PRÁCTICAS Y RESIDENCIAS EN
FORMACIÓN DOCENTE.
MEMORIAS, EXPERIENCIAS, HORIZONTES. II
http://revistas.unc.edu.ar/

Narración de Experiencias

EL DESAFÍO DE ABORDAR LOS POLINOMIOS ANALÍTICAMENTE Y MEDIADO POR NUEVAS TECNOLOGÍAS

ESTELEY, Cristina: esteley@famaf.unc.edu.ar

MORALES CARRIZO, Andrea Belén: belu_aty13@hotmail.com

PELOSSO, Marcos Emanuel: marcos_dark2@hotmail.com

Fa.M.A.F. (Facultad de Matemática, Astronomía y Física) -
Universidad Nacional de Córdoba

Palabras Clave: Prácticas profesionales - Polinomios - Nuevas Tecnologías

RESUMEN

El presente trabajo narra una experiencia vivida por los autores de este escrito en las prácticas profesionales realizadas en el año 2011 en los cursos 5to "A" y "B" del Ciclo de Especialización de una institución educativa pública de gestión privada de la Ciudad de Córdoba (Argentina). En las prácticas se desarrolló el tema Funciones Polinómicas, considerándolo como ente analítico-algebraico y apelando al laboratorio de informática como medio para explorar polinomios y dar un sentido a la determinación de las raíces de un polinomio de grado mayor a dos. Este modo de abordar los polinomios que, en un principio, se presentó como un desafío luego, abre problemas pero también posibilidades de análisis no imaginadas. De este modo, en esta ponencia, se presenta una actividad dada a los estudiantes de los quintos años, los problemas que emergieron entorno a esa actividad se presenta una breve introducción sobre cómo surge la propuesta de un abordaje analítico de las funciones polinómicas utilizando un programa de

computadora que grafica funciones, se describe la primera de las actividades de exploración que efectivamente tuvieron lugar durante las prácticas y el análisis de un problema desde un marco teórico-didáctico sobre la relación entre la enseñanza de la matemática y los medios que se utilizan.

EL DESAFÍO DE ABORDAR LOS POLINOMIOS ANALÍTICAMENTE Y MEDIADO POR NUEVAS TECNOLOGÍAS

En el ámbito de la matemática escolar la enseñanza de los polinomios de grado mayor a dos enfatiza el tratamiento algebraico de estos entes privilegiando las operaciones entre polinomios. En ese contexto, se favorece la factorización de los polinomios dados en polinomios primos con la consecuente emergencia de los conocidos "casos de factoreo". El objetivo es trabajar algebraicamente, operar con polinomios, determinar las raíces del polinomio y, en base a esa información, graficar con lápiz y papel las correspondientes funciones. Ejemplo de esto se puede observar en diversos textos escolares.

A pesar de esta tradición de trabajo con polinomios, al iniciar las interacciones con la profesora de los cursos en los que se realizaron las prácticas, ella nos sugirió intentar mirar los polinomios desde una perspectiva que integrase los aspectos algebraicos con los analíticos recurriendo al software Graphmatica como medio para potenciar esas interacciones. La docente planeaba, en cursos superiores, utilizar dichos conocimientos para realizar trabajos de modelización matemática. Además, por comentarios de la misma, los alumnos ya habían tenido contacto con las computadoras en el análisis de las funciones cuadráticas.

Aceptando el interesante desafío que representaba hacer uso de dicho "juego" entre lo analítico y lo algebraico, contrastando con nuestras experiencias como alumnos en la secundaria donde se priorizaba el desarrollo algebraico rígido y metódico, siempre reducido a la factorización y el cálculo de raíces. La planificación de las prácticas se inició con un proceso de reflexión y comprensión que posibilitó imaginar una puesta en aula diferente a lo vivido como alumnos. Se dio comienzo a una exploración del tema central a enseñar y fue necesario aprender a utilizar el software Graphmatica. A partir de allí se inició la construcción de actividades que implicaron espacios fructíferos de negociación, en parte vía e-mail, entre practicantes, la docente de los quintos y las profesoras de MOPE. De todo lo realizado y vivido en las prácticas, concentraremos nuestra presentación en lo acontecido durante la primera actividad de puesta en aula en la que las TIC's (Tecnologías de la Información y la Comunicación) tuvieron un rol protagónico. En lo que sigue presentamos una breve descripciónde los contenidos desarrollados durante nuestras prácticas y su secuenciación, describimos la primer actividad realizada, los problemas que emergieron y realizamos un análisis de los mismos. Finalmente reflexionamos sobre lo acontecido tomando aportes de algunos autores, revelando la relación entre la enseñanza de la matemática y los medios a los que se apela.

Selección, secuenciación y organización de los contenidos enseñados

Luego del periodo de observación y durante nuestras prácticas intensivas (el total de horas frente a curso fue de 35), los temas enseñados fueron los siguientes:

1. Caracterización de las funciones polinómicas
2. Definición de función polinómica
3. Aplicación del Teorema de Gauss para el cálculo de raíces
4. Repaso de algunos de los productos notables (Factor común, Diferencia de Cuadrados y Trinomio Cuadrado Perfecto)
5. Multiplicidad de raíz de una función polinómica

Las prácticas se iniciaron con una actividad de exploración de gráficos de funciones con *Graphmatica*. Tal actividad se realizó en el laboratorio de computación de la escuela y nos permitió distinguir las siguientes características: continuidad y condiciones para la expresión de un polinomio con coeficientes reales A partir de esto, dimos una definición de función polinómica.

Luego, planteando como problemático el hecho de no siempre disponer del software para conocer las raíces de la función polinómica y luego graficarla, propusimos la aplicación del Teorema de Gauss para encontrar las raíces junto con otras técnicas que los alumnos ya conocían como la Regla de Ruffini, Teorema del Resto y la fórmula resolvente para ecuaciones de segundo grado. Estas decisiones estaban justificadas porque tratamos de vincular fuertemente los aspectos analíticos y algebraicos del tema funciones polinómicas. Repasamos algunos de los productos notables para agilizar el cálculo de raíces e introdujimos la definición de multiplicidad de raíces. Si bien cada uno de estos momentos resultaron importantes, como ya se indicó, nos focalizaremos en la instancia de exploración y caracterización de las funciones polinómicas.

Gráfico, Exploración y Caracterización

Adaptándonos a cuestiones escritas en el **Programa Anual** de la profesora del curso y a sus requerimientos, realizamos actividades de observación y exploración centradas en las características de la funciones polinómicas y la relación gráficos-expresiones analíticas.

Comenzamos la clase en el laboratorio de Computación y, organizados los alumnos en grupos de a dos o tres por computadora, entregamos una guía impresa con las siguientes actividades:

a) A través de Graphmatica, grafica las siguientes funciones.

1) $f(x) = 2x - 2$
2) $f(x) = x^2 + x - 2$
3) $f(x) = (x-2)(x+2)(x-1)$
4) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 2x + 16$
5) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 23x^3 + 28x^2 + 76x - 80$
6) $f(x) = sin(x)$
7) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 3}$
8) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

b) Observen atentamente los gráficos realizados, comparen los primeros 5 gráficos con los demás y señala diferencias entre los grupos.

Otorgamos a los alumnos aproximadamente 45 minutos para resolver ambos incisos y también les pedimos que guarden las gráficas en un archivo para que puedan imprimirlas y tenerlas en la carpeta de la asignatura. Luego, para hacer una puesta en común, dibujamos el siguiente en uno de los pizarrones del laboratorio:

Función	¿Polinómica?	Trazo continuo (NO se corta)	Corta el eje x Raíces

Cuadro representativo de la puesta en común

En la columna **Función** se colocaba el número asignado a cada función, en la columna **¿Polinómica?**, se escribía **si o no**, dependiendo el caso y justificando la respuesta de forma oral. En la columna **Trazo continuo** (NO se corta), se pedía que se contestara sí o no, basándose en una noción de continuidad que dieron ellos[1] y en la última columna que se indicara si la función tenía o no raíces reales, cuántas y dónde se podían visualizar. Pedimos a algunos alumnos que lo completaran (a veces, pasaban a llenar una fila de forma voluntaria, otras elegíamos a alguno para que completase una fila y las últimas las terminamos nosotros).

Cabe notar que en esta instancia, aun cuando la docente del curso nos había contado que los alumnos habían utilizado el software durante el año anterior, los estudiantes no recordaban cómo utilizar adecuadamente algunas de las herramientas del programa. Este aspecto jugó un rol muy importante para la emergencia de problemas que ponen en evidencia la relación entre la enseñanza de la matemática y los medios a los que se apela según se describe a continuación.

Problemas emergentes: contexto de emergencia, presentación y análisis

Dado que los alumnos habían trabajado con el software Graphmatica, asumimos que tenían un buen manejo del programa. Las decisiones que tomamos en la actividad planteada exigía realizar algunas operaciones sencillas como por ejemplo ingresar al programa, cambiar los márgenes que el software asigna a la cuadrícula en la que se grafica, borrar o cambiar de color distintas gráficas o cuadrícula, guardar una gráfica en un archivo de imagen y escribir correctamente en

1. Esta noción de continuidad había sido trabajada anteriormente por los alumnos con la docente encargada del curso y se trataba de la idea intuitiva de la función "no se corta o no hace saltos", "que no hace falta levantar el lápiz para dibujarla".

el visor la expresión analítica de la función a graficar. A continuación, en la Imagen N°1, presentamos los elementos principales del programa para facilitar la comprensión del lector no familiarizado con el programa (la función escrita en el visor es $f(x) = x^5 - 2x^4 - 23x^3 + 28x^2 + 76x - 80$

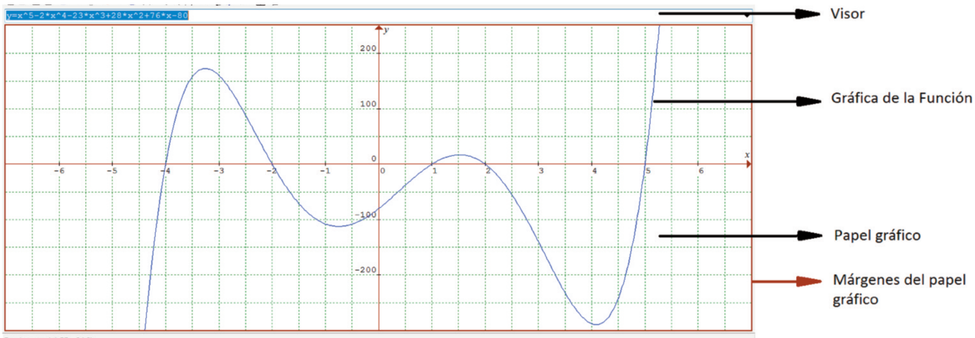

Imagen N°1: Elementos principales del programa

Veamos ejemplos de lo sucedido con algunos alumnos al graficar la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 3}$ representados en Imagen N°2 e Imagen N°3

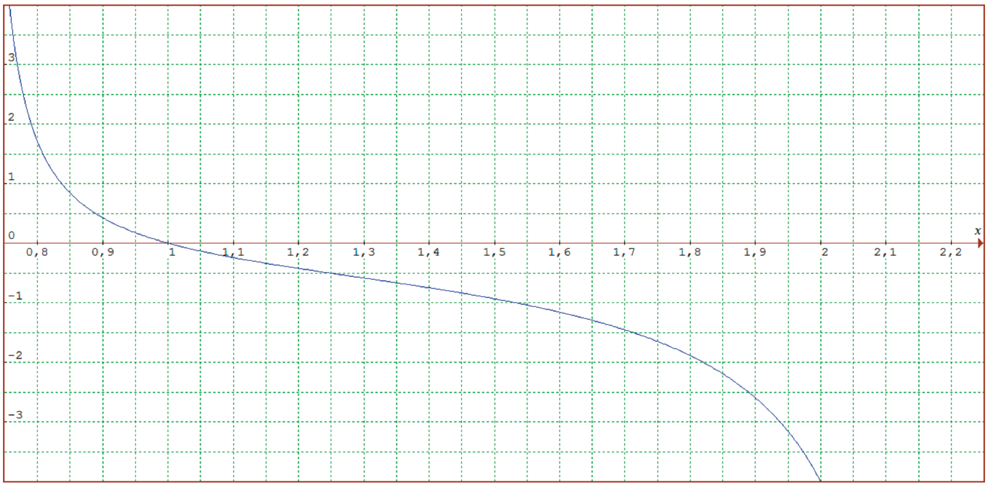

Imagen N°2: Márgenes asignados automáticamente a la función

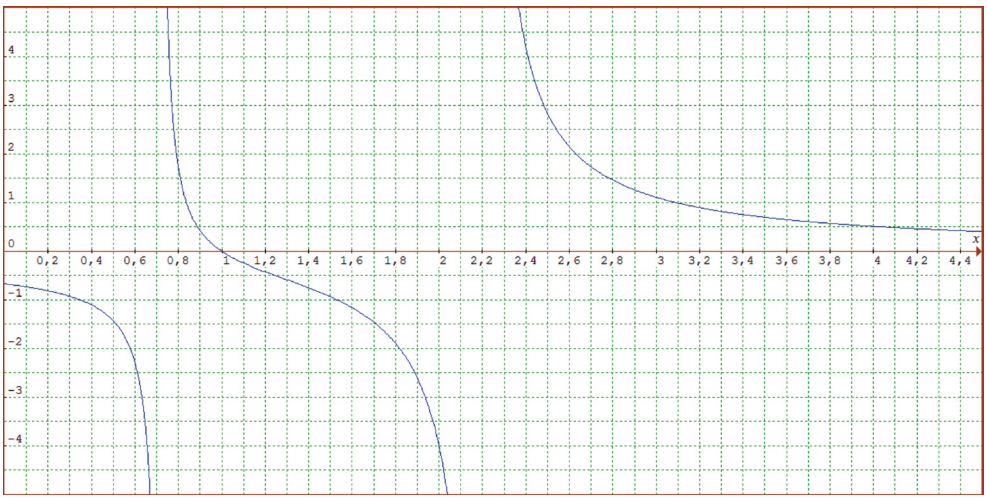

Imagen N°3: Márgenes asignados automáticamente en otra computadora

Notemos que, en la Imagen N°2, los márgenes del papel gráfico asignados automáticamente por el software son -4 y 4 sobre el eje de las ordenadas, y a partir de 0,75 hasta 2,25 para el eje de las abscisas. En la Imagen N°3, se mantienen iguales los márgenes superior, inferior e izquierda aplicados pero el derecho se extiende hasta 4,45 sobre el eje de las abscisas. Cabe aclarar que la asignación de los márgenes del papel gráfico no es fija, sino que depende de la versión instalada del programa y de los márgenes establecidos en el último archivo utilizado. La gráfica correcta matemáticamente es la presentada en la Imagen N°4:

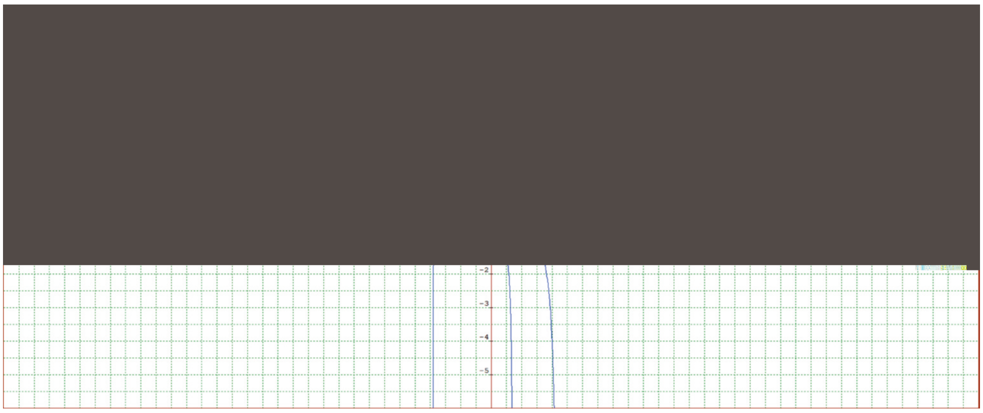

Imagen N°4: Imagen esperada de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 3}$

Ahora veamos algunos de los gráficos obtenidos por nuestros alumnos de la función $f(x) = x^5 - 2x^4 - 23x^3 + 28x^2 + 76x - 80$

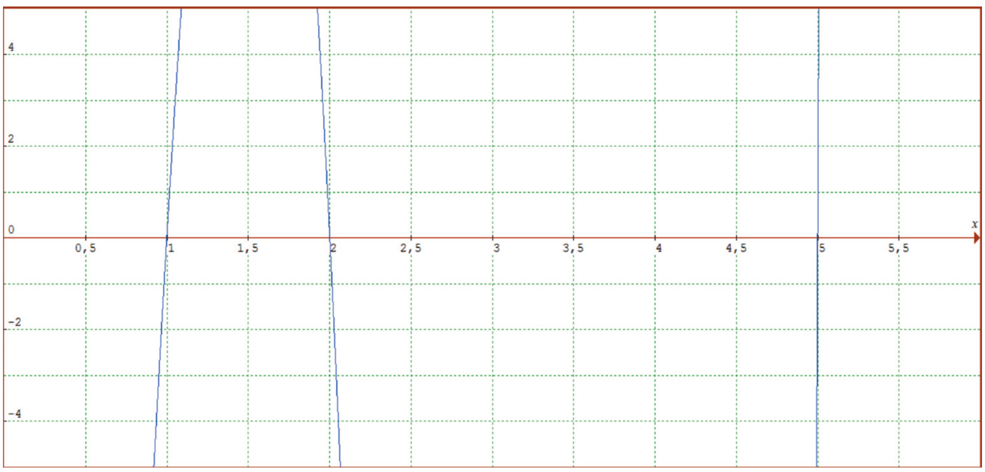

Imagen N°5: Gráfico con márgenes asignados automáticamente

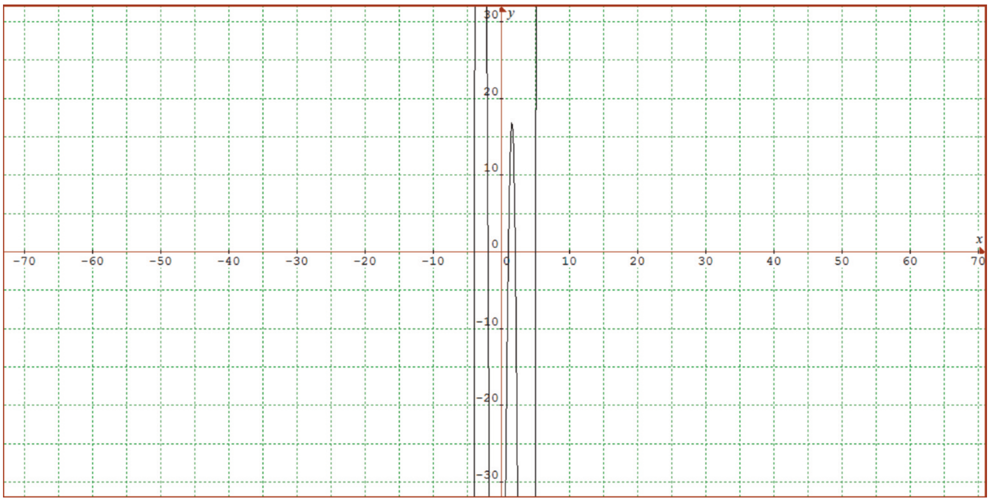

Imagen N°6: Gráfico de la misma función con otros márgenes asignados automáticamente.

En la Imagen N°5, los márgenes de la cuadrícula establecidos por el software son entre -5 y 5 sobre el eje de las ordenadas, y a partir de 0 hasta 6 para el eje de las abscisas. En la Imagen N°6 , los márgenes asignados a izquierda y derecha alcanzan valores desde -75 hasta 75, pero los límites superior y inferior se extienden desde -35 hasta 35 sobre el eje de las coordenadas. La gráfica adecuada matemáticamente para la función dada es la que puede verse en la Imagen N°1.

En la Imagen Nº2, si uno no modifica los márgenes que el programa asigna a la función $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-4x+3}$ puede asumirse que la gráfica de la misma se asemeja a una función cúbica, que es continua y que su dominio se extiende a todos los reales. En la Imagen N°3, podría afirmarse que la gráfica de la función comienza aproximadamente en el punto (0;-0,75) y que no es continua en el intervalo que parte de cero hasta 4,5.

En la Imagen N°5 puede decirse que la función $f(x) = x^5 - 2x^4 - 23x^3 + 28x^2 + 76x - 80$ es discontinua, tiene tres raíces reales, y que su gráfica se asemeja a un conjunto de segmentos; e incluso hasta podría pensarse que no es función. Por el contrario, en la Imagen N°6, la función sigue siendo discontinua pero tiene cinco raíces reales y está formada por tres rectas paralelas y una parábola.

Lo llamativo de estos gráficos produjo que los grupos comenzaran a hacerse preguntas entre ellos referidas a las imágenes que miraban. Esto hecho llamó nuestra atención y al observar en las pantallas gráficos que no se correspondían con las expresiones analíticas dadas, sugerimos a cada grupo de alumnos que trataran de obtener imágenes “que se vean un poco más”. Con esta frase nos referimos a que se modificaran los márgenes del papel gráfico para lograr una visualización de las gráficas de las funciones más conveniente para la observación de características matemáticas importantes.

Con nuestra intervención, la mayoría de los alumnos pudo visualizar las gráficas correctas matemáticamente hablando y resolver la consigna del inciso b).

En la solución de estos problemas con el programa tuvimos que dedicar buena parte de la clase a resolverlos y que no estaban previstos en la planificación. De todas maneras, esta actividad brindó la posibilidad que los alumnos tomen sentido de ciertos dominios sobre las funciones del programa.

Asumido el desafío que se nos presentó al iniciar la práctica e imaginando que los alumnos con los que trabajaríamos tenían un manejo fluido del Graphmatica, aprendimos a usar el programa con profundidad.

Ya en aula, luego de entregar las consignas y recorriendo por los distintos grupos de trabajo al escuchar preguntas como: ¿Cómo escribo las fórmulas para poder graficarlas? , ¿Cómo pongo los numeritos de arriba? , ¿Cómo borro las gráficas? o ¿Las hacemos todas juntas?, descubrimos que los alumnos no tenían un manejo fluido del software y esto hizo necesario que solucionáramos las dudas (no previstas) que surgían. Este hecho, pone en evidencia la necesidad de un profesor de matemática que, al trabajar con programas de computación según Jensen y Brevard (1992), debe:

- Brindar orientaciones escritas y habladas del uso del software.
- Monitorear el uso del software.

Nuestro objetivo no estaba focalizado en que los alumnos desarrollasen técnicas de dibujo de gráficos sino la observación de características analíticas en los mismos. En este sentido, intentamos aprovechar las posibilidades o la potencialidad de las computadoras para realizar operaciones o trabajar con expresiones complejas superando el obstáculo que pueden representar para el desarrollo del trabajo de alumnos y profesores (Ravelle, Rothestein Y Fitch, citados en Lopes y Borba; 1994).

Este aporte de las computadoras era relevante para nosotros porque lo que inquiríamos y anhelábamos en esa clase era que los estudiantes pudieran percibir y observar dichas particularidades en las funciones graficadas por el software a partir de lo que visualizaban en la pantalla y de sus conocimientos previos. Es decir, que a partir de su experimentación con el software (acompañados por nosotros), se construyeran resultados analíticos y les dieran nuevos significados a los contenidos.

De esta manera, diferenciándonos de la enseñanza "tradicional" de funciones polinómicas (meramente algebraica), intentamos abrir nuevos matices y posibilidades al uso de la computadora como medio. En este caso particular, con el programa Graphmatica, adquieren relevancia la observación indagatoria y la experimentación como procesos que desafían la hegemonía de los tratamientos algebraicos. De modo tal que *La visualización y la experimentación son naturalmente favorecidas como procesos presentes en la construcción del conocimiento matemático* (Villareal; 2004).

De esta manera, diferenciándonos de la enseñanza "tradicional" de funciones polinómicas (meramente algebraica), intentamos abrir nuevos matices y posibilidades al uso de la computadora como medio. En este caso particular, con el programa Graphmatica, adquieren relevancia la observación indagatoria y la experimentación como procesos que desafían la hegemonía de los tratamientos algebraicos. De modo tal que La visualización y la experimentación son naturalmente favorecidas como procesos presentes en la construcción del conocimiento matemático (Villareal; 2004).

> *El empleo de las computadoras en las clases de Matemática afecta:*
> *• El currículum*
> *• Las interacciones en la clase*
> *• El manejo de la clase*
> *• La evaluación y el seguimiento del progreso del estudiante*
> *e implica el desarrollo de nuevas habilidades de enseñanza y gestión de la clase. El empleo de la tecnología debe estar subordinado a los objetivos de la enseñanza de la Matemática y no ser considerado un fin en ellos mismos.*

Ahora, pensando en el tratamiento que le dimos a la computadora como medio, y más específicamente al software Graphmatica como recurso principal, tratamos que la actividad no promoviese un uso domesticado de la computadora y del software, teniendo en cuenta la siguiente idea de Borba y Penteado (2001):

> *Domesticación de la tecnología: cuando es utilizada solo como un barniz de modernidad para que no afecte el status quo de la actividad escolar vigente, manteniendo inalterados los objetivos, contenidos, metodologías de enseñanza, formas de evaluación, etc.*

Y creemos que logramos nuestro cometido, porque si bien en un principio su utilización fue únicamente para visualización de las gráficas de las funciones polinómicas y no polinómicas, la observación indagatoria, la exploración y la búsqueda de regularidades que impulsamos (trabajo de calidad analítica) hizo que la participación del software en el aula no quedara desdibujada, sino todo lo contrario, fue determinante para el reconocimiento inicial de las funciones polinómicas, facilitando la posterior institucionalización de distintas definiciones y la introducción a contenidos referidos a métodos de cálculo, como el Método de Gauss para la obtención de raíces, factorización, etc.

> En conclusión, recordemos la siguiente reflexión de Lopes y Borba (1992):
>
> El uso de las computadoras en la Educación Matemática no deberá significar una nueva estrategia para esquivar antiguos problemas. Debe llevar a una reflexión acerca de las concepciones pedagógicas que asumimos, ya que ella no solamente va a dinamizar las clases al despertar el interés de los alumnos, sino que conducirá a la necesidad de nuevos enfoques matemáticos, para los cuales debemos estar preparados.

El uso de las nuevas tecnologías no solo impone y plantea cambios tanto en las actividades del aula como en las relaciones que establecen los alumnos con los saberes, sino que también genera en el docente la necesidad de cambio, de repensar sus prácticas a las nuevas posibilidades que las nuevas herramientas facilitan para lograr, de esta manera, un mayor interés de los alumnos por la matemática apuntando siempre a lograr un aprendizaje en el que se pueda crear sentido.

Para finalizar queremos agradecer a la Profesora Analía Cristante por permitirnos compartir este espacio de aprendizaje y darnos la posibilidad de vivir esta experiencia enriquecedora, por la amabilidad con la que nos trataron y por la buena disposición para con nuestras propuestas.

BIBLIOGRAFÍA

Jensen, R.y Breward, W.(1992): *Technology: Implications for Middle Grades Mathematics.* En OWENS (Ed.) Research Ideas for de Classroom. Middle Grades Mathematics. NCTM. Macmillan Publishing Company. New York.

LOPES, A. y BORBA, M. (1994): *"Tendências em Educação Matemática".* Roteiro, Núm. 32, jul/dez, pp.49-61.

VILLAREAL, M. (2005): *"Transformaciones que las tecnologías de la información y la comunicación traen para la educación matemática".* Yupana, Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral. n.1, pp.41-55.

Rockwell, Elsie (2005): *"La lectura como práctica cultural: concepto para el estudio de los libros escolares",* en: Lulú Coquette. Revista de Didáctica de la Lengua y la Literatura., El Hacedor-Jorge Baudino Editores, Año 3, Nro. 3. Buenos Aires.

Volshinov, V. N. (1976): *El signo ideológico y la filosofía del lenguaje*, Editorial Nueva Visión, Bs. As.