

Facultad de Matemática Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba

Trabajo Especial de la Licenciatura en Física

Bases De Operadores Tensoriales Esféricos Irreducibles

Autor: Benjamín R. Marcolongo

Director: Guido A. Raggio

Co-director: Leandro R. Cagliero



Septiembre 2017



Bases De Operadores Tensoriales Esféricos Irreducibles por Benjamín R. Marcolongo se distribuye bajo una [Atribución – No Comercial – Sin Obra Derivada 4.0 Internacional](#)

Abstract

Se estudia la construcción de una base de operadores tensoriales esféricos irreducibles para un espacio de Hilbert de dimensión finita asociado a un sistema cuántico de n espines. Para lograr este objetivo se usaran herramientas de la teoría de representaciones del grupo de rotaciones y del grupo simétrico.

In this thesis we construct a base of irreducible spherical tensor operators for a finite dimensional Hilbert space associated to a quantum system of n spins. To achieve this objective we use tools of representation theory of the rotation and the symmetric group.

Palabras claves

Mecánica cuántica, representaciones, grupos, rotaciones, permutaciones, irreducibles, esféricos, tensores, dimensión finita, multiplicidad.

Clasificación biblioteca

03.65.Aa Quantum systems with finite Hilbert space

03.65.-w Quantum mechanics

03.65.Ca Formalism

03.65.Fd Algebraic methods

02.10.Ud Linear algebra

02.10.Yn Matrix theory

02.30.Tb Operator theory

Índice general

1. Introducción	5
2. Reducción del Sistema de n Partículas con Spin s	7
2.1. Acción Lineal del Grupo SO(3) en Espacios de Hilbert Asociados a Sistemas Simples	7
2.2. Acción Lineal del Grupo SO(3) en Espacios de Hilbert Asociados a Sistemas Compuestos	9
2.3. Operadores Tensoriales Esféricos Irreducibles	10
2.4. Algoritmo de Reducción para Sistemas de spin s	12
2.5. Reducción de un Sistema de n Partículas con spin $s = 1/2$	14
2.5.1. Sistema Simple: $n = 1$.	14
2.5.2. Sistemas Compuestos $n > 1$.	15
3. Grupo Simétrico y Representación en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$	16
3.1. Grupo Simétrico	16
3.2. Particiones y Clases de Conjugación	17
3.3. Representaciones del Grupo Simétrico	17
3.4. Fórmula de Hook; Diagramas y Tablas de Young	18
3.5. Representación del Grupo Simétrico en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$	20
4. Representación de $SU(2) \times S_n$ y Multiplicidades	21
4.1. Representación de Grupos compactos $G_1 \times G_2$	21
4.2. Parametrización de las Irrep de U(2), SU(2) y S_n	22
4.3. Dualidad de Schur	22
4.3.1. Ejemplo n=3	23
4.4. Relación entre las Representaciones Irreducibles de U(2) y SU(2)	23
4.5. Dualidad de Schur con Restricción a SU(2)	24
4.6. Constantes de movimiento y aplicaciones a mecánica cuántica	25
5. Conclusiones	28
A. Álgebra Lineal	29
A.1. Autovectores, Autovalores y Polinomio Característico	29
A.2. Diagonalización	31
A.3. Traza	32
A.4. Productos Internos	32

B. Grupos	35
B.1. Grupos de Lie de matrices	35
C. Breve resumen de teoría de representaciones	37
C.1. Espacios de interés y comentarios	37
C.2. Representación e unitariedad	38
C.3. Irreducibilidad y reducción completa	40
D. Representaciones irreducibles de: $SU(2)$ y $SO(3)$	42
D.1. Álgebra de Lie de un grupo de Lie de matrices	43
D.2. Representaciones de álgebras de Lie	44
D.3. $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{so}(3)$	45
D.4. Mapa Adjunto	48
E. Tablas de OTESI $n=2,3,4$	50

Capítulo 1

Introducción

Trataremos el problema de la construcción de una base de Operadores Tensoriales Esféricos Irreducibles (OTESI) para un espacio de Hilbert de dimensión finita $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$. Éste es interpretado físicamente como el espacio de las observables (o propiedades dinámicas) de un sistema físico. Matemáticamente $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ es el espacio de operadores lineales que actúan en $\mathcal{H}_n = (\mathbb{C}^{2s+1})^{\otimes n}$, este último representa los estados puros dicho sistema (compuesto por n objetos cuánticos con spin idéntico s).

Los OTESI expanden espacios irreducibles V_l , $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, de la acción unitaria del grupo de rotaciones $SO(3)$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$. Por lo que éste se descompone como suma directa de tales espacios:

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_n) = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} N(l, n) V_l. \quad (1.1)$$

La multiplicidad $N(l, n)$ con la que aparecen también será objeto de estudio de la tesis. En particular proveeremos dos formas alternativas de calcularlas, una mediante álgebra lineal básica y otra a través de la dualidad de Schur representando $SU(2) \times S_{2n}$ en $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2n}$. También se demostrará que la suma (1.1) se realiza sobre los enteros (no hay representaciones semi-enteras), aunque esto ya fue previamente probado de modo diferente en [14].

El problema surge explícitamente en la tesis doctoral de C.J Bonin [17] que construye una base con esta propiedad para 4 spin $\frac{1}{2}$ (cuatro protones magnéticamente “activos” en la RMN de un cristal líquido molecular). Las multiplicidades para un sistema de n partículas con spin $\frac{1}{2}$ fue calculada por primera vez en un seminario [12] dictado por G.R. Raggio; que luego se elabora y generaliza a spin arbitrario en la tesis de licenciatura [14], que sirve como principal antecedente de este trabajo.

La arquitectura con la se organiza el contenido principal de la tesis es la siguiente:

1. En el capítulo 2 se explicita el marco matemático bajo el cual se desarrolla el problema, éste consiste en la teoría de representaciones de grupos y álgebras de Lie. Luego se introduce la definición de OTESI. Finalmente se construye y demuestra un algoritmo que los calcula explícitamente.
2. En el capítulo 3 se introducen las herramientas básicas de representaciones del grupo simétrico S_n . Sus representaciones irreducibles, dimensiones de las irrep, etc. Es un capítulo auxiliar para el siguiente.

3. En el capítulo 4 se aborda el problema de la descomposición (1.1) desde la dualidad de Schur y se reobtienen los resultados expuestos en el capítulo dos. Es decir, se propone otro método que sistematiza la construcción de OTESI y calcula las multiplicidades que aparecen (1.1).
4. En el capítulo 5 tratamos brevemente las aplicaciones directa a la física. Se proveen fórmulas explícitas para las multiplicidades y en particular para calcular la cantidad de operadores escalares.
5. Se incluye también un apéndice donde se resume brevemente los conceptos y fundamentos matemáticos del trabajo. Principalmente se trata y comenta la teoría de representaciones de $SU(2)$ y $SO(3)$, este contenido es estandar y se lo puede encontrar en cualquier libro introductorio a la teoría de representaciones de grupos de Lie. Finalmente se presenta una tabla con los OTESI calculados para $n = 2, 3, 4$.

Capítulo 2

Reducción del Sistema de n Partículas con Spin s

2.1. Acción Lineal del Grupo SO(3) en Espacios de Hilbert Asociados a Sistemas Simples

El espacio de Hilbert \mathcal{H} asociado a un sistema de una partícula con spin s que se mueve en \mathbb{R}^3 es el producto tensorial entre $L^2(\mathbb{R}^3)$, que describe la parte espacial del sistema, y un espacio vectorial de dimensión finita $V_s = \mathbb{C}^{2s+1}$, que representa la parte spin. Es decir:

$$\mathcal{H} = \overbrace{L^2(\mathbb{R}^3)}^{\text{Espacial}} \otimes \overbrace{V_s}^{\text{Spin}},$$

donde V_s lleva una acción lineal irreducible del grupo de rotaciones SO(3)^[1].

En términos matemáticos el spin s de la partícula es el autovalor de peso máximo de la tercera componente del momento angular. Éste tiene como conjunto de autovalores la lista $s, s-1, \dots, -s$, donde s puede tomar valores positivos enteros o semi-enteros. En la literatura en física, por lo tanto, s es el número que parametriza la representación irreducible del grupo de rotaciones asociada al sistema^[2]. La parametrización de las representaciones irreducibles de SO(3) difiere de la usual que aparece en la literatura matemática, en particular en la demostración del Teorema D.3.2, porque se la construye a partir de una base ligeramente distinta, es clave tener en cuenta que ambas construcciones terminan siendo equivalentes. Las representaciones irreducibles semi-enteras se corresponden con las impares y las enteras con las pares, además se denomina fermiones a las partículas con spin semi-entero y bosones a las que poseen spin entero.

Concretamente si $\sigma_s : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{gl}(V_s)$ es la representación irreducible inducida por $\Sigma_s : \text{SO}(3) \rightarrow \text{GL}(V_s)$, entonces $\Sigma_s(e^X) = e^{\sigma_s(X)}$, para toda $X \in \mathfrak{so}(3)$. Si escribimos X como combinación lineal de la base usual de $\mathfrak{so}(3)$, luego $X = x^j F_j$ y^[3]

¹Estrictamente la representación irreducible queda definida sólo cuando s es entero, para el caso semi-entero se define una representación irreducible proyectiva.

²Así como también las irreducibles de $\mathfrak{su}(2)$, SU(2) y $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$

³Adoptamos notación de Einstein, suma sobre índices repetidos.

$$\begin{aligned}\Sigma_s \left(e^{x^j F_j} \right) &= e^{\sigma_s(x^j F_j)} \\ &= e^{x^j \sigma_s(F_j)}.\end{aligned}$$

El trío de operadores $L_j = i\sigma_s(F_j)$ con $j = 1, 2, 3$ satisface $[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k$, por lo que define el momento angular del sistema, $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3)$. Finalmente, multiplicando y dividiendo por i y expresando las coordenadas x^j de X en coordenadas esféricas⁴ tenemos que la representación toma la forma:

$$\Sigma_s(g) = e^{-i\alpha\hat{e}_{\theta,\varphi}\cdot\vec{L}} \quad (2.1)$$

para toda $g \in \text{SO}(3)$. Esta última expresión es la versión física de la representación irreducible en cuestión, el interés de multiplicar por i surge de la necesidad de interpretar las variables dinámicas del sistema a partir de operadores autoadjuntos en el espacio de Hilbert. Además, la expresión para Σ_s , posee información explícita sobre qué rotación estamos implementando; pues es la que se obtiene de rotar una cantidad α alrededor del eje dado por los ángulos azimutales y polares θ y φ , respectivamente. También es fácil verificar que actúa unitariamente en \mathcal{H} ; $\langle \Sigma_s(g)\psi, \Sigma_s(g)\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle$, para toda $g \in \text{SO}(3)$ y $\psi \in \mathcal{H}$.

Es posible promover esta representación al espacio de las propiedades dinámicas del sistema $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, que consiste en todos los operadores lineales que actúan en \mathcal{H} y constituye un espacio de Hilbert con el producto interno de Hilbert-Schmidt (Ver A.4). Para esto usamos la representación adjunta compuesta con la representación irreducible recién mencionada; $\Phi = \text{Ad} \circ \Sigma_s : \text{SO}(3) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $g \mapsto \Phi(g) = \text{Ad}_{\Sigma_s(g)}$, donde

$$\begin{aligned}\text{Ad}_{\Sigma_s(g)} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ A &\mapsto \Sigma_s(g^{-1})A\Sigma_s(g).\end{aligned}$$

Nuevamente, por Teorema D.2.1, $(\Phi, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ induce una representación $(\phi, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ del álgebra de Lie del grupo. Se sigue que $\phi = \text{ad} \circ \sigma_s : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $X \mapsto \text{ad}_{\sigma_s(X)}$, donde

$$\begin{aligned}\text{ad}_{\sigma_s(X)} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ A &\mapsto [\sigma_s(X), A].\end{aligned}$$

Luego, como ϕ es, en efecto, una representación del álgebra de Lie de $\text{SO}(3)$ debe preservar las constantes de estructuras de la base elegida. Es decir que $\text{ad}_{\sigma_s(F_j)}$, $j = 1, 2, 3$ satisfacen $[i\text{ad}_{\sigma_s(F_i)}, i\text{ad}_{\sigma_s(F_j)}] = i\epsilon_{ijk}\text{ad}_{\sigma_s(F_k)}$. Con esto podemos escribir a Φ de forma idéntica a la expresión 3.1,

$$\Phi(g) = e^{-i\alpha\hat{e}_{\theta,\varphi}\cdot\vec{\mathfrak{J}}} \quad (2.2)$$

donde $\vec{\mathfrak{J}} = i(\text{ad}_{\sigma_s(F_1)}, \text{ad}_{\sigma_s(F_2)}, \text{ad}_{\sigma_s(F_3)})$. Éstos últimos, en el contexto de la resonancia magnética nuclear, se conocen como “super-operadores”. Esquemáticamente resumimos todo lo expuesto anteriormente en el siguiente diagrama:

⁴ $\vec{x} = \alpha(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) = \alpha\hat{e}_{\theta,\varphi}$, donde α es la norma del vector.

$$\begin{array}{c}
 g \longrightarrow \Sigma_s(g) \longrightarrow \Sigma_s(g^{-1}) \cdot \Sigma_s(g) \\
 \\
 \begin{array}{ccccc}
 \mathrm{SO}(3) & \xrightarrow{\Sigma_s} & \mathrm{GL}(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{GL}(\mathfrak{gl}(\mathcal{H})) \\
 \exp \uparrow & & \exp \uparrow & & \exp \uparrow \\
 \mathfrak{so}(3) & \xrightarrow{\sigma_s} & \mathfrak{gl}(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\mathrm{ad}} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(\mathcal{H}))
 \end{array} \\
 \\
 X \longrightarrow \sigma_s(X) \longrightarrow [\sigma_s(X), \cdot]
 \end{array}$$

Por último, es importante mencionar que la representación Φ es reducible⁵. En las siguientes secciones se propone un método que realiza esta reducción y calcula las multiplicidades asociadas a cada subespacio.

2.2. Acción Lineal del Grupo $\mathrm{SO}(3)$ en Espacios de Hilbert Asociados a Sistemas Compuestos

Para un sistema compuesto por n partículas, el espacio de Hilbert asociado se obtiene de tomar el producto tensorial del espacio de cada subsistema:

$$\mathcal{H}_n = (\mathcal{H})^{\otimes n}.$$

En este trabajo nos ocupamos sólo de la parte de spin, por lo que reducimos el espacio de interés⁶ a $\mathcal{H}_n = (V_s)^{\otimes n}$.

Si consideramos la representación irreducible (Σ_s, V_s) de $\mathrm{SO}(3)$ asociada con cada subsistema, entonces es natural extender la representación del grupo al sistema compuesto como el producto de representaciones (Σ, \mathcal{H}_n) , esto es $\Sigma = (\Sigma_s)^{\otimes n}$. Ésta última es reducible y por lo tanto descompone como suma directa representaciones irreducibles. La reducción se realiza con la serie de Clebsh-Gordan que, además, a partir de la base producto, provee una forma de construir una base de cada subespacio irreducible.

Igualmente, es posible usar la representación (2.2) para construir una representación Φ_n en el espacio $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n) \simeq (V_s \otimes V_s)^{\otimes n} \simeq (V_s)^{\otimes 2n}$

$$\Phi_n = \overbrace{\Phi \otimes \dots \otimes \Phi}^{\text{n-veces}}. \quad (2.3)$$

La representación del álgebra de Lie asociada $\phi_n = (\phi)^{\otimes n}$ satisface

$$\phi_n(X) = \phi(X) \otimes \dots \otimes \mathbb{I} + \dots + \mathbb{I} \otimes \dots \otimes \phi(X),$$

para toda $X \in \mathfrak{so}(3)$. Esta representación es altamente reducible, la reducción y el cálculo de las multiplicidades de las irreducibles que aparecen en la descomposición es el tema central de este trabajo.

⁵El subespacio generado por la identidad es invariante, por lo tanto contiene al menos un subespacio no trivial invariante.

⁶ $V_s = \mathbb{C}^{2s+1}$.

2.3. Operadores Tensoriales Esféricos Irreducibles

Diremos que el conjunto de $2l + 1$ operadores, con l semientero o entero no negativo, $\mathbf{T}^{[l]} = \{T_m^{[l]} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n) : m = -l, -l + 1, \dots, l\}$ definen un conjunto de **operadores tensoriales esféricos irreducibles** (OTESI's) si y solamente si satisfacen alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

1. (Wigner)

$$\Phi_n(g)(T_m^{[l]}) = \sum_{m'=-l}^l D^{[l]}(g)_{m',m}^* T_{m'}^{[l]}$$

donde $D^{[l]}(g)_{m',m}^* = \langle \psi_{m'}, \Sigma_l(g)^* \psi_m \rangle$, es el elemento de matriz m', m de $\Sigma_l(g)$ en la base que diagonaliza $i\sigma_l(F_3) = L_3$.

2. (Racah)

$$\begin{aligned} [L_3, T_m^{[l]}] &= m T_m^{[l]} \\ [L_{\pm}, T_m^{[l]}] &= \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} T_{m \pm 1}^{[l]} \end{aligned}$$

La condición de Wigner nos indica que los OTESI's rotan con una matriz ordinaria de rotación, en este hecho reside su importancia como herramienta descriptiva de sistemas físicos que involucran rotaciones. Por otro lado, la condición de Racah afirma que los OTESI expanden los subespacios irreducibles que aparecen en la descomposición de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ (ver Teorema D.3.3).

La notación de la definición de Racah⁷ corresponde con los operadores definidos por $\phi_n(L_{\pm,3})$, $L_{\pm,3} = \sigma_s(\sigma_{\pm,3})$.

Un hecho notable, para s arbitrario, de la descomposición en irreducibles

$$(V_s)^{\otimes 2n} = \bigoplus_{l \in \mathbb{N}_0} N(l, n) V_l \tag{2.4}$$

es que los valores de l son siempre enteros, es decir $j = 2l$ es siempre par y por lo tanto $\dim(V_j) = j + 1$ es siempre impar. Por lo que la “desproyectiviza”.

Teorema 2.3.1. *Los parámetros $s = \frac{l}{2}$ que aparecen en la descomposición en irreducibles como representación de $SO(3)$ en $\mathcal{B}((V_s)^{\otimes n})$, con $V_l = \mathbb{C}^{l+1}$, son enteros no negativos (por lo que l es par).*

Demostración:

Las representaciones irreducibles V_j quedan caracterizadas por el autovalor de peso máximo j de

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

⁷ $L_{3,\pm}$ en la definición de Racah es un abuso de notación. Este trío está caracterizado por la representación derivada ϕ_n actuando en la base estándar de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, constituida por las matrices $\sigma_{3,\pm}$ definidas en el apéndice D.3 pag.65

representado en V_j . H es la notación que usamos en esta prueba para el tercer elemento de la base usual de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.⁸

Nuestra estrategia será estudiar la paridad de estos autovalores en nuestro espacio de interés. Demostraremos que sólo aparecen autovalores pares; lo que es equivalente a demostrar que, en la notación de físicos, no aparecen representaciones irreducibles semi-enteras (proyectivas) en la descomposición en irreducibles.

Sea $V_j = \mathbb{C}^{j+1}$ la representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ de peso máximo j y dimensión⁹ $\dim(V_j) = j + 1$. Los autovalores de H en V_j serán $\{j, j - 2, \dots, -j\}$, luego si j es par entonces H tiene sólo autovalores pares en V_j , igualmente para el caso de j impar tendrá todos sus autovalores impares. Sean entonces $j, j - 2, \dots, -j$ los autovalores que tienen asociados los autovectores $\{e_j, e_{j-2}, \dots, e_{-j}\}$.

Ahora consideremos $V = (V_j)^{\otimes n}$; y la base de V dada por elementos de la forma $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$, $i_l = j, j - 2, \dots, -j$. Éstos últimos son claramente autovectores de la representación derivada con autovalores dados por las sumas de la forma $\lambda = \sum_{l=1}^n i_l$.

Se sigue que:

1. Si j es par; entonces los autovalores λ_m serán sumas de números pares y por lo tanto par, cualquiera sea n .
2. Si j es impar, entonces hay dos casos. Si n es par; tendremos para cualquier λ_m una suma par de números impares, y por lo tanto un resultado par. Y si n es impar; obtenemos una suma impar de números impares, de lo que resulta sólo autovalores impares.

Por lo que la paridad de los autovalores es la misma en el caso del producto tensorial también.

Nos interesa discutir qué sucederá con los autovalores de H en $\mathcal{B}((V_j)^{\otimes n})$, investiguemos por lo tanto qué sucede en $\mathcal{B}(V_j)$ primero. Fijamos una base β de V_j de autovectores de H ,

$$[H]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Luego, sabemos que H actúa en $\mathcal{B}(V_j)$ por $\phi = \text{ad} \circ \sigma_s$. Por lo tanto si $T \in \mathcal{B}(V_j)$,

$$\begin{aligned} \phi(H)(T) &= [\sigma_s(H), T] \\ &= [H]_{\beta}[T]_{\beta} - [H]_{\beta}[T]_{\beta}. \end{aligned}$$

Sea T_{ij} el operador que tiene la matriz de la forma $[T_{ij}]_{\beta}$ tal que todos sus componentes son nulos salvo el elemento en el lugar (ij) que toma el valor 1, entonces:

⁸Ver Teorema D.3.2.

⁹ $j=2s$, donde s es el spín. Trabajamos en la base de los matemáticos en la demostración de este teorema.

$$\begin{aligned} \phi(H)(T_{ij}) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & 1_{ij} & \dots \\ & \ddots & \\ & & \dots \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} \dots & 1_{ij} & \dots \\ & \ddots & \\ & & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_i - \lambda_j)[T_{ij}]_{[\beta]} \end{aligned}$$

Los autovalores que encontramos $(\lambda_i - \lambda_j)$ son siempre pares, porque son resta (o suma) de números que tienen la misma paridad. Luego la representación derivada de H en $\mathcal{B}((V_j)^{\otimes n})$ tendrá como autovalores sumas de números pares y por lo tanto serán pares; que es lo que queríamos demostrar. **Q.E.D.**

Del Teorema D.3.4, sabemos que si el parámetro que clasifica a la representación irreducible de $\mathfrak{su}(2)$ es par ¹⁰; entonces las representaciones irreducibles de $SU(2)$ están en correspondencia automática con las de $SO(3)$, vía el isomorfismo natural entre sus álgebras de Lie ($SU(2)$ es el cubrimiento universal de $SO(3)$).

Por otro lado, demostramos en el Teorema 2.3.1 que en la descomposición en irreducibles de Φ_n sólo aparecen subespacios irreducibles de dimensión par. De lo que se concluye que, en nuestro caso en particular, podemos estudiar directamente el grupo $SU(2)$. En este sentido $SU(2)$ funciona como un auxiliar matemático de la teoría. Es una herramienta que usamos para investigar las representaciones de $SO(3)$, que es el que tiene interés físico en mecánica cuántica.

2.4. Algoritmo de Reducción para Sistemas de spin s

El objetivo de esta tesis es descomponer el espacio de las propiedades dinámicas del sistema de n partículas cuánticas con spin s , $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$, en suma de subespacios irreducibles del grupo de rotaciones $SO(3)$. Sabemos que estos subespacios quedan caracterizados por los OTESI's de distinto rango que aparecerán en tal descomposición, queremos encontrar estas bases e establecer un criterio para conocer la multiplicidad de cada espacio. Es decir:

$$\mathcal{B}(\mathcal{H})^{\otimes n} = \bigoplus_{l \in \mathbb{N}_0} N(l, n) V_l \tag{2.5}$$

donde V_j es un subespacio irreducible de la representación inducida Φ_n de $SO(3)$ actuando en $\mathcal{B}(\mathcal{H})^{\otimes n}$ y $N(l, n)$ es la multiplicidad con la que cada uno de estos espacios aparecen en la descomposición.

Consideramos la definición de OTESI de Racah que afirma que los operadores $T_m^{[l]}$ satisfacen:

$$[L_3, T_m^{[l]}] = m T_m^{[l]} \tag{2.6}$$

$$[L_{\pm}, T_m^{[l]}] = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} T_{m \pm 1}^{[l]} \tag{2.7}$$

¹⁰O lo que es equivalente en física a que el spin sea entero.

En primer lugar la ecuación (3.7) indica que si conocemos un elemento maximal $T_l^{[l]}$, luego podemos obtener el resto a través de $\phi_n(L_-)$ actuando sucesivamente en $T_l^{[l]}$, por lo que el problema se reduce a encontrar tales operadores maximales. Además, se verifica que $\phi_n(L_+)(T_l^{[l]}) = 0$, por lo que los elementos maximales que buscamos deben estar contenidos en el núcleo de $\phi_n(L_+)$, $T_l^{[l]} \in \text{Nu}\{\phi_n(L_+)\}$. Notaremos al núcleo de la siguiente manera:

$$\text{Nu}\{\phi_n(L_+)\} = W_+.$$

A continuación veremos que no sólo los maximales están en W_+ , sino que también son base de este.

Teorema 2.4.1. *El conjunto de OTESI's maximales en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ son base del núcleo del operador $\phi_n(L_+) \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_n))$ definido por la representación derivada del álgebra de Lie del grupo de rotaciones,*

$$\phi_n(L_+) = [L_+, \cdot] \otimes \dots \otimes \mathbb{I} + \dots + \mathbb{I} \otimes \dots \otimes [L_+, \cdot].$$

Demostración:

Tomemos un elemento arbitrario, $T \in W_+$. Luego, como los OTESI's son base de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$, podemos escribir a T como combinación lineal de estos:

$$T = \sum_{l=0}^{l_{max}} \sum_{i=1}^{N(l,n)} \sum_{m=-l}^l a_{lm}^i T_m^{[l]}$$

donde l_{max} es el máximo entero no negativo que aparece en la descomposición y el superíndice i distingue los subespacios con mismo l (indexa la multiplicidad). Como $T \in W_+$ se cumple que:

$$\phi_n(L_+)T = 0 \tag{2.8}$$

$$\phi_n(L_+)\left(\sum_{l,i,m} a_{lm}^i T_m^{[l]}\right) = 0 \tag{2.9}$$

$$\sum_{l,i,m} a_{lm}^i \phi_n(L_+)(T_m^{[l]}) = 0 \tag{2.10}$$

$$\sum_{l,i,m} a_{lm}^i \Omega(l, m)^i T_{m+1}^{[l]} = 0 \tag{2.11}$$

con $\Omega(l, m) = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}$ dado por la definición de Racah. $\Omega(l, m) = 0$ solamente cuando $m = l$. Por lo que si $m \neq l$, y como los OTESI's son linealmente independientes, entonces los productos $a_{lm}^i \Omega(l, m)$ de (3.11) implican forzosamente que $a_{lm}^i = 0$ para todo $m \neq l$. De lo que se concluye que cualquier elemento T que pertenezca al núcleo se escribe necesariamente como combinación lineal de OTESI's maximales.

Q.E.D.

El siguiente paso es verificar que $\phi_n(L_3)|_{W_+}$ es invariante, circunstancia a partir de la cuál obtendremos una condición extra para encontrar la base de maximales.

Proposición 2.4.2. W_+ es un subespacio invariante de $\phi_n(L_3)$.

Demostración:

Sea $T \in W_+$. Luego, por Teorema 3.4.1,

$$T = \sum_{l,i} (a_l^i)^i T_l^{[l]}$$

Y $\phi_n(L_3)$ actuando en T :

$$\begin{aligned} \phi_n(L_3)T &= \phi_n(L_3) \left(\sum_{l,i} (a_l^i)^i T_l^{[l]} \right) \\ &= \sum_{l,i} (a_l^i)(l)^i T_l^{[l]} \\ &= \sum_{l,i} (\bar{a}_l^i)^i T_l^{[l]}, \end{aligned}$$

por lo que $\phi_n(L_3)T \in W_+$.

Q.E.D.

Finalmente la condición (3.6) de la definición de Racah afirma que los $T_m^{[l]}$ son autovectores a autovalor m del operador $\phi_n(L_3) \in \mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_n))$.

De esto se sigue que los OTESI's maximales $T_l^{[l]}$ serán autovectores a autovalores l , con $l = 0, 1, 2, \dots, l_{max}$,

$$\phi_n(L_3)T_l^{[l]} = lT_l^{[l]}.$$

Por lo que la estrategia se reduce a resolver el problema de autovectores para la restricción de $\phi_n(L_3)$ al núcleo de $\phi_n(L_+)$, $\phi_n(L_3)|_{W_+}$. La dimensión de cada autoespacio \mathcal{E}_l asociado a los autovalores l indicará la multiplicidad de cada subespacio irreducible.

Computacionalmente, lo mencionado en el párrafo anterior, es equivalente a resolver el sistema lineal y homogéneo de $(2s + 1)^{2n}$ ecuaciones dado por la matriz que representa a $\phi_n(L_+)$ en una base dada. Luego escribir $\phi_n(L_3)|_{W_+}$ en términos de la base encontrada para W_+ y finalmente resolver el problema de autovectores a autovalor conocido.

Es claro el algoritmo es costoso en término de operaciones, en la siguiente sección presentamos resultados para $s = 1/2$.

2.5. Reducción de un Sistema de n Partículas con spin $s = 1/2$

2.5.1. Sistema Simple: $n = 1$.

Para el caso $s = 1/2$ tenemos que el espacio de estados puros de spin de un sistema simple, $n = 1$, es:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2.$$

Y el espacio de la propiedades dinámicas:

$$\mathcal{B}(\mathbb{C}^2) \simeq \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Elegimos como base β de $\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ a los operadores $\beta = \{\mathbb{I}, L_+, L_-, L_3\}$, que satisfacen la siguientes reglas de conmutación:

$$[L_+, L_-] = 2L_3 \tag{2.12}$$

$$[L_3, L_{\pm}] = \pm L_{\pm} \tag{2.13}$$

Luego usamos directamente estas reglas de conmutación para expresar $\phi(L_+)$ en la base β :

$$[\phi(L_+)]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones para calcular W_+ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La base β' más obvia que sugiere este sistema para el núcleo W_+ es la constituida por los operadores $U_1 = \mathbb{I}$ y $U_2 = L_+$. Nos queda restringir $\phi_n(L_3)|_{W_+}$ y resolver el problema de autovectores a autovalor conocido $l=0,1,\dots,l_{max}$, proceso que realizamos hasta agotar la dimensión de W_+ .

$$[\phi(L_3)|_{W_+}]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$[\phi(L_3)|_{W_+}]_{\beta'}$ ya es diagonal en esta base, por lo que no hace falta diagonalizar. Los autovalores que aparecen en la descomposición son $l = 0$ y $l = 1$ (con multiplicidad 1):

$$\mathcal{B}(\mathbb{C}^2) = V_0 \oplus V_1$$

Las bases, no normalizadas, de V_0 y V_1 están dadas por un OTESI escalar

$$T_0^{[0]} = \mathbb{I}$$

y otros tres OTESI's vectoriales

$$\begin{aligned} T_1^{[1]} &= L_+ \\ T_0^{[1]} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[L_-, T_1^{[1]}] = \frac{-2}{\sqrt{2}}L_3 \\ T_{-1}^{[1]} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[L_-, T_0^{[1]}] = -L_- \end{aligned}$$

respectivamente.

2.5.2. Sistemas Compuestos $n > 1$.

Para estos sistemas, $n > 1$, las dimensiones de los espacios se vuelven enormes por lo que es conveniente tratarlos computacionalmente. Al final del trabajo exponen los resultados obtenidos para $n = 2, 3, 4$ con el algoritmo programado en C++ .

Capítulo 3

Grupo Simétrico y Representación en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$

En este capítulo expondremos conceptos y herramientas básicas sobre el grupo de permutaciones S_n . Seguimos textualmente las notas [15].

Es vital entender que los subespacios irreducibles de S_n , que es completamente reducible, están en correspondencia uno a uno con los diagramas de Young asociados a las particiones que dividen el grupo en clases de conjugación. La fórmula conocida como “Hook Length Formula” provee una forma relativamente sencilla de calcular, dada la parametrización por los respectivos diagramas de Young, la dimensión de cada subespacio irreducible.

3.1. Grupo Simétrico

El **grupo simétrico** S_n es el conjunto de todas las biyecciones $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ con la composición de funciones como multiplicación. Sus elementos son llamados **permutaciones**.

Una permutación queda descripta por su tabla de valores

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Una permutación π se dice **k-ciclo** si fija todos los elementos de $\{1, \dots, n\}$ salvo los de un subconjunto $\{a_1, \dots, a_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ para los cuales $\pi(a_i) = a_{i+1}$ y $\pi(a_k) = a_1$, con $i = 1, \dots, k$. Los 2-ciclos se llaman **trasposiciones**.

Teorema 3.1.1. *Toda permutación se factoriza de manera única, salvo por el orden, como producto de ciclos disjuntos. Además, toda permutación se factoriza como producto de trasposiciones (no necesariamente disjuntas). Esta factorización no es única, pero la paridad de la cantidad de trasposiciones que aparecen en la factorización de una permutación si lo es.*

Por ejemplo:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

se factoriza como $\pi = (1)(234)$, un ciclo de longitud uno y otro de longitud tres.

3.2. Particiones y Clases de Conjugación

Una **partición** λ , es una sucesión finita debilmente decreciente de números enteros no negativos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. Los números λ_i se llaman partes de λ .

Por ejemplo $(6,3,2,2,1)$ es una partición de 14 y de profundidad 5.

Las particiones también se pueden describir en notación exponencial: si $\mathcal{P} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ es una partición de n , y r_α es la cantidad de veces que aparece α en $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ escribimos $\mathcal{P} = [1^{r_1} 2^{r_2} \dots n^{r_n}]$ omitiendo los números cuyos exponente es 0. Por ejemplo $(4, 2, 1, 1) = [1^2 2^1 4^1]$.

En general, en un grupo G , dos elementos $x, y \in G$ se dicen conjugados si existe un elemento $g \in G$ tal que $y = gxg^{-1}$. La conjugación es una relación de equivalencia y por lo tanto G queda descompuesto como unión disjunta de sus clases de conjugación.

El Teorema 3.1.1 permite definir el **tipo** de una permutación de S_n como la partición de n que resulta de considerar las longitudes de los ciclos que aparecen en su factorización incluyendo los punto fijos como ciclos de longitud 1. Por ejemplo $\sigma = (1283)(57) = (1283)(57)(4)(6)$ es una permutación de tipo $(4, 2, 1, 1) = [1^2 2^1 4^1]$.

Teorema 3.2.1. *Dos permutaciones están en la misma clase de conjugación sí y sólo sí son del mismo tipo. Además, si $\sigma \in S_n$ es de tipo $\lambda = [1^{r_1} 2^{r_2} \dots n^{r_n}]$ entonces la clase de conjugación de tipo $\lambda = [1^{r_1} 2^{r_2} \dots n^{r_n}]$ tiene*

$$\frac{n!}{1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! \dots n^{r_n} r_n!}$$

elementos.

Además, dada un partición λ definimos:

- **Tamaño** n de λ , como la suma de las partes que la componen: $n = \sum \lambda_i$. Denotamos con $\mathcal{P}(n)$ al conjunto de particiones de tamaño n .
- **Profundidad** r de λ al número que indexa la última parte no nula λ_r de ésta. Denotaremos con \mathcal{P}_r al conjunto particiones de profundidad r .

Finalmente denotamos con:

$$\mathcal{P}_r(n) = \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 : \lambda_i \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ y } \sum \lambda_j = n\}$$

al conjunto de particiones de tamaño n con profundidad r . Y:

$$\mathcal{P}_{\leq r} = \cup_{j=1}^r \mathcal{P}_j \text{ las particiones de profundidad a lo sumo } r.$$

$$\mathcal{P}_{\leq r}(n) = \cup_{j=1}^r \mathcal{P}_j(n) \text{ las particiones de } n \text{ y profundidad de a lo sumo } r.$$

3.3. Representaciones del Grupo Simétrico

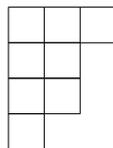
Como vimos en el Teorema C.3.4, S_n es completamente reducible cuando se lo representa sobre un espacio vectorial complejo. A continuación se enuncia un teorema que afirma que las representaciones irreducibles que aparecen en la descomposición están caracterizadas por las clases de conjugación que definimos en la sección anterior.

Teorema 3.3.1. *El número de clases de isomorfismos de representaciones irreducibles de dimensión finita de S_n sobre \mathbb{C} es igual a la cantidad de clases de conjugación de S_n .*

Es decir que las representaciones irreducibles de S_n están en correspondencia con sus clases de conjugación.

3.4. Fórmula de Hook; Diagramas y Tablas de Young

Dada una partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, el **diagrama de Young** de λ es el dibujo que consiste en filas de cuadraditos alineados a izquierda, donde la i -ésima fila tiene λ_i cuadraditos. Por ejemplo, si $\lambda = (3, 2, 2, 1)$ su diagrama es:



Dada una partición $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, una tabla de tipo λ es una asignación biyectiva de los números $\{1, 2, \dots, n\}$ a los cuadraditos del diagrama. Por ejemplo,

$$t = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 7 & 1 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$$

es una tabla de tipo $(3,2,2,1)$. Denotamos con $t_{i,j}$ el número que tiene el cuadradito de la fila i y la columna j , asimismo cada cuadradito tiene coordenadas (i, j) . En el ejemplo de recién $t_{3,2} = 1$

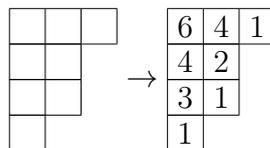
Por lo tanto, por el Teorema 4.3.1, podemos afirmar que las representaciones irreducibles de dimensión finita de S_n , S_λ con $\lambda \in \mathcal{P}(n)$, sobre \mathbb{C} están parametrizadas por los diagramas de Young de cada partición.

Por ejemplo las clases de conjugación de S_3 quedan determinadas por las particiones de $n = 3$: $[3^1]$, $[1^1 2^1]$ y $[1^3]$. Por lo que las representaciones irreducibles están parametrizadas por los diagramas, como se muestra en el siguiente cuadro:

Clase conjugación	Representación irreducible S_λ	Diagrama de Young
(1)(2)(3)	$S_{[1^3]}$	$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$
(12)(3), (13)(2), (23)(1)	$S_{[1^1 2^1]}$	$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$
(123), (132)	$S_{[3^1]}$	$\begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$

Otro resultado conocido de la teoría de representaciones de S_n es que la dimensión de cada subespacio irreducible, $\dim S^\mathcal{P}$, se calcula con la formula conocida como **“Hook Length Fórmula”**.

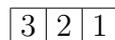
La “Hook Length Fórmula” para $\dim S_\lambda$. Sea λ una partición de n y para cada (i, j) definimos $h_{i,j}$ como la longitud del codo (hook) que tiene como vértice al cuadradito (i, j) del diagrama de λ y se extiende hacia la derecha y hacia abajo. En el siguiente ejemplo hemos rellenado el diagrama con los valores de $h_{i,j}$.



Luego,

$$\dim S_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{i,j}}. \tag{3.1}$$

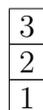
Calculemos por ejemplo la dimensión de los espacios irreducibles de S_3 . Si $S_{[3^1]}$ la tabla es:



y $\dim S_{[3^1]} = \frac{3!}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$, es fácil ver que cualquier representación irreducible parametrizada con un diagrama horizontal tendrá dimensión 1. Si $S_{[1^1 2^1]}$ la tabla queda:



y $\dim S_{[1^1 2^1]} = \frac{3!}{3 \cdot 1 \cdot 1} = 2$. Y Si $S_{[1^3]}$ la tabla queda:



y $\dim S_{[1^3]} = \frac{3!}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$, de la misma manera toda irrep asociada a un diagrama vertical es de dimensión 1.

3.5. Representación del Grupo Simétrico en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$

Definimos la representación $(V, \mathcal{B}(\mathcal{H}_n))$ de S_n como

$$V(\pi)(A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n) = A_{\pi^{-1}(1)} \otimes A_{\pi^{-1}(2)} \dots \otimes A_{\pi^{-1}(n)}, \quad (3.2)$$

donde $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\pi \in S_n$.

Es inmediato verificar que V :

1. Es unitaria.
2. Es reducible, pues el subespacio generado por el operador $A \otimes A \otimes \dots \otimes A$ es invariante no trivial.
3. Conmuta con Φ_n , $\Phi_n(g)V(\pi) = V(\pi)\Phi_n(g)$ para toda $g \in \text{SO}(3)$ y $\pi \in S_n$.

Capítulo 4

Representación de $SU(2) \times S_n$ y Multiplicidades

El propósito de este trabajo es calcular las bases y multiplicidades de la descomposición en irrep de $SO(3)$ (como rep. de $SU(2)$) cuando actúa en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n) \simeq (\mathbb{C}^{2s+1})^{\otimes 2n}$. Consideramos en el desarrollo de este capítulo $s = 1/2$:

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes 2n} = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} N(l, n) V_l$$

En el capítulo 2 proveímos una solución para este problema particular, planteando un algoritmo que calcula las multiplicidades $N(l, n)$ y las bases de OTESI's asociadas a cada subespacio irreducible, V_l , de $SU(2)$. Este método resultó ser eficaz en resolver el problema pero costoso numéricamente.

En el presente capítulo explotaremos resultados conocidos de la teoría de grupos para calcular, de manera alternativa, las multiplicidades de tal descomposición. Los ingredientes necesarios para tal emprendimiento se exponen en las siguientes secciones.

4.1. Representación de Grupos compactos $G_1 \times G_2$

Si G es un grupo de Lie compacto entonces toda representación de dimensión finita es unitaria y se descompone como suma directa de irreducibles. Si G_1 y G_2 son dos grupos de Lie compactos¹ entonces $G_1 \times G_2$ es compacto. Luego, sean \widehat{G}_1 y \widehat{G}_2 las clases de equivalencia de representaciones irreducibles de cada uno, respectivamente. Se verifica que:

Teorema 4.1.1. *Si G es un grupo de Lie compacto entonces toda representación de dimensión finita es unitaria y se descompone como suma directa de irreducibles.*

Teorema 4.1.2. *Si G_1 y G_2 son grupos de Lie compactos y \widehat{G}_1 y \widehat{G}_2 sus clases de equivalencia de representaciones irreducibles, respectivamente. Entonces:*

1. $G_1 \times G_2$ es un grupo de Lie compacto.

¹Lo que se expondrá también vale para grupos finitos, si estos tienen la propiedad de reducibilidad completa como es el caso de S_n .

2. Toda representación irreducible de $G_1 \times G_2$ es un producto tensorial de una irreducible de G_1 por una irreducible de G_2 :

$$\widehat{G_1 \times G_2} = \{\pi_1 \otimes \pi_2 : \pi_i \in \widehat{G_i}\}$$

3. Dada una representación de dimensión finita $\rho : G_1 \times G_2 \rightarrow GL(V)$ se tiene:

$$V = \bigoplus_{(\pi_1, \pi_2) \in \widehat{G_1} \times \widehat{G_2}} m(\pi_1, \pi_2) V_{\pi_1} \otimes V_{\pi_2} \tag{4.1}$$

donde $m(\pi_1, \pi_2)$ es la multiplicidad con la que cada una de estas aparece y $V_{\pi_i} : i = 1, 2$ son los espacios irreducibles.

Para ciertos grupos la descomposición (4.1) no involucra sumar sobre todo el conjunto de clases de equivalencias de irrep $\widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$. Si existe una función biyectiva $f : \widehat{G_1} \rightarrow \widehat{G_2}$, $\pi_1 \mapsto f(\pi_1) = \pi_2$ de modo que la suma en (4.1) se reduzca a:

$$V = \bigoplus_{\pi_1 \in \widehat{G_1}} m(\pi_1, f(\pi_1)) V_{\pi_1} \otimes V_{f(\pi_1)} \tag{4.2}$$

entonces diremos que hay una dualidad entre los grupos G_1 y G_2 .

A continuación veremos que para $V = (\mathbb{C}^2)^{\otimes 2n}$, $G_1 = U(2)$ y $G_2 = S_{2n}$, hay tal dualidad. Incluso más, la descomposición (4.2) es libre de multiplicidades □.

4.2. Parametrización de las Irrep de $U(2)$, $SU(2)$ y S_n

Para estos tres grupos son conocidos los siguientes resultados:

1. Las representaciones irreducibles de S_n están parametrizadas por los diagramas de Young de tamaño n , es decir por $\mathcal{P}(n)$ (las particiones de n). Denotamos con S_Y la representación irreducible de S_n correspondiente a $Y \in \mathcal{P}(n)$.
2. Las representaciones irreducibles del grupo $U(2)$ están parametrizadas por $\mathcal{P}_{\leq 2}$, las particiones de profundidad de a lo sumo 2 (éste es un conjunto infinito). Denotamos con π_Y la representación irreducible de $U(2)$ correspondiente a $Y \in \mathcal{P}_{\leq 2}$.
3. Las representaciones irreducibles de $SU(2)$ están parametrizadas por $\mathcal{P}_{< 2}$, particiones de profundidad 1. Es decir con números enteros (Teorema D.3.2).

4.3. Dualidad de Schur

Teorema 4.3.1. Sea \mathbb{C}^2 la representación canónica de $U(2)$. Entonces $U(2) \times S_n$ actúa en $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ y su descomposición en irreducibles es:

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} = \bigoplus_{Y \in \mathcal{P}_{\leq 2}(n)} \pi_Y \otimes S_Y \tag{4.3}$$

²Esto es $m(\pi_1, \pi_2)$ es 1 o 0 para todo par $(\pi_1, \pi_2) \in \widehat{G_1} \times \widehat{G_2}$

En particular:

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} = \bigoplus_{Y \in \mathcal{P}_{\leq 2}} \dim(S_Y) \pi_Y. \text{ Como representación de } U(2) \tag{4.4}$$

$$= \bigoplus_{Y \in \mathcal{P}_{\leq 2}} \dim(\pi_Y) S_Y. \text{ Como representación de } S_n \tag{4.5}$$

De (4.3) vemos que existe una dualidad, la suma es sobre los elementos correspondientes a la "diagonal" (Y, Y) . Además, la descomposición es libre de multiplicidades.

En (4.4) se afirma que las multiplicidades de la descomposición en irreducible de la acción de $U(2)$ en $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ se calcula usando la Hook-Lenght formula (3.1) en el diagrama de Young Y que parametrice la respectiva representación irreducible S_Y .

4.3.1. Ejemplo n=3

Usamos la dualidad de Schur para calcular las multiplicidades de la descomposición en irreducibles de $U(2)$ actuando en $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$. Calculemos primero la descomposición de $U(2) \times S_3$, las particiones de 3 de profundidad a los sumo 2 son: (3) y $(2,1)$:

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3} = (\pi_{\square\square\square} \otimes S_{\square\square\square}) \oplus \left(\pi_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}} \otimes S_{\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix}} \right)$$

Luego, por (4.4):

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes 3} = \dim(S_{\square\square\square}) \pi_{\square\square\square} \oplus \dim\left(S_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}}\right) \pi_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}}$$

De donde se sigue que la multiplicidad de $\pi_{\square\square\square}$ es $\dim(S_{\square\square\square}) = 1$ y de $\pi_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}}$ es $\dim\left(S_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}}\right) = 2$.

4.4. Relación entre las Representaciones Irreducibles de $U(2)$ y $SU(2)$

Sea π_Y una representación irreducible, $Y \in \mathcal{P}_{\leq 2}$, de $U(2)$. Entonces:

1. Se cumple que la acción del grupo permanece irreducible al restringir a $SU(2) \subset U(2)$. Por lo que toda representación irreducible π_Y caracteriza (o se le puede corresponder) una representación irreducible $\pi_Y|_{SU(2)}$ de $SU(2)$.
2. Y es el diagrama de Young correspondiente a una partición de tipo (t, p) de $U(2)$. Definimos la cola de Y como el diagrama de Young Y' asociado a una partición de tipo (j) que se obtiene de Y poniendo $j = t - p \geq 0$ cuadraditos en su única fila. Luego, el diagrama de Young $Y' \in \mathcal{P}_{< 2}$ que parametriza a $\pi_Y|_{SU(2)}$ se obtiene de truncar la cola del diagrama de Young Y asociado a la partición:

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \cdots & \square & \cdots & \square \\ \hline \square & \cdots & \square & & \\ \hline \end{array} \rightarrow Y' = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \cdots & \square \\ \hline \end{array}$$

Esto es consistente con lo expuesto en la sección 4.2.

4. Dada una representación irreducible $V_{Y'}$ de $SU(2)$ parametrizada por $Y' \in \mathcal{P}_{<2}$, existen infinitas $Y \in \mathcal{P}_{\leq 2}$ que parametrizan una irrep de $U(2)$ tales que $\pi_Y|_{SU(2)} = V_{Y'}$. Aunque la recíproca no es cierta, a cada irrep de $U(2)$ le corresponde una única irrep de $SU(2)$. Por ejemplo el diagrama $\square\square$ se puede obtener como cola de $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$, $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$, etc.

4.5. Dualidad de Schur con Restricción a $SU(2)$

De los incisos presentados la sección anterior y del hecho que la Dualidad de Schur (4.3) se sostiene al restringir a $SU(2) \subset U(2)$ podemos formular una versión del teorema adaptada a la necesidad de nuestro problema.

Construimos, por lo tanto, un función biyectiva que prescriba la dualidad.

Sea:

$$F_n : \mathcal{P}_{\leq 2}(n) \rightarrow \cup_{i=1}^n \mathcal{P}_{<2}(i)$$

$$(t, p) \mapsto F[(t, p)] = (t - p) = (j)$$

la función que toma el diagrama asociado a la partición (t, p) , con $t + p = n$, y devuelve el diagrama "cola" asociado a la partición (j) , donde $j = t - p$. Y,

$$F_n^{-1} : \cup_{i=1}^n \mathcal{P}_{<2}(i) \rightarrow \mathcal{P}_{\leq 2}(n)$$

$$(j) \mapsto F^{-1}[(j)] = (m + j, m)$$

es la inversa que toma el diagrama asociado a (j) y devuelve el $(m + j, m)$ de modo que $n = 2m + j$.

Observemos que, dado n , podemos construir todos los diagramas de Young asociados a las particiones que están en $\mathcal{P}_{<2}(n)$ de la siguiente manera: primero tomamos el diagrama horizontal asociado a la partición (n) y extraemos el último cuadradito para ubicarlo debajo del primero, así generamos el diagrama asociado a $(n - 1, 1)$. Luego repetimos con $(n - 1, 1)$ para obtener $(n - 2, 2)$, y así sucesivamente. Esta serie obviamente se trunca cuando logramos un diagrama de la forma (m, m) si n es par o $(m + 1, m)$ si n es impar. Donde $m = \frac{n}{2}$ para el caso par o $m = \frac{n-1}{2}$ en el caso impar. Finalmente es claro que la cola de cada diagrama disminuye de dos en dos en cada paso, por lo que F_n preserva la paridad de n . Es decir, si n es par o impar entonces la imagen de F_n será un diagrama horizontal con una cantidad par o impar de cuadraditos, respectivamente.

Habiendo considerado lo anterior, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.5.1. *Sea $V = \mathbb{C}^2$. Y sea \mathbb{L}_n el conjunto que tiene al 0 y los números pares hasta n si n es par; o los impares hasta n si n es impar. Entonces $SU(2) \times S_n$ actúa en $V^{\otimes n}$ y su descomposición en irreducibles es:*

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\substack{Y \in \cup \\ i \in \mathbb{L}_n} \mathcal{P}_{<2}(i)} V_Y \otimes S_{F_n^{-1}(Y)} \tag{4.6}$$

En particular:

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\substack{Y \in \bigcup \\ i \in \mathbb{L}_n} \mathcal{P}_{<2}(i)} \dim(S_{F_n^{-1}(Y)}) V_Y. \text{ Como representación de } SU(2). \quad (4.7)$$

Además dado un elemento maximal³ correspondiente a V_Y , todos los demás maximales (tanto como multiplicidad tenga V_Y) se obtienen a través de la acción de S_n en el elemento dado.

Automáticamente se obtiene el resultado demostrado en el Teorema 2.3.1.

Corolario 4.5.2. Si n es par sólo aparecerán irrep con parámetros pares (spin entero) en la descomposición (4.7). De la misma manera si n es impar sólo aparecerán irrep con parámetros impares.

4.6. Constantes de movimiento y aplicaciones a mecánica cuántica

En la formulación de Heisenberg de la mecánica cuántica, la física se obtiene de evolucionar los operadores autoadjuntos que representan las propiedades dinámicas del sistema y pensar los estados puros como constantes. Así, si A es un operador autoadjunto y \hat{H} es el Hamiltoniano del sistema:

$$A \mapsto A(t) = e^{i\hat{H}t} A e^{-i\hat{H}t} \quad (4.8)$$

Luego, se verifica que la ecuación de evolución para las observables en la formulación de Heisenberg es:

$$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{1}{i} [A(t), \hat{H}] + \frac{\partial}{\partial t} A(t). \quad (4.9)$$

Sí A es independiente del tiempo el último término es 0. En tal caso, diremos que $A(t)$ es una **constante de movimiento** si conmuta con el Hamiltoniano \hat{H} ,

$$\frac{d}{dt} A(t) = 0 \iff [A(t), \hat{H}] = 0 \quad (4.10)$$

Lo que es equivalente a que $A = A(t)$.

Luego para sistemas como los que estudiamos en este trabajo $\mathcal{H} = (V_s)^{\otimes n}$, vale el siguiente teorema.

Teorema 4.6.1. Sea $V = \mathbb{C}^2$. Y sea $\mathcal{H} = V^{\otimes n}$ el espacio de Hilbert asociado a la parte spin de un sistema físico de n partículas con spin $s = \frac{1}{2}$. Si \hat{H} es el Hamiltoniano del sistema y pertenece a la imagen de la representación derivada del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ construida a partir del producto tensorial de la representación irreducible $\Sigma_{1/2}$ de $SO(3)$ actuando en \mathcal{H} ,

$$(\Sigma_{1/2})^{\otimes n}(g) = e^{-i\alpha \hat{e}_\theta \cdot \vec{L}} \overbrace{\otimes \dots \otimes}^{n \text{ veces}} e^{-i\alpha \hat{e}_\theta \cdot \vec{L}}, g \in SO(3). \quad (4.11)$$

³Esta tarea siempre se puede realizar usando CG por ejemplo.

Y si Φ_n es la representación levantada de (4.11) actuando en el espacio de las propiedades dinámicas $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$,

$$\Phi_n(g) = e^{-i\alpha\hat{e}_\theta, \varphi \vec{\mathfrak{J}}} \overbrace{\otimes \dots \otimes}^{n \text{ veces}} e^{-i\alpha\hat{e}_\theta, \varphi \vec{\mathfrak{J}}}, g \in SO(3). \quad (4.12)$$

Entonces,

1. La transformación unitaria que evoluciona los estados y las observables es una rotación.
2. La cantidad de constantes de movimiento linealmente independientes es igual a la multiplicidad de V_0 en la descomposición en irreducibles de (4.12). Es decir que hay tantas constantes de movimientos linealmente independientes como operadores tensoriales esféricos irreducibles de rango 0 (OTESI's escalares).
3. La multiplicidad, $N(0, n)$, de V_0 está dada por la fórmula:

$$N(0, n) = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

4. Todos los operadores escalares se calculan de la acción de S_{2n} en la identidad de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a través del isomorfismo natural que identifica $\mathcal{B}(V^{\otimes n}) = V^{\otimes 2n}$.

Demostración:

Los puntos 1,2 y 4 son automáticos de la definición de la representación y por el Teorema 4.5.1. Además de que es evidente que los OTESE's escalares cumplen que son constantes de movimiento linealmente independientes. Para demostrar 3 basta con calcular las multiplicidades dadas por las dimensiones de los diagramas rectangulares de profundidad 2 genéricos, que son los que se corresponden con OTESE's escalares.

Probamos la fórmula que aparece en 3 por inducción (de números pares), usando la fórmula de hook en los diagramas de tipo (n, n) y tamaño $n' = 2n$. Es decir, queremos demostrar que la fórmula de hook es equivalente a

$$P(n') = \frac{n'!}{\left(\frac{n'}{2} + 1\right)! \left(\frac{n'}{2}\right)!},$$

para el conjunto de números pares.

Verifiquemos que vale para el primer número par, $P(2) = 1$. Si $n' = 2$, la tabla es

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

y la multiplicidad de $N(0, n = 1)$ es 1. Ahora probamos que vale para el siguiente, $P(4) = 2$. Si $n' = 4$, tenemos la tabla asociada al diagrama de tipo $(2, 2)$:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array},$$

y de la fórmula de hook $N(0, 2) = 2$. Entonces vale para el primer par y para el segundo.

Ahora suponemos que si vale para algún k par entonces vale para el siguiente $k + 2$ también: Si $P(k) \Rightarrow P(k + 2)$. La fórmula de hook para el diagrama asociado a la partición $Y_{k+2} = (l, l)$ tal que $k + 2 = 2l$ es:

$$\dim S_{Y_{k+2}} = \frac{(k+2)!}{\prod_{i,j} t_{ij}} \quad (4.13)$$

$$= \frac{k!(k+1)(k+2)}{t_{11}t_{21} \prod_{i,j=2} t_{ij}} \quad (4.14)$$

$$= \left(\frac{k!}{\prod_{i,j=2} t_{ij}} \right) \frac{(k+1)(k+2)}{t_{11}t_{21}} \quad (4.15)$$

$$= \frac{k!(k+1)(k+2)}{\binom{k}{2}! \binom{k}{2}! t_{11}t_{21}} \quad (4.16)$$

donde para pasar de (4.16) a (4.17) usamos la hipótesis inductiva. Luego es fácil notar que $t_{11} = l + 1 = \frac{k}{2} + 2$ y $t_{21} = l = \frac{k}{2} + 1$. Así:

$$\dim S_{Y_{k+2}} = \frac{(k+2)!}{\binom{k}{2}! \binom{k}{2}! \binom{k}{2} + 2 \binom{k}{2} + 1} \quad (4.17)$$

$$= \frac{(k+2)!}{\binom{k}{2} + 2 \binom{k}{2}! \binom{k}{2} + 1} = P(k+2). \quad (4.18)$$

Q.E.D..

El resultado obtenido en 3 se puede generalizar fácilmente para calcular las multiplicidades $N(l, n)$ asociadas a los subespacios irreducibles V_l de la descomposición (4.7), es suficiente con considerar la fórmula de hook en diagramas de tipo $(m, m + l)$ tal que $n = 2m + l$. De calculo directo se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(V^{\otimes n}) &= \bigoplus_{l \in \mathbb{L}_n} N(l, n) V_l \\ &= \bigoplus_{l \in \mathbb{L}_{2n}} \left(\frac{(2n)!(l+1)}{\binom{2(n+1)+l}{2}! \binom{2n-l}{2}!} \right) V_l \end{aligned}$$

Donde $V = \mathbb{C}^2$ y $s = l/2$ (para volver a la notación de física V_s).

Capítulo 5

Conclusiones

Se desarrollaron dos métodos diferentes para construir bases de OTESI. El método algebraico es conceptualmente sencillo para calcular explícitamente los OTESI, aunque costoso numéricamente. Queda abierta la pregunta sobre la descomposición para sistemas de spin no idénticos.

Por otro lado, la teoría de representaciones proveyó un método sofisticado que permite calcular las multiplicidades con mucha facilidad. También implica, posiblemente, la ventaja de reducir el costo computacional de calcular los OTESI a través de la acción del grupo de permutaciones en un maximal de cada tipo. Aunque como el grupo S_n contiene $n!$ elementos y puede volverse igualmente costoso. Queda para trabajos posteriores encontrar la mejor forma elegir las permutaciones que actúan en cada maximal. También postergamos la tarea de construir una base de OTESI adaptada al intercambio de partículas.

Apéndice A

Álgebra Lineal

En este apéndice hay un resumen de los elementos y resultados de álgebras que se utilizan en el desarrollo de la tesis.

A.1. Autovectores, Autovalores y Polinomio Característico

Si A es cualquier matriz en el conjunto de matrices complejas $n \times n$ denotado por $M_n(\mathbb{C})$, luego un vector $v \neq 0$ en \mathbb{C}^n se llama autovector de A si existe algún número complejo λ de modo que:

$$Av = \lambda v \tag{A.1}$$

Un autovalor de A es un número complejo λ para el cual existe un $v \neq 0$ en \mathbb{C}^n tal que $Av = \lambda v$. Por lo tanto, λ es un autovalor de A si la ecuación (A.1), o equivalentemente la ecuación

$$(A - \lambda I)v = 0$$

tiene una solución distinta de cero v . Esto sucede exactamente cuando $A - \lambda I$ falla en ser invertible, que es precisamente cuando $\det(A - \lambda I) = 0$. Para cualquier $A \in M_n(\mathbb{C})$, definimos el **polinomio característico** p de A como

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I), \lambda \in \mathbb{C}$$

Este es un polinomio de grado n . Luego, los autovalores son sus raíces.

Nos interesa considerar **espacios vectoriales**. Un espacio vectorial es una 4-tupla $\langle V, +, \mathbb{K}, \cdot \rangle$ donde V es un conjunto no vacío cuyos elementos llamaremos vectores, \mathbb{K} es un cuerpo cuyos elementos llamaremos escalares, $+$: $V \times V \rightarrow V$ es una ley de composición interna (*suma*) y \cdot : $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ es una ley de composición externa (*producto por escalar*). La suma es asociativa, conmutativa, con elemento neutro (elemento nulo) y existencia de opuesto. El producto es asociativo; distributivo respecto de la suma de vectores; distributivo respecto de la suma de escalares; y cualquier vector u en V multiplicado por el neutro multiplicativo \mathbf{e} del cuerpo \mathbb{K} , es sí mismo. Esta tesis se desarrolla en modelos de espacios vectoriales donde se interpreta matemáticamente -a través de isomorfismos- $\mu(\langle V, +, \mathbb{K}, \cdot \rangle) \rightarrow \langle \mathbb{C}^n, +, \mathbb{C}, \cdot \rangle$. La definición anterior claramente establece las pautas mínimas para que los primitivos semánticos de la

estructura tengan sentido en el contexto de una teoría algebraica, cualquier interpretación matemática de éstos produce un modelo de tal estructura.

Un **operador lineal** en un espacio vectorial V (también llamado transformación lineal) es un mapa A de V en si mismo que satisface

$$A(u + v) = Au + Av,$$

$$A(\lambda u) = \lambda Au$$

para todo u y v en V y todo λ en \mathbb{C} . Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, luego el mapa que envía el vector u en \mathbb{C}^n al vector Au (definido como el producto entre la matriz $n \times n$ y la matriz u $n \times 1$) es un operador lineal, y, dada una base del espacio, a todo operador lineal en \mathbb{C}^n se le puede asociar de forma única una matriz A . Esto se llama representación matricial del operador en cuestión.

Si A es un operador lineal en un espacio vectorial V y λ es un autovalor de A , luego el **autoespacio** λ , denotado V_λ , es el conjunto de todos los vectores $v \in V$ que satisfacen $Av = \lambda v$. V_λ es un subespacio de V y su dimensión se llama **multiplicidad geométrica de λ** .

Proposición A.1.1. *Sea A un operador lineal de un espacio vectorial V y v_1, \dots, v_k autovectores con **distintos** autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Entonces, v_1, \dots, v_k son linealmente independientes.*

Demostración: Lo probaremos por inducción. Para el caso $n = 1$ vale automáticamente, puesto que por definición de autovector $v_1 \neq 0$. Para $n = 2$ tenemos lo siguiente:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$$

$$A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \lambda_2 \alpha_2 v_2 = 0$$

Como los autovalores son distintos por hipótesis, entonces no pueden ser ambos cero. Suponemos, sin perder generalidad, que $\lambda_2 \neq 0$. Luego, $\alpha_2 v_2 = -\frac{\lambda_1 \alpha_1}{\lambda_2} v_1$. Reemplazando

$$\alpha_1 \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) v_1 = 0, \quad v_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

por lo que son li. Ahora suponemos que si vale la proposición para k entonces vale también para $k + 1$. Armamos nuevamente las combinaciones lineales nulas:

$$\sum_{l=1}^k \alpha_l v_l + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$$

$$\sum_{l=1}^k \lambda_l \alpha_l v_l + \lambda_{k+1} \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$$

Suponemos que $\lambda_{k+1} \neq 0$ y despejando: $\alpha_{k+1} v_{k+1} = -\sum_{l=1}^k \frac{\lambda_l}{\lambda_{k+1}} \alpha_l v_l$. Reemplazando y usando la hipótesis inductiva se llega a

$$\alpha_l \left(1 - \frac{\lambda_l}{\lambda_{k+1}}\right) v_l = 0, \quad l = 1, \dots, k, \quad v_l \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_{k+1} = 0$$

Por lo tanto, vale para cualquier n natural.

Q.E.D.

Proposición A.1.2. *Todo operador lineal A en un espacio vectorial complejo de dimensión finita tiene al menos un autovector.*

Esto último se sigue del teorema fundamental del álgebra, que dice que todo polinomio complejo tiene al menos una raíz compleja.

A.2. Diagonalización

Dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ son semejantes si existe una matriz invertible C de forma que

$$A = CBC^{-1}$$

luego, $B = C^{-1}AC$. La operación en la cual $B \rightarrow C^{-1}BC$ se llama conjugación de B por C . Una matriz A se dice diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. Una matriz es diagonalizable sí y sólo sí hay n autovectores linealmente independientes de A . Específicamente, si v_1, \dots, v_k son tales autovectores, y C es una matriz cuya k^{th} columna es v_k . Luego, C es invertible y

$$A = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1}$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores asociados a los autovectores v_1, \dots, v_n , en ese orden.

Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ tiene n autovalores distintos, entonces A es automáticamente diagonalizable (por proposición A.1.1). Si el polinomio característico de A tiene raíces repetidas, entonces A puede o no ser diagonalizable.

Para una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$, la **matriz adjunta de A** , denotada A^* , es su transpuesta conjugada

$$(A^*)_{kl} = \overline{A_{lk}}$$

Una matriz A se dice autoadjunta (o hermitica) si $A^* = A$. Anti-autoadjunta (o anti-hermitica) si $A^* = -A$. Unitaria si $A^* = -A^{-1}$. Si una matriz A es autoadjunta, anti-hermitica o unitaria entonces es automáticamente diagonalizable. Más aún, en cualquiera de los casos anteriores, es posible encontrar una base ortonormal de autovectores de A , lo que significa que la matriz C en la definición de diagonalizabilidad puede ser tomada como unitaria.

Si A es autoadjunta, entonces todos sus autovalores son reales. Si A es real y autoadjunta (real y simétrica), entonces sus autovectores pueden ser tomados como reales también; lo que significa, en este caso, que la matriz C es ortogonal. Si A es anti-autoadjunta, sus autovalores son imaginarios puros. Si A es unitaria, sus autovalores son números complejos de módulo 1 (i.e, si $\lambda = e^{i\theta}$).

Una matriz A se dice **normal** si conmuta con su adjunta (i.e., si $AA^* = A^*A$ o $[A, A^*] = 0$). Si A es autoadjunta, anti-autoadjunta o unitaria; entonces es normal. Resumimos estos comentarios en los siguientes teoremas.

Teorema A.2.1. *Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ con la propiedad que $[A, A^*] = 0$ (es decir, si $A^* = A$, $A^* = -A$ o $A^* = A^{-1}$). Entonces, A es diagonalizable y es posible encontrar una base ortonormal de \mathbb{C}^n de autovectores de A .*

Si A es real y simétrica, entonces todos los autovalores de A son reales y es posible encontrar una base ortonormal de autovectores de A donde cada uno de éstos sea real.

Teorema A.2.2. *Supongamos que A y B son operadores lineales en un espacio vectorial de dimensión finita V y que además ambos conmutan $[A, B] = 0$. Luego, B mapea el autoespacio V_λ de A en el mismo, para cada autovalor de A .*

Demostración: Sea λ un autovalor de A y V_λ su autoespacio asociado. Luego, consideremos un elemento $v \in V_\lambda$. Tenemos que demostrar entonces que $Bv \in V_\lambda$. Como B conmuta con A , se verifica que:

$$ABv = BAv = \lambda Bv$$

De lo que se sigue que efectivamente $Bv \in V_\lambda$.

Q.E.D.

A.3. Traza

Si A es una matriz $n \times n$, se define la **traza** de A como la suma de los elementos de su diagonal; esto es

$$\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n A_{kk}$$

Notemos que la traza es una función lineal de A . Si A y B son dos matrices $n \times n$, luego

$$\text{tr}(AB) = \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n A_{kh} B_{hk} \tag{A.2}$$

de la misma manera

$$\text{tr}(BA) = \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n B_{kh} A_{hk} \tag{A.3}$$

que es la misma que la suma (A.2). Por lo que la $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Luego si C es invertible se verifica que

$$\text{tr}(CAC^{-1}) = \text{tr}(CC^{-1}A) = \text{tr}(A)$$

por lo que la traza es invariante ante conjugación, es decir que matrices semejantes tienen la misma traza.

O en forma más general, si A es un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita V , podemos definir la traza de A eligiendo una base y tomando la traza de la matriz que representa a A en esa base. El cálculo de recién muestra que el resultado de la traza es independiente de la base que se elija.

A.4. Productos Internos

Designemos con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ al **producto interno** estándar de \mathbb{C}^n , definido por

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{u}_k v_k,$$

donde seguimos la convención de complejo conjugar el primer factor. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, luego la adjunta A^* de A tiene la siguiente propiedad

$$\langle u, Av \rangle = \langle A^*u, v \rangle$$

para todo $u, v \in \mathbb{C}^n$.

Si V es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} , un **producto interno** en V es un mapa que asocia dos vectores a un número complejo $\langle u, v \rangle$. El mapa tiene las siguientes propiedades:

1. Simetría respecto de conjugación: $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$, para todo $u, v \in V$.
2. Linealidad en el segundo factor: $\langle v, u_1 + au_2 \rangle = \langle v, u_1 \rangle + a \langle v, u_2 \rangle$, para todo $v, u_1, u_2 \in V$ y $a \in \mathbb{C}$.
3. Positividad: Para todo $v \in V$, $\langle v, v \rangle$ es real y satisface $\langle v, v \rangle \geq 0$, y $\langle v, v \rangle = 0$ si y sólo si $v = 0$.

Hay que notar que como consecuencia de la propiedad 1. y la linealidad, el producto interno es antilineal en la primer factor

$$\langle u_1 + au_2, v \rangle = \bar{a} \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$$

La **norma** de un vector $v \in V$, denotada por $\|v\|$, está definida por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

La condición de positividad garantiza que el producto interno es siempre no-negativo y se anula si y sólo si $v = 0$.

Consideremos ahora a $M_n(\mathbb{C})$ como espacio vectorial. Podemos construir un producto interno en $M_n(\mathbb{C})$ como

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^*B)$$

Notemos que

$$\text{tr}(A^*B) = \text{tr}((B^*A)^*) = \overline{\text{tr}(B^*A)}$$

por lo que esta definición satisface la propiedad 1. La linealidad en el segundo factor se sigue de la linealidad en la traza. Finalmente

$$\text{tr}(A^*A) = \sum_{k=1}^n (A^*A)_{kk} = \sum_{k,l=1}^n A_{kl}^* A_{lk} = \sum_{k,l=1}^n |A_{kl}|^2 \geq 0$$

Esta suma es cero solamente cuando la entrada es nula. Esto muestra que se cumplen los requisitos 1,2 y 3 de la definición. Éste en particular, se llama producto interno de **Hilbert-Schmidt**.

Para cualquier producto interno en un espacio vectorial de dimensión finita, podemos definir el adjunto de un operador lineal vía la condición $\langle u, Av \rangle = \langle A^*u, v \rangle$ para todo u y v en el espacio.

Finalmente, supongamos que V es un espacio de Hilbert de dimensión finita y que $W \subset V$ es un subespacio vectorial. Entonces, el **complemento ortogonal** de W , denotado por W^\perp , es el conjunto de todos los vectores $v \in V$ tales que $\langle w, v \rangle = 0$ para todo $w \in W$. Las consecuencias básicas son que (1) $(W^\perp)^\perp = W$ y (2) $V = W^\perp \oplus W$ se descompone como suma directa de W y W^\perp . El segundo punto significa que cualquier vector $v \in V$ se puede descomponer de forma única como $v = w + u$, donde $w \in W$ y $u \in W^\perp$. Esto en particular significa que la $\dim(V) = \dim(W^\perp) + \dim(W)$.

Suma de subespacios

Sean X, Y espacios vectoriales. Definimos la **suma directa** $U \oplus W$ como el producto cartesiano $X \times Y$ con las operaciones coordenada a coordenada, por ejemplo, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Si X, Y son espacios de Hilbert, se define el producto interno en $X \oplus Y$

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle \quad (\text{A.4})$$

Si $A \in \mathcal{B}(X)$ y $B \in \mathcal{B}(Y)$, definimos $A \oplus B \in \mathcal{B}(X \oplus Y)$ por

$$A \oplus B(w, u) = (Aw, Bu)$$

Por lo tanto si U_1, U_2 son representaciones unitarias de G en X, Y , respectivamente, luego $U_1 \oplus U_2$ dada por

$$(U_1 \oplus U_2)(g) = U_1(g) \oplus U_2(g)$$

es una representación de G . La llamaremos **representación suma directa**.

Un funcional lineal en un espacio vectorial complejo V es un mapa lineal de V en \mathbb{C} .

Apéndice B

Grupos

B.1. Grupos de Lie de matrices

Un **grupo** es un conjunto G , equipado con un mapa de $G \times G$ en G (denotado $g * h$). El mapa, que llamamos producto, es asociativo, con existencia de neutro e inverso multiplicativo. Si además posee la propiedad conmutativa diremos que el grupo es abeliano.

Si $M_n(\mathbb{C})$ denota el espacio de matrices $n \times n$ con entradas complejas y A_m una sucesión de matrices en M_n . Diremos que A_m **converge** a A si cada entrada de A_m converge (cuando $m \rightarrow \infty$) al correspondiente elemento de A (i.e., si $(A_m)_{kl}$ converge a A_{kl} para todo $1 \leq k, l \leq n$).

Definición B.1.1. Un **grupo de Lie de matrices** es un subgrupo G de $GL(m, \mathbb{C})$ con la siguiente propiedad: Si A_m es cualquier secuencia de matrices en G , y A_m converge a alguna matriz A , entonces $A \in G$ o A no es invertible. Esto es equivalente a decir que un grupo de Lie de matrices es un **subgrupo cerrado** de $GL(m, \mathbb{C})$.

Diremos que un grupo de Lie de matrices G es **compacto** si se satisfacen las siguientes condiciones

1. Si A_m es una secuencia de matrices en G , y A_m converge a alguna matriz A , entonces $A \in G$.
2. Existe una constante C tal que para todo $A \in G$, $|A_{kl}| \leq C$ para todo $1 \leq k, l \leq n$.

Y diremos que es **conexo** si para cualquier par de matrices A y B en G , existe un camino continuo $A(t)$, $a \leq t \leq b$ en G con $A(a) = A$ y $A(b) = B$. Además diremos el grupo es **simplemente conexo** si es conexo y todo camino (loop) en G se puede deformar continuamente a un punto en G .

Definición B.1.2. $SU(2)$ es el grupo de matrices complejas 2×2 que obedecen:

i) $UU^* = U^*U = \mathbb{I}$.

ii) $\det(U) = 1$.

ii) indica la invariancia del producto interno en \mathbb{C}^n .

Definición B.1.3. $SO(3)$ es el grupo de matrices reales 3×3 que obedecen:

i) $OO^t = O^tO = \mathbb{I}$.

ii) $\det(O) = 1$.

ii) indica la invariancia del producto interno en \mathbb{R}^n .

Definición B.1.4. El **álgebra de Lie** sobre un cuerpo \mathbb{K} es un espacio vectorial \mathfrak{g} sobre \mathbb{K} , equipado con un mapa "bracket" $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que tiene las siguientes propiedades

1. $[\cdot, \cdot]$ es bilineal.
2. $[X, Y] = -[Y, X]$ para toda $X, Y \in \mathfrak{g}$.
3. $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.
4. Para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ se cumple la identidad de jacobí

$$[X, [Y, Z]] = [Y, [Z, X]] = [Z, [X, Y]] = 0.$$

Apéndice C

Breve resumen de teoría de representaciones

Nos centraremos en dar definiciones básicas y algunos resultados que se usarán en el desarrollo del trabajo. Consideramos grupos de Lie de matrices que denotaremos con G , y sus respectivas álgebras de Lie. Otro grupo sobre el cuál haremos hincapié es el grupo finito de permutaciones. Las definiciones expuestas para grupos se adaptan fácilmente a las respectivas álgebras, por lo que omitiremos las segundas salvo que sea necesario. Por lo tanto, los modelos de grupo que tenemos que tener en mente en este capítulo son $SU(2)$, $SO(3)$ y S_N .

C.1. Espacios de interés y comentarios

Consideremos un \mathbb{C} – espacio vectorial, $\langle V, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$, de dimensión finita m equipado con un producto interno. Definimos $\text{Aut}_{\mathbb{C}}$ como el conjunto de automorfismos \mathbb{C} – lineales de V . Luego, dada una base β de V y $A \in \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \subseteq \mathcal{B}(V)$, denotaremos con $[A]_{\beta}$ a la matriz de transformación A en la base β . Entonces se puede verificar que $[\cdot]_{\beta} : \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \simeq GL(m, \mathbb{C})$ es un isomorfismo de grupos, donde $GL(m, \mathbb{C})$ es el grupo de matrices $m \times m$ invertibles con entradas en \mathbb{C} .

En el desarrollo de esta tesis trabajaremos en particular con dos modelos de las estructuras recién mencionadas. En primer lugar, interpretamos:

$$\langle V, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle \xrightarrow{\mu_1} \langle (\mathbb{C}^m)^{\otimes n}, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle \quad (\text{C.1})$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno usual de \mathbb{C} extendido al producto tensorial. Por otro lado, nos interesa también el espacio de operadores sobre $(\mathbb{C}^m)^{\otimes n}$, es decir:

$$\langle V, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle \xrightarrow{\mu_2} \langle \mathcal{B}((\mathbb{C}^m)^{\otimes n}) \simeq \mathcal{B}(\mathbb{C}^m)^{\otimes n}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{HS}} \rangle \quad (\text{C.2})$$

Es importante mencionar que ambas estructuras están identificadas naturalmente vía el producto interno de la primera, es decir: $\mathcal{B}(\mathbb{C}^m)^{\otimes n} \simeq (\mathbb{C}^m)^{\otimes 2n}$. Este isomorfismo natural queda establecido a través del siguiente mapa:

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^m &\rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}^m) \\ (w_0 \otimes v_0) &\mapsto \chi_{w_0 \otimes v_0} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

donde su imagen queda definida por:

$$\begin{aligned} \chi_{w_0 \otimes v_0} : \mathbb{C}^m &\rightarrow \mathbb{C}^m \\ v &\mapsto \chi_{w_0 \otimes v_0}(v) \doteq \langle v, w_0 \rangle v_0 \end{aligned} \tag{C.4}$$

C.2. Representación e unitariedad

La teoría de grupo, entre otras cosas, proporciona herramientas y estrategias útiles para construir bases de espacios vectoriales. La más habitual, usada en física cuántica, es empezar con un subconjunto abeliano de operadores unitarios y diagonalizarlos simultáneamente, luego la familia de matrices unitarias que conmutan tiene un conjunto común y completo de autovectores que expanden tal espacio. Veremos que profundizando un poco sobre esta teoría podemos ampliar el espectro de tales estrategias.

Definición C.2.1. Una **representación** (T, V) de dimensión finita de un grupo G sobre el cuerpo \mathbb{C} es un homomorfismo de grupos:

$$T : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \tag{C.5}$$

para algún \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión finita. Cuando hay cierta ambigüedad respecto del mapa T llamamos a V mismo representación de G . La dimensión de V es el **grado de la representación**.

Una **subrepresentación** de V es un subespacio W de V que es invariante bajo G .

La teoría de grupo tiene como objetivo clasificar tales homomorfismos, como primer paso nos restringimos a representaciones unitarias. Llamamos $\mathcal{U}(V) \subset \mathcal{B}(V)$ al conjunto de transformaciones unitarias de V en V . Luego:

Definición C.2.2. Una **representación unitaria** (U, V) de dimensión finita de un grupo G sobre el un cuerpo \mathbb{C} es un homomorfismo de grupos $T : G \rightarrow \mathcal{U}(V)$.

Dado el caso que la definición anterior se cumpla salvo una constante compleja de módulo uno, entonces usamos la siguiente definición:

Definición C.2.3. Una **representación unitaria** (U, V) se dice **proyectiva** si existe un mapa $\sigma : G \times G \rightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $a, b \in G$ se cumpla:

$$\begin{aligned} U(a)U(b) &= \sigma(a, b)U(ab) \\ |\sigma(a, b)| &= 1 \end{aligned} \tag{C.6}$$

Dadas dos representaciones (T_1, V_1) y (T_2, V_2) de un grupo G , decimos que son **representaciones equivalentes** si y sólo si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $L : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $L \circ T_1(g) = T_2(g) \circ L$ para todo g en G . Además, si ambas representaciones son unitarias y L es una transformación unitaria también, decimos que estas representaciones son **unitariamente equivalentes**. Subrayamos ésta última definición puesto que siempre que tengamos dos representaciones unitarias que sean equivalentes se puede construir automáticamente un mapa invertible e unitario que las relacione, es decir que equivalencia entre representaciones unitarias implica equivalencia unitaria entre tales representaciones ([10], pag. 23).

Establecidas estas definiciones básicas nos interesa explorar cómo generar nuevas representaciones a partir de otras, esto puede lograrse tomando representaciones previamente conocidas y combinándolas de alguna manera. En las siguientes secciones veremos tres formas estándares para realizar estas construcciones.

Suma directa de representaciones

Definición C.2.4. Sea G un grupo de Lie de matrices y sean $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ representaciones de G actuando en los espacios vectoriales V_1, V_2, \dots, V_n . Entonces, la **suma directa** de T_1, T_2, \dots, T_n es una representación $T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n$ de G actuando en el espacio $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$, definida por

$$[T_1 \oplus \dots \oplus T_n(A)](v_1, \dots, v_n) = (T_1(A)v_1, \dots, T_n(A)v_n)$$

para todo $A \in G$.

Un resultado importante de algunos grupos de Lie y sus respectivas álgebras es la propiedad de reducibilidad completa. Esto significa que toda representación de dimensión finita es isomórfica a una suma directa de representaciones irreducibles. Para estos grupos, una vez que conocemos sus representaciones irreducibles, entonces podemos caracterizar a todo el resto de las representaciones en términos de estas sumas. A pesar de que no todos los grupos satisfacen esta propiedad, los grupos de interés de esta tesis sí la tienen.

Producto Tensorial de representaciones

Definición C.2.5. Sean G, H grupos de Lie, y sean T_1, T_2 representaciones de estos grupos actuando en los espacios V_1, V_2 respectivamente. Luego, el producto tensorial de T_1 y T_2 es una representación $T_1 \otimes T_2$ de $G \times H$ actuando en $V_1 \otimes V_2$ definida por

$$T_1 \otimes T_2(A, B) = T_1(A) \otimes T_2(B) \tag{C.7}$$

para todo $A \in G$ y $B \in H$.

Definición C.2.6. Sea G un grupo de Lie, y sean T_1, T_2 representaciones de G actuando en los espacios V_1 y V_2 respectivamente. Luego, el producto tensorial de T_1 y T_2 es una representación $T_1 \otimes T_2$ de G actuando en $V_1 \otimes V_2$ definida por

$$T_1 \otimes T_2(A) = T_1(A) \otimes T_2(A)$$

para todo $A \in G$.

Representación Levantada

En la sección anterior caracterizamos dos espacios de Hilbert de interés, \mathcal{H} y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el primero se interpreta físicamente como el espacio de los estados puros y el segundo como el de las propiedades dinámicas, en nuestro caso estos espacios son de dimensión finita porque acotamos el análisis a la parte de spín del problema y nos desentendemos de la estructura espacial. Queremos ahora definir a partir de una representación unitaria (vectorial o proyectiva) en el primero \mathcal{H} otra representación en el segundo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Definición C.2.7. Sea G un grupo de Lie, y sea U una representación unitaria (vectorial o proyectiva) de G actuando en el espacio de Hilbert \mathcal{H} . Luego, podemos **inducir (o "levantar")** una representación ρ que actúa en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, definida por

$$\rho(g)A = U(g)^*AU(g)$$

para todo $g \in G$ y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Ademas se cumple que esta representación es unitaria con el producto interno definido anteriormente. También es reducible, la espacio span de la identidad es invariante.

C.3. Irreducibilidad y reducción completa

Definición C.3.1. Definimos los conceptos de reducibilidad completa y representación irreducible:

- Un subespacio vectorial $W \in V$ se dice **G-invariante** si $T(g)w \in W$ para todo $g \in G$ y todo $w \in W$.
- Si todo subespacio G-invariante tiene un complemento G-invariante, entonces diremos que la representación es **completamente reducible**.
- Una representación se dice **irreducible** si los únicos subespacios G-invariantes de V son los triviales.

Ahora vemos un teorema que liga ambos conceptos, el de la propiedad de reducibilidad completa y la representaciones irreducibles, que es clave en esta tesis.

Teorema C.3.2. *Una representación de dimensión finita es completamente reducible sí y solamente sí es suma directa de una cantidad finita de representaciones irreducibles.*

Demostración:(demostrar este teorema)

Q.E.D.

Nos queda demostrar que los grupos de interés tienen la propiedad de reducibilidad completa, lo que es equivalente a que toda representación unitaria se puede descomponer en suma directa de representaciones irreducibles. Esto partiría nuestro espacio en estos subespacios G – invariantes, lo que simplifica la construcción de una base adaptada a la simetría que representa el grupo.

Teorema C.3.3. *Sea G un grupo de Lie de matrices. Sea (U, \mathcal{H}) una representación **unitaria** de G , actuando en un espacio de Hilbert real o complejo \mathcal{H} de dimensión finita. Entonces, U es completamente reducible y por lo tanto \mathcal{H} es suma directa de una cantidad finita de representaciones irreducibles*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{H}_i.$$

donde $(U_i, \mathcal{H}_i)_{i=1, \dots, n}$ son la subrepresentaciones irreducibles restringidas a cada subespacio G – invariante.

Demostración: Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert (¡de dimensión finita!) sobre el cual U actúa y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota su producto interno. Sea $W \in \mathcal{H}$ un subespacio invariante. Y W^\perp su complemento ortogonal, es decir el espacio de todos los vectores $v \in \mathcal{H}$ tal que $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in W$. Entonces, $\mathcal{H} = W \oplus W^\perp$.

Veamos que W^\perp es también un subespacio invariante. Para ver esto notemos que U es unitaria y por lo tanto $U(A)^* = U(A)^{-1} = U(A^{-1})$ para toda $A \in G$. Entonces, para cualquier $w \in W$ y cualquier $v \in W^\perp$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle U(A)v, w \rangle &= \langle v, U(A)^*w \rangle = \langle v, U(A^{-1})w \rangle \\ &= \langle v, w' \rangle = 0 \end{aligned}$$

En el último paso usamos que $w' = U(A^{-1})w$ está en W , puesto que W es invariante por hipótesis. Esto muestra que $U(A)v$ es ortogonal a cada elemento de W y por lo tanto $U(A)v \in W^\perp$. Hemos establecido que, para representaciones unitarias, el complemento ortogonal de un subespacio invariante es invariante también. Supongamos ahora que \mathcal{H} no es irreducible, por lo que admite un subespacio invariante no trivial W , luego descomponemos $\mathcal{H} = W \oplus W^\perp$. Entonces, W y W^\perp son ambos subespacios invariantes y representaciones unitarias de G (vía restricción). Se sigue que W es irreducible o bien se separa como suma directa de subespacios invariantes ortogonales, y similarmente con W^\perp . Continuamos con este proceso y, como \mathcal{H} es de dimensión finita, en algún momento la iteración se trunca. Cada vez las dimensiones de los espacios son menores y eventualmente deberíamos llegar a las partes irreducibles, puesto que a lo sumo los subespacios invariantes tendrán dimensión uno y entonces serán automáticamente irreducibles.

Q.E.D.

Con este teorema argumentamos que $SU(2)$ y $SO(3)$, que satisfacen las hipótesis, tienen la propiedad de reducibilidad completa. Vamos a enunciar la versión del teorema para grupos finitos.

Teorema C.3.4. (Maschke) Sea (T, V) una representación de dimensión finita de un grupo finito G sobre un cuerpo \mathbb{K} . Si $\text{char}(\mathbb{K})$ no divide al orden del grupo $|G|$ entonces (T, V) es completamente reducible y por lo tanto V es suma directa de una cantidad finita de representaciones irreducibles.

Demostración: [11]:41.

En nuestro caso la $\text{char}(\mathbb{C}) = 0$. Por lo que se cumple la hipótesis del teorema. Podemos concluir finalmente que S_n tiene la propiedad de ser completamente reducible también. Así terminamos la sección habiendo demostrado que todos los grupos de interés poseen esta propiedad.

Apéndice D

Representaciones irreducibles de: SU(2) y SO(3)

Queremos clasificar las representaciones irreducibles de estos dos grupos de Lie de matrices. Veremos que ambos grupos están conectados a través de sus álgebras de Lie, que son isomorfas entre sí. Además SU(2) es simplemente conexo y por lo tanto toda representación del grupo induce una representación del álgebra y viceversa (esto no es cierto para todo grupo). Por lo que para investigar las representaciones irreducibles del grupo es suficiente conocer las del álgebra. Por último las representaciones de SU(2) y SO(3) se vinculan por el hecho de que uno es el cubrimiento universal del otro, respectivamente; lo que significa que toda representación de SO(3) se corresponde, vía composición, con una representación de SU(2), aunque la converso no es cierta salvo que incluyamos las representaciones proyectivas del grupo de rotaciones.

En mecánica cuántica, el vector $e^{i\theta}\psi$ representa el mismo estado físico que ψ . Por lo que es natural considerar las representaciones unitarias proyectivas que definimos en el capítulo anterior, es decir los homomorfismos de G al grupo cocientado $\mathcal{U}(\mathcal{H})/[e^{i\theta}\mathbb{I}]$. Además, a nivel del álgebra de Lie, como discutimos en el párrafo anterior, en caso de espacios de dimensión finita, estas representaciones pueden ser "desproyectivizadas", en particular las representaciones unitarias proyectivas de SO(3) están en correspondencia uno-a-uno con las representaciones irreducibles ordinarias de su cubrimiento universal SU(2). En otras palabras, dada una representación π de $\mathfrak{so}(3)$, puede o no puede haber una representación asociada Π a SO(3), aunque incluso si no la hay siempre podemos encontrar una representación Π' de SU(2).

De esta discusión será natural entender que, dada una representación de SO(3) en el espacio de interés, los operadores tensoriales esféricos irreducibles, objetos centrales de esta tesis, forman un conjunto de vectores que expanden los subespacios irreducibles que aparecerán, por ser SO(3) completamente reducible, en la descomposición suma directa.

Finalmente, podríamos preguntarnos por qué no usamos directamente como grupo de partida a SU(2) y nos ahorramos toda esta discusión. Desde mi punto de vista se debe a que SU(2) es un auxiliar matemático de la teoría y sólo sirve de soporte para representar a SO(3), que es el grupo que sabemos interpretar físicamente.

D.1. Álgebra de Lie de un grupo de Lie de matrices

El **álgebra de Lie** sobre un cuerpo \mathbb{K} es un espacio vectorial \mathfrak{g} sobre \mathbb{K} , equipado con un mapa "bracket" $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que tiene las siguientes propiedades

1. $[\cdot, \cdot]$ es bilineal.
2. $[X, Y] = -[Y, X]$ para toda $X, Y \in \mathfrak{g}$.
3. $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.
4. Para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ se cumple la identidad de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] = [Y, [Z, X]] = [Z, [X, Y]] = 0.$$

Como el producto del álgebra actúa bilinealmente, este queda determinado de forma única por su acción en una base del espacio \mathfrak{g} . Es decir, si el conjunto $\{X_1, \dots, X_m\}$ es una base cualquiera de \mathfrak{g} , y $U, V \in \mathfrak{g}$ dos vectores arbitrarios: $[U, V] = [\sum_{i=1}^m u^i X_i, \sum_{j=1}^m v^j X_j] = \sum_{i,j=1}^m u^i v^j [X_i, X_j]$, entonces existe un conjunto de constantes tal que

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^m c_{ijk} X_k.$$

Las constantes c_{ijk} se llaman **constantes de estructura** de \mathfrak{g} (respecto de la base elegida) y deben satisfacer dos propiedades respecto de sus índices para que el bracket sea antisimétrico y cumpla la identidad de Jacobi.

El **álgebra de Lie** de un **grupo de Lie de matrices** G , denotada \mathfrak{g} , es el conjunto de todas las matrices X tales que $e^{tX} \in G$ para todos números reales t :

$$\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{C}) | e^{tX} \in G \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

Esto significa que X está en \mathfrak{g} sí y sólo sí el subgrupo monoparamétrico generado por X está en G . Definiendo el producto como el conmutador $[X, Y] = XY - YX$, se puede demostrar que tal conjunto tiene la estructura algebraica abstracta de un álgebra de Lie (ver [1]:43).

En particular si $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{su}(n)$ y $\mathfrak{so}(n)$ denotan las respectivas álgebras de $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $SU(n)$ y $SO(n)$, entonces [2]

1. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$, por lo que dada una base en \mathbb{C}^n $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \simeq \mathcal{B}(V = \mathbb{C}^n)$
2. $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) | \text{tr}(X) = 0\}$
3. $\mathfrak{su}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) | \text{tr}(X) = 0 \text{ y } X^* = -X\}$
4. $\mathfrak{so}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) | X^t = -X\}$, la condición implica automáticamente que estas matrices tienen traza nula.

¹La convención en usada física es $e^{itX} \in G$ para todo t en los reales. También usualmente se refieren al álgebra del Lie del grupo como el espacio de los elementos infinitesimales del grupo. Generalmente tampoco se distingue claramente el grupo de Lie y su álgebra de Lie asociada.

²Ver [1]:39.

D.2. Representaciones de álgebras de Lie

Una **representación del álgebra de Lie** de un grupo es un homomorfismo de álgebras de Lie π de \mathfrak{g} a $\mathfrak{gl}(V) \simeq \mathcal{B}(V)$, donde V es un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita. Como mencionamos al principio del capítulo una representación del grupo de Lie induce de forma natural una representación del álgebra del Lie, este resultado se expone en el siguiente teorema:

Teorema D.2.1. Sean G y H dos grupos de Lie de matrices, con álgebras de Lie \mathfrak{g} y \mathfrak{h} , respectivamente. Sea $\Phi : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie³. Entonces existe un mapa lineal y real único $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tal que

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. El mapa ψ tiene las siguientes propiedades:

1. $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A^{-1})$, para todo $X \in \mathfrak{g}$, $A \in G$.
2. $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$, para toda $X, Y \in \mathfrak{g}$.
3. $\phi(X) = \left. \frac{d}{dt} \Phi(e^{tX}) \right|_{t=0}$

Supongamos que G, H y K son grupos de Lie de matrices, con $\Phi : H \rightarrow K$ y $\Psi : G \rightarrow H$ homomorfismo de grupos de Lie. Sea $\Lambda : G \rightarrow K$ la composición entre Φ y Ψ , $\Lambda(A) = \Phi(\Psi(A))$. Sean ϕ, ψ y λ sus mapas asociados de álgebras de Lie. Entonces,

$$\lambda(X) = \phi(\psi(X)).$$

Demostración: [1]:45.

Si identificamos H con $GL(V)$ para algún espacio vectorial complejo o real V de dimensión finita y $\mathfrak{h} = \mathcal{B}(V) = \mathfrak{gl}(V)$, entonces se sigue que dada una representación de grupo de Lie se puede construir de forma única una representación de su álgebra de Lie asociada. En la práctica, el mapa ϕ se calcula usando la propiedad 3.

Veremos a continuación que la recíproca es cierta si el grupo tiene la propiedad de ser simplemente conexo.

Teorema D.2.2. Sean G y H grupos de Lie de matrices con álgebras \mathfrak{g} y \mathfrak{h} . Sea $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ un homomorfismo de álgebra de Lie. Si G es simplemente conexo, entonces existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : G \rightarrow H$ tal que $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Demostración: [1]:76.

Nuevamente, en clave de representaciones, esto significa que dada una representación de álgebra de Lie de un grupo simplemente conexo, esta puede ser exponenciada para dar lugar a una representación del grupo. Esto da lugar a la siguiente definición.

³Esto es un homomorfismo de grupos que además es continuo. Esta definición tiene sentido porque se puede demostrar que todo grupo de Lie de matrices se encuentra embebido suavemente en una subvariedad diferenciable de $M_n(\mathbb{C})$, se puede ver también que el álgebra de Lie del grupo puede ser pensada como el espacio tangente a la identidad.

Definición D.2.3. Sea G un grupo de Lie conexo. Luego, el **cubrimiento universal de G** es un par ordenado (\tilde{G}, Φ) constituido por un grupo de Lie simplemente conexo \tilde{G} y un homomorfismo de grupo de Lie $\Phi : \tilde{G} \rightarrow G$ tal que el homomorfismo de álgebras de Lie asociado $\phi : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$ es un isomorfismo del álgebras de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ de \tilde{G} . El mapa Φ se llama **mapa cubrimiento** para \tilde{G} .

Supongamos que \tilde{G} es un grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ que es isomorfa con \mathfrak{g} . Entonces, la elección de un isomorfismo particular $\phi : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$ da lugar, por el teorema 4.2.2, a un homomorfismo de grupos $\phi : \tilde{G} \rightarrow G$. Esto es exactamente lo que sucede entre $SU(2) = \tilde{G}$, que es simplemente conexo, y $SO(3) = G$, que es conexo.

Ademas el estudio de las representaciones irreducibles es intercambiable a nivel del álgebra y del grupo, como se expresa en la siguiente proposición:

Proposición D.2.4. *Sea G un grupo de Lie de matrices conexo con álgebra de Lie \mathfrak{g} . Sea Π una representación de G y π la correspondiente representación del álgebra de Lie asociada. Entonces, Π es irreducible si y solamente si π es irreducible.*

La afirmación anterior nos indica que podemos investigar las representaciones irreducibles del grupo vía las irreducibles asociadas al álgebra. Esto es de suma utilidad puesto que en algunos casos es más fácil trabajar con el álgebra, por ser ésta un espacio vectorial.

D.3. $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{so}(3)$

Verificaremos el hecho de que $SU(2)$ es el cubrimiento universal de $SO(3)$ y veremos cómo podemos usar este resultado para construir representaciones irreducibles de $SO(3)$. Nos interesan entonces los casos $\mathfrak{so}(3)$ y $\mathfrak{su}(2)$, que son espacios vectoriales reales de dimensión $n=3$. Ambos quedan descriptos paramétricamente por:

$$\mathfrak{so}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Podemos usar la siguiente base para $\mathfrak{so}(3)$:

$$\left\{ F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Luego, las constantes de estructura del bracket, para esta base, quedan definidas por las reglas de conmutación”, se puede verificar por cálculo directo que:

$$[F_i, F_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} F_k.$$

En el caso de $\mathfrak{su}(2)$ tenemos la siguiente descripción paramétrica:

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & b + ic \\ -b + ic & -ia \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Y usamos la siguiente base de $\mathfrak{su}(2)$:

$$\left\{ E_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; E_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; E_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Estas son las matrices de Pauli multiplicadas por un factor, $E_k = \frac{i}{2}\sigma_k$, $k = 1, 2, 3$. Si recordamos las reglas de conmutación de las matrices de Pauli es fácil verificar que:

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} E_k.$$

Estas son las mismas relaciones que satisfacen los elementos de base de $\mathfrak{so}(3)$, F_i , $i = 1, 2, 3$. Entonces, hay un isomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ tal que $\phi(E_k) = F_k$, $k = 1, 2, 3$. Explicitado el isomorfismo podemos afirmar a continuación:

Proposición D.3.1. *Sea $\Phi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ el único homomorfismo para el homomorfismo de álgebra de Lie asociada $\phi : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$, que satisfaga $\phi(E_k) = F_k$, $k = 1, 2, 3$. Entonces el $\ker(\Phi) = \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$ y $(SU(2), \Phi)$ es el cubrimiento universal de $SO(3)$.*

Demostración: [I2]:349.

Como estas álgebras de Lie son isomorfas, entonces deben tener las mismas representaciones. Concretamente, si π es una representación de $\mathfrak{su}(2)$, luego $\pi \circ \phi^{-1}$ es una representación de $\mathfrak{so}(3)$, y toda representación de $\mathfrak{so}(3)$ es de esta forma. En particular si π_m es una representación irreducible de $\mathfrak{su}(2)$, se sigue que $\sigma_m = \pi_m \circ \phi^{-1}$ es una representación irreducible de $\mathfrak{so}(3)$. Luego, bajo la óptica del Teorema 4.2.1 y la Proposición 4.2.4, nos interesa determinar si para un algún π_m particular, existe una representación irreducible Σ_m de $SO(3)$ tal que $\Sigma_m(e^X) = e^{\sigma_m(X)} = e^{\pi_m \circ \phi^{-1}(X)}$ para todo $X \in \mathfrak{so}(3)$.

Por lo tanto, en primer lugar, tenemos que buscar (salvo equivalencia) las representaciones complejas irreducibles de dimensión finita π_m de $\mathfrak{su}(2)$. Explotaremos el hecho de que la complexificación $\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2) = \left\{ \sum_{i=1}^3 b_i E_i \mid b_i \in \mathbb{C} \right\}$ está constituida de matrices arbitrarias de traza nula y por lo tanto es isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, esto nos sirve para usar una base con constantes de estructuras que simplifiquen el problema. Es necesario señalar que cualquier representación irreducible de álgebra de Lie real se extiende únicamente a una irreducible de su complexificación y viceversa⁴.

Usamos la de base natural para $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ de matrices complejas $\sigma_3, \sigma_+, \sigma_-$, que se obtienen de las matrices de Pauli $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$:

$$\left\{ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Con las relaciones de conmutación $[\sigma_3, \sigma_{\pm}] = \pm 2\sigma_{\pm}$, $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_3$. Si V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita y J_3, J_+ y J_- operadores en V que satisfagan $[J_3, J_{\pm}] = \pm 2J_{\pm}$, $[J_+, J_-] = J_3$ ($J = 2L$, el doble del momento angular usual L), entonces el mapa lineal $\pi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ que satisface $\pi(\sigma_{3,\pm}) = J_{3,\pm}$ es una representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, y por lo tanto de $\mathfrak{su}(2)$ también, vía una transformación lineal que va de una base a otra.

Supongamos ahora que π es una representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ actuando en V .

⁴ver [II]:80.

Nuestra estrategia será diagonalizar $\pi(\sigma_3) = J_3$, aunque a priori no sabemos si es diagonalizable. Sin embargo, como estamos trabajando sobre el cuerpo complejo (que es algebraicamente cerrado), J_3 debe tener al menos un autovector. Sea ψ tal autovector, asociado al autovalor α , esto es, $J_3\psi = \alpha\psi$. Luego, por las reglas de conmutación se sigue que:

$$\begin{aligned} J_3(J_{\pm}\psi) &= (2J_{\pm} \pm J_{\pm}J_3)\psi \\ &= (\alpha \pm 2)J_{\pm}\psi, \end{aligned}$$

por lo que $J_{\pm}\psi$ es un autovector de J_3 con autovalor $\alpha \pm 2$ o es el nulo 0. Obtuvimos, así, autovalores escalera separados por 2. Si empezamos con cualquier autovector y autovalor, sucede $\alpha + 2, \alpha + 4, \dots$. Como esta secuencia tiene que terminar (porque estamos en un espacio vectorial de dimensión finita), J_3 debe tener un autovalor máximo q con un autovector asociado ψ_0 tal que $J_+\psi_0 = 0$. Entonces definimos $\psi_1 = L_-\psi_0, \psi_2 = L_-^2\psi_0, \dots, \psi_m, m \geq 0$, de modo que $L_-\psi_m = 0$, puesto que esta cadena tiene que terminar también. Luego, tenemos:

$$\begin{aligned} J_3\psi_p &= (q - 2p)\psi_p, \quad p = 0, \dots, m, \\ J_-\psi_p &= \psi_{p+1}, \quad p = 0, \dots, m - 1, \\ J_-\psi_m &= 0. \end{aligned}$$

Computemos la acción de J_+ . Sabemos que $J_+\psi_0 = 0$ por lo que

$$\begin{aligned} J_+\psi_1 &= J_+J_-\psi_0 = [J_+, J_-]\psi_0 \\ &= q\psi_0. \end{aligned}$$

Si $J_+\psi_p = \mu_p\psi_{p-1}$, entonces

$$\begin{aligned} J_+\psi_{p+1} &= J_+J_-\psi_p = [J_+, J_-]\psi_p + J_-J_+\psi_p \\ &= [(q - 2p) + \mu_p]\psi_p, \end{aligned}$$

esto es, $\mu_{p+1} = (q - 2p) + \mu_p; \mu_1 = q$. La solución inductiva es $\mu_p = p(q - p + 1)$. Así,

$$J_+\psi_0 = 0$$

$$J_+\psi_p = p(q - p + 1)\psi_{p-1} \quad p = 1, \dots, m$$

Finalmente, tenemos que chequear que

$$[L_+, L_-]\psi_m = L_3\psi_m.$$

Esto requiere $-m(q - m + 1) = q - 2m$, es decir, $(m + 1)(q - m) = 0$ o (como $m \geq 0$) $q = m$. Por lo que q es un entero positivo. Claramente $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_m$ expanden un subespacio invariante (son linealmente independientes por ser autovectores a autovalores distintos), luego por irreducibilidad expanden el espacio entero. Incluso es fácil ver que J_{\pm}, J_3 definidos por las relaciones anteriores obedecen las reglas de conmutación mientras que $q = m$. Entonces:

Teorema D.3.2. *Las representaciones irreducibles (π_m, V_m) de $su(2)$ están parametrizadas por un entero no negativo $m = 0, 1, \dots$ con $\dim(V_m) = m + 1$. J_3 tiene autovalores $m, m - 2, \dots, -m$ y J_{\pm} dados por las ecuaciones anteriores.*

Ahora, si miramos cuidadosamente la demostración del teorema, vemos que el argumento nos indica algo sobre cualquier representación de dimensión finita (no necesariamente irreducible). En particular hasta el final de la prueba no usamos el argumento de irreducibilidad, que se introduce para afirmar que los autovectores expanden el espacio completo. Por lo que obtuvimos los siguientes resultados para representaciones de dimensión arbitraria y finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$:

Teorema D.3.3. *Supongamos que π es una representación de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ actuando en un espacio V . Entonces:*

1. *Todo autovalor de $\pi(\sigma_3)$ debe ser entero.*
2. *Si ψ es un elemento no nulo de V tal que $\pi(\sigma_+) \psi = 0$ y $\pi(\sigma_3) \psi = \lambda \psi$. Entonces hay un entero no negativo $m = \lambda$ tal que los vectores $\psi, \pi(\sigma_-) \psi, \dots, \pi(\sigma_-)^m \psi$ son linealmente independientes y expanden un subespacio irreducible de dimensión $m + 1$.*

La demostración del teorema anterior está contenida en la demostración del Teorema 4.2.6, faltaría verificar que el conjunto expande un espacio irreducible. Para esto supongamos que hay un subespacio invariante $W \subseteq \pi_m = \text{span}\{\psi, \pi(\sigma_-) \psi, \dots, \pi(\sigma_-)^m \psi\}$, luego consideremos un vector arbitrario no nulo en W , digamos $v = \sum_{l=0}^{m+1} a_l \pi(\sigma_-)^l \psi$, y sea $n = \max\{l \in \mathbb{N} \mid a_l \neq 0\}$, luego aplicando directamente los operadores escaleras es claro que $\pi(\sigma_-)^l \psi$ debe ser un elemento de W , y por lo tanto todos los autovectores que expanden el subespacio, así $W = \pi_m$.

Hasta ahora hemos discutido representaciones irreducibles del álgebra de Lie de $\mathfrak{su}(2)$, que sabemos que son las mismas que las de $\mathfrak{so}(3)$, y por consiguiente las representaciones irreducibles del grupo $SU(2)$ ¿Qué sucede con $SO(3)$? Como el grupo de rotaciones no es simplemente conexo, no se cumple que toda representación del álgebra induce una del grupo, el siguiente teorema afirma cuándo esto sí sucede.

Teorema D.3.4. *Sea $\sigma_m = \pi_m \circ \phi^{-1}$ una representación irreducible compleja del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ ($m \geq 0$). Si m es impar, entonces existe una representación Σ_m del grupo $SO(3)$ tal que $\Sigma_m e^X = e^{\sigma_m(X)}$ para todo X en $\mathfrak{so}(3)$. Si m es par, entonces no hay tal representación de $SO(3)$. Demostración: [1]:117.*

En la literatura física $m = 2l$, donde l queda definido como el spín de la partícula, cuando l es semi-entero no hay representación y cuando l es entero sí. Si el spín es semi-entero se puede definir, sin embargo, una representación proyectiva.

D.4. Mapa Adjunto

Sea G un grupo de Lie de matrices, con álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Definición D.4.1. Entonces, para toda $A \in G$, se define un mapa lineal $\text{Ad}_A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ por la fórmula

$$\text{Ad}_A(X) = AXA^{-1}.$$

Proposición D.4.2. Denotamos con $GL(\mathfrak{g})$ al grupo de todas las transformaciones invertibles de \mathfrak{g} . Entonces, para cada $A \in G$, Ad_A es un transformación lineal invertible de \mathfrak{g} con inversa $Ad_{A^{-1}}$, y el mapa $A \rightarrow Ad_A$ es un homomorfismo de grupos entre G y $GL(\mathfrak{g})$. Aún más, por cada $A \in G$, Ad_A satisface $Ad_A([X, Y]) = [Ad_A(X), Ad_A(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Como \mathfrak{g} es un espacio vectorial de dimensión k , $GL(\mathfrak{g})$ es algún grupo de Lie de matrices $GL(k, \mathbb{R})$. Es fácil ver que $Ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ es continuo, por lo que es un homomorfismo de grupos de Lie o una representación. Por el Teorema 4.0.1, hay una representación del álgebra de Lie asociada que mapea $X \rightarrow ad_X$ del álgebra de Lie de G al álgebra de Lie de $GL(\mathfrak{g})$ (i.e., de $\mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$) con la propiedad que:

$$e^{ad_X} = Ad(e^X)$$

Proposición D.4.3. Sea $Ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ el homomorfismo de grupos de Lie definido anteriormente. Sea $ad : \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$ el mapa de álgebra de Lie asociada. Luego, para toda $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$ad_X(Y) = [X, Y]$$

Demostración: Por el punto 3. del Teorema 4.0.1 podemos computar ad de la siguiente manera:

$$ad_x = \left. \frac{d}{dt} Ad(e^{tX}) \right|_{t=0}$$

Entonces,

$$ad_x(Y) = \left. \frac{d}{dt} Ad(e^{tX})(Y) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} e^{tX} Y e^{-tX} \right|_{t=0} = [X, Y].$$

Q.E.D.

De lo que se sigue directamente que:

Proposición D.4.4. Para cualquier $X \in M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ dado por $ad_X Y = [X, Y]$. Entonces, para cualquier $Y \in M_n(\mathbb{C})$, tenemos que:

$$e^{ad_X} Y = Ad_{e^X} Y = e^X Y e^{-X}.$$

Apéndice E

Tablas de OTESI $n=2,3,4$

La base de OTESIS (salvo normalización) para n=3:

Para L= 0 :

1) :

$$1.0 \text{ I X (J3) X (J3) + 0.5 I X (J+) X (J-) + 0.5 I X (J-) X (J+)}$$

2) :

$$1.0 \text{ (J3) X (J3) X I + 0.5 (J+) X (J-) X I + 0.5 (J-) X (J+) X I}$$

3) :

$$1.0 \text{ (J3) X I X (J3) + 0.5 (J+) X I X (J-) + 0.5 (J-) X I X (J+)}$$

4) :

$$1.0 \text{ I X I X I}$$

5) :

$$-1.0 \text{ (J+) X (J-) X (J3) + 1.0 (J-) X (J+) X (J3) + 1.0 (J+) X (J3) X (J-) + -1.0 (J3) X (J+) X (J-) + -1.0 (J-) X (J3) X (J+) + 1.0 (J3) X (J-) X (J+)}$$

Para L= 1 :

1) :

$$1.0 \text{ (J+) X (J3) X (J3) + 0.5 (J+) X (J+) X (J-) + 0.5 (J+) X (J-) X (J+)}$$

$$-2.0 \text{ (J3) X (J3) X (J3) + -1.0 (J3) X (J+) X (J-) + -1.0 (J3) X (J-) X (J+)}$$

$$-2.0 \text{ (J-) X (J3) X (J3) + -1.0 (J-) X (J+) X (J-) + -1.0 (J-) X (J-) X (J+)}$$

2) :

$$1.0 \text{ I X I X (J+)}$$

$$-2.0 \text{ I X I X (J3)}$$

$$-2.0 \text{ I X I X (J-)}$$

3) :

$$-1.0 \text{ (J+) X I X (J3) + 1.0 (J3) X I X (J+)}$$

$$-1.0 \text{ (J+) X I X (J-) + 1.0 (J-) X I X (J+)}$$

$$-2.0 \text{ (J-) X I X (J3) + 2.0 (J3) X I X (J-)}$$

4) :

$$1.0 \text{ I X (J+) X I}$$

$$-2.0 \text{ I X (J3) X I}$$

$$-2.0 \text{ I X (J-) X I}$$

5) :

$$1.0 \text{ (J3) X (J3) X (J+) + 0.5 (J+) X (J-) X (J+) + 0.5 (J-) X (J+) X (J+)}$$

$$-2.0 \text{ (J3) X (J3) X (J3) + -1.0 (J+) X (J-) X (J3) + -1.0 (J-) X (J+) X (J3)}$$

$$-2.0 \text{ (J3) X (J3) X (J-) + -1.0 (J+) X (J-) X (J-) + -1.0 (J-) X (J+) X (J-)}$$

6) :

$$1.0 \text{ (J+) X (J3) X I + -1.0 (J3) X (J+) X I}$$

$$1.0 \text{ (J+) X (J-) X I + -1.0 (J-) X (J+) X I}$$

$$2.0 (J-) \times (J3) \times I + -2.0 (J3) \times (J-) \times I$$

7) :

$$1.0 (J+) \times I \times I$$

$$-2.0 (J3) \times I \times I$$

$$-2.0 (J-) \times I \times I$$

8) :

$$1.0 I \times (J+) \times (J3) + -1.0 I \times (J3) \times (J+)$$

$$1.0 I \times (J+) \times (J-) + -1.0 I \times (J-) \times (J+)$$

$$2.0 I \times (J-) \times (J3) + -2.0 I \times (J3) \times (J-)$$

9) :

$$1.0 (J3) \times (J+) \times (J3) + 0.5 (J+) \times (J+) \times (J-) + 0.5 (J-) \times (J+) \times (J+)$$

$$-2.0 (J3) \times (J3) \times (J3) + -1.0 (J+) \times (J3) \times (J-) + -1.0 (J-) \times (J3) \times (J+)$$

$$-2.0 (J3) \times (J-) \times (J3) + -1.0 (J+) \times (J-) \times (J-) + -1.0 (J-) \times (J-) \times (J+)$$

Para L= 2 :

1) :

$$1.0 (J+) \times I \times (J+)$$

$$-2.0 (J+) \times I \times (J3) + -2.0 (J3) \times I \times (J+)$$

$$8.0 (J3) X I X (J3) + -2.0 (J+) X I X (J-) + -2.0 (J-) X I X (J+)$$

$$12.0 (J-) X I X (J3) + 12.0 (J3) X I X (J-)$$

$$24.0 (J-) X I X (J-)$$

2) :

$$-1.0 (J+) X (J+) X (J3) + 1.0 (J+) X (J3) X (J+)$$

$$2.0 (J3) X (J+) X (J3) + -1.0 (J+) X (J+) X (J-) + -2.0 (J3) X (J3) X (J+) + 1.0 (J+) X (J-) X (J+)$$

$$-2.0 (J+) X (J-) X (J3) + 2.0 (J-) X (J+) X (J3) + 2.0 (J+) X (J3) X (J-) + 4.0 (J3) X (J+) X (J-) + -2.0 (J-) X (J3) X (J+) + -4.0 (J3) X (J-) X (J+)$$

$$12.0 (J3) X (J-) X (J3) + -12.0 (J3) X (J3) X (J-) + 6.0 (J-) X (J+) X (J-) + -6.0 (J-) X (J-) X (J+)$$

$$24.0 (J-) X (J-) X (J3) + -24.0 (J-) X (J3) X (J-)$$

3) :

$$1.0 (J+) X (J+) X I$$

$$-2.0 (J+) X (J3) X I + -2.0 (J3) X (J+) X I$$

$$8.0 (J3) X (J3) X I + -2.0 (J+) X (J-) X I + -2.0 (J-) X (J+) X I$$

$$12.0 (J-) X (J3) X I + 12.0 (J3) X (J-) X I$$

$$24.0 (J-) X (J-) X I$$

4) :

$$1.0 \text{ I X (J+) X (J+)}$$

$$-2.0 \text{ I X (J+) X (J3) + -2.0 I X (J3) X (J+)}$$

$$8.0 \text{ I X (J3) X (J3) + -2.0 I X (J+) X (J-) + -2.0 I X (J-) X (J+)}$$

$$12.0 \text{ I X (J-) X (J3) + 12.0 I X (J3) X (J-)}$$

$$24.0 \text{ I X (J-) X (J-)}$$

5) :

$$-1.0 \text{ (J+) X (J+) X (J3) + 1.0 (J3) X (J+) X (J+)}$$

$$2.0 \text{ (J+) X (J3) X (J3) + -1.0 (J+) X (J+) X (J-) + -2.0 (J3) X (J3) X (J+) + 1.0 (J-) X (J+) X (J+)}$$

$$2.0 \text{ (J+) X (J-) X (J3) + -2.0 (J-) X (J+) X (J3) + 4.0 (J+) X (J3) X (J-) + 2.0 (J3) X (J+) X (J-) + -4.0 (J-) X (J3) X (J+) + -2.0 (J3) X (J-) X (J+)}$$

$$12.0 \text{ (J-) X (J3) X (J3) + -12.0 (J3) X (J3) X (J-) + 6.0 (J+) X (J-) X (J-) + -6.0 (J-) X (J-) X (J+)}$$

$$24.0 \text{ (J-) X (J-) X (J3) + -24.0 (J3) X (J-) X (J-)}$$

Para L= 3 :

1) :

$$1.0 \text{ (J+) X (J+) X (J+)}$$

$$-2.0 \text{ (J+) X (J+) X (J3) + -2.0 (J+) X (J3) X (J+) + -2.0 (J3) X (J+) X (J+)}$$

$$8.0 (J+) \times (J3) \times (J3) + 8.0 (J3) \times (J+) \times (J3) + -2.0 (J+) \times (J+) \times (J-) + 8.0 (J3) \times (J3) \times (J+) + -2.0 (J+) \times (J-) \times (J+) + -2.0 (J-) \times (J+) \times (J+)$$

$$-48.0 (J3) \times (J3) \times (J3) + 12.0 (J+) \times (J-) \times (J3) + 12.0 (J-) \times (J+) \times (J3) + 12.0 (J+) \times (J3) \times (J-) + 12.0 (J3) \times (J+) \times (J-) + 12.0 (J-) \times (J3) \times (J+) + 12.0 (J3) \times (J-) \times (J+)$$

$$-96.0 (J-) \times (J3) \times (J3) + -96.0 (J3) \times (J-) \times (J3) + -96.0 (J3) \times (J3) \times (J-) + 24.0 (J+) \times (J-) \times (J-) + 24.0 (J-) \times (J+) \times (J-) + 24.0 (J-) \times (J-) \times (J+)$$

$$-240.0 (J-) \times (J-) \times (J3) + -240.0 (J-) \times (J3) \times (J-) + -240.0 (J3) \times (J-) \times (J-)$$

$$-720.0 (J-) \times (J-) \times (J-)$$

La base de OTESIS (salvo normalización) para n=4:

Para L= 0 :

1) :

$$-1.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J3) + 1.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J3) + -1.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J3) + 1.0 (J3) X (J-) X (J+) X (J3) + 1.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J-) + -1.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J-) + 0.5 (J+) X (J-) X (J+) X (J-) + -0.5 (J-) X (J+) X (J+) X (J-) + 1.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J+) + -1.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J+) + -0.5 (J+) X (J-) X (J-) X (J+) + 0.5 (J-) X (J+) X (J-) X (J+)$$

2) :

$$1.0 (J3) X I X (J3) X I + 0.5 (J+) X I X (J-) X I + 0.5 (J-) X I X (J+) X I$$

3) :

$$1.0 I X I X I X I$$

4) :

$$1.0 (J3) X (J3) X I X I + 0.5 (J+) X (J-) X I X I + 0.5 (J-) X (J+) X I X I$$

5) :

$$1.0 I X I X (J3) X (J3) + 0.5 I X I X (J+) X (J-) + 0.5 I X I X (J-) X (J+)$$

6) :

$$1.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J3) + 0.5 (J+) X (J3) X (J-) X (J3) + 0.5 (J-) X (J3) X (J+) X (J3) + 0.5 (J3) X (J+) X (J3) X (J-) + 0.25 (J+) X (J+) X (J-) X (J-) + 0.25 (J-) X (J+) X (J+) X (J-) + 0.5 (J3) X (J-) X (J3) X (J+) + 0.25 (J+) X (J-) X (J-) X (J+) + 0.25 (J-) X (J-) X (J+) X (J+)$$

7) :

$$-1.0 (J+) X I X (J-) X (J3) + 1.0 (J-) X I X (J+) X (J3) + 1.0 (J+) X I X (J3) X (J-) + -1.0 (J3) X I X (J+) X (J-) + -1.0 (J-) X I X (J3) X (J+) + 1.0 (J3) X I X (J-) X (J+)$$

8) :

$$1.0 (J3) X I X I X (J3) + 0.5 (J+) X I X I X (J-) + 0.5 (J-) X I X I X (J+)$$

9) :

$$1.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J3) + 1.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J3) + -1.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J3) + -1.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J3) + -1.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J-) + -0.5 (J+) X (J+) X (J-) X (J-) + 1.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J-) + 0.5 (J+) X (J-) X (J+) X (J-) + -1.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J+) + 1.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J+) + 0.5 (J-) X (J+) X (J-) X (J+) + -0.5 (J-) X (J-) X (J+) X (J+)$$

10) :

$$-1.0 (J+) X (J-) X (J3) X I + 1.0 (J-) X (J+) X (J3) X I + 1.0 (J+) X (J3) X (J-) X I + -1.0 (J3) X (J+) X (J-) X I + -1.0 (J-) X (J3) X (J+) X I + 1.0 (J3) X (J-) X (J+) X I$$

11) :

$$-1.0 I X (J+) X (J-) X (J3) + 1.0 I X (J-) X (J+) X (J3) + 1.0 I X (J+) X (J3) X (J-) + -1.0 I X (J3) X (J+) X (J-) + -1.0 I X (J-) X (J3) X (J+) + 1.0 I X (J3) X (J-) X (J+)$$

12) :

$$1.0 I X (J3) X I X (J3) + 0.5 I X (J+) X I X (J-) + 0.5 I X (J-) X I X (J+)$$

13) :

$$-1.0 (J+) X (J-) X I X (J3) + 1.0 (J-) X (J+) X I X (J3) + 1.0 (J+) X (J3) X I X (J-) + -1.0 (J3) X (J+) X I X (J-) + -1.0 (J-) X (J3) X I X (J+) + 1.0 (J3) X (J-) X I X (J+)$$

14) :

$$1.0 I X (J3) X (J3) X I + 0.5 I X (J+) X (J-) X I + 0.5 I X (J-) X (J+) X I$$

Para L= 1 :

1) :

$$1.0 (J+) X (J3) X (J3) X I + 0.5 (J+) X (J+) X (J-) X I + 0.5 (J+) X (J-) X (J+) X I$$

$$-2.0 (J3) X (J3) X (J3) X I + -1.0 (J3) X (J+) X (J-) X I + -1.0 (J3) X (J-) X (J+) X I$$

$$-2.0 (J-) X (J3) X (J3) X I + -1.0 (J-) X (J+) X (J-) X I + -1.0 (J-) X (J-) X (J+) X I$$

2) :

$$-1.0 (J+) X I X (J3) X I + 1.0 (J3) X I X (J+) X I$$

$$-1.0 (J+) X I X (J-) X I + 1.0 (J-) X I X (J+) X I$$

$$-2.0 (J-) X I X (J3) X I + 2.0 (J3) X I X (J-) X I$$

3) :

$$1.0 I X I X I X (J+)$$

$$-2.0 I X I X I X (J3)$$

$$-2.0 I X I X I X (J-)$$

4) :

$$1.0 (J3) X (J3) X (J+) X I + 0.5 (J+) X (J-) X (J+) X I + 0.5 (J-) X (J+) X (J+) X I$$

$$-2.0 (J3) X (J3) X (J3) X I + -1.0 (J+) X (J-) X (J3) X I + -1.0 (J-) X (J+) X (J3) X I$$

$$-2.0 (J3) X (J3) X (J-) X I + -1.0 (J+) X (J-) X (J-) X I + -1.0 (J-) X (J+) X (J-) X I$$

5) :

$$-1.0 I X (J+) X I X (J3) + 1.0 I X (J3) X I X (J+)$$

$$-1.0 I X (J+) X I X (J-) + 1.0 I X (J-) X I X (J+)$$

$$-2.0 I X (J-) X I X (J3) + 2.0 I X (J3) X I X (J-)$$

6) :

$$1.0 (J3) X (J3) X I X (J+) + 0.5 (J+) X (J-) X I X (J+) + 0.5 (J-) X (J+) X I X (J+)$$

$$-2.0 (J3) X (J3) X I X (J3) + -1.0 (J+) X (J-) X I X (J3) + -1.0 (J-) X (J+) X I X (J3)$$

$$-2.0 (J3) X (J3) X I X (J-) + -1.0 (J+) X (J-) X I X (J-) + -1.0 (J-) X (J+) X I X (J-)$$

7) :

$$1.0 (J3) X I X (J+) X (J3) + 0.5 (J+) X I X (J+) X (J-) + 0.5 (J-) X I X (J+) X (J+)$$

$$-2.0 (J3) X I X (J3) X (J3) + -1.0 (J+) X I X (J3) X (J-) + -1.0 (J-) X I X (J3) X (J+)$$

$$-2.0 (J3) X I X (J-) X (J3) + -1.0 (J+) X I X (J-) X (J-) + -1.0 (J-) X I X (J-) X (J+)$$

8) :

$$1.0 (J+) X I X (J3) X (J3) + 0.5 (J+) X I X (J+) X (J-) + 0.5 (J+) X I X (J-) X (J+)$$

$$-2.0 (J3) X I X (J3) X (J3) + -1.0 (J3) X I X (J+) X (J-) + -1.0 (J3) X I X (J-) X (J+)$$

$$-2.0 (J-) X I X (J3) X (J3) + -1.0 (J-) X I X (J+) X (J-) + -1.0 (J-) X I X (J-) X (J+)$$

9) :

$$1.0 I X (J+) X I X I$$

$$-2.0 I X (J3) X I X I$$

$$-2.0 I X (J-) X I X I$$

10) :

$$1.0 (J+) X (J3) X I X (J3) + 0.5 (J+) X (J+) X I X (J-) + 0.5 (J+) X (J-) X I X (J+)$$

$$-2.0 (J3) X (J3) X I X (J3) + -1.0 (J3) X (J+) X I X (J-) + -1.0 (J3) X (J-) X I X (J+)$$

$$-2.0 (J-) X (J3) X I X (J3) + -1.0 (J-) X (J+) X I X (J-) + -1.0 (J-) X (J-) X I X (J+)$$

11) :

$$1.0 I X (J3) X (J+) X (J3) + 0.5 I X (J+) X (J+) X (J-) + 0.5 I X (J-) X (J+) X (J+)$$

$$-2.0 I X (J3) X (J3) X (J3) + -1.0 I X (J+) X (J3) X (J-) + -1.0 I X (J-) X (J3) X (J+)$$

$$-2.0 I X (J3) X (J-) X (J3) + -1.0 I X (J+) X (J-) X (J-) + -1.0 I X (J-) X (J-) X (J+)$$

12) :

$$-1.0 I X I X (J+) X (J3) + 1.0 I X I X (J3) X (J+)$$

$$-1.0 I X I X (J+) X (J-) + 1.0 I X I X (J-) X (J+)$$

$$-2.0 I X I X (J-) X (J3) + 2.0 I X I X (J3) X (J-)$$

13) :

$$1.0 (J3) X I X (J3) X (J+) + 0.5 (J+) X I X (J-) X (J+) + 0.5 (J-) X I X (J+) X (J+)$$

$$-2.0 (J3) X I X (J3) X (J3) + -1.0 (J+) X I X (J-) X (J3) + -1.0 (J-) X I X (J+) X (J3)$$

$$-2.0 (J3) X I X (J3) X (J-) + -1.0 (J+) X I X (J-) X (J-) + -1.0 (J-) X I X (J+) X (J-)$$

14) :

$-1.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J3) + 1.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J3) + 0.5 (J+) X (J-) X (J+) X (J3) + -0.5 (J-) X (J+) X (J+) X (J3) + -0.5 (J+) X (J+) X (J3) X (J-) + -0.5 (J+) X (J3) X (J+) X (J-) + 1.0 (J3) X (J+) X (J+) X (J-) + -0.5 (J+) X (J-) X (J3) X (J+) + 0.5 (J-) X (J3) X (J+) X (J+)$

$-1.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J3) + 1.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J3) + -1.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J3) + 1.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J3) + 1.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J-) + -1.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J-) + -0.5 (J+) X (J+) X (J-) X (J-) + 0.5 (J-) X (J+) X (J+) X (J-) + -1.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J+) + 1.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J+) + -0.5 (J+) X (J-) X (J-) X (J-) X (J+) + 0.5 (J-) X (J-) X (J+) X (J+)$

$-2.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J3) + 2.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J3) + -1.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J3) + 1.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J3) + -1.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J-) + 1.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J-) + -1.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J+) + -1.0 (J-) X (J3) X (J-) X (J+) + 2.0 (J3) X (J-) X (J-) X (J+)$

15) :

$1.0 I X (J3) X (J3) X (J+) + 0.5 I X (J+) X (J-) X (J+) + 0.5 I X (J-) X (J+) X (J+)$

$-2.0 I X (J3) X (J3) X (J3) + -1.0 I X (J+) X (J-) X (J3) + -1.0 I X (J-) X (J+) X (J3)$

$-2.0 I X (J3) X (J3) X (J-) + -1.0 I X (J+) X (J-) X (J-) + -1.0 I X (J-) X (J+) X (J-)$

16) :

$-1.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J3) + -1.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J3) + -0.5 (J+) X (J+) X (J3) X (J-) + -0.5 (J+) X (J3) X (J+) X (J-) + 1.0 (J3) X (J+) X (J+) X (J-) + 1.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J+) + 0.5 (J-) X (J+) X (J3) X (J+) + 0.5 (J-) X (J3) X (J+) X (J+)$

$-1.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J3) + 1.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J3) + -1.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J3) + 1.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J3) + 1.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J-) + -1.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J-) + -0.5 (J+) X (J+) X (J-) X (J-) + -1.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J-) + -0.5 (J+) X (J-) X (J+) X (J-) + -1.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J+) + 1.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J+) + 1.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J+) + 0.5 (J-) X (J+) X (J-) X (J+) + 0.5 (J-) X (J-) X (J+) X (J+)$

$-2.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J3) + -2.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J3) + 2.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J-) + 1.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J-) + 1.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J-) + -1.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J+) + -1.0 (J-) X (J3) X (J-) X (J+) + 2.0 (J3) X (J-) X (J-) X (J+)$

17) :

$$1.0 (J+) X (J3) X I X I + -1.0 (J3) X (J+) X I X I$$

$$1.0 (J+) X (J-) X I X I + -1.0 (J-) X (J+) X I X I$$

$$2.0 (J-) X (J3) X I X I + -2.0 (J3) X (J-) X I X I$$

18) :

$$1.0 I X I X (J+) X I$$

$$-2.0 I X I X (J3) X I$$

$$-2.0 I X I X (J-) X I$$

19) :

$$1.0 (J3) X (J+) X I X (J3) + 0.5 (J+) X (J+) X I X (J-) + 0.5 (J-) X (J+) X I X (J+)$$

$$-2.0 (J3) X (J3) X I X (J3) + -1.0 (J+) X (J3) X I X (J-) + -1.0 (J-) X (J3) X I X (J+)$$

$$-2.0 (J3) X (J-) X I X (J3) + -1.0 (J+) X (J-) X I X (J-) + -1.0 (J-) X (J-) X I X (J+)$$

20) :

$$1.0 (J+) X I X I X I$$

$$-2.0 (J3) X I X I X I$$

$$-2.0 (J-) X I X I X I$$

21) :

$$-1.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J3) + 1.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J3) + 0.5 (J+) X (J-) X (J+) X (J3) + -0.5 (J-) X (J+) X (J+) X (J3) + -1.0 (J+) X (J3) X (J+) X (J-) + 1.0 (J3) X (J+) X (J+) X (J-) + -0.5 (J+) X (J-) X (J3) X (J+) + 0.5 (J-) X (J+) X (J3) X (J+)$$

$$-1.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J3) + 1.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J3) + -1.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J3) + 1.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J3) + 1.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J3) + -1.0 (J3) X (J-) X (J+) X (J3) + 1.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J-) + -1.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J-) + -0.5 (J+) X (J-) X (J+) X (J-) + 0.5 (J-) X (J+) X (J+) X (J-) + -1.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J+) + 1.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J+) + -0.5 (J+) X (J-) X (J-) X (J+) + 0.5 (J-) X (J+) X (J-) X (J+)$$

$$-2.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J3) + 2.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J3) + -1.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J3) + 1.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J3) + 1.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J-) + -1.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J-) + -2.0 (J-) X (J3) X (J-) X (J+) + 2.0 (J3) X (J-) X (J-) X (J+)$$

22) :

$$-1.0 (J+) X (J+) X (J-) X (J3) + 1.0 (J+) X (J-) X (J+) X (J3) + 1.0 (J+) X (J+) X (J3) X (J-) + -1.0 (J+) X (J3) X (J+) X (J-) + -1.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J+) + 1.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J+)$$

$$2.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J3) + -2.0 (J3) X (J-) X (J+) X (J3) + -2.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J-) + 2.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J-) + 2.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J+) + -2.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J+)$$

$$2.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J3) + -2.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J3) + -2.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J-) + 2.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J-) + 2.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J+) + -2.0 (J-) X (J3) X (J-) X (J+)$$

23) :

$$1.0 I X (J+) X (J3) X (J3) + 0.5 I X (J+) X (J+) X (J-) + 0.5 I X (J+) X (J-) X (J+)$$

$$-2.0 I X (J3) X (J3) X (J3) + -1.0 I X (J3) X (J+) X (J-) + -1.0 I X (J3) X (J-) X (J+)$$

$$-2.0 I X (J-) X (J3) X (J3) + -1.0 I X (J-) X (J+) X (J-) + -1.0 I X (J-) X (J-) X (J+)$$

24) :

$$1.0 I X (J+) X (J3) X I + -1.0 I X (J3) X (J+) X I$$

$$1.0 \text{ I X (J+) X (J-) X I + -1.0 I X (J-) X (J+) X I}$$

$$2.0 \text{ I X (J-) X (J3) X I + -2.0 I X (J3) X (J-) X I}$$

25) :

$$-1.0 \text{ (J+) X (J+) X (J-) X (J3) + 1.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J3) + 1.0 (J+) X (J+) X (J3) X (J-) + -1.0 (J3) X (J+) X (J+) X (J-) + -1.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J+) + 1.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J+)}$$

$$2.0 \text{ (J+) X (J3) X (J-) X (J3) + -2.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J3) + -2.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J-) + 2.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J-) + 2.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J+) + -2.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J+)}$$

$$2.0 \text{ (J+) X (J-) X (J-) X (J3) + -2.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J3) + -2.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J-) + 2.0 (J3) X (J-) X (J+) X (J-) + 2.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J+) + -2.0 (J3) X (J-) X (J-) X (J+)}$$

26) :

$$1.0 \text{ (J3) X (J+) X (J3) X I + 0.5 (J+) X (J+) X (J-) X I + 0.5 (J-) X (J+) X (J+) X I}$$

$$-2.0 \text{ (J3) X (J3) X (J3) X I + -1.0 (J+) X (J3) X (J-) X I + -1.0 (J-) X (J3) X (J+) X I}$$

$$-2.0 \text{ (J3) X (J-) X (J3) X I + -1.0 (J+) X (J-) X (J-) X I + -1.0 (J-) X (J-) X (J+) X I}$$

27) :

$$-1.0 \text{ (J+) X (J-) X (J+) X (J3) + 1.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J3) + 1.0 (J+) X (J3) X (J+) X (J-) + -1.0 (J3) X (J+) X (J+) X (J-) + -1.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J+) + 1.0 (J3) X (J-) X (J+) X (J+)}$$

$$2.0 \text{ (J+) X (J-) X (J3) X (J3) + -2.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J3) + -2.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J-) + 2.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J-) + 2.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J+) + -2.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J+)}$$

$$2.0 \text{ (J+) X (J-) X (J-) X (J3) + -2.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J3) + -2.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J-) + 2.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J-) + 2.0 (J-) X (J3) X (J-) X (J+) + -2.0 (J3) X (J-) X (J-) X (J+)}$$

28) :

$$1.0 (J+) X I X I X (J3) + -1.0 (J3) X I X I X (J+)$$

$$1.0 (J+) X I X I X (J-) + -1.0 (J-) X I X I X (J+)$$

$$2.0 (J-) X I X I X (J3) + -2.0 (J3) X I X I X (J-)$$

Para L= 2 :

1) :

$$1.0 (J+) X I X (J+) X I$$

$$-2.0 (J+) X I X (J3) X I + -2.0 (J3) X I X (J+) X I$$

$$8.0 (J3) X I X (J3) X I + -2.0 (J+) X I X (J-) X I + -2.0 (J-) X I X (J+) X I$$

$$12.0 (J-) X I X (J3) X I + 12.0 (J3) X I X (J-) X I$$

$$24.0 (J-) X I X (J-) X I$$

2) :

$$1.0 (J+) X (J+) X (J3) X (J3) + 0.5 (J+) X (J+) X (J+) X (J-) + 0.5 (J+) X (J+) X (J-) X (J+)$$

$$-2.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J3) + -2.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J3) + -1.0 (J+) X (J3) X (J+) X (J-) + -1.0 (J3) X (J+) X (J+) X (J-) + -1.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J+) + -1.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J+)$$

$$8.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J3) + -2.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J3) + -2.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J3) + 4.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J-) + -1.0 (J+) X (J-) X (J+) X (J-) + -1.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J-) + 4.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J+) + -1.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J+) + -1.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J+)$$

$$12.0 (J-) \times (J3) \times (J3) \times (J3) + 12.0 (J3) \times (J-) \times (J3) \times (J3) + 6.0 (J-) \times (J3) \times (J+) \times (J-) + 6.0 (J3) \times (J-) \times (J+) \times (J-) + 6.0 (J-) \times (J3) \times (J-) \times (J+) + 6.0 (J3) \times (J-) \times (J-) \times (J+)$$

$$24.0 (J-) \times (J-) \times (J3) \times (J3) + 12.0 (J-) \times (J-) \times (J+) \times (J-) + 12.0 (J-) \times (J-) \times (J-) \times (J+)$$

3) :

$$1.0 (J+) \times I \times I \times (J+)$$

$$-2.0 (J+) \times I \times I \times (J3) + -2.0 (J3) \times I \times I \times (J+)$$

$$8.0 (J3) \times I \times I \times (J3) + -2.0 (J+) \times I \times I \times (J-) + -2.0 (J-) \times I \times I \times (J+)$$

$$12.0 (J-) \times I \times I \times (J3) + 12.0 (J3) \times I \times I \times (J-)$$

$$24.0 (J-) \times I \times I \times (J-)$$

4) :

$$-1.0 (J+) \times (J+) \times I \times (J3) + 1.0 (J+) \times (J3) \times I \times (J+)$$

$$2.0 (J3) \times (J+) \times I \times (J3) + -1.0 (J+) \times (J+) \times I \times (J-) + -2.0 (J3) \times (J3) \times I \times (J+) + 1.0 (J+) \times (J-) \times I \times (J+)$$

$$-2.0 (J+) \times (J-) \times I \times (J3) + 2.0 (J-) \times (J+) \times I \times (J3) + 2.0 (J+) \times (J3) \times I \times (J-) + 4.0 (J3) \times (J+) \times I \times (J-) + -2.0 (J-) \times (J3) \times I \times (J+) + -4.0 (J3) \times (J-) \times I \times (J+)$$

$$12.0 (J3) \times (J-) \times I \times (J3) + -12.0 (J3) \times (J3) \times I \times (J-) + 6.0 (J-) \times (J+) \times I \times (J-) + -6.0 (J-) \times (J-) \times I \times (J+)$$

$$24.0 (J-) \times (J-) \times I \times (J3) + -24.0 (J-) \times (J3) \times I \times (J-)$$

5) :

$$1.0 I \times (J+) \times I \times (J+)$$

$$-2.0 \text{ I X (J+) X I X (J3) } + -2.0 \text{ I X (J3) X I X (J+)}$$

$$8.0 \text{ I X (J3) X I X (J3) } + -2.0 \text{ I X (J+) X I X (J-) } + -2.0 \text{ I X (J-) X I X (J+)}$$

$$12.0 \text{ I X (J-) X I X (J3) } + 12.0 \text{ I X (J3) X I X (J-)}$$

$$24.0 \text{ I X (J-) X I X (J-)}$$

6) :

$$-1.0 \text{ (J+) X (J+) X I X (J3) } + 1.0 \text{ (J3) X (J+) X I X (J+)}$$

$$2.0 \text{ (J+) X (J3) X I X (J3) } + -1.0 \text{ (J+) X (J+) X I X (J-) } + -2.0 \text{ (J3) X (J3) X I X (J+) } + 1.0 \text{ (J-) X (J+) X I X (J+)}$$

$$2.0 \text{ (J+) X (J-) X I X (J3) } + -2.0 \text{ (J-) X (J+) X I X (J3) } + 4.0 \text{ (J+) X (J3) X I X (J-) } + 2.0 \text{ (J3) X (J+) X I X (J-) } + -4.0 \text{ (J-) X (J3) X I X (J+) } + -2.0 \text{ (J3) X (J-) X I X (J+)}$$

$$12.0 \text{ (J-) X (J3) X I X (J3) } + -12.0 \text{ (J3) X (J3) X I X (J-) } + 6.0 \text{ (J+) X (J-) X I X (J-) } + -6.0 \text{ (J-) X (J-) X I X (J+)}$$

$$24.0 \text{ (J-) X (J-) X I X (J3) } + -24.0 \text{ (J3) X (J-) X I X (J-)}$$

7) :

$$-1.0 \text{ (J+) X I X (J+) X (J3) } + 1.0 \text{ (J+) X I X (J3) X (J+)}$$

$$2.0 \text{ (J3) X I X (J+) X (J3) } + -1.0 \text{ (J+) X I X (J+) X (J-) } + -2.0 \text{ (J3) X I X (J3) X (J+) } + 1.0 \text{ (J+) X I X (J-) X (J+)}$$

$$-2.0 \text{ (J+) X I X (J-) X (J3) } + 2.0 \text{ (J-) X I X (J+) X (J3) } + 2.0 \text{ (J+) X I X (J3) X (J-) } + 4.0 \text{ (J3) X I X (J+) X (J-) } + -2.0 \text{ (J-) X I X (J3) X (J+) } + -4.0 \text{ (J3) X I X (J-) X (J+)}$$

$$12.0 \text{ (J3) X I X (J-) X (J3) } + -12.0 \text{ (J3) X I X (J3) X (J-) } + 6.0 \text{ (J-) X I X (J+) X (J-) } + -6.0 \text{ (J-) X I X (J-) X (J+)}$$

$$24.0 (J-) \times I \times (J-) \times (J3) + -24.0 (J-) \times I \times (J3) \times (J-)$$

8) :

$$1.0 (J+) \times (J3) \times (J3) \times (J+) + 0.5 (J+) \times (J+) \times (J-) \times (J+) + 0.5 (J+) \times (J-) \times (J+) \times (J+)$$

$$-2.0 (J+) \times (J3) \times (J3) \times (J3) + -1.0 (J+) \times (J+) \times (J-) \times (J3) + -1.0 (J+) \times (J-) \times (J+) \times (J3) + -2.0 (J3) \times (J3) \times (J3) \times (J+) + -1.0 (J3) \times (J+) \times (J-) \times (J+) + -1.0 (J3) \times (J-) \times (J+) \times (J+)$$

$$8.0 (J3) \times (J3) \times (J3) \times (J3) + 4.0 (J3) \times (J+) \times (J-) \times (J3) + 4.0 (J3) \times (J-) \times (J+) \times (J3) + -2.0 (J+) \times (J3) \times (J3) \times (J-) + -1.0 (J+) \times (J+) \times (J-) \times (J-) + -1.0 (J+) \times (J-) \times (J+) \times (J-) + -2.0 (J-) \times (J3) \times (J3) \times (J+) + -1.0 (J-) \times (J+) \times (J-) \times (J+) + -1.0 (J-) \times (J-) \times (J+) \times (J+)$$

$$12.0 (J-) \times (J3) \times (J3) \times (J3) + 6.0 (J-) \times (J+) \times (J-) \times (J3) + 6.0 (J-) \times (J-) \times (J+) \times (J3) + 12.0 (J3) \times (J3) \times (J3) \times (J-) + 6.0 (J3) \times (J+) \times (J-) \times (J-) + 6.0 (J3) \times (J-) \times (J+) \times (J-)$$

$$24.0 (J-) \times (J3) \times (J3) \times (J-) + 12.0 (J-) \times (J+) \times (J-) \times (J-) + 12.0 (J-) \times (J-) \times (J+) \times (J-)$$

9) :

$$1.0 (J+) \times (J3) \times (J+) \times (J3) + 0.5 (J+) \times (J+) \times (J+) \times (J-) + 0.5 (J+) \times (J-) \times (J+) \times (J+)$$

$$-2.0 (J+) \times (J3) \times (J3) \times (J3) + -2.0 (J3) \times (J3) \times (J+) \times (J3) + -1.0 (J+) \times (J+) \times (J3) \times (J-) + -1.0 (J3) \times (J+) \times (J+) \times (J-) + -1.0 (J+) \times (J-) \times (J3) \times (J+) + -1.0 (J3) \times (J-) \times (J+) \times (J+)$$

$$8.0 (J3) \times (J3) \times (J3) \times (J3) + -2.0 (J+) \times (J3) \times (J-) \times (J3) + -2.0 (J-) \times (J3) \times (J+) \times (J3) + 4.0 (J3) \times (J+) \times (J3) \times (J-) + -1.0 (J+) \times (J+) \times (J-) \times (J-) + -1.0 (J-) \times (J+) \times (J+) \times (J-) + 4.0 (J3) \times (J-) \times (J3) \times (J+) + -1.0 (J+) \times (J-) \times (J-) \times (J+) + -1.0 (J-) \times (J-) \times (J+) \times (J+)$$

$$12.0 (J-) \times (J3) \times (J3) \times (J3) + 12.0 (J3) \times (J3) \times (J-) \times (J3) + 6.0 (J-) \times (J+) \times (J3) \times (J-) + 6.0 (J3) \times (J+) \times (J-) \times (J-) + 6.0 (J-) \times (J-) \times (J3) \times (J+) + 6.0 (J3) \times (J-) \times (J-) \times (J+)$$

$$24.0 (J-) \times (J3) \times (J-) \times (J3) + 12.0 (J-) \times (J+) \times (J-) \times (J-) + 12.0 (J-) \times (J-) \times (J-) \times (J+)$$

10) :

$$1.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J+) + 0.5 (J+) X (J+) X (J-) X (J+) + 0.5 (J-) X (J+) X (J+) X (J+)$$

$$-2.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J3) + -1.0 (J+) X (J+) X (J-) X (J3) + -1.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J3) + -2.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J+) + -1.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J+) + -1.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J+)$$

$$8.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J3) + 4.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J3) + 4.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J3) + -2.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J-) + -1.0 (J+) X (J+) X (J-) X (J-) + -1.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J-) + -2.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J+) + -1.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J+) + -1.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J+)$$

$$12.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J3) + 6.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J3) + 6.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J3) + 12.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J-) + 6.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J-) + 6.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J-)$$

$$24.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J-) + 12.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J-) + 12.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J-)$$

11) :

$$1.0 I X (J+) X (J+) X (J3) + -1.0 I X (J+) X (J3) X (J+)$$

$$-2.0 I X (J3) X (J+) X (J3) + 1.0 I X (J+) X (J+) X (J-) + 2.0 I X (J3) X (J3) X (J+) + -1.0 I X (J+) X (J-) X (J+)$$

$$2.0 I X (J+) X (J-) X (J3) + -2.0 I X (J-) X (J+) X (J3) + -2.0 I X (J+) X (J3) X (J-) + -4.0 I X (J3) X (J+) X (J-) + 2.0 I X (J-) X (J3) X (J+) + 4.0 I X (J3) X (J-) X (J+)$$

$$-12.0 I X (J3) X (J-) X (J3) + 12.0 I X (J3) X (J3) X (J-) + -6.0 I X (J-) X (J+) X (J-) + 6.0 I X (J-) X (J-) X (J+)$$

$$-24.0 I X (J-) X (J-) X (J3) + 24.0 I X (J-) X (J3) X (J-)$$

12) :

$$-1.0 (J+) X (J3) X (J+) X I + 1.0 (J3) X (J+) X (J+) X I$$

$$2.0 (J+) \times (J3) \times (J3) \times I + -2.0 (J3) \times (J+) \times (J3) \times I + -1.0 (J+) \times (J-) \times (J+) \times I + 1.0 (J-) \times (J+) \times (J+) \times I$$

$$4.0 (J+) \times (J-) \times (J3) \times I + -4.0 (J-) \times (J+) \times (J3) \times I + 2.0 (J+) \times (J3) \times (J-) \times I + -2.0 (J3) \times (J+) \times (J-) \times I + -2.0 (J-) \times (J3) \times (J+) \times I + 2.0 (J3) \times (J-) \times (J+) \times I$$

$$12.0 (J-) \times (J3) \times (J3) \times I + -12.0 (J3) \times (J-) \times (J3) \times I + 6.0 (J+) \times (J-) \times (J-) \times I + -6.0 (J-) \times (J+) \times (J-) \times I$$

$$24.0 (J-) \times (J3) \times (J-) \times I + -24.0 (J3) \times (J-) \times (J-) \times I$$

13) :

$$1.0 (J3) \times (J+) \times (J+) \times (J3) + 0.5 (J+) \times (J+) \times (J+) \times (J-) + 0.5 (J-) \times (J+) \times (J+) \times (J+)$$

$$-2.0 (J3) \times (J+) \times (J3) \times (J3) + -2.0 (J3) \times (J3) \times (J+) \times (J3) + -1.0 (J+) \times (J+) \times (J3) \times (J-) + -1.0 (J+) \times (J3) \times (J+) \times (J-) + -1.0 (J-) \times (J+) \times (J3) \times (J+) + -1.0 (J-) \times (J3) \times (J+) \times (J+)$$

$$8.0 (J3) \times (J3) \times (J3) \times (J3) + -2.0 (J3) \times (J+) \times (J-) \times (J3) + -2.0 (J3) \times (J-) \times (J+) \times (J3) + 4.0 (J+) \times (J3) \times (J3) \times (J-) + -1.0 (J+) \times (J+) \times (J-) \times (J-) + -1.0 (J+) \times (J-) \times (J+) \times (J-) + 4.0 (J-) \times (J3) \times (J3) \times (J+) + -1.0 (J-) \times (J+) \times (J-) \times (J+) + -1.0 (J-) \times (J-) \times (J+) \times (J+)$$

$$12.0 (J3) \times (J-) \times (J3) \times (J3) + 12.0 (J3) \times (J3) \times (J-) \times (J3) + 6.0 (J+) \times (J-) \times (J3) \times (J-) + 6.0 (J+) \times (J3) \times (J-) \times (J-) + 6.0 (J-) \times (J-) \times (J3) \times (J+) + 6.0 (J-) \times (J3) \times (J-) \times (J+)$$

$$24.0 (J3) \times (J-) \times (J-) \times (J3) + 12.0 (J+) \times (J-) \times (J-) \times (J-) + 12.0 (J-) \times (J-) \times (J-) \times (J+)$$

14) :

$$1.0 I \times (J+) \times (J+) \times I$$

$$-2.0 I \times (J+) \times (J3) \times I + -2.0 I \times (J3) \times (J+) \times I$$

$$8.0 I \times (J3) \times (J3) \times I + -2.0 I \times (J+) \times (J-) \times I + -2.0 I \times (J-) \times (J+) \times I$$

$$-2.0 (J+) X (J3) X I X I + -2.0 (J3) X (J+) X I X I$$

$$8.0 (J3) X (J3) X I X I + -2.0 (J+) X (J-) X I X I + -2.0 (J-) X (J+) X I X I$$

$$12.0 (J-) X (J3) X I X I + 12.0 (J3) X (J-) X I X I$$

$$24.0 (J-) X (J-) X I X I$$

18) :

$$-1.0 I X (J+) X (J3) X (J+) + 1.0 I X (J3) X (J+) X (J+)$$

$$2.0 I X (J+) X (J3) X (J3) + -2.0 I X (J3) X (J+) X (J3) + -1.0 I X (J+) X (J-) X (J+) + 1.0 I X (J-) X (J+) X (J+)$$

$$4.0 I X (J+) X (J-) X (J3) + -4.0 I X (J-) X (J+) X (J3) + 2.0 I X (J+) X (J3) X (J-) + -2.0 I X (J3) X (J+) X (J-) + -2.0 I X (J-) X (J3) X (J+) + 2.0 I X (J3) X (J-) X (J+)$$

$$12.0 I X (J-) X (J3) X (J3) + -12.0 I X (J3) X (J-) X (J3) + 6.0 I X (J+) X (J-) X (J-) + -6.0 I X (J-) X (J+) X (J-)$$

$$24.0 I X (J-) X (J3) X (J-) + -24.0 I X (J3) X (J-) X (J-)$$

19) :

$$1.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J+) + 0.5 (J+) X (J-) X (J+) X (J+) + 0.5 (J-) X (J+) X (J+) X (J+)$$

$$-2.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J3) + -1.0 (J+) X (J-) X (J+) X (J3) + -1.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J3) + -2.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J+) + -1.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J+) + -1.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J+)$$

$$8.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J3) + 4.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J3) + 4.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J3) + -2.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J-) + -1.0 (J+) X (J-) X (J+) X (J-) + -1.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J-) + -2.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J+) + -1.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J+) + -1.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J+)$$

$$12.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J3) + 6.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J3) + 6.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J3) + 12.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J-) + 6.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J-) + 6.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J-)$$

$$24.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J-) + 12.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J-) + 12.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J-)$$

20) :

$$1.0 (J+) X (J+) X (J3) X I + -1.0 (J+) X (J3) X (J+) X I$$

$$-2.0 (J3) X (J+) X (J3) X I + 1.0 (J+) X (J+) X (J-) X I + 2.0 (J3) X (J3) X (J+) X I + -1.0 (J+) X (J-) X (J+) X I$$

$$2.0 (J+) X (J-) X (J3) X I + -2.0 (J-) X (J+) X (J3) X I + -2.0 (J+) X (J3) X (J-) X I + -4.0 (J3) X (J+) X (J-) X I + 2.0 (J-) X (J3) X (J+) X I + 4.0 (J3) X (J-) X (J+) X I$$

$$-12.0 (J3) X (J-) X (J3) X I + 12.0 (J3) X (J3) X (J-) X I + -6.0 (J-) X (J+) X (J-) X I + 6.0 (J-) X (J-) X (J+) X I$$

$$-24.0 (J-) X (J-) X (J3) X I + 24.0 (J-) X (J3) X (J-) X I$$

Para L= 3 :

1) :

$$1.0 (J+) X (J+) X I X (J+)$$

$$-2.0 (J+) X (J+) X I X (J3) + -2.0 (J+) X (J3) X I X (J+) + -2.0 (J3) X (J+) X I X (J+)$$

$$8.0 (J+) X (J3) X I X (J3) + 8.0 (J3) X (J+) X I X (J3) + -2.0 (J+) X (J+) X I X (J-) + 8.0 (J3) X (J3) X I X (J+) + -2.0 (J+) X (J-) X I X (J+) + -2.0 (J-) X (J+) X I X (J+)$$

$$-48.0 (J3) X (J3) X I X (J3) + 12.0 (J+) X (J-) X I X (J3) + 12.0 (J-) X (J+) X I X (J3) + 12.0 (J+) X (J3) X I X (J-) + 12.0 (J3) X (J+) X I X (J-) + 12.0 (J-) X (J3) X I X (J+) + 12.0 (J3) X (J-) X I X (J+)$$

$$-96.0 (J-) X (J3) X I X (J3) + -96.0 (J3) X (J-) X I X (J3) + -96.0 (J3) X (J3) X I X (J-) + 24.0 (J+) X (J-) X I X (J-) + 24.0 (J-) X (J+) X I X (J-) + 24.0 (J-) X (J-) X I X (J+)$$

$$-240.0 (J-) X (J-) X I X (J3) + -240.0 (J-) X (J3) X I X (J-) + -240.0 (J3) X (J-) X I X (J-)$$

$$-720.0 (J-) X (J-) X I X (J-)$$

2) :

$$1.0 (J+) X (J+) X (J+) X (J3) + -1.0 (J+) X (J+) X (J3) X (J+)$$

$$-2.0 (J+) X (J3) X (J+) X (J3) + -2.0 (J3) X (J+) X (J+) X (J3) + 1.0 (J+) X (J+) X (J+) X (J-) + 2.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J+) + 2.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J+) + -1.0 (J+) X (J+) X (J-) X (J+)$$

$$2.0 (J+) X (J+) X (J-) X (J3) + 8.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J3) + -2.0 (J+) X (J-) X (J+) X (J3) + -2.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J3) + -2.0 (J+) X (J+) X (J3) X (J-) + -4.0 (J+) X (J3) X (J+) X (J-) + -4.0 (J3) X (J+) X (J+) X (J-) + -8.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J+) + 2.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J+) + 2.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J+) + 4.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J+) + 4.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J+)$$

$$-12.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J3) + -12.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J3) + 12.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J3) + 12.0 (J3) X (J-) X (J+) X (J3) + 12.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J-) + 12.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J-) + 24.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J-) + -6.0 (J+) X (J-) X (J+) X (J-) + -6.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J-) + -12.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J+) + -12.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J+) + -24.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J+) + 6.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J+) + 6.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J+)$$

$$96.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J3) + -24.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J3) + -24.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J3) + 24.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J3) + -96.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J-) + 24.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J-) + 24.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J-) + 48.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J-) + 48.0 (J3) X (J-) X (J+) X (J-) + -24.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J+) + -48.0 (J-) X (J3) X (J-) X (J+) + -48.0 (J3) X (J-) X (J-) X (J+)$$

$$240.0 (J-) X (J3) X (J-) X (J3) + 240.0 (J3) X (J-) X (J-) X (J3) + -240.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J-) + -240.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J-) + 120.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J-) + -120.0 (J-) X (J-) X (J-) X (J+)$$

$$720.0 (J-) X (J-) X (J-) X (J3) + -720.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J-)$$

3) :

$$1.0 (J+) \times I \times (J+) \times (J+)$$

$$-2.0 (J+) \times I \times (J+) \times (J3) + -2.0 (J+) \times I \times (J3) \times (J+) + -2.0 (J3) \times I \times (J+) \times (J+)$$

$$8.0 (J+) \times I \times (J3) \times (J3) + 8.0 (J3) \times I \times (J+) \times (J3) + -2.0 (J+) \times I \times (J+) \times (J-) + 8.0 (J3) \times I \times (J3) \times (J+) + -2.0 (J+) \times I \times (J-) \times (J+) + -2.0 (J-) \times I \times (J+) \times (J+)$$

$$-48.0 (J3) \times I \times (J3) \times (J3) + 12.0 (J+) \times I \times (J-) \times (J3) + 12.0 (J-) \times I \times (J+) \times (J3) + 12.0 (J+) \times I \times (J3) \times (J-) + 12.0 (J3) \times I \times (J+) \times (J-) + 12.0 (J-) \times I \times (J3) \times (J+) + 12.0 (J3) \times I \times (J-) \times (J+)$$

$$-96.0 (J-) \times I \times (J3) \times (J3) + -96.0 (J3) \times I \times (J-) \times (J3) + -96.0 (J3) \times I \times (J3) \times (J-) + 24.0 (J+) \times I \times (J-) \times (J-) + 24.0 (J-) \times I \times (J+) \times (J-) + 24.0 (J-) \times I \times (J-) \times (J+)$$

$$-240.0 (J-) \times I \times (J-) \times (J3) + -240.0 (J-) \times I \times (J3) \times (J-) + -240.0 (J3) \times I \times (J-) \times (J-)$$

$$-720.0 (J-) \times I \times (J-) \times (J-)$$

4) :

$$-1.0 (J+) \times (J+) \times (J3) \times (J+) + 1.0 (J+) \times (J3) \times (J+) \times (J+)$$

$$2.0 (J+) \times (J+) \times (J3) \times (J3) + -2.0 (J+) \times (J3) \times (J+) \times (J3) + 2.0 (J3) \times (J+) \times (J3) \times (J+) + -1.0 (J+) \times (J+) \times (J-) \times (J+) + -2.0 (J3) \times (J3) \times (J+) \times (J+) + 1.0 (J+) \times (J-) \times (J+) \times (J+)$$

$$-8.0 (J3) \times (J+) \times (J3) \times (J3) + 4.0 (J+) \times (J+) \times (J-) \times (J3) + 8.0 (J3) \times (J3) \times (J+) \times (J3) + -4.0 (J+) \times (J-) \times (J+) \times (J3) + 2.0 (J+) \times (J+) \times (J3) \times (J-) + -2.0 (J+) \times (J3) \times (J+) \times (J-) + -2.0 (J+) \times (J-) \times (J3) \times (J+) + 2.0 (J-) \times (J+) \times (J3) \times (J+) + 2.0 (J+) \times (J3) \times (J-) \times (J+) + 4.0 (J3) \times (J+) \times (J-) \times (J+) + -2.0 (J-) \times (J3) \times (J+) \times (J+) + -4.0 (J3) \times (J-) \times (J+) \times (J+)$$

$$12.0 (J+) \times (J-) \times (J3) \times (J3) + -12.0 (J-) \times (J+) \times (J3) \times (J3) + -12.0 (J+) \times (J3) \times (J-) \times (J3) + -24.0 (J3) \times (J+) \times (J-) \times (J3) + 12.0 (J-) \times (J3) \times (J+) \times (J3) + 24.0 (J3) \times (J-) \times (J+) \times (J3) + -12.0 (J3) \times (J+) \times (J3) \times$$

$$(J-) + 6.0 (J+) X (J+) X (J-) X (J-) + 12.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J-) + -6.0 (J+) X (J-) X (J+) X (J-) + 12.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J+) + -12.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J+) + 6.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J+) + -6.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J+)$$

$$-96.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J3) + 96.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J3) + -48.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J3) + 48.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J3) + 24.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J-) + -24.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J-) + -24.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J-) + -48.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J-) + 24.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J-) + 48.0 (J3) X (J-) X (J+) X (J-) + 24.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J+) + -24.0 (J-) X (J3) X (J-) X (J+)$$

$$-240.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J3) + 240.0 (J-) X (J3) X (J-) X (J3) + -240.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J-) + 240.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J-) + -120.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J-) + 120.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J-)$$

$$-720.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J-) + 720.0 (J-) X (J3) X (J-) X (J-)$$

5) :

$$1.0 (J+) X (J+) X (J+) X I$$

$$-2.0 (J+) X (J+) X (J3) X I + -2.0 (J+) X (J3) X (J+) X I + -2.0 (J3) X (J+) X (J+) X I$$

$$8.0 (J+) X (J3) X (J3) X I + 8.0 (J3) X (J+) X (J3) X I + -2.0 (J+) X (J+) X (J-) X I + 8.0 (J3) X (J3) X (J+) X I + -2.0 (J+) X (J-) X (J+) X I + -2.0 (J-) X (J+) X (J+) X I$$

$$-48.0 (J3) X (J3) X (J3) X I + 12.0 (J+) X (J-) X (J3) X I + 12.0 (J-) X (J+) X (J3) X I + 12.0 (J+) X (J3) X (J-) X I + 12.0 (J3) X (J+) X (J-) X I + 12.0 (J-) X (J3) X (J+) X I + 12.0 (J3) X (J-) X (J+) X I$$

$$-96.0 (J-) X (J3) X (J3) X I + -96.0 (J3) X (J-) X (J3) X I + -96.0 (J3) X (J3) X (J-) X I + 24.0 (J+) X (J-) X (J-) X I + 24.0 (J-) X (J+) X (J-) X I + 24.0 (J-) X (J-) X (J+) X I$$

$$-240.0 (J-) X (J-) X (J3) X I + -240.0 (J-) X (J3) X (J-) X I + -240.0 (J3) X (J-) X (J-) X I$$

$$-720.0 (J-) X (J-) X (J-) X I$$

6) :

$$1.0 \text{ I X (J+) X (J+) X (J+)}$$

$$-2.0 \text{ I X (J+) X (J+) X (J3) + -2.0 I X (J+) X (J3) X (J+) + -2.0 I X (J3) X (J+) X (J+)}$$

$$8.0 \text{ I X (J+) X (J3) X (J3) + 8.0 I X (J3) X (J+) X (J3) + -2.0 I X (J+) X (J+) X (J-) + 8.0 I X (J3) X (J3) X (J+) + -2.0 I X (J+) X (J-) X (J+) + -2.0 I X (J-) X (J+) X (J+)}$$

$$-48.0 \text{ I X (J3) X (J3) X (J3) + 12.0 I X (J+) X (J-) X (J3) + 12.0 I X (J-) X (J+) X (J3) + 12.0 I X (J+) X (J3) X (J-) + 12.0 I X (J3) X (J+) X (J-) + 12.0 I X (J-) X (J3) X (J+) + 12.0 I X (J3) X (J-) X (J+)}$$

$$-96.0 \text{ I X (J-) X (J3) X (J3) + -96.0 I X (J3) X (J-) X (J3) + -96.0 I X (J3) X (J3) X (J-) + 24.0 I X (J+) X (J-) X (J-) + 24.0 I X (J-) X (J+) X (J-) + 24.0 I X (J-) X (J-) X (J+)}$$

$$-240.0 \text{ I X (J-) X (J-) X (J3) + -240.0 I X (J-) X (J3) X (J-) + -240.0 I X (J3) X (J-) X (J-)}$$

$$-720.0 \text{ I X (J-) X (J-) X (J-)}$$

7) :

$$-1.0 \text{ (J+) X (J+) X (J3) X (J+) + 1.0 (J3) X (J+) X (J+) X (J+)}$$

$$2.0 \text{ (J+) X (J+) X (J3) X (J3) + -2.0 (J3) X (J+) X (J+) X (J3) + 2.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J+) + -1.0 (J+) X (J+) X (J-) X (J+) + -2.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J+) + 1.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J+)}$$

$$-8.0 \text{ (J+) X (J3) X (J3) X (J3) + 4.0 (J+) X (J+) X (J-) X (J3) + 8.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J3) + -4.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J3) + 2.0 (J+) X (J+) X (J3) X (J-) + -2.0 (J3) X (J+) X (J+) X (J-) + 2.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J+) + -2.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J+) + 4.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J+) + 2.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J+) + -4.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J+) + -2.0 (J3) X (J-) X (J+) X (J+)}$$

$$-12.0 \text{ (J+) X (J-) X (J3) X (J3) + 12.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J3) + -24.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J3) + -12.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J3) + 24.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J3) + 12.0 (J3) X (J-) X (J+) X (J3) + -12.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J-) + 6.0 (J+) X (J+) X (J-) X (J-) + 12.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J-) + -6.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J-) + 12.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J+) + -12.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J+) + 6.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J+) + -6.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J+)}$$

-96.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J3) + 96.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J3) + -48.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J3) + 48.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J3) + -24.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J-) + 24.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J-) + -48.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J-) + -24.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J-) + 48.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J-) + 24.0 (J3) X (J-) X (J+) X (J-) + 24.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J+) + -24.0 (J3) X (J-) X (J-) X (J+)

-240.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J3) + 240.0 (J3) X (J-) X (J-) X (J3) + -240.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J-) + 240.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J-) + -120.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J-) + 120.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J-)

-720.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J-) + 720.0 (J3) X (J-) X (J-) X (J-)

Para L= 4 :

1) :

1.0 (J+) X (J+) X (J+) X (J+)

-2.0 (J+) X (J+) X (J+) X (J3) + -2.0 (J+) X (J+) X (J3) X (J+) + -2.0 (J+) X (J3) X (J+) X (J+) + -2.0 (J3) X (J+) X (J+) X (J+)

8.0 (J+) X (J+) X (J3) X (J3) + 8.0 (J+) X (J3) X (J+) X (J3) + 8.0 (J3) X (J+) X (J+) X (J3) + -2.0 (J+) X (J+) X (J+) X (J-) + 8.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J+) + 8.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J+) + -2.0 (J+) X (J+) X (J-) X (J+) + 8.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J+) + -2.0 (J+) X (J-) X (J+) X (J+) + -2.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J+)

-48.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J3) + -48.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J3) + 12.0 (J+) X (J+) X (J-) X (J3) + -48.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J3) + 12.0 (J+) X (J-) X (J+) X (J3) + 12.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J3) + 12.0 (J+) X (J+) X (J3) X (J-) + 12.0 (J+) X (J3) X (J+) X (J-) + 12.0 (J3) X (J+) X (J+) X (J-) + -48.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J+) + 12.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J+) + 12.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J+) + 12.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J+) + 12.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J+) + 12.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J+) + 12.0 (J3) X (J-) X (J+) X (J+)

384.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J3) + -96.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J3) + -96.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J3) + -96.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J3) + -96.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J3) + -96.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J3) + -96.0 (J3) X (J-) X (J+) X (J3) + -96.0 (J+) X (J3) X (J3) X (J-) + -96.0 (J3) X (J+) X (J3) X (J-) + 24.0 (J+) X (J+) X (J-) X (J-) + -96.0 (J3) X (J3) X (J+) X (J-) + 24.0 (J+) X (J-) X (J+) X (J-) + 24.0 (J-) X (J+) X (J+) X (J-) + -96.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J+) + -96.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J+) + -96.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J+) + 24.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J+) + 24.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J+) + 24.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J+)

960.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J3) + 960.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J3) + 960.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J3) + -240.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J3) + -240.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J3) + -240.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J3) + 960.0 (J3) X (J3) X (J3) X (J-) + -240.0 (J+) X (J-) X (J3) X (J-) + -240.0 (J-) X (J+) X (J3) X (J-) + -240.0 (J+) X (J3) X (J-) X (J-) + -240.0 (J3) X (J+) X (J-) X (J-) + -240.0 (J-) X (J3) X (J+) X (J-) + -240.0 (J3) X (J-) X (J+) X (J-) + -240.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J+) + -240.0 (J-) X (J3) X (J-) X (J+) + -240.0 (J3) X (J-) X (J-) X (J+)

2880.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J3) + 2880.0 (J-) X (J3) X (J-) X (J3) + 2880.0 (J3) X (J-) X (J-) X (J3) + 2880.0 (J-) X (J3) X (J3) X (J-) + 2880.0 (J3) X (J-) X (J3) X (J-) + 2880.0 (J3) X (J3) X (J-) X (J-) + -720.0 (J+) X (J-) X (J-) X (J-) + -720.0 (J-) X (J+) X (J-) X (J-) + -720.0 (J-) X (J-) X (J+) X (J-) + -720.0 (J-) X (J-) X (J-) X (J+)

10080.0 (J-) X (J-) X (J-) X (J3) + 10080.0 (J-) X (J-) X (J3) X (J-) + 10080.0 (J-) X (J3) X (J-) X (J-) + 10080.0 (J3) X (J-) X (J-) X (J-)

40320.0 (J-) X (J-) X (J-) X (J-)

Bibliografía

- [1] Brian C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representation: an Elementary Introduction*. Springer-Verlag, (2003).
- [2] Mario Bunge, *Foundations of Physics*. Springer-Verlag Heidelberg New York (1967).
- [3] David J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*. Prentice Hall, (1995).
- [4] Mario Bunge, *Tratado de Filosofía. Vol.1: Semántica I: Sentido y Referencia*. Editorial GEDISA.
- [5] Mario Bunge, *Tratado de Filosofía. Vol.2: Semántica II: Interpretación y Verdad*. Editorial GEDISA.
- [6] Mario Bunge, *Tratado de Filosofía. Vol.3: Ontología I: El moblaje del mundo*. Editorial GEDISA.
- [7] Nadir Jeenvanjee, *An Introduction to Tensors and Group Theory for physicists*. Springer.
- [8] Phillippe Blanchard, Erwin Bruning, *Mathematical Methods in Physics: Distribution, Hilbert Space, Operators, Variational Methods, and Applications in Quantum Physics* Second Edition. Springer.
- [9] Heisenberg, W. , *The representation of nature in contemporary physics*. Daedalus, (1958).
- [10] Barry Simon , *Representation of Finite and Compact Groups*. Graduate studies in mathematics, vol.10, American Mathematica Society, Providence (1996).
- [11] Curtis , *Representation of Finite and Compact Groups*. Graduate studies in mathematics, vol.10, American Mathematica Society, Providence (1996).
- [12] Brian C. Hall, *Quantum Theory for Mathematician*. Springer, (2013).
- [13] Raggio, G. A., *Reducción de la representación del grupo de rotaciones inducida en los observables de un sistema de N espines $1/2$* ; Seminario del Grupo de Teoría de Materia Condensada, FaMAF, disponible en: <http://www.famaf.unc.edu.ar/gtmc/node/84>. (2011).
- [14] Sznajderhaus,N. *Multiplicidades de Operadores Tensoriales Esféricos Irreducibles en la Reducción de un Sistema de N espines de valor s* ; Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. (2012).

- [15] Cagliero, L., *Representaciones del Grupo Simétrico*. (2006).
- [16] Fulton, W. Harris, J., *Representation Theory: A first course* Texts in mathematics 139, Springer-Verlag.
- [17] Bonin, C.J., *Estudio de Cuasi-invariantes Dipolares en Cristales Líquidos Termotrópicos por Coherencias Cuánticas Múltiples En Resonancia Magnética Nuclear*. Tesis doctoral, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, 2011.