Desigualdad entre carga y tamaño en Relatividad General

Marcelo Enrique Rubio

Presentado ante la
Facultad de Matemática, Astronomía y Física
de la
Universidad Nacional de Córdoba
como uno de los requisitos para obtener el grado de

Licenciado en Física

Director: Sergio Dain

18 de Marzo de 2014

Índice general

Agradecimientos

- A mis padres, mis dos grandes maestros de vida, quienes siempre estuvieron al lado mío, apoyándome y aconsejándome en cada paso. A mi hermano, por hacerme el aguante siempre y por ser un amigo incondicional.

- A Sergio, mi director, por haber sido quien me permitió dar mis primeros pasos en investigación en física, y por el entusiasmo y la paciencia que demostró al trabajar conmigo.

- Al personal administrativo de FaMAF, quienes desde el comienzo hicieron mucho más fáciles y amenos estos cinco años. En especial, al Área Académica, a Departamento Alumnos y a los chicos de Biblioteca.

- Y especialmente, a todos mis amigos y compañeros, sin los cuales todo este camino por la UNC no hubiera sido igual y con los cuales hoy puedo compartir este logro personal, que significa mucho para mí.

Resumen

En este trabajo se presenta una conjetura que relaciona la carga eléctrica que puede almacenar un objeto ordinario, con alguna medida de su tamaño. Nociones tales como el volumen o el área de la superficie no representan buenas medidas de tamaño si no se asume cierta simetría. Es por ello que se abordará el estudio de esta conjetura en simetría esférica, y se considerarán dos medidas de tamaño que permiten una formulación precisa de la misma: el radio de área y la longitud propia geodésica.

Inicialmente se presentan algunas evidencias a favor de la conjetura que consisten en particulares modelos de materia cargada. Finalmente, se demuestra la desigualdad para el interior de una esfera con densidad conforme constante contenida en un dato inicial asintóticamente plano.

Palabras Clave: Relatividad General, desigualdades geométricas, carga eléctrica, medidas de tamaño, ecuaciones elípticas, sub/super-soluciones, objetos en relatividad general.

Clasificación:

- 04.20.-q Classical general relativity;
- 02.40.-k Geometry, differential geometry, and topology;
- 41.20.Cv Electrostatics; Poisson and Laplace equations, boundary-value problems.

Parte I

Presentación del Problema

Capítulo 1

Desigualdades Geométricas en Relatividad General

1.1. Introducción

La Relatividad General significó un cambio radical en la manera de estudiar, entender y hacer física teórica. Fue en 1905 cuando Albert Einstein (1879–1955), habiendo conseguido un puesto de trabajo en una oficina de patentes en Berna, publicó algunos de los artículos principales y más relevantes de la física de la época, los cuales condujeron a cambiar por completo la manera de entender el espacio y el tiempo del universo: dos conceptos que, hasta entonces, se creían absolutos.

En su lugar, se adoptó una visión más geométrica del universo, en la cual se piensa al espacio y al tiempo como un todo, conformando la idea de *espaciotiempo*: un conjunto de *eventos*, entendidos como hechos *localizados* (sin extensión espacial) que ocurren en un *instante preciso* (sin extensión temporal). Esta idea fue formalizada con los años y con ayuda de la Geometría Diferencial, considerando al espaciotiempo como una *variedad diferencial* de cuatro dimensiones.

Esta teoría es completamente consistente con la óptica y la teoría electromagnética de Maxwell (las Ecuaciones de Maxwell *contienen* Relatividad). Sin embargo, la Relatividad Especial no es compatible con los principios de gravitación de Newton, dado que éstos involucran nociones de influencia instantánea de campos, lo cual parecería ir en contra del postulado de velocidad máxima de transmisión de señales, además de insinuar cierto tiempo absoluto. Ésto llevó a Einstein a pensar que la presencia de materia está íntimamente vinculada con la estructura del espaciotiempo, de tal manera que la gravedad no es una manifestación de la existencia de objetos materiales, sino que es una propiedad inherente del espaciotiempo.

Einstein propuso la teoría de la *Relatividad General*, pensando a la gravedad como una manifestación de la *curvatura* del espaciotiempo debido a la presencia de *materia* (y energía) en él, de tal manera que las ecuaciones que describieran su estructura fueran no lineales, convencido además de que la geometría euclídea no era consistente con el Principio de Equivalencia. El primer intento de teoría fue propuesto en 1913 por Einstein y Grossmann. Aunque no pudieron dar en acierto con las ecuaciones que propusieron, dos años más tarde sería Einstein quien las reformulara tal cual las conocemos hoy:

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}, \tag{1.1}$$

donde G es la constante de Gravitación Universal y c la velocidad de la luz en el vacío. G_{ab} es un tensor $(0,2)$ simétrico, llamado *tensor de Einstein*, el cual mide la curvatura del espaciotiempo debida a una cierta distribución de materia/energía registrada en las componentes del tensor T_{ab}, llamado *tensor de energía-momento*. Éste es *el problema* de la Relatividad General: entender cómo se curva un espaciotiempo debido a la presencia de materia y energía localizada en él. Es un espacio de cuatro dimesiones, la ecuación (1.1) se trata en realidad de un sistema de diez ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales, cuyas incógnitas acopladas son las componentes del tensor métrico del espaciotiempo en cuestión. Dada la dificultad matemática de estas ecuaciones, existen unas pocas soluciones exactas de (1.1), las cuales son suficientes para entender muchos de los fenómenos con los que nos deleita el universo.

1.2. Desigualdades Geométricas

Una consecuencia del teorema de unicidad de agujeros negros es que la familia de soluciones de *Kerr–Newmann* está caracterizada por sólo tres parámetros que son la *masa* M, la *carga* q y el *momento angular* J. En general existen constantes o parámetros con los que es posible caracterizar ciertos sistemas físicos. Muchas veces sucede que estos parámetros se relacionan por medio de desigualdades que se cumplen bajo ciertas hipótesis de consistencia. Llamaremos *desigualdades geométricas* a aquellas relaciones que vinculan estos parámetros físicos de un sistema con algunas de sus propiedades geométricas. Estas características geométricas tienen a su vez significados físicos precisos. Un ejemplo relevante en Relatividad General es la

- **Positividad de la masa:** *La masa total* m *de un sistema aislado es no negativa,*

$$0 \leq m. \tag{1.2}$$

Las primeras evidencias teóricas de este resultado fueron un aporte de Araki y Brill, en 1959, aunque la primera prueba formal fue obtenida por los matemáticos Schoen y Yau en 1981 [1], utilizando principios variacionales. En ese mismo año Witten dio una demostración alternativa de (1.2) en pocas líneas, utilizando técnicas espinoriales [2]. Esta desigualdad es quizá una de las más importantes de la física. La noción que aquí se tiene de masa total tiene un significado puramente geométrico, y vale la igualdad sí y sólo sí el espaciotiempo es plano.

Si se restringe el estudio a agujeros negros en general, uno de los resultados más importantes (ver [3]) es la

- **Desigualdad de Penrose:** *Considérese un dato inicial asintóticamente plano que satisface la condición de energía dominante. Sea* m *la masa y* $\mathcal{A}$ *el área del horizonte aparente más externo. Se tiene entonces que, en cualquier región asintóticamente plana,*

$$m \geq \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{16\pi}}. \tag{1.3}$$

El área $\mathcal{A}$ del horizonte de eventos $\mathcal{H}$ de un agujero negro viene dada por

$$\mathcal{A} := \int_{\mathcal{H}} \sqrt{\det [g_{ab}]}, \tag{1.4}$$

siendo g_{ab} las componentes del tensor métrico del espaciotiempo evaluadas sobre el horizonte. Esta cantidad contiene información geométrica del agujero negro, y está relacionada con su masa, y eventualmente con su carga y momento angular. Por supuesto, todas estas cantidades físicas deben estar bien definidas al menos localmente, lo cual muchas veces no sucede. La búsqueda de desigualdades que vinculen estas cantidades constituye hoy en día un problema no trivial en física teórica y éste es el problema general en el que se enmarca este trabajo. Resulta de interés estudiar estas desigualdades dado que a partir de ellas es posible caracterizar sistemas físicos y predecir (o al menos decir algo sobre) su evolución y/o estabilidad.

A continuación se mencionarán los resultados más relevantes obtenidos para agujeros negros con simetría axial, candidatos apropiados para estudiar dado que magnitudes como q y J están bien definidas localmente. Muchos de estos resultados están siendo estudiados con el fin de encontrar expresiones análogas que valgan para objetos ordinarios.

1.2.1. Trabajos recientes

En los últimos 10 años, hubo interés en encontrar desigualdades explícitas entre cantidades físicas y geométricas, particularmente en el caso de agujeros negros. Por ejemplo, en [4] se demuestra que para un dato inicial axisimétrico vacío, maximal y asintóticamente plano, se cumple que

$$\sqrt{J} \leq m, \tag{1.5}$$

donde m y J corresponden a la masa y momento angular total del dato, respectivamente. La demostración consiste en ver que este problema variacional tiene un mínimo local en la solución extrema de Kerr, por lo que es necesario que el dato inicial esté suficientemente cerca del dato inicial de Kerr extremo. Más aún, la igualdad se cumple si el dato incial es el correspondiente a dicha solución. La principal limitación de este método es que la desigualdad pudo demostrarse sólo para el caso de un único agujero negro. Sin embargo, físicamente se espera que sea válida para un número arbitrario de agujeros negros dinámicos con simetría axial. Esta generalización es de relevancia porque está íntimamente conectada con el problema de unicidad de agujeros negros con horizontes disconexos, uno de los grandes (y aún no resueltos) problemas en Relatividad General.

El resultado anterior corresponde a agujeros negros con simetría axial. Resulta natural preguntarse qué sucede si se omite dicha hipótesis. Para ello, es necesario estudiar desigualdades entre otras cantidades geométricas, bien definidas al menos localmente. En [5], se demuestra la desigualdad entre área y carga, dada por

$$\mathcal{A} \geq 4\pi \left(\mathcal{Q}_E^2 + \mathcal{Q}_M^2 \right), \tag{1.6}$$

válida para agujeros negros dinámicos con simetría arbitraria. Aquí, $\mathcal{A}$ corresponde al área del horizonte de eventos, y

$$\mathcal{Q}_E := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} {}^*F_{ab}, \quad \mathcal{Q}_M := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} F_{ab}. \tag{1.7}$$

La integración es sobre cualquier 2–superficie $\mathcal{S}$ cerrada y orientada, embebida en el espaciotiempo. Una versión de esta desigualdad se prueba para regiones donde no hay agujeros negros, esto es, para vecindades de objetos materiales (en cuyo caso el área correspondería a una cierta superficie que contenga al objeto).

Por último, la desigualdad entre área y momento angular para agujeros negros con simetría axial

$$A \geq 8\pi|J| \tag{1.8}$$

se prueba en [6]. Aquí, J corresponde al momento angular gravitacional dado por la integral axial de Komar correspondiente. Esta desigualdad es no trivial para el agujero negro de Kerr–Newmann y además juega un rol importante en la prueba de la no existencia de una configuración de dos agujeros negros estacionarios.

Capítulo 2

La Conjetura

2.1. Introducción

En este trabajo se abordará un estudio que pretende dar cuenta de la existencia o no de alguna relación entre la carga eléctrica que puede almacenar un objeto o una región arbitraria del espacio, y el tamaño que ocupa. En principio no existen argumentos sólidos que obliguen a relacionar estas dos cantidades, al menos desde la experiencia. Uno podría ir a un laboratorio, tomar un objeto cualquiera y mediante algún mecanismo almacenar carga eléctrica en él sin restricciones clásicas (salvo excepciones obvias como la de un capacitor, claro). Sin embargo, quizá puede decirse algo desde la Relatividad General.

En este capítulo se presenta el punto de partida de este trabajo. La manera de abordarlo es a partir del enunciado de una conjetura puesta en términos completamente generales, sin hacer hipótesis sobre simetrías. La generalidad de la conjetura resulta una ventaja para el problema, dado que puede ser abordado de múltiples maneras. No obstante, pronto se restringirá al caso de simetría esférica, para poder obtener un enunciado más preciso en términos matemáticos.

Se emplearán *unidades geométricas* tales que la constante de gravitación universal y la velocidad de la luz en el vacío son, respectivamente, $G = c = 1$, salvo donde se aclare explícitamente lo contrario.

2.2. La conjetura en general

El objetivo general de este trabajo es estudiar y encontrar evidencias (o bien un contraejemplo) de la siguiente cuestión: *Toda region 3–dimensional* Ω *que posee carga eléctrica en su interior, cumple la relación*

$$\text{CARGA} \leq \text{TAMAÑO}.$$

La motivación física de la cuestión anterior es la siguiente: si un objeto Ω posee carga eléctrica en su interior, entonces éste debe tener necesariamente un tamaño mínimo, el cual corresponde a dicha carga. La *medida del tamaño* de Ω es lineal, y su dimensión tiene unidad de *longitud*.

Definir una cantidad que en cierta forma dé cuenta del *tamaño* de una región del espacio es en general una tarea no trivial y tiene muchas sutilezas. Con frecuencia suele vincularse la noción de tamaño con conceptos geométricos tales como el volumen, o el área de la superficie. Sin embargo, es fácil convencerse de que éstas no representan medidas unívocas de tamaño: basta imaginar dos objetos de igual volumen o superficie, pero con distinta forma. Existen múltiples maneras de dar cuenta de cuán grande es una superficie o una región arbitraria con mayor precisión, y por lo tanto con más artefacto matemático. En los artículos [7, 8, 9] se discuten algunas medidas de tamaño relevantes, que están vinculadas con la noción de superficies minimales y atrapadas y en [10] se analizan algunos ejemplos.

No obstante, hay casos en los que la definición buscada es clara y unívoca. Tal es el caso, por ejemplo, de la esfera de radio r; su tamaño viene dado por $\mathcal{C} = 2\pi r$. Aquí, $\mathcal{C}$ representa la medida de la circunferencia máxima de la esfera, y r es el radio de área de la esfera. El radio de área es una cantidad que en rigor está siempre bien definida para cualquier 2–superficie, pero no representa una medida de tamaño precisa si no se tiene simetría esférica.

La desigualdad planteada en unidades físicas es

$$(\text{CARGA})^2 \leq \tfrac{c^4}{G} \times (\text{TAMAÑO})^2.$$

Para el caso del electrón, por ejemplo, la desigualdad se satisface claramente si se elige al radio de área como medida de tamaño. En efecto, el radio clásico del electrón es $r_e \approx 2{,}82 \times 10^{-15}\ m$, mientras que su carga tiene magnitud $e \approx 1,6 \times 10^{-19}\ C$. Recordando que $G \approx 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$ y $c \approx 3 \times 10^8\ m/s$, se tiene

$$\frac{c^2}{\sqrt{G}} r_e \approx 3,11 \times 10^7 C \gg e. \tag{2.1}$$

La búsqueda de una definición apropiada de tamaño ha sido de interés en Relatividad General a partir de los años ′70 [11]. Si bien no se han obtenido resultados sólidos ni demostraciones con todo detalle, existen conjeturas y evidencias que dan condiciones para la formación de agujeros negros luego de un colapso, así como también son útiles para estudiar la Conjetura del Censor Cósmico, uno de los problemas más importantes en Relatividad.

Una conjetura en la cual hay una medida de tamaño involucrada, pero relacionada con la *masa* en lugar de la carga es la *conjetura de Hoop*. Esta conjetura tiene varias motivaciones físicas. Es sabido que el colapso gravitacional esférico produce un horizonte de eventos, de manera que la materia colapsante no influye en la causalidad del universo exterior a la región de colapso. Además se produce una singularidad en el centro de dicha región y sobre la cual la Relatividad deja de ser válida, por razones cuánticas. Sin embargo, para colapsos no esféricos, *K. S. Thorne* demostró que no hay necesariamente formación de horizontes, lo que llevó a la pregunta: *¿Bajo qué condiciones se forma un horizonte de eventos durante un colapso gravitatorio real?*

Este problema, íntimamente vinculado a la censura cósmica, fue rotulado por Hawking *Conjetura de hoop*, la cual establece que *Un agujero negro con horizonte de eventos se forma sí y sólo sí cierta cantidad de masa M se compacta en una región cuya circunferencia en cualquier dirección satisface $\mathcal{C} \leq 4\pi M$.*

Propuesta por Thorne en 1972 de manera bastante general, esta conjetura da una condición necesaria y suficiente para la formación de un horizonte de eventos durante un colapso gravitatorio no necesariamente esférico: si las dimensiones lineales de un objeto masivo se contraen a un tamaño suficientemente pequeño, entonces se produce un agujero negro dinámico.

La constante 4π no juega aquí ningún rol sustancial, dado que se sólo se pretende comparar órdenes de magnitud. El motivo de la elección proviene de la solución de Schwarzchild, en la que existe un horizonte de eventos en $r = 2M$, por lo que la circunferencia máxima es exactamente $\mathcal{C} = 4\pi M$. No obstante, dicha constante puede reemplazarse por 2π en caso de que haya campos electromagnéticos presentes (entendiendo a la masa como *masa/energía*). Esta conjetura da información no solo sobre agujeros negros; también sobre objetos estáticos, mientras que, por ejemplo, la conjetura isoperimétrica es pura y exclusivamente para agujeros negros en espaciotiempos asintóticamente planos.

A pesar de que aún no se ha encontrado una demostración (así como tampoco hay contraejemplos significantes), existen varias evidencias que insinuan su veracidad: es consistente con el comportamiento esperado en colapsos esféricos, cilíndricos y planos, así como también lo es con el resultado de suficientes cálculos numéricos para el problema de agujeros negros no rotantes con simetría axial. Además, hay varios ejemplos de soluciones estáticas de las ecuaciones de campo consistentes con la conjetura. Por otro lado, representa una forma útil de obtener criterios aplicables a mediciones externas a la región de colapso; es posible medir circunferencias, pero no radios; así como masa, pero no densidades de masa; es decir, cantidades independientes del interior del horizonte.

Una formulación un tanto más precisa de la conjetura de hoop requiere una definición adecuada de tamaño, así también como de masa. En este último caso, puede optarse por considerar inicialmente la definición global de masa ADM (Arnowitt–Deser–Misner). Como se adelantó más arriba, en el próximo capítulo se discutirá con más detalle sobre algunas medidas lineales de tamaño. Para más referencias, pueden consultarse los artículos [11, 12, 13, 14].

2.3. La Conjetura en simetría esférica

Es natural comenzar el estudio de este problema eligiendo como medida de tamaño el *radio de área* en *simetría esférica* aunque, por supuesto, no se trata de la elección más general bajo esta simetría.

En esta sección se pretende dar una formulación más precisa de la desigualdad, obteniendo criterios que determinen unívocamente si la desigualdad es cierta o no. Para ello, es necesario plantear el problema lo más general posible, asumida ya la simetría esférica. En términos geométricos, se tiene una región esférica con borde suave contenida en un espaciotiempo con alguna métrica (que aún se desconoce). A priori, el valor del área de la superficie de la esfera depende exclusivamente de dicha métrica, por lo que existen dos alternativas posibles: elegir a r como una de las coordenadas espaciales, o bien pensar a r como función de alguna otra coordenada longitudinal, ℓ, y considerar a $r(\ell)$ como la única función incógnita presente en la métrica. En particular, podría elegirse a ℓ como la *longitud propia geodésica de la esfera*, es decir la longitud de la curva geodésica que parte del "centro" de la esfera y llega a algún punto del borde. En el próximo capítulo se discuten en detalle las ecuaciones al respecto.

La carga eléctrica contenida en Ω está dada por

$$\mathcal{Q} = \int_{\Omega} \rho = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \mathcal{E}_i s^i, \tag{2.2}$$

donde se interpreta a ρ como la densidad de carga en el interior de la esfera, una función suave y a priori dependiente sólo de r (ó de ℓ), la cual se asume de soporte compacto. El soporte de ρ puede ser toda la esfera, o parte de ésta. Además, $\mathcal{E}^i$ es la componente i del campo eléctrico en el interior, debido a la presencia de carga.

De esta manera, se ha llegado a una formulación un tanto más precisa del problema, ya que se asumió simetría esférica, se restringieron las regiones de interés a esferas que no alteren la simetría, y además se eligió, por ejemplo, a la longitud propia geodésica como medida de tamaño. El problema en estos términos se reduce a estudiar la siguiente

Conjetura 2.3.1 *Sea Ω una esfera contenida en un dato inicial asintóticamente plano que satisface la condición de energía dominante, cuya longitud propia geodésica es ℓ. Supóngase que el interior de Ω contiene carga eléctrica $\mathcal{Q}$. Entonces se satisface la desigualdad*

$$\mathcal{Q} \leq \ell. \tag{2.3}$$

2.3.1. Observaciones

- Se supone que Ω está contenida en un dato inicial de las ecuaciones de campo; esto es, una 3–superficie con fuente adentro. Las ecuaciones de evolución (1.1) necesitan un dato inicial físicamente consistente que determine unívocamente el espaciotiempo que evolucionará. Esta formulación de valores iniciales se discute en detalle en el próximo capítulo.

- Nótese que se supone que el dato inicial es asintóticamente plano; esto es, el espacio es plano en el infinito. No obstante, la conjetura podría ponerse en términos puramente locales, sin asumir nada en el infinito, lo cual haría que el problema fuese algo más general. Imponer condiciones como la de dato inicial asintóticamente plano restringe notablemente el campo de soluciones, pero le da sentido físico a dichas soluciones, dado que dicha hipótesis está relacionada con el hecho de que se estudian sistemas aislados.

- Si bien pareciera que la elección de ℓ como medida de tamaño resulta un tanto "especial", se verá más adelante que es una medida bastante natural de tamaño, dado que la idea de curva geodésica que conecte dos puntos es una noción intuitiva de tamaño. No obstante, en el capítulo siguiente se verá que siempre resulta $\ell \geq r$, de manera que si la desigualdad se cumple para r, entonces automáticamente es cierta para ℓ.

2.4. Evidencias en geometría plana

Considérese un dato inicial plano que consiste en una esfera de radio de área R con densidad de carga uniforme en su interior. Se quiere estudiar si existe alguna desigualdad entre la carga y el tamaño de la esfera, asumiendo una versión conveniente [1] de la conjetura de hoop, la cual involucra la energía electrostática de la esfera.

[1]Es un placer agradecer a Emanuel Gallo por el argumento eurístico de las ecuaciones (2.7) a (2.11).

Dentro de la esfera, la carga eléctrica es función del radio dado que el volumen lo es. En efecto, si ρ es la densidad de carga constante dentro,

$$\mathcal{Q}(r) = \rho V(r) = \mathcal{Q}\left(\frac{r}{R}\right)^3, \quad r \leq R. \tag{2.4}$$

Para el campo eléctrico interno, la Ley de Gauss aplicada a una esfera de radio $r < R$ concéntrica con la región de carga implica que

$$\oint_{\mathcal{S}_r} \mathcal{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi\mathcal{Q}(r) = 4\pi\mathcal{Q}\left(\frac{r}{R}\right)^3, \tag{2.5}$$

y dado que el campo eléctrico tiene sólo component radial, se tiene que

$$\mathcal{E}(r) = \begin{cases} \frac{\mathcal{Q}}{R^3}r, & r \leq R \\ \\ \frac{\mathcal{Q}}{r^2}, & r > R \end{cases} \tag{2.6}$$

La energía electrostática de la esfera es entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}^2 dV \\ &= \frac{\mathcal{Q}^2}{2}\left[\int_0^R \frac{r^4}{R^6}dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}\right] \\ &= \frac{3}{5}\frac{\mathcal{Q}^2}{R}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Una generalización de la conjetura de hoop en el caso electrostático sería asumir que, para que no se forme un agujero negro, la energía electrostática debe ser menor o igual a una constante por el radio; esto es

$$\mathcal{W} \leq R/2. \tag{2.8}$$

El factor 1/2 proviene de la Solución de Schwarzchild, en la cual vale la igualdad en (2.8). Esta cota implica directamente que

$$\mathcal{Q} \leq \sqrt{\frac{5}{6}}R < R, \tag{2.9}$$

por lo que la desigualdad es cierta en geometría plana.

Capítulo 3

Formulación de las ecuaciones

La conjetura enunciada en el capítulo anterior hace referencia a un dato inicial de las Ecuaciones de evolución de Einstein. Allí se definirá la carga eléctrica que contendrá la región de interés, y su medida de tamaño estará evidentemente relacionada con la métrica inicial.

En este capítulo se hará una revisión de la formulación de valores iniciales y se discutirá en detalle la noción de carga que se tiene en Relatividad General. Luego, se expondrán explícitamente todas las ecuaciones necesarias para el estudio de la conjetura: inicialmente se abordará el estudio del dato inicial en coordenadas (ℓ, θ, φ) y luego se empleará el método conforme para analizar el dato en coordenadas tales que la métrica es conformemente plana.

3.1. Datos iniciales en Relatividad General

Muchos fenómenos físicos observados en la naturaleza contienen relatividad. El estudio de una teoría que permita justificar por qué ocurren y bajo qué condiciones volverán a ocurrir es de suma relevancia, por lo que es necesario estudiar la viabildad de la teoría, de tal manera de tener una formulación correcta y consistente del problema. La Relatividad General es una teoría bien formulada. Hoy en día se trabaja mucho con simulaciones numéricas que permiten visualizar, hasta cierto orden de precisión, la evolución de sistemas físicos cuyas ecuaciones son casi imposibles de resolver analíticamente. La gran ventaja de muchos de los métodos numéricos que se emplean en la actualidad es que, dado un dato inicial físicamente correcto, dicha simulación toma en cuenta toda la física del problema.

La estructura del espaciotiempo y la gravedad está completamente descripta por un conjunto $(\mathcal{M}, g_{ab})$ que consiste en una variedad diferencial cuadridimensional $\mathcal{M}$, equipada con una métrica Lorentziana cuyas componentes satisfacen las Ecuaciones de Einstein. A diferencia del problema de resolver ecuaciones diferenciales en las cuales la geometría está especificada a priori, las ecuaciones de Einstein dan *solución* a la geometría del espaciotiempo. Al tratarse de ecuaciones de segundo orden, es necesario especificar razonablemente un *dato inicial* de las mismas. Esto no debiera ser una sorpresa, ya que es sabido que si un sistema físico (mecánico, electromagnético, cuántico) evoluciona libremente, su comportamiento está completamente determinado por sus condiciones iniciales. De manera que, dadas condiciones iniciales para las Ecuaciones de Einstein más, eventualmente, ciertas ecuaciones de estado, son éstas ecuaciones las que determinan la posterior evolución del sistema.

La noción de una *formulación de valores iniciales* resulta entonces una parada crucial, dado que tal formulación garantizaría una teoría física viable en el sentido de que "pequeños cambios" en dichos valores iniciales implicarían correspondientemente "pequeños cambios" en la evolución consecuente. La pregunta es: **¿cómo dar datos iniciales viables para las Ecuaciones de Einstein?** Una teoría que posee una formulación de valores iniciales se dice que está *bien formulada* (well posed). En mecánica, por ejemplo, se sabe que dado el valor de la posición y la velocidad de cada componente de un sistema físico en algún instante de tiempo, su evolución es única. Esto sugiere pensar que una solución requiere la especificación previa de la métrica g_{ab} y su derivada temporal $\partial_t g_{ab}$ en algún instante de tiempo. Si bien esta idea es esencialmente correcta, es posible transformar este requerimiento "no covariante" en un enunicado algo más geométrico, como se verá a continuación.

Para comenzar a estudiar este problema, se considera una hipersuperficie 3–dimensional de caracter espacial, Σ_0. Dicha superficie representa el espacio en un dado instante de tiempo, y puede ser elegida libremente. Para caracterizarla es que se escogen ciertas coordenadas espaciales. Geométricamente, la manera de calcular distancias en Σ_0 está codificada en las seis componentes de un tensor métrico h_{ab} definido sobre Σ_0. Así, es posible caracterizar desplazamientos tangenciales a la hipersuperficie. En términos de evolución, h_{ab} será la métrica inducida a Σ_0 por g_{ab}, la métrica del espaciotiempo, solución que pretende encontrarse. Una manera de visualizar el espaciotiempo completo es considerar una foliación por una familia monoparamétrica de hipersuperficies Σ_t con parámetro de foliación t, de manera que $\Sigma|_{t=0} \equiv \Sigma_0$. Si n^a es un vector unitario normal a Σ_t, es posible descomponer a g_{ab} de manera que $h_{ab}(t) = g_{ab} + n_a n_b$. Se interpreta aquí al campo vectorial t^a como el *flujo temporal a lo largo del espaciotiempo.*

El lugar de la "derivada temporal" de h_{ab} sobre Σ_0 estará ocupado por otro tensor (0,2) simétrico definido sobre Σ_0, llamado *tensor de curvatura extrínseca*, $\mathcal{K}_{ab} := \frac{1}{2}\pounds_n h_{ab}$, donde $\pounds_n$ es la derivada de Lie a lo largo de las líneas integrales de n. Este tensor da información sobre la derivada de g_{ab} en la dirección normal a Σ_0. Intuitivamente, da cuenta de cómo se curva Σ_0 al estar inmersa en una variedad de dimensión mayor.

Un *dato inicial* $(\mathcal{S}, h_{ab}, \mathcal{K}_{ab})$ de las ecuaciones de Einstein consiste entonces en una variedad 3–dimensional $\mathcal{S}$, su métrica h_{ab} y su curvatura extrínseca, evaluadas en algún instante de tiempo. Estas cantidades no pueden ser elegidas con total libertad, dado que están sujetas a ciertas ecuaciones de vínculo. Si $\mathcal{D}_a$ denota la derivada covariante de Levi-Civitta respecto a h_{ab}, los vínculos vienen dados por

$$\mathcal{D}^b\mathcal{K} - \mathcal{D}_a\mathcal{K}^{ab} = 8\pi j^b, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{R} + \mathcal{K}^2 - \mathcal{K}_{ab}\mathcal{K}^{ab} = 16\pi\mu. \tag{3.2}$$

Aquí, $\mathcal{K} := \mathcal{K}_{ab}h^{ab}$ es la traza de la curvatura extrínseca, y $\mathcal{R}$ el escalar de curvatura asociado a h_{ab}. Además, μ es la densidad de masa/energía en $\mathcal{S}$ y j^a contiene información sobre la carga eléctrica y corrientes presentes en $\mathcal{S}$. Adicionales a estas ecuaciones, pueden pedirse ecuaciones de estado dependiendo de la configuración y de la física de las fuentes del dato inicial. Por otra parte, no deben dejarse de lado las *condiciones de energía*, las cuales garantizan la positividad de la densidad de energía, o el dominio de la densidad de energía sobre las presiones. En particular, suele pedirse la *condición de energía dominante* $\mu \geq \sqrt{|j|}$.

En general se supone que los sistemas físicos de interés tienen la característica de ser *aislados*. Esencialmente esto significa que los campos gravitacionales están localizados en regiones finitas del espaciotiempo de manera que la curvatura del mismo se incremente en las cercanías de la fuente de gravedad, así como también se atenúe en regiones cada vez más lejanas. Esto sugiere que los sistemas aislados se tratan de espaciotiempos **asintóticamente planos**. Precisamente, esto significa que para $r \to \infty$, la métrica toma la forma

$$g_{ab} = \delta_{ab} + \mathcal{O}\left(1/r\right), \quad r \to \infty, \tag{3.3}$$

mientras que sus primeras derivadas (tales como la curvatura extrínseca) decaen como $\mathcal{O}\left(1/r^2\right)$ para $r \to \infty$. El tensor δ_{ab} representa la métrica euclídea en tres dimensiones.

Teniendo en cuenta estas ideas sobre cómo formular un dato inicial con sentido físico, en la próxima sección se discute con detalle la noción de carga eléctrica que se empleará en este trabajo.

3.2. Carga eléctrica

En esta sección se discutirá la noción de carga eléctrica presente en Relatividad. Está basada fundamentalmente en los libros [15] y [16]. Éste es quizá uno de los conceptos más importantes en Relatividad General y Teoría de Campos, ya que engloba no solamente la noción de carga eléctrica, un invariante de Lorentz, sino que es posible generalizarlo para demás cantidades conservadas (como la masa de sistemas aislados, el momento angular en simetría axial, etc). Se ha discutido anteriormente que la solución de tipo agujero negro estacionario más general está caracterizada por tres parámetros: la masa, la carga y el momento angular. La noción de carga eléctrica es posiblemente la más simple de ellas.

Las Ecuaciones de Maxwell en Relatividad General permiten relacionar las componentes del tensor de campo electromagnético F_{ab} (dadas esencialmente por las componentes del campo eléctrico y magnético en todo el espaciotiempo) con las componentes del cuadrivector corriente j^a_M, según

$$\nabla_a F^{ab} = -4\pi j^b_M; \quad \nabla_{[a}F_{bc]} = 0, \tag{3.4}$$

donde ∇_c es la derivada covariante de Levi-Civita asociada al tensor métrico g_{ab} del espaciotiempo.

Definición 3.2.1 *Sea Σ una hipersuperficie espacial con métrica h_{ab} cuyo vector normal unitario es n^a. La carga eléctrica que pasa a través de Σ es*

$$\mathcal{Q}_\Sigma := -\int_\Sigma j^a_M n_a \sqrt{|h|}d^3\Omega. \tag{3.5}$$

El signo menos en (3.5) garantiza que una densidad de carga positiva en conjunto con un vector normal *temporal* dirigido hacia el *futuro* da una carga total *positiva*. Vía la primera ecuación de (3.4), es posible expresar a la carga en términos de F_{ab}. En efecto,

$$\mathcal{Q}_\Sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \nabla_a F^{ab} n_b \sqrt{|h|}d^3x = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega F^{ab} t_a n_b \sqrt{|\chi|}d^2x, \tag{3.6}$$

en virtud del Teorema de Stokes. Se supone aquí que $\Omega = \partial\Sigma$ es una 2–superficie con métrica χ_{ab} y vector normal t^a que *apunta hacia afuera*.

Utilizando el lenguaje de formas diferenciales, en el cual las ecuaciones de Maxwell toman una forma aún más compacta,

$$d^*\mathcal{F} = -4\pi^*\mathcal{J}; \quad d^*\mathcal{F} = 0, \tag{3.7}$$

se tiene, de manera análoga al análisis anterior,

$$\int_\Sigma {}^*\mathcal{J} = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma d^*\mathcal{F} = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega {}^*\mathcal{F} \tag{3.8}$$

Por otro lado, si ϵ_{abcd} es el tensor completamente antisimétrico en el espaciotiempo,

$$\int_\Sigma {}^*\mathcal{J} = \int_\Sigma \epsilon_{dabc} j^d_M = -\int_\Sigma n_{[d}\tilde{\epsilon}^\Sigma_{abc]} j^d_M = -\int_\Sigma j^a_M n_a \tilde{\epsilon}^\Sigma = \mathcal{Q}_\Sigma, \tag{3.9}$$

donde $\tilde{\epsilon}^\Sigma_{abc}$ es el tensor completamente antisimétrico en Σ. El escalar $j^a n_a$ corresponde a la densidad de carga ρ medida por un observador cuya cuadrivelocidad es n^a.

Comparando las expresiones (3.8) y (3.9) se llega a una expresión alternativa para la carga contenida en Σ:

$$\boxed{\mathcal{Q}_\Sigma = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma {}^*\mathcal{F}} \tag{3.10}$$

La expresión anterior es útil (aunque no parezca) ya que, dado que

$$\int_\Omega {}^*\mathcal{F} = \int_\Omega \mathcal{E}^a n_a d^2x, \tag{3.11}$$

se obtiene la ya conocida expresión para la carga eléctrica.

Una aplicación directa de todo esto es la verificación de que el parámetro Q que aparece en la métrica de Reissner–Nordström corresponde a la carga eléctrica. En efecto, el tensor de campo electromagnético en ese caso tiene sólo componente tr (y rt) no trivial, dada por $F^{tr} = -F^{rt} = Q/r^2$. Empleando la identidad (3.6), por ejemplo, se obtiene que $\mathcal{Q}_\Sigma = Q$ para cualquier Σ que contenga carga Q.

3.3. Ecuaciones del problema

El ejemplo más simple de un dato inicial con simetría esférica y con carga eléctrica consiste en tomar como superficie espacial a $\mathbb{R}^3$. Si se supone que la segunda forma fundamental $\mathcal{K}_{ij}$ es nula, las ecuaciones de los vínculos de Gauss–Codazzi se reducen a

$$\mathcal{R} = 16\pi\mu_M + 2\mathcal{E}^i\mathcal{E}_i; \quad \mathcal{D}_i\mathcal{E}^i = 4\pi\rho. \tag{3.12}$$

Aquí, $\mathcal{R}$ es el escalar de curvatura de la métrica y $\mathcal{D}_i$ la derivada covariante de Levi-Civita compatible con la métrica inducida a $\mathbb{R}^3$. Además, $\mathcal{E}_i$ son las componentes espaciales del campo electrostático en todo el espacio, generado por la distribución de carga interior a Ω,y μ_M y ρ las densidades de masa y carga eléctrica de Ω respectivamente. La única condición que se le pide a la función μ_M es la *condición de energía dominante*

$$\mu_M \geq -\frac{\mathcal{E}^i\mathcal{E}_i}{8\pi}. \tag{3.13}$$

A los fines de la desigualdad (2.3), puede imponerse $\mu_M = 0$, lo que es equivalente a pensar que se trata de una región del espacio sin densidad de materia, sin que esto signifique una restricción importante. Más adelante puede requerirse $\mu_M \geq 0$ de manera de pensar en un “objeto”.

Las ecuaciones (3.12)–(3.14) son generales ya que aún no se ha dicho nada sobre el sistema de coordenadas.

3.3.1. Métrica en coordenadas (ℓ, θ, φ)

Las ecuaciones de vínculo de Gauss–Codazzi en simetría esférica se discuten extensamente en la serie de artículos [17], [18] y [19]. En base a éstos se escogen las coordenadas (ℓ, θ, φ) con rangos

$$0 \leq \ell < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \tag{3.14}$$

Se equipa entonces al 3–espacio con una métrica riemanniana, cuyo elemento de línea viene dado por

$$\boxed{dh^2 = d\ell^2 + r^2(\ell)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)\, d\varphi^2)} \tag{3.15}$$

La única función incógnita es $r(\ell)$, la cual por construcción correponde al radio de área en términos de ℓ. En efecto, para una esfera $\mathcal{S}_r \subset \mathbb{R}^3$ de radio $r(\ell)$,

$$A_{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} \sqrt{det\,[h_{ij}]}dS = r^2(\ell)\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\theta)d\theta d\varphi = 4\pi r^2(\ell). \tag{3.16}$$

Los cálculos geométricos correspondientes a la métrica (3.16) tales como los símbolos de Christoffel, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, así como los operadores diferenciales que aquí se empleen, pueden encontrarse en el Apéndice B de este trabajo. En particular, puede verse que el campo vectorial $\partial/\partial\ell$ es geodésico afín espacial, de manera que ℓ mide la *distancia propia geodésica* en cada hipersuperficie espacial.

El escalar de curvatura de (3.16) está dado por

$$\mathcal{R} = -\frac{2}{r^2}\left(2(rr')' - r'^2 - 1\right), \tag{3.17}$$

donde $'$ denota la derivada respecto de ℓ. Reemplazando esta expresión en la ecuación (3.12) con $\mu_M = 0$ se obtiene

$$-2(rr')' + r'^2 + 1 = r^2\mathcal{E}^2. \tag{3.18}$$

Notar que en simetría esférica, el vector campo eléctrico $\mathbf{E}$ tiene sólo componente radial, denotada por $\mathcal{E}$, de manera que

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}\frac{\partial}{\partial\ell}. \tag{3.19}$$

Calculando la divergencia de $\mathbf{E}$ en términos de la métrica (3.16) y utilizando el segundo vínculo (3.13), se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{r^2}(r^2\mathcal{E})' = 4\pi\rho. \tag{3.20}$$

Luego, la carga contenida en una esfera de radio geodésico ℓ está dada por

$$\mathcal{Q}(\ell) = 4\pi\int_0^\ell \rho r^2 d\ell = 4\pi\int_0^\ell \frac{1}{4\pi r^2}(r^2\mathcal{E})' r^2 d\ell = \mathcal{E}(\ell)r^2(\ell) - \mathcal{E}(0)r^2(0). \tag{3.21}$$

La identificación de ℓ con r debe ser globalmente válida. En efecto, tal identificación se quebraría cuando $r'(\ell) = 0$, condición en la que una 2–superficie de radio de área r es un extremal. Pero como ℓ debe crecer monótonamente al crecer r independientemente del carácter de la 2–superficie en cuestión, se tiene que la identificación debe ser globalmente válida.

Al estar interesados en espaciotiempos con una *única* región asintóticamente plana, resulta apropiado requerir que $r(0) = 0$ de manera de excluir la posibilidad de existencia de agujeros de gusano que conecten con otra región asintóticamente plana. Además, la condición de espaciotiempo localmente plano se obtiene pidiendo que $r'(0) = 1$. Una discusión más extensa sobre estas condiciones de contorno puede encontrarse en [18].

La ecuación (3.19) se trata de una ecuación diferencial no lineal, ordinaria y de segundo orden para la función $r(\ell)$, donde se considera a la función $\mathcal{E} := \mathcal{E}(\ell)$ una función dada y completamente arbitraria a priori. No obstante, al considerar *sistemas aislados*, debe requerirse que $\mathcal{E}(\ell)$ decaiga en infinito. Para ello, es necesario que $\rho = \rho(\ell)$ tenga *soporte compacto*. Consecuentemente, *fuera* del soporte de ρ, la *única* solución para $\mathcal{E}(\ell)$ es

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{Q}_\infty}{r^2}, \tag{3.22}$$

donde $\mathcal{Q}_\infty$ es por ahora una constante que corresponde a la carga total del espacio-tiempo (asumiendo que fuera de Ω no hay fuentes).

Es evidente entonces que la solución $r(\ell)$ correspondiente a imponer (3.23) es la solución de **Reissner–Nordström**.

De esta forma, se ha llegado a una formulación precisa de la conjetura (2.3) en simetría esférica. El problema en estos términos es el siguiente: *Sea $\mathcal{E}(\ell)$ una función regular en el origen que decae en infinito y $r(\ell)$ la solución de la ecuación (3.19), con condiciones iniciales*

$$r(0) = 0,\ \ r'(0) = 1. \tag{3.23}$$

Sea

$$\rho := \rho(\ell) = \frac{1}{4\pi r^2}(r^2\mathcal{E})' \tag{3.24}$$

una función de soporte compacto, y $\mathcal{Q}(\ell)$ la función

$$\mathcal{Q}(\ell) = 4\pi\int_0^\ell \rho(s)r^2(s)ds. \tag{3.25}$$

Entonces, para todo $\ell \geq 0$ se satisface la desigualdad

$$\mathcal{Q}(\ell) \leq r(\ell). \tag{3.26}$$

Condición para r''

La identidad (3.22) impica que la desigualdad (3.27) es equivalente a

$$\mathcal{E}(\ell)r(\ell) \leq 1 \tag{3.27}$$

para todo $\ell \geq 0$, lo que sucede sí y sólo sí

$$\mathcal{E}^2(\ell)r^2(\ell) \leq 1. \tag{3.28}$$

Dado que $r(\ell)$ es la *única* solución del problema (3.19)+(3.24), demostrar (3.29) es equivalente a demostrar que $r(\ell)$ satisface la desigualdad

$$1 + r'^2 - 2(rr')' \leq 1, \tag{3.29}$$

para $\ell \geq 0$. La naturaleza no lineal de la ecuación (3.19) hace que resulte no trivial obtener información del comportamiento de $r(\ell)$, por lo que resulta últil obtener información previa antes de resolverla explícitamente (en caso que ésto último sea posible) o eventualmente realizar cálculos numéricos. Nótese que

$$1 + r'^2 - 2(rr')' = 1 - r'^2 - 2rr'' \leq 1 - 2rr'', \tag{3.30}$$

de manera que si la solución de (3.19) es tal que $r''(\ell) \geq 0$ para todo $\ell \geq 0$, entonces automáticamente se satisface (3.27).

Por otra parte, no debe olvidarse que sea cual sea la solución, ésta debe ser **continua** en todas partes, debe tener **derivada continua** en todas partes, y ser **regular en el origen**.

Solución exterior

Si la región esférica con carga tiene radio finito, la solución exterior a ella debe coincidir con la solución de Reissner–Nordström. Esto tiene que ver con que fuera de la esfera, el campo eléctrico generado por una distribución de carga dentro coincide con el campo generado por una carga de igual densidad pero localizada en el origen.

La 3–métrica de Reissner–Nordström está dada por

$$dh^2_{RN} = f(r)dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2\right), \tag{3.31}$$

donde

$$f(r) = \left(1 - \frac{2M_\infty}{r} + \frac{Q^2_\infty}{r^2}\right)^{-1}. \tag{3.32}$$

Aquí, M_∞ y Q_∞ son constantes y se interpretan como la *masa* y la *carga total* del espaciotiempo. La solución (3.32) está dada en *coordenadas de área*. La relación con la coordenada geodésica ℓ es

$$r' = \frac{1}{\sqrt{f(r)}}. \tag{3.33}$$

Límites $\ell \to 0$ y $\ell \to \infty$

Dado que $\mathcal{E}(\ell)$ es una función *suave* en el origen, la condición de contorno (3.24) inmediatamente asegura que la desigualdad se satisface para valores *pequeños* de l.

Para valores grandes de ℓ, la desigualdad también se satisface. En efecto, para valores de ℓ fuera del soporte de ρ, se tiene la solución de Reissner–Nordström, en donde $\mathcal{E}$ está dado por (3.23). Si ℓ es suficientemente grande, también lo es $r(\ell)$ y por el análisis anterior, la desigualdad se cumple.

3.3.2. Métrica en coordenadas planas

Hasta aquí se ha abordado el estudio de la conjetura habiendo asumido simetría esférica. Inicialmente, se eligieron coordenadas (ℓ, θ, φ) para el elemento de línea, pero claramente es posible elegir coordenadas más generales.

Un dato inicial esféricamente simétrico algo más general es[1]

$$ds^2 = \Phi^4(\hat{r}) \left[d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 \left(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2\right)\right], \tag{3.34}$$

con $0 < \hat{r} < \infty$. Esta clase de métricas se llaman *conformemente planas*, dado que difieren de la métrica plana por un *factor conforme* $\Phi^4(\hat{r})$, única función incógnita que aparece. Mediante el cambio de coordenadas

$$\ell(\hat{r}) = \int_0^{\hat{r}} \Phi^2(t) dt; \quad d\ell = \Phi^2(\hat{r}) d\hat{r}, \tag{3.35}$$

se reobtiene la métrica (3.16) en coordenadas de radio de área, si se elige

$$r^2(\ell) = \Phi^4\left(\hat{r}(\ell)\right) \hat{r}^2(\ell), \tag{3.36}$$

donde se piensa a $\hat{r} = \hat{r}(\ell)$ despejando de (3.36), de manera que la longitud propia geodésica en términos del factor conforme viene dado exactamente por la fórmula (3.42). Si se requiere que (3.41) sea *asintóticamente plana*, basta con pedir que

$$\Phi(\hat{r}) \to 1, \quad \hat{r} \to \infty. \tag{3.37}$$

El escalar de curvatura asociado a (3.41), viene dado en términos del factor conforme por[2]

$$\mathcal{R} = -\frac{8}{\Phi^5} \Delta\Phi, \tag{3.38}$$

donde el operador Δ es el laplaciano de la métrica *plana*. La ecuación (3.12) garantiza que $\mathcal{R} \geq 0$ por lo que debe ser necesariamente

$$\Delta\Phi \leq 0. \tag{3.39}$$

Una propiedad relevante que vincula a ℓ y r se muestra en la siguiente

[1]Toda métrica esféricamente simétrica admite *coordenadas isotrópicas* tales que, en dichas coordenadas, tal métrica resulta conformemente plana; esto es, que difiere de la métrica plana por un factor conforme.

[2]El cálculo de $\mathcal{R}$ puede verse en el apéndice B.

Proposición 3.3.1 *Sea $\Phi(\hat{r})$ una función suave tal que $\Delta\Phi \leq 0$. Entonces*

$$\int_0^{\hat{r}} \Phi^2(s)ds \geq \hat{r}\Phi^2(\hat{r}). \tag{3.40}$$

Prueba: Integrando por partes, se obtiene

$$\int_0^{\hat{r}} \Phi^2(s)ds = \hat{r}\Phi^2(\hat{r}) - 2\int_0^{\hat{r}} s\Phi(s)\Phi' ds. \tag{3.41}$$

Por otra parte, al integrar el laplaciano sobre una bola de radio r se tiene

$$0 \geq \int_{\mathcal{B}(r)} \Delta\Phi dv = \int_{\mathcal{B}(r)} \nabla\cdot(\nabla\Phi)\, dv = \oint_{\partial\mathcal{B}(r)} \nabla\Phi\cdot\hat{r}dS = 4\pi r^2\Phi'(r), \tag{3.42}$$

de donde se ve que debe ser $\Phi' < 0$. Asumiendo $\Phi > 0$ (sin perder generalidad, dado que el factor conforme es estricamente positivo) claramente es

$$-2\int_0^{\hat{r}} s\Phi(s)\Phi' ds \geq 0, \tag{3.43}$$

por lo que se tiene el resultado (3.41). ⊘

El miembro izquierdo de la desigualdad (3.41) es exactamente $\ell(\hat{r})$, mientras que de la ecuación (3.37) se ve que el miembro derecho es el radio de área. De aquí se deduce la importante relación entre ℓ y r:

$$\boxed{\ell \geq r.} \tag{3.44}$$

3.4. El Método Conforme

Al igual que con las Ecuaciones de Maxwell en Electromagnetismo, al considerar sistemas dinámicos en Relatividad General, además de las ecuaciones naturales de evolución surgen las ecuaciones de vínculo dadas por (3.1) y (3.2) que relacionan los tensores $(h_{ab}, \mathcal{K}_{ab})$ con los que se define el dato inicial para hacer evolucionar las ecuaciones de Einstein. La pregunta ahora es: **¿cómo resolver los vínculos** (3.1) **y** (3.2)**?**

El primer avance significativo a entender cómo resolver las ecuaciones de vínculo fue logrado por *André Lichnerowicz* en el año 1944 [20]. Para ello, se definen nuevos tensores $\overline{h}_{ab}$ y $\overline{\mathcal{K}}_{ab}$ dados por

$$h_{ab} := \Phi^4\overline{h}_{ab}, \quad \mathcal{K}_{ab} := \Phi^{-2}\overline{\mathcal{K}_{ab}}. \tag{3.45}$$

El inverso $\overline{h}^{ab}$ tiene componentes

$$\overline{h}^{ab} = \Phi^4 h^{ab}, \tag{3.46}$$

de manera que $\overline{h}_{ab}\overline{h}^{bc} = \delta^c_a$. Al subir los índices de $\overline{\mathcal{K}}$ con $\overline{h}$, se tiene

$$\mathcal{K}^{ab} = h^{ac}h^{bd}\mathcal{K}_{cd} = h^{ac}h^{bd}\Phi^{-2}\overline{\mathcal{K}}_{cd} = \Phi^{-10}\overline{h}^{ac}\overline{h}^{bd}\overline{\mathcal{K}}_{cd} = \Phi^{-10}\overline{\mathcal{K}}^{ab}. \tag{3.47}$$

Además,

$$\overline{\mathcal{K}}_{ab}\overline{\mathcal{K}}^{ab} = \Phi^{12}\mathcal{K}_{ab}\mathcal{K}^{ab}. \tag{3.48}$$

Si se supone que $\mathcal{K} := \mathcal{K}_{ab}h^{ab} = 0$ (dato inicial *maximal*), se tiene $\overline{\mathcal{K}} := \overline{\mathcal{K}}_{ab}\overline{h}^{ab} \equiv 0$. Por lo tanto se obtiene una ecuación elíptica para el factor conforme Φ que, en lugar de la ecuación escalar (3.2), resulta

$$\boxed{\overline{\Delta}\Phi - \frac{1}{8}\overline{\mathcal{R}}\Phi + \frac{1}{8}\overline{\mathcal{K}}_{ab}\overline{\mathcal{K}}^{ab}\Phi^{-7} + 2\pi\overline{\mu}\Phi^{-3} = 0} \tag{3.49}$$

donde se ha definido $\overline{\mu} := \Phi^8\mu$. La ecuación (3.50) se llama *Ecuación de Lichnerowicz-York con fuentes*. Otros métodos podrían haberse empleado para definir, junto con $\overline{h}$, un tensor simétrico interpretado como curvatura extrínseca, que sirva para resolver las ecuaciones de los vínculos. El presente método es el más general.

3.4.1. Principio del Máximo para ecuaciones elípticas

En general, la ecuación (3.50) es no lineal y no resulta sencillo encontrar soluciones explícitas (más aún, en la mayoría de los casos es imposible hallarlas analíticamente). Sin embargo, es posible estimar la solución exacta punto a punto, acotándola por funciones que satisfacen ecuaciones de Poisson lineales, y por lo tanto admiten a priori una solución explícita. Estas funciones se llaman *sub* y *supersoluciones* y podrían resultar de gran utilidad para encontrar un contraejemplo a la conjetura carga–tamaño o bien para demostrarla bajo ciertas condiciones. El método de la sub y supersolución puede estudiarse en detalle en [21].

Definición 3.4.1 *Considérese el problema no lineal*

$$\Delta u = f(\boldsymbol{x}, u), \quad u|_{\partial\Omega} = g, \tag{3.50}$$

donde Ω es acotado.

- *Se dice que u_+ es una **supersolución** de u si satisface el problema*

$$\Delta u_+ \leq f(\boldsymbol{x}, u_+), \quad u_+|_{\partial\Omega} = g. \tag{3.51}$$

- *Análogamente, u_- se dice **subsolución** de u si*

$$\Delta u_- \geq f(\boldsymbol{x}, u_-), \quad u_-|_{\partial\Omega} = g. \tag{3.52}$$

Notar que si $f \leq 0$, la función $u_- \equiv 0$ es siempre una subsolución de problema. El teorema que le da sentido a la definición anterior es el siguiente.

Teorema 3.4.2 *Sean u_+ y u_- supersolución y subsolución del problema (3.51). Entonces existe una solución u de (3.51) y además*

$$u_- \leq u \leq u_+. \tag{3.53}$$

Más aún, puede verse que si $f \leq 0$, el problema (3.51) tiene solucion única.

Parte II

Resultados Obtenidos

Capítulo 4

Modelo ECD

A continuación se presenta una evidencia a favor de la desigualdad carga–tamaño, para un particular modelo de materia, que básicamente consiste en partículas de polvo cargadas, localizadas en cierta región del espacio. Este sistema está bien descripto por una clase de soluciones exactas a las ecuaciones de campo, estudiada por A. Papapetrou y S. Majumdar en 1947 [22, 23].

4.1. La clase de Papapetrou-Majumdar

Es una familia de soluciones estáticas de las Ecuaciones de Einstein con fuentes,

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad T_{ab} = \rho u_a u_b + \frac{1}{4\pi}\left(F_{ac}F_b^c - \frac{g_{ab}}{4}F_{cd}F^{cd}\right), \tag{4.1}$$

donde F_{ab} es el tensor de campo electromagnético de Maxwell, y satisface las ecuaciones (3.4). Esta clase de soluciones describe precisamente un sistema de partículas puntuales newtonianas (polvo), cada una con una masa igual a su carga (en unidades relativistas), las cuales se encuentran en reposo respecto de cierto sistema inercial, permaneciendo en equilibrio mecánico debido a que las repulsiones electrostáticas se balancean exactamente con las interacciones gravitatorias entre ellas. Vale notar que dicho balance de fuerzas no sólo aparece en el límite newtoniano, sino también en relatividad general. El elemento de línea espaciotemporal que describe a este sistema aislado viene dado por

$$ds^2 = -\mathcal{S}^{-2}dt^2 + \mathcal{S}^2\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{4.2}$$

donde, en el modelo de N partículas cargadas, se toma

$$\mathcal{S}(r_i) = 1 + \sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{r_j}, \quad r_i := \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}. \tag{4.3}$$

Aquí, m_j son las masas de las partículas interactuantes, ubicadas en (x_j, y_j, z_j). $\mathcal{S}$ es una función armónica (satisface la ecuación de Laplace en tres dimensiones). Esto se deduce de proponer una relación lineal entre $1/\mathcal{S}$ y la componente temporal del potencial electromagnético. El primer término de T_{ab} representa la energía de la patículas de polvo con densidad ρ y cuadrivelocidad u^a respecto a algún referencial inercial ($u^a u_a = -1$). Por lo tanto, la cuadricorriente es $j^a = \sigma u^a$, donde σ es la densidad de carga eléctrica del sistema.

Aunque en sus comienzos se consideraba a esta solución como de poco interés físico, más adelante cobraron relevancia debido a los aportes de Hawking y Hartle, quienes demostraron que podría ser extendida analíticamente e interpretada como un sistema de agujeros negros cargados [24]. Para el caso de un único agujero negro ($N = 1$) se obtiene la métrica de Reissner–Nordstrom extremo en coordenadas isotrópicas.

4.2. El modelo de materia

El modelo ECD (electrically counterpoised dust) (ver por ejemplo [25, 3]) de partículas de polvo cargadas está descripto por la ecuación de estado

$$\sigma = \epsilon\rho, \quad \epsilon = \pm 1, \tag{4.4}$$

donde la repulsión electrostática entre las cargas de igual signo está balanceada exactamente por la atracción gravitatoria dentro del fluido.

Con este modelo de materia, se verá que la desigualdad $r_A \geq \mathcal{Q}$ se satisface, donde r_A corresponde al radio de área de las superficies $r =$ const. Además, si A es el área de una de dichas superficies, su radio de área viene dado por

$$r_A = \mathcal{S}(r)r. \tag{4.5}$$

Por otro lado, siendo

$$\mathcal{Q} = \int \sigma dv = \int \sigma \mathcal{S}^3 d^3\mathbf{r} = \int \epsilon \frac{\mu}{\mathcal{S}^3}\mathcal{S}^3 d^3\mathbf{r} = \epsilon \int \mu(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad \mu(\mathbf{r}) := \rho\mathcal{S}^3, \tag{4.6}$$

la desigualdad de la conjetrua resulta

$$\boxed{\mathcal{S}(r)r \geq \epsilon \int \mu(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}}\,. \tag{4.7}$$

En este caso, puede verse que las ecuaciones de Einstein–Maxwell resultan equivalentes a

$$\nabla^2 \mathcal{S} = -4\pi\rho\mathcal{S}^3. \tag{4.8}$$

Si ahora se realiza el cambio $\mathcal{V} := 1 - \mathcal{S}$, resulta una ecuación de Poisson para $\mathcal{V}$, dada por

$$\Delta\mathcal{V} = 4\pi\mu. \tag{4.9}$$

En este capítulo se demostrará la desigualdad (4.7) para el caso en que $\mu(r)$ es contante en una esfera de radio plano r_0, y cero fuera de ella:

$$\mu(r) = \begin{cases} \mu_0, & r \leq r_0 \\ 0, & r > r_0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Para $r > r_0$, el problema se reduce a la ecuación de Laplace para $\mathcal{V}$ con condiciones de contorno tales que $\mathcal{V} \to 0$ para $r \to \infty$ y $\mathcal{V}$ está definido para todo $r \geq 0$. Como $\mathcal{S} = \mathcal{S}(r)$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(r)$ y la ecuación se deduce a

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\mathcal{V}}{dr}\right) = 0, \tag{4.11}$$

es decir

$$\mathcal{V}(r) = \frac{\alpha}{r}, \tag{4.12}$$

para cierta constante α a determinar.

Si $r \leq r_0$, el problema se reduce a la ecuación

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\mathcal{V}}{dr}\right) = 4\pi\mu_0. \tag{4.13}$$

Poniendo $\Phi := r^2\frac{d\mathcal{V}}{dr}$ se tiene que

$$\frac{d\Phi}{dr} = 4\pi\mu_0 r^2, \tag{4.14}$$

por lo que,

$$\Phi(r) = \frac{4}{3}\pi\mu_0 r^3. \tag{4.15}$$

Notar que al pedir regularidad de $\mathcal{V}'$ en el origen, debe ser $\Phi(0) = 0$. Finalmente, para $r \leq r_0$ se tiene que

$$\mathcal{S}(r) = \frac{2}{3}\pi\mu_0 r^2 + C. \tag{4.16}$$

Las constantes α y C están unívocamente determinadas si se exige, como en todo problema de electrostática, continuidad de $\mathcal{V}$ y de $\mathcal{V}'$ en r_0. En efecto, las ecuaciones que resultan son

$$\frac{2}{3}\pi\mu_0 r_0^2 + C = \frac{\alpha}{r_0}, \tag{4.17}$$

$$\frac{4}{3}\pi\mu_0 r_0 = -\frac{\alpha}{r_0^2}. \tag{4.18}$$

Se obtiene entonces que $C = -2\pi\mu_0 r_0^2$, con lo cual

$$\mathcal{V}(r) = \begin{cases} -2\pi\mu_0\left(r_0^2 - \frac{r^2}{3}\right), \ r \leq r_0 \\ \\ -\frac{4}{3}\pi\mu_0\frac{r_0^3}{r}, \ r > r_0. \end{cases} \tag{4.19}$$

Finalmente,

$$\mathcal{S}(r) = \begin{cases} 1 + 2\pi\mu_0\left(r_0^2 - \frac{r^2}{3}\right), \ r \leq r_0 \\ \\ 1 + \frac{4}{3}\pi\mu_0\frac{r_0^3}{r}, \ r > r_0. \end{cases} \tag{4.20}$$

Para la carga, si $r > r_0$ y al asumir $\epsilon = 1$, se tiene

$$\mathcal{Q} = \int \mu(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = 4\pi\mu_0\int_0^{r_0} r^2 dr = \frac{4}{3}\pi\mu_0 r_0^3. \tag{4.21}$$

Comparando $\mathcal{S}$ y $\mathcal{Q}$ para $r > r_0$, se ve claramente que $r\mathcal{S}(r) \geq \mathcal{V}$. Para $r \leq r_0$, $\mathcal{Q}$ depende explícitamente de r, y se tiene

$$\mathcal{Q}(r) = \frac{4}{3}\pi\mu_0 r^3. \tag{4.22}$$

Para el radio de área,

$$r\mathcal{S}(r) = r + 2\pi\mu_0 r\left(r_0^2 - \frac{r^2}{3}\right) \geq \frac{4}{3}\pi\mu_0 r r_0^2 \geq \frac{4}{3}\pi\mu_0 r^3 = \mathcal{Q}(r), \tag{4.23}$$

como se quería demostrar.

La discusión para el caso en que $\mu(r)$ es una función arbitraria de soporte compacto es similar. Se debe resolver la ecuación

$$\Delta\mathcal{V} = 4\pi\mu(r), \tag{4.24}$$

con condición en infinito

$$r = |\mathbf{r}| \to \infty, \quad \mathcal{V} \approx -\frac{M}{r} \to 0. \tag{4.25}$$

Como $\mathcal{V}$ sólo es función de r, el problema se reduce a

$$\frac{1}{r^2}\frac{d\Phi}{dr} = 4\pi\mu(r), \tag{4.26}$$

con

$$\Phi(r) := r^2\frac{d\mathcal{V}}{dr}. \tag{4.27}$$

La regularidad de $\mathcal{V}$ y su derivada en $r = 0$ exige que $\Phi(0) = 0$, por lo que la solución de es

$$\Phi(r) = 4\pi\int_0^r \mu(s)s^2 ds = \mathcal{Q}(r). \tag{4.28}$$

Por construcción, $\Phi(r)$ se corresponde con el valor de la carga contenida en una esfera de radio r centrada en el origen. Esto dice que

$$\frac{d\mathcal{V}}{dr} = \frac{\mathcal{Q}(r)}{r^2}, \tag{4.29}$$

y entonces

$$\mathcal{V}(r) = \int_0^r \frac{\mathcal{Q}(s)}{s^2}ds + \mathcal{V}(0). \tag{4.30}$$

Usando la condición en infinito, se tiene

$$\mathcal{V}(0) = -\int_0^\infty \frac{\mathcal{Q}(s)}{s^2}ds. \tag{4.31}$$

Finalmente,

$$\mathcal{V}(r) = \int_0^r \frac{\mathcal{Q}(s)}{s^2}ds - \int_0^\infty \frac{\mathcal{Q}(s)}{s^2}ds = -\int_r^\infty \frac{\mathcal{Q}(s)}{s^2}ds, \tag{4.32}$$

por lo que

$$\mathcal{S}(r) = 1 + \int_r^\infty \frac{\mathcal{Q}(s)}{s^2}ds. \tag{4.33}$$

Así,

$$\mathcal{S}r = r + r\int_r^\infty \frac{\mathcal{Q}(s)}{s^2}ds \geq r\int_r^\infty \frac{\mathcal{Q}(s)}{s^2}ds, \tag{4.34}$$

por lo que debe verificarse que

$$r\int_r^\infty \frac{\mathcal{Q}(s)}{s^2}ds \geq \mathcal{Q}(r), \tag{4.35}$$

o lo que es equivalente, dado que $r \geq 0$,

$$\int_r^\infty \frac{\mathcal{Q}(s)}{s^2}ds - \frac{\mathcal{Q}(r)}{r} \geq 0. \tag{4.36}$$

La igualdad se satisface si $\mathcal{Q}$ es constante.

Capítulo 5

Longitud propia geodésica

5.1. Introducción

Uno de los problemas más importantes en Relatividad General es entender que si suficiente cantidad de materia está concentrada en un pequeño volumen, el sistema en cuestión inevitablemente colapsará bajo las propias fuerzas gravitatorias, y probablemente decaerá a un agujero negro. La solución de Schwarzchild es un claro ejemplo en simetría esférica. Ahora bien, estos argumentos no son del todo convincentes dado que el parámetro M en Schwarzchild corresponde a la masa total ADM; esto es, la cantidad total de materia menos la energía de ligadura, por lo que no representa la cantidad de materia real del sistema. Además, R corresponde al radio de área de la esfera, y quizá no represente una buena medida del tamaño, especialmente cuando la curvatura del espacio es de relevancia. Resulta interesante buscar otros criterios que indiquen si un sistema se encuentra en colapso o no.

En este capítulo se dan algunas evidencias más a favor de la conjetura carga–tamaño. Como medida de tamaño se considera la *longitud propia geodésica* en simetría esférica, cantidad definida y estudiada en [26]. Se presenta una solución explícita que corresponde a un cierto modelo de materia, el cual satisface la desigualdad localmente. Asumiendo la no existencia de superficies atrapadas en el dato inicial en cuestión, se obtiene una condición más debil que la desigualdad esféricamente simétrica entre ℓ y $\mathcal{Q}$; más aún, se obtiene la desigualdad (2.9) para ℓ.

5.2. Una solución exacta

Recordando la identidad

$$\mathcal{D}_i\mathcal{E}^i = \frac{1}{\sqrt{\det(h)}}\partial_i\left(\sqrt{\det(h)}\mathcal{E}^i\right), \quad \sqrt{\det(h)} = \Phi^6\hat{r}^2\sin(\theta), \tag{5.1}$$

se tiene que

$$\mathcal{D}_i\mathcal{E}^i = \frac{1}{\Phi^6\hat{r}^2}\partial_{\hat{r}}\left(\Phi^6\hat{r}^2\mathcal{E}\right). \tag{5.2}$$

La expresión anterior sugiere introducir nuevas cantidades para el campo eléctrico y la distribución de carga, que dependan de ciertas potencias del factor conforme presente en la métrica. En efecto, sean las *cantidades conformes*

$$\tilde{\mathcal{E}}^i(\hat{r}) := \Phi^6\mathcal{E}^i(\hat{r}), \quad \tilde{\rho}(\hat{r}) := \Phi^6\rho(\hat{r}). \tag{5.3}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} 4\pi\tilde{\rho} &= \Phi^6 \mathcal{D}_i \mathcal{E}^i \\ &= \frac{1}{\hat{r}^2}\partial_{\hat{r}}\left(\Phi^6 \hat{r}^2 \mathcal{E}\right) \\ &= \frac{1}{\hat{r}^2}\partial_{\hat{r}}\left(\hat{r}^2 \tilde{\mathcal{E}}\right), \\ &= \tilde{\mathcal{D}}^i \tilde{\mathcal{E}}_i, \end{aligned} \tag{5.4}$$

donde $\tilde{\mathcal{D}}_c$ es la derivada de Levi-Civita de la métrica plana, dado que la útlima expresión corresponde a la divergencia plana de $\mathbf{E}$. Por otro lado, bajo esta transformación, la carga contenida en un volumen arbitrario resulta invariante. En efecto,

$$\mathcal{Q}(\hat{r}) = \int_{\mathcal{V}(\hat{r})} \rho d\hat{v} = \int_{\mathcal{V}(\hat{r})} \rho \Phi^6 d\tilde{v} = \int_{\mathcal{V}(\hat{r})} \tilde{\rho} d\tilde{v}, \tag{5.5}$$

donde $d\tilde{v}$ es el elemento de volumen respecto de la métrica plana. Esto demuestra que la carga eléctrica resulta *conformemente invariante.*

Para el campo eléctrico,

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}^i \mathcal{E}_i = \mathcal{E}^i \mathcal{E}^j h_{ij} = \frac{\tilde{\mathcal{E}}^i \tilde{\mathcal{E}}^j}{\Phi^{12}} \Phi^4 \delta_{ij}, \tag{5.6}$$

por lo que

$$\mathcal{E}^2 = \frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{\Phi^8}. \tag{5.7}$$

Por lo tanto, la primera ecuación de vínculo en términos de (3.45) y (5.7) resulta

$$\Delta\Phi = -\frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{4\Phi^3}. \tag{5.8}$$

Finalmente, se ha reducido el problema anterior a resolver las siguientes ecuaciones para Φ:

$$\tilde{\mathcal{D}}_i \tilde{\mathcal{E}}^i = 4\pi\tilde{\rho}, \tag{5.9}$$

$$\Delta\Phi = -\frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{4\Phi^3}. \tag{5.10}$$

La manera de proceder es la siguiente. Se da como dato inicial a $\tilde{\rho}(\hat{r})$, se calcula $\tilde{\mathcal{E}}^i$ a partir de (5.9) y se inserta dicha solución en (5.10) para calcular $\Phi(\hat{r})$.

Como aplicación de este método, se ha estudiado el caso en que se da como dato la función

$$\boxed{\tilde{\rho}(\hat{r}) = \frac{\gamma}{4\pi\hat{r}^{5/2}}, \quad \hat{r} > 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}}. \tag{5.11}$$

La ecuación (5.9) tiene como solución general

$$\tilde{\mathcal{E}}(\hat{r}) = \frac{2\gamma}{\hat{r}^{3/2}}. \tag{5.12}$$

Reemplazando esta solución en (5.10), la ecuación para Φ resulta

$$\Delta\Phi = -\frac{\gamma^2}{\Phi^3 r^3}. \tag{5.13}$$

Como Φ depende solo de $\hat{r}$, la ecuación anterior es esencialmente una ecuación de segundo orden no lineal y ordinaria para Φ:

$$\Phi'' + \frac{2}{\hat{r}}\Phi' + \frac{\gamma^2}{\Phi^3\hat{r}^3} = 0. \tag{5.14}$$

Dada la forma de la ecuación, se propone como ansatz la función

$$\Phi(\hat{r}) = \mu\hat{r}^{\nu}. \tag{5.15}$$

Al reemplazar el ansatz en la ecuación anterior se obtiene la ecuación indicial

$$\mu\nu\,(\nu+1)\,\hat{r}^{\nu-2} + \gamma^2\mu^{-3}\hat{r}^{-3(\nu+1)} = 0. \tag{5.16}$$

Los valores de los parámetros μ y ν deben ser, necesariamente,

$$\mu = \left(\frac{16}{3}\gamma^2\right)^{1/4}, \quad \nu = -1/4. \tag{5.17}$$

La solución para Φ es,

$$\Phi(\hat{r}) = \left(\frac{16}{3}\gamma^2\right)^{1/4}\hat{r}^{-1/4}. \tag{5.18}$$

Para ver si se satisface la desigualdad $\mathcal{Q} \leq \ell$ para todo $\hat{r}$, notemos que, en virtud de las ecuaciones anteriores la densidad de carga presente en la esfera y el campo eléctrico interno generado por ésta vienen dados por las funciones

$$\rho(\hat{r}) = \Phi^{-6}\tilde{\rho} = \left(\frac{16}{3}\right)^{-3/2}\frac{\gamma^{-2}}{4\pi}\hat{r}^{-1/2}, \tag{5.19}$$

$$\mathcal{E}(\hat{r}) = \Phi^{-6}\tilde{\mathcal{E}} = 2\left(\frac{16}{3}\right)^{-3/2}\gamma^{-2}. \tag{5.20}$$

La carga contenida en $\mathcal{S}_{\hat{r}} \subset \mathcal{S}_{\hat{R}}$ es, entonces,

$$\mathcal{Q}(\hat{r}) = \int_{\mathcal{V}(\hat{r})}\tilde{\rho}d\tilde{v} = 2\gamma\hat{r}^{1/2}, \tag{5.21}$$

mientras que la longitud propia de $\mathcal{S}_{\hat{r}}$ es

$$\ell(\hat{r}) = \int_0^{\hat{r}}\Phi^2(t)dt = 2\sqrt{\frac{16}{3}}\gamma\hat{r}^{1/2}. \tag{5.22}$$

Claramente, se satisface la desigualdad $\mathcal{Q}(\hat{r}) \leq \ell(\hat{r})$.

5.3. Condición sobre el escalar de curvatura

En esta sección se obtendrá una desigualdad explícita entre ℓ y $\mathcal{Q}$ la cual es una evidencia a favor de la desigualdad $\ell \geq \mathcal{Q}$. Para ello, se asume que el dato inicial esféricamente simétrico *no contiene superficies atrapadas*[1]. En [26], se prueba que si el dato inicial contiene superficies atrapadas dentro de $\mathcal{V}(\hat{r})$, se tiene que

$$\mathcal{R}_{\text{máx}}\ell^2(\hat{r}) \geq 10. \tag{5.23}$$

[1]El caso en que el dato inicial contiene superficies atrapadas se discute en [5].

Las únicas dos hipótesis fuertes presentes en el resultado son que $\Delta\Phi \leq 0$ y el dato inicial admite al menos una superficie atrapada (es decir que $d(\hat{r}\Phi^2)/d\hat{r} \leq 0$). Además, se prueba que si no hay superficies atrapadas en $\mathcal{V}(\hat{r})$, al integrar $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{V}(\hat{r})$, se obtiene la desigualdad

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}(\hat{r})} \mathcal{R} d\hat{v} < 16\pi\ell(\hat{r})}. \tag{5.24}$$

Por lo tanto, en lugar de asumir la ausencia de superficies atrapadas, se asume una hipótesis un poco más general para el máximo valor del escalar de curvatura, $\mathcal{R}_{\text{máx}}$. En [26] se prueba que si

$$\boxed{\mathcal{R}_{\text{máx}}\ell^2(\hat{r}) < 10} \tag{5.25}$$

en $\mathcal{V}(\hat{r})$, luego no hay superficies atrapadas dentro, y por lo tanto vale la desigualdad (5.24). Este resultado motiva a preguntarse si $\mathcal{Q}^2/\ell$ es igual o menor que la integral de miembro izquierdo de (5.24). Dado que $\mathcal{R} = 2\mathcal{E}^2$, se tiene que

$$\int_{\mathcal{V}(\hat{r})} \mathcal{E}^2 d\hat{v} < 8\pi\ell(\hat{r}). \tag{5.26}$$

Por otra parte, si $\Sigma(\hat{r})$ es el borde de la esfera $\mathcal{V}(\hat{r})$ y $\mathcal{Q}_{\Sigma(\hat{r})}$ la carga en su interior, se tiene

$$4\pi\mathcal{Q}_{\Sigma(\hat{r})} = \int_{\Sigma(\hat{r})} \mathcal{E} d\Sigma, \tag{5.27}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} 16\pi^2\mathcal{Q}^2_{\Sigma(\hat{r})} &= \left(\int_{\Sigma(\hat{r})} \mathcal{E} d\Sigma\right)^2 \\ &\leq \left(\int_{\Sigma(\hat{r})} \mathcal{E}^2 d\Sigma\right)\left(\int_{\Sigma(\hat{r})} d\Sigma\right) \\ &= \left(\int_{\Sigma(\hat{r})} \mathcal{E}^2 d\Sigma\right) A\left(\Sigma(\hat{r})\right), \end{aligned} \tag{5.28}$$

donde se hizo uso de la *Desigualdad de Hölder* cuya demostración se presenta en el apéndice B de este trabajo. Ahora, como $A(\Sigma)$ es el área de la superficie de Σ, se tiene que

$$A(\Sigma) = 4\pi r^2_{A(\Sigma)} \leq 4\pi\ell(\hat{r})^2, \tag{5.29}$$

en virtud de la Proposición 3.3.2.1. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma(\hat{r})} \mathcal{E}^2 d\Sigma &\geq \frac{16\pi^2\mathcal{Q}^2_{\Sigma(\hat{r})}}{A(\Sigma)} \\ &\geq \frac{16\pi^2\mathcal{Q}^2_{\Sigma(\hat{r})}}{4\pi\ell^2} \\ &= \frac{4\pi\mathcal{Q}^2_{\Sigma(\hat{r})}}{\ell^2}, \end{aligned} \tag{5.30}$$

por lo que

$$\frac{\mathcal{Q}^2_{\Sigma(\hat{r})}}{\ell^2} \leq \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma(\hat{r})} \mathcal{E}^2 d\Sigma. \tag{5.31}$$

Esta desigualdad no es exactamente la buscada, dado que la integral que aparece es una integral sobre la superficie $\Sigma(\hat{r})$. Es decir que debería hallarse alguna relación entre dicha integral de superficie con la integral en el volumen que encierra la superficie, lo cual a priori es no trivial. Sin embargo, haciendo uso de la ecuación escalar de vínculo, se tiene

$$\int_{\Sigma(\hat{r})} \mathcal{E}^2 d\Sigma = \frac{1}{2}\int_{\Sigma(\hat{r})} \mathcal{R} d\Sigma \leq \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\text{máx}} \int_{\Sigma(\hat{r})} d\Sigma = \frac{5}{\ell^2} A(\Sigma), \tag{5.32}$$

donde en el último paso se empleó la hipótesis (5.25). Volviendo a la cota (5.31), se obtiene

$$16\pi^2 \mathcal{Q}^2_{\Sigma(\hat{r})} \leq \frac{5}{\ell^2} A(\Sigma)^2 = \frac{80\pi^2}{\ell^2} r^4_{A(\Sigma)} \leq 80\pi^2 \ell(\hat{r})^2, \tag{5.33}$$

ó bien

$$\boxed{\mathcal{Q}_{\Sigma(\hat{r})} \leq \sqrt{5}\ell(\hat{r})}. \tag{5.34}$$

Capítulo 6

Cotas con sub y supersoluciones

Con el objetivo de encontrar un contraejemplo a la desigualdad de la conjetura, se hará uso de una cota superior ℓ_+ para ℓ, la cual puede hallarse explícitamente, y estudiar si existe algún valor de $\hat{r}$ tal que $\ell_+(\hat{r}) < \mathcal{Q}(\hat{r})$. Si eso fuera así, entonces para ese valor de $\hat{r}$ se tendría $\ell(\hat{r}) < \mathcal{Q}(\hat{r})$ y la desigualdad sería falsa.

Se analizarán por separado dos casos: el problema local, en el cual no se asume ninguna hipótesis del dato en el infinito; y el caso asintóticamente plano. Ambos problemas se reducen a un problema elíptico de segundo orden con condición de frontera. La diferencia reside en la condición de contorno que se asigna a cada problema, y si se pide algo en el infinito o no. Por supuesto, el caso de mayor relevancia física corresponde a aquel asintóticamente plano, dado que estamos interesados en datos iniciales que representen sistemas físicos *aislados* (ver discusión en Capítulo 3 de este trabajo). En ambos casos se trabajará en coordenadas tales que el elemento de línea en el dato inicial es

$$ds^2 = \Phi^2(r)\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2\right)\right], \tag{6.1}$$

donde claramente la coordenada r no corresponde al radio de área; este último es $r\Phi^2(r)$. Bajo la transformación (5.1) para las fuentes (con $\hat{r} \equiv r$), se resolverán las ecuaciones *planas* de vínculo (5.7) y (5.8) en estas coordenadas, llamadas *coordenadas planas*.

6.1. El problema local esféricamente simétrico

El problema es hallar el factor conforme $\Phi(r)$ de la métrica que describe la geometría de un dato inicial que consiste en una esfera de radio *plano* $r = R$ y $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0$ constante en su interior. Al ser un problema puramente local, los resultados obtenidos debieran ser independientes de lo que haya fuera de la esfera, y en particular de la condición en infinito, por lo que no se asume nada al respecto. Dada la densidad $\tilde{\rho}_0$, se calcula la componente radial del campo eléctrico $\tilde{\mathcal{E}}$ y el problema se reduce a

$$\Delta\Phi = -\frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{4\Phi^3}, \quad \Phi|_{r=R} = \Phi_0 > 0. \tag{6.2}$$

En efecto, dado que $\tilde{\rho}(r) = \tilde{\rho}_0$, la ecuación (5.7) implica que

$$4\pi\tilde{\rho}_0 = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\tilde{\mathcal{E}}\right), \tag{6.3}$$

o sea

$$\boxed{\tilde{\mathcal{E}}(r) = \alpha r, \quad \alpha := \frac{4}{3}\pi\tilde{\rho}_0}. \tag{6.4}$$

Se define entonces la función

$$\Psi := \Phi - \Phi_0, \tag{6.5}$$

de manera que

$$\Delta\Psi = \Delta\Phi = -\frac{\alpha^2 r^2}{4\left(\Psi + \Phi_0\right)^3}, \quad \Psi|_{r=R} \equiv 0. \tag{6.6}$$

Por el Principio del Máximo, existe Ψ_+ tal que

$$0 \leq \Psi \leq \Psi_+, \tag{6.7}$$

donde Ψ_+ satisface

$$\Delta\Psi_+ = -\frac{\alpha^2 r^2}{4\Phi_0^3}, \quad \Psi_+|_{r=R} \equiv 0. \tag{6.8}$$

Pidiendo además que Ψ_+ sea regular en $r = 0$, la única solución de (6.6) es

$$\boxed{\Psi_+(r) = \Psi_+^0\left(R^4 - r^4\right), \quad \Psi_+^0 := \frac{\alpha^2}{80\Phi_0^3}}. \tag{6.9}$$

En virtud de la desigualdad (6.7) se tiene que, en el borde de la esfera,

$$\ell(R) = \int_0^R \Phi^2 = \int_0^R \left(\Psi + \Phi_0\right)^2 \leq \int_0^R \left(\Psi_+ + \Phi_0\right)^2 = \int_0^R \Phi_+^2 =: \ell_+(R). \tag{6.10}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \ell_+(R) &= \int_0^R \left(\Psi_+ + \Phi_0\right)^2 \\ &= \Phi_0^2 R + 2\Phi_0 \int_0^R \Psi_+ + \int_0^R \Psi_+^2 \\ &= \Phi_0^2 R + \frac{8}{5}\Phi_0\Psi_+^0 R^5 + \frac{32}{45}\left(\Psi_+^0\right)^2 R^9. \end{aligned} \tag{6.11}$$

La invariancia (5.3) de la carga eléctrica bajo transformaciones conformes asegura que, al ser $\tilde{\rho}$ constante, se tiene

$$\mathcal{Q}(R) = \frac{4}{3}\pi\tilde{\rho}_0 R^3 = \alpha R^3, \tag{6.12}$$

de manera que resulta

$$\wp\left(\Phi_0, R, \Psi_+^0\right) := \frac{\ell_+ - \mathcal{Q}}{R} = \frac{32}{45}\left(\Psi_+^0\right)^2 R^8 + \frac{8}{5}\Phi_0\Psi_+^0 R^4 - \frac{4}{3}\pi\tilde{\rho}_0 R^2 + \Phi_0^2. \tag{6.13}$$

Un contraejemplo explícito en este caso se tiene al imponer por ejemplo que $\Phi_0 = 2$, $R = 1$ y $\Psi_+^0 = 1$. Esta última condición implica que $\tilde{\rho}_0 = \frac{6\sqrt{10}}{\pi}$. En efecto, en unidades geométricas se tiene

$$\wp(2, 1, 1) = \frac{356}{45} - 8\sqrt{10} < 0. \tag{6.14}$$

6.2. Caso asintóticamente plano

En este caso, el problema consiste en resolver las mismas ecuaciones (5.7) y (5.8) para el caso en que $\tilde{\rho}(r) = \tilde{\rho}_0$ y con la condición asintóticamente plana

$$\lim_{r\to\infty} \Phi = 1. \tag{6.15}$$

Además, como siempre en este tipo de problemas elípticos en los que se resuelve para todo el espacio y la fuente tiene soporte compacto, se pide *continuidad de la solución y de su derivada* en todo el espacio. Análogamente al caso anterior, se procederá primero a calcular $\tilde{\mathcal{E}}$ en todo el espacio para luego hallar Φ.

Se tiene entonces que

$$\tilde{\rho}(r) = \begin{cases} \tilde{\rho}_0, \ r \leq R \\ 0, \ r > R. \end{cases} \tag{6.16}$$

Para $r \leq R$, ya se calculó $\tilde{\mathcal{E}}$ anteriormente, y al pedir nuevamamente que $\tilde{\mathcal{E}}$ sea regular en el origen, la solución es

$$\tilde{\mathcal{E}}(r) = \alpha r, \quad \alpha := \frac{4}{3}\pi\tilde{\rho}_0, \quad r \leq R. \tag{6.17}$$

Si $r > R$,

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\tilde{\mathcal{E}}\right) = 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{E}}(r) = \frac{C}{r^2}. \tag{6.18}$$

La continuidad de $\tilde{\mathcal{E}}$ en $r = R$ garantiza que $C = \alpha R^3$, de manera que

$$\tilde{\mathcal{E}}(r) = \frac{\alpha R^3}{r^2}, \quad r > R. \tag{6.19}$$

Por lo tanto, como era de esperar, el campo para todo r es

$$\tilde{\mathcal{E}}(r) = \begin{cases} \alpha r, \ r \leq R \\ \\ \frac{\alpha R^3}{r^2}, \ r > R. \end{cases} \tag{6.20}$$

La ecuación para Φ una vez que se tiene $\tilde{\mathcal{E}}(r)$ en todo el espacio está dada por (6.8). Si u es una función tal que

$$\Phi = 1 + u, \tag{6.21}$$

se tiene que

$$\Delta u = \Delta\Phi = -\frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{4\Phi^3} = -\frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{4\left(1+u\right)^3}, \quad \lim_{r\to\infty} u = 0. \tag{6.22}$$

Dado que el término derecho de la ecuación elíptica para u es no positivo, se tiene que $u \geq 0$. Luego, la función u_+ que satisface el problema

$$\Delta u_+ = -\frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{4}, \quad \lim_{r\to\infty} u_+ = 0, \tag{6.23}$$

es una supersolución. Además, u_+ puede hallarse explícitamente y es única si se le pide continuidad y continuidad de su derivada en $r = R$. Se define $\Phi_+ := 1 + u_+$. En efecto, para $r \leq R$, $u_+(r \leq R) =: u_+^<$ y

$$\Delta u_+^< = -\frac{\alpha^2}{4}r^2, \tag{6.24}$$

con solución
$$u_+^<(r) = -\frac{\alpha^2}{80}r^4 + C_<. \tag{6.25}$$

Para $r > R$, $u_+ = u_+^>$ y la ecuación a resolver es

$$\Delta u_+^> = -\frac{\alpha^2 R^6}{4r^4}. \tag{6.26}$$

La solución es
$$u_+^> = C_\infty - \frac{C_>}{r} - \frac{\alpha^2 R^6}{8r^2}. \tag{6.27}$$

Dado que $u_+ \to 0$ para $r \to \infty$, debe ser $C_\infty \equiv 0$. La continuidad de u_+ en $r = R$ garantiza que
$$u_+^<(R) = u_+^>(R), \tag{6.28}$$

lo que implica la relación
$$C_< = \frac{\alpha^2 R^4}{80} - \frac{C_>}{R} - \frac{\alpha^2 R^4}{8} \tag{6.29}$$

entre las constantes $C_<$ y $C_>$. La continuidad de u_+' en $r = R$ implica que $\left(u_+^<\right)'(R) = \left(u_+^>\right)'(R)$, condición que ajusta directamente el valor de $C_>$, dado por

$$C_> = -\frac{3}{10}\alpha^2 R^5. \tag{6.30}$$

Reemplazando este valor en la condición para $C_<$, se tiene que

$$C_< = \frac{3}{16}\alpha^2 R^4, \tag{6.31}$$

y finalmente la solución es

$$u_+(r) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{80}\left(15R^4 - r^4\right), \ r \le R \\ \\ -\frac{\alpha^2 R^6}{8r^2} + \frac{3}{10}\frac{\alpha^2 R^5}{r}, \ r > R. \end{cases} \tag{6.32}$$

La función anterior es estrictamente decreciente en todo el espacio. En efecto,

$$\left(u_+\right)'(r) = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{20}r^3, \ r \le R \\ \\ \frac{\alpha^2 R^5}{r^2}\left(\frac{R}{4r} - \frac{3}{10}\right), \ r > R. \end{cases}, \tag{6.33}$$

la cual claramente es negativa para $r \le R$. Para $r > R$, $R/r < 1$, y por lo tanto $(u_+)' < -\frac{\alpha^2 R^5}{20r^2} < 0$.

6.2.1. Supersolución para el radio de área

En términos del radio plano y el factor conforme, se tiene que

$$r_A = r\Phi^2(r) \le r\Phi_+^2 =: r_A^+, \tag{6.34}$$

Figura 6.1: Gráfico de $u_+(r)$ con $\alpha = R = 1$.

donde a la función $r_A^+(r)$ corresponde a la *supersolución* del radio de área y viene dada por

$$r_A^+ = r + 2ru_+ + ru_+^2. \tag{6.35}$$

En efecto, para $r \leq R$,

$$r_A^+(r) = \frac{\alpha^4}{6400}r^9 - \left(16 + 3\alpha^2R^4\right)\frac{\alpha^5r^5}{640} + \left(1 + \frac{3}{8}\alpha^2R^4 + \frac{9}{256}\alpha^4R^8\right)r. \tag{6.36}$$

Recordando que para $r \leq R$ es $\mathcal{Q}(r) = \alpha r^3$, puede verse que el polinomio en (r, R, α)

$$\frac{r_A^+ - \mathcal{Q}}{r} = \frac{\alpha^4}{6400}r^8 - \frac{\alpha^2}{640}\left(16 + 3\alpha^2R^4\right)r^4 - \alpha r^2 + \frac{9}{256}\alpha^4R^8 + \frac{3}{8}\alpha^2R^4 + 1 \tag{6.37}$$

es siempre estrictamente positivo. En efecto, dado que $r \leq R$,

$$\begin{aligned}\frac{r_A^+ - \mathcal{Q}}{r} &\geq 1 + \frac{3}{8}\alpha^2R^4 + \frac{9}{256}\alpha^4R^8 - \alpha R^2 - \frac{\alpha^2R^4}{640}\left(16 + 3\alpha^2R^4\right)\\ &= 1 + \frac{7}{20}\alpha^2R^4 + \frac{39}{1280}\alpha^4R^8 - \alpha R^2.\end{aligned} \tag{6.38}$$

Realizando el cambio de variable $x := \alpha R^2$, se tiene que

$$\frac{r_A^+ - \mathcal{Q}}{r} \geq \mathcal{P}(x), \tag{6.39}$$

donde

$$\mathcal{P}(x) = \frac{39}{1280}x^4 + \frac{7}{20}x^2 - x + 1, \tag{6.40}$$

el cual es positivo para todo $x \in \mathbb{R}$. En efecto, dado que $\mathcal{P}''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}(x)$ tiene un único punto crítico que correponde a un mínimo local (y global). Este valor mínimo se corresponde con la única raíz real de

$$\mathcal{P}'(x) = \frac{39}{320}x^3 + \frac{7}{10}x - 1, \tag{6.41}$$

Figura 6.2: Gráfico de $\mathcal{P}(x)$ vs. x.

la cual viene dada exactamente por

$$x_{\text{mín}} = \frac{2}{39}\sqrt[3]{30420 + 52\sqrt{484913}} - \frac{112}{3\sqrt[3]{30420 + 52\sqrt{484913}}} \approx 1{,}158... \tag{6.42}$$

De manera que

$$\frac{r_A^+ - \mathcal{Q}}{r} \geq \mathcal{P}(x) \geq \mathcal{P}(x_{\text{mín}}) \approx 0{,}366... > 0. \tag{6.43}$$

Por lo tanto, para $r \leq R$ la supersolución del radio de área satisface la desigualdad $r_A^+ \geq \mathcal{Q}$.

Para analizar el caso $r > R$, primero se estudiará si r_A^+ es una función monótona creciente de r. En efecto,

$$\left(r_A^+\right)'(r) = (1 + u_+)\left[1 + u_+ + 2r\,(u_+)'\right] = (1 + u_+)\,\delta(r), \quad \delta(r) := 1 + u_+ + 2r\,(u_+)'. \tag{6.44}$$

Para $r \leq R$, se tiene que

$$\delta^<(r) = 1 + \frac{3}{16}\alpha^2 R^4 - \frac{9}{80}\alpha^2 r^4 \geq 1 + \frac{3}{40}\alpha^2 R^4 > 0. \tag{6.45}$$

Sin embargo, para $r > R$,

$$\delta^>(r) = 1 - \frac{3\alpha^2 R^5}{10r} + \frac{3\alpha^2 R^6}{8r^2}, \tag{6.46}$$

la cual es positiva sólo si $\alpha^2 R^4 < \frac{50}{3}$. Por lo tanto, r_A^+ no es monótona creciente para cualquier par (α, R). Esto sugiere que es necesario realizar el cálculo de $r_A^+ - \mathcal{Q}$ análogo al caso $r \leq R$. En virtud de las expresiones (6.32) y (6.35), analizar el signo de $r_A^+ - \mathcal{Q}$ para $r > R$ es equivalente a estudiar el signo del polinomio

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^+(\alpha, R, r) = 1600r^4 + 960\alpha R^3\left(\alpha R^2 - \frac{5}{3}\right)r^3 + 144\alpha^2 R^6\left(\alpha^2 R^4 - \frac{25}{9}\right)r^2 + \\ -120\alpha^4 R^{11} r + 25\alpha^2 R^{12}.\end{aligned} \tag{6.47}$$

Notar que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^+(\alpha, R, r) &\geq r^2 \left(1600r^2 + 560\alpha R^3 \left(\alpha R^2 - \frac{20}{7}\right) r\right) \\ &= \left(40r - 20aR^3\right)^2 + 400a^2R^5 \left(\frac{7}{5}r - R\right) \\ &\geq 0, \end{aligned} \tag{6.48}$$

por ser $r > R$. Por lo tanto, se ha demostrado el siguiente

Teorema 6.2.1 *Sea r_A^+ una cota superior para el radio de área calculada a partir de u_+, y $\mathcal{Q}(r)$ la carga interior a una esfera de radio plano r y densidad conforme constante en su interior. Entonces se satisface la desigualdad*

$$r_A^+ \geq \mathcal{Q}, \quad \forall r \geq 0. \tag{6.49}$$

Este resultado implica además que la supersolución correspondiente a la longitud propia geodésica

$$\ell_+(r) := \int_0^r \Phi_+^2, \tag{6.50}$$

también satisface la desigualdad. En efecto, se tiene el

Lema 6.2.2 *Si ℓ_+ y r_A^+ son respectivamente las supersoluciones para ℓ y r_A respecto de u_+, entonces satisfacen la desigualdad*

$$\ell_+ \geq r_A^+. \tag{6.51}$$

Prueba: Dado que Φ_+ es una función decreciente de r, se tiene directamente que

$$\ell_+(r) = \int_0^r \Phi_+^2(x)dx \geq \min_{x\in[0,r]} \{\Phi_+(x)^2\} \int_0^r dx = \Phi^2(r)r = r_A^+. \tag{6.52}$$

6.2.2. Subsolución para el radio de área

Los resultados anteriores parecen ser claras evidencias de que la desigualdad podría ser cierta en simetría esférica. Es por ello que a continuación se estudia una subsolución para el radio de área, r_A^-, la cual permitirá asegurar que la desigualdad con densidad conforme uniforme será cierta para radio de área, al menos si se cumple cierta condición entre el radio plano de la esfera y la carga interior.

Una subsolución para u se presenta en el siguiente

Lema 6.2.3 *Sea u_- la función que satisface el problema*

$$\Delta u_- = -\frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{(1+\overline{u}_+)^3}, \quad \lim_{r\to\infty} u_- = 0, \tag{6.53}$$

siendo $\overline{u}_+$ el máximo valor que alcanza la función u_+ dada por (6.32). Entonces u_- es subsolución de u, y por lo tanto $u_- \leq u$.

Prueba: Al ser u_+ una función monótona decreciente, se tiene que

$$\overline{u}_+ = u_+(0) = \frac{3}{16}\alpha^2 R^4. \tag{6.54}$$

Para $r \leq R$, $\tilde{\mathcal{E}}(r) = \alpha r$, de manera que

$$\Delta u_-^{\leq} = -\frac{\alpha^2 r^2}{4\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3}. \tag{6.55}$$

Al pedir que $\left(u_-'\right)^<$ sea regular en $r=0$, la solución general es

$$u_-^{\leq}(r) = C_< - \frac{\alpha^2 r^4}{80\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3}, \quad r \leq R. \tag{6.56}$$

Para $r > R$, se tiene $\tilde{\mathcal{E}}(r) = \frac{\alpha R^3}{r^2}$, por lo que la ecuación para $u_-^{\geq}$ es

$$\Delta u_-^{\geq} = -\frac{\alpha^2 R^6}{4r^4\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3}, \tag{6.57}$$

cuya solución general es

$$u_-^{\geq}(r) = C_\infty - \frac{C_>}{r} - \frac{\alpha^2 R^6}{8\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3 r^2}, r > R. \tag{6.58}$$

La condición para $r \to \infty$ implica que $C_\infty \equiv 0$. La continuidad de $u_-(r)$ en $r = R$ garantiza la ecuación

$$C_< = -\frac{9\alpha^2 R^4}{80\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3} - \frac{C_>}{R}. \tag{6.59}$$

La continuidad de u_-' en $r = R$ implica directamente que

$$C_> = -\frac{3\alpha^2 R^5}{10\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3}, \tag{6.60}$$

de manera que

$$C_< = \frac{3\alpha^2 R^4}{16\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3}. \tag{6.61}$$

Finalmente, se tiene que

$$u_-(r) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{8\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3}\left(\frac{3}{2}R^4 - \frac{1}{10}r^4\right), \ r \leq R \\ \\ \frac{\alpha^2 R^5}{\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3 r}\left(\frac{3}{10} - \frac{R}{8r}\right), \ r > R. \end{cases} \tag{6.62}$$

Esta función también es monótona decreciente. En efecto,

$$(u_-)'(r) = \begin{cases} -\frac{2\alpha^2 r^3}{5\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3}, \ r \leq R \\ \\ \frac{\alpha^2 R^5}{\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3 r^2}\left(\frac{R}{4r} - \frac{3}{10}\right), \ r > R. \end{cases} \tag{6.63}$$

Para $r \leq R$, la derivada es explícitamente negativa, por lo que u_- decrece. Si $r > R$, $R/r < 1$ y por lo tanto

$$\frac{\alpha^2 R^5}{\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3 r^2}\left(\frac{R}{4r}-\frac{3}{10}\right) < -\frac{\alpha^2 R^5}{20\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3 r^2} < 0, \tag{6.64}$$

lo que implica que u_- es decreciente para todo $r \geq 0$. Más aún, se tiene que

$$u_-(r) \leq u_-(0) = \frac{3\alpha^2 R^4}{16\left(1+\frac{3\alpha^2 R^4}{16}\right)^3} \leq \frac{3}{16}\alpha^2 R^4 = \overline{u}_+. \tag{6.65}$$

De aquí se deduce inmediatamente que

$$\Delta u_- = -\frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{(1+\overline{u}_+)^3} \geq -\frac{\tilde{\mathcal{E}}^2}{(1+u_-)^3}, \tag{6.66}$$

de manera que u_- es subsolución para u. ◇

La correspondiente subsolución para el radio de área como

$$r_A^- := r\overline{\Phi}_-(r)^2 \leq r\Phi(r)^2 = r_A, \quad \overline{\Phi}_-(r) := 1+\overline{u}_-. \tag{6.67}$$

Realizando el cálculo de r_A^- para $r \leq R$, se obtiene

$$r_A^- = \frac{\alpha^4 r^9}{6400\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^6} - \frac{\alpha^2 r^5}{640\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3}\left(16+\frac{3\alpha^2 R^4}{\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3}\right)+$$
$$+\left(1+\frac{3}{8}\frac{\alpha^2 R^4}{\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^3}+\frac{9}{256}\frac{\alpha^4 R^8}{\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2 R^4\right)^6}\right)r. \tag{6.68}$$

La carga para $r \leq R$ es $\mathcal{Q}(r) = \alpha r^3$. Se quiere analizar el signo de $r_A^- - \mathcal{Q}$, expresión que se trata de un polinomio en tres variables: α, R y r. Se observa que en la expresión anterior para r_A^-, es posible definir una nueva constante adimensional, que fusiona α con R:

$$\Lambda := \alpha^2 R^4. \tag{6.69}$$

Si bien $r_A^- - \mathcal{Q}$ sigue siendo un polinomio en tres variables (α, Λ, r), este cambio será útil si se da explícitamente un valor numérico a Λ. En término de estas nuevas variables, se tiene que

$$\frac{r_A^- - \mathcal{Q}}{r} = \frac{\alpha^4 r^8}{6400\left(1+\frac{3}{16}\Lambda\right)^6} - \frac{\alpha^2 r^4}{640\left(1+\frac{3}{16}\Lambda\right)^3}\left(16+\frac{3\Lambda}{\left(1+\frac{3}{16}\Lambda\right)^3}\right)+$$
$$-\alpha r^2 + \frac{9}{256}\frac{\Lambda^2}{\left(1+\frac{3}{16}\Lambda\right)^6} + \frac{3}{8}\frac{\Lambda}{\left(1+\frac{3}{16}\Lambda\right)^3} + 1. \tag{6.70}$$

Este cambio permite a su vez realizar la sustitución adimensional $x := \alpha r^2$ y como el polinomio anterior era válido para $0 \leq r \leq R$, se tiene que

$$0 \leq x \leq \sqrt{\Lambda}. \tag{6.71}$$

Mediante estos cambios de variable, se ha logrado expresar a $\left(r_A^- - \mathcal{Q}\right)/r$ como un polinomio de dos variables, Λ y x:

$$\mathcal{P}_\Lambda(x) := \frac{r_A^- - \mathcal{Q}}{r} = \frac{x^4}{6400\left(1+\frac{3}{16}\Lambda\right)^6} - \frac{x^2}{640\left(1+\frac{3}{16}\Lambda\right)^3}\left(16 + \frac{3\Lambda}{\left(1+\frac{3}{16}\Lambda\right)^3}\right) + \\ -x + \frac{9}{256}\frac{\Lambda^2}{\left(1+\frac{3}{16}\Lambda\right)^6} + \frac{3}{8}\frac{\Lambda}{\left(1+\frac{3}{16}\Lambda\right)^3} + 1. \tag{6.72}$$

6.3. Desigualdad $r_A - \mathcal{Q}$

Es de esperar que para ciertos valores de $\Lambda \geq 0$, el polinomio en x resultante sea positivo al menos para $0 \leq x \leq \sqrt{\Lambda}$. En efecto, dicho polinomio puede ser escrito de la forma

$$\mathcal{P}_\Lambda(x) = \frac{1}{256\left(1+\frac{3\Lambda}{16}\right)^6}\left(\frac{x^2}{5} - 3\Lambda\right)^2 + \frac{15\Lambda - x^2}{40\left(1+\frac{3\Lambda}{16}\right)^3} - x + 1, \tag{6.73}$$

y dado que $0 \leq x \leq \sqrt{\Lambda}$, se tiene automáticamente que

$$\mathcal{P}_\Lambda(x) \geq \frac{7\Lambda}{20\left(1+\frac{3\Lambda}{16}\right)^3} - \sqrt{\Lambda} + 1$$

$$\geq -\sqrt{\Lambda} + 1, \tag{6.74}$$

el cual resulta positivo si $\sqrt{\Lambda} \leq 1$. Esta condición para Λ implica que

$$\alpha R^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4\pi}{3}\tilde{\rho}_0 R^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathcal{Q}}{R} \leq 1. \tag{6.75}$$

Por lo tanto, se ha demostrado el siguiente

Teorema 6.3.1 *Considérese un dato inicial asintóticamente plano de las Ecuaciones de Einstein-Maxwell, el cual contiene una esfera de radio plano R con densidad conforme constante y carga eléctrica $\mathcal{Q}$ en su interior, tal que*

$$R \geq \mathcal{Q}. \tag{6.76}$$

Entonces la desigualdad

$$r_A(r) \geq \mathcal{Q} \tag{6.77}$$

se satisface para $r \leq R$.

Dado que el factor conforme Φ de la 3–métrica es siempre mayor que 1, se tiene que

$$r_A = r\Phi^2(r) \geq r, \tag{6.78}$$

y en particular es cierto en el borde de la esfera, es decir, para $r = R$. De manera que la hipótesis del teorema anterior implica que (6.77) vale en el borde. Sin embargo, no es posible reemplazar esta hipótesis por $r_A(R) \geq \mathcal{Q}$, dado que ésta última ecuación no implica que $R \geq \mathcal{Q}$, esto es; la condición $r_A(R) \geq \mathcal{Q}$ es más débil que la que aparece en el teorema.

Capítulo 7

Conclusiones

7.1. Resultados obtenidos

En este trabajo se avanzó en el estudio de una desigualdad universal que vincula la carga eléctrica contenida en un objeto ordinario con alguna medida de su tamaño, en el caso en que se tiene simetría esférica. En general no es fácil encontrar medidas de tamaño para objetos. No obstante, en simetría esférica se tienen dos de ellas: el radio de área y la longitud propia geodésica o distancia propia. Se cree que estas son las únicas medidas de tamaño relevantes en simetría esférica. Por otra parte, se tiene que el radio de área es menor o igual a la longitud geodésica, por lo que si la desigualdad es cierta para radio de área, automáticamente se satisface para longitud geodésica.

Inicialmente se encontraron evidencias a favor de la desigualdad. En el Capítulo 4 se presentó un modelo de materia de polvo cargado, cuya densidad de masa es igual a la densidad de carga eléctrica. Si bien este modelo está lejos de describir algún sistema físico concreto real, resulta particularmente interesante ya que corresponde a un caso límite en el cual se demostró que la desigualdad con radio de área es cierta en todo el espacio.

En el Capítulo 5 se estudió la desigualdad considerando a la longitud propia geodésica como medida de tamaño. Se encontró una solución exacta para el factor conforme de la métrica del dato inicial, el cual no tiende a 1 en el infinito. Si bien esta solución no describe sistemas aislados, se trata de una solución exacta a las ecuaciones de campo la cual satisface la desigualdad. Por otro lado, se encontró una desigualdad, también con longitud propia, que corresponde a una condición más débil que la desigualdad de la conjetura (más aún, la desigualdad original de la conjetura implica este último resultado). Para demostrarla, se empleó una hipótesis extra sobre el valor máximo del escalar de curvatura del dato inicial, asumiendo que éste existe. A su vez, esta hipótesis implica que dentro de la esfera de soporte de carga no existen superficies atrapadas, lo que además implica una importante relación entre la integral del escalar de curvatura sobre una esfera arbitraria y su longitud geodésica.

En el Capítulo 6 se obtuvieron dos cotas para el radio de área; una inferior y otra superior. Primero se discutió un resultado puramente local, es decir, sin asumir nada sobre la naturaleza del factor conforme, y se encontró un contraejemplo a la desigualdad. Este resultado consiste en resolver la ecuación de vínculo para el factor conforme con condición de borde positiva sobre la superficie de la esfera de soporte de carga. El contraejemplo se construyó imponiendo además que dicha condición en el borde fuera constante y mayor que 1, para descartar que ésta pueda ser embebida en una cosmología o en un dato asintóticamente plano. De esta manera, resulta necesario asumir que el dato sea asintóticamente plano para que la desigualdad tenga posibilidad de ser cierta.

El resto del trabajo se refiere al caso en que el dato inicial es asintóticamente plano, lo que adquiere mayor relevancia física. Con el objetivo de encontrar un contraejemplo a la desigualdad, inspirado en el contraejemplo en el caso local anterior, se demostró un importante resultado: la supersolución encontrada para el radio de área satisface la desigualdad en todo el espacio. Si bien este resultado no es suficiente para demostrar la desigualdad, resulta un buen indicio de que la desigualdad podría ser cierta. Es por ello que se buscó una subsolución para el radio de área con la cual se logró demostrar la desigualdad en el interior de la esfera, asumiendo cierta condición entre la carga total y el radio plano del soporte. Dicha cota para el radio de área no fue suficiente para demostrar la desigualdad fuera de la esfera. Es por ello que el útlimo teorema está enunciado sólo para $r \leq R$. Como continuación del trabajo, restaría encontrar alguna otra cota para el radio de área tal que la desigualdad sea cierta fuera de la esfera, ó bien, encontrar un contraejemplo para dicha región.

7.2. Problemas abiertos e investigación a futuro

Este trabajo abre las puertas a continuar el estudio de la desigualdad en simetría esférica, ya que no se ha encontrado un contraejemplo para el caso en que el dato es asintóticamente plano y más aún, se dieron suficientes evidencias como para dar cuenta que la desigualdad podría ser cierta en simetría esférica. Además, es posible abordar este estudio tanto de manera numérica como analítica, buscando nuevas sub/supersoluciones para el radio de área y para la longitud propia geodésica.

Por otra parte, este problema puede generalizarse para el caso en que no se asume simetría esférica. Este caso resulta de mayor dificultad en cálculos y ecuaciones, así como también en la búsqueda de una medida de tamaño adecuada para el objeto en cuestión. Por ejemplo, en [3] se discute el caso en que se tiene ECD en el interior de un elipsoide, y se demuestra una desigualdad entre el área del elipsoide y el cuadrado de la masa de ECD que es opuesta a la conjeturada para la carga, lo que sugiere que el área de la superficie no representa una buena medida del tamaño de objetos. Este mismo problema aparece al querer generalizar la desigualdad entre área y momento angular para objetos, demostrada en [6] para agujeros negros con simetría axial. Más aún, existen definiciones alternativas de medidas de tamaño, las cuales satisfacen esta última desigualdad, como se presenta en [10].

Parte III

Apéndices y Referencias

Apéndice A

Dato inicial esféricamente simétrico

En este capítulo se exponen explícitamente todos los tensores, símbolos y operadores diferenciales empleados para el análisis del dato inicial esféricamente simétrico con elemento de línea

$$ds^2 = d\ell^2 + r^2(\ell)\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2\right). \tag{A.1}$$

Se tiene que $r := r(\ell)$, y $r' := \frac{dr}{d\ell}$.

A.1. Símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{\ell}_{\theta\theta} = r(\ell)r'(\ell), \quad \Gamma^{\ell}_{\varphi\varphi} = r(\ell)\sin^2(\theta)r'(\ell); \tag{A.2}$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\ell} = -\Gamma^{\theta}_{\ell\theta} = -\frac{r'(\ell)}{r(\ell)}, \quad \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = \sin(\theta)\cos(\theta); \tag{A.3}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\ell} = -\Gamma^{\theta}_{\ell\varphi} = -\frac{r'(\ell)}{r(\ell)}, \quad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = -\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} = -\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}; \tag{A.4}$$

A.2. Tensor de Ricci y escalar de curvatura

El tensor de Ricci es diagonal, con componentes

$$\mathcal{R}_{\ell\ell} = -\frac{2r''(\ell)}{r(\ell)}, \tag{A.5}$$

$$\mathcal{R}_{\theta\theta} = 1 - r(\ell)r''(\ell) - (r''(\ell))^2, \tag{A.6}$$

$$\mathcal{R}_{\varphi\varphi} = \sin^2(\theta)\mathcal{R}_{\theta\theta}, \tag{A.7}$$

El escalar de curvatura es

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\ell\ell}g^{\ell\ell} + \mathcal{R}_{\theta\theta}g^{\theta\theta} + \mathcal{R}_{\varphi\varphi}g^{\varphi\varphi} = -\frac{2}{r^2(\ell)}\left(2r(\ell)r''(\ell) + (r'(\ell))^2 - 1\right) \tag{A.8}$$

A.3. Gradiente, divergencia y laplaciano

Para el campo vectorial más general en coordenadas (ℓ, θ, φ)

$$\mathcal{V}(\ell,\theta,\varphi) = \mathcal{V}_\ell(\ell,\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial\ell} + \mathcal{V}_\theta(\ell,\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathcal{V}_\varphi(\ell,\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{A.9}$$

el *gradiente* es

$$\nabla^a = \frac{\partial}{\partial\ell} + \frac{1}{r(\ell)^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2(\ell)\sin^2(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}; \tag{A.10}$$

la *divergencia de* $\mathcal{V}$ es

$$\nabla^a\mathcal{V}_a = \frac{\partial\mathcal{V}_\ell}{\partial\ell} + \frac{\partial\mathcal{V}_\theta}{\partial\theta} + 2\mathcal{V}_\ell\frac{r'(\ell)}{r(\ell)} + \frac{\partial\mathcal{V}_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\mathcal{V}_\theta; \tag{A.11}$$

y para un campo escalar Φ se tiene su *laplaciano*

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\ell^2} + \frac{2r'(\ell)}{r(\ell)}\frac{\partial\Phi}{\partial\ell} + \frac{1}{r^2(\ell)}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos(\theta)}{r^2(\ell)\sin(\theta)}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2(\ell)\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}. \tag{A.12}$$

A.4. Escalar de curvatura de la métrica (3.35)

Considérese el elemento de línea (3.41), dado por

$$ds^2 = \Phi^4(r)\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2\right)\right], \tag{A.13}$$

con $\tilde{g}_{ab}$ sus componentes tensoriales. Se quiere calcular el escalar de curvatura $\tilde{\mathcal{R}}$ asociado. Una posible forma es calcular las componentes del tensor de Ricci $\tilde{\mathcal{R}}_{ab}$ y contraer con la métrica. Alternativamente, nótese que

$$\tilde{g}_{ab} = \Phi^4 g_{ab}, \tag{A.14}$$

donde g_{ab} son las componentes de la métrica plana, cuyo escalar de curvatura es $\mathcal{R} \equiv 0$. Empleando la ecuación (D.9) del Apéndice D del libro de Wald [15], se tiene que, para $n = 3$,

$$\tilde{\mathcal{R}} = -2\Phi^{-4}\left[2\nabla^a\nabla_a\left(\ln\Phi^2\right) + \nabla^a\left(\ln\Phi^2\right)\nabla_a\left(\ln\Phi^2\right)\right]. \tag{A.15}$$

Ahora bien,

$$\nabla_a\left(\ln\Phi^2\right) = \Phi^{-2}\nabla_a\Phi^2 = 2\Phi^{-1}\nabla_a\Phi, \tag{A.16}$$

por lo que

$$\nabla^a\nabla_a\left(\ln\Phi^2\right) = \nabla^a\left(\Phi^{-1}\nabla_a\Phi\right) = 2\left[\Phi^{-1}\Delta\Phi - \Phi^{-2}\left(\nabla^a\Phi\right)\left(\nabla_a\Phi\right)\right], \tag{A.17}$$

y además

$$\nabla^a\left(\ln\Phi^2\right)\nabla_a\left(\ln\Phi^2\right) = 4\Phi^{-2}\left(\nabla^a\Phi\right)\left(\nabla_a\Phi\right). \tag{A.18}$$

Reemplazando estas dos últimas expresiones en (A.15), se obtiene

$$\tilde{\mathcal{R}} = -2\Phi^{-4}\left[4\left(\Phi^{-1}\Delta\Phi - \Phi^{-2}\left(\nabla^a\Phi\right)\left(\nabla_a\Phi\right)\right) + 4\Phi^{-2}\left(\nabla^a\Phi\right)\left(\nabla_a\Phi\right)\right], \tag{A.19}$$

es decir

$$\tilde{\mathcal{R}} = -8\Phi^{-5}\Delta\Phi, \tag{A.20}$$

como se quería ver.

Apéndice B

Desigualdad de Hölder

Se presenta a continuación una demostración de la Desigualdad de Hölder. Para más detalles, se puede consultar en cualquier libro de medida, integración y Análisis Funcional.

Teorema B.0.1 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f, g : (\mathcal{X}, \mathcal{F}) \to \mathbb{C}$ funciones integrables. Si $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces*

$$\int_{\mathcal{X}} |fg| d\mu \leq \left(\int_{\mathcal{X}} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\mathcal{X}} |g|^q d\mu \right)^{1/q}. \tag{B.1}$$

Prueba. Para probar la desigualdad anterior, se hará uso del siguiente

Lema B.0.2 ***Desigualdad de Young.*** *Sean $a, b \geq 0$, $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{B.2}$$

Prueba del lema. Sea $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ la función exponencial. Esta función satisface la particular condición de que $\exp'' = \exp$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y por lo tanto es una función *convexa.* La convexidad de exp implica automáticamente que si $\alpha, \beta \geq 0$ y además $\alpha + \beta = 1$, entonces

$$\exp(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \exp(x) + \beta \exp(y). \tag{B.3}$$

De manera que la desigualdad (B.2) se obtiene trivialmente de (B.3) tomando

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}, \quad x = p \ln(a), \quad y = q \ln(b). \tag{B.4}$$

En vistas del teorema a demostrar, y via el lema anterior, considérense

$$\alpha := \left(\int_{\mathcal{X}} |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad \beta := \left(\int_{\mathcal{X}} |g|^q d\mu \right)^{1/q}. \tag{B.5}$$

Para $\alpha, \beta = 0$ ó $\alpha, \beta = \infty$, el teorema se satisface claramente. Consideremos $0 < \alpha, \beta < \infty$. Defínanse ahora las funciones $p-$(resp. $q-$) normalizadas

$$u := \frac{f}{\alpha}, \quad v := \frac{g}{\beta}, \tag{B.6}$$

y entonces

$$\int_{\mathcal{X}} |u|^p d\mu = \frac{1}{\alpha^p} \int_{\mathcal{X}} |f|^p d\mu = 1, \tag{B.7}$$

$$\int_{\mathcal{X}} |v|^q d\mu = \frac{1}{\beta^q} \int_{\mathcal{X}} |g|^q \mu = 1, \tag{B.8}$$

Nótese que se está bajo las hipótesis de la desigualdad de Young. En efecto, por la ecuación (B.2) para u y v se tiene

$$|uv| \leq \frac{|u|^p}{p} + \frac{|v|^q}{q}. \tag{B.9}$$

Integrando la desigualdad anterior válida para todo $x \in \mathcal{X}$ se tiene

$$\int_{\mathcal{X}} |uv| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_{\mathcal{X}} |u|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_{\mathcal{X}} |v|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{B.10}$$

por lo que

$$1 \geq \int_{\mathcal{X}} |uv| d\mu = \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\mathcal{X}} |fg| d\mu, \tag{B.11}$$

lo que equivale a

$$\left(\int_{\mathcal{X}} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\mathcal{X}} |g|^q d\mu \right)^{1/q} = \alpha\beta \geq \int_{\mathcal{X}} |fg| d\mu, \tag{B.12}$$

obteniendo el resultado deseado. ◇

Corolario B.0.3 *Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $f, g : (\mathcal{X}, \mathcal{F}) \to \mathbb{C}$ funciones integrables. Entonces*

$$\int_{\mathcal{X}} |fg| d\mu \leq \left(\int_{\mathcal{X}} |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{X}} |g|^2 d\mu \right)^{1/2}. \tag{B.13}$$

Prueba. Tómense $p = q = 2$ en la ecuación (B.1). ◇

Bibliografía y Referencias

[1] R. Schoen, S. Yau. Proof of the positive mass theorem. 2. *Commun.Math.Phys.*, 79, 231-260. 10.1007/BF01942062. 1981.

[2] Edward Witten. A new proof of the positive energy theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 80:381–402, 1981. 10.1007/BF01208277.

[3] W. B. Bonnor. A model of spheroidal body. *Classical and Quantum Gravity*, **15**(1998) 351 - 356, 1997.

[4] S. Dain. The inequality between mass and angular momentum for axially symmetric black holes. *nt.J.Mod.Phys.D17:519-523,2008*, 10.1142/S021827180801219X, 2007.

[5] S. Dain, J. L. Jaramillo and M. Reiris. Area-charge inequality for black holes. *Class.Quant.Grav.*, 29, 035013, 10.1088/0264-9381/29/3/035013, 2012.

[6] S. Dain and M. Reiris. Area - Angular momentum inequality for axisymmetric black holes. *Phys.Rev.Lett.*, 107, 051101, 10.1103/PhysRevLett.107.051101, 2011.

[7] G. J. Galloway; N. O' Murchadha. Some remarks on the size of bodies and black holes. *Classical and Quantum Gravity*, **25**(2008) 105009, 2008.

[8] R. Schoen; S. T. Yau. The existence of a black hole due to condensation of matter. *Commun. Math.*, **90**, 575 - 579, 1983.

[9] N. O' Murchadha. How Large Can a Star Be?. *Physical Review Letters, vol. 57, no. 19*, 1986.

[10] S. A. Dain. Inequality between size and angular momentum for bodies. *arXiv:1305.6645v1 [gr-qc]*, 2013.

[11] E. Flanagan. Hoop Conjecture for black hole horizon formation. *Physical Review D, vol. 44, no. 8*, 1991.

[12] W. B. Bonnor. The hoop conjecture on black holes. *Physics Letters, vol. 99A, no. 9*, 1983.

[13] W. B. Bonnor. The hoop conjecture on black holes II. *Physics Letters, vol. 102A, no. 8*, 1984.

[14] M. A. Khuri. Hoop Conjecture in spherically symmetric spacetimes. *Physical Review D*, **80**, 124025, 2009.

[15] R. Wald. *General Relativity.* The University of Chicago Press, Chicago 60637. 1984.

[16] E. Poisson. *An advanced course in General Relativity.* Department of Physics, University of Guelph. 2002.

[17] J. Guven and N. O' Murchadha. Geometric bounds in spherically symmetric general relativity. *Phys.Rev.*, D56:7650 - 7657, 1997, gr-qc/9709064.

[18] J. Guven and N. O' Murchadha. The Constraints in spherically symmetric classical general relativity. 1. Optical scalars, foliations, bounds on the configuration space variables and the positivity of the quasilocal mass. *Phys.Rev.*, D52:758 - 775, 1995, gr-qc/9411009.

[19] J. Guven and N. O' Murchadha. The Constraints in spherically symmetric classical general relativity. II. Identifying the configuration space: A Moment of time symmetry. *Phys.Rev.*, D52:776 - 795, 1995, gr-qc/9411010.

[20] N. O' Murchadha. Readings of the Lichnerowicz-York equation. Acta Phys.Polon.. Vol B36, 109-120, gr-qc/0502055. 2005.

[21] L. Evans. *Partial Differential Equations.* Graduate Students in Mathematics. Volume 19. Second Edition. American Mathematical Society. 2010.

[22] S. D. Majumdar. A class of exact solutions of Einstein's field equations. Phys. Rev 72, 930 (1947).

[23] A. Papapetrou. A static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge distribution. Proc. Roy. Irish Acad. A51, 191 (1947).

[24] D. Kastor. Cosmological multi-black-hole solutions. Physics Department Faculty Publication Series. University of Massachusetts - Amherst. 1993.

[25] R. Meinel; M. Hütten. On the black hole limit of ellectrically counterpoised dust configurations. *Classical and Quantum Gravity*, **28**(2011) 225010, 2011.

[26] P. Bizon; E. Malec; N. O' Murchadha. Trapped surfaces due to condensation of matter in spherically symmetric geometries. *Class. Quantum Grav.*, **6**(1989) 961 - 976, 1988.