

SUPERFICIES ISOPERIMETRICAS ESTABLES EN KERR Y FLUJO DE CURVATURA MEDIA

Autor: Marcos A. Argañaraz

Directores: Sergio A. Dain, Omar E. Ortiz

Trabajo Especial de Licenciatura en Física



FaMAF

Universidad Nacional de Córdoba

12 de Septiembre 2014

Resumen

Se estudia la evolución de hipersuperficies en datos iniciales de la ecuación de Einstein. Por medio de una ecuación de flujo que involucra principalmente la curvatura media de la hipersuperficie.

Se obtiene la evolución haciendo uso de métodos numéricos. Para ello se comienza haciendo chequeos en datos iniciales de la ecuación de Einstein, donde se tiene cierto conocimiento analítico previo de la evolución. Y luego se evoluciona donde no se lo tiene.

Como resultado del estudio numérico, se encuentran hipersuperficies de curvatura media constante, presumiblemente isoperimétricas.

Palabras claves: Relatividad General, Hipersuperficie Isoperimétrica Estable, Flujo de Curvatura media

Clasificación:

- 04.20.-q Classical general relativity
- 02.40.-k Geometry, differential geometry, and topology
- 02.60.Cb Numerical simulation; solution of equations

RESUMEN

Agradecimientos

- A mis padres y hermanos, por el afecto y apoyo incondicional. Y a toda mi familia, que siempre estuvo presente a pesar de las distancias.
- A mis directores Sergio Dain y Omar Ortiz, por el tiempo dedicado y entusiasmo con el que me guiaron.
- A Jan Metzger, que generosamente ayudo en la comprensión de parte de este trabajo.
- A los docentes que tuve a lo largo de estos años, por su compromiso, dedicación y generosidad para enseñar.
- Al personal administrativo de FaMAF, que siempre brindo ayuda y facilidades.
- A mis amigos y compañeros, que hicieron muy amenos estos años.
- A Amy, por acompañarme en cada momento.

AGRADECIMIENTOS

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Resumen | 3 |
| Agradecimientos | 5 |
| 1. Introducción | 9 |
| 1.1. Objetivo y Estrategia | 9 |
| 1.2. Estabilidad, Curvatura media y Problema Isoperimétrico | 9 |
| 1.2.1. Definiciones y Resultados | 10 |
| 1.3. Flujo de curvatura media que preserva volumen | 12 |
| 2. Flujo de curvatura media | 13 |
| 2.1. Ecuación de flujo | 13 |
| 2.1.1. Curvatura media H | 13 |
| 2.2. Hipersuperficies definidas en forma no-paramétrica | 14 |
| 2.3. Ecuación escalar de flujo | 15 |
| 2.3.1. Deducción (no paramétrica general) | 16 |
| 3. Flujo de curvatura media que preserva volumen | 19 |
| 3.1. Ecuación de flujo | 19 |
| 3.2. Rasgos característicos del flujo | 20 |
| 3.2.1. Preservación de volumen y reducción del área | 20 |
| 3.2.2. Convergencia probada analíticamente | 21 |
| 3.3. Ecuación de Flujo escalar | 22 |
| 3.3.1. Deducción (no paramétrica general) | 22 |
| 3.3.2. Diferencial de volumen sobre la hipersuperficie | 24 |
| 4. Aplicación a \mathbb{R}^3 | 25 |
| 4.1. Ecuación escalar de flujo en coordenadas | 25 |
| 4.2. Volumen encerrado por la hipersuperficie | 28 |
| 4.3. Soluciones Numéricas | 28 |
| 5. Aplicación a Reissner-Nordström | 33 |
| 5.1. Ecuación escalar de flujo en coordenadas | 33 |
| 5.2. Volumen encerrado por la hipersuperficie | 36 |

ÍNDICE GENERAL

| | |
|---|-----------|
| 5.3. Resultados y Soluciones Numéricas | 36 |
| 5.3.1. Resultados | 36 |
| 5.3.2. Soluciones Numéricas | 37 |
| 6. Aplicación a Kerr super-extremo | 43 |
| 6.1. Ecuación escalar de flujo en coordenadas | 43 |
| 6.2. Volumen encerrado por la hipersuperficie | 46 |
| 6.3. Resultados y Soluciones Numéricas | 46 |
| 6.3.1. Resultados | 46 |
| 6.3.2. Soluciones Numéricas | 47 |
| 7. Método Numérico | 55 |
| 7.1. Aproximaciones numéricas utilizadas | 55 |
| 7.1.1. Derivadas en θ | 55 |
| 7.1.2. Integrales | 56 |
| 7.1.3. Integración en el parámetro t | 56 |
| 7.2. Análisis de Precisión | 56 |
| 7.2.1. Estudio de Precisión | 56 |
| 7.2.2. Análisis de la solución | 57 |
| A. Formula de variación del área | 59 |
| A.1. Demostración para flujos en dirección normal | 59 |
| Bibliografía | 61 |

Capítulo 1

Introducción

1.1. Objetivo y Estrategia

El objetivo de este trabajo, es hacer una exploración numérica para hallar las hipersuperficies isoperimétricamente estables, en variedades Riemannianas de interés.

Para ello, la estrategia es trabajar con una ecuación de flujo que bajo ciertas condiciones puede evolucionar una hipersuperficie inicial hacia una de curvatura media constante (curvatura media: traza de la segunda forma fundamental). Para este flujo, también hay pruebas analíticas, que en ciertos casos las hipersuperficies además son estables [1],[2].

La ecuación de flujo y sus características se detallaran en (capitulo 3).

1.2. Estabilidad, Curvatura media y Problema Isoperimétrico

En esta sección se detallara la relación que existe entre las hipersuperficies de curvatura media constante y una noción de estabilidad ligada al problema isoperimétrico.

Comenzamos con la definición de problema isoperimétrico

DEFINICIÓN 1 Sea M una variedad diferenciable, un subconjunto compacto $\Omega \subset M$ se dice solución del problema isoperimétrico, si para todo $\Omega' \subset M$

$$\begin{aligned} Vol(\Omega') &= Vol(\Omega) \\ y \\ |\partial\Omega| &\leq |\partial\Omega'| \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.2. ESTABILIDAD, CURVATURA MEDIA Y PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

1.2.1. Definiciones y Resultados

En [3], se da la definición de estabilidad que se considera en este trabajo. Básicamente dice que una hipersuperficie inmersa en una variedad Riemanniana es estable, si para cualquier variación a volumen fijo, $\frac{dA}{dt} = 0$ y $\frac{d^2A}{dt^2} \geq 0$, donde A es el área de la hipersuperficie.

Para dar la formulación precisa de estabilidad, a continuación se expondrán las definiciones y resultados que figuran en [3]

Sea $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$ una inmersión de M^n en N^{n+1} .

Una variación de x , es un mapa diferenciable

$$\begin{aligned} F &: (-\epsilon, \epsilon) \times M^n \rightarrow N^{n+1} \\ F_t &: M^n \rightarrow N^{n+1}, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon) \\ F_{t=t_0} &= x. \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde para cada t , F_t es una inmersión.

Luego si llamamos $W(p) = \frac{\partial F}{\partial t} |_{t=t_0}$ al vector tangente a la variación F (en $t = t_0$) y \hat{n} al vector normal a la inmersión $F_{t=t_0}$, la velocidad normal de la variación esta dada por $f|_{t=t_0} = \langle W, \hat{n} \rangle$,

Toda variación (1.2), puede variar el área y volumen de la inmersión. Debido al rol que tienen en la definición de estabilidad, es importante tener presente el siguiente lema

LEMA 1 *Las variaciones del área y volumen, están dadas por*

$$\begin{aligned} (i) \frac{dA}{dt} |_{t=t_0} &= \int_M f H dM \\ (ii) \frac{dV}{dt} |_{t=t_0} &= \int_M f dM \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde H es la curvatura media (traza de la segunda forma fundamental), y dM el elemento de volumen de la inmersión.

Luego, podemos dar la relación entre la variación del área y las inmersiones de curvatura media constante, que se resume en la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 1 *Sea $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$ una inmersión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) x tiene curvatura media constante H_0 .
- (ii) Para toda variación que preserve el volumen, $A'(t_0) = 0$.
- (iii) Para toda variación (arbitraria), $J'(t_0) = 0$, con

$$J(t) = A(t) + nV(t) \frac{\int_M H dM_t}{\int_M dM_t} \tag{1.4}$$

1.2. ESTABILIDAD, CURVATURA MEDIA Y PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

donde es claro que (i) \rightarrow (ii) se siguen de Lema 1

Finalmente la definición de estabilidad

DEFINICIÓN 2 Sea $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$ una inmersión de curvatura media constante. La inmersión x es estable si $A''(t_0) \geq 0$ para toda variación F que preserve el volumen.

Si se consideran todas las funciones diferenciables $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, con $\int_M f dM = 0$. Es decir todas las variaciones con velocidad normal f que preservan el volumen. Y llamamos \mathcal{F} a tal conjunto de funciones, se tiene el siguiente resultado

PROPOSICIÓN 2 $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$ es estable si y solo si

$$J''(t_0)(f) = \int_M \left[-f \Delta f - f^2 \left(K_{AB} K^{AB} + R_{ab} \hat{n}^a \hat{n}^b \right) \right] dM \geq 0, \quad (1.5)$$

$\forall f \in \mathcal{F}$

donde Δ es el Laplaciano en la métrica inducida, K_{AB} es la segunda forma fundamental, \hat{n} el vector normal a la inmersión y dM el elemento de volumen de M .

Una vez que se tienen presentes estas definiciones y resultados, es importante destacar lo siguiente.

Según se enfatiza en [4]

- Las hipersuperficies de curvatura media constante, son puntos críticos del problema isoperimétrico.

lo cual puede verse de (Proposición 1.4), donde para toda inmersión con $H = cte$ resulta que $A' = 0$, para toda variación que preserve volumen. Como el problema isoperimétrico consiste encontrar la hipersuperficie con la menor área a volumen fijo, su solución debe ser un mínimo, y sus puntos críticos aquellas hipersuperficies donde $A' = 0$, es decir aquellas con $H = cte$; justificando así la afirmación.

La noción de estabilidad introducida, permite además afirmar lo siguiente

- Una hipersuperficie de curvatura media H constante, estrictamente estable ($J'' > 0$), es un **mínimo local del problema isoperimétrico**, en el sentido que cualquier variación F que preserve volumen, solo puede incrementar el área de tal hipersuperficie.

Por último, según [3] es importante mencionar que

- Una hipersuperficie estable no equivale a ser solución del problema isoperimétrico.

Para ello cita ejemplos donde las hipersuperficies son estables, pero no son soluciones del problema isoperimétrico

1.3. FLUJO DE CURVATURA MEDIA QUE PRESERVA VOLUMEN

1.3. Flujo de curvatura media que preserva volumen

Como se menciona al comienzo de la introducción, la estrategia de este trabajo es usar un flujo de curvatura media que preserva volumen.

Este flujo posee ciertos rasgos que lo sitúan como herramienta predilecta para explorar en búsqueda de hipersuperficies de curvatura media constante estables. En lo que sigue a tales hipersuperficies las llamaremos hipersuperficies isoperimétricamente estables, en relación a lo mencionado en la sección anterior.

Los rasgos del flujo son:

- (a)_*Preserva el volumen de la hipersuperficie inicial a medida que la evoluciona, $(V(0) = V(t) = cte)$.*
- (b)_*Reduce el área de la hipersuperficie a medida que la evoluciona, $(A'(t) < 0)$.*
- (c)_*Cuando converge a una hipersuperficie final, lo hace a una de curvatura media constante, $(H = cte)$.*

El rasgo (c), asegura que las hipersuperficies finales halladas serán puntos críticos del problema isoperimétrico. Mientras que los rasgos (a) y (b) marcan una tendencia hacia la estabilidad, aunque se desconocen resultados generales que prueben que el flujo converge a hipersuperficies estables en variedades Riemannianas arbitrarias.

Por lo que parte del desafío de la exploración con este flujo, será analizar la estabilidad de las hipersuperficies finales halladas.

Los detalles de este flujo se darán en el (capítulo3), puesto que en (capítulo2) se comenzará con un flujo que posee expresiones similares y servirá de introducción.

Capítulo 2

Flujo de curvatura media

Antes de presentar el *flujo de curvatura media que preserva volumen*, a manera de introducción se comenzara con una ecuación de flujo similar, el *flujo de curvatura media* sobre la que se conoce el comportamiento de sus soluciones. Además se darán las definiciones y expresiones que se usaran a lo largo del texto.

2.1. Ecuación de flujo

Sea $F : \mathcal{M}^n \times (0, T) \rightarrow \mathcal{N}^{n+1}$ una familia monparamétrica de hipersuperficies suaves, inmersas en una variedad Riemanniana \mathcal{N}^{n+1} . Se dice que $M_t^n = F(\mathcal{M}^n, t)$ es solución del flujo de curvatura media si satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^\alpha}{\partial t}(q, t) &= -H(q, t) \hat{n}^\alpha(q, t), \quad q \in \mathcal{M}^n, \quad t > 0, \quad \alpha = 1, \dots, n+1 \\ F^\alpha(q, 0) &= M_0^n(q) \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde H es la curvatura media, \hat{n} es el vector unitario normal saliente a la hipersuperficie M_t , y M_0 alguna hipersuperficie inicial.

Según se menciona en [8], (2.1) es un sistema de ecuaciones parabólico cuasilineal y es sabido que para una superficie inicial cerrada y suave, la solución siempre existe al menos por un corto tiempo.

Para estudiar el flujo, se pueden considerar la representación paramétrica y no-paramétrica de hipersuperficies. Cada representación, permite con mayor facilidad conocer diferentes aspectos de la solución. En este trabajo nos concentraremos en el caso no paramétrico. Pero antes un resultado que sera útil.

2.1.1. Curvatura media H

En el caso Riemanniano general, se puede probar que la curvatura media es igual a:

$$H = \nabla_a \hat{n}^a \quad (2.2)$$

2.2. HIPERSUPERFICIES DEFINIDAS EN FORMA NO-PARAMÉTRICA

donde \hat{n} es el vector unitario normal a la hipersuperficie.

2.2. Hipersuperficies definidas en forma no-paramétrica

En este trabajo se estudiarán hipersuperficies de dimensión 2, embebidas en una variedad Riemanniana de dimensión 3. Por lo tanto, en lo que sigue se deducirán las ecuaciones para tales casos. Sin embargo, se podrá generalizar a dimensiones mayores siguiendo los mismos pasos que se exponen a continuación.

Sea \mathcal{M}^2 una hipersuperficie y sea \mathcal{N}^{2+1} la variedad Riemanniana donde esta inmersa. La definición no-paramétrica de tal hipersuperficie es:

$$\Phi(y^1, y^2, y^3) = c \quad (2.3)$$

donde Φ es una función escalar, $\{y^1, y^2, y^3\}$ son las coordenadas de \mathcal{N}^{2+1} , y c una constante.

En particular, en este trabajo solo se consideran las hipersuperficies que satisfacen:

$$\Phi(y^1, y^2, y^3) = y^3 - u(y^1, y^2) = 0 \quad (2.4)$$

donde para cada $u(y^1, y^2)$ diferente, se tendrá una hipersuperficie diferente. Esta observación resultará útil, cuando se considere hipersuperficies que evolucionan en el tiempo.

En lo que sigue a los puntos de la superficie los llamaremos q , y por lo tanto $q \in \mathcal{M}^2$.

Para ambas definiciones (2.3) y (2.4), el vector normal, en sentido saliente a la hipersuperficie, esta dado por:

$$\hat{n}^\alpha(q) = \epsilon \frac{g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi}{(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}}} \Big|_q \quad (2.5)$$

$$\Phi = \Phi(y^1, y^2, y^3)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3$$

En cuanto a ϵ , depende del valor que toma $\Phi(y^1, y^2, y^3)$ en la región interior y exterior delimitadas por la hipersuperficie $\Phi(y^1, y^2, y^3) = 0$. Si $\Phi > 0$ en la región interior y $\Phi < 0$ en la exterior, $\epsilon = -1$. En el caso inverso $\epsilon = 1$. Esto es relevante, porque una misma hipersuperficie puede definirse con $\Phi = 0$ o $-\Phi = 0$. En ambas definiciones se tiene el mismo vector normal saliente, puesto que definen la misma hipersuperficie. Pero la expresión operacional para determinarlo, es distinta en cada caso, pues corresponde un ϵ distinto.

Sin embargo, como se vera mas adelante, la expresión final de la evolución de la hipersuperficie, no dependerá de cual de los dos tipos de definiciones se adopte.

Luego reemplazando en (2.2), se obtiene:

2.3. ECUACIÓN ESCALAR DE FLUJO

$$\begin{aligned}
 H(q) &= \epsilon \nabla_{\alpha} \left(\frac{g^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \Phi}{(g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \Phi \partial_{\beta} \Phi)^{\frac{1}{2}}} \right) \Big|_q \\
 \Phi &= \Phi(y^1, y^2, y^3) \\
 \alpha, \beta &= 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.3. Ecuación escalar de flujo

El objetivo de esta sección sera obtener una ecuación escalar, equivalente a (2.1), para resolverla numéricamente. En (2.1), se considera una hipersuperficie que evoluciona con t . Para introducir tal dependencia, la definición no-paramétrica de la superficie sera:

$$\Phi(y^1, y^2, y^3, t) = c \tag{2.7}$$

Como se mencionó en el caso anterior, en este trabajo solo se consideran hipersuperficies que satisfacen:

$$\Phi(y^1, y^2, y^3, t) = y^3 - u(y^1, y^2, t) = 0 \tag{2.8}$$

y al igual que sucede con (2.4), para cada t se tiene una hipersuperficie no-paramétrica.

Nuevamente se hará la distinción de los puntos q que pertenecen a la superficie, por lo cual $q \in \mathcal{M}^2$.

Luego, (2.5) y (2.6) en el caso de evolución temporal, adquieren la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \hat{n}^{\alpha}(q, t) &= \epsilon \frac{g^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \Phi}{(g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \Phi \partial_{\beta} \Phi)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{q,t} \\
 \Phi &= \Phi(y^1, y^2, y^3, t) \\
 \alpha, \beta &= 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
 H(q, t) &= \epsilon \nabla_{\alpha} \left(\frac{g^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \Phi}{(g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \Phi \partial_{\beta} \Phi)^{\frac{1}{2}}} \right) \Big|_{q,t} \\
 \Phi &= \Phi(y^1, y^2, y^3, t) \\
 \alpha, \beta &= 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

que son validas para ambas definiciones (2.7) y (2.8).

2.3. ECUACIÓN ESCALAR DE FLUJO

2.3.1. Dedución (no paramétrica general)

Se deducirá una expresión escalar de (2.1), aplicable a cualquier superficie definida por (2.7). Luego se obtendrá una para aquellas definidas por (2.8).

Comenzaremos considerando los puntos $\tilde{q} \in \mathcal{M}^2$ que satisfacen la definición (2.7). Si derivamos respecto a t

$$\left[\frac{d}{dt} \Phi (y^1, y^2, y^3, t) \right] |_{\tilde{q}} = \left[\frac{d}{dt} c \right] |_{\tilde{q}} = 0 \quad (2.11)$$

Luego aplicando regla de la cadena

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \Phi (y^1, y^2, y^3, t) \right] |_{\tilde{q}} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial y^\alpha} [\Phi (y^1, y^2, y^3, t)] \frac{\partial}{\partial t} [y^\alpha] + \frac{\partial}{\partial t} [\Phi (y^1, y^2, y^3, t)] \right\} |_{\tilde{q}} = 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} \Phi (y^1, y^2, y^3, t) \right] |_{\tilde{q}} &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial y^\alpha} [\Phi (y^1, y^2, y^3, t)] \frac{\partial}{\partial t} [y^\alpha] \right\} |_{\tilde{q}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

notar (2.12) vale para todos los puntos \tilde{q} que satisfacen (2.7).

El siguiente paso es tomar una superficie solución del flujo (2.1). En tal caso, resulta que los puntos $\tilde{q} \in M_t^2$, y por lo tanto $[\frac{\partial}{\partial t} y^\alpha] |_{\tilde{q} \in M_t^2} = -\hat{n}^\alpha(\tilde{q}) H(\tilde{q})$. Luego

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} \Phi (y^1, y^2, y^3, t) \right] |_{\tilde{q} \in M_t^2} &= - \left\{ \left(\left[\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \Phi (y^1, y^2, y^3, t) \right] |_{\tilde{q} \in M_t^2} \right) [-\hat{n}^\alpha(\tilde{q}) H(\tilde{q})] \right\} \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} \Phi (y^1, y^2, y^3, t) \right] |_{\tilde{q} \in M_t^2} &= \left\{ \left([\partial_\alpha \Phi (y^1, y^2, y^3, t)] |_{\tilde{q} \in M_t^2} \right) [\hat{n}^\alpha(\tilde{q}) H(\tilde{q})] \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

por ultimo usando (2.9) y (2.10), y resumiendo notación $\Phi(y^1, y^2, y^3, t) = \Phi$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \epsilon^2 \left\{ \partial_\alpha \Phi \left[\frac{g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi}{(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}}} \right] \left[\nabla_\alpha \left(\frac{g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi}{(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \right\} |_{\tilde{q} \in M_t^2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \left\{ \left(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi \right)^{\frac{1}{2}} \nabla_\alpha \left(\frac{g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi}{(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} |_{\tilde{q} \in M_t^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\Phi = \Phi(y^1, y^2, y^3, t)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Si bien esta es la expresión escalar general de (2.1), en este trabajo solo se consideraran hipersuperficies definidas según (2.8). Debido a que (2.8) es un caso particular de (2.7) con $c = 0$, (2.14) también es valida para los puntos $q \in \mathcal{M}^2$ que satisfacen (2.8). Luego (2.14) adopta la siguiente expresión

2.3. ECUACIÓN ESCALAR DE FLUJO

$$\frac{\partial u(y^1, y^2, t)}{\partial t} = - \left\{ \left(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi \right)^{\frac{1}{2}} \nabla_\alpha \left(\frac{g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi}{\left(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} \Big|_{q \in M_t^2} \quad (2.15)$$

$$\Phi = \Phi(y^1, y^2, y^3, t) = y^3 - u(y^1, y^2, t)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Las ecuación (2.15), corresponde al caso Riemanniano general, y da la expresión con la que se trabajará para resolver numéricamente. Según sea el espacio donde este embebida la hipersuperficie, y las coordenadas elegidas, proporcionará la ecuación final a resolver.

2.3. ECUACIÓN ESCALAR DE FLUJO

Capítulo 3

Flujo de curvatura media que preserva volumen

En este capítulo se abordará la descripción del flujo usado para la exploración numérica, en busca de hipersuperficies isoperiméricamente estables.

Se mencionarán los rasgos de comportamiento relevantes de la ecuación, que fueron probados en diversas publicaciones. Y por último se deducirá una ecuación escalar que permitirá aplicar un método numérico para su resolución.

3.1. Ecuación de flujo

Sea $F : \mathcal{M}^n \times (0, T) \rightarrow \mathcal{N}^{n+1}$ una familia monoparamétrica de hipersuperficies suaves, inmersas en una variedad Riemanniana \mathcal{N}^{n+1} . Se dice que $M_t^n = F(\mathcal{M}^n, t)$ es solución del **flujo de curvatura media que preserva volumen** si satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F^\alpha(q, t) &= [h - H(q, t)] \hat{n}^\alpha(q, t), \quad q \in \mathcal{M}^n, \quad t > 0, \quad \alpha = 1, \dots, n+1 \\ h &= \frac{\int_{M_t} H dM_t}{\int_{M_t} dM_t} \\ F^\alpha(q, 0) &= M_0^n \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde H es la curvatura media, \hat{n} es el vector unitario normal saliente a la hipersuperficie M_t , dM_t el n-diferencial de volumen en la métrica inducida sobre M_t y M_0 una hipersuperficie inicial.

En lo que se sigue, se obtendrá una ecuación escalar equivalente, para luego resolverla numéricamente.

3.2. RASGOS CARACTERÍSTICOS DEL FLUJO

3.2. Rasgos característicos del flujo

3.2.1. Preservación de volumen y reducción del área

- El primer rasgo importante de (3.1) es que preserva el volumen.

Para demostrar este resultado, solo basta recurrir al (Lema1), enunciado en el (capitulo 1). Según el mismo, la variación de volumen esta dada por

$$\frac{dV}{dt}|_{t=t_0} = \int_{M_0} f dM_0 \quad (3.2)$$

Luego si se reemplaza en (3.2) la velocidad normal de (3.1), es decir $f = \langle \frac{\partial}{\partial t} F, \hat{n} \rangle = (h - H)$. Se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt}|_{t=t_0} &= \int_{M_{t_0}} (h - H) dM_{t_0} = \int_{M^n} \left(\frac{\int_{M_{t_0}} H dM_{t_0}}{\int_{M_{t_0}} dM_{t_0}} - H \right) dM_{t_0} \\ &= \int_{M_{t_0}} H dM_{t_0} - \int_{M_{t_0}} H dM_{t_0} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

lo cual prueba que (3.1) preserva el volumen.

- El segundo rasgo importante de (3.1) es que el área de la hipersuperficies M_t decrece.

Para probar este resultado, nuevamente recurrimos al (Lema1). Según el mismo, la variación del área esta dada por

$$\frac{dA}{dt}|_{t=t_0} = \int_{M_{t_0}} f H dM_{t_0} \quad (3.4)$$

Luego si se reemplaza en (3.4) la velocidad normal de (3.1), es decir $f = \langle \frac{\partial}{\partial t} F, \hat{n} \rangle = (h - H)$. Se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A &= \int_{M_{t_0}} (h - H) H dM_{t_0} \\ &= - \int_{M_{t_0}} H (H - h) dM_{t_0} = - \int_{M_{t_0}} (H^2 - Hh) dM_{t_0} \end{aligned} \quad (3.5)$$

el siguiente paso es notar que $\int_{M_{t_0}} (Hh) dM_{t_0} = \int_{M_{t_0}} h^2 dM_{t_0}$, según se muestra a continuación

3.2. RASGOS CARACTERÍSTICOS DEL FLUJO

$$\begin{aligned}
\int_{M_{t_0}} (Hh)dM_{t_0} &= (h) \int_{M_t} HdM_t = \left(\frac{\int_{M_{t_0}} HdM_{t_0}}{\int_{M_{t_0}} dM_{t_0}} \right) \int_{M_{t_0}} HdM_{t_0} \\
\int_{M_{t_0}} (Hh)dM_{t_0} &= \left[\left(\frac{\int_{M_t} HdM_t}{\int_{M_t} dM_t} \right) \int_{M_t} HdM_t \right] \frac{\int_{M_t} dM_{t_0}}{\int_{M_t} dM_{t_0}} \\
\int_{M_t} (Hh)dM_{t_0} &= \left[\left(\frac{\int_{M_{t_0}} HdM_{t_0}}{\int_{M_{t_0}} dM_{t_0}} \right) \frac{\int_{M_{t_0}} HdM_{t_0}}{\int_{M_{t_0}} dM_t} \right] \int_{M_t} dM_{t_0} \quad (3.6) \\
\int_{M_{t_0}} (Hh)dM_{t_0} &= [h^2] \int_{M_{t_0}} dM_{t_0} = \int_{M_{t_0}} h^2 dM_{t_0} \\
\int_{M_{t_0}} (Hh)dM_{t_0} &= \int_{M_{t_0}} h^2 dM_{t_0}
\end{aligned}$$

luego (3.5) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A &= - \int_{M_t} (H^2 - Hh)dM_t = - \int_{M_t} (H^2 - 2Hh + h^2)dM_t \\
\frac{d}{dt}A &= - \int_{M_t} (H - h)^2 dM_t < 0 \quad (3.7)
\end{aligned}$$

quedando así probado que el área de las hipersuperficies M_t disminuye con t

Lo importante de ambos rasgos, el de preservación del volumen y el de disminución del área, es que son validos para una variedad Riemanniana general \mathcal{N}^{n+1} . Por lo tanto en cada exploración numérica aplicada a una variedad Riemanniana, las soluciones deben preservar tales rasgos.

De esta forma se cuenta con un criterio para establecer cuando una solución numérica se aleja de la solución verdadera. En particular la preservación del volumen permite una estimación cuantitativa de la proximidad de ambas soluciones, mientras que la disminución del área solo proporciona un criterio para descartar la solución numérica en caso de que el área aumente.

3.2.2. Convergencia probada analíticamente

En [1], se menciona que por los rasgos anteriores puede esperarse que las hipersuperficies M_t convergen a una solución del problema isoperimétrico. Pero en tal publicación se considera solo el caso particular $\mathcal{N}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, y se prueba que para hipersuperficies iniciales uniformemente convexas, la ecuación (3.1) tiene una solución suave para $0 \leq t \leq \infty$ y converge a una esfera encerrando el mismo volumen que M_0 a medida que $t \rightarrow \infty$, que según [5] son además estables. Pues en

3.3. ECUACIÓN DE FLUJO ESCALAR

[5] se prueba que las únicas superficies compactas y orientables estables inmersas en \mathbb{R}^{n+1} con curvatura media constante $H \neq 0$, son las esferas $\mathcal{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

En [2], se considera una variedad Riemanniana \mathcal{N}^3 asintóticamente plana. Y prueba que si se toman hipersuperficies iniciales con una curvatura media acotada, en términos de cotas de las componentes de la métrica. Al evolucionar tales hipersuperficies por (3.1), se tiene una solución única y suave para todo $t \geq 0$. Y a medida que $t \rightarrow \infty$ las hipersuperficies convergen exponencialmente a una de curvatura media estrictamente estable.

Sin embargo, no se conoce una prueba de convergencia a hipersuperficies estables para variedades \mathcal{N}^{n+1} Riemannianas generales.

Parte de la dificultad radica en que la convergencia de la solución depende tanto de la variedad \mathcal{N}^{n+1} donde esta embebida la hipersuperficie, como así también de la forma global de la hipersuperficie M_t .

3.3. Ecuación de Flujo escalar

A continuación, se obtendrá la expresión escalar de (3.1), siguiendo los mismos pasos del (capítulo 2).

3.3.1. Dedución (no paramétrica general)

Se deducirá una expresión escalar de (3.1), aplicable a cualquier superficie definida por (2.7). Luego se obtendrá una para aquellas definidas por (2.8).

Comenzaremos considerando los puntos $\tilde{q} \in \mathcal{M}^2$ que satisfacen la definición (2.7). Si derivamos respecto a t

$$\left[\frac{d}{dt} \Phi (y^1, y^2, y^3, t) \right] |_{\tilde{q}} = \left[\frac{d}{dt} c \right] |_{\tilde{q}} = 0 \quad (3.8)$$

Luego aplicando regla de la cadena

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \Phi (y^1, y^2, y^3, t) \right] |_{\tilde{q}} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial y^\alpha} [\Phi (y^1, y^2, y^3, t)] \frac{\partial}{\partial t} [y^\alpha] + \frac{\partial}{\partial t} [\Phi (y^1, y^2, y^3, t)] \right\} |_{\tilde{q}} = 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} \Phi (y^1, y^2, y^3, t) \right] |_{\tilde{q}} &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial y^\alpha} [\Phi (y^1, y^2, y^3, t)] \frac{\partial}{\partial t} [y^\alpha] \right\} |_{\tilde{q}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

notar (2.12) vale para todos los puntos \tilde{q} que satisfacen (2.7).

El siguiente paso es tomar una superficie solución del flujo (3.1). En tal caso, resulta que los puntos $\tilde{q} \in M_t^2$, y por lo tanto $\left[\frac{\partial}{\partial t} y^\alpha \right] |_{\tilde{q} \in M_t^2} = \hat{n}^\alpha (\tilde{q}) [h - H (\tilde{q})]$. Luego

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \Phi (y^1, y^2, y^3, t) \right] |_{\tilde{q} \in M_t^2} = - \left\{ \left(\left[\partial_\alpha \Phi (y^1, y^2, y^3, t) \right] |_{\tilde{q} \in M_t^2} \right) \hat{n}^\alpha (\tilde{q}) [h - H (\tilde{q})] \right\} \quad (3.10)$$

3.3. ECUACIÓN DE FLUJO ESCALAR

luego usando (2.9) y resumiendo notación $\Phi(y^1, y^2, y^3, t) = \Phi$ se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= - \left(\partial_\alpha \Phi \Big|_{\tilde{q} \in M_t^2} \right) \left[\epsilon \frac{g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi}{(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\tilde{q} \in M_t^2} [h - H(\tilde{q})] \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\epsilon \left(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi \right)_{\tilde{q} \in M_t^2}^{\frac{1}{2}} [h - H(\tilde{q})] \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\epsilon \left(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi \right)_{\tilde{q} \in M_t^2}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\int \epsilon \nabla_\alpha \left(\frac{g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi}{(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}}} \right) dM_t}{\int dM_t} - \epsilon \nabla_\alpha \left(\frac{g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi}{(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}}} \right)_{\tilde{q} \in M_t^2} \right] \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= - \left(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi \right)_{\tilde{q} \in M_t^2}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\int_{M_t} \nabla_\alpha \left(\frac{g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi}{(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}}} \right) dM_t}{\int_{M_t} dM_t} - \nabla_\alpha \left(\frac{g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi}{(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}}} \right)_{\tilde{q} \in M_t^2} \right\} \\
 \Phi &= \Phi(y^1, y^2, y^3, t) \\
 \alpha, \beta &= 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Si bien esta es la expresión escalar general de (3.1), en este trabajo solo se consideraran hipersuperficies definidas según (2.8). Debido a que (2.8) es un caso particular de (2.7) con $c = 0$, (3.11) también es válida para los puntos $q \in \mathcal{M}^2$ que satisfacen (2.8). Luego (3.11) adopta la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u(y^1, y^2, t)}{\partial t} &= \left(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi \right)_{|_q}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\int_{M_t} \nabla_\alpha \left(\frac{g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi}{(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}}} \right) dM_t}{\int_{M_t} dM_t} - \nabla_\alpha \left(\frac{g^{\alpha\beta} \partial_\beta \Phi}{(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}}} \right)_{|_q} \right\} \\
 \Phi &= \Phi(y^1, y^2, y^3, t) = y^3 - u(y^1, y^2, t) \\
 \alpha, \beta &= 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Las ecuación (3.12), corresponde al caso Riemanniano general, y da la expresión con la que se trabajará para resolver numéricamente. Según sea el espacio donde este embebida la hipersuperficie, y las coordenadas elegidas, proporcionará la ecuación final a resolver.

3.3. ECUACIÓN DE FLUJO ESCALAR

3.3.2. Diferencial de volumen sobre la hipersuperficie

Para obtener la expresión de h completamente, que aparece en la versión escalar de (3.1), solo resta determinar dM_t .

En las coordenadas $\{y^1, y^2, y^3\}$, la métrica de \mathcal{N}^{2+1} se expresa

$$\begin{aligned} d^2s &= g_{\alpha\beta}(y^1, y^2, y^3)dy^\alpha dy^\beta \\ \alpha, \beta &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

En una hipersuperficie definida por (2.8), se tiene que $y^3 = u(y^1, y^2, t)$. Y resulta

$$dy^3 = \frac{\partial u(y^1, y^2, t)}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial u(y^1, y^2, t)}{\partial y^2} dy^2 \quad (3.14)$$

Luego la métrica inducida sobre \mathcal{M}^2 se obtiene como

$$\begin{aligned} ds_*^2 &= g_{\gamma\eta}(y^1, y^2, y^3)dy^\gamma dy^\eta \\ \gamma, \eta &= 1, 2, 3 \\ dy^3 &= \frac{\partial u(y^1, y^2, t)}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial u(y^1, y^2, t)}{\partial y^2} dy^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Y finalmente el elemento de volumen sobre la hipersuperficie \mathcal{M}^2 resulta

$$dM_t = \sqrt{|g_*|} dy^1 \wedge dy^2 \quad (3.16)$$

Capítulo 4

Aplicación a \mathbb{R}^3

Lo primero que hay que tener en cuenta, es que $\mathcal{N} = \mathbb{R}^3$ es un primer paso clave antes de considerar los casos de interés, es decir Reissner-Nordström super extremo y Kerr super extremo. Porque este caso, es en donde se tiene el mayor conocimiento sobre el comportamiento del flujo (3.1).

Resolverlo numéricamente, es importante por dos motivos. Uno es que permite chequear los métodos numéricos, y el segundo es comenzar a familiarizarse con el comportamiento del flujo, lo cual sera de gran importancia en los dos siguientes capítulos.

Uno de los resultados mas importantes sobre el comportamiento del flujo es el siguiente:

- En [1] se prueba que en $\mathcal{N}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, si se toman hipersuperficies iniciales uniformemente convexas, la ecuación (3.1) tiene una solución suave para $0 \leq t \leq \infty$. Y converge a una esfera encerrando el mismo volumen que M_0 a medida que $t \rightarrow \infty$, que según [5] son ademas estables.

En [5] se prueba que las únicas hipersuperficies compactas y orientables estables inmersas en \mathbb{R}^{n+1} con curvatura media constante $H \neq 0$, son las esferas $\mathcal{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Esto se resume, que en el caso de \mathbb{R}^3 , si tomo hipersuperficies uniformemente convexas el flujo la llevara a una esfera \mathcal{S}^2 .

En el caso de que las hipersuperficies iniciales no sean uniformemente convexas, el comportamiento del flujo puede ser muy diferente. Estos casos se analizaran en mas detalle en la sección 4.3

4.1. Ecuación escalar de flujo en coordenadas

Considerando coordenadas esféricas, la métrica esta dada por

$$ds_{\mathbb{R}^3}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (4.1)$$

4.1. ECUACIÓN ESCALAR DE FLUJO EN COORDENADAS

En particular se tomaran hipersuperficies iniciales con simetría axial. Este tipo de hipersuperficie inmersa en una variedad con métrica dada por (4.1), tiene una curvatura media H que preserva tal simetría, en el sentido que H no depende de la coordenada ϕ . Debido a como interviene la curvatura media H en la ecuación (3.1), resulta que la evolución de la hipersuperficie preserva la simetría.

Por lo tanto, si las hipersuperficies iniciales tienen simetría axial, las siguientes también la tendrán y podemos definir la hipersuperficie en evolución para cada t como

$$\Phi(p, t) = r - u(\theta, t) = 0 \quad (4.2)$$

A continuación se busca obtener las expresiones de $\left\{ h, H, \left(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$ que figuran en expresión escalar (3.12), correspondiente al caso Riemanniano general y por lo tanto es aplicable a este caso.

Comenzamos primero por H . Reemplazando (4.1) y (4.2), en la expresión de la curvatura media (2.9) obtenemos

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{u(\theta, t) \left(u(\theta, t)^2 + \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \left\{ 2u(\theta, t) - \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right. \\ & - \frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \frac{u(\theta, t)^2}{\left(u(\theta, t)^3 + \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 u(\theta, t) \right)} \\ & \left. + \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial \theta^2} \frac{1}{\left(u(\theta, t)^2 + \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right)} \right\} \quad (4.3) \end{aligned}$$

es importante notar, que si $u\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon, t\right) = u\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon, t\right)$ con $\epsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, es decir la superficie posee simetría de reflexión alrededor de $\theta = \frac{\pi}{2}$, resulta que $H\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon, t\right) = H\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon, t\right)$, es decir la curvatura media H hereda la simetría de reflexión de la superficie. Este rasgo permite analizar si una solución numérica se aleja de la solución real.

Luego para obtener h , se debe conocer el diferencial de volumen sobre la hipersuperficie. Por ello determinamos la métrica inducida.

Para la hipersuperficie $\Phi = r - u(\theta, t) = 0$, se tiene que $dr = \frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} d\theta$. Reemplazando en (5.2), se obtiene su métrica inducida

4.1. ECUACIÓN ESCALAR DE FLUJO EN COORDENADAS

$$\begin{aligned}
 ds_*^2 &= g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{rr} \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 d\theta^2 \\
 ds_*^2 &= \left[g_{\theta\theta} + g_{rr} \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 \\
 ds_*^2 &= \left[\left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 + u(\theta, t)^2 \right] d\theta^2 + u(\theta, t)^2 \sin^2(\theta) d\phi^2
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\sqrt{|g^*|} = u(\theta, t) \sin(\theta) \sqrt{\left[\left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 + u(\theta, t)^2 \right]} \tag{4.5}$$

Luego la expresión para h resulta

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{\int_{M_t} H dM_t}{\int_{M_t} dM_t} = \frac{\int_{M_t} H \sqrt{|g^*(\theta, \phi)|} d\theta d\phi}{\int_{M_t} \sqrt{|g^*(\theta, \phi)|} d\theta d\phi} \\
 h &= \frac{2\pi \int_0^\pi H u(\theta, t) \sin(\theta) \sqrt{\left[\left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 + u(\theta, t)^2 \right]} d\theta}{2\pi \int_0^\pi u(\theta, t) \sin(\theta) \sqrt{\left[\left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 + u(\theta, t)^2 \right]} d\theta}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Por ultimo solo resta conocer la expresión para $(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
 (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}} &= \left(g^{rr} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[1 + \frac{1}{u(\theta, t)^2} \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Finalmente la ecuación escalar de flujo (3.12), para la métrica (5.1) en las coordenadas $\{r, \theta, \phi\}$ resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\theta, t) = \left[1 + \frac{1}{u(\theta, t)^2} \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2\pi \int_0^\pi H u(\theta, t) \sin(\theta) \sqrt{\left[\left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 + u(\theta, t)^2 \right]} d\theta}{2\pi \int_0^\pi u(\theta, t) \sin(\theta) \sqrt{\left[\left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 + u(\theta, t)^2 \right]} d\theta} - H(\theta, t) \right\} \tag{4.8}$$

donde $H(\theta, t)$ esta dado por (4.3).

4.2. VOLUMEN ENCERRADO POR LA HIPERSUPERFICIE

Es importante tener en cuenta que para resolver (4.8), se buscaran soluciones suaves con simetría axial. El dominio en la coordenada θ es $[0, \pi]$, luego de la suavidad y de la simetría axial, naturalmente surge una condición de frontera de Neumann:

$$\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0, \pi} = 0 \quad (4.9)$$

para todo t , por lo que superficie inicial también deberá cumplir tal condición de contorno.

4.2. Volumen encerrado por la hipersuperficie

Debido a que el flujo preserva el volumen, es importante conocer una fórmula para luego calcularlo numéricamente. Ello permitirá estimar cuanto se aleja la solución numérica de la verdadera.

$$\begin{aligned} V(t_0) &= \int_{M_{t_0}} (\sqrt{|g|}) \, dr d\theta d\phi \\ V(t_0) &= \int_{M_{t_0}} (\sqrt{r^4 \sin^2(\theta)}) \, dr d\theta d\phi \\ V(t_0) &= \int_{M_{t_0}} (r^2 \sin(\theta)) \, dr d\theta d\phi \\ V(t_0) &= 2\pi \int_0^\pi \sin(\theta) \left[\int_0^{u(\theta, t_0)} (r^2) \, dr \right] d\theta \\ V(t_0) &= \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi \sin(\theta) u(\theta, t_0)^3 \, d\theta \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.3. Soluciones Numéricas

En la figura 4.1 y 4.2, se toma el siguiente tipo de superficie inicial:

$$u(\theta, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos(\theta)}{a^2} + \frac{\sin(\theta)}{b^2}}} \right) \quad (4.11)$$

y en la figura 4.3 la siguiente superficie inicial:

$$u(\theta, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos(\theta)}{a^2} + \frac{\sin(\theta)}{b^2}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos(\theta)}{a^2} + \frac{\sin(\theta)}{b^2}}} \right) \quad (4.12)$$

4.3. SOLUCIONES NUMÉRICAS

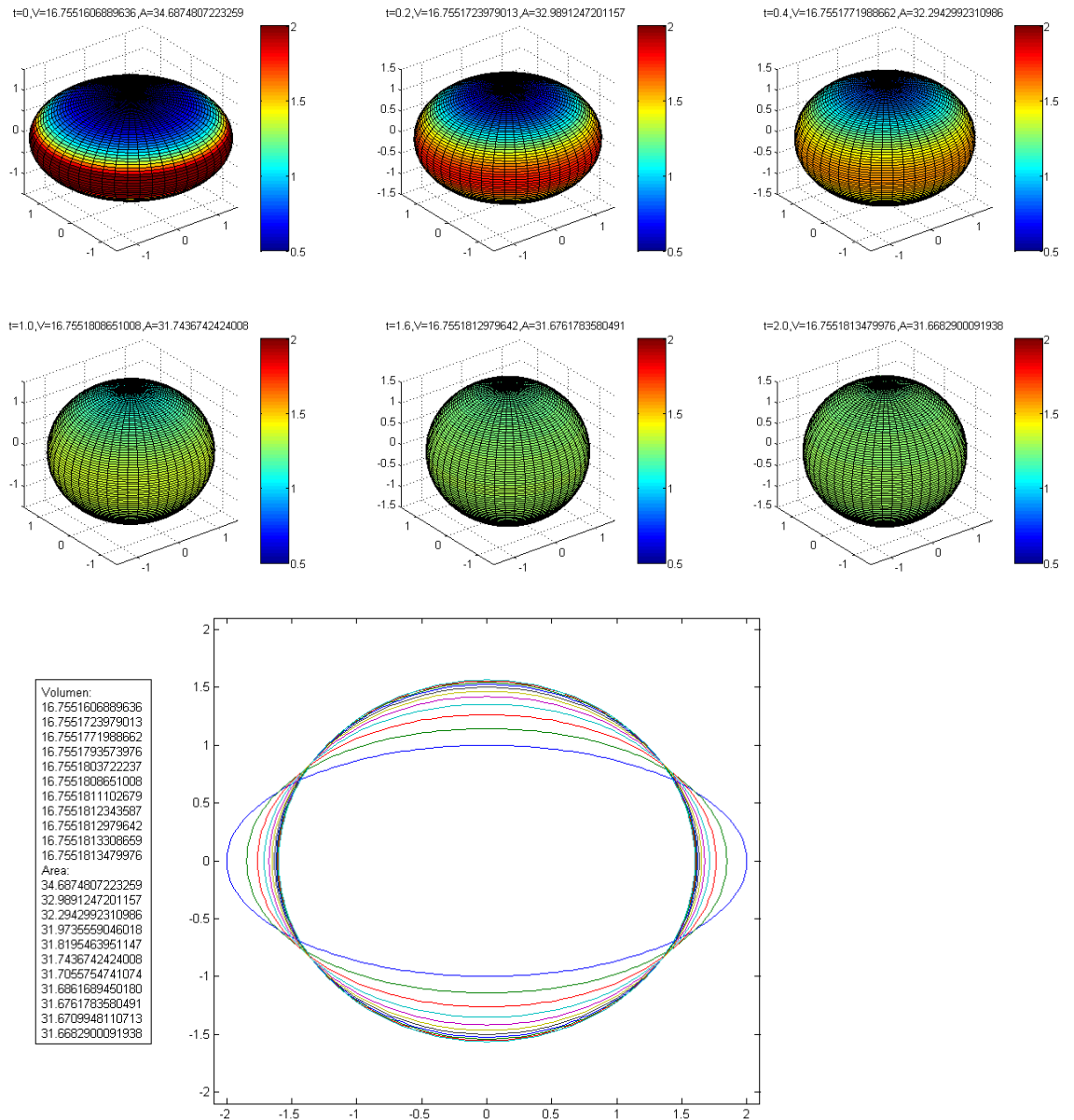


Figura 4.2: Superficie evolucionada según (4.8). Superficie inicial dada por (4.11), con parámetros $a_1 = 1$ y $b_1 = 2,0$ (Uniformemente convexa). Método de integración temporal Euler Explicito $\kappa_t = 0,00001$, hasta $t_{final} = 2,0$. Derivadas a cuarto orden en θ , con $\kappa_\theta = 0,0314$. En la primera gráfica la escala de colores indica el valor de la curvatura media H , en cada punto de la superficie. En la segunda gráfica se muestra la intersección con un plano, comenzando en $t = 0$ (azul), hasta t_{final} , a intervalos de tiempo $\Delta t = \frac{t_{final}}{10}$. **Evolución final: Convergencia a superficie de curvatura media constante y estable (Lo cual se esperaba según el resultado analítico mencionado en el comienzo del capítulo.)**

4.3. SOLUCIONES NUMÉRICAS

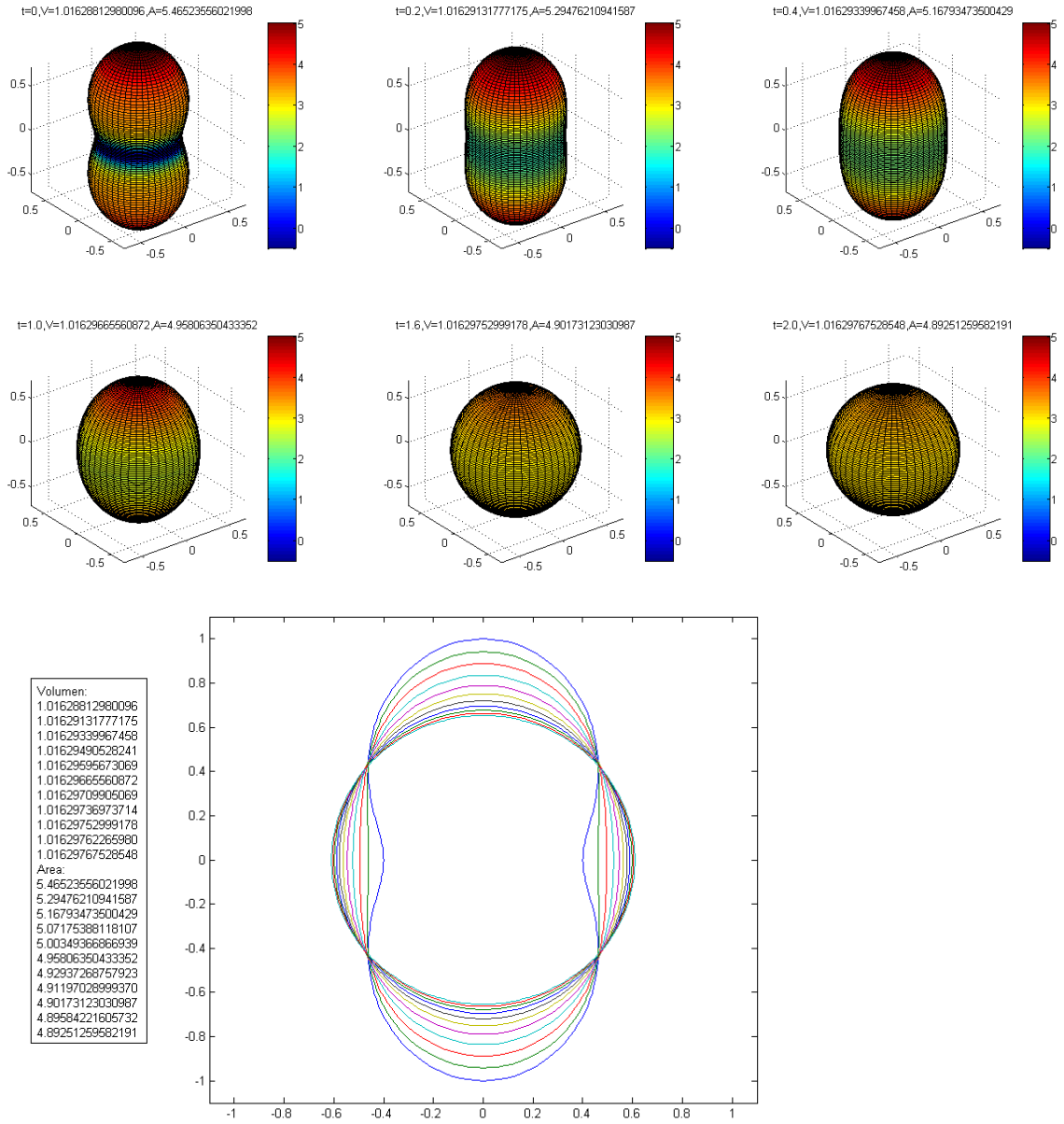


Figura 4.3: Superficie evolucionada según (4.8). Superficie inicial dada por (4.12), con parametros $a_1 = 2,0$, $b_1 = 1,5$, $a_2 = 1,0$ y $b_2 = 1,1$ (NO-Uniformemente convexa). Método de integración temporal Euler Explicito $\kappa_t = 0,00001$, hasta $t_{final} = 0,3$. Derivadas a cuarto orden en θ , con $\kappa_\theta = 0,0314$. En la primera gráfica la escala de colores indica el valor de la curvatura media H , en cada punto de la superficie. En la segunda gráfica se muestra la intersección con un plano, comenzando en $t = 0$ (azul), hasta t_{final} , a intervalos de tiempo $\Delta t = \frac{t_{final}}{10}$. **Evolución final: Convergencia a superficie de curvatura media constante y estable.**

4.3. SOLUCIONES NUMÉRICAS

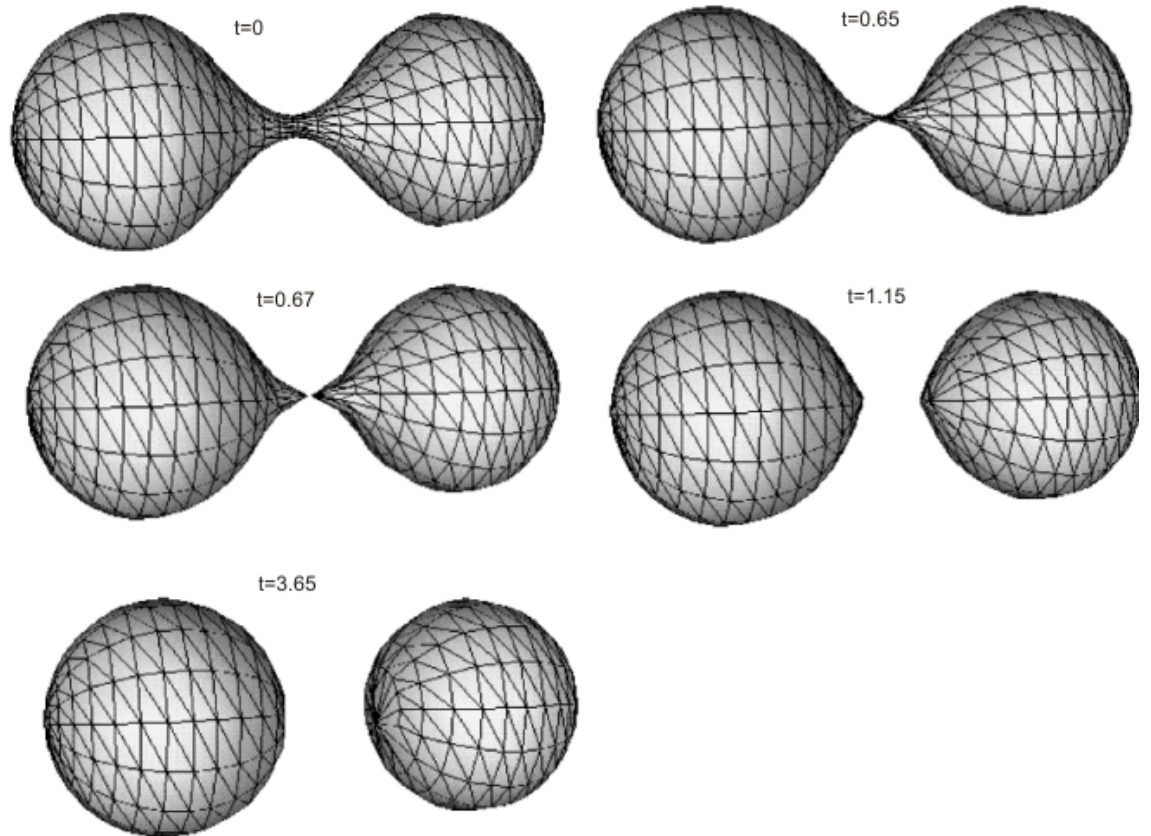


Figura 4.4: Ejemplo extraído de [11] para \mathbb{R}^3 . Este es un caso de una superficie (NO-Uniformemente convexa) que evoluciona de una forma diferente a las anteriores, figuras (4.1),(4.2) y (4.3). Se observa un estrangulamiento, el cual es un posible comportamiento del flujo.

En [11], cuando el estrangulamiento se reduce a un punto, se detiene la evolución numérica, se corta la superficie en dos y se continúa con la evolución. El método numérico empleado en la publicación es el de *Elementos Finitos*, y es diferente al utilizado a lo largo de este trabajo, en donde se utiliza *Diferencias Finitas*.

La justificación de porque se recurre a [11] para observar tal comportamiento es que, para observarlo en \mathbb{R}^3 se necesita partir de una superficie inicial que no puede ser definida según (4.2), por lo que las ecuaciones y métodos numéricos utilizados para obtener la solución del flujo no pueden ser utilizados sin una sustancial modificación. Sin embargo, es importante mencionar que el fenómeno de estrangulación se observara en los casos de Reissner-Nordström super extremo y Kerr super extremo.

Capítulo 5

Aplicación a Reissner-Nordström

El objetivo es comparar las soluciones numéricas del flujo, con las hipersuperficies isoperimétricas halladas analíticamente en [6], para el caso de Reissner-Nordström.

5.1. Ecuación escalar de flujo en coordenadas

Partiendo de la métrica de Reissner-Nordström

$$ds_{RN}^2 = \frac{1}{f(r)} d\tilde{t}^2 + f(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}(\theta) d\phi^2, \quad (5.1)$$
$$f(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}$$

distinguir la coordenada \tilde{t} , del parámetro de evolución de flujo t .

En este trabajo se considerara la parte $\tilde{t} = cte$, cuya métrica tridimensional esta dada por

$$ds^2 = f(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}(\theta) d\phi^2 \quad (5.2)$$

por el interés en estudiar el caso de Reissner-Nordström Super-Extremo, se considerara ($M^2 < Q^2$) donde el rango de la coordenada r es $0 \leq r \leq \infty$.

Siguiendo lo mencionado en los capítulos anteriores, se consideraran hipersuperficies definidas por (2.8).

En particular se tomaran hipersuperficies iniciales con simetría axial. Este tipo de hipersuperficie inmersa en una variedad con métrica dada por (5.2), tiene una curvatura media H que preserve tal simetría, en el sentido que H no depende de la coordenada ϕ . Debido a como interviene la curvatura media H en la ecuación (3.1), resulta que la evolución de la hipersuperficie preserve la simetría.

Por lo tanto, si las hipersuperficies iniciales tienen simetría axial, las siguientes también la tendrán y podemos definir la hipersuperficie en evolución para cada t como

5.1. ECUACIÓN ESCALAR DE FLUJO EN COORDENADAS

$$\Phi(p, t) = r - u(\theta, t) = 0 \quad (5.3)$$

A continuación se busca obtener las expresiones de $\left\{ h, H, (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}} \right\}$ que figuran en expresión escalar (3.12), correspondiente al caso Riemanniano general y por lo tanto es aplicable a este caso.

Comenzamos primero por H . Reemplazando (5.2) y (5.3), en la expresión de la curvatura media (2.9) obtenemos

$$\begin{aligned} H = & \left(\operatorname{sen}(\theta) u^2(\theta, t) \left[u^2(\theta, t) - 2Mu(\theta, t) + Q^2 + \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right)^{-1} \left\{ \right. \\ & + (u^2(\theta, t) - 2Mu(\theta, t) + Q^2) \left[-u(\theta, t) \operatorname{sen}(\theta) \left(\frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial \theta^2} \right) - u(\theta, t) \cos(\theta) \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \right] \\ & - \operatorname{sen}(\theta) [5Mu(\theta, t) - 2Q^2 - 3u^2(\theta, t)] \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 - \cos(\theta) u(\theta, t) \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^3 \\ & \left. + 2 [u^2(\theta, t) - 2Mu(\theta, t) + Q^2]^2 \operatorname{sen}(\theta) \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

es importante notar, que si $u\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon, t\right) = u\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon, t\right)$ con $\epsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$, es decir la superficie posee simetría de reflexión alrededor de $\theta = \frac{\pi}{2}$, resulta que $H\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon, t\right) = H\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon, t\right)$, es decir la curvatura media H hereda la simetría de reflexión de la superficie. Este rasgo permite analizar si una solución numérica se aleja de la solución real.

Luego para obtener h , se debe conocer el diferencial de volumen sobre la hipersuperficie. Por ello determinamos la métrica inducida.

Para la hipersuperficie $\Phi = r - u(\theta, t) = 0$, se tiene que $dr = \frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} d\theta$. Reemplazando en (5.2), se obtiene su métrica inducida

$$\begin{aligned} ds_*^2 &= g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 + g_{rr} \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 d\theta^2 \\ ds_*^2 &= \left[g_{\theta\theta} + g_{rr} \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 \\ ds_*^2 &= \left[u(\theta, t)^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{u(\theta, t)} + \frac{Q^2}{u(\theta, t)^2}} \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta^2 + u(\theta, t)^2 \operatorname{sen}(\theta) d\phi^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\sqrt{|g^*|} = u(\theta, \phi) \operatorname{sen}(\theta) \sqrt{u^2(\theta, t) + \frac{\left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2}{1 - \frac{2M}{u(\theta, t)} + \frac{Q^2}{u^2(\theta, t)}}} \quad (5.6)$$

5.1. ECUACIÓN ESCALAR DE FLUJO EN COORDENADAS

Luego la expresión para h resulta

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{\int_{M_t} H dM_t}{\int_{M_t} dM_t} = \frac{\int_{M_t} H \sqrt{|g^*(\theta, \phi)|} d\theta d\phi}{\int_{M_t} \sqrt{|g^*(\theta, \phi)|} d\theta d\phi} \\
 &= \frac{2\pi \int_0^\pi H u(\theta, \phi) \sin(\theta) \sqrt{u^2(\theta, t) + \frac{\left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta}\right)^2}{1 - \frac{2M}{u(\theta, t)} + \frac{Q^2}{u^2(\theta, t)}} d\theta}{2\pi \int_0^\pi u(\theta, \phi) \sin(\theta) \sqrt{u^2(\theta, t) + \frac{\left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta}\right)^2}{1 - \frac{2M}{u(\theta, t)} + \frac{Q^2}{u^2(\theta, t)}} d\theta} \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

Por ultimo solo resta conocer la expresión para $(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
 (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}} &= \left(g^{rr} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left(1 - \frac{2M}{u(\theta, t)} + \frac{\left[Q^2 + \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right]}{u^2(\theta, t)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Finalmente la ecuación escalar de flujo (3.12), para la métrica (5.1) en las coordenadas $\{r, \theta, \phi\}$ resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\theta, t) = \left(1 - \frac{2M}{u(\theta, t)} + \frac{\left[Q^2 + \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right]}{u^2(\theta, t)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2\pi \int_0^\pi u(\theta, \phi) \sin(\theta) \sqrt{u^2(\theta, t) + \frac{\left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta}\right)^2}{1 - \frac{2M}{u(\theta, t)} + \frac{Q^2}{u^2(\theta, t)}} H(\theta, t) d\theta}{2\pi \int_0^\pi u(\theta, \phi) \sin(\theta) \sqrt{u^2(\theta, t) + \frac{\left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta}\right)^2}{1 - \frac{2M}{u(\theta, t)} + \frac{Q^2}{u^2(\theta, t)}} d\theta} - H(\theta, t) \right\} \quad (5.9)$$

donde $H(\theta, t)$ esta dado por (5.4).

Es importante tener en cuenta que para resolver (5.9), se buscaran soluciones suaves con simetría axial. El dominio en la coordenada θ es $[0, \pi]$, luego de la suavidad y de la simetría axial, naturalmente surge una condición de frontera de Neumann:

$$\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0, \pi} = 0 \quad (5.10)$$

para todo t , por lo que superficie inicial también deberá cumplir tal condición de contorno.

5.2. VOLUMEN ENCERRADO POR LA HIPERSUPERFICIE

5.2. Volumen encerrado por la hipersuperficie

Debido a que el flujo preserva el volumen, es importante conocer una fórmula para luego calcularlo numéricamente. Ello permitirá estimar cuanto se aleja la solución numérica de la verdadera.

$$\begin{aligned}
 V(t_0) &= \int_{M_{t_0}} \left(\sqrt{|g_{\text{RN super extremo}}|} \right) dr d\theta d\phi \\
 V(t_0) &= \int_{M_{t_0}} \left(\sqrt{\frac{r^4 \sin^2(\theta)}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}} \right) dr d\theta d\phi \\
 V(t_0) &= \int_{M_{t_0}} \left(\sqrt{\frac{r^6 \sin^2(\theta)}{(r^2 - 2Mr + Q^2)}} \right) dr d\theta d\phi \tag{5.11} \\
 V(t_0) &= 2\pi \int_0^\pi \sin(\theta) \left[\int_0^{u(\theta, t_0)} \left(r^3 \sqrt{\frac{1}{(r^2 - 2Mr + Q^2)}} \right) dr \right] d\theta \\
 V(t_0) &= 2\pi \int_0^\pi \sin(\theta) [\gamma_{\text{RN super extremo}}(\theta)]
 \end{aligned}$$

notar que no hay problemas con el rango de integración de r , para el cálculo de $\gamma_{\text{RN super extremo}}$.

5.3. Resultados y Soluciones Numéricas

5.3.1. Resultados

Lo primero a tener en cuenta es que en Reissner-Nordström, se puede probar analíticamente que las hipersuperficies de curvatura media constante, son aquellas con la coordenada $r = cte$. En [6], se prueba analíticamente que existe un radio crítico $R_c = \frac{2Q^2}{3M}$ que delimita las hipersuperficies $r = cte$, estables de las inestables. Donde $[(r = cte) > R_c \Leftrightarrow \text{estable}]$ y $[(r = cte) < R_c \Leftrightarrow \text{inestable}]$.

A partir de este conocimiento previo, se busca analizar el comportamiento del flujo.

Se obtuvieron soluciones de la ecuación de flujo (5.9), para los valores de $M = 2, Q = 3$. En tal caso el radio crítico $R_c = 3$, y el volumen encerrado por tal hipersuperficie calculado numéricamente es $V_c = 109,6578$.

Numéricamente se observó que para hipersuperficies iniciales con volumen menor a V_c , la evolución del flujo estrangulaba o llevaba parte de la hipersuperficie hacia la singularidad $r = 0$. Mientras que para aquellas con volumen mayor a V_c , el flujo converge a una superficie de radio constante, que según se prueba en [6] es estable.

5.3. RESULTADOS Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

Para hallar numéricamente la superficie límite $r = R_c$, una estrategia útil es concentrarse solo en el volumen de las hipersuperficies iniciales. Comenzando con un volumen pequeño, e ir incrementándolo hasta que el flujo converge. Sin embargo, para aplicar esta estrategia se debe tener en cuenta los siguiente:

- Hay que tener presente que la evolución del flujo depende de la variedad donde esta inmersa la hipersuperficie, como así también la forma global de la hipersuperficie. Por lo tanto no solo hay que analizar el volumen, sino que hay que cuidar que las formas globales de las hipersuperficies no tengan cambios drásticos. Un ejemplo de este comportamiento se puede observar en las figuras (5.2) y (5.3), en donde ambas tienen el mismo volumen, pero tienen evoluciones diferentes. Una converge a una hipersuperficie de curvatura media constante estable, y la otra llega a la singularidad.
- Otro aspecto importante surge cuando en Reissner-Nordström donde hay simetría esférica, se toman hipersuperficies iniciales con simetría de reflexión en $\theta = \frac{\pi}{2}$. Resulta que en este caso, puede suceder que numéricamente el flujo se estanque en una superficie de curvatura media constante inestable. Para evitar esto, hay que considerar hipersuperficies iniciales asimétricas. Un ejemplo de este comportamiento se observa al comparar las figuras (5.4) y (5.5), en donde ambas hipersuperficies tienen el mismo volumen.

Este último aspecto de las hipersuperficies iniciales asimétricas a utilizar, fue advertido por Jan Metzger, que luego de consultarle generosamente sugirió posibles causas por las que el comportamiento numérico del flujo podía converger a hipersuperficies de curvatura media inestables.

5.3.2. Soluciones Numéricas

Las expresiones paramétricas de las hipersuperficies iniciales simétricas (simetría de reflexión en $\theta = \frac{\pi}{2}$) son:

$$u(\theta, t = 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos(\theta)}{a^2} + \frac{\sin(\theta)}{b^2}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos(\theta)}{a^2} + \frac{\sin(\theta)}{b^2}}} \right) \quad (5.12)$$

$$u(\theta, t = 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos(\theta)}{a^2} + \frac{\sin(\theta)}{b^2}}} \right) \quad (5.13)$$

Para las hipersuperficies iniciales a-simétricas se usan las expresiones anteriores, pero se divide en dos el dominio, en $\theta = [0, \frac{\pi}{2}]$ y en $\theta = [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Y para cada parte se usan parámetros diferentes.

5.3. RESULTADOS Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

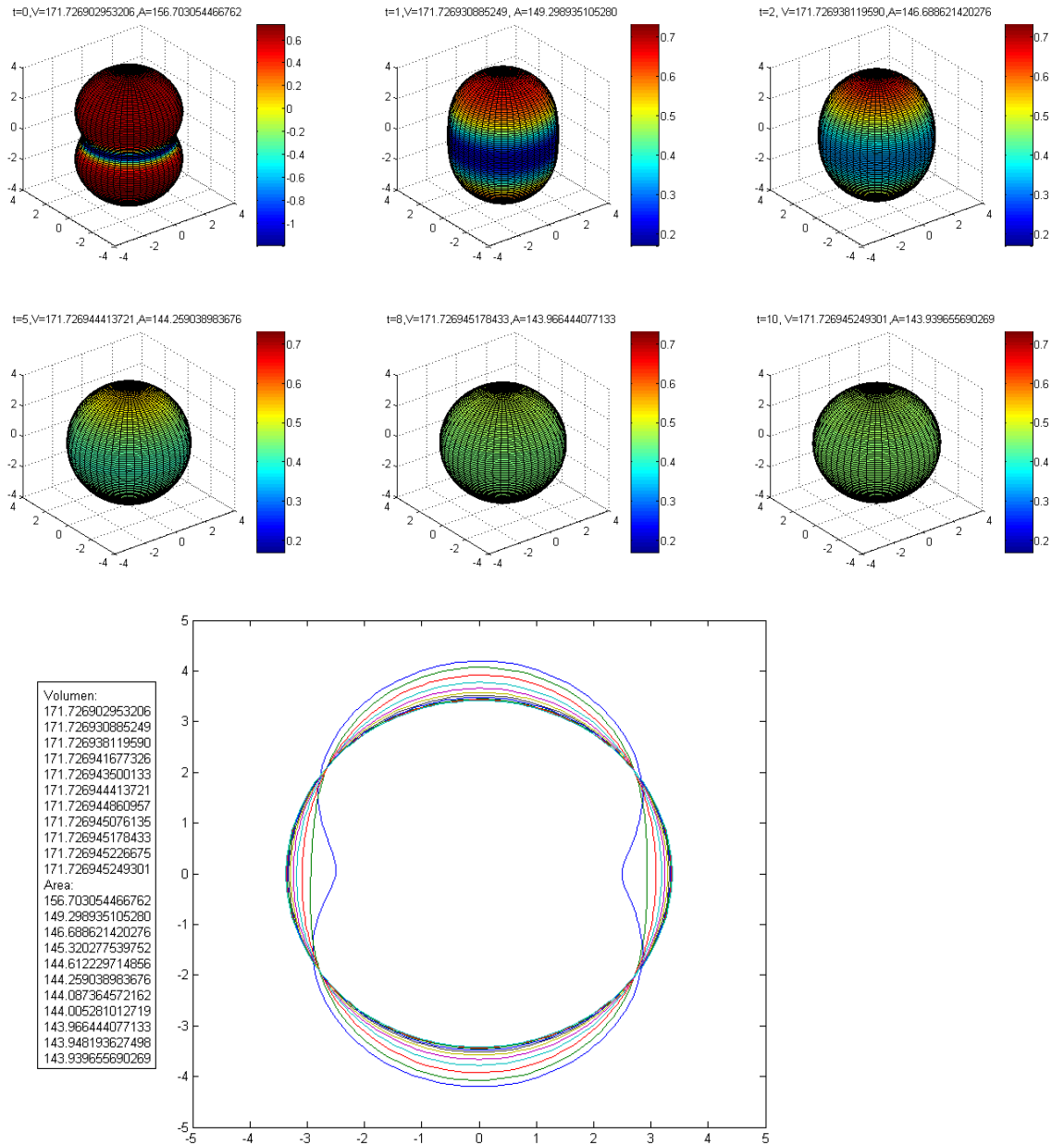


Figura 5.1: Superficie evolucionada según (5.9). Superficie inicial dada por (5.12), con $a_1 = 5, b_1 = 4,5, a_2 = 0,80138, b_2 = 2,0$. Método de integración temporal Euler Explícito $\kappa_t = 0,00001$, hasta $t_{final} = 10$. Derivadas a cuarto orden en θ , con $\kappa_\theta = 0,0314$. En la primera gráfica la escala de colores indica el valor de la curvatura media \mathbf{H} , en cada punto de la superficie. En la segunda gráfica se muestra la intersección con un plano, comenzando en $t = 0$ (azul), hasta t_{final} , a intervalos de tiempo $\Delta t = \frac{t_{final}}{10}$. **Evolución final: Convergencia a superficie de curvatura media constante y estable**

5.3. RESULTADOS Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

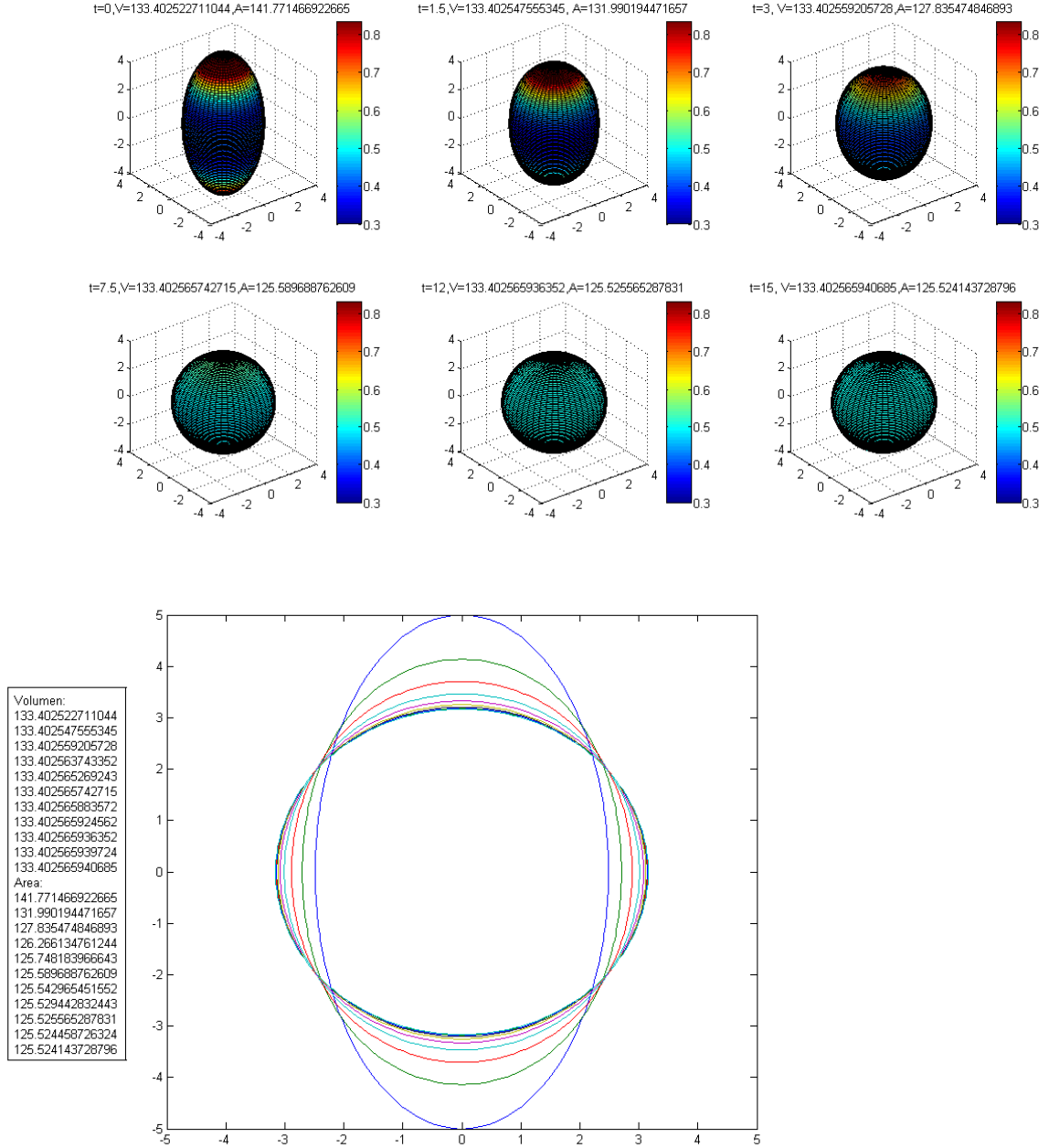


Figura 5.2: Superficie evolucionada según (5.9). Superficie inicial simétrica dada por (5.13), con parámetros $a_1 = 5$ y $b_1 = 2,483605$. Método de integración temporal Euler Explícito $\kappa_t = 0,00001$, hasta $t_{final} = 15$. Derivadas a cuarto orden en θ , con $\kappa_\theta = 0,0314$. En la primera gráfica la escala de colores indica el valor de la curvatura media \mathbf{H} , en cada punto de la superficie. En la segunda gráfica se muestra la intersección con un plano, comenzando en $t = 0$ (azul), hasta t_{final} , a intervalos de tiempo $\Delta t = \frac{t_{final}}{10}$. **Evolución final: Convergencia a superficie de curvatura media constante y estable**

5.3. RESULTADOS Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

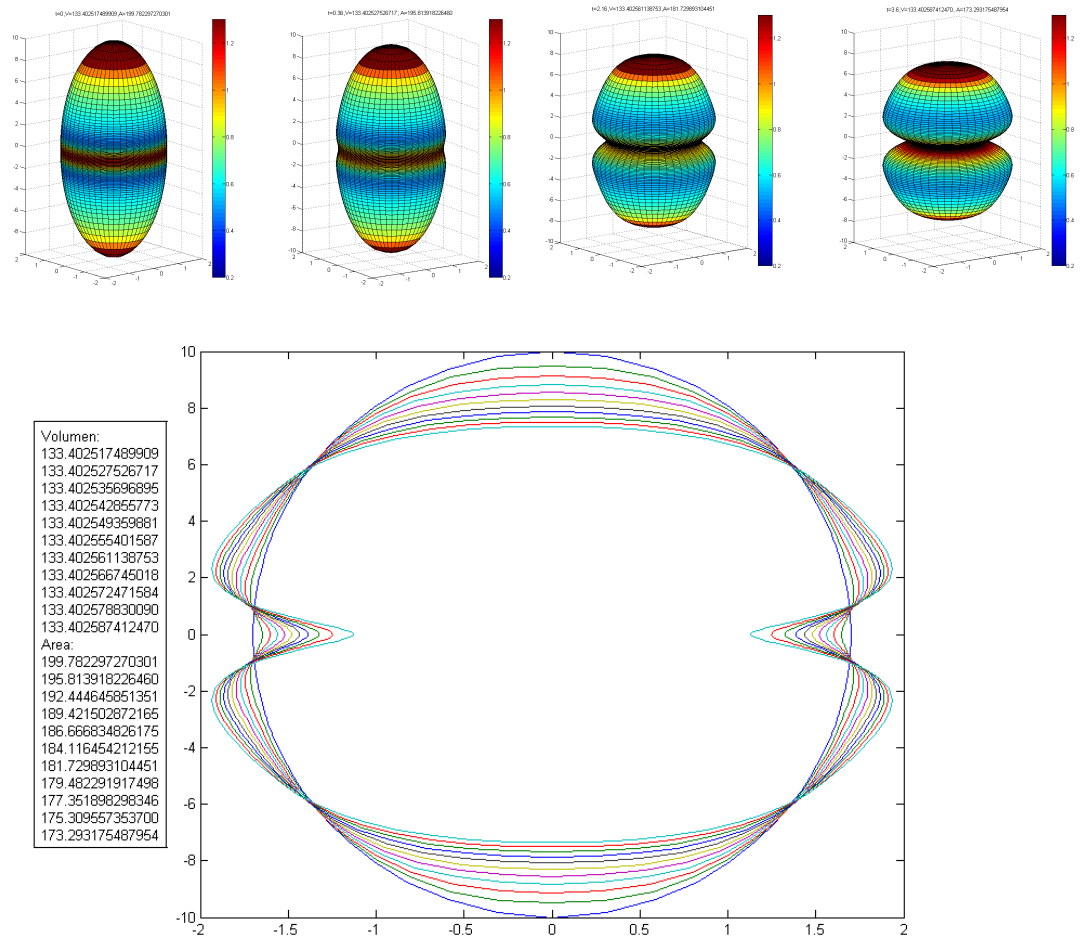


Figura 5.3: Superficie evolucionada según (5.9). Superficie inicial simétrica dada por (5.13), con parámetros $a1 = 10$ y $b1 = 1,7$. Método de integración temporal Euler Explícito $\kappa_t = 0,00001$, hasta $t_{final} = 15$. Derivadas a cuarto orden en θ , con $\kappa_\theta = 0,0314$. En la primera gráfica la escala de colores indica el valor de la curvatura media H , en cada punto de la superficie. En la segunda gráfica se muestra la intersección con un plano, comenzando en $t = 0$ (azul), hasta t_{final} , a intervalos de tiempo $\Delta t = \frac{t_{final}}{10}$. **Evolución final: Estrangulamiento.**

5.3. RESULTADOS Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

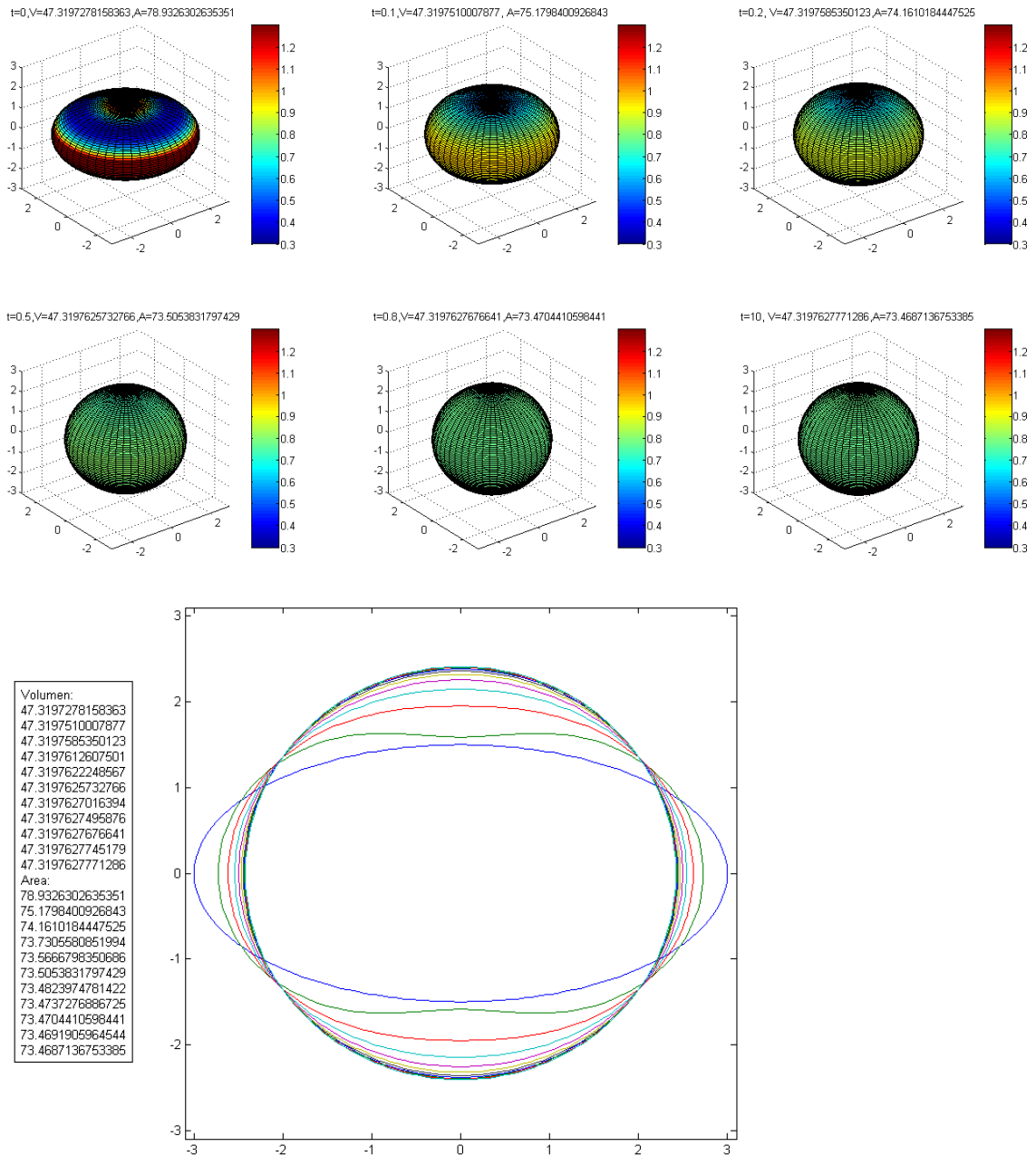


Figura 5.4: Superficie evolucionada según (5.9). Superficie inicial simétrica dada por (5.13), con parámetros $a_1 = 1,5$ y $b_1 = 3,0$. Método de integración temporal Euler Explícito $\kappa_t = 0,00001$, hasta $t_{final} = 1,3$. Derivadas a cuarto orden en θ , con $\kappa_\theta = 0,0314$. En la primera gráfica la escala de colores indica el valor de la curvatura media H , en cada punto de la superficie. En la segunda gráfica se muestra la intersección con un plano, comenzando en $t = 0$ (azul), hasta t_{final} , a intervalos de tiempo $\Delta t = \frac{t_{final}}{10}$. **Evolución final: Converge a una superficie de curvatura media constante y estable**

5.3. RESULTADOS Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

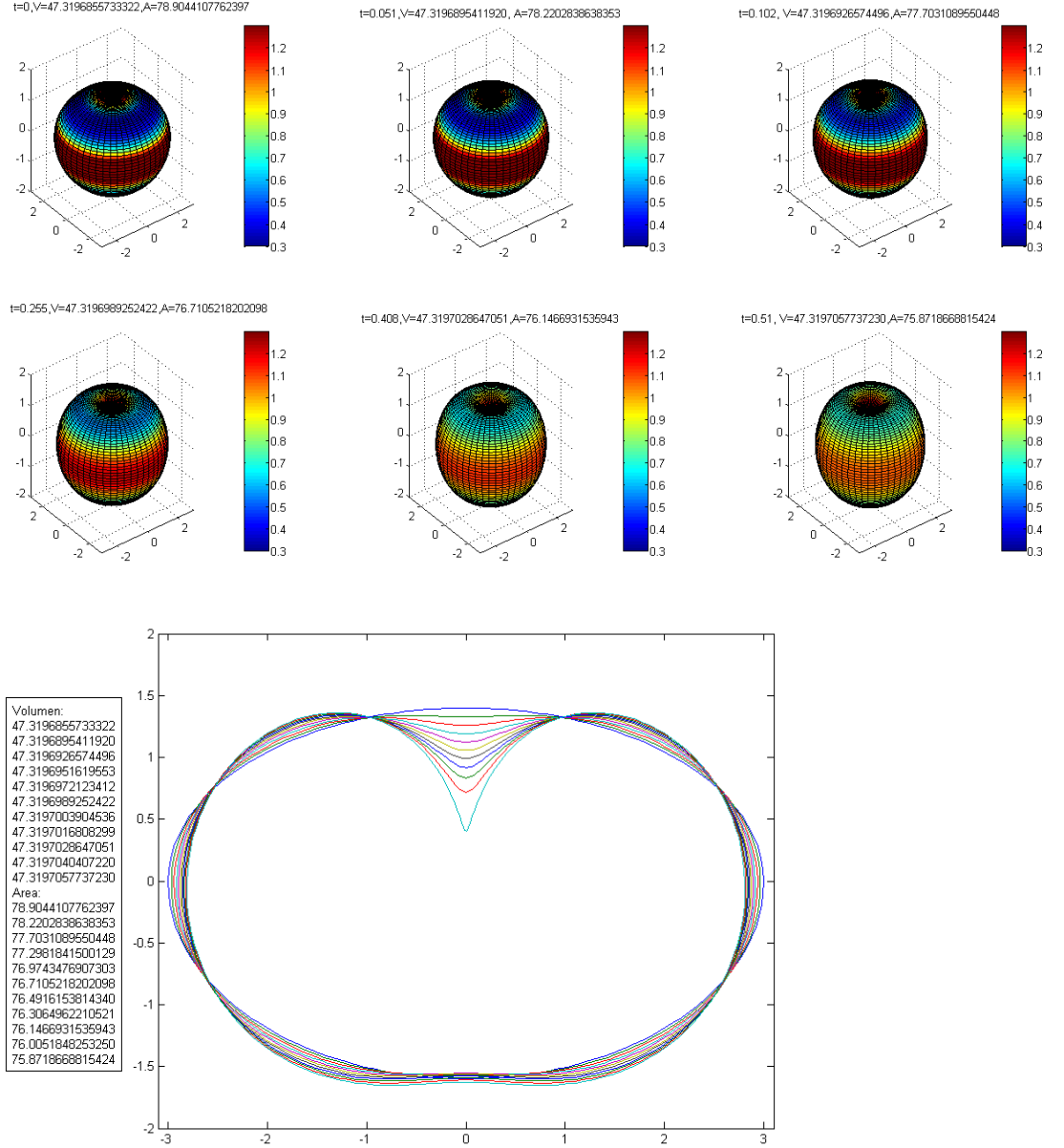


Figura 5.5: Superficie evolucionada según (5.9). Superficie inicial a-simétrica dada por (5.13), con parámetros $a_1 = 1,4$, $b_1 = 3,0$, $a_2 = 1,59793$ y $b_2 = 3,0$. Método de integración temporal Euler Explicito $\kappa_t = 0,00001$, hasta $t_{final} = 0,51$. Derivadas a cuarto orden en θ , con $\kappa_\theta = 0,0314$. En la primera gráfica la escala de colores indica el valor de la curvatura media H , en cada punto de la superficie. En la segunda gráfica se muestra la intersección con un plano, comenzando en $t = 0$ (azul), hasta t_{final} , a intervalos de tiempo $\Delta t = \frac{t_{final}}{10}$. **Evolución final: Parte de la hipersuperficie llega a la singularidad, $u(\theta = 0, t) \rightarrow r = 0$.**

Capítulo 6

Aplicación a Kerr super-extremo

6.1. Ecuación escalar de flujo en coordenadas

Partiendo de la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist

$$ds_{kerr}^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma} \right) d\tilde{t}^2 - \frac{4Mar}{\Sigma} \sin^2(\theta) d\tilde{t}d\phi + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma} \right) \sin^2(\theta) d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 + a^2 - 2Mr \\ \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2(\theta) \end{aligned}$$

En este trabajo se considerara la parte $\tilde{t} = cte$, de Kerr Super Extremo ($M^2 < a^2$)

$$ds^2 = \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma} \right) \sin^2(\theta) d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (6.2)$$

Siguiendo lo mencionado en los capítulos anteriores, se consideraran hipersuperficies definidas por (2.8).

En particular se toman hipersuperficies iniciales con simetría axial. Este tipo de hipersuperficie inmersa en una variedad con métrica dada por (6.2), tiene una curvatura media H que preserva tal simetría, en el sentido que H no depende de la coordenada ϕ . Debido a como interviene la curvatura media H en la ecuación (3.1), resulta que la evolución de la hipersuperficie preserva la simetría.

Por lo tanto, si las hipersuperficies iniciales tienen simetría axial, las siguientes también la tendrán y podemos definir la hipersuperficie en evolución para cada t como

6.1. ECUACIÓN ESCALAR DE FLUJO EN COORDENADAS

$$\Phi(p, t) = r - u(\theta, t) = 0 \quad (6.3)$$

A continuación se busca obtener las expresiones de $\left\{ h, H, (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi)^{\frac{1}{2}} \right\}$ que figuran en expresión escalar (3.12), correspondiente al caso Riemanniano general y por lo tanto es aplicable a este caso.

Comenzamos primero por H . Reemplazando (6.2) y (6.3), en la expresión de la curvatura media (2.9) obtenemos

$$\begin{aligned} H = & - \left\{ \Delta \left[\Delta a^2 \sin^2(\theta) - (a^2 + r^2)^2 \right] \frac{\partial^2 u(\theta, t)}{\partial \theta^2} \right. \\ & + 2 \left[\Delta a^2 \sin^2(\theta) - \frac{(a^2 + r^2)^2}{2} \right] \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^3 \\ & + 2 \left[\Delta a^2 \sin^2(\theta) (M - r) - \frac{(a^2 + r^2)(a^2 M - 3ra^2 - 3r^2 + 5Mr^2)}{2} \right] \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \\ & + 2\Delta \left[\Delta a^2 \sin^2(\theta) - \frac{(a^2 + r^2)^2}{2} \right] \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) \frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \\ & \left. + \Delta^2 \left[a^2 \sin^2(\theta) (M - r) + 2r^3 + 2ra^2 \right] \right\} / \\ & \left\{ \sqrt{\Sigma} \left[\Delta + \left(\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \left[\Delta a^2 \sin^2(\theta) - (a^2 + r^2)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.4)$$

es importante notar, al igual como se hizo en Reissner-Nordström, que si $u\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon, t\right) = u\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon, t\right)$ con $\epsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, es decir la superficie posee simetría de reflexión alrededor de $\theta = \frac{\pi}{2}$, resulta que $H\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon, t\right) = H\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon, t\right)$ es decir la curvatura media H hereda la simetría de reflexión de la superficie. Este rasgo permite analizar si una solución numérica se aleja de la solución verdadera.

Dentro de las expresiones que restan conocer esta h , para lo cual se debe conocer el diferencial de volumen sobre la hipersuperficie. Por ello determinamos la métrica inducida.

Para la hipersuperficie $\Phi = r - u(\theta, t) = 0$, se tiene que $dr = \frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} d\theta$. Reemplazando en (6.2), se obtiene su métrica inducida

6.1. ECUACIÓN ESCALAR DE FLUJO EN COORDENADAS

$$\begin{aligned}
 ds_*^2 &= (g_{\theta\theta}|_{r=u(\theta,t)}) d\theta^2 + (g_{\phi\phi}|_{r=u(\theta,t)}) d\phi^2 + \left(g_{rr}|_{r=u(\theta,t)} \left(\frac{\partial u(\theta,t)}{\partial \theta} \right)^2 \right) d\theta^2 \\
 ds_*^2 &= \left[(g_{\theta\theta}|_{r=u(\theta,t)}) + \left(g_{rr}|_{r=u(\theta,t)} \left(\frac{\partial u(\theta,t)}{\partial \theta} \right)^2 \right) \right] d\theta^2 + (g_{\phi\phi}|_{r=u(\theta,t)}) d\phi^2 \\
 ds_*^2 &= \left[\frac{\Sigma}{\Delta} \left(\frac{\partial u(\theta,t)}{\partial \theta} \right)^2 + \Sigma \right] d\theta^2 + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma} \right] \sin^2(\theta) d\phi^2
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\sqrt{|g^*|} = \text{sen}(\theta) \sqrt{\left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial u(\theta,t)}{\partial \theta} \right)^2 + 1 \right] \left[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta) \right]} \tag{6.6}$$

Luego la expresión para h resulta

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{\int_{M_t} H dM_t}{\int_{M_t} dM_t} = \frac{\int_{M_t} H \sqrt{|g^*(\theta, \phi)|} d\theta d\phi}{\int_{M_t} \sqrt{|g^*(\theta, \phi)|} d\theta d\phi} \\
 &= \frac{2\pi \int_0^\pi H \text{sen}(\theta) \sqrt{\left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial u(\theta,t)}{\partial \theta} \right)^2 + 1 \right] \left[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta) \right]} d\theta}{2\pi \int_0^\pi \text{sen}(\theta) \sqrt{\left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial u(\theta,t)}{\partial \theta} \right)^2 + 1 \right] \left[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta) \right]} d\theta}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Por ultimo solo resta conocer la expresión para $[g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi]^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
 [g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi]^{\frac{1}{2}} &= \left[g^{rr} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 + g^{\phi\phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[\frac{\Delta}{\Sigma} + \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{\partial u(\theta,t)}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Finalmente la ecuación escalar de flujo (3.12), para la métrica (6.2) en las coordenadas $\{r, \theta, \phi\}$ resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\theta, t) = \left[\frac{\Delta}{\Sigma} + \frac{1}{\Sigma} \left(\frac{\partial u(\theta,t)}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2\pi \int_0^\pi H(\theta, t) \text{sen}(\theta) \sqrt{\left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial u(\theta,t)}{\partial \theta} \right)^2 + 1 \right] \left[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta) \right]} d\theta}{2\pi \int_0^\pi \text{sen}(\theta) \sqrt{\left[\frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial u(\theta,t)}{\partial \theta} \right)^2 + 1 \right] \left[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta) \right]} d\theta} - H(\theta, t) \right\} \tag{6.9}$$

6.2. VOLUMEN ENCERRADO POR LA HIPERSUPERFICIE

donde $H(\theta, t)$ esta dado por (6.4).

Es importante tener en cuenta que para resolver (6.9), se buscaran soluciones suaves con simetría axial. El dominio en la coordenada θ es $[0, \pi]$, luego de la suavidad y de la simetría axial, naturalmente surge una condición de frontera de Neumann:

$$\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0, \pi} = 0 \quad (6.10)$$

para todo t , por lo que superficie inicial también deberá cumplir tal condición de contorno.

6.2. Volumen encerrado por la hipersuperficie

Debido a que el flujo preserva el volumen, es importante conocer una formula para luego calcularlo numéricamente. Ello permitirá estimar cuanto se aleja la solución numérica de la verdadera.

$$\begin{aligned} V(t_0) &= \int_{M_{t_0}} \left(\sqrt{|g_{\text{kerr super extremo}}|} \right) dr d\theta d\phi \\ V(t_0) &= \int_{M_{t_0}} \left(\sqrt{[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta)] \sin^2(\theta) \frac{\Sigma}{\Delta}} \right) dr d\theta d\phi \\ V(t_0) &= 2\pi \int_0^\pi \sin(\theta) \left[\int_0^{u(\theta, t_0)} \left(\sqrt{[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\theta)] \frac{\Sigma}{\Delta}} \right) dr \right] d\theta \\ V(t_0) &= 2\pi \int_0^\pi \sin(\theta) [\gamma_{\text{kerr super extremo}}(\theta)] \end{aligned} \quad (6.11)$$

En el caso kerr super-extremo ($M^2 < a^2$), $\Delta \neq 0$, por lo que no hay problemas con el rango de integración de r , para el calculo de $\gamma_{\text{kerr super extremo}}$.

6.3. Resultados y Soluciones Numéricas

6.3.1. Resultados

Para el caso $M = 2, a = 3$ se hicieron corridas tomando diferentes hipersuperficies iniciales.

Los resultados de tales corridas numéricas, se resumen en que existe un volumen inicial critico V_c , tal que si la superficie inicial $u(\theta, t = 0)$ tiene volumen $V_{t=0}$:

- Si $V_{t=0} > V_c$: El flujo converge a una superficie de curvatura media constante. Que se espera ademas sea *Estable*, según la evidencia del comportamiento del flujo obtenida del caso Reissner-Nordström.

6.3. RESULTADOS Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

- Si $V_{t=0} < V_c$: La superficie se deforma hasta llegar a la singularidad $r = 0$.

Para determinar V_c , se evolucionan diferentes hipersuperficies iniciales, haciendo un barrido en el volumen. Básicamente, primero se toma una superficie inicial que no converge y luego se toman otras de tal forma que sus volúmenes van incrementándose, hasta encontrar la primera que converge.

Por lo tanto, la precisión del volumen crítico depende del incremento en volumen ΔV usado en el barrido; y el volumen crítico numérico hallado se puede expresar como $V_c = (V_c \pm \Delta V)$.

Por ultimo, es importante mencionar que el resultado anterior solo es valido para las superficies iniciales consideradas: algunas dentro de los tipos (esferas, esferoides oblatos, pseudo-esferoides oblatos, elipsoides y pseudo-elipsoides asimétricos). No se puede afirmar que sea valido para todo tipo de superficie inicial. Porque la convergencia del flujo depende de la superficie inicial considerada, y puede suceder como en Reissner-Nordström que a igual Volumen inicial, dos hipersuperficies iniciales distintas evolucionen una hasta converger a una de curvatura media constante estable y la otra llegue a la singularidad, ver figuras (5.2) y (5.3). En Kerr super-extremo no se observo tal comportamiento, pero es posible que sea debido al limitado conjunto de hipersuperficies iniciales consideradas.

6.3.2. Soluciones Numéricas

Las expresiones paramétricas de las hipersuperficies iniciales simétricas (simetría de reflexión en $\theta = \frac{\pi}{2}$) son:

$$u(\theta, t = 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos(\theta)}{a^2} + \frac{\sin(\theta)}{b^2}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos(\theta)}{a^2} + \frac{\sin(\theta)}{b^2}}} \right) \quad (6.12)$$

$$u(\theta, t = 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos(\theta)}{a^2} + \frac{\sin(\theta)}{b^2}}} \right) \quad (6.13)$$

$$u(\theta, t = 0) = b; \quad (6.14)$$

Para las hipersuperficies iniciales a-simétricas se usan las expresiones anteriores, pero se divide en dos el dominio, en $\theta = [0, \frac{\pi}{2}]$ y en $\theta = [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Y para cada parte se usan parámetros diferentes.

6.3. RESULTADOS Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

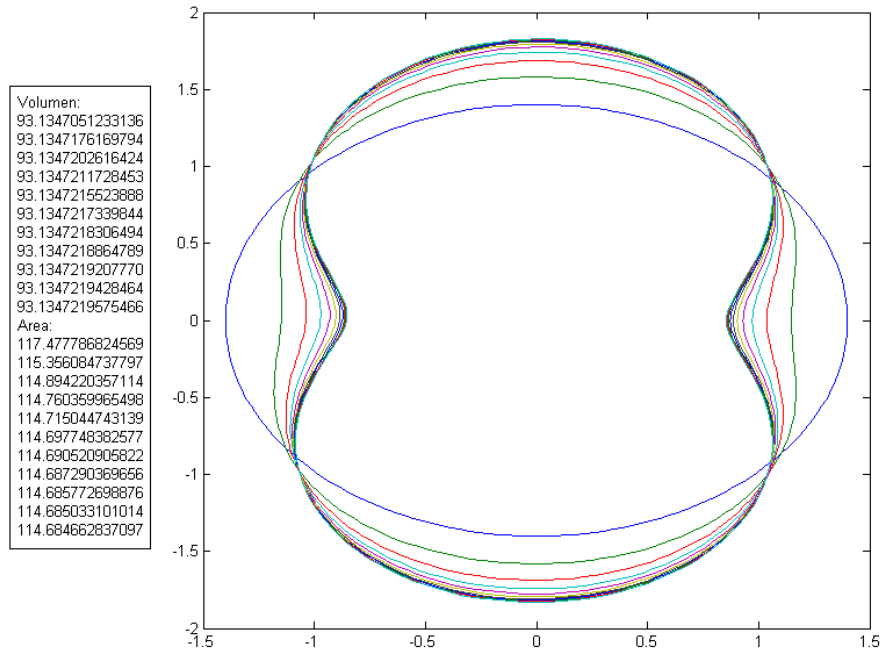
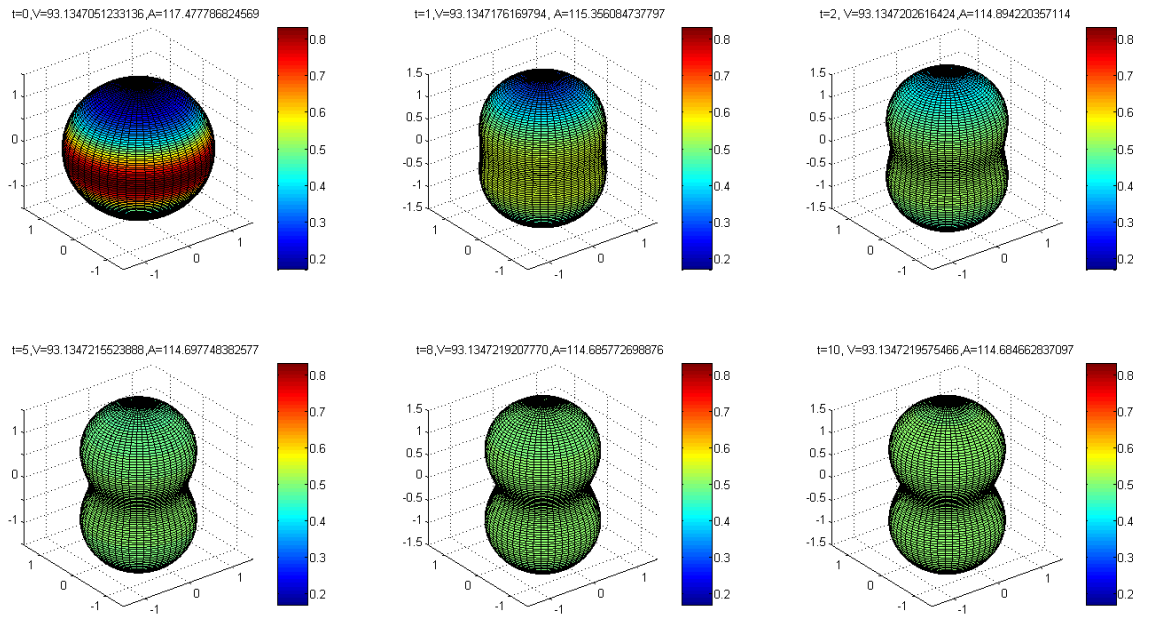


Figura 6.1: Superficie evolucionada según (6.9). Superficie inicial simétrica (6.14) $b = 1,4$. Método de integración temporal Euler Explícito $\kappa_t = 0,00001$, y derivadas a cuarto orden en θ con $\kappa_\theta = 0,0314$. La escala de colores indica el valor de la curvatura media H , en cada punto de la superficie. **Evolución final: Convergencia a superficie de curvatura media constante. Presumiblemente estable**

6.3. RESULTADOS Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

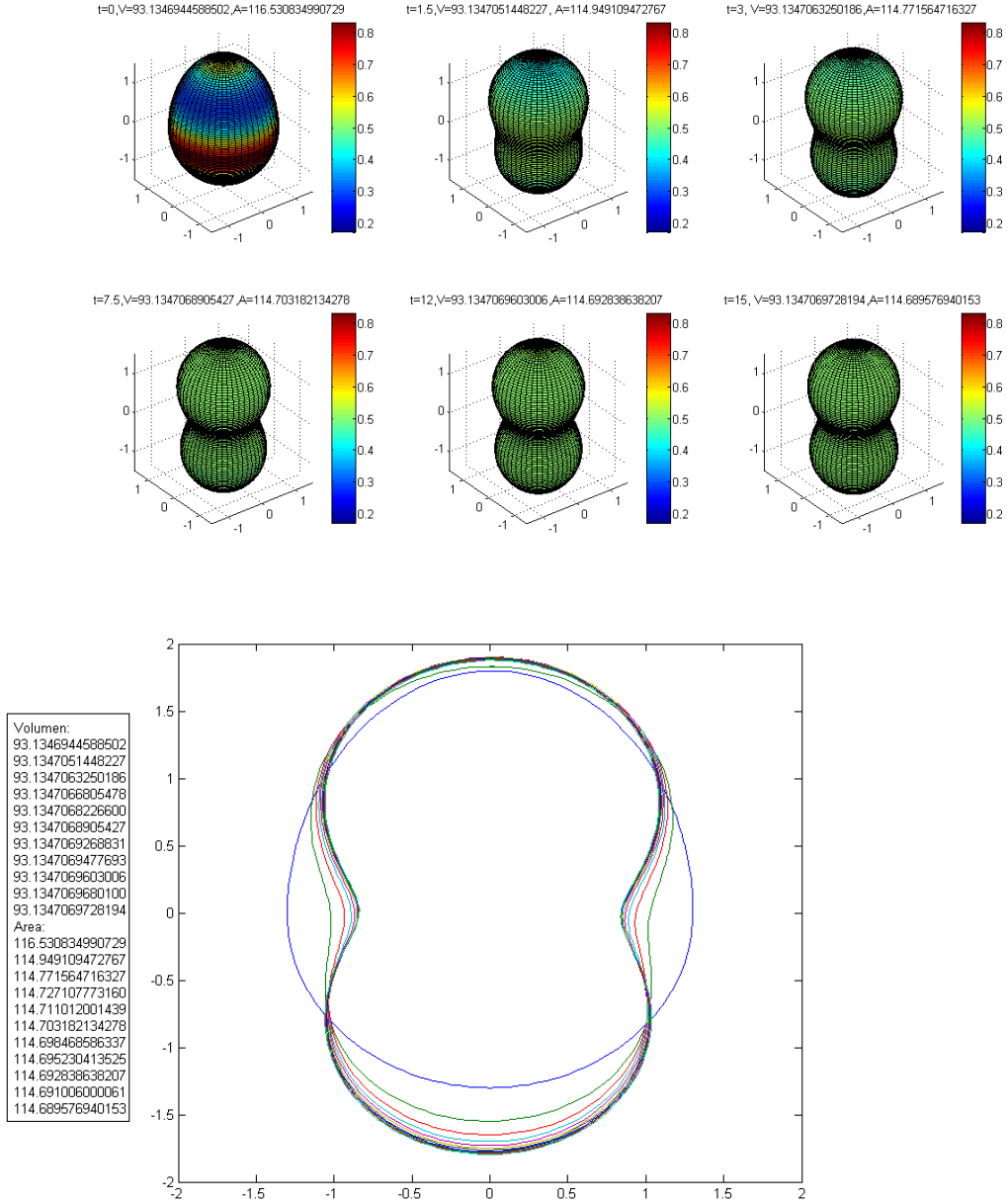


Figura 6.2: Superficie evolucionada según (6.9). Superficie inicial asimétrica (6.12), con parámetros $a_1 = 1,8$, $a_2 = 1,3$, $b_1 = 1,302636$ y $b_2 = 1,302636$. Método de integración temporal Euler Explicito $\kappa_t = 0,00001$, hasta $t_{final} = 15$. Derivadas a cuarto orden en θ , con $\kappa_\theta = 0,0314$. En la primera gráfica la escala de colores indica el valor de la curvatura media \mathbf{H} , en cada punto de la superficie. En la segunda gráfica se muestra la intersección con un plano, comenzando en $t = 0$ (azul), hasta t_{final} , a intervalos de tiempo $\Delta t = \frac{t_{final}}{10}$. **Evolución final: Convergencia a superficie de curvatura media constante. Presumiblemente estable**

6.3. RESULTADOS Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

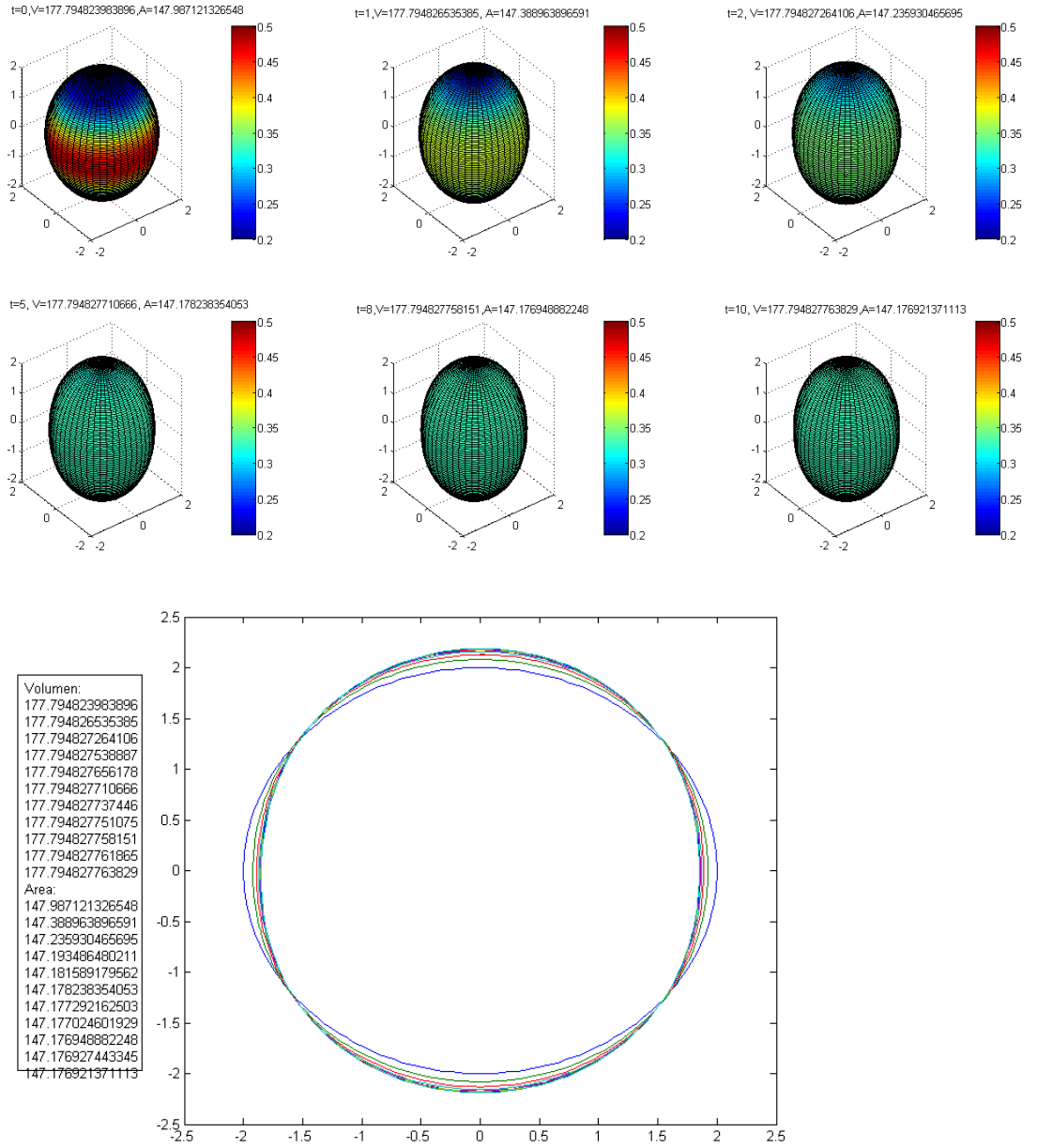


Figura 6.3: Superficie evolucionada según (6.9). Superficie inicial simétrica (6.14), con parámetro $b = 2,0$. Método de integración temporal Euler Explicito $\kappa_t = 0,00001$, hasta $t_{final} = 10$. Derivadas a cuarto orden en θ , con $\kappa_\theta = 0,0314$. En la primera gráfica la escala de colores indica el valor de la curvatura media H , en cada punto de la superficie. En la segunda gráfica se muestra la intersección con un plano, comenzando en $t = 0$ (azul), hasta t_{final} , a intervalos de tiempo $\Delta t = \frac{t_{final}}{10}$. **Evolución final: Convergencia a superficie de curvatura media constante. Presumiblemente estable**

6.3. RESULTADOS Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

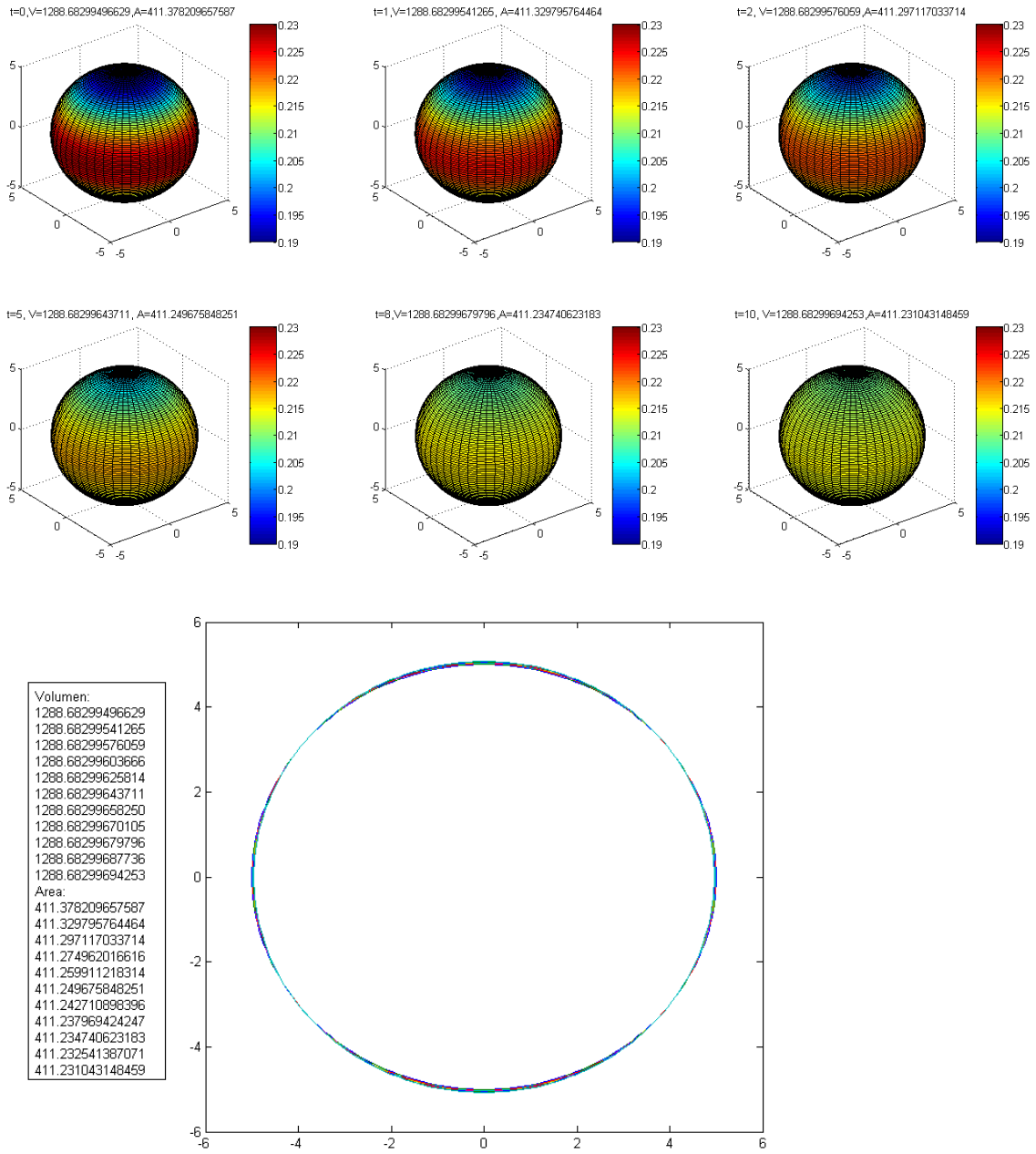


Figura 6.4: Superficie evolucionada según (6.9). Superficie inicial simétrica (6.14), con parámetro $b = 5,0$. Método de integración temporal Euler Explícito $\kappa_t = 0,00001$, hasta $t_{final} = 10$. Derivadas a cuarto orden en θ , con $\kappa_\theta = 0,0314$. En la primera gráfica la escala de colores indica el valor de la curvatura media H , en cada punto de la superficie. En la segunda gráfica se muestra la intersección con un plano, comenzando en $t = 0$ (azul), hasta t_{final} , a intervalos de tiempo $\Delta t = \frac{t_{final}}{10}$. **Evolución final: Convergencia a superficie de curvatura media constante. Presumiblemente estable**

6.3. RESULTADOS Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

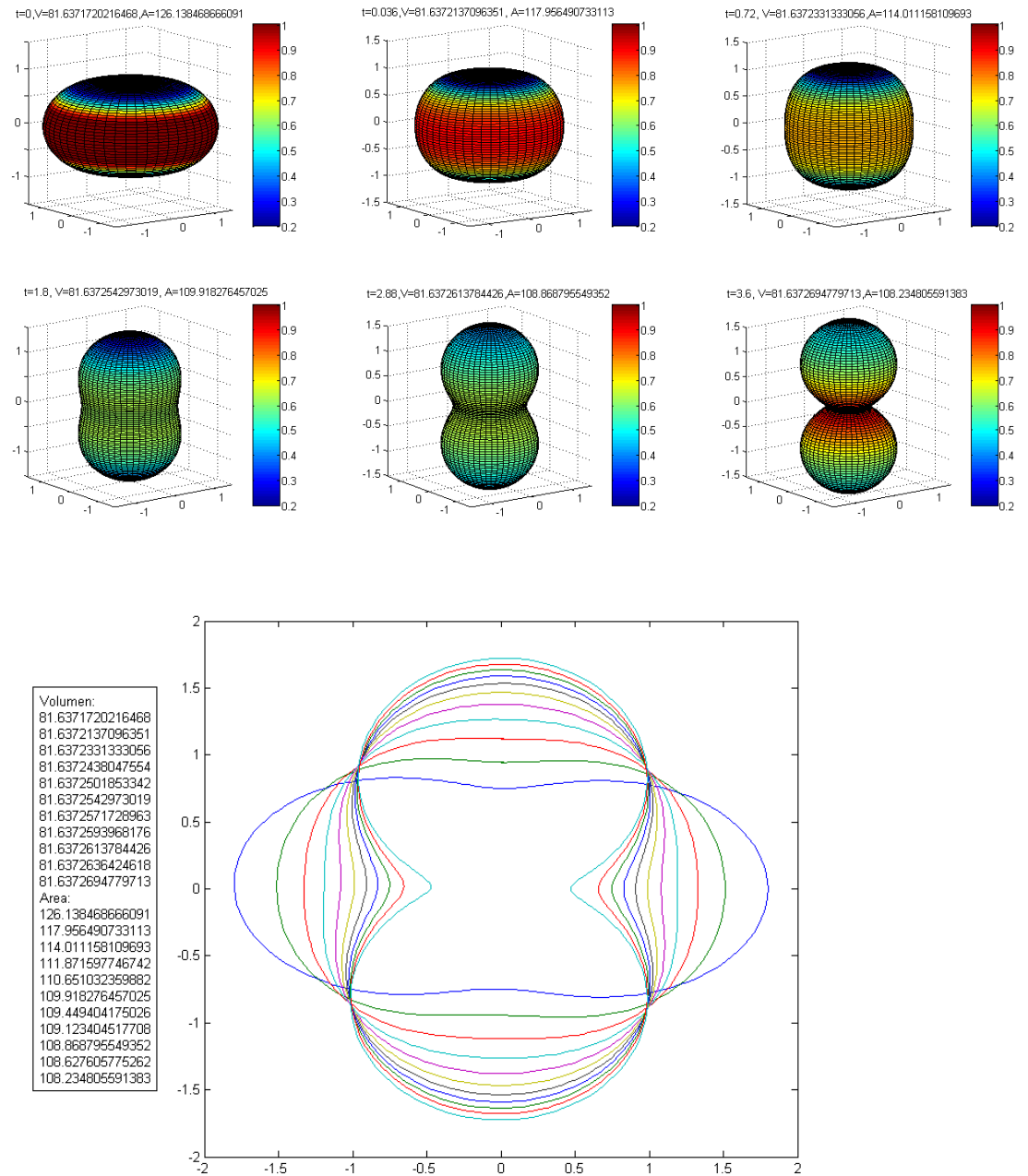


Figura 6.5: Superficie evolucionada según (6.9). Superficie inicial simétrica (6.12), con parámetros $a_1 = 2,447322$, $b_1 = 3,5$, $a_2 = 1,7$ y $b_2 = 1,7$. Método de integración temporal Euler Explícito $\kappa_t = 0,00001$, hasta $t_{final} = 3,6$. Derivadas a cuarto orden en θ , con $\kappa_\theta = 0,0314$. En la primera gráfica la escala de colores indica el valor de la curvatura media H , en cada punto de la superficie. En la segunda gráfica se muestra la intersección con un plano, comenzando en $t = 0$ (azul), hasta t_{final} , a intervalos de tiempo $\Delta t = \frac{t_{final}}{10}$. **Evolución final: Estrangulamiento.**

6.3. RESULTADOS Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

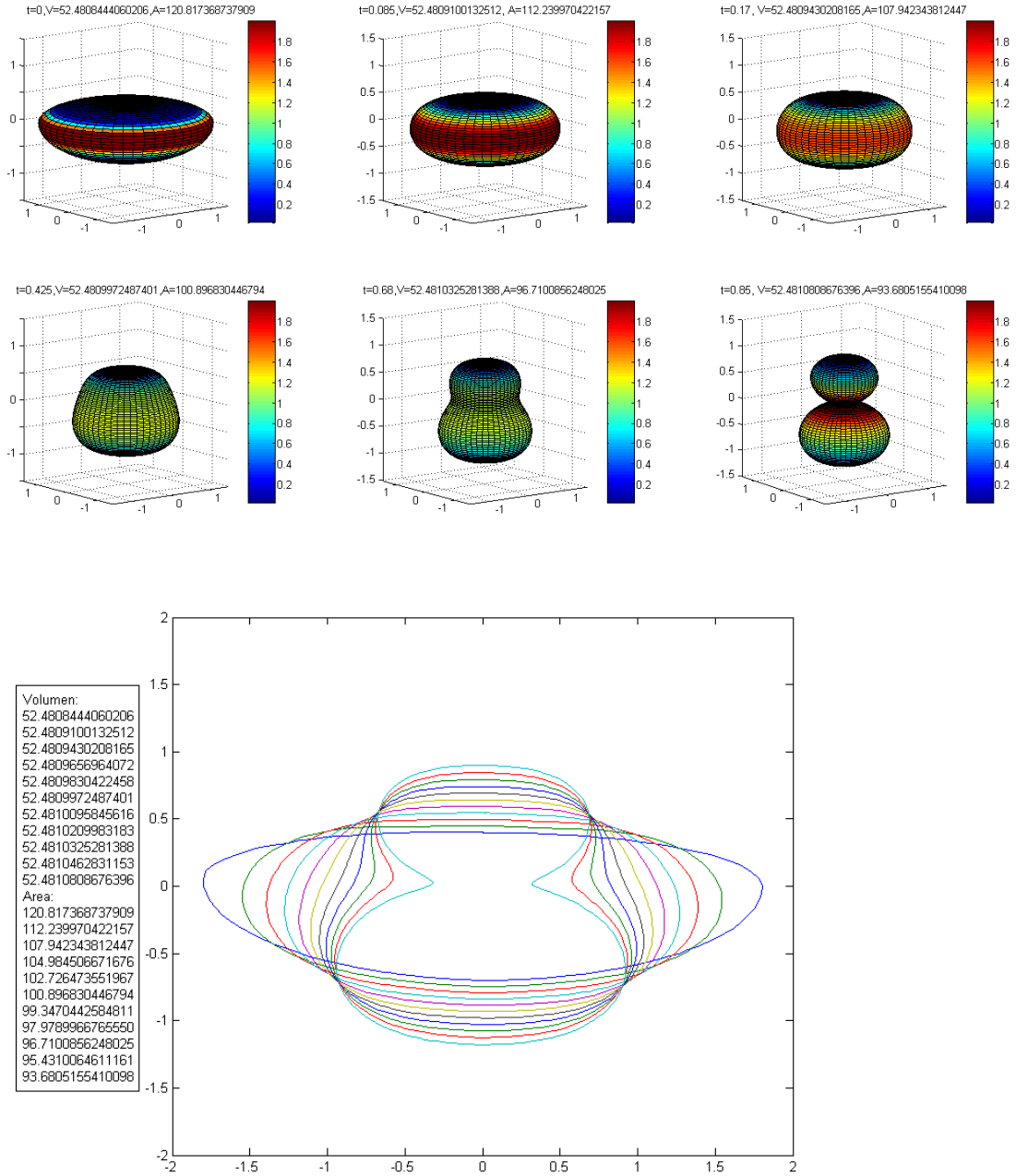


Figura 6.6: Superficie evolucionada según (6.9). Superficie inicial asimétrica (6.12), con parámetros $a_1 = 0,7$, $a_2 = 0,4$ y $b_1 = 1,802636$. Método de integración temporal Euler Explicito $\kappa_t = 0,00001$, hasta $t_{final} = 0,85$. Derivadas a cuarto orden en θ , con $\kappa_\theta = 0,0314$. En la primera gráfica la escala de colores indica el valor de la curvatura media H , en cada punto de la superficie. En la segunda gráfica se muestra la intersección con un plano, comenzando en $t = 0$ (azul), hasta t_{final} , a intervalos de tiempo $\Delta t = \frac{t_{final}}{10}$. **Evolución final: Estrangulamiento.**

6.3. RESULTADOS Y SOLUCIONES NUMÉRICAS

Capítulo 7

Método Numérico

En este capítulo se detallarán las aproximaciones numéricas de diferencias finitas utilizadas.

7.1. Aproximaciones numéricas utilizadas

Para comenzar observemos (4.8), (5.9) y (6.9). En ellas hay una derivada primera en el parámetro t , luego derivada primera, derivada segunda y una integral en la coordenada θ .

Se usaron diferencias finitas para aproximar las derivadas y las integrales. Y el dominio se discretizó según:

$$\begin{aligned}t_n &= \kappa_t n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{t_{final}}{\kappa_t} \\ \theta_i &= \kappa_\theta i, \quad i = 1, 2, \dots, N_\theta \\ \kappa_t &= 10^{-5} \\ \kappa_\theta &= \frac{\pi}{N_\theta}, \quad N_\theta = 101\end{aligned}\tag{7.1}$$

7.1.1. Derivadas en θ

Para aproximar la derivada primera y segunda en θ , se utilizaron diferencias centradas a cuarto orden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(\theta, t_0)}{\partial \theta} \Big|_{\theta_p} &\cong \frac{-u(\theta_{p+2}, t_0) + 8u(\theta_{p+1}, t_0) - 8u(\theta_{p-1}, t_0) + u(\theta_{p-2}, t_0)}{12\kappa_\theta} + O(\kappa_\theta^4) \\ \frac{\partial^2 u(\theta, t_0)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta_p} &\cong \frac{-u(\theta_{p+2}, t_0) + 16u(\theta_{p+1}, t_0) - 30u(\theta_p, t_0) + 16u(\theta_{p-1}, t_0) - u(\theta_{p-2}, t_0)}{12\kappa_\theta^2} + O(\kappa_\theta^4)\end{aligned}\tag{7.2}$$

7.2. ANÁLISIS DE PRECISIÓN

La suavidad y simetría axial de la solución, con la consecuente condición de contorno de Neumann [$\frac{\partial u(\theta, t)}{\partial \theta}|_{\theta=0, \pi} = 0$] de (4.8), (5.9) y (6.9), es un rasgo que debe implementarse numéricamente.

Una manera natural de hacerlo, es mediante el uso de puntos fantasmas (7.3), junto con (7.2).

$$\begin{aligned}u(\pi - \kappa_\theta, t) &= u(\pi + \kappa_\theta, t) \\u(\pi - 2\kappa_\theta, t) &= u(\pi + 2\kappa_\theta, t) \\u(0 - \kappa_\theta, t) &= u(0 + \kappa_\theta, t) \\u(0 - 2\kappa_\theta, t) &= u(0 + 2\kappa_\theta, t)\end{aligned}\tag{7.3}$$

notar que los puntos fantasmas (7.3), equivalen a que la derivada primera dada por (7.2) se anule en $\theta = 0, \pi$.

7.1.2. Integrales

Tanto las integrales que figuran en (4.8), (5.9) y (6.9), como también la integral doble necesaria para calcular el volumen encerrado por la superficie, se aproximaron mediante la *Regla de Simpson Compuesta* [10].

7.1.3. Integración en el parámetro t

Mencionadas las aproximaciones realizadas en los lados derechos de (4.8), (5.9) y (6.9), se obtiene la solución aproximada usando el método de *Euler Explícito* para integrar en el parámetro t .

7.2. Análisis de Precisión

7.2.1. Estudio de Precisión

Según [12], si la solución es lo suficientemente suave, y el espaciamiento κ_θ lo suficientemente pequeño, el coeficiente

$$Q = \sqrt{\frac{\int [v(\kappa_t, t, \kappa_\theta, \theta) - v(\kappa_t, t, \frac{\kappa_\theta}{2}, \theta)]^2 d\theta}{\int [v(\kappa_t, t, \frac{\kappa_\theta}{2}, \theta) - v(\kappa_t, t, \frac{\kappa_\theta}{4}, \theta)]^2 d\theta}}\tag{7.4}$$

es un indicador del orden de precisión en θ . Si $Q \cong 2^p$, indica que la precisión en κ_θ es de orden p .

Los resultados del test indican que la precisión en κ_θ depende del orden de precisión de las derivadas. Para derivadas con precisión de orden 2, se obtiene $Q \cong 4$. Mientras que para derivadas con precisión de orden 4, se obtiene $Q \cong 16$.

7.2.2. Análisis de la solución

Básicamente se chequearon dos aspectos de la solución numérica.

- **Preservación de volumen:** Da una noción cuantitativa de cuanto se aleja la solución numérica de la verdadera. En la variación de volumen están incluidos todos los errores numéricos. Y a fin de cuentas es el criterio que decide que método numérico utilizar.
- **Preservación de la simetría de reflexión:** Cuando se parte de una superficie con simetría de reflexión en la coordenada θ , ambas ecuaciones (4.8), (5.9) y (6.9) la preservan según se discutió al dar las expresiones explícitas de H para ambos casos. Luego se puede corroborar en la solución numérica si presenta tal simetría, descartando la solución en el caso que no la tenga.

Es importante mencionar que se hicieron corridas con otros métodos de integración temporal mas precisos. Entre ellos, *Euler Mejorado* (segundo orden), *Runge Kutta* (cuarto orden) y *Adams Bashforth* (cuarto orden). A pesar de su mayor precisión, se encontraron evidencias de que para (5.9) mostraban rasgos de inestabilidad. Entre ellos, menor preservación de volumen (2 ordenes de magnitud de diferencia) y de simetría de reflexión (9 ordenes de magnitud de diferencia para algunos tiempos T) en comparación con Euler Explicito. En el caso de (6.9), no se hallaron tales evidencias, pero tampoco se observó una mejora en la preservación de volumen, siendo Euler Explicito el que mejor lo preserva (diferencias menores a 1 orden de magnitud).

Por tal motivo, debido a la robustez en cuanto a la estabilidad y al menor error numérico de Euler Explicito (constatado por la menor variación de volumen), se escogió como el método mas confiable para integrar en el tiempo.

7.2. ANÁLISIS DE PRECISIÓN

Apéndice A

Formula de variación del área

En este apéndice, para el caso particular del flujo (3.1), se recuperara la formula del (Lema1) enunciado en el (capitulo 1).

Esta expresión resulta importante, pues revela que el flujo de curvatura media que preserva volumen, reduce el área.

Ademas, esta demostración permite resolver una diferencia de signo entre las publicaciones [3] y [4].

A continuación se seguirán los pasos de [7].

A.1. Demostración para flujos en dirección normal

Sean $\{x^i, i = 1, \dots, n\}$ las coordenadas locales de la hipersuperficie M_t y $\{y^\alpha, \alpha = 1, \dots, n + 1\}$ las coordenadas de N^{n+1} donde esta embebida la hipersuperficie.

La métrica g^* inducida sobre M_t , esta dada por:

$$\begin{aligned} g_{ij}^*(q) &= g_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha(q)}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta(q)}{\partial x^j}, q \in M_t \\ &= g_{\alpha\beta} \frac{\partial F^\alpha(q)}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta(q)}{\partial x^j}, q \in M_t \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Luego si derivamos (A.1) respecto a t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}^*(q) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(g_{\alpha\beta} \frac{\partial F^\alpha(q)}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta(q)}{\partial x^j} \right), q \in M_t \\ &= g_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F^\alpha(q)}{\partial x^i} \right) \right] \frac{\partial F^\beta(q)}{\partial x^j} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial F^\alpha(q)}{\partial x^i} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F^\beta(q)}{\partial x^j} \right) \right], q \in M_t \\ &= g_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial F^\alpha(q)}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial F^\beta(q)}{\partial x^j} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial F^\alpha(q)}{\partial x^i} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial F^\beta(q)}{\partial t} \right) \right], q \in M_t \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

a partir de (3.1) se tiene:

A.1. DEMOSTRACIÓN PARA FLUJOS EN DIRECCIÓN NORMAL

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}^*(q) &= g_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} [(h-H)\hat{n}^\alpha(q)] \right\} \frac{\partial F^\beta(q)}{\partial x^j} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial F^\alpha(q)}{\partial x^i} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^j} [(h-H)\hat{n}^\beta(q)] \right\}, q \in M_t \\
&= g_{\alpha\beta} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x^i} (h-H) \right] \hat{n}^\alpha(q) + (h-H) \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \hat{n}^\alpha(q) \right] \right\} \frac{\partial F^\beta(q)}{\partial x^j} \\
&\quad + g_{\alpha\beta} \frac{\partial F^\alpha(q)}{\partial x^i} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x^j} (h-H) \right] \hat{n}^\beta(q) + (h-H) \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \hat{n}^\beta(q) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

por ortogonalidad del vector normal \hat{n} , con los vectores tangentes $\left\{ \frac{\partial F}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n \right\}$ a M_t , resulta

$$g_{\alpha\beta} \hat{n}^\alpha \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i} = 0 \tag{A.4}$$

luego

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}^*(q) &= g_{\alpha\beta} \left\{ (h-H) \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \hat{n}^\alpha(q) \right] \right\} \frac{\partial F^\beta(q)}{\partial x^j} + g_{\alpha\beta} \frac{\partial F^\alpha(q)}{\partial x^i} \left\{ (h-H) \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \hat{n}^\beta(q) \right] \right\} \\
&= 2(h-H)g_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^i} \hat{n}^\alpha(q) \frac{\partial F^\beta(q)}{\partial x^j} = 2(h-H)K_{ij}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

donde K_{ij} es la curvatura extrínseca. Hasta aquí se siguió parte de la demostración que figura en [7].

Por ultimo solo resta ver que el área disminuye. El área de una hipersuperficie esta dada por:

$$A = \int_{M_t} dM_t = \int_{M_t} \sqrt{|g^*|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \tag{A.6}$$

donde $|g^*|$ es el determinante de g^* , luego

$$\frac{d}{dt} A = \int_{M_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{|g^*|} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \tag{A.7}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{|g^*|} = \frac{1}{2\sqrt{|g^*|}} \frac{d}{dt} |g^*| \tag{A.8}$$

para el calculo de $\frac{d}{dt} |g^*|$ solo basta con usar la formula de Jacobi para derivadas del determinante de matrices, y el resultado de (A.5):

A.1. DEMOSTRACIÓN PARA FLUJOS EN DIRECCIÓN NORMAL

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}|g^*| &= |g^*| \operatorname{tr} z \left[\operatorname{mat}(g_{ij}^{-1}) \operatorname{mat}\left(\frac{d}{dt}g_{ij}^*\right) \right] \\
 &= |g^*| \operatorname{tr} z \left[\operatorname{mat}(g^{ij}) 2(h - H) \operatorname{mat}(K_{ij}) \right] \quad (\text{A.9}) \\
 &= |g^*| 2(h - H) \operatorname{tr} z \left[\operatorname{mat}(g^{ij}) \operatorname{mat}(K_{ij}) \right] \\
 &= |g^*| 2(h - H) H
 \end{aligned}$$

reemplazando (A.9) en (A.8) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{|g^*|} = \sqrt{|g^*|} H (h - H) \quad (\text{A.10})$$

por ultimo si se reemplaza (A.10) en (A.7) tenemos:

$$\frac{d}{dt} A = \int_{M_t} (H(h - H) \sqrt{|g^*|}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{M_t} H(h - H) dM_t \quad (\text{A.11})$$

donde finalmente (A.11) coincide con (3.5).

Es importante notar, que la demostración sigue siendo valida para cualquier flujo con velocidad normal arbitraria. Es decir sigue siendo valido para un flujo $\frac{\partial F}{\partial t} = f \hat{n}$. En tal caso, siguiendo los mismos pasos se obtiene

$$\frac{d}{dt} A = \int_{M_t} (H f \sqrt{|g^*|}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{M_t} H f dM_t \quad (\text{A.12})$$

Sin embargo esta demostración se hizo solo para flujos normales. Mientras que la formula de (Lema1) enunciado en el (capitulo 1) es valida para un flujo general.

A.1. DEMOSTRACIÓN PARA FLUJOS EN DIRECCIÓN NORMAL

Bibliografía

- [1] Gerhard Huisken: *The volume preserving mean curvature flow*. J. reine angew. Math. **382** 35-48 (1987).
- [2] Gerhard Huisken, Shing-Tung Yau: *Definition of center of mass for isolated physical systems and unique foliations by stable spheres with constant mean curvature*. Invent.math. **124** 281-311 (1996).
- [3] Barbosa J L and do Carmo: *Stability of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Riemannian Manifolds*. Math. Z. **197**, 123-138(1988).
- [4] Jan Metzger: *Numerical computation of constant mean curvature surfaces using finite elements*. Invent.math. **arXiv:gr-qc/0408059v1** 18 Aug (2004).
- [5] Barbosa J L and do Carmo: *Stability of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature*. Math. Z. **185**, 339-353(1984).
- [6] A E Aceña and S Dain 2013. *Stable isoperimetric surfaces in superextreme Reissner-Nordström*. Class. Quantum Grav. **30** 045013
- [7] Gerhard Huisken: *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*. J. Differential Geometry **20** 237-266(1984).
- [8] Gerhard Huisken: *Local and Global Behaviour of Hypersurfaces Moving by Mean Curvature*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Volume 54 (1993). Part 1.
- [9] Gerhard Huisken and Alexander Polden: *Geometric evolution equations for hypersurfaces*.

BIBLIOGRAFÍA

- [10] David Kincaid and Ward Cheney: Numerical Analysis. The university of Texas at Austin. Brooks/Cole Publishing Company 1991, ISBN 0-534-13014-3 . pag 447.

- [11] UWE F. MAYER: *A numerical scheme for moving boundary problems that are gradient flows for the area functional*. Euro. Jnl. Applied Mathematics Volume 11, issue 2, pp. 61-80.

- [12] Heinz-Otto Kreiss, Omar Eduardo Ortiz : Introduction to Numerical Methods for Time Dependent Differential Equations. April 2014, SBN: 978-1-118-83895-2.