



FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA
Y COMPUTACIÓN

TESIS DE LICENCIATURA EN FÍSICA

**Análisis numérico de ecuaciones
Force-Free en Potenciales de Euler**

Autor:
Gastón VALVASSORI

Director:
Dr. Oscar REULA

19 de abril de 2021



Esta obra está bajo una
Licencia Creative Commons **Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0
Internacional**

Resumen

Análisis numérico de ecuaciones Force-Free en Potenciales de Euler

En este trabajo se presenta un estudio numérico de las ecuaciones de Force-Free en Potenciales de Euler las cuales conforman un sistema de ecuaciones *mal puesto* o *débilmente hiperbólico*. Esta característica da lugar a la existencia de soluciones espurias que crecen linealmente con el tiempo y la frecuencia además de no ser soluciones de las ecuaciones de electrodinámica Force-Free en su representación con campos eléctrico y magnético. Se considera el caso más sencillo en un espaciotiempo de Minkowski donde se evolucionan las ecuaciones y se catalogan los distintos modos espurios. Dada la naturaleza mal puesta del sistema las soluciones no son acotadas por el dato inicial y esto da lugar al empleo de disipación numérica mediante operadores de Kreiss-Oliger para controlar el crecimiento de modos de alta frecuencia y poder conservar el dato inicial a lo largo de la evolución.

Palabras clave:

Force-Free, Potenciales de Euler, Relatividad General, Relatividad Numérica

Agradecimientos

A mi familia, por otorgarme el privilegio de dedicar mi tiempo plenamente al estudio, por apoyarme en las decisiones iniciales sobre mi carrera y por el apoyo incondicional en la vida.

A mis amigos, por compartir discusiones y momentos inolvidables.

A Oscar, especialmente, por su predisposición, paciencia y motivación hacia la relatividad numérica, la teoría de ecuaciones diferenciales, el formalismo matemático y la pasión por la física.

Índice general

Resumen	III
Agradecimientos	V
1. Introducción	1
2. Electrodinámica Force-Free y Potenciales de Euler	3
2.1. Formalismo covariante de las ecuaciones	3
2.2. Potenciales de Euler	5
2.3. Ecuaciones de FFE en potenciales de Euler	6
3. Hiperbolicidad y well-posedness. Propiedades de las ecuaciones FFE en potenciales de Euler	9
3.1. Hiperbolicidad y well-posed	9
3.1.1. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes	9
3.1.2. Ecuaciones cuasi-lineales con coeficientes no constantes	11
3.2. Hiperbolicidad y well-posedness de las ecuaciones FFE en PE	11
3.2.1. Conjunto de ondas y descomposición 3+1	11
4. Reducción a sistema de primer orden y método numérico	15
4.1. Ecuaciones de primer orden	15
4.1.1. Modos espurios	16
4.1.1.1. Modos espurios de Tipo I	18
4.1.1.2. Modos espurios de Tipo II	19
4.2. Método numérico	19
4.2.1. Dominio espacial y mallado de evolución	21
5. Soluciones numéricas de las ecuaciones FFE en PE	23
5.1. Test con dato inicial no espurio	23
5.1.1. Condición CFL próxima a 1	24
5.1.2. Condición CFL próxima a 0,1	28
5.2. Solución con modos espurios de Tipo I	30
5.2.1. Crecimiento en la solución	36
5.3. Solución con modo espurio de Tipo II	37
5.3.1. Crecimiento en la solución	47
5.4. Solución quasi-espuria	47
5.5. Convergencia	49
5.5.1. Convergencia de modos no espurios	50
5.5.2. Convergencia de modo espurio de Tipo I	51
5.5.3. Convergencia de modo espurio de Tipo II	52
5.5.4. Discusión sobre la aparente convergencia del sistema	53

6. Conclusiones	55
6.1. Comportamiento lineal y control con disipación fuerte	55
6.2. Trabajos futuros	55
Bibliografía	57

Índice de figuras

4.1. Dominio y mallado de evolución.	21
5.1. Comportamiento de la energía en norma L^2 del sistema de ecuaciones, en escala lineal y logarítmica.	24
5.2. Comportamiento de la energía física del sistema de ecuaciones	25
5.3. Evolución del campo v_1 para cuatro tiempos distintos.	25
5.4. Evolución del campo v_2 para cuatro tiempos distintos.	26
5.5. Comparativa de la energía en norma L^2 del sistema de ecuaciones, en escala lineal y logarítmica, agregando disipación numérica.	26
5.6. Evolución del campo v_1 para cuatro tiempos distintos con disipación.	27
5.7. Evolución del campo v_2 para cuatro tiempos distintos con disipación.	27
5.8. Comparativa de la energía en norma L^2 del sistema de ecuaciones, en escala lineal y logarítmica, considerando distintos valores de la fuerza de disipación σ	28
5.9. Evolución del campo v_1 a $t = 3,53333$	29
5.10. Evolución del campo v_2 a $t = 3,53333$	29
5.11. Energía del sistema de ecuaciones para modo espurio de Tipo I-a.	30
5.12. Energía física para modo espurio de Tipo I-a.	31
5.13. Comportamiento de la energía con disipación de Kreiss-Oliger de orden 8.	31
5.14. Comportamiento de la energía con disipación de Kreiss-Oliger de orden 4.	32
5.15. Comparativa de los mejores valores de σ con operador KO4.	32
5.16. Valor de σ más potente.	32
5.17. Modo espurio de Tipo I-a sin disipación.	33
5.18. Campo v_1 de Tipo I-a con disipación KO4 a $t = 3,73$ y distintos valores de σ	34
5.19. Campo v_2 de Tipo I-a con disipación KO4 a $t = 3,73$ y distintos valores de σ	34
5.20. Energía L^2 para modos de Tipo I-a y Tipo I-b. No hay cambio en el valor de la energía entre ambos modos.	35
5.21. Comportamiento de la energía con disipación de Kreiss-Oliger de orden 4 para modo Tipo I-b.	35
5.22. Ajuste de la energía L^2 usando (5.5).	36
5.23. Crecimiento de alguna frecuencia ω y su respectivo ajuste por $f(t) = a + bt + \exp(ct + d)$	37
5.24. Comportamiento de la misma frecuencia para la solución con disipación KO4.	37
5.25. Energía L^2 para Tipo II-a.	38
5.26. Energía L^2 para Tipo II-a con disipación KO8.	38
5.27. Energía L^2 para Tipo II-a con disipación KO4.	38

5.28. Energía L^2 para Tipo II-a con disipación $KO4$ para los valores que mejor controlan los modos de alta frecuencia.	39
5.29. Campos v_1 y v_2 a tiempos inicial y final, se observa la destrucción del dato inicial.	39
5.30. Campo v_1 de Tipo II-a con disipación $KO4$ a $t = 3,75$ y distintos valores de σ	40
5.31. Campo v_2 de Tipo II-a con disipación $KO4$ a $t = 3,75$ y distintos valores de σ	40
5.32. Energía L^2 para Tipo II-a y Tipo II-b. La variación entre ambos modos espurios es apreciable.	41
5.33. Energía L^2 para Tipo II-b con operador $KO8$	41
5.34. Energía L^2 para Tipo II-b con operador $KO8$ a tiempo corto.	42
5.35. Energía L^2 para Tipo II-b con operador $KO4$	42
5.36. Ajuste de la energía L^2 para modos de tipo II-a y II-b usando el modelo (5.5).	43
5.37. Energía L^2 para Tipo II-c y II-d.	44
5.38. Energía L^2 con disipación de $KO4$ para modos espurios de Tipo II-c y II-d.	44
5.39. Ajuste de la energía L^2 para modos de tipo II-c y II-d usando el modelo (5.5).	45
5.40. Campos v_1 y v_2 de Tipo II-c sin disipación a tiempo inicial.	45
5.41. Campo v_1 de Tipo II-a con disipación $KO4$ a $t = 3,75$ y distintos valores de σ	46
5.42. Campo v_2 de Tipo II-a con disipación $KO4$ a $t = 3,75$ y distintos valores de σ	46
5.43. Crecimiento de alguna frecuencia ω y su respectivo ajuste por $f(t) = a + bt + \exp(ct + d)$	47
5.44. Comportamiento de la misma frecuencia para la solución con disipación $KO4$	47
5.45. Modo quasi-espurio controlado con el operador $KO8$	48
5.46. Comparativa de control de modo quasi-espurio usando operadores $KO4$ y $KO8$	49
5.47. Ajuste de modo quasi-espurio utilizando el modelo (5.9).	49
5.48. Ajuste lineal de la convergencia para los campos evolucionados sin modo espurio.	51
5.49. Ajuste lineal de la convergencia para los campos evolucionados con modo espurio de Tipo I.	52
5.50. Ajuste lineal de la convergencia para los campos evolucionados con modo espurio de Tipo II.	53

Índice de cuadros

5.1. Parámetros de ajuste para modos de Tipo I-a y I-b según el modelo (5.5)	36
5.2. Parámetros de ajuste para modos de Tipo II-a usando el modelo (5.5)	43
5.3. Parámetros de ajuste para modos de Tipo II-b con el modelo (5.5)	43
5.4. Parámetros de ajuste para modos de Tipo II-c con el modelo (5.5)	45
5.5. Parámetros de ajuste para modos de Tipo II-d con el modelo (5.5)	45
5.6. Parámetros de ajuste para modos Quasi-espurios con el modelo (5.9)	48
5.7. Grado de convergencia para tiempos cortos de los campos v_1 y v_2 sin dato espurio.	50
5.8. Grado de convergencia para tiempos cortos de los campos v_1 y v_2 con dato espurio de Tipo I.	51
5.9. Grado de convergencia para tiempos cortos de los campos v_1 y v_2 con dato espurio de Tipo I y disipación con operador $KO4$.	52
5.10. Grado de convergencia para tiempos cortos de los campos v_1 y v_2 con dato espurio de Tipo II.	52
5.11. Grado de convergencia para tiempos cortos de los campos v_1 y v_2 con dato espurio de Tipo II y disipación numérica con operador $KO4$.	53

Dedicado a mi Familia...

Capítulo 1

Introducción

En 1969 Hewish et. al. reportan la detección de frecuencias de radio rápidamente pulsantes provenientes de enanas blancas (WD) o estrellas de neutrones (NS) ubicadas en nuestra galaxia [1] utilizando el *Observatorio Radioastronómico Mullard* en Cambridge. Poco tiempo después, en el mismo año, Gold [2] y Pacini [3] proponen que la fuente de dichos pulsos pueden ser provocados por NS con altas velocidades de rotación y campos magnéticos muy intensos. Puesto que la formación de NS queda rodeada del remanente de supernova, su alta rotación se acopla con este gas formando un plasma cuya densidad es muchos órdenes de magnitud más pequeña que la densidad de energía del campo electromagnético. Un escenario similar aunque más extremo se encuentra en los núcleos galácticos donde el agujero negro supermasivo (SBH) está rodeado por un plasma también tenue.

Tales NS y SBH rodeados por un plasma dan lugar a la expulsión de materia ionizada altamente colimada debida a la interacción del campo magnético y el plasma [4, 5] denominados *jets*. Estos jets se modelan utilizando la *magnetohidrodinámica* (MHD) [6]. Dado que el plasma es débil frente a la densidad de energía electromagnética se puede imponer que la cuadri-densidad de Lorentz sea cero. La resultante dinámica del campo electromagnético se conoce como *electrodinámica Force-Free* (FFE), sentando las bases del estudio de la magnetósfera de objetos compactos y sistemas binarios rodeados de plasma [7-13]. En el trabajo de Reula y Carrasco [14] se obtuvo el sistema de ecuaciones de FFE de modo covariante. Dichas ecuaciones fueron utilizadas posteriormente para modelar jets de agujeros negros [15].

Resolver la electrodinámica mediante las ecuaciones completas de Force-Free involucra resolver un sistema de cuatro ecuaciones en derivadas parciales, sin embargo Carter [16] y Uchida [17, 18] formularon la teoría de FFE con dos funciones escalares conocidas como *Potenciales de Euler* (EP), dichos potenciales fueron introducidos por Stern [19] en 1970. Estos potenciales contienen toda la información física del problema aunque el sistema de ecuaciones que se obtienen al introducir estos potenciales en la formulación de FFE covariante no es *well-posed* (bien puesta), como se demuestra en el trabajo de Reula y Rubio [20], esto significa que las soluciones no están acotadas por el dato inicial. Además en ese trabajo se encuentra que existen soluciones espurias que no aparecen al resolver FFE completa que crecen linealmente con la frecuencia y el tiempo, lo que representa un conjunto de inestabilidades del sistema de ecuaciones *Force-Free en Potenciales de Euler* (FFE-EP).

Las ecuaciones FFE-EP tienen la ventaja de que son un sistema de dos ecuaciones acopladas no lineales. En este trabajo se presenta un análisis numérico de las inestabilidades de este sistema considerando el caso particular donde el objeto astrofísico está representado por un toro plano, es decir, un cubo en el espacio de Minkowski. Se catalogan los modos espurios en dos tipos distintos, los *Tipo I* y *Tipo II* junto a los modos *Quasi-espurios* que no están generados por datos iniciales espurios. Se corrobora mediante un estudio de la energía en norma L^2 que estos modos presentan

comportamientos lineales en tiempo inicial y luego crecen abruptamente destruyendo las soluciones. Además, utilizando disipación numérica fuerte [21] se estudia si estos modos espurios pueden ser controlados evitando la espontánea rotura de las evoluciones y permitiendo conservar el dato inicial por más tiempo.

El presente trabajo se ordena de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se introduce la teoría FFE y su forma covariante hiperbólica desarrollada en [14], los EP y las ecuaciones FFE-EP presentadas en [20]. En el Capítulo 3 se presenta la teoría necesaria sobre ecuaciones diferenciales, las definiciones de hiperbolicidad, bien puesto y la descomposición en $3 + 1$ del sistema FFE-EP. En el Capítulo 4 se realiza la reducción a sistema de primer orden, se calculan las condiciones iniciales que dan lugar a los modos espurios y se describen brevemente los métodos numéricos utilizados. El Capítulo 5 expone las simulaciones y resultados obtenidos junto a un análisis sobre la convergencia de las soluciones numéricas. Finalmente en el Capítulo 6 se realiza una discusión sobre los resultados obtenidos y se dan perspectivas a futuros trabajos pendientes.

Capítulo 2

Electrodinámica Force-Free y Potenciales de Euler

La MHD describe fluidos conductores de electricidad en los cuales hay un campo magnético presente, modelada por una reducción de las ecuaciones de la mecánica de fluidos acoplada con las ecuaciones de Maxwell [22]. Consideremos el caso de la MHD relativista que modela las magnetósferas alrededor de objetos relativistas como las estrellas de neutrones, los agujeros negros y los discos de acreción [4, 5]. En estos escenarios, el campo electromagnético domina sobre las interacciones de la materia, se asume que la densidad de materia del plasma es mucho menor que la densidad de energía electromagnética, lo cual permite desacoplar la ecuación de la MHD de manera tal que los campos electromagnéticos obedecen una versión modificada no-lineal de las ecuaciones de Maxwell. El rol del plasma, entonces, es el de adaptarse al campo electromagnético cancelando la fuerza de Lorentz. Esta es la llamada Electrodinámica Force-Free (FFE) o aproximación Force-Free [23].

En la siguiente sección se introducirá el formalismo de las ecuaciones de FFE, las variables de las ecuaciones a resolver son los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} . Sin embargo, basándose en un estudio de las líneas de campo magnético y las superficies magnéticas, se pueden reescribir los campos eléctrico y magnético en términos de dos potenciales escalares [17, 18], ϕ_1 y ϕ_2 , llamados Potenciales de Euler. Esto se profundizará en la sección 2.2.

2.1. Formalismo covariante de las ecuaciones

Sea (\mathcal{M}, g) una variedad lorentziana equipada con una métrica (el espaciotiempo) y sea ∇_a una conexión sobre \mathcal{M} . Tomamos la convención de signos $(-, +, +, +)$, usamos unidades naturales $c = G = 1$, donde c es la velocidad de la luz en vacío y G es la constante universal de gravitación de Newton. Entonces, en unidades gaussianas, las ecuaciones de Maxwell son

$$\begin{cases} \nabla_a F^{ab} = -4\pi J^b, \\ \nabla_{[a} F_{bc]} = 0; \end{cases} \quad (2.1)$$

donde F_{ab} es un campo tensorial suave antisimétrico de tipo $(0, 2)$ sobre (\mathcal{M}, g) que representa los campos electromagnéticos y J^a la 4-corriente electromagnética, conservada gracias a la antisimetría de F_{ab} . Con F_{ab} y la métrica g_{ab} se puede construir el tensor de energía-momento del electromagnetismo

$$T_{ab}^{EM} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F^{cd} F_{cd} \right). \quad (2.2)$$

En presencia de materia el T_{ab}^{EM} , generalmente, no se conserva según (2.1)

$$\nabla_b T_{EM}^{ab} = -F^a_b J^b, \quad (2.3)$$

esto es localmente la pérdida de energía-momento mediante el trabajo ejercido por la fuerza eléctrica ρE por la velocidad de las partículas.

La electrodinámica Force-Free representa “un régimen en el cual la transferencia de energía y momento desde el campo al plasma puede ser despreciado, no porque la corriente no sea importante, sino porque la energía-momento del campo supera altamente a la energía del plasma” [23], esto es $T_{ab} = T_{ab}^{EM} + T_{ab}^{plasma} \approx T_{ab}^{EM}$, por lo tanto la teoría lineal de Maxwell se modifica imponiendo la condición de force-free que se desprende de pedir conservación del tensor de energía-momento total,

$$F_{ab} J^b = 0, \quad (2.4)$$

de manera que, bajo esta aproximación, el tensor de energía-momento del campo electromagnético es conservado. Es decir, esta aproximación corresponde a despreciar la contribución de la materia.

Observemos que la condición (2.4), para una corriente J^a no nula, implica que el campo de Maxwell es degenerado (no inversible), que implica

$$F^{ab} F_{ab}^* = 0, \quad (2.5)$$

donde

$$\begin{cases} F_{ab}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} F^{cd}, \\ \epsilon_{abcd} = \sqrt{-g} e_{abcd}; \end{cases} \quad (2.6)$$

ϵ_{abcd} es el elemento de volumen asociado a la métrica g_{ab} y e_{abcd} es el símbolo de Levi-Civita. Esto implica que el núcleo de F^a_b es un espacio de dimensión dos, de modo que cuando el campo magnético es mucho mayor al campo eléctrico, se tiene

$$F := F^{ab} F_{ab} > 0, \quad (2.7)$$

la cual implica que F_{ab} es degenerado y esto da lugar a que el núcleo tenga dimensión dos. Es decir, existen dos autovectores de F^a_b tales que esta propiedad implica que, usando transformaciones de Lorentz, existe un referencial definido por J^a en el cual el campo eléctrico se anula. Es decir, el caso magnéticamente dominante es tal que los efectos de las corrientes eléctricas se desprecian en comparación de los efectos de la presión magnética, entonces el sistema se comporta como un plasma cuyo único efecto, debido a su conductividad, es el de hacer el campo eléctrico mucho más pequeño que el campo magnético.

Además, la condición (2.5) significa que existe un vector temporal u^a proporcional a J^a tal que $F_{ab} u^b = 0$, es decir, en el correspondiente referencial el campo eléctrico se anula. Por lo tanto, existe un 4-vector v^a tal que [14]

$$F_{ab}^* = 2v_{[a} u_{b]}, \quad (2.8)$$

o equivalentemente [20] existen dos campos covectoriales ℓ_a^1 y ℓ_a^2 tales que

$$F_{ab} = 2\ell_{[a}^1 \ell_{b]}^2. \quad (2.9)$$

Luego, con las ecuaciones (2.1) junto a la condición force-free (2.4) obtenemos

$$\begin{cases} F_{bc} \nabla_a F^{ab} = 0, \\ \nabla_{[a} F_{bc]} = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

estas son las ecuaciones que determinan la *electrodinámica Force-Free*.

2.2. Potenciales de Euler

El concepto de líneas de campo magnético es muy útil en el estudio del movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos y fenómenos de plasmas, efectos en los cuales la configuración de las líneas de campo es significativa.

Un campo vectorial \mathbf{V} genérico en tres dimensiones es descrito por tres funciones escalares de las coordenadas, es decir, $\mathbf{V} = (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3))$. Consideremos el campo magnético \mathbf{B} , la condición $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implica que sólo se necesitan dos funciones escalares para describir completamente al campo. Una representación posible es

$$\mathbf{B} = \nabla\alpha \times \nabla\beta, \quad (2.11)$$

donde α y β son las funciones escalares llamadas *Potenciales de Euler* [19]. Estas funciones escalares no son únicas pero la única condición necesaria (aunque no suficiente) que deben satisfacer es

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \nabla\alpha &= 0, \\ \mathbf{B} \cdot \nabla\beta &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Puesto que $\nabla\alpha$ y $\nabla\beta$ son perpendiculares a \mathbf{B} , las superficies de nivel de α y β a α y β constantes son tangenciales al campo en todo punto y lo mismo sucede con las líneas formadas por la intersección de ambas superficies, estas son las líneas de campo magnético.

Lo anterior es válido para la MHD no relativista, consideremos ahora el caso relativista con la aproximación (2.4). El hecho de tener un campo electromagnético degenerado da lugar a diversas propiedades geométricas. Si el campo electromagnético se comporta bien localmente (que es suave), podemos construir dos campos vectoriales linealmente independientes que se comportan bien localmente. En virtud de las ecuaciones de Maxwell, estos campos vectoriales generan una familia de superficies integrales bidimensionales en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones [17]. Estas superficies integrales se llaman superficies de flujo.

La existencia de estas superficies de flujo nos permiten introducir el concepto de líneas de campo magnético de forma geométrica. Tales líneas son la intersección de la hipersuperficie de un observador t^a a $t = \text{constante}$ y la superficie de flujo [20].

Las superficies de flujo son consecuencia de que los campos vectoriales que satisfacen $F_{ab}u^b = F_{ab}v^b = 0$ son integrables, o equivalentemente, el núcleo de F_{ab} es integrable si es tangente a una subvariedad bidimensional [20]. Esto implica, además, la existencia de dos campos escalares, ϕ_1 y ϕ_2 , tales que las superficies de flujo [16] están descritas por la intersección de los conjuntos de nivel $\phi_1 = \text{cte.}$ y $\phi_2 = \text{cte.}$ Estos son los Potenciales de Euler ¹. De (2.9) entonces se debe tener que

$$F_{ab} = \nabla_a\phi_1\nabla_b\phi_2 - \nabla_b\phi_1\nabla_a\phi_2, \quad (2.13)$$

¹Estas funciones no son las mismas que α y β introducidas anteriormente, sin embargo en [17] se puede encontrar una relación entre estos campos escalares y los nuevos potenciales ϕ_1 y ϕ_2 .

donde identificamos

$$\ell_i^a := g^{ab} \nabla_b \phi_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.14)$$

Este es el tensor de campo electromagnético en términos de los potenciales de Euler.

2.3. Ecuaciones de FFE en potenciales de Euler

Usando² el símbolo antisimétrico ε^{ij} con $i, j = 1, 2$ tal que $\varepsilon^{12} = 1$ y $\varepsilon^{ij} \varepsilon_{jk} = -\delta^i_k$ donde δ^i_j es el mapa identidad, podemos reescribir (2.13) como

$$F_{ab} = \varepsilon^{ij} \nabla_a \phi_i \nabla_b \phi_j. \quad (2.15)$$

Insertando este tensor de campo electromagnético en (2.10) tenemos que la segunda ecuación se satisface directamente,

$$\begin{aligned} \nabla_{[a} F_{bc]} &= \nabla_{[a} \left(\varepsilon^{nk} \nabla_b \phi_n \nabla_c \phi_k \right) = \varepsilon^{nk} \nabla_{[a} \left(\nabla_b \phi_n \nabla_c \phi_k \right) \\ &= \varepsilon^{nk} \frac{1}{3!} \left[\nabla_a (\nabla_b \phi_n \nabla_c \phi_k) - \nabla_a (\nabla_c \phi_n \nabla_b \phi_k) + \nabla_b (\nabla_c \phi_n \nabla_a \phi_k) \right. \\ &\quad \left. - \nabla_b (\nabla_a \phi_n \nabla_c \phi_k) + \nabla_c (\nabla_a \phi_n \nabla_b \phi_k) - \nabla_c (\nabla_b \phi_n \nabla_a \phi_k) \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $n, k = 1, 2$ y los índices a, b, c denotan coordenadas. Notemos que la antisimetrización actúa sobre índices tensoriales únicamente, es decir, sobre los índices de ε^{ij} no actúa. En virtud del símbolo ε^{ij} ,

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{nk} \left[\nabla_a (\nabla_b \phi_n \nabla_c \phi_k) - \nabla_a (\nabla_c \phi_n \nabla_b \phi_k) \right] \\ &= \nabla_a (\nabla_b \phi_1 \nabla_c \phi_2 - \nabla_b \phi_2 \nabla_c \phi_1) - \nabla_a (\nabla_c \phi_1 \nabla_b \phi_2 - \nabla_c \phi_2 \nabla_b \phi_1) \\ &= \nabla_a (\nabla_b \phi_1 \nabla_c \phi_2) - \nabla_a (\nabla_b \phi_2 \nabla_c \phi_1) - \nabla_a (\nabla_c \phi_1 \nabla_b \phi_2) + \nabla_a (\nabla_c \phi_2 \nabla_b \phi_1); \end{aligned} \quad (2.17)$$

además asumiendo que la conexión ∇_a es una conexión de Levi-Civita tenemos que para una función escalar f [24]

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f, \quad (2.18)$$

entonces usando la regla de Leibniz y la propiedad anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{nk} \left[\nabla_a (\nabla_b \phi_n \nabla_c \phi_k) - \nabla_a (\nabla_c \phi_n \nabla_b \phi_k) \right] \\ &= \nabla_a \nabla_b \phi_1 \nabla_c \phi_2 + \nabla_b \phi_1 \nabla_a \nabla_c \phi_2 - \nabla_a \nabla_b \phi_2 \nabla_c \phi_1 - \nabla_b \phi_2 \nabla_a \nabla_c \phi_1 \\ &\quad - \nabla_a \nabla_c \phi_1 \nabla_b \phi_2 - \nabla_c \phi_1 \nabla_a \nabla_b \phi_2 + \nabla_a \nabla_c \phi_2 \nabla_b \phi_1 + \nabla_c \phi_2 \nabla_a \nabla_b \phi_1, \end{aligned} \quad (2.19)$$

análogamente para las permutaciones de índices restantes, $(abc) \rightarrow (bca)$, $(abc) \rightarrow (bac)$, $(abc) \rightarrow (cab)$ y $(abc) \rightarrow (cba)$, se demuestra que la segunda ecuación de (2.10) se satisface idénticamente.

La primera ecuación de (2.10) en potenciales de Euler es

$$\begin{aligned} 0 &= F_{bc} \nabla_a F^{ab} = \varepsilon^{lm} \nabla_b \phi_l \nabla_c \phi_m \nabla_a \left(\varepsilon^{ij} \nabla^a \phi_i \nabla^b \phi_j \right) \\ &= \underbrace{\varepsilon^{lm} \nabla_c \phi_m}_{(i)} \overbrace{\varepsilon^{ij} \nabla_b \phi_l \nabla_a \left(\nabla^a \phi_i \nabla^b \phi_j \right)}^{(ii)}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

²Estructura introducida en [20].

donde hemos agrupado lo que se contrae y lo que no. Para que se satisfaga la igualdad necesitamos que (i) se anule o que (ii) se anule (no simultáneamente ambos), pero si se anula (i) obtenemos la solución trivial que no es de interés por lo tanto reordenando el segundo término se tiene

$$\boxed{\varepsilon^{ij} \nabla_a \phi_k \nabla_c (\nabla^a \phi_i \nabla^c \phi_j) = 0, \quad k = 1, 2;} \quad (2.21)$$

este es el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de interés para el presente trabajo.

Capítulo 3

Hiperbolicidad y well-posedness. Propiedades de las ecuaciones FFE en potenciales de Euler

El sistema de ecuaciones (2.21) es de gran interés puesto que es más simple de resolver, a simple vista, que el sistema (2.10) en términos de campos eléctrico y magnético. Pero esto no es tan directo, a continuación se presentan algunos resultados importantes de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales que se aplican para estudiar las características de las ecuaciones (2.21) [20].

3.1. Hiperbolicidad y well-posed

3.1.1. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

De manera resumida, los resultados de interés son aquellos relacionados con la *hiperbolicidad* y *well-posedness* de ecuaciones en derivadas parciales. Esta sección sigue la teoría y definiciones dadas en [21, 25, 26].

Consideremos un sistema de ecuaciones de primer orden con coeficientes constantes en un espacio de n dimensiones, denotamos las derivadas como $u_{x_i} := \partial u / \partial x_i$

$$u_t = P(\partial/\partial x)u = \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n A_j u_{x_j} \quad (3.1)$$

donde A_j es una matriz $n \times n$ compleja. Asimismo, $P(\partial/\partial x)$ es el operador de derivada, a este operador se le asocia un *símbolo* [27] que se obtiene formalmente de substituir $\partial/\partial x$ por $i\omega$.

Definición 3.1. La ecuación (3.1) junto a una condición inicial o de borde dada en el dominio del problema, se denomina *problema de Cauchy*.

Consideremos un problema de Cauchy sobre un dominio Ω

$$\begin{aligned} u_t &= \sum_{j=1}^n A_j u_{x_j}, \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

con $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$, la solución al problema está dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega \cdot x} e^{P(i\omega)t} \hat{f}(\omega) d\omega. \quad (3.3)$$

Definición 3.2. El problema de Cauchy (3.2) es *well-posed* (o bien-puesto) si existen algunas constantes $K > 0$ y α tales que

$$|e^{P(i\omega)t}| \leq Ke^{\alpha t}. \quad (3.4)$$

Más aún, usando (3.3) y la identidad de Parseval se obtiene

$$\|u(\cdot, t)\| \leq Ke^{\alpha t} \|f\|, \quad (3.5)$$

para alguna norma (que puede ser Sobolev).

La definición anterior implica que la solución del problema de Cauchy (3.2) está acotada por el dato inicial para todo tiempo.

A continuación introducimos la definición de *hiperbolicidad* de ecuaciones en derivadas parciales.

Definición 3.3. El sistema (3.1) se dice

- *Simétrico hiperbólico* si A_j es una matriz Hermitiana,
- *Estrictamente hiperbólico* si los autovalores de A_j son reales y distintos,
- *Fuertemente hiperbólico* si los autovalores de A_j son reales y existe un sistema completo de autovectores,
- *Débilmente hiperbólico* si los autovalores son reales.

El siguiente teorema es un compendio de varios teoremas de la literatura citada, resume la relación entre well-posed e hiperbolicidad.

Teorema 3.4. *El problema de Cauchy (3.2) es well-posed si y sólo si todos los autovalores de A_j son reales y posee un conjunto completo de autovectores, es decir, si es fuertemente hiperbólico. Un sistema débilmente hiperbólico es ill-posed (o mal-puesto), es decir, no es well-posed.*

En un problema mal-puesto las soluciones crecen exponencialmente con la frecuencia, causando que *la solución explote*. Aquí radica el interés principal de esta tesis pues para los casos que son fuertemente hiperbólicos se puede encontrar una solución numérica utilizando métodos tradicionales, pero en el caso mal-puesto esto ya no vale.

Lo anterior se reformula en lenguaje tensorial de la siguiente manera según la literatura [21, 25, 26, 28-32], comencemos por la definición de fuertemente hiperbólico. Consideremos el sistema dado por

$$\begin{cases} \partial_t u = A^i \partial_i u, \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (3.6)$$

donde $u(x, t) \in \mathbb{C}^s$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ son coordenadas espaciales y $A^i \in \mathbb{C}^{s \times s}$.

Definición 3.5. El sistema (3.6) se llama *fuertemente hiperbólico* si para cualquier covector k_c , la matriz $\mathbb{A} := A^i k_i$ tiene solo autovalores puramente reales y es diagonalizable.

Cualquier matriz compleja A es diagonalizable con autovalores reales si y sólo si existe un *simetrizador* H , es decir, una forma bilineal positiva definida tal que HA es simétrica. Por lo tanto, (3.6) es fuertemente hiperbólico si y sólo si para cada k_a existe una matriz $H(k)$ tal que $H(k)\mathbb{A}$ es simétrico.

Definición 3.6. El sistema (3.6) es *simétrico hiperbólico* si es posible encontrar un *simetrizador* H para todos los k_a posibles.

La condición de simétrico hiperbólico es suficiente pero no necesaria para garantizar que el sistema sea bien-puesto. En cambio, como vimos en la subsección anterior, un sistema fuertemente hiperbólico garantiza que sea bien-puesto luego de haber elegido una norma de Sobolev en particular.

3.1.2. Ecuaciones cuasi-lineales con coeficientes no constantes

Consideremos un sistema *cuasi-lineal* con coeficientes variables,

$$\begin{cases} \partial_t u^\alpha = A^{\alpha c}_\beta(t, x, u) \partial_c u^\beta + B^\alpha(t, x, u), \\ u^\alpha|_0 = f^\alpha \end{cases} \quad (3.7)$$

donde $u^\alpha = u^\alpha(t, x)$ es un campo tensorial arbitrario, $A^{\alpha c}_\beta$ y B^α dependen suavemente de sus argumentos.

Definición 3.7. Para $0 < T_0 < \infty$, sea $u_0(t, x)$, $t \in [0, T_0)$, una solución suave del problema (3.7). Decimos que el sistema es *well-posed* en la solución u_0 y con respecto a una norma $\|\cdot\|$ si dado cualquier $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que para cualquier dato inicial suave $f(x)$ con $\|f - f_0\| < \epsilon$, donde $f_0(x) := u_0(0, x)$, existe una solución suave $u(t, x)$ definida en $0 \leq t < T$, que satisface $|u(t, \cdot) - u_0(t, \cdot)| < \delta$ cuando $|T - T_0| < \delta$.

En este caso la definición de hiperbolicidad de un sistema cuasi-lineal es,

Definición 3.8. El sistema (3.7) es *fuertemente hiperbólico* si existe un *simetrizador*, esto es, una matriz definida positiva simétrica $H_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}(t, x, u, k)$, dependiendo suavemente de sus argumentos, tal que $h_{\alpha\beta} := H_{\alpha\gamma} A^{\gamma c}_\beta k_c$ es simétrica para todo k_c .

La manera de comprobar si un sistema del tipo (3.7) es well-posed es puramente algebraica y esto se presenta en el trabajo de Strang [33].

3.2. Hiperbolicidad y well-posedness de las ecuaciones FFE en PE

El estudio de la hiperbolicidad y well-posedness de las ecuaciones de electrodinámica Force-Free (2.21) se realizó en [20], los autores presentan una manera puramente algebraica para demostrar que las ecuaciones son mal-puestas, esto es, las soluciones no están acotadas por el dato inicial. A continuación presentamos los resultados más relevantes y necesarios para este trabajo.

3.2.1. Conjunto de ondas y descomposición 3+1

Para analizar la hiperbolicidad alcanza con estudiar el comportamiento de perturbaciones lineales de alta frecuencia en un *background* arbitrario [34], es decir, considerando soluciones arbitrarias de (2.21). Para $\epsilon > 0$ consideremos

$$\psi_i(\epsilon) = \phi_i + \epsilon \Phi_i e^{f/\sqrt{\epsilon}} \quad (3.8)$$

donde ψ_i es la solución de (2.21), f es un campo escalar complejo suave. A medida que ϵ se acerca a cero habrá más oscilaciones en una vecindad pequeña y tendrán

un tamaño cada vez más cercano a la solución de fondo ϕ_i , este es el *límite de alta frecuencia*.

Reemplazando (3.8) en (2.21) y tomando límite de $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\epsilon^{ij}(\ell_{ak}\ell^b{}_j - G_{kj}\delta^b{}_a)k^ak_b\Phi_i = 0, \quad (3.9)$$

donde

$$G_{ij} := \ell_i \cdot \ell_j = g^{ab}\nabla_a\phi_i\nabla_b\phi_j \quad (3.10)$$

es simétrico y, en general, es invertible, y $k_a := \nabla_a f$. Además vale aclarar que ϵ^{ij} permite *levantar* y *bajar* índices. La ecuación (3.9) se llama *parte principal* de (2.21) y describe completamente la estructura característica (o conjunto de onda) del sistema con respecto a una fuente de ondas genérica. El estudio de estas *características* determinan los planos de propagación de soluciones tipo onda.

Definiendo $\kappa_i := \ell_i \cdot k$ para $i = 1, 2$ se introduce

$$\mathcal{A}^i{}_j := \epsilon^{i\ell}(\kappa_j\kappa_\ell - k^2G_{j\ell}) \quad (3.11)$$

con $k^2 = k^ak_a$, por lo tanto (3.9) se reescribe como

$$\mathcal{A}^i{}_j\Phi_i = 0. \quad (3.12)$$

El sistema de ecuaciones (3.12) tiene solución si $\det(\mathcal{A}) = 0$, esto se da cuando $k^2 = 0$ o $k^2F/2 - G^{ij}\kappa_i\kappa_j = 0$, donde $F = F^{ab}F_{ab}$. En [20] se los introduce como *caso Cono* y *caso Cuña*, respectivamente. El primer caso no contiene información relevante para el presente trabajo, mientras que el caso Cuña es el que contiene lo interesante, pues este caso desemboca en obtener *modos espurios* de los campos electromagnéticos al resolver (2.21) perturbativamente, que no están presentes al resolver perturbativamente las ecuaciones de FFE en su representación de campos eléctrico y magnético, para más detalles referimos a [20].

Para el caso Cuña se puede descomponer el vector de onda k en una componente normal y una paralela. La componente k_\perp de k^a en el espacio generado por ℓ^a_1 y ℓ^a_2 , es decir, perpendicular a las hojas magnéticas definidas en el Capítulo 2. De manera que

$$k^2 = -k_0^2 + k_3^2 + k_\perp^2. \quad (3.13)$$

Por otra parte, asumiendo que $\ell_i := |\ell_i|n_i$, con n_i unitario, tenemos que la ecuación del caso Cuña es

$$0 = |\ell_1|^2|\ell_2|^2 [1 - (n_1 \cdot n_2)^2] k_\parallel^2, \quad (3.14)$$

luego, si $k_3 \neq 0$, las soluciones son $k_3 = \pm k_0$. Estas soluciones introducen los anteriormente mencionados *modos espurios*.

Para ver esto, en [20] se realiza la descomposición 3 + 1 guiados por el trabajo de Thorne & Macdonald [35] y analizaron los autovalores de la matriz \mathbb{A} resultante de la descomposición, es decir, la ecuación resulta de la forma $\mathbb{A}u = 0$. Para ello se considera una hipersuperficie Σ_0 espacial y un punto arbitrario $p \in \Sigma_0$ de manera tal que, eligiendo el gauge apropiado, los ℓ_i son perpendiculares entre si en p . Sea \mathcal{O}_p una vecindad abierta de p juntamente con un conjunto abierto $\mathcal{O} \in \mathcal{M}$ que está foliado por hipersuperficies espaciales que son las superficies de nivel de una función temporal suave $t : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $t^a := (\partial/\partial t)^a$ un campo vectorial normal a cada hipersuperficie en la foliación, elijamos la coordenada t tal que $t^a\nabla_at = 1$. Se define sobre cada hipersuperficie un referencial ortonormal $\{e^a_i\}_{i=0}^3$ tal que para los casos $i = 1, 2$ están en las direcciones de ℓ^a_i , y con $e^a_0 = (\partial/\partial t)^a$. De esta manera

se consigue descomponer la parte principal de (2.21) en un sistema $Au = 0$ donde $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$.

En el trabajo [20] se demuestran que esta matriz no es diagonalizable cuando $k_3 = k_0 = 0$, este caso corresponde a un vector perpendicular al plano $\{e_0, e_3\}$, esto implica que el vector de onda está en el espacio generado por los ℓ^a , es decir, está sobre las hojas magnéticas. Estas soluciones no aparecen al considerar el problema (2.10) con campos eléctricos y magnéticos proponiendo soluciones perturbativas, estos son los modos espurios. A su vez, esto implica que la matriz A no tiene un conjunto completo de autovectores, y de acuerdo a la definición 3.3, esto corresponde a un sistema *débilmente hiperbólico*. Por lo tanto, como se demuestra en [20], el sistema (2.21) es *mal-puesto*.

Capítulo 4

Reducción a sistema de primer orden y método numérico

En el capítulo 3 presentamos las propiedades de las ecuaciones (2.21), su hiperbolicidad y su condición *ill-posed*, este sistema es de segundo orden pero para resolverlo numéricamente necesitamos realizar una reducción a un sistema de primer orden.

4.1. Ecuaciones de primer orden

En esta sección se presenta el sistema de ecuaciones (2.21) de segundo orden reducido a un sistema de ecuaciones de primer orden, esto se hace principalmente para poder utilizar métodos tradicionales muy utilizados y bien estudiados que garantizan un buen desempeño en problemas bien puestos, en este caso se utiliza el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Los sistemas de ecuaciones mal-puestos no pueden ser estudiados por métodos tradicionales aplicados a sistemas bien-puestos, es por este motivo que estudiaremos un caso simplificado del problema. Por simplicidad consideremos el espacio-tiempo de Minkowski con la métrica $\eta_{\mu\nu}$ y signatura $(-, +, +, +)$, donde usamos letras griegas para hacer énfasis que elegimos un sistema de coordenadas, en nuestro caso cartesianas, $x^\mu = (t, x, y, z)$. Esto también implica que la conexión ahora es simplemente una derivada parcial, luego (2.14) resulta

$$\ell^\mu{}_i = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_i, \quad (4.1)$$

y las ecuaciones de FFE en PE (2.21) son

$$\varepsilon^{ij} \partial_\alpha \phi_k \partial_\gamma (\partial^\alpha \phi_i \partial^\gamma \phi_j) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (4.2)$$

Introduzcamos un poco de notación que será indispensable para realizar la reducción a un sistema de primer orden. Definimos

$$\begin{cases} v_i := \partial_t \phi_i, \\ \ell_{i\gamma} := \partial_\gamma \phi_i, \end{cases} \quad \gamma = x, y, z, \quad (4.3)$$

que llamaremos *variables de Euler*. Como $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu$ tenemos que $\partial^t = -\partial_t$ y $\partial^\alpha = \partial_\alpha$ para $\alpha = x, y, z$, entonces (4.2) resulta, para $k = 1, 2$,

$$0 = \varepsilon^{ij} \left[v_k v_j \partial_t v_i + (v_k v_i - \ell_{k\nu} \ell_i^\nu) \partial_t v_j - v_k \ell_j^\alpha \partial_\alpha v_i \right. \\ \left. - v_j \ell_k^\mu \partial_\mu v_i + \ell_{k\gamma} \ell_j^\beta \partial_\beta \ell_i^\gamma + (\ell_{k\delta} \ell_i^\delta - v_k v_i) \partial_\alpha \ell_j^\alpha \right], \quad (4.4)$$

cabe aclarar que sobre los índices griegos sólo se aplica convención de suma de Einstein y cuentan las dimensiones espaciales. Este es el sistema (4.2) reducido a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Las ecuaciones (4.4) forman el sistema que se resuelve numéricamente en el presente trabajo, pues el tensor de campo electromagnético se puede escribir en términos de las variables definidas en (4.3) sin necesidad de encontrar explícitamente los potenciales de Euler.

Las ecuaciones (4.4) se pueden reescribir como

$$\varepsilon^{ij} \left[v_k v_j \partial_t v_i + (v_k v_i - \ell_{k\nu} \ell_i^\nu) \partial_t v_j \right] = \varepsilon^{ij} \left[v_k \ell_j^\alpha \partial_\alpha v_i + v_j \ell_k^\mu \partial_\mu v_i - \ell_{k\gamma} \ell_j^\beta \partial_\beta \ell_i^\gamma \right. \\ \left. - (\ell_{k\delta} \ell_i^\delta + v_k v_i) \partial_\alpha \ell_j^\alpha \right], \quad (4.5)$$

que representan un sistema de ecuaciones de la forma

$$\mathbb{A} \partial_t \vec{v} = \mathbb{B}^\mu \partial_\mu \vec{v}, \quad (4.6)$$

donde \vec{v} tiene por componentes a los v_i ($i = 1, 2$) y la matriz \mathbb{A} es, en general, invertible. Por lo tanto podemos obtener un sistema de la forma

$$\partial_t \vec{v} = \mathbb{A}^{-1} \mathbb{B}^\mu \partial_\mu \vec{v}, \quad (4.7)$$

definiendo $\mathbb{M}^\mu := \mathbb{A}^{-1} \mathbb{B}^\mu$ obtenemos

$$\partial_t \vec{v} = \mathbb{M}^\mu \partial_\mu \vec{v}, \quad \mu = x, y, z. \quad (4.8)$$

Donde $\mathbb{M} = \mathbb{M}(v_i, \ell_i)$, es decir, el problema es con coeficientes no constantes que dependen de las *variables de Euler* (4.3).

4.1.1. Modos espurios

Como se mostró en la Sec. 3.2, el sistema de interés es mal-puesto y presenta una estructura de ondas que dan lugar a modos espurios. Para estudiar numéricamente los modos espurios del sistema de ecuaciones de primer orden (4.8) es necesario dar condiciones iniciales (CI) apropiadas. La estrategia es dar como CI un modo espurio y evolucionar el sistema, para ello se presenta a continuación un categorización de estos modos. Esto se logra realizando una descomposición $3 + 1$ que permite resolver el problema de valores iniciales de forma numérica.

La descomposición $3 + 1$ de la Sec. 3.2.1 nos permite introducir los siguientes cuadvectores y su producto

$$\ell_i^a = (0, \vec{\ell}_i), \quad k^a = (k_0, \vec{k}), \quad \ell_j^a k_a = \vec{\ell}_j \cdot \vec{k} \quad (4.9)$$

de manera tal que introduciéndolos en (3.9) y fijando un gauge tal que $\vec{\ell}_1 \cdot \vec{\ell}_2 = 0$, se obtienen las condiciones sobre ℓ_i^a para los modos espurios, $k_0 = k_3 = 0$ dadas por

$$k^a = \bar{\kappa}^i \ell_i^a. \quad (4.10)$$

Para definir $\bar{\kappa}^i$, previamente introducimos algunas cantidades calculadas en [20] además de utilizar (3.10),

$$\begin{cases} F := & F^{ab} F_{ab}, \\ \det(G) := & F/2, \\ G^{ij} := & \varepsilon^{ik} \varepsilon^{jl} G_{kl}, \\ \tilde{G}^{ij} := & \frac{2}{F} G^{ij} \implies \tilde{G}^{ij} G_{jk} = \delta^i_k, \\ \kappa_i := & \ell_i \cdot k, \end{cases} \quad (4.11)$$

entonces $\bar{\kappa}^i := \tilde{G}^{ij} \kappa_j$. Luego, reemplazando todo esto en (4.10), definiendo

$$\begin{cases} \alpha := & \frac{|\vec{\ell}_1|^2}{|\vec{\ell}_2|^2} = cte, \\ \beta := & \frac{1}{|\vec{\ell}_2|^2} = cte, \end{cases} \quad (4.12)$$

y considerando $k^a = (0, k, k, 0)$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\beta = \alpha(\ell_{2x} + \ell_{2y})\ell_{2x} + (\ell_{1x} + \ell_{1y})\ell_{1x}, \quad (4.13)$$

$$\beta = \alpha(\ell_{2x} + \ell_{2y})\ell_{2y} + (\ell_{1x} + \ell_{1y})\ell_{1y}, \quad (4.14)$$

$$0 = \alpha(\ell_{2x} + \ell_{2y})\ell_{2z} + (\ell_{1x} + \ell_{1y})\ell_{1z}, \quad (4.15)$$

$$0 = \vec{\ell}_1 \cdot \vec{\ell}_2 = \ell_{1x}\ell_{2x} + \ell_{1y}\ell_{2y} + \ell_{1z}\ell_{2z}, \quad (4.16)$$

donde (4.16) corresponde a la elección de gauge.

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos condiciones iniciales sobre los ℓ_{ix^a} para introducir un modo espurio. Debido a que no evolucionamos los ℓ_{iz} , podemos tomar $\ell_{1z} = \ell_{2z} = 0$ así la ecuación (4.15) se puede descartar. Esto nos deja con tres ecuaciones y cuatro incógnitas, por lo tanto elijo fijar

$$\ell_{1x} = \ell_{1x}^0 + \varepsilon \sin(\vec{k} \cdot \vec{x}), \quad (4.17)$$

donde $\ell_{1x}^0 = cte$ y ε es la perturbación. De la ecuación (4.16) tengo que

$$\ell_{2x} = -\frac{\ell_{1y}\ell_{2y}}{\ell_{1x}}, \quad (4.18)$$

ahora restando las ecuaciones (4.13) y (4.14) obtengo

$$0 = \alpha(\ell_{2x})^2 + (\ell_{1x})^2 - \alpha(\ell_{2y})^2 - (\ell_{1y})^2 \quad (4.19)$$

entonces reemplazando (4.18) en (4.19)

$$\begin{aligned}
0 &= \alpha(\ell_{1y})^2 \left(\frac{\ell_{2y}}{\ell_{1x}} \right)^2 + (\ell_{1x})^2 - \alpha(\ell_{2y})^2 - (\ell_{1y})^2 \\
&= (\ell_{1y})^2 \left[\alpha \left(\frac{\ell_{2y}}{\ell_{1x}} \right)^2 - 1 \right] + \ell_{1x}^2 - \alpha(\ell_{2y})^2 \\
&= \left(\frac{\ell_{1y}}{\ell_{1x}} \right)^2 [\alpha(\ell_{2y})^2 - (\ell_{1x})^2] - [\alpha(\ell_{2y})^2 - (\ell_{1x})^2] \\
&= \left[\left(\frac{\ell_{1y}}{\ell_{1x}} \right)^2 - 1 \right] [\alpha(\ell_{2y})^2 - (\ell_{1x})^2],
\end{aligned} \tag{4.20}$$

es decir,

$$\left[\left(\frac{\ell_{1y}}{\ell_{1x}} \right)^2 - 1 \right] [\alpha(\ell_{2y})^2 - (\ell_{1x})^2] = 0, \tag{4.21}$$

por lo tanto, obtendremos dos conjuntos de datos iniciales con modos espurios.

Para ambos modos espurios necesitamos que se satisfaga la condición de simetría de la derivada segunda espaciales de los potenciales ϕ_i que determinan el dato inicial, es decir $\partial_i \partial_j \phi_k = \partial_j \partial_i \phi_k$ pero esto no sucede por la naturaleza del sistema de ecuaciones que dan lugar a estos datos iniciales, para sortear este obstáculo utilizamos los parámetros α y β junto a la perturbación ϵ para que $|\partial_i \partial_j \phi_k - \partial_j \partial_i \phi_k| \ll 10^{-6}$ en el dominio donde se evoluciona el sistema. Es importante que la simetría de las derivadas cruzadas se satisfaga porque es una propiedad de la derivada covariante en Minkowski y se utiliza para poder hacer la reducción a un sistema de ecuaciones de primer orden. Por lo tanto a fines numéricos pedir que la diferencia entre las derivadas cruzadas sea menor a una cierta tolerancia nos garantiza que la condición de simetría se satisfaga.

4.1.1.1. Modos espurios de Tipo I

Considero $[\alpha(\ell_{2y})^2 - (\ell_{1x})^2] \neq 0$, por lo tanto $\left[\left(\frac{\ell_{1y}}{\ell_{1x}} \right)^2 - 1 \right] = 0$, de manera que obtengo

$$\boxed{\ell_{1y}^{(\pm)} = \pm \ell_{1x}}. \tag{4.22}$$

Esto nos da dos posibles soluciones, comenzando con $\ell_{1y} = \ell_{1x}$ y reemplazando en (4.13) obtenemos

$$\boxed{\ell_{2y} = \frac{\beta - 2(\ell_{1x})^2}{\alpha \ell_{2x}} - \ell_{2x}}. \tag{4.23}$$

Ahora sustituyendo (4.23) en (4.14) se obtiene

$$\boxed{\ell_{2x}^{(\pm)} = \pm \sqrt{\frac{\beta - 2(\ell_{1x})^2}{1 + \alpha}}}. \tag{4.24}$$

A estos modos los llamaremos *Tipo I-a* si se elije $\ell_{2x}^{(+)}$ y *Tipo I-b* si se opta por $\ell_{2x}^{(-)}$.

Si, en cambio, elegimos $\ell_{1y} = -\ell_{1x}$, de la ecuación (4.13) obtenemos

$$\ell_{2y} = \frac{\beta}{\alpha \ell_{2x}} - \ell_{2x}, \quad (4.25)$$

y de (4.14)

$$\ell_{2x}^{(\pm)} = \pm \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}}, \quad (4.26)$$

pero α y β son constantes positivas, con lo cual los campos ℓ_{2x} y ℓ_{2y} serán constantes. Aquí definimos modos de *Tipo I-c* y *Tipo I-d* para $\ell_{2x}^{(+)}$ y $\ell_{2x}^{(-)}$, respectivamente.

4.1.1.2. Modos espurios de Tipo II

Asumiendo $\left[\left(\frac{\ell_{1y}}{\ell_{1x}}\right)^2 - 1\right] \neq 0$, implica que $[\alpha(\ell_{2y})^2 - (\ell_{1x})^2] = 0$, entonces

$$\ell_{2y}^{(\pm)} = \pm \alpha^{-1/2} \ell_{1x}, \quad (4.27)$$

reemplazando en (4.18), obtengo la condición sobre ℓ_{2x} ,

$$\ell_{2x}^{(\mp)} = \mp \alpha^{-1/2} \ell_{1y}. \quad (4.28)$$

Esto nos separa, nuevamente, el modo espurio en dos casos. Si elegimos $\ell_{2y}^{(+)}$ entonces tenemos $\ell_{2x}^{(-)}$. Reemplazando en (4.13), obtengo

$$\ell_{1y}^{(\pm)} = \pm \sqrt{\beta - (\ell_{1x})^2}, \quad (4.29)$$

con lo cual tenemos dos posibles valores para ℓ_{1y} .

Si tomamos $\ell_{2y}^{(-)}$ entonces, $\ell_{2x}^{(+)}$ y obtenemos de (4.13)

$$\ell_{1y}^{(\pm)} = \pm \beta^{1/2} - \ell_{1x}, \quad (4.30)$$

que nos vuelve a dar dos posibles valores de ℓ_{1y} . De manera tal que, para esta solución de la ecuación (4.21), obtenemos cuatro posibles modos espurios.

4.2. Método numérico

Con todo lo presentado en los capítulos y secciones anteriores obtenemos el problema a estudiar, es decir, resolver numéricamente el sistema de ecuaciones (4.8) con dato inicial, considerando los casos que generan modos espurios. Para ello se utiliza un código en lenguaje C desarrollado por el Dr. Oscar Reula en conjunto con miembros del Grupo de Relatividad y Gravitación del IFEG, el cual implementa un Runge-Kutta de cuarto orden para realizar la integral temporal y operadores de diferencias finitas para calcular las derivadas espaciales.

En este trabajo se utiliza un operador de diferencias finitas de orden seis, de modo tal que el error es $\mathcal{O}(\Delta x^6)$, para construir dicho operador se utilizan los siguientes

operadores [21, 36]

$$\begin{cases} D_0 u_j &= (2\Delta x)^{-1}(u_{j+1} - u_{j-1}), & \text{Centered} \\ D_+ u_j &= (\Delta x)^{-1}(u_{j+1} - u_j), & \text{Forward} \\ D_- u_j &= (\Delta x)^{-1}(u_j - u_{j-1}), & \text{Backward} \end{cases} \quad (4.31)$$

donde u_j es la función evaluada en el punto j -ésimo de la grilla espacial. Con lo cual, el operador de orden seis es

$$D_6 = D_0 - D_0 \frac{(\Delta x)^2}{6} D_+ D_- + D_0 \frac{(\Delta x)^4}{30} D_+^2 D_-^2. \quad (4.32)$$

Estos operadores satisfacen la condición *SBP* (sumation by parts) que es el equivalente discreto de la definición de *well-posed*.

Dado que nuestro problema de interés es débilmente hiperbólico o *ill-posed*, estamos interesados en poder controlar las soluciones espurias y mitigar modos de alta frecuencia que se predicen en [20], una herramienta útil para lograr estabilidad numérica y controlar dichos modos es la *disipación numérica*. Esto consiste en modificar las ecuaciones y agregar un término con derivada espacial de orden alto, por ejemplo

$$u_t = D_p u \rightarrow u_t = D_p u + \sigma D_q u, \quad (4.33)$$

donde D_p es un operador de diferencia finita de orden p y D_q está definido como

$$D_q = (-1)^{r-1} (\Delta x)^{2r-1} D_+^{(r)} D_-^{(r)}, \quad (4.34)$$

y σ es la fuerza de disipación que debe ser positiva y constante. Este operador se conoce como *operador de disipación de Kreiss-Oliger de orden q (KO q)* y en el presente trabajo se utilizarán los operadores *KO8* y *KO4* adaptado para mantener el orden de precisión igual al del operador D_6 .

En la teoría de ecuaciones en derivadas parciales es importante estudiar el dominio de dependencia del sistema [37].

Definición 4.1. Consideremos una ecuación diferencial en algún dominio \mathcal{D} . Dada una región Γ , la mayor región Ω donde tenemos unicidad de las soluciones con datos iniciales idénticos a los dados en Γ se llama **dominio de dependencia (DoD)** de Γ . Es decir, dando datos iniciales en Γ las soluciones quedan unívocamente determinadas en todo el dominio Ω .

En el análisis numérico el DoD de la aproximación de diferencia finita (DoD-FD) está definido por los puntos de grilla (mdt, ndx) que influyen en la solución en el punto de grilla (pdt, qdt) fijo. En este sentido se pide que el DoD-FD incluya al DoD del sistema de ecuaciones y se conoce como *condición de Courant-Friedrich-Lewy (CFL)* [21],

$$CFL = \frac{v dt}{dx} \leq C, \quad (4.35)$$

donde v es la velocidad de propagación y C es el número de Courant. Esto se interpreta como que la velocidad v de propagación de la solución no puede superar a la velocidad de la luz c , mientras esto se satisfaga decimos que estamos en el dominio de dependencia numérico [26]. Este es un testeo útil para asegurar que nuestro sistema de interés (4.8) no rompe la conexión causal de los datos, es decir, ninguna solución escapa del cono de luz.

Otra definición de la teoría de ecuaciones diferenciales es la llamada *energía del sistema* o energía en norma L^2 . Supongamos que tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u_x = av_t, \\ v_x = u_t, \end{cases} \quad (4.36)$$

donde a es una constante. La energía de dicho sistema se define como

$$\mathcal{E} := \int_{\Omega} (u^2 + v^2) dx, \quad (4.37)$$

donde Ω es el dominio espacial de las soluciones u y v . Esta energía no siempre coincide con la energía física, un ejemplo en donde sí lo hace es en el electromagnetismo. Esta energía en norma L^2 vale para el caso continuo pero cuando se realiza una evolución numérica hay que utilizar la norma discreta (conocida como norma l^2) donde se reemplaza la integral por una sumatoria, sin embargo en el presente trabajo hablamos de norma L^2 refiriéndonos al caso discreto.

En este trabajo, debido a que las ecuaciones son sobre los potenciales de Euler, la energía L^2 no es la misma que la energía física que corresponde a la energía del electromagnetismo. En la bibliografía se muestra que la energía (4.37) se debe conservar para un sistema de ecuaciones simétrico hiperbólico (o well-posed), esto no es así para un sistema ill-posed. Sin embargo, son muchos los sistemas de interés que son controlados por la disipación numérica, y nuestro caso no es la excepción como se verá en el capítulo 5.

4.2.1. Dominio espacial y mallado de evolución

El sistema de ecuaciones se evoluciona en un dominio cúbico dado por

$$\begin{cases} x \in [-1, 1], \\ y \in [-1, 1], \\ z \in [0, 2], \end{cases} \quad (4.38)$$

donde se dan condiciones iniciales periódicas y se pueden utilizar operadores de diferencia finita periódicos. Este dominio se representa en la figura 4.1.

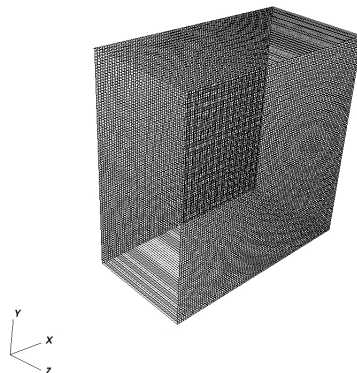


FIGURA 4.1: Dominio y mallado de evolución.

Capítulo 5

Soluciones numéricas de las ecuaciones FFE en PE

En este capítulo convergemos al núcleo del trabajo final, estudiar numéricamente el comportamiento de las soluciones a las ecuaciones de Force-Free en Potenciales de Euler en el espacio de Minkowski considerando casos particulares mencionados en los capítulos anteriores.

Previo al estudio del comportamiento de los modos espurios se realiza un testeo del código utilizando como dato inicial un modo no espurio con un CFL próximo a uno, esto nos asegura que la velocidad de propagación de la solución no supera la velocidad de la luz, que en nuestro trabajo está normalizada como $c = 1$. El resto de las simulaciones se realizan con $CFL \approx 0,1$, este es un valor bueno que nos asegura estar siempre en la región de convergencia del método numérico (ver [26, 36]).

Cabe destacar que para todo lo que sigue, cuando se habla de energía en norma L^2 estamos retirando la energía de la solución de *background* (o solución de fondo), es decir $E_{||L^2||} = E - E_0$. En virtud de lo descrito en la Sección 4.2 la energía está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = \int_{\Omega} [& (v_1)^2 + (v_2)^2 + (\ell_{1x})^2 + (\ell_{1y})^2 + (\ell_{1z})^2 \\ & + (\ell_{2x})^2 + (\ell_{2y})^2 + (\ell_{2z})^2] d^3\vec{x}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde Ω es el dominio donde están definidas las ecuaciones. Dado que estamos en el caso numérico, se debe utilizar la energía en normal L^2 discreta. También se utiliza la energía física del electromagnetismo para corroborar que ella sí se conserva dentro de cierto rango.

5.1. Test con dato inicial no espurio

El dato inicial no espurio es

$$\begin{cases} v_1 = v_1^0 + \epsilon f(x, y), \\ v_2 = v_2^0 + \epsilon f(x, y), \\ \ell_{1x} = \ell_{1x}^0 + \epsilon f(x, y), \\ \ell_{1y} = \ell_{1y}^0 + \epsilon f(x, y), \\ \ell_{2x} = \ell_{2x}^0 + \epsilon f(x, y), \\ \ell_{2y} = \ell_{2y}^0 + \epsilon f(x, y), \\ \ell_{1z} = \ell_{1z}^0, \\ \ell_{2z} = \ell_{2z}^0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Donde los ℓ_{ij}^0 y los v_i^0 son constantes, $\epsilon = 10^{-2}$ es una perturbación pequeña y

$$f(x, y) = A_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x}) p(x, y), \quad (5.3)$$

con A_0 una constante y $p(x, y)$ es un polinomio de orden alto, en este trabajo se toma orden 12, que va como $p(x, y) = c_0(x - x_0)^q(x - x_1)^q/c_1$, con c_0 y c_1 constantes. Esta función toma valores dentro del dominio $[x_0, x_1]$ y fuera de ese dominio se toma una función nula.

5.1.1. Condición CFL próxima a 1

Tomando una discretización temporal dt con una cantidad de puntos $N_t = 182$ y una espacial dx con $N_x = 91$ y $N_y = 91$ puntos espaciales en el plano $x - y$, tales que el $CFL = \frac{dt}{dx} \approx 1$, la energía en norma L^2 se muestra en la figura 5.1.

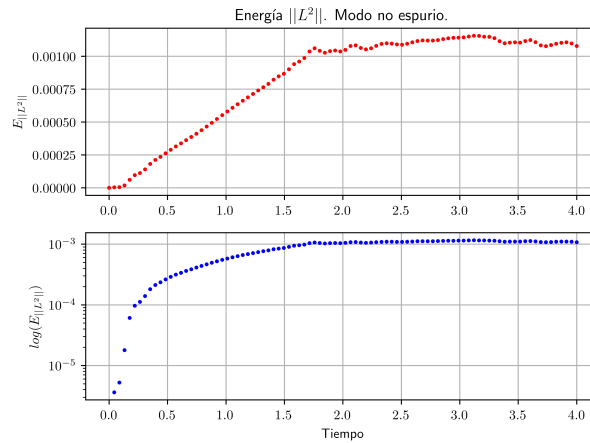


FIGURA 5.1: Comportamiento de la energía en norma L^2 del sistema de ecuaciones, en escala lineal y logarítmica.

Como predice la teoría, al tener un sistema de ecuaciones *ill-posed*, la energía en norma L^2 no es constante. Para este caso se observa un crecimiento lineal y luego comienza a ser constante. La energía del electromagnetismo se observa en la figura 5.2. La variación que se observa es de orden 10^{-4} sobre la energía inicial que es del orden de $1,07446 \times 10^2$, esto indica que la energía física se conserva, como es de esperar.

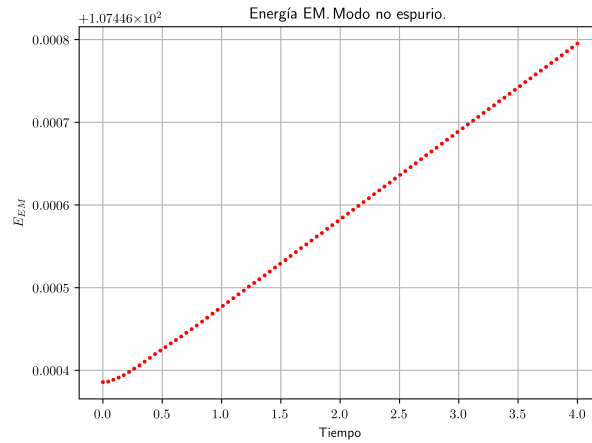


FIGURA 5.2: Comportamiento de la energía física del sistema de ecuaciones

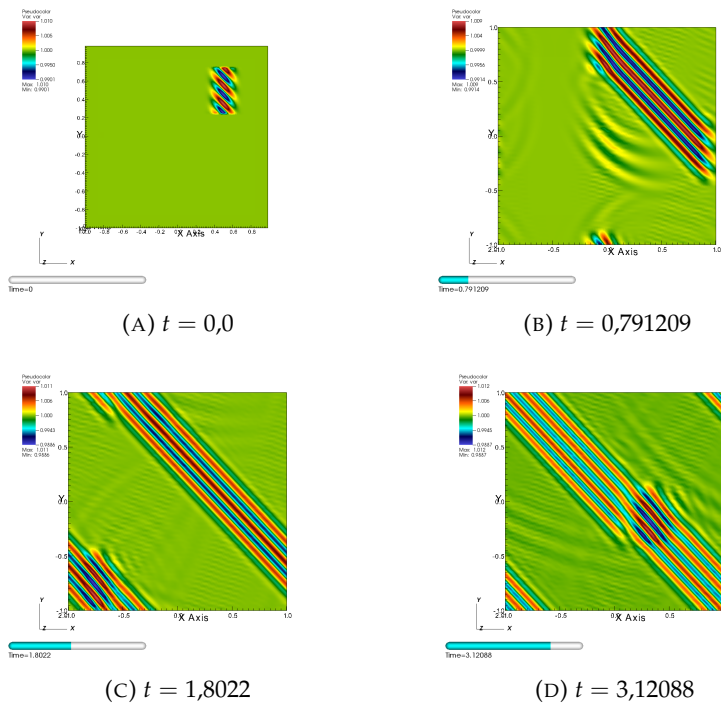


FIGURA 5.3: Evolución del campo v_1 para cuatro tiempos distintos.

La figura 5.3 muestra la evolución del campo v_1 . La subfigura 5.3a es el dato inicial, el resto de figuras son a tiempos posteriores, parte de la onda viaja hacia los $+x$ y otra parte hacia los $-x$, esto produce ese estiramiento del dato inicial. Además, se observa la aparición de modos de alta frecuencia, particularmente en las subfiguras 5.3c y 5.3d, que se observan como un reticulado de baja amplitud. Lo mismo sucede con el campo v_2 , pero las amplitudes de los modos de alta frecuencia son más grandes como se observa en las subfiguras 5.4c y 5.4d.

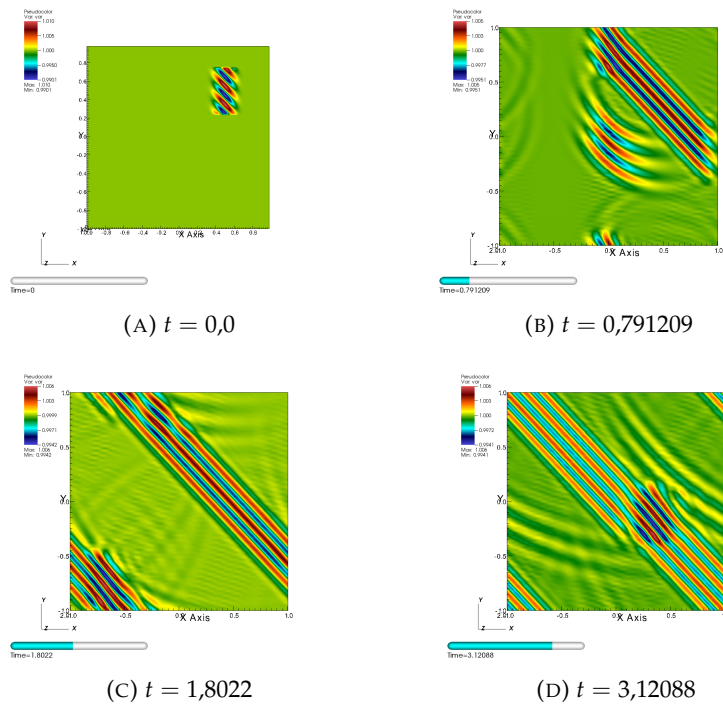


FIGURA 5.4: Evolución del campo v_2 para cuatro tiempos distintos.

Ahora, usando el operador de disipación de Kreiss-Oliger de orden 8 con una fuerza de disipación $\sigma = 0,001$, podemos observar un decaimiento en la energía L^2 en la figura 5.5. Esto se debe a que la disipación numérica atenúa los modos de alta frecuencia que aparecen al resolver el sistema de ecuaciones (4.8). Observando las figuras 5.6 y 5.7 se aprecia como los modos de alta frecuencia han desaparecido o su amplitud ha disminuido, en comparación a las figuras 5.3 y 5.4

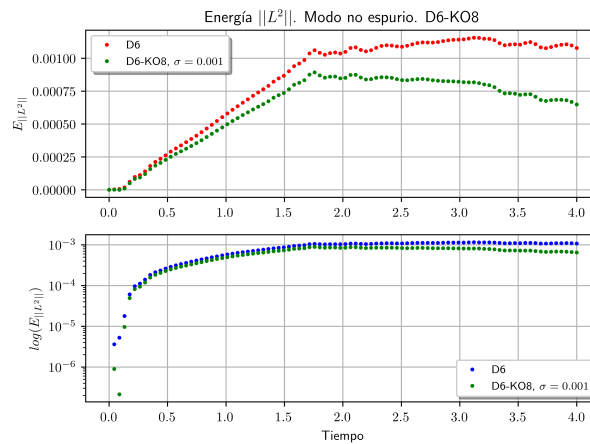


FIGURA 5.5: Comparativa de la energía en norma L^2 del sistema de ecuaciones, en escala lineal y logarítmica, agregando disipación numérica.

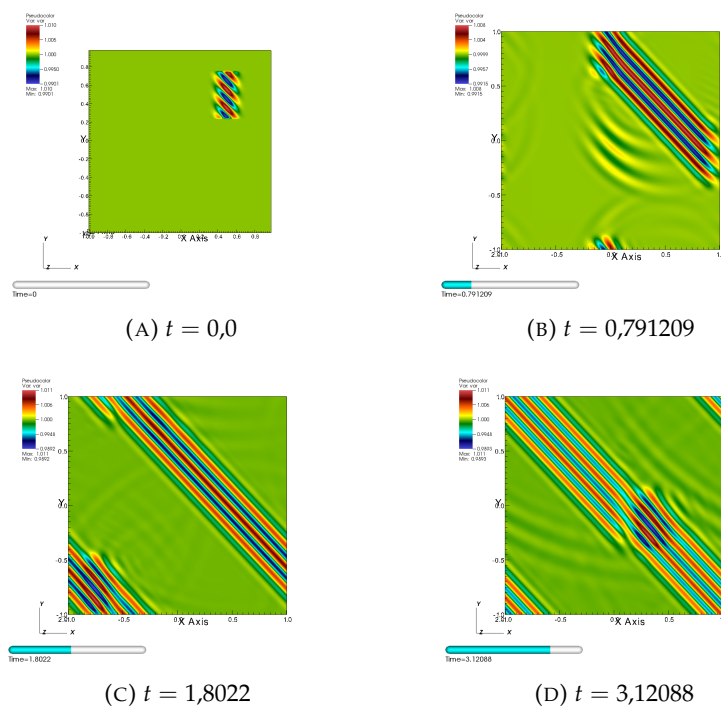


FIGURA 5.6: Evolución del campo v_1 para cuatro tiempos distintos con disipación.

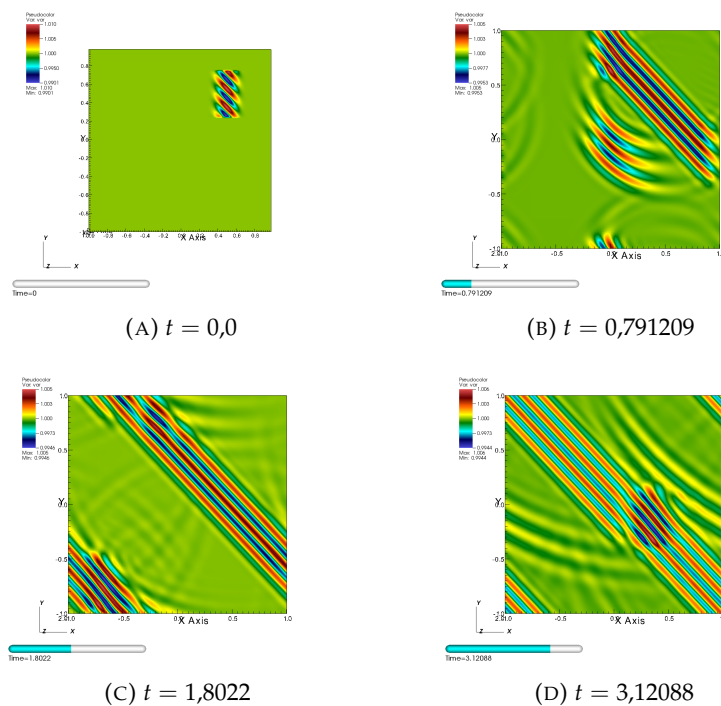


FIGURA 5.7: Evolución del campo v_2 para cuatro tiempos distintos con disipación.

El valor de σ es tal que los autovalores del operador $KO8$ van como $1/dx$, dado que estamos en el caso $CFL \approx 1$, dx es grande y si tomamos un valor de σ más grande los campos crecen extremadamente rápidos y se van fuera de la región de

convergencia del método. Esto cambia cuando se toma $CFL \approx 0,1$ como se expone en la siguiente subsección.

5.1.2. Condición CFL próxima a 0,1

Eligiendo $N_t = 1980$ puntos de grilla temporal y $N_x = N_y = 101$ puntos de grilla espacial, obtenemos un $CFL \approx 0,1$ manteniendo $t = 4$. En este caso la energía L^2 se observa en la figura 5.8 junto a la energía con disipación. Para $\sigma = 0,01$ vemos que la energía tiene una marcada pendiente negativa para $t > 1,5$ que corresponde a una fuerte atenuación de modos de alta energía como muestra la figura 5.9b y 5.10b. Cuando la intensidad de disipación es $\sigma = 0,001$, las soluciones de alta frecuencia se aplacan levemente y cuando $\sigma = 0,0001$, vemos que la disipación numérica no tiene un efecto notable, tal y como muestran las figuras 5.9c, 5.9d, 5.10c y 5.10d. Por lo tanto, para un modo no espurio, $\sigma = 0,01$ resulta ser el valor con el que se logra un mayor control sobre soluciones de alta frecuencia.

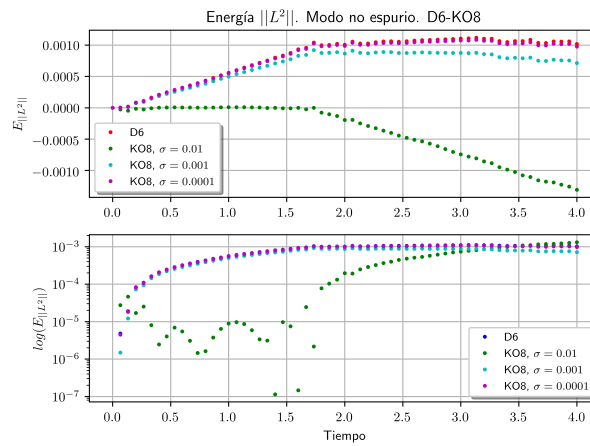
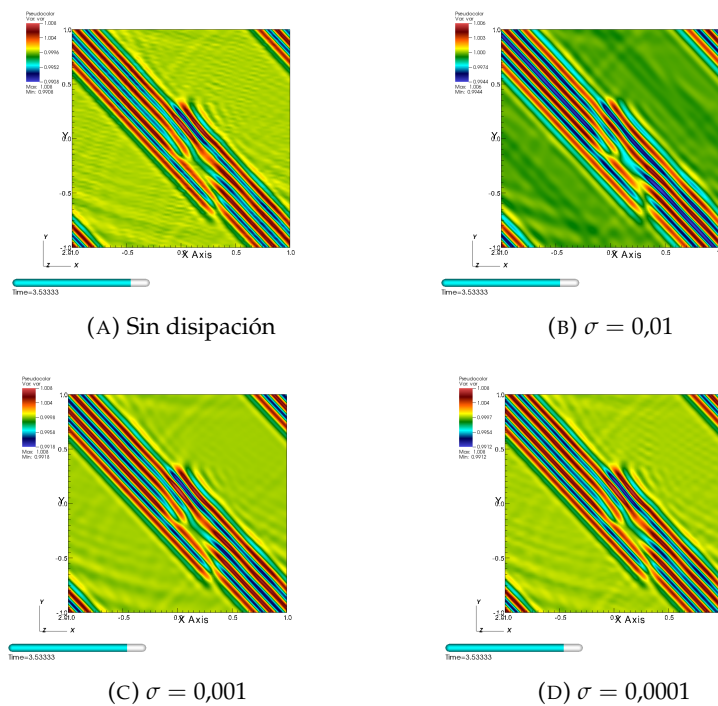
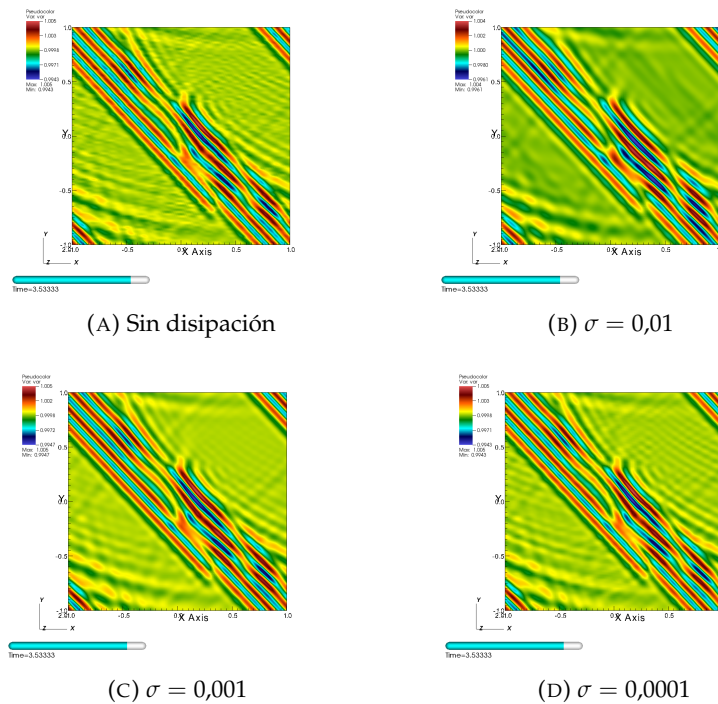


FIGURA 5.8: Comparativa de la energía en norma L^2 del sistema de ecuaciones, en escala lineal y logarítmica, considerando distintos valores de la fuerza de disipación σ .

FIGURA 5.9: Evolución del campo v_1 a $t = 3,53333$.FIGURA 5.10: Evolución del campo v_2 a $t = 3,53333$.

Lo presentado en las dos secciones anteriores nos garantiza que la velocidad de propagación de las soluciones no supera la velocidad de la luz, es decir, no tengo ninguna desconexión causal; y además, nos indica que la disipación numérica es un posible método de control de los modos espurios, permitiéndonos evolucionar el sistema para tiempos largos como se verá en las siguientes secciones.

5.2. Solución con modos espurios de Tipo I

Los modos espurios de *Tipo I* se dividen en cuatro subtipos, que llamamos *Tipo I-a*, *Tipo I-b*, *Tipo I-c* y *Tipo I-d*¹. Primero comencemos con los modos de *Tipo I-a*, donde el dato inicial está dado por

$$\begin{cases} v_1 = v_2 = 0, \\ \ell_{1z} = \ell_{2z} = 0, \\ \ell_{1x} = \ell_{1x}^0 + \epsilon f(x, y), \\ \ell_{1y} = \ell_{1x}, \\ \ell_{2x} = \sqrt{\frac{\beta - 2(\ell_{1x})^2}{1 + \alpha}}, \\ \ell_{2y} = \frac{\beta - 2(\ell_{1x})^2}{\alpha \ell_{2x}} - \ell_{2x}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Para este modo espurio necesitamos considerar una perturbación $\epsilon = 10^{-6}$ para poder evolucionar el sistema por un lapso de tiempo $t = 4$, pues como se ve en la figura 5.11 la energía en norma L^2 diverge abruptamente. La energía física 5.12 se considera constante, pues la variación es de orden 10^{-8} pero cuando la solución diverge, se observa un gran crecimiento de la misma. Los modos espurios rompen la solución como muestra la figura 5.17.

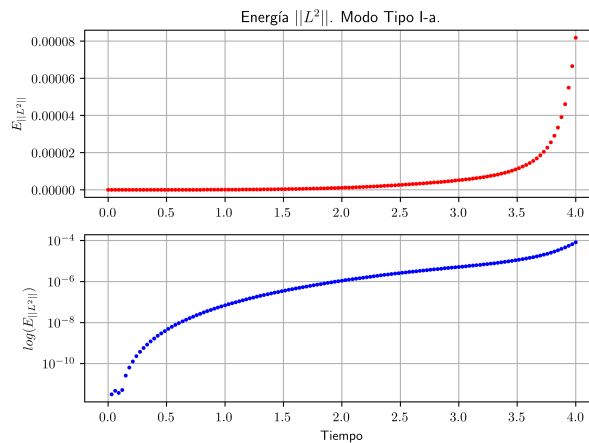


FIGURA 5.11: Energía del sistema de ecuaciones para modo espurio de Tipo I-a.

¹Los modos de Tipo I-c y I-d no brindan información adicional ni dan lugar a comportamientos distintos a los observados para los primeros dos tipos, por lo tanto solo estudiamos el primer par. Esto se debe a que los cuatro modos provienen de la misma ecuación de la Sec. 4.1.1.1.

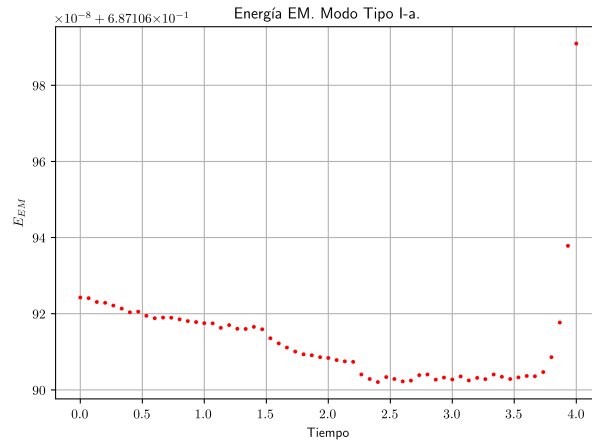


FIGURA 5.12: Energía física para modo espurio de Tipo I-a.

Utilizando un operador de disipación de Kreiss-Oliger (KO) de orden 8 (KO8) se observa un mal comportamiento para este tipo de modo espurio en la figura 5.13. Vemos que para una intensidad de disipación $\sigma = 0,01$ el crecimiento de la energía es muy marcado mientras que para valores más pequeños de σ , el sistema diverge muy rápido. Estos casos extremos se deben a que las frecuencias son muy grandes y el operador KO8 crece como ω^8 en la frecuencia, lo cual se ve detalladamente en la figura 5.13.

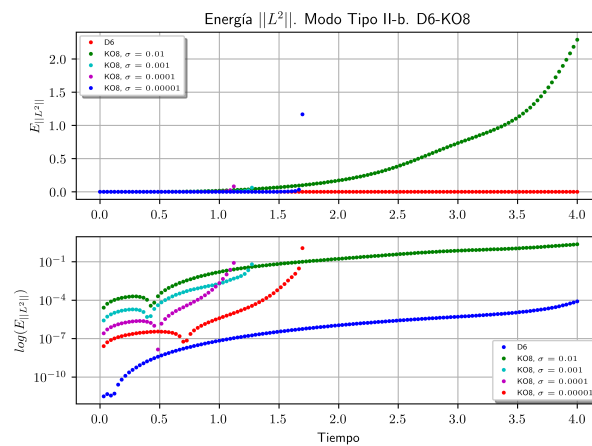


FIGURA 5.13: Comportamiento de la energía con disipación de Kreiss-Oliger de orden 8.

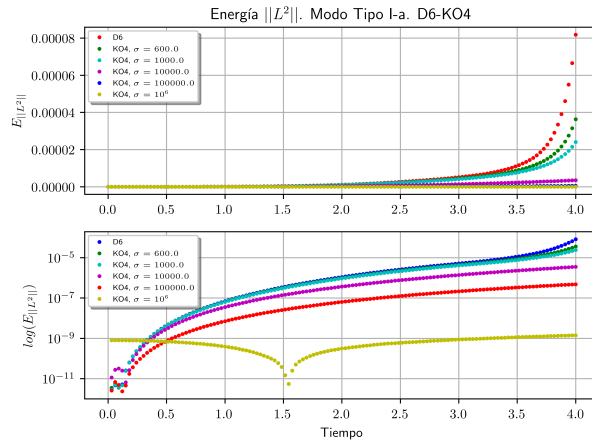


FIGURA 5.14: Comportamiento de la energía con disipación de Kreiss-Oliger de orden 4.

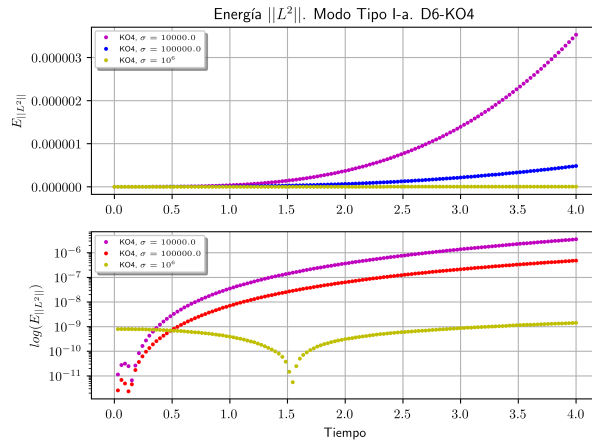


FIGURA 5.15: Comparativa de los mejores valores de σ con operador KO4.

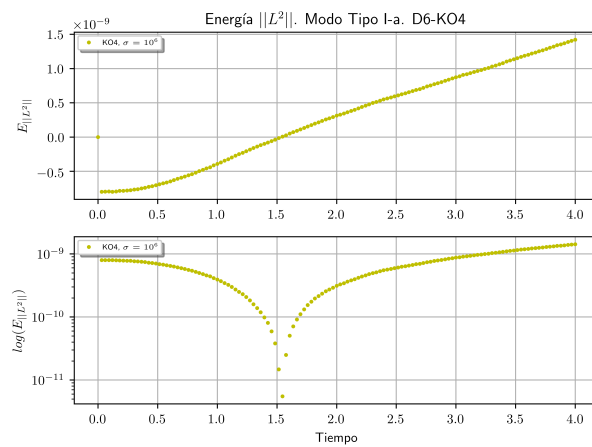


FIGURA 5.16: Valor de σ más potente.

Con el operador de disipación de Kreiss-Oliger de orden 4, obtenemos un comportamiento esperado, este operador atenúa las soluciones de alta frecuencia de manera tal que la energía L^2 no crece tan abruptamente como se observa en la figura 5.14.

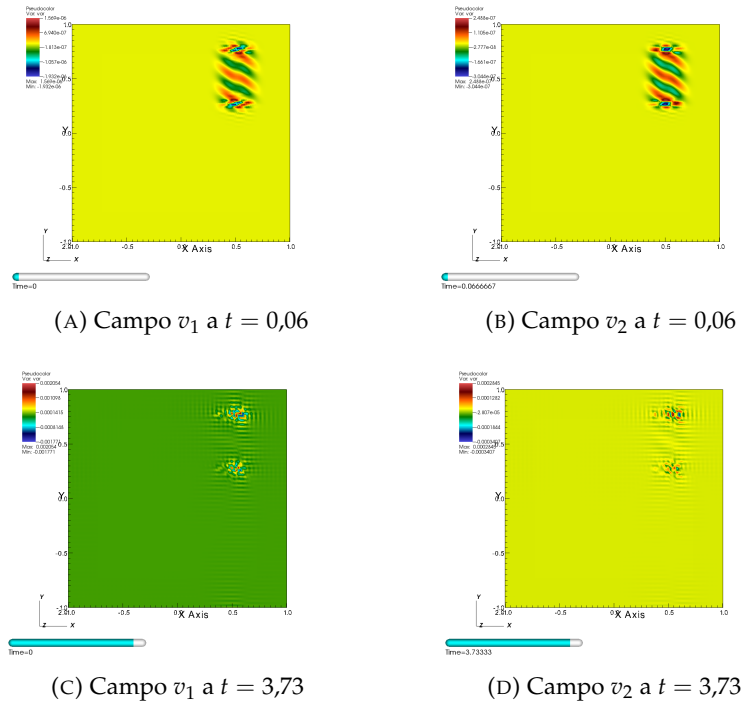


FIGURA 5.17: Modo espurio de Tipo I-a sin disipación.

En las figuras 5.18 y 5.19 se muestra como la disipación aplicada por este operador permite mantener el dato inicial más solidario a medida que evoluciona el sistema. Obteniendo que para $\sigma = 10000,0$ se da el mejor control de los modos de alta frecuencia.

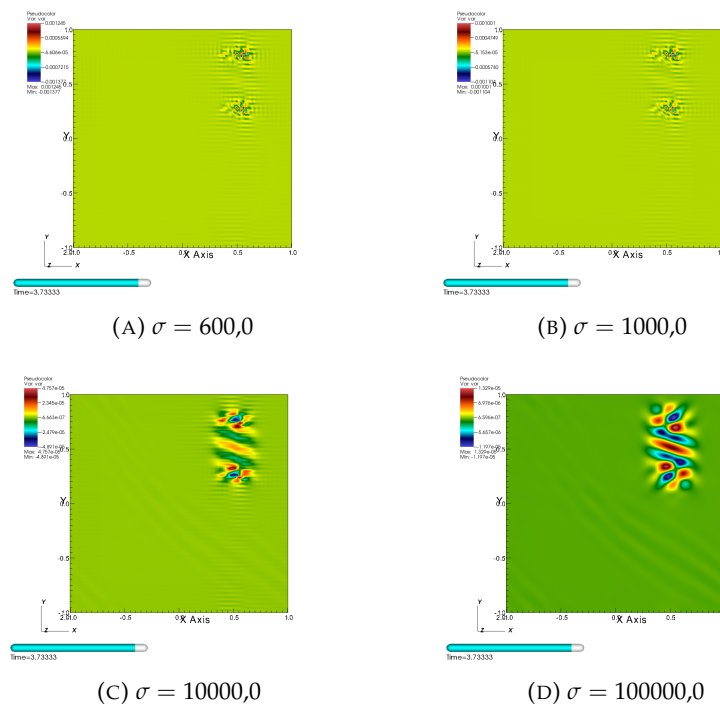


FIGURA 5.18: Campo v_1 de Tipo I-a con disipación KO4 a $t = 3,73$ y distintos valores de σ .

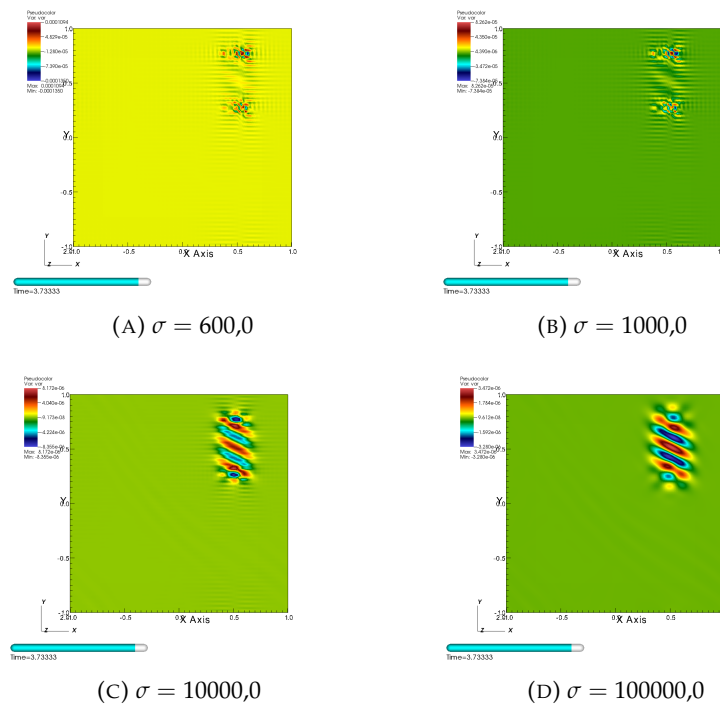


FIGURA 5.19: Campo v_2 de Tipo I-a con disipación KO4 a $t = 3,73$ y distintos valores de σ .

El modo espurio de *Tipo I-b* se obtiene usando los mismos datos iniciales (5.4) pero cambiando $l_{2x} \rightarrow -l_{2x}$, esto no da lugar a grandes diferencias con el modo

espurio de Tipo I-a como es de esperar, pues ambos modos son soluciones de la misma ecuación como se presentó en la sección 4.1.1.1. Además, el operador de Kreiss-Oliger de cuarto orden es el que mejor controla el crecimiento de modos espurios. Las figuras 5.20 y 5.21 muestran lo anteriormente dicho.

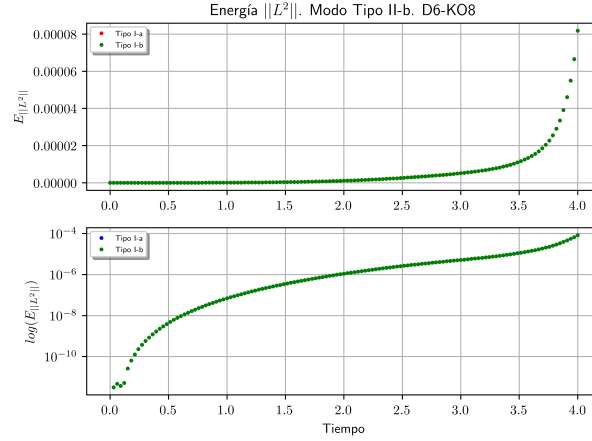


FIGURA 5.20: Energía L^2 para modos de Tipo I-a y Tipo I-b. No hay cambio en el valor de la energía entre ambos modos.

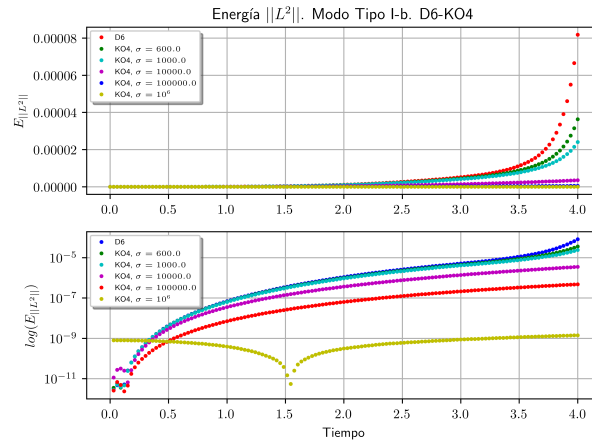


FIGURA 5.21: Comportamiento de la energía con disipación de Kreiss-Oliger de orden 4 para modo Tipo I-b.

Vale observar que para valores de $\sigma = 10^5$, la energía se controla mucho mejor pero como se observa en las figuras 5.18 y 5.19, la solución para el campo v_1 deja de ser solidaria al dato inicial.

Proponiendo una función de ajuste $E_f(t)$ para estos modos espurios de la forma

$$E_f^1(t) = at + \exp(bt + c), \quad (5.5)$$

obtenemos un ajuste con un *Residual sum of squares*² $RSS \approx 10^{-10}$ de manera tal que, como predice la teoría [20], la energía presenta un comportamiento lineal en

²Mide la discrepancia entre los datos y el modelo matemático. Un RSS pequeño indica un buen ajuste del modelo a los datos. Este parámetro sirve de control para los ajustes usando el algoritmo de Marquardt-Levenberg en gnuplot.

el tiempo, ver figura 5.22. Ambos modos se ajustan con los mismos valores de los parámetros a , b y c que se ven en la tabla 5.1.

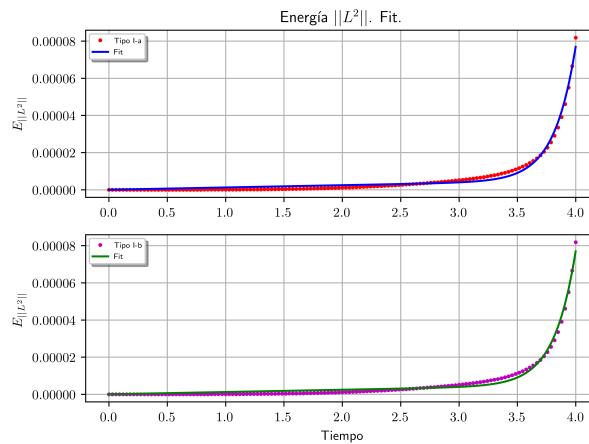


FIGURA 5.22: Ajuste de la energía L^2 usando (5.5).

Parámetro	Valor	Error(\pm)
a	$1,21719 \times 10^{-6}$	$6,96 \times 10^{-8}$
b	5,43641	0,1265
c	-31,2844	0,5133

CUADRO 5.1: Parámetros de ajuste para modos de Tipo I-a y I-b según el modelo (5.5)

5.2.1. Crecimiento en la solución

Extrayendo una proyección de la solución en un plano (x, t) podemos realizar una transformada de Fourier y extraer el espectro de frecuencias con sus respectivas amplitudes. De esta manera, elegimos una de tales frecuencias y observamos que presenta un crecimiento lineal al igual que la energía. Esto se muestra en la figura 5.23. Extrayendo la misma frecuencia de la solución con disipación KO4 con $\sigma = 10^4$ se observa que el crecimiento en la amplitud asociada a esta frecuencia disminuye en dos ordenes de magnitud como muestra la figura 5.24.

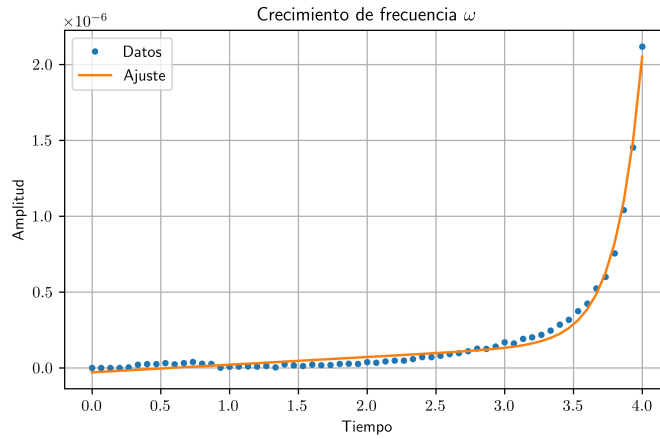


FIGURA 5.23: Crecimiento de alguna frecuencia ω y su respectivo ajuste por $f(t) = a + bt + \exp(ct + d)$.

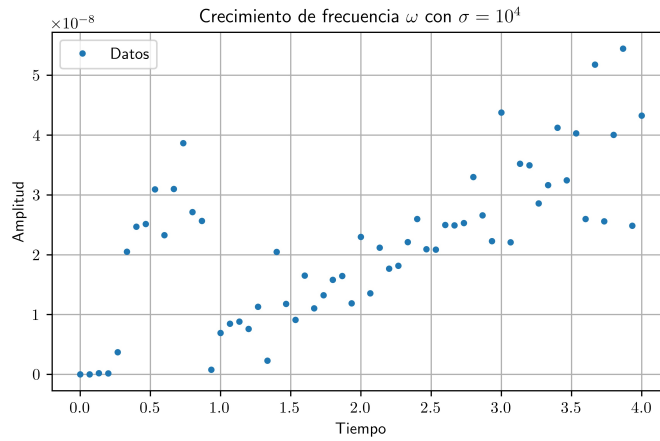


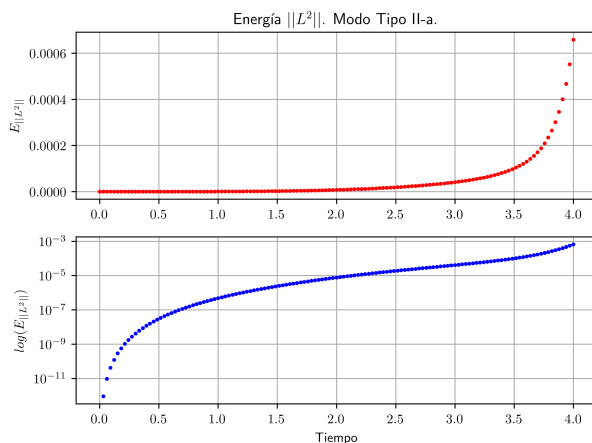
FIGURA 5.24: Comportamiento de la misma frecuencia para la solución con disipación KO4.

5.3. Solución con modo espurio de Tipo II

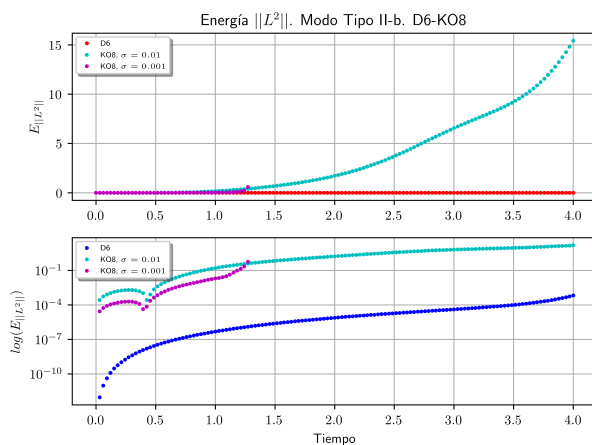
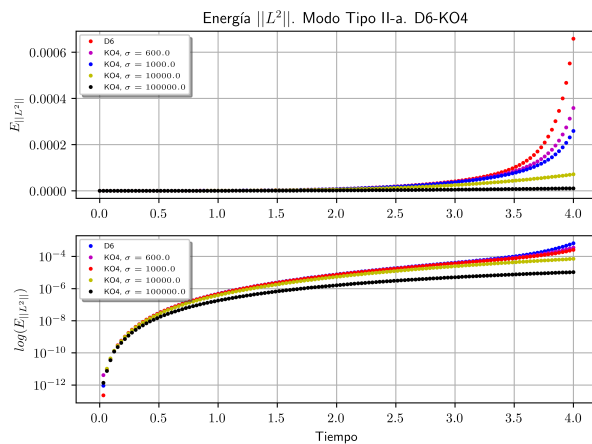
Los modos espurios de *Tipo II* se separan en cuatro sub tipos, comencemos con el modo de *Tipo II-a* dado por el siguiente dato inicial

$$\begin{cases} v_1 = v_2 = 0, \\ l_{1z} = l_{2z} = 0, \\ l_{1x} = l_{1x}^0 + \epsilon f(x, y), \\ l_{1y} = \sqrt{\beta - (l_{1x})^2}, \\ l_{2x} = -\alpha^{-1/2} l_{1y}, \\ l_{2y} = \alpha^{-1/2} l_{1x}. \end{cases} \quad (5.6)$$

El crecimiento de la energía se ve en la figura 5.25.

FIGURA 5.25: Energía L^2 para Tipo II-a.

En este modo nuevamente encontramos que el operador de Kreiss-Oliger de orden 8 no es bueno controlando los modos de alta frecuencia como muestra la figura 5.26. Sin embargo, el operador $KO4$ presenta un control muy efectivo a estos modos como se ve en la figura 5.27.

FIGURA 5.26: Energía L^2 para Tipo II-a con disipación $KO8$.FIGURA 5.27: Energía L^2 para Tipo II-a con disipación $KO4$.

La figura 5.27 muestra una información engañosa, pues para $\sigma = 10^5$ la energía parece constante, lo cual es un problema de escala. Esto lo observamos en la figura 5.28. Sin embargo, al igual que en los modos de Tipo I, lo que mejor conserva al dato inicial es $\sigma = 10^4$ como se muestra en las figuras de evolución 5.29 a 5.31.

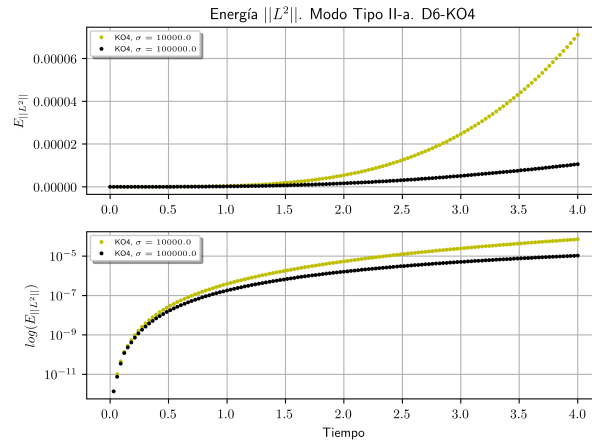
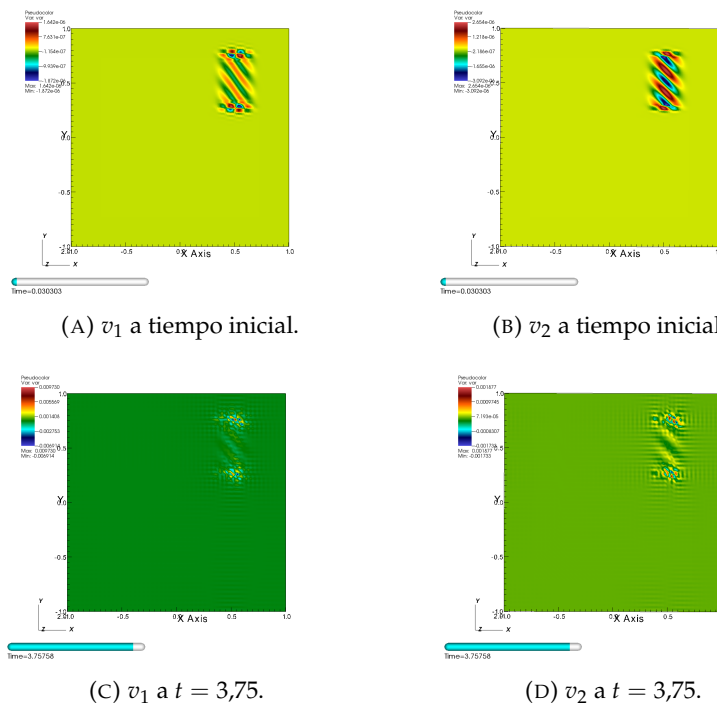


FIGURA 5.28: Energía L^2 para Tipo II-a con disipación KO4 para los valores que mejor controlan los modos de alta frecuencia.

El control de este modo se evidencia en las figuras 5.30 y 5.30, donde vemos que el valor de $\sigma = 10^5$ es el que mejor conserva el dato inicial, mostrado en la figura 5.29, a lo largo de la evolución para ambos campos.



(A) v_1 a tiempo inicial.

(B) v_2 a tiempo inicial.

(C) v_1 a $t = 3,75$.

(D) v_2 a $t = 3,75$.

FIGURA 5.29: Campos v_1 y v_2 a tiempos inicial y final, se observa la destrucción del dato inicial.

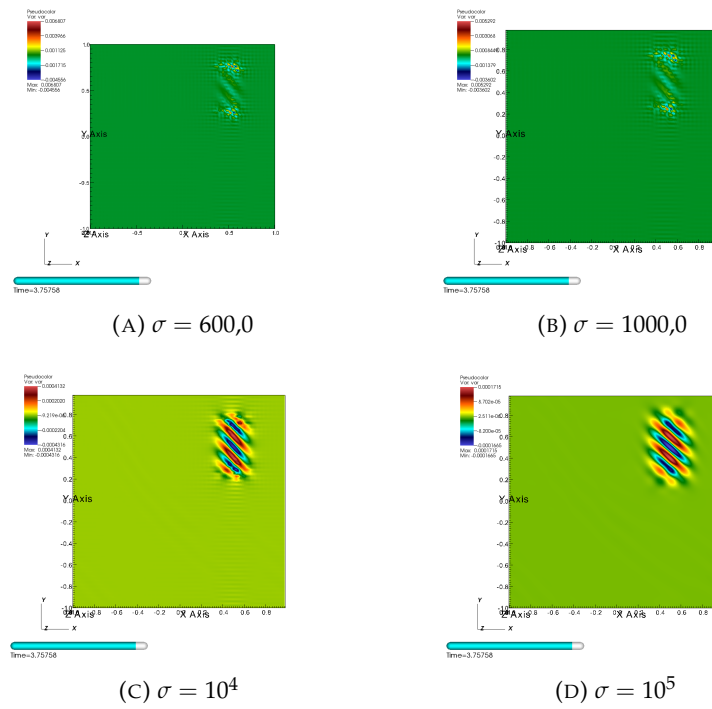


FIGURA 5.30: Campo v_1 de Tipo II-a con disipación KO4 a $t = 3,75$ y distintos valores de σ .

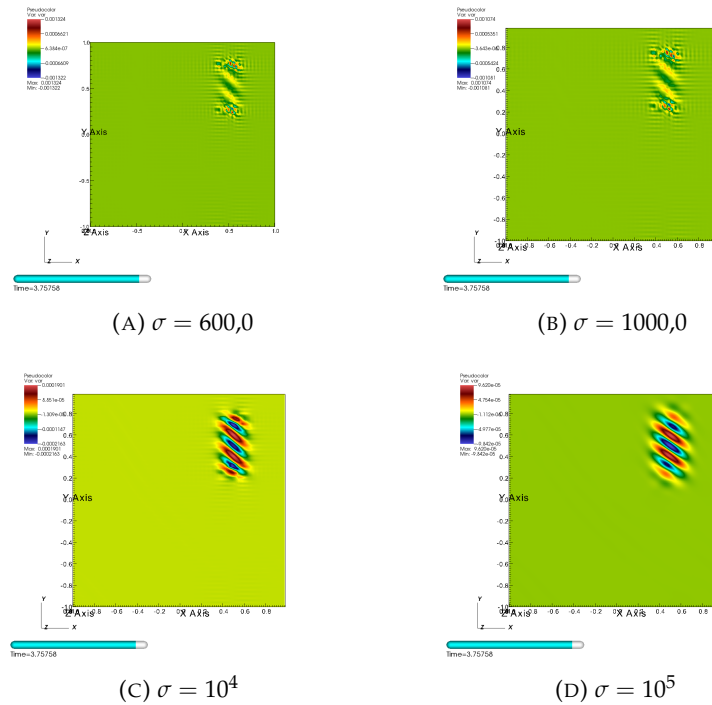


FIGURA 5.31: Campo v_2 de Tipo II-a con disipación KO4 a $t = 3,75$ y distintos valores de σ .

El modo espurio de *Tipo II-b* se obtiene de los datos iniciales (5.6) cambiando ℓ_{1y} por $-\ell_{1y}$. La diferencia entre este tipo y el tipo II-a se observa en la figura 5.32.

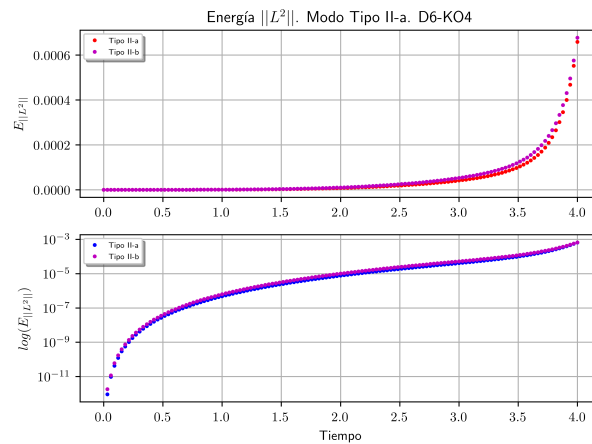


FIGURA 5.32: Energía L^2 para Tipo II-a y Tipo II-b. La variación entre ambos modos espurios es apreciable.

El comportamiento es similar por lo tanto es de esperar que el operador $KO8$ no sea adecuado como puede observarse en la figura 5.33. El comportamiento que se observa en escala logarítmica se debe a que, para tiempos cortos, la diferencia $E - E_0$ es negativa, por lo tanto hemos de tomar el valor absoluto y así poder graficar en esta escala, remitimos a la figura 5.34. Es decir, para este operador la energía en norma L^2 decrece en tiempos menores a $t = 0,4$ pero luego crece rápidamente.

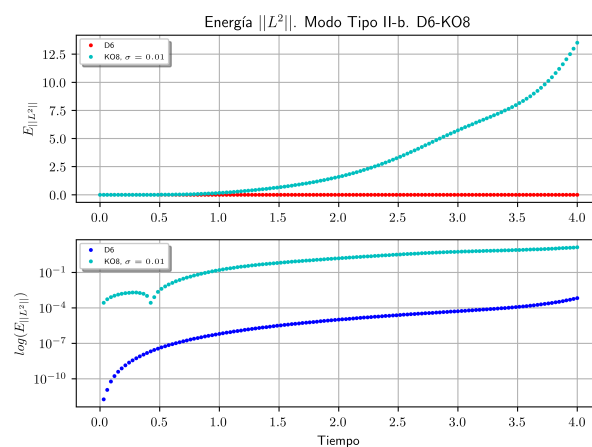


FIGURA 5.33: Energía L^2 para Tipo II-b con operador $KO8$.

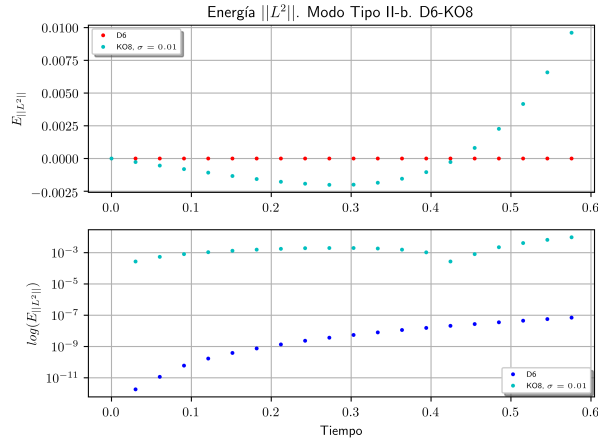


FIGURA 5.34: Energía L^2 para Tipo II-b con operador KO8 a tiempo corto.

Como es de esperar, el operador KO4 es el indicado para controlar este tipo de modo espurio, el comportamiento es similar al modo de tipo II-a y se observa en la figura 5.35.

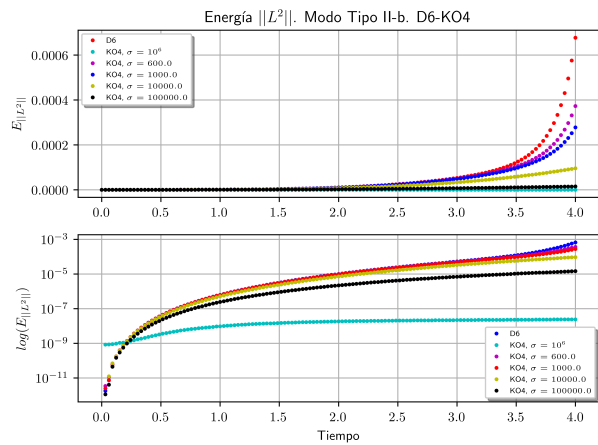


FIGURA 5.35: Energía L^2 para Tipo II-b con operador KO4.

Realizando un ajuste con el modelo de la ecuación (5.5), obtenemos un $RSS \approx 10^{-8}$ y volvemos a observar un comportamiento de crecimiento lineal en el tiempo, como presenta la figura 5.36.

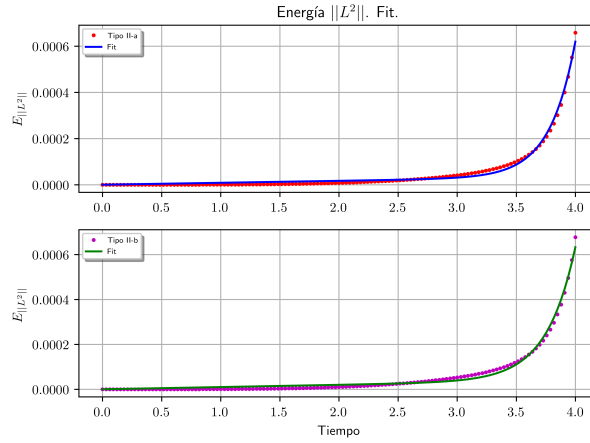


FIGURA 5.36: Ajuste de la energía L^2 para modos de tipo II-a y II-b usando el modelo (5.5).

Los valores de los parámetros a , b y c del ajuste de la figura anterior se presentan en las siguientes tablas.

Parámetro	Valor	Error(\pm)
a	$8,39335 \times 10^{-6}$	$5,347 \times 10^{-7}$
b	4,63913	0,09297
c	-25,9987	0,3752

CUADRO 5.2: Parámetros de ajuste para modos de Tipo II-a usando el modelo (5.5)

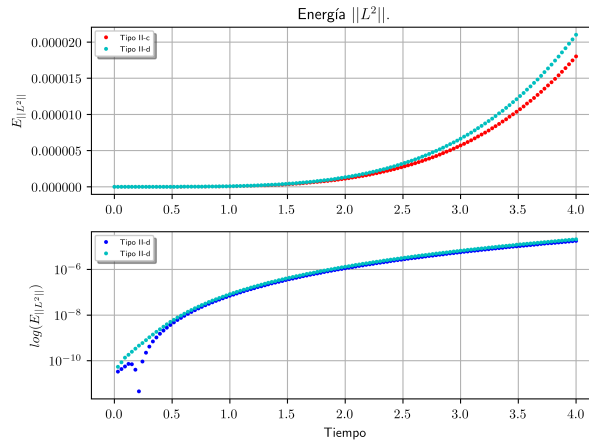
Parámetro	Valor	Error(\pm)
a	$9,84591 \times 10^{-6}$	$6,252 \times 10^{-7}$
b	4,10856	0,08825
c	-23,8644	0,3552

CUADRO 5.3: Parámetros de ajuste para modos de Tipo II-b con el modelo (5.5)

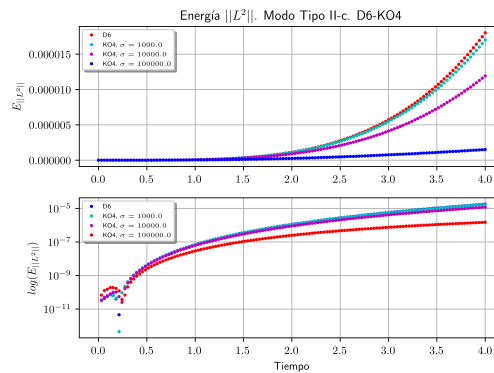
Los modos restantes están dados por el siguiente conjunto de datos iniciales, obtenidos al elegir $\ell_{2y}^{(-)}$ y $\ell_{2x}^{(+)}$ en la sección 4.1.1.2,

$$\begin{cases} v_1 = v_2 = 0, \\ \ell_{1z} = \ell_{2z} = 0, \\ \ell_{1x} = \ell_{1x}^0 + \epsilon f(x, y), \\ \ell_{1y}^{(\pm)} = \pm \sqrt{\beta} - (\ell_{1x})^2, \\ \ell_{2x} = \alpha^{-1/2} \ell_{1y}, \\ \ell_{2y} = -\alpha^{-1/2} \ell_{1x}. \end{cases} \quad (5.7)$$

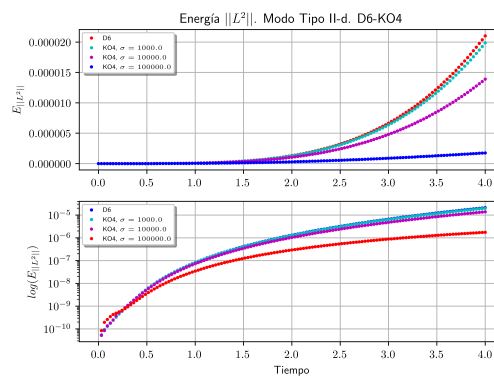
Donde llamamos modo de *Tipo II-c* cuando tomamos $\ell_{1y}^{(+)}$ y modo de *Tipo II-d* para $\ell_{1y}^{(-)}$. El comportamiento de la energía se puede observar en la figura 5.37, esto muestra que el modo de tipo II-d presenta un crecimiento mayor.

FIGURA 5.37: Energía L^2 para Tipo II-c y II-d.

Debido a que estos modos son soluciones del mismo sistema de ecuaciones, es de esperar que el operador $KO4$ sea el indicado como hemos mostrado en modos anteriores, ver figuras de evolución 5.40, 5.41 y 5.42. El control de las altas frecuencias se muestra en la figura 5.38 y comparando con los modos anteriores se observa que este modo presenta un crecimiento más lento, es decir, las soluciones no se rompen completamente como sucede en los casos anteriores, como se observa en 5.41a y 5.42a.



(A) Tipo II-c.



(B) Tipo II-d.

FIGURA 5.38: Energía L^2 con disipación de $KO4$ para modos espurios de Tipo II-c y II-d.

Este conjunto de modos espurios puede ser ajustado con el modelo (5.5) pero se obtiene un decrecimiento lineal como muestran los valores de las tablas 5.4 y 5.5, el valor del RSS es del orden de 10^{-12} . Estos ajustes se presentan en la figura 5.39.

Parámetro	Valor	Error(\pm)
a	$-1,0007 \times 10^{-6}$	$1,048 \times 10^{-7}$
b	0,972674	0,02162
c	-14,5908	0,1038

CUADRO 5.4: Parámetros de ajuste para modos de Tipo II-c con el modelo (5.5)

Parámetro	Valor	Error(\pm)
a	$-1,17094 \times 10^{-6}$	$1,216 \times 10^{-7}$
b	0,973001	0,02149
c	-14,4366	0,1032

CUADRO 5.5: Parámetros de ajuste para modos de Tipo II-d con el modelo (5.5)

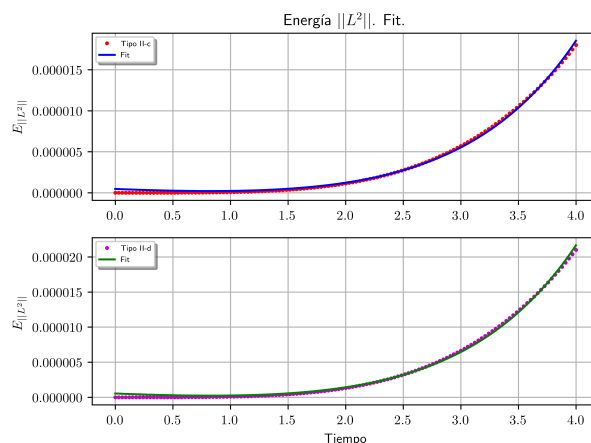


FIGURA 5.39: Ajuste de la energía L^2 para modos de tipo II-c y II-d usando el modelo (5.5).

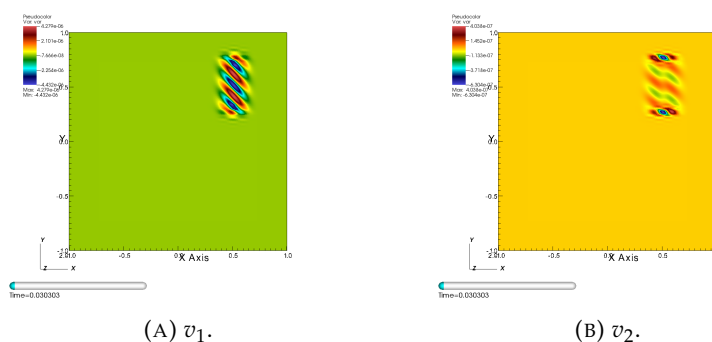


FIGURA 5.40: Campos v_1 y v_2 de Tipo II-c sin disipación a tiempo inicial.

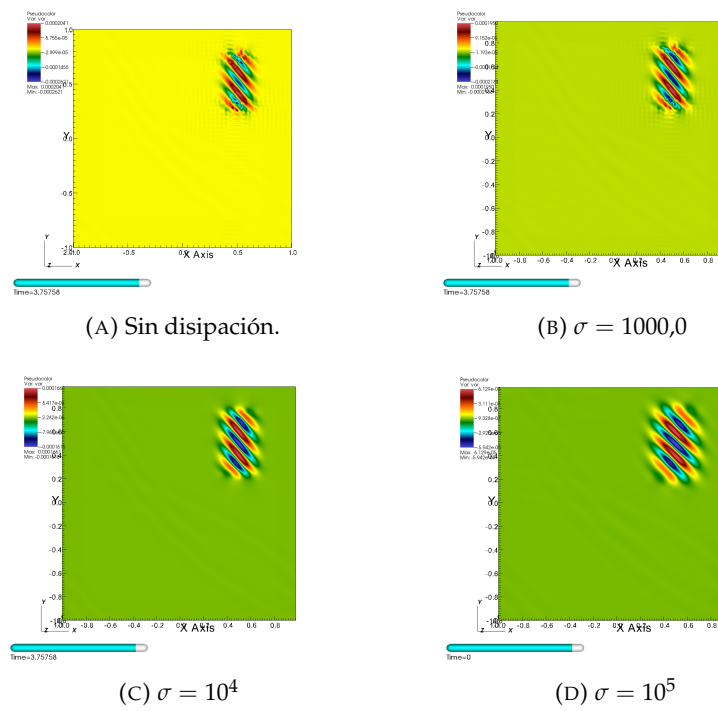


FIGURA 5.41: Campo v_1 de Tipo II-a con disipación KO4 a $t = 3,75$ y distintos valores de σ .

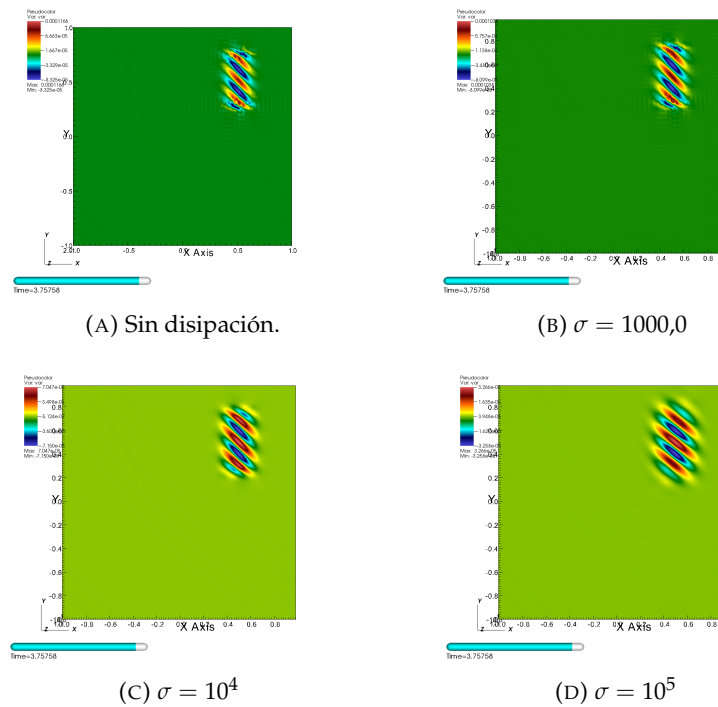


FIGURA 5.42: Campo v_2 de Tipo II-a con disipación KO4 a $t = 3,75$ y distintos valores de σ .

5.3.1. Crecimiento en la solución

Para los modos espurios de Tipo II observamos el mismo comportamiento que en la Subsec. 5.2.1, observamos que presenta un crecimiento lineal de la frecuencia al igual que la energía. Esto se muestra en la figura 5.43. Extrayendo la misma frecuencia de la solución con disipación $KO4$ con $\sigma = 10^4$ se observa que el crecimiento en la amplitud asociada a esta frecuencia disminuye en dos ordenes de magnitud como muestra la figura 5.44.

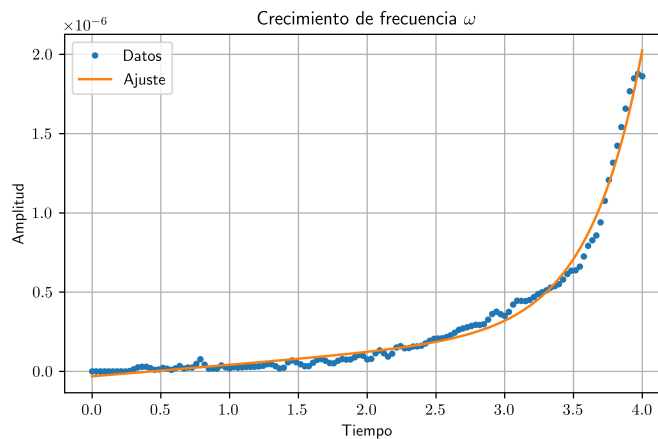


FIGURA 5.43: Crecimiento de alguna frecuencia ω y su respectivo ajuste por $f(t) = a + bt + \exp(ct + d)$.

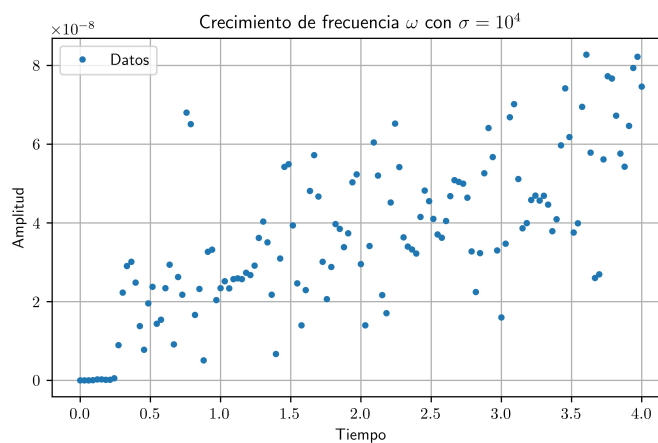


FIGURA 5.44: Comportamiento de la misma frecuencia para la solución con disipación $KO4$.

5.4. Solución quasi-espuria

Definimos una solución *quasi-espuria* como aquella que no satisface las ecuaciones (4.13) a (4.16). Una de estas soluciones está dada por el conjunto de datos iniciales

siguiente,

$$\begin{cases} v_1 = v_2 = 0, \\ l_{1z} = 2,0, \\ l_{2z} = 1,0, \\ l_{1x} = l_{1x}^0 + \epsilon f(x, y), \\ l_{1y} = \sqrt{\beta} - (l_{1x})^2, \\ l_{2x} = -\alpha^{-1/2} l_{1y}, \\ l_{2y} = \alpha^{-1/2} l_{1x}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Estos modos, a pesar de no satisfacer las ecuaciones (4.13) a (4.16), presentan una divergencia en la energía al igual que los modos espurios y pueden ser controlados con disipación de Kreiss-Oliger de orden 8 como se muestra en la figura 5.45.

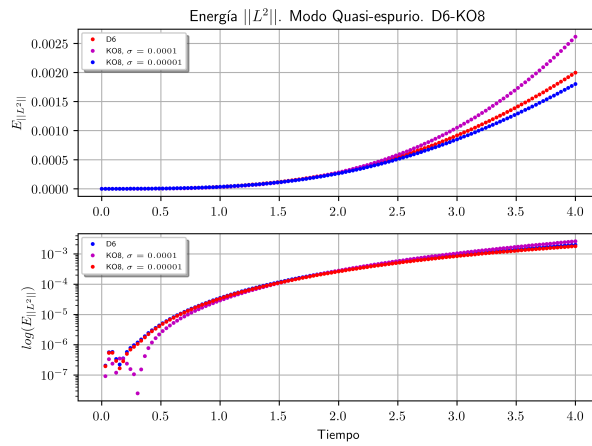


FIGURA 5.45: Modo quasi-espurio controlado con el operador KO8.

Sin embargo, el operador de disipación de orden 4 es el que mejor controla la energía, como lo muestra la siguiente figura 5.46. Además, este modo también presenta un comportamiento lineal modelado por la siguiente función

$$E_f^2(t) = at + \exp(bt + c) + d, \quad (5.9)$$

dónde a , b , c y d son constantes. La razón de usar esta función se debe a que si usamos (5.5), obtenemos un error muy grande en el parámetro a . Esta función ajusta el comportamiento de la energía L^2 con un $RSS \approx 10^{-7}$, dicho ajuste se puede ver en la figura 5.47. Los valores de los parámetros de ajuste se muestran en el siguiente cuadro.

Parámetro	Valor	Error(\pm)
a	$-2,94064 \times 10^{-5}$	$7,611 \times 10^{-7}$
b	0,489167	0,005336
c	-9,91915	0,03453
d	$-4,77712 \times 10^{-5}$	$1,611 \times 10^{-6}$

CUADRO 5.6: Parámetros de ajuste para modos Quasi-espurios con el modelo (5.9)

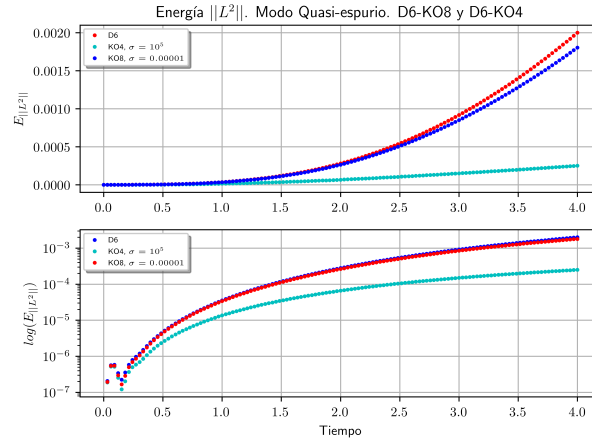


FIGURA 5.46: Comparativa de control de modo quasi-espurio usando operadores KO4 y KO8.

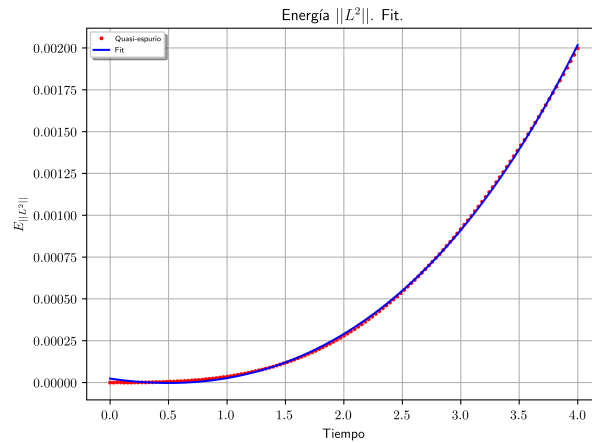


FIGURA 5.47: Ajuste de modo quasi-espurio utilizando el modelo (5.9).

Esto muestra que a pesar de estar fuera de un modo espurio aunque próximo, las soluciones también se rompen para tiempos cortos. Esto indica que existe una región cercana a los modos espurios en los que las soluciones poseen frecuencias que divergen.

5.5. Convergencia

Para un sistema hiperbólico (bien puesto) existe una forma directa de saber si las soluciones numéricas convergen y es mediante el cálculo del *cociente de precisión* [21, 26]

$$Q_h(t) = \frac{\|v^h(t) - v^{h/2}(t)\|_{L^2}}{\|v^{h/2}(t) - v^{h/4}(t)\|_{L^2}}, \quad (5.10)$$

donde $v^h(t)$ es una solución del sistema hiperbólico a un tiempo t y un paso temporal $dt = h$. Si las soluciones convergen entonces el valor esperado de Q es 2^p siendo p el orden de precisión del método utilizado. En el presente trabajo se utiliza el método de Runge-Kutta de orden 4 para la parte temporal y un operador de orden 6 para la parte espacial y por lo tanto se esperaba obtener $Q_h(t) \approx 64$.

El factor anterior se puede obtener de otra manera basado en el comportamiento del error entre las soluciones para fracciones del paso temporal h , o sea $h/2$, $h/4$ y $h/8$ computando los errores $e^p = \|v^{h/m}(t) - v^{h/2m}(t)\|_{L^2}$ para $m = 1, 2, 4$ pero podemos absorber el m dentro del número de puntos de grilla N de manera que siempre tengamos fracciones de 2 del paso h . El error para algún tiempo t_e fijo está dado por

$$\|v^h(t_e) - v^{h/2}(t_e)\|_{L^2} = \left[\left(\frac{\Delta t}{N} \right)^p - \left(\frac{\Delta t}{2N} \right)^p \right] \|\psi_p\|_{L^2}, \quad (5.11)$$

donde ψ_p son funciones que provienen de hacer una expansión asintótica de las soluciones v [26]. Entonces tomando logaritmo natural de ambos lados podemos reescribir esto como

$$\ln \left(\|v^h(t_e) - v^{h/2}(t_e)\|_{L^2} \right) = p \ln(\Delta t) + \ln \left([1 - 2^{-p}] \|\psi_t\|_{L^2} \right) - p \ln(N). \quad (5.12)$$

Identificando $y := \ln \left(\|v^h(t_e) - v^{h/2}(t_e)\|_{L^2} \right)$, $x := \ln(N)$, $a := -p$ y $b := p \ln(\Delta t) + \ln \left([1 - 2^{-p}] \|\psi_t\|_{L^2} \right)$ podemos reescribir (5.12) como la ecuación de una recta

$$y = ax + b, \quad (5.13)$$

realizando simulaciones para los distintos pasos h y graficando $\ln \left(\|v^h(t_e) - v^{h/2}(t_e)\|_{L^2} \right)$ versus $\ln(N)$ podemos ajustar la recta definida en (5.13) y así encontrar el valor de p que nos dirá el orden de convergencia. Si el método converge deberíamos obtener $p = 6$ pues estamos usando un operador D_6 periódico. La explicación de los resultados que se muestran a continuación se presenta en la Subsec. 5.5.4.

5.5.1. Convergencia de modos no espurios

Tomamos la misma configuración de datos iniciales que en (5.2) con un $\Delta t = 0,50$ y $h = 10^{-2}$, relajamos la perturbación $\epsilon = 10^{-2}$. A modo de ejemplo para $t_e = 0,20$ ajustamos la recta (5.13) para los campos v_1 y v_2 como muestra la figura 5.48. Repitiendo el mismo procedimiento para distintos tiempos obtenemos los siguientes valores para el factor p de convergencia.

t	p_{v_1}	p_{v_2}
0,20	6,586	6,770
0,25	6,586	6,770
0,30	6,586	6,770
0,35	6,586	6,770
0,40	6,500	6,932
0,45	6,500	6,932
0,50	6,500	6,932

CUADRO 5.7: Grado de convergencia para tiempos cortos de los campos v_1 y v_2 sin dato espurio.

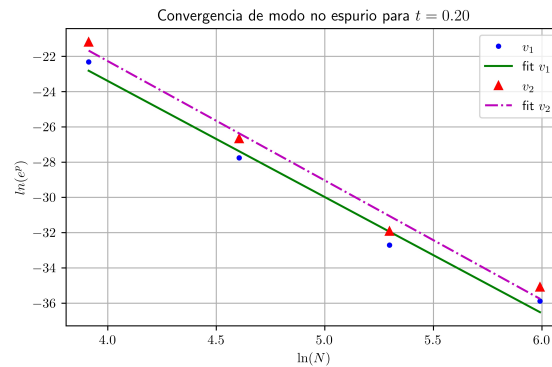


FIGURA 5.48: Ajuste lineal de la convergencia para los campos evolucionados sin modo espurio.

La razón por la cuál los factores p varían tan poco a lo largo del tiempo se debe a que las diferencias $\|v^h(t_e) - v^{h/2}(t_e)\|_{L^2}$ varían en el decimal de orden 10^{-14} y a la hora de ajustar la recta esto no representa una variación relevante, recordemos que el factor p debe ser un entero idealmente.

5.5.2. Convergencia de modo espurio de Tipo I

Como ya vimos en la Sec. 5.2 no hay una variación significativa en el comportamiento de los distintos subtipos de modos espurios por lo que para hacer el estudio de la convergencia utilizamos el modo espurio originado por los datos iniciales (5.4). Empleamos el mismo intervalo temporal y paso h que en el análisis anterior pero aquí tenemos $\epsilon = 10^{-3}$. Los valores obtenidos de los factores p son los siguientes.

t	p_{v_1}	p_{v_2}
0,20	8,023	7,994
0,25	8,023	7,994
0,30	8,023	7,994
0,35	8,023	7,994
0,40	7,964	7,966
0,45	7,964	7,966
0,50	7,964	7,966

CUADRO 5.8: Grado de convergencia para tiempos cortos de los campos v_1 y v_2 con dato espurio de Tipo I.

Volvemos a presentar a modo de ejemplo el ajuste de los datos para un $t_e = 0,20$ en la figura siguiente.

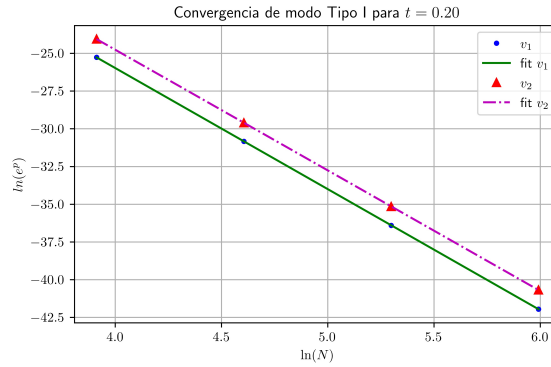


FIGURA 5.49: Ajuste lineal de la convergencia para los campos evolucionados con modo espurio de Tipo I.

El estudio de la convergencia utilizando disipación numérica con un operador KO4 y $\sigma = 10^4$ conduce a valores que solo comienzan a variar en la tercera cifra y esto no presenta ninguna mejora relevante, los valores se muestran en la tabla siguiente.

t	p_{v_1}	p_{v_2}
0,20	8,025	7,992
0,25	8,025	7,992
0,30	8,025	7,992
0,35	8,025	7,992
0,40	7,970	7,970
0,45	7,970	7,970
0,50	7,970	7,970

CUADRO 5.9: Grado de convergencia para tiempos cortos de los campos v_1 y v_2 con dato espurio de Tipo I y disipación con operador KO4.

5.5.3. Convergencia de modo espurio de Tipo II

Mantenemos el Δt y el h como en los dos casos anteriores y utilizamos los datos iniciales de (5.6) con $\epsilon = 10^{-3}$. Los valores de p se presentan en la tabla que sigue. Y un ajuste para $t_e = 0,20$ se muestra en la figura 5.50.

t	p_{v_1}	p_{v_2}
0,20	7,997	7,932
0,25	7,997	7,932
0,30	7,997	7,932
0,35	7,997	7,932
0,40	7,944	7,965
0,45	7,944	7,965
0,50	7,944	7,965

CUADRO 5.10: Grado de convergencia para tiempos cortos de los campos v_1 y v_2 con dato espurio de Tipo II.

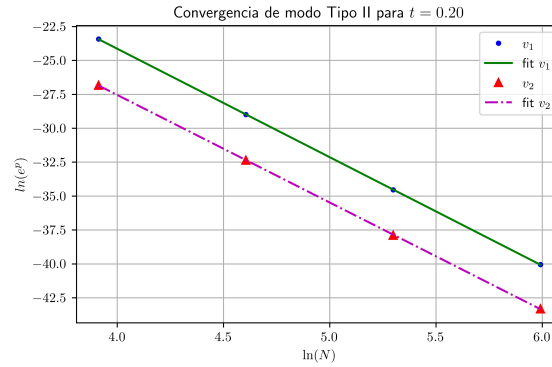


FIGURA 5.50: Ajuste lineal de la convergencia para los campos evolucionados con modo espurio de Tipo II.

Para este tipo de modo espurio también se observa que los valores de p no mejoran al aplicar disipación numérica con operador $KO4$ y $\sigma = 10^4$.

t	p_{v_1}	p_{v_2}
0,20	7,995	7,950
0,25	7,995	7,950
0,30	7,995	7,950
0,35	7,995	7,950
0,40	7,953	7,961
0,45	7,953	7,961
0,50	7,953	7,961

CUADRO 5.11: Grado de convergencia para tiempos cortos de los campos v_1 y v_2 con dato espurio de Tipo II y disipación numérica con operador $KO4$.

5.5.4. Discusión sobre la aparente convergencia del sistema

En las subsecciones anteriores se muestra que los modos no espurios tienen (para tiempos muy cortos) un orden de convergencia mayor del esperado y los modos espurios que introducen inestabilidades tienen a dos ordenes de convergencia mayores que lo esperado, $p = 6$. Esto tienta a pensar que el sistema de ecuaciones mal-puesto está convergiendo a una solución exacta pero esto no es cierto pues en las Sec. 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 se mostró que las soluciones crecen primero linealmente y luego exponencialmente, esto se refleja en que el código numérico se rompe luego de un cierto tiempo.

Para explicar esto primero es necesario introducir la condición de von Neumann [21], para ello consideremos una discretización para un sistema lineal con coeficientes variables, independientes del tiempo tales que

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{Q}\mathbf{v}^k, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{f}, \quad (5.15)$$

donde \mathbf{v}^k denota a la función de grilla $\mathbf{v}^k = \{v_j^k : j = 0, 1, \dots, N\}$ y \mathbf{Q} es la llamada *matriz de amplificación* que se asume independiente del tiempo. Entonces,

$$\mathbf{v}^k = \mathbf{Q}^k \mathbf{f} \quad (5.16)$$

y la aproximación (5.14), (5.15) es estable si y solo si existen constantes K_d y α_d tales que

$$\|\mathbf{Q}^k\|_d \leq K_d e^{\alpha_d t_k}, \quad (5.17)$$

para todo $k = 0, 1, 2, \dots$ y resoluciones de grilla suficientemente grandes.

La condición (5.17) no es muy útil en la práctica por lo tanto se introduce una forma más simple considerando los autovalores $\{q_i\}$ de \mathbf{Q} tales que

$$|q_i| \leq e^{\alpha_d \Delta t}, \quad (5.18)$$

para todo q_i autovalor de \mathbf{Q} y todo $\Delta t > 0$. Esta condición es necesaria para la estabilidad numérica, observemos que si q_i es un autovalor de \mathbf{Q} entonces q_i^k es autovalor de \mathbf{Q}^k y

$$|q_i^k| \leq \|\mathbf{Q}^k\| \leq K_d e^{\alpha_d t_k} = K_d e^{\alpha_d k \Delta t}, \quad (5.19)$$

es decir

$$|q_i| \leq K_d^{1/k} e^{\alpha_d \Delta t}, \quad (5.20)$$

que para ser válida para todo k , implica (5.18) [36].

En los sistemas de ecuaciones débilmente hiperbólicos la condición de von Neumann puede ser satisfecha y el código puede romperse muy tarde o puede incluso no hacerlo nunca. Sin embargo en los sistemas ill-posed esta condición es fácilmente violada y el código se rompe muy rápido como hemos mostrado en las secciones previas. Si se estudia la región previa a la rotura del código puede parecer que tenemos convergencia como se observa en la Sec. 5.5. Más aún, al agregar disipación este comportamiento se puede empeorar y es lo que se observa en la Sec. 5 al utilizar disipación KO8 donde las soluciones se rompen antes. Esto se muestra en el trabajo de Tiglio et. al. [38].

Esto permite concluir que las ecuaciones de Force-Free en Potenciales de Euler es inestable incluso utilizando disipación. Lo cuál es esperable y se condice con la teoría desarrollada en [20], además recordemos que la condición de estabilidad numérica para un problema de Cauchy requiere que las soluciones estén acotadas bajo alguna norma discreta $\|\cdot\|_d$ para todo tiempo por un par de constantes K_d y α_d de la siguiente manera,

$$\|v(t, \cdot)\|_d \leq K_d e^{\alpha_d t} \|f\|_d, \quad (5.21)$$

donde $v(t, \cdot)$ es la solución numérica y $f(t) = v(0, x)$ la condición inicial. Claramente, y como era de esperar, este sistema de ecuaciones no permite encontrar tales constantes K_d y α_d que satisfagan la condición (5.21) y por lo tanto el sistema no es numéricamente estable. Sin embargo el uso de disipación con valores de σ altos permiten evolucionar el sistema para tiempos más largos y de este modo se pueden realizar estudios comparativos resolviendo Force-Free en su versión con campos eléctrico y magnético.

Capítulo 6

Conclusiones

Aquí se discuten las conclusiones basadas en los resultados obtenidos en el Capítulo 5 y se proponen algunas tareas pendientes.

6.1. Comportamiento lineal y control con disipación fuerte

A lo largo del Capítulo 5 se mostró que la energía del sistema (4.8) en norma L^2 presenta un crecimiento lineal en el tiempo para los modos de *Tipo I* y *Tipo II-a-b* expuestos en las figuras 5.22 y 5.36, y en las tablas 5.1, 5.2 y 5.3. Por otra parte los modos de *Tipo II-c-d* presentan un decrecimiento lineal en la energía, ver figura 5.39 y tablas 5.4 y 5.5. Puesto que la energía se calcula según la ecuación (5.1) esto indica que las soluciones de (4.8) presentan algún comportamiento lineal como se muestra en [20] y se observa en las figuras 5.23, 5.24, 5.43, 5.44 estudiando el espectro de frecuencias mediante la transformada de Fourier.

Por otra parte se consiguió controlar el crecimiento de los modos espurios utilizando mucha disipación numérica encontrando que los mejores valores son $\sigma = 10^4, 10^5$ con el operador $KO4$. Logrando así que la solución generada por el dato inicial no se destruya completamente a lo largo de la evolución aunque esto no implica que a tiempo final la solución sea idéntica al dato inicial introducido para $t = 0$. Es decir, el dato inicial genera una solución estacionaria que a lo largo de la evolución se deforma un poco y controla las ondas de altas frecuencias que aparecen debido a la naturaleza mal puesta del sistema. Este es un resultado alentador pues sin disipación la solución se destruye completamente siendo dominado por ondas de alta frecuencia que crecen rápidamente.

En la Sec. 5.5 se presentó un análisis de la convergencia del método donde se obtuvo que para soluciones sin modo espurio el orden de convergencia es $p_{v_1} \approx 6,5$ y $p_{v_2} \approx 6,8$ mientras que el valor teórico es $p_{teo} = 6$. Esto permite concluir que para estos casos el método converge y la discrepancia se debe a errores de truncamiento y a la naturaleza misma del problema por ser mal puesto. Sin embargo para los modos espurios no se logra obtener un valor cercano al deseado ni usando disipación, esto no es extraño pues los modos espurios destruyen la solución incluso para tiempos cortos a pesar de que la disipación es un buen mecanismo de control para el crecimiento de las altas frecuencias.

6.2. Trabajos futuros

El hecho de que las soluciones puedan ser controladas con disipación abre la puerta para estudiar si las mismas convergen a soluciones obtenidas al resolver las ecuaciones de FFE completas como en la ecuación (2.10). Con los datos iniciales que

dan lugar a los modos espurios se pueden construir datos iniciales para los campos eléctrico y magnético. En general esto sirve para alimentar con datos iniciales cualquier otro formalismo basado en FFE y comparar las soluciones obtenidas.

Por otra parte se puede realizar un estudio del control con disipación utilizando operadores modificados haciendo un estudio previo del crecimiento de los autovalores del problema.

Algo interesante es estudiar posibles modificaciones de las ecuaciones de FF-EP mediante las libertades sobre los potenciales de Euler ϕ_1 y ϕ_2 y condiciones sobre los ℓ_{ix^a} que se presentan a continuación. Recordemos que las ecuaciones de Maxwell son $F_{ab} = \varepsilon^{ij} \nabla_a \phi_1 \nabla_b \phi_2$ y consideremos la transformación $\phi_j \rightarrow \tilde{\phi}_j(\phi_i)$ de manera que

$$\nabla_a \tilde{\phi}_j = \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial \phi_i} \nabla_a \phi_i, \quad (6.1)$$

donde definimos $\chi^i_j := \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial \phi_i}$ entonces,

$$\tilde{F}_{ab} = \varepsilon^{ij} \chi^k_i \chi^l_j \nabla_a \phi_k \nabla_b \phi_l. \quad (6.2)$$

Utilizando que $\varepsilon^{ij} \chi^k_i \chi^l_j = \det(\chi) \varepsilon^{kl}$ obtenemos

$$\tilde{F}_{ab} = \det(\chi) F_{ab}, \quad (6.3)$$

si $\det(\chi) = 1$ entonces F_{ab} es invariante ante la transformación propuesta. Esto permite definir nuevos campos $\tilde{\ell}_{ix^a} = \nabla_a \tilde{\phi}_i = \chi^l_i \nabla_a \phi_l$ para estudiar el comportamiento numérico de las ecuaciones bajo esta transformación. También resulta interesante agregar una condición mediante una ecuación de vínculo pidiendo que los ℓ_{ix^a} sean perpendiculares a lo largo de toda la evolución.

Otra línea de estudio interesante es investigar el comportamiento del sistema imponiendo $v_i = 0$ para todo tiempo y eligiendo $i = 1$ o $i = 2$ permitiendo que el otro campo evolucione, lo cuál nos elimina una de las ecuaciones de evolución y simplifica considerablemente el sistema. Es decir, pedir que uno de los potenciales de Euler sea independiente del tiempo.

Finalmente, se puede realizar un estudio en profundidad de la *Regularización de Tikhonov* [40-42] y métodos numéricos para el tratamiento de problemas no lineales mal puestos [43] con el objetivo de estudiar el problema de este trabajo desde esa perspectiva. Esto no es una tarea fácil y no existe en la literatura publicaciones que hayan estudiado esto.

Bibliografía

- [1] Antony Hewish y col. «Observation of a rapidly pulsating radio source». En: *Nature* 217.5130 (1968), págs. 709-713.
- [2] Thomas Gold. «Rotating neutron stars as the origin of the pulsating radio sources». En: *Pulsating Stars*. Springer, 1968, págs. 74-75.
- [3] F Pacini. «Rotating neutron stars, pulsars and supernova remnants». En: *Pulsating Stars*. Springer, 1968, págs. 76-77.
- [4] Kazunari Shibata y Yutaka Uchida. «A magnetodynamic mechanism for the formation of astrophysical jets. I-Dynamical effects of the relaxation of non-linear magnetic twists». En: *Publications of the Astronomical Society of Japan* 37 (1985), págs. 31-46.
- [5] Kazunari Shibata y Yutaka Uchida. «A magnetodynamic mechanism for the formation of astrophysical jets. II-Dynamical processes in the accretion of magnetized mass in rotation». En: *Publications of the Astronomical Society of Japan* 38 (1986), págs. 631-660.
- [6] David L Meier, Shinji Koide y Yutaka Uchida. «Magnetohydrodynamic production of relativistic jets». En: *Science* 291.5501 (2001), págs. 84-92.
- [7] Jonathan C McKinney. «Relativistic force-free electrodynamic simulations of neutron star magnetospheres». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters* 368.1 (2006), págs. L30-L34.
- [8] Carlos Palenzuela y col. «Magnetospheres of black hole systems in force-free plasma». En: *Physical Review D* 82.4 (2010), pág. 044045.
- [9] Andrej N Timokhin. «On the force-free magnetosphere of an aligned rotator». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 368.3 (2006), págs. 1055-1072.
- [10] Mitchell C Begelman, Roger D Blandford y Martin J Rees. «Massive black hole binaries in active galactic nuclei». En: *Nature* 287.5780 (1980), págs. 307-309.
- [11] Carlos Palenzuela, Luis Lehner y Steven L Liebling. «Dual jets from binary black holes». En: *Science* 329.5994 (2010), págs. 927-930.
- [12] Federico Carrasco, Carlos Palenzuela y Oscar Reula. «Pulsar magnetospheres in general relativity». En: *Physical Review D* 98.2 (2018), pág. 023010.
- [13] Samuel E Gralla, Alexandru Lupasca y Maria J Rodriguez. «Electromagnetic jets from stars and black holes». En: *Physical Review D* 93.4 (2016), pág. 044038.
- [14] Federico L Carrasco y OA Reula. «Covariant hyperbolization of force-free electrodynamics». En: *Physical Review D* 93.8 (2016), pág. 085013.
- [15] Ramiro Cayuso y col. «Astrophysical jets from boosted compact objects». En: *Physical Review D* 100.6 (2019), pág. 063009.
- [16] B Carter. *An Einstein Centenary Survey ed SW Hawking and W Israel*. 1979.
- [17] Toshio Uchida. «Theory of force-free electromagnetic fields. I. General theory». En: *Physical Review E* 56.2 (1997), pág. 2181.

- [18] Toshio Uchida. «Theory of force-free electromagnetic fields. II. Configuration with symmetry». En: *Physical Review E* 56.2 (1997), pág. 2198.
- [19] David P Stern. «Euler potentials». En: *American Journal of Physics* 38.4 (1970), págs. 494-501.
- [20] Oscar A Reula y Marcelo E Rubio. «Ill posedness of force-free electrodynamics in Euler potentials». En: *Physical Review D* 95.6 (2017), pág. 064005.
- [21] Bertil Gustafsson, Heinz-Otto Kreiss y Joseph Oliger. *Time dependent problems and difference methods*. Vol. 24. John Wiley & Sons, 1995.
- [22] HC Spruit. «Essential magnetohydrodynamics for astrophysics». En: *arXiv preprint arXiv:1301.5572* (2013).
- [23] Samuel E Gralla y Ted Jacobson. «Spacetime approach to force-free magnetospheres». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 445.3 (2014), págs. 2500-2534.
- [24] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago Press (Chicago, 1984), 1987.
- [25] Heinz-Otto Kreiss y Jens Lorenz. *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*. Vol. 47. Siam, 1989.
- [26] Heinz-Otto Kreiss y Omar Eduardo Ortiz. *Introduction to numerical methods for time dependent differential equations*. John Wiley & Sons, 2014.
- [27] Michael Taylor. *Pseudodifferential operators and nonlinear PDE*. Vol. 100. Springer Science & Business Media, 2012.
- [28] Heinz-Otto Kreiss. «Initial boundary value problems for hyperbolic systems». En: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 23.3 (1970), págs. 277-298.
- [29] Robert Geroch. «Partial differential equations of physics». En: *General Relativity: Proceedings* (1996), pág. 19.
- [30] Oscar A Reula. «Strongly hyperbolic systems in general relativity». En: *Journal of Hyperbolic Differential Equations* 1.02 (2004), págs. 251-269.
- [31] Oscar A Reula. «Hyperbolic methods for Einstein's equations». En: *Living Reviews in Relativity* 1.1 (1998), pág. 3.
- [32] Heinz-O Kreiss y Omar E Ortiz. «Some mathematical and numerical questions connected with first and second order time-dependent systems of partial differential equations». En: *The Conformal Structure of Space-Time*. Springer, 2002, págs. 359-370.
- [33] Gilbert Strang. «Necessary and insufficient conditions for well-posed Cauchy problems». En: *Journal of Differential Equations* 2.1 (1966), págs. 107-114.
- [34] Kurt O Friedrichs. «Symmetric hyperbolic linear differential equations». En: *Communications on pure and applied Mathematics* 7.2 (1954), págs. 345-392.
- [35] Kip S Thorne y Douglas Macdonald. «Electrodynamics in curved spacetime: 3+ 1 formulation». En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 198.2 (1982), págs. 339-343.
- [36] Olivier Sarbach y Manuel Tiglio. «Continuum and discrete initial-boundary value problems and Einstein's field equations». En: *Living reviews in relativity* 15.1 (2012), pág. 9.
- [37] Oscar Reula. *Métodos Matemáticos de la Física*. Ene. de 2014. ISBN: 9503307015, 9789503307014. DOI: [10.13140/2.1.4205.5687](https://doi.org/10.13140/2.1.4205.5687).

-
- [38] Gioel Calabrese y col. «Convergence and stability in numerical relativity». En: *Physical Review D* 66.4 (2002), pág. 041501.
- [39] Peter D Lax y Robert D Richtmyer. «Survey of the stability of linear finite difference equations». En: *Communications on pure and applied mathematics* 9.2 (1956), págs. 267-293.
- [40] Andrey N Tikhonov y Vasilii Y Arsenin. «Solutions of ill-posed problems». En: *New York* (1977), págs. 1-30.
- [41] AN Tikhonov. «Ill-posed and inverse problems for hyperbolic equations». En: *Ill-Posed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis: Proceedings of the International Conference, Samarkand, Uzbekistan*. Vol. 41. 13. Walter de Gruyter GmbH & Co KG. 2014, pág. 81.
- [42] Aleksandr Ivanovich Kozhanov y Regina Rifkhatovna Safiullova. «Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations». En: *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems* 18.1 (2010), págs. 1-24.
- [43] Andrei Nikolaevich Tikhonov y col. *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*. Vol. 328. Springer Science & Business Media, 2013.