



FACULTAD
DE CIENCIAS
ECONÓMICAS



Universidad
Nacional
de Córdoba

REPOSITORIO DIGITAL UNIVERSITARIO (RDU-UNC)

Funciones biométricas a través del Diagrama de LEXIS

Elvira Delia Carrizo

Ponencia presentada en XXXVI Jornadas Nacionales de Profesores Universitarios de
Matemática Financiera realizado en 2015 en Salta, Argentina



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual
4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS**

***“Funciones Biométricas a través del
Diagrama de LEXIS”***

***Prof. Elvira CARRIZO
elviracarrizo@yahoo.com.ar
Salta, octubre 2015***

Funciones Biométricas a través del Diagrama de LEXIS

Resumen

Se intenta explicar la utilidad que brinda el Diagrama de LEXIS como herramienta que permite representar los fenómenos demográficos en el tiempo, no solo en el cálculo de las funciones biométricas elementales, sino también para interpretar con facilidad los conceptos que las definen.

Introducción

Mediante la representación de los fenómenos demográficos en el tiempo, al utilizar el Diagrama de LEXIS, se facilita la comprensión de todas las funciones biométricas necesarias para la elaboración de las tablas de mortalidad. En esta presentación, solo se trabajó en dos de estas funciones biométricas, precisamente en las dos funciones que pueden referirse a poblaciones imaginarias o a poblaciones reales según provengan estas de las tablas de mortalidad o surjan de la población en estudio. Además en esta presentación se trabajó para el tramo de edades simples ($n=1$).

Objetivo

Se pretende explicar la utilidad que brinda una de las herramientas demográficas a la hora de interpretar las funciones biométricas.

En el presente trabajo se trata de demostrar mediante el Diagrama de LEXIS que el número de años vividos por una cohorte inicial dada, entre las edades x y $x+1$, representa la cantidad de personas vivas de dicha cohorte entre las edades mencionadas.

Diagrama de LEXIS:

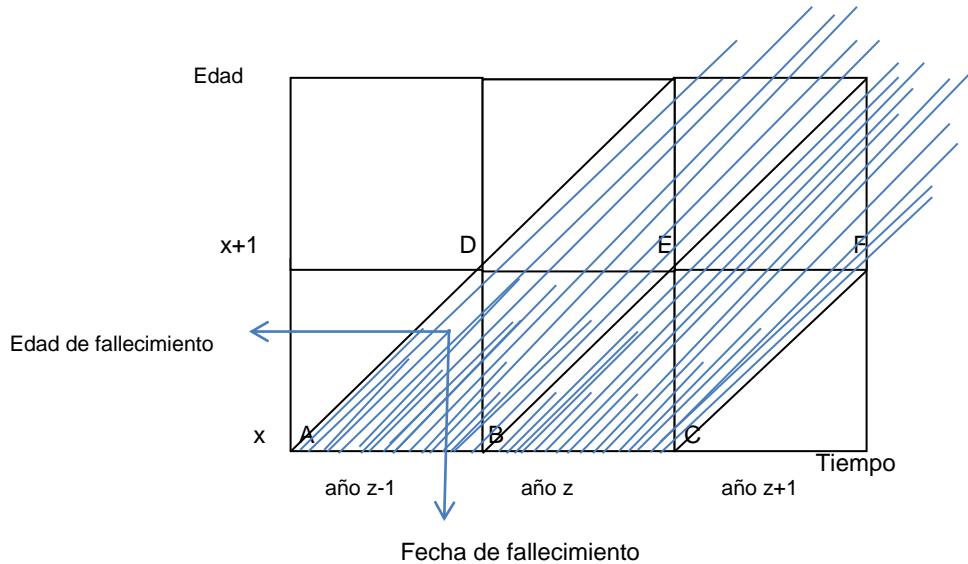
Una manera de representar los fenómenos demográficos en el tiempo, y facilitar la interpretación de diversas tasas y otros indicadores demográficos, es a través del diagrama denominado "de LEXIS". Quien introduce este diagrama es el estadístico alemán Wilhem Lexis, en su libro "*Introducción a la teoría de la estadística demográfica*", escrito en el año 1875.

El diagrama está constituido por una grilla cuadrículada donde se representan, el tiempo en los ejes horizontales y las edades en los ejes verticales. Cada una de las personas es representada por una línea de 45 grados a cada uno de los ejes.

Por lo general, el origen de cada línea es el del nacimiento (fecha registrada en el eje horizontal) a la edad cero (registrada en el eje vertical). La línea se prolonga a medida que transcurre el tiempo, se denomina *línea de vida* y se interrumpe en el momento del fallecimiento de la persona, quedando determinada la fecha de la muerte en el eje horizontal y la edad a la que ocurre el acontecimiento en el eje vertical.

Un segmento del diagrama, sea este horizontal o vertical, representa el número de personas vivas y corresponde al número de líneas de vida que cruzan por el mismo (número de líneas que lo atraviesan). En el eje vertical se representa el número de personas vivas comprendidas entre dos edades exactas y en el eje horizontal el número de personas vivas de edad exacta. Cuando la línea de vida atraviesa un segmento horizontal la persona cumple un año más de vida, cuando la línea de vida atraviesa un segmento vertical la persona pasa de un año calendario al siguiente.

Una superficie del diagrama representa el número de defunciones y corresponde a la cantidad de líneas de vida que se detienen dentro del área considerada, las superficies representan número de líneas que se cortan en ella.



Se observa en la gráfica que:

- Las personas que en un año calendario cumplen x años de vida, cumplen $x+1$ años, durante el siguiente año calendario.
- Cuando las líneas de vida atraviesan los ejes horizontales, las personas cumplen un año más de vida, dichas personas están festejando sus cumpleaños.
- Cuando las líneas de vida atraviesan los ejes verticales, las personas pasan de un año calendario al siguiente, las mismas están festejando el año nuevo.
- Las líneas de vida que se cortan durante un año calendario corresponden a defunciones de personas de dos generaciones consecutivas.

Se explican los segmentos, los cuales representan cantidad de personas vivas

\overline{BC} = cantidad de personas vivas en el año z , de edad exacta x , integrantes de una cohorte dada.

\overline{DE} = cantidad de personas vivas en el año z , de edad exacta $x+1$, número de personas en el día de su cumpleaños.

\overline{CE} = cantidad de personas vivas al final del año z , personas que habiendo cumplido x años de edad, todavía no han cumplido los $x + 1$ años de vida, número de personas vivas entre las edades x y $x+1$, en un momento dado.

Se explican las superficies, las que representan cantidad de personas fallecidas

- Por un lado, defunciones ocurridas durante un determinado año calendario, correspondientes a personas de dos cohortes.

\overline{BCED} = Cantidad de defunciones entre las edades x y $x+1$, ocurridas durante el año z , número de personas fallecidas pertenecientes a dos generaciones consecutivas.

\overline{BDE} = Cantidad de personas fallecidas entre las edades x y $x+1$, ocurridas durante el año z , personas que en el año anterior ($z - 1$) cumplieron x años de edad.

\overline{BCE} = Número de defunciones de personas entre las edades x y $x+1$, durante el año z , personas que cumplieron x años de edad en el año que murieron.

De lo explicado anteriormente se pueden expresar las defunciones de un año calendario, como sigue:

$$\overline{BCED} = \overline{BDE} + \overline{BCE}$$

- Por otro lado, las defunciones de personas de la misma generación, ocurridos estos fallecimientos durante dos años calendarios consecutivos.

\overline{ABED} = número de defunciones de personas entre la edad x y $x+1$, personas correspondientes a la misma cohorte que, habiendo cumplido los x años de edad, no llegan a cumplir $x+1$ años de vida, corresponden a defunciones ocurridas durante dos años calendarios consecutivos, año $z-1$ y z .

\overline{ABD} = número de defunciones ocurridas durante el año $z-1$ de personas entre las edades x y $x+1$, cantidad de personas que fallecen en el año que cumplieron los x años de vida.

\overline{BDE} = número de defunciones ocurridas durante el año z de personas entre las edades x y $x+1$, cantidad de defunciones de personas que cumplieron x años de edad en el año anterior al del fallecimiento.

De lo explicado anteriormente se pueden expresar las defunciones de una cohorte determinada, como sigue:

$$\overline{ABED} = \overline{ABD} + \overline{BDE}$$

Interpretación de las funciones biométricas mediante el Diagrama de LEXIS

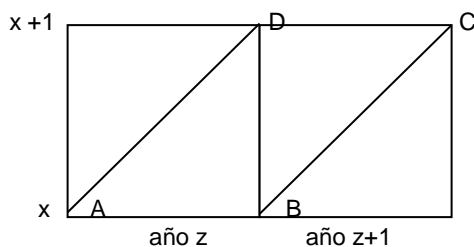
➤ l_x es una de las principales funciones biométricas e indica la cantidad de personas de edad exacta x sobrevivientes de un grupo inicial arbitrario de edad ∞ (alfa), l_{∞} es la raíz o base de la tabla, por lo general cero años. Es una función decreciente, teórica, que representa una población estática imaginaria. Esta función se anula para valores de la variable x correspondientes a las edades más avanzadas, por lo general 100 años.

➤ d_x es la cantidad de personas fallecidas entre dos edades consecutivas, número de personas que habiendo cumplido la edad exacta x no llegan a cumplir la edad exacta $x+1$.

Esta función puede referirse a una población imaginaria o a una población real, según sus valores provengan de la tabla de mortalidad o de la población en estudio. En este último caso, los datos del número de fallecimientos de edad x de una determinada población, ocurridos durante un año determinado, se obtienen de las Estadísticas Vitales.

En el primer caso, según tabla de mortalidad, la cantidad de fallecidos (d_x) surge de la diferencia entre el número de las personas de edad exacta x (l_x) y la cantidad de personas de edad exacta $x+1$ (l_{x+1}).

Se interpretan las defunciones en el Diagrama de LEXIS:



$$\overline{ABCD} = \overline{AB} - \overline{DC} \quad (1)$$

La igualdad (1) expresa que el número de defunciones de personas entre las edades x y $x+1$, representado en la superficie ABCD del Diagrama de LEXIS, está dado por el número de las líneas de vida que, partiendo del segmento AB, se cortan en esa superficie sin llegar al segmento DC, lo que puede también expresarse como:

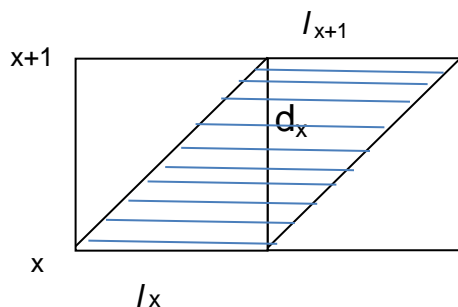
$$\overline{DC} = \overline{AB} - \overline{ABCD} \quad (2)$$

La igualdad (2) muestra que la cantidad de líneas de vida que atraviesan el segmento DC, se obtiene por la diferencia entre la cantidad de líneas de vida que parten del segmento AB menos el número de líneas de vida que se cortan en la superficie ABCD.

Se interpreta el número de defunciones entre las edades x y $x+1$, mediante el Diagrama de LEXIS, para:

$$\overline{ABCD} = d_x, \quad \overline{AB} = l_x \quad \text{y} \quad \overline{DC} = l_{x+1}$$

Se observa en el Diagrama de LEXIS:



Se reemplaza en la expresión (1) según corresponda y se obtiene $d_x = l_x - l_{x+1}$

Definido como el número de defunciones de personas entre los x y $x+1$ años de edad, el que surge de la diferencia entre la cantidad de personas de edad exacta x y la cantidad de personas de edad exacta $x+1$

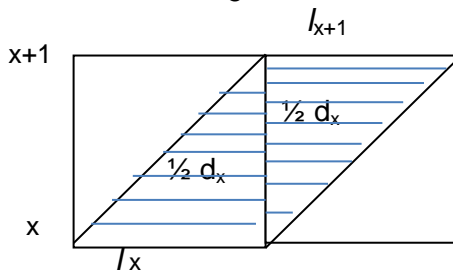
Si se reemplaza en la expresión (2), según corresponda, se obtiene $l_x - d_x = l_{x+1}$

Lo que representa el número de personas de edad exacta $x+1$, igual a la cantidad de personas de edad exacta x menos el número de defunciones de personas entre las edades x y $x+1$.

Para $x \geq 5$ supone la distribución uniforme de las defunciones ocurridas durante el intervalo de años considerados, lo que permite expresar:

$$l_x - l_{x+1} = d_x = \frac{1}{2} d_x + \frac{1}{2} d_x$$

Se observa en el Diagrama de LEXIS:

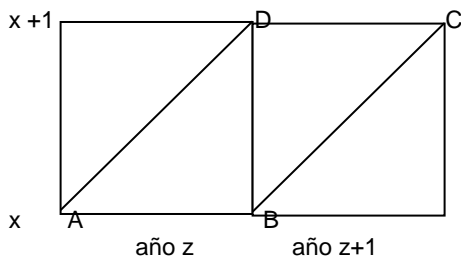


Defunciones de personas que habiendo cumplido los x años de edad no llegan a cumplir $x+1$ años de vida, ocurrido estos fallecimientos durante dos años calendarios consecutivos, $\frac{1}{2}$ de estas defunciones corresponden a cada uno de esos años calendarios.

➤ L_x es una función que representa una población dinámica que puede referirse a una población real, cuyos datos se obtienen de un censo o muestra poblacional donde se agrupan las personas según la edad cumplida, o referirse a una población imaginaria si se relaciona con los sobrevivientes l_x de una tabla de mortalidad.

Se observa la función analizada en el Diagrama de LEXIS representada por el segmento BD, el cual se puede encontrar de dos maneras:

- a) partiendo del segmento DC (Situación A)
- b) partiendo del segmento AB (Situación B)



Situación A

$$\overline{BD} > \overline{DC} \longrightarrow \overline{DC} + \overline{BCD} = \overline{BD} \quad (3)$$

La igualdad (3) representa el número de personas vivas al 31/12/z (segmento BD), el que surge de la suma entre el número de personas de edad exacta $x+1$ del año $z+1$ (segmento DC) más las defunciones de personas entre x y $x+1$ año de edad, fallecidos en el año $z+1$ (superficie BCD).

Situación B

$$\overline{BD} < \overline{AB} \quad \longrightarrow \quad \overline{AB} - \overline{ABD} = \overline{BD} \quad (4)$$

La expresión (4) representa el número de personas vivas al 31/12/z (segmento BD), el que surge de la diferencia entre el número de personas de edad exacta x del año z (segmento AB) menos las defunciones de personas entre x y x+1 año de vida, fallecidos en ese año z (superficie ABD).

A esta función biométrica la denominamos conceptualmente de dos maneras, a saber:

- Números de años vividos por la generación l_0 entre las edades x y x+1.
- Cantidad de personas comprendidas entre dos edades exactas, x y x+1.

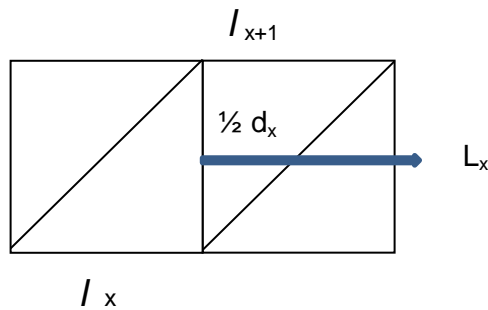
Números de años vividos por la generación l_0 entre las edades x y x+1

Se interpreta el número de años vividos por la población inicial entre las edades x y x+1, mediante el Diagrama de LEXIS, Situación A para:

$$\overline{BD} = L_x, \quad \overline{DC} = l_{x+1} \quad \text{y} \quad \overline{BCD} = \frac{1}{2} d_x$$

Si se remplace en la expresión (3) según corresponda, se obtiene $L_x = l_{x+1} + \frac{1}{2} d_x$

Lo que se observa en el Diagrama de LEXIS:



El número de años vividos por la generación l_x entre las edades x y x+1 está dado por el tiempo vivido dentro de dicho intervalo por los integrantes del grupo inicial, desde la edad exacta x hasta la edad exacta x+1. Esto es, cada una de las personas de x años de edad que llegan a cumplir x+1 años de vida vive un año, por lo que el número de años vividos por todos los integrantes del grupo es igual a l_{x+1} años, un año por cada una de las personas integrantes del grupo, esto representa los años enteros que vive el grupo. Además, hay que considerar también la cantidad de años que viven los que fallecen entre la edad x y x+1, considerando que las defunciones se distribuyen uniformemente para $x \geq 5$ se supone que los fallecidos viven $\frac{1}{2}$ año en el año en que mueren, por lo que $\frac{1}{2}$ años cada uno de los fallecidos, el total de años vividos por el número de fallecidos, es $\frac{1}{2} d_x$ años.

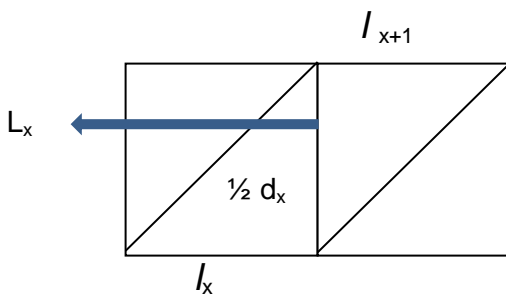
Cantidad de personas comprendidas entre dos edades exactas, x y $x+1$

Se interpreta el número de personas vivas entre las edades x y $x+1$, a través del Diagrama de LEXIS, Situación B, para:

$$\overline{BD} = L_x, \quad \overline{AB} = l_x \quad \text{y} \quad \triangle ABD = \frac{1}{2} d_x$$

Se reemplaza en la expresión (4) según corresponda y se obtiene $L_x = l_x - \frac{1}{2} d_x$

Lo visualizamos en el Diagrama de LEXIS:



El número de personas de un grupo inicial dado que habiendo cumplido x años de edad no han cumplido aún $x+1$ años de vida es el número de personas vivas en un momento determinado en el tiempo.

Para trabajar desde este concepto, además de suponer para $x \geq 5$ la distribución uniformemente de las defunciones, se considera que los l_x como grupo inicial de la tabla de mortalidad también se han distribuido uniformemente dentro del año.

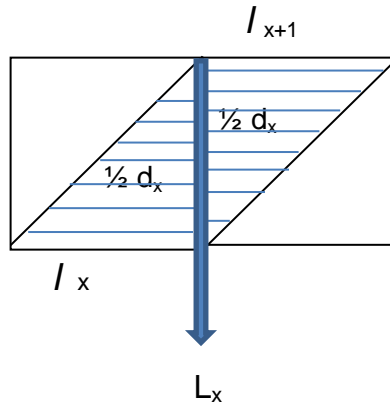
Según estas hipótesis, al final del primer año habrá un grupo de personas con edades entre x y $x+1$, representado por L_x , menor al grupo l_x (algunas de las personas de edad exacta x habrán fallecido durante ese año calendario). Manteniendo los supuestos, se considera que todos los integrantes del grupo estuvieron, en promedio, expuestos al riesgo de morir durante ese año, medio año cada uno. Entonces, la cantidad de personas comprendidas entre las edades x y $x+1$, en un momento dado, es igual a los sobrevivientes de edad exacta x menos la mitad ($\frac{1}{2}$) de las defunciones ocurridas entre ambas edades

Conclusión

Sabemos que, la función biométrica L_x , como función imaginaria al relacionar su valor con los sobrevivientes l_x de una tabla de mortalidad, es igual a las siguientes expresiones, según Situación A o B:

$$l_{x+1} + \frac{1}{2} d_x = l_x - \frac{1}{2} d_x$$

Ambas expresiones representan el valor de L_x , lo que se visualiza en el Diagrama de LEXIS sin dificultad, facilitando así la comprensión de esta función biométrica con cualquiera de los dos conceptos que la definen.



Se observa que, mediante los dos razonamientos, se encuentra la función L_x . Lo que nos permite decir que el número de años vividos por una cohorte inicial dada, entre las edades x y $x+1$, representa la cantidad de personas vivas pertenecientes a dicha cohorte que habiendo cumplido la edad exacta x no han cumplido todavía la edad exacta $x+1$.

Bibliografía

CARRIZO, José F. “*Matemática Financiera. Segunda Parte*”. Córdoba. Facultad de Ciencias Económicas U.N.C. (2001).

YASUKAWA, Alberto M. “*Matemática Actuarial y Valuaciones Actuariales*”. Córdoba. LDM Editorial (2007).

ORTEGA, Antonio “*Tablas de Mortalidad*”. Costa Rica. Centro Latinoamericano de Demografía (1987).

LEVI, Eugenio “*Curso de Matemática Financiera y Actuarial Volumen II*” Barcelona. Casa Editorial-Barcelona (1973)