

ANÁLISIS ESTACIONARIO E INESTACIONARIO DE PERFILES AERODINÁMICOS A NÚMEROS DE REYNOLDS ULTRA-BAJOS ($RE < 10000$)

Dino P. Antonelli

Autor

Dr. Ing. Carlos G. Sacco
Director

Dr. Ing. José P. Tamagno
Co-director

Tesis presentada como requisito parcial para la obtención del grado de
Magíster en Ciencias de la Ingeniería. Mención Aeroespacial.

Universidad Nacional de Córdoba
Instituto Universitario Aeronáutico

Resumen

El propósito de este estudio es describir los fenómenos que se manifiestan en flujos donde el número de Reynolds es ultra-bajo ($Re < 10000$). Para lograr dicho estudio, se utilizan técnicas matemáticas capaces de resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible-laminar. El método de elementos finitos provee un apropiado procedimiento de resolución, sin embargo debe tenerse en cuenta el problema que surge de la hipótesis de incompresibilidad donde la ecuación de continuidad cambia su estado de parabólico a elíptico. Para hacer frente a este problema, se utiliza el método de *Pasos Fraccionados*, que resulta en un integrador temporal semi-implícito y para la estabilización de los términos convectivo y de presión, se aplica el algoritmo Proyección Ortogonal de Subescalas (OSS). Por otra parte, el movimiento de la malla de elementos finitos se basa en la formulación ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) de las ecuaciones de Navier-Stokes y se implementa mediante un algoritmo de resolución de la ecuación de Poisson y optimización de la métrica de cada elemento de la malla.

Se presentan resultados útiles y básicos para describir el comportamiento de geometrías 2D en flujos estacionarios e inestacionarios a números de Reynolds ultra-bajos. Se evalúan variaciones de parámetros geométricos, como la combadura y su posición sobre la cuerda, la relación de espesor, diferentes formas del borde de ataque, etc. Además, se estudia la ubicación del desprendimiento del flujo cercano al cuerpo, sus características en función del número de Reynolds y como influye en los parámetros aerodinámicos de mayor importancia. Posteriormente, se analizan diferentes cinemáticas de vuelo como *heaving*, *pitching*, *flapping* y *hovering*, en las cuales se determinan las características aerodinámicas de perfiles en función de parámetros adimensionales como el número de Strouhal, el número de Reynolds y la frecuencia reducida.

Abstract

The purpose of this study is to describe the phenomena that manifest themselves in flows where Reynolds numbers are ultra-low ($Re < 10000$). To accomplish this study, mathematical techniques capable of solving the Navier-Stokes equations for laminar-incompressible flows are used. It is noted that a solver based on the Finite Element Method provides an appropriate resolution procedure, however, it must also be noted the problem that arise from the incompressible assumption: the continuity equation change its status from parabolic to elliptic. To deal with this problem a *Fractional Step* method which evolves toward a semi-implicit temporal integrator is used, and to handle the convective and pressure terms the so called *Orthogonal Subgrid Scale* (OSS) algorithm is applied. In addition, the motion of the finite elements computational mesh is based on the *Arbitrary Lagrangian Eulerian* (ALE) formulation of Navier-Stokes equations and through solving the Poisson equation and optimizing each element metric is implemented. Basic useful results to describe the behavior of various 2D geometries at steady and non-steady ultra-low Reynolds flows, are presented. Different geometric parameters like thickness ratio, mean lines camber, shape of leading edge, etc. were changed and its effects evaluated. In addition, the flow detachment location, its features and the impact on main aerodynamic properties are assessed. The behavior of several unsteady flight dynamics like heaving, pitching, flapping and hovering were also analyzed and its aerodynamic properties determined in terms of Strouhal numbers, reduced frequencies and Reynolds numbers.

En agradecimiento a: Dres. C. Sacco y J. Tamagno por todo su aporte y apoyo. Al Dr. S. Elaskar por hacer que todo este trabajo fuera posible. A mis compañeros de departamento por estar siempre. A Julieta por su apoyo y amor incondicional, a mi familia y a mis amigos.

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE FIGURAS	IV
LISTA DE TABLAS	XV
LISTA DE SÍMBOLOS	XVII
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Visión general	1
1.2. Breve reseña histórica del flujo inestacionario y a ultra-bajo Reynolds . .	4
1.3. Motivación y objetivos del trabajo	6
1.4. Resumen del trabajo por capítulos	7
2. AERODINÁMICA DE ULTRA-BAJO REYNOLDS	9
2.1. Aerodinámica del vuelo estacionario	9
2.1.1. Escala de vuelo y parámetros adimensionales del flujo estacionario	10
2.1.2. Sobre las hipótesis del flujo	12
2.2. Aerodinámica del vuelo inestacionario	14
2.2.1. Vuelo sin potencia	14
2.2.2. Vuelo con potencia	15
2.2.3. Producción de potencia y efecto sobre la estela	17
2.2.4. Parámetros adimensionales fundamentales del vuelo inestacionario	19
2.2.4.1. Número de Reynolds	19
2.2.4.2. Número de Strouhal	21
2.2.4.3. Frecuencia reducida	21
2.2.4.4. Relación de avance	22
2.2.4.5. Parámetros de Performance	22
2.2.5. Geometría y cinemática del vuelo inestacionario	23
2.2.6. Pérdida dinámica y vórtice de borde de ataque (LEV)	25

2.3.	Motivación del estudio en dos dimensiones	28
2.4.	Comparación de métodos de resolución viscosos y no viscosos	29
3.	ECUACIONES DE GOBIERNO Y MÉTODO NUMÉRICO	31
3.1.	Ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible	32
3.1.1.	Condiciones de contorno	32
3.1.2.	La restricción de incompresibilidad	33
3.1.3.	La problemática de la convección	34
3.2.	Formulación Lagrangeana-Euleriana Arbitraria (ALE) para las ecuaciones de Navier-Stokes	35
3.2.1.	Formulación ALE	35
3.2.2.	La ecuación fundamental ALE	37
3.2.3.	Aplicación a las ecuaciones de Navier-Stokes	38
3.3.	Discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles	39
3.3.1.	Aproximación por el método de Galerkin	39
3.3.2.	Discretización espacial por el método de elementos finitos	40
3.3.3.	Existencia y unicidad de la solución del problema estacionario	41
3.3.4.	Discretización monolítica del tiempo	42
3.4.	Esquema de pasos Fraccionados para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles	43
3.4.1.	Esquema de pasos fraccionados	43
3.4.2.	Implementación sobre las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles	44
3.5.	Algoritmo de Estabilización	46
3.5.1.	Algoritmo de estabilización de subescalas ortogonales OSS	49
3.5.2.	Estabilización de la presión	50
3.5.3.	Estabilización de la convección	51
3.5.4.	Problema estabilizado en formulación Arbitraria Lagrangeana-Euleriana (ALE)	51
3.5.5.	Condiciones de contorno	52
3.5.6.	Paso de tiempo crítico	52
3.6.	Un algoritmo para el movimiento de malla	53
4.	VALIDACIÓN Y VERIFICACIÓN DEL CÓDIGO NUMÉRICO	58
4.1.	Flujo viscoso sobre una placa plana	58
4.2.	Flujo estacionario sobre un cilindro	59

4.3.	Flujo estacionario sobre perfiles	65
4.3.1.	Flujo sobre un perfil NACA 0008	65
4.3.2.	Flujo sobre un perfil NACA 0002	67
4.4.	Flujo inestacionario sobre perfiles	68
4.4.1.	Movimiento de cabeceo o “ <i>pitching</i> ”	69
4.4.2.	Combinación de movimiento de cabeceo (<i>pitching</i>) con oscilación vertical (<i>heaving</i>)	72
4.4.3.	Análisis cualitativo	73
4.5.	Análisis de Mallado	77
5.	FLUJO ESTACIONARIO SOBRE PERFILES	79
5.1.	Dominio computacional	79
5.2.	Efectos generales del número de Reynolds ($R_e < 10000$)	80
5.2.1.	Sobre el concepto de capa límite	80
5.2.2.	Distribución de presiones	82
5.2.3.	Parámetros aerodinámicos	84
5.2.4.	Separación del flujo laminar	87
5.3.	Efectos de la relación de espesor	90
5.3.1.	Efectos de la relación de espesor sobre perfiles simétricos	91
5.3.2.	Efectos de la relación de espesor sobre perfiles con combadura	94
5.4.	Efectos de la combadura	97
5.4.1.	Efecto puntual de la combadura	98
5.4.2.	Efecto de la variación proporcional de combadura	102
5.4.3.	Efecto de la posición de la combadura	105
5.5.	Consideraciones para la combinación y posterior elección de una geometría apropiada	109
6.	FLUJO INESTACIONARIO SOBRE PERFILES	111
6.1.	Dominio de simulación	111
6.2.	Desplazamiento vertical (<i>heaving</i>)	112
6.2.1.	Efecto de la relación de espesor	113
6.2.2.	Efecto de la combadura	123
6.3.	Movimiento de cabeceo (<i>pitching</i>)	127
6.3.1.	Efecto de la relación de espesor	127
6.3.2.	Efecto de la combadura	132
6.4.	Movimiento vertical y de cabeceo combinado (<i>flapping</i>)	135

6.4.1.	Efecto de la amplitud de cabeceo o <i>pitching</i>	136
6.4.2.	Efecto de la amplitud de desplazamiento vertical o <i>heaving</i>	138
6.4.3.	Efecto de la frecuencia	141
6.4.4.	Variación de la amplitud de desplazamiento vertical o <i>heaving</i> y su frecuencia manteniendo fijo el número de Strouhal	145
6.5.	Movimiento vertical y de cabeceo combinado sin la presencia de corriente libre (<i>hovering</i>)	147
6.5.1.	<i>Hovering</i> simétrico	149
6.5.2.	<i>Hovering</i> asimétrico	155
7.	CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	159
7.1.	Presentaciones	161

LISTA DE FIGURAS

1.1. Modelos de MAV.1.1a Ala fija, 1.1b Alas rotatorias, 1.1c Alas batinentes.	2
2.1. Microvehículo aéreo capaz de ejercer tanto el vuelo estacionario como el inestacionario.	10
2.2. Diagrama general de vuelo que expone las relaciones entre peso, velocidad de crucero y carga alar [63].	11
2.3. Relación entre número de Reynolds y número de Mach.[41]	12
2.4. Burbuja de separación laminar.	13
2.5. Esquema de vuelo <i>soaring</i> [30].	15
2.6. Esquema de los tipos de vuelos suspendidos.[a] Asimétrico. [b] Simétrico. [30].	17
2.7. Calle de vórtices que indica la producción de resistencia.(a) Representación esquemática y distribución de velocidades [76].(b) Visualización experimental obtenida [40].	18
2.8. Calle de vórtices que indica la producción de propulsión.(a) Representación esquemática y distribución de velocidades [76].(b) Visualización experimental obtenida [40].	18
2.9. Calle de vórtices que indica la producción nula de propulsión.(a) Representación esquemática y distribución de velocidades [76].(b) Visualización experimental obtenida [40].	19
2.10. Tipos de movimientos en el plano bidimensional. (1) <i>heaving</i> . (2) <i>pitching</i> . (3) <i>flapping</i>	24
2.11. Esquema de la cinemática del vuelo inestacionario [30].	24
2.12. Esquema del desprendimiento dinámico de un perfil y el efecto sobre las curvas de sustentación y momento [63].	26

2.13. Contornos de presión para un perfil NACA 0012 sometido a <i>flapping</i> a: $R_e = 1100$, $St = 0,45$, $k = 0,7096$, $\alpha_a = 20^\circ$ y $h_a = 1$. 2.13a $t=0.6152s$, 2.13b $t=1.0104s$, 2.13c $t=1.6834s$, 2.13d $t=2.4372s$, 2.13e $t=3.2775s$, 2.13f $t=3.8954s$	27
2.14. Coeficientes de sustentación C_L y resistencia C_D	28
2.15. Curva de sustentación para un perfil NACA 4402 a $R_e = 1000$. Comparación de los algoritmos INS2D, MSES y el software del presente trabajo.	30
2.16. Curva polar para un perfil NACA 4402 a $R_e = 1000$. Comparación de los algoritmos INS2D, MSES y el software del presente trabajo.	30
3.1. Esquema de las funciones de transformación para los diferentes dominios de la formulación ALE.	36
4.1. Condiciones de contorno para la simulación de la placa plana (Gráfico fuera de escala).	59
4.2. Comparación del coeficiente de fricción a lo largo de la placa.	60
4.3. Mallado del dominio para las simulaciones del cilindro.(a)Dominio total.(b) Refinamiento sobre la superficie del cilindro.	60
4.4. Flujo sobre un cilindro $R_e = 20$. (a) Líneas de velocidad constante. (b) Líneas de corriente.	61
4.5. Nomenclatura de los parámetros geométricos a ser comparados y calculados en la simulación del cilindro.[51]	61
4.6. Flujo sobre un cilindro $R_e = 40$. (a) Líneas de velocidad constante. (b) Líneas de corriente.	62
4.7. Líneas de velocidad constante.(a) Flujo sobre un cilindro $R_e = 100$. (b) Flujo sobre un cilindro $R_e = 200$	64
4.8. Coeficiente de sustentación del cilindro a $R_e = 200$. (a) C_L de ref.[51]. (b) C_L del presente trabajo.	65
4.9. Mallado espacial del dominio para las simulaciones de un perfil NACA 0008.	66
4.10. Comparación de la distribución de presiones con los resultados obtenidos por [44] sobre un perfil NACA 0008.	66
4.11. Contornos de velocidad sobre un perfil NACA 0008. (a) $R_e = 2000$. (b) $R_e = 6000$	67
4.12. Mallado espacial del dominio para las simulaciones de un perfil NACA 0002.	67

4.13. Distribución de presiones sobre el perfil NACA 0002 en comparación con los obtenidos en ref. [44] a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$	68
4.14. Contornos de velocidad sobre un perfil NACA 0002. (a) $R_e = 2000$. (b) $R_e = 6000$	68
4.15. Mallado sobre un perfil NACA 0008. (a) Mallado sin deformar a $\alpha_a = 0^\circ$. (b) Mallado deformado a $\alpha_a = 5^\circ$	70
4.16. Contornos de velocidad y presión sobre un perfil NACA 0008 para el caso P4 de la tabla 4.5. (a) Contornos de presión. (b) Contornos de velocidad.	70
4.17. Comparación de resultados con los obtenidos en [55] y [30] del movimiento <i>pitching</i> . Coeficiente de tracción \bar{c}_t vs. Frecuencia reducida k a $R_e = 1100$	71
4.18. Coeficiente de sustentación y de tracción para el caso P2 de la tabla 4.6. (a) Coeficiente de sustentación. (b) Coeficiente de tracción.	72
4.19. Comparación de resultados con los obtenidos en [55] y [30] del movimiento <i>flapping</i> . Coeficiente de tracción \bar{c}_t vs. amplitud angular α_a a $R_e = 1100$	73
4.20. Comparación de topología de estela para $h = 0,025$, $R_e = 20000$ y $k = 4$.(a)Resultado experimental [45].(b) Resultado numérico laminar [76]. (c) Resultado numérico turbulento [76].(d) Resultado numérico del presente trabajo (Líneas de velocidad constante).	74
4.21. Comparación de topología de estela para $h = 0,05$, $R_e = 20000$ y $k = 4$.(a)Resultado experimental [45].(b) Resultado numérico laminar [76]. (c) Resultado numérico turbulento [76].(d) Resultado numérico del presente trabajo (Líneas de velocidad constante).	75
4.22. Dominio de análisis y detalle de la zona a refinar.	77
4.23. Coeficiente de tracción en función del refinamiento de malla. $R_e = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$, $k = 8$	78
5.1. Dominio de trabajo y condiciones de contorno.	80
5.2. Distintas topologías de mallado. (a) NACA 4404. (b) NACA 4404. (c) NACA 6302.	81
5.3. Comparación de la distribución de presiones de flujo no viscoso obtenida por [44] y flujo viscoso obtenida en el presente trabajo para un perfil NACA 0008 a $\alpha = 0^\circ$	83
5.4. Distribución de presiones sobre un perfil NACA 0002 a $\alpha = 0^\circ$	83
5.5. Distribución de presiones sobre un perfil NACA 0002 a $\alpha = 1^\circ$ a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$	84

5.6. Curva $C_L - \alpha$ para perfiles NACA 0002 y 0008 a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$.	85
5.7. Distribución de presiones sobre perfiles a $\alpha = 3^\circ$: (a) NACA 0008. (b) NACA 0002.	85
5.8. Comparación de las posiciones de desprendimiento para un perfil NACA 0008 con los resultados obtenidos en [44] a $R_e = 6000$. (a),(c) y (e) Resultados del presente trabajo.(b),(d) y (f) Resultados numéricos obtenidos por [44].	86
5.9. Comparación de las posiciones de desprendimiento para un perfil NACA 0008 con los resultados obtenidos en [44] a $R_e = 2000$. (a),(c) y (e) Resultados del presente trabajo.(b),(d) y (f) Resultados numéricos obtenidos por [44].	87
5.10. Perfiles de velocidad del <i>flujo cercano al cuerpo</i> para perfil NACA 0008 a $R_e = 6000$.(a) $\alpha = 2^\circ$. (b) $\alpha = 4^\circ$	88
5.11. Perfiles de velocidad del <i>flujo cercano al cuerpo</i> para perfil NACA 0008 a $\alpha = 3^\circ$.(a) $R_e = 400$. (b) $R_e = 800$.(c) $R_e = 2000$.(d) $R_e = 6000$	89
5.12. Variación de los espesores del <i>flujo cercano al cuerpo</i> para un perfil NACA 0008 a $\alpha = 3^\circ$, con el número de R_e y la posición sobre la cuerda.	90
5.13. Perfiles NACA 0002, 0006 y 0008.	90
5.14. Perfiles NACA 4402 y 4404.	91
5.15. Curva de sustentación a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$ para perfiles NACA 0002, 0006 y 0008. Incluye la curva de sustentación para un perfil simétrico en flujo no viscoso.	91
5.16. Curva polar a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$ para NACA 0002, 0006 y 0008.	92
5.17. Contornos de velocidad para perfiles NACA 0002 y NACA 0008 a $\alpha = 4^\circ$.(a) NACA 0002 $R_e = 6000$. (b) NACA 0008 $R_e = 6000$. (c) NACA 0002 $R_e = 2000$.(d) NACA 0008 $R_e = 2000$	94
5.18. Curva de sustentación a R_e igual a $R_e = 800$ y $R_e = 6000$ para NACA 4402 y 4404.	95
5.19. Curva polar a $R_e = 800$ y $R_e = 6000$ para NACA 4402 y 4404.	95
5.20. Contornos de velocidad para perfiles NACA 4402 y NACA 4404 a $\alpha = 3^\circ$.(a) NACA 4402 $R_e = 6000$ a $\alpha - \alpha_0 = 4,85^\circ$. (b) NACA 4404 $R_e = 6000$ a $\alpha - \alpha_0 = 4,85^\circ$. (c) NACA 4402 $R_e = 800$ a $\alpha - \alpha_0 = 5^\circ$.(d) NACA 4404 $R_e = 800$ a $\alpha - \alpha_0 = 5^\circ$	97
5.21. Placa plana y perfiles NACA 0002 y 4402.	98
5.22. Perfiles NACA 2302, 4302 y 6302.	98

5.23. Perfiles NACA 4302 y NACA 4502.	98
5.24. Curva $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ para: Placa plana, NACA 0002 y NACA 4402 a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$	99
5.25. Curva C_L/C_D para: Placa plana, NACA 0002 y NACA 4402 a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$	99
5.26. Curva $C_D - (\alpha - \alpha_0)$ para: Placa plana, NACA 0002 y NACA 4402 a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$	101
5.27. Comparación de los contornos de velocidad para los perfiles NACA 0002, NACA 4402 y placa plana. (a),(c) y (e) $R_e = 6000$ y $\alpha = 4^\circ$ ó $\alpha - \alpha_0 = 5,85^\circ$ para el perfil NACA 4402.(b),(d) y (f) $R_e = 2000$ y $\alpha = 5^\circ$ ó $\alpha - \alpha_0 = 7,2^\circ$ para el perfil NACA 4402.	102
5.28. Curva $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ a $R_e = 10000$ para: NACA 2302, 4302 y 6302.	104
5.29. Curva $C_L - C_D$ a $R_e = 10000$ para: NACA 2302, 4302 y 6302.	104
5.30. Curva $C_D - (\alpha - \alpha_0)$ a $R_e = 10000$ para: NACA 2302, 4302 y 6302.	105
5.31. Comparación de los contornos de velocidad y de presión para los perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a $R_e = 10000$. (a) y (b) NACA 2302 a $\alpha - \alpha_0 = 6,4^\circ$, (c) y (d) NACA 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 7,4^\circ$ y (e) y (f) NACA 6302 a $\alpha - \alpha_0 = 8^\circ$	106
5.32. Curva $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ a $R_e = 2000$ y $R_e = 10000$ para: NACA 4302 y 4502.	108
5.33. Curva $C_L - C_D$ a $R_e = 2000$ y $R_e = 10000$ para: NACA 4302 y 4502.	108
5.34. Curva $C_D - (\alpha - \alpha_0)$ a $R_e = 2000$ y $R_e = 10000$ para: NACA 4302 y 4502.	109
5.35. Comparación de los contornos de velocidad para los perfiles NACA 4302 y NACA 4502 a $R_e = 2000$ y $\alpha = 3^\circ$, $\alpha = 6^\circ$ y $\alpha = 7^\circ$. (a) 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 5,1^\circ$ (b) 4502 a $\alpha - \alpha_0 = 5,4^\circ$, (c) 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 8,1^\circ$ y (d) 4502 a $\alpha - \alpha_0 = 8,4^\circ$ y (e) 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 9,1^\circ$ y (f) 4502 a $\alpha - \alpha_0 = 9,4^\circ$	110
6.1. Dominio de trabajo y condiciones de contorno.	112
6.2. Mallado genérico de cuerpo y estela.	112
6.3. Movimiento vertical $h(t)$ ejemplo, con $f = 1$ y $h_a = 0,15$	113
6.4. Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 0006, 0012, a $R_e = 1100$, $f = 1$	114
6.5. Comparación de la eficiencia propulsiva η en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 0006, 0012, a $R_e = 1100$, $f = 1$	114

6.6.	Contornos de velocidad y topología de la estela para un caso con resistencia y un caso con propulsión. (a) Perfil NACA 0012. $St = 0,3$ $f = 1$, $h_a = 0,15$ y $Re = 1100$ (propulsión). (b) Perfil NACA 0012. $St = 0,1$ $f = 1$, $h_a = 0,05$ y $Re = 1100$ (resistencia).	115
6.7.	Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f = 1$	115
6.8.	Comparación del coeficiente de sustentación en función del tiempo, para NACA 0004, 0006, 0012, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f = 1$	116
6.9.	Comparación del coeficiente de resistencia en función del tiempo, para NACA 0004, 0006, 0012, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f = 1$	116
6.10.	Comparación de los perfiles de velocidad horizontal (V_x) a una distancia de $1c$ desde el borde de fuga, para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f = 1$, $St = 0,3$ y $t = 4s$	117
6.11.	Contornos de velocidad para la visualización del LEV para NACA 0012. Condición de máxima eficiencia propulsiva ($St = 0,3$) (a) $t = 0,45[s]$.(b) $t = 0,86[s]$.(c) $t = 1,29[s]$. (d) $t = 1,64[s]$.(e) $t = 2,08[s]$.(f) $t = 2,65[s]$	118
6.12.	Contornos de velocidad para la visualización del LEV para NACA 0004. Condición de máxima eficiencia propulsiva ($St = 0,3$) (a) $t = 0,45[s]$.(b) $t = 0,86[s]$.(c) $t = 1,29[s]$. (d) $t = 1,64[s]$.(e) $t = 2,08[s]$.(f) $t = 2,65[s]$	119
6.13.	Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_T en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f = 2$	121
6.14.	Comparación de la eficiencia propulsiva η en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f = 2$	121
6.15.	Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f = 2$	122
6.16.	Comparación del coeficiente de resistencia o $-C_T$ en función del tiempo, para NACA 0004, 0006, 0012, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f = 2$	122
6.17.	Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_T en función del número de Strouhal, para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f = 1$	123
6.18.	Comparación de la eficiencia propulsiva η en función del número de Strouhal, para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f = 1$	124
6.19.	Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 4404, a $Re = 1100$, $f = 1$	124
6.20.	Comparación del coeficiente de resistencia o $-C_T$ en función del tiempo, para NACA 0004, 4404, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f = 1$	125

6.21. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función del número de Strouhal, para NACA 0004 y 4404 a $R_e = 1100$, $f = 2$	125
6.22. Comparación de la eficiencia propulsiva η en función del número de Strouhal, para NACA 0004 y 4404 a $R_e = 1100$, $f = 2$	126
6.23. Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 4404, a $R_e = 1100$, $f = 2$	126
6.24. Movimiento de cabeceo $\alpha(t)$ ejemplo con $k = 10$ y $\alpha_a = 0,08726[rad] = 5^\circ$. 127	
6.25. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002 y 0012, a $R_e = 1100$ y $\alpha_a = 5^\circ$	128
6.26. Comparación de la eficiencia propulsiva η en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002 y 0012, a $R_e = 1100$ y $\alpha_a = 5^\circ$	128
6.27. Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002 y 0012, a $R_e = 1100$ y $\alpha_a = 5^\circ$	129
6.28. Comparación del coeficiente de resistencia en función del tiempo, para NACA 0002 y 0012, a $k = 10$, $R_e = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$	129
6.29. Comparación del coeficiente de momento en función del tiempo, para NACA 0002 y 0012, a $k = 10$, $R_e = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$	130
6.30. Contornos de velocidad y topología de la estela para perfiles NACA 0012 y NACA 0002 a $k = 14$, $\alpha_a = 5^\circ$ y $R_e = 1100$ y $t = 1,03s$. (a) Perfil NACA 0002, (b) Perfil NACA 0012.	130
6.31. Comparación de los perfiles de velocidad horizontal (V_x) a una distancia de $0,5c$ desde el borde de fuga, para NACA 0002, 0012, a $R_e = 1100$, $k = 14$, $\alpha_a = 5^\circ$ y $t = 1,03s$	131
6.32. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la amplitud angular de movimiento α_a , para NACA 0002 y 0012, a $R_e = 1100$ y $k = 10$	131
6.33. Comparación de la eficiencia propulsiva η en función de la amplitud angular de movimiento α_a , para NACA 0002 y 0012, a $R_e = 1100$ y $k = 10$	132
6.34. Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la amplitud angular de movimiento α_a , para NACA 0002 y 0012, a $R_e = 1100$ y $k = 10$	132
6.35. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002, 2302 y 4302 a $R_e = 1100$	133
6.36. Comparación de eficiencias propulsivas en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002, 2302 y 4302 a $R_e = 1100$	133

6.37. Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002, 2302 y 4302 a $R_e = 1100$	134
6.38. Contornos de presión para $k = 10$, $\alpha_a = 5^\circ$ y $R_e = 1100$ y $t = 1,54s$.(a) Perfil NACA 0002, (b) Perfil NACA 2302.(c) Perfil NACA 4302.	134
6.39. Comparación del coeficiente de resistencia en función del tiempo, para NACA 0002, 2302 y 4302 a $k = 10$, $R_e = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$	135
6.40. Movimiento combinado ejemplo. Con $f_\alpha = 2$, $f_h = 2$, $\alpha_a = 0,08726[rad]$, $\varphi = \pi/2$ y $h_a = 0,5[m]$	136
6.41. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $R_e = 1100$	137
6.42. Comparación de la eficiencia propulsiva η en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $R_e = 1100$	137
6.43. Comparación del coeficiente de sustentación máximo para cada ciclo, en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $R_e = 1100$	138
6.44. Contornos de velocidad en x para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $R_e = 1100$.(a) Perfil NACA 0012 $\alpha_a = 5^\circ$, (b) Perfil NACA 0012 $\alpha_a = 15^\circ$.(c) Perfil NACA 0004 $\alpha_a = 5^\circ$.(d) Perfil NACA 0004 $\alpha_a = 20^\circ$	139
6.45. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 4404 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $R_e = 1100$	140
6.46. Comparación de la eficiencia propulsiva η en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 4404 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $R_e = 1100$	140
6.47. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 0012 a $R_e = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$	141
6.48. Comparación de eficiencias propulsivas en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 0012 a $R_e = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$	141

6.49. Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 0012 a $R_e = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$	142
6.50. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 4404 a $R_e = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$	142
6.51. Comparación de eficiencias propulsivas en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 4404 a $R_e = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$	143
6.52. Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 4404 a $R_e = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$	143
6.53. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0004 y 0012 a $R_e = 1100$, $\alpha_a = 20^\circ$, $h_a = 0,5[m]$ y $\varphi = \pi/2$	144
6.54. Comparación de eficiencias propulsivas en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0004 y 0012 a $R_e = 1100$, $\alpha_a = 20^\circ$, $h_a = 0,5[m]$ y $\varphi = \pi/2$	144
6.55. Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0004 y 0012 a $R_e = 1100$, $\alpha_a = 20^\circ$, $h_a = 0,5[m]$ y $\varphi = \pi/2$	145
6.56. Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la amplitud h_a y frecuencia f_a vertical manteniendo $St = 0,3$ para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = f_a$, $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $R_e = 1100$	146
6.57. Comparación de la eficiencia propulsiva η en función de la amplitud h_a y frecuencia f_a vertical manteniendo $St = 0,3$ para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = f_a$, $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $R_e = 1100$	146
6.58. Comparación del coeficiente de sustentación máximo para cada ciclo, en función de la amplitud h_a y frecuencia f_a vertical manteniendo $St = 0,3$ para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = f_a$, $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $R_e = 1100$	147
6.59. Contornos de velocidad en x para NACA 0004 y 0012 con $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$, $St = 0,3$ y $R_e = 1100$.(a) Perfil NACA 0004 $f_\alpha = f_a = 1,5$, $h_a = 0,1[m]$ (b) Perfil NACA 0004 $f_\alpha = f_a = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$.(c) Perfil NACA 0012 $f_\alpha = f_a = 1,5$, $h_a = 0,1[m]$.(d) Perfil NACA 0012 $f_\alpha = f_a = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$	148

6.60. Dominio computacional y condiciones de contorno para vuelo <i>hovering</i> simétrico.	150
6.61. Comparación del coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> simétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$	150
6.62. Comparación de la eficiencia propulsiva en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> simétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$	151
6.63. Contornos de velocidad para la visualización de topología de estela en NACA 0012 con $\alpha_a = 20^\circ$, $k = 1/2$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 150$. (a) $t = 0,60[s]$.(b) $t = 0,92[s]$.(c) $t = 1,20[s]$.(d) $t = 1,64[s]$.(e) $t = 2,00[s]$.(f) $t = 2,26[s]$.(g) $t = 2,58[s]$.(h) $t = 3,34[s]$	152
6.64. Coeficiente de sustentación en función del tiempo sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> simétrico a $Re = 150$ con $\alpha_a = 20^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $k = 1/2$	153
6.65. Movimiento combinado alternativo ejemplo. Con $f_\alpha = 0,75$, $f_h = 0,75$, $\alpha_a = 0,1745[rad] = 10^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $h_a = 1[m]$	154
6.66. Comparación del coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> simétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$	155
6.67. Comparación de la eficiencia propulsiva en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> simétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$	155
6.68. Comparación del coeficiente de sustentación en función del tiempo sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> simétrico para dos cinemáticas (sinusoidal y alternativa) a $Re = 150$ con $\alpha_a = 20^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $k = 1/2$. . .	156
6.69. Dominio computacional y condiciones de contorno para vuelo <i>hovering</i> asimétrico.	156
6.70. Movimiento combinado ejemplo. Con $f_\alpha = 2$, $f_h = 2$, $f_x = 2$, $\alpha_a = 0,08726[rad] = 5^\circ$, $\varphi = \pi/2$, $h_a = 0,5[m]$ y $h_x = 0,2[m]$	157
6.71. Comparación del coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo <i>hovering</i> asimétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$	157

6.72. Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* asimétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$ 158

LISTA DE TABLAS

4.1. Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $R_e = 20$	62
4.2. Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $R_e = 40$	63
4.3. Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $R_e = 100$	63
4.4. Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $R_e = 200$	64
4.5. Parámetros cinemáticos para los casos de “ <i>pitching</i> ”.	69
4.6. Coeficiente de tracción promedio y coeficiente de sustentación máximo para los casos de movimiento de cabeceo para el presente trabajo, [55] y [30].	70
4.7. Parámetros cinemáticos para los casos de “ <i>flapping</i> ”.	72
4.8. Coeficiente de tracción promedio y coeficiente de sustentación máximo para los casos de movimiento de cabeceo y vertical combinado para el presente trabajo, [55] y [30].	73
5.1. Espesor de capa límite en una placa plana a diferentes números de Reynolds.	82
5.2. Comparación de los coeficientes de sustentación y resistencia para un perfil NACA 0002 con $\alpha = 1^\circ$, a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$	84
5.3. Relación $C_L - (\alpha)$ para perfiles NACA 0002, 0006 y 0008 a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$	92
5.4. Relación C_L/C_D para perfiles NACA 0002, 0006 y 0008 a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$	93
5.5. Relación $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ para perfiles NACA 4402 y 4404 a $R_e = 800$ y $R_e = 6000$	96
5.6. Relación C_L/C_D para perfiles NACA 4402 y 4404 a $R_e = 800$ y $R_e = 6000$	96
5.7. Relación $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ para perfiles NACA 4402, 0002 y placa plana a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$	100

5.8. Eficiencia (C_L/C_D), para perfiles NACA 4402, 0002 y placa plana a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$.	100
5.9. Relación ($C_L - (\alpha - \alpha_0)$) para perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a $R_e = 10000$.	103
5.10. Eficiencia (C_L/C_D) para perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a $R_e = 10000$.	103
5.11. Relación $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ para perfiles NACA 4302 y 4502 a $R_e = 2000$ y $R_e = 10000$.	107
5.12. Relación C_L/C_D para perfiles NACA 4302 y 4502 a $R_e = 2000$ y $R_e = 10000$.	107

LISTA DE SÍMBOLOS

ACRÓNIMOS

2D	Dos dimensiones
3D	Tres dimensiones
ALE	<i>Arbitrary Lagrangian Eulerian</i>
ASGS	<i>Algebraic Subgrid-Scale Stabilized</i>
b.a.	Borde de ataque
CDR	Convectiva-Difusiva-Reactiva
GLS	<i>Galerkin Least Squares</i>
LBB	Babuska-Brezzi
LEV	<i>Leading edge vortex</i>
MAV	<i>Micro air Vehicles</i>
OSS	<i>Ortogonal Subgrid-Scale</i>
PIV	<i>Particle Image Velocimetry</i>
SUPG	<i>Streamline Upwind / Petrov Galerkin</i>
TEV	<i>Trailing edge vortex</i>

SÍMBOLOS GRIEGOS

α	Ángulo de ataque
α_0	Ángulo de sustentación nula
α_a	Amplitud angular de cabeceo
β	Transformación del dominio material al dominio espacial
χ	Función vectorial genérica
Ω_x	Dominio de referencia

Ω_X	Dominio de material
Ω_x	Dominio espacial
ψ	Función de aproximación para la velocidad
ψ_h	Función de forma para la velocidad asociada al elemento
$\bar{\sigma}$	Tensor de tensiones
κ	Transformación del dominio de referencia al dominio material
ζ	Transformación del dominio de referencia al dominio espacial
χ	Función escalar genérica
Δt	Incremento de tiempo
Δt_c	Incremento de tiempo <i>crosswind</i>
Δt_u	Incremento de tiempo <i>upwind</i>
δ	Espesor de capa límite. Perturbación o desplazamiento de malla
δ_{99}	Espesor de la capa límite al 99 % de la velocidad de corriente libre
$\dot{\alpha}$	Velocidad angular del movimiento de cabeceo
η	Eficiencia propulsiva
γ	Parámetro numérico
$\hat{\Psi}$	Espacio funcional en la escala de la subgrilla
$\hat{\psi}$	Función de aproximación de la velocidad en la escala de la subgrilla
μ	Viscosidad dinámica
μ_i	Métrica de distorsión del elemento
μ_m	Métrica de distorsión del elemento mínima
ω_a	Velocidad angular
ϕ	Función de aproximación para la presión
ϕ_h	Función de forma para la presión asociada al elemento
Φ_s	Espacio funcional que contiene a la presión
Φ_t	Espacio funcional que contiene a la función de aproximación de la presión
Φ_{h_s}	Espacio funcional que contiene a la presión asociado a la partición de elementos finitos
Φ_{h_t}	Espacio funcional que contiene a la función de forma de la presión asociado a la partición de elementos finitos
π_h^n	Proyección del término convectivo sobre $\tilde{\Psi}_h$
$\pi_{h_{pc}}^n$	Proyección del gradiente de presión y del término convectivo

Ψ	Espacio de funciones continuas $H_0^1(\Omega)$
Ψ^\perp	Complemento ortogonal de $\hat{\Psi}$
ψ^\perp	Cualquier función en Ψ^\perp
Ψ_h	Espacio dimensional finito que aproxima el espacio funcional continuo Ψ
Ψ_s	Espacio funcional que contiene al vector velocidad
Ψ_t	Espacio funcional que contiene a la función de aproximación del vector velocidad
Ψ_{h_s}	Espacio funcional que contiene al vector velocidad asociado a la partición de elementos finitos
Ψ_{h_t}	Espacio funcional que contiene a la función de forma del vector velocidad asociado a la partición de elementos finitos
ρ	Densidad del fluido
τ	Parámetro de estabilización
τ_1	Parámetro de estabilización en el término convectivo
τ_2	Parámetro de estabilización en el término de la presión
τ_K	Aproximación de la inversa del operador \mathcal{L}
θ	Parámetro numérico
ϱ	Ángulo girado por la puntera del ala
$\tilde{\Psi}_h$	Espacio de funciones Ψ_h extendido que contiene las funciones vectoriales continuas asociadas a los nodos del contorno
$\tilde{\psi}_h$	Función de forma del elemento que pertenece al espacio $\tilde{\Psi}_h$
ξ_h^n	Proyección del término de presión sobre $\tilde{\Psi}_h$
f_α	Frecuencia de cabeceo
f_h	Frecuencia de desplazamiento
Γ_D	Contorno de un dominio espacial con condiciones de velocidad (Dirichlet)
Γ_M	Contorno de un dominio espacial con condiciones Mixtas
Γ_N	Contorno de un dominio espacial con condiciones de Neumann
Γ_P	Contorno de un dominio espacial con condiciones de presión (Dirichlet)
Γ	Contorno de un dominio espacial
ν	Viscosidad cinemática
Ω^e	Partición de elementos finitos
Ω	Dominio espacial

σ	Módulo del tensor de tensiones
φ	Ángulo de fase

SÍMBOLOS LATINOS

\bar{c}_l	Coefficiente de sustentación promedio
$e\bar{r}r$	error ponderado
\bar{V}_x	Velocidad media en la dirección de x
\bar{c}_p	Coefficiente de potencia promedio
\bar{c}_t	Coefficiente de tracción promedio
\mathbf{c}	Velocidad convectiva
\mathbf{c}_h	Velocidad convectiva elemental
\mathbf{f}_e	Fuerzas externas
\mathbf{g}_i	Vector gradiente direccional para cada elemento
\mathbf{n}	Vector normal unitario al contorno
\mathbf{s}	Vector tangente unitario al contorno
\mathbf{t}_c	Tracción sobre el contorno
\mathbf{u}	Vector velocidad
\mathbf{u}_0	Velocidad inicial
\mathbf{u}_c	Velocidad impuesta sobre el contorno
\mathbf{u}_h	Vector velocidad asociado al elemento
\mathbf{w}	Velocidad de la partícula fluida
\mathbf{x}	Vector de coordenadas
$\hat{\mathbf{v}}$	Velocidad de la malla
\mathbf{u}_m	Velocidad de la malla
$\hat{\mathbf{u}}_h$	Velocidad intermedia o fraccionada asociada al elemento
$\hat{\mathbf{u}}$	Velocidad intermedia o fraccionada
\mathcal{L}	Operador de la ecuación Convectiva-Difusiva-Reactiva
\dot{y}	Velocidad del movimiento vertical
\hat{u}	Velocidad en la escala de la subgrilla
\mathcal{L}^*	Operador adjunto de \mathcal{L}
a_i	Velocidad solenoidal de advección
AR	Alargamiento del ala

B	Operador de discretización del término dependiente la ecuación Convectiva-Difusiva-Reactiva
c	cuerda
C_D	Coefficiente de resistencia
C_f	Coefficiente de fricción
C_L	Coefficiente de sustentación
C_M	Coefficiente de momento
c_m	Cuerda media
C_P	Coefficiente de potencia. Coeficiente de presión
C_T	Coefficiente de tracción
$C_{L\alpha}$	Pendiente de sustentación
C_{Lmax}	Coefficiente de sustentación máximo
D	Resistencia
err	error
f	Frecuencia. Cantidad escalar en un dominio espacial. Función aproximada. Fuerza interna
f^*	Cantidad escalar en un dominio de referencia
f^{**}	Cantidad escalar en un dominio de material
f_α	Frecuencia de <i>pitching</i>
f_h	Frecuencia de <i>heaving</i>
FS	Factor de seguridad
h	Amplitud adimensional de la carrera de movimiento. Tamaño típico del elemento
h_a	Amplitud de la carrera de movimiento
J	Relación de avance
K	Elemento genérico
k	Frecuencia reducida
K_a	Constante positiva
K_b	Constante positiva
k_{efh2}	Frecuencia reducida en <i>hovering</i> bidimensional
k_{efh3}	Frecuencia reducida en <i>hovering</i> tridimensional

L	Sustentación. Operador de discretización del término independiente la ecuación Convectiva-Difusiva-Reactiva
l	Longitud característica
l_e	Tamaño del elemento
M	Momento. Número de Mach
N	Dimensión espacial. Superficie normal evaluada en el centro del triángulo
n	Paso de tiempo genérico
N_c	Norma del término convectivo
N_d	Norma del término difusivo
N_l	Norma del término independiente
P	Potencia
p	Presión
p_0	Presión inicial
p_c	Presión impuesta sobre el contorno
P_h	Proyección L^2 sobre el espacio de elementos finitos
p_h	Presión asociada al elemento
R	Longitud de la semienvergadura
Re	Número de Reynolds
Re_{fh2}	Número de Reynolds en <i>hovering</i> bidimensional
Re_{fh3}	Número de Reynolds en <i>hovering</i> tridimensional
Re_x	Número de Reynolds en función de la longitud de la placa
S	Superficie de referencia
s	Constante de reacción
St	Número de Strouhal
STB_p	Proyección del término de presión
STB_u	Proyección del término convectivo
T	Tracción o empuje
t	Tiempo
t_0	Tiempo inicial
t_f	Tiempo final
tol	Tolerancia
U	Velocidad de referencia

u	Velocidad sobre el elemento. Velocidad horizontal
u_n	Módulo de velocidad normal al contorno
u_{ske}	Vector velocidad asociado al elemento
v	Velocidad vertical
V_x	Velocidad en la dirección de x
W	Peso del vehículo
x	Longitud de coordenadas
Y	Coordenada vertical
\mathbb{T}	Período del movimiento oscilatorio inducido

SUBÍNDICES

max	Máximo
min	Mínimo
num	Numérico
pt	Presente trabajo
ref	Referencia
teo	Teórico

La aerodinámica de bajo Reynolds ha sido de interés para ingenieros y biólogos con el afán de entender su naturaleza y como aplicarla a la tecnología de vehículos de pequeña escala.

1.1 Visión general

Desde los años '90 que surge la denominación “Micro Air Vehicles”(MAV's), donde ha existido una atracción especial sobre la ciencia e ingeniería de desarrollo de estas pequeñas aeronaves. En un principio, se define como MAV's, a los vehículos con una dimensión máxima de hasta 15 cm, comparables con pequeñas aves o murciélagos. Con el rápido progreso de los últimos años en áreas como estructura, ciencia de los materiales, comunicación y miniaturización de plantas propulsoras, muchos grupos alrededor del globo se animaron al desarrollo y construcción de MAV's [63].

Existen varios conceptos o alternativas al diseño en donde se encuentran vehículos con ala fija (Fig.1.1a), alas rotatorias (Fig.1.1b), alas batientes (Fig.1.1c), o la combinación de ellos.

Además de las investigaciones ingenieriles, existe un gran apoyo a esta área por parte de los modelistas aficionados a competencias, que poseen gran conocimiento práctico capaz de aportar a desarrollos de relevancia. También existe un trabajo en paralelo con biólogos que proporcionan valiosa información sobre las escalas, morfologías, potencias involucradas etc., ya que gran cantidad de especies de aves e insectos tienen dimensiones similares a los MAV's.

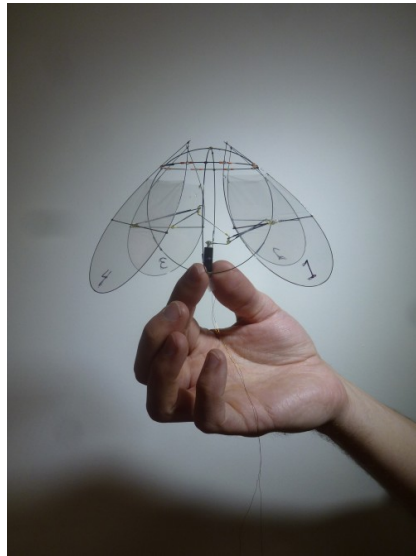
Se puede pensar que la naturaleza tiene cientos de millones de años de desarrollo en especies capaces de volar o nadar de forma eficaz y controlada. Y para tener una idea



(a)



(b)



(c)

Figura 1.1: Modelos de MAV.1.1a Ala fija, 1.1b Alas rotatorias, 1.1c Alas batinentes.

de ello, se puede comparar la velocidad de un animal o vehículo, dada como la longitud de su propio cuerpo, por unidad de tiempo recorrido. Por ejemplo el cuerpo humano es capaz de recorrer cinco veces su cuerpo en un segundo, un caballo de carrera 18 cuerpos por segundo, un avión de transporte a su máxima velocidad 3.6 cuerpos por segundo, un avión militar que viaja a Mach 3, alcanza 32 cuerpos por segundo.

Ahora si nos referimos a aves o insectos, por ejemplo una paloma es capaz de recorrer 75 longitudes de su cuerpo en un segundo, un cisne 23 cuerpos por segundo y una mosca común, capaz de volar a 3 metros por segundo, recorre 430 longitudes de su cuerpo en ese mismo tiempo [30].

Para dar una idea de la maniobrabilidad, un avión acrobático es capaz de girar 400 grados en un segundo y una golondrina 5000 grados en ese lapso. Este ángulo está estrechamente vinculado a la fuerza G que el vehículo o animal es capaz de resistir, por

ejemplo, un avión militar llega a 8 o 10 G y un ave puede tener desde 10 a 14 G en cualquier vuelo rutinario.

Obviamente que estas grandes diferencias se deben a la escala en la que se realiza, las fuerzas de inercia, las velocidades de pérdida y demás, pero deja una buena comparación cualitativa de la naturaleza y el alcance de la tecnología al día de hoy [30].

Recientemente, en la comunidad ingenieril y en particular la aeroespacial, se ha despertado un interés especial en la aerodinámica de bajo Reynolds y los potenciales que presenta en el desarrollo de MAV's, sobre todo en los métodos de propulsión poco convencionales en la práctica tecnológica y en cuanto a las potenciales utilidades que se pueden prestar como misiones de vigilancia y reconocimiento en lugares remotos, monitoreo de tráfico, fotografía y filmación aérea, exploración de catástrofes, entre otras [50].

Si bien es un panorama alentador, a lo largo de los últimos años, alas de tipo fijas y móviles han sido estudiadas en detalle para este tipo de aplicaciones encontrando una amplia caída de las prestaciones aerodinámicas respecto a aeronaves de gran porte, con un gran predominio de fenómenos viscosos sobre el cuerpo y la estela. Además debe tenerse presente que a Reynolds menores a 10^5 , los factores aerodinámicos y las geometrías puestas en juego, deben referenciarse a un estrecho rango de número de Reynolds para una evaluación adecuada. Es decir que no es lo mismo hablar de cuerpos que vuelan a Reynolds menores a 10^4 que cuerpos que vuelan a Reynolds del orden 10^5 . Esto se debe a que los fenómenos fluido-dinámicos presentes son muy sensibles a la variabilidad de este parámetro. Esto hace a la diferencia con la aerodinámica de alto Reynolds.

Luego, el camino a seguir parece ser la imitación de la naturaleza. El estudio de alas batientes promete ser la clave para que las deficiencias aerodinámicas encontradas sean subsanadas [62] y contrariamente a un ala fija, el flujo no permanece adherido a la superficie en todo instante, si no que se aprovechan los desprendimientos característicos de borde de ataque y de fuga, para lograr altos picos de sustentación, mayor eficiencia y sobre todo nuevos fenómenos que en el flujo estacionario no están presentes, como por ejemplo la propulsión [21].

1.2 Breve reseña histórica del flujo inestacionario y a ultra-bajo Reynolds

En esta sección se presenta una breve síntesis de los estudios más relevantes de carácter experimental como numérico al día de hoy. Como en este trabajo se realiza un estudio tanto de flujo estacionario como inestacionario de perfiles, se identifican trabajos de ambas áreas que han presentado mayor influencia y referato sobre la comunidad.

Hay una gran cantidad de documentos referidos a este tema provenientes del área de biología, ingeniería y aerodinámica desde hace siglos, recordemos que el deseo del hombre de volar como las aves es casi innato, provocando su curiosidad para poner esfuerzo en la comprensión y práctica del mismo.

Desde Leonardo da Vinci con sus bocetos de aeronaves y alas, hasta Otto Lilienthal, gran pionero de la aeronáutica moderna, imaginaron y experimentaron sobre modelos de alas fijas y móviles, con el fin de que pudieran volar. Lilienthal descubrió que agregar combadura a una placa plana permitía obtener mayor sustentación en sus planeadores. Este último, luego de su muerte, fue quien inspiró a los hermanos Wright en su carrera por desarrollar una aeronave capaz de volar bajo control. Luego el estudio de vehículos a gran escala con alas batientes se desanimó con la llegada de los primeros aeroplanos.

Las primeras teorías en flujo inestacionario de perfiles sólo se basaban en vuelo *heaving* (oscilación vertical). En estudios independientes Knoller [42] 1909 y Betz [68] 1912 sumergieron en una corriente libre un perfil con este tipo de movimiento, creando un ángulo de ataque efectivo para el cuerpo y como resultado obtuvieron una fuerza normal con componentes vertical (sustentación) y horizontal (empuje) hoy conocido como el efecto Knoller-Betz. Luego Katzmayer validó este efecto en un túnel de viento en 1922.

En 1930, con las características aerodinámicas alcanzadas en las alas, el estudio del flujo inestacionario se centró en el área de aeroelasticidad con el fenómeno de flutter y los problemas que acarrea. En esa misma década, Theodorsen [8] utilizó la hipótesis de flujo incompresible no viscoso totalmente adherido a la superficie con pequeñas oscilaciones sinusoidales como movimiento inducido. Además se cumplía con la condición de Kutta sobre el borde de fuga y la estela estaba compuesta de vórtices de intensidades variables en forma sinusoidal. Esta teoría constituyó un modelo estándar para el análisis de problemas aeroelásticos.

Karman y Burger [73] ofrecieron la primera explicación teórica de la resistencia y empuje generado en perfiles *heaving* y Garrick [28] al mismo tiempo demostraba que el empuje generado en este tipo de movimiento se daba para un cierto rango de frecuencias;

y para perfiles *pitching* (movimiento de cabeceo) ocurría algo similar pero con la dependencia además, de la posición del pivot. Luego le sucedieron análisis de flujo potencial inestacionario más sofisticados, donde se combinaban movimientos de poca amplitud, con simplificaciones severas como la aplicabilidad únicamente a perfiles delgados.

Con el advenimiento del cálculo por computadoras, comenzaron a aparecer códigos de flujo potencial más complejos donde ya se podían tener en cuenta efectos tridimensionales como el espesor y formas arbitrarias de perfiles. Estos métodos eran denominados métodos de paneles. Quienes desarrollaron con mayor profundidad este tipo de modelos fueron Teng[67], Platzner *et al.*[58] y Jones *et al.*[57].

En el modelo potencial no se puede predecir el punto de separación del flujo, hay que establecerlo en todo momento y se debe cumplir la condición de Kutta para el conveccionado de vórtices hacia la estela. Esto no es necesario en softwares numéricos de Navier-Stokes, ya que el punto de separación no se establece a priori y permiten tener la formación de vórtices de borde de fuga y de ataque con el desprendimiento viscoso en la sección que debe ocurrir.

Con el avance computacional, estos últimos ganaron terreno y han sido usados en las simulaciones de aerodinámica inestacionaria, más precisamente en alas y perfiles batientes.

Algunos trabajos recientes con modelos que consideran las ec. de Navier-Stokes son tomados como referencia, por ejemplo Young y Lai [77] mostraron la estructura de vórtices en la estela y la fuerte vinculación de la frecuencia de oscilación con la sustentación y el empuje. Isogai *et al.* [38] calcularon la eficiencia propulsiva para varias combinaciones de frecuencias y fases en un perfil y el efecto de la pérdida dinámica en dicha eficiencia. Kunz[44] en su tesis doctoral estudia diferentes geometrías sobre perfiles a números de Reynolds ultra-bajos para luego aplicarlas al diseño de micro-rotors. Liu *et al.*[49] utilizó un software 3D de Navier-Stokes en la simulación del vuelo suspendido (*hovering*) de una polilla. Wang[75] observó el comportamiento de un perfil elíptico sobre las características propulsivas en vuelo suspendido. Pedro *et al.*[55] estudiaron la eficiencia propulsiva de un perfil acuático a Reynolds 1100. Hover *et al.* [33] utilizaron movimientos sinusoidales y no sinusoidales en perfiles con movimiento vertical y de cabeceo, con el fin de comparar las eficiencias propulsivas de los ángulos de ataque temporales. Tuncer *et al.* [70][71][72] estudiaron el efecto de la separación sobre la propulsión generada sobre perfiles en movimiento vertical, de cabeceo y combinado.

Desde el punto de vista experimental se pueden mencionar varios trabajos de interés y que sirvieron para validar códigos numéricos aplicados en esta rama. Entre ellos Lai y

Platzer [45], visualizaron en un túnel de agua perfiles sometidos a movimientos oscilatorios, proporcionando valiosa información sobre la topología de la estela y su vinculación con la propulsión. Triantafyllou *et al.* [69] basado en los resultados experimentales de Koochesfahani [43] y un análisis de estabilidad lineal de un perfil de velocidades promedio, concluyó que la eficiencia propulsiva óptima se obtiene cuando ocurre la máxima amplificación espacial de la estela. Anderson *et al.* [1] observaron en sus experimentos que el ángulo de fase entre el movimiento vertical y de cabeceo, es clave en la máxima eficiencia propulsiva. Jones y Platzer [56] demostraron que dos perfiles en configuración de biplano y oscilando en contra-fase, tienen mayor eficiencia propulsiva que un perfil simple.

Recientemente Heathcote y Gursul [31] realizaron experimentos en un túnel de agua en perfiles flexibles en movimientos de *heaving* y *pitching*, observando que el pico de propulsión cambia para ambos movimientos manteniendo fijas las amplitudes. Miao y Ho [52] estudiaron el efecto de la amplitud flexural sobre perfiles batientes para combinación de frecuencias reducidas y números de Reynolds. Ellos observaron una mejora en la eficiencia propulsiva para una amplitud flexural del 30 % de la cuerda y a un número de Strouhal de 0.225.

1.3 Motivación y objetivos del trabajo

La motivación para la elaboración de este trabajo es que el conocimiento base existente sobre el comportamiento de perfiles alares a números de Re ultra-bajos es mínimo en comparación con la cantidad de alternativas que se presentan. La necesidad de una comprensión mayor de los problemas en esta área hace que el análisis bidimensional (2D) sea un punto de partida práctico. Estos análisis, por ser relativamente rápidos, permiten el estudio de una matriz de casos computacionales mayor y más variada, lo cual es importante cuando la investigación es exploratoria tanto en geometría como en propiedades del flujo.

La investigación está enfocada en la obtención de datos que permitan una comprensión clara del comportamiento de geometrías aerodinámicas estándares en flujo de ultra-bajo Reynolds. Tanto el estudio estacionario como inestacionario son de competencia para áreas específicas de desarrollo como palas de micro-rotores oscilantes, eficiencia de microplaneadores, vehículos propulsados con alas batientes, cuadricópteros, estudios de interacción fluido-estructura etc. Y con respecto al flujo, el comportamiento de la capa límite a este régimen, la topología de estela, la pérdida dinámica, la formación y

difusión de vórtices, la influencia de los parámetros adimensionales de gobierno y las cualidades aerodinámicas de cada geometría.

Los objetivos a plantearse para el presente son:

- Comprender las cualidades del flujo a ultra-bajo Reynolds. Capa límite, puntos de separación, distribución de presiones y otros.
- Estudiar los parámetros geométricos sobre perfiles estándares como la relación de espesor y la combadura en flujo estacionario.
- Analizar los parámetros geométricos sobre perfiles estándares como la relación de espesor y la combadura en flujo inestacionario, más específicamente en cinemáticas como *heaving*, *pitching* y *flapping*.
- Conocer como es el rol de parámetros adimensionales fundamentales como el número de Strouhal, frecuencia reducida y número de Reynolds en flujo inestacionario en el régimen planteado.
- Entender la influencia de la cinemática de vuelo sobre la aerodinámica de perfiles.

1.4 Resumen del trabajo por capítulos

Para cumplir los objetivos planteados en el presente trabajo, se decidió dividir la tesis en 7 capítulos. En el Cap. 1 se presenta un panorama general del tema, las investigaciones relevantes a la fecha, las motivaciones y los objetivos a cumplir.

En el Cap. 2 se ponen en evidencia las principales controversias que se asumen sobre la física del vuelo a ultra-bajo Reynolds y las herramientas que se utilizan para representarla, las hipótesis que se realizan para simplificar el estudio, el concepto de vuelo estacionario e inestacionario y su relación con la naturaleza, parámetros adimensionales fundamentales y cinemáticas intervinientes.

En el Cap. 3, se desarrollan las ecuaciones de gobierno del problema partiendo de las leyes de conservación, para luego exponer las ecuaciones generales de Navier Stokes y posteriormente su simplificación para un flujo viscoso incompresible laminar. Posteriormente se plantean estas ecuaciones para un sistema Euleriano-Lagrangeano Arbitrario ó ALE por *Arbitrary Lagrangean-Eulerian*.

Luego el capítulo tratará el método numérico aproximado a utilizar para resolver las ecuaciones de gobierno. Se evidencian paso a paso las discretizaciones espaciales (elementos finitos) y temporales (pasos fraccionados) aplicadas, en conjunto con el método

de estabilización para el correcto funcionamiento del código. Por último se detalla un algoritmo de optimización de suavizado para la implementación del movimiento de la malla.

En el Cap. 4 se realizan una serie de pruebas numéricas que se contrastan con resultados tanto teóricos como experimentales obtenidos de la bibliografía, ya sea para flujo estacionario como inestacionario, con el objetivo de llevar a cabo la validación y verificación del código numérico.

En el Cap. 5 se presentan estudios base para el conocimiento del comportamiento de diferentes perfiles en flujo estacionario a números de Reynolds ultra-bajos. Se tendrán en cuenta variaciones de parámetros geométricos, como la combadura y la posición de la misma sobre la cuerda del perfil y el espesor. Además, se estudia la posición del desprendimiento del flujo cercano al cuerpo, su espesor en función del número de Reynolds y como influyen a los parámetros aerodinámicos de mayor importancia.

Luego en el Cap. 6 se exponen resultados de simulaciones sobre perfiles aerodinámicos en dos dimensiones sometidos a flujo inestacionario. Principalemente el mismo se divide en las cinemáticas más importantes como *heaving*, *pitching* y *flapping*, donde se estudia como es el comportamiento de perfiles aerodinámicos en función de sus características geométricas, parámetros adimensionales de flujo y cinemáticos intervinientes. Además se presentan algunos casos especiales de vuelo *hovering* simétrico y asimétrico.

Finalmente se expresan las conclusiones finales y trabajos a futuro.

AERODINÁMICA DE ULTRA-BAJO REYNOLDS

Para un mayor entendimiento del vuelo de micro vehículos o de animales pequeños, es necesario dar una noción o marco general del tema y de los parámetros requeridos para un estudio puntual, además de poner en evidencia las principales controversias sobre la física y las herramientas que se utilizan para representarla y que al día de hoy, siguen vigentes. Sobre el concepto “ultra-bajo” aplicado al número de Reynolds, cabe aclarar que es un término subjetivo y netamente aeronáutico con el fin dar un lugar a los MAV’s en su amplio campo de estudio.

En este capítulo se presenta en que contexto la aerodinámica de ultra-bajo Reynolds debe ser tratada, que hipótesis son permisibles para simplificar el estudio, el vuelo inestacionario y su relación con la naturaleza, parámetros adimensionales fundamentales y cinemáticas intervinientes.

2.1 Aerodinámica del vuelo estacionario

Numerosas aplicaciones pueden encontrarse en la literatura de estados de vuelo estacionario a números de Reynolds muy bajos (fig. 2.1). Existen microvehículos de ala fija o móvil capaces de desarrollar el vuelo controlado en este régimen y para ello necesitan de una geometría eficiente capaz de mantener ese objetivo. Dicha geometría difiere totalmente de un avión tripulado de grandes dimensiones y adopta soluciones particulares referentes a cada caso.



Figura 2.1: Microvehículo aéreo capaz de ejercer tanto el vuelo estacionario como el inestacionario.

2.1.1 Escala de vuelo y parámetros adimensionales del flujo estacionario

Un diagrama interesante que resume la amplia escala de vuelo que va desde insectos a aeronaves tripuladas, se puede ver en la fig. 2.2 (tomada de [63]), donde se expone la correlación entre velocidad de vuelo de crucero, peso y carga alar. Con el avance técnico y tecnológico de los MAV's, sus dimensiones, su carga alar y su potencia disponible, hacen posible descender hacia la esquina inferior izquierda de la gráfica.

En la aerodinámica subsónica, donde los efectos de compresibilidad pueden no ser tenidos en cuenta, el parámetro de gobierno al que debe referenciarse cualquier resultado obtenido es el número de Reynolds. Dicho número se puede expresar de la siguiente forma,

$$Re = \frac{\rho U l}{\mu} \quad (2.1)$$

donde U es la velocidad, l una longitud característica, ρ la densidad del fluido y μ la viscosidad dinámica. El número de Reynolds define la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas en un fluido en movimiento.

Otro parámetro es la sustentación en vuelo recto y nivelado que se expresa:

$$L = \frac{1}{2} \rho S C_L U^2 \quad (2.2)$$

donde S es la superficie alar de referencia, W el peso y C_L el coeficiente de sustentación. Para el caso de un perfil en 2 dimensiones la sustentación por unidad de envergadura se

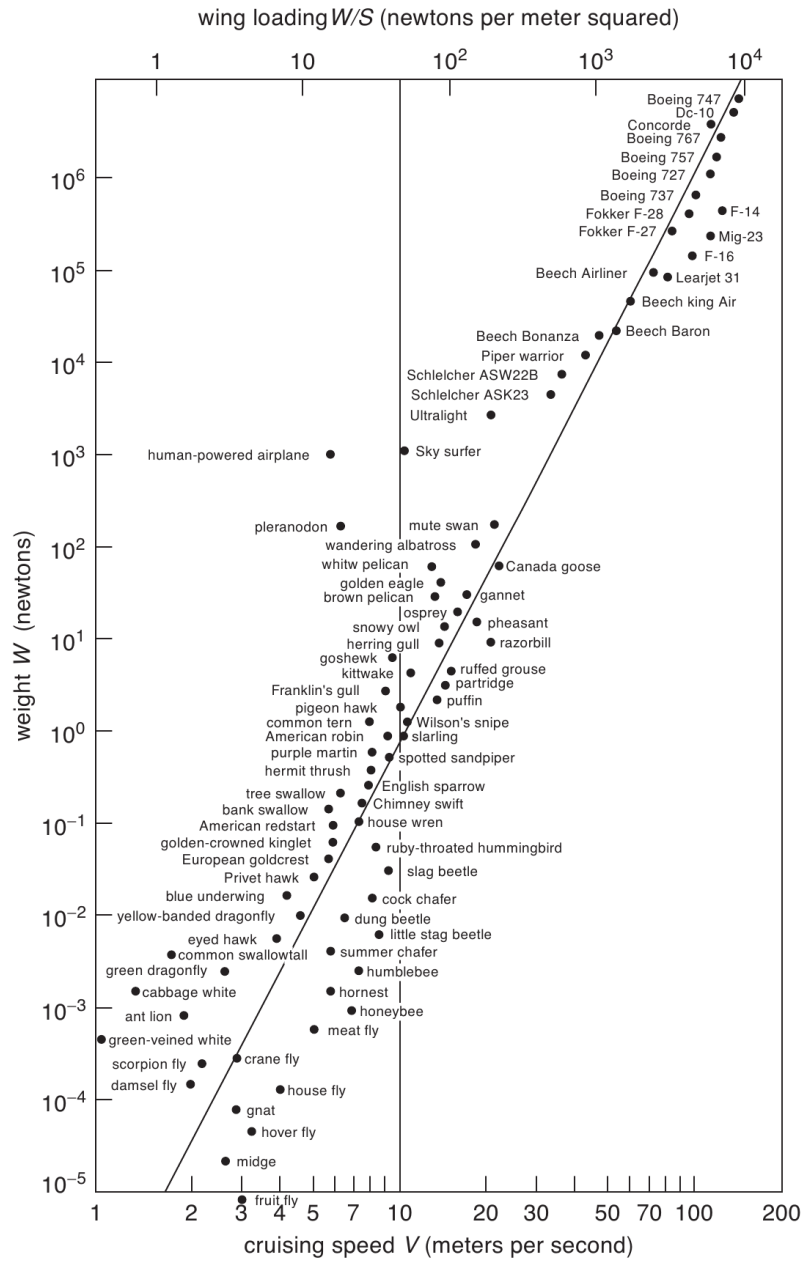


Figura 2.2: Diagrama general de vuelo que expone las relaciones entre peso, velocidad de crucero y carga alar [63].

escribe:

$$L = \frac{1}{2} \rho c C_L U^2 \quad (2.3)$$

donde c es la cuerda del perfil.

La carga alar se define como:

$$\frac{W}{S} = \frac{\rho U^2}{2} C_L \quad (2.4)$$

y la resistencia aerodinámica por unidad de envergadura de un perfil se puede escribir de la siguiente manera:

$$D = \frac{1}{2} \rho c C_D U^2 \quad (2.5)$$

donde C_D es el coeficiente de resistencia.

Otra figura interesante es la 2.3, donde se relacionan el número de Reynolds, el número de Mach y los tipos de vehículos aéreos que operan en cada rango. La fig. 2.3 destaca que para aeronaves que vuelen aproximadamente en rangos de Re menores a 7000, el flujo es laminar, es decir predomina la viscosidad sobre la inercia.

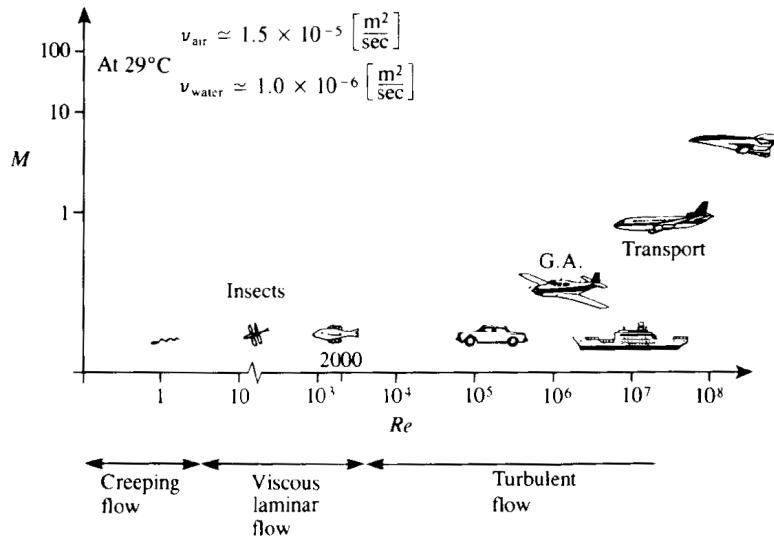


Figura 2.3: Relación entre número de Reynolds y número de Mach.[41]

2.1.2 Sobre las hipótesis del flujo

El flujo a estudiar en este trabajo se basa en un fluido newtoniano, con las ecuaciones de Navier-Stokes como ecuaciones de gobierno.

Como primera hipótesis, el flujo se asume incompresible, ya que el número de Mach en cualquier análisis de esta tesis es $M \ll 0,3$ y por lo tanto dicha hipótesis es aceptada sin controversias. La segunda simplificación asume que el flujo es completamente laminar. Esta hipótesis es un tanto incierta, ya que depende del número de Reynolds, del ángulo

de ataque, de la distribución de presión, de la geometría y de la rugosidad de la superficie. Esta simplificación se tratará a continuación.

A números de Reynolds altos, tal como ocurre en aeronaves de transporte donde su valor supera ampliamente 10^6 , los desprendimientos ocurren a altos ángulos de ataque y el flujo se caracteriza por ser turbulento en su totalidad.

En cambio, a números de Reynolds bajos es importante destacar que al impactar el flujo sobre el cuerpo en estudio, el mismo puede tener el carácter laminar y luego transicionar a turbulento debido a la presencia de gradientes adversos de presión. De aquí surgen dos posibilidades, que el flujo se separe de la superficie por completo, o que una vez separado vuelva a adherirse pero con la capa límite ya transicionada a turbulenta, previa formación de una burbuja denominada burbuja de separación laminar, fig. 2.4.

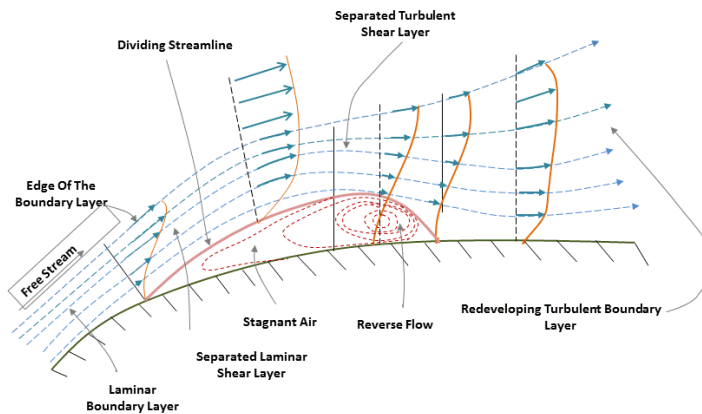


Figura 2.4: Burbuja de separación laminar.

Dicho fenómeno es importante de mencionar, ya que su formación induce un cambio en la geometría efectiva del perfil, dando lugar a una variación importante en sus cualidades aerodinámicas. Varios experimentos fueron realizados por distintos autores con el fin de observar y determinar, principalmente, cuando y como ocurre el fenómeno de separación laminar. El más importante puede decirse que fue el que realizó Carmichael [11], donde estableció una regla empírica que dice que el flujo va a readherirse sobre la superficie de un perfil, si el número de Reynolds basado en la corriente libre y considerando como longitud de referencia la distancia desde el punto de separación hasta el punto donde vuelve a adherirse, es aproximadamente 50000. Si es menor, el flujo no vuelve a

adherirse y si es ligeramente mayor, se formará una burbuja de gran longitud sobre el extradós. Finalmente, el tamaño de la misma se reduce con el aumento del número de R_e .

Si bien esta regla debe ser usada con cautela, en el presente trabajo los números de Reynolds a tratar son menores a 10000 con bajos ángulos de ataque. Por ende, se puede asumir que el flujo se encuentra lejos de presentar algún desprendimiento laminar con posterior transición a turbulento, lo cual habilita el uso de la hipótesis de flujo totalmente laminar.

2.2 Aerodinámica del vuelo inestacionario

El ejemplo más claro del flujo inestacionario, es el desarrollado por animales capaces de volar y maniobrar de manera casi perfecta, acelerando y desacelerando con pleno control. Ellos tienen la habilidad de generar sustentación y a la vez empuje a través de sus alas. Por ejemplo el vuelo de pájaros puede dividirse de dos maneras: vuelo sin potencia (*gliding* y *soaring*) y vuelo con potencia (*flapping* y *hovering*).

Dicha experiencia extraída de la naturaleza, facilita la comprensión del fenómeno físico para luego llevarla a las aplicaciones tecnológicas desarrolladas por el ser humano (MAV).

2.2.1 Vuelo sin potencia

Para mayor formalidad, se decide describir este tipo de vuelo observado en animales con el fin de tener un mejor panorama del tema, sin entrar luego en mayores detalles, como sí se lo hace con vuelos que brindan algún tipo de tracción o empuje.

Gliding o planeo es cuando la sustentación se produce mediante el ala a una determinada altura en un campo gravitacional y en un ligero ángulo de ataque respecto a la corriente libre, sólo que el animal o microvehículo utiliza su propio peso como fuerza de propulsión. Es decir, que al avanzar en el aire, existe una resistencia ejercida sobre el ala y el cuerpo que produce una pérdida de velocidad, lo que implica una pérdida de sustentación, de allí que el animal debe transformar un poco de energía potencial en energía cinética. Otro parámetro importante, es el ángulo entre la corriente de aire que impacta al cuerpo y la dirección de movimiento, dicho ángulo se denomina ángulo de planeo y es directamente proporcional a la relación sustentación-resistencia (L/D), la cual aumenta con el número de Reynolds. Esto quiere decir que para grandes aves o vehículos de similar tamaño, dicha relación es considerablemente alta ($L/D \approx 19$) lo que

permite realizar maniobras controladas sin demanda de potencia. En animales o insectos de pequeño tamaño, esto no se observa ya que el R_e es ampliamente menor al igual que la relación ($L/D \approx 1,8$).

Desde el punto de vista a analizar, el *gliding* puede ser considerado como estacionario de a tramos, donde cada tramo termina con cada cambio de altura.

El otro tipo de vuelo sin potencia es *soaring*¹ fig. 2.5 el cual es similar al anterior, sólo que el animal o vehículo para elevarse, se sumerge en una corriente ascendente de aire atmosférico de origen térmico o por desnivel geográfico.

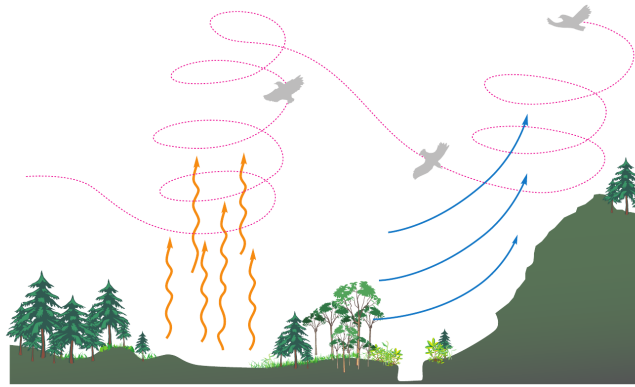


Figura 2.5: Esquema de vuelo *soaring* [30].

2.2.2 Vuelo con potencia

Flapping es el tipo de vuelo desarrollado por animales o microvehículos aéreos, capaces de generar sustentación y tracción mediante el movimiento cíclico de sus alas. El mismo posee una mayor complejidad de la que puede encontrarse en cualquier aeronave con ala de geometría fija.

El vuelo *flapping* [30] o batiente envuelve dos etapas: una es *power stroke* o *down-stroke* y es la que provee la mayor parte de la sustentación y tracción. El movimiento del ala consta de un desplazamiento hacia abajo y hacia atrás respecto del animal, siendo variable a través de la envergadura, es decir que en la cuerda de raíz existe poco desplazamiento y giro, y en la cuerda de puntera una gran traslación. El objetivo es mantener el ángulo de ataque ideal para cada sección del ala, de tal manera de producir una gran fuerza sustentadora con poca pérdida de altitud y a su vez, como dicha fuerza está ligeramente inclinada hacia adelante, se produce propulsión.

¹planeo sin pérdida de altura (vuelo en corriente ascendente)

La segunda etapa es la carrera hacia arriba o *upstroke* y trata de llevar el ala con la mayor velocidad y menor resistencia posible a la posición de inicio de la carrera hacia abajo. En dicha carrera el ala se pliega hacia el cuerpo, es decir que acorta la envergadura con un ángulo de ataque que proporcione la menor resistencia. A su vez en dicha carrera, se produce algo de sustentación que es suficiente para que el cuerpo no pierda altitud.

El otro tipo de vuelo con potencia característico, es *hovering* o vuelo suspendido. Tiene las mismas etapas que el vuelo batiente, sólo que el objetivo es mantener el cuerpo del animal o vehículo en una posición fija. Aquí toda la potencia está destinada a mantener la sustentación, dependiendo de la forma, del tamaño, los grados de libertad y el momento de inercia del ala, cosa que no es factible en muchas especies de aves.

Este tipo de vuelo se observa con mayor frecuencia en aves pequeñas e insectos. Las aves de mayor tamaño lo desarrollan pero en tiempos muy breves.

Existen dos tipos de vuelos suspendidos, *hovering* simétrico y *hovering* asimétrico [30], [63], fig. 2.6. El primero tiene la particularidad de mantener el ala extendida durante toda la carrera y sólo se observa en insectos o aves de pequeño tamaño como el colibrí. Cuando la carrera es hacia adelante, el ala rota sobre su eje longitudinal de tal manera que el extradós se transforma en el intradós y viceversa. Dicho vuelo suele denominarse *insect-stroke*.

El segundo se encuentra en aves de mayor tamaño, incapaces de girar el ala por completo, por ende sólo se extiende en su totalidad en la carrera de *downstroke* (*power-stroke*) y es plegada hacia el cuerpo del animal, en la carrera de *upstroke* (*recovery-stroke*) para disminuir la resistencia. Este vuelo suele denominarse *avian-stroke*.

Además, el vuelo *hovering* es el que ha planteado mayores incertidumbres a lo largo de los años, debido a la presencia y complejidad de fenómenos simultáneos. La variabilidad de cinemáticas de vuelo y las distintas geometrías encontradas en la naturaleza, más la cantidad de variables fluido-dinámicas involucradas, abren un abanico inmenso de posibilidades a explorar y campos de estudio que aún son desconocidos.

Mantener el vuelo *hovering* es desde el punto de vista energético muy costoso. Por lo tanto cabe preguntarse como especies tan diminutas son capaces de volar por tiempos prolongados y como es la optimización de la potencia puesta en juego para llevarlo a cabo. De aquí surgen muchos trabajos que hasta el día de hoy tratan de explicar este fenómeno tan esencial para la tecnología de microvehículos.

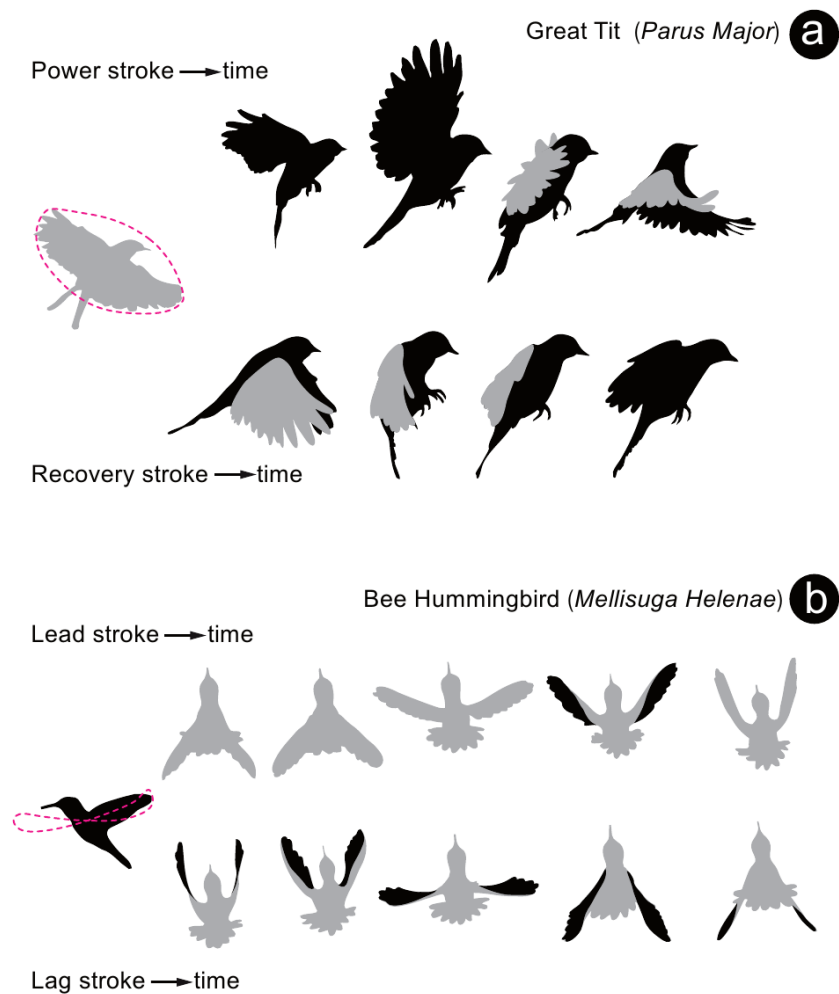


Figura 2.6: Esquema de los tipos de vuelos suspendidos.[a] Asimétrico. [b] Simétrico. [30].

2.2.3 Producción de potencia y efecto sobre la estela

En esta sección se trata de explicar como es que las aves o microvehículos generan una fuerza propulsiva hacia adelante mediante el batimiento de sus alas.

En 1935 Karman y Burgers modelaron el flujo a bajo número de Reynolds alrededor de un cuerpo romo, observando la formación de dos filas de vórtices detrás del cuerpo con signo alternado. Esta configuración de la estela es conocida como calle de vórtices de von Karman. En la fig. 2.7 puede verse que los vórtices de la fila de arriba son de sentido horario y los de la fila de abajo son anti-horarios. La consecuencia de ello es la aparición de un déficit en la velocidad de la estela respecto a la velocidad de la corriente libre. Luego, el efecto resultante es la producción de una fuerza de resistencia.

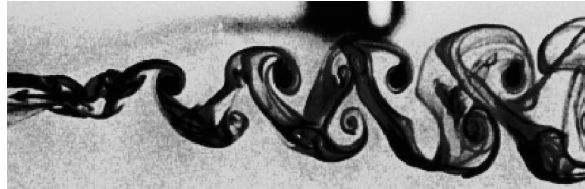
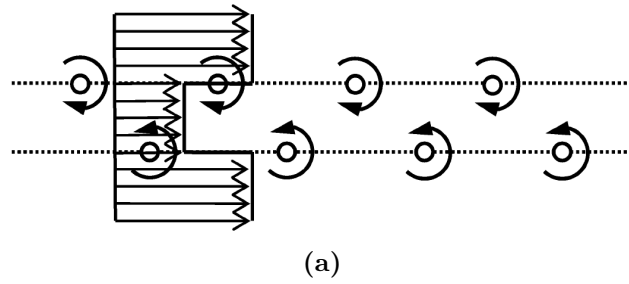


Figura 2.7: Calle de vórtices que indica la producción de resistencia.(a) Representación esquemática y distribución de velocidades [76].(b) Visualización experimental obtenida [40].

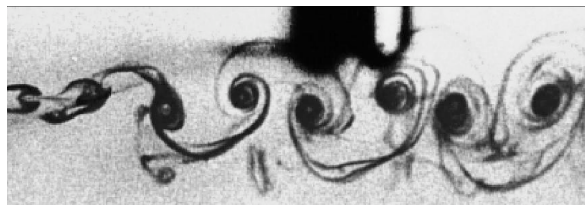
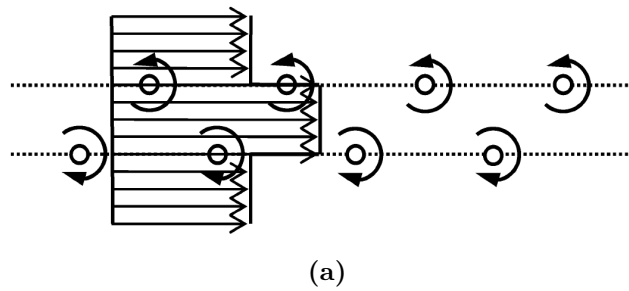


Figura 2.8: Calle de vórtices que indica la producción de propulsión.(a) Representación esquemática y distribución de velocidades [76].(b) Visualización experimental obtenida [40].

Ahora cuando un perfil es sometido por ejemplo a un movimiento sinusoidal vertical, también se puede encontrar un desprendimiento de vórtices desde el borde de fuga con formato similar al descrito anteriormente, pero con la particularidad de que los vórtices poseen un sentido de giro contrario. Es decir, que la velocidad que se encuentra en la estela es mayor a la de la corriente libre, siendo este fenómeno el responsable de la producción de tracción o fuerza propulsiva, también conocido como calle reversa de von

Karman, fig. 2.8.

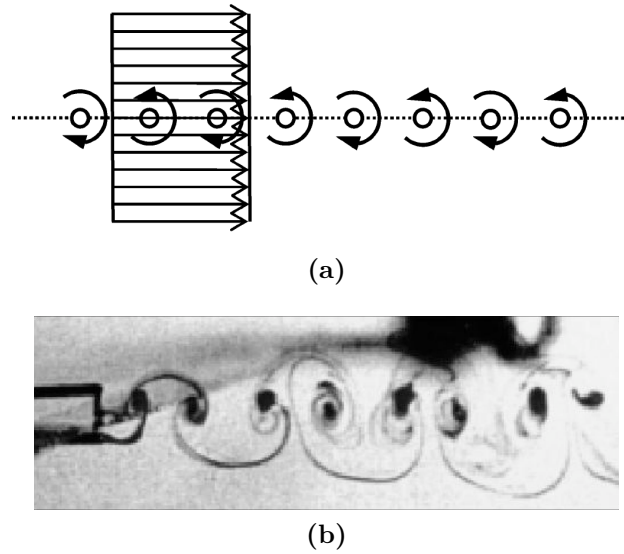


Figura 2.9: Calle de vórtices que indica la producción nula de propulsión.(a) Representación esquemática y distribución de velocidades [76].(b) Visualización experimental obtenida [40].

Otra conclusión interesante obtenida de estos dos análisis, es que el espaciado vertical entre ambas filas de vórtices de la estela es proporcional a la resistencia o la propulsión generada por el cuerpo, dando así una pauta cualitativa del fenómeno.

Existe además un caso neutral donde el espaciamiento vertical entre ambas filas es nulo, resultando en un equilibrio de la cantidad de movimiento de la estela, por lo tanto la resistencia neta es igual al empuje neto (fig. 2.9).

2.2.4 Parámetros adimensionales fundamentales del vuelo inestacionario

Una manera de llevar a cabo comparaciones aerodinámicas sobre geometrías en vuelo inestacionario, es mediante los parámetros adimensionales fundamentales que se definen a continuación [30] y [63].

2.2.4.1 Número de Reynolds

El número de Reynolds ² se define mediante la ec.2.1 y representa la relación existente entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas de un fluido en movimiento. En aves o MAV, suele utilizarse como longitud de referencia, a la cuerda media del ala y en animales o vehículos acuáticos a la longitud del cuerpo.

²fh2 y fh3 es la asignación para el número de Reynolds del vuelo *hovering* correspondiente a 2 y 3 dimensiones respectivamente.

La velocidad de referencia U en vuelo suspendido *hovering*, es diferente a la adoptada en un vuelo con presencia de corriente libre. Para el primero puede tomarse como U de referencia a la velocidad de puntera del ala, igual a $U = \omega_a R$, donde ω_a corresponde a la frecuencia angular del movimiento y R a la longitud de la semienvergadura. Luego $\omega_a = 2\varrho f$, donde ϱ es la amplitud en radianes del ángulo girado por la puntera y f la frecuencia del movimiento o vuelo *hovering*. Finalmente el número de Reynolds es:

$$R_{efh3} = \frac{2\rho c_m \varrho f R}{\mu} = \frac{\rho c_m \varrho f R^2}{AR\mu} \quad (2.6)$$

donde AR es el alargamiento del ala igual a $AR = (2R)^2/S$ y c_m la cuerda media.

Lo interesante por destacar aquí, es que para el vuelo de insectos el AR y la amplitud ϱ no varían demasiado entre una especie u otra, no siendo así la frecuencia, que generalmente aumenta en la medida que el insecto es más pequeño, resultando en un rango de Reynolds que puede encontrarse en estos animales de $10^1 < R_e < 10^4$.

Otro punto a remarcar, es que para una misma amplitud ϱ , se puede preservar el número de Reynolds mediante el producto fR^2 variando uno u otro parámetro y esto significa que se pueden construir modelos a escalas mayores, reduciendo la frecuencia y manteniendo una parte de la similitud aerodinámica, cualidad de sumo interés para la construcción de MAV. Se dice una parte, ya que además de satisfacer el número de Reynolds, se debe mantener el número de Strouhal (parámetro explicitado a continuación) y de hecho es posible hacerlo mediante la variación de la amplitud de *flapping* u *hovering*.

Para *hovering* bidimensional el número de Reynolds se define en base a la máxima velocidad de movimiento vertical como:

$$R_{efh2} = \frac{2f\rho\pi h_a c}{\mu} \quad (2.7)$$

donde h_a es la amplitud de carrera del movimiento.

Por último, en vuelos hacia adelante o con velocidad relativa al fluido circundante (*heaving* o *flapping*) en 2 y 3 dimensiones, el número de Reynolds se basa en dicha velocidad como velocidad de referencia y en la cuerda media como longitud de referencia, (ec. 2.1).

2.2.4.2 Número de Strouhal

El segundo parámetro que define a estos flujos inestacionarios es el número de Strouhal (St), el cual representa el comportamiento dinámico de los vórtices convectados hacia la estela. Se denota como:

$$St = \frac{fl}{U} = \frac{2fh_a}{U} \quad (2.8)$$

donde U es la velocidad de la corriente libre, f la frecuencia de *flapping*, h_a la amplitud de carrera. El número de Strouhal puede interpretarse como la relación entre la velocidad del movimiento inducido (fh_a) con la velocidad de la corriente libre. Además, da una idea de la eficiencia propulsiva para cada tipo de vuelo.

Las investigaciones al día de hoy muestran o avalan que el número de Strouhal es el parámetro dominante en el estudio del vuelo inestacionario y en él se centrará la mayor atención para la obtención de resultados en el presente trabajo.

2.2.4.3 Frecuencia reducida

Otro parámetro adimensional que no se puede obviar y que caracteriza la aerodinámica de movimientos como *pitching* o *heaving*, es la frecuencia reducida, la cual representa la relación del tiempo que tarda una partícula en recorrer la cuerda del perfil con el período de movimiento inducido. Para una velocidad de referencia U y una longitud de referencia $l = c_m$, la misma se define como:

$$k = \frac{2\pi fl}{2U} = \frac{\pi fc_m}{U} = \frac{\omega_a c_m}{2U} \quad (2.9)$$

donde f es la frecuencia de movimiento y ω_a su velocidad angular.

En vuelo *hovering* tridimensional, donde la velocidad de referencia es la velocidad de la puntera del ala se escribe:

$$k_{fh3} = \frac{\pi c_m}{2\rho R} = \frac{\pi}{\rho AR} \quad (2.10)$$

y para el caso bidimensional:

$$k_{fh2} = \frac{c}{2h_a} \quad (2.11)$$

Una relación interesante entre la frecuencia reducida y el número de Strouhal se expresa como:

$$St = \frac{fl}{U} = \frac{2fh_a}{U} = \frac{1}{\pi} \frac{\omega_a c_m}{2U} \frac{2h_a}{c_m} = \frac{k}{\pi} \frac{2h_a}{c_m} = \frac{2}{\pi} kh \quad (2.12)$$

donde h es la amplitud adimensional $h = h_a/c_m$ y el producto kh se define como la máxima velocidad de *heaving* adimensional.

2.2.4.4 Relación de avance

En adición a los parámetros presentados se define la relación de avance para el vuelo en 2 y 3 dimensiones como:

$$J = \frac{U}{2\pi f h_a} \quad (2.13)$$

y da una idea del avance o velocidad de avance obtenida, en función de la velocidad de movimiento impuesto.

2.2.4.5 Parámetros de Performance

En el análisis de perfiles en vuelo batiente o inestacionario, es necesario definir ciertos parámetros que permitan cuantificar el comportamiento aerodinámico propiamente dicho. Para ello, primero se presentan los ya conocidos coeficientes de sustentación y resistencia para un análisis bidimensional, es decir por unidad de envergadura:

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 c} \\ C_D &= \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 c} \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde c es la cuerda del perfil, U la velocidad de corriente libre y L y D son las fuerzas de sustentación y resistencia respectivamente.

En este tema, es preferible hablar de tracción producida que en vez de resistencia, ya que el empuje generado por un perfil es del mismo valor absoluto pero con diferente signo. Luego el coeficiente de tracción por unidad de envergadura se define como:

$$C_T = -C_D = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho U^2 c} \quad (2.15)$$

donde $T = -D$.

La potencia instantánea que debe impartir el perfil para llevar a cabo el movimiento, se calcula en función de la sustentación y del momento aerodinámico a vencer (de allí los signos negativos) como:

$$P(t) = -L(t)\dot{y}(t) - M(t)\dot{\alpha}(t) \quad (2.16)$$

donde $y(t)$ es la velocidad vertical, $\dot{\alpha}(t)$ es la velocidad de cabeceo o *pitching* del perfil sobre el punto de pivot y M es el momento de cabeceo generado por las fuerzas de sustentación y resistencia. El coeficiente de momento por unidad de envergadura se escribe como:

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho U^2 c^2} \quad (2.17)$$

Luego el coeficiente de potencia por unidad de envergadura puede presentarse como:

$$C_P(t) = \frac{P(t)}{\frac{1}{2}\rho U^3 c} \quad (2.18)$$

El valor medio en el tiempo de cualquiera de los coeficientes, puede expresarse como:

$$\bar{c}_x = \frac{1}{\mathbb{T}} \int_t^{t+\mathbb{T}} C_X(t) dt \quad (2.19)$$

donde \mathbb{T} es el período del movimiento oscilatorio inducido y $C_X(t)$ puede ser $C_L(t)$, $C_D(t)$, C_P , etc.

Finalmente la eficiencia propulsiva puede ser interpretada como la energía propulsiva transferida a la estela, en relación a la energía puesta en juego para generar empuje neto.

$$\eta = \frac{T_{medio} U}{P_{medio}} = \frac{\bar{c}_t}{\bar{c}_p} \quad (2.20)$$

donde la barra indica que son los valores medios de cada coeficiente, obtenidos en el intervalo de tiempo de cálculo.

2.2.5 Geometría y cinemática del vuelo inestacionario

En esta etapa de la investigación el estudio sólo se lleva a cabo en 2 dimensiones como simplificación del movimiento más complejo que se desarrolla en 3 dimensiones. La bibliografía indica que las simulaciones bidimensionales son la base para el entendimiento de los fenómenos que luego se presentan en casos tridimensionales, además de constituir la plataforma del diseño aerodinámico.

El movimiento tridimensional de un ala sometida a vuelo batiente o *flapping*, se simplifica en dos movimientos separados a través de una determinada fase, cuando se lo proyecta al plano bidimensional, fig. 2.10.

Dichos movimientos son: desplazamiento vertical del perfil sometido a una corriente libre o *heaving* donde los parámetros de gobierno son la amplitud máxima de desplazamiento h_a , la frecuencia f_h y el ángulo de fase φ con el movimiento de cabeceo o *pitching*. Los parámetros de este último son: la máxima amplitud o ángulo de giro α_a y la fre-

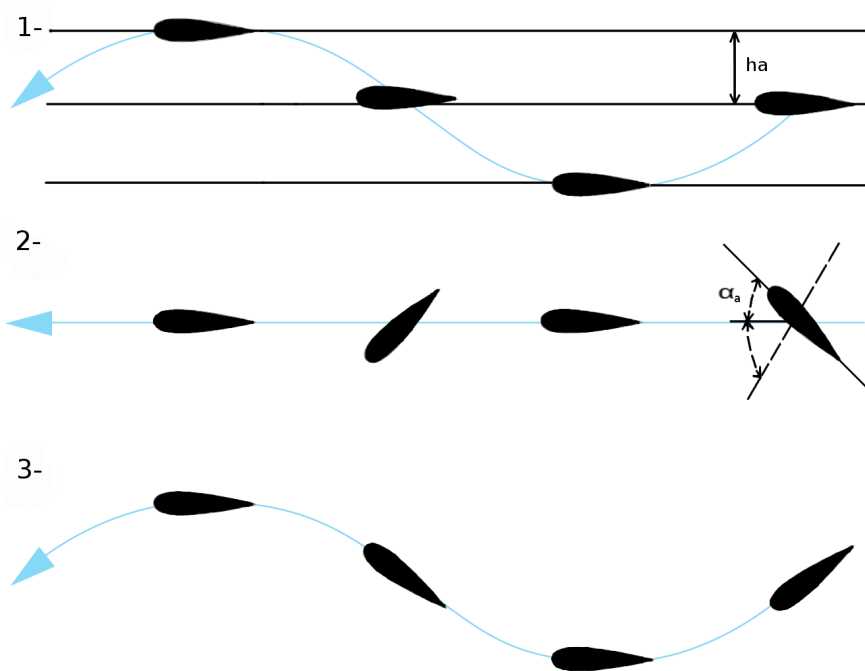


Figura 2.10: Tipos de movimientos en el plano bidimensional. (1) *heaving*. (2) *pitching*. (3) *flapping*.

cuencia f_α . En la fig. 2.11 pueden observarse algunos de estos parámetros, además de x_p que es la distancia al punto de pivot.

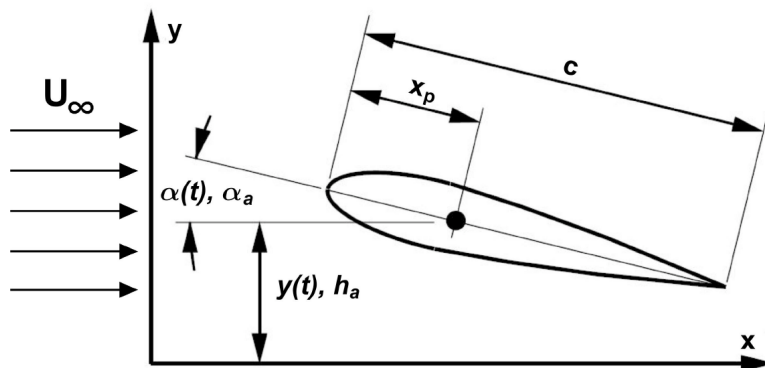


Figura 2.11: Esquema de la cinemática del vuelo inestacionario [30].

Luego el movimiento puede representarse por ecuaciones periódicas simétricas como

sigue:

$$\begin{aligned} h(t) &= h_a \sin(2\pi f_h t + \varphi) \\ \alpha(t) &= \alpha_a \sin(2\pi f_\alpha t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

y en función de la frecuencia reducida k :

$$\begin{aligned} h(t) &= h_a \sin(2\frac{U_\infty k}{c} t + \varphi) \\ \alpha(t) &= \alpha_a \sin(2\frac{U_\infty k}{c} t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Las aves y los MAV no utilizan para el vuelo cada movimiento por separado, sino una combinación de *pitching* y *heaving* separados generalmente por un ángulo de fase. De todos modos es interesante estudiar cada movimiento independientemente.

2.2.6 Pérdida dinámica y vórtice de borde de ataque (LEV)

Muchos autores en sus trabajos reconocen la importancia y el potencial de la pérdida dinámica y el vórtice que se desprende del borde de ataque de un perfil (*Leading Edge Vortex*, LEV), cuando se lo somete a un movimiento oscilatorio o simplemente cuando cambia rápidamente su ángulo de ataque y como es aprovechado por las diferentes especies naturales capaces de volar. Si bien en la literatura lo que se encuentra y utiliza son estados cuasi estacionarios, donde se termina cuantificando la sustentación y resistencia como promedios en intervalos de tiempo, se debe tener presente que son representaciones de algún modo simplistas. De igual manera, son suficientes para el diseño y optimización de geometrías que eventualmente pueden ser llevadas a la práctica.

El fenómeno propiamente dicho, se destaca por ser no lineal e inestacionario y de difícil predicción teórica, capaz de afectar sustancialmente la sustentación y resistencia durante el período en el que ocurre el desprendimiento y la trayectoria que recorre el vórtice hasta el borde de fuga. Luego ocurre una interacción con el vórtice desprendido de este último borde, dando el formato característico presente en la estela.

En la fig. 2.12 se grafica un esquema extraído de [63], en el que se describe el proceso de pérdida dinámica de un perfil al aumentar su ángulo de ataque respecto de la corriente libre.

En el punto (a) se excede el ángulo de pérdida cuando el perfil está estático, para luego darse la aparición de secciones con flujo reverso y la formación de vórtices sobre la capa límite y el borde de fuga del perfil (b) y (c). La parte más importante de este efecto, es la que acontece entre los puntos (d) y (h), donde primero ocurre una gran sección de

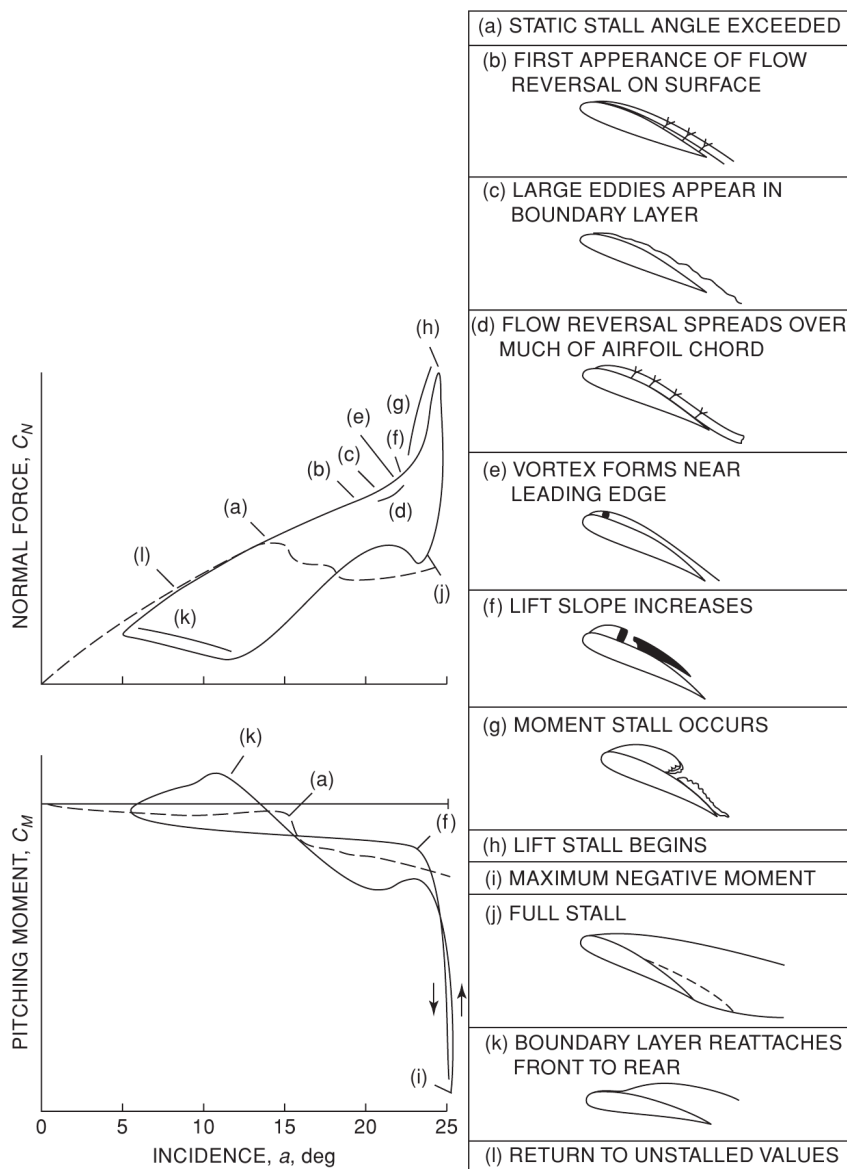


Figura 2.12: Esquema del desprendimiento dinámico de un perfil y el efecto sobre las curvas de sustentación y momento [63].

flujo reverso sobre el extradós y luego el desprendimiento del vórtice de borde de ataque. Básicamente, este último modifica la geometría efectiva del perfil en su recorrido hasta llegar a la estela, provocando el pico de sustentación que se manifiesta en la gráfica. Una vez que el LEV se ha desprendido, (h) a (k), un fenómeno interesante debe ser tenido en cuenta y es que la caída brusca de sustentación provoca un gran aumento de momento negativo sobre el perfil, o en todo caso, en la estructura elástica que soporta los esfuerzos

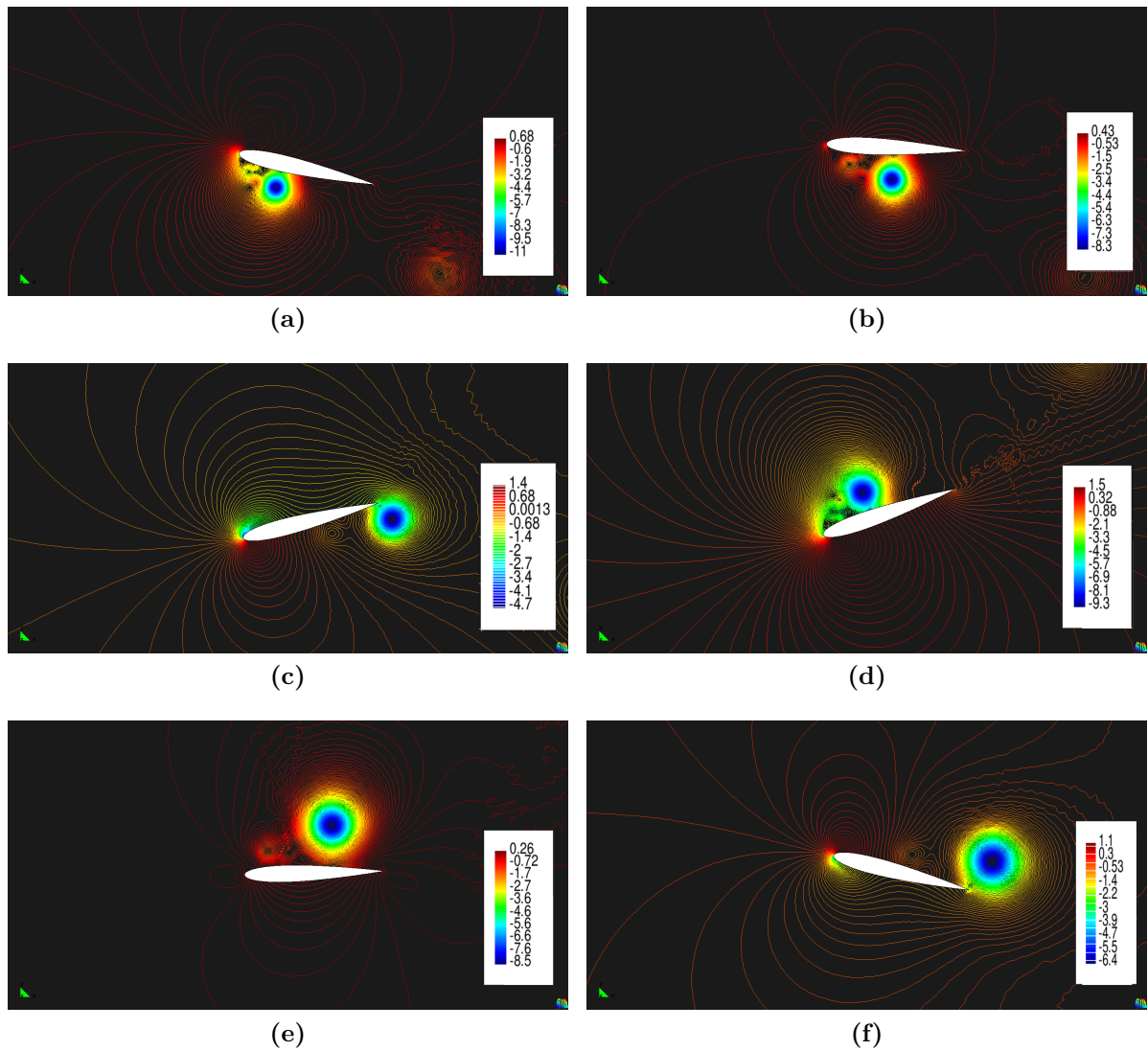


Figura 2.13: Contornos de presión para un perfil NACA 0012 sometido a *flapping* a: $R_e = 1100$, $St = 0,45$, $k = 0,7096$, $\alpha_a = 20^\circ$ y $h_a = 1$. 2.13a $t=0.6152s$, 2.13b $t=1.0104s$, 2.13c $t=1.6834s$, 2.13d $t=2.4372s$, 2.13e $t=3.2775s$, 2.13f $t=3.8954s$.

del mismo. Como puede verse, este ciclo inestacionario deriva en problemas complejos cuando se trata de acoplar algún tipo de modelo elástico, o peor aún, cuando se trata de llevar a cabo la construcción de algún prototipo de MAV.

Insectos y aves pueden aprovecharse de este efecto y dominarlo con facilidad para obtener grandes performances de vuelo y de este modo llevar a cabo maniobras complejas que no se detallarán aquí. Lo que sí se puede evidenciar es el ejemplo de la fig. 2.13, obtenido con el software utilizado en el presente trabajo, en el que el perfil NACA 0012 es sometido a un movimiento de *flapping* con los siguiente parámetros: $R_e = 1100$,

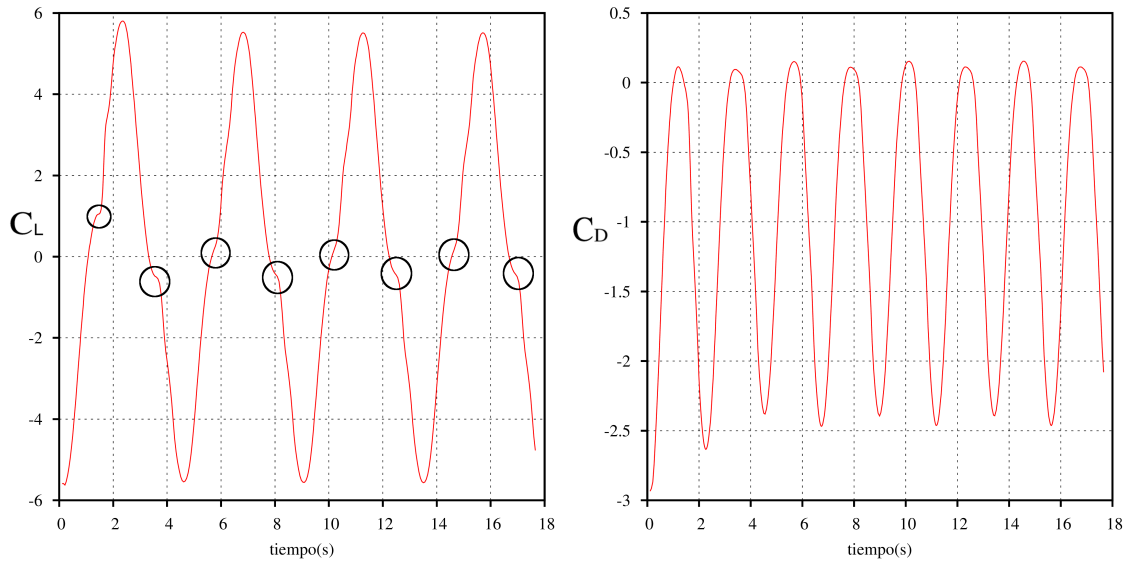


Figura 2.14: Coeficientes de sustentación C_L y resistencia C_D .

$St = 0,45$, $k = 0,7096$, $\alpha_a = 20^\circ$ y $h_a = 1$.

La figura muestra una secuencia de contornos de presión a diferentes tiempos y en ella se observa como actúa la pérdida dinámica y el desprendimiento de vórtices de bordes de ataque y de fuga. En la fig. 2.13a el LEV viaja a través del intradós del perfil pasando por la fig. 2.13b en la carrera hacia arriba o *upstroke*, hasta llegar al borde de fuga y desprenderse fig. 2.13c. Lo mismo ocurre con las tres figuras restantes (figs.2.13d, 2.13e y 2.13f), pero en la carrera hacia abajo o *downstroke*. Al contrario que el *upstroke*, el LEV viaja a través del extradós del perfil.

El efecto manifestado en las curva de sustentación y resistencia puede verse en la fig. 2.14, donde el primer desprendimiento ocurre para $t=1.68s$, provocando el salto señalado mediante un círculo negro en la curva de C_L y con menos intensidad sobre C_D . En este caso, al momento del desprendimiento, el perfil pierde sustentación, pero es rápidamente recuperada ya que el flujo se adhiere nuevamente a la superficie.

2.3 Motivación del estudio en dos dimensiones

Si bien el conocimiento que aportan los estudios de aplicaciones aeroespaciales en dos dimensiones son limitados, este no es el caso cuando lo que se intenta investigar o desarrollar requiere una base firme de pautas de diseño, o simplemente cuando el conocimiento adquirido en una determinada área, no es suficiente. La aerodinámica a

números de Reynolds muy bajos es una rama que presenta ambas situaciones, es decir, que un diseño que esté enmarcado en dicho régimen requiere especificaciones de vital importancia para su óptimo funcionamiento y si bien el crecimiento computacional de la última década ha permitido la elaboración de importantes trabajos en el área, quedan bastantes ítems a explorar.

Además, como el objetivo de este trabajo es extender el estudio hacia tres dimensiones, resulta un buen punto de partida comenzar con dos dimensiones, facilitando adicionalmente la disponibilidad de recursos y tiempo. Los análisis son relativamente rápidos, permitiendo elaborar un abanico de posibilidades y combinaciones entre las geometrías y propiedades del flujo interviniente. Otra ventaja que presenta, es observar el comportamiento de la interacción entre el campo de movimiento y la actitud geométrica libre de interferencias propias de las tres dimensiones, (p. ej. la resistencia inducida y el viento cruzado).

2.4 Comparación de métodos de resolución viscosos y no viscosos

En su trabajo, Kunz [44] presenta una comparación interesante entre dos softwares para flujo sobre perfiles en dos dimensiones. Uno se caracteriza por resolver las ecuaciones de Navier-Stokes incompresible (código INS2D desarrollado por NASA) y otro por emplear la formulación integral de capa límite en conjunto con un algoritmo de resolución de flujo potencial desarrollado por Drela (MSES) [24].

El análisis se aplica a un perfil combado (NACA 4402) a $Re = 1000$, en el que se comparan los coeficientes de sustentación y resistencia para varios ángulos de ataque. Además se anexa a la comparación, los resultados obtenidos por el software utilizado en el presente trabajo (Navier Stokes incompresible).

El programa de flujo potencial MSES y corrección viscosa se aplicó en un corto rango de ángulos de ataque, debido a los problemas que surgen con el desprendimiento del flujo.

En las figs. 2.15 y 2.16 se presentan resultados hasta ángulos de ataque donde aún se preserva el carácter de flujo estacionario. Con el software de flujo potencial (MSES) sólo es posible predecir la curva de sustentación hasta un ángulo de 3 grados de incidencia. No obstante el mismo converge a la solución de manera aceptable, con una subestimación para la sustentación respecto de los códigos con viscosidad y para el coeficiente de resistencia se localiza entre los valores obtenidos por estos códigos.

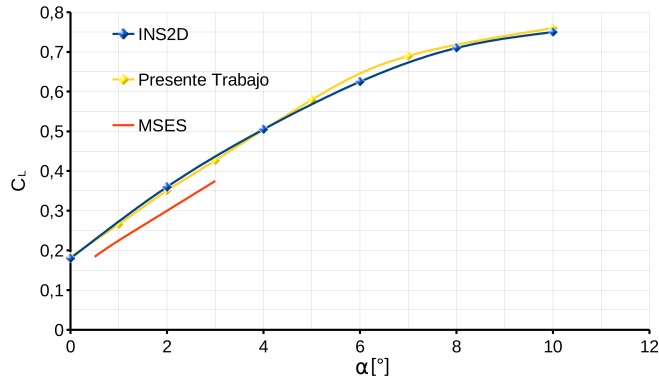


Figura 2.15: Curva de sustentación para un perfil NACA 4402 a $R_e = 1000$. Comparación de los algoritmos INS2D, MSES y el software del presente trabajo.

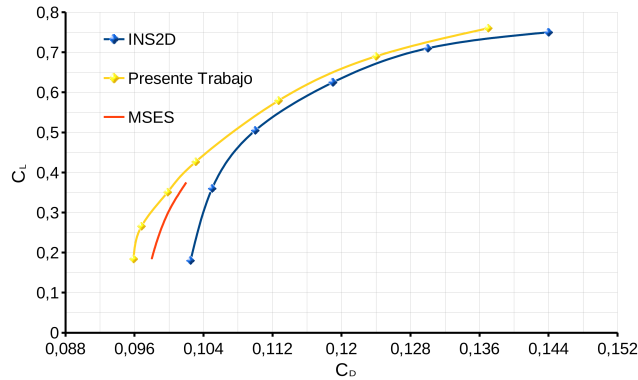


Figura 2.16: Curva polar para un perfil NACA 4402 a $R_e = 1000$. Comparación de los algoritmos INS2D, MSES y el software del presente trabajo.

Como conclusión, puede decirse que los algoritmos de flujo potencial con algún método integral para la capa límite, predicen bien las cualidades aerodinámicas a bajos ángulos de ataque y además el costo computacional es bastante inferior. Respecto a códigos con resolución viscosa puede decirse que no sólo son confiables en las simulaciones, sino que también extienden de manera notable el rango de la predicción.

ECUACIONES DE GOBIERNO Y MÉTODO NUMÉRICO

El punto de partida es el planteo de las ecuaciones que gobiernan el problema a resolver. Las leyes de la dinámica de fluidos, pueden deducirse observando que el comportamiento de un sistema físico está completamente determinado por la conservación de un cierto número de propiedades del flujo tales como la masa, la cantidad de movimiento y la energía.

En este capítulo se presentan las ecuaciones para un flujo viscoso incompresible laminar, las condiciones de contorno y los problemas que acarrearán las simplificaciones realizadas para luego escribir las ecuaciones de Navier-Stokes en un sistema Euleriano-Lagrangiano Arbitrario (ALE).

Posteriormente el capítulo describe un método numérico preciso y estable para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible-laminar.

Se comienza por discretizar las ecuaciones de gobierno, lo cual se lleva a cabo recurriendo al método de elementos finitos, en donde las ecuaciones se transforman en ecuaciones algebraicas utilizando el método de residuos ponderados (Galerkin) [78], [18], [60].

Para salvar la complicación introducida en la hipótesis de incompresibilidad, se desarrolla el empleo de un esquema temporal de integración de tipo pasos fraccionados explícito (Euler-Forward) de primer orden de precisión.

Para el entendimiento del método de estabilización se lleva a cabo una descripción de un método basado en la teoría de subescalas aplicado a una ecuación de convección-difusión-reacción [37], [59]. Luego, se lleva dicho método de estabilización al esquema de pasos fraccionados a aplicar, mediante el desarrollo de un algoritmo denominado

Proyección Ortogonal de Subescalas (OSS).

Finalmente se explica el algoritmo utilizado para el movimiento de malla.

3.1 Ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible

En cierto tipo de problemas fluido dinámicos, la densidad puede ser considerada constante, lo que conlleva a una simplificación considerable de las ecuaciones de gobierno. Ésta simplificación no sólo se da en líquidos, sino también en gases a baja velocidad. Si el flujo además es isotérmico, la viscosidad se mantiene constante. La ecuación de conservación de la masa sobre un dominio espacial Ω , un contorno Γ y un intervalo de tiempo (t_0, t_f) toma entonces la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times (t_0, t_f) \quad (3.1)$$

donde \mathbf{u} es la velocidad.

Es de hacer notar que el carácter hiperbólico del flujo compresible, se transforma en elíptico. Esto que a simple vista parece simplificar el problema, más adelante se verá que trae ciertas complicaciones a la hora de resolver las ecuaciones mediante aproximaciones numéricas.

La conservación de la cantidad de movimiento puede escribirse como:

$$\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}_e \quad \text{en} \quad \Omega \times (t_0, t_f) \quad (3.2)$$

donde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática, ρ la densidad y \mathbf{f}_e las fuerzas externas.

Las ec. 3.1 y 3.2 resultan ser las ecuaciones de gobierno (forma fuerte) del flujo incompresible isotérmico y son la base para la formulación del método de resolución basado en elementos finitos.

3.1.1 Condiciones de contorno

Para completar el modelo físico, se deben anexar a las ecuaciones para flujo incompresible las condiciones de borde e iniciales específicas conforme al dominio espacial Ω

y sus contornos $\Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_M$, en un contexto temporal de análisis (t_0, t_f) .

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_c(\mathbf{x}, t) & \text{en} & \Gamma_D \times (t_0, t_f) \\
\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}_c & \text{en} & \Gamma_N \times (t_0, t_f) \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_n; (\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \mathbf{s} &= \sigma(\mathbf{x}, t) & \text{en} & \Gamma_M \times (t_0, t_f) \\
p(\mathbf{x}, t_0) &= p_c(\mathbf{x}, t) & \text{en} & \Gamma_P \times (t_0, t_f) \\
\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}); p(\mathbf{x}, t_0) &= p_0(\mathbf{x}) & \text{en} & \Omega \times (t_0)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

donde:

Γ_D : parte del contorno Γ donde se prescribe el campo de velocidades \mathbf{u}_c (contorno tipo Dirichlet).

Γ_N : parte de Γ donde se especifican las tracciones \mathbf{t}_c (contorno tipo Neumann).

Γ_M : parte de Γ donde se prescribe la velocidad normal u_n y la componente tangencial de la fuerza σ (condición de tipo Mixta).

Γ_P : parte del contorno Γ donde se prescribe el campo de presiones p_c (contorno tipo Dirichlet).

Además, se ha denominado \mathbf{n} al vector normal unitario a Γ_N o Γ_M , mientras que \mathbf{s} es un vector unitario tangente a Γ_M y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$.

3.1.2 La restricción de incompresibilidad

Como se ha mencionado, la no introducción de la compresibilidad del flujo en las ecuaciones de Navier Stokes tiene como resultado efectos muy importantes. Estos efectos se derivan principalmente del hecho de que el campo de velocidades puede tomarse como única incógnita del problema, para ser posteriormente corregido con un campo de presiones derivado de él. En efecto, la presión en la formulación incompresible de las ecuaciones, ya no es una variable termodinámica, sino que es una cantidad que establece el equilibrio de fuerzas en cada volumen elemental. De hecho, si se toma el rotacional de (3.2), se elimina la presión de la ecuación de balance de la cantidad de movimiento. En ese caso se puede calcular un campo de velocidades que cumpla dicha ecuación y posteriormente corregirlo con un campo de presiones que permita satisfacer la condición de incompresibilidad, simplemente tomando la divergencia de (3.2) e imponiendo (3.1). Como se verá en el próximo capítulo, es posible demostrar la existencia y unicidad del problema estacionario asociado al sistema escrito en forma discreta en determinadas circunstancias [25].

3.1.3 La problemática de la convección

La problemática que presenta la aparición de términos convectivos dominantes es conocida desde el principio del desarrollo de los métodos numéricos en diversos campos. Si los términos convectivos predominan sobre los términos viscosos o difusivos, hecho que se produce para altos números de Reynolds, la solución numérica clásica del método de los elementos finitos falla y aparecen oscilaciones en todo el dominio. Una solución del problema consiste en el uso de mallas muy finas, impensables desde el punto de vista práctico. Desde un punto de vista físico, el sistema de ecuaciones resultante de aplicar el método de Galerkin añade viscosidades negativas proporcionales al número de Reynolds, provocando una mala estabilidad del problema y la aparición de oscilaciones. Este problema es característico pues, de las ecuaciones que incorporan términos importantes proporcionales a las derivadas primeras de las variables, por lo que esta dificultad se extiende a muchas ramas de la mecánica de medios continuos. Diversos autores han presentado procedimientos para resolver este inconveniente, entre ellos se destacan los métodos clásicos de evaluación *upwind* de las derivadas y la familia de métodos tipo Petrov Galerkin, Characteristic Galerkin, SUPG (Streamline Upwind / Petrov Galerkin) y GLS (Galerkin Least Squares). Todos los métodos anteriores se basan en la adición de cierta cantidad de difusión numérica a las ecuaciones básicas, diferenciándose entre ellos en las bases conceptuales sobre las cuales se diseña esa adición. A pesar de todo, ninguno de los métodos anteriores, permite tener control sobre las oscilaciones que se producen en presencia de altos gradientes de las variables (capa límite u ondas de choque). Estas oscilaciones suelen ser localizadas y no tienden a propagarse en problemas lineales, pero en problemas no lineales pueden provocar inestabilidades globales [25]. En el capítulo 4 se estudiará esta problemática y se presentará un método de estabilización que permite tratarla.

De todos modos, las aplicaciones analizadas en este trabajo están dominadas por efectos viscosos debido al bajo número de Reynolds con que se trabaja. Es más, se toma la hipótesis de que el flujo es totalmente laminar sin desarrollo de turbulencia como se mencionó anteriormente.

3.2 Formulación Lagrangeana-Euleriana Arbitraria (ALE) para las ecuaciones de Navier-Stokes

Es bien conocido que existen dos formas clásicas de representar las ecuaciones de Navier-Stokes: la representación Lagrangiana y la Euleriana. La primera basa la descripción del movimiento en un seguimiento de las partículas del fluido, mientras que la segunda basa la descripción en la posición respecto a un sistema de referencia. Tradicionalmente, las ecuaciones de dinámica de fluidos se han descrito con formulación euleriana debido a las ventajas que posee. Sin embargo, en este trabajo, se necesita un sistema de referencia arbitrario, en particular el definido por el movimiento de la malla de elementos finitos. La formulación que describe el movimiento en este caso se denomina ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian).

Este tipo de formulaciones arbitrarias provienen del contexto de los métodos de diferencias finitas [32] y más recientemente han sido incorporados al mundo del método de los elementos finitos [36], [26], [22], [54] principalmente para su aplicación en problemas de interacción fluido-estructura.

3.2.1 Formulación ALE

La idea básica de esta formulación es incorporar un dominio de referencia adicional que se denomina Ω_{χ} y cuyas coordenadas de referencia están dadas por el vector $\mathbf{X}(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$. De la misma manera se denomina Ω_X al dominio material, cuyas coordenadas $\mathbf{X}(X_1, X_2, X_3)$ son las etiquetas de las partículas (descritas, por ejemplo, por su posición en $t = 0$) y por último el dominio espacial común Ω_x de coordenadas $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$. Luego existen las funciones de transformación de coordenadas de un dominio a otro y las mismas son β , κ , ζ , respectivamente (ver fig. 3.1).

El mapeo ζ del dominio referencial al dominio espacial, el cual puede entenderse como el movimiento de los puntos de la grilla sobre este último, se representa como [23]

:

$$\begin{aligned} \zeta : \Omega_{\chi} \times [t_0, t_f] &\rightarrow \Omega_{\mathbf{x}} \times [t_0, t_f] \\ (\chi, t) &\rightarrow \zeta(\chi, t) = (\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

y su gradiente es:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial(\chi, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \chi} & \hat{\mathbf{v}} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

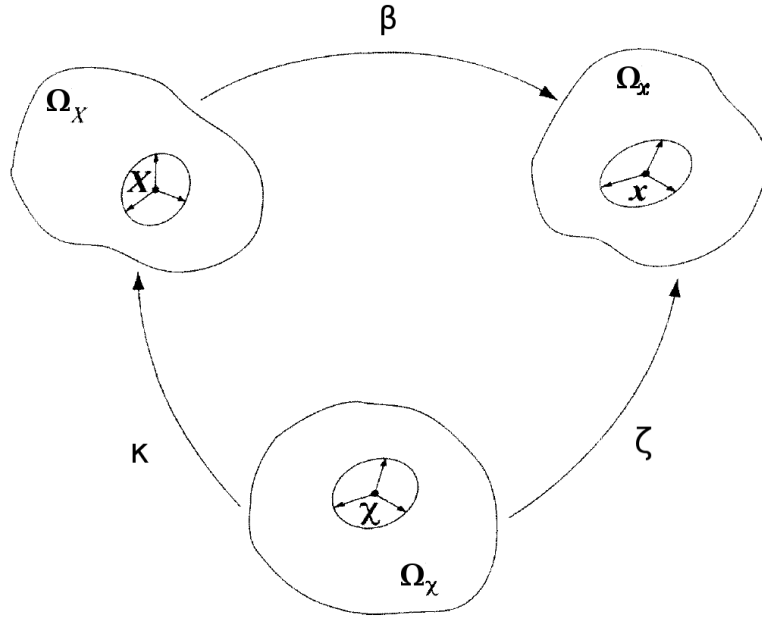


Figura 3.1: Esquema de las funciones de transformación para los diferentes dominios de la formulación ALE.

donde la velocidad de la malla es:

$$\hat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\chi}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\boldsymbol{\chi}} \quad (3.6)$$

La transformación $\boldsymbol{\kappa}$ conviene representarla mediante su inversa $\boldsymbol{\kappa}^{-1}$ de modo que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}^{-1} : \Omega_{\mathbf{X}} \times [t_0, t_f] &\rightarrow \Omega_{\boldsymbol{\chi}} \times [t_0, t_f] \\ (\mathbf{X}, t) &\rightarrow \boldsymbol{\kappa}^{-1}(\mathbf{X}, t) = (\boldsymbol{\chi}, t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

y su gradiente es:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}^{-1}}{\partial (\mathbf{X}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}} & \mathbf{w} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

donde la velocidad \mathbf{w} es:

$$\mathbf{w}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} \quad (3.9)$$

y se interpreta como la velocidad de la partícula fluida en el dominio referencial manteniendo fijo el dominio material.

Ahora la relación entre las velocidades de cada dominio se obtiene por la diferen-

ciación de la ecuación $\beta = \zeta \circ \kappa^{-1}$, como sigue:

$$\frac{\partial \beta}{\partial(\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial(\boldsymbol{\chi}, t)}(\kappa^{-1}(\mathbf{X}, t)) \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial(\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial(\boldsymbol{\chi}, t)}(\boldsymbol{\chi}, t) \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial(\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t) \quad (3.10)$$

Ahora si $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}|_{\mathbf{x}}$ resulta:

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \mathbf{w} \quad (3.11)$$

luego esta velocidad puede ser reescrita como:

$$\mathbf{c} := \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \mathbf{w} \quad (3.12)$$

definida como la velocidad convectiva \mathbf{c} y representa la velocidad relativa entre el dominio material y la malla.

3.2.2 La ecuación fundamental ALE

Siendo necesario expresar las leyes de conservación en un marco ALE, se debe encontrar la derivada total o material inherente a las mismas con la implementación del nuevo dominio de referencia $\Omega_{\boldsymbol{\chi}}$ añadido en la formulación. Entonces, para determinar la ecuación fundamenta ALE, se utiliza una cantidad arbitraria escalar f descrita en un marco espacial y la misma variable descrita en un marco material de la forma f^{**} , con la siguiente relación entre ellas que se escribe como [23]:

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.13)$$

Luego, si la variable que se describe en el nuevo dominio de referencia se denota como f^* , y con la ayuda del mapeo κ , la transformación de $f^*(\boldsymbol{\chi}, t)$ a $f^{**}(\mathbf{X}, t)$ se escribe como:

$$f^{**} = f^* \circ \kappa^{-1} \quad (3.14)$$

y los gradientes se calculan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial(\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial f^*}{\partial(\boldsymbol{\chi}, t)}(\kappa^{-1}(\mathbf{X}, t)) \frac{\partial \kappa^{-1}}{\partial(\mathbf{X}, t)}(\mathbf{X}, t) \quad (3.15)$$

La ecuación anterior resulta ser un vector. Posteriormente si se utiliza la definición de

velocidad convectiva en la segunda componente se llega a:

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial t} = \frac{\partial f^*}{\partial t} + \mathbf{c} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.16)$$

Eliminando los asteriscos y utilizando las notaciones explícitamente, se llega a las relaciones de las derivadas en el dominio material, espacial y referencial [23]:

$$\frac{\partial f}{\partial t}|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial t}|_{\chi} + \mathbf{c} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial t}|_{\chi} + \mathbf{c} \cdot \nabla f \quad (3.17)$$

donde la relación anterior se suele denominar *ecuación fundamental ALE* y expresa que la derivada material de una cantidad f es la variación local con respecto al dominio de referencia (Ω_{χ}), más un término convectivo que tiene en cuenta el movimiento relativo entre el dominio material y el dominio de referencia.

3.2.3 Aplicación a las ecuaciones de Navier-Stokes

Tomando en cuenta las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso incompresible (ec. 3.1 y 3.2) y aplicando las relaciones 3.17 con la velocidad de la malla \mathbf{u}_m resulta [23]:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{u})}{\partial t}|_{\chi} + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

donde $\mathbf{c} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_m$ es la velocidad convectiva desarrollada anteriormente.

Si la simulación fuera tal que los nodos de la malla se movieran avanzando de acuerdo a la velocidad de las partículas del fluido, la resolución sería de tipo lagrangiana ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_m$). En el caso contrario, si la simulación fuera tal que los nodos de la malla permanecieran quietos, el proceso seguiría un esquema euleriano ($\mathbf{u}_m = 0$).

Nótese que el sistema formado por 3.18 y 3.19 sólo plantea una generalización de las formulaciones lagrangianas y eulerianas clásicas, permitiendo la posibilidad de contemplar el problema respecto de un sistema de referencia arbitrario.

3.3 Discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles

Las ecuaciones de gobierno a trabajar están contenidas sobre un dominio espacial Ω , un contorno Γ , un intervalo temporal (t_0, t_f) y se presentan como,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \times (t_0, t_f) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_e \quad \text{en} \quad \Omega \times (t_0, t_f) \quad (3.21)$$

Nuevamente las condiciones de contorno son;

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_c(\mathbf{x}, t); \quad p(\mathbf{x}, t_0) = p_c(\mathbf{x}, t) & \text{en} & \quad \Gamma_D \times (t_0, t_f) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}_c & \text{en} & \quad \Gamma_N \times (t_0, t_f) \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= u_n; \quad \mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{s} = \sigma(\mathbf{x}, t) & \text{en} & \quad \Gamma_M \times (t_0, t_f) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}); \quad p(\mathbf{x}, t_0) = p_0(\mathbf{x}) & \text{en} & \quad \Omega \times (t_0) \end{aligned} \quad (3.22)$$

3.3.1 Aproximación por el método de Galerkin

Las ecuaciones de Navier-Stokes no poseen solución analítica fuerte y por ende se debe recurrir a una formulación débil o variacional para encontrar algún tipo de solución. Aplicando el método de Galerkin [13] a las ecuaciones (3.20), (3.21) se debe encontrar $\mathbf{u} \in \Psi_s$ y $p \in \Phi_s$ tal que,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial t}, \boldsymbol{\psi} \right) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) &= -\left(\nabla \frac{p}{\rho}, \nabla \boldsymbol{\psi} \right) + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \boldsymbol{\psi}) + (\mathbf{f}_e, \boldsymbol{\psi}) \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \Psi_t \\ (\phi, \nabla \cdot \mathbf{u}) &= 0 \quad \forall \phi \in \Phi_t \end{aligned} \quad (3.23)$$

Donde la nomenclatura (\cdot, \cdot) significa el producto interno L^2 : $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega$. Los

espacios funcionales de acuerdo con las condiciones de contorno (3.3) son [13]:

$$\begin{aligned}
\Psi_t &:= \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\chi} \in [L^2(t_0, t_f), H^1(\Omega)^N] \mid \\ \boldsymbol{\chi}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\chi}|_{\Gamma_M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, t \in (t_0, t_f) \end{array} \right. \\
\Psi_s &:= \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\chi} \in [L^2(t_0, t_f), H^1(\Omega)^N] \mid \\ \boldsymbol{\chi}|_{\Gamma_D} = \mathbf{v}_c, \boldsymbol{\chi}|_{\Gamma_M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{n}, t \in (t_0, t_f) \end{array} \right. \\
\Phi_t &:= \left\{ \boldsymbol{\chi} \in [L^2(t_0, t_f), L^2(\Omega)^N] \mid \boldsymbol{\chi}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0} \right\} \\
\Phi_s &:= \left\{ \boldsymbol{\chi} \in [L^2(t_0, t_f), L^2(\Omega)^N] \mid \boldsymbol{\chi}|_{\Gamma_D} = p_c \right\}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Donde N es la dimensión espacial del problema, $H^1(\Omega)^N$ el espacio de Sobolev de funciones cuyas primeras derivadas pertenecen a $L^2(\Omega)^N$ y donde se remarca que $\Psi_t = H_0^1(\Omega)^N$ es un subespacio de $H^1(\Omega)^N$ con traza nula sobre Γ .

Lo que se logra aquí, es escribir las ecuaciones de gobierno en forma débil, reduciendo en uno el orden de derivación para los términos de presión y fuerzas viscosas, aproximando las incógnitas por funciones continuas derivables. En este trabajo se utilizarán funciones derivables por tramos del tipo lagrangeanas lineales.

3.3.2 Discretización espacial por el método de elementos finitos

Para la discretización del espacio de funciones (3.23), se definen los espacios funcionales $\Psi_{h_s} \subset \Psi_s$, $\Phi_{h_s} \subset \Phi_s$, $\Psi_{h_t} \subset \Psi_t$, $\Phi_{h_t} \subset \Phi_t$, asociados a una partición del dominio Ω , denominada partición de elementos finitos Ω^e . Por lo tanto el problema discreto consta de encontrar $\mathbf{u}_h \in \Psi_{h_s}$ y $p_h \in \Phi_{h_s}$ tal que,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial(\mathbf{u}_h)}{\partial t}, \boldsymbol{\psi}_h \right) + ((\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\psi}_h) &= -(\nabla \frac{p_h}{\rho}, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) + \\
&+ (\mathbf{f}_e, \boldsymbol{\psi}_h) \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in \Psi_{h_t} \\
(\phi_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h) &= 0 \quad \forall \phi_h \in \Phi_{h_t}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Como ya se había adelantado, existen ciertas dificultades cuando se trata de resolver numéricamente el sistema (3.23). La primera se refiere a la restricción $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, que en general obliga a la elección de espacios de interpolación $\Psi_s, \Psi_t, \Phi_s, \Phi_t$ tal que permitan cumplir la condición denominada Babuska-Brezzi (LBB). Dicha condición se expone a continuación [25][9].

Sean ψ_h y ϕ_h , existen K_a y K_b dos constantes positivas tal que se cumple,

$$\begin{aligned} \frac{\nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \psi_h)}{\|\mathbf{u}_h\|_{\Psi_h}} &\geq K_a \|\psi_h\| && \forall \psi_h \in \Psi_h \\ \sup_{\mathbf{u}_h \in \Psi_h - \{0\}} \frac{(\phi_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)}{\|\mathbf{u}_h\|} &\geq K_b \|\phi_h\|_{L^2} && \forall \phi_h \in \Phi_h \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde Ψ_h y Φ_h son los espacios conformes de elementos finitos asociados a la partición Ω^e del dominio espacial Ω y la notación $\|\mathbf{u}_h\|$ se utiliza como la norma de \mathbf{u}_h .

La condición (3.26) supone una restricción a la elección de los espacios de interpolación de elementos finitos Ψ_h y Φ_h . En general, esta condición no permite que la interpolación de los espacios de velocidad y presión sea del mismo orden [64][25]. Las parejas de espacios de interpolación que cumplen la condición (3.26) se denominan div-estables. Sin embargo, en la práctica, existen metodologías que permiten utilizar igual interpolación para los espacios de velocidad y presión, mediante la modificación de la forma variacional (3.25). Entre estas metodologías, quizá la más conocida es la denominada GLS (Galerkin Least/Squares) [35]. Otra posibilidad, es la de modificar la forma del sistema (3.25), mediante el desacoplamiento en la ecuación de balance de cantidad de movimiento del efecto de la presión. De esta forma, la presión jugaría, precisamente ese papel de corrección que se le otorgó anteriormente. Esta metodología, denominada Método de Pasos Fraccionados (Fractional Step Method) [12] será estudiada detenidamente en la próxima sección del presente trabajo, donde se expondrán las importantes ventajas que su forma semi-implícita propone.

3.3.3 Existencia y unicidad de la solución del problema estacionario

Anteriormente se planteó el problema discreto.(3.23) en forma variacional ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible y se discutirá la unicidad de la solución para el problema así planteado. Suponiendo que la condición LBB se cumple para una adecuada elección de espacios de elementos finitos y además que el sistema (3.25) es estacionario, resulta [25]:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_h \cdot \nabla) \mathbf{u}_h, \psi_h) &= -(\nabla \frac{p_h}{\rho}, \nabla \psi_h) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \psi_h) + (\mathbf{f}_e, \psi_h) && \forall \psi_h \in \Psi_{ht} \\ (\phi_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h) &= 0 && \forall \phi_h \in \Phi_{ht} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Por otro lado, si se definen las normas de los términos convectivo, difusivo e independiente como[13]:

$$\begin{aligned} N_c &= \sup \frac{((\mathbf{u}_h \cdot \nabla)\mathbf{u}_h, \psi_h)}{\|\mathbf{u}_h\| \|\mathbf{u}_h\| \|\psi_h\|} \\ N_d &= \sup \frac{\nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \psi_h)}{\|\mathbf{u}_h\| \|\psi_h\|} \\ N_l &= \sup \frac{(\mathbf{f}_e, \psi_h)}{\|\psi_h\|} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Puede demostrarse la existencia y unicidad del problema estacionario (3.27) si se cumple que [35][25]:

$$\chi = \frac{N_c N_l}{K_a^2} < 1 \quad (3.29)$$

siendo N_c, N_l las constantes de continuidad de las formas correspondiente al término convectivo e independiente, respectivamente, de la ecuación de cantidad de movimiento (3.21), y K_a es la constante de estabilidad de la forma correspondiente al término difusivo ya definida anteriormente. La (3.29) es restrictiva y no se cumple para valores elevados y moderados de número de Reynolds. La realidad experimental muestra que pueden encontrarse soluciones no estacionarias e incluso varias soluciones, cuya aparición depende de las condiciones iniciales que se planteen.

3.3.4 Discretización monolítica del tiempo

Con el fin de introducir la notación que se utilizará más adelante, se plantea una discretización temporal haciendo uso de un esquema de diferencias finitas y la regla del trapecio, para establecer el cambio de las magnitudes a medida que evolucionan en el tiempo. Si se considera una partición uniforme del intervalo de tiempo $[0, T]$ de tamaño δt y si f^n es la aproximación de una función f dependiente del tiempo en el nivel de tiempo $t^n = n\delta t$, entonces un parámetro $\theta \in [0, 1]$, se denota como:

$$f^{n+\theta} := \theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^n \quad (3.30)$$

al valor de la función f en un instante $t^{n+\theta}$, intermedio entre t^n y t^{n+1} .

La integración temporal del problema planteado, se puede resolver mediante una regla trapezoidal generalizada. Dado \mathbf{u}_h^n conocido en el instante t^n , hallar \mathbf{u}_h^{n+1} y p_h^{n+1}

en t^{n+1} en función de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial(\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n)}{\partial t}, \boldsymbol{\psi}_h\right) + ((\mathbf{u}_h^{n+\theta} \cdot \nabla)\mathbf{u}_h^{n+\theta}, \boldsymbol{\psi}_h) &= -\left(\nabla \frac{p_h^{n+1}}{\rho}, \nabla \boldsymbol{\psi}_h\right) + \nu(\nabla \mathbf{u}_h^{n+\theta}, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) + \\
&+ (\mathbf{f}_e^{n+\theta}, \boldsymbol{\psi}_h) \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in \Psi_{h_t} \\
(\phi_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}) &= 0 \quad \forall \phi_h \in \Phi_{h_t}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Los valores de interés para θ son: $\theta = 1/2$ que corresponde al esquema de segundo orden de Crank- Nicholson, $\theta = 1$ al método de Euler hacia atrás (implícito) y $\theta = 0$ correspondiente al método de Euler hacia adelante (explícito).

3.4 Esquema de pasos Fraccionados para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles

3.4.1 Esquema de pasos fraccionados

Las condiciones que se deben cumplir para la existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones de Navier Stokes quedaron demostradas bajo el cumplimiento de la condición LBB [3] [14] [64], tal como se presentó en la sección anterior. Esta condición obliga a que los espacios de elementos finitos para la interpolación de la velocidad y la presión sean compatibles [3]. En la práctica y en el contexto del método de los elementos finitos, existen dos posibilidades para evitar los indeseables efectos de inestabilidad. La solución más clásica consiste en utilizar interpolaciones mixtas velocidad-presión que verifiquen LBB. Junto a ésta, existe la posibilidad de modificar la forma variacional típica, resultante de la aplicación del método de Galerkin al problema fuerte (3.20),(3.21), de manera que la restricción LBB desaparezca. Dentro de este segundo tipo se encuentran metodologías que, como GLS (Galerkin Least Squares) [34][35][9] han ganado mucha popularidad en los últimos años. Un importante grupo de soluciones dentro de esta aproximación lo constituyen los denominados métodos de pasos fraccionados [12] [74].

Básicamente, han sido desarrollados dos procedimientos diferentes que se agrupan bajo la misma denominación de métodos de pasos fraccionados. El primer procedimiento está basado en la idea de separar los efectos de los términos de transporte por convección de los viscosos. De esta forma es posible separar, por ejemplo, el tratamiento de los términos convectivos de los efectos de la capa límite. Pero, quizá el más conocido de estos algoritmos y al que se referirá exclusivamente bajo la denominación de método de pasos fraccionados, se debe a A.J. Chorin [12], quien propuso fraccionar la ecuación de

balance de cantidad de movimiento, eliminando el término del gradiente de la presión. La idea es resolver una ecuación de balance de cantidad de movimiento aproximada, resolver luego la ecuación de balance de masa y por último corregir la cantidad de movimiento. Este último paso puede interpretarse también como una proyección de la solución sobre el espacio de velocidad con divergencia nula, por lo que el algoritmo se denomina a veces de proyección. El objetivo principal que se persigue con este fraccionamiento es precisamente la estabilización de la presión. A la vez, se consigue el beneficio adicional de poder utilizar espacios de interpolación iguales para velocidad y presión. De las diversas variantes que admite el método de pasos fraccionados se estudia el denominado algoritmo semi-implícito. Este algoritmo resuelve de manera explícita los pasos correspondientes a la resolución aproximada de la ecuación de balance de cantidad de movimiento y su posterior corrección, mientras que es implícito el cálculo del campo de presiones. De hecho, dado que las características de esta algorítmica son especialmente apropiadas para el problema que se pretende resolver, esta ha sido la elegida para la implementación.

Algunas ventajas que se pueden nombrar de la metodología a estudiar son:

- La posibilidad de resolver la ecuación de balance de cantidad de movimiento independientemente de la restricción de incompresibilidad, lo que permite desarrollar un esquema semi implícito de manera que en cada paso de tiempo sólo haya que invertir una matriz de un sistema (tipo Poisson) con un grado de libertad por nodo (la presión), ahorrando una considerable cantidad de memoria.
- El esquema semi implícito es además especialmente adecuado en problemas donde la existencia de contornos donde la presión está prescrita, ya que permite que la inversión de la matriz del sistema, sea bastante rápida.
- Los dos aspectos considerados con anterioridad indican que el sistema resultante tiene características óptimas para su inversión, siendo simétrico y bien condicionado.

3.4.2 Implementación sobre las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles

Para mayor claridad se aplica el método de pasos fraccionados a las ecuaciones de Navier-Stokes en su forma fuerte (Eqs. (3.20) y (3.21)). El método implica considerar una nueva variable auxiliar, denominada velocidad intermedia o momento fraccionado $\hat{\mathbf{u}}$, que permite fraccionar el problema planteado [15]. Este método satisface la condición LBB utilizando el mismo orden de aproximación para las velocidades y para la presión

luego la ecuación de momento se divide en dos partes:

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \delta t \left[\mathbf{u}^{n+\theta} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n+\theta} + \gamma \frac{1}{\rho} \nabla p^n - \nu \nabla^n \mathbf{u}^{n+\theta} + \mathbf{f}^{n+\theta} \right] \quad (3.32)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}^{n+1} - \frac{\delta t}{\rho} (\nabla p^{n+1} - \gamma \nabla p^n) \quad (3.33)$$

En las ecuaciones (3.32) y (3.33) aparece una nueva variable que se conoce como momento fraccionado. Tomando divergencia en la ecuación (3.33) y aplicando la ecuación de continuidad se obtiene:

$$\nabla^2 (p^{n+1} - \gamma p^n) = \frac{\rho}{\delta t} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^{n+1} \quad (3.34)$$

donde γ es un parámetro numérico cuyos valores de interés son 0 y 1.

Aplicando la discretización por elementos finitos desarrollada anteriormente a las ecuaciones (3.32), (3.33) y (3.34) se llega a [61]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) &= \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - (\hat{\mathbf{u}}_h^{n+\theta} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}_h^{n+\theta}, \boldsymbol{\psi}_h) - \nu (\nabla \hat{\mathbf{u}}_h^{n+\theta}, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) + \frac{\gamma}{\rho} (\mathbf{p}_h^n, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) - \\ &\quad - (\mathbf{f}_e^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in \Psi_{h_t} \\ -\delta t (\nabla (p_h^{n+1} - \gamma p_h^n), \nabla \phi_h) &= \rho (\phi_h, \nabla \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}) \quad \forall \phi_h \in \Phi_{h_t} \\ \frac{1}{\delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) - \frac{1}{\rho} ((p_h^{n+1} - \gamma p_h^n), \nabla \boldsymbol{\psi}_h) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in \Psi_{h_t} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Puede demostrarse [16], que el error debido a la partición de la ecuación de momento, es de orden $O(\delta t)$ cuando $\gamma = 0$ y de orden $O(\delta t^2)$ cuando $\gamma = 1$. Luego para tener el mismo orden de error debido a la partición, que el debido a la discretización temporal, se consideran en general dos conjuntos de parámetros. El primero es $\gamma = 0$ y $\theta = 0$ ó $\theta = 1$, lo que corresponde a los esquemas de proyección de primer orden. Y el segundo conjunto es $\gamma = 1$ y $\theta = \frac{1}{2}$, lo que conduce a un esquema de segundo orden de precisión en el tiempo (Crank-Nicholson).

Esta formulación permite trabajar con las mismas funciones de aproximación para interpolar la presión y velocidad a nivel elemental, lo cual resulta ventajoso al momento de la implementación. Además, se elige el método explícito (Euler hacia adelante ($\theta = 0$ y $\gamma = 0$), que muestra ventajas respecto a los métodos implícitos convencionales en la eficiencia computacional asociada a la solución de sistemas lineales de menor tamaño.

Esto disminuye la necesidad de emplear algoritmos iterativos en la solución del sistema de ecuaciones y lo único que se resuelve de manera implícita, es la ecuación de Poisson (operador de Laplace) a través de un esquema de Gradientes Conjugados [61].

Por último, con las elecciones mencionadas y luego de algunos manejos algebraicos, podemos escribir el esquema de pasos fraccionados en forma compacta:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta t}(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) &= \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \nu(\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) - \\
&\quad - (\mathbf{f}_e^n, \boldsymbol{\psi}_h) \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in \Psi_{h_t} \\
(\nabla p_h^{n+1}, \nabla \phi_h) &= \frac{\rho}{\delta t} [(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \nabla \phi_h) - (\nabla \mathbf{u}_h^n, \phi_h)] \quad \forall \phi_h \in \Phi_{h_t} \\
(\mathbf{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) &= (\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) - \frac{\delta t}{\rho} (\nabla p_h^{n+1}, \phi_h)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

El esquema resultante es semi-implícito, siendo la primera y tercera ecuación de 3.36 explícitas y la segunda ecuación de 3.36 para el cálculo de la presión, resulta implícita.

3.5 Algoritmo de Estabilización

Como se mencionó anteriormente, en el problema discreto la ecuación para la presión se vuelve inestable al computarla con las velocidades discretas desacopladas de la misma, al igual que en el término convectivo, por ende se necesita plantear algún método de estabilización. Se presenta en primer lugar la estabilización de una ecuación Convectiva-Difusiva-Reactiva (CDR), para una comprensión clara del método. Sea una ecuación CDR escrita en forma indicial, cuyo operador es \mathcal{L} tal que u es la incógnita buscada, (el análisis se extrae de [59]):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u) &:= -\partial_i(\epsilon_{ij}\partial_j u) + a_i\partial_i u + su = f \quad \text{en } \Omega \\
u &= 0 \quad \text{en } \partial\Gamma
\end{aligned} \tag{3.37}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ con $d = 2, 3$, $\partial\Gamma$ es el contorno de Ω , ϵ_{ij} es un tensor constante de difusión, a_i es la velocidad solenoidal de advección, $s \geq 0$ la constante de reacción y f una fuerza interna.

El espacio de funciones cuya potencia p ($0 \leq p \leq \infty$) es integrable en un dominio ω , es denotado por $L^p(\omega)$ y cuando $p = 2$, el producto interno es denotado por $(\cdot, \cdot)_\omega$. El espacio de funciones cuyas derivadas distribucionales de hasta $m \geq 0$ (entero) pertenece a $L^2(\omega)$, es denotado por $H^m(\omega)$. El espacio $H_0^1(\omega)$ consiste de funciones en $H^1(\omega)$ que

son o valen cero sobre el contorno $\partial\gamma$. El espacio dual topológico de $H_0^1(\omega)$, es denotado por $H^{-1}(\omega)$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se utiliza para denotar la paridad dual entre ellos:

El problema puede ser escrito en forma débil, dado $f \in H^{-1}(\Omega)$, encontrar $u \in \Psi := H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$B(u, \psi) = L(\psi) \quad \forall \psi \in \Psi \quad (3.38)$$

donde:

$$\begin{aligned} B(u, \psi) &= (\partial_i \psi, \epsilon_{ij} \partial_j u)_\Omega + (\psi, a_i \partial_i u)_\Omega + (\psi, su)_\Omega \\ L(\psi) &= \langle \psi, f \rangle_\Omega \end{aligned} \quad (3.39)$$

La discretización del dominio se basa en una partición de elementos finitos, $\mathcal{P}_h = \{K\}$ de dimensión $h < 0$, el cual es un conjunto n_{el} de elementos K tal que cubren el dominio. Basada sobre esta partición, el espacio Ψ es aproximado por un espacio dimensional finito Ψ_h definido como:

$$\Psi_h = \{\omega \in \Psi : \omega \circ F^{-1}|_K \in \mathcal{P}_p(\hat{K}), 0 \leq p \leq \infty\} \quad (3.40)$$

donde $\mathcal{P}_p(\hat{K})$ denota el conjunto de polinomios de a lo sumo grado p , y F es el mapeo afín desde el elemento de referencia \hat{K} al elemento físico K . Por lo tanto el problema discreto por la aproximación de Galerkin puede escribirse como:

$$B(u_h, \psi_h) = L(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_h \quad (3.41)$$

Diferentes esquemas de estabilización son usados dependiendo de la inestabilidad del problema. Un método general que comunmente se utiliza es la formulación variacional de multiescala. La misma está basada en la descomposición de una incógnita u en dos partes, una parte u_h resoluble discreta y una parte \hat{u} en la escala de una subgrilla, no captable por la malla de elementos finitos. Por ende el espacio Ψ se puede particionar como:

$$\Psi = \Psi_h \oplus \hat{\Psi} \quad (3.42)$$

donde $\hat{\Psi}$ es el espacio de funciones en la escala de la subgrilla. Aplicando la descomposición a la ecuación en forma débil se tiene:

$$\begin{aligned} B(u_h, \psi_h) + B(\hat{u}, \psi_h) &= L(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_h \\ B(u_h, \hat{\psi}) + B(\hat{u}, \hat{\psi}) &= L(\hat{\psi}) \quad \forall \hat{\psi} \in \hat{\Psi} \end{aligned} \quad (3.43)$$

La primera ecuación, es la ecuación para la parte resoluble discreta u_h y tiene dos términos: el primero es la contribución de Galerkin y el segundo tiene en cuenta la influencia en la escala de la subgrilla sobre u_h . La segunda ecuación es una ecuación para la contribución de la escala de la subgrilla. Si se introduce la siguiente notación:

$$\Omega_h = \bigcup_{K \in \mathcal{P}_h} K \quad y \quad \Gamma_h = \bigcup_{K \in \mathcal{P}_h} \partial K \quad (3.44)$$

y

$$(\cdot, \cdot)_h = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} (\cdot, \cdot)_K, \quad (\cdot, \cdot)_{\partial h} = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} (\cdot, \cdot)_{\partial K} \quad y \quad \|\cdot\|_h^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|\cdot\|_K^2 \quad (3.45)$$

Integrando por partes la (3.43) dentro de cada elemento:

$$\begin{aligned} B(u_h, \psi_h) + (\mathcal{L}^*(\psi_h), \hat{u})_h + (n_i \epsilon_{ij} \partial_j \psi_h, \hat{u})_{\partial h} &= L(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_h \\ (\hat{\psi}, \mathcal{L}(\hat{u}))_h + (\hat{\psi}, n_i \epsilon_{ij} \partial_j \hat{u})_{\partial h} &= (\hat{\psi}, (f - \mathcal{L}(u_h)))_h - (\hat{\psi}, n_i \epsilon_{ij} \partial_j u_h)_{\partial h} \quad \forall \hat{\psi} \in \hat{\Psi} \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde \mathcal{L}^* es el adjunto del operador \mathcal{L} (con condiciones de contorno de Dirichlet) el cual se define como:

$$-\mathcal{L}^*(\psi) = \partial_i(\epsilon_{ij} \partial_j u) + \partial_i(a_i u) - su \quad (3.47)$$

Como el flujo normal a través de cualquier superficie es continuo, se deduce que:

$$(\hat{\psi}, n_i \epsilon_{ij} \partial_j u)_{\partial h} = (\hat{\psi}, n_i \epsilon_{ij} \partial_j \hat{u})_{\partial h} + (\hat{\psi}, n_i \epsilon_{ij} \partial_j u_h)_{\partial h} = 0 \quad (3.48)$$

Notar que $\hat{\psi} = 0$ sobre $\partial\Gamma$. Luego, de la segunda ecuación de (3.46) se deduce que es equivalente a encontrar $\hat{u} \in \hat{\Psi}$ tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{u}) &= f - \mathcal{L}(u_h) + \hat{\psi}^\perp \quad en \quad \Omega_h \\ \hat{u} &= u_{ske} \quad en \quad \Gamma_h \end{aligned} \quad (3.49)$$

donde u_{ske} es una función definida sobre los elementos del contorno, y $\hat{\psi}^\perp$ es cualquier función en Ψ^\perp (el complemento ortogonal de $\hat{\Psi}$ en el sentido de $L^2(\Omega_h)$). La función u_{ske} debe ser tal que el flujo normal de u sobre los contornos de un elemento interno al dominio, sea continuo y definido como $u_{ske} = u - u_h$ sobre Γ_h . Además, $\hat{\psi}^\perp$ es la función responsable para la garantía de que $\hat{u} \in \hat{\Psi}$. Un paso necesario para resolver el sistema, significa una elección de u_{ske} , $\hat{\psi}^\perp$ y una solución aproximada de (3.49).

Es de hacer notar que (3.49) se plantea en Ω_h , y consiste en la unión de los elementos de la malla, por lo tanto, cualquier elección de u_{ske} conduce a n_{el} problemas desacoplados

sobre cada elemento K . En problemas unidimensionales pueden encontrarse soluciones exactas, pero para problemas de más de una dimensión, la elección de $u_{ske} = 0$ conduce a una aproximación.

La solución aproximada puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\hat{u}|_K = \mathcal{L}^{-1} \left[(f - \mathcal{L}(u_h)) + \hat{\psi}^\perp \right] |_K \simeq \tau_K \left[(f - \mathcal{L}(u_h)) + \hat{\psi}^\perp \right] |_K \quad (3.50)$$

Esta ecuación hace hincapié en que τ_K es una aproximación de la inversa del operador diferencial \mathcal{L} , para cada elemento K , un hecho que se utiliza para construir una aproximación de la misma. Finalmente se debe imponer que $\hat{u} \in \hat{\Psi}$, o de forma equivalente, definir ψ^\perp . La opción mas simple es tomar $\psi^\perp = 0$ que se denomina Aproximación Algebraica de las Subescalas (ASGS). Otra opción es tomar $\hat{\Psi}$ como el complemento ortogonal de Ψ_h en el sentido $L^2(\Omega_h)$, la cual requiere de uso de una proyección $L^2(\Omega_h)$ con el uso de pesos elementos por elementos τ_K , (Proyección Ortogonal de las subescalas OSS). Finalmente la aproximación será de la forma,

$$\hat{u}|_K = \tau_K \Pi(f - \mathcal{L}(u_h)) \quad (3.51)$$

donde $\Pi = I$ (es la identidad en Ψ) en el caso del método ASGS y $\Pi = P_h^\perp = I - P_h$ en el caso del método OSS, siendo P_h la proyección L^2 sobre el espacio de elementos finitos. Despreciando los términos de contorno, el problema estabilizado discreto consiste en encontrar $u_h \in \Psi_h$ tal que,

$$B_\tau(u_h, \psi_h) = L_\tau(\psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Psi_h \quad (3.52)$$

donde la forma estabilizada es:

$$\begin{aligned} B_\tau(u_h, \psi_h) &= B(u_h, \psi_h) - (\mathcal{L}^*(\psi_h), \tau \Pi \mathcal{L} u_h)_h \\ L_\tau(\psi_h) &= L(\psi_h) - (\mathcal{L}^*(\psi_h), \tau \Pi f)_h \end{aligned} \quad (3.53)$$

3.5.1 Algoritmo de estabilización de subescalas ortogonales OSS

Tomando el problema en forma discreta (3.36), se procede a añadir el término de estabilización que toma la forma siguiente:

$$\tau(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+\theta} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}}_h^{n+\theta} + \nabla p^{n+1} - \pi_{h_{pc}}^n, \hat{\mathbf{u}}_h^{n+\theta} \nabla \psi_h + \nabla \phi_h) \quad \forall \psi_h \in \tilde{\Psi}_h \quad (3.54)$$

Donde $\tilde{\Psi}_h$ es el espacio de funciones Ψ_h extendido, el cual contiene las funciones vectoriales continuas asociadas a los nodos del contorno. La nueva variable auxiliar $\pi_{h_{pc}}^n$ es la proyección del gradiente de presión y del término convectivo sobre el espacio de elementos finitos Ψ_h . Una versión alternativa de la proyección del término ortogonal, presentada en [4] se utilizará en este trabajo. Esta consiste en dividir en dos mínimos cuadrados el término proyectado, una corresponde a la proyección del gradiente de presión y la otra está asociada al término convectivo. Las mismas pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} STB_u &= \tau_1(\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \pi_h^n, \mathbf{u}_h^n \nabla \psi_h) \\ STB_p &= -(\tau_2(\nabla p^n - \xi_h^n), \nabla \phi_h) \end{aligned} \quad (3.55)$$

donde ξ_h^n y π_h^n son las proyecciones del gradiente de presión y término convectivo sobre $\tilde{\Psi}_h$, respectivamente, y se calculan:

$$\begin{aligned} (\pi_h^n, \tilde{\psi}_h) &= (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \tilde{\psi}_h) \\ (\xi_h^n, \tilde{\psi}_h) &= (\nabla p^n, \tilde{\psi}_h) \end{aligned} \quad (3.56)$$

donde $\tilde{\psi}_h \in \tilde{\Psi}_h$. Además, se observa de esta última ecuación que los términos corresponden al paso n , lo que da la pauta de que se resuelven de manera explícita.

3.5.2 Estabilización de la presión

En [16] se demuestra que la estabilidad de la presión en esquemas de primer orden como en de segundo orden, depende del tamaño del paso de tiempo. Se sabe que si δt es demasiado pequeño pueden ocurrir problemas de estabilidad, es por ello que se debe recurrir a una formulación estabilizada.

El problema variacional correspondiente consiste en encontrar $\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} \in \Psi_h$, $p_h^{n+1} \in \Phi_h$, $\mathbf{u}_h^{n+1} \in \Psi_h$ y $\xi_h^n \in \tilde{\Psi}_h$, tal que

$$\frac{1}{\delta t}(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \psi_h) = \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^n, \psi_h) - (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \psi_h) - \nu(\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \psi_h) - (\mathbf{f}_e^n, \psi_h) \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} (\nabla p_h^{n+1}, \nabla \phi_h) &= \frac{\rho}{\delta t + \tau_2} [(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \nabla \phi_h) - (\nabla \mathbf{u}_h^n, \phi_h)] + \\ &\quad + \frac{\tau_2}{\delta t + \tau_2} (\nabla \xi_h^n, \nabla \phi_h) \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$(\mathbf{u}_h^{n+1}, \psi_h) = (\hat{\mathbf{u}}_h^n, \psi_h) - \frac{\delta t}{\rho} (\nabla p_h^{n+1}, \phi_h) \quad (3.59)$$

$$(\xi_h^n, \tilde{\psi}_h) = (\nabla p_h^n, \tilde{\psi}_h) \quad (3.60)$$

donde τ es el parámetro de estabilización que depende de los tamaños de elementos locales. El análisis de estabilidad y convergencia permite obtener su valor como,

$$\tau = \frac{h^2}{4\nu + 2|u|h} \quad (3.61)$$

donde h y u son el tamaño y velocidad típicas sobre el elemento. Este parámetro debe calcularse elemento a elemento en un problema real.

3.5.3 Estabilización de la convección

Al añadir el término que estabiliza la convección, el problema se completa quedando de la siguiente manera: Sea $\hat{\mathbf{u}}_h^n \in \Psi_h$, $p_h^n \in \Phi_h$, $\mathbf{u}_h^n \in \Psi_h$, $\xi_h^n \in \tilde{\Psi}_h$, $\pi_h^n \in \tilde{\Psi}_h$ encontrar $\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} \in \Psi_h$, $p_h^{n+1} \in \Phi_h$, $\mathbf{u}_h^{n+1} \in \Psi_h$ tal que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t}(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) &= \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \nu(\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{f}_e^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \\ &\quad - (\tau_1(\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \pi_h^n), \nabla \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h) \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} (\nabla p_h^{n+1}, \nabla \phi_h) &= \frac{\rho}{\delta t + \tau_2} [(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \nabla \phi_h) - (\nabla \mathbf{u}_h^n, \phi_h)] + \\ &\quad + \frac{\tau_2}{\delta t + \tau_2} (\nabla \xi_h^n, \nabla \phi_h) \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$(\mathbf{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) = (\hat{\mathbf{u}}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \frac{\delta t}{\rho} (\nabla p_h^{n+1}, \phi_h) \quad (3.64)$$

$$(\pi_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) = (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) \quad (3.65)$$

$$(\xi_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) = (\nabla p_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) \quad (3.66)$$

Puede verse que el método de estabilización es consistente. Esto significa que cuando el tamaño de los elementos tiende a cero, no sólo la viscosidad numérica de estabilización τ_1 y τ_2 tienden a cero, sino que también los términos de estabilización de presión y convección. El sistema de ecuaciones de (3.63) (presión), se resuelve mediante gradientes conjugados con preconditionador diagonal. Las ecuaciones restantes se resuelven en forma explícita condensando las matrices de masas.

3.5.4 Problema estabilizado en formulación Arbitraria Lagrangeana-Euleriana (ALE)

El problema puede generalizarse aún más si se lo plantea en un marco de referencia Euleriano-Lagrangeano arbitrario (ALE). Teniendo en cuenta las ecuaciones planteadas

en la Sec.3.2.3, se pueden escribir las ecuaciones estabilizadas en función de la velocidad convectiva \mathbf{c} y por consiguiente de la velocidad de la malla \mathbf{u}_m :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t}(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) &= \frac{1}{\delta t}(\mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{c}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \nu(\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \boldsymbol{\psi}_h) - (\mathbf{f}_e^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \\ &\quad - (\tau_1(\mathbf{c}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \pi_h^n), \nabla \mathbf{c}_h^n \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_h) \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} (\nabla p_h^{n+1}, \nabla \phi_h) &= \frac{\rho}{\delta t + \tau_2} [(\hat{\mathbf{u}}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n, \nabla \phi_h) - (\nabla \mathbf{u}_h^n, \phi_h)] + \\ &\quad + \frac{\tau_2}{\delta t + \tau_2} (\nabla \xi_h^n, \nabla \phi_h) \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$(\mathbf{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{\psi}_h) = (\hat{\mathbf{u}}_h^n, \boldsymbol{\psi}_h) - \frac{\delta t}{\rho} (\nabla p_h^{n+1}, \phi_h) \quad (3.69)$$

$$(\pi_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) = (\mathbf{c}_h^n \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) \quad (3.70)$$

$$(\xi_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) = (\nabla p_h^n, \tilde{\boldsymbol{\psi}}_h) \quad (3.71)$$

3.5.5 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno se aplican sobre la velocidad o la presión. De acuerdo al dominio espacial, que está dado por Ω y sus contornos por $\Gamma_D \cup \Gamma_N$, en un dominio temporal de análisis (t_0, t_f) se pueden establecer como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_c(\mathbf{x}, t) & \text{en} & \Gamma_D \times (t_0, t_f) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} &= t_c & \text{en} & \Gamma_N \times (t_0, t_f) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) & \text{en} & \Omega \times (0) \\ p(\mathbf{x}, t_0) &= u_0(\mathbf{x}) & \text{en} & \Omega \times (0) \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.5.6 Paso de tiempo crítico

La estabilidad del algoritmo se obtiene regulando el tamaño del paso de tiempo. El incremento de tiempo es calculado para ecuaciones Convectivas-Difusivas-Reactivas (CDR), según [17]. En el presente trabajo, para todos los sistemas de ecuaciones se utilizará el mismo incremento de tiempo siendo evaluado en cada nodo de la siguiente forma,

$$\Delta t = \frac{FS}{\frac{1}{\Delta t_c} + \frac{1}{\Delta t_u}} \quad (3.73)$$

donde Δt_c es el incremento de tiempo “crosswind” y se calcula utilizando el término difusivo de la ecuación CDR y Δt_u es el incremento “upwind”, que se calcula usando

la forma general de la ecuación CDR, la cual depende de la relación entre el término difusivo y el convectivo (a través del número de Péclet y de Reynolds). FS es un factor de seguridad menor o igual a la unidad.

3.6 Un algoritmo para el movimiento de malla

La necesidad de trabajar sobre la regularización de la malla utilizada para la discretización de dominio computacional, surge como consecuencia de simular problemas con cuerpos de geometrías complejas, fallas en algoritmos malladores, movimiento de geometrías, etc.

Existen numerosos trabajos al respecto, los cuales pueden dividirse en función del método utilizado para regularizar la malla, en aquellos que emplean o introducen cambios topológicos (eliminación, inserción de nodos etc.) o los que reubican los vértices pero no modifican la topología [2], [5].

El algoritmo utilizado en este trabajo se basa en operaciones de optimización de suavizado desarrollado para el paquete de software ANSYS® [10]. El mismo suaviza la malla en sucesivas iteraciones, luego de la deformación impuesta por el movimiento del cuerpo a estudiar. Es decir que los nodos que serán móviles y fieles a la cinemática impuesta, serán aquellos que estén sobre la superficie del cuerpo y estarán exentos de ingresar al suavizado de la malla.

Dicho algoritmo puede ser aplicado en mallas de tipo estructuradas y no estructuradas con elementos triangulares, cuadrangulares o la combinación de ambos. Además es capaz de suavizar mallas con grandes irregularidades de manera eficiente y robusta y hasta de reacomodar elementos invertidos. El mismo se divide en dos partes, la primera consta de un suavizado que reacomoda los nodos más alejados de una posición adecuada y la segunda de un suavizado optimizado más robusto y puntual, capaz de restaurar elementos altamente deformados e invertidos.

El algoritmo de movimiento y suavizado de malla se describe en forma general de la siguiente manera:

- Para cada paso de tiempo de cálculo “DO”:
 - Convocar el primer suavizado para los nodos habilitados para ello, luego del movimiento inicial del cuerpo.
 - Contador $ICOUNT=ICOUNT+1$
 - if ($ICOUNT=2$)

- Convocar al suavizado optimizado.
- ICOUNT=0
- end if
- Actualizar la posición de la malla y calcular su velocidad de movimiento.
- fin del cálculo “END DO”

El primer suavizado realiza un reposicionamiento iterativo de los nodos mediante una función de peso promedio o métrica de distorsión, que da una idea de la deformación del elemento y que puede estar basada en las longitudes de los lados o en el área del elemento. El suavizado puede describirse de la siguiente forma:

- Loop sobre un número arbitrario de iteraciones “DO”:
 - Loop sobre el número de elementos “DO”.
 - Calcular la métrica de distorsión en base al desplazamiento del nodo y el área del elemento.
 - Se calcula una variable auxiliar que acumula las métricas calculadas sobre un nodo que es común a elemento vecinos.
 - Se pondera la métrica de distorsión de cada nodo con las áreas de los elementos que lo contienen.
 - “END DO”.
- “END DO”

Ahora se procede a describir el algoritmo de optimización utilizado para el suavizado [10]. Dado μ como métrica de distorsión con valores que varían entre -1 y 1. El valor 1 corresponde a un elemento con forma perfecta (por ej. un triángulo con todos sus ángulos iguales), el valor 0 a un elemento con gran deformación prácticamente inutilizable (por ej. un triángulo con alguno de sus ángulos menor a 20 grados) y -1 a un elemento totalmente invertido.

Sea \mathbf{x} el vector de posiciones de un determinado nodo conectado con los elementos E_1, E_2, \dots, E_n con métricas positivas $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ respectivamente. El objetivo de la optimización es mover \mathbf{x} tal que $\mu_{min} = \min(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ es incrementado tanto como sea posible, tal que los elementos incidentes sobre la posición \mathbf{x} sean optimizados.

El valor de la métrica para elementos triangulares se calcula como [10]:

$$\mu(ABC) = (I)2\sqrt{3} \frac{\|CA \times CB\|}{\|CA\|^2\|AB\|^2\|BC\|^2} \quad (3.74)$$

donde:

$$I = \begin{cases} 1, (CA \times CB) \cdot N_x > 0 \\ -1, (CA \times CB) \cdot N_s < 0 \end{cases} \quad (3.75)$$

Donde N es la superficie normal evaluada en el centro del triángulo y CA , CB y BC son las longitudes de los lados del elemento. Notar que la métrica tiene el signo de I para capturar la inversión del elemento. La métrica es básicamente el área del elemento dividido por la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados. El factor $2\sqrt{3}$ es la normalización para que al triángulo equilátero le corresponda un valor máximo de $\mu = 1$.

Esta metodología se encuentra inmersa en un *loop* de iteraciones, donde la posición \mathbf{x} se mueve en direcciones de gradientes tal que μ_{min} se incremente tanto como sea posible. Dentro de una iteración el algoritmo procede de la siguiente manera:

1. Calcular los gradientes $\mathbf{g}_i = (g_x^i, g_y^i, g_z^i)$ para cada elemento E_i , con $1 \leq i \leq n$:
 - Perturbar la coordenada x de \mathbf{x} con un pequeño desplazamiento δ . La perturbación puede estar basada en la dimensión de las coordenada de los vértices, por ejemplo puede ser 10^{-5} de la dimensión máxima del modelo a estudiar.
 - Calcular la métrica perturbada μ_i^+ para cada E_i .
 - Calcular el gradiente como: $g_x^i = (\mu_i^+ - \mu_i) / \delta$. (g_y^i se calcula de manera similar).
2. El gradiente direccional se toma como $\mathbf{g} = \mathbf{g}_m$ donde m es el subíndice tal que $\mu_m = \mu_{min}$. Si $\mathbf{g} \approx 0$, luego $\mathbf{g} = \mathbf{g}_m^+$, donde m^+ es el subíndice tal que $\mu_m^+ = \mu_{min}^+$ donde μ_{min}^+ es la siguiente métrica más pequeña a μ_{min} . El vértice con posición \mathbf{x} se mueve a $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{g}$, donde λ se calcula como sigue:

- Si μ_i es considerado que es una función de \mathbf{x} , luego la expansión en serie de Taylor:

$$\mu_i(\mathbf{x}^+) = \mu_i(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{g}) \approx \mu_i(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i \quad (3.76)$$

Si $\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i \geq 0$, μ_i se incrementa para valores pequeños de λ . Esto es la elección de la dirección del gradiente tiene más probabilidad de mejorar la calidad

para E_i , lo que provocará que no haya que preocuparse de que μ_i^+ sea menor que μ_{min}^+ .

- Por otro lado si $\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i \leq 0$, luego μ_i decrece para valores pequeños λ con la elección de la dirección del gradiente. En este caso el valor de λ necesita ser restringido tal que $\mu_{min}^+ \geq \mu_i^+$ o:

$$\mu_{min} + \lambda \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \geq \mu_i + \lambda \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i \quad (3.77)$$

luego λ puede limitarse a:

$$\lambda = \min \left[\frac{(\mu_i - \mu_{min})}{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i)} \right] \quad (3.78)$$

sobre los índices i por el cual $\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_i < 0$

3. Una vez que el valor de λ es obtenido y es suficientemente grande, luego el movimiento de \mathbf{x} a $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{g}$ se realiza de la siguiente manera:

- Usando el valor de \mathbf{x}^+ , se calculan los nuevos valores de las métricas μ_i^+ para cada E_i .
- El nuevo valor mínimo de la métrica μ_{min}^+ se calcula como:

$$\mu_{min}^+ = (\mu_1^+, \mu_2^+, \mu_3^+) \quad (3.79)$$

- El movimiento de \mathbf{x} a \mathbf{x}^+ es aceptado y μ_i es seteado a μ_i^+ para cada i , si:

$$\mu_{min}^+ \geq \mu_{min} + tol \quad (3.80)$$

donde tol es una tolerancia que puede ser 10^{-5} .

- Es posible que con estas aproximaciones el λ utilizado sea demasiado grande, por lo tanto el movimiento no es aceptado. Para salvar esto se puede probar un pequeño movimiento disminuyendo λ con un factor de 2 y se repite el proceso para un nuevo \mathbf{x}^+ , si nuevamente no es aceptado, a los sumo se puede probar un valor de reducción por ejemplo de 4, antes de descartar el movimiento.

VALIDACIÓN Y VERIFICACIÓN DEL CÓDIGO NUMÉRICO

La validación y la verificación son procesos para asegurar que el código desarrollado es capaz de simular con precisión un problema del mundo real o hipotético, esto es resolver las ecuaciones correctas (validación), o resolver las ecuaciones correctamente (verificación). La validación se logra comparando resultados con algún modelo teórico, experimental ¹ ó la combinación de ambos. La verificación se puede conseguir cotejando resultados con los de alguna simulación numérica existente.

En este capítulo se desarrolla una serie de pruebas numéricas en contraste con resultados tanto teóricos como experimentales extraídos de la bibliografía, ya sea para flujo estacionario como inestacionario.

4.1 Flujo viscoso sobre una placa plana

El principal interés de esta sección, es saber que se cuenta con una aproximación razonable a un caso experimentalmente validado de la fricción que ejerce el fluido sobre una superficie plana. Tiene como objetivo verificar el buen funcionamiento del código en la determinación de las tensiones tangenciales sobre un cuerpo. Se apela entonces a los resultados obtenidos por Blasius donde establece que el coeficiente de fricción para una placa plana es:

$$C_f = \frac{0,664}{R_{ex}^{1/2}} \quad (4.1)$$

donde R_{ex} es el número de Reynolds a lo largo de la longitud de la placa.

¹el modelo experimental de validación suele calificarse como *benchmark*.

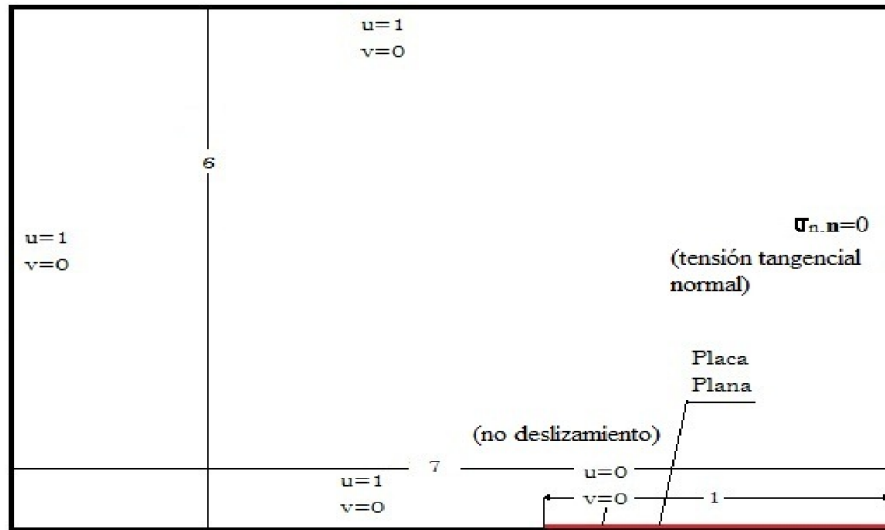


Figura 4.1: Condiciones de contorno para la simulación de la placa plana (Gráfico fuera de escala).

Para el modelo numérico se simula una placa plana sin espesor y con ángulo de ataque nulo. El dominio de simulación y las condiciones de contorno se pueden ver en la fig. 4.1 y el resultado en la fig. 4.2. Se observa una paridad aceptable en el coeficiente de fricción entre el resultado de Blasius y la simulación numérica aquí realizada. Además, se realizó una ponderación del error err entre ambos resultados sobre 1000 puntos tomados a lo largo de la placa. El valor del error resulta:

$$err = \frac{C_{f_{num}} - C_{f_{teo}}}{C_{f_{teo}}} \quad (4.2)$$

donde los subíndices num y teo significan numérico y teórico respectivamente. Finalmente, la ponderación de errores a lo largo de la placa es:

$$\bar{err} = 0,028 = 2,8\% \quad (4.3)$$

4.2 Flujo estacionario sobre un cilindro

Esta sección tiene como objetivo simular el flujo en dos dimensiones alrededor de un cilindro de sección circular sometido a una corriente uniforme. Los resultados se comparan con estudios numéricos y experimentales disponibles en la bibliografía.

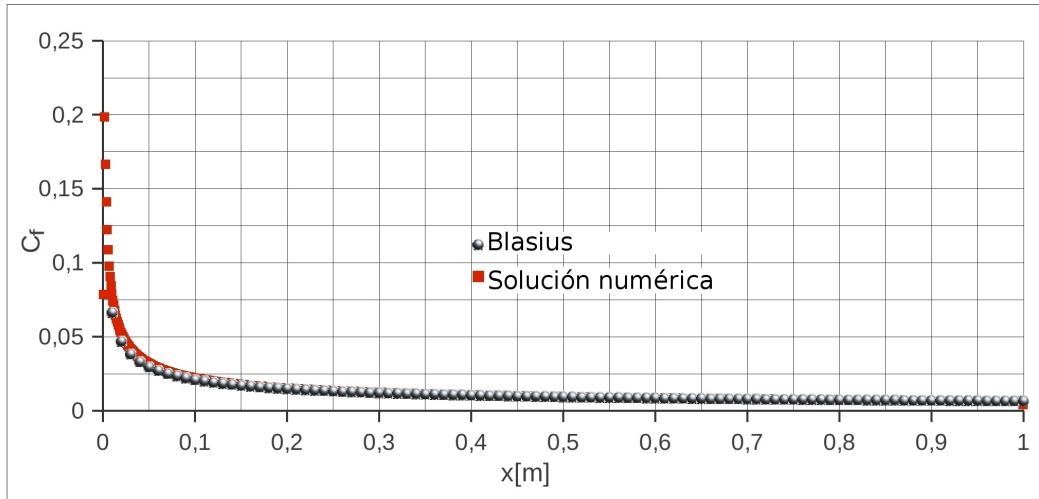


Figura 4.2: Comparación del coeficiente de fricción a lo largo de la placa.

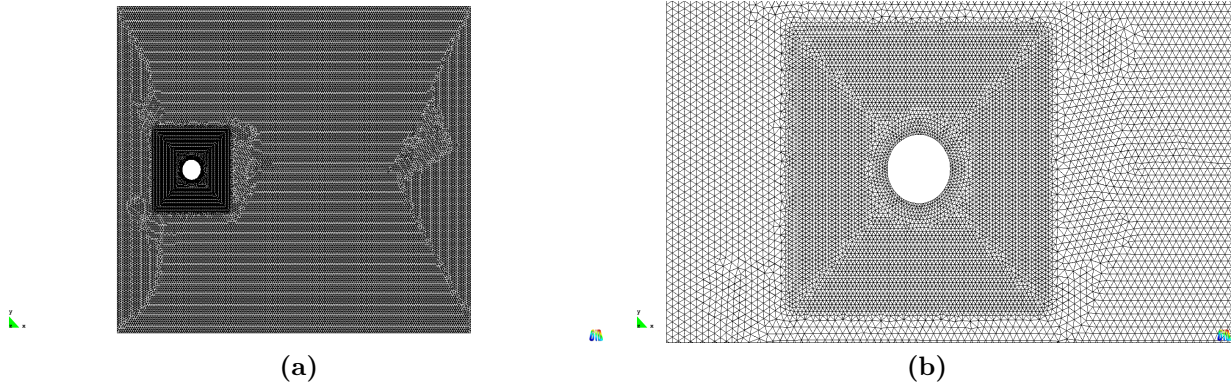


Figura 4.3: Mallado del dominio para las simulaciones del cilindro.(a)Dominio total.(b) Refinamiento sobre la superficie del cilindro.

Las simulaciones que se presentan son a números de Reynolds $Re = (D\rho U)/\mu$ de 20, 40, 100 y 200, siendo la longitud característica el diámetro del cilindro $D = 1m$, $U = 1m/s$ la velocidad de la corriente libre, $\rho = 1kg/m^3$ la densidad del fluido y μ la viscosidad dinámica y parámetro de control. La discretización del dominio computacional utilizado que se muestra en la fig. 4.3, consta de una malla no estructurada de 64527 elementos triangulares, en el un dominio $[x_a, x_b] \times [y_a, y_b] = [-4, 15] \times [-8, 8]$. El rango de Reynolds estudiado cubre regímenes de flujo estacionario, transición de estacionario a inestacionario, e inestacionario.

Las condiciones de contorno que se imponen son:

- Sobre los contornos entrantes, superior e inferior se impone velocidad $(u, v) =$

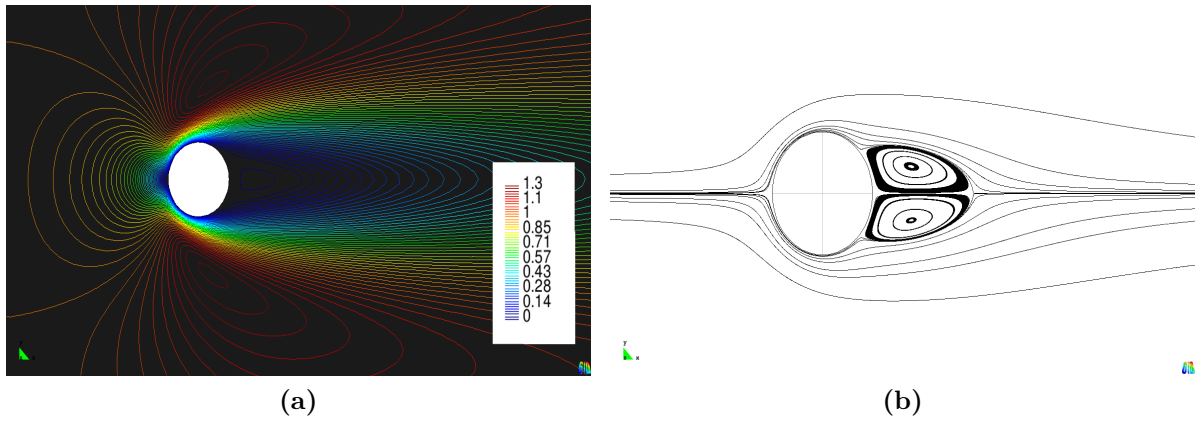


Figura 4.4: Flujo sobre un cilindro $Re = 20$. (a) Líneas de velocidad constante. (b) Líneas de corriente.

$(1, 0)$.

- Sobre el contorno saliente, tracción nula $\sigma_n \cdot \mathbf{n} = 0$.
- Sobre la superficie del cuerpo, condición de no deslizamiento $(u, v) = (0, 0)$.

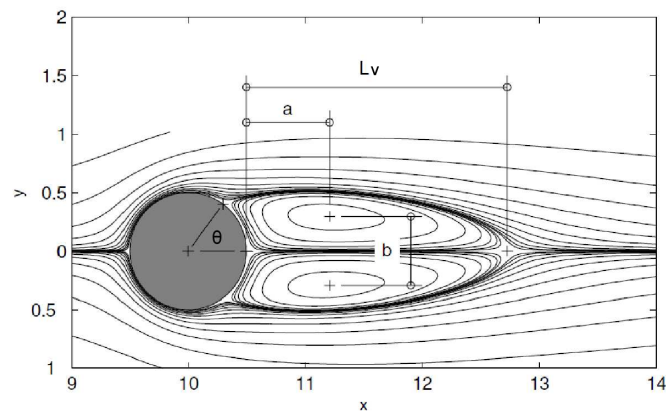


Figura 4.5: Nomenclatura de los parámetros geométricos a ser comparados y calculados en la simulación del cilindro.[51]

Los experimentos muestran que en el rango $40 < Re < 50$ comienzan las inestabilidades y la transición de flujo estacionario a inestacionario. Para $Re = 20$ (fig. 4.4) y $Re = 40$ (fig. 4.6), la estela muestra un estado simétrico detrás del cuerpo, que consta de dos vórtices adheridos al mismo, de diferentes sentidos de circulación y estables en el tiempo. Es decir, que el flujo se mantiene estacionario.

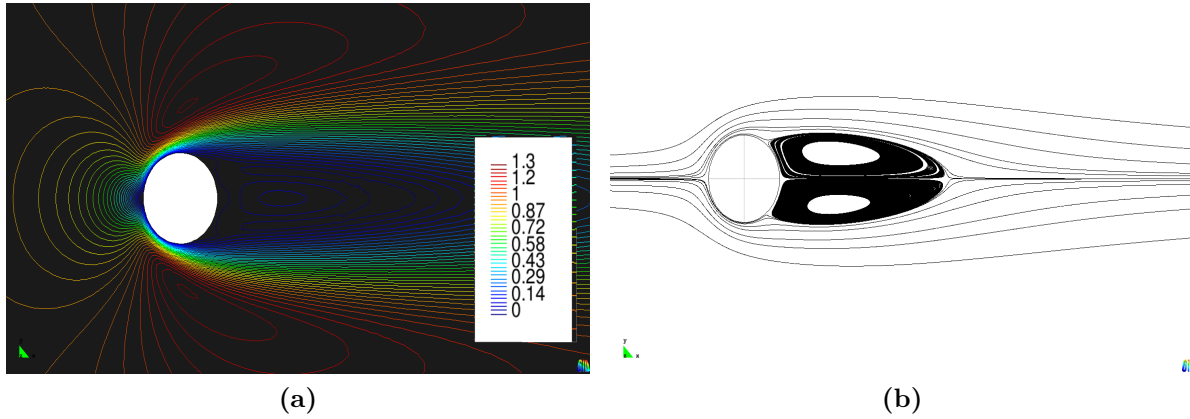


Figura 4.6: Flujo sobre un cilindro $R_e = 40$. (a) Líneas de velocidad constante. (b) Líneas de corriente.

$R_e = 20$	L_v [m]	a [m]	b [m]	θ	C_D
Dennis & Chang[20]	0.94	-		43.7	2.05
Countaunceau & Bouard*[19]	0.93	0.33	0.46	45	-
Linnik[47]	0.93	0.36	0.43	43.9	2.16
Gopalan[29]	0.92	0.34	0.42	-	-
Medjroubi [51]	0.92	0.35	0.43	44.5	2.16
Fornberg[27]	0.91	-	-	-	2
Presente trabajo	0.97	0.38	0.44	44.1	2

Tabla 4.1: Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $R_e = 20$.

La diferencia que se observa es que al aumentar el número de Reynolds (mientras se mantenga $R_e < 50$) los vórtices adheridos aumentan su tamaño, con una disminución del coeficiente de resistencia. Los parámetros geométricos se definen en la fig. 4.5 y las comparaciones con resultados de la bibliografía se presentan en las tablas 4.1 y 4.2. Se puede observar que las diferencias entre valores no exceden el 10%. Nótese que con (*) se indican resultados experimentales.

Según la bibliografía, el flujo se torna inestable para $R_e = 46 \pm 1$, como lo predice la teoría lineal [39],[30]. Superando este valor comienzan a aparecer pequeñas oscilaciones asimétricas en la estela, causadas por el desprendimiento de vórtices de la superficie del cilindro. Este proceso se denomina transición a inestacionario, o calle de vórtices de von Karman, que de hecho es lo que se analiza con las simulaciones a Reynolds 100 y 200. Los tiempos de simulación son 170s y 174s respectivamente.

El parámetro adimensional que se tiene en cuenta para caracterizar el flujo inesta-

$R_e = 40$	Lv [m]	a [m]	b [m]	θ	C_D
Dennis & Chang[20]	2.35	-		53.8	1.52
Countaunceau & Bouard*[19]	2.13	0.76	0.59	53.8	-
Linnik[47]	2.23	0.71	0.59	53.4	1.61
Gopalan[29]	2.15	0.7	0.6	-	-
Medjroubi[51]	2.21	0.7	0.59	53.8	1.6
Fornberg[27]	2.24	-	-	-	1.5
Presente trabajo	2.28	0.73	0.6	53.1	1.51

Tabla 4.2: Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $R_e = 40$.

$R_e = 100$	St	C_D	C_L
Berger & Wille*[6]	0.165	-	-
Liu et al. [48]	0.165	1.35	± 0.339
Linnik[47]	0.166	1.34	± 0.333
Gopalan[29]	0.67	-	-
Medjroubi[51]	0.167	1.36	± 0.336
Guerrero[30]	-	1.39	± 0.333
Presente trabajo	0.167	1.31	± 0.33

Tabla 4.3: Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $R_e = 100$.

cionario es el número de Strouhal $S_t = Ul/f$, donde l es la longitud característica, U es la velocidad de la corriente libre y f es la frecuencia de desprendimiento de vórtices obtenida mediante el coeficiente de sustentación, que se compara con resultados obtenidos de la bibliografía.

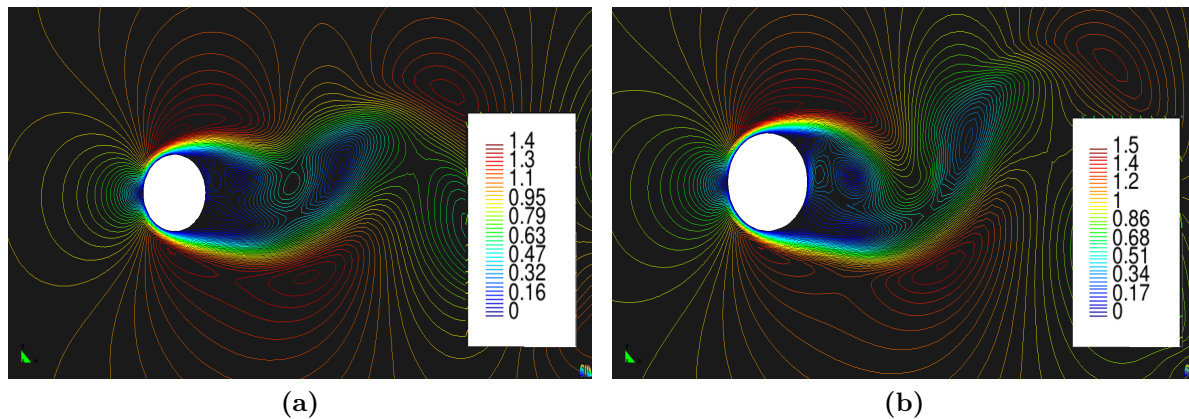


Figura 4.7: Líneas de velocidad constante.(a) Flujo sobre un cilindro $R_e = 100$. (b) Flujo sobre un cilindro $R_e = 200$.

$R_e = 200$	St	C_D	C_L
Berger & Wille*[6]	0.185	-	-
Liu et al.[48]	0.192	1.31	± 0.69
Linnik[47]	0.195	1.37	± 0.7
Medjroubi[51]	0.19	1.35	± 0.69
Guerrero[30]	-	1.4	± 0.725
Presente trabajo	0.191	1.27	± 0.68

Tabla 4.4: Comparación de los parámetros de flujo sobre un cilindro a $R_e = 200$.

Como se puede ver en las figs. 4.7a y 4.7b los contornos de velocidad manifiestan el carácter inestacionario de la estela y además se puede observar claramente la calle de von Karman. En las tablas 4.3 y 4.4 se presentan las comparaciones con resultados numéricos y experimentales provistos por la bibliografía con los del presente trabajo. Además en la fig. 4.8 se observa una equiparación satisfactoria con el coeficiente de sustentación a $R_e = 200$ obtenido por [51], donde se visualiza el período y amplitud de las oscilaciones.

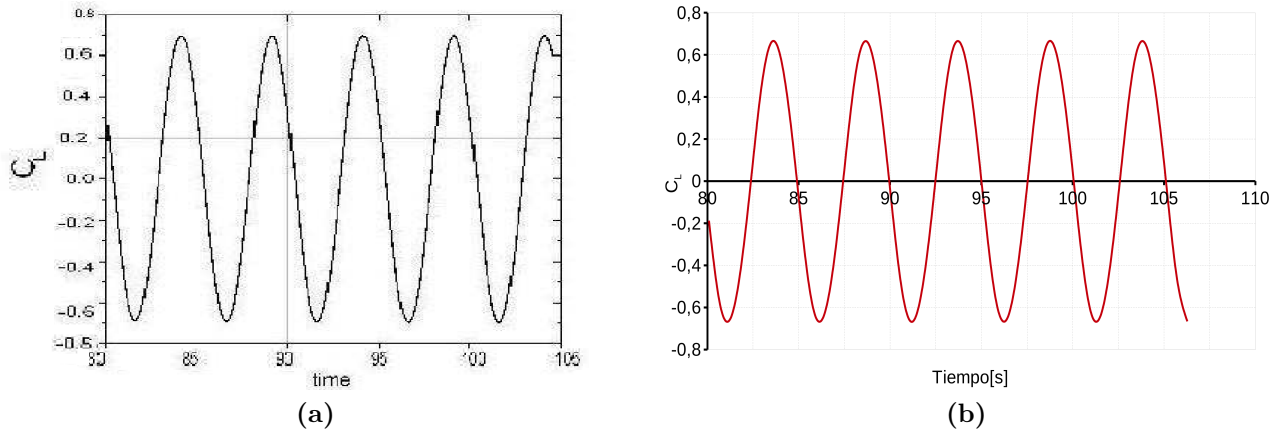


Figura 4.8: Coeficiente de sustentación del cilindro a $Re = 200$. (a) C_L de ref.[51]. (b) C_L del presente trabajo.

4.3 Flujo estacionario sobre perfiles

En esta sección se presentan casos de verificación del código donde se analizan los resultados del flujo estacionario sobre perfiles aerodinámicos ya estudiados intensivamente a lo largo de los años.

4.3.1 Flujo sobre un perfil NACA 0008

La discretización del dominio espacial utilizado como se muestra en la fig. 4.9, consta de una malla no estructurada de 147480 elementos triangulares. Sobre la superficie del cuerpo los elementos tienen un tamaño promedio de $0.0009c$. Sobre la zona cercana al perfil y sobre la estela los elementos tienen un tamaño promedio de $0.0065c$. El refinamiento se llevó a cabo en base a la dimensión que pueda tomar la capa límite para conservar de la mejor manera posible los gradientes de velocidad. En el resto del dominio, el tamaño medio de los elementos es de $0.07c$.

En la fig. 4.10 se observa la distribución de presiones sobre el perfil NACA 0008 en contraste con los resultados numéricos de [44]. Para Reynolds 2000 y 6000 existe una muy buena paridad demostrando que el código funciona bien en este régimen. También se realizó una ponderación del error err para ambos números de Reynolds, sobre 20 puntos tomados a lo largo del perfil. El valor del error resulta:

$$err = \frac{C_{p_{pt}} - C_{p_{ref}}}{C_{p_{ref}}} \quad (4.4)$$

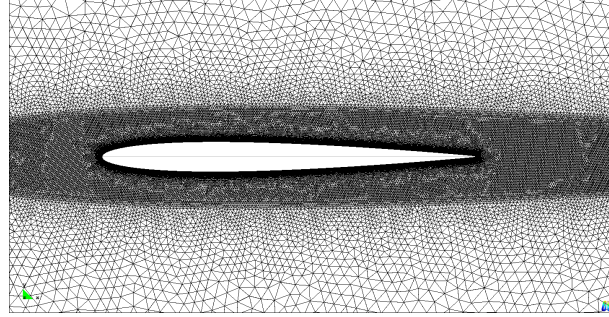


Figura 4.9: Mallado espacial del dominio para las simulaciones de un perfil NACA 0008.

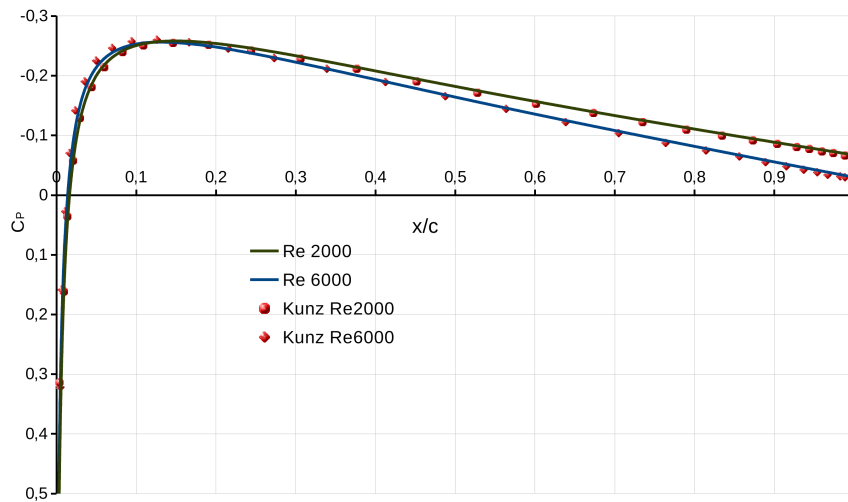


Figura 4.10: Comparación de la distribución de presiones con los resultados obtenidos por [44] sobre un perfil NACA 0008.

donde los subíndices “*pt*” y “*ref*” significan “presente trabajo” y “referencia” respectivamente. Finalmente, la ponderación de errores a lo largo del perfil para $Re = 6000$ es:

$$e_{\bar{r}r} = 0,039 = 3,9\% \quad (4.5)$$

Y para $Re = 2000$ es:

$$e_{\bar{r}r} = 0,042 = 4,2\% \quad (4.6)$$

Los contornos de velocidad a Reynolds 2000 y 6000 se muestran en la fig. 4.11, donde se observa que a menor Re_e el espesor de capa límite es mayor.

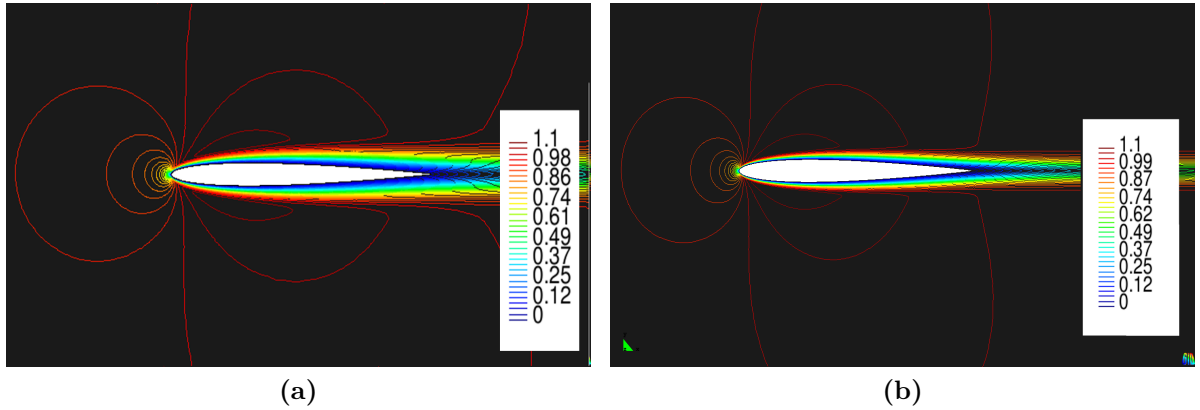


Figura 4.11: Contornos de velocidad sobre un perfil NACA 0008. (a) $Re = 2000$. (b) $Re = 6000$.

4.3.2 Flujo sobre un perfil NACA 0002

Para un perfil NACA 0002, se realizó el mismo análisis que el caso anterior. La discretización del dominio computacional consiste de una malla no estructurada de elementos triangulares, fig. 4.12. Sobre la superficie del cuerpo los elementos tienen un tamaño promedio de $0.0005c$. Sobre la zona cercana al perfil y sobre la estela los elementos tienen un tamaño promedio de $0.003c$. En el resto del dominio, el tamaño medio de los elementos es de $0.07c$.

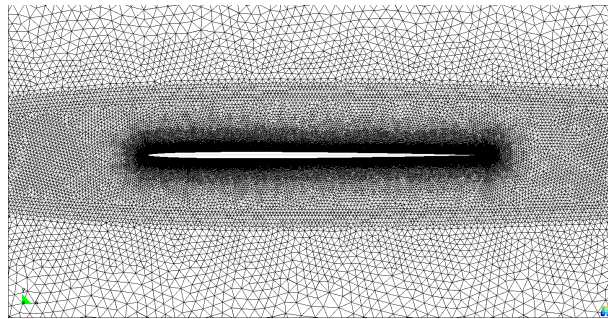


Figura 4.12: Mallado espacial del dominio para las simulaciones de un perfil NACA 0002.

En la fig. 4.13 se observa la distribución de presiones sobre el perfil NACA 0002 y se compara con los resultados de [44]. Para Reynolds 2000 y 6000 existe una buena concordancia en los resultados confirmando que el código funciona correctamente.

Al igual que el caso anterior, la ponderación del error err para ambos números de Reynolds, sobre 30 puntos tomados a lo largo del perfil resulta para $Re = 6000$:

$$\bar{err} = 0,0186 = 1,86\% \quad (4.7)$$

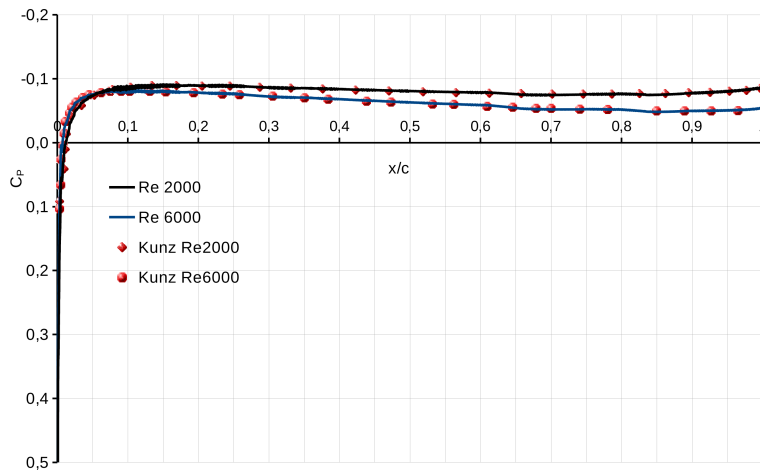


Figura 4.13: Distribución de presiones sobre el perfil NACA 0002 en comparación con los obtenidos en ref. [44] a $Re = 2000$ y $Re = 6000$.

Y para $Re = 2000$ es:

$$e\bar{r}r = 0,034 = 3,4\% \quad (4.8)$$

Los contornos de velocidad a Reynolds 2000 y 6000 se muestran en la fig. 4.14, donde se observa que ocurre lo mismo que en el perfil 0008, a menor Re el espesor de la capa límite es mayor.

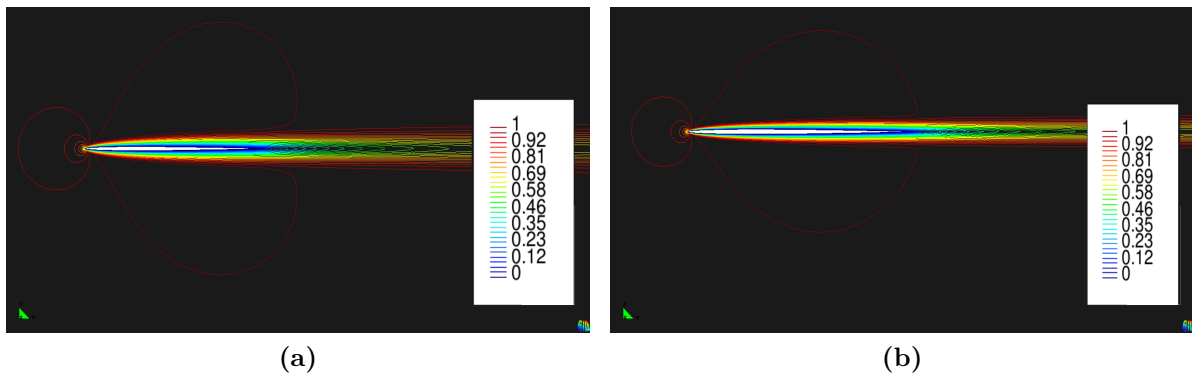


Figura 4.14: Contornos de velocidad sobre un perfil NACA 0002. (a) $Re = 2000$. (b) $Re = 6000$.

4.4 Flujo inestacionario sobre perfiles

En esta sección las comparaciones también se hacen con resultados numéricos y experimentales publicados por diferentes autores. Ellos utilizaron métodos espectrales

basados en una ecuación para la densidad, volúmenes finitos con una ecuación específica para la presión y experimentos empleando técnicas PIV (Particle Image Velocimetry).

Pedro et al.[55] realizaron un estudio sobre la eficiencia propulsiva de *flapping* en hidro-perfiles NACA 0012 a $R_e = 1100$. Utilizaron un método de volúmenes finitos con el agregado de una ecuación adicional para la presión y un esquema temporal explícito sobre una grilla estructurada. Las ecuaciones de transporte fueron discretizadas mediante diferencias centradas y para el movimiento del cuerpo se utilizó la formulación Arbitrary Lagrangeana-Eulerian (ALE). Guerrero [30] realizó el mismo análisis para validar su trabajo. Por lo tanto y como primera comparación válida, se puede llevar a cabo una prueba de paridad con los resultados publicados por los autores citados.

4.4.1 Movimiento de cabeceo o “*pitching*”

Un primer escenario a considerar es un movimiento de cabeceo puro. Los parámetros a tener en cuenta (Cap. 2) son: el número de Reynolds R_e en base a la velocidad de la corriente libre U , la frecuencia de cabeceo f_α , la frecuencia reducida k y la máxima amplitud o ángulo máximo alcanzado en grados α_a . En el análisis, la única variable será la frecuencia de cabeceo y el punto de pivot se encuentra ubicado al 25 % de la cuerda del perfil. En la tabla 4.5 se manifiestan los diferentes casos a comprobar.

Casos	f_α , [Hz]	k	α_a [°]
P1	0.6366	2.0	5.0
P2	1.9098	6.0	5.0
P3	2.5464	8.0	5.0
P4	3.1830	10.0	5.0
P5	4.4562	14.0	5.0
P6	5.7294	18.0	5.0

Tabla 4.5: Parámetros cinemáticos para los casos de “*pitching*”.

La malla de elementos finitos utilizada para el caso P4 de la tabla 4.5, se muestra en la fig. 4.15. Sobre la superficie del cuerpo los elementos tienen un tamaño promedio de 0.002c. Sobre la zona cercana al perfil los elementos tienen un tamaño promedio de 0.002c. En el resto del dominio, el tamaño medio de los elementos es de 0.1c. En estos casos los efectos importantes que se deben capturar, son la capa límite y el desprendimiento de vórtices, ya sea desde el borde de fuga o de ataque. Cabe hacer notar que al aumentar la frecuencia f_α , el refinamiento de la malla en la zona del comienzo de

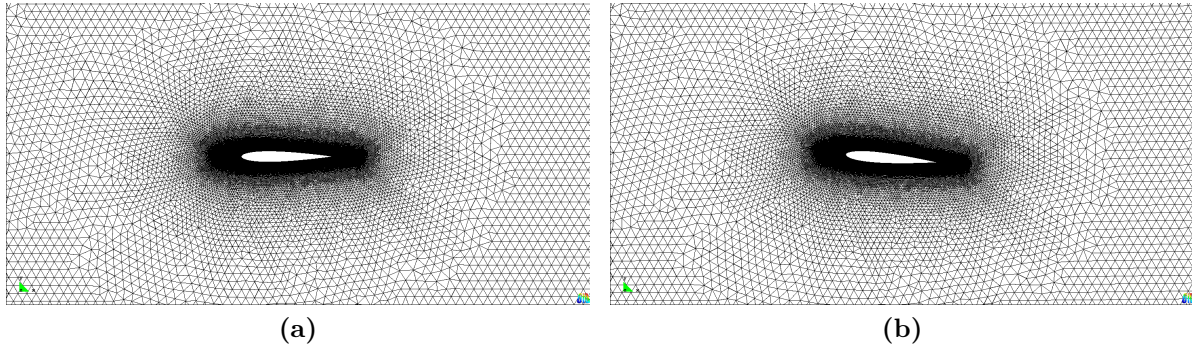


Figura 4.15: Mallado sobre un perfil NACA 0008. (a) Mallado sin deformar a $\alpha_a = 0^\circ$. (b) Mallado deformado a $\alpha_a = 5^\circ$.

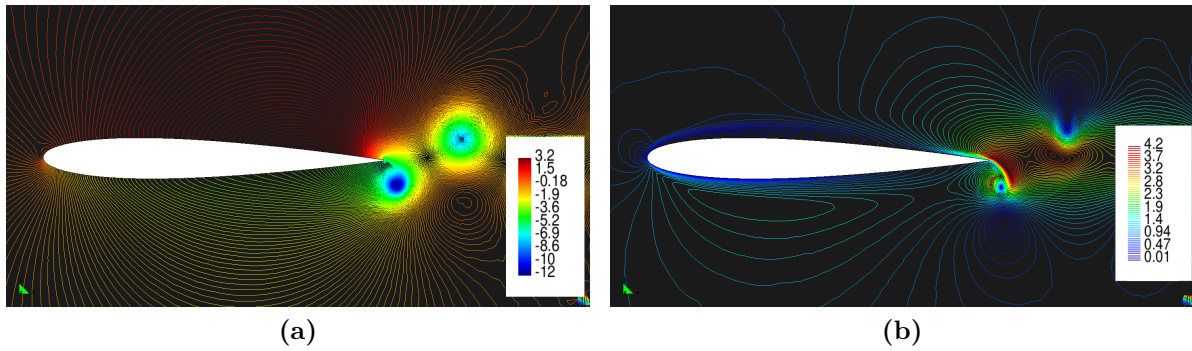


Figura 4.16: Contornos de velocidad y presión sobre un perfil NACA 0008 para el caso P4 de la tabla 4.5. (a) Contornos de presión. (b) Contornos de velocidad.

la estela es esencial.

Casos	Pedro et al.[55]		Guerrero[30]		Presente Trabajo		Errores en $\bar{c}t$	
	$\bar{c}t$	C_{Lmax}	$\bar{c}t$	C_{Lmax}	$\bar{c}t$	C_{Lmax}	<i>err</i> Ped.	<i>err</i> Gue.
P1	-0.1132	0.7107	-0.1280	0.6689	-0.0978	0.7108	0.1810	0.2757
P2	-0.0168	5.4341	-0.0204	5.2650	-0.0101	5.3858	0.3988	0.5049
P3	0.0964	9.8144	0.0986	9.3430	0.0969	9.6300	0.0058	0.0166
P4	0.2174	15.5948	0.1779	14.9362	0.2167	15.4524	0.0032	0.2181
P5	0.8624	34.1262	0.7356	29.3190	0.6300	31.1200	0.2694	0.1435
P6	1.7467	57.5248	1.4418	49.3107	1.2700	52.0250	0.2677	0.1129

Tabla 4.6: Coeficiente de tracción promedio y coeficiente de sustentación máximo para los casos de movimiento de cabeceo para el presente trabajo, [55] y [30].

En la tabla 4.6 se muestra el coeficiente de potencia o tracción promedio generado (ec. 2.15) y el coeficiente de sustentación máximo para cada caso, una vez alcanzado el

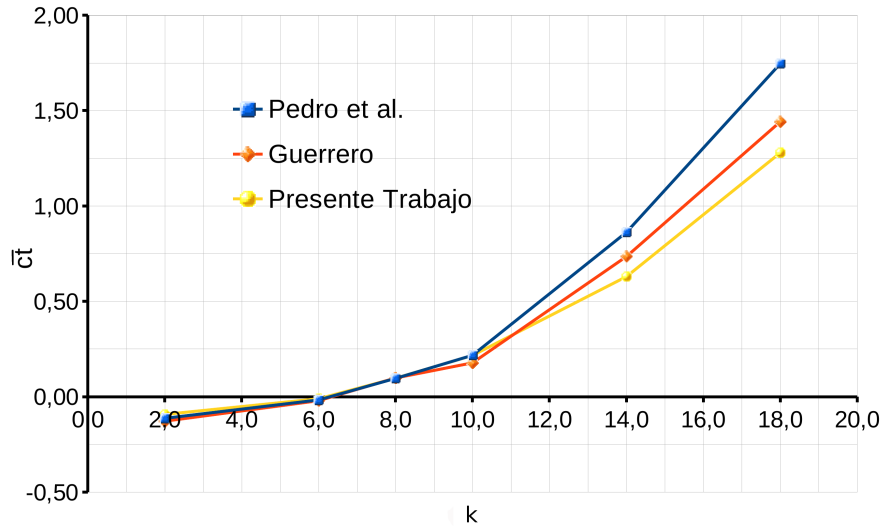


Figura 4.17: Comparación de resultados con los obtenidos en [55] y [30] del movimiento *pitching*. Coeficiente de tracción \bar{c}_t vs. Frecuencia reducida k a $Re = 1100$.

régimen cuasi estacionario de flujo. Para alcanzar dicho régimen, se toma la diferencia entre picos máximos de sustentación (C_{Lmax}) y se observa si cae dentro de un rango menor al 1%. En la mayoría de los casos el estado cuasi-estacionario se alcanza entre los 3 y 5 ciclos de movimiento. Los resultados se comparan con los obtenidos por Pedro et al.[55] y Guerrero [30]. Además, se presentan los errores relativos del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t respecto a ambas referencias. El mismo se calcula:

$$err = \frac{\bar{c}_{t_{pt}} - \bar{c}_{t_{ref}}}{\bar{c}_{t_{ref}}} \quad (4.9)$$

Los mismos muestran una paridad adecuada en los casos P3 y P4, en comparación con los resultados obtenidos por Pedro et al. y se acercan más a los resultados obtenidos por Guerrero en los casos P5 y P6. Cuando la tracción es casi nula (P2), el error puede tomar valores altos y por ello no es representativo. Luego en la curva de la fig.4.17 se grafican dichos resultados. Las diferencias pueden estar dadas por la metodología utilizada, la pérdida o desprendimiento dinámico, la captura de vórtices y por la naturaleza del flujo altamente irregular.

Se muestran contornos de velocidad y de presión para el caso P4 en la fig. 4.16 con el objetivo de dar una idea de la topología del flujo y como actúan las diferencias de presión sobre la geometría.

Además en la fig. 4.18, se observa el comportamiento en función del tiempo de los

parámetros aerodinámicos C_T y C_L para el caso P2 de la tabla 4.5.

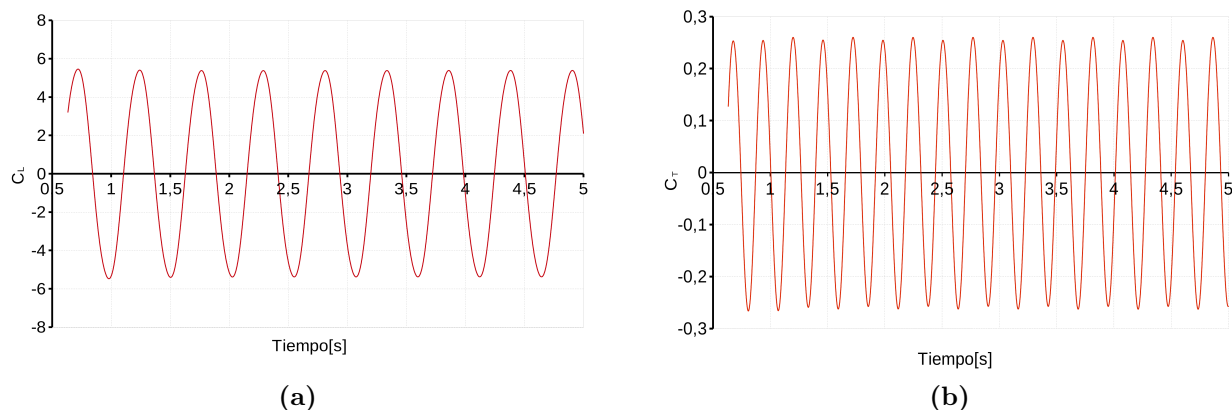


Figura 4.18: Coeficiente de sustentación y de tracción para el caso P2 de la tabla 4.6. (a) Coeficiente de sustentación. (b) Coeficiente de tracción.

4.4.2 Combinación de movimiento de cabeceo (*pitching*) con oscilación vertical (*heaving*)

Un segundo escenario de interés, es el movimiento combinado de cabeceo con desplazamiento vertical conocido como “*flapping*”, de un perfil *NACA 0012*.

Los parámetros intervinientes en dicho estudio son: El número de Reynolds R_e en base a la velocidad de corriente libre U , la frecuencia de cabeceo f_α y desplazamiento vertical f_h , la frecuencia reducida k , la máxima amplitud o ángulo máximo alcanzado en grados α_a , el ángulo de fase entre ambos movimientos φ , el número de Strouhal St y la amplitud máxima del movimiento vertical h_a .

En la tabla 4.7 se manifiestan los diferentes casos a estudiar.

Casos	$f_\alpha = f_h$ [Hz]	h_a	α_a [°]	φ [°]	k	St
F1	0.225	1.0	5	90.0	0.7096	0.45
F2	0.225	1.0	10	90.0	0.7096	0.45
F3	0.225	1.0	15	90.0	0.7096	0.45
F4	0.225	1.0	20	90.0	0.7096	0.45
F5	0.225	1.0	25	90.0	0.7096	0.45

Tabla 4.7: Parámetros cinemáticos para los casos de “*flapping*”.

Los resultados de este trabajo nuevamente se comparan con los obtenidos por Guerrero [30] y Pedro et al. [55] en la tabla 4.8. Se detallan los coeficiente \bar{c}_t , C_{Lmax} y el error

Casos	Pedro et al.[55]		Guerrero[30]		Presente Trabajo		Errores en $\bar{c}t$	
	$\bar{c}t$	C_{Lmax}	$\bar{c}t$	C_{Lmax}	$\bar{c}t$	C_{Lmax}	<i>err</i> Ped.	<i>err</i> Gue.
F1	0.4324	8.3333	0.4245	8.0828	0.4311	8.2078	0.0030	0.0155
F2	0.6511	7.4834	0.6576	7.1699	0.6556	7.2400	0.0069	0.0030
F3	0.8226	6.6307	0.8360	6.5435	0.8246	6.3904	0.0024	0.0136
F4	0.9337	5.8176	0.9389	6.1133	0.9960	5.5113	0.0667	0.0608
F5	1.0046	5.0558	0.9601	5.6080	1.0900	4.9910	0.0792	0.1353

Tabla 4.8: Coeficiente de tracción promedio y coeficiente de sustentación máximo para los casos de movimiento de cabeceo y vertical combinado para el presente trabajo, [55] y [30].

del coeficiente de tracción promedio. Se observa una buena paridad en los valores, con un ligero decaimiento a medida que se aumenta la amplitud de cabeceo. Las diferencias pueden estar dadas por la pérdida dinámica, la naturaleza irregular del flujo al aumentar el ángulo máximo de cabeceo, etc. El gráfico de la fig. 4.19 muestra que la tendencia de la curva es aceptable.

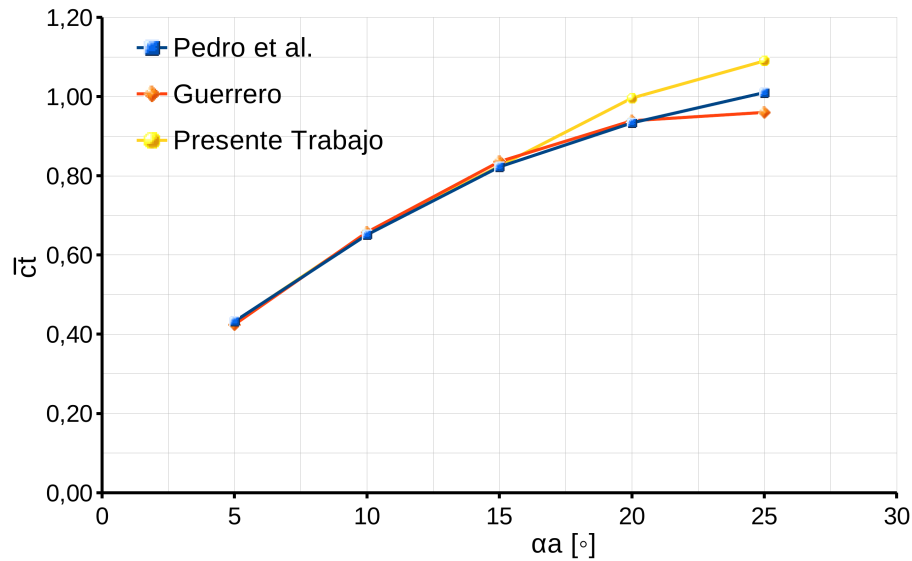


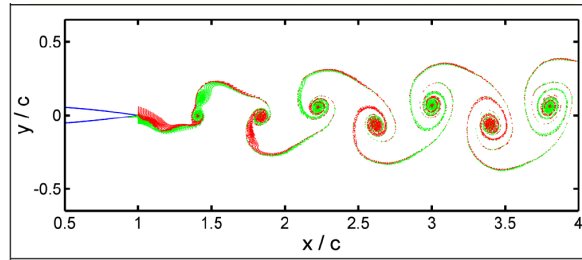
Figura 4.19: Comparación de resultados con los obtenidos en [55] y [30] del movimiento *flapping*. Coeficiente de tracción $\bar{c}t$ vs. amplitud angular α_a a $R_e = 1100$.

4.4.3 Análisis cualitativo

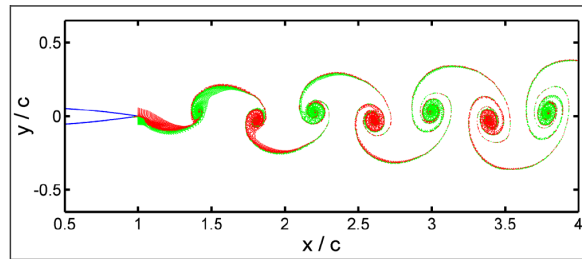
Siempre que se investiga o analiza un determinado fenómeno físico, es relevante también llevar a cabo un estudio cualitativo del mismo en donde por mera observación del resultado simulado se determina si de alguna manera se condice con la realidad.



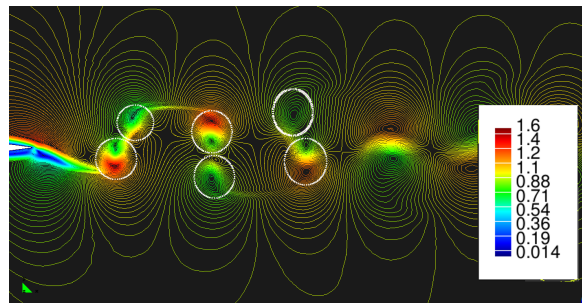
(a)



(b)



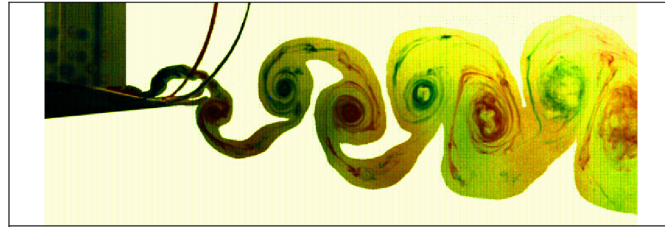
(c)



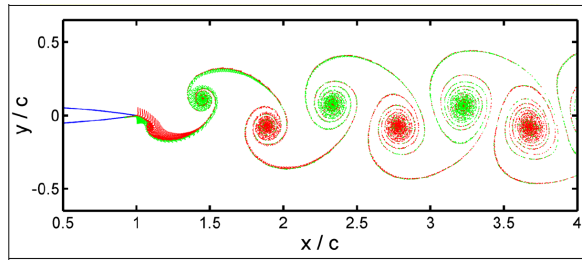
(d)

Figura 4.20: Comparación de topología de estela para $h = 0,025$, $Re = 20000$ y $k = 4$.(a)Resultado experimental [45].(b) Resultado numérico laminar [76]. (c) Resultado numérico turbulento [76].(d) Resultado numérico del presente trabajo (Líneas de velocidad constante).

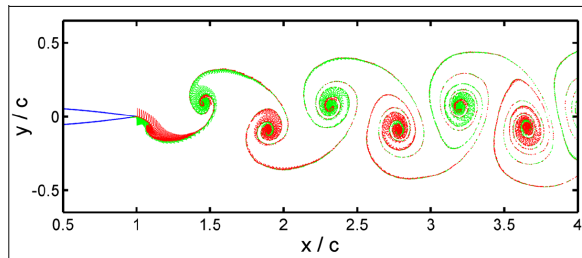
En esta área es interesante el estudio del comportamiento del flujo alrededor del cuerpo, sobre todo en la formación de patrones cuasi-estacionarios que se repiten ante una perturbación periódica, para luego llevar a cabo una comparación con resultados



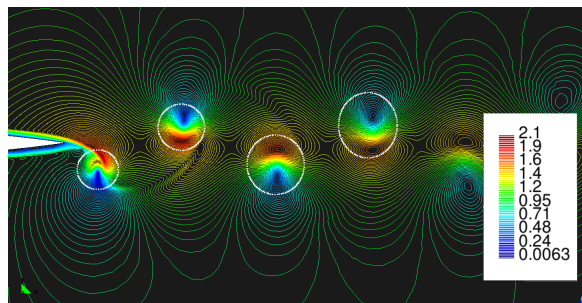
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.21: Comparación de topología de estela para $h = 0,05$, $Re = 20000$ y $k = 4$.(a)Resultado experimental [45].(b) Resultado numérico laminar [76]. (c) Resultado numérico turbulento [76].(d) Resultado numérico del presente trabajo (Líneas de velocidad constante).

experimentos.

En un estudio experimental Jones and Platzer [45] utilizaron un túnel de agua en el que analizaron un perfil NACA 0012 con movimiento vertical periódico sinusoidal

(“*heaving*”) para diferentes valores de frecuencia y amplitud. Además, Young [76] realizó un estudio numérico en comparación con el que se llevó a cabo en [45], donde se mencionó un aspecto importante cuando se estudian perfiles bajo flujo inestacionario, que es la utilización de un modelo laminar y un modelo turbulento, a los fines de analizar como cada uno es capaz de capturar los vórtices desprendidos del perfil, en contraste con el resultado experimental, a un número de Reynolds igual a 20000.

En este trabajo, si bien el flujo a estudiar es para números de Reynolds inferiores a 10000, vale la pena realizar una prueba comparativa para aseverar como sería el comportamiento del modelo de elementos finitos laminar a utilizar.

En la fig. 4.20 se observa una comparación de los datos experimentales con los resultados numéricos. El análisis se realiza para un perfil NACA 0012 a $Re = 20000$, con frecuencia reducida $k = 4$ y una amplitud de movimiento vertical $h = 0,025$. Los resultados experimentales [45] muestran una convección uniforme de la estela, donde ocurre un desprendimiento de dos pares de vórtices por período de oscilación. Para la visualización de los mismos, se emplea una técnica de chorro de tinta, donde el color rojo se inyecta sobre el extradós y el verde sobre el intradós manifestando dos tipos de vórtices por ciclo. Los vórtices se diferencian en que los rojos son de sentido de giro horario y los verdes anti-horarios.

En la simulación numérica hecha por [76] se presentan resultados de los dos esquemas propuestos. El primero (fig. 4.20b), responde a un flujo laminar y el segundo a un modelo turbulento (fig. 4.20c). El segundo no es capaz de reproducir la topología de estela que se ve en los experimentos, siendo así más favorable lo obtenido por el primer modelo. Según lo expuesto en [76], el algoritmo turbulento es incapaz de reproducir el experimento ya que el desprendimiento producido es puramente laminar.

El software utilizado en este trabajo no presenta modelo turbulento y simplemente se realizan las simulaciones bajo la hipótesis de flujo laminar planteada desde un principio. El resultado de dicho software se puede ver en la fig. 4.20d, donde se observa un comportamiento adecuado en comparación con los experimentos. El gráfico expresa los contornos de velocidad constante y los círculos blancos señalan los vórtices formados en la estela. Si se analiza en detalle, se puede ver que en cada período se desprenden dos pares de vórtices y los sentidos de giro de cada uno coinciden con los de la bibliografía. La escala de velocidad adjunta facilita la interpretación del resultado.

Un segundo estudio se ve en la fig. 4.21 donde se comparan nuevamente datos experimentales con resultados numéricos. El análisis se realiza para un perfil NACA 0012 a $Re = 20000$, con frecuencia reducida $k = 4$ y una amplitud de movimiento vertical

$h = 0,05$. Para este caso la topología de estela se caracteriza por un par de vórtices desprendidos por período de oscilación. Al igual que en el caso anterior, la fig. 4.21a corresponde al experimento realizado en [45] y las figs. 4.21b y 4.21c son las simulaciones realizadas por [76], para un modelo laminar y turbulento respectivamente.

El resultado del presente trabajo se observa en la fig. 4.21d, donde los círculos blancos indican los vórtices desprendidos en una imagen de contornos de velocidad. La paridad existente con el experimento [45] y los resultados numéricos para flujo laminar [76] permiten afirmar que el código a utilizar es apto para simular este tipo de problemas.

4.5 Análisis de Mallado

Un análisis numérico consistente proporcionará una solución que se aproxima a los resultados reales a medida que la resolución de la malla tiende a cero. Las soluciones de las ecuaciones discretizadas convergen hacia la solución de las ecuaciones del continuo. No obstante, una cuestión importante a resolver, es qué tipo de refinamiento de malla es el apropiado para un problema específico, ya que dependerá de las condiciones de flujo, del tipo de análisis, la geometría del dominio, método numérico, recursos computacionales etc. Se comienza con una resolución determinada, para luego efectuar una serie de mejoras de la malla y evaluar sus efectos. Este proceder se conoce como un estudio o refinamiento de dependencia. En general se trata de un método utilizado para la determinación del error de discretización ordenado según secuencias e implica la realización de simulaciones en dos o más mallas sucesivamente más finas.

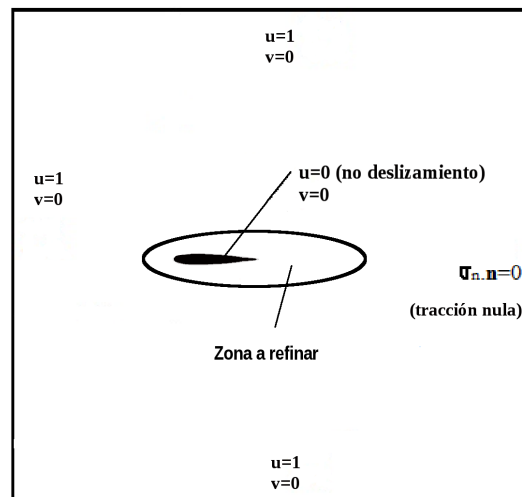


Figura 4.22: Dominio de análisis y detalle de la zona a refinar.

En este tipo de problemas no es tan simple el planteamiento de algún criterio de refinamiento de la grilla como si lo sería en un problema de tipo estructural, pero de alguna manera es posible llevar a cabo una serie de simulaciones con tal fin.

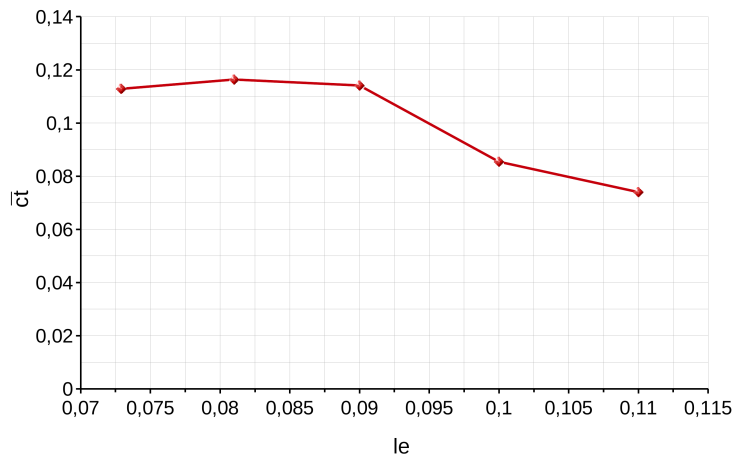


Figura 4.23: Coeficiente de tracción en función del refinamiento de malla. $R_e = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$, $k = 8$.

Las dificultades radican en el criterio utilizado para llevar a cabo dicho refinamiento, donde debe especificarse qué zona del dominio debe ser considerada como objeto de estudio. En nuestro caso el mallador y postprocesador utilizado es *GiD*®. Se toma como caso de análisis la simulación del flujo inestacionario sobre un perfil sumergido en una corriente libre y con movimiento de *pitching*.

La zona de refinamiento es la que se indica en la fig. 4.22. Con una longitud de cuerda $c = 1$ y se varía el tamaño de los elementos de dicha zona en un rango $0,0729 < l_e < 0,111$, con l_e longitud del elemento. El refinamiento consta de iniciar el análisis con el mayor tamaño de elemento y luego refinar en forma proporcional hasta llegar al mínimo valor estudiado.

El resultado puede verse en la fig. 4.23, donde para $l_e = 0,09$ se alcanza un valor del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t , que prácticamente no varía si se disminuye el tamaño del elemento.

FLUJO ESTACIONARIO SOBRE PERFILES

En el Cap. 2 se trató la importancia y la necesidad de analizar perfiles sumergidos en una corriente libre, sea para vehículos de ala fija o de alas batientes con la posibilidad de realizar vuelos estacionarios.

En este capítulo se presentan estudios básicos para el conocimiento del comportamiento de diferentes geometrías en flujos con números de Reynolds ultra-bajos. Se tendrán en cuenta variaciones de parámetros geométricos, como la combadura y su posición sobre la cuerda del perfil y el espesor. Además, se estudia el *flujo cercano al cuerpo*, sus dimensiones en función del número de Reynolds, la posición del desprendimiento y como influyen a los parámetros aerodinámicos de mayor importancia.

5.1 Dominio computacional

El dominio de trabajo para las simulaciones de la mayoría de los perfiles aerodinámicos posee las mismas características. En la fig.5.1 se puede observar las dimensiones de un dominio genérico y las condiciones de contorno utilizadas para un flujo incompresible laminar.

Para la grilla o discretización, los elementos empleados son triángulos lineales de tensión constante y el mallado en todos los casos no es estructurado. El refinamiento de la grilla es particular a cada caso estudiado. Para perfiles gruesos los elementos más pequeños rondan en una longitud de lado de $0,003c$, donde c es la cuerda del perfil y para perfiles delgados alrededor de $0,0005c$. La topología de la grilla para dos perfiles se muestra en la fig. 5.2.

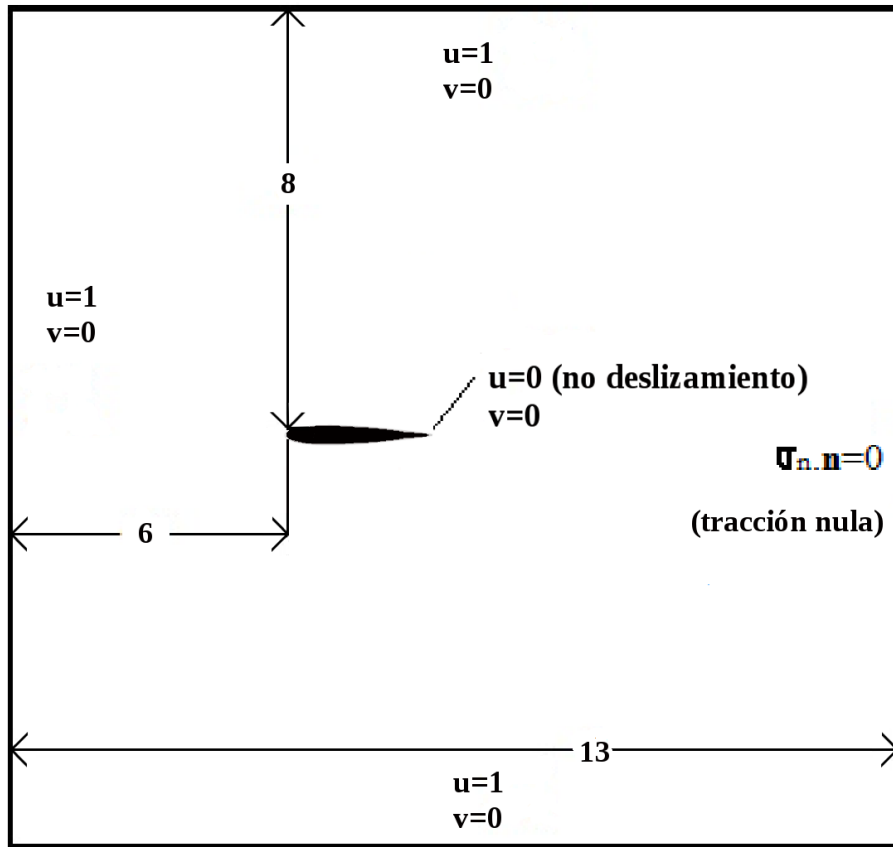


Figura 5.1: Dominio de trabajo y condiciones de contorno.

5.2 Efectos generales del número de Reynolds ($Re < 10000$)

Como es sabido, el principal efecto al disminuir el número de Reynolds es el aumento del coeficiente de resistencia. Al no ser recíproco dicho aumento para el coeficiente de sustentación, se provoca una disminución de la relación aerodinámica C_L/C_D . El vuelo a este régimen se caracteriza por tener mucho menor eficiencia que el desarrollado por vehículos de gran porte, condicionando significativamente las exigencias de potencia requerida y especialmente cuando se trata de pequeñas escalas [63].

5.2.1 Sobre el concepto de capa límite

Es bien conocido que si se realiza un análisis dimensional de las ecuaciones de cantidad de movimiento, se toma l como longitud característica del cuerpo sumergido en la corriente libre y δ como el espesor de capa límite, se llega a la relación de proporcionalidad

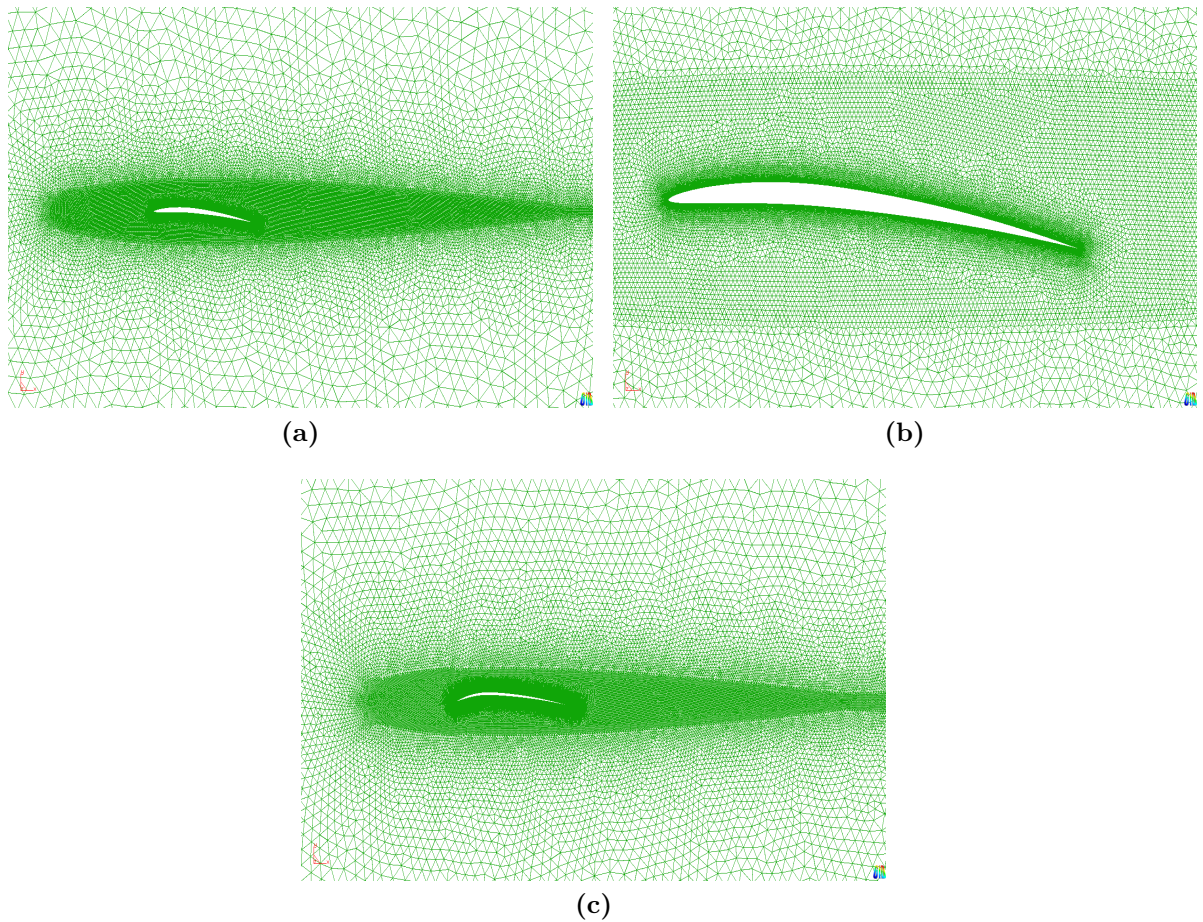


Figura 5.2: Distintas topologías de mallado. (a) NACA 4404. (b) NACA 4404. (c) NACA 6302.

lidad siguiente:

$$\frac{\delta}{l} \sim \frac{1}{Re^{1/2}} \quad (5.1)$$

donde Re es el número de Reynolds. Esto nos indica, que con números de Reynolds bajos los efectos viscosos predominan respecto de los convectivos, tornando al flujo totalmente difusivo y laminar.

Por definición, el espesor de capa límite δ_{99} es la distancia medida a partir de la superficie a la cual se alcanza el 99% de la velocidad de corriente libre. Sobre una placa plana, Blasius comprobó que era válida la siguiente relación:

$$\frac{\delta_{99}}{x} = \frac{5}{Re_x^{1/2}} \quad (5.2)$$

donde x es la distancia sobre la placa y Re_x el número de Reynolds basado en dicha

distancia.

Si se calcula el espesor para diferentes R_{ex} con una longitud de placa unitaria $l = 1$, se consigue:

R_{ex}	δ_{99}
10000	0.05
1000	0.1581
100	0.5

Tabla 5.1: Espesor de capa límite en una placa plana a diferentes números de Reynolds.

El espesor de la zona viscosa es casi el 5% de la longitud de la placa a número de $R_e = 10000$ y el 16% a $R_e = 1000$ (Tabla 5.1). Esto obliga a replantear el concepto referente a la capa límite delgada respecto de las dimensiones del cuerpo, por una zona de considerable espesor donde predominan los efectos viscosos. Para los fines de este trabajo, se hará referencia a dicha zona como *flujo cercano al cuerpo*. Es conveniente realizar esta distinción, ya que por sus dimensiones alcanzadas puede afectar más allá de lo esperado al campo de flujo libre y a la posición del desprendimiento. Estos efectos causan un aumento de resistencia, afectan la separación del flujo y son cruciales en la definición de una geometría efectiva para una determinada aplicación.

5.2.2 Distribución de presiones

Como primer resultado representativo, se calcula la distribución de presiones sobre un perfil NACA 0008 (fig. 5.3) para números de Reynolds es igual a 400, 800, 2000 y 6000 y con cero ángulo de ataque. Además, como dato comparativo, también se grafica la distribución de presiones para un flujo no viscoso [44]. En todos los casos la corriente permanece adherida a la superficie.

Las diferencias con el flujo no viscoso son evidentes, a menor número de Reynolds el espesor del *flujo cercano al cuerpo* se hace cada vez mayor e impide la recuperación de la presión. Esto hace que la succión de borde de ataque se suavice y el gradiente de presión adverso se reduzca evitando la caída brusca de sustentación, aunque genere una reducción en la eficiencia aerodinámica C_L/C_D por el aumento de resistencia. Para el perfil NACA 0002 (fig. 5.4), se acentúa aún más el efecto de la viscosidad. Tanto es así, que para los casos a R_e 400 y 800, el flujo no recupera la presión. En cuanto a lo demás, ocurre lo mismo que para el perfil NACA 0008.

En conclusión, la viscosidad produce un considerable aumento de la resistencia y

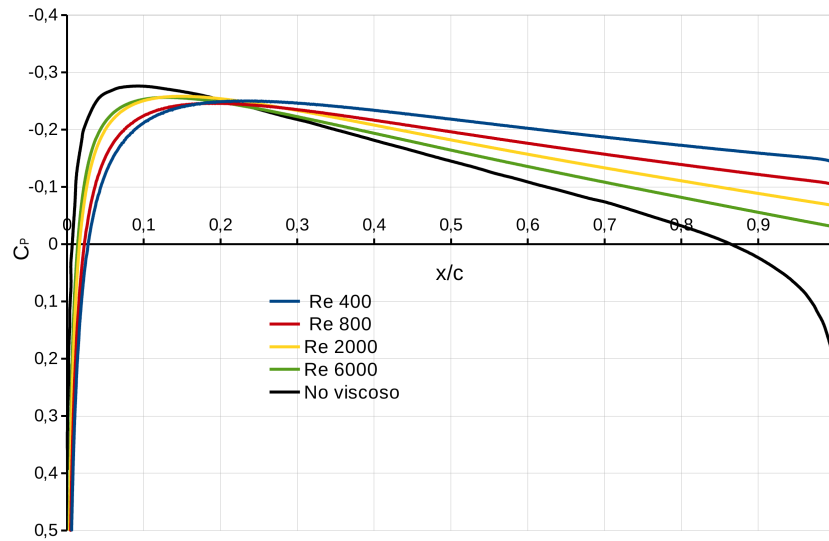


Figura 5.3: Comparación de la distribución de presiones de flujo no viscoso obtenida por [44] y flujo viscoso obtenida en el presente trabajo para un perfil NACA 0008 a $\alpha = 0^\circ$.

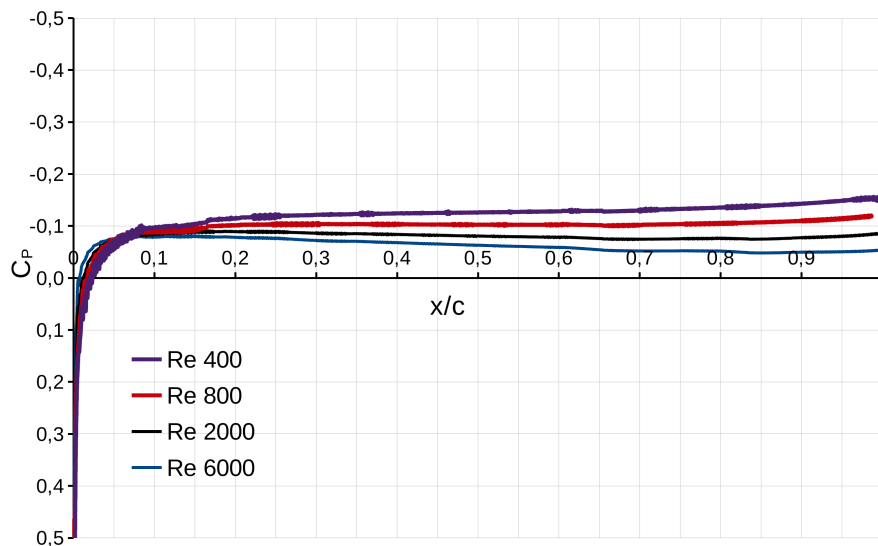


Figura 5.4: Distribución de presiones sobre un perfil NACA 0002 a $\alpha = 0^\circ$.

limita la aparición de gradientes de presión adversos que den lugar a la caída de sustentación, lo cual permite llevar el perfil a ángulos de ataques mayores sin incurrir en transitorios.

La fig. 5.5 muestra las distribuciones de presión para un perfil NACA 0002 a un ángulo de ataque de un grado, para $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$. Se hace notar la diferencia entre los picos de succión de borde de ataque y el desarrollo de la presión a lo largo de

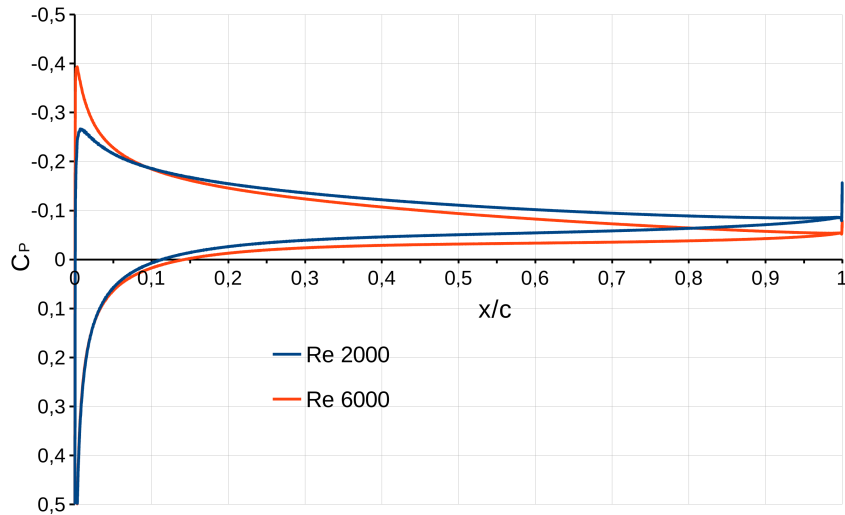


Figura 5.5: Distribución de presiones sobre un perfil NACA 0002 a $\alpha = 1^\circ$ a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$.

NACA 0002 $\alpha = 1^\circ$	C_L	C_D
$R_e = 2000$	0,9127	0,06673
$R_e = 6000$	0,96	0,0371

Tabla 5.2: Comparación de los coeficientes de sustentación y resistencia para un perfil NACA 0002 con $\alpha = 1^\circ$, a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$.

la cuerda.

La Tabla 5.2 muestra que para $R_e = 6000$ la sustentación es aproximadamente un 5% mayor que a $R_e = 2000$, mientras que el valor de la resistencia es un 44% menor respectivamente.

5.2.3 Parámetros aerodinámicos

Para conocer con mayor detalle las características del vuelo a este régimen de R_e ultra-bajos, se analizan específicamente los parámetros aerodinámicos de varios perfiles alares.

En la fig. 5.6, se muestran las curvas del coeficiente de sustentación en función del ángulo de ataque para perfiles NACA 0002 y 0008 a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$. Para ambos perfiles se verifica lo que se mencionó anteriormente. Al disminuir el número de Reynolds se retrasa la pérdida y como consecuencia el rango útil de las curvas, se extiende a mayores ángulos de ataque. El efecto que se produce es un cambio de geometría efectiva del perfil, es decir el *flujo cercano al cuerpo* tiene un espesor de magnitud tal que puede

hasta generar una especie de combadura negativa, lo que disminuye el coeficiente de sustentación.

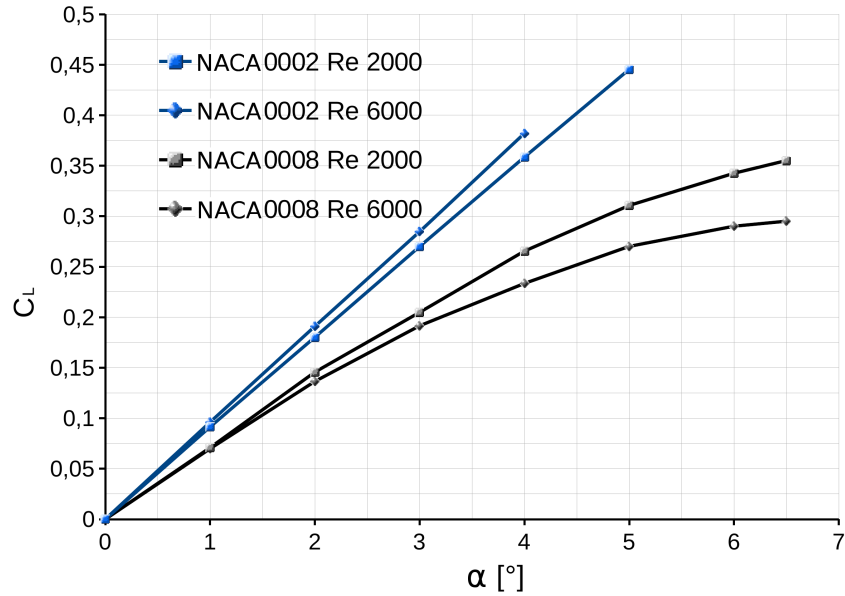


Figura 5.6: Curva $C_L - \alpha$ para perfiles NACA 0002 y 0008 a $Re = 2000$ y $Re = 6000$.

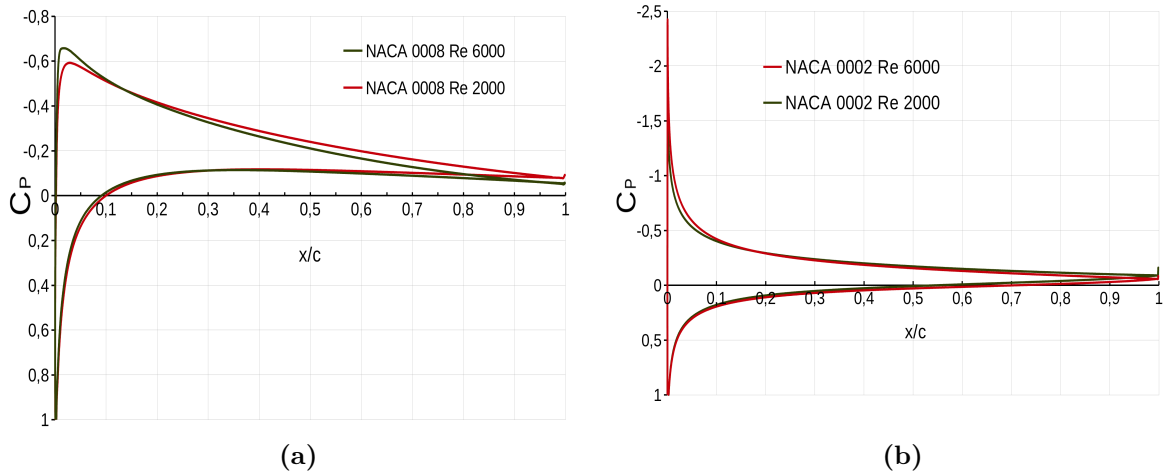


Figura 5.7: Distribución de presiones sobre perfiles a $\alpha = 3^\circ$: (a) NACA 0008. (b) NACA 0002.

La historia es diferente para la pendiente de sustentación $C_{L\alpha}$. Para el perfil más grueso (NACA 0008) $C_{L\alpha}$ se mantiene casi igual para bajos ángulos de ataque ($\alpha \leq 2^\circ$) a ambos Reynolds, pero al aumentar la incidencia empieza a ser mayor para $Re = 2000$.

En cuanto al perfil NACA 0002, ocurre lo contrario, la pendiente de sustentación se mantiene mayor para el Reynolds más alto ($Re = 6000$). Este efecto interesante, se debe a la geometría de los perfiles y a las particularidades del flujo.

Un ejemplo puntual se presenta en la fig. 5.7 con las distribuciones de presión C_P vs. x/c para ambos perfiles a $\alpha = 3^\circ$ a $Re = 2000$ y $Re = 6000$. El perfil NACA 0008 puede verse en la fig. 5.7a y el perfil NACA 0002 en la fig. 5.7b. Se observan a modo comparativo, las diferencias entre ambos perfiles sobre todo en el pico de succión de borde de ataque y en la recuperación de la presión sobre extradós.

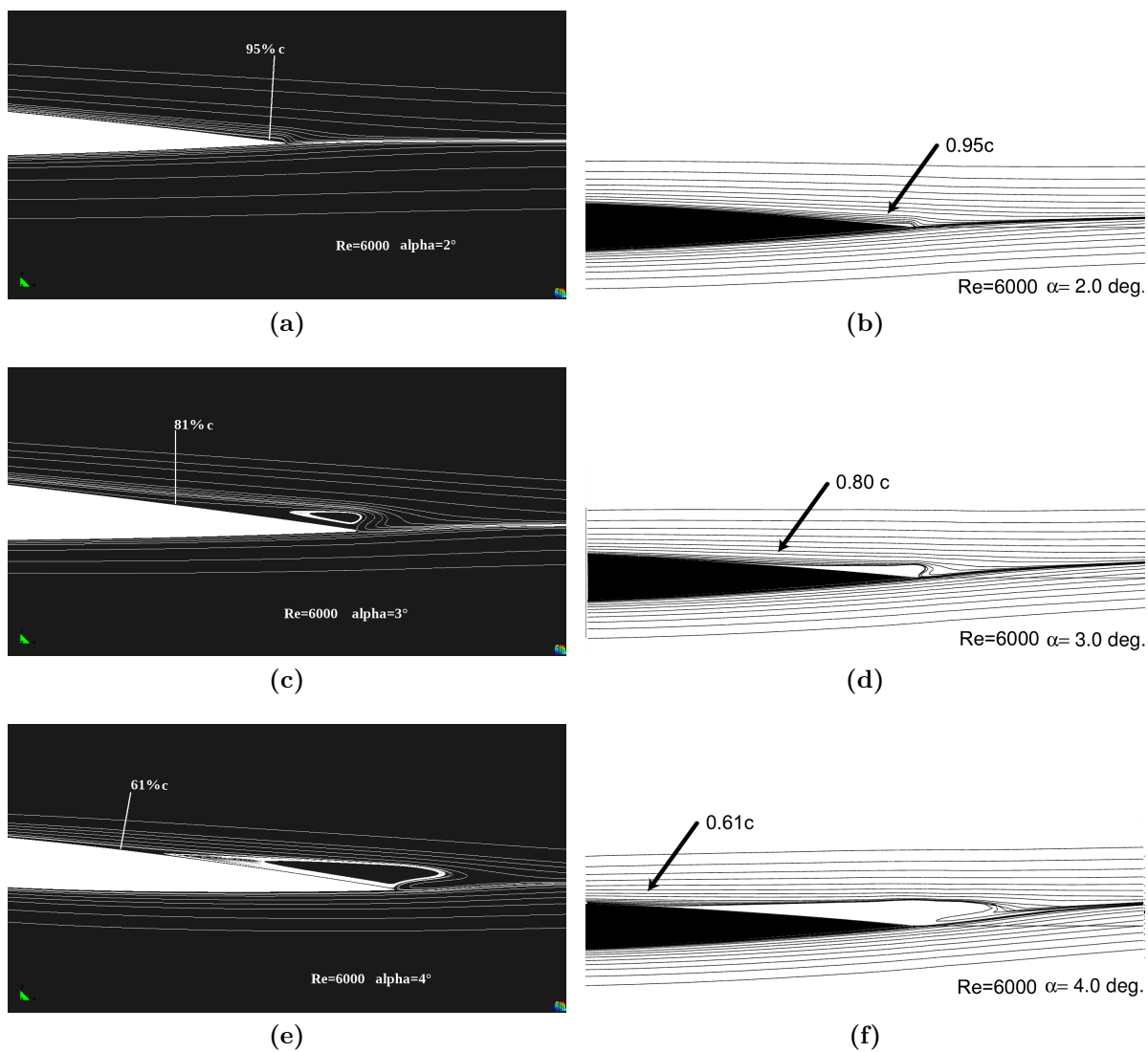


Figura 5.8: Comparación de las posiciones de desprendimiento para un perfil NACA 0008 con los resultados obtenidos en [44] a $Re = 6000$. (a),(c) y (e) Resultados del presente trabajo.(b),(d) y (f) Resultados numéricos obtenidos por [44].

5.2.4 Separación del flujo laminar

La posición del desprendimiento del flujo comienza desde el borde de fuga en el extradós y avanza sobre el mismo hacia el borde de ataque a medida que se aumenta el ángulo de incidencia del perfil. Este fenómeno es altamente dependiente de la geometría y el número de Reynolds y se determina con exactitud mediante la inspección de las tensiones de corte sobre la superficie. En dicho punto el gradiente de velocidad se anula, por ende el módulo del tensor de tensiones también.

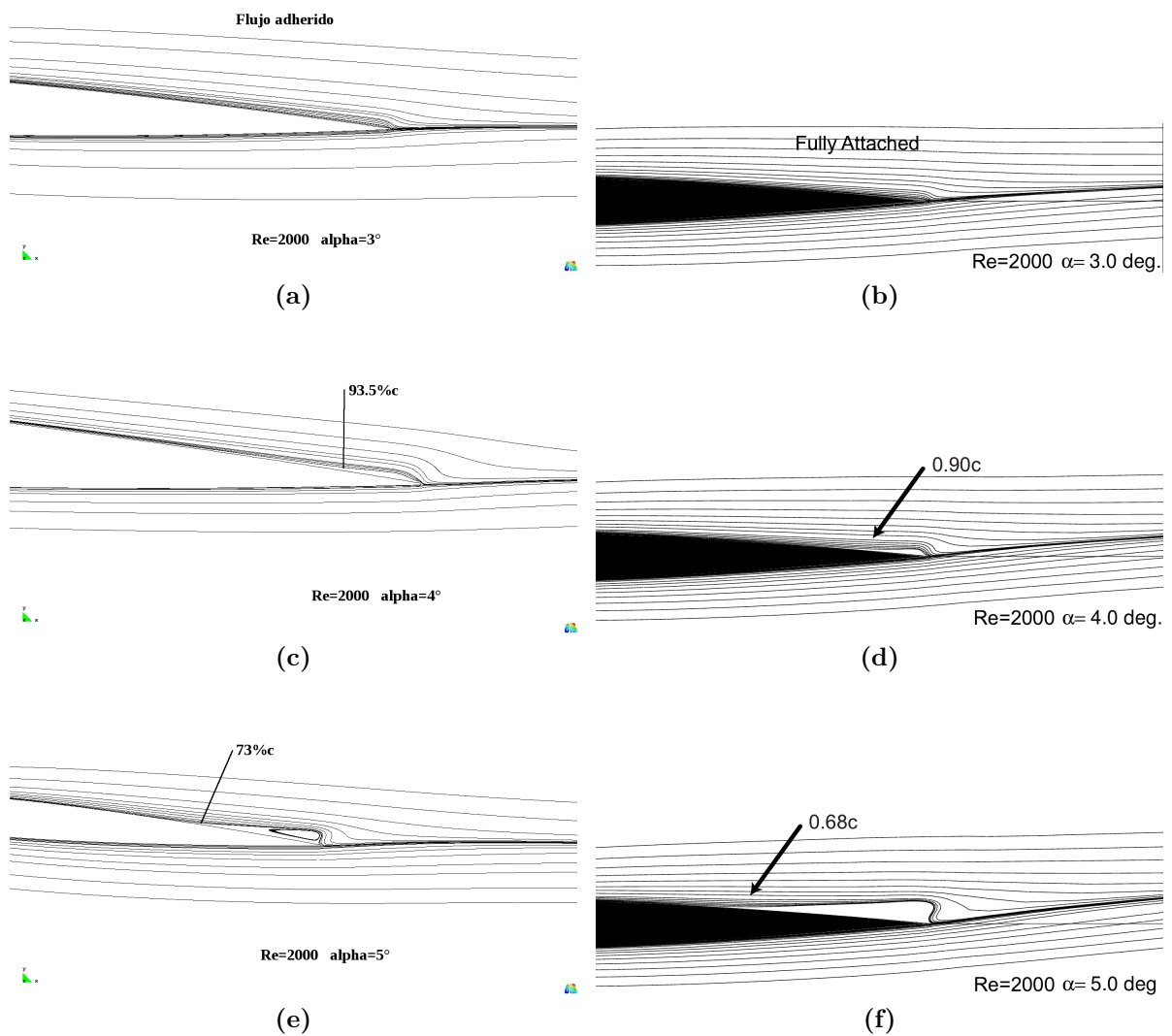


Figura 5.9: Comparación de las posiciones de desprendimiento para un perfil NACA 0008 con los resultados obtenidos en [44] a $R_e = 2000$. (a),(c) y (e) Resultados del presente trabajo.(b),(d) y (f) Resultados numéricos obtenidos por [44].

Una vez calculadas las velocidades sobre el campo de movimiento, se inspeccionan

los elementos de la superficie del cuerpo y se obtiene para cada uno el tensor de tensiones viscosas o de corte.

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.3)$$

donde μ es la viscosidad dinámica y u_i la componente de la velocidad en la dirección i .

Luego, como criterio de separación se toma:

$$\sigma_0 = 0 \quad (5.4)$$

donde σ_0 es la tensión de corte sobre la pared o superficie (*wall shear stress*).

Para poner en práctica dicho criterio, se determina en qué elemento de la malla de superficie, el módulo del tensor de tensiones se iguala a cero. Y para visualizar y corroborar dicho resultado, se grafican líneas de corriente como las que muestran las figs. 5.8 y 5.9 para un perfil NACA 0008 a $Re = 6000$ y $Re = 2000$ respectivamente. Se observan las posiciones del desprendimiento y la formación de burbujas sobre el extradós del perfil y en proximidades del borde de fuga. Además, se realiza una comparación de los resultados con los obtenidos numéricamente en [44].

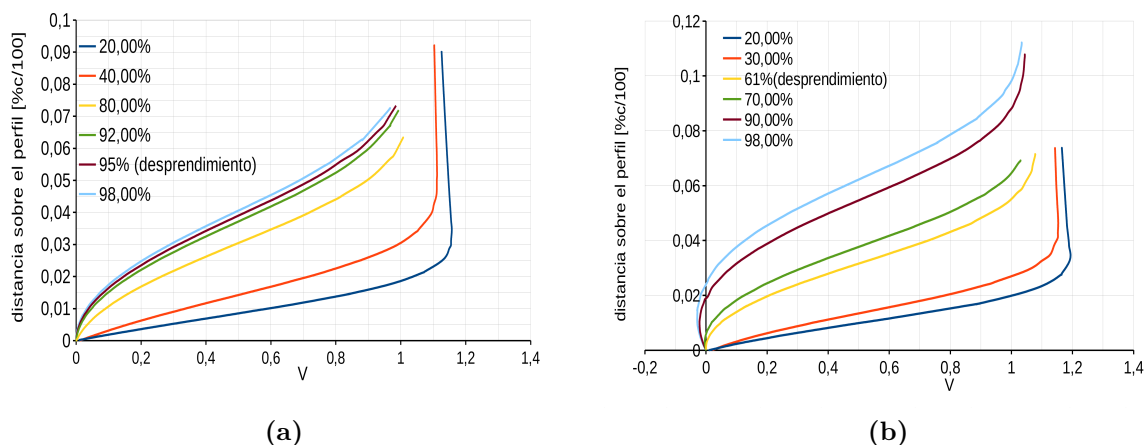


Figura 5.10: Perfiles de velocidad del *flujo cercano al cuerpo* para perfil NACA 0008 a $Re = 6000$. (a) $\alpha = 2^\circ$. (b) $\alpha = 4^\circ$.

Como análisis adicional, se muestran algunos perfiles de velocidad a lo largo del extradós de las geometrías estudiadas anteriormente, fig. 5.10. Luego, la definición del espesor del *flujo cercano al cuerpo* es debatible, pero en este trabajo se adopta que es la longitud necesaria para que la velocidad del flujo alcance el 99 % de la de corriente libre. Se grafican perfiles a lo largo de la cuerda con el objetivo de comparar, entre dos ángulos de ataque, como es el crecimiento del espesor del *flujo cercano al cuerpo*, el espesor del

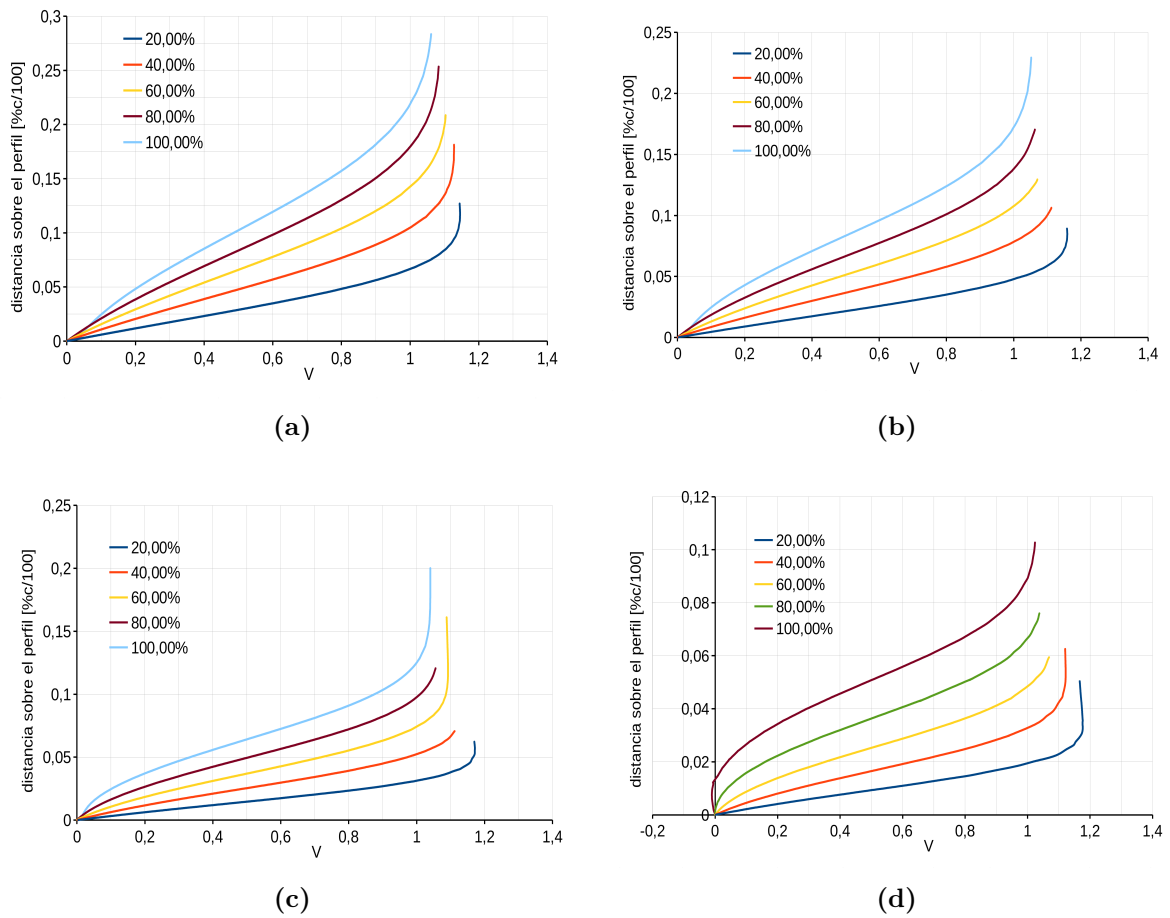


Figura 5.11: Perfiles de velocidad del *flujo cercano al cuerpo* para perfil NACA 0008 a $\alpha = 3^\circ$. (a) $R_e = 400$. (b) $R_e = 800$. (c) $R_e = 2000$. (d) $R_e = 6000$.

mismo e identificar la posición del desprendimiento sobre la cuerda. Para $\alpha = 2^\circ$ la separación del flujo se ubica al 95% de la cuerda y el *flujo cercano al cuerpo* alcanza un espesor del 6,5% de c , y para $\alpha = 4^\circ$ la separación se ubica al 61% de c con un espesor de *flujo cercano al cuerpo* de 7,5% de c .

Otra variante del estudio es graficar los perfiles de velocidad a diferentes números de Reynolds y a un ángulo de ataque constante, en este caso $\alpha = 3^\circ$, para un perfil NACA 0008. En la fig. 5.11 se ve que para números de Reynolds iguales a 400, 800 y 2000, el flujo permanece totalmente adherido a la superficie y se separa al 81% de c para $R_e = 6000$ (fig. 5.11d). Es interesante destacar las diferencias de espesor del *flujo cercano al cuerpo*, por ejemplo para $R_e = 800$ al 80% de c , alcanza un espesor del 18% de la cuerda y a $R_e = 6000$ sobre la misma posición, el 8% de c . Esta última característica también se puede ver en la fig. 5.12, donde el crecimiento del espesor es no lineal con la

disminución del Re (6000, 2000, 800 y 400) y diferentes posiciones sobre la cuerda.

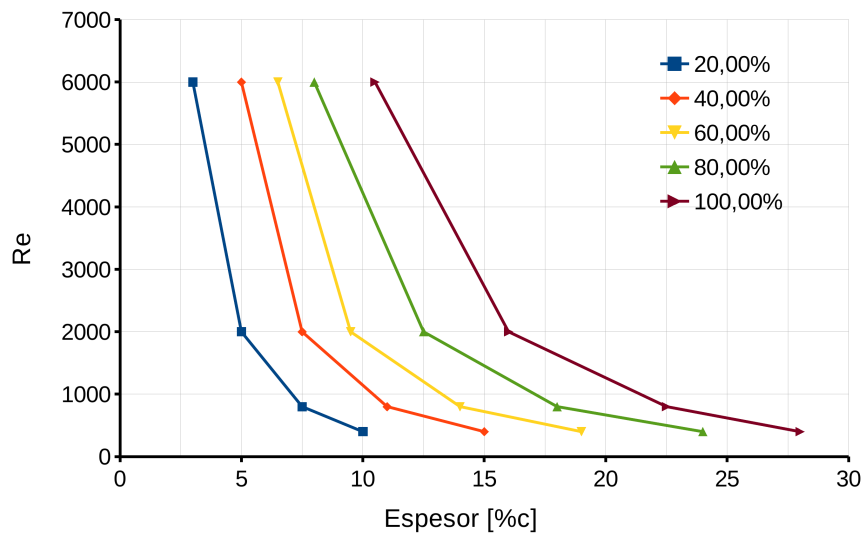


Figura 5.12: Variación de los espesores del *flujo cercano al cuerpo* para un perfil NACA 0008 a $\alpha = 3^\circ$, con el número de Re y la posición sobre la cuerda.

5.3 Efectos de la relación de espesor

Como primer análisis se estudian los efectos de espesor sobre perfiles simétricos, para aislar el comportamiento propiamente dicho y liberarlo de otros efectos. Se analizan perfiles NACA serie 4, más precisamente 0002, 0006 y 0008 a $Re = 2000$ y $Re = 6000$ (fig. 5.13).

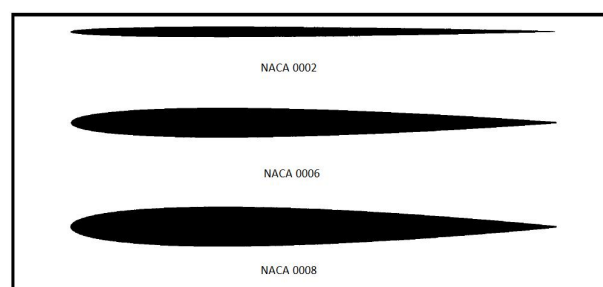


Figura 5.13: Perfiles NACA 0002, 0006 y 0008.

Un segundo análisis se hará sobre perfiles que poseen la misma combadura con la misma distribución sobre la cuerda pero de distintos espesores. Los perfiles a estudiar son NACA 4402 y 4404 (fig. 5.14).

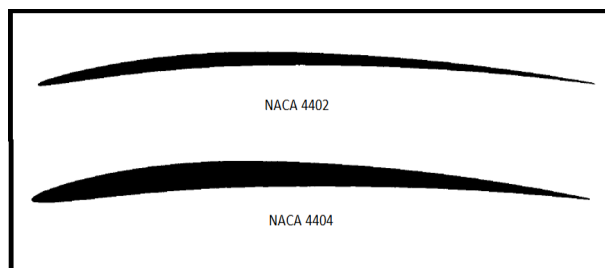


Figura 5.14: Perfiles NACA 4402 y 4404.

5.3.1 Efectos de la relación de espesor sobre perfiles simétricos

A modo de comparación, se puede mencionar que a números de Reynolds muy altos, donde las aproximaciones del flujo no viscoso pueden ser aplicadas, el incremento del espesor de los perfiles contribuye a que el comportamiento lineal de la curva $C_L - \alpha$ se prolongue a ángulos de ataque mayores, ubicándose a valores de 5% ~ 10% por debajo de la pendiente ideal 2π [44].

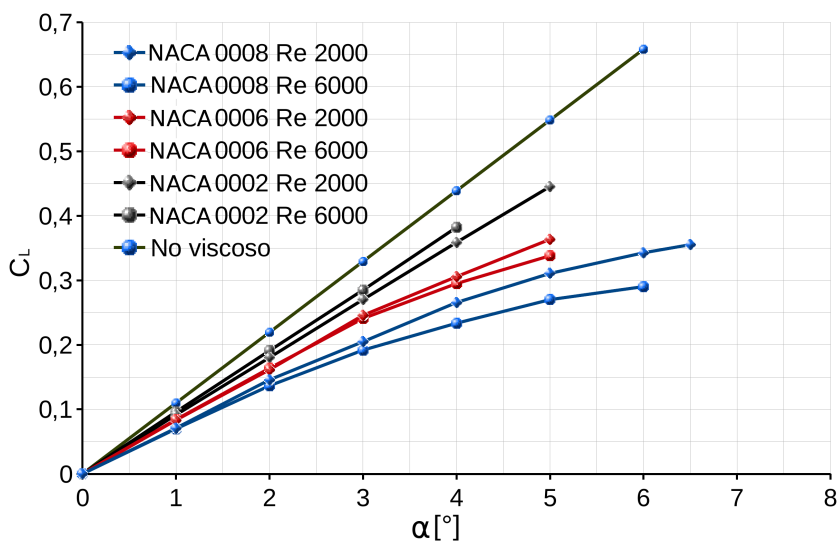


Figura 5.15: Curva de sustentación a $Re = 2000$ y $Re = 6000$ para perfiles NACA 0002, 0006 y 0008. Incluye la curva de sustentación para un perfil simétrico en flujo no viscoso.

Dicha actuación es diferente cuando se trata de números de Re ultra-bajos. La dimensión del *flujo cercano al cuerpo* produce efectos en su mayoría perjudiciales a las performances de los perfiles. La pendiente de sustentación no es ajena a esto y cuando se varía el espesor del perfil, resulta lo que se observa en la fig. 5.15. En el rango cuasi-lineal se dan diferencias en las pendientes de aproximadamente un 13% para NACA

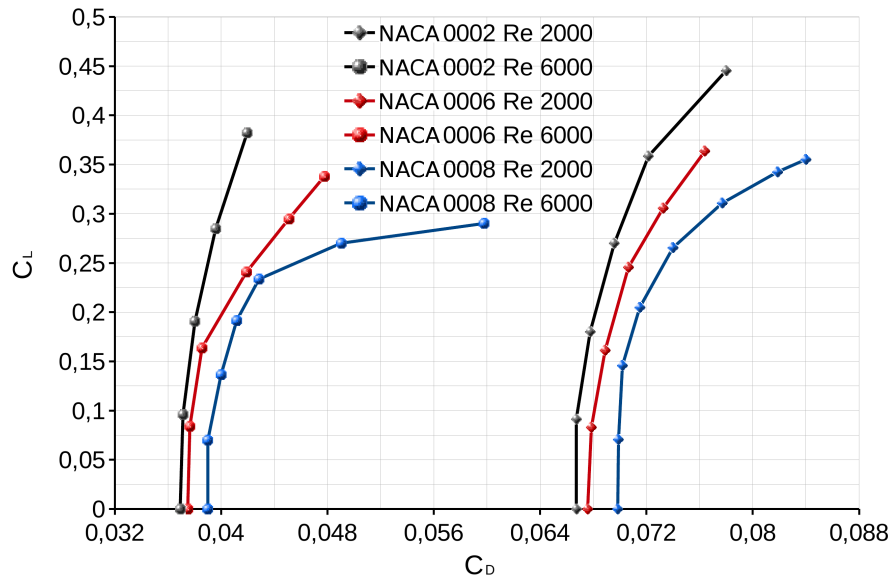


Figura 5.16: Curva polar a $Re = 2000$ y $Re = 6000$ para NACA 0002, 0006 y 0008.

0002, 33 % para NACA 0006 y 54 % para NACA 0008 respecto a la pendiente de flujo no viscoso. Otro efecto notado al aumentar el espesor, es que se pierde rápidamente la zona lineal operativa del perfil, atribuido esto al desprendimiento del flujo sobre el borde de fuga. Además en la Tabla 5.3 pueden verse los valores numéricos correspondientes a las curvas $C_L - \alpha$.

$\alpha [^\circ]$	NACA 0002: C_L		NACA 0006: C_L		NACA 0008: C_L	
	$Re = 2000$	$Re = 6000$	$Re = 2000$	$Re = 6000$	$Re = 2000$	$Re = 6000$
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0912	0.0960	0.0830	0.0840	0.0708	0.0697
2	0.1801	0.1908	0.1613	0.1636	0.1456	0.1364
3	0.2698	0.2846	0.2455	0.2407	0.2047	0.1915
4	0.3585	0.3819	0.3055	0.2947	0.2654	0.2334
5	0.4452		0.3635	0.3380	0.3106	0.2700
6					0.3425	0.2900
6.5					0.3551	0.2950

Tabla 5.3: Relación $C_L - (\alpha)$ para perfiles NACA 0002, 0006 y 0008 a $Re = 2000$ y $Re = 6000$.

La variación del coeficiente de resistencia para perfiles simétricos 0002, 0006 y 0008 con flujos a $Re = 2000$ y $Re = 6000$ puede verse en la fig. 5.16. Como se había adelantado,

el coeficiente de resistencia aumenta con la disminución del número de Reynolds. A $R_e = 6000$ se observa que con el incremento del espesor aumenta la resistencia, sobre todo a mayores ángulos de ataque. Los perfiles delgados presentan polares con menor curvatura que los de mayor espesor, es decir que la resistencia no experimenta un cambio brusco al aumentar la incidencia, lo cual es favorable para la eficiencia operativa.

Para el caso de $R_e = 2000$, aunque el comportamiento es en líneas generales similar al anterior, las curvas polares presentan un incremento más suave del coeficiente C_D , debido a que los efectos viscosos retrasan la aparición de gradientes adversos de presión y por lo tanto los desprendimientos sobre el extradós. No obstante, los valores del coeficiente de resistencia a $R_e = 2000$ aumentaron el doble respecto a los de $R_e = 6000$. Este fenómeno es de crucial importancia a la hora del diseño de propulsores de microvehículos aéreos (MAV), teniendo en cuenta que la potencia requerida para un vuelo controlado depende directamente de la resistencia aerodinámica.

NACA 0002				NACA 0006				NACA 0008			
$R_e = 2000$		$R_e = 6000$		$R_e = 2000$		$R_e = 6000$		$R_e = 2000$		$R_e = 6000$	
C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.09	1.37	0.01	2.58	0.08	1.22	0.08	2.23	0.07	1.01	0.07	1.79
0.18	2.66	0.19	5.02	0.16	2.34	0.16	4.24	0.15	2.07	0.14	3.41
0.27	3.88	0.28	7.19	0.24	3.34	0.24	5.74	0.20	2.86	0.19	4.65
0.36	4.97	0.38	9.10	0.30	3.94	0.29	6.53	0.26	3.58	0.23	5.45
0.44	5.71			0.36	4.31	0.34	7.07	0.31	3.99	0.27	5.51
								0.34	4.18	0.29	4.85
								0.35	4.23		

Tabla 5.4: Relación C_L/C_D para perfiles NACA 0002, 0006 y 0008 a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$.

Los valores de la eficiencia C_L/C_D para perfiles NACA 0002, 0006 y 0008 a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$ se presentan en la Tabla 5.4.

Está claro que el efecto viscoso sobre la curva de sustentación es dominante y va en aumento junto al incremento de espesor. Esto es consecuencia de que a mayor incidencia, las zonas de flujo muerto donde la presión no se recupera, modifican la geometría efectiva del perfil como se ve en la fig. 5.17. En la misma se grafican los contornos de velocidad para NACA 0002 y NACA 0008 a $R_e = 6000$ y $R_e = 2000$, a un ángulo de ataque $\alpha = 4^\circ$. Se puede ver como el efecto del *flujo cercano al cuerpo* es mucho mayor sobre el perfil más grueso.

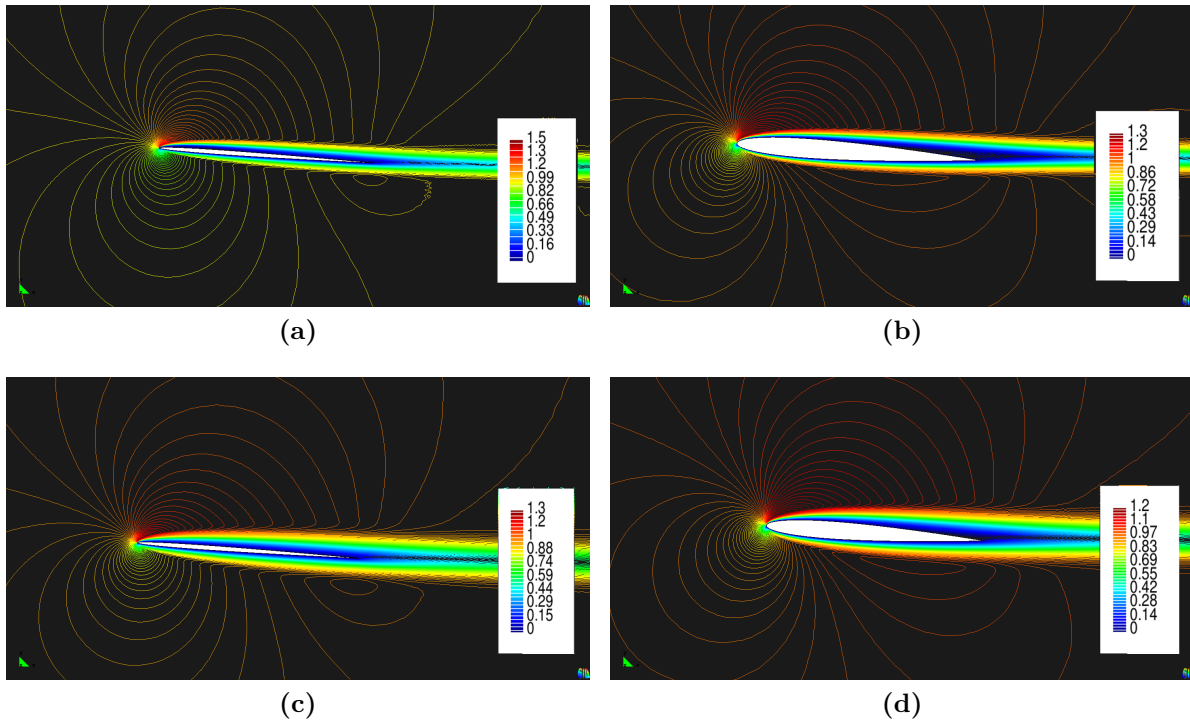


Figura 5.17: Contornos de velocidad para perfiles NACA 0002 y NACA 0008 a $\alpha = 4^\circ$. (a) NACA 0002 $R_e = 6000$. (b) NACA 0008 $R_e = 6000$. (c) NACA 0002 $R_e = 2000$. (d) NACA 0008 $R_e = 2000$.

5.3.2 Efectos de la relación de espesor sobre perfiles con combadura

Ahora se realizará un análisis similar sobre los perfiles NACA 4402 y 4404. Obviamente, el agregado de combadura cambiará la curva de sustentación respecto de un perfil simétrico. Lo interesante aquí es observar que en la fig. 5.18 el perfil más delgado NACA 4402 nuevamente tiene mejor prestación que el perfil más grueso NACA 4404. Se observa que para los dos números de Reynolds estudiados supera el coeficiente de sustentación ángulo a ángulo y las pendientes de sustentación se mantienen aproximadamente constantes.

Otra característica observada es la no linealidad en cercanías del ángulo de sustentación nula y a $R_e = 6000$. Esto se produce por efectos del desprendimiento inestacionario sobre el intradós del perfil y a bajas incidencias negativas. Además, en la Tabla 5.5 pueden verse los valores correspondientes a la curva $C_L - (\alpha - \alpha_0)$.

Las polares de los perfiles se presentan en la fig. 5.19. Si bien la diferencia de relaciones de espesor entre ambos perfiles es poca, puede observarse que el perfil más delgado tiene menor resistencia para los dos R_e estudiados.

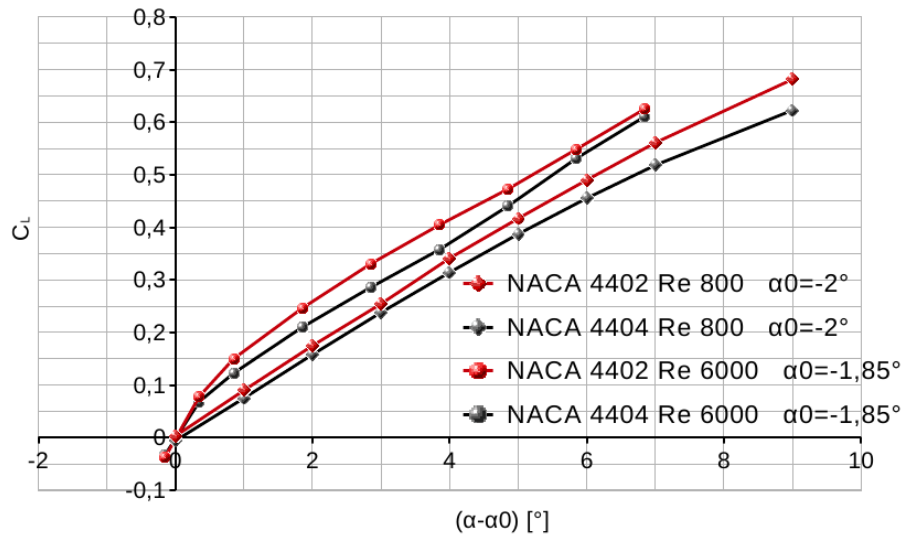


Figura 5.18: Curva de sustentación a Re igual a $Re = 800$ y $Re = 6000$ para NACA 4402 y 4404.

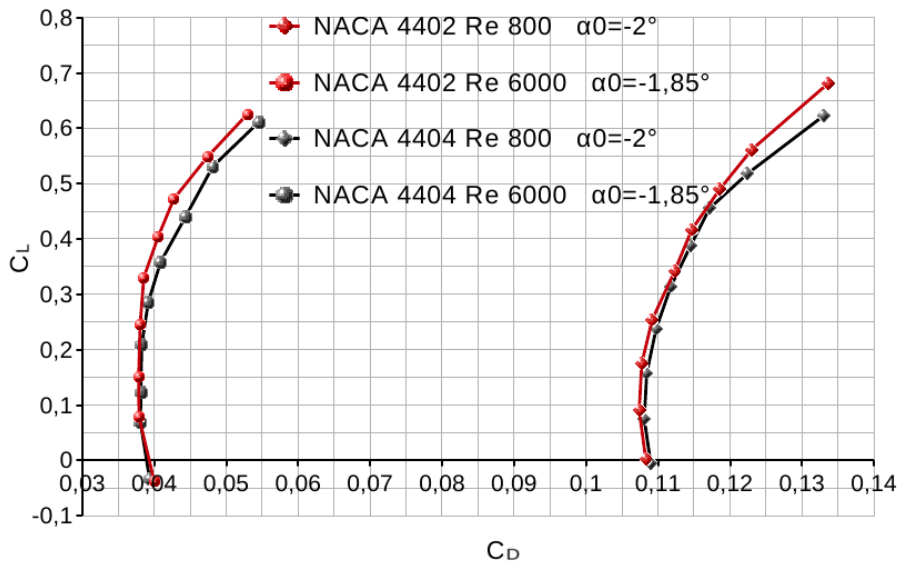


Figura 5.19: Curva polar a $Re = 800$ y $Re = 6000$ para NACA 4402 y 4404.

En la Tabla 5.6 se listan las eficiencias de ambos perfiles donde el ángulo de sustentación nula a $Re = 800$ es $\alpha_0 = -2^\circ$ en ambos perfiles y $\alpha_0 = -1,85^\circ$ a $Re = 6000$ también en ambos perfiles. Con los resultados a $Re = 6000$ se constata que para bajos ángulos de ataque el perfil NACA 4402 es más eficiente que el 4404 y a $Re = 800$ puede decirse que valen las mismas consideraciones. De todos modos, lo más importante que se deduce de la Tabla 5.6 es la abrupta caída de C_L/C_D al disminuir el número de Reynolds.

NACA 4402				NACA 4404			
$R_e = 800$		$R_e = 6000$		$R_e = 800$		$R_e = 6000$	
$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L
0	0.0028	-0.15	-0.0376	0	-0.0059	-0.15	-0.0331
0.5		0.35	0.0782	0.5		0.35	0.0685
1	0.0899	0.85	0.1499	1	0.0749	0.85	0.1224
2	0.1748	1.85	0.2461	2	0.1579	1.85	0.2098
3	0.2543	2.85	0.3304	3	0.2381	2.85	0.2857
4	0.3411	3.85	0.4044	4	0.3142	3.85	0.3574
5	0.4167	4.85	0.4725	5	0.3870	4.85	0.4400
7	0.4898	5.85	0.5483	7	0.4553	5.85	0.5309
8	0.5608	6.85	0.6253	8	0.5180	6.85	0.6108
9	0.6812	8.85		9	0.6225	8.85	

Tabla 5.5: Relación $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ para perfiles NACA 4402 y 4404 a $R_e = 800$ y $R_e = 6000$.

NACA 4402				NACA 4404			
$R_e = 800$		$R_e = 6000$		$R_e = 800$		$R_e = 6000$	
C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D
0.0028	0.03	-0.0376	-0.94	-0.0059	-0.05	-0.0331	-0.84
		0.0782	2.06			0.0685	1.80
0.0899	0.84	0.1499	3.96	0.0749	0.69	0.1224	3.21
0.1748	1.62	0.2461	6.39	0.1579	1.46	0.2098	5.48
0.2543	2.33	0.3304	8.57	0.2381	2.17	0.2857	7.29
0.3411	3.04	0.4044	9.97	0.3142	2.81	0.3574	8.75
0.4167	3.63	0.4725	11.05	0.3870	3.38	0.4400	9.92
0.4898	4.13	0.5483	11.56	0.4553	3.88	0.5309	11.03
0.5608	4.56	0.6253	11.81	0.5180	4.23	0.6108	11.20
0.6812	5.10			0.6225	4.68		

Tabla 5.6: Relación C_L/C_D para perfiles NACA 4402 y 4404 a $R_e = 800$ y $R_e = 6000$.

En la fig. 5.20 se presentan diferentes casos de contornos de velocidad a $R_e = 800$ y $R_e = 6000$ a $\alpha = 3^\circ$. Se observa que la zona de flujo muerto y desprendido sobre el borde de fuga es mayor para el $R_e = 6000$ y además puede observarse que para este ángulo

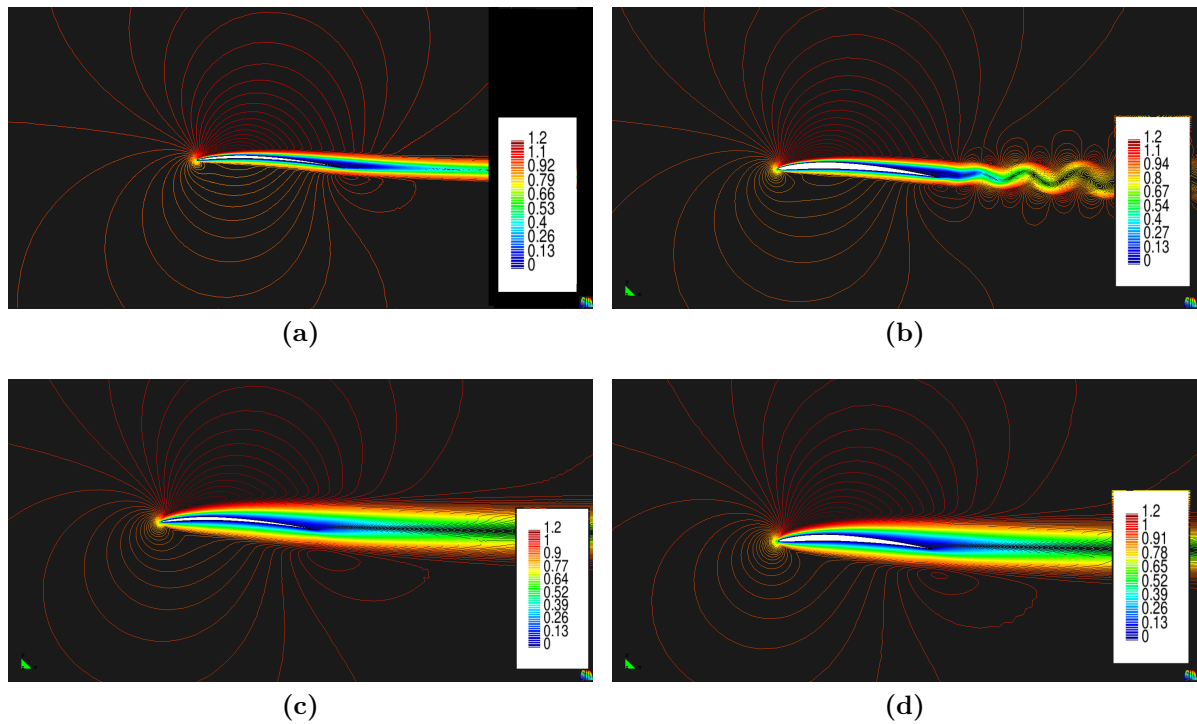


Figura 5.20: Contornos de velocidad para perfiles NACA 4402 y NACA 4404 a $\alpha = 3^\circ$. (a) NACA 4402 $R_e = 6000$ a $\alpha - \alpha_0 = 4,85^\circ$. (b) NACA 4404 $R_e = 6000$ a $\alpha - \alpha_0 = 4,85^\circ$. (c) NACA 4402 $R_e = 800$ a $\alpha - \alpha_0 = 5^\circ$. (d) NACA 4404 $R_e = 800$ a $\alpha - \alpha_0 = 5^\circ$.

de ataque relativamente bajo, el desprendimiento sobre el perfil NACA 4404 es de tipo oscilatorio.

5.4 Efectos de la combadura

Las simulaciones se realizan sobre perfiles de igual espesor con el pretexto de aislar todo efecto que no sea producto de la combadura. Se trabaja con una placa plana con bordes romos, un perfil NACA 0002 y un perfil NACA 4402. Este último tiene un valor de combadura del 4% ubicado al 40% de la cuerda, fig. 5.21.

Otro caso de interés, es el aumento proporcional de combadura, manteniendo constante la relación de espesor y su distribución sobre la cuerda. Para ello, se analizan perfiles NACA 2302, NACA 4302 y 6302, fig. 5.22.

Finalmente se varía la distribución de la combadura a lo largo de la cuerda, manteniendo su magnitud y la relación de espesor constantes. Los perfiles estudiados para este caso son NACA 4302 y NACA 4502, fig. 5.23.

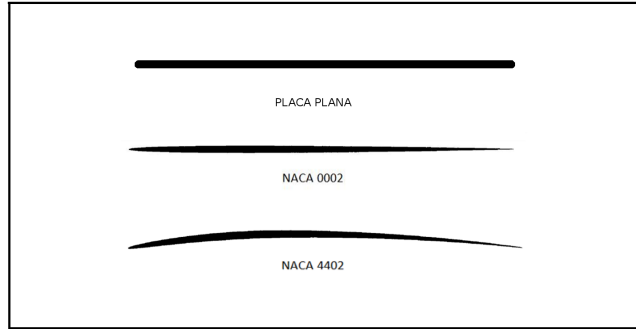


Figura 5.21: Placa plana y perfiles NACA 0002 y 4402.

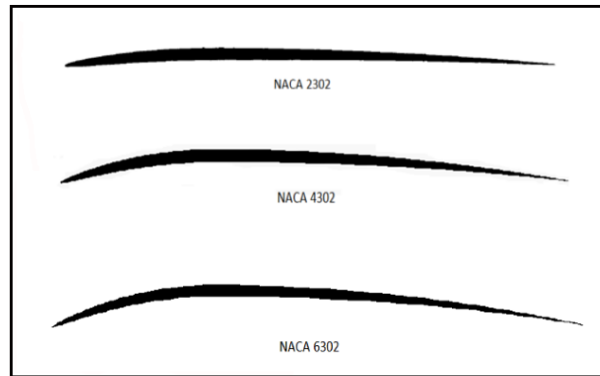


Figura 5.22: Perfiles NACA 2302, 4302 y 6302.

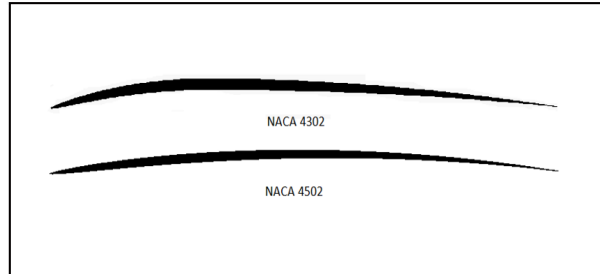


Figura 5.23: Perfiles NACA 4302 y NACA 4502.

5.4.1 Efecto puntual de la combadura

Como se mencionó, primero se realiza una comparación entre una placa plana de espesor 2% con bordes redondeados, un perfil NACA 0002 y un perfil NACA 4402.

En las curvas de la fig. 5.24 para un mismo ángulo de ataque y para el perfil NACA 4402 se observa un gran incremento de sustentación, tomando como referencia los ángulos de sustentación nula que son: $\alpha_0 = -2,2^\circ$ y $\alpha_0 = -1,85^\circ$ para R_e de 2000 y 6000 respectivamente. Luego si se compara la placa plana con el perfil simétrico, las curvas

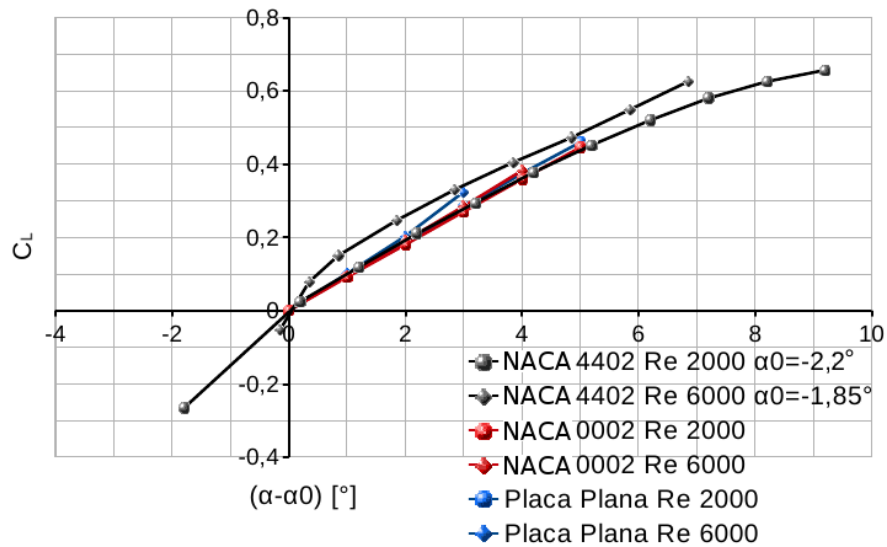


Figura 5.24: Curva $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ para: Placa plana, NACA 0002 y NACA 4402 a $Re = 2000$ y $Re = 6000$.

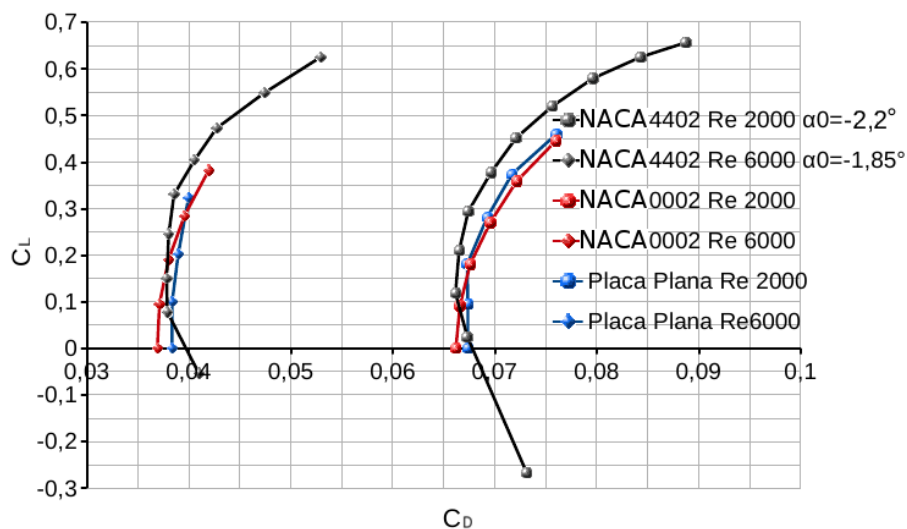


Figura 5.25: Curva C_L/C_D para: Placa plana, NACA 0002 y NACA 4402 a $Re = 2000$ y $Re = 6000$.

se mantienen medianamente similares.

Con el agregado de combadura, la pendiente de sustentación del perfil NACA 4402 casi no varía respecto a la obtenida para el perfil NACA 0002, (tomando como referencia la zona cuasi lineal de ambos perfiles) y decae para mayores ángulos de ataque. En la Tabla 5.7 se presentan los valores numéricos de dichas curvas.

Las polares del coeficiente de resistencia se presentan en la fig. 5.25. Se observa que

NACA 4402				NACA 0002			Placa Plana	
$R_e = 2000$		$R_e = 6000$			$R_e = 2000$	$R_e = 6000$	$R_e = 2000$	$R_e = 6000$
$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha [^\circ]$	C_L	C_L	C_L	C_L
-1.8	-0.2667	-2.15						
0.2	0.0247	-0.15	-0.0527	0	0.00	0.0000	0.0000	0.000
0.7		0.35	0.0781	1	0.09	0.0960	0.0958	0.101
1.2	0.1185	0.85	0.1498	2	0.18	0.1908	0.1811	0.203
2.2	0.2100	1.85	0.2461	3	0.27	0.2846	0.2816	0.324
3.2	0.2938	2.85	0.3303	4	0.36	0.3819	0.3741	
4.2	0.3774	3.97	0.4044	5	0.45		0.4593	
5.2	0.4518	4.85	0.4724					
6.2	0.5197	5.85	0.5483					
7.2	0.5794	6.85	0.6253					
8.2	0.6250	7.85						
9.2	0.6565	8.85						

Tabla 5.7: Relación $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ para perfiles NACA 4402, 0002 y placa plana a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$.

NACA 4402				NACA 0002				Placa Plana			
$R_e = 2000$		$R_e = 6000$		$R_e = 2000$		$R_e = 6000$		$R_e = 2000$		$R_e = 6000$	
C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D
-0.267	-3.65										
0.025	0.37	-0.053	-1.29	0.00	0.00	0.000	0.00	0.000	0.00	0.00	0.00
		0.078	2.06	0.09	1.37	0.097	2.59	0.096	1.42	0.101	2.63
0.118	1.79	0.150	3.96	0.18	2.66	0.191	5.02	0.181	2.69	0.203	5.21
0.210	3.16	0.246	6.47	0.27	3.88	0.285	7.19	0.282	4.07	0.324	8.10
0.294	4.36	0.330	8.57	0.36	4.97	0.382	9.10	0.374	5.22		
0.377	5.42	0.404	9.97	0.45	5.86			0.459	6.04		
0.452	6.27	0.472	11.05								
0.520	6.87	0.548	11.56								
0.579	7.27	0.625	11.81								
0.625	7.41										
0.656	7.40										

Tabla 5.8: Eficiencia (C_L/C_D), para perfiles NACA 4402, 0002 y placa plana a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$.

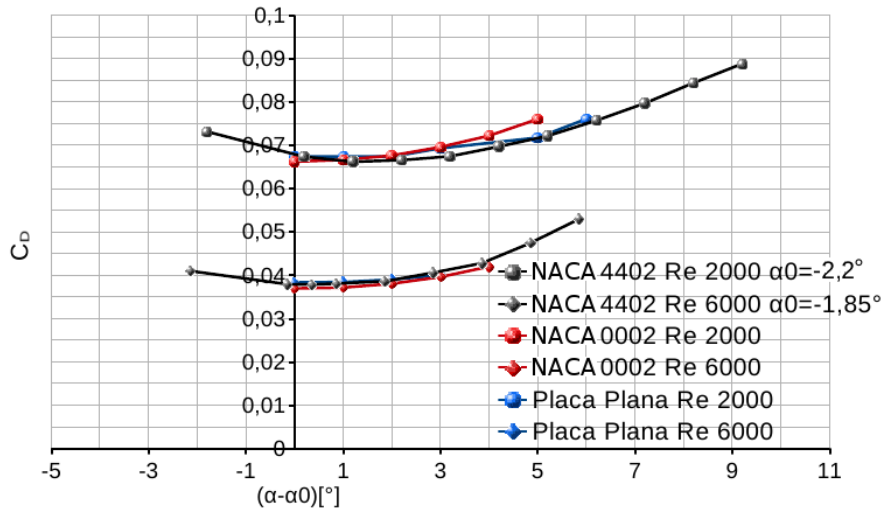


Figura 5.26: Curva $C_D - (\alpha - \alpha_0)$ para: Placa plana, NACA 0002 y NACA 4402 a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$.

se mantiene similar a bajos ángulos de ataque para los tres perfiles y luego aumenta para el perfil combado (NACA 4402). Dicho aumento es un poco más progresivo para $R_e = 6000$ que para $R_e = 2000$, debido a que los gradientes de presión adversa y subsecuentes desprendimientos comienzan antes.

La fig. 5.26 muestra las curvas de la variación de C_D con el ángulo de ataque. El incremento asociado con la combadura del perfil es de poca magnitud y ese poco aumento se ve reflejado en la Tabla 5.8, donde pueden verse las eficiencias para cada perfil.

En la fig. 5.27 queda manifestado el fenómeno mediante la gráfica de dos ángulos de ataque, ($\alpha = 5^\circ$ y $\alpha = 4^\circ$ a $R_e = 2000$ y $R_e = 6000$ respectivamente).

A $R_e = 2000$ el flujo permanece adherido a la superficie en todos los casos y puede verse que los contornos más rojos expresan mayor velocidad, lo que implica una caída en la presión y viceversa para los contornos azules. Sobre el perfil combado se observan las mayores velocidades sobre casi todo el extradós y una mayor presencia de flujo “muerto” sobre el borde de fuga con respecto al perfil simétrico.

A $R_e = 6000$ comienza un desprendimiento oscilatorio del flujo sobre el borde de fuga del perfil NACA 4402, mientras que sobre el perfil NACA 0002 aún se encuentra totalmente adherido. De todos modos los contornos de mayor velocidad del flujo adherido a la superficie del extradós del NACA 4402 verifican las diferencias en la sustentación encontradas. En cuanto a la placa plana el flujo se encuentra totalmente desprendido a este número de Reynolds y ángulo de ataque.

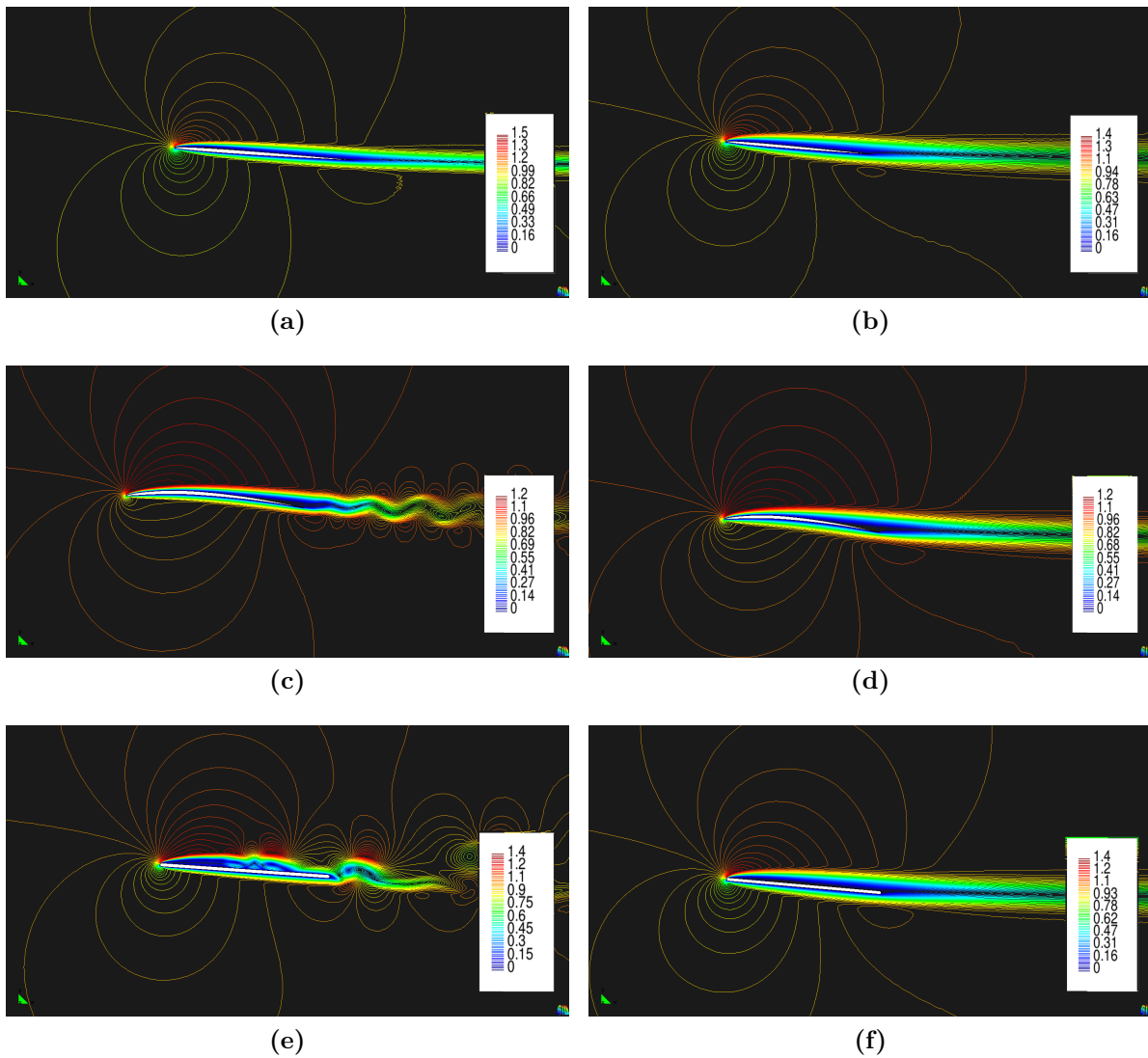


Figura 5.27: Comparación de los contornos de velocidad para los perfiles NACA 0002, NACA 4402 y placa plana. (a),(c) y (e) $R_e = 6000$ y $\alpha = 4^\circ$ ó $\alpha - \alpha_0 = 5,85^\circ$ para el perfil NACA 4402.(b),(d) y (f) $R_e = 2000$ y $\alpha = 5^\circ$ ó $\alpha - \alpha_0 = 7,2^\circ$ para el perfil NACA 4402.

5.4.2 Efecto de la variación proporcional de combadura

En los siguientes casos se comparan diferentes incrementos en la combadura, manteniendo la distribución de la misma y la relación de espesor constante. En base a esto, se utilizaron las geometrías de los perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a $R_e = 10000$.

En dicho régimen, hay un aumento de C_L casi constante con el incremento de combadura para cada ángulo de ataque del perfil 2302 y 4302 teniendo en cuenta sus respectivos ángulos de sustentación nula. Luego el NACA 6302 presenta una diferencia en la

NACA 2302		NACA 4302		NACA 6302	
$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L
		-1.6	-0.185	-1	-0.09
-0.6	-0.071	0.4	0.044	1	0.081
0.4	0.043	1.4	0.129	2	0.226
1.4	0.139	2.4	0.256	3	0.310
2.4	0.232	3.4	0.341	4	0.422
3.4	0.320	4.4	0.419	5	0.533
4.4	0.401	5.4	0.501	6	0.650
5.4	0.466	6.4	0.593	7	0.752
6.4	0.530	7.4	0.671	8	0.869

Tabla 5.9: Relación $(C_L - (\alpha - \alpha_0))$ para perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a $R_e = 10000$.

NACA 2302		NACA 4302		NACA 6302	
$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L/C_D	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L/C_D	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L/C_D
		-0.185	-2.935	-0.09	-1.196
-0.071	-2.484	0.044	1.154	0.081	1.714
0.043	1.540	0.129	4.431	0.226	5.618
0.139	4.964	0.256	8.807	0.310	9.215
0.232	8.094	0.341	11.600	0.422	12.674
0.320	10.841	0.419	13.505	0.533	14.298
0.401	13.102	0.501	14.527	0.650	14.985
0.466	13.936	0.593	15.523	0.752	14.816
0.530	13.948	0.671	15.734	0.869	11.907

Tabla 5.10: Eficiencia (C_L/C_D) para perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a $R_e = 10000$.

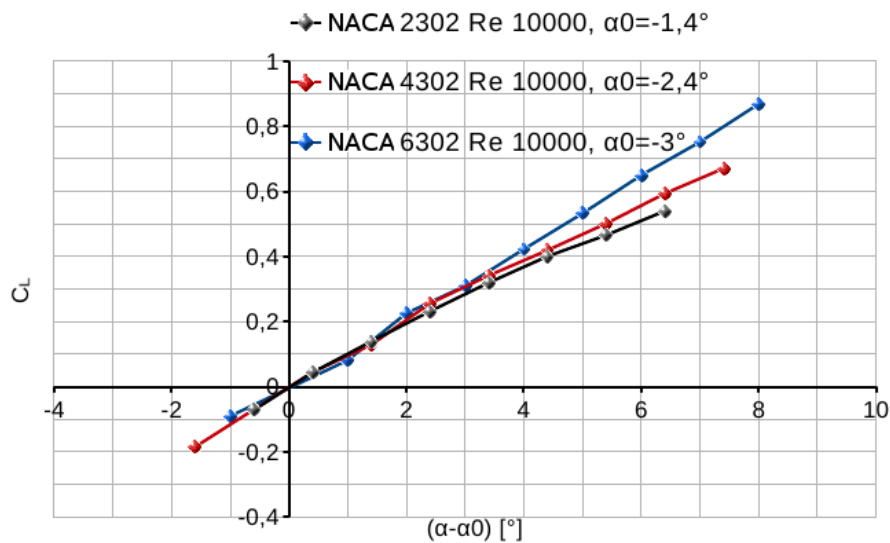


Figura 5.28: Curva $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ a $Re = 10000$ para: NACA 2302, 4302 y 6302.

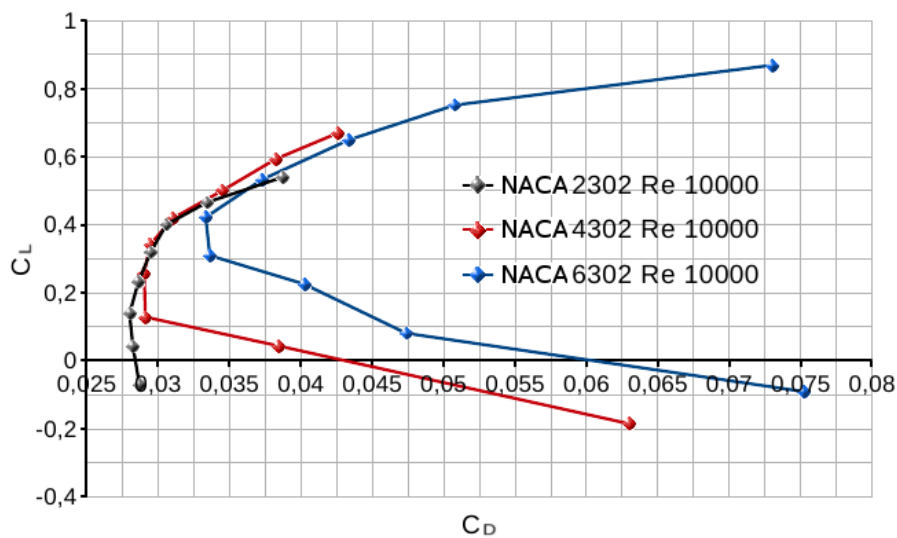


Figura 5.29: Curva $C_L - C_D$ a $Re = 10000$ para: NACA 2302, 4302 y 6302.

pendiente de sustentación del 30 % aproximadamente respecto de las pendientes de los otros dos perfiles, (fig.5.28). Los valores numéricos de C_L se pueden ver en la Tabla 5.9.

Para la visualización del coeficiente de resistencia se presentan las figs. 5.29 y 5.30. La variación del mismo con incidencias o ángulos de ataques positivos en los perfiles NACA 2302 y 4302 crece de forma gradual y de menor manera que en el perfil NACA 6302. Luego, a incidencias negativas el aumento de resistencia es considerable para los

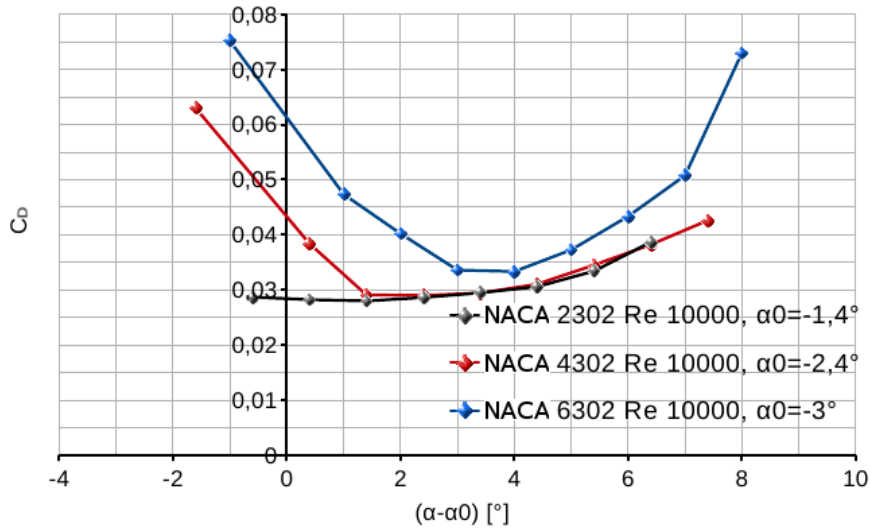


Figura 5.30: Curva $C_D - (\alpha - \alpha_0)$ a $Re = 10000$ para: NACA 2302, 4302 y 6302.

perfiles NACA 4302 y 6302 como consecuencia del temprano desprendimiento sobre el borde de ataque.

En la Tabla 5.10 se presentan las relaciones (C_L/C_D) y en la fig. 5.31 se comparan los tres perfiles a un ángulo de ataque $\alpha = 5^\circ$ (NACA 2302 a $\alpha - \alpha_0 = 6,4^\circ$, NACA 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 7,4^\circ$ y NACA 6302 a $\alpha - \alpha_0 = 8^\circ$) y a $Re = 10000$ de tal manera de examinar como es el campo de velocidades y como repercute en las presiones intervinientes sobre el cuerpo. La primera impresión es que el flujo para este ángulo de ataque pierde el carácter estacionario debido al desprendimiento oscilatorio sobre el borde de fuga. Puede verse además, que la zona de menor presión sobre el extradós del perfil con mayor combadura (NACA 6302), tiene mayor longitud que la de los otros dos, favoreciendo de este modo a la sustentación y como contraparte, la posición del desprendimiento se encuentra más avanzada hacia el borde de ataque, lo que provoca mayor C_D .

5.4.3 Efecto de la posición de la combadura

Para concluir el estudio, se varía la distribución de la combadura a lo largo de la cuerda aunque se mantiene su valor constante junto a la relación de espesor del perfil. Los casos analizados son dos perfiles delgados con un valor de 4% de combadura y su posición se varía desde el 30% de c a 50% de c (perfiles NACA 4302 y 4502) a $Re = 2000$ y $Re = 10000$.

En la fig. 5.32 las curvas de $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ no manifiestan una diferencia notoria

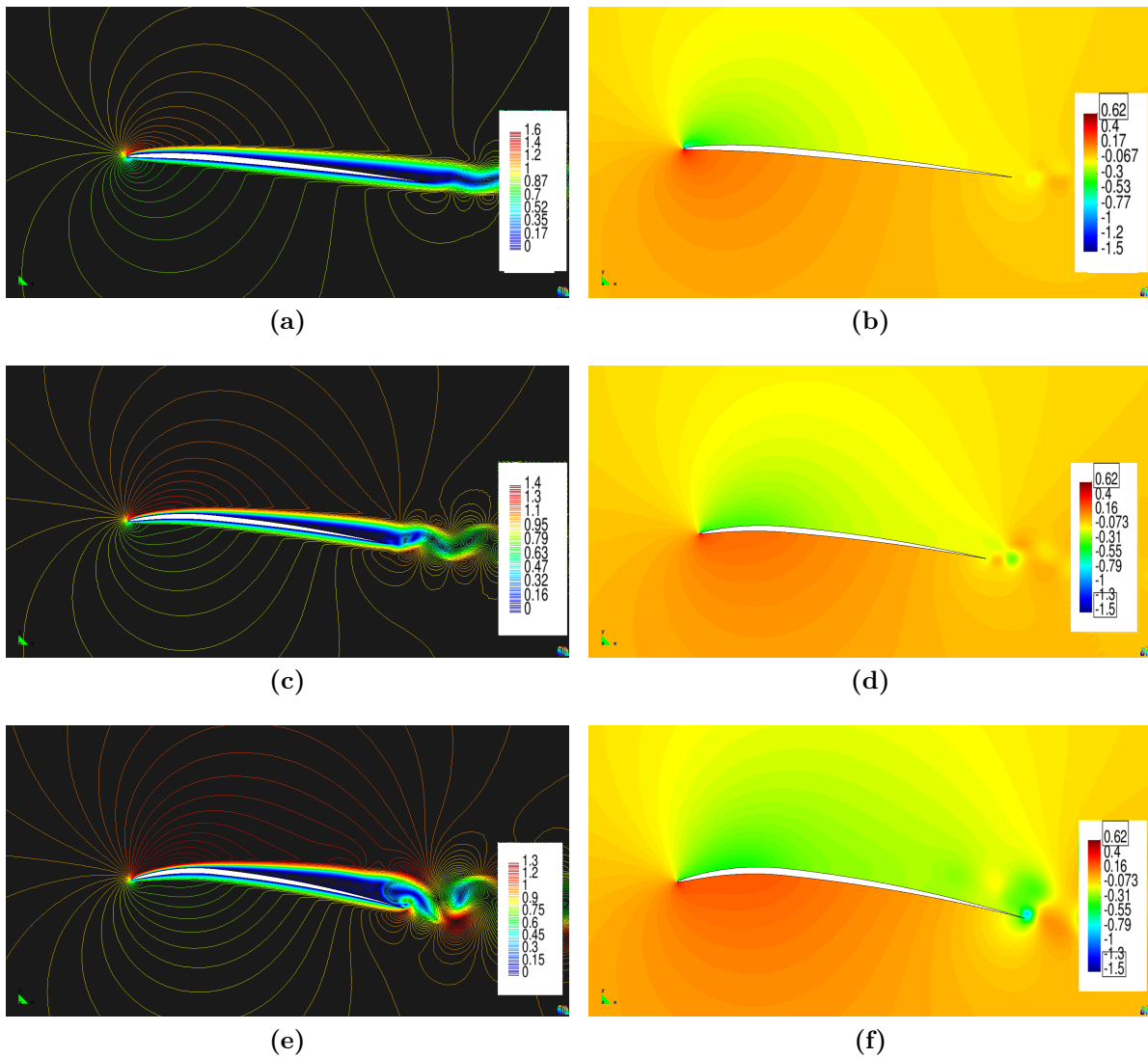


Figura 5.31: Comparación de los contornos de velocidad y de presión para los perfiles NACA 2302, 4302 y 6302 a $R_e = 10000$. (a) y (b) NACA 2302 a $\alpha - \alpha_0 = 6,4^\circ$, (c) y (d) NACA 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 7,4^\circ$ y (e) y (f) NACA 6302 a $\alpha - \alpha_0 = 8^\circ$.

como en los casos anteriores, aunque puede destacarse que el perfil NACA 4302 muestra una ligera diferencia a favor respecto al NACA 4502. Dicha ganancia a bajos ángulos de incidencia se debe a que la succión sobre el borde de ataque es de mayor intensidad. Como contraparte, el desprendimiento del flujo es más abrupto sobre el NACA 4302 abarcando mayor longitud sobre el extradós que en el perfil NACA 4502. De allí la caída de la sustentación del NACA 4302 en los máximos ángulos de ataque estudiados. Los valores de la curva $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ se presentan en la Tabla 5.11

El coeficiente de resistencia se grafica en las figs. 5.33 y 5.34. Los valores del NACA

NACA 4302				NACA 4502			
$R_e = 2000$		$R_e = 10000$		$R_e = 2000$		$R_e = 10000$	
$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L	$\alpha - \alpha_0 [^\circ]$	C_L
-1.9	-0.279	-1.6	-0.185	-1.9	-0.290	-1.9	-0.127
0.1	0.013	0.4	0.044	0.1	0.017	0.1	0.006
1.1	0.125	1.4	0.129	1.1	0.117	1.1	0.163
2.1	0.214	2.4	0.256	2.1	0.205	2.1	0.245
3.1	0.303	3.4	0.341	3.1	0.291	3.1	0.333
4.1	0.381	4.4	0.419	4.1	0.372	4.1	0.413
5.1	0.456	5.4	0.501	5.1	0.449	5.1	0.510
6.1	0.534	6.4	0.593	6.1	0.520	6.1	0.608
7.1	0.613	7.4	0.670	7.1	0.582	7.1	0.699
8.1				8.1	0.620		
9.1	0.641			9.1	0.660		

Tabla 5.11: Relación $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ para perfiles NACA 4302 y 4502 a $R_e = 2000$ y $R_e = 10000$.

NACA 4302				NACA 4502			
$R_e = 2000$		$R_e = 10000$		$R_e = 2000$		$R_e = 10000$	
C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D	C_L	C_L/C_D
-0.279	-3.77	-0.185	-2.93	-0.290	0.25	-0.127	-2.19
0.013	0.19	0.044	1.15	0.017	1.74	0.006	0.18
0.125	1.90	0.129	4.43	0.117	3.04	0.163	5.48
0.214	3.27	0.256	8.81	0.205	4.27	0.245	8.17
0.303	4.59	0.341	11.60	0.291	5.31	0.333	10.70
0.381	5.56	0.419	13.50	0.372	6.17	0.413	12.79
0.456	6.44	0.501	14.53	0.449	6.80	0.510	14.16
0.534	7.29	0.593	15.52	0.520	7.33	0.608	15.07
0.613	7.79	0.670	14.55	0.582	7.35	0.699	15.71
				0.620	7.42		
0.641	7.23			0.660			

Tabla 5.12: Relación C_L/C_D para perfiles NACA 4302 y 4502 a $R_e = 2000$ y $R_e = 10000$.

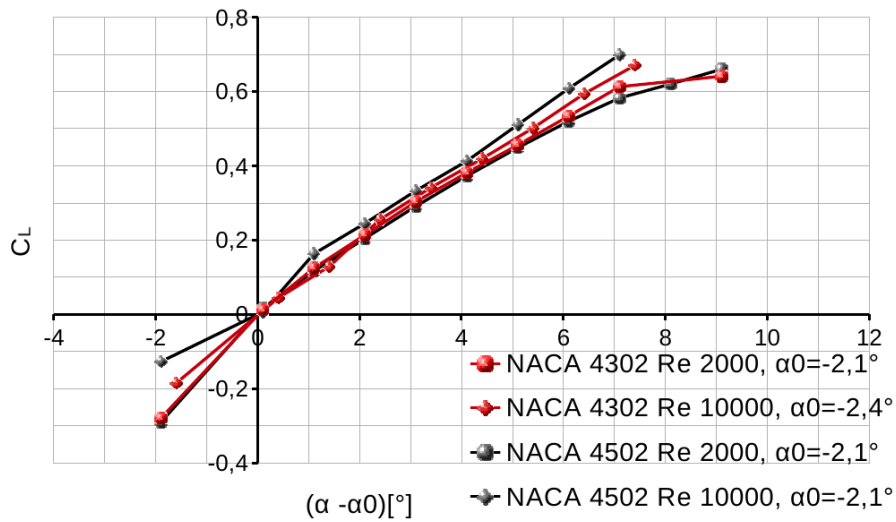


Figura 5.32: Curva $C_L - (\alpha - \alpha_0)$ a $Re = 2000$ y $Re = 10000$ para: NACA 4302 y 4502.

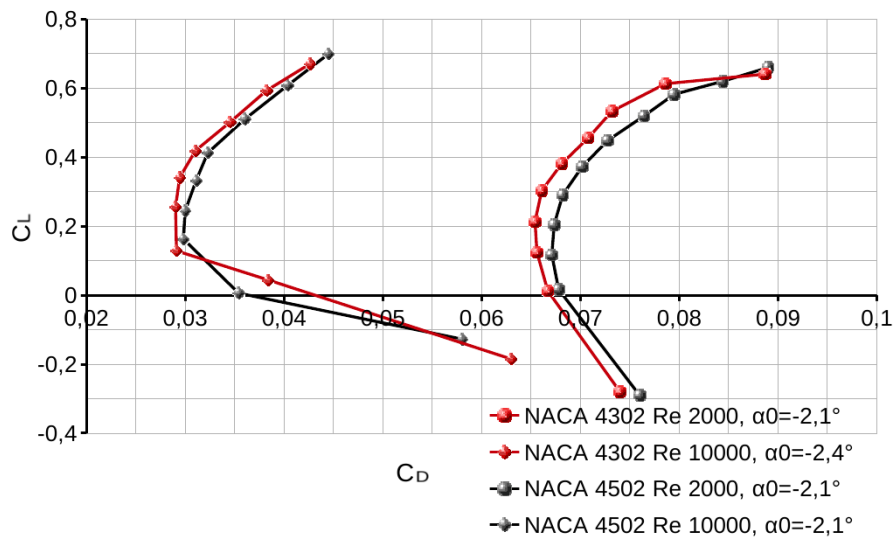


Figura 5.33: Curva $C_L - C_D$ a $Re = 2000$ y $Re = 10000$ para: NACA 4302 y 4502.

4502 están por encima del NACA 4302 y el efecto mencionado anteriormente para la sustentación, se ve reflejado en las curvas de C_D . Los valores de eficiencia C_L/C_D se presentan en la Tabla 5.12. Además se observa que a incidencias negativas la posición más adelantada de la combadura incide significativamente sobre la curva de resistencia.

La fig. 5.35 compara los contornos de velocidad de ambos perfiles a $Re = 2000$ a diferentes ángulos de ataque. En las figs. 5.35a y 5.35c, puede verse que el perfil NACA 4302 posee una zona de flujo “muerto” o desprendido sobre el borde de fuga menor a la

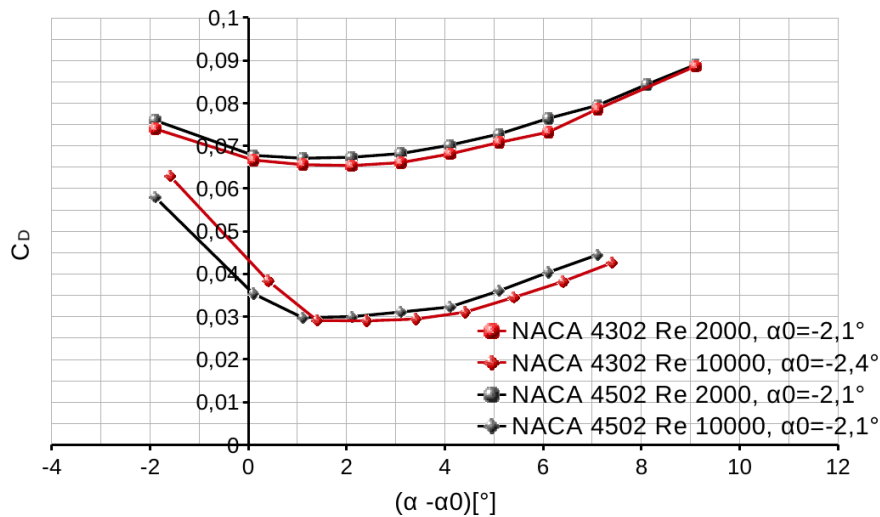


Figura 5.34: Curva $C_D - (\alpha - \alpha_0)$ a $Re = 2000$ y $Re = 10000$ para: NACA 4302 y 4502.

que puede observarse en el perfil NACA 4502 (figs. 5.35b y 5.35d). En cambio, en las fig. 5.35e, la zona desprendida sobre el extradós del perfil NACA 4302 crece con mayor graduación respecto a lo que se observa en el perfil con la posición más atrasada (NACA 4502) fig. 5.35f.

5.5 Consideraciones para la combinación y posterior elección de una geometría apropiada

En base a los datos presentados, se pueden considerar algunas pautas sobre la elección de una geometría apropiada para su utilización en una aplicación en flujos con Reynolds ultra-bajos.

Los análisis realizados indican que al disminuir el número de Reynolds, la resistencia aumenta debido a que los efectos viscosos adquieren gran relevancia, limitan la capacidad de recuperación de la presión y se producen importantes caídas de la pendiente de sustentación.

Si se comparan las relaciones de espesor, se constata que las mejores prestaciones se dan con los perfiles delgados. Claramente las pendientes de sustentación son considerablemente mayores en los perfiles delgados y ofrecen un amplio rango de operabilidad. En la polares de resistencia también se encuentra que los perfiles de menor espesor presentan las mejores prestaciones, lo cual mejora mucho la eficiencia aerodinámica.

El segundo factor de importancia es la combadura. Es evidente que mejora notable-

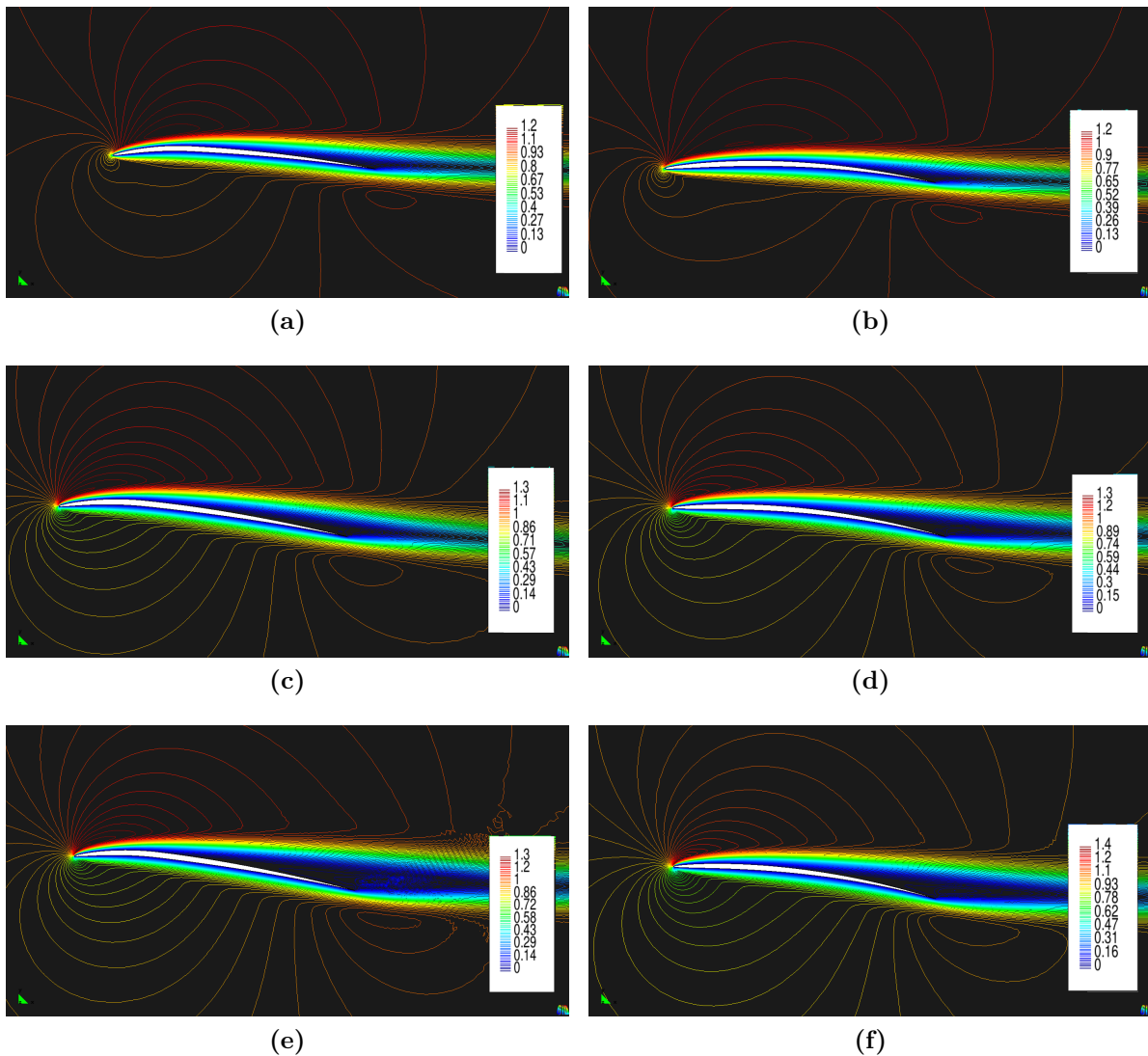


Figura 5.35: Comparación de los contornos de velocidad para los perfiles NACA 4302 y NACA 4502 a $R_e = 2000$ y $\alpha = 3^\circ$, $\alpha = 6^\circ$ y $\alpha = 7^\circ$. (a) 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 5,1^\circ$ (b) 4502 a $\alpha - \alpha_0 = 5,4^\circ$, (c) 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 8,1^\circ$ y (d) 4502 a $\alpha - \alpha_0 = 8,4^\circ$ y (e) 4302 a $\alpha - \alpha_0 = 9,1^\circ$ y (f) 4502 a $\alpha - \alpha_0 = 9,4^\circ$.

mente las características aerodinámicas de los perfiles, tanto en C_L como en la prolongación del rango de operabilidad lineal. No obstante produce un aumento de resistencia debido al desprendimiento prematuro del flujo, la ganancia neta de eficiencia es satisfactoria. Otro punto de interés a tener en cuenta es la ubicación de la combadura. Se observa que con ubicaciones adelantadas se consigue mejor comportamiento a bajos ángulos de ataque, es decir el perfil puede ser utilizado en aplicaciones donde dichos ángulos permanezcan cuasi-constantemente con valores mínimos.

FLUJO INESTACIONARIO SOBRE PERFILES

En capítulos anteriores se explicitaron varios conceptos y fenómenos importantes que van a ser de utilidad en flujos inestacionarios. Entre ellos están la estructura y topología de la estela y su relación con las fuerzas sobre el cuerpo, los tipos y posiciones de desprendimiento y cinemáticas de vuelo a ultra-bajo Reynolds en conjunto con la performances que puedan brindar.

En el presente capítulo se analiza en detalle la actuación de un perfil alar, sometido a movimientos oscilatorios en un medio fluido y se proporciona información valiosa para un eventual diseño. En este contexto se estudiarán las influencias de los parámetros antes mencionados en actuaciones definidas como *heaving*, *pitching*, *flapping* y para diferentes geometrías de perfiles NACA de cuatro dígitos. Además se incluirán casos de vuelo *hovering* simétrico y asimétrico.

6.1 Dominio de simulación

El dominio de trabajo para las simulaciones de la mayoría de los perfiles aerodinámicos posee las características de la fig. 6.1. En comparación con el flujo estacionario, las dimensiones del dominio son considerablemente mayores debido a que el movimiento de la malla debe ser suavizado de la manera más regular posible (Cap. 3, Sec. 3.6). La grilla no estructurada está compuesta por triángulos lineales de tensión constante y el refinamiento es particular a cada caso estudiado. Para perfiles gruesos los elementos más pequeños poseen una longitud de lado cercana a $0,0015c$, donde $c = 1$ es la cuerda del perfil y para perfiles delgados, alrededor de $0,0007c$.

La topología de la malla se puede ver en la fig. 6.2.

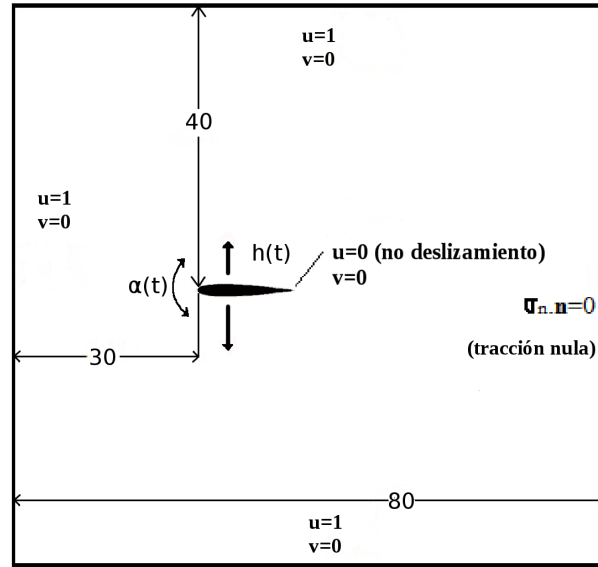


Figura 6.1: Dominio de trabajo y condiciones de contorno.

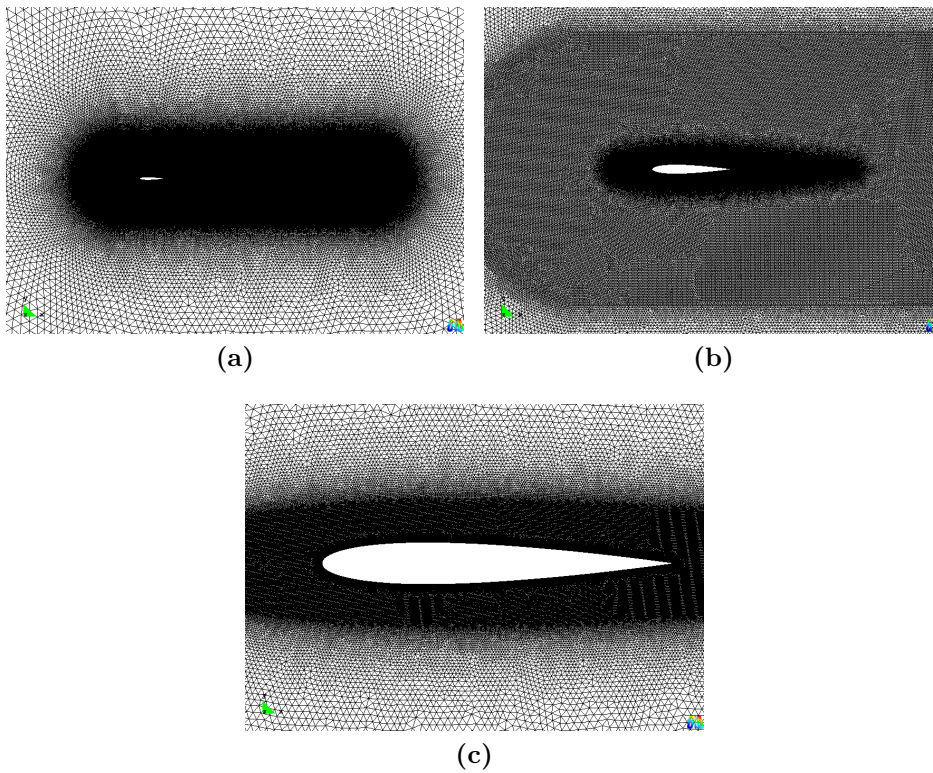


Figura 6.2: Mallado genérico de cuerpo y estela.

6.2 Desplazamiento vertical (*heaving*)

En esta sección se hará un análisis de varias geometrías de perfiles NACA de cuatro dígitos, con el fin de determinar sus prestaciones en flujo inestacionario y movimiento

vertical. La cinemática $h(t)$ responde a la primera de las ecs. 2.21 y un ejemplo representativo es graficado en la fig. 6.3.

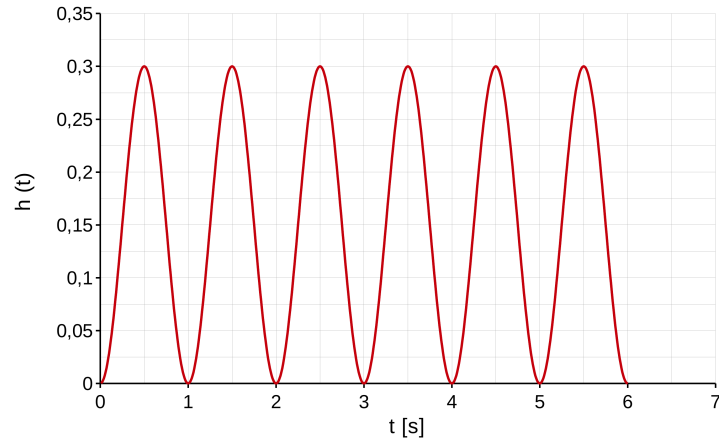


Figura 6.3: Movimiento vertical $h(t)$ ejemplo, con $f = 1$ y $h_a = 0,15$.

6.2.1 Efecto de la relación de espesor

En el Cap. 2 se comentó en detalle un parámetro fundamental de gobierno como es el número de Strouhal St y su importancia en el estudio del flujo inestacionario. Por ello, el parámetro de referencia para el presente estudio será dicho número.

La elección de un rango de variación para el número de St no es de manera aleatoria, si no que en base a estudios anteriores, como el realizado por Taylor *et al.* [66], se determina que en función de la velocidad de crucero, la frecuencia y la amplitud de batimiento de las alas en animales como pájaros, murciélagos e insectos, el mismo se encuentra en el rango $0,19 < St < 0,41$ para el 75 % de dichas especies. Otro estudio interesante realizado por Triantafyllou *et al.* [69], estableció que el rango para animales acuáticos como peces o cetáceos es aproximadamente $0,25 < St < 0,35$. Además, Nudds *et al.* [53] demostraron que el rango de Strouhal para la máxima eficiencia propulsiva (η) para aves era estrecho y reducido a $0,2 < St < 0,4$ [30].

Como primer análisis se presentará la variación en el intervalo $0,1 < St < 0,5$, de tres perfiles NACA simétricos con diferentes relaciones de espesor (NACA 0004, 0006 y 0012) y en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , manteniendo fija la frecuencia del movimiento inducido $f = 1$ y a número de $Re = 1100$. El número de Re se define con la ec. 2.1 con la cuerda c como longitud de referencia. Además se anexan algunos datos obtenidos por Guerrero [30] en un perfil de 12 % de espesor.

En la fig. 6.4 el coeficiente de tracción medio $\bar{c}t$ dado por las ecs. 2.15 y 2.19, aumenta

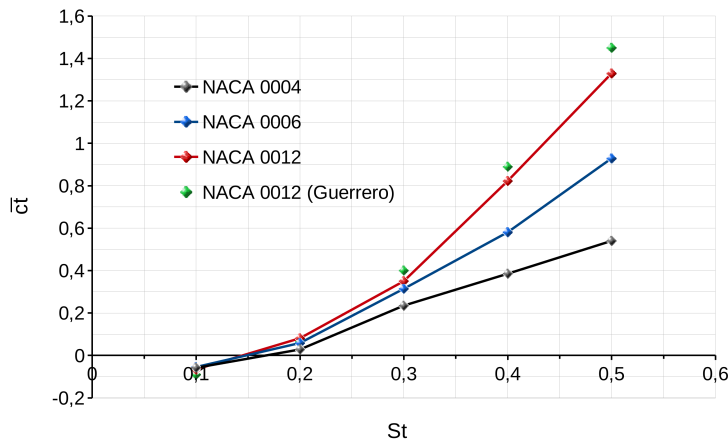


Figura 6.4: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f = 1$.

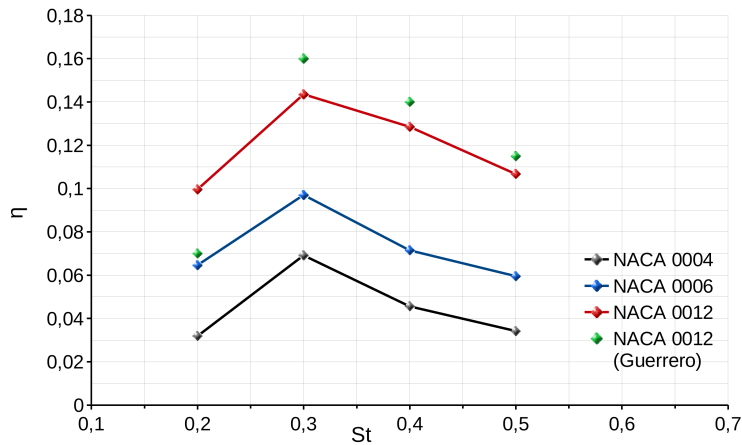


Figura 6.5: Comparación de la eficiencia propulsiva η en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f = 1$.

con el número de St para cada perfil debido al aumento de la amplitud del movimiento manteniendo la frecuencia constante. Se puede observar que existe una zona donde no hay tracción, pero sí resistencia. Esto se da aproximadamente para: NACA 0004 a $St < 0,18$, NACA 0006 a $St < 0,16$ y NACA 0012 a $St < 0,15$. Luego para los tres perfiles existe una zona de transición, de producción de resistencia a producción de empuje y dicha zona puede generalizarse para los tres casos en el rango $0,15 < St < 0,2$. Después, los tres perfiles proveen un aumento no lineal de tracción y como puede verse es mayor mientras mayor es la relación de espesor.

En la fig. 6.6, se pueden diferenciar dos tipos de topologías de estela para dos casos del presente análisis. Uno produce resistencia y otro produce propulsión. La diferencia

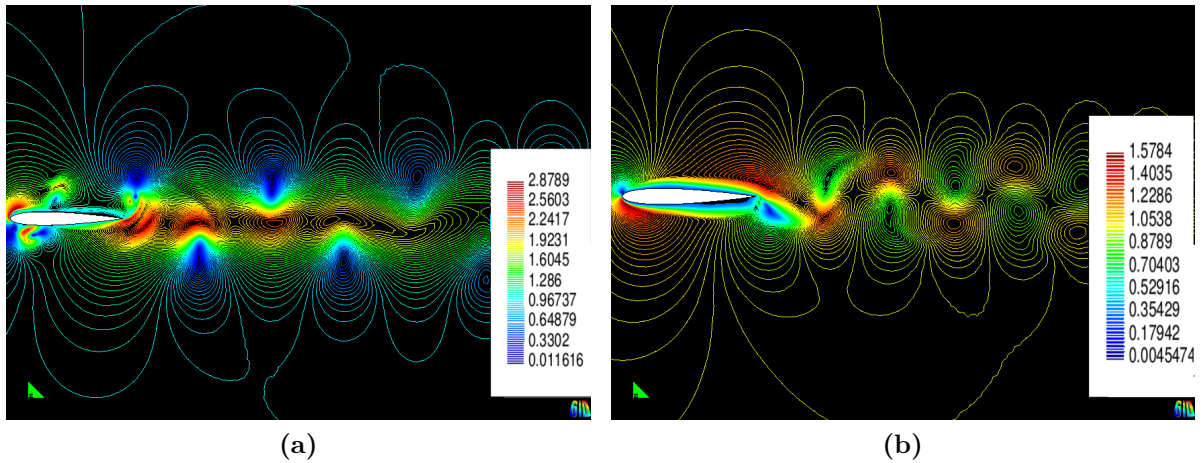


Figura 6.6: Contornos de velocidad y topología de la estela para un caso con resistencia y un caso con propulsión. (a) Perfil NACA 0012. $St = 0,3$ $f = 1$, $h_a = 0,15$ y $Re = 1100$ (propulsión). (b) Perfil NACA 0012. $St = 0,1$ $f = 1$, $h_a = 0,05$ y $Re = 1100$ (resistencia).

está en la velocidad media que tiene la estela respecto de la corriente libre.

Por otra parte, es importante determinar la eficiencia η de la propulsión entregada por dichos perfiles. La misma puede calcularse mediante la ec. 2.20 (fig. 6.5). El máximo ocurre para $St = 0,3$ para todos los perfiles. Al igual que con el empuje, la mayor eficiencia propulsiva se da para el perfil con la mayor relación de espesor (NACA 0012) y cae al disminuir la misma.

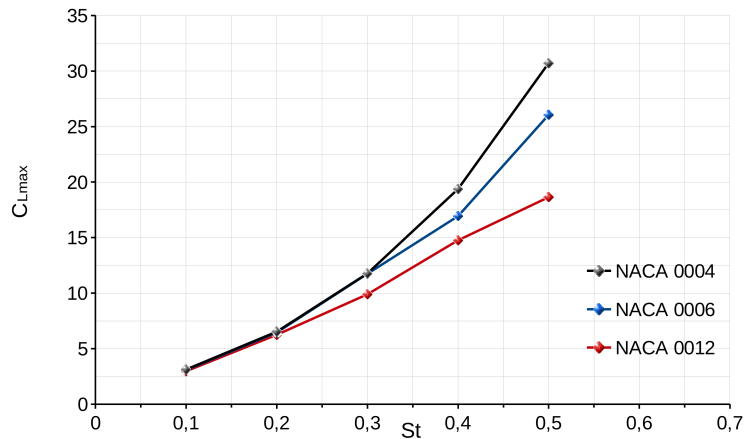


Figura 6.7: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f = 1$.

Otro factor aerodinámico de interés, es el C_{Lmax} obtenido en el ciclo de movimiento para cada perfil y cuyas curvas se presentan en la fig. 6.7. Al contrario de lo que ocurre con

el coeficiente de tracción, el C_{Lmax} aumenta en la medida que se disminuye la relación de espesor. Como puede verse en dichas curvas, el comportamiento entre los perfiles cambia a partir de un valor de $St = 0,2$, donde la presencia e intensidad del vórtice desprendido de borde de ataque (LEV), comienza a cobrar mayor importancia en los perfiles más delgados. El efecto del LEV se verá más en detalle a continuación.

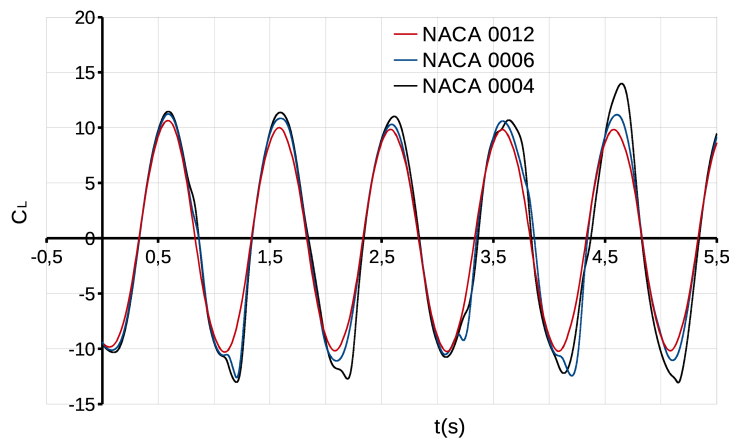


Figura 6.8: Comparación del coeficiente de sustentación en función del tiempo, para NACA 0004, 0006, 0012, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f = 1$.

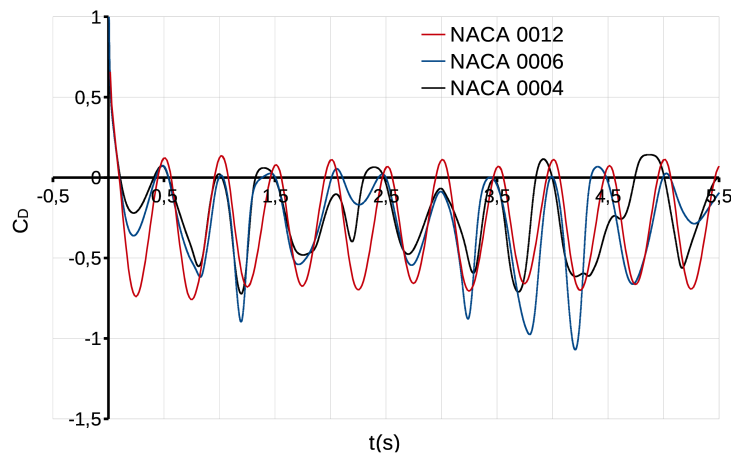


Figura 6.9: Comparación del coeficiente de resistencia en función del tiempo, para NACA 0004, 0006, 0012, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f = 1$.

En las figs. 6.8 y 6.9 puede observarse la variación de $C_L(t)$ y $C_D(t)$ de los perfiles respectivamente, para $St = 0,3$, $f = 1$ y $h_a = 0,15$. En la curva de sustentación del perfil NACA 0012 no se detectan alteraciones causadas por el LEV, como sí ocurre en los perfiles NACA 0004 y NACA 0006. Además de provocar picos de sustentación

mayores durante el ciclo, las curvas presentan un carácter asimétrico y acíclico. Este efecto repercute en la curva de tracción, distorsionando el período y afectando el valor medio utilizado luego en cálculos. Para completar con una idea cuantitativa, se grafican perfiles de velocidad horizontal sobre una posición de la estela para cada perfil listado en la fig. 6.10 y se determina la velocidad media que lleva el flujo en dicha posición.

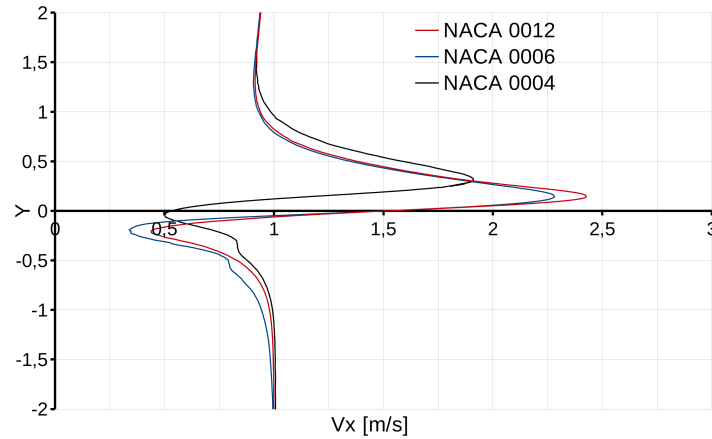


Figura 6.10: Comparación de los perfiles de velocidad horizontal (V_x) a una distancia de $1c$ desde el borde de fuga, para NACA 0004, 0006, 0012, a $Re = 1100$, $f = 1$, $St = 0,3$ y $t = 4s$.

Dicho análisis se realiza en el instante de tiempo igual a $4s$, a una distancia de $1c$ del borde de fuga del perfil. Se obtiene como resultado que las velocidades medias son: NACA 0012 $V_x = 1,43[m/s]$, NACA 0006 $V_x = 1,315[m/s]$ y NACA 0004 $V_x = 1,195[m/s]$. Se recuerda que la velocidad media de la estela está estrechamente vinculada al empuje que entrega el cuerpo.

Como se mencionó anteriormente, el efecto del vórtice desprendido desde el borde de ataque juega un rol importante en los coeficientes aerodinámicos. El comportamiento observado para cada perfil será expuesto a continuación. Para el análisis, se elige el valor de $St = 0,3$, valor con mayor eficiencia propulsiva. Además se compara el perfil de mayor espesor (NACA 0012) con el más delgado (NACA 0004) para una mayor claridad del fenómeno.

La fig. 6.11 muestra la evolución temporal del movimiento del perfil NACA 0012. La caracterización del flujo se realiza mediante los contornos de velocidad sobre el dominio y para una mayor comprensión del movimiento, remitirse a la fig. 6.3.

En la fig. 6.11a se observa la carrera de *upstroke* con la formación del vórtice de borde de ataque (LEV) sobre el intradós del perfil. Luego en la fig. 6.11b la carrera *downstroke* provoca la formación del siguiente LEV sobre el extradós y puede verse que el vórtice generado en la carrera anterior permanece inmóvil en su posición. Ahora en

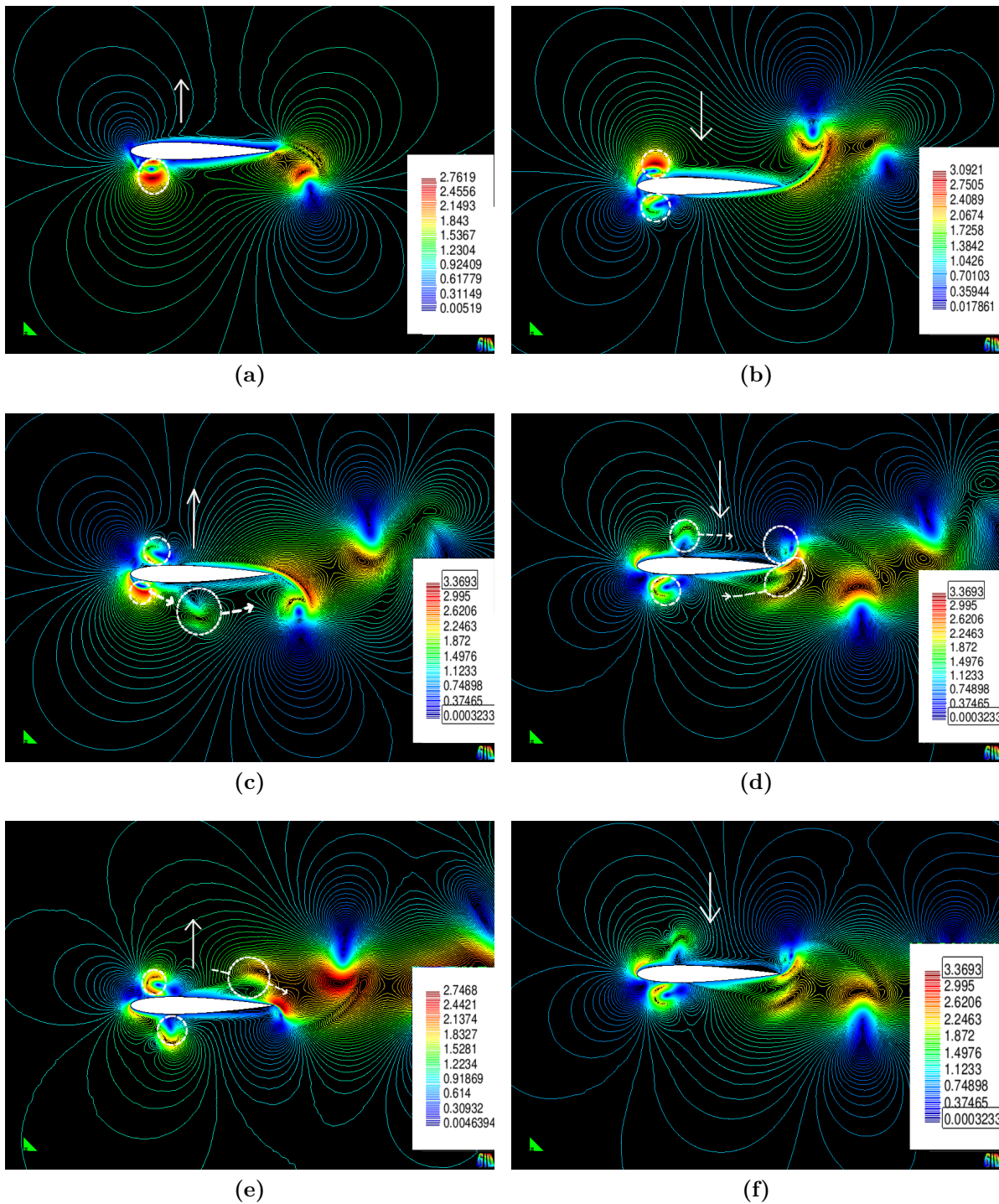


Figura 6.11: Contornos de velocidad para la visualización del LEV para NACA 0012.

Condición de máxima eficiencia propulsiva ($St = 0,3$)

(a) $t = 0,45[s]$. (b) $t = 0,86[s]$. (c) $t = 1,29[s]$. (d) $t = 1,64[s]$. (e) $t = 2,08[s]$. (f) $t = 2,65[s]$.

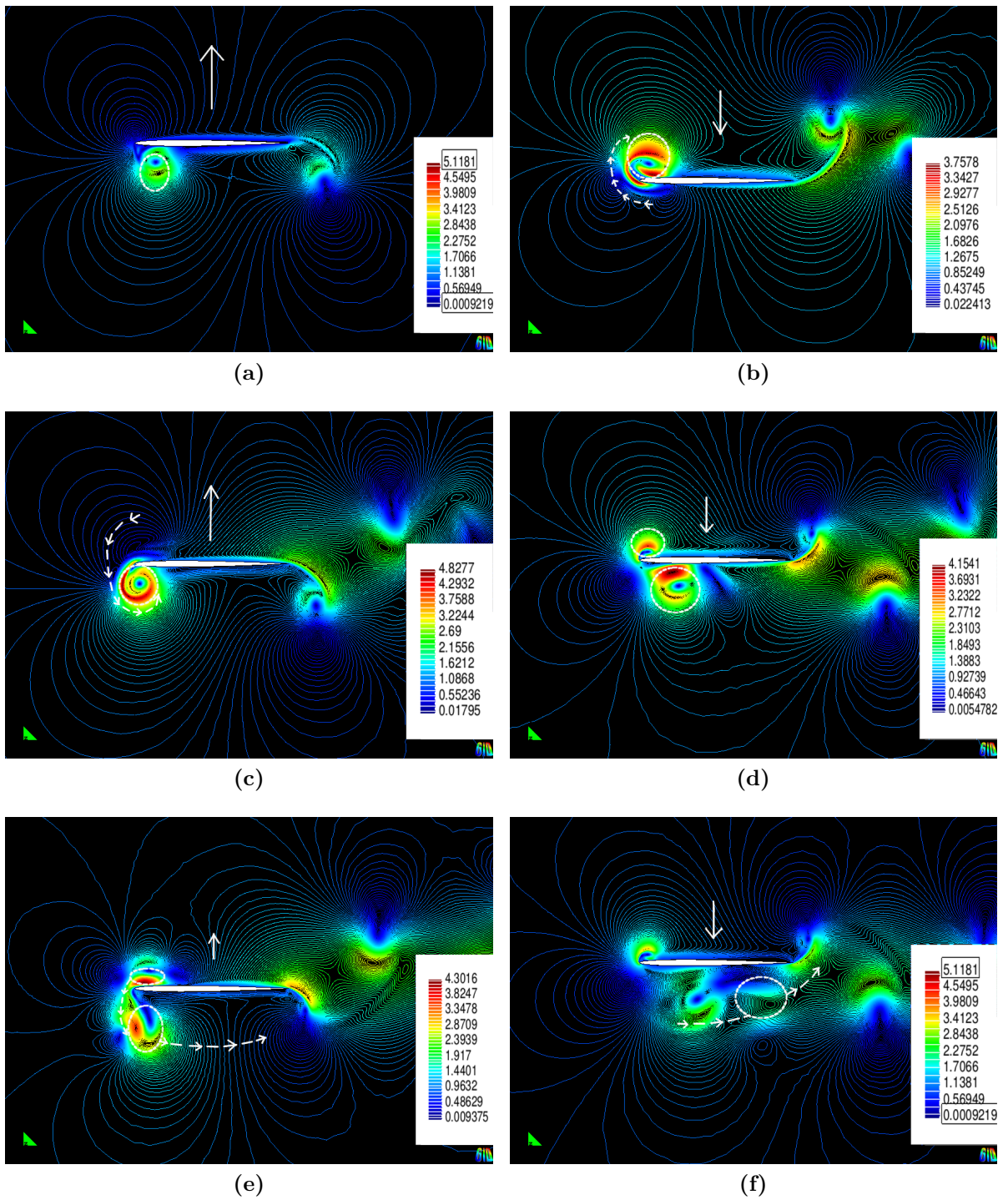


Figura 6.12: Contornos de velocidad para la visualización del LEV para NACA 0004.

Condición de máxima eficiencia propulsiva ($St = 0,3$)

(a) $t = 0,45[s]$. (b) $t = 0,86[s]$. (c) $t = 1,29[s]$. (d) $t = 1,64[s]$. (e) $t = 2,08[s]$. (f) $t = 2,65[s]$.

la fig. 6.11c, carrera hacia arriba, el vórtice de intradós se desplaza aguas abajo además de la formación de un nuevo vórtice sobre el b.a.(borde de ataque) y el vórtice sobre extradós permanece fijo en su posición. Luego, en la fig. 6.11d, nuevamente *downstroke*, el primer vórtice desprendido en la sección inferior llega al final del cuerpo, se acopla con el vórtice del borde fuga y luego a la estela en un tiempo de 1,64s. Finalmente, en las figs. 6.11e y 6.11f ocurre lo mismo con el vórtice sobre extradós e intradós respectivamente.

La fig. 6.12 muestra la evolución temporal del movimiento del perfil NACA 0004. La caracterización del flujo también se realiza mediante los contornos de velocidad sobre el dominio. Al igual que en el caso anterior, en la primera carrera de *upstroke*, fig. 6.12a, se forma un vórtice sobre el intradós del perfil a través del borde de ataque. Luego en la carrera de *downstroke*, fig. 6.12b, el vórtice formado anteriormente sobre el intradós se traslada hacia el extradós para interactuar con el nuevo vórtice formado sobre extradós en dicha carrera. En la fig. 6.12c, carrera nuevamente hacia arriba a un tiempo de 1,29s, la mezcla de vórtices que estaba sobre extradós se traslada hacia intradós. Esto se debe a que por la agudeza del perfil, existe una depresión considerable sobre el b.a., causando el traslado del LEV de una sección a otra. Ya en la fig. 6.12d(*downstroke*), el LEV se encuentra un poco más alejado de la sección, el traslado hacia extradós no ocurre y el vórtice generado comienza a desplazarse aguas abajo como puede verse en la fig. 6.12e. Todo esto es a un tiempo de 2,08s y dos ciclos de movimiento cumplidos. Luego en la fig. 6.12f y a un tiempo de 2,65s, se produce el acople del LEV con el vórtice de borde de fuga y luego con la estela. Estas interacciones entre vórtices desprendidos se repiten cíclicamente en el tiempo.

Lo hasta aquí planteado nos permite identificar las razones de las diferencias encontradas en las performances aerodinámicas entre los perfiles de diferente espesor. La permanencia de mayor tiempo del LEV sobre la región de la nariz del perfil más delgado, además de la baja presión que el mismo acarrea, influye en la convección del mismo hacia la estela y con ello la disminución de la propulsión con respecto a la entregada por el NACA 0012. Dicho efecto se ve reflejado sobre las curvas de sustentación y resistencia.

Claramente, la separación y convección del LEV, es crucial a la hora de evaluar los coeficientes aerodinámicos del perfil en movimiento *heaving*.

Lo que se ha hecho hasta aquí, es observar el comportamiento de las performances aerodinámicas en función de la relación de espesor, al variar el número de Strouhal mediante la amplitud del movimiento de *heaving* h_a , manteniendo constante la frecuencia f o frecuencia reducida k . Ahora se realiza el mismo análisis con la frecuencia $f = 2$, con el objeto de observar qué acontece con los parámetros más relevantes. En la fig.

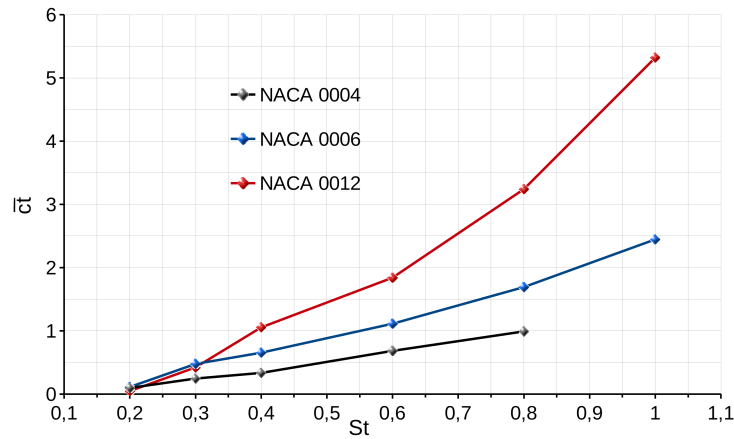


Figura 6.13: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 0006, 0012, a $R_e = 1100$, $f = 2$.

6.13 el coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t aumenta de manera no lineal en los tres perfiles. Nuevamente, dicho coeficiente lleva un mayor crecimiento para el perfil con mayor relación de espesor y decrece en la medida que esta se reduce.

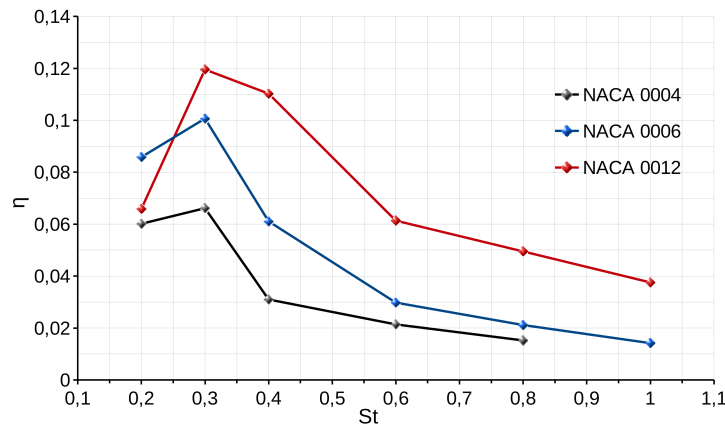


Figura 6.14: Comparación de la eficiencia propulsiva η en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 0006, 0012, a $R_e = 1100$, $f = 2$.

Además la transición de la generación de resistencia a propulsión, ocurre aproximadamente a $St = 0,2$ al igual que en el caso anterior. Luego el perfil NACA 0012 posee la mayor tracción como consecuencia del efecto causado por el vórtice desprendido del borde de ataque (LEV).

Posteriormente, la eficiencia propulsiva η se estudia en la fig. 6.14, donde el mayor valor es a $St = 0,3$ para los tres casos. De nuevo se da que el perfil de mayor espesor posee la mejor eficiencia. También puede observarse que al aumentar el valor de St ,

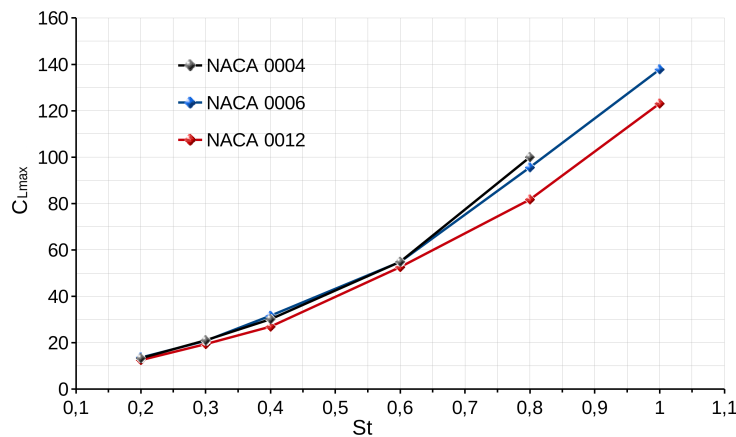


Figura 6.15: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 0006, 0012, a $R_e = 1100$, $f = 2$.

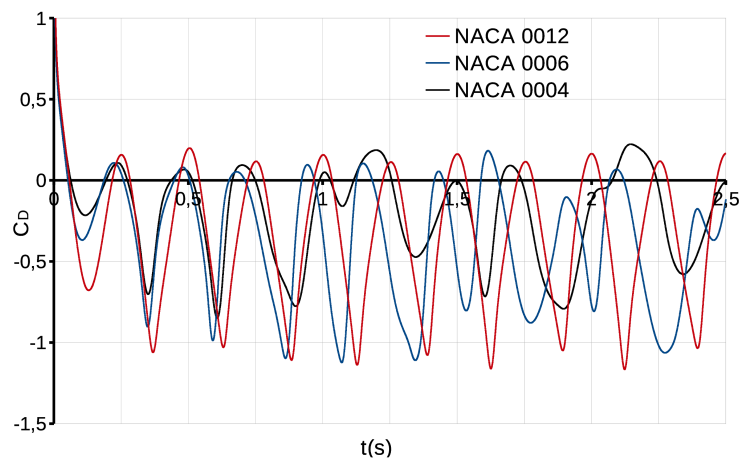


Figura 6.16: Comparación del coeficiente de resistencia o $-C_T$ en función del tiempo, para NACA 0004, 0006, 0012, a $St = 0,3$, $R_e = 1100$, $f = 2$.

es decir la amplitud de movimiento h_a , la relación cae debido a que el coeficiente de sustentación se incrementa provocando que la tasa de potencia necesaria para producir el movimiento sea mayor que la tasa de potencia propulsiva entregada por el perfil. Con referencia al coeficiente de sustentación, en la fig. 6.15 se grafica el C_{Lmax} obtenido en cada ciclo de movimiento para los perfiles estudiados.

El coeficiente de resistencia para la condición de mayor eficiencia se ve reflejado en la fig. 6.16. La pérdida de simetría en la curva de resistencia a causa del LEV, ocasiona que el valor medio del coeficiente de tracción \bar{c}_t sea menor.

Los valores promedio de los parámetros se determinan dentro de un intervalo de tiempo lo más extenso posible y luego de un tiempo prudencial de simulación, con el

fin de realizar los cálculos sobre un comportamiento cuasi estacionario, donde cada caso ha sido de estudio particular. Así mismo en varios de dichos casos no se encontró un comportamiento cuasi estacionario y donde el flujo se presenta de manera completamente irregular.

6.2.2 Efecto de la combadura

Al igual que en la sección anterior, el parámetro dominante es el número de Strouhal. Como primer análisis se presentará su variación en un rango de $0,1 < St < 0,5$ para dos perfiles NACA con diferentes combaduras (NACA 0004 y 4404) en función de la amplitud del movimiento vertical h_a y manteniendo fija la frecuencia del movimiento inducido $f = 1$. El número de Reynolds es 1100.

En la fig. 6.17 se observa que el coeficiente de tracción medio \bar{c}_t aumenta de manera no lineal con el número de Strouhal para ambos perfiles. No obstante la adición de combadura no produce un gran cambio en lo que respecta a dicho coeficiente.

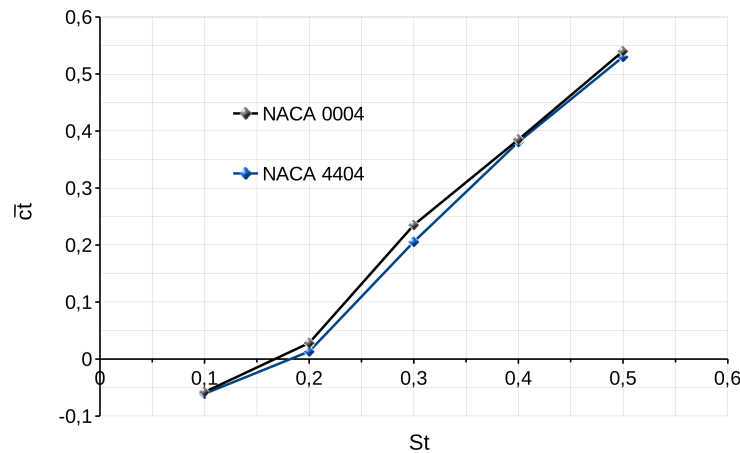


Figura 6.17: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función del número de Strouhal, para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f = 1$.

La eficiencia propulsiva η presenta una paridad entre ambos perfiles, fig. 6.18, al igual que \bar{c}_t . Nuevamente el máximo ocurre para $St = 0,3$ y en ambos casos tiene aproximadamente el mismo valor $\eta = 0,069$. Para valores de Strouhal más altos, permanece ligeramente mayor para el perfil combado, aunque las diferencias no son de gran significancia.

El coeficiente de sustentación máximo en función del St se grafica en la fig.6.19 y curiosamente, los máximos obtenidos se mantienen similares hasta $St = 0,3$ y luego son mayores para el perfil NACA 0004. Esto afirma que el efecto causado la combadura se

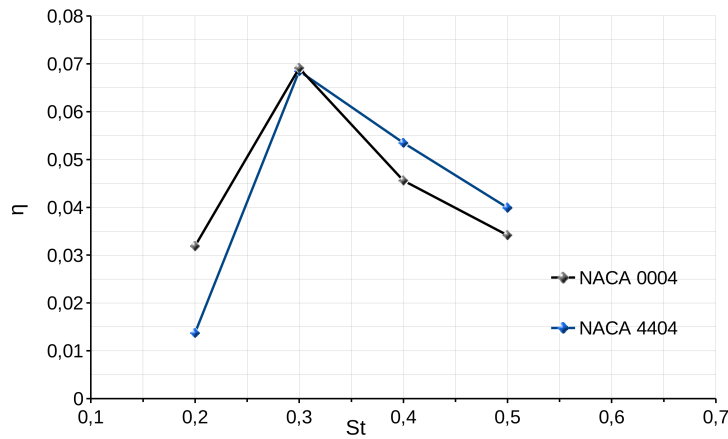


Figura 6.18: Comparación de la eficiencia propulsiva η en función del número de Strouhal, para NACA 0004 y 4404 a $R_e = 1100$, $f = 1$.

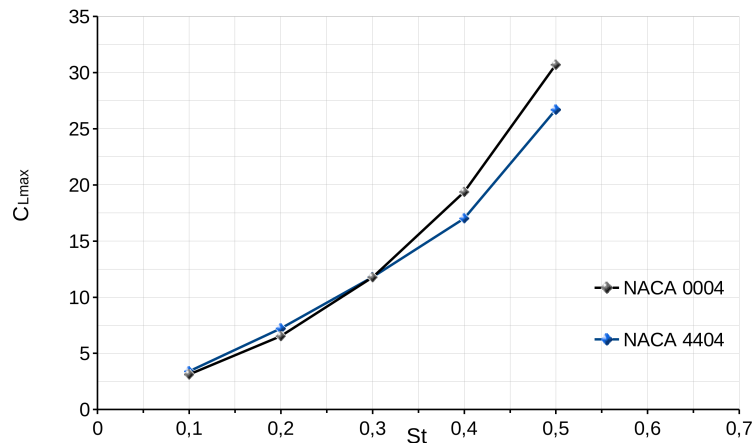


Figura 6.19: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 4404, a $R_e = 1100$, $f = 1$.

ve ocultado por el LEV y por la cinemática de movimiento, a diferencia de los resultados obtenidos en flujo estacionario, donde el agregado de combadura incrementaba las prestaciones del perfil. Al ser delgado el perfil analizado, el vórtice desprendido permanece varios ciclos de movimiento adherido a la nariz del cuerpo sin ser conveccionado hacia la estela, causando los efectos manifestados sobre todo en la propulsión.

Para la condición de mayor eficiencia obtenida, se grafica el coeficiente de resistencia en función del tiempo, fig.6.20. La irregularidad que presenta la curva de resistencia del NACA 4404 es mayor respecto a la del perfil simétrico. Como se mencionó anteriormente se debe a la presencia e intensidad del LEV y a su forma de acoplarse a la estela.

El análisis se completa considerando nuevamente al número de Strouhal como variable

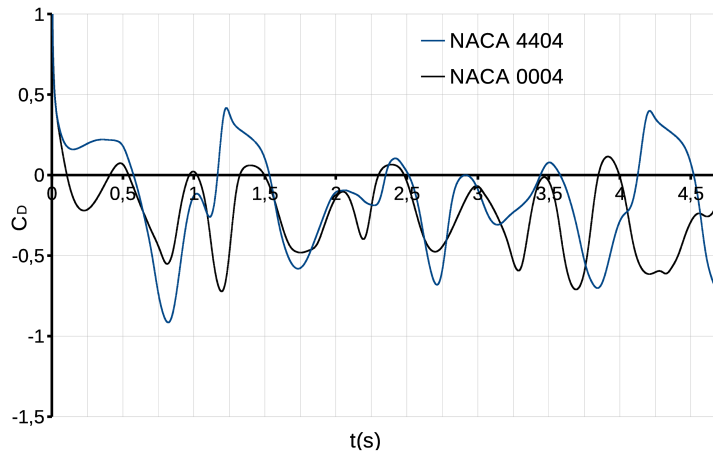


Figura 6.20: Comparación del coeficiente de resistencia o $-C_T$ en función del tiempo, para NACA 0004, 4404, a $St = 0,3$, $Re = 1100$, $f = 1$.

(controlada por la amplitud de movimiento h_a) en un rango $0,2 < St < 0,8$ y a una frecuencia de oscilación $f = 2$.

En este caso, la diferencia entre ambos perfiles es más notoria que el anterior pero con mejores prestaciones propulsivas para el perfil simétrico, fig. 6.21. Al igual que antes, la transición de resistencia a propulsión generada por el perfil ocurre en el rango $0,15 < St < 0,2$, luego el $\bar{c}t$ aumenta con la amplitud de movimiento h_a .

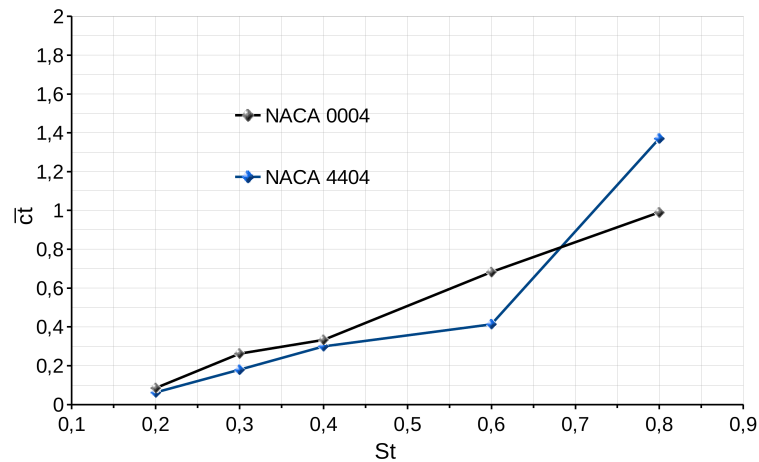


Figura 6.21: Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función del número de Strouhal, para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f = 2$.

La eficiencia propulsiva fig. 6.22, decae para el perfil combado con el aumento de la frecuencia de movimiento. Los resultados presentados hasta aquí (movimiento *heaving*), muestran que no le sienta bien un valor positivo de combadura a las prestaciones propul-

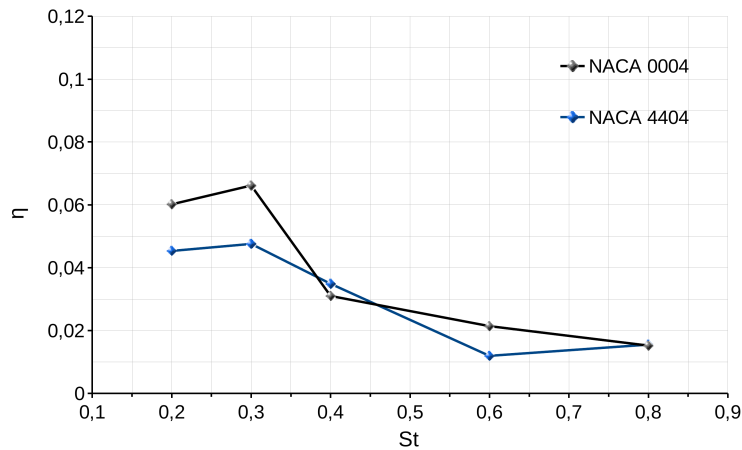


Figura 6.22: Comparación de la eficiencia propulsiva η en función del número de Strouhal, para NACA 0004 y 4404 a $R_e = 1100$, $f = 2$.

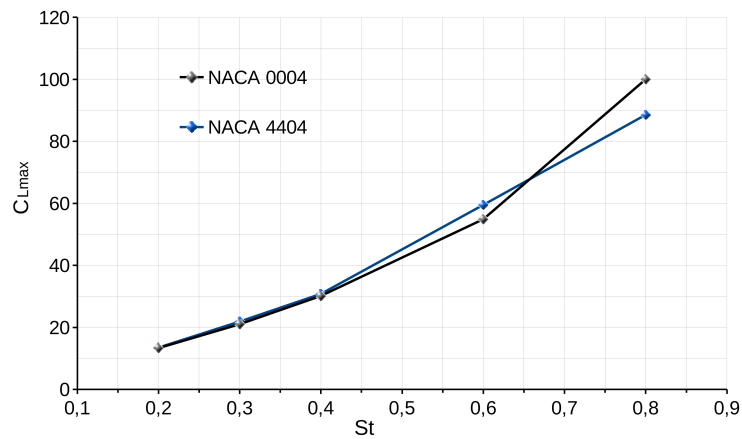


Figura 6.23: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función del número de Strouhal, para NACA 0004, 4404, a $R_e = 1100$, $f = 2$.

sivas generadas por el perfil. Para el perfil simétrico (NACA 0004) el valor máximo de η se mantiene respecto de $f = 1$ y ha aumentado para $St = 0,2$, mejorando el valor obtenido en el caso anterior. En ambos casos el máximo ocurre en $St = 0,3$ y decae para mayores valores.

El coeficiente de sustentación máximo de cada ciclo de movimiento se mantiene similar en ambos perfiles (fig. 6.23).

6.3 Movimiento de cabeceo (*pitching*)

En esta sección se hará un análisis de varias geometrías de perfiles NACA serie 4, con el fin de determinar sus prestaciones y comportamiento en flujo inestacionario con movimiento de cabeceo o *pitching*. El movimiento inducido $\alpha(t)$ responde a la segunda de las ec. 2.21, Sec. 2.2.4.3, (fig. 6.24).

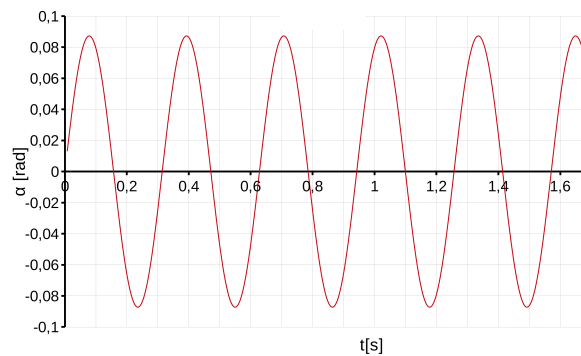


Figura 6.24: Movimiento de cabeceo $\alpha(t)$ ejemplo con $k = 10$ y $\alpha_a = 0,08726[\text{rad}] = 5^\circ$.

Los parámetros variables a considerar son la frecuencia reducida k y la amplitud angular α_a . El valor de frecuencia reducida k se obtiene mediante la ec. 2.9, Sec.2.2.4.3. El punto de pivot del perfil se ubica al 25 % de la cuerda.

6.3.1 Efecto de la relación de espesor

Como primer análisis se presentarán los efectos de la variación de frecuencia reducida en un rango $2 < k < 18$, sobre dos perfiles NACA simétricos con diferentes relaciones de espesor (NACA 0002 y 0012), manteniendo fija la amplitud angular $\alpha_a = 5^\circ$ del movimiento y a un Re igual a 1100.

De la fig. 6.25 se deduce que el coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t aumenta de manera exponencial con k para ambos perfiles y la zona de transición de producción de resistencia a producción de tracción ocurre aproximadamente a $k = 4,5$ y a $k = 6,2$ para NACA 0002 y NACA 0012 respectivamente. Es de notar que la producción de tracción es mayor para el perfil más delgado, contrariamente a lo que ocurre en *heaving*.

La eficiencia propulsiva para las dos geometrías en función de la frecuencia reducida se grafica en la fig. 6.26. La misma se calcula mediante la ec. 2.20. La curva del perfil NACA 0002 posee un pico en $k = 10$ superior al que se logra con el perfil NACA 0012. Este último si bien tiene menor eficiencia, el decrecimiento de la misma no es tan abrupto como la del perfil delgado. Puede inferirse con seguridad que los valores de dichas curvas

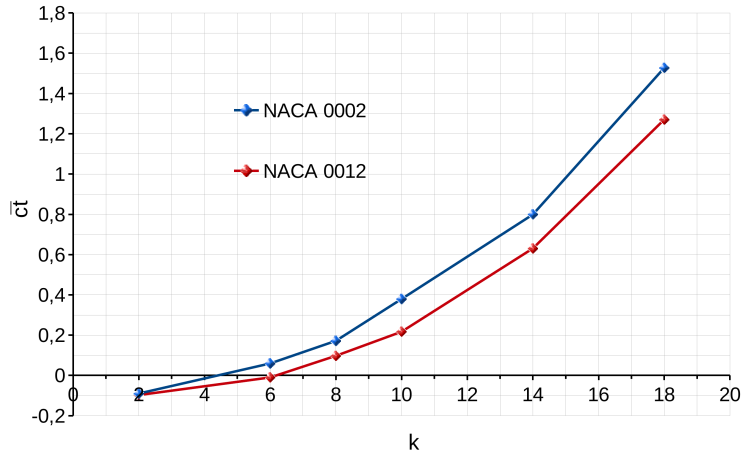


Figura 6.25: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002 y 0012, a $R_e = 1100$ y $\alpha_a = 5^\circ$.

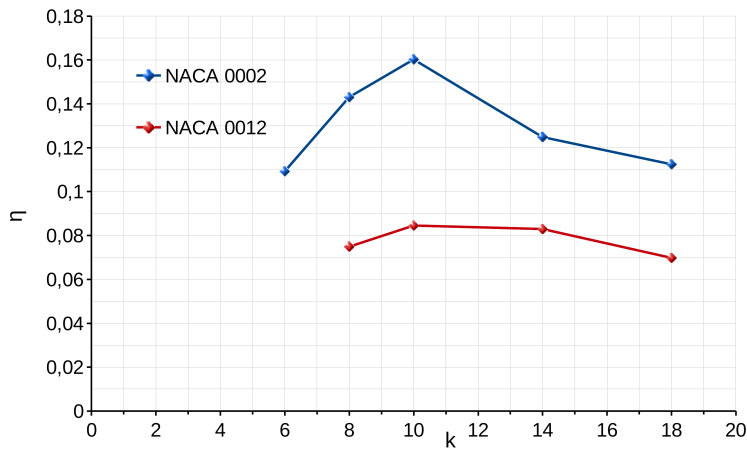


Figura 6.26: Comparación de la eficiencia propulsiva η en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002 y 0012, a $R_e = 1100$ y $\alpha_a = 5^\circ$.

seguirán decayendo si se prolonga la frecuencia, más allá del rango estudiado.

El coeficiente de sustentación máximo para cada ciclo de *pitching* es similar en ambos perfiles al variar la frecuencia, fig. 6.27 y aumenta de manera no lineal, más bien exponencial.

Para la condición de mayor eficiencia se pueden comparar los parámetros aerodinámicos de relevancia. A diferencia de *heaving* no existe desprendimiento de flujo desde el borde de ataque, por ende no existe la gran influencia del LEV manifestada anteriormente. Luego, los picos de C_L son similares en ambos perfiles por lo que no se incluye el gráfico correspondiente.

El comportamiento de la curva de C_D muestra que el valor medio más negativo

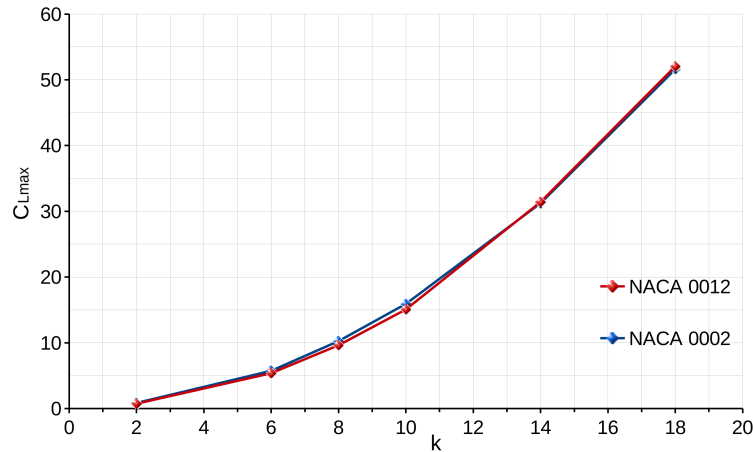


Figura 6.27: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002 y 0012, a $R_e = 1100$ y $\alpha_a = 5^\circ$.

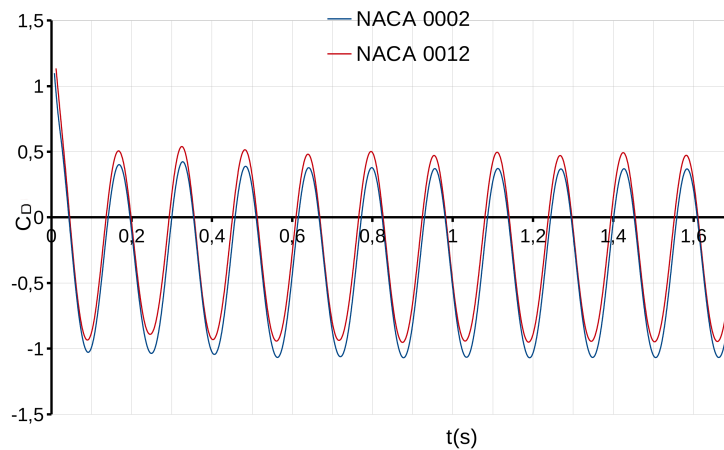


Figura 6.28: Comparación del coeficiente de resistencia en función del tiempo, para NACA 0002 y 0012, a $k = 10$, $R_e = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$.

(equivalente a la mayor propulsión), corresponde al perfil más delgado fig. 6.28. Además el coeficiente de momento puede verse en la fig. 6.29.

Los contornos de velocidad para el caso $k = 14$ y en un tiempo $t = 1,03s$ pueden verse en la fig. 6.30. Dicho valor de frecuencia es relativamente alto, ya que responde a una frecuencia $f = 4,5[1/s]$ y aún así puede observarse la ausencia de vórtices desprendidos de borde de ataque. En gran parte esto responde a que el número de Reynolds es muy bajo y mantiene el flujo adherido incluso hasta en perfiles delgados, permitiendo una convección “limpia” de vórtices desde borde de fuga (TEV) hacia la estela, lo cual genera mejores valores de eficiencia.

Perfiles de velocidad horizontal V_x sobre una posición de la estela son de utilidad para

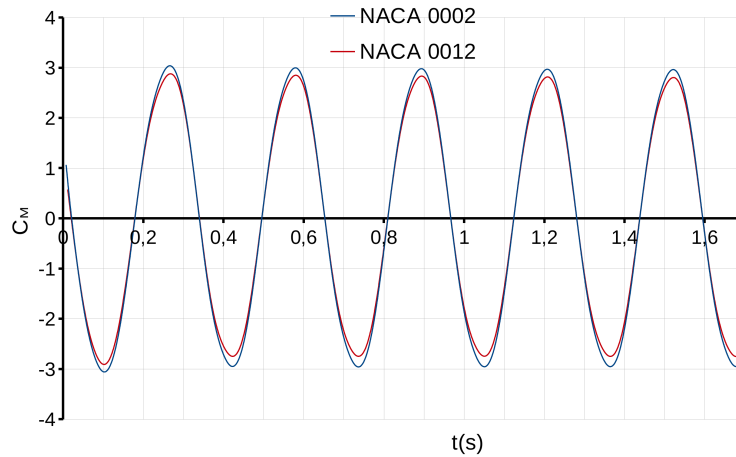


Figura 6.29: Comparación del coeficiente de momento en función del tiempo, para NACA 0002 y 0012, a $k = 10$, $R_e = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$.

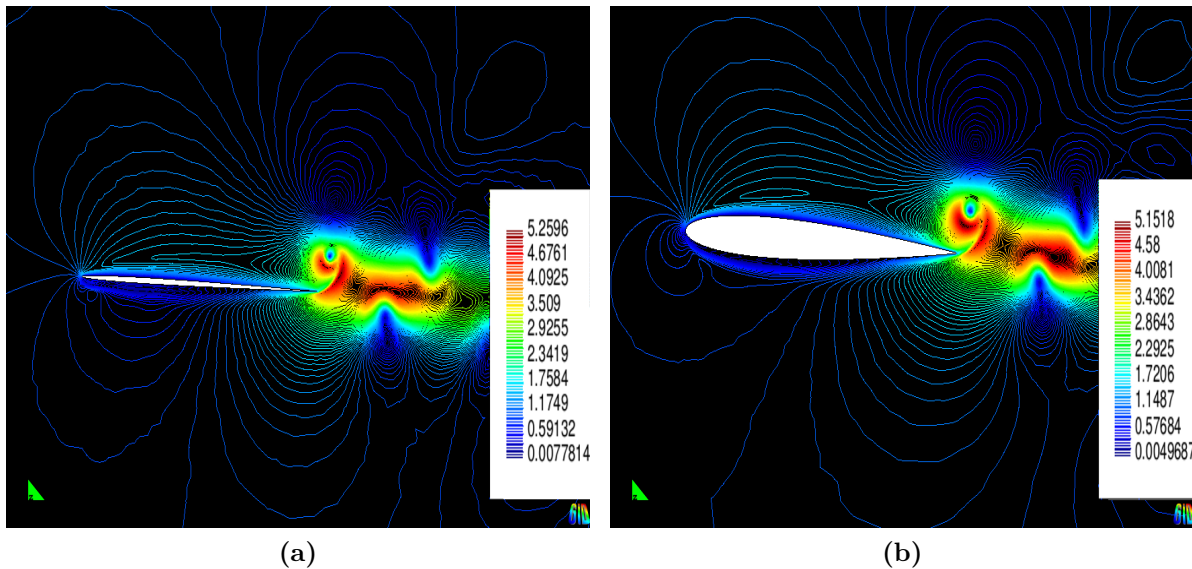


Figura 6.30: Contornos de velocidad y topología de la estela para perfiles NACA 0012 y NACA 0002 a $k = 14$, $\alpha_a = 5^\circ$ y $R_e = 1100$ y $t = 1,03s$. (a) Perfil NACA 0002, (b) Perfil NACA 0012.

ratificar los resultados obtenidos, fig. 6.31. En el capítulo 2 se vió como es la topología de estela al inducir resistencia o propulsión por parte de un cuerpo sometido a movimiento inestacionario. En este caso se grafican los perfiles sobre una posición $0,5c$ detrás del borde de fuga para $k = 14$. Se puede observar que existe una diferencia considerable entre ambos perfiles, además de presentar las siguientes velocidades medias: para NACA 0002 $\bar{V}_x = 1,99[m/s]$ y NACA 0012 $\bar{V}_x = 1,625[m/s]$. Esta diferencia confirma que la

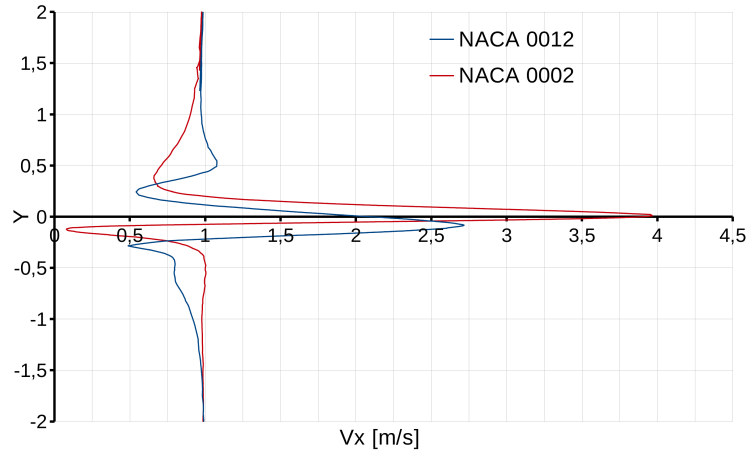


Figura 6.31: Comparación de los perfiles de velocidad horizontal (V_x) a una distancia de $0,5c$ desde el borde de fuga, para NACA 0002, 0012, a $R_e = 1100$, $k = 14$, $\alpha_a = 5^\circ$ y $t = 1,03s$.

propulsión que se obtiene con el perfil delgado es mayor.

Otro escenario a plantear para ampliar el espectro de estudio, es observar que sucede si se toma un valor fijo de frecuencia reducida k y se varía la amplitud angular de movimiento α_a .

Se puede ver fig. 6.32, que si se disminuye la amplitud del ángulo de cabeceo manteniendo la frecuencia $k = 10$, la producción de propulsión se transforma en resistencia. La transición a propulsión ocurre aproximadamente a una amplitud $\alpha_a = 2,9^\circ$ en ambos casos y luego el $\bar{c}t$ crece de manera exponencial.

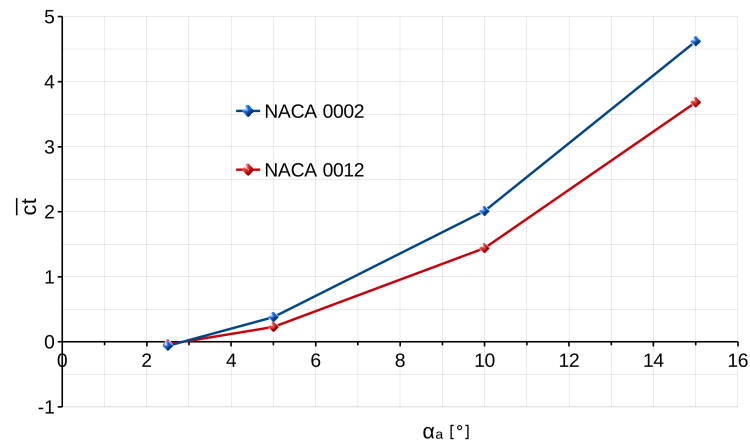


Figura 6.32: Comparación del coeficiente de tracción promedio $\bar{c}t$ en función de la amplitud angular de movimiento α_a , para NACA 0002 y 0012, a $R_e = 1100$ y $k = 10$.

La eficiencia propulsiva se muestra en la fig. 6.33. El mayor valor ocurre para una amplitud angular $\alpha_a = 10^\circ$ en el perfil más delgado. Para el NACA 0012, la eficiencia

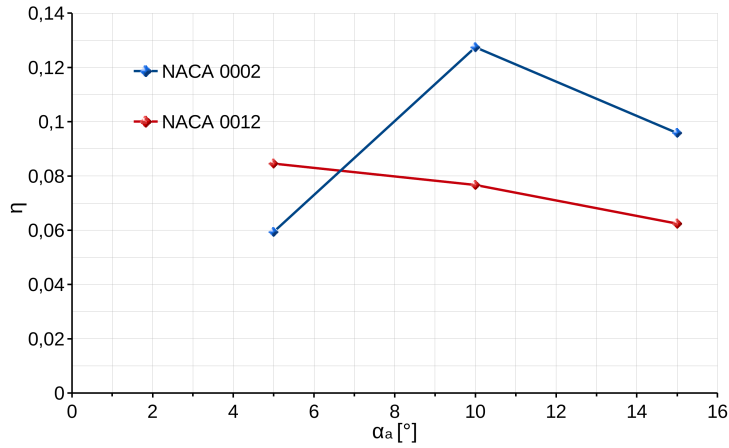


Figura 6.33: Comparación de la eficiencia propulsiva η en función de la amplitud angular de movimiento α_a , para NACA 0002 y 0012, a $R_e = 1100$ y $k = 10$.

conserva su máximo en $\alpha_a = 5^\circ$, al igual que en el caso anterior anterior (fig. 6.26) y decae menos que el perfil delgado.

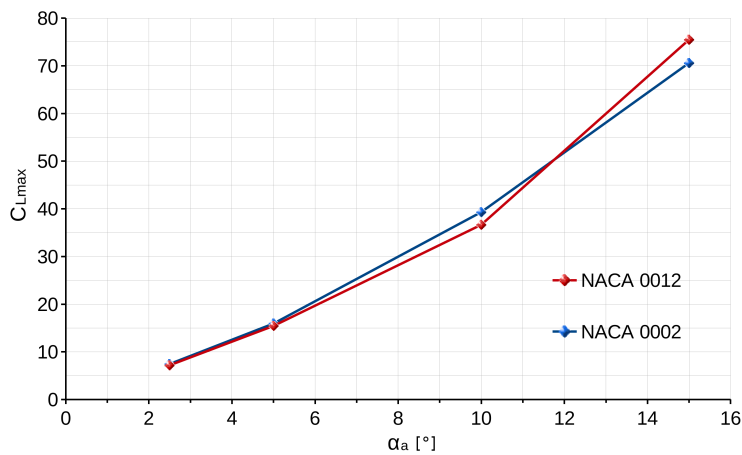


Figura 6.34: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la amplitud angular de movimiento α_a , para NACA 0002 y 0012, a $R_e = 1100$ y $k = 10$.

En el coeficiente de sustentación no se producen mayores diferencias entre ambos perfiles y su variación es exponencial con la amplitud angular de movimiento, fig. 6.34.

6.3.2 Efecto de la combadura

Se estudiará la influencia de la frecuencia reducida en el rango $2 < k < 18$, sobre tres perfiles NACA combados con diferentes valores de combadura ubicada al 30% de la cuerda (NACA 0002 , 2302 y 4302), manteniendo fija la amplitud angular $\alpha_a = 5^\circ$ del

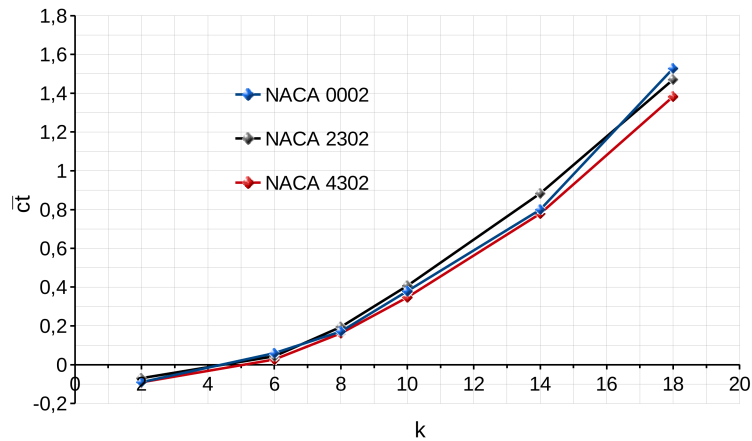


Figura 6.35: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002, 2302 y 4302 a $Re = 1100$.

movimiento de cabeceo y a $Re = 1100$.

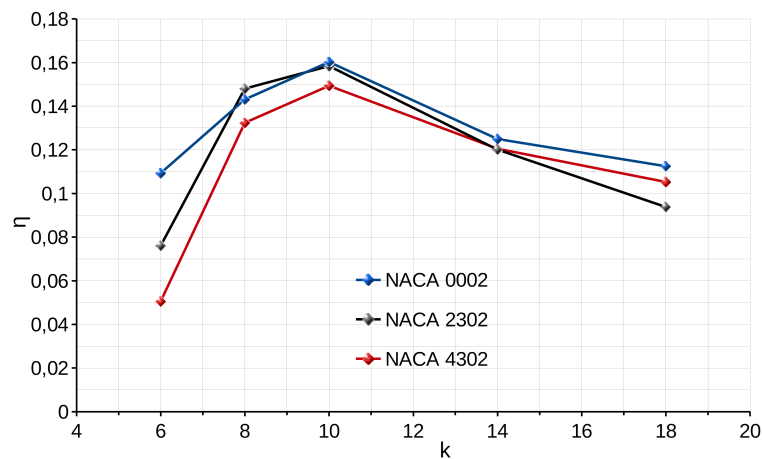


Figura 6.36: Comparación de eficiencias propulsivas en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002, 2302 y 4302 a $Re = 1100$.

Nuevamente, el coeficiente de tracción \bar{c}_t aumenta de manera exponencial en los tres casos, fig. 6.35. La transición de resistencia a propulsión ocurre en $k = 4,5$ aproximadamente para NACA 0002 y 2302. Luego para el NACA 4302 en $k = 5$ aproximadamente. De todos modos no existe una gran diferencia entre el 0002 y el 2302 y el perfil con mayor combadura NACA 4302 queda ligeramente por debajo de estos dos.

La eficiencia propulsiva η es menor para el perfil NACA 4302 respecto al 2302 y este último es menor respecto al 0002, fig. 6.36. Puede afirmarse que el agregado de combadura empeora de alguna manera el factor η , pero no en gran medida como lo hace con la relación de espesor.

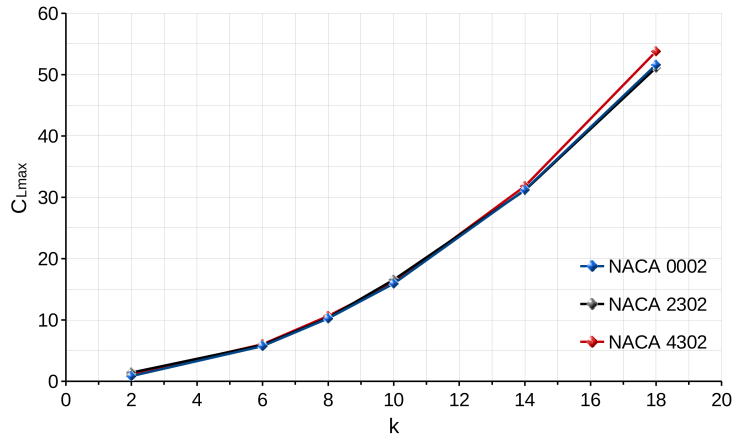


Figura 6.37: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0002, 2302 y 4302 a $R_e = 1100$.

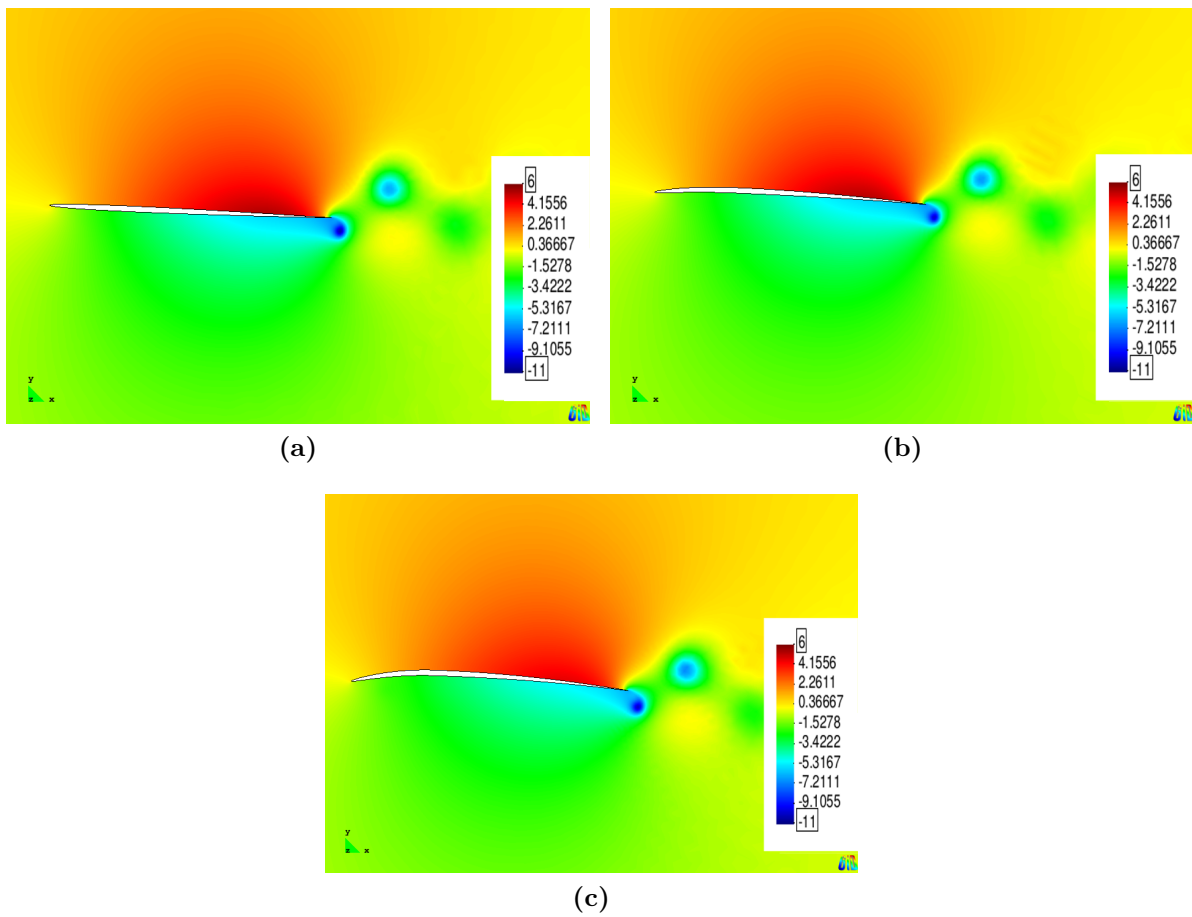


Figura 6.38: Contornos de presión para $k = 10$, $\alpha_a = 5^\circ$ y $R_e = 1100$ y $t = 1,54s$.(a) Perfil NACA 0002, (b) Perfil NACA 2302.(c) Perfil NACA 4302.

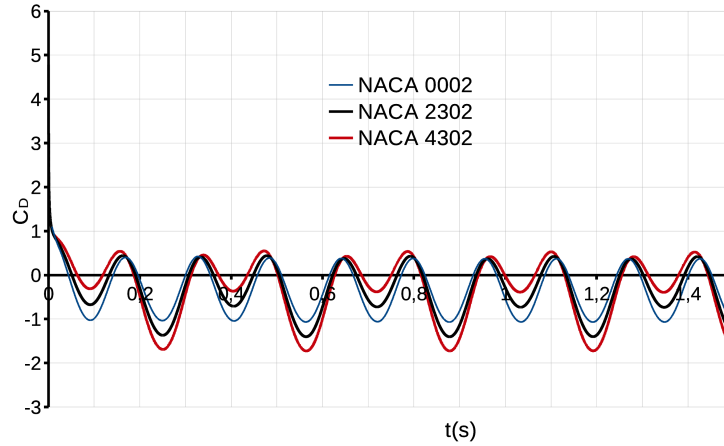


Figura 6.39: Comparación del coeficiente de resistencia en función del tiempo, para NACA 0002, 2302 y 4302 a $k = 10$, $R_e = 1100$, $\alpha_a = 5^\circ$.

En el coeficiente de sustentación máximo para cada ciclo de movimiento, prácticamente no existe diferencia alguna entre los perfiles, fig. 6.37.

Si en la fig. 6.38 se observan los contornos de presión sobre los perfiles para dicha condición y a un tiempo de $t = 1,54s$, existe una paridad aceptable en zonas aledañas a los cuerpos. Puede afirmarse entonces, que el efecto de combadura en la sustentación, se ve oculto por así decirlo, por el movimiento de cabeceo y el ángulo de ataque que va tomando el perfil en el tiempo.

No ocurre lo mismo con el coeficiente de resistencia o tracción, ya que la combadura influye sobre dicha curva eliminando la simetría, como puede verse en la fig. 6.39. Los perfiles combados muestran un pico más negativo y otro menos negativo respecto al perfil simétrico, separados por un ciclo de movimiento. El primer pico corresponde al fin de carrera a *cabrear*, dónde el vórtice desprendido de borde de fuga (TEV) es más intenso, lo que provoca que se alcancen valores de mayor tracción o menos resistencia. El segundo pico le corresponde al fin de carrera a *picar*, donde dicho vórtice es de menor intensidad, dejando como resultado una menor tracción o menos resistencia.

6.4 Movimiento vertical y de cabeceo combinado (*flapping*)

El siguiente escenario de interés, es producto del acoplamiento de los dos movimientos estudiados en las secciones previas. Se puede afirmar, que el *flapping* es el más representativo de alas batientes sumergidas en una corriente fluida.

Las principales variables involucradas son las frecuencias de cabeceo y de desplaza-

miento f_α y f_h , las amplitudes máximas α_a y h_a y el ángulo de fase existente entre ambos movimientos, φ . Por lo tanto las ecuaciones a las cuales responde esta sección son las ecs. 2.21, Sec. 2.2.5, (fig. 6.40).

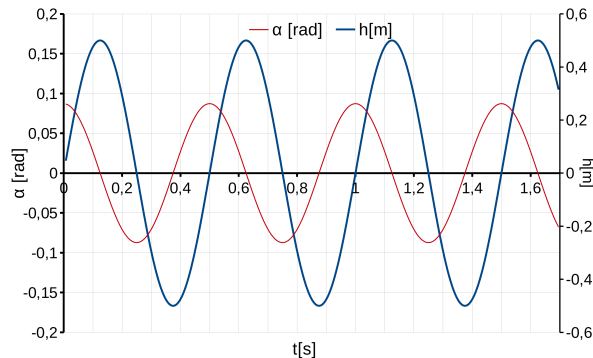


Figura 6.40: Movimiento combinado ejemplo. Con $f_\alpha = 2$, $f_h = 2$, $\alpha_a = 0,08726[rad]$, $\varphi = \pi/2$ y $h_a = 0,5[m]$.

El punto de pivot de los perfiles a analizar se ubica al 25 % de la cuerda.

6.4.1 Efecto de la amplitud de cabeceo o *pitching*

El primer análisis consiste en observar que ocurre con dos perfiles simétricos NACA 0004 y 0012 al variar la amplitud de cabeceo α_a en el rango $5^\circ < \alpha_a < 25^\circ$. Los parámetros de movimiento que se mantienen fijos son $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$ y el ángulo de fase $\varphi = \pi/2$. Además el número de Strouhal correspondiente a todo el estudio es $St = 0,3$.

El coeficiente de tracción se mantiene positivo en todos los casos simulados, es decir generando propulsión y no resistencia. En el perfil NACA 0012 el $\bar{c}t$ crece hasta tener su máximo $\bar{c}t = 0,429$ a una amplitud de $\alpha_a = 15^\circ$ y luego decae. En el perfil más delgado se alcanza un máximo $\bar{c}t = 0,455$ a $\alpha_a = 20^\circ$, fig. 6.41.

La eficiencia propulsiva aumenta con la amplitud angular en todo el rango estudiado, fig. 6.42, debido a que aumenta el coeficiente de tracción y disminuye el coeficiente de sustentación, lo que implica una menor potencia a suministrar. Los valores de eficiencia obtenidos son significativamente mayores a los obtenidos en movimiento vertical o *heaving* para el caso de $St = 0,3$, donde se encontraba el máximo de los dos perfiles estudiados, fig. 6.5. Si se comparan las dos geometrías analizadas en esta sección, el NACA 0012 posee una mayor eficiencia en la producción de tracción que el NACA 0004. Además para ángulos mayores que $\alpha_a = 25^\circ$ se entiende que se produce una caída en dichos valores, [30].

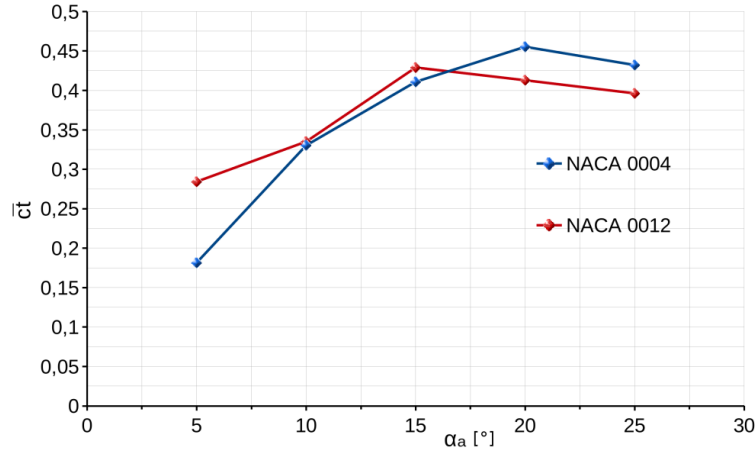


Figura 6.41: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $R_e = 1100$.

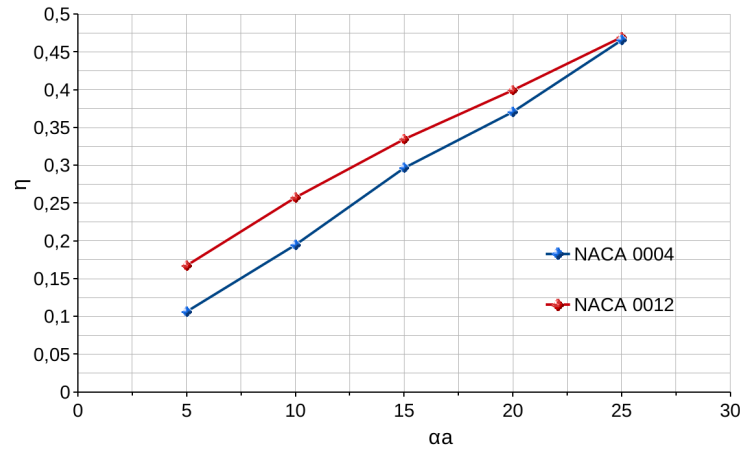


Figura 6.42: Comparación de la eficiencia propulsiva η en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $R_e = 1100$.

Los picos de sustentación máximo de cada ciclo de movimiento decrecen con el aumento de la amplitud de cabeceo debido que al mantener fija la amplitud y frecuencia del movimiento vertical, el ángulo de ataque relativo que ve el perfil respecto de la corriente libre disminuye con la amplitud de cabeceo (fig. 6.43). De la comparación entre ambos perfiles, se deduce que el más delgado NACA 0004 tiene mayores picos de sustentación que el perfil más grueso NACA 0012.

En la fig. 6.44 se presenta una comparación interesante utilizando los contornos de velocidad horizontal V_x , las topologías de estela y *flujo cercano al cuerpo* con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $R_e = 1100$ a un tiempo $t = 9,03[s]$ de simulación.

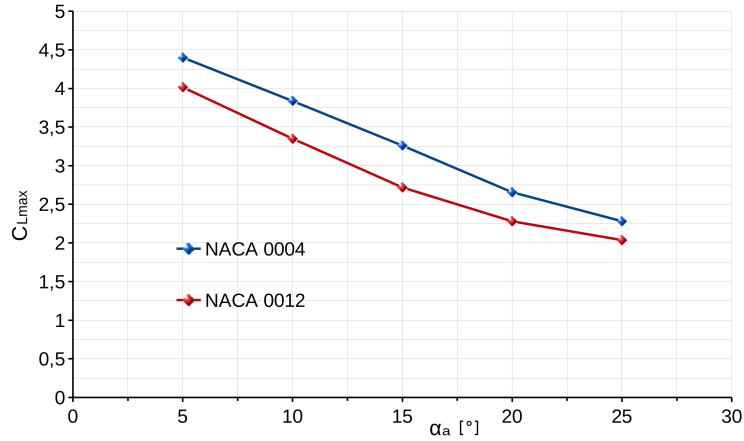


Figura 6.43: Comparación del coeficiente de sustentación máximo para cada ciclo, en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.

Dicha comparación convalida un poco lo que se decía antes sobre la influencia de la amplitud angular y su aporte al efecto propulsivo. La distancia de separación vertical de la calle de vórtices da una idea de este efecto y se ve como en las figs. 6.44b y 6.44d dicha distancia permanece mayor que en las figs. 6.44a y 6.44c.

Un segundo escenario a plantear, es realizar el mismo análisis con dos perfiles NACA serie 4 con diferente valor de combadura, a efectos de caracterizar la influencia de la misma en función de la variable de estudio.

El coeficiente de tracción presenta una leve mejoría con el agregado de combadura y el máximo se ubica en la misma posición que el perfil simétrico $\alpha_a = 20^\circ$, fig. 6.45. La eficiencia propulsiva también produce un aumento respecto al perfil sin combadura como puede verse en la fig.6.46. El coeficiente de sustentación máximo en cada ciclo de movimiento permanece casi idéntico en ambos perfiles, de modo que no vale la pena mostrarlo. Sí es relevante mencionar, que el efecto de la combadura se ve opacado por la cinemática del flujo sobre el perfil y por el LEV desprendido y sobre todo cuanto mayor son las amplitudes del movimiento.

6.4.2 Efecto de la amplitud de desplazamiento vertical o *heaving*

Otra variante que se puede estudiar, es observar que ocurre si se varía la amplitud del movimiento vertical h_a manteniendo los demás parámetros constantes. El rango de variación es $0,025 < h_a < 0,5$ con $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$. Además, dicho rango de estudio es equivalente a $0,05 < St < 1$ si se describe en función

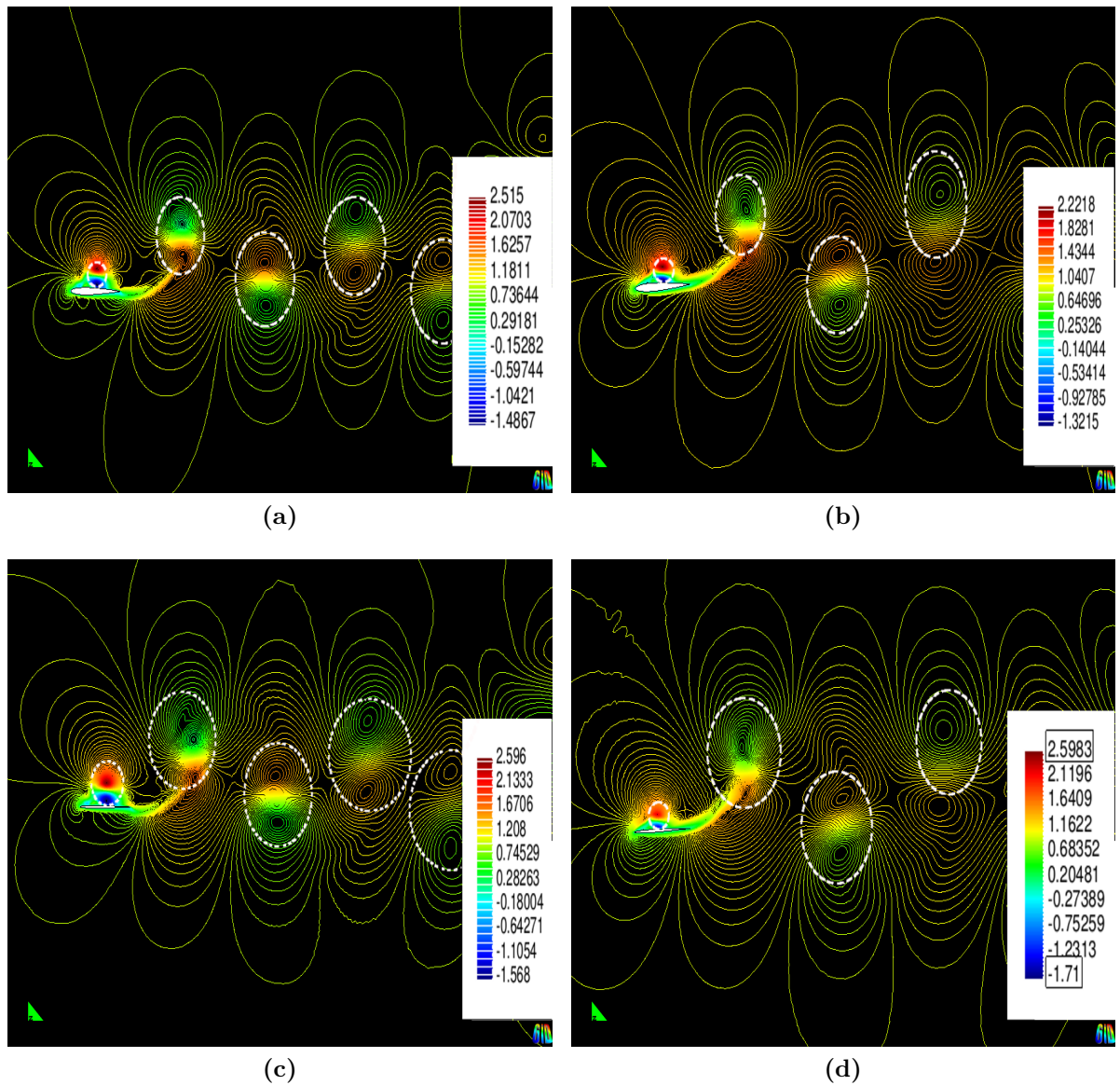


Figura 6.44: Contornos de velocidad en x para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.(a) Perfil NACA 0012 $\alpha_a = 5^\circ$, (b) Perfil NACA 0012 $\alpha_a = 15^\circ$.(c) Perfil NACA 0004 $\alpha_a = 5^\circ$.(d) Perfil NACA 0004 $\alpha_a = 20^\circ$.

del número de Strouhal.

El coeficiente de tracción $\bar{c}t$ varía en forma exponencial respecto a la amplitud h_a y en todos los casos de la región de estudio, existe propulsión. El NACA 0004 se encuentra por encima del NACA 0012 pero no con diferencias de notoriedad, fig. 6.47.

La eficiencia propulsiva presenta un máximo $\eta = 0,33$ en $h_a = 0,1$ para el NACA 0004 y un máximo $\eta = 0,23$ en $h_a = 0,2$ para el NACA 0012. Luego decrecen con un gradiente

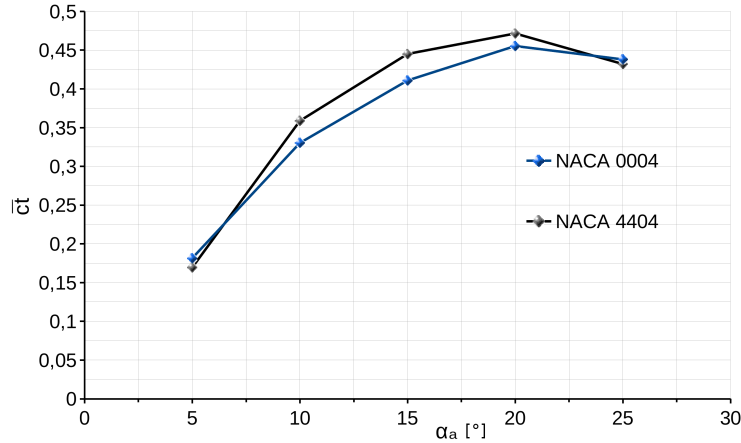


Figura 6.45: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 4404 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $R_e = 1100$.

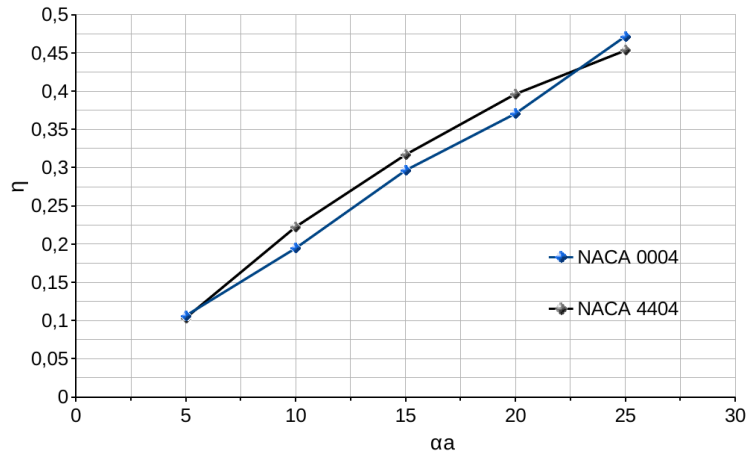


Figura 6.46: Comparación de la eficiencia propulsiva η en función de la amplitud de cabeceo α_a , para NACA 0004 y 4404 con $f_\alpha = 0,3$, $f_h = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$, $\varphi = \pi/2$ y $R_e = 1100$.

mayor en el perfil más delgado, fig. 6.48. El número de Strouhal correspondiente a dichos máximos es $St = 0,2$ y $St = 0,4$ respectivamente.

El coeficiente de sustentación máximo en cada ciclo de movimiento crece de manera exponencial con la amplitud h_a . Además, existe una leve caída en el mismo de $h_a = 0,025$ a $h_a = 0,1$, fig 6.49.

También se analizaron algunos casos de un perfil con valor positivo de combadura y los resultados se muestran a continuación.

Los valores del coeficiente de tracción del perfil NACA 4404 permanecen por debajo de los valores del perfil NACA 0004, fig. 6.50. La eficiencia propulsiva, fig. 6.51 también es

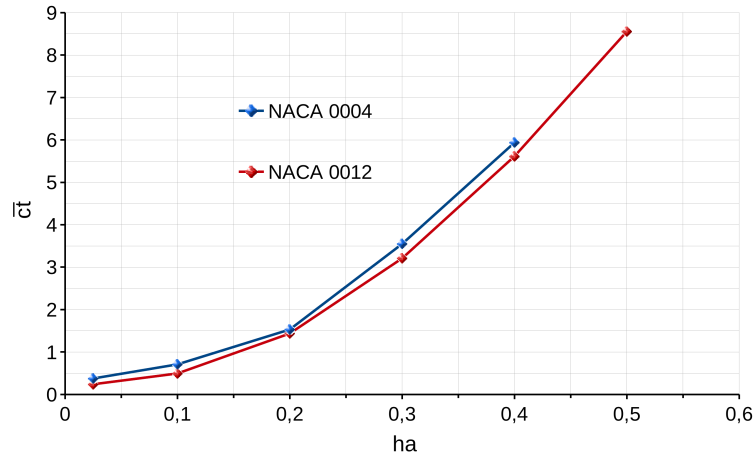


Figura 6.47: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 0012 a $R_e = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$.

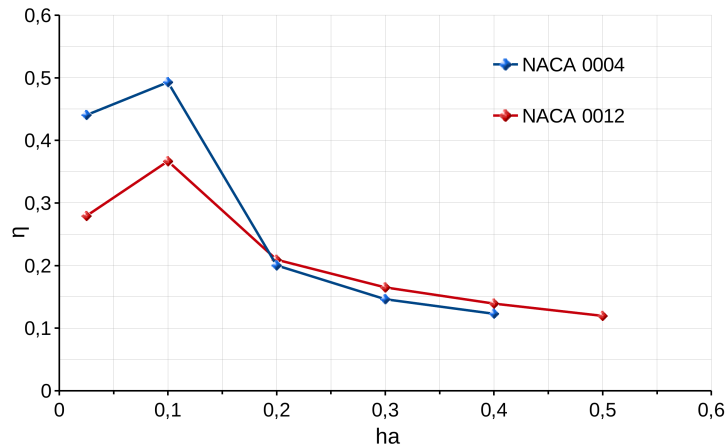


Figura 6.48: Comparación de eficiencias propulsivas en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 0012 a $R_e = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$.

mayor sobre el perfil simétrico y se encuentra en $h_a = 0,1$. El coeficiente de sustentación máximo en cada ciclo de movimiento, fig. 6.52 permanece similar en ambos perfiles a bajas amplitudes de movimiento y luego aumenta para el perfil NACA 0004.

6.4.3 Efecto de la frecuencia

En esta sección se analizan diferentes geometrías sometidas a diferentes frecuencias con amplitudes de movimiento y ángulo de fase fijos. El objetivo es observar que ocurre a altas frecuencias de movimiento, aunque se presupone que los resultados a obtener,

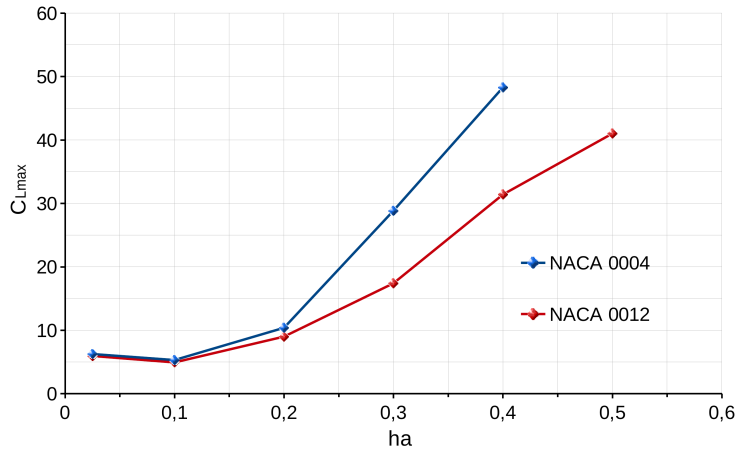


Figura 6.49: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 0012 a $R_e = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$.

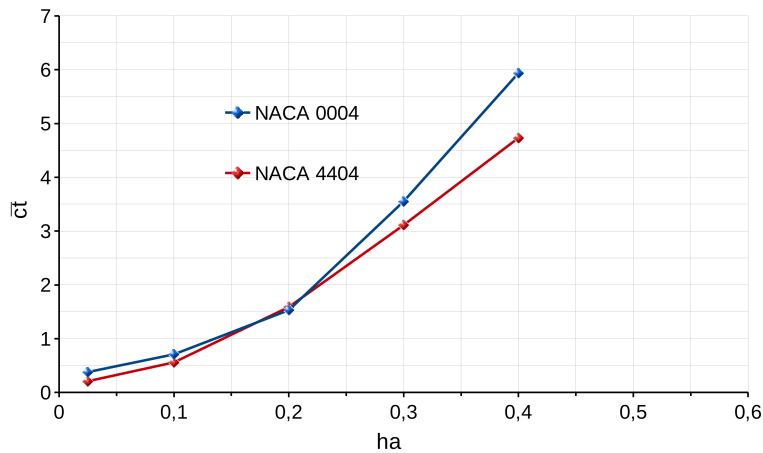


Figura 6.50: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 4404 a $R_e = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$.

pueden llegar a ser imprecisos debido a la complejidad del flujo que se desarrolla sobre los contornos del cuerpo. Cuando se trabaja con frecuencias mayores, los desprendimientos desde ambos bordes se transforman en fenómenos con comportamientos de difícil captura. Por ende con los recursos disponibles para este trabajo, cabe esperar algunas limitaciones.

Sobre dos perfiles NACA simétricos (0004 y 0012) se presentará el efecto de la variación de frecuencia ($f[1/s]$) en un rango de $0,5 < f < 6$, que equivale a un rango de frecuencia reducida $1,570 < k < 18,849$, manteniendo fija la amplitud angular $\alpha_a = 20^\circ$ y la amplitud de desplazamiento vertical $h_a = 0,5[m]$. Además la fase entre el

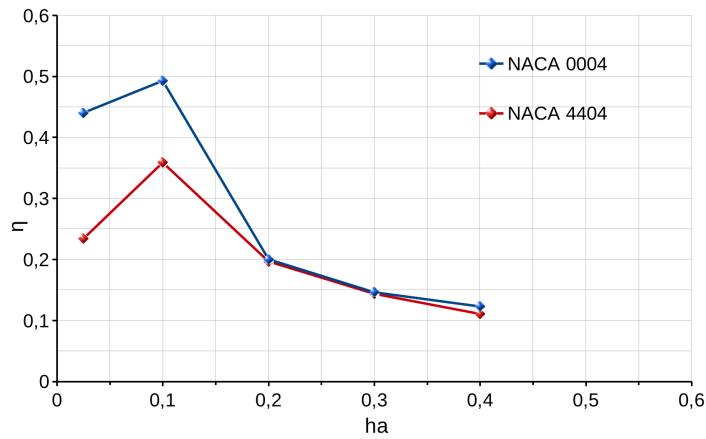


Figura 6.51: Comparación de eficiencias propulsivas en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$.

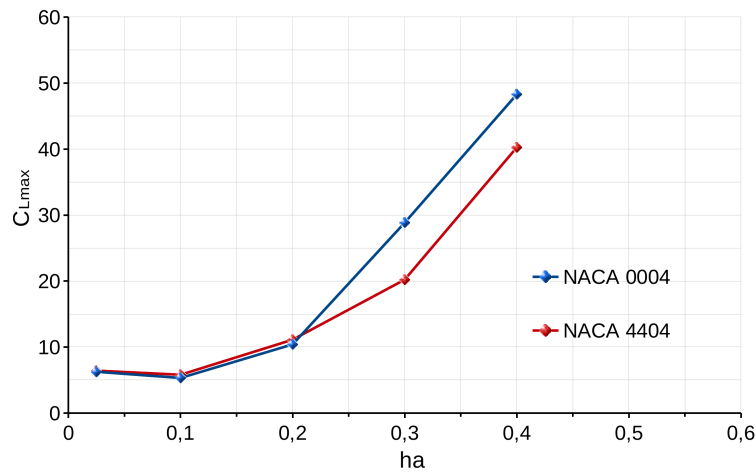


Figura 6.52: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la amplitud del movimiento vertical h_a , para NACA 0004 y 4404 a $Re = 1100$, $f_h = f_\alpha = 1$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $\varphi = \pi/2$.

movimiento vertical el cabeceo es $\varphi = \pi/2$ y el número de Reynolds igual a 1100.

La fig. 6.53 muestra que no se presentan diferencias entre ambos perfiles en el coeficiente de tracción y su aumento no es lineal con k .

Dentro del rango estudiado, sólo existe la generación de propulsión y los mayores valores calculados se encuentran en las menores frecuencias, más precisamente a $k = 1,57$ ($St = 0,5$). Si se comparan ambos perfiles, se aprecia una mayor eficiencia en el NACA 0012, al menos hasta una frecuencia $k = 9,42$, fig. 6.54.

El coeficiente de sustentación máximo en cada ciclo de movimiento tiene un compor-

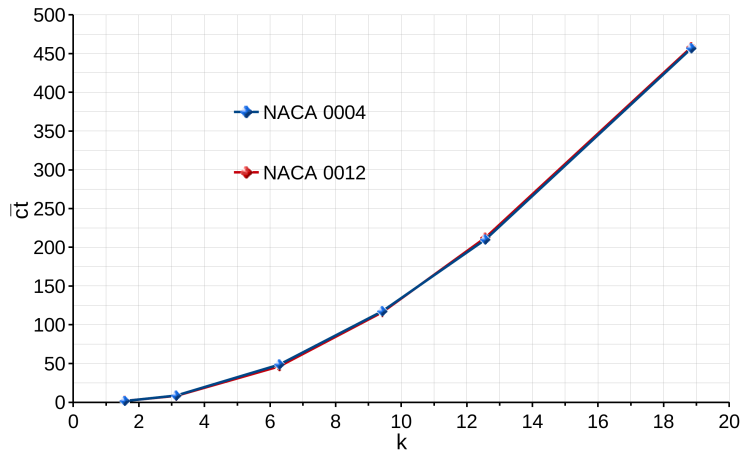


Figura 6.53: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0004 y 0012 a $R_e = 1100$, $\alpha_a = 20^\circ$, $h_a = 0,5[m]$ y $\varphi = \pi/2$.

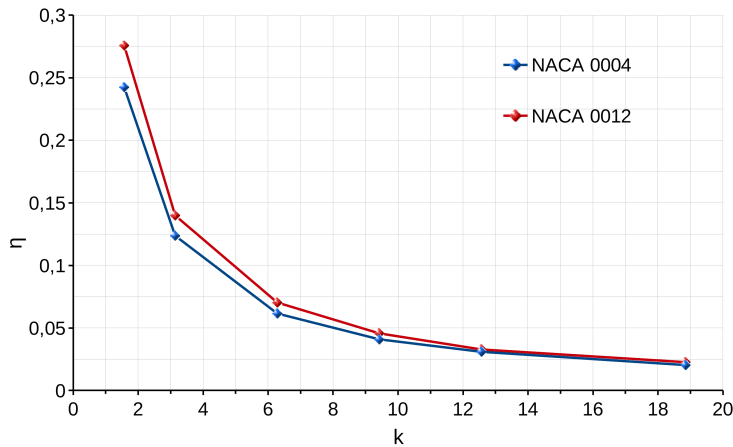


Figura 6.54: Comparación de eficiencias propulsivas en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0004 y 0012 a $R_e = 1100$, $\alpha_a = 20^\circ$, $h_a = 0,5[m]$ y $\varphi = \pi/2$.

tamiento no lineal en ambas geometrías, tal como ocurre con el coeficiente de tracción, fig. 6.55. Se reitera que para las frecuencias más altas, no se puede saber a ciencia cierta si el mayor coeficiente obtenido es un máximo, ya que por las irregularidades presentes en el flujo, el tiempo de cómputo es tan elevado que resulta impracticable lograr un estado cuasi estacionario. No obstante se puede observar que los mayores valores se encuentran en el perfil más delgado NACA 0004.

Otro fenómeno que está presente, es el vórtice de borde de ataque (LEV) cuyo su efecto no sería tan impactante como en *heaving*. La inclusión del ángulo de incidencia en el movimiento, hace que la convección del LEV hacia la estela se realice con mayor

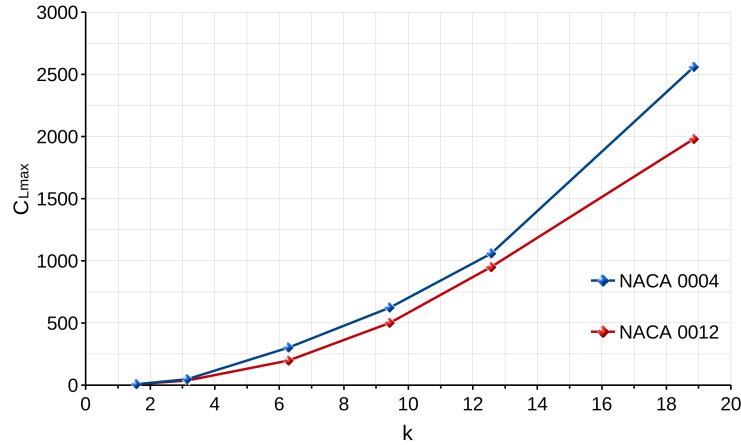


Figura 6.55: Comparación del coeficiente de sustentación máximo en función de la frecuencia reducida k , para NACA 0004 y 0012 a $R_e = 1100$, $\alpha_a = 20^\circ$, $h_a = 0,5[m]$ y $\varphi = \pi/2$.

facilidad permitiendo alcanzar mejores prestaciones propulsivas, sobre todo en las frecuencias más bajas. Luego en las frecuencias más altas, el LEV permanece más tiempo próximo a la nariz del perfil, impidiendo el desarrollo limpio del flujo hacia el borde de fuga, lo cual tiende a perjudicar la eficiencia. De todos modos, los bajos valores de η no sólo se debe a las frecuencias altas, si no que también influyen los altos valores de C_L que se obtienen y que de alguna manera, la potencia suministrada debe compensar.

6.4.4 Variación de la amplitud de desplazamiento vertical o *heaving* y su frecuencia manteniendo fijo el número de Strouhal

Un caso complementario a los dos anteriores es variar ambos parámetros (frecuencia y amplitud de movimiento vertical) simultáneamente, de tal manera que el número de Strouhal se mantenga constante $St = 0,3$ (ec. 2.8). El rango de variación para la frecuencia es $0,1666 < f_h = f_\alpha < 1,5$ y para la amplitud vertical $0,1 < h_a < 0,9$. Luego los parámetros que se mantienen fijos son $\varphi = \pi/2$, $\alpha_a = 15^\circ$ y $R_e = 1100$.

El coeficiente de tracción presenta su máximo a bajas amplitudes de movimiento vertical y no existe en el rango estudiado algún caso donde se produzca resistencia. Lo interesante es la caída abrupta de propulsión entre $0,1 < h_a < 0,3$ ó $0,5 < f_a < 1,5$, para luego mantenerse aproximadamente constante, fig. 6.56.

La eficiencia propulsiva en el perfil el NACA 0012 presenta su máximo en $h_a = 0,5$, y no existe demasiada diferencia con respecto a los demás valores, permaneciendo más bien constantes a partir de dicho máximo, fig. 6.57. Para el caso del NACA 0004, los

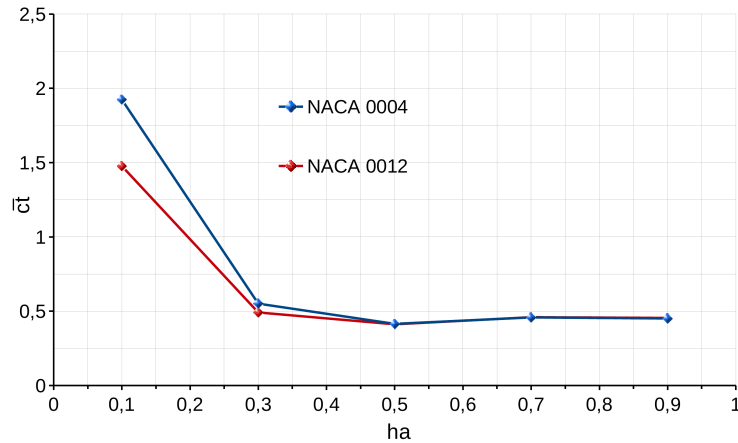


Figura 6.56: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función de la amplitud h_a y frecuencia f_a vertical manteniendo $St = 0,3$ para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = f_a$, $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.

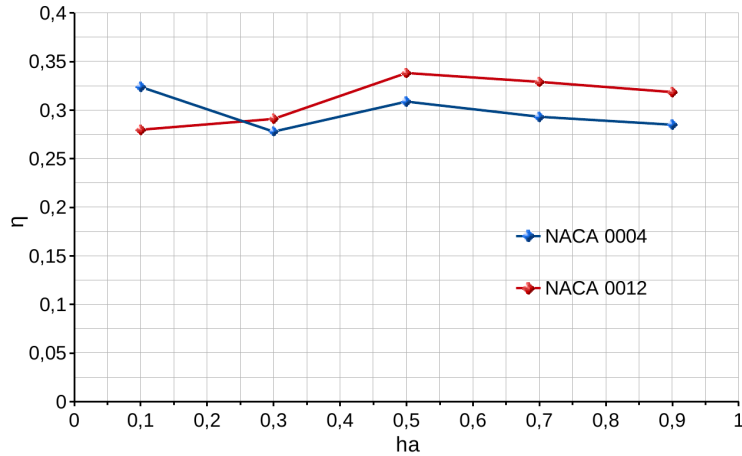


Figura 6.57: Comparación de la eficiencia propulsiva η en función de la amplitud h_a y frecuencia f_a vertical manteniendo $St = 0,3$ para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = f_a$, $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.

valores de eficiencia también permanecen aproximadamente constantes iguales a $\eta = 0,3$.

La curva del coeficiente de sustentación máximo para cada ciclo, fig. 6.58, tiene un comportamiento similar a la del coeficiente de tracción, donde se manifiestan grandes diferencias a bajas amplitudes de movimiento vertical.

Con el objetivo de profundizar un poco más sobre los resultados, es interesante observar que ocurre con el flujo en algunos casos, fig. 6.59. Para ello se comparan a ambos perfiles con amplitudes $h_a = 0,1$ y $h_a = 0,5$. En los casos de mayor frecuencia y menor amplitud, (figs. 6.59a y 6.59c), la velocidad presente en la estela es mayor, lo que indica

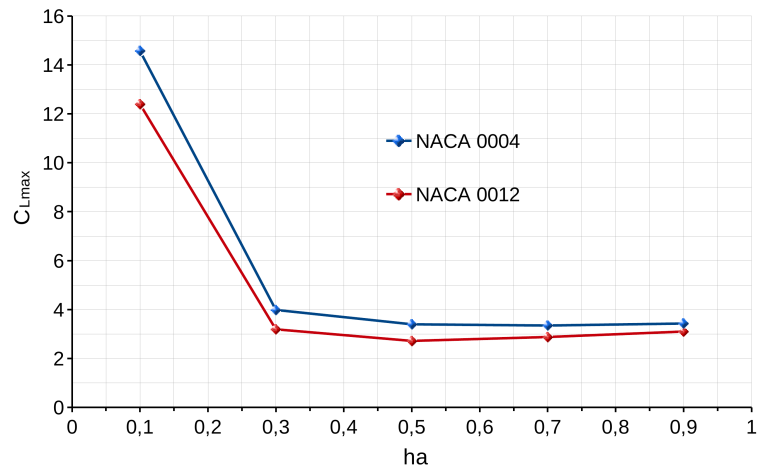


Figura 6.58: Comparación del coeficiente de sustentación máximo para cada ciclo, en función de la amplitud h_a y frecuencia f_a vertical manteniendo $St = 0,3$ para NACA 0004 y 0012 con $f_\alpha = f_a$, $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 1100$.

mayor propulsión. Además, en dichos casos casi no existe desprendimiento de flujo desde el borde de ataque (LEV), al contrario de lo que ocurre con el caso de amplitud $h_a = 0,5$ (figs. 6.59b y 6.59d), donde la intensidad de dicho vórtice es mucho mayor.

6.5 Movimiento vertical y de cabeceo combinado sin la presencia de corriente libre (*hovering*)

En el Cap. 2 se detallaron las características de este tipo de vuelo desarrollado por insectos y distintas aves. Además es factible de reproducir en microvehículos aéreos.

Como ya se mencionara, en la naturaleza se encuentran dos tipos de vuelos *hovering*, el que permite mantener al cuerpo del animal suspendido en una posición, o bien aquel que permite realizar una maniobra a partir de dicha posición. Entre ellos cabe señalar el vuelo *hovering* simétrico, específico de insectos y aves pequeñas¹ y el vuelo *hovering* asimétrico encontrado en insectos de dimensiones considerables y en aves de mediano y gran tamaño.

Los mecanismos de mayor relevancia que se detectan al intentar analizar el vuelo *hovering* son:

- El aprovechamiento de la pérdida dinámica y la subsecuente generación de sustentación adicional.

¹El colibrí es el ave por excelencia capaz de ejercer el vuelo *hovering* simétrico, con el fin de mantener su cuerpo suspendido en una posición fija en el espacio por un tiempo considerable.

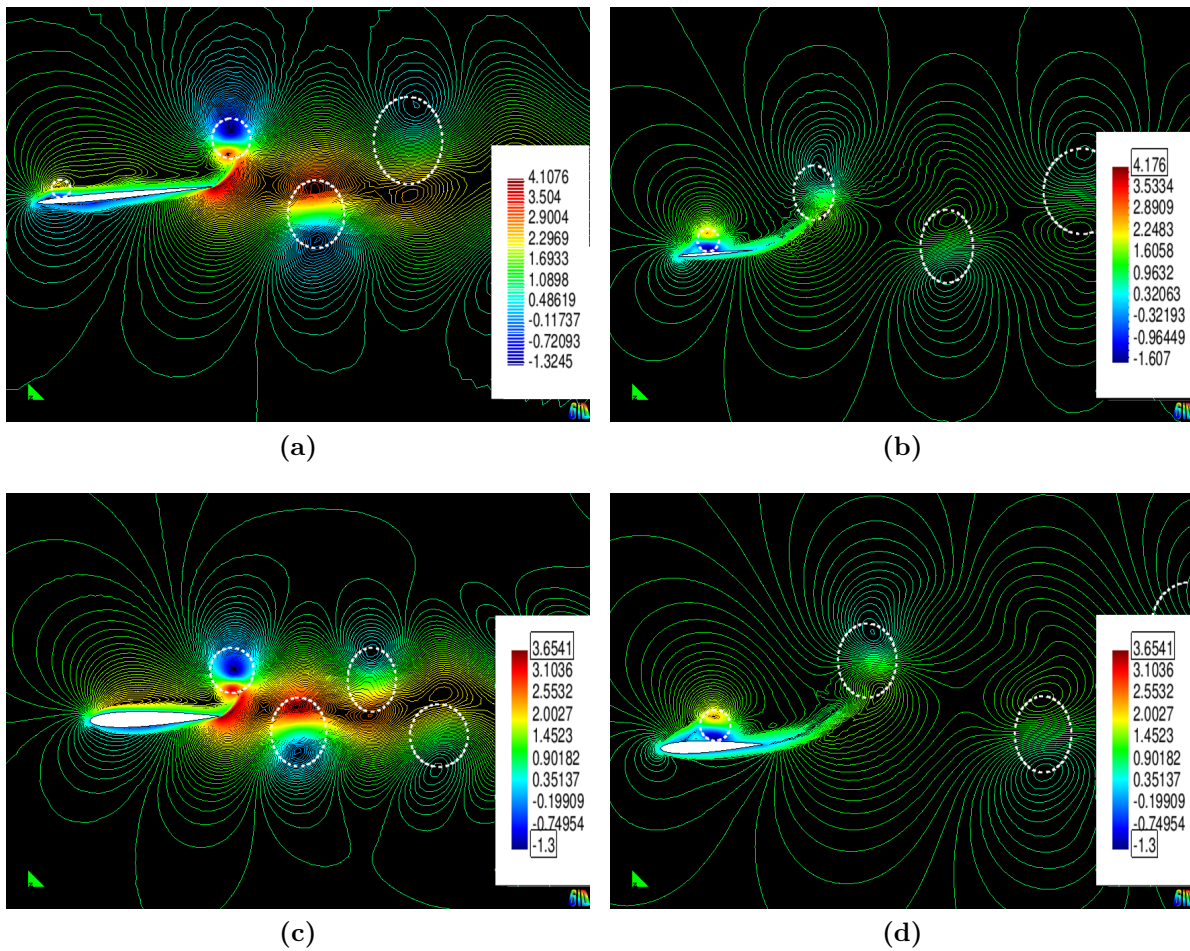


Figura 6.59: Contornos de velocidad en x para NACA 0004 y 0012 con $\alpha_a = 15^\circ$, $\varphi = \pi/2$, $St = 0,3$ y $Re = 1100$.(a) Perfil NACA 0004 $f_\alpha = f_a = 1,5$, $h_a = 0,1[m]$ (b) Perfil NACA 0004 $f_\alpha = f_a = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$.(c) Perfil NACA 0012 $f_\alpha = f_a = 1,5$, $h_a = 0,1[m]$.(d) Perfil NACA 0012 $f_\alpha = f_a = 0,3$, $h_a = 0,5[m]$.

- La captura de la estela de la carrera anterior, es el mecanismo por el cual se puede lograr un incremento de la sustentación media. Los vórtices desprendidos antes de difundirse con el tiempo, pueden ser capturados por el borde de ataque del perfil y generar un cambio de geometría efectiva. Este efecto no es tan simple de realizar, ya que debe tener una sincronización adecuada entre la captura y desprendimiento de vórtices y el movimiento inducido en la geometría.
- El giro del perfil durante los finales de carrera (*upstroke* y *downstroke*) también induce un incremento de sustentación. Puede interpretarse como un efecto magnus sobre un cilindro giratorio en una corriente fluida.

Un problema que se afronta en este tipo de vuelo, es que las condiciones de borde aceptadas por el software y descritas en los capítulos 3 y 4, no son las más adecuadas para el problema en cuestión. La condición de flujo nulo en todo el dominio es la condición de borde a establecer y la dificultad radica sobre que imposición debe colocarse sobre los contornos de dicho dominio.

Para subsanar esto existen dos caminos, el primero es colocar sobre dichos contornos condiciones tipo absorbentes, es decir que tienen la capacidad de predecir si una perturbación puede dejar el dominio y también volver a ingresar. El segundo es utilizar un dominio suficientemente amplio y difusivo para que en el tiempo de simulación, la perturbación no alcance los contornos del mismo y las condiciones allí impuestas no tengan efecto alguno sobre el resultado.

En base a la experiencia adquirida con casos de flujo inestacionario ya simulados, se podría decir que en la mayoría de dichos casos, las perturbaciones del flujo causadas por el cuerpo no alcanzan los contornos del dominio utilizado. Se estima que no queda otra alternativa que utilizar dimensiones suficientemente grandes en el dominio computacional.

6.5.1 *Hovering* simétrico

Como se mencionó, este tipo de vuelo es desarrollado por insectos y aves pequeñas con el sólo fin de generar sustentación sin desplazamiento. La potencia que demanda mantener este tipo de vuelo en relación al tamaño y masa del cuerpo, no permite que aves de gran tamaño sean capaces de sostener dicho vuelo por un tiempo muy prolongado. Por ende el régimen de aplicación es para números de Reynolds extremadamente bajos desde el punto de vista aeronáutico.

El dominio representativo del problema puede verse en la fig. 6.60, con $c = 1$ como la cuerda del perfil.

El primer estudio radica en determinar el comportamiento del flujo y los coeficientes aerodinámicos tomando como variable el número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 con una cinemática sinusoidal similar a la que manifiesta la fig. 6.40. El rango variable de Reynolds es $100 < R_e < 1000$, el cual se determina mediante la ec. 2.7, ya que no existe velocidad de la corriente libre, siendo el parámetro variable la viscosidad dinámica μ . Además se fija un valor de frecuencia reducida $k = 1/2$ (ec. 2.11), un ángulo de fase $\varphi = \pi/2$ y las frecuencias $f_\alpha = 0,75$ y $f_h = 0,75$. El punto de pivot de los perfiles a analizar se ubica al 25 % de la cuerda.

El coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función del número de Reynolds para

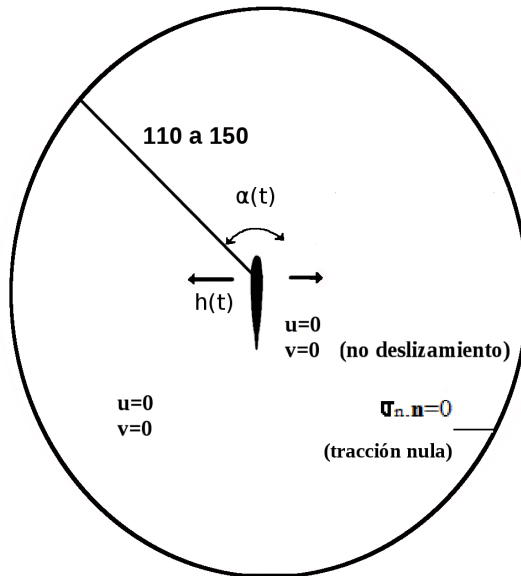


Figura 6.60: Dominio computacional y condiciones de contorno para vuelo *hovering* simétrico.

dos amplitudes angulares $\alpha_a = 10^\circ$ y $\alpha_a = 20^\circ$ puede verse en la fig. 6.61.

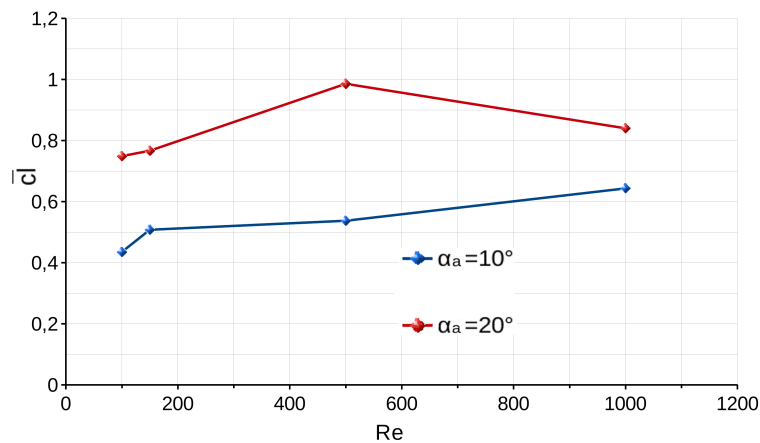


Figura 6.61: Comparación del coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* simétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$.

Si se compara la variación de cada ángulo con el Re , se ve que no presentan un cambio importante del coeficiente de sustentación medio generado, más bien permanecen dentro de un rango estrecho. Con el aumento de la amplitud desde $\alpha_a = 10^\circ$ a $\alpha_a = 20^\circ$, se consigue un considerable aumento de \bar{c}_l .

En definitiva, el efecto propulsivo que se tenía en los casos anteriores con presencia de corriente libre, es el mismo que se presenta en esta cinemática, sólo que se transforma

en sustentación ya que es el objetivo del *hovering*. La convección del flujo hacia la estela se torna ahora más compleja, ya que no se cuenta con una corriente libre que lo facilite. Este fenómeno se tratará más adelante.

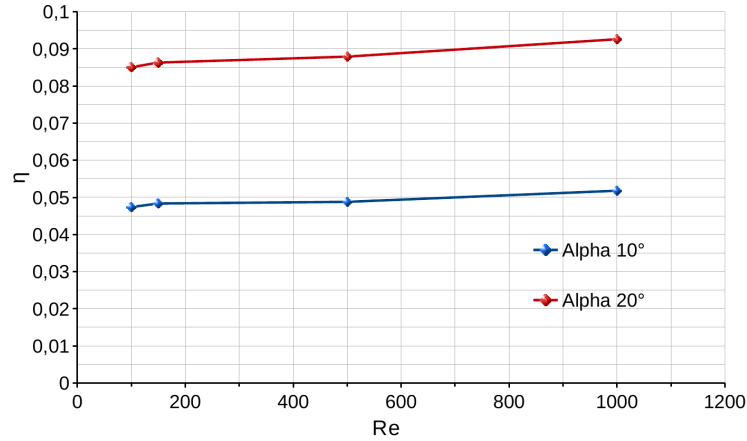


Figura 6.62: Comparación de la eficiencia propulsiva en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* simétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$.

Lo que sí presenta mayor relevancia es la eficiencia, donde esta última se determina con la ec. 2.20 y la ec. 2.16 donde se reemplaza la sustentación por la resistencia.

Dicho coeficiente se puede ver en la fig. 6.62, en la que se mantiene aproximadamente constante, además con $\alpha_a = 20^\circ$ se consiguen mayores valores que con $\alpha_a = 10^\circ$.

Para una mejor comprensión del vuelo *hovering*, se muestra una secuencia en el tiempo de la simulación a $Re = 150$ y $\alpha_a = 20^\circ$, fig. 6.63. Este análisis de tipo puntual también puede ser complementado con la fig. 6.64, donde cada pico de la curva de sustentación a partir de un tiempo $t = 0,6[s]$ hasta $t = 3,34[s]$ se corresponde con la secuencia de la fig. 6.63.

En la fig. 6.63a se observa que el perfil se encuentra en una carrera hacia la izquierda luego de haber partido de una posición central y haber recorrido media carrera hacia la derecha y media carrera hacia la izquierda. Esta se corresponde con un tiempo $t = 0,6[s]$ donde el perfil alcanza un pico de sustentación. En el flujo pueden verse ambos vórtices desprendidos desde el borde de fuga y desde el borde de ataque, además de que los vórtices de arranque ya fueron capturados por el flujo circundante al cuerpo y trasladados a la estela en la zona derecha del perfil. Posteriormente, el perfil llega al final de la misma carrera fig. 6.63b a un tiempo $t = 0,92[s]$, dejando dos vórtices desprendidos del cuerpo suspendidos en el medio fluido. A esta posición le corresponde el pico negativo de sustentación ubicado en dicho tiempo.

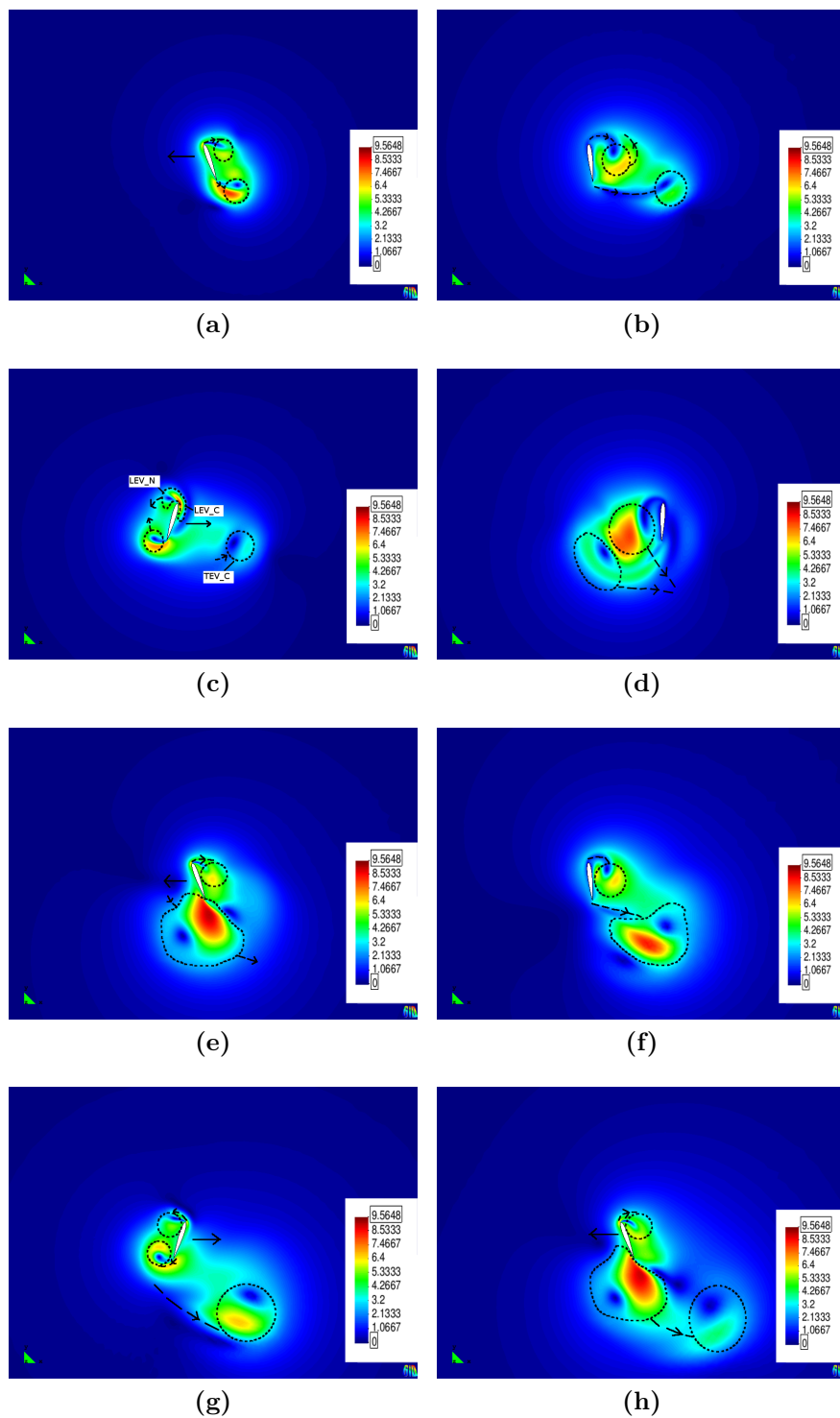


Figura 6.63: Contornos de velocidad para la visualización de topología de estela en NACA 0012 con $\alpha_a = 20^\circ$, $k = 1/2$, $\varphi = \pi/2$ y $Re = 150$. (a) $t = 0,60[s]$.(b) $t = 0,92[s]$.(c) $t = 1,20[s]$.(d) $t = 1,64[s]$.(e) $t = 2,00[s]$.(f) $t = 2,26[s]$.(g) $t = 2,58[s]$.(h) $t = 3,34[s]$.

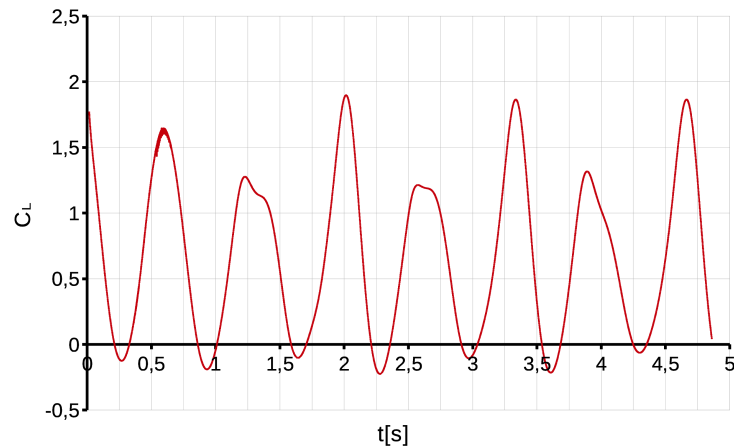


Figura 6.64: Coeficiente de sustentación en función del tiempo sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* simétrico a $R_e = 150$ con $\alpha_a = 20^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $k = 1/2$.

En la siguiente carrera hacia la derecha $t = 1,20[s]$, fig. 6.63c, el perfil captura primero el vórtice desprendido de borde de ataque (LEV_C), de la carrera anterior, mientras que a su vez genera por el movimiento otro vórtice (LEV_N) y por último captura al vórtice desprendido de borde de fuga (TEV_C). El pico de sustentación que le corresponde a dicho tiempo puede verse en la fig.6.64, donde existe una diferencia de presión entre el extradós y el intradós temporarios, generadas por la baja presión de ambos vórtices y la alta presión de impacto respectivamente. En el final de dicha carrera $t = 1,64[s]$, fig. 6.63d nuevamente ocurre la captura total de estela y puede verse dos grandes vórtices a la izquierda de la geometría del perfil. En esta posición, el pico de sustentación es negativo.

Nuevamente se emprende una carrera hacia la izquierda, $t = 2,00[s]$, fig. 6.63e, en la que los vórtices o estela creada en movimientos pasados se convectan hacia el borde de fuga del perfil, dejando una zona favorable sobre el intradós temporal para que se genere una zona de alta presión. Además, de manera simultánea se genera un LEV que permite obtener bajos valores de presión sobre el extradós momentáneo, lo que nos da como resultado un pico mayor al que se obtenía en la carrera hacia la derecha, fig. 6.64. Al final de esta carrera y en la siguiente hacia la derecha figs. 6.63f y 6.63g ya existe una estela fuera del plano de movimiento que se difunde en el medio fluido y por ende el perfil encuentra un flujo sin alteraciones provocando un menor pico de sustentación a $t = 2,58[s]$.

Por último, se hace referencia a la siguiente carrera hacia la izquierda $t = 3,34[s]$, fig. 6.63h, donde existe un nuevo conveccionado de vórtices LEV y TEV, que generan un nuevo

pico máximo de sustentación.

El comportamiento para $R_e = 100$ y $R_e = 500$, es similar al caso planteado. Para $R_e = 1000$ difiere un poco la topología debido a la difusión más lenta de vórtices y estela, con un comportamiento más irregular.

En el vuelo de insectos se encuentran cinemáticas diferentes a las planteadas anteriormente [7], [65],[46] por lo cual, es de interés realizar un análisis con una combinación diferente de movimientos periódicos. En este trabajo se estudia una cinemática que responde a una onda tipo diente de sierra para el desplazamiento $h(t)$ y una onda de tipo escalón para el ángulo de cabeceo $\alpha(t)$, fig. 6.65. Las ecuaciones correspondientes a dichas curvas se escriben a continuación y se las denominará como cinemática alternativa:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{h_a}{\sin^{-1}(0,8)} \sin^{-1}(0,8 \sin(2\pi f_h t)) \\ \alpha(t) &= \frac{\alpha_a}{\tanh^{-1}(3)} \tanh^{-1}(3 \sin(2\pi f_\alpha t + \varphi)) \end{aligned} \quad (6.1)$$

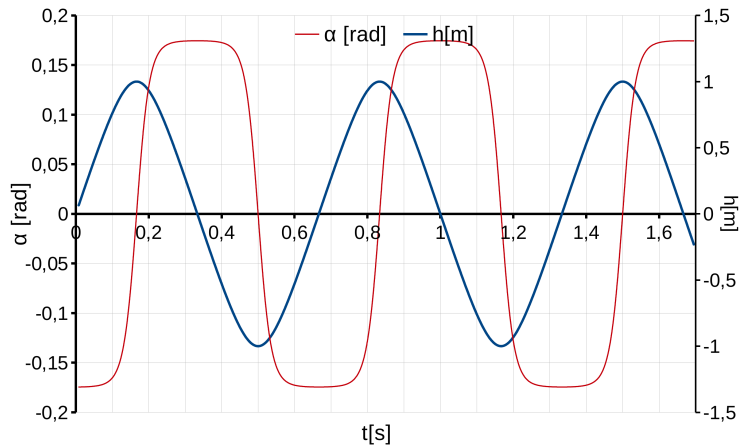


Figura 6.65: Movimiento combinado alternativo ejemplo. Con $f_\alpha = 0,75$, $f_h = 0,75$, $\alpha_a = 0,1745[rad] = 10^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $h_a = 1[m]$.

El coeficiente de sustentación medio para $\alpha_a = 10^\circ$ tiene un comportamiento similar a la cinemática anterior, mejorando un poco el valor para Reynolds igual a 500. En $\alpha_a = 20^\circ$ se mantiene constante alrededor de $\bar{c}_l = 0,78$, lo que empeora un poco respecto a los valores anteriores para Reynolds 500 y 1000, fig. 6.66 vs. fig. 6.61.

La eficiencia propulsiva también presenta un comportamiento similar al caso anterior, manteniendo un valor casi constante aunque es superior para ambas amplitudes angulares fig. 6.67 vs. 6.62. Esto indica que se necesita suministrar menos potencia para conseguir el mismo coeficiente de sustentación respecto de una cinemática sinusoidal.

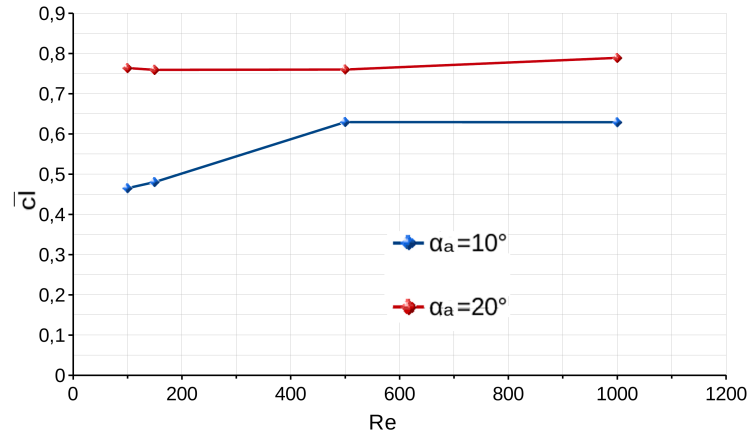


Figura 6.66: Comparación del coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* simétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$.

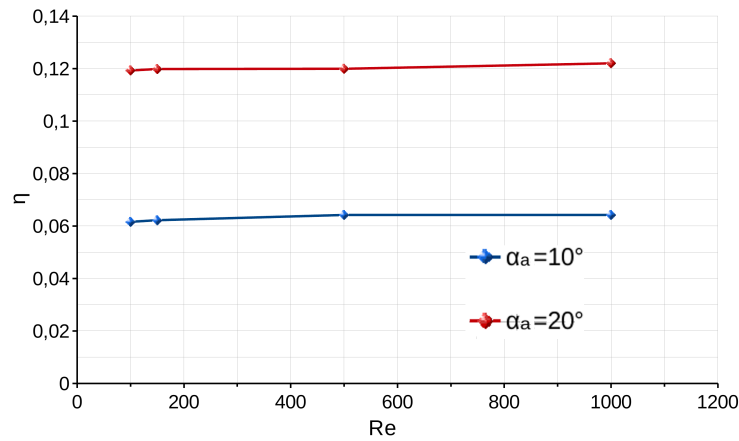


Figura 6.67: Comparación de la eficiencia propulsiva en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* simétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$.

Finalmente, se comparan las curvas de sustentación correspondientes a las dos cinemáticas estudiadas para el caso de $\alpha_a = 20^\circ$ y $Re = 150$, fig. 6.68. Es interesante destacar que si bien los picos de sustentación alcanzados en la curva sinusoidal son mayores a los obtenidos en la cinemática alternativa, el promedio \bar{c}_l de esta última permanece por encima.

6.5.2 *Hovering* asimétrico

Este tipo de vuelo es el que se observa comunmente en aves al realizar una aproximación a la superficie donde va a posarse. El objetivo es mantener el vuelo suspendido

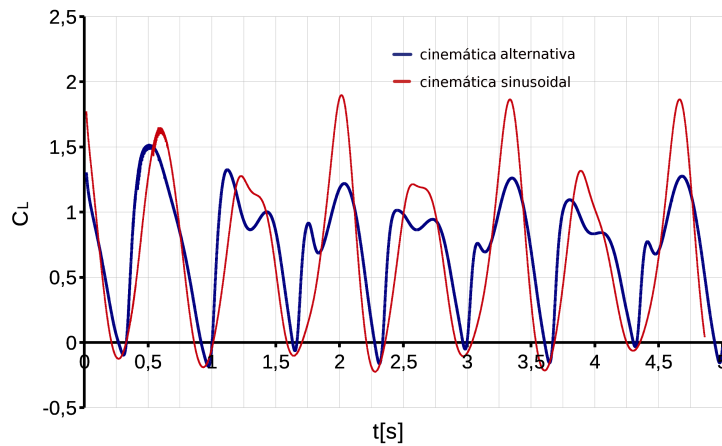


Figura 6.68: Comparación del coeficiente de sustentación en función del tiempo sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* simétrico para dos cinemáticas (sinusoidal y alternativa) a $R_e = 150$ con $\alpha_a = 20^\circ$, $\varphi = \pi/2$ y $k = 1/2$.

en una posición por unos segundos, para luego asentarse de manera suave.

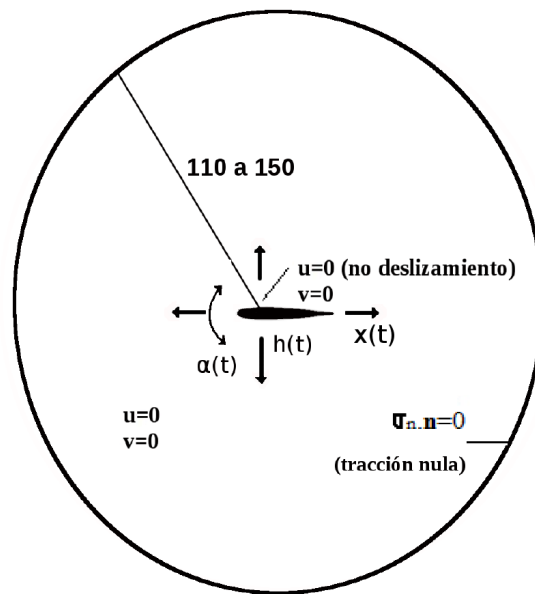


Figura 6.69: Dominio computacional y condiciones de contorno para vuelo *hovering* asimétrico.

El desarrollo completo de este fenómeno se da en tres dimensiones como se vio en el Cap. 2. De todos modos resulta interesante el planteo bidimensional, puesto que nos permite observar como se da el movimiento del flujo de una forma simple.

El dominio representativo del problema puede verse en la fig. 6.69, con $c = 1$ como la cuerda del perfil.

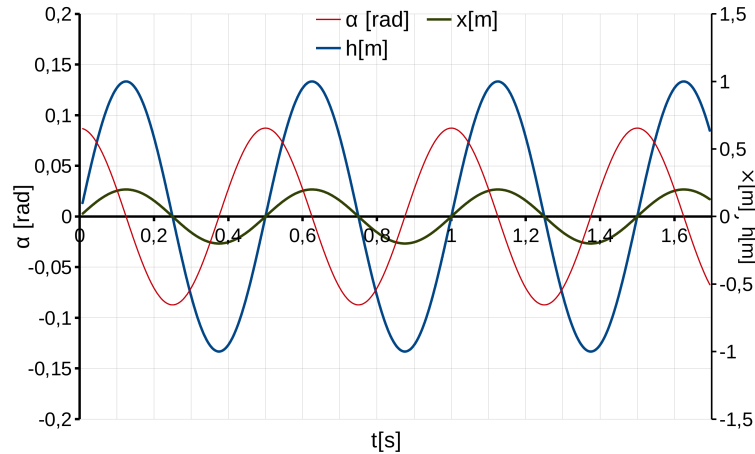


Figura 6.70: Movimiento combinado ejemplo. Con $f_\alpha = 2$, $f_h = 2, f_x = 2$, $\alpha_a = 0,08726[rad] = 5^\circ$, $\varphi = \pi/2$, $h_a = 0,5[m]$ y $h_x = 0,2[m]$.

Al igual que para vuelo suspendido simétrico, el estudio radica en determinar el comportamiento del flujo y los coeficientes aerodinámicos tomando como variable el número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 con una cinemática sinusoidal similar a la que se presenta en la fig. 6.70. El rango variable de Reynolds es $150 < Re < 5000$ y se determina mediante la ec. 2.7, ya que no existe velocidad de corriente libre siendo el parámetro variable la viscosidad. Además se fija un valor de frecuencia reducida $k = 1/2$ (ec. 2.11), un ángulo de fase $\varphi = \pi/2$ y las frecuencias $f_\alpha = f_h = f_x = 0,75$. El punto de pivot de los perfiles se ubica al 25% de la cuerda.

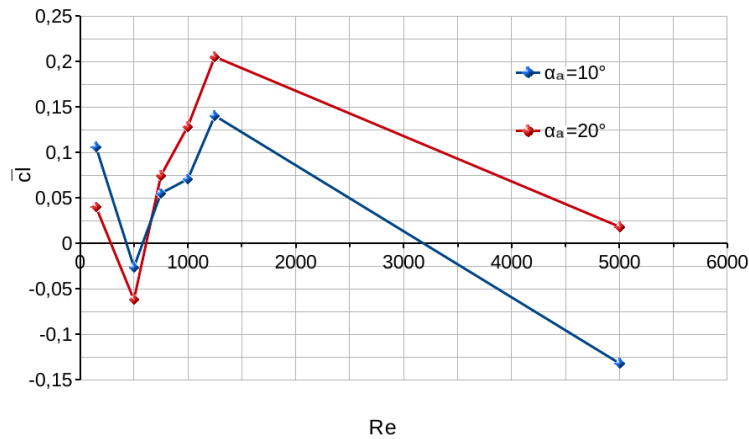


Figura 6.71: Comparación del coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* asimétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$.

El coeficiente de sustentación promedio \bar{c}_l para cada número de Reynolds tiene un comportamiento como el presentado en la fig. 6.71. A $Re = 150$ es mayor para una

amplitud de cabeceo $\alpha_a = 10^\circ$ y luego a partir de $Re = 500$ decae a valores negativos y algo semejante ocurre con $\alpha_a = 20^\circ$. Luego se tiene un máximo a $Re = 1250$ para la mayor amplitud y aparentemente decaen sobre $Re = 5000$. No se hicieron estudios para determinar exactamente lo que ocurre en el intervalo de $1250 < Re < 5000$. De todos modos es de hacer notar que el análisis es realizado a un sólo valor común de frecuencia en los tres casos, lo cual no garantiza un panorama completo del fenómeno. Para tener un mapeo más general se debería hacer un barrido de combinaciones de parámetros, lo cual trasciende el alcance de la tesis.

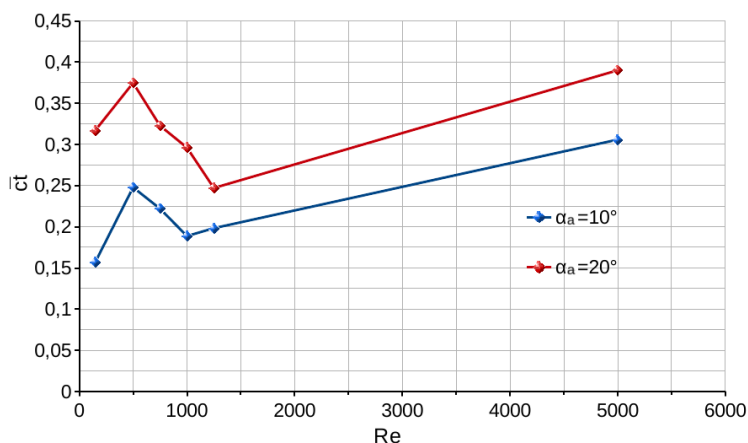


Figura 6.72: Comparación del coeficiente de tracción promedio \bar{c}_t en función del número de Reynolds sobre un perfil NACA 0012 en vuelo *hovering* asimétrico con $k = 1/2$ y $\varphi = \pi/2$.

En este tipo de vuelo y con los parámetros utilizados, se encontró que existe propulsión generada por el cuerpo en todos los casos. Las curvas del coeficiente de tracción promedio pueden verse en la fig. 6.72. Para la amplitud $\alpha_a = 20^\circ$ se encuentran los mayores valores y puede observarse que el comportamiento de las curvas es inverso al observado en las curvas de sustentación. Sin entrar en mayores detalles, este comportamiento de las curvas de la fig. 6.72 estaría vinculado a la convección de vórtices LEV y TEV.

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En este trabajo se ha llevado a cabo el estudio del flujo a números de Reynolds ultrabajos, con el fin de aportar al desarrollo de la aerodinámica de micro vehículos aéreos en un marco numérico computacional, se resolvieron de las ecuaciones de Navier-Stokes, bajo régimen laminar en 2 dimensiones, mediante el método de elementos finitos y con un algoritmo de integración de pasos fraccionados. El algoritmo de estabilización implementado es conocido como OSS (Ortogonal Subscale Stabilization) y la discretización del dominio se realizó con elementos triangulares lineales de tensión constante. El movimiento de la malla se basó en la formulación ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) y se implementó mediante un algoritmo de optimización de suavizado.

La verificación del código se llevó a cabo mediante la evaluación de casos teóricos y experimentales encontrados en la bibliografía, tanto en flujos estacionarios como transitorios, con resultados satisfactorios.

En primer lugar, se utilizó el código en perfiles sometidos a flujo estacionario a los efectos de estudiar la variación del número de Reynolds, la geometría del perfil (como combadura y espesor), posiciones de desprendimiento, performances aerodinámicas de las curvas C_L y C_D para diferentes condiciones de flujo y remarcar la importancia de los efectos viscosos que se presentan. El espesor de la zona viscosa que se extiende desde el cuerpo hacia la estela, desempeña un papel fundamental en las características aerodinámicas de los perfiles, al incidir de manera relevante en su geometría efectiva. Quizás el efecto más notorio, es el incremento de la resistencia al avance con la disminución del número de Reynolds para un mismo ángulo de ataque, de aquí la importancia de la eficiencia, debido a la potencia demandada en el caso del vuelo controlado de un micro vehículo aéreo. Por otro lado, la pendiente de sustentación es menor con respecto a Reynolds altos, a causa de que el pico de succión de borde de ataque disminuye por los

efectos viscosos, resultando en un impacto negativo en la relación L/D .

El segundo análisis destacado es el estudio de perfiles sometidos a flujo inestacionario. La primera cinemática desarrollada fue el vuelo *heaving*. En dicha cinemática se estudió el comportamiento de la relación de espesor en función del número de Strouhal a $Re = 1100$. Se observó que la geometría de mayor espesor cuenta con la mayor eficiencia propulsiva y además se analizó la topología del flujo en las diferentes geometrías y sobre todo la gran influencia del vórtice desprendido del b.a. sobre los parámetros aerodinámicos. Dicho análisis también fue extendido a otra frecuencia de movimiento y al estudio de la influencia de la combadura del cuerpo, proporcionando valiosa información relacionada con el conocimiento del fenómeno.

La siguiente cinemática estudiada fue *pitching*, donde a número de Reynolds $Re = 1100$, se calcularon los coeficientes de tracción y sustentación, la eficiencia propulsiva en función de la amplitud de cabeceo, la frecuencia reducida, la relación de espesor y el valor de combadura de los perfiles. Se observó además la topología del flujo y de la estela, para los casos más relevantes.

El acoplamiento de *heaving* y *pitching* da origen al siguiente movimiento analizado, que se denomina *flapping*. Las simulaciones también fueron hechas a número de Reynolds $Re = 1100$ con el objetivo de comparar distintas geometrías de perfiles NACA serie 4, en términos de la amplitud de cabeceo, del desplazamiento vertical, de la frecuencia reducida, y la variación simultánea de los últimos dos parámetros con el propósito de mantener fijo el número de Strouhal. Al igual que en los casos anteriores, la influencia del flujo cercano al cuerpo, la topología de la estela y los desprendimientos son considerados causales de los resultados presentados.

Por último, se simularon casos correspondientes a vuelos suspendidos o *hovering*. Cabe aclarar que esta rama del vuelo inestacionario es muy extensa, siendo de particular interés en el vuelo que desarrollan insectos y animales de pequeño tamaño. Se presentaron diferentes tipos de cinemáticas (*hovering* simétrico y asimétrico) en función del número de Reynolds y la geometría de perfiles aerodinámicos estándares, observando el comportamiento de los coeficientes aerodinámicos con el objeto de tener un panorama básico del tema.

Los resultados obtenidos brindan una visión general para el entendimiento de la aerodinámica a ultra-bajos Reynolds de alas batientes en dos dimensiones, permitiendo formar una base sobre la cual proyectar futuros estudios de mayor complejidad.

Los desarrollos a futuro, tienen por objetivo extender la investigación del flujo a ultra-bajos Reynolds a 3 dimensiones, es decir modelar alas de envergadura finita y

ejecutar los análisis más relevantes detectados en casos 2D. Se observará la influencia del alargamiento y alabeo de superficies portantes, la topología tridimensional de la estela y el flujo cercano al cuerpo, los desprendimientos y parámetros aerodinámicos más importantes dentro de los recursos disponibles.

Además se estudiará la posibilidad de agregar al modelo computacional fluido-dinámico bidimensional, un modelo elástico, con el propósito de simular los fenómenos ya estudiados pero bajo un entorno más complejo, como el aeroelástico.

7.1 Presentaciones

Antonelli, D., Sacco, C. and Tamagno, J. *Aerodinámica del vuelo a números de Reynolds ultra-bajos ($Re < 10000$)*. "XX Congreso de Métodos numéricos y sus aplicaciones - ENIEF 2013 ", Mendoza, Argentina.

Antonelli, D., Sacco, C. and Tamagno, J. *Steady and unsteady analysis of aerodynamics wing sections at ultra-low Reynolds numbers ($Re < 10000$)*. "1st Pan-American Congress on Computational Mechanics - PANACM 2015 " y "XI Argentine Congress on Computational Mechanics - MECOM 2015 ", Buenos Aires, Argentina.

Bibliografía

- [1] ANDERSON, J. M., STREITLIEN, K., BARRETT, D. S., AND TRIANTAFYLLOU, M. S. Oscillating foils of high propulsive efficiency. *Fluids Mechanics* 360:41–72 (1998).
- [2] ARNEY, D., AND FLAHERTY, J. A two-dimensional mesh moving technique for time dependent partial differential equations. *J.Comput. Phys.* 67,124-144 (1986).
- [3] BABUSKA, I. Error bounds for finite element method. *Numer. Math.* 16:322-333 (1971).
- [4] BADIA, S., AND CODINA, R. Algebraic pressure segregation methods for the incompressible navier-stokes equations. *Arch Comput Methods Eng* (2008).
- [5] BAINES, M. *Moving Finite Elements*. Oxford University Press, 1994.
- [6] BERGER, E., AND WILLE, R. Periodic flow phenomena. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 4:313–340 (1972).
- [7] BERMAN, G., AND JANEWANG, Z. Energy-minimizing kinematics in hovering insect flight. *Cambridge University Press* (2007).
- [8] BETZ, A. General theory of aerodynamic instability and the mechanism in flutter. *Technical report, NACA, Technical Report No. 496* (1935).
- [9] BREZZI, F., AND DOUGLAS, J. Stabilized mixed methods for the stokes problem. *Numer. Math* (1988).
- [10] CANANN, S. A., TRISTANO, J. R., AND STATEN, M. L. An approach to combined laplacian and optimization-based smoothing for triangular, quadrilateral, and quad-dominant meshes. *International Meshing Roundtable* (1998).

- [11] CARMICHAEL, B. H. Low reynolds number airfoil survey. *NASA CR 1165803* (1981).
- [12] CHORIN, A. A numerical method for solving incompressible viscous problems. *Computational Physics 2:12-26* (1967).
- [13] CODINA, R. *A finite element model for incompressible flow problem*. PhD thesis, Universidad Politécnic de Cataluña, 1992.
- [14] CODINA, R. A finite element formulation for the numerical solution of the convection-difusion equation. Tech. rep., International Center for Numerical Methods in Engineering, 1993.
- [15] CODINA, R. Pressure stability in fractional step element methods for incompressible flows. *Computational Physics 170:112-140* (2000).
- [16] CODINA, R. Stabilization of incompressibility and convection trough orthogonal sub-scales in finite element methods. *Computational Physics 190:1579-1599* (2000).
- [17] CODINA, R. Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales. *Computational Methods for Applied Mechanics in Engineering* (2002).
- [18] COOK, R., MALKUS, D. S., WITT, R. J., AND PLESHA, M. E. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Hardcover, 2001.
- [19] COUTANCEAU, M., AND BOUARD, R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. part1: Steady flow. *J. Fluid Mech. 79:231-256* (1977).
- [20] DENNIS, S. C. J., AND CHANG, G. Z. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at reynolds numbers up to 100. *J. Fluid Mech. 180:120-154* (1970).
- [21] DICKINSON, M. H. Solving the mystery of insect flight. *Scientific American, June:35-41* (2001).
- [22] DONEA, J. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient fluid structure interactions. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 33:689-723* (1982).

- [23] DONEA, J., AND HUERTA, A. *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley and Sons, 2003.
- [24] DRELA, M., AND GILES, M. A two-dimensional viscous aerodynamics design and analysis code. *AIAA Paper 87-0424* (1987).
- [25] ESPINOSA, J. G., OÑATE, E., AND SIERRA, H. Un método de elementos finitos para análisis hidrodinámico de estructuras navales. *International Center for Numerical Methods in Engineering 59* (2000), 1–115.
- [26] FARHAT, C., KOOBUS, B., AND TRAN, H. Simulation of vortex shedding dominated flows past rigid and flexible structures. *In Computational Methods for Fluid Structure Interaction, Trondheim (Norway)* (1999).
- [27] FORNBERG, B. A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder. *Fluid Mechanics 98:819–855* (1980).
- [28] GARRICK, I. Naca no. 567. Tech. rep., Propulsion of a flapping and oscillating airfoil, 1936.
- [29] GOPALAN, H. *Numerical Modeling of Aerodynamics of Airfoils of Micro Air Vehicles in Gusty Environment*. PhD thesis, University of Akron, 2008.
- [30] GUERRERO, J. *Numerical simulation of the unsteady aerodynamics of flapping flight*. PhD thesis, University of Genova, 2008.
- [31] HEATHCOTE, S., AND GURSUL, I. Flexible flapping airfoil propulsion at low reynolds numbers. *AIAA Paper 2005-1405-CP* (2005).
- [32] HIRT, C., AMSDEN, A., AND COOK, J. An arbitrary lagrangean-eulerian computing method for all flow speeds. *Jnl. of Comp. Physics, 14:227-253* (1974).
- [33] HOVER, F. S., HAUGSDAL, O., AND TRIANTAFYLLOU, M. S. Effect of angle of attack profiles in flapping foil propulsion. *Fluids and Structures, 19:37–47* (2004).
- [34] HUGHES, T., AND FRANCA, L. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Vii. the stokes problem with various well-posed boundary conditions: Symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 7* (1987).

- [35] HUGHES, T., FRANCA, L., AND HULBERT, G. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Viii. the galerkin/least squares method for advective-difusive equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 8 (1989).
- [36] HUGHES, T., LIU, W., AND ZIMMERMANN, T. Lagrangian-eulerian finite element formulation for viscous flows. *Comp. Meth. Appl. Mech.Engng.*, 29:329-349 (1981).
- [37] HUGHES, T., SCOVAZZI, G., AND FRANCA, L. *Multiscale and Stabilized Methods, Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley and Sons, 2004.
- [38] ISOGAI, K., SHINMOTO, Y., AND WATANABE, Y. Effects of dynamic stall on propulsive efficiency and thrust of a flapping airfoil. *AIAA*, 37:1145–1151 (2000).
- [39] JACKSON, C. A finite element study on the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *Computational Physics* 180:120–154 (2002).
- [40] JONES, K. D., DOHRING, C. M., AND PLATZER, M. F. Wake structures behind plunging airfoils:a comparison of numerical and experimental results. *AIAA Paper 96-0078-CP* (1996).
- [41] KATZ, J., AND PLOTKIN, A. *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2001.
- [42] KNOLLER, R. Die gesetze des luftwiderstandes. *Flug und Motortechnik Wien*, 3:1–7 (1909).
- [43] KOOCHESFAHANI, M. Vortical patterns in the wake of an oscillation foil. *AIAA* 27:1200–1205 (1989).
- [44] KUNZ, P. J. *Aerodynamics and desing for ultra-low Reynolds number flight*. PhD thesis, Stanford University, 2003.
- [45] LAI, J. C. S., AND PLATZER, M. Jet characteristics of a plunging airfoil. *AIAA* (1999).
- [46] LEHMANN, F., AND PICK, S. The aerodynamic benefit of wing–wing interaction depends on stroke trajectory in flapping insect wings. *Journal of Experimental Biology* (2007).

- [47] LINNICK, M. N., AND FASEL, H. F. A high-order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains. *Computational Physics* 204(1):157–192 (2005).
- [48] LIU, C., ZHENG, X., AND SUNG, C. H. Preconditional multigrid methods for unsteady incompressible flows. *J. Comput. Phys.* 139:35–57 (1998).
- [49] LIU, H., ELLINGTON, C., KAWACHI, K., VANDENBERG, C., AND WILLMOT, A. A computational fluid dynamic study of hawkmoth hovering. *Journal of Experimental Biology*, 201:461–477 (1998).
- [50] MCMICHAEL, J. M., AND FRANCIS, M. S. Defense advanced research projects agency (darpa). Tech. rep., Micro air vehicles - toward a new dimension in flight, 1997.
- [51] MEDJROUBI, W. *Numerical Simulation of Dynamic Stall for Heaving Airfoils Using Adaptive Mesh Techniques*. PhD thesis, Ossietsky Universität Oldenburg, 2011.
- [52] MIAO, J., AND HO, M. M. Effect of flexure on aerodynamic propulsive efficiency of flapping flexible airfoil. *Fluids and Structures*, 22:401–419 (2006).
- [53] NUDDS, R. L., TAYLOR, G. K., AND THOMAS, A. R. Tuning of strouhal number for high propulsive efficiency accurately predicts how wingbeat frequency and stroke amplitude relate and scale with size and flight speed in birds. *Proc. Biol. Sci.*, 7:2071–2076 (2004).
- [54] OÑATE, E., AND ESPINOSA, J. G. Computation of the stabilization parameter for the finite element solution of advective-difusive problems with sharp gradients. *In European Conference on Computational Mechanics (ECCM'99)* (1999).
- [55] PEDRO, G., SULEMAN, A., AND DJILALI, N. A numerical study of the propulsive efficiency of a flapping hydrofoil. *International Journal for numerical methods in fluids* 42:493–526 (2003).
- [56] PLATZER, M. F., AND JONES, K. D. The unsteady aerodynamics of flapping-foil propellers. *9th International Symposium on Unsteady Aerodynamics Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines Ecole Centrale de Lyon* (2000).
- [57] PLATZER, M. F., JONES, K. D., AND LUND, T. G. Experimental and computational investigation of flapping wing propulsion for micro- air vehicles. *In Symposium of Low-Reynolds Number Vehicles, University of Notre Dame* (2000).

- [58] PLATZER, M. F., NEACE, K. S., AND PANG, C. K. Aerodynamic analysis of flapping wing propulsion. *AIAA Paper 93-0484-CP* (1993).
- [59] PRINCIPE, J., AND CODINA, R. On the stabilization parameter in the subgrid scale approximation of scalar convection–diffusion–reaction equations on distorted meshes. Tech. rep., International Center for Numerical Methods in Engineering, 2009.
- [60] REDDY, J. N. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, 1993.
- [61] SACCO, C., AND GIUGGIOLONI, F. Análisis de la aerodinámica de un automóvil de competición. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional* (2006).
- [62] SHYY, W., BERG, M., AND LJUNGQVIST., D. Flapping and flexible wings for biological and micro air vehicles. *Progress in Aerospace Sciences*, 35:455–505 (1999).
- [63] SHYY, W., LIAN, Y., TANG, J., VIHERU, D., AND LIU, H. *Aerodynamics of low Reynolds number flyers*. Cambridge University Press, 2008.
- [64] SOTO, O. *Estabilización de la Solución por Elementos Finitos de Problemas de Flujo Incompresible con Rotación, Turbulencia, Superficie Libre y Temperatura*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 1997.
- [65] SUN, M., AND TANG, J. Unsteady aerodynamic force generation by a model fruit fly wing in flapping motion. *Journal of Experimental Biology* (2001).
- [66] TAYLOR, G., NUDDS, R., AND THOMAS, A. Flying and swimming animals cruise at a strouhal number tuned for high power efficiency. *Letters to Nature*, 425:707–711 (2003).
- [67] TENG, N. H. The development of a computer code for the numerical solution of unsteady, inviscid and incompressible flow over an airfoil. *Master’s thesis. U.S. Naval Postgraduate School, Department of Aeronautics and Astronautics* (1987).
- [68] THEODORSEN, T. Ein beitrag zur erklärung des segelfluges. *Zeitschrift für Flugtechnik und Motor-luftschiffahrt*, 3:269–272 (1912).
- [69] TRIANTAFYLLOU, G. S., TRIANTAFYLLOU, M. S., AND GROSENBAUGH, M. A. Optimal thrust development in oscillating foils with application to fish propulsion. *Fluids and Structures*, 7:205–224 (1993).

- [70] TUNCER, I. H. A 2-d unsteady navier-stokes solution method with moving overset grids. *AIAA*, 35:471–476 (1997).
- [71] TUNCER, I. H., AND KAYA, M. Optimization of flapping airfoils for maximum thrust. *AIAA Paper 2003-0420-CP* (2003).
- [72] TUNCER, I. H., AND PLATZER, M. F. Thrust generation due to airfoil flapping. *AIAA* 34:324–331 (1995).
- [73] VON KARMAN, T., AND BURGERS, J. General aerodynamic theory - perfect fluids. *Aerodynamic Theory 2* (1935).
- [74] VÁZQUEZ, M., CODINA, R., AND ZIENKIEWICZ, O. Numerical modelling of compressible laminar and turbulent flow: The cbs algorithm. Tech. rep., International Center for Numerical Methods in Engineering, 1999.
- [75] WANG, Z. J. Vortex shedding and frequency selection in flapping flight. *Fluid Mechanics* (2000).
- [76] YOUNG, J. *Numerical simulation of the unsteady aerodynamics of flapping airfoils*. PhD thesis, The University of New South Wales, 2005.
- [77] YOUNG, J., AND LAI, J. Oscillation frequency and amplitude effects on the wake of a plunging airfoil. *AIAA* 42:2042–2052 (2004).
- [78] ZIENKIEWICZ, O., AND TAYLOR, R. *The finite element method*. Butterworth-Heinemann, 2002.