle - \langle u(t)|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|u(t)\rangle}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Las geodésica en el espacio  $\mathcal{PH}$  son aquellas curvas  $C_0$  que hacen estacionaria a esta funcional. Para buscar la ecuación de geodésica (2.41) debemos realizar un cálculo variacional. Vamos a omitir por simplicidad el argumento  $t$  de las expresiones, y vamos a realizar un cambio infinitesimal  $\delta|\psi\rangle$  en

el estado  $|\psi\rangle$ ,

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}[C_0] &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{\| |u\rangle_{\perp} \|} \delta \{ \langle u|u\rangle - \langle u|\psi\rangle\langle\psi|u\rangle \} \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{\| |u\rangle_{\perp} \|} \{ \langle\delta u|u\rangle + \langle u|\delta u\rangle - \langle\delta u|\psi\rangle\langle\psi|u\rangle \\
&\quad - \langle u|\delta\psi\rangle\langle\psi|u\rangle - \langle u|\psi\rangle\langle\delta\psi|u\rangle - \langle u|\psi\rangle\langle\psi|\delta u\rangle \} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{\| |u\rangle_{\perp} \|} \operatorname{Re} \{ \langle\delta u|u\rangle - \langle\delta u|\psi\rangle\langle\psi|u\rangle - \langle\delta\psi|u\rangle\langle u|\psi\rangle \} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{\| |u\rangle_{\perp} \|} \operatorname{Re} \{ \langle\delta u|u\rangle_{\perp} - \langle\delta\psi|u\rangle\langle u|\psi\rangle \}.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

En la cuarta línea se ha usado la definición de  $|u\rangle_{\perp}$  dada en (2.38). De igual manera, en el segundo término de la última línea, empleando (2.38) y el hecho de que  $\langle u|\psi\rangle$  y  $\langle\delta\psi|u\rangle$  son imaginario puro, tenemos:

$$\delta\mathcal{L}[C_0] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{\| |u\rangle_{\perp} \|} \operatorname{Re} \{ \langle\delta u|u\rangle_{\perp} + \langle\delta\psi|u\rangle_{\perp}\langle\psi|u\rangle \}. \tag{A.10}$$

Integrando por partes el término correspondiente a  $|\delta u\rangle$ , tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{\| |u\rangle_{\perp} \|} \operatorname{Re} \langle\delta u|u\rangle_{\perp} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \operatorname{Re} \langle\delta u|\hat{u}\rangle_{\perp} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \operatorname{Re} \left\langle \delta \frac{d\psi}{dt} \middle| \hat{u} \right\rangle_{\perp} = \int_{t_1}^{t_2} dt \operatorname{Re} \left\langle \frac{d}{dt} \delta\psi \middle| \hat{u} \right\rangle_{\perp} \\
&= \langle\delta\psi|\hat{u}\rangle_{\perp} - \int_{t_1}^{t_2} dt \langle\delta\psi| \frac{d}{dt} \hat{u} \rangle_{\perp},
\end{aligned} \tag{A.11}$$

donde definimos  $|\hat{u}\rangle_{\perp} = |u\rangle_{\perp} / \| |u\rangle_{\perp} \|$ ; llevando el resultado de la integración anterior a la variación  $\delta\mathcal{L}[C_0]$ , descartando el primer término de frontera, se tiene:

$$\delta\mathcal{L}[C_0] = - \int_{t_1}^{t_2} dt \operatorname{Re} \left( \langle\delta\psi| \frac{d}{ds} \frac{|u\rangle_{\perp}}{\| |u\rangle_{\perp} \|} - \langle\psi|u\rangle \frac{|u\rangle_{\perp}}{\| |u\rangle_{\perp} \|} \right). \tag{A.12}$$

Como siempre, la ecuación para la geodésica se obtiene pidiendo que esta última integral se anule para variaciones arbitrarias de  $|\delta\psi\rangle$ , sujeto a la condición  $\langle\delta\psi|\psi\rangle$  sea puramente imaginario. Tenemos finalmente la ecuación (2.41):

$$\left( \frac{d}{dt} - iA_{|\psi(t)\rangle} \right) \frac{|u(t)\rangle_{\perp}}{\| |u\rangle_{\perp} \|} = f(t) |\psi\rangle, \quad f \text{ real.} \tag{A.13}$$

---

## Un aspecto del problema del tiempo

---

*“Un hombre con un reloj sabe qué hora es, un hombre con dos relojes nunca está muy seguro.”*

En este apéndice vamos a mostrar solo un aspecto relacionado al *problema del tiempo* en teorías parametrizadas. Veremos cómo surge este problema a nivel clásico y comentaremos la cuantización extendida de una teoría como esta.

### B.1. El problema del modelo dinámico no relativista parametrizado

Vamos a describir un modelo para un sistema parametrizado que, si bien es artificial, es importante ya que nos da una buena idea de lo que sucede en teorías que son invariantes ante reparametrizaciones como la Relatividad y Supercuerdas, *Loop Quantum Gravity*, entre otras [105], [106].

Recordemos que la ley fundamental de la mecánica de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$  es válida en sistemas inerciales. En otras palabras, el reloj que usamos para medir el tiempo tiene ciertas propiedades. Supongamos que queremos estudiar el sistema dinámico con un “mal” reloj, el cual atrasa en forma consistente y no-lineal, y el tiempo  $t$  que mide es una función conocida del tiempo  $\tau$  usado en un sistema inercial donde “vale la ley de Newton”<sup>1</sup>. ¿Podríamos estudiar la dinámica con un reloj defectuoso? Sí podemos, pero la formulación de la ley de Newton sería más complicada que  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Sin embargo, si conocemos la relación que vinculan los dos relojes, las conclusiones que obtendríamos al comparar con aquellas logradas con un buen reloj deberían ser las mismas.

Para ver esto de una manera más formal, consideremos la *acción* de un modelo unidimensional,

---

<sup>1</sup>La expresión entre comillas, no pone en duda la validez de la ley de Newton en sistemas inerciales, solo pretende llamar la atención sobre el reloj usado para registrar el tiempo, este reloj puede ser tan malo como el que se está comparando y tal vez mejor que algún otro en otro sistema inercial. ¿Cómo podemos asegurar que tenemos un “buen” reloj? No podemos. Tal vez una opción sea considerar aquel que nos permita expresar la ley de Newton de la manera más sencilla.

de una partícula puntual (no relativista), con un Lagrangiano independiente del tiempo<sup>2</sup>

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}). \quad (\text{B.1})$$

Si ahora promovemos el parámetro  $t$  (el tiempo absoluto o Newtoniano) al rango de una variable dinámica introduciendo la parametrización<sup>3</sup>  $\tau(t)$ , tenemos de esta manera una parametrización del espacio configuración del sistema,  $(t, q) \rightarrow (t(\tau), q(\tau))$ . Representemos las derivadas de estas variables respecto a  $\tau$  con un punto y asumimos la restricción  $\dot{t} > 0$ . La acción con esta nueva parametrización es:

$$S[q(\tau), t(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \dot{t} L\left(q, \frac{\dot{q}}{\dot{t}}\right) \equiv \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \tilde{L}(q, \dot{q}, \dot{t}). \quad (\text{B.2})$$

Podemos observar que el Lagrangiano  $\tilde{L}$  posee una propiedad importante: es homogéneo (de grado uno) en las velocidades,  $\tilde{L}(q, \lambda\dot{q}, \lambda\dot{t}) = \lambda L(q, \dot{q}, \dot{t})$ , donde  $\lambda$  también puede ser una función arbitraria de  $\tau$ . Los Lagrangianos homogéneos son importantes porque conducen a *acciones* que son invariantes bajo las reparametrizaciones  $\tau \rightarrow \tilde{\tau} \equiv f(\tau)$ . En efecto, lo que tenemos es una acción escrita como una  $\tilde{\tau}$ -integral sobre el mismo Lagrangiano; si tomamos  $\dot{f} > 0$ , tenemos:

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L(q, \dot{q}) = \int_{\tilde{\tau}_1}^{\tilde{\tau}_2} \frac{d\tilde{\tau}}{\dot{f}} L\left(q, \frac{dq}{d\tilde{\tau}} \dot{f}\right) = \int_{\tilde{\tau}_1}^{\tilde{\tau}_2} d\tilde{\tau} L\left(q, \frac{dq}{d\tilde{\tau}}\right). \quad (\text{B.3})$$

Los momentos canónicos para las variables de configuración extendidas, lo encontramos a partir de la acción (B.2):

$$\begin{aligned} \tilde{p}_q &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{t} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\dot{q}}{\dot{t}}\right)} \frac{1}{\dot{t}} = p_q \\ p_t &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{t}} = L\left(q, \frac{\dot{q}}{\dot{t}}\right) + \dot{t} \frac{\partial L\left(q, \frac{\dot{q}}{\dot{t}}\right)}{\partial \dot{t}} = \\ &= L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) - \frac{dq}{dt} \frac{\partial L(q, dq/dt)}{\partial (dq/dt)} = -\mathcal{H}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

De estas ecuaciones notamos que  $t$  y el negativo del Hamiltoniano  $-\mathcal{H}$ , correspondiente a la acción (B.1) representan pares conjugados. Mientras que el Hamiltoniano correspondiente a  $\tilde{L}$  es:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{p}_q \dot{q} + p_t \dot{t} - \tilde{L} = \dot{t}(\mathcal{H} + p_t). \quad (\text{B.5})$$

La expresión anterior nos permite definir una nueva cantidad llamada el *Super-Hamiltoniano*:

$$\mathcal{H}_S := \mathcal{H} + p_t. \quad (\text{B.6})$$

Usando en esta expresión los momentos canónicos (B.4) encontramos un vínculo de la teoría:

$$\mathcal{H}_S \approx 0. \quad (\text{B.7})$$

<sup>2</sup>Esta discusión se puede generalizar a  $n$  partículas y al caso relativista sin mayores dificultades.

<sup>3</sup>Este es un ejemplo de una estructura donde absolutamente se enmascara el tiempo, en otras palabras, estamos reemplazando un “mal reloj” por otro “mal reloj”.

El símbolo  $\approx$  debe entenderse como una *igualdad débil* en el sentido de Dirac [124], quien sentó las bases para un tratamiento formal de teorías con vínculos (más sobre esto en [105], [106], [125], [126]). Esta ecuación débil define un subespacio en el espacio de fase y es igual a cero solamente *luego* de que todos los corchetes de Poisson se han evaluados<sup>4</sup>. En este sentido resulta ser que nuestro Super-Hamiltoniano es un vínculo de la teoría, relaciones entre  $q$  y  $p$  que valen para todo tiempo en la evolución del sistema. En otras palabras, es una cantidad conservada en el sistema (si bien se anula) pero se debe conservar. Recordemos que las cantidades conservadas están asociadas a simetrías en los sistemas físicos, por consiguiente,  $\mathcal{H}_S$  es generador de simetrías<sup>5</sup>.

*¿Qué es lo que está sucediendo?* El Super-Hamiltoniano evaluado en los vínculos se anula idénticamente, esto es, en sistemas como este no hay *evolución temporal* se encuentran congelados. En realidad la existencia del vínculo Hamiltoniano define un flujo en el subespacio de fase que genera la igualdad débil anterior, este flujo es la única dinámica del sistema. El uso de relojes arbitrarios en la teoría genera trayectorias dinámicas equivalentes. Es decir, la arbitrariedad del reloj introduce una simetría en el sistema y la única dinámica del sistema es producto de la simetría. La dinámica verdadera no es arbitraria, tiene que ser desmadejada del uso de relojes arbitrarios.

Uno puede reformular el principio de mínima acción incorporando este vínculo mediante multiplicadores de Lagrange

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (p_q \dot{q} + p_t \dot{t} - N \mathcal{H}_S), \quad (\text{B.9})$$

donde todas las cantidades presentes (inclusive el multiplicador  $N$ ) deben variarse. La variación de  $N$  permite obtener el vínculo encontrado. De las ecuaciones de Hamilton se obtiene:

$$\dot{t} = \frac{\partial(N \mathcal{H}_S)}{\partial p_t} = N. \quad (\text{B.10})$$

El multiplicador  $N$  se llama la función lapso (*lapse function*) y nos da la rapidez de cambio del tiempo Newtoniano  $t$  respecto al parámetro  $\tau$ . El Hamiltoniano total expresado por (B.5) es:

$$\tilde{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{Tot}} := N(\tau) \mathcal{H}_S(q, p_q, t, p_t) \quad (\text{B.11})$$

Con este Hamiltoniano, las ecuaciones de *evolución* resultan:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \{q, \mathcal{H}_{\text{Tot}}\} = N p_q, & \dot{p}_q &= 0 \\ \dot{t} &= \{t, \mathcal{H}_{\text{Tot}}\} = N, & \dot{p}_t &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

La existencia del vínculo (B.7) es una consecuencia de la invariancia de reparametrización con respecto a  $\tau$  que tiene la teoría planteada. En general, una teoría Lagrangiana homogénea en las

<sup>4</sup>Lo sorprendente de este formalismo es que el problema queda reducido a un problema de sistemas de ecuaciones lineales encontradas en álgebra lineal. Las soluciones encontradas permiten entender el significado físico detrás de las transformaciones de gauge.

<sup>5</sup>Para ver esto, supongamos una cantidad conservada  $\mathcal{O}$  definida en el espacio de fases, a la cual se le puede asociar un flujo en este espacio

$$\frac{dq}{d\lambda} = \{q, \mathcal{O}\}, \quad \frac{dp}{d\lambda} = \{p, \mathcal{O}\}. \quad (\text{B.8})$$

El flujo  $q(\lambda)$ ,  $p(\lambda)$  representa una trayectoria en el espacio de fases (tal vez sin mucho sentido). Pero si la cantidad  $\mathcal{O}$  es conservada en la evolución, quiere decir que es invariante por el flujo de evolución  $\{\mathcal{O}, \mathcal{H}\} = 0$ . Recíprocamente, esta ecuación implica que  $\mathcal{H}$  es dejado invariante por el flujo generado por  $\mathcal{O}$ . En otras palabras, existe una curva en el espacio de fases a lo largo del cual uno puede deslizar el  $\mathcal{H}$  del sistema sin modificar sus propiedades mecánicas. Estas curvas indican una simetría que dependerá de la naturaleza de  $\mathcal{O}$ , [126].

velocidades es equivalente a que su correspondiente Hamiltoniano sea cero. Se ha demostrado anteriormente que la homogeneidad es equivalente a la invariancia de reparametrización.

Dado un Lagrangiano homogéneo, se encuentra para el Hamiltoniano canónico,

$$\mathcal{H}_c = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = \lambda^{-1} \left( \frac{\partial L(q, \lambda \dot{q})}{\partial (\lambda \dot{q})} \lambda \dot{q} - L(q, \lambda \dot{q}) \right) = \lambda^{-1} \mathcal{H}_c. \quad (\text{B.13})$$

Como  $\lambda$  es arbitrario, entonces  $\mathcal{H}_c$  debe necesariamente anularse. En otras palabras, si  $\mathcal{H}_c$  se anula, al sustituir  $\dot{q}$  por  $\lambda \dot{q}$ ,

$$\frac{\partial L(q, \lambda \dot{q})}{\partial \dot{q}} \dot{q} = L(q, \lambda \dot{q}), \quad (\text{B.14})$$

el lado izquierdo de esta expresión se puede escribir como  $\lambda p_q \dot{q} = \lambda L$  y así verificamos la homogeneidad de  $L$ , esto es:  $\lambda L(q, \dot{q}) = L(q, \lambda \dot{q})$ <sup>6</sup>.

Aunque el tiempo de Newton se ha mezclado con las otras variables dinámicas, se lo puede recuperar fácilmente, ya que su momento  $p_t$  se encuentra linealmente expresado en (B.6). Si asumimos por ejemplo un Hamiltoniano usual  $\mathcal{H} = p_q^2/2m + V(q)$ , (sin pérdida de generalidad se podría tomar el caso más sencillo, la partícula libre  $V(q) = 0$ ). Resolviendo el vínculo (B.7) se encuentra que  $p_t = -\mathcal{H}$  y si escogemos la función lapso  $N = \text{constante}$  (a esto se le llama “fijar el gauge”), encontramos:

$$S = \int dt \left( p_q \frac{dq}{dt} - \mathcal{H} \right), \quad (\text{B.15})$$

que es la acción estándar (B.1) en su forma Hamiltoniana, y de las expresiones (B.12) se recobra la mecánica Newtoniana. Este proceso se conoce como *desparametrización* de la teoría<sup>7</sup>.

## B.2. Cuantización: Espacio de Hilbert extendido

¿Cómo se cuantifica un sistema dado por una restricción como (B.7)? Un procedimiento exitoso, aunque heurístico, se debe a Dirac [124]. Una restricción clásica se implementa en la teoría cuántica como una restricción a las funciones de onda permitidas físicamente. Por tanto, (B.7) se traduce en

$$\hat{H}_S |\Psi\rangle = 0, \quad (\text{B.16})$$

donde  $\hat{H}_S$  denota el operador Super-Hamiltoniano asociado con su homólogo clásico  $\mathcal{H}_S$ . En la representación de la posición,  $\hat{q}$  se representan mediante la multiplicación por  $q$  y los momentos  $\hat{p}$  se representan mediante derivadas  $(\hbar/i)\partial/\partial q$ . Para la partícula parametrizada, esto incluye también  $\hat{p}_t = (\hbar/i)\partial/\partial t$ . Por lo tanto, la versión cuántica de la restricción (B.6, B.7) es:

$$\left( \hat{H} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) |\Psi(q, t)\rangle = 0, \quad (\text{B.17})$$

que es simplemente la ecuación de Schrödinger. ¿Significa esto que  $t$  ahora ha sido incorporado a la QM como una variable dinámica? La respuesta es no. Ya hemos mencionado que el tiempo no

<sup>6</sup>Se puede tener invariancia de reparametrización sin restricción Hamiltoniana si  $q$  y  $p$  no transforman como escalares bajo reparametrizaciones [125]. Sin embargo, esta no es una situación natural. En este caso, el teorema que se acaba de demostrar sigue siendo cierto, pero se pierde la conexión con la invariancia de reparametrización.

<sup>7</sup>Este procedimiento en Relatividad General resulta ser una complicación, los momentos canónicos aparecen en forma cuadrática en expresiones como (B.6, B.7).

puede ser representado por un operador (por ejemplo, estaría en contradicción con la delimitación de la energía). Esta es la consecuencia de tener una estructura absoluta disfrazada: sigue siendo una estructura absoluta en la teoría cuántica, a pesar de su apariencia formal como una variable cuántica.

La cuantización canónica del *espacio de fase extendido*, el cual incorpora a  $t$  y  $p_t$  como variables conjugadas, define la extensión cuántica natural para este sistema, el cual requiere un espacio de Hilbert extendido, que podemos escribir como:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_q \otimes \mathcal{H}_t. \quad (\text{B.18})$$

Donde  $\mathcal{H}_t$  es el subsistema donde viven los relojes, el cual es isomorfo, por ejemplo, al espacio de Hilbert de una partícula sobre una línea. El vínculo Super-Hamiltoniano  $\mathcal{H}_S$ , define el *operador-vínculo*:

$$\hat{H}_S = \hat{H}_q \otimes \mathbb{1}_t + \mathbb{1}_q \otimes \hat{H}_t, \quad (\text{B.19})$$

donde  $\hat{H}_q$  es el Hamiltoniano del sistema, y  $\mathbb{1}_q$  y  $\mathbb{1}_t$  son las identidades en  $\mathcal{H}_q$  y  $\mathcal{H}_t$ . Por construcción  $\hat{H}_S$  es autoadjunto y tiene un espectro continuo que incluye todos los valores reales posibles como autovalores generalizados. El operador-vínculo define el *subespacio físico* de la teoría  $\mathcal{H}_{\text{Fis}}$ , donde se encuentran los *vectores físicos*  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{Fis}} \subset \mathcal{H}_q \otimes \mathcal{H}_t$  que satisfacen:

$$\hat{H}_S |\Psi\rangle = (\hat{H}_q \otimes \mathbb{1}_t + \mathbb{1}_q \otimes \hat{H}_t) |\Psi\rangle = 0. \quad (\text{B.20})$$

Es decir, la ecuación (B.20) fuerza a los vectores físicos a ser autoestados del Super-Hamiltoniano con autovalor nulo, consistentemente con la ecuación de Wheeler-DeWitt. De acuerdo a este modelo, los estados  $|\Psi\rangle$  son objetos “estáticos” que no evolucionan. En otras palabras, la ecuación (B.20) es precisamente la ecuación universal del formalismo introducido por Page y Wootters para una partícula unidimensional y un tiempo continuo.

En este apéndice mostramos solo un aspecto del llamado *problema del tiempo*, cómo surge en esta clase de teorías que son invariantes ante reparametrizaciones, si bien el modelo que usamos es simple, este captura notablemente las dificultades que se presentan en modelos más realistas. También, dentro de este contexto, hemos dado una explicación de la ecuación de partida del formalismo *timeless* y que ha sido disparador de la sección 3.4 y de los capítulos 5 y 6 de esta tesis. Las referencias indicadas en este apéndice son suficientes para introducir al lector en este fascinante asunto.





---

## Publicaciones y presentaciones en congresos

---

### Publicaciones

- A. P. Majtey, A. Valdés-Hernández, C. G. Maglione and A. R. Plastino, *Entropic characterization of quantum states with maximal evolution under given energy constraints*, Entropy **21**, 770 (2019).
- A. Valdés-Hernández, C. G. Maglione, A. P. Majtey, A. R. Plastino. *Entanglement and the ticking of the clock*, Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. **42**, e20190313 (2020).
- A. Valdés-Hernández, C. G. Maglione, A. P. Majtey, A. R. Plastino. *Emergent dynamics from entangled mixed states*, Phys. Rev. A, **102**, 052417 (2020).

### Presentaciones en congresos

- VII Jornadas de Fundamentos de Cuántica: 90 años de incerteza. Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación. Córdoba, Argentina, 29 Noviembre al 1 de Diciembre de 2017 *Entanglement and optimal evolution: A geometric approach*. César Germán Maglione, Ana P. Majtey y Walter Lamberti.
- Cuantos 2018 - 1er Taller Argentino de Cuántica. Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación. Córdoba, Argentina, 25 – 27 Abril, 2018. *Entrelazamiento y dinámica en un mundo cuántico sin tiempo*. César Germán Maglione, Ana Paula Majtey, Andrea Valdés-Hernández, Angel Ricardo Plastino.
- *Entropic Characterization of Quantum States with Maximal Evolution under Given Energy Constraints*. C.G. Maglione, A.P. Majtey, A. Valdés-Hernández, A.R. Plastino. IX CONFERENCE ON QUANTUM FOUNDATIONS - FaMAF, UNC 27 – 29 Noviembre 2019.



---

### Agradecimientos...

---

Debo reconocer que este trabajo fue posible gracias a varias personas que voluntariamente, o no, me dieron su soporte e impulso, a cada una les debo mi gratitud de todo corazón. Es así que, en cada gramo, en cada bit escrito en esta tesis también intenté plasmar el aporte emocional de aquellos que sentí a mi lado en estos años y que fue fundamental para que mis brazos no cayeran. Tengo mucho por agradecerles y sé que no necesitan que sus nombres queden escritos en esta tesis que tal vez no entiendan, sin embargo considero que merecen ser mencionadas y quiero intentarlo.

Quisiera comenzar agradeciendo a Ana no solo por dirigir esta tesis y por enseñarme todo lo que aprendí en este trabajo, sino por hacerme sentir que tenía en todo momento una compañera, por dejarme volar y traerme de vuelta. Va también mi gratitud a Walter Lamberti por animarme al cambio en el momento que más lo necesitaba y por sus estimulantes charlas. Al Guille A. Varela y a Gonzalo Biarnés también por alentarme a ese cambio (y a Gonzalo, por darme un rincón de su escritorio para que pueda concluir este trabajo); a la *OAF* y por supuesto al *noveno infierno* por los gratos momentos compartidos. Este trabajo también evolucionó gracias a Andrea Valdéz-Hernández y a Ángel Plastino que junto a Ana me brindaron la posibilidad de trabajar en este tema tan apasionante que hoy resumo en esta tesis, a ellos van mis *gracias totales*.

Quiero también agradecer y dedicar este trabajo a varias personas. A Alfredo Gonzalez, nuestra amistad forjada en aquella oficina de becarios ha sido un aliento hasta el final. A Fabián Bejarano que, a pesar de la distancia, su amistad siempre fue cercana, ayudándome a no olvidar de dónde vengo. A Caro, por acompañarme durante estos años, por su comprensión, su paciencia, su empuje, su apoyo incondicional, su cariño, por *TODO* lo que ella es capaz de dar desde su corazón y me lo ha dado. También va mi gratitud a Aarón por su gran amistad y sus desafíos para aprender más física, llenando cada vez la pizarra de la oficina 10 sin dejar de divertirnos; a toda la cátedra de Física 2 de la *FCEfyN* por el apoyo y el lugar que me han dado. A Maru, por haber estado *ahí* con su inagotable impulso, por acompañarme siempre con su *enorme* corazón lleno de cariño y plagado de su curiosidad contagiosa acerca de todo el Universo. A mis amigos, “*los muchachos*”, Juanjo, Marce, Marcos, Ari, Pablo, por estar y alegrar mis momentos.

Recuerdo que estaba ingresando a la secundaria cuando mi padre intentó explicarme un artículo de física que yo había leído en una revista. Todavía lo recuerdo y lo conservo, ¡había despertado mi curiosidad! Las vueltas de la vida me llevaron años más tarde a concluir esta tesis relacionada con aquel artículo... ¡No imagino el esfuerzo que habrá hecho para calmar mi espíritu curioso! A mi papá y a mi mamá por transmitirme con afecto los valores de la vida, por sus palabras necesarias y a mi hermana por su apoyo y cariño; a ellos por la herencia del estudio, sin su esfuerzo inicial no hubiera podido comenzar a andar estos caminos...

Finalmente, quiero agradecer a la *Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación*, la *FaMAF* simplemente, por darme la oportunidad de realizar esta carrera; a todos los profesores que han dejado huellas en mi camino. A todo el personal de posgrado por hacer que los trámites sean más fáciles y por supuesto al personal de biblioteca por sus inagotables prestamos.

En estos años, en mi carrera doctoral, he tenido la oportunidad de elegir y recorrer caminos llenos de experiencias, aprendí que *la paciencia y el tiempo ayudan a la fuerza y a la pasión*. Que bajar los brazos y detener la marcha frente a la adversidad no puede ser nunca una opción. En algunos de estos caminos encontré personas con quienes compartí un montón de sentimientos y vivencias, algunas de ellas estuvieron de paso y con otras, desde aquel entonces, nuestro andar ha quedado de alguna manera *entrelazado*...