Universidad Nacional de Córdoba

Tesis de doctorado:

ESTRUCTURA DE LOS PRODUCTOS TENSORIALES DE $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-MÓDULOS UNISERIALES.

Por:
Iván Dario Gómez Rivera
ivangomezrivera@gmail.com

Bajo la dirección de:
Dr. LEANDRO CAGLIERO

Tesis presentada ante la Facultad de Matemáticas, Astronomía, Física y Computación como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemáticas de la Universidad Nacional de Córdoba.

2020

Abstract.

The classification of indecomposable modules of finite dimensional of a Lie algebras non-semisimple is very difficult and such classification is not known, even for Lie algebras of low dimensionality. By example, A. Piard in [Pi] classify some indecomposable modules for the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$ where $V(1)$ is the irreducible $\mathfrak{sl}(2)$-module of highest weight 1 which has great importance in the physical (see [BG]).

For know better the classification of indecomposable modules a natural estrategy is to identify a class of indecomposable modules for which you can wait a reasonable classification. A important class is the of uniserial modules, which play role very important in associative algebras. In 2013, L. Cagliero and F. Szechman in [CS] classified the uniserial modules for the family of perfect Lie algebras $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$ where $V(m)$ is a irreducible $\mathfrak{sl}(2)$-module of highest weight $m \geq 1$. This classification is completely determined by a family of uniserial modules denoted $Z(a, \ell)$ and respective duals $Z(a, \ell)^*$, together with some exceptional cases. A natural question that arises of this classification is understand the monoidal category generated by these uniserial modules and in particular if the tensor products are sum of uniserial modules.

For answer this question a natural way is to study especial especial submodules of these tensor products as the socle and the radical. In this thesis we explicitly show the decomposition that has the socle of the tensor products $Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell')$, $Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell')^*$ and $Z(a, \ell)^* \otimes Z(b, \ell')^*$ as $\mathfrak{sl}(2)$-modules and their highest weight vectors, allowing us to determine that these socles are free of multiplicity. Also, we show the socle series of $Z(a, \ell)^* \otimes Z(b, \ell')^*$ and in consequence we get the radical series of $Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell')$.

On the other hand, we proof that the tensor product $Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell')$ is cyclic $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-module for all $m \geq 1$, i.e., there exists $v \in Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell')$ such that $Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell') = \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m))v$ where $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m))$ is universal enveloping algebra of $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$. Also $Z(a, \ell)^* \otimes Z(b, \ell')^*$ is a cyclic $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-module, showing how to build explicitly the highest weight vectorswith a generator vector.
Finally we show that modules $Z(0, 1) \otimes Z(a, 1)$ are indecomposable for all $a \neq 0$ and decomposable for $a = 0$, on this last case the indecomposable factors are not uniserial modules.

Resumen.

La clasificación de módulos indescomponibles de dimensión finita sobre álgebras de Lie no semisimple es extremadamente complicada y no se conoce tal clasificación, incluso para álgebras de Lie de dimensiones bajas. Por ejemplo, A. Piard en [Pi] clasifica algunos módulos indescomponibles para el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$ donde $V(1)$ es el $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo 1, que tiene una gran importancia en la física (ver [BG]).

Para entender mejor la clasificación de módulos indescomponibles una estrategia natural es identificar una clase distinguida de módulos indescomponibles para la cual se pueda esperar una clasificación razonable. Una de estas clases distinguidas son los módulos uniseriales, los cuales juegan un rol muy importante en álgebras asociativas. En 2013, L. Cagliero y F. Szechman en [CS] clasificaron los módulos uniseriales para la familia de álgebra de Lie perfectas $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$ donde $V(m)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo de peso máximo $m \geq 1$. Esta clasificación está completamente determinada por una familia de módulos uniseriales denotados $Z(a, \ell)$ y sus respectivos duales $Z(a, \ell)^*$, junto con algunos casos excepcionales. Una pregunta natural que surge de esta clasificación es entender la categoría monoidal generada por estos módulos uniseriales y en particular si los productos tensoriales se expresan en suma de uniseriales.

Para responder a esta pregunta un camino natural es estudiar submódulos especiales de estos productos tensoriales como lo son el zócalo y el radical, en esta tesis mostramos explícitamente la descomposición que tiene cada zócalo de los productos tensoriales $Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell')$, $Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell')^*$ y $Z(a, \ell)^* \otimes Z(b, \ell')^*$ como $\mathfrak{sl}(2)$-módulos y los vectores de peso máximo que lo conforman, lo que nos permite determinar que estos zócalos son libres de multiplicidad. Además, mostramos la serie de zócalo de $Z(a, \ell)^* \otimes Z(b, \ell')^*$ y en consecuencia obtuvimos la serie del radical de $Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell')$.

Por otra parte, mostramos que el producto tensorial $Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell')$ es $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulo cíclico para todo $m \geq 1$, es decir, existe $v \in Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell')$ tal que $Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell') = \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m))v$, donde $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m))$ es la envolvente universal del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$. Además, $Z(a, \ell)^* \otimes Z(b, \ell')^*$ es un $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulo cíclico, mostrando como construir explícitamente los vectores de peso máximo con un vector generador.
Finalmente demostramos que los módulos $Z(0, 1) \otimes Z(a, 1)$ son indescomponibles para todo $a \neq 0$ y descomponible para $a = 0$, en este último caso los factores indescomponibles no son módulos uniseriales.

Agradecimientos.

Le agradezco a mis padres Maria Carmenza, Gabriel y mis hermanos Sandra Marcela y Luis Gabriel quienes fueron, son y serán los mejores consejeros en mi vida y al resto de mi familia en quienes he encontrado siempre un apoyo incondicional.

A la vida por permitirme conocer tantas buenas personas a lo largo de este proceso, en especial a todos los integrantes del Basquetononon, la vecindad, los borbotones y todos los integrantes de la 333 quienes me acogieron en estos grupos y me brindaron su compañerismo y amistad. Además, de la Colonia Colombo-Santiagueña que al llegar a Córdoba nos brindo todo su calor humano.

A Ceci y Sergio por compartir tantos momentos de estudio y de amistad, agradezco muy especialmente a Augusto y Yirana por brindarme su amistad y ayudarme en uno de los momentos mas difíciles de mi vida. Al Edison por la amistad que me ha brindado y por sus buenos consejos.

También le agradezco a mi director Leandro no solo por guiarme en este proceso de formación y tenerme tanta paciencia a lo largo de este, sino también por estar pendiente de mi como persona.

Quiero expresar mi agradecimiento a la FaMAF por darme la oportunidad de crecer profesionalmente y a los profesores que tuve de los cuales aprendi mucho. Además, al Conicet por darme la oportunidad de continuar con mis estudios con su apoyo económico el cual no es posible en mi pais.

Índice general

1 Introducción y resultados obtenidos.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero con descomposición de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$, donde $\mathfrak{r}$ es el radical soluble de $\mathfrak{g}$. En este trabajo todos los módulos son considerados de dimensión finita.

1.1. Resultados previos relevantes a esta Tesis.

La clasificación de módulos indescomponibles sobre álgebras de Lie es extremadamente complicada y en la mayoría de los casos no se conoce. En álgebras de Lie semisimples la clasificación de los módulos indescomponibles de dimensión finita puede ser suministrada teniendo en cuenta que cualquier módulo indescomponible es un módulo irreducible y si el álgebra de Lie es simple los módulos irreducibles son clasificados por los pesos dominantes del álgebra. Pero cuando el álgebra no es semisimple el problema de clasificación es mucho más complicado, incluso para álgebras de Lie de dimensiones bajas. Por ejemplo A. Piard en [Pi] clasifica algunos módulos indescomponibles para el álgebra de Lie $\mathfrak{e}(2) = \mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{C}^2$, en este caso el problema de clasificación está muy lejos de ser entendido.

Por lo tanto en el caso en que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$ con $\mathfrak{r} \neq 0$, una estrategia natural para este problema es identificar una clase distinguida de módulos indescomponibles para la cual se pueda esperar una clasificación razonable.

1.1.1. Módulos uniseriales.

Una clase distinguida de módulos indescomponibles de dimensión finita son los módulos uniseriales, que son aquellos módulos que solo tienen una serie de composición, es decir, V es uniserial, si la serie de zócalo:

$$0 = \mathrm{soc}^0(V) \subset \mathrm{soc}^1(V) \subset \ldots \subset \mathrm{soc}^n(V) = V$$

es una serie de composición, con $\mathrm{soc}^i(V)/\mathrm{soc}^{i-1}(V) = \mathrm{soc}(V/\mathrm{soc}^{i-1}(V))$ los cuales se denominan factores de zócalo y donde $\mathrm{soc}(V)$ es el submódulo máximal semisimple de V, denotado de esta forma por su traducción en inglés "socle".

Se sabe muy poco sobre representaciones uniseriales de álgebras de Lie (de dimensión finita) a pesar de que en el ámbito de álgebras asociativas las representaciones uniseriales juegan un rol muy destacado. Por ejemplo, un resultado famoso de Nakayama (Teorema 17 de [Na]) establece que dada un álgebra asociativa con unidad de dimensión finita A, si sus módulos regulares a izquierda y derecha son uniseriales (es decir, todos los ideales izquierdos Ae e ideales derechos eA, donde e es un idempotente primitivo, poseen solo una serie de composición), entonces todos los módulos indescomponibles del álgebra son uniseriales (ver más detalles en §3.3). Esto no ocurre con álgebras de Lie no semisimples. Es claro que el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$, donde $V(m)$ es el $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo m, es uniserial para todo $m \geq 1$ (por medio de su representación adjunta), en §6.2 se muestra que estas álgebras poseen módulos indescomponibles de dimensión finita que no son uniseriales. En el caso de $\mathfrak{sl}(k) \ltimes \mathbb{C}^k$, P. Casati en [Ca2] muestra una familia de módulos indescomponibles que contienen estrictamente a los módulos uniseriales denominados módulos cíclicos perfectos, generalizando el trabajo de A. Piard [Pi] en el caso $\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{C}^2$. También los trabajos de B. Huisgen-Zimmermann [HZ1] y [HZ2] son destacadas citas sobre la relevancia que tienen los módulos uniseriales sobre un álgebra básica de dimensión finita.

Volviendo al caso de álgebras de Lie, en 2013 en un trabajo conjunto de L. Cagliero y F. Szechtman [CS] se clasifican los módulos uniseriales de la familia de álgebras de Lie perfectas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$ para todo $m \geq 1$ (ver [CS, Theorem 10.1. §10]), el cual esta dado por el siguiente teorema:

Teorema 1. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$ con $m \geq 1$ y sea V un $\mathfrak{g}$-módulo uniserial de longitud ℓ. Entonces, salvo el orden contrario, los factores de zócalo irreducibles de V son:

$\ell = 1.$ $V(a)$.

$\ell = 2.$ $V(a), V(b)$, donde $a + b \equiv m \pmod 2$ y $0 \leq b - a \leq m \leq a + b$.

$\ell = 3.$ $V(a), V(a + m), V(a + 2m)$; o
$V(0), V(m), V(c)$, donde $c \equiv 2m \pmod 4$ y $c \leq 2m$.

$\ell = 4.$ $V(a), V(a + m), V(a + 2m), V(a + 3m)$; o
$V(0), V(m), V(m), V(0)$, donde $m \equiv 0 \pmod 4$.

$\ell \geq 5.$ $V(a), V(a + m), \ldots, V(a + sm)$, donde $s \geq 4$.

Cada una de estas sucesiones de irreducibles ocurre en una y sólo una clase de isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales, excepto el caso $V(0), V(m), V(m), V(0)$, $m \equiv 0 \mod 4$. Las clases de isomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales asociadas a esta última sucesión están parametrizadas por los números complejos.

Una clase distinguida de los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulos uniseriales son aquellos que tienen factores de zócalo $V(a), V(a + m), \ldots, V(a + \ell m)$ los cuales se denotan por $Z(a, \ell)$ y sus respectivos duales $Z(a, \ell)^*$ los cuales tienen factores de zócalo $V(a + \ell m), \ldots, V(a)$. Como se puede observar en el teorema anterior la clasificación de los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulos uniseriales está completamente determinada por $Z(a, \ell)$ y $Z(a, \ell)^*$, junto con algunos otros módulos excepcionales.

En 2016, L. Cagliero, L. Gutiérrez Frez y F. Szechtman en [CGS] clasifican los módulos uniseriales de una familia de álgebras de Galilei conformes $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathfrak{h}_n$, donde $\mathfrak{h}_n$ es el álgebra de Heisenberg de dimensión $2n+1$, que tienen una gran importancia en la física, ver por ejemplo [BG]. Esta clasificación se da en dos partes, los módulos uniseriales no fieles coinciden con los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulos uniseriales donde $m = 2n-1$ y los módulos fieles (ver [CGS, Theorem 1.1. §1]) se dan en el siguiente teorema:

Teorema 2. Todo $\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathfrak{h}_n$-módulo uniserial fiel tiene longitud 3. Además, los factores de zócalo de un $\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathfrak{h}_n$-módulo uniserial fiel de longitud 3 son:

$m = 1$. $V(a), V(a+1), V(a)$ o $V(a+1), V(a), V(a+1)$ con $a \geq 0$.

$m = 3$. $V(0), V(3), V(0)$ o $V(1), V(4), V(1)$ o $V(1), V(2), V(1)$ o $V(4), V(3), V(4)$.

$m \geq 5$. $V(0), V(m), V(0)$ o $V(1), V(m+1), V(1)$ o $V(1), V(m-1), V(1)$.

1.1.2. Módulos cíclicos perfectos.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie perfecta, es decir, $\mathfrak{g}$ coincide con su álgebra derivada $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, se tiene otra familia importante de $\mathfrak{g}$-módulos indescomponibles de dimensión finita, que son aquellos módulos generados por un $\mathfrak{s}$-módulo irreducible, donde $\mathfrak{s}$ es la parte semisimple de $\mathfrak{g}$. Esta familia contiene a la familia de $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales (ver [Ca2, Proposition 3.5 §3]), la cual es estudiada sistemáticamente por primera vez en 1986 por A. Piard en [Pi] el cual los denomina módulos cíclicos. En este trabajo, entre otras cosas, Piard clasifica los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulos cíclicos obteniendo el siguiente resultado (ver [Pi, Theoreme. §1. Pág. 12]):

Teorema 3. Existe una aplicación biyectiva entre las clases de equivalencia de los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulos cíclicos de dimensión finita y las sucesiones de números enteros positivos (salvo a que es un entero no negativo), $(a; \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k)$ con $\ell_{i+1} \leq \ell_i$ para todo $1 \leq i \leq k$ y tal que $k \leq a$.

Más recientemente, en 2017 P. Casati en [Ca2] clasifica los $\mathfrak{sl}(n+1) \ltimes \mathbb{C}^{n+1}$-módulos cíclicos. Aunque en este trabajo los denomina módulos cíclicos perfectos, el resultado obtenido es una sofisticada extensión del resultado obtenido por A. Piard y lo resumimos en el siguiente teorema (ver [Ca2, Theorem 4.7. §4]):

Teorema 4. La clase de los $\mathfrak{sl}(n+1) \ltimes \mathbb{C}^{n+1}$-módulos cíclicos perfectos de dimensión finita están en correspondencia uno a uno con la colección de conjuntos $\mathfrak{M}$, donde $\mathfrak{M}$ es la colección de todos los conjuntos $\mathcal{M} = \{\lambda_0, \mathcal{M}^{\lambda_0}\}$ tales que $\lambda_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k w_k$ es un peso dominante de $\mathfrak{sl}(n+1)$ y $\mathcal{M}^{\lambda_0}$ es el conjunto de enteros positivos definida como sigue:

$$\mathcal{M}^{\lambda_0} =$$
$$\left\{ \begin{array}{l|l} & 0 \leq i_1 \leq M_1^{\lambda_0} \\ & M_1^{\lambda_0} \geq 1; \\ M_1^{\lambda_0}, M_k^{\lambda_0}(i_1, \ldots, i_{k-1}) & 0 \leq i_k < M_k^{\lambda_0}(i_1, \ldots, i_{k-1}), 2 \leq k \leq n+1; \\ 2 \leq k \leq n+1 & 1 \leq M_k^{\lambda_0}(i_1, \ldots, i_{k-1}) \leq \mu_{k-1} + 1, 2 \leq k \leq n+1; \\ & M_k^{\lambda_0}(i_1, \ldots, i_{k-1}) \geq M_k^{\lambda_0}(j_1, \ldots j_{k-1}) \\ & \text{si } i_l \leq j_l, 0 \leq l \leq k-1, 2 \leq k \leq n+1 \end{array} \right\}.$$

En el caso de las álgebras de Lie $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$ con $m \geq 2$ no se conoce una clasificación de los módulos cíclicos perfectos que no sean uniseriales.

1.1.3. Preguntas.

Una pregunta natural que surge de estas clasificaciones es si el producto tensorial de módulos uniseriales puede aportar nuevos módulos indescomponibles o si estos productos tensoriales son suma de módulos de este estilo, sean uniseriales o cíclicos perfectos.

En el caso del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$ el producto tensorial de módulos uniseriales no es suma de módulos uniseriales, un ejemplo notorio es el producto tensorial $Z(0,1) \otimes Z(0,1)$ para $m = 2$ como se muestra en la siguiente matriz sobre una base fija (ver 6.2).

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccccc|c||ccc|ccc}
0 & 2e_2 & -4e_1 & 2e_0 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & 2h & 2e & 0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & 0 & 0 & e_0 & & & & & & \\
 & f & 0 & e & 0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & 0 & e_1 & & & & & & \\
 & 0 & 2f & -2h & 0 & 0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & e_2 & & & & & & \\
\hline
 & & & & 4h & 4e & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
 & & & & f & 2h & 3e & 0 & 0 & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 2f & 0 & 2e & 0 & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 3f & -2h & e & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 4f & -4h & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & 0 & & & & & & \\
\hline\hline
 & & & & & & & & & & 2h & 2e & 0 & -2e_1 & 2e_0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & f & 0 & e & -e_2 & 0 & e_0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 2f & -2h & 0 & -2e_2 & 2e_1 \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & 2h & 2e & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & f & 0 & e \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & 2f & -2h
\end{array} \right).$$

Este ejemplo muestra parte de lo sofisticada que es la pregunta, pues el resultado no es ni indescomponible, ni suma de uniseriales, ni suma de cíclicos perfectos.

Otras preguntas que surgen con el ejemplo anterior: ¿son todos los productos tensoriales de módulos uniseriales son descomponibles? ¿Hay productos tensoriales de módulos uniseriales que sean indescomponibles y de ser así, cuál sería su estructura?

Los resultados obtenidos en esta Tesis y verificaciones computacionales nos inducen a formular la siguiente conjetura:

Conjetura 1.1.1. Sean a, b, ℓ, ℓ' números enteros no negativos. $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')$ es descomponible si y sólo si $a = b = 0$ y $\ell'\ell \neq 0$, o $a = b$ y $\ell = \ell'$.

1.2. Principales resultados obtenidos.

El objetivo principal de esta tesis es estudiar la categoría monoidal asociada a los módulos uniseriales de dimensión finita en el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con descomposición de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$, donde $\mathfrak{r}$ es el radical soluble de $\mathfrak{g}$. Si V y W son dos $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales con factores de zócalo $V_1, \ldots, V_\ell$ y $W_1, \ldots, W_{\ell'}$ respectivamente, donde cada V_i y W_j son $\mathfrak{s}$-módulos irreducibles, entonces:

$$V \otimes W =_{\mathfrak{s}} \bigoplus_{(i,j)\in[1,\ell]\times[1,\ell']} V_i \otimes W_j. \tag{1.1}$$

Puesto que cada uno de estos productos tensoriales se puede descomponer como suma de $\mathfrak{s}$-módulos irreducibles por el Teorema de Weyl, entonces una manera natural de estudiar la estructura de estos productos tensoriales es:

i. Descomponer cada producto tensorial en (1.1) como suma de $\mathfrak{s}$-módulos.

ii. Analizar la acción de $\mathfrak{r}$ en cada uno de estos $\mathfrak{s}$-módulos irreducibles.

En el caso que $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(2)$, tenemos que existen enteros no negativos $a_1, \ldots, a_\ell, b_1, \ldots, b_{\ell'}$ tales que para todo $1 \leq i \leq \ell$ y todo $1 \leq j \leq \ell'$, $V_i = V(a_i)$ y $W_j = V(b_j)$ son $\mathfrak{sl}(2)$-módulos irreducibles de pesos máximos a_i y b_j respectivamente. Si $V(\mu)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible que aparece en la descomposición de $V(a_i) \otimes V(b_j)$ el Teorema de Clebsch-Gordan (ver Teorema 2.3.5), nos muestra un vector de peso máximo μ y por lo tanto la descomposición de cada producto tensorial en (1.1) es conocida. Sin embargo, la acción de $\mathfrak{r}$ en cada uno de estos $\mathfrak{sl}(2)$-módulos irreducibles es complicada y una manera natural de encarar el punto ii es estudiando $\mathfrak{g}$-submódulos especiales como lo son el zócalo y el radical de un módulo. En la §3.4 se muestran propiedades de la acción de $\mathfrak{r}$ que reflejan las dificultades que aparecen.

Una de las propiedades especiales que cumplen las álgebras de Lie $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$, es que son álgebras de Lie perfectas, es decir, un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se denomina perfecta, si $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. El Lema 3.1.10 nos indica que el radical soluble de un álgebra de Lie perfecta actúa trivialmente en los módulos irreducibles y por lo tanto actúa trivialmente en el zócalo de cualquier módulo. Si un álgebra de Lie perfecta $\mathfrak{g}$ tiene descomposición de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$, donde $\mathfrak{r}$ es el radical soluble de $\mathfrak{g}$, la descripción del zócalo de un $\mathfrak{g}$-módulo V, está dada por los $\mathfrak{s}$-submódulos irreducibles de V en los cuales el radical soluble de $\mathfrak{g}$ actúa trivialmente.

Volviendo al caso $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$, en el Capítulo 4 se muestra el zócalo de los productos tensoriales de los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulos uniseriales, dando explícitamente la descomposición que tiene cada zócalo como $\mathfrak{sl}(2)$-módulo y los vectores de peso máximo que lo conforman. Este resultado lo resumimos como:

Teorema 5. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$. Si a, b, ℓ, ℓ' son números enteros no negativos. Entonces:

i. $\operatorname{soc}(Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')) =_{\mathfrak{sl}(2)} \operatorname{soc}(Z(a,\ell)) \otimes \operatorname{soc}(Z(b,\ell')) \oplus \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{\min\{\ell,\ell'\}} V(a+b+km).$

ii. $\operatorname{soc}(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*) =_{\mathfrak{sl}(2)} \operatorname{soc}(Z(a,\ell)^*) \otimes \operatorname{soc}(Z(b,\ell')^*).$

iii.

$$\begin{aligned}\operatorname{soc}(Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')^*) &\simeq_{\mathfrak{sl}(2)} \\ &\operatorname{soc}(Z(a,\ell)) \otimes \operatorname{soc}(Z(b,\ell')^*) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\min\{\ell,\ell',\lfloor (b-a)/m\rfloor+\ell'\}} V(b+(\ell'-k)m-a).\end{aligned}$$

El teorema anterior, nos muestra que los zócalos de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$, $Z(a,\ell)^*\otimes Z(b,\ell')^*$ y de $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')^*$ son libres de multiplicidad.

Para la demostración del resultado anterior, utilizamos el hecho de que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ es un álgebra de Lie graduada, donde $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(2)$ y $\mathfrak{g}_1 = V(m)$. Además, mostramos que para todo a, b, ℓ, ℓ', tanto $Z(a,\ell) \otimes Z(a,\ell')$, $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$ y $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$ son $\mathfrak{g}$-módulos graduados, donde un $\mathfrak{g}$-módulo V es graduado, si existen $\mathfrak{g}_0$-submódulos $V_0, V_1, \dots, V_n$ de V tales que $\mathfrak{g}_1{\cdot}V_i \subset V_{i+1}$ para todo $0 \le i \le n$ y $V = \bigoplus_{i=0}^{n} V_i$ con $V_{n+1} = 0$. De este modo, el trabajo de determinar el zócalo de estos productos tensoriales se reduce a encontrar todos los $\mathfrak{g}_0$-submódulos irreducibles de cada V_i donde $\mathfrak{g}_1$ actúa trivialmente.

La estrategia para determinar los $\mathfrak{g}_0$-submódulos irreducibles $\mathfrak{g}_1$-triviales es similar en los tres casos, aunque el grado de dificultad es mucho mayor cuando $V = Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')^*$.

El caso $V = Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$ es el más sencillo y, gracias a lo simple que es el resultado, logramos luego obtener toda la serie del zócalo.

Cuando $V = Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')$ el zócalo resulta estar compuesto por, además del producto tensorial de los zócalos, una copia diagonal de las componentes irreducibles de Cartan (la de mayor peso en el producto tensorial) que aparecen en algunas componente graduada. Descubrir este resultado, y luego su demostración no fue tarea sencilla.

Por último, cuando $V = Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')^*$ su zócalo está compuesto por, además del producto tensorial de los zócalos, una copia diagonal de las componentes irreducibles de menor peso de ciertas componentes graduadas. Este fue un resultado inesperado y muy laborioso para nosotros y consecuentemente su demostración nos dio mucho trabajo.

Los zócalos de los productos tensoriales con los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulos uniseriales excepcionales no se calcularon al momento de escribir este trabajo, pero estamos trabajando en ello. Estos casos excepcionales son mucho más sencillos que el caso general que hemos completado.

Como ya mencionamos, gracias a la estructura que tiene el zócalo de $Z(a,\ell)^*\otimes Z(b,\ell')^*$, en §4.4 se muestra la serie de zócalo de este producto tensorial, el cual lo enunciamos como:

Corolario. Sean $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2)\ltimes V(m)$ y a,b,ℓ,ℓ' números enteros no negativos. Entonces los factores de zócalo de $Z(a,\ell)^*\otimes Z(b,\ell')^*$ para cada $0\le k\le \ell+\ell'$ son:

$$\operatorname{soc}^{k+1}(Z(a,\ell)^*\otimes Z(b,\ell')^*)/\operatorname{soc}^{k}(Z(a,\ell)^*\otimes Z(b,\ell')^*) =_{\mathfrak{sl}(2)} \bigoplus_{(i,j)\in I_k} V(a+(\ell-i)m)\otimes V(b+(\ell'-j)m)$$

con $I_k=\{(i,j)\in[0,\ell]\times[0,\ell'] : i+j=\ell+\ell'-k\}$.

En consecuencia, tenemos :

Corolario. Los factores del radical de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$, dados para cada $0\le k\le \ell+\ell'$ son:

$$\operatorname{rad}^{k}(Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell'))/\operatorname{rad}^{k+1}(Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')) = \bigoplus_{(i,j)\in I_k} V(a+im)\otimes V(b+jm),$$

con $\operatorname{rad}^{\ell+\ell'+1}(Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell'))=0$.

Este corolario nos permite concluir que la longitud del radical (longitud del zócalo) descrita en §3.1 de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$ es $\ell+\ell'+1$.

Al momento de redactarse esta tesis no sabemos la serie completa del zócalo de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$ ni de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')^*$, ya que la estructura que tiene el zócalo en estos dos casos es mas complicada que en el caso $Z(a,\ell)^*\otimes Z(b,\ell')^*$ y debido a las dimensiones que se manejan, aún con el uso de computadora no se obtiene un patrón para determinar estas series de zócalo.

Como ya dijimos, A. Piard en [Pi] considera, para el caso $m=1$, una familia de módulos más generales que la de uniseriales a los que llama cíclicos (o cíclicos perfectos según [Ca2]). Estos módulos V se caracterizan por tener un submódulo irreducible W (que llaman espacio generador) tal que $V=W\oplus\mathfrak{r}V$. Un paso importante en la clasificación de Piard establece (ver [Pi, Proposition. §1. Pág. 10]) que en todo $\mathfrak{sl}(2)\ltimes V(1)$-módulo cíclico V con espacio generador W, existe un $n\in\mathbb{N}$ tal que:

$$V=W\oplus\bigoplus_{t=1}^{n}\mathfrak{r}^t(W).$$

El Teorema 3.5.2 extiende este resultado para toda álgebra de Lie perfecta, en particular a todas las álgebras $\mathfrak{sl}(2)\ltimes V(m)$ para $m\ge 1$. Un $\mathfrak{g}$-módulo V se denomina cíclico (propiamente dicho), si existe $v\in V$ tal que $V=\mathcal{U}(\mathfrak{g})v$, donde $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es la envolvente universal del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo cíclico perfecto sobre un álgebra de

Lie perfecta, en [Ca2, Proposition 3.6. §3] se muestra que V es cíclico y en el cual se puede elegir un vector de peso máximo del subespacio generador que genera a todo V.

En §5.1 se demuestra que $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')$ es un $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulo cíclico propiamente dicho, lo cual lo enunciamos como:

Teorema 6. Sean a, b, ℓ, ℓ' números enteros no negativos. Entonces $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')$ es un $\mathfrak{g}$-módulo cíclico, con un vector generador $v_{\ell,\ell'}$ el cual es la suma de todos los vectores de peso máximo en $V(a+\ell m) \otimes V(b+\ell' m)$.

El teorema anterior nos permite mostrar que el $\mathfrak{sl}(2)$-módulo $V(a+\ell m) \otimes V(b+\ell' m)$ es un subespacio generador de $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')$ y que:

$$\mathfrak{r}^t(V(a+\ell m) \otimes V(b+\ell' m)) = \bigoplus_{(i,j)\in I_t} V(a+im) \otimes V(b+jm)$$

con $I_t = \{(i,j) \in [0,\ell] \times [0,\ell'] : i+j = \ell+\ell'-t\}$ para todo $0 \leq t \leq \ell+\ell'$.

Además, en §5.2 se muestra que $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$ es un $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulo cíclico propiamente dicho, se tiene el siguiente teorema :

Teorema 7. Sean $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$ y a, b, ℓ, ℓ' números enteros no negativos. Entonces $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$ es un $\mathfrak{g}$-módulo cíclico, con un vector generador $w_{\ell,\ell'} + w_1 + \ldots + v_k$. Donde $k = \min\{\ell,\ell'\}$, $w_{\ell,\ell'}$ es una suma de los vectores de peso máximo en $V(a) \otimes V(b)$ y para cada $1 \leq t \leq k$ se tiene que w_t es una suma alternada de los vectores de peso máximo $a+b+t$ en $V(a+i) \otimes V(b+jm)$ tales que $t = \ell+\ell'-(i+j)$.

En este caso demostramos que $V(a) \otimes V(b) \oplus \bigoplus_{t=1}^{\min\{\ell,\ell'\}} V_t$ es un subespacio generador del $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulo $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$, donde V_t es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo $a+b+t$; para el caso $m > 1$ no se sabe si ocurra algo similar.

En el Capítulo 6 se muestra que el módulo $Z(0,1) \otimes Z(0,1)$, se descompone en dos $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-submódulos indescomponibles para todo $m \geq 1$. A diferencia de los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulos $Z(0,1) \otimes Z(a,1)$, los cuales son indescomponibles para todo $a \geq 1$.

Para demostrar estos hechos, tenemos en cuenta que si un $\mathfrak{g}$-módulo $V = V_1 \oplus V_2$ con $V_i \neq 0$ para $i = 1,2$, se debe de tener que $V_i \cap \operatorname{soc}(V) \neq 0$ para cada $i = 1,2$. En nuestro caso $V = Z(0,1) \otimes Z(b,1)$ y $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$ con b un entero no negativo, conocemos el zócalo el cual solo consta de dos sumandos de $\mathfrak{sl}(2)$-módulos irreducibles de pesos diferentes $V(b) \oplus V(b+m)$, donde $\operatorname{soc}(Z(0,1)) \otimes \operatorname{soc}(Z(b,1)) \simeq_{\mathfrak{sl}(2)} V(b)$ y además conocemos un subespacio generador el cual es $V(m) \otimes V(b+m)$. El hecho que $\operatorname{soc}(Z(0,1)) \otimes \operatorname{soc}(Z(b,1)) \simeq_{\mathfrak{sl}(2)} V(b)$, nos permite demostrar la descomponibilidad de $Z(0,1) \otimes Z(0,1)$ y la indescomponibilidad de $Z(0,1) \otimes Z(a,1)$ para todo entero positivo a.

Como ya mencionamos en §1.1.3, creemos que $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell)$ es descomponible si y solo si $a = b = 0$ y $\ell\ell' \neq 0$, o $a = b$ y $\ell = \ell'$. Creemos estar cerca de demostar la conjetura en general, en particular tenemos casi listo el caso $Z(0,1) \otimes Z(b,\ell)$, $\ell > 1$.

Al momento de redactar esta tesis no tenemos conocimiento significativo sobre la descomponibilidad de $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell)^*$ y $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell)^*$.

2 Preliminares.

En este capítulo se darán definiciones básicas de álgebras de Lie sobre el cuerpo de los números complejos. Además, módulos sobre un álgebra de Lie y en particular módulos irreducibles en el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$, junto con el Teorema de Clebsch-Gordan, las cuales serán una herramienta fundamental en el desarrollo de este trabajo. Los resultados en este capítulo en su mayoría fueron sacados de [H] y [J]. Todos los espacios vectoriales considerados son de dimensión finita.

2.1. Álgebras de Lie.

Dado $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial de dimensión finita, una aplicación bilineal $[\_,\_] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que a cada pareja $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ se le asigna $[x, y] \in \mathfrak{g}$, es un *corchete de Lie de* $\mathfrak{g}$, si para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ se tiene:

i. $[x, y] = -[y, x]$ (antisimetría).

ii. $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$ (Identidad de Jacobi).

Denominamos a $(\mathfrak{g}, [\_,\_])$ (o simplemente $\mathfrak{g}$) un *álgebra de Lie*. Una *subálgebra de Lie* de $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que es cerrado bajo el corchete de Lie de $\mathfrak{g}$, es decir, $[x, y] \in \mathfrak{h}$ para todo $x, y \in \mathfrak{h}$.

Dadas $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_1$ álgebras de Lie con corchetes de Lie $[\_,\_]$ y $[\_,\_]_1$ respectivamente. Diremos que una transformación lineal $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1$ es un *homomorfismo de álgebras de Lie* o simplemente un *homomorfismo*, si $f([x, y]) = [f(x), f(y)]_1$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

Ejemplos 2.1.1.

1. Sea V un espacio vectorial. Si consideramos $[v, w] = 0$ para todo $v, w \in V$, entonces $(V, [\_,\_])$ es un álgebra de Lie. Además, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie tal que $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}$ se denomina *álgebra de Lie abeliana*.

2. Sea A un álgebra asociativa de dimensión finita con unidad. Denotamos por $\mathrm{Lie}(A)$ el álgebra de Lie cuyo espacio vectorial asociado es A y su corchete de Lie esta dado por $[a, b] = ab - ba$ para todo $a, b \in A$.

   Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, denotamos por $\mathfrak{gl}(V)$ el álgebra de Lie asociada al álgebra asociativa $\mathrm{End}(V)$, es decir, $\mathfrak{gl}(V) = \mathrm{Lie}(\mathrm{End}(V))$. Por otra parte, si fijamos una base de V podemos identificar a $\mathfrak{gl}(V)$ con el conjunto de todas las matrices de tamaño $n\times n$ con entradas en $\mathbb{C}$, donde $n = \dim(V)$, la cual denotamos por $\mathfrak{gl}(n)$.

3. Denotamos por $\mathfrak{sl}(n)$ la subálgebra de $\mathfrak{gl}(n)$, cuyos elementos constan de las matrices de tamaño $n \times n$ con traza cero. Es decir:

$$\mathfrak{sl}(n) = \{M \in \mathfrak{gl}(n) : \mathrm{tr}(M) = 0\}.$$

Definición 2.1.2. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Un subespacio I de $\mathfrak{g}$ se denomina un* ideal *de $\mathfrak{g}$, si $[x, y] \in I$ para todo $x \in I$ y todo $y \in \mathfrak{g}$.*

En particular, si I es un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces I es una subálgebra de $\mathfrak{g}$.

Ejemplos 2.1.3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie.

1. 0 y $\mathfrak{g}$ son los ideales triviales de $\mathfrak{g}$.

2. Si I y J son ideales de $\mathfrak{g}$, entonces $[I, J] = span\{[x, y] : x \in I \text{ e } y \in J\}$ e $I + J$ son ideales de $\mathfrak{g}$. El ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ se denomina el *álgebra derivada* de $\mathfrak{g}$.

3. El *centro* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0 \text{ para todo } y \in \mathfrak{g}\}$, el cual es un ideal de $\mathfrak{g}$.

Los anteriores ejemplos nos permiten definir la noción de *serie derivada* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, la cual es una cadena descendente de ideales:

$$\mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{g}^{(n)} \supseteq \ldots$$

donde $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^{(n)} = [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}]$ para todo $n \geq 1$. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se denomina *soluble*, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$.

Además, definimos la *serie central* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como la cadena descendente de los ideales:

$$\mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{g}^n \supseteq \ldots$$

donde $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n-1}]$. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se denomina *nilpotente*, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^n = 0$.

Lema 2.1.4. *[H, Proposition I. §3.1]. Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, I y J ideales de $\mathfrak{g}$. Entonces:*

i. Si $\mathfrak{g}$ es soluble, entonces cada subálgebra e imagen homomórfica de $\mathfrak{g}$ es soluble.

ii. Si I es soluble y $\mathfrak{g}/I$ es soluble, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.

iii. Si I, J son solubles, entonces $I + J$ es soluble.

Prueba:

i. Dados $\mathfrak{h}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$ y $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1$ un epimorfismo, se tiene que $\mathfrak{h}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^{(i)}$ y $\mathfrak{g}_1^{(i)} = \phi(\mathfrak{g}^{(i)})$ para todo i. Puesto que $\mathfrak{g}$ es soluble, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$, por lo tanto $\mathfrak{h}^{(n)} = 0$ y $\mathfrak{g}_1^{(n)} = 0$. Así $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{g}_1$ son solubles.

ii. Tomamos $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ la proyección canónica. Como π es un epimorfismo, entonces $\pi(\mathfrak{g}^{(i)}) = \mathfrak{g}^{(i)}/I$. Al ser $\mathfrak{g}/I$ soluble, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^{(n)}/I = 0$, es decir, $\mathfrak{g}^{(n)} \subset I$. Ya que I es soluble, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $I^{(m)} = 0$, por lo tanto $\mathfrak{g}^{(n+m)} \subset I^{(m)} = 0$. Así $\mathfrak{g}$ es soluble.

iii. Puesto que $(I + J)/J \simeq I/(I \cap J)$, aplicando la primera parte del Lema a la proyección canónica de I en $I/(I \cap J)$, tenemos que $I/(I \cap J)$ es soluble y por lo tanto $(I + J)/J$ es soluble. Además, como J es soluble, por la segunda parte del lema, tenemos que $I + J$ es soluble.

□

Puesto que la suma de dos ideales solubles es soluble, entonces toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ contiene un único ideal soluble máximal, denominado el *radical soluble* de $\mathfrak{g}$ y denotado por $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ o simplemente por $\mathfrak{r}$ si no se presta para confusión.

Definición 2.1.5. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no nula es* semisimple*, si el radical soluble de $\mathfrak{g}$ es cero.*

Ejemplos 2.1.6.

1. Consideremos el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$, la base estándar de esta álgebra de Lie es $\{h, e, f\}$, donde:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Esta base cumple con las relaciones:

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

   El álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$ es un álgebra de Lie semisimple, la cual se denomina el *álgebra lineal especial*.

2. Para $n = 2k$. Consideremos las subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n)$:

$$\mathfrak{sp}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n) : A^T J + JA = 0\} \text{ y } \mathfrak{o}(k) = \{A \in \mathfrak{gl}(n) : A^T J_1 + J_1 A = 0\}$$

   donde $J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline -I_k & 0 \end{array}\right)$ y $J_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_k \\ \hline I_k & 0 \end{array}\right)$ con I_k la matriz identidad de tamaño $k \times k$. Estas dos subálgebras son álgebras de Lie semisimples, las cuales se denominan el *álgebra simpléctica* y el *álgebra ortogonal* respectivamente.

El Lema 2.1.4 tiene un resultado análogo para álgebras de Lie nilpotentes, la prueba se puede encontrar en [H, Proposition I. §3.2].

Lema 2.1.7. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, I y J ideales de $\mathfrak{g}$. Entonces:*

i. Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces cada subálgebra e imagen homomórfica de $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

ii. Si $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ es nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

iii. Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente y no nulo, entonces $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$.

iv. Si I, J son nilpotentes, entonces $I + J$ es nilpotente.

Puesto que la suma de dos ideales nilpotentes es nilpotente, entonces toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ contiene un único ideal nilpotente máximal, denominado el *nilradical* de $\mathfrak{g}$ y denotado por $\mathrm{nilrad}(\mathfrak{g})$.

Nota 2.1.8. Por ser $\mathfrak{r}$ soluble, se tiene que $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ es nilpotente y así $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subset \mathrm{nilrad}(\mathfrak{g})$. Además, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble; con esto podemos concluir que $\mathrm{nilrad}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{r}$.

Un resultado importante en la teoría de álgebras de Lie es el Teorema de Levi, el cual nos permite descomponer toda álgebra de Lie (de dimensión finita) como suma directa de una subálgebra de Lie semisimple con el radical soluble del álgebra. Es decir, toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tiene una descomposición de la forma $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$ como espacios vectoriales, donde $\mathfrak{s}$ es un álgebra de Lie semisimple y $\mathfrak{r}$ es el radical soluble de $\mathfrak{g}$. La demostración del siguiente resultado se puede encuentrar en [J, Levi's Theorem III. §9].

Teorema 2.1.9 (Teorema de Levi)**.** *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero con radical soluble $\mathfrak{r}$, entonces existe una subálgebra de Lie semisimple $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$.*

Puesto que $\mathfrak{s}$ es una subálgebra semisimple de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{r}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, denotaremos la descomposición dada en el teorema anterior por $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$ denominada la *descomposición de Levi de* $\mathfrak{g}$.

Recordamos la caracterización de las álgebras de Lie nilpotentes por medio del Teorema de Engel. Para esto tenemos el siguiente lema:

Lema 2.1.10. *[H, Theorem I. §3.3]. Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita tal que para todo $X \in \mathfrak{g}$, X es nilpotente. Entonces, existe $v \in V - \{0\}$ tal que $X(v) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

Prueba: Probaremos por inducción sobre $\dim(\mathfrak{g})$.

Si $\dim(\mathfrak{g}) = 1$, entonces $\mathfrak{g} = span\{T\}$ para algún $0 \neq T \in \mathfrak{gl}(V)$ nilpotente. Puesto que T es nilpotente, basta con ver que T tiene un vector propio de valor propio 0. En efecto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n-1} \neq 0$ y $T^n = 0$. De donde, existe $v_1 \in V$ no nulo tal que $v = T^{n-1}(v_1) \neq 0$ y $T(v) = T(T^{n-1}(v_1)) = T^n(v_1) = 0$.

Ahora, consideremos que $\dim(\mathfrak{g}) > 1$. Definimos el conjunto $\mathcal{S} = \{0 \subsetneq L \subsetneq \mathfrak{g} : L \text{ es subálgebra de } \mathfrak{g}\}$, el cual es no vacío pues $span(T) \in \mathcal{S}$ para todo $T \in \mathfrak{g}$. Sea K un elemento máximal en $\mathcal{S}$ con respecto a la inclusión.
Afirmamos que K es un ideal de $\mathfrak{g}$. En efecto, tomamos $\psi : K \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/K)$ dada por $\psi(x)(g+K) = [x,g]+K$ para todo $x \in K$ y $g \in \mathfrak{g}$. Todo elemento de K es nilpotente, ψ es un homomorfismo de álgebras de Lie y $\dim(K) < \dim(\mathfrak{g})$. Por hipotesis de inducción, existe $g + K \in \mathfrak{g}/K - \{0\}$ tal que $\psi(x)(g+K) = 0$ para todo $x \in K$, es decir, $[x,g] \in K$ para todo $x \in K$. Por lo tanto $g \in \mathrm{norm}_{\mathfrak{g}}(K)$, donde $\mathrm{norm}_{\mathfrak{g}}(K) = \{g \in \mathfrak{g} : [g,x] \in K \text{ para todo } x \in K\}$. Por ser K máximal en $\mathcal{S}$, tenemos que $\mathrm{norm}_{\mathfrak{g}}(K) = \mathfrak{g}$. Así K es un ideal de $\mathfrak{g}$.

Además, $\dim(\mathfrak{g}/K) = 1$, pues si $\dim(\mathfrak{g}/K) > 1$, tomamos K' una subálgebra de $\mathfrak{g}/K$. Por el Teorema de Correspondencia, existe $K_1 \supset K$ subálgebra de $\mathfrak{g}$ tal que $K_1/K \simeq K'$. Por la maximalidad de K, tenemos que $K_1 = \mathfrak{g}$ lo cual es absurdo.

Como $\dim(K) < \dim(\mathfrak{g})$ y $K \subset \mathfrak{gl}(V)$, existe $v_1 \in V - \{0\}$ tal que $Y(v_1) = 0$ para todo $Y \in K$. Consideramos $W = \{v \in V : Y(v) = 0 \text{ para todo } Y \in K\}$, W es un subespacio vectorial de V distinto de cero, pues $v_1 \in W$. Si $T \in \mathfrak{g} - K$, entonces $Y(T(w)) = [Y,T](w) + T(Y(w)) = 0$ para todo $Y \in K$ y todo $w \in W$. Puesto que T es nilpotente, existe $v \in W - \{0\}$ tal que $T(v) = 0$, entonces $X(v) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. $\square$

Enunciamos el Teorema de Engel descrito en [J, Engel's Theorem II. §3].

Teorema 2.1.11 (Teorema de Engel). *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces, $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si $ad_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ con $ad_x(y) = [x,y]$ es nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Prueba: Supongamos que $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^n = 0$. Puesto que para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ se tiene que $\mathrm{ad}_x^n(y) = [x,[x,\ldots,[x,[x,y]]\ldots]] \in \mathfrak{g}^{n+1}$, tenemos que $\mathrm{ad}_x^n = 0$. Así ad_x es nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Recíprocamente, supongamos que ad_x es nilpotente para todo $x \in \mathfrak{g}$. Veamos que $\mathfrak{g}$ es nilpotente. Sea $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ dada por $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}_x$. La identidad de Jacobi implica que ad es un homomorfismo de álgebras de Lie. Consideremos $\mathfrak{h} = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$, la cual es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, donde cada elemento de $\mathfrak{h}$ es nilpotente por hipotesis. Por el Lema 2.1.10, existe $g \in \mathfrak{g} - \{0\}$ tal que $\mathrm{ad}_x(g) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, es decir, $g \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$. Por lo tanto $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Consideramos $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$. Así, $\dim(\mathfrak{g}') < \dim(\mathfrak{g})$ y para todo $\overline{x} \in \mathfrak{g}'$ tenemos que $\mathrm{ad}_{\overline{x}}$ es nilpotente, pues cada ad_x es nilpotente. Por hipotesis de inducción, $\mathfrak{g}'$ es nilpotente y por el Lema 2.1.7, tenemos que $\mathfrak{g}$ es nilpotente. $\square$

Como un ejemplo de álgebra de Lie nilpotente tenemos el álgebra de Heisenberg de dimensión $2n+1$, denotada por $\mathfrak{h}_n$, la cual tiene por base $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z\}$ y está sujeta a las relaciones:

$$\begin{aligned} &[x_i, y_j] = \delta_{i,j} z, \\ &[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = [x_i, z] = [y_j, z] = 0, \end{aligned}$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Para caracterizar las álgebras de Lie solubles, recordamos el Teorema de Lie. Para esto tenemos el siguiente lema:

Lema 2.1.12. *[H, Theorem II. §4.1] Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de Lie soluble de $\mathfrak{gl}(V)$, con V de dimensión finita. Si V es no nulo, entonces existe $v \in V - \{0\}$ y $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ tal que $T(v) = \alpha(T)v$ para todo $T \in \mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{g}^*$ es el conjunto de todas las transformaciones lineales de $\mathfrak{g}$ en $\mathbb{C}$.*

Prueba: Probaremos por inducción sobre $\dim(\mathfrak{g})$.

Como $\mathfrak{g}$ es soluble, tenemos que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subsetneq \mathfrak{g}$. Si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$, $\mathfrak{g}$ es abeliana y por ende nilpotente. Por el Lema 2.1.10, existe $v \in V - \{0\}$ tal que $T(v) = 0$ para todo $T \in \mathfrak{g}$. En particular, si $\dim(\mathfrak{g}) = 1$.

Supongamos que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$ y $\dim(\mathfrak{g}) > 1$. Consideremos $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, que es un álgebra de Lie abeliana, de donde cualquier subespacio vectorial de $\mathfrak{g}_1$ es un ideal. Sea K un ideal de $\mathfrak{g}_1$ con $\dim(\mathfrak{g}_1/K) = 1$. Por el Teorema de Correspondencia, existe un ideal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ y $\mathfrak{h}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = K$. Como $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{g}_1/K$, tenemos que $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = 1$. Además, como $\mathfrak{g}$ es soluble, por el Lema 2.1.4, $\mathfrak{h}$ es soluble. Por hipotesis de inducción, existen $v_1 \in V - \{0\}$ y $\alpha_1 \in \mathfrak{h}^*$ tales que $S(v_1) = \alpha_1(S)v_1$ para todo $S \in \mathfrak{h}$.

Definimos $W = \{v \in V : S(v) = \alpha_1(S)v$ para todo $S \in \mathfrak{h}\}$. Como $v_1 \in W$, entonces $W \neq 0$. Además, si $T \in \mathfrak{g}$, tenemos que $[S, T] \in \mathfrak{h}$ para todo $S \in \mathfrak{h}$, pues $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Si $w \in W$, entonces $S(T(w)) = T(S(w)) + [T, S](w)$. Por lo tanto:

$$S(T(w)) = \alpha_1(S)T(w) + \alpha_1([T, S])w \text{ para todo } S \in \mathfrak{h}. \tag{2.1}$$

Afirmamos que $\alpha_1([S, T]) = 0$ para todo $S \in \mathfrak{h}$ y todo $T \in \mathfrak{g}$. En efecto, fijamos $w \in W - \{0\}$ y $T \in \mathfrak{g}$. Sea n el número natural mas pequeño tal que $\{w, T(w), \ldots, T^{n-1}(w)\}$ es un conjunto linealmente independiente.
Definimos $W_0 = 0$ y $W_i = \mathrm{span}\{w, T(w), \ldots, T^{i-1}(w)\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por la definición

de n, tenemos que $\dim(W_i) = i$ para cada $0 \leq i \leq n$ y $W_n = W_{n+1}$. Por la ecuación (2.1), $S(T(w)) - \alpha_1(S)T(w) = \alpha_1([S,T])w$ para todo $S \in \mathfrak{h}$. Entonces, $S(T(w)) - \alpha_1(S)T(w)$ pertenece a W_1 para todo $S \in \mathfrak{h}$.
Supongamos que $S(T^i(w)) - \alpha_1(S)T^i(w) \in W_i$ y veamos que $S(T^{i+1}(w)) - \alpha_1(S)T^{i+1}(w) \in W_{i+1}$ para todo $S \in \mathfrak{h}$. Como:

$$S(T^{i+1}(w)) = [S,T](T^i(w)) + T(S(T^i(w)))$$

y $[S,T]$ están en $\mathfrak{h}$.
Por hipotesis, existen $z_1, z_2 \in W_i$ tales que $[S,T](T^i(w)) = \alpha_1([S,T])T^i(w) + z_1$ y $S(T^i(w)) = \alpha_1(S)T^i(w) + z_2$. De donde:

$$S(T^{i+1}(w)) = \alpha_1([S,T])T^i(w) + \alpha_1(S)T^{i+1}(w) + z_1 + T(z_2).$$

Puesto que $\alpha_1([S,T])T^i(w) + z_1 + T(z_2) \in W_{i+1}$, tenemos que:

$$S(T^{i+1}(w)) - \alpha_1([S,T])T^{i+1}(w) \in W_{i+1}.$$

De lo anterior, tenemos que $S(T^i(w)) - \alpha_1([S,T])T^i(w) \in W_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Así, $S|_{W_n}$ es una matriz triangular superior con $\alpha_1(S)$ en la diagonal principal para todo $S \in \mathfrak{h}$. Por lo tanto, $\operatorname{tr}(S|_{W_n}) = n\alpha_1$ para todo $S \in \mathfrak{h}$. En particular, $\operatorname{tr}([S,T]|_{W_n}) = n\alpha_1([S,T])$ para todo $S \in \mathfrak{h}$. Ya que $\operatorname{tr}([S,T]|_{W_n}) = 0$, entonces $\alpha_1([S,T]) = 0$ para todo $S \in \mathfrak{h}$. Puesto que, T es un elemento de $\mathfrak{g}$ arbitrario, hemos probado nuestra afirmación.

Así la ecuación (2.1) se modifica como $S(T(w)) = \alpha_1(S)T(w)$. Por lo tanto $\mathfrak{g} \cdot W \subset W$. Como $\dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = 1$, entonces para $T_1 \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ existe $v \in W - \{0\}$ tal que $T_1(v) = \lambda v$. Extendemos a $\alpha_1 : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ a $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ con $\alpha(S) = \alpha_1(S)$ y $\alpha(T_1) = \lambda$ para todo $S \in \mathfrak{h}$. Así $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ y cumple que $T(v) = \alpha(T)v$ para todo $T \in \mathfrak{g}$. $\square$

Teorema 2.1.13 (Teorema de Lie). *[H, Corollary II. §4.1] Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble y $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ un homomorfismo de álgebras de Lie, con V de dimensión finita. Entonces, existen subespacios V_i con $1 \leq i \leq n = dim(V)$ tales que $V_{i-1} \subsetneq V_i$ y $\psi(g)(V_i) \subset V_i$ para todo $g \in \mathfrak{g}$, donde $V_0 = 0$.*

Prueba: Como $\mathfrak{g}$ es soluble, por el Lema 2.1.4, $\psi(\mathfrak{g})$ es soluble. Por lo tanto, por el Lema 2.1.12, existe $v_1 \in V - \{0\}$ tal que $\psi(g)(v_1) = \alpha_1(\psi(g))v_1 = \alpha(g)v_1$ con $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ y todo $g \in \mathfrak{g}$.
Tomamos $V_1 = span\{v_1\}$, lo anterior implica que $\psi(g)(V_1) \subset V_1$.Además, ψ induce un homomorfismo de álgebras de Lie $\psi_1 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/V_1)$ con $\psi_1(g)(\overline{v}) = \overline{\psi(v)}$. Nuevamente, el Lema 2.1.12, implica que existe $v_2 \in V - V_1$ tal que $\psi_1(g)(\overline{v_2}) \subset span\{\overline{v_2}\}$. Consideramos $V_2 = span\{v_1, v_2\}$. Siguiendo de esta manera obtenemos los subespacios V_i tales que $V_{i-1} \subset V_i$ y $\psi(g)(V_i) \subset V_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, donde $V_0 = 0$. $\square$

La *envolvente universal* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un par (A, ι), donde A es un álgebra asociativa con unidad e $\iota : \mathfrak{g} \to A$ es una transformación lineal tal que $\iota([x,y]) =$

$\iota(x)\iota(y) - \iota(y)\iota(x)$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, que cumple con la siguiente propiedad universal: Si B es un álgebra asociativa con unidad y $\psi : \mathfrak{g} \to B$ es una transformación lineal tal que $\psi([x, y]) = \psi(x)\psi(y) - \psi(y)\psi(x)$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, entonces existe un único homomorfismo de álgebras asociativas $\overline{\psi} : A \to B$ tal que $\psi = \overline{\psi}\iota$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, "\overline{\psi}"] \\
\mathfrak{g} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "\psi"'] & B.
\end{tikzcd}$$

En otras palabras, (A, ι) es una envolvente universal de $\mathfrak{g}$, si $\iota : \mathfrak{g} \to \mathrm{Lie}(A)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie y cumple con la siguiente propiedad universal: Si B es un álgebra asociativa y $\psi : \mathfrak{g} \to \mathrm{Lie}(B)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces existe un único homomorfismo de álgebras asociativas $\overline{\psi} : A \to B$ tal que $\psi = \overline{\psi}\iota$.

Por la propiedad universal de la envolvente universal de un álgebra de Lie, se tiene el siguiente resultado:

Lema 2.1.14. *[J, Theorem V.1. §1]. Sean (A, ι) y (A', ι') envolventes universales de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Entonces, $A \simeq A'$ como álgebras asociativas.*

Prueba: Puesto que (A, ι) y (A', ι') cumplen con la propiedad universal de la envolvente universal, entonces tenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, "\overline{\iota'}"] \arrow[dd, bend left=60, "\mathrm{id}_A"] \\
\mathfrak{g} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "\iota'"'] \arrow[dr, "\iota"'] & A' \arrow[d, "\overline{\iota}"] \\
& A
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& A' \arrow[d, "\overline{\iota}"] \arrow[dd, bend left=60, "\mathrm{id}_{A'}"] \\
\mathfrak{g} \arrow[ur, "\iota'"] \arrow[r, "\iota"'] \arrow[dr, "\iota'"'] & A \arrow[d, "\overline{\iota'}"] \\
& A'
\end{tikzcd}$$

por unicidad se tiene que $\overline{\iota}\,\overline{\iota'} = \mathrm{id}_{A'}$ y $\overline{\iota'}\,\overline{\iota} = \mathrm{id}_A$ y por lo tanto $A \simeq A'$. $\square$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie con envolvente universal, por el Lema anterior tenemos que esta envolvente es única salvo isomorfismos.

Para la construcción de la envolvente universal de un álgebra de Lie, consideramos lo siguiente: Sea V un espacio vectorial, el *álgebra tensorial* asociada a V, denotada por $\mathrm{T}(V)$ es:

$$\mathrm{T}(V) = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$$

donde $V^{\otimes 1} = V$ y $V^{\otimes n} = V^{\otimes n-1} \otimes V$ para todo $n \geq 2$, la cual es un espacio vectorial con la operación usual y con multiplicación dada por yuxtaposición sobre sus generadores, es decir, si $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ y $w_1 \otimes \ldots \otimes w_m$ están en $\mathrm{T}(V)$ con $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m \in V$, entonces:

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)(w_1 \otimes \ldots \otimes w_m) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m.$$

Además, tenemos la inclusión canónica $i : V \to \mathrm{T}(V)$, pues V se identifica con $V^{\otimes 1}$. El par $(\mathrm{T}(V), i)$ cumple con la siguiente propiedad universal: Si A es un álgebra asociativa y $f : V \to A$ es una transformación lineal, entonces existe un único homomorfismo de álgebras asociativas $\overline{f} : \mathrm{T}(V) \to A$ tal que $f = \overline{f}i$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{T}(V) \arrow[d, "\overline{f}"] \\ V \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "f"'] & A. \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, entonces el ideal I en $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ generado por $[x, y] - x \otimes y + y \otimes x$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, induce una estructura de álgebra de Lie en $\mathrm{T}(\mathfrak{g})/I$ y un homomorfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{T}(\mathfrak{g})/I$ con $\rho(x) = \pi i(x)$, donde $i : \mathfrak{g} \to \mathrm{T}(\mathfrak{g})$ es la inclusión canónica y $\pi : T(V) \to T(V)/I$ es la proyección canónica. Además, tenemos que $\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

Denotamos por $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{T}(\mathfrak{g})/I$, la cual es un álgebra asociativa y por lo anterior tenemos un homomorfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{Lie}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$.

Teorema 2.1.15. *[J, Theorem V.2. §1]. $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \rho)$ es una envolvente universal de $\mathfrak{g}$.*

Prueba: Es suficiente probar que $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \rho)$ cumple con la propiedad universal de la envolvente universal. Consideremos B un álgebra asociativa y $\psi : \mathfrak{g} \to B$ una transformación lineal tal que $\psi([x, y]) = \psi(x)\psi(y) - \psi(y)\psi(x)$. Por la propiedad universal de $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$, existe un único homomorfismo de álgebras asociativas $\overline{\psi} : \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \to B$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\overline{\psi}"] \\ \mathfrak{g} \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\psi"'] & B. \end{tikzcd}$$

Puesto que $\overline{\psi}([x, y]) = \overline{\psi}(x)\overline{\psi}(y) - \overline{\psi}(y)\overline{\psi}(x) = \overline{\psi}(x \otimes y - y \otimes x)$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Entonces, $[x, y] - x \otimes y + y \otimes x \in \ker(\overline{\psi})$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, de donde $I \subset \ker(\overline{\psi})$. Así, existe una única tranformación lineal $\overline{\overline{\psi}}$ tal que $\overline{\overline{\psi}}\pi = \overline{\psi}$, es decir, los triángulos interiores del siguiente diagrama son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{\psi}"] & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[dl, "\overline{\overline{\psi}}"] \\ \mathfrak{g} \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\psi"'] & B. & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\overline{\overline{\psi}} : \mathrm{Lie}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \to \mathrm{Lie}(B)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\overline{\overline{\psi}}"] \\ \mathfrak{g} \arrow[ur, "\rho=\pi i"] \arrow[r, "\psi"'] & B. \end{tikzcd}$$

Veamos ahora que $\overline{\overline{\psi}}$ es el único homomorfismo que hace conmutar el diagrama anterior. Supongamos que existe un homomorfismo de álgebras asociativas $f : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to B$ con $f([x,y]) = f(x)f(y) - f(y)f(x)$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "f"] \\ \mathfrak{g} \arrow[ur, "\pi i"] \arrow[r, "\psi"'] & B. \end{tikzcd}$$

Consideremos $\overline{f} = f\pi : T(\mathfrak{g}) \to B$, el cual es un homomorfismo de álgebras asociativas. Por la definición de $\overline{f}$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\overline{f}"] \\ \mathfrak{g} \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\psi"'] & B. \end{tikzcd}$$

Por la unicidad de $\overline{\psi}$, tenemos que $\overline{f} = \overline{\psi}$. Por lo tanto, $f\pi = \overline{\psi}$ y por la unicidad de $\overline{\overline{\psi}}$, obtenemos que $\overline{\overline{\psi}} = f$, demostrando el teorema. $\square$

Nota 2.1.16. La necesidad de definir la envolvente universal de un álgebra de Lie se verá en los Capítulos 3 y 5.

2.2. Módulos y representaciones de álgebras de Lie.

Fijemos un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y consideremos V un espacio vectorial de dimensión finita. Diremos que V es un $\mathfrak{g}$-*módulo*, si existe una transformación bilineal $\cdot : \mathfrak{g} \times V \to V$ con $\cdot(g, v) = g \cdot v$ para todo $g \in \mathfrak{g}$ y todo $v \in V$ tal que $[g, g_1] \cdot v = g \cdot (g_1 \cdot v) - g_1 \cdot (g \cdot v)$ para todo $g, g_1 \in \mathfrak{g}$ y todo $v \in V$. Si no se presta para confusión escribiremos $g\,v$ en lugar de $g \cdot v$.

Ya que para todo espacio vectorial V el espacio $\mathfrak{gl}(V)$ es un álgebra de Lie, la condición $[g, g_1]\,v = g\,(g_1\,v) - g_1\,(g\,v)$ para un $\mathfrak{g}$-módulo V, implica que $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ dada por $\pi(g)(v) = g\,v$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Recíprocamente, si $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces el espacio vectorial V tiene estructura de $\mathfrak{g}$-módulo, dada por $g\,v = \rho(g)(v)$. La pareja (V, ρ) se denomina *representación* de $\mathfrak{g}$ y lo anterior nos indica que podemos hablar de $\mathfrak{g}$-módulo o de representación indistintamente sea el caso que nos interese.

Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo, un subespacio vectorial W de V se denomina *$\mathfrak{g}$-submódulo de V*, si $g\,w \in W$ para todo $g \in \mathfrak{g}$ y todo $w \in W$. Una transformación lineal $T : V \to W$ entre dos $\mathfrak{g}$-módulos V y W se denomina *homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos*, si $T(g\,v) = g\,T(v)$ para todo $g \in \mathfrak{g}$ y todo $v \in V$.

Ejemplos 2.2.1. Consideremos $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie.

1. Todo espacio vectorial V tiene una estructura trivial de $\mathfrak{g}$-módulo, dada por $g\,v = 0$ para todo $g \in \mathfrak{g}$ y todo $v \in V$. En particular, si $V = \mathbb{C}$.

2. La transformación lineal $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, dada por $ad(x)(y) = ad_x(y) = [x, y]$, es una representación de $\mathfrak{g}$ y por lo tanto $\mathfrak{g}$ es un $\mathfrak{g}$-módulo. Esta representación se le denomina la *representación adjunta de* $\mathfrak{g}$, donde los $\mathfrak{g}$-submódulos de $\mathfrak{g}$ son los ideales de $\mathfrak{g}$.

3. Si V, W son $\mathfrak{g}$-módulos, entonces:

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{T : V \to W : T \text{ es una transformación lineal}\}$$

   tiene estructura de $\mathfrak{g}$-módulo, dada por $(g\,T)(v) = g\,(T(v)) - T(g\,v)$ para toda transformación lineal T de V en W. En particular, $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ tiene estructura de $\mathfrak{g}$-módulo, dada por $(g\,T)(v) = -T(g\,v)$ para todo $g \in \mathfrak{g}$ y todo $v \in V$. A V^* se le denomina el *dual de V*.

   De manera semejante, el producto tensorial $V \otimes W$ de dos $\mathfrak{g}$-módulos tiene estructura de $\mathfrak{g}$-módulo, dada por la acción sobre los generadores:

$$g\,(v \otimes w) = g\,v \otimes w + v \otimes g\,w$$

   para todo $g \in \mathfrak{g}$, $v \in V$ y $w \in W$.

4. Si $T : V \to W$ es un homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, entonces $\ker(T)$ es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V e $\mathrm{Im}(T)$ es un $\mathfrak{g}$-submódulo de W.

5. Si W_1 y W_2 son $\mathfrak{g}$-submódulos de un $\mathfrak{g}$-módulo V, entonces $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$ son $\mathfrak{g}$-submódulos de V.

Diremos que un homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos $T : V \to W$ es un *monomorfismo*, si $\ker(T) = \{0\}$ y es un *epimorfismo*, si $\mathrm{Im}(T) = W$. Si T es tanto monomorfismo como epimorfismo, entonces T se denomina *isomorfismo*. Dos $\mathfrak{g}$-módulos V y W son *isomorfos*, si existe un isomorfismo $T : V \to W$ y escribiremos $V \simeq_{\mathfrak{g}} W$.

Para cualquier submódulo V_1 de un $\mathfrak{g}$-módulo V, V/V_1 tiene estructura de $\mathfrak{g}$-módulo por la acción $g\,\overline{v} = \overline{g\,v}$ para todo $g \in \mathfrak{g}$ y todo $\overline{v} \in V/V_1$. Además, la proyección canónica $\pi : V \to V/V_1$ es un homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos.
La siguiente proposición resume algunas propiedades básicas de los módulos sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Proposición 2.2.2.

i. *Si $T : V \to W$ es un homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Entonces, $V/ker(T) \simeq_{\mathfrak{g}} Im(T)$. Además, si V_1 es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V contenido en $ker(T)$, existe un único homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos $\psi : V/V_1 \to W$ tal que $\psi\pi = T$, donde $\pi : V \to V/V_1$ es la proyección canónica.*

ii. *Si V_1 y V_2 son submódulos de un $\mathfrak{g}$-módulo V tal que $V_1 \subset V_2$, entonces V_2/V_1 es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V/V_1. Además:*

$$(V/V_1)\,/\,(V_2/V_1) \simeq_{\mathfrak{g}} V/V_2.$$

iii. *Si V_1 y V_2 son submódulos de un $\mathfrak{g}$-módulo V, entonces existe un isomorfismo natural:*

$$(V_1 + V_2)/V_1 \simeq_{\mathfrak{g}} V_2/(V_1 \cap V_2).$$

iv. *Si V, W son $\mathfrak{g}$-módulos, entonces tenemos que:*

$$Hom(V, W) \simeq_{\mathfrak{g}} V^* \otimes W.$$

Prueba: La prueba de *i, ii y iii* las omitimos, las cuales se pueden encontrar en [H, Proposition I. §2.2].

Probamos *iv.* Consideramos $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Entonces, $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ es una base de V^*, donde $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$. Definimos $\psi : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$, dada por $\psi(f \otimes w)(v) = f(v)w$ para todo $f \in V^*, w \in W, v \in V$. Además, consideramos $\phi : \mathrm{Hom}(V, W) \to V^* \otimes W$, dada por $\phi(T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i^* \otimes T(v_i)$ para todo $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

Dados $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ y $v \in V$, existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tales que $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.

Por lo tanto:

$$(\psi\phi)(T)(v) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^* \otimes T(v_i)\right)(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(v_i) = T(v).$$

Así $\psi\phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(V,W)}$.

Por otra parte, si $f \in V^*$ existen escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}$ tales que $f = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j^*$, de donde:

$$\phi\psi(f \otimes w)) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \phi(\psi(v_j^* \otimes w)) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^* \otimes v_j^*(v_i) w \right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j (v_j^* \otimes w) = f \otimes w.$$

Así $\phi\psi = \mathrm{id}_{V^* \otimes W}$.

Además como:

$$\psi(g\,(f \otimes w))(v) = \psi(g\,f \otimes w)(v) + \psi(f \otimes g\,w)(v) = (g\,f)(v)w + f(v)g\,w,$$

por la acción de $\mathfrak{g}$ tenemos que $\psi(g\,(f \otimes w))(v) = g\,(\psi(f \otimes w)(v)) - \psi(f \otimes w)(g\,v)$, por lo tanto $\psi(g\,(f \otimes w))(v) = (g\,\psi(f \otimes w))(v)$ para todo $v \in V$. Así ψ es un isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos y $\mathrm{Hom}(V, W) \simeq_{\mathfrak{g}} V^* \otimes W$. $\square$

Definición 2.2.3. *Un $\mathfrak{g}$-módulo V no nulo se denomina* irreducible*, si V no posee submódulos propios no triviales, es decir, si los únicos $\mathfrak{g}$-submódulos de V son 0 y el mismo V.*

Lema 2.2.4 (Lema de Schur)**.** *[H, Schur's Lemma II. §6.1]. Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo irreducible de dimensión finita y $T : V \to V$ es un homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Entonces, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T = \lambda id_V$.*

Prueba: Puesto que T es una transformación lineal sobre $\mathbb{C}$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que el subespacio vectorial $\ker(T - \lambda\,\mathrm{id}_V) \neq 0$. Afirmamos que $W = \ker(T - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ es un submódulo de V. En efecto, tomemos $w \in W$ y $g \in \mathfrak{g}$, entonces:

$$T(g\,w) = g\,T(w) = g\,(\lambda w) = \lambda(g\,w).$$

Por lo tanto, $g\,w \in W$ y así W es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V no nulo. Como V es irreducible, entonces $W = V$ y así $T(v) = \lambda v$ para todo $v \in V$. $\square$

Definición 2.2.5. *Un $\mathfrak{g}$-módulo V se denomina* semisimple o completamente reducible*, si V es suma directa de $\mathfrak{g}$-submódulos irreducibles.*

Lema 2.2.6. *Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita. Entonces, V es semisimple si y sólo si cualquier submódulo de V tiene un complemento.*

Prueba: Supongamos que V es semisimple, es decir, existen $\mathfrak{g}$-submódulos irreducibles $S_1, \ldots, S_n$ de V tales que $V = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ y sea W un $\mathfrak{g}$-submódulo de V. Consideremos $\{S_{i_1}, \ldots, S_{i_m}\}$ la familia máximal de $\{S_1, \ldots, S_n\}$ tal que $W \cap V_1 = 0$, donde $V_1 = S_{i_1} \oplus \ldots \oplus S_{i_n}$. Por lo tanto, $W \cap (V_1 \oplus S_j) \neq 0$ para todo $j \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$. Así, $(W + V_1) \cap S_j \neq 0$ y $S_j \subset W + V_1$, pues S_j es irreducible, de donde $V = W \oplus V_1$.

Recíprocamente, si V es irreducible el resultado es obvio. Supongamos ahora que V no es un $\mathfrak{g}$-módulo irreducible y que el resultado es valido para módulos de dimensión más pequeña que la dimensión de V. Consideremos el conjunto:

$$\mathcal{S} = \{0 \neq W \subset V : W \text{ es } \mathfrak{g}\text{-submódulo de } V\}.$$

Sea S_1 un elemento de $\mathcal{S}$ de dimensión mínima, por lo tanto S_1 es un $\mathfrak{g}$-submódulo irreducible de V, por hipótesis S_1 posee un complemento, es decir, existe un submódulo W de V tal que $V = S_1 \oplus W$ y $\dim(W) < \dim(V)$, aplicando la hipótesis inductiva obtenemos el resultado deseado. $\square$

Nota: No todo $\mathfrak{g}$-módulo es semisimple sobre un álgebra de Lie arbitraria. Si el álgebra de Lie es semisimple, entonces todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita es semisimple. Este hecho es conocido como el Teorema de Weyl, el cual se puede encontrar en [H, Weyl's Theorem II. §6.3].

Teorema 2.2.7 (Teorema de Weyl)**.** *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple, entonces todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita es semisimple.*

2.3. Módulos irreducibles de $\mathfrak{sl}(2)$.

En esta sección hablaremos sobre los $\mathfrak{sl}(2)$-módulos irreducibles junto con el producto tensorial de estos, que es una de las herramientas más importantes a lo largo de este trabajo.

Consideramos la base estándar $\{h, e, f\}$ de $\mathfrak{sl}(2)$, la cual está sujeta a las relaciones:

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h. \tag{2.3}$$

Como $\mathfrak{sl}(2)$ es un álgebra de Lie semisimple y h es una matriz diagonal, entonces h actúa diagonalmente en todo $\mathfrak{sl}(2)$-módulo de dimensión finita V ([H, Corollary II. §6.4]). Es decir:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda,$$

con $V_\lambda = \{v \in V : h\, v = \lambda\, v\}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.
Si $V_\lambda \neq 0$, denominamos a λ *un peso* de h en V y V_λ un *espacio peso*. La demostración del siguiente lema se tiene a partir de las relaciones en la base estándar de $\mathfrak{sl}(2)$.

Lema 2.3.1. *[H, Lemma II. §7.2]. Si $v \in V_\lambda$, entonces $e\, v \in V_{\lambda+2}$ y $f\, v \in V_{\lambda-2}$.*

Cualquier vector no nulo $v \in V_\lambda$ tal que $e\, v = 0$, lo denominaremos *vector de peso máximo* λ. Sea V un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible y consideremos $v_0 \in V$ un vector de peso máximo λ. Si tomamos $v_i = \frac{1}{i!} f^i\, v_0$ para $i \geq 0$ y $v_{-1} = 0$, entonces las relaciones en la base estándar de $\mathfrak{sl}(2)$ implican que:

$$h\, v_i = (\lambda - 2i)\, v_i, \quad f\, v_i = (i+1)\, v_{i+1}, \quad e\, v_i = (\lambda - i + 1)\, v_{i-1}.$$

Por lo anterior v_i está en el espacio propio $V_{\lambda-2i}$ y el conjunto $\{v_i : i \geq 0 \text{ y } v_i \neq 0\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Si V es irreducible y de dimensión finita, entonces existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $v_n \neq 0$ y $v_{n+1} = 0$. De donde, $W = span\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo de V. Por lo tanto, $V = W$ y $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V. Además, como $v_{n+1} = 0$, entonces tenemos que:

$$0 = e\, v_{n+1} = (\lambda - n)v_n.$$

Así, $\lambda = n$.

Teorema 2.3.2. *Sea $\{h, e, f\}$ la base estándar de $\mathfrak{sl}(2)$.*

i. Dado n un entero no negativo. Consideramos $V(n)$ el espacio vectorial de dimensión $n+1$, con base $\{v_0, \ldots, v_n\}$, donde $\mathfrak{sl}(2)$ actúa como:

$$\begin{aligned} h\, v_k &= (n-2k)v_k, \\ f\, v_k &= (k+1)v_{k+1} \text{ para } k < n \text{ y } f\, v_n = 0, \\ e\, v_k &= (n+1-k)v_{k-1} \text{ para } k > 0 \text{ y } e\, v_0 = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Entonces, $V(n)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible.
A $V(n)$ lo denominaremos $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo n *donde el vector v_0 es un vector de peso máximo n y $v_i = \frac{1}{i!} f^i\, v_0$ para todo $0 \leq i \leq n$.*

ii. $V(n) \simeq_{\mathfrak{sl}(2)} V(m)$ si y sólo si $n = m$.

iii. Cada $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de dimensión finita es isomorfo a un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo n, para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

iv. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $V(n) \simeq_{\mathfrak{sl}(2)} V(n)^*$.

Prueba: La prueba de *i, ii* y *iii* se puede encontrar en [H, Theorem II. §7.2]. Así, probaremos sólo *iv.*

Sea $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ la base de $V(n)$ dada en *i*. Entonces tenemos la base dual $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ para $V(n)^*$ donde $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$ para todo $0 \leq i, j \leq n$. Afirmamos que v_n^* es un vector de peso máximo n. En efecto, puesto que $(h\, v_n^*)(v_i) = -v_n^*(h\, v_i)$ y $h\, v_i = (n-2i)v_i$ para todo $0 \leq i \leq n$, entonces $(h\, v_n^*)(v_i) = -(n-2i)v_n^*(v_i)$. Por la definición de v_n^*, tenemos que $(h\, v_n^*)(v_i) = nv_n^*(v_i)$ para todo $0 \leq i \leq n$. Así, $h\, v_n^* = nv_n^*$. De manera similar, tenemos que $e\, v_n^* = 0$. Por lo tanto, v_n^* es un vector de peso máximo n en $V(n)^*$, de donde $V(n)^*$ contiene un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible $V(n)$ generado por el vector de peso máximo v_n^*. Puesto que $\dim(V(n)) = \dim(V(n)^*) = n+1$, entonces $V(n) \simeq_{\mathfrak{sl}(2)} V(n)^*$. $\square$

La representación asociada a $V(n)$ está dada por el homomorfismo de álgebras de Lie $\rho_n : \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{gl}(V(n))$, donde las matrices asociadas a la base $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ con

$v_i = \dfrac{1}{i!} f^i\, v_0$ para cada $0 \leq i \leq n$ son matrices de tamaño $(n+1)\times(n+1)$ de la forma:

$$\rho_n(h) \to \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -n \end{pmatrix}; \qquad \rho_n(e) \to \begin{pmatrix} 0 & n & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\rho_n(f) \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & n & 0 \end{pmatrix}.$$

Para simplificar la forma matricial de ρ_n, escribiremos las matrices:

$$A(h,e,f) = \begin{pmatrix} nh & ne & 0 & \dots & 0 & 0 \\ f & (n-2)h & (n-1)e & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2f & (n-4)h & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & (2-n)h & e \\ 0 & 0 & 0 & \dots & nf & -nh \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Donde $\rho_n(h) \to A(1,0,0)$, $\rho_n(e) \to A(0,1,0)$ y $\rho_n(f) \to A(0,0,1)$.

Ejemplos 2.3.3.

$n=2$	$n=3$	$n=4$
$\begin{pmatrix} 2h & 2e & 0 \\ f & 0 & e \\ 0 & 2f & -2h \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3h & 3e & 0 & 0 \\ f & h & 2e & 0 \\ 0 & 2f & -h & e \\ 0 & 0 & 3f & -3h \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4h & 4e & 0 & 0 & 0 \\ f & 2h & 3e & 0 & 0 \\ 0 & 2f & 0 & 2e & 0 \\ 0 & 0 & 3f & -2h & e \\ 0 & 0 & 0 & 4f & -4h \end{pmatrix}$.

Si consideramos la base $\{v_0^n, v_1^n, \dots, v_n^n\}$, donde $v_0^n = v_0$ y $v_i^n = f^i\, v_0^n$; las relaciones que cumple esta base con la base estándar de $\mathfrak{sl}(2)$ son:

$$h\, v_i^n = (n-2i)v_i^n, \qquad f\, v_i^n = v_{i+1}^n, \qquad e\, v_i^n = k(n+1-i)v_{i-1}^n$$

Las matrices asociadas a esta base son de la forma:

$$B(h,e,f) = \begin{pmatrix} nh & ne & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ f & (n-2)h & 2(n-1)e & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & (n-4)h & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & (4-n)h & 2(n-1)e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f & (2-n)h & ne \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f & -nh \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Donde $\rho_n(h) \to B(1,0,0)$, $\rho_n(e) \to B(0,1,0)$ y $\rho_n(f) \to B(0,0,1)$.

Ejemplos 2.3.4.

$n=2$	$n=3$	$n=4$
$\begin{pmatrix} 2h & 2e & 0 \\ f & 0 & 2e \\ 0 & f & -2h \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3h & 3e & 0 & 0 \\ f & h & 4e & 0 \\ 0 & f & -h & 3e \\ 0 & 0 & f & -3h \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4h & 4e & 0 & 0 & 0 \\ f & 2h & 6e & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 6e & 0 \\ 0 & 0 & f & -2h & 4e \\ 0 & 0 & 0 & f & -4h \end{pmatrix}$

Como vimos en el Ejemplo 2.2.1, si V y W son $\mathfrak{sl}(2)$-módulos, entonces $V \otimes W$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo. Puesto que $\mathfrak{sl}(2)$ es semisimple, entonces por el Teorema de Weyl (Teorema 2.2.7) tenemos que $V \otimes W$ es semisimple. En particular, si tomamos $V = V(n)$ y $W = V(m)$.

Uno de los resultados que más usaremos en este trabajo es el Teorema de Clebsch-Gordan que nos da la descomposición del producto tensorial $V(n) \otimes V(m)$ como $\mathfrak{sl}(2)$-módulo.

Teorema 2.3.5 (Teorema de Clebsch-Gordan)**.**
Sean $V(n)$ y $V(m)$ $\mathfrak{sl}(2)$-módulos irreducibles de peso máximo n y m respectivamente. Entonces:

$$V(n) \otimes V(m) \simeq_{\mathfrak{sl}(2)} \bigoplus_{k=0}^{min\{n,m\}} V(n+m-2k).$$

Prueba: Consideramos las bases $\{v_0^n, v_1^n, \dots, v_n^n\}$ y $\{v_0^m, v_1^m, \dots, v_m^m\}$ de $V(n)$ y $V(m)$ respectivamente, donde v_0^n es un vector de peso máximo n de $V(n)$ y v_0^m es un vector de peso máximo m de $V(m)$. Además, se cumple que $v_i^n = f^i\, v_0^n$ y $v_j^m = f^j\, v_0^m$ para todo $0 \leq i \leq n$ y todo $0 \leq j \leq m$.

Sabemos que $V(n) \otimes V(m)$ tiene por base $\{v_i^n \otimes v_j^m : 0 \leq i \leq n \text{ y } 0 \leq j \leq m\}$. Fijemos $0 \leq k \leq \min\{n,m\}$. Para todo $0 \leq r \leq k$, tenemos que $v_r^n \otimes v_{k-r}^m \neq 0$ y cumplen con:

$$h\,(v_r^n \otimes v_{k-r}^m) = (n+m-2k)\, v_r^n \otimes v_{k-r}^m. \quad (2.7)$$

Además, tenemos que:

$$e\,(v_r^n \otimes v_{k-r}^m) = r(n+1-r)\,v_{r-1}^n \otimes v_{k-r}^m + (k-r)(m+1-(k-r))\,v_r^n \otimes v_{k-r-1}^m. \quad (2.8)$$

En particular,

$$e\,(v_0^n \otimes v_k^m) = k(m+1-k)\,v_0^n \otimes v_{k-1}^m \quad y \quad e\,(v_k^n \otimes v_0^m) = k(n+1-k)\,v_{k-1}^n \otimes v_0^m.$$

Definimos el vector:

$$v_0^{n,m,n+m-2k} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{\binom{k}{r}}{\binom{n+m-k}{n-r}} v_r^n \otimes v_{k-r}^m.$$

Afirmamos que $v_0^{n,m,n+m-2k}$ es un vector de peso máximo $n+m-2k$ en $V(n)\otimes V(m)$ para todo $0 \leq k \leq \min\{n,m\}$. En efecto, como cada vector $v_r^n \otimes v_{k-r}^m$ tiene peso $n+m-2k$ por (2.7), entonces $v_0^{n,m,n+m-2k}$ tiene peso $n+m-2k$. Por lo tanto, es suficiente mostrar que $e\,v_0^{n,m,n+m-2k} = 0$. Puesto que:

$$\begin{aligned} e\,v_0^{n,m,n+m-2k} &= \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{\binom{k}{r} r(n-(r-1))}{\binom{n+m-k}{n-r}} v_{r-1}^n \otimes v_{k-r}^m \\ &\qquad + \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{\binom{k}{r}(k-r)(m-(k-r-1))}{\binom{n+m-k}{n-r}} v_r^n \otimes v_{k-r-1}^m, \end{aligned}$$

por (2.8), aplicando propiedades de las combinatorias y teniendo en cuenta que $v_{-1}^n = v_{-1}^m = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} e\,v_0^{n,m,n+m-2k} &= \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{r+1} \frac{\binom{k}{r}(k-r)(m+1-(k-r))}{\binom{n+m-k}{n-r}} v_r^n \otimes v_{k-r-1}^m \\ &\qquad + \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \frac{\binom{k}{r}(k-r)(m+1-(k-r))}{\binom{n+m-k}{n-r}} v_r^n \otimes v_{k-r-1}^m. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $e\,v_0^{n,m,n+m-2k} = 0$, de donde los vectores $v_0^{n,m,n+m-2k}$ son vectores de peso máximo $n+m-2k$ en $V(n)\otimes V(m)$ y estos generan $\mathfrak{sl}(2)$-módulos irreducibles $V(n+m-2k)$ en $V(n)\otimes V(m)$. Así:

$$\bigoplus_{k=0}^{\min\{n,m\}} V(n+m-2k) \subset V(n)\otimes V(m).$$

Por otro lado, como:

$$\dim\left(\bigoplus_{k=0}^{\min\{n,m\}} V(n+m-2k)\right) = (n+1)(m+1) = \dim(V(n)\otimes V(m)),$$

entonces tenemos la igualdad en la contenencia anterior. $\square$

Nota 2.3.6. Si $V(\mu)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible que aparece en la descomposición de $V(n) \otimes V(m)$, existe $0 \leq k \leq \min\{n, m\}$ tal que $\mu = n + m - 2k$. Denotaremos $x_\mu^{n,m}$ en lugar de k.

Además como vimos en la demostración del Teorema, los vectores $v_0^{n,m,n+m-2x_\mu^{n,m}}$ son vectores de peso máximo $n+m-2x_\mu^{n,m}$ para todo $0 \leq x_\mu^{n,m} \leq \min\{n, m\}$. Denotaremos por $\lambda_r^{n,m,\mu} = (-1)^r \frac{\binom{x_\mu^{n,m}}{r}}{\binom{n+m-x_\mu^{n,m}}{n-r}} = (-1)^r \frac{\binom{x_\mu^{n,m}}{r}}{\binom{x_\mu^{n,m}+\mu}{n-r}}$ para todo $0 \leq r \leq x_\mu^{n,m}$. Por lo tanto:

$$v_0^{n,m,\mu} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{n,m}} \lambda_r^{n,m,\mu} \; v_r^n \otimes v_{x_\mu^{n,m}-r}^m.$$

3 Representaciones de álgebras de Lie no semisimples.

En el capítulo anterior dimos la noción de módulo irreducible sobre un álgebra de Lie arbitraria. Cuando el álgebra de Lie es semisimple, el Teorema de Weyl nos garantiza que todo módulo de dimensión finita es suma directa de submódulos irreducibles. Pero esto en general no es cierto, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 3.0.1. *Sea* $\mathfrak{g}$ *un álgebra de Lie. Un* $\mathfrak{g}$*-módulo* V *se denomina* indescomponible*, si no existen* $\mathfrak{g}$*-módulos no triviales* V_1 *y* V_2 *tales que* $V = V_1 \oplus V_2$*.*

En el caso de álgebras de Lie simples, la clasificación de los módulos indescomponibles de dimensión finita está dada por los pesos dominantes del álgebra. Como es el caso del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$ visto en §2.3.

3.1. Módulos uniseriales sobre álgebras de Lie perfectas.

Todos los resultados de esta sección excepto el Teorema 3.1.1 y la Proposición 3.1.6 se pueden encontrar en [CS]. Nuestro interés en esta sección es estudiar los $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales de dimensión finita sobre álgebras de Lie perfectas.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Una *serie de composición* de un $\mathfrak{g}$-módulo V de *longitud* n, es una sucesión creciente de $\mathfrak{g}$-submódulos de V:

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$$

tal que V_i/V_{i-1}, denominados factores de composición, son $\mathfrak{g}$-módulos irreducibles para todo $1 \leq i \leq n$. El siguiente resultado muestra que dadas dos series de composición de un $\mathfrak{g}$-módulo, sus longitudes son iguales.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Jordan-Hölder)**.** *Si* $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ *y* $0 = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_m = V$ *son dos series de composición de un* $\mathfrak{g}$*-módulo de dimensión finita* V*, entonces* $n = m$ *y existe una permutación* σ *tal que* $W_{j+1}/W_j \simeq_{\mathfrak{g}} V_{\sigma(j)+1}/V_{\sigma(j)}$*.*

Prueba: Si $n = 0$, entonces $V = 0$ y por lo tanto $m = 0$.
Supongamos que $n > 0$ y que el resultado se cumple para longitud $n - 1$. Consideramos la sucesión de submódulos de V:

$$0 = W_0 \cap V_{n-1} \subset W_1 \cap V_{n-1} \subset \ldots \subset W_m \cap V_{n-1} = V_{n-1} = W_0 + V_{n-1} \subset \\ W_1 + V_{n-1} \subset \ldots \subset W_m + V_{n-1} = V_n$$

Para $j < m$ existe una sucesión exacta:

$$0 \to \frac{W_{j+1} \cap V_{n-1}}{W_j \cap V_{n-1}} \to \frac{W_{j+1}}{W_j} \to \frac{W_{j+1} + V_{n-1}}{W_j + V_{n-1}} \to 0.$$

Como $\dfrac{W_{j+1}}{W_j}$ es irreducible, entonces

$$\frac{W_{j+1} \cap V_{n-1}}{W_j \cap V_{n-1}} \simeq \frac{W_{j+1}}{W_j} \quad \text{o bien} \quad \frac{W_{j+1}}{W_j} \simeq \frac{W_{j+1} + V_{n-1}}{W_j + V_{n-1}},$$

y el otro cociente es cero. Además como V_n/V_{n-1} es irreducible, existe exactamente un $i < m$ tal que $V_{n-1} = W_i + V_{n-1} \subset W_{i+1} + V_{n-1} = V_n$. Así $V_n/V_{n-1} \simeq W_{i+1}/W_i$ y

$$0 = W_0 \cap V_{n-1} \subset W_1 \cap V_{n-1} \subset \ldots \subset W_i \cap V_{n-1} = W_{i+1} \cap V_{n-1} \subset \ldots \subset W_m \cap V_{n-1} = V_{n-1}$$

es una serie de composición de V_{n-1}. Por hipótesis tenemos que $m - 1 = n - 1$ y existe una función biyectiva σ' del conjunto $\{0, 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m-1\}$ en $\{0, 1, \ldots, n-2\}$ tal que $W_{j+1}/W_j \simeq V_{\sigma'(j)+1}/V_{\sigma'(j)}$ para todo $j \neq i$. Así tomamos $\sigma(j) = \sigma'(j)$ si $j \neq i$ y $\sigma(i) = n - 1$, obteniendo el resultado. $\square$

Este resultado junto con su prueba son iguales a la dada en [DK, Pág. 19], para álgebras asociativas con unidad. La razón de esto, es que todo $\mathfrak{g}$-módulo es un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo, donde $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es la envolvente universal de $\mathfrak{g}$, definida en §2.1. El recíproco también es válido.

Además, el Teorema de Jordan-Hölder muestra que todas las series de composición tienen la misma longitud. Por lo tanto, diremos que un $\mathfrak{g}$-módulo V tiene *longitud* n, si todas las series de composición tienen longitud n.

Lema 3.1.2. *[CS, Lemma 2.6. §2]. Si W es un subespacio de V, sea $W^0 = \{f \in V^* : f(W) = 0\}$. Entonces, la asignación $W \to W^0$ es una biyección de los $\mathfrak{g}$-submódulos de V con los $\mathfrak{g}$-submódulos de V^*. Además, si $U \subset W$ son $\mathfrak{g}$-submódulos de V, entonces $U^0/W^0 \simeq_{\mathfrak{g}} (W/U)^*$ via $f + W^0 \to \tilde{f}$, donde $\tilde{f}(w + U) = f(w)$. En particular, si $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$ es una serie de composición de V, con factores de composición $X_1, \ldots, X_n$, entonces $0 = V_n^0 \subset \ldots \subset V_1^0 \subset V_0^0 = V^*$ es una serie de composición de V^*, con factores de composición isomorfos a $X_n^*, \ldots, X_1^*$.*

Prueba: Dado W un $\mathfrak{g}$-submódulo de V, afirmamos que W^0 es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V^*. En efecto, W^0 es no vacio pues $0 \in W^*$. Además, si $f, h \in W^0$, entonces $f(w) = h(w) = 0$ para todo $w \in W$. Así, $(f + h)(w) = f(w) + h(w) = 0$ para todo $w \in W$, por lo tanto $f + h \in W^0$.
Si $g \in \mathfrak{g}$ y $f \in W^0$, entonces $(g\,f)(w) = -f(g\,w) = 0$ para todo $w \in W$. Por lo tanto, $g\,f \in W^0$ y así W^0 es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V^*.

Si U es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V^*, definimos $U^\perp = \{v \in V : f(v) = 0 \text{ para todo } f \in U\}$. Afirmamos que $U^\perp$ es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V. En efecto, $U^\perp$ no es vacio pues $0 \in U^\perp$.

Además, si $u, v \in U^\perp$, entonces $f(u) = f(v) = 0$ para todo $f \in U$. De donde, $f(u+v) = 0$ para todo $f \in U$ y así $u + v \in U^\perp$.
Si $g \in \mathfrak{g}$ y $u \in U^\perp$, entonces $f(g\,u) = -(g\,f)(u) = 0$ para todo $f \in U$. Por lo tanto, $g\,u \in U^\perp$ y $U^\perp$ es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V.

Puesto que V tiene dimensión finita, se puede mostrar fácilmente que $(W^0)^\perp = W$ y $(U^\perp)^0 = U$ para W y U $\mathfrak{g}$-submódulos de V y V^* respectivamente. $\square$

Puesto que la suma directa de dos $\mathfrak{g}$-submódulos semisimples de un $\mathfrak{g}$-módulo es también semisimple, entonces todo $\mathfrak{g}$-módulo posee un único $\mathfrak{g}$-submódulo maximal semisimple. Esto da cabida a dar la siguente definición.

Definición 3.1.3. *Sea V un $\mathfrak{g}$-módulo, el* zócalo de V *es el único $\mathfrak{g}$-submódulo maximal semisimple de V y lo denotaremos por $soc(V)$.*

Las siguientes propiedades son claras de la definición:

1. Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo semisimple, entonces $V = \mathrm{soc}(V)$.

2. Cualquier $\mathfrak{g}$-submódulo irreducible de un $\mathfrak{g}$-módulo V está contenido en el zócalo de V.

3. Si W es un $\mathfrak{g}$-submódulo no nulo de un $\mathfrak{g}$-módulo V, entonces $\mathrm{soc}(V) \cap W \neq 0$.

4. Si $T : V \to W$ es un homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, entonces $T(\mathrm{soc}(V)) \subset \mathrm{soc}(W)$.

5. Si $T : V \to V$ es un homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos y $\lambda \in \mathbb{C}$, $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$ es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V. Por lo tanto, si λ es un valor propio de un homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos T, entonces $\mathrm{soc}(V) \cap V_\lambda \neq 0$. Así, todo valor propio de T es un valor propio de $T|_{\mathrm{soc}(V)}$.

Nota 3.1.4. Por el Lema 3.1.2, podemos definir el *radical* de V como:

$$\mathrm{rad}(V) = \{v \in V : \alpha(v) = 0 \text{ para todo } \alpha \in \mathrm{soc}(V^*)\}.$$

Es decir, $\mathrm{rad}(V) = \mathrm{soc}(V^*)^\perp$ y $\mathrm{soc}(V) = \mathrm{rad}(V^*)^\circ$.

Algunas propiedades del radical son:

1. $\mathrm{rad}(V)$ es la intersección de todos los submódulos máximales de V.

2. Si $T : V \to W$ es un homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, entonces $T(\mathrm{rad}(V)) \subset \mathrm{rad}(W)$.

De lo anterior, tenemos que tanto el zócalo como el radical de un $\mathfrak{g}$-módulo son submódulos preservados por todo homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos.

Definición 3.1.5. *La* serie de zócalo *de un $\mathfrak{g}$-módulo V de dimensión finita, es la sucesión creciente:*

$$0 = soc^0(V) \subset soc^1(V) \subset \ldots \subset soc^m(V) = V$$

donde $soc^i(V)/soc^{i-1}(V) = soc(V/soc^{i-1}(V))$ para todo $1 \leq i \leq m$.
Los cocientes $soc^i(V)/soc^{i-1}(V)$ se denominan factores de zócalo *de V.*

Como $\mathrm{soc}(V/\mathrm{soc}^{i-1}(V))$ es único en la definición anterior para cada $1 \leq i \leq m$. Podemos definir la longitud de la serie de zócalo de un $\mathfrak{g}$-módulo V, como $lz(V) = m$. De manera semejante se define la *serie del radical* de un $\mathfrak{g}$-módulo V, como la sucesión decreciente:

$$V = \mathrm{rad}^0(V) \supset \mathrm{rad}^1(V) \supset \ldots \supset \mathrm{rad}^n(V) \supset \mathrm{rad}^{n+1}(V) = 0$$

donde $\mathrm{rad}^{i+1}(V) = \mathrm{rad}\left(\mathrm{rad}^i(V)\right)$ para todo $1 \leq i \leq n$. La longitud de la serie radical de un $\mathfrak{g}$-módulo V es $lr(V) = n$.

Un resultado importante en la Teoría de Representaciones de módulos sobre álgebras asociativas con unidad es que las longitudes de la serie de zócalo y la longitud de la serie radical coinciden. Esto lo resumimos en la siguiente proposición la cual se puede encontrar en [A, Proposition 1.3. §V.1].

Proposición 3.1.6. *Sea V un módulo de dimensión finita sobre un álgebra asociativa con unidad, entonces $lz(V) = lr(V)$.*

Puesto que todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita es un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-módulo de dimensión finita, la proposición anterior es válida para $\mathfrak{g}$-módulos.

Definición 3.1.7. *Un $\mathfrak{g}$-módulo V se denomina* uniserial*, si el conjunto de $\mathfrak{g}$-submódulos de V está totalmente ordenado por inclusión.*

De la definición anterior se tiene que un $\mathfrak{g}$-módulo V es uniserial si y sólo si la serie de zócalo es una serie de composición, que a su vez es equivalente a que la serie radical sea una serie de composición de V.

Definición 3.1.8. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se denomina* perfecta*, si $\mathfrak{g}$ es igual a su álgebra derivada, es decir, $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

De la definición anterior tenemos que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es perfecta si y sólo si su radical soluble $\mathfrak{r}$ coincide con $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$.

Ejemplos 3.1.9.

1. Toda álgebra de Lie semisimple es un álgebra de Lie perfecta.

2. Consideremos el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con descomposición de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$, donde $V(m)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo m, esta álgebra de Lie está sujeta a las relaciones sobre la base estandar $\{h, e, f\}$ de $\mathfrak{sl}(2)$ y la base $\{e_0, e_1, \ldots, e_m\}$ de $V(m)$ donde $e_i = \dfrac{1}{i!} f^i\, e_0$ para todo $0 \leq i \leq m$:

$$\begin{aligned} [h, e_i] &= (m - 2i)\, e_i, & [e, e_i] &= (m - (i-1))\, e_{i-1}, \\ [f, e_i] &= (i+1)\, e_{i+1}, & [e_i, e_j] &= 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

para todo $0 \leq i, j \leq m$, con $e_{-1} = 0 = e_{m+1}$. Puesto que una base para $V(m)$ es $\{e_0, e_1, \ldots, e_m\}$ y como se muestra en las relaciones (3.1), tenemos que $e_i \in [\mathfrak{g}, V(m)]$ para todo $0 \leq i \leq m$. Por lo tanto, $V(m) \subset [\mathfrak{g}, V(m)]$. Además, como $V(m)$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces $[\mathfrak{g}, V(m)] \subset V(m)$. Así, $V(m) = [\mathfrak{g}, V(m)]$ y $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie perfecta.

3. Consideremos ahora el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con descomposición de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathfrak{h}_n$ donde $\mathfrak{h}_n$ es el álgebra de Heisenberg de dimensión $2n+1$. La cual está dada por las relaciones sobre la base canónica $\{h, e, f\}$ de $\mathfrak{sl}(2)$, la base $\{e_0, e_1, \ldots, e_m\}$ de $V(m)$ donde $e_i = \dfrac{1}{i!} f^i\, e_0$ para todo $0 \leq i \leq m$, $\{z\}$ la base de $V(0)$:

$$\begin{aligned} [h, e_i] &= (m - 2i)\, e_i, & [h, z] &= 0, & [e_i, e_{m-i}] &= (-1)^i \binom{m}{i} z, \\ [e, e_i] &= (m - (i-1))\, e_{i-1}, & [e, z] &= 0, & [e_i, e_j] &= 0 \text{ con } j \neq m - i, \\ [f, e_i] &= (i+1)\, e_{i+1}, & [f, z] &= 0 & [e_i, z] &= 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

para todo $0 \leq i \leq m$, con $e_{-1} = 0 = e_{m+1}$.
De manera similar al ejemplo anterior, las relaciones descritas para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathfrak{h}_n$, nos muestran que los elementos de la base $\{e_0, e_1, \ldots, e_m, z\}$ están en $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_n]$. Por lo tanto, $\mathfrak{h}_n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_n]$ y así $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie perfecta.

Lema 3.1.10. *[CS, Lemma 2.1. §2] Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie perfecta. Entonces el radical $\mathfrak{r}$ anula a todos los $\mathfrak{g}$-módulos irreducibles de dimensión finita.*

Prueba: Consideremos V un $\mathfrak{g}$-módulo irreducible de dimensión finita.
Puesto que $\mathfrak{r}$ es soluble, por el Teorema de Lie existe una transformación lineal $\lambda : \mathfrak{r} \to \mathbb{C}$ tal que $W = \{v \in V : r \cdot v = \lambda(r)v \text{ para todo } r \in \mathfrak{r}\} \neq 0$. Como $\mathfrak{r}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces W es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V, por lo tanto $V = W$. Además, $\mathrm{tr}(r) = \lambda(r)\dim(V)$ para todo $r \in \mathfrak{r}$, pero $\mathrm{tr}(r) = 0$ pues $\mathfrak{r} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ al ser $\mathfrak{g}$ perfecta. Por lo tanto, $0 = \lambda(r)\dim(V)$ y así $\lambda(r) = 0$ para todo $r \in \mathfrak{r}$. $\square$

Nota 3.1.11. Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo irreducible, con $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie perfecta, entonces V es un $\mathfrak{s}$-módulo irreducible y por el Lema 3.1.10, $\mathfrak{r}$ actúa trivialmente en V.

Consideremos una serie de composición de un $\mathfrak{g}$-módulo V:

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V. \tag{3.3}$$

Es decir, cada V_i es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V y V_i/V_{i-1} son $\mathfrak{g}$-módulos irreducibles para cada $1 \leq i \leq n$. Puesto que los V_i también son $\mathfrak{s}$-módulos, entonces por el Teorema de Weyl a (3.3) la podemos escribir como:

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset W_1 \oplus W_2 \subset \ldots \subset W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n = V$$

con $V_i =_{\mathfrak{s}} W_1 \oplus \ldots \oplus W_i$ donde los W_i son $\mathfrak{s}$-módulos que cumplen con lo siguiente:

1. Cada W_i es un $\mathfrak{s}$-módulo irreducible.
2. $V_i/V_{i-1} \simeq_{\mathfrak{s}} W_i$.

Definición 3.1.12. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con descomposición de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$, donde $\mathfrak{r}$ es el radical soluble de $\mathfrak{g}$. Diremos que la sucesión de $\mathfrak{s}$-módulos irreducibles $W_1, W_2, \ldots, W_n$ es una* sucesión admisible*, si existe un $\mathfrak{g}$-módulo uniserial V tal que $V =_{\mathfrak{s}} W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$ y $soc^i(V)/soc^{i-1}(V) \simeq_{\mathfrak{s}} W_i$ para todo i.*

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie perfecta con radical soluble $\mathfrak{r}$ y $V =_{\mathfrak{s}} W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$ es como en la definición anterior, entonces por el Lema 3.1.10 tenemos que $\mathfrak{r} \cdot W_i \subset W_1 \oplus \ldots \oplus W_{i-1}$.

Nota 3.1.13. Por el Lema 3.1.2, si V es un $\mathfrak{g}$-módulo uniserial al cual se le asocia la sucesión admisible $W_1, W_2, \ldots, W_n$, entonces V^* también es un $\mathfrak{g}$-módulo uniserial con sucesión admisible $W_n^*, \ldots, W_1^*$.

Consideremos ahora una representación de $\mathfrak{g}$, $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ y B una base de V. Si $d = \dim(V)$. Por $M_B : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(d)$, denotamos la correspondiente representación matricial de T.

Por una $\mathfrak{s}$-base de tipo 1 de V, la entenderemos como una base de la forma $B = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ donde cada B_i es una base del $\mathfrak{s}$-submódulo W_i de V tal que:

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset W_1 \oplus W_2 \subset \ldots \subset W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n = V \tag{3.4}$$

es la serie de zócalo de V, es decir, $\mathrm{soc}^i(V) = W_1 \oplus \ldots \oplus W_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Igualmente, definimos una $\mathfrak{s}$-base de tipo 2, si (3.4) es una serie de composición de V.

Si $B = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ es cualquier $\mathfrak{s}$-base de un $\mathfrak{g}$-módulo V, con B_i una base fija de W_i como en (3.4). Entonces, $M_B(x)$ es una matriz dividida en $n \times n$ bloques para todo $x \in \mathfrak{g}$. Donde el bloque (i, j) corresponde a los coeficientes de la imagen de la base B_i de W_i por medio de la representación T en la base B_j.

Consideremos un álgebra de Lie perfecta con descomposición de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$, entonces tenemos el siguiente corolario del Lema 3.1.10, el cual se puede encontrar en [CS, Corollary 2.2. §2].

Corolario 3.1.14. *Si B es cualquier $\mathfrak{s}$-base de V, entonces $M_B(s)$ vista en bloques es diagonal y $M_B(r)$ es una matriz estrictamente triangular superior por bloques, para todo $s \in \mathfrak{s}$ y todo $r \in \mathfrak{r}$.*
En otras palabras, si $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$ como en (3.4). Entonces, para todo $s \in \mathfrak{s}$ y todo $r \in \mathfrak{r}$, tenemos que $T(s)(W_i) \subset W_i$ y $T(r)(W_i) \subset W_1 \oplus \ldots \oplus W_{i-1}$ para $1 \leq i \leq n$.

Este corolario nos permite demostrar el siguiente lema:

Lema 3.1.15. *[CS, Lemma 2.3. §2]. Si B es una $\mathfrak{s}$-base de tipo 1 de un $\mathfrak{g}$-módulo V. Entonces, ninguno de los bloques en la primera superdiagonal de $M_B(r)$ es idénticamente cero para todo $r \in \mathfrak{r}$.*
Es decir, el bloque $(i, i+1)$ de $M_B(r)$ no es idénticamente cero para todo $r \in \mathfrak{r}$ y todo $1 \leq i \leq n-1$.

Prueba: Sean B, $W_1, \ldots, W_n$ como en (3.4). Supongamos que el bloque $(i, i+1)$ de $M_B(r)$ es idénticamente cero. Por el Corolario 3.1.14 tenemos que:

$$\operatorname{Im}(M_B(r)|_{W_1 \oplus \ldots \oplus W_i}) \subset W_1 \oplus \ldots \oplus W_{i-2}$$

o equivalentemente $\mathfrak{r} \cdot \operatorname{soc}^i(V) \subset \operatorname{soc}^{i-2}(V)$ para todo $r \in \mathfrak{r}$. Puesto que $W_i \subset \operatorname{soc}^i(V)$, entonces:

$$\mathfrak{g} \cdot (\operatorname{soc}^{i-2}(V) \oplus W_i) \subset \operatorname{soc}^{i-2}(V) \oplus W_i,$$

de donde $\operatorname{soc}^{i-2}(V) \oplus W_i$ es un submódulo de $\operatorname{soc}^i(V)$. Además tenemos los isomorfismos $\operatorname{soc}^{i-2}(V) \oplus W_i / \operatorname{soc}^{i-2}(V) \simeq_{\mathfrak{s}} W_i$ y $\operatorname{soc}^{i-1}(V)/\operatorname{soc}^{i-2}(V) \simeq_{\mathfrak{s}} W_{i-1}$ los cuales tienen intersección trivial. Esto es absurdo puesto que $\operatorname{soc}^{i-1}(V)/\operatorname{soc}^{i-2}(V) = \operatorname{soc}\left(V/\operatorname{soc}^{i-2}(V)\right)$. $\square$

Este resultado permite caracterizar la forma matricial que tienen los $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales.

Teorema 3.1.16. *[CS, Theorem 2.4. §2]. Un $\mathfrak{g}$-módulo V es uniserial si y sólo si dada cualquier $\mathfrak{s}$-base de tipo 2 ninguno de los bloques en la primera superdiagonal de $M_B(\mathfrak{r})$ es idénticamente cero. Si $\mathfrak{g}$ es perfecta y existe una $\mathfrak{s}$-base de tipo 2 tal que ninguno de los bloques en la primera superdiagonal es idénticamente cero, entonces V es uniserial.*

Prueba: Si V es uniserial, entonces toda $\mathfrak{s}$-base B de tipo 2 es de tipo 1 y por el Lema 3.1.15 se tiene la primera implicación.

Recíprocamente, supongamos que V no es uniserial, entonces existe i en la serie de zócalo tal que $\operatorname{soc}^i(V)/\operatorname{soc}^{i-1}(V)$ no es irreducible. Por lo tanto existen V_1 y V_2 submódulos de V tales que $\operatorname{soc}^{i-1}(V) \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subset \operatorname{soc}^i(V)$, $V_1/\operatorname{soc}^{i-1}(V)$ es irreducible y $V_2/V_1 \simeq_{\mathfrak{g}} (V_2/\operatorname{soc}^{i-1}(V))/(V_1/\operatorname{soc}^{i-1}(V))$ es irreducible. Como $V_1 \subsetneq V_2$, entonces existe un $\mathfrak{s}$-módulo no nulo W tal que $V_2 =_{\mathfrak{s}} V_1 \oplus W$. Pero V_2/V_1 es irreducible, de donde $\mathfrak{r}$ actúa de forma escalar sobre V_2/V_1 y por lo tanto $\mathfrak{r}$ actúa de forma escalar sobre W. Esto muestra que W es un $\mathfrak{g}$-submódulo y que para cualquier serie de composición que contenga a V_1 y V_2 se tendría que $M_B(\mathfrak{r})$ tiene un bloque idénticamente cero, lo que contradice nuestro supuesto.

Supongamos ahora que $\mathfrak{g}$ es perfecta y sea B una $\mathfrak{s}$-base de tipo 2 tal que ninguno de los bloques en la primera superdiagonal de $M_B(\mathfrak{r})$ es idénticamente cero. Como se indicó antes, B da lugar a una serie de $\mathfrak{s}$-módulos $W_1, W_2, \ldots, W_n$ tal que (3.4) es una serie de composición de V. Definimos los $\mathfrak{g}$-submódulos de V, $V_i = W_1 \oplus \ldots \oplus W_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Veamos que (3.4) en efecto es la serie del zócalo. Argumentamos por inducción, es suficiente mostrar que $\mathrm{soc}(V) = W_1$. Sea U un $\mathfrak{g}$-submódulo no nulo de V. Como $U \cap V \neq 0$, existe $1 \leq j \leq n$ (el más pequeño de todos) tal que $U \cap V_j \neq 0$. Si $j = 1$, por la irreducibilidad de V_1, se tiene que $V_1 = W_1$ y así $W_1 \subset U$.

Supongamos que $1 < j \leq n$. Por la definición de j, existe $u \in V_j \cap U$, por lo tanto $u = \sum_{i=1}^{j} w_i$ con $w_i \in W_i$ para $1 \leq i \leq j$, además $w_j \neq 0$. Como $\mathfrak{g}$ es perfecta, $\mathfrak{r} \cdot w_1 = 0$ entonces:

$$r\, u = \sum_{i=2}^{j} r\, w_i \text{ para todo } r \in \mathfrak{r}.$$

De donde $r\, u \in V_{j-1}$ para todo $r \in \mathfrak{r}$. Por la definición de j, $r\, u = 0$ para todo $r \in \mathfrak{r}$ lo cual implica que $\mathfrak{r}\, w_j \subset V_{j-2}$.
Sea $T = \{\overline{v} \in V_j/V_{j-2} : r\,\overline{v} = 0 \text{ para todo } r \in \mathfrak{r}\}$, como $\overline{w_j} \in T$ entonces $T \neq 0$. Además como $\mathfrak{r}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, tenemos que T es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V_j/V_{j-2}. Por lo tanto $W_j + V_{j-2} \subset T$ y así $\mathfrak{r} \cdot W_j \subset V_{j-2}$ lo cual es absurdo. □

3.2. Clasificación de $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulos uniseriales.

Todos los resultados en esta sección se pueden encontrar en [CS].

Fijamos el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$ donde $V(m)$ es el $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo $m \geq 1$, además tomamos la base de $\mathfrak{g}$ dada por $\{h, e, f, e_0, e_1, \ldots, e_m\}$ que cumple con las relaciones (3.1).

Dado a un entero no negativo, consideramos la matriz $H(a)$ la cual es una matriz diagonal de tamaño $(a+1) \times (a+1)$ que consta de los elementos $a, a-2, \ldots, 2-a, -a$ en su diagonal. Para $a = 0$ tomamos $F(a) = E(a) = 0$, si $a > 0$ definimos $F(a)$ como la matriz que en su primera diagonal inferior consta de los elementos $a, a-1, \ldots, 1$ y $E(a)$ como la matriz en donde su primera diagonal superior consta de los elementos $1, 2, \ldots, a$.

Consideremos ahora las $m+1$ matrices rectangulares $W_0(a), W_1(a), \ldots, W_m(a)$, de tamaños $(a+1) \times (a+m+1)$, donde $W_i(a) = \big(0_{(a+1)\times(m-i)} | I_{a+1} | 0_{(a+1)\times i}\big)$, de esta manera podemos definir las matrices $E_i(a) = (-1)^i \binom{m}{i} W_i(a)$ para $0 \leq i \leq m$.

Para $\ell \geq 0$ consideramos las matrices por bloques:

$$\begin{aligned} H(a,\ell) = & \quad H(a) \oplus H(a+m) \oplus \ldots \oplus H(a+\ell m), \\ E(a,\ell) = & \quad E(a) \oplus E(a+m) \oplus \ldots \oplus E(a+\ell m), \\ F(a,\ell) = & \quad F(a) \oplus F(a+m) \oplus \ldots \oplus F(a+\ell m), \end{aligned}$$

junto con las matrices $E_i(a,\ell)$, las cuales son matrices por bloques donde todos los bloques son iguales a cero, excepto si $\ell \geq 1$ donde los bloques en la primera superdiagonal se constituyen por las matrices $E_i(a), E_i(a+m), \ldots, E_i(a+(\ell-1)m)$.

Ejemplos 3.2.1. Consideramos $m = 1$:

$$H(2,1) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right), \; E(2,1) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$F(2,1) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right), \; E_0(2,1) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$E_1(2,1) \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lema 3.2.2. *[CS, Lemma 5.1 §5]. La aplicación $h \mapsto H(a,\ell)$, $e \mapsto E(a,\ell)$, $f \mapsto F(a,\ell)$, $e_i \mapsto E_i(a,\ell)$ para todo $0 \leq i \leq m$, define una representación matricial de $\mathfrak{g}$ que corresponde a un módulo uniserial con sucesión admisible $V(a), V(a+m), \ldots, V(a+\ell m)$.*

Prueba: Como $H(a,\ell)$, $E(a,\ell)$ y $F(a,\ell)$ satisfacen las relaciones en (3.1) tenemos que la aplicación $h \mapsto H(a,\ell)$, $e \mapsto E(a,\ell)$ y $f \mapsto F(a,\ell)$ define una representación matricial de $\mathfrak{sl}(2)$, cuyo $\mathfrak{sl}(2)$-módulo asociado se descompone como $V(a) \oplus V(a+m) \oplus \ldots \oplus V(a+\ell m)$.

Dado un número entero no negativo b, cosideramos $U_i(b)$ la matriz particionada en 4 bloques, en donde la entrada $(1,2)$ está la matriz $W_i(b)$ y todos los demás bloques 0. Se puede mostrar directamente que se cumplen las siguientes relaciones:

$$[H(b) \oplus H(b+m), U_0(b)] = mU_0(b),$$
$$[E(b) \oplus E(b+m), U_0(b)] = 0,$$
$$[F(b) \oplus F(b+m), U_i(b)] = (m-i)U_{i+1}(b).$$

Así $U_0(b), U_1(b), \ldots, U_m(b)$ forman una base para el $\mathfrak{sl}(2)$-módulo S_b isomorfo a $V(m)$. Además tenemos que $\frac{1}{i!}f^i\, U_0(b) = (-1)^i\binom{m}{i}U_i(b)$ para $0 \leq i \leq m$ es una base de S_b sobre la cual h, e, f actúa como en (3.1). Tenemos que:

$$[H(a,\ell), E_i(a,\ell)] = [H(a) \oplus H(a+m), U_i(a)] \oplus \ldots \oplus [H(a+(\ell-1)m) \oplus H(a+\ell m), U_i(a+(\ell-1)m)],$$
$$[E(a,\ell), E_i(a,\ell)] = [E(a) \oplus E(a+m), U_i(a)] \oplus \ldots \oplus [E(a+(\ell-1)m) \oplus E(a+\ell m), U_i(a+(\ell-1)m)],$$
$$[F(a,\ell), E_i(a,\ell)] = [F(a) \oplus F(a+m), U_i(a)] \oplus \ldots \oplus [F(a+(\ell-1)m) \oplus F(a+\ell m), U_i(a+(\ell-1)m)]$$

De donde:

$$[H(a,\ell), E_0(a,\ell)] = mE_0(a,\ell)$$
$$[E(a,\ell), E_0(a,\ell)] = 0$$
$$[F(a,\ell), E_i(a,\ell)] = (m-i)E_{i+1}(a,\ell)$$

Por lo tanto, $E_0(a,\ell), \ldots, E_m(a,\ell)$ es una base de un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo, en el cual actúan $H(a,\ell), E(a,\ell), F(a,\ell)$ como en (3.1).

Faltaría probar que $[E_i(a,\ell), E_j(a,\ell)] = 0$ para todo $0 \leq i,j \leq m$; por la forma como actúan e, f sobre $E_0(a,\ell), \ldots, E_m(a,\ell)$, es suficiente verificar que $[E_0(a,\ell), E_m(a,\ell)] = 0$, reduciendo el caso además al caso $\ell = 2$ pero esto es:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & E_0(a) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & E_m(a) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = 0$$

lo cual es inmediato.
Así tenemos una representación matricial de un $\mathfrak{g}$-módulo con factores del zócalo $V(a), \ldots, V(a+\ell m)$. $\square$

Nota 3.2.3. Al $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulo asociado a la representación matricial dada en el Lema 3.2.2, lo denominaremos $Z(a,\ell)$, el cual tiene sucesión admisible $V(a), V(a+m), \ldots, V(a+\ell m)$. La representación matricial dada en el lema anterior, corresponde a la base $B' = \bigcup_{i=0}^{\ell} B'_i$, donde B'_i es la base de $V(a+im)$ que cumple con las relaciones dadas en el Teorema 2.3.2 para cada $0 \leq i \leq \ell$.

Damos los siguientes ejemplos para la visualización de estos $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulos uniseriales tomando $m = 1$, usando la notación dada en la ecuación (2.5), aunque en este caso consideramos la matriz $A(h, e, f, e_0, e_1)$.

<table>
<tr><th>$Z(0,1)$</th><th>$Z(1,1)$</th><th>$Z(2,1)$</th></tr>
<tr>
<td>$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & -e_1 & e_0 \\ \hline & h & e \\ & f & -h \end{array}\right)$</td>
<td>$\left(\begin{array}{cc|ccc} h & e & -e_1 & e_0 & 0 \\ f & -h & 0 & -e_1 & e_0 \\ \hline & & 2h & 2e & 0 \\ & & f & 0 & e \\ & & 0 & 2f & -2h \end{array}\right)$</td>
<td>$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 2h & 2e & 0 & -e_1 & e_0 & 0 & 0 \\ f & 0 & e & 0 & -e_1 & e_0 & 0 \\ 0 & 2f & -2h & 0 & 0 & -e_1 & e_0 \\ \hline & & & 3h & 3e & 0 & 0 \\ & & & f & h & 2e & 0 \\ & & & 0 & 2f & -h & e \\ & & & 0 & 0 & 3f & -3h \end{array}\right)$</td>
</tr>
</table>

De la Nota 3.1.13 junto con el Teorema anterior tenemos que $Z(a,\ell)^*$ es un $\mathfrak{g}$-módulo uniserial con sucesión admisible $V(a+\ell m),\ldots,V(a)$.

Usando la acción de $\mathfrak{g}$ sobre $Z(a,\ell)^*$, tenemos los siguientes ejemplos:

<table>
<tr><th>Z(0,1)*</th><th>Z(1,1)*</th><th>Z(2,1)*</th></tr>
<tr>
<td>$\left(\begin{array}{cc|c} h & e & e_0 \\ f & -h & e_1 \\ \hline & & 0 \end{array}\right)$</td>
<td>$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2h & 2e & 0 & 2e_0 & 0 \\ f & 0 & e & e_1 & e_0 \\ 0 & 2f & -2h & 0 & 2e_1 \\ \hline & & & h & e \\ & & & f & -h \end{array}\right)$</td>
<td>$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 3h & 3e & 0 & 0 & 3e_0 & 0 & 0 \\ f & h & 2e & 0 & e_1 & 2e_0 & 0 \\ 0 & 2f & -h & e & 0 & 2e_1 & e_0 \\ 0 & 0 & 3f & -3h & 0 & 0 & 3e_1 \\ \hline & & & & 2h & 2e & 0 \\ & & & & f & 0 & e \\ & & & & 0 & 2f & -2h \end{array}\right)$</td>
</tr>
</table>

Puesto que la sucesión admisible de $Z(a,\ell)$ es $V(a),\ldots,V(a+\ell m)$ y la sucesión admisible de $Z(a,\ell)^*$ es $V(a+\ell m),\ldots,V(a)$, entonces $Z(a,\ell)$ es isomorfo a $Z(a,\ell)^*$ si y sólo si $\ell=0$.

Con estos $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales, damos el Teorema de Clasificación de los $\mathfrak{sl}(2)\ltimes V(m)$-módulos uniseriales, el cual se encuentra en [CS, Theorem 10.1. §10], este se presenta por medio de las sucesiones admisibles de los módulos uniseriales.

Teorema 3.2.4. *Sea $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2)\ltimes V(m)$ donde $m\geq 1$. Entonces, salvo el orden contrario, las siguientes son las únicas sucesiones admisibles de $\mathfrak{g}$:*

$\ell=1.$ $V(a)$.

$\ell=2.$ $V(a),V(b)$, *donde* $a+b\equiv m \pmod 2$ *y* $0\leq b-a\leq m\leq a+b$.

$\ell=3.$ $V(a),V(a+m),V(a+2m)$; *o*
$V(0),V(m),V(c)$, *donde* $c\equiv 2m \pmod 4$ *y* $c\leq 2m$.

$\ell=4.$ $V(a),V(a+m),V(a+2m),V(a+3m)$; *o*
$V(0),V(m),V(m),V(0)$, *donde* $m\equiv 0 \pmod 4$.

$\ell\geq 5.$ $V(a),V(a+m),\ldots,V(a+sm)$ *para* $s\geq 4$

Cada una de estas sucesiones de irreducibles ocurre en una y sólo una clase de isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales, excepto el caso $V(0),V(m),V(m),V(0)$, $m\equiv 0 \mod 4$. Las clases de isomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales asociadas a esta sucesión están parametrizadas por los números complejos.

3.3. Álgebras asociativas versus álgebras de Lie.

Las definiciones y ejemplos en esta sección sobre álgebras Asociativas fueron sacadas de [A], al igual que de [ARS].

Consideremos A un álgebra asociativa con unidad de dimensión finita. Un conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de elementos de A se denomina un *conjunto de idempotentes ortogonales primitivos* de A, si cumple con las siguientes condiciones:

i. (Idempotencia) Cada e_i es idempotente, es decir, $e_i^2 = e_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

ii. (Ortogonalidad) $e_i\, e_j = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$ con $i \neq j$.

iii. (Primitivo) Cada e_i no puede ser escrito como suma de dos o más idempotentes ortogonales no nulos.

iv. $1 = e_1 + \ldots + e_n$.

Esto nos permite descomponer al álgebra A vista como A-módulo derecho como:

$$A = e_1\, A \oplus \ldots \oplus e_n\, A$$

donde cada $e_i\, A$ es un A-módulo derecho indescomponible, puesto que cada e_i es primitivo.

Definición 3.3.1. *Un álgebra asociativa con unidad A se denomina* indescomponible*, si* 0 *y* 1 *son los únicos idempotentes centrales de A, donde un idempotente e se denomina* central*, si $e\, a = a\, e$ para todo $a \in A$.*

Si A es un álgebra asociativa de dimensión finita la dotamos de estructura de A-módulo derecho, entonces A admite una descomposición en suma directa $A = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$, donde $P_1, \ldots, P_n$ son ideales derechos indescomponibles de A. Por lo tanto, para cada $1 \leq i \leq n$ existen $e_i \in P_i$ tales que $1 = e_1 + \ldots + e_n$, puesto que los $e_j = e_1 e_j + \ldots + e_i e_j + \ldots + e_n e_j$ para $1 \leq j \leq n$, entonces $e_j = \delta_{ij}\, e_i e_j$ y por lo tanto los e_i's son idempotentes y ortogonales. Además, como P_i es indescomponible tenemos que los e_i's son primitivos y por lo tanto $P_i = e_i A$ para $1 \leq i \leq n$. Así, el conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto de idempotentes ortogonales de A.

Recíprocamente, si $A = e_1 A \oplus \ldots \oplus e_n A$, donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto de idempotentes primitivos ortogonales, entonces los A-módulos derechos $e_i\, A$ son proyectivos indescomponibles para todo $1 \leq i \leq n$. Puesto que la descomposición de A es única salvo permutaciones, tenemos que los conjuntos de idempotentes primitivos ortogonales son únicos salvo permutaciones.

Si A es un álgebra asociativa, tenemos el álgebra opuesta A^{op} la cual como conjunto coincide con A y tiene por producto $a \cdot_{op} b = b\, a$ para todo $a, b \in A$.
Además, tenemos que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto de idempotentes ortogonales primitivos de A si y sólo si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto de idempotentes ortogonales primitivos de A^{op}.

Ejemplos 3.3.2. Consideremos el álgebra asociativa

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{33} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Entonces un conjunto de idempotentes primitivos ortogonales de A es:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además, tenemos que:

$$e_1\,A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{13} \in \mathbb{C} \right\},$$

$$e_2\,A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a_{22} \in \mathbb{C} \right\},$$

$$e_3\,A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} : a_{33} \in \mathbb{C} \right\}.$$

Los cuales son A-módulos derechos proyectivos indescomponibles.

En este caso se tiene que:

$$e_1\,A^{op} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a_{11} \in \mathbb{C} \right\},$$

$$e_2\,A^{op} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a_{12}, a_{22} \in \mathbb{C} \right\},$$

$$e_3\,A^{op} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} : a_{13}, a_{33} \in \mathbb{C} \right\}$$

que son A^{op}-módulos derechos proyectivos indescomponibles.

Un álgebra asociativa A se denomina *básica*, si $e_i\,A \not\simeq e_j\,A$ para todo $i \neq j$. La siguiente definición se puede encontrar en [A, Definition V.2.3. §V.2].

Definición 3.3.3. *Un álgebra asociativa A se denomina* serial derecha*, si cada A-módulo derecho proyectivo indescomponible es uniserial. Un álgebra asociativa A se denomina* serial izquierda*, si cada A-módulo izquierdo proyectivo indescomponible es uniserial.*

Según la definición anterior un álgebra asociativa A es serial derecha, si los A-módulos derechos $e_i A$ son uniseriales para un conjunto de primitivos idempotentes ortogonales $\{e_1, \dots, e_n\}$ y por lo tanto A visto como A-módulo derecho se descompone como suma de A-módulos uniseriales. Además, un álgebra asociativa A es serial derecha (resp. izquierda) si y sólo si A^{op} es serial izquierda (resp. derecha).

Un álgebra asociativa A de dimensión finita se denomina *álgebra de Nakayama*, si A es serial derecha y serial izquierda. Uno de los resultados que se tienen para las álgebras de Nakayama es sacado de [ARS, Theorem VI.2.1], el cual es válido para álgebras Artinianas en general.

Teorema 3.3.4. *Se tiene lo siguiente para un álgebra de Nakayama A:*

i. Cada A-módulo indescomponible es uniserial, y por lo tanto es un factor de un módulo proyectivo indescomponible.

ii. A tiene una cantidad finita de A-módulos derechos indescomponibles.

Nota 3.3.5. En la definición de álgebra de Nakayama, no es necesario que el álgebra A sea de dimensión finita, en [ARS, Chapter V. §2] la definición se da en un concepto más general sobre álgebra Artiniana.

Gracias a la antisimetría en las álgebras de Lie, no es necesario hacer la distinción entre módulos derechos y módulos izquierdos. Sin embargo, el Teorema de Nakayama mencionado recién no puede extenderse a álgebras de Lie como muestra el siguiente ejemplo.

Recordamos que el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$ está descrita por la base $B = \{e_0, \dots, e_m, e, h, f\}$, con $\{e, h, f\}$ la base estándar de $\mathfrak{sl}(2)$ y $\{e_0, \dots, e_m\}$ es base de $V(m)$ donde e_0 es un vector de peso máximo m y $e_i = \frac{1}{i!} f^i\, e_0$ para cada $0 \leq i \leq m$, lo que nos conlleva a las relaciones:

$$\begin{aligned} [h, e_i] &= (m - 2i)\, e_i, & [e, e_i] &= (m - (i-1))\, e_{i-1}, \\ [f, e_i] &= (i+1)\, e_{i+1}, & [e_i, e_j] &= 0 \end{aligned}$$

para cada $0 \leq i \leq m$ con $e_{-1} = e_{m+1} = 0$. Por lo tanto la representación adjunta $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ está dada por la representación matricial en términos de la base B por:

$$\left(\begin{array}{cccccc||ccc}
mh & me & 0 & \dots & 0 & 0 & -me_1 & -me_0 & 0 \\
f & (m-2)h & (m-1)e & \dots & 0 & 0 & -(m-1)e_2 & -(m-2)e_1 & -e_0 \\
0 & 2f & (m-4)h & & 0 & 0 & -(m-2)e_3 & -(m-4)e_2 & -2e_1 \\
& \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & (m-1)f & -(m-2)h & e & me_m & (m-2)e_{m-1} & -(m-1)e_{m-2} \\
0 & 0 & \dots & 0 & mf & -mh & 0 & -e_m & -me_{m-1} \\
\hline\hline
& & & & & & 2h & 2e & 0 \\
& & & & & & f & 0 & e \\
& & & & & & 0 & 2f & -2h
\end{array}\right).$$

De donde $\mathfrak{g}$ con la representación adjunta es un $\mathfrak{g}$-módulo uniserial con sucesión admisible $V(m), V(2)$ como en el Teorema 3.2.4.

Por lo tanto tenemos un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que es uniserial como $\mathfrak{g}$-módulo con la representación adjunta. Sin embargo, los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulos cíclicos clasificados por A. Piard en [Pi], los cuales son ejemplos de módulos indescomponibles que no son uniseriales. Como mostraremos en el Capítulo 6, $Z(0,1) \otimes Z(a,1)$ con a un entero positivo, son $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulos indescomponibles que no son ni uniseriales, ni cíclicos perfectos para todo $m \geq 1$.

Consideremos los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulos uniseriales $Z(0,1)$ y $Z(1,1)$, donde $Z(0,1) =_{\mathfrak{sl}(2)} V(0) \oplus V(1)$ y $Z(1,1) =_{\mathfrak{sl}(2)} V(1) \oplus V(2)$ los cuales tienen representaciones matriciales de la forma:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & -e_1 & e_0 \\ \hline & h & e \\ & f & -h \end{array}\right) \text{ y } \left(\begin{array}{cc|ccc} h & e & -e_1 & e_0 & 0 \\ f & -h & 0 & -e_1 & e_0 \\ \hline & & 2h & 2e & 0 \\ & & f & 0 & e \\ & & 0 & 2f & -2h \end{array}\right)$$

respectivamente. Como se puede ver en el Apéndice 6.2, $Z(0,1) \otimes Z(1,1)$ es indescomponible y el cual tiene representación matricial:

$$\left(\begin{array}{cc||ccc||ccc|c||cccc|cc}
h & e & -e_1 & e_0 & 0 & -e_1 & e_0 & 0 & e_1 & & & & & & \\
f & -h & 0 & -e_1 & e_0 & 0 & -e_1 & e_0 & e_0 & & & & & & \\
\hline\hline
 & & 2h & 2e & 0 & & & & & -e_1 & e_0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}e_1 & 0 \\
 & & f & 0 & e & & & & & & -e_1 & e_0 & 0 & e_0 & e_1 \\
 & & 0 & 2f & -2h & & & & & 0 & 0 & -e_1 & e_0 & 0 & \frac{1}{2}e_0 \\
\hline\hline
 & & & & & 2h & 2e & 0 & & -e_1 & e_0 & 0 & 0 & -e_1 & 0 \\
 & & & & & f & 0 & e & & 0 & -e_1 & e_0 & 0 & -\frac{1}{2}e_0 & -\frac{1}{2}e_1 \\
 & & & & & 0 & 2f & -2h & & 0 & 0 & -e_1 & e_0 & 0 & -e_0 \\
\hline
 & & & & & & & & 0 & & & & & -\frac{1}{2}e_1 & \frac{1}{2}e_0 \\
\hline\hline
 & & & & & & & & & 3h & 3e & 0 & 0 & & \\
 & & & & & & & & & f & h & 2e & 0 & & \\
 & & & & & & & & & 0 & 2f & -h & e & & \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 3f & -3h & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & h & e \\
 & & & & & & & & & & & & & f & -h
\end{array}\right)$$

3.4. Propiedades de los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulos.

En esta sección todos los resultados se pueden encontrar en [Pi], excepto el Lema 3.4.1 que es una generalización del Lema 1 en [Pi, Lemme 1. §1. Pág. 4] y el Lema 3.4.2 que es una generalización del Lema 2 en [Pi, Lemme 2. §1. Pág. 4].

Consideremos $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con descomposición de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$, donde $\mathfrak{r}$ es el radical soluble de $\mathfrak{g}$ y V un $\mathfrak{g}$-módulo. Si I es un ideal de $\mathfrak{g}$ y W es un subespacio vectorial de V, denotamos por $I(W)$ el subespacio vectorial de V dado por:

$$I(W) = span\{g\,w : g \in I \text{ y } w \in W\}.$$

Si el ideal I tiene una base $\{g_1, \ldots, g_s\}$, entonces $I(W) = g_1\, W + \ldots + g_s\, W$.

Lema 3.4.1. *Sean V un $\mathfrak{g}$-módulo e I un ideal de $\mathfrak{g}$, si W es un $\mathfrak{s}$-submódulo de V. Entonces $I(W)$ es un $\mathfrak{s}$-submódulo de V.*

Prueba: Dados $g \in I$ y $w \in W$, para cada $s \in \mathfrak{s}$ tenemos $s\,(g\,w) = g\,(s\,w) + [s, g]\,w$. Puesto que W es un $\mathfrak{s}$-submódulo de V, $s\,w \in W$ e I es un ideal de $\mathfrak{g}$, entonces $[s, g] \in I$. Por lo tanto $s\,(g\,w) \in I(W)$ para todo $s \in \mathfrak{s}$. Así $I(W)$ es un $\mathfrak{s}$-submódulo de V. $\square$

Puesto que $I(W)$ es un subespacio de V, definimos $I^n(W) = I^{n-1}(I(W))$ para todo $n \geq 2$.

Lema 3.4.2. *Consideremos $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie perfecta con descomposición de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$, donde $\mathfrak{r}$ es el radical soluble de $\mathfrak{g}$ y V un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{r}^n(V) = 0$.*

Prueba: Consideremos una serie de composición $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = V$ de V, es decir, V_i/V_{i-1} es irreducible para todo $1 \leq i \leq m$. Tomamos $B = B_1 \cup \ldots \cup B_m$ una base de V tal que $B_1 \cup \ldots \cup B_i$ es una base de V_i para $1 \leq i \leq m$. Puesto que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie perfecta, por el Lema 3.1.10 $\mathfrak{r}(V_i) \subset V_{i-1}$ para cada $1 \leq i \leq m$. Por lo tanto $M_B(r)$ es una matriz estrictamente superior para todo $r \in \mathfrak{r}$, donde $M_B(r)$ denota la representación matricial en la base B. De donde $M_B(r)^d = 0$ para todo $r \in \mathfrak{r}$ con $d = \dim(V)$, así $\mathfrak{r}^d(V) = 0$. $\square$

De ahora en adelante fijamos el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathfrak{r}$, donde $\mathfrak{r} = V(1)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo 1 con base $\{e_0, e_1\}$ a menos que se diga lo contrario. Si W es un subespacio de un $\mathfrak{g}$-módulo V, entonces $\mathfrak{r}(W) = e_0\, W + e_1\, W$.

La siguiente proposición (ver [Pi, Porposition I. Pág. 5]) nos muestra la estructura que tiene $\mathfrak{r}(V(a))$, donde $V(a)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo irreducible de un $\mathfrak{g}$-módulo V.

Proposición 3.4.3. *Sea V un $\mathfrak{g}$-módulo. Si $V(a)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo irreducible de peso máximo a de V con base $\{v_0, v_1, \ldots, v_a\}$, donde $v_i = \frac{1}{i!} f^i\, v_0$ para todo $0 \leq i \leq a$. Se tiene:*

i. *Si $e_0\, v_0 = e_1\, v_0 = 0$, entonces $\mathfrak{r}(V(a)) = 0$.*

ii. *Si $e_0\, v_0 = 0$ y $e_1\, v_0 \neq 0$, entonces $\mathfrak{r}(V(a))$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo irreducible de V de peso máximo $a - 1$ con base*

$$\{e_1\, v_0, e_1\, v_1, \ldots, e_1\, v_i, \ldots, e_1\, v_{a-1}\}$$

con $e_1\, v_i = -e_0\, v_{i+1}$ para todo $0 \leq i \leq a - 1$.

iii. *Si $e_0\, v_0 \neq 0$ y $e_0\, v_1 - a e_1\, v_0 = 0$, entonces $\mathfrak{r}(V(a))$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo $a + 1$ con base*

$$\left\{ e_0\, v_0, \frac{a+1}{a} e_0\, v_1, \ldots, \frac{a+1}{a-(i-1)} e_0\, v_i, \ldots, (a+1) e_0\, v_a, e_1\, v_a \right\}$$

con $\frac{1}{a-(i-1)}e_0\,v_i = \frac{1}{i}e_1\,v_{i-1}$ *para todo* $1 \leq i \leq a$.

iv. *Si* $e_0\,v_0 \neq 0$ *y* $e_0\,v_1 - ae_1\,v_0 \neq 0$, *entonces* $\mathfrak{r}(V(a)) \simeq V(a+1) \oplus V(a-1)$ *donde* $e_0\,v_0$ *es un vector de peso máximo* $a+1$ *y* $e_0\,v_1 - ae_1\,v_0$ *es un vector de peso máximo* $a-1$. *Además,* $\{e_0\,v_0, \ldots, e_0\,v_i + e_1\,v_{i-1}, \ldots, e_0\,v_a + e_1\,v_{a-1}, e_1\,v_a\}$ *es una base de* $V(a+1)$ *en* $\mathfrak{r}(V(a))$ *y* $\{e_0\,v_1 - ae_1\,v_0, \ldots, (i+1)e_0\,v_{i+1} - (a-i)e_1\,v_i, \ldots, ae_0\,v_a - e_1\,v_{a-1}\}$ *es una base de* $V(a-1)$ *en* $\mathfrak{r}(V(a))$.

Prueba:

i. Puesto que $e_0\,v_i = \frac{1}{i}\left(f\left(e_0\,v_{i-1}\right) - e_1\,v_{i-1}\right)$ y $e_1\,v_i = \frac{1}{i}f(e_1 v_{i-1})$. Por lo tanto, es suficiente mostrar que $e_0\,v_1 = e_1\,v_1 = 0$ y el resultado se sigue inductivamente. Puesto que $e_0\,v_1 = f\left(e_0\,v_0\right) - e_1\,v_0 = 0$ y $e_1\,v_1 = f(e_1 v_0) = 0$ por hipótesis, entonces $e_0\,v_1 = 0$ como queríamos probar.

ii. Como $e_1\,v_0 \neq 0$, tenemos que:

$$h\left(e_1\,v_0\right) = e_1\left(h\,v_0\right) + [h, e_1]\,v_0 = (a-1)e_1\,v_0.$$

Además por hipótesis $e\left(e_1\,v_0\right) = e_0\,v_0 = 0$, por lo tanto $e_1\,v_0$ es un vector de peso máximo $a-1$.
Por otro lado, como $f\left(e_1\,v_0\right) = e_1\,v_1$, entonces para todo $0 \leq i \leq a$ tenemos $\frac{1}{i!}f^i\left(e_1\,v_0\right) = e_1\,v_i$. Como $e_0\,v_0 = 0$ se tiene que $f\left(e_0\,v_0\right) = 0$. De donde $-e_0\,v_1 = e_1\,v_0$. Supongamos que $-e_0\,v_i = e_1\,v_{i-1}$ para $1 \leq i < a$. Entonces:

$$-e_0\,v_{i+1} = e_1\left(ev_{i+1}\right) - e\left(e_1\,v_{i+1}\right).$$

Puesto que $\frac{1}{i!}f^i\left(e_1\,v_0\right) = e_1\,v_i$, entonces de la ecuación anterior obtenemos que:

$$-e_0\,v_{i+1} = (a-i)e_1\,v_i - (a-1-i)e_1 v_i = e_1\,v_i.$$

iii. Procedemos semejante a la parte *ii.* Como:

$$h\left(e_0\,v_0\right) = e_0\left(h\,v_0\right) + [h, e_0]\,v_0 = (a+1)e_0\,v_0$$

y además es claro que $e\left(e_0\,v_0\right) = 0$, de donde $e_0\,v_0$ es un vector de peso máximo $a+1$.
Por otro lado, como $e_0\,v_1 = ae_1\,v_0$, para todo $0 \leq i \leq a$ tenemos que $e_0\,v_{i+1} = \frac{a-i}{i+1}e_1\,v_i$, de donde:

$$\frac{1}{i!}f^i\left(e_0\,v_0\right) = \frac{a+1}{a-i+1}e_0\,v_i = \frac{a+1}{i}e_1\,v_{i-1}.$$

iv. Como en *iii.*, $e_0\,v_0$ es un vector de peso máximo $a+1$, puesto que:

$$\begin{aligned} h\left(e_0\,v_1 - ae_1\,v_0\right) =& e_0\left(h\,v_1\right) + [h, e_0]\,v_1 - a\{e_1\left(h\,v_0\right) + [h, e_1]\,v_0\} \\ =& (a-1)(e_0\,v_1 - ae_1\,v_0) \end{aligned}$$

y $e\,(e_0\,v_1 - ae_1\,v_0) = 0$, entonces $e_0\,v_1 - ae_1\,v_0$ es un vector de peso máximo $a-1$. Por las relaciones que cumple la base $\{v_0, \ldots, v_a\}$ y $\{e_0, e_1\}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i!} f^i\,(e_0\,v_0) =& e_0\,v_i + e_1\,v_{i-1} \\
\frac{1}{i!} f^i\,(e_0\,v_1 - ae_1\,v_0) =& (i+1)e_0\,v_{i+1} - (a-i)e_1\,v_i
\end{aligned}$$

lo cual prueba la proposición. $\square$

Para darnos una idea de lo que pasa en el proposición anterior tenemos los siguientes ejemplos que describen el comportamiento de los $\mathfrak{sl}(2)$-submódulos irreducibles de un $\mathfrak{g}$-módulo V.

Ejemplos 3.4.4. Sea V un $\mathfrak{g}$-módulo.

1. Si $V(4)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo de V tal que $e_0\,v_0 \neq 0$ y $e_0\,v_1 - 4e_1\,v_0 = 0$, donde v_0 es un vector de peso máximo 4, podemos representarlo gráficamente como:

$$4 \bullet\!\longrightarrow\!\bullet\ 5\ .$$

   Una representación matricial gracias a la Proposición 3.4.3 está dada por:

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccccc}
5h & 5e & 0 & 0 & 0 & 0 & e_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
f & 3h & 4e & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5}e_1 & \frac{4}{5}e_0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2f & h & 3e & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5}e_1 & \frac{3}{5}e_0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3f & -h & 2e & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5}e_1 & \frac{2}{5}e_0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4f & -3h & e & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5}e_1 & \frac{1}{5}e_0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5f & -5h & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\
\hline
 & & & & & & 4h & 4e & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & f & 2h & 3e & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 2f & 0 & 2e & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 3f & -2h & e \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 4h & -4h
\end{array}\right).$$

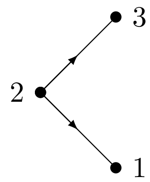
2. Si $V(4)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo de V tal que $e_0\,v_0 = 0$ y $e_1\,v_0 \neq 0$, donde v_0 es un vector de peso máximo 4, podemos representarlo gráficamente como:

$$4 \bullet\!\longrightarrow\!\bullet\ 3\ .$$

Y una representación matricial está dada por:

$$
\left(\begin{array}{cccc|ccccc}
3h & 3e & 0 & 0 & e_1 & -e_0 & 0 & 0 & 0 \\
f & h & 2e & 0 & 0 & e_1 & -e_0 & 0 & 0 \\
0 & 2f & -h & e & 0 & 0 & e_1 & -e_0 & 0 \\
0 & 0 & 3f & -3h & 0 & 0 & 0 & e_1 & -e_0 \\
\hline
 & & & & 4h & 4e & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & f & 2h & 3e & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 2f & 0 & 2e & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 3f & -2h & e \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 4f & -4h
\end{array}\right).
$$

3. Si $V(2)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo de V tal que $e_0\, v_0 \neq 0$ y $e_0\, v_1 - 4e_1\, v_0 \neq 0$, donde v_0 es un vector de peso máximo 2, podemos representarlo gráficamente como:



.

Una representación matricial está dada por:

$$
\left(\begin{array}{cc|cccc|ccc}
h & e & & & & & e_1 & -e_0 & 0 \\
f & -h & & & & & 0 & e_1 & -e_0 \\
\hline
 & & 3h & 3e & 0 & 0 & 3e_0 & 0 & 0 \\
 & & f & h & 2e & 0 & e_1 & 2e_0 & 0 \\
 & & 0 & 2f & -h & e & 0 & 2e_1 & e_0 \\
 & & 0 & 0 & 3f & -3h & 0 & 0 & 3e_1 \\
\hline
 & & & & & & 2h & 2e & 0 \\
 & & & & & & f & 0 & e \\
 & & & & & & 0 & 2f & -2h
\end{array}\right).
$$

Debido a la conmutatividad de e_0 con e_1 y a la Proposición 3.4.3 tenemos el siguiente lema cuya demostración se tiene de manera recursiva, los detalles de la demostración se encuentran en [Pi, Lemme 4. Lemme 5. §I. Pág. 8 y 9].

Lema 3.4.5. *Sean V un $\mathfrak{g}$-módulo y $V(a)$ un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo irreducible de V con un vector de peso máximo v_0.*

i. Si $e_0\, v_0 = 0$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{r}^{k_0}(V(a)) = 0$ y $\mathfrak{r}^k(V(a))$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo irreducible de peso máximo $a - k$ para todo $0 \leq k < k_0$ con base $\{e_0^k\, v_k, \ldots, e_0^k\, v_{k+i}, \ldots, e_0^k\, v_a\}$, donde $e_0^k\, v_{k+i} = (-1)^k e_1^k\, v_i$ para todo $k \leq i \leq a$.

ii. Si $e_0 v_1 - ae_1 v_0 = 0$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{r}^{k_0}(V(a)) = 0$ y $\mathfrak{r}^k(V(a))$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo irreducible de peso máximo $a + k$ para todo $0 \leq k < k_0$ donde $e_0^k v_0$ es un vector de peso máximo $a + k$.

Denotaremos por $\mathfrak{r}_+(V(a))$ y $\mathfrak{r}_-(V(a))$ los subespacios de $\mathfrak{r}(V(a))$ generados por $e_0 v_0$ y $ae_1 v_0 - e_0 v_1$ respectivamente.

Puesto que $\mathfrak{r}_+(V(a))$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo irreducible de peso máximo $a + 1$, donde $e_0 v_0$ es un vector de peso máximo $a + 1$. Entonces $\mathfrak{r}_-(\mathfrak{r}_+(V(a)))$ es generado por $(a + 1)e_1 (e_0 v_0) - e_0 (f (e_0 v_0))$. Además $\mathfrak{r}_-(V(a))$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo $a - 1$, de donde $ae_1 v_0 - e_0 v_1$ es un vector de peso máximo a. Entonces $\mathfrak{r}_+(\mathfrak{r}_-(V(a)))$ generado por $e_0 (ae_1 v_0 - e_0 v_1)$. Ya que $[e_0, e_1] = 0$ tenemos que:

$$(a + 1)e_1 (e_0 v_0) - e_0 (f (e_0 v_0)) = e_0 (ae_1 v_0 - e_0 v_1),$$

por lo tanto:

$$\mathfrak{r}_+(\mathfrak{r}_-(V(a))) = \mathfrak{r}_-(\mathfrak{r}_+(V(a))). \tag{3.5}$$

Proposición 3.4.6. *Sean V un $\mathfrak{g}$-módulo y $V(a)$ un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo de V de peso máximo a. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^{k_0}(V(a)) = 0$ y los subespacios $(\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^k(V(a))$ con $k = 0, \ldots, k_0 - 1$ generan $\mathfrak{sl}(2)$-módulos irreducibles de peso máximo a todos distintos.*

Prueba: Puesto que $(\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^k(V(a)) \subset \mathfrak{r}^k(V)$ para todo k, entonces por el Lema 3.4.2 tenemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^{k_0}(V(a)) = 0$ y para cada $0 \leq k < k_0$, $(\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^k(V(a))$ son $\mathfrak{sl}(2)$-módulos de peso máximo a. Sean $v_{0,k}$ vectores de peso máximo a en $(\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^k(V(a))$ para cada $0 \leq k < k_0$.

Supongamos que existe $k_1 < k_0$ y escalares $\lambda_{k_1+1}, \ldots, \lambda_{k_0-1} \in \mathbb{C}$ tales que:

$$v_{0,k_1} = \lambda_{k_1+1} v_{0,k_1+1} + \ldots + \lambda_{k_0-1} v_{0,k_0-1},$$

por lo tanto $v_{0,k_1} \in \displaystyle\sum_{k=k_1+1}^{k_0-1} (\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^k(V(a))$, de donde:

$$(\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^{k_1}(V(a)) \subset \sum_{k=k_1+1}^{k_0-1} (\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^k(V(a))$$

lo que implica que $(\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^{k_0-1}(V(a)) \subset \displaystyle\sum_{k=k_1+1}^{k_0-1} (\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^{k+k_0-(k_1+1)}(V(a))$, puesto que $k + k_0 - (k_1 + 1) \geq k_0$ para todo $k_1 + 1 \leq k \leq k_0 - 1$. Entonces la suma de la derecha es cero y así $(\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^{k_0-1}(V(a)) = 0$ lo cual contradice la definición de k_0, lo que finaliza la demostración. □

3.5. Clasificación de los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulos cíclicos perfectos.

En esta sección todos los resultados se pueden encontrar en [Pi], excepto el Teorema 3.5.2, el cual es una generalización de [Pi, Proposition. §I. Pág. 10]. Nuestro principal interés en esta sección es describir la clasificación de los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulos cíclicos perfectos dada por A. Piard.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie perfecta con descomposición de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$, donde $\mathfrak{r}$ es el radical soluble de $\mathfrak{g}$. Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita, entonces el subespacio $\mathfrak{r}(V)$ es un $\mathfrak{s}$-submódulo de V. Por el Teorema de Weyl este posee un complemento.

Definición 3.5.1. *Sea V un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita sobre un álgebra de Lie perfecta. Un $\mathfrak{s}$-submódulo W de V se denomina* subespacio generador de V, *si $V =_{\mathfrak{s}} W \oplus \mathfrak{r}(V)$.*

Un resultado que usaremos más adelante y que nos describe la estructura que tiene un $\mathfrak{g}$-módulo sobre un álgebra de Lie perfecta por medio de un subespacio generador es el siguiente teorema, el cual es una generalización cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$ dada en [Pi, Proposition. §I. Pág. 10].

Teorema 3.5.2. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie perfecta. Si W es un subespacio generador de un $\mathfrak{g}$-módulo V. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\mathfrak{r}(V) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathfrak{r}^k(W).$$

Prueba: Dado $v \in V$, existen $w_0 \in V$ y $x_0 \in \mathfrak{r}(V)$ tales que $v = w_0 + x_0$. Por lo tanto para cada $r \in \mathfrak{r}$ se tiene que $r\,v = r\,w_0 + r\,x_0$, de donde $\mathfrak{r}(V) \subset \mathfrak{r}(W) \oplus \mathfrak{r}^2(V)$. Puesto que la otra contenencia se tiene trivialmente, entonces $\mathfrak{r}(V) = \mathfrak{r}(W) \oplus \mathfrak{r}^2(V)$. Procediendo de manera recursiva, tenemos que $\mathfrak{r}^k(V) = \mathfrak{r}^k(W) \oplus \mathfrak{r}^{k+1}(V)$ para todo k. Por lo tanto $\mathfrak{r}(V) = \mathfrak{r}(W) + \mathfrak{r}^2(W) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{r}^k(W) \oplus \mathfrak{r}^{k+1}(V)$. Por el Lema 3.4.2, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{r}^n(V) = 0$, de donde $\mathfrak{r}(V) = \mathfrak{r}(W) \oplus \mathfrak{r}^2(W) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{r}^n(W)$. □

Recordamos que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ denota la envolvente universal del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ vista en §2.1. La demostración del siguiente resultado se puede encontrar en [Ca2, Lemma 3.4. §3].

Teorema 3.5.3. *Si V es un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita sobre un álgebra de Lie perfecta con descomposición de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i. Existe un $\mathfrak{s}$-módulo irreducible W de V tal que $V = W \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{g})(\mathfrak{r}(W))$.

ii. Existe un $\mathfrak{s}$-módulo irreducible W de V tal que $V = \mathcal{U}(\mathfrak{g})(W)$.

iii. Existe un $\mathfrak{s}$-módulo irreducible W que es un subespacio generador de V.

iv. $V/\mathfrak{r}(V)$ *es un* $\mathfrak{s}$*-módulo irreducible.*

Este teorema motiva la siguiente definición.

Definición 3.5.4. *Sea* V *un* $\mathfrak{g}$*-módulo de dimesión finita sobre un álgebra de Lie perfecta con descomposición de Levi* $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$*. Denominamos a* V *un* $\mathfrak{g}$-módulo cíclico perfecto, *si existe un subespacio generador* W *que es un* $\mathfrak{s}$*-submódulo irreducible de* V*.*

Nota 3.5.5. En el caso en el que la parte semisimple de $\mathfrak{g}$ sea $\mathfrak{sl}(2)$, si V es un $\mathfrak{g}$-módulo cíclico perfecto, entonces un espacio generador de V es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de algún peso máximo. Además si V es un $\mathfrak{g}$-módulo cíclico perfecto y v es un vector de peso máximo en un subespacio generador de V. Entonces $V = \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$, es decir, V es un $\mathfrak{g}$-módulo cíclico propiamente dicho.

Lema 3.5.6. *[Pi, Proposition. §I. Pág. 11]. Sean* V *un* $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$*-módulo de dimensión finita y* $V(a)$ *un* $\mathfrak{sl}(2)$*-submódulo irreducible de peso máximo* a *de* V*. La sucesión de números naturales* $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k)$*; es finita, decreciente y* $k \leq a$*. Donde* ℓ_i *es el menor entero tal que:*

$$\mathfrak{r}_+^{\ell_i}(\mathfrak{r}_-^{i-1}(V(a))) = 0$$

con $\mathfrak{r}_-^{i-1}(V(a)) \neq 0$.

Prueba: La sucesión es finita ya que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{r}^k(V(a)) = 0$.
Puesto que para cada $1 < i \leq k$, se tiene que:

$$\mathfrak{r}_+^{\ell_{i-1}}(\mathfrak{r}_-^{i-1}(V(a))) = \mathfrak{r}_+^{\ell_{i-1}}(\mathfrak{r}_-(\mathfrak{r}_-^{i-2}(V(a)))),$$

, como $\mathfrak{r}_-$ y $\mathfrak{r}_+$ conmutan por (3.5), entonces:

$$\mathfrak{r}_+^{\ell_{i-1}}(\mathfrak{r}_-^{i-1}(V(a))) = \mathfrak{r}_-(\mathfrak{r}_+^{\ell_{i-1}}(\mathfrak{r}_-^{i-2}(V(a)))) = 0,$$

por la definición de ℓ_{i-1}. Además como ℓ_i es el natural más pequeño tal que $\mathfrak{r}_+^{\ell_i}(\mathfrak{r}_-^{i-1}(V(a)))$, entonces $\ell_i \leq \ell_i$ para todo $1 \leq i \leq k$. $\square$

Proposición 3.5.7. *[Pi, Proposition. §I. Pág. 11]. Las sucesiones correspondientes a dos subespacios generadores* $V(a)$ *y* $V(b)$ *de un* $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$*-módulo cíclico perfecto* V *son identicas.*

Prueba: Puesto que $V(a)$ y $V(b)$ son dos subespacios generadores de V, entonces $a = b$. Los $\mathfrak{sl}(2)$-submódulos irreducibles del mismo peso máximo a está incluidos en $V(a) \oplus \bigoplus_i (\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^i(V(a))$ por Proposición 3.4.6, por lo tanto:

$$V(b) \subset V(a) \oplus \bigoplus_i (\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^i(V(a)).$$

De igual manera:

$$V(a) \subset V(b) \oplus \bigoplus_i (\mathfrak{r}_+ \circ \mathfrak{r}_-)^i(V(b)).$$

Por lo tanto $\mathfrak{r}_+^n(\mathfrak{r}_-^i(V(a))) = 0$ si y sólo si $\mathfrak{r}_+^n(\mathfrak{r}_-^i(V(b))) = 0$ para todo i, así $\ell_i = \ell_i'$, donde $(\ell_1, \dots, \ell_k)$ es la sucesión correspondiente a $V(a)$ y $(\ell_1', \dots, \ell_k')$ es la sucesión correspondiente a $V(b)$. $\square$

De la proposición anterior a cada $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulo cíclico perfecto podemos asignarle la sucesión $(a; \ell_1, \dots, \ell_k)$, donde a es el peso máximo de un espacio generador. Además nos muestra que existe una aplicación F de todas las clases de isomorfismos de $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulos cíclicos perfectos en el conjunto de sucesiones finitas de enteros $(a; \ell_1, \dots, \ell_k)$, donde a es un entero no negativo, $k \leq a$ y $0 < \ell_{i+1} \leq \ell_i$ para todo $1 \leq i \leq k$.

La demostración del teorema de clasificación de los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulos cíclicos perfectos se encuentra en [Pi, Theoreme. §I. Pág. 12].

Teorema 3.5.8. *Existe una aplicación biyectiva entre las clases de equivalencia de los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulos cíclicos perfectos de dimensión finita y las sucesiones de números enteros $(a; \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k)$ con a un entero no negativo, $0 < \ell_{i+1} \leq \ell_i$ para todo $1 \leq i \leq k$ y tal que $k \leq a$.*

Nota 3.5.9. Notar que el $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulo uniserial $Z(a, \ell)$ está en correspondencia con la sucesión $(a + \ell; 0, 0, \dots, 0)$ con $\ell + 1$ ceros. Además, $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulo uniserial $Z(a, \ell)^*$ está en correspondencia con las sucesión $(a; \ell)$.

4 Zócalo de productos tensoriales de $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulos uniseriales.

Como vimos en §3.2, la clasificación de los $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulos uniseriales está dada en su mayoría por los $Z(a, \ell)$ y sus correspondientes duales $Z(a, \ell)^*$, salvo algunos casos excepcionales dada por L. Cagliero y F. Szechtman en [CS]. En este capítulo describiremos el zócalo de cada uno de los productos tensoriales $Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell')$, $Z(a, \ell)^* \otimes Z(b, \ell')^*$ y $Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell')^*$.

Para fijar notación, en lo que sigue de este capítulo, $\mathfrak{g}$ denotará el álgebra de Lie con descomposición de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathfrak{r}$, donde $\mathfrak{r} = V(m)$ es el $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo $m \geq 1$. Esta álgebra de Lie tiene una base $\{h, e, f, e_0, e_1, \ldots, e_m\}$, donde $\{h, e, f\}$ es la base estándar de $\mathfrak{sl}(2)$, la cual cumple con la ecuación (2.3) y $\{e_0, e_1, \ldots, e_m\}$ es base de $\mathfrak{r}$ tal que e_0 es un vector de peso máximo m y $e_i = \frac{1}{i!} f^i\, e_0$. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ cumple con las relaciones:

$$
\begin{aligned}
[h, e_i] &= (m - 2i)e_i, & [e, e_i] &= (m - (i-1))e_{i-1}, \\
[f, e_i] &= (i+1)e_{i+1}, & [e_i, e_j] &= 0,
\end{aligned}
$$

donde $0 \leq i, j \leq m$ y $e_{-1} = 0 = e_{m+1}$.

Nota 4.0.1. Puesto que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ como espacio vectorial, donde $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(2)$ y $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{r}$. Las relaciones anteriores sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, nos indican que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = \mathfrak{g}_0$, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_1$ y $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = 0$. Por lo tanto, $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie graduada con una graduación $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.

Consideramos el $\mathfrak{g}$-módulo uniserial $Z(a, \ell)$ con a, ℓ enteros no negativos, el cual posee sucesión admisible $V(a), V(a+m), \ldots, V(a+\ell m)$ (ver 3.1.12), es decir:

$$
\operatorname{soc}\big(Z(a, \ell)/\operatorname{soc}^{i-1}(Z(a, \ell))\big) =_{\mathfrak{sl}(2)} V(a + im)
$$

para todo $0 \leq i \leq \ell$.

Para cada $0 \leq i \leq \ell$, fijaremos las bases $B_i = \{v_0^i, v_1^i, \ldots, v_{a+im}^i\}$ de $V(a + im)$ tales que v_0^i es un vector de peso máximo $a + im$ y $v_k^i = f^k\, v_0^i$ para todo $0 \leq k \leq a + im$. Esta base cumple con las siguientes relaciones:

$$
h\, v_k^i = (a + im - 2k)v_k^i, \qquad f\, v_k^i = v_{k+1}^i, \qquad e\, v_k^i = k(a + im + 1 - k)v_{k-1}^i \tag{4.1}
$$

donde $v_{-1}^i = v_{a+im+1}^i = 0$. Por lo tanto, $B_{a,\ell} = \bigcup_{i=0}^{\ell} B_i$ es una base de $Z(a,\ell)$.

En el Lema 3.2.2, tenemos la correspondiente representación matricial de $Z(a,\ell)$. Con la base $B_{a,\ell}$ definida anteriormente tenemos que $\mathfrak{r}$ actúa en $Z(a,\ell)$ de la siguiente manera:

$$e_s\, v_k^i = (-1)^s \binom{m}{s} \frac{k!}{(s+k-m)!} v_{s+k-m}^{i-1} \tag{4.2}$$

para todo $0 \leq s \leq m$, donde $0 \leq k \leq a+im$. Además, si $s+k-m < 0$ o $a+im < s+k-m$, entonces $v_{s+k-m}^{i-1} = 0$ y $v_\alpha^{-1} = 0$ para todo α.

Nota 4.0.2. Observar que $\mathfrak{r} \cdot V(a+im) \subset V(a+(i-1)m)$ para todo $1 \leq i \leq \ell$ y que $\mathfrak{r} \cdot V(a) = 0$.

Analicemos la acción de $\mathfrak{g}$ en el módulo uniserial $Z(a,\ell)^*$. Por el Teorema 2.3.2, tenemos que $V(a+im)^*$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo $a+im$ con un vector de peso máximo $\left(v_{a+im}^i\right)^*$, donde $\left\{\left(v_0^i\right)^*, \ldots, \left(v_{a+im}^i\right)^*\right\}$ es la base dual de B_i para cada $0 \leq i \leq \ell$.

Por la Nota 3.1.13, se tiene que $Z(a,\ell)^*$ es un $\mathfrak{g}$-módulo uniserial con sucesión admisible $V(a+\ell m), \ldots, V(a)$. Para cada $0 \leq i \leq \ell$, fijamos las bases $B_{\ell-i}^* = \{w_0^{\ell-i}, \ldots, w_{a+(\ell-i)m}^{\ell-i}\}$ de $V(a+(\ell-i)m)$, donde:

$$w_k^{\ell-i} = (-1)^{k+i}(a+(\ell-i)m)! \left(v_{a+(\ell-i)m-k}^{\ell-i}\right)^*$$

para todo $0 \leq k \leq a+(\ell-i)m$. Por lo tanto, $B_{a,\ell}^* = \bigcup_{i=0}^{\ell} B_{\ell-i}^*$ es una base de $Z(a,\ell)^*$.

Lema 4.0.3. *Sean a,ℓ enteros no negativos. Consideremos la base $B_{a,\ell}^*$ definida anteriormente para $Z(a,\ell)^*$. Entonces:*

i. Para todo $0 \leq i \leq \ell$ y $0 \leq k \leq a+(\ell-i)m$, tenemos que:

$$\begin{aligned} h\, w_k^{\ell-i} &= (a+(\ell-i)m-2k)w_k^{\ell-i}, \\ f\, w_k^{\ell-i} &= w_{k+1}^{\ell-i}, \\ e\, w_k^{\ell-i} &= k(a+(\ell-i)m-(k-1))w_{k-1}^{\ell-i}. \end{aligned}$$

ii. Para todo $0 \leq s \leq m$ y $0 \leq k \leq a+(\ell-i)m$, tenemos que

$$e_s\, w_k^{\ell-i} = \binom{m}{s} \frac{k!\binom{a+(\ell-i)m}{k}}{(s+k)!\binom{a+(\ell-i+1)m}{s+k}} w_{s+k}^{\ell-i+1}.$$

Donde $w_{s+k}^{\ell-i+1} = 0$, si $s+k < 0$ o $\ell-i+1 < s+k$. Si $i = 0$, tomamos $w_{s+k}^{\ell+1} = 0$.

Prueba:

i. Dado $v_j^{\ell-i}$ en $B_{\ell-i}$, tenemos $x\, w_k^{\ell-i}(v_j^{\ell-i}) = -w_k^{\ell-i}(x\, v_j^{\ell-i})$ para todo $x \in \mathfrak{sl}(2)$. Por lo tanto:

$$x\, w_k^{\ell-i}(v_j^{\ell-i}) = -(-1)^{k+i}(a+(\ell-i)m)! \left(v_{a+(\ell-i)m-k}^{\ell-i}\right)^* (x\, v_j^{\ell-i}).$$

Por lo tanto, como $h\, v_0^{\ell-i} = (a+(\ell-i)m)v_0^{\ell-i}$. Entonces:

$$h\, w_0^{\ell-i}(v_j^{\ell-i}) = -(-1)^i(a+(\ell-i)m)! \left(v_{a+(\ell-i)m}^{\ell-i}\right)^* (h\, v_j^{\ell-i}) = (a+(\ell-i)m)w_0^{\ell-i}(v_j^{\ell-i}).$$

Puesto que $f\, v_j^{\ell-i} = v_{j+1}^{\ell-i}$. Tenemos que:

$$f\, w_k^{\ell-i}(v_j^{\ell-i}) = -(-1)^{k+i}(a+(\ell-i)m)! \left(v_{a+(\ell-i)m-k}^{\ell-i}\right)^* (v_{j+1}^{\ell-i}) = w_{k+1}^{\ell-i}(v_j^{\ell-i}).$$

Además, como $e\, v_j^{\ell-i} = v_{j-1}^{\ell-i}$. Entonces:

$$e\, w_0^{\ell-i}(v_j^{\ell-i}) = -(-1)^i(a+(\ell-i)m)! \left(v_{a+(\ell-i)m}^{\ell-i}\right)^* (v_{j-1}^{\ell-i}) = 0,$$

pues $v_{a+(\ell-i)m+1}^{\ell-i} = 0$.

De donde, $w_0^{\ell-i}$ es un vector de peso máximo $a+(\ell-i)m$ en $V(a+(\ell-i)m)$. El conjunto $\{w_0^{\ell-i}, \dots, w_{a+(\ell-i)m}^{\ell-i}\}$ es una base de $V(a+(\ell-i)m)$, con $w_k^{\ell-i} = f^k\, w_0^{\ell-i}$ para todo $0 \leq k \leq a+(\ell-i)m$.

ii. Tomamos e_s un elemento de la base de $V(m)$ y v_t^j en la base $B_{a,\ell}$ de $Z(a,\ell)$. Entonces por definición de los $w_k^{\ell-i}$ tenemos que:

$$(e_s\, w_k^{\ell-i})(v_t^j) = (-1)\left[(-1)^{k+i}(a+(\ell-i)m)! \left(v_{a+(\ell-i)m-k}^{\ell-i}\right)^* (e_s\, v_t^j)\right].$$

Puesto que cada v_s^j cumple (4.2), tenemos:

$$(e_s\, w_k^{\ell-i})(v_t^j) = (-1)^{k+s+i-1}\binom{m}{s}\frac{t!(a+(\ell-i)m)!}{(s+t-m)!}\left(v_{a+(\ell-i)m-k}^{\ell-i}\right)^* (v_{s+t-m}^{j-1}),$$

de donde $(e_s\, w_k^{\ell-i})(v_t^j) \neq 0$ si y sólo si $t = a+(\ell-i+1)m-(k+s)$ y $j = \ell-i+1$, por lo tanto multiplicando y dividiendo por $(a+(\ell-i+1)m)!$, $s!$ y $(s+k)!$ tenemos que:

$$(e_s w_k^{\ell-i})(v_t^j) = \binom{m}{s}\frac{k!\binom{a+(\ell-i)m}{k}}{(s+k)!\binom{a+(\ell-i+1)m}{s+k}}(w_{s+k}^{\ell-i+1})(v_t^j)$$

puesto que v_t^j es arbitrario en $B_{a,\ell}$, entonces:

$$e_s\, w_k^{\ell-i} = \binom{m}{s}\frac{k!\binom{a+(\ell-i)m}{k}}{(s+k)!\binom{a+(\ell-i+1)m}{s+k}}w_{s+k}^{\ell-i+1}$$

obteniendo el resultado deseado. $\square$

Nota 4.0.4. La parte *ii* del lema anterior nos indica que $\mathfrak{r} \cdot V(a+(\ell-i)m) \subset V(a+(\ell-i+1)m)$ para todo $1 \leq i \leq \ell$ y $\mathfrak{r} \cdot V(a+\ell m) = 0$.

Para a, ℓ enteros no negativos, fijaremos la base $B_{a,\ell}$ para $Z(a,\ell)$ y la base $B^*_{a,\ell}$ para $Z(a,\ell)^*$ en lo que sigue de este trabajo.

4.1. Zócalo de $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')$.

Consideremos los $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales $Z(a,\ell)$ y $Z(b,\ell')$. Puesto que $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell') \simeq_{\mathfrak{g}} Z(b,\ell')\otimes Z(a,\ell)$, podemos suponer sin perdida de generalidad en esta sección que $\ell \leq \ell'$. El producto tensorial entre estos $\mathfrak{g}$-módulos tiene la siguiente estructura como $\mathfrak{sl}(2)$-módulo:

$$Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell') =_{\mathfrak{sl}(2)} \bigoplus_{i=0}^{\ell} \bigoplus_{j=0}^{\ell'} V(a+im) \otimes V(b+jm).$$

Sean $B_{a,\ell}$ la base fija de $Z(a,\ell)$, donde $V(a+im)$ tiene por base $B_i = \{v_0^i, \ldots, v_{a+im}^i\}$ para cada $0 \leq i \leq \ell$ y $B_{b,\ell'}$ es la base fija para $Z(b,\ell')$, donde $V(b+jm)$ tiene por base $B_j = \{w_0^j, \ldots, w_{b+jm}^j\}$ para cada $0 \leq j \leq \ell'$. Tanto $B_{a,\ell}$ como $B_{b,\ell'}$ cumplen con las relaciones (4.1) y (4.2).

Recordamos que por el Teorema de Clebsch-Gordan (Teorema 2.3.5), un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo μ aparece en la descomposición del producto tensorial de $V(n)$ con $V(m)$, si $x_\mu^{n,m} = \frac{n+m-\mu}{2}$ con $0 \leq x_\mu^{n,m} \leq \min\{n,m\}$ y $v_0^{n,m,\mu}$ es un vector de peso máximo μ en $V(n)\otimes V(m)$ donde:

$$v_0^{n,m,\mu} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{n,m}} \lambda_r^{n,m,\mu}\; v_r^n \otimes v^m_{x_\mu^{n,m}-r}$$

con $\lambda_r^{n,m,\mu} = (-1)^r \dfrac{\binom{x_\mu^{n,m}}{r}}{\binom{x_\mu^{n,m}+\mu}{n-r}}$ para $0 \leq r \leq x_\mu^{n,m}$.

Fijemos $(i,j) \in [0,\ell]\times[0,\ell']$. Si $V(\mu)$ aparece en la descomposición de $V(a+im)\otimes V(b+jm)$, denotaremos por $x_\mu^{i,j}$ en lugar de $x_\mu^{a+im,b+jm}$ y $\lambda_r^{i,j,\mu}$ en lugar de $\lambda_r^{a+im,b+jm,\mu}$, donde:

$$\begin{aligned} x_\mu^{i,j} &= \frac{a+b+(i+j)m-\mu}{2}, \\ \lambda_r^{i,j,\mu} &= (-1)^r \frac{\binom{x_\mu^{i,j}}{r}}{\binom{x_\mu^{i,j}+\mu}{a+im-r}} \end{aligned} \tag{4.3}$$

para todo $0 \leq r \leq x_{\mu}^{i,j}$. Además, denotaremos por $v_0^{i,j,\mu}$ el vector de peso máximo $v_0^{a+im,b+jm,\mu}$, el cual estaría descrito con esta notación por:

$$v_0^{i,j,\mu} = \sum_{r=0}^{x_{\mu}^{i,j}} \lambda_r^{i,j,\mu} v_r^i \otimes w_{x_{\mu}^{i,j}-r}^j. \tag{4.4}$$

En consecuencia $\{v_0^{i,j,\mu}, \ldots, v_{\mu}^{i,j,\mu}\}$ es una base de $V(\mu)$, donde $v_k^{i,j,\mu} = f^k\, v_0^{i,j,\mu}$ para todo $0 \leq k \leq \mu$.

Analizaremos la acción de $\mathfrak{r}$ en los vectores de peso máximo $v_0^{i,j,\mu}$ en el producto tensorial $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')$ con $(i,j) \in [0,\ell] \times [0,\ell']$.

Fijemos nuevamente $(i,j) \in [0,\ell] \times [0,\ell']$. Para todo $0 \leq s \leq m$, definimos el vector en $V(a+(i-1)m) \otimes V(b+jm)$:

$$v_{1,s}^{i,j,\mu} = \sum_{r=0}^{x_{\mu}^{i,j}} \frac{(-1)^s \binom{m}{s} r!}{(r+s-m)!} \lambda_r^{i,j,\mu}\, v_{s+r-m}^{i-1} \otimes w_{x_{\mu}^{i,j}-r}^j, \tag{4.5}$$

donde $v_{s+r-m}^{i-1} = 0$, si $(s+r-m) < 0$ o $(s+r-m) > a+(i-1)m$.
Además, definimos el vector en $V(a+im) \otimes V(b+(j-1)m)$:

$$v_{2,s}^{i,j,\mu} = \sum_{r=0}^{x_{\mu}^{i,j}} \frac{(-1)^s \binom{m}{s} (x_{\mu}^{i,j}-r)!}{((x_{\mu}^{i,j}-r)+s-m)!} \lambda_r^{i,j,\mu}\, v_r^i \otimes w_{(x_{\mu}^{i,j}-r)+s-m}^{j-1}, \tag{4.6}$$

donde $w_{(x_{\mu}^{i,j}-r)+s-m}^{j-1} = 0$, si $((x_{\mu}^{i,j}-r)+s-m) < 0$ o $((x_{\mu}^{i,j}-r)+s-m) > b+(j-1)m$.

Usando la acción de $\mathfrak{r}$ en $Z(a,\ell)$ y $Z(b,\ell')$ dada en (4.2) y por la acción de $\mathfrak{g}$ en el producto tensorial descrita en §2.2, tenemos que:

$$e_s\, v_0^{i,j,\mu} = v_{1,s}^{i,j,\mu} + v_{2,s}^{i,j,\mu},$$

el cual pertenece a $(V(a+(i-1)m) \otimes V(b+jm)) \oplus (V(a+im) \otimes V(b+(j-1)m))$.

Lema 4.1.1. *Si $v_0^{i,j,\mu}$ es un vector de peso máximo μ en $V(a+im) \otimes V(b+jm)$. Entonces $v_{1,m}^{i,j,\mu} = 0$ si y sólo si $i = 0$. Además, $v_{2,m}^{i,j,\mu} = 0$ si y sólo si $j = 0$.*

Prueba: Supongamos que $i \neq 0$ y que $v_{1,m}^{i,j,\mu} = \sum_{r=0}^{x_{\mu}^{i,j}} (-1)^m \lambda_r^{i,j,\mu}\, v_r^{i-1} \otimes w_{x_{\mu}^{i,j}-r}^j = 0$. Por lo tanto, $(-1)^m \lambda_r^{i,j} = 0$ para $0 \leq r \leq \min\{a+(i-1)m, x_{\mu}^{i,j}\}$, ya que el conjunto:

$$\left\{ v_r^{i-1} \otimes w_{x_{\mu}^{i,j}-r}^j : \text{ para todo } 0 \leq r \leq \min\{a+(i-1)m, x_{\mu}^{i,j}\} \right\}$$

es un conjunto linealmente independiente en $V(a+(i-1)m)\otimes V(b+jm)$. En particular, $\lambda_0^{i,j,\mu}=0$ lo cual es absurdo, puesto que $\lambda_0^{i,j,\mu}=\dfrac{1}{\binom{x_\mu^{i,j}+\mu}{a+im}}$.

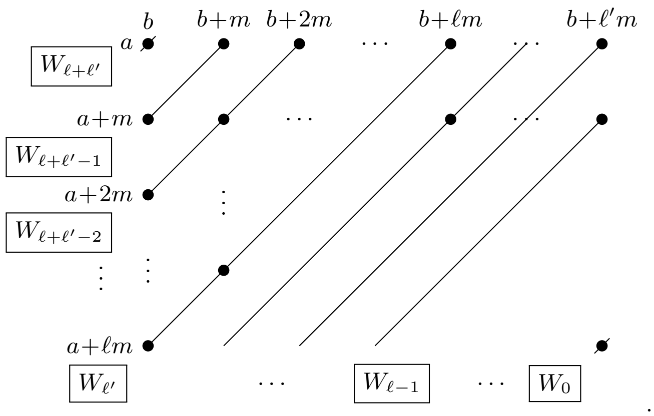
De manera semejante, si $j\neq 0$ y $v_{2,m}^{i,j,\mu}=0$, implica que $\lambda_r^{i,j,\mu}=0$ para todo $0\leq r\leq \min\{b+(j-1)m, x_\mu^{i,j,\mu}\}$. En particular, $\lambda_0^{i,j,\mu}=0$ lo cual es absurdo. $\square$

Para cada $0\leq t\leq \ell+\ell'$, definimos los subespacios W_t de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$ dados por:

$$W_t=\bigoplus_{(i,j)\in I_t} V(a+im)\otimes V(b+jm)$$

donde $I_t=\{(i,j)\in[0,\ell]\times[0,\ell']: i+j=\ell+\ell'-t\}$.

Para visualizar mejor esta situación, los W_t son las diagonales de abajo hacia arriba de la siguiente tabla del producto tensorial entre $Z(a,\ell)$ con $Z(b,\ell')$:



Por lo tanto $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')=\bigoplus_{t=0}^{\ell+\ell'} W_t$. Por la acción en el producto tensorial de dos $\mathfrak{g}$-módulos dado en §2.2, Ejemplo 2.2.1 y por la Nota 4.0.2. Tenemos que:

$$\mathfrak{r}\cdot(V(a+im)\otimes V(b+jm))\subset(V(a+(i-1)m)\otimes V(b+jm))\oplus(V(a+im)\otimes V(b+(j-1)m)).$$

Además, si $(i,j)\in I_t$, entonces $(i-1,j),(i,j-1)\in I_{t+1}$. Por lo tanto $\mathfrak{r}\cdot W_t\subset W_{t+1}$ para todo $0\leq t\leq \ell+\ell'$ con $W_{\ell+\ell'+1}=0$. Por otra parte, los $W_t's$ son $\mathfrak{sl}(2)$-submódulos de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$ y $W_{\ell+\ell'}=\mathrm{soc}(Z(a,\ell))\otimes\mathrm{soc}(Z(b,\ell'))$.

Por la Nota 4.0.1 y las relaciones descritas anteriormente para los W_t's, tenemos que $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$ es un $\mathfrak{g}$-módulo graduado de la forma $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')=\bigoplus_{t=0}^{\ell+\ell'} W_t$.

Proposición 4.1.2. *Sea v un vector de peso máximo μ en W_t, con $t \neq \ell + \ell'$ tal que $\mathfrak{r} \cdot v = 0$. Entonces $t \geq \ell'$ y $\mu = a + b + (\ell + \ell' - t)m$.*
Además, v es un múltiplo del vector de peso máximo $a + b + (\ell + \ell' - t)m$ en W_t:

$$v_0^0 \otimes w_0^{\ell+\ell'-t} - v_0^1 \otimes w_0^{(\ell+\ell'-t)-1} + \ldots + (-1)^{\ell+\ell'-t} v_0^{\ell+\ell'-t} \otimes w_0^0.$$

Prueba: Puesto que v es un vector de peso máximo μ en W_t, existen pares $(i_0, j_0), \ldots, (i_n, j_n)$ en I_t y escalares no nulos $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tales que:

$$v = \lambda_0 v_0^{i_0,j_0,\mu} + \ldots + \lambda_n v_0^{i_n,j_n,\mu},$$

donde $v_0^{i_k,j_k,\mu}$ son los vectores de peso máximo μ en $V(a + i_k m) \otimes V(b + j_k m)$, descritos en (4.4) para cada $0 \leq k \leq n$. Por el Teorema de Clebsch-Gordan la multiplicidad de $V(\mu)$ en cada $V(a + i_k m) \otimes V(b + j_k m)$ es uno, de donde $(i_k, j_k) \neq (i_s, j_s)$ para todo $k \neq s$.

Si $n = 0$. Tenemos que $v = \lambda_0 v_0^{i_0,j_0,\mu}$, con $\lambda_0 \neq 0$. Como $\mathfrak{r} \cdot v = 0$, en particular $e_m v = 0$. De donde:

$$\lambda_0 v_{1,m}^{i_0,j_0,\mu} + \lambda_0 v_{2,m}^{i_0,j_0,\mu} = 0.$$

Por independencia lineal tenemos que $v_{1,m}^{i_0,j_0,\mu} = v_{2,m}^{i_0,j_0,\mu} = 0$. Por el Lema 4.1.1, $i_0 = j_0 = 0$. Por lo tanto $(0, 0) \in I_t$ y así $t = \ell + \ell'$ lo cual es absurdo.

De lo anterior, debe pasar que $n \geq 1$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $i_0 < i_1 < \ldots < i_n$, lo que implica que $j_n < j_{n-1} < \ldots < j_0$, puesto que si $i_k = i_{k+1}$, entonces $j_k = \ell + \ell' - t - i_k = j_{k+1}$ y así $(i_k, j_k) = (i_{k+1}, j_{k+1})$, de donde $V(\mu)$ tendría multiplicidad 2 en el producto tensorial $V(a + i_k m) \otimes V(b + j_k m)$ lo que sería absurdo.

Afirmamos que $i_k = k$ y $j_k = (\ell + \ell' - t) - k$ para todo $0 \leq k \leq n$, lo que mostraría que $n = \ell + \ell' - t$ y $v = \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell+\ell'-t} \lambda_k v_0^{k,(\ell+\ell'-t)-k,\mu}$.

En efecto, puesto que $e_m v = 0$, entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (v_{1,m}^{i_k,j_k,\mu} + v_{2,m}^{i_k,j_k,\mu}) = 0$. Donde:

$$\begin{aligned} v_{1,m}^{i_k,j_k,\mu} &\in V(a + (i_k - 1)m) \otimes V(b + j_k m), \\ v_{2,m}^{i_k,j_k,\mu} &\in V(a + i_k m) \otimes V(b + (j_k - 1)m). \end{aligned}$$

Si $i_0 \neq 0$. Entonces existe $0 < k_0 \leq n$ tal que se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \lambda_0 v_{1,m}^{i_0,j_0,\mu} + \lambda_{k_0} v_{1,m}^{i_{k_0},j_{k_0},\mu} &= 0, \\ \lambda_0 v_{1,m}^{i_0,j_0,\mu} + \lambda_{k_0} v_{2,m}^{i_{k_0},j_{k_0},\mu} &= 0. \end{aligned}$$

Lo que implicaría en el primer caso que $i_0 = i_{k_0}$ y $j_0 = j_{k_0}$, lo que es absurdo. En el segundo caso se tiene que $i_0 - 1 = i_{k_0}$ y $j_0 = j_{k_0} - 1$, lo que también es absurdo pues $j_0 > j_{k_0}$. Así, $i_0 = 0$ y por lo tanto $j_0 = \ell + \ell' - t$, pues $(i_0, j_0) \in I_t$.

De manera semejante, si $j_n \neq 0$, entonces existe $0 \leq k_n < n$ tal que se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

$$\lambda_n v_{2,m}^{i_n,j_n,\mu} + \lambda_{k_n} v_{1,m}^{i_{k_n},j_{k_n},\mu} = 0,$$
$$\lambda_n v_{2,m}^{i_n,j_n-1,\mu} + \lambda_{k_n} v_{2,m}^{i_{k_n},j_{k_n},\mu} = 0.$$

Lo que implica en el primer caso que $i_n = i_{k_n} - 1$ y $j_n - 1 = j_{k_n}$, lo que es absurdo pues $i_n > i_{k_n}$. En el segundo caso se tiene que $i_n = i_{k_n}$ y $j_n - 1 = j_{k_n} - 1$, lo que también es absurdo. Así $j_n = 0$ y por lo tanto $i_n = \ell + \ell' - t$. Además, como $0 \leq j_0 \leq \ell'$ y $0 \leq i_n \leq \ell$, entonces $\ell' \leq t < \ell + \ell'$.

Puesto que $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_n = \ell + \ell' - t$ y $0 = j_n < j_{n-1} < \ldots < j_0 = \ell + \ell' - t$, junto con el Lema 4.1.1, tenemos que para todo $0 < k < n$ los elementos $v_{1,m}^{i_k,j_k,\mu}$ y $v_{2,m}^{i_k,j_k,\mu}$ son no nulos. Además que $v_{2,m}^{0,(\ell+\ell'-t),\mu} \neq 0$ y $v_{1,m}^{(\ell+\ell'-t),0,\mu} \neq 0$.

Como $v_{2,m}^{0,(\ell+\ell'-t),\mu} \neq 0$, entonces existe $0 < k_0 \leq n$ tal que se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

$$\lambda_0 v_{2,m}^{0,(\ell+\ell'-t),\mu} + \lambda_{k_0} v_{1,m}^{i_{k_0},j_{k_0},\mu} = 0,$$
$$\lambda_0 v_{2,m}^{0,(\ell+\ell'-t),\mu} + \lambda_{k_0} v_{2,m}^{i_{k_0},j_{k_0},\mu} = 0.$$

La segunda igualdad no se puede dar puesto que esta implica $i_{k_0} = 0 = i_0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto se debe de tener la primera igualdad, la cual implica $i_{k_0} = 1$ y $j_{k_0} = (\ell + \ell' - t) - 1$. Puesto que $0 = i_0 < i_1 \leq i_{k_0} = 1$, entonces $k_0 = 1$. Así $i_1 = 1$ y $j_1 = (\ell + \ell' - t) - 1$.

Supongamos que el resultado es válido para $k - 1$. Es decir, $i_{k-1} = k - 1$ y $j_{k-1} = (\ell + \ell' - t) - (k - 1)$. Puesto que $i_k \neq 0$, entonces existe $0 \leq \alpha_k \leq n$ con $\alpha_k \neq k$ tal que se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

$$\lambda_k v_{1,m}^{i_k,j_k,\mu} + \lambda_{\alpha_k} v_{1,m}^{i_{\alpha_k},j_{\alpha_k},\mu} = 0,$$
$$\lambda_k v_{1,m}^{i_k,j_k,\mu} + \lambda_{k_0} v_{2,m}^{i_{\alpha_k},j_{\alpha_k},\mu} = 0.$$

La primera igualdad no es posible puesto que $i_k \neq i_{\alpha_k}$. Por lo tanto, se debe de tener la segunda igualdad la que implica $i_k - 1 = i_{\alpha_k}$ y $j_k = j_{\alpha_k} - 1$. Esto sólo ocurre si $\alpha_k < k$. Puesto que $\alpha_k \leq k - 1 < k$, entonces $i_{\alpha_k} \leq i_{k-1} < i_k = i_{\alpha_k} + 1$. Por lo tanto $\alpha_k = k - 1$. Así $i_k = i_{k-1} + 1$ y $j_k = j_{k-1} - 1$; por hipótesis obtenemos:

$$\begin{aligned} i_k =& (k-1) + 1 = k, \\ j_k =& ((\ell + \ell' - t) - (k - 1)) - 1 = (\ell + \ell' - t) - k. \end{aligned}$$

Lo que prueba nuestra afirmación.

Así, tenemos que $n = \ell + \ell' - t$ y $v = \sum_{k=0}^{\ell+\ell'-t} \lambda_k v_0^{k,(\ell+\ell'-t)-k,\mu}$, donde $v_0^{k,(\ell+\ell'-t)-k,\mu}$ es un vector de peso máximo μ en $V(a+km) \otimes V(b+((\ell+\ell'-t)-k)m)$ para todo $0 \leq k \leq \ell+\ell'-t$. Además, para cada k tenemos:

$$x = x_\mu^{k,(\ell+\ell'-t)-k} = \frac{a+km+b+((\ell+\ell'-t)-k)m-\mu}{2} = \frac{a+b+(\ell+\ell'-t)m-\mu}{2}.$$

Afirmamos que $x = 0$ y por lo tanto $\mu = a+b+(\ell+\ell'-t)m$. En efecto, sin pérdida de generalidad supondremos que $\lambda_0 = 1$. Como $e_m\, v = 0$, entonces:

$$\sum_{k=0}^{\ell+\ell'-t} \lambda_k \left(v_{1,m}^{k,(\ell+\ell'-t)-k,\mu} + v_{2,m}^{k,(\ell+\ell'-t)-k,\mu} \right) = 0.$$

De donde:

$$\lambda_k v_{2,m}^{k,(\ell+\ell'-t)-k,\mu} + \lambda_{k+1} v_{1,m}^{k+1,(\ell+\ell'-t)-(k+1),\mu} = 0$$

para todo $0 \leq k < \ell+\ell'-t$.

En particular, $v_{2,m}^{0,\ell+\ell'-t,\mu} = -\lambda_1 v_{1,m}^{1,\ell+\ell'-t-1,\mu}$. Por las ecuaciones (4.5) y (4.6), tenemos que:

$$\begin{aligned} v_{2,m}^{0,\ell+\ell'-t,\mu} &= \sum_{r=0}^{x} (-1)^m \lambda_r^{0,\ell+\ell'-t,\mu} \;\; v_r^0 \otimes w_{x-r}^{\ell+\ell'-(t+1)}, \\ v_{1,m}^{1,\ell+\ell'-t-1,\mu} &= \sum_{r=0}^{x} (-1)^m \lambda_r^{1,\ell+\ell'-t-1,\mu} \;\; v_r^0 \otimes w_{x-r}^{\ell+\ell'-(t+1)}, \end{aligned}$$

por independencia lineal:

$$-\lambda_r^{0,\ell+\ell'-t,\mu} = \lambda_1 \lambda_r^{1,\ell+\ell'-t-1,\mu}$$

para todo $0 \leq r \leq x$.

Si $x \neq 0$ y como $0 \leq x \leq \min\{a, b+(\ell+\ell'-t)m\}$, entonces $a \neq 0$. Por lo tanto:

$$-\frac{\lambda_0^{0,\ell+\ell'-t,\mu}}{\lambda_0^{1,\ell+\ell'-t-1,\mu}} = \lambda_1 = -\frac{\lambda_1^{0,\ell+\ell'-t,\mu}}{\lambda_1^{1,\ell+\ell'-t-1,\mu}}.$$

Pero $\lambda_r^{k,\ell+\ell'-t-k,\mu} = (-1)^r \frac{\binom{x}{r}}{\binom{x+\mu}{a+km-r}}$ definidas en (4.3). De donde:

$$\frac{\frac{\binom{x}{0}}{\binom{x+\mu}{a}}}{\frac{\binom{x}{0}}{\binom{x+\mu}{a+m}}} = \frac{\frac{\binom{x}{1}}{\binom{x+\mu}{a-1}}}{\frac{\binom{x}{1}}{\binom{x+\mu}{a+m-1}}}.$$

Simplificando los términos, obtenemos que $(x+\mu-(a+m)+1)a=(x+\mu-a+1)(a+m)$. Así $(x+\mu+1)m=0$. Como $m\geq 1$, tenemos que $x+\mu=-1$ lo cual es absurdo, ya que tanto x como μ son números enteros no negativos. Así, $x=0$ y por lo tanto $\mu=a+b+(\ell+\ell'-t)m$, es decir:

$$v=v_0^{0,\ell+\ell'-t,a+b+(\ell+\ell'-t)m}+\ldots+\lambda_{\ell+\ell'-t}\,v_0^{\ell+\ell'-t,0,a+b+(\ell+\ell'-t)m}.$$

Además, $v_0^{k,(\ell+\ell'-t)-k,a+b+(\ell+\ell'-t)m}=v_0^k\otimes w_0^{(\ell+\ell'-t)-k}$, de donde:

$$v=v_0^0\otimes w_0^{\ell+\ell'-t}+\ldots+\lambda_{\ell+\ell'-t}\,v_0^{\ell+\ell'-t}\otimes w_0^0.$$

Por otra parte, tenemos que $e_m\,v_0^k\otimes w_0^{\ell+\ell'-t-k}=v_0^{k-1}\otimes w_0^{\ell+\ell'-t-k}+v_0^k\otimes w_0^{\ell+\ell'-t-(k+1)}$. De donde:

$$0=(1+\lambda_1)v_0^0\otimes w_0^{(\ell+\ell'-t)-1}+\sum_{k=1}^{\ell+\ell'-t-1}(\lambda_k+\lambda_{k+1})v_0^k\otimes w_0^{(\ell+\ell'-t)-(k+1)},$$

en consecuencia $\lambda_k=(-1)^k$ para todo $0\leq k\leq \ell+\ell'-t$ y así:

$$v=\sum_{k=0}^{\ell+\ell'-t}(-1)^k v_0^k\otimes w_0^{(\ell+\ell'-t)-k}$$

lo que prueba la proposición. $\square$

El resultado principal de esta sección es el siguiente teorema que nos describe el zócalo del producto tensorial de los $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales $Z(a,\ell)$ y $Z(b,\ell')$.

Teorema 4.1.3. *Sean a,b,ℓ,ℓ' números enteros no negativos. Entonces:*

$$soc(Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell'))\simeq_{\mathfrak{sl}(2)}\big(soc(Z(a,\ell))\otimes soc(Z(b,\ell'))\big)\oplus\bigoplus_{k=1}^{min\{\ell,\ell'\}}V(a+b+km).$$

En particular, $soc(Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell'))=soc(Z(a,\ell))\otimes soc(Z(b,\ell'))$ si y sólo si $\ell=0$.

Prueba: Sin pérdida de generalidad, supondremos que $\ell\leq\ell'$.

Para determinar el soc$(Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell'))$ es suficiente con describir como son los $\mathfrak{g}$-submódulos irreducibles de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$.

Sea V un $\mathfrak{g}$-submódulo irreducible de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$. Entonces tenemos que V es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible y por el Lema 3.1.10, tenemos que $\mathfrak{r}$ actúa trivialmente en V. Por lo tanto, existe un número entero no negativo μ tal que $V\simeq V(\mu)$.

Sea v un vector de peso máximo μ en V. Puesto que $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')=\bigoplus_{t=0}^{\ell+\ell'}W_t$, entonces existen $0\leq t_\alpha<t_{\alpha-1}<\ldots<t_0\leq\ell+\ell'$ y $v_0,v_1,\ldots,v_\alpha$ tales que:

$$v=v_0+v_1+\ldots+v_\alpha$$

donde $v_d \in W_{t_d}$ para todo $0 \leq d \leq \alpha$. Puesto que W_{t_d} es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$, entonces v_d es un vector de peso máximo μ en W_{t_d} para todo $0 \leq d \leq \alpha$. Además, como $\mathfrak{r}\cdot W_t \subset W_{t+1}$, por independencia lineal tenemos que:

$$\mathfrak{r}\cdot v_d = 0$$

para todo $0 \leq d \leq \alpha$. Por lo tanto, v_d es un vector de peso máximo μ en W_{t_d} tal que $\mathfrak{r}\cdot v_d = 0$ para todo $0 \leq d \leq \alpha$.

Afirmamos que $\alpha = 0$. En efecto, si $\alpha > 1$, entonces existen $t_2 < t_1 < \ell+\ell'$ y por la Proposición 4.1.2 $\mu = a+b+(\ell+\ell'-t_1)m$ y $\mu = a+b+(\ell+\ell'-t_2)m$, por lo cual $t_1 = t_2$ lo que es absurdo. Así, tenemos que $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$.

Si $\alpha = 1$ y como $t_1 < t_0 \leq \ell+\ell'$, entonces por la Proposición 4.1.2, $\mu = a+b+(\ell+\ell'-t_1)m > a+b$. Si $t_0 = \ell+\ell'$, existe un vector de peso máximo $a+b+(\ell+\ell'-t_1)m$ en $W_{\ell+\ell'} = V(a)\otimes V(b)$ lo que es absurdo, pues los pesos máximos de $V(a)\otimes V(b)$ son menores o iguales a $a+b$ por el Teorema de Clebsch-Gordan.

Por lo tanto, t_0 como t_1 deben ser distintos de $\ell+\ell'$, por la Proposición 4.1.2, $\mu = a+b+(\ell+\ell'-t_0)m$ y $\mu = a+b+(\ell+\ell'-t_1)m$, lo cual implica que $t_0 = t_1$ lo que nos conlleva a una contradicción.

De lo anterior, tenemos que $\alpha = 0$ y v es un vector de peso máximo μ en W_{t_0} para algún $0 \leq t_0 \leq \ell+\ell'$. Si $t_0 = \ell+\ell'$, entonces V es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo irreducible de $\operatorname{soc}(Z(a,\ell))\otimes\operatorname{soc}(Z(b,\ell'))$.

Si $t_0 \neq \ell+\ell'$, por la Proposición 4.1.2 tenemos que $\ell' \leq t_0 < \ell+\ell'$, $\mu = a+b+(\ell+\ell'-t_0)m$, por lo tanto $V \simeq V(a+b+(\ell+\ell'-t_0)m)$ para algún $\ell' \leq t_0 < \ell+\ell'$ el cual tiene un vector de peso máximo:

$$v_0^0\otimes w_0^{\ell+\ell'-t_0} - v_0^1\otimes w_0^{(\ell+\ell'-t_0)-1} + \ldots + (-1)^{\ell+\ell'-t_0}v_0^{\ell+\ell'-t_0}\otimes w_0^0.$$

Reparametrizando, tenemos que $V \simeq V(a+b+km)$ para algún $1 \leq k \leq \ell$ con $k = \ell+\ell'-t_0$ y un vector de peso máximo:

$$v_0^0\otimes w_0^k - v_0^1\otimes w_0^{k-1} + \ldots + (-1)^k v_0^k\otimes w_0^0.$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{soc}(Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')) \simeq_{\mathfrak{sl}(2)} \big(\operatorname{soc}(Z(a,\ell))\otimes\operatorname{soc}(Z(b,\ell'))\big) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\ell} V(a+b+km)$$

como queríamos demostrar. $\square$

Puesto que los pesos máximos de $\operatorname{soc}(Z(a,\ell))\otimes\operatorname{soc}(Z(b,\ell')) = V(a)\otimes V(b)$, son números enteros de la forma $a+b, a+b-2, \ldots, |a-b|$. El teorema anterior nos indica que $\operatorname{soc}(Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell'))$ es libre de multiplicidad.

Ejemplos 4.1.4. Consideramos $m = 1$ y los $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales $Z(0,1)$ y $Z(1,1)$. Así $a = 0$ y $b = \ell = \ell' = 1$. Por lo tanto $Z(0,1) \otimes Z(1,1)$ tiene la siguiente representacion matricial. La cual está separada por bloques para mostrar donde aparecen los productos tensoriales $V(a+im) \otimes V(b+jm)$ y donde los recuadros muestran la combinación lineal de los vectores de peso máximo que describen el zócalo:

$$
\left(\begin{array}{l|cc|ccc|ccc|c|cccc|cc}
V(a)\otimes V(b) & \boxed{h} & \boxed{e} & \boxed{-e_1} & \boxed{e_0} & \boxed{0} & \boxed{-e_1} & \boxed{e_0} & \boxed{0} & e_1 & & & & & & \\
 & \boxed{f} & \boxed{-h} & \boxed{0} & \boxed{-e_1} & \boxed{e_0} & \boxed{0} & \boxed{-e_1} & \boxed{e_0} & e_0 & & & & & & \\
\hline\hline
V(a)\otimes V(b+m) & & & \boxed{2h} & \boxed{2e} & \boxed{0} & & & & & -e_1 & e_0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}e_1 & 0 \\
 & & & \boxed{f} & \boxed{0} & \boxed{e} & & & & & 0 & -e_1 & e_0 & 0 & e_0 & e_1 \\
 & & & \boxed{0} & \boxed{2f} & \boxed{-2h} & & & & & 0 & 0 & -e_1 & e_0 & 0 & \frac{1}{2}e_0 \\
\hline\hline
V(a+m)\otimes V(b) & & & & & & \boxed{2h} & \boxed{e} & \boxed{0} & & -e_1 & 2e_0 & 0 & 0 & -e_1 & 0 \\
 & & & & & & \boxed{f} & \boxed{0} & \boxed{e} & & 0 & -e_1 & e_0 & 0 & -\frac{1}{2}e_0 & -\frac{1}{2}e_1 \\
 & & & & & & \boxed{0} & \boxed{2f} & \boxed{-2h} & & 0 & 0 & -e_1 & e_0 & 0 & -e_0 \\
\hline
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}e_1 & \frac{1}{2}e_0 \\
\hline\hline
V(a+m)\otimes V(b+m) & & & & & & & & & & 3h & 3e & 0 & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & f & h & 2e & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & 2f & -h & e & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 3f & -3h & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & & h & e \\
 & & & & & & & & & & & & & & f & -h
\end{array}\right).
$$

Por lo tanto $\operatorname{soc}(Z(0,1) \otimes Z(1,1)) \simeq_{\mathfrak{sl}(2)} V(1) \oplus V(2)$.

4.2. Zócalo de $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$.

Consideramos los $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales $Z(a,\ell)^*$ y $Z(b,\ell')^*$. Puesto que $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^* \simeq_{\mathfrak{g}} Z(b,\ell')^* \otimes Z(a,\ell)^*$, podemos suponer de nuevo sin perdida de generalidad que $\ell \leq \ell'$. El producto tensorial de estos $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales tiene la siguiente estructura como $\mathfrak{sl}(2)$-módulos:

$$Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^* =_{\mathfrak{sl}(2)} \bigoplus_{i=0}^{\ell} \bigoplus_{j=0}^{\ell'} V(a+(\ell-i)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m).$$

Sea $B^*_{a,\ell}$ la base fija de $Z(a,\ell)^*$ descrita al principio del Capítulo, donde $V(a+(\ell-i)m)$ tiene por base $B^*_{\ell-i} = \{w_0^{\ell-i}, \ldots, w_{a+(\ell-i)m}^{\ell-i}\}$ para cada $0 \leq i \leq \ell$ y sea $B^*_{b,\ell'}$ la base fija de $Z(b,\ell')^*$, donde $V(b+(\ell'-j)m)$ tiene por base $B^*_{\ell'-j} = \{y_0^{\ell'-j}, \ldots, y_{b+(\ell'-j)m}^{\ell'-j}\}$ para cada $0 \leq j \leq \ell'$. Tanto $B^*_{a,\ell}$ como $B^*_{b,\ell'}$ cumplen con las relaciones dadas en el Lema 4.0.3.

Fijamos i, j. Si $V(\mu)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo μ que aparece en la descomposición del producto tensorial de $V(a+(\ell-i)m)$ con $V(b+(\ell'-j)m)$. El Teorema de Clebsch-Gordan (Teorema 2.3.5) nos muestra un vector de peso máximo μ en $V(a+(\ell-i)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m)$.

Denotaremos $x_\mu^{\ell-i,\ell-j}$ en lugar de $x_\mu^{a+(\ell-i)m,b+(\ell'-j)m}$ y $\lambda_r^{\ell-i,\ell'-j,\mu}$ en lugar de los escalares $\lambda_r^{a+(\ell-i)m,b+(\ell'-j)m,\mu}$, donde:

$$
\begin{aligned}
x_\mu^{\ell-i,\ell'-j} =& \frac{a+b+((\ell+\ell')-(i+j))m-\mu}{2} \\
\lambda_r^{\ell-i,\ell'-j,\mu} =& (-1)^r \frac{\binom{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}}{r}}{\binom{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}+\mu}{a+(\ell-i)m-r}}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

para todo $0 \leq r \leq x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}$. Por lo tanto un vector de peso máximo μ en el producto tensorial de $V(a+(\ell-i)m)$ con $V(b+(\ell'-j)m)$ descrito en el Teorema de Clebsch-Gordan es:

$$
v_0^{\ell-i,\ell'-j,\mu} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}} \lambda_r^{\ell-i,\ell'-j,\mu}\, w_r^{\ell-i} \otimes y^{\ell'-j}_{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}-r}
\tag{4.8}
$$

y $\{v_0^{\ell-i,\ell'-j,\mu}, \ldots, v_\mu^{\ell-i,\ell'-j,\mu}\}$ es una base de $V(\mu)$ en $V(a+(\ell-i)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m)$, donde $v_k^{\ell-i,\ell'-j,\mu} = f^k\, v_0^{\ell-i,\ell'-j,\mu}$ para todo $0 \leq k \leq \mu$.

Fijamos $(i,j) \in [0,\ell] \times [0,\ell']$. Si $0 \leq s \leq m$, entonces por la acción de $\mathfrak{g}$ en $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$, tenemos que $e_s\, v_k^{\ell-i,\ell'-j,\mu}$ es un elemento que pertenece a:

$$
(V(a+(\ell-i+1)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m)) \oplus (V(a+(\ell-i)m) \otimes V(b+(\ell'-j+1)m)).
$$

para todo $0 \leq k \leq \mu$. Usando la acción de $\mathfrak{r}$ en $Z(a,\ell)^*$ y $Z(b,\ell')^*$ dada en el Lema 4.0.3 tenemos que:

$$
e_s\, v_0^{\ell-i,\ell'-j,\mu} = v_{1,s}^{\ell-i,\ell'-j,\mu} + v_{2,s}^{\ell-i,\ell'-j,\mu}.
$$

Donde:

$$
v_{1,s}^{\ell-i,\ell'-j,\mu} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}} \frac{\binom{m}{s} r! \binom{a+(\ell-i)m}{r} \lambda_r^{\ell-i,\ell'-j,\mu}}{(s+r)! \binom{a+(\ell-i+1)m}{s+r}} w_{s+r}^{\ell-i+1} \otimes y^{\ell'-j}_{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}-r},
\tag{4.9}
$$

el cual es un elemento que pertenece a $V(a+(\ell-i+1)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m)$, con $w_{s+r}^{\ell-i+1} = 0$ si $(s+r) < 0$ o $(s+r) > a+(\ell-i)m$. Y donde:

$$
v_{2,s}^{\ell-i,\ell'-j,\mu} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}} \frac{\binom{m}{s} (x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}-r)! \binom{b+(\ell'-j)m}{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}-r} \lambda_r^{\ell-i,\ell'-j,\mu}}{(s+x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}-r)! \binom{b+(\ell'-j+1)m}{s+x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}-r}} w_r^{\ell-i} \otimes y^{\ell'-j+1}_{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}-r+s},
\tag{4.10}
$$

que pertenece a $V(a+(\ell-i)m) \otimes V(b+(\ell'-j+1)m)$, con $y^{\ell'-j+1}_{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}-r+s} = 0$ si se tiene $(x_\mu^{\ell-i,\ell'-j} - r + s) < 0$ o $(x_\mu^{\ell-i,\ell'-j} - r + s) < b + (\ell'-j+1)m$.

Además, $w_{s+r}^{\ell+1} = y^{\ell'+1}_{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}-r+s} = 0$.

Lema 4.2.1. *Si* $v_0^{\ell-i,\ell'-j,\mu}$ *es un vector de peso máximo* μ *en el producto tensorial de* $V(a+(\ell-i)m)$ *con* $V(b+(\ell'-j)m)$. *Entonces* $v_{1,0}^{\ell-i,\ell'-j,\mu}=0$ *si y sólo si* $i=0$. *Además,* $v_{2,0}^{\ell-i,\ell'-j,\mu}=0$ *si y sólo si* $j=0$.

Prueba: Supongamos que $i\neq 0$ y que:

$$v_{1,0}^{\ell-i,\ell'-j,\mu}=\sum_{r=0}^{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}}\frac{\binom{a+(\ell-i)m}{r}}{\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}}\lambda_r^{\ell-i,\ell'-j,\mu}w_r^{\ell-i+1}\otimes y^{\ell'-j}_{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}-r}=0.$$

Tenemos que $\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}\lambda_r^{\ell-i,\ell'-j,\mu}=0$, pues el conjunto:

$$\left\{w_r^{\ell-i+1}\otimes y^{\ell'-j}_{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}-r}\ :\ \text{para todo } 0\leq r\leq x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}\right\}$$

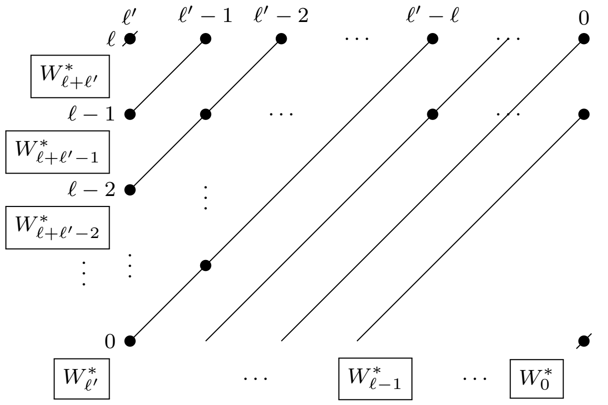
es un conjunto linealmente independiente en $V(a+(\ell-i+1)m)\otimes V(b+(\ell'-j)m)$. En particular $\lambda_0^{\ell-i,\ell'-j,\mu}=0$ lo cual es absurdo. $\square$

Para cada $0\leq t\leq \ell+\ell'$, definimos los subespacios W_t^* de $Z(a,\ell)^*\otimes Z(b,\ell')^*$ dados por:

$$W_t^*=\bigoplus_{(i,j)\in I_t}V(a+(\ell-i)m)\otimes V(b+(\ell'-j)m)$$

donde I_t es como en la §4.1.

Para visualizar mejor la situación, los W_t^* son las diagonales de arriba hacia abajo de la siguiente tabla del producto tensorial entre $Z(a,\ell)^*$ con $Z(b,\ell')^*$:



Nota 4.2.2. Es claro de esta definición que $W_t^*\simeq (W_{\ell'+\ell-t})^*$, donde $W_{\ell+\ell'-t}$ están definidos en la sección anterior.

Por lo tanto, $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^* = \bigoplus_{t=0}^{\ell+\ell'} W_t^*$. Por la acción en el producto tensorial de dos $\mathfrak{g}$-módulos dado en el Ejemplo 2.2.1 y por el Lema 4.0.3. Tenemos que:

$$\mathfrak{r}\cdot(V(a+(\ell-i)m)\otimes V(b+(\ell'-j)m)) \subset V(a+(\ell-i+1)m)\otimes V(b+(\ell'-j)m)\oplus V(a+(\ell-i)m)\otimes V(b+(\ell'-j+1)m).$$

Además, si $(i,j) \in I_t$, entonces $(i-1,j),(i,j-1) \in I_{t+1}$. Por lo tanto, $\mathfrak{r}\cdot W_t^* \subset W_{t+1}^*$ para todo $0 \le t \le \ell+\ell'$ con $W_{\ell+\ell'+1}^* = 0$. Por otra parte, los W_t^*'s son $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo de $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$ y $W_{\ell+\ell'}^* = \mathrm{soc}(Z(a,\ell)^*) \otimes \mathrm{soc}(Z(b,\ell')^*)$.

Por la Nota 4.0.1, tenemos que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie graduada y por lo descrito anteriormente, tenemos que $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$ es un $\mathfrak{g}$-módulo graduado, con una graduación $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^* = \bigoplus_{t=0}^{\ell+\ell'} W_t^*$.

Proposición 4.2.3. *Sea v un vector de peso máximo μ en W_t^* tal que $\mathfrak{r}\cdot v = 0$. Entonces $t = \ell' + \ell$, es decir, $v \in soc(Z(a,\ell)^*) \otimes soc(Z(b,\ell')^*)$.*

Prueba: Puesto que v es un vector de peso máximo μ en W_t^*, entonces existen pares $(i_0,j_0),\ldots,(i_n,j_n)$ en I_t y escalares no nulos $\lambda_0,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ tales que:

$$v = \lambda_0 v_0^{\ell-i_0,\ell'-j_0,\mu} + \ldots + \lambda_n v_0^{\ell-i_n,\ell'-j_n,\mu}.$$

Por el Teorema de Clebsch-Gordan la multiplicidad de $V(\mu)$ en el producto tensorial de $V(a+(\ell-i_k)m)$ con $V(b+(\ell'-j_k)m)$ es uno para todo $0 \le k \le n$, de donde $(i_k,j_k) \ne (i_s,j_s)$ para todo $k \ne s$.

Si $n=0$, entonces $v = \lambda_0 v_0^{\ell-i_0,\ell'-j_0,\mu}$. Puesto que $\mathfrak{r}\cdot v = 0$, en particular $e_0\, v = 0$. De donde:

$$\lambda_0 v_{1,0}^{\ell-i_0,\ell'-j_0,\mu} + \lambda_0 v_{2,0}^{\ell-i_0,\ell'-j_0,\mu} = 0.$$

Por independencia lineal, tenemos que $v_{1,0}^{\ell-i_0,\ell'-j_0,\mu} = v_{2,0}^{\ell-i_0,\ell'-j_0,\mu} = 0$. Por el Lema 4.2.1, tenemos $i_0 = j_0 = 0$. Por lo tanto $(0,0) \in I_t$ y así $t = \ell + \ell'$, de donde:

$$v \in W_{\ell+\ell'}^* = \mathrm{soc}(Z(a,\ell)^*) \otimes \mathrm{soc}(Z(b,\ell')^*).$$

Veamos que n no puede ser distinto de cero. Supongamos que $n \ge 1$, sin pérdida de generalidad supondremos que $i_0 < \ldots < i_n$ y por lo tanto $j_n < \ldots < j_0$.

Afirmamos que $i_k = k$ y $j_k = (\ell+\ell'-t) - k$ para todo $0 \le k < n$. En efecto, puesto que $e_0\, v = 0$, entonces:

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (v_{1,0}^{\ell-i_k,\ell'-j_k,\mu} + v_{2,0}^{\ell-i_k,\ell'-j_k,\mu}) = 0$$

Si $i_0 \neq 0$, entonces existe $0 < k_0 \leq n$, tal que se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

$$\lambda_0 v_{1,0}^{\ell-i_0,\ell'-j_0,\mu} + \lambda_{k_0} v_{1,0}^{\ell-i_{k_0},\ell'-j_{k_0},\mu} = 0,$$
$$\lambda_0 v_{1,0}^{\ell-i_0,\ell'-j_0,\mu} + \lambda_{k_0} v_{2,0}^{\ell-i_{k_0},\ell'-j_{k_0},\mu} = 0.$$

Lo que implica en el primer caso que $\ell - i_0 = \ell - i_{k_0}$ y $\ell' - j_0 = \ell' - j_{k_0}$ lo que es absurdo. En el segundo caso se tiene que $\ell - i_0 + 1 = \ell - i_{k_0}$ y $\ell' - j_0 = \ell' - j_{k_0} + 1$, lo que también es absurdo pues $j_{k_0} < j_0$. Así, por el Lema 4.2.1, tenemos que $i_0 = 0$ y por lo tanto $j_0 = \ell + \ell' - t$.

De manera semejante, si $j_n \neq 0$, existe $0 \leq k_n < n$ tal que se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

$$\lambda_n v_{2,0}^{\ell-i_n,\ell'-j_n,\mu} + \lambda_{k_n} v_{1,0}^{\ell-i_{k_n},\ell'-j_{k_n},\mu} = 0,$$
$$\lambda_n v_{2,0}^{\ell-i_n,\ell'-j_n,\mu} + \lambda_{k_n} v_{2,0}^{\ell-i_{k_n},\ell'-j_{k_n},\mu} = 0.$$

Las dos igualdades nos conducen a una contradicción. Así, por el Lema 4.2.1, tenemos $j_n = 0$ y por lo tanto $i_n = \ell + \ell' - t$. Además, como $0 \leq j_0 \leq \ell'$ y $0 \leq i_n \leq \ell$, entonces $\ell' \leq t \leq \ell + \ell'$.

Puesto que $0 = i_0 < i_k$ y $0 = j_n < j_k$. Por el Lema 4.2.1, tenemos $v_{1,0}^{\ell-i_k,\ell'-j_k,\mu} \neq 0$ y $v_{2,0}^{\ell-i_k,\ell'-j_k,\mu} \neq 0$ para todo $0 < k < n$. Además, $v_{2,0}^{\ell,t-\ell,\mu}$ y $v_{1,0}^{t-\ell',\ell',\mu}$ son no nulos.

Como $v_{2,0}^{\ell,t-\ell,\mu} \neq 0$, existe $0 < k_0 \leq n$ tal que se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

$$\lambda_0 v_{2,0}^{\ell,t-\ell,\mu} + \lambda_{k_0} v_{1,0}^{\ell-i_{k_0},\ell'-j_{k_0},\mu} = 0,$$
$$\lambda_0 v_{2,0}^{\ell,t-\ell,\mu} + \lambda_{k_0} v_{2,0}^{\ell-i_{k_0},\ell'-j_{k_0},\mu} = 0.$$

La segunda igualdad no se puede dar puesto que esta implica $i_{k_0} = 0 = i_0$ lo que es absurdo. Por lo tanto se debe tener la primera igualdad, la cual implica $i_{k_0} = 1$ y $j_{k_0} = (\ell + \ell' - t) - 1$. Puesto que $0 = i_0 < i_1 \leq i_{k_0} = 1$, entonces $k_0 = 1$. De donde $i_1 = 1$ y $j_1 = (\ell + \ell' - t) - 1$.

Supongamos el resultado válido para $k-1$, es decir, $i_{k-1} = k-1$ y $j_{k-1} = (\ell + \ell' - t) - (k-1)$. Puesto que $i_k \neq 0$, entonces existe $0 \leq \alpha_k \leq n$ con $\alpha_k \neq k$ tal que se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

$$\lambda_k v_{1,0}^{\ell-i_k,\ell'-j_k,\mu} + \lambda_{\alpha_k} v_{1,0}^{\ell-i_{\alpha_k},\ell'-j_{\alpha_k},\mu} = 0,$$
$$\lambda_k v_{1,0}^{\ell-i_k,\ell'-j_k,\mu} + \lambda_{k_0} v_{2,0}^{\ell-i_{\alpha_k},\ell'-j_{\alpha_k},\mu} = 0.$$

La primera igualdad no es posible pues $i_k \neq i_{\alpha_k}$. Por lo tanto se debe de tener la segunda igualdad, la cual implica $i_k - 1 = i_{\alpha_k}$ y $j_k = j_{\alpha_k} - 1$. Esto ocurre si y sólo si $\alpha_k < k$. Puesto que $\alpha_k \leq k - 1 < k$, entonces $i_{\alpha_k} \leq i_{k-1} < i_k = i_{\alpha_k} + 1$. Por lo tanto $\alpha_k = k - 1$ y así $i_k = i_{k-1} + 1$ y $j_k = j_{k-1} - 1$. Por hipótesis obtenemos que:

$$\begin{aligned} i_k =& (k-1) + 1 = k, \\ j_k =& ((\ell + \ell' - t) - (k-1)) - 1 = (\ell + \ell' - t) - k. \end{aligned}$$

Lo que prueba nuestra afirmación.

Así, tenemos que $n = \ell + \ell' - t$ y $v = \sum_{k=0}^{\ell+\ell'-t} \lambda_k v_0^{\ell-k,t-\ell+k,\mu}$, donde $v_0^{\ell-k,t-\ell+k,\mu}$ es un vector de peso máximo μ en $V(a+(\ell-k)m) \otimes V(b+(t-\ell+k)m)$ para todo $0 \leq k \leq n$. Además:

$$x_\mu^{\ell-k,t-\ell+k} = \frac{a + (\ell - k)m + b + (t - \ell + k)m - \mu}{2} = \frac{a + b + tm - \mu}{2} = x.$$

Sin perdida de generalidad, supondremos que $\lambda_0 = 1$. Puesto que:

$$e_s\, v = \sum_{k=0}^{\ell+\ell'-t} \lambda_k \left(v_{1,s}^{\ell-k,t-\ell+k,\mu} + v_{2,s}^{\ell-k,t-\ell+k,\mu} \right) = 0$$

para todo $0 \leq s \leq m$, entonces:

$$\lambda_k\, v_{2,m}^{\ell-k,t+k-\ell,\mu} + \lambda_{k+1}\, v_{1,m}^{\ell-(k+1),t-\ell+(k+1),\mu} = 0.$$

En particular $v_{2,m}^{\ell,t-\ell,\mu} = -\lambda_1 v_{1,m}^{\ell-1,t-\ell+1,\mu}$. Por las ecuaciones (4.9) y (4.10), tenemos que:

$$v_{2,m}^{\ell,t-\ell,\mu} = \sum_{r=0}^{x} \frac{(x-r)!\binom{b+(t-\ell)m}{x-r}}{(x-r+m)!\binom{b+(t-\ell+1)m}{(x-r)+m}} \lambda_r^{\ell,t-\ell,\mu}\, w_r^\ell \otimes y_{x-r+m}^{t-\ell+1},$$

$$v_{1,m}^{\ell-1,t-\ell+1,\mu} = \sum_{r=0}^{x} \frac{r!\binom{a+(\ell-1)m}{r}}{(r+m)!\binom{a+\ell m}{r+m}} \lambda_r^{\ell-1,t-\ell+1,\mu}\, w_{r+m}^\ell \otimes y_{x-r}^{t-\ell+1}.$$

Tenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{x} \frac{(x-r)!\binom{b+(t-\ell)m}{x-r}}{(x-r+m)!\binom{b+(t-\ell+1)m}{(x-r)+m}} \lambda_r^{\ell,t-\ell,\mu}\, w_r^\ell \otimes y_{x-r+m}^{t-\ell+1} = \\ - \lambda_1 \sum_{r=0}^{x} \frac{r!\binom{a+(\ell-1)m}{r}}{(r+m)!\binom{a+\ell m}{r+m}} \lambda_r^{\ell-1,t-\ell+1,\mu}\, w_{r+m}^\ell \otimes y_{x-r}^{t-\ell+1}. \end{aligned}$$

Pero $w_0^\ell \otimes y_{x+m}^{t-\ell+1} \neq 0$, pues:

$$0 \leq x - r \leq x \leq \min\{a + \ell m, b + (t-\ell)m\} \leq b + (t-\ell)m.$$

Entonces por independencia lineal, existe $0 \leq r_1 \leq x$ tal que:

$$\frac{x!\binom{b+(t-\ell)m}{x}}{(x+m)!\binom{b+(t-\ell+1)m}{x+m}}\lambda_0^{\ell,t-\ell,\mu}\, w_0^\ell \otimes y_{x+m}^{t-\ell+1} = -\lambda_1 \frac{r_1!\binom{a+(\ell-1)m}{r_1}}{(r_1+m)!\binom{a+\ell m}{r_1+m}}\lambda_{r_1}^{\ell-1,t-\ell+1,\mu}$$
$$w_{r_1+m}^\ell \otimes y_{x-r_1}^{t+\ell+1}.$$

Pero esto solo ocurre si y sólo si $r_1 + m = 0$, lo cual es absurdo, pues r_1 es un entero no negativo y $m \geq 1$.

Así, $n = 0$ y por lo tanto $v \in \mathrm{soc}(Z(a,\ell)^*) \otimes \mathrm{soc}(Z(b,\ell')^*)$. □

El resultado principal de esta sección es el siguiente teorema que nos describe el zócalo del producto tensorial de los $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales $Z(a,\ell)^*$ y $Z(b,\ell')^*$.

Teorema 4.2.4. *Sean a, b, ℓ, ℓ' números enteros no negativos. Entonces:*

$$soc(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*) \simeq_{\mathfrak{sl}(2)} soc(Z(a,\ell)^*) \otimes soc(Z(b,\ell')^*).$$

Prueba: Sea V un $\mathfrak{g}$-submódulo irreducible de $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$, entonces tenemos que V es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible y por el Lema 3.1.10 tenemos que $\mathfrak{r}$ actúa trivialmente en V. Por lo tanto existe un número entero no negativo μ tal que $V \simeq_{\mathfrak{sl}(2)} V(\mu)$. Sea v un vector de peso máximo μ en V. Puesto que $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^* = \bigoplus_{t=0}^{\ell+\ell'} W_t^*$, entonces existen $0 \leq t_\alpha < t_{\alpha-1} < \ldots < t_0 \leq \ell + \ell'$ y vectores $v_0, v_1, \ldots, v_\alpha$ tales que:

$$v = v_0 + v_1 + \ldots + v_\alpha$$

donde v_d es un vector de peso máximo μ en $W_{t_d}^*$ para todo $0 \leq d \leq \alpha$.

Además, como $\mathfrak{r} \cdot W_t^* \subset W_{t+1}^*$ por independencia lineal tenemos que:

$$\mathfrak{r} \cdot v_d = 0$$

para todo $0 \leq d \leq \alpha$. Por lo tanto, v_d es un vector de peso máximo μ en $W_{t_d}^*$ tal que $\mathfrak{r} \cdot v_d = 0$ para todo $0 \leq d \leq \alpha$.

Por la Proposición 4.2.3, v_d es un vector de peso máximo μ en el producto tensorial $\mathrm{soc}(Z(a,\ell)^*) \otimes \mathrm{soc}(Z(b,\ell')^*)$ para todo $0 \leq d \leq \alpha$. Como la multiplicidad de $V(\mu)$ en $\mathrm{soc}(Z(a,\ell)^*) \otimes \mathrm{soc}(Z(b,\ell')^*)$ es uno, entonces $\alpha = 0$ y $v \in \mathrm{soc}(Z(a,\ell)^*) \otimes \mathrm{soc}(Z(b,\ell')^*)$. □

De igual manera que el zócalo del producto tensorial de $Z(a,\ell)$ con $Z(b,\ell')$, el teorema anterior nos muestra que $\mathrm{soc}(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*)$ es libre de multiplicidad.

Ejemplos 4.2.5. Consideramos $m = 1$ y los $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales $Z(0,1)^*$ y $Z(1,1)^*$. Así $a = 0$ y $b = \ell = \ell' = 1$, por lo tanto $Z(0,1)^* \otimes Z(1,1)^*$ tiene la siguiente representacion matricial:

$$\left(\begin{array}{l|cccc|cc||ccc|c||ccc||cc}
V(1)\otimes V(2) & \boxed{3h} & \boxed{3e} & \boxed{0} & \boxed{0} & & & 3e_0 & 0 & 0 & & 3e_0 & 0 & 0 & & \\
 & \boxed{f} & \boxed{h} & \boxed{4e} & \boxed{0} & & & e_1 & 2e_0 & 0 & & e_1 & 2e_0 & 0 & & \\
 & \boxed{0} & \boxed{f} & \boxed{-h} & \boxed{3e} & & & 0 & e_1 & e_0 & & 0 & e_1 & e_0 & & \\
 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{f} & \boxed{-3h} & & & 0 & 0 & e_1 & & 0 & 0 & e_1 & & \\
\hline
 & & & & & \boxed{h} & \boxed{e} & -e_1 & e_0 & 0 & e_0 & 2e_1 & -2e_0 & 0 & & \\
 & & & & & \boxed{f} & \boxed{-h} & 0 & -e_1 & 2e_0 & e_1 & 0 & 2e_1 & -4e_0 & & \\
\hline\hline
V(1)\otimes V(1) & & & & & & & 2h & 2e & 0 & & & & & 2e_0 & 0 \\
 & & & & & & & f & 0 & 2e & & & & & e_1 & e_0 \\
 & & & & & & & 0 & f & -2h & & & & & 0 & e_1 \\
\hline
 & & & & & & & & & & 0 & & & & e_1 & e_0 \\
\hline\hline
V(0)\otimes V(2) & & & & & & & & & & & 2h & 2e & 0 & 2e_0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & f & 0 & 2e & e_1 & e_0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & f & -2h & 0 & e_1 \\
\hline\hline
V(0)\otimes V(1) & & & & & & & & & & & & & & h & e \\
 & & & & & & & & & & & & & & f & -h
\end{array}\right).$$

Este producto tensorial tiene por zócalo $\operatorname{soc}(Z(0,1)^* \otimes Z(1,1)^*) =_{\mathfrak{sl}(2)} V(3) \oplus V(1)$.

4.3. Zócalo de $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')^*$.

Consideramos los $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales $Z(a,\ell)$ y $Z(b,\ell')^*$, los cuales tienen sucesiones admisibles $V(a),\dots,V(a+\ell m)$ y $V(b+\ell' m),\dots,V(b)$ respectivamente. Puesto que $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')^* \simeq_{\mathfrak{g}} Z(b,\ell')^* \otimes Z(a,\ell)$, consideramos en esta sección $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')^*$. De donde:

$$Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')^* =_{\mathfrak{sl}(2)} \bigoplus_{i=0}^{\ell}\bigoplus_{j=0}^{\ell'} V(a+im)\otimes V(b+(\ell'-j)m).$$

Sean $B_{a,\ell}$ la base de $Z(a,\ell)$ descrita en la §4.1 y $B^*_{b,\ell'}$ la base de $Z(b,\ell')^*$ descrita en la §4.2.

Fijamos i,j. Denotaremos $x_\mu^{i,\ell-j}$ en lugar de $x_\mu^{a+im,b+(\ell'-j)m}$ y $\lambda_r^{i,\ell'-j,\mu}$ en lugar de $\lambda_r^{a+im,b+(\ell'-j)m,\mu}$, donde:

$$\begin{aligned}
x_\mu^{i,\ell'-j} &= \frac{a+b+((\ell'-j)+i)m-\mu}{2},\\
\lambda_r^{i,\ell'-j,\mu} &= (-1)^r\frac{\binom{x_\mu^{i,\ell'-j}}{r}}{\binom{x_\mu^{i,\ell'-j}+\mu}{a+im-r}}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

para todo $0 \le r \le x_\mu^{i,\ell'-j}$. Por lo tanto un vector de peso máximo μ en el producto tensorial de $V(a+im)$ con $V(b+(\ell'-j)m)$ descrito en el Teorema de Clebsch-Gordan es:

$$v_0^{i,\ell'-j,\mu} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{i,\ell'-j}} \lambda_r^{i,\ell'-j,\mu}\, v_r^i \otimes y^{\ell'-j}_{x_\mu^{i,\ell'-j}-r} \tag{4.12}$$

de donde $\{v_0^{i,\ell'-j,\mu}, \ldots, v_\mu^{i,\ell'-j,\mu}\}$ es una base de $V(\mu)$ en $V(a+im) \otimes V(b+(\ell'-j)m)$ con $v_0^{i,\ell'-j,\mu} = f^k\, v_0^{i,\ell'-j,\mu}$ para todo $0 \leq k \leq \mu$.

Veamos ahora como actúa $\mathfrak{r}$ en $v_0^{i,\ell'-j,\mu}$, para esto fijamos $(i,j) \in [0,\ell] \times [0,\ell']$. Si $0 \leq s \leq m$, entonces por la acción de $\mathfrak{g}$ en $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')^*$, tenemos que $e_s\, v_k^{i,\ell'-j,\mu}$ es un elemento que pertenece a:

$$(V(a+(i-1)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m)) \oplus (V(a+im) \otimes V(b+(\ell'-j+1)m)).$$

Además, por la ecuación (4.2) y el Lema 4.0.3, tenemos que:

$$e_s\, v_0^{i,\ell'-j,\mu} = v_{1,s}^{i,\ell'-j,\mu} + v_{2,s}^{i,\ell'-j,\mu}$$

donde:

$$v_{1,s}^{i,\ell'-j,\mu} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{i,\ell'-j}} (-1)^s \frac{r!\binom{m}{s}}{(s+r-m)!} \lambda_r^{i,\ell'-j,\mu}\, v_{s+r-m}^{i-1} \otimes y_{x_\mu^{i,\ell'-j}-r}^{\ell'-j}, \tag{4.13}$$

el cual pertenece a $V(a+(i-1)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m)$ y por:

$$v_{2,s}^{i,\ell'-j,\mu} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{i,\ell'-j}} \binom{m}{s} \frac{(x_\mu^{i,\ell'-j}-r)!\binom{b+(\ell'-j)m}{x_\mu^{i,\ell'-j}-r}}{(s+x_\mu^{i,\ell'-j}-r)!\binom{b+(\ell'-j+1)m}{s+x_\mu^{i,\ell'-j}-r}} \lambda_r^{i,\ell'-j,\mu}\, v_r^i \otimes y_{x_\mu^{i,\ell'-j}-r+s}^{\ell'-j+1}, \tag{4.14}$$

que pertenece a $V(a+im) \otimes V(b+(\ell'-j+1)m)$.

Una combinación de los Lemas 4.1.1 y 4.2.1 es el siguiente lema.

Lema 4.3.1. *Si $v_0^{i,\ell'-j,\mu}$ es un vector de peso máximo μ en $V(a+im) \otimes V(b+(\ell'-j)m)$. Entonces $v_{1,m}^{i,\ell'-j,\mu} = 0$ si y sólo si $i = 0$. Además, $v_{2,0}^{i,\ell'-j,\mu} = 0$ si y sólo si $j = 0$.*

Prueba: Supongamos que $i \neq 0$, entonces si:

$$v_{1,m}^{i,\ell'-j,\mu} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{i,\ell'-j}} (-1)^m \lambda_r^{i,\ell'-j,\mu} v_r^{i-1} \otimes y_{x_\mu^{i,\ell'-j}-r}^{\ell'-j} = 0,$$

tenemos que $\lambda_r^{i,\ell'-j,\mu} = 0$, pues el conjunto $\left\{ v_r^{i-1} \otimes y_{x_\mu^{i,\ell'-j}-r}^{\ell'-j} :\ \text{para todo } 0 \leq r \leq x_\mu^{i,\ell'-j} \right\}$ es un conjunto linealmente independiente en $V(a+(i-1)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m)$. En particular $\lambda_0^{i,\ell'-j,\mu} = 0$ lo que es absurdo.

De manera semejante, supongamos que $j \neq 0$ y que:

$$v_{2,0}^{i,\ell'-j,\mu} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{i,\ell'-j}} \frac{\binom{b+(\ell'-j)m}{x_\mu^{i,\ell'-j}-r}}{\binom{b+(\ell'-j+1)m}{x_\mu^{i,\ell'-j}-r}} \lambda_r^{i,\ell'-j,\mu}\, v_r^i \otimes y_{x_\mu^{i,\ell'-j}-r}^{\ell'-j+1} = 0.$$

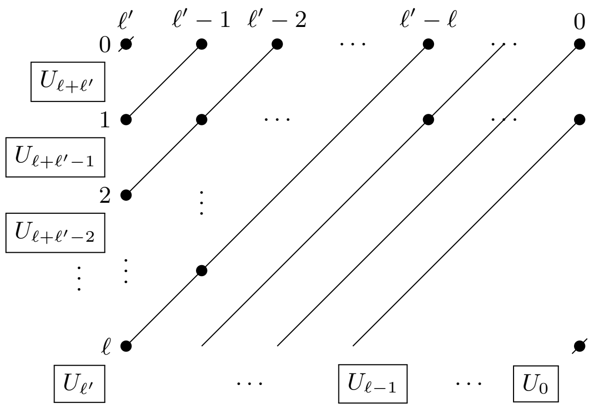
Entonces $\dfrac{\binom{b+(\ell'-j)m}{x_\mu^{i,\ell'-j}-r}}{\binom{b+(\ell'-j+1)m}{x_\mu^{i,\ell'-j}-r}}\lambda_r^{i,\ell'-j,\mu} = 0$ para todo $0 \leq r \leq x_\mu^{i,\ell'-j}$. En particular, si $r = 0$ tenemos que $\dfrac{\binom{b+(\ell'-j)m}{x_\mu^{i,\ell'-j}}}{\binom{b+(\ell'-j+1)m}{x_\mu^{i,\ell'-j}}}\lambda_0^{i,\ell'-j,\mu} = 0$ lo cual es absurdo. $\square$

Para cada $0 \leq t \leq \ell + \ell'$ definimos los subespacios U_t de $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')^*$ dados por:

$$U_t = \bigoplus_{(i,j)\in I_t} V(a+im) \otimes V(b+(\ell'-j)m)$$

donde $I_t = \{(i,j) \in [0,\ell] \times [0,\ell'] : i + j = \ell + \ell' - t\}$, para todo $0 \leq t \leq \ell + \ell'$.

Para visualizar mejor la situación, los U_t son las diagonales de derecha a izquierda de la siguiente tabla del producto tensorial entre $Z(a,\ell)$ con $Z(b,\ell')^*$ si $\ell \leq \ell'$:



De lo anterior tenemos que $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')^* = \bigoplus_{t=0}^{\ell+\ell'} U_t$. Por la acción en el producto tensorial de dos $\mathfrak{g}$-módulos dado en §2.2 Ejemplo 2.2.1, por la ecuación (4.2) y por el Lema 4.0.3. Tenemos que:

$$\mathfrak{r}\cdot(V(a+im)\otimes V(b+(\ell'-j)m)) \subset V(a+(i-1)m)\otimes V(b+(\ell'-j)m) \oplus V(a+im)\otimes V(b+(\ell'-j+1)m).$$

Además, si $(i,j) \in I_t$, entonces $(i-1,j),(i,j-1) \in I_{t+1}$. Por lo tanto $\mathfrak{r} \cdot U_t \subset U_{t+1}$ con $U_{\ell+\ell'+1} = 0$. Además cada U_t es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo de $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')^*$ y $U_{\ell+\ell'}$ es el producto tensorial de los zócalos de $Z(a,\ell)$ y $Z(b,\ell')^*$.

Al igual que $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')$ y $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$, tenemos que $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')^*$ es un $\mathfrak{g}$-módulo graduado, con una graduación $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell') = \bigoplus_{t=0}^{\ell+\ell'} U_t$.

Proposición 4.3.2. *Sea v un vector de peso máximo μ en U_t tal que $\mathfrak{r} \cdot v = 0$, entonces $max\{\ell, \ell'\} \leq t \leq \ell + \ell'$ y se tiene:*

i. Si $a > b + (t - \ell)m$, entonces $v \in soc(Z(a, \ell)) \otimes soc(Z(b, \ell')^*)$.

ii. Si $a \leq b + (t - \ell)m$, entonces v está en $soc(Z(a, \ell)) \otimes soc(Z(b, \ell')^*)$ o bien v es un vector de peso máximo $\mu = b + (\ell' - t)m - a$, el cual es un multiplo escalar de:

$$v_0^{0,t-\ell,\mu} - \frac{a!}{(a+m)!} v_0^{1,t-\ell+1,\mu} + \ldots + (-1)^{\ell'+\ell-t} \frac{a!}{(a+(t-\ell)m)!} v_0^{\ell'+\ell-t,\ell',\mu}.$$

Prueba: Puesto que v es un vector de peso máximo μ en U_t, entonces existen parejas $(i_0, j_0), \ldots, (i_n, j_n)$ en I_t y escalares no nulos $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tales que:

$$v = \lambda_0 v_0^{i_0,\ell'-j_0,\mu} + \ldots + \lambda_n v_0^{i_n,\ell'-j_n,\mu}.$$

Por el Teorema de Clebsch-Gordan tenemos que la multiplicidad de $V(\mu)$ en el producto tensorial de $V(a + i_k m)$ con $V(b + (\ell' - j_k)m)$ es uno para todo $0 \leq k \leq n$, de donde $(i_k, j_k) \neq (i_s, j_s)$ para todo $k \neq s$.

Si $n = 0$, entonces $v = \lambda_0 v_0^{i_0,\ell'-j_0,\mu}$ con $\lambda_0 \neq 0$. Puesto que $\mathfrak{r} \cdot v = 0$ en particular $e_0\, v = 0$ y $e_m\, v = 0$, de donde:

$$\lambda_0 v_{1,0}^{i_0,\ell'-j_0,\mu} + \lambda_0 v_{2,0}^{i_0,\ell'-j_0,\mu} = 0,$$
$$\lambda_0 v_{1,m}^{i_0,\ell'-j_0,\mu} + \lambda_0 v_{2,m}^{i_0,\ell'-j_0,\mu} = 0.$$

Por independencia lineal $v_{1,0}^{i_0,\ell'-j_0,\mu} = v_{2,0}^{i_0,\ell'-j_0,\mu} = 0$ y $v_{1,m}^{i_0,\ell'-j_0,\mu} = v_{2,m}^{i_0,\ell'-j_0,\mu} = 0$. Por el Lema 4.3.1 tenemos que $i_0 = j_0 = 0$, por lo tanto $(0,0) \in I_t$ y así $t = \ell + \ell'$. De donde:

$$v \in U_{\ell+\ell'} = \mathrm{soc}(Z(a, \ell)) \otimes \mathrm{soc}(Z(b, \ell')^*).$$

Supongamos que $v = \lambda_0 v_0^{i_0,\ell'-j_0,\mu} + \ldots + \lambda_n v_0^{i_n,\ell'-j_n,\mu}$ con $n \geq 1$ y tal que $(i_k, j_k) \in I_t$ con $0 \leq k \leq n$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $i_0 < \ldots < i_n$, de donde $j_n < \ldots < j_0$.

Afirmamos que $i_k = k$ y $j_k = (\ell + \ell' - t) - k$ para todo $0 \leq k < n$. En efecto, puesto que $e_s\, v = 0$, entonces:

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (v_{1,s}^{i_k,\ell'-j_k,\mu} + v_{2,s}^{i_k,\ell'-j_k,\mu}) = 0$$

Si $i_0 \neq 0$, entonces existe $0 < k_0 \leq n$ tal que se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

$$\lambda_0 v_{1,m}^{i_0,\ell'-j_0,\mu} + \lambda_{k_0} v_{1,m}^{i_{k_0},\ell'-j_{k_0},\mu} = 0,$$
$$\lambda_0 v_{1,m}^{i_0,\ell'-j_0,\mu} + \lambda_{k_0} v_{2,m}^{i_{k_0},\ell'-j_{k_0},\mu} = 0.$$

El primer caso implica $i_0 = i_{k_0}$ y $\ell' - j_0 = \ell' - j_{k_0}$ lo que es absurdo. En el segundo caso se tiene que $i_0 - 1 = i_{k_0}$ y $\ell' - j_0 = \ell' - j_{k_0} + 1$, lo que también es absurdo pues $j_{k_0} < j_0$. Así, por el Lema 4.3.1, tenemos que $i_0 = 0$ y por lo tanto $j_0 = \ell + \ell' - t$.

De manera semejante, si $j_n \neq 0$, entonces existe $0 \leq k_n < n$ tal que se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

$$\lambda_n v_{2,0}^{i_n,\ell'-j_n,\mu} + \lambda_{k_n} v_{1,0}^{i_{k_n},\ell'-j_{k_n},\mu} = 0,$$
$$\lambda_n v_{2,0}^{i_n,\ell'-j_n,\mu} + \lambda_{k_n} v_{2,0}^{i_{k_n},\ell'-j_{k_n},\mu} = 0.$$

Las dos igualdades anteriores nos conllevan a una contradicción. Así, por el Lema 4.3.1 tenemos que $j_n = 0$. Por lo tanto $i_n = \ell + \ell' - t$. Además, como $0 \leq i_n \leq \ell$ y $0 \leq j_0 \leq \ell'$, entonces $\max\{\ell, \ell'\} \leq t \leq \ell + \ell'$.

Puesto que $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_n = \ell + \ell' - t$ y $0 = j_n < j_{n-1} < \ldots < j_0 = \ell + \ell' - t$, por el Lema 4.3.1 tenemos que $v_{1,m}^{i_k,\ell'-j_k,\mu} \neq 0$ y $v_{2,0}^{i_k,\ell'-j_k,\mu} \neq 0$ para todo $0 < k < n$. Además, $v_{2,0}^{0,t-\ell,\mu} \neq 0$ y $v_{1,m}^{\ell+\ell'-t,\ell',\mu} \neq 0$.

Como $v_{2,0}^{0,t-\ell,\mu} \neq 0$, entonces existe $0 < k_0 \leq n$ tal que se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

$$\lambda_0 v_{2,0}^{0,t-\ell,\mu} + \lambda_{k_0} v_{1,0}^{i_{k_0},\ell'-j_{k_0},\mu} = 0,$$
$$\lambda_0 v_{2,0}^{0,t-\ell,\mu} + \lambda_{k_0} v_{2,0}^{i_{k_0},\ell'-j_{k_0},\mu} = 0.$$

La segunda igualdad no se puede dar, ya que implica $i_{k_0} = 0 = i_0$ lo que es absurdo. Por lo tanto se debe de tener la primera igualdad, la cual implica $i_{k_0} = 1$ y $j_{k_0} = (\ell+\ell'-t)-1$. Puesto que $0 = i_0 < i_1 \leq i_{k_0} = 1$, entonces $k_0 = 1$. De donde $i_1 = 1$ y $j_1 = (\ell+\ell'-t)-1$.

Supongamos el resultado válido para $k-1$, es decir, $i_{k-1} = k-1$ y $j_{k-1} = (\ell + \ell' - t) - (k-1)$, puesto que $i_k \neq 0$, entonces existe $0 \leq \alpha_k \leq n$ con $\alpha_k \neq k$, tal que se cumple una y sólo una de las siguientes igualdades:

$$\lambda_k v_{1,m}^{i_k,\ell'-j_k,\mu} + \lambda_{\alpha_k} v_{1,m}^{i_{\alpha_k},\ell'-j_{\alpha_k},\mu} = 0,$$
$$\lambda_k v_{1,m}^{i_k,\ell'-j_k,\mu} + \lambda_{\alpha_k} v_{2,m}^{i_{\alpha_k},\ell'-j_{\alpha_k},\mu} = 0.$$

La primera igualdad no es posible, ya que $i_k \neq i_{\alpha_k}$. Por lo tanto se debe de tener la segunda igualdad, la cual implica $i_k - 1 = i_{\alpha_k}$ y $j_k = j_{\alpha_k} - 1$. Que ocurre si y sólo si $\alpha_k < k$. Puesto que $\alpha_k \leq k-1 < k$, entonces $i_{\alpha_k} \leq i_{k-1} < i_k = i_{\alpha_k} + 1$. Por lo tanto $\alpha_k = k-1$. Así $i_k = i_{k-1} + 1$ y $j_k = j_{k-1} - 1$ por hipótesis obtenemos que:

$$\begin{aligned} i_k =& (k-1) + 1 = k, \\ j_k =& ((\ell + \ell' - t) - (k-1)) - 1 = (\ell + \ell' - t) - k. \end{aligned}$$

Lo que prueba nuestra afirmación.

Así tenemos que:

$$v = \sum_{k=0}^{\ell'+\ell-t} \lambda_k v_0^{k,t-\ell+k,\mu},$$

donde $v_0^{k,t+k-\ell,\mu}$ es un vector de peso máximo μ en $V(a+km)\otimes V(b+(t-\ell+k)m)$ para todo $0\leq k\leq n$. Además:

$$x_\mu^{k,t-\ell+k} = \frac{a+km+b+(t-\ell+k)m-\mu}{2} = \frac{a+b+(t-\ell+2k)m-\mu}{2}.$$

Sin perdida de generalidad supondremos que $\lambda_0 = 1$. Puesto que:

$$e_s\, v = \sum_{k=0}^{\ell+\ell'-t} \lambda_k \left(v_{1,s}^{k,t-\ell+k,\mu} + v_{2,s}^{k,t-\ell+k,\mu}\right) = 0$$

para todo $0\leq s\leq m$. Entonces:

$$\lambda_k v_{2,s}^{k,t-\ell+k,\mu} + \lambda_{k+1} v_{1,s}^{k+1,t-\ell+(k+1),\mu} = 0.$$

En particular $v_{2,0}^{0,t-\ell,\mu} = -\lambda_1 v_{1,0}^{1,t-\ell+1,\mu}$. Por las ecuaciones (4.14) y (4.13), tenemos que:

$$v_{2,0}^{0,t-\ell,\mu} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{0,t-\ell}} \frac{\binom{b+(t-\ell)m}{x_\mu^{0,t-\ell}-r}}{\binom{b+(t-\ell+1)m}{x_\mu^{0,t-\ell}-r}} \lambda_r^{0,t-\ell,\mu} v_r^0 \otimes y^{t-\ell+1}_{x_\mu^{0,t-\ell}-r},$$

$$v_{1,0}^{1,t-\ell+1,\mu} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{1,t-\ell+1}} \frac{r!}{(r-m)!} \lambda_r^{1,t-\ell+1,\mu} v_{r-m}^0 \otimes y^{t-\ell+1}_{x_\mu^{1,t-\ell+1}-r}.$$

De donde:

$$\sum_{r=0}^{x_\mu^{0,t-\ell}} \frac{\binom{b+(t-\ell)m}{x_\mu^{0,t-\ell}-r}}{\binom{b+(t-\ell+1)m}{x_\mu^{0,t-\ell}-r}} \lambda_r^{0,t-\ell,\mu}\, v_r^0 \otimes y^{t-\ell+1}_{x_\mu^{0,t-\ell}-r} = -\lambda_1 \sum_{r=0}^{x_\mu^{1,t-\ell+1}} \frac{r!}{(r-m)!} \lambda_r^{1,t-\ell+1,\mu}\, v_{r-m}^0 \otimes y^{t-\ell+1}_{x_\mu^{1,t-\ell+1}-r}.$$

Como $0\leq x_\mu^{0,t-\ell}\leq \min\{a, b+(t-\ell)m\}$, entonces $v_r^0\otimes y^{t-\ell+1}_{x_\mu^{0,t-\ell}-r}\neq 0$. Por lo tanto, para que tenga sentido la igualdad anterior se debe tener que:

$$x_\mu^{1,t-\ell+1} = x_\mu^{0,t-\ell} + m.$$

Además, se tiene la igualdad:

$$\lambda_0^{0,t-\ell,\mu} \frac{\binom{b+(t-\ell)m}{x_\mu^{0,t-\ell}}}{\binom{b+(t-\ell+1)m}{x_\mu^{0,t-\ell}}} = -\lambda_1 m! \lambda_m^{1,t-\ell+1,\mu}.$$

Por lo tanto:

$$\lambda_1 = (-1)\frac{\binom{b+(t-\ell)m}{x_\mu^{0,t-\ell}}\lambda_0^{0,t-\ell,\mu}}{m!\binom{b+(t-\ell+1)m}{x_\mu^{0,t-\ell}}\lambda_m^{1,t-\ell+1,\mu}}. \tag{4.15}$$

Por otro lado, como $v_{2,m}^{0,\ell-t,\mu} + \lambda_1 v_{1,m}^{1,\ell-t+1,\mu} = 0$ tenemos que:

$$\sum_{r=0}^{x_\mu^{0,t-\ell}} \frac{(x_\mu^{0,t-\ell}-r)!\binom{b+(t-\ell)m}{x_\mu^{0,t-\ell}-r}}{(x_\mu^{0,t-\ell}-r+m)!\binom{b+(t-\ell+1)m}{x_\mu^{0,t-\ell}-r+m}}\lambda_r^{0,t-\ell,\mu}\, v_r^0 \otimes y_{x_\mu^{0,t-\ell}-r+m}^{t-\ell+1} =$$

$$(-1)^{m+1}\lambda_1 \sum_{r=0}^{x_\mu^{1,t-\ell+1}} \lambda_r^{1,t-\ell+1,\mu}\, v_r^0 \otimes y_{x_\mu^{1,t-\ell+1}-r}^{t-\ell+1}.$$

Tomando $r=0$ al lado izquierdo de la igualdad anterior, tenemos que:

$$\frac{x_\mu^{0,t-\ell}!\binom{b+(t-\ell)m}{x_\mu^{0,t-\ell}}}{(x_\mu^{0,t-\ell}+m)!\binom{b+(t-\ell+1)m}{x_\mu^{0,t-\ell}+m}}\lambda_0^{0,t-\ell,\mu} = (-1)^{m+1}\lambda_1\lambda_0^{1,t-\ell+1,\mu}.$$

Como $x_\mu^{1,t-\ell+1} = x_\mu^{0,t-\ell}+m$ y despejando λ_1 tenemos:

$$\lambda_1 = (-1)^{m+1}\frac{x_\mu^{0,\ell-t}!\binom{b+(\ell-t)m}{x_\mu^{0,\ell-t}}\lambda_0^{0,\ell-t,\mu}}{x_\mu^{1,\ell-t+1}!\binom{b+(\ell-t+1)m}{x_\mu^{1,\ell-t+1}}\lambda_0^{1,\ell+1-t,\mu}}. \tag{4.16}$$

Igualando las ecuaciones (4.15) y (4.16) obtenemos:

$$(-1)\frac{\binom{b+(t-\ell)m}{x_\mu^{0,t-\ell}}\lambda_0^{0,t-\ell,\mu}}{m!\binom{b+(t-\ell+1)m}{x_\mu^{0,t-\ell}}\lambda_m^{1,t-\ell+1,\mu}} = (-1)^{m+1}\frac{x_\mu^{0,t-\ell}!\binom{b+(t-\ell)m}{x_\mu^{0,t-\ell}}\lambda_0^{0,t-\ell,\mu}}{x_\mu^{1,t-\ell+1}!\binom{b+(t-\ell+1)m}{x_\mu^{1,t-\ell+1}}\lambda_0^{1,t-\ell+1,\mu}}.$$

Simplificando obtenemos que:

$$(-1)^m\binom{b+(t-\ell+1)m-x_\mu^{0,t-\ell}}{m}\lambda_0^{1,t+1-\ell,\mu} = \lambda_m^{1,t+1-\ell,\mu}.$$

Puesto que $b+(t-\ell+1)m-x_\mu^{0,t-\ell} = x_\mu^{1,t+1-\ell}+\mu-a$ y reemplazando los valores de $\lambda_0^{1,t+1-\ell,\mu}$ y $\lambda_m^{1,t+1-\ell,\mu}$ dados en (4.11), obtenemos que:

$$\binom{a+m}{m} = \binom{x_\mu^{1,t+1-\ell}}{m}.$$

Como $m \geq 1$, entonces $a+m = x_\mu^{1,t+1-\ell}$, de donde $a = x_\mu^{0,t-\ell}$. Además como $x_\mu^{0,t-\ell} \leq \min\{a, b+(t-\ell)m\}$, entonces lo anterior ocurre si y sólo si $a \leq b+(t-\ell)m$.

Por lo tanto, si $b+(t-\ell)m < a$ obtendriamos un absurdo, lo que implica que $n=0$ obteniendo el caso *ii.*

Si $a \leq b+(t-\ell)m$ ocurre, entonces v es un vector de peso máximo $\mu = b+(t-\ell)m-a$. Por otra parte, para cada $1 \leq k \leq \ell+\ell'-t$, tenemos que $x_{\mu}^{k,t-\ell+k} = x_{\mu}^{k-1,t-\ell+(k-1)} + m$ y $x_{\mu}^{0,t-\ell} = a$. Por lo tanto, $x_{\mu}^{k,t+k-\ell} = a+km$.

Además, para cada $0 \leq k \leq n$:

$$\lambda_k v_{2,s}^{k,t-\ell+k,\mu} + \lambda_{k+1} v_{1,s}^{k+1,t-\ell+(k+1),\mu} = 0.$$

Así, tenemos que para todo $0 \leq s \leq m$ y todo $0 \leq r \leq a+km$:

$$\lambda_{k+1} = \frac{(a+km-r)!\binom{b+(t+k-\ell)m}{a+km-r} r! \lambda_r^{k,t+k-\ell,\mu}}{(s+a+km-r)!\binom{b+(t+(k+1)-\ell+1)m}{s+a+km-r}(r+m-s)!\lambda_{r+m-s}^{k+1,t-\ell+(k+1),\mu}}.$$

Por los valores que toman $\lambda_r^{k,t+k-\ell,\mu}$ y $\lambda_{r+m-s}^{k+1,t-\ell+(k+1),\mu}$ en (4.11) y simplificando los términos, tenemos que:

$$\lambda_{k+1} = (-1)\frac{(a+km)!}{(a+(k+1)m)!}\lambda_k$$

para todo $0 \leq k \leq n$. Notar que la expresión de la derecha en la igualdad anterior no depende de r.

Puesto que $\lambda_0 = 1$, entonces $\lambda_k = (-1)^k \frac{a!}{(a+km)!}$ para $1 \leq k \leq n$. Por lo tanto, v es un vector de peso máximo $\mu = b+(t-\ell)m-a$ y es un múltiplo escalar del vector:

$$v_0^{0,t-\ell,\mu} - \frac{a!}{(a+m)!}v_0^{1,t-\ell+1,\mu} + \ldots + (-1)^{\ell+\ell'-t}\frac{a!}{(a+(t-\ell)m)!}v_0^{\ell'+\ell-t,\ell',\mu}.$$

Como queríamos demostrar. $\square$

El resultado principal de esta sección es el siguiente teorema que nos describe el zócalo del producto tensorial de los $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales $Z(a,\ell)$ y $Z(b,\ell')^*$.

Teorema 4.3.3. *Sean a, b, ℓ, ℓ' números enteros no negativos. Entonces:*

$$soc(Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')^*) \simeq_{\mathfrak{sl}(2)}$$
$$soc(Z(a,\ell)) \otimes soc(Z(b,\ell')^*) \oplus \bigoplus_{k=1}^{min\{\ell,\ell',\lfloor(b-a)/m\rfloor+\ell'\}} V(b+(\ell'-k)m-a).$$

En particular, $soc(Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')^*) \simeq_{\mathfrak{sl}(2)} soc(Z(a,\ell)) \otimes soc(Z(b,\ell')^*)$ si y sólo si $b+(\ell'-k)m < a$ para todo $1 \leq k \leq min\{\ell,\ell'\}$.

Prueba: Sea V un $\mathfrak{g}$-submódulo irreducible de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')^*$. Entonces tenemos que V es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible y por el Lema 3.1.10, $\mathfrak{r}$ actúa trivialmente en V. Por lo tanto existe un número entero no negativo μ tal que $V \simeq_{\mathfrak{sl}(2)} V(\mu)$. Sea v un vector de peso máximo μ en V.

Puesto que $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')^* = \bigoplus_{t=0}^{\ell+\ell'} U_t$, entonces existen $0 \leq t_\alpha < t_{\alpha-1} < \ldots < t_0 \leq \ell+\ell'$ y $v_0, v_1, \ldots, v_\alpha$ tal que:

$$v = v_0 + v_1 + \ldots + v_\alpha,$$

donde $v_d \in U_{t_d}$ para todo $0 \leq d \leq \alpha$.

Puesto que U_{t_d} es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')^*$, entonces v_d es un vector de peso máximo μ en U_{t_d} para todo $0 \leq d \leq \alpha$. Además, como $\mathfrak{r}\cdot U_t \subset U_{t+1}$ por independencia lineal tenemos que:

$$\mathfrak{r}\cdot v_d = 0$$

para todo $0 \leq d \leq \alpha$. Si $\alpha \neq 0$ la proposición anterior nos indica que v_d es un vector de peso máximo $\mu = b + (t_d - \ell)m - a$ en U_{t_d} para todo $0 \leq d \leq \alpha$. De donde, si $0 \leq k, d \leq \alpha$ tenemos que $t_d = t_k$ lo cual es absurdo.

Por lo tanto $\alpha = 0$ y $v = v_0$ es un vector de peso máximo $\mu = b + (t_0 - \ell) - a$ en U_{t_0} tal que $\max\{\ell,\ell'\} \leq t_0 < \ell + \ell'$. Si tomamos $s = \ell + \ell' - t_0$, entonces v es un vector de peso máximo $\mu = b + (\ell' - s)m - a$ en $U_{\ell+\ell'-s}$ tal que $1 \leq s \leq \min\{\ell,\ell'\}$. $\square$

Al igual que $\mathrm{soc}(Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell'))$ y $\mathrm{soc}(Z(a,\ell)^*\otimes Z(b,\ell')^*)$, el zócalo de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')^*$ es libre de multiplicidad.

Ejemplos 4.3.4. Consideramos $m = 1$ y los $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales $Z(0,1)$ y $Z(1,1)^*$. Así $a = 0$ y $b = \ell = \ell' = 1$, por lo tanto $Z(0,1)\otimes Z(1,1)^*$ tiene la siguiente representacion matricial:

$$\left(\begin{array}{c|ccc||cc||cccc|cc||ccc|c}
V(0)\otimes V(2) & \boxed{2h} & \boxed{2e} & \boxed{0} & \boxed{2e_0} & \boxed{0} & -e_1 & e_0 & 0 & 0 & \boxed{2e_0} & \boxed{0} & & & & \\
 & \boxed{f} & \boxed{0} & \boxed{2e} & \boxed{e_1} & \boxed{e_0} & 0 & -e_1 & e_0 & 0 & \boxed{e_1} & \boxed{e_0} & & & & \\
 & \boxed{0} & \boxed{f} & \boxed{-2h} & \boxed{0} & \boxed{e_1} & 0 & 0 & -e_1 & e_0 & \boxed{0} & \boxed{e_1} & & & & \\
\hline\hline
V(0)\otimes V(1) & & & & \boxed{h} & \boxed{e} & & & & & & & -e_1 & e_0 & 0 & e_0 \\
 & & & & \boxed{f} & \boxed{-h} & & & & & & & 0 & -e_1 & 2e_0 & e_1 \\
\hline\hline
V(1)\otimes V(2) & & & & & & 3h & 3e & 0 & 0 & & & 3e_1 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & f & h & 4e & 0 & & & e_1 & 2e_0 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & f & -h & 3e & & & 0 & e_1 & e_0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 & f & -3h & & & 0 & 0 & e_1 & \\
\hline
 & & & & & & & & & & \boxed{h} & \boxed{e} & & & & e_0 \\
 & & & & & & & & & & \boxed{f} & \boxed{-h} & & & & e_1 \\
\hline\hline
V(1)\otimes V(1) & & & & & & & & & & & & 2h & 2e & 0 & \\
 & & & & & & & & & & & & f & 0 & 2e & \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & f & -2h & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & & & 0
\end{array}\right).$$

El cual tiene por zócalo $\mathrm{soc}(Z(0,1)\otimes Z(1,1)^*) =_{\mathfrak{sl}(2)} V(2)\oplus V(1)$.

4.4. Serie de zócalo de $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$ y serie radical de $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')$.

Como dijimos en la Capítulo 3, para cada $\mathfrak{g}$-módulo V, existe la serie de zócalo y la serie del radical. En esta sección describimos la serie del zócalo del $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulo $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$.

Consideramos los $\mathfrak{sl}(2)$-submódulos W_t^* de $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$, definidos en §4.2. Supongamos que $V(\mu)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo irreducible en W_t^* tal que $e_i\, v = 0$ para todo $0 \le i \le m$ y donde v es un vector de peso máximo μ. Puesto que:

$$e_i\,(f\,v) = f\,(e_i\,v) - [f, e_i]\,v = 0,$$

tenemos que $e_i\,v_j = 0$ para todo $0 \le i \le m$ y todo $0 \le j \le \mu$ donde $v_j = f^j\,v$. Por lo tanto $V(\mu) \subset \operatorname{soc}(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*)$. Por el Teorema 4.2.4 tenemos que:

$$\operatorname{soc}(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*) = W^*_{\ell+\ell'}.$$

Lo anterior nos indica que para todo vector de peso máximo v en W_t^* con $t \neq \ell + \ell'$, existe $0 \le i \le m$ tal que $e_i\,v \neq 0$ y $e_{i-1}\,v = 0$. Por lo tanto $e_k\,v = 0$ para todo $0 \le k < i$ y $e_j\,v \neq 0$ para todo $i \le j \le m$.

Lema 4.4.1. *Sea v un vector de peso máximo μ en W_t^* con $t \neq \ell + \ell'$ tal que $e_{i-1}\,v = 0$ y $e_i\,v \neq 0$ para algún $0 \le i \le m$. Entonces $e_i\,v$ es un vector de peso máximo $\mu + (m-2i)$ en W^*_{t+1}.*

Prueba: Por la definición de los W_t^*'s tenemos que $e_i\,v \in W^*_{t+1}$, como:

$$h\,(e_i\,v) = e_i\,(h\,v) + [h, e_i]\,v = (\mu + (m-2i))e_i\,v,$$

entonces $e_i\,v$ tiene peso $\mu + (m-2i)$. Además:

$$e\,(e_i\,v) = e_i\,(e\,v) + [e, e_i]\,v = (m-i+1)e_{i-1}\,v.$$

Pero $e_{i-1}\,v = 0$ por hipótesis, entonces $e\,(e_i\,v) = 0$ y así $e_i\,v$ es un vector de peso máximo $\mu + (m-2i)$ en W^*_{t+1}. $\square$

Tenemos el siguiente resultado para el $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulo $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$.

Teorema 4.4.2. *Sean a, b, ℓ, ℓ' números enteros no negativos. Entonces, los factores de zócalo de $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$ son:*

$$soc^{k+1}(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*)/soc^{k}(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*) = W_k^*.$$

para todo $0 \le k \le \ell + \ell'$.

Prueba: El resultado de este teorema es equivalente a probar que para $1 \leq k \leq \ell + \ell'$:

$$\operatorname{soc}^k(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*) =_{\mathfrak{g}} \bigoplus_{t=\ell+\ell'-(k-1)}^{\ell+\ell'} W_t^*.$$

Para $k = 1$, el resultado se tiene por el Teorema 4.2.4.

Tomamos $k > 1$. Supongamos el resultado válido para $k-1$, es decir:

$$\operatorname{soc}^{k-1}(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*) = \bigoplus_{t=\ell+\ell'-(k-2)}^{\ell+\ell'} W_t^*.$$

Veamos que se cumple para k. En efecto, por la acción en el producto tensorial de dos $\mathfrak{g}$-módulos dado en el Ejemplo 2.2.1 y por el Lema 4.0.3, tenemos que $\mathfrak{r} \cdot W_t^* \subset W_{t+1}^*$ para todo $0 \leq t \leq \ell + \ell'$ con $W_{\ell+\ell'+1}^* = 0$. En particular, $\mathfrak{r} \cdot W_{\ell+\ell'-(k-1)}^* \subset W_{\ell+\ell'-(k-2)}^*$, entonces $W_{\ell+\ell'-(k-1)}^* \subset \operatorname{soc}^k(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*)$. Por lo tanto:

$$\operatorname{soc}^{k-1}(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*) \subsetneq \operatorname{soc}^k(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*).$$

Además:

$$\bigoplus_{t=\ell+\ell'-(k-1)}^{\ell+\ell'} W_t^* \subset \operatorname{soc}^k(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*).$$

Consideremos v un vector de peso máximo μ en $\operatorname{soc}^k(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*)$. Queremos ver que $v \in \bigoplus_{t=\ell+\ell'-(k-1)}^{\ell+\ell'} W_t^*$, lo que mostraría la igualdad en la contenencia anterior.

En efecto, como v es un elemento de $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^* = \bigoplus_{t=0}^{\ell+\ell'} W_t^*$. Entonces existen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vectores de peso máximo μ en $W_{t_1}^*, W_{t_2}^*, \ldots, W_{t_n}^*$ respectivamente tales que $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq \ell + \ell'$ y se cumple que:

$$v = w_1 + w_2 + \ldots + w_n.$$

Si $\ell + \ell' - (k-1) \leq t_i \leq \ell + \ell'$ para todo $1 \leq i \leq n$, entonces:

$$v \in \bigoplus_{t=\ell+\ell'-(k-1)}^{\ell+\ell'} W_t^*.$$

Supongamos que existe $1 \leq s \leq n$ (el más grande de todos) tal que:

$$0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_s < \ell + \ell' - (k-1) \leq t_{s+1} < \ldots < t_n \leq \ell + \ell'.$$

Entonces $0 \leq t_1 < \ell + \ell' - (k-1)$. Por lo tanto, $t_1 \neq \ell + \ell'$ y existe $0 \leq i \leq m$ tal que $e_i\, w_1 \neq 0$. Por el Lema 3.1.10, tenemos que $\mathfrak{r}$ actúa trivialmente en:

$$\operatorname{soc}\Big(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*/(\operatorname{soc}^{k-1}(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*))\Big).$$

Por lo tanto, $\mathfrak{r} \cdot \operatorname{soc}^k(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*) \subset \operatorname{soc}^{k-1}(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*)$.
Entonces $e_i\, v = e_i\, w_1 + \ldots + e_i\, w_n$ que está en $\operatorname{soc}^{k-1}(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*)$. Por hipótesis $\operatorname{soc}^{k-1}(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*) = \displaystyle\bigoplus_{t=\ell+\ell'-(k-2)}^{\ell+\ell'} W_t^*$, de donde:

$$e_i\, w_1 \in \bigoplus_{t=\ell+\ell'-(k-2)}^{\ell+\ell'} W_t^* \oplus \bigoplus_{i=2}^{s} W_{t_i+1}^*,$$

pero $e_i\, w_1 \in W_{t_1+1}^*$ y $0 \leq t_1 + 1 \leq \ell + \ell' - (k-1)$. Por lo tanto, existe $2 \leq i_0 \leq s$ tal que $t_1 + 1 = t_{i_0} + 1$, lo que contradice la elección de los t_i's. Así tenemos que:

$$v \in \bigoplus_{t=\ell+\ell'-(k-1)}^{\ell+\ell'} W_t^*$$

de donde $\operatorname{soc}^k(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*) =_{\mathfrak{g}} \displaystyle\bigoplus_{t=\ell+\ell'-(k-1)}^{\ell+\ell'} W_t^*$. $\square$

El anterior teorema nos indica que la serie del zócalo de $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell)^*$ es:

$$W_{\ell+\ell'}^* \subset W_{\ell+\ell'}^* \oplus W_{\ell+\ell'-1}^* \subset \ldots \subset \bigoplus_{t=0}^{\ell+\ell'} W_{\ell+\ell'-t}^* = Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell)^*$$

con $\operatorname{soc}^k(Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*) = \displaystyle\bigoplus_{t=\ell+\ell'-(k-1)}^{\ell+\ell'} W_t^*$.

Recordamos que si U es un $\mathfrak{g}$-submódulo de V^*, entonces:

$$U^\perp = \{v \in V : f(v) = 0 \text{ para todo } f \in U\}$$

además $\operatorname{rad}(V) = \operatorname{soc}(V^*)^\perp$, por lo tanto tenemos el siguiente corolario del Teorema 4.4.2

Corolario 4.4.3. *Sean a, b, ℓ, ℓ' números enteros no negativos. Entonces*

$$rad^k(Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')) = \bigoplus_{t=k}^{\ell+\ell'} W_t.$$

Prueba: Recordamos que $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell') = \bigoplus_{t=0}^{\ell+\ell'} W_t$, donde:

$$W_t = \bigoplus_{(i,j)\in I_t} V(a+im)\otimes V(b+jm).$$

Además tenemos que $W_t^* \simeq (W_{\ell+\ell'-t})^*$.

Para demostrar este corolario, usamos un resultado de álgebras asociativas (ver demostracion de [A, Corollary V.1.2. §V.1]). Este resultado nos dice que existe un isomorfismo $(\mathrm{soc}^k(M))^* \simeq M^*/\mathrm{rad}^k(M^*)$.

Por lo tanto:

$$(\mathrm{soc}^k(Z(a,\ell)^*\otimes Z(b,\ell')^*))^* \simeq_{\mathfrak{g}} (Z(a,\ell)^*\otimes Z(b,\ell')^*)^*/\mathrm{rad}^k((Z(a,\ell)^*\otimes Z(b,\ell')^*)^*).$$

Puesto que $Z(a,\ell)^*\otimes Z(b,\ell')^* \simeq_{\mathfrak{g}} Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$, entonces:

$$\Big(\mathrm{soc}^k(Z(a,\ell)^*\otimes Z(b,\ell')^*)\Big)^* \simeq_{\mathfrak{g}} Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')/\mathrm{rad}^k(Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')).$$

Por el Teorema 4.4.2, tenemos que:

$$\mathrm{soc}^k(Z(a,\ell)^*\otimes Z(b,\ell')^*) =_{\mathfrak{g}} \bigoplus_{t=\ell+\ell'-(k-1)}^{\ell+\ell'} W_t^*.$$

Por lo tanto:

$$\left(\bigoplus_{t=\ell+\ell'-(k-1)}^{\ell+\ell'} W_t^*\right)^* \simeq_{\mathfrak{g}} Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')/\mathrm{rad}^k(Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')).$$

Por la Nota 4.2.2, tenemos que $W_t^* \simeq (W_{\ell+\ell'-t})^*$, entonces:

$$\bigoplus_{t=\ell+\ell'-(k-1)}^{\ell+\ell'} W_{\ell+\ell'-t} \simeq_{\mathfrak{g}} Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')/\mathrm{rad}^k(Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')).$$

Reparametrizamos, tomando $s=\ell+\ell'-t$:

$$\bigoplus_{s=0}^{k-1} W_s \simeq_{\mathfrak{g}} Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')/\mathrm{rad}^k(Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')).$$

Así $\mathrm{rad}^k(Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')) = \bigoplus_{t=k}^{\ell+\ell'} W_t$. $\square$

Por lo tanto, la serie del radical de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$ es:

$$W_0 \subset W_0\oplus W_1 \subset \ldots \subset W_0\oplus W_1\oplus\ldots\oplus W_{\ell+\ell'} = Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell').$$

5 Módulos cíclicos de $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$.

La noción general de $\mathfrak{g}$-módulo cíclico para cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, coincide con la definición de A-módulo cíclico sobre un álgebra asociativa A con unidad. Su relación con los $\mathfrak{g}$-módulos cíclicos perfectos se puede observar en [Ca2, Proposition 3.6 §3]. En este capítulo mostraremos que $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')$ es un $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$-módulo cíclico y que $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$ es un $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulo cíclico.

Definición 5.0.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Un $\mathfrak{g}$-módulo V se denomina* $\mathfrak{g}$-módulo cíclico*, si existe $v \in V$ tal que:*

$$V = \mathcal{U}(\mathfrak{g})v.$$

Recordamos que para cada entero no negativo a, existe un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible $V(a)$, el cual es generado por un vector v_0^a denominado vector de peso máximo a. Una base de $V(a)$ está dada por $\{v_0^a, v_1^a, \ldots, v_a^a\}$, donde $v_k^a = f^k\, v_0^a$. Esta base cumple con las siguientes relaciones:

$$h\, v_k^a = (\mu - 2k)v_k^a, \quad f\, v_k^a = v_{k+1}^a, \quad e\, v_k^a = k(a-(k-1))v_{k-1}^a, \tag{5.1}$$

para todo $0 \leq k \leq a$, donde $v_{-1}^a = v_{a+1}^a = 0$.

Proposición 5.0.2. *Si $V = V(a_1) \bigoplus \ldots \bigoplus V(a_n)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo tal que se tiene $a_1 < \ldots < a_n$. Entonces V es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo cíclico, con un vector generador $v = v_0^{a_1} + \ldots + v_0^{a_n}$. Donde $v_0^{a_i}$ es un vector de peso máximo a_i de $V(a_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Prueba: Consideremos $v = v_0^{a_1} + \ldots + v_0^{a_n}$ y $W = \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2))v$ que es un $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo de V. Puesto que $a_n > a_k$ para todo $0 \leq k < n$, entonces $v_{a_n}^{a_k} = f^{a_n} v_0^{a_k} = 0$ para todo $0 \leq k < n$. De donde $f^{a_n} v = v_{a_n}^{a_n} \in W$. Para recuperar a $v_0^{a_n}$ tenemos que $e^{a_n} v_{a_n}^{a_n} = (a_n!)^2 v_0^{a_n}$, por lo tanto:

$$\frac{1}{(a_n!)^2} e^{a_n} f^{a_n} v = v_0^{a_n}.$$

Así $v_0^{a_n} \in W$, de donde $V(a_n) \subset W$.
Tomamos ahora $v - v_0^{a_n} = v_0^{a_1} + \ldots + v_0^{a_{n-1}} \in W$. Razonando de manera similar obtenemos que $v_0^{a_k} \in W$ para todo $0 \leq k \leq n$. Así $V = \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2))v$. $\square$

Combinando la proposición anterior con el Teorema de Clebsch-Gordan tenemos que $V(k_1) \otimes V(k_2)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo cíclico para cualquier par de enteros no negativos k_1, k_2.

5.1. $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$ es un $\mathfrak{sl}(2)\ltimes V(m)$-módulo cíclico.

Como vimos en §4.3 el producto tensorial de $Z(a,\ell)$ con $Z(b,\ell')$ tiene una descomposición en suma directa de $\mathfrak{sl}(2)$-módulos:

$$Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')=\bigoplus_{t=0}^{\ell+\ell'} W_t$$

tal que $\mathfrak{r}\cdot W_t\subset W_{t+1}$. Donde $W_t=\bigoplus_{(i,j)\in I_t} V(a+im)\otimes V(b+jm)$ y los conjuntos I_t constan de las parejas $(i,j)\in[0,\ell]\times[0,\ell']$ tales que $i+j=\ell+\ell'-t$ para todo $0\le t\le \ell+\ell'$.

Para cada pareja $(i,j)\in[0,\ell]\times[0,\ell']$, definimos los elementos:

$$v_{i,j}=\sum_{k=0}^{\min\{a+im,b+jm\}} v_0^{i,j,a+b+(i+j)m-2k}$$

en $V(a+im)\otimes V(b+jm)$, es decir, $v_{i,j}$ es la suma de los vectores de peso máximo que aparecen en el Teorema de Clebsch-Gordan para la descomposición de $V(a+im)\otimes V(b+jm)$ como $\mathfrak{sl}(2)$-módulo.

Por la Proposición 5.0.2 tenemos que cada producto tensorial $V(a+im)\otimes V(b+jm)$ es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo cíclico con un vector generador $v_{i,j}$.

Para cada $0\le i\le\ell$, fijaremos las bases $B_i=\{v_0^i,v_1^i,\dots,v_{a+im}^i\}$ de $V(a+im)$ tal que v_0^i es un vector de peso máximo $a+im$ y $v_k^i=f^k\,v_0^i$ para todo $0\le k\le a+im$. Por lo tanto $B_{a,\ell}=\bigcup_{i=0}^{\ell} B_i$ es una base de $Z(a,\ell)$. Como en el Capítulo 4.

Con la base $B_{a,\ell}$ definida anteriormente tenemos que $\mathfrak{r}$ actúa en $Z(a,\ell)$ de la siguiente manera:

$$e_s\,v_k^i=(-1)^s\binom{m}{s}\frac{k!}{(s+k-m)!}v_{s+k-m}^{i-1} \tag{5.2}$$

para todo $0\le s\le m$, donde $0\le k\le a+im$. Además, si $s+k-m<0$ o $a+im<s+k-m$, entonces $v_{s+k-m}^{i-1}=0$ y $v_\alpha^{-1}=0$ para todo α.

Por otra parte, consideramos $B_{b,\ell'}=\bigcup_{j=0}^{\ell'} B_j$ base de $Z(b,\ell')$. Donde $B_j=\{w_0^j,\dots,w_{b+jm}^j\}$ para todo $0\le j\le\ell'$. $B_{b,\ell'}$ cumple las mismas propiedades que la base $B_{a,\ell}$ para $Z(a,\ell)$.

Recordamos la notación dada en §4.1. Si $V(\mu)$ aparece en la descomposición de $V(a+im)\otimes V(b+jm)$, entonces:

$$x_\mu^{i,j}=\frac{a+b+(i+j)m-\mu}{2}\ \text{con}\ 0\le x_\mu^{i,j}\le \min\{a+im,b+jm\}, \tag{5.3}$$

$$\lambda_r^{i,j,\mu}=(-1)^r\frac{\binom{x_\mu^{i,j}}{r}}{\binom{x_\mu^{i,j}+\mu}{a+im-r}}\ \text{para todo}\ 0\le r\le x_\mu^{i,j}. \tag{5.4}$$

Un vector de peso máximo μ en $V(a+im)\otimes V(b+jm)$ es:

$$v_0^{i,j,\mu}=\sum_{r=0}^{x_\mu^{i,j}}\lambda_r^{i,j,\mu}v_r^i\otimes w^j_{x_\mu^{i,j}-r}.$$

Proposición 5.1.1. *Para toda pareja $(i,j)\in[1,\ell]\times[0,\ell']$ con $b+jm\neq 0$, el $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo $V(a+(i-1)m)\otimes V(b+jm)$ de $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$ está contenido en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j}$.*

Prueba: Puesto que $V(a+im)\otimes V(b+jm)=\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2))v_{i,j}$, entonces $V(a+im)\otimes V(b+jm)$ está contenido en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j}$. Por lo tanto, para todo $0\le r\le a+im$ y todo $0\le s\le b+jm$ los elementos $v_r^i\otimes w_s^j$ están en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j}$.

Para determinar que $V(a+(i-1)m)\otimes V(b+jm)$ está contenido en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j}$, es suficiente mostrar que cada vector de peso máximo en $V(a+(i-1)m)\otimes V(b+jm)$ está en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j}$.

Sea $v_0^{i-1,j,\mu}$ un vector de peso máximo μ en $V(a+(i-1)m)\otimes V(b+jm)$. Se tiene que:

$$0\le x_\mu^{i-1,j}\le \min\{a+(i-1)m,b+jm\}\le \min\{a+im,b+jm\}.$$

Caso$[x_\mu^{i-1,j}\neq \mathbf{min}\{a+(i-1)m,b+jm\}]$
Consideramos los elementos:

$$z_0=\sum_{r=0}^{x_\mu^{i-1,j}}(-1)^r\binom{x_\mu^{i-1,j}}{r}\alpha_r\, v_r^i\otimes w^j_{x_\mu^{i-1,j}-r},$$
$$z_1=\sum_{r=0}^{x_\mu^{i-1,j}+1}(-1)^r\binom{x_\mu^{i-1,j}+1}{r}\beta_r\, v_r^i\otimes w^j_{x_\mu^{i-1,j}+1-r},$$

los cuales son elementos que están en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j}$ y donde cada producto tensorial involucrado en ambas sumas es diferente de cero.

De donde, $(-1)^m e_m\, z_0$ y $\dfrac{(-1)^{m-1}}{\binom{m}{m-1}(x_\mu^{i-1,j}+1)}e_{m-1}\, z_1$ son elementos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j}$.

Usando la acción de $\mathfrak{r}$ sobre $V(a+im)$ y $V(b+jm)$ dada en (5.2), tenemos que:

$$(-1)^m e_m\, z_0 = \sum_{r=0}^{x_\mu^{i-1,j}} (-1)^r \binom{x_\mu^{i-1,j}}{r} \alpha_r\, v_r^{i-1} \otimes w^j_{x_\mu^{i-1,j}-r} + \sum_{r=0}^{x_\mu^{i-1,j}} (-1)^r \binom{x_\mu^{i-1,j}}{r} \alpha_r\, v_r^{i} \otimes w^{j-1}_{x_\mu^{i-1,j}-r}$$

Además, se tiene la siguiente igualdad:

$$\frac{(-1)^{m-1}}{\binom{m}{m-1}(x_\mu^{i-1,j}+1)} e_{m-1} z_1 = \sum_{r=0}^{x_\mu^{i-1,j}} (-1)^{r+1} \binom{x_\mu^{i-1,j}}{r} \beta_{r+1}\, v_r^{i-1} \otimes w^j_{x_\mu^{i-1,j}-r} + \sum_{r=0}^{x_\mu^{i-1,j}} (-1)^r \binom{x_\mu^{i-1,j}}{r} \beta_r\, v_r^{i} \otimes w^{j-1}_{x_\mu^{i-1,j}-r}.$$

Queremos determinar valores de los α_r's y β_r's de tal manera que se cumpla la siguiente igualdad:

$$v_0^{i-1,j,\mu} = e_m\, z_0 - \frac{(-1)^{m-1}}{\binom{m}{m-1}(x_\mu^{i-1,j}+1)}\, e_{m-1} z_1$$

lo que nos lleva a lo siguiente:

$$\sum_{r=0}^{x_\mu^{i-1,j}} \lambda_r^{i-1,j,\mu}\, v_r^{i-1} \otimes w^j_{x_\mu^{i-1,j}-r} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{i-1,j}} (-1)^r \binom{x_\mu^{i-1,j}}{r} (\alpha_r + \beta_{r+1}) v_r^{i-1} \otimes w^j_{x_\mu^{i-1,j}-r} + \sum_{r=0}^{x_\mu^{i-1,j}} (-1)^r \binom{x_\mu^{i-1,j}}{r} (\alpha_r - \beta_r) v_r^{i} \otimes w^{j-1}_{x_\mu^{i-1,j}-r},$$

donde $\lambda_r^{i-1,j} = (-1)^r \frac{\binom{x_\mu^{i-1,j}}{r}}{\binom{x_\mu^{i-1,j}+\mu}{a+(i-1)m-r}}$, para todo $0 \leq r \leq x_\mu^{i-1,j}$, dada en la ecuación (5.2).

Así, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_r + \beta_{r+1} & = & \dfrac{1}{\binom{x_\mu^{i-1,j}+\mu}{a+(i-1)m-r}} \\ \\ \alpha_r - \beta_r & = & 0 \end{cases}$$

para todo $0 \leq r \leq x_\mu^{i-1,j}$ y $\beta_{x_\mu^{i-1,j}+1} = 0$. Las soluciones para este sistema están dadas por:

$$\alpha_r = \beta_r = \sum_{s=0}^{x_\mu^{i-1,j}-r} (-1)^{x_\mu^{i-1,j}-r+s} \frac{1}{\binom{x_\mu^{i-1,j}+\mu}{a+(i-1)m-s}},$$

para todo $0 \leq r \leq x_\mu^{i-1,j}$.

Por lo tanto, $v_0^{i-1,j,\mu}$ está en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j}$ para todo vector de peso máximo μ en el producto tensorial de $V(a+(i-1)m)$ con $V(b+jm)$ tal que $0 \leq x_\mu^{i-1,j} < \min\{a+(i-1)m, b+jm\}$.

Cabe notar que la demostración del caso anterior es valida, si tenemos que:

$$x_\mu^{i-1,j} = \min\{a+(i-1)m, b+jm\} = a+(i-1)m$$

Caso$[x_\mu^{i-1,j} = \mathbf{min}\{a+(i-1)m, b+jm\} = b+jm]$

Para este caso consideramos los elementos:

$$z_0 = \sum_{r=0}^{x_\mu^{i-1,j}} (-1)^r \binom{x_\mu^{i-1,j}}{r} \alpha_r \, v_r^i \otimes w^j_{x_\mu^{i-1,j}-r},$$

$$z_1 = \sum_{r=0}^{x_\mu^{i-1,j}} (-1)^r \binom{x_\mu^{i-1,j}+1}{r+1} \beta_r \; v_{r+1}^i \otimes w^j_{x_\mu^{i-1,j}-r},$$

que son elementos que están en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j}$ y donde cada producto tensorial involucrado en la suma es diferente de cero.

Procediendo de manera similar que antes, queremos que:

$$v_0^{i-1,j,\mu} = (-1)^m e_m \, z_0 + \frac{(-1)^{m-1}}{\binom{m}{m-1}(x_\mu^{i-1,j}+1)} e_{m-1} \, z_1,$$

es decir:

$$\sum_{r=0}^{x_\mu^{i-1,j}} \lambda_r^{i-1,j,\mu} \, v_r^{i-1} \otimes w^j_{x_\mu^{i-1,j}-r} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{i-1,j}} (-1)^r \binom{x_\mu^{i-1,j}}{r} (\alpha_r + \beta_r) v_r^{i-1} \otimes w^j_{x_\mu^{i-1,j}-r} + \sum_{r=0}^{x_\mu^{i-1,j}} (-1)^r \binom{x_\mu^{i-1,j}}{r} (\alpha_r - \beta_{r-1}) v_r^i \otimes w^{j-1}_{x_\mu^{i-1,j}-r},$$

con $\beta_{x_\mu^{i-1,j}-1} = 0$ y donde $\lambda_r^{i-1,j} = (-1)^r \dfrac{\binom{x_\mu^{i-1,j}}{r}}{\binom{x_\mu^{i-1,j}+\mu}{a+(i-1)m-r}}$ para todo $0 \leq r \leq x_\mu^{i-1,j}$.

Así tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_r + \beta_r &= \dfrac{1}{\binom{x_\mu^{i-1,j}+\mu}{a+(i-1)m-r}} \\ \\ \alpha_r - \beta_{r-1} &= 0 \end{cases}$$

para todo $0 \leq r \leq x_\mu^{i-1,j}$ y $\beta_{-1} = 0$. Las soluciones para este sistema están dadas por:

$$\alpha_r = \beta_{r-1} = \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^{r+s} \frac{1}{\binom{x_\mu^{i-1,j}+\mu}{a+(i-1)m-s}}$$

para todo $1 \leq r \leq x_\mu^{i-1,j}$ y $\alpha_0 = \beta_{-1} = 0$.

Por lo tanto de los casos anteriores tenemos que si $V(\mu)$ aparece en la descomposición de $V(a+(i-1)m) \otimes V(b+jm)$, entonces $V(\mu)$ está en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j}$.
Así, $V(a+(i-1)m) \otimes V(b+jm) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j}$. $\square$

El resultado anterior muestra que cualquier vector de peso máximo en el producto tensorial $V(a+(i-1)m)\otimes V(b+jm)$ es generado por elementos en $V(a+im)\otimes V(b+jm)$ siempre que $i \neq 0$ y $b+jm \neq 0$, quien a su vez es generado por el vector $v_{i,j}$.

Procediendo de manera análoga a la proposición anterior, cambiando los roles de a y b, e i con j tenemos el siguiente resultado que muestra que cualquier vector de peso máximo en $V(a+im)\otimes V(b+(j-1)m)$ también es generado por elementos en $V(a+im)\otimes V(b+jm)$ siempre que $j \neq 0$ y $a+im \neq 0$.

Proposición 5.1.2. *Para toda pareja $(i,j) \in [0,\ell] \times [1,\ell']$ con $a+im \neq 0$, el $\mathfrak{sl}(2)$-submódulo $V(a+im) \otimes V(b+(j-1)m)$ de $Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell')$ está contenido en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j}$.*

Nota 5.1.3. Observar que en las demostraciones de las proposiciones anteriores, se muestra que todo vector de peso máximo μ en $V(a+(i-1)m)\otimes V(b+jm)$ con $i(b+jm) \neq 0$ o en $V(a+im) \otimes V(b+(j-1)m)$ con $j(a+im) \neq 0$ está en $\mathfrak{r}(V(a+im) \otimes V(b+jm))$.

Con esto tenemos el siguiente teorema que nos muestra que el producto tensorial de los $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales $Z(a,\ell)$ y $Z(b,\ell')$ es un $\mathfrak{g}$-módulo cíclico.

Teorema 5.1.4. *Sean a, b, ℓ, ℓ' números enteros no negativos. Entonces $Z(a,\ell)\otimes Z(b,\ell')$ es un $\mathfrak{g}$-módulo cíclico con $v_{\ell,\ell'}$ como un vector generador, es decir:*

$$Z(a,\ell) \otimes Z(b,\ell') = \mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{\ell,\ell'}.$$

Prueba: Por las Proposiciones 5.1.1 y 5.1.2 tenemos que tanto $V(a+(i-1)m)\otimes V(b+jm)$ si $b+jm \neq 0$ e $i \neq 0$, y $V(a+im) \otimes V(b+(j-1)m)$ si $a+im \neq 0$ y $j \neq 0$ están en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j}$. Si $i = 0$, claramente $V(a+(i-1)m) \otimes V(b+jm) = 0$ y por lo tanto está en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j}$, de igual manera si $j = 0$, tenemos que $V(a+im) \otimes V(b+(j-1)m) = 0$.

Si $b+jm = 0$ y $i \neq 0$, entonces $j = 0$. Por lo tanto, $V(a+im) \otimes V(b+(j-1)m) = 0$ y $V(a+(i-1)m) \otimes V(b+jm) \simeq_{\mathfrak{sl}(2)} V(a+(i-1)m)$. Además, tenemos que $v_0^{i-1} \otimes w_0^0 = (-1)^m e_m\,(v_0^i \otimes w_0^0)$ es un vector de peso máximo $a+(i-1)m$ en $V(a+(i-1)m)\otimes V(b+jm)$. De donde, $V(a+(i-1)m) \otimes V(b+jm)$ está contenido en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,0}$.

De manera semejante, tenemos el caso $a + im = 0$ y $j \neq 0$.
Si $a + im = 0$ y $b + jm = 0$, entonces $i = j = 0$ y $V(a + im) \otimes V(b + (j - 1)m) = V(a + (i - 1)m) \otimes V(b + jm) = 0$.

Afirmamos que $W_t \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{\ell,\ell'}$ para todo $0 \leq t \leq \ell + \ell'$. En efecto, puesto que $V(a + \ell m) \otimes V(b + \ell' m) = \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2))v_{\ell,\ell'}$. Entonces:

$$W_0 = V(a + \ell m) \otimes V(b + \ell' m) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{\ell,\ell'}.$$

Por las Proposiciones 5.1.1 y 5.1.2, tanto $V(a+(\ell-1)m) \otimes V(b+\ell' m)$ como el producto tensorial $V(a + \ell m) \otimes V(b + (\ell' - 1)m)$ están en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{\ell,\ell'}$. De donde, $W_1 \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{\ell,\ell'}$.

Supongamos que $W_t \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{\ell,\ell'}$ para $0 < t < \ell + \ell'$. Afirmamos que $W_{t+1} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{\ell,\ell'}$. En efecto, consideremos $(i, j) \in I_{t+1}$. Es decir, $V(a+im) \otimes V(b+jm) \subset W_{t+1}$, entonces $(i - 1, j)$ y/o $(i, j - 1)$ están en I_t. Por las Proposiciones 5.1.1 y 5.1.2, tenemos que $V(a + im) \otimes V(b + jm) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i-1,j}$ y/o $V(a + im) \otimes V(b + jm) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j-1}$. Pero, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i-1,j}$ y $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{i,j-1}$ están contenidos en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{\ell,\ell'}$, pues por hipotesis $v_{i-1,j}, v_{i,j-1} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{\ell,\ell'}$. De donde, $V(a+im) \otimes V(b+jm) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{\ell,\ell'}$. Puesto que la pareja $(i, j) \in I_{t+1}$ es arbitraria, tenemos que $W_{t+1} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{\ell,\ell'}$.

Así, $W_t \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{\ell,\ell'}$ para todo $0 \leq t \leq \ell + \ell'$. Por lo tanto, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v_{\ell,\ell'} = Z(a, \ell) \oplus Z(b, \ell')$.
$\square$

Nota 5.1.5. Por lo dicho en la Nota 5.1.3 y en la demostración del teorema anterior, tenemos que $V(a+(i-1)m) \otimes V(b+jm)$ y $V(a+im) \otimes V(b+(j-1)m)$ están contenidos en $\mathfrak{r}(V(a + im) \oplus V(b + jm))$. Por lo tanto:

$$\mathfrak{r}(V(a+im) \otimes V(b+jm)) = (V(a+(i-1)m) \otimes V(b+jm)) \oplus (V(a+im) \otimes V(b+(j-1)m)).$$

Siguiendo la noción de espacio generador dada en §3.4, tenemos que $W_0 = V(a + \ell m) \otimes V(b + \ell' m)$ es un subespacio generador de $Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell')$. Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado, el cual es una consecuencia inmediata de los resultados antes obtenidos.

Corolario 5.1.6. *Para todo $1 \leq k \leq \ell + \ell'$, tenemos que $\mathfrak{r}^k(W_0) = W_k$.*

Prueba: Por la Nota 5.1.5, tenemos que $\mathfrak{r}(W_0) = W_1$. Pues, $W_0 = V(a+\ell m) \otimes V(b+\ell' m)$ y $W_1 = (V(a + (i - 1)m) \otimes V(b + jm)) \oplus (V(a + im) \otimes V(b + (j - 1)m))$.

Supongamos que $\mathfrak{r}^k(W_0) = W_k$, por lo tanto $\mathfrak{r}^{k+1}(W_0) \subset W_{k+1}$. Para todo $0 \leq t \leq \ell + \ell'$ tenemos:

$$W_t = \bigoplus_{(i,j) \in I_t} V(a + im) \otimes V(b + jm)$$

con $I_t = \{(i,j) \in [0,\ell] \times [0,\ell'] : i+j = \ell+\ell'-t\}$.

Si $V(a+im)\otimes V(b+jm) \subset W_{k+1}$, es por que $(i,j) \in I_{k+1}$. De donde, $(i-1,j) \in I_k$ y/o $(i,j-1) \in I_k$, es decir, $V(a+(i-1)m)\otimes V(b+jm) \subset W_k$ y $V(a+im)\otimes V(b+(j-1)m) \subset W_k$. Por la Nota 5.1.5, tenemos que se cumple alguna de las dos contenencias (o ambas):

$$
\begin{aligned}
V(a+im)\otimes V(b+jm) &\subset \mathfrak{r}(V(a+im)\otimes V(b+(j-1)m))\\
V(a+im)\otimes V(b+jm) &\subset \mathfrak{r}(V(a+(i-1)m)\otimes V(b+jm))
\end{aligned}
$$

para todo $(i,j) \in I_{k+1}$. Por lo tanto, $V(a+im)\otimes V(b+jm) \subset \mathfrak{r}(W_k)$, para todo $(i,j) \in I_{k+1}$. Por hipótesis, obtenemos que $W_{k+1} \subset \mathfrak{r}^{k+1}(W_0)$. Así, $\mathfrak{r}^{k+1}(W_0) = W_{k+1}$

Podemos concluir entonces que $\mathfrak{r}^k(W_0) = W_k$ para todo $1 \leq k \leq \ell+\ell'$. $\square$

5.2. $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$ es un $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulo cíclico.

Como vimos en §4.2, el producto tensorial de $Z(a,\ell)^*$ con $Z(b,\ell')^*$ tienen una estructura de $\mathfrak{sl}(2)$-módulo:

$$Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^* = \bigoplus_{t=0}^{\ell+\ell'} W_t^*$$

tal que $\mathfrak{r}\cdot W_t^* \subset W_{t+1}^*$, donde $W_t^* = \displaystyle\bigoplus_{(i,j)\in I_t} V(a+(\ell-i)m)\otimes V(b+(\ell'-j)m)$ y para $0 \leq t \leq \ell+\ell'$, tenemos $I_t = \{(i,j) \in [0,\ell]\times[0,\ell'] : i+j = \ell+\ell'-t\}$.

Para cada $(i,j) \in [0,\ell]\times[0,\ell']$, definimos los elementos:

$$w_{\ell-i,\ell'-j} = \sum_{k=0}^{\min\{a+(\ell-i)m,b+(\ell'-j)m\}} v_0^{\ell-i,\ell'-j,a+b+((\ell+\ell')-(i+j))m-2k}$$

en $V(a+(\ell-i)m)\otimes V(b+(\ell'-j)m)$, es decir, $w_{\ell-i,\ell'-j}$ es la suma de todos los vectores de peso máximo en $V(a+(\ell-i)m)\otimes V(b+(\ell'-j)m)$ que nos da el Teorema de Clebsch-Gordan. Por la Proposición 5.0.2, tenemos que:

$$V(a+(\ell-i)m)\otimes V(b+(\ell'-j)m) = \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2))w_{\ell-i,\ell'-j}.$$

Para cada $0 \leq i \leq \ell$, fijaremos las bases $B_{\ell-i}^* = \{w_0^{\ell-i}, w_1^{\ell-i}, \ldots, w_{a+(\ell-i)m}^{\ell-i}\}$ de $V(a+(\ell-i)m)$ tal que $w_0^{\ell-i}$ es un vector de peso máximo $a+(\ell-i)m$ y $w_k^{\ell-i} = f^k\, w_0^{\ell-i}$ para todo $0 \leq k \leq a+(\ell-i)m$. Por lo tanto $B_{a,\ell}^* = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{\ell} B_{\ell-i}^*$ es una base de $Z(a,\ell)^*$. Como en el Capítulo 4.

Con la base $B^*_{a,\ell}$ definida anteriormente, por el Lema 4.0.3 tenemos que $\mathfrak{r}$ actúa en $Z(a,\ell)^*$ de la siguiente manera:

$$e_s\, w_k^{\ell-i} = \binom{m}{s} \frac{k!\binom{a+(\ell-i)m}{k}}{(s+k)!\binom{a+(\ell-i+1)m}{s+k}} w_{s+k}^{\ell-i+1}. \tag{5.5}$$

para todo $0 \leq s \leq m$, donde $0 \leq k \leq a+(\ell-i)m$. Además si $s+k < 0$ o $a+(\ell-i+1)m < s+k$, entonces $w_{s+k}^{\ell-i+1} = 0$ y $w_\alpha^{\ell+1} = 0$ para todo α.

Consideramos $B^*_{b,\ell'} = \bigcup_{j=0}^{\ell'} B^*_j$ base de $Z(b,\ell')^*$. Donde $B_j = \{y_0^{\ell'-j}, \ldots, y_{b+(\ell'-j)m}^{\ell'-j}\}$ para todo $0 \leq j \leq \ell'$. Esta base cumple las mismas propiedades que la base $B^*_{a,\ell}$ para $Z(a,\ell)^*$.

Además, recordamos la notación dada en §4.2. Tenemos que:

$$x_\mu^{\ell-i,\ell'-j} = \frac{a+b+(\ell+\ell'-(i+j))m-\mu}{2}, \tag{5.6}$$

$$\lambda_r^{\ell-i,\ell'-j,\mu} = (-1)^r \frac{\binom{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}}{r}}{\binom{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}+\mu}{a+(\ell-i)m-r}} \text{ para todo } 0 \leq r \leq x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}. \tag{5.7}$$

Además:

$$v_0^{\ell-i,\ell'-j,\mu} = \sum_{r=0}^{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}} \lambda_r^{\ell-i,\ell'-j,\mu} w_r^{\ell-i} \otimes y^{\ell-j}_{x_\mu^{\ell-i,\ell'-j}-r}.$$

denota el vector de peso máximo μ en $V(a+(\ell-i)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m)$ descrito en el Teorema de Clebsch-Gordan.

Consideramos los elementos en W_t^* con $1 \leq t \leq \min\{\ell,\ell'\}$, dados por:

$$w_t = \sum_{k=0}^{t} (-1)^k v_0^{k,t-k,a+b+tm}.$$

Es decir, w_t es la suma alternada de los vectores de peso máximo $a+b+tm$ en el producto tensorial de $V(a+km)$ con $V(b+(t-k)m)$ tal que $(\ell-k, \ell'+k-t) \in I_t$; de esta definición tenemos que w_t es un vector de peso máximo $a+b+tm$ en W_t^*.

Puesto que la multiplicidad de $V(a+b+tm)$ en los espacio $V(a+km) \otimes V(b+(t-k)m)$ es uno tenemos el siguiente lema:

Lema 5.2.1. *Consideremos los $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales $Z(a,\ell)^*$ y $Z(b,\ell')^*$. Entonces la multiplicidad de $V(a+b+tm)$ en W_t^* es:*

i. $t+1$, *si* $0 \leq t \leq min\{\ell, \ell'\}$.

ii. $min\{\ell, \ell'\}+1$, *si* $min\{\ell, \ell'\} < t \leq max\{\ell, \ell'\}$.

iii. $(\ell+\ell'-t)+1$, *si* $max\{\ell, \ell'\} < t \leq \ell+\ell'$.

Prueba: Como $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^* \simeq_{\mathfrak{g}} Z(b,\ell')^* \otimes Z(a,\ell')^*$, supondremos sin pérdida de generalidad que $\ell \leq \ell'$.

i. Si $0 \leq t \leq \ell$. Como W_t^* tiene $t+1$ sumandos en su descomposición como $\mathfrak{sl}(2)$-módulo de la forma $V(a+(\ell-i)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m)$, correspondientes a las parejas $(\ell, \ell'-t), (\ell-1, \ell'-t+1), \ldots, (\ell-t, \ell')$ en I_t. Puesto que en cada sumando $V(a+km) \otimes V(b+(t-k)m)$ la multiplicidad de $V(a+b+tm)$ es uno. Entonces $V(a+b+tm)$ aparece en la descomposición de W_t^* como $\mathfrak{sl}(2)$-módulo $t+1$-veces.

ii. Si $\ell < t \leq \ell'$. Como W_t^* tiene $\ell+1$ sumandos en su descomposición como $\mathfrak{sl}(2)$-módulo de la forma $V(a+(\ell-i)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m)$ correspondientes a las parejas $(\ell, \ell'-t), (\ell-1, \ell'-t+1), \ldots, (0, \ell'-t+\ell)$ en I_t. Puesto que en cada sumando $V(a+km) \otimes V(b+(t-k)m)$ la multiplicidad de $V(a+b+tm)$ es uno. Entonces $V(a+b+tm)$ aparece en la descomposición de W_t^* como $\mathfrak{sl}(2)$-módulo $\ell+1$-veces.

iii. Si $\ell' < t \leq \ell+\ell'$. Entonces W_t^* tiene $\ell+1$ sumandos en su descomposición como $\mathfrak{sl}(2)$-módulo de la forma $V(a+(\ell-i)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m)$ correspondientes a las parejas $(\ell+\ell'-t, 0), (\ell+\ell'-t-1, 1), \ldots, (0, \ell+\ell'+t)$ en I_t. Puesto que en cada sumando $V(a+km) \otimes V(b+(t-k)m)$ la multiplicidad de $V(a+b+tm)$ es uno. Entonces $V(a+b+tm)$ aparece en la descomposición de W_t^* como $\mathfrak{sl}(2)$-módulo $(\ell'+\ell-t)+1$-veces.

$\square$

La siguiente proposición la enunciamos de manera general para todo $m \geq 1$.

Proposición 5.2.2. *Sea* $v_0^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}$ *un vector de peso máximo* μ *en el producto tensorial de* $V(a+(\ell-i+1)m)$ *con* $V(b+(\ell'-j)m)$ *con* $i \neq 0$.
Si $1 \leq x_\mu^{\ell-i+1,\ell'-j} \leq min\{a+(\ell-i)m, b+(\ell'-j)m\}$ *o* $x_\mu^{\ell-i+1,\ell'-j} = a+(\ell-i)m+1$.
Entonces,

$$v_0^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})w_{\ell-i,\ell'-j}.$$

Prueba: Para simplificar notación en esta prueba, llamaremos x a $x_\mu^{\ell-i+1,\ell'-j}$.
Como $V(a+(\ell-i)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})w_{\ell-i,\ell'-j}$, queremos mostrar que $v_0^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}$ es puede expresar como combinación lineal de acciones de $\mathfrak{g}$ en vectores de $V(a+(\ell-i)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m)$.

Caso $[1 \leq x \leq \mathbf{min}\{a+(\ell-i)m, b+(\ell'-j)m\}]$
Puesto que $x \leq \min\{a+(\ell-i)m, b+(\ell'-j)m\}$. Entonces $w_s^{\ell-i} \otimes y_k^{\ell'-j} \neq 0$ para todo

$0 \leq s, k \leq x$. Definimos los elemento z_0 y z_1 en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})w_{\ell-i,\ell'-j}$ como:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sum_{r=0}^{x-1} \alpha_r w_r^{\ell-i} \otimes y_{x-r}^{\ell'-j}, \\ z_1 &= \sum_{r=0}^{x-1} \beta_r w_r^{\ell-i} \otimes y_{x-(r+1)}^{\ell'-j}. \end{aligned}$$

Puesto que $1 \leq x$, los productos tensoriales en cada sumando de z_0 y z_1 son distintos de cero y están en $V(a+(\ell-i)m) \otimes V(b+(\ell'-j)m)$. Usando la acción de $\mathfrak{r}$ en los elementos $w_r^{\ell-i}$ y $y_{x-r}^{\ell'-j}$ dada en (5.5), para cada $0 \leq r \leq x-1$ tenemos que:

$$e_0\, z_0 = \sum_{r=0}^{x-1} \frac{\binom{a+(\ell-i)m}{r}}{\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}} \alpha_r w_r^{\ell-i+1} \otimes y_{x-r}^{\ell'-j} + \sum_{r=0}^{x-1} \frac{\binom{b+(\ell'-j)m}{x-r}}{\binom{b+(\ell'-j+1)m}{x-r}} \alpha_r w_r^{\ell-i} \otimes y_{x-r}^{\ell'-j+1}.$$

Además:

$$\frac{1}{m} e_1\, z_1 = \sum_{r=1}^{x} \frac{\binom{a+(\ell-i)m}{r-1}}{r\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}} \beta_{r-1} w_r^{\ell-i+1} \otimes y_{x-r}^{\ell'-j} + \sum_{r=0}^{x-1} \frac{\binom{b+(\ell'-j)m}{x-(r+1)}}{(x-r)\binom{b+(\ell'-j+1)m}{x-r}} \beta_r w_r^{\ell-i} \otimes y_{x-r}^{\ell'-j+1}.$$

Queremos determinar valores de los α_r's y β_r's de tal manera que se cumpla la siguiente igualdad:

$$e_0\, z_0 - \frac{1}{m} e_1\, z_1 = v_0^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}$$

lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones con $2x+1$ ecuaciones y $2x$ incognitas:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \lambda_0^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}, \\[2ex] \dfrac{\binom{a+(\ell-i)m}{r}}{\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}} \alpha_r - \dfrac{\binom{a+(\ell-i)m}{r-1}}{r\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}} \beta_{r-1} = \lambda_r^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu} \text{ para todo } 1 \leq r \leq x-1, \\[2ex] \dfrac{\binom{b+(\ell'-j)m}{x-r}}{\binom{b+(\ell'-j+1)m}{x-r}} \alpha_r - \dfrac{\binom{b+(\ell'-j)m}{x-(r+1)}}{(x-r)\binom{b+(\ell'-j+1)m}{x-r}} \beta_r = 0 \text{ para todo } 0 \leq r \leq x-1, \\[2ex] -\dfrac{\binom{a+(\ell-i)m}{x-1}}{x\binom{a+(\ell-i+1)m}{x}} \beta_{x-1} = \lambda_x^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu} \end{cases}$$

Reemplazando, obtenemos:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \lambda_0^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}, \\ \\ \alpha_r = \dfrac{\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}}{\binom{a+(\ell-i)m}{r}}\lambda_r^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu} + \dfrac{\binom{a+(\ell-i)m}{r-1}\binom{b+(\ell'-j)m}{x-(r-1)}(x-(r-1))}{\binom{a+(\ell-i)m}{r}\binom{b+(\ell'-j)m}{x-r}r}\alpha_{r-1} \\ \text{si } 1 \leq r \leq x-1, \\ \\ \beta_r = \dfrac{\binom{b+(\ell'-j)m}{x-r}(x-r)}{\binom{b+(\ell'-j)m}{x-(r+1)}}\alpha_r \text{ si } 0 \leq r \leq x-1, \\ \\ \beta_{x-1} = -\dfrac{x\binom{a+(\ell-i+1)m}{x}}{\binom{a+(\ell-i)m}{x-1}}\lambda_x^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}. \end{cases}$$

Afirmamos que las soluciones son:

$$\begin{cases} \alpha_r = \dfrac{\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}(x-r)}{\binom{a+(\ell-i)m}{r}x}\lambda_r^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}, \\ \\ \beta_r = \dfrac{\binom{b+(\ell'-j)m}{x-r}\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}(x-r)^2}{\binom{b+(\ell'-j)m}{x-(r+1)}\binom{a+(\ell-i)m}{r}x}\lambda_r^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu} \end{cases}$$

para todo $0 \leq r \leq x-1$. En efecto, si $r = 0$, entonces:

$$\alpha_0 = \lambda_0^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu} = \frac{\binom{a+(\ell-i+1)m}{0}(x-0)}{\binom{a+(\ell-i)m}{0}x}\lambda_0^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}.$$

Supongamos el resultado cierto para α_r, entonces:

$$\alpha_{r+1} = \frac{\binom{a+(\ell-i+1)m}{r+1}}{\binom{a+(\ell-i)m}{r+1}}\lambda_{r+1}^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu} + \frac{\binom{a+(\ell-i)m}{r}\binom{b+(\ell'-j)m}{x-r}(x-r)}{\binom{a+(\ell-i)m}{r+1}\binom{b+(\ell'-j)m}{x-(r+1)}(r+1)}\alpha_r.$$

Por hipotesis y reemplazando tenemos que:

$$\alpha_{r+1} = \frac{\binom{a+(\ell-i+1)m}{r+1}}{\binom{a+(\ell-i)m}{r+1}}\lambda_{r+1}^{\ell-i+1,l'-j,\mu} + \\ \frac{\binom{a+(\ell-i)m}{r}\binom{b+(\ell'-j)m}{x-r}(x-r)\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}(x-r)}{\binom{a+(\ell-i)m}{r+1}\binom{b+(\ell'-j)m}{x-(r+1)}(r+1)\binom{a+(\ell-i)m}{r}x}\lambda_r^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}.$$

Por lo tanto:

$$\alpha_{r+1} = \frac{\binom{a+(\ell-i+1)m}{r+1}}{\binom{a+(\ell-i)m}{r+1}}\lambda_{r+1}^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu} + \frac{\binom{b+(\ell'-j)m}{x-r}(x-r)\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}(x-r)}{\binom{a+(\ell-i)m}{r+1}\binom{b+(\ell'-j)m}{x-(r+1)}(r+1)x}\lambda_r^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}.$$

Puesto que $x = \dfrac{a + (\ell - i + 1)m + b + (\ell' - j)m - \mu}{2}$ y usando la definición de los λ_r's dada en (5.7), se puede comprobar fácilmente que:

$$\frac{x - (r-1)}{r}\lambda_{r-1}^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu} = -\frac{a + (\ell - i + 1)m - (r-1)}{b + (\ell' - j)m - x + r}\lambda_r^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu} \tag{5.8}$$

Sustituyendo tenemos que:

$$\alpha_{r+1} = \frac{\binom{a+(\ell-i+1)m}{r+1}}{\binom{a+(\ell-i)m}{r+1}}\lambda_{r+1}^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu} + \frac{\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}\binom{b+(\ell'-j)m}{x-r}(x-r)(a+(\ell-i+1)m-r)}{\binom{a+(\ell-i)m}{r+1}\binom{b+(\ell'-j)m}{x-(r+1)}x(b+(\ell'-j)m-x+r+1)}\lambda_r^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu},$$

por lo tanto obtenemos que:

$$\alpha_{r+1} = \frac{\binom{a+(\ell-i+1)m}{r+1}}{\binom{a+(\ell-i)m}{r+1}}\lambda_{r+1}^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu} - \frac{(r+1)\binom{a+(\ell-i+1)m}{r+1}}{\binom{a+(\ell-i)m}{r+1}x}\lambda_{r+1}^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}.$$

Así sacando factor común y simplificando tenemos que:

$$\alpha_{r+1} = \frac{\binom{a+(\ell-i+1)m}{r+1}(x-(r+1))}{\binom{a+(\ell-i)m}{r+1}x}\lambda_{r+1}^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}.$$

De donde nuestra afirmación es cierta para los $\alpha_r' s$, es decir:

$$\alpha_r = \frac{\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}(x-r)}{\binom{a+(\ell-i)m}{r}x}\lambda_r^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}$$

para todo $0 \leq r \leq x-1$. Además reemplazando para encontrar los valores de los $\beta_r' s$ tenemos:

$$\beta_r = \frac{\binom{b+(\ell'-j)m}{x-r}\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}(x-r)^2}{\binom{b+(\ell'-j)m}{x-(r+1)}\binom{a+(\ell-i)m}{r}x}\lambda_r^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}$$

para todo $0 \leq r \leq x-1$.

En particular, tenemos que:

$$\begin{aligned}\beta_{x-1} &= \frac{\binom{b+(\ell'-j)m}{1}\binom{a+(\ell-i+1)m}{x-1}}{\binom{a+(\ell-i)m}{x-1}x}\lambda_{x-1}^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}\\ &= -\frac{\binom{a+(\ell-i+1)m}{x}x}{\binom{a+(\ell-i)m}{x-1}}\lambda_x^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}.\end{aligned}$$

Los que muestra la consistencia del sistema de ecuaciones planteado. Por lo tanto, el vector $v_0^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}$ de peso máximo μ está en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})w_{\ell-i,\ell'-j}$.

Caso $[x = a + (\ell-i)m + 1]$
Este caso ocurre sólo cuando $\min\{a + (\ell-i)m, b + (\ell'-j)m\} = a + (\ell-i)m$.
Como $x = a + (\ell-i)m + 1$ consideramos los elementos:

$$\begin{aligned} z_0' &= \sum_{r=0}^{a+(\ell-i)m} \alpha_r w_r^{\ell-i} \otimes y_{x-r}^{\ell'-j}, \\ z_1' &= \sum_{r=0}^{a+(\ell-i)m} \beta_r w_r^{\ell-i} \otimes y_{x-(r+1)}^{\ell'-j}. \end{aligned}$$

Como nuestro objetivo de nuevo es conseguir valores de los α_r's y $\beta_r's$ de tal forma que $e_0\, z_0' - \frac{1}{m} e_1\, z_1' = v_0^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}$, procedemos de manera similar al caso anterior obteniendo que las soluciones del sistema son:

$$\begin{cases} \alpha_r &= \dfrac{\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}(x-r)}{\binom{a+(\ell-i)m}{r}x} \lambda_r^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}, \\ \\ \beta_r &= \dfrac{\binom{b+(\ell'-j)m}{x-r}\binom{a+(\ell-i+1)m}{r}(x-r)^2}{\binom{b+(\ell'-j)m}{x-(r+1)}\binom{a+(\ell-i)m}{r}x} \lambda_r \end{cases}$$

para todo $0 \leq r \leq a + (\ell-i)m$. $\square$

Para $m = 1$ tenemos el siguiente corolario de la proposición anterior.

Corolario 5.2.3. *Sean $Z(a,\ell)^*$ y $Z(b,\ell')^*$ dos $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulos uniseriales. Si $v_0^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu}$ es un vector de peso máximo μ en $V(a+\ell-i+1) \otimes V(b+\ell'-j)$ con $i \neq 0$ tal que $x_\mu^{\ell-i+1,\ell'-j} \neq 0$. Entonces*

$$v_0^{\ell-i+1,\ell'-j,\mu} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})w_{\ell-i,\ell'-j}.$$

Prueba: Sabemos que $1 \leq x_\mu^{\ell-i+1,\ell'-j} \leq \min\{a+\ell-i+1, b+\ell'-j\}$. Puesto que se tiene una de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \min\{a+\ell-i+1, b+\ell'-j\} =& \min\{a+\ell-i, b+\ell'-j\}, \\ \min\{a+\ell-i+1, b+\ell'-j\} =& \min\{a+\ell-i, b+\ell'-j\} + 1. \end{aligned}$$

Si $\min\{a+\ell-i+1, b+\ell'-j\} = \min\{a+\ell-i, b+\ell'-j\}$, tenemos que $1 \leq x_\mu^{\ell-i+1,\ell'-j} \leq \min\{a+\ell-i, b+\ell'-j\}$.

Si $\min\{a+\ell-i+1, b+\ell'-j\} = \min\{a+\ell-i, b+\ell'-j\}+1$ lo que ocurre si y sólo si $a+\ell-i+1 = b+\ell'-j$, entonces $1 \leq x_\mu^{\ell-i+1,\ell'-j} \leq \min\{a+\ell-i, b+\ell'-j\}$ o $x_\mu^{\ell-i+1,\ell'-j} = a+\ell-i+1$.

En cualquiera de los casos, podemos aplicar la Proposición 5.2.2 para obtener el resultado deseado. □

De manera similar a la Proposición 5.2.2, cambiando los roles de a y b, e i y j, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 5.2.4. *Sea $v_0^{\ell-i,\ell'-j+1,\mu}$ un vector de peso máximo μ en el producto tensorial de $V(a+(\ell-i)m)$ con $V(b+(\ell'-j+1)m)$ con $j \neq 0$.*
Si $1 \leq x_\mu^{\ell-i,\ell'-j+1} \leq min\{a+(\ell-i)m, b+(\ell'-j)m\}$ o $x_\mu^{\ell-i,\ell'-j+1} = b+(\ell'-j)m+1$. Entonces,

$$v_0^{\ell-i,\ell'-j+1,\mu} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})w_{\ell-i,\ell'-j}.$$

Para el caso $m=1$, tenemos el siguiente corolario de la proposición anterior.

Corolario 5.2.5. *Sean $Z(a,\ell)^*$ y $Z(b,\ell')^*$ dos $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulos uniseriales.*
Si $v_0^{\ell-i,\ell'-j+1,\mu}$ es un vector de peso máximo μ en $V(a+(\ell-i)) \otimes V(b+(\ell'-j+1))$ con $j \neq 0$ tal que $x_\mu^{\ell-i,\ell'-j+1} \neq 0$. Entonces:

$$v_0^{\ell-i,\ell'-j+1,\mu} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})w_{\ell-i,\ell'-j}.$$

Prueba: Sabemos que $1 \leq x_\mu^{\ell-i,\ell'-j+1} \leq \min\{a+\ell-i, b+\ell'-j+1\}$.
Además, $\min\{a+\ell-i, b+\ell'-j+1\} = \min\{a+\ell-i, b+\ell'-j\}$ o $\min\{a+\ell-i, b+\ell'-j+1\} = \min\{a+\ell-i, b+\ell'-j\}+1$.

Si $\min\{a+\ell-i, b+\ell'-j+1\} = \min\{a+\ell-i, b+\ell'-j\}$, tenemos que $1 \leq x_\mu^{\ell-i,\ell'-j+1} \leq \min\{a+\ell-i, b+\ell'-j\}$.

Si $\min\{a+\ell-i, b+\ell'-j+1\} = \min\{a+\ell-i, b+\ell'-j\}+1$ lo que ocurre si y sólo si $a+\ell-i = b+\ell'-j+1$, entonces $1 \leq x_\mu^{\ell-i,\ell'-j+1} \leq \min\{a+\ell-i, b+\ell'-j\}$ o $x_\mu^{\ell-i,\ell'-j+1} = b+\ell'-j+1 = \min\{a+\ell-i, b+\ell'-j+1\}$.

Aplicando la Proposición 5.2.4 obtenemos el resultado deseado. □

Si v es un vector de peso máximo $a+b+tm$ en W_t^* tal que $e_0\,v \neq 0$, entonces $e_0\,v$ es un vector de peso máximo $a+b+(t+1)m$ en W_{t+1}^*, de aquí tenemos el siguiente lema.

Lema 5.2.6. *Consideremos los $\mathfrak{g}$-módulos uniseriales $Z(a,\ell)^*$ y $Z(b,\ell')^*$ dos :*

i. Si $0 \leq t < min\{\ell,\ell'\}$. Entonces:

$$\{e_0\,v_0^{k,t-k,a+b+tm} : 0 \leq k \leq t\}$$

es un conjunto de $t+1$ vectores linealmente independiente de vectores de peso máximo $a+b+(t+1)m$ en W^*_{t+1}.

ii. *Si $min\{\ell,\ell'\} \leq t < max\{\ell,\ell'\}$. Entonces:*

$$\{e_0\, v_0^{k,t-k,a+b+tm} : 0 \leq k \leq min\{\ell,\ell'\}\}$$

es un conjunto de $min\{\ell,\ell'\}+1$ vectores linealmente independiente de vectores de peso máximo $a+b+(t+1)m$ en W^*_{t+1}.

iii. *Si $max\{\ell,\ell'\} \leq t < \ell+\ell'$. Entonces:*

$$\{e_0\, v_0^{k,t-k,a+b+tm} : t - max\{\ell,\ell'\} < k \leq min\{\ell,\ell'\}\}$$

es un conjunto de $(\ell+\ell'-t)+1$ vectores linealmente independiente de peso máximo $a+b+(t+1)m$ en W^*_{t+1}.

Prueba: Supondremos sin pérdida de generalidad que $\ell \leq \ell'$. Como $v_0^{k,t-k,a+b+tm} = w_0^k \otimes y_0^{t-k}$, entonces:

$$e_0\, v_0^{k,t-k,a+b+tm} = w_0^{k+1} \otimes y_0^{t-k} + w_0^k \otimes y_0^{t-k+1}. \tag{5.9}$$

i. Si $0 \leq t < \ell$. Entonces, I_t está conformada por los pares $(\ell,\ell'-t),\ldots,(\ell-t,\ell')$. Por lo tanto los sumandos en (5.9) de $e_0\, v_0^{k,t-k,a+b+tm}$ son diferentes de cero, donde el primer sumando está en $V(a+(k+1)m)\otimes V(b+(t-k)m)$ y el segundo sumando está en $V(a+km)\otimes V(b+(t-k+1)m)$. De donde $\{e_0\, v_0^{k,t-k,a+b+tm} : 0 \leq k \leq t\}$ es un conjunto con $t+1$ vectores linealmente independientes en W^*_{t+1}.

ii. Si $\ell \leq t < \ell'$. Entonces, I_t está conformada por los pares $(\ell,\ell'-t),\ldots,(0,\ell'+\ell-t)$. Por lo tanto los sumandos en (5.9) de $e_0\, v_0^{k,t-k,a+b+tm}$ son diferentes de cero excepto en el par $(0,\ell'+\ell-t)$, en cuyo caso el primer sumando de $e_0\, v_0^{\ell,t-\ell,a+b+tm}$ es cero y el segundo sumando es diferente de cero. Por lo tanto $\{e_0\, v_0^{k,t-k,a+b+tm} : 0 \leq k \leq \ell\}$ es un conjunto con $\ell+1$ sumandos linealmente independientes en W^*_{t+1}.

iii. Si $\ell' \leq t < \ell+\ell'$. Entonces, $(\ell'+\ell-t,0),(\ell'+\ell-t-1,1),\ldots,(0,\ell'+\ell-t)$. Por lo tanto los sumandos en (5.9) de $e_0\, v_0^{k,t-k,a+b+tm}$ son diferentes de cero excepto en el par $(\ell'+\ell-t,0)$. En cuyo caso el segundo sumando de $e_0\, v_0^{t-\ell',\ell',a+b+tm}$ es cero y el primer sumando es diferente de cero. En el par $(0,\ell'+\ell-t)$ en donde el primer sumando de $e_0\, v_0^{t-\ell',\ell',a+b+tm}$ es cero y el segundo sumando es diferente de cero. Extrayendo el par $(\ell'+\ell-t,0)$ tenemos que el conjunto $\{e_0\, v_0^{k,t-k,a+b+tm} : t-\ell' < k \leq \ell\}$ correspondiente a los pares $(\ell'+\ell-t-1,1),\ldots,(0,\ell'+\ell-t)$ es un conjunto con $(\ell+\ell'-t)+1$ vectores linealmente independiente en W^*_{t+1}.

□

Gracias al lema anterior, Corolario 5.2.3 y Corolario 5.2.5 enunciamos el teorema principal en esta sección.

Teorema 5.2.7. *Sea* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$ *y sean* a, b, ℓ, ℓ' *números enteros no negativos. Entonces,* $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$ *es un* $\mathfrak{g}$*-módulo cíclico con* $v = w_{\ell,\ell'} + \sum_{t=1}^{\ell} w_t$ *como un vector generador. Es decir:*

$$Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^* = \mathcal{U}(\mathfrak{g})v.$$

Prueba: Supondremos de nuevo sin pérdida de generalidad que $\ell \leq \ell'$.

Puesto que W_0^* es generado por el vector $w_{\ell,\ell'}$ como $\mathfrak{sl}(2)$-módulo. Entonces W_0^* está contenido en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v$. Por los Corolarios 5.2.3 y 5.2.5 todo vector de peso máximo μ en $V(a+\ell+1) \otimes V(b+\ell')$ o en $V(a+\ell) \otimes V(b+(\ell'+1))$ tal que $\mu \neq a+b+(\ell+\ell'+1)$ pertenecen a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})w_{\ell,\ell'} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$.
Por el Lema 5.2.6, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})w_{\ell+\ell'}$ genera el vector $e_0\, v_0^{\ell,\ell'}$ de peso máximo $a+b+(\ell+\ell'+1)$ en W_1^*, el cual es linealmente independiente a w_1. Además, por el Lema 5.2.1, W_1^* tiene 2 vectores de peso máximo $a+b+(\ell+\ell'+1)$. Por lo tanto $W_1^* \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$.

Supongamos que $W_t^* \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$ para $0 \leq t < \ell$. Entonces por los Corolarios 5.2.3 y 5.2.5 todo vector de peso máximo μ en $V(a+k+1) \otimes V(b+t-k)$ o en $V(a+k) \otimes V(b+(t-k+1))$ tal que $\mu \neq a+b+(t+1)$ pertenecen a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})w_{k,t-k} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$. Por lo tanto, todo vector de peso máximo $\mu \neq a+b+(t+1)$ en W_t^* pertenece a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v$.

Por otra parte, el Lema 5.2.6 parte i. $\{e_0\, v_0^{k,t-k} : 0 \leq k \leq t\}$ es un conjunto con $t+1$ vectores linealmente independientes de peso máximo $a+b+(t+1)$ en W_{t+1}^* y en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v$. Además, w_{t+1} es un vector de peso máximo $a+b+(t+1)$ en W_{t+1}^* y en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v$ que no depende del conjunto $\{e_0\, v_0^{k,t-k} : 0 \leq k \leq t\}$. Por lo tanto, tenemos $t+2$ vectores linealmente independientes de peso máximo $a+b+(t+1)$ en W_{t+1}^* y en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v$. Pero el Lema 5.2.1 nos dice que la cantidad de vectores de peso máximo $a+b+(t+1)$ es $t+2$. Por lo tanto todo vector de peso máximo $a+b+(t+1)$ en W_{t+1}^* pertenece a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v$, así $W_{t+1}^* \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$.

Con lo anterior tenemos que $W_t^* \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$ para todo $0 \leq t \leq \ell$. Por los Corolarios 5.2.3 y 5.2.5 todos los vectores de peso máximo $\mu \neq a+b+(\ell+1)$ de $W_{\ell+1}^*$ pertenecen a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v$. Además, por el Lema 5.2.6 parte ii. $\{e_0\, v_0^{k,\ell-k} : 0 \leq k \leq \ell\}$ es un conjunto con $\ell+1$ vectores linealmente independientes de peso máximo $a+b+(\ell+1)$ en $W_{\ell+1}^*$ y en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v$. Por el Lema 5.2.1, tenemos que $W_{\ell+1}^*$ tiene $\ell+1$ vectores de peso máximo $a+b+(\ell+1)$. Por lo tanto $W_{\ell+1}^* \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$.
Argumentando de manera similar tenemos que $W_t^* \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$ para todo $\ell < t \leq \ell'$.

Puesto que $W_{\ell'} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$. Entonces por los Corolarios 5.2.3 y 5.2.5 todos los vectores de peso máximo $\mu \neq a+b+(\ell'+1)$ de $W_{\ell'+1}^*$ pertenecen a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v$. Además, por el Lema 5.2.6 parte iii. $\{e_0\, v_0^{k,\ell-k} : 1 \leq k \leq \ell'\}$ es un conjunto con $\ell'-1$ vectores linealmente independientes de peso máximo $a+b+(\ell'+1)$ en $W_{\ell'+1}^*$ y en $\mathcal{U}(\mathfrak{g})v$. Pero el Lema 5.2.1 tenemos que $W_{\ell'+1}^*$ tiene ℓ vectores de peso máximo $a+b+(\ell'+1)$. Por lo tanto

$W^*_{\ell'+1} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$.
Argumentando de manera similar tenemos que $W^*_t \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$ para todo $\ell' < t \leq \ell + \ell'$.

Por lo tanto $W^*_t \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$ para todo $0 \leq t \leq \ell+\ell'$. De donde $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell') = \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$.
$\square$

Puesto que $w_{\ell,\ell'}$ genera a W^*_0 y cada vector de peso máximo w_t genera un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible V_t de peso máximo $a+b+t$ para todo $0 \leq t \leq \ell$, entonces $Z(a,\ell)^* \otimes Z(b,\ell')^*$ tiene espacio generador $W^*_0 \oplus \bigoplus_{t=1}^{\ell} V_t$.

6 Resultados parciales de la conjetura 1.1.1.

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$ con $m \geq 1$. Nuestra conjetura basada en verificaciones computacionales y resultados obtenidos en los capítulos anteriores es:

$Z(a, \ell) \otimes Z(b, \ell')$ **es descomponible con** $\ell \leq \ell'$ **para todo** $m \geq 1$ **si y sólo si** $a = b = 0$ **y** $\ell \neq 0$ **o** $a = b$ **y** $\ell = \ell'$**.**

En este Capítulo mostramos que $Z(0,1) \otimes Z(0,1)$ es descomponible y $Z(0,1) \otimes Z(a,1)$ es indescomponible para todo $a, m \geq 1$.

Consideramos las bases $B_{a,\ell}$ para cada $Z(a,\ell)$ dadas en el Capítulo 4 y recordamos que la acción de $\mathfrak{r} = V(m)$ en $Z(a,\ell)$ está dada por:

$$e_s\, v_k^i = (-1)^s \binom{m}{s} \frac{k!}{(s+k-m)!} v_{s+k-m}^{i-1} \tag{6.1}$$

donde $\{e_0, \ldots, e_m\}$ es la base de $\mathfrak{r}$ con e_0 vector de peso máximo m y $e_i = \frac{1}{i!} f^i\, e_0$.

6.1. Descomponibilidad de $Z(0,1) \otimes Z(0,1)$.

Puesto que $Z(0,1) =_{\mathfrak{sl}(2)} V(0) \oplus V(m)$, entonces el producto tensorial de $Z(0,1) \otimes Z(0,1)$ lo podemos vizualizar en la siguiente tabla, donde cada bloque interior representa los pesos máximos del $\mathfrak{sl}(2)$-módulo $V(im) \otimes V(jm)$ para $0 \leq i, j \leq 1$ y cada diagonal de derecha a izquierda representa la $\mathfrak{g}$-graduación de $Z(0,1) \otimes Z(0,1)$:

$$\begin{array}{|c||c|c|}
\hline
\otimes & 0 & m \\
\hline
0 & 0 & m \\
\hline
m & m & \begin{array}{ccccc} 2m & & & & \\ & 2m-2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 0 \end{array} \\
\hline
\end{array}.$$

Donde $W_0 = V(m) \otimes V(m)$, $W_1 = V(0) \otimes V(m) \oplus V(m) \otimes V(0)$ y $W_2 = V(0) \otimes V(0)$.

Lema 6.1.1. *Sea $v_0^{1,1,\mu}$ un vector de peso máximo μ en W_0. Entonces:*

i. Si $x^{1,1}_{\mu}$ *es par, entonces:*

$$\frac{(-1)^{m-x^{1,1}_{\mu}}}{\binom{m}{m-x^{1,1}_{\mu}}} e_{m-x^{1,1}_{\mu}}\, v^{1,1,\mu}_0 = x^{1,1}_{\mu}!\, \lambda^{1,1,\mu}_0 (v^{0,1,m}_0 + v^{1,0,m}_0),$$

que es un vector de peso máximo m *en* W_1*.*

ii. Si $x^{1,1}_{\mu}$ *es impar, entonces:*

$$\frac{(-1)^{m-x^{1,1}_{\mu}}}{\binom{m}{m-x^{1,1}_{\mu}}} e_{m-x^{1,1}_{\mu}}\, v^{1,1,\mu}_0 = (-1)x^{1,1}_{\mu}!\, \lambda^{1,1,\mu}_0 (v^{0,1,m}_0 - v^{1,0,m}_0),$$

que es un vector de peso máximo m *en* W_1*.*

Prueba: Denotaremos por x a $x^{1,1}_{\mu}$, además $0 \leq x \leq \min\{m, m\} = m$. Puesto que $v^{1,1,\mu}_0 = \sum_{r=0}^{x} \lambda^{1,1,\mu}_r v^1_r \otimes w^1_{x-r}$, por la acción de $\mathfrak{r}$ en $Z(0,1) \otimes Z(0,1)$ tenemos que para cada $0 \leq r \leq x$:

$$\frac{(-1)^{m-x}}{\binom{m}{m-x}} e_{m-x}\, v^1_r \otimes w^1_{x-r} = \frac{r!}{(r-x)!} v^0_{r-x} \otimes w^1_{x-r} + \frac{(x-r)!}{(-r)!} v^1_r \otimes w^0_{-r}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{(-1)^{m-x}}{\binom{m}{m-x}} e_{m-x}\, v^{1,1,\mu}_0 = x!(\lambda^{1,1,\mu}_x v^0_0 \otimes w^1_0 + \lambda^{1,1,\mu}_0 v^1_0 \otimes w^0_0).$$

Además tenemos que $\lambda^{1,1,\mu}_x = \frac{(-1)^x}{\binom{x+\mu}{m-x}}$, pero $x = \frac{2m-\mu}{2}$ de donde $m - x = x + \mu - m$, así usando la simetría de las combinatorias tenemos que:

$$\lambda^{1,1,\mu}_x = \frac{(-1)^x}{\binom{x+\mu}{m}} = (-1)^x \lambda^{1,1,\mu}_0.$$

Reemplazando $\frac{(-1)^{m-x}}{\binom{m}{m-x}} e_{m-x}\, v^{1,1,\mu}_0 = x!\lambda^{1,1,\mu}_0((-1)^x v^0_0 \otimes w^1_0 + v^1_0 \otimes w^0_0)$.

De donde:

$$\frac{(-1)^{m-x}}{\binom{m}{m-x}} e_{m-x}\, v^{1,1,\mu}_0 = x!\lambda^{1,1,\mu}_0(v^0_0 \otimes w^1_0 + v^1_0 \otimes w^0_0) \text{ si } x \text{ es par},$$

$$\frac{(-1)^{m-x}}{\binom{m}{m-x}} e_{m-x}\, v^{1,1,\mu}_0 = x!\lambda^{1,1,\mu}_0(v^1_0 \otimes w^0_0 - v^0_0 \otimes w^1_0) \text{ si } x \text{ es impar}.$$

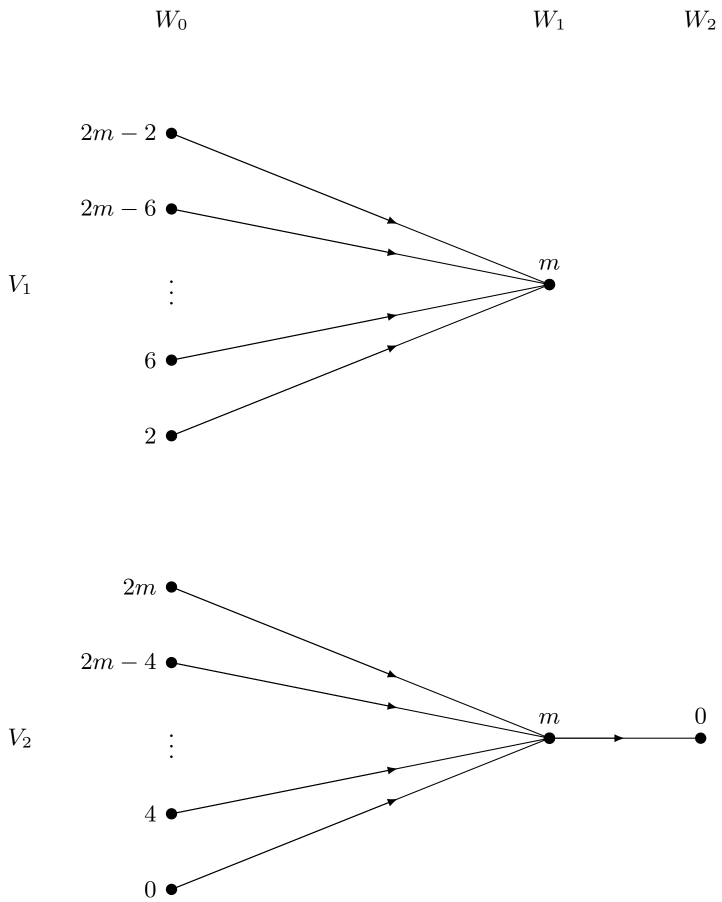
Puesto que $v^{0,1,m}_0 = v^0_0 \otimes w^1_0$ y $v^{1,0,m}_0 = v^1_0 \otimes w^0_0$ obtenemos el resultado buscado. $\square$

Gracias al Teorema 4.1.3 tenemos que $\mathrm{soc}(Z(0,1)\otimes Z(0,1)) = \mathrm{soc}(Z(0,1))\otimes\mathrm{soc}(Z(0,1))\oplus V(m)$ donde $V(m)$ en este caso es el $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible generado por el vector $v_0^1 \otimes w_0^0 - v_0^0 \otimes w_0^1$ de peso máximo m.
Por el Lema anterior tenemos que cualquier vector $v_0^{1,1,\mu}$ de peso máximo $\mu = 2m - 2x_\mu^{1,1}$ en W_2 con $x_\mu^{1,1}$ impar generan a $v_0^1 \otimes w_0^0 - v_0^0 \otimes w_0^1 \in \mathrm{soc}(Z(0,1) \otimes Z(0,1))$.
Consideramos V_1 el $\mathfrak{g}$-submódulo de $Z(0,1) \otimes Z(0,1)$ generado por todos los vectores $v_0^{1,1,\mu}$ con $x_\mu^{1,1}$ impar, los cuales generan al vector de peso máximo m en $\mathrm{soc}(Z(0,1) \otimes Z(0,1))$.
Sea V_2 el $\mathfrak{g}$-submodulo de $Z(0,1) \otimes Z(0,1)$ generado por los vectores $v_0^{1,1,\mu}$ con $x_\mu^{1,1}$ par, los cuales generan a un vector de peso máximo $\mu = 0$ de $\mathrm{soc}(Z(0,1)) \otimes \mathrm{soc}(Z(0,1))$.

Proposición 6.1.2. *Sean $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$ y $Z(0,1)$ el $\mathfrak{g}$-módulo uniserial con sucesión admisible $V(0), V(m)$. Si V_1, V_2 son los $\mathfrak{g}$-submódulos de $Z(0,1)\otimes Z(0,1)$ definidos antes. Entonces:*

$$Z(0,1) \otimes Z(0,1) = V_1 \oplus V_2.$$

Representamos este hecho con el siguiente diagrama si m es par:



.

6.2. Indescomponibilidad de $Z(0,1) \otimes Z(a,1)$ con $a \geq 1$.

Puesto que $Z(0,1) =_{\mathfrak{sl}(2)} V(0) \oplus V(m)$ y $Z(a,1) =_{\mathfrak{sl}(2)} V(a) \oplus V(a+m)$, entonces el producto tensorial de $Z(0,1) \otimes Z(a,1)$ lo podemos vizualizar en la siguiente tabla:

$\otimes$	a	$a+m$
0	a	$a+m$
m	$a+m$ $\ddots$ $\lvert a-m\rvert$	$a+2m$ $a+2m-2$ $a+2m-4$ $\ddots$ a

.

Donde $W_0 = V(m) \otimes V(a+m)$, $W_1 = V(0) \otimes V(a+m) \oplus V(m) \otimes V(a)$ y $W_2 = V(0) \otimes V(a)$.

Tenemos el siguiente lema similar al probado en la Sección anterior.

Lema 6.2.1. *Sea $v_0^{1,1,\mu}$ un vector de peso máximo μ en W_0. Entonces:*

i. Si $x_\mu^{1,1}$ es par, entonces:

$$\frac{(-1)^{m-x_\mu^{1,1}}}{\binom{m}{m-x_\mu^{1,1}}} e_{m-x_\mu^{1,1}}\, v_0^{1,1,\mu} = x_\mu^{1,1}!\, \lambda_0^{1,1,\mu} \left(\frac{\binom{a+m}{x_\mu^{1,1}}}{\binom{m}{x_\mu^{1,1}}} v_0^{0,1,a+m} + v_0^{1,0,a+m} \right),$$

que es un vector de peso máximo $a+m$ en W_1.

ii. Si $x_\mu^{1,1}$ es impar, entonces:

$$\frac{(-1)^{m-x_\mu^{1,1}}}{\binom{m}{m-x_\mu^{1,1}}} e_{m-x_\mu^{1,1}}\, v_0^{1,1,\mu} = (-1) x_\mu^{1,1}!\, \lambda_0^{1,1,\mu} \left(\frac{\binom{a+m}{x_\mu^{1,1}}}{\binom{m}{x_\mu^{1,1}}} v_0^{0,1,a+m} - v_0^{1,0,a+m} \right),$$

que es un vector de peso máximo $a+m$ en W_1.

Prueba: Denotaremos por x a $x_\mu^{1,1}$, además $0 \leq x \leq \min\{m, a+m\} = m$. Puesto que $v_0^{1,1,\mu} = \sum_{r=0}^{x} \lambda_r^{1,1,\mu} v_r^1 \otimes w_{x-r}^1$, por la acción de $\mathfrak{r}$ en $Z(0,1) \otimes Z(a,1)$ tenemos que para cada $0 \leq r \leq x$:

$$\frac{(-1)^{m-x}}{\binom{m}{m-x}} e_{m-x}\, v_r^1 \otimes w_{x-r}^1 = \frac{r!}{(r-x)!} v_{r-x}^0 \otimes w_{x-r}^1 + \frac{(x-r)!}{(-r)!} v_r^1 \otimes w_{-r}^0.$$

Por lo tanto:

$$\frac{(-1)^{m-x}}{\binom{m}{m-x}} e_{m-x}\, v_0^{1,1,\mu} = x!(\lambda_x^{1,1,\mu} v_0^0 \otimes w_0^1 + \lambda_0^{1,1,\mu} v_0^1 \otimes w_0^0).$$

Además tenemos que $\lambda_x^{1,1,\mu} = \frac{(-1)^x}{\binom{x+\mu}{m-x}}$, pero $x = \frac{a+2m-\mu}{2}$ de donde $m-x = x+\mu-(a+m)$, así usando la simetría de las combinatorias tenemos que:

$$\lambda_x^{1,1,\mu} = \frac{(-1)^x}{\binom{x+\mu}{a+m}} = (-1)^x \frac{\binom{a+m}{x}}{\binom{m}{x}} \lambda_0^{1,1,\mu}.$$

Reemplazando $\frac{(-1)^{m-x}}{\binom{m}{m-x}} e_{m-x}\, v_0^{1,1,\mu} = x! \lambda_0^{1,1,\mu} \left((-1)^x \frac{\binom{a+m}{x}}{\binom{m}{x}} v_0^0 \otimes w_0^1 + v_0^1 \otimes w_0^0 \right)$.

De donde:

$$\frac{(-1)^{m-x}}{\binom{m}{m-x}} e_{m-x}\, v_0^{1,1,\mu} = x! \lambda_0^{1,1,\mu} \left(\frac{\binom{a+m}{x}}{\binom{m}{x}} v_0^0 \otimes w_0^1 + v_0^1 \otimes w_0^0 \right) \text{ si } x \text{ es par,}$$

$$\frac{(-1)^{m-x}}{\binom{m}{m-x}} e_{m-x}\, v_0^{1,1,\mu} = x! \lambda_0^{1,1,\mu} \left(v_0^1 \otimes w_0^0 - \frac{\binom{a+m}{x}}{\binom{m}{x}} v_0^0 \otimes w_0^1 \right) \text{ si } x \text{ es impar.}$$

Puesto que $v_0^{0,1,a+m} = v_0^0 \otimes w_0^1$ y $v_0^{1,0,a+m} = v_0^1 \otimes w_0^0$ obtenemos el resultado buscado. $\square$

Supongamos que $m \neq 1,2$, entonces la multiplicidad de $V(a+2m-2)$ es uno en la descomposición de $Z(0,1) \otimes Z(a,1)$ como $\mathfrak{sl}(2)$-módulo, si $m=1$ la multiplicidad de $V(a)$ es 2 y si $m=2$ la multiplicidad de $V(a+2)$ es 3, teniendo en cuenta esto tenemos la siguiente proposición.

Proposición 6.2.2. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathfrak{r}$ con $\mathfrak{r} = V(m)$ con $m \neq 1,2$. El producto tensorial de $Z(0,1) \otimes Z(a,1)$ es indescomponible para todo $a \geq 1$.*

Prueba: Supongamos que $Z(0,1) \otimes Z(a,1) = V_1 \oplus V_2$ tal que V_1 y V_2 son $\mathfrak{g}$-submódulos de $Z(0,1) \otimes Z(a,1)$, por el Teorema 4.1 tenemos que:

$$\mathrm{soc}(Z(0,1) \otimes Z(a,1)) = \mathrm{soc}(Z(0,1)) \otimes \mathrm{soc}(Z(a,1)) \oplus V(a+m)$$

con $V(a+m)$ el $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo $a+m$ generado por $v_0^{0,1,a+m} - v_0^{1,0,a+m}$, además $\mathrm{soc}(Z(0,1)) \otimes \mathrm{soc}(Z(a,1)) = W_2$ que es un $\mathfrak{sl}(2)$-módulo irreducible de peso máximo a generado por $v_0^{0,0,a}$, es decir, $v_0^{0,1,a+m} - v_0^{1,0,a+m}$ y $v_0^{0,0,a}$ generan a $\mathrm{soc}(Z(0,1) \otimes Z(a,1))$ como $\mathfrak{g}$-módulo.

Puesto que $\mathrm{soc}(Z(0,1) \otimes Z(a,1)) \cap V_i \neq 0$ para $i = 1,2$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathrm{soc}(Z(0,1)) \otimes \mathrm{soc}(Z(a,1)) \subset V_1$ y por lo tanto $v_0^{0,0,a} \in V_1$. Como la multiplicidad de $V(a+2m)$ es uno en $Z(0,1) \otimes Z(a,1)$ ya que $m \neq 1,2$, entonces $V(a+2m) \subset V_1$ o bien $V(a+2m) \subset V_2$. Por el Lema 6.2.1 tenemos que:

$$(-1)^m e_m\, v_0^{1,1,a+2m} = \lambda_0^{1,1,a+2m} \left(v_0^{0,1,a+m} + v_0^{1,0,a+m} \right), \tag{6.2}$$

pues $x_{a+2m}^{1,1} = 0$, por lo tanto $e_m^2\, v_0^{1,1,a+2m} = 2\lambda_0^{1,1,a+2m} v_0^{0,0,1} \in V_1$, entonces $V(2m+1)$ está contenido en V_1.

Por otro lado, como la multiplicidad de $V(a+2m-2)$ es uno en $Z(0,1)\otimes Z(a,1)$, entonces $V(a+2m-2)\subset V_1$ o bien $V(a+2m-2)\subset V_2$. Por el Lema 6.2.1 tenemos que:

$$(-1)^{m-1}e_{m-1}\,v_0^{1,1,a+2m-2} = -\lambda_0^{1,1,a+2m-2}\left(\frac{a+m}{m}v_0^{0,1,a+m} - v_0^{1,0,a+m}\right), \qquad (6.3)$$

pues $x_{a+2m-2}^{1,1} = 1$ y como $a \neq 1$, entonces $(-1)^{m-1}e_{m-1}\,v_0^{1,1,a+2m-2} \notin \mathrm{soc}(Z(0,1)\otimes Z(1,1))$, por lo tanto $(-1)(e_m\,e_{m-1}\,v_0^{1,1,a+2m-2}) = \lambda_0^{1,1,a+2m-2}\dfrac{a}{m}v_0^{0,0,a} \in V_1$, entonces $V(a+2m-2)$ está contenido en V_1.

Puesto que $V(a+2m)$ y $V(a+2m-2)$ están en V_1, entonces (6.2) y (6.3) están en V_1, por lo tanto $v = v_0^{0,1,a+m} + v_0^{1,0,a+m}$ y $w = \frac{a+m}{m}v_0^{0,1,a+m} - v_0^{1,0,a+m}$ están en V_1, de donde:

$$-\frac{a}{a+2m}v + \frac{2m}{a+2m}w = v_0^{1,0,a+m} - v_0^{1,0,a+m} \in V_1,$$

pero $v_0^{0,0,a} \in V_1$, por lo tanto como los generadores del zócalo de $Z(0,1)\otimes Z(a,1)$ están en V_1, entonces $\mathrm{soc}(Z(0,1)\otimes Z(a,1)) \subset V_1$, así $V_2 = 0$ y $Z(0,1)\otimes Z(a,1)$ es indescomponible. □

Lema 6.2.3. *Sea* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)\ltimes V(m)$ *con* $m = 1,2$. *Entonces* $Z(0,1)\otimes Z(a,1)$ *es indescomponible.*

Prueba: La demostración del caso $m = 1$ es similar a la dada en el Apéndice 6.2.

Caso $m = 2$:

Supongamos que $Z(0,1)\otimes Z(a,1) = V_1 \oplus V_2$ con V_1 y V_2 $\mathfrak{g}$-módulos de $Z(0,1)\otimes Z(a,1)$ tal que $\mathrm{soc}(Z(0,1))\otimes \mathrm{soc}(Z(a,1)) \subset V_1$.
Sea v un vector de peso máximo $a+2$ en $Z(0,1)\otimes Z(a,1)$, entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tal que $v = \alpha_1 v_0^{0,1,a+2} + \alpha_2 v_0^{1,0,a+2} + \alpha_3 v_0^{1,1,a+2}$.

Si $\alpha_3 \neq 0$ afirmamos que $z_0 = \frac{a+2}{2}v_0^{0,1,3} - v_0^{1,0,3} \in V_1$, en efecto, puesto que $e_{m-1}\,v_0^{0,1,a+2} = e_{m-1}\,v_0^{1,0,a+2} = 0$, entonces:

$$\frac{(-1)^{m-1}}{\binom{m}{m-1}}e_{m-1}\,v = \frac{(-1)^{m-1}}{\binom{m}{m-1}}e_{m-1}\,v_0^{1,1,a+2} = (-1)\lambda_0^{1,1,a+2}\alpha_3\left(\frac{a+2}{2}v_0^{0,1,a+2} - v_0^{1,0,a+2}\right).$$

Por lo tanto:

$$\frac{-1}{\binom{m}{m-1}}(e_m\,e_{m-1}\,v = (-1)^m e_m\left(\frac{(-1)^{m-1}}{\binom{m}{m-1}}e_{m-1}\,v\right) = \frac{(-1)a\lambda_0^{1,1,a+2}\alpha_3}{2}v_0^{0,0,a} \in V_1.$$

Así $v \in V_1$ y por lo tanto $z_0 = \frac{a+2}{2}v_0^{0,1,a+2} - v_0^{1,0,a+2} \in V_1$.

Por otra parte como $e_m^2\, v_0^{1,1,a+4} = 2\lambda_0^{1,1,a+4} v_0^{0,0,a} \in V_1$, entonces $v_0^{1,1,a+4} \in V_1$ y por lo tanto $z_1 = v_0^{0,1,a+2} + v_0^{1,0,a+2} \in V_1$. Así:

$$v_0^{1,0,a+2} - v_0^{0,1,a+2} \in V_1,$$

ya que $v_0^{0,0,a}$ y $v_0^{1,0,a+2} - v_0^{0,1,a+2}$ generan a $\mathrm{soc}(Z(0,1) \otimes Z(a,1))$ y están en V_1, entonces $\mathrm{soc}(Z(0,1) \otimes Z(a,1)) \subset V_1$ y por lo tanto $V_2 = 0$, lo que muestra la indescomponibilidad de $Z(0,1) \otimes Z(a,1)$. $\square$

Combinando estos resultados tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6.2.4. *Sean $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$ y $a \geq 1$. Entonces $Z(0,1) \otimes Z(a,1)$ es un $\mathfrak{g}$-módulo indescomponible para todo $m \geq 1$.*

Apéndice

Ejemplo Introducción

Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(2)$ con base $\{h, e, f, e_0, e_1, e_2\}$, consideremos el $\mathfrak{g}$-módulo uniserial $Z(0,1)$ que como $\mathfrak{sl}(2)$-módulo se descompone como $V(0) \oplus V(2)$.

Sean $\{v_0^0\}(\{w_0^0\})$ y $\{v_0^1, v_1^1, v_2^1\}(\{w_0^1, w_1^1, w_2^1\})$ bases de $V(0)$ y $V(2)$ respectivamente, donde v_0^0 y w_0^0 son vectores de peso máximo 0, v_0^1 y w_0^1 son vectores de peso máximo 2 y se tiene que $v_k^1 = \frac{1}{k!} f^k\, v_0^k$ y $w_k^1 = \frac{1}{k!} f^k\, w_0^k$ para $k = 1, 2$.

Visualizamos el producto tensorial $Z(0,1) \otimes Z(0,1)$ por medio de la siguiente tabla que muestra los pesos máximos de cada $V(a+2i) \otimes V(b+2j)$:

$\otimes$	0	2
0	0	2
2	2	4 2 0

.

Tenemos la siguiente tabla, donde la primera columna es la base de $Z(0,1) \otimes Z(0,1)$ correspondiente a las bases dadas antes, la segunda columna es la aplicación de e_0, la tercera es la aplicación de e_1 y la cuarta es la aplicación de e_2, a cada elemento de la base la identificamos con z_i dependiendo de la posición en la tabla.

Base de $Z(0,1) \otimes Z(0,1)$	e_0	e_1	e_2
$z_1 = v_0^0 \otimes w_0^0$	0	0	0
$z_2 = v_0^0 \otimes w_0^1$	0	0	z_1
$z_3 = v_0^0 \otimes w_1^1$	0	$-2z_1$	0
$z_4 = v_0^0 \otimes w_2^1$	z_1	0	0
$z_5 = v_0^1 \otimes w_0^0$	0	0	z_1
$z_6 = v_1^1 \otimes w_0^0$	0	$-2z_1$	0
$z_7 = v_2^1 \otimes w_0^0$	z_1	0	0
$z_8 = v_0^1 \otimes w_0^1$	0	0	$z_2 + z_5$
$z_9 = v_1^1 \otimes w_0^1 + v_0^1 \otimes w_1^1$	0	$-2(z_2 + z_5)$	$z_3 + z_6$
$z_{10} = v_2^1 \otimes w_0^1 + v_1^1 \otimes w_1^1 + v_0^1 \otimes w_2^1$	$z_2 + z_5$	$-2(z_3 + z_6)$	$z_4 + z_7$
$z_{11} = v_2^1 \otimes w_1^1 + v_1^1 \otimes w_2^1$	$z_3 + z_6$	$-2(z_4 + z_7)$	0
$z_{12} = v_2^1 \otimes w_2^1$	$z_4 + z_7$	0	0
$z_{13} = v_1^1 \otimes w_0^1 - v_0^1 \otimes w_1^1$	0	$-2(z_2 - z_5)$	$-(z_3 - z_6)$
$z_{14} = 2v_2^1 \otimes w_0^1 - 2v_0^1 \otimes w_2^1$	$2(z_2 - z_5)$	0	$-2(z_4 - z_7)$
$z_{15} = v_2^1 \otimes w_1^1 - v_1^1 \otimes w_2^1$	$z_3 - z_6$	$2(z_4 - z_7)$	0
$z_{16} = v_2^1 \otimes w_0^1 - \frac{1}{2} v_1^1 \otimes w_1^1 + v_0^1 \otimes w_2^1$	$z_2 + z_5$	$z_3 + z_6$	$z_4 + z_7$

.

Por lo tanto la representación matricial es:

$$
\left(\begin{array}{c||ccc||ccc||ccccc|ccc|c}
0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & & & & & & & & & \\
\hline\hline
 & 2h & 2e & 0 & & & & e_2 & -2e_1 & e_0 & 0 & 0 & -2e_1 & 2e_0 & 0 & e_0 \\
 & f & 0 & e & & & & 0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & 0 & -e_2 & 0 & e_0 & e_1 \\
 & 0 & 2f & -2h & & & & 0 & 0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & 0 & -2e_2 & 2e_1 & e_2 \\
\hline\hline
 & & & & 2h & 2e & 0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & 0 & 0 & 2e_1 & -2e_0 & 0 & e_0 \\
 & & & & f & 0 & e & 0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & 0 & e_2 & 0 & -e_0 & e_1 \\
 & & & & 0 & 2f & -2h & 0 & 0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & 0 & 2e_2 & -2e_1 & e_2 \\
\hline\hline
 & & & & & & & 4h & 4e & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & & & f & 2h & 3e & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & & & 0 & 2f & 0 & 2e & 0 & & & & \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 3f & -2h & e & & & & \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 4f & -4h & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & 2h & 2e & 0 & \\
 & & & & & & & & & & & & f & 0 & e & \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 2f & -2h & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & & & 0
\end{array}\right).
$$

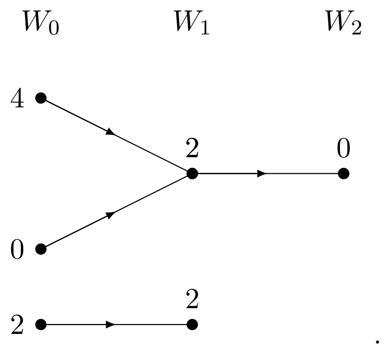
Cambiamos los elementos de la base anterior z_2 por $z_2 + z_5$, z_3 por $z_3 + z_6$, z_4 por $z_4 + z_7$ y z_5 por $z_2 - z_5$, z_6 por $z_3 - z_6$, z_7 por $z_4 - z_7$, los demas permanecen igual obteniendo la matriz:

$$
\left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccccc|ccc|c}
0 & 2e_2 & -4e_1 & 2e_0 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & 2h & 2e & 0 & & & & e_2 & -2e_1 & e_0 & 0 & 0 & & & & e_0 \\
 & f & 0 & e & & & & 0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & 0 & & & & e_1 \\
 & 0 & 2f & -2h & & & & 0 & 0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & & & & e_2 \\
\hline
 & & & & 2h & 2e & 0 & & & & & & -2e_1 & 2e_0 & 0 & \\
 & & & & f & 0 & e & & & & & & -e_2 & 0 & e_0 & \\
 & & & & 0 & 2f & -2h & & & & & & 0 & -2e_2 & 2e_1 & \\
\hline
 & & & & & & & 4h & 4e & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & & & f & 2h & 3e & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & & & 0 & 2f & 0 & 2e & 0 & & & & \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 3f & -2h & e & & & & \\
 & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 4f & -4h & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & 2h & 2e & 0 & \\
 & & & & & & & & & & & & f & 0 & e & \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & 2f & -2h & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & & & 0
\end{array}\right).
$$

Cambiando bloque tenemos la nueva representación matricial:

$$
\left(\begin{array}{c|ccc|ccccc|c||ccc|ccc}
0 & 2e_2 & -4e_1 & 2e_0 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & 2h & 2e & 0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & 0 & 0 & e_0 & & & & & & \\
 & f & 0 & e & 0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & 0 & e_1 & & & & & & \\
 & 0 & 2f & -2h & 0 & 0 & e_2 & -2e_1 & e_0 & e_2 & & & & & & \\
\hline
 & & & & 4h & 4e & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
 & & & & f & 2h & 3e & 0 & 0 & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 2f & 0 & 2e & 0 & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 3f & -2h & e & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 4f & -4h & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & 0 & & & & & & \\
\hline\hline
 & & & & & & & & & & 2h & 2e & 0 & -2e_1 & 2e_0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & f & 0 & e & -e_2 & 0 & e_0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 2f & -2h & 0 & -2e_2 & 2e_1 \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & 2h & 2e & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & f & 0 & e \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & 2f & -2h
\end{array}\right).
$$

Podemos observar que $Z(0,1) \otimes Z(0,1) = V_1 \oplus V_2$ donde $V_1 =_{\mathfrak{sl}(2)} V(2) \oplus V(2)$ el cual es un $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(2)$-módulos uniserial y $V_2 =_{\mathfrak{sl}(2)} V(0) \oplus V(4) \oplus V(2) \oplus V(0)$ el cual no es un $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(2)$-módulos uniserial, ni cíclico perfecto. Este hecho lo podemos representar a través del siguiente diagrama:



Ejemplo §3.3

Consideramos los $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V(1)$-módulos uniseriales $Z(0,1)$ y $Z(1,1)$, de donde $Z(0,1) =_{\mathfrak{sl}(2)} V(0) \oplus V(1)$ y $Z(1,1) =_{\mathfrak{sl}(2)} V(1) \oplus V(2)$.
Sean v_0^0, v_0^1 vectores de peso máximo 0 y 1 en $Z(0,1)$ respectivamente y w_0^0, w_0^1 vectores de peso máximo 1 y 2 en $Z(1,1)$ respectivamente.

Siguiendo la notación dada en el Capítulo 4 tenemos que $v_0^{i,j,\mu}$ es un vector de peso máximo μ en $V(a+i) \otimes V(b+j)$ con $0 \leq i,j \leq 1 = \ell = \ell'$, donde $a = 0$ y $b = 1$. Visualizamos el producto tensorial $Z(0,1) \otimes Z(1,1)$ por medio de la siguiente tabla que muestra los pesos máximos de cada $V(a+i) \otimes V(b+j)$:

$\otimes$	1	2
0	1	2
1	2 0	3 1

Supongamos que $Z(0,1) \otimes Z(1,1) = V_1 \oplus V_2$ con V_1, V_2 $\mathfrak{g}$-submódulos. Puesto que $Z(0,1) \otimes Z(1,1)$ posee vectores de peso máximo 1, podemos suponer que V_1 posee un vector v de peso máximo 1, por lo tanto existen escalares α_1, α_2 tal que $v = \alpha_1 v_0^{0,0,1} + \alpha_2 v_0^{1,1,1}$.
Afirmamos que $v_0^{0,0,1} \in V_1$. En efecto, si $\alpha_2 = 0$ no hay nada que demostrar, supongamos que $\alpha_2 \neq 0$, puesto que $v_0^{0,0,1} \in \mathrm{soc}(Z(0,1) \otimes Z(1,1))$ y como $\mathrm{soc}(Z(0,1) \otimes Z(1,1)) = \mathrm{soc}(Z(0,1)) \otimes \mathrm{soc}(Z(1,1)) \oplus V(2)$ donde $V(2)$ es el $\mathfrak{sl}(2)$-módulo generado por el vector de peso máximo $v_0^0 \otimes w_0^1 - v_0^1 \otimes v_0^0$ (ver 4.3)) y como $v_0^{1,1,1} = v_0^1 \otimes w_1^1 - \frac{1}{2} v_1^1 \otimes w_0^1$, entonces:

$$e_0\, v = \alpha_2 (v_0^1 \otimes w_0^0 - \frac{1}{2} v_0^0 \otimes w_0^1) \in V_1$$

que es un vector de peso máximo 2, además:

$$0 \neq e_1\, e_0\, v = \frac{1}{2}\alpha_2\, v_0^0 \otimes w_0^0 \in V_1,$$

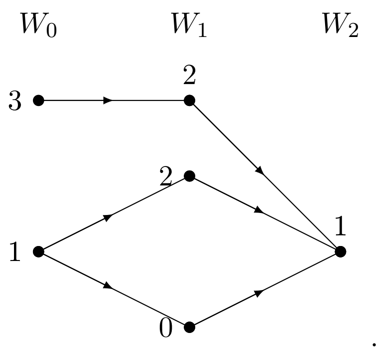
por lo tanto $v_0^{0,0,1} = v_0^0 \otimes w_0^0 \in V_1$.
Lo anterior también nos muestra que todos los vectores de peso máximo 1 en $Z(0,1) \otimes Z(1,1)$ están en V_1.

Por otra parte, como $v_0^{1,1,3}$ es el único vector de peso máximo 3 en $Z(0,1) \otimes Z(1,1)$ este está en V_1 o V_2. Supongamos que $v_0^{1,1,3} \in V_2$, puesto que $v_0^{1,1,3} = v_0^1 \otimes w_0^1$ entonces:

$$e_1\, v_0^{1,1,3} = v_0^1 \otimes w_0^0 + v_0^0 \otimes w_0^1 \in V_2.$$

Además $e_1^2\, v_0^{1,1,3} = 2v_0^0 \otimes w_0^0 \in V_1$ lo cual es absurdo, así $v_0^{1,1,3} = v_0^1 \otimes w_0^1 \in V_1$. Como $Z(0,1) \otimes Z(1,1)$ es cíclico y es generado por el vector $v_{1,1} = v_0^{1,1,3} + v_0^{1,1,1}$ (ver Capítulo 5), entonces $Z(0,1) \otimes Z(1,1) = V_1$.

Podemos observar lo anterior demostrado siguiendo el diagrama donde cada columna representa los pesos máximo que aparecen en cada W_i definidos en el Capítulo 4.



Bibliografía

[A] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: 1. Techniques of the Representation Thery*, New York: Cambridge University Press, Cambrige, UK, 2007.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten and O. Smal∅, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[BG] A. Bagchi and R. Gopakumar, *Galilean conformal algebras and AdS/CFT*, Journal of High Energy Physics 2019-07.

[CS] L. Cagliero y F. Szechtman, *The classification of uniserial* $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V(m)$*-modules and a new interpretation of the Racah-Wigner* $6j$*-symbols*, Journal of Algebra, **386** (2013) 142–175.

[CS1] L. Cagliero and F. Szechtman, *Jordan-Chevalley decomposition in finite dimesional Lie algebras*, Proceedings of the American Mathematical society **139** (2011) 3909-3913.

[CGS] L. Cagliero, L. Gutiérrez Frez y F. Szechtman, *Classification of finite dimensional uniserial representations of conformal Galilei algebras*, Journal of Mathematical Physics **57**, (2016) 101706.

[Ca1] P. Casati, *The classification of the perfect cyclic* $\mathfrak{sl}_{n+1} \ltimes \mathbb{C}^{n+1}$*-modules*, Journal of Algebra 476 (2017) 311–343.

[Ca2] P. Casati, *Irreducible* $\mathfrak{sl}_{n+1}$*-representations remain indecomposable restricted to some Abelian subalgebras*, Journal Lie Theory **20** (2010) 393-407.

[CMS] P. Casati, S. Minniti, V. Salari, *Indecomposable representations of the Diamond Lie algebra*, Journal of Mathematical Physics **51** (2010) 033515-033515-20.

[Dd] A. Douglas and H. de Guise, *Some nonunitary, indecomposable representations of the Euclidean algebra* $\mathfrak{e}(3)$ Journal of Physics A Mathematical and Theoretical **43** (2010) 085204 (13pp).

[DK] Y. Drozd and V. Kirichenko, *Finite Dimensional Algebras*, Springer-Verlag.

[DR] A. Douglas, J. Repka, *Embedding of the Euclidean algebra e(3) into sl(4,C) and restriction of irreducible representations of sl(4,C)*, Journal of Mathematical Physics **52** (2011) 013504.

[DP] A. Douglas and A. Premat, *A class of nonunitary, finite dimensional representations of the euclidean algebra* $\mathfrak{e}(2)$, Communications in Algebra **35** (2007) 1433-1448.

[EG] D. Eisenbud and P. Griffith, *Serial rings*, Journal of Algebra 17 (1971) 389–400 .

[GP] I.M. Gelfand, V.A. Ponomarev, *Remarks on the classification of a pair of commuting linear transformations in a finite dimensional vector space*, Funct. Anal. Appl. **3** (1969) 325-326.

[HZ1] B. Huisgen-Zimmermann, *The geometry of uniserial representations of finite dimensional algebras I*, Journal of Pure and Applied Alegbra 127 (1998) 39–72.

[HZ2] B. Huisgen-Zimmermann, *The geometry of uniserial representations of finite dimensional algebras. III: Finite uniserial type*, Transactions of the American Mathematical Society 348 (1996) 4775-4812.

[H] J. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, NY, 1972.

[J] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover Publications, Inc, New York, NY, 1962.

[Na] T. Nakayama, *On Frobeniusean Algebras. II*, Annals of Mathematics, Vol.42, No.1, January,1941.

[Pi] A. Piard, *Sur des représentations indécomposables de dimension finie de* $SL(2).R^2$, Journal of Geometry and Physics, Volume **3**, Issue 1, 1986, 1–53.

[Pr] A. Premat, *Indecomposable representations of the euclidean algebra*, preprint.

[Rd] J. Repka and H. de Guise, *Some finite-dimensional indecomposable representations of E(2)*, Journal of Mathematical Physics **40** (1999) 6087-6109.

[Sa] A. Savage, *Quivers and the Euclidean group*, Contemporary Mathematics **478** 2009 177-188.