

# Estructura y Características de Agujeros Negros Aislados con Momento Angular

por

**Marcos A. Argañaraz**

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física  
y Computación como parte de los requerimientos para la  
obtención del grado de

Doctor en Física

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



Octubre de 2020

©FaMAF - UNC

Director: Dr. Osvaldo M. Moreschi



Estructura y Características de Agujeros Negros Aislados con Momento Angular por Marcos A. Argañaraz  
se distribuye bajo Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.



# Resumen

Para estudiar la naturaleza de los agujeros negros, resulta de gran importancia conocer las trayectorias, caminos o curvas que sigue la luz bajo la geometría del espaciotiempo. En particular si se construyen coordenadas adaptadas a tales direcciones, es posible estudiar la geometría del espaciotiempo de forma completa. Tanto en el horizonte de eventos, como fuera y dentro de la región que delimita el mismo.

Una de las contribuciones de esta tesis, es presentar por primera vez un sistema de coordenadas doblemente nulas completo y bien comportado en todo el espaciotiempo de Kerr, incluso en el eje de simetría. El método para construir la definición es original, está basado en las secciones centro de masa en el infinito nulo futuro; e involucra la solución de una ecuación diferencial no lineal, que se resuelve numéricamente a cualquier orden de precisión deseado. A tales coordenadas las llamamos  $u$  (salientes) y  $v$  (entrantes), y están naturalmente adaptadas a los horizontes y al infinito nulo futuro. En tal construcción, como intersección de ambas coordenadas nulas, se obtiene una familia de superficies esferoidales  $r_s$ , que serían la extensión natural de la coordenada tortuga de Schwarzschild  $r_*$ , al caso de Kerr. Las superficies  $r_s$  son axialmente simétricas, pero dependen de  $(r, \theta)$  en las coordenadas de Boyer-Lindquist. Tales superficies, también pueden caracterizarse geoméricamente por medio de la curvatura intrínseca y extrínseca, haciendo uso del formalismo GHP. Lejos del horizonte, los valores de la curvatura intrínseca o Gaussiana son cercanos a una constante, por lo que cada superficie  $r_s$  tiene una geometría intrínseca cercana a una esfera con curvatura Gaussiana constante, resultando ser una superficie muy suave.

Otro estudio importante, que se presenta en la tesis es el abordaje y resolución del problema característico de un sistema hiperbólico, haciendo uso de un sistema de coordenadas doblemente nulo, en una geometría sin simetría esférica. Esto significa un aporte novedoso, dado que los trabajos anteriores sobre este tema se han desarrollado con la suposición de simetría esférica y en muchos de los casos por separación de variables, lo que torna al problema unidimensional. Aquí presentamos la metodología para atacar la resolución de la ecuación de onda para un campo escalar sin masa, con dato característico en el espaciotiempo de Kerr. En la literatura se trabajó ampliamente, sin embargo todos los trabajos fueron limitados a estudios lejos del horizonte de eventos. Y sólo para el caso de Schwarzschild se pudo atravesar el horizonte de eventos utilizando un esquema característico, con ambas coordenadas nulas (salientes y entrantes), en simultáneo.

En esta tesis, se contribuye con el desarrollo de un esquema y código numérico característico para resolver la ecuación de un campo escalar sin masa en el espaciotiempo de Kerr, que hasta el momento no tiene antecedentes en la literatura. Con las nuevas coordenadas nulas en Kerr, por primera vez se aborda este estudio, siguiendo un esquema característico general, y con dependencia angular no trivial. Entre otras cosas, se puede dar dato inicial fuera del horizonte de eventos, y evolucionar numéricamente hasta atravesar y adentrarse en las regiones delimitadas por ambos horizontes, incluido el eje de simetría.

**Palabras claves:** Agujeros negros, Espaciotiempo de Kerr, Geodésicas, Coordenadas doblemente nulas, Campo escalar sin masa.

**Clasificación conceptual:** General Relativity, Gravitation, Classical Black Holes.



# Abstract

To study black holes nature, it is of great importance to know trajectories, paths or curves followed by light under spacetime geometry. If adapted coordinates to such directions are constructed, it is possible to study the spacetime geometry completely. Outside and within the region delimited by the event horizon.

One contribution of this thesis, is to present for the first time a complete and well behaved null coordinate system all over Kerr spacetime, including on the axis of symmetry. The method for constructing the definition is original, it is based on the center of mass sections at future null infinity; and involves the solution of a nonlinear differential equation, which is solved numerically to any desired precision order. We call such coordinates  $u$  (outgoing) and  $v$  (ingoing), and they are naturally adapted to horizons and future null infinity. In such construction, as an intersection of both null coordinates, a family of spheroidal surfaces  $r_s$  is obtained, which would be the natural extension of the Schwarzschild turtle coordinate  $r_*$ , to Kerr's case. The surfaces  $r_s$  are axially symmetric, but depend on  $(r, \theta)$  in Boyer-Lindquist coordinates. Such surfaces can also be characterized geometrically by means of intrinsic and extrinsic curvature, making use of the GHP formalism. Away from the horizon, it's intrinsic or Gaussian curvature is close to a constant, so each surface  $r_s$  has an intrinsic geometry close to a sphere with constant Gaussian curvature, resulting in a very smooth surface.

Another important study presented in this thesis, is to address and solve the characteristic problem of a hyperbolic system, making use of a double null coordinate system, over a geometry without spherical symmetry. This means a novel contribution, given that previous works on this topic have been developed with the assumption of spherical symmetry and in many cases by separation of variables, which makes the problem one dimensional. Here we present the methodology to attack and solve the wave equation for a massless scalar field, with characteristic data in the Kerr spacetime. In literature, extensive work was done, however was limited to studies far from the event horizon. And only for the case of Schwarzschild, the event horizon could be crossed using a characteristic scheme, with both null coordinates (outgoing and ingoing), simultaneously.

In this thesis, we contribute to the development of a numerical characteristic scheme and code, to solve the equation of a massless scalar field in Kerr spacetime, which up to now hasn't any precedent in the literature. With these new null coordinates in Kerr, this study is address for the first time, following a general characteristic scheme with non trivial angular dependence. Among other things, it is possible to give initial data outside the event horizon, and evolve numerically until crossing and entering in regions delimited by both horizons, including the axis of symmetry.

**Keywords:** Black holes, Kerr spacetime, Geodesics, Double null coordinates, Massless scalar field.

**Conceptual classification:** General Relativity, Gravitation, Classical Black Holes.



*Dedicado a mi esposa Amelia e hija Vita Francesca.  
Mis padres Hugo, Myriam; hermanos Victor, Mara,  
Melisa y Victoria; sobrinos, abuelos, tíos y primos.*



# *Agradecimientos*

Durante el desarrollo de esta tesis, recibí el esfuerzo, trabajo y afecto de muchas personas. Como la mayoría de las actividades humanas, la ciencia tiene un fuerte componente colaborativo y social. Por ello quisiera agradecer a todos aquellos que me acompañaron durante el doctorado. Debido a la brevedad de este escrito, solo voy a nombrar una pequeña parte. Sin embargo, para todos aquellos que en su memoria tengan un recuerdo compartido, simplemente gracias por compartir el camino y contribuir en el desarrollo de esta tesis.

Para comenzar, quisiera agradecer a mi director Osvaldo M. Moreschi, quien a lo largo de estos años me hizo un lugar en su vida. Me destino su tiempo, esfuerzo y experiencia para formarme. Quien gracias a su largo trayecto como investigador, me permitió abordar el problema de investigación desarrollado en esta tesis. También estoy muy agradecido de que en los momentos más difíciles, me brindó total apoyo y respondió con más esfuerzo de su parte para superar los obstáculos.

Agradezco al grupo de Relatividad y Gravitación, a cada uno de sus miembros en diferentes roles, alumnos, docentes, investigadores, con quienes compartí gratamente e hicieron grandes contribuciones a mi formación. Entre docentes e investigadores, destacar con quienes me forme en métodos numéricos: Dr. Omar Ortiz, Dr. Oscar Reula y Dr. Manuel Tiglio quienes siempre me brindaron total apoyo. Con aquellos que me formaron en las materias teóricas: Dr. Carlos N. Kozameh y Dr. Alejandro Perez (quienes además me apoyaron para trabajar en una de sus líneas de investigación), Dr. Gustavo Dotti, Dra. Maria Eugenia Gabach Clement y a la memoria del Dr. Sergio Dain quien fue una gran influencia y sigue siendo un fuente de inspiración. Entre alumnos y compañeros con quienes compartí gratos momentos en el camino del aprendizaje, muchos de ellos ya doctores e investigadores: Ivan Nieva, Pedro Denaro, Fernando Abalos, Lautaro Amadei, Ivan Gentile de Austria, Exequiel Boero, Bernardo Araneda, Marcelo Rubio, Federico Carrasco, Grabiell Crisnejo, Pablo Anglada, Marcos Ramirez, Paula Mandrili.

A la comisión asesora de doctorado: Dr. Carlos Bruno Briozzo y Dr. Carlos N. Kozameh, por el acompañamiento durante el doctorado. Al tribunal de tesis, por leer detenidamente el manuscrito y realizar sus devoluciones: Dr. Ernesto F. Eiroa, Dr. Emanuel Gallo y Dr. Pedro Walter Lamberti.

Agradezco a la comunidad de FaMAF, por su calidez, el excelente ambiente de trabajo y el compromiso de todos por dar siempre lo mejor de si mismos. Dispuestos a mejorar, ayudar y brindar soluciones, tanto personal docente, no-docente, administrativos y autoridades.

También estoy agradecido por haber encontrado y conocido muchas personas que iluminaron mi camino, con diferentes miradas desde otros campos de estudio y siempre comprometidas en su honestidad intelectual; muchos ya doctores e investigadores. Entre las que destaco a Hector Peña Pollastri por su generosidad en compartir sus conocimientos y voluntad en brindar ayuda, Dr. Oscar Lasso con quien mantuve colaboraciones en investigaciones paralelas, Sebastian Degui, Ignacio Prina, Nahuel Almeida, Ana Schaigorodsky, Jose Robledo, Martín Moroni y a todos mis compañeros de oficina con los que compartí estos años. Docentes e investigadores de mayor experiencia que me brindaron su apoyo: Dr. Edgardo Bonzi, Dra. Gabriela Grad, Dr. Jorge Lauret.

En el plano personal, agradezco a mi familia por el constante apoyo y soporte en todo momento, en todos los aspectos de la vida. A todos mis amigos quienes me reconfortaron, fortalecieron y apoyaron durante todo este tiempo. Con quienes compartí momentos inolvidables.

A las instituciones que financiaron parte de viajes, estadías y asistencias a congresos: The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italia. International Centre for Theoretical Physics, South American Institute for Fundamental Research (ICTP-SAIFR/IFT-UNESP), São Paulo, Brazil. Fundación Valenciana de Estudios Avanzados (FVEA), Valencia, España.

Agradezco a las instituciones de educación pública, gratuita y de apoyo al desarrollo de la ciencia; las cuales hicieron posible esta tesis: Universidad Nacional de Córdoba, donde realice mis estudios de doctorado; al CONICET quien me otorgó una beca interna doctoral y al IFEG por el lugar de trabajo donde desarrolle mis trabajos de investigación. Agradezco a la población Argentina en su conjunto, por sostener y defender tales instituciones. Creo que la educación nos llega como una inversión, que mejora nuestras vidas y de quienes nos rodean. Espero continuar con el compromiso de quienes nos formaron, de compartir, multiplicar y contribuir al sistema educativo y científico Argentino.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>9</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>15</b>
1.1. Solución de Kerr y su relevancia . . . . .	15
1.2. Coordenadas nulas y el espaciotiempo de Kerr . . . . .	16
1.3. Breve organización de la tesis . . . . .	19
<b>2. Espaciotiempo de Kerr</b>	<b>21</b>
2.1. Métrica de Kerr . . . . .	21
2.2. Congruencias principales nulas . . . . .	22
<b>3. Geodésicas</b>	<b>25</b>
3.1. Método de Hamilton-Jacobi . . . . .	25
3.1.1. Lagrangeano y Hamiltoniano de una curva geodésica . . . . .	26
3.1.2. Ecuación de Hamilton Jacobi . . . . .	26
3.2. Método de Hamilton-Jacobi aplicado a Kerr . . . . .	27
3.2.1. Usando Lagrangeano: constantes E y L . . . . .	27
3.2.2. Resolviendo la ecuación de Hamilton-Jacobi . . . . .	28
3.2.3. Geodésicas en Kerr (primer orden en derivadas) . . . . .	30
3.3. Congruencia de Geodésicas en Kerr . . . . .	31
3.3.1. Caso general . . . . .	31
3.3.2. Geodésicas Nulas en Kerr . . . . .	32
3.4. Caso de simetría esférica . . . . .	33
3.5. Usando resultados de Walker-Penrose . . . . .	34
<b>4. Coordenadas nulas <i>centro de masa</i></b>	<b>35</b>
4.1. Método para construir la definición . . . . .	35
4.1.1. Congruencia de geodésicas nulas . . . . .	35
4.1.2. Definición de función nula $u$ . . . . .	36
4.1.3. Constante de Carter: $K$ vs $K(r, \theta)$ . . . . .	37
4.1.4. Solución de la ecuación diferencial de K . . . . .	37
4.2. Expresiones integrales . . . . .	38
4.2.1. Caminos de integración naturales . . . . .	43
4.3. Superficies nulas $u = cte$ . . . . .	45
4.4. Tetrada asociada y coeficientes de espín . . . . .	46
4.4.1. Tetrada nula <i>centro de masa</i> . . . . .	46

4.4.2. Coeficientes de espín . . . . .	48
4.5. Métrica de Kerr en coordenadas nulas $\{u, v, \theta, \phi\}$ . . . . .	50
4.5.1. Forma co-variante . . . . .	50
4.5.2. Forma contra-variante . . . . .	52
<b>5. Superficies <math>r_s</math></b> . . . . .	<b>55</b>
5.1. Superficies $r_s$ : intersección de $u$ y $v$ . . . . .	55
5.1.1. Métrica inducida en $r_s$ . . . . .	56
5.2. Cálculo de Escalares de curvatura . . . . .	57
5.2.1. Rotación de tetrad nula: principal hacia <i>centro de masa</i> . . . . .	57
5.2.2. Escalares de Weyl . . . . .	58
5.3. Gráficos y Cálculos Numéricos . . . . .	59
5.3.1. Curvatura Gaussiana y Extrínseca de superficie $r_s$ (2D) . . . . .	59
5.3.2. Curvatura Gaussiana de $r_s$ 2D, en $(r = r_{\pm})$ . . . . .	60
5.3.3. Casos límites: Schwarzschild y Minkowski . . . . .	63
5.4. Comparación con otras definiciones . . . . .	64
<b>6. Nueva coordenada angular <math>\varphi</math></b> . . . . .	<b>67</b>
6.1. Divergencia en $r_+$ y $r_-$ . . . . .	67
6.2. Definición adaptada a direcciones principales . . . . .	67
6.3. Definición adaptada a direcciones <i>centro de masa</i> . . . . .	68
6.3.1. Posible definición $\tilde{\varphi}$ . . . . .	68
6.3.2. Definición adoptada $\varphi$ . . . . .	69
<b>7. Kerr en coordenadas nulas <i>centro de masa</i> y nueva <math>\varphi</math></b> . . . . .	<b>71</b>
7.1. Kerr en coordenadas Boyer Lindquist $\{t, r, \theta\}$ y nueva coordenada axial $\varphi$ . . . . .	71
7.1.1. Forma co-variante . . . . .	71
7.1.2. Forma contra-variante . . . . .	72
7.2. Kerr en coordenadas <i>centro de masa</i> y nueva $\varphi$ . . . . .	73
7.2.1. Forma co-variante . . . . .	73
7.2.2. Forma contra-variante . . . . .	77
7.3. Kerr en coordenadas <i>centro de masa</i> extendidas $\{U, V, \theta, \varphi\}$ . . . . .	78
7.3.1. Forma co-variante . . . . .	78
7.3.2. Forma contra-variante . . . . .	81
7.4. Coordenadas T y X en Kerr . . . . .	84
<b>8. Ecuación de onda de un campo escalar</b> . . . . .	<b>87</b>
8.1. Ecuación de campo escalar sin masa . . . . .	87
8.2. Minkowski: Ecuación de campo escalar sin masa . . . . .	87
8.2.1. Coordenadas cartesianas $\{t, x, y, z\}$ . . . . .	87
8.2.2. Coordenadas esféricas $\{t, r, \theta, \phi\}$ . . . . .	88
8.2.3. Coordenadas nulas $(u, v)$ . . . . .	88
8.3. Schwarzschild: Ecuación de campo escalar sin masa . . . . .	90
8.3.1. Coordenadas estándares $\{t, r, \theta, \phi\}$ . . . . .	90
8.3.2. Coordenadas nulas $\{u, v, \theta, \phi\}$ . . . . .	91
8.3.3. Coordenadas nulas $\{U, V, \theta, \phi\}$ . . . . .	92
8.4. Kerr: Ecuación de campo escalar sin masa . . . . .	93
8.4.1. Coordenadas Boyer-Lindquist . . . . .	93
8.4.2. Transformación a coordenadas <i>centro de masa</i> $\{u, v, \theta, \varphi\}$ . . . . .	94

---

8.4.3. Coordenadas <i>centro de masa</i> extendidas $\{U, V, \theta, \varphi\}$ . . . . .	95
<b>9. Solución de problemas característicos en Kerr</b>	<b>99</b>
9.1. Esquema numérico doblemente nulo . . . . .	99
9.1.1. Aproximaciones de trabajos previos (en simetría esférica) . . . . .	101
9.1.2. Esquema numérico en Kerr . . . . .	102
9.2. Datos iniciales con simetría axial . . . . .	103
9.2.1. Atravesando horizonte de eventos . . . . .	104
9.2.2. Dependencia angular en $\theta$ . . . . .	105
9.2.3. Construcción de la grilla . . . . .	106
9.3. Resultados Numéricos . . . . .	107
9.3.1. Dato inicial . . . . .	107
9.3.2. Evolución dato inicial Ancho. Caso: $(m, a) = (1, 0,80)$ . . . . .	111
9.3.3. Evolución dato inicial Ancho. Caso: $(m, a) = (1, 0,98)$ . . . . .	112
9.3.4. Evolución dato inicial Fino. Caso: $(m, a) = (1, 0,80)$ . . . . .	113
9.3.5. Evolución dato inicial Fino. Caso: $(m, a) = (1, 0,98)$ . . . . .	114
9.3.6. Evolución dato inicial Armónico. Caso: $(m, a) = (1, 0,80)$ . . . . .	115
9.3.7. Evolución dato inicial Armónico. Caso: $(m, a) = (1, 0,98)$ . . . . .	116
9.3.8. Test de precisión numérica . . . . .	117
9.4. Enfoque alternativo $\Phi(U, V, \theta = cte)$ . . . . .	119
9.4.1. Enfoque Alternativo, dato inicial Ancho. Caso: $(m, a) = (1, 0,80)$ . . . . .	120
9.4.2. Enfoque Alternativo, dato inicial Ancho. Caso: $(m, a) = (1, 0,98)$ . . . . .	121
9.4.3. Enfoque Alternativo, dato inicial Fino. Caso: $(m, a) = (1, 0,80)$ . . . . .	122
9.4.4. Enfoque Alternativo, dato inicial Fino. Caso: $(m, a) = (1, 0,98)$ . . . . .	123
9.4.5. Enfoque Alternativo, dato Armónico. Caso: $(m, a) = (1, 0,80)$ . . . . .	124
9.4.6. Enfoque Alternativo, dato Armónico. Caso: $(m, a) = (1, 0,98)$ . . . . .	125
9.5. Observaciones sobre resultados obtenidos . . . . .	126
<b>10. Comentarios finales</b>	<b>127</b>
10.1. Contribuciones de tesis . . . . .	127
10.2. Perspectivas futuras . . . . .	128
10.2.1. Extensión tipo Vaidya en Kerr . . . . .	128
10.2.2. Estudios de estabilidad en Kerr . . . . .	128
10.2.3. Estudios de Superradiancia en Kerr . . . . .	129
<b>A. Ecuación de campo escalar y transformación de coordenadas</b>	<b>131</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>137</b>

---



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Solución de Kerr y su relevancia

Una de las predicciones más notables de la teoría de Relatividad General, postulada por Albert Einstein (1915), es la existencia de agujeros negros. Estos son objetos compactos que aparecen naturalmente en la teoría y que por definición presentan una membrana nula denominada horizonte de eventos, tal que si un observador la cruza, no puede luego escapar hacia el infinito. Durante décadas, el estudio de agujeros negros fue puramente teórico, basado en el estudio de las soluciones de vacío de las ecuaciones de Einstein.

Primero se conocieron las soluciones con simetría esférica, sin carga Schwarzschild y con carga Reissner–Nordström, Schwarzschild [1916], Chandrasekhar [1992]. Debido a su simplicidad, se logró interpretar cabalmente la presencia del agujero negro. Han sido útiles las coordenadas nulas (Edington-Finkelstein)Wald [1984]; las cuales están relacionadas con particulares congruencias de geodésicas nulas, que son los caminos o trayectorias que sigue la luz en tal espaciotiempo.

También estas geometrías fueron importantes, porque la solución de Schwarzschild pudo interpretarse como el estado final de un colapso gravitatorio con simetría esférica, la cual es una idealización extrema, pero permitió hacer los cálculos Oppenheimer and Snyder [1939]. Se logró probar que se forma un horizonte de eventos, y dentro del mismo una singularidad.

Por otro lado, de las observaciones astronómicas, se conoce que genéricamente un proceso de colapso incluirá un momento angular final. Esto inspiró la búsqueda de soluciones con tales características. El resultado más notable es la solución de Kerr Kerr [1963], que precisamente representa un agujero negro con momento angular. Luego esta solución fue generalizada a la situación de un agujero negro con momento angular y carga eléctrica Newman [1965]. A diferencia del caso con simetría esférica, todavía no se conoce un modelo teórico cerrado de colapso gravitatorio cuyo estado final coincida con la solución de Kerr; aunque si se entiende que todo colapso que termine en una situación de vacío exterior con momento angular, tenderá asintóticamente al espaciotiempo de Kerr.

A partir de los teoremas de singularidad de Hawking-Penrose Wald [1984] se sabe que en algunas situaciones, un colapso gravitatorio conducirá a una singularidad. La noción de horizonte de eventos, se construye cuando el espaciotiempo tiene dos regiones; en el sentido que hay una región asintótica, a la cual no llegan las geodésicas nulas que provienen de una región interior al horizonte. En la literatura es muy conocida la llamada *conjetura de censura cósmica*, la cual postula que para cualquier colapso gravitatorio que forme una singularidad,

también se formará un horizonte de eventos que rodea, cubre o censura la singularidad y no permite que un observador en el infinito pueda detectarla.

Es importante señalar los requisitos mínimos esperados cuando uno busca soluciones que representen un colapso gravitatorio. Básicamente se pide que fuera de la distribución de masa, sea una solución de vacío (esto es que el tensor de Ricci sea cero), que sea estacionaria, que contenga un agujero negro y sea asintóticamente plana (es decir que al alejarnos, la geometría del espaciotiempo tiende a la de Minkowski). Por los resultados de Carter [1971], Robinson [1975] todo indica que el espaciotiempo debe depender solamente de dos parámetros como la solución de Kerr. Además se conoce que la métrica de Kerr es la única que representa soluciones con agujeros negros, de vacío y estacionarias.

Luego, si este enfoque es válido, y uno considera un escenario realista donde el colapso gravitatorio llega a un estado final estacionario; se formará un agujero negro y el estado final será un agujero negro de Kerr. Es así como la validez de la *conjetura de censura cósmica*, está estrechamente relacionada con la estabilidad de la solución de Kerr; y es uno de los problemas abiertos más importantes de la Relatividad General.

Si bien estos resultados teóricos señalan al agujero negro de Kerr, como principal candidato para el estado final de un agujero negro real, también existen observaciones experimentales que lo hacen. En 2019 fue publicada la primera imagen de un agujero negro ubicado en el centro de la Galaxia M87 The EHT Collaboration [2019], ver figura 1.1. La apariencia de la imagen, pudo ser modelada con un turbulento y caliente disco magnetizado orbitando un agujero negro de Kerr.

Actualmente las observaciones de la existencia de agujeros negros, no sólo provienen de señales electromagnéticas, sino también a partir de un fenómeno de naturaleza diferente: *Ondas Gravitacionales*. La colaboración LIGO, en 2016 publicó por primera vez los resultados de su medición Abbott [2016], producto de la colisión de dos agujeros negros. Actualmente LIGO, sigue publicando nuevos hallazgos de eventos, como resultado de la colisión de objetos masivos, principalmente agujeros negros. Notablemente, todas las descripciones que tenemos sobre el resultado final de una colisión de dos agujeros negros, es que se formará un nuevo agujero negro final con momento angular.

Es así como, a partir de esta última década en adelante, se cuentan con observaciones que permitirán contrastar y conocer con mayor precisión la verdadera naturaleza de estos objetos. La solución de Kerr resulta ser el modelo que mejor caracteriza las observaciones de agujeros negros reales hasta el momento.

## 1.2. Coordenadas nulas y el espaciotiempo de Kerr

Como se señaló anteriormente, resulta de gran importancia conocer las trayectorias o caminos que sigue la luz bajo la geometría del espaciotiempo. En particular las geodésicas nulas son una herramienta fundamental en nuestro trabajo.

En general, cuando se encuentra una solución de las ecuaciones de Einstein-Hilbert, esta se expresa en un sistema coordinado específico. La primera solución que se encontró fue la de Schwarzschild, y servirá para ejemplificar la importancia de las coordenadas nulas. Su métrica, se puede describir por su elemento de línea

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (1.1)$$

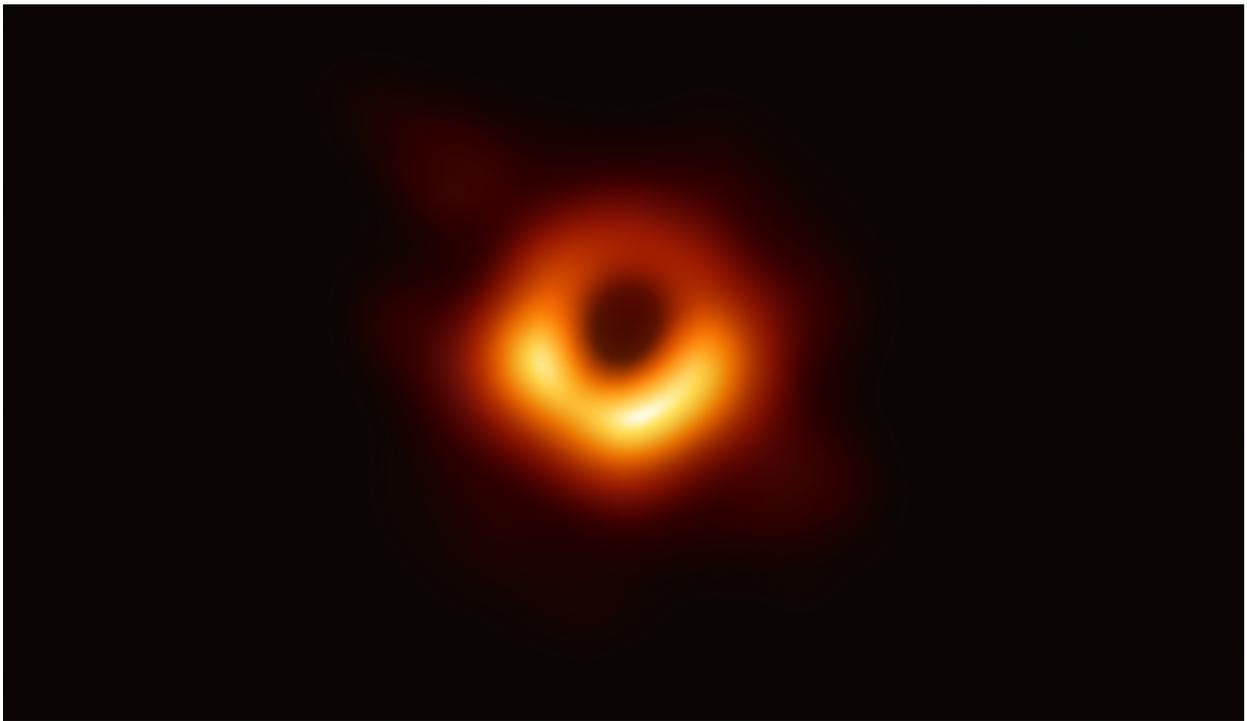


Figura 1.1: Primera imagen de un Agujero Negro: Obtenida de las observaciones del centro de la galaxia M87, mediante el uso del Event Horizon Telescope (arreglo de radio telescopios). El agujero negro rota en dirección de las manecillas del reloj. La apariencia de la imagen, pudo ser modelada con un turbulento y caliente disco magnetizado orbitando un agujero negro de Kerr.

y durante mucho tiempo no se comprendió el significado de la superficie ( $r = 2m$ ), puesto que la expresión de la métrica diverge cuando  $r$  toma ese valor.

Sin embargo, gracias a la simetría esférica, es sencillo encontrar las geodésicas nulas (camino o trayectoria que sigue la luz), que sean radiales. A lo largo de tales trayectorias, las coordenadas están relacionadas por

$$t = \pm r_* + \text{constante}, \quad (1.2)$$

con

$$r_* = r + 2m \ln \left( \frac{r}{2m} - 1 \right). \quad (1.3)$$

A partir de tal relación, se pueden definir dos coordenadas nulas (Eddington–Finkelstein–Wald [1984]), que se mantienen constante a lo largo de tales trayectorias

$$u = t - r_*, \quad (1.4)$$

$$v = t + r_*; \quad (1.5)$$

que cubren el exterior del espaciotiempo, sin llegar a los horizontes. En cambio, el siguiente cambio de coordenadas permite extender la variedad a través de los horizontes

$$U = -e^{-\frac{u}{4m}}, \quad (1.6)$$

$$V = e^{\frac{v}{4m}}. \quad (1.7)$$

Luego si escribimos la métrica en esas coordenadas nulas, obtenemos

$$ds^2 = -\frac{32M^3 e^{-\frac{r}{2m}}}{r} dU dV - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (1.8)$$

la cual no tiene problemas cuando  $r = 2m$ , y la interpretación correcta es que tal superficie define los horizontes de eventos de Schwarzschild.

La ventaja de utilizar las coordenadas nulas en Schwarzschild se extiende a innumerables resultados y aplicaciones. Entre ellos podemos destacar el cálculo de la radiación de Hawking [1975], y los estudios de estabilidad de la solución de Schwarzschild.

En general, las coordenadas nulas son una gran herramienta para estudiar la geometría del espacio tiempo. *Aunque puede resultar asombroso que hasta hoy, se desconocían tales coordenadas globales para el caso de Kerr.* Esto tal vez se debe, a que desde la publicación de la solución de Kerr, se conocían ciertas direcciones nulas, llamadas congruencias principales nulas; respecto a las cuales muchas de las ecuaciones que caracterizan la geometría del espacio tiempo se simplifican.

Al estudiar el caso de Kerr en los libros de texto Chandrasekhar [1992], Poisson [2004], puede pasar inadvertido que las coordenadas  $u$  y  $v$  definidas allí, adaptadas a las congruencias principales, no son coordenadas nulas. Esto se debe a que las direcciones principales tienen "twist", lo cual impide definir una coordenada que se mantenga constante a lo largo de tales direcciones.

En la literatura existen importantes intentos de definir coordenadas nulas en Kerr, entre ellas se destacan Pretorius and Israel [1998], Bishop and Venter [2006], Fletcher and Lun [2003a] y Hayward [2004]. Pero en todos ellos, existe un mal comportamiento en los polos ( $\theta = 0, \pi$ ). Por lo tanto, en la literatura todavía no existe para Kerr, un sistema coordenado nulo que cumpla con el requisito mínimo de suavidad global que todo sistema coordenado debe tener. En esta tesis, tal déficit es solucionado.

### 1.3. Breve organización de la tesis

En el Capítulo 2, se presenta la métrica y detalles. Se discute porqué las congruencias principales no son útiles para definir coordenadas nulas en Kerr. En el Capítulo 3, se estudia en profundidad el método de Hamilton-Jacobi como método general para obtener las geodésicas del espaciotiempo. Tal estudio, permite sentar las bases para la búsqueda de las coordenadas nulas.

En el Capítulo 4, se presenta en detalle el método para construir la definición del sistema coordinado nulo en Kerr, haciendo uso del estudio de geodésicas. Se detalla tanto la deducción analítica, como así también el esquema numérico para resolver la ecuación diferencial no lineal que involucra la definición. Se muestran las expresiones de las coordenadas nulas  $u$  salientes y  $v$  entrantes junto con los gráficos de resultados numéricos. En Capítulo 5, se muestra que asociado al par de coordenadas nulas, existe una familia de superficies 2D, que se obtiene como la intersección de ambas coordenadas nulas ( $du = dv = 0$ ). Tales superficies, se corresponden a ( $r_s = cte$ ), donde  $r_s$  pueden considerarse como la extensión a Kerr, de la coordenada tortuga  $r_*$  de Schwarzschild. Se presenta una completa caracterización geométrica en términos de la curvatura Gaussiana y extrínseca, haciendo uso del formalismo GHP, Geroch et al. [1973]. En Minkowski (coordenadas esféricas) y Schwarzschild (coordenadas estándares), tales superficies son esferas de ( $r = cte$ ), de curvatura Gaussiana constante, mientras que en Kerr (coordenadas Boyer-Lindquist), para  $r > r_+$  son esferoides  $r(\theta)$ , con curvatura Gaussiana que depende de  $\theta$ , no constante.

En el Capítulo 6, se define un par de coordenadas angulares axiales que son regulares para cada horizonte respectivamente. Esto es debido a que la coordenada original de Boyer-Lindquist  $\phi$  tiene mal comportamiento en el horizonte futuro. Si se quiere resolver la ecuación de un campo escalar sin masa y atravesar el horizonte de eventos, resulta fundamental definir una coordenada angular axial regular. Para ello, se hace un estudio analizando diversas posibilidades. Finalmente se adopta una nueva definición de coordenada angular, que permitirá lograr el cometido de atravesar el horizonte y minimizar la complejidad numérica.

En el Capítulo 7, se presenta la métrica de Kerr en las coordenadas doblemente nulas ( $u, v$ ) *centro de masa*, haciendo uso de la nueva coordenada angular. Se analiza en detalle el comportamiento en el horizonte de eventos y se presenta el sistema de coordenadas doblemente nulo ( $U, V$ ) que permite extender las coordenadas a través de los horizontes. Estas últimas son las que se usarán en el cálculo numérico. En el Capítulo 8, se escribe la ecuación de campo escalar sin masa, para Minkowski y Schwarzschild, en diferentes sistemas coordinados. Se reproducen y analizan resultados conocidos en la literatura, como paso previo al estudio en Kerr. Se escribe la ecuación de campo escalar sin masa para Kerr, en las coordenadas *centro de masa*, con nueva coordenada angular bien comportada  $\varphi$ . Se estudia en detalle el buen comportamiento obtenido en el horizonte.

En el Capítulo 9, se extienden técnicas empleadas en Eilon and Ori [2016] y Gundlach et al. [1994], y se plantea un esquema característico general para resolver la ecuación de un campo escalar sin masa en Kerr, haciendo uso del sistema de coordenadas doblemente nulo. Se desarrolla un código numérico que permite, entre otras cosas dar dato inicial fuera del horizonte de eventos, con dependencia angular no trivial y evolucionar numéricamente hasta atravesarlo.

Finalmente en el Capítulo 10, revisamos los aportes de esta tesis, englobando los resultados más destacados.



# Capítulo 2

## Espaciotiempo de Kerr

*El espaciotiempo de Kerr se conoce desde 1963 Kerr [1963]. Si un objeto astronómico (por ejemplo una estrella), tiene un colapso gravitatorio, en un escenario realista llegará a un estado final estacionario; se formará un agujero negro y la comunidad entiende que el estado final estará descrito por el espaciotiempo de Kerr.*

### 2.1. Métrica de Kerr

La geometría del espaciotiempo de Kerr, queda totalmente codificada en su métrica. La cual puede expresarse en las coordenadas Boyer-Lindquist Boyer and Lindquist [1967] como

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - (r^2 + a^2) \sin^2(\theta) d\phi^2 - \left( \frac{2mr}{\Sigma} \right) (dt - a \sin^2(\theta) d\phi)^2 \\ &= \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} dt d\phi \\ &\quad - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left( r^2 + a^2 + \frac{2a^2mr}{\Sigma} \sin^2(\theta) \right) \sin^2(\theta) d\phi^2 \\ &= \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} dt d\phi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\phi^2; \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde <sup>1,2</sup>

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta), \tag{2.2}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr, \tag{2.3}$$

$$\frac{\Upsilon}{\Sigma} = \left( r^2 + a^2 + \frac{2a^2mr}{\Sigma} \sin^2(\theta) \right) = \frac{1}{\Sigma} \left( (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta) \right). \tag{2.4}$$

El parámetro  $m$  denota la masa y el momento angular del agujero negro está dado por  $J = am$ .

En el artículo original de Boyer-Lindquist Boyer and Lindquist [1967], el término  $dt d\phi$  tenía el signo opuesto. Sin embargo, escogimos el signo para concordar con los libros de texto Wald [1984] y Chandrasekhar [1992].

---

<sup>1</sup>Notar que en el libro de Chandrasekhar Chandrasekhar [1992],  $\Sigma$  se llama  $\rho^2$

<sup>2</sup>Notar que en el libro de Chandrasekhar Chandrasekhar [1992],  $\Upsilon$  se llama  $\Sigma^2$ .

La condición  $\Delta = 0$ , tiene dos soluciones

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}, \quad (2.5)$$

que determinan dos horizontes de eventos. Uno exterior y otro interior. A su vez, estos se desdoblan. Por ejemplo, para la versión exterior, se tiene el horizonte  $H^+$  y el horizonte  $H^-$ , donde, estando adentro de  $H^+$  no se puede llegar por trayectorias causales al infinito nulo futuro.

La métrica inversa como se puede constatar en Chandrasekhar [1992], está dada por

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 &= \frac{\Upsilon}{\Sigma\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \frac{4amr}{\Sigma\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \\ &\quad - \frac{\Delta}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma\Delta \sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^2; \end{aligned} \quad (2.6)$$

## 2.2. Congruencias principales nulas

En un espaciotiempo tipo D (en la clasificación de Petrov), por el teorema de Goldberg-Sachs Goldberg and Sachs [1962] existen dos congruencias nulas shear-free. Cuando se escriben las ecuaciones de Einstein en términos de tetradas, usar tales congruencias especiales simplifican enormemente las expresiones. Es gracias a tal simplificación algebraica, que fue posible resolver la ecuación de Einstein a mano, y encontrar la solución de Kerr. Tales direcciones nulas, se llaman principales.

Por otro lado, en el caso de Schwarzschild, tenemos que las coordenadas nulas de Eddington-Finkelstein están adaptadas a las direcciones principales.

A pesar de los antecedentes y ventajas de las direcciones principales, en esta sección mostraremos que en el caso de Kerr, no es posible definir coordenadas nulas adaptadas a las mismas.

En coordenadas Boyer-Lindquist, la tetrada asociada a tales congruencias, en sus formas contra-variante y co-variante pueden encontrarse en Chandrasekhar [1992], y están dadas por

$$l^a = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a + \frac{a}{\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a, \quad (2.7)$$

$$n^a = \frac{r^2 + a^2}{2\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a - \frac{\Delta}{2\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a + \frac{a}{2\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a, \quad (2.8)$$

$$m^a = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos(\theta))} \left[ ia \sin(\theta) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^a + \frac{i}{\sin(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a \right], \quad (2.9)$$

$$l_a = (dt)_a - \frac{\Sigma}{\Delta} (dr)_a - a \sin^2(\theta) (d\phi)_a, \quad (2.10)$$

$$n_a = \frac{\Delta}{2\Sigma} (dt)_a + \frac{1}{2} (dr)_a - \frac{\Delta}{2\Sigma} a \sin^2(\theta) (d\phi)_a, \quad (2.11)$$

$$m_a = \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos(\theta))} \left[ ia \sin(\theta) (dt)_a - \Sigma (d\theta)_a - i(r^2 + a^2) \sin(\theta) (d\phi)_a \right]. \quad (2.12)$$

Sus propiedades geométricas rápidamente se pueden inferir si calculamos sus coeficientes de espín en el formalismo GHP Geroch et al. [1973]. El primero a analizar es  $\kappa$ , al anularse

nos indica que las direcciones son geodésicas

$$\kappa = 0. \quad (2.13)$$

El siguiente es  $\sigma$ , que también se anula y por ello se dice que las direcciones principales son "shear-free" (característica distintiva de estas congruencias)

$$\sigma = 0. \quad (2.14)$$

Por último, el coeficiente  $\rho$  revela que las direcciones principales no pueden utilizarse para definir un sistema de coordenado nulo asociado. En este caso  $\rho$  es complejo, y por lo tanto la congruencia tiene "twist" (no es ortogonal a hipersuperficies).

$$\rho = \frac{1}{i a \cos(\theta) - r}. \quad (2.15)$$

El resto de los coeficientes, pueden consultarse en Chandrasekhar [1992].

Por lo que acabamos de ver, las direcciones principales de Kerr no poseen coordenadas nulas asociadas.

En este punto, resulta de interés reproducir el desarrollo que se hace en Chandrasekhar [1992] y Poisson [2004]. Para enfatizar que lo definido como  $\tilde{u}$  y  $\tilde{v}$ , en realidad no son coordenadas nulas, salvo que se considere ( $\theta = 0$ ). Podemos comenzar siguiendo Poisson [2004], en donde se considera

$$d\tilde{u} = dt - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad (2.16)$$

$$d\tilde{v} = dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr, \quad (2.17)$$

Si comparamos (2.10) con (2.16), podremos notar que únicamente cuando ( $\theta = 0$ ), tenemos

$$l_\alpha = d\tilde{u}. \quad (2.18)$$

En el caso mas general, con  $\theta \neq 0$ ,

$$l_\alpha \neq d\tilde{u}, \quad (2.19)$$

por lo que la coordenada  $\tilde{u}$  definida en los libros de texto, si bien están inspiradas en las direcciones principales, no son nulas, es decir no contienen dichas direcciones. Esto está relacionado con que las direcciones principales tienen "twist."

Si se calcula la norma  $g(d\tilde{u}, d\tilde{u})$ , se obtiene

$$g(d\tilde{u}, d\tilde{u}) = \frac{a^2 \sin^2(\theta)}{r^2 + a^2 \cos(\theta)}. \quad (2.20)$$

Notar que solamente cuando ( $\theta = 0$ ), o cuando ( $\theta = \pi$ ),  $d\tilde{u}$  y  $d\tilde{v}$  son tangentes a hipersuperficies nulas.



# Capítulo 3

## Geodésicas

*Para construir la definición de coordenadas nulas, es importante conocer las ecuaciones generales de geodésicas para cada espaciotiempo.*

*El método de Hamilton-Jacobi permitió expresarlas por primera vez como un sistema de primer orden para el caso de Kerr, que al no tener simetría esférica demandó cálculos más complejos Carter [1968]. Dominar por completo el método, permite comprender en profundidad todos aquellos resultados relacionados a las geodésicas de un determinado espaciotiempo.*

*Poco tiempo después, Walker y Penrose Walker and Penrose [1970] probaron que las soluciones de vacío de tipo D admiten integrales cuadráticas de las geodésicas nulas. En particular para el caso de Kerr, que admite un Killing tensor; junto a las otras simetrías, provee de un método para la integración de las geodésicas como un sistema en derivadas primeras; dando otro enfoque a los resultados de Carter.*

### 3.1. Método de Hamilton-Jacobi

Fue Carter [1968] el primero en hallar las ecuaciones de geodésicas en Kerr como sistema de primer orden usando el método de Hamilton-Jacobi, que describiremos en detalle a lo largo de este capítulo. Carter demostró explícitamente que la ecuación de Hamilton-Jacobi es de variables separables, y dedujo la existencia de una constante de movimiento extra ( $K_{Carter}$ ), obteniendo un total de cuatro cantidades conservadas. Gracias a las cuales se obtienen las ecuaciones de geodésicas en término de derivadas primeras.

Luego, Walker y Penrose Walker and Penrose [1970] mostraron que todo espaciotiempo de vacío tipo-D, tiene un tensor de Killing conforme. En el cual se codifican las simetrías. Y es directo ver, que a partir de tal tensor de Killing, también pueden obtenerse las ecuaciones de geodésicas Chandrasekhar [1992] como un sistema de derivadas primeras.

En algún sentido, la ecuación de Hamilton-Jacobi resulta de variables separables, gracias a las simetrías. Que a su vez, también se codifican en el tensor de Killing conforme, presente en todo espaciotiempo tipo D. Por lo que uno espera, que el método presentado en este capítulo, pueda ser utilizado para todo espacio tiempo tipo D vacío.

El método de Hamilton-Jacobi suele estar presentado en el contexto de Mecánica Clásica, y su ecuación se deduce en términos de un Lagrangeano y Hamiltoniano. Por lo tanto, primero debemos establecer adecuadamente el Lagrangeano y Hamiltoniano a utilizar, cuando buscamos las ecuaciones de geodésicas en un determinado espaciotiempo.

### 3.1.1. Lagrangeano y Hamiltoniano de una curva geodésica

La longitud de una curva espacial, o el tiempo propio en caso de una curva temporal, está dado por

$$d' = \int_a^b \sqrt{\pm g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}} d\lambda = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\pm g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}} dt = d \quad (3.1)$$

que es independiente de la parametrización de la curva. Puede probarse que  $d$  es máximo (para curvas temporales), o mínimo (para curvas espaciales), si la ecuación de geodésica se satisface. Siguiendo a Wald [1984] (3.3.7 a 3.3.14), es importante destacar que las ecuaciones que satisfacen las geodésicas, pueden obtenerse a partir de un Lagrangeano del tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}, \quad (3.2)$$

y de las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\mathcal{L}$ . Este importante resultado, es el punto de partida para aplicar y utilizar los resultados de mecánica clásica.

A partir de (3.2), podemos obtener el Hamiltoniano asociado  $H$ , usando la transformación de Legendre

$$H = \sum_{\gamma} p_{\gamma} \dot{q}^{\gamma} - \mathcal{L}, \quad (3.3)$$

donde

$$\dot{q}^{\gamma} = \frac{dx^{\gamma}}{d\lambda}, \quad (3.4)$$

y

$$p_{\gamma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{\gamma}} = \frac{\partial \left( \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} \right)}{\partial \dot{q}^{\gamma}} = g_{\alpha\gamma} \dot{q}^{\alpha}, \quad (3.5)$$

debido a la simetría de la métrica ( $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ ).

Luego podemos reemplazar en (3.3), para obtener

$$H = \sum_{\gamma} p_{\gamma} \dot{q}^{\gamma} - \mathcal{L} = g_{\alpha\gamma} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\gamma} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = \mathcal{L}, \quad (3.6)$$

que en términos del momento (3.5), está dada por

$$H = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} = \frac{1}{2} p_{\beta} \dot{q}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_{\alpha} p_{\beta} \quad (3.7)$$

### 3.1.2. Ecuación de Hamilton Jacobi

Como figura en la mayoría de los libros de texto de Mecánica Clásica, por ejemplo Moreschi [2000], la ecuación de Hamilton Jacobi se obtiene por medio de una transformación canónica, generada por la función generatriz  $F_{00}(q_i, Q_j, \lambda) = S$ , en donde  $S$  es la acción

$$S = \int_{q_i}^{Q_i} \sum_i p_i dq_i - \int_{\lambda_0}^{\lambda} H d\lambda. \quad (3.8)$$

Con tal transformación, uno obtiene las bien conocidas relaciones

$$p_i(\lambda) = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad (3.9)$$

$$P_i(t) = -\frac{\partial S}{\partial Q_i} \quad (3.10)$$

y debido a que  $F_{00} = S$ , la ecuación siguiente es igual a cero

$$H'(P_i, Q_j, \lambda) = H + \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0, \quad (3.11)$$

donde  $H'$  es el nuevo Hamiltoniano obtenido por la transformación canónica. Esta última ecuación es la llamada *Ecuación de Hamilton Jacobi*. Que para nuestro caso particular, el Hamiltoniano está dado por (3.7), y obtenemos

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta = 0.} \quad (3.12)$$

## 3.2. Método de Hamilton-Jacobi aplicado a Kerr

Para comenzar, es importante hacer uso del Lagrangeano y las ecuaciones de Euler-Lagrange para encontrar las primeras dos constantes de movimiento.

Luego en una segunda etapa, utilizar la ecuación de Hamilton-Jacobi (3.12).

### 3.2.1. Usando Lagrangeano: constantes E y L

La métrica de Kerr en las coordenadas de Boyer-Lindquist, está dada por

$$[g_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} dt & dr & d\theta & d\phi \\ \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) & 0 & 0 & \frac{2aMr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \\ 0 & -\frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ \frac{2aMr \sin^2(\theta)}{\Sigma} & 0 & 0 & -\frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \begin{matrix} dt \\ dr \\ d\theta \\ d\phi \end{matrix}. \quad (3.13)$$

Luego, podemos escribir el Lagrangeano asociado a una curva geodésica (3.2), como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \frac{\delta}{2}, \quad (3.14)$$

donde  $\delta$  determina si la curva es espacial ( $\delta < 0$ ), temporal ( $\delta > 0$ ) o nula ( $\delta = 0$ ), en el caso de signatura (+ - - -). Si reemplazamos las componentes de la métrica (3.13) en (3.14), obtenemos

$$2\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2M}{\Sigma}\right) \dot{t}^2 + \frac{4aMr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \dot{t}\dot{\phi} - \frac{\Sigma}{\Delta} \dot{r}^2 - \Sigma \dot{\theta}^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2, \quad (3.15)$$

Este Lagrangeano admite dos cantidades conservadas, que se pueden deducir del teorema de Noether, debido a que conocemos dos simetrías de Killing. Pero en las coordenadas de

Boyer-Lindquist, estas cantidades conservadas se pueden deducir directamente de la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0. \quad (3.16)$$

Donde  $\mathcal{L}$  no depende de las coordenadas  $t$  y  $\phi$ , por lo que tales coordenadas son cíclicas y tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = p_t = \left( 1 - \frac{2M}{\Sigma} \right) \dot{t} + \frac{2aMr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \dot{\phi} = E = \text{constante}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = p_\phi = \frac{2aMr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \dot{t} - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) \dot{\phi} = L = -L_z = \text{constante}; \quad (3.18)$$

donde  $L_z$  es la elección de Chandrasekhar [1992].

### 3.2.2. Resolviendo la ecuación de Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi para un Lagrangeano del tipo (3.2), está dada por (3.12). Si utilizamos (3.9) para hacer explícitas las derivadas parciales de la acción  $S$  respecto a las coordenadas, obtenemos

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} = 0, \quad (3.19)$$

Notar que la ecuación (3.19) es la misma a la utilizada en Chandrasekhar [1992] (página 344), que a su vez sigue el trabajo de Carter [1968].

Para continuar, será útil tener la forma contra-variante de la métrica

$$[g^{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} \partial_t & \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ \frac{\Upsilon}{\Sigma\Delta} & 0 & 0 & \frac{2aMr}{\Sigma\Delta} \\ 0 & -\frac{\Delta}{\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Sigma} & 0 \\ \frac{2aMr}{\Sigma\Delta} & 0 & 0 & -\left[ \frac{\Delta - a^2 \sin^2(\theta)}{\Delta\Sigma \sin^2(\theta)} \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_r \\ \partial_\theta \\ \partial_\phi \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Luego reemplazamos las componentes de la métrica (3.20) en (3.19), y obtenemos

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial S}{\partial \lambda} = & -\frac{\Upsilon}{\Sigma\Delta} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + \frac{\Delta}{\Sigma} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\Sigma} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \left[ \frac{\Delta - a^2 \sin^2(\theta)}{\Delta\Sigma \sin^2(\theta)} \right] \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \\ & - \frac{4aMr}{\Sigma\Delta} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Si tenemos presente (3.8)

$$S = \int_{q_i}^{Q_i} \sum_i p_i dq_i - \int_{\lambda_0}^{\lambda} H d\lambda, \quad (3.8)$$

y además que ( $H = \mathcal{L} = \frac{\delta}{2}$ ) según (3.6), obtenemos

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = -\frac{\delta}{2}. \quad (3.22)$$

Luego reemplazamos en (3.21)

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{\Upsilon}{\Sigma\Delta} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{\Delta}{\Sigma} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\Sigma} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - \left[ \frac{\Delta - a^2 \sin^2(\theta)}{\Delta \Sigma \sin^2(\theta)} \right] \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \\ & + \frac{4aMr}{\Sigma\Delta} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

En esta etapa, siguiendo Chandrasekhar [1992], es conveniente reescribir (3.23) en forma alternativa

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{1}{\Sigma\Delta} \left[ (r^2 + a^2) \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right) + a \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right) \right]^2 - \frac{1}{\Sigma \sin^2(\theta)} \left[ a \sin^2(\theta) \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right) \right]^2 \\ & - \frac{\Delta}{\Sigma} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\Sigma} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

En el método de Hamilton-Jacobi, la acción  $S$  es a su vez la función generatriz de la transformación canónica; por lo tanto

$$p_t = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = p_t = \left( 1 - \frac{2M}{\Sigma} \right) \dot{t} + \frac{2aMr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \dot{\phi} = E = \text{constante}, \quad (3.25)$$

$$p_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = p_\phi = \frac{2aMr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \dot{t} - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) \dot{\phi} = L = -L_z = \text{constante}; \quad (3.26)$$

donde  $L_z$  es la elección de Chandrasekhar [1992]. A partir de (3.17) y (3.18), resulta que son dos cantidades conservadas, llamadas  $E$  y  $L$ . Luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} = -\frac{\delta}{2} & \Rightarrow S = -\frac{\delta}{2} \lambda + F(t, r, \theta, \phi) \\ \frac{\partial S}{\partial t} = p_t = E & \Rightarrow S = -\frac{\delta}{2} \lambda + E t + f(r, \theta, \phi) \\ \frac{\partial S}{\partial \phi} = p_\phi & \Rightarrow \frac{\partial f(r, \theta, \phi)}{\partial \phi} = p_\phi = L \Rightarrow f(r, \theta, \phi) = L \phi + S_{r\theta}(r, \theta). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Y así obtenemos la siguiente expresión para  $S$

$$S = -\frac{\delta}{2} \lambda + E t + L \phi + S_{r\theta}(r, \theta). \quad (3.28)$$

Si reemplazamos (3.28) en (3.23), y multiplicamos ambos miembros por  $\Sigma$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \Sigma \delta = & + \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2) E + aL]^2 - \frac{1}{\sin^2(\theta)} [a \sin^2(\theta) E + L]^2 \\ & - \Delta \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.29)$$

luego reorganizando términos, finalmente obtenemos la separación de variables

$$\begin{aligned} r^2 \delta - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2) E + aL]^2 + \Delta \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 = \\ - \frac{1}{\sin^2(\theta)} [a \sin^2(\theta) E + L]^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - a^2 \cos^2(\theta) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para resolver (3.30), podemos utilizar la técnica de separación de variables, es decir tomar

$$S_{r\theta}(r, \theta) = S_r(r) + S_\theta(\theta). \quad (3.31)$$

Y luego separar las dependencias en  $r$  y  $\theta$

$$\begin{aligned} r^2\delta - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E + aL]^2 + \Delta \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 = \\ - \frac{1}{\sin^2(\theta)} [a \sin^2(\theta)E + L]^2 - \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 - a^2 \cos^2(\theta) \end{aligned} \quad (3.32)$$

En el lado izquierdo de (3.32), tenemos dependencia con la variable  $r$  y en el lado derecho con  $\theta$ . La igualdad se mantiene para diferentes valores de  $r$  y  $\theta$ , sólo si ambos miembros de la igualdad son constantes

$$- \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{\sin^2(\theta)} [a \sin^2(\theta)E + L]^2 - a^2 \cos^2(\theta)\delta = -K, \quad (3.33)$$

$$r^2\delta - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E + aL]^2 + \Delta \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 = -K, \quad (3.34)$$

donde debido al signo definido de (3.33), decidimos trabajar con  $K$  definida positiva. Desde nuestro punto de vista es una forma más pedagógica de presentar los resultados que siguen. La constante  $K$ , es la llamada constante de Carter, quien la halló por primera vez, usando las coordenadas Boyer-Lindquist.

Finalmente, haciendo las siguientes abreviaciones

$$\Theta = K - \frac{1}{\sin^2(\theta)} [a \sin^2(\theta)E + L]^2 - a^2 \cos^2(\theta)\delta, \quad (3.35)$$

$$\mathcal{R} = [(r^2 + a^2)E + aL]^2 - \Delta [r^2\delta + K], \quad (3.36)$$

podemos escribir la solución de (3.19) como

$$\mathcal{S} = -\frac{\delta}{2}\lambda + Et + L\phi + \int \sqrt{\Theta} d\theta + \int \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr. \quad (3.37)$$

### 3.2.3. Geodésicas en Kerr (primer orden en derivadas)

Por múltiples propósitos, resulta conveniente expresar las ecuaciones de geodésicas en términos de ecuaciones diferenciales de primer orden. Para hacerlo, simplemente hay que tener en cuenta lo siguiente

$$p_t = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \left( 1 - \frac{2M}{\Sigma} \right) \dot{t} + \frac{2aMr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \dot{\phi} = E, \quad (3.25)$$

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = -\frac{\Sigma}{\Delta} \dot{r}, \quad (3.38)$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = -\Sigma \dot{\theta}, \quad (3.39)$$

$$p_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{2aMr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \dot{t} - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) \dot{\phi} = L. \quad (3.26)$$

Si partimos de (3.34) y reemplazamos ( $\frac{dS_r}{dr} = -\frac{\Sigma}{\Delta}\dot{r}$ ) como indica (3.38), obtenemos

$$r^2\delta - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2) E + aL]^2 + \frac{\Sigma^2}{\Delta} \dot{r}^2 = -K, \quad (3.40)$$

luego utilizando (3.36), expresamos de forma resumida

$$\boxed{\Sigma^2 \dot{r}^2 = [(r^2 + a^2) E + aL]^2 - \Delta [r^2\delta + K] = \mathcal{R}.} \quad (3.41)$$

De manera similar, si partimos por (3.39), y luego reemplazamos ( $\frac{dS_\theta}{d\theta} = -\Sigma\dot{\theta}$ ) como indica (3.39), obtenemos

$$-\Sigma^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{\sin^2(\theta)} [a \sin^2(\theta) E + L]^2 - a^2 \cos^2(\theta)\delta = -K, \quad (3.42)$$

luego utilizando (3.35), podemos expresar de manera resumida

$$\boxed{\Sigma^2 \dot{\theta}^2 = K - \frac{1}{\sin^2(\theta)} [a \sin^2(\theta) E + L]^2 - a^2 \cos^2(\theta)\delta = \Theta.} \quad (3.43)$$

Por último para encontrar las ecuaciones correspondientes a  $\dot{t}$  y  $\dot{\phi}$ , simplemente se resuelve el sistema de dos ecuaciones (3.17) y 3.18 que definen las constantes  $E$  y  $L$ . Las cuales poseen como incógnitas a  $\dot{t}$  y  $\dot{\phi}$ . La solución del tal sistema, está dada por

$$\boxed{\Sigma \dot{t} = \frac{1}{\Delta} [E \Upsilon + 2amrL],} \quad (3.44)$$

$$\boxed{\Sigma \dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} \left[ 2amr E - (\Sigma - 2mr) \frac{L}{\sin^2(\theta)} \right].} \quad (3.45)$$

Notar que (3.41) y (3.43) tienen incorporada en sus expresiones la constante  $\delta$ , mientras que (3.44) y (3.45) no la tienen. El signo de  $\delta$  distingue el tipo de geodésica (temporal, espacial o nula). Las soluciones de  $\dot{r}$  y  $\dot{\theta}$  cambian para el caso temporal, espacial y nulo; mientras que  $\dot{t}$  y  $\dot{\phi}$  también cambian debido a que dependen de  $(r, \theta)$ , a pesar de que en sus expresiones no aparece de manera explícita  $\delta$ .

Por último, para comparar las expresiones con el libro de texto, tener en cuenta que  $L = -L_z$ , donde  $L_z$  es la notación de Chandrasekhar [1992].

### 3.3. Congruencia de Geodésicas en Kerr

#### 3.3.1. Caso general

A partir de (3.41),(3.43),(3.44) y (3.45), para cada valor de las constantes  $E, L, \delta, K$  podemos construir vectores geodésicos, tangentes a diferentes congruencias. En particular, podemos distinguir dos tipos de congruencias, salientes con ( $\dot{r} > 0$ ), y entrantes con ( $\dot{r} < 0$ ),

dirigidas hacia el futuro. Y para distinguirlas, a sus vectores tangentes genéricos los podemos llamar  $\ell^a$  y  $n^a$

$$\begin{aligned} \ell^a = & \frac{1}{\Sigma\Delta} [E\Upsilon + 2amrL] \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a + \frac{1}{\Sigma}\sqrt{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a \\ & \pm \frac{1}{\Sigma}\sqrt{\Theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^a + \frac{1}{\Sigma\Delta} \left[2amrE - (\Sigma - 2mr)\frac{L}{\sin^2(\theta)}\right] \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^a, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} n^a = & \frac{1}{\Sigma\Delta} [E\Upsilon + 2amrL] \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a - \frac{1}{\Sigma}\sqrt{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a \\ & \pm \frac{1}{\Sigma}\sqrt{\Theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^a + \frac{1}{\Sigma\Delta} \left[2amrE - (\Sigma - 2mr)\frac{L}{\sin^2(\theta)}\right] \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^a. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Por otro lado, es importante destacar que la versión dual de tales vectores, es decir las uno-formas o covectores  $\ell_a$  y  $n_a$  admiten una expresión resumida, que será útil para simplificar los cálculos y las expresiones a lo largo de esta tesis

$$\ell_a = g_{ab}\ell^b = E dt_a - \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr_a - \left(\pm\sqrt{\Theta}\right) d\theta_a + L d\phi_a, \quad (3.48)$$

$$n_a = g_{ab}\ell^b = E dt_a + \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr_a - \left(\pm\sqrt{\Theta}\right) d\theta_a + L d\phi_a. \quad (3.49)$$

### 3.3.2. Geodésicas Nulas en Kerr

A partir de (3.41),(3.43),(3.44) y (3.45), podemos obtener el caso nulo, simplemente tomando ( $\delta = 0$ )

$$\dot{t} = \frac{1}{\Sigma\Delta} [E\Upsilon + 2amrL], \quad (3.50)$$

$$\dot{r} = \pm\frac{1}{\Sigma}\sqrt{[(r^2 + a^2)E + aL]^2 - \Delta K}, \quad (3.51)$$

$$\dot{\theta} = \pm\frac{1}{\Sigma}\sqrt{K - \frac{1}{\sin^2(\theta)} [a\sin^2(\theta)E + L]^2}, \quad (3.52)$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Sigma\Delta} \left[2amrE - (\Sigma - 2mr)\frac{L}{\sin^2(\theta)}\right]. \quad (3.53)$$

Por último, resultara útil tener las expresiones explícitas del caso  $E = 1$

$$\dot{t} |_{E=1} = \frac{1}{\Sigma\Delta} [\Upsilon + 2amrL], \quad (3.54)$$

$$\dot{r} |_{E=1} = \pm\frac{1}{\Sigma}\sqrt{[(r^2 + a^2) + aL]^2 - \Delta K}, \quad (3.55)$$

$$\dot{\theta} |_{E=1} = \pm\frac{1}{\Sigma}\sqrt{K - \frac{1}{\sin^2(\theta)} [a\sin^2(\theta) + L]^2}, \quad (3.56)$$

$$\dot{\phi} |_{E=1} = \frac{1}{\Sigma\Delta} \left[2amr - (\Sigma - 2mr)\frac{L}{\sin^2(\theta)}\right]. \quad (3.57)$$

### 3.4. Caso de simetría esférica

Es importante señalar, que podemos considerar el espaciotiempo de Minkowski, Schwarzschild o Reissner–Nordström, en las coordenadas del tipo esféricas usuales, con tal sólo considerar un elemento de línea del tipo

$$ds^2 = F(r) dt^2 - \frac{dr^2}{F(r)} - r^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2). \quad (3.58)$$

En cada caso corresponde una función  $F(r)$  diferente

$$F(r)_{Mink} = 1, \quad (3.59)$$

$$F(r)_{Schw} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (3.60)$$

$$F(r)_{ReNo} = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right). \quad (3.61)$$

Si aplicamos el método de Hamilton-Jacobi partiendo de (3.58), y reproducimos todo el proceso de las secciones anteriores, obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden para las geodésicas

$$\dot{t} = \frac{E}{F(r)}, \quad (3.62)$$

$$\dot{r} = \pm F(r) \sqrt{\mathcal{R}_{esferico}}, \quad (3.63)$$

$$\dot{\theta} = \pm \frac{1}{r^2} \sqrt{\Theta_{esferico}}, \quad (3.64)$$

$$\dot{\phi} = \frac{-L}{r^2 \sin^2(\theta)}, \quad (3.65)$$

donde

$$\mathcal{R}_{esferico} = \frac{1}{r^2 F(r)} \left( \frac{r^2}{F(r)} E^2 - r^2 \delta - \mathcal{D} \right), \quad (3.66)$$

$$\Theta_{esferico} = \mathcal{D} - \frac{L^2}{\sin^2(\theta)}, \quad (3.67)$$

con la constante  $\mathcal{D}_{esferico}$  análoga a la de Carter en los casos de simetría esférica.

De la misma forma, también podemos distinguir dos tipos de congruencias, las salientes ( $\dot{r} > 0$ ) y entrantes ( $\dot{r} < 0$ ), cuyas direcciones tangentes genéricas pueden ser descritas en término de los covectores  $(\ell_{esferico})_a$  y  $(n_{esferico})_a$ , al estilo de (3.48) y (3.49)

$$(\ell_{esferico})_a = E dt_a - \sqrt{\mathcal{R}_{esferico}} dr_a - \left( \pm \sqrt{\Theta_{esferico}} \right) d\theta_a + L d\phi_a, \quad (3.68)$$

$$(n_{esferico})_a = E dt_a + \sqrt{\mathcal{R}_{esferico}} dr_a - \left( \pm \sqrt{\Theta_{esferico}} \right) d\theta_a + L d\phi_a. \quad (3.69)$$

### 3.5. Usando resultados de Walker-Penrose

El resultado central de Walker and Penrose [1970], dice que un *espaciotiempo tipo D*, admite un *Killing tensor conforme*. Las implicaciones de tal resultado, pueden seguirse con claridad en Chandrasekhar [1992]. Para el espaciotiempo de Kerr, los resultados se resumen en el siguiente corolario

**Corolario 3.5.1** El espaciotiempo de Kerr admite una cantidad conservada a lo largo de cualquier geodésica. Si llamamos  $\mathcal{K}$  a la cantidad conservada,  $k^a$  al vector geodésico genérico, y  $l, n, m, \bar{m}$  a las direcciones principales nulas; tenemos que

$$\mathcal{K} = 2\Sigma (k^a l_a) (k^a n_a) - r^2 k^a k_a, \quad (3.70)$$

y

$$\mathcal{K} = 2\Sigma (k^a m_a) (k^a \bar{m}_a) + a^2 \cos^2(\theta) k^a k_a. \quad (3.71)$$

Las ecuaciones geodésicas pueden obtenerse a partir del corolario 3.5.1. En coordenadas Boyer-Lindquist las direcciones principales están dadas por (2.10), (2.11) y (2.12); con el vector geodésico genérico expresado por

$$k^a = \dot{t} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \dot{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^a + \dot{\theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^a + \dot{\phi} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^a. \quad (3.72)$$

Luego al hacer las contracciones del corolario, en (3.70) y (3.71) obtenemos

$$\mathcal{K} = 2\Sigma \left[ \frac{\Delta}{2\Sigma} \left( \dot{t} - a \sin^2(\theta) \dot{\phi} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\Sigma}{\Delta} \dot{r}^2 \right] - r^2 \delta, \quad (3.73)$$

$$\mathcal{K} = 2\Sigma \left[ \frac{1}{2\Sigma} \left( (r^2 + a^2) \dot{\phi} - a \dot{t} \right)^2 \sin^2(\theta) + \frac{\Sigma}{2} \dot{\theta}^2 \right] + a^2 \cos^2(\theta) \delta. \quad (3.74)$$

El siguiente paso, es utilizar las expresiones de  $\dot{t}$  y  $\dot{\phi}$  dadas por (3.44) y (3.45) (obtenidas a partir de la definición de  $E$  y  $L$ , en las ecuaciones (3.17) y 3.18).

$$\Sigma \dot{t} = \frac{1}{\Delta} [E \Upsilon + 2amrL], \quad (3.44)$$

$$\Sigma \dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} \left[ 2amr E - (\Sigma - 2mr) \frac{L}{\sin^2(\theta)} \right]. \quad (3.45)$$

Luego se reemplaza (3.44) y (3.45), en (3.73) y (3.74), para obtener como era esperado, las mismas expresiones encontradas con el método de Hamilton-Jacobi

$$\Sigma^2 \dot{r}^2 = [(r^2 + a^2) E + aL]^2 - \Delta [r^2 \delta + K], \quad (3.41)$$

$$\Sigma^2 \dot{\theta}^2 = K - \frac{1}{\sin^2(\theta)} [a \sin^2(\theta) E + L]^2 - a^2 \cos^2(\theta) \delta. \quad (3.42)$$

Desde el punto de vista operacional, al usar el resultado de Walker-Penrose, se trabaja con cuatro ecuaciones para la misma cantidad de incógnitas ( $\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ ). El corolario 3.5.1 provee de dos ecuaciones independientes (3.73) y (3.74), mientras que las constantes de movimiento  $E$  y  $L$  proveen las dos restantes (3.17) y (3.18).

# Capítulo 4

## Coordenadas nulas *centro de masa*

*Se presenta en detalle el método para construir la definición del sistema coordenado doblemente nulo en Kerr, haciendo uso del estudio de geodésicas. Se detalla tanto la deducción analítica, como así también el esquema numérico para resolver la ecuación diferencial no lineal que involucra la definición. Se muestran las expresiones de las coordenadas nulas salientes  $u$  y entrantes  $v$ , junto a los gráficos de resultados numéricos*

### 4.1. Método para construir la definición

En esta sección, como punto de partida consideramos las ecuaciones de geodésicas nulas (3.51),(3.52),(3.50) y (3.53), que contemplan dos tipos de congruencias, las salientes ( $\dot{r} > 0$ ) con  $\ell_a$  dada por (3.48) (con  $\delta = 0$ ), y las entrantes ( $\dot{r} < 0$ ) con  $n_a$  dada por (3.49) (con  $\delta = 0$ ).

A continuación se mostrarán los pasos para construir la definición, partiendo de la congruencia nula futura saliente  $\ell_a$ . Sin embargo, se pueden reproducir pasos análogos, partiendo de la congruencia nula futura entrante  $n_a$ . La ventaja de trabajar con la congruencia en su forma co-variante, es que se las ecuaciones y expresiones se simplifican, y la nueva definición de coordenadas nulas se resume en pocos pasos.

#### 4.1.1. Congruencia de geodésicas nulas

El estudio de geodésicas nulas, nos permite escribir la congruencia nula futura saliente más general del espaciotiempo de Kerr, como una 1-forma  $\ell_a$

$$\ell_a = g_{ab} \ell^b = E dt_a - \frac{\sqrt{[(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - K\Delta}}{\Delta} dr_a - \left( \pm \sqrt{K - \left[ a E \sin(\theta) - \frac{L_z}{\sin(\theta)} \right]^2} \right) d\theta_a - L_z d\phi_a; \quad (4.1)$$

donde  $L_z$  es la elección de Chandrasekhar [1992] ( $L_z = -L$ ). En cada punto del espaciotiempo, la elección de constantes  $E$ ,  $L_z$  y  $K$  determinan una dirección en la esfera de direcciones. En lo que sigue consideraremos  $E = 1$ .

Uno puede preguntarse, como escoger *las constantes*  $L_z$  y  $K$ , tal que *localmente* definan una hipersuperficie nula con las propiedades que nosotros queremos; es decir, a pesar de que

son constantes a lo largo de cada geodésica nula, somos libres de escoger valores diferentes para cada geodésica. *La idea que nos guía, es que  $\ell_a$  sea un diferencial exacto; junto con el requerimiento que la congruencia sea ortogonal a una esfera en el infinito nulo futuro.*

Consideremos ahora las 2-superficies  $S_r$  definidas por ( $t = \text{constante}$ ) y ( $r = \text{constante}$ ). Luego, los vectores  $(\frac{\partial}{\partial\theta})^b$  y  $(\frac{\partial}{\partial\phi})^b$  son tangentes a  $S_r$ . En particular nos interesa el caso limite donde esta superficie tiende a una esfera en el infinito  $S_r \rightarrow S_\infty$ . En nuestra definición, elegimos la congruencia  $\ell^a$  que sea ortogonal a  $S_\infty$ , es decir

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{ab} \ell^a \left( \frac{\partial}{\partial\theta} \right)^b = - \left( \pm \sqrt{K - \left[ a \sin(\theta^*) - \frac{L_z}{\sin(\theta^*)} \right]^2} \right) = 0, \quad (4.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{ab} \ell^a \left( \frac{\partial}{\partial\phi} \right)^b = -L_z = 0; \quad (4.3)$$

que se satisfacen cuando

$$(L_z)|_{r=\infty} = 0, \quad (4.4)$$

$$K|_{r=\infty} = a^2 \sin(\theta^*)^2; \quad (4.5)$$

donde  $\theta^*$  es el valor de  $\theta$  en la superficie  $S_\infty$ . Más precisamente, haciendo uso de la versión retardada de la coordenada de Kerr, definida por  $d\tilde{u} = dt - \frac{r^2+a^2}{\Delta} dr$ , mencionada anteriormente en (2.16); se puede ver que en el límite  $\tilde{u} = \text{constante}$ ,  $r \rightarrow \infty$  las secciones  $S_r$  van a las secciones centro de masa  $S_\infty$  en el infinito nulo futuro Moreschi [2004]. La congruencia buscada es la que llega perpendicularmente a estas secciones centro de masa, que se especifican por las condiciones asintóticas (4.4) y (4.5).

#### 4.1.2. Definición de función nula $u$

La expresión de la 1-forma  $\ell_a$  se obtuvo de las ecuaciones de geodésicas, donde  $K$  y  $L_z$  son constantes a lo largo cada geodésica. Consideremos el caso  $L_z = 0$ . Luego, intentemos construir una congruencia, tal que  $\ell_a$  coincida con el diferencial de una función nula  $u$ , es decir

$$(du)_a = \ell_a = dt_a - \frac{\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - K\Delta}}{\Delta} dr_a - \left( \pm \sqrt{K - a^2 \sin^2(\theta)} \right) d\theta_a. \quad (4.6)$$

Según (4.5),  $K$  deberá tener una dependencia en  $\theta$ . Pero para lograr satisfacer (4.6) como se vera en (4.7), debemos permitir además que  $K$  sea una función de  $r$  y  $\theta$ . El signo para  $\dot{\theta}$  se escoge pensando en un esferoide en el infinito futuro nulo, teniendo presente que el espacio tiempo es asintóticamente plano; por lo cual tomamos (+) para el hemisferio norte y (-) para el hemisferio sur y expresaremos simplemente con  $\pm|_h$ .

Para que se cumpla (4.6), ver apéndice de Wald [1984], la derivada exterior debe anularse, es decir

$$d\ell = d(du) = \frac{1}{2\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - K\Delta}} \frac{\partial K}{\partial\theta} d\theta \wedge dr \pm|_h \frac{1}{2\sqrt{K - (a \sin(\theta))^2}} \frac{\partial K}{\partial r} dr \wedge d\theta = 0; \quad (4.7)$$

lo cual equivale a la siguiente ecuación diferencial

$$\boxed{\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - K\Delta} \frac{\partial K}{\partial r} \pm|_h \sqrt{K - (a \sin(\theta))^2} \frac{\partial K}{\partial\theta} = 0}. \quad (4.8)$$

La ecuación (4.8) es la condición de integrabilidad para que la 1-forma  $\ell_a$  sea el diferencial de una función nula, que junto con (4.6) definen la coordenada nula  $u$ , en una versión diferencial. En las secciones siguientes, se darán las versiones integrales.

### 4.1.3. Constante de Carter: $K$ vs $K(r, \theta)$

Una vez que consideramos la dependencia  $K(r, \theta)$ , es importante verificar si  $K$  se mantiene constante a lo largo de cada geodésica, porque las expresiones de  $\ell_a$  se obtuvieron de las ecuaciones de geodésicas, en donde  $K$  y  $L$  son constantes a lo largo de cada una de ellas.

Para hacerlo, simplemente calculamos la derivada de  $K$  con respecto al parámetro afín de cada geodésica, y usamos regla de la cadena para derivar

$$\frac{dK}{d\lambda} = \frac{\partial K}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial K}{\partial \theta} \dot{\theta} = \frac{\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - K\Delta}}{\Sigma} \frac{\partial K}{\partial r} \pm |_h \frac{\sqrt{K - (a \sin(\theta))^2}}{\Sigma} \frac{\partial K}{\partial \theta} = 0; \quad (4.9)$$

es decir, que la imposición de la ecuación (4.8) garantiza que  $K$  es constante a lo largo de cada una de las geodésicas nulas de la congruencia.

Es decir que según nuestra definición de coordenada nula,  $u = cte$  define una hipersuperficie ortogonal a la congruencia  $\ell^a$ , en donde cada geodésica tiene una constante de Carter  $K$  diferente, pero que se mantiene constante a lo largo de cada geodésica. Ese es el significado de que  $K = K(r, \theta)$  satisfaga (4.8) y (4.9).

### 4.1.4. Solución de la ecuación diferencial de $K$

Con la definición de coordenada nula anterior, es de central importancia resolver la ecuación diferencial (4.8). La cual es no lineal, y se desconocen métodos analíticos de resolución. Por tal motivo, se decidió resolverla numéricamente. Los resultados se muestran en figuras 4.1 y 4.2.

Para lograrlo, debemos hacer uso de la condición asintótica

$$\lim_{r \rightarrow \infty} K = a^2 \sin(\theta_\infty)^2; \quad (4.10)$$

donde  $\theta_\infty$  es el valor de  $\theta$  en el infinito nulo futuro. Esta es la condición para construir una congruencia que llega al infinito nulo futuro ortogonal a las secciones centro de masa. Por lo tanto, para integrar numéricamente podemos reescribir la ecuación de la siguiente manera

$$\frac{\partial K}{\partial r} = - \pm |_h \frac{\sqrt{K - (a \sin(\theta))^2}}{\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - K\Delta}} \frac{\partial K}{\partial \theta}; \quad (4.11)$$

la cual nos invita definir  $k$ , según la siguiente relación

$$K(r, \theta) = a^2 \sin(\theta)^2 + k(r, \theta)^2; \quad (4.12)$$

y hacer el cambio de variable

$$\xi = \frac{1}{r}; \quad (4.13)$$

de tal manera que la ecuación es ahora

$$\frac{\partial K}{\partial r} = -2\xi^2 k \frac{\partial k}{\partial \xi} = -\pm |k| \frac{\pm |k|}{\sqrt{(1 + \xi^2 a^2)^2 - \xi^4 K \Delta}} (2a^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + 2k \frac{\partial k}{\partial \theta}); \quad (4.14)$$

que es invariante ante el intercambio  $k \rightarrow -k$ ; con la condición de frontera

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} k = 0. \quad (4.15)$$

La cual puede resolverse numéricamente desde  $\xi = 0$  hasta  $\xi_+ = \frac{1}{r_+}$ .

Notemos que en el hemisferio norte, se tiene el signo positivo y que  $\sin(\theta) \cos(\theta)$  es positivo, por lo tanto, luego de comenzar en  $k = 0$ , podemos asignar el signo de  $k$  a voluntad. Si asumimos  $k > 0$ , tenemos que usar la ecuación

$$\frac{\partial k}{\partial \xi} = \frac{a^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + k \frac{\partial k}{\partial \theta}}{\sqrt{(1 + \xi^2 a^2)^2 - \xi^4 \Delta (a^2 \sin(\theta)^2 + k^2)}}; \quad (4.16)$$

y si por el contrario, asumimos que  $k < 0$  en el hemisferio norte, luego tenemos que usar el signo opuesto en la ecuación anterior; notando que en principio el signo de  $k$  no interviene en el signo de  $\dot{\theta}$ . Por simplicidad usaremos la primera elección, que asume  $k > 0$ , en el hemisferio norte, en las cercanías del infinito nulo futuro.

Para resolver (4.16), se implementó un código numérico en lenguajes **Fortran** y **C**. En el mismo se utilizaron derivadas angulares con precisión de cuarto orden, y para integrar en  $\xi$  se utilizó el método Runge-Kutta de cuarto orden.

Se logró hacer la integración numérica con el mínimo error posible  $1 \times 10^{-14}$  (cercano al error de doble precisión, dado por compilador en C).

Si reemplazamos la solución numérica en la misma ecuación diferencial (4.16), podemos estimar el error global o residuo. El orden de precisión se aumenta simplemente aumentando el número de puntos de grilla, cuidando siempre estar dentro del límite CFL que relaciona los tamaños de grilla  $\Delta\xi$  y  $\Delta\theta$ , dentro de los cuales la integración numérica se mantiene en región de estabilidad. Para estimar el error, definiremos el residuo numérico como la evaluación de la siguiente expresión

$$\sqrt{(1 + \xi^2 a^2)^2 - \xi^4 K \Delta} \frac{\partial k}{\partial \xi} - (a^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + k \frac{\partial k}{\partial \theta}) = 0; \quad (4.17)$$

que es una manera alternativa de escribir la ecuación (4.16); pero adaptada a corroborar el error numérico.

## 4.2. Expresiones integrales

Una vez que tenemos la solución  $K(r, \theta)$ , de manera similar a (4.6), en realidad podemos definir dos funciones nulas  $u$  (saliente) y  $v$  (entrante)

$$du = dt - \left[ \frac{\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - K(r, \theta) \Delta}}{\Delta} dr + (\pm |h| \sqrt{K(r, \theta) - a^2 \sin^2(\theta)}) d\theta \right], \quad (4.18)$$

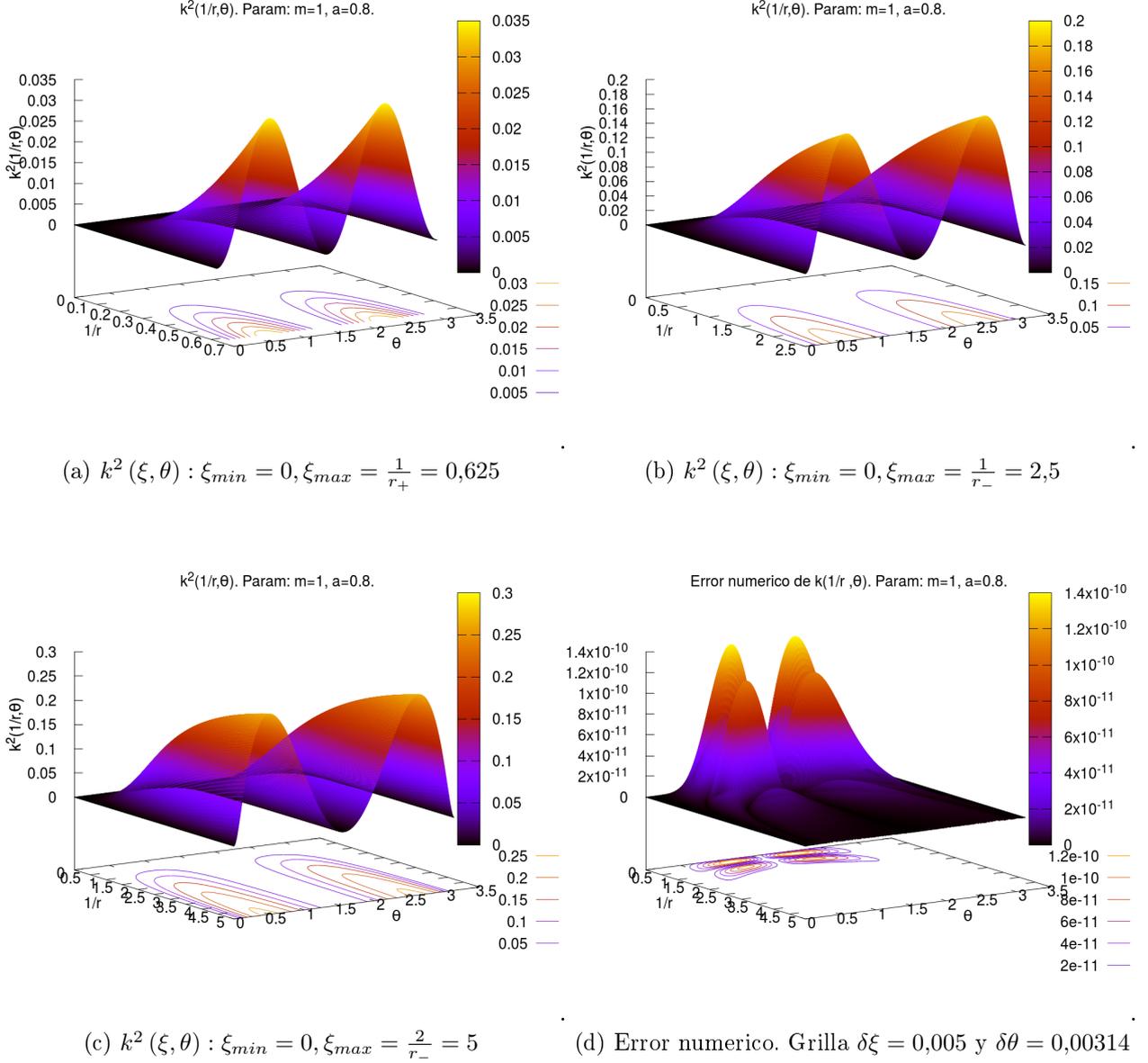


Figura 4.1: Gráfico de  $k^2(\xi, \theta)$ , donde  $k(\xi, \theta)$  es solución numérica de ecuación (4.16). Parámetros usados:  $a = 0,8$ ,  $m = 1,0$ . El horizonte exterior e interior están dados por  $r_+ = 1,6$  y  $r_- = 0,4$ . Se observa que las soluciones de (4.16) están bien definidas y comportadas en ambos horizontes  $r_+$ ,  $r_-$ , e incluso en el interior de  $r_-$ , es decir  $r < r_-$ .

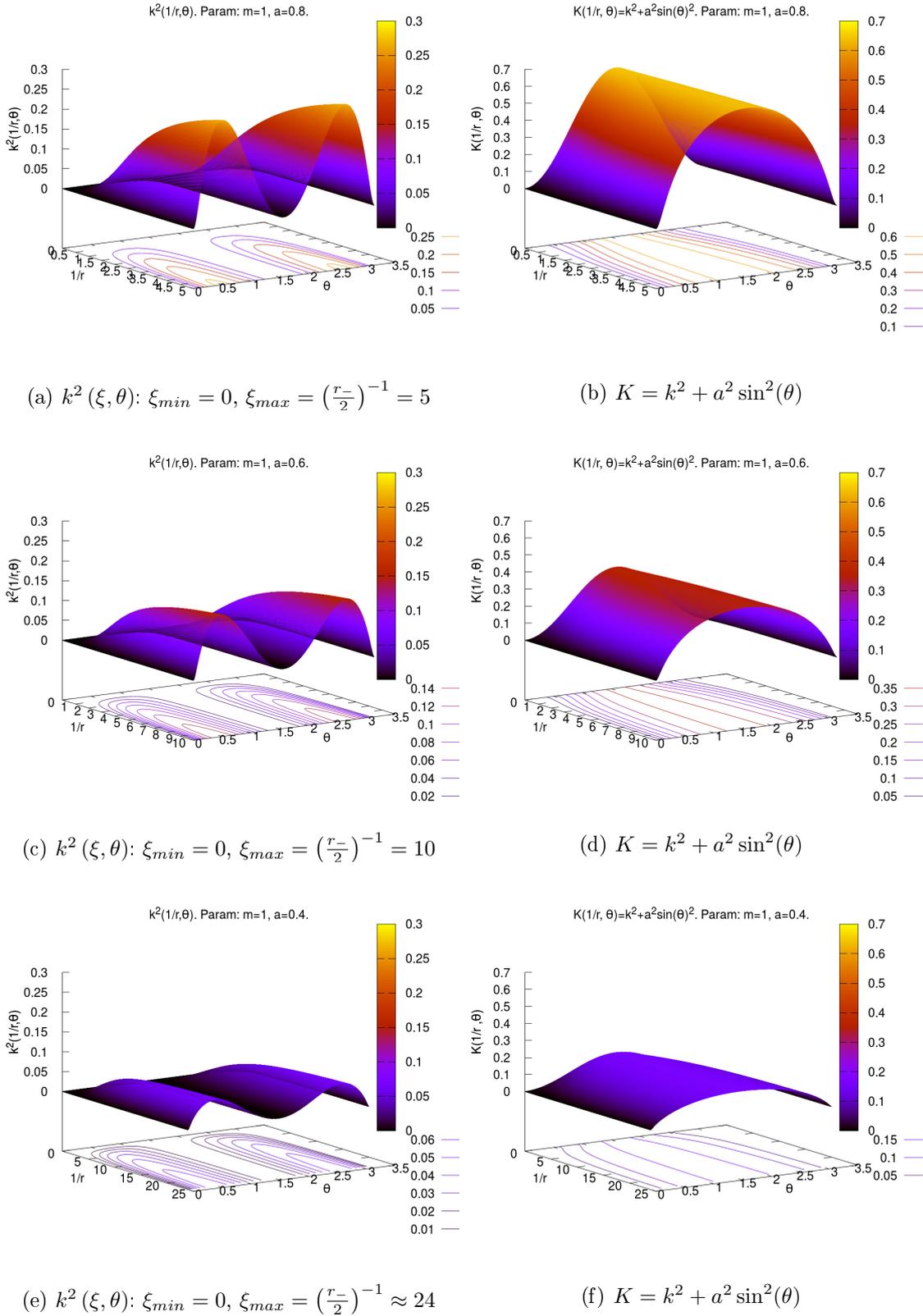


Figura 4.2: **Función  $k^2(r, \theta)$  y  $K(r, \theta)$ : dependencia con el parámetro de momento angular  $a$ , e integración hasta regiones interiores ( $r < r_-$ ).** Se integra desde ( $\xi = 0$ ) hasta incluso ( $\xi = \left(\frac{r_-}{2}\right)^{-1}$ ). Lo cual muestra que no hay inconvenientes en las regiones interiores, incluso en  $r < r_-$ . Se observa como  $k^2(r, \theta)$  y  $K(r, \theta)$  disminuyen a medida que el momento angular disminuye y viceversa.

$$dv = dt + \left[ \frac{\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - K(r, \theta) \Delta}}{\Delta} dr + (\pm |h| \sqrt{K(r, \theta) - a^2 \sin^2(\theta)}) d\theta \right]. \quad (4.19)$$

En lo que sigue, trabajaremos con estas definiciones diferenciales, y procuraremos obtener las expresiones integrales de las funciones  $u$  y  $v$ . Debido a la similitud entre ambas, por simplicidad en lo que sigue sólo trabajaremos con la expresión para  $u$ .

El diferencial de la función  $u$  puede integrarse a lo largo de cualquier curva  $\gamma(s)$ , cuyo recorrido va desde un punto inicial  $(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$  hasta el punto  $(t, r, \theta, \phi)$ . Por lo que en principio uno podría hacer este cálculo con la notación  $u(s)$  y escribir la integral en términos de  $s$ . En la expresión anterior, esto nos hace pensar en términos de  $t(s)$ ,  $r(s)$  y  $\theta(s)$ .

Dada la curva  $\gamma$ , con  $s' \in [s_0, s]$ , uno puede expresar

$$\begin{aligned} u(t, r, \theta, \phi) - u_0(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0) = & t - t_0 - \int_{s_0}^s \frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta')}}{\Delta} \frac{dr'}{ds'} ds' \\ & - \int_{s_0}^s \pm |h| \sqrt{\Theta(r'', \theta')} \frac{d\theta'}{ds'} ds'. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Debido a que los integrandos dependen únicamente de dos coordenadas, los dos caminos naturales desde el punto inicial al final son:  $(r_0; \theta_0) \rightarrow (r; \theta_0) \rightarrow (r; \theta)$  y  $(r_0; \theta_0) \rightarrow (r_0; \theta) \rightarrow (r; \theta)$ ; donde en el primer caso mantenemos la coordenada angular constante a lo largo de una primera etapa de recorrido, y la coordenada radial constante a lo largo de una segunda etapa de recorrido, y en el segundo caso, la situación opuesta. Es decir, los casos particulares son:

$$\begin{aligned} u(t, r, \theta, \phi) - u_0(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0) = & t - t_0 - \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta_0)}}{\Delta} dr' \\ & - \int_{\theta_0}^{\theta} \pm |h| \sqrt{\Theta(r, \theta')} d\theta', \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} u(t, r, \theta, \phi) - u_0(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0) = & t - t_0 - \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta)}}{\Delta} dr' \\ & - \int_{\theta_0}^{\theta} \pm |h| \sqrt{\Theta(r_0, \theta')} d\theta', \end{aligned} \quad (4.22)$$

En lo que sigue, estudiemos el comportamiento de esas expresiones. Aunque debido a las similitudes entre ambas, haremos los desarrollos sólo para (4.21). Nos concentramos en la primera integral de (4.21), y hacemos un desarrollo del integrando alrededor de  $(\Delta \approx 0)$ , es decir en las cercanías de los horizontes exteriores e interiores

$$\frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta_0)}}{\Delta} \approx \left( \frac{(r'^2 + a^2)}{\Delta} - \frac{1}{2(r'^2 + a^2)} K - \frac{\Delta}{8(r'^2 + a^2)^3} K^2 + \dots \right), \quad (4.23)$$

a partir del cual, queda claro que el comportamiento divergente de la primera integral de (4.21), proviene del primer término de (4.23). Podemos hacer explícito tal comportamiento,

simplemente sumando y restando tal término en la primera integral de (4.21), es decir

$$\begin{aligned}
 u(t, r, \theta, \phi) - u_0(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0) &= t - t_0 - \int_{r_0}^r \left( \frac{(r'^2 + a^2)}{\Delta} \right) dr' \\
 &\quad - \int_{r_0}^r \left( \frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta_0)}}{\Delta} - \frac{(r'^2 + a^2)}{\Delta} \right) dr' \\
 &\quad - \int_{\theta_0}^{\theta} \pm_h \sqrt{\Theta(r, \theta')} d\theta',
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

donde la componente divergente puede integrarse analíticamente

$$\begin{aligned}
 \int_{r_0}^r \left( \frac{(r'^2 + a^2)}{\Delta} \right) dr' &= \left[ r + \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_+) - \frac{r_-^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln(r - r_-) \right] \Big|_{r_0}^r \\
 &= \left[ r + \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{r_-^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right] \Big|_{r_0}^r.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

De esta manera, tenemos una expresión equivalente a (4.21)

$$\begin{aligned}
 u(t, r, \theta, \phi) - u_0(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0) &= t - \left( r + \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{r_-^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right) \\
 &\quad - \int_{r_0}^r \left( \frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta_0)}}{\Delta} - \frac{(r'^2 + a^2)}{\Delta} \right) dr' \\
 &\quad - \int_{\theta_0}^{\theta} \pm_h \sqrt{\Theta(r, \theta')} d\theta' + C_0(t_0, r_0),
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

donde  $C_0$  es una constante. La estrategia es elegir

$$u_0(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0) = -C_0(t_0, r_0), \tag{4.27}$$

de manera tal, que para cualquier punto inicial de referencia  $(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$

$$\begin{aligned}
 u(t, r, \theta, \phi) &= t - \left( r + \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{r_-^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right) \\
 &\quad - \int_{r_0}^r \left( \frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta_0)}}{\Delta} - \frac{(r'^2 + a^2)}{\Delta} \right) dr' \\
 &\quad - \int_{\theta_0}^{\theta} \pm_h \sqrt{\Theta(r, \theta')} d\theta'.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

El paso final para definir la función coordenada  $u(t, r, \theta, \phi)$ , es escoger el punto inicial  $(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$ . Nos interesa tomar el valor en infinito futuro nulo, es decir  $r \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty, \theta \rightarrow \theta_\infty, \phi \rightarrow \phi_\infty$ , donde  $\theta_\infty$  y  $\phi_\infty$  son finitas. Notar que en (4.28), no hay dependencia con  $\phi_0$ , por lo cual hay total libertad para escoger  $\phi_\infty$ , sin modificar los valores de  $u$ . Finalmente

escogiendo el punto inicial  $(t_\infty, r_\infty, \theta_\infty, \phi_\infty)$  en el infinito futuro nulo, obtenemos

$$\begin{aligned}
 u(t, r, \theta, \phi) = t - & \left( r + \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{r_-^2 + a^2}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right) \\
 & - \int_{r_\infty}^r \left( \frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta_\infty)}}{\Delta} - \frac{(r'^2 + a^2)}{\Delta} \right) dr' \\
 & - \int_{\theta_\infty}^\theta \pm_h \sqrt{\Theta(r, \theta')} d\theta'.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Es importante hacer algunas observaciones sobre (4.29). Notar que cuando  $a \rightarrow 0$ , sucede que  $K \rightarrow 0$  y por lo tanto los dos últimos términos que involucran integrales se anulan, porque cada integrando se anula. También cuando  $a \rightarrow 0$ , resulta que  $r_- \rightarrow 0$ . Esto último nos permite analizar los términos con logaritmo natural  $\ln$ , a partir de la primera línea de (4.25) (en donde  $r_-$  no es divisor), simplemente tomando  $a = 0$  y  $r_- = 0$ . Así, finalmente obtenemos

$$\lim_{a \rightarrow 0} u(t, r, \theta, \phi) = t - \left( r + r_+ \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) \right) = t - \left( r + 2m \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right) \right). \tag{4.30}$$

que coincide con la coordenada nula saliente de Schwarzschild (coordenadas de Eddington).

### 4.2.1. Caminos de integración naturales

En la sección anterior, se mencionó que existen dos caminos naturales de integración (4.21) y (4.22).

También se detallaron los pasos para escoger el punto  $(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$  y el valor de referencia inicial  $u_0(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$ , en el caso de (4.21). Para finalmente arribar a (4.29) que tiene todos los detalles de nuestra definición incorporados.

En esta parte, mostraremos que los caminos naturales reducen aun más las expresiones de  $u(t, r, \theta, \phi)$ .

Recordemos que el primer camino natural, es comenzar en  $\theta_0$  y moverse desde  $r_\infty$  hasta  $r$ , y luego fijando  $r' = r$ , moverse desde  $\theta_0$  hasta  $\theta$ . Para obtener expresiones más simples, y aprovechar la ventaja de este camino natural, además debemos escoger  $(\theta_0 = \theta_\infty = 0)$ . Este caso, es justamente el considerado para arribar a (4.29); por lo cual sólo basta con reescribir haciendo explícitas las dependencias dentro de las integrales, con el detalle extra de reescribir  $(r_+^2 + a^2 = 2mr_+)$  y  $(r_-^2 + a^2 = 2mr_-)$

$$\begin{aligned}
 u(t, r, \theta, \phi) = t - & \left( r + \frac{2mr_+}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2mr_-}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right) \\
 & - \int_{r_\infty}^r \left( \frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta_\infty)}}{\Delta} - \frac{(r'^2 + a^2)}{\Delta} \right) dr' \\
 & - \int_{\theta_\infty}^\theta \pm_h \sqrt{K(r, \theta') - a^2 \sin(\theta')^2} d\theta'.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Para lo que sigue, es importante considerar la crucial propiedad

$$K(r, \theta = 0) = 0. \tag{4.32}$$

Luego al reemplazar en (4.31), resulta que la elección de  $(\theta_0 = \theta_\infty = 0)$ , proporciona una expresión simplificada para  $u(t, r, \theta, \phi)$ , en donde la integral radial se anula, y obtenemos

$$\boxed{u(t, r, \theta, \phi) = t - \left( r + \frac{2mr_+}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2mr_-}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right) - \int_0^\theta \pm_h \sqrt{K(r, \theta') - a^2 \sin(\theta')^2} d\theta'.} \quad (4.33)$$

Respecto al segundo camino natural, recordemos que se comienza en  $(r_0 = r_\infty = \infty)$  y se integra desde  $\theta_\infty$  hasta  $\theta$ ; y luego fijando  $\theta$ , se integra desde  $r_\infty$  hasta  $r$ . La expresión análoga a (4.29) para este segundo camino, incluyendo los detalles explícitos dentro de cada integrando, es la siguiente

$$\begin{aligned} u(t, r, \theta, \phi) = & t - \left( r + \frac{2mr_+}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2mr_-}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right) \\ & - \int_{r_\infty}^r \left( \frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta)}}{\Delta} - \frac{(r'^2 + a^2)}{\Delta} \right) dr' \\ & - \pm_h \int_{\theta_\infty}^\theta \sqrt{K(r_\infty, \theta') - a^2 \sin(\theta')^2} d\theta'. \end{aligned} \quad (4.34)$$

En este caso, por la otra propiedad crucial

$$K(r = \infty, \theta) = a^2 \sin(\theta)^2, \quad (4.35)$$

tenemos que

$$K(r_\infty, \theta') - a^2 \sin(\theta')^2 = 0. \quad (4.36)$$

Luego al reemplazar en (4.34), obtenemos una segunda expresión simplificada para  $u(t, r, \theta, \phi)$ , donde la integral angular se anula.

$$\boxed{u(t, r, \theta, \phi) = t - \left( r + \frac{2mr_+}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2mr_-}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right) - \int_\infty^r \left( \frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta)}}{\Delta} - \frac{(r'^2 + a^2)}{\Delta} \right) dr'.} \quad (4.37)$$

Notar que la expresión obtenida, es válida para cualquier elección de ángulo inicial  $\theta_0 = \theta_\infty$ .

Es importante destacar que las expresiones simplificadas (4.33) y (4.37), facilitan el cómputo de la función nula saliente  $u(t, r, \theta, \phi)$ , y resultan ser las más convenientes de utilizar.

Por último, de manera análoga, si comenzamos con (4.19), podemos obtener las expresiones integrales para la función nula entrante  $v(t, r, \theta, \phi)$ . Haciendo uso de los dos caminos naturales de integración, tenemos las siguientes expresiones simplificadas

$$\boxed{v(t, r, \theta, \phi) = t + \left( r + \frac{2mr_+}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2mr_-}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right) + \int_0^\theta \pm_h \sqrt{K(r, \theta') - a^2 \sin(\theta')^2} d\theta',} \quad (4.38)$$

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 v(t, r, \theta, \phi) = & t + \left( r + \frac{2mr_+}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2mr_-}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right) \\
 & + \int_{\infty}^r \left( \frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta)}}{\Delta} - \frac{(r'^2 + a^2)}{\Delta} \right) dr'.
 \end{aligned}
 } \quad (4.39)$$

O sea, al realizar el cálculo de  $K$  uno no sólo obtiene la coordenada nula saliente deseada  $u$ , sino que también, debido a la estructura de la geometría del espaciotiempo de Kerr, se obtiene la coordenada nula entrante  $v$ ; que provee así de un sistema doblemente nulo para esta geometría.

### 4.3. Superficies nulas $u = cte$

Se trabajo con ambas expresiones integrales para  $u$  (4.33) y (4.37). Se corroboró que ambas expresiones arrojan idénticos resultados hasta error de maquina ( $1 \times 10^{-15}$ ).

Para graficar los resultados, resulta interesante el caso  $u(t, r, \theta, \phi) = 0$ , es decir

$$\begin{aligned}
 t = & \left( r + \frac{2mr_+}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2mr_-}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right) \\
 & + \int_0^\theta \pm_h \sqrt{K(r, \theta') - a^2 \sin^2(\theta')^2} d\theta',
 \end{aligned} \quad (4.40)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
 t = & \left( r + \frac{2mr_+}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2mr_-}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right) \\
 & + \int_{r_\infty}^r \left( \frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta)}}{\Delta} - \frac{(r'^2 + a^2)}{\Delta} \right) dr'.
 \end{aligned} \quad (4.41)$$

En el caso de la integral radial, para evitar problemas numéricos, resulta conveniente expresarla de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 - \int_{r_\infty}^r \left( \frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta'')}}{\Delta} - \frac{(r'^2 + a^2)}{\Delta} \right) dr' &= - \int_{r_\infty}^r (A - B) dr' \\
 &= - \int_{r_\infty}^r \left( \frac{A^2 - B^2}{A + B} \right) dr' \\
 &= - \int_{r_\infty}^r \left( \frac{\frac{-K}{\Delta}}{\frac{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta'')}}{\Delta} + \frac{(r'^2 + a^2)}{\Delta}} \right) dr' \\
 &= \int_{r_\infty}^r \left( \frac{K}{\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - \Delta K(r', \theta'')} + (r'^2 + a^2)} \right) dr' \\
 &= - \int_0^\xi \left( \frac{K}{\sqrt{(1 + \xi'^2 a^2)^2 - \xi'^4 \Delta K(\xi', \theta'')} + (1 + \xi'^2 a^2)} \right) d\xi'.
 \end{aligned} \quad (4.42)$$

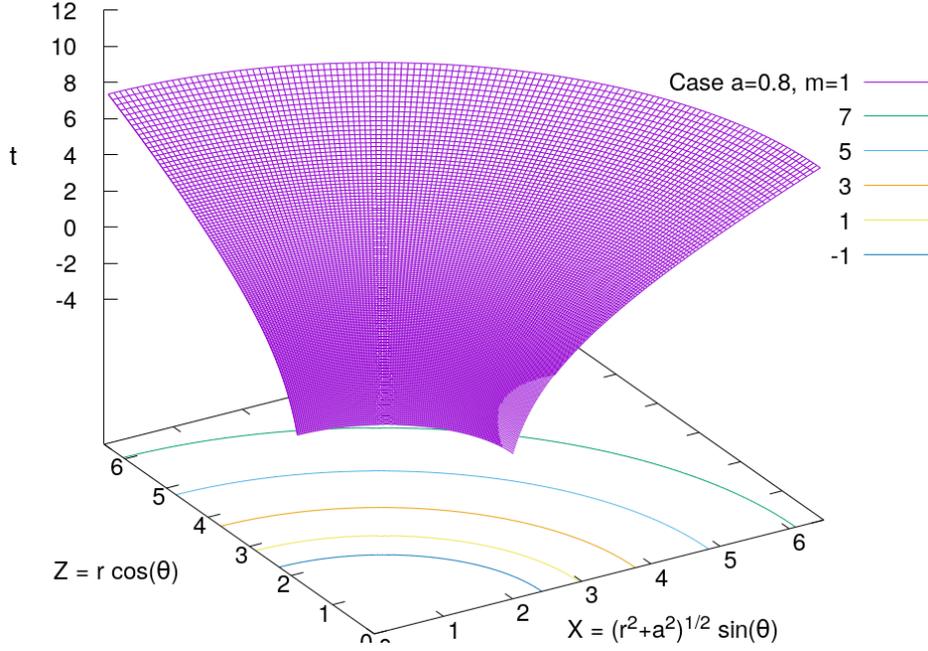


Figura 4.3: **Superficie** ( $u = 0$ ) : Parámetros  $a = 0,8$ ,  $m = 1,0$ . En la base del gráfico se proyectan las intersecciones  $t = cte = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$  con  $u = 0$ .

Los resultados numéricos del cómputo de (4.40) o (4.41) (ambas expresiones arrojan el mismo resultado), se muestran en figuras 4.3 y 4.4. En la figura 4.4, se observa gráficamente la diferencia entre coordenadas nula saliente de Schwarzschild ( $u$ -Eddington) y de Kerr ( $u$ -centro de masa).

## 4.4. Tetrada asociada y coeficientes de espín

A partir de las definiciones de coordenadas nulas salientes (4.18) y entrantes (4.19), disponemos de dos direcciones nulas para construir una tetrada. La cual será de gran utilidad para el cálculo de escalares de curvatura, al igual que de los coeficientes de espín en formalismos como Newman-Penrose Newman and Penrose [1962] y Geroch-Held-Penrose (GHP) Geroch et al. [1973]. En los capítulos siguientes, esto permitirá realizar análisis geométricos completos.

### 4.4.1. Tetrada nula *centro de masa*

Con el fin de seguir las notaciones de los formalismos mencionados, consideraremos dos congruencias nulas. Una adaptada a las coordenada nula saliente

$$(du)_a = \ell_a = dt_a - \frac{\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - K\Delta}}{\Delta} dr_a - (\pm|_h \sqrt{K - a^2 \sin^2(\theta)}) d\theta_a; \quad (4.6)$$

y la otra adaptada a la coordenada nula entrante

$$(dv)_a = N_a = dt_a + \frac{\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - K\Delta}}{\Delta} dr_a + (\pm|_h \sqrt{K - a^2 \sin^2(\theta)}) d\theta_a. \quad (4.43)$$

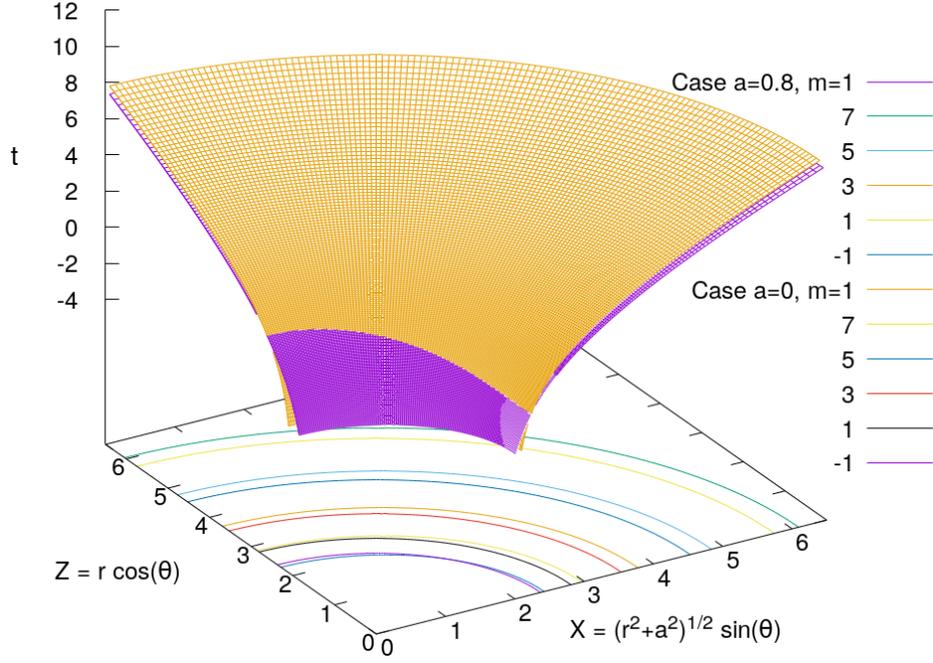


Figura 4.4: **Comparación de superficies** ( $u = 0$ ) : Parámetros  $a = 0,8$ ,  $m = 1,0$  (superficie violeta);  $a = 0$ ,  $m = 1,0$  (superficie amarilla). En la base del gráfico se proyectan las intersecciones  $t = cte = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$  con  $u = 0$ .

Y a partir de  $N_a$ , definimos la uno-forma  $n_a$

$$n_a = \alpha N_a. \quad (4.44)$$

Luego nos resta determinar dos vectores complejos  $m^a$  y  $\bar{m}^a$  tal que

$$g_{ab} = l_a n_b + l_b n_a - m_a \bar{m}_b - m_b \bar{m}_a. \quad (4.45)$$

Calculamos los vectores primero, porque sabemos que tienen la forma

$$m = -\frac{\Delta(\pm\sqrt{\Theta})}{\pm\sqrt{\mathcal{R}}} A \partial_r + A \partial_\theta + iB \partial_\phi, \quad (4.46)$$

donde

$$\Theta = K - a^2 \sin^2(\theta), \quad (4.47)$$

$$\mathcal{R} = (r^2 + a^2)^2 - K\Delta, \quad (4.48)$$

y

$$\mathcal{R} + \Theta\Delta = \Upsilon \quad (4.49)$$

La expresión (4.46), se conoce del hecho que la intersección de las hipersuperficies generadas por  $l_a$  and  $n_a$  son de dimensión 2, que llamamos ( $r_s = \text{constante}$ ); y es la integral de los términos  $dr$  y  $d\theta$ . Notar que (4.46), garantiza que se cumpla la relación de ortogonalidad

$$m^a l_a = m^a n_a = 0. \quad (4.50)$$

Los coeficientes  $A$  y  $B$ , se obtienen de las relaciones que deben satisfacer los elementos de la tetrad nula

$$\ell^a \ell_a = n^a n_a = m^a m_a = \bar{m}^a \bar{m}_a = 0, \quad (4.51)$$

$$\ell^a n_a = 1, \quad (4.52)$$

$$m^a \bar{m}_a = -1. \quad (4.53)$$

Para lo que sigue, es importante expresar los vectores en su forma contra-variante

$$\ell^a = \frac{\Upsilon}{\Sigma \Delta} \partial_t^a + \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Sigma} \partial_r^a + \frac{\pm |h| \sqrt{\Theta}}{\Sigma} \partial_\theta^a + \frac{2amr}{\Delta \Sigma} \partial_\phi^a, \quad (4.54)$$

$$n^a = \alpha \left( \frac{\Upsilon}{\Sigma \Delta} \partial_t^a - \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Sigma} \partial_r^a - \frac{\pm |h| \sqrt{\Theta}}{\Sigma} \partial_\theta^a + \frac{2amr}{\Delta \Sigma} \partial_\phi^a \right); \quad (4.55)$$

y por (4.52), junto con el hecho que  $\Upsilon = \mathcal{R} + \Delta\Theta$ , obtenemos la condición para  $\alpha$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\Sigma \Delta}{\Upsilon}. \quad (4.56)$$

Finalmente los elementos de la tetrad nula en su forma contravariante, están dados por

$$\ell^a = \left( \frac{\Upsilon}{\Sigma \Delta} \partial_t^a + \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Sigma} \partial_r^a + \frac{\pm |h| \sqrt{\Theta}}{\Sigma} \partial_\theta^a + \frac{2amr}{\Delta \Sigma} \partial_\phi^a \right), \quad (4.57)$$

$$n^a = \frac{1}{2} \left( \partial_t^a - \frac{\sqrt{\mathcal{R}} \Delta}{\Upsilon} \partial_r^a - \frac{\Delta}{\Upsilon} (\pm |h| \sqrt{\Theta}) \partial_\theta^a + \frac{2amr}{\Upsilon} \partial_\phi^a \right), \quad (4.58)$$

$$m^a = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( -\pm |h| \sqrt{\frac{\Theta}{\Upsilon \Sigma}} \Delta \partial_r^a + \sqrt{\frac{\mathcal{R}}{\Upsilon \Sigma}} \partial_\theta^a + i \sqrt{\frac{\Sigma}{\Upsilon \sin^2(\theta)}} \partial_\phi^a \right). \quad (4.59)$$

Y en su forma covariante por

$$\ell_a = \left( dt_a - \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr_a - (\pm |h| \sqrt{\Theta}) d\theta_a \right), \quad (4.60)$$

$$n_a = \frac{1}{2} \frac{\Sigma \Delta}{\Upsilon} \left( dt_a + \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr_a + (\pm |h| \sqrt{\Theta}) d\theta_a \right), \quad (4.61)$$

$$m_a = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( i \frac{2amr \sin(\theta)}{\sqrt{\Upsilon \Sigma}} dt_a + \pm |h| \sqrt{\frac{\Sigma \Theta}{\Upsilon}} dr_a - \sqrt{\frac{\Sigma \mathcal{R}}{\Upsilon}} d\theta_a - i \sqrt{\frac{\Upsilon}{\Sigma}} \sin(\theta) d\phi_a \right). \quad (4.62)$$

Notar que el caso de  $\tilde{m}$ , se obtiene de la expresión de  $m$  simplemente reemplazando  $i$  por  $(-i)$ .

#### 4.4.2. Coeficientes de espín

A partir de la tetrad anterior, podemos calcular las coeficientes de espín. Por simplicidad usaremos la notación del formalismo GHP Geroch et al. [1973], pero es importante tener en cuenta que los coeficientes de espín del formalismo de Newman-Penrose son equivalentes?, y sólo hay que tener en cuenta los nombres y notación utilizada para cada uno.

Nos concentraremos en algunos coeficientes de espín que reflejan los rasgos más relevantes, como son  $\kappa$  y  $\rho$  que indican si la congruencia es geodésica ( $\kappa = 0$ ), y si es ortogonal a hipersuperficies  $\rho = \bar{\rho}$ .

Comenzamos por  $\kappa$

$$\kappa = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{\Upsilon}}{\Sigma^{\frac{3}{2}} \Delta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{\mathcal{R}} - \pm|_h \Delta \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{\Theta} \right). \quad (4.63)$$

Se puede ver fácilmente que este coeficiente es cero, que se deduce de la condición de integrabilidad (4.8). Por lo tanto, ( $\kappa = 0$ ) para la congruencia asociada a las coordenadas *centro de masa*, lo cual concuerda con el punto de partida considerando geodésicas nulas.

Luego continuamos con  $\rho$

$$\rho = -\frac{1}{2 \Sigma} \left( \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{\mathcal{R}} \pm|_h \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{\Theta} \pm|_h \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{\Theta} \right). \quad (4.64)$$

Que es claramente real, y por lo tanto es ortogonal a hipersuperficies, lo cual concuerda con nuestro requerimiento de que la derivada exterior de la congruencia debía anularse, ver (4.7). Y es una de las diferencias más importantes y cruciales con las congruencias de geodésicas nulas principales. Por otro lado, es importante señalar que en los polos ( $\theta = 0, \pi$ ), la función  $\sqrt{\Theta} \rightarrow 0$ , y por regla de L'hospital se puede mostrar que  $\lim_{\theta \rightarrow 0, \pi} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{\Theta} = \partial_\theta k(r, \theta)$ , que tiene un comportamiento suave en los polos; ver (9.44) por mas detalles.

El otro coeficiente de spin importante es  $\sigma$ . A diferencia de las congruencias principales nulas que tienen  $\sigma = 0$ , en el caso de las coordenadas nulas *centro de masa*, tenemos

$$\begin{aligned} \sigma = & -i \frac{am \sin(\theta)}{\Sigma^2 \Upsilon} \left[ \sqrt{\mathcal{R}} a^2 r \cos(\theta) \sin(\theta) \pm|_h \sqrt{\Theta} \left( 2r^4 + 2a^2 r^2 + (a^2 m r - a^2 r^2) \sin^2(\theta) \right) \right] \\ & + \frac{1}{\Upsilon \Sigma} \left[ \left( 2r^3 + r a^2 + a^2 m + (r a^2 - a^2 m) \cos^2(\theta) \right) \sqrt{\mathcal{R}} - \pm|_h \sqrt{\Theta} \Delta a^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \right] \\ & \pm|_h \frac{1}{4 \sin(\theta) \Sigma^2 \sqrt{\Theta}} \left( -\sin(\theta) \Sigma \partial_\theta K + (2K \Sigma - 4a^2 \sin^2(\theta) K + 4a^4 \sin^4(\theta)) \cos(\theta) \right) \\ & + \frac{1}{4 \Sigma^2 \sqrt{\mathcal{R}}} \left[ \Sigma \Delta \partial_\theta K - 4r \mathcal{R} + \left( 2(r - m) K + 4r a^2 - 4r^3 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.65)$$

En lo que sigue, daremos las expresiones explícitas de otros dos coeficientes de espín del formalismo GHP, que serán utilizadas en el próximo capítulo

$$\sigma' = -\frac{1}{2} \frac{\Sigma \Delta}{\Upsilon} \sigma, \quad (4.66)$$

$$\rho' = -\frac{1}{2} \frac{\Sigma \Delta}{\Upsilon} \rho. \quad (4.67)$$

Los coeficientes fueron calculados haciendo uso del software de manipulación algebraica y tensorial GRTensorII.

## 4.5. Métrica de Kerr en coordenadas nulas $\{u, v, \theta, \phi\}$

### 4.5.1. Forma co-variante

Comenzamos con la métrica de Kerr en las coordenadas Boyer-Lindquist

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} dt d\phi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (2.1)$$

En lo que sigue, se mostrarán los pasos para escribirla en términos de las coordenadas nulas *centro de masa*. Los diferenciales  $du$  y  $dv$ , están dados por

$$du = dt - \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr - \left(\pm|_h \sqrt{\Theta}\right) d\theta, \quad (4.68)$$

$$dv = dt + \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr + \left(\pm|_h \sqrt{\Theta}\right) d\theta, \quad (4.69)$$

con

$$\sqrt{\mathcal{R}} = \sqrt{(r^2 + a^2)^2 - K\Delta}, \quad \sqrt{\Theta} = \sqrt{K - a^2 \sin^2(\theta)}; \quad (4.70)$$

y podemos despejar

$$dt = \frac{(dv + du)}{2}, \quad (4.71)$$

$$dr_* = \frac{(dv - du)}{2} = \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr + \left(\pm|_h \sqrt{\Theta}\right) d\theta. \quad (4.72)$$

La ecuación (4.72) puede escribirse de una manera conveniente para luego hacer el cambio de coordenadas

$$dr = \left[ \frac{(dv - du)}{2} - \left(\pm|_h \sqrt{\Theta}\right) d\theta \right] \frac{\Delta}{\sqrt{\mathcal{R}}}. \quad (4.73)$$

Luego, hacemos los reemplazos (4.71) y (4.73) en (2.1), para obtener

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) \left( \frac{du^2 + dv^2 + 2 du dv}{4} \right) + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \left( \frac{dv + du}{2} \right) d\phi - \frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{R}} \left( \left[ \frac{(dv - du)}{2} - \left(\pm|_h \sqrt{\Theta}\right) d\theta \right] \right)^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (4.74)$$

cuya expresión, se puede escribir de manera conveniente agrupando términos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) \left( \frac{du^2 + dv^2 + 2 du dv}{4} \right) + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \left( \frac{dv + du}{2} \right) d\phi - \frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{R}} \left[ \frac{(dv - du)^2}{4} + \Theta d\theta^2 \pm|_h (du - dv) \sqrt{\Theta} d\theta \right] - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (4.75)$$

para expresarla como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) \left( \frac{du^2 + dv^2 + 2 du dv}{4} \right) + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \left( \frac{dv + du}{2} \right) d\phi - \frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{R}} \left[ \frac{(dv - du)^2}{4} \pm|_h (du - dv) \sqrt{\Theta} d\theta \right] - \left( \frac{\Delta\Theta}{\mathcal{R}} + 1 \right) \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\phi^2; \quad (4.76)$$

y luego como

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) \left(\frac{du^2 + dv^2 + 2 du dv}{4}\right) + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \left(\frac{dv + du}{2}\right) d\phi \\
 & - \frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{R}} \left[\frac{(dv^2 + du^2 - 2 dv du)^2}{4} \pm |{}_h (du - dv) \sqrt{\Theta} d\theta\right] - \frac{\Upsilon \Sigma}{\mathcal{R}} d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\phi^2.
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

Si continuamos ordenando términos, tenemos

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{1}{4} \left[ \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) - \frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{R}} \right] (du^2 + dv^2) + \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) \frac{du dv}{2} \\
 & + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \left(\frac{dv + du}{2}\right) d\phi - \frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{R}} \left[ -\frac{du dv}{2} \pm |{}_h (du - dv) \sqrt{\Theta} d\theta \right] \\
 & - \frac{\Upsilon \Sigma}{\mathcal{R}} d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\phi^2.
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Notar que si comparamos la métrica de Schwarzschild en coordenadas nulas  $u$  y  $v$ , la cual no tiene términos con  $du^2$  o  $dv^2$  (debido a la simetría esférica); con el caso de Kerr en coordenadas nulas *centro de masa*, además de las naturales diferencias en las componentes angulares, es interesante notar la diferencia debida al término

$$\frac{1}{4} \left[ \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) - \frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{R}} \right] (du^2 + dv^2), \tag{4.79}$$

que tiene el comportamiento esperado de un espacio tiempo asintóticamente plano, es decir se recupera Minkowski en el limite

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) - \frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{R}} \right] = 0; \tag{4.80}$$

y mas importante aún, recuperando Schwarzschild

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) - \frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{R}} \right] = 0. \tag{4.81}$$

Si trabajamos un poco más el arreglo de términos, finalmente obtenemos

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma} - \frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{R}}\right) (du^2 + dv^2) + \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma} + \frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{R}}\right) \frac{du dv}{2} \\
 & + dv \left(\frac{2amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} d\phi \pm |{}_h \frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{R}} \sqrt{\Theta} d\theta\right) \\
 & + du \left(\frac{2amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} d\phi - \pm |{}_h \frac{\Sigma\Delta}{\mathcal{R}} \sqrt{\Theta} d\theta\right) \\
 & - \frac{\Upsilon \Sigma}{\mathcal{R}} d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\phi^2,
 \end{aligned}
 } \tag{4.82}$$

Notar que en la expresión co-variante de la métrica de Kerr (2.1), la singularidad coordenada en Boyer-Lindquist para ( $\Delta = 0$ ); es completamente removida al utilizar las coordenadas

nulas  $\{u, v, \theta, \phi\}$ . Por otro lado, no debemos perder de vista la dependencia de  $r = r(u, v, \theta)$ , que esta implícita en (4.73), y se manifiesta en términos de sus derivadas

$$\frac{\partial r(u, v, \theta)}{\partial \theta} = -\pm|_h \Delta \frac{\sqrt{\Theta}}{\sqrt{\mathcal{R}}}, \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial r(u, v, \theta)}{\partial u} = -\frac{\Delta}{2\sqrt{\mathcal{R}}}, \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial r(u, v, \theta)}{\partial v} = \frac{\Delta}{2\sqrt{\mathcal{R}}}. \quad (4.85)$$

Las últimas relaciones, son importantes si uno desea operar y calcular cantidades geométricas haciendo uso de la métrica en estas coordenadas (4.82).

### 4.5.2. Forma contra-variante

Podemos comenzar con la métrica de Kerr en su forma contra-variante, expresada en coordenadas Boyer-Lindquist

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 &= \frac{\Upsilon}{\Sigma\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \frac{4amr}{\Sigma\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \\ &\quad - \frac{\Delta}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma\Delta \sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Formalmente usaremos notación con tilde, para distinguir las coordenadas inalteradas respecto de las nuevas. Tomaremos como sistema de partida a  $\{t, r, \theta, \phi\}$ ; y de llegada a  $\{u, v, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}\}$ . Notar que las coordenadas  $\theta, \phi$  se mantienen inalteradas, y solo se introducen las nuevas coordenadas  $u, v$ . Para comenzar, será útil tener expresiones diferenciales de las coordenadas de llegada

$$du = dt - \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr - (\pm|_h \sqrt{\Theta}) d\theta, \quad (4.68)$$

$$dv = dt + \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr + (\pm|_h \sqrt{\Theta}) d\theta, \quad (4.69)$$

$$d\tilde{\theta} = d\theta, \quad (4.86)$$

$$d\tilde{\phi} = d\phi. \quad (4.87)$$

Luego podemos expresar los vectores coordenados

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} = \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right), \quad (4.89)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} = \pm|_h \sqrt{\Theta} \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}, \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}} \quad (4.91)$$

Si recuperamos notación quitando tildes y reemplazamos en (2.6), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 &= 4 \frac{\Upsilon}{\Sigma\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial}{\partial v}\right) - \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma\Delta \sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2 \\
 &+ 2 \left(\frac{\partial}{\partial u}\right) \left[ \frac{2amr}{\Sigma\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \pm_{|h} \frac{\sqrt{\Theta}}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \right] \\
 &+ 2 \left(\frac{\partial}{\partial v}\right) \left[ \frac{2amr}{\Sigma\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right) - \pm_{|h} \frac{\sqrt{\Theta}}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \right];
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

Se verifica inmediatamente que  $\ell_a = (du)_a$  y  $n_a = (dv)_a$  son vectores nulos, lo cual es consistente con la definición coordenadas nulas *centro de masa*.



# Capítulo 5

## Superficies $r_s$

Asociado al par de coordenadas nulas, existe una familia de superficies  $2D$ , que se obtiene como la intersección de ambas coordenadas nulas ( $du = dv = 0$ ). Tales superficies, se corresponden a ( $r_s = cte$ ), donde  $r_s$  pueden considerarse como la extensión a Kerr, de la coordenada tortuga de Schwarzschild  $r_*$ .

Haciendo uso del formalismo GHP, Geroch et al. [1973], se presenta una completa caracterización geométrica en términos de la curvatura Gaussiana y extrínseca. En Minkowski (coordenadas esféricas) y Schwarzschild (coordenadas estándares), tales superficies son esferas de ( $r = cte$ ), con curvatura Gaussiana constante, mientras que en Kerr (coordenadas Boyer-Lindquist) son esferoides cercanos a esferas  $r(\theta)$ , con curvatura Gaussiana que depende de  $\theta$ , no constante.

### 5.1. Superficies $r_s$ : intersección de $u$ y $v$

Al observar (4.18) y (4.19), es importante notar que  $du$  y  $dv$ , pueden escribirse como

$$du = dt - dr_s, \quad (5.1)$$

$$dv = dt + dr_s, \quad (5.2)$$

con

$$dr_s = \left[ \frac{\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - K\Delta}}{\Delta} dr + (\pm|_h \sqrt{K - (a \sin(\theta))^2}) d\theta \right]. \quad (5.3)$$

A partir de las cuales podemos despejar

$$dt = \frac{dv + du}{2}. \quad (5.4)$$

y

$$dr_s = \frac{dv - du}{2}, \quad (5.5)$$

donde, como se dijo anteriormente,  $r_s$  puede interpretarse como la generalización de la coordenada tortuga de Schwarzschild ( $r_*$ ) al caso de Kerr.

Luego, si tomamos la intersección de ambas coordenadas, es decir ( $u = \text{constante}$ ) y ( $v = \text{constante}$ ), tenemos la definición de las superficies espaciales 2D asociadas a las coordenadas nulas  $u$  y  $v$

$$dt = \frac{(dv + du)}{2} = 0, \quad (5.6)$$

$$dr_s = \frac{(dv - du)}{2} = \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr + \left( \pm_h \sqrt{\Theta} \right) d\theta = 0, \quad (5.7)$$

es decir

$$dr = - \frac{\left( \pm_h \sqrt{\Theta} \right) \Delta}{\sqrt{\mathcal{R}}} d\theta; \quad (5.8)$$

Estas superficies pueden ser descritas de una manera puramente geométrica, en términos de sus curvatura Gaussiana y Extrínseca.

A partir del formalismo GHP Geroch et al. [1973], tales curvaturas pueden calcularse como

$$C_{Gaussian} = \left( \bar{Q}_{GHP} + Q_{GHP} \right), \quad (5.9)$$

$$C_{Extrinsic} = i \left( \bar{Q}_{GHP} - Q_{GHP} \right), \quad (5.10)$$

$$Q_{GHP} = \sigma\sigma' - \rho\rho' - \Psi_2 + \Lambda + \Phi_{11}, \quad (5.11)$$

donde  $\sigma, \sigma', \rho, \rho'$  son los coeficientes de espín en el formalismo GHP, y los dos últimos términos  $\Lambda$  y  $\Phi_{11}$  se anulan en el caso de Kerr. Ver (4.64), (4.65), (4.66) y (4.67).

### 5.1.1. Métrica inducida en $r_s$

Comenzamos con la métrica de Kerr en las coordenadas Boyer-Lindquist

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) dt^2 + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} dt d\phi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (2.1)$$

La métrica inducida sobre las superficies 2D, puede obtenerse reemplazando ( $dt = 0$ )

$$ds^2 = - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\phi^2; \quad (5.12)$$

y luego, a partir de la ecuación (5.8)

$$dr = - \frac{\left( \pm_h \sqrt{\Theta} \right) \Delta}{\sqrt{\mathcal{R}}} d\theta; \quad (5.8)$$

se reemplaza  $dr$  en 5.12 y se obtiene

$$ds^2 = - \frac{\Sigma}{\Delta} \left( - \frac{\left( \pm_h \sqrt{\Theta} \right) \Delta}{\sqrt{\mathcal{R}}} d\theta \right)^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (5.13)$$

si se agrupan términos, tenemos

$$ds^2 = - \Sigma \left[ \frac{\Theta \Delta + \mathcal{R}}{\mathcal{R}} \right] d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (5.14)$$

Por último, usando la relación

$$\Theta\Delta + \mathcal{R} = \Upsilon, \quad (5.15)$$

podemos expresar la métrica inducida como

$$ds_{2D}^2 = -\frac{\Sigma\Upsilon}{\mathcal{R}}d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma}\sin^2(\theta)d\phi^2, \quad (5.16)$$

donde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta), \quad (2.2)$$

$$\Upsilon = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta), \quad (2.4)$$

$$\mathcal{R} = (r^2 + a^2)^2 - K\Delta. \quad (4.48)$$

Estas hipersuperficies espaciales 2D, en coordenadas Boyer-Lindquist están descritas por ( $r = r(\theta)$ ), que es solución de la ecuación diferencial (5.8). También es importante notar, que la métrica inducida (5.16), puede obtenerse a partir (4.82) simplemente tomando ( $du = dv = 0$ ).

## 5.2. Cálculo de Escalares de curvatura

En las ecuaciones (5.9) y (5.11), están involucrados los coeficientes de espín, que ya fueron calculados. Sin embargo el cálculo de  $\Psi_2$  no resulta trivial. Por tal motivo, en esta sección se hará el cálculo de todos los escalares de Weyl  $\{\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4\}$ , haciendo uso de las rotaciones desde los valores dados en la tetrada asociada a las direcciones principales.

### 5.2.1. Rotación de tetrada nula: principal hacia *centro de masa*

En esta parte, comenzaremos con la tetrada principal nula, y la rotaremos hasta llegar a la tetrada *centro de masa*. Sólo serán necesarias tres rotaciones, identificadas como tipo I, II y III, según se puede ver apéndice de Prior [1977]. La secuencia de rotaciones será la siguiente: tipo II, tipo III y tipo I

$$\hat{n}_{II}^a = n^a, \quad (5.17)$$

$$\hat{m}_{II}^a = m^a + \Lambda n^a, \quad (5.18)$$

$$\hat{\ell}_{II}^a = l^a + \Lambda \bar{m}^a + \bar{\Lambda} m^a + \Lambda \bar{\Lambda} n^a; \quad (5.19)$$

$$\hat{n}_{II.III}^a = Z^{-1} \hat{n}_{II}^a, \quad (5.20)$$

$$\hat{m}_{II.III}^a = e^{is} \hat{m}_{II}^a, \quad (5.21)$$

$$\hat{\ell}_{II.III}^a = Z \hat{\ell}_{II}^a; \quad (5.22)$$

$$\hat{n}_{I.II.III}^a = \hat{n}_{II.III}^a + \Gamma \bar{\hat{m}}_{II.III}^a + \bar{\Gamma} \hat{m}_{II.III}^a + \Gamma \bar{\Gamma} \hat{\ell}_{II.III}^a, \quad (5.23)$$

$$\hat{m}_{I.II.III}^a = \hat{m}_{II.III}^a + \Gamma \hat{\ell}_{II.III}^a, \quad (5.24)$$

$$\hat{\ell}_{I.II.III}^a = \hat{\ell}_{II.III}^a. \quad (5.25)$$

Los coeficientes involucrados se determinan imponiendo la condición, que tras la última rotación se obtenga la tetraeda *centro de masa*. Si escribimos las expresiones en términos de los elementos de la tetraeda principal, rastreando las conversiones desde (5.17),(5.18) y (5.19); hasta (5.23),(5.24) y (5.25), obtenemos

$$\ell^a = Z l^a + Z\Lambda \bar{m}^a + Z\bar{\Lambda} m^a + Z\Lambda\bar{\Lambda} n^a, \quad (5.26)$$

$$m^a = \Gamma Z l^a + \Gamma Z\Lambda \bar{m}^a + (\Gamma Z\bar{\Lambda} + e^{is}) m^a + \Lambda (\Gamma Z\bar{\Gamma} + e^{is}) n^a, \quad (5.27)$$

$$n^a = \Gamma\bar{\Gamma} Z l^a + (\bar{\Gamma}e^{-is} + \bar{\Gamma}\Gamma Z\Lambda) \bar{m}^a + \left( \frac{1}{Z} + \Gamma\bar{\Lambda}e^{-is} + \bar{\Gamma}\Lambda e^{is} + \Gamma\bar{\Gamma}Z\Lambda\bar{\Lambda} \right) n^a. \quad (5.28)$$

Luego, los valores de los coeficientes  $Z$ ,  $\Lambda$ ,  $\Gamma$  y  $e^{is}$  se calculan usando las propiedades de contracción entre elementos de la tetraeda principal (las únicas contracciones distintas de cero son:  $l^a n_a = 1$  y  $m^a \bar{m}_a = -1$ ). Convenientemente escogemos los elementos a contraer, y obtenemos

$$Z = n_a \ell^a = \frac{\sqrt{\mathcal{R}} + r^2 + a^2}{2\Sigma}, \quad (5.29)$$

$$\Lambda = -\frac{m_a \ell^a}{Z} = \frac{1}{Z} \frac{(\pm |h\sqrt{\Theta} - ia \sin(\theta))}{\sqrt{2}(r + ia \cos(\theta))}, \quad (5.30)$$

$$\Gamma = \frac{n_a m^a}{Z} = -\frac{1}{Z} \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{(ia \sin(\theta) \pm |h\sqrt{\Theta}) \Delta}{\sqrt{\Upsilon\Sigma}}, \quad (5.31)$$

$$e^{is} = \bar{m}_a m^a - n_a m^a \bar{\Lambda} = \frac{a \Delta \left[ \pm |h\sqrt{\Theta} \sin(\theta) (ir - a \cos(\theta)) - ar \sin^2(\theta) + ik^2 \cos(\theta) \right]}{\sqrt{\Upsilon\Sigma} (\sqrt{\mathcal{R}} + r^2 + a^2)}. \quad (5.32)$$

En Boero and Moreschi [2020], se hicieron cálculos análogos para una tetraeda nula arbitraria, a diferencia de este caso donde las rotaciones se hicieron para llegar a la tetraeda *centro de masa*.

### 5.2.2. Escalares de Weyl

Gracias a los resultados anteriores, podemos calcular los escalares de Weyl asociados a la tetraeda *centro de masa*. Podemos comenzar con los escalares en la tetraeda principal, donde el único escalar distinto de cero es  $\Psi_{2p}$ ; y luego de las rotaciones calcularlos nuevamente, a partir de los coeficientes (5.29), (5.30), (5.31) y (5.32); ver apéndice de Prior [1977]. Los escalares, luego de la secuencia de tres rotaciones de tipo II, III y I, están dados por

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= 6 Z^2 e^{2is} \Lambda^2 \Psi_{2p} \\ \Psi_1 &= 3 Z e^{is} \Lambda \Psi_{2p} + 6 \bar{\Gamma} Z^2 e^{2is} \Lambda^2 \Psi_{2p} \\ \Psi_2 &= \Psi_{2p} + 6 \bar{\Gamma} Z e^{is} \Lambda \Psi_{2p} + 6 \bar{\Gamma}^2 Z^2 e^{2is} \Lambda^2 \Psi_{2p} \\ \Psi_3 &= 0 + 3 \bar{\Gamma} \Psi_{2p} + 9 \bar{\Gamma}^2 Z e^{is} \Lambda \Psi_{2p} + 6 \bar{\Gamma}^3 Z^2 e^{2is} \Lambda^2 \Psi_{2p}, \\ \Psi_4 &= 0 + 0 + 6 \bar{\Gamma}^2 \Psi_{2p} + 12 \bar{\Gamma}^3 Z e^{is} \Lambda \Psi_{2p} + 6 \bar{\Gamma}^4 Z^2 e^{2is} \Lambda^2 \Psi_{2p}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Para nuestros propósitos, nos concentraremos en la expresión de  $\Psi_2$  en la tetrada *centro de masa*, dada por

$$\Psi_2 = \Psi_{2p} [1 + 6 (\bar{\Gamma} Z e^{i s} \Lambda + \bar{\Gamma}^2 Z^2 e^{2i s} \Lambda^2)]. \quad (5.34)$$

Debido a que estamos interesados en estudiar de manera individual la parte real e imaginaria, será útil expresar cada factor con ambas partes separadas. Comenzamos por escalar de Weyl correspondiente a la tetrada principal

$$\Psi_{2p} = -\frac{m}{(r + i a \cos(\theta))^3} \quad (5.35)$$

cuyas partes real e imaginaria están dadas por

$$\Psi_{2p} = (\Psi_{2p})_{Re} + i (\Psi_{2p})_{Im} = \frac{3mra^2 \cos^2(\theta) - mr^3}{\Sigma^3} + i \frac{m a \cos(\theta) (3r^2 - a^2 \cos^2(\theta))}{\Sigma^3}. \quad (5.36)$$

Luego continuamos con el factor

$$F = [1 + 6 (\bar{\Gamma} Z e^{i s} \Lambda + \bar{\Gamma}^2 Z^2 e^{2i s} \Lambda^2)] = [1 + 6 (\alpha + \alpha^2)], \quad (5.37)$$

donde las partes real e imaginaria del número complejo  $\alpha$ , están dadas por

$$\alpha_{Re} = -\frac{1}{2} \frac{K a^2 \Delta^2 (k \cos(\theta) + r \sin(\theta))^2}{\Upsilon \Sigma (\sqrt{R} + r^2 + a^2)^2}, \quad (5.38)$$

$$\alpha_{Im} = -\frac{1}{2} \frac{K a^2 \Delta^2 (k^2 r \cos(\theta) + k \sin(\theta) (r^2 - a^2 \cos^2(\theta)) + a^2 r \cos(\theta)^3 - a^2 r \cos(\theta))}{\Upsilon \Sigma (\sqrt{R} + r^2 + a^2)^2}. \quad (5.39)$$

La expresión final de las partes real e imaginaria de  $\Psi_2$ , son expresiones extensas. Sin embargo, podemos expresarla en forma resumida, en términos de las partes real e imaginaria de  $\Psi_{2p}$  y  $\alpha$

$$(\Psi_2)_{Re} = (1 + 6 \alpha_{Re} + 6 \alpha_{Re}^2 - 6 \alpha_{Im}^2) (\Psi_{2p})_{Re} - 12 (\Psi_{2p})_{Im} \alpha_{Im} \left( \frac{1}{2} + \alpha_{Re} \right), \quad (5.40)$$

$$(\Psi_2)_{Im} = (1 + 6 \alpha_{Re} + 6 \alpha_{Re}^2 - 6 \alpha_{Im}^2) (\Psi_{2p})_{Im} + 12 (\Psi_{2p})_{Re} \alpha_{Im} \left( \frac{1}{2} + \alpha_{Re} \right). \quad (5.41)$$

## 5.3. Gráficos y Cálculos Numéricos

### 5.3.1. Curvatura Gaussiana y Extrínseca de superficie $r_s$ (2D)

Los escalares de curvatura en las superficies 2D definidas por ( $r_s = \text{constante}$ ) (5.5), involucran la función  $K(r, \theta)$  y sus derivadas. La cual es solución de la ecuación diferencial (4.8), que debido a su no linealidad se resolvió numéricamente. Por lo tanto, a pesar de contar con expresiones analíticas de los escalares de curvatura, para evaluarlos debemos usar la solución numérica de  $K(r, \theta)$  y hacer el cálculo de sus derivadas numéricamente.

Es importante mencionar que nuestro código numérico al igual que los resultados previos involucrados, nos permiten integrar  $K(r, \theta)$  desde el infinito nulo futuro hasta los horizontes exteriores  $H^+$  y  $H^-$ , e incluso ingresar al interior  $r < r_-$ , y calcular las superficies 2D junto con sus curvaturas Gaussiana y Extrínseca, cuya complejidad es mucho mayor, comparado al cálculo en el horizonte.

Los resultados se observan en figuras 5.1 y 5.2.

Notar que la curvatura Gaussiana es intrínseca a la geometría de la superficie. Lo cual, nos permite establecer una analogía con una superficie 2D embebida en  $\mathbb{R}^3$ , que tenga los mismos valores de curvatura. En el último gráfico de figura 5.1, tal superficie se podría construir con un toroide modificado, de manera tal que en su centro haya un disco con curvatura cero, unido al toroide, tal que para ángulos cercanos al ecuador, la curvatura tendrá valores negativos y luego positivos en el ecuador ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

Esta analogía, de alguna manera indica como las superficies 2D  $r_s$ , hacen una foliación del espacio. A medida que se aproximan a la singularidad (con topología de anillo en Kerr), estas superficies la envuelven de una manera peculiar, con una topología cercana al toroide modificado mencionado en el párrafo anterior.

### 5.3.2. Curvatura Gaussiana de $r_s$ 2D, en ( $r = r_{\pm}$ )

Antes de proseguir es importante señalar que si bien, las coordenadas  $u, v$  divergen correspondientemente en los horizontes  $H^+, H^-$ ; se puede definir, por ejemplo sobre la hipersuperficie  $u = \text{constante}$ , una familia de esferoides  $r_s$  tal que tienen un límite bien definido sobre  $H^-$  y análogamente se pueden definir las secciones que son límite de los esferoides  $r_s$  sobre la hipersuperficie  $v = \text{constante}$ , llegando a  $H^+$ . Pero además, asumiendo la validez de la métrica (4.82) incluso para valores  $r < r_+$ , esto nos permite estudiar estas secciones para  $r = r_{\pm}$  e inclusive para valores  $r < r_-$ .

Cuando consideramos la foliación en superficies espaciales  $r_s$  2D, con métrica inducida (5.16), tenemos que por ser una superficie 2D, como resultado general de geometría diferencial, el tensor de Riemann es proporcional al tensor de Ricci. Y por lo tanto, toda la curvatura queda resumida en el Ricci. En tal caso, la curvatura Gaussiana queda determinada por su traza; donde para signatura  $(+ - - -)$  esta dada por

$$C_{Gauss} = -\frac{R_a^a}{2}. \quad (5.42)$$

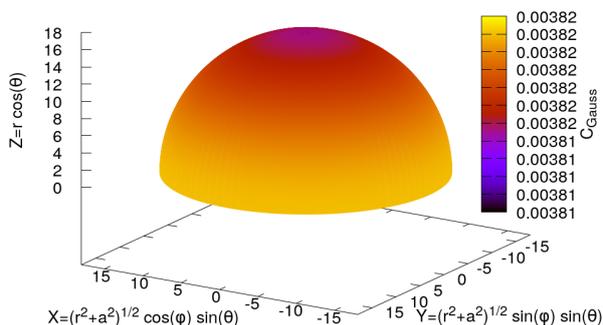
En los horizontes exteriores ( $r = r_+$ ), é interiores ( $r = r_-$ ), tenemos que  $\Delta = 0$ . Como las superficies  $r_s$  son equivalentes a  $r = r(\theta)$ , solución de la ecuación diferencial (4.83), resulta que en los horizontes  $r$  no depende de  $\theta$ , y simplemente tenemos  $r = r_+$  ó  $r = r_-$ . En tal caso, se puede calcular el tensor de Ricci con facilidad, a partir de la métrica inducida (5.16). De esa manera, obtenemos

$$C_{Gauss-Horizon} = 2 \frac{(mr_{\pm}^3 - 3mr_{\pm}a^2 \cos^2(\theta))}{(r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2(\theta))^3} = -2 (\Psi_{2p})_{Re} |_{r=r_{\pm}}. \quad (5.43)$$

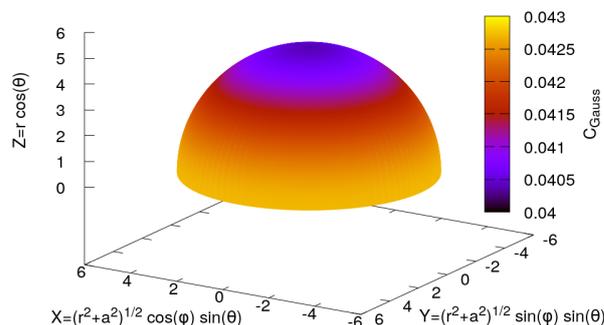
El valor del tensor de Ricci, también fue calculado con anterioridad, como por ejemplo en Smarr [1973]; y coincide con las expresiones usadas para obtener (5.43).

Por último, y muy relevante, es mencionar que el resultado analítico (5.43), también se obtiene directamente de las expresiones de GHP para la curvatura Gaussiana, ver (5.9) y

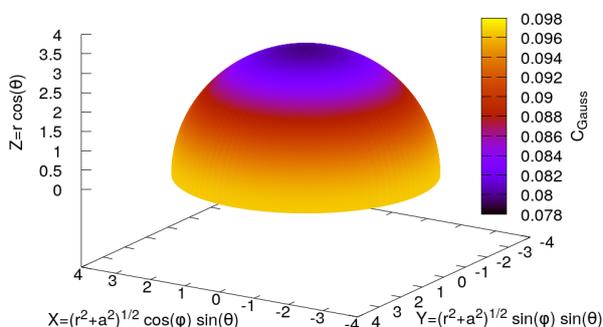
Curvatura Gaussiana. Superficie 2D: ( $r_s = cte$ )  $\equiv$  ( $du = dv = 0$ )  
 Caso ( $r(\theta) \approx 10r_+$ ). Param:  $m=1.00$ ,  $a=0.80$



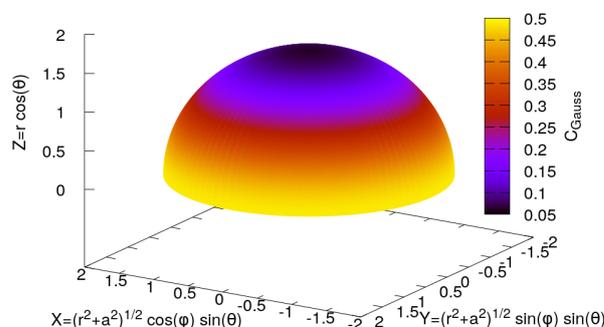
Curvatura Gaussiana. Superficie 2D: ( $r_s = cte$ )  $\equiv$  ( $du = dv = 0$ )  
 Caso ( $r(\theta) \approx 3r_+$ ). Param:  $m=1.00$ ,  $a=0.80$



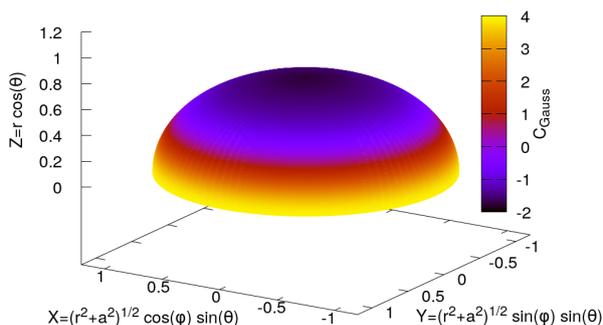
Curvatura Gaussiana. Superficie 2D: ( $r_s = cte$ )  $\equiv$  ( $du = dv = 0$ )  
 Caso ( $r(\theta) \approx 2r_+$ ). Param:  $m=1.00$ ,  $a=0.80$



Curvatura Gaussiana. Superficie 2D: ( $r_s = cte$ )  $\equiv$  ( $du = dv = 0$ )  
 Caso ( $r(\theta) \approx r_+$ ). Param:  $m=1.00$ ,  $a=0.80$



Curvatura Gaussiana. Superficie 2D: ( $r_s = cte$ )  $\equiv$  ( $du = dv = 0$ )  
 Caso ( $r(\theta) \approx 0.5r_+$ ). Param:  $m=1.00$ ,  $a=0.80$



Curvatura Gaussiana. Superficie 2D: ( $r_s = cte$ )  $\equiv$  ( $du = dv = 0$ )  
 Caso ( $r(\theta) \approx 0.85r_+$ ). Param:  $m=1.00$ ,  $a=0.80$

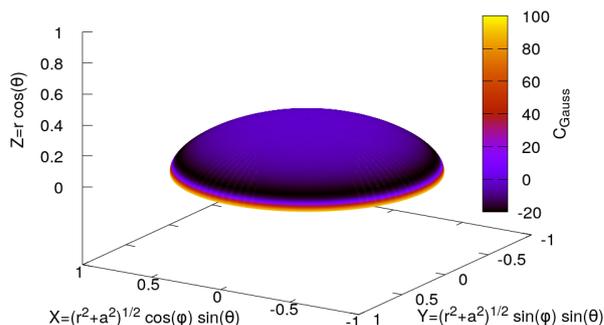
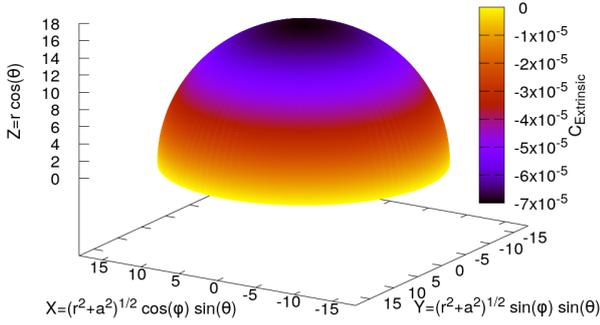
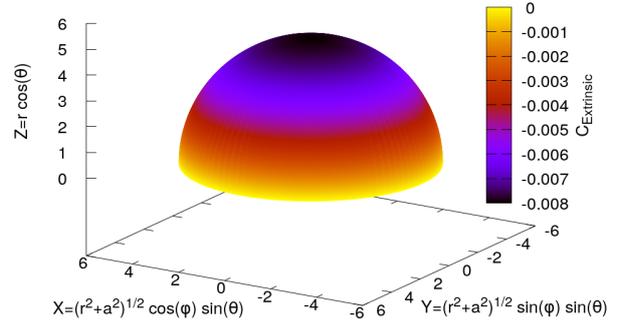


Figura 5.1: **Curvatura Gaussiana. Superficies 2D ( $r_s = cte$ )  $\equiv$   $r(\theta)$  (intersección de  $u$  y  $v$  constantes):** Se observa que las superficies tienden a curvatura Gaussiana constante cuando  $r$  crece, con un comportamiento del tipo  $\approx \frac{1}{r^2}$ . Sin embargo, en superficies cercanas a  $r_+$ , sucede lo contrario. La curvatura Gaussiana tiende a variar con  $\theta$ . En el interior ( $r < r_+$ ), los cambios aumentan y se tornan drásticos cambiando incluso el signo, pasando a valores negativos en las cercanías del polo norte. Notar la diferencia de escala en los colores de la curvatura Gaussiana. Se muestran sólo los hemisferios norte de cada superficie, debido a su simetría respecto al ecuador ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

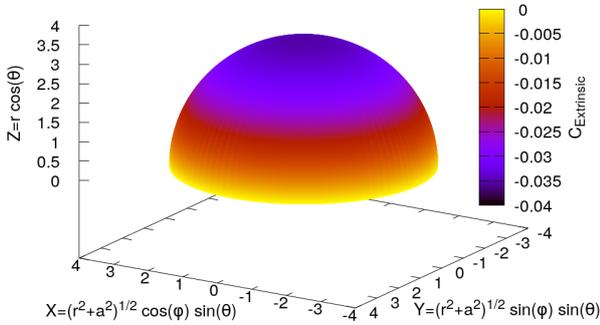
Curvatura Extrínseca. Superficie 2D: ( $r_s=cte$ )  $\equiv$  ( $du=dv=0$ )  
 Caso ( $r(\theta) \approx 10r_+$ ). Param:  $m=1.00$ ,  $a=0.80$



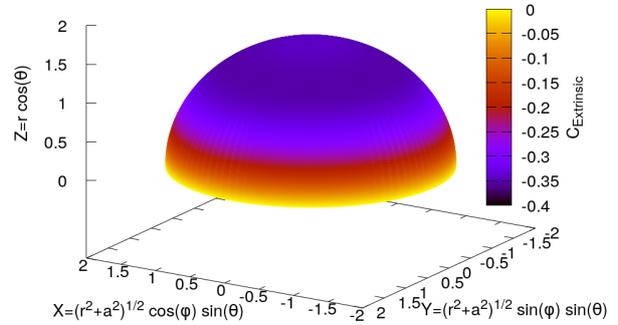
Curvatura Extrínseca. Superficie 2D: ( $r_s=cte$ )  $\equiv$  ( $du=dv=0$ )  
 Caso ( $r(\theta) \approx 3r_+$ ). Param:  $m=1.00$ ,  $a=0.80$



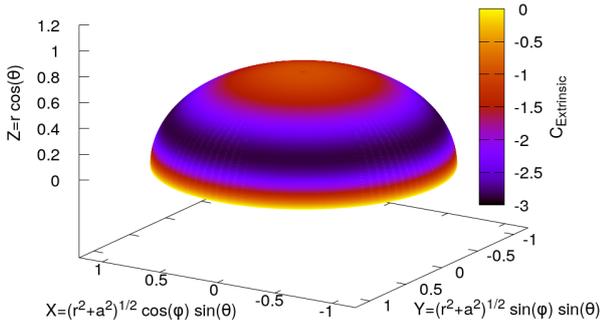
Curvatura Extrínseca. Superficie 2D: ( $r_s=cte$ )  $\equiv$  ( $du=dv=0$ )  
 Caso ( $r(\theta) \approx 2r_+$ ). Param:  $m=1.00$ ,  $a=0.80$



Curvatura Extrínseca. Superficie 2D: ( $r_s=cte$ )  $\equiv$  ( $du=dv=0$ )  
 Caso ( $r(\theta) \approx r_+$ ). Param:  $m=1.00$ ,  $a=0.80$



Curvatura Extrínseca. Superficie 2D: ( $r_s=cte$ )  $\equiv$  ( $du=dv=0$ )  
 Caso ( $r(\theta) \approx 0.5 r_+$ ). Param:  $m=1.00$ ,  $a=0.80$



Curvatura Extrínseca. Superficie 2D: ( $r_s=cte$ )  $\equiv$  ( $du=dv=0$ )  
 Caso ( $r(\theta) \approx 0.85r_+$ ). Param:  $m=1.00$ ,  $a=0.80$

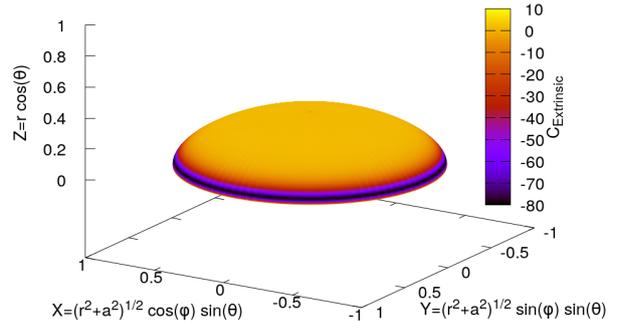


Figura 5.2: **Curvatura Extrínseca. Superficies 2D ( $r_s = cte$ )  $\equiv$   $r(\theta)$  (intersección de  $u$  y  $v$  constantes):** Se observa que las superficies tienden a curvatura Extrínseca nula cuando  $r$  crece, con un comportamiento del tipo  $\approx \frac{1}{r^2}$ . Sin embargo, en superficies cercanas a  $r_+$ , su valor absoluto aumenta, junto con las diferencias en  $\theta$ , con valor cero en el ecuador  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , y disminuye con valores negativos hacia el polo norte ( $\theta = 0$ ). En el interior ( $r_- < r < r_+$ ), los cambios aumentan y se tornan drásticos, comenzando en cero en el ecuador, disminuyendo y luego aumentando hacia hacia el polo norte. A diferencia de la curvatura Gaussiana, el cambio de signo se produce sólo cuando  $r < r_-$ . Notar la diferencia de escala en los colores de la curvatura Gaussiana. Se muestran sólo los hemisferios norte de cada superficie, debido a su simetría respecto al ecuador ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

(5.11). Notar que  $\sigma'$  y  $\rho'$  son proporcionales a  $\Delta$ , ver (4.67) y (4.66). Por lo cual en  $r = r_+$  ( $\Delta = 0$ ), los coeficientes de espín no contribuyen. Luego, el único término que contribuye es  $\Psi_2$ . Si observamos los coeficientes de rotación  $\Gamma$  y  $e^{i_s}$  (ver (5.31), (5.32)), resulta que ambos son proporcionales a  $\Delta$ , por lo cual en ( $\Delta = 0$ ), el número complejo  $\alpha$  se anula, y obtenemos un factor igual a la unidad ( $F = 1$ ) en (5.37). Finalmente si reemplazamos en (5.34), tenemos  $\Psi_2 = \Psi_{2p}$ ; y la curvatura Gaussiana (5.9) resulta

$$(C_{Gauss-GHP})|_{r=r_{\pm}} = -2(\Psi_2)_{Re}|_{r=r_{\pm}} = -2(\Psi_{2p})_{Re}|_{r=r_{\pm}}, \quad (5.44)$$

que coincide exactamente con (5.43), calculado por un camino totalmente diferente. Lo cual, es una prueba más de la consistencia en los resultados analíticos y numéricos presentados.

### 5.3.3. Casos límites: Schwarzschild y Minkowski

Es importante comparar los resultados anteriores con los casos límites de Schwarzschild y Minkowski.

Si consideramos la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist (2.1), podemos obtener la métrica de Schwarzschild en coordenadas usuales simplemente tomando  $a = 0$ . De manera similar, podemos tomar  $a = 0, m = 0$  para obtener la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas. En ambos casos, las coordenadas *centro de masa*, se obtienen a partir de las ecuaciones generales para espaciotiempos con simetría esférica (3.68) y (3.69); donde si tomamos  $\mathcal{D} = L = 0$ , obtenemos para Schwarzschild

$$du_{Schw} = dt - \frac{dr}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}, \quad (5.45)$$

$$dv_{Schw} = dt + \frac{dr}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}; \quad (5.46)$$

y para Minkowski

$$du_{Mink} = dt - dr, \quad (5.47)$$

$$dv_{Mink} = dt + dr. \quad (5.48)$$

En ambos casos, las superficies 2D espaciales  $r_s = cte$ . (intersección de ambas coordenadas nulas  $du = dv = 0$ ), corresponden a  $r = cte$ . Es directo verificar que la curvatura Gaussiana y Extrínseca de estas superficies son constantes

$$C_{Gaussian} = \frac{1}{r^2}, \quad (5.49)$$

$$C_{Extrinsic} = 0. \quad (5.50)$$

Al comparar estos casos límites de Schwarzschild y Minkowski con Kerr, es inmediato notar las diferencias en la geometría de las superficies  $r_s = cte$ .

Por último, es interesante mencionar el caso límite de tomar  $m = 0$ , pero manteniendo  $a \neq 0$ , en la expresión de la métrica de Kerr (2.1). Interpretar el verdadero significado de ese límite no es trivial, tal como se menciona en Gibbons and Volkov [2017]. Sin embargo, con las consideraciones adecuadas (tomando  $r \geq 0$ ), se puede interpretar como el espaciotiempo de Minkowski en coordenadas esferoidales. Es posible probar que existe un límite para la función

$K$ , tomando  $m \rightarrow 0$ , y que en este límite  $K$  satisface la ecuación (4.8). De esta forma se puede construir las coordenadas nulas  $u$  y  $v$  en el sistema de coordenadas esferoidales, con la particularidad que las geodésicas nulas contenidas en  $u = \text{constante}$  llegan ortogonalmente a esferas asintóticas en el infinito nulo futuro. En otras palabras, las superficies  $u = \text{constante}$  en el caso esferoidal coinciden con la misma familia en el caso esférico. Por lo que las superficies  $r_s$  coinciden en ambos casos, contienen los mismos puntos del espaciotiempo de Minkowski aunque expresados en diferentes coordenadas, puesto que son definidas de la misma manera. En particular se obtendrán los mismos valores en cada punto del espaciotiempo para las curvaturas Gaussiana y Extrínseca.

Sin embargo, si analizamos la motivación e interpretación de las coordenadas *centro de masa* desde el punto de vista físico geométrico, que se usó originalmente; encontramos una diferencia importante. Esto es debido a que si la masa es cero, el espaciotiempo es el Minkowskiano y por lo tanto no existe horizonte de evento ni tampoco secciones centro de masa en el infinito nulo futuro. Entonces desde este punto de vista, el límite  $m \rightarrow 0$  es singular, puesto que no existe un sistema de referencia centro de masa. Aunque si es posible hacer una identificación entre el espaciotiempo de Minkowski en coordenadas esferoidales y en coordenadas esféricas, tal como se hizo en el párrafo anterior.

## 5.4. Comparación con otras definiciones

Los resultados presentados mejoran varios intentos de la literatura. Uno de los mas notables es el de Sean Hayward [2004], cuya definición no incluye la geodésica nula que va a lo largo del eje de simetría.

Lo cual se manifiesta en su construcción, al no obtener superficies 2D suaves en los polos. Para comparar con nuestro trabajo, a partir de Hayward [2004], consideramos la función nula

$$u^* = t^* - r_*, \quad (5.51)$$

$$v^* = t^* + r_*. \quad (5.52)$$

El análogo a nuestras esferas 2D  $r_s$ , se obtienen a partir de la intersección de ( $u^* = \text{constante}$ ) y ( $v^* = \text{constante}$ ), que pueden parametrizarse con  $r_{sH}$ .

En figura 5.3, se puede ver que para  $r_{sH}$  hay una discontinuidad en las derivadas en ( $\theta = 0, \pi$ ), mientras que los esferoides  $r_s$  son claramente suaves. La discontinuidad en las derivadas, no solo se observa en la figura; sino que fundamentalmente reside en el hecho de que la curvatura Gaussiana en las superficies  $r_{sH}$  diverge en los polos. Mientras que la curvatura Gaussiana en las superficies  $r_s$  es suave.

El carácter intrínseco de la curvatura Gaussiana, despeja cualquier duda respecto a la influencia de escala en figura 5.3, y la presencia del pico discontinuo en los polos que poseen las superficies  $r_{sH}$ . La discontinuidad a lo largo del eje de simetría, implica que el mapa doblemente nulo propuesto por Hayward [2004], es incompleto. Desde el punto de vista operacional, eso genera graves inconvenientes, reduciendo el alcance y la utilidad del mapa coordenado.

A manera de ejemplo concreto, podemos considerar la ecuación de un campo escalar sin masa. En coordenadas *centro de masa*, se expresa según ecuación (8.64), donde los coeficientes son regulares y bien comportados. Mientras que usando el mapa propuesto por Hayward [2004] (se obtiene de (8.64), tomando  $K = a^2$ ); presenta un coeficiente que diverge en los

polos. El cual corresponde al coeficiente de espín  $\rho$  (expansión) (4.64); cuyo tercer término es

$$\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{K(r, \theta) - a^2 \sin^2(\theta)}. \quad (5.53)$$

En el caso de Hayward (tomando  $K = a^2$ ), el coeficiente diverge en los polos

$$\lim_{\theta \rightarrow 0, \pi} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{K(r, \theta) - a^2 \sin^2(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0, \pi} \frac{a \cos^2(\theta)}{\sin(\theta)} = \infty. \quad (5.54)$$

Por lo tanto, la cúspide o pico que se observa en figura 5.3, señala un grave problema geométrico en la definición de Hayward [2004]. *El mal comportamiento divergente en las dos cantidades geométricas, tanto en la curvatura Gaussiana de sus superficies  $r_{sH}$ , como así también en el coeficiente de espín  $\rho_{\text{Hayward}}$  (expansión), indica que las coordenadas nulas de Hayward, están adaptadas a congruencias nulas que forman cáusticas a lo largo del eje de simetría. En aplicaciones, como el ejemplo concreto de la ecuación de campo escalar sin masa, la presencia de cáusticas introduce un comportamiento divergente en uno de los coeficientes; lo cual hace imposible cualquier intento de resolución, imposibilitando su tratamiento tanto analítico como numérico.*

*Dicho de otro modo, si se analiza la métrica de Kerr en coordenadas nulas de Hayward [2004], no se observan divergencias o malos comportamientos en sus componentes (excepto por los típicos problemas de las coordenadas esféricas). El problema reside en las derivadas de la métrica. El coeficiente de espín  $\rho_{\text{Hayward}}$ , está estrechamente relacionado a la conexión del espaciotiempo Geroch et al. [1973], la cual involucra derivadas de la métrica. Debido a que la curvatura del espacio tiempo esta determinada por su conexión, podemos vaticinar los graves problemas de utilidad de las coordenadas nulas de Hayward [2004]. Numerosos problemas de interés, como por ejemplo el caso del campo escalar sin masa en Kerr, tendrán comportamientos divergentes a lo largo del eje de simetría, haciendo imposible su tratamiento.*

Mientras que en coordenadas *centro de masa*, según se muestra en (9.44), el coeficiente es regular y bien comportado

$$\lim_{\theta \rightarrow 0, \pi} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{K(r, \theta) - a^2 \sin^2(\theta)} = \partial_\theta k(r, \theta) \Big|_{\theta=0, \pi} \quad (5.55)$$

El ejemplo anterior, muestra la limitación del sistema coordenado incompleto propuesto por Hayward. Mientras que el sistema coordenado *centro de masa*, al ser completo permite abordar y resolver el problema de evolución, tal como se desarrolla en Capítulo 9

Otro trabajo importante en el que se definen coordenadas nulas para Kerr es el de Fletcher and Lun [2003b], donde también se considera la posibilidad de tomar  $K$  como constante, con  $K = a^2 E^2$ . Tal condición se nombra como  $X^2 = 1$ , donde  $X^2 = \frac{K}{a^2 E^2}$ . Por lo cual, tal definición también tiene el mismo problema y patología que Hayward [2004].

Nuestro enfoque está mas relacionado al trabajo de Frans Pretorius y Werner Israel Pretorius and Israel [1998], aunque su tratamiento sólo cubre el hemisferio norte, sus expresiones también fallan en el polo norte y son difíciles de calcular incluso numéricamente Bishop and Venter [2006]. En concreto, también sería imposible tratar la ecuación de campo escalar sin masa en Kerr usando tal sistema coordenado, debido a que sus expresiones también divergen en los polos.

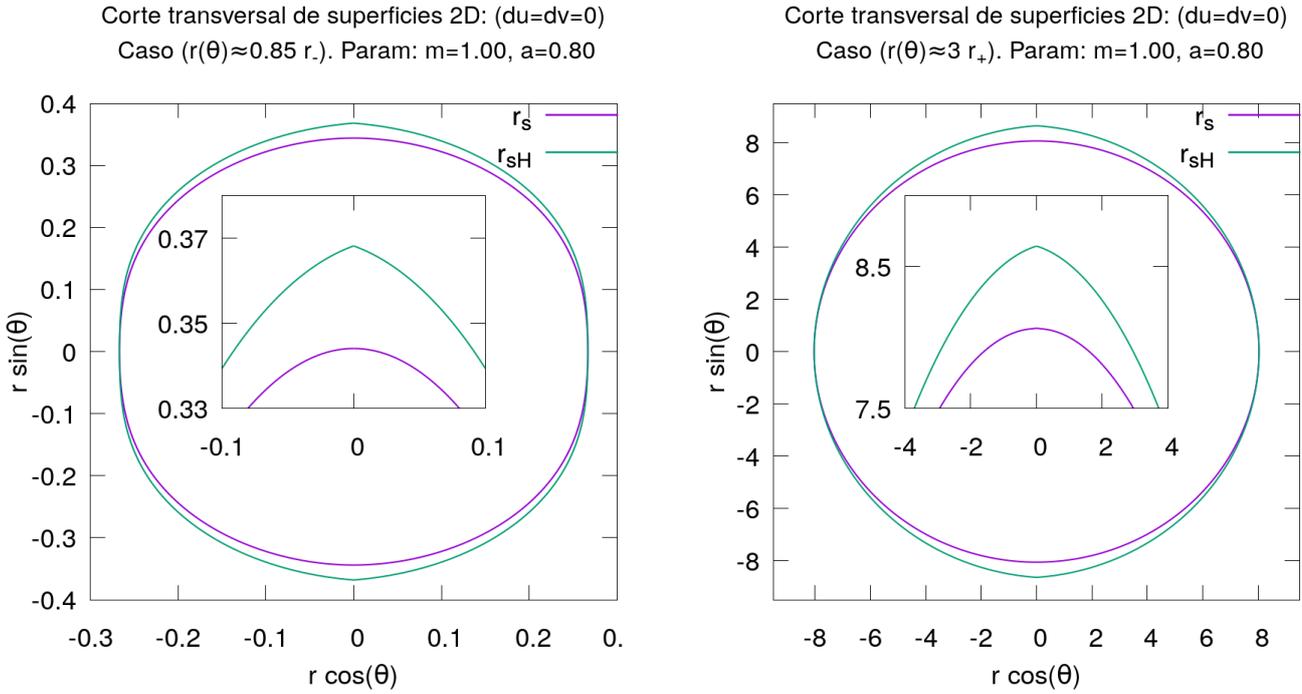


Figura 5.3: **Comparación entre superficies 2D  $r_s$  y  $r_{sH}$  asociadas a coordenadas *centro de masa* y Hayward [2004].** Se observa que las superficies  $r_s$  son completamente suaves, mientras que las superficies  $r_{sH}$  presentan una discontinuidad en los polos ( $\theta = 0, \pi$ ); lo cual no es un efecto de escala. Cada superficie  $r_{sH}$  tiene un comportamiento divergente en su curvatura Gaussiana y su coeficiente de espín  $\rho_{Hayward}$ ; indicando la presencia de cáusticas a lo largo del eje de simetría. Lo cual sucede para toda la familia de superficies, en todas las regiones (excepto en  $r = r_+, r_-$ ). Se muestran dos casos, uno en región interior a los horizontes ( $r \approx 0,85 r_-$ ) y otro en región lejana a los horizontes ( $r \approx 3 r_+$ ).

Finalmente, luego de estas comparaciones, podemos concluir que las coordenadas nulas *centro de masa*, son el primer sistema coordenado doblemente nulo completo; en el sentido de que permite tratar y resolver problemas de aplicación fundamentales donde otras definiciones previas han fallado. En particular, permite abordar y resolver el problema de evolución, tal como se desarrolla en Capítulo 9.

# Capítulo 6

## Nueva coordenada angular $\varphi$

*Debido a que la coordenada angular  $\phi$  de Kerr (en coordenadas de Boyer-Lindquist) tiene mal comportamiento en el horizonte futuro; si se quiere resolver la ecuación de un campo escalar sin masa y atravesar el horizonte de eventos, resulta fundamental definir una nueva coordenada angular axial, que sea regular en  $H^+$ . Para ello, se hace un estudio analizando diversas posibilidades. Finalmente se adopta una nueva definición de coordenada angular, que permitirá lograr el cometido de atravesar el horizonte y minimizar la complejidad numérica.*

### 6.1. Divergencia en $r_+$ y $r_-$ .

Comencemos analizando la ecuación de geodésica nula mas general para la coordenada angular  $\phi$ , dada por

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{1}{\Sigma \Delta} \left[ 2amr + (\Sigma - 2mr) \frac{L}{\sin^2(\theta)} \right]. \quad (3.45)$$

Es claro que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{d\phi}{d\lambda} \rightarrow \infty; \quad (6.1)$$

donde  $\Delta = (r - r_+)(r - r_-)$ ; es decir que  $\Delta \rightarrow 0$ , cuando  $r \rightarrow r_+$  ó  $r \rightarrow r_-$ .

Como en este trabajo estudiamos el paso desde la región externa a través del horizonte  $H^+$ , estudiaremos la definición de una coordenada angular axial que sea regular cuando  $r \rightarrow r_+$ .

### 6.2. Definición adaptada a direcciones principales

Una manera de definir una nueva coordenada, es inspirada en el caso de las congruencias principales, como se hace en sección 5.3.6 de Poisson [2004].

Para poner en contexto, recordemos que  $\phi$  es mal comportada para cualquier geodésica nula. Cuando se escogen los valores de las constantes de movimiento  $E, L, K_{Carter}$ , se escoge una particular dirección geodésica. A su vez, al considerar el conjunto de geodésicas para cada punto del espaciotiempo, tenemos que tal elección de constantes determina una congruencia de geodésicas. Para definir las coordenadas nuladas, en este trabajo se consideró un par de congruencias particulares, que son diferentes a las principales nuladas.

En lo que sigue, mostraremos cómo se puede definir una nueva coordenada angular adaptada a una congruencia particular. Comenzamos con el caso de las congruencias principales nulas, en donde

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm_{oi} E, \quad (6.2)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{aE}{\Delta}; \quad (6.3)$$

donde  $\pm_{oi} = +$  (congruencia saliente hacia el futuro),  $\pm_{oi} = -$  (entrante hacia el futuro). Notar que para congruencias que alcanzan la región asintóticamente plana, es natural elegir  $E = 1$ ; lo cual es equivalente a una reparametrización de  $\lambda$ . Luego, para el caso de las direcciones principales, es usual definir (ver Poisson [2004])

$$\psi_{\pm_{oi}} = \phi - \pm_{oi} \int \frac{a}{\Delta} dr = \phi - \int \frac{d\phi}{d\lambda} [\pm_{oi} dr] = \phi - \int \frac{d\phi}{d\lambda} d\lambda = \phi - \phi + C_{\pm_{oi}} = C_{\pm_{oi}}. \quad (6.4)$$

Es decir, que las nuevas coordenadas angulares  $\psi_{\pm_{oi}}$  pasan a estar bien comportadas, y además se mantienen constante a lo largo de cada congruencia principal nula.

$$\frac{d\psi_{\pm_{oi}}}{d\lambda} = 0. \quad (6.5)$$

Este último ejemplo, servirá de inspiración para definir una nueva coordenada angular adaptada a las direcciones *centro de masa*.

## 6.3. Definición adaptada a direcciones *centro de masa*

### 6.3.1. Posible definición $\tilde{\varphi}$

Inspirados en el caso de las direcciones principales nulas, analizamos la posibilidad de definir una nueva coordenada angular  $\varphi$ , tal que  $\dot{\varphi} = 0$ , a lo largo de las direcciones *centro de masa*. Para las cuales se satisfacen (3.51), (3.53) (con  $\delta = 0$ ,  $L = 0$ ,  $E = 1$ )

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm_{oi} \frac{\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - K(r, \theta)\Delta}}{\Sigma}; \quad (6.6)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{2amr}{\Sigma\Delta}. \quad (6.7)$$

Lo cual sugiere, al estilo de 6.4, considerar la siguiente definición

$$\tilde{\varphi}_{\pm_{oi}} = \phi - \pm_{oi} \int \frac{2amr'}{\Delta\sqrt{(r'^2 + a^2)^2 - K\Delta}} dr; \quad (6.8)$$

que en principio, además de depender de la coordenada angular  $\theta$ , con  $(\frac{\partial\tilde{\varphi}_{\pm_{oi}}}{\partial\theta} \neq 0)$ , según la elección  $\pm_{oi}$ , es bien comportada en  $r_+$  tomando ( $\pm_{oi} = -$ ) para el horizonte  $H^+$  y tomando ( $\pm_{oi} = +$ ) para el horizonte  $H^-$ .

Esta definición natural, también ha sido sugerida en Pretorius and Israel [1998]; sin embargo decidimos no utilizarla, porque las ecuaciones geométricas se tornan muy complicadas.

### 6.3.2. Definición adoptada $\varphi$

Luego de la exploración previa, se decidió usar la definición que se emplea en la construcción de la forma Kerr-Schild de la métrica de Kerr, la que involucra un sistema de coordenadas cartesianas de la métrica de fondo plano empleada. Esta definición entonces, no sólo es más sencilla, desde el punto de vista algebraico, sino que además tiene un significado geométrico fundamental de la métrica de Kerr. La nueva coordenada angular está adaptada a las direcciones principales, en el sentido de que además de evitar el mal comportamiento en los horizontes, se mantiene constante a lo largo de las congruencias principales

$$\left. \frac{d\varphi}{d\lambda} \right|_{\text{direcciones-principales}} = 0. \quad (6.9)$$

Sin embargo, al utilizar la misma definición junto con las coordenadas nulas *centro de masa*, logramos evitar el mal comportamiento en los horizontes, pero la coordenada angular cambia a lo largo de las congruencias *centro de masa*, es decir

$$\left. \frac{d\varphi}{d\lambda} \right|_{\text{direcciones-Centro de Masa}} \neq 0. \quad (6.10)$$

La definición adoptada para la nueva coordenada angular  $\varphi$  es entonces la discutida en las secciones 6.2

$$\boxed{d\varphi_{\pm oi} = d\phi - \pm_{oi} \frac{a}{\Delta} dr;} \quad (6.11)$$

que puede ser integrada, para obtener

$$\varphi_{\pm oi} = \phi - \pm_{oi} \int \frac{a}{\Delta} dr = \phi - \pm_{oi} \frac{a}{2\sqrt{m^2 - a^2}} \ln \left( \frac{r - r_+}{r - r_-} \right). \quad (6.12)$$

Notar que por construcción, hemos definido dos posibles coordenadas angulares,  $\varphi_+$ , que es bien comportada en  $H^-$  (que puede atravesarse con una geodésica nula saliente) y  $\varphi_-$  que es bien comportada en el horizonte  $H^+$  (que puede atravesarse con una geodésica nula entrante).

En los próximos capítulos, será útil expresar el diferencial (6.11) en términos de las coordenadas nulas *centro de masa*  $u, v$ ; que a partir de

$$dr = \left[ \frac{(dv - du)}{2} - \left( \pm_h \sqrt{\Theta} \right) d\theta \right] \frac{\Delta}{\sqrt{\mathcal{R}}}, \quad (4.73)$$

puede expresarse como

$$\boxed{d\varphi_{\pm oi} = d\phi - \pm_{oi} \frac{a}{\sqrt{\mathcal{R}}} \left[ \frac{(dv - du)}{2} - \left( \pm_h \sqrt{\Theta} \right) d\theta \right].} \quad (6.13)$$

Para finalizar el capítulo, notar que todo el estudio realizado se puede repetir, y lo haremos, cuando uno quiere estudiar el traspaso a través de los horizontes de Cauchy  $C^+$  y  $C^-$ , que están en el interior del agujero negro, y refieren a la condición  $r = r_-$ ; pero esto lo estudiaremos en futuros trabajos.



# Capítulo 7

## Kerr en coordenadas nulas *centro de masa* y nueva $\varphi$

Se presenta la métrica de Kerr en las coordenadas doblemente nulas  $(u, v)$  centro de masa, haciendo también uso de la nueva coordenada angular  $\varphi$ . Se analiza en detalle el comportamiento en el horizonte de eventos y se presenta el sistema de coordenadas doblemente nulo  $(U, V)$  que permite extender las coordenadas a través de los horizontes. Estas últimas son las que se usarán en el cálculo numérico.

### 7.1. Kerr en coordenadas Boyer Lindquist $\{t, r, \theta\}$ y nueva coordenada axial $\varphi$ .

#### 7.1.1. Forma co-variante

El primer paso, es escribir la métrica de Kerr en su forma co-variante, incorporando la nueva coordenada  $\varphi$ . Para eso podemos comenzar por la métrica de Kerr en las coordenadas Boyer-Lindquist

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} dt d\phi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\phi^2; \quad (2.1)$$

luego introducir la nueva coordenada angular  $\varphi$ , dada por

$$d\varphi = d\phi - \pm_{oi} \frac{a}{\Delta} dr; \quad (7.1)$$

y así obtener

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} dt \left(d\varphi \pm_{oi} \frac{a}{\Delta} dr\right) - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) \left(d\varphi \pm_{oi} \frac{a}{\Delta} dr\right)^2; \quad (7.2)$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} dt d\varphi \pm_{oi} \frac{4a^2mr \sin^2(\theta)}{\Sigma\Delta} dt dr - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) \left(d\varphi^2 + \frac{a^2}{\Delta^2} dr^2 \pm_{oi} 2\frac{a}{\Delta} dr d\varphi\right); \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} dt d\varphi \pm_{oi} \frac{4a^2mr \sin^2(\theta)}{\Sigma\Delta} dt dr \\
 & - \left(\frac{\Sigma}{\Delta} + \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma\Delta^2}\right) dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \pm_{oi} \frac{2a\Upsilon \sin^2(\theta)}{\Sigma\Delta} dr d\varphi - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\varphi^2.
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

### 7.1.2. Forma contra-variante

Podemos comenzar con la métrica de Kerr en su forma contra-variante, expresada en coordenadas Boyer-Lindquist

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = & \frac{\Upsilon}{\Sigma\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \frac{4amr}{\Sigma\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \\
 & - \frac{\Delta}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{\Delta - a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma\Delta \sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Formalmente usaremos notación con tilde, para distinguir las coordenadas inalteradas respecto de las nuevas. Tomaremos como sistema de partida a  $\{t, r, \theta, \phi\}$ ; y de llegada a  $\{\tilde{t}, \tilde{r}, \tilde{\theta}, \varphi\}$ . Notar que las coordenadas  $t, r, \theta$  se mantienen inalteradas, y sólo se introduce la nueva coordenada angular  $\varphi$ .

$$d\tilde{t} = dt, \tag{7.5}$$

$$d\tilde{r} = dr, \tag{7.6}$$

$$d\tilde{\theta} = d\theta, \tag{4.86}$$

$$d\varphi = d\phi - \pm_{oi} \frac{a}{\Delta} dr. \tag{7.7}$$

Luego, podemos expresar los vectores coordenados

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}, \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} - \pm_{oi} \frac{a}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}, \tag{7.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}. \tag{7.11}$$

Si recuperamos notación quitando tildes y reemplazamos en (2.6), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = & \frac{\Upsilon}{\Sigma\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \frac{4amr}{\Sigma\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \pm_{oi} \frac{2a}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\
 & - \frac{\Delta}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{\Sigma \sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

## 7.2. Kerr en coordenadas *centro de masa* y nueva $\varphi$

Debido a la importancia del resultado, haremos una presentación detallada de diversos manejos algebraicos elementales que conducen a las expresiones finales deseadas.

### 7.2.1. Forma co-variante

En esta sección introduciremos las coordenadas *centro de masa*. Comenzamos por (7.4), y luego introducimos

$$dt = \frac{dv + du}{2}, \quad (5.4)$$

$$dr = \frac{\Delta}{\sqrt{\mathcal{R}}} \left[ \frac{(dv - du)}{2} - (\pm|_h \sqrt{\Theta}) d\theta \right]. \quad (4.73)$$

Si reemplazamos en los dos primeros términos de (7.4), obtenemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) \left(\frac{du + dv}{2}\right)^2 \\ &\pm_{oi} \frac{4mra^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma \Delta} \left(\frac{du + dv}{2}\right) \left[ \frac{(dv - du)}{2} - (\pm|_h \sqrt{\Theta}) d\theta \right] \frac{\Delta}{\sqrt{\mathcal{R}}}. \\ &- \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \Delta^2} dr^2 + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} d\varphi dt \\ &- \pm_{oi} \frac{\Upsilon}{\Delta \Sigma} 2a \sin^2(\theta) d\varphi dr - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\varphi^2, \end{aligned} \quad (7.13)$$

luego comenzamos a agrupar términos

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) \left(\frac{dv^2 + du^2 + 2dv du}{4}\right) \\ &\pm_{oi} \frac{4mra^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \left\{ \left(\frac{dv^2 - du^2}{4}\right) - \left(\frac{dv + du}{2}\right) (\pm|_h \sqrt{\Theta}) d\theta \right\}, \\ &- \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \Delta^2} dr^2 + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} d\varphi dt \\ &- \pm_{oi} \frac{\Upsilon}{\Delta \Sigma} 2a \sin^2(\theta) d\varphi dr - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\varphi^2, \end{aligned} \quad (7.14)$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) (du^2 + dv^2) \pm_{oi} \left(\frac{mra^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}}\right) (dv^2 - du^2) \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) du dv - \pm_{oi} \pm|_h \frac{2mra^2 \sin^2(\theta) \sqrt{\Theta}}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} (dv d\theta + du d\theta) \\ &- \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \Delta^2} dr^2 + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} d\varphi dt \\ &- \pm_{oi} \frac{\Upsilon}{\Delta \Sigma} 2a \sin^2(\theta) d\varphi dr - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\varphi^2. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Luego procedemos con el tercer, cuarto y quinto termino de (7.4)

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) (du^2 + dv^2) \pm_{oi} \left( \frac{mra^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma\sqrt{\mathcal{R}}} \right) (dv^2 - du^2) \\
 & + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) du dv - \pm_{oi} \pm|_h \frac{2mra^2 \sin^2(\theta)\sqrt{\Theta}}{\Sigma\sqrt{\mathcal{R}}} (dv d\theta + du d\theta) \\
 & - \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \Delta^2} \frac{\Delta^2}{\mathcal{R}} \left[ \frac{(dv - du)}{2} - (\pm|_h \sqrt{\Theta}) d\theta \right]^2 \\
 & - \pm_{oi} \frac{\Upsilon}{\Delta \Sigma} 2a \sin^2(\theta) \frac{\Delta}{\sqrt{\mathcal{R}}} \left[ \frac{(dv - du)}{2} - (\pm|_h \sqrt{\Theta}) d\theta \right] d\varphi \\
 & + \frac{4amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} d\varphi \left( \frac{dv + du}{2} \right) - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\varphi^2,
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

si expandimos los términos

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) (du^2 + dv^2) \pm_{oi} \left( \frac{mra^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma\sqrt{\mathcal{R}}} \right) (dv^2 - du^2) \\
 & + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) du dv - \pm_{oi} \pm|_h \frac{2mra^2 \sin^2(\theta)\sqrt{\Theta}}{\Sigma\sqrt{\mathcal{R}}} (dv d\theta + du d\theta) \\
 & - \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \left[ \frac{(dv^2 + du^2 - 2dvdu)}{4} + \Theta d\theta^2 - \pm|_h (dv - du) \sqrt{\Theta} d\theta \right] \\
 & - \pm_{oi} \frac{2\Upsilon a \sin^2(\theta)}{\Sigma\sqrt{\mathcal{R}}} \left[ \frac{(dv - du)}{2} - (\pm|_h \sqrt{\Theta}) d\theta \right] d\varphi \\
 & + \frac{2amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} d\varphi (dv + du) - \Sigma d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\varphi^2,
 \end{aligned} \tag{7.17}$$

y luego reagrupamos

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} - \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \right) (du^2 + dv^2) \pm_{oi} \left( \frac{mra^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma\sqrt{\mathcal{R}}} \right) (dv^2 - du^2) \\
 & + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} + \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \right) du dv \\
 & \pm|_h \left[ \sqrt{\Theta} \left( \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \right) - \pm_{oi} \frac{2mra^2 \sin^2(\theta)\sqrt{\Theta}}{\Sigma\sqrt{\mathcal{R}}} \right] dv d\theta \\
 & - \pm|_h \left[ \sqrt{\Theta} \left( \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \right) \pm_{oi} \frac{2mra^2 \sin^2(\theta)\sqrt{\Theta}}{\Sigma\sqrt{\mathcal{R}}} \right] du d\theta \\
 & - \pm_{oi} \frac{2\Upsilon a \sin^2(\theta)}{\Sigma\sqrt{\mathcal{R}}} \left[ \frac{(dv - du)}{2} - (\pm|_h \sqrt{\Theta}) d\theta \right] d\varphi + \frac{2amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} d\varphi (dv + du) \\
 & - \left[ \Sigma + \Theta \left( \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \right) \right] d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\varphi^2,
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

finalmente obtenemos

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} - \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} - \pm_{oi} \frac{4mra^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \right) du^2 \\
 & \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} - \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \pm_{oi} \frac{4mra^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \right) dv^2 \\
 & + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} + \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \right) du dv \\
 & - \pm_h \left[ \sqrt{\Theta} \left( \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \right) \pm_{oi} \frac{2mra^2 \sin^2(\theta) \sqrt{\Theta}}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \right] du d\theta \\
 & \pm_h \left[ \sqrt{\Theta} \left( \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \right) - \pm_{oi} \frac{2mra^2 \sin^2(\theta) \sqrt{\Theta}}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \right] dv d\theta \\
 & + \left( \frac{2amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \pm_{oi} \frac{\Upsilon a \sin^2(\theta)}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \right) d\varphi du \\
 & + \left( \frac{2amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} - \pm_{oi} \frac{\Upsilon a \sin^2(\theta)}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \right) d\varphi dv \\
 & \pm_{oi} \pm_h \frac{2\Upsilon a \sin^2(\theta)}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \sqrt{\Theta} d\theta d\varphi \\
 & - \left[ \Sigma + \Theta \left( \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \right) \right] d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\varphi^2.
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

La expresión (7.19), es la métrica de Kerr en las coordenadas *centro de masa*, con la nueva coordenada angular  $\varphi_{\pm_{oi}}$ .

Notar que  $\pm_h$  depende del hemisferio ( $\theta < \frac{\pi}{2}$ :  $\pm_h = +$ ) y ( $\theta > \frac{\pi}{2}$ :  $\pm_h = -$ ). Mientras que  $\pm_{oi}$  depende de la elección de la coordenada angular  $\varphi_+$  o  $\varphi_-$ ; que se hará según la región de interés.

### Comportamiento en el horizonte

Es importante remarcar que la métrica no depende de las coordenadas nulas  $u$  y  $v$ ; pero que al acercarnos al horizonte  $H^+$  la coordenada  $u$  diverge, mientras que si nos acercamos al horizonte  $H^-$  la coordenada  $v$  diverge. Esto no impide estudiar el límite de las componentes de la métrica cuando nos aproximamos a estos horizontes, lo que ayuda, como paso previo a definir las nuevas coordenadas nulas que serán finitas en estos horizontes.

Queremos analizar que sucede cuando  $\Delta = 0$ , es decir en  $r = r_+$  ó  $r = r_-$ . Para ello, podemos estudiar el comportamiento de las componentes de la métrica, por medio de

expansiones en serie alrededor de  $\Delta = 0$ . Las cuales, están dadas por

$$g_{uu} |_{(\pm_{oi}=-)} \approx \frac{1}{256} \frac{K [(K - 8mr) a^2 \sin^2(\theta) - 16m^2 r^2]}{m^4 r^4 (2mr + a^2 \sin^2(\theta))} \Delta^2 + \mathcal{O}(\Delta^3), \quad (7.20)$$

$$g_{uu} |_{(\pm_{oi}=+)} \approx -\frac{a^2 \sin^2(\theta)}{2mr + a^2 \sin^2(\theta)} + \mathcal{O}(\Delta), \quad (7.21)$$

$$g_{vv} |_{(\pm_{oi}=+)} \approx \frac{1}{256} \frac{K [(K - 8mr) a^2 \sin^2(\theta) - 16m^2 r^2]}{m^4 r^4 (2mr + a^2 \sin^2(\theta))} \Delta^2 + \mathcal{O}(\Delta^3), \quad (7.22)$$

$$g_{vv} |_{(\pm_{oi}=-)} \approx -\frac{a^2 \sin^2(\theta)}{2mr + a^2 \sin^2(\theta)} + \mathcal{O}(\Delta), \quad (7.23)$$

$$g_{uv} = g_{vu} \approx \frac{1}{16m^2 r^2} \frac{(4mr - K) a^2 \sin^2(\theta) + 8m^2 r^2}{2mr + a^2 \sin^2(\theta)} \Delta + \mathcal{O}(\Delta^2). \quad (7.24)$$

Las correspondientes a componentes cruzadas con parte angular

$$g_{u\theta} |_{(\pm_{oi}=-)} \approx \pm |h \frac{1}{8} \frac{\sqrt{\Theta} ((4mr - K) a^2 \sin^2(\theta) - 8m^2 r^2)}{r^2 m^2 (2mr - a^2 \sin^2(\theta))} \Delta + \mathcal{O}(\Delta^2), \quad (7.25)$$

$$g_{u\theta} |_{(\pm_{oi}=+)} \approx -\pm |h \frac{2\sqrt{\Theta} a^2 \sin^2(\theta)}{2mr - a^2 \sin^2(\theta)} + \mathcal{O}(\Delta), \quad (7.26)$$

$$g_{v\theta} |_{(\pm_{oi}=+)} \approx -\pm |h \frac{1}{8} \frac{\sqrt{\Theta} ((4mr - K) a^2 \sin^2(\theta) - 8m^2 r^2)}{r^2 m^2 (2mr - a^2 \sin^2(\theta))} \Delta + \mathcal{O}(\Delta^2), \quad (7.27)$$

$$g_{v\theta} |_{(\pm_{oi}=-)} \approx \pm |h \frac{2\sqrt{\Theta} a^2 \sin^2(\theta)}{2mr - a^2 \sin^2(\theta)} + \mathcal{O}(\Delta), \quad (7.28)$$

$$g_{u\varphi} |_{(\pm_{oi}=-)} \approx -\frac{1}{4} \frac{(4mr + K - 2a^2 \sin^2(\theta)) a^2 \sin^2(\theta)}{mr (2mr - a^2 \sin^2(\theta))} \Delta + \mathcal{O}(\Delta^2), \quad (7.29)$$

$$g_{u\varphi} |_{(\pm_{oi}=+)} \approx \frac{4amr \sin^2(\theta)}{2mr - a^2 \sin^2(\theta)} + \mathcal{O}(\Delta), \quad (7.30)$$

$$g_{v\varphi} |_{(\pm_{oi}=+)} \approx -\frac{1}{4} \frac{(4mr + K - 2a^2 \sin^2(\theta)) a^2 \sin^2(\theta)}{mr (2mr - a^2 \sin^2(\theta))} \Delta + \mathcal{O}(\Delta^2), \quad (7.31)$$

$$g_{v\varphi} |_{(\pm_{oi}=-)} \approx \frac{4amr \sin^2(\theta)}{2mr - a^2 \sin^2(\theta)} + \mathcal{O}(\Delta). \quad (7.32)$$

Y las correspondientes a componentes netamente angulares

$$g_{\theta\varphi} \approx \pm_{oi} \pm |h \frac{4m^2 r^2 a \sin^2(\theta) \sqrt{\Theta}}{mr (2mr - a^2 \sin^2(\theta))} + \mathcal{O}(\Delta), \quad (7.33)$$

$$g_{\theta\theta} \approx -\frac{4m^2 r^2 - (4mr - K)}{2mr - a^2 \sin^2(\theta)} + \mathcal{O}(\Delta), \quad (7.34)$$

$$g_{\varphi\varphi} \approx \frac{4m^2 r^2 \sin^2(\theta)}{2mr - a^2 \sin^2(\theta)} + \mathcal{O}(\Delta). \quad (7.35)$$

La manera en que cada componente de la métrica se comporta, en términos de  $\Delta$ , es lo esperado al construir este sistema de coordenadas doblemente nulo. Este comportamiento es lo que nos permite definir, en la nueva sección, las coordenadas que serán regulares en cada uno de los horizontes.

### 7.2.2. Forma contra-variante

Podemos comenzar con la métrica de Kerr en su forma contra-variante, expresada en coordenadas  $\{t, r, \theta, \varphi\}$  (Boyer-Lindquist y nueva  $\varphi$ )

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 &= \frac{\Upsilon}{\Sigma\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \frac{4amr}{\Sigma\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \pm_{oi} \frac{2a}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\ &\quad - \frac{\Delta}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{\Sigma \sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2. \end{aligned} \quad (??)$$

Nuevamente, usaremos notación formal con tilde, para distinguir las coordenadas inalteradas respecto de las nuevas. Tomaremos como sistema de partida a  $\{t, r, \theta, \varphi\}$  y de llegada a  $\{u, v, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}\}$ . Notar que las coordenadas  $\theta, \varphi$  se mantienen inalteradas, y se introducen nuevas  $u, v$ . Para comenzar, será útil tener expresiones diferenciales de las nuevas coordenadas

$$du = dt - \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr - (\pm|_h \sqrt{\Theta}) d\theta, \quad (4.68)$$

$$dv = dt + \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr + (\pm|_h \sqrt{\Theta}) d\theta, \quad (4.69)$$

$$d\tilde{\theta} = d\theta, \quad (4.86)$$

$$d\tilde{\varphi} = d\varphi. \quad (7.36)$$

Podemos expresar los vectores coordenados por

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, \quad (7.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} = \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right), \quad (7.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} = \pm|_h \sqrt{\Theta} \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}, \quad (7.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}}. \quad (7.40)$$

Si recuperamos notación quitando tildes y reemplazamos en (7.12), obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 &= 4 \frac{\Upsilon}{\Sigma\Delta} \left(\frac{\partial}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial}{\partial v}\right) - \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{\Sigma \sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2 \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial}{\partial u}\right) \left[ \left( \frac{2amr}{\Sigma\Delta} - \pm_{oi} \frac{a\sqrt{\mathcal{R}}}{\Sigma\Delta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \pm|_h \frac{\sqrt{\Theta}}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \right] \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial}{\partial v}\right) \left[ \left( \frac{2amr}{\Sigma\Delta} \pm_{oi} \frac{a\sqrt{\mathcal{R}}}{\Sigma\Delta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) - \pm|_h \frac{\sqrt{\Theta}}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \right]. \end{aligned} \quad (7.41)$$

### 7.3. Kerr en coordenadas *centro de masa* extendidas $\{U, V, \theta, \varphi\}$

A continuación extenderemos las coordenadas *centro de masa* a través de los horizontes, definiendo dos nuevas coordenadas  $(U, V)$  a partir de  $(u, v)$ . Comenzamos con la definición inspirada en las coordenadas de Kruskal para el caso de Schwarzschild

$$U = -e^{-\kappa u}, \quad (7.42)$$

$$V = e^{\kappa v}, \quad (7.43)$$

donde el valor de  $\kappa$  se escogerá unas líneas más adelante.

#### 7.3.1. Forma co-variante

Luego tenemos

$$dU = \frac{\partial U}{\partial u} du = \kappa e^{-\kappa u} du = -\kappa U du, \quad (7.44)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial v} dv = \kappa e^{\kappa v} dv = \kappa V dv; \quad (7.45)$$

es decir

$$du = -\frac{1}{\kappa} \frac{dU}{U}, \quad (7.46)$$

$$dv = \frac{1}{\kappa} \frac{dV}{V}. \quad (7.47)$$

Finalmente reemplazamos (7.46) y (7.47) en (7.19), para obtener

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} - \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} - \pm_{oi} \frac{4mra^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \right) \frac{1}{\kappa^2 U^2} dU^2 \\
 & \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} - \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \pm_{oi} \frac{4mra^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \right) \frac{1}{\kappa^2 V^2} dV^2 \\
 & - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2mr}{\Sigma} + \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \right) \frac{1}{\kappa^2 UV} dU dV \\
 & \pm |_h \left[ \sqrt{\Theta} \left( \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \right) \pm_{oi} \frac{2mra^2 \sin^2(\theta) \sqrt{\Theta}}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \right] \frac{1}{\kappa U} dU d\theta \\
 & \pm |_h \left[ \sqrt{\Theta} \left( \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \right) - \pm_{oi} \frac{2mra^2 \sin^2(\theta) \sqrt{\Theta}}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \right] \frac{1}{\kappa V} dV d\theta \\
 & - \left( \frac{2amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} \pm_{oi} \frac{\Upsilon a \sin^2(\theta)}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \right) \frac{1}{\kappa U} dU d\varphi \\
 & + \left( \frac{2amr \sin^2(\theta)}{\Sigma} - \pm_{oi} \frac{\Upsilon a \sin^2(\theta)}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \right) \frac{1}{\kappa V} dV d\varphi \\
 & \pm_{oi} \pm |_h \frac{2\Upsilon a \sin^2(\theta)}{\Sigma \sqrt{\mathcal{R}}} \sqrt{\Theta} d\theta d\varphi \\
 & - \left[ \Sigma + \Theta \left( \frac{\Upsilon a^2 \sin^2(\theta) + \Sigma^2 \Delta}{\Sigma \mathcal{R}} \right) \right] d\theta^2 - \frac{\Upsilon}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\varphi^2.
 \end{aligned} \quad (7.48)$$

Para comprender como (7.48) logra extender la métrica a través de  $r_+$ , podemos escoger un camino hacia el horizonte  $H^+$ , y mostrar que la métrica es bien comportada. El primer paso, es analizar el comportamiento de  $U, V$  cerca de ( $\Delta \approx 0$ ). Para ello, a partir de  $u(t, r, \theta)$  y  $v(t, r, \theta)$  (ver ecuaciones (4.33),(4.37),(4.38),(4.39)), consideramos solamente la parte que diverge en el horizonte, dejando de lado las integrales angulares (que no divergen) para tener expresiones más simples; y manteniendo la coordenada  $t$  para un análisis más completo, es decir

$$u(t, r, \theta) \approx t - \left( r + \frac{2mr_+}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2mr_-}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right), \quad (7.49)$$

$$v(t, r, \theta) \approx t + \left( r + \frac{2mr_+}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2mr_-}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right). \quad (7.50)$$

Es importante destacar que el comportamiento de  $U, V$  en las cercanías del horizonte, también dependerá del  $\kappa$  elegido (ver ecuaciones (7.42) y (7.42)). Para el caso de  $H^+$ , tomamos

$$\boxed{\kappa = \kappa_+ = \frac{r_+ - r_-}{4mr_+}}, \quad (7.51)$$

que es la misma elección de Poisson [2004] (página 197). Luego reemplazamos (7.49), (7.50) en (7.42),(7.43), y obtenemos una expresión para el producto de  $UV$  en las proximidades de ( $r_+$ )

$$UV |_{(r \approx r_+)} \approx - \frac{e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}} \Delta. \quad (7.52)$$

El siguiente paso es escoger el camino hacia el horizonte  $H^+$ . Por ejemplo, podemos movernos a  $V$  constante, es decir  $V = V_0$ , y aproximarnos a ( $r_+$ ). En ese caso, tenemos

$$U |_{V=V_0, (r \approx r_+)} \approx - \frac{e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{V_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}} \Delta, \quad (7.53)$$

Para mostrar el buen comportamiento de las componentes de la métrica (7.48), hay que usar la simple relación entre las componentes de la métrica en ambos sistemas coordenados  $\{u, v, \theta, \varphi\}$  y  $\{U, V, \theta, \varphi\}$ . Luego recordar los análisis de comportamiento cerca del horizonte, es decir las ecuaciones (7.20),(7.25) y (7.29); el resto de las componentes no se las considera porque a  $V$  constante, tenemos ( $dV = 0$ ). También tener en cuenta el comportamiento de  $U$  cerca del horizonte a  $V$  constante (7.53). Y por último, como se mencionó en capítulo Capítulo 6, la coordenada angular bien definida en  $H^+$ , corresponde a  $\varphi_-$ , y por lo tanto deberemos considerar la elección de signo ( $\pm_{oi} = -$ ). A partir de las consideraciones anteriores,

tenemos el siguiente comportamiento en cercanías de  $H^+$

$$g_{UU} = \frac{g_{uu}}{\kappa_+^2 U^2} \approx f(r, \theta) = \frac{K}{256\kappa_+^2} \frac{[(K - 8mr) a^2 \sin^2(\theta) - 16m^2 r^2]}{m^4 r^4 (2mr + a^2 \sin^2(\theta))} \left[ \frac{V_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}}{e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}} \right]^2, \quad (7.54)$$

$$g_{U\theta} = -\frac{g_{u\theta}}{\kappa_+ U} \approx \tilde{f}(r, \theta) = \pm \frac{1}{8\kappa_+} \frac{\sqrt{\Theta} ((4mr - K) a^2 \sin^2(\theta) - 8m^2 r^2)}{r^2 m^2 (2mr - a^2 \sin^2(\theta))} \frac{V_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}}{e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}, \quad (7.55)$$

$$g_{U\varphi} = -\frac{g_{u\varphi}}{\kappa_+ U} \approx \tilde{\tilde{f}}(r, \theta) = -\frac{1}{4} \frac{(4mr + K - 2a^2 \sin^2(\theta)) a^2 \sin^2(\theta)}{mr (2mr - a^2 \sin^2(\theta))} \frac{V_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}}{e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}, \quad (7.56)$$

donde  $f(r, \theta)$ ,  $\tilde{f}(r, \theta)$  y  $\tilde{\tilde{f}}(r, \theta)$  son funciones bien comportadas en  $(r_+)$ , y particularmente en el horizonte  $H^+$ . Es importante mencionar que el buen comportamiento mostrado, se logró siguiendo un camino en particular. Sin embargo, el resultado es válido para cualquier otro camino de aproximación a  $H^+$ .

De manera análoga, podemos mostrar que la métrica también se extiende a  $H^-$ . Para ello, primero escogemos el camino hacia  $H^-$ . Por ejemplo, podemos movernos a  $U$  constante, es decir  $U = U_0$ , y aproximarnos a  $(r_+)$ . En ese caso, tenemos

$$V |_{U=U_0, (r \approx r_-)} \approx -\frac{e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{U_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}} \Delta. \quad (7.57)$$

Para mostrar el buen comportamiento de las componentes de la métrica (7.48), hay que usar la simple relación entre las componentes de la métrica en ambos sistemas coordenados  $\{u, v, \theta, \varphi\}$  y  $\{U, V, \theta, \varphi\}$ . Luego recordar los análisis de comportamiento cerca del horizonte, es decir las ecuaciones (7.22), (7.27) y (7.31); el resto de las componentes no se las considera porque a  $U$  constante, tenemos ( $dU = 0$ ). También tener en cuenta el comportamiento de  $V$  cerca del horizonte a  $U$  constante (7.57). Y por último, como se mencionó en el capítulo Capítulo 6, la coordenada angular bien definida en  $H^-$ , corresponde a  $\varphi_+$ , y por lo tanto deberemos considerar la elección de signo ( $\pm_{oi} = +$ ). A partir de las consideraciones anteriores,

tenemos el siguiente comportamiento en cercanías de  $H^-$

$$g_{VV} = \frac{g_{vv}}{\kappa_+^2 V^2} \approx h(r, \theta) = \frac{K}{256\kappa_+^2} \frac{[(K - 8mr) a^2 \sin^2(\theta) - 16m^2 r^2]}{m^4 r^4 (2mr + a^2 \sin^2(\theta))} \left[ \frac{U_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}}{e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}} \right]^2, \quad (7.58)$$

$$g_{V\theta} = -\frac{g_{v\theta}}{\kappa_+ V} \approx \tilde{h}(r, \theta) = \pm_{|h} \frac{1}{8\kappa_+} \frac{\sqrt{\Theta} ((4mr - K) a^2 \sin^2(\theta) - 8m^2 r^2)}{r^2 m^2 (2mr - a^2 \sin^2(\theta))} \frac{U_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}}{e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}, \quad (7.59)$$

$$g_{V\varphi} = -\frac{g_{v\varphi}}{\kappa_+ V} \approx \tilde{\tilde{h}}(r, \theta) = -\frac{1}{4} \frac{(4mr + K - 2a^2 \sin^2(\theta)) a^2 \sin^2(\theta)}{mr (2mr - a^2 \sin^2(\theta))} \frac{U_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}}{e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}, \quad (7.60)$$

donde  $h(r, \theta)$ ,  $\tilde{h}(r, \theta)$  y  $\tilde{\tilde{h}}(r, \theta)$  son funciones bien comportadas en  $(r_+)$ , y particularmente en el horizonte  $H^-$ .

De esta manera, luego de analizar el comportamiento de la métrica en su forma co-variante, se ha mostrado lo anunciado al comienzo del capítulo, es decir que las coordenadas  $\{U, V, \theta, \varphi\}$ , logran extender de forma regular las coordenadas *centro de masa*  $\{u, v, \theta, \varphi\}$  a través de ambos horizontes externos  $H^+$  y  $H^-$ .

Por último, es importante notar que este estudio se puede repetir, y lo haremos, cuando uno quiere estudiar el traspaso a través de los horizontes de Cauchy  $C^+$  y  $C^-$ , que están en el interior del agujero negro, y refieren a la condición  $r = r_-$ ; pero esto será estudiado en un trabajo posterior a esta tesis.

### 7.3.2. Forma contra-variante

Podemos comenzar con la métrica de Kerr en su forma contra-variante, expresada en coordenadas *centro de masa* con nueva coordenada angular  $\{u, v, \theta, \varphi\}$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^2 &= 4 \frac{\Upsilon}{\Sigma \Delta} \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) - \frac{1}{\Sigma} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{\Sigma \sin^2(\theta)} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \\ &+ 2 \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) \left[ \left( \frac{2amr}{\Sigma \Delta} - \pm_{oi} \frac{a\sqrt{R}}{\Sigma \Delta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \pm_{|h} \frac{\sqrt{\Theta}}{\Sigma} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \\ &+ 2 \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) \left[ \left( \frac{2amr}{\Sigma \Delta} \pm_{oi} \frac{a\sqrt{R}}{\Sigma \Delta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \pm_{|h} \frac{\sqrt{\Theta}}{\Sigma} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Nuevamente, usaremos notación formal con tilde, para distinguir las coordenadas inalteradas respecto de las nuevas. Tomaremos como sistema de partida a  $\{u, v, \theta, \varphi\}$ ; y de llegada a  $\{U, V, \tilde{\theta}, \tilde{\varphi}\}$ . Notar que las coordenadas  $\theta, \varphi$  se mantienen inalteradas, y se introducen nuevas  $U, V$ . Para comenzar, será útil tener expresiones diferenciales de las nuevas

coordenadas

$$dU = -\kappa U du, \quad (7.44)$$

$$dV = \kappa V dv, \quad (7.45)$$

$$d\tilde{\theta} = d\theta, \quad (4.86)$$

$$d\tilde{\varphi} = d\varphi. \quad (7.61)$$

Luego podemos expresar los vectores coordenados

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial}{\partial V} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} = -\kappa U \frac{\partial}{\partial U}, \quad (7.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial}{\partial V} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} = \kappa V \frac{\partial}{\partial V}, \quad (7.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial V} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}, \quad (7.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial V} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}}. \quad (7.65)$$

Si recuperamos notación quitando tildes y reemplazamos en (7.41), obtenemos

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 &= -4\kappa^2 \frac{\Upsilon}{\Sigma \Delta} UV \left(\frac{\partial}{\partial U}\right) \left(\frac{\partial}{\partial V}\right) - \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{\Sigma \sin^2(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2 \\ &\quad - 2\kappa U \left(\frac{\partial}{\partial U}\right) \left[ \left(\frac{2amr}{\Sigma \Delta} - \pm_{oi} \frac{a\sqrt{R}}{\Sigma \Delta}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \pm_{lh} \frac{\sqrt{\Theta}}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \right] \\ &\quad + 2\kappa V \left(\frac{\partial}{\partial V}\right) \left[ \left(\frac{2amr}{\Sigma \Delta} \pm_{oi} \frac{a\sqrt{R}}{\Sigma \Delta}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) - \pm_{lh} \frac{\sqrt{\Theta}}{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \right]. \end{aligned}} \quad (7.66)$$

Para comprender como (7.66) logra extender la métrica en su forma contra-variante a través de  $r_+$ ; de manera análoga a como se hizo para la forma co-variante, siguiendo las mismas consideraciones, en este caso podemos comenzar con

$$UV|_{(r \approx r_+)} \approx -\frac{e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}} \Delta. \quad (7.52)$$

A partir de la misma, podemos ver que la componente cruzada es bien comportada en  $r_+$ , es decir en ambos horizontes exteriores  $H^+$  y  $H^-$

$$g^{UV} = -4\kappa^2 \frac{\Upsilon}{\Sigma \Delta} UV \approx \frac{4\kappa_+^2 \Upsilon e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{\Sigma r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}}. \quad (7.67)$$

Luego, para estudiar las componentes restantes que aparentan tener problemas, podemos escoger un camino hacia cada horizonte exterior  $H^+$  y  $H^-$ , y mostrar que la métrica es bien comportada.

Comencemos escogiendo un camino hacia el horizonte  $H^+$ . Por ejemplo, podemos movernos a  $V$  constante, es decir  $V = V_0$ , y aproximarnos a  $(r_+)$ . En ese caso, tenemos

$$U |_{V=V_0, (r \approx r_+)} \approx -\frac{e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{V_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}} \Delta. \quad (7.53)$$

Para mostrar el buen comportamiento de las componentes de la métrica (7.66) en  $H^+$ , hay que tener en cuenta el comportamiento de  $U$  cerca del horizonte a  $V$  constante (7.53). A su vez, como se mencionó en capítulo Capítulo 6, la coordenada angular bien definida en  $H^+$ , corresponde a  $\varphi_-$ , y por lo tanto deberemos considerar la elección de signo ( $\pm_{oi} = -$ ). A partir de las consideraciones anteriores, tenemos el siguiente comportamiento en cercanías de  $H^+$

$$g^{U\varphi} = -2\kappa U \left( \frac{2amr}{\Sigma\Delta} - \pm_{oi} \frac{a\sqrt{R}}{\Sigma\Delta} \right) \approx \mathbf{f}(r, \theta) = \frac{8amr}{\Sigma} \frac{\kappa_+ e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{V_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}}, \quad (7.68)$$

$$g^{V\varphi} = 2\kappa V \left( \frac{2amr}{\Sigma\Delta} \pm_{oi} \frac{a\sqrt{R}}{\Sigma\Delta} \right) \approx \tilde{\mathbf{f}}(r, \theta) = 2\kappa_+ V_0 \frac{a}{\Sigma}; \quad (7.69)$$

donde  $\mathbf{f}(r, \theta)$  y  $\tilde{\mathbf{f}}(r, \theta)$  son funciones bien comportadas en  $(r_+)$ , y particularmente en el horizonte  $H^+$ . Es importante mencionar que el buen comportamiento mostrado, se logró siguiendo un camino en particular. Sin embargo, el resultado es válido para cualquier otro camino de aproximación a  $H^+$ .

De manera análoga, podemos mostrar que la métrica también se extiende a  $H^-$ . Para ello, primero escogemos el camino hacia  $H^-$ . Por ejemplo, podemos movernos a  $U$  constante, es decir  $U = U_0$ , y aproximarnos a  $(r_-)$ . En ese caso, tenemos

$$V |_{U=U_0, (r \approx r_-)} \approx -\frac{e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{U_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}} \Delta. \quad (7.57)$$

Para mostrar el buen comportamiento de las componentes de la métrica (7.66) en  $H^-$ , hay que tener en cuenta el comportamiento de  $V$  cerca del horizonte a  $U$  constante (7.57). A su vez, como se mencionó en capítulo Capítulo 6, la coordenada angular bien definida en  $H^-$ , corresponde a  $\varphi_+$ , y por lo tanto deberemos considerar la elección de signo ( $\pm_{oi} = +$ ). A partir de las consideraciones anteriores, tenemos el siguiente comportamiento en cercanías de  $H^-$

$$g^{U\varphi} = -2\kappa U \left( \frac{2amr}{\Sigma\Delta} - \pm_{oi} \frac{a\sqrt{R}}{\Sigma\Delta} \right) \approx \mathbf{h}(r, \theta) = 2\kappa_+ U_0 \frac{a}{\Sigma}, \quad (7.70)$$

$$g^{V\varphi} = 2\kappa V \left( \frac{2amr}{\Sigma\Delta} \pm_{oi} \frac{a\sqrt{R}}{\Sigma\Delta} \right) \approx \tilde{\mathbf{h}}(r, \theta) = -\frac{8amr}{\Sigma} \frac{\kappa_+ e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{U_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}}; \quad (7.71)$$

donde  $\mathbf{h}(r, \theta)$  y  $\tilde{\mathbf{h}}(r, \theta)$  son funciones bien comportadas en  $(r_-)$ , y particularmente en el horizonte  $H^-$ . Es importante mencionar que el buen comportamiento mostrado, se logró

siguiendo un camino en particular. Sin embargo, el resultado es válido para cualquier otro camino de aproximación a  $H^-$ .

De la forma funcional que tienen las expresiones anteriores es fácil ver que no sólo la métrica sino sus primeras derivadas, también son regulares en los horizontes.

De esta manera, luego de analizar el comportamiento de la métrica en su forma contra-variante, se ha mostrado lo anunciado al comienzo del capítulo, es decir que las coordenadas  $\{U, V, \theta, \varphi\}$ , logran extender de forma regular las coordenadas *centro de masa*  $\{u, v, \theta, \varphi\}$  a través de ambos horizontes externos  $H^+$  y  $H^-$ .

Por último, es importante notar que este estudio se puede repetir, y lo haremos, cuando uno quiere estudiar el traspaso a través de los horizontes de Cauchy  $C^+$  y  $C^-$ , que están en el interior del agujero negro, y refieren a la condición  $r = r_-$ ; pero esto será estudiado en un trabajo posterior a esta tesis.

## 7.4. Coordenadas T y X en Kerr

Comencemos con coordenadas Boyer-Lindquist, y analicemos las superficies ( $t = cte$ ) y ( $r = cte$ ). Los vectores normales a tales superficies, cambian sus rasgos causales según la región del espaciotiempo. Si calculamos sus normas, tenemos

$$g^{ab} (dt)_a (dt)_b = \frac{\Upsilon}{\Sigma \Delta} = \frac{\Upsilon}{(r^2 + a^2 \cos^2(\theta)) (r - r_+) (r - r_-)}, \quad (7.72)$$

$$g^{ab} (dr)_a (dr)_b = -\frac{\Delta}{\Sigma} = -\frac{(r - r_+) (r - r_-)}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)}. \quad (7.73)$$

Fuera y lejos de los horizontes exteriores ( $r \gg r_+$ ), tenemos  $(dt)_a$  temporal, y  $(dr)_a$  espacial. Por lo tanto el cambio en los valores de  $t$  y  $r$ , siguen direcciones temporales y espaciales. En ese caso, como Kerr es asintóticamente plano, podemos asociar los valores de  $t$  y  $r$  con alguna noción de tiempo y distancia radial. Sin embargo, en la región interior ( $r_- < r < r_+$ ),  $(dt)_a$  cambia a espacial y  $(dr)_a$  a temporal. Por lo tanto, ya no es posible asociar la misma noción a  $t$  y  $r$ . Claramente, una interpretación causal en coordenadas Boyer-Lindquist se torna muy complicada.

Una ventaja de trabajar con coordenadas nulas *centro de masa*, es que nos permiten definir dos nuevas coordenadas, una temporal  $T$  y una espacial  $X$ , en todo el espaciotiempo.

Las propuesta de Kruskal-Szekeres para Schwarzschild Kruskal [1960], Szekeres [1960], llamadas  $T, X$  en Wald [1984], puede extenderse al caso de Kerr usando las coordenadas *centro de masa* extendidas  $U, V$ , simplemente definiendo

$$T = \frac{1}{2} (V + U), \quad (7.74)$$

$$X = \frac{1}{2} (V - U). \quad (7.75)$$

Los vectores normales a las superficies ( $T = cte$ ) y ( $X = cte$ ), están dados por

$$(dT)_a = \frac{1}{2} (dV)_a + \frac{1}{2} (dU)_a, \quad (7.76)$$

$$(dX)_a = \frac{1}{2} (dV)_a - \frac{1}{2} (dU)_a. \quad (7.77)$$

Si calculamos sus normas, haciendo uso de (7.66) obtenemos

$$g^{ab} (dT)_a (dT)_b = -2\kappa^2 \frac{\Upsilon}{\Sigma\Delta} UV > 0, \quad (7.78)$$

$$g^{ab} (dX)_a (dX)_b = 2\kappa^2 \frac{\Upsilon}{\Sigma\Delta} UV < 0. \quad (7.79)$$

Para mostrar el signo de cada norma, primero notar que ( $\Upsilon > 0$ ) en todo el espaciotiempo (en Chandrasekhar [1992], se enfatiza denotándola como una cantidad real elevada al cuadrado). Luego debemos tener una expresión del producto  $UV$ . Si utilizamos las expresiones sin aproximaciones de  $u$  y  $v$

$$u(t, r, \theta, \phi) = t - \left( r + \frac{2mr_+}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2mr_-}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right) - \int_0^\theta \pm_{|h} \sqrt{K(r, \theta') - a^2 \sin^2(\theta')} d\theta', \quad (4.33)$$

$$v(t, r, \theta, \phi) = t + \left( r + \frac{2mr_+}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2mr_-}{r_+ - r_-} \ln\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \right) + \int_0^\theta \pm_{|h} \sqrt{K(r, \theta') - a^2 \sin^2(\theta')} d\theta'; \quad (4.38)$$

y escogemos  $\kappa = \kappa_+$  (7.51); obtenemos explícitamente

$$UV \Big|_{\kappa=\kappa_+} = - e^{2\kappa_+ \left( r + \int_0^\theta \pm_{|h} \sqrt{\Theta(r, \theta')} d\theta' \right)} \frac{(r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{(r_+) (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}} \Delta. \quad (7.80)$$

Luego, en la región ( $r_- < r < \infty$ ) es explícito el carácter temporal de  $(dT)_a$  y espacial de  $(dX)_a$ .



# Capítulo 8

## Ecuación de onda de un campo escalar

A manera de introducción se escribe la ecuación de campo escalar sin masa, para Minkowski y Schwarzschild, en diferentes sistemas coordenados. Se reproducen y analizan resultados conocidos en la literatura, como paso previo al estudio en Kerr.

Se escribe la ecuación de campo escalar sin masa para Kerr, en las coordenadas centro de masa, con nueva coordenada angular bien comportada  $\varphi$ . Se estudia en detalle el buen comportamiento obtenido en el horizonte.

### 8.1. Ecuación de campo escalar sin masa

La ecuación de campo escalar sin masa está dada por

$$\nabla^a \nabla_a \Phi = 0. \quad (8.1)$$

Para encontrar una expresión general de cálculo en coordenadas, podemos notar lo siguiente

$$\nabla^a \nabla_a \Phi = g^{ab} \nabla_b \nabla_a \Phi = g^{ab} \nabla_b \partial_a \Phi = \nabla_b (g^{ab} \partial_a \Phi). \quad (8.2)$$

Y luego, por (eq 3.4.10) de Wald [1984], tenemos una expresión operacional para cada sistema coordenado

$$\nabla^a \nabla_a \Phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{|g|} g^{\mu\beta} \frac{\partial \Phi(x^1, x^2, x^3, x^4)}{\partial x^\beta} \right) = 0. \quad (8.3)$$

En lo que sigue, calcularemos (8.3) en diferentes espaciotiempos y sistemas coordenados.

### 8.2. Minkowski: Ecuación de campo escalar sin masa

#### 8.2.1. Coordenadas cartesianas $\{t, x, y, z\}$

En este caso, la métrica de Minkowski está dada por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (8.4)$$

Luego, consideremos un campo escalar  $\Phi_{Mink}(t, x, y, z)$ . La ecuación de campo escalar sin masa (8.3), en este caso está dada por

$$\nabla^a \nabla_a \Phi_{Mink} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (8.5)$$

### 8.2.2. Coordenadas esféricas $\{t, r, \theta, \phi\}$

En este caso, la métrica de Minkowski está dada por

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (8.6)$$

Luego consideramos un campo escalar  $\Phi_{Mink}(t, r, \theta, \phi)$ , y la ecuación de campo escalar sin masa (8.3), en este caso está dada por

$$\begin{aligned} \nabla^a \nabla_a \Phi_{Mink} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos(\theta)}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \right] \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla_{(r, \theta, \phi)}^2 \Phi \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \nabla_{(\theta, \phi)}^2 \Phi, \end{aligned} \quad (8.7)$$

Para resolver esta ecuación diferencial es común introducir armónicos esféricos

$$\Phi_{Mink} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ \frac{f_l(t, r)}{r} \right] Y_l^m(\theta, \phi), \quad (8.8)$$

que satisface

$$r^2 \nabla_{(r, \theta, \phi)}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = r^2 \nabla_{(\theta, \phi)}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (8.9)$$

es decir

$$\nabla_{(\theta, \phi)}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_l^m(\theta, \phi). \quad (8.10)$$

Si reemplazamos (8.8) en (8.7), obtenemos

$$\nabla^a \nabla_a \Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{\partial^2 f_l(t, r)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f_l(t, r)}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} f_l(t, r) \right\} \frac{Y_l^m(\theta, \phi)}{r} = 0, \quad (8.11)$$

es decir

$$\frac{\partial^2 f_l(t, r)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f_l(t, r)}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} f_l(t, r) = 0, \quad \forall l = 0, \dots, \infty. \quad (8.12)$$

### 8.2.3. Coordenadas nuladas $(u, v)$

En este caso la métrica está dada por

$$ds^2 = du dv - r(u, v)^2 d\theta^2 - r(u, v)^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (8.13)$$

en donde la dependencia de  $r(u, v)$  proviene de la definición de coordenadas nuladas  $du = dt - dr$ ,  $dv = dt + dr$ , que pueden integrarse fácilmente para obtener  $(u = t - r)$ ,  $(v = t + r)$  y

$$r = \frac{v - u}{2}. \quad (8.14)$$

Luego podemos escribir explícitamente la métrica en coordenadas nulas

$$ds^2 = du dv - \left(\frac{v-u}{2}\right)^2 d\theta^2 - \left(\frac{v-u}{2}\right)^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (8.15)$$

Consideremos el campo escalar  $\Phi_{Mink}(u, v, \theta, \phi)$ . Luego, la ecuación de campo escalar sin masa (8.3), en este caso está dada por

$$\begin{aligned} \nabla^a \nabla_a \Phi_{Mink} &= 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} + \frac{2}{r} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos(\theta)}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \right] \\ &= 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} + \frac{2}{r} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) - \nabla_{(\theta, \phi)}^2 \Phi, \end{aligned} \quad (8.16)$$

Para resolver esta ecuación diferencial, se utilizan los armónicos esféricos, pero en este caso se considera una dependencia con  $(u, v)$

$$\Phi_{Mink} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ \frac{f_l(u, v)}{r} \right] Y_l^m(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ \frac{f_l(u, v)}{\left(\frac{v-u}{2}\right)} \right] Y_l^m(\theta, \phi), \quad (8.17)$$

donde la parte angular satisface las propiedades usuales

$$r^2 \nabla_{(r, \theta, \phi)}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = r^2 \nabla_{(\theta, \phi)}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (8.18)$$

es decir

$$\nabla_{(\theta, \phi)}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_l^m(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{\left(\frac{v-u}{2}\right)^2} Y_l^m(\theta, \phi). \quad (8.19)$$

Si reemplazamos (8.17) en (8.16), obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla^a \nabla_a \Phi &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ 4 \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} \left( \frac{f_l(u, v)}{\left(\frac{v-u}{2}\right)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\left(\frac{v-u}{2}\right)} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{f_l(u, v)}{\left(\frac{v-u}{2}\right)} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{f_l(u, v)}{\left(\frac{v-u}{2}\right)} \right) \right] + \frac{l(l+1)}{r^2} f_l(u, v) \right\} \frac{Y_l^m(\theta, \phi)}{r} = 0, \end{aligned} \quad (8.20)$$

luego de calcular explícitamente las derivadas, tenemos

$$\boxed{\nabla^a \nabla_a \Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ 4 \frac{\partial^2 f_l(u, v)}{\partial v \partial u} + \frac{l(l+1)}{r^2} f_l(u, v) \right\} \frac{Y_l^m(\theta, \phi)}{r} = 0,} \quad (8.21)$$

es decir

$$4 \frac{\partial^2 f_l(u, v)}{\partial v \partial u} + \frac{l(l+1)}{r^2} f_l(u, v) = 4 \frac{\partial^2 f_l(u, v)}{\partial v \partial u} + \frac{l(l+1)}{\left(\frac{v-u}{2}\right)^2} f_l(u, v) = 0, \quad \forall l = 0, \dots, \infty. \quad (8.22)$$

### 8.3. Schwarzschild: Ecuación de campo escalar sin masa

#### 8.3.1. Coordenadas estándares $\{t, r, \theta, \phi\}$

En este caso, la métrica de Schwarzschild es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (8.23)$$

Consideremos un campo escalar  $\Phi_{Schw}(t, r, \theta, \phi)$ . La ecuación de campo escalar sin masa (8.3), en este caso está dada por

$$\begin{aligned} \nabla^a \nabla_a \Phi_{Schw} = & \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}, \end{aligned} \quad (8.24)$$

Donde podemos identificar la parte angular

$$\nabla^a \nabla_a \Phi_{Schw} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \nabla_{(\theta, \phi)}^2 \Phi \quad (8.25)$$

donde la dependencia con el horizonte es explícita en el factor  $\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$ .

Para resolver esta ecuación diferencial, en la literatura es común introducir armónicos esféricos

$$\Phi_{Schw} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ \frac{f_l(t, r)}{r} \right] Y_l^m(\theta, \phi), \quad (8.26)$$

que satisfacen

$$r^2 \nabla_{(r, \theta, \phi)}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = r^2 \nabla_{(\theta, \phi)}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (8.27)$$

es decir

$$\nabla_{(\theta, \phi)}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2} Y_l^m(\theta, \phi). \quad (8.28)$$

Si reemplazamos (8.26) en (8.24), obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla^a \nabla_a \Phi_{Schw} = & \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \frac{\partial^2 f_l(t, r)}{\partial t^2} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\partial^2 f_l(t, r)}{\partial r^2} - \frac{2m}{r^2} \frac{\partial f_l(t, r)}{\partial r^2} \right. \\ & \left. + \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m}{r^3} \right] f_l(t, r) \right\} \frac{Y_l^m(\theta, \phi)}{r} = 0, \end{aligned} \quad (8.29)$$

Es decir,  $\forall l = 0, \dots, \infty$  debe cumplirse que

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} \frac{\partial^2 f_l(t, r)}{\partial t^2} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\partial^2 f_l(t, r)}{\partial r^2} - \frac{2m}{r^2} \frac{\partial f_l(t, r)}{\partial r^2} + \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m}{r^3} \right] f_l(t, r) = 0. \quad (8.30)$$

Si multiplicamos ambos lados por  $(1 - \frac{2m}{r})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_l(t, r)}{\partial t^2} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \frac{\partial^2 f_l(t, r)}{\partial r^2} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{2m}{r^2} \frac{\partial f_l(t, r)}{\partial r} \\ + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m}{r^3} \right] f_l(t, r) = 0, \end{aligned} \quad (8.31)$$

podemos identificar el segundo y tercer termino con la derivada respecto a  $r_* = r + \ln(\frac{r}{2m} - 1)$ , usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial r_*} = \frac{dr}{dr_*} \frac{\partial}{\partial r} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r}, \quad (8.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dr}{dr_*} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{dr}{dr_*} \frac{\partial}{\partial r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{2m}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Luego podemos expresar (8.31) como

$$\boxed{\frac{\partial^2 f_l(t, r)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f_l(t, r)}{\partial r_*^2} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m}{r^3} \right] f_l(t, r) = 0, \quad \forall l = 0, \dots, \infty.} \quad (8.34)$$

### 8.3.2. Coordenadas nulas $\{u, v, \theta, \phi\}$

Comenzamos con la metrica de Schwarzschild en las coordenadas estandares

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (8.35)$$

Luego consideramos la coordenada tortuga

$$r_* = r + 2m \ln \left( \frac{r}{2m} - 1 \right), \quad (8.36)$$

ó

$$dr_* = \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} dr, \quad (8.37)$$

para definir las coordenadas

$$du = dt - \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} dr, \quad (8.38)$$

$$dv = dt + \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} dr. \quad (8.39)$$

A partir de (8.38) y (8.39), podemos escribir

$$dt = \frac{du + dv}{2}, \quad (8.40)$$

$$dr_* = \frac{dv - du}{2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} dr, \quad (8.41)$$

con

$$r_* = r + 2m \ln \left( \frac{r}{2m} - 1 \right) = r + 2m \ln \left( 1 - \frac{r}{2m} \right) = \frac{v-u}{2} \quad (8.42)$$

y

$$dr = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \left( \frac{dv - du}{2} \right). \quad (8.43)$$

Si reemplazamos (8.40) y (8.41) en (8.35), obtenemos

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \left( \frac{du + dv}{2} \right)^2 - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \left( \frac{dv - du}{2} \right)^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (8.44)$$

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) du dv - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (8.45)$$

Luego, la ecuación de campo escalar sin masa (8.3), en este caso está dada por

$$\nabla^a \nabla_a \Phi_{Schw} = \frac{4}{\left( 1 - \frac{2m}{r} \right)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} - \frac{2}{r} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) - \nabla_{(\theta, \phi)}^2 \Phi \quad (8.46)$$

### 8.3.3. Coordenadas nulas $\{U, V, \theta, \phi\}$

Definimos las coordenadas nulas  $U, V$  como

$$U = -e^{-\frac{v}{4m}} \quad (8.47)$$

$$V = e^{\frac{v}{4m}}, \quad (8.48)$$

luego tenemos

$$du = -\frac{4m}{U} dU, \quad (8.49)$$

$$dv = \frac{4m}{V} dV. \quad (8.50)$$

Reemplazamos en (8.44) y obtenemos la métrica de Schwarzschild en coordenadas nulas  $U, V$

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m}{r(U, V)} \right) \frac{16m^2}{UV} dU dV - r(U, V)^2 d\theta^2 - r(U, V)^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (8.51)$$

donde

$$dr = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \left( \frac{4m}{V} dV + \frac{4m}{U} dU \right), \quad (8.52)$$

es decir

$$\frac{\partial r}{\partial U} = \left( 1 - \frac{2m}{r(U, V)} \right) \frac{2m}{U} \quad (8.53)$$

$$\frac{\partial r}{\partial V} = \left( 1 - \frac{2m}{r(U, V)} \right) \frac{2m}{V}. \quad (8.54)$$

Si calculamos la ecuación de campo escalar sin masa (8.3), tenemos

$$\nabla^a \nabla_a \Phi_{Schw} = -\frac{1}{4m^2} \frac{UV}{\left( 1 - \frac{2m}{r} \right)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U \partial V} - \frac{2}{r} \left( \frac{V}{4m} \frac{\partial \Phi}{\partial V} + \frac{U}{4m} \frac{\partial \Phi}{\partial U} \right) - \nabla_{(\theta, \phi)}^2 \Phi. \quad (8.55)$$

Para ver si hemos logrado evitar la singularidad de coordenadas, veamos el limite

$$\lim_{r \rightarrow 2m} \frac{U V}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}, \quad (8.56)$$

que es de tipo  $\frac{0}{0}$ , por lo tanto podríamos intentar usar regla de L'hopital; pero no es necesario. Observemos que

$$UV = -e^{\frac{v-u}{4m}}. \quad (8.57)$$

Luego, a partir de

$$r_* = r + 2m \ln \left( \frac{r}{2m} - 1 \right) = \frac{v-u}{2}, \quad (8.42)$$

reemplazando en (8.57), obtenemos

$$UV = -e^{\frac{2r+4m \ln(\frac{r}{2m}-1)}{4m}} = -e^{\frac{r}{2m}} \left( \frac{r}{2m} - 1 \right); \quad (8.58)$$

es decir

$$\frac{U V}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} = -e^{\frac{r}{2m}} \left( \frac{r}{2m} \right). \quad (8.59)$$

Usando el resultado previo, podemos escribir la métrica (8.51) como

$$ds^2 = \frac{32 m^3 e^{-\frac{r}{2m}}}{r} dU dV - r (U, V)^2 d\theta^2 - r (U, V)^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (8.60)$$

Finalmente obtenemos un sistema coordenado en donde la ecuación de campo escalar sin masa es regular en el horizonte ( $r = 2m$ )

$$\boxed{\nabla^a \nabla_a \Phi_{Schw} = \frac{r e^{\frac{r}{2m}}}{(2m)^3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U \partial V} - \frac{2}{r} \left( \frac{V}{4m} \frac{\partial \Phi}{\partial V} + \frac{U}{4m} \frac{\partial \Phi}{\partial U} \right) - \nabla_{(\theta, \phi)}^2 \Phi}. \quad (8.61)$$

En el caso de Kerr, que analizaremos en la próxima sección, el producto de  $UV$  también tendrá un rol importante en la regularidad de la ecuación de campo escalar sin masa.

## 8.4. Kerr: Ecuación de campo escalar sin masa

En el caso de Kerr, si intentamos calcular (8.3) en las coordenadas  $\{u, v, \theta, \varphi\}$ , nos encontramos con una gran dificultad, las expresiones a manipular resultan ser muy extensas y complicadas.

Sin embargo, podemos seguir un camino más corto. La estrategia es comenzar con la ecuación de campo escalar sin masa en las coordenadas de Boyer-Lindquist y luego hacer la transformación a las nulas *centro de masa*.

### 8.4.1. Coordenadas Boyer-Lindquist

Comenzamos con la ecuación de campo escalar sin masa en las coordenadas Boyer-Lindquist, que puede encontrarse en Teukolsky [1972]

$$\begin{aligned} (\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma = & \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2(\theta)^2 \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{4amr}{\Delta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \phi} + \left[ \frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin(\theta)^2} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \\ & - \frac{\partial}{\partial r} \left( \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8.62)$$

### 8.4.2. Transformación a coordenadas *centro de masa* $\{u, v, \theta, \varphi\}$

El cambio de coordenadas será desde  $\{t, r, \theta, \phi\}$  a  $\{du, dv, \tilde{\theta}, \varphi\}$ . Las coordenadas iniciales, pueden escribirse en términos de las nuevas como

$$dt = \frac{dv + du}{2}, \quad (5.4)$$

$$dr = \frac{\Delta}{\sqrt{\mathcal{R}}} \left[ \frac{(dv - du)}{2} - (\pm|_h \sqrt{\Theta}) d\theta \right], \quad (4.73)$$

$$d\theta = d\tilde{\theta}, \quad (8.63)$$

$$d\phi = d\varphi \pm_{io} \frac{a}{\Delta} dr. \quad (6.11)$$

Será útil tener expresiones de las nuevas coordenadas en términos de las iniciales

$$du = dt - \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr - (\pm|_h \sqrt{\Theta}) d\theta, \quad (4.68)$$

$$dv = dt + \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr + (\pm|_h \sqrt{\Theta}) d\theta, \quad (4.69)$$

$$d\tilde{\theta} = d\theta, \quad (4.86)$$

$$d\varphi = d\phi - \pm_{io} \frac{a}{\Delta} dr. \quad (6.11)$$

Finalmente, (ver Apéndice A), se obtiene

$$\begin{aligned} (\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma = & 4 \left( \frac{\mathcal{R}}{\Delta} + \Theta \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \left( \partial_r \sqrt{\mathcal{R}} \pm_{|h} \partial_\theta \sqrt{\Theta} \pm_{|h} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{\Theta} \right) \\ & + \frac{2a}{\Delta} \left( 2mr \pm_{io} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} \right) + \frac{2a}{\Delta} \left( 2mr - \pm_{io} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \varphi} \right) \\ & - \pm_{|h} 2 \sqrt{\Theta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \theta} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \theta} \right) \\ & - \frac{1}{\sin(\theta)^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8.64)$$

Donde se consideró  $\tilde{\theta} = \theta$ , para simplificar notación. Por otro lado, notar que el coeficiente de las derivadas primeras respecto a  $u$  y  $v$ , es el coeficiente de espín  $\rho$ , ver (4.64).

Por último, es importante comparar (8.64) con (8.46), para apreciar la consistencia de las expresiones. Si tomamos ( $a = 0$ ) en (8.64), tenemos

$$\Theta|_{(a=0)} = 0, \quad (8.65)$$

$$\Sigma|_{(a=0)} = r^2, \quad (8.66)$$

$$\partial_r \sqrt{\mathcal{R}}|_{(a=0)} = 2r, \quad (8.67)$$

$$\frac{\mathcal{R}}{\Delta}|_{(a=0)} = \frac{r^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}; \quad (8.68)$$

por lo cual, en el caso ( $a = 0$ ), se recupera la ecuación de campo escalar de Schwarzschild en coordenadas nulas (Eddington-Finkelstein) (8.46), tal como era esperado.

### 8.4.3. Coordenadas *centro de masa* extendidas $\{U, V, \theta, \varphi\}$

A partir de las definiciones de coordenadas extendidas  $(U, V)$  dadas por las ecuaciones (7.42) y (7.43), tenemos

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial}{\partial V} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial}{\partial U} = -\kappa U \frac{\partial}{\partial U}, \quad (8.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial U}{\partial v} \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial}{\partial V} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial}{\partial V} = \kappa V \frac{\partial}{\partial V}. \quad (8.70)$$

Si reemplazamos (8.69) y (8.70) en (8.64), obtenemos

$$\begin{aligned} (\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma &= -4\kappa^2 \left( \frac{\mathcal{R}}{\Delta} + \Theta \right) UV \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V \partial U} - \kappa \left( V \frac{\partial \Phi}{\partial V} + U \frac{\partial \Phi}{\partial U} \right) \left[ \partial_r \sqrt{\mathcal{R}} \pm_{|h} \left( \partial_\theta \sqrt{\Theta} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{\Theta} \right) \right] \\ &+ \frac{2a\kappa V}{\Delta} \left( 2mr \pm_{|oi} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V \partial \varphi} \right) - \frac{2a\kappa U}{\Delta} \left( 2mr - \pm_{|oi} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U \partial \varphi} \right) \\ &- \pm_{|h} 2\sqrt{\Theta} \kappa \left( V \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V \partial \theta} + U \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U \partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0, \end{aligned} \quad (8.71)$$

Si nos concentramos en estudiar las soluciones de (8.71) en  $r > 0$ , lo que implica también  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta) > 0$ ; las soluciones de (8.71) son las mismas que las de

$$\begin{aligned} 4\kappa^2 \left( \frac{\mathcal{R}}{\Delta} + \Theta \right) UV \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V \partial U} &= -\kappa \left( V \frac{\partial \Phi}{\partial V} + U \frac{\partial \Phi}{\partial U} \right) \left[ \partial_r \sqrt{\mathcal{R}} \pm_{|h} \left( \partial_\theta \sqrt{\Theta} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{\Theta} \right) \right] \\ &+ \frac{2a\kappa V}{\Delta} \left( 2mr \pm_{|oi} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V \partial \varphi} \right) - \frac{2a\kappa U}{\Delta} \left( 2mr - \pm_{|oi} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U \partial \varphi} \right) \\ &- \pm_{|h} 2\sqrt{\Theta} \kappa \left( V \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V \partial \theta} + U \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U \partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (8.72)$$

En (8.72), se pueden identificar tres coeficientes que aparentan tener problemas en  $r_+$ , para ambos horizontes externos  $H^+$  (futuro) y  $H^-$  (pasado). En lo que sigue, primero mostraremos el buen comportamiento en  $H^+$ , y luego en  $H^-$ . A grandes rasgos, se harán elecciones similares a como se hizo en Capítulo 7, Sección 7.3. En el caso de los horizontes externos, se escoge  $\kappa = \kappa_+$  (7.51).

Comenzaremos analizando el segundo y tercer término del lado derecho de (8.72); que pueden tratarse en simultáneo. La estrategia es escoger un camino para aproximarnos a  $H^+$ . De manera similar a como se hizo en el capítulo anterior, podemos movernos a  $V$  constante, es decir  $V = V_0$ , y aproximarnos a  $(r_+)$ . En ese caso, tenemos

$$U |_{V=V_0, (r \approx r_+)} \approx - \frac{e^{2\kappa_+ r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{V_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}} \Delta. \quad (7.53)$$

Luego, como se mencionó en capítulo Capítulo 6, la coordenada angular bien definida en  $H^+$ , corresponde a  $\varphi_-$ , es decir debemos considerar la elección de signo ( $\pm_{io} = -$ ). Por lo

cual, los términos bajo análisis adoptan las siguientes expresiones

$$\frac{2a\kappa_+V}{\Delta} (2mr - \sqrt{\mathcal{R}}) \approx -2a\kappa_+V_0, \quad (8.73)$$

$$-\frac{2a\kappa_+U}{\Delta} (2mr + \sqrt{\mathcal{R}}) \approx \frac{2a\kappa_+e^{2\kappa_+r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{V_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_++r_-}{r_+}}} (2mr + r^2 + a^2), \quad (8.74)$$

es decir que ambos coeficientes poseen buen comportamiento en  $H^+$ .

De forma análoga, se puede mostrar que poseen buen comportamiento en  $H^-$ . Para ello, primero escogemos el camino hacia  $H^-$ . Por ejemplo, podemos movernos a  $U$  constante, es decir  $U = U_0$ , y aproximarnos a  $(r_+)$ . En ese caso, tenemos

$$V |_{U=U_0, (r \approx r_-)} \approx -\frac{e^{2\kappa_+r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{U_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_++r_-}{r_+}}} \Delta. \quad (8.57)$$

Luego, como se mencionó en capítulo Capítulo 6, la coordenada angular bien definida en  $H^-$ , corresponde a  $\varphi_+$ , es decir debemos considerar la elección de signo ( $\pm_{io} = +$ ) en los términos bajo análisis. Por lo cual, cada uno adopta las siguientes expresiones

$$\frac{2a\kappa V}{\Delta} (2mr + \sqrt{\mathcal{R}}) \approx -\frac{2a\kappa_+e^{2\kappa_+r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{U_0 r_+ (r - r_-)^{\frac{r_++r_-}{r_+}}} (2mr + r^2 + a^2), \quad (8.75)$$

$$-\frac{2a\kappa_+U}{\Delta} (2mr - \sqrt{\mathcal{R}}) \approx 2a\kappa_+U_0, \quad (8.76)$$

es decir que ambos coeficientes poseen buen comportamiento en  $H^-$ .

Sólo resta analizar el último coeficiente que aparenta tener problemas en los horizontes exteriores. Es el que está en el miembro izquierdo de (8.72). Para analizarlo, antes debemos tener una expresión del producto  $UV$ ; si utilizamos las expresiones sin aproximaciones de  $u$  (4.33) y  $v$  (4.38); obtenemos explícitamente

$$UV |_{\kappa=\kappa_+} = -e^{2\kappa_+(r+\int_0^\theta \pm_{|h} \sqrt{\Theta(r,\theta')} d\theta')} \frac{(r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{(r_+) (r - r_-)^{\frac{r_++r_-}{r_+}}} \Delta. \quad (8.80)$$

Notar que al considerar las expresiones completas sin aproximar (4.33) y (4.38), se introduce la dependencia angular dada por la integral en coordenada  $\theta$ . Finalmente el tercer termino bajo análisis, en las proximidades de  $(r_+)$ , para ambos horizontes exteriores  $H^+$  y  $H^-$ , está dado por

$$4\kappa^2 \left( \frac{\mathcal{R}}{\Delta} + \Theta \right) UV |_{r=r_+} = -4\kappa_+^2 \mathcal{R} e^{2\kappa_+(r+\int_0^\theta \pm_{|h} \sqrt{\Theta(r,\theta')} d\theta')} \frac{(r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{(r_+) (r - r_-)^{\frac{r_++r_-}{r_+}}}, \quad (8.77)$$

que es claramente regular en ambos horizontes exteriores.

Para finalizar el capítulo, es importante notar que la regularidad en los horizontes exteriores  $H^+$  y  $H^-$  de la ecuación de campo escalar sin masa en *coordenadas centro de masa extendidas*  $\{U, V, \theta, \varphi\}$ , también es válida en los horizontes de Cauchy  $C^+$  y  $C^-$ , que están

en el interior del agujero negro, y refieren a la condición  $r = r_-$ ; pero esto será estudiado en un trabajo posterior a esta tesis. Como adelanto, sólo mencionaremos que en tal caso, se deberá escoger  $\kappa = \kappa_-$

$$\kappa_- = -\frac{r_+ - r_-}{4mr_-}. \quad (8.78)$$



# Capítulo 9

## Solución de problemas característicos en Kerr

*Siguiendo técnicas similares a las de Gundlach et al. [1994] y Eilon and Ori [2016], se plantea un esquema característico general, para resolver la ecuación de un campo escalar sin masa en Kerr haciendo uso del sistema de coordenadas doblemente nulo.*

*Se desarrolla un código numérico que permite, entre otras cosas dar dato inicial fuera del horizonte de eventos, con dependencia angular no trivial y evolucionar numéricamente hasta atravesar y adentrarse incluso en las regiones delimitadas por ambos horizontes.*

*En la literatura se estudió ampliamente la ecuación de un campo escalar para el caso de Kerr. Sin embargo, una de las principales dificultades es trabajar cerca del horizonte de eventos. El enfoque comúnmente utilizado es usar coordenadas de Boyer-Lindquist para trabajar en la región exterior (ver por ejemplo Tiglio et al. [2008]). Cuando se necesita hacerlo en regiones cercanas e interiores se suelen utilizar coordenadas Kerr-Schild; usando una descomposición espacial-temporal 3+1 para resolver la ecuación de campo escalar.*

*Usar coordenadas doblemente nuladas (descomposición nula-nula 2+2), para resolver la ecuación de campo escalar, hasta ahora solo se hizo en Schwarzschild Gundlach et al. [1994]. Por lo cual, el cálculo en Kerr resulta novedoso y no tiene antecedentes en la literatura.*

### 9.1. Esquema numérico doblemente nulo

En esta tesis, se trabaja numéricamente en coordenadas *centro de masa extendidas*  $\{U, V, \theta, \varphi\}$ , que permiten atravesar ambos horizontes  $H^+$ ,  $H^-$ . Aunque en este capítulo nos concentraremos en atravesar el horizonte exterior  $H^+$ .

Sin embargo, el esquema numérico es aplicable siempre que se disponga de un sistema doblemente nulo, y por lo tanto también se puede aplicar usando coordenadas *centro de masa*  $u, v$ . Debido a la generalidad del método, en esta sección llamaremos simplemente  $u, v$  al par de coordenadas nuladas, sin distinguir con la versión extendida.

Comenzamos escribiendo la ecuación (8.72), de una forma más compacta

$$\Phi_{uv} = F(\Phi, \Phi_u, \Phi_v, \Phi_{v\theta}, \Phi_{u\theta}, \Phi_{v\varphi}, \Phi_{u\varphi}, \Phi_{\varphi\varphi}, \Phi_{\theta\theta}, \Phi_\theta), \quad (9.1)$$

donde las derivadas parciales se denotan como

$$\Phi_{x^\alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha}, \quad (9.2)$$

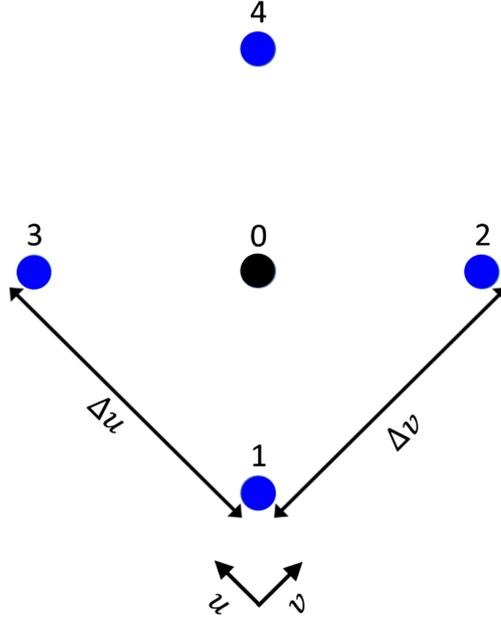


Figura 9.1: **Cuadrícula base de esquema numérico:** Los valores de  $\Phi$  en los puntos 1, 2, 3 son conocidos. En el punto 4, se determinará numéricamente

$$\Phi_{x^\alpha x^\beta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (9.3)$$

La parte fundamental del algoritmo es considerar en detalle subregiones del grillado, en bloques básicos de 4 puntos, que resulta ser la grilla básica del esquema numérico. Ver figura 9.1.

Luego utilizaremos las aproximaciones de diferencias centradas, que aproximan las derivadas

$$\begin{aligned} \Phi_{uv} \approx & \frac{\Phi(u + \delta u, v + \delta v) - \Phi(u + \delta u, v - \delta v) - \Phi(u - \delta u, v + \delta v) + \Phi(u - \delta u, v - \delta v)}{4\delta u \delta v} \\ & + \mathcal{O}(\delta u)^2 + \mathcal{O}(\delta v)^2. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Si se considera

$$\delta u = \frac{\Delta u}{2}, \quad (9.5)$$

y se evalúa (9.4) en el punto 0 (figura 9.1), se obtiene

$$(\Phi_{uv})_{|_0} \approx \frac{\Phi_4 - \Phi_3 - \Phi_2 + \Phi_1}{\Delta u \Delta v} + \mathcal{O}[(\Delta u)^2] + \mathcal{O}[(\Delta v)^2]; \quad (9.6)$$

que es exactamente la misma expresión utilizada en ambos trabajos sobre los cuales está inspirado el esquema numérico, es decir Gundlach et al. [1994] y Eilon and Ori [2016]. En ambos casos se trabaja y aproxima la derivada cruzada, que junto a la ecuación diferencial (9.1) que denotaremos como

$$(\Phi_{uv})_{|_0} = F(u_0, v_0) = F_{|_0}; \quad (9.7)$$

se obtiene una estimación numérica de  $\Phi_4$

$$\Phi_4 \approx \Phi_3 + \Phi_2 - \Phi_1 + (\Delta u \Delta v) F_{|_0} + \mathcal{O} [\Delta v (\Delta u)^3] + \mathcal{O} [\Delta u (\Delta v)^3]. \quad (9.8)$$

En el caso de una grilla del tipo  $(\Delta u = \Delta v = h)$ , tenemos la ecuación central del esquema numérico doblemente nulo

$$\boxed{\Phi_4 \approx \Phi_3 + \Phi_2 - \Phi_1 + h^2 F_{|_0} + \mathcal{O} [h^4]}. \quad (9.9)$$

En el siguiente paso se toma una nueva cuadrícula base, avanzando  $\Delta v$  y se integra  $\Phi_4$ . Completado el rango de  $v$ , se regresa al  $v$  inicial, y se toma una nueva cuadrícula base avanzando  $\Delta u$  y se comienza nuevamente el proceso. Este esquema es consistente con un dato inicial dado en una región  $\{(u_0, v) \cup (u, v_0)\}$ .

Si la grilla  $u, v$  tiene  $N^2$  puntos, para llegar al último punto de la grilla en este esquema numérico, se realizan  $N^2$  pasos de integración. Luego, el error global es

$$\mathcal{E}_{global} = N^2 \mathcal{E}_{local}. \quad (9.10)$$

A partir de (9.9), el error local es

$$\mathcal{E}_{local} \approx \mathcal{O} [h^4]. \quad (9.11)$$

Si el espaciamiento de grilla es  $h = 1/N$ , tenemos

$$\mathcal{E}_{global} \approx \mathcal{O} [h^2]. \quad (9.12)$$

Es decir, este esquema numérico doblemente nulo es preciso a segundo orden.

En la práctica,  $F_{|_0}$  debe determinarse numéricamente como  $(F_{num})_{|_0}$ . Por lo tanto, para satisfacer (9.12), se debe aproximar el lado derecho de (9.1) con error local  $\mathcal{O} (h^2)$ , es decir

$$F_{|_0} \approx (F_{num})_{|_0} + \mathcal{O} (h^2), \quad (9.13)$$

de manera tal que el producto  $h^2 F_{|_0}$  en (9.9), genere un error local (9.11), a partir del cual se obtiene el error global buscado (9.12).

### 9.1.1. Aproximaciones de trabajos previos (en simetría esférica)

En los trabajos de Gundlach et al. [1994] y Eilon and Ori [2016] (en simetría esférica), se realizan algunas aproximaciones que también serán usadas en el caso de Kerr.

En el trabajo de Gundlach et al. [1994], se resuelve la siguiente ecuación diferencial

$$\Phi_{uv} = \frac{\mathcal{V}_l}{4} \Phi, \quad (9.14)$$

y se aproxima  $F_{|_0}$ , como

$$F_{|_0} = \frac{\mathcal{V}_l(r)}{4} (\Phi)_{|_0} \approx \frac{\mathcal{V}_l(r)}{4} \left( \frac{\Phi_3 + \Phi_2}{2} \right) + \mathcal{O} (h^2), \quad (9.15)$$

donde fundamentalmente se aproxima

$$(\Phi)_{|_0} \approx \left( \frac{\Phi_3 + \Phi_2}{2} \right) + \mathcal{O}(h^2). \quad (9.16)$$

En el trabajo de Eilon and Ori [2016], la ecuación diferencial es distinta, involucrando derivadas primeras respecto a coordenadas  $u, v$ . Para lograr la precisión (9.13), las derivadas se aproximan a segundo orden

$$(\Phi_u)_{|_0} \approx \frac{\Phi_3 - \Phi_1 + \Phi_4 - \Phi_2}{2\Delta u} + \mathcal{O}(\Delta u)^2, \quad (9.17)$$

$$(\Phi_v)_{|_0} \approx \frac{\Phi_2 - \Phi_1 + \Phi_4 - \Phi_3}{2\Delta v} + \mathcal{O}(\Delta v)^2. \quad (9.18)$$

Es importante mencionar, que en Eilon and Ori [2016] se utiliza un esquema predictor-corrector de dos pasos, que se detallará en la sección siguiente.

### 9.1.2. Esquema numérico en Kerr

A diferencia de los casos con simetría esférica, en el caso de Kerr la ecuación diferencial (9.1), involucra derivadas angulares primeras y segundas; e incluso cruzadas entre coordenadas nulas y angulares.

Para calcularlas numéricamente, hay que tener presente la dependencia de  $\Phi$  con los ángulos, es decir

$$\Phi(u_0, v_0) \equiv \Phi(u_0, v_0, \theta, \varphi), \quad \text{con } \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (9.19)$$

Cada derivada cruzada nula-angular, se calcula como

$$(\Phi_{u\theta})_{|_0} \approx D_\theta^n \left[ (\Phi_u)_{|_0} \right] + \mathcal{O}(\Delta u)^2 + \mathcal{O}(\Delta\theta)^n, \quad (9.20)$$

$$(\Phi_{v\theta})_{|_0} \approx D_\theta^n \left[ (\Phi_v)_{|_0} \right] + \mathcal{O}(\Delta v)^2 + \mathcal{O}(\Delta\theta)^n, \quad (9.21)$$

$$(\Phi_{u\varphi})_{|_0} \approx D_\varphi^n \left[ (\Phi_u)_{|_0} \right] + \mathcal{O}(\Delta u)^2 + \mathcal{O}(\Delta\varphi)^n, \quad (9.22)$$

$$(\Phi_{v\varphi})_{|_0} \approx D_\varphi^n \left[ (\Phi_v)_{|_0} \right] + \mathcal{O}(\Delta v)^2 + \mathcal{O}(\Delta\varphi)^n, \quad (9.23)$$

y las derivadas angulares como

$$(\Phi_{\theta\theta})_{|_0} \approx DD_\theta^n \left[ (\Phi)_{|_0} \right] + \mathcal{O}(\Delta\theta)^n, \quad (9.24)$$

$$(\Phi_{\varphi\varphi})_{|_0} \approx DD_\varphi^n \left[ (\Phi)_{|_0} \right] + \mathcal{O}(\Delta\varphi)^n, \quad (9.25)$$

$$(\Phi_\theta)_{|_0} \approx D_\theta^n \left[ (\Phi)_{|_0} \right] + \mathcal{O}(\Delta\theta)^n, \quad (9.26)$$

donde  $D_{x^\alpha}^n$  y  $DD_{x^\alpha}^n$  son operadores de diferencias finitas, que aproximan la derivada primera y segunda con error de orden  $\mathcal{O}(\Delta x^\alpha)^2$ . En el caso de las derivadas angulares, se aproxima  $(\Phi)_{|_0}$  a segundo orden, como (9.16). En este trabajo se trabajará a orden ( $n = 4$ ) en las

derivadas angulares. Esto determinará, como es usual en las ecuaciones hiperbólicas, una relación entre los espaciamentos de grilla en las coordenadas  $(u, v)$  y las angulares, que será necesario respetar para preservar la estabilidad numérica del esquema. Tal condición, se traduce en una cota para el cociente entre espaciamento de grillas, conocido como coeficiente CFL (Courant–Friedrichs–Lewy).

Finalmente con los valores de las derivadas en cada punto  $(u_0, v_0, \theta, \varphi)$ , se aproxima el lado derecho de (9.1)

$$(F_{num-Kerr})|_0 \approx F|_0 + \mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(\Delta\theta)^4 + \mathcal{O}(\Delta\varphi)^4, \quad (9.27)$$

obteniendo la precisión necesaria (9.13), para que el esquema numérico sea preciso a segundo orden, con error global (9.12).

Por último, al estilo de Eilon and Ori [2016], en realidad se hará uso de un esquema predictor-corrector. En un primer paso se calculan las derivadas primeras con precisión de orden uno

$$\left(\tilde{\Phi}_u\right)|_0 \approx \frac{\Phi_3 - \Phi_1}{\Delta u} + \mathcal{O}(\Delta u), \quad (9.28)$$

$$\left(\tilde{\Phi}_v\right)|_0 \approx \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta v} + \mathcal{O}(\Delta v), \quad (9.29)$$

junto con las derivadas angulares y cruzadas correspondientes; donde para el cálculo de las angulares, se usa la aproximación (9.16). Luego del primer paso, se obtiene

$$\left(\tilde{F}_{num-Kerr}\right)|_0 = F|_0 + \mathcal{O}(h), \quad (9.30)$$

$$\left(\tilde{\Phi}_4\right)_{num-Kerr} = \Phi_4 + \mathcal{O}(h^3). \quad (9.31)$$

En el segundo paso, se utiliza  $\tilde{\Phi}_4$  para calcular las derivadas primeras respecto a  $u, v$  según (9.17) y (9.18). También se calculan las derivadas angulares y cruzadas correspondientes. Para el cálculo de las angulares, se introduce la aproximación (9.16) en (9.24), (9.25) y (9.26). De esta manera, en el segundo paso se logra estimar  $F|_0$  con la precisión buscada (9.13); obteniendo

$$(F_{num-Kerr})|_0 = F|_0 + \mathcal{O}(h^2), \quad (9.32)$$

$$(\Phi_4)_{num-Kerr} = \Phi_4 + \mathcal{O}(h^4). \quad (9.33)$$

## 9.2. Datos iniciales con simetría axial

Las dificultades numéricas de trabajar con la derivada respecto a  $\varphi$  en los polos, demanda trabajar con diferentes parches coordenados para el cálculo numérico, como se hace en Gomez et al. [2007]. Lo cual es no trivial, y es una técnica que demanda un largo desarrollo.

Por tal motivo, en esta tesis se procura resolver la ecuación (8.72) con un compromiso entre los resultados y el tiempo de desarrollo. Si consideramos un dato inicial con simetría axial, se evita el desarrollo de un código al estilo de Gomez et al. [2007]; pero se mantiene la complejidad suficiente para dar dato inicial no trivial con dependencia angular en  $\theta$ .

Si el dato inicial  $\Phi$  no depende de la coordenada  $\varphi$ , mientras ( $U \neq 0, V \neq 0$ ), podemos escribir la ecuación de evolución (8.72) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V \partial U} = & \left[ \frac{1}{4 \left( \frac{\mathcal{R}}{\Delta} + \Theta \right) (\kappa^2 UV)} \right] \left\{ -\kappa \left( V \frac{\partial \Phi}{\partial V} + U \frac{\partial \Phi}{\partial U} \right) \left( \partial_r \sqrt{\mathcal{R}} \pm_{|h} \partial_\theta \sqrt{\Theta} \pm_{|h} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{\Theta} \right) \right. \\ & \left. - \pm_{|h} 2\sqrt{\Theta} \kappa \left( V \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V \partial \theta} + U \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U \partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (9.34)$$

La cual se integrará numéricamente, siguiendo el esquema presentado en sección (9.1). Al estilo de (9.1), podemos denotarla como

$$\Phi_{UV} = F(\Phi, \Phi_U, \Phi_V, \Phi_{V\theta}, \Phi_{U\theta}, \Phi_{\theta\theta}, \Phi_\theta), \quad (9.35)$$

y seguir todos los detalles del esquema numérico en Kerr, detallado en sección 9.1.2.

### 9.2.1. Atravesando horizonte de eventos

En lo que sigue, debido a que nos interesa atravesar el horizonte exterior  $H^+$ , con ( $r = r_+ \equiv (U = 0)$ ), se hará el análisis para ese caso.

La principal ventaja del uso de coordenadas  $\{U, V\}$ , es que permiten atravesar ambos horizontes exteriores  $H^+$  y  $H^-$ . Al observar en detalle (9.34), podemos preguntarnos cómo resolver tal ecuación en el horizonte, es decir cuando ( $U = 0$ ), ( $\Delta = 0$ ).

En Capítulo 8, se analizó el buen comportamiento de la ecuación de campo escalar en ambos horizontes exteriores. Se arribó a la siguiente expresión

$$4\kappa^2 \left( \frac{\mathcal{R}}{\Delta} + \Theta \right) UV \Big|_{r=r_+} = -4\kappa_+^2 \mathcal{R} e^{2\kappa_+ \left( r + \int_0^\theta \pm_{|h} \sqrt{\Theta(r, \theta')} d\theta' \right)} \frac{(r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{(r_+) (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}}. \quad (8.77)$$

Lo cual nos permite escribir (9.34) en el horizonte ( $U = 0$ )

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V \partial U} \right) \Big|_{U=0} = & \left[ \frac{-(r_+) (r - r_-)^{\frac{r_+ + r_-}{r_+}}}{4 \kappa_+^2 \mathcal{R} e^{2\kappa_+ \left[ r + \int_0^\theta (\pm_{|h} \sqrt{\Theta(r, \theta')} d\theta') \right]} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}} \right] \left\{ \right. \\ & -\kappa_+ \left( V \frac{\partial \Phi}{\partial V} \right) \left( \partial_r \sqrt{\mathcal{R}} \pm_{|h} \partial_\theta \sqrt{\Theta} \pm_{|h} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{\Theta} \right) \\ & \left. - \pm_{|h} 2\sqrt{\Theta} \kappa_+ \left( V \frac{\partial^2 \Phi}{\partial V \partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Notar que la ecuación (9.36) no presenta problemas en el horizonte, y se puede evolucionar siguiendo el esquema presentado en sección (9.1), logrando atravesar el horizonte ( $U = 0$ ). Luego de atravesarlo, tenemos  $U > 0$ ; y se continúa la evolución con (9.34).

### 9.2.2. Dependencia angular en $\theta$

La simetría axial en  $\Phi$ , naturalmente se corresponde con el hecho de que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0,\pi} = 0. \quad (9.37)$$

Luego, podemos hacer el cálculo del último término de (9.34) y (9.36) y finalmente usando regla de L'Hopital, obtenemos

$$\left[ \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \right] \Big|_{\theta=0,\pi} = 2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) \Big|_{\theta=0,\pi}. \quad (9.38)$$

Para implementar tal condición, se usarán puntos fantasmas

$$\begin{aligned} \Phi_{ghost}(\theta = 0 - h_\theta) &= \Phi(\theta = 0 + h_\theta) \\ \Phi_{ghost}(\theta = 0 - 2h_\theta) &= \Phi(\theta = 0 + 2h_\theta) \\ \Phi_{ghost}(\theta = \pi + h_\theta) &= \Phi(\theta = \pi - h_\theta) \\ \Phi_{ghost}(\theta = \pi + 2h_\theta) &= \Phi(\theta = \pi - 2h_\theta); \end{aligned} \quad (9.39)$$

que junto con la fórmula de diferencias centradas de 4to orden para el cálculo de las derivadas angulares, garantizan que en los polos se cumpla (9.37). Mientras que a su vez, se logra trabajar con el mismo orden de precisión en todo el dominio angular.

La siguiente evaluación que resulta importante de analizar, es el factor

$$\left( \partial_r \sqrt{\mathcal{R}} \pm_{|h} \partial_\theta \sqrt{\Theta} \pm_{|h} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{\Theta} \right) \quad (9.40)$$

para lo cual será útil tener presente la definición de  $k(r, \theta)$  4.12, que nos permitirá reducir las expresiones que se detallaran a continuación. Comenzamos por

$$\pm_{|h} \sqrt{\Theta} = \pm_{|h} (\sqrt{K(r, \theta) - a^2 \sin^2(\theta)}) = k(r, \theta), \quad (9.41)$$

luego

$$\pm_{|h} \partial_\theta \sqrt{\Theta} = \partial_\theta k(r, \theta), \quad (9.42)$$

$$\pm_{|h} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{\Theta} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} k(r, \theta). \quad (9.43)$$

en el caso de (9.43), necesitaremos usar la regla de L'Hopital para evaluar en los polos. Así obtenemos

$$\lim_{\theta=0,\pi} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} k(r, \theta) = \frac{\partial_\theta (k(r, \theta) \cos(\theta))}{\partial_\theta (\sin(\theta))} = \frac{(\partial_\theta k(r, \theta) \cos(\theta) - k(r, \theta) \sin(\theta))}{\cos(\theta)} = (\partial_\theta k(r, \theta)) \Big|_{\theta=0,\pi}. \quad (9.44)$$

Finalmente tenemos la expresión para calcular (9.40) en los polos

$$\boxed{\lim_{\theta=0,\pi} \left[ \pm_{|h} \partial_\theta \sqrt{\Theta} \pm_{|h} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{\Theta} \right]} = 2 \left( \frac{\partial k(r, \theta)}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=0,\pi}. \quad (9.45)$$

El termino restante en el factor (9.40) es  $\partial_r \sqrt{\mathcal{R}}$ ; y conviene escribirlo explícitamente

$$\partial_r \sqrt{\mathcal{R}} = \frac{\partial_r \mathcal{R}}{2\sqrt{\mathcal{R}}} = \frac{4r(r^2 + a^2) - \Delta \partial_r K(r, \theta) - K(r, \theta)(2r - 2m)}{2\sqrt{\mathcal{R}}} \quad (9.46)$$

para evitar el cálculo de derivadas en  $r$ , podemos hacer uso de (4.8), es decir

$$\frac{\partial K}{\partial r} = -\pm|_h \frac{\sqrt{\Theta}}{\sqrt{\mathcal{R}}} \frac{\partial K}{\partial \theta}; \quad (9.47)$$

y así reescribir (9.46), como

$$\partial_r \sqrt{\mathcal{R}} = \frac{4r(r^2 + a^2) \pm|_h \Delta \frac{\sqrt{\Theta}}{\sqrt{\mathcal{R}}} \frac{\partial K(r, \theta)}{\partial \theta} - K(r, \theta)(2r - 2m)}{2\sqrt{\mathcal{R}}}. \quad (9.48)$$

que a partir de (4.12) y (9.41), también podemos expresar como

$$\partial_r \sqrt{\mathcal{R}} = \frac{4r(r^2 + a^2)}{2\sqrt{\mathcal{R}}} + \frac{\Delta \frac{k(r, \theta)}{\sqrt{\mathcal{R}}} (2a^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + 2k(r, \theta) \partial_\theta k(r, \theta))}{2\sqrt{\mathcal{R}}} - \frac{(a^2 \sin^2(\theta) + k^2(r, \theta)) (2r - 2m)}{2\sqrt{\mathcal{R}}}. \quad (9.49)$$

### Observaciones

Al observar (9.34), es importante señalar que la ecuación es simétrica respecto a los hemisferios. Para entenderlo en detalle, primero nos concentramos en el factor

$$\left( \partial_r \sqrt{\mathcal{R}} \pm|_h \partial_\theta \sqrt{\Theta} \pm|_h \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{\Theta} \right) = \left( \partial_r \sqrt{\mathcal{R}} + \partial_\theta k(r, \theta) + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} k(r, \theta) \right) \quad (9.50)$$

el cual tiene valores simétricos y el mismo signo en ambos hemisferios. De tal manera, que incluso en el caso de que el dato inicial no tenga dependencia angular, al evolucionar el factor (9.50) incorpora en cada paso una pequeña dependencia angular; que luego al evaluar las derivadas primeras angulares en (9.51), serán positivas y negativas en cada hemisferio.

Pero justamente los términos que tienen derivadas angulares primeras están balanceados por  $\pm|_h$  y  $\cos(\theta)$ , o de manera equivalente por el signo de  $k(r, \theta)$  y  $\cos(\theta)$

$$-\pm|_h 2\sqrt{\Theta} \kappa (V \Phi_{V\theta} + U \Phi_{U\theta}) - \left( \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) \Phi_\theta = -2k(r, \theta) \kappa (V \Phi_{V\theta} + U \Phi_{U\theta}) - \left( \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) \Phi_\theta, \quad (9.51)$$

de tal manera que se mantiene el signo y la simetría de  $\Phi$  en ambos hemisferios. Respecto a las derivadas angulares segundas, debido a la simetría, sucede lo análogo.

### 9.2.3. Construcción de la grilla

Lo central es establecer la relación entre la coordenada  $r(\theta = 0)$  con los valores de  $(U, V)$ . Para lo cual utilizamos (7.80), tomando  $(\theta = 0)$ , que puede expresarse como

$$-UV - \frac{(r - r_+) (r - r_-)^{-\frac{r_-}{r_+}} e^{2\kappa+r} (r_-)^{\frac{r_-}{r_+}}}{r_+} = 0. \quad (9.52)$$

A partir de (9.52), se determina  $r(U, V, \theta = 0)$ . Numéricamente puede encontrarse usando el método de Newton-Raphson, con cualquier error de aproximación deseado.

El siguiente paso es determinar  $r(U, V, \theta)$ . Sabemos que  $(U, V = cte)$  equivalen a las superficies 2D estudiadas en Capítulo 5. En coordenadas de Boyer-Lindquist, tales superficies están dadas por  $r(\theta)$ , como solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\left(\pm|_h\sqrt{\Theta}\right)\Delta}{\sqrt{\mathcal{R}}} = -\frac{k(r, \theta)\Delta}{\sqrt{\mathcal{R}}}. \quad (5.8)$$

En este caso, se toma como dato inicial

$$r(\theta = 0) = r_0(U_0, V_0, \theta = 0), \quad (9.53)$$

y luego se integra numéricamente con el método de Runge-Kutta de cuarto orden. La dificultad es que en cada paso de integración, el nuevo valor  $r(\theta + \Delta\theta)$  en general cae fuera de la grilla donde se calculó  $K(r, \theta)$ . Por ello, se utiliza una interpolación de tres puntos bi-dimensional con polinomios de Legendre, para evaluar el lado derecho de (5.8), en cada paso intermedio del método Runge-Kutta.

## 9.3. Resultados Numéricos

### 9.3.1. Dato inicial

En base a los trabajos previos Gundlach et al. [1994] y Eilon and Ori [2016], la región  $\mathcal{D}$  donde se da el dato inicial (que además es consistente con el esquema numérico), es la siguiente

$$\mathcal{D} : \{(U_0, V) \cup (U, V_0)\}, \quad (9.54)$$

que consiste en dos rectas (perpendiculares entre sí, en un diagrama causal), una con  $U = U_0$  y otra con  $V = V_0$ . De manera similar a Gundlach et al. [1994], los datos se dan de la siguiente manera

$$\Phi(U_0, V, \theta) \neq 0, \quad (9.55)$$

$$\Phi(U, V_0, \theta) = 0. \quad (9.56)$$

A fines prácticos, se decidió trabajar en el dominio

$$U \in [U_0 = -1, U_{max} = 1], \quad (9.57)$$

$$V \in [V_0 = 0,5, V_{max} = 2,5], \quad (9.58)$$

$$\theta \in [0, \pi]. \quad (9.59)$$

Para trabajar numéricamente, se definió una grilla de  $N_U = N_V = 400$  y  $N_\theta = 200$  puntos; obteniendo los siguientes espaciamientos de grilla

$$\Delta U = 5 \times 10^{-3}, \quad (9.60)$$

$$\Delta V = 5 \times 10^{-3}, \quad (9.61)$$

$$\Delta\theta = 1,57 \times 10^{-2}. \quad (9.62)$$

Numéricamente se verificó que tales espaciamentos de grilla satisfacen la condición CFL (Courant–Friedrichs–Lewy).

Respecto al dato inicial, se decidió trabajar con tres diferentes. Dos de ellos con forma de campana en  $(V, \theta)$ , definidos por

$$\Phi(U_0, V, \theta) = \frac{A}{(0,1575)^8} [V - (V_{center} - \sigma_V)]^4 [V - (V_{center} + \sigma_V)]^4 [\theta - (\theta_{center} - \sigma_\theta)]^4 [\theta - (\theta_{center} + \sigma_\theta)]^4, \quad (9.63)$$

con valores

$$\begin{aligned} V_{center} &= 1,5 \\ \theta_{center} &= 0,45 \pi \\ \sigma_\theta &= 0,2 \pi. \end{aligned} \quad (9.64)$$

A fines de comparar los efectos de la dispersión del dato respecto a  $V$ , se consideran dos tipos de campanas. Que llamaremos *Ancho* (con  $\sigma_V = 0,5$ ,  $A = 0,003990666942$ ) y *Fino* (con  $\sigma_V = 0,1$ ,  $A = 1558,854274$ ). Donde el parámetro  $A$ , se escoge para lograr una máxima amplitud con valor cercano a la unidad.

En el tercer dato inicial, se introdujo una dependencia angular correspondiente al armónico esférico  $Y_0^2(\theta)$ . Lo llamaremos *Armónico*, y está definido por

$$\Phi(U_0, V, \theta) = A \frac{\sqrt{5}}{4\pi} (3 \cos^2(\theta) - 1) [V - (V_{center} - \sigma_V)]^4 [V - (V_{center} + \sigma_V)]^4, \quad (9.65)$$

con valores

$$\begin{aligned} A &= 800, \\ V_{center} &= 1,5, \\ \sigma_V &= 0,5. \end{aligned} \quad (9.66)$$

Los datos iniciales a evolucionar se pueden observar en las figuras 9.2, 9.3 y 9.4.

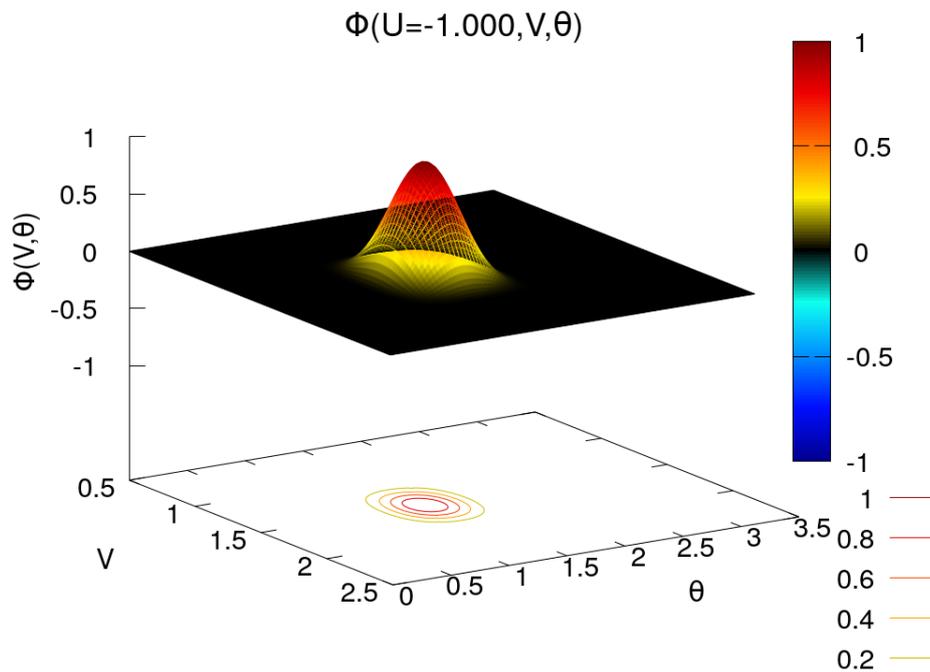


Figura 9.2: **Dato inicial *Ancho*** ( $\sigma_V = 0,5$ ): Definido por 9.63, con parámetros comunes 9.64, y particulares  $\sigma_V = 0,5$ ,  $A = 0,003990666942$ .

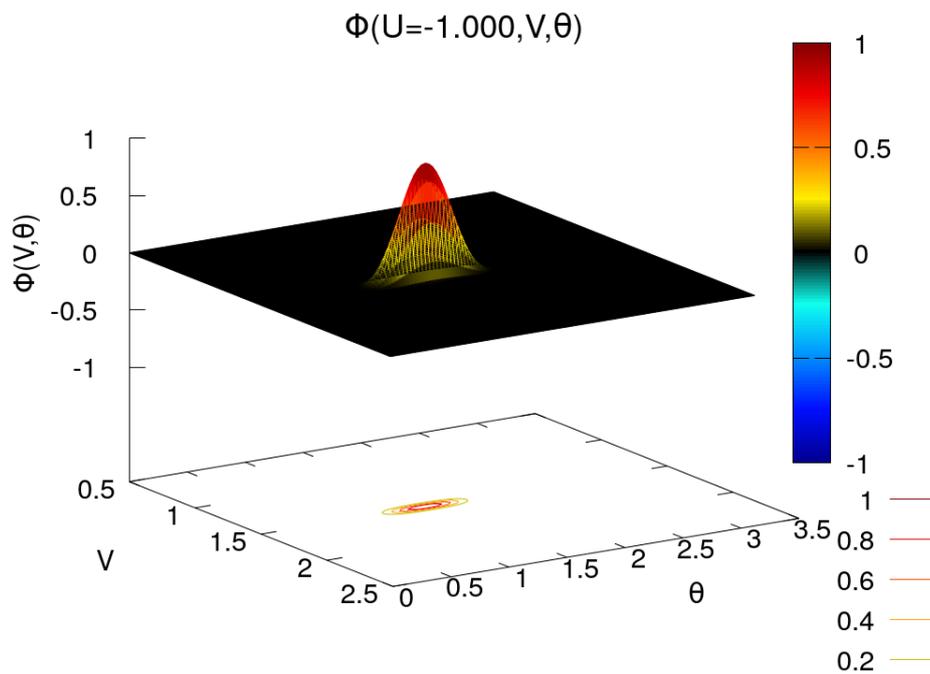


Figura 9.3: **Dato inicial *Fino*** ( $\sigma_V = 0,1$ ): Definido por 9.63, con parámetros comunes 9.64, y particulares  $\sigma_V = 0,1$  con  $A = 1558,854274$ .

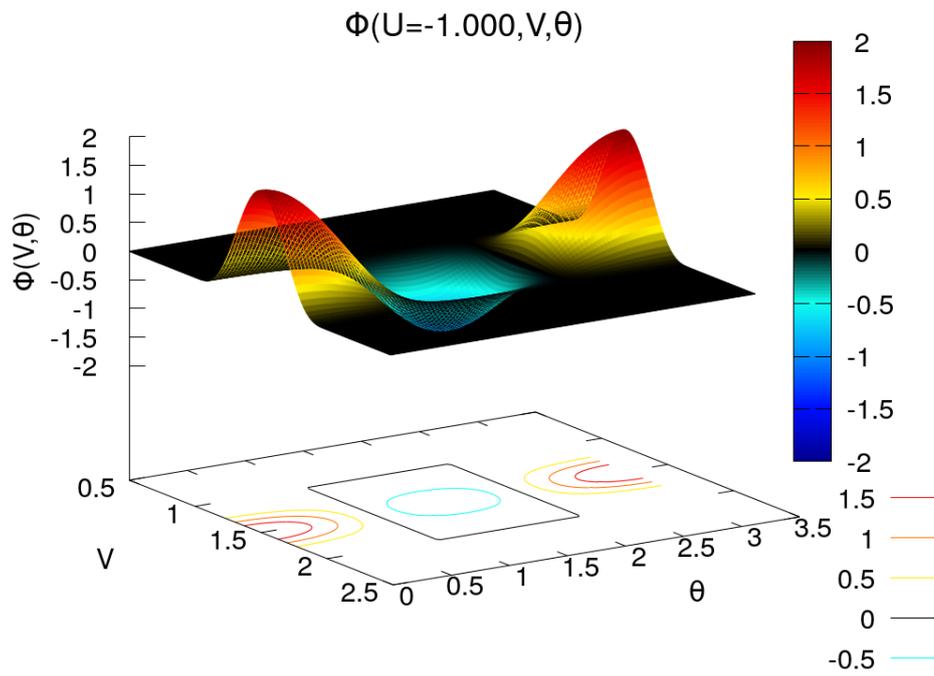


Figura 9.4: **Dato inicial Armónico** ( $\sigma_V = 0,5$ ): Definido por 9.65, con parámetros comunes 9.66.

### 9.3.2. Evolución dato inicial Ancho. Caso: $(m, a) = (1, 0.80)$

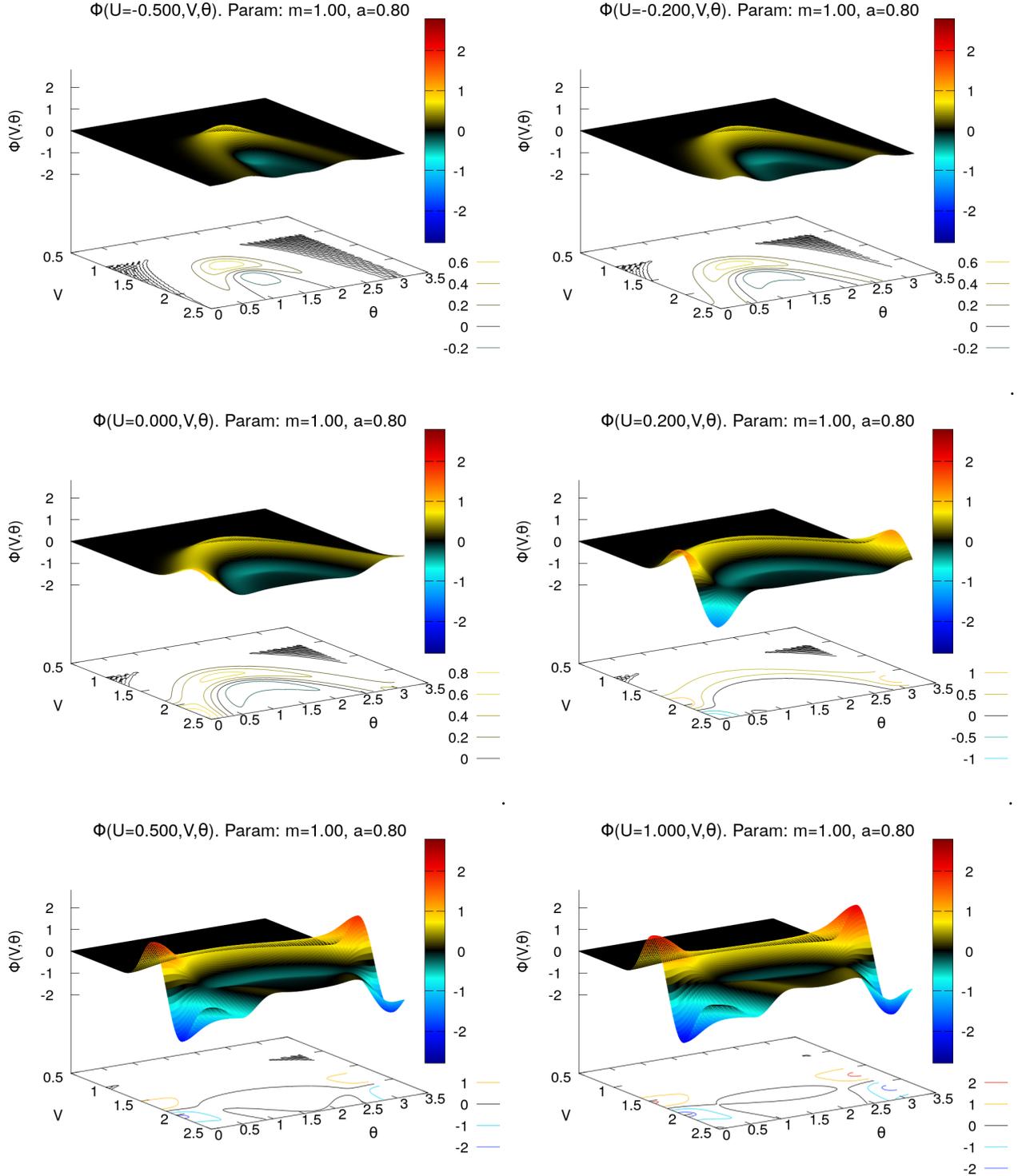


Figura 9.5: Evolución numérica de (9.34), con dato inicial Ancho (figura 9.2): Se integra desde  $U = -1$  hasta  $U = 1$ . Se observa el suave comportamiento al atravesar el horizonte exterior  $H^+$  ( $U = 0 \equiv r_+$ ), tal como se analizó en los capítulos anteriores. También se aprecia la dependencia angular en  $\theta$ . Parámetros de espaciotiempo  $a = 0,8$ ,  $m = 1$ .

### 9.3.3. Evolución dato inicial Ancho. Caso: $(m, a) = (1, 0.98)$

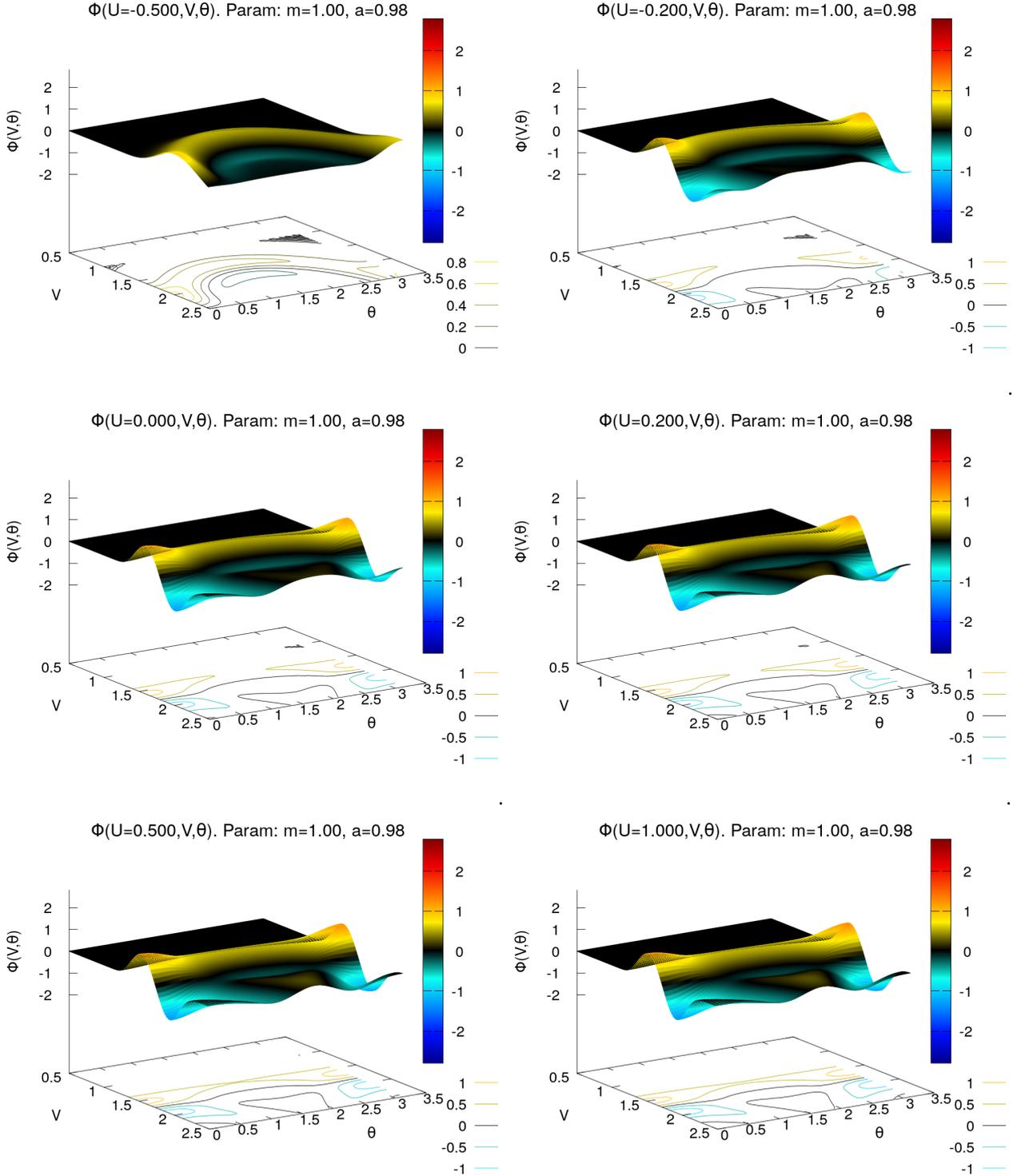


Figura 9.6: Evolución numérica de (9.34), con dato inicial Ancho (figura 9.2): Se integra desde  $U = -1$  hasta  $U = 1$ . Se observa el suave comportamiento al atravesar el horizonte exterior  $H^+$  ( $U = 0 \equiv r_+$ ), tal como se analizó en los capítulos anteriores. También se aprecia la dependencia angular en  $\theta$ . Parámetros de espaciotiempo  $a = 0.98, m = 1$ .

### 9.3.4. Evolución dato inicial Fino. Caso: $(m, a) = (1, 0.80)$

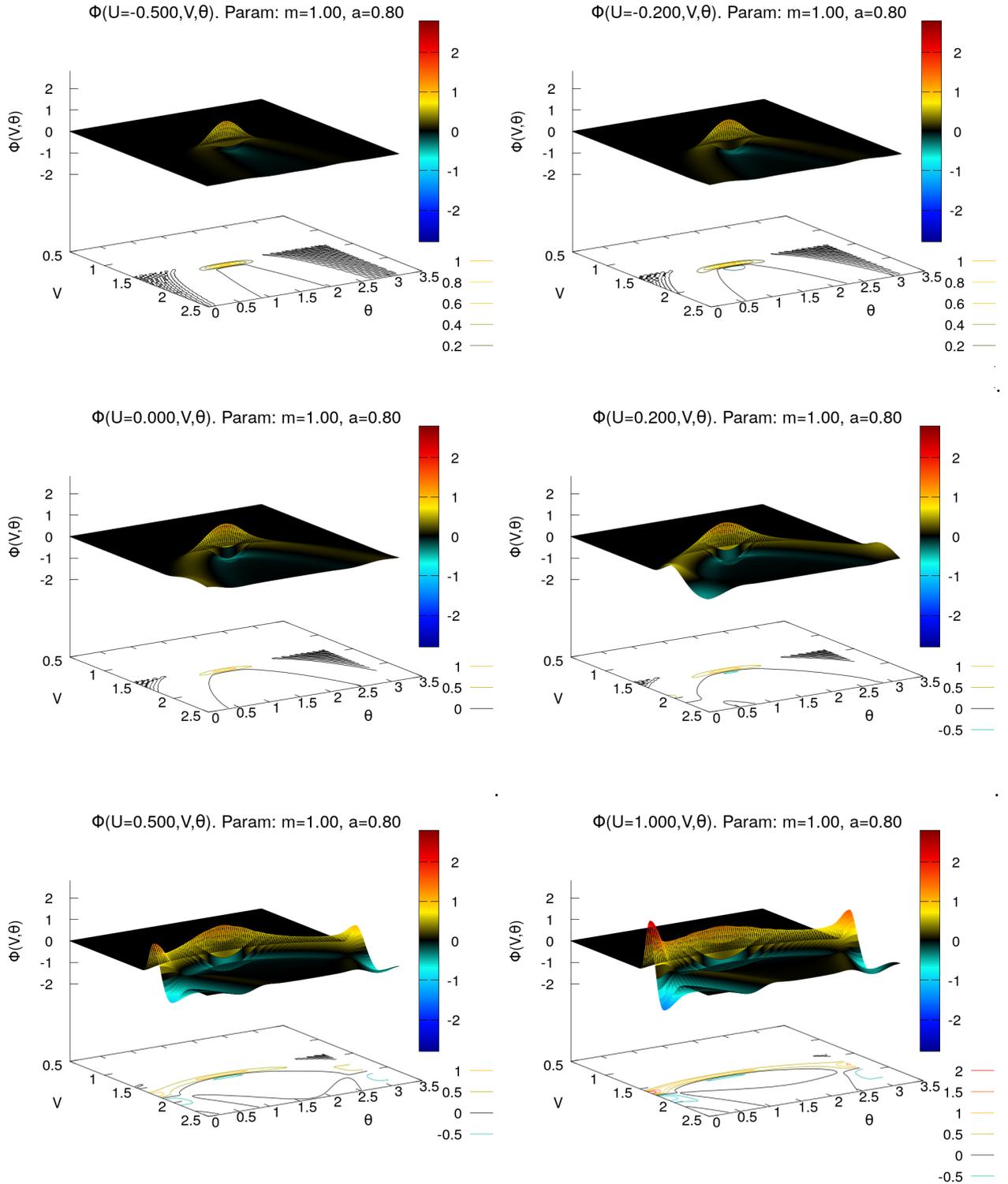


Figura 9.7: Evolución numérica de (9.34), con dato inicial Fino (figura 9.3): Se integra desde  $U = -1$  hasta  $U = 1$ . Se observa el suave comportamiento al atravesar el horizonte exterior  $H^+$  ( $U = 0 \equiv r_+$ ), tal como se analizó en los capítulos anteriores. También se aprecia la dependencia angular en  $\theta$ . Parámetros de espaciotiempo  $a = 0,8$ ,  $m = 1$ .

### 9.3.5. Evolución dato inicial Fino. Caso: $(m, a) = (1, 0.98)$

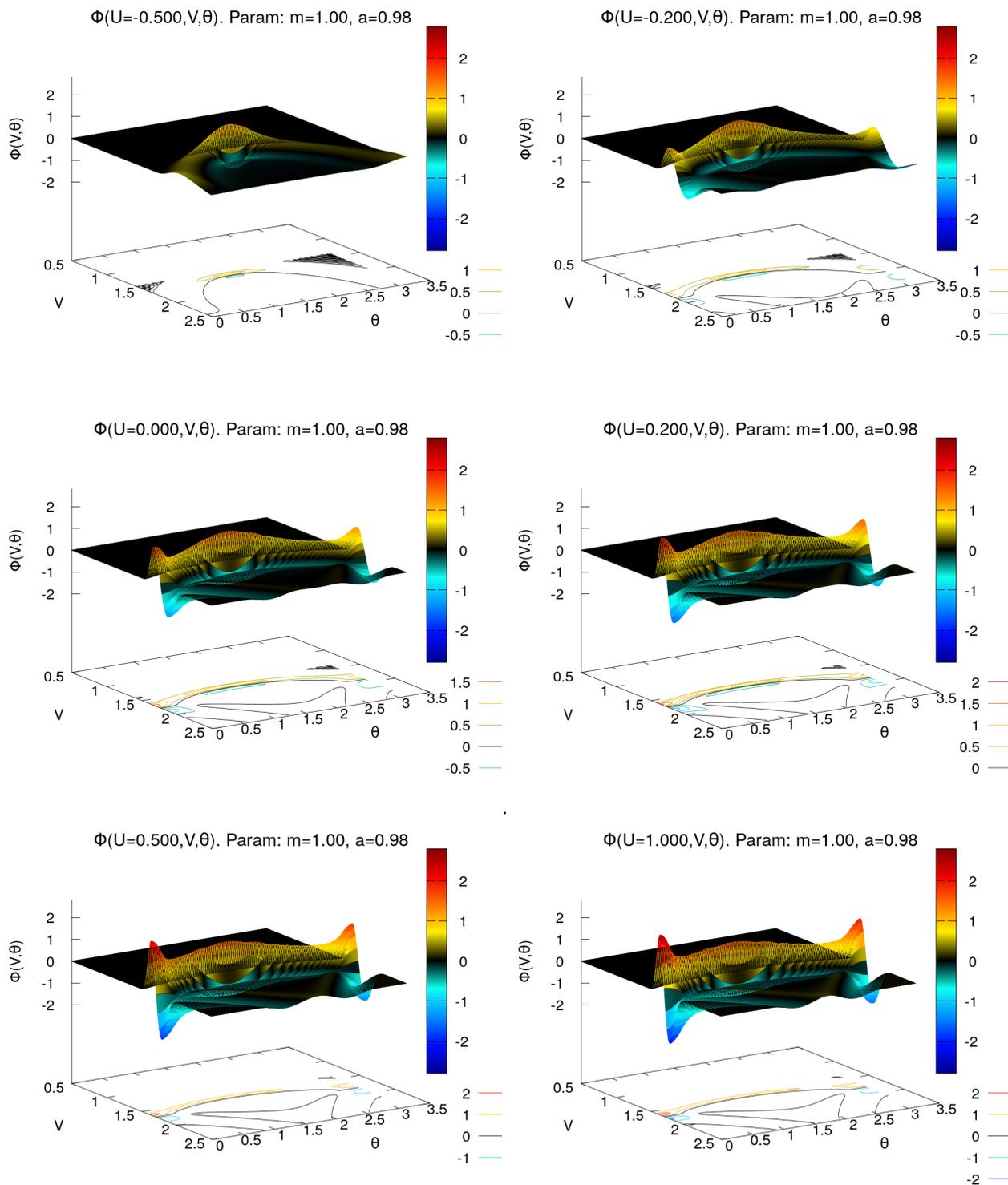


Figura 9.8: Evolución numérica de (9.34), con dato inicial Fino (figura 9.3): Se integra desde  $U = -1$  hasta  $U = 1$ . Se observa el suave comportamiento al atravesar el horizonte exterior  $H^+$  ( $U = 0 \equiv r_+$ ), tal como se analizó en los capítulos anteriores. También se aprecia la dependencia angular en  $\theta$ . Parámetros de espaciotiempo  $a = 0.98, m = 1$ .

9.3.6. Evolución dato inicial Armónico. Caso:  $(m, a) = (1, 0.80)$

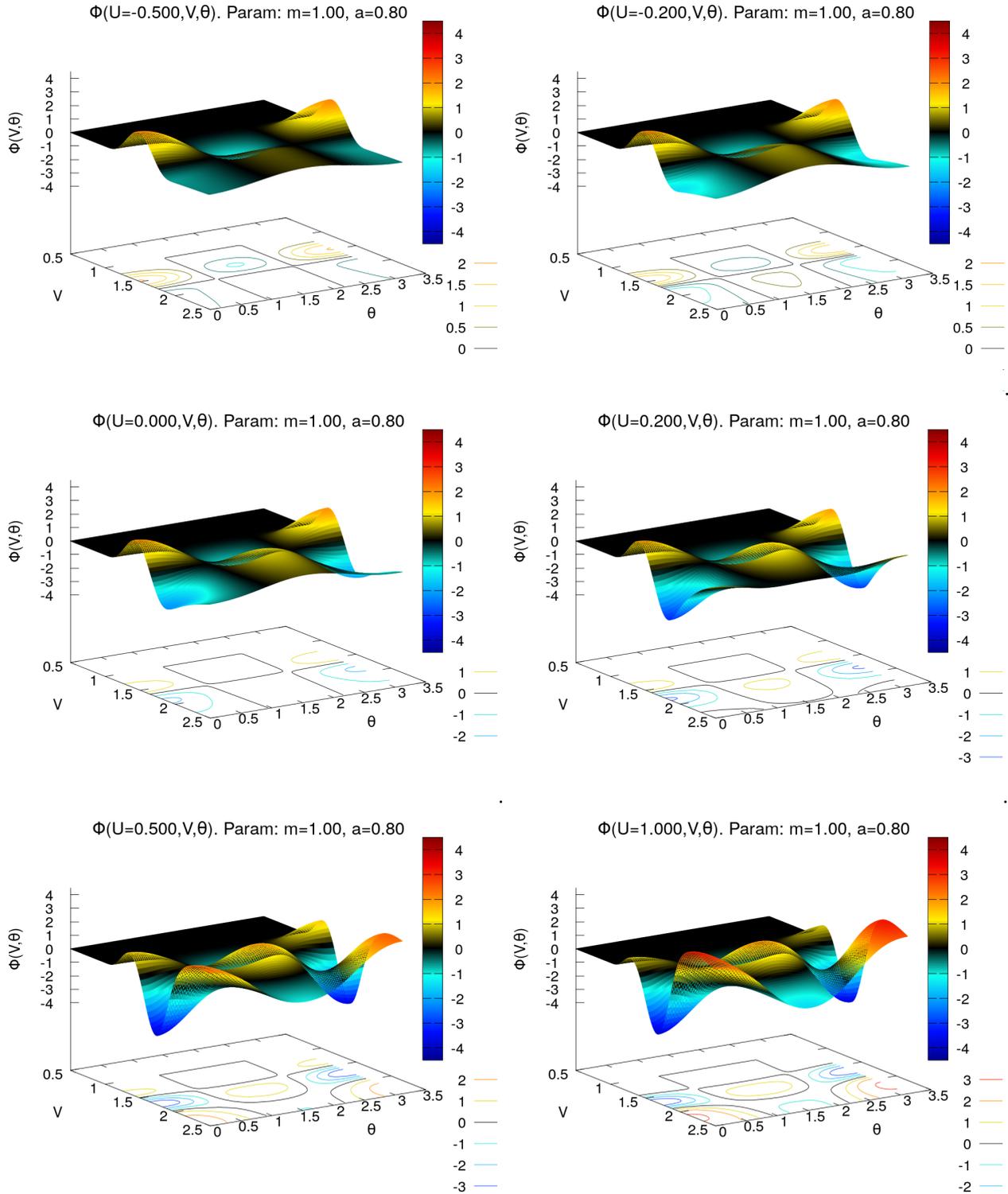


Figura 9.9: Evolución numérica de (9.34), con dato inicial Armónico (figura 9.4): Se integra desde  $U = -1$  hasta  $U = 1$ . Se observa el suave comportamiento al atravesar el horizonte exterior  $H^+$  ( $U = 0 \equiv r_+$ ), tal como se analizó en los capítulos anteriores. También se aprecia la dependencia angular en  $\theta$ . Parámetros de espaciotiempo  $a = 0.8, m = 1$ .

9.3.7. Evolución dato inicial Armónico. Caso:  $(m, a) = (1, 0,98)$

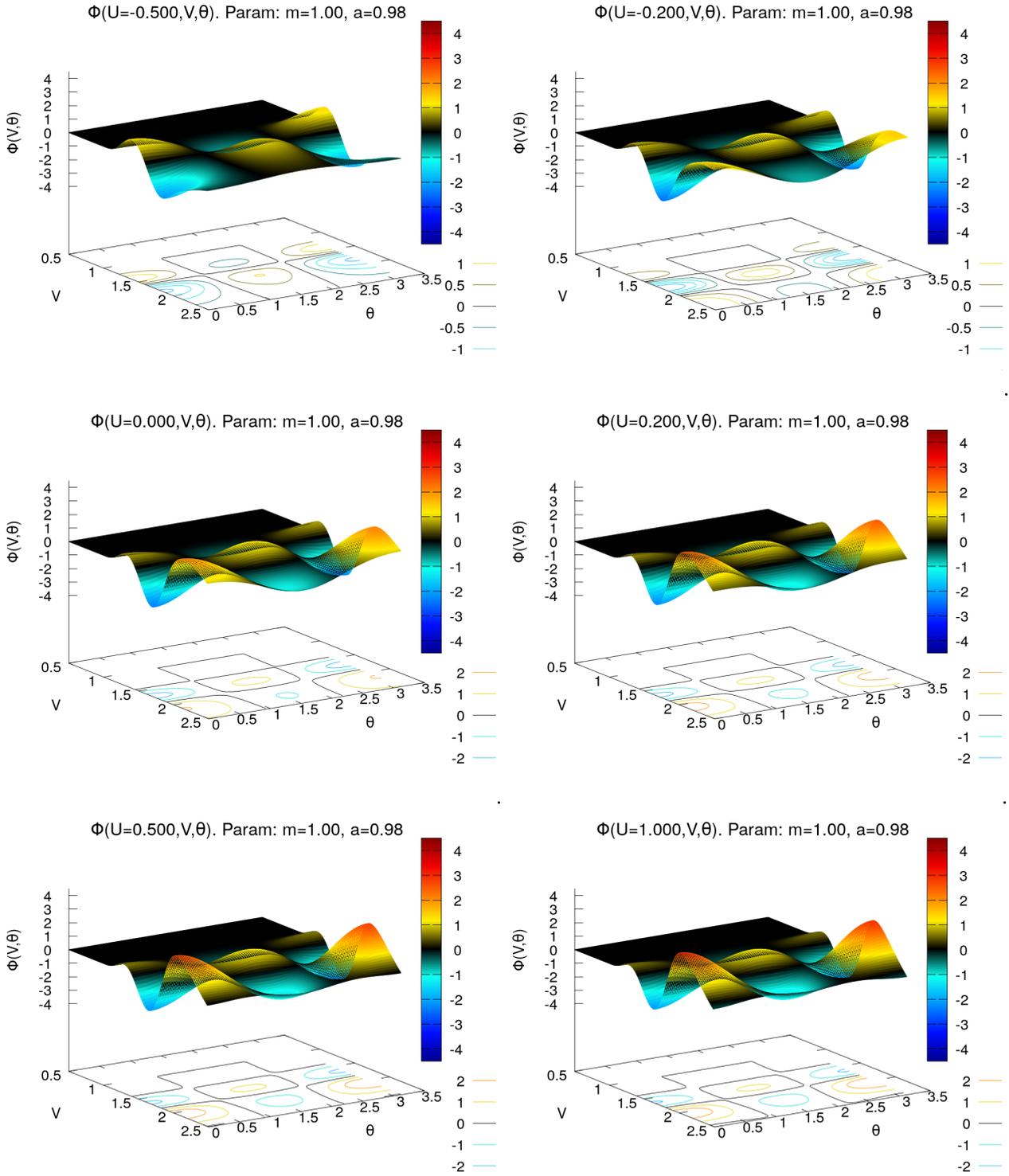


Figura 9.10: Evolución numérica de (9.34), con dato inicial Armónico (figura 9.4): Se integra desde  $U = -1$  hasta  $U = 1$ . Se observa el suave comportamiento al atravesar el horizonte exterior  $H^+$  ( $U = 0 \equiv r_+$ ), tal como se analizó en los capítulos anteriores. También se aprecia la dependencia angular en  $\theta$ . Parámetros de espaciotiempo  $a = 0,98, m = 1$ .

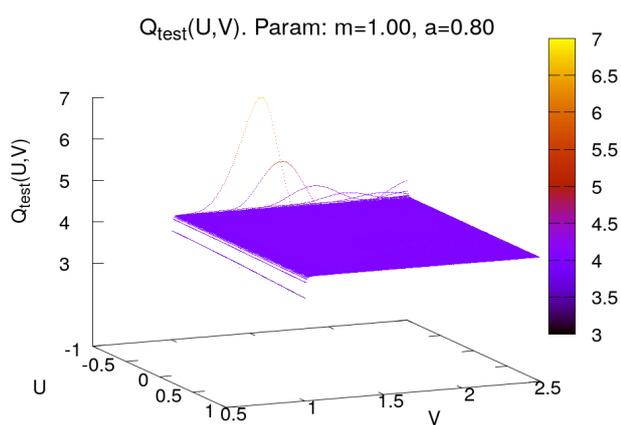
### 9.3.8. Test de precisión numérica

El esquema numérico utilizado tiene precisión de segundo orden. Para verificar el orden de precisión, se realizó un test, calculando diferencias entre las soluciones obtenidas con diferentes espaciamentos de grilla  $h_{UV}$ ,  $\frac{h_{UV}}{2}$  y  $\frac{h_{UV}}{4}$

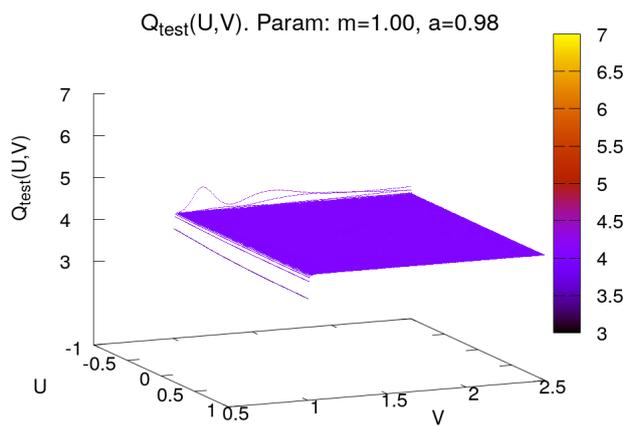
$$Q_{test}(U, V) = \frac{\int_0^\pi [\Phi(U, V, \theta, h_{UV}, h_\theta) - \Phi(U, V, \theta, \frac{h_{UV}}{2}, h_\theta)]^2 d\theta}{\int_0^\pi [\Phi(U, V, \theta, \frac{h_{UV}}{2}, h_\theta) - \Phi(U, V, \theta, \frac{h_{UV}}{4}, h_\theta)]^2 d\theta} \approx 2^p, \quad (9.67)$$

donde  $p$  es el orden de precisión; y la solución tiene error numérico global  $(h_{UV})^p$ .

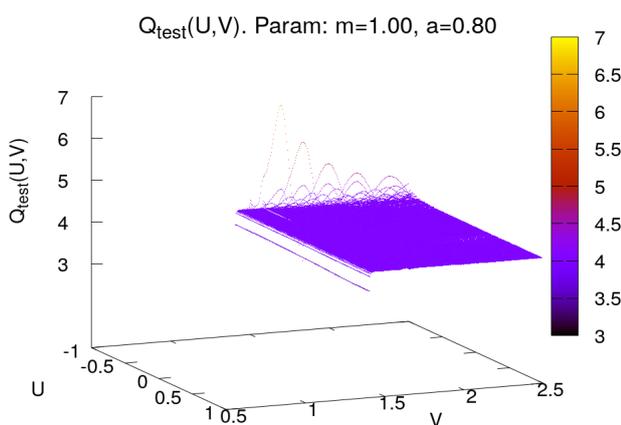
Se realizó el test para todos los casos expuestos en figuras 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9 y 9.10. En todos los casos, el resultado obtenido es  $Q_{test}(U, V) \approx 4$ , lo cual indica que el esquema numérico y código implementado, tiene precisión de segundo orden, es decir que la solución numérica tiene error global  $\mathcal{O}(h^2)$ , que coincide con el valor esperado según el diseño del esquema numérico (9.12). Los tests de precisión para cada caso, se muestran en figura 9.11



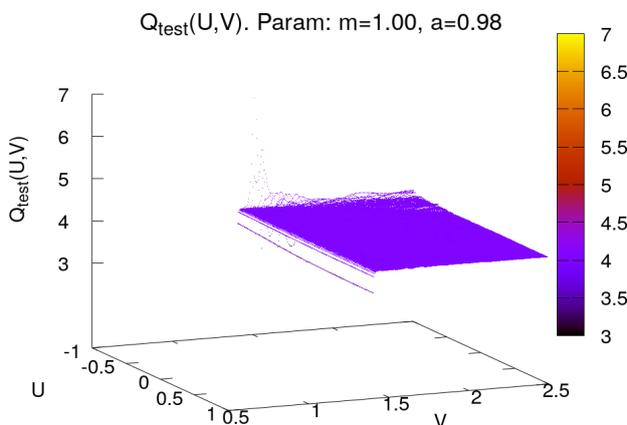
(a) Dato inicial Ancho, ver figura 9.2



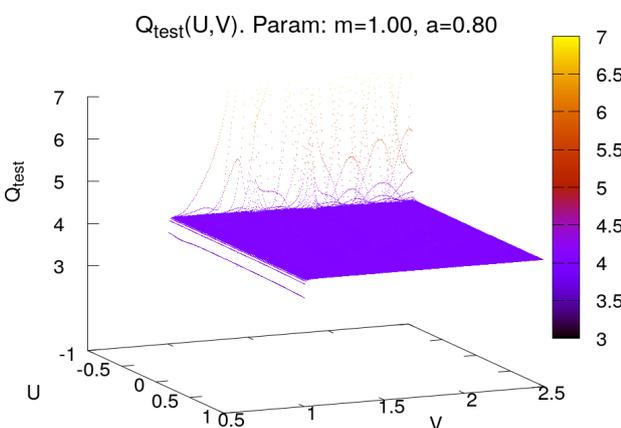
(b) Dato inicial Ancho, ver figura 9.2



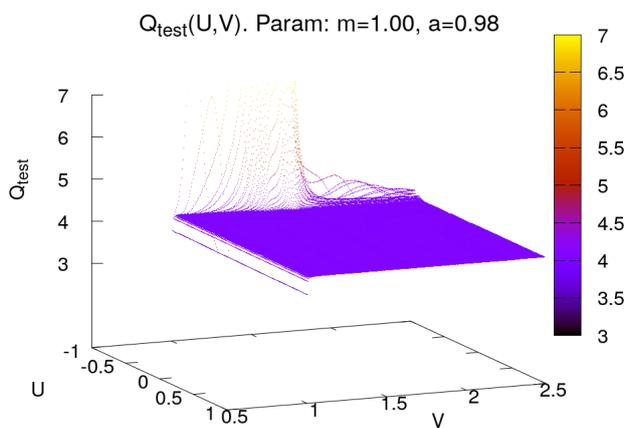
(c) Dato inicial Fino, ver figura 9.3



(d) Dato inicial Fino, ver figura 9.3



(e) Dato inicial Armónico, ver figura 9.4



(f) Dato inicial Armónico, ver figura 9.4

Figura 9.11: **Test de precisión numérica.** Se calcula  $Q_{test}(U, V)$  para los seis casos expuestos en figuras 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9 y 9.10. El resultado obtenido es  $Q_{test}(U, V) \approx 4$ , lo cual indica que el código y esquema numérico utilizado tiene precisión de segundo orden, es decir que la solución numérica tiene error global  $\mathcal{E}_{global} \approx \mathcal{O}[h^2]$  ..

## 9.4. Enfoque alternativo $\Phi(U, V, \theta = cte)$

En esta sección, a manera de enfoque alternativo, daremos una nueva representación de los resultados numéricos. En las figuras anteriores 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9 y 9.10, se muestran las evoluciones numéricas para diferentes datos iniciales, y parámetros del espaciotiempo. En cada una de ellas, se grafica  $\Phi(U = cte, V, \theta)$ .

En este enfoque alternativo, se grafica  $\Phi(U, V, \theta = cte)$ . Es decir, para un ángulo particular, podremos observar la evolución en  $U, V$ . Tales gráficos, se observan en las figuras 9.12, 9.13, 9.14, 9.15, 9.16 y 9.16.

9.4.1. Enfoque Alternativo, dato inicial Ancho. Caso:  $(m, a) = (1, 0.80)$

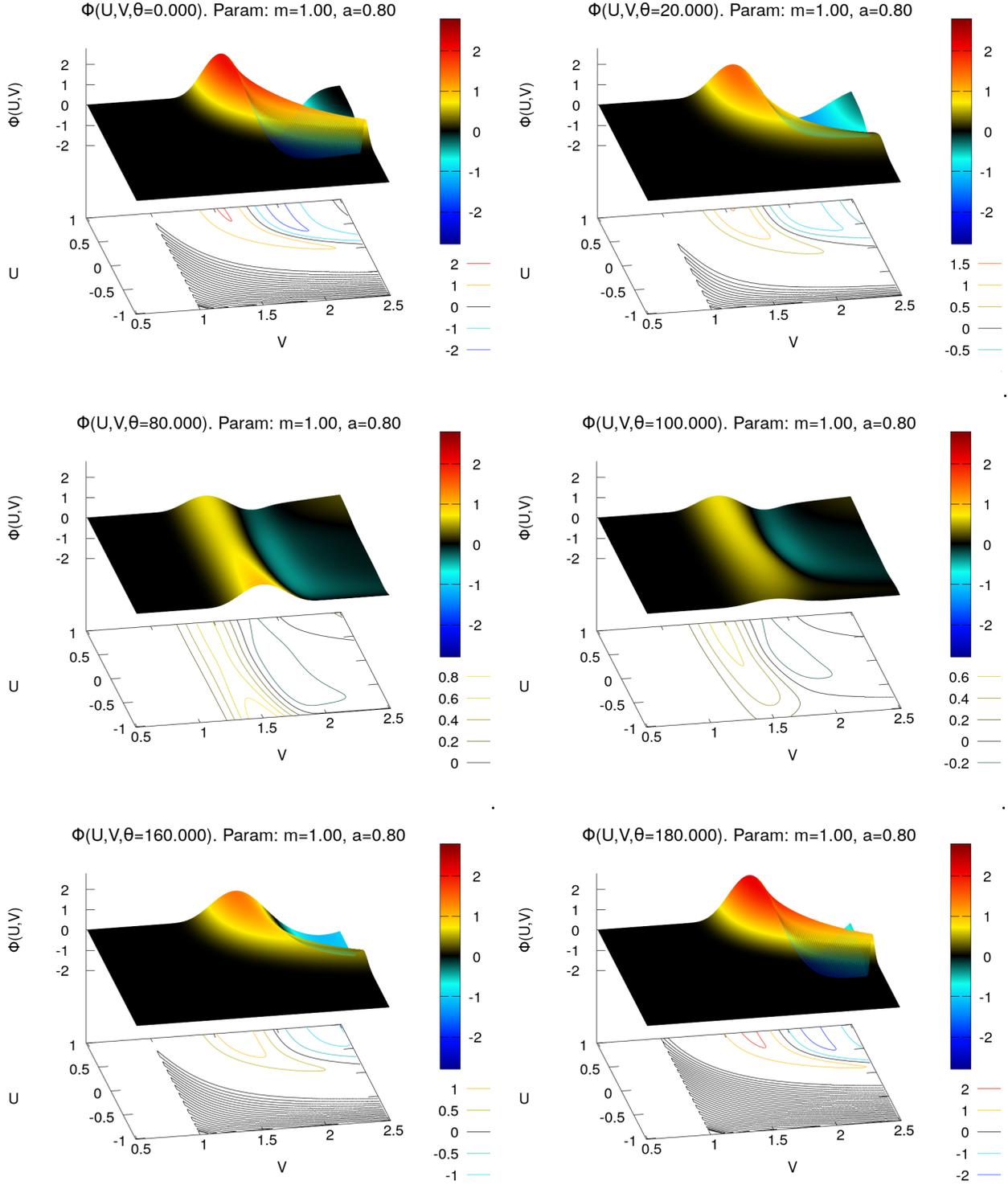


Figura 9.12: **Enfoque Alternativo. Evolución numérica de (9.34), con dato inicial Ancho** (figura 9.2): Se integra desde  $U = -1$  hasta  $U = 1$ . Se observa el suave comportamiento al atravesar el horizonte exterior  $H^+$  ( $U = 0 \equiv r_+$ ), estudiado en los capítulos anteriores. Cada gráfico corresponde a un ángulo  $\theta$  fijo, con  $(180 \equiv \pi)$ . Parámetros de espaciotiempo  $a = 0,8$ ,  $m = 1$ .

9.4.2. Enfoque Alternativo, dato inicial Ancho. Caso:  $(m, a) = (1, 0,98)$

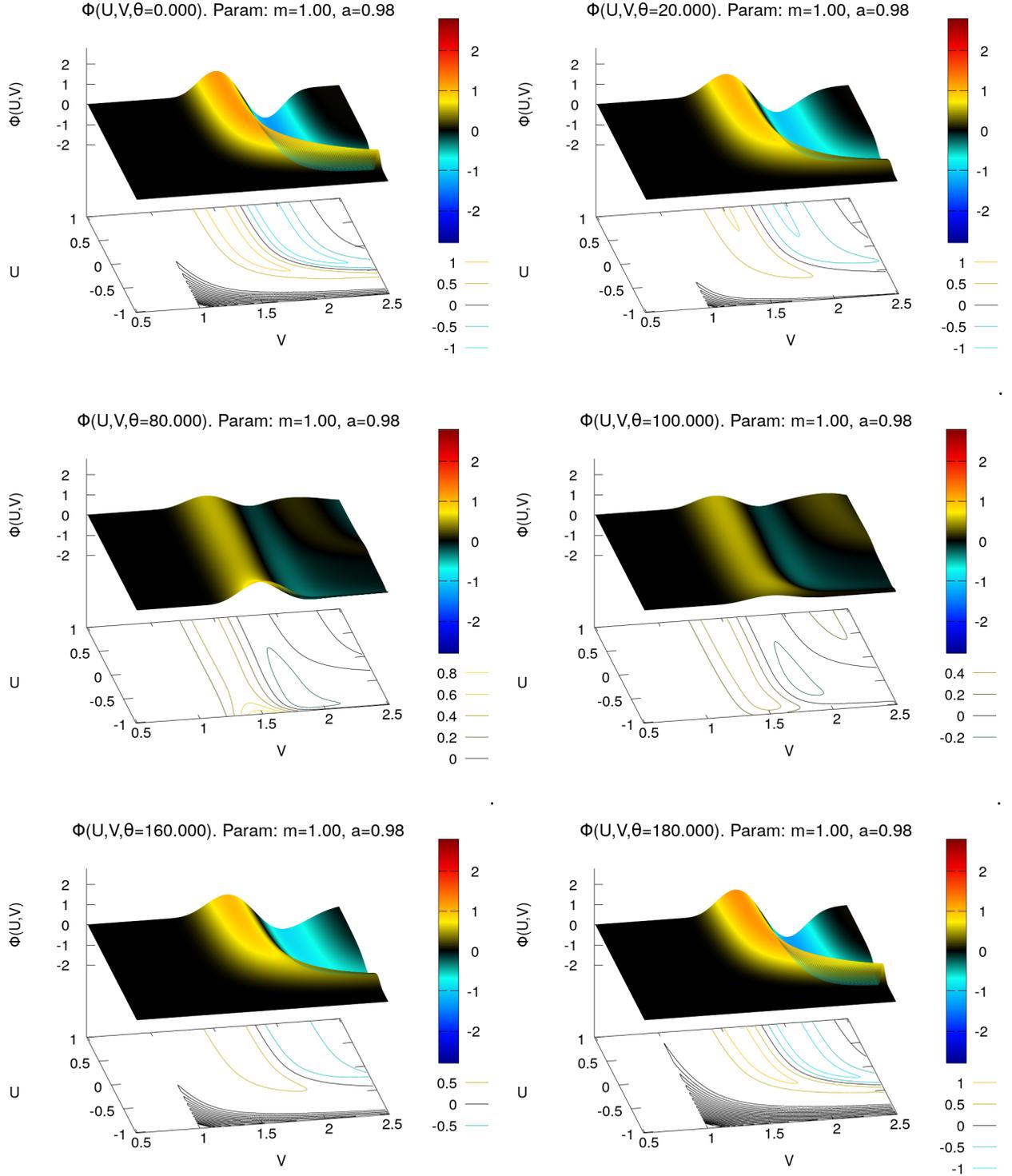


Figura 9.13: Enfoque Alternativo. Evolución numérica de (9.34), con dato inicial Ancho (figura 9.2): Se integra desde  $U = -1$  hasta  $U = 1$ . Se observa el suave comportamiento al atravesar el horizonte exterior  $H^+$  ( $U = 0 \equiv r_+$ ), estudiado en los capítulos anteriores. Cada gráfico corresponde a un ángulo  $\theta$  fijo, con  $(180 \equiv \pi)$ . Parámetros de espaciotiempo  $a = 0,8$ ,  $m = 1$ .

9.4.3. Enfoque Alternativo, dato inicial Fino. Caso:  $(m, a) = (1, 0.80)$

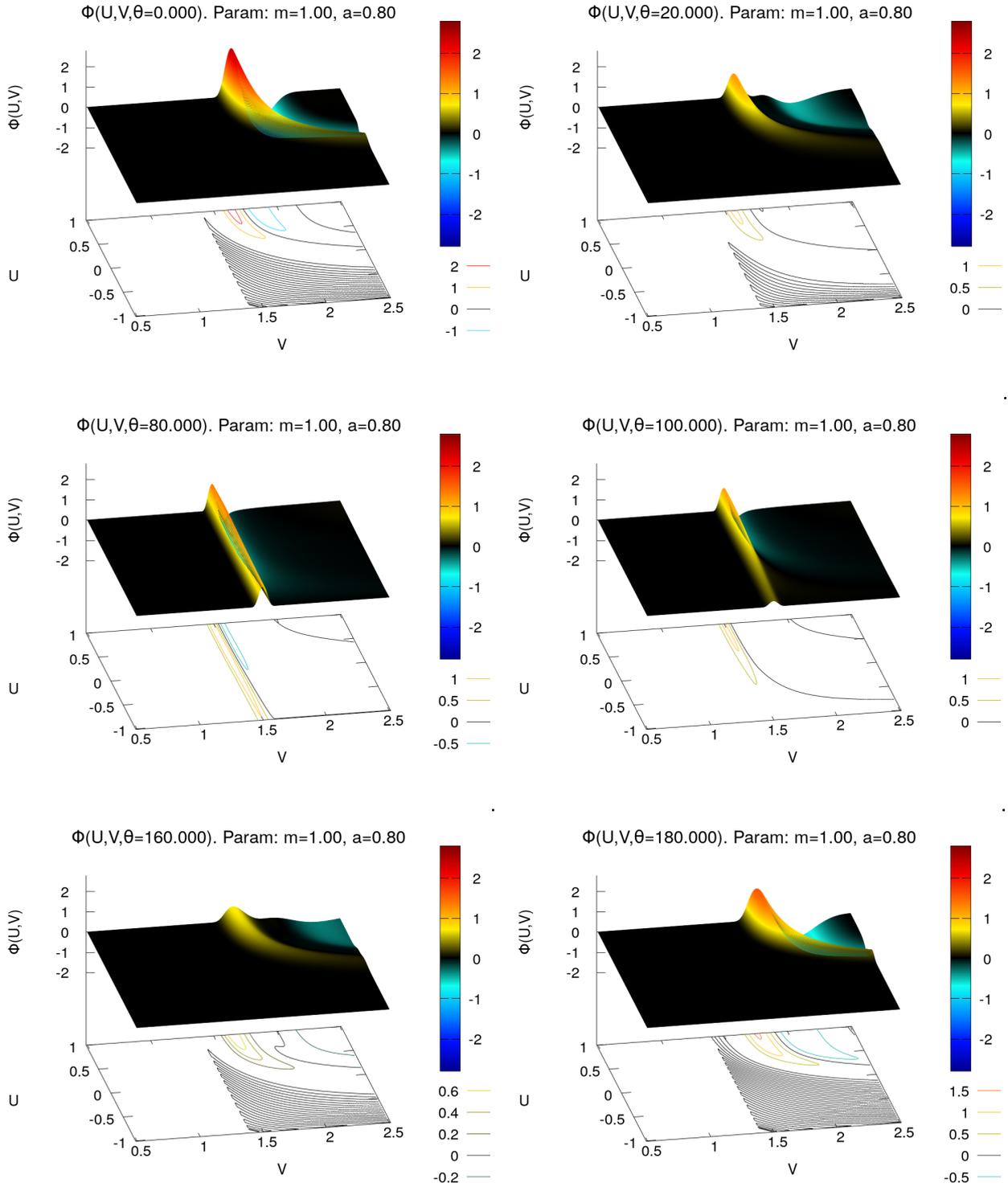


Figura 9.14: **Enfoque Alternativo. Evolución numérica de (9.34), con dato inicial Fino** (figura 9.3): Se integra desde  $U = -1$  hasta  $U = 1$ . Se observa el suave comportamiento al atravesar el horizonte exterior  $H^+$  ( $U = 0 \equiv r_+$ ), estudiado en los capítulos anteriores. Cada gráfico corresponde a un ángulo  $\theta$  fijo, con  $(180 \equiv \pi)$ . Parámetros de espaciotiempo  $a = 0,8$ ,  $m = 1$ .

9.4.4. Enfoque Alternativo, dato inicial Fino. Caso:  $(m, a) = (1, 0,98)$

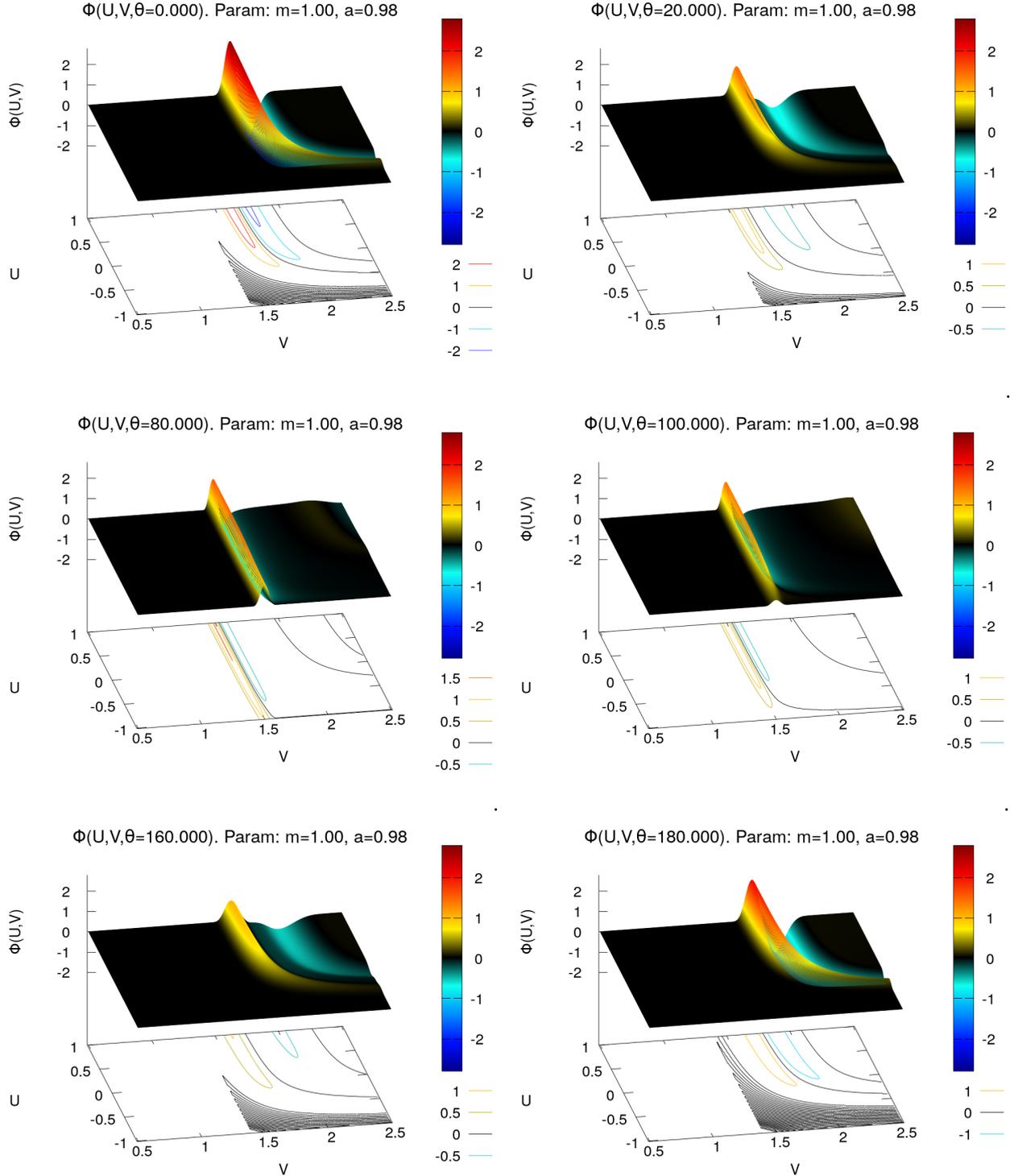


Figura 9.15: Enfoque Alternativo. Evolución numérica de (9.34), con dato inicial Fino (figura 9.3): Se integra desde  $U = -1$  hasta  $U = 1$ . Se observa el suave comportamiento al atravesar el horizonte exterior  $H^+$  ( $U = 0 \equiv r_+$ ), estudiado en los capítulos anteriores. Cada gráfico corresponde a un ángulo  $\theta$  fijo, con  $(180 \equiv \pi)$ . Parámetros de espaciotiempo  $a = 0,8$ ,  $m = 1$ .

9.4.5. Enfoque Alternativo, dato Armónico. Caso:  $(m, a) = (1, 0.80)$

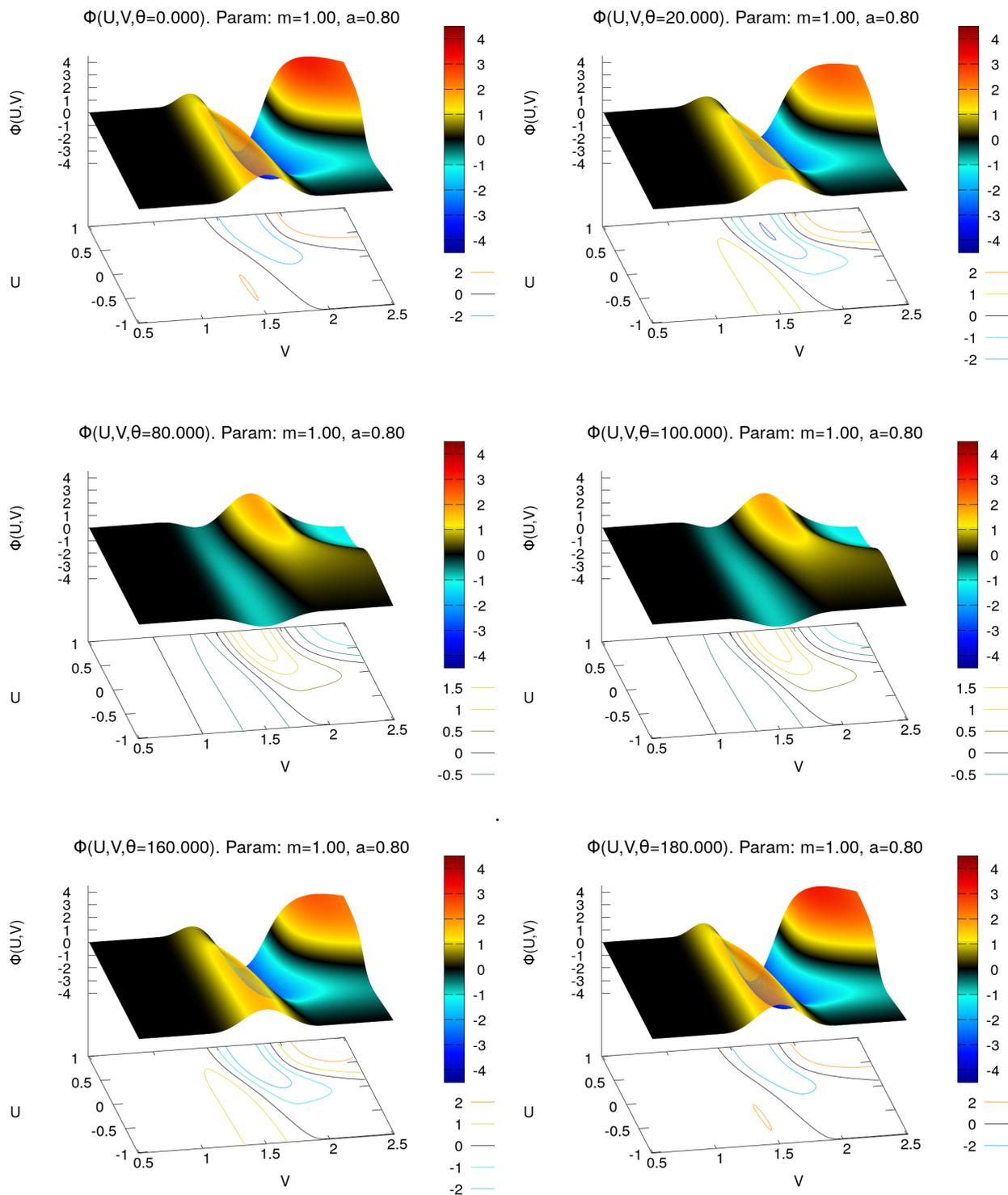


Figura 9.16: **Enfoque Alternativo. Evolución numérica de (9.34), con dato inicial Armónico** (figura 9.4): Se integra desde  $U = -1$  hasta  $U = 1$ . Se observa el suave comportamiento al atravesar el horizonte exterior  $H^+$  ( $U = 0 \equiv r_+$ ), estudiado en los capítulos anteriores. Cada gráfico corresponde a un ángulo  $\theta$  fijo, con  $(180 \equiv \pi)$ . Parámetros de espaciotiempo  $a = 0,8$ ,  $m = 1$ .

9.4.6. Enfoque Alternativo, dato Armónico. Caso:  $(m, a) = (1, 0,98)$

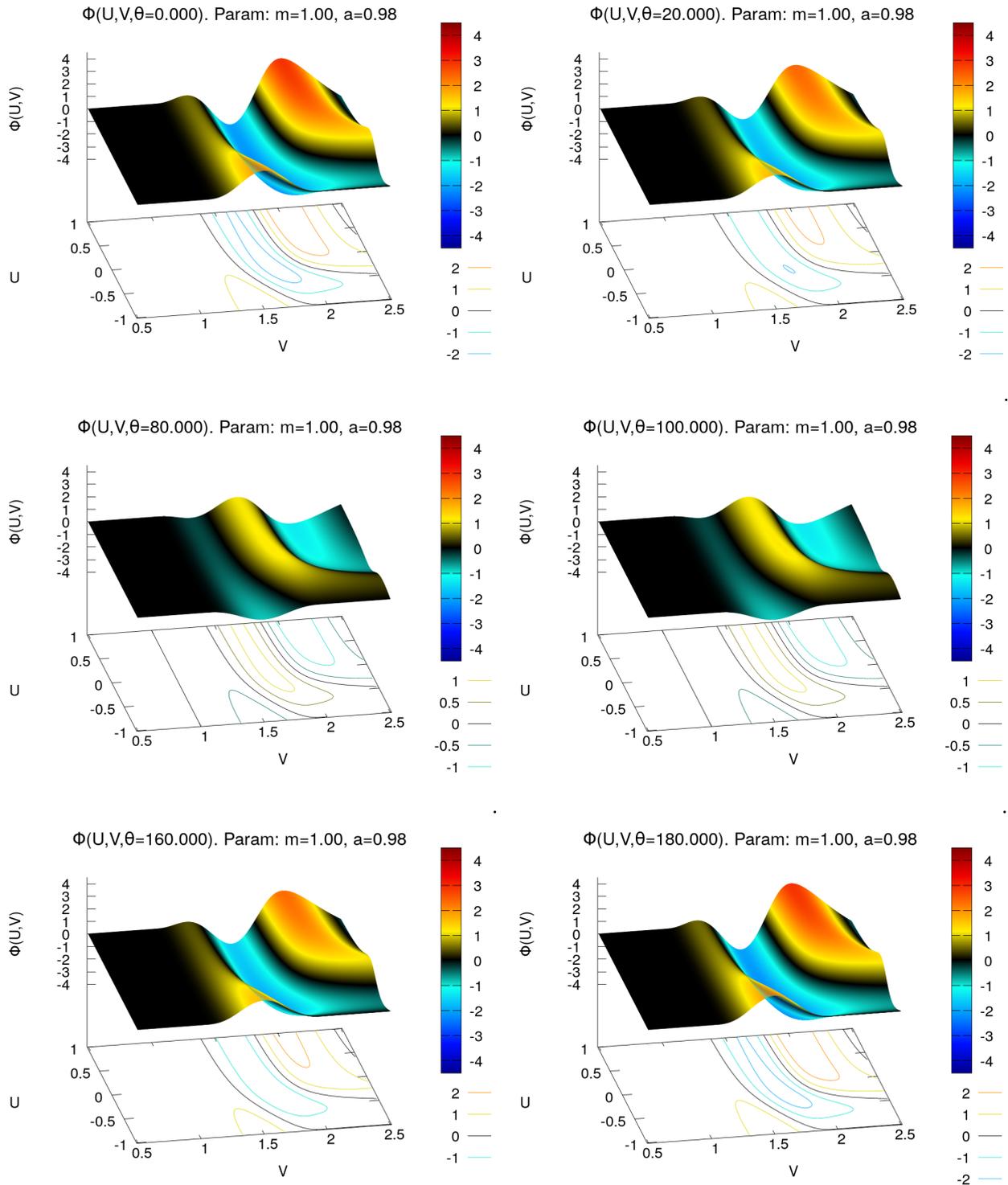


Figura 9.17: Enfoque Alternativo. Evolución numérica de (9.34), con dato inicial Armónico (figura 9.4): Se integra desde  $U = -1$  hasta  $U = 1$ . Se observa el suave comportamiento al atravesar el horizonte exterior  $H^+$  ( $U = 0 \equiv r_+$ ), estudiado en los capítulos anteriores. Cada gráfico corresponde a un ángulo  $\theta$  fijo, con  $(180 \equiv \pi)$ . Parámetros de espaciotiempo  $a = 0,8$ ,  $m = 1$ .

## 9.5. Observaciones sobre resultados obtenidos

En el espaciotiempo de Kerr, es la primera vez que se usó un sistema coordenado doblemente nulo (descomposición nula-nula 2+2), para resolver la ecuación de campo escalar sin masa. Los resultados obtenidos evidencian la importancia del sistema coordenado *centro de masa*, que es bien comportado en todo el espaciotiempo incluido el eje de simetría, a diferencia de los antecedentes previos de la literatura Pretorius and Israel [1998] y Hayward [2004]. El desarrollo del esquema y código numérico correspondiente, muestran claramente la viabilidad de resolver este tipo de ecuaciones con dependencia angular no trivial, a precisión de segundo orden en espaciado de grilla, es decir con error global del orden  $\mathcal{O}[h^2]$ .

Entre las ventajas de la descomposición nula-nula 2+2, encontramos que permiten hacer una interpretación causal directa; lo cual al evolucionar hacia el interior del horizonte  $H^+$ , resulta provechoso. Por otro lado, se reduce notablemente la complejidad de las ecuaciones diferenciales. De derivadas segundas en tiempo y espacio (en la descomposición espacial-temporal 3+1), se pasan a derivadas primeras respecto a cada una de las coordenadas nulas.

Respecto a los resultados numéricos obtenidos, podemos mencionar uno de los aspectos más notables. Se observa un crecimiento de la amplitud del campo en los polos; principalmente en el interior del horizonte  $H^+$  ( $U = 0 \equiv r = r_+$ ). Lo cual se aprecia con mayor claridad en los gráficos de enfoque alternativo, figuras 9.12, 9.13, 9.14, 9.15, 9.16 y 9.16.

Este fenómeno, se debe en parte al término con derivadas puramente angulares en  $\theta$ , tipo Laplaciano (presentes en Schwarzschild y Kerr), que en algún sentido difunden el dato inicial hacia los polos, promoviendo pequeño aumento. Pero también se debe a términos con dependencia angular que solamente están presentes en Kerr, como el factor (9.50) que acompaña a las derivadas primeras en  $U, V$ , y las cruzadas entre  $U, V, \theta$  con sus correspondientes factores. Son justamente estos términos (solo presentes en Kerr), los que producen una mayor amplificación en los polos.

Además de los resultados detallados en este capítulo, también se hicieron evoluciones numéricas con otros datos iniciales. Un caso interesante de mencionar, es el de una campana en  $V$ , sin dependencia angular

$$\Phi(V) = e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{(V-V_0)}{\sigma_V} \right]^2}. \quad (9.68)$$

Incluso en tal caso, notablemente se observó un mayor crecimiento de la amplitud en los polos. Para contrastar, también se hicieron evoluciones numéricas en el espaciotiempo de Schwarzschild (simetría esférica), con el mismo dato inicial (9.68), sin dependencia angular. Aunque los resultados no son comparables, debido a que son espaciotiempos diferentes, en el caso de Schwarzschild no hubo crecimiento en los polos.

Por lo tanto, el aumento de amplitud en los polos, observado en los resultados numéricos, indican lo que podría ser un rasgo distintivo de la evolución del campo escalar sin masa en el espaciotiempo Kerr; especialmente en la región interior.

# Capítulo 10

## Comentarios finales

### 10.1. Contribuciones de tesis

- Se logró definir un sistema coordenado doblemente nulo llamado *centro de masa*, que es bien comportado en todo el espaciotiempo de Kerr. El mismo, está dado en términos de una función  $K(r, \theta)$ , que satisface una ecuación diferencial no lineal (4.8) (en coordenadas Boyer-Lindquist). Lo notable es que tal función  $K(r, \theta)$ , es bien comportada en todo el espaciotiempo, tanto en el exterior del horizonte de eventos, como también al interior, e incluso llega a la singularidad con derivada cero según (4.16). Al igual como sucede en los espaciotiempos con simetría esférica, las funciones nulas  $u, v$  divergen en los horizontes nulo futuro y pasado; por lo que también se define una versión extendida tipo "Kruskal", que es bien comportada en los horizontes. A su vez, también se definió una nueva coordenada angular  $\varphi$  bien comportada en los horizontes, en reemplazo de la coordenadas angular  $\phi$  de Boyer-Lindquist. Se obtuvo así, un sistema doblemente nulo que mapea todo el espaciotiempo de Kerr sin problema alguno.

Asociado a tal definición, existe un conjunto de superficies 2D espaciales, que resultan de la intersección  $u = cte$  y  $v = cte$ . En Schwarzschild tales superficies se corresponden a esferas, con curvatura Gaussiana constante. Sin embargo, en el caso de Kerr tales superficies corresponden a esferoides dados por  $r(\theta)$  en coordenadas Boyer-Linquist, cuya curvatura Gaussiana no es constante. En regiones lejanas al horizonte de eventos, tal curvatura es cercana a una constante. Pero en proximidades al horizonte exterior, e incluso en la región interior, la curvatura tiene mayores variaciones; develando la manera intrínseca en que estas superficies se aproximan y envuelven la singularidad, tal como se observa en figura 5.2. Es notable cómo en las proximidades de la singularidad de anillo, a partir de los valores de la curvatura Gaussiana, se aprecia que la geometría intrínseca de las superficies es análoga a la de un toroide modificado embebido en  $\mathbb{R}^3$ , de manera tal que en su centro haya un disco con curvatura cero, unido al toroide, tal que para ángulos cercanos al ecuador, la curvatura tendrá valores negativos y luego positivos en el ecuador ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

- Se desarrolló e implementó un esquema y código numérico que permite evolucionar la ecuación de onda de un campo escalar sin masa, en la descomposición nula-nula  $2 + 2$ . Los resultados muestran un comportamiento suave al atravesar el horizonte, y la posibilidad de estudiar numéricamente la estabilidad en el interior del mismo. Si tenemos

en cuenta que el caso del campo escalar (fuente de perturbación con espín 0), es una de las posibles perturbaciones lineales de Kerr, descritas por la ecuación de Teukolsky [1972]. Es inmediato inferir que los desarrollos anteriores podrán extenderse al estudio de perturbaciones lineales con fuentes de espín 1 (campo electromagnético) y espín 2 (ondas gravitacionales). Constituyendo un nuevo enfoque para abordar tales estudios.

## 10.2. Perspectivas futuras

### 10.2.1. Extensión tipo Vaidya en Kerr

- La construcción de las coordenadas *centro de masa*, permite trasladar al caso de agujeros negros con momento angular, la metodología usada por Vaidya para el caso de Schwarzschild; por lo que planeamos generalizar los espaciotiempos de Kerr a aquellos en los que la masa cambia como función de las coordenadas nulas que hemos construido. Como antecedente de tal extensión, se destaca Boehmer and Hogan [2017], en el cual se utiliza un sistema coordenado nulo mal comportado, por lo cual su utilidad queda restringida a futuras aplicaciones.

### 10.2.2. Estudios de estabilidad en Kerr

- El estudio de estabilidad de soluciones de las ecuaciones de Einstein es extremadamente complejo, debido, en parte, a la no-linealidad de las ecuaciones. Genéricamente, el primer paso es estudiar la estabilidad lineal de un espaciotiempo, de manera que uno se deshace de las no-linealidades, pero aún así el problema continúa siendo notablemente difícil. Una simplificación adicional es considerar la estabilidad lineal modal; de hecho, la mayoría de los trabajos en la literatura se concentra en esta noción de estabilidad, que es muy débil en relación al problema original. La estabilidad lineal no-modal de Schwarzschild fue probada sólo recientemente en Dotti [2014] (y extendida al caso con constante cosmológica en Dafermos et al. [2019]). Sin embargo, la del agujero negro rotante de Kerr constituye uno de los grandes problemas abiertos hoy en día (siendo el paso previo al problema no-lineal).

Los desarrollos logrados en esta tesis, permitirán abordar el problema con un enfoque novedoso. Las coordenadas doblemente nulas bien comportadas, junto al desarrollo e implementación del código numérico; permiten evolucionar las ecuaciones de perturbación, con dato inicial fuera del agujero negro, evolucionar hacia el interior, atravesar el horizonte de eventos, y estudiar qué sucede con la perturbación en el interior del agujero negro. Tal región, es la más complicada técnicamente dentro del estudio perturbaciones lineales; y es ineludible si se quiere abordar el problema de dar dato fuera de ella, para luego estudiar su evolución hacia el interior. Como hemos visto, el problema se simplifica en una descomposición nula-nula  $2+2$ , y abordarlo desde tal enfoque, hasta el momento no tiene antecedentes en la literatura.

Respecto al estudio de la estabilidad lineal de Kerr en la región exterior, y en particular al caso con fuente de campo escalar (espín 0), se destacan el estudio numérico Tiglio et al. [2008] y la prueba analítica Dafermos et al. [2014]. Sin embargo, los avances del

estudio en el interior, se han visto truncados por dificultades técnicas. Entre los avances recientes se destaca Dafermos and Luk [2017], pero como se mencionó anteriormente, en tal trabajo el dato inicial se da directamente en el interior; debido a la dificultad para darlo en el exterior y evolucionar hacia el interior.

Con las herramientas desarrolladas se podrán estudiar, además de problemas tradicionales como los 'tails' en la métrica de Kerr, otros problemas más intrincados como los asociados a la estabilidad del horizonte de Cauchy. Éste es el tema de una discusión abierta que todavía no ha sido resuelta con claridad. La idea preponderante sugerida hace tiempo por R. Penrose, es que para una configuración genérica de campos en el exterior del horizonte de eventos, debido al efecto de que intervalos de tiempo infinitos en el exterior, corresponden a intervalos de tiempo finitos en el interior del agujero negro; en las cercanías del horizonte de Cauchy uno detectaría gran cantidad de energía de campos que en el exterior inofensivamente decaen a cero hacia el infinito futuro. Sin embargo, esto es muy complicado de calcular, si no se tiene el sistema de coordenadas que hemos construido. Es así que esperamos realizar importantes contribuciones en este área.

### 10.2.3. Estudios de Superradiancia en Kerr

- El primer antecedente teórico de extracción de energía-momento al agujero negro rotante de Kerr es propuesto por Penrose and Floyd [1971], mostrando que un proceso de scattering en la ergoesfera puede generar partículas de alta energía, escapando de la ergoregión a grandes distancias. Luego, en Teukolsky and Press [1974] estudiaron un proceso similar, llamado superradiancia, para su análogo gravitacional y electromagnético. En donde se resolvieron las ecuaciones de Teukolsky Teukolsky [1972] con fuentes de espín 1 y 2.

Recientemente hay estudios más complejos, entre los que se destaca East and Pretorius [2017]. En el mismo se estudia la superradiancia en Kerr acoplado a un campo vectorial. Y se resuelven las ecuaciones de Einstein (no-lineales), usando descomposición espacial-temporal  $3 + 1$ . El acoplamiento con campo, introduce rasgos no-lineales, mientras que mantiene tratable la complejidad del problema.

Se espera que con las herramientas desarrolladas, en un futuro cercano se puedan hacer este tipo de estudios en la descomposición  $2 + 2$ , facilitando el tratamiento en las cercanías del horizonte de eventos, que en este fenómeno particular resulta de gran importancia.



# Apéndice A

## Ecuación de campo escalar y transformación de coordenadas

El cambio de coordenadas será desde  $\{t, r, \theta, \phi\}$  a  $\{du, dv, \tilde{\theta}, \varphi\}$ . Las coordenadas iniciales, pueden escribirse en términos de las nuevas como

$$dt = \frac{dv + du}{2}, \quad (5.4)$$

$$dr = \frac{\Delta}{\sqrt{\mathcal{R}}} \left[ \frac{(dv - du)}{2} - (\pm|_h\sqrt{\Theta}) d\theta \right], \quad (4.73)$$

$$d\theta = d\tilde{\theta}, \quad (4.86)$$

$$d\phi = d\varphi \pm_{io} \frac{a}{\Delta} dr. \quad (6.11)$$

Será útil tener expresiones de las nuevas coordenadas en términos de las iniciales

$$du = dt - \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr - (\pm|_h\sqrt{\Theta}) d\theta, \quad (4.68)$$

$$dv = dt + \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} dr + (\pm|_h\sqrt{\Theta}) d\theta, \quad (4.69)$$

$$d\tilde{\theta} = d\theta, \quad (4.86)$$

$$d\varphi = d\phi - \pm_{io} \frac{a}{\Delta} dr. \quad (6.11)$$

Comenzamos con el primer cambio de coordenadas  $\phi \rightarrow \varphi$ . Tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 + 0 + 0 + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad (A.1)$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} = \frac{\partial \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)}{\partial \phi} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (A.2)$$

Luego reemplazamos (A.1) y (A.2) en (8.62), para obtener

$$(\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma = \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2(\theta) \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{4amr}{\Delta} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \left[ \frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \right] \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (\text{A.3})$$

El siguiente cambio de coordenadas será  $t \rightarrow (u, v)$ . A partir de (4.68) y (4.69), tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, \quad (\text{A.4})$$

y luego

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial \left[ \left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \right]}{\partial t} = \frac{\partial \left[ \left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \right]}{\partial u} + \frac{\partial \left[ \left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \right]}{\partial v} = \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}. \quad (\text{A.5})$$

Si reemplazamos (A.4) y (A.5) en (A.3), obtenemos

$$(\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma = \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2(\theta) \right] \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right) + \frac{4amr}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} \right) + \left[ \frac{a}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \right] \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \Delta \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (\text{A.6})$$

El siguiente cambio de coordenada será  $r \rightarrow (u, v, \varphi)$ . A partir de (6.11), (4.68) y (4.69), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial}{\partial v} + 0 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= \left( -\frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left( \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} \right) \frac{\partial}{\partial v} + \left( -\pm_{io} \frac{a}{\Delta} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

al reorganizar los términos, obtenemos

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \right] - \pm_{io} \frac{a}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \varphi}}. \quad (\text{A.8})$$

Para calcular la segunda derivada, será útil derivar las funciones que dependen explícitamente de  $r$ . Es decir

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \left( \frac{\left( \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} \right)}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\mathcal{R}}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} \right) - \pm_{io} \frac{a\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial u \partial \varphi} \right) \\ &\quad - \pm_{io} \left( \frac{\partial \left( \frac{a}{\Delta} \right)}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) - \pm_{io} \frac{a\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial u \partial \varphi} \right) + \frac{a^2}{\Delta^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Si reorganizamos términos en (A.9), podemos expresarla como

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \right] \left( \frac{\partial_r \mathcal{R}}{2\sqrt{\mathcal{R}}\Delta} - \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta^2} \partial_r \Delta \right) + \left( \frac{\mathcal{R}}{\Delta^2} \right) \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} \right) \right\}} \\ \pm_{io} \frac{a \partial_r \Delta}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \pm_{io} \frac{2a\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial u \partial \varphi} \right) + \frac{a^2}{\Delta^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2};$$
(A.10)

El siguiente paso es reemplazar (A.8) y (A.10) en (A.6). Primero expandimos el penúltimo término de (A.6)

$$(\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma = \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2(\theta) \right] \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right) + \frac{4amr}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} \right) \\ + \left[ \frac{a}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \right] \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \Delta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \partial_r \Delta - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0,$$
(A.11)

y luego reemplazamos (A.8) en (A.11)

$$(\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma = \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2(\theta) \right] \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right) + \frac{4amr}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} \right) \\ + \left[ \frac{a}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \right] \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \Delta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \left\{ \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \right] - \pm_{io} \frac{a}{\Delta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\} \partial_r \Delta \\ - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0,$$
(A.12)

luego reemplazamos (A.10) en el cuarto término de (A.12)

$$(\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma = \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2(\theta) \right] \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right) + \frac{4amr}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} \right) \\ + \left[ \frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \right] \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial_r \mathcal{R}}{2\sqrt{\mathcal{R}}} - \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} \partial_r \Delta \right) \\ - \frac{\mathcal{R}}{\Delta} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} \right) \right\} \\ - \pm_{io} \frac{a \partial_r \Delta}{\Delta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \pm_{io} \frac{2a\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial u \partial \varphi} \right) - \frac{a^2}{\Delta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \\ - \left\{ \frac{\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \right] - \pm_{io} \frac{a}{\Delta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\} \partial_r \Delta - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0,$$
(A.13)

y reagrupamos términos

$$\begin{aligned}
 (\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma &= \left[ \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2(\theta) \right] \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right) + \frac{4amr}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} \right) \\
 &\quad - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial_r \mathcal{R}}{2\sqrt{\mathcal{R}}} \right) - \frac{\mathcal{R}}{\Delta} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} \right) \right\} \\
 &\quad \pm_{io} \frac{2a\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial u \partial \varphi} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
 (\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma &= \left[ \frac{\mathcal{R}}{\Delta} + \Theta \right] \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right) + \frac{4amr}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} \right) \\
 &\quad - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial_r \mathcal{R}}{2\sqrt{\mathcal{R}}} \right) - \frac{\mathcal{R}}{\Delta} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} \right) \right\} \\
 &\quad \pm_{io} \frac{2a\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial u \partial \varphi} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
 (\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma &= [\Theta] \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right) + 4 \frac{\mathcal{R}}{\Delta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} + \frac{4amr}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} \right) \\
 &\quad - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial_r \mathcal{R}}{2\sqrt{\mathcal{R}}} \right) \pm_{io} \frac{2a\sqrt{\mathcal{R}}}{\Delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial u \partial \varphi} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
 (\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma &= (\Theta) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right) - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial_r \mathcal{R}}{2\sqrt{\mathcal{R}}} \right) + 4 \left( \frac{\mathcal{R}}{\Delta} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} \\
 &\quad + \frac{2a}{\Delta} \left( 2mr \pm_{io} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} \right) + \frac{2a}{\Delta} \left( 2mr - \pm_{io} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \varphi} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

El último cambio coordenado que resta hacer es  $\theta \rightarrow \tilde{\theta}$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \left( -\pm |_h \sqrt{\Theta} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left( \pm |_h \sqrt{\Theta} \right) \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} + 0,$$

(A.18)

reorganizamos términos y obtenemos

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \theta} = \pm |_h \sqrt{\Theta} \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}.} \tag{A.19}$$

Luego, la segunda derivada está dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \frac{\partial \left( \pm|_h \sqrt{\Theta} \right)}{\partial \theta} + \pm|_h \sqrt{\Theta} \frac{\partial \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right)}{\partial \theta} + \frac{\partial \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta}, \quad (\text{A.20})$$

es decir

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \pm|_h \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \partial_\theta \sqrt{\Theta} + \Theta \left( \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} \right) \pm|_h 2\sqrt{\Theta} \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial \tilde{\theta}} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial \tilde{\theta}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\theta}^2}, \quad (\text{A.21})$$

Si expandimos el último término de (A.17), tenemos

$$\begin{aligned} (\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma &= (\Theta) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right) - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial_r \mathcal{R}}{2\sqrt{\mathcal{R}}} \right) + 4 \left( \frac{\mathcal{R}}{\Delta} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} \\ &+ \frac{2a}{\Delta} \left( 2mr \pm_{io} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} \right) + \frac{2a}{\Delta} \left( 2mr - \pm_{io} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \varphi} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) \\ &- \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

y luego reemplazamos (A.19) y (A.21) en (A.22), para obtener

$$\begin{aligned} (\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma &= (\Theta) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right) - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial_r \mathcal{R}}{2\sqrt{\mathcal{R}}} \right) + 4 \left( \frac{\mathcal{R}}{\Delta} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} \\ &+ \frac{2a}{\Delta} \left( 2mr \pm_{io} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} \right) + \frac{2a}{\Delta} \left( 2mr - \pm_{io} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \varphi} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) \\ &- \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \left[ \pm|_h \sqrt{\Theta} \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \\ &- \left[ \pm|_h \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \partial_\theta \sqrt{\Theta} + \Theta \left( \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} \right) \pm|_h 2\sqrt{\Theta} \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial \tilde{\theta}} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial \tilde{\theta}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\theta}^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

reagrupamos términos

$$\begin{aligned} (\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma &= 4(\Theta) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right) - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial_r \mathcal{R}}{2\sqrt{\mathcal{R}}} \right) + 4 \left( \frac{\mathcal{R}}{\Delta} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} \\ &+ \frac{2a}{\Delta} \left( 2mr \pm_{io} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} \right) + \frac{2a}{\Delta} \left( 2mr - \pm_{io} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \varphi} \right) \\ &- \pm|_h 2\sqrt{\Theta} \left( \frac{\partial^2}{\partial v \partial \tilde{\theta}} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial \tilde{\theta}} \right) - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \left[ \pm|_h \sqrt{\Theta} \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \right] \\ &- \left[ \pm|_h \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \right) \partial_\theta \sqrt{\Theta} \right] \\ &- \frac{1}{\sin(\theta)^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\theta}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}
 (\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma &= 4 \left( \frac{\mathcal{R}}{\Delta} + \Theta \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \left( \partial_r \sqrt{\mathcal{R}} \pm_{|h} \partial_\theta \sqrt{\Theta} \pm_{|h} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{\Theta} \right) \\
 &+ \frac{2a}{\Delta} \left( 2mr \pm_{io} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} \right) + \frac{2a}{\Delta} \left( 2mr - \pm_{io} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \varphi} \right) \\
 &- \pm_{|h} 2 \sqrt{\Theta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \tilde{\theta}} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \tilde{\theta}} \right) \\
 &- \frac{1}{\sin(\theta)^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\theta}} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{A.25}$$

Para simplificar notación, en (A.25) se toma  $\tilde{\theta} = \theta$ , y finalmente tenemos

$$\begin{aligned}
 (\nabla^a \nabla_a \Phi) \Sigma &= 4 \left( \frac{\mathcal{R}}{\Delta} + \Theta \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) \left( \partial_r \sqrt{\mathcal{R}} \pm_{|h} \partial_\theta \sqrt{\Theta} \pm_{|h} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sqrt{\Theta} \right) \\
 &+ \frac{2a}{\Delta} \left( 2mr \pm_{io} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \varphi} \right) + \frac{2a}{\Delta} \left( 2mr - \pm_{io} \sqrt{\mathcal{R}} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \varphi} \right) \\
 &- \pm_{|h} 2 \sqrt{\Theta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial \theta} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial \theta} \right) \\
 &- \frac{1}{\sin(\theta)^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{8.64}$$

# Bibliografía

- Abbott, B. P. e. T. L. S. C. (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102.
- Bishop, N. T. and Venter, L. R. (2006). Kerr metric in bondi-sachs form. *Phys. Rev. D*, 73:084023.
- Boehmer, C. and Hogan, P. (2017). A vaidya-type generalization of kerr spacetime. *Modern Physics Letters A*, 32:1750189.
- Boero, E. F. and Moreschi, O. M. (2020). Efficient gravitational lens optical scalars calculation of black holes with angular momentum. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 492(3):3763–3778.
- Boyer, R. H. and Lindquist, R. W. (1967). Maximal analytic extension of the Kerr metric. *J.Math.Phys.*, 8:265–281.
- Carter, B. (1968). Global structure of the Kerr family of gravitational fields. *Phys.Rev.*, 174:1559–1571.
- Carter, B. (1971). Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. *Phys. Rev. Lett.*, 26:331–333.
- Chandrasekhar, S. (1992). *The Mathematica Theory of Black Holes*. Oxford University Press.
- Dafermos, M., Holzegel, G., and Rodnianski, I. (2019). The linear stability of the Schwarzschild solution to gravitational perturbations. *Acta Math.*, 222:1–214.
- Dafermos, M. and Luk, J. (2017). The interior of dynamical vacuum black holes I: The  $C^0$ -stability of the Kerr Cauchy horizon.
- Dafermos, M., Rodnianski, I., and Shlapentokh-Rothman, Y. (2014). Decay for solutions of the wave equation on Kerr exterior spacetimes III: The full subextremal case  $|a| < M$ .
- Dotti, G. (2014). Nonmodal linear stability of the schwarzschild black hole. *Phys. Rev. Lett.*, 112:191101.
- East, W. E. and Pretorius, F. (2017). Superradiant instability and backreaction of massive vector fields around kerr black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 119:041101.
- Eilon, E. and Ori, A. (2016). Adaptive gauge method for long-time double-null simulations of spherical black-hole spacetimes. *Phys. Rev. D*, 93:024016.

- Fletcher, S. J. and Lun, A. W. C. (2003a). The kerr spacetime in generalized bondi–sachs coordinates. *Class. Quant. Grav.*, 20(19):4153–4167.
- Fletcher, S. J. and Lun, A. W. C. (2003b). The kerr spacetime in generalized bondi–sachs coordinates. *Class. Quant. Grav.*, 20(19):4153–4167.
- Geroch, R., Held, A., and Penrose, R. (1973). A space-time calculus based on pairs of null directions. *J. Math. Phys.*, 14:874–881.
- Gibbons, G. W. and Volkov, M. S. (2017). Zero mass limit of Kerr spacetime is a wormhole. *Phys. Rev. D*, 96(2):024053.
- Goldberg, J. N. and Sachs, R. K. (1962). A theorem on Petrov types. *Acta Phys. Polon.*, 22:13–23. Suppl.
- Gomez, R., Barreto, W., and Frittelli, S. (2007). A Framework for large-scale relativistic simulations in the characteristic approach. *Phys. Rev. D*, 76:124029.
- Gundlach, C., Price, R. H., and Pullin, J. (1994). Late time behavior of stellar collapse and explosions: 1. Linearized perturbations. *Phys. Rev. D*, 49:883–889.
- Hawking, S. W. (1975). Particle creation by black holes. *Communications in Mathematical Physics*, 43(3):199–220.
- Hayward, S. A. (2004). Kerr black holes in horizon-generating form. *Phys. Rev. Lett.*, 92:191101.
- Kerr, R. P. (1963). Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *PRL*, 11:237–238.
- Kruskal, M. D. (1960). Maximal extension of schwarzschild metric. *Phys. Rev.*, 119:1743–1745.
- Moreschi, O. M. (2000). *Fundamentos de la Mecánica de Sistemas de Partículas*. editorial Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba.
- Moreschi, O. M. (2004). Intrinsic angular momentum and center of mass in general relativity. *Class. Quantum Grav.*, 21:5409–5425.
- Newman, E. T. and Penrose, R. (1962). An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math. Phys.*, 3(3):566.
- Newman, E. T. e. (1965). Metric of a rotating, charged mass. *J. Math. Phys.*, 6(6):918–919.
- Oppenheimer, J. R. and Snyder, H. (1939). On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, 56:455–459.
- Penrose, R. and Floyd, R. M. (1971). Extraction of rotational energy from a black hole. *Nature Physical Science*, 229(6):177–179.
- Poisson, E. (2004). *A relativist’s toolkit: The mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge University Press.

- 
- Pretorius, F. and Israel, W. (1998). Quasispherical light cones of the Kerr geometry. *Class.Quant.Grav.*, 15:2289–2301.
- Prior, C. (1977). Angular momentum in general relativity. *Proc. R. Soc. Lond.*, A(354):379.
- Robinson, D. C. (1975). Uniqueness of the kerr black hole. *Phys. Rev. Lett.*, 34:905–906.
- Schwarzschild, K. (1916). On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1916:189–196.
- Smarr, L. (1973). Surface Geometry of Charged Rotating Black Holes. *Phys. Rev.*, D7:289–295.
- Szekeres, G. (1960). On the singularities of a Riemannian manifold. *Publ. Math. Debrecen*, 7:285–301.
- Teukolsky, S. A. (1972). Rotating black holes: Separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, 29:1114–1118.
- Teukolsky, S. A. and Press, W. H. (1974). Perturbations of a rotating black hole. iii. interaction of the hole with gravitational and electromagnetic radiation. *The Astrophysical Journal*, 193:443–461.
- The EHT Collaboration, e. a. (2019). First m87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole. *ApJL*, 875:4.
- Tiglio, M., Kidder, L. E., and Teukolsky, S. A. (2008). High accuracy simulations of Kerr tails: Coordinate dependence and higher multipoles. *Class.Quant.Grav.*, 25:105022.
- Wald, R. (1984). *General Relativity*. The Chicago University Press.
- Walker, M. and Penrose, R. (1970). On quadratic first integrals of the geodesic equations for type [22] spacetimes. *Commun. Math. Phys.*, 18:265–274.