Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Datos iniciales para agujeros negros extremos

Trabajo especial de Licenciatura en Física

Stauber López Daniela

Directora: Dra. Gabach Clement María Eugenia

Resumen

Este trabajo está enmarcado en el problema general de determinar cuáles datos semilla se mapean a datos iniciales físicos en variedades con finales asintóticamente cilíndricos y asintóticamente planos. Este tipo de datos iniciales describen agujeros negros con máximos valores de carga y momento angular por unidad de masa. El problema es de gran interés, no sólo teórico, sino también práctico, por su posterior evolución y estudio de colisiones de agujeros negros, emisión de ondas gravitacionales, etc.

El objetivo central de este trabajo es explorar la existencia de datos iniciales para las ecuaciones de Einstein que describan agujeros negros extremos sin el requisito a priori de que pertenezcan a la clase Yamabe positivo. Esto se traduce en considerar métricas semilla que tengan escalar de curvatura no positivo en alguna región de la variedad.

Para ello estudiamos la existencia de datos iniciales tipo trompeta en el caso CMC (Curvatura Media Constante) maximal, el caso CMC no maximal y finalmente, de mayor interés para nosotros, en el caso no CMC. El sistema de ecuaciones de vínculo en esta situación es complejo porque consiste de 4 ecuaciones acopladas no lineales con un comportamiento asintótico singular en uno de los finales de la variedad. Prestamos especial atención al efecto de un escalar de curvatura no positivo, sobre la existencia de soluciones.

Probamos existencia de sub y supersoluciones de las ecuaciones de vínculo bajo diferentes condiciones tanto para la métrica de background como para los demás elementos del dato inicial semilla.

Abstract

This work is framed in the general problem of determining which background data is mapped to physical initial data in manifolds with asymptotically cylindrical and asymptotically flat ends. This type of initial data describes black holes with maximum values of charge and angular momentum per unit mass. The problem is of great interest, not only theoretical, but also numerical, due to its subsequent evolution and study of black hole collisions, emission of gravitational waves, etc.

The main objective of this work is to explore the existence of initial data for the Einstein equations which describe extreme black holes without the requirement that they belong to the positive Yamabe class. Namely considering seed metrics that have a non-positive curvature scalar in some region of the manifold.

For this we study the existence of initial trumpet-like data in the maximal CMC case, the non-maximal CMC case and finally, of greater interest to us, in the non-CMC case. The system of constraint equations in this situation is complex because it consists of 4 non-linear coupled equations, with singular asymptotic behavior at one end of the manifold. We pay special attention to the effect of a non-positive scalar of curvature on the existence of solutions.

We prove the existence of sub and supersolutions of the constraint equations under different conditions both for the background metric and for the other elements of the initial seed data.

Palabras clave:
AGUJEROS NEGROS EXTREMOS
DATOS INICIALES PARA LAS ECUACIONES DE EINSTEIN
CLASIFICACION DE YAMABE

Agradecimientos

Porque el finalizar la carrera no hubiera sido posible sin el apoyo de un montón de personas, quiero agradecerles por acompañarme todos estos años.

En primer lugar a mi familia por su incondicional apoyo, paciencia y amor. En especial a Juanca, Marcela, Sofi y Marcos, quienes fueron y son mi gran sostén. Por toda la motivación, las herramientas y sobre todo paciencia que me han dado siempre. A mi compañero, Franco, por ser mi gran soporte y propulsor. A mis amigos más cercanos, que han estado en todo momento apoyándome y llenándome de alegría. En particular aquellos que me dio la facultad con los cuales compartí un montón de horas de estudio, risas y llantos. Y quienes me han ayudado a sobrellevar la carrera. A aquellas personas que he conocido en el entorno y que han aportado de una u otra forma para que llegue a este punto.

A los profes y científicos que me han inspirado en estos años. De los cuales he aprendido muchísimo y me han impulsado en el transcurso de los años. En particular a Eugenia, quien con una calidez enorme me enseñó y acompañó en esta etapa, quién alimentó mi entusiasmo por la relatividad y me brindó un montón de herramientas para comenzar mis estudios en el área.

Por último a la Universidad Nacional de Córdoba y en particular a la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación por la altísima calidad de formación que me han brindado. Por darme la posibilidad de lograr este titulo de grado y darme todas las herramientas para ello. Gracias a todas las personas que hay detrás de ello.

Índice

Capítulo 1

Introducción

Ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein

$$\bar{G} \equiv \overline{Ric} - \frac{1}{2}\bar{R}\bar{g} = 8\pi\bar{T} \tag{1.1}$$

son un sistema geométrico de ecuaciones para el par $(M, \bar{g})$ que describen cómo el espaciotiempo se curva frente a la presencia de materia y cómo la misma se comporta frente a la existencia de curvatura. Aquí M es una variedad de dimensión $n+1$ dotada de una métrica Lorentziana $\bar{g}$. $\overline{Ric}$ es el tensor de Ricci de la métrica $\bar{g}$, $\bar{R}$ es su escalar de curvatura y $\bar{T}$ es el tensor de energía-momento.

Una característica notable de (1.1) es que hay liberad de Gauge asociada con difeomorfismos en la variedad. Es decir si $\varphi : M \to M$ es un difeomorfismo, entonces $(M, \bar{g})$ y $(M, \varphi^*\bar{g})$ representan el mismo espaciotiempo. Debido a lo mencionado, el carácter parabólico, hiperbólico o elíptico de las ecuaciones (1.1) no está claro, [26], [31], [44], [30].

Si se escoge un sistema coordenado y se expresan las componentes de $\bar{Ric}$ en términos de $\bar{g}_{\mu\nu}$, se puede observar que $\bar{R}_{\mu\nu}$ depende de las derivadas de $\bar{g}_{\mu\nu}$ hasta segundo orden y es altamente no lineal en $\bar{g}_{\mu\nu}$. Por esto las ecuaciones de Einstein son equivalentes a un sistema acoplado de 10 ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden no lineal para las componentes de la métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$.

Se puede notar que la identidad de Bianchi

$$\bar{\nabla}_a \bar{G}^{ab} = 0 \tag{1.2}$$

implica que las ecuaciones

$$\bar{G}^{a0} = 8\pi T^{a0} \tag{1.3}$$

no aportan información sobre la dinámica de evolución . Esto muestra que 4 de las 10 ecuaciones de (1.1) darán relaciones entre $\bar{\partial}_t \bar{g}_{ab}$ y $\bar{g}_{ab}$ y que la verdadera evolución estará dada por las 6 ecuaciones que restan. En 1952 el trabajo de Yvonne Choquet-Bruhat "*Theoreme d'existence pour certains systemes d'equations aux derivees partielles non lineaires*"[29] generó un cambio drástico al respecto. En el mismo, al introducir coordenadas armónicas, se llevó las ecuaciones de Einstein a un sistema cuasilineal de carácter hiperbólico. Toda ecuación hiperbólica de evolución en física, necesita datos iniciales para ser resuelta. Por ejemplo, en mecánica Newtoniana una determinación completa de las soluciones de las ecuaciones de movimiento requiere especificación de la posición y de la velocidad de un móvil en un determinado instante de tiempo.

La formulación del problema de Cauchy en relatividad general involucra un desacople del espaciotiempo 4-dimensional en tres dimensiones espaciales y una temporal. El formalismo $3+1$ tiene la ventaja de proveer una interpretación geométrica del espaciotiempo como foliación, es decir sucesivas tajadas espaciales que llenan el espaciotiempo. Además el mismo identifica 4 funciones libremente especificables, directamente asociadas a la libertad de elección de las coordenadas. Este formalismo está dotado de 4 ecuaciones de vínculo y 12 ecuaciones de evolución. Las primeras, de carácter elíptico, no contienen derivadas temporales, sino que brindan relaciones entre los campos espaciales y sus fuentes. Y las segundas son ecuaciones de primer orden para las variables de los campos espaciales.

Ecuaciones de vínculo

El problema de valores iniciales para Relatividad General comienza con la selección de una hipersuperficie espacial Σ, la cual representa un “instante de tiempo". Para tener una representación significativa de la misma, se necesita tener caracterizados los desplazamientos dentro de ella y las derivadas de la métrica en dirección normal a la hipersuperficie. Para lo primero se utiliza la métrica inducida y para lo segundo, la curvatura extrínseca. Entonces se define un conjunto de datos iniciales para las ecuaciones de Einstein como un triplete (Σ, h_{ab}, K_{ab}) que consiste en una variedad Σ, una métrica Riemanniana h_{ab} y un 2-tensor covariante simétrico K_{ab}. Estos datos no pueden ser dados libremente, sino que deben satisfacer las ecuaciones (1.3), que se pueden escribir como

$$R_h + \tau^2 - K_{ab}K^{ab} = 16\pi\rho \tag{1.4}$$

$$D_b K_a^b - D_a\tau = 8\pi J_a \tag{1.5}$$

y se conocen como *Ecuaciones de vínculo*. Aquí τ es la curvatura media es decir, la traza de la curvatura extrínseca, D es la 3-derivada covariante compatible con h, R_h es el escalar de curvatura con respecto a h, $\rho = T_{ab}n^a n^b$ es la densidad de materia y $J_c = T_{ab}h^a_c n^b$ es la densidad de momento, medidas por un observador cuya trayectoria tiene como vector tangente n^a que coincide con la normal a la hipersuperficie Σ. Las mismas permiten que la hipersuperficie Σ con dato (h, K) sea propiamente embebida en una variedad $(M, \bar{g})$. La derivación de las ecuaciones de vínculo se encuentra en el apéndice A.

Las ecuaciones de vínculo constituyen un sistema indeterminado, ya que son 4 ecuaciones para 12 componentes de la 3-métrica y la curvatura extrínseca. Es decir, las ecuaciones sólo nos permiten determinar 4 de estas componentes, dejando 8 indeterminadas. Pero esta indeterminación no es física. 4 de ellas están asociadas a elecciones de coordenadas y las que restan representan grados de libertad dinámicos [7]. Esta indeterminación será de gran utilidad a la hora de resolver las ecuaciones, como veremos más adelante.

Agujeros negros extremos

Los agujeros negros son soluciones de las ecuaciones de Einstein caracterizados por la presencia de una región desde la cual nada puede escapar. El borde de esta región se conoce como horizonte de eventos. Los agujeros negros, como muchos sistemas físicos, están descriptos por varios parámetros como su masa total M, su momento angular J, su carga eléctrica Q, cuanto más complejo sea el agujero negro, más parámetros necesitamos para describirlo. En esta gran familia de agujeros negros, hay un subconjunto que posee características especiales e interesantes: los *Agujeros negros extremos*, que serán el objeto de estudio en este trabajo. Informalmente, los extremos son aquellas soluciones que poseen la máxima carga y momento angular por unidad de masa, dentro de la familia. Es decir, son los que rotan más rápido, o los que poseen la carga máxima permitida. Valores mayores de J y Q rompen la noción de horizonte y la solución deja de describir un agujero negro y pasa a describir una singularidad desnuda.

Evidencia observacional

En abril del 2019 el Event Horizon Telescope publicó la primera imagen de un agujero negro cercano a nuestra galaxia, el M87 [19], mostrando así que estos objetos efectivamente existen en la naturaleza. En particular, y relacionado con el presente trabajo, se encontró que el M87 es un agujero negro rotante con gran velocidad angular.

Otra evidencia de la existencia de agujeros negros con grandes valores de J por unidad de masa es el caso del sistema binario GRS 1915+105 compuesto por una estrella y un agujero negro de Kerr altamente rotante. Se ha encontrado una cota inferior para el momento angular $J/M^2 \geq 0{,}98$ [43], muy próxima al valor teórico máximo $J/M^2 = 1$.

Relevancia teórica

Como usualmente sucede en teorías físicas, las soluciones que surgen como límites asintóticos son más simples que otras soluciones y proveen información útil acerca de la teoría. En el conjunto de soluciones de las ecuaciones de Einstein, los agujeros negros extremos representan una especie de barrera que divide a los agujeros negros de las singularidades desnudas. Por esto, pueden dar luz sobre la conjetura del censor cósmico y sus hipótesis. Esta conjetura establece que las singularidades del espaciotiempo provienen de colapsos gravitatorios y están *cubiertas* por un horizonte de eventos, prohibiendo que para un observador situado en el infinito las mismas sean visibles [15]. Claramente las singularidades desnudas son soluciones indeseables ya que rompen la predictibilidad de la teoría.

Además hay un gran interés en agujeros negros extremos ya que juegan un rol importante en la determinación de velocidades de retroceso en choques de agujeros negros. Simulaciones sobre colapso de agujeros negros altamente rotantes han llegado a dar velocidades de retroceso del orden de los miles de kilómetros por segundo [22], [9], [10].

Geometría *trompeta*

El problema de datos iniciales de agujeros negros extremos es interesante como problema matemático, ya que en el limite extremo la geometría del espaciotiempo cambia respecto a un agujero negro no extremo. Básicamente lo que sucede es que la geometría pasa de tener dos finales asintóticamente planos (que representan la región infinitamente lejos del agujero, y el horizonte mismo) a tener un final asintóticamente plano (que representan la región infinitamente lejos del agujero) y un final asintóticamente cilíndrico (que representa el horizonte). El final cilíndrico impone condiciones asintóticas nuevas y diferentes sobre el dato.

Se han construido soluciones numéricas no estacionarias con finales cilíndricos en [24], [41], [32] y hay evidencia de que las geometrías cilíndricas son más fáciles de evolucionar que las que poseen múltiples finales asintóticamente planos. Datos iniciales con finales de este tipo son los llamados "trumpet data". Los mismos resultan buenos para simulaciones numéricas de colisiones de agujeros negros. Estos datos son preferidos dadas las condiciones de gauge que se utilizan en el método de "puncture"móvil en sistemas binarios. [33], [4], [8]. Por estas razones es de interés numérico acceder a datos con las características de agueros negros extremos.

Método conforme

Una de las maneras más usuales de tratar las ecuaciones de vínculo es a través del Método Conforme. Este método explota la libertad debida a la indeterminación en las ecuaciones de vínculo y propone un reescaleo y redefinición del dato inicial físico (h_{ij}, K_{ij}) en términos de *datos semilla* $(\tilde{g}_{ij}, \sigma_{ij})$ conocidos. Se tiene

$$h_{ij} = \phi^l \tilde{g}_{ij}, \qquad K_{ij} = \phi^{-l(n+2)/2}(\sigma + LW)_{ij} \tag{1.6}$$

donde $l = \frac{4}{n-2}$ (ver el Apéndice B). Esto se conoce en la literatura como descomposición conforme transversal-libre de traza (CTT) [7], [20], [6]. Este tratamiento nos permite transformar las ecuaciones de vínculo en el sistema de ecuaciones LCBY (1.7) y (1.8), en honor a Lichnerowicz, Choquet-Bruhaty York.

$$\Delta_{\tilde{g}}\phi - \frac{1}{8}\phi\tilde{R} - \frac{1}{12}\tau^2\phi^5 + \frac{1}{8}(\sigma^{ij} + (LW)^{ij})(\sigma_{ij} + (LW)_{ij})\phi^{-7} = -2\pi\tilde{\rho}\phi^{-3} \tag{1.7}$$

$$\tilde{D}_i(LW)^{ij} - \frac{2}{3}\phi^6\tilde{D}^j\tau = 0 \tag{1.8}$$

donde utilizado la suposición de que no hay corrientes iniciales ($T^{0i} = 0$) y que la densidad de energía inicial es $\tilde{\rho}$. Remarcamos que $(\tilde{g}_{ij}, \sigma_{ij}, \tau, \tilde{\rho})$ son datos y se busca solución (ϕ, W^i) de estas ecuaciones. En teoría, una vez que uno conoce las soluciones, las reemplaza en (1.6) y obtiene el dato inicial (h_{ij}, K_{ij})

En este trabajo nos concentramos en el sistema LCBY (1.7)-(1.8) y estudiamos condiciones sobre los datos semilla que garanticen existencia de soluciones (ϕ, W^i) para un dato inicial que describa un agujero negro extremo. Para ello buscamos datos con dos finales, uno asintóticamente plano y uno asintóticamente cilíndrico.

Clase Yamabe positivo

Una clase particular de datos semilla son los conocidos como *Yamabe positivo*. Estos datos son aquellos tales que

$$Y(\Sigma, \tilde{g}) := \inf_u \frac{\int_\Sigma (c(n)|\tilde{D}u|^2 + \tilde{R}u^2)}{\int_\Sigma u^{\frac{2n}{n-2}}} > 0 \tag{1.9}$$

para todo $u \in C_0^\infty(\Sigma)$, es decir, funciones suaves de soporte compacto, con $c(n) = \frac{4(n-1)}{n-2}$. Y es un invariante conforme, es decir que toma el mismo valor para todas las métricas relacionadas entre sí mediante una transformación conforme. Más detalles se dan en la sección 2.1.1.

Uno de los últimos resultados en este tema [40] establece que si el dato semilla es Yamabe positivo, entonces existe solución de las ecuaciones de vínculo (ver también ([39], [18], [16], [17]). Relajar esta condición de positividad de Yamabe tiene que ver con los objetivos del presente trabajo.

Objetivos

Los estudios realizados en este trabajo están enmarcados en un objetivo general que consiste en clasificar variedades y datos semilla en función de si aseguran la existencia o no de soluciones para las ecuaciones de vínculo. Esto tiene un gran interés, no sólo teórico, sino también práctico, ya que es crucial conocer cuáles datos semillas son buenos candidatos para obtener datos iniciales apropiados. Los cuales luego son evolucionados numéricamente y utilizados para estudiar, por ejemplo, colisiones de agujeros negros, emisión de ondas gravitacionales, etc.

Como mencionamos antes, el caso de datos Yamabe positivo (CMC y no CMC) se ha resuelto recientemente. El objetivo central de este trabajo es explorar la existencia de soluciones del sistema LCBY sin requerir *a priori* que el dato semilla sea Yamabe positivo. Esto se traduce en considerar métricas semilla que tengan escalar de curvatura no positivo en alguna región de la variedad. Remarcamos, sin embargo, que el hecho de que el escalar de curvatura sea negativo en alguna región acotada no implica que el dato no sea Yamabe positivo.

Para alcanzar este objetivo, estudiamos la existencia de datos iniciales tipo trompeta en varias situaciones intermedias:

- Caso CMC maximal. Donde analizamos la ecuación de Lichnerowicz, los comportamientos de los distintos término involucrados y nos familiarizamos con el método de sub y supersoluciones.

- Caso CMC no maximal. Donde indagamos en las implicaciones del nuevo término, relacionado con $\tau \neq 0$, en el comportamiento de la ecuación de Lichnerowicz para variedades trompeta.

- Caso no CMC con ecuaciones desacopladas. Donde examinamos las complicaciones de pedir que $\tilde{R}$ sea negativo y como el término correspondiente $\tau = \tau(\vec{r})$ afectaba a esta suposición.

para llegar finalmente al caso de mayor interés, el sistema acoplado no CMC. Prestamos especial interés en el efecto de un escalar de curvatura no positivo, sobre la existencia de soluciones.

Estructura del trabajo

Este trabajo final está estructurado de la siguiente manera.

Comenzamos en el capítulo 2 introduciendo nociones matemáticas que son necesarias para el tratamiento de las ecuaciones de vínculo. Entre las mismas se encuentran conceptos como la clasificación de Yamabe (sección 2.1.1) y su relevancia en la determinación de existencia o no de soluciones; distintos espacios funcionales utilizados (sección 2.1.2) junto con su análisis; y el método de sub y super soluciones (sección 2.1.3). En este capítulo también discutimos algunos de los antecedentes más relevantes (sección 2.2) sobre el problema de datos iniciales. En particular en lo que se refiere a datos trompetas.

En capítulo 3 comenzamos el tratamiento del sistema LCBY para el caso en el que la curvatura media τ es constante. Aquí diferenciamos dos casos. Cuando el dato es maximal, es decir la curvatura media es nula $\tau = 0$, en la sección 3.1. Y cuando el dato no es maximal, es decir $\tau = const \neq 0$, en sección 3.2. En la sección 3.1, utilizando el hecho de que las ecuaciones del sistema LCBY se desacoplan, estudiamos existencia de soluciones de la ecuación de Lichnerowicz (via método de sub y supersoluciones) que describan un dato trompeta. En la sección 3.2 analizamos qué es lo que ocurre con el sistema LCBY para datos trompeta no maximales.

En el capítulo 4 al asumir que la curvatura media no es una constante sino que tiene dependencia con un punto de la hipersuperficie Σ, el sistema LCBY está altamente acoplado. Se presentan dos formas de estudio de las ecuaciones utilizando ideas de los trabajos de Chrusciel [16] [17], en la sección 4.1, y Leach [39] [40] en la sección 4.2. En la primer sección, 4.1, trabajamos buscando sub y supersoluciones de la ecuación de Lichnerowicz solicitando ciertos comportamientos para la parte de acople que contiene la solución vectorial a la ecuación de momento. En la siguiente sección buscamos sub y supersoluciones del sistema LCBY completo, utilizando un control sobre la parte vectorial.

Finalmente en el capítulo 5 analizamos las dificultades encontradas al tratar de relajar suposiciones utilizadas en la literatura para demostrar existencia de datos trompeta. Discutimos los resultados encontrados y sus implicaciones. Por último comentamos desafíos que quedan pendientes para determinar la existencia o no existencia de datos para agujeros negros extremos.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Preliminares y definiciones matemáticas

2.1.1. Clasificación de Yamabe

En el corazón del método conforme está el problema de Yamabe [45]. Desde un punto de vista geométrico, el mismo consiste en, dada una variedad Riemanniana cerrada (Σ, h) de dimensión $n \geq 3$, encontrar una métrica conforme a h tal que su escalar de curvatura sea constante.

Si $\tilde{g}_{ij} = \phi^{p-2} h_{ij}$ con ϕ una función definida positiva y $p = \frac{2n}{n-2}$, los escalares de curvatura de $\tilde{g}$ y h están relacionados por

$$\tilde{R} = \phi^{1-p} \left(\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_h \phi + R\phi \right) \tag{2.1}$$

Entonces $\tilde{g}$ tiene escalar de curvatura constante, $\tilde{R} = \lambda$ si y solo si ϕ satisface la ecuación de Yamabe

$$\left(\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_h + R \right) \phi = \lambda \phi^{p-1} \tag{2.2}$$

Este es un problema no lineal de autovalores y las propiedades del mismo dependen del exponente $p - 1$.

Yamabe observó que

$$Y(\Sigma, \tilde{g}) := \inf_{\phi} \frac{\int_\Sigma (c(n)|\tilde{D}\phi|^2 + \tilde{R}\phi^2)}{\int_\Sigma \phi^{\frac{2n}{n-2}}} \tag{2.3}$$

es un invariante de la clase conforme (Σ, h), denominada invariante Yamabe y permite hacer una clasificación de las métricas de acuerdo al valor de este invariante.

En variedades cerradas, el conjunto de métricas se puede particionar en Yamabe positivo $(Y > 0)$, métricas conformes a una métrica con escalar de curvatura 1, Yamabe cero $(Y = 0)$, métricas conformes a una métrica con escalar de curvatura 0 y Yamabe negativo $(Y < 0)$, métricas conformes a una métrica con escalar de curvatura -1. Esto permite, fácilmente determinar si existe solución o no de la ecuación de Lichnerowicz [36].

La utilidad de la clasificación de Yamabe es más impresionante en el caso de variedades asintóticamente planas. Para el caso de variedades asintóticamente planas (sólo finales asintóticamente planos), el conjunto de métricas se puede particionar en Yamabe positivo ($Y > 0$), métricas conformes a una métrica con escalar de curvatura 0 y no Yamabe positivo, métricas no conformes a una métrica con escalar de curvatura 0. El trabajo de Cantor muestra que un conjunto de datos semilla asintóticamente planos se mapea a una solución de las ecuaciones de vínculo si y sólo si la métrica semilla es Yamabe positivo [36].

En el caso de variedades con finales asintóticamente planos y cilíndricos (como el objeto del presente trabajo), también se particiona el conjunto de métricas en Yamabe positivo y no positivo. Si una métrica es Yamabe positivo ($Y > 0$), entonces está conformemente relacionada a una métrica con escalar de curvatura positivo. Si no es Yamabe positivo, no existe esa transformación conforme. En este tipo de variedades aún no existe un resultado del tipo de Cantor. Sin embargo, como veremos más adelante, se sabe que si un dato semilla es Yamabe positivo, entonces se puede mapear a una solución de las ecuaciones de vínculo. Es nuestro objetivo explorar el caso no Yamabe positivo.

Para entender el contexto donde las métricas no Yamabe positivo son relevantes, recordemos que la ecuación de vínculo Hamiltoniana es

$$R_h + \tau^2 - K_{ab}K^{ab} = 16\pi\rho \tag{2.4}$$

Vemos que cuando $\tau = 0$, entonces $R_h \geq 0$. Esto indica que la variedad es Yamabe positivo. Como el invariante de Yamabe es invariante conforme, esto significa que al resolver la ecuación de Lichnerowicz con $\tau = 0$, tanto el dato semilla como el físico son Yamabe positivo y por lo tanto, existe solución de la ecuación de Lichnerowicz. La única manera de considerar datos no Yamabe positivo es salir del caso maximal.

2.1.2. Espacios Funcionales

Tenemos como objetivo encontrar un tipo particular de soluciones al sistema LCBY liberando algunas restricciones impuestas en la literatura a los datos semilla. Este tipo de dato, trompeta, ha sido introducido brevemente en el capítulo 1, y nos interesan condiciones de existencia dentro de ciertos espacios funcionales apropiados. A continuación presentamos los espacios funcionales utilizados en trabajos previos para tratar con datos de esta índole. También hacemos un análisis para conocer los que mejor se adapten al propósito de este trabajo.

2.1.2.1. Espacios Pesados de Bartnik

En el artículo de Bartnik [5], se definen los espacios pesados de Lebesgue L^p_δ y L'^p_δ de la siguiente manera. Dados $r = |\vec{r}|$, $\sigma = \sqrt{1+r^2}$, $\delta \in \mathbb{R}$ el peso y $1 \leq p < \infty$. El primero está definido como el conjunto de funciones u medibles en $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $L'^p_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tales que la norma presentada a continuación, existe y está acotada.

$$L^p_\delta : \|u\|_{p,\delta} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \sigma^{-\delta p - n} dV \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.5}$$

Notemos que este espacio tiene un solo peso en infinito por lo que es apropiado para describir datos asintóticamente planos (sin finales cilíndricos).

El segundo espacio está definido a través de la norma

$$L'^p_\delta : \|u\|'_{p,\delta} = \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |u|^p r^{-\delta p - n} dV \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.6}$$

Notamos que este paso asigna el mismo peso al infinito y al origen, lo que los hace interesantes para estudiar datos con más de un final asintótico.

A partir de los espacios de Lebesgue, se definen los espacios de Sobolev pesados de manera usual

$$W^{k,p}_\delta : \|u\|_{k,p,\delta} = \sum_{j=0}^{k} \|D^j u\|_{p,\delta-j} \tag{2.7}$$

$$W'^{k,p}_\delta : \|u\|'_{k,p,\delta} = \sum_{j=0}^{k} \|D^j u\|'_{p,\delta-j} \tag{2.8}$$

$W^{k,p}_\delta$ es el conjunto de funciones u tales que la norma (2.7) existe y está acotada. De la misma forma para $W'^{k,p}_\delta$ con la norma (2.8).

El hecho de que $u \in W'^{k,p}_\delta$ implica que (ver [5], [25])

$$|u| = o(r^\delta), \qquad r \to 0, \quad r \to \infty \tag{2.9}$$

Esto se puede ver de la siguiente manera. Sea u una función definida en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que $u \in L'^p_\delta$. Suponemos que decae como $u = \mathcal{O}(r^m)$ en infinito y diverge como $u = \mathcal{O}(r^s)$ en el origen. Como pertenece al espacio L'^p_δ, se tiene que $\|u\|'_{p,\delta} < \infty$, es decir

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} |u|^p r^{-\delta p - n} r^{n-1} dr < \infty \tag{2.10}$$

Estudiando el comportamiento asintótico necesario para que la norma sea finita, se encuentra $m < \delta$, $s > \delta$ es decir que la función u decae más rápido que r^δ en infinito y diverge más lento que r^δ en el origen.

2.1.2.2. Espacios Pesados de Leach

En los trabajos realizados por Leach [39] [40] se presenta interés en los mismos comportamientos para el dato inicial que en nuestro trabajo. Un final asintóticamente cilíndrico y un final asintóticamente euclídeo . Dados $r = |\vec{r}|$, $x = -\ln(r)$, μ, $\nu \in \mathbb{R}$ los pesos y $1 \leq p < \infty$, se define el espacio de Lebesgue pesado $L^p_{\mu,\nu}$ como el conjunto de funciones u tales que la norma

$$\|u\|_{p,\mu,\nu} := \left(\int_\Sigma e^{-p\mu x} r^{-p\nu - n} |u|^p dV \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.11}$$

exista y esté acotada. Y de la misma forma para el espacio de Sobolev pesado $W^{k,p}_{\mu,\nu}$, con la norma

$$\|u\|_{k,p,\mu,\nu} := \sum_{\alpha \leq k} \|r^{|\alpha|} D^\alpha u\|_{p,\mu,\nu} \tag{2.12}$$

Observamos que estos espacios también son interesantes para estudiar datos con más de un final asintótico, porque tienen pesos en el $r \to \infty$ y en $x \to \infty$. Además, por el hecho de que los pesos en cada final sean independientes, estos espacios son más flexibles en cuanto al tipo de finales que se pueden considerar.

También se define la norma local de Hölder, denotada por $||.||_{k,\alpha;B_1(q)}$ como

$$||u||_{k,\alpha;B_1(q)} = \sum_{j=0}^{k} \sup\ _{B_1(q)}|D^j u| + \sup\ _{p_1,p_2\in B_1(q)} \frac{|D^k u(p_1) - D^k u(p_2)|}{\mathrm{dist}(p_1 - p_2)^\alpha} \tag{2.13}$$

donde $q \in \Sigma$ y $B_1(q)$ es la bola alrededor de q de radio 1. De forma similar la norma $C^{k,\alpha}$ global, dada por

$$||u||_{k,\alpha} = \sup\ _{q\in\Sigma}||u||_{k,\alpha;B_1(q)} \tag{2.14}$$

Y el espacio de Hölder pesado que utiliza Leach $C^{k,\alpha}_{\mu,\nu}$ está dado por el espacio de funciones u tales que la norma

$$||e^{-\mu x} u r^{-\nu}||_{k,\alpha} \tag{2.15}$$

existe y está acotada.

Haciendo un análisis detallado del comportamiento en los finales asintóticos se puede ver que si $f \in W^{k,p}_{\mu,\nu}$, entonces f es k veces débilmente diferenciable y

$$f = o(r^\nu) \qquad \text{cuando} \quad r \to \infty \tag{2.16}$$

y

$$f = o(e^{\mu x}) \qquad \text{cuando} \quad x \to \infty \tag{2.17}$$

Leach [40] trata con datos trompeta, por lo que busca un mejor control de los comportamientos en los finales. Eso lo garantiza el hecho que los pesos sean distintos en las regiones de interés.

2.1.2.3. Métricas trompeta y espacios funcionales

Estamos interesados en datos iniciales que describan agujeros negros extremos, es decir, datos que presenten una geometría tipo trompeta. Dado el reescaleo propuesto por el método conforme en 3 dimensiones ($n = 3$)

$$h = \phi^4 \tilde{g} \tag{2.18}$$

donde h es la métrica física, los comportamientos asintóticos solicitados a la misma pueden ser requerimientos para el factor conforme o para la métrica semilla $\tilde{g}$. Comenzamos el análisis de esta sección estudiando los comportamientos de ϕ tal que sea lo que dé el carácter de dato trompeta a h y luego se estudiará el caso en el que $\tilde{g}$ imponga estas características.

2.1.2.4. Datos trompeta en espacios de Bartnik

Estudiamos las particularidades de factores conformes que describan datos iniciales de agujeros negros como Kerr, Reissner Nordström y Bowen-York (ver por ejemplo, el dato de Reissner Nordström en la sección 3.1.1), tendiendo a su limite extremo. Suponiendo que el final asintóticamente plano corresponde a $r \to \infty$ y que el final asintóticamente cilíndrico corresponde a $r \to 0$, y que $\tilde{g}$ es suave y acotada, entonces el carácter “trompeta"del dato se manifiesta a través del siguiente comportamiento asintótico del factor conforme ϕ

$$\phi \to \frac{1}{\sqrt{r}} \qquad \text{cuando} \qquad r \to 0 \tag{2.19}$$

$$\phi \to 1 + \frac{m}{r} \qquad \text{cuando} \qquad r \to \infty \tag{2.20}$$

Denotando $\phi - 1 = \Phi$ con $\Phi = \mathcal{O}(r^{-\frac{1}{2}})$ al $r \to 0$ y $\Phi = \mathcal{O}(r^{-1})$ al $r \to \infty$, observamos que h es del tipo trompeta, es decir posee un final asintóticamente cilíndrico y un final asintóticamente plano si $\Phi \in L'^{p}_{\delta}$ con $-1 > \delta > -\frac{1}{2}$.

Sin embargo, este espacio funcional también incluye funciones que decaen más lento que $r^{-\frac{1}{2}}$ en el origen. De esta forma el encontrar una solución dentro de este espacio funcional, no garantiza que el dato inicial descripto sea del tipo trompeta.

2.1.2.5. Datos trompeta en espacios de Leach

Lo que el autor propone, en [39] y [40] para asegurar que una métrica es trompeta es *normalizar* la métrica de interés con una métrica límite apropiada en los finales. Veamos esto en más detalle.

Sea Σ una n-variedad que posee un subconjunto compacto $\mathcal{K}$ con borde suave tal

$$\Sigma \setminus \mathcal{K} = E_e \sqcup E_c \tag{2.21}$$

con E_e difeomorfico a $\mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ y E_c difeomorfico a $\mathbb{R}^+ \times \Theta$. Donde Θ es una variedad $n-1$-dimensional cerrada. Sea $g_{S^{n-1}}$ la métrica sobre S^{n-1} y g_Θ sobre la variedad cerrada Θ. Suponemos que g_0 es una métrica sobre Σ, la cuál es Euclídea en E_e y conformemente cilíndrica sobre E_c. Es decir que existen funciones coordenadas r y x tal que

$$g_0|_{E_e} = dr^2 + r^2 g_{S^{n-1}} \tag{2.22}$$

$$g_0|_{E_c} = \psi_o^{\kappa-2}(dx^2 + g_\Theta) \tag{2.23}$$

con $\kappa = 4$, $x = -\ln(r)$ y ψ_o una función dependiente de las coordenadas.

Decimos que la métrica semilla $\tilde{g}$ es de clase trompeta $C^{k,\alpha}_{\mu,\nu}$ si

$$\tilde{g} - g_0 \in C^{k,\alpha}_{\mu,\nu} \tag{2.24}$$

Además decimos que el dato semilla $(\tilde{g}, \tau, \sigma)$ es del tipo trompeta si $\tilde{g}$ pertenece a la clase trompeta $C^{3,\alpha}_{-1,-\gamma}$ con $0 < \gamma < 2(n-2)$. Si se buscan soluciones de la ecuación de Lichnerowicz pertenecientes al espacio $C^{2,\alpha}$, como $\tilde{g}$ es de tipo trompeta h lo será también.

Compatibilidad entre ambas nociones de métrica trompeta

Veamos ahora la relación y compatibilidad entre las nociones de dato trompeta dadas por los dos tipos de espacios funcionales.

Por simplicidad, para el siguiente análisis, pensamos en una métrica conformemente plana y con $n = 3$, es decir que en coordenadas isotrópicas tenemos

$$h = \phi^4(dr^2 + r^2 d\Omega^2) \tag{2.25}$$

Si el factor conforme es tal que, en el limite extremo, $\phi \sim 1$ en E_e y $\phi \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$ en E_c, veamos como se comporta h en los finales.

$$h \to 1(dr^2 + r^2 d\Omega^2) = g_0|_{E_e} \tag{2.26}$$

$$h \to \phi^4(dr^2 + r^2 d\Omega^2) = r^2\phi^4(\frac{dr^2}{r^2} + d\Omega^2) = \psi_o^2(dx^2 + d\Omega^2) = g_0|_{E_c} \tag{2.27}$$

Teniendo ya las características de h y g_0 por separado, analicemos el comportamiento de $h - g_0$.

En el final asintóticamente plano ($r \to \infty$) se tiene que

$$\phi = 1 + \frac{m}{r} f(\theta, \varphi) + \mathcal{O}(\frac{1}{r^2}) \tag{2.28}$$

entonces $\phi - 1 = \mathcal{O}(r^{-1})$.

$$\begin{aligned} h &= \phi^4(dr^2 + r^2 d\Omega^2) = (1 + \frac{1}{m} f(\theta, \varphi) + ...)^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) && (2.29) \\ &= (1 + \frac{2m}{r} f(\theta, \varphi) + \frac{2m^2}{r^2} f^2(\theta, \varphi) + ...)(dr^2 + r^2 d\Omega^2) && (2.30) \end{aligned}$$

$$h = (dr^2 + r^2 d\Omega^2) + \frac{2m}{r} f(\theta, \varphi)(dr^2 + r^2 d\Omega^2) + \frac{2m^2}{r^2} f^2(\theta, \varphi)(dr^2 + r^2 d\Omega^2) + ... \tag{2.31}$$

$$h - g_0|_{E_e} = \frac{cte}{r} f(\theta, \varphi) + ... \tag{2.32}$$

En el final asintóticamente cilíndrico

$$\phi = \frac{\alpha(\theta, \varphi)}{\sqrt{r}} + o(\frac{1}{\sqrt{r}}) = \frac{\alpha(\theta, \varphi)}{r^{-\frac{1}{2}}} + \frac{\beta(\theta, \varphi)}{r^{-(\frac{1}{2} - \epsilon)}} + ... \tag{2.33}$$

para $\epsilon > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} h &= r^2\phi^4(dx^2 + d\Omega^2) = (\sqrt{r}\phi)^4(dx^2 + d\Omega^2) && (2.34) \\ &= (\alpha(\theta, \varphi) + \frac{\beta(\theta, \varphi)}{r^{-\epsilon}})^4 (dx^2 + d\Omega^2) && (2.35) \\ &= \alpha(\theta, \varphi)(dx^2 + d\Omega^2) + \beta(\theta, \varphi) r^{\epsilon}(dx^2 + d\Omega^2) + ... && (2.36) \\ &= \psi_o^2(dx^2 + d\Omega^2) + \beta(\theta, \varphi) e^{-\epsilon x}(dx^2 + d\Omega^2) + ... && (2.37) \end{aligned}$$

$$h - g_0|_{E_c} = O(e^{-\epsilon x}) \tag{2.38}$$

con $x \to \infty$ cuando $r \to 0$ y recordando el cambio de coordenadas $x = -\ln(r)$.

Siguiendo las definiciones del trabajo de Leach [40], una métrica es del tipo trompeta si $h - g_0 \in W^{k,p}_{\mu,\nu}$ con $\mu < 0$ y $0 > \nu > -n+2$. Veamos los comportamientos que las funciones pertenecientes a ese espacio tienen. Sea u una función perteneciente al mismo, tal que $u = \mathcal{O}(r^m)$ al $r \to \infty$ y $u = \mathcal{O}(e^{-sx})$ cuando $x \to \infty$. Gracias al análisis previo se ve que se debe cumplir $-s < \mu < 0$ y, $0 > \nu > m \geq 2-n$ ó $0 > \nu > 2-n \geq m$. Es decir que este espacio de Sobolev mencionado incluye funciones que decaen más rápido que r^ν y cuyo orden de decaimiento dominante puede estar entre $\nu > m \geq 2-n$ ó $2-n \geq m$ cuando $r \to \infty$. Y que decae más rápido que $r^{-\mu}$ cuando $r \to 0$.

Arriba se encontró que $h-g_0$, tal que $h-g_0 = O(r^{-1})$ cuando $r \to \infty$ y $h-g_0 = O(e^{-x\epsilon})$ al $x \to \infty$, pertenece al espacio de Sobolev pesado $W^{k,p}_{\mu,\nu}$ con $\mu < 0$ y $0 > \nu > 2-n$, con $n = 3$. Debido a que en infinito este espacio necesita que $\nu > -1$ y como por definición $0 > \nu > 2-n = -1$ cumple la condición . Como $\epsilon > 0$, mientras $|\mu| > |\epsilon|$, $h-g_0 \in W^{k,p}_{\mu,\nu}$. Es decir h es una métrica "Trumpet"si los comportamientos los obtiene del factor conforme corresponden a (2.28) en infinito y a (2.33) en el origen.

2.1.3. Método de super y subsoluciones

Utilizamos la siguiente notación

$$H^k_0 = W^{k,2}_0(U) \tag{2.39}$$

Donde H denota los espacios de Hilbert, $W^{k,2}_0$ los espacios de Sobolev no pesados y $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto.

Sea (Σ, h) una variedad Riemanniana de dimensión n y F una función localmente Lipschitz. Se tiene el siguiente problema

$$\Delta_{\tilde{g}}\phi = F(\vec{r}, \phi) \tag{2.40}$$

Sea $v \in H^1_0$, se introducirán las soluciones débiles del problema (2.40). $u \in H^1_0$ es una solución débil del problema (2.40) si

$$\int_\Sigma Du.Dv\ dV = \int_\Sigma F(x,u)\ dV \tag{2.41}$$

para cada $v \in H^1_0$. $\underline{u} \in H^1$ es una subsolución débil de (2.40) si

$$\int_\Sigma D\underline{u}.Dv\ dV \leq \int_\Sigma F(x,\underline{u})\ dV \tag{2.42}$$

para cada $v \in H^1_0$. Y por último, $\bar{u} \in H^1$ es una supersolución débil de (2.40) si

$$\int_\Sigma D\bar{u}.Dv\ dV \geq \int_\Sigma F(x,\bar{u})\ dV \tag{2.43}$$

para cada $v \in H^1_0$.

Dadas las definiciones anteriores se tiene el teorema de existencia de una solución débil de (2.40) entre sub y super soluciones débiles del problema.

Teorema 1 (Sub y Supersoluciones débiles). [28] Asumimos que existe supersolución débil $\bar{u}$ y subsolución débil $\underline{u}$ del problema (2.40) en U, con condiciones de borde $u = 0$ sobre ∂U. Las mismas satisfacen $\underline{u} \leq 0, \bar{u} \geq 0$ sobre ∂U, $\underline{u} \leq \bar{u}$ en U. Entonces existe solución débil u de (2.40) tal que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ en U

De la misma forma se puede trabajar con soluciones que no sean débiles. Se define una supersolución $\bar{\phi}$ de (2.40) si se tiene

$$\Delta_{\tilde{g}}\bar{\phi} \leq F(\vec{r}, \bar{\phi}) \tag{2.44}$$

y de la misma forma una subsolución $\underline{\phi}$ del problema mencionado como

$$\Delta_{\tilde{g}}\underline{\phi} \geq F(\vec{r}, \underline{\phi}) \tag{2.45}$$

Pudiendo de esta forma determinar la existencia de una solución a un problema como (2.40) con el mismo método.

Teorema 2 (Sub y Supersoluciones). [40] Sea (Σ, h) una variedad Riemanniana y F una función localmente Lipschitz. Sean $\underline{\phi} \leq \bar{\phi}$ funciones continuas tales que se satisface (2.45) para $\underline{\phi}$ y (2.44) para $\bar{\phi}$. Entonces existe una solución ϕ sobre Σ tal que se cumple

$$\Delta_{\tilde{g}}\phi = F(\vec{r}, \phi) \tag{2.46}$$

y se tiene $\underline{\phi} \leq \phi \leq \bar{\phi}$

Al mirar la ecuación de Lichnerowicz de una forma semejante a (2.40), este método nos permite al encontrar super y subsoluciones, garantizar la existencia de una solución. Claro está que la elección arbitraria de super y subsoluciones al problema, pueden no aportar información suficiente de la solución. Si se garantiza que estas super y subsoluciones pertenecen a un espacio funcional que contenga funciones con conductas como las deseadas, se asegurará que la solución encontrada tiene las características buscadas. A esta afirmación se llegó en base a la demostración del Teorema 2, la cual es constructiva y asegura convergencia a las sub y supersoluciones dentro de espacios funcionales.

2.2. Antecedentes

A luz de lo comentado en la introducción, apéndices y preliminares, surge la pregunta: ¿Para cuál elección de hipersuperficie Σ y de dato semilla $(\tilde{g}_{ij}, K, \sigma_{ij})$ el sistema LCBY, (2.47) y (2.48), dado por

$$\Delta_{\tilde{g}}\phi - \frac{1}{8}\phi\tilde{R} - \frac{1}{12}\tau^2\phi^5 + \frac{1}{8}(\sigma^{ij} + (LW)^{ij})(\sigma_{ij} + (LW)_{ij})\phi^{-7} = -2\pi\tilde{\rho}\phi^{-3} \tag{2.47}$$

$$\tilde{D}_i(LW)^{ij} - \frac{2}{3}\phi^6\tilde{D}^j\tau = 0 \tag{2.48}$$

tiene solución? Para cuáles elecciones el sistema no tiene solución?

Se ha trabajado sobre esta pregunta desde hace mas de 50 años, logrando hasta ahora varios resultados de existencia. El tipo de variedad sobre el cual se resuelve el sistema es crucial a la hora de establecer existencia. Las variedades más estudiadas y en orden de dificultad son las cerradas, las asintóticamente planas, las asintóticamente hiperbólicas, y las variedades asintóticamente cilíndricas y trompeta.

Dentro de cada variedad la curvatura media es uno de los principales factores que clasifica los resultados encontrados. Esto se debe a que si se observan las ecuaciones (2.47) y (2.48) de vacío, al tener un dato semilla con curvatura principal constante, las ecuaciones se desacoplan. La mayor cantidad de condiciones de existencia se pueden encontrar en los casos "Near-CMCz "CMC", es decir curvatura media constante o casi constante.

Para el caso de un dato semilla con curvatura media constante, en el caso de variedades cerradas el problema de existencia está completamente determinado. [35]. Para variedades asintoticamente Euclídeas, el problema también se encuentra determinado y la existencia depende de la clase de métrica conforme que tenga. [12] [11]. Para Σ asintoticamente hiperbólica, el problema esta completamente determinado y la solución siempre existe. [2] [3]. Para variedades asintoticamente Euclídeas con condiciones de borde internas, hay algunos casos determinados [21] [42]. Estos últimos son de particular interés para las simulaciones numéricas de objetos astrofísicos.

Hay algunas herramientas comúnmente utilizadas para la demostración de existencia o no existencia de una solución, como el Principio de Máximo, el Teorema Yamabe y el método de sub y supersoluciones (Sección 2.1).

El Teorema Yamabe es muy útil, ya que la ecuación de Lichnerowicz en el caso "CMC"vacío, es invariante conforme. Esto es, existe solución para el dato semilla $(\tilde{g}, K, \sigma)$ si y solo si para $\psi > 0$ existe solución para el dato semilla $(\psi^4\tilde{g}, K, \psi^{-2}\sigma)$. De esta forma se permite trabajar en un conjunto de datos cuyo escalar de curvatura sea constante para variedades cerradas. El principio de Máximo junto con el Teorema Yamabe es comúnmente usado para demostrar la no existencia de soluciones. Por último el método de sub y supersoluciones es uno de los más utilizados para la determinación de condiciones de existencia. El mismo permite también la creación de super y subsoluciones de forma secuencial $\bar{\phi} \geq \bar{\phi}_1 \geq ...\underline{\phi}$. Mediante la resolución de una secuencia lineal de ecuaciones, se puede ver que la secuencia bajo ciertas condiciones puede converger a la solución de la ecuación de Lichnerowicz.

En el caso de curvatura media cercana a ser constante "Near-CMC.º "Far-from-CMC", el trabajo es mas arduo dado que el sistema LCBY ahora está acoplado. Al establecer condiciones de control sobre el gradiente de K, se puede lograr que el sistema de ecuaciones esté levemente acoplado. Esto posibilita el estudio de la existencia de soluciones para conjuntos de datos semilla cercanos a estar al caso "'CMC". Las herramientas claves en este desarrollo han sido estimaciones analíticas sobre el operador elíptico $\tilde{D}_i(L.)^{ij}$ que aparece del lado derecho de la ecuación (2.48). Se utiliza la estimación elíptica $||W^j||_{W^{k+2}} \leq C||\tilde{D}_i(LW)^i_j||_{W_k}$. W_k es el espacio de Sobolev de los campos vectoriales que son cuadrado integrables, para los cuales las primeras k derivadas son cuadrado integrables también. C es una constante que depende de la geometría. De la mano de esta estimación, ciertos teoremas de embedings en los espacios de Sobolev y desigualdades de integrales, se llega a

$$|LW| \leq \tilde{C}\mathrm{max}_\Sigma\phi^6\mathrm{max}_\Sigma|\tilde{D}\tau| \tag{2.49}$$

Con $\tilde{C}$ otra constante que depende de la geometría del dato inicial. De esta forma se controla el sistema de ecuaciones acoplado, con suficientes condiciones en la pequeñez de

$|\tilde{D}K|$. Con estas estimaciones, y el método de super y subsoluciones se han llegado a resultados de existencia [1] [39].

Así para el caso "Near-CMC.$^{\text{en}}$ el caso de variedades cerradas como también de variedades asintoticamente euclideas y asintoticamente hiperbólicas, se tiene el problema en su mayoría determinado. Pero, para el primero, solo en algunos casos la solución existe [38] [37] [13]. Buscando extender resultados de existencia para el caso "Non-CMC", para distintas geometrías del dato inicial, se han llegado a distintos resultados. [40] [27] [34]

Como mencionamos con anterioridad en el presente trabajo estamos interesados en datos iniciales particulares, de tipo trompeta. Los primeros estudios de existencia al respecto fue en variedades con finales cilíndricos o periódicos. [16], [17]. Posteriormente se fueron encontrando resultados de existencia para datos trompeta bajo suposiciones como, métricas conformalmente planas [18], datos Yamabe Positivo [39] [40], y datos "CMC". Lo que dispara el interrogante que se estudiará a lo largo de este trabajo. ¿Existe una solución (ϕ, W^i), que describa un dato trompeta, que relaje las hipótesis encontradas en la literatura sobre el dato semilla?

Capítulo 3

Resultados con curvatura media constante

En este capítulo presentamos el estudio de datos iniciales de curvatura media constante. Este caso es el que más se ha tratado en la literatura debido a que como las ecuaciones de vínculo se desacoplan, es más simple. Nos enfocamos en el caso maximal (curvatura media cero), en la sección 3.1 y luego analizamos los inconvenientes que aparecen en el caso no maximal, en la sección 3.2.

3.1. Análisis del caso CMC maximal

Dado el sistema LCBY, (1.7) y (1.8), si se toman datos semilla con curvatura media constante $\tilde{D}^i\tau = 0$ y maximal $\tau = 0$ con $\tilde{J}^j = 0$, el mismo se reduce a

$$\Delta_{\tilde{g}}\phi = \frac{1}{8}\phi\tilde{R} - \frac{(\sigma^{ij} + (LW)^{ij})(\sigma_{ij} + (LW)_{ij})}{8\phi^7} - \frac{2\pi\tilde{\rho}}{\phi^3} = F(\vec{r}, \phi) \tag{3.1}$$

$$\tilde{D}_i(LW)^{ij} = 0 \tag{3.2}$$

donde hemos definido la función $F(\vec{r}, \phi)$ como

$$F(\vec{r}, \phi) := \frac{1}{8}\phi\tilde{R} - \frac{(\sigma^{ij} + (LW)^{ij})(\sigma_{ij} + (LW)_{ij})}{8\phi^7} - \frac{2\pi\tilde{\rho}}{\phi^3} \tag{3.3}$$

Recordemos, como vimos en la sección 2.1.1, que maximalidad implica Yamabe positivo, por lo tanto, por los resultados de Leach [40], esperamos encontrar solución de la ecuación de Lichnerowicz. Lo que hacemos en esta sección es investigar cómo los diferentes términos de la ecuación intervienen en la prueba de existencia. Esto nos permitirá trabajar con mayor comodidad cuando pasemos al caso no maximal.

Una observación importante es que bajo estas consideraciones, el sistema (3.1) y (3.2) no está acoplado. Es decir, que primero se resuelve la ecuación de momento (3.2) para el campo LW, y luego se usa esta solución en la ecuación de Lichnerowicz (3.1) para encontrar el factor conforme ϕ. Usualmente lo que se hace y lo que hacemos en esta sección es suponer la existencia de solución de la ecuación de momento con un comportamiento asintótico apropiado, y usar la función $|\sigma + LW|^2$ general como conocida.

Por este motivo nos enfocamos en la ecuación de Lichnerowicz (3.1) y exploramos la existencia de soluciones ϕ que describan datos iniciales para agujeros negros extremos. Es decir, en este capítulo será ϕ, y sus comportamientos, lo que le de el carácter de trompeta a la métrica h. Esto se explica en más detalle en la subsección 2.1.2. Para esto buscamos funciones barreras con el comportamiento asintótico adecuado que, vía el Teorema de sub y supersoluciones (sección 2.1.3) garanticen la existencia de la solución deseada.

3.1.1. Supersolución de la ecuación de Lichnerowicz

Basados en trabajos anteriores, [22], [23], estudiamos el dato inicial para la solución de Reissner Nordström como posible supersolución para la ecuación de Lichnerowicz. Esta solución describe una familia de datos para agujeros negros esféricos, estáticos, aislados y cargados eléctricamente. Cada elemento de la familia está caracterizado por su masa total M y su carga eléctrica Q, con $M \geq |Q|$. Lo interesante de este dato inicial es que tiene el comportamiento adecuado para nuestro propósito y es de gran simplicidad.

El dato de Reissner Nordström, $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, h_{ij}, K_{ij}, \rho)$, está dado, en coordenadas isotrópicas por

$$h_{ij} = \phi^4_{RN,\mu}\delta_{ij} \tag{3.4}$$

con

$$\phi_{RN,\mu} = \sqrt{1 + \frac{M}{r} + \frac{\mu^2}{4r^2}}, \qquad \mu = \sqrt{M^2 - Q^2} \tag{3.5}$$

$$K_{ij} = 0 \tag{3.6}$$

$$\rho = \frac{\tilde{\rho}}{\phi^8_{RN}} = \frac{Q^2}{8\pi r^4 \phi^8_{RN}} \tag{3.7}$$

Notamos que este dato es conformemente plano y de curvatura extrínseca cero (*time symmetric*).

El parámetro μ de (3.5) es no negativo y el límite $\mu \to 0$ describe el caso extremo de este agujero negro. En este límite la carga por unidad de masa es máxima para esta familia ($M = |Q|$) y el factor conforme toma la siguiente forma

$$\phi_{RN,0} = \phi_{RN} = \sqrt{1 + \frac{Q}{r}} \tag{3.8}$$

Se puede apreciar que los comportamientos de la métrica física son reflejados en el factor conforme. En el límite $r \to \infty$ tanto $\phi_{RN,\mu}$ como ϕ_{RN} decaen a 1. Esto caracteriza al final asintóticamente plano. Sin embargo al tomar el limite de $r \to 0$ se observa una diferencia importante entre el dato subextremo ($\mu > 0$) y el dato extremo ($\mu = 0$). En el primer caso $\phi_{RN,\mu}$ diverge como $1/r$, mientras que en el caso extremo ϕ_{RN} va como $1/\sqrt{r}$. Esto muestra que el limite extremo supone un cambio de geometría desde un dato con dos finales asintóticamente planos a un dato con un final asintóticamente plano y uno cilíndrico.

El dato de Reissner Nordström extremo ($|Q| = M$) descripto arriba se puede obtener, mediante el método conforme, a partir del siguiente dato semilla $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\},\ \tilde{g}_{ij} = \delta_{ij},\ \tilde{K}_{ij} =$

$0,\ 2\pi\tilde{\rho} = Q^2/4r^4$) y satisface la ecuación de Lichnerowicz

$$\Delta_\delta \phi_{RN} = -\frac{2\pi\tilde{\rho}}{\phi_{RN}^3} = -\frac{Q^2}{4r^4\phi_{RN}^3} \tag{3.9}$$

donde Δ_δ es el operador de Laplace con respecto a la métrica plana δ.

Notemos que ϕ_{RN} representa una familia monoparamétrica de soluciones, con parámetro Q. En esta sección estudiamos si existe algún elemento de esa familia, es decir, si existe un valor de Q tal que ϕ_{RN}, dado por (3.8), es supersolución de la ecuación (3.1). Para ello buscamos Q tal que

$$\Delta_{\tilde{g}}\phi_{RN} \leq F(\vec{r}, \phi_{RN}) = \frac{\tilde{R}}{8}\phi_{RN} - \frac{\zeta^2}{8\phi_{RN}^7} - \frac{2\pi\tilde{\rho}}{\phi_{RN}^3} \tag{3.10}$$

donde definimos

$$\zeta^2 := (\sigma_{ij} + (LW)_{ij})(\sigma^{ij} + (LW)^{ij}) \tag{3.11}$$

para simplificar la notación y tener presente que es una cantidad positiva.

A partir de la forma explícita del factor conforme, (3.8), calculamos el Laplaciano con respecto a la métrica $\tilde{g}$ que aparece en el lado izquierdo de la desigualdad (3.10). Tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{g}}\phi_{RN} &= \left(\tilde{g}^{rr}\partial_r^2 - \tilde{g}^{ab}\tilde{\Gamma}_{ab}^r\partial_r\right)\phi_{RN} & (3.12)\\ &= -a\frac{Q^2}{4r^4\phi_{RN}^3} + b\frac{Q}{4r^3\phi_{RN}} & (3.13) \end{aligned}$$

con

$$a := \tilde{g}^{rr}, \qquad b := 4\tilde{g}^{rr} + 2r\tilde{g}^{ab}\tilde{\Gamma}_{ab}^r \tag{3.14}$$

y $\tilde{\Gamma}_{ab}^c$ son los símbolos de Christoffel de la métrica $\tilde{g}$. Notar que para el caso conformemente plano $\tilde{g} = \delta$ y se tiene $a = 1, b = 0$. Suponemos que en infinito, a decae a 1 y b a 0, también que son acotadas y suaves en toda la variedad. Esto es necesario para que la métrica semilla tenga el comportamiento asintótico apropiado.

Entonces la desigualdad (3.10) queda

$$-a\frac{Q^2}{4r^4\phi_{RN}^3} + b\frac{Q}{4r^3\phi_{RN}} \leq \frac{\tilde{R}}{8}\phi_{RN} - \frac{\zeta^2}{8\phi_{RN}^7} - \frac{2\pi\tilde{\rho}}{\phi_{RN}^3} \tag{3.15}$$

$$-aQ^2 + brQ\phi_{RN}^2 \leq \frac{\tilde{R}r^4}{2}\phi_{RN}^4 - \frac{\zeta^2 r^4}{2\phi_{RN}^4} - 8\pi\tilde{\rho}r^4 \tag{3.16}$$

$$aQ^2 - brQ\phi_{RN}^2 \geq \frac{\zeta^2 r^4}{2\phi_{RN}^4} + 8\pi\tilde{\rho}r^4 - \frac{\tilde{R}r^4}{2}\phi_{RN}^4 \tag{3.17}$$

Usando la forma explícita del factor conforme tenemos

$$aQ^2 - brQ\left(1 + \frac{Q}{r}\right) \geq \frac{\zeta^2 r^4}{2}\left(1 + \frac{Q}{r}\right)^{-2} + 8\pi\tilde{\rho}r^4 - \frac{\tilde{R}r^4}{2}\left(1 + \frac{Q}{r}\right)^2 \tag{3.18}$$

Analizando esta desigualdad arribamos al siguiente resultado

Proposición 1. (Reissner Nordström supersolución): Dado un dato inicial $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \tilde{g}, \tilde{K}, \tilde{\rho})$ caracterizado por las funciones $\tilde{R}$, ζ^2 y $\tilde{\rho}$ tales que

$$\tilde{R} = \mathcal{O}(r^{-4}), \qquad \zeta^2 = \mathcal{O}(r^{-4}), \qquad \tilde{\rho} = \mathcal{O}(r^{-4}), \qquad \text{en} \qquad r \to \infty \tag{3.19}$$

y

$$\tilde{R} = \mathcal{O}(r^{-2}), \qquad \zeta^2 = \mathcal{O}(r^{-6}), \qquad \tilde{\rho} = \mathcal{O}(r^{-4}) \qquad \text{en} \qquad r \to 0. \tag{3.20}$$

Entonces si

$$4\tilde{g}^{rr} + 2r\tilde{g}^{ab}\tilde{\Gamma}^r_{ab} \leq 0 \tag{3.21}$$

y

$$\tilde{g}^{rr} \geq -\frac{\tilde{R}r^2}{2} \tag{3.22}$$

existe un valor de Q tal que $\phi_{RN,Q}$ es supersolución de la ecuación de Lichnerowicz (3.1).

Demostración. Supongamos entonces $b \leq 0$, condición (3.21). Como $aQ^2 - brQ\left(1 + \frac{Q}{r}\right) \geq aQ^2$, entonces buscamos Q tal que se satisfaga

$$aQ^2 \geq \frac{\zeta^2 r^4}{2}\left(1 + \frac{Q}{r}\right)^{-2} + 8\pi\tilde{\rho}r^4 - \frac{\tilde{R}r^4}{2}\left(1 + \frac{Q}{r}\right)^2 \tag{3.23}$$

donde a está acotada y va a 1 en infinito. Esta desigualdad es más simple para analizar.

Veamos término a término del lado derecho de esta desigualdad. El primer término es decreciente con Q y acotado en toda la variedad por hipótesis. Por lo tanto, eligiendo un Q suficientemente grande, es posible tener

$$\frac{a}{3}Q^2 \geq \frac{\zeta^2 r^4}{2}\left(1 + \frac{Q}{r}\right)^{-2} \tag{3.24}$$

por lo que el primer término no es problema, dados los requerimientos para ζ^2.

El segundo término, proporcional a $\tilde{\rho}$ no depende de Q y es acotado en toda la variedad, por lo tanto existe Q suficientemente grande tal que

$$\frac{a}{3}Q^2 \geq 8\pi\tilde{\rho}r^4 \tag{3.25}$$

Así acotamos los primeros dos términos.

Finalmente, veamos el último término. Notamos que si $\tilde{R} \geq 0$, entonces podemos acotar este término por cero y queda probada la proposición. Sin embargo, si $\tilde{R}$ no es positivo en toda la variedad, la desigualdad no se satisface en general porque el término crece linealmente con Q^2. Sin embargo, si

$$a \geq -\frac{\tilde{R}r^2}{2} \tag{3.26}$$

se puede elegir Q tal que

$$\frac{a}{3}Q^2 \geq -\frac{\tilde{R}}{2}\left(1+\frac{Q}{r}\right)^2 \tag{3.27}$$

lo que termina de probar la desigualdad (3.23) y por lo tanto la desigualdad (3.10) y la proposición.

□

Observamos que las dos condiciones (3.21) y (3.22) ponen restricciones a la métrica solamente, y en particular, sobre la curvatura. Esto está relacionado con la idea intuitiva de que el escalar de curvatura no puede ser muy negativo en alguna región, porque el dato es Yamabe positivo (por ser maximal).

Si la condición (3.21) no se satisface, en toda la variedad o en una región de la misma, es posible hallar restricciones sobre la métrica semilla y sus derivadas de tal forma que exista Q. Es decir (3.21), no es una condición restrictiva para ver que $\phi_{RN,Q}$ es supersolución de la ecuación de Lichnerowicz (3.1).

3.1.2. Subsolución de la ecuación de Lichnerowicz

Luego de haber encontrado que hay elementos de la familia de Reissner Nordström extremo que funcionan bien como supersolución bajo ciertos comportamientos del dato semilla, buscamos una subsolución de la ecuacion de Lichnerowicz (3.1). Dentro del caso CMC Maximal, exploramos diferentes alternativas de subsolución.

3.1.2.1. Propuesta 1: Reissner Nordström

Basados en el cálculo de la subsección anterior, lo primero que intentamos es determinar si existe algún elemento de la familia de agujeros negros de Reissner Nordström extremo tal que sea subsolución de la ecuación de Lichnerowicz. Es decir si el factor conforme ϕ_{RN} que representa una familia manométrica de soluciones con parámetro Q , cumple que

$$\Delta_{\tilde{g}}\phi_{RN} \geq F(\vec{r},\phi_{RN}) = \frac{\tilde{R}}{8}\phi_{RN} - \frac{\zeta^2}{8\phi_{RN}^7} - \frac{2\pi\tilde{\rho}}{\phi_{RN}^3} \tag{3.28}$$

con ζ^2 definido en (3.11). Recordamos que ϕ_{RN} satisface la ecuación (3.9). Esto lo utilizamos a continuación junto con la expresión encontrada en la subsección anterior para $\Delta_{\tilde{g}}$. De la misma forma, esa desigualdad lleva a que (3.28) sea equivalente a

$$-a\frac{Q^2}{4r^4\phi_{RN}^3} + b\frac{Q}{4r^3\phi_{RN}} \geq \frac{\tilde{R}}{8}\phi_{RN} - \frac{\zeta^2}{8\phi_{RN}^7} - \frac{2\pi\tilde{\rho}}{\phi_{RN}^3} \tag{3.29}$$

$$-aQ^2 + brQ\phi_{RN}^2 \geq \frac{\tilde{R}r^4}{2}\phi_{RN}^4 - \frac{\zeta^2 r^4}{2\phi_{RN}^4} - 8\pi\tilde{\rho}r^4 \tag{3.30}$$

$$aQ^2 - brQ\left(1+\frac{Q}{r}\right) \leq \frac{\zeta^2 r^4}{2}\left(1+\frac{Q}{r}\right)^{-2} + 8\pi\tilde{\rho}r^4 - \frac{\tilde{R}r^4}{2}\left(1+\frac{Q}{r}\right)^2 \tag{3.31}$$

Analicemos esta desigualdad. A diferencia de aquella encontrada para la supersolución, aquí $aQ^2 - brQ\left(1+\frac{Q}{r}\right)$ acota por debajo al lado derecho de (3.31) y esto trae algunos inconvenientes. Si $b < 0$ el lado izquierdo de esta última desigualdad es positivo y rápidamente se puede observar que si $\tilde{R}$ es positivo y suficientemente grande esta desigualdad carece de sentido. Notemos también que esta desigualad excluye datos semilla axialmente simétricos, como Kerr, debido a que las cantidades involucradas en la derecha de (3.31) se anulan en el eje. Es decir esta desigualdad excluye muchos datos semilla de interés. Por lo que podemos decir que los elementos pertenecientes a la familia de Reissner Norström extremo, descritos por el factor conforme ϕ_{RN} no funcionan bien como subsoluciones de la ecuación de Lichnerowicz.

3.1.2.2. Propuesta 2: Subsolución construida a partir de una supersolución.

Por último pensamos otra forma de encontrar una subsolución utilizando la supersolución ya encontrada. Recordamos la función de la ecuación de Lichnerowicz (3.1)

$$F(\vec{r},\phi) = \frac{\tilde{R}}{8}\phi - \frac{\zeta^2}{8\phi^7} - \frac{2\pi\tilde{\rho}}{\phi^3} \tag{3.32}$$

Si se cumple que $\underline{\phi} \leq \bar{\phi}$ y F es no decreciente respecto al factor conforme ϕ, se puede observar que $F(\vec{r},\underline{\phi}) \leq F(\vec{r},\bar{\phi})$. De esta forma, si $\underline{\phi}$ es solución de la ecuación de Poisson

$$\Delta_{\tilde{g}}\underline{\phi} = F(\vec{r},\bar{\phi}) \tag{3.33}$$

podemos obtener que

$$F(\vec{r},\bar{\phi}) = \Delta_{\tilde{g}}\underline{\phi} \geq F(\vec{r},\underline{\phi}) \tag{3.34}$$

Lo que muestra que $\underline{\phi}$ es subsolución de la ecuación de Lichnerowicz (3.1).

En nuestro caso veamos bajo qué condiciones la función F es no decreciente. La función F, tiene

$$\frac{dF(\vec{r},\phi)}{d\phi} = \frac{\tilde{R}}{8} + \frac{7\zeta^2}{8\phi^8} + \frac{6\pi\tilde{\rho}}{\phi^4} \tag{3.35}$$

Para que sea no decreciente, se debe cumplir que

$$\frac{\tilde{R}}{8} + \frac{7\zeta^2}{8\phi^8} + \frac{6\pi\tilde{\rho}}{\phi^4} \geq 0 \tag{3.36}$$

Analizando este requerimiento para las cantidades $\tilde{R}$, ζ^2 y $\tilde{\rho}$, arribamos al siguiente resultado

Proposición 2. : Dado un dato inicial $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \tilde{g}, \tilde{K}, \tilde{\rho})$ que satisface las condiciones de la Proposición 1 y además

$$\tilde{R} \geq -\frac{7\zeta^2}{\phi_{RN}^8} - \frac{48\pi\tilde{\rho}}{\phi_{RN}^4} \tag{3.37}$$

donde ϕ_{RN} es la supersolución encontrada en la Proposición 1, entonces la solución de la ecuación de Poisson

$$\Delta_{\tilde{g}}\underline{\phi} = F(\vec{r}, \phi_{RN}) \tag{3.38}$$

es subsolución de la ecuación de Lichnerowicz (3.1).

Demostración. Vimos que F es no decreciente si se cumple, para todo ϕ

$$\frac{\tilde{R}}{8} + \frac{7\zeta^2}{8\phi^8} + \frac{6\pi\tilde{\rho}}{\phi^4} \geq 0 \tag{3.39}$$

Pero como ϕ_{RN} es supersolución, tenemos $\phi \leq \phi_{RN}$. Entonces

$$\frac{\tilde{R}}{8} + \frac{7\zeta}{8\phi^8} + \frac{6\pi\tilde{\rho}}{\phi^4} \geq \frac{\tilde{R}}{8} + \frac{7\zeta^2}{8\phi_{RN}^8} + \frac{6\pi\tilde{\rho}}{\phi_{RN}^4} \geq 0 \tag{3.40}$$

donde la última desigualdad sale de la hipótesis (3.37). Utilizando funciones de Green, se puede encontrar $\underline{\phi}$ [18] [22] lo que finaliza con la demostración de la proposición.

□

Es interesante notar que la condición extra que necesitamos para este resultado, la condición (3.37) no involucra solamente a la métrica semilla, sino a todo el dato semilla. Esto es importante porque no hace referencia solo a la naturaleza Yamabe del dato semilla. Es posible que sea un requisito más profundo del sistema para que tenga subsolución, o que se deba solamente a la elección del método usado para constuir la subsolución.

3.2. Análisis caso CMC no maximal

Dada la situación de que el dato semilla tenga curvatura media constante, pero no maximal, es decir $\tilde{D}^i\tau = 0$ pero $\tau \neq 0$ el sistema de ecuaciones LCBY queda

$$\Delta_{\tilde{g}}\phi = \frac{1}{8}\phi\tilde{R} - \frac{\zeta^2}{8\phi^7} - \frac{2\pi\tilde{\rho}}{\phi^3} + \frac{\tau^2}{12}\phi^5 \tag{3.41}$$

$$\tilde{D}_i(LW)^{ij} = 0 \tag{3.42}$$

donde $\tilde{J}^i = 0$ y $\zeta^2 = (\sigma^{ij} + (LW)^{ij})(\sigma_{ij} + (LW)_{ij})$.

El sistema de ecuaciones continúa siendo un sistema desacoplado. Debido a esto y a los motivos mencionados a comienzo de la sección 3.1, analizamos aquí sólo la ecuación de Lichnerowicz. Recordemos que buscamos soluciones ϕ que describan un dato trompeta.

Como buscamos una solución asintóticamente plana para que describa un objeto aislado, esperamos $\phi \to 1$ cuando $r \to \infty$ y por lo tanto, también esperamos $\Delta\phi \to 0$ en este límite. Sin embargo el último término de (3.41), que contiene a τ^2, no decae a cero cuando $r \to \infty$ sino que va como una constante. Por lo tanto no será posible construir un dato asintóticamente plano en el caso de que τ sea constante distinto de cero. La única manera de tener un dato no maximal asintóticamente plano es que el $\tau \to 0$ cuando $r \to \infty$, lo que nos lleva afuera del caso CMC debido a que esta cantidad necesita una dependencia con $\vec{r}$.

Notemos que cuando τ es distinto de cero, la ecuación de vínculo Hamiltoniana

$$R_h + \tau^2 - K_{ab}K^{ab} = 16\pi\rho \tag{3.43}$$

ya no implica que la variedad es Yamabe positivo. Es decir con el objetivo de este trabajo en mente, comenzamos a complejizar la situación.

Capítulo 4

Resultados con curvatura media no constante

En este capítulo tratamos el caso de Curvatura Media no Constante. Hay dos *approaches*. El primero es mirar solamente la ecuación de Lichnerowicz, esto es lo que hacemos en la sección 4.1, siguiendo los argumentos usados en el caso CMC. El segundo es considerar todas las ecuaciones de vínculo, teniendo en cuenta su acople. Esto es lo que hacemos en la sección 4.2, utilizando herramientas matemáticas diferentes.

Dado el sistema de ecuaciones LCBY, al liberar la condición de que la traza de la curvatura extrínseca sea constante, es decir τ ahora es una función que depende de la posición en la hipersuperficie Σ, con $\tilde{J}^i = 0$ se tiene

$$\Delta_{\tilde{g}}\phi = \frac{1}{8}\tilde{R}\phi - \frac{(\sigma^{ij} + (LW)^{ij})(\sigma_{ij} + (LW)_{ij})}{8\phi^7} + \frac{\tau^2}{12}\phi^5 - \frac{2\pi\tilde{\rho}}{\phi^3} = F(\vec{r}, \phi) \tag{4.1}$$

$$\tilde{D}_i(LW)^{ij} = \frac{2}{3}\tilde{D}^j\tau\phi^6 \tag{4.2}$$

Donde queda claro que las ecuaciones están acopladas a través de la curvatura media τ.

4.1. Sub y Super soluciones de la ecuación de Lichnerowicz

En esta sección estudiamos la ecuación de Lichnerowicz (4.1) siguiendo la idea presentada por Chrusciel en [16] para el caso de escalar de curvatura $\tilde{R}$ positivo, y siguiendo las líneas de las secciones 3.1.1-3.1.2. Recordemos que en los desarrollos presentados, el factor conforme ϕ era lo que le daba carácter de dato trompeta a h. A diferencia del tratamiento de Chruciel aquí no suponemos escalar de curvatura positivo. Trabajamos con la ecuación de Lichnerowicz, tomando el acople como si fuera una cantidad dada con ciertos comportamientos apropiados, es decir consideramos a la función

$$\zeta^2 = (\sigma^{ij} + (LW)^{ij})(\sigma_{ij} + (LW)_{ij}) \tag{4.3}$$

como general pero dada en la variedad. ζ^2 depende de la posición y es una cantidad no negativa. Escribimos entonces la ecuación de Lichnerowicz como

$$\Delta_{\tilde{g}}\phi = \frac{\tilde{R}}{8}\phi - \frac{\zeta^2}{8\phi^7} + \frac{\tau^2}{12}\phi^5 - \frac{2\pi\tilde{\rho}}{\phi^3} = F(\vec{r},\phi). \tag{4.4}$$

4.1.1. Supersolución de la ecuación de Lichnerowicz

Veamos si existe un valor de Q tal que la solución de RN es supersolución de (4.4), es decir, tal que

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{g}}\phi_{RN} &\leq F(\vec{r},\phi_{RN}) && (4.5)\\ &\leq \frac{1}{8}\tilde{R}\phi_{RN} - \frac{\zeta^2}{8\phi_{RN}^7} + \frac{\tau^2}{12}\phi_{RN}^5 - \frac{2\pi\tilde{\rho}}{\phi_{RN}^3} && (4.6)\end{aligned}$$

Recordando que

$$\phi_{RN} = \sqrt{1+\frac{M}{r}} \tag{4.7}$$

satisface la ecuación de Lichnerowicz

$$\Delta_{\delta}\phi_{RN} = -\frac{2\pi\bar{\rho}}{\phi_{RN}^3} = -\frac{Q^2}{4r^4\phi_{RN}^3} \tag{4.8}$$

utilizamos lo encontrado en la sección 3.1.1

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{g}}\phi_{RN} &= \left(\tilde{g}^{rr}\partial_r^2 - \tilde{g}^{ab}\tilde{\Gamma}^r_{ab}\partial_r\right)\phi_{RN} && (4.9)\\ &= -a\frac{Q^2}{4r^4\phi_{RN}^3} + b\frac{Q}{4r^3\phi_{RN}} && (4.10)\end{aligned}$$

con

$$a := \tilde{g}^{rr}, \qquad b := 4\tilde{g}^{rr} + 2r\tilde{g}^{ab}\tilde{\Gamma}^r_{ab} \tag{4.11}$$

y $\tilde{\Gamma}^c_{ab}$ son los símbolos de Christoffel de la métrica $\tilde{g}$. Con a y b decaen a 1 en infinito, son acotadas y suaves en toda la variedad.

Entonces

$$-aQ^2 + b\frac{Q}{4r^3\phi_{RN}} \leq \frac{r^4}{2}\tilde{R}\phi_{RN}^4 - \frac{r^4\zeta^2}{2\phi_{RN}^4} + \frac{r^4}{3}\tau^2\phi_{RN}^8 - 8\pi r^4\tilde{\rho} \tag{4.12}$$

Donde dando vuelta la igualdad y reemplazando a ϕ_{RN} por (4.7)

$$aQ^2 - b\frac{Q}{4r^3\phi_{RN}} \geq \frac{r^4}{2}\zeta^2\left(1+\frac{Q}{r}\right)^{-2} + 8\pi r^4\tilde{\rho} - \frac{r^4}{2}\tilde{R}\left(1+\frac{Q}{r}\right)^2 - \frac{r^4}{3}\tau^2\left(1+\frac{Q}{r}\right)^4 \tag{4.13}$$

Analizando estas desigualdades arribamos a la siguiente proposición

Proposición 3. (Reissner Nordström supersolución de la ecuación de Lichnerowicz): Dado un dato inicial $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \tilde{g}, \tilde{K}, \tilde{\rho})$ caracterizado por las funciones $\tilde{R}$, ζ^2, $\tilde{\rho}$ y τ tales que

$$\tilde{R} = \mathcal{O}(r^{-4}), \qquad \zeta^2 = \mathcal{O}(r^{-4}), \qquad \tilde{\rho} = \mathcal{O}(r^{-4}), \qquad \tau^2 = \mathcal{O}(r^{-4}) \qquad \text{en} \qquad r \to \infty \tag{4.14}$$

y

$$\tilde{R} = \mathcal{O}(r^{-2}), \qquad \zeta^2 = \mathcal{O}(r^{-6}), \qquad \tilde{\rho} = \mathcal{O}(r^{-4}), \qquad \tau^2 = \mathcal{O}(1) \qquad \text{en} \qquad r \to 0. \tag{4.15}$$

Entonces si

$$4\tilde{g}^{rr} + 2r\tilde{g}^{ab}\tilde{\Gamma}^r_{ab} \leq 0 \tag{4.16}$$

y si alguna de las siguientes condiciones se satisfacen

1. $\tau^2 > 0$
2. $\tilde{g}^{rr} + \frac{2\tau^2}{3} \geq -\frac{\tilde{R}r^2}{2}$

existe un valor de Q tal que $\phi_{RN,Q}$ es supersolución de la ecuación de Lichnerowicz (4.1).

Demostración. La prueba es similar a la de la Proposición 1 y no repetiremos algunos pasos aquí. Analizaremos el término nuevo, proporcional a τ^2 en la desigualdad (4.13). Notamos que es de carácter benigno, ya que tiene el signo correcto.

La ecuación (4.13) se puede escribir de la forma

$$f(Z) \geq g(Z) \tag{4.17}$$

con

$$f(Z) := \alpha^2 Z + \beta(1+Z)^2 + \gamma^2(1+Z)^4, \qquad g(Z) := \frac{\omega^2}{(1+Z)^2} + \delta^2 \tag{4.18}$$

$$Z := \frac{Q}{r}, \qquad \alpha^2 := a^2 r^2, \qquad \beta := \frac{\tilde{R}r^4}{2}, \qquad \gamma^2 := \frac{\tau^2 r^4}{3}, \qquad \omega^2 := \frac{\zeta^2 r^4}{2}, \qquad \delta^2 := 8\pi r^4 \tilde{\rho} \tag{4.19}$$

Los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \omega, \delta$ depende del punto en la variedad. Sin embargo, analizamos la desigualdad (4.17) para un punto fijo arbitrario. En particular esto implica que consideramos a Z como función sólo de Q. Entre los coeficientes de f y g, el único que puede ser no positivo es β, ya que es proporcional al escalar de curvatura.

La función g es acotada en Z y la función f es creciente con Z para Z suficientemente grande si τ^2 es estrictamente positivo. En este caso, para $\tau^2 > 0$, existe un valor de Z, y por lo tanto de Q tal que la desigualdad (4.17) y por ende, proposición está probada.

Si τ^2 no es estrictamente positivo, entonces se puede ver que si se satisface la condición 2. en la proposición, la desigualdad vale y la proposición está probada.

□

Queremos remarcar un punto interesante con respecto a esta Proposición. La presencia de una curvatura media no constante favorece la existencia de supersoluciones, ya que las dos condiciones 1. y 2. de la proposición relajan las restricciones sobre la métrica semilla con respecto al caso CMC (ver condición (3.22) de la proposición 1).

Respecto a la condición (4.16), ocurre lo mismo que lo mencionado en los comentarios de la Proposición 1. Donde mencionamos que de no satisfacerse, es posible encontrar nuevas restricciones sobre la métrica semilla y sus derivadas tal que existe valor de Q.

4.1.2. Subsolución de la ecuación de Lichnerowicz

La idea aquí es la misma que la utilizada en la subsección 3.1.2, para encontrar una subsolución a partir de una supersolución conocida. La única diferencia al respecto es que en este caso de dato no maximal, la función F está dada por

$$F(\vec{r},\phi) = \frac{\tilde{R}}{8}\phi + \frac{\tau^2}{12}\phi^5 - \frac{\zeta^2}{8\phi^7} - \frac{2\pi\tilde{\rho}}{\phi^3} \tag{4.20}$$

Para esta función F se tiene

$$\frac{dF(\vec{r},\phi)}{d\phi} = \frac{\tilde{R}}{8} + \frac{5}{12}\tau^2\phi^4 + \frac{7\zeta^2}{8\phi^8} + \frac{6\pi}{\phi^4}\tilde{\rho} \tag{4.21}$$

Teniendo como objetivo seguir el mismo razonamiento presentado en la subsección 3.1.2 notemos que el término nuevo, proporcional a τ^2, es no negativo. Por lo que (4.21) es tal que

$$\frac{dF(\vec{r},\phi)}{d\phi} \geq \frac{\tilde{R}}{8} + \frac{7\zeta^2}{8\phi^8} + \frac{6\pi}{\phi^4}\tilde{\rho} \tag{4.22}$$

Entonces el estudio realizado en la la subsección *"Propuesta 2: Subsolución construida a partir de una supersolución "* sirve completo para determinar si podemos o no crear una subsolución en este caso. Y esto es porque si demostramos como en esa subsección que

$$\frac{\tilde{R}}{8} + \frac{7\zeta^2}{8\phi^8} + \frac{6\pi}{\phi^4}\tilde{\rho} \geq 0 \tag{4.23}$$

entonces tenemos

$$\frac{\tilde{R}}{8} + \frac{5}{12}\tau^2\phi^4 + \frac{7\zeta^2}{8\phi^8} + \frac{6\pi}{\phi^4}\tilde{\rho} \geq 0 \tag{4.24}$$

Entonces, debido a lo mencionado llegamos a la siguiente proposición

Proposición 4. : Dado un dato inicial $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \tilde{g}, \tilde{K}, \tilde{\rho})$ que satisface las condiciones de la Proposición 3 y además

$$\tilde{R} \geq -\frac{7\zeta^2}{\phi_{RN}^8} - \frac{48\pi\tilde{\rho}}{\phi_{RN}^4} \tag{4.25}$$

donde ϕ_{RN} es la supersolución encontrada en la Proposición 3, entonces la solución de la ecuación de Poisson

$$\Delta_{\tilde{g}}\underline{\phi} = F(\vec{r}, \phi_{RN}) \tag{4.26}$$

es subsolución de la ecuación de Lichnerowicz (4.1).

4.2. Sub y Supersoluciones de las ecuaciones de vínculo

Para estudiar las ecuaciones de vínculo acopladas, es necesario utilizar una técnica diferente a la empleada en el caso CMC, donde las ecuaciones de vínculo se desacoplan y se pueden tratar independientemente.

Como antes buscamos funciones barreras para las ecuaciones de vínculo. Seguimos los trabajos de Leach, Dilts y Chrusciel [39], [40], [27], [16], [16] y los extendemos al caso en que no pedimos escalar de curvatura positivo ni Yamabe positivo.

La estrategia que usamos es la siguiente. Consideremos un modelo de dos ecuaciones escalares para las funciones f, g para ilustrar la idea. Estas funciones satisfcen el sistema acoplado

$$Lf = A(f, g) \tag{4.27}$$

$$Pg = B(f, g) \tag{4.28}$$

donde L, P son operadores diferenciales independientes de f, g y A, B son funciones que dependen de las f, g. Lo que hacemos es: dada una función g_1 arbitraria, resolvemos la ecuación

$$Lf = A(f, g_1) \tag{4.29}$$

ahora esta ecuación se puede resolver independientemente de la ecuación (4.28), porque no depende de g. Supongamos que denotamos a la solución de esta ecuación por $f_1(g_1)$. Reemplazamos esta solución en la segunda ecuación y tenemos

$$Pg = B(f_1(g_1), g) \tag{4.30}$$

vemos que ahora también esta ecuación se puede resolver para g porque no aparece f como incógnita sino que aparece la solución $f_1(g_1)$ conocida.

Definimos sub y super soluciones de la ecuación

$$Pg = B(f_1, g) \tag{4.31}$$

de la misma forma que antes, a través de las condiciones

$$Pg_+ \leq B(f_1, g_+), \qquad 0 < g \leq g_+ \tag{4.32}$$

$$Pg_- \geq B(f_1, g_-), \qquad g_- \leq g \tag{4.33}$$

y $g_- \leq g_+$, estas son sub y supersoluciones del sistema acoplado, respectivamente.

Una vez probada la existencia de sub y supersoluciones de las ecuaciones desacopladas, se obtiene una solución unica de las ecuaciones desacopladas. Luego hay que probar convergencia de la sucesión de soluciones a una solución del sistema original. No estudiamos la convergencia en este trabajo, pero en el capítulo 5 discutimos algunos aspectos de este problema.

Con esta idea en mente, definimos el operador $\mathrm{Lich}_\phi(\theta)$

$$\mathrm{Lich}_\phi(\theta) = \Delta_{\tilde{g}}(\theta) - C_n \tilde{R}\theta - \tilde{\beta}\theta^\alpha + C_n|\sigma + LW_\phi|^2_{\tilde{g}}\theta^{-(\alpha+2)} \tag{4.34}$$

Donde utilizamos las siguientes definiciones

$$\alpha = \frac{n+2}{n-2} \tag{4.35}$$

$$C_n = \frac{n-2}{4(n-1)} \tag{4.36}$$

$$\tilde{\beta} = \frac{n-2}{4n}\tau^2 \tag{4.37}$$

$$\zeta^2 = |\sigma + LW_\phi|^2_{\tilde{g}} = (\sigma_{ij} + (LW)_{ij})(\sigma^{ij} + (LW)^{ij}) \tag{4.38}$$

En la notación del sistema modelo anterior tenemos $\theta = g$, $\phi = g_1$. Además la ecuación de Lichnerowicz que buscamos resolver está dada por

$$\mathrm{Lich}_\phi(\phi) = 0 \tag{4.39}$$

Buscamos construir una supersolución $\bar{\phi}$ y una subsolución $\underline{\phi}$, globales para el sistema (4.1) y (4.2). Donde los datos semilla $(\tilde{g}, \tau, \sigma)$ que consideramos son del tipo trompeta. La solución (ϕ, W) que se busca es tal que la métrica resultante $h = \phi^4\tilde{g}$ tenga los mismos comportamientos que la métrica $\tilde{g}$. Donde el criterio para definir un dato del tipo trompeta está detallado en la sección 2.1.2.3.

Nos interesa relajar la condición de positividad sobre el escalar de curvatura $\tilde{R}$ en parte de la región intermedia. Definimos las regiones asintóticas E_e, E_c y $\mathcal{K}$ un subconjunto compacto de Σ con borde suave, tal que

$$\Sigma \setminus \mathcal{K} = E_e \sqcup E_c \tag{4.40}$$

Con respecto al escalar de curvatura suponemos

$$\tilde{R}|_{E_e} = R_e, \;\; \tilde{R}|_{E_c} = R_c, \;\; \tilde{R}|_{\mathcal{K}} = R_{\mathcal{K}} \tag{4.41}$$

R_e, R_c y $R_{\mathcal{K}}$ son funciones definidas en toda la variedad Σ con las siguientes características. $R_e > 0$ decae rápidamente en E_e tal que $\chi_e R_e \in L^2_{-1,-\gamma-2}$. R_c tiende a $\mathring{R}$ con una razón de e^{-x}, $\mathring{R} > c > 0$. $R_0 < R_{\mathcal{K}}$ donde c y $R_0 < 0$ son constantes. No suponemos $R_{\mathcal{K}}$ negativo en toda la zona intermedia, pero sí en parte.

Remarcamos que esta condición para el escalar de curvatura no garantiza que el dato no sea Yamabe positivo, pero sí relaja las condiciones de existencia encontradas en la literatura.

Sean las funciones de corte χ_e y χ_c, idénticamente 1 en el final E_e y E_c, respectivamente, y que decaen rápidamente fuera de ellos. Las cantidades $\chi_e\tau$, $\chi_e\sigma$, $\chi_c\tau - \mathring{\tau}$ y $\chi_c\sigma - \mathring{\sigma}$ pertenecen a $C^{1,\alpha}_{-\delta,-\frac{\gamma}{2}-1}$. Donde $0 < \delta < \delta' < \delta_*$ con δ_* un número, $\mathring{\tau}$ una constante no nula fija y $\mathring{\sigma}$ un 2-tensor fijo en $C^{1,\alpha}(\Theta)$. Recordando que Θ es una variedad $n-1$-dimensional cerrada.

Para trabajar con la parte vectorial del sistema LCBY usamos una cota sobre $|LW_\phi|$ en términos de $||\phi||_0$ donde $||.||_0$ denota la norma sup usualPara esto usamos una extensión de la proposición 3.1 del trabajo de Leach [40] para el caso con finales asintóticamente cilíndricos y planos.

Proposición 5. (Extensión de la Proposición 3.1 de [40]): Dada una variedad $(\Sigma, \tilde{g})$ la cuál no admite campos de Killing conformes y el dato conforme $(\tilde{g}, \sigma, \tau)$ es del tipo trompeta tal que $\nabla\tau \in C^{0,\mu}_{-\delta',-\nu-2}$, entonces cualquier solución W_ϕ de la ecuación de momento (4.2) satisface

$$|LW_\phi| \leq K_\tau r^{-\frac{\gamma}{2}-1} e^{-\delta x} ||\phi||_0^{\alpha+1} \tag{4.42}$$

Donde $K_\tau = K||\tilde{D}\tau||_{0,-\delta'}$, K una constante que no depende de ϕ o τ

Demostración. Esta prueba es una extensión de la demostración la proposición 3.1 del paper [40].

Utilizamos $\nu = -\frac{\gamma}{2}$ Tenemos

$$|LW_\phi| = e^{-\delta x} r^{-\nu-1} |e^{-(-\delta x)} r^{-(-\nu-1)} LW_\phi| \leq e^{-\delta x} r^{-\nu-1} ||LW_\phi||_{L^p_{-\delta,-\nu-1}} \leq Ce^{-\delta x} r^{-\nu-1} ||LW_\phi||_{W^{1,p}_{-\delta,-\nu-1}} \tag{4.43}$$

Como L denota un mapa acotado tal que va de $W^{2,p}_{-\delta,-\nu} \oplus \mathscr{Y}$ a $W^{1,p}_{-\delta,-\nu-1}$

$$Ce^{-\delta x} r^{-\nu-1} ||LW_\phi||_{W^{1,p}_{-\delta,-\nu-1}} \leq Ce^{-\delta x} r^{-\nu-1} ||W_\phi||_{W^{2,p}_{-\delta,-\nu} \oplus \mathscr{Y}} \tag{4.44}$$

Utilizando el teorema 2.3 de [40] tenemos que W_ϕ pertenece a $W^{2,p}_{-\delta,-\nu} \oplus \mathscr{Y}$ donde dotamos al subespacio $\mathscr{Y}$ con la norma $W^{2,p}_{-\delta,-\nu}$. Entonces la existencia de una inversa generalizada para $(\Delta_L W)^j = \tilde{D}_i(LW)^{ij}$ implica que

$$Ce^{-\delta x} r^{-\nu-1} ||W_\phi||_{W^{2,p}_{-\delta,-\nu} \oplus \mathscr{Y}} \leq C' e^{-\delta x} r^{-\nu-1} ||\phi^{\alpha+1} \tilde{D}\tau||_{L^p_{-\delta,-\nu-2}} \tag{4.45}$$

Utilizando un p suficientemente grande y argumentos de embedding [39] se tiene

$$Ce^{-\delta x} r^{-\nu-1} ||W_\phi||_{C^{1,\mu}_{-\delta,-\nu}} \leq C' e^{-\delta x} r^{-\nu-1} ||\phi^{\alpha+1} \tilde{D}\tau||_{L^p_{-\delta,-\nu-2}} \leq C' e^{-\delta x} r^{-\nu-1} ||\phi||_0^{\alpha+1} ||\tilde{D}\tau||_{0,\delta'} \tag{4.46}$$

□

4.2.1. Supersolución de las ecuaciónes de vínculo

En esta sección construimos una supersolución por partes, encontrando una en cada extremo, que luego se empalman en la región intermedia.

Final asintóticamente plano E_e

Analizamos primero el final E_e. Fijamos una función F idénticamente igual a $r^{-\gamma-2}$ sobre E_e y a e^{-x} sobre E_c. Aquí $\tilde{R} = R_e > 0$, es decir aquí el escalar de curvatura es estrictamente positivo. Gracias a esto y a la Proposición 3.2 de [27] se puede asegurar la existencia de una única solución ψ a

$$P(\psi + \chi_e) = (\Delta_{\tilde{g}} - C_n R_e)(\psi + \chi_e) = -F \tag{4.47}$$

Para que la solución ψ sea positiva, pedimos que

$$C_n R_e \chi_e - F < 0 \tag{4.48}$$

Veamos en detalle este requisito. Si asumimos que existe una subsolución ψ_- y una supersolución ψ_+ de (4.48) tales que $\psi_- < \psi_+$, entonces existe una solución ψ tal que $\psi_- < \psi < \psi_+$. Si se quiere que $0 < \psi$, se puede tomar $\psi_- = 0$. Para que cero sea una subsolución de la ecuación (4.48) se debe cumplir que

$$(\Delta_{\tilde{g}} - C_n R_e)(\psi_- + \chi_e) \geq -F \tag{4.49}$$

$$(\Delta_{\tilde{g}} - C_n R_e)(\chi_e) \geq -F \tag{4.50}$$

Y esto ocurre si se satisface (4.48).

Luego, podemos descomponer a ψ como $\psi = C_\gamma r^{-\gamma} + \hat{\psi}$ con $\hat{\psi} \in C^{2,\alpha}_{-1,-2\gamma}$ y $C_\gamma = (\gamma^2 + (n-2)\gamma)^{-1}$ [27]. El hecho de que $\hat{\psi}$ esté dentro del espacio de Hölder mencionado, indica que es una función 2 veces continuamente diferenciable, cuyas 2 primeras derivadas son Hölder continuas con exponente α. Y los pesos del espacio, señalan que es una función que decae en infinito de la forma $r^{-2\gamma}$ o más rápido. Esto en particular indica que existe un punto $r_0 > 1$ tal que $\psi + \chi_e$ es decreciente sobre la región E_e para cualquier $r \geq r_0$. Esto también se puede ver cualitativamente con el siguiente argumento. Consideremos coordenadas esféricas r, θ, φ

$$\partial_r(\chi_e + \psi) = \partial_r \psi = \partial_r(C_\gamma r^{-\gamma} + \hat{\psi}) = -\gamma C_\gamma r^{-\gamma-1} + \partial_r \hat{\psi} \tag{4.51}$$

Como $\hat{\psi}$ decae más rápido que $r^{-\gamma}$ entonces suficientemente lejos, domina el primer termino, que es negativo. Lo que implica que para r suficientemente grande $\psi + \chi_e$ es decreciente. El valor r_0 es algún valor de r tal que a partir de ahí domina el primer término para todo θ, φ. Fijando $r_0 > 1$, sea $a = \min_{r=r_0}(1+\psi) > 1$.

Multiplicamos a $(1+\psi)$ por una constante η, suficientemente chica, para que $\eta(1+\psi)$ sea supersolución de las ecuaciones de vínculo. Notemos que para demostrar que $\bar{\phi} = \eta(1+\psi)$ es supersolución, utilizando la notación del operador $\mathrm{Lich}_\phi(\theta)$, debemos verificar que

$$\mathrm{Lich}_\phi(\eta(1+\psi)) \leq 0 \tag{4.52}$$

Esto se ve rápidamente recordando la definición de supersolución hecha en el capítulo 2. $\bar{\phi}$ es supersolucion de la ecuación $\Delta_{\tilde{g}}\phi = F(\vec{r},\phi)$ si satisface

$$\Delta_{\tilde{g}}\bar{\phi} \leq F(\vec{r},\bar{\phi}) \tag{4.53}$$

En este caso $F(\vec{r},\phi) = C_n\tilde{R}\phi - C_n|\sigma + LW_\phi|^2\phi^{-(\alpha+2)} + \tilde{\beta}\phi^\alpha$. Sumando a ambos lados de la última desigualdad $-F(\vec{r},\bar{\phi})$ se llega a que (4.53) es equivalente a la inecuación (4.52).

Aplicando el operador Lich_ϕ al candidato a supersolución $\eta(1+\psi)$ tenemos

$$\text{Lich}_\phi(\eta(1+\psi)) = (\Delta_{\tilde{g}} - C_n\tilde{R})(\eta(1+\psi)) - \tilde{\beta}(\eta(1+\psi))^\alpha + C_n|\sigma + LW_\phi|^2(\eta(1+\psi))^{-(\alpha+2)} \tag{4.54}$$

En este final $\tilde{R}|_{E_e} = R_e > 0$. En lo siguiente usamos que $\tilde{\beta} > 0$ para descartar el segundo término, acotando de está manera por arriba la igualdad anterior.

$$\text{Lich}_\phi(\eta(1+\psi)) \leq -\eta F + C_n(\eta(1+\psi))^{-(\alpha+2)}|\sigma + LW_\phi|^2 \tag{4.55}$$

$$\text{Lich}_\phi(\eta(1+\psi)) \leq -\eta F + C_n(\eta(1+\psi))^{-(\alpha+2)}(2|\sigma|^2 + 2|LW_\phi|^2) \tag{4.56}$$

$$\text{Lich}_\phi(\eta(1+\psi)) \leq -\eta F + 2C_n(\eta(1+\psi))^{-(\alpha+2)}\left(r^{-2(\frac{\gamma}{2}+1)}|r^{-(-\frac{\gamma}{2}-1)}\sigma|^2 + |LW_\phi|^2\right) \tag{4.57}$$

Utilizando la proposición 5, encontramos

$$\text{Lich}_\phi(\eta(1+\psi)) \leq -\eta F + 2C_n(\eta(1+\psi))^{-(\alpha+2)}\left(r^{-(\gamma+2)}||\sigma||^2_{0,-\frac{\gamma}{2}-1} + K_\tau^2||\phi||_0^{2(\alpha+1)}r^{-(\gamma+2)}\right) \tag{4.58}$$

Como ψ decae como $r^{-\gamma}$ en este final y $\phi < \eta(1+\psi)$, tenemos

$$\text{Lich}_\phi(\eta(1+\psi)) \leq -\eta F + 2C_n\eta^{-(\alpha+2)}r^{-(\gamma+2)}||\sigma||^2_{0,-\frac{\gamma}{2}-1} + 2C_nK_\tau^2\eta^{-(\alpha+2)}\eta^{2(\alpha+1)}r^{-(\gamma+2)} \tag{4.59}$$

Redefiniendo las constantes como $C_1 = 2C_n$ y $C_2 = 2C_nK_\tau^2$ la desigualdad (4.59) es equivalente a

$$\text{Lich}_\phi(\eta(1+\psi)) \leq -\eta F + C_1\eta^{-(\alpha+2)}r^{-(\gamma+2)}||\sigma||^2_{0,-\frac{\gamma}{2}-1} + C_2\eta^\alpha r^{-(\gamma+2)} \tag{4.60}$$

Dada esta desigualdad, buscamos condiciones sobre la constante η y los datos semilla τ y σ para que se cumpla

$$-\eta F + C_1\eta^{-(\alpha+2)}r^{-(\gamma+2)}||\sigma||^2_{0,-\frac{\gamma}{2}-1} + C_2\eta^\alpha r^{-(\gamma+2)} \leq 0 \tag{4.61}$$

Para ello pedimos que se satisfaga

$$-\frac{\eta}{2}F + C_2\eta^\alpha r^{-(\gamma+2)} < 0 \tag{4.62}$$

Esto impone que η sea suficientemente pequeño, donde esto significa que

$$\eta^{\alpha-1} < \frac{Fr^{\gamma+2}}{2C_2} \tag{4.63}$$

También pedimos que $||\sigma||_{0,-\frac{\gamma}{2}-1}$ sea tal que

$$-\frac{\eta}{2}F + C_1\eta^{-(\alpha+2)}r^{-(\gamma+2)}||\sigma||^2_{0,-\frac{\gamma}{2}-1} < 0 \tag{4.64}$$

Lo cual también impone otra cota para η

$$\frac{2C_1||\sigma||^2_{0,-\frac{\gamma}{2}-1}}{Fr^{\gamma+2}} < \eta^{\alpha+3} \tag{4.65}$$

De esta forma mostramos que para ciertas elecciones del dato semilla y de la constante η se tiene que $\eta(1+\psi)$ es supersolución sobre E_e.

Región intermedia $\mathcal{K}$

El siguiente paso es extender la supersolución a la región intermedia. Como $(1+\psi)$ es decreciente para r suficientemente grande, hay un $r_1 > r_0$ tal que

$$1 < \max_{r=r_1}(1+\psi) < a \tag{4.66}$$

Fijando r_1 entonces tomamos $\tilde{R}|_{\mathcal{K}}$ no positivo en alguna región tal que $\tilde{R}|_{\mathcal{K}} \geq R_0$ con R_0 negativo.

En esta región proponemos como supersolución una constante $\bar{\phi} = \epsilon_+$. Es decir, buscamos que

$$\mathrm{Lich}_\phi(\epsilon_+) \leq 0 \tag{4.67}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lich}_\phi(\epsilon_+) &= (\Delta_{\tilde{g}} - C_n\tilde{R})\epsilon_+ - \beta\epsilon_+^\alpha + C_n|\sigma + LW_\phi|^2\epsilon_+^{-(\alpha+2)} && (4.68)\\
&\leq C_n|R_{\mathcal{K}}|\epsilon_+ - \beta\epsilon_+^\alpha + C_n(2|\sigma|^2 + 2|LW_\phi|^2)\epsilon_+^{-(\alpha+2)} && (4.69)\\
&\leq C_n|R_0|\epsilon_+ - \beta\epsilon_+^\alpha + 2C_n||\sigma||_0^2\epsilon_+^{-(\alpha+2)} + 2C_n|LW_\phi|^2\epsilon_+^{-(\alpha+2)} && (4.70)
\end{aligned}$$

Utilizando la proposición 5, se puede acotar por arriba la anterior desigualdad por

$$\mathrm{Lich}_\phi(\epsilon_+) \leq C_n|R_0|\epsilon_+ - \beta\epsilon_+^\alpha + 2C_n||\sigma||_0^2\epsilon_+^{-(\alpha+2)} + 2C_nK_\tau^2||\phi||_0^{2(\alpha+1)}\epsilon_+^{-(\alpha+2)} \tag{4.71}$$

Con $D_2 = 2C_nK_\tau^2$ y dado que $\phi < \epsilon_+$, llegamos a que

$$\mathrm{Lich}_\phi(\epsilon_+) \leq C_n|R_0|\epsilon_+ - \beta\epsilon_+^\alpha + 2C_n||\sigma||_0^2\epsilon_+^{-(\alpha+2)} + D_2\epsilon_+^\alpha \tag{4.72}$$

De esta cota para $\mathrm{Lich}_\phi(\epsilon_+)$ obtenemos condiciones para que se cumpla

$$C_n|R_0|\epsilon_+ - \beta\epsilon_+^\alpha + 2C_n||\sigma||_0^2\epsilon_+^{-(\alpha+2)} + D_2\epsilon_+^\alpha \leq 0 \tag{4.73}$$

La cual puede ser reescrita como

$$C_n|R_0|\epsilon_+ - (\beta - D_2)\epsilon_+^\alpha + 2C_n||\sigma||_0^2\epsilon_+^{-(\alpha+2)} \leq 0 \tag{4.74}$$

En primer lugar elegimos

$$\beta - D_2 > 0 \tag{4.75}$$

notando que esta es una condición sobre τ y su derivada.

Si tenemos

$$C_n|R_0|\epsilon_+ - \frac{(\beta - D_2)}{2}\epsilon_+^\alpha \leq 0 \tag{4.76}$$

y

$$2C_n||\sigma||_0^2\epsilon_+^{-(\alpha+2)} - \frac{(\beta - D_2)}{2}\epsilon_+^\alpha \leq 0 \tag{4.77}$$

entonces automáticamente se satisface (4.73). Estudiemos estas dos restricciones sobre los datos semilla.

La primera implica

$$\left(\frac{C_n|R_0|}{\beta - D_2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \leq \epsilon_+ \tag{4.78}$$

es decir una cota inferior para la constante ϵ_+. Por otro lado la segunda desigualdad implica

$$\left(\frac{4C_n||\sigma||_0^2}{\beta - D_2}\right)^{\frac{1}{2(\alpha+1)}} \leq \epsilon_+ \tag{4.79}$$

Entonces

$$\omega \leq \epsilon_+ \tag{4.80}$$

con

$$\omega = \max\left[\left(\frac{C_n|R_0|}{\beta - D_2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \left(\frac{4C_n||\sigma||_0^2}{\beta - D_2}\right)^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}\right] \tag{4.81}$$

Para que la supersolución definida por partes sea suave, se necesita que los intervalos de definición de η y ϵ_+ sean no nulos y que la intersección entre ω y $(\eta, a\eta)$ sea no nula.

Recordando las inecuaciónes para η, esta constante pertenece al intervalo

$$I_1 = \left(\left(\frac{2C_1\|\sigma\|^2_{0,-\frac{\gamma}{2}-1}}{Fr^{\gamma+2}}\right)^{\frac{1}{\alpha+3}}, \left(\frac{Fr^{\gamma+2}}{2C_2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) \tag{4.82}$$

En particular la interacción requerida implica que

$$\left(\frac{C_n|R_0|}{\beta - D_2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \leq \left(\frac{Fr^{\gamma+2}}{2C_2}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{4.83}$$

Con esta desigualdad encontramos una restricción en que tan negativa puede hacerse el escalar de curvatura. Ya que se tiene

$$|R_0| \leq 2Fr^{\gamma+2}(\frac{\tau^2}{3K_\tau^2} - 1) \tag{4.84}$$

es decir

$$R_0 \geq -2Fr^{\gamma+2}(\frac{\tau^2}{3K_\tau^2} - 1) \tag{4.85}$$

Por el decaimiento que tiene F en el final asitóticamente plano, $Fr^{\gamma+2}$ va como una constante.

El hecho de que exista o no una intersección como la que se busca, va a estar intrínsecamente relacionado con las condiciones y limites que se le imponen a los datos semilla.

La importancia de elegir $r_0 < r_1$ como se hizo, garantiza que $\min\{\eta(1+\psi), \epsilon_+\}$ sea supersolución global en $E_{r_0} = E_e \cap \{r \geq r_0\}$.

Final asintóticamente cilíndrico E_c

La supersolución constante ϵ_+ es una supersolución global, pero es importante contar con una supersolución (y una subsolución) que presenten el comportamiento asintótico apropiado en los finales. De esta forma se controla el comportamiento asintótico de la solución, que existe al aplicar el teorema de. En el final E_c también buscamos una supersolución. Para comenzar la construcción de la supersolución en esta región, introducimos la ecuación de Lichnerowicz reducida

$$\Delta_{g_\Theta}\mathring{\phi} - C_n\mathring{R}\mathring{\phi} - \mathring{\beta}\mathring{\phi}^\alpha + C_n\mathring{\sigma}^2\mathring{\phi}^{-(\alpha+2)} = 0 \tag{4.86}$$

Aquí $\mathring{\phi}$ es la solución a la ecuación, g_Θ es la métrica inducida sobre la sección transversal Θ. $\mathring{R}$ es el escalar de curvatura asociado a esta métrica y $\mathring{\beta}$ es una función constante que es el limite asintótico de β. Hay que notar que esta ecuación difiere de la ecuación de Lichnerowicz en la región E_c, dado que las dimensiones en ellas son distintas, lo que conduce a que las constantes involucradas en ellas son distintas.

Demostramos brevemente la existencia de una solución $\mathring{\phi}$ de la ecuación de Lichnerowicz reducida siguiendo a [40]. Veamos que $\bar{\phi} = \tilde{\epsilon}_+$ es supersolución de (4.86) y $\underline{\phi} = tu_1$ es subsolución, con t una constante y u_1 una función en particular. Entonces existe $\mathring{\phi}$ tal que $tu_1 < \mathring{\phi} < \tilde{\epsilon}_+$. Comenzando por la supersolución

$$-C_n\mathring{R}\tilde{\epsilon}_+ - \mathring{\beta}\tilde{\epsilon}_+^\alpha + C_n\mathring{\sigma}\tilde{\epsilon}_+^{-(\alpha+2)} \leq -C_n\mathring{R}\tilde{\epsilon}_+ + C_n\mathring{\sigma}\tilde{\epsilon}_+^{-(\alpha+2)} \leq 0 \tag{4.87}$$

De aquí se ve que la última desigualdad se cumple si se toma

$$\tilde{\epsilon}_+^{\alpha+3} > \frac{\mathring{\sigma}^2}{\mathring{R}} \tag{4.88}$$

Por lo que hay una $\tilde{\epsilon}_+$ tal que es supersolución de la ecuación de Lichnerowicz reducida.

Sean h, a y f funciones suaves sobre una variedad compacta Riemanniana (Θ, g_Θ) con $f \geq 0$, $a > 0$ y $f + h \geq c > 0$. Sea la ecuación

$$\Delta_{g_\Theta}u - hu = fu^{\bar{\alpha}} - au^{-\bar{\gamma}} \tag{4.89}$$

con $\bar{\alpha} > 1$, $\bar{\gamma} > 0$. La positividad de $h + f$ hace que exista solución u_1 a

$$\Delta_{g_\Theta}u_1 - (h+f)u_1 = -a \tag{4.90}$$

Por el principio de máximo $u_1 > 0$. Se elige una constante t tal que tu_1 sea subsolución de (4.89).

$$\Delta_{g_\Theta}(tu_1) - h(tu_1) = -at + ftu_1 \tag{4.91}$$

Pedimos que

$$-at + ftu_1 \geq f(tu_1)^{\bar{\alpha}} - a(tu_1)^{-\bar{\gamma}} \tag{4.92}$$

Que se satisface si $at \leq a(tu_1)^{-\bar{\gamma}}$ y $ftu_1 \leq f(tu_1)^{-\bar{\alpha}}$.

Al elegir $h = C_n \mathring{R}$, $f = \mathring{\beta}$, $a = C_n \mathring{\sigma}^2$, $\bar{\alpha} = \alpha$ y $\bar{\gamma} = \alpha + 2$, en el desarrollo anterior se demostró que tu_1 es subsolución de la ecuación de Lichnerowicz. Por lo que se concluye en que existe solución $\mathring{\phi}$ a la misma.

Recuperando constantes introducidas en la sección anterior, δ_* una constante positiva tal que se eligen $0 < \delta < \delta' < \delta_*$, se asume que $\tilde{D}\tau \in C^{0,\mu}_{-\delta'}$ y se toma $\nu < \frac{\delta}{2\alpha+2}$. Sea u la única solución de la ecuación

$$\Delta_{\tilde{g}} u - C_n R_c u = -\chi_c e^{-\nu x} \tag{4.93}$$

Recordamos que $R_c > 0$. Por el principio de máximo, existen constantes k_1 y k_2 tales que $k_1 e^{-\nu x} \leq u \leq k_2 e^{-\nu x}$.

Con estas definiciones probamos a continuación que en el final asintóticamente cilíndrico $\bar{\phi} = \mathring{\phi} + bu$ es una supersolución, con b una constante. Para ello debemos verificar que

$$\mathrm{Lich}_\phi(\mathring{\phi} + bu) \leq 0 \tag{4.94}$$

con

$$\mathrm{Lich}_\phi(\mathring{\phi} + bu) = (\Delta_{\tilde{g}} - C_n R_c)\mathring{\phi} - be^{-\nu x} - \beta(\mathring{\phi} + bu)^\alpha + C_n|\sigma + LW_\phi|^2(\mathring{\phi} + bu)^{-(\alpha+2)} \tag{4.95}$$

Aquí el escalar de curvatura $\tilde{R}|_{E_c} = R_c$ tiene como limite $\mathring{R} > c > 0$. Como $\alpha > 1$, por convexidad, se puede acotar la anterior expresión por

$$\begin{aligned}\mathrm{Lich}_\phi(\mathring{\phi} + bu) \leq{}& (\Delta_{\tilde{g}} - C_n \mathring{R})\mathring{\phi} - \beta\mathring{\phi}^\alpha - be^{-\nu x} - \beta(bu)^\alpha \\ &+ C_n\left(|\sigma|^2 + 2|\sigma||LW_\phi| + |LW_\phi|^2\right)(\mathring{\phi} + bu)^{-(\alpha+2)}\end{aligned} \tag{4.96}$$

Por el mismo motivo, se tiene que $(\mathring{\phi} + bu)^{-(\alpha+2)} < \min\{\mathring{\phi}^{-(\alpha+2)}, (bu)^{-(\alpha+2)}\}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Lich}_\phi(\mathring{\phi} + bu) \leq{}& (\Delta_{\tilde{g}} - C_n \mathring{R})\mathring{\phi} - \beta\mathring{\phi}^\alpha + C_n|\sigma|^2\mathring{\phi}^{-(\alpha+2)} - be^{-\nu x} - \beta(bu)^\alpha \\ &+ C_n\left(2|\sigma||LW_\phi| + |LW_\phi|^2\right)(bu)^{-(\alpha+2)}\end{aligned} \tag{4.97}$$

Los primeros términos se pueden expresar como $\mathrm{Lich}_0(\mathring{\phi})$, al cual se le solicitará que decaiga más rápido que $e^{-\nu x}$ cuando $x \to \infty$. Por este motivo, se continuará con el análisis de los últimos 4 términos. Los cuales pueden acotarse por arriba por la siguiente expresión

$$-be^{-\nu x} - \beta(bu)^\alpha + C_n 2||\sigma||_0|LW_\phi|(bu)^{-(\alpha+2)} + C_n|LW_\phi|^2(bu)^{-(\alpha+2)} \tag{4.98}$$

Por características de la solución u, previamente mencionadas, se encuentra la siguiente cota superior

$$-be^{-\nu x}-\beta k_1^{\alpha}b^{\alpha}e^{-\alpha\nu x}+C_n2k_1^{-(\alpha+2)}||\sigma||_0|LW_\phi|b^{-(\alpha+2)}e^{\nu x(\alpha+2)}+C_nk_1^{-(\alpha+2)}|LW_\phi|^2b^{-(\alpha+2)}e^{\nu x(\alpha+2)} \tag{4.99}$$

Haciendo uso de la proposición 5 para tratar con la parte vectorial de la ecuación, se ve que la expresión anterior es menor o igual a

$$\begin{aligned}&-be^{-\nu x}-\beta k_1^{\alpha}b^{\alpha}e^{-\alpha\nu x}+C_n2k_1^{-(\alpha+2)}||\sigma||_0K_\tau||\phi||_0^{\alpha+1}e^{-\delta x}b^{-(\alpha+2)}e^{\nu x(\alpha+2)}\\ &\qquad+C_nk_1^{-(\alpha+2)}K_\tau^2||\phi||_0^{2(\alpha+1)}e^{-2\delta x}b^{-(\alpha+2)}e^{\nu x(\alpha+2)}\end{aligned} \tag{4.100}$$

Definiendo las constantes $A_1=k_1^{\alpha}$, $A_2=2C_nk_1^{-(\alpha+2)}K_\tau$ y $A_3=C_nk_1^{-(\alpha+2)}K_\tau^2$, y dado que $\phi<\bar{\phi}=\mathring{\phi}+bu$, se tiene

$$\begin{aligned}&-be^{-\nu x}-A_1\beta b^{\alpha}e^{-\alpha\nu x}+A_2||\sigma||_0||\mathring{\phi}+bu||_0^{\alpha+1}b^{-(\alpha+2)}e^{x[\nu(\alpha+2)-\delta]}\\ &\qquad+A_3||\mathring{\phi}+bu||_0^{2(\alpha+1)}b^{-(\alpha+2)}e^{x[\nu(\alpha+2)-2\delta]}\end{aligned} \tag{4.101}$$

Si la constante b se escoge tal que

$$||\frac{\mathring{\phi}}{b}+u||_0\leq 2||u||_0 \tag{4.102}$$

y se redefinen las constantes como $\tilde{A}_2=A_2(2||u||_0)^{\alpha+1}$ y $\tilde{A}_3=A_3(2||u||_0)^{2(\alpha+1)}$, la última expresión está acotada superiormente por

$$-be^{-\nu x}-A_1\beta b^{\alpha}e^{-\alpha\nu x}+\tilde{A}_2||\sigma||_0b^{-1}e^{x[\nu(\alpha+2)-\delta]}+\tilde{A}_3b^{\alpha}e^{x[\nu(\alpha+2)-2\delta]} \tag{4.103}$$

De aquí observamos que si $\nu(\alpha+2)<\nu(2\alpha+2)<\delta$, los dos últimos términos decaen mas rápido que el segundo término, al $x\to\infty$. Y eso ocurre al imponer la condición sobre la constante ν. Con la suposición realizada para los primeros cuatro términos de (4.97), hay un x_0 tal que $\mathrm{Lich}_0(\mathring{\phi})<e^{-\nu x}$ para $x>x_0$. Escogemos $x_1>x_0$ tal que

$$-A_1\beta b^{\alpha}e^{-\alpha\nu x}+\tilde{A}_2||\sigma||_0b^{\alpha}e^{x[\nu(\alpha+2)-\delta]}+\tilde{A}_3b^{\alpha}e^{x[\nu(\alpha+2)-2\delta]} \tag{4.104}$$

para $x>x_1$. Claramente se tiene $\tilde{A}_2||\sigma||_0b^{-1}e^{x[\nu(\alpha+2)-\delta]}<\tilde{A}_2||\sigma||_0b^{\alpha}e^{x[\nu(\alpha+2)-\delta]}$

La importancia de elegir $x_0<x_1<x$ es que garantiza que $\min\{\mathring{\phi}+bu,\epsilon_+\}$ sea supersolución global en $E_{x_1}=E_c\cap\{x\geq x_1\}$.

Con esto probamos la siguiente proposición

Proposición 6. Supersolución: Sea $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \tilde{g}, \tilde{\sigma}, \tau)$ un dato semilla tipo trompeta con $\tilde{R}$ posiblemente negativo sólo en una región compacta de $\mathbb{R}^3$. Entonces existe supersolución $\bar{\phi}$ de la ecuación de Lichnerowicz de vacío (4.1).

$$\bar{\phi} = \begin{cases} \min(\eta(1+\psi), \epsilon_+) & \text{en } E_{r_0} \\ \epsilon_+ & \text{en } \Sigma \setminus (E_{r_0} \cup E_{x_1}) \\ \min(\mathring{\phi}_c + bu, \epsilon_+) & \text{en } E_{x_1} \end{cases} \tag{4.105}$$

es una supersolución global de las ecuaciones de vínculo. Aquí, $\epsilon_+ \geq \omega$ con ω dado por (4.81), $\eta \in I_2$ con I_2 definido en (4.82), b debe satisfacer (4.102) y $\mathring{\phi}_c$ es solución de la ecuación reducida (4.86).

Observamos que las restricciones sobre las constantes η, ϵ_+ se traducen en restricciones sobre el dato semilla. En particular notamos que el hecho de que los intervalos I_1, I_2 deben ser no vacíos, impone relaciones entre $\tilde{g}$, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{R}$ y τ. Esto es interesante, ya que no observamos esta dependencia en el caso explorado en la sección (3.1.1), sino que sólo obtuvimos condiciones para la métrica semilla.

4.2.2. Subsolución de las ecuaciones de vínculo

Con un desarrollo semejante, en esta sección construimos una subsolución global por partes para las ecuaciones de vínculo. Las condiciones impuestas sobre el escalar de curvatura son las mismas que las enunciadas a comienzo de la sección, que han sido las utilizadas para el desarrollo de la supersolución.

Final asintóticamente cilíndrico E_c

Comenzamos con el final asintóticamente cilíndrico. Para ello tomamos $x_2 > 1$ tal que se tiene que

$$\mathrm{Lich}_0(\mathring{\phi}) + e^{-\nu x} - C_n|LW_\phi|(|LW_\phi| + 2|\sigma|)(\min_\Sigma \mathring{\phi})^{-(\alpha+2)} \geq 0 \tag{4.106}$$

sobre $E_{x_2} = E_c \bigcap \{x \geq x_2\}$. En esta región consideramos el problema elíptico con condiciones de contorno

$$(\Delta_{\tilde{g}} - C_n R_c)v = -e^{-\nu x} \tag{4.107}$$

$$v|_{\partial E_{x_2}} = \mathring{\phi}|_{\partial E_{x_2}} \tag{4.108}$$

La subsolución propuesta en esta región es la función positiva $\varphi = \mathring{\phi}_c - v$.

Buscamos

$$\mathrm{Lich}_\phi(\varphi) \geq 0 \tag{4.109}$$

Esta condición es equivalente a pedir que φ sea subsolución.

El operador Lich_ϕ aplicado a la función φ está dado por

$$(\Delta_{\tilde{g}} - C_n\tilde{R})(\mathring{\phi} - v) - \tilde{\beta}(\mathring{\phi} - v)^\alpha + C_n|\sigma + LW_\phi|^2(\mathring{\phi} - v)^{-(\alpha+2)} \tag{4.110}$$

Como se tiene $\tilde{R}|_{E_c} = R_c > c > 0$, la expresión anterior está acotada por abajo por

$$\text{Lich}_\phi(\varphi) \geq (\Delta_{\tilde{g}} - C_n\tilde{R})\mathring{\phi} + e^{-\nu x} - \tilde{\beta}\mathring{\phi}^\alpha + C_n(|LW_\phi|^2 + |\sigma|^2 - 2|LW_\phi||\sigma|)\mathring{\phi}^{-(\alpha+2)} \quad (4.111)$$

Reorganizando términos y dado que $C_n(|LW_\phi|^2 - 2|LW_\phi||\sigma|) > C_n(|LW_\phi|^2 - 2|LW_\phi||\sigma|) - 2C_n|LW_\phi|^2$, se llega a que

$$\text{Lich}_\phi(\varphi) \geq (\Delta_{\tilde{g}} - C_n\tilde{R})\mathring{\phi} - \tilde{\beta}\mathring{\phi}^\alpha + C_n|\sigma|^2\mathring{\phi}^{-(\alpha+2)} + e^{-\nu x} - C_n(|LW_\phi|^2 + 2|LW_\phi||\sigma|)\mathring{\phi}^{-(\alpha+2)} \quad (4.112)$$

$$\text{Lich}_\phi(\varphi) \geq (\Delta_{\tilde{g}} - C_n\tilde{R})\mathring{\phi} - \tilde{\beta}\mathring{\phi}^\alpha + C_n|\sigma|^2\mathring{\phi}^{-(\alpha+2)} + e^{-\nu x} - C_n(|LW_\phi|^2 + 2|LW_\phi||\sigma|)(\min_\Sigma\mathring{\phi})^{-(\alpha+2)} \quad (4.113)$$

Los primeros cuatro términos pueden ser expresados en función del operador Lich como $\text{Lich}_0(\mathring{\phi})$, por lo que

$$\text{Lich}_\phi(\varphi) \geq \text{Lich}_0(\mathring{\phi}) + e^{-\nu x} + C_n(|LW_\phi|^2 - 2|LW_\phi||\sigma|)(\min_\Sigma\mathring{\phi})^{-(\alpha+2)} \quad (4.114)$$

Recordando que $\text{Lich}_0(\mathring{\phi})$ decae mas rápido que $e^{-\nu x}$ en este final, con (4.106) se satisface que

$$\text{Lich}_\phi(\mathring{\phi} - v) \geq 0 \quad (4.115)$$

4.2.2.1. Final asintóticamente plano E_e

Sobre el final asintóticamente plano tenemos

$$\Delta(1 - r^{-\nu}) = (\nu - \nu^2)r^{-\nu-2} + \mathcal{O}(r^{-\gamma-2}) \quad (4.116)$$

Entonces para cualquier $\eta(1 - Cr^{-\nu-2})$, donde $C > 0$ es una constante, se tiene que

$$\begin{aligned}\text{Lich}_\phi(\eta(1 - Cr^{-\nu-2})) = \Delta_{\tilde{g}}\eta(1 - Cr^{-\nu-2}) - C_n\tilde{R}\eta(1 - Cr^{-\nu-2}) - \tilde{\beta}(\eta(1 - Cr^{-\nu-2}))^\alpha \\ + C_n|\sigma + LW_\phi|^2(\eta(1 - Cr^{-\nu-2}))^{-(\alpha+2)} \quad (4.117)\end{aligned}$$

Veamos que que $\eta(1 - Cr^{-\nu-2}) \leq \phi$ funciona como subsolución en el final E_e, es decir

$$\text{Lich}_\phi(\eta(1 - Cr^{-\nu-2})) \geq 0 \quad (4.118)$$

La métrica $\tilde{g}$ es del tipo trompeta por lo que $\Delta_{\tilde{g}} \to \Delta$, entonces

$$\text{Lich}_\phi(\eta(1 - Cr^{-\nu-2})) \geq \eta C[(\nu - \nu^2)r^{-\nu-2} + \mathcal{O}(r^{-\gamma-2})] - C_n\tilde{R}\eta - \tilde{\beta}\eta^\alpha + C_n|\sigma + LW_\phi|^2\eta^{-(\alpha+2)} \quad (4.119)$$

Pedimos

$$\eta C[(\nu - \nu^2)r^{-\nu-2} + \mathcal{O}(r^{-\gamma-2})] + C_n|\sigma + LW_\phi|^2\eta^{-(\alpha+2)} \geq C_nR_e\eta + \tilde{\beta}\eta^\alpha \quad (4.120)$$

donde usamo que $\tilde{R}|_{E_e} = R_e$. Notando que

$$C_n(|\sigma|^2 + |LW_\phi|^2)\eta^{-(\alpha+2)} \geq C_n|\sigma + LW_\phi|^2\eta^{-(\alpha+2)} \quad (4.121)$$

y utilizando la proposición 5 se tiene

$$C_n|\sigma|^2\eta^{-(\alpha+2)} + C_n K_\tau^2 r^{-\gamma-2}||\phi||_0^{2(\alpha+1)}\eta^{-(\alpha+2)} \geq C_n|\sigma + LW_\phi|^2\eta^{-(\alpha+2)} \tag{4.122}$$

$$C_n|\sigma|^2\eta^{-(\alpha+2)} + C_n K_\tau^2 r^{-\gamma-2}\eta^{\alpha-1} \geq C_n|\sigma + LW_\phi|^2\eta^{-(\alpha+2)} \tag{4.123}$$

Entonces

$$C[(\nu-\nu^2)r^{-\nu-2} + \mathcal{O}(r^{-\gamma-2})] + C_n|\sigma|^2\eta^{-(\alpha+2)} + C_n K_\tau^2 r^{-\gamma-2}\eta^{\alpha-1} \geq C_n R_e\eta + \tilde{\beta}\eta^\alpha \tag{4.124}$$

Recordamos que se tiene $\tilde{\beta} > 0$ con $\chi_e\tau \in C^{1,\alpha}_{-\delta,-\frac{\gamma}{2}-1}$, $R_e > 0$ tal que $\chi_e R_e \in L^2_{-1,-\gamma-2}$ y $\chi_e\sigma \in C^{1,\alpha}_{-\delta,-\frac{\gamma}{2}-1}$. Por lo que con cualquier elección de $C > 0$ la desigualdad anterior se satisface. Por lo que existe un $r_2 > 1$ tal que $\eta(1 - Cr^{-\nu})$ es una subsolución en $E_{r_2} = E_e \bigcap \{r \geq r_2\}$.

4.2.2.2. Región intermedia $\mathcal{K}$

Finalmente buscamos una subsolución que interpole aquellas encontradas en los finales. Recordando que $\mathcal{K}$ está definido como aquel compacto tal que

$$\mathcal{K} = \overline{\Sigma \setminus (E_e \cup E_c)} \tag{4.125}$$

Claramente $\mathcal{K}$ tiene un borde dado por la unión de dos partes disconexas $\partial_1\mathcal{K}$ y $\partial_2\mathcal{K}$. Donde el primer borde es el aquel con el final E_e y el segundo con el final E_c. Sobre $\mathcal{K}$ se tiene el siguiente problema elíptico con condiciones de contorno

$$\begin{aligned} (\Delta_{\tilde{g}} - C_n\tilde{R}|_{\mathcal{K}} - \tilde{\beta})w &= 0 \\ w|_{\partial_1\mathcal{K}} &= 0 \\ w|_{\partial_2\mathcal{K}} &= \frac{1}{2}\mathring{\phi}|_{\partial_2\mathcal{K}} \end{aligned} \tag{4.126}$$

Donde recordamos que en esta región $R_0 < R_{\mathcal{K}}$ con R_0 negativo. Si

$$C_n R_{\mathcal{K}} + \tilde{\beta} > 0 \tag{4.127}$$

entonces por el principio de máximo se tiene que w es positiva en el interior de $\mathcal{K}$ y además $w < \eta(1 - Cr^{-\nu})$ en $\partial_1\mathcal{K}$ y $w < \varphi$ en $\partial_2\mathcal{K}$ entonces llegamos a la siguiente subsolución

Proposición 7. Subsolución: Consideremos un dato semilla que satisface las condiciones de la Proposición 6 y además que se satisface (4.127). Entonces

$$\underline{\phi} = \begin{cases} \max(w, \eta(1 - Cr^{-\nu})) & \text{en } E_{r_2} \\ w & \text{en } \Sigma\setminus(E_{r_2} \cup E_{x_1}) \\ \max(w, \varphi) & \text{en } E_{x_1} \end{cases} \tag{4.128}$$

es una subsolución global de las ecuaciones de vínculo.

Remarcamos que la condición (4.127) es importante para la validez del principio de máximo. Es automáticamente satisfecha para el caso de escalar de curvatura positivo, como se analiza en [40]. En este caso, notamos que la presencia de una curvatura media no cero es crucial en este paso.

Capítulo 5

Comentarios Finales

Para finalizar discutimos los resultados más importantes del trabajo realizado, los inconvenientes encontrados y los problemas que quedan abiertos.

Espacios Funcionales

Ante la necesidad de describir un dato del tipo trompeta, recurrimos a los espacios funcionales. Estudiamos dos formas de garantizar características de los datos para que describan agujeros negros extremos. En los casos donde el estudio se centra en la ecuación de Lichnerowicz, optamos por exigirle al factor conforme que fuera lo que diera carácter de dato de trompeta a h. Para ello investigamos dos espacios funcionales pesados, espacios de Sobolev con un peso distinto en cada final y de Sobolev con los mismos pesos en los finales. Para el caso en el que el análisis estuviese en las ecuaciones acopladas del sistema LCBY, le requerimos a la métrica semilla que fuera lo que le dé el comportamiento trompeta a h. Para ello definimos lo que sería una métrica trompeta acotando como decae la misma en los fínales a los comportamientos deseados, haciendo uso de espacios de Hölder pesados.

Los espacios de Sobolev dan la noción de solución débil, y por ello fueron utilizados para manipular comportamientos del factor conforme ϕ o de las sub y supersoluciones. Los espacios de Hölder tienen una noción mas diferenciable que los de Sobolev, y es por ello que fueron utilizados para manipular los decaimientos de la métrica semilla.

Una de las dificultades más importantantes que encontramos en este aspecto es que los resultados de los libros de texto y la literatura estandar, no suelen trabajar con estas variedades ni espacios funcionales. Para nuestro análisis los pesos fueron claves para controlar los decaimientos. Motivo por el cuál el trabajo presentado tuvo desafíos al tener que adaptar y extender muchos resultados de estos espacios, a su versión con peso.

Caso CMC

Como un primer paso para abordar el problema de existencia de soluciones de las ecuaciones de vínculo, en la sección 3 estudiamos la existencia de soluciones de la ecuación de Lichnerowicz para el caso de datos maximales. Esto es interesante porque las ecuaciones se desacoplan y uno se puede enfocar solamente en la ecuación escalar, semilineal de Lichnerowicz, de la forma $\Delta_{\tilde{g}}\phi = F(\phi, \vec{r})$. Esto nos permitió familiarizarnos con los detalles y problemas de esta ecuación, los comportamientos asintóticos y el rol que los diferentes elementos de la ecuación juegan a la hora de establecer existencia. En particular, en la sección 3.1.1 observamos que la solución de Reissner Nordström extrema es buena candidata como supersolución por diferentes razones: se la conoce explícitamente y tiene simetría esférica, lo que la hace fácil de manipular, tiene los comportamientos asintóticos adecuados y una interpretación clara como dato para un agujero negro extremo. Este es el contenido de la proposición 1. En la misma encontramos condiciones para la métrica semilla y sus cantidades asociadas, escalar de curvatura semilla y Christoffels. Lo cuál era esperado, debido a la ecuación de vínculo, el dato es Yamabe positivo. Es decir es esperable encontrar condiciones que estén asociadas a este requerimiento físico para el dato.

Sin embargo, debido principalmente al hecho de que tiene simetría esférica, encontramos que los elementos de la familia de agujeros negros extremos de Reissner Norström no son buenos candidatos como subsolución de la ecuación de Lichnerowicz (sección 3.1.2). Aún así, encontramos que bajo ciertas condiciones (esencialmente si la función $F(\vec{r}, \phi)$ es no decreciente en ϕ donde F es la función que aparece en la ecuación de Lichnerowicz.) sobre el dato semilla, uno puede construir una subsolución a partir de la solución de Reissner Nordström que funciona como supersolución. Este es el contenido de la proposición 2. En la cuál se encontró una condición para el dato semilla que involucra todas las cantidades del mismo que aparecen en la función F. Esto no era esperado debido a que se esperaban que los requerimientos solo involucren a la métrica semilla, dada la condición de Yamabe positivo. Quizá esto sea consecuencia del método implementado y no sea una limitación física realmente. Queda por analizar el caso en que la función $F(\vec{r}, \phi)$ no es no decreciente. En este caso, lo que uno debería hacer es deformar la ecuación (es decir, deformar el dato semilla) de tal manera que uno obtenga una ecuación diferentecial para la subsolución más simple que la ecuación original para ϕ, que tenga el mismo comportamiento asintótico pero cuya existencia sea más fácil de probar. Por ejemplo, llevar la ecuación a una ecuación lineal y usar el método de Green para resolverla [18] [22]

Caso non CMC

En la sección 4 comenzamos el estudio de las ecuaciones de vínculo para el caso de curvatura media no constante.

El hecho de que la curvatura media τ sea no constante cambia la situación de dos maneras fundamentales. En primer lugar porque las ecuaciones de vínculo quedan acopladas. Y en segundo lugar porque ahora carácter de Yamabe del dato no está especificado a priori. Es decir que dependiendo del valor de τ y sus derivadas, el dato puede ser Yamabe positivo o no. Este último ingrediente es lo que exploramos en la sección 4

En este caso, las ecuaciones están acopladas. Aún así abordamos el problema en etapas para intentar identificar las sucesivas dificultades que fueren apareciendo. Primero miramos sólo la ecuación de Lichnerowicz, considerando al término de acople como general, pero dado. Luego estudiamos las ecuaciones acopladas.

En la sección 4.1 nos concentramos en la ecuación de Lichnerowicz, y la existencia de sub y supersoluciones para la misma. Al no considerar el acople específico, sino solo el comportamiento global, pudimos investigar el rol del nuevo término (es decir, el término proporcional a la curvatura media). Notamos que no modifica las características básicas de la ecuación siempre que tenga el comportamiento adecuado en los finales asintóticos. En este caso realizamos un estudio similar al caso CMC, es decir, mostramos que existe un valor de Q tal que la solución de Reissner Norström extremo es supersolución de la ecuación de Lichnerowicz no CMC (sección 4.1.1). Observamos sin embargo que el relajar la condición de curvatura escalar positiva para el dato semilla, es clave en la elección de la Q. Es decir que si el escalar de curvatura es negativo, eso *empuja* el valor de Q hacia valores mayores. Eso indica o sugiere el hecho de que la condición de curvatura escalar positiva, o incluso la condición de Yamabe postivo juega un papel importante en la existencia y determinación de la supersolución. Este es el contenido de la proposición 6. En la misma también notamos que el nuevo término asociado a la curvatura media, ayuda a liberar la condición de escalar de curvatura positivo debido al signo del término. Luego, de la misma manera que para el caso CMC maximal, vimos que si la función $F(\vec{r}, \phi, W)$ es no decreciente, uno puede construir una subsolución (sección 4.1.2) a partir de la supersolución. En este caso, nuevamente la no positividad del escalar de curvatura pone restricciones a todo el dato semilla para que de lugar a una subsolución y por lo tanto, a una solución de la ecuación de Lichnerowicz. Este resultado está en la proposición 7

En la sección 4.2 comenzamos el estudio del sistema de ecuaciones de vínculo acopladas por la curvatura media no constante. Para esta parte seguimos las líneas que Leach plantea en [40] [39] para el caso de datos Yamabe positivo. Como mencionamos antes, nos interesa relajar esta positividad del escalar de curvatura y explorar las dificultades que trae aparejadas el hecho de que el mismo sea no positivo . Esta sección es más formal y utiliza espacios funcionales de Sobolev con pesos en los finales para garantizar que las funciones y soluciones, utilizadas y encontradas, tengan el comportamiento esperado para datos trompeta.

Con respecto a la existencia de sub y supersoluciones en este caso, hemos probado la existencia por regiones. Para aprovechar teoremas de existencia de soluciones lineales, hemos tomado el escalar de curvatura negativo sólo en una región acotada de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Esto no es muy restrictivo, ya que como buscamos datos asintóticamente planos en uno de los finales, el escalar de curvatura va a cero en ese final. Y como buscamos datos asintóticamente cilíndricos en el otro final, ahí el escalar de curvatura debe ser estrictamente positivo. Con esta condición, encontramos que las supersoluciones en los finales se pueden tratar de la misma manera que para el caso de R no negativo. Para poder interpolar estas supersoluciones a una supersolución global en toda la variedad encontramos restricciones al dato semilla que involucran al escalar de curvatura, curvatura extrínseca y curvatura media. A pesar de la complejidad técnica de este análisis, remarcamos que hemos obtenido un resultado similar al encontrado para el caso simple de la sección 4.1. Esto es el contenido de las proposiciones 6 para la supersolución y 7 para la subsolución.

Queda como problema abierto el tema de la convergencia de las soluciones encontradas a una solución del sistema acoplado, como se mencionó en la sección 4.2. Nuevamente esperamos que la no positividad del escalar de curvatura juegue un papel importante en esta convergencia. Este problema no es para nada trivial y requiere la utilización de métodos de punto fijo. Este estudio es necesario para poder asegurar la existencia o no existencia al liberar la condición de que el escalar de curvatura sea positivo.

Pruebas numéricas

Sería de enorme utilidad realizar pruebas numéricas de los datos encontrados en este trabajo. En particular para testear las condiciones sobre el dato semilla. Y sobre todo, para testear la convergencia mencionada antes.

Un enfoque interesante sería considerar una familia monoparamétrica de datos semilla, de tipo trompeta, de manera que, por ejemplo un valor de parámetro positivo está relacionado con un escalar de curvatura positivo y un valor negativo de parámetro, con un valor de escalar de curvatura negativo en alguna región compacta de la variedad. Sería interesante estudiar numéricamente el comportamiento de la solución a medida que el parámetro se hace negativo, y ver si la solución existe y es bien comportanda para valores que saquen al dato de la clase Yamabe positivo.

Apéndice A

Ecuaciones de vínculo

Se asume que el espaciotiempo $(M, \bar{g})$ puede ser foliado por una familia de hipersuperficies Σ_t espaciales, las cuales no se intersectan entre sí. Al menos localmente las mismas serán vistas como superficies de nivel de una función escalar t. Esta función es la que se interpretará como función de tiempo global.

Sea Σ una hipersuperficie dentro del espaciotiempo $(M, \bar{g})$. Comenzamos definiendo la primera forma fundamental $h := i^*\bar{g}$ como el pullback de la métrica ambiente en Σ, cuando la misma no es degenerada se llama métrica inducida.

Sea n^c la normal a Σ, definida en toda la hipersuperficie, tal que $n^c n_c = s = cte$. Es de interés los casos en que s es 1 o -1. En el primer caso la normal es un vector espacial, por lo que Σ es una hipersuperficie temporal y h_{ab} es Lorentziana. En el segundo caso la normal es un vector temporal, entonces Σ es es una hipersuperficie espacial y h_{ab} es Riemanniana. Entonces ahora podemos escribir la métrica como

$$h_{ab} = g_{ab} - s n_a n_b \tag{A.1}$$

La 3-derivada covariante esta definida como

$$D_a T^b_c = h^d_a h^b_e h^f_c \nabla_d T^e_f \tag{A.2}$$

El tensor de Riemann sobre Σ está definido como

$$D_{[a} D_{b]} w_c = \frac{1}{2} R^d_{abc} w_d \tag{A.3}$$

Este tensor tiene información sobre la curvatura intrínseca de Σ y no sobre como esta se dobla inmersa en la variedad ambiente. Para ello se definirá un nuevo tensor, la curvatura extrínseca o segunda forma fundamental

$$K_{ab} = h^c_a h^d_b \nabla_{(c} n_{d)} \tag{A.4}$$

Se puede observar también que se puede expresar a la misma en función de la derivada de Lie de la métrica inducida respecto al vector normal $\mathscr{L}_n$. La derivada de Lie a lo largo de un campo vectorial X, mide cuanto cambia el campo tensorial a lo largo de X. Entonces esta forma de expresar a la curvatura extrínseca evidencia la información que el tensor aporta. La segunda forma fundamental indica como la hipersuperficie se curva en la variedad ambiente, es una cantidad extrínseca a la misma.

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\mathscr{L}_n h_{ab} \tag{A.5}$$

Para derivar las ecuaciones de vínculo, se procederá buscando relaciones entre la curvatura extrínseca y los tensores de Riemann, tanto de la variedad ambiente como de la hipersuperficie Σ. Sea w_c un tensor tangente a Σ, es decir $n^c w_c = 0$.

$$D_a D_b w_c = h_a^{a'} h_b^{b'} h_c^{c'} \nabla_{a'} (h_{b'}^{b''} h_{c'}^{c''} \nabla_{b''} w_{c''}) \tag{A.6}$$

$$D_a D_b w_c = h_a^{a'} h_b^{b'} h_c^{c'} [(\nabla_{a'} h_{b'}^{b''}) h_{c'}^{c''} \nabla_{b''} w_{c''} + h_{b'}^{b''} (\nabla_{a'} h_{c'}^{c''}) \nabla_{b''} w_{c''} + h_{b'}^{b''} h_{c'}^{c''} \nabla_{c'} \nabla_{b''} w_{c''}] \tag{A.7}$$

El primer término de esta última expresión expresando a métrica inducida como (A.1) y contrayendo queda

$$h_a^{a'} h_b^{b'} h_c^{c''} (\nabla_{a'} [g_{b'}^{b''} - s n^{b''} n_{b'}]) \nabla_{b''} w_{c''} = -s n^{b''} K_{ab} \nabla_{b''} w_{c''} \tag{A.8}$$

El segundo término al realizar un tratamiento similar

$$h_a^{a'} h_b^{b''} h_c^{c'} (\nabla_{a'} [g_{c'}^{c''} - s n^{c''} n_{c'}]) \nabla_{b''} w_{c''} = s K_{ac} w^{c''} K_{bc''} \tag{A.9}$$

y por último el tercer término

$$h_a^{a'} h_b^{b'} h_c^{c''} \nabla_{a'} \nabla_{b'} w_{c''} \tag{A.10}$$

Es decir

$$D_a D_b w_c = -s n^{b''} K_{ab} \nabla_{b''} w_{c''} + s K_{ac} K_{bc''} w^{c''} + h_a^{a'} h_b^{b'} h_c^{c''} \nabla_{a'} \nabla_{b'} w_{c''} \tag{A.11}$$

Al antisimetrizar (A.11) en los índices a y b obtenemos

$$D_{[a} D_{b]} w_c = \frac{1}{2} s (K_{ac} K_b^d w_d - K_{bc} K_a^d w_d) + \frac{1}{2} h_a^{a'} h_b^{b'} h_c^{c'} \bar{R}^d_{a'b'c'} w_d \tag{A.12}$$

Finalmente reorganizando los términos, se llega a la Identidad de Gauss

$$R^d_{abc} = s (K_{ac} K_b^d - K_{bc} K_a^d) + h_a^{a'} h_b^{b'} h_c^{c'} \bar{R}^d_{a'b'c'} \tag{A.13}$$

Esta identidad nos relaciona el 3-Riemann y la curvatura extrínseca con proyecciones del Riemann de la variedad ambiente. Ahora se buscará una identidad que nos relacione derivadas de la curvatura extrínseca con proyecciones del 4-Riemann.

$$D_a K_{bc} = h_a^{a'} h_b^{b''} h_c^{c'} \nabla_{a'} (h_{b''}^{b'} \nabla_{b'} n_{c'}) \tag{A.14}$$

$$D_a K_{bc} = h_a^{a'} h_b^{b''} h_c^{c'} ([\nabla_{a'} h_{b''}^{b'}] \nabla_{b'} n_{c'} + h_{b''}^{b'} \nabla_{a'} \nabla_{b'} n_{c'}) \tag{A.15}$$

El primer término de esta expresión, luego de contraer y reemplazar a la métrica inducida por (A.1), es equivalente a

$$- s K_{ab} n^d \nabla_d n_c \tag{A.16}$$

El segundo término queda tal cual se muestra en (A.15). De esta forma se obtiene que

$$D_a K_{bc} = -sK_{ab}n^d \nabla_d n_c + h_a^{a'} h_b^{b'} h_c^{c'} \nabla_{a'} \nabla_{b'} n_{c'} \tag{A.17}$$

Antisimetrizando en los índices a y b se llega a la identidad de Codazzi (A.18)

$$D_{[a} K_{b]c} = \frac{1}{2} h_a^{a'} h_b^{b'} h_c^{c'} \bar{R}^d_{a'b'c'} n_d \tag{A.18}$$

Para llegar a las ecuaciones de vínculo se hará uso de las ecuaciones de Einstein

$$G_{ab} = \bar{R}_{ab} - \frac{\bar{R}}{2} \bar{g}_{ab} \tag{A.19}$$

Se partirá de la siguiente igualdad para llegar a la ecuación de vínculo Hamiltoniana, se llegó a la misma utilizando (A.1)

$$\bar{R}_{abcd} h^{ac} h^{bd} = \bar{R}_{abcd} g^{ac} g^{bd} - s\bar{R}_{abcd} g^{ac} n^b n^d - s\bar{R}_{abcd} g^{bd} n^a n^c \tag{A.20}$$

Se puede observar que del lado derecho se tiene lo siguiente

$$\bar{R} - 2s\bar{R}_{ab} n^a n^b = 2G_{ab} n^a n^b = 16\pi T_{ab} n^a n^b \tag{A.21}$$

Se define la densidad de energía ρ medida por un observador, cuya trayectoria tiene por vector tangente al vector n^a, como

$$\rho = T_{ab} n^a n^b \tag{A.22}$$

Utilizando la identidad de Gauss (A.13) del lado izquierdo de (A.20)

$$h^{ac} h^{bd} (h_a^{a'} h_b^{b'} h_c^{c'} \bar{R}_{a'b'c'd'}) = R + sK_{ab} K^{ab} - s\tau^2 \tag{A.23}$$

τ es llamada la curvatura principal del dato inicial. Se recuerda que el caso de interés de este trabajo son hipersuperficies espaciales es decir $s = -1$ Reuniendo lo encontrado se obtiene la ecuacion de vínculo Hamiltoniana

$$R + sK_{ab} K^{ab} - s\tau^2 = 16\pi\rho \tag{A.24}$$

Utilizando la ecuación de Einstein y realizamos una proyección con la métrica inducida y otra con el vector normal, se obtiene

$$8\pi T_{ab} h_c^a n^b = \bar{R}_{ab} h_c^a n^b - \frac{\bar{R}}{2} h_c^a n^b g_{ab} \tag{A.25}$$

En el primer término se utilizará la identidad de Codazzi (A.18) y el segundo es nulo, de esta forma se llega a la ecuación de vínculo de momento

$$D_a K_c^a - D_c \tau = 8\pi j_c \tag{A.26}$$

En donde se define la densidad de momento medida por un observador, cuya trayectoria tiene por vector tangente a n^c, como

$$j_c = T_{ab} h^a_c n^b \tag{A.27}$$

De esta forma se encontró el sistema de ecuaciones de vínculo para las ecuaciones de Einstein. El cual garantiza que el dato inicial (Σ, h) esté propiamente embebido en la variedad ambiente $(M, \bar{g})$

Apéndice B

Sistema de ecuaciones LCBY

Se asumirá que se trabaja en una variedad de dimensión n, dotada de la métrica h . Se considerará el reescaleo de la misma vía el factor conforme ϕ dado por

$$h_{ij} = \phi^l \tilde{g}_{ij} \tag{B.1}$$

Se verá a continuación como se transforman los distintos tensores característicos a h .

Los símbolos de Christoffel transforman como sigue

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} h^{im} (\partial_j h_{km} + \partial_k h_{jm} - \partial_m h_{jk}) \tag{B.2}$$

$$\Gamma^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{jk} + \frac{l}{2\phi} (\delta^i_k \partial_j \phi + \delta^i_j \partial_k \phi - g_{jk} \tilde{D}^i \phi) \tag{B.3}$$

Donde $\tilde{D}$ denota la derivada covariante de $\tilde{g}$ y D la referida a h. La ecuación (B.3) puede ser escrita como

$$D_X Y = \tilde{D}_X Y + C(X, Y) \tag{B.4}$$

con

$$C(X, Y) = \frac{l}{2\phi} (Y(\phi) X + X(\phi) Y - h(X, Y) D\phi) \tag{B.5}$$

Dado el reescaleo de la conexión, el tensor de curvatura

$$R(X, Y)Z = (D_X D_Y Z - D_Y D_X Z) - D_{[X,Y]} Z \tag{B.6}$$

puede escribirse en función de la métrica $\tilde{g}$ como

$$R^i_{jkl} = \tilde{R}^i_{jkl} + C^i_{lj;k} - C^i_{kj;l} + C^i_{km} C^m_{jl} - C^i_{lm} C^m_{jk} \tag{B.7}$$

Haciendo uso de los cálculos llevados a cabo en el Apéndice C de [14] se puede observar que el tensor de Ricci transforma como

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - \frac{l(n-2)}{2\phi} \tilde{D}_i \tilde{D}_j \phi + \frac{l(n-2)(l+2)}{4\phi^2} \tilde{D}_i \tilde{D}_j \phi - \frac{l}{2\phi} \Delta_{\tilde{g}} \phi \tilde{g}_{ij} - \frac{(n-2)l^2 - 2l}{4\phi} \tilde{D}^k \phi \tilde{D}_k \phi \tilde{g}_{ij} \tag{B.8}$$

Y el escalar de curvatura

$$R = h^{ij}R_{ij} = \phi^{-l}(\tilde{R} - \frac{l(n-1)}{\phi}\Delta_{\tilde{g}}\phi - \frac{l(n-1)[(n-2)l-4]}{4\phi^2}\tilde{D}^i\tilde{D}_i\phi) \tag{B.9}$$

Para $n \neq 2$ una elección conveniente es

$$l = \frac{4}{n-2} \tag{B.10}$$

De esta forma se encuentra que

$$h_{ij} = \phi^{\frac{4}{n-2}}\tilde{g}_{ij} \tag{B.11}$$

$$R = \phi^{-\frac{4}{n-2}}(\tilde{R} - \frac{4(n-1)}{(n-2)\phi}\Delta_{\tilde{g}}\phi) \tag{B.12}$$

Es conveniente desacoplar el tensor curvatura extrínseca en su traza τ y una parte simétrica libre de traza, de la siguiente forma

$$K_{ij} = A_{ij} + \frac{\tau}{n}h_{ij} \tag{B.13}$$

Y se transformarán estos tensores vía factor conforme de la siguiente forma

$$A_{ij} = \phi^{-\frac{l(n+2)}{2}}\tilde{A}_{ij} \tag{B.14}$$

$$\tau = \phi^{\alpha}\tilde{\tau} \tag{B.15}$$

Eligiendo $\alpha = 0$ se estará tomando la curvatura principal como invariante conforme. Es decir, se fijará $\tau = \tilde{\tau}$ Partiendo de la ecuación de vínculo de momento con materia

$$8\pi j^j = D_i(K^{ij} - \tau h^{ij}) \tag{B.16}$$

$$8\pi j^j = D_i(\phi^{-\frac{l(n+2)}{2}}\tilde{A}^{ij}) - \frac{n-1}{n}\phi^{-l}\tilde{D}^j\tau \tag{B.17}$$

Se analizará el primer término en detalle. Para ello comencemos con la divergencia

$$\tilde{D}\tilde{A}^{ij} = \partial_i\tilde{A}^{ij} + \tilde{\Gamma}^i_{ik}\tilde{A}^{kj} + \tilde{\Gamma}^j_{ik}\tilde{A}^{ik} \tag{B.18}$$

$$\tilde{D}\tilde{A}^{ij} = D_i\tilde{A}^{ij} + (\tilde{\Gamma}^i_{ik} - \Gamma^i_{ik})\tilde{A}^{kj} + (\tilde{\Gamma}^j_{ik} - \Gamma^j_{ik})\tilde{A}^{ik} \tag{B.19}$$

Donde utilizando la transformación de los Christoffel y que $\tilde{A}$ es libre de traza, se obtiene

$$\tilde{D}\tilde{A}^{ij} = D_i\tilde{A}^{ij} - \frac{l(n+2)}{2\phi}\partial_k\phi\tilde{A}^{kj} \tag{B.20}$$

$$\tilde{D}_i\tilde{A}^{ij} = \phi^{\frac{l(n+2)}{2}}D_i(\phi^{-\frac{l(n+2)}{2}}\tilde{A}^{ij}) \tag{B.21}$$

Regresando a la ecuación (B.17) se tiene

$$\tilde{D}_i\tilde{A}^{ij} = 8\pi\phi^{\frac{2(n+2)}{n-2}}j^j + \frac{n-1}{n}\phi^{\frac{2n}{n-2}}\tilde{D}^j\tau \tag{B.22}$$

Cualquier tensor simétrico libre de traza puede ser descompuesto en una parte transversal libre de traza y en una parte longitudinal simétrica. Esta última puede ser escrita como el gradiente de un vector.

$$\tilde{A}^{ij} = \tilde{A}^{ij}_{TT} + \tilde{A}^{ij}_{L} \tag{B.23}$$

Se expresará de aquí en adelante a $\tilde{A}^{ij}_{T}T$ como σ^{ij} y se tiene que

$$\tilde{D}_i \sigma^{ij} = 0 \tag{B.24}$$

La parte longitudinal satisface

$$\tilde{A}^{ij}_{L} = \tilde{D}^i W^j + \tilde{D}^j W^i - \frac{2}{3}\tilde{g}^{ij}\tilde{D}_k W^k \equiv (LW)^{ij} \tag{B.25}$$

Ahora

$$\tilde{D}_i \tilde{A}^{ij} = \tilde{D}_i \tilde{A}^{ij}_{L} = \tilde{D}_i (LW)^{ij} = \tilde{D}^2 W^j + \frac{1}{3}\tilde{D}^j(\tilde{D}_i W^i) + \tilde{R}^j_i W^i \equiv (\tilde{\Delta_L} W)^j \tag{B.26}$$

Donde $\tilde{\Delta_L} W$ es el Laplaciano Vectorial. De esta forma la ecuación de vínculo de momento se transforma, via una transformación conforme, en

$$(\tilde{\Delta_L} W)^j = \tilde{D}_i (LW)^{ij} = 8\pi\phi^{\frac{2(n+2)}{n-2}} j^j + \frac{n-1}{n}\phi^{\frac{2n}{n-2}}\tilde{D}^j\tau \tag{B.27}$$

Para analizar la ecuación de vínculo Hamiltoniana se utilizarán los reescaleos del escalar de curvatura y de la métrica. Se tiene además

$$K_{ij}K^{ij} - \tau^2 = h_{ik}h_{jl}K^{ij}K^{kl} - \tau^2 \tag{B.28}$$

$$K_{ij}K^{ij} - \tau^2 = h_{ik}h_{jl}(A^{ij} + \frac{\tau}{n}h^{ij})(A^{kl+\frac{\tau}{n}h^{kl}} - \tau^2 \tag{B.29}$$

$$K_{ij}K^{ij} - \tau^2 = \phi^{-nl}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} - \frac{n-1}{n}\tau^2 \tag{B.30}$$

Haciendo uso del desacople propuesto para $\tilde{A}_i j$ se obtiene

$$K_{ij}K^{ij} - \tau^2 = \phi^{-nl}(\sigma_{ij} + (LW)_{ij})(\sigma^{ij} + (LW)^{ij}) - \frac{n-1}{n}\tau^2 \tag{B.31}$$

Utilizando esta última igualdad, y (B.12) se transformará la ecuación de vínculo Hamiltoniana

$$R_h - K_{ij}K^{ij} + \tau^2 = 16\pi\rho \tag{B.32}$$

$$\tilde{R} - \frac{4(n-1)}{(n-2)\phi}\Delta_{\tilde{g}}\phi = \phi^{\frac{4}{n-2}}[\phi^{-nl}(\sigma_{ij} + (LW)_{ij})(\sigma^{ij} + (LW)^{ij}) - \frac{n-1}{n}\tau^2 + 16\pi\rho] \tag{B.33}$$

Donde distribuyendo potencias, reorganizando términos y factores se obtiene

$$\Delta_{\tilde{g}}\phi = \frac{n-2}{4(n-1)}\phi\tilde{R} - \frac{n-2}{4(n-1)}\phi^{\frac{2-3n}{n-2}}(\sigma_{ij} + (LW)_{ij})(\sigma^{ij} + (LW)^{ij}) + \frac{n-2}{4n}\tau^2\phi^{\frac{n+2}{n-2}} - 16\pi\rho\frac{n-2}{4(n-1)}\phi^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{B.34}$$

Esta última ecuación se la conoce como ecuación de Lichnerowicz. Al sistema conformado por (B.27) y (B.34) se lo conoce como el sistema LCBY, en honor a Lichnerowicz, Choquet-Bruhat y York. Donde especificando la métrica semilla $\tilde{g}$, la curvatura principal K y σ_{ij} se encontró, haciendo uso del método conforme, un sistema de ecuaciones acopladas para el factor conforme ϕ y el campo vectorial W^i.

Notemos que al solicitar que el dato sea de curvatura principal constante y el dato inicial es de vacío, el sistema de ecuaciones se desacopla. De esta forma se puede poner completa atención en la ecuación de Licnerowicz (B.34).

En la literatura se han encontrado transformaciones de ρ y j^i a materia semilla, de la siguiente forma

$$\rho = \phi^{-8}\tilde{\rho} \tag{B.35}$$

$$j^i = \phi^{-10}\tilde{j}^i \tag{B.36}$$

Bibliografía

[1] Paul T Allen, Adam Clausen, and James Isenberg. Near-constant mean curvature solutions of the einstein constraint equations with non-negative yamabe metrics. Classical and Quantum Gravity, 25(7):075009, Mar 2008.

[2] L Andersson and P. T. Chrusciel. On asymptotic behaviour of solutions of the constraint equations in general relativity with 'hyperboloidal boundary conditions. Diss. Math., 355:1–100, 1996.

[3] P. T Andersson L, Chruciel and H Friedrich. On the regularity of solutions to the yamabe equation and the existence of smooth hyperboloidal initial data for einstein's field equations. Communications in Mathematical Physics; (Germany), 149:3, Oct 1992.

[4] John G. Baker, Joan Centrella, Dae-Il Choi, Michael Koppitz, and James van Meter. Gravitational-wave extraction from an inspiraling configuration of merging black holes. Phys. Rev. Lett., 96:111102, Mar 2006.

[5] Robert Bartnik. The mass of an asymptotically flat manifold. Communications on Pure and Applied Mathematics, 39:661 – 693, 09 1986.

[6] Robert Bartnik and Jim Isenberg. The constraint equations. 06 2004.

[7] T.W. Baumgarte and S.L. Shapiro. Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer. Cambridge University Press, 2010.

[8] M. Campanelli, C. O. Lousto, P. Marronetti, and Y. Zlochower. Accurate evolutions of orbiting black-hole binaries without excision. Physical Review Letters, 96(11), Mar 2006.

[9] M. Campanelli, C. O. Lousto, and Y. Zlochower. Spinning-black-hole binaries: The orbital hang-up. Phys. Rev. D, 74:041501, Aug 2006.

[10] Manuela Campanelli, Carlos Lousto, Yosef Zlochower, and David Merritt. Maximum gravitational recoil. Physical review letters, 98:231102, 07 2007.

[11] Murray Cantor. The existence of non-trivial asymptotically flat initial data for vacuum spacetimes. Communications in Mathematical Physics, 57:317–330, 1977.

[12] Murray Cantor and Dieter Brill. The laplacian on asymptotically flat manifolds and the specification of scalar curvature. Compositio Mathematica, 43(3):317–330, 1981.

[13] Yvonne Choquet-Bruhat, James Isenberg, and James W. York. Einstein constraints on asymptotically euclidean manifolds. Physical Review D, 61(8), Mar 2000.

[14] Piotr T. Chruściel. Cauchy problems for the einstein equations: an introduction. Sep 2018.

[15] Piotr T. Chrusciel, Gregory J. Galloway, and Daniel Pollack. Mathematical general relativity: a sampler. 4 2010.

[16] Piotr T. Chruściel and Rafe Mazzeo. Initial data sets with ends of cylindrical type: I. The Lichnerowicz equation. Ann. Henri Poincaré, 16:1231–1266, 2015.

[17] Piotr T. Chruściel, Rafe Mazzeo, and Samuel Pocchiola. Initial data sets with ends of cylindrical type: II. The vector constraint equation. Adv. Theor. Math. Phys., 17:829–865, 2013.

[18] María E Gabach Clément. Conformally flat black hole initial data with one cylindrical end. Classical and Quantum Gravity, 27(12):125010, Apr 2010.

[19] The Collaboration, Kazunori Akiyama, A. Alberdi, Walter Alef, Keiichi Asada, Rebecca Azulay, Anne-Kathrin Baczko, David Ball, Mislav Baloković, John Barrett, Dan Bintley, Lindy Blackburn, Wilfred Boland, Katherine Bouman, Geoffrey Bower, Michael Bremer, Christiaan Brinkerink, Roger Brissenden, and Silke Britzen. First m87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole. Astrophysical Journal Letters, 875, 04 2019.

[20] Gregory B. Cook. Initial data for numerical relativity. Living Reviews in Relativity, 3(1), Nov 2000.

[21] S Dain. Trapped surfaces as boundaries for the constraint equations. Classical and Quantum Gravity, 22(4):769, Feb 2005.

[22] Sergio Dain and María E Gabach Clément. Extreme bowen–york initial data. Classical and Quantum Gravity, 26(3):035020, jan 2009.

[23] Sergio Dain and María E Gabach Clément. Small deformations of extreme kerr black hole initial data. Classical and Quantum Gravity, 28(7):075003, Feb 2011.

[24] Sergio Dain and María Gabach-Clement. Geometrical inequalities bounding angular momentum and charges in general relativity. Living Reviews in Relativity, 21, 07 2018.

[25] Sergio Dain, Carlos O. Lousto, and Yosef Zlochower. Extra-large remnant recoil velocities and spins from near-extremal-bowen-york-spin black-hole binaries. Physical Review D, 78(2), Jul 2008.

[26] Georges Darmois. Les équations de la gravitation einsteinienne. Number 25 in Mémorial des sciences mathématiques. Gauthier-Villars, 1927.

[27] James Dilts, Jim Isenberg, Rafe Mazzeo, and Caleb Meier. Non-cmc solutions of the einstein constraint equations on asymptotically euclidean manifolds. Classical and Quantum Gravity, 31(6):065001, Feb 2014.

[28] Lawrence C. Evans. Partial differential equations, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[29] Y. Fourés-Bruhat. Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Acta Math., 88:141–225, 1952.

[30] Helmut Friedrich and Alan D. Rendall. The Cauchy problem for the Einstein equations. Lect. Notes Phys., 540:127–224, 2000.

[31] Robert Geroch. Gauge, diffeomorphisms, initial-value formulation, etc. 01 2004.

[32] Mark Hannam, Sascha Husa, and Niall Ó Murchadha. Bowen-york trumpet data and black-hole simulations. Phys. Rev. D, 80:124007, Dec 2009.

[33] Mark Hannam, Sascha Husa, Denis Pollney, Bernd Brügmann, and Niall Ó Murchadha. Geometry and regularity of moving punctures. Physical Review Letters, 99(24), Dec 2007.

[34] M. Holst, G. Nagy, and G. Tsogtgerel. Far-from-constant mean curvature solutions of einstein's constraint equations with positive yamabe metrics. Physical Review Letters, 100(16), Apr 2008.

[35] James Isenberg. Constant mean curvature solutions of the einstein constraint equations on closed manifolds. Classical and Quantum Gravity, 12(9):2249–2274, sep 1995.

[36] JAMES ISENBERG. Constructing solutions of the einstein constraint equations. General Relativity and Gravitation, Sep 2002.

[37] James Isenberg and Vincent Moncrief. A set of nonconstant mean curvature solutions of the einstein constraint equations on closed manifolds. Classical and Quantum Gravity, 13(7):1819–1847, jul 1996.

[38] James Isenberg and Niall Ó Murchadha. Non-cmc conformal data sets which do not produce solutions of the einstein constraint equations. Classical and Quantum Gravity, 21(3):S233–S241, Jan 2004.

[39] Jeremy Leach. A far-from-cmc existence result for the constraint equations on manifolds with ends of cylindrical type. Classical and Quantum Gravity, 31(3):035003, Dec 2013.

[40] Jeremy Leach. Non-constant mean curvature trumpet solutions for the einstein constraint equations. Classical and Quantum Gravity, 33(14):145001, jun 2016.

[41] Geoffrey Lovelace, Robert Owen, Harald P. Pfeiffer, and Tony Chu. Binary-black-hole initial data with nearly extremal spins. Phys. Rev. D, 78:084017, Oct 2008.

[42] David Maxwell. Solutions of the einstein constraint equations with apparent horizon boundaries. Communications in Mathematical Physics, 253(3):561–583, Nov 2004.

[43] Jeffrey E. McClintock, Rebecca Shafee, Ramesh Narayan, Ronald A. Remillard, Shane W. Davis, and Li Xin Li. The spin of the near-extreme kerr black hole grs. 652(1):518–539, nov 2006.

[44] Robert M. Wald. General Relativity. Chicago Univ. Pr., Chicago, USA, 1984.

[45] Hidehiko Yamabe. On a deformation of riemannian structures on compact manifolds. Osaka Math. J., 12(1):21–37, 1960.