Epistemología e Historia de la Ciencia ● Volumen 19 - 2013

La Prehistoria del Gauge

Víctor R. Rodriguez [*] *y Pedro W. Lamberti* [†]

Introducción

El concepto de gauge[1] es uno de los ingredientes centrales de las nuevas articulaciones teóricas en diferentes ámbitos de la física. Se lo encuentra en relatividad general, teoría cuántica de campos, teoría unificadas y, también, en dominios de la física clásica. Su evolución ha exhibido una considerable metamorfosis dentro de las matemáticas, con las naturales consecuencias teóricas y epistemológicas en el sector de sus aplicaciones físicas.

En matemáticas es común asistir a lecturas de su historia plenamente contaminadas de conceptualizaciones contemporáneas, algo que los historiadores intentan desterrar pero sin demasiado éxito. Usualmente, un concepto moderno o contemporáneo configura nuevas matrices de lectura e interpretación de articulaciones previas. Esto ha sucedido con la geometría, el álgebra, el análisis, la topología. Así, grupos, invariantes, transformaciones, simetrías, han servido como marcos conceptuales para contextualizar antiguos conceptos dentro de teorizaciones vigentes, aunque también situadas históricamente. El concepto de gauge no es la excepción, tal como puede apreciarse en las caracterizaciones hechas por los propios matemáticos. Para T. Tao, por ejemplo (Tao 2008), un gauge no es otra cosa que un sistema coordenado que varía de acuerdo con la localización de uno con respecto a algún espacio de base o espacio de parámetros. Una transformación gauge es un cambio de coordenadas aplicado a tal localización. Una teoría de gauge es un modelo para algún sistema físico o matemático al cual pueden aplicarse transformaciones de gauge. Esto usualmente viene acompañado con una carga teórica adicional importante: la invariancia de gauge, que significa que todas las cantidades físicamente significativas permanecen estables o se transforman naturalmente bajo transformaciones de gauge. Cuando se fija un gauge o, dicho en otros términos, se rompe la simetría de gauge, el modelo se hace más fácil de analizar matemáticamente, como es el caso con sistemas de ecuaciones diferenciales parciales en teorías clásicas. Un punto clave para destacar aquí es que la tratabilidad del problema puede depender fuertemente del gauge fijado.

Los matemáticos han desarrollado versiones extensas y variadas de estas teorías, cuestión que escapa por cierto a los alcances de este trabajo. No obstante, a los fines de comprender más cabalmente sus orígenes dentro de la física –que es uno de nuestros objetivos– conviene señalar que la explosión de artículos sobre el tema es un fenómeno del siglo pasado, asociado normalmente a matemáticos como E. Noether y H.Weyl. Posteriormente, a intentos de re-escritura de teorías físicas de considerable abstracción (Mills 1989, Jackson-Okun 2001). Hoy es común dentro de este contexto hablar de fibrados,

[*] Facultad de Filosofía y Humanidades, UNC
[†] Facultad de Matemática, Astronomía y Física, UNC y CONICET, lamberti@famaf.unc.edu.ar

conexiones y curvaturas. Las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre, por ejemplo, pueden expresarse dentro del contexto de las teorías de gauge en términos de una conexión y sus curvaturas. Aunque no es parte de este trabajo, puede extenderse este enfoque hasta las teorías actuales en torno de las ecuaciones del tipo de Yang-Mills, lo que constituye en sí mismo una verdadera industria teórica. Esta dinámica conceptual ha acarreado numerosos problemas que se encuentran abiertos en investigaciones actuales, debido fundamentalmente a la complejidad inherente a los mismos y al complejo desarrollo matemático asociado. En muchos casos, por ejemplo, no se entiende adecuadamente si el uso de la elección correcta del gauge es una mera conveniencia técnica, o es algo más intrínseco de la ecuación involucrada. Como se suele señalar, es posible que una ecuación de campo gauge esté bien establecida bajo una elección del gauge, pero no lo suficiente bajo otra. Esto confluye en líneas de investigación abiertas en torno de la teoría de la invariancia gauge de las ecuaciones diferenciales parciales.

Dentro de la literatura filosófica, también se ha incursionado en el concepto de gauge asociado a las matemáticas y la física. Para el lector interesado en profundizar algunas líneas de abordaje en este sector, sugerimos Belot (2008) y Healey (2007). En ámbitos más cotidianos, puede verse una aproximación al tema desde la perspectiva de un análisis de la rotación vía deformación y el movimiento de los cuerpos deformables, como los plásticos movimientos de la caída de un gato y su extraordinaria capacidad adaptativa para atenuar los efectos de ella. Al respecto, F. Wilczek (1989) menciona que Maxwell llevó a cabo una serie inusual de experimentos arrojando gatos desde sus habitaciones en el Trinity para determinar cómo se las ingeniaban para caer sobre sus pies. Estimamos que esta anécdota es adecuada para ilustrar los sutiles contactos entre los fenómenos físicos del siglo XIX y sus descripciones matemáticas; en el sector intermedio existe espacio para diferentes representaciones conceptuales que pretenden aliviar la tensión entre las semánticas involucradas y la capacidad de tratamiento vía cálculos relevantes.

Este contexto general nos ha guiado para abordar lo que llamamos "la prehistoria" del concepto de gauge y, como veremos, se remonta a los orígenes de la teoría electromagnética.

A la pregunta ¿qué es la teoría de Maxwell?, H. Hertz respondía: "*No conozco una respuesta más corta o más definitiva que la siguiente: La Teoría de Maxwell es el sistema de ecuaciones de Maxwell*" (Hertz, 1892). A la misma pregunta un físico moderno contestaría que la teoría de Maxwell es: *"Relatividad Especial más Invariancia de Gauge"*. Las ecuaciones de Maxwell, escritas en notación moderna, son:

$$\nabla . \vec{D} = \rho; \qquad \nabla . \vec{B} = 0; \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

donde $\boldsymbol{E}$ es el campo eléctrico, $\boldsymbol{D}$ es el campo desplazamiento eléctrico, $\boldsymbol{B}$ es el campo inducción magnética y $\boldsymbol{H}$ es el campo magnético[2]. ϱ y $\boldsymbol{J}$ representan la densidad de carga y la densidad de corriente eléctrica, respectivamente. Estas ecuaciones se deben complementar con otras conocidas como ecuaciones constitutivas, las cuales son relaciones entre los distintos campos, y representan físicamente las propiedades del medio.

La respuesta de Hertz a la pregunta arriba enunciada se dio en el marco de la disputa decimonónica dentro de la física entre acciones a distancia y la teoría de campos para la interacción electromagnética y refleja claramente su concepción filosófica sobre el significado de una teoría: distintas representaciones y modelos que sirvan para representar una misma realidad física, pueden considerarse en algún sentido equivalentes e igualmente válidas. En ese sentido algunos de sus esfuerzos conciliadores entre las teorías de acción a distancia y la teoría de campos tuvieron que ver con la deducción de las ecuaciones de Maxwell a partir de premisas aceptadas por los defensores de las acciones a distancia (Hertz, 1884).

Por otro lado, la segunda respuesta tiene que ver con dos aspectos centrales de la teoría de Maxwell: la invariancia relativista de sus ecuaciones, técnicamente, la invariancia frente el grupo de Lorentz, y la invariancia de estas ecuaciones frente a transformaciones de gauge. Matemáticamente esta última se puede enunciar de la siguiente forma. Dado que el campo de inducción magnética tiene divergencia nula, existe un campo vectorial ***A*** tal que:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{1}$$

A su vez se puede introducir un campo escalar V, tal que

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V \tag{2}$$

La *invariancia de gauge* tiene que ver con el hecho que las ecuaciones de Maxwell son invariantes frente a los reemplazos

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\Lambda$$

$$V \rightarrow V - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

donde Λ es una función arbitraria (Jackson, 1975). Usualmente hay dos elecciones o condiciones de gauge para los campos ***A*** y V: El *gauge de Lorenz*[3]

$$\nabla . \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0; \tag{3}$$

y el gauge de Coulomb

$$\nabla . \vec{A} = 0 \tag{4}$$

El hecho que se pueda cambiar arbitrariamente a los potenciales ***A*** y V, llevó a pensar que no tendrían ninguna relevancia física. Sin embargo en el ámbito de la mecánica cuántica se mostró su significado físico en situaciones como el Aharonov-Bohm, el cual ha sido verificado experimentalmente. A su vez una extensión de la idea de la invariancia de gauge en campos no conmutativos condujo a teorías del tipo Yang-Mills, de fundamental importancia en la formulación de teorías para describir las interacciones fundamentales. No es el propósito de esta monografía analizar contextos actuales de la noción de invariancia de gauge, sino indagar sobre sus orígenes. Como veremos el mismo se remonta a la etapa fundacional del electromagnetismo, de puja entre las acciones a distancia versus la teoría de campos.

Maxwell y el estado electro-tónico sugerido por Faraday

Claramente el concepto de invariancia de gauge está asociado a la introducción de los potenciales ***A*** y V. Por ello revisaremos en esta sección la aparición de estos potenciales en las etapas tempranas de la teoría electromagnética. Poco después de descubrir el fenómeno de inducción electromagnética en 1831, M. Faraday se pregunta sobre la naturaleza de la propagación de la fuerza electromagnética, es decir, indaga sobre cuál es la relación a la sustancia material en la cual esa fuerza se propaga, por ejemplo, el hierro en el cual el circuito primario y secundario están envueltos. Faraday sugiere que el pasaje de la corriente eléctrica a través del circuito primario da origen a un estado de tensión en las partículas del anillo de hierro. A este estado lo llama *estado electro-tónico*. J.C. Maxwell en 1853, en una carta a Thomson dice:

> He intentado aplicar a esos hechos la noción de Faraday de un estado electro-tónico. He realizado una buena cantidad de elaboración matemática en esta línea y creo haber llegado a varias verdades sobre el estado electro-tónico. Una cosa en la que al menos he tenido éxito ha sido reducir a un principio no sólo la atracción de corrientes y la inducción de corrientes, sino también la atracción de cuerpos electrificados sin ninguna nueva suposición

El concepto de estado electro-tónico puede rastrearse a lo largo del trabajo de Maxwell (bajo distintos nombres) y termina siendo el *potencial vector* en el *Treatise* (Maxwell, 1954). En el artículo 540 de ese libro, Maxwell deja en claro la importancia que le da a la idea de potencial, identificándola como “la cantidad fundamental en la teoría electromagnética”:

> La historia completa de esta idea (la del estado electrotónico) en la mente de Faraday, como se muestra en sus Researches, merece ser estudiada. Por el curso de los experimentos, guiado por una intensa aplicación de pensamientos, pero sin el agregado de cálculos matemáticos, (Faraday) fue guiado a reconocer la existencia de algo, el cual ahora conocemos que es una cantidad matemática, y la cual podría ser llamada la cantidad fundamental en la teoría del electromagnetismo. Pero como él fue conducido a esta concepción por un camino puramente experimental, el aceptó su existencia física, y supuso que era una condición peculiar de la materia, aunque estaba preparado para abandonar esta teoría tan pronto como pudiese explicar el fenómeno por cualquier forma de pensamiento más familiar.

Maxwell llama al vector ***A*** de la ecuación (1) intensidad electrotónica. La noción de un potencial vector había sido ya introducida por Thomson en 1846 al estudiar la analogía entre los fenómenos electromagnéticos y los de la teoría de la elasticidad. Este potencial vector es equivalente al que había sido usado por Neumann, Weber y Kirchhoff al estudiar las corrientes de inducción. El primer trabajo publicado de Maxwell sobre electromagnetismo (1856) lleva por título *Sobre la líneas de fuerza de Faraday*. En la primera parte dice:

> La idea del estado electro-tónico, no se me ha presentado aún de tal forma que su naturaleza y propiedades puedan ser expresadas claramente sin referencia a meros símbolos

La parte II de ese trabajo lleva por título: S*obre el estado electro-tónico de Faraday*. Allí Maxwell introduce tres cantidades, las cuales están relacionadas a la "fuerza electromotriz en un punto y al magnetismo", y agrega: "A estas cantidades doy el nombre de funciones electro-tónicas, o componentes de la intensidad electro-tónica". Luego enuncia algunas leyes. La primera tiene el siguiente enunciado:

> Ley I: La intensidad electro-tónica completa alrededor de la frontera de un elemento de superficie mide la cantidad de inducción magnética que pasa a través de esa superficie, o en otras palabras el número de líneas de fuerza magnética la cual pasa a través de esa superficie.

Esto puesto en fórmulas se representa:

$$\oint A.dl = \oiint B.d\sigma$$

la cual no es otra cosa que la expresión (1) en forma integral. Tras el enunciado de la cuarta ley dice:

> Por esas cuatro leyes la cantidad magnética y eléctrica podría ser deducida a partir de los valores de la función electro-tónica

La sexta ley dice:

> Ley VI: La fuerza electromotriz sobre cualquier elemento de un conductor se mide por la tasa de cambio instantánea de la intensidad electro-tónica de ese elemento, ya sea en magnitud o dirección.

Esta es precisamente la expresión (2) puesta en palabras. Al final de esa sección, Maxwell expresa sus objetivos inmediatos:

> En estas seis leyes me he propuesto expresar la idea en la cual creo están los fundamentos matemáticos de los modos de pensar expresados en las Research de Faraday.

H. von Helmholtz, Hertz y la conciliación entre acciones a distancia y la teoría Maxwelliana

En su trabajo *Théorie des phénomènes électro-dynamiques, uniquement déduite de l'expérience*, Ampere enuncia la ley de interacción entre dos elementos, *ds* y *ds´*, de dos circuitos por lo que circula una corriente eléctrica *i* e *i´*, respectivamente. La ley de fuerza está dada por (Ampere, 1990),

$$d^2\vec{F} = K\frac{ii'dsds'}{r^2}\hat{r}\left(3\cos\phi\cos\phi' - 2\cos\varepsilon\right) \qquad (5)$$

donde ϕ y ϕ' son los ángulos que forman los elementos *ds* y *ds´* con el radio vector que los une *r*; ε es la diferencia entre estos ángulos. A partir de esta ley, W. Weber deduce una ley de interacción tipo acción a distancia para dos partículas en movimiento. La fuerza de Weber involucra las magnitudes de las cargas de las partículas, y su velocidad y aceleración relativa:

$$\vec{F} = K\frac{ee'}{r^2}\hat{r}\left(1 - \frac{a^2}{16}\dot{r}^2 + \frac{a^2 r\ddot{r}}{8}\right)$$

La constante *a* está relacionada con la velocidad de la luz. A partir de esta expresión Weber puede deducir la ley de inducción de Faraday. Otro enfoque dado a la formulación de acciones a distancia de las interacciones electromagnéticas, es deduciendo la ley de fuerzas a partir de un potencial. Por ejemplo, entre 1845 y 1847 Franz Neumann desarrolla una teoría de acción a distancia a partir del potencial para dos corrientes:

$$V_N = -\frac{ii'dsds'}{r}\cos\varepsilon$$

donde el significado de las distintas cantidades es el mismo que en la expresión (5). En un intento de reconciliar este tipo de formulaciones de acción a distancia para las interacciones electromagnéticas, Hermann von Helmholtz, al hacerse cargo de la cátedra de Física en Berlin, se propone *Esclarecer la selva sin senderos de las diversas teorías electromagnéticas*. En ese trabajo introduce un potencial para la interacción entre dos elementos de corriente, cuya expresión es

$$V_H = -\frac{ii'}{r}dsds'\left(\frac{1+k}{2}\cos\varepsilon + \frac{1-k}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)$$

en donde *k* es una constante, en principio indeterminada. Para *k=1* se re obtiene el potencial de Neumann, para *k = -1* una fuerza equivalente a la de Weber, y para *k=0* se recupera la teoría de Maxwell. Los términos proporcionales a *k*, se anulan al integrar este potencial sobre un circuito cerrado, por lo tanto las tres formulaciones coinciden cuando una de las corrientes equivale a un circuito cerrado.

La teoría de Helmholtz tiene tres ingredientes fundamentales (Cahan1993):

1. Expresiones para los potenciales electromagnéticos $\boldsymbol{U}$ y ϕ_f y las fuerzas derivadas de ellos;
2. Una ecuación de continuidad que relaciona la "carga" eléctrica con la "corriente".
3. Una modelo para los medios eléctrica y magnéticamente polarizables.

El potencial U depende de la corriente eléctrica a través de la expresión:

$$\vec{U}(x,t) = \int \frac{\vec{J}(x',t)}{|x-x'|} d^3x' + \frac{1}{2}(1-k)\nabla\left(\int \vec{J}(x',t).\nabla_{x'}|x-x'|d^3x'\right)$$

En cambio, el potencial ϕ_f depende de la carga libre ρ_f a través de la ecuación

$$\nabla^2\phi_f = -4\pi\rho_f$$

Además, el campo vectorial $\boldsymbol{U}$ verifica ecuaciones:

$$\nabla^2\vec{U} = (1-k)\nabla\left(\frac{\partial\phi_f}{\partial t}\right) - 4\pi\vec{J}$$

$$\nabla.\vec{U} = -k\frac{\partial\phi_f}{\partial t}$$

Cuando $k=0$ esta última ecuación es equivalente a la condición del gauge de Coulomb; ec. (4). Esta es la elección que hizo Maxwell como condición de gauge para su potencial vector $\boldsymbol{A}$. A pesar de que el valor $k=0$ corresponde con la teoría Maxwelliana en lo que a la ley de inducción electromagnética se refiere, la teoría electromagnética de Helmholtz predice fenómenos físicos marcadamente diferentes a los predichos por la teoría de Maxwell. Por ejemplo la teoría del sabio alemán no sólo conduce a ondas transversales, sino también a ondas longitudinales de polarización eléctrica. Estas perturbaciones longitudinales tienen velocidad infinita en el caso $k=0$, lo cual conduzco a Helmholtz a un conjunto de inconsistencias que no pudo solucionar (Cahan 1993).

En 1884 H. Hertz publica un trabajo tratando de deducir las ecuaciones de Maxwell a partir de los principios de la electrodinámica continental. Su punto de partida son las ecuaciones

$$\vec{H}(x,y,z,t) = \nabla\times\vec{A}$$

$$\vec{E}(x,y,z,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{A}(x,y,z,t) = \frac{1}{c}\iiint\frac{\vec{j}(x,y,z,t)d^3x}{r}$$

con las condiciones $\rho = 0 \; y \; \nabla . j = 0$ (distribución de carga nula y lazos de corriente cerrados). Poco tiempo después cambia de actitud y se preocupa en escribir las ecuaciones de Maxwell sólo en término de los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$. Idéntica actitud toma Heaviside, enfatizando la simetría de las ecuaciones de Maxwell cuando se escriben en término de $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{E}$.

Concluimos esta monografía con un breve comentario sobre le gauge de Lorenz, ec. (3). En un trabajo notable del año 1867, L. Lorenz, establece la relación existente entre la luz y el electromagnetismo (Lorenz, 1867). Es de destacar que este trabajo es escrito por el autor sin conocer el manuscrito de Maxwell del año 1865. Allí la condición (3) aparece escrita de la forma:

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d\bar{\Omega}}{dt}$$

donde, naturalmente *a, β,*y *γ*, son las componentes del potencial vector y $\bar{\Omega}$ es el potencial escalar. A partir de esa condición, deduce una ecuación para el potencial vector, la cual no es otra que la ecuación de ondas para el potencial vector. La interpretación física que Lorenz hace de este hecho está claramente expresada de la siguiente forma:

> Este resultado es una nueva demostración de la identidad de las vibraciones de la luz con las corrientes eléctricas; por esto es claro ahora,… que las leyes de la luz pueden ser deducidas a partir de aquellas de las corrientes eléctricas.

Comentarios finales

Estimamos que hemos podido ilustrar una primera fase de la evolución del concepto de gauge y su fuerte dependencia con la teoría electromagnética. Como fue comentado al comienzo de este artículo, durante el siglo pasado el mismo floreció en estructuras matemáticas sumamente sofisticadas, a tal punto que resulta difícil diferenciar los estilos de abordaje provenientes de la física matemática y de la matemática aplicada a la física. Tantos físicos como matemáticos han desarrollado robustos programas de investigación en torno al concepto y por ello resulta razonable explorar las raíces históricas del mismo. Si tomamos, por ejemplo una obra sobre el tratamiento del concepto de gauge en un marco puramente geométrico (confrontar, por ejemplo Freed-Uhlenbeck, 1984), se hace difícil seguir la evolución histórica del mismo dentro de la tradición matemática, lo cual, a nuestro juicio disminuye la cabal comprensión del alcance del mismo.

Notas

[1]Aquí usamos la palabra inglesa “Gauge” en lugar de sus traducciones castellanas “Calibre” o “Medida” por ser de uso común aun en la bibliografía escrita en español.

[2] En las expresiones matemáticas usaremos una flecha encima del símbolo para indicar el carácter vectorial de la magnitud. En el texto usaremos la letra en negrita para indicar ese carácter.

[3] No confundir Ludvig Lorenz con Hendrik Lorentz

Bibliografía

AMPERE, A.M., *Mémoire sur la Théorie Mathematique des Phenomenes Electro-dynamiques uniquement déduite de L´Éxperience*, Éditions J. Gabay, Paris. 1990.

BELOT, G. An elementary notion of gauge equivalence. *General Relativity and Gravitation*, **40**: 199-215. 2008.

CAHAN, D. H. von Helmholtz and foundations of nineteenth century science, capítulo escrito por W. Kaiser, pp. 375-402, University of California Press. 1993.

FREED, D. y UHLENBECK, K. Instantons and Four-Manifolds. Springer Verlag, New York. 1984.

HEALEY, R. *Gauging What´s Real. The Conceptual Foundations of Contemporary Gauge Theories*. Oxford Univ. Press. 2007.

HERTZ, H., *Untersuchungen Ueber die Ausbreitung der Elektrischen Kraft*, J.A. Barth, Leipzig. 1892.

HERTZ, H., *Annalen der Physik* **23**: 84. (1884).

JACKSON, J.D., *Classical Electrodynamics*, J. Wiley & Sons, New York. 1975.

JACKSON, J.D y OKUN, L.B. Historical roots of gauge invariance. *Review of Modern Physics*, **73**: 663-680, 2001.

LORENZ, L. Ueber die Identität der Schwingungen des Lichts mit den elektrischen Strömen, *Annalen der Physik Chemie*. **131**: 243-263. 1867.

MAXWELL, J.C. A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol I, Dover, New York. 1951.

MAXWELL, J.COn Faraday´s lines of force, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol X, Part I. 1955.

MILLS, R. Gauge fields. *Am.J.Phys.* **57**(6). 1981.

TAO, T. What is a gauge? Terrytao.wordpress.com/2008/09/27/What-is-a-gauge. 2008

WILCZECK, F. Gauge theories of swimming. *Physics World* **2**: 36-38. 1989.