

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA:

Estudio de la dinámica temporal de un modelo de urnas: probabilidades de primer pasaje y criticalidad auto-organizada

Florencia Perachia

Directora:

Dra. Silvia Menchón

Marzo 2020



Esta obra está licenciada bajo la Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>.

A mamá... Cuando tu busco
no hay sitio en donde no estés.

Resumen

Los modelos de urnas son ampliamente usados para describir numerosos sistemas físicos. Dos de los modelos de urnas más conocidos son los denominados modelos de Ehrenfest y del votante. En ambos se consideran dos urnas y un número finito de N elementos rotulados del 1 al N . En el modelo de Ehrenfest, a cada paso temporal, se sortea un número del 1 al N y el elemento con el rótulo sorteado se cambia de urna. En el modelo del votante se sortean dos números del 1 al N y los elementos con los rótulos sorteados son colocados en la urna del primer elemento sorteado. En este trabajo estudiamos una combinación de los clásicos modelos de Ehrenfest y del votante. En nuestro modelo, a cada paso temporal se efectúa el modelo de Ehrenfest con probabilidad α , o el del votante con probabilidad $(1 - \alpha)$. Este modelo puede ser visto como una caminata aleatoria unidimensional en una red finita. Analizamos los estados de equilibrio del sistema y determinamos una transición de fase para $\alpha = 1/N$. Asimismo, definiendo el tamaño de avalancha como la cantidad de pasos necesarios para volver al estado de equilibrio por primera vez, estudiamos la distribuciones de tamaños de avalanchas y de retornos, para determinar si el comportamiento del sistema presenta, además, criticalidad auto-organizada. Desde el punto de vista de la sociofísica, este modelo representa un modelo de opinión, donde el cambio de opinión puede darse por interacción, (modelo del votante), o sin interacción, (modelo de Ehrenfest). Aunque el cambio de opinión sin interacción es muy particular, ya que se realiza con mayor probabilidad en la dirección contraria a lo que opina la mayoría; incluso para valores de α relativamente chicos ($\sim 1/N$), el sistema evoluciona a una sociedad polarizada.

Índice general

1. Introducción	5
1.1. ¿Qué es la Criticalidad Auto-Organizada?	5
1.2. SOC y caminatas aleatorias	7
2. Modelos de urnas y caminatas aleatorias	9
2.1. Modelo del Votante	10
2.2. Modelo de Ehrenfest	11
2.3. Nuestro Modelo	12
2.4. Distribuciones estacionarias de probabilidad	13
3. Resultados	17
3.1. Expansión de Sistema	17
3.2. Resultados Computacionales	20
3.2.1. Resultados Modelo de Urnas de Ehrenfest	20
3.2.2. Resultados de nuestro modelo	22
4. Conclusiones	31

Capítulo 1

Introducción

Los sistemas complejos se caracterizan por estar compuestos de un gran número de elementos y/o agentes interactuantes que, como un conjunto, exhiben propiedades y comportamientos no evidentes a partir de las interacciones entre sus componentes [1]. Cuando el comportamiento macroscópico de ciertos sistemas complejos muestra una invariancia de escala temporal o espacial (característica de un punto crítico), sin la necesidad de ajustar algún parámetro a un valor particular, decimos que el sistema presenta *Self-Organized Criticality* (SOC) [2].

En este trabajo presentamos un modelo de urnas que resulta análogo a una caminata aleatoria unidimensional y analizamos si presenta SOC simulando el proceso estocástico subyacente. El concepto de SOC, puede ser considerado relativamente nuevo, dado que fue introducido por Bak, Tang, y Wiesenfeld (BTW) en 1987 [3]. En esta introducción daremos una descripción de las propiedades de los sistemas que presentan SOC; como así también, relacionaremos éstos con caminatas aleatorias y el tiempo de primer pasaje. En los capítulos siguientes propondremos nuestro modelo, el cual puede ser considerado un modelo de opinión, haremos un análisis de expansión del tamaño del sistema y presentaremos los resultados numéricos.

1.1. ¿Qué es la Criticalidad Auto-Organizada?

Bak, Tang, y Wiesenfeld (BTW) en 1987 [3] se preguntaron por la existencia de algún tipo de mecanismo que fuera capaz de producir un mismo comportamiento macroscópico para un gran número de sistemas que estuviesen formados por muchos componentes interactuantes, (a través de algún tipo de fuerza o información). Es decir, si podría existir algún comportamiento general, sin importar que las propiedades y características microscópicas de los mismos fueran completamente diferentes; como lo son, por ejemplo, un conjunto de electrones, un ecosistema, un fluido, una comunidad o la bolsa de valores. Plantearon así la hipótesis de que, en efecto, los sistemas formados por muchos componentes interactuantes podrían exhibir cierto tipo de comportamientos generales, independientemente de sus detalles configuracionales. Propusieron que, bajo ciertas condiciones, los sistemas dinámicos son capaces de auto-organizarse en estados con estructuras complejas generales. Para estos sistemas no existe un único tamaño característico de los eventos, es decir, un único tiempo o escala característica que controle su evolución. Por otro lado, las propiedades estadísticas de estos sistemas son descritas por simples leyes de potencia y, sorprendentemente, algunos de los exponentes de estas leyes pueden llegar

a ser los mismos para sistemas completamente diferentes desde el punto de vista microscópico. En otras palabras, Bak, Tang, y Wiesenfeld notaron, que los estados en los cuales se auto-organizan los sistemas tienen el mismo tipo de propiedades que exhiben los sistemas en equilibrio que se encuentran en un punto crítico.

Jensen plantea [4], (para entender mejor la diferencia entre SOC y punto crítico), que por más que las respuestas de los sistemas sin SOC en estado no crítico difieran si el sistema es perturbado en diferentes posiciones y/o tiempos; la distribución de probabilidad de estas reacciones es estrecha y queda muy bien descrita por una respuesta promedio. En cambio, para un sistema crítico, la misma perturbación aplicada en distintas o iguales posiciones, en tiempos diferentes, puede llevar a reacciones del sistema de cualquier magnitud. Es así que el promedio, en general, no suele ser una medida útil. Es decir, en palabras Jensen [4], que para casi todas las temperaturas se puede perturbar al sistema localmente y el efecto de esta perturbación solo influirá en los vecinos de la localidad. Sin embargo, a la temperatura de transición, las perturbaciones locales se propagan a lo largo de todo el sistema debido a que los efectos de la misma decaen algebraicamente y no exponencialmente. El sistema entonces se vuelve crítico en el sentido de que se tienen correlaciones de largo alcance. La diferencia con el comportamiento de auto-organización crítica que presentan algunos sistemas fuera del equilibrio, es que éste se genera sin ningún tipo de ajuste de las propiedades del sistema que venga desde el exterior, (por ejemplo, no hace falta ajustar la temperatura o la presión para llevar al sistema a su punto crítico). Es por este motivo que BTW decidieron llamar a este tipo de comportamiento como *Self-Organized Criticality*.

Se ha dicho que varios sistemas, en distintas áreas de la ciencia, presentan SOC; por ejemplo terremotos, incendios, evolución, extinción de especies, movimiento de líneas de campo magnético en superconductores, crecimiento de interfases e incluso fenómenos sociales como la frecuencia de tamaños de guerras. Sin embargo, dice Jensen, no existe aún una definición clara y generalmente aceptada de qué es SOC, como así tampoco un conocimiento de las condiciones necesarias bajo las cuales pueda emerger este comportamiento.

Para entender mejor la respuesta a una perturbación de un sistema con SOC veamos el ejemplo clásico de la pila de arena, el cual fue propuesto por BTW [3]. Éste consiste en una pila que crece gradualmente debido a que se le va agregando un grano de arena por vez en una posición aleatoria. Estos granos se van incorporando a la pila en el lugar que han caído y el sistema evoluciona hasta que la pendiente de la pila llega a un determinado umbral. A partir de ese momento el siguiente grano agregado desencadenará una avalancha que, en consecuencia, reducirá la pendiente de la pila por debajo del umbral crítico. Así, el sistema es empujado, a un bajo ritmo, por su mecanismo de evolución temporal hasta alcanzar el umbral, a partir del cual se desencadenará una explosión de actividad. La distribución de tiempos de vida de estas avalanchas, como así también la distribución de tamaños, siguen una ley de potencia. Cuando la avalancha termina el sistema evoluciona nuevamente, impulsado por sus mecanismos internos, hacia el umbral, y se genera una nueva avalancha.

Como ya habíamos mencionado, la distribución de tiempos de vida de estas avalanchas, $P(t)$, como así también la distribución de tamaños, $P(s)$, siguen una ley de potencia, de la forma $P(t) \sim t^{-\gamma}$ y $P(s) \sim s^{-\tau}$. Este tipo de distribuciones suele tener una superposición con un decaimiento exponencial para sistemas con tamaño

finito, es decir, $P(s) \sim e^{-s/S_0}$ para s mayor que algún valor fijo S_0 que caracteriza el tamaño del sistema.

Según Jensen, la importancia que tiene el estudio y la búsqueda de una mayor comprensión de SOC reside en entender que, para una enorme variedad de sistemas, puede resultar engañoso descuidar o despreciar las fluctuaciones. Es así que SOC ha generado un enorme interés en el estudio de la dinámica de sistemas no lineales que manifiestan grandes fluctuaciones en su evolución temporal. Estas fluctuaciones son tan grandes que el destino de casi todo el sistema puede llegar a ser determinado por un solo evento.

SOC se ha establecido como un subcampo de la mecánica estadística de sistemas fuera del equilibrio. Por el momento se encuentra mucho más caracterizada por un énfasis en lo fenomenológico y por su definición constructiva y exclusiva. Lo más importante de SOC es que ha forzado el reconocimiento de que los umbrales, la metaestabilidad y las grandes fluctuaciones cumplen un rol fundamental en el comportamiento espacio-temporal de un gran grupo de sistemas de muchos cuerpos. Esta visión resulta lo suficientemente importante como para inspirar a más investigación teórica, observacional, experimental y computacional desde el punto de vista de SOC.

1.2. SOC y caminatas aleatorias

Muchos de los fenómenos SOC mencionados en la sección anterior pueden ser directamente relacionados y estudiados con el formalismo de caminatas aleatorias. Mas específicamente, pueden ser descritos en términos de procesos de primer pasaje [5]. Como ya hemos dicho, muchos de los sistemas que presentan SOC tienen la característica de que evolucionan naturalmente hacia un umbral, a partir del cual se desencadenan fluctuaciones que pueden llegar a tener incluso casi el tamaño del sistema mismo. Resulta interesante entonces pensar en el tiempo que le lleva al sistema llegar al umbral por primera vez. En ese sentido, la dinámica subyacente es simplemente análoga a la del problema del primer pasaje de una caminata aleatoria unidimensional. Es decir, podemos considerar la distribución de probabilidad de que un caminante aleatorio alcance por primera vez un sitio específico de una red unidimensional. De este modo, el exponente de la distribución de avalanchas que caracteriza la evolución temporal de este tipo de sistemas, emergería simplemente como el exponente de decaimiento de la distribución de probabilidad de primer pasaje [5].

En particular, Yang estudió el origen de las distribuciones de leyes de potencias en sistemas con SOC considerando las variaciones de sitios activos como una caminata aleatoria unidimensional [6]. El trabajo de Yang considera que los sitios activos ¹ sólo pueden variar en ± 1 ; con esta limitación, Yang encontró que las distribuciones de leyes de potencias asociadas a las avalanchas se correspondían con caminatas aleatorias sin sesgo. Análogamente, en una generalización de este trabajo, donde se considera que la variación de sitios activos puede ser ± 1 o 0 , la distribución de ley de potencia surge cuando la probabilidad de saltar a derecha o izquierda es la misma

¹Con sitios activos Yang se refiere a localidades del sistema en donde el umbral ha sido superado. Por ejemplo, en el caso de la pila de arena, puntos donde el valor local de la pendiente es mayor a la crítica.

[7]. Esto sugiere que las leyes de potencia asociadas a SOC pueden ser originadas por un balance de interacciones competitivas.

Otros trabajos han relacionado caminatas aleatorias con SOC. Por ejemplo, en Ref. [8], Bakar y Tirnakli estudiaron las fluctuaciones alrededor del equilibrio en el modelo clásico de Ehrenfest [9]. Considerando las fluctuaciones como avalanchas, encontraron que la distribución de probabilidad de sus tamaños sigue una ley de potencias y la distribución de retornos converge a una q -Gaussiana. Estas ideas serán desarrolladas y presentadas con más detalle en el capítulo 3.

En el capítulo 2 detallaremos las características de los modelos de urnas estudiados y cuya dinámica temporal ha sido analizada en este trabajo, así como las distribuciones de probabilidad estacionarias alcanzadas. A continuación, en el capítulo 3 se expondrán y analizarán tanto los resultados teóricos como computacionales que obtuvimos del estudio del proceso estocástico subyacente a nuestro modelo. Por último en el capítulo 4 se encontrarán las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Modelos de urnas y caminatas aleatorias

En este capítulo vamos a estudiar dos modelos clásicos de urnas: los denominados modelos del votante y de Ehrenfest. Posteriormente, presentaremos un modelo de urnas que combina ambos y que es el objeto principal de estudio de este trabajo final. En general, los denominados modelos de urnas consisten de un dado número de urnas, las cuales contienen un dado número de elementos y de ciertas reglas que determinan la evolución temporal del contenido de cada urna. Si bien hay casos muy generales donde se puede contar con un gran número de urnas y donde incluso los elementos pueden tener diversas características que hacen más compleja su interacción, en este trabajo consideraremos dos urnas y un número fijo, N , de elementos a los que también denominaremos bolas.

A cada uno de los N elementos se le asigna un número del 1 al N , sin repetir. Es por ello que diremos que los elementos están rotulados. Como el número de elementos es fijo, y a cada paso temporal tienen que estar en alguna de las dos urnas disponibles, el estado del sistema a tiempo t queda completamente determinado por el número de elementos en una de las urnas, $n(t)$. La cantidad $n(t)$ puede tomar $N + 1$ valores discretos comprendidos entre el cero y el número N . Los posibles valores para la diferencia $n(t + 1) - n(t)$ dependen de las reglas de interacción entre los elementos; en este trabajo puede tomar los valores: ± 1 o 0 , siendo el último, no permitido en el modelo de Ehrenfest. Esta particularidad nos permite relacionar los modelos de urnas aquí presentados con caminatas aleatorias en una dimensión con saltos a primeros vecinos. En otras palabras, los modelos de urnas que consideraremos en este trabajo son análogos a problemas planteados para caminatas aleatorias a tiempo discreto en una red regular unidimensional de tamaño finito. Desde el punto de vista de los modelos de opinión, las urnas se asocian con dos opiniones diferentes y los elementos simbolizan los miembros de una sociedad conformada por N individuos. De esta manera, los elementos en una dada urna representan los individuos con una dada opinión y la interacción entre los individuos, (elementos), modifica la cantidad de miembros asociados a una dada opinión.

Si bien nuestro modelo puede ser considerado un caso particular de modelos más generales, como aquellos presentados por William Pickering & Chjan Lim [10] y Holger Dette [11], hay muchas características que aún no han sido estudiadas ni analizadas en detalle para nuestro caso particular. Algunos de los resultados teóricos ya conocidos serán presentados en este capítulo. En los capítulos siguientes

se analizarán resultados novedosos que vinculan nuestro modelo con el concepto de criticalidad auto-organizada.

2.1. Modelo del Votante

Como todos los modelos que describiremos en este trabajo, el modelo del votante considera dos urnas y una cantidad fija de N elementos, los cuales están rotulados del 1 al N . Lo que cambia de modelo a modelo son las reglas de interacción entre los elementos. Para el modelo del votante, a cada paso temporal se procede de la siguiente manera:

1. Se sortean dos números del 1 al N , denominados n_1 y n_2 ,
2. Los elementos con los rótulos sorteados son colocados en la urna donde estaba el elemento con rótulo n_1 .

Para una configuración dada a tiempo t , $n(t)$, tenemos tres posibles valores para $n(t+1)$. Como ejemplo, y para una mejor descripción, consideremos $N = 10$ y una configuración dada a tiempo t como la del panel izquierdo de la figura 2.1. Supongamos ahora que los números sorteados son $n_1 = 7$ y $n_2 = 5$. De acuerdo con las reglas de interacción, como el elemento rotulado con el número 7, al tiempo t , estaba presente en la urna B ; al tiempo $t+1$, el elemento rotulado con el número 5 debe estar ubicado en la urna B y por lo tanto la configuración, a tiempo $t+1$, cambia a la dada por el panel derecho de la figura 2.1. Si $n(t)$ representa la cantidad de elementos en la urna A al tiempo t ; entonces, para este ejemplo en particular, $n(t) = 7$ y $n(t+1) = 6 = n(t) - 1$.

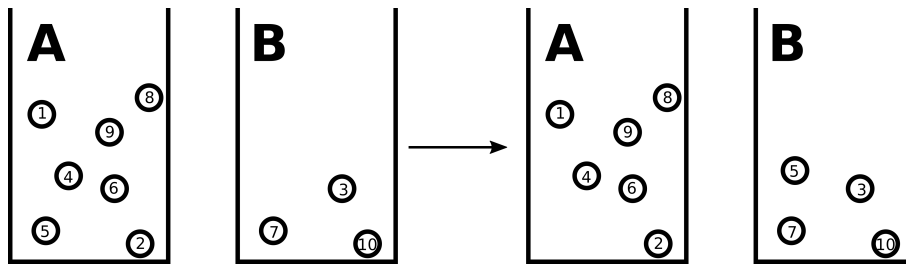


Figura 2.1: Dos urnas con $N = 10$ elementos. A la izquierda una dada configuración a tiempo t . A la derecha, configuración al tiempo $t+1$, según el modelo del votante, cuando $n_1 = 7$ y $n_2 = 5$.

Si los números sorteados hubiesen sido, por ejemplo, $n_1 = 7$ y $n_2 = 3$, no hubiera habido cambios, es decir, $n(t+1) = n(t)$. Por otro lado, si los valores de n_1 y n_2 hubiesen sido 2 y 5, respectivamente; el valor de n se hubiese incrementado en uno, es decir, $n(t+1) = n(t) + 1$. Claramente, si a un dado tiempo, t_c , todos los elementos se encuentran en la urna A , (B); $n(t)$ tomará el valor N , (0), para $t > t_c$. Al tiempo t_c se lo denomina tiempo de consenso.

Desde el punto de vista de una caminata aleatoria, el modelo del votante es equivalente a una caminata aleatoria sobre una red unidimensional de $N+1$ nodos,

Desde el punto de vista de una caminata aleatoria, el modelo de Ehrenfest es equivalente a una caminata aleatoria sobre una red unidimensional de $N + 1$ nodos, equiespaciados, rotulados de 0 al N , con condiciones de contorno reflectantes; y probabilidades de saltos a primeros vecinos dadas por:

$$\begin{aligned} a_i &= P(i + 1|i) = \left(\frac{N - i}{N}\right), \\ c_i &= P(i - 1|i) = \left(\frac{i}{N}\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

En este modelo $P(i + \delta|i) = 0$ si δ toma valores diferentes al ± 1 . La expresión para $P(i + 1|i)$ es la probabilidad de elegir un elemento de la urna B entre N elementos, $(N - i)/N$; y la expresión para $P(i - 1|i)$ es la probabilidad de elegir un elemento de la urna A entre N elementos, i/N . Podemos ahora definir la matriz estocástica de manera análoga a la ecuación (2.2), donde $b_i = 0$, para todo i . Al final de este capítulo estudiaremos la distribución estacionaria de este modelo y al comienzo del capítulo siguiente haremos un análisis de expansión de tamaño del sistema.

Considerando al modelo del votante y al modelo de Ehrenfest como modelos de opinion, podemos asociar al modelo del votante un cambio de opinión por interacción entre los individuos, mientras que el modelo de Ehrenfest podría considerar cambios de opinión de manera independiente, con una tendencia a “llevar la contra”, en el sentido de que es más probable cambiar de opinión independientemente mientras más sujetos haya con una opinión dada.

2.3. Nuestro Modelo

Nuestro modelo consiste en una combinación de los dos mencionados anteriormente. Las componentes son nuevamente dos urnas y una cantidad fija de N elementos, los cuales están rotulados del 1 al N . Mientras que las reglas de interacción entre los elementos, a cada paso temporal, vienen dadas por:

1. Con probabilidad α se procede como en el modelo de Ehrenfest.
2. Caso contrario, es decir, con probabilidad $1 - \alpha$, se procede como en el modelo del votante.

En cada iteración, un paso de Ehrenfest es aplicado con probabilidad α o uno del Votante con probabilidad $1 - \alpha$. En otras palabras, podemos suponer que a cada paso temporal tiramos una moneda pesada, de tal manera que α sea la probabilidad de que salga cara. Si sale cara, procedemos como en el modelo de Ehrenfest, y si sale cruz, en ese paso temporal aplicamos el modelo del votante. Claramente, si α es uno el modelo se reduce al modelo de Ehrenfest y si α es cero el modelo se torna el modelo del votante.

Desde el punto de vista de una caminata aleatoria, nuestro modelo es equivalente a una caminata aleatoria sobre una red unidimensional de $N + 1$ nodos, equiespaciados, rotulados de 0 al N , con condiciones de contorno que dependen del valor de

α ; y probabilidades de saltos a primeros vecinos dadas por:

$$\begin{aligned} a_i &= P(i+1|i) = \alpha \left(\frac{N-i}{N} \right) + (1-\alpha) \left(\frac{i}{N} \frac{N-i}{N-1} \right), \\ b_i &= P(i|i) = (1-\alpha) \left[1 - 2 \left(\frac{i}{N} \right) \left(\frac{N-i}{N-1} \right) \right], \\ c_i &= P(i-1|i) = \alpha \left(\frac{i}{N} \right) + (1-\alpha) \left(\frac{i}{N} \frac{N-i}{N-1} \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde, nuevamente, $P(i+\delta|i)$ es la probabilidad condicional de que la urna A tenga $i+\delta$ elementos al tiempo $t+1$, dado que al tiempo t había i elementos en la mencionada urna. Pensando nuestro modelo como la combinación de procesos estocásticos independientes; (lanzar la moneda es un evento independiente de los sorteos de n_1 y n_2), es fácil ver que la expresión para $P(i+\delta|i)$ es la suma pesada de las probabilidades condicionales para los modelos de Ehrenfest y del votante. Es por ello que, $P(i+\delta|i)$ toma los valores dados en la ecuación (2.4) para $\delta = 0$ ó ± 1 y se anula si δ toma otros valores diferentes al cero o ± 1 . Obviamente, si $\alpha = 1$ ($\alpha = 0$), la ecuación (2.4) se reduce a la ecuación (2.3) ((2.1)). La matriz estocástica queda definida nuevamente como en la ecuación (2.2), donde ahora a_i , b_i y c_i vienen dados por la ecuación (2.4).

Considerando a nuestro modelo como un modelo de opinión, este modelo combina los cambios de opinión por interacción entre los individuos con probabilidad $1-\alpha$, y los cambios de opinión de manera independiente con probabilidad α . Es importante recordar que los cambios de opinión independientes no tienen una probabilidad constante, depende de la cantidad de individuos que tengan una dada opinión. Nuestro modelo es una combinación de uno que evoluciona naturalmente al consenso, (modelo del votante), y de otro que evoluciona naturalmente a la polarización, (modelo de Ehrenfest). Como veremos más adelante, dependiendo del valor de α , la sociedad podrá estar polarizada, llegar a un consenso o tener cualquier estado posible con igual probabilidad.

2.4. Distribuciones estacionarias de probabilidad

En 1994, Dette presentó un modelo de Ehrenfest generalizado [11]. El modelo presentado por Dette considera $N \in \mathbb{N}$, dos parámetros reales tales que $a, b > -1$ o $a, b < -N$, y $\nu > 0$. También considera una cadena de Markov en el $\{0, \dots, N\}$ con probabilidades de transición dadas por:

$$\begin{aligned} P(i+1|i) &= \left(1 - \frac{i}{N} \right) \left(\frac{a+1+i}{N+a+b+2} \right) \nu, \\ P(i|i) &= 1 - \left(1 - \frac{i}{N} \right) \left(\frac{a+1+i}{N+a+b+2} \right) \nu - \frac{i}{N} \left(\frac{N+b+1-i}{N+a+b+2} \right) \nu, \\ P(i-1|i) &= \frac{i}{N} \left(\frac{N+b+1-i}{N+a+b+2} \right) \nu, \end{aligned} \quad (2.5)$$

y $P(i + \delta|i) = 0$, si δ difiere de cero o ± 1 . Usando un análisis espectral, Dette concluye que la la distribución de probabilidades estacionaria viene dada por:

$$\pi_i = \binom{N}{j} \frac{\beta(a + j + 1, N + b + 1 - j)}{\beta(a + 1, b + 1)}, \quad (2.6)$$

donde $\beta(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x + y)$ es la función beta y $\Gamma(x)$ es la función gama.

Comparando las probabilidades condicionales de nuestro modelo, dadas por (2.4), con las del modelo de Dette, ecuación (2.5), podemos ver que nuestro modelo es un caso particular del presentado por Dette, si tomamos los siguientes valores para a , b y ν :

$$a = b = \frac{\alpha N - 1}{1 - \alpha}, \quad \nu = \frac{\alpha N + N - 2\alpha}{N - 1}.$$

Si $\alpha = 1$ obtenemos la distribución estacionaria para Ehrenfest, $\pi_j = \binom{N}{j}(1/2)^N$, la cual se obtiene tomando correctamente el límite para $\alpha \rightarrow 1$, ($a \rightarrow \infty$). Si $\alpha = 1/N$, ($a = 0$) tenemos $\pi_j = 1/(N + 1)$, para todo j , es decir, para $\alpha = 1/N$ la distribución de probabilidad estacionaria es uniforme. Si $\alpha = 0$ y $n(0) = N/2$, $\pi_j = 0$ para $0 < j < N$ y $\pi_j = 0,5$ para $j = 0, N$. En la figura (2.2), mostramos las distribuciones estacionarias para diferentes valores de α , considerando $N = 100$. Como vemos, para $\alpha = 1/N$ la distribución es uniforme; mientras que para $\alpha < 1/N$ los máximos se encuentran en los bordes y para $\alpha > 1/N$ el máximo está al centro de la red.

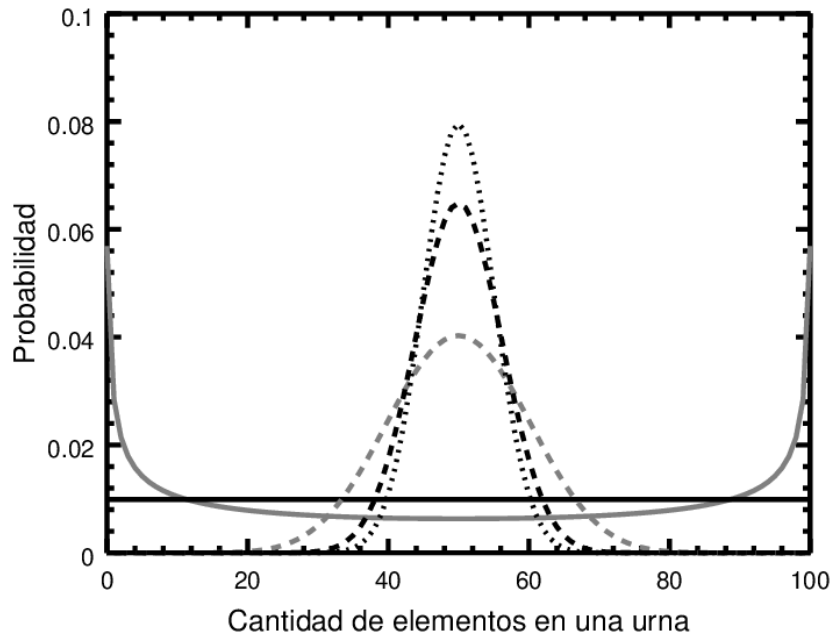


Figura 2.2: Distribuciones de probabilidad estacionarias considerando $N = 100$, para los siguientes valores de α : 0,005, (línea sólida gris); 0,01 = $1/N$, (línea sólida negra); 0,15, (línea a trazos gris); 0,5, (línea a trazos negra) y 1, (línea punteada negra).

En general podemos ver que tenemos tres conductas bien diferenciadas que dependen del tamaño del sistema, N :

1. Si $\alpha < 1/N$, hay dos estados con mayor probabilidad que el resto, $n = 0$ y $n = N$. Desde el punto de vista de una caminata aleatoria, el caminante tiende a estar en los bordes de la red. En términos sociales, la sociedad prefiere los estados de consenso.
2. Si $\alpha = 1/N$, todos los estados son igualmente probables, es decir, no hay preferencia por ninguno de ellos y se vuelve imposible predecir el sistema.
3. Si $\alpha > 1/N$, hay un estado con mayor probabilidad que el resto, $n = N/2$, (suponemos N par). Desde el punto de vista de una caminata aleatoria, el caminante tiende a estar en el centro de la red. En términos sociales, la sociedad se vuelve una sociedad polarizada.

Como vemos en la figura (2.2), el ancho del pico para $\alpha = 1$ es algo menor que aquel para 0,5; y considerablemente menor que el de $\alpha = 0,15$. Es por ello que, para $\alpha > 1/N$ esperamos menores fluctuaciones cuanto más grande sea el valor de α . De manera análoga, en la región $\alpha < 1/N$, cuanto más pequeño α más le cuesta salir al sistema de la región cercana a un dado estado de consenso. Simulacionalmente, estudiar la distribución de probabilidad de primer pasaje para $\alpha < 1/N$, se vuelve computacionalmente muy costoso.

A modo ilustrativo la figura (2.3) muestra las evoluciones temporales del sistema para diferentes valores de α , considerando $N = 100$ y $n(0) = N/2$. Para $\alpha = 0$, modelo del votante, una vez alcanzado un estado de consenso el sistema permanece en él. Para $\alpha = 0,005$ es difícil, pero no imposible, salir de la región cercana a un consenso, se tienen “bordes pegajosos”. Si $\alpha = 1/N$ la variabilidad es muy grande. Mientras que para $\alpha > 1/N$ vemos que las fluctuaciones son menores mientras más grande es α . Los detalles numéricos serán dados en el capítulo siguiente, donde también estudiaremos las fluctuaciones y la distribución de probabilidad de volver por primera vez al punto $N/2$ en m pasos, principalmente, para $\alpha > 1/N$.

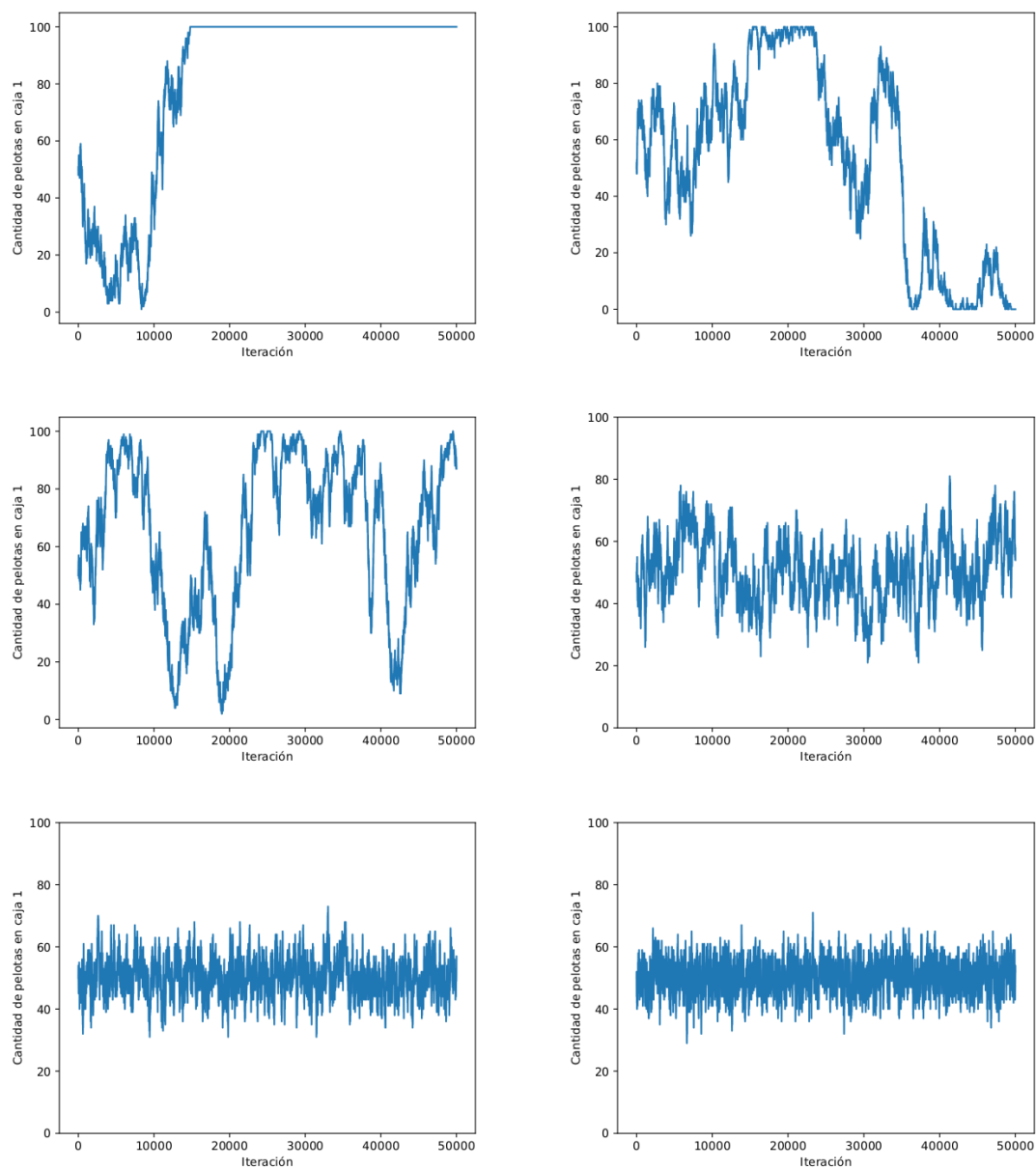


Figura 2.3: Evoluciones temporales para 50.000 iteraciones, considerando $N = 100$ y $n(0) = N/2$, para los siguientes valores de α : 0, (panel superior izquierdo); 0,005, (panel superior derecho); 0,01 = $1/N$, (panel del medio a la izquierda); 0,15, (panel del medio a la derecha), 0,5, (panel inferior izquierdo) y 1, (panel inferior derecho).

Capítulo 3

Resultados

En este capítulo presentaremos los resultados obtenidos en nuestro trabajo. El mismo está organizado de la siguiente manera: primero mostraremos los resultados analíticos que resultan de hacer una expansión de tamaño del sistema, y posteriormente discutiremos los resultados numéricos obtenidos computacionalmente.

3.1. Expansión de Sistema

Como ya mencionamos en el Capítulo 2, podemos pensar el proceso estocástico, que resulta de nuestro modelo, como una caminata aleatoria en una red unidimensional finita. Tanto el espacio como el tiempo son considerados discretos. En particular, la red espacial tiene $N + 1$ sitios, comenzando en cero y terminando en N y el tiempo se incrementa por intervalos $\Delta t = 1$. Como la posición actual del caminante sólo depende de la posición anterior, al proceso se lo denomina, proceso de Markov de primer orden.

Para estudiar la evolución temporal de nuestro modelo, vamos a plantear la ecuación maestra asociada al mismo. Más aún, para tener una descripción de como se aproxima al estado estacionario y un análisis de las fluctuaciones alrededor del mismo, haremos una expansión de tamaño del sistema, [12]. Para ello, busquemos una expresión de la probabilidad de que el caminante esté en la posición n al tiempo $t + \Delta t$. Por ser un proceso de Markov podemos escribir:

$$P_n(t + \Delta t) = P(n|n - 1)P_{n-1}(t) + P(n|n)P_n(t) + P(n|n + 1)P_{n+1}(t). \quad (3.1)$$

El miembro derecho de la ecuación (3.1) tiene la información de la distribución de probabilidad al tiempo t . En particular, el primer término corresponde a la probabilidad de estar en la posición $n - 1$ al tiempo t y moverse un espacio de la red hacia la derecha, para así llegar a la posición n al tiempo $t + \Delta t$. Como la probabilidad de estar en $n - 1$ al tiempo t es independiente de la probabilidad de hacer un salto a la derecha, ambas probabilidades se multiplican. Análogamente, el segundo término es la probabilidad de que el caminante esté en la posición n al tiempo t y permanezca en ella, para continuar en la misma posición al tiempo $t + \Delta t$. Por último, el tercer término es la probabilidad de llegar al sitio n al tiempo $t + \Delta t$ desde el sitio $n + 1$. El miembro derecho de la ecuación (3.1) sólo tiene tres términos porque $P(n|n \pm \delta) = 0$ para todo $\delta > 1$, es decir, el caminante sólo puede llegar a la posición n al tiempo $t + \Delta t$ si al tiempo t estaba en algunas de las siguientes

posiciones: $n - 1$, n , o $n + 1$. Por otro lado, si al tiempo t el caminante estaba en la posición n , al tiempo $t + \Delta t$ deberá estar en $n \pm 1$ o bien haber permanecido en su posición. Por lo tanto, $P(n|n) = 1 - P(n + 1|n) - P(n - 1|n)$. Reemplazando esta expresión en (3.1) y reagrupando obtenemos:

$$P_n(t + \Delta t) - P_n(t) = P(n|n - 1)P_{n-1}(t) - P(n - 1|n)P_n(t) + P(n|n + 1)P_{n+1}(t).$$

Definiendo $\Delta P_n = P_n(t + \Delta t) - P_n(t)$ y $\Delta \tau = 1/N$ de tal manera que $\Delta t = \Delta \tau N$, la ecuación anterior puede llevarse a la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P_n}{\Delta \tau} = N [& P(n|n - 1)P_{n-1}(t) - P(n - 1|n)P_n(t) + \\ & P(n|n + 1)P_{n+1}(t) - P(n + 1|n)P_n(t)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Claramente, para N suficientemente grande, $\Delta \tau$ será suficientemente pequeño y $\Delta P_n / \Delta \tau \rightarrow dP/d\tau$. Sin embargo, con el objetivo de hacer una expansión de tamaño del sistema, es conveniente realizar unos pasos previos. Es por ello, que definimos los operadores $\mathbb{E}^{\pm 1}$ los cuales aumentan o disminuyen en uno el valor de n , es decir, $\mathbb{E}^{\pm 1} f(n) \rightarrow f(n \pm 1)$. Podemos entonces reescribir la ecuación (3.2) en término de estos operadores como:

$$\frac{\Delta P_n}{\Delta \tau} = N [(\mathbb{E}^{+1} - 1) P(n - 1|n)P_n(t) + (\mathbb{E}^{-1} - 1) P(n + 1|n)P_n(t)]$$

Usando las expresiones de $P(i|j)$ asociadas a nuestro modelo, ecuación (2.4), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P_n}{\Delta \tau} = N \left[& (\mathbb{E}^{+1} - 1) \left(\alpha \left(\frac{n}{N} \right) + (1 - \alpha) \left(\frac{n}{N} \frac{N - n}{N - 1} \right) \right) P_n(t) + \\ & (\mathbb{E}^{-1} - 1) \left(\alpha \left(\frac{N - n}{N} \right) + (1 - \alpha) \left(\frac{n}{N} \frac{N - n}{N - 1} \right) \right) P_n(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como la ecuación 3.3 sigue siendo discreta y queremos una expresión continua para N suficientemente grande, tenemos que modificar los operadores. Utilizando la hipótesis de la expansión de Van Kampen [12], es decir, desacoplando las contribuciones de la componente macroscópica y el ruido, proponemos:

$$n(t) \propto N\phi(t) + N^{\frac{1}{2}}\xi, \quad (3.4)$$

donde $\phi(t)$ es una función determinista que indica, en nuestro caso, la concentración macroscópica de elementos en una dada urna, n/N y ξ es una variable aleatoria. Para escribir la ecuación (3.4), suponemos que las fluctuaciones tienen comportamiento gaussiano, $n \propto N^{1/2}\xi$ y ϕ es independiente del número total de partículas, (representa una concentración). Ahora, la expresión (3.4), nos vincula la variable n con dos variables t y ξ . Por lo tanto, debemos reescribir la ecuación (3.3) en términos de estas variables. Considerando que el tamaño del sistema, N , es grande; un cambio en n por $n + 1$ no influiría sobre la ϕ que es estable, sino sobre ξ . Es decir,

que un cambio en $n \rightarrow n \pm 1$ se genera si $\xi \rightarrow \xi \pm \frac{1}{\sqrt{N}}$. Como $\frac{1}{\sqrt{N}} \ll 1$, podemos realizar una expansión de Taylor de los operadores $\mathbb{E}^{\pm 1}$. Luego,

$$\mathbb{E}^{\pm 1} \sim I \pm N^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} + N^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}. \quad (3.5)$$

Por otro lado, también tenemos que reescribir la probabilidad de que el sistema esté en la posición n en la iteración t , $P_n(t) = P(n, t)$, en término de las nuevas variables. Usando (3.4) hacemos un cambio de variables tal que:

$$P(n, t) = P(N\phi + N^{1/2}\xi) = \Pi(t, \xi).$$

Entonces:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t}$$

Ahora, como ξ no depende del tiempo, $\partial n / \partial t = N \partial \phi / \partial t$. Además, ϕ no cambia al variar n , entonces, $\partial P / \partial n = (\partial \Pi / \partial \xi) (\partial \xi / \partial n)$. Por lo tanto, como $\partial \xi / \partial n = \Delta \xi / \Delta n$ y $\Delta \xi = \pm 1 / \sqrt{N}$ cuando $\Delta n = \pm 1$; tenemos:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial t} + N^{1/2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}$$

Reescribiendo y utilizando (3.3) y (3.5) llegamos a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt} - N^{1/2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \Pi \left[\left(N^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{N^{-1}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left(\alpha n + (1 - \alpha) n \left(\frac{N - n}{N - 1} \right) \right) + \right. \\ \left. \left(-N^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{N^{-1}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \left(\alpha (N - n) + (1 - \alpha) n \left(\frac{N - n}{N - 1} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

Si usamos (3.4), suponemos N suficientemente grande, tal que $N \approx N - 1$ y notamos que los términos con potencias negativas de N tienden a cero cuando N es suficientemente grande, llegamos a que, (si $\alpha \neq \frac{1}{N}$ y 0), se tienen que cumplir simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha - 2\alpha\phi \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} (\Pi 2\xi\alpha) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [(2\phi(1 - \alpha)(1 - \phi) + \alpha)\Pi]. \quad (3.7)$$

La solución de (3.6) nos da información de la parte macroscópica. En particular vemos que $\phi = Ae^{-2\alpha t} + 1/2$, donde A es una constante que depende de las condiciones iniciales. En el límite $N \rightarrow \infty$, el valor crítico de α , $(1/N)$, tiende a cero y por lo tanto, la distribución estacionaria tiene un máximo en $N/2$ para $\alpha \neq 0$ (ver Capítulo 2). En particular, si la condición inicial es diferente a $N/2$, ($A \neq 0$), el sistema evoluciona hacia el punto de equilibrio, $N/2$, con un decaimiento exponencial que depende de α , siendo máximo; es decir, llegando más rápidamente al equilibrio, en el caso de Ehrenfest.

Por otro lado, la ecuación (3.7) es la ecuación de Fokker-Planck asociada a nuestro modelo y nos da información sobre las fluctuaciones. Considerando la siguiente expresión general de la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} A(y)P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} B(y)P,$$

y comparando con la ecuación (3.7), podemos identificar $y = \xi$, $A(\xi) = -2\xi\alpha$ y $B(\xi) = 2\phi(1 - \alpha)(1 - \phi) + \alpha$. De esta manera, obtenemos las siguientes ecuaciones para el primer y segundo momento de ξ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \xi \rangle = -2\alpha \langle \xi \rangle, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \xi^2 \rangle = -2(2\alpha) \langle \xi^2 \rangle + [2\phi(1 - \alpha)(1 - \phi) + \alpha]. \quad (3.9)$$

La solución para (3.8) es $\langle \xi \rangle = Be^{-2\alpha t}$, si $\alpha \neq 0$, (no consideraremos el caso $\alpha = 0$ que sabemos que tiene condiciones absorbentes en los bordes). Por otro lado, si reemplazamos ϕ en (3.9) por la solución encontrada para (3.6), llegamos a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \xi^2 \rangle = -4\alpha \langle \xi^2 \rangle - 2A^2 e^{-4\alpha t} (1 - \alpha) + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \right),$$

cuyas soluciones son de la forma:

$$\langle \xi^2 \rangle = (-2A^2(1 - \alpha)t + cte) e^{-4\alpha t} + \frac{\alpha + 1}{8\alpha}. \quad (3.10)$$

De esta expresión podemos ver que las fluctuaciones, en estado estacionario y para N grande, son proporcionales a $1 + 1/\alpha$. Es decir, tienen una magnitud mínima para el caso de Ehrenfest, $\alpha = 1$, y son muy grandes para valores de α cercanos a cero.

3.2. Resultados Computacionales

En esta sección presentamos primero los resultados del estudio computacional que realizamos del modelo de urnas de Ehrenfest con el fin de reproducir los resultados de Burhan Bakar y Ugur Tirnakli [8], y así comenzar a familiarizarnos con la dinámica de sistemas que presentan Criticalidad Auto-organizada. A continuación detallamos los resultados simulacionales de nuestro modelo.

3.2.1. Resultados Modelo de Urnas de Ehrenfest

Se simuló el proceso estocástico del modelo de Ehrenfest realizando 10^8 iteraciones temporales, para diferentes tamaños de sistema, N .

Dado que estamos interesados en los retornos al punto de equilibrio, comenzamos las simulaciones desde el equilibrio. Es decir, consideramos que inicialmente ambas cajas tienen $N/2$ elementos. Del mismo modo que en el trabajo de Bakar y Tirnakli [8], registramos la cantidad de iteraciones ocurridas desde que el sistema sale y vuelve a llegar al equilibrio. Definimos entonces a las avalanchas de este proceso como la cantidad de iteraciones que dura la fluctuación y las denominamos como λ . En total se esperó a que el sistema llegase 10^7 veces al equilibrio.

En la figura (3.1) podemos observar la distribución de tamaños de avalanchas, en escala logarítmica, para $N = 100$, $N = 1000$ y $N = 10^5$. En concordancia

con el trabajo de Bakar y Tirnakli [8] tenemos, para el caso $N = 10^5$, una clara distribución del tipo ley de potencia. Mientras que para los casos $N = 100$ y $N = 1000$ observamos una ley de potencia seguida de un decaimiento exponencial debido a los efectos de tamaño finito del sistema.

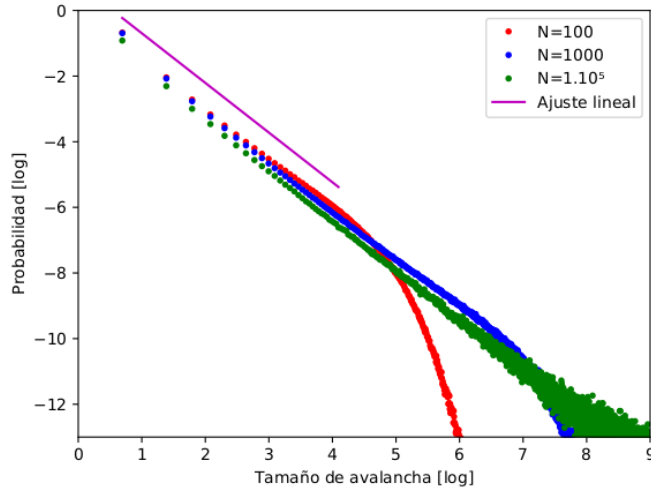


Figura 3.1: Distribución de tamaños de avalanchas en escala logarítmica para $N = 100$, 1000 y 10^5 ; y ajuste lineal, con pendiente $\tau = 1,5$, correspondiente a los tres casos. Las distribuciones están normalizadas por la cantidad máxima de veces que el sistema regresó al equilibrio: 10^7 .

Realizamos un ajuste lineal para los tres valores de N seleccionando una misma cantidad de puntos, correspondientes a la zona donde la distribución no muestra los efectos de tamaño finito, y obtuvimos el mismo valor de pendiente para los tres casos: $\tau = 1,5$. Dicho valor coincide con el reportado en Ref. [8].

A continuación estudiamos la distribución de retornos, es decir, la diferencia de tamaño entre avalanchas consecutivas $\Delta_t = \lambda_{t+1} - \lambda_t$, donde t y $t + 1$ representan ahora las iteraciones consecutivas para las cuales se completó una fluctuación del sistema.

En la figura 3.2 graficamos las distribuciones de retornos, normalizadas al valor máximo, que se obtuvieron para $N = 100$, $N = 1000$ y $N = 10^5$. El eje de las ordenadas representa la frecuencia de las diferencias de tamaño entre avalanchas consecutivas dividida la frecuencia del valor máximo, $F(x)/F(0)$; y en el eje horizontal tenemos Δ_t .

Notemos que para ninguno de los casos se tiene una distribución de retornos que pueda ser ajustada por una Gaussiana. A medida que aumentamos el tamaño del sistema, y las leyes de potencia comienzan a dejar de decaer por efectos de tamaño finito, las distribuciones de retorno se acercan a una distribución de cola ancha. En la Ref. [8] manifiestan que para tamaños de sistema lo suficientemente grandes, en nuestro caso para $N = 10^5$, las distribuciones pueden ser ajustadas por una q -Gaussiana dada por:

$$P(x) = P(0)[1 + \beta(q - 1)x^2]^{-\frac{1}{q-1}} \quad (3.11)$$

Donde se define $x = \Delta\lambda - \langle\Delta\lambda\rangle$, siendo $\langle\Delta\lambda\rangle$ el valor medio del conjunto de

diferencias de tamaño de avalanchas consecutivas. Por otro lado, β caracteriza el ancho de la distribución. Para $q \neq 1$ se tiene un alejamiento del comportamiento gaussiano y para $q \rightarrow 1$ se reobtiene la forma normal de la distribución Gaussiana.

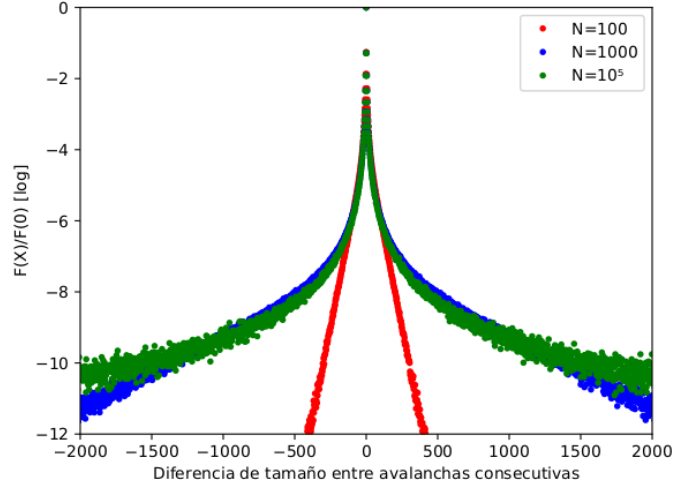


Figura 3.2: Distribuciones de retornos, i.e. diferencia de tamaño entre avalanchas consecutivas, para $N=100, 1000$ y 10^5 , normalizadas al valor máximo

Del mismo modo que afirman Bakar y Tirnakli [8], nuestros resultados de las figuras 3.1 y 3.2 muestran la conexión entre criticalidad y la aparición de q -Gaussianas. Mientras más persiste la ley de potencias más se acercan las colas de la distribución de retornos a las de una q -Gaussiana. De este modo, podemos concluir que cuando $N \rightarrow \infty$ el régimen de ley de potencias en la distribución de tamaños de avalanchas será válido para todo λ y su correspondiente distribución de retorno convergerá a una q -Gaussiana para toda la región. Comportamientos que son observados y reportados en sistemas con SOC.

3.2.2. Resultados de nuestro modelo

Del mismo modo que lo hicimos para el modelo de Ehrenfest, estudiamos la dinámica de nuestro modelo. Realizamos simulaciones con distintos valores del parámetro α . Como el tiempo computacional de retorno al $N/2$ varía notablemente para diferentes valores de α y sabemos que nuestro modelo presenta un punto crítico en $\alpha = 1/N$, es decir, que depende del tamaño del sistema; la mayoría de las simulaciones en este trabajo se realizaron para $N = 100$.

Si bien para el caso $N = 100$ se realizaron múltiples simulaciones, con un conjunto amplio de valores del parámetro α , detallaremos los casos más significativos e interesantes, como así también mostraremos algunos resultados para valores más grandes de N . Los resultados computacionales correspondientes a los distintos valores de α se presentan en el orden temporal en que se fue analizando numéricamente la dinámica del sistema, como así también la motivación que llevó a ello.

El parámetro α es la probabilidad de realizar el modelo de Ehrenfest o el del votante a cada paso temporal. Es por ello que si $\alpha = 0,5$ ambos modelos tienen igual probabilidad de ocurrir en un dado paso temporal y no hay una clara preferencia por alguno de ellos. Por esta razón, $\alpha = 0,5$ fue naturalmente nuestro primer caso

de interés. En la figura (3.3a) podemos observar la distribución de probabilidades del tamaño de las avalanchas para este caso. Para todo el rango de avalanchas, a excepción del intervalo correspondiente a los tamaños de avalanchas mas chicas, se puede distinguir una clara ley de potencias, lo cual podría indicar la presencia de criticalidad auto-organizada, seguida del decaimiento exponencial debido al tamaño finito del sistema, tal y como habíamos observado para el modelo de Ehrenfest, ($\alpha = 1$). Por otro lado, en la figura 3.3b podemos observar una distribución de retornos similar a la que teníamos en el caso de Ehrenfest, para $N = 100$. Es de esperar que para tamaños de sistema, N , más grandes la distribución de retornos tienda a una q -Gaussiana, (ver figura (3.8a)).

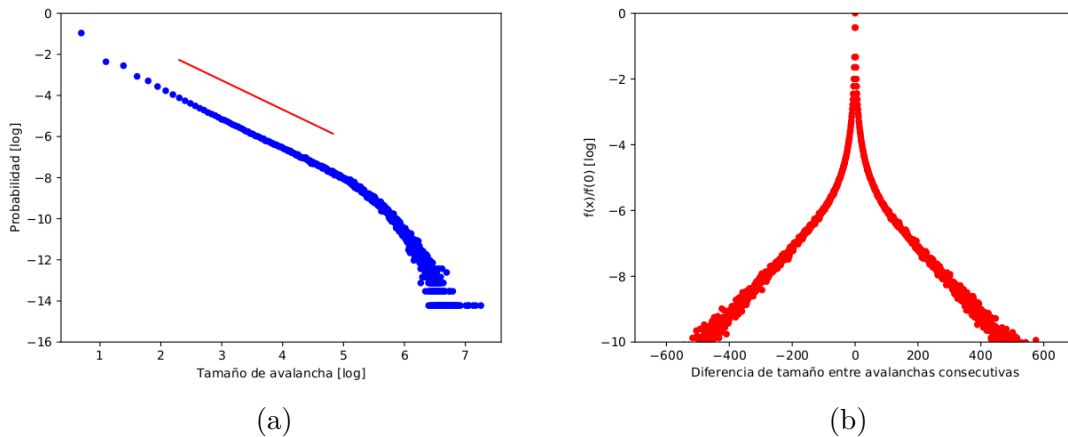


Figura 3.3: (a): Distribución de tamaños de avalanchas en escala logarítmica para $N = 100$, con $\alpha = 0,5$, y ajuste lineal correspondiente con pendiente $\tau = 1,4$. Las distribuciones están normalizadas por la cantidad total de veces que el sistema regresó al equilibrio: 10^7 . (b): Distribuciones de retornos, i.e. diferencia de tamaño entre avalanchas consecutivas, para $N = 100$, con $\alpha = 0,5$, normalizadas al valor máximo.

Resulta interesante notar el hecho de que por mas que las probabilidades de ocurrencia de los modelos de Ehrenfest y del Votante fueron las mismas para esta simulación, los efectos sobre la dinámica temporal de las iteraciones para las cuales se ejecutó el modelo de Ehrenfest son predominantes. Persiste la tendencia del sistema de auto-organizarse para volver al estado en el cual cada urna contiene $N/2$ elementos.

Si se piensa en un grupo social este simple modelo estaría indicando que, por más que los individuos tengan iguales chances de cambiar de opinión, ya sea por la interacción con votantes que poseen la otra postura, o por convicción propia; el consenso resulta básicamente imposible. En general, el caminante no llega a los bordes de la red como se puede ver en la figura (2.3) para el caso $\alpha = 0,5$; y el grupo tiende a permanecer polarizado.

Para el modelo de Ehrenfest la pendiente del ajuste presentado en Fig. (3.1) tiene el valor $\tau = 1,5$. La primer pregunta que surge es si esta pendiente depende del valor de α . La recta ajustada en la figura (3.3a) tiene una pendiente ligeramente menor $\tau = 1,4$. Con la intención de encontrar alguna relación que describiese la dependencia entre la pendiente de estas rectas en función del α , comenzamos a investigar si es que los distintos valores de α llevarían a leyes de potencia con valores distintos de

pendiente. Esta iniciativa nos llevó a resultados completamente sorprendentes y un poco alejados de lo que esperábamos encontrar.

En primera instancia pensaríamos que, al acercarse el parámetro α al valor 1, la distribución de probabilidades de las avalanchas comenzaría a parecerse cada vez mas a las de la figura (3.1) con la pendiente de la recta ajustada acercándose al valor 1,5. Sin embargo el estudio de valores de α mayores a 0,5 nos hizo notar una diferencia entre las distribuciones de probabilidad de las avalanchas de tamaño impar y las de tamaño par.

Veamos por ejemplo la figura 3.4, la cual corresponde al caso $\alpha = 0,8$. Para los tamaños de avalanchas mas chicos podemos distinguir claramente como la probabilidad de ocurrencia de las pares resulta mayor a la de las impares. Aún así, vemos que existe un intervalo de tamaños a partir del cual las distribuciones resultan indistinguibles y vuelve a aparecer una ley de potencias con decaimiento por tamaño finito. La pendiente de la recta ajustada es $\tau = 1,4$, como habíamos obtenido para el caso $\alpha = 0,5$.

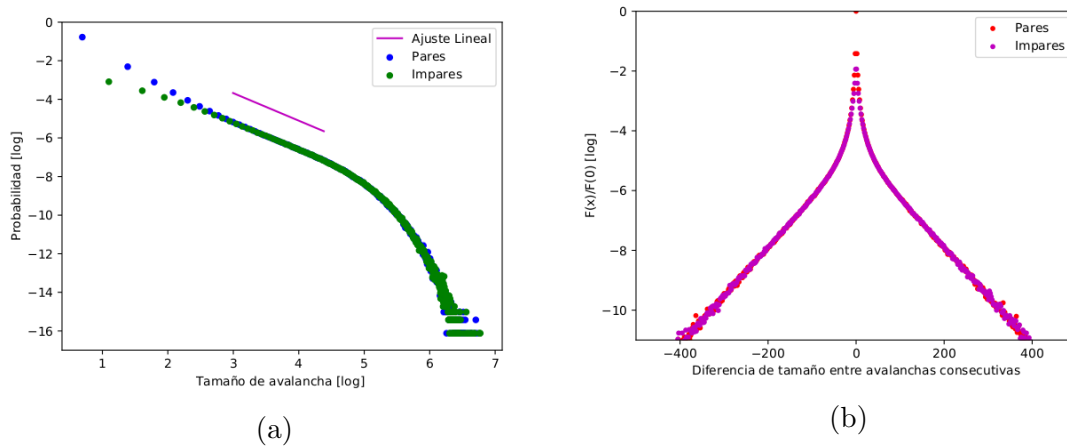


Figura 3.4: (a): Distribución de tamaños de avalanchas en escala logarítmica para $N = 100$, con $\alpha = 0,8$, y ajuste lineal correspondiente con pendiente $\tau = 1,4$. Las distribuciones están normalizadas por la cantidad total de veces que el sistema regresó al equilibrio: 10^7 . (b): Distribuciones de retornos, i.e., diferencia de tamaño entre avalanchas consecutivas, para $N = 100$, con $\alpha = 0,8$, normalizadas al valor máximo.

Notemos ahora que el intervalo que se había ignorado para ajustar la recta en el gráfico de la figura 3.3a es en el cual las distribuciones de probabilidad de las avalanchas pares e impares comenzaban a ser distinguibles.

En la figura 3.4b vemos una discriminación entre diferencias pares e impares de tamaño de avalanchas consecutivas. Tengamos en cuenta que las diferencias pares pueden surgir de restar dos avalanchas pares o dos avalanchas impares, mientras que las diferencias impares surgen de restar una avalancha impar con una par. En este caso ambos tipos de diferencias siguen la misma distribución.

A medida que fuimos aumentando el valor del parámetro α las diferencias se volvieron cada vez mas notorias a lo largo de todo el rango de tamaño de avalanchas. La ley de potencias comenzó a desdoblarse hasta el punto de llegar a observarse dos leyes de potencia con pendientes distintas para las avalanchas pares e impares.

Esto puede visualizarse en las figuras 3.5a, (correspondiente a $\alpha = 0,95$); 3.6a, (correspondiente a $\alpha = 0,999$); y 3.7a, (correspondiente a $\alpha = 0,99999$).

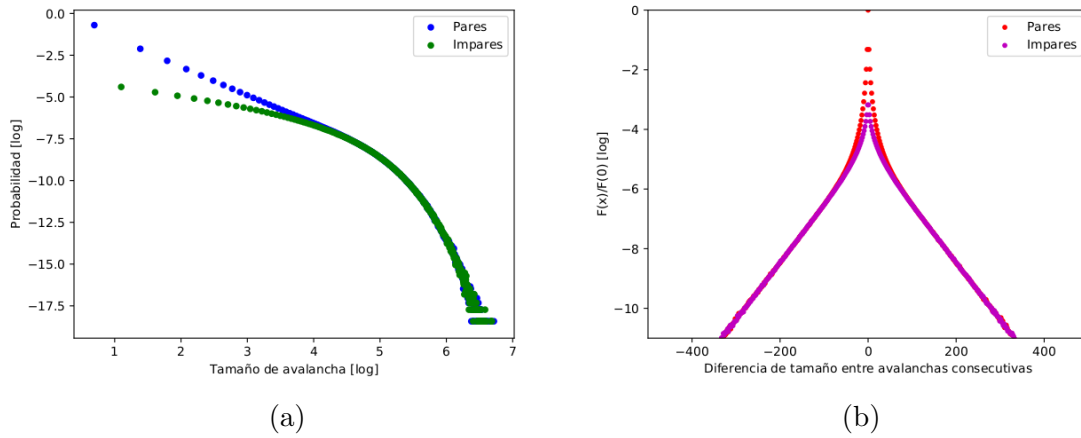


Figura 3.5: (a): Distribuciones de tamaños de avalanchas pares e impares en escala logarítmica para $N = 100$, con $\alpha = 0,95$. Las distribuciones están normalizadas por la cantidad total de veces que el sistema regresó al equilibrio: 10^7 . (b): Distribuciones de retornos, i.e., diferencia de tamaño entre avalanchas consecutivas pares e impares, para $N=100$, con $\alpha = 0,95$ normalizadas al valor máximo de la distribución par.

Para $\alpha = 0,95$ podemos ver claramente el desdoblamiento y desaparición de la ley de potencias que compartían las avalanchas sin distinción de paridad, aunque todavía se superponen en el decaimiento por tamaño finito. Además, en la figura 3.5b podemos comenzar a distinguir una separación entre las distribuciones de diferencias pares e impares.

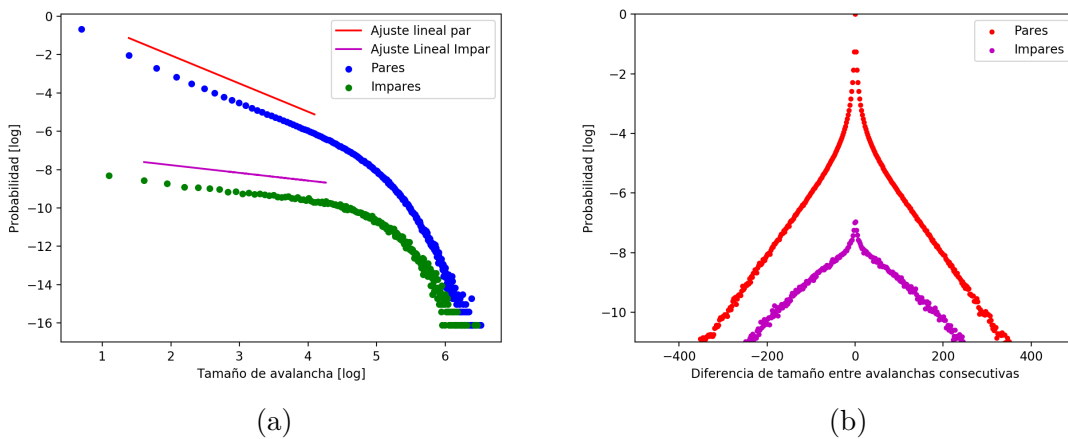


Figura 3.6: (a): Distribuciones de tamaños de avalanchas pares e impares en escala logarítmica para $N = 100$, con $\alpha = 0,999$. Las rectas ajustadas sobre cada distribución tienen pendientes $\tau_{par} = 1,5$, $\tau_{impar} = 0,4$ para los casos par e impar respectivamente. Las distribuciones están normalizadas por la cantidad total de veces que el sistema regresó al equilibrio: 10^7 . (b): Distribuciones de retornos, i.e., diferencia de tamaño entre avalanchas consecutivas pares e impares, para $N=100$, con $\alpha = 0,999$, normalizadas al valor máximo de la distribución par.

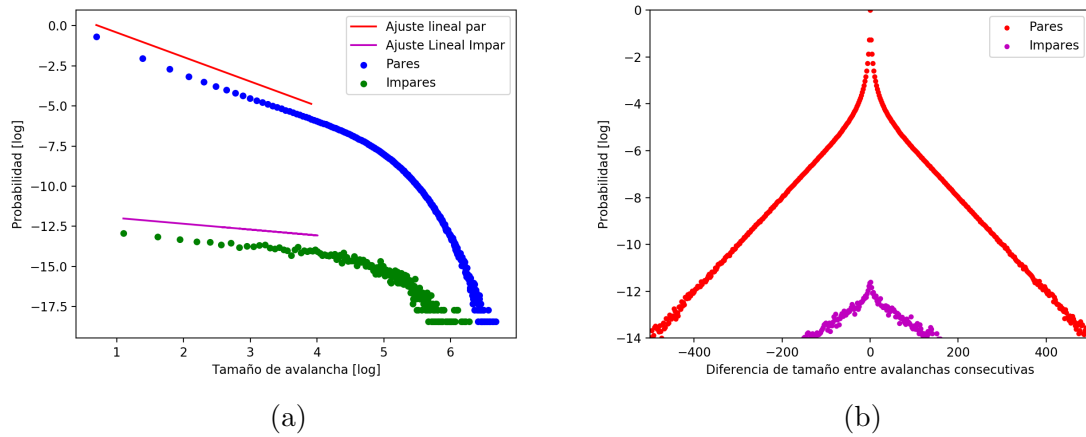


Figura 3.7: (a): Distribuciones de tamaños de avalanchas pares e impares en escala logarítmica para $N = 100$, con $\alpha = 0,99999$, normalizadas por la cantidad total de veces que el sistema regresó al equilibrio: 10^7 . Las rectas ajustadas sobre cada distribución tienen pendientes $\tau_{par} = 1,5$, $\tau_{impar} = 0,4$ para los casos par e impar respectivamente. (b): Distribuciones de retornos, i.e., diferencia de tamaño entre avalanchas consecutivas pares e impares, para $N = 100$, con $\alpha = 0,99999$, normalizadas al valor máximo de la distribución par.

A la distribución par para $\alpha = 0,999$ se le ajustó una recta cuya pendiente resultó ser $\tau_{par} = 1,5$ y procediendo de igual manera para el caso la impar, se obtuvo $\tau_{impar} = 0,4$. Notemos que para $\alpha = 0,99999$ las pendientes siguen siendo las mismas. La probabilidad de las avalanchas impares disminuyó pero manteniendo la misma pendiente de la ley de potencias que tenía en el caso de $\alpha = 0,999$. Para este caso distinguimos claramente en la figura 3.6b dos distribuciones. Como tenemos dos leyes de potencia con distinta pendiente para las avalanchas de tamaño par e impar, esperaríamos encontrar correspondientemente dos q -Gaussianas en las distribuciones de retorno. Recordemos que, como mencionamos anteriormente, las diferencias pares pueden provenir de dos avalanchas impares o dos pares. Es decir, la distribución que vemos en rojo debería estar formada por una combinación de dos q -Gaussianas, una correspondiente a la ley de potencia de avalanchas pares y otra a la de impares. Con respecto a la distribución que vemos para las diferencias impares, solo podemos decir que está formada por la combinación de avalanchas pares con impares, es decir una mezcla de las dos leyes de potencia. Es así que no podemos afirmar que se trate de una q -Gaussiana con el mismo criterio que usamos para el caso de las diferencias pares.

Si bien los resultados para valores de α mayores a 0,5 fueron un poco inesperados, un simple análisis permite entender la aparición de dos distribuciones distintas para las avalanchas pares e impares. Pensemos que el sistema está en el estado de equilibrio, es decir, ambas urnas contienen $N/2$. Habíamos definido a las avalanchas como la cantidad de iteraciones que le lleva al sistema salir del equilibrio y volver al mismo. Como en el caso del modelo de Ehrenfest los únicos cambios posibles, luego de una iteración, son que la cantidad de elementos en una urna aumente o disminuya en uno, los tamaños de avalanchas solo pueden ser pares. En términos de caminatas aleatorias, se necesitan un número par de pasos para volver al sitio de donde se comenzó porque la probabilidad de permanencia en un dado sitio es cero.

Pero cuando mezclamos los modelos y le damos una cierta probabilidad de ocurrencia al modelo del votante, se introduce la posibilidad de que el sistema permanezca en el mismo estado luego de una iteración. Esto permite que tengamos avalanchas de tamaño impar. Ahora, si la probabilidad de ocurrencia del modelo del Votante es menor a la de Ehrenfest, $\alpha > 0,5$, las permanencias en un mismo estado serán bastante menos probables y por lo tanto las avalanchas de tamaño impar también lo serán en comparación a las de tamaño par. La diferencia en las distribuciones comienza a notarse primero en los tamaños de avalanchas mas chicas ya que el sistema sale y regresa al equilibrio en una menor cantidad de iteraciones y, por lo tanto, hay menos chances de que ocurra una iteración del modelo del Votante que permita una permanencia. Lo que no resulta trivial es que ambas distribuciones sigan una ley de potencia y con pendientes distintas.

Habiendo descubierto esta separación en leyes de potencias pares e impares decidimos volver a analizar nuestro primer caso de interés, con la intención de averiguar si éste comportamiento se mantendría para un mayor tamaño del sistema. En la figura 3.8a podemos comparar las distribuciones de tamaño de avalanchas para $N = 100$ y $N = 10^4$. Podemos notar que las probabilidades para ambos tamaños del sistema coinciden en aquel pequeño intervalo, en el cual veíamos que la ley de potencia comenzaba a mostrar una tendencia a separarse. Como era de esperarse también, la ley de potencias para $N = 10^4$ no presenta decaimiento por efectos de tamaño finito. Por otro lado podemos notar una ligera diferencia en las pendientes de ambas leyes de potencias. Para $N = 100$ recordemos que habíamos obtenido una pendiente de $\tau = 1,4$, mientras que para $N = 10^4$ obtuvimos $\tau = 1,5$, valor que coincide con la pendiente de la ley de potencia de Ehrenfest. En la figura 3.8b podemos ver que la distribución de retornos se acerca mas a una q -Gaussiana en el caso $N = 10^4$, como era de esperarse ya que la ley de potencias abarca un mayor rango de tamaños de avalanchas.

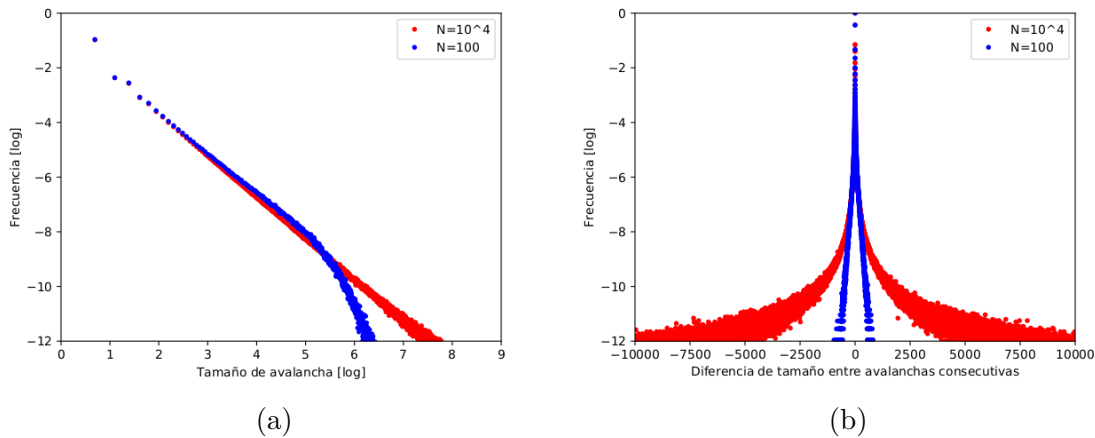


Figura 3.8: (a): Distribuciones de tamaños de avalanchas en escala logarítmica para $N = 100$ y $N = 10^4$, con $\alpha = 0,5$, normalizadas por la cantidad total de veces que el sistema regresó al equilibrio: 10^7 . Las pendientes de las leyes de potencia son $\tau_{100} = 1,4$ y $\tau_{10^4} = 1,5$. (b): Distribuciones de retornos, i.e., diferencia de tamaño entre avalanchas consecutivas para $N = 100$ y $N = 10^4$ con $\alpha = 0,5$, normalizadas a sus respectivos valores máximos.

Seguidamente regresamos al caso de $\alpha = 0,999$ para analizar también el compor-

tamiento del sistema para un mayor tamaño. En la figura 3.9a podemos comparar la distribución de avalanchas que habíamos obtenido para el caso $N = 100$ con la de $N = 1000$. Como es de esperar, lo primero que notamos es que el decaimiento por efectos de tamaño finito se da para tamaños de avalanchas mayores en el caso $N = 1000$. Lo interesante es que si bien seguimos apreciando en el caso $N = 1000$ una notable diferencia entre las distribuciones de avalanchas pares e impares, asintóticamente las distribuciones parecen juntarse. Otra cuestión a remarcar es que para el caso $N = 1000$, como podemos ver en la figura 3.9b, la distribución de diferencias impares se parece mas a una q -Gaussiana que la del caso $N = 100$.

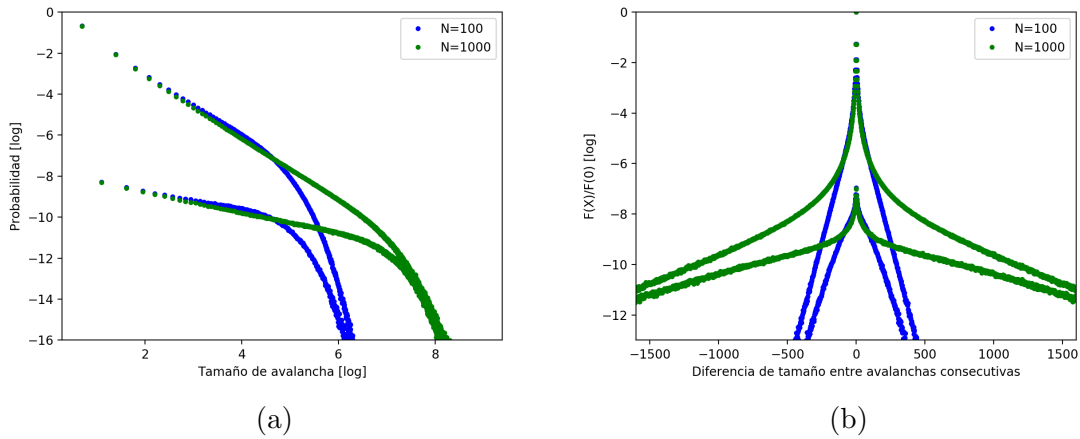


Figura 3.9: (a): Distribuciones de tamaños de avalanchas en escala logarítmica para $N=100$ y $N=1000$ con $\alpha = 0,999$ normalizadas por la cantidad total de veces que el sistema regresó al equilibrio: 10^8 . (b): Distribuciones de retornos, i.e., diferencia de tamaño entre avalanchas consecutivas para $N = 100$ y $N = 1000$ con $\alpha = 0,999$, normalizadas a sus respectivos valores máximos.

Lo siguiente a analizar fueron los casos con $\alpha < 0,5$. A medida que fuimos achicando el parámetro las leyes de potencia se siguieron manteniendo y la diferencia entre las distribuciones de probabilidades de avalanchas pares e impares, que ya en el caso $\alpha = 0,5$ se manifestaban para las avalanchas de menor tamaño, se fueron volviendo cada vez menores hasta desaparecer.

Analicemos ahora la distribución de probabilidad en el punto crítico $\alpha = 1/N$ y sus inmediaciones. En la figura 3.10a podemos ver la distribución de avalanchas con $\alpha = 0,01$ (Punto crítico para $N=100$). Notemos que, por mas que el sistema tenga un tamaño finito, se observa esta amplia ley de potencias junto a una distribución de retornos claramente q -Gaussiana. Ésta presenta además un cambio de concavidad, el cual no observamos para las simulaciones correspondientes a $\alpha > 0,01$. Además, podemos ver que la diferencia entre las distribuciones de probabilidad de avalanchas pares e impares ya no existe. El decaimiento por efectos de tamaño finito no parece observarse hasta pasada la región de cambio de concavidad. Por último, la pendiente de la ley de potencia sigue siendo $\tau = 1,5$.

A partir de la figura 3.11a podemos comparar las distribuciones correspondientes a $\alpha = 0,02$, $\alpha = 0,01$ (punto crítico) y $\alpha = 0,005$. Al estar en las cercanías del punto crítico, los casos $\alpha = 0,02$ y $\alpha = 0,005$ presentan también claras leyes de potencias por mas de que el tamaño del sistema sea simplemente $N=100$. Por otro lado, para

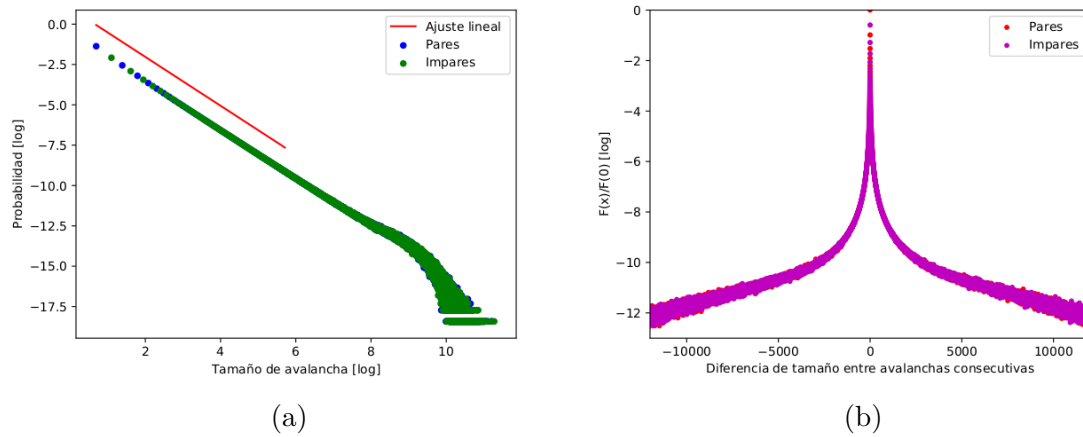


Figura 3.10: (a): Distribución de tamaños de avalanchas en escala logarítmica para $N=100$, con $\alpha = 0,01$, normalizadas por la cantidad máxima de veces que el sistema regresó al equilibrio: 10^8 . La recta ajustada sobre la distribución tiene pendiente $\tau = 1,5$. (b): Distribuciones de retornos, i.e. diferencia de tamaño entre avalanchas consecutivas para $N=100$, con $\alpha = 0,01$, normalizadas al valor máximo

el caso $\alpha = 0,02$, que es mayor al punto crítico, no vemos el cambio de concavidad en la distribución que si se observa para $\alpha = 0,005$, que es menor al punto crítico.

En 3.11b podemos observar que las q -Gaussianas resultan en decaimientos bien diferentes según si α es mayor, menor o igual al punto crítico. Recordemos que la distribución de retornos nos daba una noción de la probabilidad de ocurrencia de avalanchas de ciertos tamaños consecutivamente. Claramente, para los tres casos, las avalanchas de pequeños tamaños siguen siendo muy probables y por lo tanto también lo es la ocurrencia de dos avalanchas seguidas del mismo tamaño. Así, vemos una mayor probabilidad de obtener diferencias de tamaño cero. Pero notemos que ni bien nos alejamos del valor máximo, la distribución correspondiente a $\alpha = 0,005$ se vuelve mas angosta que las otras, es decir decae más rápidamente. Esto es debido a que, como vimos en la sección 2.4, el $N/2$ ya no es un punto de equilibrio, sino que ahora lo son el 0 y el N . Partiendo entonces del $N/2$, llega un momento en que el sistema prefiere permanecer mas tiempo cerca de uno de los bordes y por lo tanto el retorno al $N/2$ demora una gran cantidad de iteraciones. Entonces, las avalanchas de tamaño intermedio resultan menos probables que en los casos mayores o igual al punto crítico, y menos aún la ocurrencia de dos de manera consecutiva. Sin embargo, aproximadamente a partir de la diferencias de tamaño 5000 la distribución comienza a decrecer de manera mucho mas gradual y podemos ver que, para los tamaños mayores, supera en probabilidad a la del $\alpha = 0,02$ y, si bien no se puede observar en el gráfico, la tendencia de decrecimiento de la distribución de $\alpha = 0,01$ parece indicar que se haría también menor. Esto último es debido a que la probabilidad de permanencia en lo bordes y por lo tanto de ocurrencia consecutiva de avalanchas de gran tamaño, es mayor pasado el punto crítico.

En la figura 3.12a podemos distinguir claramente los diferentes comportamientos que tiene el sistema en los casos subcríticos (en la figura se observa $\alpha = 0,5$), crítico ($\alpha = 0,01$) y supercríticos ($\alpha = 0,001$ en la figura). Notemos que el decaimiento por efectos de tamaño finito se da, en el caso subcrítico, de manera mas abrupta (impidiendo la generación de avalanchas de mayor tamaño) que en el crítico y subcrítico.

En el caso supercrítico podemos observar que la región de cambio de concavidad de la distribución de avalanchas es mayor a la del caso crítico, permitiéndose así la formación de avalanchas mayores a las que se pueden formar en el caso crítico. Esto, como ya dijimos, resulta esperable ya que, como vimos en la sección 2.4, para $\alpha < 1/N$ el sistema tiende a permanecer mas sobre uno de los bordes, al ser estos los nuevos puntos de equilibrio, y por lo tanto el regreso a la posición $N/2$ involucrará una mayor cantidad de iteraciones, ie. se podrán producir avalanchas mayores.

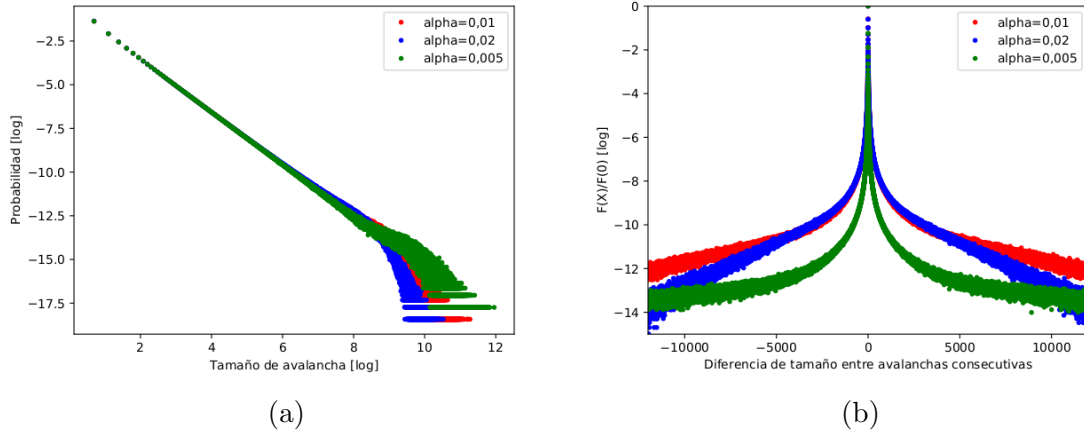


Figura 3.11: (a): Distribuciones de tamaños de avalanchas en escala logarítmica para $N=100$, con $\alpha = 0,01, \alpha = 0,005$ y $\alpha = 0,02$, normalizadas por la cantidad máxima de veces que el sistema regresó al equilibrio: 10^8 . (b): Distribuciones de retornos, i.e. diferencia de tamaño entre avalanchas consecutivas pares e impares, para $N=100$ con $\alpha = 0,01, \alpha = 0,005$ y $\alpha = 0,02$, normalizadas a sus respectivos valores máximos

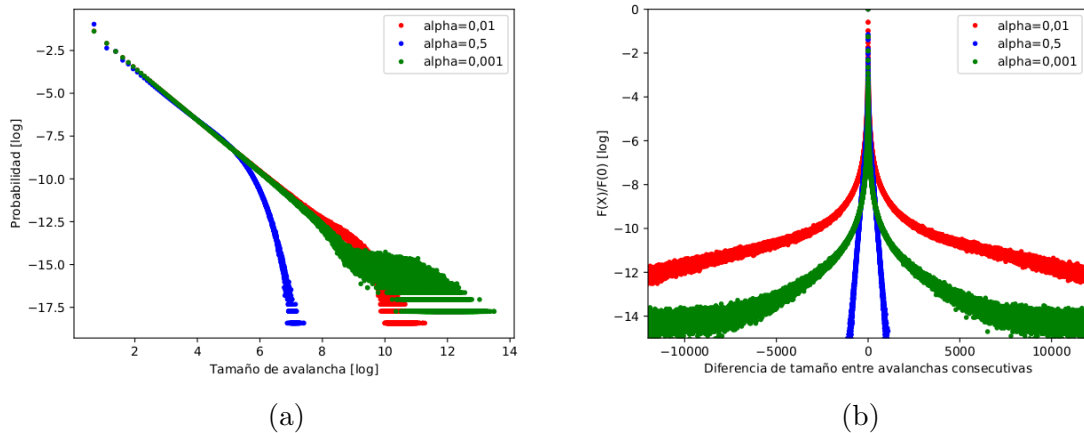


Figura 3.12: (a): Distribuciones de tamaños de avalanchas en escala logarítmica para $N=100$, con $\alpha = 0,01, \alpha = 0,001$ y $\alpha = 0,5$, normalizadas por la cantidad máxima de veces que el sistema regresó al equilibrio: 10^8 . (b): Distribuciones de retornos, i.e. diferencia de tamaño entre avalanchas consecutivas para $N=100$, con $\alpha = 0,01, \alpha = 0,001$ y $\alpha = 0,5$, normalizadas a sus respectivos valores máximos

Capítulo 4

Conclusiones

Estudiamos la dinámica temporal de nuestro modelo de urnas, el cual consiste en una combinación del modelo de Ehrenfest y el del Votante. Simulando el proceso estocástico subyacente, pudimos inferir una serie de propiedades de la dinámica del mismo, que, como era de esperar para un sistema complejo y fuera del equilibrio, resultaron difíciles de predecir. Si bien los modelos de Ehrenfest y del votante han sido ampliamente estudiados y comprendidos a lo largo de estas últimas décadas, la combinación de sus simples mecanismos (o reglas) nos permitió descubrir la emergencia de comportamientos globales interesantes, algunos de los cuales pudimos analizar con mayor detalle utilizando herramientas desarrolladas por otros autores a través del formalismo de las caminatas aleatorias.

Con herramientas teóricas, determinamos el punto crítico en $\alpha = 1/N$. Para este valor crítico la distribución de probabilidad estacionaria es uniforme, es decir, todos los estados de las urnas son igualmente probables. Para valores menores de α , la configuración con igual cantidad de elementos en cada urna deja de ser la más probable y las configuraciones más probables pasan a ser aquellas para las cuales una urna está llena y la otra vacía. En este caso el tiempo de retorno al $N/2$ se vuelve cada vez mayor y el enfoque computacional no es el mejor a utilizar. De todas maneras, al dejar de ser $N/2$ el estado más probable y permanecer el sistema en cercanías de los estados cero o N , se podría hacer un análisis similar al realizado en este trabajo pero ahora considerando los tiempos de retornos al cero o al N .

Por otra parte, mediante la técnica de Van Kampen de expansión de tamaño del sistema determinamos que, si el sistema parte desde una posición arbitraria distinta a $N/2$, se llega al punto de equilibrio $N/2$ mediante un decaimiento exponencial que depende del valor de α . A su vez, a través de la ecuación de Fokker-Planck asociada a nuestro modelo, pudimos inferir que las fluctuaciones en estado estacionario, para $N \rightarrow \infty$, son proporcionales a $1 + 1/\alpha$. Notemos que para cuando α tiende al valor crítico las fluctuaciones se vuelven del tamaño del sistema, N .

A través del análisis de las distribuciones de probabilidad del tiempo de retorno, (distribución de tamaños de avalanchas), y de las diferencias entre fluctuaciones consecutivas, (distribución de retornos), podríamos inferir la presencia de SOC en la dinámica temporal del sistema descrito por el proceso estocástico de nuestro modelo. Si bien observamos las leyes de potencias que indican la invariancia de escala temporal, característica de este tipo de comportamiento, todavía queda por analizar en detalle la distribución de retornos para N grandes, la cual esperamos que tienda a una distribución q -Gaussiana. Para hacer un buen estudio de estas

distribuciones necesitamos tamaños de sistemas considerablemente grandes, $N \sim 10^6$ y una gran cantidad de retornos. Hacer este estudio para diferentes valores de α implica, computacionalmente, tiempos largos.

Otro resultado interesante que también requiere más análisis en futuros trabajos, fue la diferenciación entre las distribuciones de avalanchas pares e impares, la cual se vuelve mas notoria a medida que $\alpha \rightarrow 1$. Es interesante cómo la que parece ser una única ley de potencia para valores pequeños de α , se va separando hasta el punto de observarse dos leyes de potencias con pendientes distintas. A medida que mas se diferencian, la pendiente de las avalanchas pares se acerca al valor frecuentemente obtenido en los procesos que presentan SOC: $\tau = 1, 5$. Por otro lado, para el punto crítico y los valores cercanos al mismo, el valor de la pendiente de la única ley de potencias, (sin distinción entre avalanchas pares e impares), también tiene una pendiente de $\tau = 1, 5$.

Pudimos corroborar que para tamaños del sistema mayores a $N = 100$ la separación en dos distribuciones distintas para las avalanchas pares e impares persiste. Creemos entonces que esto no se trataría de un efecto de tamaño finito. Lo que intuimos es que, a medida que $N \rightarrow \infty$, las leyes de potencia se juntarán asintóticamente, lógicamente en tamaños de avalanchas cada vez mayores. Como trabajo futuro buscaremos corroborar esto numéricamente estudiando el sistema con al menos $N = 10^6$, lo cual requiere de un mayor tiempo simulacional que aquel con el que se contaba en esta instancia. Por otro lado, esperamos próximamente estudiar nuevamente el sistema para valores de $\alpha \rightarrow 1$, diferenciando la procedencia de las diferencias de tamaño pares, y poder corroborar si en efecto las q -Gaussianas pares observadas están formadas por la suma de las dos q -Gaussianas correspondientes a cada ley de potencias. Con el fin de obtener de manera bien definida la q -Gaussiana correspondiente a la diferencia par proveniente de restar dos avalanchas impares, será necesario contar con una mayor cantidad de estadística y por lo tanto mayores tiempos simulacionales.

Uno de los puntos mas interesantes a remarcar es que si bien al comenzar este trabajo sabíamos que el modelo de Ehrenfest presentaba Self-Organized Criticality, no podríamos haber presupuesto que al combinarlo con el modelo del votante seguiríamos observando este comportamiento, aún cuando las probabilidades de ocurrencia del modelo de Ehrenfest fuesen bajas como hemos descubierto.

Aunque el modelo presentado aquí es interesante en sí mismo desde el punto de vista de caminatas aleatorias, también puede tener aplicaciones en sociofísica. En particular, puede representar los cambios de opinión en una sociedad numerosa, (o no), con dos posturas de opinión. Las reglas de nuestro modelo indicarían que los cambios de opinión se pueden dar por interacción o sin interacción, por ejemplo, por pensamiento independiente. Este cambio sin interacción es muy particular, porque representaría un cambio en la dirección opuesta a lo que piensa la mayoría. Para este caso particular, mientras la probabilidad de cambio de opinión sin interacción sea mayor a $1/N$, (valor que puede ser muy pequeño si la sociedad es numerosa), no sólo se romperían los consensos, sino que desencadenaría un mecanismo a través del cual, siempre la población tendería a un estado polarizado.

Bibliografía

- [1] Nino Boccara, Modeling Complex Systems (2004).
- [2] Per Bak, How Nature Works: The science of self-Organization (1996).
- [3] Bak, Tang, and Wiesenfeld, Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise, Physical Review Lett. 59, 381
- [4] Henrik Jeldtoft Jensen, Self-Organized Criticality Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems(1998)
- [5] Redner Sidney, A Guide to First-Passage Processes, Cambridge University Press (2001)
- [6] C.B. Yang, The origin of power-law distributions in self-organized criticality, Journal of Physics A: Mathematical and General 37 L523 (2004)
- [7] Cao Xiao-Feng, Deng Zong-Wei, and Yang Chun-Bin†, On Origin of Power-Law Distributions in Self-Organized Criticality from Random Walk Treatment, Communications in Theoretical Physics 49 (2008).
- [8] Burhan Bakar and Ugur Tirnakli, Analysis of self-organized criticality in Ehrenfest's dog-flea model, Physical Review E. 79 (2009).
- [9] Von Paul u. Tatiana Ehrenfest, Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche H-Theorem, Physikalische Zeitschrift. 8. Jahrgang. No. 9. 311-314,
- [10] William Pickering and Chjan Lim, Solution to urn models of pairwise interaction with application to social, physical, and biological sciences, Physical Review E. 96, 012311 (2017)
- [11] Holger Dette, On a Generalization of the Ehrenfest Urn Model, Journal of Applied Probability, **31**(4), 930-939 (1994).
- [12] N.G. Van Kampen, Stochastic Processes in Physics and Chemistry-Elsevier (2007)