

04.209. → Relativ. Gral Clásica.
04.2062 → Space-time topology, causal structure
spinor structure



Cuerdas cósmicas y causalidad

Manuel Tiglio

Tesis Doctoral

Director: Reinaldo Gleiser

T
F
TIG
ej.2

Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba

Año 2000



A Ana

BIBLIOTECA
FACULTAD MATEMATICA
ASTRONOMIA Y FISICA

Inv. N.º 15033
Sig. TF TIG. q.2

Descripción: del autor

Orden:

Fecha Ingres: 11-10-00

Ingres.	Inv.	C. de S.	Defin.	Propan.



Agradecimientos

Es un placer agradecer a Abhay Ashtekar, Sean Carroll, Eduardo Domínguez, Reinaldo Gleiser, Carlos Kozameh, Jorge Pullin, y Guido Raggio, por muy fructíferas colaboraciones, discusiones, sugerencias, comentarios, y/o críticas; y a familiares y amigos por su apoyo y paciencia. Ha sido también un privilegio tener durante estos años como amigo, colaborador y maestro a Reinaldo Gleiser. Este trabajo fue posible gracias a una beca de doctorado de CONICET.





Índice

1	Introducción	7
2	Cuerdas estáticas	11
2.1	Cuerdas y métrica exterior	11
2.2	Cuerdas y condiciones de energía	12
2.2.1	Condición fuerte	13
2.2.2	Condición débil	14
2.2.3	Condición dominante	14
3	Cuerdas interactuando con campos de Einstein Maxwell	15
3.1	Métrica solitónica y campos asociados	16
3.2	Propiedades del espaciotiempo	17
3.3	Corrientes efectivas	18
4	Cuerdas con momento y CTCs eternas	21
4.1	Métricas exóticas	21
4.1.1	Comportamiento global	22
4.2	Cuerdas superconductoras con momento	23
4.3	Fuentes para la métrica exótica	23
4.3.1	Un resultado negativo	24
4.4	Conclusiones y direcciones futuras	26
5	Holonomías y energía-momento	27
5.1	Transporte paralelo	27
5.2	El grupo de Lorentz y su geometría	28
5.3	Consecuencias	30
6	CTCs y horizontes de Cauchy	33
6.1	Superficies polarizadas	33
6.2	Energía momento y direcciones nulas fijas	35
6.3	Retrospectiva	36
7	Máquinas de tiempo	39
8	Protección cronológica y gravedad cuántica	41
8.1	Ondas de Einstein Rosen	42
8.2	Formulación en superficies nulas	43
8.3	Efectos cuánticos	44
8.3.1	Estados coherentes	44
8.3.2	Fluctuaciones cuánticas	45
8.4	Contexto	46



Capítulo 1

Introducción

Las cuerdas cósmicas son defectos topológicos predichos por las mayorías de las teorías de gran unificación, que pueden haberse formado en alguna de las varias transiciones de fase posibles en el universo temprano. En parte, el interés en estos objetos proviene de que, precisamente por su carácter topológico, podrían explicar la presencia de inhomogeneidades y formación de estructuras en el universo; además de que, a diferencia de otros defectos como paredes o monopolos, su existencia no está en contradicción con la observación. En esta tesis voy a estudiar las propiedades gravitacionales de cuerdas, con especial interés en la estructura causal del espaciotiempo. El campo de las cuerdas cósmicas es muy amplio y dinámico como para intentar un resumen aquí. En todo caso, se puede consultar la referencia standard de Vilenkin y Shellard [1], en la que hay una lista relativamente completa de referencias al año 1994.¹

Como teoría de gravitación voy a usar la relatividad general (RG) de Einstein, con una constante cosmológica nula. Esto último no es una suposición estética o de primeros principios, sino de simplicidad; de hecho, hay evidencia en favor de una constante no nula [2].

RG permite la existencia de violaciones de causalidad debido a la posibilidad de topologías no triviales y/o curvatura del espaciotiempo. Si bien no está claro si la topología del universo es o no trivial (ver, por ejemplo, los trabajos de [3]), a lo largo de esta tesis voy a restringirme, también por simplicidad, sólo a espacios simplemente conexos y abiertos (i.e. con secciones espaciales no compactas).

La posibilidad de violaciones de causalidad aparece cuando en el espaciotiempo hay curvas causales cerradas. Voy a estar particularmente interesado en la existencia de curvas *temporales* cerradas (CTCs): un observador, moviéndose con velocidad menor que la de la luz, puede regresar al mismo punto del espaciotiempo de donde partió, dando lugar a infinitud de paradojas que abundan en la literatura de ciencia ficción (de ellas, la más común -y truculenta- es la del hombre que se encuentra con sus padres antes de haber nacido y los mata). Las paradojas se pueden evitar considerando sólo historias consistentes (y poniendo restricciones a la voluntad humana) [4], pero hay cierta resistencia en los físicos y filósofos a aceptar sin más una explicación de este tipo. Otra posibilidad es que existan CTCs en regiones del universo inaccesibles al hombre. Una posibilidad particularmente original en este sentido es la señalada por Gott y Li [5], de que en el pasado lejano haya habido un horizonte cronológico.

En espacios con CTCs no existe una noción *global* de tiempo. Sin embargo, parece razonable suponer que sí existe, al menos, una noción *local* de tiempo. Por ello, a lo largo de toda esta tesis voy a hacer esta suposición, en un sentido que voy a precisar más adelante.

Los espacios en los que existen CTCs pueden dividirse en tres tipos distintos:

1. *Violaciones de causalidad "eternas"*. Con esto me refiero a un espaciotiempo en el que las CTCs no son producto de la evolución de ciertos datos iniciales, sino que existen "desde siempre y para siempre".
2. *Violaciones de causalidad restringidas a una zona del espaciotiempo*. En este caso existe una (o más) zona causalmente bien comportada y otra con CTCs. Ambas están separadas por un horizonte cronológico u "horizonte de Cauchy".

¹Lamentablemente, en [1] hay varias inexactitudes en los temas que toco en esta tesis.

3. *Máquinas de tiempo*. Este tipo de violaciones de causalidad son producidas por cambios locales en el espaciotiempo. Están caracterizadas por lo que se llama un horizonte de Cauchy compactamente generado (CGCH).

A lo largo de esta tesis voy a considerar la posibilidad de que cuerdas cósmicas generen cada una de estos tipos de violaciones de causalidad, y caracterizar las circunstancias bajo las cuales esto sucede. Estas caracterizaciones van a estar ligadas con condiciones energéticas. Por eso es que en el próximo capítulo discuto algunas propiedades generales del campo gravitacional de cuerdas (superconductoras o no) estáticas, con particular énfasis en su relación con condiciones sobre la energía. Siguiendo con este tipo de análisis, en el tercer capítulo presento una familia solitónica de métricas especialmente construidas para modelar la interacción de cuerdas con campos electrogravitacionales, y discuto sus propiedades con un enfoque similar al del caso estático.

Las violaciones de causalidad eternas van a estar presentes en el capítulo 4, en lo que voy a llamar "métricas exóticas". Allí voy a discutir la posibilidad de que cuerdas superconductoras con flujo de momento lineal puedan generarlas. Al respecto, voy a mostrar que, bajo ciertas hipótesis, cualquier fuente para estas métricas debe violar la condición dominante para la energía (DEC), i.e. la materia debe ser de tipo taquiónico. Estas hipótesis son bastante generales, pero no del todo, por lo que la respuesta de si cuerdas superconductoras pueden o no generar CTCs eternas permanece abierta.

Un ejemplo de violaciones de causalidad restringidas a una zona del espacio tiempo es el espacio de Gott, compuesto de dos cuerdas cósmicas (no superconductoras) en mutuo scattering gravitatorio [6]. Las cuerdas que usualmente se consideran son abiertas, rectas, y de longitud infinita, por lo que pueden verse, equivalentemente, como partículas en $2 + 1$. El hecho de que sean infinitas no es una característica físicamente razonable, pero en el resto de la tesis voy a concentrarme en sistemas de este tipo. Si bien esta restricción es muy severa, es muy poco el conocimiento que se tiene sobre cuerdas y/o problemas de causalidad en sistemas sin estas simetrías.

A diferencia de $3 + 1$, en $2 + 1$ puede definirse energía momento (EM) de subsistemas; y, a diferencia de relatividad especial, la ley de composición de EM es no lineal. Esto permite, por ejemplo, que dos partículas en movimiento relativo, cada una de ellas con EM temporal, tengan EM total espacial, en analogía con sistemas taquiónicos, a pesar de que *ambas partículas se muevan con velocidad menor que c* . La energía de un sistema en $2 + 1$ puede definirse en término de transporte paralelo de vectores alrededor de loops que encierren el sistema en cuestión. De este modo se llega al estudio del grupo de Lorentz y su geometría como grupo de Lie. El capítulo 5 se dedica a estos temas.

Para que en la solución de Gott haya CTCs debe satisfacerse cierta desigualdad que involucra la velocidad relativa de las partículas y sus respectivas masas. Esencialmente, la velocidad debe ser suficientemente alta y/o las masas suficientemente grandes, i.e. debe haber suficiente energía. Más precisamente, la EM total debe ser espacial. Siguiendo a Gott, otros autores consideraron soluciones con más de dos partículas, y encontraron que la existencia de CTCs estaba siempre condicionada a EM total espacial. Finalmente, Kabat conjeturó que esto debía suceder para un número arbitrario de partículas, i.e. que indefectiblemente se necesita EM espacial para generar CTCs [7]. En el capítulo 6 voy a dar una prueba simple de esta conjetura, basada en la convergencia de superficies polarizadas.

Ahora sólo nos queda por investigar el caso de máquinas de tiempo. Hawking ha mostrado que en estos espacios debe violarse la condición débil para la energía [8]. En el capítulo 7 muestro un resultado que, en cierto sentido, dice cuánta energía negativa debe haber para que exista un CGCH. La prueba toma un camino distinto del caso no compactamente generado, y se basa, esencialmente, en el estudio de la dinámica de los generadores del horizonte cronológico.

Una vez discutidas, entonces, las condiciones bajo las cuales cuerdas pueden generar los distintos tipos de CTCs, surge la pregunta de si existe algún mecanismo de protección cronológica, tal como Hawking ha conjeturado [8]. Esto es, algún mecanismo que impida la realización efectiva de *todas* estas condiciones. Discuto esto en el capítulo 8, siendo la conclusión que al momento no existe ningún mecanismo convincente dentro de gravedad clásica o semiclásica. Por ello es que reanalizo los efectos grandes de gravedad cuántica descubiertos por Ashtekar [9], quien notó (en cierto midisuperspace exactamente soluble en $2 + 1$) que existen estados clásicos espurios que describen espacios con curvatura arbitrariamente chica. Estos efectos no aparecen en un análisis cuántico perturbativo o semiclásico, y ponen en duda la creencia usual de que gravedad clásica es una buena aproximación en tanto la curvatura sea pequeña, o que los efectos de gravedad cuántica serían apreciables sólo



en el universo temprano o cerca de un agujero negro.² En nuestro contexto, surge la pregunta de si espacios clásicos con CTCs no serán también espurios. Esto es, mientras que en general se buscan mecanismos de protección cronológica en gravedad clásica o semiclásica, la respuesta podría estar sólo en un análisis cuántico no perturbativo. Para estudiar cómo se reflejan los efectos grandes de Ashtekar en la estructura causal del espaciotiempo, reconsidero su análisis a la luz de una reformulación de RG en la que el acento está puesto en la estructura conforme o causal: la Formulación de Superficies Nulas (NSF). Si bien este análisis no es suficiente para contestar si existe o no un mecanismo de protección cronológica cuántico, como resultado podemos concluir algo muy interesante: mientras que pequeñas fluctuaciones cuánticas son amplificadas exponencialmente en la métrica, en la variable básica de NSF son amortiguadas (también exponencialmente).

La intención es presentar un resumen medianamente unificado de todos estos temas. Por ello, en general la presentación (y en algunos casos, la interpretación) de resultados de otros autores no coincide con la visión original. Por razones similares, la lista de referencias (y, sobre todo, la mención explícita de alguna de ellas) está limitada a las más relevantes.

Elijo la signatura para la métrica como $(-, +, +, +)$ y, a menos que indique lo contrario, uso unidades en las que $G = c = \hbar = 1$.

²De hecho, estas creencias definitivamente no son ciertas en el modelo considerado por Ashtekar.

Capítulo 2

Cuerdas estáticas

En este capítulo resumo algunas propiedades básicas de cuerdas, a la vez que introduzco un poco de notación. Esencialmente, estas propiedades salen de considerar las ecuaciones completas de la métrica acoplada a los campos de materia, sin presuponer más que regularidad y existencia de soluciones, en el espíritu de Garfinkle [10].

2.1 Cuerdas y métrica exterior

En esta tesis me voy restringir, a menos que indique lo contrario, a cuerdas "usuales". Esto es, cuando me refiera a una cuerda cósmica, será a una cuerda no superconductora, con una simetría $\mathcal{U}(1)$ de gauge. Ésta consiste de un campo vectorial A_a y un campo escalar complejo Φ , que descompongo en fase y módulo: $\Phi = Re^{i\psi}$ ($R, \psi \in \mathcal{R}$). El Lagrangeano resultante para la materia es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\nabla^a R \nabla_a R - \frac{1}{2}R^2(\nabla_a \psi + eA_a)(\nabla^a \psi + eA^a) - \lambda(R^2 - \eta^2)^2 - \frac{1}{16\pi}F_{ab}F^{ab}, \quad (2.1)$$

donde $F_{ab} := \nabla_a A_b - \nabla_b A_a$. Más aún, voy a restringirme a cuerdas infinitas, i.e. con simetría cilíndrica. En el caso estático, en compatibilidad con todas estas simetrías, usualmente se propone el ansatz

$$R = R(r) \quad , \quad \psi = n\theta \quad , \quad A_a = \frac{1}{e}[P(r) - 1]\nabla_a \theta \quad ,$$

donde $n \in \mathcal{N}$ es el winding number de la cuerda.

Por otra parte, cuando me refiera a una cuerda superconductora, en general será a una cuerda bosónica $\mathcal{U}(1) \times \tilde{\mathcal{U}}(1)$, con ambas simetrías también de gauge [11]. Ahora hay dos campos vectoriales, A_a y B_a , con campos escalares asociados Φ y σ , respectivamente. Si también descomponemos estos campos en módulo y fase: $\Phi = Re^{i\psi}$, $\sigma = Se^{i\phi}$, el Lagrangeano para la materia es ahora

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}\nabla^a R \nabla_a R - \frac{1}{2}\nabla^a S \nabla_a S - \frac{1}{2}R^2(\nabla_a \psi + eA_a)(\nabla^a \psi + eA^a) - \frac{1}{2}S^2(\nabla_a \sigma + eB_a)(\nabla^a \sigma + eB^a) \\ & - \lambda(R^2 - \eta^2)^2 - \frac{1}{16\pi}F_{ab}F^{ab} - \frac{1}{16\pi}H_{ab}H^{ab} - fR^2S^2 - \frac{1}{4}\lambda_2 S^4 + \frac{1}{2}m^2 S^2 . \end{aligned}$$

donde $F_{ab} := \nabla_a A_b - \nabla_b A_a$ y $H_{ab} := \nabla_a B_b - \nabla_b B_a$. El ansatz usual es:

$$R = R(r) \quad , \quad \psi = n\theta \quad , \quad A_a = \frac{1}{e}[P(r) - 1]\nabla_a \theta \quad , \quad S = S(r) \quad , \quad \phi = \phi(z) \quad , \quad B_a = B(r)\nabla_a z .$$

A distancias grandes del núcleo, la métrica que describe una cuerda (superconductora) es solución asintótica de las ecuaciones de Einstein de vacío (con un campo puramente magnético). Como en general los campos decaen exponencialmente fuera del core o núcleo, uno puede suponer que éste tiene un radio finito, y que fuera

de él sólo se tiene vacío (campo magnético).¹ Por ello es útil introducir en este punto la familia de soluciones cilíndricas y estáticas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell:

$$ds^2 = r^{(\Delta^2-1)/2} \Gamma^2 (dt^2 - dr^2) - r^{1+\Delta} \Gamma^2 \left(1 - \frac{\delta}{2\pi}\right)^2 d\phi^2 - r^{1-\Delta} \Gamma^{-2} dz^2 \quad (2.2)$$

con $\Gamma := (1 + j^2/r^{\Delta-1})$. Las coordenadas tienen, *en principio*, el rango usual: i.e., $t \in \mathcal{R}$, $r \geq 0$, $z \in \mathcal{R}$ y $\phi \in [0, 2\pi]$. Los parámetros Δ , δ y j son constantes arbitrarias, *en general* no triviales, i.e. relacionados con tres escalares de curvatura independientes [12].

En el caso de vacío, $j = 0$, la métrica se reduce a la de Levi-Civita y las soluciones que difieren solamente en el signo de Δ son localmente isométricas. Hay invariancia ante boosts en la dirección z si y sólo si $\Delta = 1$ o $\Delta = 3$. Si $\Delta \neq 1$ hay escalares de curvatura que divergen para $r \rightarrow 0$ y $r \rightarrow \infty$, pero mientras que la primera singularidad puede ser alcanzada por geodésicas causales en parámetro afín finito, la segunda está a distancia afín infinita. Para $\Delta = 1$ la métrica es localmente plana excepto por una regularidad cónica en el eje si $\delta \neq 0$. Finalmente, se puede ver que partículas y fotones son repelidos por la singularidad si y sólo si $|\Delta| < 1$.

En el caso de electrovacío ($j \neq 0$), cuando $\Delta \neq -1$ también hay escalares de curvatura que divergen cuando $r \rightarrow 0$ y $r \rightarrow \infty$ y, como en el caso de vacío, la singularidad para $r \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) es alcanzable (inalcanzable) por geodésicas causales en parámetro afín finito. Hay cierta relación entre la presencia de estas singularidades y corriente (proporcional a j) en el eje de simetría, que voy a discutir en detalle en el próximo capítulo. Cuando $\Delta = -1$ la métrica es regular en todas partes, incluido el eje de simetría, y describe el llamado² universo magnético de Melvin (las coordenadas z y ϕ deben ser intercambiadas para esta solución) [13].

Usualmente se interpretan las singularidades de curvatura en el eje de la siguiente forma: la métrica (2.2) es válida sólo en la región exterior a un cilindro de cierto radio no nulo, dentro del cual la métrica es regular. Sin embargo, hay que tener en cuenta que no siempre es posible un empalme con una métrica interior regular que satisfice condiciones de energía. En este sentido, en la siguiente sección analizo ciertas relaciones entre la métrica exterior y la estructura interna de la cuerda.

2.2 Cuerdas y condiciones de energía

Supongamos que se tiene una métrica cilíndrica estática (no necesariamente de vacío, electrovacío, o correspondiente a una cuerda). Pueden elegirse coordenadas tal que ésta tome la forma

$$ds^2 = -e^A dt^2 + e^B dz^2 + dr^2 + e^C d\theta^2, \quad (2.3)$$

con A, B y C funciones sólo de r . Definiendo una base ortonormal,

$$t^a := e^{-A/2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a, \quad r^a := \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a, \quad z^a := e^{-B/2} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a, \quad \theta^a := e^{-C/2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^a,$$

las componentes no nulas del tensor de Ricci para la métrica (2.3) son

$$R_{ab} \hat{t}^a \hat{t}^b = \frac{1}{2} \left[A' e^{(A+B+C)/2} \right]' e^{-(A+B+C)/2}, \quad (2.4)$$

$$R_{ab} \hat{z}^a \hat{z}^b = -\frac{1}{2} \left[B' e^{(A+B+C)/2} \right]' e^{-(A+B+C)/2}, \quad (2.5)$$

$$R_{\theta\theta} \hat{\theta}^a \hat{\theta}^b = -\frac{1}{2} \left[C' e^{(A+B+C)/2} \right]' e^{-(A+B+C)/2}, \quad (2.6)$$

$$R_{ab} \hat{r}^a \hat{r}^b = -\frac{1}{2} (A + B + C)'' - \frac{1}{4} (A'^2 + B'^2 + C'^2), \quad (2.7)$$

¹Si no se hace esta suposición, lo único que cambia es que en todas las proposiciones que se muestran hay que cambiar "fuera del core" por "asintóticamente".

²Sobre todo por Melvin.

Si se satisfacen las ecuaciones de Einstein, $R_{ab} = 8\pi(T_{ab} - g_{ab}T/2)$, y la métrica es regular en todas partes, se pueden integrar las ecuaciones (2.4,2.5,2.6,2.7) entre el eje ($r = 0$) y algún r , usar las condiciones de regularidad, y obtener así relaciones entre el comportamiento de la métrica y el tensor energía impulso. En las siguientes subsecciones discuto algunas consecuencias de estas relaciones aplicadas a cuerdas.

2.2.1 Condición fuerte

La condición fuerte para la energía (SEC) es que, para todo \hat{t}^a temporal unitario, $\mathcal{SEC} := T_{ab}\hat{t}^a\hat{t}^b + T/2 \geq 0$. Una de las ecuaciones que podemos obtener integrando (2.4,2.5,2.6,2.7) es

$$A'(r) = 16\pi e^{-(A+B+C)/2} \Big|_r^r \left[e^{(A+B+C)/2} (T_{ab}\hat{t}^a\hat{t}^b + T/2) \right]_{\tilde{r}} d\tilde{r}, \quad (2.8)$$

de donde podemos ver que si $A' < 0$ en algún punto, entonces necesariamente se viola la SEC (en un conjunto de medida no nula).

En general se encuentra que defectos topológicos violan la SEC si y sólo si tienen alguna simetría global. Por ejemplo, para una cuerda $\mathcal{U}(1)$ global [14] se tiene $\mathcal{SEC} = -\frac{1}{8}\lambda(R^2 - \eta^2)^2$, cantidad que es manifiestamente negativa, por lo que sabemos, *sin necesidad resolver las ecuaciones de Einstein*, que se viola la SEC *en todo punto*. Para otros defectos, en cambio, no puede saberse si se satisface o no la SEC a menos que se resuelvan las ecuaciones de campo. Sin embargo, siempre se encuentra alguna evidencia de que defectos globales violan la SEC, e.g. monopolos globales [15] y defectos sin vacío [16] tienen campos gravitacionales repulsivos que seguramente están relacionados con el hecho de que se viola la SEC. De la misma forma, en el caso de defectos de gauge, las soluciones numéricas en general muestran que se satisface la SEC [17].

Sin embargo, existe una posible excepción a esta regla: Amsterdamski y Laguna han resultado numéricamente las ecuaciones que describen una cuerda superconductor acoplada con gravedad [18]. Este análisis es muy interesante, porque en general se supone la existencia de soluciones a las ecuaciones de campo que describen este sistema y no sabe en qué regiones del espacio de parámetros hay superconductividad, si es que existen tales regiones. En el análisis original de Witten [19] sólo se muestra que soluciones superconductoras, de existir, son energéticamente favorables; pero, en principio, podría suceder que no existen tales soluciones. El trabajo de Amsterdamski y Laguna muestra que sí existen soluciones superconductoras, regulares en todas partes. Pero lo que me interesa notar de este trabajo es que, si uno observa allí la figura (7), claramente g_{tt} tiene un mínimo local. De acuerdo a la ecuación (2.8) y la discusión que le sigue, esto significaría que cuerdas superconductoras violan la SEC.

Pero hay que ser cautelosos con respecto a esta observación sobre los resultados de [18]. Como el problema es estacionario, las ecuaciones que allí se resuelven son elípticas, y se usaron métodos tipo "shooting". Una característica de estos métodos es que tienden a producir extremos locales espurios. Entender si éste es o no el caso para la figura (7) de [18] es importante. Para ello podrían usarse otros métodos numéricos (eg. de relajación) o un enfoque puramente analítico. En el capítulo 4, en relación con la presencia de momento en cuerdas superconductoras, vamos a toparnos con un problema parecido: mientras que algunos autores encontraron ciertas propiedades exóticas, se puede probar analíticamente que tales propiedades son espurias, consecuencia del método numérico usado.

Como discuto en breve, si cuerdas superconductoras violan o no la SEC tiene consecuencias sobre el radio mínimo que el núcleo de una cuerda puede tener; esto a su vez limita el conocimiento que uno puede obtener de la corriente que fluye de la cuerda, como discuto en el próximo capítulo. Si cuerdas superconductoras efectivamente satisfacen la SEC, sería interesante intentar una prueba de la conjetura que mencioné arriba: que defectos violan la SEC si y sólo si tienen una simetría global.

Asumiendo que el core tiene un radio finito, uno puede calcular la geodésicas causales fuera de él con la métrica (2.2), y ver [20] que éstas son repelidas por la cuerda si y sólo si $1 < \Delta < 3$ y

$$r < \left[j^2 \left(\frac{3 - \Delta}{1 + \Delta} \right) \right]^{1-\Delta}. \quad (2.9)$$

Por otro lado, podemos calcular el lado izquierdo de ec.(2.8) usando la métrica exterior (2.2) y se obtiene que, tal como uno espera, es negativo (y se viola la SEC) si y sólo si se cumple (2.9) [21]. En resumen: si cuerdas

superconductoras satisfacen la SEC, las soluciones que en el espacio de parámetros corresponden a $1 < \Delta < 3$ no pueden ser consistentemente modeladas por una cuerda de radio arbitrariamente chico.

Otra resultado que tenemos que tener en mente es que, en el caso de vacío, la SEC se viola si y sólo si $0 < \Delta < 1$, y en estos casos lo hace *en todo punto*. Esto será importante para la interpretación física de las soluciones del capítulo siguiente.

2.2.2 Condición débil

De la integración de las ecs. (2.4,2.5,2.6,2.7) uno también obtiene

$$(A - C)'|_r = 16\pi e^{-(A+B+C)/2} \Big|_r \int_0^r \left[e^{(A+B+C)/2} (T_{ab} \hat{t}^a \hat{t}^b + T_{ab} \hat{z}^a \hat{z}^b) \right]_{\vec{r}} d\vec{r}. \quad (2.10)$$

La condición débil para la energía (WEC) es que, para todo vector temporal,

$$T_{ab} \hat{t}^a \hat{t}^b \geq 0$$

[en particular, implica que el integrando de (2.10) también es no negativo]. De ec.(2.10) podemos ver, entonces, que si se satisface la WEC, $A - C$ es una función creciente de r . Si la métrica es regular en el eje, entonces allí $A - C = 0$; luego, la WEC y regularidad implican que $|g_{tt}| \geq g_{zz} \forall r$, y la igualdad vale en un punto r si y sólo si

$$\int_0^r \left[e^{(A+B+C)/2} (T_{ab} \hat{t}^a \hat{t}^b + T_{ab} \hat{z}^a \hat{z}^b) \right]_{\vec{r}} d\vec{r} = 0. \quad (2.11)$$

Esto, de hecho, sucede para una cuerda no superconductoras. Más aún, vale una propiedad más fuerte: no sólo la integral (2.11) es cero, sino que el integrando lo es *en cada punto*. Esto puede verse a priori, sin conocer la solución a las ecuaciones de campo [10]. Como consecuencia, fuera del core (o a distancias grandes de él) el espacio es plano con un ángulo de déficit.

Un aspecto que convendrá tener en cuenta en el último capítulo es que, como comenté al comienzo de éste, excepto por el caso $\Delta = 1$, las métricas de vacío o electrovacío que describen cilindros estacionarios tienen singularidades de curvatura para grandes valores de r . De acuerdo a (2.10) y la discusión que le sigue, el caso no singular requiere de un delicado balance entre tensión y energía.

2.2.3 Condición dominante

La última condición que quiero mencionar y que va a jugar un rol importante en las consideraciones de violaciones de causalidad es la condición dominante para la energía (DEC): para cualquier vector temporal y dirigido al futuro t^a , $p^a := -T^{ab}t_b$ es dirigido al futuro y causal. Si se viola la DEC, el cuadvivector momento es espacial, la velocidad de flujo de energía es mayor que la de la luz (aunque esto no implica que las correspondientes ecuaciones no sean hiperbólicas), y la materia es de tipo taquiónico.

Capítulo 3

Cuerdas interactuando con campos de Einstein Maxwell

Mientras que la descripción de cuerdas estáticas puede ayudar a entender su rol en procesos tales lentes gravitacionales, existen otros (por ejemplo, radiación gravitacional) que sólo pueden entenderse conociendo propiedades de cuerdas dinámicas. Es por eso que en este capítulo voy a discutir propiedades de cuerdas, superconductoras o no, interactuando con el medio que las rodea, que supondré electrogravitatorio.

Existen al menos dos formas en las que se puede atacar este problema. La primera es considerando las ecuaciones completas para los campos de gauge y la métrica. Dada la complejidad de las ecuaciones resultantes, éstas sólo pueden atacarse con métodos numéricos. Otro enfoque (el que sigo en este capítulo) es considerar soluciones exactas de electrovacío que puedan modelar el campo exterior a una cuerda interactuando con su medio. La ventaja de este enfoque es que permite sondear explícitamente el espacio de parámetros y ver los comportamientos posibles. La desventaja es que tenemos que inferir la estructura interna de la cuerda en base a su campo exterior. Mientras que en el caso estacionario esto es directo, en el caso dinámico aparecen algunas sutilezas que obstaculizan la interpretación.

Las técnicas más usadas para obtener soluciones exactas en RG son probablemente las de scattering inverso. Éstas permiten generar nuevas soluciones de las ecuaciones de Einstein, a partir de "semillas", i.e. soluciones conocidas. En general, las soluciones que deciden construirse son de tipo solitónico, aunque esto no es necesario. Los solitones son soluciones bastante peculiares de algunas teorías no lineales, donde la no linealidad es compensada por la dispersión, dando lugar a ondas que se propagan sin deformarse, incluso después de colisionar entre ellas. Que las ecuaciones de Einstein permitan la existencia de solitones es un hecho altamente no trivial. La primera técnica de scattering inverso para obtener solitones gravitacionales fue introducida en los 70 por Belinski y Zakharov (BZ) [22]. En los 80 Alekseev generalizó este tipo de scattering inverso, para poder construir solitones electrogravitacionales [23], requiriendo para ello un formalismo completamente nuevo. Así, la relación entre los dos formalismos, el de BZ y el de Alekseev, es para nada directa. Sin embargo, puede verse que las métricas construidas con el último, cuando se reducen a vacío, son equivalentes a las correspondientes BZ, módulo transformaciones de gauge [24]. Existe un review, un poco desactualizado ya, de soluciones solitónicas en relatividad general por Verdaguer [25].

En este capítulo voy a presentar una familia solitónica de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, obtenida con la técnica de Alekseev, y discutir sus propiedades, sobre todo aquellas que permiten interpretarlas como las exteriores a una cuerda (superconductora o no) interactuando con el medio que las rodea. Esta familia es muy rica en la diversidad de comportamientos que describe, de hecho es la más general en su tipo (generaliza, por ejemplo, las presentadas en [26]).

3.1 Métrica solitónica y campos asociados

Una ventaja práctica de los métodos de scattering inverso es que el proceso de resolver las ecuaciones no lineales de Einstein se reduce a resolver ecuaciones en derivadas parciales *lineales*. Por ejemplo, el método de Alekseev requiere, una vez que se ha elegido la semilla, resolver ecuaciones en derivadas parciales para una matriz compleja 3×3 . Así y todo, dependiendo de la complejidad de la semilla, podrán o no encontrarse soluciones cerradas (en término de funciones elementales).

Por otra parte, una ventaja de elegir transformaciones solitónicas entre todas las posibles para el scattering inverso es que los solitones pueden verse como un "pulso" electrogravitacional, y el (o los) parámetro que describe su tamaño puede elegirse tal que éste último sea arbitrariamente chico, resultando en una métrica arbitrariamente próxima a la semilla. En este sentido, uno se refiere a estas soluciones como "perturbaciones solitónicas", si bien son soluciones de las ecuaciones completas (no lineales). De este modo, si uno quiere generalizar una solución determinada, la elige como semilla, a sabiendas de que las nuevas métricas pueden estar arbitrariamente cerca de la semilla si uno así lo quiere. Siendo, entonces, que queremos obtener soluciones que generalicen la métrica exterior a una cuerda superconductor estática, deberíamos tomar a esta última como semilla. Sin embargo, es posible tomar un camino un tanto más complicado y menos directo, pero que permite resolver las ecuaciones de Alekseev. Este camino consiste en tomar como semilla las familias de soluciones que describen cuerdas superconductoras cuando éstas no tienen corriente, i.e. la métrica de Levi-Civita. Básicamente, para describir una cuerda superconductor, en lugar de tomar solitones pequeños se los toma grandes, de la forma explicada en [21].

Una vez que se resuelven las ecuaciones de Alekseev, el resto de los pasos en la construcción de la métrica son puramente algebraicos. Introduzco las funciones¹

$$\sigma_+ := (i\omega + t + r)^{1/2}, \quad \sigma_- := (i\omega + t - r)^{1/2}, \quad \Lambda := \left(\frac{\sigma_- + \sigma_+}{\sigma_- - \sigma_+} \right)^{1/2},$$

con ω real positivo, y las descompongo en módulo y fase:

$$\sigma_+ + \sigma_- =: \sqrt{2\rho}\sigma^{1/4}e^{i\phi/2}, \quad \sigma, \phi \in \mathcal{R}. \quad (3.1)$$

Escribiendo la métrica en la forma

$$ds^2 = f(-dt^2 + dr^2) - g_{22}dx_2^2 - g_{33}dx_3^2 - 2g_{23}dx_2dx_3,$$

los coeficientes son

$$\begin{aligned} f &= -\frac{C'}{\mathcal{H}}r^{(\Delta^2-1)/2}\sigma|\mathcal{D}|^2, \\ g_{22} &= -\frac{r^{1+\Delta}}{|\mathcal{D}|^2} \left[\left(\sqrt{\sigma} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right)^2 \left(\sin(\phi + \delta) \left(\sin(\phi + \delta) - \frac{q}{L_0} \right) + \frac{q^2}{4L_0^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin^2\phi \left(\left(\frac{L_0}{\sigma^{(\Delta+1)/2}} + \frac{\sigma^{(\Delta+1)/2}}{L_0} \right) \left(\frac{L_0}{\sigma^{(\Delta+1)/2}} + \frac{\sigma^{(\Delta+1)/2}}{L_0} + \frac{2q}{L_0} \right) + \frac{q^2}{L_0^2} \right) \right], \\ g_{23} &= -\frac{2\omega}{|\mathcal{D}|^2\sqrt{\sigma}} \left[L_0 \left(\frac{1}{\sigma^{\Delta/2}} (\sin(\phi - \delta) + \sigma \sin(\phi + \delta)) \right) + \frac{2q}{L_0} \sqrt{\sigma} \sin\phi \cos\delta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^{\Delta/2}}{L_0} (\sin(\phi + \delta) + \sigma \sin(\phi - \delta)) + \frac{q}{2L_0} (1 - \sigma) \left(\frac{L_0}{\sigma^{\Delta/2}} - \frac{\sigma^{\Delta/2}}{L_0} \right) \right], \\ g_{33} &= -\frac{r^{1-\Delta}}{|\mathcal{D}|^2} \left[\left(\sqrt{\sigma} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right)^2 \left(\sin(\phi - \delta) \left(\sin(\phi - \delta) + \frac{q}{L_0} \right) + \frac{q^2}{4L_0^2} \right) \right. \end{aligned}$$

¹En las funciones multivaluadas elijo el corte ramal a lo largo del semieje real negativo.

$$+ \sin^2 \phi \left(\left(\frac{L_0}{\sigma^{(\Delta-1)/2}} + \frac{\sigma^{(\Delta-1)/2}}{L_0} \right) \left(\frac{L_0}{\sigma^{(\Delta-1)/2}} + \frac{\sigma^{(\Delta-1)/2}}{L_0} + \frac{2q}{L_0} \right) + \frac{q^2}{L_0^2} \right),$$

con

$$\delta := \Delta\phi + \delta_0, \quad \mathcal{H} := (1 - \sigma)^2 + \frac{16\omega^2\sigma^2}{(1 - \sigma)^2 r^2},$$

$$\mathcal{D} := \left(\sqrt{\sigma} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right) \left(\sin \delta - \frac{q}{2L_0} \cos \phi \right) + i \left[\frac{L_0}{\sigma^{\Delta/2}} + \frac{\sigma^{\Delta/2}}{L_0} + \frac{q}{2L_0} \left(\sqrt{\sigma} + \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right) \right] \sin \phi,$$

y δ_0 , q , L_0 , C' constantes reales arbitrarias y positivas, excepto por δ_0 , que también puede tomar valores negativos.

El potencial complejo para el el tensor electromagnético autodual está dado por

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & \frac{\omega\sqrt{2q}}{\mathcal{D}} r^{(\Delta-1)/2} e^{i(4\theta_d + 2\delta_0 + \pi)/4} \left[\cos \left(\frac{\phi + \delta + \pi/2}{2} \right) \left(-\frac{\sigma^{(\Delta+1)/4}}{L_0} + \frac{1}{\sigma^{(\Delta+1)/4}} \right) \right. \\ & \left. + i \sin \left(\frac{\phi + \delta + \pi/2}{2} \right) \left(\frac{\sigma^{(\Delta+1)/4}}{L_0} + \frac{1}{\sigma^{(\Delta+1)/4}} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 = & \frac{\omega\sqrt{2q}}{\mathcal{D}} r^{(-\Delta-1)/2} e^{i(4\theta_d + 2\delta_0 - \pi)/4} \left[\cos \left(\frac{-\phi + \delta - \pi/2}{2} \right) \left(-\frac{\sigma^{(\Delta-1)/4}}{L_0} + \frac{1}{\sigma^{(\Delta-1)/4}} \right) \right. \\ & \left. - i \sin \left(\frac{-\phi + \delta - \pi/2}{2} \right) \left(\frac{\sigma^{(\Delta-1)/4}}{L_0} + \frac{1}{\sigma^{(\Delta-1)/4}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Respecto al rol que juegan algunos parámetros: el tensor electromagnético es proporcional a q , i.e. el último provee una escala para el primero; θ_d define rotaciones duales; L_0 es un parámetro de polarización para el campo gravitacional de vacío (si $q = 0$ y $L_0 \rightarrow 0$, entonces sobrevive sólo un grado de polarización, i.e. la métrica se vuelve diagonal); y soluciones con Δ y $-\Delta$ son localmente isométricas, en tanto $L_0 \neq 0$. Otras propiedades son más complicadas de ver, doy un breve resumen de ellas en la próxima sección, para más detalles ver [21].

3.2 Propiedades del espaciotiempo

En relatividad general se puede definir de forma rigurosa la noción de planitud asintótica para un espaciotiempo requiriendo que la variedad pueda compactificarse y los campos satisfagan ciertos decaimientos en la frontera [27]. Los espacios de cuerdas de longitud infinita y soluciones del tipo obviamente no son asintóticamente planos en este sentido. Pero, siendo que en nuestras métricas solitónicas el covector dr es espacial y la región asintótica $r \rightarrow \infty$ está a una distancia propia infinita, voy a llamar a esta región asintótica infinito espacial; análogamente para el infinito nulo y temporal.

En general, en estas regiones los campos divergen. Esto no es una peculiaridad de las soluciones solitónicas, lo mismo sucede para el campo gravitacional estacionario de una cuerda superconductora, y por ejemplo, para el campo newtoniano o coulombiano de un cilindro infinito. De hecho, como vimos en el capítulo anterior, en el caso estacionario el que la métrica no sea singular en el infinito espacial es más bien una excepción, y depende para ello de un delicado balance entre tensión y densidad de masa. De todos modos, como voy a discutir, en algunos casos estas métricas solitónicas son planas en las regiones asintóticas, y por lo tanto puede definirse una noción de planitud asintótica, infinito nulo, masas tipo ADM y de Bondi, etc, en analogía con el caso 3 + 1 [28] [29]. En estos casos, entonces, puede calcularse la radiación como flujo de masa tipo Bondi o de C-energy [30]. Si bien el flujo de estas dos cantidades no coincide², si uno de ellos es no nulo, el otro tampoco, y viceversa. Esto es, el que una solución sea o no radiativa no depende de cual definición se tome para calcular el flujo de energía.

²Excepto en una aproximación linealizada alrededor de Minkowski.

Empecemos discutiendo el caso $\Delta = 1$ y $q \neq 2L_0 \sin \delta_0$. El espacio es asintóticamente plano en el sentido recién discutido. Las soluciones son radiativas, y se puede calcular explícitamente la radiación, se defina ésta como un flujo de C-energy o de masa tipo Bondi. El eje es regular o cuasi regular, dependiendo de la elección de ciertos parámetros. La cuasiregularidad está asociada a la existencia de un ángulo de déficit en el eje y, en analogía con el caso estacionario, se puede atribuir este ángulo α a la presencia de una cuerda cósmica de gauge (no superconductora) en el eje, cuya masa por unidad de longitud está definida por α . Sin embargo, hay que notar que si bien estas soluciones son radiativas, la interacción entre cuerda y radiación es un tanto extraña: la masa de la cuerda no cambia con el tiempo. Por otra parte, la métrica en el infinito espacial es plana, pero rotada respecto al eje. Esto es, la métrica no puede diagonalizarse globalmente porque hay dos grados de polarización, y si se elige diagonal en el eje, entonces no lo es en el infinito espacial. Algunos autores han llamado a soluciones de este tipo "cuerda rotantes", si bien sería más apropiado decir que la cuerda está rotada pero no rotando; en el último caso debería haber un término cruzado " $t\theta$ " en la métrica. El ángulo de déficit en el infinito espacial define la masa total (por unidad de longitud), y es siempre menor que 2π (como discuto en el capítulo 5, esto es una característica general). Cuando $q \rightarrow 2L_0 \sin \delta_0$ el ángulo de déficit tiende a 2π y el espacio se "cierra"; esto puede interpretarse como el límite supermasivo de la cuerda [31]. En el límite $q = 2L_0 \sin \delta_0$ las propiedades del espaciotiempo cambian sustancialmente y, por ejemplo, no es posible asignar a las coordenadas (t, r, z, θ) el rango usual que las convierte en cilíndricas; además, a tiempos grandes aparecen singularidades de curvatura.

Supongamos ahora que $\Delta \neq 1$ y $q \neq 2L_0 \sin \delta_0$. El eje es singular³, y esta singularidad puede interpretarse como indicativa de la presencia de una cuerda superconductora en el eje (discuto esto con más detalle en la próxima sección). Al igual que en el caso $\Delta = 1$, la métrica tiende a la semilla en el infinito espacial y nulo, pero ésta ahora no es asintóticamente plana. En el infinito temporal, el comportamiento depende fuertemente del valor de Δ : si $\Delta > 1$, a tiempos grandes aparecen singularidades de curvatura; mientras que esto no sucede si $0 \leq \Delta < 1$, sino que la métrica tiende al background (semilla). En el capítulo anterior vimos que los casos con $0 \leq \Delta < 1$ son precisamente aquellos en los que la fuente para la semilla viola la SEC, de manera que hay repulsión gravitatoria. Puede pensarse que esta repulsión gravitatoria es la que evita la formación de singularidades que de otro modo (cuando $\Delta > 1$) sí ocurren. Finalmente, de forma similar al caso $\Delta = 1$, cuando $q \neq 2L_0 \sin \delta_0$ el comportamiento es bastante patológico y probablemente no tenga interés físico.

3.3 Corrientes efectivas

A diferencia del caso estacionario, en el caso general no es posible inferir de los campos exteriores la corriente total que fluye por la cuerda. Esto dificulta la interpretación de nuestras métricas solitónicas. Estos puntos son un tanto sutiles y bastante interesantes, por lo que el análisis que sigue es bien detallado.

En las ecuaciones de Maxwell para el tensor electromagnético autodual,

$$d\mathcal{F}^\dagger = 4\pi j^\dagger, \quad (3.2)$$

la fuente, el cuadrivector complejo de corriente j^\dagger , es en general una combinación lineal de partes eléctricas y magnéticas. Esto implica que en un sistema localmente inercial podemos escribir (3.2) en la forma

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\mathcal{E}} + i \vec{\mathcal{B}}) = 4\pi(\rho_e + i \rho_m), \quad (3.3)$$

$$\partial_t(\vec{\mathcal{E}} + i \vec{\mathcal{B}}) + i \vec{\nabla} \times (\vec{\mathcal{E}} + i \vec{\mathcal{B}}) = -4\pi(\vec{j}_e + i \vec{j}_m), \quad (3.4)$$

donde, como condición de integrabilidad, debe cumplirse

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_e + i \vec{j}_m) = -\partial_t(\rho_e + i \rho_m). \quad (3.5)$$

En estas ecuaciones, ρ_e y \vec{j}_e representan la densidad de carga eléctrica y la densidad de corriente eléctrica, respectivamente, mientras que ρ_m and \vec{j}_m son los equivalentes magnéticos. Si, *en todo punto del espacio*

³Excepto cuando $\Delta = 3$. El eje no es singular, entonces, sólo cuando $\Delta = 1, 3$. Curiosamente, estos son los únicos dos casos en los que la semilla es invariante ante boosts en la dirección z .

tiempo,

$$\vec{j}_e = \alpha \vec{j}_m, \quad \rho_e = \alpha \rho_m,$$

con α una constante real, entonces la parte magnética de j^\dagger puede ser eliminada con una rotación dual. Sin embargo, si \mathcal{F}^\dagger aparece en el contexto de campos de gauge, se pueden imaginar situaciones en las que j^\dagger contiene una parte magnética no trivial. Como en nuestro problema estamos considerando sólo la región exterior, en la que $j^\dagger = 0$, surge la pregunta de en qué medida es posible obtener información de la fuente j^\dagger considerando sólo los campos en esta región. Para contestar a esta pregunta, apliquemos el teorema de Stokes a una región tridimensional Σ de frontera S :

$$\int_{\Sigma} j^\dagger = \frac{1}{4\pi} \int_S \mathcal{F}^\dagger. \quad (3.6)$$

Ahora restrinjo el análisis a simetría cilíndrica, y supongo que existe una fuente regular de radio arbitrario \mathcal{R}_0 , de forma tal que la corriente j^\dagger también es regular. Elijo Σ como un 3-cilindro a z constante, de radio arbitrario $\mathcal{R} \geq \mathcal{R}_0$, y frontera dada por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, con S_i ($i = 1 \dots 3$) definidos como sigue. S_1 y S_2 son discos de radio \mathcal{R} , a z constante, tomados a tiempos t y $t + \tau$ respectivamente; y S_3 es una superficie cilíndrica bidimensional, a z constante, con radio \mathcal{R} , y "altura" τ . Entonces, de ec.(3.6), tenemos

$$4\pi \int_{\Sigma} j^\dagger = \int_{S_3} \mathcal{F}_{02}^\dagger dt d\phi + \int_{S_2} \mathcal{F}_{12}^\dagger dr d\phi - \int_{S_1} \mathcal{F}_{12}^\dagger dr d\phi. \quad (3.7)$$

El término del lado izquierdo de ec.(3.7) es $4\pi \times$ la corriente total \mathcal{I} en la dirección z , integrada en el tiempo entre t y $t + \tau$. De manera que tomando la derivada de ec.(3.7) respecto a τ , y evaluandola en $\tau = 0$, tenemos

$$4\pi \mathcal{I} = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_{02}^\dagger \Big|_{r=\mathcal{R}} d\phi + \int_{S_1} \partial_t \mathcal{F}_{12}^\dagger dr d\phi. \quad (3.8)$$

Cuando los campos son estacionarios, la segunda integral en el lado derecho de ec.(3.8) es cero. En tal caso, como la primera integral se calcula en la región de vacío, su valor es independiente del radio \mathcal{R} . En particular, podemos tomar el límite $\mathcal{R} \rightarrow 0$ y calcular la corriente total \mathcal{I} a través de dicho límite. Por ejemplo, las componentes no nulas del tensor autodual electromagnético en la región exterior a una cuerda superconductora estacionaria son

$$\mathcal{F}_{02}^\dagger = (\Delta - 1) j e^{i\theta_d}, \quad \mathcal{F}_{13}^\dagger = \frac{(\Delta - 1)}{r\Delta\Gamma^2} j e^{i(\theta_d + \pi/2)}.$$

Asumiendo que este tensor es estacionario en todas partes, i.e., que $\partial_t \mathcal{F}_{12}^\dagger = 0$ también en la región interior, la corriente total es

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4\pi} \lim_{\mathcal{R} \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_{02}^\dagger \Big|_{r=\mathcal{R}} d\phi, \quad (3.9)$$

i.e.

$$\mathcal{I} = \frac{(\Delta - 1)}{2} j e^{i\theta_d}.$$

En particular, la corriente puede elegirse puramente eléctrica tomando $\theta_d = 0$.

Todo este procedimiento no puede aplicarse al caso general, en el que los campos no son estacionarios, porque la primera integral del lado derecho de ec.(3.8) no es independiente de \mathcal{R} . Como S_1 se vuelve de medida nula cuando \mathcal{R} tiende a cero, podemos pensar que, si asumimos que la fuente es regular de forma tal que la integral en S_1 en ec.(3.8) sea nula en este límite, la corriente \mathcal{I} estará definida por ec.(3.9). El problema es que, como comenté en el capítulo anterior, (al menos en el caso estático) la fuente no puede tener un radio arbitrariamente chico si se satisfacen condiciones para la energía. Si bien la falta de información para calcular la integral que involucra $\partial_t \mathcal{F}_{12}^\dagger$ nos impide usar ec.(3.8) para calcular \mathcal{I} , podemos argumentar que esta ecuación ciertamente permite la posibilidad de que \mathcal{I} sea no nulo. En particular, como ya mencioné, en nuestras métricas solitónicas podemos recuperar, como caso particular, el límite estacionario, en el que sí vale (3.8). Más aún, eligiendo adecuadamente los parámetros de la métrica solitónica, podemos conseguir que ésta varíe muy suavemente con el tiempo y sea cuasi estacionaria. De manera que sería razonable mirar al lado derecho de ec.(3.9), para distintos valores de \mathcal{R} , como una medida o indicación de la corriente total fluyendo a lo largo

de la cuerda, recordando siempre que una respuesta definitiva necesariamente depende de un modelo detallado para la fuente.

Un punto interesante que surge cuando seguimos este procedimiento es que la corriente total resultante es compleja, y no puede hacerse real mediante una rotación dual. A primera vista esto puede ser interpretado como una indicación de que la fuente necesariamente tiene corrientes magnéticas no triviales. Sin embargo, como estamos considerando sólo la región exterior de vacío, existe otra interpretación posible. Por simplicidad me limito de ahora en más al caso plano, i.e. supongo que el espaciotiempo es Minkowski. Supongamos que tenemos una solución de ecs. (3.3,3.4), con $\rho_m = 0$ y corrientes eléctricas y magnéticas no nulas. Puedo definir un nuevo campo $\vec{B}'(\vec{x}, t)$ mediante

$$\vec{B}'(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x}, t) + \int_{t_0}^t \vec{j}_m(\vec{x}, t') dt' ,$$

donde t_0 es arbitrario. Los campos $\vec{B}'(\vec{x}, t)$ y $\vec{B}(\vec{x}, t)$ son idénticos fuera del soporte de j_m , i.e., para cualquier \vec{x}_1 tal que $j_m(\vec{x}_1, t) = 0$ para todo t . Entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}'(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) + \int_{t_0}^t \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m(\vec{x}, t') dt' ,$$

y, de ecs. (3.3,3.4,3.5), si $\rho_m = 0$, tenemos en término de \vec{E} y \vec{B}' ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}' = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e , \quad (3.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B}' = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}' - \partial_t \vec{E} = 4\pi\vec{j}'_e , \quad (3.11)$$

donde \vec{j}'_e es una corriente eléctrica efectiva dada por

$$\vec{j}'_e = \vec{j}_e + \int_{t_0}^t \vec{\nabla} \times \vec{j}_m(\vec{x}, t') dt' ,$$

junto con la ecuación de conservación

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}'_e = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t} .$$

Entonces, si $\rho_m = 0$, el campo electromagnético fuera de las fuentes puede ser considerado como solución de ecs. (3.3,3.4), con corrientes eléctricas y magnéticas, o bien de ecs. (3.10,3.11), con corrientes puramente eléctricas.

Como conclusión, si bien tenemos suficientes elementos para interpretar nuestras métricas solitónicas como describiendo la interacción entre cuerdas superconductoras y radiación electrogravitacional, no nos es posible inferir la presencia y tipo de corriente que fluye por la cuerda como producto de esta interacción.

Capítulo 4

Cuerdas con momento y CTCs eternas

De acuerdo a relatividad general, fuentes con rotación generan un efecto de arrastre en los sistemas inerciales: un observador fuera de una fuente compacta (por ejemplo, una estrella) puede saber, *por observaciones puramente locales*, que la fuente está rotando. Una de las formas en que esto se refleja en la métrica es en la propiedad de no ser diagonalizable. En este capítulo voy a analizar la pregunta de si existe un mecanismo similar de arrastre de sistemas inerciales, ahora no por momento angular sino lineal, y las consecuencias gravitacionales de este arrastre. Por simplicidad, y en analogía con el caso rotante-esférico, voy a restringirme a sistemas cilíndricos, donde el momento lineal sería en la dirección de simetría longitudinal del cilindro. En lo que sigue, entonces, cuando me refiera "momento", aunque no lo explicito, será a "momento lineal".

En la primera sección voy a presentar y analizar la métrica exterior que describiría este arrastre, en caso de existir. Sus propiedades son bastante exóticas, la más notable de ellas es la existencia de curvas cerradas temporales eternas, por lo que voy a llamarlas "métricas exóticas" o, indistintamente, "espaciotiempos exóticos".

En la segunda sección voy a comentar la propuesta de Thatcher y Morgan (TM) para cuerdas superconductoras con momento [32]. Lamentablemente, en esta propuesta el momento es constante, en el sentido de que no depende de la coordenada radial, y, por lo tanto, puede anularse eligiendo un sistema de referencia en el que el flujo de materia sea cero *en todo punto*; equivalentemente, la métrica es diagonalizable y no exótica (voy a referirme a este tipo de momentos como *triviales*).

Si bien la propuesta de TM no puede ser fuente de las métricas exóticas, existe la posibilidad de que otras configuraciones, de cuerdas superconductoras u otros campos, sí den origen a un arrastre por momento lineal y, por lo tanto, a la existencia de CTCs eternas. Evaluar esta posibilidad es el propósito de la tercera sección, en la que presento un resultado negativo: bajo condiciones bastante generales, cualquier fuente para la métrica exótica debe violar la DEC.

En la última sección presento algunas conjeturas y comentarios relacionados con cuerdas. Más detalles de todo lo que sigue puede encontrarse en [33].

4.1 Métricas exóticas

En caso de existir arrastre por momento lineal en fuentes cilíndrica, fuera del "tubo de materia" que generaría el arrastre (por ejemplo, el core de una cuerda superconductora con momento), la métrica debería ser de vacío, cilíndrica y (a diferencia de la métrica de Levi-Civita o Weyl) no diagonalizable. Usando un sistema de coordenadas adaptado a sus simetrías, la métrica más general con estas propiedades puede escribirse en la forma

$$ds^2 = g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{tt}dt^2 + g_{zz}dz^2 + 2g_{tz}dtdz, \quad (4.1)$$

con el rango usual para las coordenadas, y

$$g_{\theta\theta} = c_1|r - r_0|^{2q_1}, \quad (4.2)$$

$$g_{zz} = c_2^2|r - r_0|^{2q_2} \cos[2k \ln(|r - r_0|) + 2\phi_1], \quad (4.3)$$

$$g_{tt} = -c_3^2 |r - r_0|^{2q_2} \cos [2k \ln(|r - r_0|) + 2\phi_2], \quad (4.4)$$

$$g_{tz} = c_2 c_3 |r - r_0|^{2q_2} \cos [2k \ln(|r - r_0|) + \phi_1 + \phi_2], \quad (4.5)$$

donde α , k , c_1 , c_2 , c_3 , ϕ_1 , y ϕ_2 son constantes arbitrarias reales y

$$q_1 := \frac{1}{3} \left[1 + 2s(1 + 3k^2)^{1/2} \right], \quad q_2 := \frac{1}{3} \left[1 - s(1 + 3k^2)^{1/2} \right], \quad s = \pm 1.$$

La métrica exótica es no degenerada si y sólo si

$$c_1, c_2, c_3 \neq 0 \quad \text{y} \quad \phi_1 - \phi_2 \neq n\pi \quad (n \in \mathcal{Z}),$$

y cuando es degenerada lo es en todo punto (omitiendo del análisis $r = r_0$, donde hay singularidades de curvatura, que, en principio y de acuerdo a la interpretación usual, estarían "cubiertas" por la fuente). Es estática sólo cuando $k = 0$, correspondiendo a una métrica de Levi-Civita con $\Delta = \pm 1$ o ± 3 si $s = 1$ o -1 , respectivamente. Ésta es una propiedad curiosa y muy interesante, puesto que $\Delta = \pm 1$ o ± 3 son los únicos casos en los que la métrica diagonal de vacío (Levi-Civita) tiene simetría de boost. O sea que una métrica exótica puede estar suficientemente cerca de una métrica diagonal sólo cuando esta última es invariante ante boosts (para ello habría que tomar $\Delta = \pm 1$ o ± 3 y k suficientemente chico). *Si fuera posible interpretar las métricas exóticas como las exteriores a fuentes con momento lineal, esto significaría que sólo es posible darle un pequeño momento no trivial a una sistema cilíndrico cuando éste es invariante ante boosts.* Esta conclusión está limitada por el hecho de que, como nuestro en la próxima sección, la evidencia hasta el momento parece indicar que las métricas exóticas no describen la geometría exterior de fuentes físicas con momento lineal. Conviene notar, también, que, al menos localmente, la mayoría de los parámetros de las métricas exóticas no tienen significado geométrico y pueden eliminarse por un cambio de coordenadas (una excepción que debería tenerse en mente a lo largo de todo este capítulo es el parámetro k). Sin embargo, es importante recordar que esto sólo puede hacerse localmente. Si bien esta observación es un tanto trivial, una confusión en este sentido llevó a creer durante décadas que en relatividad general un cilindro rotante sólo puede existir para materia "no coherente" [34]. Para ejemplificar, basta recordar el caso de una cuerda cósmica: la métrica fuera del núcleo es localmente plana, y puede ponerse explícitamente en forma minkowskiana; pero sólo localmente, el único párametro libre de estas métricas no tiene significado geométrico, sino topológico, y es una medida de la masa total (por unidad de longitud) de la cuerda. Las razones para llamar exóticas a estas métricas están basadas en lo peculiar de su comportamiento global, que ahora paso a resumir.

4.1.1 Comportamiento global

Primero notemos, de ecs.(4.2,4.3,4.4,4.5), que los vectores de Killing $(\partial/\partial z)$ y $(\partial/\partial t)$ cambian de temporal a nulo, de espacial a nulo, de nulo a temporal, y así sucesivamente, a medida que se avanza en r . Esto es, estos vectores parece "rotar" en un plano dado por r y θ constantes, a medida que se avanza en r . Pero esto no refleja ninguna patología física en las métricas exóticas, a diferencia de su comportamiento causal.

Es fácil ver que en estos espacios exóticos existe una orientación temporal: un campo vectorial que no se anula en ninguna parte. Esta orientación provee de una noción local de tiempo de la siguiente forma. Se dice que una curva temporal, con vector tangente n^a , está dirigida al futuro si $n^a t_a > 0$, y dirigida al pasado si $n^a t_a < 0$.¹ Dicho de otro modo, la orientación define, localmente, conos de luz pasados y futuros. Supongamos ahora que existe una orientación que provenga de una función tiempo f , esto es, $t_a = \nabla_a f$. En ese caso, f crece a lo largo de la trayectoria mundo de un observador dirigido al futuro ($n^a t_a > 0$), de modo que éste no puede volver al mismo punto del espaciotiempo del que partió, y no pueden existir CTCs. La proposición inversa también es cierta, si bien es más difícil de probar. O sea: un espaciotiempo, o una región de él, es causalmente bien comportado si y sólo si existe una función tiempo.

Volviendo a los espacios exóticos, no es posible en ellos una definición global de tiempo, dado que por cada punto pasa una (altamente no única) curva cerrada causal. Estas curvas causales pueden elegirse temporales o

¹El hecho de que ambos campos vectoriales sean temporales excluye la posibilidad de que su producto escalar sea cero.

nulas, pero no geodésicas nulas. En otras palabras, no existen geodésicas nulas autointersectantes (en contraste, por ejemplo, con el espacio de Gott, en el que sí existen este tipo de curvas).

Si bien las geodésicas nulas no pueden autointersectarse, las geodésicas, sean temporales o nulas, tienen un comportamiento peculiar: cada una de ellas tiene dos puntos de retorno en r y por tanto no puede extenderse arbitrariamente lejos o cerca (respecto de r). Pero pueden construirse explícitamente curvas temporales o nulas (no geodésicas) que se extienden arbitrariamente en r . Es decir, el valor máximo de r al que una geodésica causal puede llegar depende de dicha curva, no es una característica del espacio tiempo ni indica la presencia de un horizonte de eventos. En particular, eligiendo distintas geodésicas puede llegarse arbitrariamente lejos.

4.2 Cuerdas superconductoras con momento

Tal como discutí en el segundo capítulo, las soluciones para cuerdas que usualmente se consideran son estáticas. Para dar lugar a la presencia de CTCs eternas, por otra parte, la solución debe ser estacionaria pero no estática. Dada la cantidad de campos involucrados, en principio no parece posible dotar a una cuerda cósmica de un flujo de momento no trivial. En cambio, en principio, sí es posible hacerlo para una cuerda superconductora, pero no es obvio que existan soluciones regulares con esta propiedad. Una propuesta en este sentido es la de TM. En realidad, el análisis de TM está restringido a cuerdas superconductoras sin corriente, i.e. mientras que una cuerda superconductora "usual" tiene dos simetrías de gauge, en este caso una de las dos simetrías es global. Por esta razón quizás sea más apropiado llamarlas "cuerdas superfluidas".

Lamentablemente, la propuesta de TM no funciona, porque el momento es trivial. Esencialmente, la idea es la siguiente. Siendo cilíndrica, la métrica puede escribirse, al menos localmente, en la forma (4.1). Descomponiendo los campos en sus módulos y fase,

$$\Phi = R e^{i\psi} , \quad \sigma = S e^{i\phi} ,$$

el Lagrangeano resultante para la materia es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \nabla^a R \nabla_a R - \frac{1}{2} \nabla^a S \nabla_a S - \frac{1}{2} R^2 (\nabla_a \psi + e A_a) (\nabla^a \psi + e A^a) - \frac{1}{2} S^2 \nabla_a \phi \nabla^a \phi \\ & - \lambda (R^2 - \eta^2)^2 - \frac{1}{16\pi} F_{ab} F^{ab} - f R^2 S^2 - \frac{1}{4} \lambda_2 S^4 + \frac{1}{2} m^2 S^2 . \end{aligned}$$

Luego se propone el siguiente ansatz:

$$R = R(r) , \quad \psi = \theta , \quad A_a = \frac{1}{e} [P(r) - 1] \nabla_a \theta , \quad S = S(r) , \quad \phi = kz - \omega t , \quad (|kz| < |\omega t|) .$$

La forma asumida para ϕ intenta dotar a la cuerda de un momento en la dirección z . Si bien esto es cierto, este momento es trivial y puede anularse explícitamente haciendo un boost en la dirección z . Puede verse que en el nuevo sistema de referencia cualquier métrica regular es diagonalizable.

Así y todo, aún persiste la posibilidad de que otras configuraciones, con momento no trivial, de cuerdas superconductoras o de algún otro sistema físico, puedan generar algún tipo de arrastre por momento y ser fuente de las métricas exóticas. En la próxima sección muestro un resultado negativo en esta dirección.

4.3 Fuentes para la métrica exótica

Voy a probar que, bajo circunstancias bastante generales, una fuente satisfaciendo la condición dominante para la energía (DEC) no puede generar una métrica exterior exótica. La prueba es constructiva, porque el tipo de desigualdades que se obtienen son aplicables a circunstancias más generales, y dan relaciones entre el comportamiento de métricas cilíndricas no diagonalizables y la materia que genera esas métricas. Las desigualdades de la prueba pueden ejemplificarse y verificarse en un modelo de cáscaras concéntricas (en cuyo caso la métrica puede construirse explícitamente) [33].

El problema puede plantearse como uno de empalme: puede un cilindro finito *regular* de radio coordenado \mathcal{R}_1 , con materia que satisface la DEC, empalmarse con una métrica exterior (i.e. válida para $r \geq \mathcal{R}_1$) del tipo

exótica?. Si el empalme fuera posible, la métrica interior debería ser estacionaria; de lo contrario habría ondas que se transmitirían al exterior, en contradicción con el hecho de que éste se ha asumido exótico (recordemos que el espacio exótico es estacionario). Esto porque, a diferencia de simetría esférica, en simetría cilíndrica existen ondas de vacío (e.g. Einstein Rosen). Voy a suponer que la métrica interior, además de estacionaria, tiene dos vectores de Killing espaciales, uno rotacional-superficie ortogonal y otro traslacional. Esto es, pido que la métrica interior tenga las mismas simetrías que la exterior (exótica), pero que, *además*, los vectores de Killing no "roten". Dicho de otro modo, la métrica interior puede escribirse como

$$ds^2 = -e^A dt^2 + e^B dz^2 + 2D(r)e^{(A+B)/2} dt dz + dr^2 + e^C d\theta^2 . \quad (4.6)$$

con A, B, C, D funciones *finitas* de r .

En la próxima sección muestro que una fuente de este tipo no puede generar métricas exóticas. La primera parte de la prueba consiste en obtener ciertas desigualdades que la DEC impone en las componentes del tensor energía impulso.² En la segunda parte de la prueba estas desigualdades se plantean, usando ahora que si se satisfacen las ecuaciones de Einstein entonces $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$, como desigualdades diferenciales de las que se pueden obtener cotas para ciertas combinaciones de la métrica exterior, provisto que la interior sea regular.³ Finalmente, se nota que las métricas exóticas no satisfacen estas cotas.

4.3.1 Un resultado negativo

DEC, autovalores y autovectores

Para métricas del tipo (4.1), las ecuaciones no triviales para los autovalores y autovectores de $T_a{}^b$ corresponden al sector $t - z$. Para el análisis de esta subsección, es conveniente elegir (sin pérdida de generalidad) una base ortonormal (\hat{t}^a, \hat{z}^a) en el punto en el que llevo a cabo el análisis, i.e. $g_{tz} = 0$, $g_{tt} = -1$, y $g_{zz} = 1$. Los autovalores de $T_a{}^b$ están dados, entonces, por

$$\lambda_{(\epsilon)} = \frac{1}{2} \left[(T_{zz} - T_{tt}) + \epsilon \gamma^{1/2} \right] , \quad \gamma = (T_{zz} + T_{tt})^2 - 4T_{tz}^2 , \quad \epsilon = \pm 1 .$$

Primero notemos que todo vector unitario temporal y dirigido al futuro m^a se puede escribir como $\hat{m}^a = \hat{t}^a \cosh \xi + \hat{z}^a \sinh \xi$. Luego es fácil ver que, si los autovalores son complejos ($\gamma < 0$) entonces $n^a := T_{ab} m^b$ es siempre espacial si $T_{zz} - T_{tt} = 0$, y es espacial para algún ξ si $T_{zz} - T_{tt} \neq 0$. Por otro lado, n^a es dirigido al futuro $\forall \xi$ si y sólo si

$$n^a \hat{t}_a = (T_{zz} + T_{tt}) \sinh^2 \xi + T_{tt} \geq 0 ,$$

una condición que es satisfecha $\forall \xi$ si y sólo si $T_{tt} \geq 0$ y $T_{zz} + T_{tt} \geq 0$.

Supongamos que se satisface la DEC, entonces $\gamma \geq 0$ y hay dos autovalores reales. Las normas de los correspondientes autovectores, $e_{(\epsilon)}^a$, están dadas por

$$e_{(\epsilon)}^a e_{(\epsilon)a} = \frac{\epsilon}{2} \gamma^{1/2} (T_{zz} + T_{tt} + \gamma^{1/2}) .$$

Si $\gamma = 0$, existe un único autovector (nulo), $\hat{t}^a + \hat{z}^a$, con multiplicidad 2, y el tensor energía momento es de tipo II en la clasificación de Hawking y Ellis [35]. Si $\gamma > 0$, uno de los autovectores es temporal y el otro espacial. En este caso, el tensor energía-impulso es de tipo I en la clasificación de [35].

La prueba

En las métricas exóticas puede elegirse sin pérdida de generalidad el signo de k , por ello voy a suponer de ahora en más $k < 0$.

²Si bien estas desigualdades parecen estar implícitas en muchos libros de texto, no conozco un análisis explícito, y parece por lo tanto razonable incorporarlo aquí.

³Con regular me refiero a derivadas segundas de la métrica finitas; esto implica que T_{ab} es C^1 . No es difícil cambiar la prueba para incluir discontinuidades en las derivadas primeras, i.e. la posibilidad de cáscaras de materia [33].

En un sistema no ortogonal de coordenadas, como el dado por (4.6), los autovalores de T_a^b son

$$\lambda = (2h)^{-1} \left\{ T_{tt}g_{zz} + T_{zz}g_{tt} - 2T_{tz}g_{tz} \pm [(T_{tt}g_{zz} - T_{zz}g_{tt})^2 - 4(T_{zz}g_{tz} - T_{tz}g_{zz})(T_{tz}g_{tt} - T_{tt}g_{tz})]^{1/2} \right\}.$$

Como acabo de mostrar, la DEC implica que estos autovalores deben ser reales (es importante recordar que esta es una propiedad que no depende de la base usada para su derivación). En nuestro nuevo sistema de coordenadas, esto es equivalente a

$$\alpha := (T_{tt}g_{zz} - T_{zz}g_{tt})^2 - 4(T_{zz}g_{tz} - T_{tz}g_{zz})(T_{tz}g_{tt} - T_{tt}g_{tz}) \geq 0. \quad (4.7)$$

Usando $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ y la forma (4.6) para la métrica, se tiene

$$\alpha = \frac{1}{64\pi^2} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2),$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}(1 + D^2)e^{(A+B-C)/2} \left[(A - B)' e^{(A+B+C)/2} (1 + D^2)^{-1/2} \right]', \\ \alpha_2 &= e^{(A+B-C)/2} (1 + D^2)^{1/2} \left[D' e^{(A+B+C)/2} (1 + D^2)^{-1/2} \right]' - \frac{D}{4} e^{(A+B)} (A - B)'^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

También se puede ver que

$$\alpha_1 = 8\pi(1 + D^2)^{1/2} e^{(A+B)} (T_{ab} \hat{t}^a \hat{t}^b + T_{ab} \hat{z}^a \hat{z}^b), \quad (4.9)$$

de manera que la WEC $\Rightarrow \alpha_1 \geq 0$. Si bien no está relacionado con la prueba, voy a mostrar algo más. De las ecuaciones (4.8) y (4.9) se obtiene

$$(A - B)' e^{(A+B+C)/2} (1 + D^2)^{-1/2} = 16\pi \int_0^r e^{(A+B+C)/2} (1 + D^2)^{-1/2} (T_{ab} \hat{t}^a \hat{t}^b + T_{ab} \hat{z}^a \hat{z}^b),$$

y la WEC $\Rightarrow (A - B)' \geq 0$. Recordando que $(A - B)_{r=0} = 0$, tenemos $|g_{tt}| \geq g_{zz} \forall r$.

Volviendo a nuestra prueba, el punto es que la no negatividad de α_1 implica que (4.7) puede ser escrita como $\alpha_1 - |\alpha_2| \geq 0$. Pero $\alpha_1 - |\alpha_2| \geq 0 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 \geq 0$. Y tenemos

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{1}{2}(1 + D^2)e^{(A+B-C)/2-F} (qe^F)',$$

con

$$q = A' - B' - 2D'(1 + D^2)^{-1/2}, \quad F = \int_0^r \frac{D [(A - B)'(1 + D^2)^{1/2} + 2D']}{2(1 + D^2)e^{(A+B)/2}}.$$

La convergencia de la integral que define F está garantizada por la regularidad del eje, que a su vez implica

$$g_{tt} = -1 + O(r^2), \quad g_{zz} = 1 + O(r^2), \quad g_{\theta\theta} = r^2 + O(r^4), \quad g_{tz} = O(r^2). \quad (4.10)$$

La DEC es, entonces, equivalente a

$$(qe^F)' \geq 0. \quad (4.11)$$

Integrando ec.(4.11) y usando una vez más ecs. (4.10), tenemos $q \geq 0 \forall r$. En particular, $q \geq 0$ en el radio de empalme, $r = \mathcal{R}_1$. Por regularidad, la función q , que está construida a partir de las componentes de la métrica y sus derivadas, es continua, y, por lo tanto, en $r = \mathcal{R}_1$ puede ser evaluada usando las métricas exóticas, encontrando

$$q|_{r=\mathcal{R}_1} = \frac{2k [(1 + \sin \alpha_1) \cos \alpha_2 + (1 - \sin \alpha_2) \cos \alpha_1]}{(\mathcal{R}_1 - r_1) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2} \geq 0, \quad (4.12)$$

con

$$\alpha_1 := 2k \ln(\mathcal{R}_1 - r_1) + 2\phi_1, \quad \alpha_2 := 2k \ln(\mathcal{R}_1 - r_1) + 2\phi_2 - \pi$$

Analicemos ahora el lado derecho de ec.(4.12). Para que la métrica exterior (exótica) sea regular, $\mathcal{R}_1 - r_1 > 0$. También tenemos que $\cos \alpha_1 > 0$ y $\cos \alpha_2 > 0$, dado que los coeficientes de la métrica en $r = R_1$ son

$$g_{zz} = c_2^2 (\mathcal{R}_1 - r_1)^{2q_2} \cos \alpha_1 > 0 \quad , \quad g_{tt} = -c_3^2 (\mathcal{R}_1 - r_1)^{2q_2} \cos \alpha_2 < 0 .$$

Dado que $k < 0$, la desigualdad (4.12) es equivalente a

$$[(1 + \sin \alpha_1) \cos \alpha_2 + (1 - \sin \alpha_2) \cos \alpha_1] \leq 0 ,$$

pero esta condición no puede ser satisfecha si $\cos \alpha_1 > 0$ y $\cos \alpha_2 > 0$. **QED.**

4.4 Conclusiones y direcciones futuras

Una de las hipótesis de la prueba es que se satisface la DEC. Existe bastante consenso en la comunidad científica en que la materia satisface esta condición, i.e. que no existen taquiones. Pero es importante destacar que *existen fuentes regulares que violan la DEC y que generan efecto de arrastre*, en [33] pueden verse ejemplos explícitos de cáscaras concéntricas. Otra de las hipótesis es que los vectores de Killing de la métrica interior no roten, i.e. que no cambien de tipo, o signatura, con r . Como la métrica interior se supone regular, el eje debe ser "minkowskiano". Esto implica, por continuidad, que la forma (4.6) para la métrica es válida en un entorno del eje, aún si los vectores de Killing rotan. De manera que si fuentes con Killing que rotan generaran efecto de arrastre, no podrían tener un radio suficientemente chico. Aquí deberíamos recordar que en el segundo capítulo vimos que el core de cuerdas superconductoras estáticas tiene una propiedad similar si se satisface la SEC; por ello sería interesante ahondar en esto. Finalmente, también supuse que la métrica interior tiene simetría cilíndrica, pero no creo que esto tenga ninguna relevancia. Esto es, creo que si se prueba que un tubo cilíndricamente simétrico de materia, con vectores de Killing que rotan, no genera efecto de arrastre, entonces tampoco lo genera un tubo no simétrico.

Aparentemente, de acuerdo a todo lo discutido en este capítulo, la evidencia *al momento* indica que no pueden construirse fuentes físicas para las métricas exóticas. Si esto fuera cierto, de allí no debería concluirse, por supuesto, que no existen sistemas con momento no trivial en relatividad general. La conclusión sería que la métrica exterior o lejana (si la fuente no es compacta en r) debe ser diagonalizable (Levi-Civita) y, por lo tanto, no existe un efecto de arrastre y un observador no puede, por mediciones puramente locales, inferir que la fuente tiene flujo no trivial de materia.

Capítulo 5

Holonomías y energía-momento

En una idealización extrema, el espaciotiempo de una cuerda cósmica puede aproximarse por uno plano con una singularidad cónica en el eje de simetría. Siendo que hay un vector de Killing superficie ortogonal, $(\partial/\partial z)$, la métrica puede reducirse de forma natural a una en $2 + 1$ y corresponde, en este nuevo espacio, a la métrica de una partícula. Análogamente, el campo de varias cuerdas (posiblemente, en movimiento relativo) puede verse como el de varias partículas, y, por ejemplo, un par de Gott corresponde a un par de partículas con velocidad relativa. El propósito de esta reducción es solamente el de "olvidarse de la coordenada z ".

En $2 + 1$ puede definirse energía-momento (EM) de un sistema usando holonomías, y esto me será muy útil en los próximos capítulos. Para estos espacios existe también una definición de planitud asintótica, masa tipo ADM y masa tipo Bondi, en un espíritu parecido al de $3 + 1$ [28] [29]; pero es fácil ver que todas estas definiciones están limitadas a lo que en término de holonomías se llamará EM total temporal. Esto es, la definición de EM usando holonomías cubre más casos que la "conforme", pero puede verse que ambas coinciden cuando la última está definida.

Gran parte de este capítulo está basada en un muy buen trabajo de Carroll, Farhi, Guth y Olum [36].

5.1 Transporte paralelo

Empecemos pensando en una región globalmente hiperbólica: entonces existe una foliación en hipersuperficies Σ_t completas, acronales y sin borde. Asumamos que no se viola la DEC (equivalentemente, que no hay taquiones), de manera que la materia (con esto me refiero a las curvas integrales del cuadvivector momento $p^a := -T^{ab}t_b$, usando cualquier covector temporal t_a para definirlo) interseque cada una de estas superficies una y sólo una vez. Tomemos una cualquiera de estas hipersuperficies Σ_t y definamos un sistema al tiempo t como un región abierta conexa y simplemente conexa S tal que su frontera sea una curva suave no autointersectante C :

$$C : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M} \quad , \quad C(0) = C(1) .$$

En la próxima sección, un punto p_0 en esta frontera va a ser interpretado como un observador, y voy a definir la energía momento de S medida por este observador usando la holonomía con punto base p_0 y loop C . Esto es, sea $\{e_i\}$, $i = 1 \dots 3$, una base ortonormal de T_{p_0} . Transportando esta base paralelamente a lo largo de C , se obtiene una sucesión de bases ortonormales de $T_p(s)$, $s = 0 \dots 1$, que denotamos por $\{e_i(s)\}$. Cuando se regresa al punto original del cual se partió, $s = 1$ y cada elemento, $e_i(1)$, está relacionado con el original, $e_i(0)$, por una transformación de Lorentz:

$$e_i(1) = L e_i(0) \quad , \quad L \in SO(2, 1) .$$

La EM del sistema medida por este observador se definirá en término de L . Toda curva cerrada no autointersectante en \mathcal{R}^2 divide al plano en una región exterior y una interior (teorema de Jordan). Si la región exterior

es vacía¹, entonces L definirá la energía momento total. Así definida, esta cantidad tendrá varias propiedades deseadas:

- Para un observador dado, no dependerá del loop. Los diferentes loops posibles están definidos en $R := \Sigma_t - \bar{S}$, donde \bar{S} es la clausura del soporte de la materia². Como R es vacío, es plano³, y el transporte paralelo no depende de la curva, en tanto sean deformables unas en otras. Por otra parte, la condición de que los loops no se autointersecten implica que todos ellos tienen winding number 1 y son, efectivamente, homotópicos entre sí.
- Será conservada.

En principio, para todas estas construcciones parece requerirse que el espaciotiempo sea globalmente hiperbólico, y por lo tanto no poder extenderse a un espaciotiempo con violaciones de causalidad. Sin embargo, que tal extensión es posible sale de la siguiente observación: en realidad no se necesita de una foliación en superficies acronales, sino tan sólo de una foliación en superficies a las que la materia cruce una y sólo una vez. Esto es, sólo necesito pedir que las Σ_t sean "acronales respecto de la materia" o "m-acronales", i.e. que las curvas integrales de p^a (definido arriba) intersecten cada superficie una y sólo una vez. Interessantemente, todos los espacios que se construyen describiendo partículas *sin spin* satisfacen este requerimiento, tal como ahora describo.

Para definir un espacio de varias partículas se procede con "papel, tijera y pegamento" [37]. Comencemos con una partícula: se toma una superficie (2 dimensional), se le corta un ángulo $\alpha < 2\pi$ y se identifican los lados, i.e. se tiene una superficie plana con una singularidad cónica (posición de la partícula). Para construir un espacio de dos partículas en reposo relativo, se toman dos copias Σ_1 y Σ_2 de superficies que describan cada una de ellas partículas con ángulos de déficit α_1 y α_2 , respectivamente, con $\alpha_1 + \alpha_2 < 2\pi$. En Σ_1 se elige una curva C_1 infinita. Esta curva divide Σ_1 en dos regiones disconexas, de las cuales una tiene la singularidad cónica; tomamos esta región, y su frontera C_1 . Ahora repetimos la construcción en Σ_2 , obteniendo una correspondiente frontera C_2 , y exigimos la condición de que la métrica inducida y curvatura extrínseca de las curvas C_1 y C_2 sean idénticas⁴, de forma tal que sea posible un empalme, i.e. identificamos C_1 con C_2 . Para construir espacios con más partículas en reposo relativo se procede en forma análoga, debiendo cumplirse $\sum_i \alpha_i < 2\pi$ como condición necesaria (más adelante discuto el significado de esta desigualdad). Finalmente, para describir dos partículas con velocidad relativa, las curvas C_i deben ser curvas integrales de isometrías (i.e. rectas en las superficies originales, antes de quitarles el ángulo de déficit). Entonces, es posible identificar C_1 y C_2 con un boost relativo. Esta construcción sólo es posible si $\alpha_i < \pi$ ($i = 1, 2$). Para describir varias partículas en movimiento relativo se procede de forma análoga.

5.2 El grupo de Lorentz y su geometría

En lugar de discutir las propiedades del grupo de Lorentz en $2+1$, $SO(2,1)$, voy a discutir las de su doble cubrimiento $SU(1,1)$. Es decir, $SO(2,1)$ como grupo de Lie no es simplemente conexo, básicamente porque rotaciones de ángulo 0 y 2π están identificadas. Si no se hace dicha identificación, se obtiene $SU(1,1)$, el doble cubrimiento de $SO(2,1)$, en el que rotaciones de ángulo 0 y 4π están identificadas. Si se relaja esta identificación se obtiene un cubrimiento de $SU(1,1)$, y así sucesivamente; finalmente, el cubrimiento universal es simplemente conexo y lo denoto por $\widetilde{SO}(2,1)$.

Cualquier elemento $T \in SU(1,1)$ puede descomponerse en una rotación R de ángulo θ y un boost B de rapidez ξ y dirección caracterizada por el ángulo δ :

$$T = B(\xi, \delta)R(\theta) \quad (5.1)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} \cosh(\xi/2) & e^{i(\theta/2)-\delta} \sinh(\xi/2) \\ e^{i(-\theta/2)+\delta} \sinh(\xi/2) & e^{i\theta/2} \cosh(\xi/2) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

¹ Si la materia no tiene soporte espacial compacto esto puede lograrse deformando un loop C al infinito.

² Si se trata de partículas entonces se toma algún S que las contenga, y suficientemente pequeño para que los loops del argumento estén en R .

³ En $2+1$ el tensor de Weyl es idénticamente cero.

⁴ De signo opuesto, en realidad.

Como grupo de Lie, $SU(1, 1)$ tiene una métrica naturalmente definida por las constantes de estructura y es, definiendo $\Psi := 2\delta - \theta$,

$$ds^2 = -\frac{1}{4} \cosh^2(\xi/2) d\theta^2 + \frac{1}{4} d\xi^2 + \frac{1}{4} \sinh^2(\xi/2) d\Psi^2 \quad (5.3)$$

Interesantemente, esta métrica es de signatura Lorentziana y corresponde al espaciotiempo de anti-deSitter en $2+1$ (notar que la coordenada θ es temporal respecto de esta métrica). En la figura (5.2) muestro un diagrama conforme de (el cubrimiento universal de) este espaciotiempo, suprimiendo la coordenadas δ . Si se considera sólo $SO(2, 1)$, las regiones I y III están identificadas.

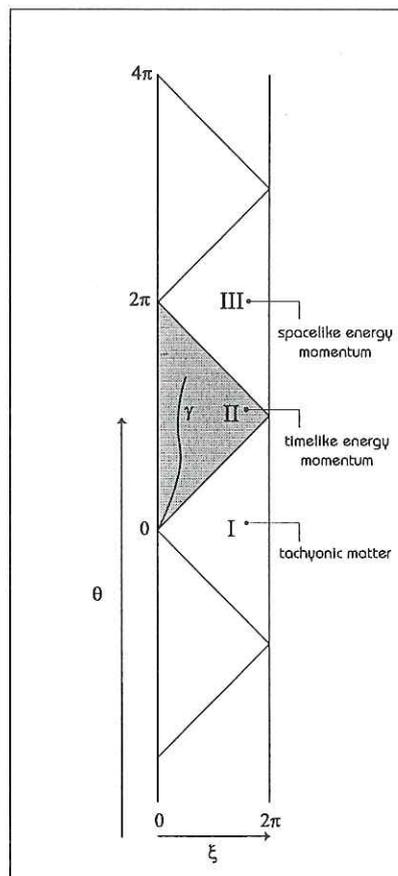


Figura 5.1: Diagrama conforme de anti-deSitter.

Para definir la EM de un sistema S de frontera C , medida por un observador p , se parte del loop trivial con punto base p . Luego, manteniendo el punto base, se agranda el loop hasta que éste coincida con C . En el proceso, el operador holonómico parte de la identidad (correspondiente al loop trivial) y llega a un elemento $T \in \widetilde{SO}(2, 1)$. Se proyecta T a $SO(2, 1)$, para luego poder escribirlo exponenciando elementos del álgebra de Lie,

$$T = \exp(-i\phi^\mu \mathcal{J}_\mu) .$$

Una posible representación para dicha algebra es

$$\mathcal{J}_0 = \frac{1}{2}\sigma_3 \quad , \quad \mathcal{J}_1 = -\frac{i}{2}\sigma_2 \quad , \quad \mathcal{J}_2 = \frac{i}{2}\sigma_1 \quad ,$$

con σ_i las matrices de Pauli. El vector tangente a la identidad, ϕ^μ , se define como la EM de S medida por p , y se dice que ésta es temporal, nula o espacial si ϕ^μ lo es [respecto a la métrica (5.3)]. Por ejemplo, para una partícula de masa m se tiene que, en "el sistema en reposo", ϕ^μ es una rotación pura,

$$\phi^\mu = (\alpha, 0, 0) = (8\pi m, 0, 0), \quad (5.4)$$

y, en consecuencia, la EM de una partícula es siempre temporal.

Para definir la EM total simplemente se toma p fuera del soporte de la materia. La curva γ que el operador holonómico describe en el grupo de Lie depende de la forma en que se deforma el loop, pero lo importante es que el punto final de γ no depende de la deformación, y es único módulo transformaciones de equivalencia (esta ambigüedad corresponde a la libertad en elegir la base ortonormal que se transporta paralelamente).

Si bien γ no es única, puede caracterizarse de acuerdo a las condiciones energéticas que satisface la materia encerrada por el loop en el proceso: γ es causal si se satisface la DEC, y dirigida al futuro si se satisface la WEC. Si la materia no es continua, sino que está compuesta de partículas, estas propiedades se traducen de la siguiente forma: sean L_1 y L_2 los operadores holonómicos correspondientes a sistemas S_1 y S_2 , respectivamente, tal que $S_1 \subset S_2$. Si la materia satisface la DEC entonces L_1 y L_2 están ambos relacionados causalmente con la identidad (y, en particular, relacionados causalmente entre sí), y si satisface la DEC entonces L_2 está en el futuro causal de L_1 . En cualquier caso, un sistema o subsistema que satisface la DEC no puede tener holonomía en la región III. En particular, esto explica la diferencia entre un par de Gott y un taquión. Mientras que el primero tiene holonomía en la región I, el último viola la DEC y por lo tanto tiene EM en la región III. Pero, por otra parte, para definir EM se proyecta a $\mathcal{SO}(2,1)$ y se identifican las regiones I y III, por ello la EM de un taquión y un par de Gott coinciden. En otras palabras, mientras que vectores trasladados alrededor de un par de Gott no notan diferencia respecto a un taquión, espinores sí lo hacen. Esto explica por qué un par de Gott no es taquiónico (por otro lado, satisface la DEC y por lo tanto cada partícula se mueve con velocidad menor que la de la luz).

5.3 Consecuencias

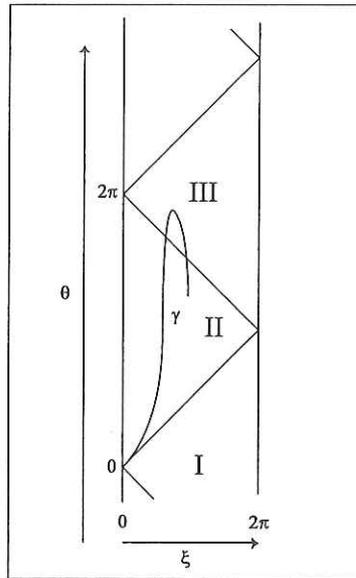
En el caso de EM total temporal, el ángulo de déficit en el sistema en reposo define, de forma similar a una partícula [ec.(5.4)], la masa total del espaciotiempo. Como este ángulo no puede exceder el valor de 2π , se obtiene el curioso resultado de que la masa total está acotada por arriba. Esta cota puede verse de la siguiente forma: \mathcal{R}^2 provisto de una métrica Riemanniana geodésicamente completa tiene curvatura Gaussiana acotada por 2π (teorema de Cohn-Vossen); por otra parte, esta curvatura total coincide con el ángulo de déficit en el sistema en reposo (teorema de Gauss-Bonnet). Ashtekar y Varadarajan han encontrado, de forma independiente, un resultado ligeramente más débil, en el marco de un formalismo hamiltoniano para gravedad en $2+1$ [29].

En la sección anterior vimos cómo se reflejan en el grupo de holonomías, visto como variedad Lorentziana, distintas condiciones energéticas en la materia. Ahora podemos hacer uso de algunas propiedades básicas de geometría diferencial, aplicadas al grupo de Lie, para obtener de forma muy simple y elegante varias propiedades interesantes, de las que voy a sacar provecho en los capítulos siguientes.

Consideremos un sistema que respeta la WEC, la DEC, y tiene EM total temporal. Entonces el operador holonómico parte de la identidad y describe una curva suave en el grupo de Lie hasta llegar a un elemento en la región I y, por lo tanto, ningún subsistema puede tener EM espacial.

A partir de la propiedad anterior puede, por ejemplo, afirmarse lo siguiente: una partícula no puede decaer en dos o más partículas, tal que se tenga como subsistema un par de Gott y así construir una máquina de tiempo. La razón es que no habría suficiente energía total para acelerar el par de partículas hasta que tengan velocidad suficiente para constituir un par de Gott (en [38] puede verse un análisis explícito, i.e. sin usar la geometría del grupo de Lorentz, de esta consideración energética).

Para el capítulo 7 voy a necesitar una generalización de este tipo de análisis, en el que se permita violación de la WEC [39]. Una suposición natural es que, aún si se viola esta condición, se satisfaga la DEC y que existan puntos en los que la distribución de materia tenga masa positiva. Si parto de un loop trivial en alguno de estos puntos y empiezo a deformarlo encerrando más y más materia, el operador holonómico describe una curva γ que al comienzo es dirigida al futuro, pero se vuelve dirigida al pasado cuando el loop pasa por zonas con densidad



de energía negativa. Voy a suponer que γ no llega nunca a la región III⁵. La primera restricción pone cotas a la cantidad de materia con masa negativa, mientras que la segunda lo hace respecto a la cantidad de materia con masa positiva. Mas aún, voy a suponer que esto sucede cualquiera sea el punto con densidad de masa positiva que se tome para comenzar la deformación. Con estas restricciones en cuenta, resulta que no existen subsistemas con EM espacial.

⁵En particular, estoy suponiendo que todo subsistema tiene EM temporal, como comenté antes esta propiedad es automática si se satisface la WEC.

Capítulo 6

CTCs y horizontes de Cauchy

El espaciotiempo de un número arbitrario de partículas en reposo es causalmente bien comportado. El ejemplo más simple con CTCs se obtiene con un par de Gott, i.e. dos partículas en movimiento relativo. Supongamos, por simplicidad, que las dos partículas tienen masas m iguales, y denotemos su rapidez por ξ . En sus respectivos sistemas en reposo, cada partícula tiene un ángulo de déficit $\alpha = m(8\pi)^{-1}$. Puede verse explícitamente [6] que para que este par tenga CTCs debe cumplirse la siguiente desigualdad:

$$\cosh \xi \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) > 1. \quad (6.1)$$

Por otra parte, puede verse que la EM total (definida en el capítulo anterior), de este sistema es espacial si y sólo si se satisface la desigualdad (6.1). Esto fue notado por primera vez por Deser, Jackiw y t'Hooft [40], concluyendo (incorrectamente, en base a lo discutido en el capítulo anterior) que se trata de un sistema taquiónico.

Como también discutí en el capítulo anterior, el espaciotiempo de Gott puede obtenerse con "papel, tijera y pegamento". Si uno considera las superficies que se usan para la construcción, encuentra que, suficientemente lejos, *por toda superficie* pasa alguna CTC. Esto llevó a afirmar a Deser, Jackiw y t'Hooft que este espacio no puede verse como la evolución de ciertos datos iniciales, i.e. que tiene CTCs eternas. Nuevamente, esta interpretación es incorrecta.¹ Eligiendo adecuadas secciones espaciales, puede verse que existe una región del espaciotiempo causalmente bien comportada con un horizonte de Cauchy futuro, más allá del cual están las CTCs [41].

En este capítulo voy a mostrar que, cualquiera sea el número de partículas que se tenga, el análogo de la desigualdad (6.1) es condición necesaria para la existencia de CTCs, i.e. no puede haber CTCs si la EM total es temporal [43]. La prueba no es una generalización del análisis [6], porque para un número arbitrario de partículas obviamente no podemos hacer un estudio explícito. La idea de la prueba es la siguiente: siguiendo a Cutler [41], no es difícil ver que para un número arbitrario de partículas *que satisfacen la WEC* también vale la propiedad de que si hay CTCs, éstas están restringidas a una zona del espaciotiempo y hay un horizonte de Cauchy. Ahora, el horizonte de Cauchy puede obtenerse como límite de las superficies polarizadas; pero, por otra parte, éstas no convergen en presencia de EM total temporal.

6.1 Superficies polarizadas

Sea entonces \mathcal{S} una superficie parcial de Cauchy para $D^+(\mathcal{S})$, y $D^+(\mathcal{S})$ parte de un espaciotiempo orientable y temporalmente orientable, con un horizonte de Cauchy futuro $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}^+(\mathcal{S})$. Entonces, puede verse [35] que

1. \mathcal{H}^+ es compacto si y sólo si \mathcal{S} lo es.

¹Todos estos desaciertos (y algunos más) de Deser, Jackiw y t'Hooft están bien revisados por Headrick y Gott [42].

2. \mathcal{H}^+ es diferenciable excepto por un conjunto de medida nula. De ahora en más voy a asumir implícitamente diferenciability cada vez que sea necesario.
3. \mathcal{H}^+ está generado por geodésicas que son completas en el pasado pero pueden ser incompletas en el futuro. Denotamos estas geodésicas, genéricamente, por $\beta(s, x) : \mathcal{I} \times \mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^+$, con \mathcal{I} algún intervalo de \mathcal{R} y s algún parámetro afin.

Estoy interesado en sistemas compuestos por partículas que no se intersectan. Una propiedad de estos sistemas es que existe al menos una foliación en superficies m-acronales: las partículas atraviesan cada superficie una y sólo una vez, permitiendo definir EM total incluso en la presencia de CTCs.

Voy a empezar discutiendo el caso de dos partículas y luego generalizar. Supongamos, entonces, que hay CTCs, i.e. que se tiene un par de Gott. Tomemos un punto $q \in \mathcal{H}$ y una curva S que tenga a q en uno de sus extremos y esté completamente contenida en la zona con CTCs (excepto por q , que no está en dicha zona, sino en su frontera), a la que denotamos por \mathcal{M}_{ctc} :

$$S : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M} \quad , \quad S(0) = q \in \mathcal{H} \quad , \quad S(1) =: p_n^0 \quad , \quad S(t) \in \mathcal{M}_{ctc} \text{ para } t \in (0, 1] .$$

Como $p_n^0 \in \mathcal{M}_{ctc}$, existe una CTC C_n^0 que pasa por p_n^0 , de winding number n . Ahora acerquemos p_n^0 al horizonte \mathcal{H} a lo largo de S , deformando C_n^0 en el proceso de forma continua, i.e. manteniendola como una CTC de winding number n . Eligiendo un conjunto discreto de esta deformación, puedo construir una sucesión de CTCs C_n^i que pasan por puntos $p_n^i \in S$ (n fijo, $i \geq 0$). Ninguno de estos puntos p_n^i puede coincidir con q , de lo contrario existiría una CTC que pasa por dicho punto; como \mathcal{M}_{ctc} es un conjunto abierto, existiría una CTC en la zona causalmente bien comportada, llegando así a un absurdo.

Como (la imagen de) S es un conjunto compacto, la sucesión p_n^i converge a algún punto $\tilde{p}_n \in S$. Se supone, además, que existe el límite

$$C_n := \lim_{i \rightarrow \infty} C_n^i , \tag{6.2}$$

y que C_n es una curva suave a trozos. Por continuidad, C_n es causal y de winding number n , pero no es temporal; de lo contrario, podría acercarse \tilde{p}_n aún más al horizonte y reiniciar el argumento, en contradicción con ser el límite de la sucesión $\{p_n^i\}$. Puede verse que una curva causal que une dos puntos y no puede deformarse en una curva temporal es una geodésica nula quebrada, en este caso una geodésica nula autointersecante (GNA), i.e. una geodésica nula que regresa al mismo punto pero posiblemente con un vector tangente distinto (reservo el nombre de geodésica nula cerrada para aquellas en las que el vector tangente es proporcional al original). Se define la n -ésima superficie polarizada \mathcal{H}_n como el conjunto de puntos por los cuales pasa una GNA de winding number n ; en otras palabras, $\tilde{p}_n \in \mathcal{H}_n$.

Ahora repito el proceso, pero en lugar de partir con la curva C_n^0 parto de una curva C_{2n}^0 de winding number $2n$ que construyo recorriendo dos veces C_n^0 , i.e.

$$C_{2n}^0(t) := C_n^0(2t) ,$$

obteniendo una GNA C_{2n} que pasa por un punto $\tilde{p}_{2n} \in \mathcal{H}_{2n}$ más cerca de $q \in \mathcal{H}$ que \tilde{p}_n (en un sentido topológico, i.e. existe un abierto que contiene a \tilde{p}_{2n} y q , pero no a \tilde{p}_n).

Repitiendo el argumento, se tiene que en el límite $n \rightarrow \infty$ las superficies polarizadas convergen al horizonte de Cauchy,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_n = \mathcal{H} . \tag{6.3}$$

Esta es una propiedad muy útil, pero todavía no lo suficiente. El próximo paso es centrar la atención en la convergencia de vectores tangentes, del siguiente modo. Hasta ahora tenemos una sucesión de GNA C_n que pasan por puntos $\tilde{p}_n \in S$. En principio, C_n es una GNA pero no una geodésica nula cerrada, de modo que en \tilde{p}_n el vector tangente no regresa a su mismo valor luego de recorrer C_n : existe un vector inicial k_n^i y otro final k_n^f (ambos nulos) no necesariamente iguales. Considerando los distintos n , tengo una sucesión de pares de vectores nulos (k_n^i, k_n^f) , ambos en $T_{\tilde{p}_n}$. A distinto n , cada par de vectores está en un espacio vectorial distinto, pero puedo trasladar paralelamente todos ellos a q deformando la curva C_n , de forma que siga siendo de winding number n (ya no será causal, pero esto no importa). En resumen; tengo una sucesión de pares de vectores nulos (k_n^i, k_n^f) , todos ellos en T_q . La siguiente observación es crucial:

Consideremos una GNA C_1 y su correspondiente par (k_1^i, k_1^f) . Por ser C_1 una geodésica, el transporte de k_1 a lo largo de C_1 , partiendo y llegando a \tilde{p}_1 , es paralelo; y por ser C_1 de winding number 1,

$$k_1^f = Lk_1^i,$$

donde L es, por definición, el elemento de $\mathcal{SO}(2, 1)$ que define la EM total. Análogamente, para una GNA C_n

$$k_n^f = L^{(n)}k_n^i, \quad L^{(n)} = L \times L \times \dots L, \quad n \text{ veces}.$$

Ahora, cuando $n \rightarrow \infty$, el par de sucesiones (k_n^i, k_n^f) converge a un múltiplo del vector tangente al horizonte en q , llamémoslo k (también es nulo, en particular porque el horizonte lo es). En particular, esto implica que k es una dirección nula fija del operador holónomico L . Esto es, existe un vector nulo k tal que

$$Lk = \lambda k, \quad \lambda \in \mathcal{R}.$$

6.2 Energía momento y direcciones nulas fijas

De manera que, como condición necesaria para la existencia de CTCs en el espacio de Gott, el elemento L que describe la EM total debe tener una dirección nula fija. Equivalentemente, si se lo ve como un mapa lineal, L debe tener un autovector nulo. En $3 + 1$, todo elemento del grupo de Lorentz tiene al menos un autovector nulo. En cambio, puede verse que en $2 + 1$ un elemento L del grupo de Lorentz tiene:

1. Ningún autovector nulo si es temporal (equivalente a una rotación), salvo cuando es la identidad.
2. Exactamente un autovector nulo, de autovalor uno, si es nulo (equivalente a una rotación nula).
3. Dos autovectores nulos si es espacial (equivalente a un boost). Uno de ellos es $\lambda_1 > 1$, y el otro $\lambda_2 = 1/\lambda_1$.

Existen distintas formas desde las que se puede ver esta diferencia entre el grupo de Lorentz en $3 + 1$ y $2 + 1$ respecto a la existencia o no de direcciones nulas fijas. La más simple es la que acabo de mencionar, i.e. un problema de álgebra lineal. Otra forma es considerar a un elemento de $\mathcal{SO}(3, 1)$ como un mapa de la esfera en sí mismo que preserva la orientación; este tipo de mapas tienen al menos un punto fijo [44]. Análogamente, podemos ver a un elemento de $\mathcal{SO}(2, 1)$ como un homeomorfismo del círculo que preserva la orientación. A diferencia de la esfera, un mapa de este tipo en el círculo no necesariamente tiene un punto fijo. Una condición necesaria y suficiente es, por ejemplo, que su número de rotación sea entero² [45].

En cualquier caso, hemos probado que en el espacio de Gott no pueden existir CTCs si la EM total es temporal, salvo cuando es la identidad. Si ésta corresponde a un ángulo de rotación cero, el espaciotiempo es vacío y plano; por lo tanto causalmente bien comportado, ya que su topología se ha asumido simplemente conexa. Si la identidad corresponde a una rotación de ángulo de 2π , entonces es posible que existan CTCs, pero este caso es inestable: disminuyendo la masa total en una cantidad arbitrariamente chica las CTCs deben desaparecer. Esto se puede precisar usando la topología natural del grupo de Lie visto como variedad; el operador holónomico correspondiente a una rotación de 2π está en la frontera del conjunto de puntos que describen EM temporal, y en cualquier abierto que lo contenga existen elementos con EM temporal de ángulo menor que 2π [ver figura 6.2].

La generalización es ahora inmediata. Supongamos que la EM total es temporal y recordemos que esto implica que todo subsistema tiene EM del mismo tipo. Ahora basta repetir el análisis para alguna familia de CTCs que rodee algún subsistema, y se obtiene que dicho subsistema no puede tener EM temporal, llegando así a un absurdo (excepto por el inestable caso de EM total temporal de ángulo 2π).

²El número de rotación de un homeomorfismo en el círculo es una generalización del ángulo de rotación.

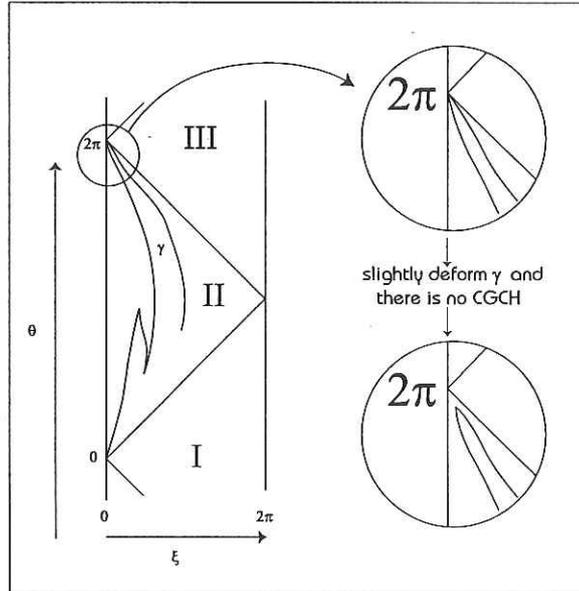


Figura 6.1: Inestabilidad de los casos en los que puede haber CTCs.

6.3 Retrospectiva

El concepto de superficies polarizadas fue originalmente introducido por Kim y Thorne [46] para analizar la estabilidad de horizontes de Cauchy en wormholes ante campos semiclásicos. En este tipo de análisis esencialmente se mira el cambio en la frecuencia que sufre un fotón al acercarse al horizonte de Cauchy \mathcal{H}^+ por superficies polarizadas para intentar inferir si \mathcal{H}^+ es o no estable.

Poniendo paredes reflejantes puede suceder que \mathcal{H}^+ no sea el límite de superficies polarizadas, básicamente porque las GNA no pueden acercarse arbitrariamente al horizonte sino que son reflejadas [47]. Aunque la inclusión de estas paredes es un poco artificial, conviene tener en cuenta este punto.

Cuando la topología es simplemente conexa, como aquí, el único punto que resta por probar en el criterio del horizonte de Cauchy como límite de superficies polarizadas, es la existencia del límite (6.2). Si bien parece razonable asumir que dicho límite existe, al momento no hay una prueba rigurosa de bajo qué condiciones lo hace. Probablemente podrían usarse técnicas similares a las del caso globalmente hiperbólico, en el que se define $C(p, q)$ como el conjunto de curvas³ continuas causales que unen p con q [35]. Este conjunto naturalmente hereda una topología de aquella a su vez naturalmente definida en el espaciotiempo (visto como variedad). Esto es, se define un abierto de $\gamma \in C(p, q)$ como el conjunto de curvas tales que todos sus puntos están en algún entorno de todo punto de γ . Si bien $C(p, q)$ puede definirse sea o no el espaciotiempo globalmente hiperbólico, se puede ver que es compacto si y sólo si el espacio es globalmente hiperbólico [48] [esta compacticidad puede ser luego usada, por ejemplo, para probar convergencia de sucesiones en $C(p, q)$]. Una forma de probar esta equivalencia entre compacticidad de $C(p, q)$ e hiperbolicidad global es notar que esta última condición es, a su vez, equivalente a la compacticidad de $J^+(p) \cap J^-(q)$, donde $J^{+(-)}(p)$ denota el futuro (pasado) causal de

³En realidad, de clases de equivalencias de curvas, módulo parametrización.

p . De forma similar, creo que, muy probablemente, lo que se necesite para probar el límite (6.2) sea mostrar que (quizás, bajo condiciones adicionales) $J^+(p) \cap J^-(p)$, i.e. el conjunto de puntos q tal que exista una curva causal cerrada que pasa por p y por q , es compacto.

De todos modos, un chequeo de autoconsistencia altamente no trivial de la idea del horizonte como límite de las superficies polarizadas y de la existencia del límite (6.2) es el de Cutler [41]. En su análisis sobre la estructura global del espacio de Gott, construye completamente el horizonte de Cauchy futuro y el pasado usando superficies polarizadas (y algunas simetrías del espaciotiempo), y encuentra que ambos horizontes coinciden, i.e. que la zona donde hay CTCs desaparece, cuando la EM se convierte en temporal (algo que uno sabe cierto por otros medios).

Capítulo 7

Máquinas de tiempo

Una posible caracterización de máquinas de tiempo es la de Hawking [35]: supongamos que se parte de un espaciotiempo causalmente bien comportado y se cambia la métrica en una región compacta, tal que como resultado de este cambio aparecen CTCs. Puede verse que, si en el proceso no se crean singularidades, el horizonte de Cauchy debe ser compactamente generado (CGCH, su definición se precisa en breve). También puede verse que en un horizonte de este tipo necesariamente se viola la condición débil para la energía (WEC).

Esto implica, en particular, que un par de Gott no puede crearse por decaimiento de una partícula, a menos que como subproducto se cree también algún conjunto de partículas con masa negativa. Por otra parte, parece razonable suponer que en este tipo de procesos debe conservarse la energía. Por ejemplo, si, por algún mecanismo que no viene al caso, espontáneamente se crea un par de Gott de masas $m > 0$ y velocidades $|\vec{v}|$, entonces, por ejemplo, debe crearse otro par ("antiGott") de masas $(-m)$ y velocidad $|\vec{v}|$. Este tipo de máquinas de tiempo son ciertamente posibles.

Pero ahora voy a mostrar la imposibilidad de construir máquinas de tiempo imponiendo ciertas condiciones adicionales; esencialmente, que cada subsistema tenga EM temporal (discutí esta condición al final del capítulo 5). La prueba consiste en analizar la dinámica de los generadores del horizonte de Cauchy y relacionar dicha dinámica con la energía [43].

Un horizonte de Cauchy \mathcal{H}^+ se define como compactamente generado si todos sus generadores, cuando dirigidos al pasado, entran en una región compacta¹ \mathcal{K} y permanecen allí para siempre. Esto es, si para cada $x \in \mathcal{H}^+$, existe s_0 tal que $\beta(s, x) \in \mathcal{K} \quad \forall s \geq s_0$.

Se define el conjunto base $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}^+$ como el conjunto de puntos terminales de acumulación de los generadores [49]. Se puede ver que la completitud de los generadores en el pasado y la compactidad de \mathcal{K} implican que \mathcal{B} es no vacío. También se puede ver que \mathcal{B} está compuesto por generadores nulos inextendibles en el futuro y pasado, aunque no necesariamente con órbitas cerradas. En breve voy a mostrar que vale una propiedad más fuerte: las órbitas deben ser cerradas (esto no es cierto en 3 + 1).

Consideremos el sistema dinámico definido por los generadores $\mathcal{B}(s, x)$ dirigidos al pasado en la variedad compacta dos dimensional \mathcal{K} . Quiero reexpresar algunas de las propiedades de un CGCH en el lenguaje usual de sistemas dinámicos:

1. \mathcal{K} es invariante positivo, i.e. las órbitas (en esta caso, geodésicas) permanecen en \mathcal{K} para siempre.
2. Como los generadores son completos en el pasado, existe solución global $\mathcal{B}(s, x)$.
3. Se puede ver que la completitud de los generadores en el pasado implica que no existen puntos fijos, i.e. no existe $x \in \mathcal{K}$ tal que $\beta(s, x) = x \quad \forall s$.

El primer ítem nos permite pensar en nuestro sistema dinámico como uno definido en una variedad compacta. El segundo ítem nos permite introducir lo que usualmente se llama, en sistemas dinámicos, el "conjunto límite ω " de un punto $m \in \mathcal{K}$. Este conjunto se define como el conjunto de puntos $x \in \mathcal{K}$ tal que el generador que

¹En realidad, para todos los resultados alcanza con pedir un número finito de regiones compactas.

pasa a través de m satisface lo siguiente: para cada entorno \mathcal{O} de x y cada s_0 en el dominio de definición existe $s > s_0$ tal que $\beta(s, m) \in \mathcal{O}$. El "conjunto límite ω ", se define, análogamente, como la unión de los conjuntos límites ω de todos los puntos en \mathcal{K} . Esto es, el conjunto límite ω de \mathcal{K} es, *por definición*, el conjunto base \mathcal{B} . Con esto en mente, de ahora en más voy a reemplazar ω por \mathcal{B} . La razón por la que no usé una sola convención desde el principio es que en sistemas dinámicos la notación usual es "conjunto límite ω ", mientras que Kay, Radzikowski, y Wald han introducido de forma independiente el mismo concepto, llamándolo conjunto base [49].

El teorema de Poincare-Bendixon-Schwartz² muestra lo siguiente [50]: sea \mathcal{K} una variedad bidimensional compacta, conexa, y orientable, con $k^a \in T(\mathcal{K})$ un campo vectorial en \mathcal{K} con órbitas completas, tal que para cada $m \in \mathcal{K}$, $\beta(m)$ no contiene puntos fijos (como ya discutí, nuestro sistema dinámico satisface estas condiciones). Entonces $\mathcal{B}(m) = \mathcal{K} = \mathcal{T}^2$, o bien $\mathcal{B}(m)$ consiste de una órbita cerrada \mathcal{C} , y $\mathcal{B}(s, x)$ tiende a \mathcal{C} . Por \mathcal{T}^2 me refiero al toro, una variedad compacta sin frontera; se puede ver que tal topología queda en nuestro caso excluida por la suposición de que el universo es abierto. De manera que existe al menos una órbita cerrada, i.e. una geodésica nula cerrada \mathcal{C} .

Una vez que hemos probado que existe una geodésica nula cerrada, el resto de la prueba para mostrar restricciones a la creación de máquinas de tiempo sigue de forma similar al capítulo anterior: como \mathcal{C} es una geodésica nula cerrada, el vector tangente en un punto cualquiera es proporcional a sí mismo luego de recorrer la curva. A su vez, esto implica que el operador holonómico L que define la EM encerrada por \mathcal{C} tiene una dirección nula fija. Como hemos supuesto que todo subsistema tiene EM temporal, L debe ser una rotación de ángulo cero o 2π . En el capítulo anterior, la de ángulo cero quedaba descartada porque era equivalente a vacío, y un espacio plano, vacío y simplemente conexo es causalmente bien comportado. Como aquí se viola la WEC, una rotación de ángulo cero no corresponde necesariamente a vacío. Sin embargo, cualquiera de los dos casos, EM correspondiente a una rotación de ángulo cero o 2π , son inestables, como discutí también en el capítulo anterior.

²Esencialmente, una generalización del teorema de Poincare-Bendixon a variedades. La generalización no es trivial, ya que la prueba usual del teorema de Poincare-Bendixon usa el teorema de Jordan, que no es generalizable a variedades.

Capítulo 8

Protección cronológica y gravedad cuántica

La evidencia hasta ahora indica que para producir nuestras métricas exóticas (y CTCs eternas) con cuerdas, o algún otro sistema con momento, debe violarse la DEC. Hay bastante acuerdo en la comunidad científica en que la materia satisface esta condición energética, i.e. que no existen taquiones. De modo que si se probara que necesariamente las métricas exóticas requieren de violación de la DEC, podríamos decir que no son físicamente razonables (pero es importante recordar que la presencia de CTCs eternas de ningún modo está necesariamente asociada a violación de la DEC: el espacio de Goedel [52] es un contraejemplo).

Por otra parte, vimos que para producir CTCs restringidas a una zona del espaciotiempo con cuerdas (de gauge, infinitas, etc.) la EM total debe ser espacial, y que esto no necesariamente indica que se trata de un sistema taquiónico. Siguiendo las construcciones del capítulo 6, es fácil notar que estos sistemas son estables, en el sentido de que, quitándole o agregándole un poco de energía, las CTCs siguen estando presentes.

Para la construcción de una máquina de tiempo en el sentido de Hawking se necesita violación de la WEC. Si bien también hay bastante acuerdo en que esta condición es satisfecha clásicamente, es sabido que un campo cuántico la viola, por ejemplo en el efecto Casimir [53]. En este sentido, para probar si espacios con CGCH son o no estables, se ha recurrido a análisis de estabilidad semiclásica y backreaction. Esto es, se consideran campos cuánticos de prueba sobre una geometría de fondo con un CGCH. Si el valor de expectación del tensor energía impulso del campo de prueba, $\langle T_{ab} \rangle$, diverge al acercarse al horizonte, entonces existe la fuerte posibilidad de que el horizonte de Cauchy desaparecería si uno acoplara el campo de prueba a la métrica. Kim y Thorne han tenido una controversia con Hawking sobre si estos análisis sugieren que las máquinas de tiempo son o no estables. La controversia en parte surge de un desacuerdo respecto a en qué régimen gravedad cuántica debería ser apreciable y la teoría semiclásica tener un cutoff. Este tipo de especulaciones semiclásicas tiene varios inconvenientes: uno de ellos es que, en principio, teoría cuántica de campos está matemáticamente bien definida en espacios globalmente hiperbólicos [54]. En este sentido, Kay, Radzikowski y Wald han probado que cualquier extensión de esta teoría a un CGCH necesariamente está mal definida [49]. Por otra parte, el conjunto en que está mal definida puede ser de medida nula, y $\langle T_{ab} \rangle$ definirse allí por simple continuidad [55]). Pero, incluso si la teoría semiclásica estuviera bien definida en horizontes de Cauchy compactamente generados o no, existe un inconveniente extra, y es que, en ausencia de una teoría cuántica de gravedad, no podemos conocer las limitaciones de las teorías clásica y semiclásica. Que las limitaciones pueden ser insospechadas es el objeto de estudio de este capítulo, pero antes de pasar a él, quiero notar que para un review sobre la conjetura de protección cronológica, puede verse el capítulo V de [5].

Nuestra intuición y sentido común respecto a fenómenos cuánticos está, esencialmente, limitada a la cuantización de teorías lineales, o a la cuantización perturbativa de teorías no lineales. Puede suceder, entonces, siendo gravedad una teoría no lineal, que su cuantización no perturbativa depare sorpresas. Esto fue recientemente enfatizado por Ashtekar, mostrando explícitamente que en ciertos midisuperspaces muchas soluciones clásicas son espurias, en el sentido de que no surgen como el límite clásico de la correspondiente teoría cuántica. Más aún, estos espacios clásicos pueden tener masa y curvatura total arbitrariamente chica. Del análisis de Ashtekar también resulta que un espacio clásico de curvatura y masa arbitrariamente chicas, límite clásico de la teoría cuántica, puede tener fluctuaciones cuánticas muy grandes, aún si éstas son de energía y número de partículas

arbitrariamente chicos.

Estos fenómenos sugieren que gravedad clásica puede tener limitaciones no sospechadas, y ponen en duda los argumentos, que forman parte del folclore relativista, que afirman que los efectos de gravedad cuántica sólo son importantes cerca de un agujero negro o en el universo temprano. Como mencioné más arriba, al momento no existe ningún mecanismo de protección cronológica clásico o semiclásico. En soluciones como las de Gott, el horizonte de Cauchy es localmente plano, y por lo tanto usualmente se cree que la teoría clásica es una buena representación del espaciotiempo y que las correcciones cuánticas son despreciables. Ahora, podría suceder que espacios con Horizontes de Cauchy sean espurios y no aparezcan como límites clásicos de la teoría cuántica.

En este capítulo quiero estudiar posibles efectos grandes de gravedad cuántica en la estructura causal o conforme del espacio tiempo. Para esto parece más adecuado usar NSF (Null Surface Formulation), una reformulación de RG, esencialmente desarrollada por Frittelli, Kozameh y Newman, en la que las variables básicas son superficies o conos de luz [56]. En las formulaciones usuales de GR las variables básicas son locales (e.g. métrica, conexión, etc), a partir de las cuales pueden obtenerse las superficies nulas y conos de luz como cantidades derivadas. En NSF el enfoque es el opuesto: la variable básica es una función (llamada Z), a partir de la cual puede obtenerse, como cantidad derivada, una métrica que satisface las ecuaciones de Einstein. Respecto de esta métrica, la ecuación $u = Z(x, \xi)$, con ξ coordenada en el círculo, describe una superficie nula o corte de cono de luz.

Voy a mostrar que las variables de NSF tienen un comportamiento muy distinto al de la métrica a nivel cuántico en lo que hace a su límite semiclásico [57]. Para ello voy a analizar, entonces, las consecuencias de estos efectos grandes de gravedad cuántica en las variables básicas de NSF, en el mismo midisuperspace analizado originalmente por Ashtekar, i.e. gravedad $2 + 1$ rotacionalmente simétrica acoplada a un campo escalar sin masa, sistema que puede obtenerse por reducción de ondas de Einstein-Rosen.

En este capítulo voy a poner explícitamente las constantes de Newton G y de Planck \hbar .

8.1 Ondas de Einstein Rosen

Las ondas de Einstein-Rosen constituyeron, históricamente, la primera prueba de que las ecuaciones de Einstein predicen la existencia de ondas gravitacionales. Esencialmente, son ondas cilíndricas de vacío con un solo grado de polarización. La métrica de un espaciotiempo de vacío con dos campos vectoriales de Killing que, además, conmuten entre sí y sean ortogonales a hipersuperficies, puede escribirse como

$$ds^2 = e^{2\psi} dz^2 + e^{2(\gamma-\psi)}(-dt^2 + dr^2) + r^2 e^{-2\psi} d\phi^2 ,$$

donde r y t son llamadas coordenadas canónicas de Weyl (únicas módulo traslaciones en t), $\psi = \psi(t, r)$, $\gamma = \gamma(t, r)$, y el rango para las coordenadas es el usual.

El proceso de reducción a la métrica tridimensional es como sigue. La variedad tridimensional se obtiene tomando el cociente entre espaciotiempo cuadrídimensional y las órbitas del campo de Killing ($\partial/\partial z$). La cuadrímétrica naturalmente define una métrica inducida en estas hipersuperficies, $d\bar{\sigma}^2$, y las ecuaciones de Einstein cuadrídimensionales pueden expresarse como un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para la trimétrica y la norma de ($\partial/\partial z$). Estas ecuaciones se simplifican considerablemente si se reescala la trimétrica $d\bar{\sigma}^2$ por $\exp(2\psi)$, el cuadrado de la norma del vector de Killing,

$$d\sigma^2 = e^{2\gamma}(-dt^2 + dr^2) + r^2 d\phi^2 .$$

Las ecuaciones de vacío cuadrídimensionales son, entonces, equivalentes al conjunto de ecuaciones

$$\gamma' = r(\dot{\psi}^2 + \psi'^2) , \quad \dot{\gamma} = 2r\dot{\psi}\psi' .$$

De manera que uno puede resolver la ecuación de onda para ψ en un espacio plano fiduciario y luego obtener la métrica por cuadraturas, tomando ésta la forma

$$ds^2 = e^{G\Gamma(r,t)}(-dt^2 + dr^2) + r^2 d\phi^2 ,$$

$$\Gamma(r, t) := \frac{1}{2} \int_0^r \left[\left(\frac{\partial \Phi(\bar{r}, t)}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi(\bar{r}, t)}{\partial t} \right)^2 \right] \bar{r} d\bar{r} .$$

Notar que $\Gamma(r, t)$ es la energía del campo Ψ encerrada en un disco de radio r , al tiempo t , tal como se la mediría si el espaciotiempo plano fiduciario fuera físico. La masa total es

$$H = \frac{1}{4G} (1 - e^{-4GH_0}) . \quad (8.1)$$

De ec.(8.1) podemos ver nuevamente un aspecto de $2+1$ que ya mencioné en el capítulo 5: la masa total está acotada por arriba.

Supongamos de ahora en más que el dato inicial (en, digamos, $t = 0$) para el campo escalar tiene soporte compacto, contenido en $r \leq R_0$, y llamemos \mathcal{O} a la región fuera del soporte del campo, i.e. la región dada por $t \geq 0$ y $t - r =: u < -R_0$. En \mathcal{O} la métrica es

$$ds^2 = e^{GH_0} (-dt^2 + dr^2) + r^2 d\phi^2 . \quad (8.2)$$

8.2 Formulacion en superficies nulas

Consideremos el cono de luz emandando de un punto $x^\mu = (t, r, \phi)$, y su intersección con el infinito nulo futuro \mathcal{I}^+ . Este "corte de cono de luz" es una curva cerrada (de winding number 1 y, en general, con autointersecciones y cúspides), que *localmente* puede ser descrita como una ecuación del tipo $u = Z(\xi, x^\mu, [\Psi])$, donde (u, ξ) son coordenadas tipo Bondi para \mathcal{I}^+ , y $[\Psi]$ denota dependencia funcional con Ψ . Inversamente, para cada $(u, \xi) \in \mathcal{I}^+$, el conjunto de puntos x^μ que satisface $u = \text{constante} = Z(\xi, x^\mu, [\Psi])$ forman el cono de luz pasado de (u, ξ) . De esta forma, Z admite las dos interpretaciones duales que mencioné al comienzo del capítulo.

Si una función $Z(\xi, x^\mu, [\Psi])$ satisface las llamadas condiciones de metricidad, entonces existe una métrica conforme tal que Z tiene la interpretación arriba mencionada. Esta métrica puede construirse, explícitamente, de la siguiente forma. Para cada ξ , existen coordenadas intrínsecas $\theta^\nu = (u, \omega, R)$, dadas por

$$u = Z(\xi, x^\mu, [\Psi]) \quad , \quad \omega = \partial_\xi Z(\xi, x^\mu, [\Psi]) \quad , \quad R = \partial_\xi^2 Z(\xi, x^\mu, [\Psi]) .$$

La función $\Lambda(\xi, \theta^\nu, [\Psi])$ se define expresando las coordenadas θ^ν en término de x^μ , insertandolas en R , y derivando respecto de ξ :

$$\Lambda(\xi, \theta^\nu, [\Psi]) \equiv \partial_\xi R(\xi, x^\mu(\theta^\nu), [\Psi]) .$$

Ahora se introduce la cobase $\theta^\nu_a := (d\theta^\nu)_a$, y su dual $\theta^\mu_a \theta^\nu_a = \delta^\mu_\nu$. Entonces, las componentes de la métrica conforme en la base $\{\theta^\mu_a\}$ son:

$$g^{ij} = \tilde{\Omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -(1/3)\partial_R \Lambda \\ -1 & -(1/3)\partial_R \Lambda & [-(1/3)\partial_\xi(\partial_R \Lambda) + (1/9)(\partial_R \Lambda)^2 + \partial_\omega \Lambda] \end{pmatrix} . \quad (8.3)$$

Uno también debe resolver ciertas ecuaciones que aseguran que $\tilde{\Omega}$ es tal que (8.3) satisface las ecuaciones de Einstein.

Por simplicidad, miramos en la región \mathcal{O} . Luego nos restringimos a la porción de \mathcal{I}^+ dada por $u \leq -R_0$ y $\xi < \phi + \arccos(t/r + R_0/r)$. Allí Z está dado por la relativamente simple expresión

$$Z(\xi, x^\mu, [\Psi]) = t - r \cos[e^{-GH_0/2}(\xi - \phi)] . \quad (8.4)$$

La principal razón para esta restricción es que alcanza para obtener la métrica en $(t, r, \phi) \in \mathcal{O}$. Esto es, siguiendo el procedimiento arriba bosquejado, se obtiene

$$ds^2 = \tilde{\Omega}^{-1} e^{-2GH_0} [e^{GH_0} (-dt^2 + dr^2) + r^2 d\phi^2] . \quad (8.5)$$

En lugar de resolver las correspondientes ecuaciones para $\tilde{\Omega}$, notamos que si la elegimos como una constante, entonces (8.5) satisface las ecuaciones de vacío. Podemos reescalarlo en la forma $\tilde{\Omega} = e^{-2GH_0}$, para así

reobtener la métrica en las coordenadas de Weyl. Una vez que esta elección está hecha, es fácil verificar que, fijando $(t, r, \phi) \in \mathcal{O}$, (8.4) describe la porción del cono de luz que, en su camino a \mathcal{I}^+ , no atravesó materia.

Resumiendo, en este punto tenemos dos descripciones equivalentes de la región \mathcal{O} . Una de ellas está dada por la variable local (8.2), y la otra por la variable no local (8.4).

8.3 Efectos cuánticos

La cuantización de ondas de Einstein-Rosen y de gravedad acoplada a un campo escalar en $2+1$ fue considerada por Kuchar [58] y Allen [59], respectivamente, y, más recientemente, por Ashtekar y Pierri [60]. Una forma de cuantizar este modelo es codificar los grados de libertad en Ψ , promoviendo a un operador actuando en el espacio de Hilbert sugerido por la geometría plana fiduciaria. De esta forma se obtiene el operador métrico

$$\widehat{ds}^2 = e^{G\widehat{H}_0}(-dt^2 + dr^2) + r^2\widehat{I}d\phi^2,$$

cuya única componente no trivial es $g := e^{G\widehat{H}_0}$. Análogamente, se pueden cuantizar los cortes de cono de luz, promoviendo Z a un operador ($\partial_\xi Z$ y $\partial_\xi^2 Z$ también deben ser cuantizados, pero los resultados son similares):

$$\widehat{Z} = Z(\xi, x^\mu, [\widehat{\Psi}]) = t\widehat{I} - r \cos[e^{-G\widehat{H}_0/2}(\xi - \phi)].$$

A diferencia de mecánica cuántica, en teoría cuántica de campos las distintas representaciones irreducibles de las relaciones de Weyl¹ no son unitariamente equivalentes (básicamente porque hay un número infinito de grados de libertad). En teoría cuántica de campos sobre Minkowski implícitamente se usa la existencia de simetrías temporales para elegir una representación natural (y se puede ver que tomando las distintas simetrías temporales de Minkowski el procedimiento arroja representaciones unitariamente equivalentes). En un espacio curvo estacionario se puede hacer lo mismo, pero en un espaciotiempo general no existe ninguna representación natural que tomar. Esto no es una dificultad fundamental: se puede resolver usando un formalismo algebraico (ver, e.g., [54] y referencias allí contenidas).

De modo que en principio, la representación arriba elegida usando el espaciotiempo fiduciario es ad hoc. Sin embargo, se puede hacer una cuantización asintótica y allí sí existe una representación natural (usando la estructura de \mathcal{I}^+) que elegir; se puede ver que esta cuantización es unitariamente equivalente a la definida por el espacio fiduciario [61].

8.3.1 Estados coherentes

En este punto nos preguntamos si existen estados coherentes para la teoría, i.e. estados para los cuales los elementos del par (g, Φ) o el par (Z, Φ) tengan valores de expectación centrados alrededor de los correspondientes valores clásicos, con fluctuaciones pequeñas. Como candidatos obvios podemos tomar a los estados coherentes del campo escalar (por simplicidad tomamos estados monocromáticos, de frecuencia, digamos, ω_0):

$$|\Psi\rangle = e^{-|c_0|^2/2\hbar} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{c_0^2}{\hbar}\right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{n!}} |n_{\omega_0}\rangle. \quad (8.6)$$

Se pueden encontrar expresiones cerradas para el valor clásico de la métrica, $g = e^{G\langle H_0 \rangle}$, como así también para el valor medio y sus fluctuaciones. Estas expresiones son

$$g = e^{a_0}, \quad \langle \widehat{g} \rangle = e^{a_0(e^{N_0} - 1)/\Omega_0}, \quad \left(\frac{\Delta \widehat{g}}{\langle \widehat{g} \rangle}\right)^2 = e^{a_0(e^{N_0} - 1)^2} - 1. \quad (8.7)$$

con $N_0 := |c_0|^2/\hbar \gg 1$ el número de partículas, $\Omega_0 := G\hbar\omega_0$, y $a_0 := N_0\Omega_0$. La condición $N_0 \gg 1$ debe ser satisfecha, para que las incertezas en el campo escalar sean pequeñas (típicamente, las incertezas de las distintas

¹Esencialmente, son exponenciación de las relaciones de conmutación, para tener operadores unitarios, i.e. acotados.

cantidades asociadas al campo escalar van como N^{-1} o N^{-2}). Pero esta sola condición no es suficiente para que el valor medio de \hat{g} tenga un pico agudo alrededor g ; de las ecuaciones (8.7) puede verse que esto sucede, para a_0 arbitrario pero fijo, sólo a bajas frecuencias $\Omega_0 \ll 1$. En tal caso, uno puede obtener las correcciones cuánticas en un desarrollo perturbativo alrededor de $\Omega_0 = 0$. Si bien no tenemos expresiones cerradas para el corte y sus fluctuaciones, exactamente las mismas propiedades recién mencionadas son válidas para el corte, y su valor medio

$$\langle \hat{Z} \rangle = t - r \sum_{n \geq 0} \frac{(\xi - \phi)^{2n}}{(2n)!} (-1)^n e^{a_0(e^{-\Omega_0 n} - 1)/\Omega_0}.$$

El corte tienen un pico agudo alrededor de su valor clásico

$$Z = t - r \cos [e^{-a_0/2}(\xi - \phi)],$$

sólo a bajas frecuencias. En ese caso, uno también puede obtener las correcciones cuánticas en un desarrollo perturbativo

$$\begin{aligned} \langle \hat{Z} \rangle &= Z + \frac{1}{2} a_0 \Omega_0 \partial_{a_0^2} Z + O(\Omega_0^2) \\ \left(\frac{\Delta \hat{Z}}{\langle \hat{Z} \rangle} \right)^2 &= \frac{1}{4Z^2} r^2 (\xi - \phi)^2 \sin^2 [e^{-a_0/2}(\xi - \phi)] a_0 e^{-a_0} \Omega_0 + O(\Omega_0^2). \end{aligned}$$

En resumen, se tome el par (g, Φ) o el par (Z, Φ) para describir el sistema, en cualquier caso existen estados coherentes. La existencia de estos estados es no trivial, como tampoco lo es el hecho de que los estados coherentes sean los mismos para el par (g, Φ) o el par (Z, Φ) . De hecho, en la proxima subsección vamos a ver que los dos pares se comportan muy distinto en lo que respecta a su estabilidad frente a fluctuaciones cuánticas.

8.3.2 Fluctuaciones cuánticas

Hasta este punto no encontramos diferencias entre métrica y corte, ni ningún efecto cuántico nuevo. Pero ahora supongamos que al estado dado por (8.6), con $N_0 \ll 1$, $\Omega_0 \ll 1$ y a_0 fijo pero arbitrario (i.e., un estado coherente para el campo escalar que también minimice las incertezas para la métrica, o, equivalentemente, el corte) le agregamos cierto número N_1 de partículas de alta frecuencia, i.e.,

$$|\Psi\rangle = e^{-(|c_0|^2 + |c_1|^2)/2\hbar} \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left(\frac{c_0^2}{\hbar} \right)^{n/2} \left(\frac{c_1^2}{\hbar} \right)^{m/2} \frac{1}{\sqrt{m!n!}} |n_{\omega_0} m_{\omega_1}\rangle. \quad (8.8)$$

con $\Omega_1 := G\hbar\omega_1 \gg 1$, $N_1 := |c_1|^2/\hbar$ (el número de partículas agregado) y $a_1 := N_1\Omega_1$ arbitrario pero fijo. También pueden darse expresiones cerradas para la métrica :

$$g = e^{a_0 + a_1}, \quad (8.9)$$

$$\langle \hat{g} \rangle = e^{a_0(e^{\Omega_0} - 1)/\Omega_0 + a_1(e^{\Omega_1} - 1)/\Omega_1}, \quad (8.10)$$

$$\left(\frac{\Delta \hat{g}}{\langle \hat{g} \rangle} \right)^2 = e^{a_0(e^{\Omega_0} - 1)^2/\Omega_0 + a_1(e^{\Omega_1} - 1)^2/\Omega_1} - 1. \quad (8.11)$$

Recordando que $\Omega_0 \ll 1$ and $\Omega_1 \gg 1$, tenemos que

$$\langle \hat{g} \rangle \approx e^{a_0 + a_1 e^{\Omega_1}/\Omega_1}, \quad \left(\frac{\Delta \hat{g}}{\langle \hat{g} \rangle} \right)^2 \approx e^{a_1 e^{2\Omega_1}/\Omega_1} - 1. \quad (8.12)$$

Supongamos que el número de partículas de alta frecuencia es muy pequeño, $N_1 \ll 1$, tal que $a_1 \ll 1$. Esto corresponde a una pequeña desviación del régimen en el que el par $(\hat{\Phi}, \hat{g})$ tenía un pico agudo alrededor de los correspondientes valores clásicos (un pequeño "blip"). Incluso si a_1 es bien pequeño, para Ω_1 suficientemente

grande, las fluctuaciones \hat{g} son enormes, y su valor medio difiere de la misma forma del valor clásico. Los términos del tipo $e^{a_1 e^{\Omega_1}/\Omega_1}$ son los que causan este comportamiento. Dicho de otro modo, si a un estado coherente se le agrega tan solo una partícula de frecuencia suficientemente alta, entonces el valor clásico es espurio, y las fluctuaciones son gigantes, incluso si la geometría clásica tiene masa total pequeña y la curvatura es baja. Esto se conoce como *efectos grandes de gravedad cuántica*.

En este punto el corte se comporta de forma completamente diferente. Se puede ver que sus fluctuaciones son muy pequeñas, de hecho hay términos del tipo $(e^{a_1 e^{-\Omega_1}/\Omega_1} - 1)$, y en seguida van a a cero cada Ω_1 aumenta. En otras palabras, mientras que pequeñas fluctuaciones en la materia son exponencialmente amplificadas en la métrica, son amortiguadas en el corte. El valor medio del corte tiene un comportamiento similar, esto es, permanece muy cerca del valor clásico. Este último es

$$Z = t - r \cos \left[e^{-(a_0+a_1)/2}(\xi - \phi) \right], \text{ y por lo tanto } Z \approx t - r \cos \left[e^{-a_0/2}(\xi - \phi) \right] \text{ for } a_1 \ll 1;$$

mientras que el valor medio está dado por

$$\langle \hat{Z} \rangle = t - r \sum_{n \geq 0} \frac{(\xi - \phi)^{2n}}{(2n)!} (-1)^n e^{a_0(e^{-\Omega_0 n} - 1)/\Omega_0 + a_1 e^{-\Omega_1 n} - 1/\Omega_1},$$

y, por lo tanto, para $\Omega_0 \ll 1$, $a_1 \ll 1$, and $\Omega_1 \gg 1$, tenemos

$$\langle \hat{Z} \rangle \approx t - r \sum_{n \geq 0} \frac{(\xi - \phi)^{2n}}{(2n)!} (-1)^n e^{a_0 n} = t - r \cos \left[e^{-a_0/2}(\xi - \phi) \right].$$

Uno espera que, en cualquier circunstancia en que las fluctuaciones en la métrica sean amplificadas, las del corte serán amortiguadas. Esta conclusión sale de notar, de ec.(8.3) (en $3+1$ se tiene una expresión similar), que las componentes de la métrica covariante esencialmente van como inversa del corte y sus derivadas.

8.4 Contexto

NSF está, en principio, pensada para gravedad en $3+1$. Pero, dado que en $2+1$ se cuenta con definiciones de planitud asintótica, coordenadas tipo Bondi, etc, no hay ninguna dificultad en adaptar NSF a estas dimensiones, y es el enfoque que seguí en este capítulo [57, 62].

La cuantización asintótica de gravedad (en $3+1$), inicialmente sugerida por Sachs [63], fue trabajada extensivamente por Ashtekar [64]. Esencialmente, se fijan los grados de libertad en el dato libre de Bondi (sólo se consideran espacios puramente radiativos), y se usa la estructura intrínseca de \mathcal{I} para llevar a cabo la cuantización. Más recientemente ha sido sugerida la posibilidad de cuantizar NSF tomando ingredientes de la cuantización asintótica de Ashtekar. Los resultados serían curiosos: los puntos mismos del espacio tiempo se vuelven operadores con relaciones de conmutación no triviales, y el concepto mismo de espacio tiempo se vuelve "difuso" [65]. Si bien los cálculos que llevan a esta observación son un tanto heurísticos (por ejemplo, son perturbativos y la creencia general es que no se puede hacer una teoría cuántica perturbativa de gravedad), la idea parece interesante y para ser tenida en cuenta. De todos modos, estas dificultades desaparecen en el tipo de midisuperspace que consideré en este capítulo, y por lo tanto es un modelo donde probar la idea general.

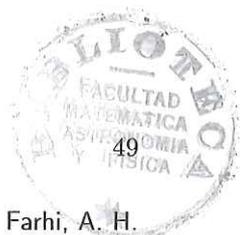
Efectos cuánticos grandes para la métrica han sido encontrados en otros modelos: CGHS [66], toroidales [67], ondas planas [68], y ondas de Einstein-Rosen desde una perspectiva cuatridimensional [69].

Al buscar estados coherentes para la teoría tomamos estados coherentes para la materia, ec.(8.6), y después vimos en qué régimen son también estados coherentes para la geometría (descrita por Z o g). Pero estos no son los únicos candidatos posibles: Gambini y Pullin han buscado estados que simultáneamente minimicen las intertezas para la materia y para la geometría. El resultado es que puede ganarse coherencia en la geometría a expensas de perderla en la materia [70].

Referencias

- [1] "*Cosmic strings and other topological defects*", A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, Cambridge University Press (Cambridge, 1994).
- [2] "*The cosmological constant*", S. M. Carroll, Living Reviews in Relativity (<http://www.livingreviews.org>).
- [3] "*Special issue featuring invited papers from the Topology of the Universe Conference, Cleveland, Ohio, October 1997*", *Class. Quant. Grav.* **15** (1998).
- [4] "*Billiard balls in wormhole space-times with closed timelike curves: classical theory*", F. Echeverria, G. Klinkhammer, K. S. Thorne, *Phys. Rev. D* **44**, 1077 (1991); "*Cauchy problem in space-times with closed timelike curves*", J. Friedman, M. S. Morris, I. D. Novikov, F. Echeverria, G. Klinkhammer, K. S. Thorne, U. Yurtsever, *Phys. Rev. D* **42**, 1915 (1990).
- [5] "*Can the universe create itself?*", R. J. Gott. III and Li-Xin Li, *Phys. Rev. D* **58**, 023501 (1998).
- [6] "*Closed timelike curves produced by pairs of moving cosmic strings: exact solutions*", R. J. Gott III, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1126 (1991).
- [7] "*Conditions for the existence of closed timelike curves in 2+1 gravity*", D. N. Kabat, *Phys. Rev. D* **46**, 2710 (1992).
- [8] "*The chronology protection conjecture*", S. W. Hawking, *Phys. Rev. D* **46**, 603 (1992).
- [9] "*Large quantum gravity effects: unexpected limitations of the classical theory*", A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4864 (1996).
- [10] "*General relativistic strings*", D. Garfinkle, *Phys. Rev. D* **32**, 1323 (1985).
- [11] "*Superconducting cosmic strings. 2. Spacetime curvature*" A. Babul, T. Pirani, and D. N. Spergel, *Phys. Lett. B* **209**, 477 (1988); "*Bosonic superconducting cosmic strings. 1. Classical field theory solutions*", A. Babul, T. Piran, and D. N. Spergel, *Phys. Lett. B* **202**, 307 (1988); "*The gravitational field of a superconducting cosmic string*", I. Moss and S. Poletti, *Phys. Lett. B* **199**, 34 (1987).
- [12] "*A geometric theory of the electromagnetic and gravitational fields*", L. Witten, in *Gravitation: an Introduction to Current Research*, editado por L. Witten (Wiley, New York, 1962).
- [13] M. A. Melvin, *Phys. Lett.* **8**, 65 (1964).
- [14] "*The gravitational field of a global string*", D. Harari and P. Sikivie, *Phys. Rev. D* **37**, 3438 (1988); "*Global string singularities*", R. Gregory, *Phys. Lett B* **215**, 663 (1988).
- [15] "*Repulsive gravitational effects of global monopoles*", D. Harari and C. Lousto, *Phys. Rev. D* **42**, 2626 (1990).
- [16] "*Gravitational field of vacuumless defects*", I. Cho and A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **59**, 063510 (1999); "*Vacuum defects without a vacuum*", I. Cho and A. Vilenkin *Phys. Rev. D* **59**, 021701 (1999).

- [17] "Coupled field solutions for $U(1)$ gauge cosmic strings", P. Laguna-Castillo and R. A. Matzner, Phys. Rev. D **36**, 3663 (1987).
- [18] "Internal structure and the spacetime of superconducting bosonic strings", P. Amsterdamski and P. Laguna Castillo, Phys. Rev. D **37**, 877 (1988).
- [19] "Superconducting strings", E. Witten, Nucl. Phys. B **249**, 557 (1985).
- [20] "Motion of test particles and light rays around massive conducting cosmic string", M. Demianski, Phys. Rev. D **38**, 698 (1988).
- [21] "Nonstationary Einstein-Maxwell fields interacting with a superconducting cosmic string", R. J. Gleiser and M. Tiglio, Phys. Rev. D **58**, 064018 (1998).
- [22] V. A. Belinski and V. E. Zakharov, Sov. Phys. JETP **48**, 985 (1978); V. A. Belinski and V. E. Zakharov, Sov. Phys. JETP **50**, 1 (1979);
- [23] G. A. Alekseev, Sov. Phys. JETP **32**, 277 (1981); Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **3**, 215 (1988).
- [24] El paper sobre la equivalencia entre BZ y Alekseev
- [25] "Soliton solutions in spacetimes with two spacelike killing fields", E. Verdaguer, Phys. Rep. **229** (1993).
- [26] "New exact solution describing the interaction of Einstein-Maxwell radiation and rotating cosmic string", A. D. Dagotto, R. J. Gleiser, and C. O. Nicasio, Phys. Rev. D **42**, 424 (1990); "Interaction of Einstein-Maxwell radiation and a cosmic string: special solutions with hypersurface-orthogonal Killing vectors", A. D. Dagotto, R. J. Gleiser, and C. O. Nicasio, Phys. Rev. D **43**, 1162 (1991); "Soliton solutions and cosmological gravitational waves", B. J. Carr and E. Verdaguer, Phys. Rev. D **28**, 2995 (1983).
- [27] "Asymptotic structure of Space-Time", R. Geroch, en "Asymptotic structure of Space-Time", editado por F. P. Esposito y L. Witten, Plenum (New York, 1977).
- [28] "Asymptotic structure of symmetry reduced general relativity", A. Ashtekar, J. Bicak, and B. G. Schmidt, Phys. Rev. D **55**, 669 (1997).
- [29] "A striking property of the gravitational Hamiltonian", A. Ashtekar and M. Varadarajan, Phys. Rev. D **50**, 4944 (1994).
- [30] "Energy of infinitely long, cylindrically symmetric systems in general relativity", K. S. Thorne, Phys. Rev. **138**, 251 (1965).
- [31] "Spacetime of supermassive $U(1)$ gauge cosmic strings", P. Laguna and D. Garfinkle, Phys. Rev. D **40**, 1011 (1989).
- [32] "Superconducting cosmic strings with exotic spacetime", M. J. Thatcher and M. J. Morgan, Phys. Rev. D **58**, 043505 (1998).
- [33] "Exotic spacetimes, superconducting strings with linear momentum, and (not quite) all that", R. J. Gleiser and M. Tiglio, Phys. Rev. D **61**, 104006 (2000).
- [34] "Exact gravitational field of the infinitely long rotating hollow cylinder" E. Frehland, Commun. Math. Phys. **26**, 307 (1972); "Hollow cosmic string: the general relativistic hollow cylinder", G. Clement and I. Zouzou, Phys. Rev. D **50**, 7271 (1994).
- [35] *The Large Scale Structure of Spacetime*, S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, Cambridge University Press (Cambridge, 1976).



- [36] "Energy-momentum restrictions on the creation of Gott time machine", S. M. Carroll, E. Farhi, A. H. Guth, and K. D. Olum, *Phys. Rev. D* **50**, 6190 (1994).
- [37] "Three-dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space", S. Deser, R. Jackiw, and G. 't Hooft, *Ann. Phys. (N.Y.)* **152**, 220 (1984).
- [38] "An obstacle to building a time machine", S. M. Carroll, E. Farhi, and A. H. Guth, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 263 (1992), Erratum-ibid **68**, 3368 (1992).
- [39] "No time machine construction in open 2 + 1 gravity with timelike total energy-momentum", M. H. Tiglio, *Phys. Rev. D* **58**, 064018 (1998).
- [40] "Physical cosmic strings do not generate closed timelike curves", by S. Deser, R. Jackiw, and G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 267 (1992).
- [41] "Global structure of Gott's two-string spacetime", C. Cutler, *Phys. Rev. D* **45**, 487 (1992).
- [42] "2 + 1 dimensional spacetimes containing closed timelike curves", M. P. Headrick and J. R. Gott III, *Phys. Rev. D* **50**, 7244 (1994).
- [43] "How much energy do closed timelike curves in 2 + 1 spacetimes need?", M. Tiglio, *Phys. Rev. D* **61** Rap. Commun., 081503 (2000).
- [44] "Spinors and Space-Time", R. Penrose and W. Rindler, Cambridge University Press (Cambridge, 1984).
- [45] "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems", R. L. Devaney, (Addison-Wesley, Reading, MA, 1985).
- [46] "Do vacuum fluctuations prevent the creation of closed timelike curves?", S. W. Kim and K. S. Thorne, *Phys. Rev. D* **43**, 3929 (1991).
- [47] "New light on time machines: against the chronology protection conjecture", L.-X. Li, *Phys. Rev. D* **50** Rap. Commun. 6037 (1994).
- [48] "The domain of dependence", R. Geroch, *J. Math. Phys.* **11**, 437 (1970).
- [49] "Quantum field theory on spacetimes with a compactly generated Cauchy horizon", B. S. Kay, M. J. Radzikowski, and R. M. Wald, *Commun. Math. Phys.* **183**, 533 (1997).
- [50] A. Schwartz, *Am. J. Math.* **85**, 453 (1963).
- [51] "On asymptotically flat spacetimes with $G(2)$ invariant Cauchy surfaces", B. K. Berger, P. T. Chrusciel, and V. Moncrief, *Ann. Phys.* **237**, 322 (1995).
- [52] "An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equations of gravitation", K. Goedel, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 447 (1949).
- [53] "The Casimir effect", G. Plunien, B. Muller, and W. Greiner, *Phys. Rep.* **134**, 97 (1986).
- [54] "Quantum field theory in curved spacetimes and black hole thermodynamics", R. M. Wald
- [55] "A selfconsistent vacuum for Misner space and the chronology protection conjecture", L.-X. Li and R. J. Gott III, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2980 (1998).
- [56] C. N. Kozameh, in "Gravitation and relativity: at the turn of the millenium", N. Dahdhich, J. Narlikar, editors, Proceedings of the 15th International Conference on General Relativity and Gravitation, IUCAA publishing, Poona, India 1998; "On the dynamics of characteristic surfaces", S. Frittelli, C. N. Kozameh, and E. T. Newman, *J. Math. Phys.* **36**, 6397 (1995); "Lorentzian metrics from characteristic surfaces", **36**, 4975 (1995); "GR via characteristic surfaces", **36**, 4984 (1995); "Linearized Einstein theory via null surfaces", **36**, 5005 (1995); C. N. Kozameh and E. T. Newman, *J. Math. Phys.* **24**, 2481 (1983).

- [57] "Large quantum gravity effects and nonlocal variables", A. E Domínguez and M. Tiglio, Phys. Rev. D 58, 064018 (1998).
- [58] K. Kuchar, Phys. Rev. 4, 955 (1970).
- [59] "Canonical quantization of a spherically symmetric, massless scalar field interacting with gravity in 2 + 1 dimensions", M. Allen, Class. Quant. Grav. 4, 149 (1987).
- [60] "Probing quantum gravity through exactly soluble midisuperspaces.1", A. Ashtekar and M. Pierri, J. Math. Phys. 37, 6250 (1997).
- [61] A. Ashtekar, comunicación privada.
- [62] "On the null surface formalism: formulation in three dimensions and gauge freedom", M. Tanimoto, preprint gr-qc/9703003 ; "Null surfaces formulation in 3d", D. M. Forni, M. Iriondo, and C. N. Kozameh, por aparecer en J. Math. Phys., preprint gr-qc/0005120
- [63] Sachs
- [64] "New perspectives in canonical gravity", A. Ashtekar (Monographs and textbooks in physical sciences, Bibliopolis, Napoli, 1988).
- [65] "Fuzzy spacetime from a null surface formulation of GR", S. Frittelli, C. N. Kozameh, E. T. Newman, C. Rovelli, and R. S. Tate, Class. Quant. Grav. 14, 143 (1997); "On the quantization of the null surface formulation of GR", Phys. Rev. D 56, 889 (1997); "Building a quantum spacetime", C.N. Kozameh, Int. J. Theor. Phys. 38, 1103 (1999).
- [66] "Quantum gravity effects in the CGHS model of collapse to a black hole", M. Varadarajan, Phys. Rev. D 57, 3463 (1998).
- [67] "Midisuperspace quantization of noncompact toroidally symmetric gravity", C. Beetle, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 471 (1998).
- [68] "Plane waves in quantum gravity: breakdown of the classical space-time", G. A. Mena Marugan, M. Montejo, Phys. Rev. D 61, 084019 (2000).
- [69] "Large quantum gravity effects: cylindrical waves in four dimensions", M. E. Angulo, G. A. Mena Marugan, preprint gr-qc/0002056.
- [70] "Large quantum gravity effects: backreaction on matter", R. Gambini and J. Pullin, Mod. Phys. Lett. A12, 2407 (1997).

