



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

# Análisis dinámico de sistemas resonantes multi-planetarios

por Carolina Charalambous

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación para obtener el título de Doctora en Astronomía

Director: Dr. Cristián Beaugé

- Marzo 2020 -

Análisis dinámico de sistemas resonantes multi-planetarios por Carolina Charalambous se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribucion- NoComercial - Sin Derivadas 4.0 Internacional (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).





*Un humilde aporte a la ciencia...*



---

# Agradecimientos

Muy brevemente quiero tomarme un ratito para agradecer a todas las personas que de algún modo u otro hicieron posible, apoyaron y contribuyeron para que esta tesis hoy esté terminada. Entre ellos, me gustaría mencionar a mi familia que está siempre disponible para todo, bancando cualquier proyecto que decida emprender. A mi director y mi grupo de trabajo, que me ayudaron a crecer académicamente, discutiendo trabajos, mirando mis presentaciones antes de seminarios o congresos, organizando ideas, etc etc. También quisiera mencionar al jurado, con sus aportes logramos un cierre muy bueno a este trabajo, quedando súper completito. Y obviamente también a mis amigos, a quienes conocí en Córdoba y a los de todos lados, por cada charla, cada comentario, cada risa, cada todo.

Chiquito también quisiera recordar y agradecer a la Universidad Pública que me ha permitido realizar tanto mi carrera de grado como la de posgrado, con excelentes docentes, personal no docente y de apoyo de CONICET. A veces nos olvidamos de lo importante que es todo esto para nuestra formación y desenvolvimiento profesional...



---

# Índice general

Índice de figuras	xi
Índice de tablas	xiii
Resumen	xv
Abstract	xix

## I Introducción general a sistemas planetarios y marco teórico **1**

<b>1. Sistemas planetarios – Aspectos teóricos</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.2. El Sistema Solar . . . . .	4
1.3. Modelos de formación planetaria . . . . .	8
1.4. Migración en discos protoplanetarios . . . . .	13
1.4.1. Modelos de discos protoplanetarios . . . . .	14
1.4.2. Migración de tipo I . . . . .	16
1.4.3. Migración de tipo II . . . . .	17
1.4.4. Migración de tipo III . . . . .	19
<b>2. Sistemas planetarios – Aspectos observacionales</b>	<b>21</b>
2.1. Sistemas extrasolares . . . . .	21
2.2. Métodos de detección . . . . .	26
2.2.1. Velocidad Radial . . . . .	26
2.2.2. Microlente . . . . .	28
2.2.3. Astrometría . . . . .	29
2.2.4. Imagen directa . . . . .	30
2.2.5. Pulsar . . . . .	30
2.2.6. Tránsito . . . . .	32
2.2.7. Variación de tiempo de tránsito . . . . .	34
<b>3. Modelos dinámicos</b>	<b>37</b>
3.1. Formulación Hamiltoniana . . . . .	37
3.2. Teoría de perturbaciones . . . . .	39
3.3. El problema resonante . . . . .	40
3.3.1. Las variables . . . . .	40
3.3.2. Tratamiento del problema . . . . .	42

3.3.3. Dinámica resonante . . . . .	45
<b>II Nuestro trabajo y resultados</b>	<b>51</b>
<b>4. Análisis dinámico de 2 planetas</b>	<b>53</b>
4.1. Población observada alrededor de las RMM 2/1 y 3/2 . . . . .	53
4.2. El offset resonante . . . . .	58
4.2.1. Definiciones y modelo analítico . . . . .	58
4.2.2. Migración diferencial y su relación con las masas planetarias . . . . .	68
4.3. Aplicación a sistemas observados . . . . .	73
4.4. Conclusiones parciales . . . . .	78
<b>5. Análisis dinámico de 3 planetas</b>	<b>81</b>
5.1. ¿Por qué estudiar resonancias de 3 planetas? . . . . .	82
5.2. El sistema dinámico . . . . .	88
5.3. Estructura resonante . . . . .	94
5.3.1. Construcción de los mapas dinámicos . . . . .	94
5.3.2. Análisis de estructura . . . . .	96
5.3.3. RMM de 3-planetas . . . . .	103
5.4. Aplicación a sistemas planetarios . . . . .	107
5.4.1. Sistemas conocidos en resonancias dobles . . . . .	108
5.4.2. Captura resonante en sistemas ficticios . . . . .	114
5.5. Conclusiones parciales . . . . .	120
<b>6. Aplicación a TRAPPIST-1</b>	<b>123</b>
6.1. La misión TRAPPIST . . . . .	123
6.2. El sistema . . . . .	124
6.3. Captura de TRAPPIST-1 en RMMs-3P . . . . .	127
6.3.1. Primeras pruebas . . . . .	128
6.3.2. Variación de parámetros del disco . . . . .	135
6.3.3. Variación de la escala de tiempo de circularización orbital . . . . .	137
6.4. Conclusiones parciales . . . . .	143
<b>7. Discusión y comentarios finales</b>	<b>147</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>151</b>



---

# Índice de figuras

1.1. Imagen representativa del Sistema Solar. . . . .	5
1.2. Distribución de asteroides. . . . .	7
1.3. Esquema ilustrativo de la clasificación de los objetos estelares jóvenes a partir de la distribución espectral de energía. . . . .	9
1.4. Disco protoplanetario de HL Tauri. . . . .	11
1.5. Representación esquemática de los discos protoplanetarios en función del índice de forma $f$ . . . . .	15
1.6. Simulaciones hidrodinámicas que muestran el comportamiento de dos planetas con distinta masa inmersos en un disco de gas. . . . .	18
2.1. Esquema de los métodos de detección de exoplanetas y cantidad encontrada con cada uno de ellos. . . . .	22
2.2. Cantidad acumulada de planetas extrasolares descubiertos hasta la actualidad. . . . .	23
2.3. Histograma de masas de las estrellas centrales de cada sistema extrasolar. . . . .	23
2.4. Histograma con la cantidad de planetas confirmados por cada sistema extrasolar. . . . .	24
2.5. Tabla periódica de exoplanetas. . . . .	25
2.6. Período versus excentricidad y masa de exoplanetas. . . . .	25
2.7. Esquema de velocidad radial. . . . .	26
2.8. Esquema del efecto observado de lente gravitatoria. . . . .	29
2.9. Detección del sistema HR 8799. . . . .	31
2.10. Esquema representativo de un tránsito planetario. . . . .	32
2.11. Características de los tránsitos planetarios. . . . .	33
2.12. Mediciones de TTV del sistema planetario KIC 11442793. . . . .	35
3.1. Representación de una órbita en el plano y el espacio para un planeta. . . . .	41
3.2. Representación del sistema de coordenadas de Jacobi para 4 masas. . . . .	42
3.3. Solución numérica de un Hamiltoniano genérico. Se muestran las variables ángulo acción medias $(J^*, \theta^*)$ y su contraparte osculadora $(J, \theta)$ . . . . .	45
3.4. Regímenes de movimiento en el espacio de fases visto en el plano de variables canónicas $(S, \theta)$ y superposición de resonancias. . . . .	47
3.5. Regímenes de movimiento en el espacio de fases visto en el plano de variables canónicas $(S, \theta)$ y superposición de resonancias. . . . .	48
3.6. Regímenes de movimiento en el plano de elementos orbitales $(a, e)$ . . . . .	49
4.1. Histograma de la razón de períodos de los planetas <i>Kepler</i> en sistemas múltiples. . . . .	54
4.2. Razón de períodos de pares de planetas adyacentes para sistemas con distintas multiplicidades alrededor de la RMM 2/1. . . . .	55

4.3. Razón de períodos de pares de planetas adyacentes para sistemas con distintas multiplicidades alrededor de la RMM $3/2$ . . . . .	56
4.4. Distribución de la razón de períodos $P_{i+1}/P_i$ de pares de planetas adyacentes en función del período orbital del planeta interno, para RMMs $2/1$ y $3/2$ . . . . .	57
4.5. Mapa $\max(\Delta e)$ para las resonancias $2/1$ y $3/2$ para un sistema ficticio de dos planetas orbitando a una estrella central. . . . .	62
4.6. Razón de período orbital $P_2/P_1 = (p+1)/p + \Delta_{(p+1)/p}$ en función del período del planeta interno, para discos con flare con $H_0 = 0.05$ , $\alpha = 1$ y $f = 0.25$ , en RMM $2/1$ y $3/2$ . . . . .	71
4.7. Simulaciones de N-cuerpos de capturas en la resonancia $2/1$ . . . . .	74
4.8. Combinaciones de $f$ y $H_0$ que satisfacen las posiciones de los planetas de los sistemas Kepler-25 y K2-24 en el plano $(\Delta_{2/1}, P_1)$ . . . . .	75
4.9. Variación de los parámetros del disco $f$ , $H_0$ y $\alpha$ (derecha) para Kepler-25 . . . . .	76
4.10. Simulaciones Monte Carlo de los sistemas Kepler-25 y K2-24 para valores extremos de la densidad superficial del disco. . . . .	77
5.1. Histograma de la razón de períodos orbitales de pares de planetas adyacentes en sistemas multiplanetarios. . . . .	84
5.2. Ternas de planetas observados con diferentes técnicas en el plano $(n_1/n_2, n_2/n_3)$ . . . . .	84
5.3. Representación esquemática del sistema de 3 planetas. . . . .	88
5.4. Aproximación de los términos de corto período de la función perturbadora. . . . .	93
5.5. Grilla de condiciones iniciales y variación temporal de $a$ y $e$ de una partícula ficticia integrada por $2 \times 10^5$ años. . . . .	95
5.6. Explicación del mapa dinámico. . . . .	95
5.7. Mapas dinámicos $\max(\Delta a)$ y $\max(\Delta e)$ para sistemas de 3 planetas de igual masa. Integraciones para masas planetarias de $m_1 = m_2 = m_3 = 150m_\oplus$ . . . . .	97
5.8. Mapas $\max(\Delta a)$ y $\max(\Delta e)$ para $m_1 = m_2 = m_3 = 30m_\oplus$ . . . . .	97
5.9. Mapas $\max(\Delta a)$ y $\max(\Delta e)$ para $m_1 = m_2 = m_3 = 3m_\oplus$ . . . . .	98
5.10. Caracterización de la estructura del mapa dinámico. . . . .	100
5.11. Estructura resonante de una resonancia de orden 0 en el plano $(a, e)$ . . . . .	101
5.12. Estructura resonante para un sistema con $m_i = 30m_\oplus$ . . . . .	102
5.13. Posición y anchos de libración para RMM-3P de orden cero (de tipo Laplace), en el mapa dinámico de la Figura 5.10. . . . .	104
5.14. Posición de RMM-3P de primer orden. . . . .	104
5.15. Mapa $\max(\Delta a)$ para planetas de $m_i = 30m_\oplus$ y $m_i = 3m_\oplus$ con y sin variaciones de corto período. . . . .	106
5.16. Simulaciones con migración tipo-I y secuencia de capturas en resonancia. . . . .	108
5.17. Mapa $\max(\Delta a)$ para planetas de $m_i = 30m_\oplus$ y $m_i = 3m_\oplus$ con y sin variaciones de corto período. . . . .	111
5.18. Masas planetarias estimadas en función del período orbital para varios sistemas multiresonantes. . . . .	112
5.19. Evolución tidal de un sistema ficticio de 3 planetas. . . . .	113
5.20. Simulaciones para sistema ficticio de 3 planetas. . . . .	115
5.21. Simulaciones con diferentes condiciones iniciales para sistemas ficticios de 3 planetas. . . . .	116
5.22. Simulaciones con migración para diferentes densidades superficiales del disco protoplanetario $\Sigma_0 = \Sigma(r = 1)$ . . . . .	119
6.1. Representación de las órbitas de los 7 planetas de TRAPPIST-1. . . . .	125
6.2. Posiciones de los 7 planetas de TRAPPIST-1 formando una cadena resonante. . . . .	126

6.3. Configuración multi-resonante entre cada terna del sistema TRAPPIST. . . .	126
6.4. Posición observada de cada terna del sistema TRAPPIST-1. . . . .	127
6.5. Simulaciones de N-cuerpos con migración planetaria de tipo-I para un sistema ficticio símil TRAPPIST-1. . . . .	130
6.6. Ángulos resonantes de la terna b-c-d de TRAPPIST-1 para $Q_e = 0.1$ . . . . .	131
6.7. Ángulos resonantes de la terna c-d-e de TRAPPIST-1 para $Q_e = 0.1$ . . . . .	132
6.8. Ángulos resonantes de la terna d-e-f de TRAPPIST-1 para $Q_e = 0.1$ . . . . .	133
6.9. Ángulos resonantes de la terna e-f-g de TRAPPIST-1 para $Q_e = 0.1$ . . . . .	133
6.10. Ángulos resonantes de la terna f-g-h de TRAPPIST-1 para $Q_e = 0.1$ . . . . .	134
6.11. Migración relativa entre los planetas b y c en función de la masa del planeta interno $m_b$ de TRAPPIST-1 variando los parámetros del disco $f$ , $H_0$ y $\alpha$ . . . . .	136
6.12. Resultados para una simulación con migración de tipo-I para un sistema ficticio tipo TRAPPIST-1 con $m_b = 16.8$ y $Q_{e_i} = 0.07$ . . . . .	137
6.13. Simulación con migración de tipo-I para un sistema ficticio tipo TRAPPIST-1 con $m_b = 17.0$ y $Q_{e_b} = 0.06$ , $Q_{e_c} = 0.1$ , $Q_{e_d} = 0.06$ . . . . .	139
6.14. Simulación con migración de tipo-I para un sistema ficticio tipo TRAPPIST-1 con $m_b = 16.7$ y $Q_{e_b} = 0.1$ , $Q_{e_c} = 0.07$ , $Q_{e_d} = 0.09$ . . . . .	139
6.15. Ángulos críticos de primer orden $3n_b - 6n_c + 2n_d$ y de orden cero $2n_b - 5n_c + 3n_d$ de la terna b-c-d de TRAPPIST-1. . . . .	140
6.16. Ángulo resonante de primer orden $n_b - 4n_c + 4n_d$ de la terna b-c-d de TRAPPIST-1. . . . .	141
6.17. Ángulo resonante de primer orden $2n_b - 7n_c + 6n_d$ de la terna b-c-d del sistema TRAPPIST-1. . . . .	141
6.18. Ángulos resonantes de la terna c-d-e del sistema TRAPPIST-1. . . . .	141
6.19. Ángulos resonantes de la terna d-e-f del sistema TRAPPIST-1. . . . .	142
6.20. Ángulos resonantes de la terna e-f-g del sistema TRAPPIST-1. . . . .	142
6.21. Ángulos resonantes de la terna f-g-h del sistema TRAPPIST-1. . . . .	143



---

# Índice de tablas

4.1. Medición de las masas y períodos orbitales de Kepler-25 b,c y K2-24 b,c. . . . .	75
5.1. Características de los sistemas multiresonantes. . . . .	85
5.2. Características de algunas simulaciones con migración. . . . .	110
6.1. Período, radio y semieje mayor de los 3 primeros planetas descubiertos por Gillon et al. (2016), TRAPPIST-1 <i>b</i> , <i>c</i> y <i>d</i> . . . . .	124
6.2. Período, radio y semieje mayor y masa (con sus respectivos errores) de los 7 planetas del sistema TRAPPIST-1 reportados por Gillon et al. (2017). Ver que los valores para los primeros 3 planetas difieren de los presentado en la Tabla 6.1. Además, se muestra en la última fila la razón de períodos de pares de planetas adyacentes. . . . .	125
6.3. Valores de $p$ y $q$ para cada terna de TRAPPIST-1 reportados por Luger et al. (2017). Con estos valores, el ángulo resonante de 3-planetes libra en torno a un valor fijo (ecuación 5.5). . . . .	126
6.4. Parámetros variados para el disco. . . . .	136
6.5. Características de las simulaciones variando la escala de tiempo de circularización orbital. . . . .	138



---

# Resumen

A lo largo de esta tesis pretendemos abarcar algunos de los problemas generales que se observan en los sistemas extrasolares como consecuencia de su evolución dinámica. La misma está dividida en dos partes. En la primera, estudiamos el apartamiento de sistemas de 2 planetas respecto al valor nominal de una resonancia dada, mientras que en la segunda analizamos las resonancias multi-planetarias. El objetivo es investigar en qué contexto se formaron los planetas para obtener las arquitecturas actualmente observadas.

Para esto, primero analizamos las bases de datos actualizadas de exoplanetas y, en particular, nos quedamos con aquellos sistemas que tuvieran buenas determinaciones de los períodos orbitales, que son principalmente aquellos detectados con métodos de tránsito. Nos concentramos en sistemas en configuraciones (casi)-resonantes ya que la evidencia actual, tanto teórica como observacional, sugiere que los sistemas más comunes del Universo no son los sistemas resonantes, contrario a lo que se esperaría luego de que los cuerpos sufran migración.

Iniciamos este estudio analizando sistemas con 2 planetas. Luego de comprender bien la dinámica de estos sistemas, pasamos al análisis de sistemas con 3 planetas. El interés en este caso viene porque a partir de nuevos descubrimientos en los últimos años, desde 2016, se ha planteado un cambio de paradigma en la forma de analizar estos sistemas. Propusimos un estudio similar al de 2 planetas, es decir, medir el apartamiento de los planetas respecto de la resonancia, pero esta vez considerando de a 3 cuerpos masivos.

Para llevar a cabo esta investigación utilizamos simulaciones numéricas de N-cuerpos. Estudiamos de manera detallada la evolución de los sistemas planetarios durante las primeras etapas de formación, es decir, cuando aún existía gas en el disco protoplanetario. Realizamos mapas dinámicos a partir de grillas de condiciones iniciales para sistemas con planetas de diferentes masas y comparamos los resultados de las simulaciones de N-cuerpos con el modelado analítico para entender los caminos evolutivos en cada caso, de qué parámetros del disco dependen y demás características físicas del sistema.

En particular los resultados de esta tesis son consistentes con el hecho de que los sistemas no se formaron *in-situ* sino que tuvieron que migrar para llegar a sus posiciones actuales. Que aquellos planetas que se encuentran más cercanos a la estrella central tienen mayor desviación respecto del valor nominal de la resonancia. Que es posible que los planetas utilicen como rutas para desplazarse en el disco a las resonancias de bajo orden. Que es posible encontrar a los planetas donde se los observa sin tener que suponer efectos disipativos ad-hoc, como podrían ser los efectos de marea estelares.

Por último, analizamos dinámicamente el sistema planetario TRAPPIST-1 que se encuentra en una configuración resonante muy compleja. En él se observa que los planetas están en una cadena resonante tomándolos de a pares, y cada subconjunto de 3, en resonancia de 3-planetas.

A lo largo de esta investigación hemos ido publicando los resultados relacionados con la tesis en los siguientes artículos:

1. **Planetary migration and the origin of the 2/1 and 3/2 (near)-resonant population of close-in exoplanets.**  
X.S. Ramos, C. Charalambous, P. Benítez-Llambay & C. Beaugé  
*A&A, Volume 602, A 101, 11 pp, June 2017.*  
doi = [10.1051/0004-6361/201629642](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201629642)
2. **Orbital migration and Resonance Offset of the Kepler-25 and K2-24 systems.**  
C. Charalambous, X.S. Ramos, P. Benítez-Llambay & C. Beaugé  
*Journal of Physics Conference Series, Volume 911, 12027, October 2017.*  
doi = [10.1088/1742-6596/911/1/012027](https://doi.org/10.1088/1742-6596/911/1/012027).
3. **Resonance Capture and Dynamics of 3-Planet Systems.**  
C. Charalambous, J.G. Martí, C. Beaugé & X.S. Ramos  
*MNRAS, Volume 477, Issue 1, 11 June 2018, Pages 1414–1425.*  
doi = [10.1093/mnras/sty676](https://doi.org/10.1093/mnras/sty676)



---

## Clasificación

- 95.10.Ce Mecánica Celeste (incluyendo problemas de N-cuerpos)
- 95.75.Pq Procedimientos matemáticos y técnicas computacionales.
- 97.82.-j Sistemas planetarios extrasolares.
- 97.82.Jw Discos protoplanetarios.

**Palabras claves:** resonancias de movimientos medios – simulaciones numéricas – métodos: analíticos y numéricos – migración planetaria – interacciones planeta-disco.



---

# Abstract

Throughout this thesis we intend to cover some of the general problems observed in extrasolar systems as a consequence of their dynamical evolution. It is divided into two parts. In the first, we study the separation of 2 planet systems with respect to the nominal value of a given resonance, while in the second we analyze multi-planetary resonances. The objective is to investigate in which context the planets were formed to obtain the currently observed architectures.

For this purpose, we first analyzed the updated databases of exoplanets and, in particular, we chose those systems that had good determinations of the orbital periods, which are mainly the ones detected with transit methods. We focus on systems in (near)-resonant configurations since current evidence, both theoretical and observational, suggests that the most common systems in the Universe are not resonant, contrary to what would be expected after the bodies undergo migration.

We begin this study by analyzing systems with 2 planets. After well understanding the dynamics of these kind of systems, we turn to the analysis of systems with 3 planets. The interest in this case comes because of new discoveries in recent years. Since 2016, there has been a paradigm shift in the way of analyzing resonant systems. We proposed a study similar to that of 2 planets, that is, measuring the deviation of planets from exact resonance, but this time considering 3 massive bodies.

To carry out this investigation we use N-body numerical simulations. We study in detail the evolution of planetary systems during the early stages of planet formation, that is, when there was still gas in the protoplanetary disk. We make dynamical maps from grids of initial conditions for systems with planets of different masses and compare the results of the N-body simulations with the analytical modeling to understand the evolutionary paths in each case, on which parameters of the disk depend and other physical characteristics of the system.

In particular, the results of this thesis are consistent with the fact that systems were not formed *in-situ* but had to migrate to reach their current positions. That those planets closest to the central star have greater deviation from the nominal value of the resonance. That it is possible for planets to use low order resonances as paths to travel on the disk. That it is possible to find the planets where they are currently observed without having to suppose ad-hoc dissipative effects, such as tidal effects by the star.

Finally, we dynamically analyze the TRAPPIST-1 planetary system that is in a very complex resonant configuration. It shows that the planets are in a resonant chain taking them in pairs, and each subset of 3, in resonance of 3-planets.

Throughout this investigation we have published the results related to the thesis

in the following articles:

1. **Planetary migration and the origin of the 2/1 and 3/2 (near)-resonant population of close-in exoplanets.**

X.S. Ramos, C. Charalambous, P. Benítez-Llambay & C. Beaugé  
*A&A*, Volume 602, A 101, 11 pp, June 2017.  
doi = [10.1051/0004-6361/201629642](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201629642)

2. **Orbital migration and Resonance Offset of the Kepler-25 and K2-24 systems.**

C. Charalambous, X.S. Ramos, P. Benítez-Llambay & C. Beaugé  
*Journal of Physics Conference Series*, Volume 911, 12027, October 2017.  
doi = [10.1088/1742-6596/911/1/012027](https://doi.org/10.1088/1742-6596/911/1/012027).

3. **Resonance Capture and Dynamics of 3-Planet Systems.**

C. Charalambous, J.G. Martí, C. Beaugé & X.S. Ramos  
*MNRAS*, Volume 477, Issue 1, 11 June 2018, Pages 1414–1425.  
doi = [10.1093/mnras/sty676](https://doi.org/10.1093/mnras/sty676)

---

# Classification

- 95.10.Ce Celestial mechanics (including n-body problems).
- 95.75.Pq Mathematical procedures and computer techniques.
- 97.82.-j Extrasolar planetary systems.
- 97.82.Jw Protoplanetary disks.

**Key words:** mean-motion resonances – numerical simulations – methods: analytical and numerical – planetary migration – planet-disk interactions.



---

---

# PARTE I

---

---

Introducción general a sistemas planetarios  
y marco teórico





---

# CAPÍTULO 1

---

## Sistemas planetarios - Aspectos teóricos

En este capítulo presentamos las definiciones de los objetos que conforman a los sistemas planetarios en general. Describiremos las principales características del sistema en que vivimos junto con las teorías más aceptadas de formación y migración planetaria, para comprender el contexto en el que desarrollamos nuestro estudio.

### Índice

---

<b>1.1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1.2. El Sistema Solar</b>	<b>4</b>
<b>1.3. Modelos de formación planetaria</b>	<b>8</b>
<b>1.4. Migración en discos protoplanetarios</b>	<b>13</b>
1.4.1. Modelos de discos protoplanetarios	14
1.4.2. Migración de tipo I	16
1.4.3. Migración de tipo II	17
1.4.4. Migración de tipo III	19

---

### 1.1. Introducción

Las teorías sobre formación de sistemas planetarios y el origen de los planetas se basan en simulaciones numéricas y observaciones realizadas en base a nuestro propio Sistema Solar. Por esto resulta importante caracterizar bien el sistema en el que vivimos, para poder enmarcar el contexto en el que vamos a desarrollar nuestras teorías.

Sin embargo, nuestro Sistema es uno de los tantos diversos sistemas planetarios que existen en el Universo. Como ejemplo podemos mencionar al primer exoplaneta

descubierto alrededor de una estrella de tipo solar, la estrella 51 Pegasi, por [Mayor y Queloz \(1995\)](#). Este sistema cuenta con un planeta de masa similar a la de Júpiter orbitando alrededor de su estrella central en una órbita más pequeña que la de Mercurio. Luego de este descubrimiento y gracias a los avances tecnológicos fue posible detectar miles de sistemas planetarios de las más diversas características, desde diferencias en las estrellas progenitoras hasta características orbitales y composiciones químicas o de las atmósferas de los planetas.

En lo que respecta al Sistema Solar, el Modelo de Niza (llamado así por un conjunto de tres trabajos realizados por investigadores del Observatorio de Niza, Francia: [Gomes et al. \(2005\)](#); [Morbidelli et al. \(2005\)](#); [Tsiganis et al. \(2005\)](#)) propone el modelo más aceptado en la actualidad para su formación. En particular, plantea que la configuración orbital inicial de los planetas gigantes, una vez disipada la nebulosa primordial, era mucho más compacta que la actual. Además, propone la existencia de un disco residual de planetesimales detrás de las órbitas de los planetas gigantes, con los que interactúan gravitatoriamente y genera la migración hasta sus posiciones actuales. El éxito de este modelo radica en que permite explicar cuantitativamente muchos aspectos observados: órbitas, excentricidades e inclinaciones de los planetas exteriores del Sistema Solar ([Tsiganis et al., 2005](#)), los Troyanos de Júpiter ([Morbidelli et al., 2005](#)), el origen del Gran Bombardeo Tardío ([Gomes et al., 2005](#)) y la formación del cinturón de Kuiper ([Levison et al., 2008](#)).

Todo esto nos permite entender que los planetas no se formaron en sus posiciones actuales sino que han movido sus órbitas. Existe un debate muy grande sobre los mecanismos de migración, y es en gran parte lo que estudiaremos en este trabajo. Como información general distinguimos algunos tipos diferentes de migración, como la dispersión por planetesimales ([Chatterjee y Ford, 2015](#)) o mediante la interacción planeta-disco ([Tanaka et al., 2002](#); [Ward, 1997](#)). La primera se da por inyección o expulsión de materia sólida del sistema y puede darse en cualquier etapa de la formación. El segundo mecanismo únicamente puede ocurrir en las etapas primordiales, mientras se encuentra presente el gas en el disco protoplanetario, y consiste en la interacción gravitatoria entre el embrión planetario y la nebulosa primordial.

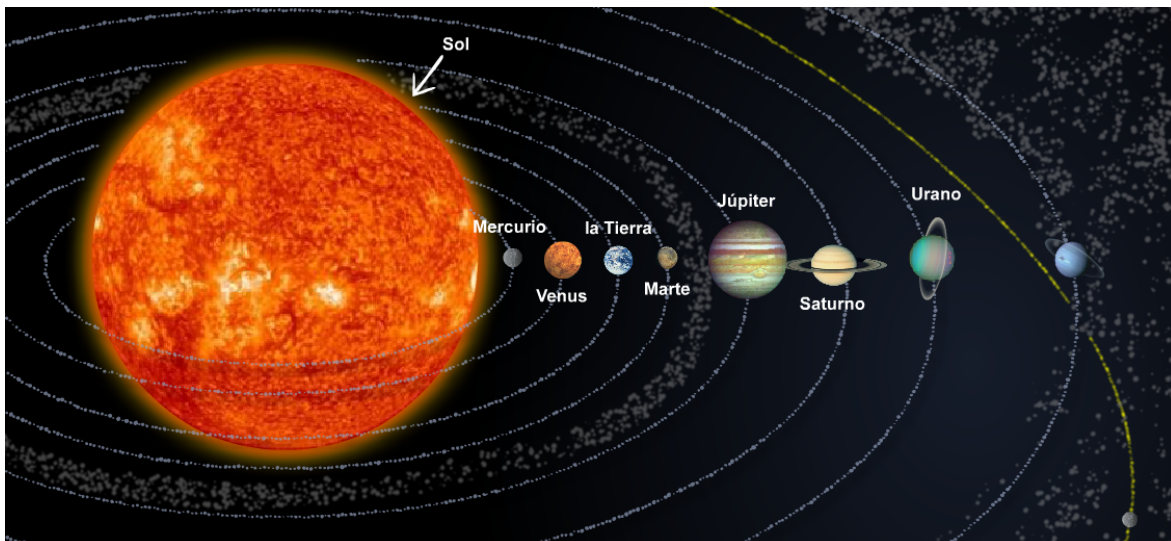
## 1.2. El Sistema Solar

El Sistema Solar (SS) es el sistema en el cual habita nuestra Tierra, razón por la cual es posible que tengamos gran detalle de los objetos que lo componen ya que podemos observarlo de manera muy detallada con telescopios o sondas que viajan por el espacio interplanetario. En la Figura 1.1 se muestra una imagen esquemática de nuestro sistema planetario, que a continuación describiremos con cierto nivel de detalle.

Nuestro SS presenta una gran diversidad en lo que respecta a sus componentes, desde tamaños, composiciones químicas, características dinámicas, etc.

En el año 2006, la Unión Astronómica Internacional (IAU) consensuó la definición de "planeta" del Sistema Solar, que se define como aquel cuerpo celeste que

1. orbita alrededor del Sol;



**Figura 1.1.** Imagen representativa del Sistema Solar. Se muestra el Sol, los planetas, el cinturón de asteroides y la nube de Oort. Esta figura no se encuentra a escala ni de tamaños ni de distancias.

2. tiene la suficiente cantidad de masa como para que su propia gravedad supere las fuerzas del cuerpo rígido, de manera de alcanzar el equilibrio hidrostático;
3. ha barrido todo el material de su órbita, remanente de la formación planetaria.

Con esta definición, nuestro entorno planetario se compone de 8 planetas, planetas enanos y cuerpos menores. Algunos de los planetas cuentan, además, con satélites que pueden ser tanto naturales como artificiales.

Los planetas pueden diferenciarse según sean rocosos -Mercurio, Venus, Tierra y Marte- o gigantes gaseosos -Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno-.

Los planetas rocosos se caracterizan por tener núcleos de hierro y delgadas atmósferas gaseosas (con excepción de Mercurio que no cuenta con una) y se cree que se formaron *in situ*, cerca del Sol (ver, por ejemplo, [D'Angelo y Bodenheimer, 2016](#); [Malhotra et al., 2013](#)). Tienen superficies sólidas que han sido modificadas por eventuales impactos de meteoritos. En particular, la Tierra se encuentra en la Zona Habitable (ZH) del SS, lo que permitió el desarrollo de la vida. La zona de habitabilidad de un sistema planetario se define como la región circumestelar dentro de la cual un planeta con características similares a La Tierra es capaz de retener agua líquida en su superficie ([Kasting et al., 1993](#)) teniendo en cuenta la luminosidad de la estrella central del sistema (independientemente de sus características físicas) y consideraciones de tipo climáticas, principalmente relacionadas con el efecto invernadero. Los límites de la región tienen que ver con la temperatura de la atmósfera (que no aumente tanto como para incrementar el vapor de agua y, en consecuencia, evaporación de los océanos, o disminuya tanto como para que se congelen). Para determinar los límites de esta región, que están relacionados con el efecto invernadero, [Kopparapu et al. \(2013\)](#) propone la existencia de dos ZH, una Conservadora y una Optimista. Nosotros no tendremos en cuenta esta diferencia por lo que, cada vez que hablemos de región habitable consideraremos que los límites serán el más

interno y el más externo.

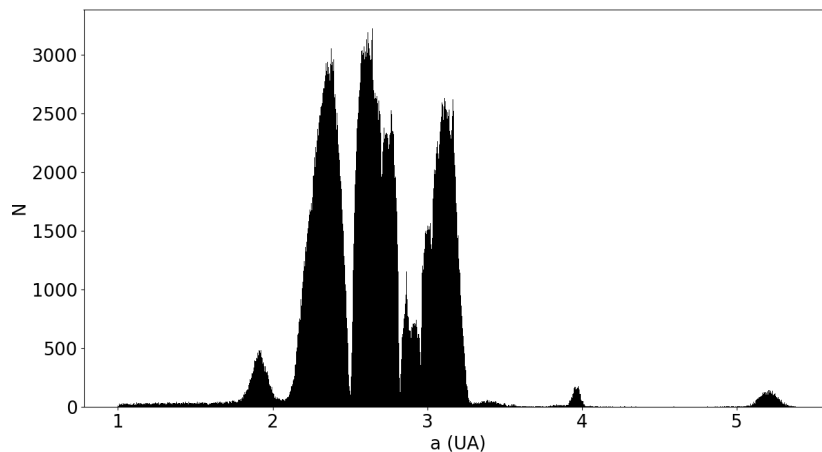
Los 4 planetas gigantes, en cambio, tienen gruesas atmósferas de Hidrógeno (*H*) y Helio (*He*), principalmente. Su composición interior todavía no se logra explicar con buen acuerdo, pero hay argumentos para creer que los planetas gigantes tienen un núcleo sólido denso en su interior, formado por un embrión que tuvo que haber sido lo suficientemente masivo como para capturar una gran cantidad de gas en la atmósfera, antes que se disipara el gas nebuloso. Este escenario es conocido como modelo de inestabilidad nucleada y fue propuesto inicialmente por Mizuno (1980); Perri y Cameron (1974). El crecimiento del núcleo sólido se da de la misma forma que en los cuerpos terrestres. Cuando se igualan las masas del núcleo y del gas acretado se desprende un "runaway gaseoso", momento en que el crecimiento de la envoltura gaseosa se dispara. A partir de ese instante se desencadena una acreción acelerada de gas en que el embrión acreta todo el gas circundante y se termina formando un planeta gigante gaseoso. La masa del núcleo sólido de los 4 planetas gigantes de nuestro SS es la misma, pero sólo Júpiter y Saturno sufrieron este runaway. Urano y Neptuno, por el contrario, no llegaron a esa etapa dado que el gas del disco ya se había disipado cuando sus núcleos lograron la masa suficiente.

Por otro lado, es necesario destacar que existe otra hipótesis, conocida como modelo de inestabilidad de disco (Boss, 1997; Cameron, 1978; Kuiper, 1951), que propone que los planetas gigantes gaseosos podrían formarse en los discos protoplanetarios de manera similar a la que se forman las estrellas (por colapso gravitatorio). Debido a que estos planetas se formarían como consecuencia de inestabilidades gravitatorias en el disco, éste se fragmentaría en grumos autogravitantes con masas del orden de la masa de Júpiter.

De los gigantes, 2 son gaseosos (con una estructura principalmente de Hidrógeno y Helio) y 2 son helados (estructura principalmente constituida por hielo, roca y gas), y cada uno de ellos cuenta con un sistema de anillos asociado y satélites a su alrededor, simulando un sistema planetario en miniatura. Dentro de estas estructuras más pequeñas se pueden observar interacciones dinámicas, en las que es posible poner a prueba modelos orbitales. Como ejemplo se puede mencionar a los anillos de Saturno, en donde se observa una dinámica muy particular entre las Lunas perturbadoras y el continuo de partículas más chicas. En ella, se ven restos de migración, ondulaciones en el disco, gaps, etc (Atreya et al., 2016; Ayliffe y Bate, 2012; Bate et al., 2003; Canup y Ward, 2002).

En la categoría de planetas enanos conocidos hasta el momento podemos nombrar, entre otros, a Plutón, Eris, Haumea y Make-Make. Estos cuerpos difieren de los planetas en no haber limpiado la vecindad de su órbita, es decir que no satisfacen la condición  $n^{\circ}3$  de la definición de planeta del SS propuesta por la IAU, y tampoco son satélites de un planeta.

Entre Marte y Júpiter se encuentra el cinturón principal de asteroides, una estructura conformada por cuerpos sólidos pequeños de formas irregulares, que orbitan alrededor del Sol. Se cree que la presencia de Júpiter en las etapas primordiales inhibió la aglomeración de estos cuerpos y formación de un planeta en esta región (Wetherhill, 1980). Hay distintas maneras de caracterizar a estos objetos, como por ejemplo, según sus características dinámicas o por su composición química. En el segundo caso, la división es en tres clases principales: los asteroides pueden ser



**Figura 1.2.** Distribución de asteroides entre 1 y  $\sim 5$  *ua*. Se observan regiones densamente pobladas en contraste con unas regiones vacías que se corresponden con resonancias de movimientos medios con Júpiter. (Imagen extraída de la Tesis de Licenciatura de Nair Trógolo.)

de tipo-C, por contener elementos carbonáceos, de tipo-S por los silicatos o de tipo-M, por ser metálicos. La distinción dinámica tiene que ver con sus características orbitales. Como se evidencia en la Figura 1.2, existen regiones densamente pobladas y otras desprovistas de objetos. A estas regiones se las reconoce como Lagunas de Kirkwood (Kirkwood, 1867; Nesvorný et al., 2002). Son regiones de inestabilidad, que se han vaciado parcialmente debido a resonancias de movimientos medios con Júpiter. Algunos tienen órbitas cercanas a los planetas vecinos y por interacción gravitatoria tienen probabilidad de impactar con la Tierra. A este grupo de objetos se los conoce como Near Earth Objects (NEOs), y están asociados a resonancias en el cinturón. A algunos objetos se los reconoce en familias, producto de un impacto que fragmentara a un viejo asteroide más grande. A los miembros de una determinada familia se los reconoce por compartir características orbitales y composición química. Cabe destacar que no son el único conjunto de asteroides en todo el sistema, sino que en esta región ( $\sim 2 - 4$  unidades astronómicas o, abreviadamente, *ua*) se encuentra confinada la mayor población. Al día de la fecha se han descubierto del orden de 800 mil objetos, catalogados en la base de datos del Minor Planet Center, y la masa total de asteroides en el Sistema Solar es de aproximadamente  $10^{-5}$  masas terrestres, (en símbolos de ahora en adelante,  $m_{\oplus}$ ).

El espacio Transneptuniano está situado más allá de Neptuno. Los cuerpos que lo conforman se conocen como Objetos Transneptunianos (TNOs, por sus siglas en inglés, TransNeptunian Objects), y su clasificación dinámica no es única. El capítulo 1 de Gladman et al. (2008) ofrece algunas definiciones formales consensuadas, que reuniré a continuación. En la región Transneptuniana se alojan los cometas con períodos menores a 20 años. A grandes rasgos se diferencia una población resonante de una no resonante. Cuerpos cuya distancia pericéntrica  $q$  sea menor al semieje mayor de Neptuno  $a_N$ ,  $q < a_N$ , se denominan 'Centauros', y su órbita alrededor del Sol se encuentra entre Júpiter y Neptuno. Una definición alternativa para este grupo es que  $a > a_J$ , siendo  $a$  el semieje del TNO y  $a_J$  el semieje mayor de Júpiter. El espacio Transneptuniano tiene otros objetos que no cruzan las órbitas planetarias

y se llaman 'Objetos del Disco Dispersado' ('Scattered Near Objects'). Este disco se divide en dos, los 'Objetos del Disco Dispersado Extendido' (Scatter Extended Objects) con perihelio grande y origen difícil de comprender (con  $e > 0.2$ ) y los 'Objetos Clásicos', con  $e < 0.2$ .

Finalmente, se infiere la existencia de la Nube de Oort, un reservorio de cometas ubicado entre 1000 y 100000  $ua$ , con períodos mayores a 200 años, y cometas no periódicos. Los objetos que la componen están distribuidos de manera isotrópica. Se cree que fueron formados en la región externa del disco protoplanetario y que mediante la interacción con los planetas gigantes han ido dispersándose hacia la Nube. Por el momento no se ha podido observar esta región dada la lejanía a la que se encuentra y por lo débiles que son los objetos que la componen. Sin embargo, la existencia de los cometas de largo período con altas inclinaciones nos hace creer que allí está. Luego de la Nube de Oort, la influencia gravitatoria del Sol deja de dominar por lo que éste es el límite más externo del Sistema Solar. Los detalles más recientes sobre la formación y evolución del cinturón de Kuiper y la Nube de Oort pueden encontrarse en [Morbidelli y Nesvorný \(2020\)](#).

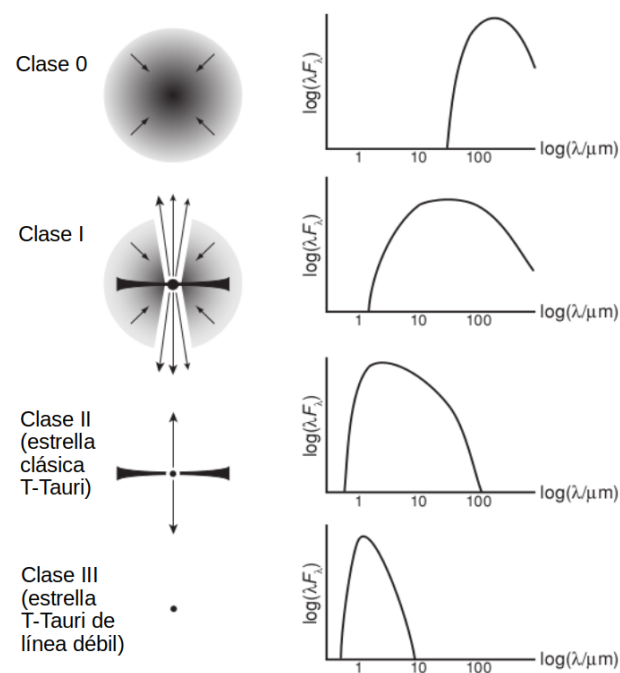
### 1.3. Modelos de formación planetaria

Los sistemas planetarios son el residuo del proceso de formación estelar. Los planetas se forman en discos protoplanetarios de gas y polvo, que se observan alrededor de estrellas jóvenes. En esta sección haremos una breve descripción de los procesos físicos y dinámicos que dan lugar a la formación de los discos protoplanetarios y a las posteriores etapas de formación planetaria.

En nuestra Galaxia, las estrellas se forman en sus brazos espirales a partir del colapso de una nube de gas gravitatoriamente inestable. Estas nubes gigantes son de hidrógeno molecular, frías y densas, con masas del orden de  $10^5 - 10^6$  masas solares (de aquí en adelante,  $M_{\odot}$ ).

Dado que estas nubes moleculares tienen un momento angular intrínseco no nulo, además de la fuerza gravitatoria y la presión, existe una fuerza centrífuga que actúa durante el colapso del material. Mientras que la gravedad y la presión actúan en forma isotrópica, la fuerza centrífuga tiene una dirección preferencial perpendicular al eje de rotación, generando la formación un disco en el plano ecuatorial de la protoestrella, el disco protoplanetario. Por lo tanto, las principales características de los discos protoplanetarios y sus futuros planetas, como sus masas, tamaños y composición química, están íntimamente relacionadas con las regiones de formación estelar. Es decir, la composición de los planetas deberá ser la misma que la composición de la nube de gas, que a su vez comparte las mismas características que la estrella central ([Lissauer, 1993](#)).

Si bien es difícil obtener información de los discos protoplanetarios a partir de observaciones directas, es posible tener datos a partir de la distribución espectral de energía de los objetos estelares jóvenes, que se clasifican según la pendiente de la distribución espectral de energía en la región infrarroja (IR) del espectro. Estos objetos se clasifican en cuatro diferentes clases, de 0 a III, que mostramos en un esquema ilustrativo en la Figura 1.3. Según [Adams et al. \(1987\)](#), a esta clasificación se la puede interpretar como una secuencia evolutiva en donde los objetos de cla-



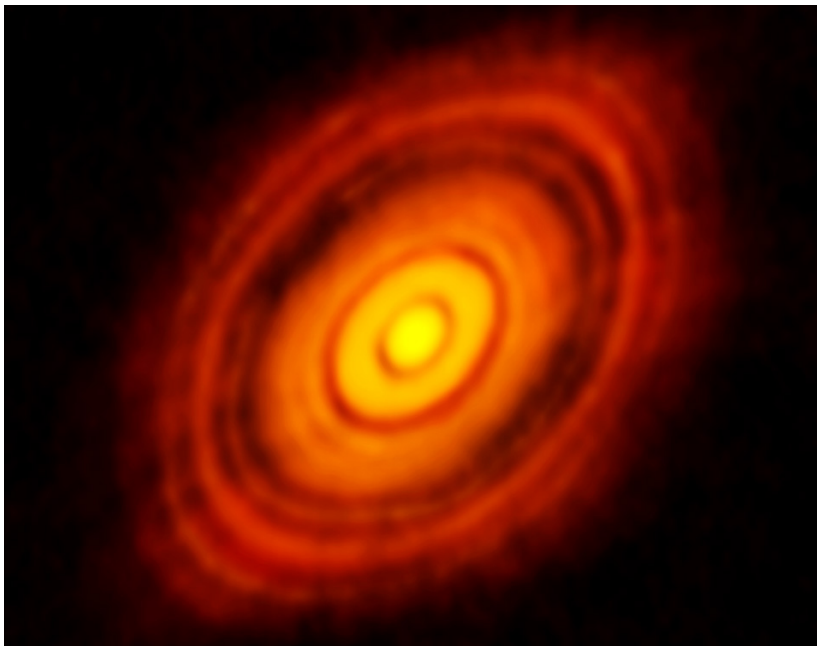
**Figura 1.3.** Esquema ilustrativo de la clasificación de los objetos estelares jóvenes. A la izquierda se muestra la secuencia evolutiva y a la derecha la distribución espectral de energía. Objetos de Clase 0 representan los objetos menos evolucionados durante las primeras etapas del colapso gravitatorio, y se corresponden con una distribución espectral de energía con máximo en el IR lejano. Los Clase I muestran las primeras evidencias de disco y muestran una distribución plana en el IR cercano y medio. Los Objetos de Clase II corresponden a estrellas T Tauri clásicas, mientras que los de Clase III a una estrella T Tauri de línea débil (ancho equivalente de la línea  $H\alpha$  menor a  $10\text{\AA}$ ). Imagen tomada de [Armitage \(2010\)](#).

se 0 representan los objetos menos evolucionados durante las primeras etapas del colapso gravitatorio, y se corresponden con una distribución espectral de energía con máximo en el infrarrojo lejano, y sin flujo de energía en el IR cercano. En esta etapa el disco no es detectable observacionalmente, aún si existiera material rotando en torno a la protoestrella. Los primeros que evidencian la presencia de un disco entonces son los de Clase I. Estos objetos aún se encuentran inmersos en las nubes moleculares y poseen una envoltura que está colapsando. Su distribución espectral es prácticamente plana entre el infrarrojo cercano y medio. Además, suele detectarse eyección de material de estos objetos estelares. Entonces, si la nube presenta una densidad suficiente, podrá vencer la energía térmica (criterio de Jeans), y formar un objeto central con las características de una estrella. Por conservación, la energía potencial perdida durante el colapso se transformará en calor, y en un determinado momento la proto estrella comenzará a producir energía por medio de reacciones nucleares. La fase más evolucionada se evidencia en los objetos de Clase II, objetos cuya distribución de energía posee un marcado descenso entre el IR cercano y medio, y gran parte del material ha sido acretado por la estrella central. La distribución espectral de energía de estos objetos puede interpretarse como la suma de una protoestrella (óptico) y un disco protoplanetario (emisión en IR). Además es usual observar exceso de emisión en el ultravioleta por parte de la estrella, que se atribuye a acreción de gas del disco por parte de la estrella. Luego de que los discos de gas son disipados, los objetos de la Clase III se asocian a estrellas de presecuencia principal, en donde no se evidencia indicios de la presencia de un disco (su distribución en el infrarrojo corresponde a la fotosfera estelar). Sin embargo, algunos de estos objetos evidencian la presencia de un disco de polvo remanente del proceso de formación estelar.

Es importante recordar que la mayoría de lo que sabemos sobre la formación de planetas se basa en modelos teóricos que predicen, por ejemplo, que la masa de un disco protoplanetario no puede superar el  $\sim 20\%$  de la masa de la estrella central dado que se volvería gravitatoriamente inestable ([Avenhaus et al., 2018](#); [Hartmann et al., 1998](#)). Sin embargo, a fines de 2014 se logró observar con el conjunto de antenas ALMA (Atacama Large Millimeter Array) el primer disco protoplanetario, alrededor de la estrella HL Tauri, como se muestra en la Figura 1.4. Imágenes con este nivel de detalle habían estado relegadas a las simulaciones numéricas, pero ahora es posible observar anillos concéntricos en el disco con alto contraste. Las estructuras que se observan en esta imagen sugieren que el proceso de formación planetaria ha iniciado alrededor de esta estrella, que tiene menos de un millón de años ([Mamajek, 2009](#)).

Como ya dijimos anteriormente, las estrellas se forman en nubes de gas y polvo que colapsan bajo los efectos de la gravedad. Con el pasar del tiempo, las partículas de polvo se empiezan a acretar formando grumos y eventualmente rocas más grandes que se asientan en el plano medio del disco en el que van a formarse los cometas, asteroides y planetas, proceso que describiremos con más detalle a continuación. Una vez que los cuerpos adquieren la masa suficiente, modifican drásticamente la estructura de su disco progenitor, generando estos anillos y surcos mientras los planetas limpian su órbita de escombros, tal como se ve en la imagen. De esta forma hay ahora evidencia de que la teoría de formación planetaria coincide





**Figura 1.4.** Disco protoplanetario de HL Tauri tomada con ALMA. En esta imagen podemos ver la extensión del disco protoplanetario y los surcos en donde se supone que se están formando los planetas. Además, es con observaciones en infrarrojo se puede tener información de la composición química del disco protoplanetario.

con las observaciones.

Hasta aquí hemos descrito en forma general el proceso de formación estelar con su disco protoplanetario, pero aún falta dar cuenta del proceso de formación planetaria. De forma resumida, podemos decir que este proceso tiene algunas etapas durante las cuales los planetas deben alcanzar las masas y radios que tendrán durante toda su vida. La primera etapa tiene que ver con el crecimiento de polvo (partículas con tamaño del orden del micrón) en planetesimales (cuerpos sólidos con tamaño del orden del kilómetro, capaces de desacoplarse dinámicamente del gas nebular). En la segunda los núcleos planetarios se forman, cuando la estrella es reconocible como una T-Tauri, objeto de pre-secuencia principal. En la última, el disco desaparece por los efectos del viento estelar y la fotoevaporación, dejando una población de objetos planetarios recientemente formados y escombros.

La acumulación de granos de polvo en planetesimales es el primer paso en el proceso de formación planetaria. Sin embargo, los procesos físicos que intervienen en la coagulación entre los granos de polvo para formar objetos de mayor tamaño no están del todo comprendidos. Existen dos teorías principales que intentan explicar la formación de los planetesimales.

La más clásica es a partir de sucesivas colisiones entre las partículas de polvo, pero tiene dos grandes problemas. Por un lado, el proceso de coagulación de las partículas mayores que el milímetro es ineficiente ya que, las colisiones las fragmentan en vez de coagularlas (Blum y Wurm, 2000; Weidling et al., 2012; Zsom et al., 2010). Por otro lado, existe el problema conocido como la barrera del metro, que tiene que ver con el rápido decaimiento orbital que sufren los cuerpos de estos tamaños, cuyas escalas temporales son de tan solo 100 años y objetos mayores a

$1m$  no tendrían tiempo de formarse.

La otra teoría se conoce como mecanismo de inestabilidad gravitatoria (Goldreich y Ward, 1973; Safronov, 1969). Ésta propone que las partículas de polvo se acumulan en el plano medio del disco y debido a sus interacciones gravitatorias colapsan coherentemente para formar directamente a los planetesimales, evitando los problemas de la teoría anterior. Es decir, aún si la coagulación entre las partículas de polvo es ineficiente y si los tiempos de migración son grandes, se logra evitar el problema de la barrera del metro. Sin embargo, la principal dificultad de este modelo aparece cuando se trabaja con discos más realistas, al incluir turbulencia, dado que ésta excita a las partículas de polvo evitando el colapso gravitatorio (ver Morbidelli y Raymond, 2016 y las referencias allí mencionadas).

Una vez formados los planetesimales, la dinámica queda gobernada por interacciones gravitatorias y el amortiguamiento del gas. Las velocidades relativas entre los planetesimales son bajas y las colisiones terminan en acreción. Aquellos cuerpos que lograron crecer más que el resto de la población, crecerán más rápido a expensas de los demás, dado que su atracción gravitatoria aumenta y, por lo tanto, la acreción se hace más eficiente.

Los planetesimales más grandes crecen siguiendo una ley de potencias en la masa dada por Kokubo y Ida (1996),  $dM/dt \propto M^{4/3}$ . Así, los planetesimales más masivos se separan en masa de la media de la población a medida que transcurre el tiempo, efecto conocido como *crecimiento en fuga* de los planetesimales (Greenberg et al., 1978; Wetherill y Stewart, 1989). Mientras tanto, las velocidades de dispersión de los planetesimales más pequeños se mantienen relativamente bajas y las perturbaciones gravitatorias que reciben de los cuerpos más masivos se hacen más intensas, produciéndose un aumento en las velocidades relativas. Este efecto lleva a una transición hacia un régimen de crecimiento más lento.

Es decir, el crecimiento en fuga termina cuando los cuerpos más masivos dominan gravitatoriamente a los planetesimales circundantes. A estos cuerpos masivos se los pasa a llamar embriones planetarios u oligarcas (Kokubo y Ida, 1998), y son los únicos que continúan creciendo por acreción, en un nuevo régimen llamado *crecimiento oligárquico*, mucho más lento que el anterior. En esta etapa, los planetesimales que no han sido acretados dejan de crecer dadas las velocidades relativas de los planetesimales, y por este efecto las colisiones entre planetesimales pasan a un régimen de fragmentación.

Estos embriones planetarios continúan su crecimiento por acreción de planetesimales de forma independiente. Debido al amortiguamiento en las excentricidades e inclinaciones producidas por el gas del disco y la fricción dinámica de los planetesimales, los protoplanetas crecen en órbitas coplanares cuasi circulares, por lo que se espera que no haya cruces en sus órbitas. Sin embargo, a medida que los embriones crecen, las distancias mutuas entre ellos disminuye. Cuando la distancia es menor a  $\sim 3$  radios de Hill mutuos (radio de influencia gravitatoria), las perturbaciones gravitatorias entre los embriones se vuelven importantes, permitiendo el cruce de órbitas y una consecuente fusión entre embriones. Se mantienen así los embriones en órbitas cuasi circulares y coplanares hasta la disipación de la componente gaseosa del disco, formando los planetas terrestres en la región interna del disco, bajo el régimen de crecimiento oligárquico.

Por último, hay dos modelos diferentes para la formación de planetas gigantes, uno conocido como *modelo de acreción de núcleo* y otro como *modelo de inestabilidad de disco*. El primero se basa en la hipótesis de que inicialmente el núcleo crece por acreción de planetesimales, a una tasa mucho mayor que la de la envoltura gaseosa. Si la masa de la envoltura iguala a una masa crítica del núcleo de  $\sim 10m_{\oplus}$  antes de que se disipe la componente gaseosa del disco protoplanetario, se induce una inestabilidad hidrodinámica que resulta en una acreción muy rápida de gas sobre el embrión (Mizuno, 1980; Perri y Cameron, 1974). La envoltura comienza a contraerse y la tasa de acreción del gas crece exponencialmente en muy poco tiempo. El resultado final es un planeta con una gran envoltura gaseosa enriquecido de elementos pesados.

El segundo modelo, en cambio, supone que los planetas gigantes gaseosos se forman en los discos protoplanetarios de una manera similar al proceso en que se forman las estrellas, por colapso gravitatorio dentro de las nubes moleculares (Brunini y Benvenuto, 2008; Cameron, 1978; Guilera et al., 2019; Guilera y Ronco, 2017; Kuiper, 1951). Los planetas gigantes se formarían entonces como consecuencia de inestabilidades gravitatorias en el disco, que conducirían a la fragmentación del mismo en grumos autogravitantes con masas del orden de la masa de Júpiter.

## 1.4. Migración en discos protoplanetarios

Como vimos anteriormente, todavía hay debate en lo que respecta a los modelos de formación planetaria. Sin embargo, sí hay consenso en el hecho de que los planetas se forman dentro de un disco de gas y polvo por lo que necesariamente deben darse interacciones entre el planeta y el disco en donde la gravedad del planeta perturba al fluido. Las interacciones que se dan en esa etapa juegan un rol muy importante a la hora de modelar la arquitectura final de los sistemas planetarios.

Como veremos en el Capítulo 2, la población exoplanetaria observada es muy diversa. Se observan desde sistemas con muy altas excentricidades hasta sistemas en órbitas circulares, sistemas con planetas de varias masas de Júpiter hasta planetas con la masa de Mercurio, sistemas con estrellas muy masivas o planetas alrededor de estrellas M enanas. Explicar el origen y las diferencias entre esta enorme variedad es muy complejo. Las teorías de formación planetaria necesitan poder explicar tanto sistemas con un solo planeta como el propio Sistema Solar. Parte de estas explicaciones dentro de las teorías de formación tiene que ver con las interacciones entre los planetas en crecimiento y el disco circundante de gas. Además, los distintos modelos de disco que se asumen modifican la configuración final de las posiciones de los planetas.

La interacción gravitatoria que se da entre los planetas en formación y el disco circumestelar es un proceso muy complejo durante el cual el planeta modifica la distribución local de gas en su entorno originando estructuras en el disco que generan torques. Éstos producen distintos movimientos orbitales que pueden darse hacia adentro o hacia afuera del disco protoplanetario, a la vez que amortigua o excita su excentricidad e inclinación, proceso conocido como migración planetaria.

Las características de la migración tendrán que ver con la masa del planeta y de las propiedades locales del disco de gas. Como casos límites se pueden distinguir la migración de tipo I, que afecta a planetas de baja masa y puede estudiarse utilizando un desarrollo lineal (Tanaka et al., 2002); y la migración de tipo II, que afecta a planetas con masas del orden o mayores a la de Júpiter. En este último, el planeta es lo suficientemente masivo como para abrir una brecha en el disco de gas alrededor de su posición orbital, y el movimiento del planeta queda ligado a la evolución viscosa del disco (Ward, 1997). La migración de tipo III se da para planetas de masa intermedia inmersos en discos muy masivos (Masset y Papaloizou, 2003).

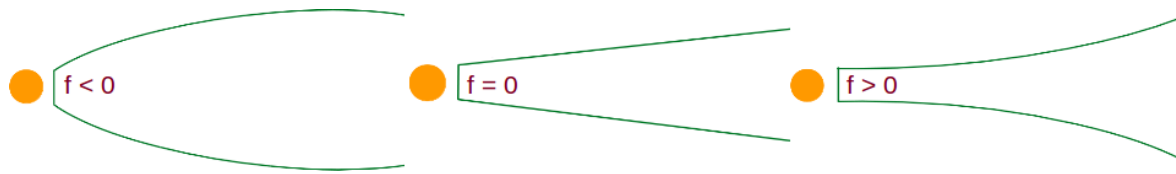
La predicción más fuerte en relación a la migración es el hecho de que los planetas deberían estar preferentemente en resonancias de movimientos medios y observarse con bajas excentricidades (Cresswell y Nelson, 2006). Por más que sí hay muchos sistemas que muestran esta configuración, como puede ser el caso de GJ-876 (Marcy et al., 2001), Kepler-60 (Steffen et al., 2013), Kepler-80 (MacDonald et al., 2016), Kepler-223 (Mills et al., 2016a) y TRAPPIST-1 (Gillon et al., 2017), el número total de sistemas resonantes es mucho menor del que se esperaría si durante el proceso de formación efectivamente hubiera habido migración. La duda que surge entonces es si los sistemas se forman *in-situ*, si el proceso que hace que se formen las resonancias es más extraño de lo supuesto o si efectivamente se da un decaimiento orbital que forma las resonancias, pero luego se vuelven dinámicamente inestables por algún mecanismo externo (Goldreich y Schlichting, 2014; Izidoro et al., 2017).

Lo que resulta más razonable es descartar la hipótesis de que los planetas se hayan formado en las posiciones donde son observados actualmente y que, en cambio, hayan migrado durante su formación. Es por esto que intentaremos comprender las interacciones que se dan entre el disco y un sólo planeta inmerso en él, moviéndose en órbita circular. Para esto es necesario primero caracterizar los distintos modelos de discos y diferenciar entre planetas con alta, mediana y baja masa, ya que éste parámetro es el que indica cómo se modifica la estructura del disco a su alrededor.

### 1.4.1. Modelos de discos protoplanetarios

La evolución orbital del planeta inmerso en el disco protoplanetario depende de la estructura considerada para el disco. Como ya mencionamos, durante el proceso de formación estelar las estrellas arman un disco en donde se van a formar los planetas. Estos discos se observan alrededor de estrellas tipo T-Tauri, estrellas tempranas de pre-secuencia principal. La composición del disco protoplanetario es la misma que la de la estrella central, y mide aproximadamente  $\sim 100$  *ua* de radio.

Los discos circumplanetarios son discos de acreción. Esto significa que la estrella central se alimenta del material que el disco le entrega. Hartmann et al. (1998) calcularon la tasa de acreción en estrellas jóvenes en  $\sim 10^{-8} M_{\odot}$  por año. Sin embargo, la vida media calculada para sus discos es de  $\sim 2.5 \times 10^6$  años (Mamajek, 2009), lo que indica que debe haber otro mecanismo de traslado de momento angular para que el gas fluya hacia la parte interna del disco, caiga sobre la estrella y remueva el material remanente.



**Figura 1.5.** Representación esquemática de los discos protoplanetarios en función del índice de forma  $f$ . Si  $f > 0$  la altura  $H$  crece aceleradamente con el radio y el disco será cóncavo hacia arriba. El caso contrario ocurre cuando  $f < 0$  y el disco será cóncavo hacia abajo, mientras que  $f = 0$  se corresponde con un disco con relación de aspecto constante, por lo que su altura crece linealmente con  $r$ .

Para especificar el modelo de disco se suelen adoptar leyes de potencias radiales para la densidad superficial y la temperatura:

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 r^{-\alpha}, \quad T(r) = T_0 r^{-\beta}, \quad (1.1)$$

y se consideran los valores de  $\Sigma_0 = 1700 \text{ gr cm}^{-2}$  y  $T_0 = 270 \text{ K}$  (a  $1 \text{ ua}$ ) usados en el trabajo de [Hayashi \(1981\)](#), que da valores para la Nebulosa Solar de Masa Mínima (NSMM). Además, según este modelo  $\alpha = 1.5$ , aunque suelen utilizarse exponentes en el rango  $\alpha \in [0, 1.5]$ , y para el perfil de temperatura se utiliza  $\beta \in [-1, 0]$ .

Para pensar en la geometría del disco suele utilizarse, en vez de la ecuación para la temperatura, la expresión para la relación de aspecto  $H(r) = H_0 r^f$ . La relación de aspecto del disco a  $1 \text{ ua}$  está dada por  $H_0 = (c_s/v_k)$ , donde la velocidad isotérmica del sonido es  $c_s = 1 \text{ km/s}$  en el vacío, mientras que  $v_k$  representa la velocidad circular Kepleriana. El parámetro  $f$  mide la forma del disco y es conocido con el nombre de índice de forma o *flare*. Si  $f > 0$  la altura  $H$  crece aceleradamente con el radio y el disco será cóncavo hacia arriba. El caso contrario ocurre cuando  $f < 0$  y el disco será cóncavo hacia abajo, mientras que  $f = 0$  se corresponde con un disco plano, por lo que su altura crece linealmente con  $r$ . En la Figura 1.5 mostramos esquemáticamente los distintos casos.

La interacción gravitatoria entre un planeta y el disco circundante genera torques sobre el planeta (y lógicamente también sobre el disco, por la conservación de momento angular) que tiene dos componentes: el *torque de Lindblad* y el *torque de corrotación*. El movimiento radial de un planeta en el disco se dará como consecuencia de estos torques. La dirección y la tasa a la cual migra el planeta viene dada por el peso de cada uno de éstos. La región de corrotación es aquella en que el gas y el planeta están fijos uno respecto del otro. Para un planeta en órbita circular a una distancia  $r_p$  de la estrella, su momento angular vendrá dado por  $L_p = m_p r_p^2 \Omega(r_p)$ , siendo  $\Omega$  la frecuencia orbital. Si se aplica un torque neto  $\Gamma$  al planeta, su ritmo de migración será

$$\frac{dr_p}{dt} = 2 \frac{\Gamma}{m_p} \sqrt{\frac{r_p}{GM_*}}. \quad (1.2)$$

La tasa de transferencia de momento angular y energía entre un disco y un satélite que orbita un cuerpo central fue calculada por [Goldreich y Tremaine \(1980\)](#), sentando las primeras bases para la migración planetaria. Ahí se mostró que si la transferencia se da en resonancias de Lindblad el cuerpo aumenta su órbita a la vez

que disminuye su excentricidad, mientras que si la transferencia se da en corrotación su semieje decrece.

### 1.4.2. Migración de tipo I

La migración de tipo I fue originalmente propuesta por [Goldreich y Tremaine \(1979\)](#), basándose en la fuerte suposición de que es válido un análisis lineal de las ecuaciones hidrodinámicas. Aplica a planetas de baja masa y su dirección y amplitud dependen de las propiedades del disco, por lo que es difícil proponer un escenario universal a priori.

El potencial gravitatorio de un planeta en órbita circular puede expresarse en series de Fourier en coordenadas polares  $(r, \phi)$  y viene dado por

$$\Phi_p(r, \phi, t) \equiv -\frac{Gm_p}{|\vec{r}_p - \vec{r}|} = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m(r) \cos(m[\phi - \phi_p]) \quad (1.3)$$

con  $\phi_p = \Omega_p t$  la posición angular del planeta que se mueve en órbita circular con velocidad angular  $\Omega_p$ , y  $\Phi_m$  son los coeficientes de Fourier de cada modo azimutal  $m$ . Así, el potencial del planeta queda representado por una superposición de términos que rotan con una velocidad igual a la velocidad orbital angular del planeta, medida desde un marco de referencia inercial.

Las resonancias de Lindblad ocurren cuando la velocidad angular  $\omega$  relativa de cada modo azimutal  $m$  del perturbador coincide con la frecuencia de epiciclo  $\kappa$  en un marco de referencia que se mueve con un elemento de fluido orbitando en el disco a una distancia  $r$ , es decir,

$$\omega \equiv m[\Omega(r) - \Omega_p] = \pm\kappa. \quad (1.4)$$

Así, la posición de las resonancias de Lindblad estará en

$$\Omega(r) = \Omega_p \pm \frac{\kappa}{m}. \quad (1.5)$$

En consecuencia, las resonancias de Lindblad pueden interpretarse como un caso particular de resonancia de movimientos medios entre el potencial perturbador (planeta) de frecuencia  $\Omega_p$  y el gas del disco, con frecuencia  $\Omega$ . En una resonancia de Lindblad la relación de movimientos medios es igual a la frecuencia de epiciclo  $\kappa$  del gas.

Si además el disco es Kepleriano,  $\kappa = \Omega_p$  y la frecuencia de cada modo será

$$\Omega(r) = \frac{m}{m \pm 1} \Omega_p, \quad (1.6)$$

que se corresponde con las posiciones de las resonancias de Lindblad internas (aquellas con el signo '-') y externas (con el signo '+').

Un planeta se dirá que tiene masa pequeña si no es capaz de alterar significativamente la estructura del disco en su entorno local, es decir que las perturbaciones que genera en el gas son pequeñas. Sin embargo, estas perturbaciones pueden ser significativas en la vecindad de las resonancias de Lindblad.

El momento angular del planeta es transportado a diferentes partes del disco a través de las ondas de densidad generadas en el disco (ver [Papaloizou et al., 2007](#)). Cada onda tiene una velocidad  $\Omega_p$  igual a la del planeta, pero como  $\Omega_p > \Omega(r)$  en la parte del disco exterior al planeta, las ondas que se propagan tienen momento angular positivo respecto al material del disco. De esta manera, el planeta le ejerce un torque positivo al disco. Para conservar el momento angular, la excitación de las ondas debe remover momento angular del planeta. Lo opuesto ocurre cuando las ondas son excitadas en la región interior a la resonancia de Lindblad. Vemos entonces que las resonancias internas y externas generan torques de distinto signo en el planeta. Generalmente, el torque externo es el que domina siendo el torque total negativo, lo que provoca que el planeta pierda momento angular y espirale hacia la estrella ([Ward, 1997](#)).

La posición en que las frecuencias angulares del gas y el planeta coinciden ( $\Omega_p = \Omega(r)$ ) se conoce como torque de corrotación, y se da en aquellos lugares en que el gas y el planeta orbitan a la misma velocidad. A esta región usualmente se la llama región de herradura, debida a su forma.

Para planetas de baja masa, los torques generados por estas resonancias son generalmente demasiado pequeños como para compensar el torque de Lindblad, excepto en las regiones en donde existe un fuerte gradiente en la densidad superficial del gas.

Las conclusiones básicas del trabajo de [Goldreich y Tremaine \(1979\)](#) sobre la migración planetaria de tipo I son: primero que el potencial del planeta ejerce un torque sobre el disco protoplanetario únicamente en las resonancias de Lindblad y en corrotación. Segundo, que el torque es positivo en las resonancias de Lindblad externas y negativo en las internas. Y por último, que el torque de corrotación tiene el mismo orden de magnitud que el torque de Lindblad.

El tiempo característico de migración se define a partir de la variación temporal del semieje como  $r_p |dr_p/dt|^{-1}$ . En el caso Kepleriano ( $\Omega = \Omega_k$ ) se tiene que

$$\tau_{mig_I} = \frac{L_p}{2 |\Gamma|} = \frac{1}{2} \frac{M_\star^2}{m_p} \frac{H(r)^2}{r_p^2 \Sigma_p \Omega_p(r)}, \quad (1.7)$$

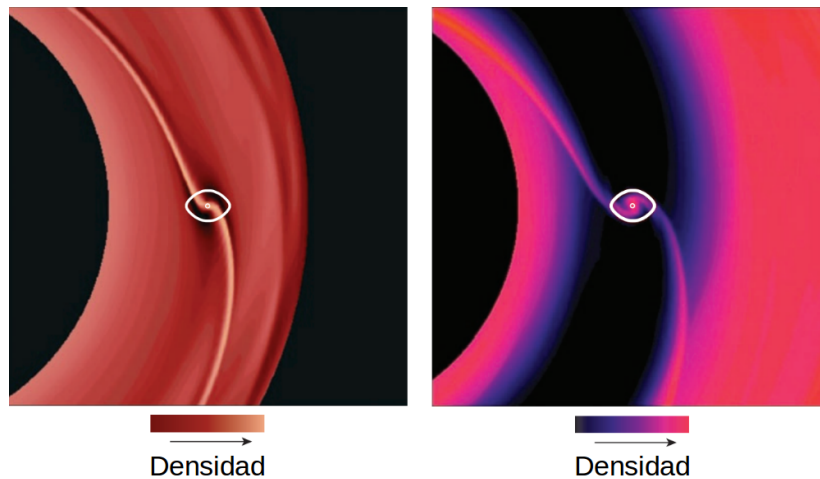
con  $L_p$  el momento angular orbital del planeta y  $M_\star$  la masa de la estrella a la que el planeta orbita.

### 1.4.3. Migración de tipo II

La migración de tipo II fue propuesta por [Ward \(1997\)](#) para el caso en que la masa del perturbador es lo suficientemente grande como para ejercer perturbaciones que limpian la vecindad de su órbita y dejan sin gas una región anular a su alrededor.

Se dice que se abre un 'gap' (brecha) en el disco cuando el 90 % del material en la región coorbital al planeta es removido. Así, mediante simulaciones hidrodinámicas [Crida et al. \(2006\)](#) propone una condición para la apertura del gap considerando un disco viscoso, dada por

$$\frac{3}{4} \frac{H(r)}{r_H} + \frac{50\nu}{a_p^2 \Omega_p} \frac{M_\star}{m_p} \leq 1, \quad (1.8)$$



**Figura 1.6.** Simulaciones hidrodinámicas que muestran el comportamiento de dos planetas con distinta masa inmersos en un disco de gas. Ambas imágenes fueron extraídas del trabajo de [Chambers \(2009\)](#). En ambos gráficos, la paleta de colores indica una escala para la densidad superficial de gas. **Izquierda:** Migración de tipo I de un planeta con baja masa. Se muestra como el planeta genera ondas espirales de densidad que transportan momento angular causando su migración. **Derecha:** Migración de tipo II para un planeta masivo que abre una brecha en del disco de gas.

con  $H$  la relación de escala del disco,  $r_H$  el radio de Hill del planeta de masa  $m_p$  ubicado a una distancia  $a_p$  de la estrella central, cuya masa es  $M_*$ . La viscosidad del disco está representada por  $\nu$ . La formación del gap surge como una competencia entre el torque que puede ejercer el planeta sobre el gas y el torque viscoso del disco, que intentan rellenarlo nuevamente.

En este vaciamiento de masa significativo en la región coorbital, el torque de corrotación disminuye volviéndose irrelevante a medida que el surco va creciendo en profundidad y en radio. Las resonancias de Lindblad van quedando en el interior del gap, disminuyendo su efecto sobre la dinámica del planeta y anulando el torque diferencial de Lindblad. Así, el planeta deja de experimentar un torque neto y su migración se detiene.

Cuando el planeta logra abrir la brecha, su evolución orbital queda ligada al disco, y migra a la misma tasa a la que lo hace el gas ([Lin y Papaloizou, 1985](#)). Si el planeta se acerca a alguno de los bordes del gap, el torque resultante lo vuelve hacia el medio. Sin embargo, [Duffell et al. \(2014\)](#) cuestionan esta idea de que el planeta permanezca atado a la cavidad y encuentran que el gas es capaz de cruzar la órbita de herradura, evidenciando que la idea de un disco interno y otro externo, desconectados a través del surco no es adecuada, modificando así la velocidad de migración de tipo II. El torque no depende de la velocidad de caída del gas hacia la estrella. Las tasas de migración de tipo II son, en general, menores a las correspondientes para la migración de tipo I, y viene dada por

$$\tau_{migII} \propto -\frac{\nu}{a_p}, \quad (1.9)$$

que, como se ve, variará según la viscosidad del disco en el que se encuentre sumergido dicho planeta.



En la figura 1.6 se muestra una comparación entre dos simulaciones hidrodinámicas para las cuales se ha variado la masa del planeta. En la figura de la izquierda no es lo suficientemente masivo el cuerpo como para abrir un gap en el disco y sufre únicamente migración de tipo I. En la figura de la derecha, en cambio, el planeta es más masivo y genera perturbaciones en su entorno gaseoso tal que divide al disco en una región interna y otra externa, quedando sujeta a migración de tipo II.

#### 1.4.4. Migración de tipo III

El régimen de migración de tipo III (o de modo rápido -runaway migration-) fue propuesto por [Masset y Papaloizou \(2003\)](#) y afecta a planetas de masas intermedias. Depende fuertemente del flujo de gas en la vecindad del planeta, no tiene una dirección predeterminada y es dominada por el torque de corrotación. Este fenómeno se da para planetas con masas similares a la de Saturno, que limpian de gas una región parcial dentro del disco. La migración de tipo III puede darse hacia adentro o hacia afuera del disco, pero en muy pocas órbitas el planeta cambia dramáticamente su posición.

En pocas palabras, si el perfil de densidad superficial no se ve afectado por el planeta, entonces el torque de corrotación cancela con el de Lindblad. Si alrededor del planeta se forma una brecha parcial tal que la región corrotante con el planeta queda vacía, entonces los torques ya no se cancelan entre sí y aparece un déficit de masa,  $\delta M$ . Esta masa es la que debería ser agregada a la región de corrotación para que la densidad superficial sea igual a la densidad superficial media del flujo que cruza la región. A grandes rasgos, si  $\delta M < \widetilde{M}_p = m_p + M_{CPD}$  (con  $M_{CPD}$  la masa del disco circumplanetario) el flujo a través de la región de corrotación puede acelerar la migración, pero no se da el runaway. En cambio, cuando  $\delta M > \widetilde{M}_p$  la migración se produce aceleradamente.

El gas restante cercano al planeta ejerce un torque de corrotación que crece proporcionalmente a la velocidad de migración. Este efecto genera una tasa de migración muy alta, ya sea hacia la estrella central o hacia afuera del disco, dependiendo de las condiciones termodinámicas y de la estructura del disco. De todas formas, [D'Angelo y Lubow \(2008\)](#) argumentan que no es claro todavía si efectivamente pueden darse las condiciones necesarias en el disco para generar esta migración acelerada, ni cuánto tiempo durará.



---

## CAPÍTULO 2

---

# Sistemas planetarios - Aspectos observacionales

En este capítulo presentamos las características generales de los exoplanetas observados. Principalmente mostraremos datos extraídos del catálogo de 'NASA exoplanet archive' (<https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>). Veremos que se observa una enorme diversidad en el rango de parámetros físicos en los distintos sistemas. Desarrollaremos las distintas técnicas utilizadas para la detección de exoplanetas, que se hacen con telescopios tanto en tierra como en órbita en el espacio. Veremos que cada una es sensible a determinadas configuraciones con las cuales es posible obtener diferentes datos.

### Índice

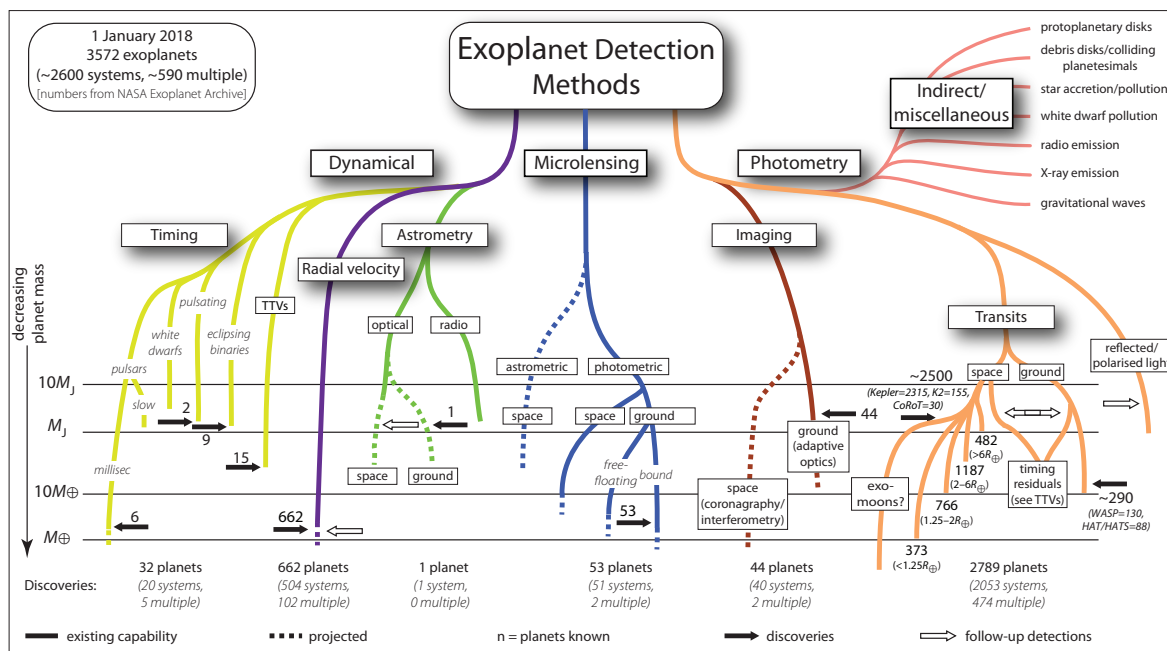
---

<b>2.1. Sistemas extrasolares</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>2.2. Métodos de detección</b> . . . . .	<b>26</b>
2.2.1. Velocidad Radial . . . . .	26
2.2.2. Microlente . . . . .	28
2.2.3. Astrometría . . . . .	29
2.2.4. Imagen directa . . . . .	30
2.2.5. Pulsar . . . . .	30
2.2.6. Tránsito . . . . .	32
2.2.7. Variación de tiempo de tránsito . . . . .	34

---

## 2.1. Sistemas extrasolares

La observación de planetas extrasolares es muy complicada por encontrarse muy lejos de la Tierra, y por no poseer luz propia. En la actualidad existen diversas



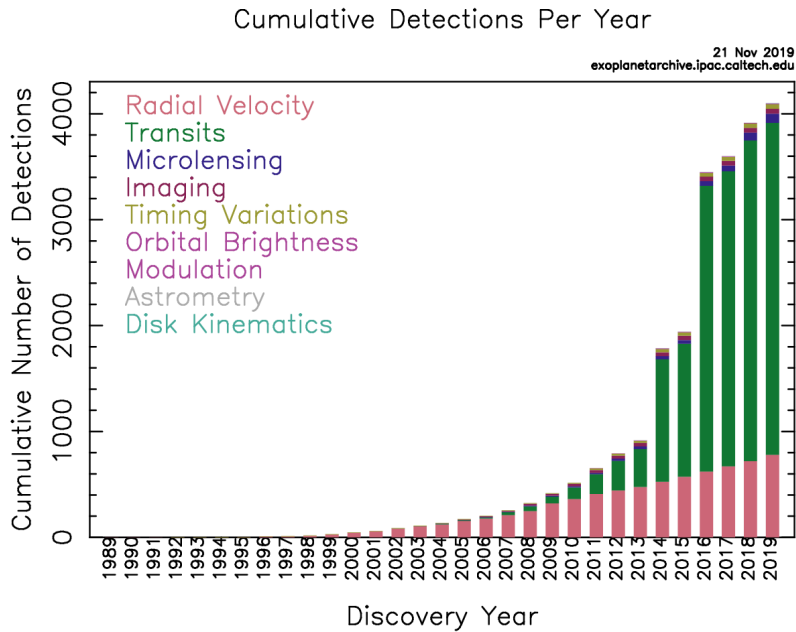
**Figura 2.1.** Esquema de los métodos de detección de exoplanetas y cantidad encontrada con cada uno de ellos, actualizado al 1 de enero de 2018. Imagen tomada del *exoplanet.eu* realizado por Perryman.

técnicas de detección de planetas en sistemas extrasolares. Con cada una de ellas es posible determinar diferentes características de los planetas y sus órbitas. En la Figura 2.1 se muestra un breve resumen de las propiedades básicas de cada técnica y cuántos sistemas se han descubierto con cada una de ellas.

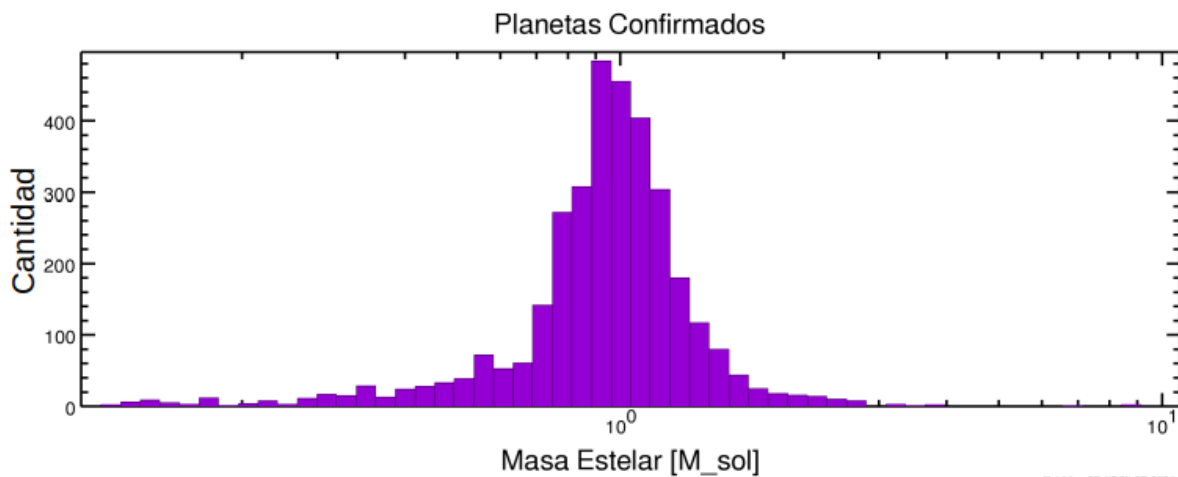
Hasta el 31/03/2020 hay un total de 4100 exoplanetas entre confirmados y validados, según lo indica 'NASA Exoplanet Archive'. Cada uno de los sistemas encontrados tiene sus particularidades, desde el número de planetas hasta sus propiedades dinámicas. Las diferencias encontradas guardan registro de cada proceso de formación.

Previo al desarrollo de la tecnología que permitió descubrir tantos nuevos planetas, se creía que el Sistema Solar era un ejemplo típico de sistema exoplanetario. Sin embargo, el primer exoplaneta descubierto, PSR1257+12 (Wolszczan y Frail, 1992), orbitaba en torno a un púlsar. Recién en 1995, tres años más tarde, se descubrió el primer exoplaneta alrededor de estrella tipo solar, 51 Peg b (Mayor y Queloz, 1995). Esto mostró que existía una gran diversidad de objetos que era necesario estudiar.

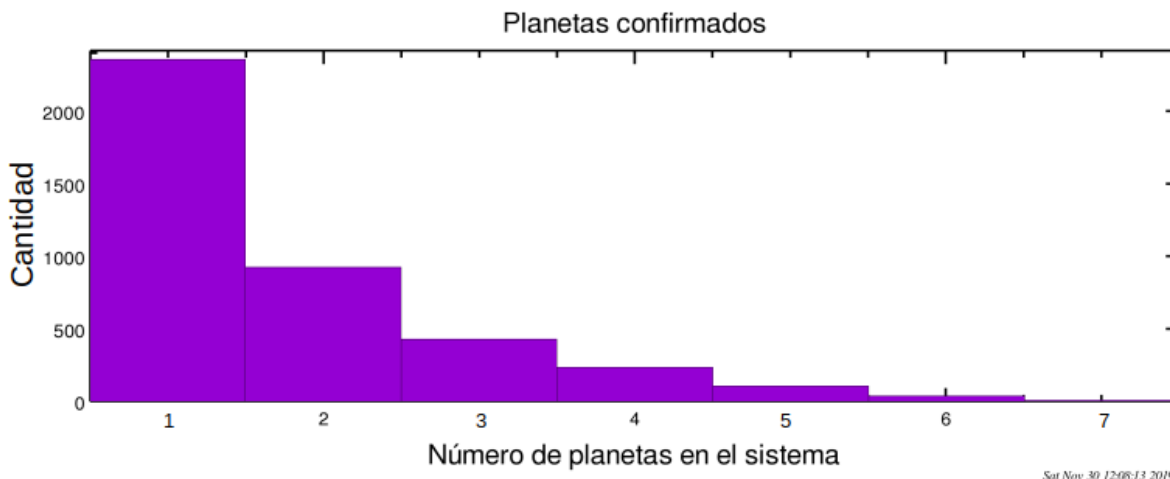
En la Figura 2.2 vemos un histograma que muestra la cantidad de planetas descubiertos en función del tiempo, desde el primero detectado. La frecuencia de descubrimientos incrementó con el correr del tiempo, y en particular, un gran número de ellos han sido descubiertos por el satélite Kepler, mediante la técnica fotométrica de tránsito. Veremos más adelante que el dato con mayor precisión que brinda esta técnica, es el período orbital. Con esto, es posible estudiar de manera detallada la dinámica del sistema pero no sus procesos de formación ya que, por ejemplo, sus masas no están bien determinadas.



**Figura 2.2.** Cantidad acumulada de planetas descubiertos desde 1995 hasta la actualidad. Cada color representa un método de detección (destacado en la leyenda de la imagen). El tamaño de cada barra tiene que ver con la cantidad de detecciones de esa técnica. Imagen extraída de ‘NASA exoplanet archive’ (<https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/exoplanetplots>).



**Figura 2.3.** En esta figura se muestra un histograma del rango de masas que tienen las estrellas centrales de los sistemas exoplanetarios descubiertos. Notar que la mayor acumulación se ve en masas estelares del orden de  $\sim 1M_{\odot}$ . Imagen extraída de ‘NASA exoplanet archive’ (<https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/exoplanetplots>).

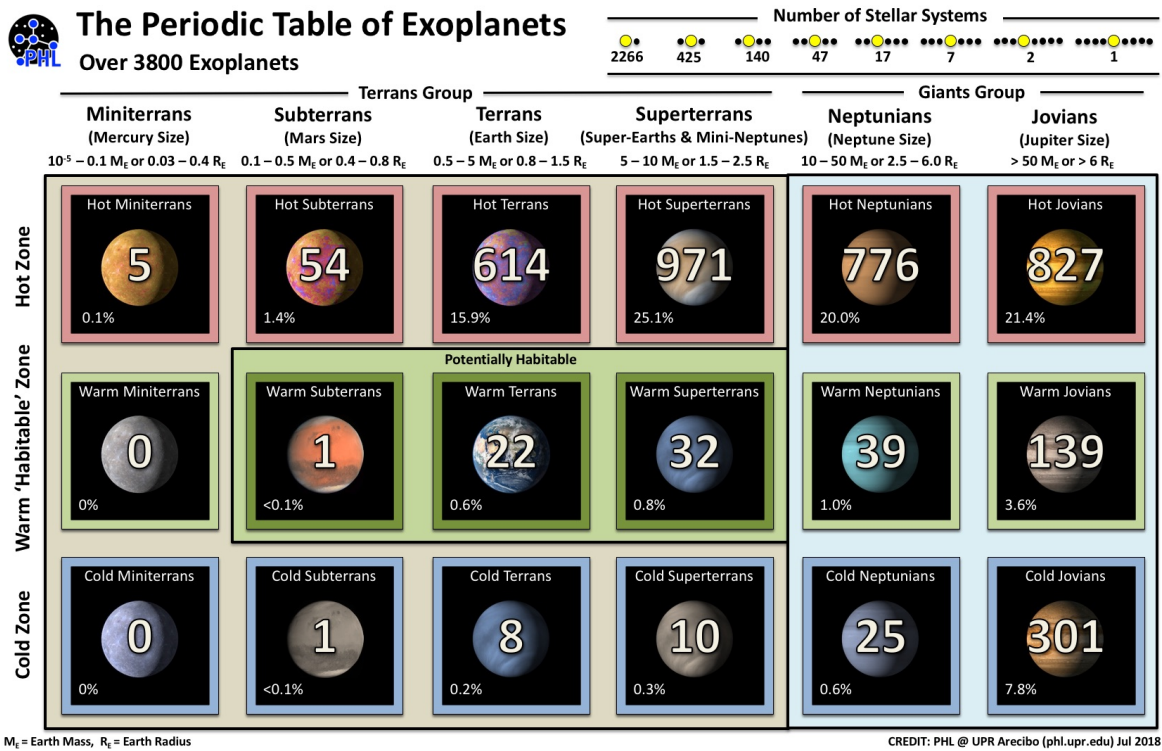


**Figura 2.4.** En esta figura se muestra un histograma con la cantidad de planetas confirmados por cada sistema extrasolar. Imagen extraída de 'NASA exoplanet archive' (<https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/exoplanetplots>).

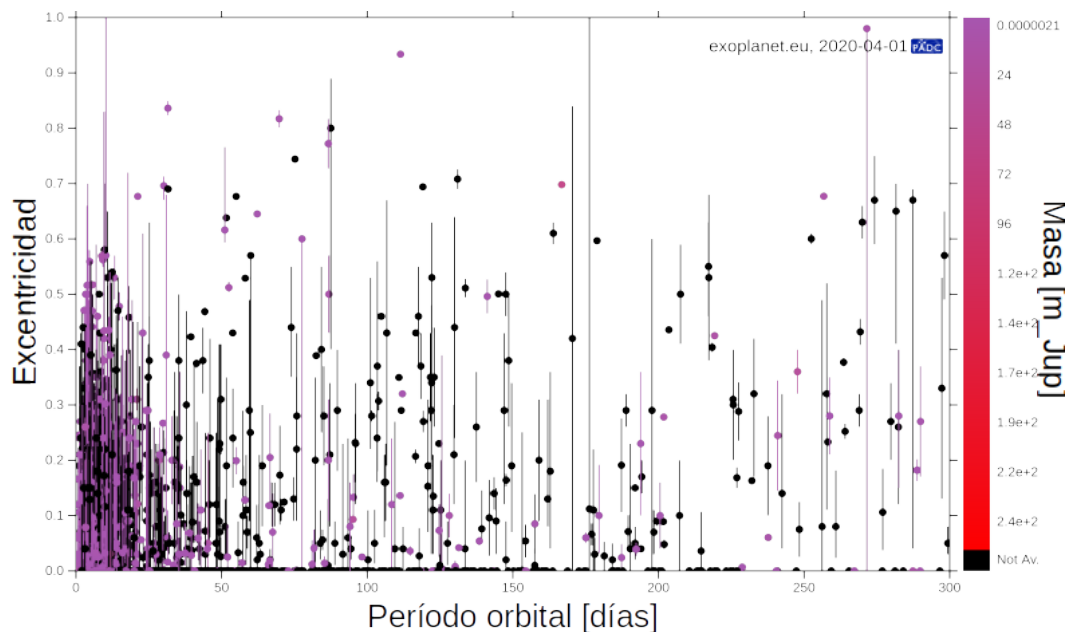
En la figura 2.3 se ve un histograma del rango de masas que tienen las estrellas centrales de los sistemas exoplanetarios observados. Distinguimos una gran concentración de planetas descubiertos en torno a estrellas con masas similares al Sol. Por último, en la Figura 2.4 se puede ver la cantidad de planetas con los que cuenta cada sistema extrasolar. Notar que el número de planetas por sistema disminuye abruptamente. Hay 2358 sistemas con 1 planeta, se ve que hay poco menos de 1000 sistemas con 2, ~500 con 3, alrededor de 200 con 4, ~100 con 5, menos de 50 con 6 y menos de 10 sistemas cuentan con 7 planetas. El único sistema planetario con 8 planetas descubiertos es el Sistema Solar.

La variedad observada de exoplanetas, más allá del sesgo observacional es muy grande. En la Figura 2.5 se muestran más de 3800 exoplanetas, cuántos planetas hay por sistema, muestra aquellos cuerpos que se encuentran internos a la región de habitabilidad, en la ZH y exterior a ella. El gráfico fue realizado con datos de Habitable Exoplanet Catalog (HEC) en julio de 2018. La imagen fue extraída de Planetary Habitability Laboratory de la Universidad de Puerto Rico (<https://www.hpcf.upr.edu>). Por más que el gráfico esté desactualizado, muestra una gran variedad de objetos y representa más del 90% de los q hoy en día.

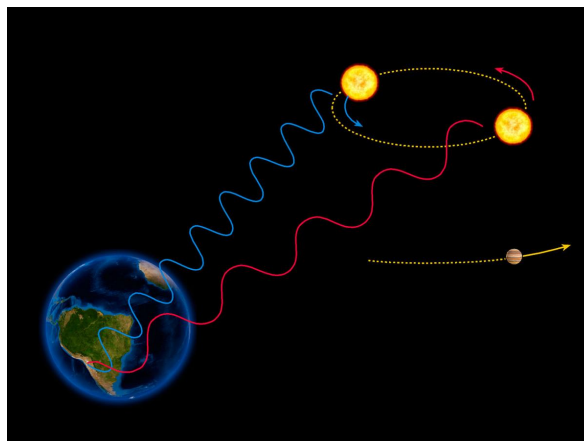
En la Figura 2.6 muestra el período versus la excentricidad de ~ 3500 exoplanetas. No se han graficado más porque no se conoce este dato para todos los planetas. Sin embargo, de los que sí se conoce se tienen errores muy grandes. Por otro lado se representó con un color la masa de los cuerpos, y en negro se muestran aquellos para los que este parámetro no está definido. Todos estos datos ( $P_i$ ,  $e_i$  y  $m_i$ ) son muy importantes a la hora de un estudio dinámico ya que, como veremos en los capítulos siguientes, están involucrados en todas las ecuaciones. Además, elegimos mostrar los sistemas hasta 300 días de período orbital ya que en el análisis que realizaremos consideraremos sistemas que están cerca de la estrella.



**Figura 2.5.** Tabla periódica de exoplanetas. Muestra más de 3800 exoplanetas, cuántos planetas hay por sistema, muestra aquellos cuerpos que se encuentran internos a la región de habitabilidad, en la ZH y exterior a ella. El gráfico fue realizado con datos de Habitable Exoplanet Catalog (HEC) en julio de 2018. Imagen extraída de Planetary Habitability Laboratory de la Universidad de Puerto Rico (<https://www.hpcf.upr.edu>).



**Figura 2.6.** Período versus excentricidad de ~3500 exoplanetas (aquellos que tienen datos sobre *e*). La masa de cada planeta está representada con un color. En negro se muestran aquellos para los que este parámetro no está definido. Imagen extraída de 'NASA exoplanet archive' (<https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/exoplanetplots>).



**Figura 2.7.** Esquema de velocidad radial. La imagen muestra cómo una estrella se mueve alrededor del centro de masas del sistema estrella-planeta. Esto genera que un observador en la Tierra detecta un cambio en la longitud de onda emitida por la estrella: cuando la estrella se acerca al observador la luz se corre hacia el azul mientras que cuando se aleja, hacia el rojo. Imagen extraída de la página de la European Southern Observatory (ESO): ESO Press Photo 22e/07.

## 2.2. Métodos de detección

Cabe destacar que para la detección de cada uno de estos sistemas, se han utilizado distintas técnicas como microlentes, imagen directa, tránsitos y velocidades radiales entre otras, con telescopios tanto en tierra como en órbita en el espacio, que describiremos a continuación. Lamentablemente, los parámetros físicos que podemos conocer dependen fuertemente de la técnica con la que se observa.

A continuación describimos brevemente cada método resaltando sus ventajas y limitaciones. Destacando que aproximadamente el 99 % de los exoplanetas fueron detectados por tránsito o velocidad radial, las explicaremos con más detalle.

### 2.2.1. Velocidad Radial

El método de velocidad radial (VR) (o efecto Doppler) es una técnica indirecta de detección de planetas a partir de pequeños cambios en la posición de la estrella, que permite detectar planetas en la vecindad de la Vía Láctea, hasta una distancia de 100 años luz de la Tierra. En los sistemas planetarios, la estrella central es el cuerpo más masivo. Si la estrella tiene planetas orbitando a su alrededor, el baricentro del sistema estará desplazado del centro de la estrella, como se muestra de modo esquemático en la Figura 2.7.

Este método está basado en la medición del desplazamiento de las líneas espectrales estelares por efecto Doppler, a causa del movimiento radial de la estrella inducido por los cuerpos que la orbitan.

Formalmente, esta técnica detecta planetas midiendo las perturbaciones gravitatorias generadas en la estrella central por el/los exoplanetas que orbitan alrededor de ella. La velocidad radial se mide por efecto Doppler: se da un cambio de frecuencia aparente en la onda electromagnética producida por el movimiento relativo



de la fuente respecto a su observador,  $\Delta f = f_0 \Delta v / c$ .  $\Delta v$  representa el cambio de velocidad del receptor respecto de la fuente ( $\Delta v > 0$  cuando la fuente y el receptor se acercan, y negativa en caso que se alejen), y  $f_0$  la frecuencia emitida. Los cambios en la velocidad  $v$  de un objeto se puede representar por:

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}, \quad (2.1)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la línea espectral observada y  $\lambda_0$  es la longitud de onda de la línea espectral en reposo.

A grandes rasgos, esta técnica consiste en medir el cambio en la posición de las líneas de la estrella mientras se acerca y se aleja del observador. Para esto se mide el cambio en la longitud de onda de la luz emitida por dicha estrella, efecto conocido como 'corrimiento Doppler', que resulta del movimiento producido por estar la estrella y el planeta orbitando el centro de masa del sistema. Estos corrimientos se detectan analizando el espectro de la estrella. Cuando la estrella está en movimiento hacia la Tierra, la luz se mueve hacia el azul, mientras que si la estrella se aleja de la Tierra, sus ondas de luz se corren al rojo. Este efecto es mayor cuanto más grande sea el planeta, o más cerca se encuentre de su estrella, ya que la estrella se moverá más rápido alrededor del centro de masa, razón por la cual resulta más sencillo de detectar planetas en estas configuraciones.

Supongamos que la masa de la estrella es  $M_*$ , y la del planeta es  $m_p$ , y que sus centros están separados por una distancia  $r$ . La posición de la estrella ( $d_*$ ) y del planeta ( $d_p$ ) respecto del baricentro del sistema vendrán dadas, respectivamente, por:

$$d_p = \frac{M_*}{M_* + m_p} r ; \quad d_* = \frac{m_p}{M_* + m_p} r. \quad (2.2)$$

Cuanto más masivos sean los cuerpos que orbitan alrededor de la estrella, en comparación con la misma, mayor corrimiento habrá respecto del baricentro. Por esta misma razón, cuanto menor sea la masa de la estrella, más efectiva resulta la técnica.

Con esta técnica es posible inferir parámetros orbitales tales como el período  $P$ , la excentricidad  $e$ , la longitud del periastro  $\omega$ , y la relación  $m_p \sin(i)$  entre la masa del planeta y la inclinación de su órbita, midiendo velocidades radiales en distintas fases orbitales. Además se puede estimar la masa estelar espectroscópicamente, acompañando de modelos de evolución estelar.

En función de los parámetros orbitales se puede expresar la velocidad radial como:

$$V_{rad} = V_0 + A[\cos(\nu(t) + \omega) + e \cos(\omega)] \quad (2.3)$$

donde  $V_0$  representa una velocidad de la estrella que depende de cómo se ha medido,  $\nu$  es la anomalía verdadera,  $e$  la excentricidad del planeta y  $A$  es la semiamplitud de la VR observada, para el problema de los dos cuerpos. La amplitud puede calcularse mediante la ecuación

$$A = \left( \frac{2\pi\mathcal{G}}{P} \right)^{1/3} \frac{m_p \sin(i)}{(M_* + m_p)^{2/3}} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad (2.4)$$

donde  $\mathcal{G}$  es la constante de gravitación universal, e  $i$  la inclinación respecto al plano del cielo.

Es necesario entonces para la detección, que los sistemas se encuentren bien orientados (si  $i = 0$ , es imposible detectarlos, resultan invisibles). De la ec. 2.4 vemos que es más sencillo detectar planetas con corto período orbital. Además, si el efecto Doppler introducido por la presencia de un planeta puede ser mucho más pequeño que el ancho de las líneas de la estrella (Herbig y Spalding, 1955) por lo que es necesario contar con una alta precisión al medir las líneas de absorción de la estrella. Por último y más importante, con este método únicamente es posible la estimación de una cota mínima para la masa del planeta ( $m_p \sin i$ ). Utilizando únicamente VR no es posible la determinación de masas individuales de las componentes del sistema. Sin embargo, si se logra observar el sistema con otra técnica, esta indeterminación desaparece.

En conclusión, en la detección de un exoplaneta, mediciones de velocidad radial aportan información sobre el período y la excentricidad del planeta, junto con un límite inferior para su masa y argumento de pericentro.

### 2.2.2. Microlente

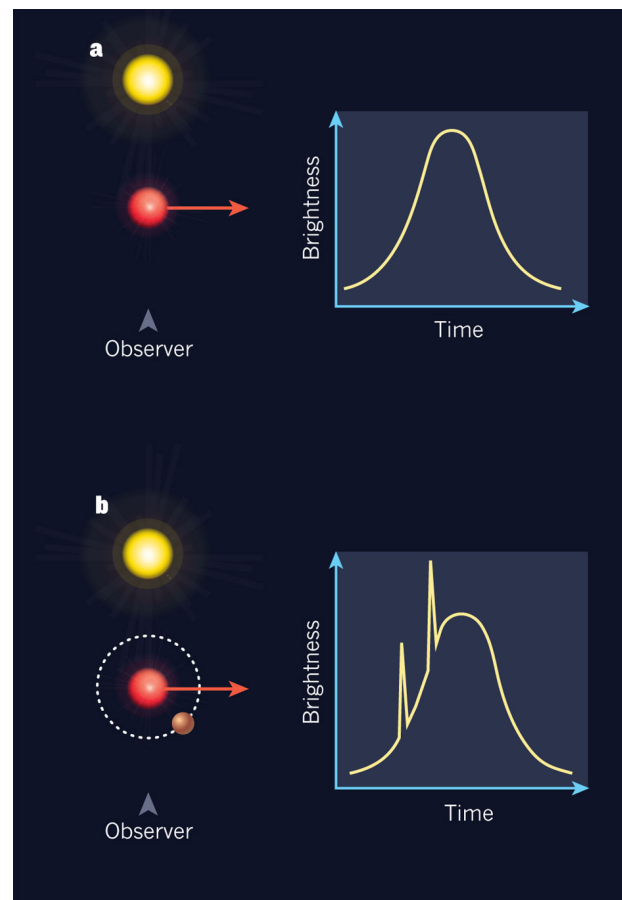
El efecto de lente gravitatoria fue predicho por Einstein en la Teoría de la Relatividad General. Propone que si entre la Tierra y una estrella lejana brillante pasa un sistema de estrella-planeta, la gravedad de este sistema curvará los rayos de luz de la más lejana generando que la distancia entre ellas proyectada en el plano del cielo, se vea mayor. Cuando la gravedad del planeta actúa como lente, enfoca los rayos de luz causando un aumento temporal en el brillo y un cambio aparente en la posición de la estrella. En la Figura 2.8 mostramos el efecto observado, de modo esquemático, de cómo varía el brillo de la estrella en función del tiempo.

La técnica de microlente es la única capaz de detectar planetas más allá de la vecindad solar. Puede llegar hasta el centro galáctico, a  $\sim 1000$  años luz de la Tierra, y permite detectar los exoplanetas más pequeños.

Esta técnica es sensible a cuerpos masivos en órbitas no muy compactas. Es complementaria a las técnicas de tránsito y velocidad radial, que son más eficientes en objetos cercanos a la estrella central. Permite detectar objetos cuando los campos gravitatorios del planeta y la estrella de un dado sistema se acoplan para aumentar la luz de una estrella distante. Para que sea efectiva es necesario que los 3 cuerpos estén perfectamente alineados. El principal defecto de este método es que este fenómeno es muy poco frecuente y no se tiene una periodicidad por lo que, para confirmar si el cuerpo detectado es efectivamente un planeta, hay que estudiarlo adicionalmente con otras métodos.

La principal campaña de microlente es el Optical Gravitational Lensing Experiment (OGLE). Cada vez que OGLE detecta un evento de microlente, se pone en contacto con una red de telescopios para obtener una buena curva de luz y así poder determinar si hay, o no, un planeta presente. Esta estrategia tuvo éxito en la detección del primer planeta de baja masa en una órbita alejada, designado con el nombre de OGLE-2005-BLG-390lb (Beaulieu y et al., 2006).

El resultado de un evento microlente es que es posible obtener información so-



**Figura 2.8.** Esquema del efecto observado de lente gravitatoria. En el gráfico superior vemos la curva de luz de una estrella brillante. Cuando otra estrella pasa por el medio del observador y la estrella lejana, si no es lo suficientemente masiva, no se observa ningún efecto. Sin embargo, en la parte inferior del gráfico vemos que, cuando el sistema que pasa entre medio del observador y la estrella brillante lejana es lo suficientemente masivo, los campos gravitatorios del planeta y la estrella se acoplan para aumentar la luz de una estrella distante. Esto se observa en los picos del gráfico derecho en la curva de luz de la estrella distante. Para que la técnica sea efectiva es necesario que los 3 cuerpos estén perfectamente alineados.

bre la masa total del sistema, la órbita del planeta y su período. Hasta la fecha (marzo de 2020) hay un total de 270 planetas descubiertos por este método.

### 2.2.3. Astrometría

La astrometría intenta detectar el movimiento de una estrella causado por el efecto gravitatorio de un planeta, midiendo la trayectoria de la estrella a través del cielo, mientras muestra pequeños círculos o elipses alrededor del centro de masas del sistema.

Es más sensible a sistemas en lo que el planeta se encuentra a grandes distancias de la estrella, y su plano orbital es perpendicular a la línea de la visual, es decir que  $i = 0$ .

Al igual que el método de velocidad radial, la detección de planetas se da de

forma indirecta. Una desventaja de este método es que es necesario largo tiempo de observación para la confirmación de planetas ya que, al ser eficiente para planetas alejados de su estrella, su período orbital es grande.

Por el momento, no ha habido ningún planeta detectado utilizando astrometría. Sin embargo, es un buen determinador de cota superior en la masa del planeta, a través de un parámetro astrométrico  $\alpha$  que viene dado por

$$\alpha = \frac{m_p a}{M_* D}, \quad (2.5)$$

donde  $a$  es la separación en  $ua$  entre el planeta de masa  $m_p$ , y la estrella, de masa  $M_*$ .  $D$  es la distancia, en parsecs (pc), a la estrella ([Sozzetti, 2005](#)).

#### 2.2.4. Imagen directa

Es una técnica de observación que enmascara a la estrella central del sistema permitiendo la detección de planetas de forma directa, a diferencia de los demás métodos. Utiliza los avances de la óptica adaptativa para obtener imágenes reales de exoplanetas. Con esta técnica fue posible detectar los cuerpos de nuestro Sistema Solar. Como ejemplo mostramos en la Figura 2.9 al sistema múltiple HR 8799, detectado mediante esta técnica por [Marois et al. \(2008\)](#)

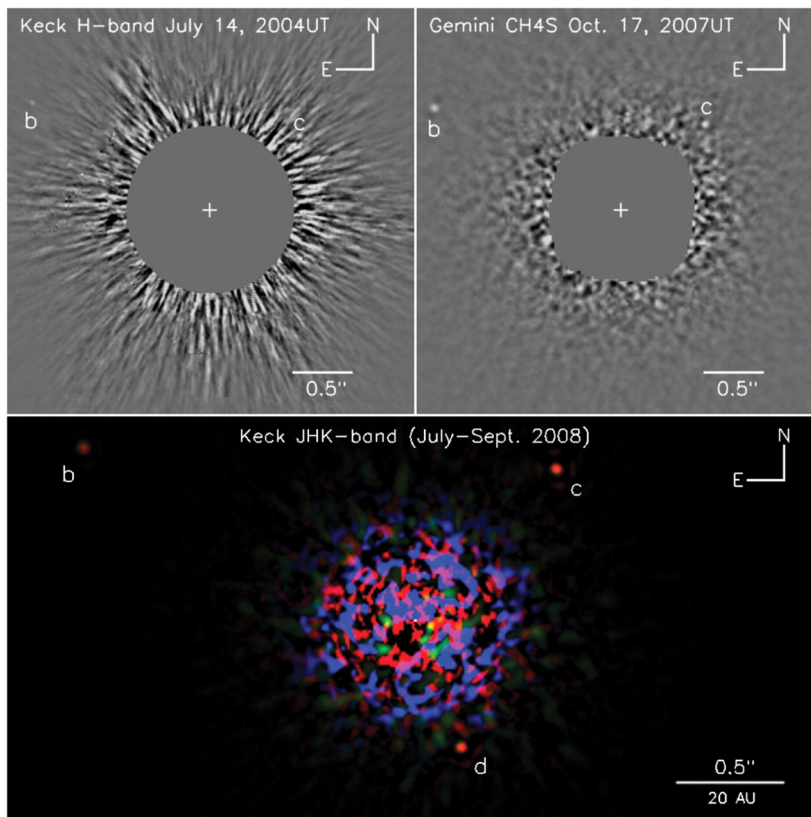
Para la observación de planetas es necesario hacer uso de máscaras, que se encargan de ocultar el brillo de la estrella central, dada la diferencia con el brillo de el/los planetas de un dado sistema. Suele observarse en el infrarrojo cercano ya que es en esa longitud de onda donde se encuentra maximizado el contraste entre el brillo estelar y la emisión térmica del planeta.

Este método favorece la detección de planetas jóvenes por ser más calientes en las etapas tempranas de formación. Además, los objetivos suelen ser estrellas K y M ya que, al ser menos masivas, y por ende menos luminosas, resulta más eficiente la observación de planetas. La mayoría de los planetas detectados por imagen directa son masivos y se encuentran bastante alejados de su estrella anfitriona. Por esta razón, para obtener buenos parámetros es necesario realizar varias observaciones separadas en tiempo, lo que implica una desventaja para el método.

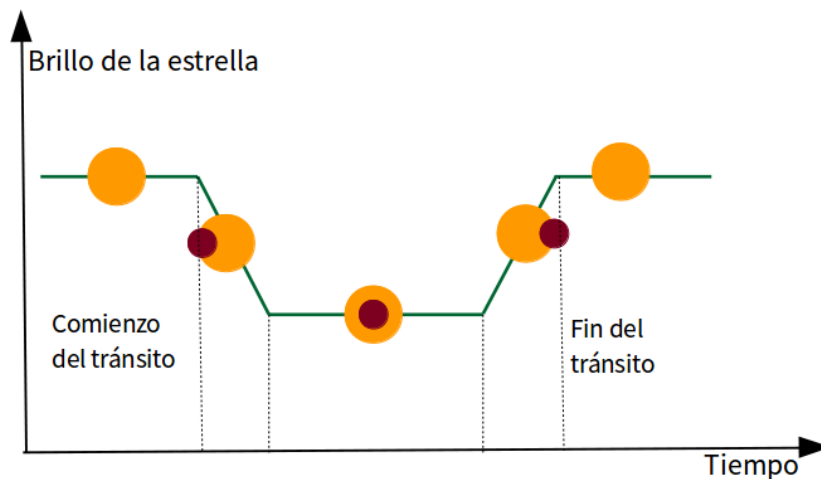
#### 2.2.5. Pulsar

Un pulsar es una estrella de neutrones pulsante que emite radiación periódica muy intensa. Estos objetos poseen un campo magnético muy intenso que induce la emisión de pulsos electromagnéticos en intervalos regulares, relacionados con su período de rotación.

Los púlsares son objetos muy densos (compactos), y su rotación es muy rápida. Si el eje del campo magnético de estos objetos no coincide con el de rotación, se podrán observar pulsos extremadamente regulares en la frecuencia de rayos X o Gamma, en caso de encontrarnos en la línea de la visual de la emisión de materia. Si la rotación se viera afectada por algún objeto, éste perturbaría la exactitud con la que se observa el pulso. De esta forma es posible detectar planetas alrededor de este tipo de objetos, aunque suelen carecer de interés ya que no es posible que alberguen vida.



**Figura 2.9.** Detección de un nuevo planeta en el sistema HR 8799 por el grupo [Marois et al. \(2008\)](#). **Arriba izquierda:** Imagen adquirida con el telescopio Keck en Julio del 2004, en la que pueden observarse los planetas b y c. En las dos imágenes superiores se ha puesto una máscara para tapar el brillo de la estrella. **Arriba derecha:** Se observan nuevamente los planetas b y c en Octubre de 2007 con Gemini. **Abajo:** Se remueve la máscara descubriendo el planeta d. Imagen combinada en las bandas J-H-K con Keck en Julio y Septiembre de 2008.



**Figura 2.10.** Esquema representativo del tránsito de un planeta que pasa por delante de su estrella central (primario). Se muestran las distintas etapas del tránsito y de la variación de la curva de luz de la estrella.

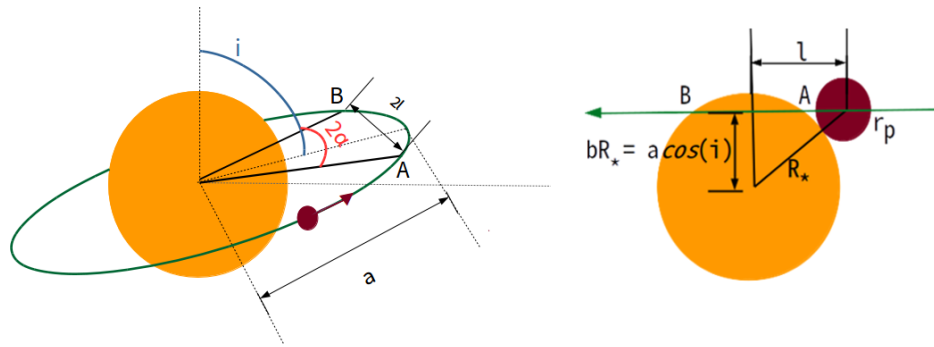
De todas formas, con este método se detectó el primer planeta alrededor de un objeto masivo (PSR 1257+12, [Wolszczan, 1994](#)), midiendo el cambio en la frecuencia de rotación de esta estrella.

### 2.2.6. Tránsito

La detección por tránsitos se realiza de manera indirecta. Se definen dos tipos, el primario, cuando el planeta pasa entre la estrella y el observador (una mitad de la órbita), y el secundario cuando pasa por detrás (la otra mitad). En la figura 2.10 se muestra un esquema de tránsito en un sistema con un solo planeta, en condiciones ideales. En la imagen vemos esquemáticamente una típica curva de tránsito. La curva de luz de la estrella permanece constante hasta que el planeta transita por delante de ella, momento en el cual se genera un decaimiento en la intensidad del brillo.

Con la aparición del satélite Kepler de la NASA (National Aeronautics and Space Administration), que trabaja con la técnica de tránsito planetario, ha crecido muchísimo el número de planetas tanto confirmados como candidatos: 4099 a diciembre de 2019, según la base de datos del [exoplanet.eu](#), luego de la observación a más de 100.000 estrellas. Esta misión fue diseñada para mapear una porción de la Vía Láctea y descubrir planetas del tamaño de la Tierra cercanas a la zona de habitabilidad del sistema, y determinar además cuántas de las estrellas de nuestra galaxia podrían tener planetas con estas características. El satélite Kepler mide curvas de luz de estrellas distantes para detectar planetas con la técnica de tránsito. Dentro de los objetivos científicos de esta misión se encuentran también, determinar la distribución de formas y tamaños de las órbitas de los planetas, estimar la cantidad de sistemas múltiples o de sistemas planetarios alrededor de estrellas binarias o múltiples y determinar las características y propiedades de las estrellas anfitrionas de planetas.

Los tránsitos planetarios serán detectables si la inclinación de la órbita del planeta es tal que el planeta logre eclipsar a la estrella. Esto es, si  $\tan i < a/R_{\star}$ , siendo



**Figura 2.11.** Características de los tránsitos planetarios. Izquierda: Representación de la geometría 3D de un tránsito planetario. **Derecha:** Duración del tránsito. La geometría del sistema muestra la distancia,  $2l$ , que debe atravesar el planeta, el parámetro de impacto  $b$ , y los radios  $R_*$  y  $r_p$  de la estrella y el planeta, respectivamente.

$i$  la inclinación del planeta,  $a$  su semieje mayor y  $R_*$  el radio de la estrella. Durante un tránsito primario, parte de la luz de la estrella es bloqueada por el planeta durante su órbita. Para la detección de planetas se miden las variaciones periódicas en la curva de luz de la estrella anfitriona. De ser un solo planeta el que causa la caída en el brillo, los eventos de tránsito deberían ser periódicos y siempre con la misma intensidad y duración.

Con buenas determinaciones de la profundidad del tránsito, es posible calcular la razón entre el radio del planeta y de la estrella, ya que el efecto de la caída del brillo es proporcional al radio del planeta. Si uno conociera mediante el tipo espectral, por ejemplo, la masa y el radio estelar, midiendo el tiempo entre dos tránsitos consecutivos se puede obtener el período orbital. Midiendo también la profundidad del tránsito, se puede obtener el radio del planeta y el semieje mayor de su órbita. Combinando los parámetros obtenidos con aquellos de velocidad radial, en particular con el dato de la inclinación  $i$ , es posible determinar la masa individual del planeta  $m_p$  y su radio  $r_p$ . Con estos dos datos podemos tener la densidad  $\rho_p$  del planeta, caracterizando por completo el sistema.

El tamaño de la estrella y del planeta determinan el decaimiento del flujo durante el tránsito, mientras que la distancia orbital entre los cuerpos no afecta a la profundidad del tránsito. En el lado izquierdo de la Figura 2.11 mostramos la representación 3D de un tránsito planetario.

La profundidad del tránsito viene dada por

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\pi r_p^2}{\pi R_*^2} = \frac{r_p^2}{R_*^2}, \quad (2.6)$$

mientras que la duración del tránsito puede determinarse mediante el parámetro de impacto  $b$ , que se define como la distancia entre el centro del disco estelar y el centro del disco del planeta (proyectado en el plano del cielo) durante la conjunción. Los valores del mismo pueden variar desde  $b = 0$  en el centro del disco estelar hasta  $b = b_{max}$  en el borde externo del astro.

Suponiendo que la órbita del planeta es circular,

$$b = \frac{a \cos(i)}{R_*}. \quad (2.7)$$

El tiempo de duración del tránsito  $T_{dur}$  se mide desde que alguna parte del disco estelar se encuentra ocultado por el planeta. Si  $b = 0$  la duración del tránsito será máxima, mientras que en cualquier otro caso, es menor. En la parte derecha de la Figura 2.11 se muestra la distancia que debe recorrer el planeta para atravesar todo el disco estelar:

$$2l = 2\sqrt{(r_p + R_\star)^2 - (bR_\star)^2}. \quad (2.8)$$

Mientras el planeta cruza de A a B se forma un ángulo  $\alpha$  entre A y el centro de la estrella. El perímetro de la órbita será  $2\pi a$ , siendo  $a$  el radio de su órbita. La longitud de arco entre los puntos A y B es  $\alpha a$  y la distancia a lo largo de la línea que une ambos puntos es  $2l$ . Del triángulo entre A, B y el centro de la estrella,

$$\sin\left(\frac{\alpha}{a}\right) = \frac{l}{a}, \quad (2.9)$$

de donde se puede derivar una expresión para la duración del evento:

$$T_{dur} = P \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{P}{\pi} \sin^{-1} \left( \frac{\sqrt{(r_p + R_\star)^2 - (bR_\star)^2}}{a} \right). \quad (2.10)$$

### 2.2.7. Variación de tiempo de tránsito

La variación de tiempo de tránsito o TTV por su nombre en inglés Transit Timing Variations, es un método complementario al de tránsito planetario, propuesto originalmente por [Holman y Murray \(2005\)](#). Plantea detectar planetas adicionales, no necesariamente transitando, analizando las perturbaciones periódicas generadas al planeta que efectivamente transita, a través de su interacción gravitatoria. La efectividad de la técnica dependerá principalmente de la masa del perturbador.

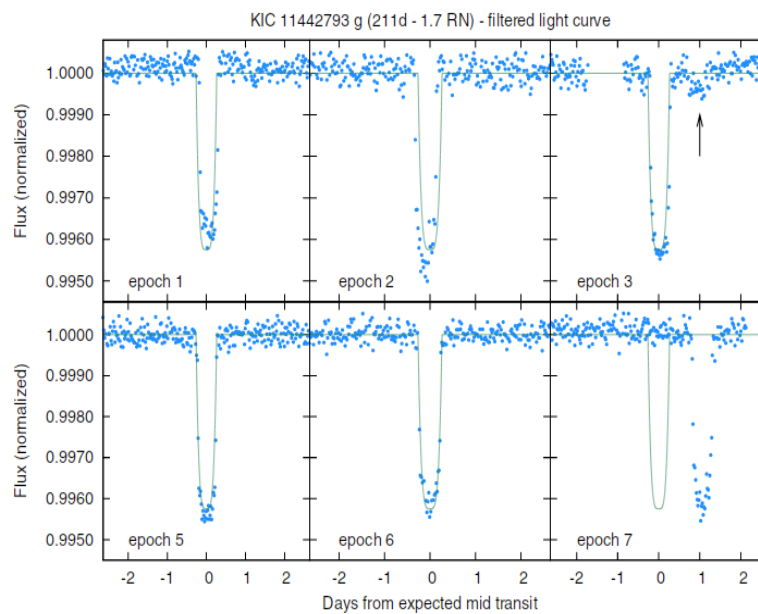
El intervalo de tiempo entre tránsitos sucesivos es siempre el mismo para una masa sin perturbar. La presencia de un tercer cuerpo produce variaciones de corto período en la misma. Durante su evolución los planetas intercambian energía y momento angular, como resultado de su interacción mutua. Esta interacción genera oscilaciones de corto período del semieje mayor y la excentricidad del planeta, lo que provoca variaciones en el intervalo entre tránsitos consecutivos. Este intervalo de tiempo se puede calcular integrando las ecuaciones variacionales de Lagrange

$$\Delta t = \frac{45\pi}{16} \left( \frac{m_{p2}}{M_\star} \right) P_1 \left( \frac{a_1}{a_2(1 - e_2)} \right)^3 \left( 1 - \sqrt{2} \left( \frac{a_1}{a_2(1 - e_2)} \right)^{3/2} \right)^{-2}, \quad (2.11)$$

siendo  $M_\star$  la masa de la estrella,  $P_1$  y  $a_1$  el período y semieje mayor, respectivamente, del planeta que transita y  $m_{p2}$ ,  $a_2$  y  $e_2$ , la masa, el semieje mayor y la excentricidad del planeta perturbador, siempre que ( $a_2 > a_1$ ).

En la Figura 2.12 se observan las variaciones temporales de la curva de luz del tránsito del planeta  $g$  del sistema KIC 11442793 debido a la interacción gravitatoria de otros objetos, posiblemente del planeta  $h$  en este caso. Este tipo de análisis también es utilizado para la detección de satélites. En este trabajo discuten también la posibilidad de que KIC 11442793  $g$  hospede una luna debido a características





**Figura 2.12.** Tránsito del sistema planetario KIC 11442793 por [Cabrera et al. \(2014\)](#). La imagen muestra la variación de la curva de luz de la estrella central del sistema. Los puntos marcan los tránsitos observados del planeta g, mientras que las líneas indican el tránsito si el período fuera constante. Se puede observar una variación en la periodicidad de la curva de luz (época 7, por ejemplo, cuando los puntos no coinciden con la línea). La causa de esta variación podría deberse a la presencia, por ejemplo, de una luna en el sistema.

morfológicas ([Kipping, 2011](#); [Sartoretti y Schneider, 1999](#)) en las épocas 1, 2 y 3 de la Figura. Sin embargo, en este caso particular, la distancia entre el tránsito en la época 3 y un evento de tipo lunar (marcado con una flecha) permiten estimar que la distancia entre el planeta y el candidato a satélite sería muy cercano al radio de Hill del planeta por lo que la órbita de la luna no sería estable.



---

## CAPÍTULO 3

---

# Modelos dinámicos

En este capítulo explicaremos las bases dinámicas teóricas que nos sirvieron para entender el problema a abordar en el resto de la tesis. Presentamos el modelo general de resonancias y más adelante estudiaremos casos particulares.

### Índice

---

<b>3.1. Formulación Hamiltoniana</b>	<b>37</b>
<b>3.2. Teoría de perturbaciones</b>	<b>39</b>
<b>3.3. El problema resonante</b>	<b>40</b>
3.3.1. Las variables	40
3.3.2. Tratamiento del problema	42
3.3.3. Dinámica resonante	45

---

## 3.1. Formulación Hamiltoniana

Analizar la dinámica de un sistema de  $N$  planetas en 3 dimensiones, cuyo movimiento es determinado por sus interacciones gravitatorias mutuas se hace mediante  $n = 3N$  coordenadas independientes o, equivalentemente, grados de libertad,  $\vec{q}$  y  $\dot{\vec{q}}$ . Describiremos brevemente las ecuaciones de la formulación de Hamilton basándonos en el libro [Goldstein \(1950\)](#).

Con la formulación de Lagrange, un sistema de  $n$  grados de libertad se describirá mediante  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden en el tiempo. La solución de cada ecuación requerirá dos integraciones que darán lugar, entre todas, a  $2n$  constantes de integración. En un problema concreto, dichas constantes se determinan a partir de las condiciones iniciales, es decir, de los valores iniciales de las  $n$  coordenadas generalizadas  $q_j$  y los valores de las  $n$  velocidades generalizadas  $\dot{q}_j$ . Sin embargo, la mayoría de los problemas no son totalmente integrables. No obstante, aún cuando no se puedan obtener soluciones completas, suele ser posible obtener

mucha información referente a la naturaleza física del movimiento del sistema. Las ecuaciones de Hamilton y Lagrange tienen el mismo contenido físico mediante sus principios variacionales respectivos.

La formulación Hamiltoniana describe el movimiento de los sistemas mecánicos en los que todas sus fuerzas pueden derivarse de un potencial escalar generalizado, que puede ser función de las coordenadas, velocidades y del tiempo. En un sistema con  $n$  grados de libertad, el *principio de Hamilton* es un principio integral dado por

$$\delta \mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) dt = 0, \quad (3.1)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la acción, que se deduce a partir de las ecuaciones de Lagrange. La *función lagrangiana* se define como  $\mathcal{L} = T - V$ , siendo  $T = \sum_i (m_i v_i^2)/2$  la energía cinética y  $V$  la potencial del sistema de estudio.

En la formulación Hamiltoniana, describir el movimiento de un sistema de  $N$  planetas se hace mediante  $2N$  ecuaciones de movimiento de primer orden, en un espacio de las fases de  $2N$  variables independientes, tomándose  $N$  coordenadas generalizadas  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$  y  $N$  momentos o impulsos generalizados  $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ . A este conjunto de variables  $(\vec{p}, \vec{q})$  se las denomina variables canónicas. Se define así el *Hamiltoniano* del sistema como

$$\mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p}, t) = \dot{q}_j p_j - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t). \quad (3.2)$$

Diferenciando  $\mathcal{H}$  se obtienen las ecuaciones canónicas de Hamilton que constituyen el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, que reemplazan a las ecuaciones de Lagrange:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}}, \quad -\dot{\vec{p}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}}. \quad (3.3)$$

Si tenemos un sistema Hamiltoniano autónomo  $\mathcal{H}(\vec{q}, \vec{p})$  podemos realizar una transformación canónica de las variables  $(\vec{p}, \vec{q}) \rightarrow (\vec{P}, \vec{Q})$  definida mediante una función generatriz de tipo Jacobi,  $S(\vec{P}, \vec{q})$ . Así, las ecuaciones de transformación entre ambos conjuntos de variables vendrán dadas por

$$\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, \quad \vec{Q} = \frac{\partial S}{\partial \vec{P}}. \quad (3.4)$$

Cuando una coordenada generalizada  $q_j$  no aparece en el Hamiltoniano, diremos que esa coordenada es cíclica. Por esta razón, una forma de resolver este sistema es encontrando un nuevo Hamiltoniano  $\mathcal{H}^*$  que dependa únicamente de las nuevas acciones  $\vec{P}$ , es decir, si  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*(\vec{P})$ . De esta manera, la ecuación de movimiento de Hamilton para una coordenada cíclica se reduce a

$$\frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial Q_j} = 0 \quad \longrightarrow \quad P_j = \text{constante}. \quad (3.5)$$

Así, la cantidad de movimiento generalizada conjugada a una coordenada cíclica se conserva. Si logramos expresar al Hamiltoniano sin que aparezcan algunas cantidades de movimiento generalizadas correspondientes a la coordenada cíclica pero

que sí contenga a su cantidad de movimiento conjugada, como  $P_j$  es una constante de integración, las restantes integraciones sólo contendrán coordenadas no cíclicas.

Según el teorema de Nöether, toda simetría que tenga un potencial genera una integral de movimiento. Sin detenernos en las ecuaciones formales, utilizaremos las simetrías que tenga un sistema para obtener cantidades conservadas. Por ejemplo, si es invariante ante traslaciones según una dirección dada, o si es invariante ante rotaciones en torno a un eje dado, como podría ser el caso del momento angular. Del mismo modo, en caso que las fuerzas se deriven de potenciales que sólo dependan de las posiciones, se conservará el Hamiltoniano. Vemos entonces que dependiendo del problema particular serán las soluciones que se pueden obtener.

Si se aplica de manera directa, la formulación Hamiltoniana no suele disminuir la dificultad de resolución de cualquier problema mecánico. Sin embargo, tiene ciertas ventajas si lográramos encontrar un problema para el cual la resolución de las ecuaciones de Hamilton sea trivial. Consideremos, por ejemplo, un caso en que el Hamiltoniano sea una constante del movimiento y todas las coordenadas sean cíclicas. En estas condiciones, las  $P_j$  serán todas constantes ( $P_j = \alpha_j$ ) y, como el Hamiltoniano no puede ser función explícita del tiempo ni de las coordenadas cíclicas,  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . En consecuencia, las ecuaciones de Hamilton para  $Q_j$  serán

$$\frac{dQ_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial P_j} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \alpha_j} = \omega_j, \quad (3.6)$$

donde las  $\omega_j$  son funciones sólo de las  $\alpha_j$  y, por lo tanto, son también constantes del tiempo. Las ecuaciones (3.6) tienen entonces soluciones inmediatas:

$$Q_j = \omega_j t + \beta_j, \quad (3.7)$$

donde las  $\beta_j$  son constantes de integración, determinadas por las condiciones iniciales.

El número de coordenadas cíclicas depende de la elección de las coordenadas generalizadas y para cada problema puede haber una elección para la cual todas las coordenadas sean cíclicas. Si se puede hallar tal sistema, lo que queda por hacer es trivial. Se deduce para esto un método específico para pasar de un sistema de variables a otro más conveniente, conocido como transformaciones canónicas. A partir de ellas es posible pasar de las variables viejas a un nuevo conjunto mediante funciones generatrices, que se utilizan también para realizar la transformación inversa.

Se dice entonces que un sistema será integrable si tiene tantas integrales globales de movimiento como grados de libertad tenga el sistema. En vez de eso, generalmente se tiene un Hamiltoniano de la forma  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1$ , donde  $\mathcal{H}_0$  dará cuenta de la parte integrable (es decir que sólo depende de las constantes de movimiento) mientras que  $\mathcal{H}_1$  es la contribución de los términos que dependen también de los ángulos y  $\varepsilon$  es un parámetro que da una idea del tamaño de la perturbación.

## 3.2. Teoría de perturbaciones

El problema de  $N$  planetas se puede trabajar mediante un Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  autónomo, de  $n$  grados de libertad. Resolver este sistema dinámico analíticamente

implica encontrar todas las integrales de movimiento. Como resolver el caso general no es posible, el problema de N-cuerpos se estudia mediante la teoría de perturbaciones. Esto quiere decir que se restringe el estudio a aquellos casos en que el sistema pueda escribirse como

$$\mathcal{H}(\vec{J}, \vec{\theta}) = \mathcal{H}_0(\vec{J}) + \varepsilon \mathcal{H}_1(\vec{J}, \vec{\theta}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.8)$$

donde  $\mathcal{H}_0(\vec{J})$  es un sistema integrable. En particular, el conjunto  $(\vec{J}, \vec{\theta})$  son las variables ángulo acción de  $\mathcal{H}_0$ . El parámetro  $\varepsilon$  es un parámetro pequeño ( $\varepsilon \ll 1$ ), y se utiliza para plantear al problema como *casi* integrable, es decir que  $\mathcal{H}_0$  es la parte integrable del Hamiltoniano y  $\mathcal{H}_1$  representa una perturbación a  $\mathcal{H}_0$ . En el caso planetario,  $\mathcal{H}_1$  es una expresión a primer orden en la razón de las masas  $\max(m_i)/m_0$ . En otras palabras,  $\varepsilon = m_i/m_0$  es el parámetro de la perturbación de la expresión (3.8).

La idea básica detrás de la teoría de perturbaciones es suponer o tratar a  $\mathcal{H}(\vec{J}, \vec{\theta})$  como si fuera un sistema integrable. Dicho de otra forma, se asume que existe un nuevo conjunto de variables  $(\vec{J}^*, \vec{\theta}^*)$  tal que se puede escribir al Hamiltoniano anterior como  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*(\vec{J}^*)$ , que se puede hacer únicamente por suponer que  $\varepsilon \ll 1$ . Esto no es trivial ya que la mayoría de los sistemas con  $N > 1$  son *no* integrables.

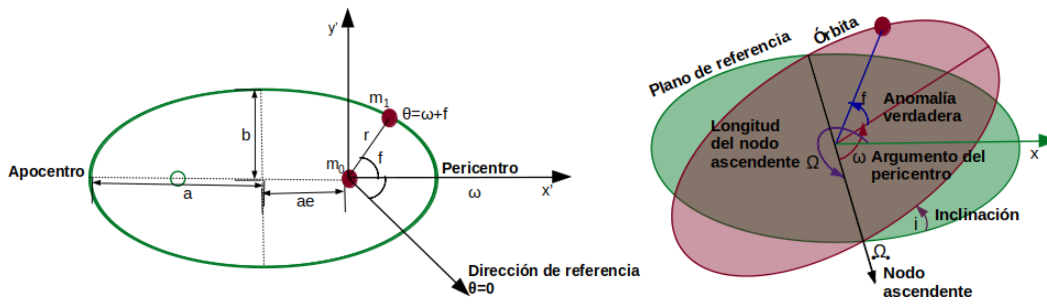
La relación entre el conjunto de variables  $(\vec{J}, \vec{\theta})$  y  $(\vec{J}^*, \vec{\theta}^*)$  se da a través de una nueva función generatriz. Lo complicado es hallar esta función de transformación entre los dos conjuntos de variables, problema que abordaremos más adelante en este capítulo.

### 3.3. El problema resonante

#### 3.3.1. Las variables

Consideremos un sistema dinámico que consiste en  $N$  masas planetarias  $m_i$  que asumimos en órbitas coplanares alrededor de una estrella central de masa  $m_0$ , con  $m_0 \gg m_i$ . Denotamos con  $a_i$  a los semiejes mayores osculadores,  $e_i$  las excentricidades,  $\lambda_i$  las longitudes medias y  $\varpi_i$  la longitud del pericentro para cada planeta  $i$ , esquematizados en la Figura 3.1 para el caso particular de 1 planeta alrededor de la estrella central.

En el caso planetario, para poder construir variables canónicas existen tres opciones: se puede utilizar un sistema de referencia baricéntrico, coordenadas de Jacobi o coordenadas de Poincaré. Para definir estas variables, un sistema de referencia astrocéntrico no resulta adecuado. Las coordenadas baricéntricas tienen su origen en el centro de masas del sistema pero, trabajar con sistemas de N-cuerpos implica utilizar un número innecesariamente grande de ecuaciones diferenciales al tener que seguir la evolución orbital de cada cuerpo, incluyendo la estrella central. A las coordenadas de Poincaré, por su parte, se las conoce como variables mixtas ya que las posiciones y velocidades se miden desde orígenes diferentes. En comparación, las variables de Poincaré parecen más adecuadas, aunque la representación de la función perturbadora queda escrita de una forma un poco más compleja. Para simplificar la complejidad matemática, el sistema de referencia más apropiado para el caso planetario es el de Jacobi.



**Figura 3.1.** Representación de una órbita elíptica de la masa  $m_1$  alrededor de  $m_0$ . **Izquierda:** La masa central se encuentra en el foco lleno, mientras que el otro se encuentra vacío (marcado con un círculo vacío verde). Se representa con  $a$  el semieje mayor de la elipse, y con  $b$  al menor.  $ae$  representa la distancia entre cada uno de los focos y el centro de la elipse. En coordenadas polares  $(r, \theta)$  se posiciona la masa  $m_1$ , midiendo el ángulo en sentido directo desde una posición de referencia  $\theta = 0$ . **Derecha:** Órbita en 3 dimensiones respecto de un plano de referencia.

Para el problema genérico de N-cuerpos, las coordenadas  $\vec{r}_j$  del referencial jacobiano se arman de la siguiente manera:

$$\vec{r}_{j+1} = \vec{x}_{j+1} - \frac{1}{m_{0j}} \sum_{k=1}^j m_k \vec{x}_k, \tag{3.9}$$

con  $j = 1, \dots, N-1$ ,  $m_{0j} = \sum_{k=1}^j m_k$  y los  $\vec{x}_j$  medidos desde un sistema de referencia inercial. Así,  $\vec{R}$  será el vector que representa el centro de masa de todos los cuerpos

$$\vec{R} = \frac{1}{m_{0j}} \sum_{k=1}^N m_k \vec{x}_k. \tag{3.10}$$

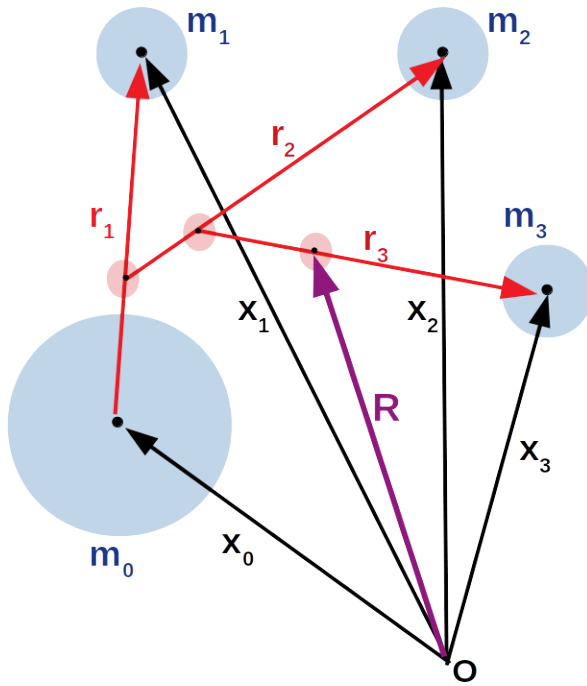
Para armarlo, en cada paso se reduce el problema a sistemas de 2 masas ‘aisladas’ dentro del total de N-cuerpos. En otras palabras, se toma a los cuerpos  $m_0$  y  $m_1$ , se calcula su centro de masas y ese será  $r_1$ . Luego, se toma a ese centro de masas y se calcula un nuevo centro con  $m_2$ , y con ellos se calcula la posición de  $r_2$ , y así hasta calcular para todos los cuerpos del sistema. Esquemáticamente se puede ver en la Figura 3.2, el caso para 4 cuerpos masivos.

Para el modelo analítico adoptamos el formalismo Hamiltoniano. Todos los elementos orbitales son definidos en el sistema de referencia de Jacobi (Ford et al., 2000). Sin embargo, resulta conveniente definir un conjunto canónico de variables conocido como variables modificadas de Delaunay:

$$\begin{aligned} L_i &= m'_i \sqrt{\mu_i a_i} & , & & \lambda_i, \\ S_i &= L_i \left( 1 - \sqrt{1 - e_i^2} \right) & , & & -\varpi_i. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Los factores de masa de cada planeta vienen dados por  $\mu_i$  la masa reducida, y  $m'_i$

$$\mu_i = \mathcal{G} \sum_{j=0}^i m_j \quad ; \quad m'_i = m_i \frac{\sum_{j=0}^{i-1} m_j}{\sum_{j=0}^i m_j}, \tag{3.12}$$



**Figura 3.2.** En rojo se muestra una representación del sistema de coordenadas Jacobiano para 4 masas. Los vectores  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  y  $\vec{r}_3$  son las coordenadas de Jacobi y  $\vec{R}$  representa el centro de gravedad del sistema.

donde  $\mathcal{G}$  representa la constante gravitatoria.

En este referencial, el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  del sistema se escribe como la contribución de dos términos,  $\mathcal{H}_0$  y  $\mathcal{H}_1$ . El primero se refiere al movimiento Kepleriano de los planetas alrededor del centro de masas mientras que  $\mathcal{H}_1$  reúne todos los términos perturbativos que provienen de las interacciones gravitatorias entre los planetas.

### 3.3.2. Tratamiento del problema

Dentro de la dinámica planetaria, una configuración frecuente es la de resonancias de movimientos medios (de aquí en adelante RMM). Supongamos que tenemos  $N$  planetas, y que sus movimientos medios vienen dados por  $n_1 > n_2 > \dots > n_N$ , lo que es equivalente a decir que el planeta 1 es más interno que el 2, que el 3 y así sucesivamente hasta  $N$ . Matemáticamente se dice que estos planetas estarán en resonancia de movimientos medios cuando satisfacen la condición de conmensurabilidad dada por

$$\vec{j} \cdot \vec{n} = j_1 n_1 + j_2 n_2 + \dots + j_N n_N \simeq 0, \quad (3.13)$$

donde  $j_i \in \mathbb{Z}$ , y  $j_i \neq 0, \forall i$ . El valor absoluto de la suma de los enteros de esta ecuación define el orden de la resonancia  $s = |\sum_{i=1}^N j_i|$ . El orden de una RMM se conoce como el orden en el que aparecen las excentricidades de los planetas en los coeficientes de la expansión de la función perturbadora  $\mathcal{H}_\infty$ . En el caso particular de 2 planetas, la relación anterior puede escribirse como  $(p+q)n_1 - pn_2 \simeq 0$  y se dice que el sistema se encuentra en la vecindad de la resonancia de movimientos medios  $(p+q)/p$ , donde el valor de  $q$  es el que indica el orden de la resonancia.

Al describir un sistema que se encuentra lejos de una resonancia de movimientos medios, en su Hamiltoniano existirán términos de corto período asociados a los períodos orbitales y términos seculares o de largo período, es decir que no dependen de la variación de los ángulos rápidos  $\lambda_i$ .



Para poder realizar un análisis del sistema en largos períodos de tiempo es necesario utilizar técnicas de promediación para eliminar los términos de corto período. Existen diferentes técnicas para realizar el promediado o *averaging*, pero nos basaremos en el método de Hori (Hori, 1961) para pasar de variables medias a instantáneas u osculadoras. Luego del proceso de promediado, los términos resonantes aparecerán únicamente a orden  $q$  en las excentricidades.

Asumimos entonces que el sistema se encuentra en la vecindad de una resonancia de movimientos medios y aprovechamos esta cercanía para reducir el número de grados de libertad. Aplicamos el método de Hori para encontrar una transformación canónica que simplifique el problema. Para simplificar la notación, trabajaremos con un Hamiltoniano casi-integrable dado por una expresión del tipo

$$\mathcal{H}(\vec{J}, \vec{\theta}; \varepsilon) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1(\vec{J}, \vec{\theta}; \varepsilon), \quad (3.14)$$

y buscamos una transformación canónica definida por  $B(\vec{J}^*, \vec{\theta}^*) : (\vec{J}, \vec{\theta}) \rightarrow (\vec{J}^*, \vec{\theta}^*)$  tal que la función generatriz  $B$  dependa de las nuevas variables y no de su antigua contraparte. Así, el Hamiltoniano transformado únicamente dependerá de las nuevas acciones,  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*(\vec{J}^*)$ .

La expresión para  $\mathcal{H}_0$  del caso de  $N$  cuerpos masivos en órbitas coplanares alrededor de una estrella central en términos de las variables modificadas de Delaunay en un sistema de referencia de Jacobi es

$$\mathcal{H}_0 = - \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i^2 m_i^3}{2L_i^2}. \quad (3.15)$$

La función perturbadora resultante de la interacción entre  $m_i$  y  $m_j$  está representada por  $\mathcal{H}_1$  que, considerando únicamente los términos de menor orden en las masas, las perturbaciones gravitatorias tienen la misma forma funcional que aquellas deducidas para el problema restringido de 3 cuerpos (ver Libert y Henrard, 2007; Murray y Dermott, 1999). Así, la función perturbadora planetaria puede expresarse en términos de los vectores posición  $\vec{r}_i$  como

$$- \mathcal{H}_1 = \mathcal{G} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N m_i m_j \left( \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{|\vec{r}_j|^3} \right), \quad (3.16)$$

con  $\vec{r}_i$  expresado también en el referencial de Jacobi. Al primer término de  $\mathcal{H}_1$  se lo conoce como *directo* y da cuenta del efecto que tiene el perturbador sobre la masa a la que perturba, mientras que el segundo término será, por consecuencia, el *indirecto* y representa el efecto que generan los cuerpos menos masivos sobre el central.

La forma del nuevo Hamiltoniano en términos del original y de  $B$  es

$$\mathcal{H}^*(\vec{J}^*, \vec{\theta}^*; \varepsilon) = \mathcal{H}(\vec{J}, \vec{\theta}; \varepsilon) + \{\mathcal{H}, B\} + \frac{1}{2}\{\{\mathcal{H}, B\}, B\} + \dots, \quad (3.17)$$

donde  $\{\mathcal{H}, B\}$  son los corchetes de Poisson y están definidos por

$$\{\mathcal{H}, B\} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i^*} \frac{\partial B}{\partial J_i^*} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i^*} \frac{\partial B}{\partial \theta_i^*} \right). \quad (3.18)$$

De acuerdo con el método de Hori, asumimos que todas las funciones que intervienen pueden ser expandidas en series de potencias del parámetro pequeño  $\varepsilon$  según

$$\mathcal{H}^* = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_j^*(\vec{J}^*) \varepsilon^j = \mathcal{H}_0^* + \varepsilon^1 \mathcal{H}_1^* + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2^* + \cdots + \varepsilon^n \mathcal{H}_n^* + \cdots, \quad (3.19)$$

$$\mathcal{H} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_j(\vec{J}, \vec{\theta}) \varepsilon^j = \mathcal{H}_0 + \varepsilon^1 \mathcal{H}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{H}_2 + \cdots + \varepsilon^n \mathcal{H}_n + \cdots, \quad (3.20)$$

$$B = \sum_{j=1}^{\infty} B_j(\vec{J}^*, \vec{\theta}^*) \varepsilon^j = \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \cdots + \varepsilon^n B_n + \cdots. \quad (3.21)$$

Luego sustituimos en (3.17) y agrupamos términos del mismo orden en  $\varepsilon$ , que en este caso hace referencia a las masas planetarias. Realizamos una transformación canónica de Lie para encontrar  $\mathcal{H}_j^*$  y  $B_j$ . Aplicamos los pasos necesarios del método de Hori a nuestro Hamiltoniano hasta segundo orden en  $\varepsilon$ . El primer término se calcula como

$$\mathcal{H}_1^* = \mathcal{H}_1 + \{\mathcal{H}_0, B_1\} \quad (3.22)$$

y la nueva función perturbadora a segundo orden en las masas planetarias puede calcularse como la mitad del corchete de Poisson entre  $\mathcal{H}_1$  y  $B_1$ , es decir,

$$\mathcal{H}_2^* = \frac{1}{2} \langle \{\mathcal{H}_1, B_1\} \rangle. \quad (3.23)$$

La forma implícita para  $B_1$  viene dada por

$$-\vec{\nu} \cdot \frac{\partial B_1}{\partial \vec{\theta}} = \mathcal{H}_1, \quad (3.24)$$

donde  $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$  son los ángulos principales y  $\vec{\nu} = (\partial \mathcal{H}_0 / \partial J_1, \dots, \partial \mathcal{H}_0 / \partial J_N)$  son las frecuencias fundamentales del Hamiltoniano sin perturbar.

De esta manera, la expresión final para el nuevo Hamiltoniano termina siendo

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_0^* + \mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_2^*, \quad (3.25)$$

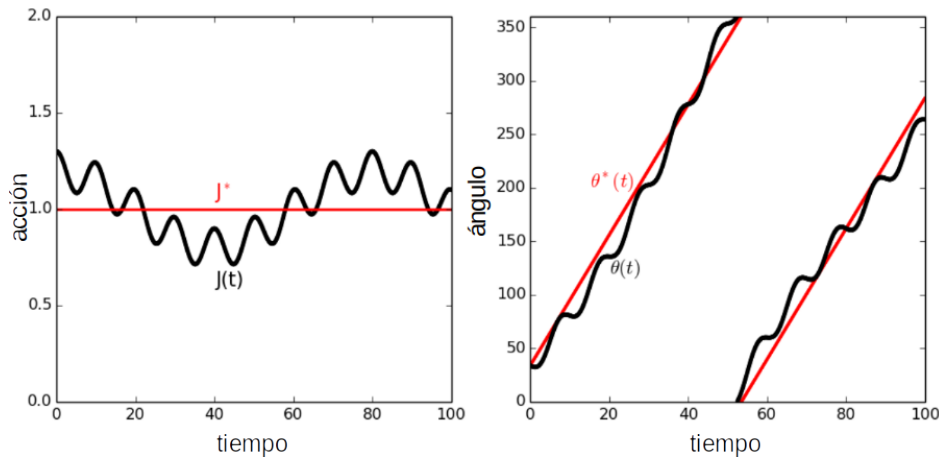
con las ecuaciones y coeficientes que se deducen de los cálculos anteriores. Las nuevas variables  $(\vec{J}^*, \vec{\theta}^*)$  son el conjunto ángulo-acción del nuevo Hamiltoniano, y su evolución temporal viene dada por

$$J_i^* = cte, \quad \theta_i^* = \nu_i^* t + \theta_{i0}. \quad (3.26)$$

Así,  $J_i^*$  son *casi* integrales de movimiento del sistema completo y los nuevos ángulos son funciones lineales del tiempo. Las nuevas frecuencias fundamentales son  $\nu_i^* = \partial \mathcal{H}^* / \partial J_i^*$ , que difieren de  $\nu_i$  a orden  $\varepsilon$ .

Lo único que falta para resolver el problema es obtener la evolución temporal de las variables originales  $\vec{J}(t)$  y  $\vec{\theta}(t)$ . Esto se hace a partir de una transformación inversa y se obtiene que

$$\begin{aligned} J_i &= J_i^* + \varepsilon \{J_i^*, B_1\} + \varepsilon^2 \{J_i^*, B_2\} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \{\{J_i^*, B_1\}, B_1\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ \theta_i &= \theta_i^* + \varepsilon \{\theta_i^*, B_1\} + \varepsilon^2 \{\theta_i^*, B_2\} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \{\{\theta_i^*, B_1\}, B_1\} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (3.27)$$



**Figura 3.3.** Solución numérica de un Hamiltoniano genérico. Se muestran las variables ángulo acción ( $J^*, \theta^*$ ) (en curva negra) y su contraparte vieja ( $J, \theta$ ) (curva roja). La amplitud de oscilación de cada conjunto depende explícitamente de la magnitud de la perturbación (ver ecuación (3.28)). Imagen tomada del apunte 'Analytical and semi-analytical models for mean-motion resonances' de C. Beaugé.

Calculando explícitamente los corchetes de Poisson hasta primer orden,

$$\vec{J} = \vec{J}^* + \varepsilon \frac{\partial B_1}{\partial \vec{\theta}^*} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad , \quad \vec{\theta} = \vec{\theta}^* - \varepsilon \frac{\partial B_1}{\partial \vec{J}^*} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.28)$$

Notar que si  $\varepsilon = 0$  la transformación se reduce a la identidad o, lo que es lo mismo,  $\vec{J} = \vec{J}^*$  y  $\vec{\theta} = \vec{\theta}^*$ . Es decir que entre ambos conjuntos, la diferencia es del orden de la magnitud de la perturbación  $\varepsilon$ .

Si se grafica la evolución temporal de ambos conjuntos de variables ( $\vec{J}, \vec{\theta}$ ) y ( $\vec{J}^*, \vec{\theta}^*$ ) para un sistema específico, la diferencia entre ambos conjuntos se observa en la Figura 3.3. En el caso de las acciones,  $\vec{J}(t)$  muestra una oscilación periódica alrededor de la nueva acción  $\vec{J}^*$ , que representa el valor medio (o promediado) del momento canónico. De manera similar,  $\vec{\theta}^*(t)$  muestra oscilaciones periódicas alrededor de  $\vec{\theta}(t)$ . Como indican las ecuaciones anteriores, la amplitud de oscilación es proporcional a  $\varepsilon$ .

Para trabajar con un caso real resta plantear un Hamiltoniano (y una respectiva función perturbadora) específicos para un determinado problema y resolver. En este trabajo de tesis consideramos un máximo de 3 cuerpos masivos por sistema, además del cuerpo central. Es por esto que de aquí en adelante restringiremos la notación a  $N_{pl} = 3$ . Si en un sistema dinámico de este tipo todos los planetas se encuentran en órbitas coplanares, el problema tiene 6 grados de libertad. La complicación de trabajar con un Hamiltoniano de tantos grados de libertad radica en que es analíticamente intratable. Es por esto que aprovecharemos la cercanía del sistema a los diferentes tipos de RMM para reducir el número de grados de libertad.

### 3.3.3. Dinámica resonante

Con el fin de presentar la forma de las ecuaciones en un caso concreto, describimos a continuación la dinámica de un sistema con 2 planetas. Si el movimiento se da

en el plano,  $\mathcal{H}_0$  vendrá dado por la expresión (3.15) y  $\mathcal{H}_1$  siempre puede escribirse como

$$\mathcal{H}_1 = \frac{\mathcal{G}m_j}{a_j} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g_{h,k}(\alpha_{ij}) e_i^{|h_2|+2k_1} e_j^{|h_4|+2k_2} \cos(\varphi) \quad (3.29)$$

donde  $g_{h,k}(\alpha_{ij})$  son funciones analíticas de la razón de semiejes ( $\alpha_{ij} = a_i/a_j$ ),  $h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$ ,  $k = (k_1, k_2)$  y

$$\varphi = h_1\lambda_i + h_2\varpi_i + h_3\lambda_j + h_4\varpi_j. \quad (3.30)$$

Además, los  $h_i$  deben satisfacer la condición de D'Alembert:  $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 0$ . Los términos de más bajo orden (es decir, los de mayor magnitud) son aquellos proporcionales a  $e_i^{|h_2|} e_j^{|h_4|}$ .

Expresando la función perturbadora en elementos orbitales, es posible realizar un desarrollo en series de Fourier en potencias de las excentricidades  $e_i$ , que se parecerá mucho a la expresión exacta siempre que los cuerpos se muevan en órbitas *casí* circulares.

Nuevamente, estudiamos la dinámica a largo plazo del sistema de 2 planetas. Para eso, aplicamos el método de Hori descrito en la sección anterior y eliminamos con la técnica de averaging los términos de corto período del Hamiltoniano.

Al considerar únicamente el caso plano, es conveniente definir un nuevo conjunto de variables canónicas resonantes (Ferraz-Mello, 1988):

$$\begin{aligned} J_i &= L_i - p(S_i + S_j) & ; & \lambda_i \\ J_j &= L_j + (p + q)(S_i + S_j) & ; & \lambda_j \\ & & & S_i & ; & \theta_i \\ & & & S_j & ; & \theta_j \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde  $\theta$  son los denominados ángulos resonantes o críticos y vienen dados por

$$\begin{aligned} q\theta_i &= (p + q)\lambda_j - p\lambda_i - q\varpi_i, \\ q\theta_j &= (p + q)\lambda_j - p\lambda_i - q\varpi_j. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Si contamos con la simplificación extra de que  $m_j$  se mueve en órbita circular, entonces la función perturbadora luego de la promediación queda expresada de la siguiente manera

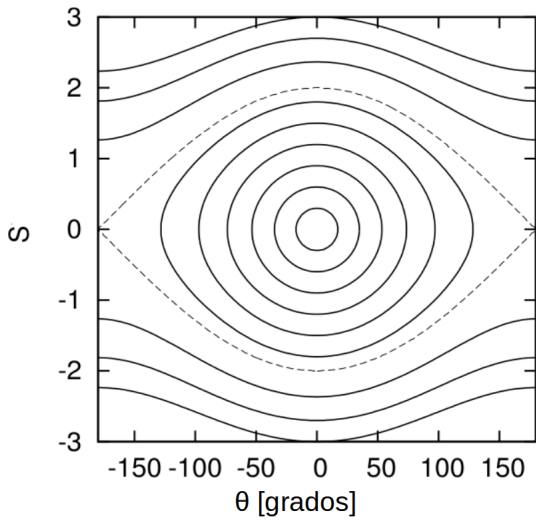
$$\mathcal{H}_1 = \frac{\mathcal{G}m_j}{a_j} \sum_{h,k=0}^{\infty} \hat{g}_{h,k}(\alpha_{ij}) e_i^{|h_2|+2k_1} \cos(\varphi). \quad (3.33)$$

La función perturbadora promediada dependerá solo de los ángulos resonantes y las longitudes medias serán cíclicas, por lo que  $J_i$  y  $J_j$  son constantes de movimiento y el Hamiltoniano se expresa como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1(a_i, e_i, \theta_i). \quad (3.34)$$

Finalmente, para encontrar la forma funcional de  $\mathcal{H}_1$  en las nuevas variables resonantes utilizamos las expresiones dadas en el apéndice B de Murray y Dermott (1999) quedando

$$\mathcal{H}_1 \simeq -\frac{\mathcal{G}m_i m_j}{a_j} [\hat{g}_{0,0}(\alpha_{ij}) + \hat{g}_{0,1}(\alpha_{ij}) e_i^2 + \hat{g}_{1,0}(\alpha_{ij}) e_i \cos(\theta_i)], \quad (3.35)$$



**Figura 3.4.** Regímenes de movimiento en el espacio de fases visto en el plano de variables canónicas  $(S, \theta)$ . La curva a trazos marca la separatriz de movimiento entre los dominios de libración y circulación. En el centro se encuentra el punto estable de las ecuaciones (3.37) mientras que en  $\pi$  y  $-\pi$  los puntos inestables. Imagen tomada del apunte 'Analytical and semi-analytical models for mean-motion resonances' de C. Beaugé.

con  $\hat{g}_1(\alpha_{ij})$  y  $\hat{g}_2(\alpha_{ij})$  una combinación de los coeficientes de Laplace  $b_{1/2}^s(\alpha_{ij})$  y sus derivadas  $D_\alpha = d/d\alpha_{ij}$ , que vienen dados por las expresiones

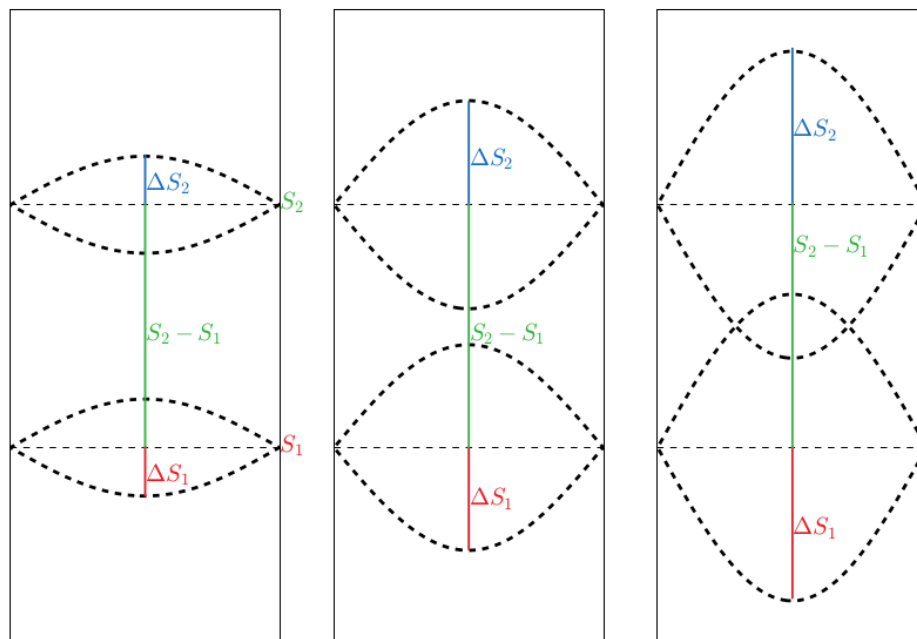
$$\begin{aligned}\hat{g}_{0,0}(\alpha_{ij}) &= \frac{1}{2} b_{1/2}^0(\alpha_{ij}), \\ \hat{g}_{0,1}(\alpha_{ij}) &= \frac{1}{4} [2\alpha_{ij} D_\alpha + \alpha_{ij}^2 D_\alpha^2] b_{1/2}^0(\alpha_{ij}), \\ \hat{g}_{1,0}(\alpha_{ij}) &= -\frac{1}{2} [2(p+q) + \alpha_{ij} D_\alpha] b_{1/2}^{(p+q)}(\alpha_{ij}).\end{aligned}\quad (3.36)$$

Lo más importante de analizar la vecindad de una resonancia es que cambia la topología del espacio de fases del Hamiltoniano original. Un sistema resonante descrito por una ecuación del tipo (3.34) tiene soluciones estacionarias dadas por las ecuaciones

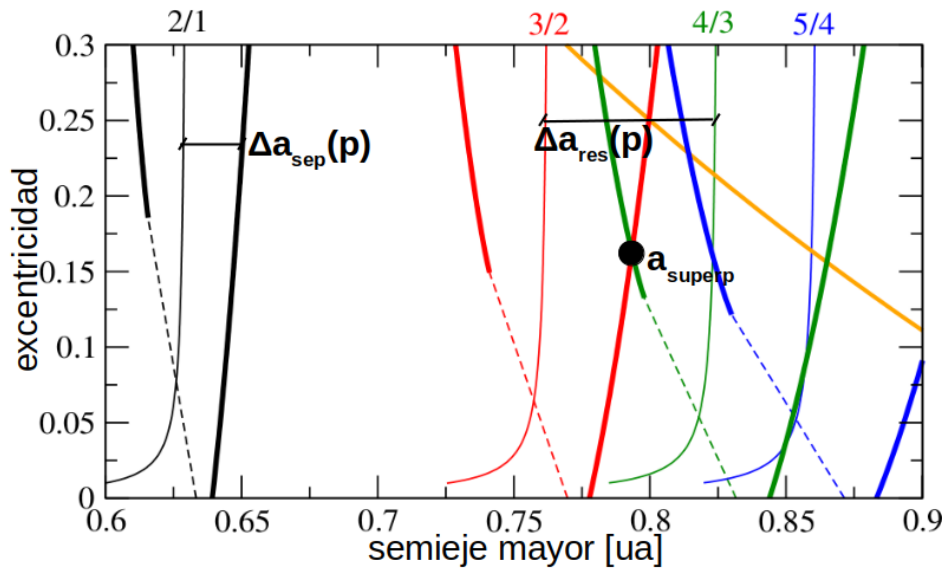
$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i} = \frac{dS_i}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_i} = \frac{d\theta_i}{dt} = 0. \quad (3.37)$$

Resolver estas ecuaciones puede dar diferentes tipos de soluciones. Se pueden tener puntos fijos estables (centros) o inestables (puntos silla). Los inestables generan una curva de período infinito que se conoce como separatriz, dentro de la cual se da la *región de libración o movimiento resonante*, en donde el ángulo crítico libra alrededor de un valor fijo  $\theta = \theta_0$ . En la Figura 3.4 la separatriz está marcada con una curva a trazos, que divide a dos regímenes que se distinguen claramente. La zona encerrada por la separatriz es la parte de movimiento resonante mientras que la región externa muestra donde el ángulo crítico está circulando, es decir, donde el ángulo crítico no está acotado y puede tomar cualquier valor entre 0 y  $2\pi$ .

Se puede calcular el ancho que tendrá la región de libración reemplazando los valores de las soluciones estacionarias (del ángulo crítico y la acción para la separatriz) en el Hamiltoniano. Valores mayores al del Hamiltoniano en la separatriz se corresponderán con el dominio de libración mientras que valores menores se asocian con circulación. Si existe más de una resonancia en el sistema, cada una estará centrada alrededor de un valor fijo  $S_i$  para la acción y tendrá un determinado ancho  $\Delta S_i$ . Por simplicidad, supongamos que tenemos dos resonancias en el plano  $(S, \theta)$ ,



**Figura 3.5.** Regímenes de movimiento en el espacio de fases visto en el plano de variables canónicas  $(S, \theta)$ .  $s_1$  y  $s_2$  indican el centro de cada resonancia. La curva a trazos marca la separatriz de movimiento entre los dominios de libración y circulación. En el centro se encuentra el punto estable de las ecuaciones (3.37) mientras que en  $\pi$  y  $-\pi$  los puntos inestables. Imagen extraída de la tesis de Doctorado de Ximena S. Ramos. **Izquierda:** Dos resonancias aisladas. **Medio:** Dos resonancias aisladas con  $\Delta S$  mayores que en el gráfico izquierdo. **Derecha:** Superposición de resonancias.



**Figura 3.6.** Esquema conceptual de la superposición de resonancias de movimientos medios adyacentes de primer orden en el plano  $(a, e)$ . Se ve la estructura de distintas RMM en donde el centro de la resonancia está representado en línea continua fina. De izquierda a derecha se observan las RMM 2/1 con su espacio de influencia en negro, siguiendo se observa la 3/2 con su dominio resonante en rojo, la 4/3 destacada en verde y por último la 5/4 en azul con su separatriz de movimiento. La resonancia 2/1 se encuentra aislada mientras que todas las otras se superponen en  $a_{superp}$ , marcado con un punto negro. Imagen tomada del apunte 'Analytical and semi-analytical models for mean-motion resonances' de C. Beaugé.

ver los gráficos de la Figura 3.5. Si las resonancias están lo suficientemente separadas (izquierda y medio), cada una tendrá sus dominios de libración y circulación bien definidos. En este caso, el movimiento global del sistema será acotado. Caso contrario, si el ancho de libración asociado a una de las resonancias se toca con el de la vecina, se da una superposición (o, en inglés, *overlap*) y se dice que hay caos global o que el movimiento es no acotado. Esta situación se muestra esquemáticamente en el panel derecho de la Figura 3.5 y se dará cuando se satisfaga la siguiente condición, conocida como condición de overlap:

$$\Delta S_{res} \equiv S_2 - S_1 \leq \Delta S_1 + \Delta S_2. \quad (3.38)$$

En esta situación, una partícula atrapada en una resonancia fácilmente puede viajar a través de las separatrices de movimiento y así quedar atrapada en otra comensurabilidad. Sistemas con estas características son propensos a mostrar inestabilidad orbital.

La idea global de trabajar con un Hamiltoniano tiene que ver con la simplicidad de trabajar con variables ángulo acción o canónicas y luego pasar nuevamente a elementos orbitales. Se puede entonces conocer el ancho de libración de una resonancia en el plano  $(a, e)$  mediante las transformaciones entre los diferentes conjuntos de variables y ver si habrá o no superposición de resonancias y si un cuerpo en dicho sistema tendrá órbitas estables o inestables.

En la Figura 3.6 se observan en el plano representativo  $(a, e)$  cuatro distintas resonancias de primer orden (del tipo  $(p + q)/p$ ) para el problema de los 3 cuerpos

circular restringido (Sol-Júpiter-asteroide). De izquierda a derecha se ve la estructura de la RMM 2/1 (su rama pericéntrica en línea continua fina y su ancho de libración en negro), en rojo la 3/2, en verde la 4/3 y en azul la 5/4. En esta Figura se puede ver la que RMM 2/1 está aislada mientras que en la posición marcada como  $a_{superp}$  empieza la superposición de las RMM 3/2 con 4/3, para algún valor de la excentricidad, conformando un dominio de inestabilidad orbital. Cuanto más grande es el valor de  $p$  (y recordar que para una RMM de primer orden  $q = 1$  queda fijo), más cerca están los centros de las resonancias y mayor es la posibilidad de superposición resonante. Estas condiciones iniciales no tienen un movimiento acotado o restringido a una única resonancia.

La versión análoga en elementos orbitales de la ecuación 3.38 para la superposición entre dos resonancias consecutivas es

$$\Delta a_{res}(p) \leq \Delta a_{sep}(p) + \Delta a_{sep}(p + 1), \quad (3.39)$$

remarcando que esta condición se satisface para un cierto valor de la excentricidad, que en las variables canónicas de Delaunay ya está considerado ( $S_i = S_i(a_i, e_i)$ ).



---

---

## PARTE II

---

---

Nuestro trabajo y resultados



# Análisis dinámico de 2 planetas

En este capítulo presentaremos una parte de los resultados publicados en [Ramos et al. \(2017\)](#) y en [Charalambous et al. \(2017\)](#), que servirán como base para el estudio de 3 planetas. Aquí desarrollamos el análisis de las configuraciones orbitales de sistemas ficticios de dos planetas en el rango de masas de las súper-Tierras inmersos en un disco de gas, que experimentan migración de tipo-I. El estudio se realizó mediante técnicas analíticas y numéricas, con las que analizamos el rol de las capturas luego de migración en distintas resonancias, y su relación con los diferentes métodos de detección. Aquí sólo nos concentraremos en la parte analítica para ver de qué depende la desviación de los planetas respecto del valor nominal de una resonancia dada.

## Índice

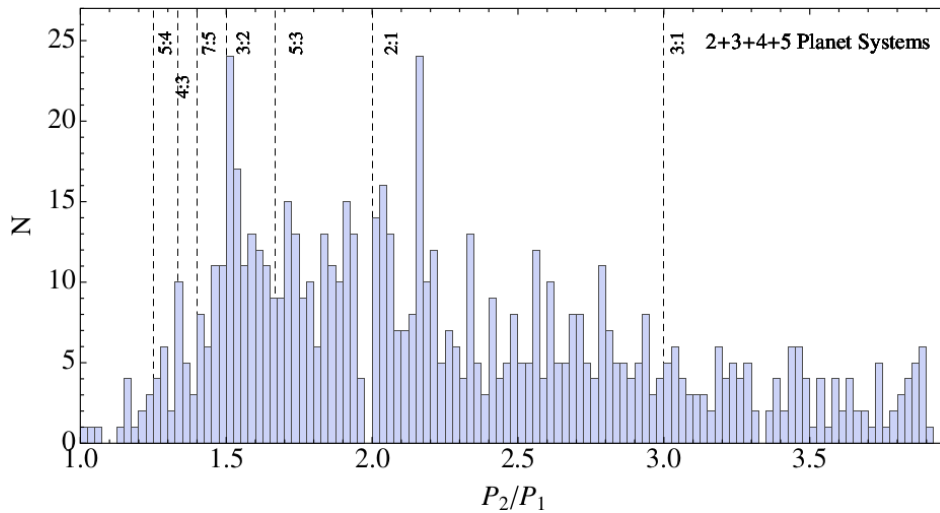
---

<b>4.1. Población observada alrededor de las RMM 2/1 y 3/2 . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>4.2. El offset resonante . . . . .</b>	<b>58</b>
4.2.1. Definiciones y modelo analítico . . . . .	58
4.2.2. Migración diferencial y su relación con las masas planetarias . . . . .	68
<b>4.3. Aplicación a sistemas observados . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>4.4. Conclusiones parciales . . . . .</b>	<b>78</b>

---

## 4.1. Población observada alrededor de las RMM 2/1 y 3/2

Como vimos de las teorías de formación planetaria, se espera que una vez disipado el disco gaseoso, los planetas en formación hayan alcanzado sus posiciones finales en configuraciones resonantes luego de sufrir migración. A partir de analizar la distribución final de la razón de períodos de los sistemas múltiples con cualquier

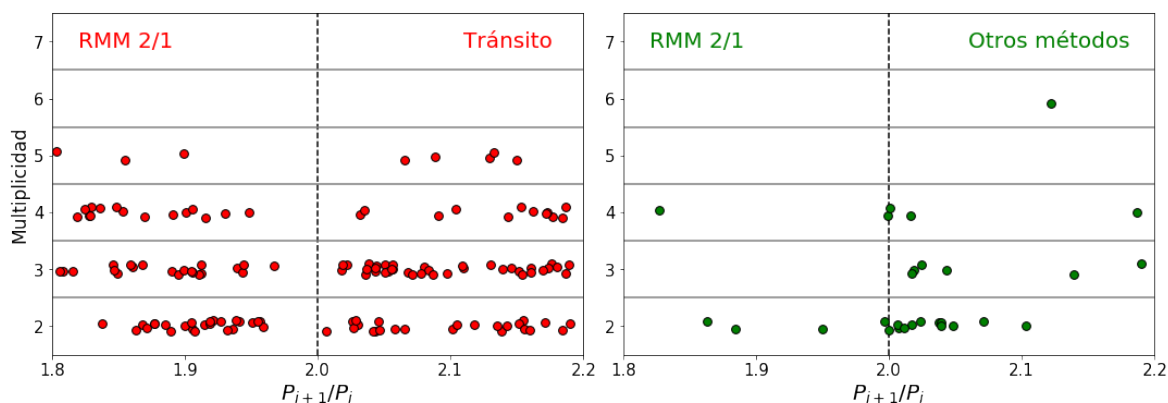


**Figura 4.1.** Histograma de la razón de períodos de los planetas *Kepler* en sistemas múltiples, realizado en Enero de 2013. Las posiciones nominales de las resonancias de movimientos medios están marcadas como líneas negras a trazos. Puede verse que la mayoría de los planetas no se encuentra en RMM de bajo orden, ni cercanos a ellas. Sin embargo, se observa un significativo exceso de pares de planetas con razones de períodos levemente mayores al de la resonancia exacta. Imagen extraída del artículo de [Goldreich y Schlichting \(2014\)](#).

método de detección (Figura 5.1) y de los *Kepler* en particular (Figura 4.1), se destacan dos características muy interesantes. En primer lugar, los sistemas en resonancias de movimientos medios parecen ser muy escasos, o equivalentemente, la mayoría parecen ser no resonantes. Esto introduce el problema de si la formación de los planetas se dio in-situ (por ejemplo [Chatterjee y Tan, 2014](#); [Hansen y Murray, 2012](#); [Petrovich et al., 2013](#)) o si luego del proceso de migración, la captura no fue eficiente ([Baruteau y Papaloizou, 2013](#); [Rein, 2012](#)). La segunda cuestión tiene que ver con la existencia de un número muy grande de pares de planetas muy cercanos a resonancias (en particular la 2/1 y la 3/2), pero con razones de períodos orbitales mayores al valor nominal de cada una de ellas. Esta característica es esperada en la dinámica resonante, especialmente si los planetas tienen bajas excentricidades, pero los valores observados están bastante por encima de los obtenidos en simulaciones de capturas resonantes. Generalmente se cree que los sistemas son no resonantes, es decir, que se encuentran fuera del dominio de libración.

En las Figuras 4.2 y 4.3 pueden observarse estas características, en las que hemos graficado la razón de períodos  $P_{i+1}/P_i$  de planetas consecutivos para sistemas con distintas multiplicidades alrededor de las RMMs 2/1 y 3/2, respectivamente. En cada caso pueden verse a la izquierda los sistemas descubiertos por tránsito (Sistemas *Kepler*) mientras que a la derecha se muestran los planetas detectados por todos los demás métodos: velocidad radial, imaging, TTV y púlsar. En el eje vertical se grafica la cantidad de planetas interactuantes de cada sistema, y en el eje horizontal, la razón de períodos de los pares adyacentes. Este análisis fue realizado a partir de la base de datos del [exoplanet.eu](#) analizada en diciembre de 2016.

En el panel izquierdo de la Figura 4.2 vemos que los sistemas con  $n = 2$  y  $n = 4$  planetas interactuantes tienen planetas en la resonancia exacta 2/1. En los sistemas



**Figura 4.2.** Razón de períodos  $P_{i+1}/P_i$  de pares de planetas adyacentes para sistemas con distintas multiplicidades alrededor de la RMM 2/1. A la izquierda se muestran planetas descubiertos con método de tránsito mientras que a la derecha se muestran los descubiertos de cualquier otra forma. Los círculos rojos representan planetas confirmados detectados por tránsito, mientras que los verdes se corresponden a los planetas detectados por velocidad radial, imaging, púlsar o TTV.

Kepler (gráfico izquierdo), en cambio, casi no hay planetas sobre el valor nominal de la resonancia.

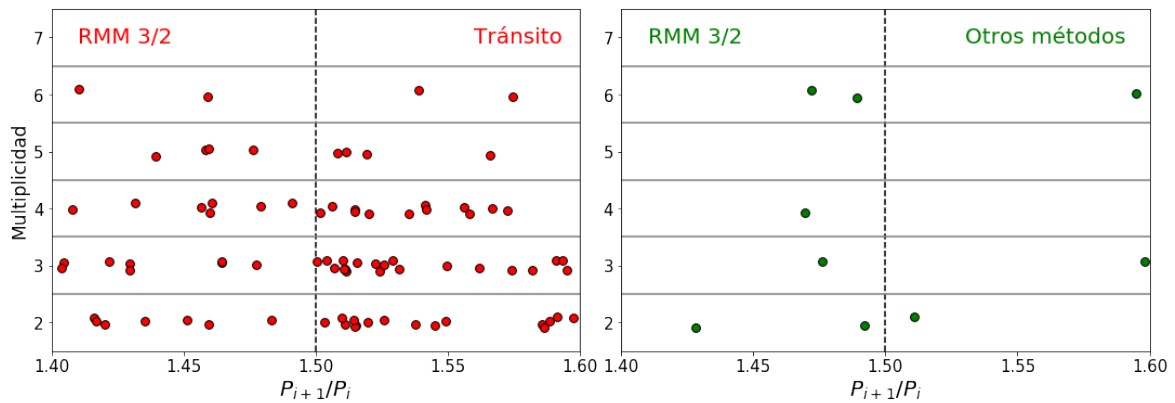
En lo que respecta a la resonancia 3/2 vemos en la Figura 4.3, que la situación es la opuesta a la observada en la RMM 2/1. Casi no hay sistemas descubiertos mediante RV + Imaging en configuración resonante mientras que en los sistemas Kepler, sin embargo, sí hay más cantidad de sistemas cercanos a la posición de la conmensurabilidad 3/2.

Extendido el análisis a las demás resonancias, no considerando únicamente a la 2/1 y la 3/2, en la Figura 1 del artículo de [Goldreich y Schlichting \(2014\)](#) (Figura 4.1) se puede ver un histograma de la razón de períodos de los planetas adyacentes descubiertos por la misión *Kepler* en sistemas con 2, 3, 4 y 5 planetas, realizado en Enero de 2013. A la fecha de publicación de dicho artículo, habían sólo 3 sistemas descubiertos con más de 5 planetas. Las posiciones nominales de las resonancias de movimientos medios están marcadas como líneas negras a trazos. Puede verse que la mayoría de los planetas se encuentran fuera de las resonancias. Al igual que en el caso de la Figura 5.1, se observa un significativo exceso de pares de planetas con razones de períodos levemente mayores al de la resonancia exacta.

Dada esta particularidad que presentan los sistemas y antes de continuar con el análisis de estas poblaciones (casi)-resonantes, es necesario definir el apartamiento de los planetas respecto al valor nominal de la resonancia exacta. Para esto consideraremos un sistema de dos planetas de masas  $m_1$  y  $m_2$ , ubicados a una distancia  $a_1$  y  $a_2$  de su estrella central, con masa  $m_0$ . Los períodos orbitales de dichos planetas serán  $P_1 < P_2$ , y se encontrarán en la vecindad de una resonancia de movimientos medios de orden  $q$ ,  $(p+q)/p$ . Se define entonces el *offset resonante* como:

$$\Delta_{(p+q)/p} = \frac{P_2}{P_1} - \frac{(p+q)}{p}, \quad (4.1)$$

cuyo valor indica la distancia a la resonancia exacta. El valor del offset dependerá



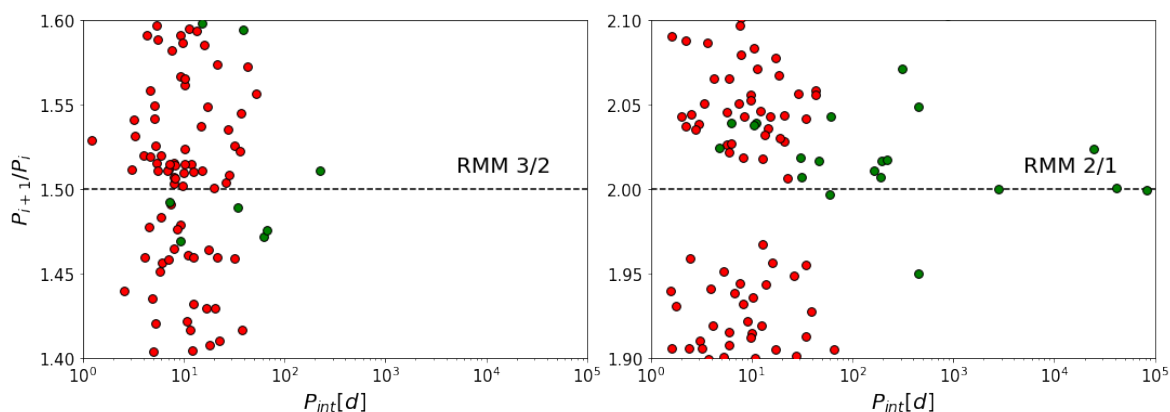
**Figura 4.3.** Razón de períodos  $P_{i+1}/P_i$  de pares de planetas adyacentes para sistemas con distintas multiplicidades alrededor de la RMM 3/2. Para descripción del código de colores, ver Figura 4.2.

de las masas planetarias y las excentricidades, que pueden obtenerse de simulaciones de N-cuerpos e hidrodinámicas. Al simular la captura resonante alrededor de la RMM 2/1 se obtienen algunos valores de referencia para el apartamiento, generalmente del orden de  $\Delta_{2/1} \simeq 10^{-3}$  (ver [Silburt y Rein, 2015](#)). Sin embargo, en la Figura 4.4 se puede ver que para la mayoría de los sistemas *Kepler* cercanos a esta conmensurabilidad el valor es mayor, aproximadamente de  $\Delta_{2/1} \sim 0.04$ .

Continuando con el análisis, en la Figura 4.4 se puede ver la distribución de razón de períodos  $P_{i+1}/P_i$  de pares de planetas adyacentes en sistemas multiplanetarios, como función del período orbital del planeta interno de cada par. El cuadro izquierdo muestra la vecindad de la RMM 3/2 mientras que el derecho, los resultados para la conmensurabilidad 2/1. En ambos casos, los círculos rojos corresponden a sistemas planetarios detectados por tránsitos, mayoritariamente frutos de la misión *Kepler*. Finalmente, los sistemas descubiertos por cualquier otro método están graficados como círculos verdes. Las distribuciones que se presentan alrededor de cada resonancia tienen distintas características. En primer lugar, los planetas descubiertos por tránsito se encuentran, generalmente, a menor distancia que aquellos detectados con otros métodos.

La resonancia 2/1 tiene varios casos bien conocidos de pares o incluso sistemas múltiples en resonancia. El sistema HR8799, por ejemplo, se encuentra muy alejado de la estrella central. Cada uno de sus pares cuenta con períodos orbitales mayores a  $10^4$  días, y parece estar atrapado en una resonancia del tipo de Laplace ( $n_1 - 3n_2 + 2n_3 \simeq 0$ ). La razón de períodos de los planetas más externos son 2.0009 y 1.9995, respectivamente, ubicándolos extremadamente cerca de la posición exacta de la resonancia 2/1, 2/1 ([Goździewski y Migaszewski, 2014](#)).

Más cerca de la estrella, entre  $10^2$  y  $10^3$  días, se puede observar un conjunto de 4 círculos verdes muy cercanos a la RMM 2/1, todos detectados por el método de velocidad radial. Los sistemas más conocidos de este conjunto son HD82943, cuyos planetas confirmados tienen una razón de períodos de  $\sim 2.017$  ([Baluev y Beaugé, 2014](#)), y HD73526 con  $P_{i+1}/P_i \sim 2.006$  ([Wittenmyer et al., 2014](#)). Las incertezas en las mediciones de los períodos orbitales dificulta establecer si todos los sistemas son efectivamente resonantes, como es el caso de HD128311 en el



**Figura 4.4.** Distribución de la razón de períodos  $P_{i+1}/P_i$  de pares de planetas adyacentes en sistemas multiplanetarios, como función del período orbital del planeta interno. A la derecha se muestra la vecindad de la resonancia 2/1 mientras que el gráfico de la izquierda muestra la RMM 3/2. En ambos gráficos los círculos rojos representan planetas confirmados detectados por tránsito mientras que los verdes se corresponden a los planetas detectados por cualquier otro método: velocidad radial, imaging, púlsar o TTV.

que la razón de los períodos de sus miembros es de  $\sim 2.04$  (McArthur et al., 2014).

El último ejemplo que mencionaremos es otro sistema detectado por velocidad radial en la vecindad de la resonancia 2/1, GJ876, cuyos planetas se encuentran atrapados en resonancia de Laplace (Baluev, 2011; Rivera et al., 2010). Aunque el sistema alberga un planeta muy pequeño, éste se encuentra muy cercano a la estrella por lo que su interacción gravitatoria con los demás miembros es despreciable. El offset resonante de GJ876 es mayor que el observado para los demás casos, con  $P_{i+1}/P_i \sim 2.02$  y  $\sim 2.04$  (Nelson et al., 2016). Este sistema ha demostrado ser muy caótico (Martí et al., 2013), aunque estable para tiempos comparables con el del Sistema Solar. Batygin et al. (2015) argumentan que la tan fuerte caoticidad es incompatible con migración lenta en un disco laminar, y propone en cambio que la captura resonante debe haber ocurrido en un disco turbulento caracterizado por perturbaciones estocásticas de pequeña amplitud. Sin embargo, no queda claro cómo las perturbaciones habrían afectado a este sistema y no a otros miembros de la población resonante. Por otro lado, Martí et al. (2016) muestran que la resonancia de Laplace en GJ876 también contiene una región interna de baja caoticidad. Aunque el ajuste orbital posiciona al sistema en el dominio más externo de la región resonante, es posible que futuras observaciones cambien este panorama y sea más consistente con la zona regular más interna.

La distribución de aquellos sistemas descubiertos por tránsito alrededor de la resonancia 2/1 (recordar, círculos rojos en las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4) muestra dos características principales que han sido objeto de estudio de diversos trabajos a lo largo de los últimos años. Primero, hay un exceso significativo de planetas con un valor positivo de  $\Delta_{2/1}$  con una mediana alrededor de  $\sim 0.04$  para  $P_2/P_1 \in [2.0, 2.1]$ . Ya que el radio planetario de estos cuerpos es consistente con masas en el rango de súper-Tierras y Neptunos (hasta  $\sim 20 m_\oplus$ ), se cree generalmente que estos sistemas se encuentran fuera del dominio de libración y son intrínsecamente no resonantes. Sin embargo, es verdaderamente curioso que sistemas más distantes, con

masas típicamente mayores (relación entre la masa y el radio planetario calculado de la expresión de [Lissauer et al., 2011](#),  $m_i = r_i^{2.06}$ ), tienen valores menores de offset aunque su dominio de libración es significativamente mayor.

Una segunda característica interesante en la distribución de estos sistemas es un incremento importante del valor de  $\Delta_{2/1}$  para planetas cercanos a la estrella y que muestran  $P_2/P_1 > 2$  días. [Delisle y Laskar \(2014\)](#) también encontraron un aumento del offset cerca de la estrella central analizando dos subsets: el primero con  $P_1 \leq 15$  días, y un segundo con  $P_1 \geq 15$  días. Ellos atribuyen esta dicotomía a efectos tidales que deberían ser importante para períodos orbitales menores, aproximadamente, que 10-20 días. La Figura 4.4 muestra resultados similares pero avanza un casillero más: el offset observado indica una posible tendencia suave en la que  $\Delta_{2/1} \sim 0.05$  para  $P_1 \sim 1$  día, disminuyendo a  $\Delta_{2/1} \sim 0.01$  para períodos orbitales del planeta interno de  $\sim 10^3$  días. Esto podría indicar que la distribución de offset resonante depende principalmente de la distancia a la estrella y no tanto al tipo de migración. GJ876 parece cumplir esta condición. Aún habiendo sido detectado por velocidad radial y conteniendo planetas gigantes que deberían haber sufrido migración de Tipo II, su valor de  $\Delta_{2/1}$  es similar a la de los sistemas *Kepler* y no a aquellos sistemas más lejanos de planetas gigantes.

El cuadro izquierdo de la Figura 4.4 se concentra en las observaciones para la vecindad de la conmensurabilidad 3/2. Hasta la fecha se conoce únicamente un sistema resonante confirmado detectado por VR (HD45364, [Correia et al., 2009](#)), con  $P_1 \sim 226$  días y un offset de  $\Delta_{3/2} \sim 0.01$ . Así, al menos en el caso de los relevamientos de velocidad radial, la población resonante en el caso de la RMM 3/2 es mucho menos abundante que la observada en el caso de la 2/1.

Los sistemas en tránsito cercanos a la resonancia 3/2 muestran diferencias significativas con la población alrededor de la 2/1. Por un lado, el offset es significativamente menor, con una mediana centrada en  $\Delta_{3/2} \sim 0.01$ , calculada en sistemas con  $P_2/P_1 \in [1.5, 1.6]$ . Este valor es del mismo orden que el observado para HD45364, indicando una dependencia más suave con el período orbital del cuerpo más interno. De hecho, tal como señalaron [Wang y Ji \(2014\)](#) la distribución de sistemas *Kepler* es consistente con una acumulación cerca de la resonancia exacta con offsets pequeños, y no se observa ningún gap para valores negativos de  $\Delta_{3/2}$ . Otra característica interesante es una aparente acumulación de planetas con períodos  $P_1 \sim 10$  días, que tampoco se observa para la resonancia 2/1.

Como conclusión, asumiremos que la distribución es principalmente dependiente de la distancia a la estrella central y que entonces todos los sistemas exoplanetarios constituyen una única población, independientemente de su método de detección.

## 4.2. El offset resonante

### 4.2.1. Definiciones y modelo analítico

En principio, existen dos maneras de explicar la estructura (casi)-resonante de un sistema exoplanetario y su dependencia con la distancia a la estrella central, efecto que se manifiesta en la Figura 4.4. La primera implica que los planetas estuvieran inicialmente atrapados en resonancia (con valores pequeños de su offset)



pero hayan luego sido expulsados del dominio de libración por efectos de marea con la estrella. Esto parece razonable para algunos sistemas alrededor de la RMM 2/1, pero no explica por qué el offset observado para la resonancia 3/2 es mucho menor. Además, los efectos tidales no parecen explicar la tendencia observada para los sistemas lejanos en la resonancia 2/1. [Lee et al. \(2013\)](#) argumentan que la amortiguación de las excentricidades por la disipación de las mareas en los planetas puede reducir las excentricidades a valores suficientemente pequeños para obtener las desviaciones observadas a las conmensurabilidades exactas ([Batygin y Morbidelli, 2013](#); [Lithwick y Wu, 2012](#)). La disipación tidal en el planeta hace que la excentricidad orbital decaiga al tiempo que conserva el momento angular del sistema. Sin embargo, en pares (casi)-resonantes las excentricidades decaen lentamente con una ley de potencias, necesitando muchos períodos para que se manifieste la separación de la resonancia exacta  $P_{i+1}/P_i$  en un porcentaje apreciable. Para que un par de planetas cercano a una resonancia pueda alcanzar su offset en el tiempo de vida de su estrella anfitriona depende de manera crítica del valor de  $Q/k_2$  del planeta interior, que es muy diferente para los planetas rocosos y gigantes, siendo  $Q$  el valor de disipación del cuerpo y  $k_2$  el número de Love, parámetro adimensional que hace referencia a la rigidez de un objeto y su susceptibilidad por modificar su forma como respuesta a los efectos de las fuerzas de marea.

Una segunda posibilidad es la de captura en resonancia debido a las interacciones entre el planeta y el disco, que llevarán a diferentes valores de  $\Delta_{(p+1)/p}$  en distintas partes del disco. Así, si la migración planetaria hubiera frenado muy lejos de la estrella central estaría caracterizada por bajos valores del offset mientras que este valor aumentaría para distancias menores. Durante nuestro trabajo analizamos este mecanismo.

Sin embargo, antes de simular los procesos de migración, revisaremos la estructura dinámica de resonancias planetarias y analizaremos los tipos de movimientos esperados para diferentes valores de  $\Delta_{(p+1)/p}$ . Para esto, trabajamos con el formalismo Hamiltoniano presentado en variables modificadas de Delaunay, presentadas en la ecuación 3.11.

Partimos del Hamiltoniano para problema de los 3 cuerpos. Tomamos una función perturbadora simple, válida para la vecindad de una resonancia de movimientos medios de primero orden  $(p+1)/p$ , en la que despreciamos perturbaciones seculares. Además consideramos bajas excentricidades por lo que nos quedamos a primer orden en este parámetro. Así, el Hamiltoniano alrededor de la resonancia  $n_1 p - n_2(p+1) \simeq 0$  toma la siguiente forma:

$$F = -\frac{\mu_1^2 m_1^3}{2L_1^2} - \frac{\mu_2^2 m_2^3}{2L_2^2} + C_1 e_1 \cos(\theta_1) - C_2 e_2 \cos(\theta_2), \quad (4.2)$$

donde  $C_i = C_i(a_1/a_2)$  dependen únicamente de los semiejes y tiene que ver con los coeficientes de Laplace. Analizando una resonancia particular,  $C_i$  es una constante.

Buscamos los puntos fijos de este sistema (revisar ecuación 3.37) resolviendo el conjunto de ecuaciones.

$$\frac{\partial F}{\partial S_i} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial \theta_i} = 0. \quad (4.3)$$

Para realizar estas derivadas es necesario recordar que  $S_i$  es función de  $L_i$ . De la segunda se desprende que los  $\theta_i$  deben ser iguales a 0 o a  $\pi$ .

La primera ecuación requiere más esfuerzo por lo que la trabajamos dividida. Separamos la parte integrable de la no integrable. Así,

$$\frac{\partial F}{\partial S_i} = \frac{\partial F_0}{\partial S_i} + \frac{\partial R}{\partial S_i}. \quad (4.4)$$

La derivada de la parte integrable la calculamos con la regla de la cadena:

$$\frac{\partial F_0}{\partial S_i} = \frac{\partial F_0}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial S_i} + \frac{\partial F_0}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial S_i}, \quad (4.5)$$

donde las derivadas parciales toman la forma

$$\frac{\partial L_1}{\partial S_1} = \frac{\partial L_1}{\partial S_2} = -p \quad \text{y} \quad \frac{\partial L_2}{\partial S_1} = \frac{\partial L_2}{\partial S_2} = p + q \quad (4.6)$$

(ver ecuación 3.31). Así,

$$\frac{\partial F_0}{\partial S_i} = -p \frac{\partial F_0}{\partial L_1} + (p + q) \frac{\partial F_0}{\partial L_2}. \quad (4.7)$$

Por último, como  $\partial F_0/\partial L_i = n_i$ ,

$$\frac{\partial F_0}{\partial S_1} = \frac{\partial F_0}{\partial S_2} = -pn_1 + (p + q)n_2 = 0. \quad (4.8)$$

Para las derivadas de la función perturbadora hay que realizar primero un cambio de variables ya que  $e_i \simeq \sqrt{2S_i/L_i}$  y luego

$$\frac{\partial R}{\partial S_1} = \frac{\partial R}{\partial e_1} \frac{\partial e_1}{\partial S_1} = \frac{C_1}{\sqrt{2S_1L_1}} \cos(\theta_1) \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial S_2} = \frac{\partial R}{\partial e_2} \frac{\partial e_2}{\partial S_2} = \frac{C_2}{\sqrt{2S_2L_2}} \cos(\theta_2). \quad (4.9)$$

Finalmente,

$$\frac{\partial F}{\partial S_1} = \frac{\partial F_0}{\partial S_1} + \frac{\partial R}{\partial S_1} = -pn_1 + (p + q)n_2 + \frac{C_1}{\sqrt{2S_1L_1}} \cos(\theta_1) = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial S_2} = \frac{\partial F_0}{\partial S_2} + \frac{\partial R}{\partial S_2} = -pn_1 + (p + q)n_2 + \frac{C_2}{\sqrt{2S_2L_2}} \cos(\theta_2) = 0. \quad (4.11)$$

De la ecuación para  $\partial F/\partial S_1$  expresada en la ecuación superior de (4.11), al considerar que en las vecindades de la resonancia de movimientos medios  $pn_1 - (p + q)n_2 = 0$ , se puede multiplicar y dividir por  $\sqrt{L_1}$  para obtener,

$$-pn_1 + (p + q)n_2 = \frac{C_1}{e_1L_1} \cos(\theta_1). \quad (4.12)$$

La derivada de la parte integrable  $\partial F_0/\partial S_1$  da información sobre la posición exacta de las RMM, mientras que la parte correspondiente a la función perturbadora aparece como el 'excedente' de la parte integrable, con el que se define el *offset*

*resonante*. Recordar que en la ecuación (4.1) ya teníamos la expresión, que venía dada por

$$\Delta_{(p+q)/p} = \frac{P_2}{P_1} - \frac{p+q}{p}. \quad (4.13)$$

Si trabajamos con la expresión para  $\partial F/\partial S_1$  en las vecindades de la resonancia de primer orden  $(p+1)/p$ ,  $-pn_1 + (p+1)n_2 = 0$  y con esto podemos estimar el valor del offset resonante en función de la excentricidad del planeta interno  $e_1$ . Empezamos planteando que

$$-pn_1 + (p+1)n_2 + \frac{C_1}{\sqrt{2S_1L_1}} \cos(\theta_1) = \frac{C_1}{e_1L_1} \cos(\theta_1). \quad (4.14)$$

De la ecuación para  $\Delta_{(p+q)/p}$  y recordando que  $n_1/n_2 = P_2/P_1$

$$n_2p\Delta_{(p+q)/p} = \frac{C_1}{e_1L_1} \cos(\theta_1). \quad (4.15)$$

Como habíamos mencionado, tanto  $C_1$  como  $C_2$  provienen de los coeficientes de Laplace, y tienen la siguiente forma

$$C_1 = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{a_2} f_{27}(\alpha, r) \quad , \quad C_2 = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{a_2} f_{31}(\alpha, r), \quad (4.16)$$

para algún entero  $r$ . Las funciones  $f_{27}$  y  $f_{31}$  vienen dadas por

$$\begin{aligned} f_{27}(\alpha, r) &= \frac{1}{2} [-2r - \alpha D_\alpha] b_{1/2}^{(r)}(\alpha) \\ f_{31}(\alpha, r) &= \frac{1}{2} [-1 + 2r + \alpha D_\alpha] b_{1/2}^{(r-1)}(\alpha) - \frac{\delta_{(r-1),1}}{2\alpha^2}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

Reemplazando en la ecuación (4.15) se obtiene que

$$n_2a_2L_1p\Delta_{(p+q)/p} = \frac{1}{e_1} \mathcal{G}m_1m_2 f_{27}(\alpha, r) \cos(\theta_1). \quad (4.18)$$

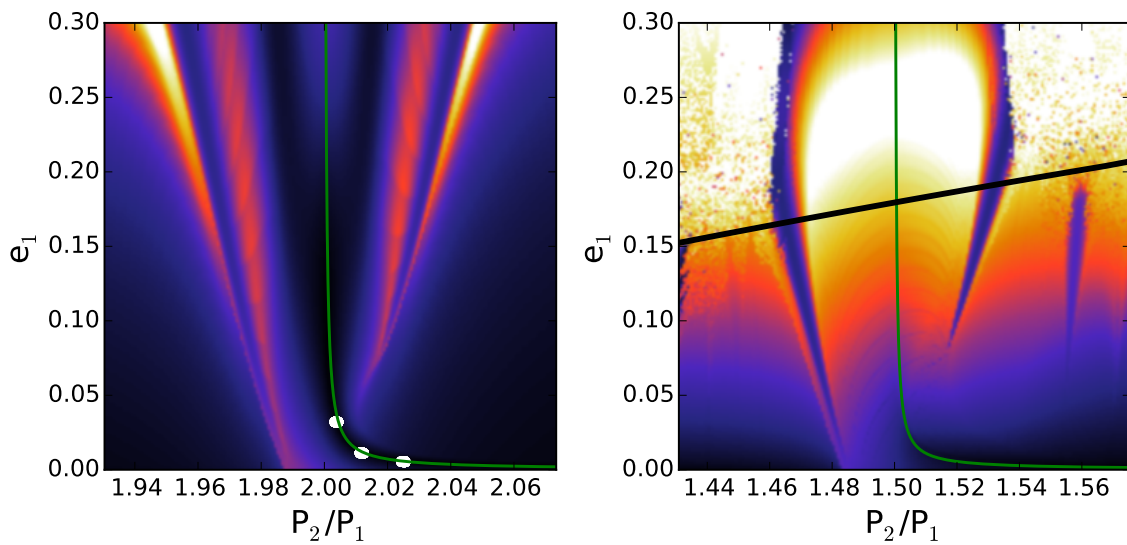
Aquí haremos uso de varias suposiciones. Aproximamos  $m'_1 = m_1$ ,  $\mu_1 = \mathcal{G}m_0$  y  $\mu_2 = \mathcal{G}m_0$ , válidas cuando  $m_1, m_2 \ll m_0$ . Además, usamos  $\cos(\theta_1) = 1$  y con la tercera ley de Kepler ( $n_2^2 a_2^3 = \mu_2$ ) podemos llegar a

$$\Delta_{(p+q)/p} = \frac{1}{e_1} \frac{m_2}{m_0} \frac{f_{27}(\alpha, r)}{p\sqrt{\alpha}} \cos(\theta_1), \quad (4.19)$$

de la que finalmente obtenemos

$$\Delta_{(p+q)/p} = C'_1(\alpha) \frac{m_2}{m_0} \frac{1}{e_1}. \quad (4.20)$$

Lo que nos dice esto es que, fijada una resonancia (por ejemplo  $p = 1$ ) y las masas planetarias (en nuestro caso  $m_1 = 0.05m_{\text{Jup}}$  y  $m_2 = 0.1m_{\text{Jup}}$ ), el valor del offset resulta inversamente proporcional a la excentricidad de equilibrio del cuerpo interno.



**Figura 4.5.** Mapa dinámico del indicador  $\max(\Delta e)$  para las resonancias 2/1 (izquierda) y 3/2 (derecha) para un sistema ficticio de dos planetas con  $m_1 = 0.05m_{\text{Jup}}$  y  $m_2 = 0.1m_{\text{Jup}}$  orbitando en torno a una estrella central de masa  $m_0 = 1m_{\odot}$ . La órbita del planeta externo se tomó inicialmente circular y su semieje mayor  $a_2 = 1$  AU. Todas las variables angulares se eligieron igual a cero. El tiempo total de integración fue de  $10^3$  años. Las curvas color verde muestran la posición de las soluciones ACR de amplitud cero, estimadas con el modelo analítico de la ecuación (4.30). Los puntos blancos en el gráfico izquierdo son el resultado de tres simulaciones de N-cuerpos de captura en la RMM 2/1. La curva negra ancha de la figura derecha corresponde al límite de estabilidad de Marchal-Bozis, que indica el límite entre cruce de órbitas. Los tonos más oscuros se asocian a pequeñas variaciones de la excentricidad del planeta interno, mientras que colores más claros hacen referencia a grandes cambios. Es posible, además, identificar la separatriz entre los regímenes de libración y circularización.

Así, valores muy bajos de  $e_i$  serán necesarios para obtener una desviación significativa de la posición exacta de la resonancia. Como ejemplo (ver gráfico izquierdo de la Figura 4.5), reproducir un offset alrededor de la RMM 2/1 de  $\Delta_{2/1} \simeq 0.05$ , requeriría que las excentricidades se mantuvieran bajas, del orden de  $e_1 \sim 10^{-3} - 10^{-4}$  para un sistema orbitando alrededor de una estrella de masa  $m_0 = 1m_\odot$ .

Trabajando de manera análoga se puede obtener una expresión similar para  $\Delta_{(p+1)/p}$  en función de  $e_2$ , e igualándola con la de  $e_1$ , es posible estimar una relación entre las excentricidades de los dos planetas:

$$e_2 = C'_2(\alpha) \frac{m_1}{m_2} e_1. \quad (4.21)$$

Se muestran en la Figura 4.5 dos mapas dinámicos, en el cuadro izquierdo la resonancia 2/1 y en el derecho la 3/2. En cada caso integramos una serie de condiciones iniciales en una grilla definida en el plano  $(P_2/P_1, e_1)$ . Las masas de los planetas se eligieron  $m_1 = 0.05m_{\text{Jup}}$  para el interno, y  $m_2 = 0.1m_{\text{Jup}}$  para el externo, y la estrella central de una masa solar. Específicamente elegimos una razón de masas tal que  $m_2/m_1 > 1$  para garantizar que los puntos fijos sean estables (Beaugé et al., 2006; Michtchenko et al., 2008). La órbita del planeta externo fue inicialmente considerada circular, con semieje  $a_2 = 1UA$  y todos los ángulos iguales a cero.

El código de colores corresponde al máximo valor de  $|e_1(t) - e_1(t=0)|$  (que llamaremos  $\max(\Delta e)$ ), alcanzado durante una integración de  $10^3$  años. Los tonos más oscuros (o claros) se asocian a pequeños (grandes) variaciones de la excentricidad del planeta interno. Para la resonancia 3/2, la curva negra ancha marca el límite de estabilidad calculado usando el criterio de Marchal y Bozis (1982). Por más que el indicador  $\Delta e$  no sea un indicador de caos, es una herramienta muy importante a la hora de analizar la estructura de las resonancias y nos ayuda a identificar la posición de las soluciones estacionarias (llamadas soluciones ACR, ver Beaugé et al., 2006), y la separatriz, que divide los dominios de libración y circulación.

En la misma figura, la línea verde indica la posición aproximada de la familia de soluciones ACR de amplitud cero, caracterizadas por la libración simultánea de los dos ángulos resonantes

$$\theta_1 = (p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 - q\varpi_1, \quad \theta_2 = (p+q)\lambda_2 - p\lambda_1 - q\varpi_2, \quad (4.22)$$

donde  $\lambda_i$  y  $\varpi_i$  son la longitud media y la longitud del pericentro de cada planeta, con  $q = 1$  al tratarse de resonancias de primer orden.

La evolución de los planetas mientras están sumergidos en un disco de gas genera naturalmente que los planetas se muevan a lo largo del disco, y como producto de esta migración los planetas terminan en configuración resonante. A la escala de tiempo de decaimiento de la órbita (Tanaka et al., 2002) de cada planeta, se la conoce como  $\tau_{a_i}$ . Si los planetas están en órbita circular y en un disco con densidad superficial constante ( $f = 0$ ), entonces el decaimiento o aumento en su semieje viene dado por la expresión 1.7,

$$\tau_{a_i} = \left| \frac{a_i}{\dot{a}_i} \right| = \frac{1}{2} \frac{M_\star^2}{m_p} \frac{H(r)^2}{r_p^2 \Sigma_p \Omega_p(r)}.$$

De esta ecuación se puede ver que planetas con distintas masas migrarán a diferentes velocidades. Como consecuencia, la razón de períodos evolucionará hasta que ambas órbitas converjan (cuando el planeta externo sea más grande que el interno) y queden atrapados en resonancia de movimientos medios (Nelson y Papaloizou, 2002).

Las ondas de densidad que genera un planeta de baja masa al moverse en el disco provocan que el planeta espirale hacia la estrella. La escala de tiempo  $\tau_{e_i}$  que tarda en circularizarse la órbita se calcula como (Tanaka y Ward, 2004)

$$\tau_{e_i} = \left| \frac{e_i}{\dot{e}_i} \right| = 0.289 \frac{M_*^2}{m_p} \left( \frac{c_s}{r_p \Omega_p(r)} \right)^2. \quad (4.23)$$

Si la migración es lo suficientemente suave y lenta (adiabática), y si las órbitas se mantienen casi circulares, se espera que la evolución siga a la rama pericéntrica en el dominio de libración, y que los ángulos resonantes exhiban oscilaciones de baja amplitud. En este escenario ideal, las excentricidades finales y el offset  $\Delta_{(p+1)/p}$  dependerán de la fuerza relativa entre las escalas de tiempo de decaimiento y circularización de la órbita de cada planeta (Beugé et al., 2006; Lee y Peale, 2002). Así, en el límite adiabático, el resultado final de la captura en resonancia dependerá fundamentalmente de las razones entre  $\mathcal{K}_i = \tau_{a_i}/\tau_{e_i}$ , llamados *factores- $\mathcal{K}$* .

Papaloizou y Szuszkiewicz (2005) dedujeron una relación entre las excentricidades de equilibrio y las escalas de tiempo de migración y circularización orbital que toma la siguiente forma:

$$\frac{e_2^2}{\tau_{e_2}} + \frac{e_1^2}{\tau_{e_1}} \frac{m_1 n_2 a_2}{m_2 n_1 a_1} - \left( \frac{e_2^2}{\tau_{e_2}} - \frac{e_1^2}{\tau_{e_1}} \right) D = \left( \frac{1}{\tau_{a_2}} - \frac{1}{\tau_{a_1}} \right) \frac{D}{2}, \quad (4.24)$$

que, reacomodando un poco, se puede escribir como

$$(1 - D) \frac{e_2^2}{\tau_{e_2}} + B \frac{e_1^2}{\tau_{e_1}} = \frac{D}{2} \left( \frac{1}{\tau_{a_2}} - \frac{1}{\tau_{a_1}} \right). \quad (4.25)$$

Multiplicando a ambos miembros por  $\tau_{a_2}$ , y usando que  $\tau_{a_i} = \mathcal{K}_i \tau_{e_i}$ ,

$$e_2^2 \mathcal{K}_2 (1 - D) + e_1^2 \mathcal{K}_1 B \left( \frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right) = \frac{D}{2} \left( 1 - \frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right), \quad (4.26)$$

donde los nuevos coeficientes

$$B = \frac{m_1 n_2 a_2}{m_2 n_1 a_1} + D \quad \text{y} \quad D = \frac{1}{(p+1)} \left( 1 + \frac{a_1 m_2}{a_2 m_1} \right)^{-1} \quad (4.27)$$

dependen únicamente de la resonancia y la razón de masa de los planetas. Usando de la ecuación para el offset (4.20) que

$$e_1 = C_1 \frac{m_2}{m_0} \frac{1}{\Delta_{(p+1)/p}}, \quad (4.28)$$

la relación entre las excentricidades (4.21) queda

$$e_2^2 = \left( C_1 C_2 \frac{m_1}{m_0} \frac{1}{\Delta_{(p+1)/p}} \right)^2. \quad (4.29)$$

De la relación (4.26) es posible obtener una expresión para el offset en términos de las escalas de tiempo de migración como:

$$\Delta_{(p+1)/p}^2 = \frac{2}{D} \left( C_1 \frac{m_2}{m_0} \right)^2 \frac{\left[ (1-D)\mathcal{K}_2 \left( C_2 \frac{m_1}{m_2} \right)^2 + B\mathcal{K}_1 \left( \frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right) \right]}{1 - \left( \frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right)}. \quad (4.30)$$

Ya que las capturas se darán únicamente en casos de migración convergente, es decir, los casos en los que  $\tau_{a_1} > \tau_{a_2}$  (Lyra et al., 2010), el denominador es siempre positivo y sin singularidades. Asumiendo una relación constante para las masas  $m_1/m_2$ , la expresión (4.30) muestra que el valor del offset es una función lineal de  $m_2$ , indicando que para valores fijos de las escalas de migración se esperarían desviaciones mayores respecto de la resonancia, cuanto más masivos sean los planetas. Como este no parece ser el caso, los valores observados de  $\Delta_{(p+1)/p}$ , particularmente para sistemas compactos, deben ser dominados por las características de las interacciones entre el planeta y el disco.

Para probar el modelo definido en las ecuaciones (4.20)-(4.30), realizamos una serie de pruebas con el integrador de N-cuerpos desarrollado por Beaugé y Nesvorný (2012), incluyendo una aceleración externa ad-hoc (e.g. Cresswell y Nelson, 2008):

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -\frac{1}{\tau_{a_i}} \left[ \frac{\mathbf{v}_i}{2} + 2\mathcal{K}_i \frac{(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i}{r_i^2} \right], \quad (4.31)$$

donde  $\mathbf{r}_i$  es el vector de posición (radial) del planeta y  $\mathbf{v}_i$  su vector velocidad. Fijando valores para  $\tau_{a_i}$  podemos variar  $\mathcal{K}_i$  y analizar su efecto en la desviación de la resonancia exacta. Realizamos para esto 3 simulaciones de N-cuerpos en las que incluimos migración de los planetas usando la receta anterior. La masa y órbita inicial del planeta externo fueron las mismas que aquellas con las que construimos los mapas. El valor inicial de  $a_1$  lo elegimos fuera de la resonancia 2/1 y todos los ángulos iguales a cero. Fijamos al decaimiento orbital del planeta interno en  $\tau_{a_1} = 10^5$  años y el del externo en  $\tau_{a_2} = 7 \times 10^4$  años para garantizar migración convergente y adiabática. Los valores del tiempo de circularización  $\tau_{e_i}$  los elegimos tales que se mantuvieran los mismos factores- $\mathcal{K}$  para ambos planetas, es decir,  $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$ . Cada simulación fue realizada para 3 valores diferentes de dichos factores:  $\mathcal{K} = 10^2$ ,  $\mathcal{K} = 10^3$  y  $\mathcal{K} = 10^4$ .

Integramos cada condición inicial por  $10^5$  años asumiendo, además, que el disco comienza a dispersarse a los  $T_{\text{disp}} = 7 \times 10^4$  años, y que la densidad superficial llega a cero en  $T_{\text{disp}} = 8 \times 10^4$  años. Este proceso fue modelado reduciendo la magnitud de la fuerza disipativa suavemente y en una escala de tiempo fue lo suficientemente lenta como para permitirle al sistema alcanzar la solución de equilibrio y adaptarse adiabáticamente. El 10% final de cada salida fue utilizado para calcular valores promedio de las excentricidades y movimientos medios. Los puntos blancos en el gráfico izquierdo de la Figura 4.5 muestra estos resultados finales.

La simulación con  $\mathcal{K} = 10^2$  terminó con  $e_1 \simeq 0.03$  y  $P_2/P_1 \simeq 2.004$ , muy cercano al valor exacto de la resonancia, y muy similar a los dos pares externos del sistema extrasolar HR-8799. La segunda corrida, con  $\mathcal{K} = 10^3$  alcanzó un valor menor para la excentricidad de equilibrio ( $e_1 \simeq 0.01$ ) y un offset levemente mayor ( $P_2/P_1 \simeq 2.01$ ),

similar a varios sistemas resonantes descubiertos por velocidad radial (por ejemplo, HD-82943 o HD-155358). Finalmente, la simulación con  $\mathcal{K} = 10^4$  muestra el menor valor alcanzado para las excentricidades y el mayor offset:  $P_2/P_1 \simeq 2.03$ , del orden observado para GJ-876. Todos estos resultados están en perfecto acuerdo con las estimaciones deducidas de las expresiones (4.20) y (4.30).

Los valores predichos en los modelos lineales de migración tipo-I para los factores- $\mathcal{K}$  (Cresswell y Nelson, 2008; Papaloizou y Larwood, 2000; Tanaka y Ward, 2004) son mucho menores que los utilizados aquí, del orden de  $10^4$  años. En el límite de bajas excentricidades es posible escribir

$$\tau_{a_i} = Q_a \frac{t_{\text{wave}_i}}{H_{r_i}^2}, \quad \tau_{e_i} = Q_e \frac{t_{\text{wave}_i}}{0.780}, \quad (4.32)$$

donde  $H_{r_i}$  es la relación de aspecto del disco en la posición de cada planeta.  $Q_e$  en la expresión (4.32) es un parámetro ad-hoc artificial constante, introducido por Cresswell y Nelson (2006) utilizado para ajustar los resultados con las simulaciones hidrodinámicas. Allí encontraron que los mejores resultados se obtienen con  $Q_e \sim 0.1$ , valor que utilizamos también nosotros en estas simulaciones.  $Q_a$  es función de la pendiente  $\alpha$  de la densidad superficial del disco. El modelo lineal de Tanaka et al. (2002) propone  $Q_a^{-1} \simeq 2.7 + 1.1\alpha$ , mientras que ajustes numéricos con simulaciones hidrodinámicas usualmente llevan a formas funcionales levemente diferentes (ver D'Angelo y Lubow, 2010). Finalmente,

$$t_{\text{wave}_i} = \frac{m_0}{m_i} \frac{m_0}{\Sigma(a_i) a_i^2} \frac{H_{r_i}^4}{\Omega(a_i)}, \quad (4.33)$$

es la escala típica de tiempo para la migración planetaria.  $\Omega(a_i) = \sqrt{\frac{\mathcal{G}(m_0+m_i)}{a_i^3}}$  es la velocidad angular Kepleriana (circular) y nuevamente,  $\mathcal{G}$  es la constante de gravitación universal.

Si ahora el disco ya no es de densidad constante sino que la densidad superficial  $\Sigma$  y la altura de escala  $H_r$  tienen una dependencia con la distancia a la estrella central dada por una ley de potencias ( $f \neq 0$ ):

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 r^{-\alpha}, \quad H_r(r) = H_0 r^f, \quad (4.34)$$

donde  $\Sigma_0$  y  $H_0$  son los valores a  $r = 1 \text{ ua}$ . De las ecuaciones (4.32)-(4.34) podemos obtener una forma explícita sencilla para los factores- $\mathcal{K}$ :

$$\mathcal{K}_i \equiv \frac{\tau_{a_i}}{\tau_{e_i}} = \frac{0.78}{H_0^2} \frac{Q_a}{Q_e} r_i^{-2f}. \quad (4.35)$$

Asumiendo un disco plano ( $f = 0$ ) y valores típicos para  $H_0 \sim 0.05$ , obtenemos factores del orden de  $\mathcal{K}_i \sim 300$  para cualquier distancia a la estrella, que son los valores utilizados usualmente en las simulaciones de N-cuerpos de migración planetaria y captura en resonancia (ver Quillen et al., 2013; Silburt y Rein, 2015). Un disco con flare ( $f > 0$ ), sin embargo, no sólo llevará a una dependencia de  $\mathcal{K}_i$  con el semieje mayor, sino que también aumenta su valor para planetas cercanos a la estrella central. Adoptando  $f = 0.25$  obtenemos valores similares a los anteriores para  $a = 1 \text{ AU}$  aunque significativamente mayores ( $\mathcal{K}_i \sim 10^3$ ) para  $a = 0.05 \text{ ua}$ .



Aunque esto parece prometedor, el aumento de los factores- $\mathcal{K}$  no es suficiente. Un offset  $\Delta_{2/1} \simeq 0.05$ , como el observado para los sistemas compactos requeriría  $\mathcal{K}_i \sim 10^5$ , que cuanto mínimo, parece improbable. [Xiang-Gruess y Papaloizou \(2015\)](#) propusieron que las trampas planetarias cercanas a la estrella (borde interno del disco) podría frenar la migración, aunque no afectaría la escala de tiempo de circularización orbital, llevando a un aumento artificial de su correspondiente magnitud en  $\mathcal{K}$ . Aunque esta idea parece probable, no explicaría la tendencia observada de decrecimiento del offset como función del semieje mayor, ni tampoco se esperaría que funcione para períodos orbitales del orden de  $10^2$  días.

Para tener en cuenta la contribución del damping de la excentricidad en los cambios de semieje mayor asociados a la conservación (parcial) del momento angular, [Goldreich y Schlichting \(2014\)](#) propusieron modificar las expresiones de  $\tau_{a_i}$  y  $\tau_{e_i}$  (ver ecuación 4.32). Así, la escala de tiempo característica efectiva de migración orbital debería ser:

$$\frac{1}{\tau_{a_{eff_i}}} = \frac{1}{\tau_{a_i}} + 2\beta \frac{e_i^2}{\tau_{e_i}}, \quad (4.36)$$

donde  $\tau_{a_i}$  y  $\tau_{e_i}$  mantienen la misma forma que en las ecuaciones (4.32) y  $\beta$  es un factor que cuantifica la fracción del momento angular conservado durante la migración. Si el momento angular se preserva por completo, entonces  $\beta = 1$ . Esto se da en el caso de efectos tidales en órbitas sincrónicas, por ejemplo, mientras que en los demás casos,  $\beta < 1$ . En dicho trabajo, [Goldreich y Schlichting \(2014\)](#) se refieren a estimaciones de [Tanaka y Ward \(2004\)](#) que sugieren que  $\beta \simeq 0.3$  cuando las interacciones entre el planeta y el disco son de tipo-I, es decir, para cuerpos pequeños.

La escala de tiempo de migración modificada cambiará, claramente, el valor de los factores- $\mathcal{K}$  llevándolos a una forma "efectiva":

$$\mathcal{K}_{eff_i} \equiv \frac{\tau_{a_{eff_i}}}{\tau_{e_i}} = \frac{\mathcal{K}_i}{1 + 2\beta e_i^2 \mathcal{K}_i}, \quad (4.37)$$

donde  $\mathcal{K}_i$  viene dado por la ecuación (4.35). Dado que las excentricidades de equilibrio dentro de una resonancia suelen ser del orden de  $e_i \sim 1/\mathcal{K}_i$ , al menos en lo que respecta al orden de magnitud, se espera que el factor- $\mathcal{K}$  asociado no sea muy diferente de su valor original. Más aún, dado que el denominador de la ecuación (4.37) es siempre mayor que la unidad, se verifica que  $\mathcal{K}_{eff_i} < \mathcal{K}_i$ . Consecuentemente, considerar el momento angular en las prescripciones de migración no cambia significativamente el panorama, es decir, no se logra obtener los valores necesarios de  $\mathcal{K}_i$  para explicar los offsets observados.

El cambio al tiempo efectivo de migración afecta también a la ecuación (4.30) para el offset resonante. Luego de algunas manipulaciones algebraicas obtenemos una nueva fórmula para el apartamiento de la resonancia exacta:

$$\Delta_{(p+1)/p}^2 = \frac{2}{D} \left( C_1 \frac{m_2}{m_0} \right)^2 \frac{\left[ (1 - D(1 + \beta)) \mathcal{K}_2 \left( C_2 \frac{m_1}{m_2} \right)^2 + (B + D\beta) \mathcal{K}_1 \left( \frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right) \right]}{1 - \left( \frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right)} \quad (4.38)$$

con las expresiones para  $\tau_{a_i}$  y  $\mathcal{K}_i$  definidas en las ecuaciones (4.32) y (4.35).

### 4.2.2. Migración diferencial y su relación con las masas planetarias

Aún si la migración planetaria se da entre valores limitados de los factores- $\mathcal{K}$ , es posible obtener un offset significativamente grande si el denominador de la expresión (4.38) es suficientemente pequeño. Como ya se mencionó anteriormente, esta cantidad mide la escala de tiempo de migración diferencial entre ambos planetas. Para que la captura en la resonancia sea factible, el planeta externo debe migrar más rápidamente que el interno, es decir,  $\tau_{a_2} < \tau_{a_1}$ , generando valores positivos de  $(1 - \tau_{a_2}/\tau_{a_1})$ . Consecuentemente, valores que se obtienen para  $\Delta_{(p+1)/p}$  son reales.

Para analizar el ingreso y la salida de dos planetas masivos  $m_1$  y  $m_2$  a la conmensurabilidad  $(p+1)/p$ , orbitando alrededor de una estrella de masa  $M_*$ , [Deck y Batygin \(2015\)](#) consideran un Hamiltoniano que utilizan para describir la dinámica de los cuerpos en este sistema conservativo igual al que nosotros utilizamos en la ecuación (4.2). En dicho trabajo, reducen el Hamiltoniano a 1 grado de libertad a través de una serie de transformaciones canónicas, obteniendo en la región del espacio de fase cercana a la resonancia, la siguiente forma:

$$F' = -\frac{1}{2}(\Phi - \Gamma)^2 - \sqrt{2\Phi} \cos(\phi), \quad (4.39)$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{3.75p}{\epsilon_p} \right)^{2/3} \sigma^2, \\ \sigma^2 &\approx e_1^2 + e_2^2 - 2e_1e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2), \\ \phi &= (p+1)\lambda_2 - p\lambda_1 + \psi, \\ \Gamma &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{3.75p}{\epsilon_p} \right)^{2/3} \frac{1}{2} \left( \sigma^2 + \frac{\Delta\alpha}{p} \right), \\ \tan \psi &= -\frac{e_1 \sin \varpi_1 - e_2 \sin \varpi_2}{e_1 \cos \varpi_1 - e_2 \cos \varpi_2}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

con  $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_{res}$ ,  $\epsilon_p = \frac{m_1+m_2}{M_*}$ ,  $\psi$  la longitud generalizada del pericentro y  $\Gamma$  es un parámetro de proximidad, que mide cuán cerca se encuentra el sistema de la resonancia. En el caso conservativo,  $\Lambda < 3/2$  y el sistema tiene un único punto fijo. Si  $\Lambda > 3/2$ , el sistema cuenta con tres puntos fijos y una separatriz de movimiento.

Consideran además la formulación de [Goldreich y Schlichting \(2014\)](#), donde tienen en cuenta el acoplamiento entre el semieje y la excentricidad para sistemas bajo la acción de migración tipo-I, es decir, con planetas pequeños que no abren un gap en el disco. Para ellos se da que  $\tau_e \sim \tau_a H_r^2 \ll \tau_a$ . En general, dos planetas bajo la acción de migración convergente serán atrapados en resonancia si el tiempo que tardan en atravesar el ancho de la misma debido a la migración es lo suficientemente largo comparado con el período de libración de la resonancia y si además la excentricidad inicial de los planetas es baja. Planetas experimentando migración divergente nunca podrán ser atrapados en resonancia por lo tanto únicamente consideran el caso en que se satisface la condición  $\tau_{a_2} > \tau_{a_1}$  de migración convergente. Sin embargo, aún si el planeta interno migra originalmente más rápido que el externo puede alcanzarse

la condición de convergencia cuando el planeta interno alcance el borde interno del disco, frenando allí su migración y permitiendo que el planeta externo lo alcance.

Considerando la dinámica disipativa en el caso con acoplamiento entre  $a$  y  $e$ , las ecuaciones de movimiento se modifican, al menor orden en la excentricidad, de la siguiente manera:

$$\left. \frac{d\Gamma}{dt} \right|_{dis} \sim \frac{A_0}{\tau_a} + \left[ \frac{C_0}{\tau_e} + \frac{\beta A_1}{\tau_a e} \right] \Phi \quad , \quad \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{dis} \sim \frac{C_0}{\tau_e} \Phi. \quad (4.41)$$

Los coeficientes  $A_0$ ,  $A_1$  y  $C_0$  están escritos explícitamente en el apéndice del artículo de [Deck y Batygin \(2015\)](#), no son los mismos que utilizamos nosotros en el desarrollo del Hamiltoniano.

Además,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_e} &= \frac{1}{\tau_{e1}} - \frac{m_1/m_2}{\tau_{e2}} \\ \frac{1}{\tau_a} &= \frac{1}{\tau_{a2}} - \frac{1}{\tau_{a1}} \\ \frac{1}{\tau_{ae}} &= \frac{1}{\tau_{e1}} - \frac{(m_1/m_2)^2 \alpha_{res}}{R^2 \tau_{e1} \tau_{e2}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

donde

$$R^2 \equiv \frac{|f_{p+1,27}(\alpha_{res})|}{|f_{p+1,31}(\alpha_{res}) - 2\delta_{p,1}\alpha_{res}|}. \quad (4.43)$$

donde  $f_{p+1,27}$  y  $f_{p+1,31}$  son función de los coeficientes de Laplace evaluados en  $\alpha_{res}$ .  $\delta_{p,1}$  es la delta de Kronecker y aparece para eliminar el término indirecto en la función perturbadora.

Las ecuaciones (4.41) tienen un punto fijo con 3 autovalores:  $\alpha_0$ , y  $\alpha_{\pm} = \alpha_1 \pm i\alpha_2$ . Se encuentra que  $\alpha_0$  es siempre negativo pero  $\alpha_1$  puede tomar valores tanto positivo como negativo. Si  $\alpha_1 > 0$ , el punto fijo estará asociado a una espiral inestable, en cuyo caso el tiempo en que el sistema permanece en resonancia será finito. Esto se dará cuando

$$\epsilon_p \equiv \frac{m_1 + m_2}{M_{\star}} < \epsilon_{p,crit} \equiv \frac{3\beta}{2^{3/2}0.8\tau_{ae}} \frac{\tau_e}{\tau_{ae}} \frac{(1 + m_1/m_2)^2}{\left[ p \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) + \beta \frac{\tau_e}{\tau_{ae}} \right]^{3/2}} \left( \frac{\tau_e}{\tau_{ae}} \right)^{3/2}. \quad (4.44)$$

Durante su evolución, el sistema pasa primero por el punto fijo (la resonancia) y luego empieza a oscilar con amplitud más y más grande, hasta que se desestabiliza el sistema. Con esto tenemos entonces una condición para *captura temporal*. Utilizando los parámetros del disco (ecuaciones 4.32 y 4.33) esta expresión queda

$$\begin{aligned} \epsilon_p < \epsilon_{p,crit} &\equiv \frac{3\beta}{2^{3/2}0.8} \frac{a_1}{R^2 m_2} \left( \frac{R^2 m_2 a_1 \Sigma_1 \Omega_1 - m_1 a_2 \Sigma_2 \Omega_2}{a_1^2 \Sigma_1 \Omega_1 - a_2^2 \Sigma_2 \Omega_2} \right) \\ &\frac{(1 + m_1/m_2)^2}{\left[ p \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right) + \frac{\beta a_1}{R^2 m_2} \left( \frac{R^2 m_2 a_1 \Sigma_1 \Omega_1 - m_1 a_2 \Sigma_2 \Omega_2}{a_1^2 \Sigma_1 \Omega_1 - a_2^2 \Sigma_2 \Omega_2} \right) \right]^{3/2}} \left[ \frac{Q_e H_r^2}{0.78 Q_a m_1} \left( \frac{m_2 a_2^2 \Sigma_2 \Omega_2 - m_1 a_1^2 \Sigma_1 \Omega_1}{a_1^2 \Sigma_1 \Omega_1 - a_2^2 \Sigma_2 \Omega_2} \right) \right]^{3/2}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

de donde obtenemos una condición sobre las masas de los planetas respecto a la de su estrella progenitora para que se de la captura, que en principio puede ser permanente o temporaria. Sin embargo, para escalas de tiempo cortas ( $1/\alpha_1 > 1/|\alpha_0|$ ) el sistema queda temporalmente atrapado en la resonancia y luego se escapa de la misma.

La excentricidad de equilibrio en resonancia estará dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &= \frac{(1 + m_1/m_2)^2}{2p \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) + 2\beta \frac{\tau_e}{\tau_{ae}}} \frac{\tau_e}{\tau_a} \\ &\equiv \frac{(1 + m_1/m_2)^2}{2p \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) + \frac{2\beta a_1}{R^2 m_2} \left(\frac{R^2 m_2 a_1 \Sigma_1 \Omega_1 - m_1 a_2 \Sigma_2 \Omega_2}{a_1^2 \Sigma_1 \Omega_1 - a_2^2 \Sigma_2 \Omega_2}\right)} \frac{Q_e H_r^2}{0.78 Q_a m_1} \left(\frac{m_2 a_2^2 \Sigma_2 \Omega_2 - m_1 a_1^2 \Sigma_1 \Omega_1}{a_1^2 \Sigma_1 \Omega_1 - a_2^2 \Sigma_2 \Omega_2}\right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Si  $\beta = 0$ , la ecuación (4.45) nunca se puede satisfacer y, por lo tanto, el equilibrio en resonancia es siempre estable. Un criterio suficiente para la estabilidad resulta darse si  $\epsilon_p > \epsilon_{p,crit}$ , que sólo puede satisfacerse si  $\tau_{ae} > 0$ . Esto ocurre en el caso en que

$$\frac{\tau_{e_2}}{\tau_{e_1}} > \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 \frac{\alpha_{res}}{R^2}. \quad (4.47)$$

Además, de las expresiones para  $\tau_{a_i}$  y  $\tau_{e_i}$ , la relación de convergencia implica que la razón de masas  $m_2/m_1$  entre los planetas debe satisfacer la condición

$$\frac{m_2}{m_1} \geq \left(\frac{m_2}{m_1}\right)_{\min} \equiv \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{2}{3}(2f+\alpha-0.5)}. \quad (4.48)$$

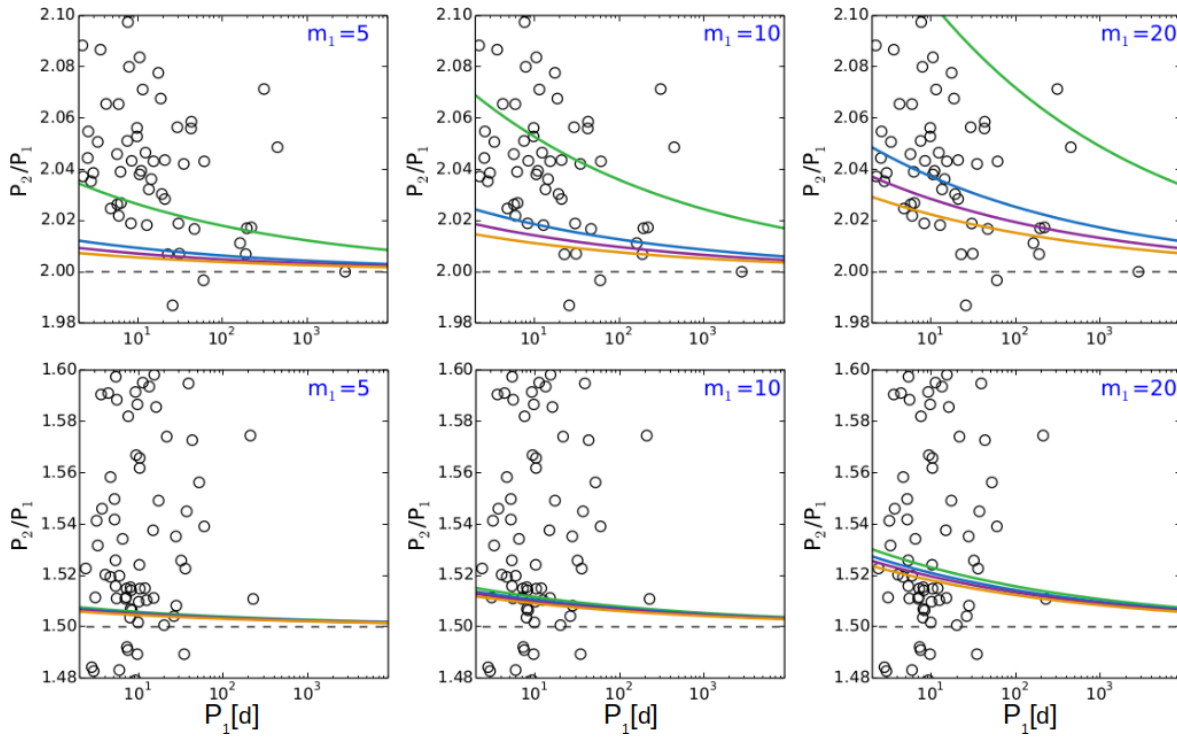
Si el punto fijo es inestable, la amplitud de libración crecerá con el tiempo. Para un cierto rango de parámetros, esta oscilación saturará en un ciclo límite estable que encierre a ese punto fijo. En ese caso, el sistema permanecerá atrapado en resonancia con una amplitud de libración distinta de cero. Un criterio para escapar de la resonancia será tal que el punto fijo sea inestable por lo que no habría posibilidad de saturar hacia un ciclo límite. Formalmente,

$$\epsilon_p = \frac{15p}{64\sqrt{2}} \frac{(1 + m_1/m_2)^3}{\left[p \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) + \beta \frac{\tau_e}{\tau_{ae}}\right]^{3/2}} \left(\frac{\tau_a}{\tau_e}\right)^{3/2} \equiv \epsilon_{CL}. \quad (4.49)$$

La ecuación (4.48) define la razón de masa límite que posibilita la captura en las diferentes comensurabilidades. En el caso general de discos con flare, la posibilidad de captura en una dada resonancia no depende únicamente de la razón de masas sino también de la separación orbital inicial entre los planetas.

Siguiendo con esta notación, si

- $\epsilon_{p,crit} < \epsilon_p \rightarrow$  el sistema queda atrapado en resonancia alrededor de un punto fijo estable,
- $\epsilon_{CL} < \epsilon_p < \epsilon_{p,crit} \rightarrow$  el sistema queda atrapado en resonancia alrededor de un punto fijo inestable, dentro de un ciclo límite.



**Figura 4.6.** Razón de período orbital  $P_2/P_1 = (p+1)/p + \Delta_{(p+1)/p}$  en función del período del planeta interno de cada par,  $P_1$  (en días), tal como se predice en la expresión (4.35). Los valores de los parámetros para los discos fueron  $H_0 = 0.05$ ,  $\alpha = 1$  y un flare de  $f = 0.25$ . Los paneles superiores fueron realizados a partir de la RMM 2/1 mientras que los de abajo para la 3/2. En cada gráfico se asumen valores distintos para las masas del planeta interno ( $m_1$  en  $m_\oplus$ ), cuyo valor se indica en la esquina superior derecha. Cada curva de color representa una razón de masa particular:  $m_2/m_1 = 1.6$  (verde),  $m_2/m_1 = 1.7$  (azul),  $m_2/m_1 = 1.8$  (violeta) y  $m_2/m_1 = 2$  (naranja). Los círculos negros indican la distribución de planetas confirmados, sin distinción de su método de detección.

El límite  $\epsilon_p < \epsilon_{p,crit}$  es un criterio de inestabilidad para sistemas con dos planetas masivos, aunque formalmente, para que se de un escape es necesario también que se cumpla que  $\epsilon_p < \epsilon_{CL}$  y que  $\epsilon_p < \epsilon_{p,crit}$ .

Aplicando la condición (4.48), analizamos la variación del offset resonante en función de la razón de masas y la distancia orbital. Particularmente, analizamos la existencia de un conjunto de parámetros que parezca consistente con la distribución orbital de los sistemas (casi)-resonantes observados.

La Figura 4.6 muestra una aplicación de la ecuación (4.35) para  $H_0 = 0.05$ ,  $\alpha = 1$  y  $f = 0.25$ , para los valores de equilibrio predichos de la ecuación para la razón de períodos  $P_2/P_1 = (p+1)/p + \Delta_{(p+1)/p}$  en función del período del planeta más interno de cada par,  $P_1$ . En los plots superiores se muestran los resultados alrededor de la RMM 2/1, mientras que aquellos para la 3/2 se muestran en los gráficos inferiores. La distribución de los datos observados se encuentran representados por círculos negros vacíos, sin distinción entre los métodos de detección. Cada cuadro corresponde a un valor distinto de  $m_1$  (en unidades de  $m_\oplus$ ), mientras que cada curva de color, a un valor de razón de masas  $m_2/m_1$  diferente: la curva verde corresponde a  $m_2/m_1 = 1.6$ , la azul a  $m_2/m_1 = 1.7$ , la violeta a  $m_2/m_1 = 1.8$  y la naranja a

$$m_2/m_1 = 2.$$

En todos los casos el apartamiento del valor resonante aumenta cuanto menor es la distancia del planeta a la estrella, aunque su magnitud es una función que depende tanto de  $m_1$  como de  $m_2/m_1$ . Como se espera de la ecuación (4.48), razones de masa cercanas a  $(m_2/m_1)_{\min}$  muestran valores grandes de  $\Delta_{(p+1)/p}$ , aunque este valor aumenta con  $m_1$ , resultado igualmente esperado.

Analizando la RMM 2/1 una vez fijados los parámetros del disco, la distribución observada de offsets de exoplanetas no parece compatible con sistemas que tengan masas internas menores a  $m_1 \sim 10m_{\oplus}$ . Aunque estos casos límite son razonablemente adecuados, una variedad mucho mayor de offsets se obtiene asumiendo  $m_1 \simeq 20m_{\oplus}$ , donde prácticamente todos los offsets observados son reproducidos por este modelo.

Los gráficos inferiores, correspondientes a la RMM 3/2, muestran resultados muy diferentes. En todos los casos el offset aumenta a distancias pequeñas de la estrella, pero se observa poca dependencia tanto con  $m_1$  como con la razón de masas. Los mejores resultados se obtienen asumiendo  $m_1 \sim 10m_{\oplus}$  (al menos para este conjunto de parámetros) ya que reproduce bien la acumulación de objetos con  $P_1 \sim 10$  días. La dispersión de  $\Delta_{3/2}$  (menor que  $\Delta_{2/1}$ ) concuerda con las observaciones.

Estos resultados los obtuvimos a partir de nuestro modelo analítico de la expresión (4.38), pero se requiere además una confirmación numérica. El gráfico superior izquierdo de la Figura 4.7 muestra cuatro simulaciones de N-cuerpos, donde la migración planetaria fue modelada de acuerdo a la ecuación (4.31). También se incorporó la receta de Goldreich y Schlichting (2014), presentadas aquí en las ecuaciones (4.36) y (4.37). Asumimos  $\beta = 0.3$  y una densidad superficial de  $\Sigma_0 = 400$  gr/cm<sup>2</sup>. Los factores  $H_0$ ,  $Q_a$  y  $Q_e$  fueron elegidos tal como se describió en la sección 3.2.

En todos los casos simulamos captura en la resonancia 2/1 con  $m_1 = 20m_{\oplus}$  y distintos valores de la razón  $m_2/m_1$ . Tal como se predijo, el offset efectivamente aumenta más cerca de la estrella central, mostrando un muy buen acuerdo con las observaciones. Los 3 gráficos restantes muestran distintos aspectos de la simulación en la que fijamos  $m_2/m_1 = 1.6$ , valor que lleva al mayor offset (y coincidente además con la razón de masas  $m_2/m_1$  del sistema Kepler-25).

El marco superior derecho muestra la evolución de los dos ángulos críticos en función de  $P_2/P_1$ . El ángulo principal  $\theta_1$  libra con baja amplitud alrededor de cero, incluso para offsets  $\Delta_{2/1} \simeq 0.1$ , valores usualmente asociados a movimiento no-resonante. El ángulo auxiliar  $\theta_2$  también libra durante toda la evolución del sistema, aunque con amplitud creciente. Así, aún en el ejemplo numérico más extremo podemos ver que los dos planetas del sistema se mantienen atrapados dentro de las soluciones ACR a pesar de su proximidad (o lejanía) a la resonancia exacta.

Los dos plots inferiores de la Figura 4.7 muestran información complementaria: la excentricidad del planeta interno como función de  $P_2/P_1$  (izquierda) y la relación entre las excentricidades de ambos planetas (derecha). La curva continua negra indica la forma funcional dada por las expresiones (4.20) y (4.21) obtenida para soluciones ACR con el Hamiltoniano resonante de Sessin. La coincidencia con las simulaciones de N-cuerpos es muy buena, lo que indica que un aumento en el offset

sigue la posición de las soluciones ACR de baja amplitud y la evolución del sistema continúa dominada por la conmensurabilidad, incluso para valores grandes de  $\Delta_{2/1}$ .

Realizamos una serie de simulaciones de N-cuerpos cubriendo distintos valores de masas y flare, y observamos la misma evolución que aquella descrita en la Figura 4.7. Contrario a las expectativas, grandes offsets no necesariamente se ven asociados a movimiento no-resonante, incluso si las soluciones resultantes corresponden al dominio de libración cinemático y no dinámico.

El mecanismo propuesto anteriormente depende fuertemente de las masas individuales y la razón de masas de los planetas ubicados cercanos a una RMM tanto 2/1 como 3/2. El aumento del offset cerca de la estrella es más notorio cuando  $m_2/m_1 \simeq 1$  y  $m_1$  al menos del orden de  $10m_{\oplus}$ . Más importante aún, para que sea posible la migración convergente, el planeta externo debe ser más masivo que su compañero más interno, por un factor fuertemente dependiente del flare asumido para el disco.

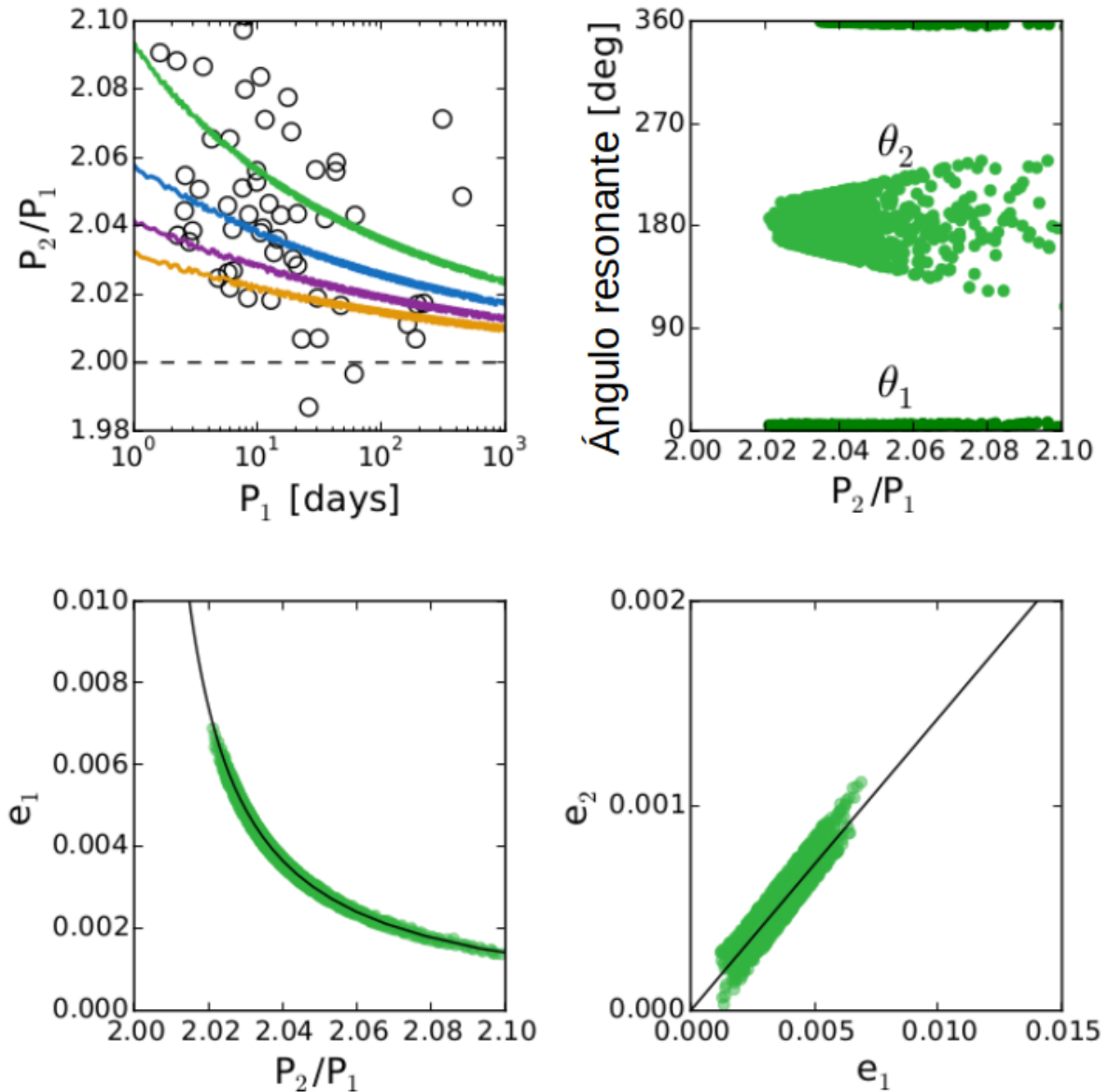
Sin embargo, no es sencillo evaluar si las configuraciones (casi)-resonantes de los exoplanetas observados validan este escenario. La mayoría de los sistemas a los que es posible aplicar la teoría de migración tipo-I fueron descubiertos por tránsito, por lo que tener datos certeros de la medición de sus masas resulta bastante complicado.

### 4.3. Aplicación a sistemas observados

De los 165 pares de planetas en la vecindad de la resonancia 2/1 con  $P_1 \leq 100$  días, únicamente 18 casos tienen masas de los dos planetas medidas o estimadas con algún grado de certeza. De éstos, solo 10 tienen razones de períodos en el intervalo  $P_2/P_1 \in [2.0, 2.10]$  y pueden entonces, ser catalogados como miembros de la región (casi)-resonante. Este número continúa decreciendo ya que 7 de estos sistemas tienen alguno de sus miembros con  $m_i > 50m_{\oplus}$ , masa más que suficiente para abrir un gap en el disco y haber migrado en el régimen tipo-II. Dado que este modelo se basa en prescripciones analíticas para migración laminar tipo-I, estos sistemas se escapan de nuestro espectro de estudio.

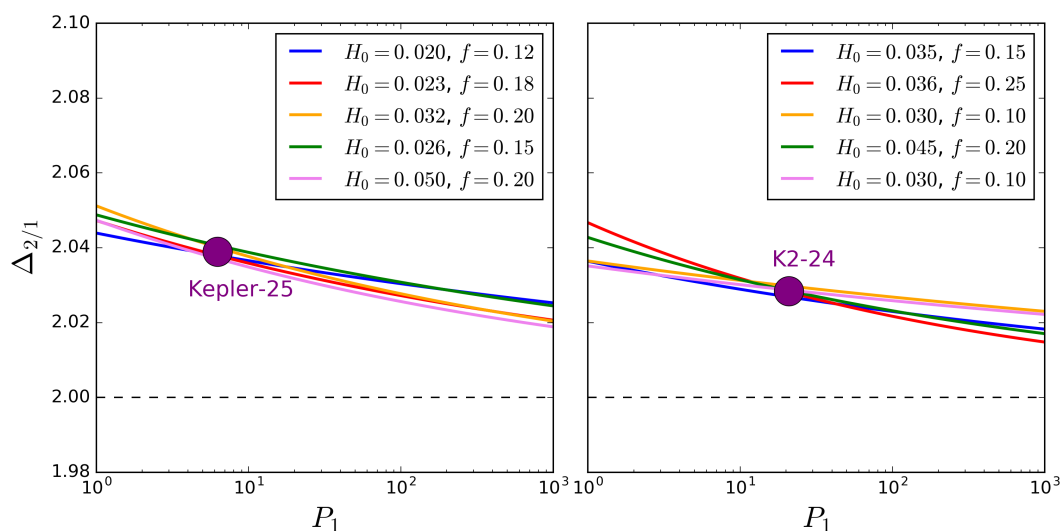
De los 3 sistemas restantes, HD 219134 está muy cuestionado. La primer referencia a este sistema aparece en [Motalebi et al. \(2015\)](#), quien analiza 98 observaciones de VR medidas con el telescopio HARPS-N y encuentra evidencia de 4 planetas de baja masa. El más externo de los planetas del par resonante no fue detectado. Luego, [Vogt et al. \(2015\)](#) analizaron 276 mediciones de VR Doppler e identificaron 6 planetas en este sistema. [Johnson et al. \(2016\)](#) encontraron pruebas sustanciales de periodicidad en los datos debida a la rotación estelar, con un período de 22.8 días, valor prácticamente igual a  $P_1/2$ . Aunque los autores no creen que esta evidencia es suficiente para descartar la existencia del planeta más interno, la amplitud generada por el planeta en la señal de VR puede estar afectada por la rotación estelar y, consecuentemente, la masa  $m_1$  deducida ser sustancialmente menor.

Esto nos deja entonces con 2 sistemas, Kepler-25 ([Marcy et al., 2014](#)) y K2-24 ([Petigura et al., 2016](#)). En la Tabla 4.1 se dan las masas planetarias y períodos orbitales de cada sistema, junto con la masa estelar y la desviación standard de



**Figura 4.7.** El panel superior izquierdo muestra el resultado de 4 simulaciones de N-cuerpos que terminan capturados en la RMM 2/1. En todos los casos, la masa del planeta interno se mantiene fija en  $m_1 = 20m_{\oplus}$ . Las curvas de colores indican diferentes razones de masas:  $m_2/m_1 = 2$  (naranja),  $m_2/m_1 = 1.8$  (violeta),  $m_2/m_1 = 1.7$  (azul), y  $m_2/m_1 = 1.6$  (verde). Los cuadros restantes muestran diferentes características dinámicas de la evolución orbital dentro de la resonancia, de la corrida con  $m_2/m_1 = 1.6$ . La curva negra continua en los paneles inferiores indican las predicciones analíticas dada por las expresiones (4.20) y (4.21).





**Figura 4.8.** *Izquierda:* Con un círculo violeta se muestra la posición de los planetas del sistema Kepler-25 en el plano  $(\Delta_{2/1}, P_1)$ . Las curvas de colores muestran diferentes combinaciones de los parámetros  $f$  y  $H_0$  que satisfacen la ecuación (4.38), utilizando para la densidad superficial siempre  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0.3$ . Las masas usadas son aquellas presentadas en la Tabla 4.1. *Derecha:* Ídem para el sistema K2-24.

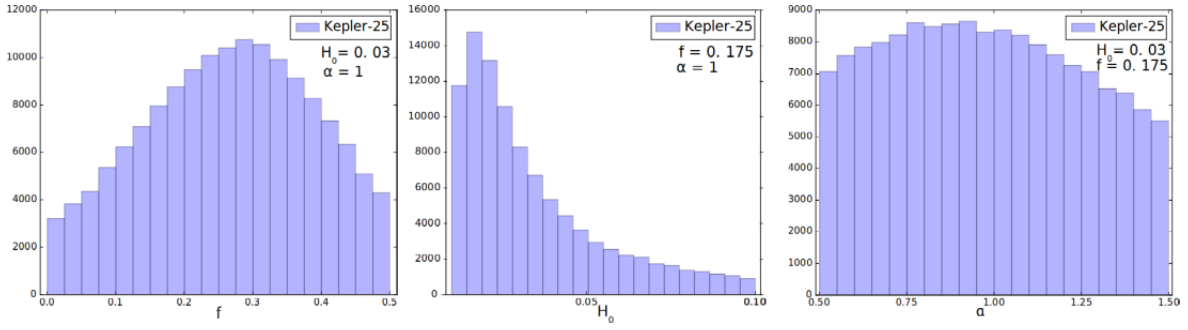
**Tabla 4.1.** Medición de las masas y períodos orbitales de Kepler-25 b,c y K2-24 b,c.

System	$m_1 [m_\oplus]$	$m_2 [m_\oplus]$	$P_1 [d]$	$P_2/P_1$	$m_0 [M_\odot]$
Kepler-25	$9.6 \pm 4.2$	$24.6 \pm 5.7$	6.24	2.0390	$1.22 \pm 0.06$
K2-24	$21.0 \pm 5.4$	$27.0 \pm 7.0$	20.89	2.0284	$1.12 \pm 0.05$

cada parámetro. Ambos sistemas tienen razón de masas (nominales) más grandes que la unidad ( $m_2/m_1 > 1$ ), suficiente como para haber sufrido migración de tipo-I y ser candidatos a captura en resonancia post-migración.

Al tener los datos de las masas, es posible comprobar si el valor observado del desplazamiento de resonancia 2/1 puede lograrse utilizando nuestro modelo, con las suposiciones realizadas, es decir, un disco laminar y acampanado ( $f \neq 0$ ). En la Figura 4.8 se ven, en el plano  $(\Delta_{2/1}, P_1)$ , con un círculo violeta la posición de los planetas del sistema Kepler-25 (a la izquierda) y K2-24 (derecha). Las curvas de colores muestran diferentes combinaciones de los parámetros  $f$ ,  $H_0$  y  $Q_e$  que satisfacen la ecuación (4.38), utilizando para la densidad superficial siempre  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0.3$ .

Para obtener buenos resultados en el modelo es necesario conocer los parámetros de cada disco. El problema radica en que éstos también están pobremente determinados. El índice forma se espera que sea una función fuertemente dependiente de las eficiencias de enfriamiento/calentamiento y de las propiedades radiativas del disco. En simulaciones hidrodinámicas se han registrado valores del orden de  $f \sim 0.3$  (por ejemplo Bitsch et al., 2013). Similarmente, aunque las estimaciones clásicas de la Nebulosa Solar de Masa Mínima proponen valores de  $\alpha \sim 3/2$ , no existe razón para creer que dicho valor sea universal. La distribución observada de sistemas exoplanetarios muestran una gran diversidad de índices para la ley



**Figura 4.9.** Variación de los parámetros del disco  $f$  (izquierda),  $H_0$  (medio) y  $\alpha$  (derecha) para el sistema Kepler-25 [Marcy et al. \(2014\)](#).

de potencia ([Raymond y Cossou, 2014](#)), aunque la posición actual puede no ser indicativa del lugar de formación si los planetas sufrieron gran migración. Por otro lado, aunque se cree que la escala de altura  $H_0 \in [0.01, 0.1]$ , muchos estudios suponen  $H_0 \simeq 0.05$ . Este factor también resulta muy importante ya que el offset es una función fuerte de  $H_0$ , de hecho,  $\Delta_{(p+q),p} \propto 1/H_0$ , ver ecuación (4.38).

Como vemos, hay muchos parámetros libres por determinar. Si fijamos  $Q_a$  y  $Q_e$ , podemos variar los parámetros del disco dentro de su rango posibilidades ( $f \in [0, 0.5]$ ,  $H_0 \in [0.01, 0.1]$  y  $\alpha \in [0.5, 1.5]$ ) y ver, para estos dos sistemas, cual varía más. En la Figura 4.9 la variación de los parámetros del disco  $f$  (izquierda),  $H_0$  (medio) y  $\alpha$  (derecha) para el sistema Kepler-25 y vemos que el parámetro que menos varía es la pendiente del perfil de densidad superficial  $\alpha$ , y lo mismo se observa para el sistema K2-24.

Dado que en estos dos casos el valor  $\Delta_{2/1}$  es conocido, podemos invertir la expresión (4.38) para obtener explícitamente el valor de  $H_0$  en función de las masas y del flare del disco:

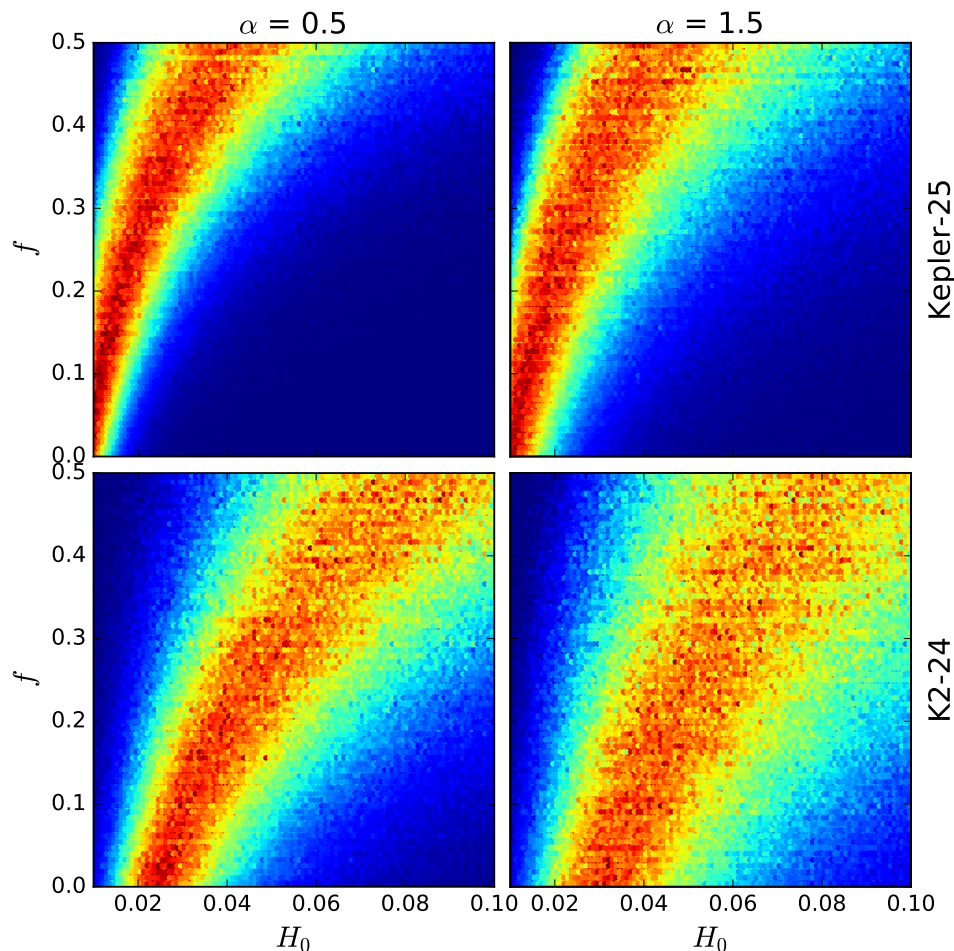
$$H_0^2 = \frac{2}{D \Delta_{\text{obs}}^2} \left( C_1 \frac{m_2}{m_0} \right)^2 \frac{\left[ (1 - D(1 + \beta)) \mathcal{K}_2^* \left( C_2 \frac{m_1}{m_2} \right)^2 + (B + D\beta) \mathcal{K}_1^* \left( \frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right) \right]}{1 - \left( \frac{\tau_{a_2}}{\tau_{a_1}} \right)}, \quad (4.50)$$

donde  $\Delta_{\text{obs}}$  es el valor observado del apartamiento resonante y

$$\mathcal{K}_i^* = 0.78(Q_a/Q_e) a_i^{-2f} \quad (4.51)$$

son expresiones  $H_0$ -normalizadas para los factores- $\mathcal{K}$  de cada planeta. Si las masas de los planetas son conocidas, aún con cierta incerteza, es posible estimar relaciones entre el flare  $f$  y la razón de aspecto  $H_0$  del disco que nos llevan al valor observado del offset. Dado que la incerteza en los valores puede ser significativa, elegimos un enfoque estadístico con el método de Monte Carlo, incorporando los errores en las masas en el cálculo, utilizando los datos de la Tabla 4.1.

El procedimiento fue el siguiente. Para cada sistema realizamos una serie de 1000 conjuntos  $(m_1, m_2)$  de una distribución normal con la media y la varianza que se muestran en la Tabla 4.1. Con los valores de cada corrida logramos determinar los valores de  $(H_0, f)$  de acuerdo con la ecuación (4.50), para 3 valores fijos de  $\alpha$ : 0.5, 1.0, 1.5. Los resultados se muestran en el mapa de colores de la Figura



**Figura 4.10.** Resultados de simulaciones Monte Carlo para el sistema Kepler-25 (paneles superiores) y para K2-24 (paneles inferiores) para dos valores extremos de la densidad superficial del disco. En los gráficos izquierdos se ven los resultados para  $\alpha = 0.5$  mientras que en el derecho se ven para  $\alpha = 1.5$ . El código de colores corresponde a la posibilidad de un par  $(H_0, f)$  de ser solución de la ecuación (4.50) para el  $\Delta_{2/1}$  observado. Colores azules indican baja posibilidad mientras que el rojo se asocia a mayor frecuencia en la salida de resultados.

4.10 donde los paneles superiores corresponden a las simulaciones realizadas para Kepler-25 mientras que los inferiores a K2-24. Los paneles de la izquierda asumen  $\alpha = 0.5$  mientras que los de la derecha son los resultados obtenidos para  $\alpha = 1.5$ . Como se puede observar, los resultados parecen no depender de la pendiente del perfil de densidad superficial, por lo que únicamente mostramos los casos extremos, y no para  $\alpha = 1$  ya que es la interpolación entre  $\alpha = 0.5$  y  $\alpha = 1.5$ . El código de colores corresponde a la posibilidad de un par  $(H_0, f)$  de ser solución de la ecuación (4.50). Colores azules indican baja posibilidad mientras que los rojos se asocian a mayor frecuencia en la salida de resultados.

Para Kepler-25 la mayoría de los resultados positivos se da en un amplio ran-

go de valores, con  $H_0$  pequeños y grandes valores de  $f$ . Esto es consistente con las simulaciones Monte Carlo presentadas también en [Ramos et al. \(2017\)](#) para la población (casi)-resonante y sistemas con masas indeterminadas. Hay que notar además que el hecho de que la indeterminación en  $m_1$  sea tan grande no afecta significativamente los resultados ni la 'posición' de valores  $(H_0, f)$ , consistente con los valores observados del offset que permanecen bastante restringidos.

Los resultados para K2-24 son menos definidos que los de Kepler-25, lo que implica que el rango de parámetros que reproduce el offset observado es más amplio. En parte, esto se debe a que el valor de  $\Delta_{2/1}$  es menor. Por un lado las masas individuales son mayores que las de Kepler-25, cosa que lleva a un dominio resonante mayor. Pero por otro lado, la razón de masas  $m_2/m_1$  es aproximadamente 1 que, como se ve de la ecuación (4.38), también implica un offset mayor aún para bajos valores de  $f$  y grandes de  $H_0$ .

Finalmente, aunque en este trabajo concentramos la atención en la población (casi)-resonante de exoplanetas en las vecindades de las RMM  $3/2$  y  $2/1$ , es importante recordar que la mayoría de estos sistemas compactos permanecen en configuraciones seculares. Mientras explicamos el origen de tales sistemas, es posible que al menos algunos de ellos sean el resultado de capturas resonantes fracasadas o eventos de scattering o colisiones. No todas las razones de masas ni parámetros del disco llevaron a capturas estables ([Deck y Batygin, 2015](#)), y la consecuente evolución caótica de sus órbitas podría explicar al menos algunos de los resultados negativos.

## 4.4. Conclusiones parciales

En este capítulo estudiamos las configuraciones orbitales de los planetas en su interacción con el disco protoplanetario. El intercambio de momento angular entre ellos modula la evolución y la arquitectura final de los sistemas. Estas interacciones afectan a los planetas, principalmente excitando la excentricidad de sus órbitas. Al ser cuerpos de baja masa los estudiados aquí, se produce una migración que depende de la masa del planeta en consideración y, fundamentalmente, de las propiedades físicas del disco en la vecindad de dicho planeta (perfiles de densidad radial y temperatura). Para mejorar el conocimiento de este efecto es necesario conocer los parámetros de los discos protoplanetarios, cosa que por el momento no es posible. Conocerlos llevará a mejorar los modelos dinámicos y las teorías de migración planetaria.

Mediante técnicas analíticas y numéricas analizamos el rol de las capturas luego de migración en distintas resonancias. Hemos presentado un modelo muy simple para explicar el offset resonante  $\Delta_{(p+1)/p}$  generado por migración tipo-I en un disco acampanado y aplicable a resonancias de primer orden. La migración planetaria la describimos usando prescripciones analíticas con factores de corrección elegidos a partir de simulaciones hidrodinámicas en sistemas de dos planetas resonantes. Incluimos además la evolución orbital en etapas tardías de formación, luego de disipado el disco.

Hallamos que la distribución observada de sistemas exoplanetarios en la vecindad de la resonancia  $2/1$  presenta una fuerte evidencia de un aumento en el valor de

$\Delta_{2/1}$  cerca de la estrella central. Aquellos pares de planetas cercanos a la resonancia  $3/2$  muestran una dependencia mucho menor y menores offsets para cualquier distancia. Nuestro modelo logra reproducir adecuadamente ambas propiedades. La distribución general de los sistemas Kepler (casi)-resonantes es consistente con migración lenta en un disco laminar acampanado con un valor grande para el índice de flare ( $f$  alrededor de 0.25) en discos muy finos ( $H_0 \sim 0.03$ ).

Validar este modelo es bastante complicado ya que la mayoría de las observaciones no proveen estimaciones confiables de las masas planetarias. Sin embargo, pudimos aplicar el modelo a dos sistemas planetarios (Kepler-25 y K2-24) cercanos a la resonancia de movimientos medios  $2/1$ , con sus offsets observados y las masas planetarias razonablemente bien estimadas. Encontramos que los parámetros necesarios del disco para explicar la desviación de la resonancia exacta de sistemas bajo el régimen de migración tipo-I, son valores pequeños para la escala de altura del disco ( $H_0$ ) y significativo índice de forma  $f$ . Este acuerdo indica que el mecanismo propuesto puede efectivamente tener un rol determinante en la distribución observada de exoplanetas (casi)-resonantes.

Finalmente encontramos que offsets grandes, incluso del orden de  $\Delta_{2/1} \simeq 0.1$ , siguen asociados al régimen de libración de uno o ambos argumentos críticos. Sin un modelo más sofisticado de resonancias no somos capaces de decir si la libración es dinámica (dentro de la separatriz) o cinemática (fuera del dominio resonante); sin embargo, resulta posible que muchos de estos sistemas (casi)-resonantes, sean efectivamente resonantes después de todo.

Los trabajos que se desprenden de este capítulo han tenido una fuerte repercusión en el estudio de la dinámica de sistemas que comparten estas características. El trabajo titulado 'Planetary migration and the origin of the  $2/1$  and  $3/2$  (near)-resonant population of close-in exoplanets' (Ramos et al., 2017) recibió por el momento 16 citas. En particular, el desarrollo analítico permitió realizar un análisis de sistemas tanto de algunos sistemas extrasolares como también de asteroides del Sistema Solar. Recientemente y sólo para mencionar algunos ejemplos, Christiansen et al. (2018) analizaron los pares de planetas adyacentes del sistema K2-138 con los métodos presentados en este capítulo. Wang y Ji (2017) analizaron las diferentes tasas de migración utilizando nuestras recetas. Pichierri et al. (2018) han estudiado la captura en resonancia para sistemas con planetas de igual masa. Por último, ambos artículos (Charalambous et al., 2017; Ramos et al., 2017) fueron citados por Migaszewski y Goździewski (2018) en un análisis exhaustivo del sistema Kepler-25.



---

## CAPÍTULO 5

---

# Análisis dinámico de 3 planetas

La dinámica de 2 planetas se conoce razonablemente bien. Se tiene un espacio de fases bien mapeado, hay disponibles buenos modelos analíticos adecuados para resonancias de movimientos medios, la dinámica secular también es bien comprendida. Existen criterios de estabilidad, captura y posterior evolución en resonancia. Suena natural entonces continuar con el estudio de la dinámica de sistemas con 3 planetas. Estos sistemas son muy diversos, y los más llamativos son los resonantes, o casi resonantes.

Algunas preguntas que nos surgen, que intentaremos responder en estos capítulos son, por ejemplo, ¿cómo se ve afectada la dinámica de 2 planetas por la presencia del tercer cuerpo? ¿Podrán las teorías desarrolladas para sistemas de 2 planetas ser extendidas y aplicadas al caso de 3 planetas? ¿Podrá hacerse siempre? ¿Cuándo? ¿Existen criterios de estabilidad para sistemas con 3 cuerpos masivos? ¿Cómo se modifica, con respecto al caso de 2 cuerpos, la estructura resonante del espacio de fases? La migración planetaria, ¿se dará de la misma forma?

En este capítulo desarrollaremos entonces el análisis del movimiento de sistemas ficticios con tres planetas y la estructura del espacio generado. Los resultados de este análisis se encuentran publicados en [Charalambous et al. \(2018\)](#).

### Índice

---

<b>5.1. ¿Por qué estudiar resonancias de 3 planetas?</b> . . . . .	<b>82</b>
<b>5.2. El sistema dinámico</b> . . . . .	<b>88</b>
<b>5.3. Estructura resonante</b> . . . . .	<b>94</b>
5.3.1. Construcción de los mapas dinámicos . . . . .	94
5.3.2. Análisis de estructura . . . . .	96
5.3.3. RMM de 3-planetas . . . . .	103
<b>5.4. Aplicación a sistemas planetarios</b> . . . . .	<b>107</b>
5.4.1. Sistemas conocidos en resonancias dobles . . . . .	108
5.4.2. Captura resonante en sistemas ficticios . . . . .	114
<b>5.5. Conclusiones parciales</b> . . . . .	<b>120</b>

---

## 5.1. ¿Por qué estudiar resonancias de 3 planetas?

El número de sistemas planetarios múltiples que se observan alrededor de resonancias de movimientos medios de a pares consecutivos a partir de los datos de la misión *Kepler* es muy grande. Ahora bien, ¿qué significa esto? Las resonancias de movimientos medios entre 2 cuerpos son un caso muy estudiado dentro de la dinámica planetaria por lo que contamos con modelos tanto analíticos, como semi-analíticos y numéricos para el desarrollo de un estudio integral de dicho problema.

Retomando las ecuaciones del capítulo 3, la idea básica es que una resonancia aparece cuando se da una relación de conmensurabilidad entre frecuencias o períodos orbitales entre los cuerpos del sistema. Los períodos involucrados pueden ser el período de rotación y el orbital de un único planeta, generando lo que se conoce como *acoplamiento spin-órbita*, o puede darse una conmensurabilidad entre los períodos orbitales de distintos cuerpos generando las *resonancias de movimientos medios (RMM)*. En el Sistema Solar se observan resonancias de ambos tipos tanto entre planetas como entre satélites o en grupos de asteroides. Los ejemplos más conocidos de acoplamiento spin-órbita son el caso de la Luna, que rota en el mismo tiempo en que se traslada, generando que siempre veamos la misma cara de nuestro satélite. A esta conmensurabilidad se la llama resonancia 1/1. Otro caso es el de Mercurio, que se observa en resonancia 3/2, es decir que el planeta da 2 vueltas alrededor del Sol a la vez que rota 3 veces sobre su propio eje. Ejemplos de RMM se ven entre Júpiter y Saturno, por ejemplo. En este caso, Júpiter da 5 vueltas alrededor del Sol al mismo tiempo que Saturno completa casi 2 revoluciones, y se encuentran en la proximidad de la RMM 5/2. Otro ejemplo se observa en el sistema de las lunas Galileanas de Júpiter: Ío está en resonancia 2/1 con Europa al tiempo que Europa está en resonancia 2/1 con Ganímede. También Neptuno y Plutón están en resonancia 3/2 de movimientos medios. Todas estas resonancias actúan como método preventivo de encuentros próximos entre los cuerpos y hacen que estas posiciones orbitales sean estables.

Existen otras configuraciones, en cambio, que generan perturbaciones que pueden actuar como mecanismo de desestabilización del sistema y hace que ciertas regiones del espacio se observen desprovistas de objetos. Este es el caso de los conocidos lagunas de Kirkwood, en donde Júpiter actúa como responsable de la ausencia de asteroides. En este trabajo nos concentramos únicamente en las resonancias de movimientos medios observadas en sistemas extrasolares. En éstos aparecen también características resonantes, que detallaremos mejor en los capítulos siguientes.

Como mencionamos en la ecuación (3.13), las RMM se dan cuando la relación de movimientos medios  $n_i$  entre planetas satisfacen la condición

$$j_1 n_1 + j_2 n_2 + \cdots + j_N n_N \simeq 0, \quad \text{con } j_i \in \mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

Recordar que el orden de la resonancia viene dado por  $s = |\sum_{i=1}^N j_i|$ . Dinámicamente, las resonancias de bajo orden son las más significativas. Los sistemas exoplanetarios resonantes suelen encontrarse cercanos a alguna RMM con  $s$  pequeño.

Por mucho tiempo, el análisis dinámico de exoplanetas se realizó (y se sigue haciendo) tomando los cuerpos de a pares adyacentes. Supongamos que un sistema



tiene 3 planetas de masas  $m_i$ ,  $m_j$  y  $m_k$ , el análisis usual es mediante el estudio de las razones de períodos orbitales, tomándolos de a dos planetas consecutivos que se encuentran cercanos a sucesivas RMM. A la hora de realizar un estudio dinámico es fundamental el análisis de la variable angular  $\sigma$  del sistema, conocida como ángulo resonante. De la forma tradicional, los ángulos críticos de este sistema de 3 planetas son

$$(p+q)\lambda_j - p\lambda_i - \varpi_i \sim \sigma_{ij_i}, \quad (p+q)\lambda_j - p\lambda_i - \varpi_j \sim \sigma_{ij_j}, \quad (5.2)$$

$$(p+q)\lambda_k - p\lambda_j - \varpi_j \sim \sigma_{jk_j}, \quad (p+q)\lambda_k - p\lambda_j - \varpi_k \sim \sigma_{jk_k}. \quad (5.3)$$

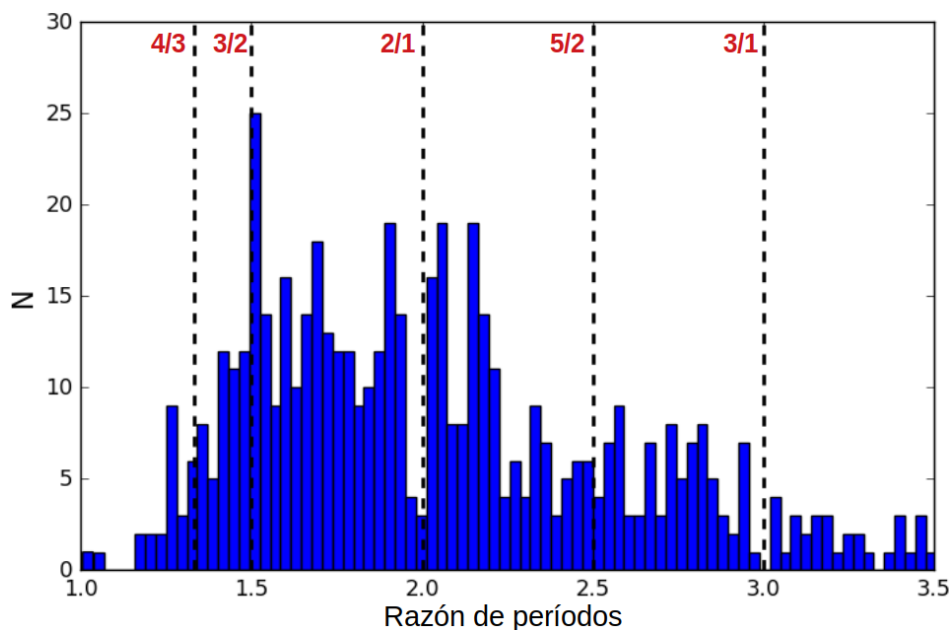
A esta configuración se la conoce como cadena resonante. [Luger et al. \(2017\)](#) propusieron, en cambio, estudiar los sistemas como multi-resonantes, es decir, analizando las resonancias de a 3-planetas en reemplazo a las cadenas resonantes. Esto quiere decir que el sistema será resonante si cumple con la condición

$$\begin{aligned} pn_1 - (p+q)n_2 + qn_3 &\sim 0, & \text{con } p, q \in \mathbb{Z} \\ p\lambda_1 - (p+q)\lambda_2 + q\lambda_3 &\sim \phi \end{aligned} \quad (5.4)$$

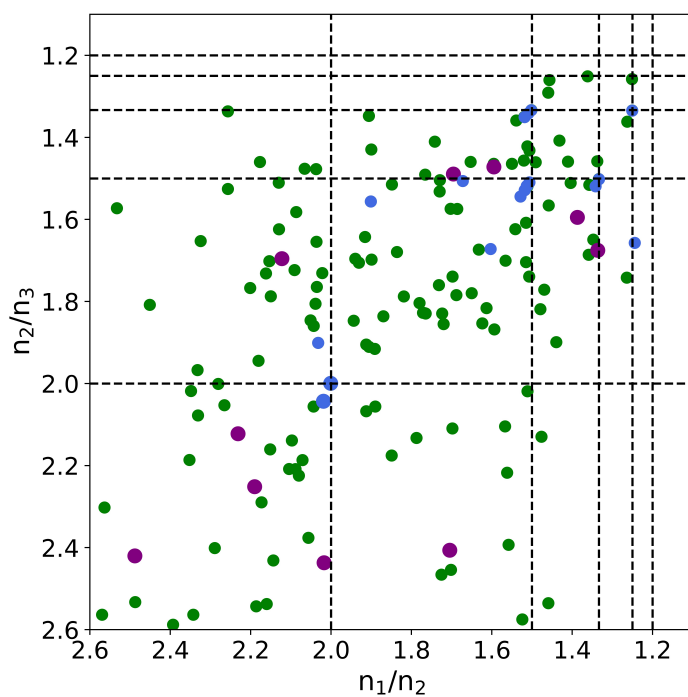
donde  $\phi$  es el ángulo resonante de 3-planetas que libra en torno a un valor fijo. Esta expresión también es conocida como relación de Laplace ([Quillen, 2011](#)). Esta forma fue aplicada en principio al caso particular del sistema TRAPPIST-1, y luego en otros sistemas planetarios que cuentan con 3 o más planetas.

La pregunta que surge es ¿por qué eligieron estudiar al sistema con resonancias entre 3-planetas y no entre 2, como se hacía usualmente? Parte de esta respuesta tiene que ver con la cantidad de sistemas para los cuales la razón de períodos orbitales de pares de planetas adyacentes se encuentran cercanos al valor nominal de RMM entre 2 cuerpos. Específicamente, al realizar este gráfico para los sistemas multiplanetarios descubiertos con cualquier método de detección (ver Figura 5.1) se observa que la mayoría de los pares no se encuentran en el valor exacto de la RMM de 2 planetas (curvas a trazos superpuestas al histograma), ni en su vecindad. Notar que alrededor de las resonancias hay una caída en la cantidad de pares, y en su defecto se encuentra una acumulación en valores levemente mayores a los resonantes. Es de esperar entonces que cadenas resonantes (recordemos, grupos de planetas para los que cada par está en resonancia, con razón de período orbital fijo en un valor racional) o resonancias de 3 planetas, sean más difíciles de encontrar, menos frecuentes ([Izidoro et al., 2017](#); [Lega et al., 2013](#)).

Si queremos analizar sistemas con 3 o más planetas podemos utilizar el plano representativo de la razón de movimientos medios ( $n_1/n_2, n_2/n_3$ ) para analizar sub-conjuntos de a tres. En la Figura 5.2 mostramos la posición de las diferentes ternas de los sistemas observados en un rango de valores limitado. En verde graficamos los sistemas detectados con métodos de tránsito y en violeta, con velocidad radial. En curvas a trazos marcamos las principales resonancias de primer orden: verticales para resonancias entre los planetas interno y medio, y horizontales para el par medio y externo. Aquellos sistemas que se observan en las posiciones exactas de los cruces de RMM de 2 planetas son los que conforman las cadenas resonantes y, por ende, considerados como sub-conjuntos resonantes. Además, observamos sistemas cercanos a esta configuración resonante doble aunque, mediante este gráfico únicamente, no es posible determinar si son o no son multi-resonantes.



**Figura 5.1.** Histograma de la razón de períodos orbitales de pares de planetas adyacentes en sistemas con más de 2 planetas, incluyendo todos los métodos de detección. En líneas a trazos están marcadas las posiciones nominales de las resonancias de 2 cuerpos. Este diagrama lo realizamos con datos extraídos de la base de datos de <https://www.exoplanets.eu> en diciembre de 2017.



**Figura 5.2.** Ternas de planetas observados en sistemas con 3 o más planetas en el plano representativo de la razón de movimientos medios ( $n_1/n_2, n_2/n_3$ ). En verde se muestran graficados los sistemas detectados con métodos de tránsito y en violeta, con velocidad radial. En curvas a trazos marcamos las principales resonancias de primer orden: verticales para resonancias entre los planetas interno y medio, y horizontales para el par medio y externo. Sistemas en resonancias múltiples o en cadenas resonantes se muestran en azul (ver Tabla 5.1).

Sistema	Relación resonante	Descubrimiento	Método de detección
GJ-876	$n_b - 3n_c + 2n_d \simeq 0$	Rivera et al. (2010)	Velocidad Radial
HR-8799	$n_b - 3n_c + 2n_d \simeq 0$	Goździewski y Migaszewski (2014)	Imagen Directa
TRAPPIST-1	$2n_b - 5n_c + 3n_d \simeq 0$ $n_c - 3n_d + 2n_e \simeq 0$ $2n_d - 5n_e + 3n_f \simeq 0$ $n_e - 3n_f + 2n_g \simeq 0$ $n_f - 2n_g + n_h \simeq 0$	Gillon et al. (2016)	
Kepler-60	$n_b - 2n_c + n_d \simeq 0$	Steffen et al. (2013)	
Kepler-79	$n_b - 3n_c + 2n_d \simeq 0$	Wang et al. (2012)	
Kepler-80	$2n_d - 5n_e + 3n_b \simeq 0$ $n_e - 3n_b + 2n_c \simeq 0$	MacDonald et al. (2016)	
Kepler-90	$n_b - 2n_c + n_i \simeq 0$ $n_c - 2n_i + n_d \simeq 0$ $n_i - 2n_d + n_e \simeq 0$ $n_d - 3n_e + 2n_f \simeq 0$ $n_e - 2n_f + n_g \simeq 0$ $n_f - 3n_g + 2n_h \simeq 0$	Borucki et al. (2011)	Tránsito
Kepler-223	$n_b - 2n_c + n_d \simeq 0$ $n_c - 3n_d + 2n_e \simeq 0$	Mills et al. (2016a)	
K2-138	$2n_b - 5n_c + 3n_d \simeq 0$ $2n_c - 5n_d + 3n_e \simeq 0$ $2n_d - 5n_e + 3n_f \simeq 0$	Christiansen et al. (2018)	

**Tabla 5.1.** Características de los sistemas multiresonantes. Se destaca el nombre de cada sistema, la relación de conmensurabilidad que genera cada resonancia de 3 planetas en un mismo sistema, el grupo que descubrió cada sistema y el método con el que fue detectado.

Sin embargo, existen varios sistemas que cumplen la condición de resonancia múltiple, tanto sistemas de planetas gigantes descubiertos con VR como sub-jovianos descubiertos con la técnica de tránsito. A varios de estos sistemas los observamos en la vecindad de los cruces de RMM entre 2 planetas, y se encuentran marcados en azul en la Figura 5.2. No obstante, algunos de estos puntos azules se encuentran apartados de una posición resonante identificada. En la Tabla 5.1 se detalla cuál es la condición resonante que satisface cada sub-conjunto de 3 planetas en algunos sistemas particulares, el grupo de trabajo que descubrió a cada uno y con qué método fueron detectados. Recordar que aquellos planetas descubiertos por VR no tienen tan bien determinado el período como los de tránsito, y que los de tránsito no poseen tan buenas determinaciones de las masas como los de velocidad radial. Observar que en varios de estos sistemas destacados en la Tabla 5.1 aparece al menos una vez la conmensurabilidad  $n_i - 3n_j + 2n_k \simeq 0$ . A este caso particular de resonancia de 3 cuerpos se le da el nombre de *resonancia de Laplace*, y se da en el caso en que los cocientes de movimientos medios de los pares consecutivos satisfacen que  $n_i/n_j \sim n_j/n_k \sim 2/1$ . A este caso lo distinguiremos como resonancia de orden cero:  $j_1 + j_2 + j_3 = 0$ .

De los sistemas presentados en la Tabla 5.1, podemos destacar algunas características. Por ejemplo, TRAPPIST-1 (Gillon et al., 2016, 2017) es un sistema

exoplanetario único, que consta de 7 exoplanetas en una cadena bastante compleja de resonancias, compuesta por cinco resonancias entrelazadas de orden cero entre subconjuntos de 3 planetas. Aunque el estado multiresonante de este sistema no ha sido efectivamente confirmado al momento, muchas condiciones iniciales consistentes con las observaciones llevan a inestabilidades dinámicas en cortas escalas de tiempo (Gillon et al., 2017). Simulaciones de N-cuerpos realizadas por Tamayo et al., 2017 indican que configuraciones similares estables pueden encontrarse si la migración es lo suficientemente lenta.

Otros caso llamativo lo presenta Kepler-223 (Mills et al., 2016b). Para éste, a lo largo de 4 años de observaciones, se han obtenido mediciones precisas de TTV que muestran la libración de los ángulos de Laplace. Más allá del número de planetas conocidos, los bloques de construcción fundamentales de todas estas cadenas de resonancia consisten en resonancias de Laplace de 3 cuerpos. Así, independientemente de la multiplicidad de planetas, varias propiedades dinámicas de los sistemas multi-resonantes pueden ser abordadas estudiando las conmensurabilidades entre 3 planetas.

Aunque no aparece en la tabla, otro sistema interesante es Kepler-444 (Campante et al., 2015). Cuenta con cinco planetas orbitando la estrella central, todos dentro de las  $0.8 \text{ ua}$ . Este sistema es particularmente especial por dos motivos. El primero es que la estrella tiene una compañera binaria a  $\sim 60 \text{ ua}$ , que al estar tan cerca, pudo haber influenciado el proceso de formación planetaria. Por otro lado, se estima que la edad de la estrella central tiene  $11.2 \times 10^9$  años, postulándose como uno de los sistemas más viejos conocidos hasta la fecha, por lo que resulta un buen candidato para analizar cómo los efectos tidales pueden haber modificado su arquitectura orbital primordial. Sin embargo, en este análisis dejamos afuera a este sistema justamente porque la estrella secundaria puede generar perturbaciones tan grandes que no abordamos en este estudio. Además, es probable que los procesos de formación de un sistema binario sean diferentes al de los sistemas simples.

En este capítulo pretendemos analizar las arquitecturas observadas en la población exoplanetaria. En particular, queremos entender las configuraciones (casi)-resonantes que muestran los sistemas, ya sean tomados de a pares o en ternas. Para esto, es necesario comenzar preguntándonos ¿cómo llegaron a esas configuraciones? Aceptamos que durante las primeras etapas de la formación planetaria existió un disco protoplanetario en el que los embriones estaban inmersos. Resumiendo lo visto en el capítulo 1 secciones 1.3 y 1.4, las interacciones tidales entre el disco gaseoso y los protoplanetas producen una pérdida de momento angular en el planeta que es depositado en el disco, generando que el exoplaneta migre hacia adentro (Ward, 1997). La perturbación que el protoplaneta induce al gas es relativamente pequeña. El torque al que es sometido el planeta depende principalmente de las características del disco, y es inversamente proporcional a la masa del planeta que se encuentra migrando. Por este motivo, la migración de tipo-I resulta más eficiente mientras más masivos sean los cuerpos, aunque no deben ser tan masivos como para experimentar migración de tipo-II (e.g. Lin et al., 1996; Lin y Papaloizou, 1985) y abrir un gap en el disco. Se supone que aquellos planetas descubiertos con métodos de tránsito tienen baja masa, por lo que habrían sufrido migración tipo-I.

Masset et al. (2006) proponen que el borde interno del disco provee lo que se

conoce como *trampa planetaria*, una sobredensidad en la densidad superficial del disco que genera una barrera para la migración. A lo largo de este proceso se espera que los planetas queden atrapados en resonancias de movimientos medios, de a pares. Es decir, que el planeta más interno frenará en el lugar de la trampa y el resto de los planetas detendrán su migración cuando entran en resonancia con el primero, formando así una cadena (Ogihara y Ida, 2009; Terquem y Papaloizou, 2007). En sistemas con 3 o más planetas el resultado de la migración puede también ser una resonancia múltiple, que no termina de quedar claro cómo se forma. Se esperaría, por esta razón, observar una acumulación de planetas cerca de resonancias de 2 planetas. Sin embargo, muchas diferentes arquitecturas se observan entre los sistemas observados, especialmente en posiciones diferentes a las esperadas.

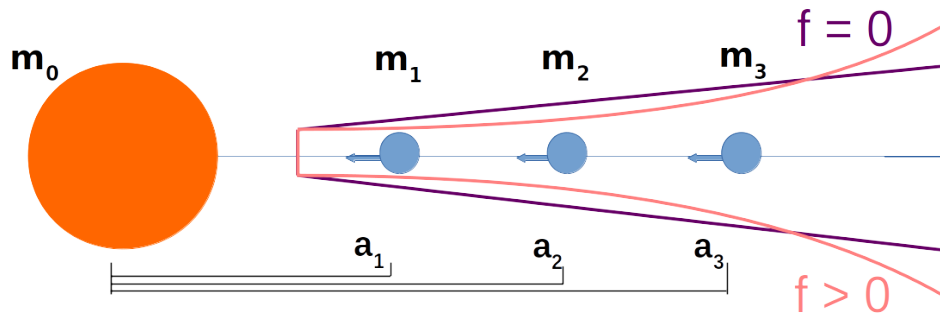
Luego de la disipación del disco de gas, se cree que los planetas evolucionan por interacción tidal con la estrella, escapando de la posición nominal de la comensurabilidad. La combinación de estos dos mecanismos podrían, en principio, explicar globalmente la población exoplanetaria conocida.

La estructura resonante que muestran los sistemas de la Tabla 5.1 es consistente con el escenario planteado en los párrafos anteriores, particularmente de aquellos que experimentan migración de tipo-I, masas menores a  $50 m_{\oplus}$ . Esta configuración sugiere que los planetas del sistema se han formado en la región externa del disco y han migrado hacia adentro (ver por ejemplo, Raymond et al., 2008). Esto sugiere que la migración orbital que sufrieron los planetas de cada sistema tuvo un papel muy importante a la hora de delimitar su estructura, en la cual se generaron cadenas resonantes que unen a todos los miembros del sistema. Además, en muchos de los sistemas, dada la cercanía de los planetas a la estrella central también deben haber sido importantes en la evolución orbital de los planetas, las interacciones tidales con la estrella.

Las resonancias de 3 planetas pudieron haber jugado un rol muy importante al definir la arquitectura de nuestro propio Sistema Solar. Aparte de las resonancias clásicas entre los tres satélites internos Galileanos (e.g. Guzzo, 2005, 2006; Murray y Holman, 1999; Yoder, 1979, entre otros), propusieron que las cadenas resonantes actuaron entre los planetas externos, generando posiblemente el (extremadamente débil) movimiento caótico en el Sistema Solar exterior.

Las resonancias múltiples no tienen un desarrollo teórico muy elaborado hasta el momento ya que hasta hace no tanto tiempo, únicamente se conocían a las lunas galileanas en esta configuración. Luego apareció el sistema GJ876 en resonancia de Laplace y ahora existen estos otros que mostramos en la Tabla 5.1, pero todavía no hay un estudio completo respecto de la estructura resonante, la estabilidad ni de las condiciones de migración para estos sistemas. En lo que sigue, abordaremos este problema sobre las multi-resonancias utilizando como base a la RMM de Laplace.

Para realizar el estudio dinámico que proponemos, trabajamos con sistemas de 3 planetas de masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  ubicados a una distancia  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ , respectivamente, orbitando en torno a una estrella central de masa  $m_0$  (y  $m_0 \gg m_i$ ), tal como se muestra en la Figura 5.3. Como únicamente consideramos planetas de baja masa, sólo tendremos en cuenta los efectos de la migración de tipo-I. Suponemos que los planetas están inmersos en el disco de gas, en el que cada uno puede desplazarse en una escala de tiempo  $\tau_{a_i}$ , y modificar su excentricidad en un tiempo  $\tau_{e_i}$ . La forma



**Figura 5.3.** Representación esquemática del sistema a considerar. Consta de tres planetas de masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  ubicados a una distancia  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$ , respectivamente. Los planetas se encuentran en órbitas circulares y coplanares en torno de una estrella central de masa  $m_0$ , con  $m_0 \gg m_i$ . Los mismos se encuentran sumergidos en un disco de gas caracterizado por el índice de flare  $f$ . En este disco tienen permitido migrar orbitalmente a una tasa  $\tau_{a_i}$  y modificar su excentricidad a una tasa  $\tau_{e_i}$ .

del disco varía dependiendo del *índice de forma* o *flare* que únicamente puede tomar valores de  $f \geq 0$  (Bitsch et al., 2013). Recordar que los diferentes valores de  $f$  nos indican su forma: cuando  $f = 0$  el disco es plano mientras que  $f > 0$  hace referencia a un disco acampanado.

Para comprender este fenómeno abordamos dos enfoques diferentes, uno analítico y otro numérico. Para desarrollar la parte analítica del trabajo utilizamos un formalismo Hamiltoniano, en variables canónicas modificadas de Delaunay, en un sistema de referencia Jacobiano, herramientas que ya venimos describiendo en detalle a lo largo de los capítulos anteriores.

Como parte numérica realizamos una serie de mapas dinámicos utilizando un integrador de N-cuerpos en el plano representativo de la razón de movimientos medios entre pares de planetas consecutivos. Tomamos allí las condiciones iniciales para sistemas de 3 planetas ficticios. Esto nos ayuda a revelar la compleja estructura resonante, como así también las fuerzas relativas y el origen común entre las resonancias de 2 planetas y aquellas de distintos ordnes entre 3 planetas. Estudiamos además la captura en resonancia luego del proceso de migración planetaria como función de las condiciones iniciales, la masa planetaria y las tasas de migración, y discutimos cómo diferentes tipos de configuraciones resonantes pueden ser alcanzadas en cada caso.

Finalmente, comparamos estas estructuras y los resultados teóricos con la distribución de exoplanetas conocidos.

## 5.2. El sistema dinámico

El sistema consiste de 3 masas planetarias  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) en órbitas coplanares alrededor de una estrella central de masa  $m_0$ , con  $m_0 \gg m_i$ . Trabajamos en variables canónicas modificadas de Delaunay (presentadas en la ecuación (3.11)), en un sistema de referencia Jacobiano. A modo de repaso, tendremos un Hamiltoniano general que consistirá de dos partes,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$  donde  $\mathcal{H}_0$  es el Hamiltoniano

no-perturbado (integrable) que toma la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_0 = - \sum_{i=1}^{N_{pl}} \frac{\mu_i^2 m_i'^3}{2L_i^2} = - \frac{\mu_1^2 m_1'^3}{2L_1^2} - \frac{\mu_2^2 m_2'^3}{2L_2^2} - \frac{\mu_3^2 m_3'^3}{2L_3^2}, \quad (5.5)$$

donde  $N_{pl}$  se corresponde con el número de planetas a considerar, 3 en este caso. La perturbación tiene los siguientes términos

$$\mathcal{H}_1 \equiv -\mathcal{R} = -\mathcal{R}_{12} - \mathcal{R}_{23} - \mathcal{R}_{13}. \quad (5.6)$$

Recordar de la ecuación 3.29 que  $\mathcal{R}_{ij}$  considera la interacción entre los cuerpos  $i$  y  $j$ . Escrito de esta manera, la perturbación tiene en cuenta la fuerza que se hacen entre cada uno de los pares de cuerpos del sistema.

Al realizar modelos analíticos, las posiciones de las resonancias vienen dadas en variables medias ( $\vec{J}^*$ ,  $\vec{\theta}^*$ ) (promediadas sobre los términos de corto período) pero en las simulaciones numéricas, la estructura de las resonancias se obtiene en variables osculadoras ( $\vec{J}$ ,  $\vec{\theta}$ ). En la Figura 3.3 mostramos en negro el resultado de una simulación y en rojo el promedio en cada una de las variables dinámicas. Para hacer un análisis comparativo entre los resultados de las simulaciones con el modelado teórico, es necesario realizar un cambio de variables medias a osculadoras, que existe para el caso de 2 planetas, pero no para 3.

Nuestros mapas dinámicos son calculados en el plano representativo de los elementos osculadores. Aunque la diferencia entre ambos conjuntos de variables puede no ser muy significativa para masas planetarias pequeñas y/o para sistemas muy lejos del límite de estabilidad de Hill (Deck et al., 2013; Ferraz-Mello et al., 2005; Ramos et al., 2015), sí es muy importante para lograr identificar correctamente las resonancias que se observan en los mapas dinámicos y para poder calcular las fuerzas relativas entre ellas. De esta forma y dado que estamos interesados en analizar los resultados de las simulaciones de la dinámica en el largo plazo, es necesario remover todas las contribuciones de corto período promediando sobre las longitudes medias de los planetas. Para obtener entonces un buen ajuste para las posiciones de las conmensurabilidades de 2 y 3 planetas con los mapas, transformamos las posiciones de las resonancias (definidas en elementos medios) a sus contrapartes en variables osculantes.

Los detalles de la transformación canónica para sistemas de 2 planetas está bien detallada en artículos como Deck et al. (2013); Ramos et al. (2015); Tisserand (1889). Sin embargo, la extensión a sistemas de 3 planetas no es tan conocida. Nos detenemos aquí en ese desarrollo. La construcción de la función canónica es análoga al caso de 2 cuerpos. La única diferencia significativa es la existencia de tres términos independientes en la función perturbadora (3.29). Seguimos el desarrollo propuesto (aunque no del todo detallado) en el trabajo de Ramos et al. (2015), pero claramente, extendiendo al caso de 3 planetas. Seguimos este trabajo ya que se basó en un modelo semianalítico que mostró ser mucho más preciso que las estimaciones analíticas (por ejemplo, Deck et al., 2013; Ferraz-Mello et al., 2005). Sin embargo, como únicamente nos concentramos en el caso circular (i.e.  $e_i = 0$ ), la transformación entre elementos medios y osculadores se puede realizar de modo

cerrado con un desarrollo analítico, y no dependerá de la proximidad de las condiciones iniciales a cualquier resonancia de movimientos medios. Como consecuencia, la transformación deseada será equivalente a vincular las variables osculadoras  $(L_i, S_i, \lambda_i, -\varpi_i)$  con las seculares  $(L_i^*, S_i^*, \lambda_i^*, -\varpi_i^*)$ .

La metodología es bastante conocida. Buscamos una función generatriz del tipo de Lie  $B : (L_i, S_i, \lambda_i, -\varpi_i) \rightarrow (L_i^*, S_i^*, \lambda_i^*, -\varpi_i^*)$  tal que el Hamiltoniano transformado sea independiente de las longitudes medias nuevas, es decir,  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*(S_i^*, -\varpi_i^*; L_i^*)$ . Esta transformación entre elementos medios y osculadores puede no ser muy importante cuando los planetas se encuentran alejados (ceranos a la resonancia 2:1, por ejemplo) pero resulta necesaria cuando los cuerpos están cerca. Contrariamente a la aplicación usual del método de promediación de Hori, consideramos una función generatriz  $B$  escrita en variables viejas (osculadoras) en vez de en variables nuevas (medias). A primer orden en las masas, la relación entre ambos conjuntos estará dado explícitamente por

$$\begin{aligned} L_i &= L_i^* + \frac{\partial B}{\partial \lambda_i} & ; & \quad \lambda_i = \lambda_i^* - \frac{\partial B}{\partial L_i}, \\ S_i &= S_i^* - \frac{\partial B}{\partial \varpi_i} & ; & \quad \varpi_i = \varpi_i^* + \frac{\partial B}{\partial S_i}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

con  $(i = 1, 2, 3)$ . La función generatriz de primer orden  $B$  es la solución de la ecuación diferencial parcial

$$-\vec{n} \cdot \frac{\partial B}{\partial \vec{\lambda}} = \{\mathcal{H}_1\} = -\{\mathcal{R}_{12}\} - \{\mathcal{R}_{23}\} - \{\mathcal{R}_{13}\} \quad (5.8)$$

donde  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  es el vector de movimiento medio,  $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  es el vector de longitudes medias, y  $\{\mathcal{R}_{ij}\}$  denota la parte puramente periódica de  $\mathcal{R}_{ij}$  (e.g. Ferraz-Mello, 2007; Hori, 1961). Hemos usado que  $\{\mathcal{R}_{ij}\} = \mathcal{R}_{ij} - \langle \mathcal{R}_{ij} \rangle$ , donde  $\langle \mathcal{R}_{ij} \rangle$  es parte de la función perturbadora  $\mathcal{H}_1$  de la ecuación (3.29) que considera la interacción entre los planetas  $i$  y  $j$ .  $\mathcal{R}_{ij}$  es sólo la parte no promediada de la función perturbadora exacta evaluada en las condiciones iniciales (en variables medias), mientras que  $\langle \mathcal{R}_{ij} \rangle$  es la contribución promediada sobre los ángulos rápidos (ver capítulo 3 para desarrollo completo).

Ya que hemos elegido expresar  $B$  en variables osculadoras  $B = B(L_i, S_i, \lambda_i, -\varpi_i)$  en vez de en su contraparte en elementos medios  $B = B(L_i^*, S_i^*, \lambda_i^*, -\varpi_i^*)$ , las ecuaciones de transformación (5.7) deberán ser resueltas de modo iterativo. Sin embargo, la precisión que se gana con este enfoque hace que el esfuerzo valga la pena.

En el caso de órbitas circulares, y despreciando los términos indirectos, la expansión de Laplace de la función perturbadora toma la siguiente forma (Brouwer y Clemence, 1961)

$$\mathcal{R}_{ij} = \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{2a_j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{1/2}^{(k)}(\alpha_{ij}) \cos[k(\lambda_i - \lambda_j)] \quad (5.9)$$

con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $\alpha_{ij} = a_i/a_j$  la razón de semiejes mayores. Las funciones  $b_{1/2}^{(h)}(\alpha_{ij})$  son los coeficientes de Laplace para  $s = 1/2$

$$b_s^{(k)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(k\phi) d\phi}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \phi)^s}. \quad (5.10)$$



Sumando las tres funciones perturbadoras  $\mathcal{R}_{ij}$  diferentes que salen de las interacciones entre los planetas  $i$  y  $j$ , eliminando los términos seculares (no periódicos), e introduciendo la expresión resultante en la ecuación (5.8), se puede calcular explícitamente la función generatriz, obteniendo

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{a_2(n_1 - n_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} b_{1/2}^{(k)}(\alpha_{12}) \sin [k(\lambda_1 - \lambda_2)] + \\
&+ \frac{\mathcal{G}m_2m_3}{a_3(n_2 - n_3)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} b_{1/2}^{(k)}(\alpha_{23}) \sin [k(\lambda_2 - \lambda_3)] + \\
&+ \frac{\mathcal{G}m_1m_3}{a_3(n_1 - n_3)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} b_{1/2}^{(k)}(\alpha_{13}) \sin [k(\lambda_1 - \lambda_3)].
\end{aligned} \tag{5.11}$$

En la vecindad de una resonancia de movimientos medios, los  $\varpi_i$  son ángulos lentos, es decir variables de largo período, mientras que  $\sigma$ , el ángulo crítico resonante, tiene una frecuencia mayor, del orden del período orbital de los cuerpos del sistema. Por esta razón, resulta útil entonces promediar el Hamiltoniano y eliminar variaciones de corto período. Sin embargo, la relación entre el conjunto de variables canónicas originales (variables medias) y su contraparte osculadora, no depende de la resonancia y, por ende, debe ser válida para cualquier condición inicial, resonante o no-resonante.

Reemplazando (5.11) en (5.7) y resolviendo las ecuaciones de transformación, obtenemos las coordenadas viejas  $L_i$  en términos de las nuevas,

$$\begin{aligned}
L_1 &= L_1^* + \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{a_2(n_1 - n_2)} \sum_{k=1}^{\infty} b_{1/2}^{(k)}(\alpha_{12}) \cos [k(\lambda_1 - \lambda_2)] \\
&+ \frac{\mathcal{G}m_1m_3}{a_3(n_1 - n_3)} \sum_{k=1}^{\infty} b_{1/2}^{(k)}(\alpha_{13}) \cos [k(\lambda_1 - \lambda_3)], \\
L_2 &= L_2^* - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{a_2(n_1 - n_2)} \sum_{k=1}^{\infty} b_{1/2}^{(k)}(\alpha_{12}) \cos [k(\lambda_1 - \lambda_2)] \\
&+ \frac{\mathcal{G}m_2m_3}{a_3(n_2 - n_3)} \sum_{k=1}^{\infty} b_{1/2}^{(k)}(\alpha_{23}) \cos [k(\lambda_2 - \lambda_3)], \\
L_3 &= L_3^* - \frac{\mathcal{G}m_2m_3}{a_3(n_2 - n_3)} \sum_{k=1}^{\infty} b_{1/2}^{(k)}(\alpha_{23}) \cos [k(\lambda_2 - \lambda_3)] \\
&- \frac{\mathcal{G}m_1m_3}{a_3(n_1 - n_3)} \sum_{k=1}^{\infty} b_{1/2}^{(k)}(\alpha_{13}) \cos [k(\lambda_1 - \lambda_3)].
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Ya que estamos trabajando únicamente con órbitas circulares,  $B$  no depende ni de  $S_i$  ni de  $\varpi_i$ . Más aún, eligiendo condiciones iniciales con  $\lambda_i = 0$ , se obtiene  $\lambda_i^* = 0$ , mientras que los cambios en las acciones  $L_i$  pueden escribirse en términos de la

función perturbadora original como

$$\begin{aligned} L_1 &= L_1^* + \frac{\{\mathcal{R}_{12}\}}{(n_1 - n_2)} + \frac{\{\mathcal{R}_{13}\}}{(n_1 - n_3)}, \\ L_2 &= L_2^* - \frac{\{\mathcal{R}_{12}\}}{(n_1 - n_2)} + \frac{\{\mathcal{R}_{23}\}}{(n_2 - n_3)}, \\ L_3 &= L_3^* - \frac{\{\mathcal{R}_{13}\}}{(n_1 - n_3)} - \frac{\{\mathcal{R}_{23}\}}{(n_2 - n_3)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Finalmente, como  $\lambda_i = 0$ , la amplitud de las funciones puramente periódicas puede calcularse de forma explícita

$$\begin{aligned} \{\mathcal{R}_{ij}\} &= \mathcal{R}_{ij} - \langle \mathcal{R}_{ij} \rangle \\ &= \mathcal{R}_{ij} - \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{a_j} \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)}(\alpha_{ij}) \\ &= \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{a_j} \left( \frac{a_j}{\Delta_{ij}} - \alpha_{ij} - \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)}(\alpha_{ij}) \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Como  $\Delta_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  entonces  $a_j/\Delta_{ij} = (1 - 2\alpha_{ij} + \alpha_{ij}^2)^{-1/2}$ , y se obtiene que

$$\{\mathcal{R}_{ij}\} = \frac{\mathcal{G}m_i m_j}{a_j} \left( \frac{1}{(1 - \alpha_{ij})} - \alpha_{ij} - \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)}(\alpha_{ij}) \right). \quad (5.15)$$

Introduciendo esta expresión en las ecuaciones (5.13) podemos obtener una fórmula analítica para la transformación entre elementos de medios y osculadores de los momentos de Delaunay y, consecuentemente, entre los semiejes mayores  $a_i$ .

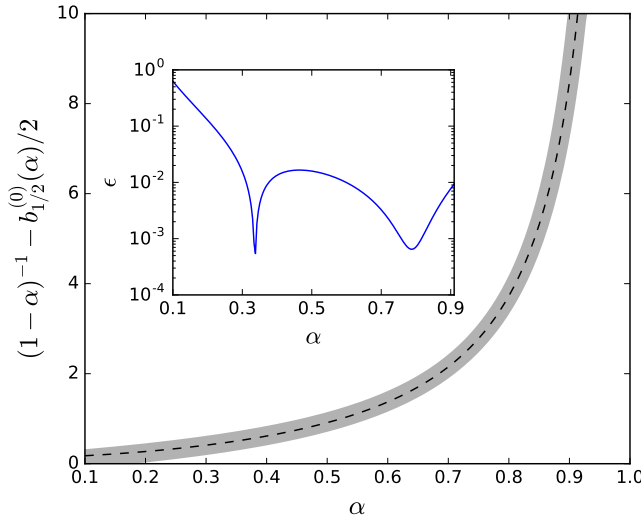
Sin embargo, una simplificación adicional puede hacerse. Inspirados en la correlación encontrada por Wisdom (1980) entre la amplitud del término resonante principal y el grado  $p$  de una dada resonancia de primer orden, hemos buscado una tendencia similar en los términos de corto período. Aunque fallamos en hallar una expresión similar para los coeficientes de Laplace, sí encontramos una aproximación válida para los términos de corto período de la función perturbadora (5.14). Explícitamente, encontramos que

$$\frac{1}{1 - \alpha_{ij}} - \frac{1}{2} b_{1/2}^{(0)}(\alpha_{ij}) \simeq 1.43 p_{ij} + 0.13, \quad (5.16)$$

donde los coeficientes numéricos fueron determinados mediante un ajuste lineal con el método de cuadrados mínimos en el parámetro  $p_{ij}$ , definido como

$$p_{ij} = \frac{\alpha_{ij}^{3/2}}{1 - \alpha_{ij}^{3/2}}. \quad (5.17)$$

Si las condiciones iniciales en razón de semiejes son cercanas a una resonancia de primer orden, entonces  $p_{ij}$  es un entero que vale lo que el grado de la conmensurabilidad, es decir,  $n_i/n_j = (p_{ij} + 1)/p_{ij}$ . En cualquier otro caso,  $p_{ij}$  es un valor no entero. La Figura 5.4 compara las predicciones de la ecuación (5.16) marcada en



**Figura 5.4.** La curva gruesa gris en el gráfico principal muestra la función  $(1 - \alpha)^{-1} - (1/2)b_{1/2}^{(0)}(\alpha)$  como función de la razón de semiejes, mientras que la curva negra a trazos corresponde a la aproximación descrita en la ecuación (5.16). El gráfico pequeño muestra el error relativo  $\epsilon$  del ajuste de cuadrados mínimos.

curva a trazos, con el valor exacto de la función  $(1 - \alpha)^{-1} - (1/2)b_{1/2}^{(0)}(\alpha)$ , señalada en gris ancha en el cuadro principal. El recuadro pequeño muestra el error relativo  $\epsilon$  entre ambas del ajuste de cuadrados mínimos. Este ajuste lineal asegura un error relativo máximo de  $\epsilon \sim 10^{-2}$  para cualquier separación orbital en el intervalo  $\alpha \in [0.3, 0.9]$ . Para una dada resonancia de primer orden se tiene

$$\frac{a_i}{a_j} = \left( \frac{P_j}{P_i} \right)^{2/3} = \left( \frac{p_{ij}}{p_{ij} + 1} \right)^{2/3}. \quad (5.18)$$

Con estas dos ecuaciones es posible estimar la diferencia entre los elementos seculares y los medios,

$$\begin{aligned} \Delta L_1 &= L_1 - L_1^* = \frac{Gm_1m_2}{a_2(n_1 - n_2)} \left( 1.43 p_{12} + 0.13 - \frac{a_1}{a_2} \right) \\ &\quad + \frac{Gm_1m_3}{a_3(n_1 - n_3)} \left( 1.43 p_{13} + 0.13 - \frac{a_1}{a_3} \right), \\ \Delta L_2 &= L_2 - L_2^* = -\frac{Gm_1m_2}{a_2(n_1 - n_2)} \left( 1.43 p_{12} + 0.13 - \frac{a_1}{a_2} \right) \\ &\quad + \frac{Gm_2m_3}{a_3(n_2 - n_3)} \left( 1.43 p_{23} + 0.13 - \frac{a_2}{a_3} \right), \\ \Delta L_3 &= L_3 - L_3^* = -\frac{Gm_1m_3}{a_3(n_1 - n_3)} \left( 1.43 p_{13} + 0.13 - \frac{a_1}{a_3} \right) \\ &\quad - \frac{Gm_2m_3}{a_3(n_2 - n_3)} \left( 1.43 p_{23} + 0.13 - \frac{a_2}{a_3} \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Por otro lado, es posible expresar el semi-ancho de libración para una RMM de primer orden  $(p + 1)/p$  que involucra a los planetas  $m_i$  y  $m_j$  siguiendo a [Deck et al., 2013](#), aunque con un pequeño cambio de notación:

$$\frac{\Delta\alpha_{\text{sep}}^*}{\alpha_{\text{res}}^*} = 3.78 \left( \frac{m_i + m_j}{m_0} \right)^{2/3} \left[ \frac{(f_{27}^2 + f_{31}^2 \sqrt{\alpha_{\text{res}}^*} m_i/m_j)(\alpha_{\text{res}}^* + m_i/m_j)}{9\sqrt{\alpha_{\text{res}}^*} (p + 1)(1 + m_i/m_j)^2} \right]^{1/3}, \quad (5.20)$$

donde  $\alpha_{\text{res}}^* = (\mu_i/\mu_j)^{1/3}(p/(p+1))^{2/3}$  es el valor de  $\alpha_{ij}$  en la resonancia exacta y tanto  $f_{27}$  como  $f_{31}$  son funciones de los coeficientes de Laplace y vienen dados por

$$\begin{aligned} f_{27}(\alpha, r) &= \frac{1}{2} [-2r - \alpha D_\alpha] b_{1/2}^{(r)}(\alpha), & \text{y} \\ f_{31}(\alpha, r) &= \frac{1}{2} [-1 + 2r + \alpha D_\alpha] b_{1/2}^{(r-1)}(\alpha) - \frac{\delta_{(r-1),1}}{2\alpha^2}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

ver [Murray y Dermott \(1999\)](#). Además, los coeficientes dados en la expresión (5.21) pueden aproximarse por

$$f_{27} \simeq -0.46 - 0.802p \quad ; \quad f_{31} \simeq 0.87 + 0.802p \quad (5.22)$$

(ver [Deck et al., 2013](#); [Malhotra, 1998](#); [Quillen, 2011](#)). Una vez transformados los elementos osculadores, es posible calcular la posición de la resonancia y del borde interno de la separatriz en el mapa dinámico (ver Figura 5.10).

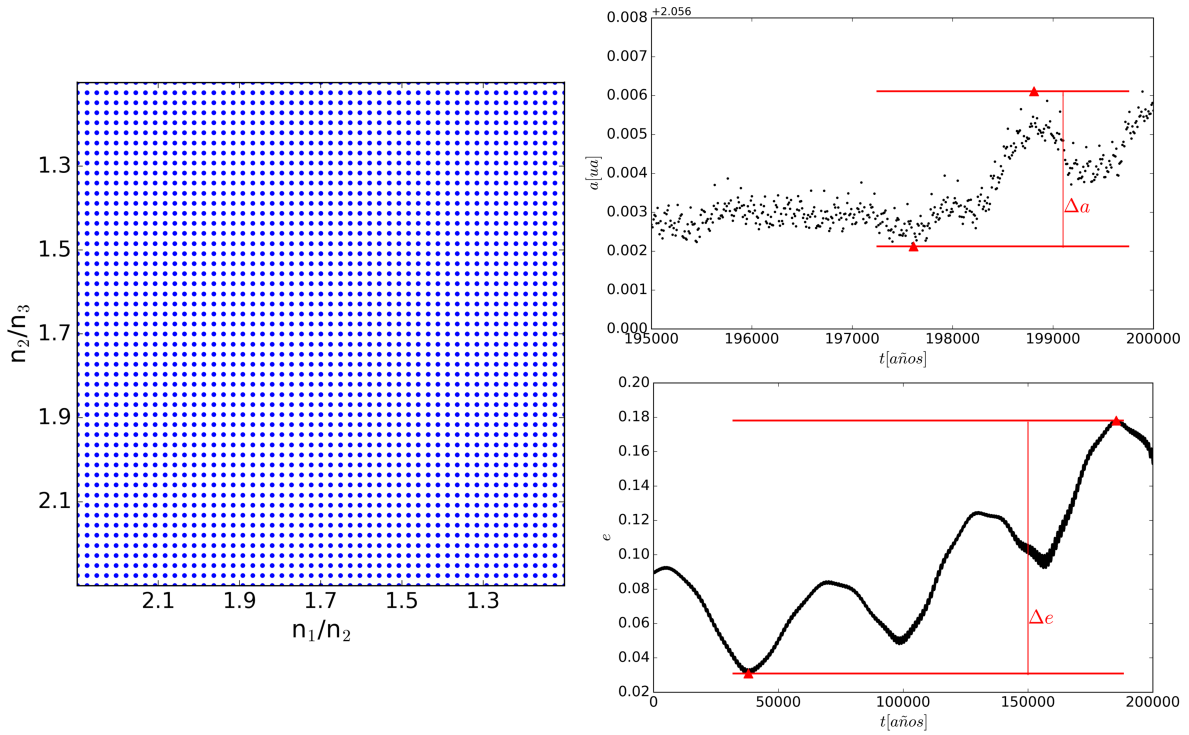
### 5.3. Estructura resonante

El sistema dinámico presentado en la sección anterior se hace intratable analíticamente debido a la gran cantidad de grados de libertad que tiene el problema. El análisis de la estructura resonante del problema de 3 planetas se simplifica bastante desde un punto de vista numérico que realizamos a partir del uso de mapas dinámicos, descritos en detalle a continuación. Mediante estas simulaciones numéricas confirmamos o rechazamos las aproximaciones analíticas que realizamos en la sección anterior.

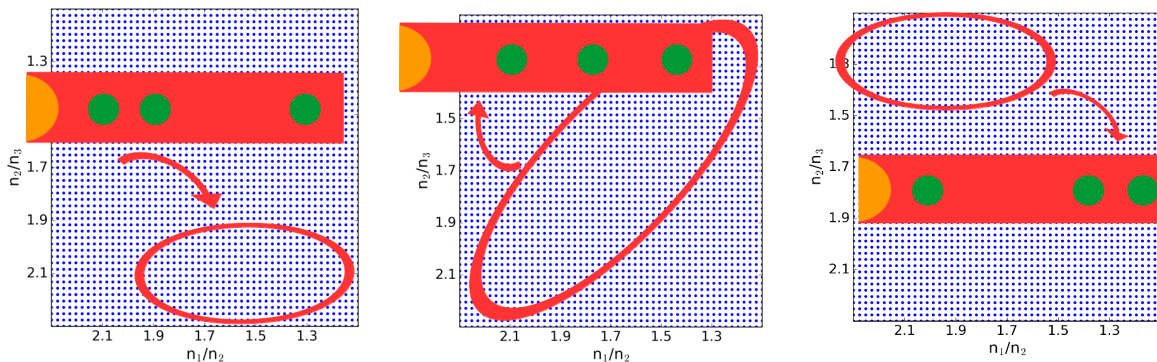
#### 5.3.1. Construcción de los mapas dinámicos

A fin de construir los mapas dinámicos utilizamos un integrador de N-cuerpos para simular la evolución orbital de una grilla de  $n \times n$  condiciones iniciales en el plano de razón de movimientos medios  $(n_1/n_2, n_2/n_3)$ , ver cuadro izquierdo de la Figura 5.5. Las integraciones numéricas las realizamos con el algoritmo de Bulirsch-Stöer, en el marco de referencia de Jacobi. Simulamos sistemas para los que tomamos al cuerpo central con  $m_0 = 1M_\odot$  y consideramos que a su alrededor hay 3 cuerpos de masas iguales  $m_1 = m_2 = m_3$  orbitando. Cada uno de estos cuerpos está inicialmente en órbita circular coplanar,  $e_i = i_i = 0$  y con todos los ángulos igual a cero. Esta elección genera una configuración colineal donde las distancias mutuas entre los planetas es mínima. A cada una de éstas las integramos por un tiempo total de  $T = 10^4$  órbitas del cuerpo más externo (al que ubicamos en  $a_3 = 1au$ ), tiempo durante el cual guardamos registro de los cambios en semieje mayor  $\Delta a_i$  y excentricidad  $\Delta e_i$  que experimentó cada planeta (e.g. [Gallardo et al., 2016](#)), suficiente para que se manifiesten las principales estructuras dinámicas, pero no para que aparezca difusión caótica.

Calculamos el valor máximo de  $\Delta a_i$  alcanzado por cada cuerpo y generamos un código de colores con el que identificamos el estado final de  $\max(\Delta a)$  y  $\max(\Delta e)$  de cada condición inicial. Específicamente,  $\max(\Delta a) = \max(\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3)$ , mientras



**Figura 5.5.** Izquierda: Representación de una grilla de condiciones iniciales que luego serán integradas con un código de N-cuerpos. Derecha arriba: Variación temporal de semieje mayor  $a$  de una partícula ficticia integrada por  $2 \times 10^5$  años. La evolución de la partícula se muestra en puntos negros mientras que los triángulos rojos representan los valores mínimo y máximo alcanzados. Derecha abajo: Ídem con la excentricidad  $e$ .



**Figura 5.6.** Explicación del mapa dinámico. En cada uno de los cuadros puede observarse una región encerrada por una elipse roja. Los círculos verdes representan las posiciones de los planetas. Izquierda: la zona destacada de interacción entre los dos planetas más internos, ya que el externo se encuentra más alejado. Medio: en la diagonal de los mapas, todos los planetas se encuentran equiespaciados, por lo que cada uno contribuye de igual manera a la dinámica del sistema. Derecha: se marca la zona en la que interactúan mayormente los dos cuerpos externos.

que  $\Delta a_i = (a_{i\max} - a_{i\min})$ , y lo mismo para  $\max(\Delta e)$ . Éstos cuantifican la máxima variación del semieje mayor y de la excentricidad durante el período de tiempo de integración. Si bien no son indicadores de caos, son buenos delimitando la estructura del espacio de fases, mapear la estructura resonante y permiten armarnos una idea acerca de la estabilidad dinámica de la región de estudio. Con  $\max(\Delta a)$  es posible analizar el comportamiento de los sistemas planetarios, de manera muy similar al método de máximo cambio en excentricidad (e.g. [Dvorak et al., 2004](#); [Ramos et al., 2015](#)).

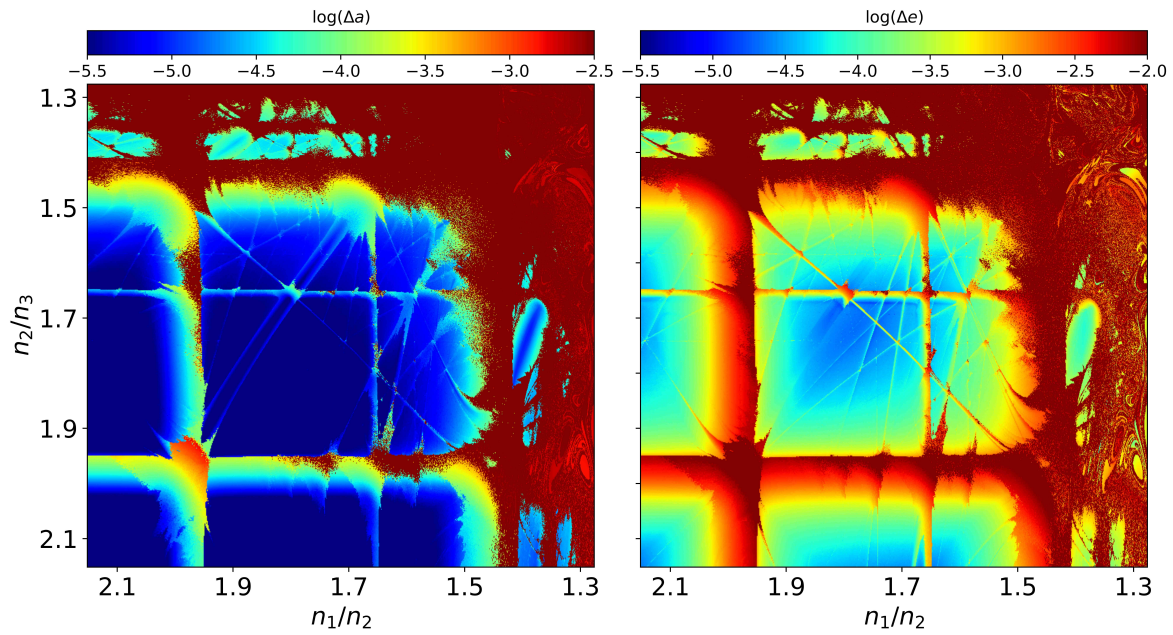
Esquemáticamente, en los paneles de la derecha de la Figura 5.5 mostramos la variación temporal de  $a$  en el cuadro superior y  $e$  en el inferior, para una partícula ficticia a la que se dejó evolucionar por  $2 \times 10^5$  años. Se puede ver que los parámetros orbitales toman un valor mínimo y un valor máximo, y la amplitud entre los extremos definen la máxima variación de  $a$  y  $e$ , respectivamente. Si la partícula experimenta una gran variación en semieje, es decir alto  $\max(\Delta a)$ , entonces su color al final de la integración será rojo oscuro. Si su variación es pequeña, entonces el color correspondiente será azul claro, y entre medio los demás casos.

El resultado final que observaremos en los mapas podemos dividirlo en tres grandes regiones, destacadas en la Figura 5.6. En cada uno de los cuadros de dicha Figura puede observarse una región encerrada por una elipse roja. En el gráfico de la izquierda, la zona destacada en rojo resalta que allí, la interacción será más importante entre los dos planetas más internos, ya que el externo se encuentra más alejado. En esta región, el término perturbativo más importante será aquel que incluya a estos dos cuerpos, es decir,  $\mathcal{R}_{12}$ . En la diagonal de los mapas, todos los planetas se encuentran equiespaciados, por lo que cada uno contribuye de igual manera a la dinámica del sistema:  $\mathcal{R}_{12} \simeq \mathcal{R}_{23} \simeq \mathcal{R}_{13}$ . En la figura derecha está marcada la zona en la que interactúan mayormente los dos cuerpos externos, y el término que más contribuye en la función perturbadora es  $\mathcal{R}_{23}$ . Lógicamente, las demás zonas muestran distinto grado de perturbación entre los cuerpos.

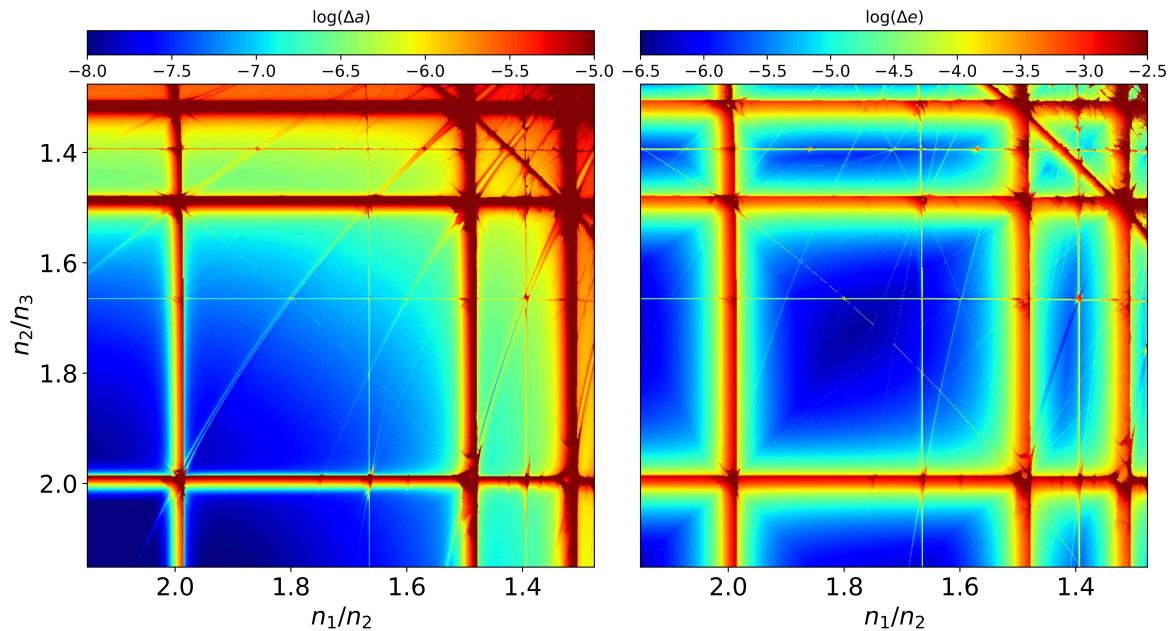
### 5.3.2. Análisis de estructura

Una vez presentados los mapas, estamos en condiciones de empezar con el estudio numérico de la estructura resonante del problema de 3 planetas. Las Figuras 5.7, 5.8 y 5.9 muestran, cada uno, dos mapas dinámicos calculados para sistemas con 3 planetas ficticios de masas iguales. Los paneles derechos muestran el resultado de la máxima variación de semieje,  $\max(\Delta a)$ , mientras que los paneles izquierdos representan el indicador  $\max(\Delta e)$  una vez finalizada la integración. Los tonos azules corresponden a pequeños cambios (generalmente asociados a movimiento regular), mientras que los colores rojo y amarillo hacen referencia a grandes cambios en los elementos orbitales. El tiempo de integración fue elegido lo suficientemente grande como para mapear las principales características de la estructura resonante, pero no tan largo como para borrarlas con difusión caótica. Esto quiere decir que estamos interesados en mapear el espacio de fases y no en identificar regiones estables o inestables.

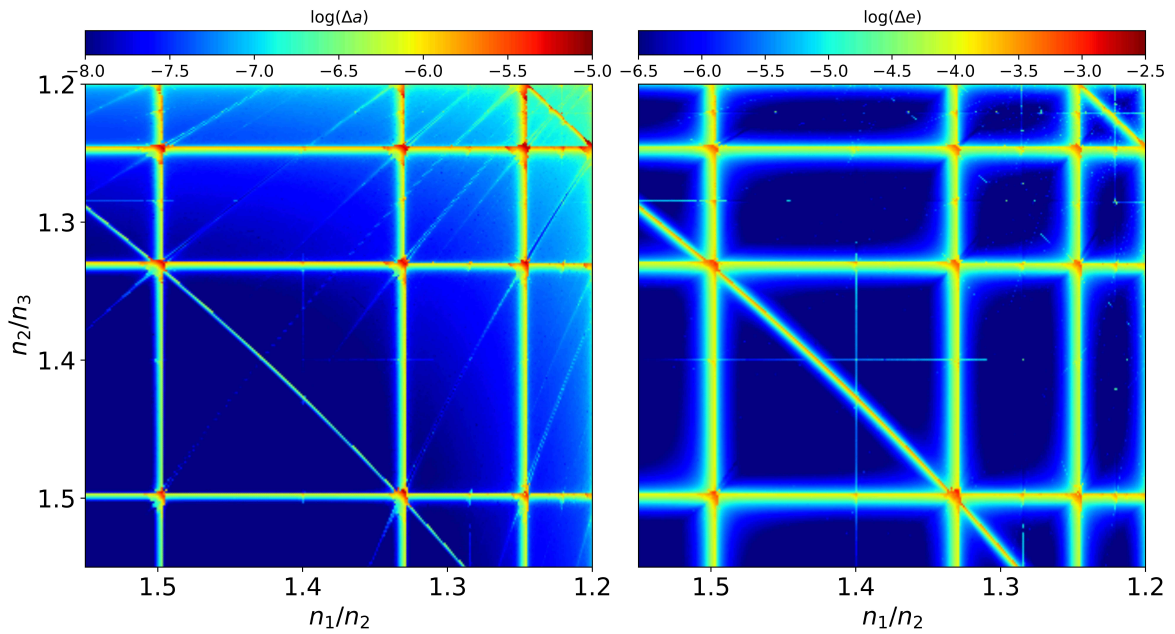
La Figura 5.7 considera cuerpos con  $m_i = 150 m_{\oplus}$  o, equivalentemente,  $m_i \sim 0.5 m_{\text{Jup}}$ . La integración de la Figura 5.8 fue realizada con masas de  $m_i = 30 m_{\oplus}$



**Figura 5.7.** Mapas dinámicos en el plano  $(n_1/n_2, n_2/n_3)$  para  $800 \times 800$  condiciones iniciales en órbitas circulares coplanares. Tonos azules indican poco cambio en semieje mayor mientras que tonos rojos, valores mayores. El tiempo total de integración fue de  $T = 10^4$  órbitas del planeta externo. Consideramos sistemas con planetas de igual masa  $m_1 = m_2 = m_3 = 150m_\oplus$  orbitando a una estrella central de masa  $m_0 = 1M_\odot$ . **Izquierda:** Indicador  $\max(\Delta a)$ . **Derecha:** Indicador  $\max(\Delta e)$ . Para más detalles, ver texto.



**Figura 5.8.** Misma explicación y código de colores que en la Figura 5.7 pero en esta oportunidad, las masas planetarias fueron tomadas iguales a  $m_i = 30m_\oplus$ . **Izquierda:** Indicador  $\max(\Delta a)$ . **Derecha:** Indicador  $\max(\Delta e)$ .



**Figura 5.9.** Mismo código de colores y tiempo de integración que en las Figuras 5.7 y 5.8 pero en estos mapas fueron integradas  $500 \times 500$  condiciones iniciales. Las masas planetarias fueron tomadas iguales a  $m_i = 3m_{\oplus}$ . **Izquierda:** Indicador  $\max(\Delta a)$ . **Derecha:** Indicador  $\max(\Delta e)$ .

(aproximadamente  $0.1 m_{\text{Jup}}$ ) mientras que los de la Figura 5.9 para masas de  $m_i = 3m_{\oplus} \simeq 0.01 m_{\text{Jup}}$ . Notar que en cada caso los límites de  $n_1/n_2, n_2/n_3$  que graficamos son distintos. Las interacciones más fuertes se dan para valores pequeños de razón de movimientos medios o en la diagonal. En los sistemas menos masivos, si los planetas no se encuentran cercanos, no se percibe variación en los elementos orbitales, por lo que elegimos cambiar la región del espacio de fases a estudiar, para lograr observar el fenómeno.

Los colores rojos para  $n_1/n_2$  o  $n_2/n_3$  pequeños pueden deberse a órbitas dinámicamente inestables, ya sea por escapes o colisiones, o a condiciones iniciales estables cercanas a la separatriz de una resonancia, cuya dinámica haya inducido grandes excentricidades. Notar que el efecto que produce un tercer planeta es mucho mayor cuanto más masivo es el perturbador, es decir, las regiones rojo oscuro son más grandes y más borrosas.

El plano de fases muestra una estructura rica, generada por una red de resonancias de 2 y 3 planetas. Todas las conmensurabilidades en este plano se caracterizan por una condición del tipo

$$j_1 n_1 + j_2 n_2 + j_3 n_3 \simeq 0, \quad (5.23)$$

para algún conjunto de enteros  $(j_1, j_2, j_3)$  distinto de cero. Para hacer el análisis nos vamos a concentrar particularmente en el mapa  $\max(\Delta a)$  (izquierdo) de la Figura 5.7 de  $m_i = 150 m_{\oplus}$  para poder identificar la estructura resonante, que detallaremos en la Figura 5.10. Las resonancias que se observan pueden dividirse en cuatro grandes grupos.

- Primero identificamos resonancias entre los pares de planetas internos, es



decir, aquellas que involucran a  $m_1$  y  $m_2$ , y son caracterizadas en la ecuación (5.23) por  $j_3 = 0$ . En la Figura 5.10 aparecen como las líneas verticales.

- Segundo, destacamos las RMM entre los cuerpos externos  $m_2$  y  $m_3$ , que se corresponde con  $j_1 = 0$  en la ecuación (5.23). Simétricamente respecto de la diagonal definida por  $n_1/n_2 = n_2/n_3$ , se observan curvas casi horizontales que las marcan.
- Conmensurabilidades entre  $m_1$  y  $m_3$ , que se corresponde con  $j_2 = 0$  de la ecuación (5.23).

A estos 3 tipos de resonancias las llamaremos *resonancias de 2 planetas o RMM-2P*, haciendo referencia a la interacción entre 2 planetas únicamente.

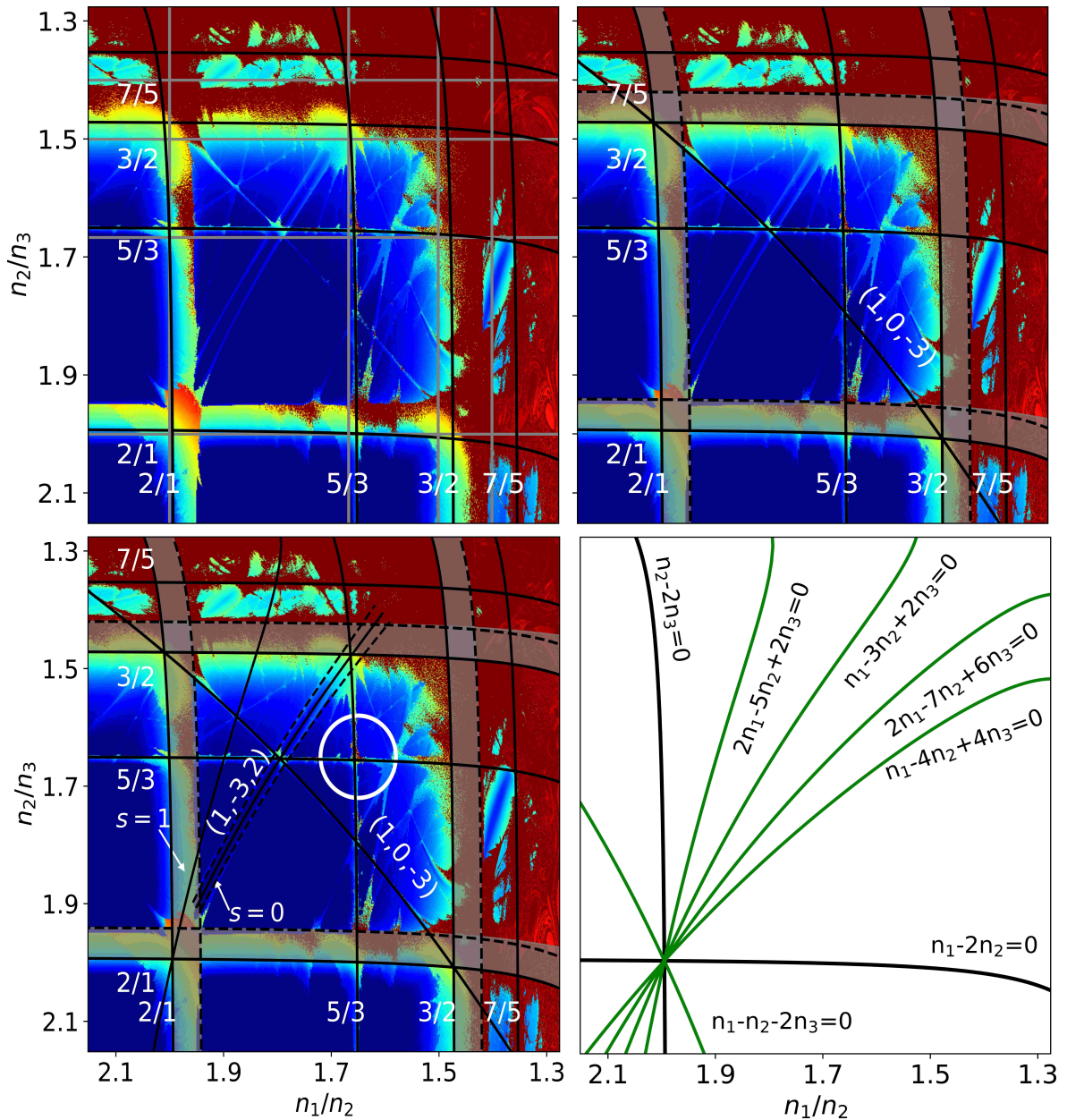
El punto de intersección entre los dos tipos de RMM entre 2 planetas marca la posición de un tipo especial de conmensurabilidad entre los 3 cuerpos que llamaremos *resonancias dobles*, resaltada con un círculo blanco en el gráfico inferior izquierdo de la Figura 5.10.

- Por último, llamaremos *resonancias puras de 3-planetas* a aquellas condiciones que satisfagan  $j_i \neq 0, \forall i$ , pero que al mismo tiempo no estén asociadas a RMM-2P independientes. De ahora en adelante, a este tipo de RMM entre 3 planetas las llamaremos *RMM-3P*.

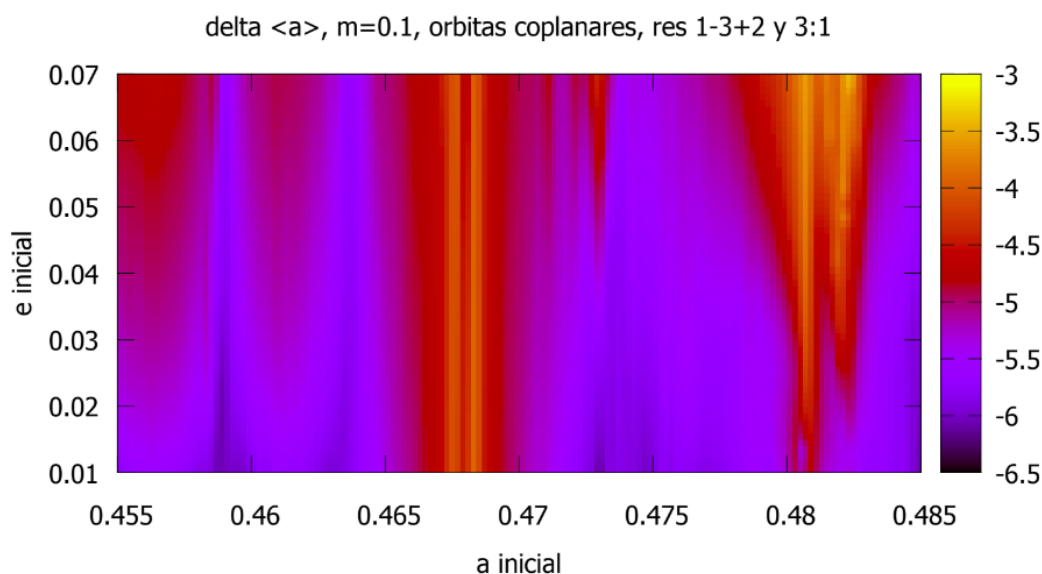
Notar que en la imagen superior izquierda de la Figura 5.10 las curvas que marcan las RMM-2P se ven como líneas rectas grises y no coinciden plenamente con la estructura que se observa de fondo en el mapa. Esto se debe a que las relaciones resonantes se definen en elementos orbitales medios, mientras que los mapas dinámicos se construyen a partir de una grilla de condiciones iniciales en elementos osculadores. Es necesario utilizar las ecuaciones de transformación deducidas en la sección anterior para relacionar ambos conjuntos de variables. Como comparación graficamos en negro las nuevas posiciones resonantes en elementos osculadores, que ya no se observan como líneas rectas sino que, luego del cambio de elementos medios a su contraparte en osculadores, se observa una curvatura y, ahora sí, coinciden con el mapa de fondo. La forma funcional de las curvas se calculó a partir de las expresiones deducidas en la sección anterior, y las diferencias entre ambos conjuntos son causadas principalmente por las perturbaciones de corto período del tercer planeta, el no resonante,  $m_1$  en el caso de las curvas horizontales y  $m_3$  en las verticales. De izquierda a derecha (y de abajo hacia arriba) observamos las RMM  $2/1, 5/3, 3/2$  y  $7/5$ .

Mientras las resonancias de segundo orden tienen anchos de libración despreciable para órbitas circulares, las de primer orden causan un cambio significativo tanto en excentricidad y semieje mayor para todas las condiciones iniciales entre el valor nominal resonante y la separatriz interna para  $e_i = 0$  (ver Ramos et al., 2015). Esta región se observa sombreada en gris, donde el semiancho de la región de libración se estimó utilizando la expresión analítica dada por Deck et al. (2013).

El mapa de la Figura 5.10 muestra también evidencias de RMMs-2P entre cuerpos no adyacentes. La curva diagonal que empieza en  $(n_1/n_2, n_2/n_3) \simeq (2.15, 1.35)$



**Figura 5.10.** Superpuesto al mapa dinámico de  $150 m_{\oplus}$  se muestran diferentes características en la estructura resonante. **Izquierda arriba:** la comparación entre las resonancias de movimientos medios entre dos cuerpos en elementos medios (curvas grises) y osculadores (curvas negras) que surgen de las transformaciones dadas en las ecuaciones (5.13). **Derecha arriba:** Posición nominal de las RMM entre 2 planetas en líneas negras. Para las RMM de primer orden calculamos la posición de la separatriz interna, que marcamos en líneas a trazos. La región gris indica la zona de libración o de movimiento estable. La curva en diagonal corresponde a la RMM 3/1 entre  $m_1$  y  $m_3$ . **Izquierda abajo:** El círculo blanco resalta una resonancia doble, aquella que se compone de la intersección entre dos RMM de 2 planetas. Con curvas continuas negras se marcan resonancias puras de 3 planetas de primer orden,  $s = 1$  y de orden cero,  $s = 0$ . A esta última le calculamos también las ramas interna y externa de la separatriz de movimiento, que pueden verse en líneas a trazos. **Derecha abajo:** Posición nominal de varias RMM de 3 planetas (verde) fijadas al nodo definido a partir de la intersección entre la RMM simultánea 2:1 de los pares interno y externo (curvas negras).



**Figura 5.11.** Estructura resonante de una resonancia de orden 0 en el plano  $(a, e)$ . El mapa fue realizado por Tabaré Gallardo (comunicación interna) en octubre de 2017.

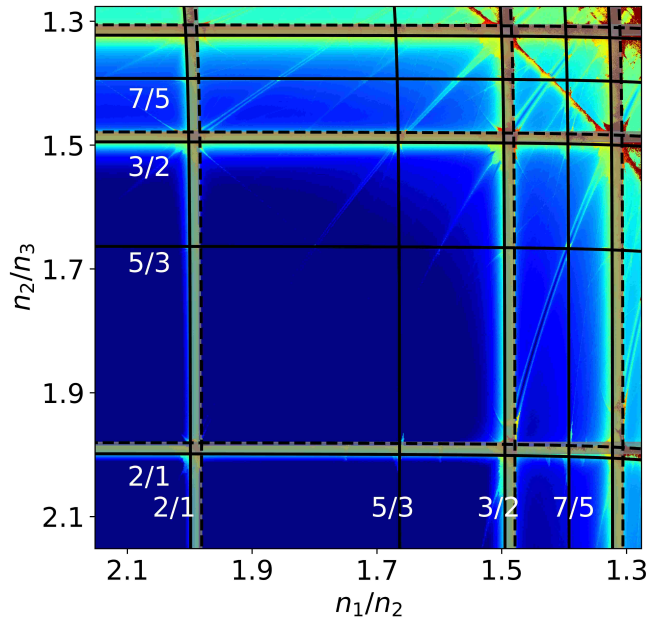
y va hasta  $\simeq (1.35, 2.15)$  marca la posición de la resonancia  $3/1$  o, equivalentemente,  $(1, 0, -3)$  entre  $m_1$  y  $m_3$ . Aunque existen otras conmensurabilidades similares en este gráfico, o son débiles (y por lo tanto difíciles de visualizar) o están ubicadas en razón de períodos cerca de la unidad y por lo tanto, quedan en la región roja del mapa. Tal como muestra [Delisle \(2017\)](#), RMM entre planetas no adyacentes pueden jugar un rol muy importante generando nuevos puntos fijos estables para resonancias de 3 planetas.

Respecto de las resonancias puras de 3-planetas, recordar que llamamos orden  $s$  de la resonancia a la suma de los índices  $j_i$ , i.e.,  $s = j_1 + j_2 + j_3$ . En el gráfico inferior izquierdo de la Figura 5.10 se pueden ver dos resonancias puras, una de orden cero ( $s = 0$ ) identificada como  $(1, -3, 2)$ , y otra de orden uno ( $s = 1$ ). En el primer caso es posible además calcular las separatrices de movimiento en elementos osculadores y comparar con la estructura observada en el mapa. La estructura de una resonancia de orden cero en el plano  $a - e$  se muestra en la Figura 5.11. Dicho mapa fue realizado por Tabaré Gallardo (comunicación interna) y lo que muestra principalmente es cómo, para una RMM-3P de orden 0, particularmente la  $(1, -3, 2)$  que también se observa en el mapa dinámico de la Figura 5.10, tiene presentes en  $e = 0$  ambas ramas de la separatriz de movimiento.

En el gráfico inferior derecho de la Figura 5.10 mostramos en negro la intersección de la resonancia  $2/1, 2/1$  entre pares de planetas adyacentes. Las curvas verdes muestran varias resonancias de 3 planetas que atraviesan el nodo que se forma en dicha intersección. Para comprender mejor este concepto reescribimos la relación resonante (5.23) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} j_1 n_1 + j_2 n_2 + j_3 n_3 &= j_1 n_1 - (k_1 + k_3) n_2 + j_3 n_3 \\ &= (j_1 n_1 - k_1 n_2) - (k_3 n_2 - j_3 n_3) = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

donde  $k_1, k_3$  son cualesquiera dos enteros tales que  $j_2 = -(k_1 + k_3)$ . La última igual-



**Figura 5.12.** En el fondo se muestra el mapa dinámico de  $30 m_{\oplus}$ . Superpuesto, se ve la posición de las RMM-2P en líneas negras, y en líneas a trazos se ve la separatriz interna de aquellas RMM de primer orden. Nuevamente, la región gris indica la zona de libración.

dad se satisface trivialmente en el caso en que ambos términos sean idénticamente nulos o, en otras palabras, cuando  $n_1/n_2 = k_1/j_1$  y  $n_2/n_3 = -j_3/(j_2 + k_1)$ . Como consecuencia, siempre que ambas relaciones de movimientos medios sean positivas, la resonancia de 3 planetas cruzará al menos uno, aunque posiblemente varios, puntos de intersección diferentes de RMM de 2 planetas.

En el caso particular que se muestra en la Figura 5.10, nos hemos concentrado en el nodo definido por la resonancia de Laplace, en la que  $n_1/n_2 = n_2/n_3 = 2/1$ . Todas las curvas verdes satisfacen la condición dada en (5.24) y cruzan la resonancia de Laplace. Notar que la dinámica de esta conmensurabilidad mixta de 3 planetas es, en principio, extremadamente compleja ya que muchas relaciones resonantes diferentes habitan en sus proximidades.

En este mapa dinámico solo se dibujan las cinco resonancias de 3 planetas que se observan cruzando la resonancia de Laplace, por más que se puede esperar que infinitas posibles la crucen. En principio, no todas las resonancias tienen la misma fuerza por lo que no se observan todas. Esta característica suele depender del orden de la RMM. La única resonancia de orden cero que genera una estructura apreciable en esa región del mapa es aquella dada por  $n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0$ , es decir  $(j_1, j_2, j_3) = (1, -3, 2)$ .

A modo de comparación, mostramos en la Figura 5.12 como es la deformación de estas mismas curvas pero para un sistema menos masivo, de la misma forma que las respectivas separatrices. Observar también que la región de libración disminuye en comparación con el sistema de  $150 m_{\oplus}$ . No lo graficamos aquí, pero en el caso de  $m_i = 3 m_{\oplus}$  es menos evidente todavía este comportamiento. El cambio entre elementos medios y osculadores se ve mucho menos pronunciado, lo que implica una estructura menos deformada en las regiones cercanas al valor nominal de razón de movimientos medios. El grado de caoticidad, o excitación de los semiejes, se ve también significativamente reducido. Lo mismo se observa para las fuerzas y anchos

de las resonancias.

### 5.3.3. RMM de 3-planetas

Los planetas se quedarán en la vecindad de una resonancia de movimientos medios de 3 planetas si sus movimientos medios satisfacen la ecuación (5.23) con  $j_i \neq 0, \forall i$ . Se puede reescribir esta relación resonante como

$$pn_1 - (p + q - s)n_2 + qn_3 \simeq 0 \quad ; \quad \text{con } p, s, q \in \mathbb{Z}. \quad (5.25)$$

La suma de los índices es igual a  $s$ , cuyo valor absoluto da el orden de dicha RMM-3P. Todos los sistemas exoplanetarios asociados a configuraciones multiresonantes (por ejemplo GJ876, Kepler-60, Kepler-80, Kepler-223) se encuentran en resonancias de Laplace (i.e.  $s = 0$ ), así como también los satélites Galileanos. Hasta aquí, únicamente los planetas externos de nuestro propio Sistema Solar parecen afectados por RMM-3P de alto orden (Guzzo, 2005, 2006; Murray y Holman, 1999), posiblemente llevando a movimiento caótico en escala de tiempo de los  $\sim 10^9$  años.

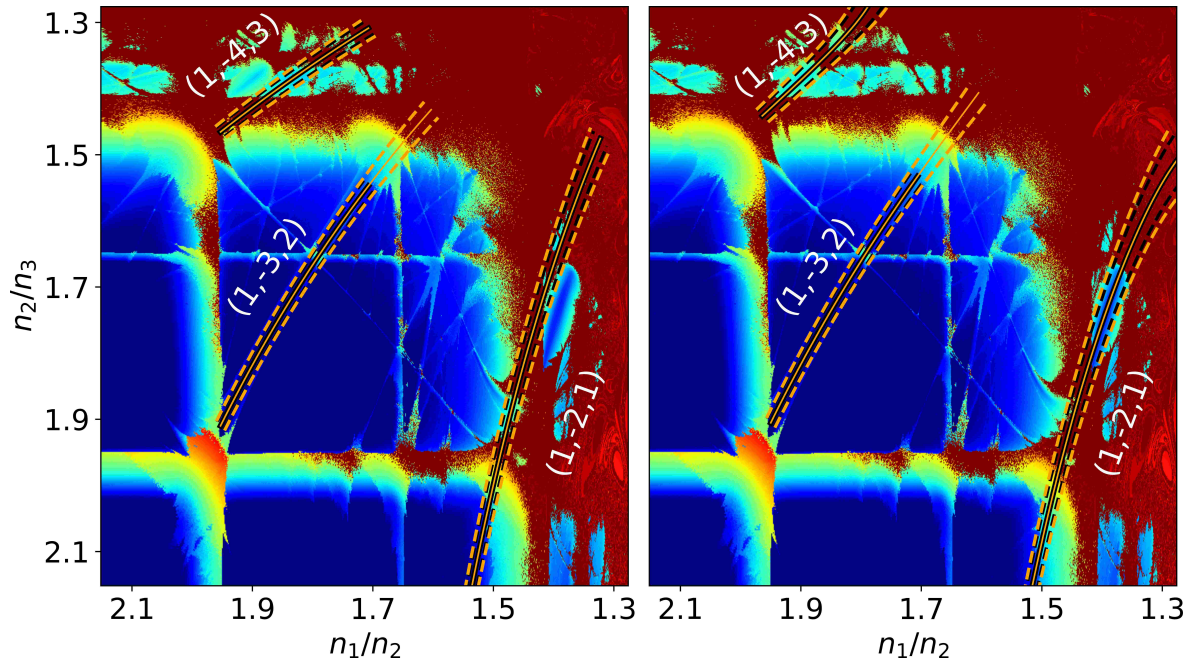
La posición de las RMM de 3 cuerpos en el mapa dinámico define curvas dadas por las funciones

$$\left(\frac{n_2}{n_3}\right)^{-1} = \frac{(p + q - s)}{q} - \frac{p}{q} \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \quad (5.26)$$

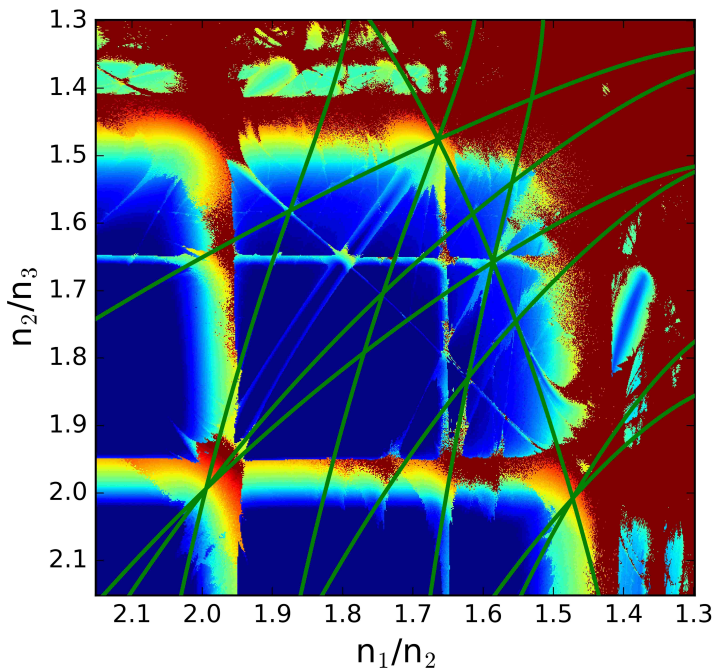
(e.g. Gallardo et al., 2016). Como en el caso de las conmensurabilidades entre 2 planetas, estas relaciones están dadas en variables medias y deben ser transformadas a osculadoras antes de graficarlas en el plano representativo de condiciones iniciales.

De la misma forma que en el gráfico inferior izquierdo de la Figura 5.10, identificamos en la Figura 5.13 la posición y el ancho de libración (para excentricidad igual a cero) para varias resonancias de Laplace ( $s = 0$ ). De izquierda a derecha se observan las RMM-3P  $n_1 - 4n_2 + 3n_3 = 0$ ,  $n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0$  y  $n_1 - 2n_2 + n_3 = 0$ . Por más que un número infinito de este tipo de resonancias existen en el plano, sólo hemos graficado aquellas RMMs que llevan a valores apreciables (visibles) de  $\max(\Delta a)$  durante el tiempo de integración. Aún sin ser este un criterio riguroso, éstas deberían ser las conmensurabilidades que más afectan la dinámica de sistemas planetarios, al menos para los valores de las masas consideradas en este trabajo.

El gráfico izquierdo muestra las curvas en elementos medios, mientras que en el cuadro derecho está la respectiva transformación a elementos osculadores. Tal como pasa para 2 planetas, las RMM en elementos medios no coinciden con la estructura que se observa de fondo. En ambos casos graficamos la rama pericéntrica de las distintas conmensurabilidades (curvas continuas) con sus respectivas separatrices, en líneas a trazos. Los anchos de libración fueron calculados con el modelo analítico propuesto por Quillen (2011), el cual no incluye los términos indirectos de la función perturbadora. A este modelo lo representamos con curvas naranjas en ambos cuadros de la Figura 5.13. Las curvas negras, en cambio, muestran el caso en que agregamos dichos términos. Llamativamente, agregar este término en la función perturbadora no mejora el modelo de Quillen (2011), ya que las curvas naranjas



**Figura 5.13.** Posición y anchos de libración para RMM-3P de orden cero (de tipo Laplace), en el mapa dinámico descrito en la Figura 5.10. De izquierda a derecha, las conmensurabilidades marcadas corresponden a  $n_1 - 4n_2 + 3n_3 = 0$ ,  $n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0$  y  $n_1 - 2n_2 + n_3 = 0$ . Las ramas pericéntricas están graficadas como curvas continuas mientras que sus respectivas separatrices, en líneas a trazos. Los anchos libración fueron calculados con los términos indirectos de la función perturbadora (curvas negras) y despreciando dichos términos (modelo de [Quillen \(2011\)](#), curvas naranjas). **Izquierda:** Curvas en variables medias. **Derecha:** Curvas en variables osculadoras.



**Figura 5.14.** Superpuesto al mapa dinámico de  $m_i = 0.5m_{\text{Jup}}$  se marcan en verde, en variables osculadoras, las posiciones de muchas RMM-3P de primer orden. Notar que, excepto la resonancia  $n_1 + n_2 - n_3 = 0$ , todas las curvas tienen un gradiente positivo. Esto quiere decir que  $\partial(n_2/n_3)/\partial(n_1/n_2) > 0$ , que se corresponde con  $q > 0$  de la ecuación (5.26).

muestran mejor acuerdo con la estructura del fondo de las simulaciones numéricas (mayor ancho de libración). Tal como muestra [Quillen \(2011\)](#), las resonancias de Laplace no presentan dependencia con las excentricidades, y ambas ramas de la separatriz se observan claramente para órbitas circulares.

En la Figura 5.14 se muestra evidencia de resonancias de primer orden de 3 cuerpos y superiores. Las posiciones de las conmensurabilidades más relevantes con  $s = 1$  se resaltan en verde. Definimos para un sistema con 3 planetas al ángulo de convergencia como

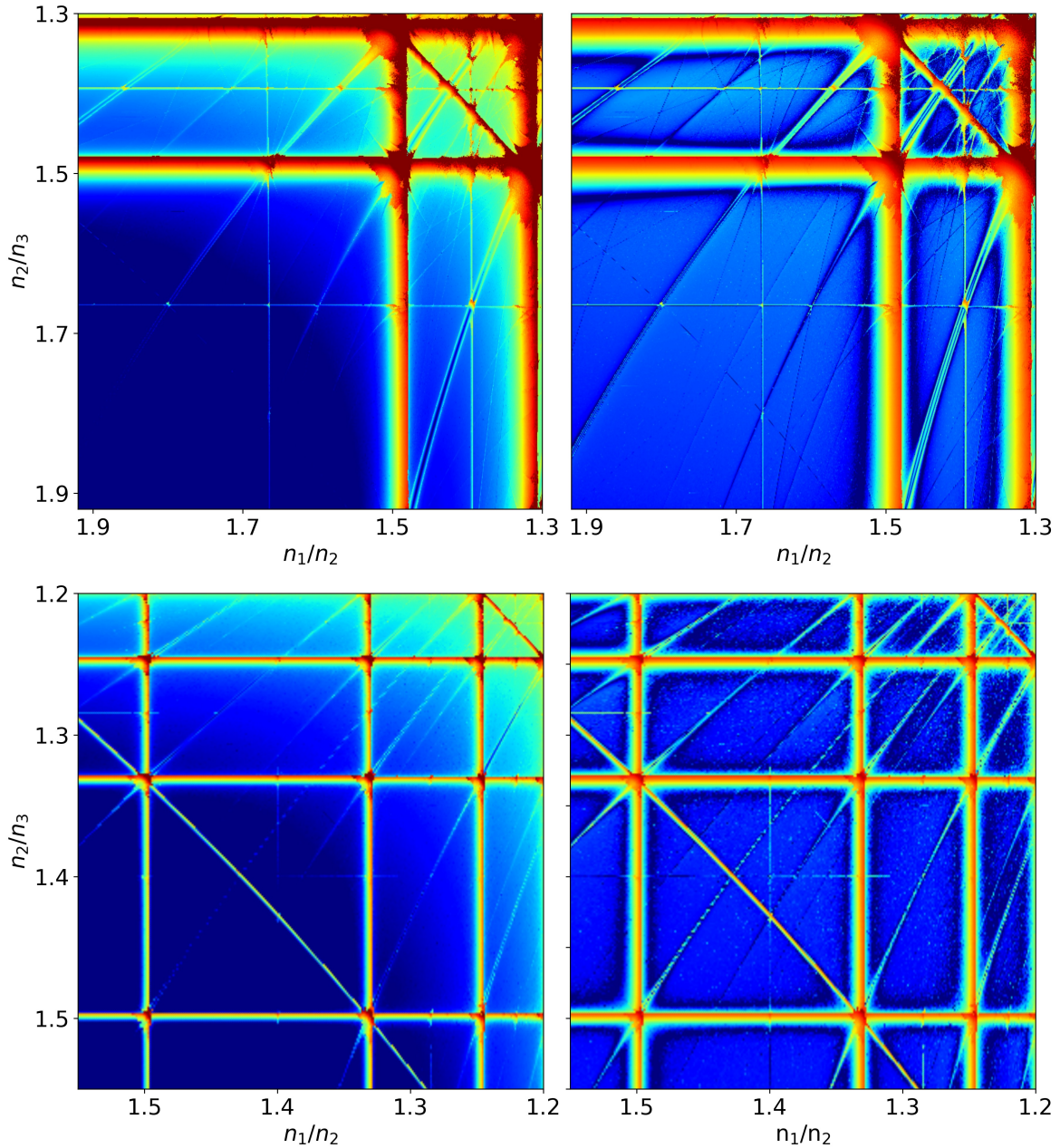
$$A_c = \frac{\partial(n_2/n_3)}{\partial(n_1/n_2)}. \quad (5.27)$$

Tal como en las de orden cero, casi todas las curvas tienen un gradiente positivo en el plano de razón de movimientos medios. Esto quiere decir que  $A_c > 0$  que se da cuando  $q > 0$ , y ocurre lo opuesto cuando  $q < 0$  (ver ecuación (5.26)). El único caso graficado en verde en este mapa se da para la resonancia  $n_1 + n_2 - n_3 = 0$ .

Como ya mencionamos, tenemos dos tipos de resonancias de 3 planetas. Aquellos en que los pares  $(m_1, m_2)$  y  $(m_2, m_3)$  están ambos en RMM-2P tales que  $pn_1 - k_1n_2 = 0$  y  $k_2n_2 - qn_3 = 0$ , por lo que la diferencia entre ambas también es cero:  $pn_1 - (k_1 + k_2)n_2 + qn_3 = 0$ . En este caso, la resonancia de tres planetas se da como consecuencia de la superposición de dos RMM independientes de 2 cuerpos ([Morbidelli, 2000](#)) y la dinámica del sistema sigue dominada por los términos resonantes provenientes de la forma normal de primer orden, y no por las perturbaciones de segundo modeladas por [Quillen \(2011\)](#). Como ejemplo de estas resonancias dobles están los tres planetas externos de GJ-876 y HR-9799 que se encuentran en resonancia doble. De los cuatro ángulos críticos de 2 planetas de GJ-876, 3 se encuentran librando, generando además una libración del ángulo de Laplace ([Martí et al., 2013](#)).

El caso opuesto se da cuando la condición resonante para 3 cuerpos  $pn_1 - (p + q - s)n_2 + qn_3 = 0$  se satisface sin que los pares individuales exhiban movimiento resonante. Siguiendo la notación de [Papaloizou \(2015\)](#) y [Goździewski et al. \(2016\)](#), nos referimos a tales configuraciones como *resonancias verdaderas de 3 planetas*. Los modelos construidos a partir de un Hamiltoniano de segundo orden son válidos únicamente en estos casos, ya que se espera que los términos de primer orden tengan valores medios cercanos a cero y sean de corto período. Sin embargo, tal como discute [Gallardo et al. \(2016\)](#) en su trabajo, este no siempre es el caso y el dominio de validez de los modelos de segundo orden como el de [Quillen \(2011\)](#), pueden presentar una dependencia fuerte con las excentricidades.

Para masas planetarias más pequeñas mostramos en la Figura 5.15 mapas adicionales con un zoom en razones menores de movimientos medios. Para los paneles superiores hemos adoptado masas de  $m_i = 30m_{\oplus}$ , mientras que en los inferiores usamos  $m_i = 3m_{\oplus}$ . En estos mapas las regiones más inestables y caóticas no se observan, pero el valor de fondo de  $\max(\Delta a)$  muestran un gran incremento cuando la razón  $n_i/n_{i+1}$  se aproxima a uno. Esto produce un gradiente de color causado por la amplitud creciente de las variaciones de corto período y complica la identificación de las estructuras resonantes en las distintas partes del plano (ver cuadros izquierdos de la Figura). Para eliminarlas, se podría aplicar un filtro digital de paso bajo a la salida de la integración numérica, pero esto aumentaría innecesariamente



**Figura 5.15.** Arriba izquierda: Mapa dinámico del indicador  $\max(\Delta a)$  para planetas de  $m_i = 30m_{\oplus}$ , orbitando su estrella central de  $m_0 = 1M_{\odot}$ . Arriba derecha: Igual que el gráfico derecho pero luego de sustraer la amplitud de las variaciones de corto período. Abajo: Mismas figuras que arriba pero para sistemas con masas  $m_i = 3m_{\oplus}$ .



el tiempo de cómputo. En vez de eso, optamos por un método alternativo bastante más interesante.

Recuperando la información de las ecuaciones (5.15), (5.16) y (5.19), es posible restarle a los resultados de las integraciones numéricas de los mapas dinámicos, la diferencia con los  $\Delta L_i$  calculados analíticamente

$$\begin{aligned}
\Delta L_1 &= \frac{Gm_1m_2}{a_2(n_1 - n_2)} \left( 1.43 p_{12} + 0.13 - \frac{a_1}{a_2} \right) \\
&\quad + \frac{Gm_1m_3}{a_3(n_1 - n_3)} \left( 1.43 p_{13} + 0.13 - \frac{a_1}{a_3} \right), \\
\Delta L_2 &= -\frac{Gm_1m_2}{a_2(n_1 - n_2)} \left( 1.43 p_{12} + 0.13 - \frac{a_1}{a_2} \right) \\
&\quad + \frac{Gm_2m_3}{a_3(n_2 - n_3)} \left( 1.43 p_{23} + 0.13 - \frac{a_2}{a_3} \right), \\
\Delta L_3 &= -\frac{Gm_1m_3}{a_3(n_1 - n_3)} \left( 1.43 p_{13} + 0.13 - \frac{a_1}{a_3} \right) \\
&\quad - \frac{Gm_2m_3}{a_3(n_2 - n_3)} \left( 1.43 p_{23} + 0.13 - \frac{a_2}{a_3} \right).
\end{aligned} \tag{5.28}$$

y con ellos, calcular los  $\Delta a_{\text{sin}}$  correspondientes. El subíndice "sin" hace referencia a que a los  $\Delta a_i$  ya se les han removido los términos de corto período a través de las ecuaciones de  $\Delta L_i$ , y están dadas por

$$\Delta a_{\text{sin}_i} = \frac{2|\Delta L_i|}{m_i} \sqrt{\frac{a_i}{\mu_i}}. \tag{5.29}$$

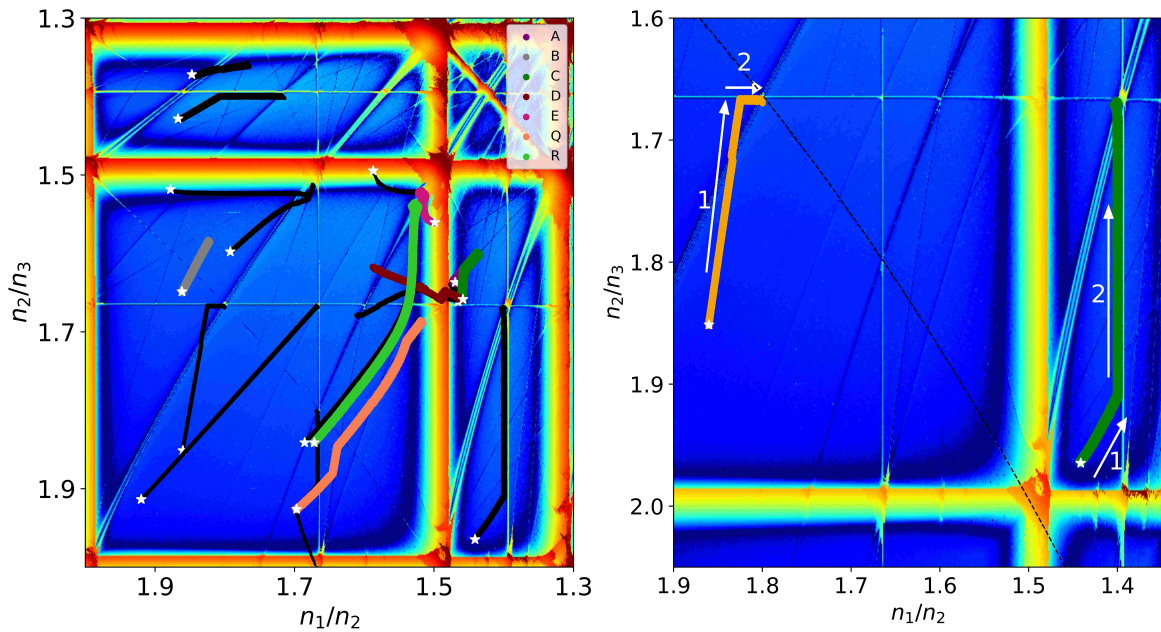
Finalmente graficamos en el cuadro derecho de la Figura 5.15 el  $\Delta a - \Delta a_{\text{sin}}$ , donde  $\Delta a_{\text{sin}} = \max(\Delta a_{\text{sin}_1}, \Delta a_{\text{sin}_2}, \Delta a_{\text{sin}_3})$ . Reacomodando las ecuaciones anteriores,

$$\Delta a_i = \frac{4L_i}{\mu_i m_i^2} \Delta L_i \quad \text{con} \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.30}$$

Como resultado de este enfoque vemos una gran reducción en el gradiente diferencial del fondo permitiendo ver más claramente la estructura del plano representativo definido por la larga evolución dinámica. La compleja red de resonancias se ve ahora realzada, y se diferencian bien las distintas regiones del plano, hecho que no sucedía graficando  $\Delta a$  con los términos que de esta manera se eliminan.

## 5.4. Aplicación a sistemas planetarios

De la distribución de sistemas múltiples descubiertos por velocidad radial tenemos información disponible de excentricidades y masas mínimas con lo que un análisis dinámico completo y razonablemente bueno es posible. Se encuentra que la mayoría de estos sistemas son, de hecho, resonantes indicando un pasado en el que fue posible migración convergente, necesariamente en un disco protoplanetario. En los sistemas de tránsito, sin embargo, esta información no está disponible y no se



**Figura 5.16. Izquierda:** Simulaciones con migración tipo-I para diferentes condiciones iniciales, superpuestas al mapa dinámico para  $30 m_{\oplus}$ . En color se destacan algunas simulaciones cuyas características se encuentran detalladas en la Tabla 5.2. Las estrellas indican el inicio de cada integración. **Derecha:** Migración orbital para dos simulaciones con diferente posición inicial en las que se obtienen distintas secuencias de captura en resonancia. Ambos casos detienen la migración relativa cuando se cruzan con una resonancia doble.

puede probar un comportamiento resonante ni estimar la proximidad real a RMM-3P. Las RMM-2P incluso son muy difíciles de analizar, aún teniendo información de TTVs. Entonces, ¿es posible aportar algo más al caso de las RMM de 3 planetas? ¿Cómo se puede probar que los ángulos de Laplace están efectivamente librando?

Los sistemas que presentamos en la Tabla 5.1 suponemos que están en resonancias de 3 planetas y vimos dónde se encuentran en el plano de la razón de movimientos medios (Figura 5.2), pero ¿dónde los encontraríamos sobre los mapas dinámicos? La configuración final de una cadena resonante, ¿depende de cómo haya sido la migración de cada par de planetas que componen dicha cadena? Es decir, ¿importa que primero el sistema migre verticalmente hasta cruzar una RMM entre  $m_2$  y  $m_3$  y luego horizontalmente hasta que  $m_1$  y  $m_2$  entren en resonancia? ¿Qué pasa si se da al revés? Por otro lado, durante la evolución de un sistema multi-resonante, ¿qué ruta de migración sigue hasta quedar capturado? ¿Cómo es que afectan las evoluciones tidales con la estrella central a este tipo de arquitecturas? Analizamos estas cuestiones a lo largo de las siguientes secciones mediante simulaciones en las que incluimos migración planetaria, variando las condiciones iniciales y algunos parámetros del disco.

#### 5.4.1. Sistemas conocidos en resonancias dobles

Para ver dónde encontraríamos a los sistemas planetarios luego de sufrir la migración planetaria, realizamos simulaciones de N-cuerpos en las que incluimos mi-

gración de tipo-I. En la imagen izquierda de la Figura 5.16 mostramos en negro algunas de estas integraciones, superpuestas al mapa dinámico para  $m_i = 30m_{\oplus}$ . Por más que en líneas generales parece que la migración se detiene siempre que haya un cruce de al menos dos resonancias, existe una gran diversidad de resultados finales. Es decir, vemos que cualquier configuración final es posible, aunque no igualmente probable. Hay casos que saltan resonancias importantes para llegar a una más fuerte que frene la migración en un cruce de resonancias. Algunas condiciones iniciales experimentan migración convergente, situación que se observa en el mapa dinámico cuando  $n_i/n_{i+1} \rightarrow 1$ , y otras divergente (caso contrario). Un resultado interesante de estas simulaciones tiene que ver con las masas de los planetas. En el caso de 2 cuerpos, para que se de una captura la migración debe ser convergente y la masa de los planetas crecer hacia afuera. En el caso de 3 planetas, esta no es una condición necesaria. A modo de ejemplo, se pueden ver en la Tabla 5.2 algunas condiciones iniciales, que están resaltadas en el gráfico con distintos colores. Puede apreciarse también que en algunos casos (simulaciones E y R, por ejemplo) las masas de los planetas son las mismas, al igual que la altura de escala  $H_0$ , pero los resultados son muy distintos. Evidentemente, lo que causa un resultado u otro son las distintas posiciones iniciales. En este caso, la simulación E inicia de forma divergente para el par interno de planetas, hasta que se cruza con una RMM-3P de orden cero y queda allí atrapada. La simulación Q, sin embargo, empieza de manera convergente, saltea una resonancia de 2 planetas y utiliza como guía una de 3 de alto orden. Así viaja hasta encontrar un cruce de resonancias lo suficientemente fuerte como para detener el cambio en la razón de movimientos medios relativa. Lo interesante de graficar los resultados en este plano es que, a priori, un sistema con las razones de períodos finales de las simulaciones no serían detectados como resonantes (simulaciones A, C y D del cuadro izquierdo de la Figura 5.16).

En el gráfico de la derecha de la Figura 5.16 resaltamos dos simulaciones particulares, en las que los planetas migran hasta encontrar una resonancia lo suficientemente fuerte que utilizan de guía y continúan evolucionando hasta una resonancia doble, donde frena la migración relativa. En una de las integraciones (curva verde) el sistema migra primero hasta una RMM-2P entre  $m_1$  y  $m_2$  y continúa hasta una intersección con una RMM-2P entre  $m_2$  y  $m_3$ , que hace también de nodo de una RMM-3P de orden cero. La simulación graficada en color naranja muestra el caso contrario: durante la evolución el sistema saltea una resonancia de orden cero hasta llegar a una de 2 planetas entre  $m_2$  y  $m_3$ , y se detiene al llegar a la intersección con una resonancia entre  $m_1$  y  $m_3$ , marcada a trazos. A modo de ejemplo, [Delisle \(2017\)](#) realizó un modelo analítico para un sistema en el que cada par de cuerpos están en RMM y, en particular, lo aplicó al sistema Kepler-223. Encontró 6 soluciones estables independientes para los ángulos de Laplace. Como dependiendo de las condiciones iniciales la secuencia de capturas en resonancia varía, calculó la probabilidad de hallar al sistema en la configuración observada dado que los ángulos críticos de este sistema se conocen por TTV. Muestra que el escenario que mejor reproduce la configuración observada se da si primero entran en la resonancia  $3/2$  los planetas c y d, luego se captura el más externo e formando la cadena 2:3:4 y finalmente se bloquea el más interno b. De esta forma, un 52% de sus simulaciones reproducen las observaciones de Kepler-223, mientras que si las capturas son del más interno

Sim	$m_1$ [ $m_\oplus$ ]	$m_2$ [ $m_\oplus$ ]	$m_3$ [ $m_\oplus$ ]	$a_1$ [ua]	$a_2$ [ua]	$H_0$	Migración	Captura
A	13.386	19.02	22.19	0.557	0.72	0.03	Convergente	Si
B	17.435	19.02	22.19	0.483	0.7309	0.05	Convergente	No
C	17.435	19.02	22.19	0.566	0.728	0.05	Convergente	Si
D	22.19	17.435	19.02	0.566	0.728	0.05	Divergente	No
E	15.85	19.02	22.19	0.5675	0.7433	0.05	Divergente	Si
Q	15.85	19.02	22.19	0.454	0.646	0.03	Convergente	Si
R	15.85	19.02	22.19	0.47258	0.66569	0.03	Convergente	Si

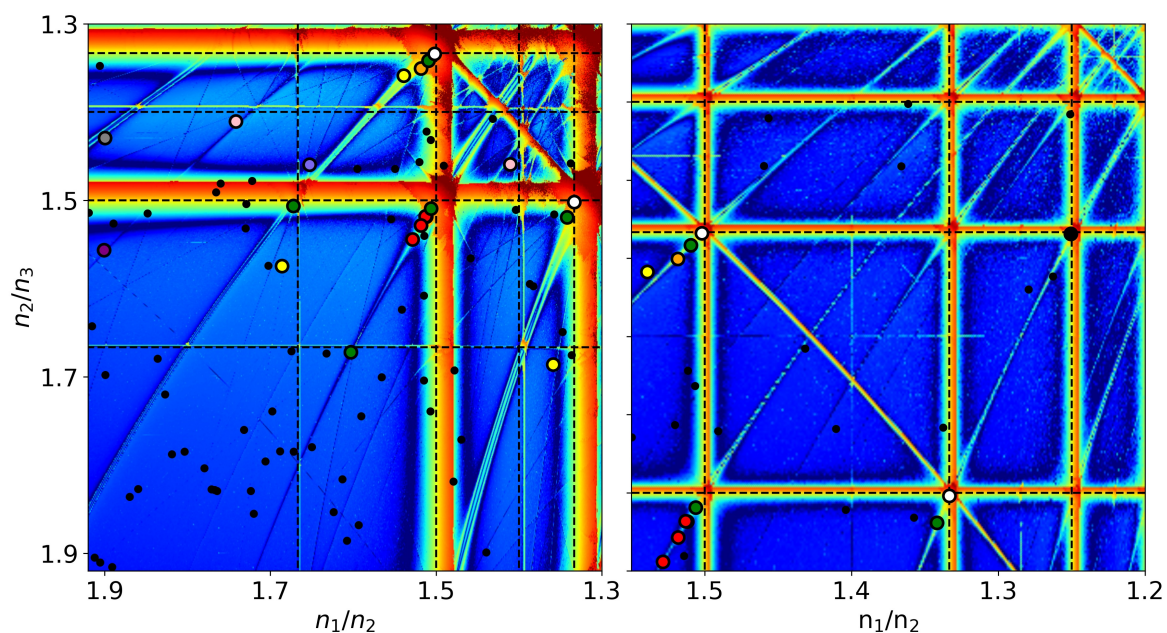
**Tabla 5.2.** Características de las simulaciones con migración resaltadas en la Figura 5.16. Detallamos las masas y semiejes iniciales de cada uno de los planetas ( $a_3 = 1 ua$  fijo) y la altura de escala del disco. Como resultados finales marcamos el tipo de migración y si la simulación terminó capturada o no en resonancia.

al más externo, sólo el  $\sim 4\%$  de las veces logran que los ángulos resonantes libren como se los observa. Sobre los mapas dinámicos de 3 y  $30 m_\oplus$  graficamos, en la Figura 5.17, la posición actual de los sistemas exoplanetarios observados en la región de interés. Resaltamos diez sistemas multi-planetarios compactos, cuya dinámica se supone dominada por resonancias de 3 planetas, varios de ellos detallados en la Tabla 5.1. No graficamos a los planetas gigantes de la Tabla ya que el análisis que realizamos incluye únicamente sistemas descubiertos por tránsito. El código de colores empleado para identificar cada sistema es el siguiente: a todos los sistemas detectados con tránsito los graficamos en negro, mientras en color se resaltan los sistemas mencionados durante este capítulo (ver pie de foto para detalle de colores). Notar que en estas imágenes vemos información complementaria a la que nos brindaba la Figura 5.2, dada por los mapas que se observan de fondo.

La distribución de masas y períodos orbitales de cada uno de los sistemas destacados en la Figura 5.17 puede verse en la Figura 5.18, exceptuando a Kepler-11 que no aparece dado que sus planetas tienen todos períodos mayores a 20 días. Por otro lado, Kepler-33, Kepler-90 y Kepler-184 no tienen determinadas las masas de sus planetas y por ende tampoco fueron graficados. Por su parte, las masas del cuerpo más interno de Kepler-80 y el más externo de TRAPPIST-1 son también desconocidas y fueron graficadas sin barras de error.

Como puede verse ahora, la elección de masas para realizar los mapas dinámicos no fue caprichosa, sino que los valores calculados de  $m_i/m_*$  de los planetas descubiertos cubren el intervalo entre  $\sim 3 - 30$ . Por lo tanto, debería haber una correspondencia entre las características cualitativas generales de la dinámica de cada sistema que mostramos en los gráficos de las Figuras 5.17 y 5.18.

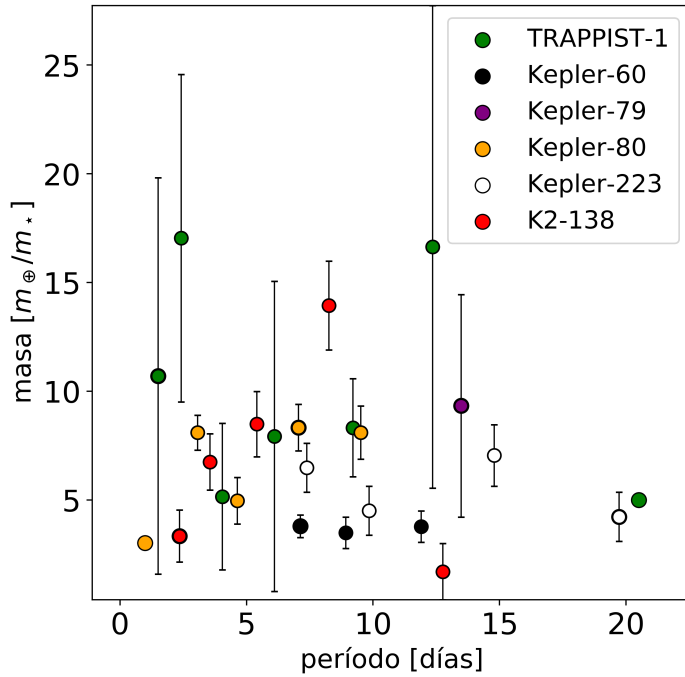
Mientras los sistemas destacados con colores en la Figura 5.17 parecen estar en resonancias dobles, es posible diferenciarlos en dos subgrupos en la Figura 5.18. El primero está compuesto por Kepler-60 y Kepler-223, que en el plano de razón de períodos no muestra un desplazamiento apreciable respecto de la posición nominal de la resonancia doble. En el caso de Kepler-60, la proximidad a la resonancia puede estar viciada ya que el proceso de ajuste orbital de [Goździewski et al. \(2016\)](#) asume



**Figura 5.17. Izquierda:** Mapa dinámico del indicador  $\max(\Delta a)$  habiendo sustraído las variaciones de corto período para 3 planetas de  $30m_{\oplus}$ . Los círculos en negro representan los planetas descubiertos por tránsito en esa región del plano mientras que los puntos de colores indican las posiciones de algunos sistemas exoplanetarios conocidos, que parecen estar en RMM-3P: TRAPPIST-1 (verde), Kepler-11 (rosa), Kepler-33 (azul), Kepler-60 (negro), Kepler-79 (violeta), Kepler-80 (naranja), Kepler-90 (amarillo), Kepler-184 (gris), Kepler-223 (blanco), y K2-138 (rojo). Las posiciones nominales de resonancias de primer orden entre 2 cuerpos están marcadas como líneas a trazos verticales y horizontales. **Derecha:** Misma descripción y código de colores pero para el mapa dinámico del fondo fue realizado para 3 masas iguales de  $3m_{\oplus}$ .

movimiento resonante como proxy. Sin embargo, no es el caso de Kepler-223, en que la libración de los ángulos de Laplace de 3-planetas fue medido con datos de TTV (Mills et al., 2016b) y la proximidad a la resonancia doble exacta parece real. Observando la Figura 5.18, Kepler-79 parece formar parte también de este primer grupo, pero en los mapas mostrados en la Figura 5.15 no hay evidencia de una RMM doble en su posición.

TRAPPIST-1 y Kepler-80, representantes del segundo grupo junto con K2-138, muestran un desplazamiento significativo respecto de la resonancia doble, a pesar de que todos los subsistemas de 3 planetas estén bien alineados con la posición de la RMM-3P de orden cero. La distribución de período orbital de esos sistemas (Figura 5.18) muestra que los 3 conjuntos se encuentran mucho más próximos a su estrella progenitora que los miembros del primer grupo, siendo así más susceptibles a los efectos de evolución tidal. Dependiendo del número de ángulos resonantes librando de 2-planetas, Papaloizou (2015) propuso que algunos sistemas dentro de las resonancias dobles podían evolucionar por efectos tidales preservando la libración del ángulo de Laplace. Específicamente, MacDonald et al. (2016) mostraron con simulaciones numéricas para el caso de Kepler-80 que la migración divergente inducida tidalmente puede llevar a arquitecturas orbitales similares a las observa-



**Figura 5.18.** Masas planetarias estimadas en función del período orbital para varios sistemas multi-resonantes cercanos a su estrella progenitora. El código de colores es el mismo que el usado en la figura anterior. Las masas están dadas en unidades de masa terrestre respecto de la masa estelar.

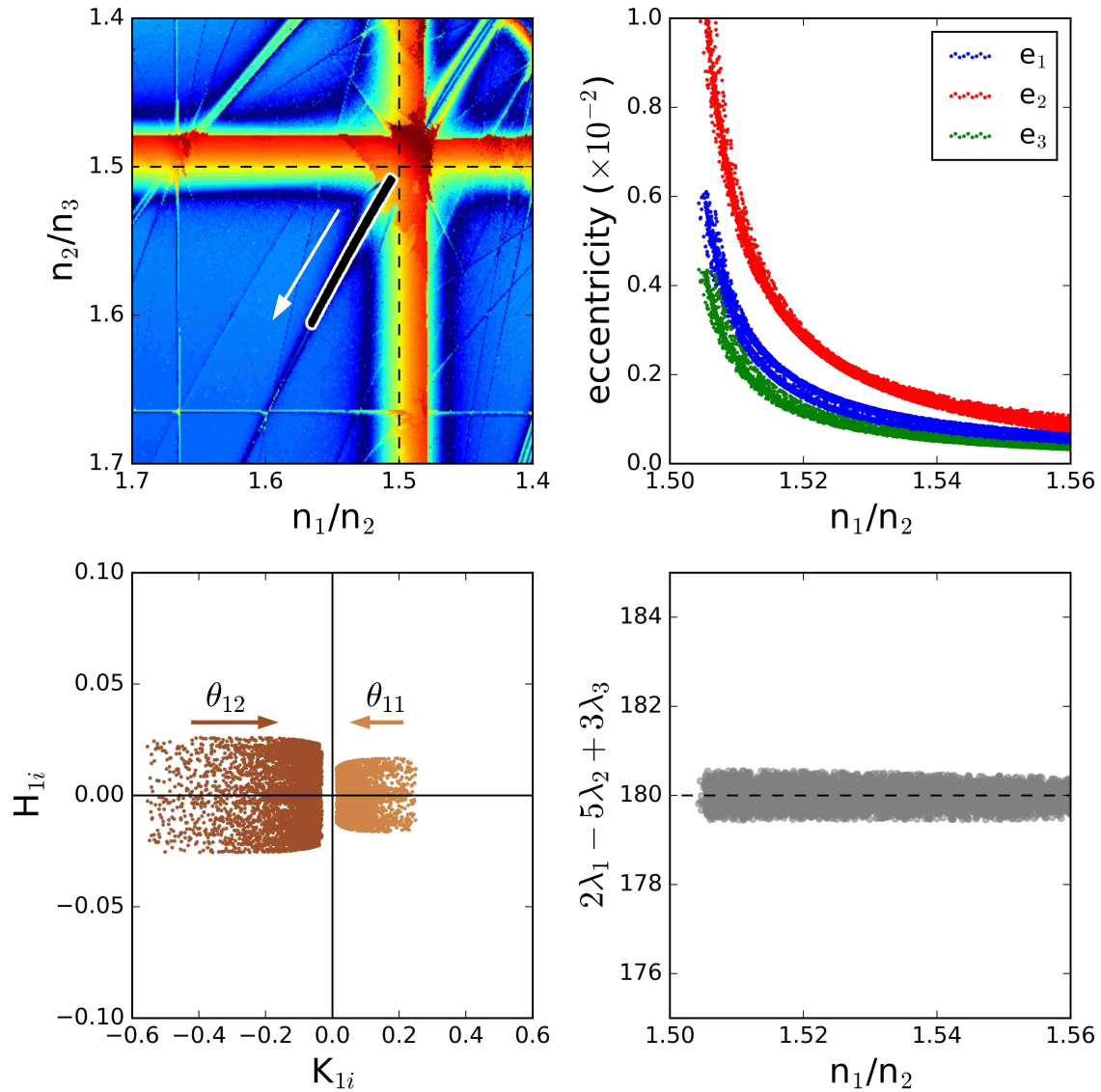
das en la actualidad, caracterizados por grandes desplazamientos de las RMMs-2P mientras preservan la libración de los ángulos de Laplace.

Para entender cómo afectan las mareas a la distribución de las cadenas resonantes de 3-planetas con bajas masas en el plano  $(n_1/n_2, n_2/n_3)$ , la Figura 5.19 muestra la evolución tidal de un sistema ficticio compuesto por 3 planetas orbitando una estrella central de  $m_{*} = 1 M_{\odot}$ . Las condiciones iniciales se tomaron del estado final de una simulación previa en la que se consideraba captura en resonancia, y corresponde a una muy pequeña amplitud de libración de todos los ángulos resonantes de 2 planetas:

$$\begin{aligned} \theta_{11} &= 3\lambda_2 - 2\lambda_1 - \varpi_1 & , & & \theta_{12} &= 3\lambda_2 - 2\lambda_1 - \varpi_2, \\ \theta_{22} &= 3\lambda_3 - 2\lambda_2 - \varpi_2 & , & & \theta_{23} &= 3\lambda_3 - 2\lambda_2 - \varpi_3. \end{aligned} \quad (5.31)$$

La evolución tidal la simulamos usando el modelo clásico de [Mignard \(1979\)](#) incorporando términos de disipación y precesión a un código de N-cuerpos (e.g. [Beaugé y Nesvorný, 2012](#)). Como los gráficos muestran correlación entre distintas proyecciones en el espacio de las fases y no varían en función del tiempo, los resultados son independientes de los parámetros tidales, siempre y cuando las escalas de tiempo evolutivas sean adiabáticas con respecto a los períodos de libración.

Iniciando desde  $(n_1/n_2, n_2/n_3) \simeq (1.504, 1.509)$ , muy cerca de la RMM 3/2-3/2, se ve que la migración divergente aumenta ambas razones de movimientos medios apartando al sistema de la resonancia doble (cuadro superior izquierdo de la Figura 5.19). Sin embargo, dichas tasas de cambio no son independientes sino que están restringidas por o alineadas con la resonancia de Laplace. Tal como fue previamente encontrado por [Papaloizou \(2015\)](#) y [MacDonald et al. \(2016\)](#), la resonancia de orden cero de 3-planetas que sale de la resonancia doble, actúa como una guía sobre la cual el sistema evoluciona. Como se ve en el cuadro inferior derecho, el



**Figura 5.19.** Evolución tidal de un sistema ficticio de 3 planetas, con masas  $m_1 = 7 m_\oplus$ ,  $m_2 = 10 m_\oplus$  y  $m_3 = 15 m_\oplus$ , inicialmente atrapado en resonancia doble  $3/2$ - $3/2$ . **Arriba izquierda:** superpuesto al mapa dinámico, la línea negra sobre blanca muestra el camino evolutivo del sistema conduciendo hacia razones mayores de movimiento medio, pero siguiendo la RMM-3P  $2n_1 - 5n_2 + 3n_3 = 0$ . **Arriba derecha:** Decrecimiento de las excentricidades en función de  $n_1/n_2$ . **Abajo izquierda:** Comportamiento de las variables canónicas regulares  $(K_{1i}, H_{1i}) = (2S_i)^{1/2}(\cos \theta_{1i}, \sin \theta_{1i})$  para los ángulos resonantes del par interno:  $\theta_{1i} = 3\lambda_2 - 2\lambda_1 - \varpi_i$  (ver ecuación (5.31)). Las flechas indican la dirección de la evolución. Se observa un comportamiento similar para el par  $(K_{2i}, H_{2i})$ . **Abajo derecha:** Ángulo resonante de Laplace en función de  $n_1/n_2$ .

ángulo correspondiente de Laplace  $\theta = 2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 3\lambda_3$  libra alrededor de  $\theta = 180^\circ$  con amplitud muy pequeña sin desviación discernible.

Por más que esperábamos que el ángulo de 2 planetas circule una vez que el sistema aumenta su desviación respecto de la resonancia doble, el gráfico inferior izquierdo muestra que este no es el caso. La evolución tidal sigue una solución asimétrica (Beaugé et al., 2006; Michtchenko et al., 2006), generando un decrecimiento monotónico en las excentricidades (gráfico superior derecho) con amplitudes amortiguadas de los modos seculares.

Aún siendo estas libraciones cinemáticas y estando el movimiento acotado por la separatriz, los términos resonantes de las interacciones entre 2 planetas continúan siendo importantes a la hora de definir la dinámica del sistema, incluso lejos de las posiciones nominales. Al momento de definir la dinámica a largo plazo del sistema, esto plantea un problema sobre el peso relativo entre los términos resonantes puros de 3 planetas (Quillen, 2011) y las perturbaciones de 2 planetas. Quizás la subestimación de las estimaciones analíticas de los anchos de libración de las resonancias de Laplace (cuadro derecho de la Figura 5.13) no es debido a limitaciones intrínsecas en la forma normal de segundo orden, sino en las contribuciones de primer orden que no han sido incluidas.

#### 5.4.2. Captura resonante en sistemas ficticios

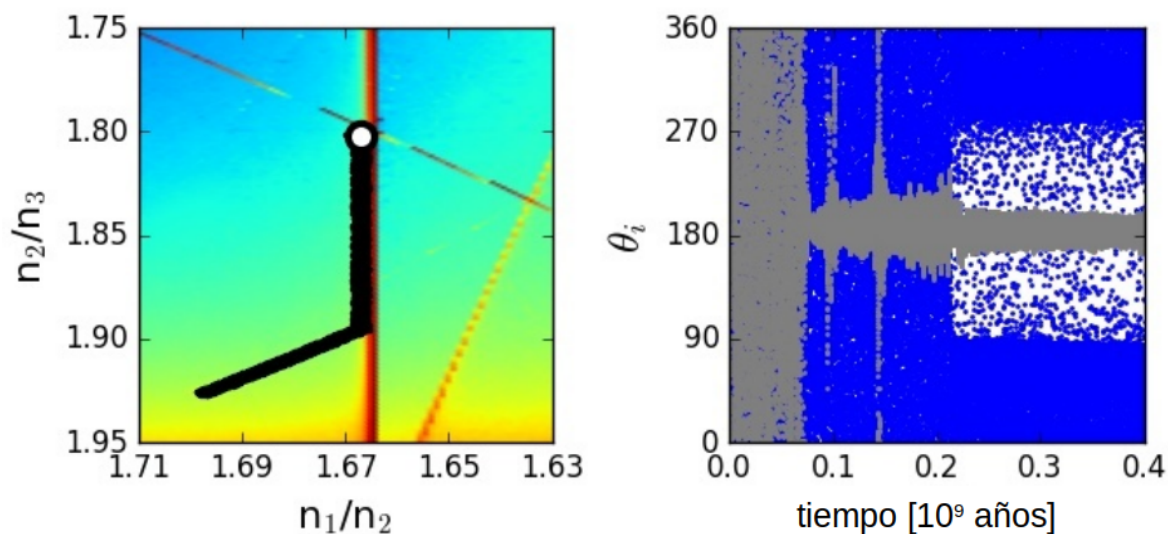
Dada la gran diversidad de sistemas resonantes que observamos en el ejemplo anterior y asumiendo que pueden ser el resultado de migración planetaria, en esta sección estudiamos si es posible obtener capturas en otro tipo de configuraciones. En particular, nos preguntamos si haciendo integraciones de sistemas de 3 planetas lo suficientemente largas, es posible obtener capturas estables en configuraciones resonantes que no estén asociadas a resonancias dobles entre pares de planetas adyacentes.

Para esto, realizamos una serie de simulaciones de N-cuerpos en las que modificamos las escalas de tiempo de migración orbital entre  $\tau_a \in [10^4, 10^7]$  años. En ellas variamos las masas de los planetas, sus semiejes mayores iniciales (aunque el planeta más externo lo inicializamos siempre en  $1 \text{ ua}$ ) y la altura de escala  $H_0$  del disco en que se encontraban inmersos durante la etapa de formación. En estas integraciones, elegimos la densidad superficial del disco a  $r = 1 \text{ ua}$  igual a  $\Sigma_0 = 20 \text{ gr/cm}^2$  y para el perfil de densidad superficial del disco utilizamos como exponente  $\alpha = 1/2$ . Por simplicidad, fijamos la masa estelar en  $m_0 = 1M_\odot$ .

En líneas generales, un sistema cuya migración es rápida suele llevar a una captura en una resonancia doble fuerte. Las simulaciones novedosas fueron aquellas en las que el decaimiento orbital fue más lento. Éstas generaron una variedad mayor de configuraciones finales posibles. Para realizar una comparación más directa con los sistemas multiplanetarios compactos observados, restringimos los valores de las masas entre  $1 - 30m_\oplus$ . Por último, variamos la densidad superficial de los discos.

En las Figuras 5.20 y 5.21 mostramos los resultados de tres simulaciones con salidas distintas. Los cuadros de la izquierda muestran la evolución sobre el plano  $(n_1/n_2, n_2/n_3)$  mientras que en la derecha se muestran, en cada caso, los ángulos resonantes.

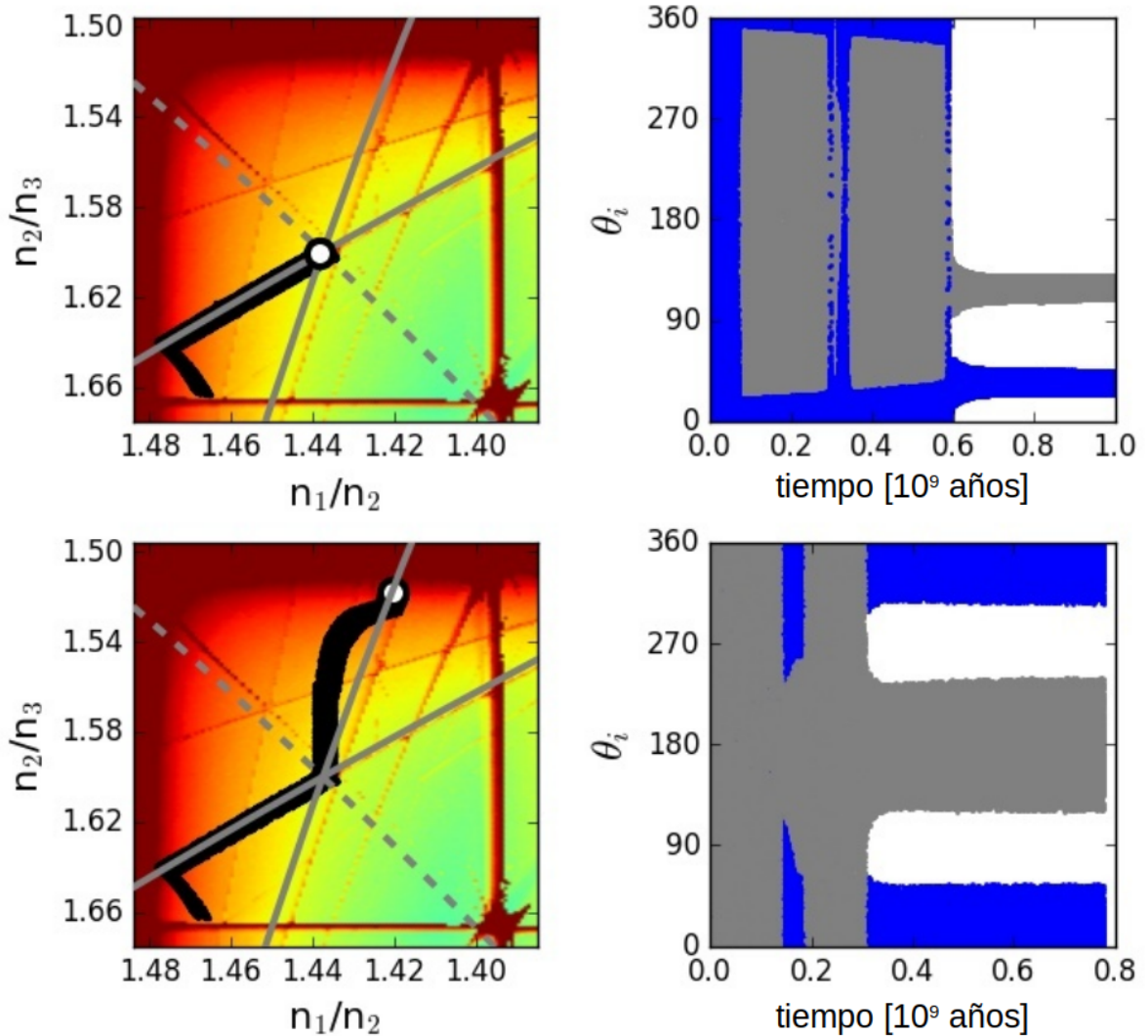




**Figura 5.20.** Resultado de una simulación de N-cuerpos para un sistema ficticio de 3 planetas de masas  $m_1 = 16$ ,  $m_2 = 19$  y  $m_3 = 22$ , en unidades de  $m_\oplus$ . **Izquierda:** Las líneas negras muestran el camino evolutivo en el plano  $(n_1/n_2, n_2/n_3)$  superpuestas al mapa dinámico de  $m_i = 30m_\oplus$ . **Derecha:** Comportamiento de los ángulos resonantes involucrados en la simulación.

Los paneles de la Figura 5.20 corresponden a una integración de un sistema con masas  $m_1 = 16$ ,  $m_2 = 19$  y  $m_3 = 22$ , todos en unidades de masa terrestre. Estas razones de masas garantizan que la migración sea convergente. Primero, los 2 planetas internos quedan atrapados en la RMM-2P  $5/3$ , luego de lo cual el sistema continúa evolucionando de manera vertical hasta que se cruza con la comensurabilidad  $n_1 - 3n_3 = 0$ , correspondiente con una RMM  $3/1$  de 2 planetas entre los cuerpos más interno y externo, que puede verse en el mapa como una línea diagonal que cruza el gráfico en un ángulo obtuso. Por más que la migración planetaria no se detenga y los semiejes mayores de todos los planetas sigan disminuyendo, el sistema ha alcanzado en este punto una configuración estable con las excentricidades del orden de  $e_i \sim 10^{-3}$  y no se observan más cambios en la razón de movimientos medios. La imagen de la derecha muestra el comportamiento de los ángulos resonantes  $5\lambda_2 - 3\lambda_1 - 2\varpi_2$  en gris y  $3\lambda_3 - \lambda_1 - 2\varpi_1$  en azul. Ambos dos se encuentran librando alrededor de valores simétricos indicando que el sistema está efectivamente atrapado en una configuración orbital tal que el planeta interno está simultáneamente en resonancia de 2 planetas con el planeta del medio y con el externo, respectivamente, pero  $m_2$  y  $m_3$  no están entre ellos en movimiento resonante.

Las dos gráficas de arriba en la Figura 5.21 muestran el resultado de una segunda simulación. En esta oportunidad las masas utilizadas fueron  $m_1 = 18.4$ ,  $m_2 = 19$  y  $m_3 = 22$  (en  $m_\oplus$ ), lo que implica un pequeño incremento en la masa del cuerpo más interno en comparación con el caso descrito anteriormente. La intención con esto era generar una migración inicial divergente entre  $m_1$  y  $m_2$  y analizar cómo se comportaba el sistema entero a esta situación no trivial. La densidad superficial se mantuvo igual que en el caso previo, pero redujimos las separaciones iniciales entre los planetas para estudiar una región del espacio de fases más densamente poblada con resonancias de 3 planetas.



**Figura 5.21.** Resultados de 2 simulaciones de N-cuerpos para un sistema ficticio de 3 planetas de masas  $m_1 = 18.4$ ,  $m_2 = 19$  y  $m_3 = 22$  (en  $m_\oplus$ ). **Arriba:** Integración para un disco con densidad superficial  $\Sigma_0 = 20 \text{ gr/cm}^2$ . **Abajo:** Disco con  $\Sigma_0 = 40 \text{ gr/cm}^2$ . **Izquierda:** Las líneas negras muestran el camino evolutivo en el plano  $(n_1/n_2, n_2/n_3)$  superpuestas al mapa dinámico de  $m_i = 30m_\oplus$ . Las líneas grises continuas muestran la posición de las RMMs-3P de primer orden,  $2n_1 - 6n_2 + 5n_3 = 0$  y  $4n_1 - 7n_2 + 2n_3 = 0$ . Las grises a trazos se corresponden con la resonancia  $2n_1 - n_2 - 3n_3 = 0$  de segundo orden. Las posiciones de las resonancias las hemos graficado en elementos medios por lo que se observa un leve corrimiento respecto del mapa de fondo. **Derecha:** Comportamiento de los ángulos resonantes involucrados en cada simulación.

Al igual que antes, el camino evolutivo está marcado en el esquema de la izquierda. La divergencia inicial del par interno frena ni bien el sistema se encuentra con la resonancia de 3 planetas  $2n_1 - 6n_2 + 5n_3 = 0$  de primer orden, en la cual queda capturado. De aquí en adelante el ángulo crítico correspondiente  $2\lambda_1 - 6\lambda_2 + 5\lambda_3 - \varpi_3$  comienza a librar alrededor de un centro asimétrico (marcado en azul en el gráfico de la derecha), aunque también se observa una circulación temporal seguida de un pasaje a otra conmensurabilidad. El sistema continúa su migración siguiendo la familia de la resonancia  $2n_1 - 6n_2 + 5n_3 = 0$  hasta que se encuentra con la  $4n_1 - 7n_2 + 2n_3 = 0$ . Esta intersección de dos RMM-3Ps independientes actúa como 'trampa' planetaria, frenando efectivamente cualquier migración diferencial adicional. De aquí en adelante, el ángulo resonante  $4\lambda_1 - 7\lambda_2 + 2\lambda_3 + \varpi_3$  también comienza a librar alrededor de una solución asimétrica, mientras que las excentricidades continúan levemente excitadas,  $e_i \sim 10^{-3}$ .

La captura permanente en dos RMM-3P independientes de primer orden, dinámicamente estable, era un resultado hasta ahora desconocido para la migración lenta de sistemas de 3 planetas. La resonancia de segundo orden de 3 planetas marcada en línea a trazos sobre el mapa, no ha mostrado ningún efecto dinámico apreciable en el sistema. Sin embargo, es interesante marcar que

$$(4n_1 - 7n_2 + 2n_3) - 2(2n_1 - 6n_2 + 5n_3) = 5n_2 - 8n_3, \quad (5.32)$$

lo que implica que una libración simultánea en ambas resonancias de primer orden entre los 3 planetas también conduce a una libración de los dos planetas externos en la resonancia  $n_2/n_3 = 8/5$ . Esta es la misma conmensurabilidad que se cree que domina a la terna de planetas b-c-d de TRAPPIST-1 (ver capítulo siguiente).

La pregunta que nos surge a continuación es intentar entender si alguna de las resonancias es la causa y la otra la consecuencia. En principio, uno esperaría que una resonancia de 2 planetas, aún si es de tercer orden como la  $8/5$ , sea más significativa que una de 3 planetas de menor orden. Sin embargo, la ausencia de cualquier tipo de indicio de la resonancia  $8/5$  en el mapa dinámico, genera alguna duda al respecto.

Por más que la intersección de dos resonancias independientes de movimientos medios entre 3 planetas siempre se asocia a resonancias de 2 planetas entre cuerpos adyacentes, muchas veces son de alto orden y por ende, dinámicamente despreciables. Por ejemplo, mientras que la interacción de las conmensurabilidades entre 3 planetas del gráfico del medio de la Figura 5.21 lleva a una resonancia  $8/5$  entre  $m_2$  y  $m_3$ , la correspondiente razón de movimientos medios entre el par interno es  $n_1/n_2 = 23/16$ , una resonancia de tan alto orden que no influye demasiado en la dinámica del sistema. Consecuentemente, es posible que el proceso de captura tanto de TRAPPIST-1 como de los sistemas ficticios de la Figura 5.21 esté dominado por RMMs de 3 planetas de primer orden, y no por las de 2 planetas de órdenes mayores.

Los dos paneles inferiores de la Figura 5.21 corresponden a una tercera simulación que tiene exactamente las mismas masas y condiciones iniciales que en el caso anterior, pero una mayor densidad superficial:  $\Sigma_0 = 40 \text{ gr/cm}^2$ . Se observa que las primeras etapas del proceso de migración son similares. Sin embargo, la migración rápida no puede ser contrarrestada, en este caso, por la intersección de las RMMs-3P de primer orden. Aquí, luego de la captura temporal, el sistema continúa

evolucionando hacia una configuración más compacta. De todos modos, luego de un cierto tiempo los planetas encuentran la conmensurabilidad  $4n_1 - 7n_2 + 2n_3 = 0$  y se repite la captura, como se ve a partir del comportamiento del ángulo crítico  $4\lambda_1 - 7\lambda_2 + 2\lambda_3 + \varpi_3$ , en puntos grises en el gráfico de la derecha. La fase final de la evolución continúa sobre esta familia resonante hasta que se encuentra la resonancia de 2 planetas  $n_2/n_3 = 3/2$  y frena toda migración diferencial posible. Los puntos azules en el gráfico de la derecha muestran el comportamiento del ángulo  $\theta_c = 3\lambda_3 - 2\lambda_2 - \varpi_2$ , donde se puede apreciar una libración con amplitud moderada alrededor de  $\theta_c \sim 0$ , en una configuración estable.

Vemos entonces que es posible obtener nuevas posibles arquitecturas como resultado final de la migración de sistemas con 3 planetas, en donde el par de resonancias que actúan como trampa planetaria se compone de una RMM de 3 planetas pura y una (más clásica) resonancia de primer orden entre 2 planetas.

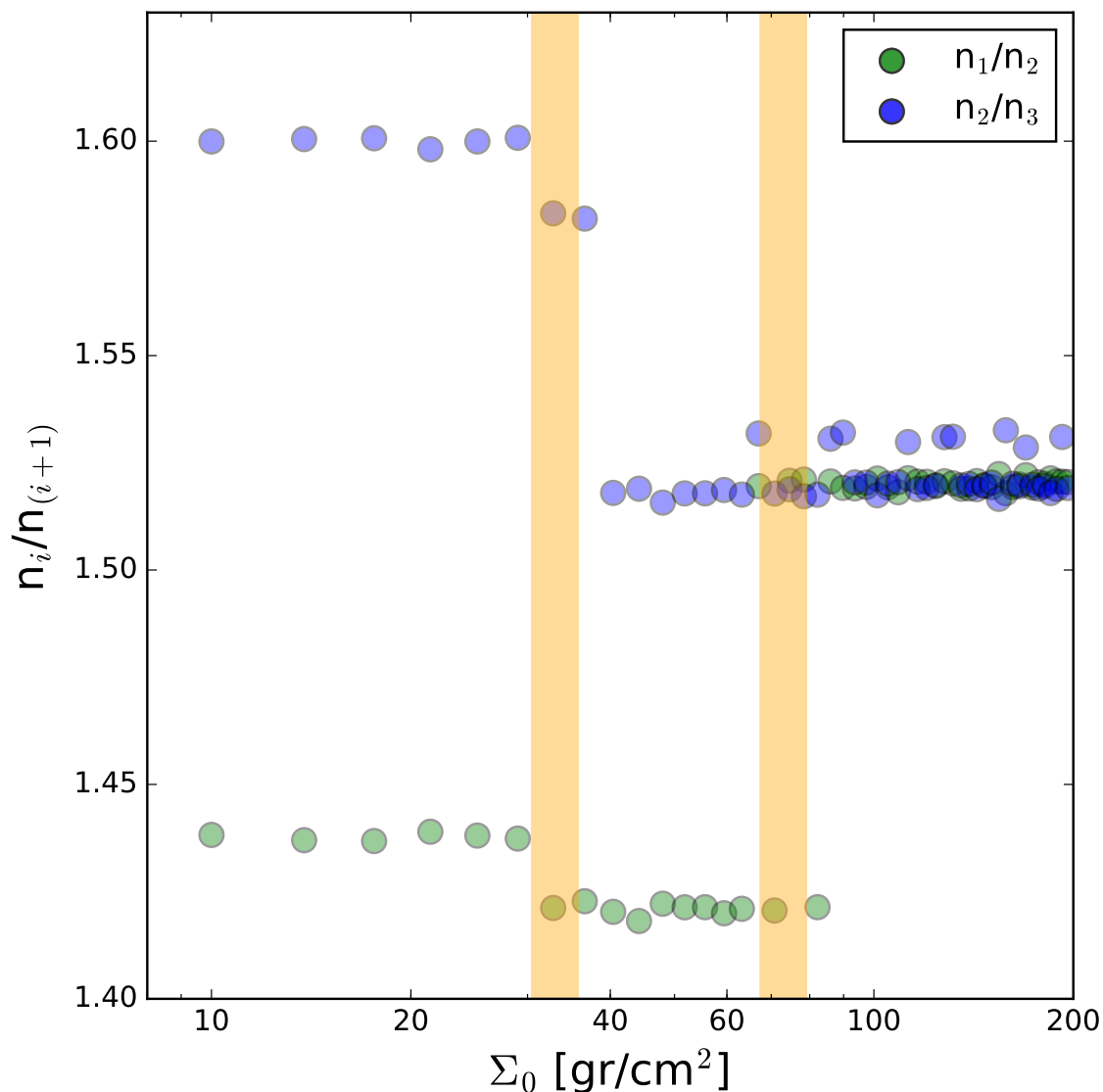
Las simulaciones de N-cuerpos que exponemos como ejemplos en las Figuras 5.20 y 5.21 muestran resultados muy diferentes entre sí. Mientras en todos los casos la migración convergente frena únicamente en la intersección de dos resonancias independientes, este resultado no es restringido a RMM de 2 planetas sino que puede incluir un amplio rango de posibilidades. Por otro lado, algo muy interesante es que este tipo de configuraciones finales no hubiera sido identificada como un sistema resonante solo por las razones de movimientos medios individuales (las de 2 planetas), sino que surgen de este análisis detallado del sistema completo de 3 planetas. Los mapas dinámicos ayudan a identificar resonancias relevantes en los sistemas multiplanetarios.

Finalmente, para entender cómo influyen las escalas de tiempo de migración en la configuración final de los sistemas, hemos repetido las simulaciones anteriores variando la densidad superficial del disco. Tomamos 50 valores en el intervalo  $\Sigma_0 \in [10, 200]$  gr/cm<sup>2</sup>. Para cada corrida calculamos el valor final de equilibrio para  $n_1/n_2$  y  $n_2/n_3$ , y graficamos los resultados en función de  $\Sigma_0$ . Los resultados pueden verse en la Figura 5.22.

Aquellos sistemas cuya escala de tiempo característica de migración está entre  $\tau_a \gtrsim 1.5 \times 10^5$ , que se corresponden con valores medios de la densidad superficial  $\Sigma_0 \lesssim 30$  gr/cm<sup>2</sup>, quedaron capturados en una configuración análoga a la que describimos en los gráficos superiores de la Figura 5.21. En otras palabras, el decaimiento orbital se detiene en una intersección aparente de dos resonancias de movimientos medios de 3 planetas de primer orden. Además, dado que la combinación de ambas relaciones resonantes generan que  $5n_2 - 8n_3 = 0$ , también se observa al par externo afectado por esta conmensurabilidad de alto orden entre 2 planetas.

Para densidades superficiales levemente mayores, es decir,  $\tau_a$  entre  $8 \times 10^4$  y  $1.5 \times 10^5$  años, los efectos combinados de las resonancias  $2n_1 - 6n_2 + 5n_3 = 0$  y  $4n_1 - 7n_2 + 2n_3 = 0$  no resultan lo suficientemente fuertes como para actuar de trampa planetaria por lo que el sistema continúa evolucionando hacia una nueva solución estacionaria que involucra la resonancia de 3 planetas  $4n_1 - 7n_2 + 2n_3 = 0$  y a  $2n_2 - 3n_3 = 0$ , de 2 cuerpos. Sin embargo, esta configuración orbital solo resulta posible para un rango limitado de densidades superficiales y constituye una transición entre los escenarios de altas y bajas densidades.

Por último, aquellas migraciones que tienen una escala de decaimiento orbital



**Figura 5.22.** Valores finales de razón de movimientos medios de simulaciones con migración en sistemas con 3 planetas para diferentes densidades superficiales del disco protoplanetario  $\Sigma_0 = \Sigma(r = 1)$ . Las masas de los planetas y las condiciones iniciales las tomamos iguales a las de la Figura 5.21. Las franjas verticales anaranjadas indican de manera aproximada límites para tres resultados distintos. Para  $\Sigma_0 \lesssim 30 \text{ gr/cm}^2$ , todas las capturas ocurren en la intersección de dos RMM-3P de primer orden, mientras que para  $\Sigma_0 \gtrsim 80 \text{ gr/cm}^2$  los planetas frenan su migración en la resonancia doble  $3/2$ . En densidades superficiales intermedias, los sistemas evolucionan hacia la intersección entre conmensurabilidades de 2 y 3 planetas.

$\tau_a \lesssim 8 \times 10^4$  años, ninguna RMM-3P parece lo suficientemente fuerte como para contrarrestar los efectos disipativos por lo que finalmente, los planetas terminan capturados en la resonancia doble  $3/2$ - $3/2$ . Todas estas configuraciones finales son dinámicamente estables y al menos uno de sus ángulos resonantes se encuentra librando alrededor de un punto estacionario con amplitud baja o moderada.

Claramente, el límite entre estos regímenes depende tanto de las masas de los planetas considerados, como de los parámetros del disco (índice de forma  $f$  y la pendiente de la densidad superficial). Es posible que también otros efectos físicos más complejos como considerar discos radiativos o zonas muertas (localizadas) en el disco, afecten los valores numéricos y alteren el alcance efectivo de las resonancias de 3 planetas.

## 5.5. Conclusiones parciales

Nuevas observaciones y análisis de sistemas planetarios múltiples, en configuraciones compactas, muestran la existencia de cadenas entrelazadas de resonancias, compuestas por conmensurabilidades entre 2 planetas y entre 3 planetas. Ejemplos confirmados de esto son los sistemas TRAPPIST-1, Kepler-60, Kepler-80, Kepler-223 y K2-138. Se cree que estos sistemas tienen un comportamiento dinámico muy complejo, y hasta ahora, todas las conmensurabilidades entre 3 planetas se han asociado a resonancias dobles, y no a resonancias puras de movimientos medios entre los 3 planetas.

En esta parte del trabajo, propusimos una visión más general de la interacción gravitatoria en sistemas de 3 planetas en el que estudiamos de manera global las resonancias de movimientos medios y posibles rutas evolutivas desde configuraciones seculares a resonantes. Nuestro estudio se basa en la construcción y análisis detallado de mapas dinámicos de condiciones iniciales en el plano representativo de la razón de movimientos medios entre planetas consecutivos. Con estos mapas logramos develar una estructura dinámica muy rica de posibles configuraciones resonantes, incluyendo resonancias de orden cero (conocidas como resonancias de Laplace) y resonancias puras de movimientos medios entre 3 planetas, de primer orden. Por más que las resonancias aparecen densamente en este plano representativo, no todas son igualmente importantes. En ausencia de modelos analíticos apropiados, estos mapas nos permitieron evaluar las fuerzas relativas e identificar cuáles resonancias son las relevantes para la evolución orbital en sistemas de 3 planetas.

Las relaciones de conmensurabilidad están definidas en variables medias, mientras que la integración de condiciones iniciales es realizada en elementos osculadores. Generalmente, la diferencia entre ambos conjuntos de variables es despreciada. Durante el análisis de los mapas, notamos que los valores nominales de las resonancias están significativamente desplazados de los observados. Para resolver esto construimos y aplicamos un modelo analítico simple para transformar los semiejes mayores de medios a osculadores. Este modelo es muy importante para poder identificar correctamente cuál de las RMM de 3 planetas está asociada a cada característica dinámica del mapa. Como valor agregado, esta transformación nos permitió además eliminar del fondo las perturbaciones de corto período y así, realzar los efectos dinámicos de largo período en las diferentes regiones del plano.

Hay que enfatizar que estos mapas los realizamos únicamente para cuerpos de igual masa, sólo para 3 valores específicos. No es de esperarse que sean idénticos para diferentes conjuntos de  $(m_1, m_2, m_3)$  (como puede verse en las figuras a lo largo del capítulo en las Figuras 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 y 5.15). Sin embargo, las características generales y las posiciones de las resonancias sí deberían mantenerse cualitativamente, al menos para masas en el mismo rango. Así, aún si este análisis resulta ilustrativo, hemos utilizado estos mapas genéricos extensamente como punto de referencia para el análisis de las interacciones dinámicas de sistemas planetarios tanto reales como ficticios.

La fuerza efectiva de resonancias puras de primer orden entre 3 planetas la probamos mediante una serie de simulaciones de N-cuerpos en las que incluimos migración de tipo I. Para sistemas ficticios de 3 planetas encontramos que es posible formar cadenas resonantes incluso si la migración diferencial entre los pares de planetas es inicialmente divergente (recordar que en el caso de sistemas con 2 planetas, esto no es posible, ver ecuación 5.7). La migración relativa se detiene únicamente una vez que el sistema queda atrapado en dos resonancias independientes de movimientos medios. Para escalas cortas de migración, las conmensurabilidades que intervienen en el proceso son las de 2 planetas, como las que se observan en Kepler-60, Kepler-80 y Kepler-223. No obstante, encontramos además que las tasas de migración más lentas conducen a una gama más amplia de posibilidades. Esto quiere decir que los sistemas multiplanetarios pueden quedar atrapados en una combinación entre resonancias de 2 planetas con una de 3 planetas pura de primer orden, por ejemplo. Dependiendo de las masas, siempre parece existir un límite superior para la densidad superficial del disco bajo la cual dos resonancias independientes puras de 3 planetas de primer orden pueden capturar de forma permanente a un sistema en una configuración estable, sin que ésta esté asociada a ninguna resonancia de movimientos medios de 2 planetas.

Los sistemas en cadenas resonantes que no incluyen conmensurabilidades entre 2 planetas no pueden ser fácilmente identificados como multi-resonantes, no al menos graficando sencillamente la razón de movimientos medios entre los planetas adyacentes. Esta razón hace interesantes a este tipo de sistemas. Además, las capturas resonantes como la que se muestra en el panel superior de la figura 5.21 tampoco hubieran sido naturalmente asociadas a resonancias de 3 planetas. Esto nos lleva a preguntarnos si la distribución observada de sistemas múltiples puede, de hecho, albergar sistemas con este tipo de configuraciones características. Hemos estado analizando esta posibilidad y, por más que no hemos encontrado una correlación global, sí parecen haber algunos sistemas prometedores (ver Tabla 5.1).

Con parte de los resultados de este capítulo hemos publicado el trabajo [Chalambous et al. \(2018\)](#) que fue citado 5 veces, particularmente para el estudio de cadenas de resonancias en sistemas multiplanetarios y en la estabilidad de los mismos.





---

## CAPÍTULO 6

---

# Aplicación a TRAPPIST-1

En este capítulo aplicaremos el método descrito en el capítulo anterior a un sistema planetario particular, TRAPPIST-1. Este sistema está conformado por 7 planetas por lo que lo tomaremos de a subgrupos de 3 para trabajar.

### Índice

---

<b>6.1. La misión TRAPPIST</b> . . . . .	<b>123</b>
<b>6.2. El sistema</b> . . . . .	<b>124</b>
<b>6.3. Captura de TRAPPIST-1 en RMMs-3P</b> . . . . .	<b>127</b>
6.3.1. Primeras pruebas . . . . .	128
6.3.2. Variación de parámetros del disco . . . . .	135
6.3.3. Variación de la escala de tiempo de circularización orbital . . . . .	137
<b>6.4. Conclusiones parciales</b> . . . . .	<b>143</b>

---

## 6.1. La misión TRAPPIST

La misión TRAPPIST (denominada así por su nombre en inglés TRAnsiting Planets and Planetesimals Small Telescope) consiste de 2 telescopios de 60cm, uno en el Observatorio de La Silla, Chile, y otro en Oukaimden Observatory, Marruecos. Se dedica principalmente a la detección y caracterización de exoplanetas y al estudio de cometas y cuerpos menores de nuestro Sistema Solar.

La misión TRAPPIST apunta a objetos tipo estelares que tengan temperaturas menores a  $2700\text{ K}$ , conocidas como *ultracool dwarfs* o, en español, *enanas ultra frías* (Kirkpatrick et al., 1995). Estos objetos parecen exóticos en comparación con nuestro Sol, pero hay varios motivos para elegirlos.

En primer lugar, el grupo de ultra fríos incluye estrellas de muy baja masa que poseen como máximo el 15 % de la masa Solar así como también enanas marrones, cuerpos subestelares que son tan poco masivos que no logran sostener la fusión de

Planetas	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
Período [días]	1.5108	2.4218	?
Radio [ $R_{\oplus}$ ]	1.113	1.049	$\sim 1.168$
Semieje [ua]	0.0111	0.01522	?

**Tabla 6.1.** Período, radio y semieje mayor de los 3 primeros planetas descubiertos por [Gillon et al. \(2016\)](#), TRAPPIST-1*b*, *c* y *d*.

hidrógeno en su núcleo. Este tipo de objetos representa el 15% de la población de objetos astronómicos cercanos al Sol ([Cantrell et al., 2013](#)).

Además, la capacidad de descubrir planetas con el método de tránsito alrededor de estrellas tan pequeñas aumenta enormemente. Esto ayuda también en el estudio de atmósferas planetarias. Que la estrella central sea pequeña implica que la señal producida por planetas del tamaño de la Tierra sea 80 veces más fuerte comparando con planetas orbitando una estrella de tipo Solar, e igual proporción se obtiene para las atmósferas.

Otra razón muy importante para seleccionar este tipo de estrellas tiene que ver con la habitabilidad de los planetas alrededor de ellas. Un planeta orbitando alrededor de una estrella tipo Solar en su zona de habitabilidad (como la Tierra) tarda del orden de un año en recorrer su órbita mientras que un planeta igualmente templado alrededor de una estrella ultra fría demora sólo una semana. En comparación con el Sistema Solar, encontrar planetas con características y arquitecturas diferentes nos permite poner en contexto a la Tierra, y entender cuán común fue su formación.

Por otra parte, no resulta práctico buscar planetas tipo terrestres (en cuanto a tamaño, masa, radio y temperatura) alrededor de estrellas de masa Solar con la tecnología actual, mientras que sí es posible hacerlo para estrellas ultra frías e ir ganando conocimientos al respecto. Por ejemplo, se han detectado 7 planetas alrededor de la estrella TRAPPIST-1A, para los cuales es posible estudiar la climatología ya que la proximidad de los planetas a la estrella central hace que se encuentran ligados por efectos de marea y que en una de las caras siempre sea de día mientras que en la otra, siempre de noche.

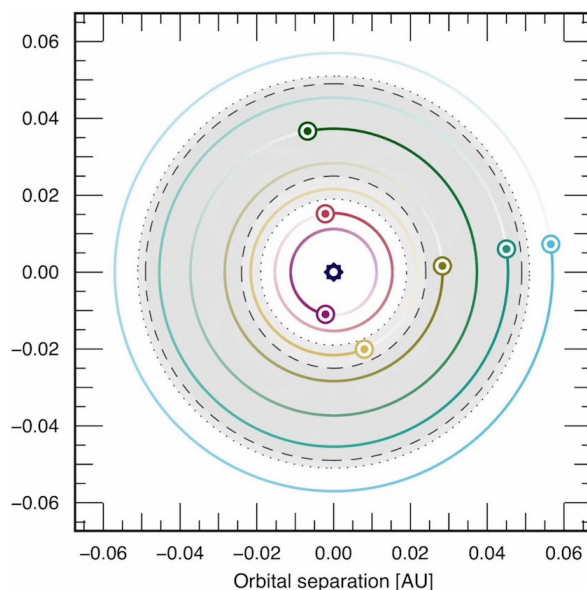
## 6.2. El sistema

La estrella TRAPPIST-1A tiene únicamente el 8% de la masa solar, un radio aproximado de  $0.117 R_{\odot}$ , y su clasificación espectral es M8. Se encuentra a  $\sim 12$  pc de distancia, tiene metalicidad solar y su período de rotación es  $P_{\text{rot}} = 1.4 \pm 0.05$  días. La edad de la estrella está estimada en  $7.6 \pm 2.2 \times 10^9$  años ([Burgasser y Mamajek, 2017](#)), notar que el error es muy grande.

Cronológicamente, la historia de este sistema es la siguiente. [Gillon et al. \(2016\)](#) detectaron 3 planetas de tamaño similar al de la Tierra alrededor de esta estrella. Sus radios fueron bien estimados, propio de la técnica de tránsito, pero no así las masas y composiciones químicas, tal como se describió en el capítulo 1. Los 2 planetas más internos se observan ubicados cerca del límite interno de la zona de habitabilidad estelar, mientras que el período del planeta externo no se conocía de-

Planetas	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
Período [días]	1.511	2.422	4.049	6.099	9.207	12.353	?
Radio [ $R_{\oplus}$ ]	1.086	1.056	0.772	0.918	1.045	1.127	$\sim 0.75$
Semieje [ua]	0.011	0.015	0.021	0.028	0.037	0.045	?
Masa [ $m_{\oplus}/m_{\odot}$ ]	$10.62 \pm 9$	$17.25 \pm 7.62$	$5.12 \pm 3.37$	$7.75 \pm 7.25$	$8.5 \pm 2.25$	$16.75 \pm 11$	24?
Resonancias		8/5	5/3	3/2	3/2	4/3	?

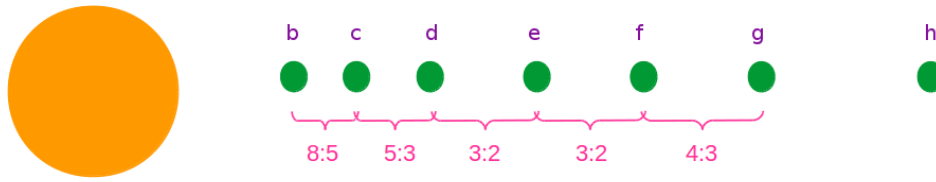
**Tabla 6.2.** Período, radio y semieje mayor y masa (con sus respectivos errores) de los 7 planetas del sistema TRAPPIST-1 reportados por [Gillon et al. \(2017\)](#). Ver que los valores para los primeros 3 planetas difieren de los presentado en la Tabla 6.1. Además, se muestra en la última fila la razón de períodos de pares de planetas adyacentes.



**Figura 6.1.** Representación gráfica de las órbitas de los 7 planetas de TRAPPIST-1 en el plano perpendicular a la línea de la visual. El anillo gris representa la zona habitable del sistema. Los límites de esta región son calculadas con estimaciones de [Kopparapu et al. \(2013\)](#). La línea punteada indica la zona de habitabilidad Optimista y la línea a trazos, la Conservadora. En la región de la ZH total, se observan 4 planetas que despiertan un especial interés desde un punto de vista astrobiológico ya que en ellos puede existir agua en estado líquido en la superficie. Imagen extraída de [Gillon et al. \(2017\)](#).

bido a la falta de datos observacionales para realizar un ajuste. Todos los planetas se encuentran muy cercanos a la estrella central y probablemente estén ligados tidalmente (sincronismo spin-órbita). Las principales características del sistema al momento en que únicamente se conocían 3 planetas se encuentran listadas en la Tabla 6.1.

Un año después de este descubrimiento, [Gillon et al. \(2017\)](#) reanalizaron las observaciones existentes incluyendo monitoreo fotométrico de la estrella desde tierra y con el Telescopio Espacial Spitzer. Descubrieron que la información proveniente del planeta más externo, TRAPPIST-1*d*, al que no se le conocía el período, era una señal combinada de 4 planetas. A su vez, detectaron una señal de un objeto que podría tener un tamaño un poco menos que el radio terrestre. De esta forma, el sistema quedó conformado por 7 planetas en vez de por 3. Con este nuevo estudio fue posible entonces estimar las masas de los 6 cuerpos más internos. En la Tabla 6.2



**Figura 6.2.** Posiciones de los 7 planetas de TRAPPIST-1 formando una cadena resonante. Se destacan las razones de períodos orbitales de cada par de planetas adyacentes. Notar que  $g$  y  $h$  no están asociados a una RMM ya que no se conoce el período del planeta más externo.

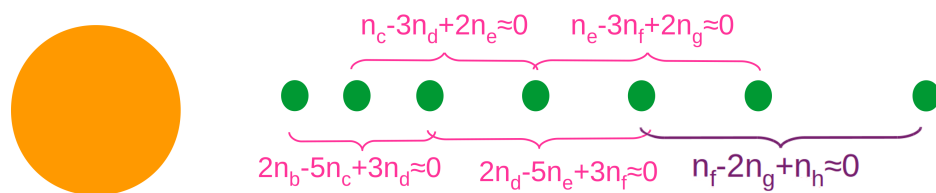
Ternas	$p$	$q$
$b-c-d$	2	3
$c-d-e$	1	2
$d-e-f$	2	3
$e-f-g$	1	2

**Tabla 6.3.** Valores de  $p$  y  $q$  para cada terna de TRAPPIST-1 reportados por Luger et al. (2017). Con estos valores, el ángulo resonante de 3-planetas libra en torno a un valor fijo (ecuación 5.5).

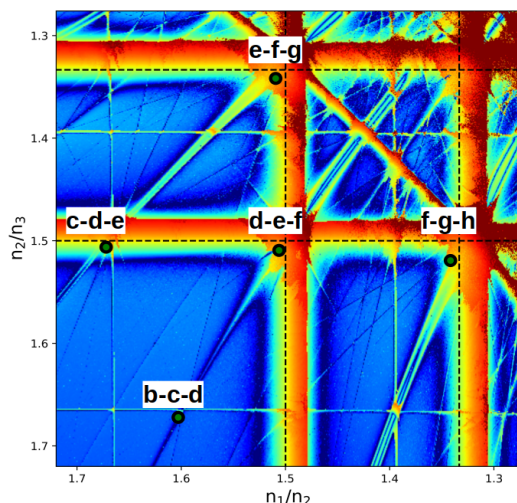
se detallan los radios, semiejes y períodos orbitales del sistema completo, excepto que, nuevamente, no se reporta el período del cuerpo más externo. De esos datos se ve que el sistema es muy compacto, tal como se muestra en la Figura 6.1. En ella se grafican los 7 planetas en la posición que ocupan en el disco circunestelar y se ve que 4 de ellos se encuentran en la Zona Habitable del sistema, marcada en gris.

Por otra parte, se observa que las razones de períodos orbitales de pares de planetas adyacentes están cerca de sucesivas RMM, configuración conocida como cadena resonante y que representamos esquemáticamente en la Figura 6.2. Esta cadena de resonancias de movimientos medios está detallada en la última fila de la Tabla 6.2, donde listamos las razones de períodos entre cuerpos consecutivos empezando desde el par más interno. Notar que el último conjunto no tiene asignada una RMM por desconocerse el período del planeta más externo.

Si en vez de estudiar al sistema mediante las cadenas se analiza siguiendo la propuesta de Luger et al. (2017), se encuentran 4 subconjuntos de 3 planetas que satisfacen la condición resonante con  $1 \leq p, q \leq 3$ , ver Tabla 6.3. Estos auto-



**Figura 6.3.** Configuración multi-resonante entre cada terna del sistema TRAPPIST. La ecuación que satisfacen los 5 subconjuntos es  $pn_1 - (p + q)n_2 + qn_3 \sim 0$ , con  $p, q \in \mathbb{Z}$  detallados en la Tabla 6.3.



**Figura 6.4.** En el fondo se puede ver el mapa dinámico realizado para 3 planetas con masas iguales de  $m_i = 30m_{\oplus}$  orbitando en torno a una estrella central de  $1 M_{\odot}$ . Superpuesto, identificamos con un cartel la posición de cada una de las ternas del sistema TRAPPIST-1 en el plano de la razón de movimientos medios.

res sugieren que TRAPPIST-1*h* también debería estar en resonancia triple con los planetas *f* y *g*. Para estudiar si efectivamente se da esa configuración, analizan el ángulo resonante probando para distintos valores de  $p$  y  $q$ , en los mismos límites que el resto de las ternas del sistema ( $p, q \leq 3$ ). De los 6 posibles valores de  $p$  y  $q$  únicamente detectaron una señal fuerte para  $p = q = 1$ , restringiendo finalmente el valor del período orbital del único planeta que faltaba en  $P_h = 18.77$  días. De esta forma, el sistema en su totalidad queda interconectado por sucesivas resonancias de 3 planetas, tal como se muestra en la Figura 6.3.

A partir de este análisis aplicado al sistema TRAPPIST-1, queda planteado un cambio de paradigma en lo que respecta al estudio de sistemas planetarios con 3 planetas o más. Pueden estudiarse a los sistemas como multi-resonantes y analizar el ángulo de 3-cuerpos, y no de a 2 en pares consecutivos.

En lo que resta de este capítulo haremos un análisis dinámico al sistema particular TRAPPIST-1 y aplicaremos lo desarrollado en el capítulo 5. Distinguimos a cada terna del sistema en el plano de movimientos medios (ver Figura 6.4) utilizando los mapas dinámicos presentados en el capítulo anterior para este estudio.

### 6.3. Captura de TRAPPIST-1 en RMMs-3P

Como hemos visto a lo largo de este trabajo, se cree que los sistemas multi-resonantes extrasolares han llegado a sus configuraciones actuales como consecuencia de una migración convergente suave, a raíz de la interacción con el disco gaseoso primordial. Lógicamente, esto también vale para los demás sistemas que discutimos en el capítulo 5: Kepler-60, Kepler-80 y Kepler-223. Dado que las masas  $m_i/m_{\star}$  son pequeñas, se espera que el decaimiento orbital esté dominado por migración de tipo-I (e.g. Ward, 1997).

Mientras que en los sistemas de 2 planetas las interacciones entre el planeta y el disco hacen que la razón de movimientos medios frene cuando queda atrapada en alguna RMM, en el caso de 3 cuerpos masivos es diferente. La migración diferencial frena únicamente si el sistema completo es capturado en dos resonancias independientes de movimientos medios. En los ejemplos anteriores, todas las cap-

turas parecen ser resonancias de 2 cuerpos. Así, todas las conmensurabilidades de 2 planetas no parecen ser puras sino resonancias dobles.

### 6.3.1. Primeras pruebas

Para analizar el caso de TRAPPIST-1 en el contexto de la teoría que venimos desarrollando para 3 planetas, es necesario tomar ternas para trabajar. Así, subdividimos a TRAPPIST-1 en 5 sub-sistemas de a cuerpos consecutivos. El primer conjunto es b-c-d, el segundo c-d-e, el tercero d-e-f, el cuarto lo conforman los planetas e-f-g y por último f-g-h.

Como mencionamos en el capítulo anterior, para mapear la estructura resonante calculamos la máxima variación en los semiejes. Es decir, utilizamos el indicador  $\max(\Delta a) = \max(\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3)$ . A pesar de que no mide movimiento caótico permite identificar resonancias de tipo Laplace, donde la excentricidad no sufre una excitación apreciable.

La configuración orbital actual de la terna más interna formada por los planetas b-c-d del sistema TRAPPIST-1, es curiosa. Su posición puede verse en la Figura 6.4, marcada como un punto verde ubicado en  $(n_1/n_2, n_2/n_3) \sim (1.6, 1.66)$ . De acuerdo a Gillon et al. (2017), este sub-sistema está en una resonancia doble identificada como  $(n_1/n_2, n_2/n_3) = (8/5, 5/3)$ , correspondiéndose con dos resonancia de 2 planetas de alto orden. En el mapa dinámico logramos identificar la resonancia 5/3, pero no hemos hallado ningún rastro de la RMM-2P de tercer orden 8/5. Sin embargo, sí vemos una curva diagonal que se intersecta con la posición observada de b-c-d, y se corresponde con la RMM-3P de primer orden,  $3n_1 - 6n_2 + 2n_3 = 0$ . Lo que nos cuestionamos a partir de esto fue, primero, qué rol tienen las resonancias entre 3 planetas a la hora de capturar a los planetas en resonancia. Por otra parte nos preguntamos si la evolución del sistema está o no guiada por éstas, en lugar de ser las resonancias tradicionales de 2 planetas las importantes en esta instancia.

Para comprender mejor esta situación realizamos una serie de simulaciones de N-cuerpos para sistemas ficticios tipo TRAPPIST-1, en las que incluimos migración planetaria de tipo-I. Los resultados de una simulación típica de migración se muestran en la Figura 6.5, superpuesto al mapa dinámico. En estas simulaciones consideramos las masas de cada planeta dentro de los límites de las observaciones (ver Tabla 6.2). Dado que la captura resonante únicamente ocurre, al menos de lo que sabemos del caso de 2 planetas, si la migración es convergente (es decir  $\tau_{a_i} > \tau_{a_{i+1}}$ ) y tomando todos los parámetros fijos del disco, es necesario tomar las masas tal que crezcan hacia afuera del disco. Para simular la migración adoptamos la prescripción analítica de decaimiento orbital de Tanaka et al. (2002) y Tanaka y Ward (2004), donde incorporamos además la conservación parcial del momento angular, sugerida por Goldreich y Schlichting (2014).

Existe otro trabajo realizado por Tamayo et al. (2017) en el que estudian la cadena resonante de TRAPPIST-1 pero, a diferencia de lo que hicimos nosotros, introdujeron una fuerza externa ad-hoc únicamente en el planeta más externo. Elegimos este tratamiento por sobre el propuesto por dichos autores ya que nos pareció más realista pensando en el contexto de formación planetaria. Esto quiere decir que se acerca más a la realidad el hecho de que todos los planetas migren en el disco a que

migre únicamente el último y empuje al resto. Tanto las ecuaciones de movimiento completas como los detalles que incluimos en el código de N-cuerpos para las integraciones pueden encontrarse en las expresiones del capítulo 4, en particular las ecuaciones 4.31 y 4.32 o en trabajos como Zoppetti et al. (2018). Por último, para entender bien el proceso de migración y posterior captura despreciamos la evolución por efectos tidales y los efectos relativistas en los planetas.

Para que la migración sea convergente asumimos que las masas crecen con la distancia a la estrella y tomamos  $m_b = 16$ ,  $m_c = 17$ ,  $m_d = 17.6$ ,  $m_e = 18.4$ ,  $m_f = 19.5$ ,  $m_g = 21$  y  $m_h = 24$ , en unidades de  $m_{\oplus}/m_{\odot}$ . Es decir, estas son las masas que tendrían los planetas medidas en masas terrestres si la estrella a la que orbitan tuviera una masa solar, en vez de tan solo el 8% de la misma. Por más que estos valores parecen arbitrarios, son consistentes con aquellos estimados para las masa (dentro de sus rangos de errores), como se muestra en la Figura 5.18.

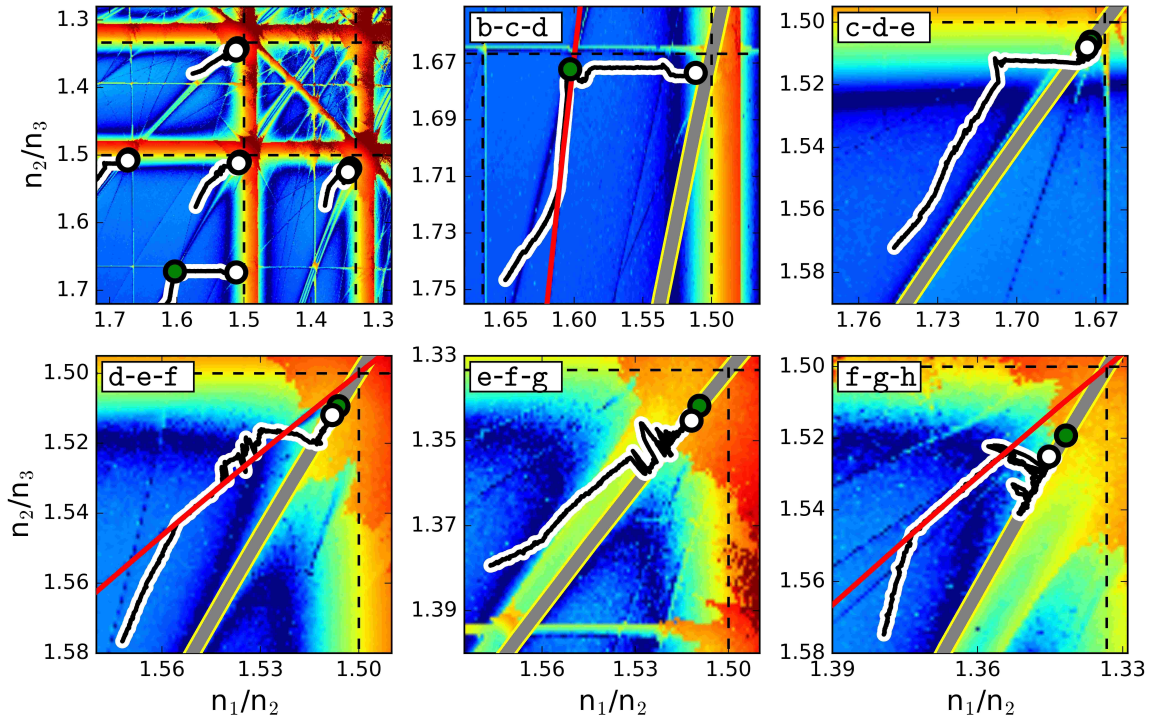
Además, hemos asumido que los planetas están inmersos en un disco plano, laminar, cuya altura a  $1ua$  es  $H_0 = 0.05$ , y un perfil de densidad superficial  $\Sigma(r) = \Sigma_0 r^{-\alpha}$  con  $\alpha = 1/2$  y  $\Sigma_0 = 50 \text{ gr/cm}^2$ . Al elegir una densidad superficial pequeña, la escala de tiempo característica para la migración fue de  $\tau_a \sim 10^5$  años, probablemente mucho mayor que si hubiéramos tomado los valores que se proponen para la NSMM (Hayashi, 1981), aunque prácticamente igual al asumido por Tamayo et al. (2017).

Como condiciones iniciales elegimos excentricidades  $e_i = 0.01$  y todos los ángulos iguales a cero. Ubicamos a los planetas con semiejes mayores un poco más alejados de sus posiciones actuales, y más lejos también de la posición resonante. Al modificar las masas de los planetas (y, en consecuencia, la razón de masa con la estrella) nos fue posible generar caminos evolutivos en el plano  $(n_1/n_2, n_2/n_3)$  en cualquier ángulo de convergencia  $A_c$  (ver ecuación (5.27)). Así cada sub-sistema puede cruzar cualquier conmensurabilidad. Esto fue posible por tener en nuestro trabajo para cada planeta una velocidad de migración. En el trabajo de Tamayo et al. (2017), en cambio, cada sub-sistema estaba siempre obligado a seguir líneas verticales en su evolución en el plano de razón de movimientos medios.

En la Figura 6.5, superpuesto al mapa dinámico que construimos para  $m_i = 30m_{\oplus}$ , mostramos los resultados de una simulación típica. Las curvas negras sobre blanco muestran los senderos que recorrió cada sub-sistema, y los puntos blancos muestran la posición final de cada terna. Los puntos verdes representan la posición observada de los planetas de TRAPPIST-1. En el panel superior izquierdo se puede ver globalmente la evolución de todo el sistema, mientras que los demás cuadros de la Figura son una ampliación de la región de interés de cada triplete. En la mayoría de los casos la simulación coincide con la posición observada, excepto en la terna de planetas más internos (b-c-d). En este único caso, la posición final alcanzada siempre llegaba a una captura en la resonancia doble  $(n_1/n_2, n_2/n_3) = (3/2, 5/3)$ .

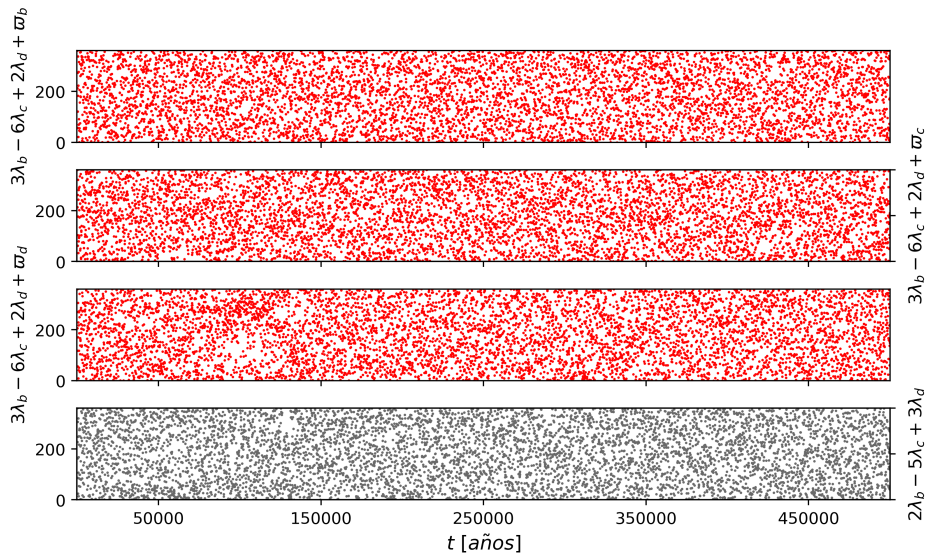
Los gráficos restantes se concentran en la migración de los diferentes sub-sistemas, identificados con carteles blancos en la esquina superior izquierda de cada sub-gráfico. A continuación, describiremos en detalle cada caso.

- **Planetas (b-c-d):** Empezando por la parte inferior izquierda del gráfico, el subsistema de 3 planetas se aproxima a la resonancia de 3 planetas  $3n_1 - 6n_2 + 2n_3 = 0$  de primer orden (curva roja) a la que utiliza como camino hasta llegar a



**Figura 6.5.** Simulaciones de N-cuerpos con migración planetaria de tipo-I para un sistema ficticio símil TRAPPIST-1. **Arriba izquierda:** evolución de la razón de movimientos medios de pares de planetas consecutivos tomados como subsistemas de 3 planetas. En círculos blancos se representan la configuración final de la simulación mientras que los verdes muestran la posición observada. Las curvas negras sobre blancas son los caminos evolutivos seguidos por cada subsistema, desde las posiciones iniciales hasta las de equilibrio finales. Todos los demás cuadros de esta Figura muestran una ampliación de la vecindad de cada sub-sistema, empezando por el triplete (b-c-d) (arriba al medio, ver la leyenda en cada panel) hasta (f-g-h) en el panel inferior derecho. Las resonancias relevantes de 2 planetas se identifican como líneas negras a trazos, las resonancias de Laplace (de orden cero) entre 3 planetas se muestran como curvas grises anchas, y las RMMs-3P de primer orden se indican en rojo. Filtramos las simulaciones para eliminar los términos de corto período y así, las posiciones de las resonancias se muestran en variables medias (no osculadoras). Para garantizar que la migración sea convergente, tomamos las masas planetarias  $m_i/m_\odot$  iguales a 16, 17, 17.6, 18.4, 19.5, 21 y 24, todas en unidades de  $m_\oplus/m_\odot$ . Frenamos la integración cuando el sistema alcanzó una configuración estable, que se corresponde con  $\sim 5 \times 10^5$  períodos orbitales del planeta externo en su posición inicial. El valor de  $Q_e$  utilizado para la circularización de la órbita (ver ecuación 4.32) fue el mismo para todos los planetas,  $Q_e = 0.1$ .

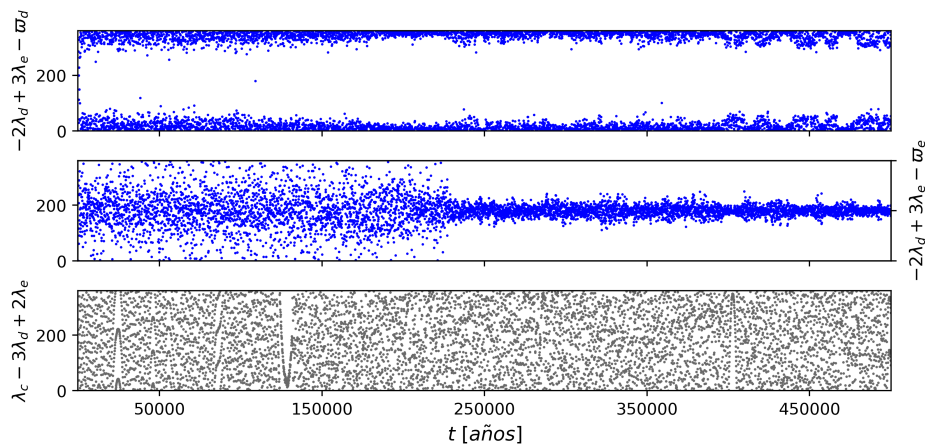




**Figura 6.6.** Ángulos críticos de primer orden (los tres paneles superiores en rojo) y de orden cero (panel inferior en gris) de la terna b-c-d del sistema TRAPPIST-1, con los parámetros la simulación descrita en la Figura 6.5. Como se observa en dicha Figura, esta terna no queda atrapada en la resonancia de 3 cuerpos  $3n_b - 6n_c + 2n_d$  que se observa en el mapa dinámico y el ángulo correspondiente no libra, así como tampoco en la de orden cero  $2n_b - 5n_c + 3n_d$ .

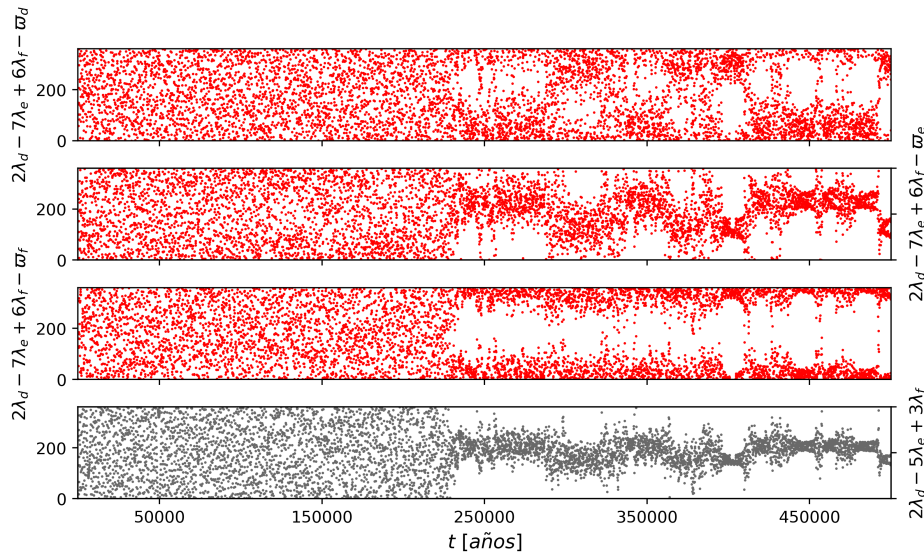
la posición donde actualmente se observa el sistema, en la intersección entre esta resonancia con la de 2 planetas  $n_2/n_3 = 5/3$ . Notar que no se observa ninguna indicación de la  $n_1/n_2 = 8/5$  en el mapa dinámico. Más allá de que el sistema simulado queda temporalmente capturado en una ubicación muy cercana a la observada de la terna interna de TRAPPIST-1, eventualmente resulta eyectada de allí y utiliza como nueva ruta de migración a la resonancia  $n_2/n_3 = 5/3$  en donde es capturado de manera estable hasta el final de la integración, en la posición de la comensurabilidad doble  $(n_1/n_2, n_2/n_3) = (3/2, 5/3)$ . La línea gris ancha muestra la resonancia de Laplace  $4n_1 - 9n_2 + 5n_3 = 0$ . En la Figura 6.6, sin embargo, graficamos el ángulo resonante correspondiente a esta resonancia de 3 cuerpos  $3n_1 - 6n_2 + 2n_3 = 0$  (en rojo, los 3 paneles superiores) y vemos que no está librando, sino que parece que únicamente utiliza la resonancia como guía. Graficamos también, en gris, la resonancia de orden cero  $2n_1 - 5n_2 + 3n_3$  en la que debería estar el sistema según el análisis de [Luger et al. \(2017\)](#), y no encontramos que esta terna libre con los parámetros que utilizamos para esta simulación.

Incluso luego de muchos intentos en los que variamos la masa de los planetas y los parámetros del disco, nos fue imposible encontrar una captura permanente, estable, en la resonancia doble  $(n_1/n_2, n_2/n_3) = (8/5, 5/3)$ . Este aparente inconsistencia con los resultados de [Tamayo et al. \(2017\)](#) puede deberse a las diferencias en el modelo utilizado para la migración planetaria, o puede que sea necesaria una exploración más exhaustiva del espacio de parámetros.

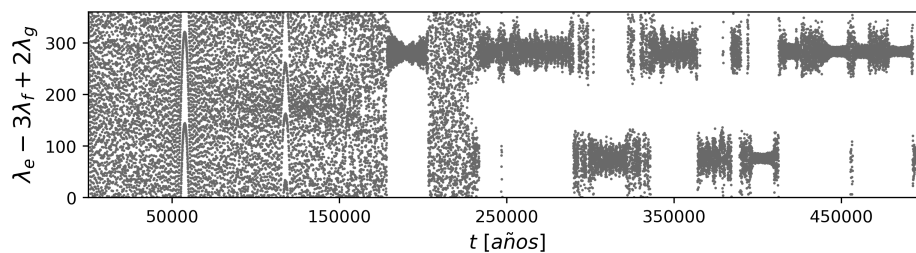


**Figura 6.7.** Ángulos resonantes de la terna c-d-e del sistema TRAPPIST-1. En los dos gráficos superiores se muestra la resonancia  $n_d/n_e = 3/2$ , en la que el par más externo se encuentra librando. En la Figura 6.5 esta terna está durante casi toda su evolución fuera de resonancia hasta el final, que parece quedar capturada en la resonancia de 3 cuerpos  $n_c - 3n_d + 2n_e$ . Sin embargo, el ángulo correspondiente no libra.

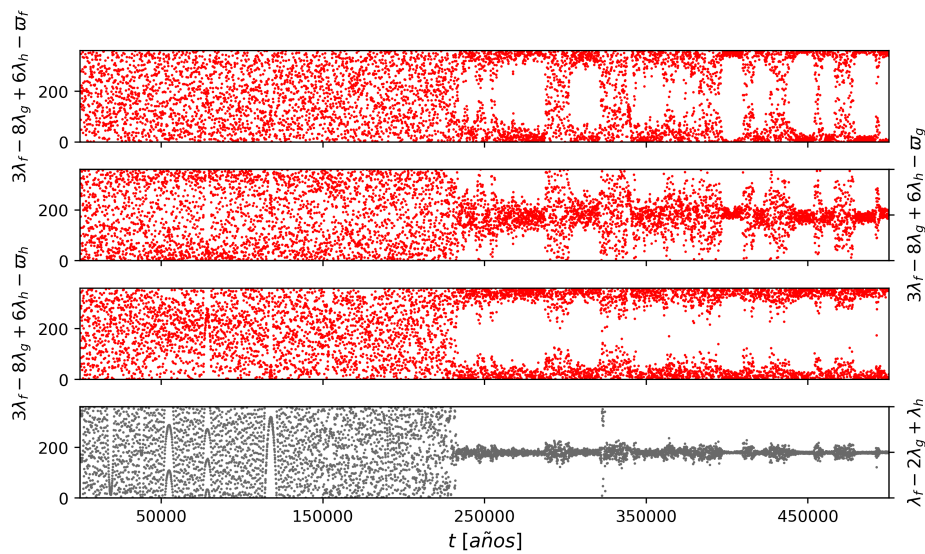
- **Planetas (c-d-e):** Este caso es más directo. La dirección de la migración relativa de estos cuerpos evita cualquier resonancia fuerte pura de 3 planetas. La migración sigue hasta que el par externo se encuentra con la resonancia  $n_2/n_3 = 3/2$  y el ángulo resonante empieza a librar (ver Figura 6.7), y continúa utilizándola como ruta hasta frenar en la intersección con la  $n_1/n_2 = 5/3$ . Allí se queda, en un lugar muy cercano a la configuración actual observada de este triplete. Sin embargo y llamativamente, con los valores utilizados en la simulación para las masas y el disco este sub-sistema no oscila dentro de la resonancia de orden cero  $n_c - 3n_d + 2n_e$  que propone Luger et al. (2017) (ver panel inferior de la Figura 6.7), por más que sí lo hace en las dos RMM-2P.
- **Planetas (d-e-f):** Después de una migración inicial en configuración secular, el sistema queda atrapado en una resonancia pura de primer orden entre los 3 planetas  $2n_1 - 7n_2 + 6n_3 = 0$ , que está indicada con una curva roja en la Figura 6.5. El sub-sistema sigue este camino hasta alcanzar la vecindad de la resonancia doble, donde la trayectoria empieza a exhibir oscilaciones irregulares. En algún punto, el sistema deja esta resonancia de primer orden para ser capturada por una resonancia más fuerte entre los 3 planetas, la resonancia de Laplace de orden cero definida por  $2n_1 - 5n_2 + 3n_3 = 0$  y marcada con una curva gris gruesa en el gráfico. En la Figura 6.8 pueden verse librar los ángulos correspondientes a las dos resonancias mencionadas aunque, curiosamente, el sistema queda capturado en ambas al mismo tiempo, contrario a lo que deja ver la simulación sobre el mapa dinámico en la Figura 6.5. La curva negra y blanca sobre el mapa marca el camino evolutivo hasta que este sub-sistema llega a su destino final, muy cercano al de los planetas reales. La captura en esta RMM-3P pura de orden cero no parece haber sido una transición suave desde la de primer orden, pero sí parece una consecuencia del scattering a



**Figura 6.8.** Ángulos resonantes de la terna d-e-f del sistema TRAPPIST-1. Los parámetros de la simulación son los descritos en la Figura 6.5. En los 3 paneles superiores graficamos la resonancia de primer orden  $2n_d - 7n_e + 6n_f$  en rojo, mientras que el inferior mostramos en gris el ángulo resonante correspondiente a la resonancia de orden cero  $2n_d - 5n_e + 3n_f$ .



**Figura 6.9.** Ángulos resonantes de la terna e-f-g del sistema TRAPPIST-1. La resonancia graficada es la de orden cero  $n_e - 3n_f + 2n_g$ , que parece estar en una configuración asimétrica. Además, se puede ver en gris en el plano  $(n_1/n_2, n_2/n_3) \sim (4/3, 3/2)$  de la Figura 6.5.



**Figura 6.10.** Ángulos resonantes de la terna f-g-h del sistema TRAPPIST-1. Para detalles de la simulación, ver Figura 6.5. En los 3 paneles superiores se grafica el ángulo crítico de primer orden  $3n_f - 8n_g + 6n_h$  en rojo, mientras que el inferior se ve, en gris, la resonancia de orden cero  $n_f - 2n_g + n_h$ .

pequeña escala ocasionado por las perturbaciones de la primer ruta elegida por el sistema en su decaimiento orbital.

- **Planetas (e-f-g):** Contrario al caso anterior, este sistema parece sufrir una captura lenta y suave en la resonancia pura de Laplace  $n_1 - 3n_2 + 2n_3 = 0$ , nuevamente marcada en gris sobre el mapa, en las primeras etapas de la migración, aunque no podemos descartar una posible RMM-3P de primer orden guiando la primera parte de la integración. Sin embargo, no logramos encontrar una relación resonante de este tipo, lo suficientemente fuerte para explicar esta transición entre la condición inicial y la resonancia de Laplace. El ángulo de orden cero se muestra oscilando en una configuración asimétrica en la Figura 6.9 desde poco antes de los 200 mil años.
- **Planetas (f-g-h):** El caso final y más interesante es el sub-sistema compuesto por los tres planetas más externos. A primera vista, la evolución general es muy similar a la descrita para los planetas d-e-f, con una primera captura en la resonancia  $3n_1 - 8n_2 + 6n_3 = 0$  (línea roja) y cambiando luego a la RMM-3P de Laplace  $n_1 - 2n_2 + n_3 = 0$ . Sendos ángulos se observan librando en la Figura 6.10, en rojo los de primer orden y en gris el de orden cero. Notar que nuevamente se da la captura al mismo tiempo en ambas resonancias. Sin embargo, lo que hace que este caso sea más notable es el gran desplazamiento final que muestra respecto al valor nominal de la resonancia doble, incluso mayor al valor medido para el sistema real. De todas formas, tanto los planetas reales como los simulados no muestran apartamiento alguno a la conmensurabilidad pura de 3 planetas de orden cero.

Aún cuando no nos fue posible describir por completo la migración y formación de la cadena resonante entera del sistema TRAPPIST-1 tal como se lo observa, y sin obtener la posición relativa observada de los 3 planetas más internos ni los ángulos de algunos sub-sistemas resonando, los resultados que obtuvimos a partir de estas integraciones nos revelaron aspectos inesperados de la compleja dinámica en sistemas multi-resonantes. La primer conclusión a la que llegamos es que las resonancias entre 2 planetas no son las únicas conmensurabilidades capaces de atrapar sistemas multiplanetarios en resonancia. Si la escala de tiempo de migración es lo suficientemente larga, las RMM puras de 3 planetas de primer orden también pueden generar capturas y guiar al sistema hacia otras conmensurabilidades. Otro resultado inesperado e interesante es la captura en resonancia de tipo Laplace, aunque en este caso no nos queda claro todavía si ésta puede alcanzarse mediante migración suave o si requiere necesariamente el paso previo por una región caótica generada por la interacción con otras conmensurabilidades. Cualquiera sea la explicación, estos ejemplos muestran una diversidad dinámica mucho más rica que lo que se creía hasta ahora.

Un segundo resultado y quizás más importante es el gran apartamiento que alcanzaron los cuerpos de nuestra simulación sin la necesidad de tener que asumir una etapa de evolución tidal luego de disipado el disco y finalizada la migración. El sub-sistema de planetas f-g-h es probablemente el mejor ejemplo: nuestras simulaciones generaron separaciones bastante significativas respecto del valor nominal de la razón de movimientos medios, valores incluso más grandes que los observados. Por otra parte, ya que este sub-sistema es el más alejado de la estrella central, se esperaba que la migración tidal divergente inducida sea menos importante en este sub-sistema que en los tripletes más cercanos a la estrella. Quizás la explicación para este offset resonante no tenga que ver con los efectos disipativos de mareas sino únicamente con la dinámica resonante y el acoplamiento entre los distintos actores involucrados en la cadena resonante.

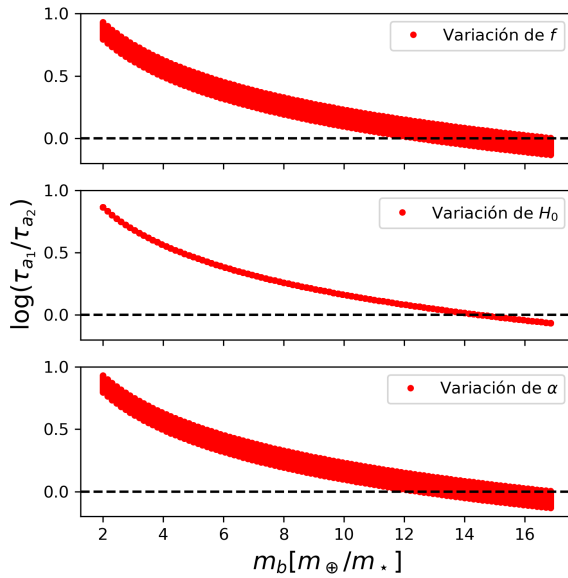
De todas maneras, es necesario recordar que la magnitud del apartamiento respecto de las resonancias dobles es función de las masas de los planetas, sin importar si asumimos que se forma por efectos dinámicos o tidales, y por esta misma razón es que no esperamos que los offsets generados en las simulaciones sean exactamente iguales a los observados. Sin embargo, no podemos dejar de mencionar que los offsets que obtuvimos en las integraciones numéricas crecen a medida que los sub-sistemas son más lejanos a la estrella central, al igual que como se observa en los planetas de TRAPPIST-1.

### 6.3.2. Variación de parámetros del disco

Como vimos en la sección anterior, el subgrupo más interno sólo queda capturado en la RMM 8/5 de manera temporal, y luego en su evolución continúa disminuyendo la razón de movimientos medios. Para reproducir la posición relativa actual del sub-sistema b-c-d en el plano  $(n_1/n_2, n_2/n_3)$  exploramos un amplio rango de valores de los distintos parámetros del disco, que mostramos en la Tabla 6.4. Asumimos que el disco es plano y laminar si  $f = 0$ . La densidad superficial la tomamos como  $\Sigma(r) = \Sigma_0 r^{-\alpha}$  y la razón de aspecto como  $H_r(r) = H_0 r^f$ , ambas con leyes de potencias que dependen de la distancia a la estrella, y variamos los parámetros

Parámetros	Valores
Índice de forma del disco	$f \in [0, 0.5]$
Escala de altura del disco (en $r = 1 \text{ ua}$ )	$H_0 \in [0, 0.5]$
Densidad superficial del disco (en $r = 1 \text{ ua}$ )	$\Sigma_0 \in [20, 200]$
Exponente de la ley de potencias	$\alpha \in [0, 1]$
Factor de decaimiento de la excentricidad	$Q_e \in [0.05, 0.15]$
Masa del planeta b	$m_b \in [2.0, 17.0]$

**Tabla 6.4.** Parámetros variados del disco y la masa del planeta más interno para las simulaciones de migración convergente con posterior captura resonante. Asumimos un disco plano laminar si  $f = 0$ . La densidad superficial  $\Sigma(r) = \Sigma_0 r^{-\alpha}$  y la razón de aspecto  $H_r(r) = H_0 r^f$  son leyes de potencias que dependen de la distancia a la estrella. La escala de tiempo de circularización de la órbita  $\tau_e$  tiene un factor  $Q_e$  introducido por [Cresswell y Nelson \(2006\)](#) para ajustar las simulaciones hidrodinámicas, que modificamos en las distintas integraciones para analizar la influencia que tuvo en el proceso de migración planetaria.

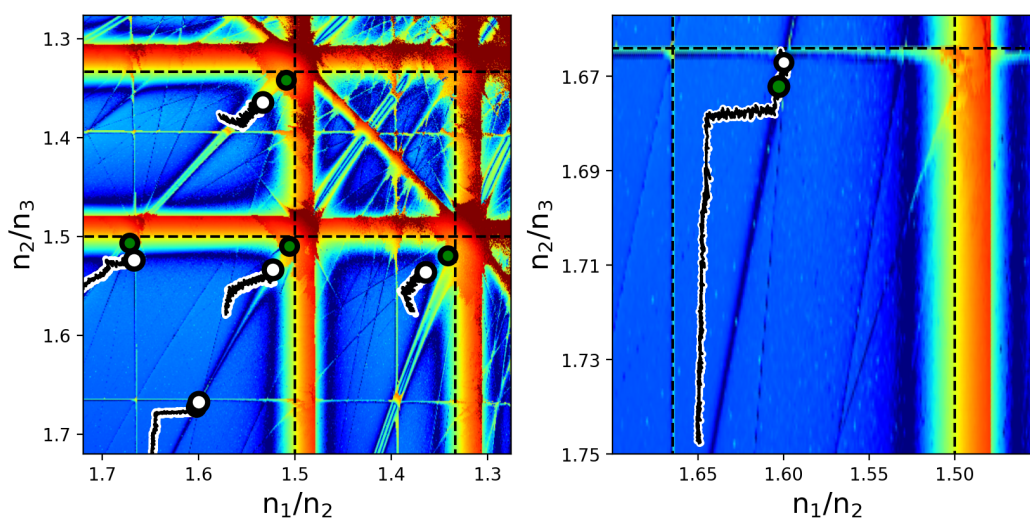


**Figura 6.11.** Migración relativa entre los planetas b y c en función de la masa del planeta interno  $m_b$  de TRAPPIST-1 variando los parámetros del disco  $f$ ,  $H_0$  y  $\alpha$  dentro de los límites indicados en la Tabla 6.4. La línea a trazos indica cuando  $\tau_{a_1} = \tau_{a_2}$  y la migración pasa de convergente  $\log(\tau_{a_1}/\tau_{a_2}) > 0$  a divergente  $\log(\tau_{a_1}/\tau_{a_2}) < 0$ .

característicos  $f$ ,  $H_0$ ,  $\Sigma_0$  y  $\alpha$  dentro de sus valores posibles.

Además, fijamos todas las masas en los valores con que habían alcanzado la estructura resonante similar a la observada, exceptuando la del planeta b. A ésta la variamos entre la masa mínima dentro del error observacional ( $m_b \sim 2.0$ ) y el máximo para que se de una posible captura luego de migración convergente, según el análisis de 2 planetas.

Los resultados los vemos en la Figura 6.11. La curva a trazos indica el valor para el cual  $\tau_{a_1} = \tau_{a_2}$ . Técnicamente, todos los valores para los cuales la curva roja queda por encima de la negra permiten que se de la migración convergente. Sin embargo, realizamos las simulaciones correspondientes e incluso de las pruebas de la sección anterior vemos que los valores de  $\log(\tau_{a_1}/\tau_{a_2}) < 0$  prueban ser también factibles. Esto debe darse porque el análisis de 2 planetas no arroja los mismos resultados que con 3 cuerpos. Es decir, este análisis considera la captura estable en la resonancia 8/5 entre los planetas b y c y no en la RMM-3P con los cuerpos b,



**Figura 6.12.** Resultados para una simulación con migración de tipo-I para un sistema ficticio tipo TRAPPIST-1 con los mismos valores que la Figura 6.5 pero con  $m_b = 16.8m_{\oplus}/m_{\odot}$  y  $Q_{e_i} = 0.07$  en vez de  $Q_{e_i} = 0.1$ . **Izquierda:** Evolución general del sistema. **Derecha:** Zoom para el sub-sistema b-c-d.

c y d.

De todas maneras, de la Figura 6.11 vemos que para un mismo valor de masa  $m_b$  variar  $\alpha$  o  $f$  permite en algunos casos que la migración sea convergente y en otros divergente. El caso de  $H_0$ , sin embargo, es menos ruidoso y no se da esta situación.

### 6.3.3. Variación de la escala de tiempo de circularización orbital

Dado que variando los parámetros físicos del disco no conseguimos reproducir la arquitectura observada, modificamos entonces la escala de tiempo característico de circularización orbital  $\tau_e$ . Esto lo hicimos a través del factor  $Q_e$ . En principio éste fue definido por Cresswell y Nelson (2006) para ajustar las simulaciones hidrodinámicas de migración, que fueron realizadas para un único planeta. Usualmente, para sistemas con más de un planeta se toma el mismo valor para todos los cuerpos.

Específicamente, si bien  $\tau_e$  depende de todos los parámetros que variamos (ver Tabla 6.4 y ecuación 4.32), es más sensible a la masa del cuerpo que migra y  $Q_e$ , por lo que consideraremos principalmente  $\tau_{e_i} \propto Q_e/m_i$ .

Como primer resultado positivo hallamos que cuando  $Q_e < 0.1$  la órbita se circulariza más lentamente por lo que es posible reproducir la tendencia completa de TRAPPIST-1, ver cuadro izquierdo de la Figura 6.12. En particular la posición del triplete b-c-d mejora en comparación con las simulaciones de la sección anterior. Sin embargo, para las ternas más externas aumenta el offset que obtenemos a valores bastante mayores que los observados y que aquellos obtenidos en las simulaciones que mostramos en la sección 6.3.1, Figura 6.5.

El caso de la Figura 6.12 muestra el ejemplo para  $m_b = 16.8m_{\oplus}/m_{\odot}$ , pero en esta oportunidad el valor de  $Q_e$  es igual a 0.07 en lugar de 0.1. El cuadro izquierdo muestra la tendencia general del sistema mientras que a la derecha mostramos una

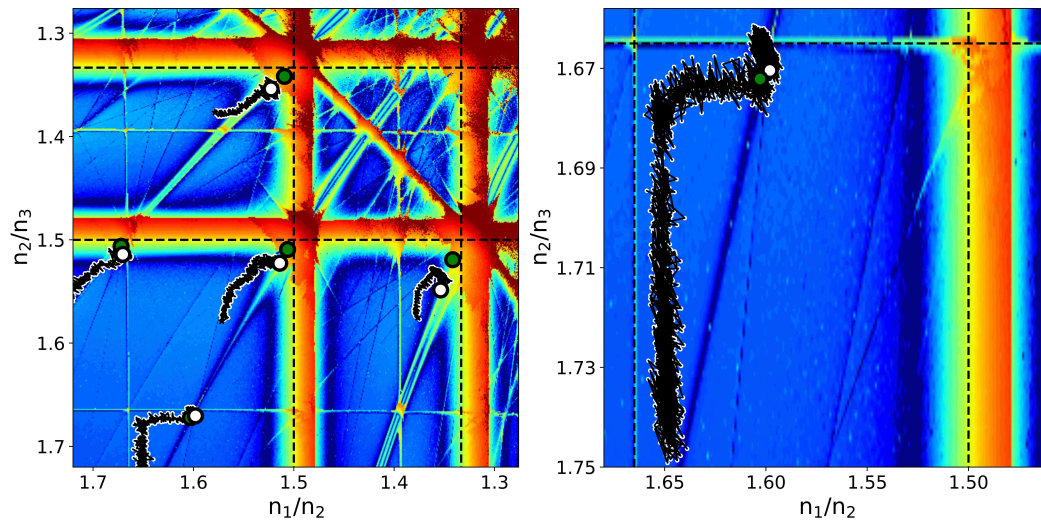
Simulaciones	$Q_{e_i}$	Capturas	Ángulos
S1	$Q_{e_b} \in [0.06, 0.1]$ $Q_{e_i} = 0.07, i = c \dots h$	$m_b = 16.6, Q_{e_b} = 0.06$	NO
		$m_b = 16.7, Q_{e_b} = 0.09$	NO
		$m_b = 16.9, Q_{e_b} = 0.06$	NO
		$m_b = 17.0, Q_{e_b} = 0.07$	NO
S2	$Q_{e_b} \in [0.06, 0.1]$ $Q_{e_i} = 0.08, i = c \dots h$	$m_b = 16.7, Q_{e_b} = 0.06$	NO
		$m_b = 16.8, Q_{e_b} = 0.10$	NO
		$m_b = 16.9, Q_{e_b} = 0.10$	NO
S3	$Q_{e_b} \in [0.06, 0.1]$ $Q_{e_i} = 0.09, i = c \dots h$	$m_b = 16.7, Q_{e_b} = 0.10$	NO
S4	$Q_{e_b}, Q_{e_c}, Q_{e_d} \in [0.06, 0.1]$ $Q_{e_i} = 0.1, i = e \dots h$	$m_b = 16.5, Q_{e_b} = 0.10, Q_{e_c} = 0.07, Q_{e_d} = 0.09$	NO
		$m_b = 16.7, Q_{e_b} = 0.08, Q_{e_c} = 0.10, Q_{e_d} = 0.06$	NO
		$m_b = 16.7, Q_{e_b} = 0.10, Q_{e_c} = 0.07, Q_{e_d} = 0.09$	SI
		$m_b = 17.0, Q_{e_b} = 0.06, Q_{e_c} = 0.10, Q_{e_d} = 0.06$	NO

**Tabla 6.5.** En las primeras dos columnas se detallan las características para los distintos conjuntos de simulaciones variando la escala de tiempo de circularización orbital. Realizamos cuatro conjuntos diferentes de simulaciones, cada una distinguida con el nombre S1, S2, S3 o S4. Para todas ellas, la masa del planeta más interno fue variada entre  $m_b \in [16.5, 17.0]$ . En S1, S2 y S3 variamos únicamente el parámetro  $Q_e$  para el planeta más interno entre  $Q_{e_b} \in [0.06, 0.1]$  mientras para el resto de los cuerpos lo dejamos fijo. En las simulaciones S4 variamos  $Q_e$  para los 3 planetas más internos, dejando fijo para los 4 externos  $Q_{e_e}, Q_{e_f}, Q_{e_g}, Q_{e_h} = 0.1$ . En las últimas dos columnas se muestran los resultados positivos de dichas simulaciones, es decir, aquellas para las que obtuvimos la misma configuración que la observada y analizamos si para todos los sub-sistemas de 3 planetas ficticios tipo TRAPPIST-1 los ángulos resonantes se encuentran librando.

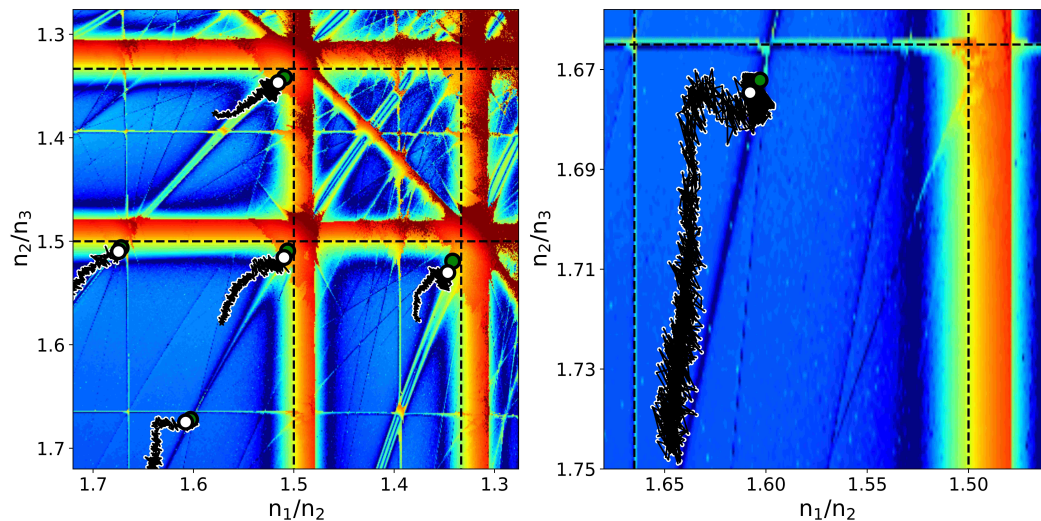
ampliación para el sub-sistema b-c-d. En este caso, el triplete b-c-d empieza a librar casi a los 300.000 años en la resonancia de primer orden de 3 cuerpos  $3\lambda_1 - 6\lambda_2 + 3\lambda_3$ , ruta que utiliza para migrar, y el ángulo oscila hasta terminada la integración. Sin embargo, no todos los ángulos resonantes de las demás ternas se observan librando, sólo algunos casos, como en la sección anterior. En particular, el triplete c-d-e se observa en la posición relativa correspondiente pero el ángulo crítico circula. Esta simulación pertenece al conjunto S1 de la Tabla 6.5.

El siguiente paso en el análisis fue intentar efectivamente encontrar al sistema en las respectivas resonancias de 3 planetas propuestas por [Luger et al. \(2017\)](#) (ver Tabla 6.3). Para esto realizamos diferentes tipos de simulaciones, en las que en todos los casos variamos la masa del planeta más interno entre  $m_b \in [16.5, 17.0]$ . El detalle de las características están enumeradas en las primeras dos columnas de la Tabla 6.5. Por un lado las simulaciones S1, S2 y S3 modelan sistemas en los que las escalas de tiempo de amortiguamiento de excentricidad se mantiene igual para los 6 planetas más externos ( $Q_{e_i}$  igual para  $i = c \dots h$ ). Los distintos valores estudiados fueron  $Q_{e_i} = 0.07, 0.08$  y  $0.09$ , respectivamente, a la vez que modificamos el valor del más interno entre  $Q_{e_b} \in [0.06, 0.1]$ . Para cada conjunto S1, S2 y S3 realizamos 30 de simulaciones. Por otra parte, para el conjunto de simulaciones S4 modificamos los valores de  $Q_{e_i}$  permitiendo que varíe el valor de circularización de la órbita de los primeros 3 planetas individualmente. De esta manera no se obliga a que la escala de tiempo para circularizar la órbita de todos los planetas sea la misma. En este grupo fijamos los valores de  $Q_{e_e}, Q_{e_f}, Q_{e_g}$  y  $Q_{e_h}$  en 0.1. Para este último grupo realizamos

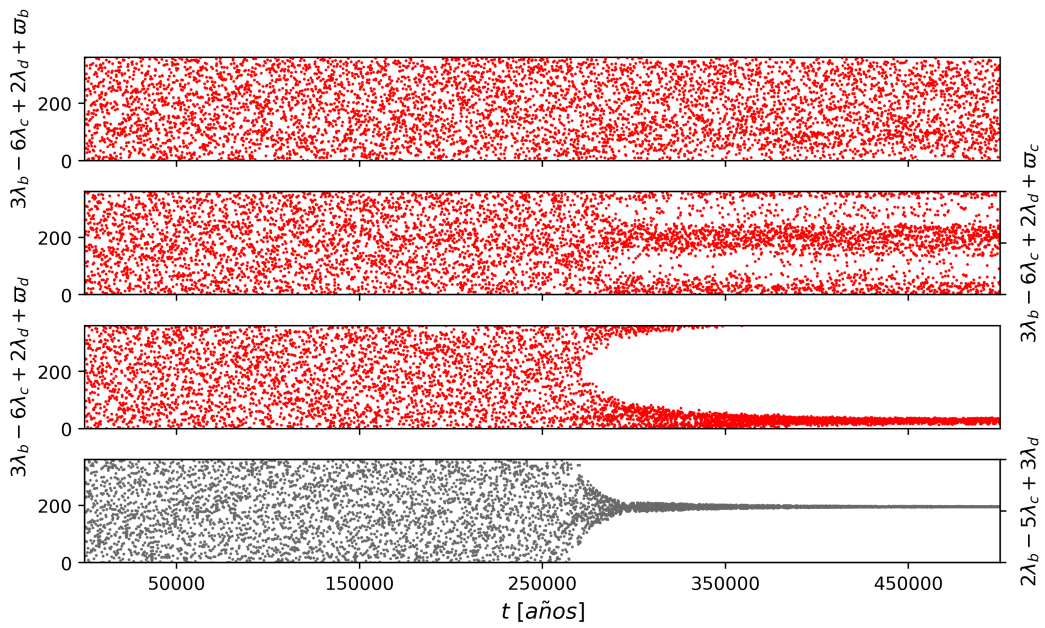




**Figura 6.13.** Resultados para una simulación con migración de tipo-I para un sistema ficticio tipo TRAPPIST-1, del grupo S4, con  $m_b = 17.0m_\odot/m_\odot$  y  $Q_{e_b} = 0.06$ ,  $Q_{e_c} = 0.1$ ,  $Q_{e_d} = 0.06$ . **Izquierda:** Evolución general del sistema. **Derecha:** Zoom para el sub-sistema b-c-d.



**Figura 6.14.** Resultados para una simulación con migración de tipo-I para un sistema ficticio tipo TRAPPIST-1, del grupo S4, con  $m_b = 16.7m_\odot/m_\odot$  y  $Q_{e_b} = 0.1$ ,  $Q_{e_c} = 0.07$ ,  $Q_{e_d} = 0.09$ . **Izquierda:** Evolución general del sistema. **Derecha:** Zoom para el sub-sistema b-c-d.



**Figura 6.15.** Ángulos críticos de primer orden (en rojo) y de orden cero (en gris) de la terna b-c-d de TRAPPIST-1. Los ángulos que se muestran son  $3n_b - 6n_c + 2n_d$  y  $2n_b - 5n_c + 3n_d$ .

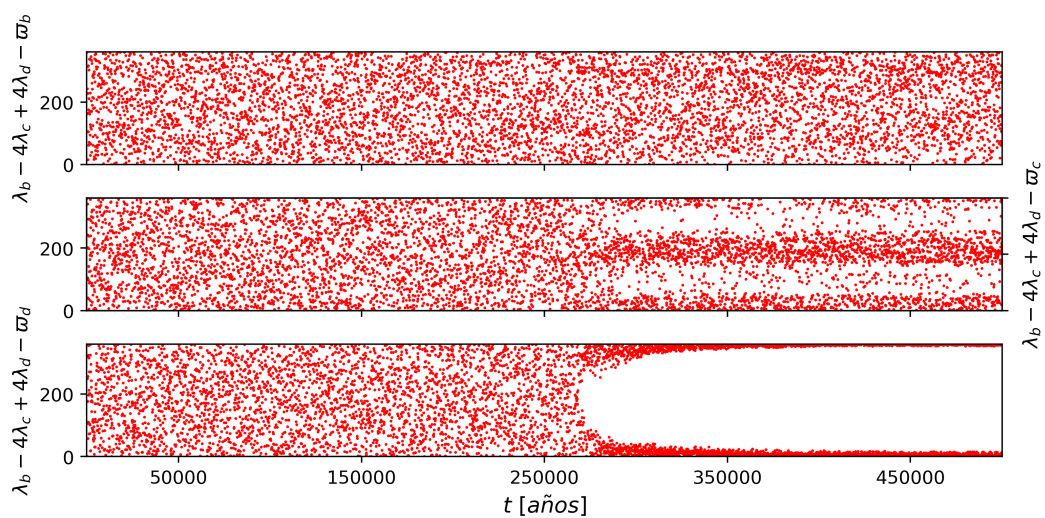
750 integraciones.

De estas 840 simulaciones únicamente 12 alcanzaron configuraciones similares a las observadas. De hecho, como mostramos en las últimas dos columnas de la Tabla 6.5, tras analizar todos los sub-sistemas ficticios similares a TRAPPIST-1 sólo en *una* simulación cada ángulo resonante está librando en torno a un valor fijo. Este caso se da cuando  $m_b = 16.7m_\odot/m_\odot$  y  $Q_{e_b} = 0.1$ ,  $Q_{e_c} = 0.07$ ,  $Q_{e_d} = 0.09$  y  $Q_{e_i} = 0.1$  con  $i = e \dots h$ . Las Figuras 6.15, 6.16 y 6.17 muestran los ángulos resonantes en los que simultáneamente se observa librando a la terna más interna. Observar que todas son RMM-3P, de ellas hay tres de primer orden ( $n_b - 4n_c + 4n_d$ ,  $3n_b - 6n_c + 2n_d$  y  $2n_b - 7n_c + 6n_d$ ) y una de orden cero  $2n_b - 5n_c + 3n_d$ .

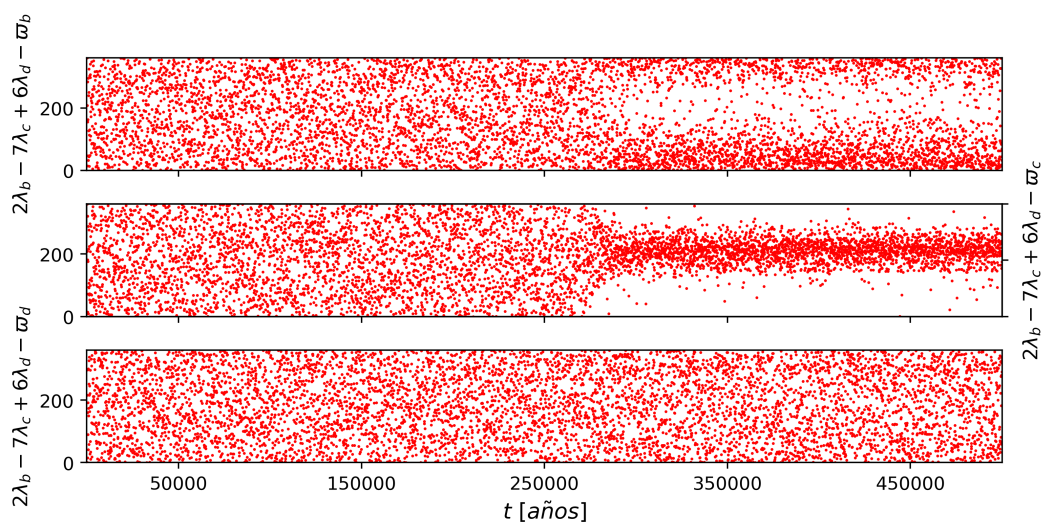
En el resto de las Figuras que mostramos (6.19-6.21) las tres ternas restantes oscilan en torno a un valor fijo, con amplitud menor a aquellos mostrados en para la simulación de la Figura 6.5. En todos los casos, las resonancias de primer orden están representados en rojo mientras que las de orden cero, en gris.

Lo interesante y para destacar de las simulaciones que mostramos es, en primer lugar, que hay varios casos en los que la arquitectura observada coincide con la de las observaciones, por más que esto no implique que los sub-sistemas se encuentren en resonancias de 3 planetas. En segundo lugar, hemos encontrado configuraciones que quedan capturadas temporalmente en RMM-3P por más que no satisfacen la condición resonante para 2 cuerpos masivos. Un ejemplo de esto es el caso en que  $m_b = m_c = 17.0$ , que según el estudio de 2 planetas implica que  $\tau_{a_b} = \tau_{a_c}$ , que en principio no genera migración convergente. En la Figura 6.14, sin embargo, vemos que para el análisis de 3 planetas el resultado es diferente.

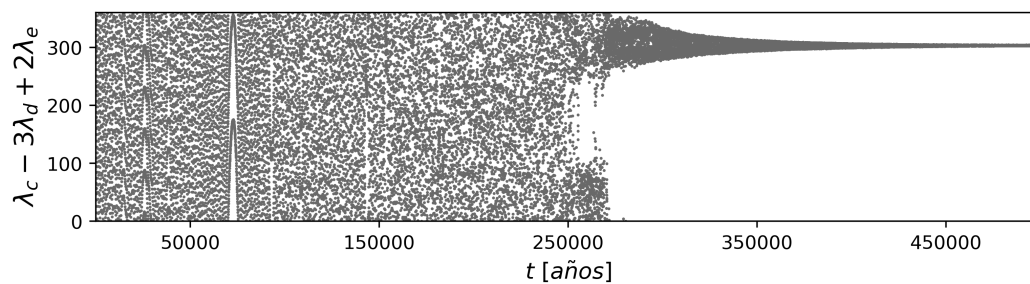
Además, se desprende de este análisis que, como las fórmulas originales de migración consideraban únicamente órbitas circulares Tanaka et al. (2002), luego se extendió para sistemas con excentricidad Tanaka y Ward (2004) y por último se



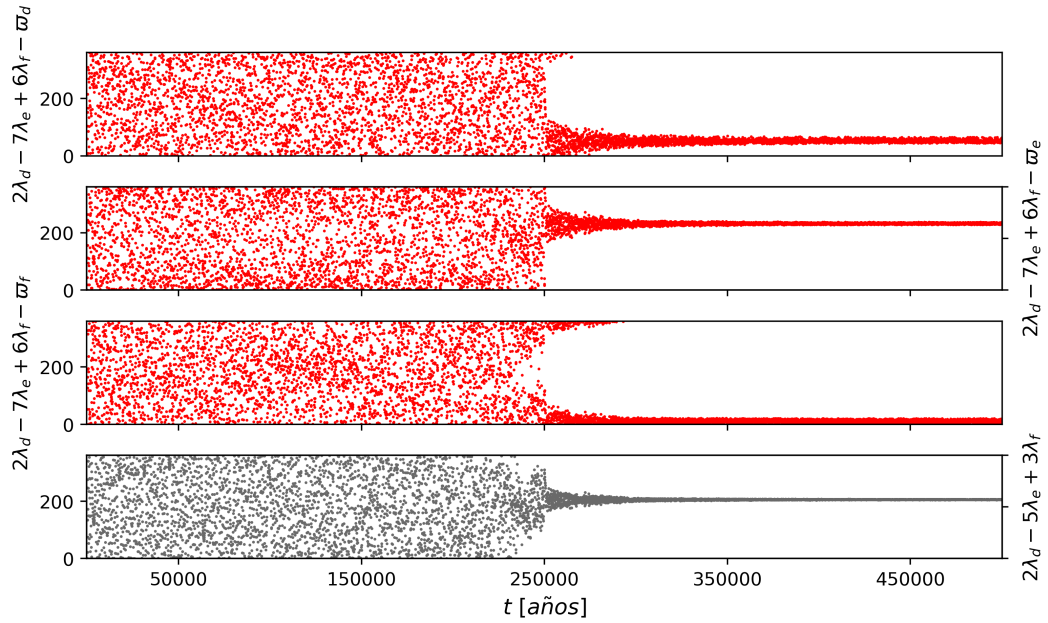
**Figura 6.16.** Ángulo resonante de primer orden  $n_b - 4n_c + 4n_d$  de la terna b-c-d de TRAPPIST-1.



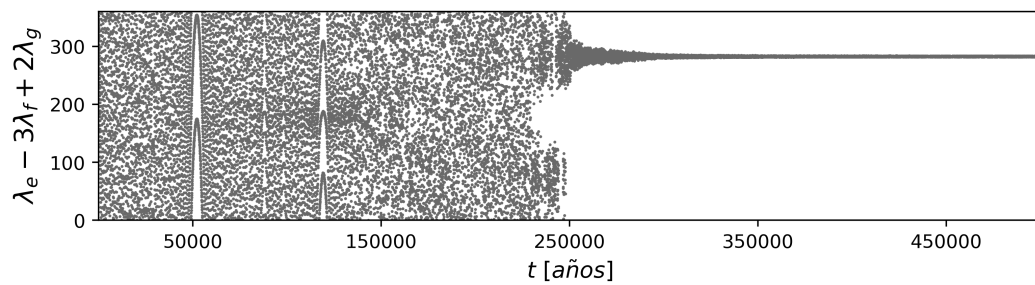
**Figura 6.17.** Ángulo resonante de primer orden  $2n_b - 7n_c + 6n_d$  de la terna b-c-d del sistema TRAPPIST-1.



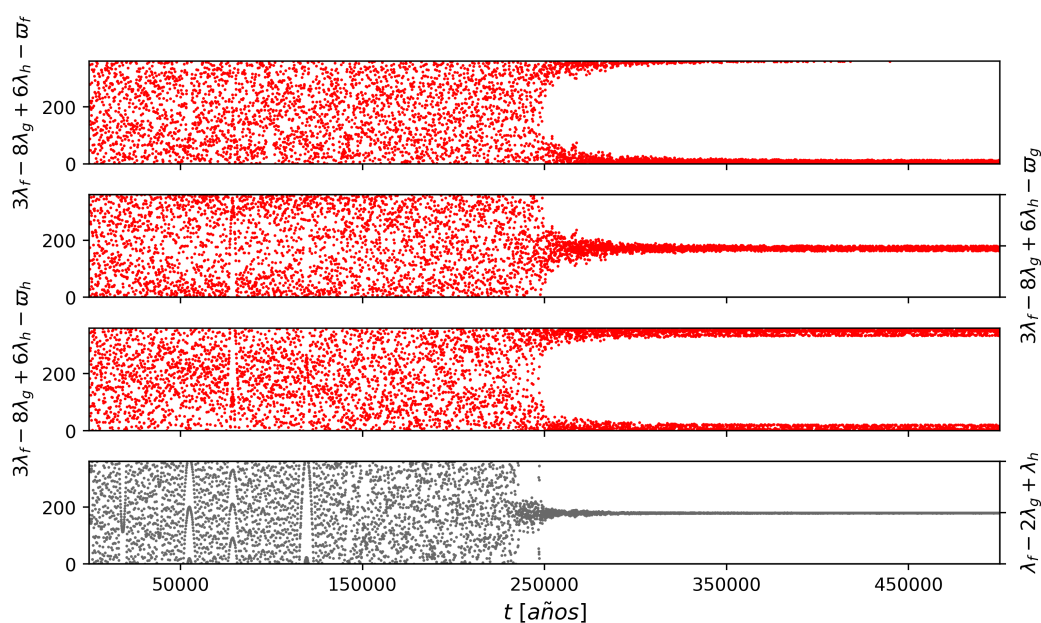
**Figura 6.18.** Ángulo crítico de orden cero  $n_c - 3n_d + 2n_e$  de la terna c-d-e del sistema TRAPPIST-1.



**Figura 6.19.** Ángulos críticos de primer orden (en rojo)  $2n_d - 7n_e + 6n_f$  y de orden cero  $n_b - 3n_c + 2n_d$  (en gris) de la terna d-e-f del sistema TRAPPIST-1.



**Figura 6.20.** Ángulo crítico de la resonancia de 3 planetas de orden cero,  $n_e - 3n_f + 2n_g$  de la terna e-f-g del sistema TRAPPIST-1.



**Figura 6.21.** Ángulos críticos de primer orden (en rojo) y de orden cero (en gris) de la terna f-g-h del sistema ficticio tipo TRAPPIST-1. Los ángulos que se muestran son  $3n_f - 8n_g + 6n_h$  y  $n_f - 2n_g + n_h$ .

ajustó el parámetro artificial  $Q_e$  para mejorar los resultados de simulaciones hidrodinámicas [Cresswell y Nelson \(2008\)](#), este parámetro necesita de mayor estudio. Tomar a  $Q_e$  como si fuera el mismo para todos los planetas del disco, supone una forma de disco muy simple en la que no es posible encontrar a los sistemas en RMM-3P sino que necesariamente debe tenerse en cuenta que cada planeta migra con velocidad diferente y que cada órbita se circulariza con escalas de tiempo distintas, que dependen de la cantidad de material que haya en cada parte del disco.

Para reproducir la terna b-c-d de TRAPPIST-1 modificamos las masas, los parámetros del disco y el valor de  $Q_e$  de decaimiento en la excentricidad de cada planeta del sistema, y obtuvimos que este parámetro  $Q_e$  no debe tener un valor fijo (como fue propuesto por [Cresswell y Nelson \(2008\)](#)), sino que depende de cada sistema y, en particular, no tiene por qué ser igual para cada miembro del mismo. Con las combinaciones de  $Q_e$  para los que se alcanza la configuración orbital observada, deducimos que la estructura del disco en que están inmersos los planetas no puede ser un disco plano laminar sino que debe ser mucho más compleja.

## 6.4. Conclusiones parciales

TRAPPIST-1 ([Gillon et al., 2016, 2017](#)) es un sistema exoplanetario único compuesto por una estrella central de  $m_* = 0.08m_\odot$  y 7 planetas de baja masa. Se estima que la edad de la estrella está entre  $3$  y  $8 \times 10^9$  años ([Luger et al., 2017](#)). Las posiciones y períodos orbitales de cada uno de sus planetas está bien determinado a partir de las observaciones por tránsito, aunque hay gran incerteza en la determinación de las masas. El sistema parece residir en una compleja cadena resonante

compuesta por cinco resonancias de movimientos medios de tres cuerpos de orden cero (es decir, tipo Laplace) entrelazadas entre sí, aunque esto aún no ha sido confirmado. Se cree que los sistemas multi-resonantes han alcanzado esa configuración como consecuencia de una migración planetaria suave y convergente, producto de la interacción con el disco de gas. Como las masas  $m_i/m_*$  son pequeñas, se espera que el decaimiento orbital haya estado dominado por migración de tipo-I.

Mediante simulaciones de N-cuerpos [Tamayo et al. \(2017\)](#) proponen una forma de alcanzar, a través de la migración suave únicamente del planeta más externo, una configuración estable similar a la observada. De esta forma no se generarían inestabilidades dinámicas en cortas escalas de tiempo, resolviendo el problema planteado por [Gillon et al. \(2017\)](#). En el capítulo 5, en cambio, estudiamos la captura luego de migración pero de un modo más consistente, es decir, asumiendo que todos los planetas se encuentran migrando. Logramos de este modo reproducir las posiciones actuales de todos los tripletes excepto del más interno.

Mientras que en sistemas de 2 planetas las interacciones planeta-disco conducen a que la razón de movimientos medios quede acotada en RMM-2P, en el caso con 3 planetas la situación es diferente. La migración diferencial se detiene únicamente cuando el sistema completo queda atrapado en resonancias independientes. En TRAPPIST-1 todos los sub-sistemas de 3 planetas parecen encontrarse en la posición de RMM-3P de orden cero, aunque muestran un desplazamiento significativo de la resonancia doble exacta. Todos los miembros del sistema están muy cerca de la estrella central por lo que una posible explicación para el offset observado tiene que ver con la evolución debida a efectos tidales ([Batygin y Morbidelli, 2013](#); [Papaloizou, 2015](#)).

El sistema TRAPPIST-1 forma parte de la población (casi)-resonante. Sin embargo, el offset que se le observa es mucho más grande que el esperado. Una forma de explicar la posición de los planetas alejados de las resonancias suele ser a partir de los efectos tidales ([Delisle y Laskar, 2014](#); [Lee et al., 2013](#); [Papaloizou, 2015](#)) o por interacción con el disco protoplanetario ([Chatterjee y Ford, 2015](#)). Esto significa que primero se da una captura en la resonancia y luego se da el escape. A través de la migración de tipo-I es posible obtener sistemas atrapados en diferentes conmensurabilidades. Las tasas de migración dependen de la densidad del disco de gas, de las masas de los planetas que se encuentran migrando, de sus semiejes mayores y excentricidades, entre otras propiedades físicas del sistema.

Las velocidades con las que migran los cuerpos dependen de las características del sistema. Para estudiar la dinámica de la población (casi)-resonante se requiere conocer los parámetros involucrados en las fórmulas de migración,  $\tau_{a_i}$  y  $\tau_{e_i}$ , que dependen principalmente de la forma del disco y, en particular, de las masas de los planetas. El problema principal para entender la evolución dinámica de estos sistemas es que las masas de los planetas están estimadas con gran incerteza y, por lo tanto, no es posible delimitar sus tasas de migración. Para intentar poner restricciones a los valores de las masas dentro de los límites de los datos observacionales y así llegar a saber cómo fue su evolución, en [Charalambous et al. \(2018\)](#) utilizamos mapas dinámicos realizados con 3 planetas ficticios de igual masa, ya que éstos exponen la estructura dinámica e indican posibles rutas de migración hacia conmensurabilidades de 3 cuerpos. Mediante simulaciones de N-cuerpos en las que

incluimos con recetas clásicas a la migración de tipo-I, buscamos la configuración orbital final de TRAPPIST-1 comparando con el offset resonante actual observado, sin imponer una disipación tidal *ad-hoc*. De esta manera nos fue posible reproducir la posición de todos los sub-sistemas de 3 planetas, excepto de uno: el triplete más interno conformado por los planetas b-c-d.

En la sección 6.3.1 presentamos los resultados publicados en Charalambous et al. (2018). Allí utilizamos parámetros típicos para un disco plano laminar y con ellos pudimos reproducir todos los sub-sistemas consecutivos de planetas, excepto por la terna más interna. En la sección 6.3.3 nos concentramos en adquirir la posición y el offset del triplete b-c-d, sin que se modifique la configuración general del sistema. Para esto variamos los parámetros del disco en un amplio rango (Tabla 6.4) y encontramos que el factor más importante es el decaimiento en la excentricidad. En el caso en el que  $Q_e = 0.07$ , en lugar de  $Q_e = 0.1$ , la tendencia general fue alcanzada aunque el offset de los demás sub-sistemas creció. Finalmente, logramos reproducir la arquitectura global de TRAPPIST-1 variando las escalas de tiempo de circularización de la órbita de cada planeta individualmente. En las ecuaciones de torque no hay forma de tener en cuenta el cambio en la excentricidad de los planetas, por lo que la variación del parámetro  $Q_e$  resultó reveladora. Así, encontramos diferentes combinaciones de  $Q_{e_i}$  para los que se alcanza la configuración orbital observada, aunque esos valores no coinciden con una estructura de disco laminar sino que debe ser más compleja de lo que imaginamos.





# Discusión y comentarios finales

Los sistemas planetarios son el resultado del proceso de formación estelar. En lo que respecta a los modelos de formación planetaria todavía hay cierto debate, pero sí hay consenso en el hecho de que los planetas se forman dentro de un disco de gas y de polvo que se observa alrededor de estrellas jóvenes. Mientras el planeta crece se encuentra inmerso en el disco protoplanetario en el que se dan interacciones en donde la gravedad del planeta perturba al fluido que lo rodea. Lo que ocurre en esa etapa resulta muy importante a la hora de esculpir la arquitectura final de los sistemas planetarios.

Durante este proceso, el planeta modifica la distribución local de gas en su entorno originando estructuras en el disco que generan torques y una consecuente transferencia de momento angular. Se producen entonces modificaciones de la órbita en donde generalmente el planeta se mueve hacia adentro del disco, a la vez que amortigua su excentricidad e inclinación. Este efecto es conocido con el nombre de migración planetaria. Las características de la migración dependen de la masa del planeta y de las propiedades locales del disco. Como resultado del proceso de migración, en algunos casos los planetas quedan atrapados en resonancias de movimientos medios, configuración en la cual los cuerpos se ejercen una perturbaciones periódicas entre sí.

A lo largo de este trabajo hemos estudiado en detalle el proceso de migración planetaria y posterior captura en resonancia. La primera etapa del estudio se basó en explicar, mediante el desarrollo de modelos analíticos y numéricos, por qué los pares de planetas adyacentes de un sistema planetario se apartan de la posición exacta de una resonancia. Comparamos el modelo con la población exoplanetaria observada alrededor de las RMM  $2/1$  y  $3/2$ , que muestra evidencia de mayor apartamiento resonante para cuerpos cercanos a la estrella central. El modelo que desarrollamos parece compatible con un escenario en el que la migración es lenta y se da en un disco delgado, acampanado y laminar.

Aplicamos este modelo de offset resonante a los sistemas Kepler-25 y K2-24, ambos cercanos a la RMM  $2/1$ . Estos sistemas tienen la particularidad de que sus masas son conocidas, aún habiendo sido detectados por tránsito. Contar con estos datos extra permite mejorar el modelo haciéndolo depender únicamente de los parámetros del disco y las escalas de tiempo de migración. De esta manera logramos principalmente comprender que este mecanismo pudo haber sido determinante

a la hora de esculpir la distribución exoplanetaria observada de la población (casi)-resonante y para delimitar los valores de algunos parámetros del disco protoplanetario.

Con el descubrimiento de TRAPPIST-1, sistema planetario de 3 planetas primero [Gillon et al. \(2016\)](#) y 7 planetas después [Gillon et al. \(2017\)](#) se planteó un cambio de paradigma en la forma de análisis. En ese momento, los sistemas resonantes solían analizarse estudiando la conmensurabilidad de movimientos medios entre 2 cuerpos hasta que [Luger et al. \(2017\)](#) propusieron analizar a TRAPPIST-1 como sistema multi-resonante, es decir, considerando que el ángulo crítico que se forma entre 3 planetas, es el que libra. De esta forma, cada terna de TRAPPIST-1 se encontraba en resonancia, aún si no fuera posible asociarlo a dos resonancias individuales de 2 planetas.

Con esta idea en mente analizamos la población exoplanetaria y hallamos varios sistemas que cumplían con la condición de multi-resonancia: GJ-876, HR-8799, Kepler-60, Kepler-80, Kepler-223, K2-138, etc. De esos sistemas, nos concentramos en aquellos descubiertos por tránsito debido a la precisión del período orbital que logra dicha técnica. Al analizarlos en el plano representativo de razón de movimientos medios entre pares de planetas adyacentes, encontramos que dichos sistemas también forman parte de la población (casi) multi-resonantes. Sin embargo, de la población observada hay falta de conocimiento de los parámetros cruciales para la investigación dinámica que hace que el análisis posterior sea muy complicado. Además, no estamos todavía en condiciones de realizar un análisis estadístico sobre la condición resonante de estos sistemas. Con suerte, algunas de estas incertezas se resuelvan con futuras observaciones y sea posible mejorar el entendimiento sobre esta población.

Surgió naturalmente el análisis de los sistemas en resonancias múltiples y su comparación con la contraparte de 2 planetas. Lo primero interesante a destacar de la observación de los mapas dinámicos es que las resonancias de movimientos medios de 3 planetas son más abundantes, aunque más débiles, que las de 2 planetas. Además, la presencia del 3<sup>er</sup> cuerpo genera una perturbación que afecta a  $m_i$  en una cantidad proporcional a  $m_j m_k$  modificando la posición nominal de las RMM-2P e incrementando el caos en la separatriz. Es decir, la posición de la resonancia se mueve en una cantidad proporcional a la masa del perturbador, por lo que, si la masa del perturbador es menor, el efecto también lo es. Sin embargo, este efecto es de bastante corto alcance en las RMM de 2 planetas, a menos que el sistema sea extremadamente compacto. Por último, las inestabilidades generadas por la superposición de resonancias de 3 planetas y su interacción con las de 2 ([Quillen, 2011](#); [Quillen y French, 2014](#)) hace que la separación orbital en un sistema con 3 planetas debe ser mayor que en los de 2 para que el sistema sea estable.

Por otro lado, vemos que es posible formar cadenas de resonancias en sistemas con 3-planetas aún cuando la migración diferencial de a pares sea divergente, hecho que no es posible en el caso de 2 planetas. En este sentido, las resonancias dobles no son las únicas capaces de capturar sistemas múltiples sino también las resonancias de orden cero, por lo que la diversidad dinámica de los sistemas es mucho más rica que la imaginada hasta ahora.

Para finalizar, nos focalizamos en el sistema planetario TRAPPIST-1. Lo com-

paramos con nuestros mapas dinámicos y realizamos simulaciones con migración iniciando desde separaciones iniciales cercanas a las actuales, pero levemente más alejadas. Tomando al sistema en subsistemas de 3 planetas, encontramos que la mayoría de las ternas frenan su migración relativa en las resonancias dobles donde se los observa. Sin embargo, los caminos evolutivos hacia dichas posiciones usualmente son guiadas por las resonancias de primer orden de 3 planetas. Además, fue posible encontrar algunas capturas en resonancias de tipo Laplace de movimientos medios entre 3 planetas, antes de alcanzar las resonancias de 2 planetas. De esta forma, los subsistemas quedan capturados en (o cerca de) su posición observada, sin tener que explicar el apartamiento de las resonancias dobles con otro efecto.

Un caso particularmente curioso es la terna más interna de TRAPPIST-1, la de los planetas b-c-d. Se cree que este subsistema está en la vecindad de la resonancia doble  $n_1/n_2 = 8/5$ ,  $n_2/n_3 = 5/3$ . Al principio, no pudimos encontrar las condiciones iniciales o parámetros del disco que hicieran posible una captura estable en esta configuración orbital. Sí logramos detectar algunas libraciones temporales para algunos parámetros, aunque no es suficiente en la edad estimada para el sistema. Aunque nuestros mapas son capaces de identificar rastros de resonancias en un amplio rango, no logramos encontrar evidencia alguna de la RMM  $8/5$  ni en los mapas que realizamos con el indicador  $\max(\Delta a)$  ni con  $\max(\Delta e)$ . Como esta conmensurabilidad es de tercer orden, es posible que la ausencia sea por haber realizado nuestros mapas comenzando de órbitas circulares. Sin embargo, también puede sugerir algo similar a lo observado en la Figura 5.21, en que la libración simultánea de una resonancia de primer orden de dos planetas con una RMM pura de 3 planetas se combinen para formar una libración en la resonancia  $8/5$  entre 2 planetas aún cuando esta resonancia no haya actuado en el proceso de captura. Tal como se muestra en las Figuras 5.20 y 5.21, tal configuración final es posible únicamente para escalas de tiempo limitadas de migración. Esto también permite explicar por qué no logramos reproducirlo en las aplicaciones para TRAPPIST-1.

A pesar del caso del triplete b-c-d, nuestras simulaciones de migración y posterior captura resonante, en donde no incluimos efectos tidales, nos permitió obtener offsets resonantes para las resonancias dobles muy similares a los valores observados para los planetas de TRAPPIST-1. Podría decirse entonces que la evolución tidal en los sistemas multi-resonantes no tuvo un papel tan importante como se creía anteriormente. Sin embargo, es necesario realizar estudios similares en otros sistemas (como en Kepler-80) antes de sacar conclusiones apresuradas ni pensar que estos resultados son generales, en vez de aplicables al caso particular de TRAPPIST-1.

Las fórmulas originales de migración fueron propuestas por Tanaka et al. (2002) para planetas en órbitas circulares. Luego, Tanaka y Ward (2004) agregaron el análisis a sistemas con excentricidad y finalmente Cresswell y Nelson (2008) con el fin de ajustar los resultados de migración en simulaciones hidrodinámicas, utilizaron un parámetro *ad-hoc*,  $Q_e$ . Para reproducir la terna b-c-d de TRAPPIST-1 modificamos las masas, los parámetros del disco y el valor de  $Q_e$  de decaimiento en la excentricidad de cada planeta del sistema, y obtuvimos que este parámetro es el más influyente. Evidentemente, el parámetro  $Q_e$  no tiene un valor fijo (como fue propuesto por Cresswell y Nelson (2006)), sino que depende de cada sistema y, en

particular, no tiene por qué ser igual para cada miembro del mismo. Con las combinaciones de  $Q_e$  para los que se alcanza la configuración orbital observada, deducimos que la estructura del disco en que están inmersos los planetas no puede ser laminar sino que debe ser mucho más compleja.

Otro punto interesante de los resultados que presentamos en el capítulo 6 es que en varias de las simulaciones, la arquitectura observada coincide con la de las observaciones. Sin embargo, al analizar los ángulos resonantes en cada caso, no necesariamente se los encontraba librando en RMM-3P. Por otro lado, hemos encontrado configuraciones que quedan capturadas temporalmente en RMM-3P por más que no satisfacen la condición resonante para 2 cuerpos masivos.

Este tipo de análisis dinámico a través de los mapas puede aplicarse a cualquier sistema de cuerpos que los objetos tengan tamaños similares, orbitando a uno central bastante más masivo. En particular, puede utilizarse para estudiar resonancias en sistemas de satélites de planetas gigantes e intentar entender su proceso de formación.

---

# Bibliografía

- Adams, F. C., Lada, C. J., y Shu, F. H. (1987). Spectral evolution of young stellar objects. *ApJ*, 312:788–806.
- Armitage, P. J. (2010). *Astrophysics of Planet Formation*.
- Atreya, S. K., Crida, A., Guillot, T., Lunine, J. I., Madhusudhan, N., y Mousis, O. (2016). The Origin and Evolution of Saturn, with Exoplanet Perspective. *arXiv e-prints*.
- Avenhaus, H., Quanz, S. P., Garufi, A., Perez, S., Casassus, S., Pinte, C., Bertrang, G. H. M., Caceres, C., Benisty, M., y Dominik, C. (2018). Disks around T Tauri Stars with SPHERE (DARTTS-S). I. SPHERE/IRDIS Polarimetric Imaging of Eight Prominent T Tauri Disks. *ApJ*, 863(1):44.
- Ayliffe, B. A. y Bate, M. R. (2012). The growth and hydrodynamic collapse of a protoplanet envelope. *MNRAS*, 427:2597–2612.
- Baluev, R. V. (2011). Orbital structure of the GJ876 extrasolar planetary system based on the latest Keck and HARPS radial velocity data. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111:235–266.
- Baluev, R. V. y Beaugé, C. (2014). Possible solution to the riddle of HD 82943 multiplanet system: the three-planet resonance 1:2:5? *MNRAS*, 439:673–689.
- Baruteau, C. y Papaloizou, J. C. B. (2013). Disk-Planets Interactions and the Diversity of Period Ratios in Kepler’s Multi-planetary Systems. *ApJ*, 778:7.
- Bate, M. R., Lubow, S. H., Ogilvie, G. I., y Miller, K. A. (2003). Three-dimensional calculations of high- and low-mass planets embedded in protoplanetary discs. *MNRAS*, 341:213–229.
- Batygin, K., Deck, K. M., y Holman, M. J. (2015). Dynamical Evolution of Multi-resonant Systems: The Case of GJ876. *AJ*, 149:167.
- Batygin, K. y Morbidelli, A. (2013). Dissipative Divergence of Resonant Orbits. *AJ*, 145:1.
- Beaugé, C., Michtchenko, T. A., y Ferraz-Mello, S. (2006). Planetary migration and extrasolar planets in the 2/1 mean-motion resonance. *MNRAS*, 365:1160–1170.

- Beaugé, C. y Nesvorný, D. (2012). Multiple-planet Scattering and the Origin of Hot Jupiters. *ApJ*, 751:119.
- Beaulieu, J. P. y et al. (2006). Discovery of a cool planet of 5.5 Earth masses through gravitational microlensing. *Nature*, 439(7075):437–440.
- Bitsch, B., Crida, A., Morbidelli, A., Kley, W., y Dobbs-Dixon, I. (2013). Stellar irradiated discs and implications on migration of embedded planets. I. Equilibrium discs. *A&A*, 549:A124.
- Blum, J. y Wurm, G. (2000). Experiments on Sticking, Restructuring, and Fragmentation of Preplanetary Dust Aggregates. *ICARUS*, 143:138–146.
- Borucki, W. J., Koch, D. G., Basri, G., Batalha, N., Brown, T. M., Bryson, S. T., Caldwell, D., Christensen-Dalsgaard, J., Cochran, W. D., DeVore, E., Dunham, E. W., Gautier, Thomas N., I., Geary, J. C., Gilliland, R., Gould, A., Howell, S. B., Jenkins, J. M., Latham, D. W., Lissauer, J. J., Marcy, G. W., Rowe, J., Sasselov, D., Boss, A., Charbonneau, D., Ciardi, D., Doyle, L., Dupree, A. K., Ford, E. B., Fortney, J., Holman, M. J., Seager, S., Steffen, J. H., Tarter, J., Welsh, W. F., Allen, C., Buchhave, L. A., Christiansen, J. L., Clarke, B. D., Das, S., Désert, J.-M., Endl, M., Fabrycky, D., Fressin, F., Haas, M., Horch, E., Howard, A., Isaacson, H., Kjeldsen, H., Kolodziejczak, J., Kulesa, C., Li, J., Lucas, P. W., Machalek, P., McCarthy, D., MacQueen, P., Meibom, S., Miquel, T., Prsa, A., Quinn, S. N., Quintana, E. V., Ragozzine, D., Sherry, W., Shporer, A., Tenenbaum, P., Torres, G., Twicken, J. D., Van Cleve, J., Walkowicz, L., Witteborn, F. C., y Still, M. (2011). Characteristics of Planetary Candidates Observed by Kepler. II. Analysis of the First Four Months of Data. *ApJ*, 736(1):19.
- Boss, A. P. (1997). Giant planet formation by gravitational instability. *Science*, 276:1836–1839.
- Brouwer, D. y Clemence, G. M. (1961). *Methods of celestial mechanics*.
- Brunini, A. y Benvenuto, O. G. (2008). On oligarchic growth of planets in protoplanetary disks. *ICARUS*, 194(2):800–810.
- Burgasser, A. J. y Mamajek, E. E. (2017). On the Age of the TRAPPIST-1 System. *ApJ*, 845(2):110.
- Cabrera, J., Csizmadia, S., Lehmann, H., Dvorak, R., Gandolfi, D., Rauer, H., Erikson, A., Dreyer, C., Eigmüller, P., y Hatzes, A. (2014). The Planetary System to KIC 11442793: A Compact Analogue to the Solar System. *ApJ*, 781:18.
- Cameron, A. G. W. (1978). Physics of the primitive solar accretion disk. *Moon and Planets*, 18:5–40.
- Campante, T. L., Barclay, T., Swift, J. J., Huber, D., Adibekyan, V. Z., Cochran, W., Burke, C. J., Isaacson, H., Quintana, E. V., Davies, G. R., Silva Aguirre, V., Ragozzine, D., Riddle, R., Baranec, C., Basu, S., Chaplin, W. J., Christensen-Dalsgaard, J., Metcalfe, T. S., Bedding, T. R., Handberg, R., Stello, D., Brewer, J. M., Hekker,

- S., Karoff, C., Kolbl, R., Law, N. M., Lundkvist, M., Miglio, A., Rowe, J. F., Santos, N. C., Van Laerhoven, C., Arentoft, T., Elsworth, Y. P., Fischer, D. A., Kawaler, S. D., Kjeldsen, H., Lund, M. N., Marcy, G. W., Sousa, S. G., Sozzetti, A., y White, T. R. (2015). An Ancient Extrasolar System with Five Sub-Earth-size Planets. *ApJ*, 799:170.
- Cantrell, J. R., Henry, T. J., y White, R. J. (2013). The Solar Neighborhood XXIX: The Habitable Real Estate of Our Nearest Stellar Neighbors. *AJ*, 146(4):99.
- Canup, R. M. y Ward, W. R. (2002). Formation of the Galilean Satellites: Conditions of Accretion. *AJ*, 124:3404–3423.
- Chambers, J. E. (2009). Planetary Migration: What Does It Mean for Planet Formation? *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 37(1):321–344.
- Charalambous, C., Martí, J. G., Beugé, C., y Ramos, X. S. (2018). Resonance capture and dynamics of three-planet systems. *MNRAS*, 477(1):1414–1425.
- Charalambous, C., Ramos, X. S., Benítez-Llambay, P., y Beugé, C. (2017). Orbital migration and Resonance Offset of the Kepler-25 and K2-24 systems. In *Journal of Physics Conference Series*, volume 911 of *Journal of Physics Conference Series*, page 012027.
- Chatterjee, S. y Ford, E. B. (2015). Planetesimal Interactions Can Explain the Mysterious Period Ratios of Small Near-Resonant Planets. *ApJ*, 803(1):33.
- Chatterjee, S. y Tan, J. C. (2014). Inside-out Planet Formation. *ApJ*, 780:53.
- Christiansen, J. L., Crossfield, I. J. M., Barentsen, G., Lintott, C. J., Barclay, T., Simmons, B. D., Petigura, E., Schlieder, J. E., Dressing, C. D., Vanderburg, A., Allen, C., McMaster, A., Miller, G., Veldthuis, M., Allen, S., Wolfenbarger, Z., Cox, B., Zemiro, J., Howard, A. W., Livingston, J., Sinukoff, E., Catron, T., Grey, A., Kusch, J. J. E., Terentev, I., Vales, M., y Kristiansen, M. H. (2018). The K2-138 System: A Near-resonant Chain of Five Sub-Neptune Planets Discovered by Citizen Scientists. *AJ*, 155(2):57.
- Correia, A. C. M., Udry, S., Mayor, M., Benz, W., Bertaux, J. L., Bouchy, F., Laskar, J., Lovis, C., Mordasini, C., Pepe, F., y Queloz, D. (2009). The HARPS search for southern extra-solar planets. XVI. HD 45364, a pair of planets in a 3:2 mean motion resonance. *A&A*, 496:521–526.
- Cresswell, P. y Nelson, R. P. (2006). On the evolution of multiple protoplanets embedded in a protostellar disc. *A&A*, 450:833–853.
- Cresswell, P. y Nelson, R. P. (2008). Three-dimensional simulations of multiple protoplanets embedded in a protostellar disc. *A&A*, 482:677–690.
- Crida, A., Morbidelli, A., y Masset, F. (2006). On the width and shape of gaps in protoplanetary disks. *Icarus*, 181(2):587–604.

- D'Angelo, G. y Bodenheimer, P. (2016). In Situ and Ex Situ Formation Models of Kepler 11 Planets. *ApJ*, 828(1):33.
- D'Angelo, G. y Lubow, S. H. (2008). Evolution of Migrating Planets Undergoing Gas Accretion. *ApJ*, 685(1):560–583.
- D'Angelo, G. y Lubow, S. H. (2010). Three-dimensional Disk-Planet Torques in a Locally Isothermal Disk. *ApJ*, 724:730–747.
- Deck, K. M. y Batygin, K. (2015). Migration of Two Massive Planets into (and out of) First Order Mean Motion Resonances. *ApJ*, 810:119.
- Deck, K. M., Payne, M., y Holman, M. J. (2013). First-order Resonance Overlap and the Stability of Close Two-planet Systems. *ApJ*, 774:129.
- Delisle, J. B. (2017). Analytical model of multi-planetary resonant chains and constraints on migration scenarios. *A&A*, 605:A96.
- Delisle, J. B. y Laskar, J. (2014). Tidal dissipation and the formation of Kepler near-resonant planets. *A&A*, 570:L7.
- Duffell, P. C., Haiman, Z., MacFadyen, A. I., D'Orazio, D. J., y Farris, B. D. (2014). The Migration of Gap-opening Planets is Not Locked to Viscous Disk Evolution. *The Astrophysical Journal*, 792(1):L10.
- Dvorak, R., Pilat-Lohinger, E., Schwarz, R., y Freistetter, F. (2004). Extrasolar Trojan planets close to habitable zones. *A&A*, 426:L37–L40.
- Ferraz-Mello, S. (1988). The High-Eccentricity Libration of the Hildas. *AJ*, 96:400.
- Ferraz-Mello, S., editor (2007). *Canonical Perturbation Theories - Degenerate Systems and Resonance*, volume 345 of *Astrophysics and Space Science Library*.
- Ferraz-Mello, S., Michtchenko, T. A., y Beaugé, C. (2005). The Orbits of the Extrasolar Planets HD 82943c and b. *ApJ*, 621:473–481.
- Ford, E. B., Kozinsky, B., y Rasio, F. A. (2000). Secular Evolution of Hierarchical Triple Star Systems. *ApJ*, 535(1):385–401.
- Gallardo, T., Coito, L., y Badano, L. (2016). Planetary and satellite three body mean motion resonances. *ICARUS*, 274:83–98.
- Gillon, M., Burdanov, A., Delrez, L., Jehin, E., Magain, P., Van Grootel, V., Bolmont, E., Leconte, J., Raymond, S., Selsis, F., Demory, B. O., Queloz, D., Triaud, A., de Wit, J., Burgasser, A., Carey, S., Ingalls, J., Lederer, S., Agol, E., y Deck, K. (2016). Red worlds: Spitzer exploration of a compact system of temperate terrestrial planets transiting a nearby Jupiter-sized star. Spitzer Proposal.
- Gillon, M., Triaud, A. H. M. J., Demory, B. O., Jehin, E., Agol, E., Deck, K. M., Lederer, S. M., de Wit, J., Burdanov, A., Ingalls, J. G., Bolmont, E., Leconte, J., Raymond, S. N., Selsis, F., Turbet, M., Barkaoui, K., Burgasser, A., Burleigh, M. R.,



- Carey, S. J., Chaushev, A., Copperwheat, C. M., Delrez, L., Fernandes, C. S., Holdsworth, D. L., Kotze, E. J., Van Grootel, V., Almléaky, Y., Benkhaldoun, Z., Magain, P., y Queloz, D. (2017). Seven temperate terrestrial planets around the nearby ultracool dwarf star TRAPPIST-1. *Nature*, 542:456–460.
- Gladman, B., Marsden, B. G., y Vanlaerhoven, C. (2008). *Nomenclature in the Outer Solar System*, page 43.
- Goldreich, P. y Schlichting, H. E. (2014). Overstable Librations can Account for the Paucity of Mean Motion Resonances among Exoplanet Pairs. *AJ*, 147:32.
- Goldreich, P. y Tremaine, S. (1979). The excitation of density waves at the Lindblad and corotation resonances by an external potential. *ApJ*, 233:857–871.
- Goldreich, P. y Tremaine, S. (1980). Disk-satellite interactions. *ApJ*, 241:425–441.
- Goldreich, P. y Ward, W. R. (1973). The Formation of Planetesimals. *ApJ*, 183:1051–1062.
- Goldstein, H. (1950). *Classical mechanics*.
- Gomes, R., Levison, H. F., Tsiganis, K., y Morbidelli, A. (2005). Origin of the cataclysmic Late Heavy Bombardment period of the terrestrial planets. *Nature*, 435(7041):466–469.
- Goździewski, K. y Migaszewski, C. (2014). Multiple mean motion resonances in the HR 8799 planetary system. *MNRAS*, 440:3140–3171.
- Goździewski, K., Migaszewski, C., Panichi, F., y Szuszkiewicz, E. (2016). The Laplace resonance in the Kepler-60 planetary system. *MNRAS*, 455:L104–L108.
- Greenberg, R., Wacker, J. F., Hartmann, W. K., y Chapman, C. R. (1978). Planetesimals to planets - Numerical simulation of collisional evolution. *ICARUS*, 35:1–26.
- Guilera, O. M., Cuello, N., Montesinos, M., Miller Bertolami, M. M., Ronco, M. P., Cuadra, J., y Masset, F. S. (2019). Thermal torque effects on the migration of growing low-mass planets. *MNRAS*, 486(4):5690–5708.
- Guilera, O. M. y Ronco, M. P. (2017). Giant planet formation on wide orbits by core accretion. In *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica Conference Series*, volume 49 of *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica Conference Series*, pages 73–73.
- Guzzo, M. (2005). The web of three-planet resonances in the outer Solar System. *ICARUS*, 174:273–284.
- Guzzo, M. (2006). The web of three-planet resonances in the outer Solar System. II. A source of orbital instability for Uranus and Neptune. *ICARUS*, 94:411–432.

- Hansen, B. M. S. y Murray, N. (2012). Migration Then Assembly: Formation of Neptune-mass Planets inside 1 AU. *ApJ*, 751(2):158.
- Hartmann, L., Calvet, N., Gullbring, E., y D'Alessio, P. (1998). Accretion and the Evolution of T Tauri Disks. *ApJ*, 495:385–400.
- Hayashi, C. (1981). Structure of the Solar Nebula, Growth and Decay of Magnetic Fields and Effects of Magnetic and Turbulent Viscosities on the Nebula. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 70:35–53.
- Holman, M. J. y Murray, N. W. (2005). The Use of Transit Timing to Detect Terrestrial-Mass Extrasolar Planets. *Science*, 307:1288–1291.
- Hori, G. I. (1961). A Modification of von Zeipel's Method for a Choice of Canonical Variables Especially Suitable for Orbits with Small Eccentricities. *AJ*, 66:286.
- Izidoro, A., Ogihara, M., Raymond, S. N., Morbidelli, A., Pierens, A., Bitsch, B., Cosso, C., y Hersant, F. (2017). Breaking the chains: hot super-Earth systems from migration and disruption of compact resonant chains. *MNRAS*, 470(2):1750–1770.
- Johnson, M. C., Endl, M., Cochran, W. D., Meschiari, S., Robertson, P., MacQueen, P. J., Brugamyer, E. J., Caldwell, C., Hatzes, A. P., Ramírez, I., y Wittenmyer, R. A. (2016). A 12-Year Activity Cycle for HD 219134. *ArXiv e-prints*.
- Kasting, J. F., Whitmire, D. P., y Reynolds, R. T. (1993). Habitable Zones around Main Sequence Stars. *ICARUS*, 101:108–128.
- Kipping, D. M. (2011). LUNA: an algorithm for generating dynamic planet-moon transits. *MNRAS*, 416(1):689–709.
- Kirkpatrick, J. D., Henry, T. J., y Simons, D. A. (1995). The Solar Neighborhood. II. The First List of Dwarfs with Spectral Types of M7 and Cooler. *AJ*, 109:797.
- Kirkwood, D. (1867). *Meteoric astronomy: a treatise on shooting-stars, fireballs, and aerolites*.
- Kokubo, E. y Ida, S. (1996). On Runaway Growth of Planetesimals. *ICARUS*, 123:180–191.
- Kokubo, E. y Ida, S. (1998). Oligarchic Growth of Protoplanets. *ICARUS*, 131:171–178.
- Kopparapu, R. K., Ramirez, R., Kasting, J. F., Eymet, V., Robinson, T. D., Mahadevan, S., Terrien, R. C., Domagal-Goldman, S., Meadows, V., y Deshpande, R. (2013). Habitable Zones around Main-sequence Stars: New Estimates. *ApJ*, 765:131.
- Kuiper, G. P. (1951). On the Origin of the Solar System. *Proceedings of the National Academy of Science*, 37:1–14.
- Lee, M. H., Fabrycky, D., y Lin, D. N. C. (2013). Are the Kepler Near-resonance Planet Pairs due to Tidal Dissipation? *ApJ*, 774:52.

- Lee, M. H. y Peale, S. J. (2002). Dynamics and Origin of the 2:1 Orbital Resonances of the GJ 876 Planets. *ApJ*, 567:596–609.
- Lega, E., Morbidelli, A., y Nesvorný, D. (2013). Early dynamical instabilities in the giant planet systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 431(4):3494–3500.
- Levison, H. F., Morbidelli, A., Van Laerhoven, C., Gomes, R., y Tsiganis, K. (2008). Origin of the structure of the Kuiper belt during a dynamical instability in the orbits of Uranus and Neptune. *ICARUS*, 196(1):258–273.
- Libert, A. S. y Henrard, J. (2007). Analytical study of the proximity of exoplanetary systems to mean-motion resonances. *A&A*, 461:759–763.
- Lin, D. N. C., Bodenheimer, P., y Richardson, D. C. (1996). Orbital migration of the planetary companion of 51 Pegasi to its present location. *Nature*, 380:606–607.
- Lin, D. N. C. y Papaloizou, J. (1985). On the dynamical origin of the solar system. In Black, D. C. y Matthews, M. S., editors, *Protostars and Planets II*, pages 981–1072.
- Lissauer, J. J. (1993). Planet formation. *ARAA*, 31:129–174.
- Lissauer, J. J., Ragozzine, D., Fabrycky, D. C., Steffen, J. H., Ford, E. B., Jenkins, J. M., Shporer, A., Holman, M. J., Rowe, J. F., Quintana, E. V., Batalha, N. M., Borucki, W. J., Bryson, S. T., Caldwell, D. A., Carter, J. A., Ciardi, D., Dunham, E. W., Fortney, J. J., Gautier, III, T. N., Howell, S. B., Koch, D. G., Latham, D. W., Marcy, G. W., Morehead, R. C., y Sasselov, D. (2011). Architecture and Dynamics of Kepler’s Candidate Multiple Transiting Planet Systems. *ApJ S*, 197:8.
- Lithwick, Y. y Wu, Y. (2012). Resonant Repulsion of Kepler Planet Pairs. *ApJ*, 756:L11.
- Luger, R., Sestovic, M., Kruse, E., Grimm, S. L., Demory, B. O., Agol, E., Bolmont, E., Fabrycky, D., Fernandes, C. S., Van Grootel, V., Burgasser, A., Gillon, M., Ingalls, J. G., Jehin, E., Raymond, S. N., Selsis, F., Triaud, A. H. M. J., Barclay, T., Barentsen, G., Howell, S. B., Delrez, L., de Wit, J., Foreman-Mackey, D., Holdsworth, D. L., Leconte, J., Lederer, S., Turbet, M., Almléaky, Y., Benkhaldoun, Z., Magain, P., Morris, B. M., Heng, K., y Queloz, D. (2017). A seven-planet resonant chain in TRAPPIST-1. *Nature Astronomy*, 1:0129.
- Lyra, W., Paardekooper, S.-J., y Mac Low, M.-M. (2010). Orbital Migration of Low-mass Planets in Evolutionary Radiative Models: Avoiding Catastrophic Infall. *ApJ*, 715(2):L68–L73.
- MacDonald, M. G., Ragozzine, D., Fabrycky, D. C., Ford, E. B., Holman, M. J., Isaacson, H. T., Lissauer, J. J., Lopez, E. D., Mazeh, T., Rogers, L., Rowe, J. F., Steffen, J. H., y Torres, G. (2016). A Dynamical Analysis of the Kepler-80 System of Five Transiting Planets. *AJ*, 152:105.

- Malhotra, R. (1998). Orbital Resonances and Chaos in the Solar System. In Lazzaro, D., Vieira Martins, R., Ferraz-Mello, S., y Fernandez, J., editors, *Solar System Formation and Evolution*, volume 149 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 37.
- Malhotra, R., Petrovich, C., y Tremaine, S. (2013). In-situ Planet Formation: Implications for Planets near Resonances. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #45*, AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts, page 300.05.
- Mamajek, E. E. (2009). How accurately can we age-date solar-type dwarfs using activity/rotation diagnostics? In Mamajek, E. E., Soderblom, D. R., y Wyse, R. F. G., editors, *IAU Symposium*, volume 258 of *IAU Symposium*, pages 375–382.
- Marchal, C. y Bozis, G. (1982). Hill Stability and Distance Curves for the General Three-Body Problem. *Celestial Mechanics*, 26:311–333.
- Marcy, G. W., Butler, R. P., Fischer, D., Vogt, S. S., Lissauer, J. J., y Rivera, E. J. (2001). A Pair of Resonant Planets Orbiting GJ 876. *ApJ*, 556(1):296–301.
- Marcy, G. W., Isaacson, H., Howard, A. W., Rowe, J. F., Jenkins, J. M., Bryson, S. T., Latham, D. W., Howell, S. B., Gautier, III, T. N., Batalha, N. M., Rogers, L., Ciardi, D., Fischer, D. A., Gilliland, R. L., Kjeldsen, H., Christensen-Dalsgaard, J., Huber, D., Chaplin, W. J., Basu, S., Buchhave, L. A., Quinn, S. N., Borucki, W. J., Koch, D. G., Hunter, R., Caldwell, D. A., Van Cleve, J., Kolbl, R., Weiss, L. M., Petigura, E., Seager, S., Morton, T., Johnson, J. A., Ballard, S., Burke, C., Cochran, W. D., Endl, M., MacQueen, P., Everett, M. E., Lissauer, J. J., Ford, E. B., Torres, G., Fressin, F., Brown, T. M., Steffen, J. H., Charbonneau, D., Basri, G. S., Sasselov, D. D., Winn, J., Sanchis-Ojeda, R., Christiansen, J., Adams, E., Henze, C., Dupree, A., Fabrycky, D. C., Fortney, J. J., Tarter, J., Holman, M. J., Tenenbaum, P., Shporer, A., Lucas, P. W., Welsh, W. F., Orosz, J. A., Bedding, T. R., Campante, T. L., Davies, G. R., Elsworth, Y., Handberg, R., Hekker, S., Karoff, C., Kawaler, S. D., Lund, M. N., Lundkvist, M., Metcalfe, T. S., Miglio, A., Silva Aguirre, V., Stello, D., White, T. R., Boss, A., Devore, E., Gould, A., Prsa, A., Agol, E., Barclay, T., Coughlin, J., Brugamyer, E., Mullally, F., Quintana, E. V., Still, M., Thompson, S. E., Morrison, D., Twicken, J. D., Désert, J. M., Carter, J., Crepp, J. R., Hébrard, G., Santerne, A., Moutou, C., Sobeck, C., Hudgins, D., Haas, M. R., Robertson, P., Lillo-Box, J., y Barrado, D. (2014). Masses, Radii, and Orbits of Small Kepler Planets: The Transition from Gaseous to Rocky Planets. *ApJ S*, 210:20.
- Marois, C., Macintosh, B., Barman, T., Zuckerman, B., Song, I., Patience, J., Lafrenière, D., y Doyon, R. (2008). Direct Imaging of Multiple Planets Orbiting the Star HR 8799. *Science*, 322:1348.
- Martí, J. G., Cincotta, P. M., y Beaugé, C. (2016). Chaotic diffusion in the Gliese-876 planetary system. *MNRAS*, 460:1094–1105.
- Martí, J. G., Giuppone, C. A., y Beaugé, C. (2013). Dynamical analysis of the Gliese-876 Laplace resonance. *MNRAS*, 433:928–934.

- Masset, F. S., Morbidelli, A., Crida, A., y Ferreira, J. (2006). Disk Surface Density Transitions as Protoplanet Traps. *ApJ*, 642(1):478–487.
- Masset, F. S. y Papaloizou, J. C. B. (2003). Runaway Migration and the Formation of Hot Jupiters. *ApJ*, 588(1):494–508.
- Mayor, M. y Queloz, D. (1995). A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, 378:355–359.
- McArthur, B. E., Benedict, G. F., Henry, G. W., Hatzes, A., Cochran, W. D., Harrison, T. E., Johns-Krull, C., y Nelan, E. (2014). Astrometry, Radial Velocity, and Photometry: The HD 128311 System Remixed with Data from HST, HET, and APT. *ApJ*, 795:41.
- Michtchenko, T. A., Beaugé, C., y Ferraz-Mello, S. (2006). Stationary Orbits in Resonant Extrasolar Planetary Systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94(4):411–432.
- Michtchenko, T. A., Beaugé, C., y Ferraz-Mello, S. (2008). Dynamic portrait of the planetary 2/1 mean-motion resonance - II. Systems with a more massive inner planet. *MNRAS*, 391:215–227.
- Migaszewski, C. y Goździewski, K. (2018). A periodic configuration of the Kepler-25 planetary system. *MNRAS*, 480(2):1767–1777.
- Mignard, F. (1979). The evolution of the lunar orbit revisited. I. *Moon and Planets*, 20:301–315.
- Mills, S., Fabrycky, D. C., Migaszewski, C., Ford, E. B., Petigura, E., y Isaacson, H. T. (2016a). Kepler-223: A Resonant Chain of Four Transiting, Sub-Neptune Planets. In *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting*, volume 47 of *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting*, page 101.03.
- Mills, S. M., Fabrycky, D. C., Migaszewski, C., Ford, E. B., Petigura, E., y Isaacson, H. (2016b). A resonant chain of four transiting, sub-Neptune planets. *Nature*, 533:509–512.
- Mizuno, H. (1980). Formation of the Giant Planets. *Progress of Theoretical Physics*, 64:544–557.
- Morbidelli, A. (2000). ASTEROIDS: Living in the Kingdom of Chaos. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #32*, volume 32 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, page 998.
- Morbidelli, A., Levison, H. F., Tsiganis, K., y Gomes, R. (2005). Chaotic capture of Jupiter's Trojan asteroids in the early Solar System. *Nature*, 435(7041):462–465.
- Morbidelli, A. y Nesvorný, D. (2020). *Kuiper belt: formation and evolution*, pages 25–59.

- Morbidelli, A. y Raymond, S. N. (2016). Challenges in planet formation. *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 121(10):1962–1980.
- Motalebi, F., Udry, S., Gillon, M., Lovis, C., Ségransan, D., Buchhave, L. A., Demory, B. O., Malavolta, L., Dressing, C. D., Sasselov, D., Rice, K., Charbonneau, D., Collier Cameron, A., Latham, D., Molinari, E., Pepe, F., Affer, L., Bonomo, A. S., Cosentino, R., Dumusque, X., Figueira, P., Fiorenzano, A. F. M., Gettel, S., Harutyunyan, A., Haywood, R. D., Johnson, J., Lopez, E., Lopez-Morales, M., Mayor, M., Micela, G., Mortier, A., Nascimbeni, V., Philips, D., Piotto, G., Pollacco, D., Queloz, D., Sozzetti, A., Vanderburg, A., y Watson, C. A. (2015). The HARPS-N Rocky Planet Search. I. HD 219134 b: A transiting rocky planet in a multi-planet system at 6.5 pc from the Sun. *A&A*, 584:A72.
- Murray, C. D. y Dermott, S. F. (1999). *Solar system dynamics*.
- Murray, N. y Holman, M. (1999). The Origin of Chaos in the Outer Solar System. *Science*, 283:1877.
- Nelson, B. E., Robertson, P. M., Payne, M. J., Pritchard, S. M., Deck, K. M., Ford, E. B., Wright, J. T., y Isaacson, H. T. (2016). An empirically derived three-dimensional Laplace resonance in the Gliese 876 planetary system. *MNRAS*, 455:2484–2499.
- Nelson, R. P. y Papaloizou, J. C. B. (2002). Possible commensurabilities among pairs of extrasolar planets. *MNRAS*, 333(2):L26–L30.
- Nesvorný, D., Ferraz-Mello, S., Holman, M., y Morbidelli, A. (2002). *Regular and Chaotic Dynamics in the Mean-Motion Resonances: Implications for the Structure and Evolution of the Asteroid Belt*, pages 379–394.
- Ogihara, M. y Ida, S. (2009). N-Body Simulations of Planetary Accretion Around M Dwarf Stars. *ApJ*, 699(1):824–838.
- Papaloizou, J. C. B. (2015). Three body resonances in close orbiting planetary systems: tidal dissipation and orbital evolution. *International Journal of Astrobiology*, 14:291–304.
- Papaloizou, J. C. B. y Larwood, J. D. (2000). On the orbital evolution and growth of protoplanets embedded in a gaseous disc. *MNRAS*, 315:823–833.
- Papaloizou, J. C. B., Nelson, R. P., Kley, W., Masset, F. S., y Artymowicz, P. (2007). Disk-Planet Interactions During Planet Formation. In Reipurth, B., Jewitt, D., y Keil, K., editors, *Protostars and Planets V*, page 655.
- Papaloizou, J. C. B. y Szuszkiewicz, E. (2005). On the migration-induced resonances in a system of two planets with masses in the Earth mass range. *MNRAS*, 363:153–176.
- Perri, F. y Cameron, A. G. W. (1974). Hydrodynamic instability of the solar nebula in the presence of a planetary core. *ICARUS*, 22:416–425.

- Petigura, E. A., Howard, A. W., Lopez, E. D., Deck, K. M., Fulton, B. J., Crossfield, I. J. M., Ciardi, D. R., Chiang, E., Lee, E. J., Isaacson, H., Beichman, C. A., Hansen, B. M. S., Schlieder, J. E., y Sinukoff, E. (2016). Two Transiting Low Density Sub-Saturns from K2. *ApJ*, 818:36.
- Petrovich, C., Malhotra, R., y Tremaine, S. (2013). Planets near Mean-motion Resonances. *ApJ*, 770:24.
- Pichierri, G., Morbidelli, A., y Crida, A. (2018). Capture into first-order resonances and long-term stability of pairs of equal-mass planets. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 130(8):54.
- Quillen, A. C. (2011). Three-body resonance overlap in closely spaced multiple-planet systems. *MNRAS*, 418:1043–1054.
- Quillen, A. C., Bodman, E., y Moore, A. (2013). Origin scenarios for the Kepler 36 planetary system. *MNRAS*, 435:2256–2267.
- Quillen, A. C. y French, R. S. (2014). Resonant chains and three-body resonances in the closely packed inner Uranian satellite system. *MNRAS*, 445:3959–3986.
- Ramos, X. S., Charalambous, C., Benítez-Llambay, P., y Beaugé, C. (2017). Planetary migration and the origin of the 2:1 and 3:2 (near)-resonant population of close-in exoplanets. *A&A*, 602:A101.
- Ramos, X. S., Correa-Otto, J. A., y Beaugé, C. (2015). The resonance overlap and Hill stability criteria revisited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 123:453–479.
- Raymond, S. N., Barnes, R., y Mandell, A. M. (2008). Observable consequences of planet formation models in systems with close-in terrestrial planets. *MNRAS*, 384(2):663–674.
- Raymond, S. N. y Cossou, C. (2014). No universal minimum-mass extrasolar nebula: evidence against in situ accretion of systems of hot super-Earths. *MNRAS*, 440:L11–L15.
- Rein, H. (2012). Period ratios in multiplanetary systems discovered by Kepler are consistent with planet migration. *MNRAS*, 427:L21–L24.
- Rivera, E. J., Laughlin, G., Butler, R. P., Vogt, S. S., Haghighipour, N., y Meschiari, S. (2010). The Lick-Carnegie Exoplanet Survey: a Uranus-Mass Fourth Planet for GJ 876 in an Extrasolar Laplace Configuration. *ApJ*, 719:890–899.
- Safronov, V. S. (1969). *Evolution of the protoplanetary cloud and formation of the earth and planets*.
- Sartoretti, P. y Schneider, J. (1999). On the detection of satellites of extrasolar planets with the method of transits. *A&AS*, 134:553–560.

- Silburt, A. y Rein, H. (2015). Tides alone cannot explain Kepler planets close to 2:1 MMR. *MNRAS*, 453:4089–4096.
- Sozzetti, A. (2005). Astrometric Methods and Instrumentation to Identify and Characterize Extrasolar Planets: A Review. *PASP*, 117:1021–1048.
- Steffen, J. H., Fabrycky, D. C., Agol, E., Ford, E. B., Morehead, R. C., Cochran, W. D., Lissauer, J. J., Adams, E. R., Borucki, W. J., Bryson, S., Caldwell, D. A., Dupree, A., Jenkins, J. M., Robertson, P., Rowe, J. F., Seader, S., Thompson, S., y Twicken, J. D. (2013). Transit timing observations from Kepler - VII. Confirmation of 27 planets in 13 multiplanet systems via transit timing variations and orbital stability. *MNRAS*, 428:1077–1087.
- Tamayo, D., Rein, H., Petrovich, C., y Murray, N. (2017). Convergent Migration Renders TRAPPIST-1 Long-lived. *ApJ*, 840:L19.
- Tanaka, H., Takeuchi, T., y Ward, W. R. (2002). Three-Dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. I. Corotation and Lindblad Torques and Planet Migration. *ApJ*, 565:1257–1274.
- Tanaka, H. y Ward, W. R. (2004). Three-dimensional Interaction between a Planet and an Isothermal Gaseous Disk. II. Eccentricity Waves and Bending Waves. *ApJ*, 602:388–395.
- Terquem, C. y Papaloizou, J. C. B. (2007). Migration and the Formation of Systems of Hot Super-Earths and Neptunes. *ApJ*, 654:1110–1120.
- Tisserand, F. (1889). Mémoires et observations. Sur la théorie de la capture des comètes périodiques. [Suite et fin (<sup>1</sup>).]. *Bulletin Astronomique, Serie I*, 6:289–292.
- Tsiganis, K., Gomes, R., Morbidelli, A., y Levison, H. F. (2005). Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System. *Nature*, 435(7041):459–461.
- Vogt, S. S., Burt, J., Meschiari, S., Butler, R. P., Henry, G. W., Wang, S., Holden, B., Gapp, C., Hanson, R., Arriagada, P., Keiser, S., Teske, J., y Laughlin, G. (2015). Six Planets Orbiting HD 219134. *ApJ*, 814:12.
- Wang, S. y Ji, J. (2014). Near 3:2 and 2:1 Mean Motion Resonance Formation in the Systems Observed by Kepler. *ApJ*, 795:85.
- Wang, S. y Ji, J. (2017). Near mean-motion resonances in the system observed by kepler: Affected by mass accretion and type i migration. *The Astronomical Journal*, 154(6):236.
- Wang, S., Ji, J., y Zhou, J.-L. (2012). Predicting the Configuration of a Planetary System: KOI-152 Observed by Kepler. *ApJ*, 753(2):170.
- Ward, W. R. (1997). Protoplanet Migration by Nebula Tides. *ICARUS*, 126:261–281.



- Weidling, R., Güttler, C., y Blum, J. (2012). Free collisions in a microgravity many-particle experiment. I. Dust aggregate sticking at low velocities. *ICARUS*, 218:688–700.
- Wetherill, G. W. y Stewart, G. R. (1989). Accumulation of a swarm of small planetesimals. *ICARUS*, 77:330–357.
- Wisdom, J. (1980). The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem. *AJ*, 85:1122–1133.
- Wittenmyer, R. A., Tan, X., Lee, M. H., Horner, J., Tinney, C. G., Butler, R. P., Salter, G. S., Carter, B. D., Jones, H. R. A., O’Toole, S. J., Bailey, J., Wright, D., Crane, J. D., Schectman, S. A., Arriagada, P., Thompson, I., Minniti, D., y Diaz, M. (2014). A Detailed Analysis of the HD 73526 2:1 Resonant Planetary System. *ApJ*, 780:140.
- Wolszczan, A. (1994). Confirmation of Earth-Mass Planets Orbiting the Millisecond Pulsar PSR B1257+12. *Science*, 264:538–542.
- Wolszczan, A. y Frail, D. A. (1992). A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12. *Nature*, 355:145–147.
- Xiang-Gruess, M. y Papaloizou, J. C. B. (2015). Evolutionary outcomes for pairs of planets undergoing orbital migration and circularization: second-order resonances and observed period ratios in Kepler’s planetary systems. *MNRAS*, 449:3043–3056.
- Yoder, C. F. (1979). How tidal heating in Io drives the Galilean orbital resonance locks. *Nature*, 279:767–770.
- Zoppetti, F. A., Beaugé, C., y Leiva, A. M. (2018). Resonant capture and tidal evolution in circumbinary systems: testing the case of Kepler-38. *MNRAS*, 477(4):5301–5311.
- Zsom, A., Ormel, C. W., Güttler, C., Blum, J., y Dullemond, C. P. (2010). The outcome of protoplanetary dust growth: pebbles, boulders, or planetesimals? II. Introducing the bouncing barrier. *A&A*, 513:A57.

