



FACULTAD
DE CIENCIAS
ECONÓMICAS



UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba

REPOSITORIO DIGITAL UNIVERSITARIO (RDU-UNC)

Gráficos de control con muestreo simple y doble para la proporción de ítems no conformes en procesos de alta calidad

Silvia Joeques, Marcelo Smrekar, Emanuel Pimentel Barbosa

Ponencia presentada en XLI Coloquio Argentino de Estadística realizado en 2013 en la Facultad de Ciencias Económicas - Universidad Nacional de Cuyo. Mendoza, Argentina



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

GRÁFICOS DE CONTROL CON MUESTREO SIMPLE Y DOBLE PARA LA PROPORCIÓN DE ÍTEMS NO CONFORMES EN PROCESOS DE ALTA CALIDAD

SILVIA JOEKES¹, MARCELO SMREKAR², EMANUEL PIMENTEL BARBOSA³

1- Instituto de Estadística, U.N.C., mail: joekess@eco.unc.edu.ar

2- Laboratorio de Ingeniería y Mantenimiento Industrial, U.N.C.,
mail: msmrekar@efn.uncor.edu

3- Dpto. Estatística, Imecc/UNICAMP, Campinas-SP, Brazil,
mail; emanuel@ime.unicamp.br>

RESUMEN

Actualmente hay situaciones en la producción industrial en la que los procesos, especialmente debido a los avances tecnológicos, han alcanzado muy altos estándares de calidad. Estos procesos se conocen como *procesos de alta calidad* y se caracterizan por tener una fracción de productos no conformes generalmente muy pequeña y tamaños de muestra no suficientemente grandes. Cuando esto sucede, los gráficos de control convencionales tienen serios inconvenientes para detectar disminuciones en los valores de p produciendo un exceso de falsas alarmas. Basado en esta dificultad, los autores desarrollaron un gráfico p mejorado que mostró un beneficio considerable sobre el gráfico p habitual para atributos. Sin embargo, el gráfico p mejorado fracasa en la detección de incrementos pequeños en los parámetros del proceso. En esta situación, una alternativa la constituyen los gráficos de control con muestreo doble (MD) que le dan al proceso una segunda oportunidad antes de tomar una decisión. En este trabajo se muestran los beneficios del gráfico p mejorado con muestreo doble evaluados en términos de eficacia estadística (longitud media de corrida, ARL) y se lo compara con el mismo gráfico con muestreo simple. Además, se presentan tablas para la elección adecuada del plan de muestreo doble. El trabajo incluye una aplicación con datos reales.

PALABRAS CLAVE: Gráficos de Control, Muestreo Doble, Procesos de Alta Calidad, Proporción de No-conformes.

1. Introducción

Independientemente de lo bien diseñado o controlado que se encuentre un proceso productivo, éste siempre tendrá cierta variabilidad inherente o natural como un efecto acumulativo de causas inevitables. El gráfico de control es una de las herramientas del control estadístico de procesos que, en general, es proactiva y principalmente dirigida a supervisar el proceso (Montgomery, 2008). Un gráfico de control está diseñado para identificar adecuadamente la variabilidad natural de un proceso de producción que surge como resultado de causas no asignables (aleatorias) de aquellos

resultados producido por causas asignables (o especiales) que determinan que el proceso se encuentre fuera de control.

Debido a su simpleza y eficacia, el tradicional gráfico p de Shewhart ha sido ampliamente utilizado para el monitoreo y control de la proporción de ítems no conformes de un proceso. Sin embargo, este gráfico no es sensible para detectar pequeños desplazamientos en los valores de p que son comunes en los precisos procesos de producción actuales. Esta dificultad aumenta el riesgo de decidir que el proceso está bajo control cuando realmente está fuera de control (riesgo β) o que el proceso está fuera de control cuando realmente está bajo control (riesgo α).

El gráfico de Shewhart fue construido basado en la aproximación normal para la estadística binomial, pero dejó de ser adecuado en situaciones de bajo nivel de no conformidades o cuando el tamaño de la muestra no es suficientemente grande. Para pequeños valores de p , la distribución binomial es altamente asimétrica, y como resultado, cualquier intento de controlar p con límites de control simétricos está sujeto a un exceso de falsas alarmas.

Se han propuesto una serie de alternativas para mejorar la potencia y la sensibilidad de los gráficos p en proceso de alta calidad. Un buen estudio puede encontrarse en Xie et al., (2002). Pero, aunque los gráficos propuestos pueden aumentar la exactitud del monitoreo y control de los procesos, todavía carecen de la precisión deseable cuando el verdadero p es muy pequeño y n no es lo suficientemente grande.

En un artículo previo, Joekes y Barbosa (2013), presentaron un gráfico p mejorado que proporciona un beneficio considerable sobre el gráfico p habitual para atributos. Este nuevo gráfico, basado en la expansión cuantílica de Cornish-Fisher, mostró ser mejor que el tradicional gráfico de control de Shewhart especialmente en el sentido que permite el monitoreo de valores de p más bajos, como es el caso en los procesos de alta calidad. El método propuesto consiste en hacer un ajuste en los límites de control que dependen del tamaño de la muestra y del valor de los parámetros del proceso.

Sin embargo, el gráfico p mejorado no es eficiente para detectar pequeños incrementos de los parámetros del proceso. Para estas situaciones, una alternativa a los gráficos de control para atributos con muestreo simple es la aplicación de gráficos de control con muestreo doble (MD). El muestreo doble es un caso especial de muestreo múltiple, que consiste en la toma de decisiones en dos pasos en lugar de en un sólo paso como es lo habitual.

El gráfico de control con muestreo doble (MD) fue propuesto originalmente por Croasdale, (1974) para el caso de gráficos de control para variables. En estos primeros gráficos de control con muestreo doble la información de la primera y segunda muestra se evalúan por separado y la confirmación se realiza sólo con la segunda muestra. Daudin (1992) mejoró el gráfico de control de Croasdale y propuso un gráfico de control con muestreo doble que utiliza la información de ambas muestras en la segunda etapa. El mayor tamaño de la muestra mejora la precisión del gráfico de control dado que utiliza una menor desviación estándar muestral. En la estimación de los límites de control el gráfico de control de Daudin optimiza el tamaño de muestra esperado. Irianto y Shinozaki (1998) maximizaron la potencia del gráfico de control para determinar los límites de control del gráfico. He et al. (2002) y Costa y Claro (2007) han hecho otros desarrollos en los gráficos de control con muestreo doble para el caso de gráficos de control para variables.

Recientemente se han realizado investigaciones tendientes a mejorar la efectividad de de los gráficos de control de atributos (gráficos np). Wu et al. (2006), desarrollaron un algoritmo para la optimización del diseño del gráfico de control np considerando una inspección del 100%. Wu y Wang (2007), proponen un gráfico de control np con doble inspección. La primera inspección decide el estado del proceso (bajo control o fuera de control) según el número de elementos no

conformes encontrados en la muestra y en la segunda inspección, el gráfico propuesto comprueba la ubicación de un ítem no conforme particular en la muestra.

A.Rodrigues et al. (2011), propusieron un muestreo de dos etapas o muestreo-doble (MD) combinado con los gráficos de control de Shewhart. Este es otro método utilizado para mejorar la performance del tradicional gráfico p de control de Shewhart sin incrementar el número promedio (bajo control) de ítems inspeccionados por unidad de tiempo. Durante la primera etapa, uno o más ítems de la muestra son inspeccionados y, dependiendo del resultado, el muestreo se interrumpe o pasa a la segunda etapa, donde los ítems restantes de la muestra son inspeccionados.

El propósito del muestreo doble radica en reducir el número de ítems a ser inspeccionados. La eficacia de este plan consiste en detectar cambios pequeños o moderados en la proporción de ítems no conformes en el proceso. Generalmente, en situaciones como ésta, es necesario tomar muestras grandes lo que pueden ser indeseable o inviable en algunas situaciones prácticas.

Un plan de muestreo doble tiene dos posibles ventajas sobre un plan de muestreo simple. En primer lugar, puede reducir la cantidad total de inspección. La primera muestra tiene un tamaño menor respecto de lo que se pide bajo un plan de muestreo simple y, por consiguiente, en todos los casos en que un lote sea aceptado o rechazado en la primera muestra, puede haber un ahorro considerable en la inspección total. También es posible rechazar un lote sin inspeccionar completamente la segunda muestra. En segundo lugar, un plan de muestreo doble tiene la ventaja psicológica de dar al lote una segunda oportunidad. A algunas personas, especialmente al productor, puede parecerles injusto rechazar un lote sobre la base de una sola muestra. Es decir, el muestreo doble le da a un proceso una nueva oportunidad antes de tomar una decisión.

2. Gráficos de control con muestreo simple

2.1.- Límites de control del gráfico p basados en la distribución normal

Cuando se obtienen X ítems no conformes en una muestra de n observaciones, entonces la proporción muestral denotada por P , se define como $P = X/n$ (binomial relativa). La media, varianza y desviación estándar de P son, respectivamente;

$$\mu_P = \mathbb{E}(P) = p, \quad \sigma_P^2 = \mathbb{V}(P) = p(1-p)/n, \quad \sigma_P = \sqrt{p(1-p)/n} \quad (1)$$

Cuando la distribución binomial es adecuadamente aproximada por la distribución normal, los límites de control para monitorear la proporción de ítems no conformes se obtiene fácilmente. Si la verdadera proporción de ítems no conformes es conocida o adecuadamente estimada, entonces los límites de control 3σ se obtienen de la siguiente manera;

$$UCL = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \quad CL = p, \quad LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (2)$$

Estos límites, conocidos como límites 3-sigma, constituyen la base para la mayoría los gráficos de control utilizados en la práctica (Montgomery, 2008). Sin embargo, esta aproximación sólo se considera adecuada cuando $np(1-p) > 5$ and $0.1 < p < 0.9$, o cuando $np(1-p) > 25$, (Xie et al., 2002).

Pero, esta no es la situación de los procesos de alta calidad. En los procesos de alta calidad los valores de p son generalmente muy pequeños (menos de 0.10) y los tamaños de muestra no son lo suficientemente grandes. En esta situación, los límites del control basados en la aproximación normal, no permiten describir adecuadamente la situación real del estado del proceso o no detectar

correctamente cambios. El problema radica en que debido a la alta probabilidad de falsas alarmas, las verdaderas señales pueden ser ignoradas. Otro problema se presenta en las proximidades de cero defectos o cero no conformidades. Cuando el proceso funciona con alta calidad, es decir, cuando muchas muestras carecen de no conformidades, sucede a menudo que el límite inferior de control es en menor que cero, lo que compromete seriamente la interpretación del comportamiento del proceso. El límite superior de control puede ser inferior a uno salvo que la muestra sea suficientemente grande. En estos casos, cualquier muestra que contenga un sólo ítem defectuoso causará una señal de falsa alarma invalidando el control en sí mismo.

Esta situación motivó el desarrollo de un gráfico de control para p mejorado (Joekes y Barbosa, 2013) que tiene algunas ventajas principalmente debido a que permite el monitoreo de valores más bajos de p , como es el caso de procesos de alta calidad. Este gráfico mejorado, basado en la fórmula de corrección cuantílica de Cornish-Fisher, muestra una ventaja respecto del gráfico p tradicional debido a que prácticamente elimina el exceso de falsas alarmas.

2.2.- Expansión de cuantiles de Cornish-Fisher

La fórmula de corrección cuantílica de Cornish-Fisher permite mejorar la aproximación normal a la distribución binomial usando la información de sus cumulantes.

Si z_α denota el cuantil α de la distribución normal estándar, entonces el α -ésimo cuantil de Y , denotado por Y_α , se obtiene de la expansión de Cornish-Fisher con tres términos de corrección (Cornish-Fisher, <http://value-at-risk.net>) de la siguiente manera;

$$\frac{Y_\alpha - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \cong z_\alpha + \frac{(z_\alpha^2 - 1)}{6} K_3 + \frac{(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)}{24} K_4 - \frac{(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)}{36} K_3^2 \quad (3)$$

La expansión de cuantiles de Cornish-Fisher, usa la información de los cumulantes de 3° y 4° orden (K_3 y K_4). (Para detalles del procedimiento ver Joekes y Barbosa, 2013).

2.3.- El gráfico p mejorado

La primera persona que investigó la modificación de los límites del control del gráfico p tradicional fue Winterbotom (1993), quien logró una mejora en la exactitud probabilística de los límites de control mediante un simple ajuste (cumulante de 3° orden) derivado de la expansión de cuantiles de Cornish-Fisher para corregir no-normalidad. También señaló que los ajustes son mejores que la normalización mediante transformaciones dado que mantienen la escala original de los datos.

Winterbottom afirmó que si X es una variable aleatoria binomial con tamaño de muestra n y parámetro p , entonces $Y = X/n$ es una proporción binomial con $\mu = E(Y) = p$, y momentos centrales de Y , $\mu_2 = V(Y) = p(1-p)/n$, $\mu_3 = p(1-p)(1-2p)/n^2$. Si z_α denota el cuantil α de la distribución normal estándar, luego, el α -ésimo cuantil de Y , denotado por Y_α (llamado aquí $Y_\alpha(1)$), se obtiene de la expansión de Cornish-Fisher con un solo término de corrección como:

$$Y_\alpha(1) = p + z_\alpha [p(1-p)/n]^{1/2} + \frac{(z_\alpha^2 - 1)}{6n} (1 - 2p) \quad (4)$$

Los resultados Winterbottom fueron ampliados mediante la inclusión de un nuevo término en un gráfico p mejorado, que permitió obtener una mejor aproximación normal para la distribución binomial. El estudio (Joekes y Barbosa, 2013), se llevó a cabo empleando dos ajustes en la expansión asintótica de Cornish-Fisher que permitió corregir sesgo y asimetría. En este caso se agregó el momento central de cuarto orden de Y , dado por μ_4 .

Sigue inmediatamente que;

$$Y_{\alpha}(2) \cong Y_{\alpha}(1) + \frac{(z_{\alpha}^3 - 3z_{\alpha}) [1 - 6p(1 - p)]}{24n^2 [p(1 - p)/n]^{1/2}} - \frac{(2z_{\alpha}^3 - 5z_{\alpha})}{36n^2} \frac{(1 - 2p)^2}{[p(1 - p)/n]^{1/2}} \quad (5)$$

Notar que esta fórmula depende sólo del valor del parámetro (p), el tamaño de la muestra (n) y el valor de z_{α} (cuantil de la distribución normal estándar).

2.4.- Límite de control del gráfico p mejorado

Los límites de control se obtienen teniendo en cuenta la proporción de ítems no conformes aceptables en el lote, el tamaño de la muestra y el riesgo de falsa alarma (o riesgo alfa). Tradicionalmente este valor fue fijado en ± 3 que corresponde a un riesgo de falsa alarma de 0.0027. Sin embargo, en los procesos de alta calidad este valor se considera altamente exigente y poco realista de manera que se sugiere un valor algo mayor de, por ejemplo, 0,0050.

Además, como el propósito es detectar causas asignables que resultan en aumentos del valor de p , el gráfico se define sin el límite inferior de control (o equivalente, el límite inferior de control es igual a cero).

Fijando $z_{\alpha} = 3$ en la ecuación (5), que corresponde a un riesgo α de 0.0027, se obtienen los límites de control del gráfico p mejorado como;

$$LSC = p + 3 [p(1 - p)/n]^{1/2} + \frac{4(1 - 2p)}{3n} - \frac{[p(1 - p) + 2]}{6n^2 [p(1 - p)/n]^{1/2}} \quad (6)$$

Cuando se considera un riesgo $\alpha = 0.005$, en la ecuación (2) debe colocarse $z_{\alpha} = 2.807$, de manera de obtener los límites de control del gráfico p mejorado.

3. Procedimiento del gráfico de control con muestreo simple.

El procedimiento de control con muestreo simple (MS), consiste en tomar una muestra aleatoria de tamaño n del proceso y contar el número de artículos no conformes en la muestra. Si esa cantidad es mayor que el límite superior de control, el lote es rechazado y será necesario tomar acciones sobre el proceso. Si la cantidad es menor o igual al límite superior de control, el lote es aceptado.

Cada ítem muestreado, X , es una variable aleatoria discreta que denota el número de pruebas que determinaron un resultado de interés, con distribución binomial de parámetros n y p , donde n es el número de ensayos, p es la probabilidad de encontrar un artículo no conforme y $(1-p)$ es la probabilidad de encontrar un ítem conforme. Además se asume que las n observaciones de X son independientes, es decir, la probabilidad de encontrar un artículo no conforme en la muestra es independiente de los ítems no conformes de las muestras previas. La proporción de la muestra P , se define como $P = X/n$ (binomial relativa) con media, varianza y desviación estándar como se indica en la sección 2.1.

Sea p_0 la proporción de ítems no conformes aceptables en el lote y p_1 la proporción de ítems no conformes en el lote ($p_1 > p_0$). Alfa (α) es la probabilidad de que un lote bueno sea rechazado (cuando la proporción de ítems no conformes es igual a p_0) y beta (β) es la probabilidad de que un lote malo sea aceptado (cuando la proporción de ítems no conformes es igual a p_1).

Los riesgos α y β están dados por;

$$\alpha = \text{probabilidad de rechazar un lote cuando } p = p_0$$

$$\alpha = Pr(X/n > LSC/p = p_0) = 1 - Pr_{p_0}(X/n \leq LSC) \quad (7)$$

β = probabilidad de aceptar un lote cuando $p = p_1$

$$\beta = Pr(X/n \leq LSC/p = p_1) \quad (8)$$

donde n es el tamaño de la muestra, p_0 es el valor del parámetro bajo control, p_1 es el valor del parámetro fuera de control y LSC es el Límite Superior de Control para el gráfico p como fue dado en la Eq. (6).

Teniendo en cuenta que el propósito del gráfico consiste en detectar causas asignables que resultan en aumentos en el valor de p , es decir, $p = p_1$, donde $p_1 > p_0$, el gráfico se define con el límite de control inferior igual a cero.

Luego, dados p_0 , p_1 , α y β , es posible definir un plan de control como sigue

- 1.- Obtener el límite superior de control como se indica en Eq.(6) con parámetro $p = p_0$
- 2.- Tomar una muestra de n ítems del proceso en intervalos de tiempo fijo, por ejemplo, cada hora
- 3.- Calcular la proporción de ítems no conformes, P
- 4.- Comparar P con LSC y tomar una decisión
 - 4.1.- Si $P > LSC$ rechazar el lote
 - 4.2.- Si $P \leq LSC$ aceptar el lote

Algunas veces es conveniente hacer un gráfico de control simplemente representando el número de ítems no conformes X en la muestra (a partir de ahora llamado d) en lugar de la proporción de no conformes P . Esto es particularmente cierto si el tamaño de muestra n es constante y la proporción no conformes P es muy pequeña. Este gráfico, conocido comúnmente como gráfico np , proporciona esencialmente la misma información que el gráfico p . La diferencia básica entre el gráfico p y el gráfico np es la escala del eje vertical. El límite superior de control del gráfico np es n veces el límite superior de control del gráfico p , es decir, $LSC(\text{gráfico } np) = n LSC(\text{gráfico } p)$.

4. Procedimiento del gráfico de control con muestreo doble.

El gráfico de control con muestreo doble (MD) tiene por objeto mejorar la capacidad de detectar cualquier pequeño cambio de condición de fuera de control mediante la observación de una segunda muestra sin interrumpir el muestreo. El gráfico de control con muestreo doble puede preservar las ventajas del gráfico de control p mejorado e incrementar la capacidad de detectar desplazamientos de los valores de p en el proceso reduciendo, al mismo tiempo el tamaño de la muestra. El procedimiento de control para el muestreo doble es similar al del muestreo simple por lo que el plan de muestreo simple presentado anteriormente puede ser extendido al esquema de muestreo doble (A. Rodrigues et al., 2011).

Como antes, la proporción de ítems no conformes p aceptable en el lote, es p_0 , es decir, cuando el proceso está bajo control, $p = p_0$. Si se presentan causas asignables hay un incremento en el valor de p (es decir, $p = p_1$, donde $p_1 > p_0$). Sólo este caso será considerado por lo que el gráfico se define sin límite de control inferior.

El gráfico np con MD utiliza cinco parámetros: el tamaño de la primera muestra (n_1), el número de aceptación para la primera muestra (límite de advertencia, LA), el número de rechazo para la

primera muestra LSC_1 , el tamaño de la segunda muestra (n_2) y el número de aceptación para la segunda etapa de muestreo ($LSCL_2$).

Luego, dados n_1 , n_2 , LA , LSC_1 y LSC_2 , es posible definir un plan de control como;

- 1.- Tomar una muestra de n_1 ítems del proceso
- 2.- Sea d_1 el número de ítems no conformes encontrados en esta muestra (de tamaño n_1)

En este caso, la decisión depende de d_1 ;

- 2.1.- Si $d_1 < LA$, el proceso es considerado bajo control y se continua operando con el esquema de control previsto
- 2.2.- Si $d_1 > LSC_1$, el proceso se considera fuera de control debiendo tomar acciones correctivas
- 2.3.- Si $LA < d_1 < LSC_1$, una muestra adicional de n_2 ítems debe ser inmediatamente tomada

De ser así;

- 3.- Tomar una segunda muestra de n_2 ítems del proceso
- 4.- Sea d_2 el número de ítems no conformes encontrados en esta muestra (de tamaño n_2)
- 5.- Sea $(d_1 + d_2)$, la suma de ítems no conformes encontrados en las dos muestras (con tamaño n_1 y n_2)

En este caso, la decisión depende de $(d_1 + d_2)$

- 5.1.- Si $(d_1 + d_2) < LSC_2$, el proceso es considerado bajo control y se continua operando con el esquema de control previsto
- 5.2.- Si $(d_1 + d_2) > LSC_2$, el proceso se considera fuera de control debiendo tomar acciones correctivas
- 6.- En intervalos de muestreo prefijados (cada hora, por ejemplo) retornar a la primera fase del esquema de MD y tomar una nueva muestra de tamaño n_1 .

Estas acciones se pueden ver en la siguiente figura;

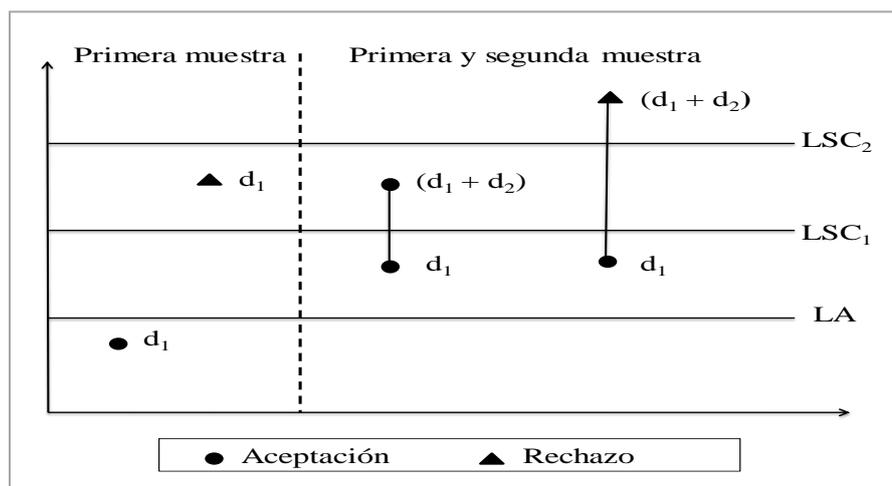


Figura 1: Procedimiento del gráfico de control con MD

Debe tenerse en cuenta que el número de ítems no conformes en la muestra, d_1 y d_2 , son siempre valores enteros, por lo que resulta apropiado que los límites de advertencia y de control sean

expresados mediante valores fraccionarios. Cuando se emplean límites fraccionarios, el usuario no dudará en determinar si un número de ítems no conformes cae dentro o fuera de los límites del control. Luego, los límites de advertencia y control fraccionarios pueden ser definidos de la siguiente manera:

$$LA = [LA] + 0.5 ; \quad LSC_1 = [LSC_1] - 0.5 ; \quad LSC_2 = [LSC_2] + 0.5$$

Donde $[LA]$ representa el menor valor entero para el límite de advertencia, $[LSC_1]$ representa el mayor valor entero del límite de control de la primera muestra y $[LSC_2]$ representa el menor valor entero para el límite de control con la segunda muestra.

Siguiendo el mismo criterio para el gráfico con muestreo simple, $LSC_0 = [LSC] + 0.5$, donde $[LSC]$ representa el menor valor entero para el límite superior de control.

4.1.- Medida de desempeño del gráfico de control con muestreo doble

En el área de calidad y principalmente en la industria de la producción, una forma de evaluar las decisiones con respecto a eficacia de un gráfico control es a través de la longitud media de corrida (ARL). Esencialmente, el ARL es el número promedio de puntos que deben ser graficados antes de que un punto indique una condición de fuera de control. En particular, ARL_0 es la longitud promedio de corrida para un proceso en estado de control y ARL_1 es la longitud promedio de corrida para un proceso fuera de control.

Se conoce que incluso cuando un proceso está bajo control (es decir, cuando no hay causas especiales presentes en el sistema, $p = p_0$), hay aproximadamente una probabilidad de 0,0027 de que un punto exceda el límite de control superior 3-sigma. Incluso en un gráfico de control apropiadamente construido, puede ser posible que una causa especial aparezca sin que necesariamente haya ocurrido. Para un gráfico de control con límites 3-sigma, esta falsa alarma se produce en promedio una vez cada $1 / 0,0027$ o 370,4 observaciones. Por lo tanto, la longitud promedio de corrida de un gráfico bajo control (ARL_0), es 370,4. En condiciones menos restrictivas, como ocurre con los procesos de alta calidad, es más realista considerar la probabilidad de una falsa alarma un poco mayor, por ejemplo, de 0,005, es decir, una falsa alarma ocurre en promedio una vez cada $1 / 0,005$ o cada 200 observaciones (Bissell, 1988).

Por otro lado, si se produce una causa especial, ésta puede no puede ser de magnitud suficiente como para que el gráfico determine una condición inmediata de alarma. Si se produce una causa especial, uno puede describir esa causa midiendo el cambio en la fracción de ítems no conformes en el proceso en cuestión ($p_1 > p_0$). Cuando se cuantifican los cambios, es posible determinar el ARL fuera de control para el gráfico (ARL_1).

Sean, ARL_0 y ARL_1 las medidas de rendimiento de los gráficos de control, con $ARL_0 = 1/\alpha$, donde α es la probabilidad de falsa alarma y $ARL_1 = 1/1 - \beta$, donde β es la probabilidad de no detectar una causa especial en la muestra. En los gráficos de control con muestreo simple, estas cantidades se obtienen directamente utilizando las ecuaciones (7) y (8).

En MD, estas medidas de desempeño se obtienen de manera diferente. Para el gráfico np con MD, después de cada muestreo, la probabilidad de que el gráfico indique que el proceso está bajo control, está dada por;

$$P_T = P_a^I + P_a^{II} \quad (9)$$

donde P_a^I indica la probabilidad de que el valor del estadístico en la muestra esté por debajo del límite de advertencia (LA) en la primera etapa del esquema de MD y P_a^{II} indica la probabilidad de

que se necesite tomar una segunda muestra y que el número total de ítems no conformes en las dos muestras sea menor que el límite de control de la segunda etapa (LSC_2).

P_a^I y P_a^{II} están dados por:

$$P_a^I = Pr(d_1 \leq [LA], n_1, p_0)$$

$$P_a^I = \sum_{d_1=0}^{[LA]} \frac{n_1!}{d_1! (n_1 - d_1)!} p_0^{d_1} (1 - p_0)^{n_1 - d_1} \quad (10)$$

Donde P_a^I es la probabilidad de aceptar el lote con la primera muestra

$$P_a^{II} = Pr([LA] < d_1 \leq [LSC_1]) \cap (d_1 + d_2 \leq [LSC_2])$$

$$P_a^{II} = \sum_{d_1=[LSC_1]+1}^{[LSC_2]-1} \left[\frac{n_1!}{d_1! (n_1 - d_1)!} p_0^{d_1} (1 - p_0)^{n_1 - d_1} \cdot \left(\sum_{d_2=0}^{[LSC_2]-d_1} \frac{n_2!}{d_2! (n_2 - d_2)!} p_0^{d_2} (1 - p_0)^{n_2 - d_2} \right) \right] \quad (11)$$

y P_a^{II} es la probabilidad de aceptar el lote cuando una segunda muestra debe ser tomada

De esta manera, es posible calcular α , β , ARL_0 y ARL_1 como:

$$\text{Cuando } p = p_0, \quad \alpha = 1 - P_T, \quad ARL_0 = 1 / (1 - P_T), \quad y \quad (12)$$

$$\text{Cuando } p = p_1, \quad \beta = P_T, \quad ARL_1 = 1 / 1 - P_T$$

No menos importante es determinar el tamaño promedio de muestra que termina siendo considerado. En el muestreo simple, el tamaño de la muestra total inspeccionada es siempre constante. En el muestreo doble este tamaño variará dependiendo de si una segunda muestra es necesaria o no. La probabilidad de una segunda muestra variará con p_0 . Con una inspección completa de la segunda muestra, el tamaño promedio de la muestra es igual al tamaño de la primera muestra por la probabilidad de que sólo se necesite una muestra, más el tamaño de la muestra combinada por la probabilidad de que la segunda muestra sea necesaria.

Cuando $p = p_0$, la probabilidad de tomar una decisión en la primera muestra es P_1 , esto es;

$$P_1 = Pr(\text{el lote sea aceptado en la primera muestra}) + Pr(\text{el lote sea rechazado en la primera muestra})$$

$$P_1 = Pr(d_1 \leq [LA], n_1, p_0) + Pr(d_1 > [LSC_1], n_1, p_0) \quad (13)$$

Luego, la probabilidad de tener que tomar una segunda muestra es $1 - P_1$, donde;

$$1 - P_1 = Pr([LA] < d_1 < [LSC_1]) \quad (14)$$

Por lo tanto, una formula general para el tamaño promedio de la muestra (TPM) en el muestreo doble, asumiendo inspección completa de la segunda muestra es;

$$TPM = n_1 P_1 + (n_1 + n_2) (1 - P_1) = n_1 + n_2 (1 - P_1) \quad (15)$$

Donde P_1 es la probabilidad de tomar una decisión en la primera muestra.

En la práctica, la inspección suele realizarse sobre la segunda muestra y el lote es rechazado tan pronto como el número de unidades no conformes en la muestra combinada, supera el segundo número de aceptación LSC_2 . De esta manera, es posible rechazar un lote sin una inspección completa de la segunda muestra, porque si el recuento del número de unidades no conformes en las dos muestras combinadas ($d_1 + d_2$) supera a LSC_2 , el lote es rechazado sin continuar la inspección (esto se conoce como cercenar o restringir la segunda muestra). Por lo tanto, el muestreo doble frecuentemente puede llevar a reducir los costos generales de inspección.

4.2.- Diseño del gráfico con muestreo doble

En este apartado, se define el diseño óptimo del gráfico np con MD y el desempeño comparativo de este gráfico con el gráfico np con muestreo simple. El diseño del gráfico np con MD se basa en ciertas condiciones de optimización previamente establecidas por A. Rodrigues et al. (2011).

Sea TPM_1 el tamaño promedio de muestra (TPM) para un proceso fuera de control, es decir, $p = p_1$, y TPM_0 el TPM bajo control con $p = p_0$. La función objetivo consiste en minimizar β o equivalente minimizar ARL_1 para un desplazamiento determinado de p , sujeto a ciertas restricciones sobre TPM_0 y ARL_0 .

Formalmente, el problema de optimización del gráfico np con MD es el siguiente:

- a. Minimizar ARL_1 (o minimizar el número de unidades muestrales hasta la detección de un ítem fuera de control en el proceso), sujeto a:
- b. $TPM_0 \leq n$ (el tamaño promedio de muestral en MD con $p = p_0$, debe ser menor que el tamaño de muestra en el muestreo simple, MS)
- c. $ARL_0 \geq ARL_{0min}$

Donde n y ARL_{0min} son valores especificados.

Las expresiones para calcular ARL_0 , ARL_1 and TPM_0 están dadas en las Ecuaciones (12) y (15).

Con el fin de permitir la comparación entre los gráficos np con MD y MS bajo las mismas condiciones, se imponen ciertas restricciones sobre TPM_0 y ARL_0 , bajo control. Para un número de valores especificados de estas restricciones, es posible comparar los valores ARL de ambos gráficos para un rango de desplazamientos ascendentes en los valores de p .

Los parámetros asociados al gráfico con muestreo simple son, el tamaño especificado muestra n y el límite superior de control LSC, dado que el gráfico se define sin límite inferior de control. En el gráfico con MD, los valores de p_0 , p_1 , n y ARL_{0min} , son los input del problema. Por conveniencia, la proporción de no conformidades p_1 , se obtiene de la relación $\gamma = p_1/p_0$.

Para resolver el problema de optimización, fue desarrollado el programa bajo plataforma de R (R Development Core Team ,2012), basado en el programa original en MatlabTM que se encuentra en la tesis doctoral de A. Rodrigues, 2005, el cual se encuentra disponible en el sitio: <https://sites.google.com/site/marcelosmrekar/home> (Publicaciones).

En este artículo, se considera un proyecto para procesos de alta calidad en el cual la proporción de no conformidades es baja y, por lo general, el tamaño de la muestra también. Los parámetros de entrada considerados fueron los siguientes: $p_0 = 0,005, 0,01, 0,02$; $\gamma = 1,5, 2,0$; $n = 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 80, 100$, y $ARL_{0min} = 200$ y $370,4$. Debe tenerse en cuenta que un $ARL_{0min} = 200$ corresponde a un riesgo de falsa alarma de 0,5% ($z_\alpha = 2.807$) y un $ARL_{0min} = 370,4$ corresponde a un riesgo de falsa alarma de 0,27% ($z_\alpha = 3$), como se indica en la sección 4.4.

Un $ARL_{0min} = 370,4$ es considerado un valor estándar para ARL_0 en los gráficos de control pero este valor puede conducir a tamaños de muestra muy grandes si se requiere que el gráfico tenga un

poder de detección razonable de una situación fuera de control. Bissel (1988) sugiere utilizar un $ARL_{0min} = 200$ para gráficos de control de atributos como una situación más realista.

En las tablas 1 a 4 se presentan los resultados de los parámetros de diseño óptimo del gráfico np con MS y MD. Las tablas 1 y 2 exhiben los resultados para $ARL_{0min} = 370,4$, con $\gamma = 1,5$, y $2,0$, mientras que las tablas 3 y 4 exhiben los resultados para $ARL_{0min} = 200$ con $\gamma = 1,5$ y $2,0$. También es posible ver los valores de ARL_0 y ARL_1 así como los parámetros de diseño óptimo para cada uno de los gráficos considerados.

Tabla 1: Diseño óptimo para gráficos np con MS y MD con $ARL_{0min} = 370,4$ y $\gamma = 1,5$

		Gráfico de control np con muestreo simple						Gráfico de control np con muestreo doble						
p_0	p_1	n	LSC	LSC ₀	ARL ₀	ARL ₁	LA	LSC ₁	LSC ₂	n_1	n_2	TPM	ARL ₀	ARL ₁
0.5%	0.75%	40	2.109	2.5	929.88	295.17	1.5	2.5	4.5	34	162	35.94	803.41	193.22
		60	2.647	2.5	289.17	95.21	1.5	2.5	4.5	42	203	45.57	370.98	91.48
				3.5	4102.47	905.70	1.5	2.5	4.5	42	203	45.57	370.98	91.48
				3.5	1369.21	314.31	1.5	3.5	5.5	64	271	75.05	371.19	64.00
		100	3.462	3.5	597.63	142.60	1.5	3.5	6.5	74	352	92.57	372.43	55.45
1%	1.5%	20	2.089	2.5	996.44	314.66	1.5	2.5	4.5	18	81	19.06	738.32	177.41
		30	2.627	2.5	301.41	98.75	1.5	2.5	4.5	21	104	22.80	374.61	91.30
				3.5	4492.41	984.55	1.5	2.5	4.5	22	96	23.81	370.48	91.50
				3.5	1458.56	332.47	1.5	3.5	5.5	32	137	37.53	371.55	63.67
		50	3.441	3.5	626.50	148.47	1.5	3.5	6.5	37	178	46.32	372.23	54.92
2%	3%	10	2.048	2.5	1157.53	361.67	1.5	2.5	4.5	9	37	9.46	923.44	218.99
		15	2.586	2.5	329.02	106.71	1.5	2.5	4.5	11	51	11.93	373.56	89.88
				3.5	5464.31	1179.8	1.5	2.5	4.5	11	51	11.93	373.56	89.88
				3.5	1667.56	374.70	1.5	3.5	5.5	16	70	18.77	372.28	63.03
		25	3.399	3.5	691.62	161.66	1.5	3.5	6.5	19	89	23.82	371.88	53.92

Tabla 2: Diseño óptimo para gráficos np con MS y MD con $ARL_{0min} = 370,4$ y $\gamma = 2,0$

		Gráfico de control np con muestreo simple						Gráfico de control np con muestreo doble						
p_0	p_1	n	LSC	LSC ₀	ARL ₀	ARL ₁	LA	LSC ₁	LSC ₂	n_1	n_2	TPM	ARL ₀	ARL ₁
0.5%	1%	40	2.109	2.5	929.88	133.38	1.5	2.5	4.5	34	162	35.94	803.41	72.74
		60	2.647	2.5	289.17	44.60	1.5	2.5	4.5	42	203	45.57	370.98	36.13
				3.5	4102.47	320.17	1.5	2.5	4.5	43	194	46.56	370.91	36.33
				3.5	1369.21	115.48	1.5	3.5	5.5	65	267	76.20	372.08	21.42
		100	3.462	3.5	597.63	54.42	1.5	3.5	6.5	78	336	97.43	372.29	17.21
1%	2%	20	2.089	2.5	996.44	141.47	1.5	2.5	4.5	18	81	19.06	738.32	66.70
		30	2.627	2.5	301.41	46.05	1.5	2.5	4.5	21	104	22.80	374.61	35.87
				3.5	4492.41	345.60	1.5	2.5	4.5	22	96	23.81	370.50	35.88
				3.5	1458.56	121.35	1.5	3.5	5.5	33	133	38.68	373.58	21.19
		50	3.441	3.5	626.50	56.31	1.5	3.5	6.5	39	170	48.77	372.53	16.97
2%	4%	10	2.048	2.5	1157.53	160.93	1.5	2.5	4.5	9	37	9.46	923.44	80.50
		15	2.586	2.5	329.02	49.28	1.5	2.5	4.5	11	51	11.93	373.56	34.88
				3.5	5464.31	408.21	1.5	2.5	4.5	11	51	11.93	373.56	34.88
				3.5	1667.56	134.90	1.5	3.5	5.5	17	66	19.92	377.35	20.77
		25	3.399	3.5	691.62	60.53	1.5	3.5	6.5	19	89	23.82	371.88	16.55

Tabla 3: Diseño óptimo para gráficos np con MS y MD con $ARL_{0min} = 200$ y $\gamma = 1,5$

		Gráfico de control np con muestreo simple						Gráfico de control np con muestreo doble						
p_0	p_1	n	LSC	LSC ₀	ARL ₀	ARL ₁	LA	LSC ₁	LSC ₂	n_1	n_2	TPM	ARL ₀	ARL ₁
0.5%	0.75%	40	2.109	2.5	929.88	295.17	1.5	2.5	4.5	34	162	35.94	803.41	193.22
		60	2.477	2.5	289.17	95.21	1.5	2.5	4.5	50	242	55.83	200.04	51.35
		80	2.880	2.5	129.67	44.26	1.5	2.5	4.5	56	192	61.63	200.95	53.09
				3.5	1369.21	314.31	1.5	3.5	5.5	66	324	79.96	225.64	42.07
		100	3.234	3.5	597.63	142.60	1.5	3.5	5.5	79	290	96.14	200.25	37.01
1%	1.5%	20	1.968	2.5	996.44	314.66	1.5	2.5	4.5	18	81	19.06	738.32	177.41
		30	2.460	2.5	301.41	98.75	1.5	2.5	4.5	25	118	27.81	212.94	54.04
		40	2.863	2.5	133.38	45.31	1.5	2.5	4.5	28	99	30.88	201.04	52.47
				3.5	1458.56	332.47	1.5	3.5	5.5	33	162	39.91	230.68	42.63
		50	3.216	3.5	626.50	148.47	1.5	3.5	5.5	39	148	47.50	200.76	36.93
2%	3%	10	1.935	2.5	1157.53	361.67	1.5	2.5	4.5	9	37	9.46	923.44	218.99
		15	2.426	2.5	329.02	106.71	1.5	2.5	4.5	13	56	14.40	221.64	55.49
		20	2.828	2.5	141.47	47.60	1.5	2.5	4.5	14	52	15.48	203.14	51.83
				3.5	1657.56	374.70	1.5	3.5	5.5	16	81	19.21	257.64	46.53
		25	3.181	3.5	691.62	161.66	1.5	3.5	5.5	19	77	23.17	202.04	36.86

Tabla 4: Diseño óptimo para gráficos np con MS y MD con $ARL_{0min} = 200$ y $\gamma = 2,0$

		Gráfico de control np con muestreo simple						Gráfico de control np con muestreo doble						
p_0	p_1	n	LSC	LSC ₀	ARL ₀	ARL ₁	LA	LSC ₁	LSC ₂	n_1	n_2	TPM	ARL ₀	ARL ₁
0.5%	1%	40	2.109	2.5	929.88	133.38	1.5	2.5	4.5	34	162	35.94	803.41	72.74
		60	2.477	2.5	289.17	44.60	1.5	2.5	4.5	50	242	55.83	200.04	21.37
		80	2.880	2.5	129.67	21.48	1.5	2.5	4.5	54	209	59.76	200.11	21.51
				3.5	1369.21	115.48	1.5	3.5	5.5	66	324	79.96	225.64	15.26
		100	3.234	3.5	597.63	54.42	1.5	3.5	5.5	81	283	98.47	200.52	13.14
1%	2%	20	1.968	2.5	996.44	141.47	1.5	2.5	4.5	18	81	19.06	738.32	66.70
		30	2.460	2.5	301.41	46.05	1.5	2.5	4.5	25	118	27.81	212.94	22.24
		40	2.863	2.5	133.38	21.90	1.5	2.5	4.5	28	99	30.88	201.04	21.52
				3.5	1458.56	121.35	1.5	3.5	5.5	33	162	39.91	230.68	15.36
		50	3.216	3.5	626.50	56.31	1.5	3.5	5.5	41	141	49.84	201.34	13.02
2%	4%	10	1.935	2.5	1157.53	160.93	1.5	2.5	4.5	9	37	9.46	923.44	80.50
		15	2.426	2.5	329.02	49.28	1.5	2.5	4.5	13	56	14.40	221.64	22.45
		20	2.828	2.5	141.47	22.80	1.5	2.5	4.5	14	52	15.48	203.14	21.04
				3.5	1657.56	134.90	1.5	3.5	5.5	16	81	19.21	257.64	16.48
		25	3.181	3.5	691.62	60.53	1.5	3.5	5.5	20	73	24.33	205.27	13.04

En las tablas anteriores, es posible ver los proyectos óptimos para los gráficos np muestreo con muestreo simple y doble y las medidas de rendimiento para todas las combinaciones de γ , ARL_{0min} , p_0 y TPM, previamente establecidos.

El análisis muestra que algunas combinaciones de parámetros considerados en los proyectos óptimos producen grandes valores ARL_1 , valores que son inaceptables en la práctica. Sin embargo, estos proyectos son de interés para el análisis y para comparar el desempeño de los gráficos np con MS y MD. También permite el análisis de la sensibilidad de de los gráficos con estos valores.

Debe notarse que para algunos valores observados del límite superior de control en el gráfico con MS, la acción produce dos posibilidades para el análisis. Esto se debe a que el menor valor entero del límite de control no cumple con una de las restricciones de optimización establecidas, dado que el ARL_{0min} es inferior al valor del prefijo.

Lo que sucede es que en los gráficos de control de atributos, los límites de control son valores fraccionarios, pero la estadística graficada es un entero. Por ejemplo, si el $LSC = 2,880$, esto

significa que si en el proceso hay más de dos artículos defectuosos, el proceso es considerado fuera de control. Lo mismo pasaría si $LSC = 2.043$, puesto que la variable binomial considera solamente el valor entero del número. Obviamente los límites de control pueden ser "redondeados" a valores enteros (como se hace aquí) pero cuanto mayor es el valor del límite superior de control (para un mismo tamaño de muestra y valor de p) mayor será el ARL_1 o número de muestras hasta la detección de un ítem fuera de control en el proceso. En las tablas anteriores, se colocan las dos posibilidades, una que es real pero no cumple con las restricciones, y otra que satisface las restricciones. Sin embargo, aunque la primera no cumple con las restricciones en el muestreo simple, tiene el mejor rendimiento en el muestreo doble.

Para ilustrar el proceso de optimización, se consideran los datos de la Tabla 3 en la que se muestran los proyectos óptimos y sus medidas de desempeño para el gráfico de control np con MD.

Los datos de entrada son:

$$\gamma = 2,0, \alpha_{\max} = 0,005 \text{ or } ARL_0 = 200; \quad p_0 = 0,5\% , \quad [LSC] = 2 \text{ and } TPM_{\max} = 60$$

El diseño óptimo del gráfico np con MD es (50, 242, 1,5, 2,5, 4,5) dado que $n_1 = 50$, $n_2 = 242$, $[LA] = 1$, $[LSC_1] = 3$ and $[LSC_2] = 4$. Con estos parámetros, el $TPM = 55.83$ y las medidas de desempeño son $ARL_0 = 200,04$ y $ARL_1 = 21,37$.

El proyecto para el gráfico de control np con MS que logra las mismas condiciones con; $n \leq 60$ y $\alpha = 0,005$ es el gráfico de control con MS (60, 2,5) donde $n = 60$, $[LSC] = 2$, $ARL_0 = 289,17$ y $ARL_1 = 44,60$.

Por lo tanto, el gráfico np con muestreo doble y el gráfico np con muestreo simple son comparables en el sentido de que cumplen las mismas restricciones respecto a TPM y ARL_0 y pero el gráfico np con MD tiene menor ARL_1 .

En la siguiente sección se muestra un ejemplo con datos reales empleando este plan de muestreo doble.

5. Ejemplo ilustrativo con datos reales.

Supongamos que queremos analizar la adhesión de un sellador de pintura en piezas de automóvil. El proceso consiste en pintar piezas con este sellador y luego aplicar la pintura final. Una pieza se considera no conforme cuando no consigue una buena adherencia. Para el control, se toma una muestra de 60 piezas/hora de producción y se considera el número de piezas con mala adherencia de la pintura final. A causa de que el muestreo es costoso, el Departamento de calidad decide implementar el doble muestreo con el fin de reducir el número de muestras a ser inspeccionadas.

En la siguiente tabla se muestra el resultado de la inspección del proceso inicial de 12 muestras en Fase I (Chakraborti et al., 2008), con una proporción de no conformidades de 0,005. Luego, se agregan 12 muestras en las que la proporción de no conformidades del proceso se ha incrementado a 0,01 (claramente esto es sólo una parte del control, dado que el número de muestras en Fase I es siempre mucho mayor)

Considérese nuevamente el proyecto óptimo para los datos de la Tabla 3, donde; $\gamma = 1,5$, $\alpha_{\max} = 0,005$, $ARL_0 = 200$; $p_0 = 0,5\%$. El diseño óptimo del gráfico np con MD es (50, 242, 1,5, 2,5 y 4,5).

El plan de muestreo doble consiste en tomar una primera muestra de tamaño $n_1 = 50$. Si el número de no conformes en la muestra (d_1) es menor que $LA = 1,5$ ($\delta \leq 1$), el proceso es considerado bajo control y se continua con el esquema de control como venía operando. Si $d_1 > 4,5$ ($\delta \geq 5$) se considera que el proceso está fuera de control. Si $1,5 < d_1 < 2,5$ ó $d_1 = 2$, debe

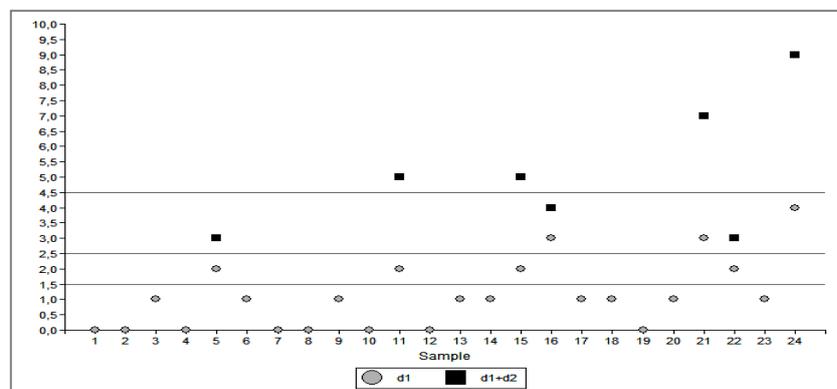
tomarse inmediatamente una muestra adicional de $n_2 = 242$ ítems. En esta muestra, se cuenta el número de ítems no conformes d_2 , y si $(d_1 + d_2)$ es menor que $LSC_2 = 4.5$ ($\hat{\sigma} \leq 4$) el proceso se considera bajo control y se continua con el esquema de control como venía operando. Pero, si $(d_1 + d_2)$ es mayor que $LSC_2 = 4.5$ ($\hat{\sigma} \geq 5$) el proceso se considera fuera de control por lo que debe tomarse alguna acción correctiva. Este procedimiento se encuentra presentado en la Tabla 5, a continuación.

Tabla 5: Ejemplo de un diseño óptimo con muestreo doble para el control del número de no conformes

Muestra N°	n_1	d_1	Acción ^(*)	n_2	d_2	$d_1 + d_2$	Acción ^(*)
1	50	0	A				
2	50	0	A				
3	50	1	A				
4	50	0	A				
5	50	2	TSM	242	1	3	A
6	50	1	A				
7	50	0	A				
8	50	0	A				
9	50	1	A				
10	50	0	A				
11	50	2	TSM	242	3	5	R
12	50	0	A				
13	50	1	A				
14	50	1	A				
15	50	2	TSM	242	3	5	R
16	50	3	TSM	242	1	4	A
17	50	1	A				
18	50	1	A				
19	50	0	A				
20	50	1	A				
21	50	3	TSM	242	4	7	R
22	50	2	TSM	242	1	3	A
23	50	1	A				
24	50	4	TSM	242	5	9	R

(*) A = aceptar, TSM = tomar una segunda muestra

Figura 2: Gráfico de control np para los valores de la Tabla 5.



Ahora, sería interesante determinar cuáles son las diferencias con el muestreo simple.

Primero, la muestra N° 11 de la Fase I habría sido aceptada con el muestreo simple, cuando en realidad debería ser rechazada. Lo mismo ocurrió con la muestra N° 15 de la fase II. Por el contrario, la muestra N° 16 habría sido rechazado con el muestreo simple cuando en realidad el proceso estaba bajo control. Notemos que en el muestreo doble, la muestra N° 15 no necesita ser completada, dado que, inmediatamente cuando el conteo de las no conformidades de la segunda muestra sumados al de la primera muestra supera el LSC_2 , se detiene el conteo y el proceso es rechazado.

El cálculo para obtener el porcentaje de ganancia del diseño estadístico del gráfico np con MD en relación con el diseño estadístico del gráfico np con MS para este caso en particular, está dado por:

$$\text{Percentage gain} = \frac{ARL_{1(MS)} - ARL_{1(MD)}}{ARL_{1(MS)}} \times 100 = \frac{44,60 - 21,37}{44,60} = 52,09\%$$

Esto es, el porcentaje de ganancia en términos de tamaño muestral promedio, utilizando el gráfico con muestreo doble en lugar del gráfico con muestreo simple es de aproximadamente un 52%.

6. Conclusión y comentarios finales

En este trabajo se propone un nuevo procedimiento, el gráfico de control doble muestreo (MD) cuyo objetivo es mejorar la capacidad de detectar cualquier condición de fuera de control mediante la observación de una segunda muestra. La eficacia de este procedimiento consiste en detectar cambios pequeños o moderados en la proporción de ítems no conformes del proceso, sin aumentar el muestreo.

En un artículo anterior (Joeques y Barbosa, 2013), se presentó un gráfico p mejorado mostrando que el mismo proporciona una gran ventaja sobre el gráfico p habitual para atributos. Sin embargo, este gráfico permite detectar grandes aumentos en la proporción de ítems no conformes pero no es eficiente para detectar pequeños incrementos de los parámetros del proceso. Para situaciones como ésta, los gráficos de control con doble muestreo (MD) tienen dos posibles ventajas sobre procedimiento con muestreo simple. En primer lugar, permite reducir la cantidad total de inspección y en segundo lugar, tiene la ventaja de dar al lote una segunda oportunidad antes de tomar una decisión.

En este artículo, se desarrolla un procedimiento de muestreo doble para el gráfico np proporcionando los diseños que minimizan el ARL_1 para incrementos del 50%, 100% y 200% en la proporción de no conformidades del proceso. Este procedimiento fue aplicado a procesos con una fracción de ítems no conformes bajo control (p_0) igual a 0,005, 0,010 y 0,020 y para $ARL_0 \geq 200$ y $ARL_0 \geq 370,4$. Además se mostraron los diseños óptimos para tamaños muestrales promedio de manera que $np_0 = 0,5, 1,0, 2,0$ y $4,0$. En todos estos casos se determinó que el muestreo doble reduce el número de muestras necesarias hasta la detección de un ítem fuera de control en el proceso.

También se estableció el desempeño comparativo del gráfico np mejorado con muestreo doble respecto al mismo gráfico empleando el muestreo simple. Esta comparación reveló que el procedimiento de MD puede ser considerado más apropiado para la detección de los incrementos en la proporción de ítems no conformes en el proceso, debido a que ofrece mejor eficacia estadística (en términos de longitud promedio de corrida), sin aumentar el muestreo.

En conclusión, el gráfico np con MD se convierte en una opción interesante para el monitoreo de la proporción de ítems no conformes en los procesos de alta calidad.

Finalmente, quien desee resolver el problema de optimización del gráfico np con muestreo doble puede descargar fácilmente el programa en R desde la web.

REFERENCIAS

- [1] A.F. Bissell, (1988) “Control chart limits for attributes and events”- Journal of Applied Statistics 15 (1), pp. 97–105.
- [2] Aurélia Aparecida De Araújo Rodrigues, Eugenio Kahn Epprecht and Maysa Sacramento De Magalhães, (2011) “Double-sampling control charts for attributes” Journal of Applied Statistics- Vol. 38, No. 1, p.p. 87–112.
- [3] S. Chakraborti, S.W. Human and M.A. Graham (2008) Phase I Statistical Process Control Charts: An Overview and some results. Quality Engineering 21:1, 52-62.
- [4] Costa, A.F.B. & Claro, F.A.E., (2007) *Double Sampling X Control Chart for a First-Order Autoregressive Moving Average Process Model*, International Journal of Advanced Manufacturing Technology, on-line edition.
- [5] Cornish-Fisher expansion, section 3.14 in Holton, Glyn A. (2013). *Value-at-Risk: Theory and Practice*, 2nd ed. e-book at <http://value-at-risk.net>
- [6] Croasdale, R., (1974) *Control Charts for a Double-Sampling Scheme Based On Average Production Run Lengths*, International Journal of Production Research, **12**(5), 585-592.
- [7] Daudin, J.J., (1992) *Double Sampling X Charts*, Journal of Quality Technology, **24**(2), 78-87.
- [8] He, D., Grigoryan, A. & Sigh, M., (2002) *Design of Double- and Triple-Sampling X-bar Control Chart Using Genetic Algorithms*, International Journal of Production Research, **40**(6), 1387-1404.
- [9] Irianto, D. & Shinozaki, N., (1998) *An Optimal Double Sampling X Control Chart*, International Journal of Industrial Engineering – Theory, Applications and Practice, **5**(3), 226-234.
- [10] Joeques, S. and Pimentel Barbosa, E. (2013) “An improved attribute control chart for monitoring non-conforming proportion in high quality processes” - Control Engineering Practice - Volume 21, Issue 4, Pages 407-412- Ed. Elsevier - April 2013- <http://dx.doi.org/10.1016/j.conengprac.2012.12.005> -
- [11] Montgomery, D .C., (2008). *Introduction to Statistical Quality Control*. 6th ed., Wiley
- [12] R Development Core Team (2012). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.
- [13] Winterbottom, A. (1993). “Simple adjustments to improve control limits on attribute charts”. *Quality and Reliability Engineering International*, 9, 2, pp 105-109.
- [14] Xie, M.; Goh, T. N. and Kuralmani, V., (2002). *Statistical Models and Control Charts for High Quality Processes*. Kluwer Academic Publ.
- [15] Z. Wu and Q. Wang, (2007) *An np control chart using double inspections*, J. Appl. Stat. 34(7), pp. 843–855.
- [16] Z. Wu, H. Luo, and X. Zhang, (2006) *Optimal np control chart with curtailment*, Eur. J. Oper. Res. 174, pp. 1723–1741.