

Solución Mediante Métodos Espectrales de la Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger (DNLS)



Gustavo J. Krause

Directores:

Dr. Sergio Elaskar

Dra. Andrea Costa

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
Universidad Nacional de Córdoba

Instituto Universitario Aeronáutico

Tesis para alcanzar el grado de:
Magíster en Ciencias de la Ingeniería

28 de junio de 2012

Abstract

La manera convencional de estudiar el comportamiento de un plasma es mediante las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica (MHD), pero cuando los fenómenos en estudio involucran frecuencias del orden de la frecuencia de ciclotrón iónica, es necesario incluir el efecto de considerar un valor finito para esta frecuencia. Este efecto es normalmente referido como efecto Hall, y su influencia puede observarse explícitamente en la ecuación de inducción magnética de las MHD. En el modelo “MHD-Hall” resultante, los modos de propagación de ondas se acoplan y el sistema es dispersivo, pero para propagación paralela (o casi paralela) al campo magnético ambiente ocurre la degeneración de los modos, el modo de Alfvén se desacopla de los modos magnetosónicos y las ondas son circularmente polarizadas pudiendo describirse mediante la Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger (DNLS). En el presente trabajo, dicha ecuación se soluciona numéricamente utilizando métodos espectrales para la resolución de las derivadas espaciales y un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden para la integración en el tiempo. En primer lugar se considera la ecuación DNLS sin efectos difusivos manteniendo los términos no lineal y dispersivo, con condición inicial de una onda para verificar el cumplimiento de las condiciones analíticas de estabilidad modular, además de determinar el tiempo en el cual se produce la inestabilidad y la forma de la evolución posterior. En segundo término se analiza el caso con condición inicial de tres ondas cerca de resonancia con el objetivo de evaluar la transferencia de energía entre los diferentes modos y la influencia de los distintos parámetros que intervienen en la simulación. Finalmente se incorporan los efectos difusivos al caso de tres ondas iniciales, con una onda excitada y las restantes amortiguadas, tomando distintos valores de difusión para evaluar una serie de atractores hallados numéricamente y comparar los resultados con aquellos obtenidos mediante técnicas de truncamiento a tres ondas.

Agradecimientos

Este trabajo no hubiera sido posible sin el aporte de numerosas personas a las cuales estoy profundamente agradecido. En primer lugar quisiera destacar al Dr. Sergio Elaskar por brindarme la posibilidad de incorporarme a su equipo de trabajo y confiar en mis capacidades para llevar a cabo este proyecto. También me gustaría mencionar a la Dra. Andrea Costa por sus aportes y sugerencias y al Ing. Eduardo Zapico por su apoyo y motivación. Por otro lado, no quisiera dejar de destacar al Dr. José Tamagno, quien hace ya algún tiempo despertó mi interés por la investigación. Finalmente extendiendo mi gratitud a todos mis profesores y compañeros de maestría, y agradezco a los miembros del tribunal examinador por disponer del tiempo para evaluar el trabajo.

En el ámbito personal quisiera resaltar el apoyo de todos los miembros de mi familia, de mis padres y hermanos, y muy especialmente de Andrea, en cuya infinita paciencia se refleja la calidad de su amor y compromiso.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Aspectos generales	1
1.2. Contenido de la investigación	2
2. Las Ondas de Alfvén y La Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger	4
2.1. Conceptos Iniciales	4
2.1.1. Frecuencia del plasma y Longitud de Debye	5
2.1.2. Movimiento de partículas simples	6
2.2. El Modelo MHD-Hall	6
2.3. Ondas en el Modelo MHD	10
2.3.1. Propagación Paralela $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{k}$	11
2.3.2. Propagación perpendicular $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{k}$	12
2.3.3. Caso general $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = B_0 k \cos \theta$	12
2.4. Ondas en el Modelo MHD-Hall	13
2.5. Ondas No Lineales	13
2.5.1. Baja frecuencia $\omega \ll \Omega_i$	14
2.5.2. Alta frecuencia $\omega \lesssim \Omega_i$	15
2.5.3. Derivación de la Ecuación DNLS	16
2.6. La Ecuación DNLS	18
2.6.1. Resultados previos de la DNLS	19
2.6.1.1. Soluciones exactas	20
2.6.1.2. Reducción a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias	21
2.6.1.3. Soluciones numéricas	23
3. Solución Mediante Métodos Espectrales	25
3.1. Introducción a los Métodos Espectrales	25
3.1.1. Funciones de expansión ortogonales	26
3.1.2. La Expansión de Fourier continua	26
3.1.3. La Expansión de Fourier Discreta	28
3.1.3.1. El error de “aliasing”	29
3.2. Implementación en la Ecuación DNLS	29
4. Solución de la Ecuación DNLS No Difusiva	33
4.1. Consideraciones iniciales	33
4.2. DNLS no difusiva con condición inicial de una onda	35
4.2.1. Condiciones analíticas de estabilidad modular	35
4.2.2. Resultados numéricos de la ecuación DNLS con condición inicial de una onda	36
4.3. DNLS no difusiva con condición inicial de tres ondas	45

4.3.1. Resultados numéricos de la ecuación DNLS con condición inicial de tres ondas	45
5. Solución de la Ecuación DNLS con Efectos Difusivos	55
5.1. Consideraciones iniciales	55
5.2. Resultados numéricos	57
5.2.1. Análisis de los Resultados	60
5.2.1.1. Atractor A_8	60
5.2.1.2. Atractor A_7	61
5.2.1.3. Atractor A_6	62
5.2.1.4. Atractor A_5	63
5.2.1.5. Atractor A_4	64
5.2.1.6. Atractor A_3	66
6. Conclusiones	68
6.1. Ecuación DNLS sin efectos difusivos	68
6.1.1. Condición inicial de una onda	68
6.1.2. Condición inicial de tres ondas	69
6.2. Ecuación DNLS con efectos difusivos	70
6.3. Conclusiones finales	71
6.4. Trabajos Futuros	72
A. Parámetros de Descripción del Plasma	73
B. Modelo de Truncamiento de la Ecuación DNLS	75
Referencias	81

Índice de figuras

3.1. Ejemplo de aliasing para una grilla con $N = 8$. Ambos modos toman los mismos valores en los puntos de la grilla	29
3.2. Esquemas de filtrado de Philips (izquierda) y de Orszag (derecha) disponibles para corregir el error de aliasing.	30
4.1. Tiempo de inestabilidad en función de la amplitud de la onda inicial A_0 para diferentes números de onda inicial n_0	38
4.2. Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 2$	40
4.3. Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 5$	41
4.4. Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 10$	42
4.5. Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 15$	43
4.6. Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 20$	44
4.7. Sensibilidad al número de modos utilizado en la discretización para plasmas fríos con $q = 0,90$, $m = 0,10$, $n_0 = 5$ y condición inicial de tres ondas	47
4.8. Sensibilidad al número de modos utilizado en la discretización para plasmas fríos con $q = 0,90$, $m = 0,10$, $n_0 = 10$ y condición inicial de tres ondas	48
4.9. Sensibilidad al número de modos utilizado en la discretización para plasmas fríos con $q = 0,90$, $m = 0,10$, $n_0 = 15$ y condición inicial de tres ondas	49
4.10. Influencia del nivel de energía (factor m) y de la distribución de la misma (coeficiente q) para plasmas fríos con $n_0 = 5$ y condición inicial de tres ondas	50
4.11. Influencia del nivel de energía (factor m) y de la distribución de la misma (coeficiente q) para plasmas fríos con $n_0 = 10$ y condición inicial de tres ondas	51
4.12. Influencia del nivel de energía (factor m) y de la distribución de la misma (coeficiente q) para plasmas fríos con $n_0 = 15$ y condición inicial de tres ondas	52
4.13. Evolución de la energía relativa de cada modo resonante para plasmas fríos, polarización izquierda, $m = 0,10$, $q = 0,90$ y $n_0 = 5$	53
4.14. Evolución de la energía relativa de cada modo resonante para plasmas fríos, polarización izquierda, $m = 0,10$, $q = 0,90$ y $n_0 = 10$	53
4.15. Evolución de la energía relativa de cada modo resonante para plasmas fríos, polarización izquierda, $m = 0,10$, $q = 0,90$ y $n_0 = 15$	54
5.1. Función de amortiguamiento/excitación en el espacio de Fourier	56
5.2. Evolución de la energía E_m para distintas configuraciones de ondas resonantes iniciales con $\eta = 0,12$ y $\hat{\gamma}_0 = 0,02$	59

5.3. Influencia en la evolución de la energía del parámetro N para $n_0 = 9$, $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$, con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$ y $\eta = 0,30$	59
5.4. Atractor A_8 ($n_0 = 9$, $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)	61
5.5. Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_8	61
5.6. Atractor A_7 ($n_0 = 9$, $n_1 = 2$ y $n_2 = 16$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)	62
5.7. Atractor A_6 ($n_0 = 9$, $n_1 = 3$ y $n_2 = 15$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)	63
5.8. Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_6	63
5.9. Atractor A_5 ($n_0 = 9$, $n_1 = 4$ y $n_2 = 14$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)	64
5.10. Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_5	64
5.11. Atractor A_4 ($n_0 = 9$, $n_1 = 5$ y $n_2 = 13$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)	65
5.12. Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_4	65
5.13. Atractor A_3 ($n_0 = 9$, $n_1 = 6$ y $n_2 = 12$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)	66
5.14. Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_3	67

Capítulo 1

Introducción

Las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD) constituyen las ecuaciones de gobierno fundamentales para la descripción del comportamiento de un plasma. Con ellas es posible determinar los modos característicos de propagación de ondas, es decir las ondas magnetosónicas rápida y lenta y las ondas de Alfvén. Sin embargo, cuando los fenómenos de estudio ameritan que se consideren frecuencias del orden de la frecuencia de ciclotrón iónica o las longitudes de interés son del orden de la llamada longitud inercial iónica, las ecuaciones MHD ya no resultan apropiadas. En esos casos es necesario incorporar al modelo los efectos de considerar una frecuencia de ciclotrón iónica finita, extendiendo así el rango de aplicación de las ecuaciones. La incorporación de estos efectos se refiere usualmente como el “efecto Hall”, el cual surge explícitamente en la ecuación de inducción magnética de las MHD. A este modelo se lo conoce como el modelo MHD-Hall.

En el modelo MHD-Hall, si bien los modos magnetosónicos y de Alfvén pueden diferenciarse, se produce entre ellos un acoplamiento que genera que estos modos sean dispersivos, situación que constituye la principal diferencia con las ondas correspondientes al modelo MHD convencional. Además, para el caso de propagación paralela (o casi paralela) ocurre la degeneración de las ondas, el modo de Alfvén se desacopla de los modos magnetosónicos y experimenta una resonancia a la frecuencia de ciclotrón iónica cuando las ondas son polarizadas a izquierda. En plasmas uniformes inmersos en un campo magnético ambiente también uniforme se determinó que ondas de Alfvén no lineales pueden propagarse paralelas a la dirección del campo ya que el efecto Hall constituye el término dispersivo que permite balancear las no linealidades.

1.1. Aspectos generales

Las ondas de Alfvén son un rasgo característico en plasmas magnetizados. Tanto en plasmas espaciales como en plasmas de laboratorio, ondas de Alfvén de amplitud finita son excitadas por numerosas fuentes: haces de partículas cargadas, parámetros del plasma ambiente no uniformes, ondas electromagnéticas y electrostáticas (Shukla y Stenflo, 1999). El entendimiento de las propiedades no lineales de las ondas de Alfvén dispersivas es un requisito indispensable para interpretar correctamente las numerosas observaciones de ondas electromagnéticas de baja frecuencia en plasmas espaciales. Se han observado ondas de Alfvén de larga amplitud acompañando al viento solar (Smith et al., 1995), además se cree que son responsables del calentamiento turbulento de las coronas estelares (Pettini et al., 1985), de fenómenos relacionados con la generación de viento estelar y de chorros extragalácticos (Jetenco-Pereira, 1995), entre otros fenómenos. Además, se han registrado fluctuaciones de larga amplitud en la magnetósfera de la Tierra con períodos de onda del orden del período de ciclotrón del protón local (Tsurutani et al., 1985). Todas estas situaciones demuestran

que en ocasiones el efecto de la frecuencia de ciclotrón iónica finita debe ser incorporado.

Por otro lado, la interacción de amarras espaciales electrodinámicas (tethers) con la ionósfera de la Tierra y el campo magnético ambiente, además de generar ondas electromagnéticas (Dobrowolny y Melchioni, 1993), puede tener aplicaciones diversas como ser la producción de potencia eléctrica y propulsión, generación de auroras boreales artificiales (Sanmartín et al., 2006) o mitigación de basura espacial (Ahedo y Sanmartín, 2002). La emisión de ondas de Alfvén por la presencia de un elemento conductor se produce en forma de estructuras denominadas Alas de Alfvén. El estudio de estas estructuras puede abordarse diferenciando las regiones cercanas al cuerpo (campo próximo) de las alejadas (campo lejano). Para el primer caso un análisis lineal puede resultar suficiente (Sanmartín y Estes, 1997), pero en las cercanías del elemento existe una serie de fenómenos que obliga a un estudio más detallado, ya que se esperan ondas de mayor intensidad con efectos no lineales más importantes.

No linealidades débiles de las ondas dispersivas en el modelo MHD-Hall pueden estudiarse mediante la aplicación de la teoría de perturbaciones (Cramer, 2001). Mediante ese estudio y otras técnicas se demostró que los modos magnetosónicos obedecen a la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) cuando los ángulos de propagación son suficientemente grandes (Kakutani et al., 1968; Kever y Morikawa, 1969; Morton, 1964), mientras que el modo de Alfvén está representado por la ecuación KdV modificada. Para propagación paralela o casi paralela al campo magnético ambiente, las ondas MHD se degeneran y, si la velocidad de Alfvén es significativamente mayor que la velocidad del sonido, sólo el modo de Alfvén y el magnetosónico rápido son degenerados, pudiendo describirse mediante la ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger (DNLS) (Mio et al., 1976; Mjølhus, 1976; Rogister, 1971, entre otros).

La ecuación DNLS tiene la capacidad de describir la propagación paralela o casi paralela al campo magnético ambiente de ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas. Actualmente se conoce una gran cantidad de soluciones exactas de la DNLS (Belashov y Vladimirov, 2005), además la misma ha sido estudiada por técnicas alternativas como ser la integración numérica (Dawson y Fontan, 1988; Spangler et al., 1985) y la reducción a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias suponiendo ondas viajeras estacionarias (Hada et al., 1990) o utilizando un número finito de modos (Elaskar et al., 2006; Sánchez-Arriaga et al., 2007; Sanmartín et al., 2004).

El estudio de la ecuación DNLS se encuentra justificado en el hecho de que permitiría comprender las propiedades de las ondas de Alfvén, independientemente de la utilidad que puede tener la descripción de la propagación de ondas en amarras espaciales electrodinámicas para otras aplicaciones. Además, desde el punto de vista matemático, la ecuación DNLS tiene una importancia teórica muy relevante.

1.2. Contenido de la investigación

La investigación desarrollada en este trabajo tiene como objetivo principal el estudio numérico de la ecuación DNLS unidimensional con condiciones de contorno periódicas, para describir la propagación paralela (o casi paralela) al campo magnético ambiente de ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas. La suposición de condiciones de contorno periódicas tiene sustento en virtud de que para numerosas simulaciones fue demostrado que en la ecuación DNLS el fenómeno de interés no está influenciado por lo que sucede en los contornos (Belashov y Vladimirov, 2005). Esta propiedad permite utilizar un esquema numérico de métodos espectrales basados en expansiones en series de Fourier para el cálculo de las derivadas espaciales, tratando el avance en el tiempo explícitamente a través de un esquema de Runge-Kutta-Fehlberg de cuarto orden.

En primer término se estudia la ecuación DNLS sin tener en cuenta efectos difusivos,

con el término no lineal y el dispersivo, considerando plasmas fríos con ondas polarizadas a izquierda y derecha, utilizando dos tipos de condiciones iniciales diferentes: una onda plana (identificada con el número de onda k_0), y tres ondas que satisfacen la relación de resonancia ($2k_0 = k_1 + k_2$). En el caso con condición inicial de una onda el objetivo del análisis consiste en verificar numéricamente las condiciones analíticas de estabilidad modular de la DNLS (Fla, 1992), obteniendo además el tiempo al cual se produce la inestabilidad, la evolución posterior de la solución y los mecanismos de transferencia de energía entre los distintos modos. En el segundo caso el estudio está enfocado a la verificación de la estabilidad de ondas polarizadas a derecha y al entendimiento de la influencia de los distintos parámetros que intervienen en la simulación, siendo uno de los aspectos más importantes la determinación de la cantidad adecuada de puntos en la discretización.

El segundo análisis corresponde al estudio de la ecuación DNLS con efectos difusivos, con el término no lineal y el dispersivo, considerando plasmas fríos con ondas polarizadas a izquierda y utilizando como condición inicial una configuración de tres ondas cerca de resonancia, con un modo inestable (excitado) y dos modos amortiguados. El modelo así planteado podría describir la propagación de ondas de Alfvén en amarras espaciales electrodinámicas (Sánchez-Arriaga, 2009), el modo inestable es fruto de la interacción paramétrica con las amarras mientras que los modos estables extraen energía del sistema a través de algún mecanismo disipativo (en este trabajo se utiliza el modelo de amortiguamiento resistivo). El objetivo del estudio bajo las condiciones mencionadas es evaluar cómo se produce la transferencia de energía entre los distintos modos para una serie de atractores que se obtienen numéricamente, comparando los resultados obtenidos con aquellos hallados mediante técnicas de truncamiento a tres ondas (Sánchez-Arriaga et al., 2009).

Capítulo 2

Las Ondas de Alfvén y La Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger

En la primera mitad del siglo pasado se descubrió que, a diferencia de lo que ocurre en conductores rígidos, ondas electromagnéticas de baja frecuencia son capaces de propagarse en fluidos conductores tales como plasmas. Hannes Alfvén en 1942 investigó las propiedades de los plasmas asumiendo a éstos como un fluido incompresible, magnetizado y altamente conductor ([Alfvén, 1942](#)). Allí encontró que en estos fluidos surge un modo característico de ondas que se propagan en la dirección del campo magnético, las cuales se conocen actualmente como Ondas de Alfvén, cuya existencia fue verificada posteriormente por [Lundquist \(1949\)](#) de manera experimental. La importancia del descubrimiento de Alfvén fue rápidamente detectada y el caso de plasmas compresibles, el cual conduce a las ondas magnetosónicas rápida y lenta además de las de Alfvén fue tratado por [Herlofsen \(1950\)](#).

Bajo ciertas condiciones, la propagación de ondas de Alfvén puede describirse a través de una ecuación de diferencias no lineal, en derivadas parciales denominada Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger (DNLS), la cual tiene una forma conocida y ha sido ampliamente estudiada. Esta ecuación posee la capacidad de describir la propagación paralela o casi paralela de ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas.

La ecuación DNLS ha sido obtenida por numerosos autores utilizando condiciones y técnicas diferentes ([Baccelli et al., 1992](#); [Medvedev, 1999](#); [Mio et al., 1976](#); [Mjolhus, 1976](#); [Rogister, 1971](#); [Sakai y Sonnerup, 1983](#); [Spangler y Sheerin, 1982](#)). En este capítulo se presenta la derivación de la ecuación DNLS a partir de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (MHD) considerando el efecto Hall (MHD-Hall). Para ello, en primer lugar se presenta formalmente el modelo MHD-Hall explicitando las hipótesis y simplificaciones que lo definen, seguidamente se describen los distintos modos de onda presentes en los modelos, y finalmente se realiza la derivación de la ecuación DNLS.

2.1. Conceptos Iniciales

Un plasma es un medio relativamente complejo consistente en un fluido formado por un gran número de iones, electrones y partículas neutras, el cual está sujeto a fuerzas eléctricas y magnéticas, además de las fuerzas clásicas que actúan sobre los fluidos convencionales. La característica fundamental de un plasma es el hecho de que las partículas cargadas exhiben un comportamiento colectivo debido a la acción de largo alcance de las fuerzas de Coulomb, lo cual implica que no puede definirse como plasma a cualquier gas ionizado, sino que necesariamente el efecto colectivo debe predominar por sobre la interacción debida a las colisiones interpartículas.

2.1.1. Frecuencia del plasma y Longitud de Debye

Una de las propiedades fundamentales de un plasma es la tendencia del mismo a permanecer eléctricamente neutro. Esta propiedad se manifiesta frente a cualquier cambio en la neutralidad local de una región del plasma que se produce por la separación de cargas. Bajo esa situación se generan campos eléctricos que actúan sobre las partículas cargadas para devolverlas a su posición original y, debido a la inercia de las mismas, se produce una oscilación alrededor de la posición inicial a una frecuencia generalmente muy elevada. Este comportamiento permite asumir una cuasi neutralidad del plasma siempre que los tiempos de interés sean mucho mayores que el período de la oscilación.

La frecuencia de esta oscilación se conoce como frecuencia del plasma, y existe una frecuencia para cada especie que conforma el plasma (e : electrones; i : iones):

$$\omega_{pe,i} = \left(\frac{n_{e,i} e^2}{\varepsilon_0 m_{e,i}} \right)^{1/2}, \quad (2.1)$$

donde $n_{e,i}$ es la densidad de partículas de la especie, e es la carga del electrón (se consideran iones de carga $+e$), $m_{e,i}$ es la masa del electrón (ion) y ε_0 la permitividad eléctrica en el vacío.

En la Ec. (2.1) se observa que la frecuencia de plasma de los electrones es mucho mayor que la de los iones, ya que $m_e \ll m_i$. Por otro lado, como el plasma es globalmente neutro y se considera que los iones son de carga $+e$ resulta $n_e \approx n_i \approx n$.

Para establecer la escala de longitud se utiliza la distancia recorrida por una partícula en un tiempo correspondiente a un período de oscilación ω_{pe}^{-1} . Para definir esta longitud se hace uso de la velocidad térmica de las partículas dada por:

$$v_{te,i} = \left(\frac{2T\kappa}{m_{e,i}} \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

donde T es la temperatura y κ la constante de Boltzmann. Con esta ecuación resulta:

$$\lambda_D = v_{te,i} \omega_{pe,i}^{-1} = \left(\frac{\varepsilon_0 \kappa T}{n e^2} \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

El parámetro λ_D es conocido como longitud de Debye y puede pensarse como la mínima longitud a la cual la cuasi neutralidad del plasma no es violada por las fluctuaciones espontáneas del mismo. Con este valor y la frecuencia del plasma quedan definidas las escalas de longitud y tiempo para las cuales los fenómenos pueden describirse dentro de la teoría de plasmas:

$$\begin{aligned} t &\gg \omega_{pe}^{-1}, \\ L &\gg \lambda_D. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Además de estas dos condiciones, una tercera restricción es requerida para asegurar que el comportamiento colectivo de las partículas prevalece por sobre las interacciones debidas a las colisiones, esto es

$$\nu \ll \omega_{pe}, \quad (2.5)$$

siendo ν la frecuencia de colisiones.

2.1.2. Movimiento de partículas simples

Una de las razones que hace que los plasmas sean particularmente difíciles de estudiar se debe a que la densidad de los mismos se encuentra dentro de un rango intermedio. Fluidos densos no requieren que los movimientos individuales de las moléculas sean tenidos en cuenta ya que las colisiones dominan el comportamiento, sin embargo, un plasma en ocasiones se comporta como una colección de partículas individuales y por lo tanto es necesario considerar el movimiento de partículas cargadas individuales en presencia de campos eléctricos y magnéticos externos.

Para el análisis del movimiento de las partículas individuales se utiliza esencialmente la segunda ley de Newton en términos de la fuerza debida al campo eléctrico y la fuerza de Lorentz $q \mathbf{u} \times \mathbf{B}$, donde q es la carga de la partícula, \mathbf{u} su velocidad y \mathbf{B} el campo magnético.

Suponiendo que el campo eléctrico es nulo y el campo magnético es uniforme y constante en el tiempo, se obtiene que las partículas cargadas presentan un movimiento circular en un plano normal a las líneas de campo el cual se denomina movimiento de ciclotrón, cuya frecuencia de rotación es llamada frecuencia de ciclotrón (o girofrecuencia) y está dada por la intensidad del campo magnético, la carga de la partícula y su masa. Para electrones y iones de carga $+e$ esta frecuencia es

$$\Omega_{e,i} = \frac{eB}{m_{e,i}}. \quad (2.6)$$

Las frecuencias de ciclotrón constituyen los límites de las escalas temporales para los cuales el efecto de este movimiento debe ser tenido en cuenta. El radio de giro del movimiento se denomina radio de Larmor y el mismo determina el límite de la escala espacial que hace relevante el fenómeno. Naturalmente, siendo $m_e \ll m_i$ resulta $\Omega_e \gg \Omega_i$ y el radio de Larmor es mucho mayor para el caso de los iones.

2.2. El Modelo MHD-Hall

Existen diferentes formas para describir un plasma. La manera más exacta de realizar este estudio es conocer la posición y velocidad de cada partícula y los campos eléctrico y magnético en cada punto del dominio, sin embargo, el número total de partículas es en general extremadamente grande como para emplear este enfoque. Otra forma de llevar a cabo el análisis es mediante una aproximación estadística, utilizando funciones de distribución para la posición y la velocidad de las partículas, las cuales son normalmente dependientes del tiempo. La teoría de la evolución de las funciones de distribución se conoce como teoría cinética del plasma y en ocasiones su implementación puede resultar dificultosa. Una aproximación más simple se obtiene al estudiar el plasma como si se tratara de un fluido conductor, adaptando las ecuaciones de la dinámica de los fluidos para incluir los efectos de las fuerzas eléctricas y magnéticas. Este modelo se denomina Magnetohidrodinámica (MHD) y el mismo puede derivarse a partir de las ecuaciones de la teoría cinética.

Las ecuaciones de la MHD se obtienen al suponer inicialmente que el plasma está compuesto por dos fluidos, iones y electrones los cuales están acoplados a través de la transferencia de cantidad de movimiento debida a las colisiones entre partículas y las ecuaciones de

Maxwell:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0, \quad (2.7)$$

$$n_\alpha m_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \right) \mathbf{u}_\alpha = n_\alpha q_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B} \right) - \nabla \cdot \Pi - \nabla p_\alpha + \mathcal{C}, \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (n_e q_e + n_i q_i), \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 (n_e q_e \mathbf{u}_e + n_i q_i \mathbf{u}_i), \quad (2.10)$$

donde n_α , m_α , q_α , \mathbf{u}_α y p_α son la densidad de partículas, la masa, la carga eléctrica, la velocidad y la presión escalar de la especie α , respectivamente, con $\alpha = e, i$ (electrones e iones). Π es el tensor de tensiones en el cual los elementos fuera de la diagonal representan los efectos viscosos, \mathbf{E} es el campo eléctrico y \mathbf{B} el campo magnético, y la constante μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío. En la Ec. (2.8) el término \mathcal{C} describe las interacciones colisionales.

Combinando la densidad y velocidad de los iones y electrones surgen ecuaciones cuyas variables son la densidad de masa total ρ , la velocidad del centro de masa \mathbf{u} , la densidad de corriente eléctrica \mathbf{j} y la densidad de carga eléctrica ρ_c . Si se define entonces:

$$\rho = n_e m_e + n_i m_i, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u} = \frac{n_e m_e \mathbf{u}_e + n_i m_i \mathbf{u}_i}{n_e m_e + n_i m_i}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{j} = n_e q_e \mathbf{u}_e + n_i q_i \mathbf{u}_i = e (n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e), \quad (2.13)$$

$$\rho_c = n_e q_e + n_i q_i = e (n_i - n_e), \quad (2.14)$$

donde se ha considerado que los iones son partículas de carga eléctrica $+e$, estas ecuaciones junto a las Ecs. (2.7) a (2.10) conducen al siguiente conjunto de ecuaciones (Krall y Trivelpiece, 1973):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (2.16)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \cdot \Pi + \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla (\mathbf{u} \otimes \mathbf{j} + \mathbf{j} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rho_c) = \\ \frac{(n_e + n_i) e^2}{m_e + m_i} \mathbf{E} + \frac{e^2}{c} \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_i} \right) \frac{\rho}{m_e + m_i} \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \\ - \frac{e}{c} \left(\frac{m_e}{m_i} + \frac{m_i}{m_e} \right) \frac{1}{m_e + m_i} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{e}{m_e} \nabla \cdot \left(\frac{m_e}{m_i} \Pi_i - \Pi_e \right) + \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde, en la ecuación (2.17) se ha incorporado al tensor Π la presión electrónica p_e y la presión iónica p_i .

Las Ecs. (2.15) a (2.18) constituyen el conjunto de ecuaciones para fluido simple o mono fluido, donde la ecuación de cierre del sistema es la ecuación de estado del gas que relaciona la presión y la densidad. La Ec. (2.18) es llamada la Ley de Ohm generalizada, ya que relaciona la corriente \mathbf{j} con el campo eléctrico \mathbf{E} . El término de colisiones \mathcal{C} normalmente se estima mediante una aproximación lineal:

$$\mathcal{C} \approx \nu \mathbf{j}.$$

donde ν es un promedio de la frecuencia de colisiones, en base al cual pueden definirse la resistividad η y la conductividad σ :

$$\eta = \frac{\nu m_e}{n_e e^2}, \quad \sigma = \frac{1}{\eta} \quad (2.19)$$

de manera que la Ec. (2.18) produzca la Ley de Ohm $\mathbf{E} = \eta \mathbf{j}$ en el caso estacionario con $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ y presión uniforme.

A continuación se realiza una serie de simplificaciones e hipótesis que conducen a la forma final de las ecuaciones MHD que se utiliza habitualmente. Se debe tener en cuenta que las simplificaciones que se efectúan definen el rango de validez del modelo.

Cuasineutralidad $\rho_{ce} \approx \rho_{ci}$: la mayor simplificación se logra al asumir que la densidad de carga se anula. Esto conduce a que $n_e \approx n_i \equiv n$ ya que previamente se asumió que los iones son partículas de carga $+e$. Esta suposición exige que la escala de referencia debe cumplir $L \gg \lambda_D$, que es una de las restricciones dadas en la expresión (2.4). Otro resultado que se desprende de esta hipótesis se deduce de la Ec. (2.16), que arroja $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ cuando $\rho_c = 0$.

Masa del electrón despreciable $m_e \ll m_i$: una simplificación trivial es despreciar los términos $m_e/m_i \ll 1$. Por otro lado, esto lleva además a que, considerando la Ec. (2.11), la densidad de masa resulta $\rho = n_i m_i$

Efectos viscosos despreciables $\nabla \cdot \Pi_\alpha = \nabla p_\alpha$: esta hipótesis es estrictamente válida cuando la frecuencia de colisiones interpartículas es suficientemente grande, sin embargo, ha probado ser aplicable incluso en el estudio de plasmas casi no colisionales (Krall y Trivelpiece, 1973).

Pequeñas perturbaciones en la velocidad: si se considera un marco de referencia en el cual la velocidad no perturbada es nula, para perturbaciones suficientemente pequeñas es posible despreciar los términos cuadráticos en \mathbf{u} , simplificando de esa manera la Ley de Ohm generalizada, Ec. (2.18).

Velocidades del plasma no relativistas $V_0 \ll c$: esta suposición permite despreciar el término de la corriente de desplazamiento $(1/c^2)(\partial \mathbf{E}/\partial t)$ en la ecuación de Ampere. Esto implica suponer que los procesos estudiados son lentos quedando excluidas, por ejemplo, las ondas electromagnéticas que necesitan de este término para ser obtenidas. Con esta simplificación la densidad de corriente se obtiene únicamente en términos del campo magnético ($\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$).

Eliminación del término $\partial \mathbf{j}/\partial t$ en la Ley de Ohm generalizada: la posibilidad para realizar esta simplificación surge de la hipótesis de cuasi neutralidad, ya que según esta suposición se puede escribir

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \approx n e \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$$

y este término es pequeño cuando los electrones y los iones se desplazan en conjunto. Si además se considera la Ec. (2.10), un argumento dimensional permite despreciar $\partial \mathbf{j}/\partial t$ frente al término en \mathbf{E} para frecuencias mucho menores que la frecuencia de plasma ($\omega \ll \omega_{pe}$).

Eliminación de la presión electrónica: esta es una simplificación no trivial, la misma puede realizarse para el caso de plasmas fríos en escalas que cumplen $LV_0\Omega_e \gg \kappa(T_e/m_e)$, donde V_0 es una velocidad de referencia, T_e la temperatura electrónica y Ω_e la frecuencia de ciclotrón del electrón dada en la Ec. (2.6).

Resistividad despreciable $\eta = 0$: cuando se elimina el término resistivo se habla de MHD ideal. Esta simplificación permite reducir la expresión de la Ley de Ohm, siendo válida para números de Reynolds magnético suficientemente grandes ($R_M = \mu_0 L V_0 / \eta \gg 1$).

Con estas simplificaciones, considerando que la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética son uniformes, con las Ecs. (2.15) a (2.18) se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.20)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{m_i}{\mu_0 e} \nabla \times \left[\frac{1}{\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right], \quad (2.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.23)$$

que son las ecuaciones de la MHD-Hall ideal, cuyas ecuaciones de cierre son:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (2.24)$$

y la ecuación de estado del gas, que en general está dada por una ley politrópica del tipo

$$p \propto \rho^\gamma, \quad (2.25)$$

siendo γ el coeficiente politrópico.

El efecto Hall está asociado con el movimiento de ciclotrón de los iones, y resulta de considerar un radio de Larmor finito (Cramer, 2001). El mismo aparece explícitamente en el segundo término del miembro derecho de la Ec. (2.22). Teniendo en cuenta la expresión que define la frecuencia de ciclotrón iónica Ω_i , Ec. (2.6), la Ec. (2.22) puede escribirse como:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{B}{\mu_0 \Omega_i} \nabla \times \left[\frac{1}{\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right]. \quad (2.26)$$

donde $B = |\mathbf{B}|$ es el módulo del campo magnético.

En la Ec. (2.26) puede observarse que el término de Hall es de orden B/Ω_i . Por otro lado, si se introduce la llamada longitud inercial iónica del plasma dada por la relación entre la velocidad de la luz c y la frecuencia iónica del plasma ω_{pi} :

$$l_i = \frac{c}{\omega_{pi}} = \left(\frac{m_i}{\mu_0 n e^2} \right)^{1/2}, \quad (2.27)$$

donde fue utilizada la relación $c^2 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1}$, se deduce que el término de Hall también es proporcional a l_i^2 . De este modo, si se consideran frecuencias ω y escalas de longitud L tales que $\omega/\Omega_i \ll 1$ y $(l_i/L)^2 \ll 1$, el término de Hall no es importante y puede despreciarse en la Ec. (2.22), dando lugar a las ecuaciones MHD habituales. Por el contrario, si $\omega \approx \Omega_i$ o $L \approx l_i$, el efecto Hall adquiere importancia y por lo tanto debe utilizarse el modelo MHD-Hall.

Sin tener en cuenta el término de difusión magnética ($\eta = 0$), la ley de Ohm generalizada que interviene en el modelo MHD-Hall también puede escribirse como:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{m_i}{\rho e} \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (2.28)$$

En el miembro de la derecha de la Ec. (2.28), el primer término está presente en el modelo MHD ordinario, mientras que el segundo corresponde al efecto Hall.

2.3. Ondas en el Modelo MHD

En esta sección se presentan los distintos tipos de ondas que se propagan al considerar el modelo MHD ideal, ya que un primer desarrollo sin tener en cuenta el efecto Hall permitirá más adelante visualizar con mayor claridad las consecuencias de considerar una frecuencia de ciclotrón finita. Tomando las Ecs. (2.20) a (2.22) sin tener en cuenta el término de Hall, se realizan las siguientes sustituciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_1, \\ \rho &= \rho_0 + \rho_1, \\ p &= p_0 + p_1,\end{aligned}\tag{2.29}$$

donde las cantidades con subíndice 1 representan perturbaciones de los valores de equilibrio indicados con subíndice 0. Se desprende de la expresión de \mathbf{u} que se considera un marco de referencia en el cual $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, además se asume un equilibrio uniforme con $\rho_0 = \text{cte}$. $\mathbf{B}_0 = \text{cte}$ y $p_0 = \text{cte}$.

Introduciendo estas expresiones en las ecuaciones de la MHD y considerando únicamente los términos de primer orden se obtiene:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0,\tag{2.30}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0,\tag{2.31}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0),\tag{2.32}$$

$$p_1 = c_s^2 \rho_1,\tag{2.33}$$

siendo c_s la velocidad del sonido dada por

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}.\tag{2.34}$$

Se proponen soluciones de onda plana de la forma

$$f = \hat{f} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)},\tag{2.35}$$

donde f representa una de las cantidades perturbadas, \mathbf{k} es el vector de onda y ω la frecuencia de la oscilación. Utilizando las siguientes identidades vectoriales

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c},$$

las Ecs. (2.30) a (2.33) pueden expresarse como:

$$-\omega \hat{\rho} + \rho_0 \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0,\tag{2.36}$$

$$-\rho_0 \omega \hat{\mathbf{u}} = -\mathbf{k} \hat{p} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \hat{\mathbf{B}} - \frac{1}{\mu_0} (\hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{k},\tag{2.37}$$

$$-\omega \hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \hat{\mathbf{u}} - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{B}_0,\tag{2.38}$$

$$\hat{p} = c_s^2 \hat{\rho}.\tag{2.39}$$

Reemplazando $\hat{\rho}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ en la Ec. (2.37) por las igualdades dadas por las Ecs. (2.36) y (2.38), respectivamente, y teniendo en cuenta la Ec. (2.39) se obtiene una expresión para la variable

$\hat{\mathbf{u}}$ (Schwartz et al., 2004):

$$\begin{aligned} -\rho_0\omega^2\hat{\mathbf{u}} = & -\rho_0c_s^2(\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{u}})\mathbf{k} - \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)\hat{\mathbf{u}} - (\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{u}})\mathbf{B}_0] + \\ & + \frac{1}{\mu_0}[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_0)(\mathbf{B}_0\cdot\hat{\mathbf{u}})\mathbf{k} - (\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{u}})B_0^2\mathbf{k}]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

La Ec. (2.40) puede escribirse como $[\mathbf{A}]\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, donde $[\mathbf{A}]$ es una matriz función de \mathbf{k} , ω , \mathbf{B}_0 y ρ_0 . Para que exista una solución no trivial de este sistema debe cumplirse que el determinante de la matriz de coeficientes sea nulo ($\det[\mathbf{A}] = 0$). La ecuación que resulta de esta condición entrega una relación entre el vector de onda \mathbf{k} y la frecuencia ω que se conoce como relación de dispersión.

Para el siguiente análisis se considera que el campo magnético de equilibrio es paralelo a la dirección z , es decir, $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{e}}_z$.

2.3.1. Propagación Paralela $\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{k}$

Considerando el caso de ondas que se propagan paralelas al campo magnético ambiente \mathbf{B}_0 alineado con el eje z , al tener en cuenta únicamente las componentes en esa dirección, la Ec. (2.40) resulta:

$$\omega^2\hat{u}_z = k^2c_s^2\hat{u}_z. \quad (2.41)$$

Esta expresión indica que para $\hat{u}_z \neq 0$ se cumple $\omega^2 = c_s^2k^2$, que es la relación de dispersión para ondas sónicas. Se observa además que estas ondas son longitudinales con una velocidad de fase

$$\frac{\omega}{k} = \pm c_s. \quad (2.42)$$

Si ahora se considera la componente transversal al campo de la Ec. (2.40)

$$-\rho_0\omega^2\hat{\mathbf{u}}_{\perp} = \frac{k^2B_0^2}{\mu_0}\hat{\mathbf{u}}_{\perp}, \quad (2.43)$$

resulta que para $\hat{\mathbf{u}}_{\perp} \neq \mathbf{0}$ la relación de dispersión es

$$\frac{\omega}{k} = \pm V_A. \quad (2.44)$$

donde

$$V_A = \frac{B_0}{(\rho_0\mu_0)^{1/2}} \quad (2.45)$$

es la llamada velocidad de Alfvén.

La Ec. (2.44) es la relación de dispersión para las ondas de Alfvén. La perturbación $\hat{\mathbf{u}}$ es perpendicular a \mathbf{k} y \mathbf{B}_0 y por ello la onda se denomina transversal o de corte. Por otro lado, de la Ec. (2.38) resulta

$$\hat{\mathbf{B}} = -\frac{kB_0}{\omega}\hat{\mathbf{u}}_{\perp}, \quad (2.46)$$

lo que indica que la perturbación del campo magnético es paralela a la de la velocidad. En cuanto a la densidad y la presión, las Ecs. (2.36) y (2.39) muestran que $\hat{\rho} = \hat{p} = 0$, es decir, no existe compresión del plasma y las ondas de Alfvén son esencialmente magnéticas.

2.3.2. Propagación perpendicular $\mathbf{B}_0 \perp \mathbf{k}$

Considerando ahora un vector de onda \mathbf{k} perpendicular al campo magnético \mathbf{B}_0 , la Ec. (2.40) indica que $\hat{u}_z = 0$, mientras que la componente perpendicular es:

$$-\rho_0 \omega^2 \hat{\mathbf{u}}_{\perp} = -\rho c_s^2 (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\perp}) \mathbf{k} - \frac{B_0^2}{\mu_0} (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\perp}) \mathbf{k} \quad (2.47)$$

De la Ec. (2.47) se deduce que $\hat{\mathbf{u}}_{\perp}$ es paralela a la dirección de la propagación \mathbf{k} y entonces, para la solución no trivial se obtiene la relación de dispersión

$$\omega^2 = k^2 (c_s^2 + V_A^2) \quad (2.48)$$

la cual corresponde al modo denominado magnetosónico rápido, ya que según se observa en las Ecs. (2.36), (2.38) y (2.39), tanto ρ , \mathbf{B} como p muestran variación ($\hat{\rho} \neq 0$, $\hat{\mathbf{B}} \neq \mathbf{0}$ y $\hat{p} \neq 0$).

2.3.3. Caso general $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k} = B_0 k \cos \theta$

En el caso general donde el vector de onda es oblicuo al campo magnético, siendo θ el ángulo entre ambos, existen tres modos de ondas, esencialmente porque hay tres fuerzas restituyentes: tensión magnética, presión magnética y presión cinética (Pécsele, 2007). Sin pérdida de generalidad se escoge un sistema de referencia donde el campo magnético sin perturbar es paralelo al eje z , es decir $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$, con lo cual la Ec. (2.40) resulta:

$$(\omega^2 - V_A^2 k^2 \cos^2 \theta) \hat{\mathbf{u}} + V_A^2 k \cos \theta (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{e}}_z + \left[(c_s^2 + V_A^2) (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) - V_A^2 k \cos \theta (\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{u}}) \right] \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (2.49)$$

Multiplicando escalarmente la ecuación anterior por \mathbf{k} y $\hat{\mathbf{e}}_z$ se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} [\omega^2 - k^2 (c_s^2 + V_A^2)] (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) + V_A^2 k^3 \cos^2 \theta (\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{u}}) = 0 \\ \omega^2 (\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{u}}) - c_s^2 k \cos \theta (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

La solución trivial de este sistema da como resultado el modo de Alfvén, mientras que anulando el determinante de la matriz de coeficientes aparecen los llamados modos magnetosónicos:

Alfvén:

$$\omega^2 = V_A^2 k^2 \cos^2 \theta = V_A^2 k_z^2 \quad (2.51)$$

Magnetosónico rápido:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{2} \left\{ V_A^2 + c_s^2 + \left[(V_A^2 + c_s^2)^2 - 4V_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2} \right\} \quad (2.52)$$

Magnetosónico lento:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{2} \left\{ V_A^2 + c_s^2 - \left[(V_A^2 + c_s^2)^2 - 4V_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2} \right\} \quad (2.53)$$

Se observa que la velocidad de fase es independiente de la frecuencia y del vector de onda para todos los casos, por lo tanto ninguno de ellos es dispersivo, aunque la dependencia con el ángulo de propagación θ evidencia la anisotropía de la propagación.

2.4. Ondas en el Modelo MHD-Hall

Como se vio en la sección anterior, las ondas presentes en el modelo MHD sin efecto Hall no son dispersivas, sin embargo, cuando este término es incorporado, si bien los modos de Alfvén y magnetosónicos aún pueden diferenciarse, se produce un acoplamiento entre ellos y los mismos se hacen dispersivos. Considerando el término del efecto Hall en la Ec. (2.22), la Ec. (2.32) resulta

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) - \frac{1}{\Omega_i} \frac{B_0}{\mu_0 \rho_0} \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0]. \quad (2.54)$$

El segundo término del miembro derecho de la ecuación anterior representa el efecto Hall. Considerando soluciones de onda plana como la propuesta en la Ec. (2.35), la ecuación anterior resulta:

$$-\omega \hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \hat{\mathbf{u}} - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{B}_0 - \frac{i}{\Omega_i} \frac{B_0}{\rho_0 \mu_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{B}}), \quad (2.55)$$

Teniendo en cuenta la definición de la velocidad de Alfvén, Ec. (2.45), y considerando nuevamente un sistema de referencia donde el campo magnético de equilibrio está alineado con el eje z , al combinar las Ecs. (2.36), (2.37) y (2.55) es posible determinar la relación de dispersión del modelo MHD-Hall (Brodin y Stenflo, 1990; Stringer, 1963):

$$(\omega^2 - V_A^2 k_z^2) [\omega^2 (\omega^2 - c_s^2 k^2) - V_A^2 k^2 (\omega^2 - c_s^2 k_z^2)] = \left(\frac{\omega}{\Omega_i}\right)^2 V_A^4 k_z^2 k^2 (\omega^2 - c_s^2 k^2) \quad (2.56)$$

El término del miembro derecho de la Ec. (2.56) surge del término de Hall, y acopla la relación de dispersión del modo de Alfvén (primer factor del miembro izquierdo) con las relaciones de los modos magnetosónicos (segundo factor). Para el caso de propagación paralela (o casi paralela), ocurre la degeneración de los modos, el modo de Alfvén se desacopla de los modos magnetosónicos, y experimenta una resonancia a la frecuencia de ciclotrón iónica. Para $\theta = 0$ ($k_z = k$) la Ec. (2.56) resulta:

$$(\omega^2 - V_A^2 k^2) = \mp \frac{\omega}{\Omega_i} V_A^2 k^2, \quad (2.57)$$

donde el signo superior corresponde a ondas polarizadas a izquierda y el inferior a derecha. Reescribiendo la Ec. (2.57) se obtiene:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{V_A^2 \left(1 \mp \frac{\omega}{\Omega_i}\right)}, \quad (2.58)$$

donde queda explicitada la resonancia cuando $\omega = \Omega_i$ para ondas polarizadas a izquierda. Esta resonancia se denomina resonancia de ciclotrón iónica. Por el contrario, las ondas con polarización derecha atraviesan la frecuencia de ciclotrón iónica sin experimentar resonancia, terminando en la bifurcación de whistler cuando las frecuencias se hacen tan grandes que el aporte de la inercia de los electrones resulta importante (Pécsele, 2007).

2.5. Ondas No Lineales

En un plasma con densidad uniforme y con un campo magnético ambiente también uniforme, se ha encontrado que ondas de Alfvén no lineales pueden propagarse paralelamente a la dirección del campo, siempre que las no linealidades estén balanceadas por un término

dispersivo en las ecuaciones de onda (Mjølhus, 1976; Sakai y Sonnerup, 1983; Spangler et al., 1985). El término dispersivo se debe al efecto de la frecuencia de ciclotrón iónica finita, a veces referido como el efecto de la inercia de los iones, que surge explícitamente del término de Hall en la Ley de Ohm generalizada, Ec. (2.22). En este caso, las ondas no lineales son circularmente polarizadas y las ondas del campo magnético satisfacen la Ecuación Derivada No lineal de Schrödinger (DNLS).

En el caso de propagación paralela, las soluciones de la ecuación DNLS han sido útiles para la descripción de la turbulencia en el modelo MHD del viento solar (Ghosh y Papadopoulos, 1987; Spangler y Sheerin, 1982). Por otro lado, para propagación a ángulos suficientemente grandes del campo magnético base, las ondas MHD rápida y lenta obedecen a la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) y el modo de Alfvén a la ecuación KdV modificada (MKdV) (Cramer, 2001), aunque para propagación oblicua en una dimensión con $\beta > 1$ la DNLS muestra ser válida para el caso de plasmas colisionales (Ruderman, 2002).

A continuación se procede a establecer la ecuación diferencial no lineal para propagación paralela o casi paralela de ondas de Alfvén considerando primeramente baja frecuencia ($\omega \ll \Omega_i$) y luego alta frecuencia ($\omega \lesssim \Omega_i$). Para este desarrollo se toman las ecuaciones del modelo MHD-Hall, Ecs. (2.20)–(2.22), normalizando la densidad ρ y el campo magnético \mathbf{B} por los valores de referencia ρ_0 y B_0 :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.59)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla p + V_A^2 (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{V_A^2}{\Omega_i} \nabla \times \left[\frac{1}{\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right]. \quad (2.61)$$

2.5.1. Baja frecuencia $\omega \ll \Omega_i$

En este análisis se considera propagación unidimensional en la dirección del eje z . La escala de tiempo de los fenómenos de interés es mucho mayor que el período de ciclotrón de los iones y entonces el término de Hall en la Ec. (2.61), proporcional a $1/\Omega_i$ puede despreciarse, por lo tanto esta solución corresponde al modelo MHD convencional. El campo magnético ambiente se asume constante y alineado con la dirección z , y se toma un marco de referencia tal que $u_z = 0$, lo que implica que $\partial \rho / \partial t = 0$ según la Ec. (2.59). Además se considera que ρ es constante en la dirección z y entonces también lo es la presión p .

Con las condiciones anteriores la Ec. (2.60) resulta:

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} [p + V_A^2 (B_x^2 + B_y^2)], \quad (2.62)$$

por lo tanto el cuadrado del módulo del campo magnético transversal $\mathbf{B}_\perp = (B_x, B_y)$ es constante:

$$|\mathbf{B}_\perp|^2 = B_x^2 + B_y^2 = \text{cte.} \quad (2.63)$$

De las Ecs. (2.60) y (2.61), teniendo en cuenta la Ec. (2.45), resulta la siguiente expresión para las componentes transversales del campo magnético:

$$\frac{\partial^2 B_{x,y}}{\partial t^2} = V_A^2 \frac{\partial^2 B_{x,y}}{\partial z^2}, \quad (2.64)$$

donde se ha establecido $B_0 = 1$ y $\rho_0 = 1$. Una solución para las Ecs. (2.63) y (2.64) es:

$$\begin{aligned} B_x &= B_A \cos [k(z - V_A t) - \psi], \\ B_y &= \pm B_A \sin [k(z - V_A t) - \psi], \end{aligned} \quad (2.65)$$

donde B_A es una amplitud real constante, k es un número de onda arbitrario y ψ es un ángulo de fase. El signo superior (inferior) en la ecuación de B_y corresponde a ondas polarizadas a izquierda (derecha).

La Ec. (2.65) indica que una onda incompresible circularmente polarizada, de cualquier sentido de polarización y amplitud arbitraria, es una solución exacta de la ecuación no lineal (2.64), siempre que la frecuencia sea mucho menor que la frecuencia de ciclotrón iónica (Sagdeev y Galeev, 1969). El campo magnético transversal y la velocidad del plasma para esta onda se relacionan por:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{B}_\perp}{(\mu_0 \rho)^{1/2}}, \quad (2.66)$$

independientemente del tamaño de la amplitud de la onda.

Debe notarse que en el modelo MHD, si se tratara de construir una onda de Alfvén no lineal de propagación paralela linealmente polarizada, por combinación de las soluciones polarizadas opuestamente, Ecs. (2.65), resulta que B_\perp^2 ya no es constante, por lo tanto u_z y ρ , según las Ecs. (2.59) y (2.62), tampoco lo son. Esto implica que una solución simple linealmente polarizada de la ecuación no lineal no es una solución exacta posible, sin embargo en ocasiones podría ser utilizada como una aproximación (Hollweg, 1971).

2.5.2. Alta frecuencia $\omega \lesssim \Omega_i$

Fluctuaciones de larga amplitud de la MHD fueron detectadas en la magnetósfera de la Tierra, con períodos de onda del orden del período de ciclotrón del protón local (Tsurutani et al., 1985). Otro caso similar es el de ondas de larga amplitud que se observaron acompañando al viento solar (Smith et al., 1995). Este tipo de situaciones evidencia que en ocasiones el efecto de la frecuencia de ciclotrón finita de los iones debe ser tenido en cuenta para la descripción de algunos fenómenos de interés.

Considerando el término del efecto Hall en las Ecs. (2.59) a (2.61) se encuentra que la onda circularmente polarizada dada en las Ecs. (2.65) ya no es una solución exacta del problema. Tomando nuevamente la propagación de la onda únicamente en la dirección z y asumiendo que las ondas son circularmente polarizadas, se define el campo magnético transversal complejo como:

$$b = B_x \pm i B_y, \quad (2.67)$$

donde el signo superior (inferior) corresponde a ondas polarizadas a izquierda (derecha), similarmente al caso de la expresión de B_y en las Ecs. (2.65).

Notando que B_z es otra vez constante, de las Ecs. (2.60) y (2.61) se obtiene (Ovenden et al., 1983)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V_A^2}{\rho} \frac{\partial b}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[u_z \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (u_z b) \right) + \frac{\partial}{\partial t} (u_z b) \right] + \\ \pm i \frac{V_A^2}{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial b}{\partial z} \right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial b}{\partial z} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Para una ecuación de estado $p \propto \rho$ con movimiento isotérmico, las Ecs. (2.59) y (2.61) resultan (Cramer, 2001):

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{V_A^2}{2} |b|^2 + \rho u_z^2 \right), \quad (2.69)$$

siendo c_s la velocidad del sonido dada en (2.34).

Las Ecs. (2.68) y (2.69) conforman el conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales que describen la evolución del campo magnético cuando se consideran frecuencias del orden de la frecuencia de ciclotrón iónica.

2.5.3. Derivación de la Ecuación DNLS

A diferencia de lo realizado en las secciones anteriores, el conjunto de ecuaciones de la MHD-Hall, Ecs. (2.59)–(2.61), puede reducirse a una simple ecuación no lineal la cual tiene soluciones conocidas, siempre que el término de Hall sea relativamente pequeño, esto es, que la frecuencia sea una fracción no nula de la frecuencia de ciclotrón iónica. Para el desarrollo es necesario definir un nuevo conjunto de coordenadas, utilizando un parámetro que cuantifica la importancia de los términos dispersivos:

$$\varepsilon = \frac{V_A}{\Omega_i} k = l_i k, \quad (2.70)$$

siendo l_i la longitud inercial de los iones dada en la Ec. (2.27) y k el número de onda paralelo a la dirección z .

Un tiempo característico es el período de ciclotrón iónico Ω_i^{-1} , por lo tanto la frecuencia en esta escala de tiempo es de orden ε , al igual que el término de Hall en la Ec. (2.61), entonces una ecuación diferencial no lineal en derivadas parciales con soluciones del tipo solitón puede obtenerse exigiendo que los términos no lineales sean también de orden ε .

Para el caso de propagación paralela al campo magnético ambiente alineado con la dirección z , en un marco de referencia que se mueve a la velocidad de propagación (velocidad de Alfvén), la onda es estacionaria para orden ε , y la dispersión produce un cambio en la frecuencia de orden ε^2 . Partiendo de la relación de dispersión para propagación paralela de ondas de Alfvén lineales que del modelo MHD, Ec. (2.44), si se suma un término de dispersión debido al efecto Hall se encuentra una relación de dispersión no lineal de la forma (Medvedev, 1999):

$$\omega = kV_A \left(1 \pm \frac{1}{2\Omega_i} kV_A \right) = V_A k \pm \frac{V_A^2}{2\Omega_i} k^2, \quad (2.71)$$

que es la relación de dispersión para propagación paralela (o casi paralela) de ondas de Alfvén no lineales, entonces, de acuerdo a la Ec. (2.70)

$$\frac{\omega}{\Omega_i} \sim \varepsilon \pm \frac{1}{2}\varepsilon^2 \quad (2.72)$$

La Ec. (2.72) indica que una coordenada de tiempo adecuada debería ser de orden ε^2 , por lo tanto se define $\tau = \varepsilon^2 t$. Por otro lado, en el marco de referencia que se mueve a velocidad de Alfvén V_A , el número de onda k es de orden ε , que resulta en una coordenada espacial $\xi = \varepsilon(z - V_A t)$.

Se asume que las perturbaciones de los campos se deben principalmente a fluctuaciones alfvénicas, con variaciones de densidad del plasma y velocidad paralela a la dirección del campo más pequeñas que las variaciones del campo magnético y velocidad transversales. Tomando $\rho_0 = 1$, las variables son expandidas en series de potencias de ε de la siguiente forma (Mio et al., 1976):

$$\begin{aligned} \rho &= 1 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \dots, \\ B_x &= \varepsilon^{1/2} B_{x1} + \varepsilon^{3/2} B_{x2} + \dots, \\ B_y &= \varepsilon^{1/2} B_{y1} + \varepsilon^{3/2} B_{y2} + \dots, \\ u_z &= \varepsilon u_{z1} + \varepsilon^2 u_{z2} + \dots, \\ u_x &= \varepsilon^{1/2} u_{x1} + \varepsilon^{3/2} u_{x2} + \dots, \\ u_y &= \varepsilon^{1/2} u_{y1} + \varepsilon^{3/2} u_{y2} + \dots \end{aligned} \quad (2.73)$$

Con estas definiciones, utilizando el campo magnético complejo b definido en la Ec. (2.67), la Ec. (2.69) de orden ε queda:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho_1 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{V_A^2}{2} |b|^2 \right), \quad (2.74)$$

la cual indica que las perturbaciones de la densidad están conducidas por la fuerza debida al gradiente de presión magnética transversal (fuerza ponderomotiva).

Reemplazando las Ecs. (2.73) en las ecuaciones de la MHD-Hall (2.59)–(2.61), utilizando las variables τ y ξ definidas anteriormente, y considerando los términos del mismo orden en ε , se obtienen las siguientes ecuaciones (Cramer, 2001):

$$\begin{aligned} -V_A \frac{\partial B_{x1}}{\partial \xi} &= \frac{\partial u_{x1}}{\partial \xi}, \\ -V_A \frac{\partial B_{y1}}{\partial \xi} &= \frac{\partial u_{y1}}{\partial \xi}, \\ -V_A \frac{\partial u_{z1}}{\partial \xi} &= -c_s^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \frac{V_A^2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (B_{x1}^2 + B_{y1}^2), \\ V_A \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} &= \frac{\partial u_{z1}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Las ecuaciones correspondientes al siguiente orden en ε son:

$$\begin{aligned} -V_A \frac{\partial u_{x2}}{\partial \xi} - V_A^2 \frac{\partial B_{x2}}{\partial \xi} &= - \left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial \tau} + u_{z1} \frac{\partial u_{x1}}{\partial \xi} \right) + V_A \rho_1 \frac{\partial u_{x1}}{\partial \xi}, \\ -V_A \frac{\partial u_{y2}}{\partial \xi} - V_A^2 \frac{\partial B_{y2}}{\partial \xi} &= - \left(\frac{\partial u_{y1}}{\partial \tau} + u_{z1} \frac{\partial u_{y1}}{\partial \xi} \right) + V_A \rho_1 \frac{\partial u_{y1}}{\partial \xi}, \\ -V_A \frac{\partial B_{x2}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{x2}}{\partial \xi} &= - \frac{\partial B_{x1}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} (u_{z1} B_{x1}) - \frac{V_A}{\Omega_i} \frac{\partial^2 u_{y1}}{\partial \xi^2}, \\ -V_A \frac{\partial B_{y2}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{y2}}{\partial \xi} &= - \frac{\partial B_{y1}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} (u_{z1} B_{y1}) - \frac{V_A}{\Omega_i} \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

A diferencia de un factor $1/V_A$, la primera y la segunda ecuación de las Ecs. (2.76) son iguales a la tercera y la cuarta, respectivamente, lo cual resulta en las siguientes expresiones para los campos de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{x1}}{\partial \tau} + \frac{V_A}{4(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial \xi} [B_{x1} (B_{x1}^2 + B_{y1}^2)] - \frac{V_A^2}{2\Omega_i} \frac{\partial^2 B_{y1}}{\partial \xi^2} &= 0, \\ \frac{\partial B_{y1}}{\partial \tau} + \frac{V_A}{4(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial \xi} [B_{y1} (B_{x1}^2 + B_{y1}^2)] - \frac{V_A^2}{2\Omega_i} \frac{\partial^2 B_{x1}}{\partial \xi^2} &= 0, \end{aligned} \quad (2.77)$$

donde

$$\beta = \frac{c_s^2}{V_A^2} = \frac{2\mu_0 p_0}{B_0^2}, \quad (2.78)$$

es el llamado parámetro β , el cual indica la relación entre la presión del gas y la presión magnética del plasma. Cuando $\beta < 1$ la presión magnética es mayor que la presión cinética y por lo tanto la dinámica es gobernada por el campo magnético, caso contrario, cuando $\beta > 1$ la presión del gas es mayor y por lo tanto la dinámica es dominada por el fluido.

Cambiando a las coordenadas originales t y z , y teniendo en cuenta que

$$\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + V_A \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (2.79)$$

se obtiene la siguiente ecuación, donde nuevamente se ha utilizado la variable b definida en la Ec. (2.67)

$$\frac{\partial b}{\partial t} + V_A \frac{\partial b}{\partial z} \pm i \frac{V_A^2}{2\Omega_i} \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \frac{V_A}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_1 b) = 0 \quad (2.80)$$

Si se desprecia el último término de la Ec. (2.80), los tres primeros términos dan la relación de dispersión (2.71). De las Ecs. (2.75), la perturbación de la densidad forzada por la presión del campo magnético transversal es:

$$\rho_1 = \frac{1}{2(1-\beta)} |b|^2 + \text{cte.} \quad (2.81)$$

Si ahora se desprecia el tercer término de la Ec. (2.80) (término dispersivo), una solución de las Ecs. (2.80) y (2.81) resulta:

$$|b|^2 = \text{cte}, \quad \rho_1 = 0, \quad (2.82)$$

que representa una onda plana circularmente polarizada, transversal de amplitud constante de extensión infinita, como en la solución obtenida para el caso de $\omega \ll \Omega_i$ de la sección 2.5.1. Obviamente, cuando se incluye el término dispersivo, la solución dada por la Ec. (2.82) ya no es válida.

Considerando la Ec. (2.81) con $\text{cte} = 0$, la Ec. (2.80) resulta:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + V_A \frac{\partial b}{\partial z} + \frac{V_A}{4(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) \pm i \frac{V_A^2}{2\Omega_i} \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = 0 \quad (2.83)$$

donde $b = (B_x \pm iB_y) / B_0$ es el campo magnético transversal complejo adimensionalizado, ya que para la derivación de esta ecuación se utilizaron las ecuaciones MHD-Hall normalizadas por los valores de referencia B_0 y ρ_0 .

La Ec. (2.83) es la llamada Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger, DNLS por sus siglas en inglés (Derivative Nonlinear Schrödinger Equation). Esta ecuación es el punto de partida de la investigación llevada a cabo en este trabajo. En la sección siguiente se detallan los aspectos más importantes referidos a la DNLS.

2.6. La Ecuación DNLS

En las secciones anteriores se realizó una revisión de los conceptos preliminares referidos a la física de plasmas para posteriormente arribar a la Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger (DNLS), Ec. (2.83). De acuerdo a lo desarrollado, esta ecuación permite describir la propagación paralela o casi paralela al campo magnético ambiente alineado con el eje z de ondas de Alfvén no lineales de amplitud finita circularmente polarizadas.

La ecuación DNLS ha sido derivada por distintos autores utilizando técnicas y condiciones diferentes. En primer término fue Rogister (1971) quien utilizando las ecuaciones de Vlasov encontró que para el caso de propagación paralela o casi paralela, en lugar de dos ecuaciones separadas (KdV y MKdV) para los dos modos, se obtienen dos ecuaciones acopladas que se pueden expresar mediante una sola ecuación (la DNLS) cuando se emplea variable compleja. Posteriormente Mio et al. (1976) y Mjølhus (1976) arribaron a esta ecuación partiendo de las ecuaciones MHD-Hall para $\beta = 0$, mientras que Spangler y Sheerin (1982) y Sakai y Sommerup (1983) lo hicieron para $\beta > 0$. Además de éstos, existen otros autores que alcanzaron la misma solución (Baccelli et al., 1992; Medvedev, 1999).

En general, es conveniente expresar la Ec. (2.83) de una forma adimensional para lo cual se establecen variables adimensionales. En el caso del campo magnético transversal b la

adimensionalización ya está implícita en la ecuación ya que para su derivación se utilizó el campo normalizado por el valor de referencia B_0 , aunque en este caso se incorpora además un factor $1/2$:

$$b = \frac{B_x \pm iB_y}{2B_0}. \quad (2.84)$$

Con respecto al tiempo t y a la coordenada espacial z , se realizan las siguientes adimensionalizaciones:

$$2\Omega_i t \rightarrow t, \quad \frac{2\Omega_i}{V_A} z \rightarrow z, \quad (2.85)$$

donde, como en lo visto hasta el momento, B_0 es el campo magnético no perturbado, Ω_i es la frecuencia de ciclotrón iónica y V_A la velocidad de Alfvén. De acuerdo a estas definiciones, la Ec. (2.83) resulta:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial z} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) \pm i \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = 0 \quad (2.86)$$

siendo

$$\alpha = \frac{1}{1 - \beta}. \quad (2.87)$$

En el caso de plasmas fríos ($\beta \rightarrow 0$), α no puede ser negativo y puede asumirse $\alpha = 1$, en cambio, en plasmas calientes el término no lineal puede cambiar de signo, lo cual trae importantes consecuencias en cuanto a la estabilidad de algunas soluciones, sin embargo, si se utiliza teoría cinética, el coeficiente α se hace negativo únicamente cuando la temperatura electrónica es mucho mayor que la iónica, permaneciendo positivo para la mayor parte de los casos de interés (Mjølhus y Wyller, 1986, 1988).

La Ec. (2.86) corresponde al caso no difusivo, ya que para su derivación se asumió inicialmente $\eta = 0$ en la ecuación de la Ley de Ohm generalizada del modelo MHD-Hall (ver sección 2.2). Cuando se consideran efectos difusivos, es posible modelar el amortiguamiento o excitación mediante un operador lineal apropiado (Russell y Ott, 1981) y la ecuación DNLS se escribe como:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial z} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) \pm i \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \hat{\gamma} b = 0 \quad (2.88)$$

donde $\hat{\gamma}$ es el operador lineal de amortiguamiento o excitación mencionado. En adelante se hace referencia a esta ecuación como la DNLS difusiva.

El término lineal $\partial b/\partial z$ presente tanto en la Ec. (2.86) como en la (2.88), se debe a que el marco de referencia utilizado son ejes laboratorio. Si en cambio se utiliza un sistema de coordenadas que se mueve con velocidad de Alfvén en la dirección z este término desaparece sin incidir sobre la solución (Spangler y Sheerin, 1982). Por otro lado, hay que recordar que de acuerdo a la definición realizada en la Ec. (2.67), el signo superior en el término dispersivo corresponde a ondas con polarización izquierda, mientras que el inferior a polarización derecha.

2.6.1. Resultados previos de la DNLS

La característica que hace atractiva a la ecuación DNLS es la gran cantidad de soluciones exactas que se conocen (Belashov y Vladimirov, 2005). Además esta ecuación ha sido estudiada por tres técnicas alternativas: búsqueda de soluciones exactas (Mjølhus y Hada, 1997), integración numérica (Dawson y Fontan, 1988; Spangler et al., 1985), y reducción a

un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante dos procedimientos: suponiendo ondas viajeras estacionarias (Hada et al., 1990) y utilizando un número finito de modos (Elaskar et al., 2006; Sánchez-Arriaga et al., 2007; Sanmartín et al., 2004). A continuación se presentan los detalles más importantes acerca de cada una de estas técnicas.

2.6.1.1. Soluciones exactas

La ecuación DNLS, al igual que otras ecuaciones, tiene la propiedad de lo que usualmente se denomina invarianza del campo lejano, la cual es una invarianza de escala que establece que si $b(z, t)$ es solución de la ecuación, entonces

$$b_\varepsilon(z, t) = \varepsilon^{1/2} b(\varepsilon z, \varepsilon^2 t) \quad (2.89)$$

es también solución. A continuación se enumeran las soluciones exactas tomando como referencia el trabajo de Mjolhus y Hada (1997).

1. Ondas polarizadas circularmente

$$\begin{aligned} b &= A_0 e^{i(kz - \omega t)}, \\ \omega &= \alpha A_0 k - k^2. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Estas soluciones dependen del número de onda k y de la amplitud A_0 . El sentido de polarización está dado por el signo de k : izquierda para $k > 0$ y derecha para $k < 0$. Mediante un análisis de estabilidad es posible deducir que es inestable cuando

$$\alpha A_0 < 2k$$

2. Trenes periódicos de ondas oblicuas: si se asumen ondas viajeras estacionarias $\chi = z - Vt$ y se integra la ecuación ordinaria resultante, puede obtenerse la extensión a propagación oblicua de la solución anterior. Realizando estas operaciones el campo magnético viene dado por la siguiente ecuación algebraica:

$$-(bC_0^* + b^*C_0) + V|b|^2 = H_0. \quad (2.91)$$

Esta ecuación está en función de los parámetros V , C_0 y H_0 , los cuales están relacionados con la velocidad, la amplitud y la oblicuidad de la propagación. El análisis de estabilidad de esta solución muestra que, frente a modulación paralela, todas las soluciones polarizadas a derecha son estables mientras que la mayor parte de las polarizadas a izquierda son inestables.

3. Solitones de un parámetro: la solución expuesta previamente engloba dos familias uniparamétricas de solitones a las que se llama solitón brillante (polarización izquierda) y solitón oscuro (polarización derecha). Las expresiones analíticas pueden darse en forma modulacional o como expresiones racionales de funciones exponenciales.
4. Solitones de dos parámetros: las soluciones de solitones dependientes de dos parámetros también son admitidas por la ecuación DNLS, tanto en propagación paralela como oblicua. Las expresiones correspondientes pueden encontrarse en los trabajos de Kaup y Newell (1978), Mjolhus y Wyller (1986) y Mjolhus (1989).
5. Modulación sobre un estado circularmente polarizado: en el caso de que el estado en el infinito consista en un campo magnético circularmente polarizado, aparece una nueva colección de soluciones exactas, sin embargo las mismas no tienen gran interés físico ya que se trata de una condición de contorno muy particular.

Luego del desarrollo de la teoría para propagación paralela de [Kaup y Newell \(1978\)](#), otros autores han extendido el estudio para propagación oblicua ([Kawata y Inoue, 1978](#)), ondas circularmente polarizadas en el infinito ([Kawata et al., 1980](#)) y con condiciones de contorno periódicas ([Prikrpatskii, 1981](#)).

Los métodos IST (inverse scattering transform) también han sido utilizados para estudiar la ecuación DNLS. Estos métodos permiten determinar qué clase de perfiles iniciales de onda $b = b(z, 0)$ evolucionan hacia soluciones de solitones. Además, debido a que se han observado estructuras solitónicas en plasmas espaciales, su utilización cobró importancia para la descripción de este tipo de fenómenos.

2.6.1.2. Reducción a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

Como se dijo anteriormente, la reducción de la ecuación DNLS a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias fue realizada mediante dos procedimientos: suponiendo ondas viajeras estacionarias ([Hada et al., 1990](#)) y utilizando un número finito de modos ([Elaskar et al., 2006](#); [Sánchez-Arriaga et al., 2007](#); [Sanmartín et al., 2004](#)). A continuación se presentan algunos detalles de cada uno de ellos.

Ondas viajeras estacionarias

En este procedimiento se suponen soluciones de ondas viajeras estacionarias que cumplen la siguiente condición:

$$b = b(\xi), \quad \xi = z - Vt. \quad (2.92)$$

Siguiendo el trabajo de [Hada et al. \(1990\)](#), al considerar la ecuación DNLS con un término de amortiguamiento resistivo e introduciendo un forzamiento monocromático y circularmente polarizado ($S = A_0 e^{ik\xi}$), integrando la ecuación resultante y realizando ciertas definiciones se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo:

$$\begin{aligned} \frac{dw_y}{d\zeta} - \nu \frac{dw_z}{d\zeta} &= \frac{dh}{dw_z} + a \cos \theta \\ \frac{dw_z}{d\zeta} + \nu \frac{dw_y}{d\zeta} &= -\frac{dh}{dw_y} + a \sin \theta \\ \frac{d\theta}{d\zeta} &= \Omega \end{aligned} \quad (2.93)$$

donde la función h está dada por:

$$h(\mathbf{w}) = \frac{1}{4} (\mathbf{w}^2 - 1)^2 - \frac{\lambda}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{e}_x)^2$$

y se realizaron las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{1}{b_0} \mathbf{b}, & a &= \frac{A_0}{\alpha b_0^3 k}, & \zeta &= \frac{ab_0^2 \xi}{\mu}, \\ \nu &= \frac{\eta}{\mu}, & \Omega &= \frac{\mu k}{\alpha b_0^2}, & \lambda &= \frac{V}{\alpha b_0^2}. \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$.

El caso de $a = 0$ y $\nu = 0$ constituye la solución de onda estacionaria que se presentó en el apartado de soluciones analíticas. Por otro lado, para $a \neq 0$ y $\nu = 0$ se tiene un sistema Hamiltoniano forzado, mientras que el caso general $a \neq 0$ y $\nu \neq 0$ es un sistema disipativo forzado.

El estudio del sistema de ecuaciones (2.93) arrojó los siguientes resultados.

- Para sistemas forzados no disipativos ($a \neq 0, \nu = 0$) soluciones cercanas a las separatrices de solitones cuyo sentido de polarización es igual al del forzamiento presentaron comportamiento caótico con el aumento de la amplitud del forzamiento, sin embargo para el caso de polarización contraria al forzamiento no se encuentra caos.
- Sistemas forzados disipativos ($a \neq 0, \nu \neq 0$) presentan una dinámica compleja cuando se varía la amplitud del forzamiento, exhibiendo órbitas periódicas, bifurcaciones de doblamiento de período con transiciones a caos y transiciones duras a caos, diversos tipos de atractores y distintos tipos de intermitencias (Borotto et al., 2004; Chian et al., 1998; Hada et al., 1990).
- El sistema forzado disipativo también presenta una dinámica muy compleja cuando se toma ν como parámetro de control. Nuevamente aparece una variedad de bifurcaciones, atractores y crisis de fronteras (Chian et al., 2002).

La existencia de fenómenos de intermitencia y de crisis ha sido comprobada a través de diversos ensayos con plasmas de laboratorio y numerosas observaciones en plasmas espaciales, por lo tanto, el modelo anterior puede utilizarse para entender y predecir este tipo de comportamientos, siempre teniendo en cuenta las simplificaciones que se realizaron para su desarrollo.

Truncamiento

El otro método utilizado para reducir la ecuación DNLS a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias consiste en realizar el truncamiento de la DNLS suponiendo que la solución es la suma de un número finito de modos. Este análisis permite aplicar las herramientas para el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias, obteniendo resultados que posteriormente ayudan a investigar la ecuación original.

El orden de las ecuaciones diferenciales ordinarias depende directamente del número de modos utilizados para hacer el truncamiento, por este motivo se ha de seleccionar el número mínimo de modos que reproduzca correctamente las soluciones. Estudios numéricos en los cuales se ha integrado la DNLS completa (Ghosh y Papadopoulos, 1987; Nariyuki y Hada, 2005) indican que existen tres modos dominantes cuyos números de ondas cumplen la condición de resonancia:

$$2k_0 = k_1 + k_2 \tag{2.94}$$

El truncamiento realiza una aproximación en la cual existe una coherencia de fase, es decir, las ondas son monocromáticas y la relación entre las fases tiene significado físico. Para ondas con un ancho de banda $\Delta\omega$ sólo se justifica la aproximación de coherencia de fase si $T \Delta\omega \ll 1$, siendo T el tiempo característico, por ejemplo el período de oscilación del plasma (Robinson y Drysdale, 1996). Por otro lado, si las amplitudes de onda son tan grandes que el tiempo de interacción entre ellas es del mismo orden que el período de las propias ondas, el truncamiento deja de ser válida (de Oliveira et al., 1997).

El análisis de la DNLS mediante técnicas de truncamiento fue llevado a cabo por primera vez por Ghosh y Papadopoulos (1987), incluyendo en la ecuación un término de amortiguamiento o excitación. En ese trabajo se integró numéricamente la DNLS y mediante un análisis del espectro en frecuencia, se observó que existían tres modos dominantes, lo que sugirió realizar el truncamiento. Sin embargo, una mala elección de los parámetros llevó a que se concluyera erróneamente que el truncamiento a tres modos de la DNLS no presenta caos, siendo necesario un número mínimo de siete.

Un trabajo posterior (Sanmartín et al., 2004), que utilizaba un modelo que incluía un modo excitado (inestable) y dos modos amortiguados con iguales coeficientes de amortiguamiento, demostró que el truncamiento a tres modos de la DNLS presenta caos, y que dependiendo del parámetro de control seleccionado, los caminos de transición podían ser por doblamiento de período o transición dura. Además, este estudio reveló que al tomar coeficientes de amortiguamiento diferentes y utilizar un modelo de amortiguamiento de Landau, continuaba existiendo un dominio paramétrico para el cual la dinámica era caótica.

2.6.1.3. Soluciones numéricas

La ecuación DNLS, tanto en la versión presentada en la Ec. (2.86) como en variaciones de la misma, ha sido estudiada mediante análisis numérico por numerosos autores. Además, la variedad de soluciones analíticas que se conocen y la existencia de un número infinito de cantidades que se conservan, ayudan a la interpretación de los resultados.

Las dos primeras cantidades que se conservan en la DNLS son (Kaup y Newell, 1978):

$$C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} bb^* dz, \quad (2.95)$$

$$C_1 = \text{Im} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial b^*}{\partial z} b - \frac{\partial b}{\partial z} b^* \right) dz \right]. \quad (2.96)$$

las cuales constituyen, desde el punto de vista numérico, una herramienta de validación de los métodos.

La integración numérica de la ecuación DNLS fue llevada a cabo en primer término por Spangler (1985) utilizando un método que conserva las cantidades anteriores y que impone explícitamente condiciones de contorno periódicas. Este método permite obtener la evolución de un campo magnético $b(z, t)$ partiendo de una condición inicial $b(z, t_i)$, mediante la transformada espacial de Fourier del campo magnético b y de $|b|^2 b$, resolviendo la DNLS en el dominio de los números de onda (dominio de Fourier). La integración de este código permitió comprobar que los solitones que fueron obtenidos analíticamente eran numéricamente estables, sin embargo, en ciertas combinaciones de sentido de polarización y signo del factor α en el término no lineal de la Ec. (2.86), aparecía una inestabilidad de colapso.

Seguidamente, se realizaron dos trabajos que incluían términos de amortiguamiento o excitación en la DNLS. En el primero de ellos (Spangler, 1986), las ondas con mayores longitudes de onda se amplificaban debido a la presencia de una corriente de iones a una velocidad superior a la velocidad de Alfvén, mientras que las de longitud de onda corta se amortiguaban a causa de la resonancia de absorción ion-ciclotrón. En un segundo trabajo (Ghosh y Papadopoulos, 1987) se utilizó el mismo algoritmo que en el anterior pero cambiando el método de integración trapezoidal por un método de Adams, resultando en este caso que el sistema podía tener soluciones caóticas y la coexistencia de varios atractores. Además, el espectro en potencia reveló que la dinámica era dominada por tres modos, lo que sugirió realizar un estudio de truncamiento de la DNLS, pero en ese análisis no se encontraron soluciones caóticas. Estudios posteriores demostraron que esta falla se debió a una inadecuada elección de los parámetros, evidenciando que el truncamiento a sólo tres modos es capaz de reproducir la dinámica del sistema completo y en particular desarrollar caos (Elaskar et al., 2005; López-Rebollal et al., 1998; Sanmartín et al., 2004).

Los métodos basados en la transformada de Fourier pueden presentar inestabilidades debido a que se utiliza un número finito de modos. Para evitar esta situación, Fla (1992) desarrolló un esquema numérico implícito basado en el método de Whitham-Fornberg que además reproduce la conservación de las constantes del movimiento. Debido a estas características no se encontraron inestabilidades adicionales a las que se obtienen mediante un

análisis lineal, lo que hace al método eficaz para estudiar la inestabilidad modular de la ecuación DNLS.

Simulaciones numéricas de la DNLS para $\beta \sim 1$ han sido desarrolladas en el trabajo de Buti et al. (2000). Para estas situaciones deben incluirse efectos cinéticos debido a que el acoplamiento entre las fluctuaciones de densidad y de campo magnético cobra importancia. Los resultados de estas simulaciones confirman que para $\beta < 1$ las ondas polarizadas a izquierda son inestables mientras que a derecha son estables. Para $\beta > 1$ la situación se invierte, y además se observa que ondas inicialmente polarizadas a izquierda pueden cambiar el sentido de polarización.

Más recientemente se ha utilizado un esquema de integración numérica que emplea métodos espectrales para las derivadas espaciales y un esquema de Runge-Kutta para el avance en el tiempo (Nariyuki y Hada, 2005), con y sin término de amortiguamiento y excitación. Los resultados que se obtuvieron comprobaron nuevamente que el sistema evoluciona con tres modos dominantes que satisfacen la condición de resonancia $2k_0 = k_1 + k_2$ cuando se utiliza una onda como condición inicial y valores de amplitud relativamente bajos. En esta investigación se trabaja en la misma dirección, utilizando métodos espectrales y un esquema de Runge-Kutta para la integración de la DNLS, evaluando además sistemas con condición inicial de tres ondas cerca de resonancia.

Capítulo 3

Solución Mediante Métodos Espectrales

Como es sabido, existen diversos métodos para obtener soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, entre los cuales pueden mencionarse los métodos de diferencias finitas, los métodos de elementos finitos o los métodos espectrales. A su vez, dentro de cada uno de ellos existen distintas variaciones que dan origen a los métodos específicos que se emplean habitualmente. En este trabajo se busca solucionar numéricamente la ecuación DNLS utilizando métodos espectrales para la resolución de las derivadas espaciales, y un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden para el avance en el tiempo.

El objetivo del presente capítulo es, en primer lugar, introducir las características principales de los métodos espectrales, justificando posteriormente su utilización en la resolución de la ecuación DNLS, para finalmente presentar la implementación de este tipo de soluciones en dicha ecuación.

3.1. Introducción a los Métodos Espectrales

A diferencia de los métodos de diferencias finitas, los métodos espectrales no utilizan expansiones en series de Taylor para la representación de la solución aproximada, sino que se valen de expansiones en serie de funciones de base, de manera similar a lo realizado en los métodos de elementos finitos, pero empleando funciones globales en el dominio infinitamente derivables o polinomios de alto orden.

Cuando las condiciones de borde de la función estudiada requieren que la solución sea espacialmente periódica, los senos y cosenos de una serie de Fourier, los cuales son las funciones de base naturales para todos los problemas periódicos, automáticamente e individualmente satisfacen las condiciones de borde. En el caso de problemas no periódicos, los polinomios de Chebyshev son la opción natural para funciones de base. En ese caso las condiciones de borde no se satisfacen apropiadamente, pero es sencillo incorporar explícitamente restricciones para minimizar el residuo, o utilizar funciones de base que satisfagan independientemente las condiciones de contorno homogéneas y adicionar funciones conocidas que cumplan las condiciones no homogéneas (Boyd, 2000).

En numerosas simulaciones para la ecuación DNLS, el fenómeno de interés no está influenciado por lo que sucede en el contorno y por lo tanto simulaciones numéricas con condiciones de contorno periódicas mostraron ser una buena implementación (Belashov y Vladimirov, 2005). Esta cualidad permite utilizar los métodos espectrales basados en expansiones en series de Fourier, cuyas características principales se revisan más adelante.

En cuanto a la dependencia temporal, si bien es posible tratar esta evolución espectralmente, en general es más eficiente aplicar los métodos espectrales únicamente a la depen-

dencia espacial. La razón es que la integración en el tiempo puede hacerse explícitamente, lo cual es mucho menos costoso en términos computacionales que calcular la solución simultáneamente en el dominio espacio-tiempo. Una discretización espectral sólo espacial reduce la ecuación diferencial en derivadas parciales original a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable tiempo que pueden integrarse mediante alguna de las variantes del método de Runge-Kutta o utilizando cualquier otro esquema de avance en el tiempo.

3.1.1. Funciones de expansión ortogonales

La teoría subyacente a los métodos espectrales se construye a partir de la expansión de una función $\phi(x)$ sobre un intervalo finito (aquí tomado $[0, 2\pi]$) en términos de una secuencia infinita de funciones ortogonales $\varphi_k(x)$

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_k \varphi_k(x), \quad (3.1)$$

donde los coeficientes $\hat{\phi}_k$ se determinan mediante la integral

$$\hat{\phi}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) \varphi_k(x) dx, \quad (3.2)$$

y las funciones de expansión y sus complejas conjugadas satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} \varphi_k(x) \varphi_\ell^*(x) dx = 2\pi \delta_{k\ell}, \quad (3.3)$$

siendo $\delta_{k\ell}$ el delta de Kronecker.

La transformación indicada en las Ecs. (3.1) a (3.3) es llamada “transformación finita de ϕ ” entre el espacio físico y el espacio de transformación, ya que la integral se realiza sobre un intervalo finito. Si el conjunto de funciones ortogonales es completo, lo cual significa que la precisión de la serie para representar la función original aumenta al incrementar el número de funciones de base consideradas, la transformación puede invertirse, y de esta manera las funciones pueden representarse tanto por sus valores en el espacio físico como por sus coeficientes en el espacio de transformación. Por otro lado, debe notarse que los coeficientes de expansión $\hat{\phi}_k$ en la Ec. (3.2) dependen de todos los valores de ϕ en el espacio físico y entonces en general no pueden computarse de manera exacta cuando se cuenta con descripciones discretas.

Cuando en la expansión dada en la Ec. (3.1) se utiliza un número finito de coeficientes usando los valores de ϕ en un número finito de puntos seleccionados, correspondientes por ejemplo a una grilla, el procedimiento se denomina como una “transformación discreta” entre el conjunto de valores de ϕ en la grilla y el conjunto de coeficientes aproximados (o discretos).

3.1.2. La Expansión de Fourier continua

La expansión de Fourier continua es la expansión más común dentro de los métodos espectrales y es la que se utiliza en este trabajo. Como se mencionó anteriormente, esta expansión es natural para problemas con condiciones de contorno periódicas, es decir para funciones que cumplen:

$$\phi(x) = \phi(x + L), \quad (3.4)$$

donde L es la longitud del dominio de integración.

En la expansión de Fourier, las funciones de base son funciones trigonométricas, las cuales conforman una base ortogonal completa de la forma

$$\varphi_k(x) = e^{ikx}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.5)$$

en el intervalo $[0, 2\pi]$, y de donde resultan, según la Ec. (3.2), los coeficientes de Fourier de ϕ :

$$\hat{\phi}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(x) e^{-ikx} dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.6)$$

La relación dada en (3.6) asocia la función ϕ con una secuencia de números complejos (los coeficientes de Fourier $\hat{\phi}_k$) llamada la “transformada de Fourier de ϕ ”. El análisis consiste en evaluar qué tan bien la función $\phi(x)$ es aproximada por esta secuencia de polinomios trigonométricos

$$P_N \phi(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{\phi}_k e^{ikx}, \quad (3.7)$$

cuando $N \rightarrow \infty$, donde la función $P_N \phi(x)$ es la serie de Fourier truncada (o finita) de orden N de $\phi(x)$.

Si se define el producto interno y la norma en la manera habitual, tal que para dos funciones $\phi(x)$ y $\psi(x)$

$$(\phi, \psi) = \int_0^{2\pi} \phi(x) \psi^*(x) dx, \quad (3.8)$$

$$\|\phi\|^2 = \int_0^{2\pi} |\phi(x)|^2 dx, \quad (3.9)$$

insertando la Ec. (3.1) en la (3.9), y haciendo uso de la relación de ortogonalidad dada en la Ec. (3.3), se obtiene la identidad de Parseval

$$\|\phi\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}_k|^2. \quad (3.10)$$

Con la ecuación anterior y utilizando la Ec. (3.7) resulta

$$\|\phi - P_N \phi\|^2 = 2\pi \sum_{|k| \geq N/2} |\hat{\phi}_k|^2. \quad (3.11)$$

Esta última expresión indica que el error generado por reemplazar ϕ con su serie de Fourier truncada de orden N depende de qué tan rápido los coeficientes de Fourier $\hat{\phi}_k$ decaen a cero. Se puede demostrar que esto está relacionado con la regularidad de ϕ en el dominio considerado.

Integrando la Ec. (3.6) por partes y haciendo uso de las condiciones de borde periódicas de ϕ se obtiene

$$\hat{\phi}_k = \frac{1}{2\pi ik} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{dx} e^{-ikx} dx.$$

Al iterar sobre este resultado se encuentra que si ϕ es m veces continuamente derivable en $[0, 2\pi]$ y si las derivadas son periódicas para todo orden $j \leq m - 2$, entonces (Camuto et al., 2006)

$$\hat{\phi}_k = \mathcal{O}(k^{-m}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.12)$$

lo cual demuestra que el coeficiente de Fourier k -ésimo de una función infinitamente derivable cuyas derivadas son periódicas decae más rápidamente que cualquier potencia negativa de k .

3.1.3. La Expansión de Fourier Discreta

En la mayoría de las aplicaciones se utiliza una expansión de Fourier discreta, ya que la misma provee una eficiente manera de computar los coeficientes de Fourier de una función que sólo es conocida en una distribución discreta de puntos, y recuperar en el espacio físico la información que fue calculada en el espacio de transformación.

En la transformada de Fourier discreta se hace uso de los puntos

$$x_j = \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (3.13)$$

normalmente referidos como puntos de la grilla, para definir el par de transformaciones

$$\mathcal{F}[\phi_j] = \bar{\phi}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_j e^{-ikx_j}, \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\bar{\phi}_k] = \phi_j = \sum_{k=-N/2}^{\frac{N}{2}-1} \bar{\phi}_k e^{ikx_j}, \quad j = 0, 1, \dots, N - 1, \quad (3.15)$$

donde se ha utilizado la notación $\phi(x_j) = \phi_j$ y $\bar{\phi}(k) = \bar{\phi}_k$.

Las Ecs. (3.14) y (3.15) definen un par de transformación exacto entre los N valores ϕ_j de la grilla y los N coeficientes de Fourier discretos $\bar{\phi}_k$. La transformación puede hacerse en uno u otro sentido sin pérdida de información, lo cual puede demostrarse introduciendo la Ec. (3.14) en la (3.15), teniendo en cuenta la propiedad de ortogonalidad

$$\frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{\frac{N}{2}-1} e^{-2\pi ik(j-\ell)/N} = \delta_{j\ell}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las definiciones (3.14) y (3.15) resulta

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n \phi_j}{dx^n}\right] = (ik)^n \mathcal{F}[\phi_j] = (ik)^n \bar{\phi}_k, \quad (3.16)$$

por lo tanto

$$\frac{d^n \phi_j}{dx^n} = \mathcal{F}^{-1}[(ik)^n \bar{\phi}_k], \quad (3.17)$$

y de esta forma es posible evaluar la derivada de cualquier orden de la función discreta $\phi(x)$ en cualquier punto de la muestra.

En las simulaciones mediante métodos espectrales las transformaciones entre un espacio y otro son normalmente quienes definen la eficiencia de un cálculo espectral, por lo tanto es de vital importancia utilizar para estas transformaciones algoritmos altamente eficientes. La transformada de Fourier discreta definida anteriormente puede computarse de una manera “rápida”, realizando del orden de $N \log_2(N)$ operaciones en lugar de N^2 (Jardin, 2010), a través de la Transformada Rápida de Fourier (FFT), para la cual se han desarrollado numerosos algoritmos altamente probados. De esta manera no es necesario realizar un código para resolver la FFT, sino que pueden utilizarse las librerías disponibles para este propósito, aunque deben conocerse las características del algoritmo empleado, la manera en que se redistribuyen los puntos en el espacio de transformación y cómo se definen los límites de las expansiones para asegurar el correcto funcionamiento del esquema numérico.

3.1.3.1. El error de “aliasing”

La relación entre los coeficientes de Fourier discretos $\bar{\phi}_k$, Ec. (3.14), y los coeficientes de Fourier exactos $\hat{\phi}_k$, Ec. (3.6), se obtiene igualando ϕ_j en la Ec. (3.1) con el dado en la expresión (3.15):

$$\bar{\phi}_k = \hat{\phi}_k + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \hat{\phi}_{k+Nm}. \quad (3.18)$$

siendo N el número de puntos de la discretización.

Puede verse que el modo k -ésimo de la transformación discreta depende no sólo del modo k -ésimo de ϕ , sino también de todos los modos que distorsionan el modo k -ésimo de la grilla discreta. Este error se denomina “aliasing” y se ilustra en la Figura 3.1.

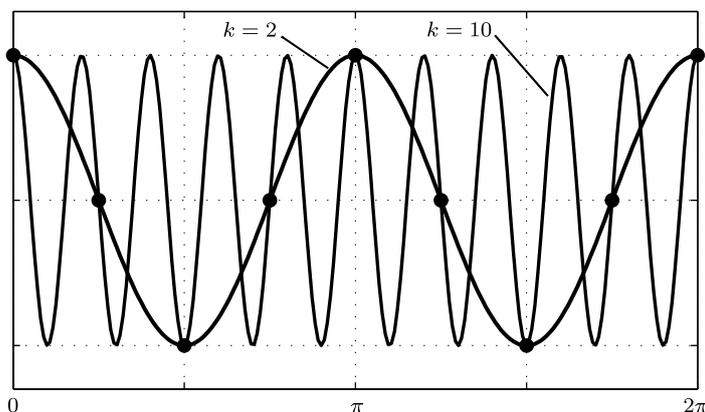


Figura 3.1: Ejemplo de aliasing para una grilla con $N = 8$. Ambos modos toman los mismos valores en los puntos de la grilla

El error de aliasing puede causar inestabilidades numéricas en la integración en el tiempo de ecuaciones no lineales, ya que la interacción no lineal puede generar que números de ondas aislados sumamente grandes, los cuales estarán “aliados” dentro de los números de onda pertenecientes al dominio considerado, produzcan una alta transferencia de energía hacia los números de onda más bajos (Boyd, 2000).

Una de las estrategias empleadas para eliminar las consecuencias de los modos distorsionados es la de filtrado “todo o nada”, en la cual se anulan los coeficientes de Fourier ubicados fuera de una porción determinada del dominio.

El método de Philips (1959), originalmente utilizado para modelos de diferencias finitas, aplica un filtro espacial que suprime la mitad del espectro de transformación, utilizando solamente los coeficientes ubicados en la mitad central del dominio de Fourier y anulando aquellos que se encuentran en los cuartos externos. Sin embargo, Orszag (1971) mostró que no es necesario purgar la mitad de los coeficientes del espectro, sino que sólo se necesita eliminar un tercio de los mismos, dejando dos tercios de la porción central sin filtrar. En su trabajo Orszag sostiene que la interacción cuadrática de dos números de onda se distorsiona únicamente fuera de la porción central establecida. En la Figura 3.2 se muestran de manera gráfica las dos estrategias de filtrado mencionadas.

3.2. Implementación en la Ecuación DNLS

Como se mencionó en la sección anterior, se demostró que en la ecuación DNLS el fenómeno de interés no está influenciado por lo que sucede en el contorno y por lo tanto son

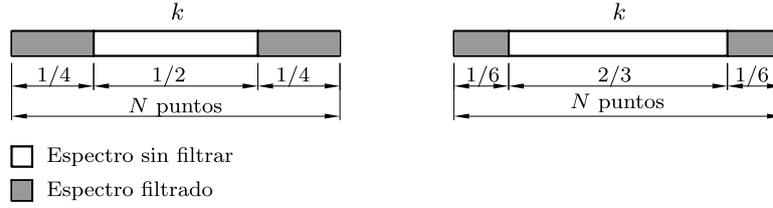


Figura 3.2: Esquemas de filtrado de Philips (izquierda) y de Orszag (derecha) disponibles para corregir el error de aliasing.

aplicables simulaciones numéricas con condiciones de contorno periódicas (Belashov y Vladimirov, 2005). Esta característica hace que los métodos espectrales basados en expansiones en series de Fourier puedan utilizarse para la resolución de la ecuación.

Se considera la ecuación DNLS en coordenadas adimensionalizadas, tal como se presenta en la Sección 2.6 del capítulo anterior:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial z} + \alpha \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) \pm i \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \hat{\gamma} b = 0, \quad (3.19)$$

donde el campo magnético b satisface en todo momento condiciones de contorno periódicas, es decir:

$$b(z, t) = b(z + L, t), \quad (3.20)$$

siendo L la longitud del dominio de integración.

En este trabajo la ecuación DNLS se soluciona numéricamente utilizando métodos espectrales para el cálculo de las derivadas espaciales, y un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden para la integración en el tiempo. Teniendo en cuenta la Ec. (3.19), la derivada temporal puede escribirse en función de los términos restantes que conforman la ecuación DNLS:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{\partial b}{\partial z} - \alpha \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) \mp i \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} - \hat{\gamma} b \quad (3.21)$$

Aplicando las transformaciones definidas en las Ecs. (3.14) y (3.15), y considerando la expresión (3.17) resulta:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \mathcal{F}^{-1} \left[-ik \mathcal{F}[b] - \alpha ik \mathcal{F}[|b|^2 b] \pm ik^2 \mathcal{F}[b] \right] - \hat{\gamma} b, \quad (3.22)$$

donde, de acuerdo a lo establecido en la Sección 2.6

$$\begin{aligned} \text{Término dispersivo } \pm ik^2 \mathcal{F}[b] & \begin{cases} \text{Signo superior } \rightarrow \text{polarización izquierda} \\ \text{Signo inferior } \rightarrow \text{polarización derecha} \end{cases} \\ \text{Término no lineal } \alpha ik \mathcal{F}[|b|^2 b] & \begin{cases} \text{Plasmas fríos } \rightarrow \alpha = 1 \\ \text{Plasmas calientes } \rightarrow \alpha = \frac{1}{1 - \beta} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Para una colección de N valores de b igualmente espaciados en un dominio de longitud L centrado en el origen $(-L/2, L/2]$ donde está definida la siguiente distribución de puntos

$$z_j = \frac{L}{N} \left(-\frac{N}{2} + j \right), \quad j = 1, \dots, N,$$

las transformaciones de Fourier dadas en las Ecs. (3.14) y (3.15) resultan

$$\mathcal{F}[b_j] = \bar{b}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b_j e^{-ikz_j}, \quad k = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad (3.24)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\bar{b}_k] = b_j = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{N/2} \bar{b}_k e^{ikz_j}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.25)$$

donde se ha utilizado la notación $b(z_j) = b_j$ y $\bar{b}(k) = \bar{b}_k$.

Reagrupando los términos en la Ec. (3.22) y con las definiciones anteriores, la ecuación DNLS puede descomponerse en sus partes real e imaginaria:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{\partial b_j}{\partial t} \right] &= \mathcal{F}^{-1} \left[-k_j (-1 \pm k_j) \operatorname{Im}[\mathcal{F}[b_j]] + \alpha k_j \operatorname{Im} \left[\mathcal{F} \left[|b_j|^2 b_j \right] \right] \right] - \operatorname{Re}[\hat{\gamma} b_j], \\ \operatorname{Im} \left[\frac{\partial b_j}{\partial t} \right] &= \mathcal{F}^{-1} \left[k_j (-1 \pm k_j) \operatorname{Re}[\mathcal{F}[b_j]] - \alpha k_j \operatorname{Re} \left[\mathcal{F} \left[|b_j|^2 b_j \right] \right] \right] - \operatorname{Im}[\hat{\gamma} b_j] \end{aligned} \quad (3.26)$$

siendo

$$k_j = \frac{2\pi j}{L} \quad (3.27)$$

La nueva distribución de puntos tanto en el espacio físico como en el espacio de Fourier obedece al algoritmo de la FFT utilizado para calcular las transformaciones. Normalmente estos algoritmos requieren una cantidad de puntos N par, lo cual significa que la distribución alrededor del origen no será simétrica, y en consecuencia uno de los extremos del dominio queda fuera del mismo. De este modo, los puntos del espacio físico resultan

$$z \in \left(-\frac{L}{2} + h, -\frac{L}{2} + 2h, \dots, \frac{L}{2} - h, \frac{L}{2} \right], \quad \text{con } h = \frac{L}{N},$$

y por lo tanto los puntos del espacio de Fourier son

$$k \in \left(\frac{2\pi}{L} \left(-\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} \right) \right].$$

De esta manera queda establecido el procedimiento para obtener la derivada temporal en la ecuación DNLS. Con la definición de un término de amortiguamiento/excitación, es posible determinar las Ecs. (3.26) para realizar la integración en el tiempo de la DNLS, la cual se lleva a cabo mediante un esquema de Runge-Kutta-Fehlberg de cuarto orden. Debe tenerse en cuenta que antes de realizar la transformada de Fourier inversa en (3.26), debe aplicarse alguno de los filtros descritos en la Sección 3.1.3.1 para evitar que se produzcan inestabilidades debidas al error de aliasing.

La implementación computacional del esquema numérico se hace mediante una serie de subrutinas desarrolladas en lenguaje FORTRAN 95, utilizando además las capacidades de programación en paralelo con memoria compartida que permiten las directivas de OpenMP para este lenguaje. La paralelización no se realiza sobre la discretización del dominio, ya que se comprobó que ese enfoque resulta eficiente únicamente cuando se utilizan grillas suficientemente densas, de lo contrario el tiempo que significa la creación y destrucción de hilos de procesamiento penaliza la rapidez de efectuar los cálculos en paralelo cuando se dispone de un número relativamente bajo de procesadores. Por este motivo, la paralelización se realiza de manera de poder realizar simulaciones simultáneas para distintas configuraciones iniciales utilizando una sola computadora de múltiples procesadores.

En cuanto a los tiempos de procesamiento, si bien la reducción del costo computacional es una de las propiedades más atractivas de los esquemas numéricos basados en expansiones de Fourier, la naturaleza del problema relativiza en cierta medida esta característica, ya que las no linealidades requieren que se utilicen pasos de integración pequeños y, en general, se necesita simular durante tiempos prolongados, especialmente en los procesos de comprobación de condiciones de estabilidad. Estas características indican que es de suma importancia no utilizar discretizaciones excesivamente densas ya que esto repercute fuertemente en los costos computacionales.

En los capítulos siguientes se presentan las soluciones numéricas obtenidas para la ecuación DNLS considerando distintos casos: sin efectos difusivos con condición inicial de una onda y con condición inicial de tres ondas cerca de resonancia; y con efectos difusivos con condición inicial de tres ondas cerca de resonancia, con una onda excitada y las restantes amortiguadas.

Capítulo 4

Solución de la Ecuación DNLS No Difusiva

En los capítulos anteriores se presentaron los conceptos preliminares referidos a la Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger (DNLS), su capacidad de describir la propagación paralela o casi paralela a un campo magnético no perturbado de ondas de Alfvén de amplitud finita circularmente polarizadas, y la posibilidad de solucionar numéricamente dicha ecuación mediante métodos espectrales basados en expansiones de Fourier y un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden.

En este capítulo se presentan resultados numéricos obtenidos para la ecuación DNLS sin considerar efectos difusivos, utilizando distintos tipos de condiciones iniciales. El objetivo principal del estudio es analizar el comportamiento del código numérico y la influencia de los distintos parámetros que intervienen en la simulación.

4.1. Consideraciones iniciales

Para el estudio de la ecuación DNLS no difusiva se utiliza la Ec. (2.86) cuya obtención se muestra en el Capítulo 2

$$\frac{\partial b}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) \pm i \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = 0, \quad (4.1)$$

donde, por simplicidad, se ha tomado $\alpha = \pm 1$. El signo superior en el coeficiente α corresponde a plasmas fríos ($\beta \approx 0$), mientras que el inferior a plasmas calientes. En el término dispersivo el signo superior se aplica para ondas polarizadas a izquierda y el inferior para polarización derecha. Por otro lado, en la Ec. (4.1) no se ha incorporado el término lineal $\partial b/\partial z$ ya que se asume la utilización de un sistema de referencia que se mueve con velocidad de Alfvén en la dirección z y por lo tanto puede eliminarse sin afectar la solución (Spangler y Sheerin, 1982).

Con estas consideraciones, teniendo en cuenta las Ecs. (3.26) del Capítulo 3 y utilizando una discretización de N puntos, la derivada temporal de la Ec. (4.1) se resuelve mediante:

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\frac{\partial b_j}{\partial t} \right] &= \mathcal{F}^{-1} \left[\mp k_j^2 \text{Im}[\mathcal{F}[b_j]] \pm k_j \text{Im} \left[\mathcal{F} \left[|b_j|^2 b_j \right] \right] \right], \\ \text{Im} \left[\frac{\partial b_j}{\partial t} \right] &= \mathcal{F}^{-1} \left[\pm k_j^2 \text{Re}[\mathcal{F}[b_j]] \mp k_j \text{Re} \left[\mathcal{F} \left[|b_j|^2 b_j \right] \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $\mathcal{F}[\cdot]$ es el operador de la transformada de Fourier discreta, $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$ su inversa y

$$k_j = \frac{2\pi j}{L}, \quad b_j = b(z_j) \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4.3)$$

siendo L la longitud del dominio de integración.

Como ya fue mencionado, la aplicación de los métodos espectrales basados en expansiones en series de Fourier requiere que la solución de la ecuación DNLS cumpla en todo momento condiciones de borde periódicas, es decir $b(z, t) = b(z + L, t)$.

Un aspecto importante de analizar previamente a la presentación de los resultados numéricos, es la evaluación de la habilidad del método para reproducir la relación de dispersión de la Ec. (4.1) para una onda de amplitud constante A_0 , con frecuencia ω y número de onda k_0 de la forma:

$$b(z, t) = A_0 e^{i(k_0 z - \omega t)}, \quad (4.4)$$

la cual, al insertarse en la Ec. (4.1) considerando polarización izquierda y plasma con $\beta \approx 0$ produce

$$\omega = k_0 A_0^2 - k_0^2. \quad (4.5)$$

La descripción discreta de la onda dada en la Ec. (4.4) se escribe como:

$$b_j^m = A_0 e^{i(k_0 z_j - \omega m \tau)}. \quad (4.6)$$

donde $b_j^m = b(z_j, m\tau)$, siendo m el número de paso de tiempo y τ el intervalo de integración temporal. Con esta expresión se obtiene la relación de dispersión discreta (Fla, 1992)

$$\sin [(\omega + k_0^2) \tau] = \frac{1}{4} A_0^2 k_0 \tau (1 + \cos [(\omega + k_0^2) \tau])^2,$$

la cual, considerando la Ec. (4.5) para $A_0^2 k_0 \tau \ll 1$ resulta

$$\omega \approx A_0^2 k_0 \left[1 - \frac{1}{2} (A_0^2 k_0 \tau)^2 \right] - k_0^2. \quad (4.7)$$

donde se ha utilizado la identidad trigonométrica $\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta$.

De esta última ecuación se deduce que el error relativo de la relación de dispersión (4.5) es $\mathcal{O} \left[\frac{1}{2} (A_0^2 k_0 \tau)^2 \right]$, por lo tanto el esquema numérico reproducirá de manera satisfactoria la relación de dispersión no lineal de una onda de amplitud constante para un paso de tiempo tal que:

$$\tau \ll \frac{\sqrt{2}}{A_0^2 k_0} \quad (4.8)$$

Por otro lado, una estimación del error relativo debido al truncamiento para la onda basada en la Ec. (4.7) después de un tiempo $t = m\tau$ puede obtenerse mediante

$$\Delta = \left| \frac{\Delta b}{b} \right| \approx \frac{1}{2} t (a^2 k_0)^3 \tau^2. \quad (4.9)$$

Esta expresión indica que aun cuando se utilice un paso de integración temporal que cumpla con la condición (4.8), los resultados obtenidos pueden considerarse correctos únicamente cuando se verifique $\Delta \ll 1$, es decir

$$t \ll \frac{2}{(a^2 k_0)^3 \tau^2}. \quad (4.10)$$

Las condiciones dadas en las Ecs. (4.9) y (4.10), aunque son estrictamente válidas para el caso de solución de una onda de amplitud constante, permiten estimar en primer término un paso de integración temporal adecuado, y posteriormente evaluar el límite de tiempo para el cual la simulación puede considerarse válida.

4.2. DNLS no difusiva con condición inicial de una onda

El objetivo de este primer estudio es verificar las condiciones de estabilidad modular de la DNLS con condiciones de contorno periódicas, y conocer de qué manera evoluciona la solución luego de que la inestabilidad se produce. Para ello se sigue el desarrollo presentado en el trabajo de Fla (1992), quien estableció condiciones de estabilidad modular para la DNLS cuando se utiliza como condición inicial una onda de la forma

$$b(z, 0) = b_0 = A_0 e^{ik_0 z}, \quad (4.11)$$

donde el vector de onda está dado por

$$k_0 = \frac{2\pi n_0}{L}, \quad (4.12)$$

con n_0 el número de onda inicial, L la longitud del dominio y A_0 la amplitud de la onda.

4.2.1. Condiciones analíticas de estabilidad modular

El análisis que se realiza a continuación representa la referencia teórica con la cual se comparan los resultados numéricos que se obtienen más adelante. El desarrollo corresponde al estudio de la estabilidad modular de la DNLS con condiciones de contorno periódicas, para lo cual se utiliza la expresión de la modulación de un tren de ondas de amplitud constante:

$$b(z, t) = A_0 e^{i(k_0 z - \omega t)} [1 + \varepsilon(z, t)], \quad (4.13)$$

donde b y ε son funciones complejas periódicas en el intervalo $[-L/2, L/2]$ y $|\varepsilon|^2 \ll 1$.

Introduciendo la expresión anterior en la ecuación DNLS se obtiene la siguiente ecuación aproximada:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + i \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} + ik_0 A_0^2 (\varepsilon + \varepsilon^*) + 2(A_0^2 - k_0) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + A_0^2 \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial z} = 0$$

Si se expresa la perturbación $\varepsilon(z, t)$ mediante una expansión en serie de Fourier de la forma

$$\varepsilon(z, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\varepsilon}_j(t) e^{i(\ell_j z)},$$

donde $\ell_j = 2\pi j/L$ es el número de onda de la perturbación, se encuentra que el coeficiente $\hat{\varepsilon}_0(t)$ es una constante la cual puede asumirse igual a cero sin pérdida de generalidad, y además se deduce

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\varepsilon}_j}{dt} = i [k_0 A_0^2 + 2(A_0^2 - k_0) \ell_j - \ell_j^2] \hat{\varepsilon}_j + i A_0^2 (k_0 + \ell_j) \hat{\varepsilon}_j^* \\ \frac{d\hat{\varepsilon}_j^*}{dt} = -i A_0^2 (k_0 - \ell_j) \hat{\varepsilon}_j - i [k_0 A_0^2 + 2(A_0^2 - k_0) \ell_j + \ell_j^2] \hat{\varepsilon}_j^* \end{cases}$$

Si se asume

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_j(t) &= \hat{\varepsilon}_j(0) e^{i\lambda_j t}, \\ \hat{\varepsilon}_j^*(t) &= \hat{\varepsilon}_j^*(0) e^{i\lambda_j t}, \end{aligned}$$

se obtiene

$$\lambda_j = i2(A_0^2 - k_0) \ell_j \pm |\ell_j| \sqrt{(2k_0 - A_0^2) A_0^2 - \ell_j^2}. \quad (4.14)$$

Observando la Ec. (4.14) se pueden determinar las siguientes condiciones de estabilidad para un tren de ondas de amplitud constante:

$$\begin{cases} 2k_0 < A_0^2 \rightarrow \text{Marginalmente estable} \\ 2k_0 > A_0^2 \rightarrow \text{Inestable} \end{cases} \quad (4.15)$$

De esta manera quedan establecidas las condiciones analíticas de estabilidad modular de la DNLS para un tren de ondas de amplitud constante. Estas condiciones constituyen uno de los parámetros de evaluación del desempeño del código numérico implementado en este trabajo.

4.2.2. Resultados numéricos de la ecuación DNLS con condición inicial de una onda

En este apartado se presentan los resultados numéricos obtenidos para el caso de la ecuación DNLS con condición inicial de una onda. El primer análisis corresponde a la verificación numérica de las condiciones analíticas de estabilidad modular establecidas en la sección anterior. Posteriormente se estudia el comportamiento de la solución para distintos números de onda y valores de amplitud iniciales.

Teniendo en cuenta la Ec. (4.12), las condiciones dadas en (4.15) indican que los valores de amplitud para los cuales existirá inestabilidad dependen del número de onda n_0 . Para verificar este aspecto es necesario establecer un criterio que permita determinar si existe inestabilidad de la onda y en qué momento se produce. Con este propósito se define el parámetro E_{k_0} , el cual representa la relación entre la energía transportada por la onda inicial y la energía total del sistema en el espacio de Fourier:

$$E_{k_0} = \frac{|\bar{b}_{k_0}|}{N \sum_{j=1} |\bar{b}_{k_j}|}, \quad (4.16)$$

donde \bar{b}_{k_0} es la componente de la transformada de Fourier discreta correspondiente a la onda inicial, N es el número total de modos utilizados en la simulación y j indica el número de onda.

Según la Ec. (4.16), $E_{k_0} = 1$ indica que toda la energía del sistema se encuentra concentrada en la onda identificada con k_0 , lo cual representa la situación inicial del sistema. Cuando se produce la inestabilidad la energía inicialmente concentrada en el modo k_0 se transfiere hacia otros modos y en consecuencia resulta $E_{k_0} < 1$. Para evaluar la estabilidad de la solución, se considera que cuando la onda inicial pierde el 0,01 % de su energía se produce la inestabilidad, es decir, cuando $E_{k_0} \leq 0,9999$. Con este criterio se realizan los gráficos presentados en la Figura 4.1 donde se especifica el tiempo de inestabilidad en función de la amplitud de la onda inicial para distintos números de onda. El objetivo del análisis es verificar si se cumplen las condiciones de estabilidad modular dadas en (4.15). La subdivisión de la figura en números de ondas pares e impares obedece únicamente a mejorar la claridad de los resultados.

Si bien el procedimiento anterior representa un método objetivo para evaluar la estabilidad del sistema, hay que destacar que si se modifica la fracción de energía que determina la inestabilidad, los resultados no varían sustancialmente y los gráficos no cambian su forma, ya que una vez producida la inestabilidad, en todos los casos se genera un fuerte descenso de la energía de la onda inicial, situación que se comprueba con el estudio de la evolución de la energía relativa E_{k_0} .

Para las simulaciones se utilizó un paso de tiempo $\tau = 1 \times 10^{-3}$ con una discretización de $N = 256$ puntos, considerando ondas polarizadas a izquierda y $\beta \approx 0$ en la ecuación DNLS. La elección del paso de tiempo se llevó a cabo luego de numerosos ensayos que permitieron establecer cuál era el menor valor de τ que satisfacía la estabilidad que debe verificarse para ondas polarizadas a derecha (Buti et al., 2000), utilizando números de onda y valores de amplitud dentro de los rangos considerados y un tiempo de integración de 50000. La utilización de $N = 256$ obedece a la misma razón, ya que esta cantidad de puntos en la discretización es la menor capaz de reproducir correctamente el aspecto anteriormente citado para los números de onda considerados (ver sección 4.3).

En cuanto al esquema de filtrado utilizado para evitar el error de aliasing, debe destacarse que ambos métodos (de Philips y de Orszag) fueron implementados, obteniéndose resultados idénticos en todo el rango de valores analizado.

Observando la Figura 4.1, se deduce en primera instancia que el tiempo para que se produzca la inestabilidad depende fuertemente de la amplitud de la onda inicial y del número de onda considerado. Además se observa que la condición de inestabilidad $A_0 < \sqrt{2k_0}$ se verifica en todos los casos analizados. Para visualizar esta situación se han graficado en línea de trazos los límites correspondientes a cada caso, siendo la región estable la que se ubica desde esta línea hacia $A_0 \rightarrow \infty$. La estabilidad en esta región se comprobó para simulaciones de hasta $t = 50000$ con valores de amplitud inicial del doble de la amplitud límite. Por otro lado, para amplitudes $A_0 \rightarrow 0$ la inestabilidad se retrasa constantemente, así por ejemplo para el caso de $n_0 = 11$ y $k_0 \approx 1,08$ con $A_0 < 0,06$ no se produjo inestabilidad en simulaciones de hasta $t = 50000$.

Simulaciones para modos iniciales con $n_0 > 21$ también fueron realizadas, pero los resultados para estos casos comenzaron a presentar comportamientos no apropiados. Esto puede atribuirse a que, según las condiciones (4.15) y la Ec. (4.8), modos más altos tienen límites de estabilidad a amplitud mayores, y por lo tanto requieren pasos de tiempo más pequeños. Para ilustrar esta situación se presenta el siguiente ejemplo:

$$n_0 = 8 \rightarrow \begin{cases} A_{0\max} = 1,253 \\ \tau \ll 1,146 \end{cases} \quad n_0 = 25 \rightarrow \begin{cases} A_{0\max} = 2,454 \\ \tau \ll 0,117 \end{cases}$$

donde se ha utilizado $L = 64$ como en las simulaciones. En estos resultados se observa la diferencia de órdenes de magnitud entre ambos casos para establecer el paso de integración temporal adecuado. Esto indica que para reproducir correctamente el comportamiento de modos iniciales más altos se requieren pasos de integración cada vez más pequeños, lo cual repercute directamente en el tiempo de procesamiento computacional.

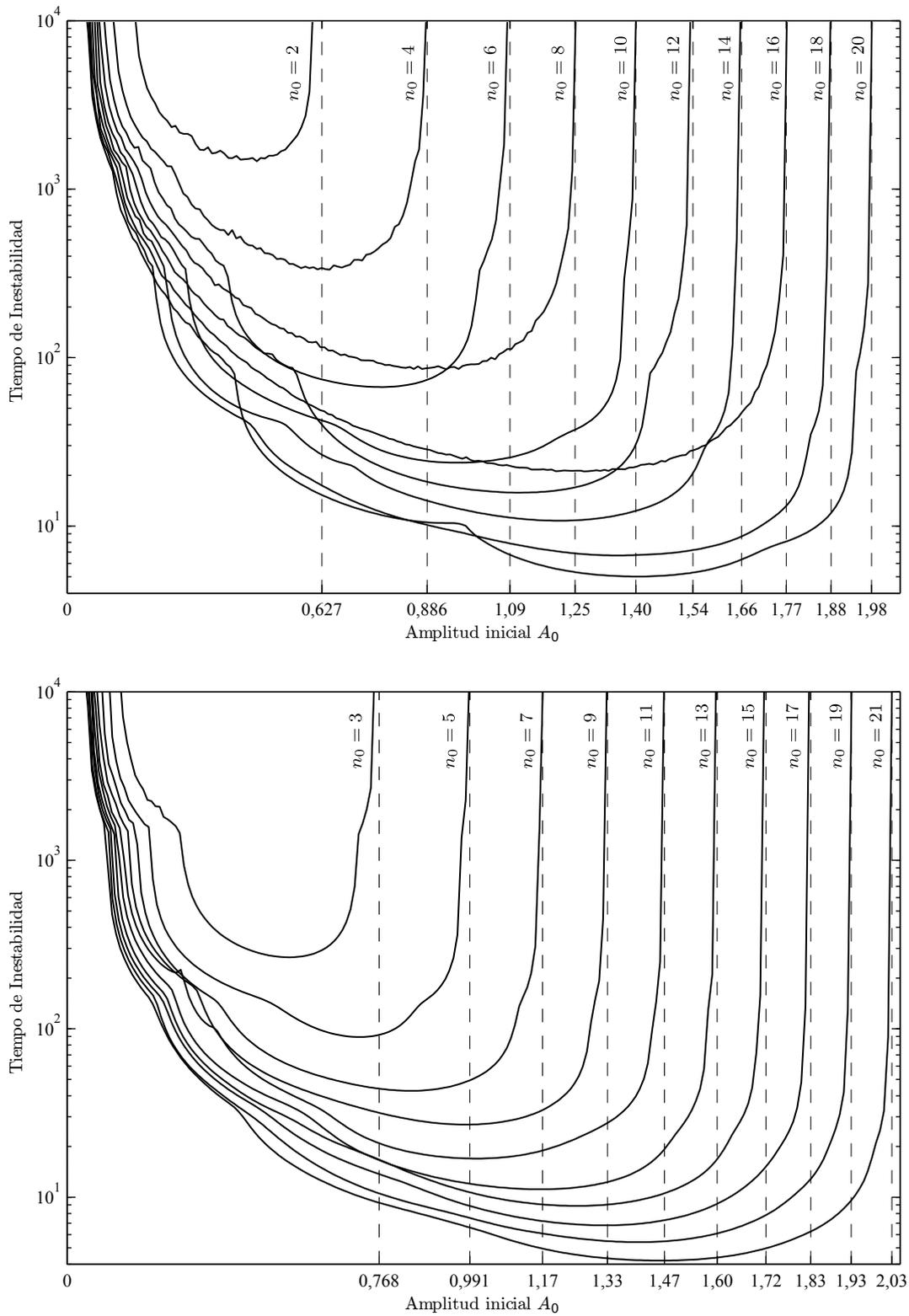


Figura 4.1: Tiempo de inestabilidad en función de la amplitud de la onda inicial A_0 para diferentes números de onda inicial n_0

Continuando con el análisis, el paso siguiente es estudiar la evolución de la onda luego de alcanzada la inestabilidad. Para ello en las Figuras 4.2 a la 4.6 se muestra la evolución del parámetro E_{k_0} para distintos números de onda iniciales y diferentes amplitudes. Además se grafica la distribución de la energía en el espacio de Fourier correspondiente a la condición inicial (curva $|\bar{b}_k|_0$), y a la ocurrida en el instante de tiempo en el cual la energía de la onda inicial es mínima (curva $|\bar{b}_k|_{\min}$). El objetivo del análisis es conocer de qué manera se produce la transferencia de energía entre el modo inicial y los nuevos modos surgidos en la inestabilidad.

Se observa en todos los casos que el parámetro E_{k_0} presenta una evolución similar, encontrándose básicamente dos comportamientos distintos que dependen del valor de la amplitud inicial A_0 . En un primer rango de amplitudes menores a cierto valor que depende del número de onda inicial, aparecen soluciones cuasi periódicas, donde la onda inicial recupera la energía cedida a los otros modos formando ciclos en los cuales la onda inicial pasa de un valor de energía máximo a uno mínimo. El mínimo valor de energía relativa de la onda inicial está ligado a la amplitud inicial de la onda, haciéndose más pequeño para amplitudes mayores, con un período que también decrece con el aumento de A_0 . Lo destacable de este primer comportamiento es que la transferencia de energía se hace fundamentalmente entre la onda inicial (onda madre) y dos ondas (ondas hijas) cuyos números de onda k_1 y k_2 satisfacen la relación de resonancia $2k_0 = k_1 + k_2$. Este resultado es importante a la hora de establecer el número de modos a utilizar en modelos de truncamiento.

El otro comportamiento que se observa, correspondiente a amplitudes iniciales mayores, presenta una evolución de forma caótica, casi independientemente del número de onda considerado inicialmente. A diferencia de la situación anterior, en estos casos la onda inicial no vuelve a recuperar gran parte de su energía original, sino que una vez transferida, la energía se distribuye aleatoriamente entre todos los modos del espectro.

La transición entre cada uno de los comportamientos se produce dentro de un rango de valores de A_0 donde la evolución de la solución presenta una combinación de las dos situaciones detalladas anteriormente. En este rango de transición la onda inicial recupera parcialmente su energía original completando ciclos similares a los del primer comportamiento pero con un decremento constante de los niveles máximos de energía, para luego dar lugar a la evolución irregular.

Los valores de amplitudes iniciales límites para los cuales se producen los distintos tipos de comportamiento dependen del número de onda de la onda inicial. En las figuras queda evidenciado que modos iniciales más altos tienen rangos de comportamiento periódico más pequeños y los intervalos de transición son más acotados. Por el contrario, modos iniciales bajos presentan un comportamiento periódico a amplitudes mayores y la transición hacia el comportamiento caótico es más suave.

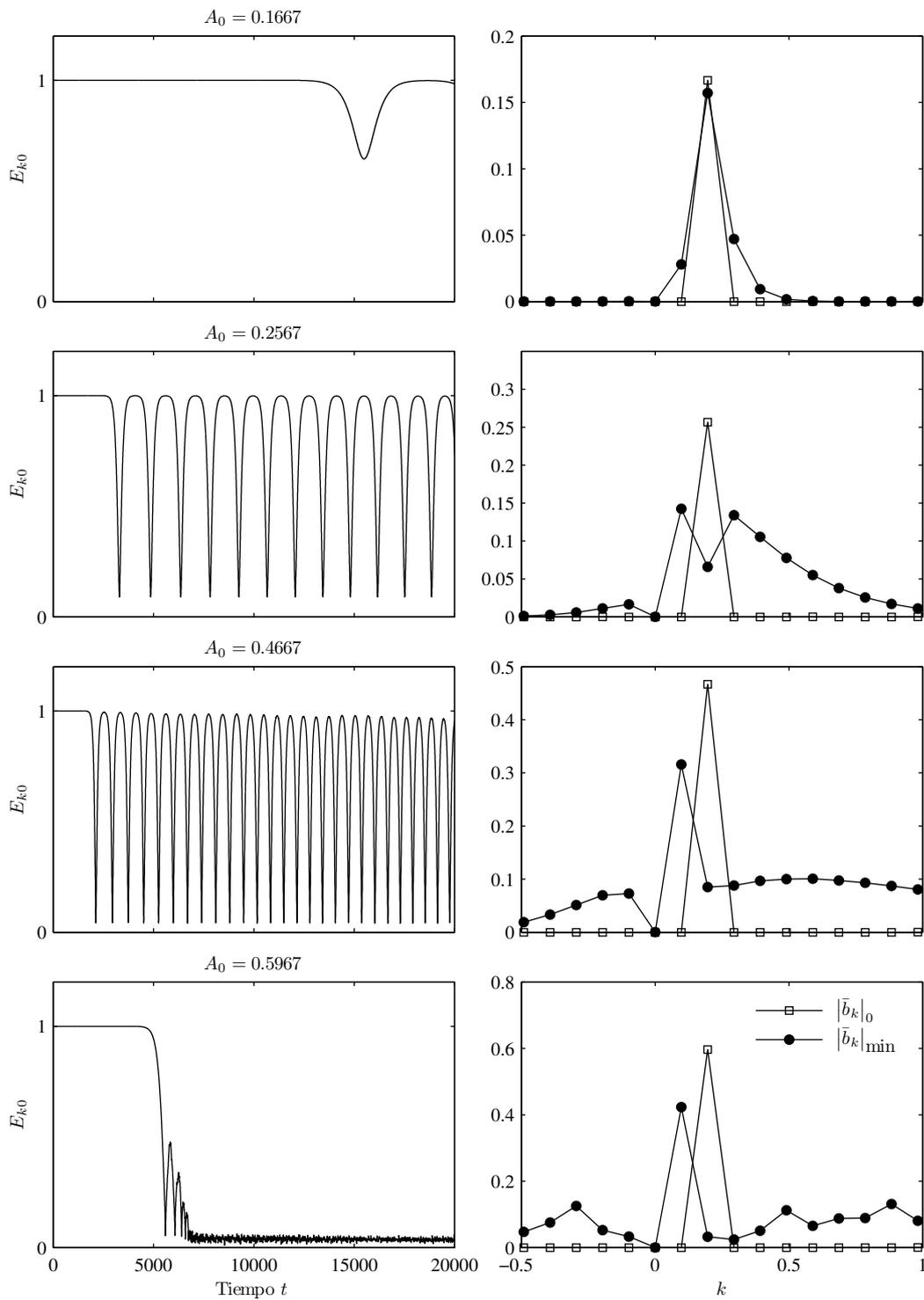


Figura 4.2: Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 2$

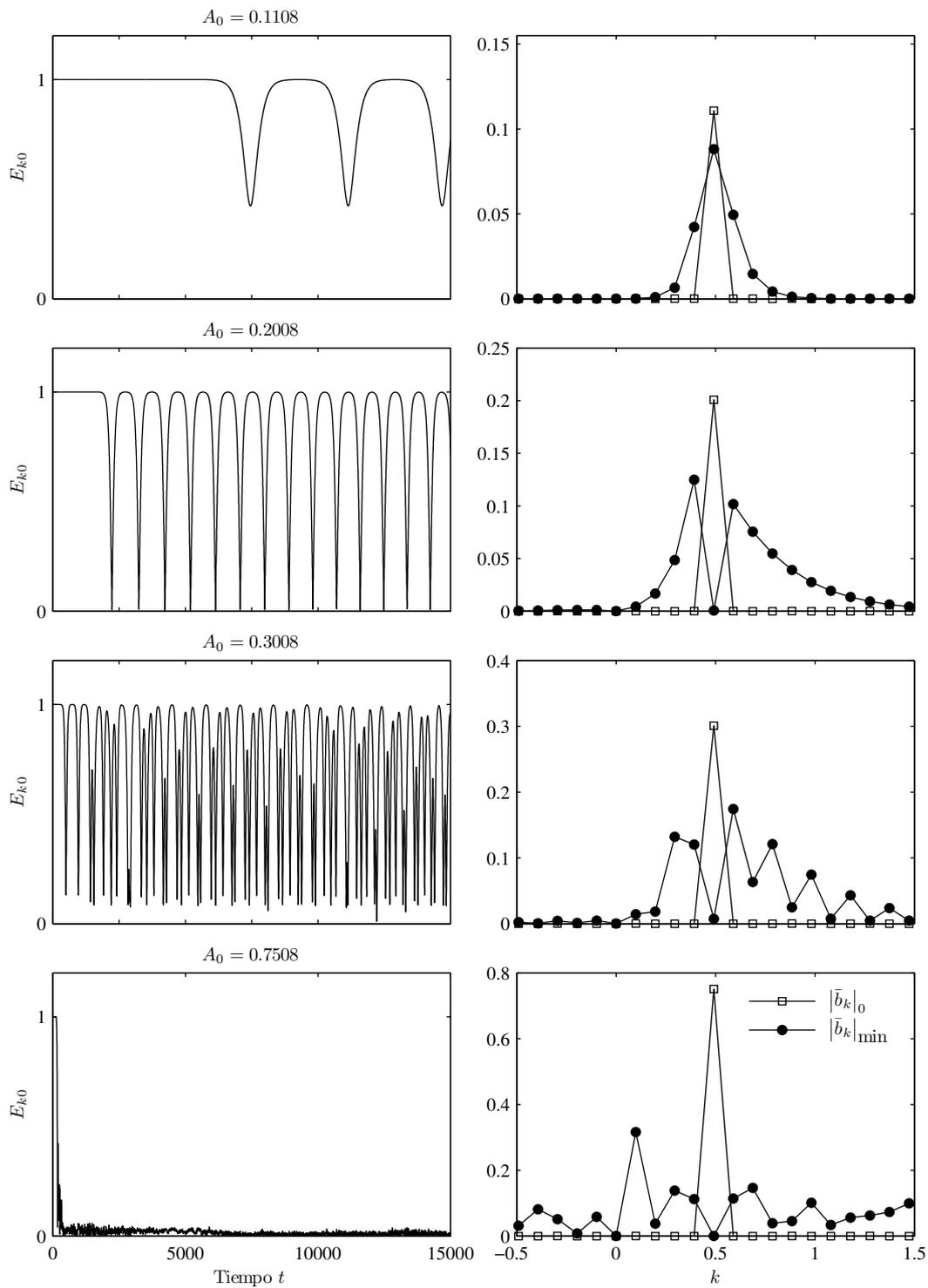


Figura 4.3: Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 5$

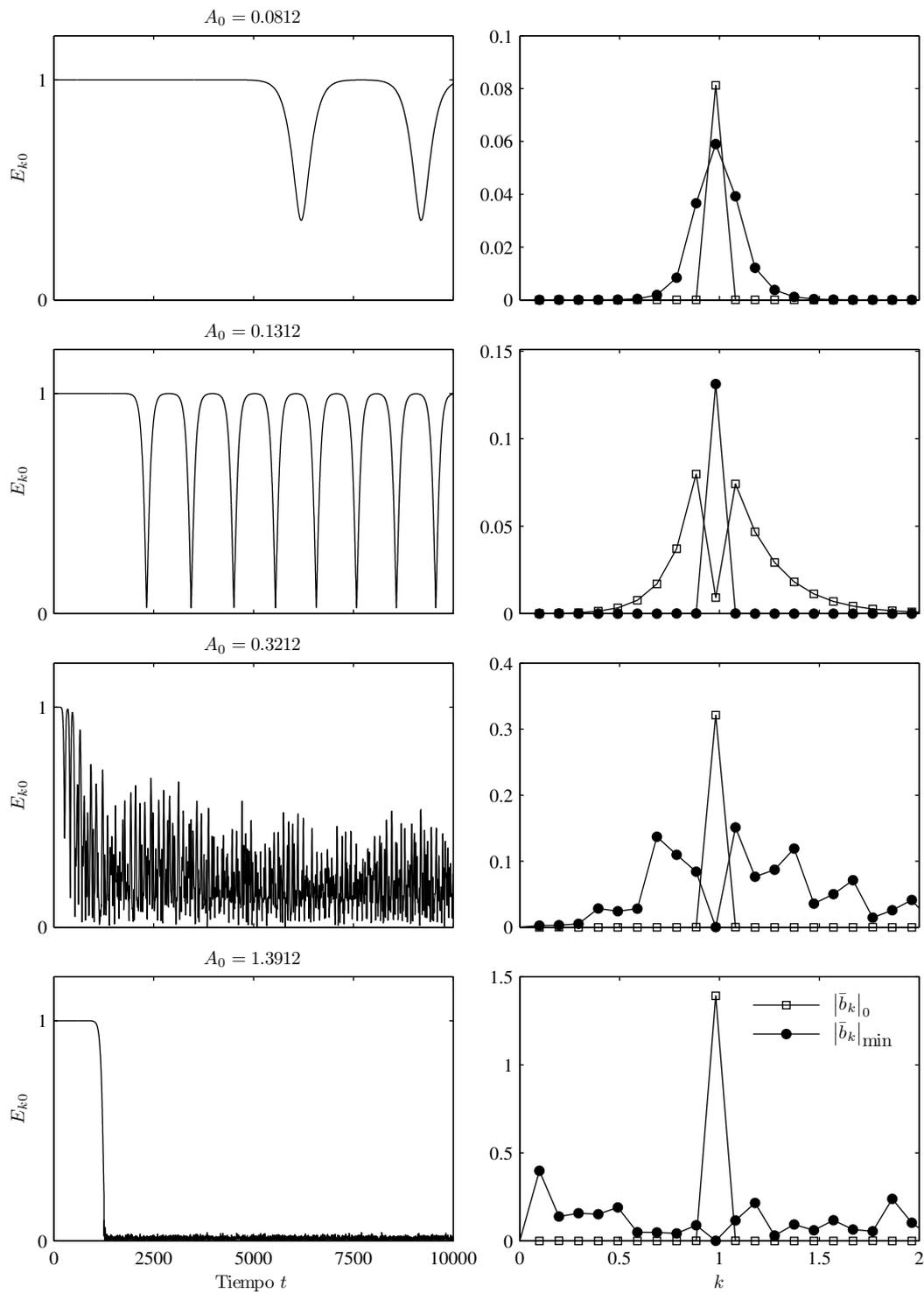


Figura 4.4: Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 10$

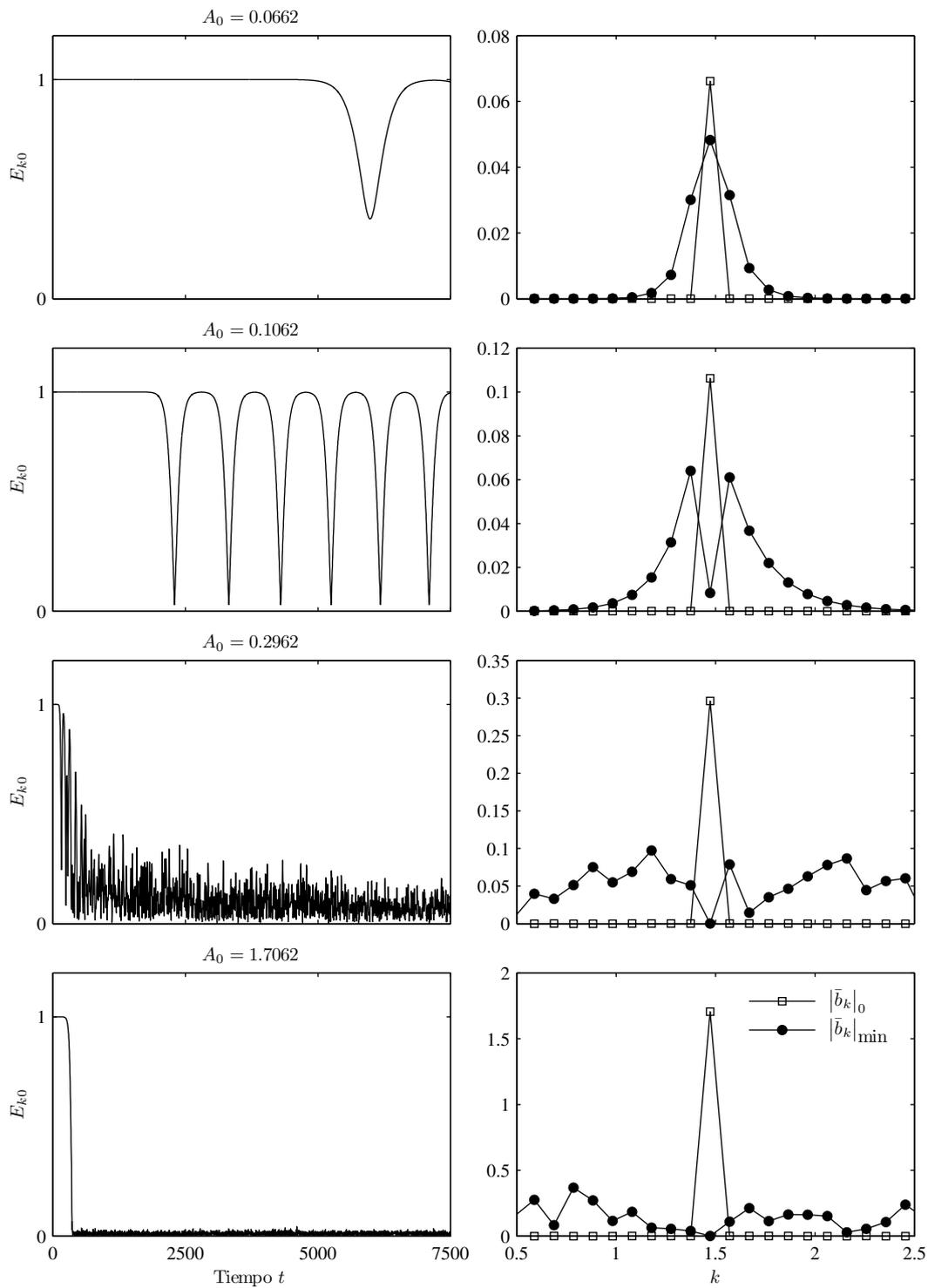


Figura 4.5: Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 15$

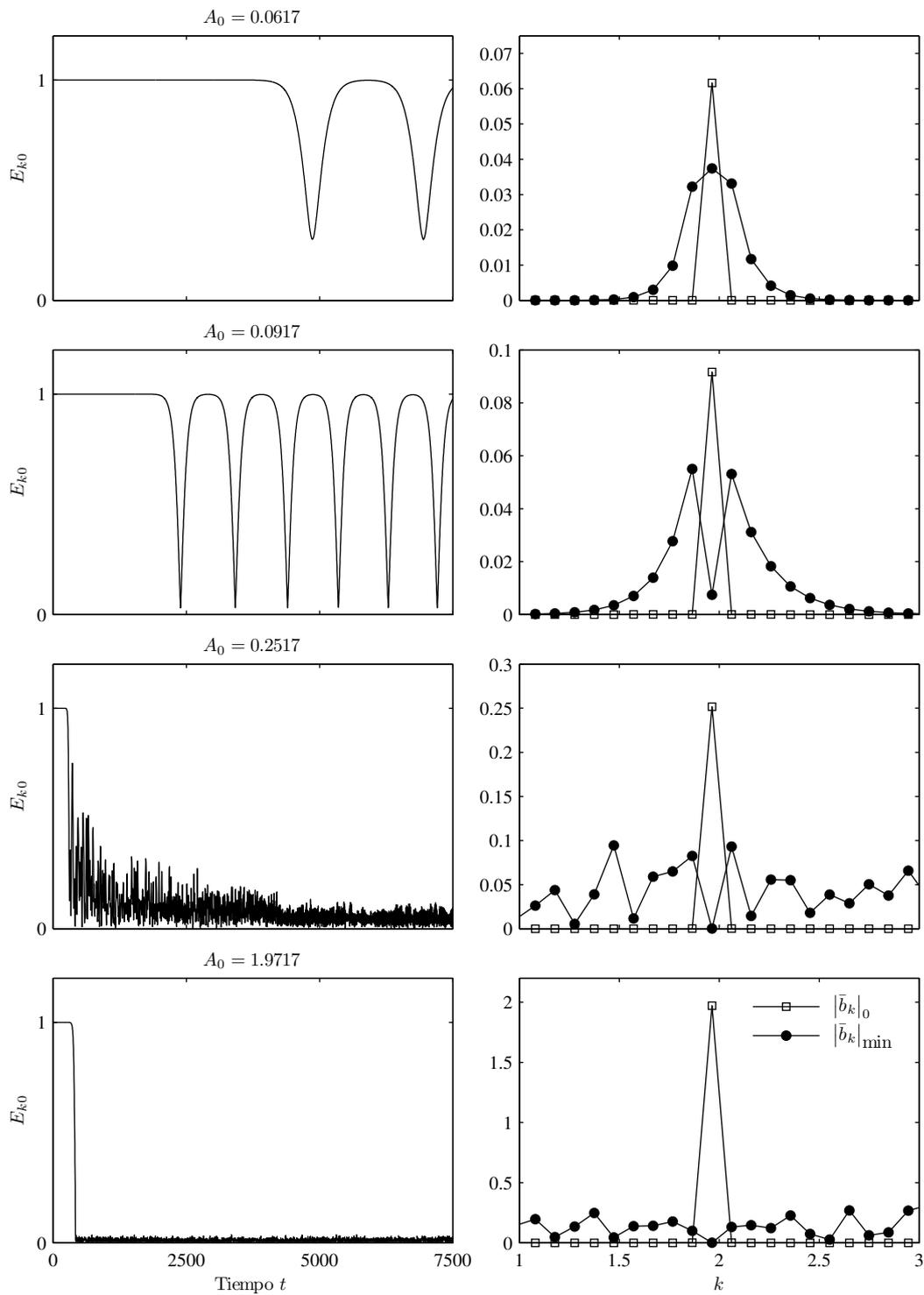


Figura 4.6: Evolución de la distribución de la energía en función del tiempo para distintos valores de amplitud de la onda inicial con $n_0 = 20$

4.3. DNLS no difusiva con condición inicial de tres ondas

Los resultados obtenidos en la sección anterior para el caso de valores de amplitud relativamente pequeños, en los cuales se produce una evolución cuasi periódica, muestran que la energía se reparte fundamentalmente entre tres ondas: la onda inicial o madre identificada con el número de onda k_0 , y dos ondas hijas (k_1 y k_2) que cumplen la relación de resonancia $2k_0 = k_1 + k_2$. Este comportamiento amerita realizar un análisis de la ecuación DNLS con condición inicial de tres ondas circularmente polarizadas que verifican dicha relación y tienen la siguiente forma:

$$b(z, 0) = b_0 = \sum_{j=0}^2 \sqrt{k_j N_j} e^{ik_j z}, \quad (4.17)$$

donde los números de onda k_j están dados por la Ec. (4.12), siendo

$$n_{1,2} = (1 \mp \delta) n_0, \quad (4.18)$$

El parámetro δ se toma de manera tal de maximizar el crecimiento de la inestabilidad modular para ondas madre polarizadas a izquierda, resultando (Sánchez-Arriaga, 2009)

$$\delta = \sqrt{N_0 - \frac{N_0^2}{2}}. \quad (4.19)$$

Los factores N_j en las amplitudes normalizadas $\sqrt{k_j N_j}$ de las ondas iniciales se parametrizan mediante un coeficiente q que describe cómo se reparte la energía y un factor m que cuantifica el nivel de energía que se ingresa al sistema:

$$N_0 = q m, \quad N_{1,2} = \frac{1 - q}{2} m. \quad (4.20)$$

Establecidas de esta forma, las tres ondas iniciales cumplen la condición de periodicidad $b(z, 0) = b(z + L, 0)$ necesaria para la aplicación de los métodos espectrales basados en expansiones de Fourier y además verifican la relación de resonancia entre la onda madre y las ondas hijas ($2k_0 = k_1 + k_2$).

Para evaluar los resultados de las simulaciones, de manera similar a lo realizado para el caso con condición inicial de una onda, se utiliza un parámetro que representa la relación entre la energía contenida en los tres modos iniciales y la energía total del sistema:

$$E_k = \frac{|\bar{b}_{k0}| + |\bar{b}_{k1}| + |\bar{b}_{k2}|}{\sum_{j=1}^N |\bar{b}_{kj}|}. \quad (4.21)$$

Valores del parámetro E_k próximos a la unidad indican que la energía se encuentra distribuida fundamentalmente en las tres ondas iniciales, mientras que valores más bajos significan que la energía se encuentra distribuida en un número mayor de modos.

4.3.1. Resultados numéricos de la ecuación DNLS con condición inicial de tres ondas

El primer análisis consiste en evaluar la influencia del número total de modos N utilizado en la simulación, para lo cual se consideran plasmas fríos con ondas polarizadas a izquierda y a derecha, utilizando distintos números de onda madre n_0 . El objetivo del estudio es comparar

las soluciones obtenidas para valores de N crecientes y determinar cuál es la mínima cantidad de puntos en la discretización que reproduce de forma satisfactoria los resultados.

En las Figuras 4.7 a 4.9 se presenta la evolución del parámetro E_k dado en la Ec. (4.21) para números de onda madre $n_0 = 5, 10$ y 15 , con $m = 0,10$ y $q = 0,90$. Observando los gráficos se destaca que los resultados para $N = 64$ y $N = 128$ son sustancialmente diferentes de los obtenidos para $N = 256$ y $N = 512$ en los casos donde $n_0 \geq 10$, produciéndose además inestabilidad de las ondas polarizadas a derecha, las cuales deben permanecer estables (Buti et al., 2000).

De acuerdo a las figuras, los resultados correspondientes a $N = 256$ no difieren mayormente de los obtenidos con $N = 512$, verificándose en ambos casos valores similares para los tiempos de inestabilidad, más allá de pequeñas diferencias en las evoluciones posteriores. Este aspecto permite establecer que una cantidad de $N = 256$ puntos en la discretización es adecuada para reproducir los resultados, ya que los mismos obtenidos con ese valor son similares a los correspondientes a $N = 512$ que se suponen más aproximados asumiendo que la base de funciones de expansión de Fourier es completa. En adelante, a menos que se especifique lo contrario, todas las simulaciones llevadas a cabo en este trabajo se realizan tomando $N = 256$.

El siguiente análisis tiene como objetivo conocer de qué manera influyen los parámetros q y m que definen la distribución y el nivel de energía del sistema, respectivamente. Considerando nuevamente plasmas con $\beta \approx 0$ y ondas polarizadas a izquierda para que se produzca la inestabilidad, en las Figuras 4.10 a 4.12 se grafica la evolución del parámetro E_k en función del tiempo para números de onda madre $n_0 = 5, 10$ y 15 tomando distintas combinaciones de valores de q y m .

Observando las figuras se deduce en primera instancia que la influencia del nivel de energía ingresado al sistema y de su distribución es independiente del número de onda madre considerado. En todos los casos, el aumento del nivel de energía (incremento de m) significó un adelantamiento de la inestabilidad y un cambio en la evolución posterior de la solución, donde las ondas iniciales no pueden recuperar sus niveles de energía originales, produciéndose de este modo un comportamiento similar al observado en el caso de la DNLS con condición inicial de una onda, en el cual el aumento del valor de amplitud inicial generaba una evolución caótica impidiendo a la onda inicial recuperar su energía original. Por otro lado, para niveles bajos de energía relativa de la onda madre ($q \rightarrow 0$), es decir que la energía está concentrada mayoritariamente en las ondas hijas, producen el retraso de la inestabilidad, aunque el nivel de energía en el rango estable de las tres ondas iniciales decae en relación a la energía total del sistema, lo que indica que existen otros modos que adquieren importancia.

Para finalizar este estudio, se presenta una serie de gráficos con los cuales se busca conocer de qué manera se distribuye la energía entre los tres modos iniciales. En las Figuras 4.13 a 4.15 se muestra la evolución de la energía de cada uno de los modos resonantes iniciales para los casos de plasmas fríos, polarización izquierda, $m = 0,10$, $q = 0,90$ y $n_0 = 5, 10$ y 15 como los analizados previamente.

Se observa en las figuras que independientemente de la onda madre inicial considerada, el cambio en la energía relativa de cada modo es similar, y por lo tanto el comportamiento de cada uno de ellos se corresponde con el del parámetro E_k . Esto significa que cuando se produce la inestabilidad, los tres modos iniciales ceden proporcionalmente su energía.

Con este último análisis queda finalizado el estudio correspondiente a la ecuación DNLS sin efectos difusivos. En el capítulo siguiente se presenta el caso de la DNLS difusiva considerando distintos valores de amortiguamiento y utilizando como condición inicial tres ondas resonantes.

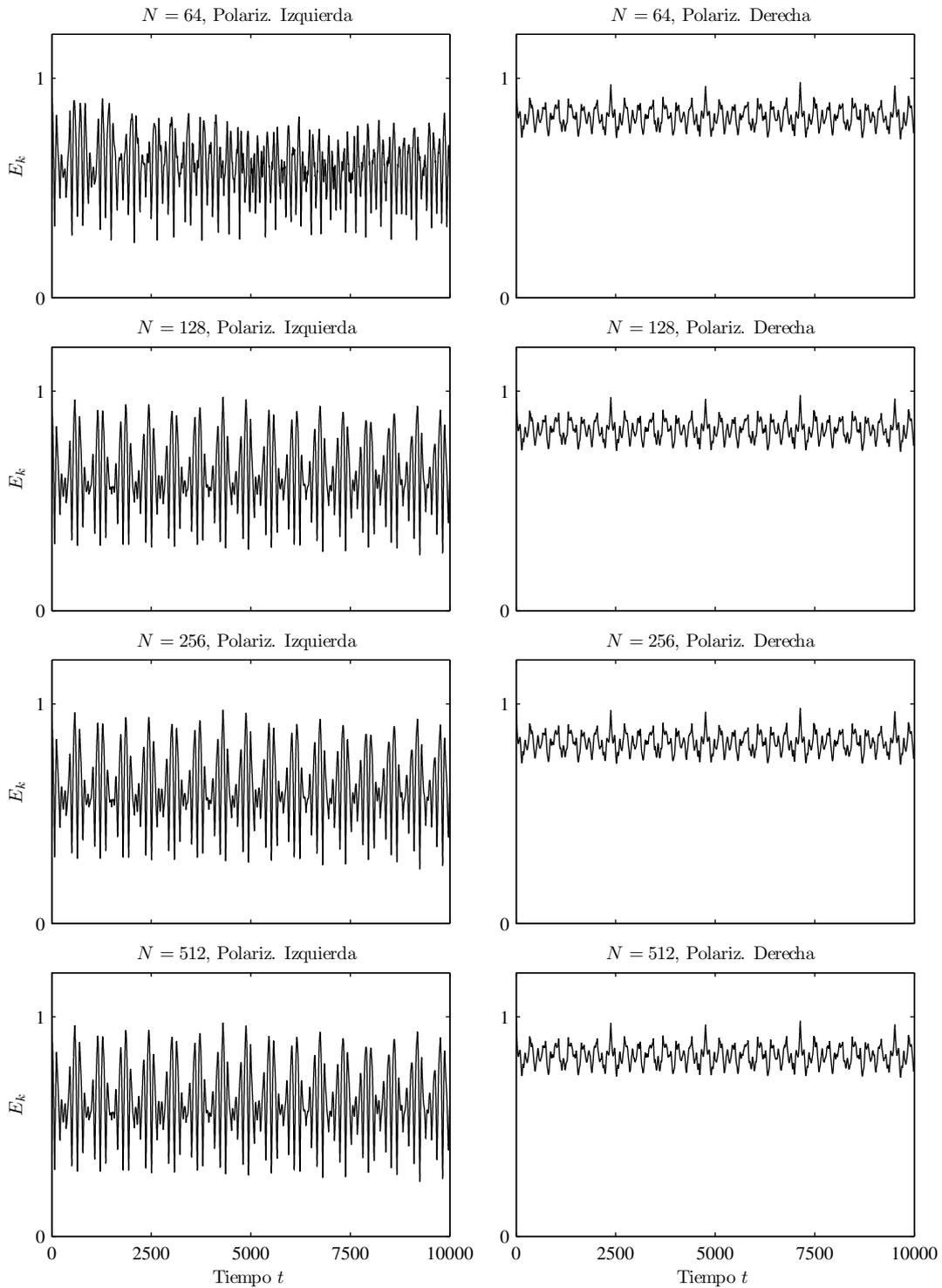


Figura 4.7: Sensibilidad al número de modos utilizado en la discretización para plasmas fríos con $q = 0,90$, $m = 0,10$, $n_0 = 5$ y condición inicial de tres ondas

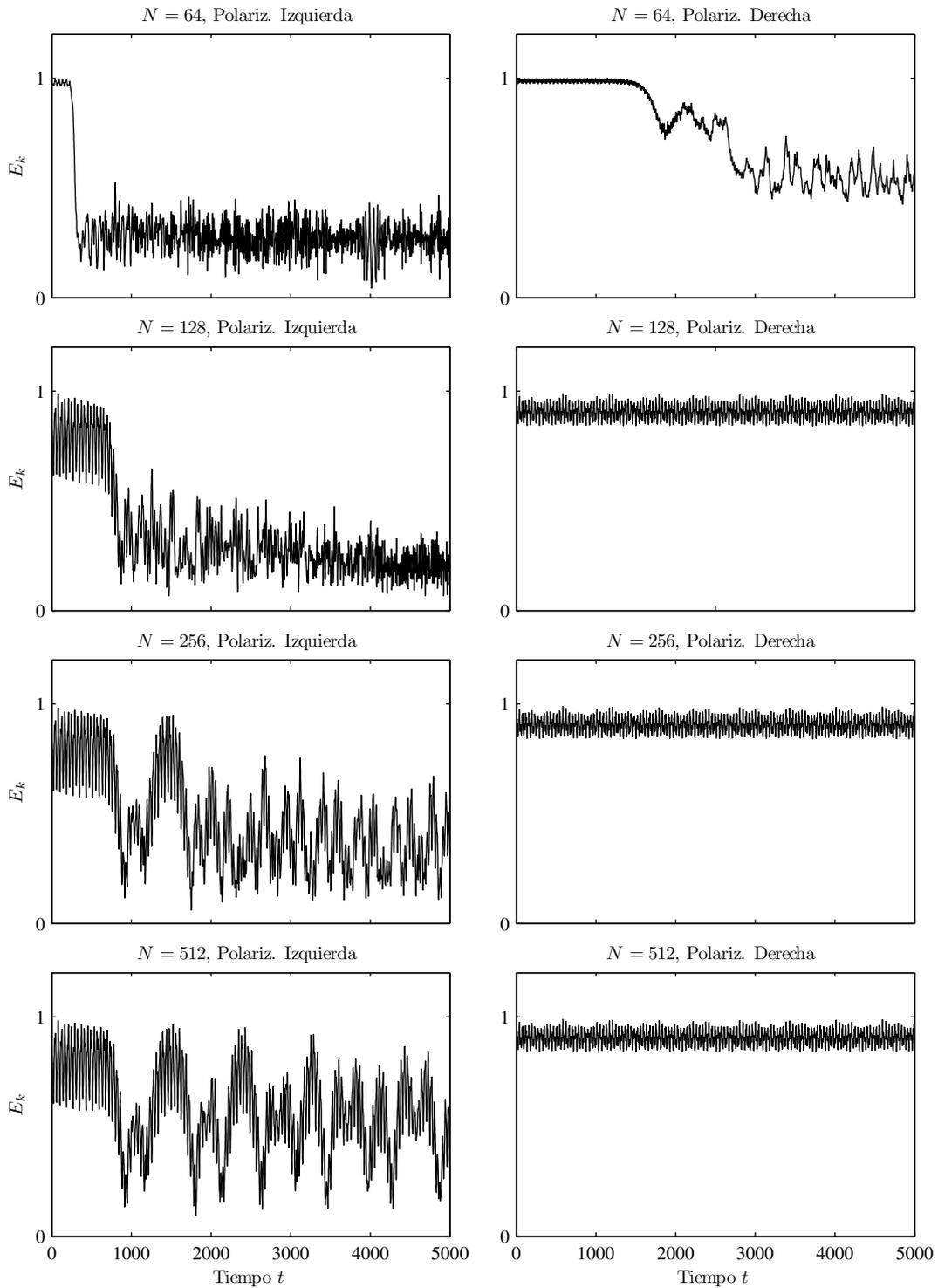


Figura 4.8: Sensibilidad al número de modos utilizado en la discretización para plasmas fríos con $q = 0,90$, $m = 0,10$, $n_0 = 10$ y condición inicial de tres ondas

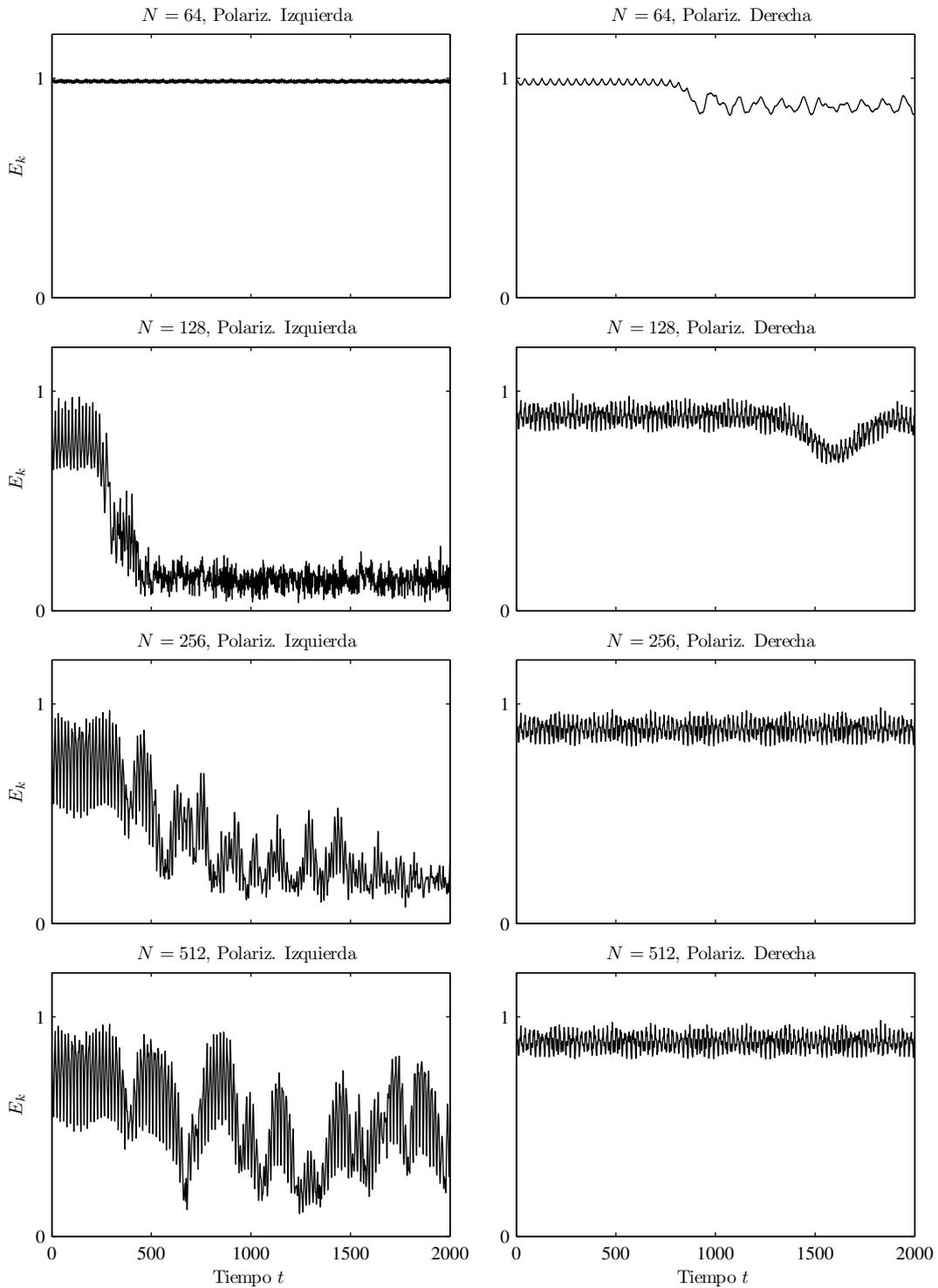


Figura 4.9: Sensibilidad al número de modos utilizado en la discretización para plasmas fríos con $q = 0,90$, $m = 0,10$, $n_0 = 15$ y condición inicial de tres ondas

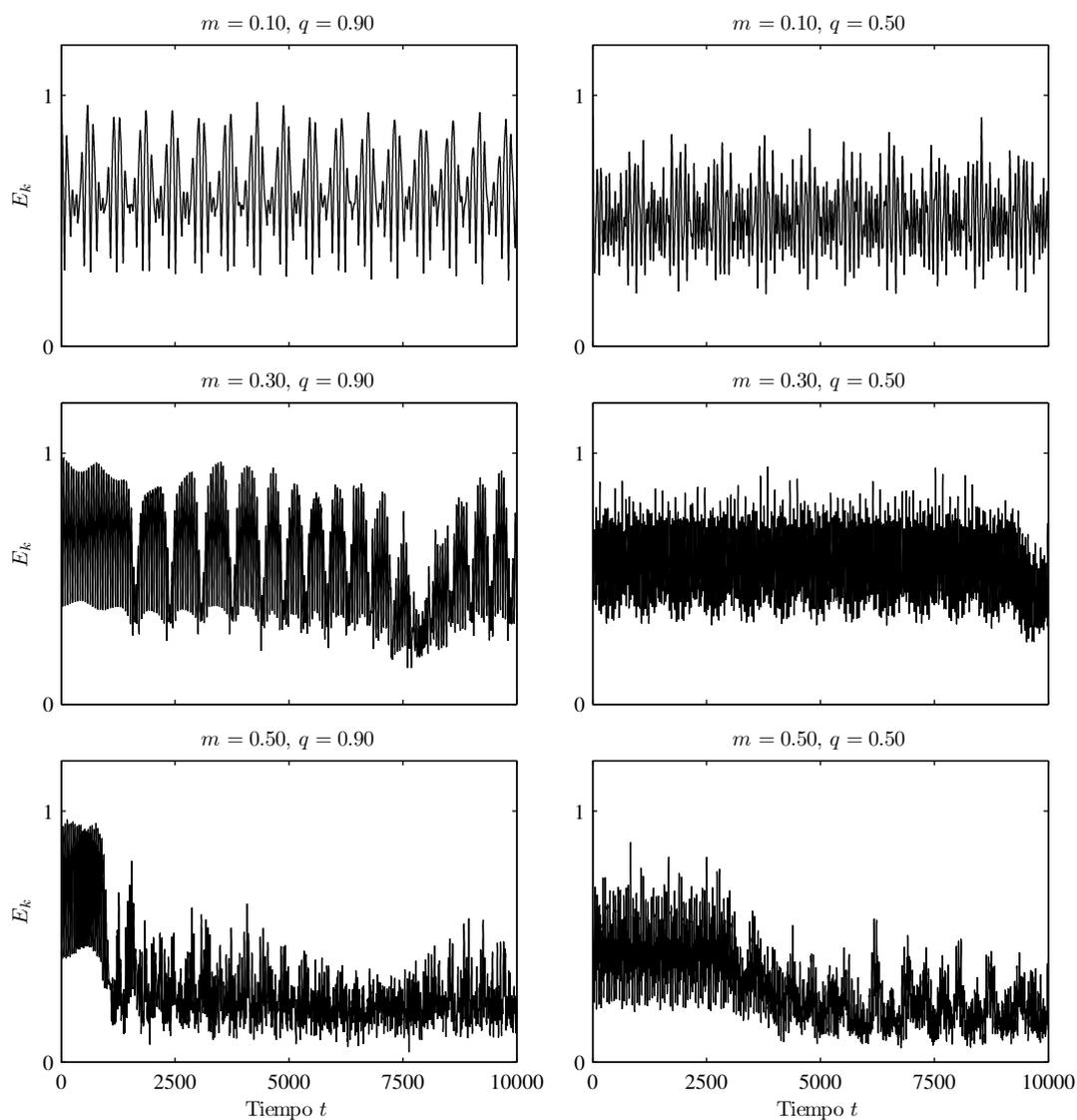


Figura 4.10: Influencia del nivel de energía (factor m) y de la distribución de la misma (coeficiente q) para plasmas fríos con $n_0 = 5$ y condición inicial de tres ondas

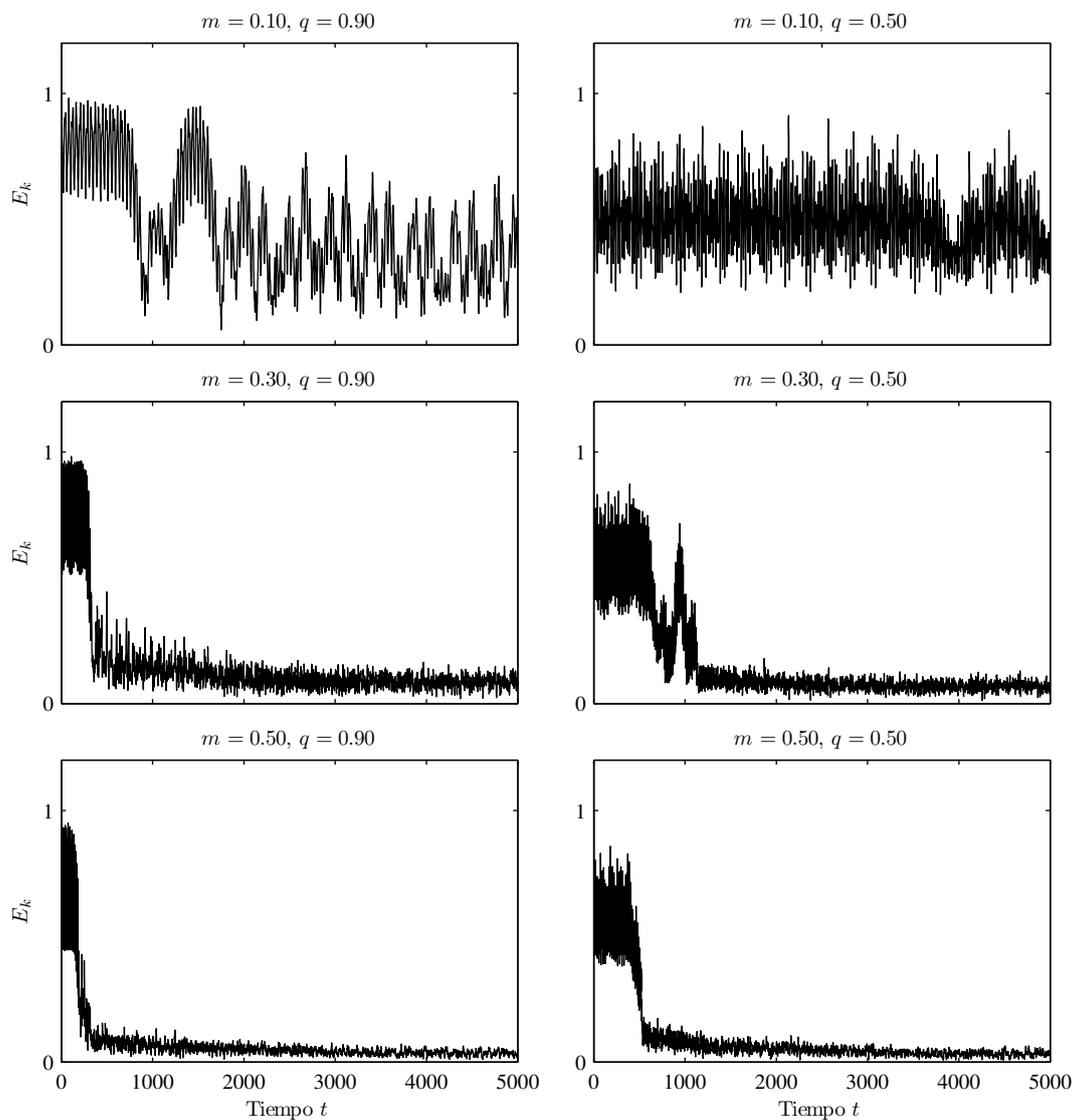


Figura 4.11: Influencia del nivel de energía (factor m) y de la distribución de la misma (coeficiente q) para plasmas fríos con $n_0 = 10$ y condición inicial de tres ondas

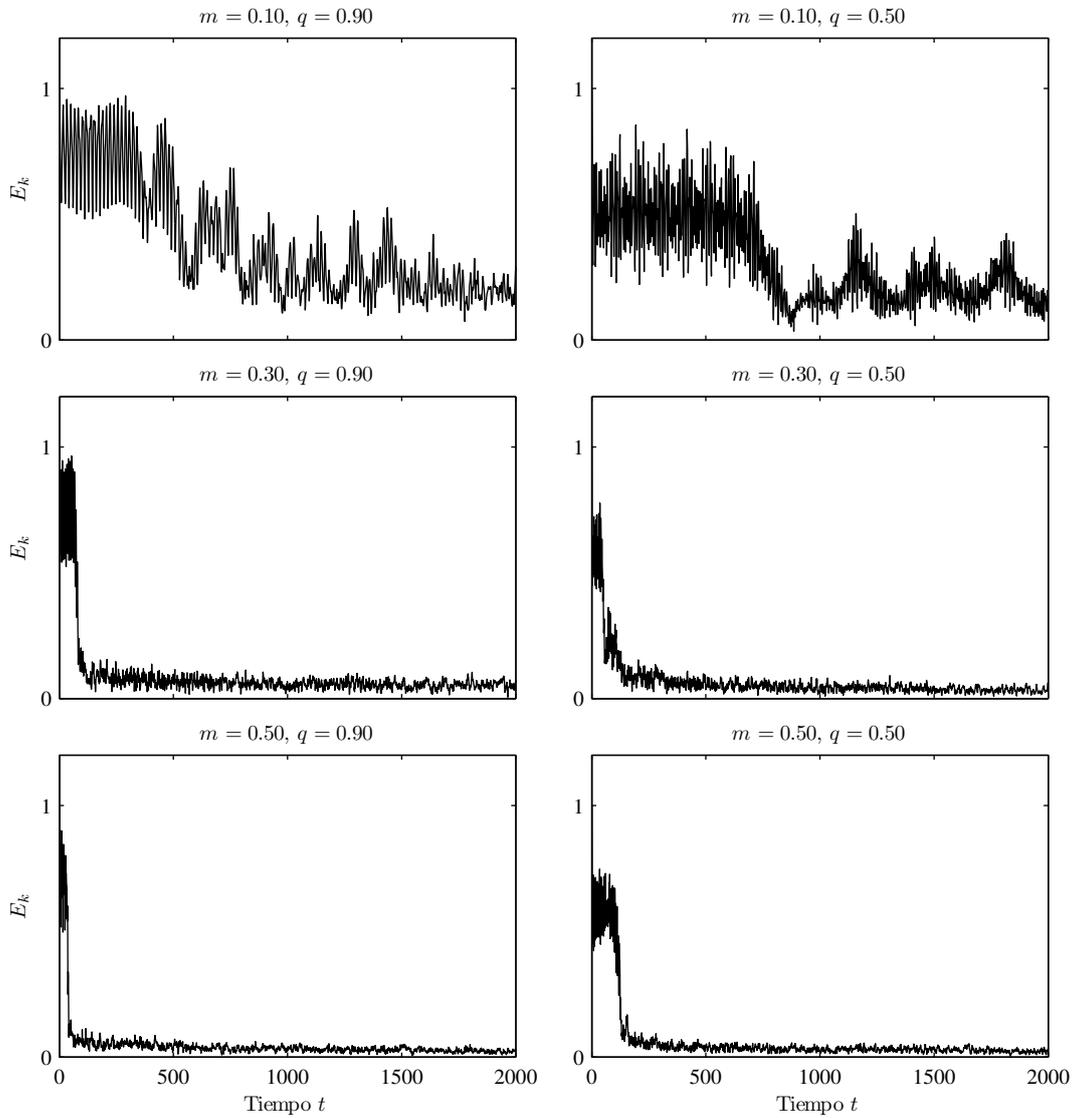


Figura 4.12: Influencia del nivel de energía (factor m) y de la distribución de la misma (coeficiente q) para plasmas fríos con $n_0 = 15$ y condición inicial de tres ondas

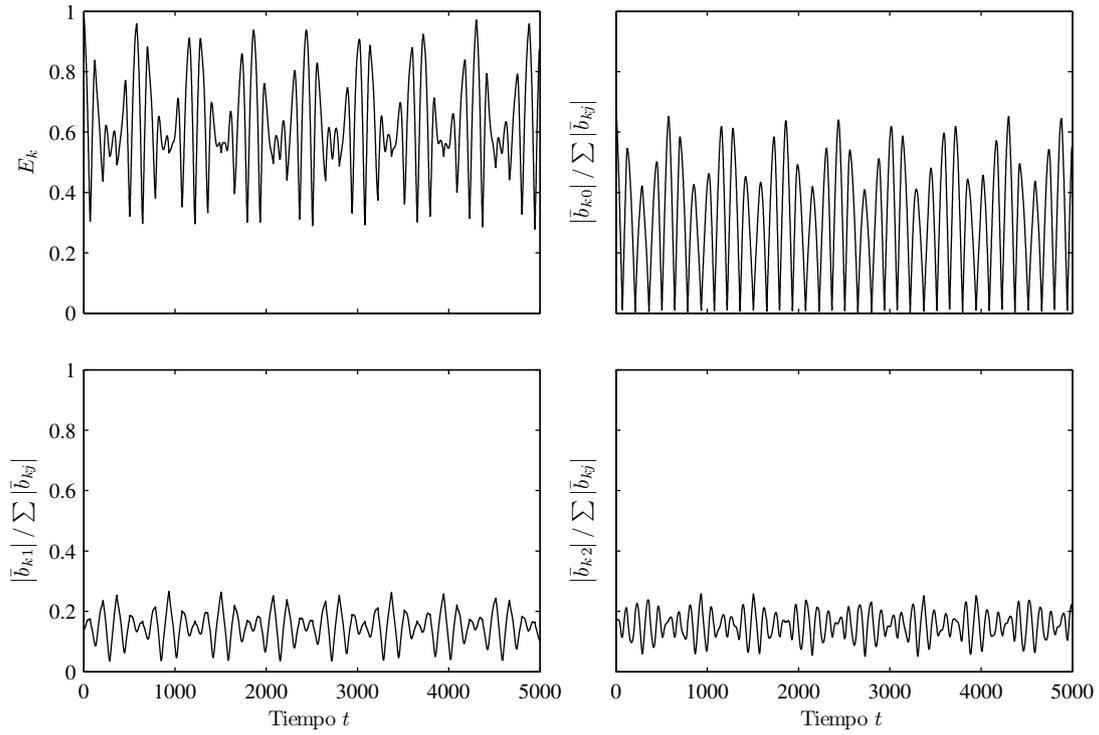


Figura 4.13: Evolución de la energía relativa de cada modo resonante para plasmas fríos, polarización izquierda, $m = 0,10$, $q = 0,90$ y $n_0 = 5$

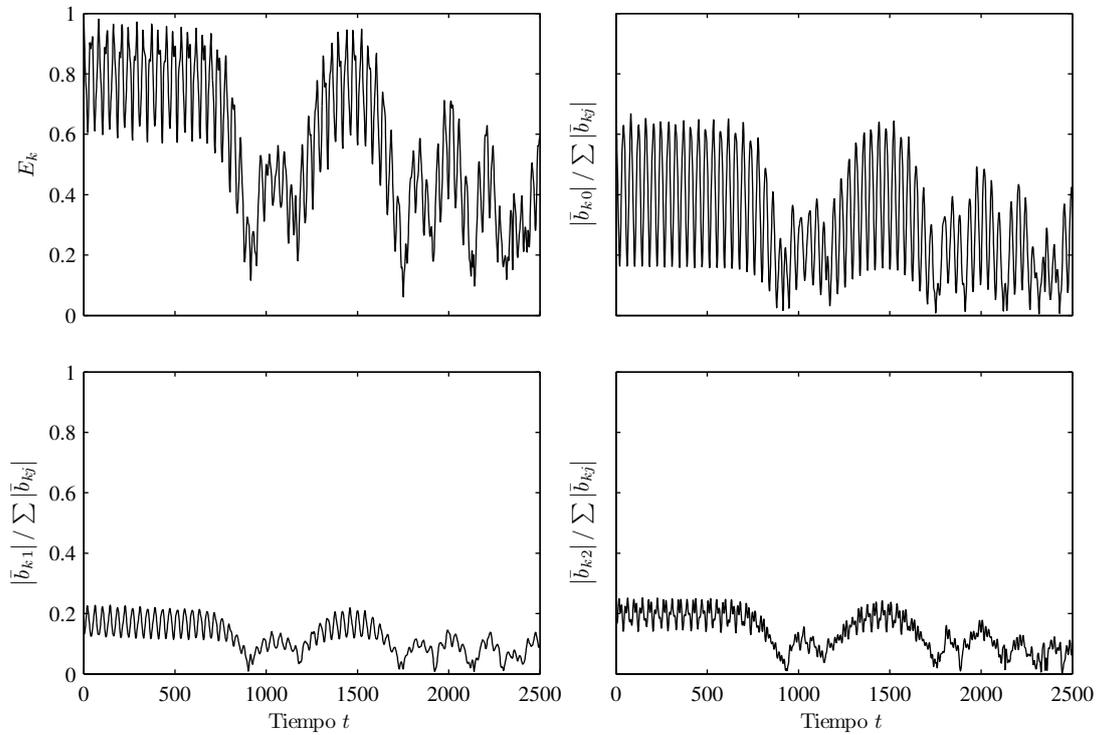


Figura 4.14: Evolución de la energía relativa de cada modo resonante para plasmas fríos, polarización izquierda, $m = 0,10$, $q = 0,90$ y $n_0 = 10$

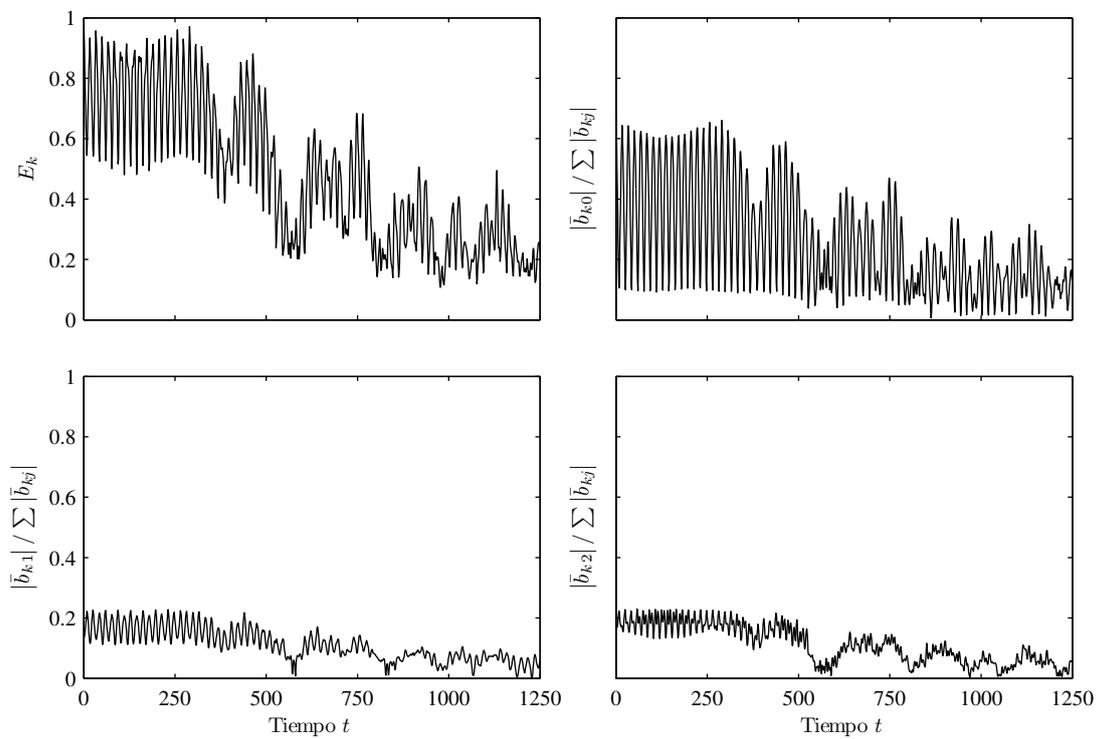


Figura 4.15: Evolución de la energía relativa de cada modo resonante para plasmas fríos, polarización izquierda, $m = 0,10$, $q = 0,90$ y $n_0 = 15$

Capítulo 5

Solución de la Ecuación DNLS con Efectos Difusivos

En este capítulo se presentan los resultados numéricos obtenidos para el caso de la ecuación DNLS considerando efectos difusivos. El objetivo del análisis es estudiar la transferencia de energía entre los diferentes modos para distintos valores de difusión, comparando los resultados de las simulaciones numéricas con aquellos hallados mediante técnicas de truncamiento.

El estudio se realiza para la ecuación DNLS difusiva con un modelo de amortiguamiento resistivo y ondas polarizadas a izquierda, considerando plasmas fríos con condición inicial de tres ondas cerca de resonancia, con un modo excitado y los restantes amortiguados. Las simulaciones numéricas permiten obtener una serie de atractores cuyos resultados se comparan con aquellos hallados por técnicas de truncamiento a tres ondas.

5.1. Consideraciones iniciales

Para un campo magnético sin perturbar B_0 alineado según el eje z de un marco de referencia que se mueve con velocidad de Alfvén en esa dirección, asumiendo plasmas fríos ($\beta \approx 0$) con ondas polarizadas a izquierda, la ecuación DNLS resulta (ver Capítulo 2):

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) + i \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \hat{\gamma} b = 0 \quad (5.1)$$

donde, de acuerdo a la Ec. (2.88), se ha tomado $\alpha = 1$ y las variables b , z y t son variables adimensionales según las Ecs. (2.84) y (2.85). El parámetro $\hat{\gamma}$ es el operador de excitación/amortiguamiento.

Para una discretización de N puntos, la derivada temporal de la Ec. (5.1) se resuelve mediante las expresiones (3.26) obtenidas en el Capítulo 3. Si se utiliza un operador de amortiguamiento característico de efectos difusivos de la forma

$$\hat{\gamma} = -\eta \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (5.2)$$

donde η es el coeficiente de amortiguamiento, resolviendo la derivada mediante la expresión dada en la Ec. (3.17) puede obtenerse para el punto genérico z_j :

$$\hat{\gamma} b_j = \mathcal{F}^{-1} [\eta k_j^2 \mathcal{F}[b_j]] \quad (5.3)$$

Con estas definiciones, y asumiendo que el modo identificado con el número de onda k_0 (onda madre) se encuentra excitado, la derivada temporal del campo magnético en la

ecuación DNLS se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[\frac{\partial b_j}{\partial t}\right] &= \mathcal{F}^{-1}\left[-k_j(k_j - 1)\operatorname{Im}[\mathcal{F}[b_j]] + k_j\operatorname{Im}\left[\mathcal{F}\left[|b_j|^2 b_j\right]\right]\right] + \\ &\quad + \mathcal{F}^{-1}\left[(\gamma_g\delta(k_j - k_0) - \eta k_j^2)\operatorname{Re}[\mathcal{F}[b_j]]\right], \\ \operatorname{Im}\left[\frac{\partial b_j}{\partial t}\right] &= \mathcal{F}^{-1}\left[k_j(k_j - 1)\operatorname{Re}[\mathcal{F}[b_j]] - k_j\operatorname{Re}\left[\mathcal{F}\left[|b_j|^2 b_j\right]\right]\right] + \\ &\quad + \mathcal{F}^{-1}\left[(\gamma_g\delta(k_j - k_0) - \eta k_j^2)\operatorname{Im}[\mathcal{F}[b_j]]\right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde los números de onda k_j están dados por

$$k_j = \frac{2\pi j}{L}, \quad (5.5)$$

y δ es la función delta de Dirac que se utiliza para representar la excitación de la onda madre identificada con k_0

$$\hat{\gamma}_0 = \gamma_g\delta(k - k_0) - \eta k_0^2. \quad (5.6)$$

De este modo la función de amortiguamiento/excitación $\hat{\gamma}$ en el espacio de Fourier queda representada por la Figura 5.1:

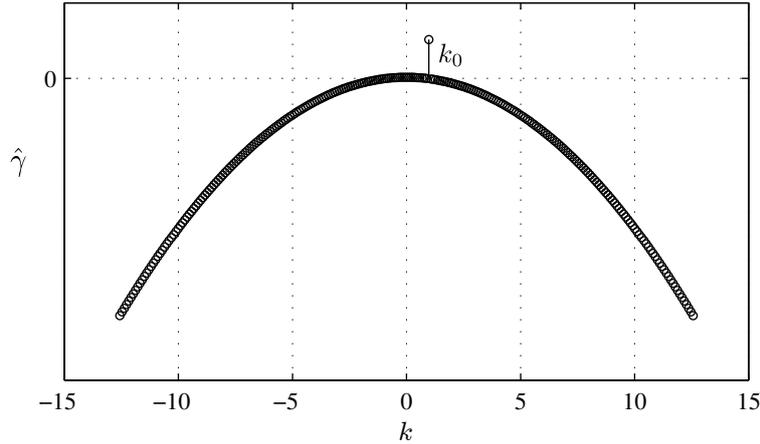


Figura 5.1: Función de amortiguamiento/excitación en el espacio de Fourier

La utilización de un operador de amortiguamiento como el indicado en la Ec. (5.2) es equivalente a asumir un modelo de amortiguamiento resistivo en el cual la disipación es proporcional a k_j^2 (Sanmartín et al., 2004):

$$\hat{\gamma}_j \approx \frac{V_A^2 k_j^2}{2\Omega_e \Omega_i \tau_c} = \eta k_j^2, \quad (5.7)$$

siendo V_A la velocidad de Alfvén, Ω_e y Ω_i las frecuencias de ciclotrón de los electrones y los iones, y τ_c el tiempo de colisión de Braginskii.

En las simulaciones se emplean condiciones iniciales de tres ondas cerca de resonancia ($2k_0 = k_1 + k_2$) como las utilizadas en la Sección 4.3

$$b(z, 0) = \sum_{j=0}^2 a_j e^{ik_j z}, \quad (5.8)$$

con números de onda $k_1 = (1 - \delta) k_0$ y $k_2 = (1 + \delta) k_0$. Planteadas de este modo las tres ondas iniciales cumplen la condición de periodicidad $b(z, 0) = b(z + L, 0)$ necesaria para la aplicación de métodos espectrales basados en expansiones en series de Fourier.

Durante la simulación la onda madre se encuentra excitada mientras que las restantes permanecen amortiguadas. La utilización de una configuración de este tipo, en la cual existe un modo inestable (excitado) y los modos restantes estables (amortiguados) obedece a que este modelo podría utilizarse para la descripción de la propagación de ondas magnetosónicas en amarras espaciales electrodinámicas que interactúan con la ionósfera terrestre y el campo magnético ambiente. El modo inestable se debe a la interacción paramétrica con las amarras mientras que los modos estables extraen energía del sistema a través de algún mecanismo disipativo (Sánchez-Arriaga, 2009).

Con el uso de técnicas de truncamiento se busca una solución aproximada de la ecuación DNLS consistente en tres ondas viajeras que satisfacen la condición de resonancia

$$b(z, t) = \sum_{j=0}^2 a_j e^{i(k_j z - \omega_j t + \phi_j)}, \quad (5.9)$$

siendo $a_j(t)$ y $\phi_j(t)$ números reales, con frecuencias que satisfacen la relación de dispersión no lineal sin pérdidas para ondas de Alfvén circularmente polarizadas $\omega_j = \mp k_j^2$.

Asumiendo que los modos no resonantes se amortiguan para $t \rightarrow \infty$ es posible determinar las amplitudes a_j máximas (ver Apéndice B) para los casos donde se cumplen las condiciones de existencia y estabilidad de los puntos fijos relacionadas con los valores de excitación y amortiguamiento de las ondas k_0 , k_1 y k_2 . Son estos valores de amplitudes máximas halladas por truncamiento los que se introducen en la Ec. (5.8) para definir una condición inicial de la DNLS para luego realizar la simulación y verificar si el resultado converge hacia algún atractor.

A los fines de realizar comparaciones entre los resultados obtenidos por las simulaciones numéricas y los hallados por truncamiento, se define la energía del campo magnético en todo el dominio:

$$E_m = \int_0^L |b|^2 dz, \quad (5.10)$$

donde para el caso de truncamiento se verifica

$$E_m = \int_0^L |b|^2 dz = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2) L. \quad (5.11)$$

Además de las comparaciones entre los valores de energía, es posible también evaluar las diferencias entre los valores de amplitudes del modelo de truncamiento con las correspondientes a los tres modos resonantes del modelo numérico cuando se alcanza el atractor.

5.2. Resultados numéricos

La evaluación de los resultados numéricos se realiza para una serie de atractores hallados para configuraciones iniciales con onda madre correspondiente a $n_0 = 9$ y excitación $\hat{\gamma}_0 = 0,02$. Los atractores se obtienen por medio de la simulación numérica dentro de determinados rangos de coeficientes de amortiguamiento η en función de los números de onda n_1 y n_2 de las ondas hijas consideradas.

Para poder realizar la comparación de los resultados numéricos con los del modelo de truncamiento a tres ondas, es necesario no sólo que se verifique la existencia de algún atractor,

sino que además persistan únicamente los modos resonantes iniciales y no aparezcan nuevos modos con porciones de energía relativa relevantes, ya que la técnica de truncamiento supone la existencia de los tres modos iniciales solamente.

De acuerdo a este criterio, en la Tabla 5.1 se especifican los atractores hallados numéricamente en función del coeficiente de amortiguamiento para las distintas configuraciones consideradas.

Atractor	Rango de amortiguamiento	n_1	n_0	n_2
A_8	$\eta \geq 0,04$	1	9	17
A_7	$\eta \geq 0,08$	2	9	16
A_6	$\eta \geq 0,05$	3	9	15
A_5	$\eta \geq 0,04$	4	9	14
A_4	$0,05 \leq \eta \leq 0,15$	5	9	13
A_3	$0,03 \leq \eta \leq 0,13$	6	9	12

Tabla 5.1: Rango de existencia de atractores en función del coeficiente de amortiguamiento para $\hat{\gamma}_0 = 0,02$

Para la obtención de los atractores se tiene en cuenta la convergencia del valor de energía E_m dado en la Ec. (5.10) y de las amplitudes a_0 , a_1 y a_2 de los modos resonantes iniciales, durante un intervalo de tiempo no menor a 2000 unidades. Se escoge este criterio debido a que pudo comprobarse tras numerosas simulaciones que independientemente de los números de ondas hijas n_1 y n_2 considerados inicialmente, todas las configuraciones convergen hacia el atractor A_8 para $t \rightarrow \infty$, esto es, las ondas hijas ceden toda su energía a los modos dados por $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$ y el sistema evoluciona hasta alcanzar los niveles de energía del atractor mencionado, mientras que los modos restantes del espectro permanecen con cantidades de energía despreciables. Para visualizar este comportamiento se presenta la Figura 5.2, en la cual se grafica la evolución de la energía en el tiempo para distintas configuraciones iniciales.

Como se ve en la figura, puede decirse que existen períodos de estabilidad transitoria donde las soluciones permanecen aproximadamente invariantes durante un cierto intervalo de tiempo, hasta que se produce en las mismas un salto abrupto hacia otro atractor. Si bien en la figura se indica la evolución de la energía, los valores de amplitud de las ondas iniciales registran un comportamiento similar, pero en el caso de las ondas hijas, en el momento del salto hacia el nuevo atractor, la energía de estas ondas cae hasta prácticamente anularse, ya que la misma se transfiere a los modos dados por $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$ correspondientes a las ondas hijas del atractor A_8 . La prevalencia de este atractor puede explicarse a partir del modelo de amortiguamiento utilizado, ya que el mismo implica que la difusión es proporcional al número de onda al cuadrado y de esta manera, para una configuración de modos que satisfacen la condición de resonancia, la máxima difusión sobre esos modos se produce para el caso del atractor A_8 .

El hecho de que estos intervalos de estabilidad transitoria sean en ocasiones relativamente largos, justifica el estudio de esas soluciones como si se tratara de atractores convencionales. En estas situaciones cabe la comparación con los resultados de las técnicas de truncamiento a tres ondas, ya que como se dijo anteriormente, en esos casos la energía se concentra fundamentalmente en los tres modos resonantes iniciales.

En cuanto a la evolución de la energía en las simulaciones numéricas, puede observarse en la Figura 5.2 que la convergencia de este valor hacia el atractor no se produce de manera estricta, sino que existen oscilaciones alrededor de un valor medio, como si se tratara de un ciclo límite. Sin embargo, numerosos ensayos numéricos permitieron demostrar que estas oscilaciones se deben a la discretización del dominio y no representan una característica

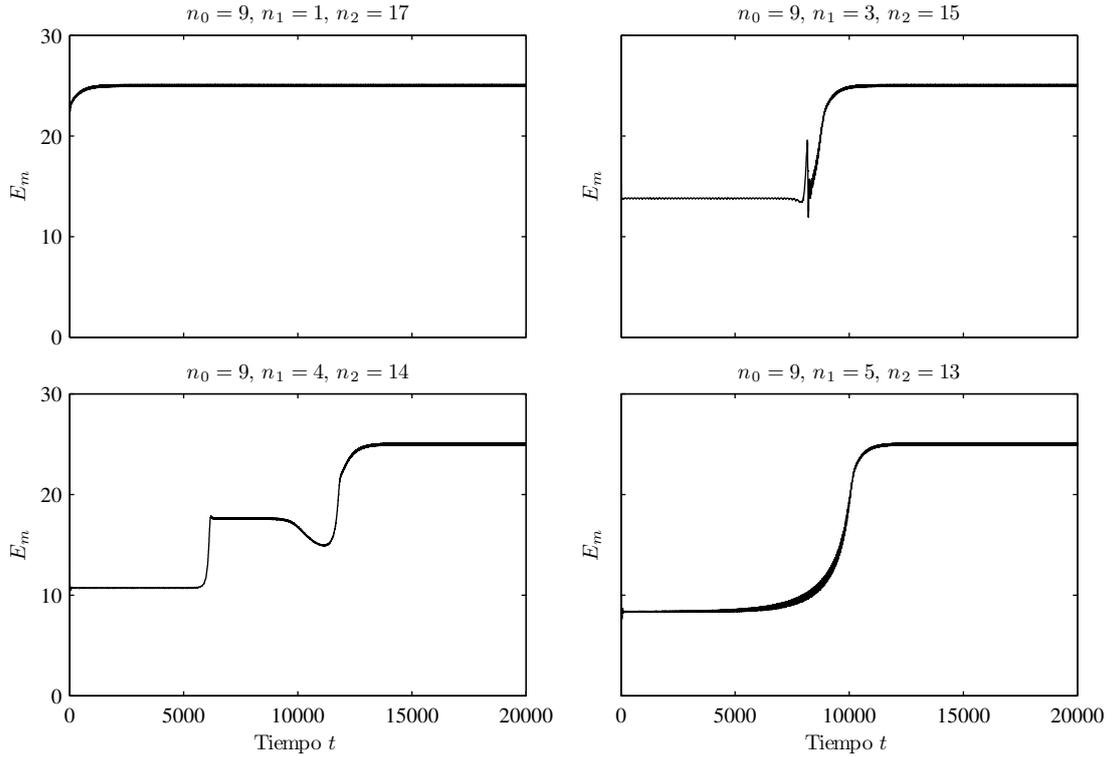


Figura 5.2: Evolución de la energía E_m para distintas configuraciones de ondas resonantes iniciales con $\eta = 0,12$ y $\hat{\gamma}_0 = 0,02$

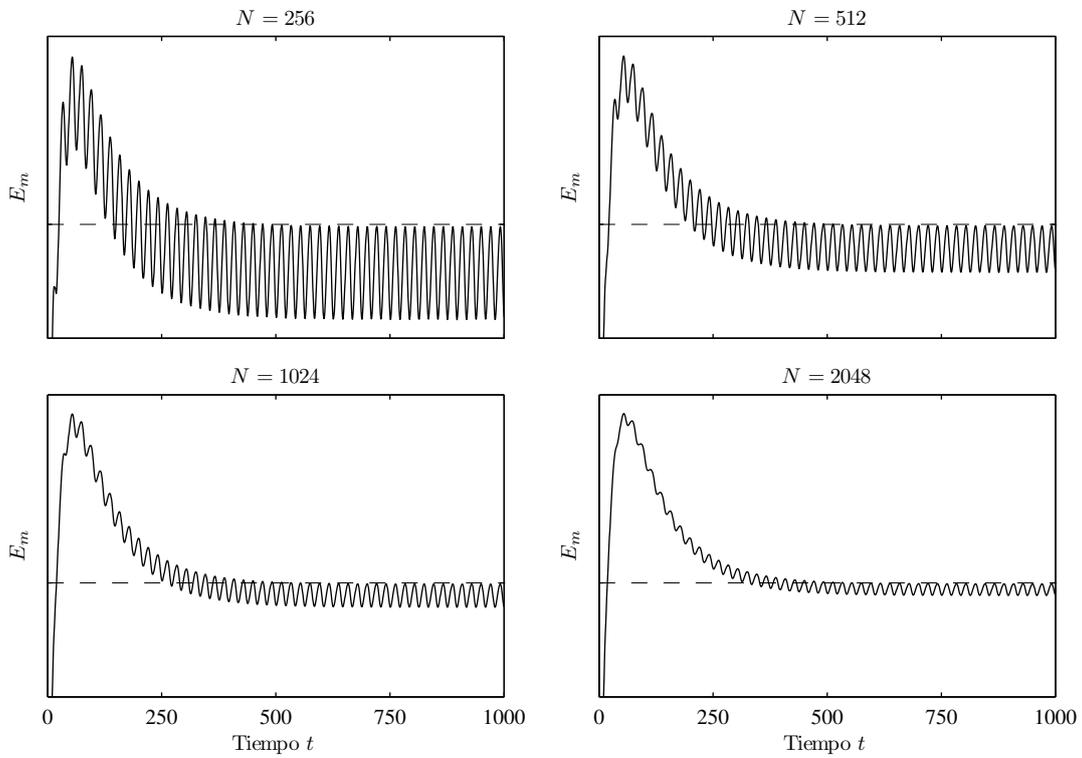


Figura 5.3: Influencia en la evolución de la energía del parámetro N para $n_0 = 9$, $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$, con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$ y $\eta = 0,30$

propia de la solución de la ecuación DNLS. Para demostrar esta situación se presenta la Figura 5.3, donde se grafica la evolución del parámetro E_m para simulaciones realizadas para distintos valores de N . En la figura se observa que al incrementar la cantidad de puntos de la grilla las oscilaciones disminuyen produciéndose una convergencia hacia los valores superiores de las mismas. Esta evolución oscilatoria no se registra en el caso de las amplitudes de los modos resonantes iniciales, por lo tanto el comportamiento oscilatorio de la energía se explica en el hecho de que el aumento de la cantidad de puntos en la discretización equivale a utilizar más modos en la serie de Fourier, los cuales si bien presentan niveles de energía muy bajos en comparación con los de los modos iniciales, su influencia cobra algo de importancia en la sumatoria total representada en el parámetro E_m . No obstante lo detallado anteriormente, hay que destacar que estas oscilaciones son pequeñas frente al valor de energía aun para el caso de $N = 256$, sólo que en la figura se ha amplificado la región para mejorar la visualización. Más allá de estos comentarios, el aspecto más importante del comportamiento radica en la posibilidad de determinar el valor de la energía sin necesidad de utilizar grillas excesivamente densas, ya que esto implica un aumento desproporcionado del costo computacional.

Teniendo en cuenta lo detallado en el párrafo anterior, en todas las simulaciones se utiliza una discretización de $N = 256$ puntos, longitud de integración $L = 64$ y paso de integración temporal $\tau = 0,001$, considerándose ondas polarizadas a izquierda y plasmas fríos. Los resultados presentados se obtuvieron con el esquema de filtrado por aliasing de Orszag, aunque hay que destacar que al igual que en el caso no difusivo, pudo comprobarse que las soluciones no se alteran si se utiliza el esquema de Philips.

5.2.1. Análisis de los Resultados

Para el análisis de los resultados se presenta una serie de figuras en las cuales se grafican los resultados correspondientes a la energía E_m y a las amplitudes a_0 , a_1 y a_2 de las ondas iniciales. En cada figura los símbolos circulares indican los resultados obtenidos mediante las simulaciones numéricas por métodos espectrales, mientras que en trazo continuo se representan los valores que predice la técnica de truncamiento a tres ondas.

5.2.1.1. Atractor A_8

En la Figura 5.4 se grafican los resultados correspondientes al atractor A_8 cuyos modos resonantes iniciales están dados por $n_0 = 9$, $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$. Según se aprecia en la figura, los resultados de ambos métodos presentan muy buena concordancia en casi todo el dominio de amortiguamiento considerado, a excepción de la región para $\eta \lesssim 0,15$, donde se visualizan discrepancias entre los valores de amplitudes de las ondas hijas a_1 y a_2 .

Para entender este comportamiento es conveniente analizar el espectro de energía que existe cuando se producen estas diferencias. Con este propósito se confecciona la Figura 5.5, en la cual se grafica la amplitud de cada onda en función del número de onda, destacando en línea de trazos los números de onda resonantes, para dos valores de η en los cuales se presentan comportamientos distintos.

Puede observarse en la figura que la discrepancia en los resultados para valores bajos de amortiguamiento se debe a dos situaciones: en primer lugar una diferencia en el cálculo de las amplitudes correspondientes a las ondas hijas k_1 y k_2 , la cual también puede apreciarse en la Figura 5.4; y en segundo lugar la aparición de nuevos modos con niveles de energía considerables además de los tres modos resonantes iniciales. En el caso opuesto, para valores del coeficiente η mayores sólo la energía de los tres modos resonantes es relevante y las amplitudes calculadas por ambos métodos presentan valores similares.

Lo destacable de la aparición de estos nuevos modos para valores $\eta \rightarrow 0$ es que los mismos verifican la relación de resonancia con la onda madre inicial. Identificando con k_3 y k_4 a los

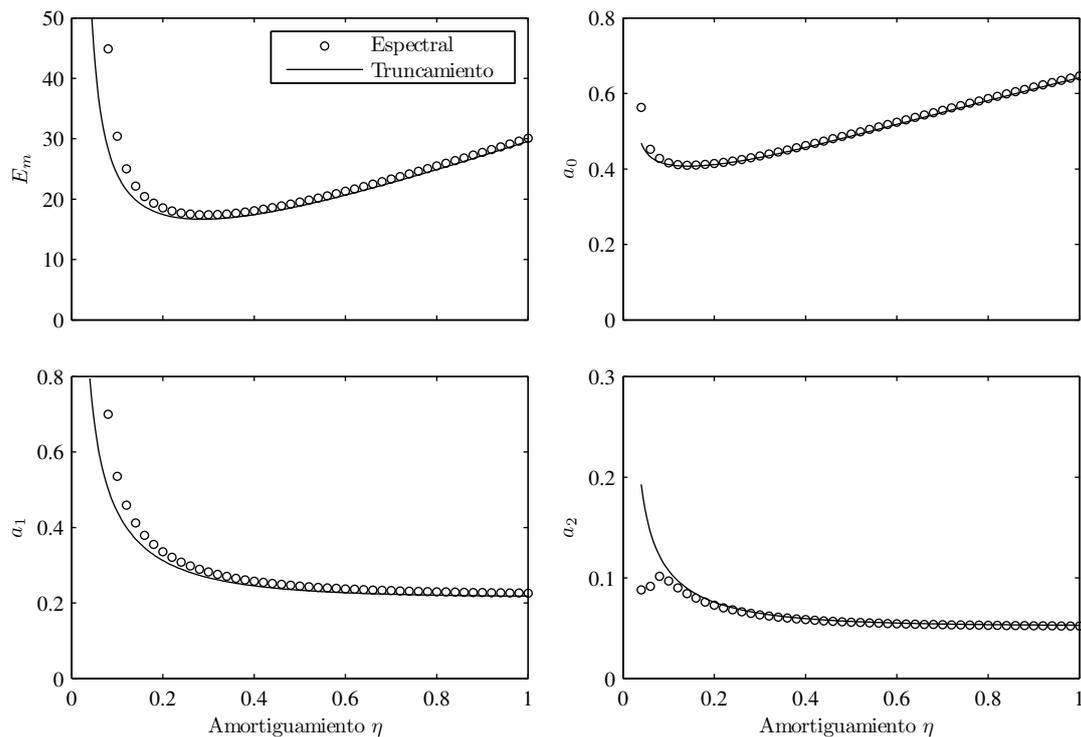


Figura 5.4: Atractor A_8 ($n_0 = 9$, $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)

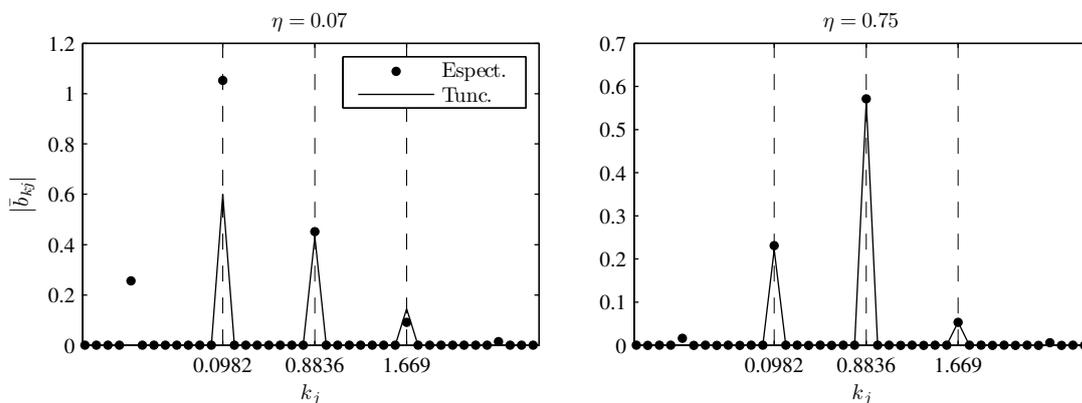


Figura 5.5: Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_8

nuevos modos, siendo $k_3 < k_1 < k_0 < k_2 < k_4$, se cumple que $2k_0 = k_1 + k_2 = k_3 + k_4$ y además $k_4 - k_3 = 2(k_2 - k_1)$. Estas relaciones no sólo se producen en el caso particular de este atractor sino que, como se verá más adelante, el mismo está presente en todos los casos analizados.

5.2.1.2. Atractor A_7

Los resultados del atractor A_7 dado por $n_0 = 9$, $n_1 = 2$ y $n_2 = 16$ se presentan en la Figura 5.6. En la misma se observa que, a diferencia de lo ocurrido en el caso anterior, la concordancia entre los resultados de ambos métodos es muy buena en todo el rango de amortiguamiento analizado, verificándose esta situación tanto en los valores de energía como en los de amplitud de las ondas resonantes iniciales. Esta correlación indica que para

este atractor la energía permanece concentrada en los tres modos iniciales aun cuando se consideran coeficientes de amortiguamiento pequeños, y no se transfiere hacia otros modos en cantidades relevantes, lo cual naturalmente repercute en la buena concordancia entre los resultados de las simulaciones numéricas y el modelo de truncamiento. Sin embargo, no hay que olvidar que si se consideran evoluciones para tiempos más prolongados, este atractor ya no se verifica y el sistema converge al atractor A_8 registrándose resultados como los indicados anteriormente.

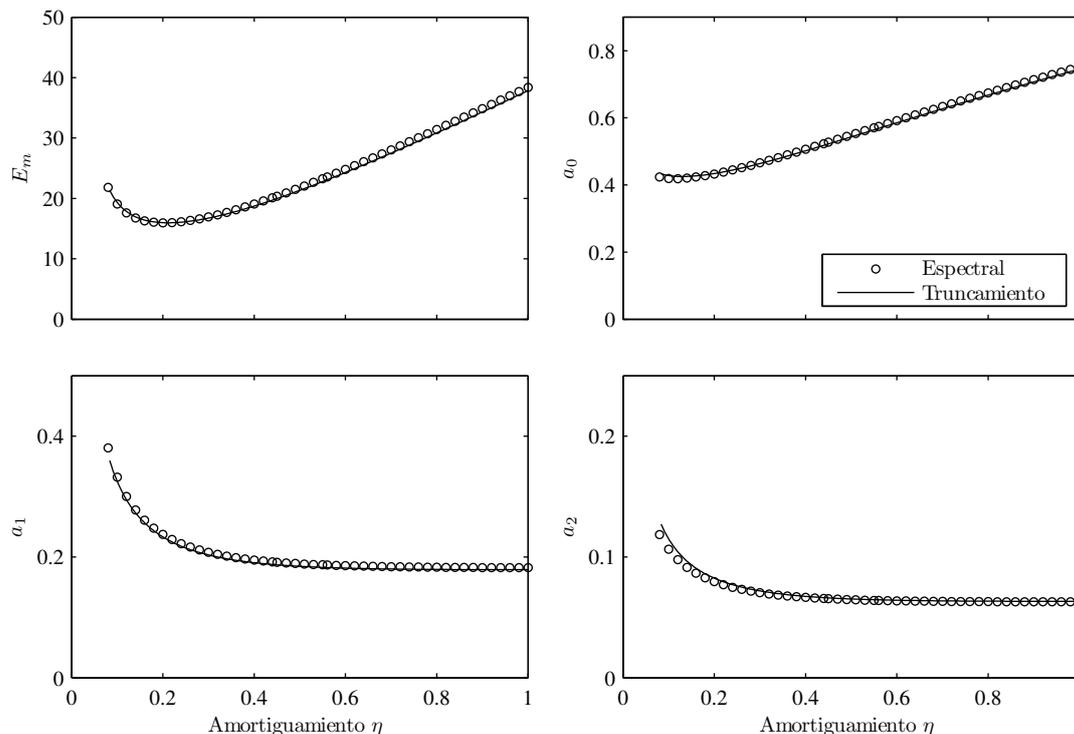


Figura 5.6: Atractor A_7 ($n_0 = 9$, $n_1 = 2$ y $n_2 = 16$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)

5.2.1.3. Atractor A_6

El tercer atractor analizado es A_6 , el cual está definido por $n_0 = 9$, $n_1 = 3$ y $n_2 = 15$. En la Figura 5.7 se muestran los resultados obtenidos para esta configuración, donde se observa que de manera similar a lo ocurrido con el atractor A_8 , en este caso la concordancia entre los resultados de cada técnica es muy buena en casi todo el rango de amortiguamiento considerado, exceptuando la región donde $\eta \rightarrow 0$. De hecho, los resultados son muy similares para $\eta \gtrsim 0,20$, donde comienzan a registrarse discrepancias entre los valores de amplitud a_0 y a_2 , y consecuentemente de energía, cuando se disminuye el coeficiente de amortiguamiento.

De manera similar a lo realizado para el atractor A_8 , en la Figura 5.8 se grafica el espectro de energía para dos valores de η donde se registran comportamientos diferentes. En el caso de la región donde los resultados no concuerdan, se observa nuevamente la aparición de dos modos diferentes a los iniciales con niveles de energía no despreciables, los cuales verifican las mismas relaciones detalladas en el caso de A_8 . Por el contrario, para coeficientes de amortiguamiento mayores, la energía permanece en los modos resonantes iniciales, de igual manera a lo ocurrido anteriormente.

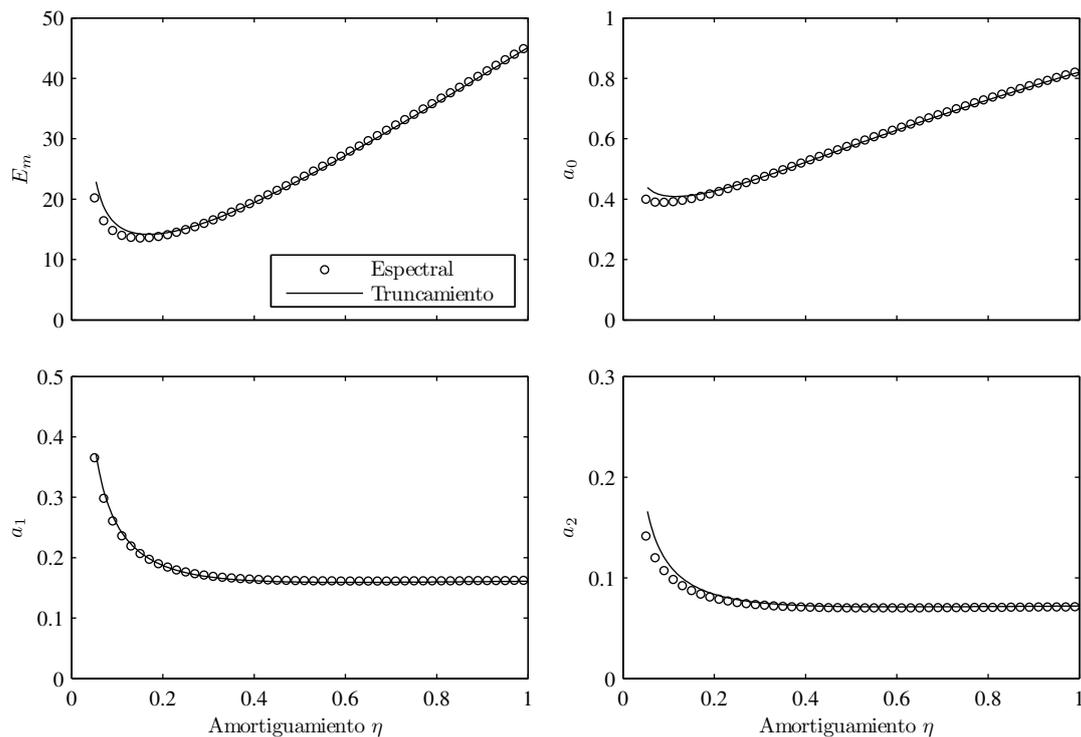


Figura 5.7: Atractor A_6 ($n_0 = 9$, $n_1 = 3$ y $n_2 = 15$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)

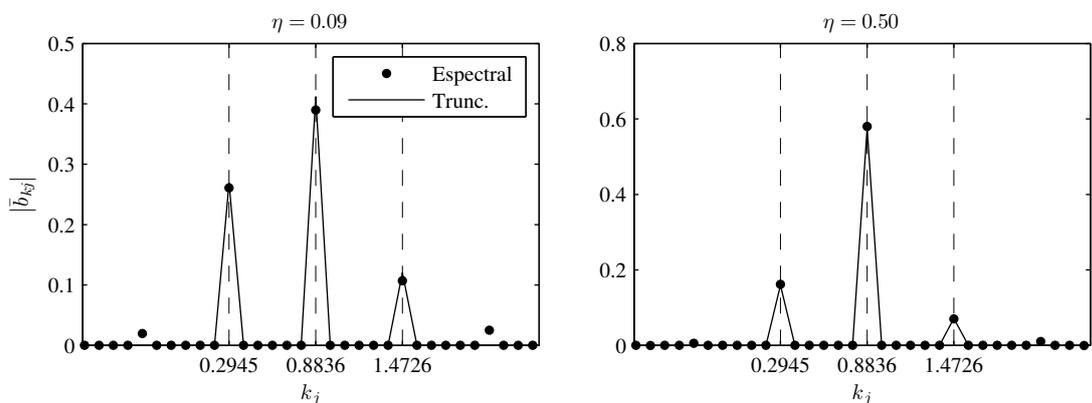


Figura 5.8: Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_6

5.2.1.4. Atractor A_5

El atractor A_5 está dado por $n_0 = 9$, $n_1 = 4$ y $n_2 = 14$, en la Figura 5.9 se presentan los resultados correspondientes al mismo. Se observa en la figura que para este atractor se produce una situación similar a la de los atractores A_8 y A_6 , es decir, una región de coeficientes de amortiguamiento relativamente grandes ($\eta \gtrsim 0,15$) donde la concordancia entre los resultados de ambos métodos es muy buena, y otra ($\eta \lesssim 0,15$) donde comienzan a aparecer discrepancias para $\eta \rightarrow 0$, aunque en este caso las mismas son más acentuadas.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, es posible predecir que estas diferencias se producen por la aparición de dos nuevos modos distintos a los tres modos resonantes iniciales, los cuales presentan niveles considerables de energía, lo cual hace fallar al método de truncamiento que supone solamente la existencia de tres modos. Para verificar esta hipótesis

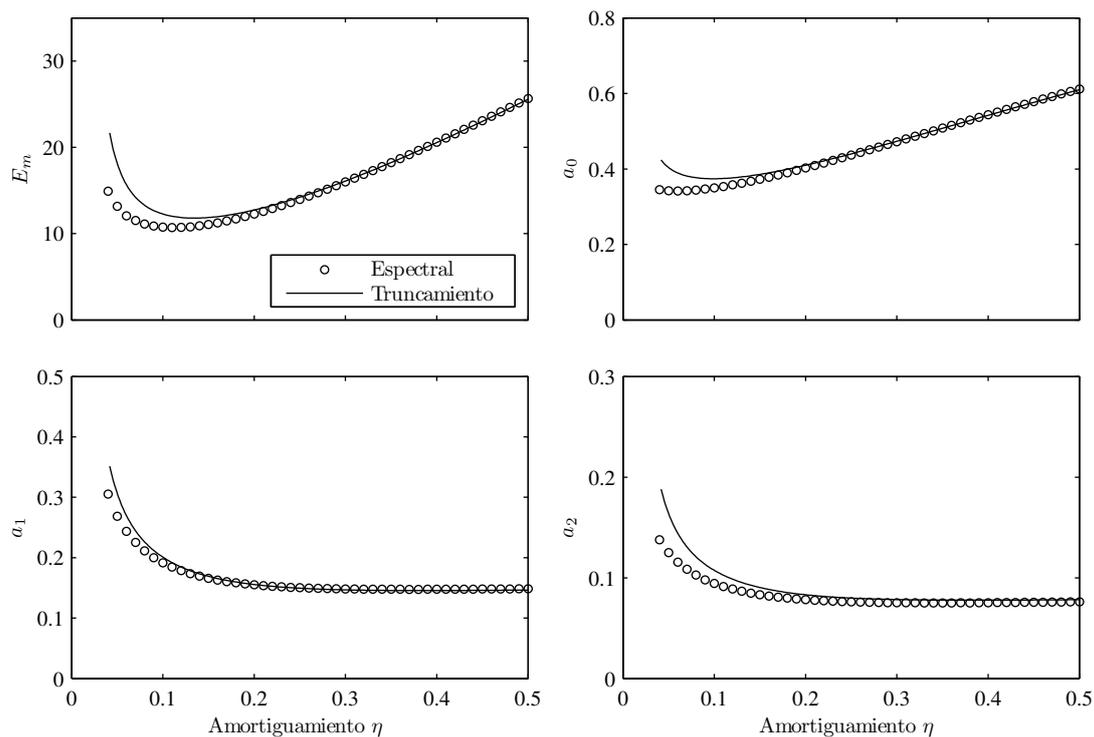


Figura 5.9: Atractor A_5 ($n_0 = 9$, $n_1 = 4$ y $n_2 = 14$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)

en la Figura 5.10 se grafica el espectro de energía en el espacio de Fourier para las dos situaciones.

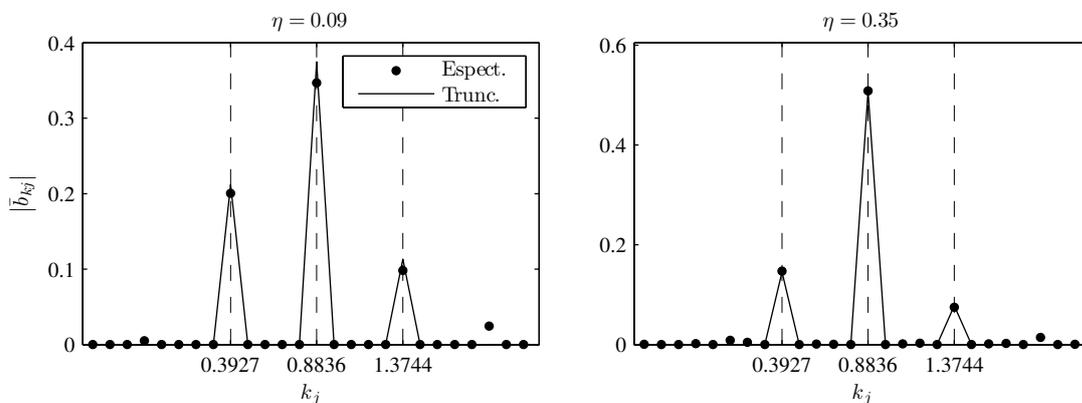


Figura 5.10: Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_5

Tal como se había anticipado y como ocurre en los casos anteriores, la aparición de los nuevos modos con niveles de energía no despreciables genera la discrepancia entre los resultados de cada método. Nuevamente, estos modos cumplen con las ondas iniciales las mismas relaciones que se explicaron para el atractor A_8 .

5.2.1.5. Atractor A_4

Continuando con el análisis, se presenta el estudio del atractor A_4 correspondiente a $n_0 = 9$, $n_1 = 5$ y $n_2 = 13$. Para ello en la Figura 5.11 se han graficado los resultados de

energía y amplitudes de los modos resonantes obtenidos por ambos métodos.

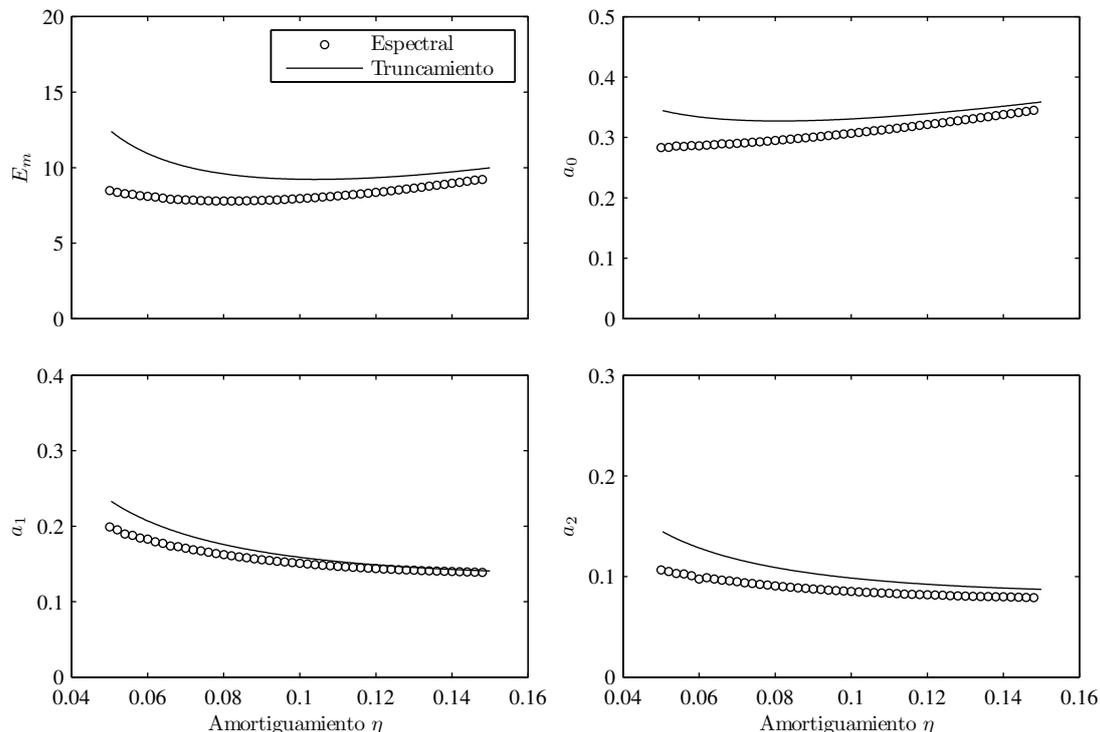


Figura 5.11: Atractor A_4 ($n_0 = 9$, $n_1 = 5$ y $n_2 = 13$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)

Analizando la figura se pueden diferenciar dos regiones en las cuales los resultados se comportan de manera diferente. En la primera de ellas, correspondiente a $\eta \gtrsim 0,10$, se observa una diferencia aproximadamente constante entre los valores obtenidos por las simulaciones numéricas y los de las técnicas de truncamiento. En la segunda región ($\eta \lesssim 0,10$) las discrepancias comienzan a incrementarse progresivamente con la disminución del coeficiente de amortiguamiento, tanto en los resultados de energía como en los de las amplitudes de los modos iniciales. Para entender estas diferencias en la Figura 5.12 se muestra la distribución de energía entre los distintos modos para ambas situaciones.

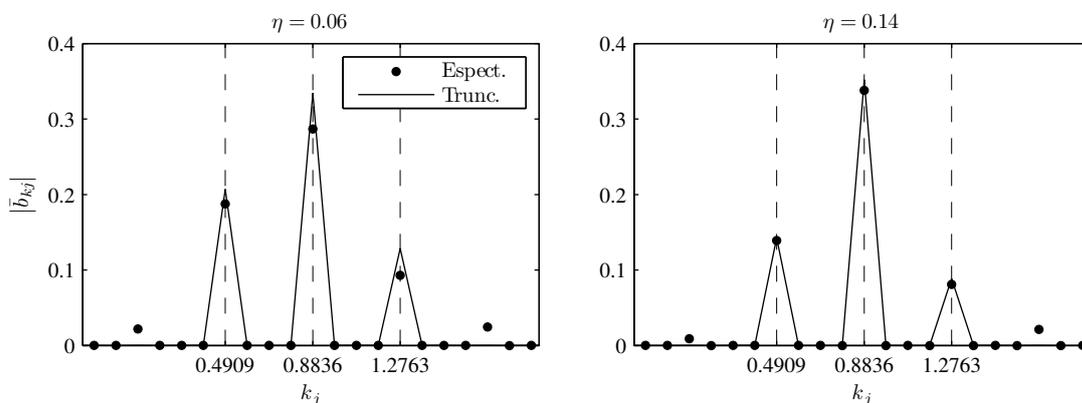


Figura 5.12: Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_4

La figura muestra que las distribuciones de energía presentan ciertas diferencias para cada caso. En el primero de ellos, además de la diferencia en el cómputo de las amplitudes de las

ondas iniciales, existen otros dos modos con niveles de energía relevantes, los cuales satisfacen las relaciones detalladas para el caso del atractor A_8 y que se verifican para todos los atractores donde los resultados presentan discrepancias cuando se utilizan coeficientes de amortiguamiento pequeños. En el otro extremo ($\eta = 0,14$), los resultados numéricos indican que aquí también existen dos modos no despreciables pero de menor energía que en el caso de amortiguamiento bajo, y además los valores obtenidos por el modelo de truncamiento para los modos iniciales se aproximan más a los de las simulaciones numéricas.

5.2.1.6. Atractor A_3

Finalizando el análisis se estudia el atractor A_3 cuyas ondas iniciales corresponden a $n_0 = 9$, $n_1 = 6$ y $n_2 = 12$. De igual manera que lo realizado hasta el momento, en la Figura 5.13 se disponen los resultados obtenidos por ambas técnicas.

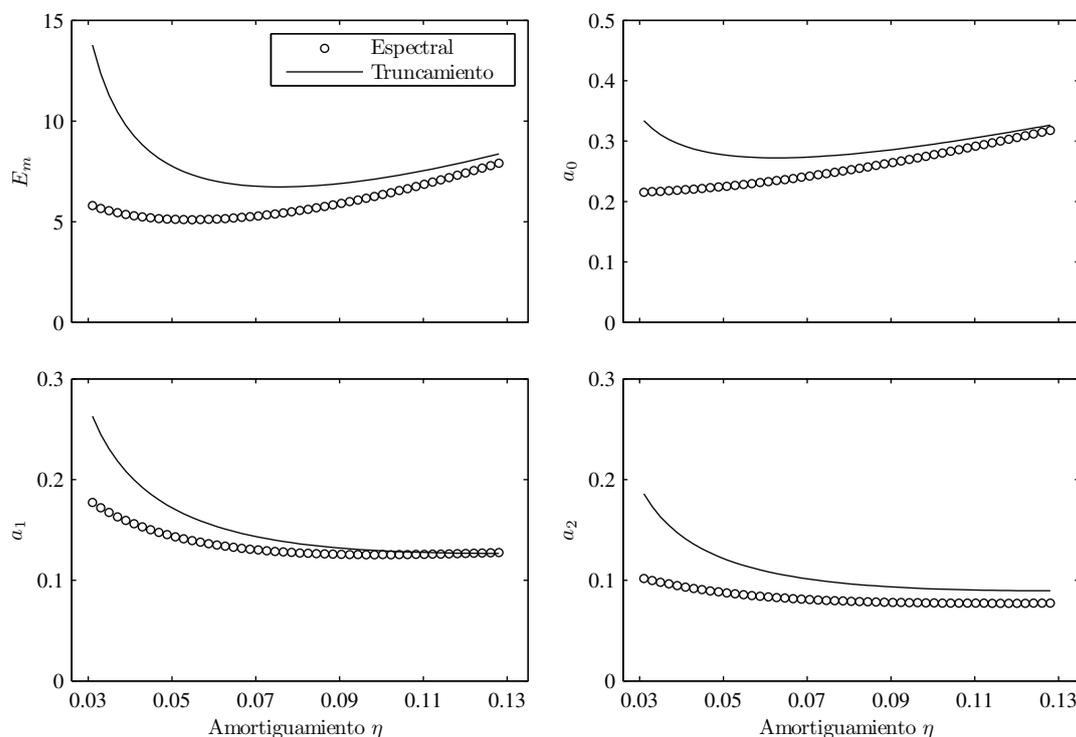


Figura 5.13: Atractor A_3 ($n_0 = 9$, $n_1 = 6$ y $n_2 = 12$ con $\hat{\gamma}_0 = 0,02$)

Se observa en la figura una situación similar a la del atractor A_4 detallado anteriormente, es decir, la presencia de dos regiones en las cuales se manifiestan dos comportamientos diferentes. Como en el caso anterior, en la primera región correspondiente a $\eta \gtrsim 0,08$ los resultados obtenidos por los dos métodos presentan una diferencia aproximadamente constante tanto en energía como en amplitudes de los modos resonantes. Por otro lado, en la región donde $\eta \lesssim 0,08$ los resultados presentan discrepancias que se incrementan con la disminución del coeficiente de amortiguamiento. En la Figura 5.14 se grafica la distribución de energía para valores de amortiguamiento pertenecientes a cada una de las regiones mencionadas.

Como era de prever, para el caso donde se obtuvieron resultados más aceptables ($\eta > 0,08$), la figura muestra que la distribución de energía se realiza principalmente entre los tres modos resonantes iniciales, con buena concordancia entre los resultados de uno y otro método, aunque igualmente se visualiza que otros dos modos presentan niveles considerables de energía. Por el contrario, en la región donde se registraron las mayores diferencias, en

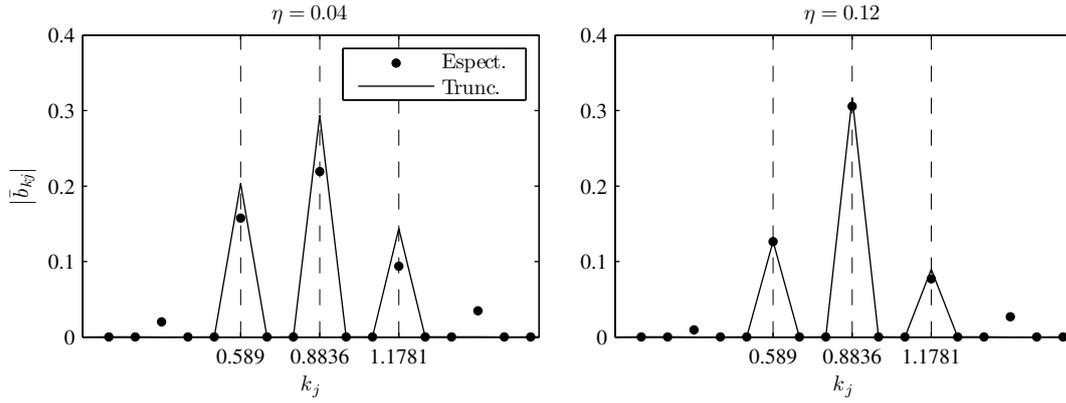


Figura 5.14: Distribución de la energía entre los diferentes modos para el atractor A_3

el panel izquierdo de la Figura 5.14 se observa que de igual manera que lo sucedido para otros atractores con coeficientes de amortiguamiento pequeños, surgen dos modos extras con niveles de energía considerables, y además se registran diferencias más notorias entre los valores de amplitud de los modos iniciales calculados por cada método. En ambos casos, los nuevos modos satisfacen las relaciones de resonancia dadas en el caso del atractor A_8 .

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se ha solucionado numéricamente la Ecuación Derivada No Lineal de Schrödinger (DNLS) utilizando un esquema de métodos espectrales basados en expansiones en series de Fourier para la resolución de las derivadas espaciales y un esquema de Runge-Kutta-Fehlberg de cuarto orden para la integración en el tiempo. En primer término se analizó el caso de la ecuación DNLS sin efectos difusivos para posteriormente continuar con el estudio de la DNLS difusiva. A continuación se detallan las principales conclusiones obtenidas para cada caso.

6.1. Ecuación DNLS sin efectos difusivos

En el Capítulo 4 fueron presentados los resultados obtenidos para simulaciones numéricas de la ecuación DNLS sin considerar efectos difusivos. Las mismas se llevaron a cabo utilizando dos tipos diferentes de condiciones iniciales: la primera correspondiente a una onda plana, y la segunda consistente en tres ondas cerca de resonancia ($2k_0 = k_1 + k_2$).

6.1.1. Condición inicial de una onda

El estudio de la DNLS no difusiva con condición inicial de una onda fue realizado con dos objetivos diferentes. El primero consistente en verificar numéricamente las condiciones de estabilidad modular de la DNLS, factibles de establecerse para plasmas fríos con polarización izquierda, determinando además el tiempo en el cual se produce la inestabilidad. El segundo objetivo se refiere a conocer la evolución de la solución para cuando la inestabilidad se genera.

En el primer caso fue posible verificar numéricamente las condiciones analíticas de estabilidad modular, las cuales exigen que $A_0 > \sqrt{2k_0}$ siendo A_0 la amplitud de la onda inicial y $k_0 = 2\pi n_0/L$ su número de onda. Mediante el código se pudieron verificar estas condiciones para números de onda $n_0 \leq 21$ con discretizaciones de $N = 256$ puntos, longitud de integración $L = 64$ y un paso de tiempo $\tau = 0,001$, considerando un tiempo de integración máximo $t = 50000$. La estabilidad para números de onda mayores no pudo ser estrictamente verificada con esas condiciones ya que modos más elevados requieren pasos de integración temporal cada vez menores, tal como se destaca en la Sección 4.1 del Capítulo 4, donde se muestra que para $n_0 = 25$ el paso de tiempo máximo debe ser un orden de magnitud menor que para $n_0 = 5$. Con estos resultados además se pudo constatar que el tiempo al cual se produce la inestabilidad depende fuertemente de la amplitud de la onda inicial y de su número, aspecto que no es posible de determinar por el estudio analítico.

Para el análisis de la evolución posterior de la solución en las configuraciones inestables se consideraron cinco números de onda distintos dentro del rango $2 \leq n_0 \leq 21$ y diferentes valores de amplitud inicial A_0 . En todos los casos las soluciones mostraron comportamientos

similares definidos por el valor de amplitud inicial. En el primero de ellos, correspondiente a amplitudes relativamente bajas, se observa una evolución cuasi periódica de la energía relativa de la onda inicial, en la cual dicha onda recupera casi la totalidad de la energía cedida formando ciclos que van desde el valor máximo inicial hasta un valor mínimo aproximadamente igual para cada ciclo. El rango de amplitudes para el cual se verifica este comportamiento cuasi periódico es $0 < A_0 < A_{0p}$, donde A_{0p} es mayor para modos iniciales bajos y menor para modos iniciales más altos. Además, pudo observarse que el valor mínimo de energía relativa de la onda inicial está relacionado con la amplitud A_0 , cuanto mayor es A_0 mayor es la fracción de energía entregada por la onda inicial, hasta llegar al límite donde la onda inicial cede casi la totalidad de su energía, situación en la cual el comportamiento cuasi periódico de la solución comienza a alterarse con el aumento de A_0 . Por otro lado, en este rango de evolución cuasi periódica se verifica que la transferencia de energía entre la onda inicial y los diferentes modos se produce de manera similar independientemente del número de onda inicial considerado y del valor de amplitud. En este caso la energía se reparte fundamentalmente entre tres modos, el modo inicial (onda madre identificada con k_0) y dos ondas hijas (k_1 y k_2) que cumplen la relación de resonancia $2k_0 = k_1 + k_2$.

Para amplitudes de la onda inicial mayores comienza a registrarse una pérdida de regularidad en las soluciones periódicas, dando lugar a un nuevo comportamiento definido por una evolución totalmente irregular de la distribución de la energía, independientemente del modo inicial considerado. En este caso la onda inicial no sólo no recupera su energía original, sino que la misma se transfiere de manera aleatoria entre la totalidad de los modos del espectro. El cambio del comportamiento pseudo periódico al comportamiento caótico se da en un rango de amplitudes de transición en el cual la solución presenta una combinación de ambas situaciones: la onda inicial recupera fracciones cada vez menores de su energía original formando ciclos cuyos valores máximos decaen constantemente hasta llegar a la evolución caótica. Este rango de transición es mayor para el caso de modos iniciales más bajos, mientras que el cambio se produce más bruscamente cuando los modos iniciales son elevados.

6.1.2. Condición inicial de tres ondas

Los resultados registrados en la transferencia de energía para el caso de la ecuación DNLS no difusiva con condición inicial de una onda y valores de amplitud inicial relativamente bajos mostraron que la misma se producía fundamentalmente entre el modo inicial o madre (k_0), y dos ondas hijas (k_1 y k_2), satisfaciendo la relación de resonancia $2k_0 = k_1 + k_2$. Este aspecto motivó la realización del estudio de la DNLS con condición inicial de tres ondas cerca de resonancia con el objetivo de conocer de qué manera influyen los diferentes parámetros que intervienen en la simulación.

El primer punto que se analizó fue conocer cómo influye en los resultados la cantidad de puntos utilizada en la discretización. Para ello se realizaron simulaciones considerando plasmas fríos con ondas polarizadas a izquierda y derecha para tres números de onda madre diferentes $n_0 = 5, 10$ y 15 , teniendo en cuenta que las ondas polarizadas a derecha son estables y asumiendo que los resultados más precisos se obtienen para $N \rightarrow \infty$ ya que la base de funciones de expansión de Fourier es completa.

Utilizando discretizaciones de $N = 64, 128, 256$ y 512 puntos se pudo constatar que en los casos donde se consideran modos iniciales más elevados se requieren discretizaciones más densas, ya que para el caso de $n_0 = 5$ se verificó la estabilidad de las ondas con polarización derecha aun con $N = 64$, mientras que para $n_0 = 15$ sólo con $N \geq 256$ se pudo verificar esta condición. Por otro lado, las evoluciones inestables de ondas polarizadas a izquierda mostraron concordancia en cuanto al tiempo de inestabilidad para configuraciones con $n_0 = 15$ sólo en los casos donde fue utilizado $N = 256$ y $N = 512$. De este modo, para el rango de números de onda madre analizado, se fijó como límite inferior una discretización de $N = 256$

puntos y se escogió este valor para la realización de las simulaciones siguientes.

El otro aspecto estudiado para la DNLS no difusiva con condición inicial de tres ondas es la influencia del nivel y la distribución de energía en los modos iniciales. Mediante simulaciones considerando plasmas fríos, ondas polarizadas a izquierda y números de onda madre $n_0 = 5, 10$ y 15 como en el caso anterior, se observó que el aumento en el nivel de energía inicial de la configuración genera el adelantamiento de la inestabilidad independientemente del número de onda madre utilizado. Además pudo comprobarse también que configuraciones con números de onda madre más altos se inestabilizan más rápido para iguales niveles de energía inicial. Por otro lado, pudo verificarse en primera instancia que para distribuciones de energía en las cuales la misma se concentra mayormente en las ondas hijas, la inestabilidad se retrasa, aunque los modos no considerados inicialmente adquieren niveles mayores de energía que en los casos donde la onda madre contiene la mayor parte de la misma.

Finalizando este estudio se analizó la evolución de la energía de cada modo resonante inicial. Con estas observaciones pudo constatar que la energía relativa de cada modo resonante presenta una evolución similar en cada uno de ellos para todos los casos de número de onda madre analizados. De esta manera, la inestabilidad de la solución se corresponde con la caída de la energía relativa de cada una de las ondas iniciales.

6.2. Ecuación DNLS con efectos difusivos

La segunda parte de la investigación consistió en la solución numérica de la ecuación DNLS considerando efectos difusivos para una configuración de tres ondas iniciales cerca de resonancia, con la onda madre excitada y las restantes amortiguadas. El objetivo del estudio es conocer la transferencia de energía entre los distintos modos y evaluar una serie de atractores obtenidos por las simulaciones numéricas, comparando los resultados con los de un modelo de truncamiento a tres ondas.

Estos atractores están ligados a la onda madre con número de onda dado por $n_0 = 9$, para una excitación $\hat{\gamma}_0 = 0,02$ en plasmas fríos con polarización izquierda, utilizando un modelo de amortiguamiento resistivo. En el análisis se estudiaron los seis atractores que quedan definidos por las ondas hijas definidas por $n_1 = 1$ a 6 y $n_2 = 17$ a 12 , respectivamente. El rango de coeficientes de amortiguamiento para los cuales se verifican estos atractores se detalla en la Tabla 5.1.

Las simulaciones numéricas mostraron que todas las configuraciones de ondas iniciales convergen hacia un mismo atractor, produciéndose la transferencia de energía desde las ondas hijas hacia los modos dados por $n_1 = 1$ y $n_2 = 17$, correspondientes al atractor A_8 . Sin embargo, la evolución de los resultados muestra que existen períodos de estabilidad transitoria donde la energía y las amplitudes de los modos iniciales permanecen aproximadamente invariantes, hasta que se produce un salto abrupto hacia el atractor A_8 . Estos períodos pueden estudiarse como si se trataran de atractores convencionales, ya que los mismos se registran durante intervalos de tiempo que pueden considerarse relativamente largos.

Los resultados numéricos para los atractores A_8, A_7 y A_6 fueron los que mejor se correspondieron con las soluciones del modelo de truncamiento. En estos casos la concordancia entre ambos métodos fue muy buena en casi todo el rango de coeficientes de amortiguamiento considerado, exceptuando las regiones limitadas por $\eta \lesssim 0,15$, donde las amplitudes de las ondas hijas y consecuentemente la energía comenzaron a mostrar diferencias. Dentro de esta región la simulación numérica evidenció que además de los tres modos resonantes iniciales aparecen dos nuevos modos con niveles de energía no despreciables, los cuales se identifican con k_3 y k_4 siendo $k_3 < k_1 < k_0 < k_2 < k_4$. Estos nuevos modos verifican la relación de resonancia con la onda madre, es decir que se cumple $2k_0 = k_1 + k_2 = k_3 + k_4$, y además están relacionados con las ondas hijas por $k_4 - k_3 = 2(k_2 - k_1)$. Estas relaciones no sólo

se producen en estos casos, sino que el comportamiento se repite para todos los atractores analizados.

En las regiones donde las discrepancias entre ambos métodos son más acentuadas los niveles de energía de los nuevos modos adquieren importancia y además, las amplitudes de las ondas resonantes iniciales evaluadas por truncamiento difieren en relación a los resultados numéricos. En el caso de coeficientes de amortiguamiento mayores ($\eta \gtrsim 0,15$), la aparición de los nuevos modos también puede apreciarse, pero la misma se produce con niveles de energía muy bajos que no afectan de manera sustancial el valor de energía calculado solamente con los tres modos iniciales. Por otro lado, dentro de este rango las amplitudes de los modos iniciales computadas por cada método son muy similares. Con los resultados a la vista, se puede decir que la aplicación de un modelo de truncamiento a tres modos para los atractores A_8 , A_7 y A_6 es aceptable, aun en la región donde se registraron las mayores diferencias ya que las mismas no son excesivamente grandes.

Los comentarios respecto a los resultados registrados para el atractor A_5 son similares a los expresados anteriormente, pero en este caso las discrepancias producidas para coeficientes de amortiguamiento pequeños son mucho más importantes, especialmente en el cómputo de la amplitud de la onda madre. De este modo, para regiones donde $\eta \lesssim 0,10$, la aplicación de un modelo de truncamiento a tres ondas no es posible.

La discusión acerca del estudio correspondientes a los atractores A_4 y A_3 se hace conjuntamente, ya que los mismos se verifican sobre un rango de amortiguamiento similar y para ambos se obtuvieron resultados muy parecidos. En este caso, las simulaciones numéricas mostraron dos comportamientos diferentes para cada atractor de acuerdo al valor del coeficiente de amortiguamiento considerado. Para $\eta \lesssim 0,09$ se registraron diferencias mayores entre los resultados de las simulaciones numéricas y los del modelo de truncamiento a tres ondas, tanto en la energía como en las amplitudes de los modos resonantes iniciales. Por otro lado, para $\eta \gtrsim 0,09$ la concordancia entre ambos métodos fue aceptable, aunque las diferencias pueden apreciarse. Mediante el análisis del espectro de energía de los distintos modos pudo verse que, en todo el rango de amortiguamiento donde se verifican los atractores, aparecen nuevamente dos modos distintos a los iniciales con niveles de energía considerables, lo cual se hace más evidente en la región de coeficientes de amortiguamiento más pequeños. Estos modos, tal como sucediera en los atractores estudiados anteriormente, satisfacen la relación de resonancia alrededor de la onda madre, además de las relaciones entre ondas hijas detalladas anteriormente. De esta forma queda evidenciado que las discrepancias en los resultados se producen no sólo en el cómputo de las amplitudes resonantes, sino también por la presencia de nuevos modos con niveles de energía no despreciables que obviamente no son considerados por el modelo de truncamiento a tres ondas.

6.3. Conclusiones finales

En cuanto al análisis de la ecuación DNLS no difusiva, puede concluirse que para esta situación el método produjo resultados dentro de lo esperado. Por un lado se verificaron numéricamente las condiciones analíticas de estabilidad modular considerando un amplio rango de números de onda iniciales, además se pudo computar el tiempo al cual se produjeron las inestabilidades y conocer que luego de la inestabilidad, para amplitudes iniciales relativamente bajas, la energía se reparte fundamentalmente entre la onda inicial (onda madre) y dos ondas hijas satisfaciendo la relación de resonancia $2k_0 = k_1 + k_2$. Seguidamente se comprobó numéricamente la estabilidad de ondas polarizadas a derecha y se analizó la influencia del número de puntos de la discretización, obteniéndose que es necesario un número mínimo de 256 nodos para obtener resultados correctos con ondas iniciales de hasta $n_0 = 21$ y un paso de tiempo $\tau = 0,001$.

Con respecto al estudio de la ecuación DNLS con efectos difusivos, puede concluirse que el modelo de truncamiento a tres ondas parece ser una buena descripción cuando se consideran coeficientes de amortiguamiento relativamente grandes, ya que las simulaciones numéricas mostraron que en esos casos, para la totalidad de los atractores analizados, la energía se reparte fundamentalmente entre los tres modos resonantes iniciales. Por el contrario, para coeficientes de amortiguamiento más bajos comienzan a aparecer discrepancias entre los resultados de ambos métodos, las cuales se deben no sólo a la diferencia en el cómputo de las amplitudes de las ondas resonantes iniciales, sino que además aparecen dos nuevos modos (k_3 y k_4) con niveles de energía no despreciables. Estos nuevos modos se encuentran relacionados con las ondas iniciales a través de la condición de resonancia con la onda madre y de la relación $k_4 - k_3 = 2(k_2 - k_1)$ con las ondas hijas. Estos resultados evidencian que para esta situación ya no existen únicamente tres modos relevantes, sino que son cinco los modos a tener en cuenta para describir de qué manera se distribuye la energía.

6.4. Trabajos Futuros

Durante esta investigación pudo constatarse la viabilidad de utilizar un esquema numérico de métodos espectrales basados en expansiones de Fourier para solucionar la ecuación DNLS. Para comprobar su validez, se analizó la ecuación DNLS sin efectos difusivos para verificar las condiciones analíticas de estabilidad modular y evaluar la influencia de los distintos parámetros que intervienen en la simulación. Posteriormente se realizó el estudio incorporando el término difusivo, pudiendo extraerse algunas conclusiones importantes.

Los desarrollos futuros para esta investigación corresponden al análisis más detallado de la ecuación DNLS con efectos difusivos para entender cuáles son los mecanismos de transferencia de energía que determinan la convergencia hacia modos dominantes, ampliando además los rangos de aplicación del método para verificar la existencia de nuevos atractores. Por otro lado, se ha encontrado en estudios por truncamiento que en la solución de la ecuación DNLS aparecen fenómenos de intermitencia como ruta hacia caos. El análisis de estos fenómenos permitirá adaptar las formulaciones desarrolladas en los trabajos de [del Río y Elaskar \(2010\)](#); [del Río et al. \(2011\)](#) y [Elaskar et al. \(2011\)](#), para ser utilizadas en una aplicación física como lo es la descripción de la propagación de ondas de Alfvén, ya que las mismas han sido utilizadas únicamente para el caso de mapas.

Apéndice A

Parámetros de Descripción del Plasma

Nomenclatura

κ	Constante de Boltzmann
ε_0	Permitividad en el vacío
μ_0	Permeabilidad magnética en el vacío
c	Velocidad de la luz
e	Carga eléctrica del electrón
T	Temperatura del plasma
m_e	Masa del electrón
m_i	Masa del ion
n	Densidad de partículas
B	Módulo del campo magnético
η	Coefficiente de difusión magnética (Resistividad)
ρ	Densidad de masa
p	Presión cinética
γ	Coefficiente politrópico
L	Longitud de referencia
V_0	Velocidad de referencia

Longitud de Debye

$$\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 \kappa T}{ne^2} \right)^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

Frecuencia (electrónica) del plasma

$$\omega_{pe} = \left(\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e} \right)^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

Velocidad térmica de los electrones

$$v_{te} = \left(\frac{2\kappa T}{m_e} \right)^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

Frecuencia de ciclotrón del electrón

$$\Omega_e = \frac{eB}{m_e} \quad (\text{A.4})$$

Frecuencia iónica del plasma

$$\omega_{pi} = \left(\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_i} \right)^{1/2} \quad (\text{A.5})$$

Velocidad térmica de los iones

$$v_{ti} = \left(\frac{2\kappa T}{m_i} \right)^{1/2} \quad (\text{A.6})$$

Frecuencia de ciclotrón iónica

$$\Omega_i = \frac{eB}{m_i} \quad (\text{A.7})$$

Longitud inercial de los iones

$$l_i = \frac{c}{\omega_{pi}} \quad (\text{A.8})$$

Número de Reynolds magnético

$$R_M = \frac{\mu_0 L V_0}{\eta} \quad (\text{A.9})$$

Velocidad de Alfvén

$$V_A = \frac{B}{(\mu_0 \rho)^{1/2}} \quad (\text{A.10})$$

Velocidad del Sonido

$$c_s = \left(\frac{\gamma p}{\rho} \right)^{1/2} \quad (\text{A.11})$$

Parámetro β del plasma

$$\beta = \frac{2\mu_0 p}{B^2} = \frac{c_s^2}{V_A^2} \quad (\text{A.12})$$

Apéndice B

Modelo de Truncamiento de la Ecuación DNLS

En el presente apéndice se describe brevemente el modelo de truncamiento a tres ondas de la ecuación DNLS, el cual puede consultarse en mayor profundidad en el trabajo de [Sánchez-Arriaga \(2009\)](#).

Tomando el campo magnético sin perturbar B_0 en la dirección z de un marco de referencia moviéndose con velocidad de Alfvén y asumiendo un plasma frío ($\beta \approx 0$), la ecuación DNLS resulta:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (|b|^2 b) \pm i \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \hat{\gamma} b = 0 \quad (\text{B.1})$$

donde el signo superior (inferior) en la Ec. (B.1) corresponde a ondas polarizadas a izquierda (derecha), $\hat{\gamma}$ es un operador lineal de amortiguamiento o excitación y las variables b , z y t son adimensionalizadas de la siguiente manera:

$$b = \frac{B_x \pm iB_y}{B_0}, \quad \Omega_i t \rightarrow t, \quad \frac{\Omega_i}{V_A} \rightarrow z, \quad (\text{B.2})$$

Se considera tres ondas viajeras de la forma:

$$b(z, t) = \sum_{j=0}^2 b_j e^{i(k_j z - \omega_j t + \phi_j)}, \quad (\text{B.3})$$

siendo $b_j(t)$ y $\phi_j(t)$ números reales, con números de onda $k_1 = (1 - \delta) k_0$ y $k_2 = (1 + \delta) k_0$ que cumplen la condición de resonancia $2k_0 = k_1 + k_2$, y frecuencias que satisfacen la relación de dispersión sin pérdidas $\omega_j = \mp k_j^2$. El modelo de truncamiento disipativo se obtiene substituyendo la Ec. (B.3) en la expresión (B.1) y despreciando los términos de los modos no resonantes, ya que se acepta que los mismos se amortiguan para $t \rightarrow \infty$. Por otro lado, para obtener formulaciones más compactas se realizan los siguientes definiciones:

$$r = \frac{b_2}{b_1}, \quad (\text{B.4})$$

$$\theta = \nu t + \phi_1 + \phi_2 - 2\phi_0, \quad (\text{B.5})$$

$$\nu = 2\omega_0 - \omega_1 - \omega_2 = \pm 2\delta^2 \quad (\text{B.6})$$

El parámetro ν es un desajuste en la frecuencia, una consecuencia del carácter dispersivo de las ondas, y su signo está relacionado directamente con el sentido de polarización (positivo: izquierda, negativo: derecha).

Los coeficientes de excitación/amortiguamiento se denotan como γ_0 , γ_1 y γ_2 correspondientes a las ondas identificadas con k_0 , k_1 y k_2 respectivamente. Valores de $\gamma_i > 0$ indican disipación, mientras que $\gamma_i < 0$ significa excitación, de acuerdo a los signos que se utilizan en las ecuaciones.

Haciendo uso de las siguientes normalizaciones en el tiempo y las amplitudes

$$\begin{aligned} t &\rightarrow (\gamma_1 + \gamma_2) t, \\ b_0^2 &\rightarrow \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\sqrt{k_1 k_2}} b_0^2, \\ b_1^2 &\rightarrow \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{k_1 + k_2} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} b_1^2, \\ b_2^2 &\rightarrow \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{k_1 + k_2} \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} b_2^2, \end{aligned} \tag{B.7}$$

el modelo de truncamiento resulta

$$\begin{aligned} \dot{b}_0 &= \Gamma b_0 + r b_0 b_1^2 \sin \theta, \\ \dot{b}_1 &= -\frac{\zeta}{1 + \zeta} b_1 - r b_0^2 b_1 \sin \theta, \\ \dot{r} &= -\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} r - (1 - r^2) b_0^2 \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \bar{\nu} - 2b_0^2 \left(\frac{1 + \kappa}{2\sqrt{\kappa}} + \frac{1 + r^2}{2r} \cos \theta \right) + 2r b_1^2 \cos \theta + \frac{b_1^2 \sqrt{\kappa}}{1 + \kappa} \left(\kappa + \frac{r^2}{\kappa} \right), \end{aligned} \tag{B.8}$$

donde \dot{b}_2 fue reemplazado por $r = b_2/b_1$ y se utilizaron los siguientes parámetros:

$$\kappa = \frac{k_1}{k_2} < 1, \tag{B.9}$$

$$\zeta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} < 1, \tag{B.10}$$

$$\Gamma = -\frac{\gamma_0}{\gamma_1 + \gamma_2} < 1, \tag{B.11}$$

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{\gamma_1 + \gamma_2}. \tag{B.12}$$

$$\tag{B.13}$$

El número de parámetros se reduce cuando se utiliza un modelo de amortiguamiento determinado, tal como el modelo de Landau ($\gamma \propto k$) o el modelo resistivo ($\gamma \propto k^2$). En el caso de amortiguamiento resistivo (Sanmartín et al., 2004):

$$\gamma \approx \frac{V_A^2 k^2}{2\Omega_e \Omega_i \tau_c} \rightarrow \zeta = \kappa^2, \tag{B.14}$$

siendo V_A la velocidad de Alfvén, Ω_e y Ω_i las frecuencias de ciclotrón, y τ_c el tiempo de colisión de Braginskii.

Los puntos fijos del sistema (B.8) representan ondas de Alfvén viajeras para las cuales efectos no lineales y dispersivos son balanceados entre sí manteniendo las amplitudes y las fases relativas constantes. Estos puntos fijos se obtienen anulando las ecuaciones (B.8):

$$r = \sqrt{\zeta}, \tag{B.15}$$

$$b_0^2 = -\frac{\sqrt{\zeta}}{(1 + \zeta) \sin \theta}, \tag{B.16}$$

$$b_1^2 = -\frac{\Gamma}{\sqrt{\zeta} \sin \theta}, \tag{B.17}$$

$$\bar{\nu} \sin \theta = F - (1 - 2\Gamma) \cos \theta, \tag{B.18}$$

siendo

$$F = \frac{\zeta + \kappa^2}{(1 + \kappa)\sqrt{\kappa\zeta}}\Gamma - \frac{1 + \kappa}{1 + \zeta}\sqrt{\frac{\zeta}{\kappa}}. \quad (\text{B.19})$$

La Ec. (B.18) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\cos \theta = \frac{F(1 - 2\Gamma) \pm \bar{\nu}\sqrt{\bar{\nu}^2 + (1 - 2\Gamma)^2 - F^2}}{\bar{\nu}^2 + (1 - 2\Gamma)^2}, \quad (\text{B.20})$$

La expresión anterior indica que existen combinaciones de dos puntos fijos, P y P^* correspondientes al signo superior e inferior, respectivamente. Las condiciones de existencia de los puntos fijos están dadas en primer término por el signo del discriminante en la Ec. (B.20) ($F^2 < \bar{\nu}^2 + (1 - 2\Gamma)^2$). En segundo lugar, las Ecs. (B.16) y (B.17) requieren que $\sin \theta < 0$ ya que, según las definiciones (B.10) y (B.11), $\zeta > 0$ y $\Gamma > 0$. Por último, puede demostrarse que la condición $|\cos \theta| \leq 1$ se cumple si se satisface la primera condición, que resulta ser la más restrictiva. En cuanto a la estabilidad de los puntos fijos, se demuestra que el punto P^* es siempre inestable en el modelo de amortiguamiento resistivo ($\zeta = \kappa^2$) para cualquier sentido de polarización.

Referencias

- Ahedo, E. y Sanmartín, J. (2002). Analysis of Bare-Tether Systems for Deorbiting Low-Earth-Orbit Satellites. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 39(2):198–205.
- Alfvén, H. (1942). Existence of Electromagnetic-hydrodynamic Waves. *Nature*, 150:405.
- Baccelli, G., Cohen, G., Olsder, G., y J., Q. (1992). *Synchronization and Linearity. An Algebra for Discrete Even Systems*. Wiley and Sons.
- Belashov, V. y Vladimirov, S. (2005). *Solitary Waves in Dispersive Complex Media*. Springer, Berling.
- Borotto, F., Chian, A., Hada, T., y Rempel, E. (2004). Chaos in Driven Alfvén Systems: Boundary and Interior Crises. *Physica D*, 194:275–282.
- Boyd, J. (2000). *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. DOVER Publications.
- Brodin, G. y Stenflo, L. (1990). Coupling Coefficients for Ion-Cyclotron Alfvén Waves. *Contributions to Plasma Physics*, 30:413–419.
- Buti, B., Velli, M., Liewer, P., Goldstein, B., y Hada, T. (2000). Hybrid Simulations of Collapse of Alfvénic Wave Packets. *Physics of Plasmas*, 7(10):3998–4003.
- Canuto, C., Quarteroni, A., Hussaini, M., y Zang, T. (2006). *Spectral Methods Fundamentals in Single Domains*. Springer.
- Chian, A., Borotto, F., y González, W. (1998). Alfvén Intermittent Turbulence Driven by Temporal Chaos. *The Astrophysical Journal*, 505:993–998.
- Chian, A., Borotto, F., y Rempel, E. (2002). Alfvén Boundary Crises. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(7):1653–1658.
- Cramer, N. (2001). *The Physics of Alfvén Waves*. Wiley-VCH Verlag Berlin GmbH, 1 edition.
- Dawson, S. y Fontan, C. (1988). Soliton Decay of Nonlinear Alfvén Waves Numerical Studies. *Physics of Fluids*, 31(1):83–89.
- de Oliveira, G., de Oliveira, L., y Rizzato, F. (1997). Nonintegrable Three Mode Interaction in the Zakharov Equations. *Physica D*, 104:119–126.
- del Río, E. y Elaskar, S. (2010). New Characteristic Relations for Intermittency Type II. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 20(4):1185–1191.
- del Río, E., SanJuan, M., y Elaskar, S. (2011). Effect of Noise in Reinjection Probability Density in Intermittency. In *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*.

-
- Dobrowolny, M. y Melchioni, E. (1993). Electrodynamic Aspects of the First Tethered Satellite Mission. *Journal of Geophysics Research*, 98(A8):13761–13778.
- Elaskar, S., del Río, E., y Donoso, J. (2011). Reinjection Probability Density in Type-III intermittency. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 390(15):2759–2768.
- Elaskar, S., Sánchez-Arriaga, G., y Sanmartín, J. (2005). Fully three Wave Model to Study the Hard Transition to Chaotic Dynamics in Alfvén Wave Fronts. *Mecánica Computacional*, XXIV:2271–2287.
- Elaskar, S., Sánchez-Arriaga, G., y Sanmartín, J. (2006). Chaos in Nonlinear Alfvén Waves Using the DNLS Equation. *International Symposium on Electrohydrodynamics – 2006 ISEHD Buenos Aires, 4-6 de diciembre, Publicado en los Proceedings del Congreso*, ISBN 950-29-0964-X:131–134.
- Fla, T. (1992). A Numerical Conserving Method for the DNLS Equation. *Journal of Computational Physics*, 101:71–79.
- Ghosh, S. y Papadopoulos, K. (1987). The onset of Alfvénic Turbulence. *Physics of Fluids*, 30:1371–1387.
- Hada, T., Kennel, C., Buti, B., y Mjølhus, E. (1990). Chaos in Driven Alfvén Systems. *Physics of Fluids*, B2(11):2581–2590.
- Herlofson, N. (1950). Magnetohydrodynamic Waves in a Compressible Fluid Conductor. *Nature*, 165:1020.
- Hollweg, J. (1971). Density Fluctuations Driven by Alfvén Waves. *Journal of Geophysics Research*, 76:5155–5161.
- Jardin, S. (2010). *Computational Methods in Plasma Physics*. Chapman & Hall, CRC Press.
- Jetenco-Pereira, V. (1995). Alfvén Waves in Astrophysical Plasmas. *Physics Scripta*, 60:113.
- Kakutani, T., Ono, H., Taniuti, T., y Wei, C. (1968). Reductive Perturbation Method in Nonlinear Wave Propagation II. Application to Hydromagnetic Waves in Cold Plasma. *Journal of the Physical Society of Japan*, 24:1159–1166.
- Kaup, D. y Newell, A. (1978). An Exact Solution for the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation. *Journal of Mathematical Physics*, 19:798–802.
- Kawata, T. y Inoue, H. (1978). Exact Solution of the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation under Nonvanishing Conditions. *Journal of the Physical Society of Japan*, 44:1968–1976.
- Kawata, T., Sakai, J., y Kobayashi, N. (1980). Inverse Method for the Mixed Nonlinear Schrödinger Equation and Solitons Solutions. *Journal of the Physical Society of Japan*, 48:1371–1379.
- Keuer, H. y Morikawa, G. (1969). Korteweg-de Vries Equation for Nonlinear Hydromagnetic Waves in a Warm Collision-free Plasma. *Physics of Fluids*, 12(10):2090–2093.
- Krall, N. y Trivelpiece, A. (1973). *Principles of Plasma Physics*. Mc-Graw Hill.
- López-Rebollal, O., Sanmartín, J., y del Río, E. (1998). Sudden Transition to Chaos in Plasma Wave Interactions. *Physics of Plasmas*, 5(8):2861–2867.

- Lundquist, S. (1949). Experimental Investigation of Magneto-hydrodynamics Waves. *The Physical Review*, 76:1805–1809.
- Medvedev, M. (1999). Collisionless Dissipative Nonlinear Alfvén Waves: Nonlinear Steepling Compressible Turbulence, and Particle Trapping. *Physics of Plasmas*, 6(5):2191–2197.
- Mio, K., Ogino, T., Minami, K., y Takeda, S. (1976). Modified Nonlinear Schrödinger Equation for Alfvén Waves Propagating along the Magnetic Field in a Cold Plasma. *Journal of the Physical Society of Japan*, 41:265–271.
- Mjølhus, E. (1976). On the Modulation Instability of Hydromagnetic Waves Parallel to the Magnetic Field. *Journal of Plasma Physics*, 16:321–334.
- Mjølhus, E. (1989). Nonlinear Alfvén Waves and the DNLS Equation: Oblique Aspects. *Physics Scripta*, 40:227–237.
- Mjølhus, E. y Hada, T. (1997). *Nonlinear Waves and Chaos in Space Plasmas*. edited by T. Hada and H. Matsumoto (Terrapub, Tokio).
- Mjølhus, E. y Wyller, J. (1986). Alfvén Solitons. *Physics Scripta*, 33:442–451.
- Mjølhus, E. y Wyller, J. (1988). Nonlinear Alfvén Waves in a Finite-beta Plasma. *Journal of Plasma Physics*, 40(2):299–318.
- Morton, K. (1964). Finite Amplitude Compression Waves in a Collision-Free Plasma. *Physics of Fluids*, 7(11):1800–1815.
- Nariyuki, Y. y Hada, T. (2005). Self-generation of Phase Coherence in Parallel Alfvén Turbulence. *Earth Planets Space*, 57:e9–e12.
- Orszag, S. (1971). Numerical Simulations of Incompressible Flows within Simple Boundaries. Galerkin Spectral Representation. *Studies in Applied Mathematics*, 50:293–327.
- Ovenden, C., Shah, H., y Schwartz, S. (1983). Alfvén Soliton in the Solar Wind. *Journal of Geophysics Research*, 88:6095–6101.
- Pécseli, H. (2007). Waves and Oscillations in Plasmas. Draft of the book.
- Pettini, M., Nocera, L., y Vulpiani, A. (1985). Compressible MHD Turbulence; An Efficient Mechanism to Heat Stellar Coronae. *Chaos in Astrophysics*, Eds. J. Bucler et al., Dorochet Reidel.
- Philips, N. (1959). An Example of Non-linear Computational Instability. *The Atmosphere and the Sea in Motion, Rosby Memorial*, E:501–504.
- Prikarpatskii, A. (1981). Almost Periodic Solutions of a Modified Nonlinear Schrödinger Equation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 47(3):487–493.
- Robinson, P. y Drysdale, P. (1996). Phase Transition Coherent and Incoherent Three-Wave Interactions. *Physical Review Letters*, 77(13):2698–2701.
- Rogister, A. (1971). Parallel Propagation of Nonlinear Low-Frequency Waves in High- β Plasma. *Physics of Fluids*, 14(12):2733–2739.
- Ruderman, M. (2002). DNLS Equation for Large-amplitude Solitons Propagating in an Arbitrary Direction in a High- β Hall Plasma. *Journal of Plasma Physics*, 67(4):271–276.

-
- Russell, D. y Ott, E. (1981). Chaotic (strange) and Periodic Behaviour in Instability Saturation by the Oscillating Two Stream Instability. *Physics of Fluids*, 24:1976–1988.
- Sagdeev, R. y Galeev, A. (1969). *Nonlinear Plasma Theory*. W. A. Benjamin, Inc., New York.
- Sakai, J. y Sonnerup, B. (1983). Modulational Instability of Finite amplitude dispersive Alfvén Waves. *Journal of Geophysics Research*, 88:9069–9079.
- Sánchez-Arriaga, G. (2009). *Nonlinear Low-frequency Wavefront Generated by Electrodynamics Tethers*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos.
- Sánchez-Arriaga, G., Hada, T., y Nariyuki, Y. (2009). The Truncation Model of the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation. *Physics of Plasmas*, 16:042302.
- Sánchez-Arriaga, G., Sanmartín, J., y Elaskar, S. (2007). Damping Models in the Truncated DNLS Equation. *Physics of Plasmas*, 14:082108.
- Sanmartín, J., Charro, M., Peláez, J., Tinao, I., Elaskar, S., Hilgers, A., y Martínez-Sánchez, A. (2006). Electrically Floating Bare-Tether as Upper Atmosphere Probe. *Journal of Geophysics Research*, 111:A11310.
- Sanmartín, J. y Estes, R. (1997). Alfvén Wave Far Field from Steady-Current Tethers. *Journal of Geophysics Research*, 102-A7(14):625.
- Sanmartín, J., López-Rebollal, O., del Río, E., y Elaskar, S. (2004). Hard Transition to Chaos Dynamics in Alfvén Wave-Fronts. *Physics of Plasmas*, 11(5):2026–2035.
- Schwartz, S., Owen, C., y Burgess, D. (2004). *Astrophysical Plasma*. Astronomy Unit, Queen Mary, University of London.
- Shukla, P. y Stenflo, L. (1999). Nonlinear Phenomena Involving Dispersive Alfvén Waves. In Passot, T. y Sulem, P., editors, *Nonlinear MHD Waves and Turbulence*, pages 1–30. Springer.
- Smith, E., Balogh, A., Neugebauer, M., y McComas, D. (1995). Ulysses Observations of Alfvén Waves in the Southern and Northern Hemispheres. *Geophysical Research Letters*, 22:3381.
- Spangler, S. (1985). Nonlinear Astrophysical Alfvén Waves: onset and outcome of the Modulational Instability. *The Astrophysical Journal*, 299:122–137.
- Spangler, S. (1986). The Evolution of Nonlinear Alfvén Waves Subject to Growth and Damping. *Physics of Fluids*, 29:2535–2547.
- Spangler, S. y Sheerin, J. (1982). Properties of Alfvén Solitons in a Finite-beta Plasma. *Journal of Plasma Physics*, 27(2):193–198.
- Spangler, S., Sheerin, J., y Payne, G. (1985). A Numeric Study of Nonlinear Alfvén Waves and Solitons. *Physics of Fluids*, 28:104–109.
- Stringer, T. (1963). Low-frequency Waves in an Unbounded Plasma. *Plasma Physics (Journal in Nuclear Energy Part C)*, 5:89–107.
- Tsurutani, B., Richardson, I., Thorne, R., Butler, M., Smith, E., Cowley, S., Gary, S., Akasofu, S., y Zwickl, R. (1985). Observation of the Right-hand Resonant Ion Beam Instability in the Distant Plasma Sheet Boundary Layer. *Journal of Geophysics Research*, 90:12159–12172.