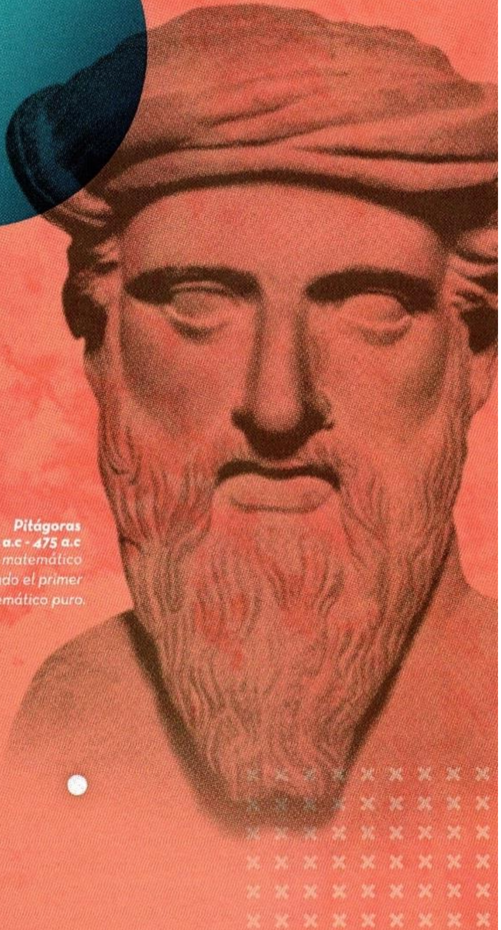
Universidad Nacional de Córdoba

TRABAJO FINAL DE PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA

Profesorado en Matemática



Pitágoras
569 a.c - 475 a.c
Filósofo y matemático griego considerado el primer matemático puro.

UNC Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Polígonos y cuadriláteros: un abordaje desde la definición, construcción y propiedades

Trabajo Final de Prácticas Profesionales Docentes

Bordagaray, Manuela.

Ruderman, Joaquin.

Profesora supervisora de prácticas e informe final:

Prof. Coirini Carreras Araceli

Equipo responsable de MyPE:

Prof. Asinari Marianela

Prof. Coirini Carreras Araceli

Mg. Mina María

Lic. Smith Silvina

Carrera:

Profesorado en matemática

Fecha:

21/11/2019

Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Clasificación:

97 Mathematical Education

97D Education and instruction in mathematics

Palabras Claves:

Cuadriláteros, polígonos, GeoGebra, protocolo de construcción, construcciones, argumentación.

RESUMEN:

El presente informe relata nuestras experiencias de prácticas como estudiantes del Profesorado en Matemática desarrolladas en dos divisiones de un tercer año de una escuela secundaria de Córdoba Capital. Se describe el contexto educativo y propio de cada curso para situar al lector y facilitar la comprensión de la propuesta didáctica y contrastarla con su implementación en las aulas. Además, se realiza un análisis sobre los distintos procesos de construcción en el software *GeoGebra* de los alumnos para intentar dilucidar aspectos claves del uso del recurso y sus potencialidades didácticas. Por último, se presentan algunas conclusiones y reflexiones finales acerca de los resultados obtenidos de la implementación en aula de la propuesta y del análisis del trabajo con el software.

ABSTRACT:

This report describes our internship experiences as students of Mathematics Teacher developed in two divisions of a third year of a high school in Córdoba Capital. The educational and specific context of each class is described to place the reader and facilitate the understanding of the didactic proposal and contrast it with its implementation in the classroom. In addition, an analysis is carried out on the different construction processes in the GeoGebra software of the students in order to try to explain the key aspects of the use of the resource and its didactic potential. Finally, some conclusions and final reflections on the results obtained from the classroom implementation of the proposal and the analysis of the work with the software are presented.

Agradecimientos:

A Araceli, por acompañarnos en este momento tan importante de nuestra carrera.

Al equipo de MyPE, por darnos las herramientas y el apoyo necesario para llevar a cabo nuestras prácticas.

A la institución, por abrirnos las puertas y recibirnos con tanta calidez.

A los profesores titulares, por dejarnos trabajar tan libremente y hacernos sentir cómodos en sus cursos.

A nuestros alumnos, por el cariño y los momentos compartidos, por la predisposición al trabajo y las ganas de aprender.

A nuestras familias, por ser el apoyo fundamental durante los años de carrera y el cariño incondicional.

A todos ellos, los llevamos en el corazón.

ÍNDICE:

1. Introducción………………………………………………………………………………. 2
   1.1. La institución……………………………………………………………………… 2
      1.1.1. Aula inteligente…………………………………………………………….. 3
   1.2. Estilo de trabajo en las clases de matemática……………………………………... 4
   1.3. Caracterización del grupo de alumnos…………………………………………….. 5
2. Nuestra práctica………………………………………………………………………… 7
   2.1. Análisis del programa de matemática y relación con el tema de la práctica………… 7
   2.2. Planificación de la práctica……………………………………………………….. 7
   2.3. Evaluación……………..………………………………………………………… 16
      2.3.1. Primera evaluación………………………………………………………... 16
      2.3.2. Evaluación final…………………………………………………………… 22
      2.3.3. Promedios finales………………………………………………………….. 29
3. ¿Cómo construyen cuadriláteros en *GeoGebra* nuestros alumnos?................................. 31
   3.1. Problemática……………………………………………………………………... 31
      3.1.1. ¿Cuál es y cómo elegimos nuestra problemática?... 31
      3.1.2. Acerca de GeoGebra………………………………………………………. 31
   3.2. Diferenciación entre construcción y dibujo………………………………………… 33
   3.3. Análisis de las construcciones de cuadriláteros de 3° C y D……………………….. 35
      3.3.1. Criterios para el análisis de las construcciones……………………………… 35
      3.3.2. Cuadrado………………………………………………………………….. 36
      3.3.3. Rombo…………………………………………………………………….. 38
      3.3.4. Rectángulo………………………………………………………………… 42
      3.3.5. Trapecio…………………………………………………………………… 44
      3.3.6. Trapecio rectángulo……………………………………………………….. 49
      3.3.7. Romboide…………………………………………………………………. 53
   3.4. Análisis general de todas las construcciones……………………………………..… 57
   3.5. Conclusiones……………………………………………………………………... 59
4. Reflexiones finales……………………………………………………………………… 61
5. Referencias……………………………………………………………………………… 63
6. Anexo…………………………………………………………………………………… 64

1. Introducción

En el presente informe se hará un recorrido por nuestra experiencia de prácticas, en donde inicialmente presentaremos la institución que nos abrió sus puertas para poder llevarlas a cabo. Posteriormente, en la sección 2 abordaremos el tema que nos asignaron para desarrollar la práctica, la propuesta didáctica que elaboramos y detalles sobre su implementación en las aulas. En la sección 3, realizaremos un análisis de tipo investigativo sobre una problemática propia de las prácticas. Por último, en la sección 4, presentaremos algunas reflexiones respecto al trayecto realizado.

En esta primera sección se intentará ubicar al lector dentro del contexto educativo donde realizamos nuestras prácticas profesionales docentes. En primer lugar, se describirá la institución educativa que nos abrió las puertas para hacer posible esta instancia de aprendizaje. Posteriormente se hará referencia al aula utilizada por ambos para desarrollar la gran mayoría de las clases. Luego, se referirá al estilo de trabajo que pudimos apreciar en las horas de matemática durante el período de observaciones. Por último, se realizará una caracterización de los grupos de alumnos que nos acompañaron en esta experiencia.

1.1 La institución

Realizamos nuestras prácticas en un colegio de gestión pública que se encuentra ubicado en la zona céntrica de la ciudad de Córdoba Capital, Argentina. La institución educativa fue creada en el año 1687, y desde entonces ofrece una alternativa curricular de nivel secundario de 7 años de duración en Bachiller en Ciencias Sociales y Humanidades. Además, ofrece los posgrados de: Martillero y Contador Público, Comunicación Visual, Tecnicatura Superior en Bromatología y cursos de preceptor.

En lo que respecta a su estructura, posee un estilo colonial que se puede ver desde sus amplios y altos pasillos, sus grandes puertas y sus fuentes internas, hasta el estilo de los bancos de los estudiantes y las pinturas en las paredes.

La institución cuenta con 3 pisos, en el primero encontramos: sala de profesores, dirección, regencia, mayordomía donde se encuentra el encargado de administrar las llaves de los distintos espacios de la institución, y los cursos de 6° y 7° año junto con sus preceptorías. En el segundo piso encontramos el centro de estudiantes, las aulas y preceptorías correspondientes a los cursos de 3°, 4° y 5° año, y un “Aula Inteligente” (ver sección 1.1.1). En el tercer piso encontramos las aulas y preceptorías de 1° y 2° año.

Las aulas de 3°C y 3°D, cursos en los que realizamos nuestras prácticas, son muy similares en cuanto a infraestructura y dimensiones, cuentan con bancos individuales atornillados al piso y numerados. Los alumnos deben sentarse en el banco correspondiente a su número en la lista, aunque los docentes no son muy estrictos respecto a esto. Entre las filas de bancos queda un pasillo estrecho por el cual se puede circular durante el desarrollo de la clase.

1.1.1 Aula Inteligente

En nuestras prácticas casi la totalidad de las clases tuvieron lugar en el "Aula Inteligente" por lo que en este apartado describiremos las prestaciones que posee dicho espacio.

El aula cuenta con: 2 proyectores que dan imagen a la pizarra digital y a una pantalla de proyección plegable; la pizarra digital que se controla con un lápiz que cumple el papel de mouse permitiendo así escribir sobre lo proyectados; una pizarra a fibrón y 1 computadora para el docente con *GeoGebra* instalado, desde la cual se manejan los 2 cañones con un sistema en el cual arrastrando la pestaña que se desea proyectar hacia la derecha se muestra la imagen en la pantalla de proyección y hacia la izquierda en la pizarra digital. En lo que hace a la disposición áulica, cuenta con 4 mesas móviles con bancos suficientes para grupos de 8 personas por mesa y tomacorriente para conectar los dispositivos electrónicos, como se muestra en la *Figura 1*.

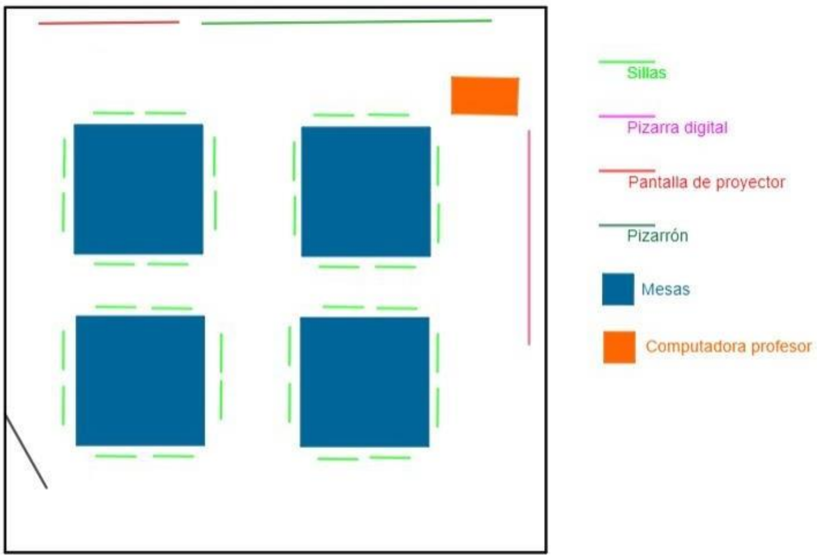


Figura 1: Croquis del Aula inteligente, donde se desarrollaron principalmente nuestras prácticas.

1.2 Estilo de trabajo en las clases de matemática

Durante el período de observaciones percibimos que las clases consistían mayormente en el trabajo de los alumnos con el material de estudio, el cual era "Entre Números 2: Actividades de matemática" de Editorial Santillana, lo cual se reflejaba en una dinámica de estudio muy autónoma por parte de los estudiantes de ambos cursos. El libro de estudio posee definiciones y conceptos, acompañados de ejercitación para que los alumnos afiancen y amplíen sobre el tema. En los días de observación no se registró que los estudiantes trabajaran con otro material de estudio, pero los docentes nos comunicaron que a partir de la siguiente unidad trabajarían con un apunte realizado por los docentes de la institución. Ellos nos facilitaron este material para que podamos trabajarlo. Para las evaluaciones, los docentes entregaban las consignas, ya sea en forma de fotocopias o escritas en el pizarrón para que los alumnos las copien.

Analizando las condiciones de trabajo las clases se realizaban en las aulas correspondientes de cada curso. Consideramos que en ambos cursos eran bastante propicias para desarrollar la actividad matemática, los profesores no ponían restricciones a las modalidades de trabajo, y por parte de los alumnos vimos una buena predisposición para el trabajo grupal, también pudimos observar que en ambos cursos solo se utilizó la pizarra. Dentro del grupo de estudiantes se percibía una buena relación y predisposición para explicarse entre ellos, y respetar el clima de trabajo. En lo que respecta a la relación de los docentes con los alumnos vimos que era más bien formal, y de los estudiantes con los preceptores pudimos percibir que era buena, cercana y algo más amistosa.

Dentro de las modalidades de trabajo notamos que la profesora de 3°D llevaba una cuenta clara de los tiempos destinados a cada actividad y siempre dejaba los últimos minutos de clases para realizar una puesta en común. En caso de que no se llegaran a terminar las actividades previstas, las mismas quedaban de tarea y a la siguiente clase se realizaba un control de quiénes la habían realizado y a quien no la tuviera le correspondía un signo menos, acumular 3 signos menos representaba un 1 (uno) en la libreta.

En el curso de 3°C notamos mucho trabajo grupal por parte de los alumnos ayudados por el docente, el cual circulaba por el curso respondiendo dudas y controlando que todos estuvieran trabajando. El profesor no acostumbraba dar tareas ya que todo el trabajo se realizaba dentro del salón de clases.

1.3 Caracterización del grupo de alumnos

Las cantidades de alumnos por curso son muy similares, 3°C está conformado por 33 alumnos de los cuales 14 son varones y 19 mujeres, por su parte, en 3°D hay 32 alumnos de los cuales 16 son varones y 16 mujeres.

En lo que respecta a comportamientos pudimos percibir que en 3°C los alumnos tienen una buena predisposición para realizar trabajos grupales, notamos también que no estaban muy acostumbrados a realizar puestas en común y/o exposiciones al frente y que son muy autónomos en la forma de trabajo. Durante la jornada de observación de día completo, se pudo presenciar una evaluación de ciencias naturales y el desarrollo de una clase de inglés, allí se pudo percibir que el comportamiento y las formas de dirigirse a los docentes no presentaban cambios sustanciales en las distintas materias.

En 3°D la forma de trabajo era muy similar, autónoma y en grupos con el material de estudio, pudimos observar buenos desarrollos de puestas en común, y responsabilidad en el cumplimiento de tareas. En cuanto al comportamiento se pudo observar que era apropiado y no variaba en las distintas materias. Esto se pudo observar en la jornada de día completo donde se presenció una clase de historia, una des castellano, una evaluación de inglés y clases de latín.

En ambos cursos, los alumnos, a pesar de tener carpetas realizaban sus registros en el material de estudio. Cumplían los horarios de entrada y salida al recreo, respecto a esto tienen gran influencia los preceptores. Eran los preceptores los que se encargaban tanto de anunciar el fin de la hora de clases -en caso de que no se escuchara la campana- como de controlar el ingreso al curso de los alumnos al finalizar el recreo. También notamos buen cumplimiento de las reglas de convivencia, las cuales aparecían escritas en las libretas de los alumnos, por esto no presenciamos faltas de respeto hacia los docentes o a los propios compañeros, ni la utilización de teléfonos celulares en horarios de clases. Se pudo observar la utilización del uniforme completo dentro de la institución.

En cuanto a las jornadas de clases, ambos cursos comienzan a las 7:15hs y finalizan a las 12:30hs de lunes a viernes, tienen 7 horas cátedra por jornada, separadas por recreos de 5 minutos, excepto el recreo de media jornada que tiene una duración de 10 minutos. Las horas de matemática, como se puede ver en la *Tabla 1*, se distribuyen de maneras distintas en los cursos que nos fueron asignados: 3°C tiene 2 horas cátedra los martes y 3 los viernes, mientras que 3°D que tiene 2 horas cátedra los lunes, 1 los miércoles y 2 los viernes.

HORARIOS					
Hora	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
7.15 a 7.55			3° año D		
8.00 a 8.40					3° año D
8.45 a 9.25	3° año D				3° año D y 3° año C
9.30 a 10.10	3° año D				3° año C
10.20 a 11.00					3° año C
11.05 a 11.45		3° año C			
11.50 a 12.30		3° año C			

Tabla 1: Horarios de las clases de matemáticas de los cursos de 3°C y 3°D.

En cuanto a los cursos designados para cada practicante, Joaquín realizó sus prácticas en 3° año C, mientras que Manuela lo hizo en 3° año D.

2. Nuestra práctica

En este capítulo se describe la planificación realizada, su implementación en las aulas y los instrumentos de evaluación para los dos cursos.

2.1 Análisis del programa de matemática y relación con el tema de la práctica

Las unidades dentro del programa de 3° año de la institución eran: 1. Lenguaje algebraico - monomios; 2. Gráficos y funciones en Q; 3. Cuadriláteros y polígonos; 4. Perímetros y áreas. Teorema de Pitágoras; 5. Lenguaje algebraico – polinomios; 6. Números Reales; 7. Funciones y sistema de ecuaciones; 8. Proporcionalidad y 9. Trigonometría.

El tema que los docentes de la institución seleccionaron para el desarrollo de las prácticas fue "Polígonos y cuadriláteros", unidad número 3 dentro de la Planificación Anual. Dentro de la unidad los contenidos eran:

- Clasificación de cuadriláteros convexos según el paralelismo de sus lados.
- Revisión de la suma de ángulos interiores de un cuadrilátero y de polígonos en general.
- Propiedades de los paralelogramos, romboides y trapecios.
- Polígonos regulares. Medida del ángulo central de polígonos regulares.
- Resolución de ejercicios y problemas. Evaluación de la razonabilidad del resultado obtenido.

Durante el período de observaciones en ambos cursos se estaba trabajando con planteo y resolución de ecuaciones. La resolución de ecuaciones estuvo vinculada a los ejercicios finales de nuestra práctica, pues para abordar "resolución de ejercicios" realizamos actividades donde los alumnos tenían que plantear ecuaciones y resolverlas a partir de las propiedades de los cuadriláteros y polígonos. En la sección 2.2 se describirá más en profundidad.

2.2 Planificación de la práctica

El objetivo general de las prácticas fue construir mediante exploración conocimientos básicos de polígonos y cuadriláteros. Entendiendo por exploración a un proceso de enseñanza que involucre la participación activa de los estudiantes, y que los ponga en el lugar de productores del saber. De esta forma, se intentó atribuir sentido a los conocimientos trabajados y aumentar la confianza de los estudiantes en sus capacidades de producción.

De acuerdo a lo propuesto por el marco teórico de Duval (2000), se buscó que los alumnos se relacionaran principalmente de tres maneras con el objeto de estudio, es decir los polígonos y cuadriláteros. Por medio de la visualización que ayude a dar sentido a lo aprendido al usar habilidades perceptivas que les permitieran dar cuenta de las condiciones y propiedades de las figuras. Mediante la construcción de figuras donde los estudiantes pudieran identificar propiedades mediante el uso tanto de herramientas tradicionales como de software graficadores como GeoGebra. Por último, a través del razonamiento que lograran poner en juego su capacidad de justificación a partir del manejo de propiedades y definiciones. Estos tres procesos cognitivos fueron abordados de manera articulada a lo largo de la práctica y se propusieron actividades que abonen el desarrollo de los mismos. Los contenidos que se trabajaron fueron:

- Clasificación de polígonos desde una visión de inclusión de clases. Abordar la existencia y diferencias entre polígonos cóncavos -convexos y regulares -irregulares.

- Estudio de los cuadriláteros, como polígonos convexos, abordando la clasificación según el paralelismo de sus lados y las propiedades de las diagonales y ángulos.

- Propiedades de polígonos regulares referentes a suma de ángulos interiores y medida del ángulo central.

A continuación, mostraremos la planificación que realizamos clase por clase, detallando el tema central de cada una de ellas y las actividades principales que se realizaron. En las primeras dos columnas se puede observar un desfasaje en los números de clase para los cursos, esto se debe a una diferencia en la distribución de las horas de matemática en los cursos. De este modo, 3°C tenía 2 horas cátedra los días martes y 3 los días viernes, mientras que 3°D tenía 2 horas cátedra los días lunes, 1 los días miércoles y 2 los días viernes. De todas formas, la planificación se realizó teniendo en cuenta esta salvedad de horarios, pero manteniendo una correspondencia entre las clases, así lo que se daba el día miércoles y viernes en el 3º D se correspondía con lo que se abordaba de manera completa el día viernes en 3º C.

3º C Joaquín	3º D Manuela	Temas a trabajar	Actividades
Clase 1	Clase 1	-Polígonos: Definición y clasificación. -Partes de una definición.	-Presentación. - Explicación partes de una definición. -Institucionalización de la definición de polígono. -Institucionalización de las clasificaciones de polígonos en: cóncavos/convexos y regulares/irregulares.
(80 minutos)			
Clase 2	Clase 2 y 3	-Definiciones de cuadriláteros. -Clasificación de cuadriláteros según el paralelismo de sus lados. -Demostración y justificación de propiedades de cuadriláteros.	- Elaboración de la definición de un cuadrilátero específico comparando cuadriláteros recortados en cartulina. -Institucionalización de las definiciones de cuadriláteros. -Realización de un Trabajo práctico con *GeoGebra*.
(120 minutos)			
Clase 3	Clase 4	-Suma de ángulos interiores de un polígono de n lados.	-Puesta en común de los cuadros de propiedades y de clasificación por el paralelismo de los lados de los cuadriláteros. -Demostraciones de propiedades para: Paralelogramo, Trapecio Isósceles y Trapezoide realizada por el practicante. -*PowerPoint* con nombres de polígonos según su cantidad de lados. -Completar tabla que relaciona la cantidad de

80 minutos			lados de un polígono con la mínima cantidad de triángulos en los que se puede dividir. -Construir la fórmula para calcular la suma de ángulos interiores de un polígono de n lados.
Clase 4	Clases 5 y 6	-Suma de ángulos interiores de un cuadrilátero. -Suma de ángulos interiores de polígonos. -Medida del ángulo central e interior de polígonos regulares inscritos. -Partes de un polígono inscrito.	-Guía de actividades y puesta en común. -Presentación de las partes de un polígono inscrito. -Institucionalización de la fórmula para calcular la medida del ángulo interior. -Institucionalización de la fórmula para calcular la medida del ángulo central de un polígono regular. -Guía de actividades sobre ángulo central.
120 minutos			
Clase 5	Clase 7	-Repasar los temas vistos hasta el momento.	-Puesta en común de la guía de actividades. -*PowerPoint* de repaso. -Trabajar con los ejercicios adicionales de la guía.
80 minutos			
Clase 6	Clases 8 y 9	-Evaluación de los contenidos estudiados. -Demostración.	-Evaluación -Demostración por parte de la practicante de la existencia de triángulos no congruentes cuyos ángulos si lo son y del “juego de los dados”. -Demostración guiada de las propiedades de ángulos para el paralelogramo y el romboide.
120 minutos			
Clase 7	Clase 10	-Repasar lo visto hasta el	

		momento.	-Trabajar con Actividades de integración.
80 minutos			
Clase 8	Clases 11 y 12	-Repasar lo visto hasta el momento.	-Trabajar Actividades de integración. -Puesta en común actividades de integración.
120 minutos			
Clase 9	Clase 13	-Evaluar los contenidos.	-Evaluación.
80 minutos			

A continuación, abordaremos cada una de las clases explicando cuales fueron los objetivos, los recursos utilizados y lo acontecido en el aula.

Clase 1 de Manuela y Joaquín:

Los objetivos fueron:

- Construir la definición de polígono a partir de ejemplos y contraejemplos e institucionalizar la que se tomará como válida las próximas clases.

- Caracterizar los aspectos distintivos de una definición.

- Diferenciar los polígonos desde una visión de clases de inclusión en: regulares/irregulares/convexos/cóncavos.

- Realizar un mapa conceptual que dé cuenta de la clasificación de los polígonos.

Recursos utilizados: Polígonos recortados en papel, pizarrón, tiza o marcador, afiche, lápiz y fotocopias.

Tiempo destinado: 80 minutos

Implementación: Ingresamos al curso y nos presentamos, tanto al practicante que sería el docente del curso en el periodo de la práctica como al par pedagógico y la profesora supervisora. Luego, para que los alumnos puedan realizar una definición de polígono y sepan entender las definiciones desde su estructura, presentamos el afiche que se ve en la *Figura 2* con las partes de una definición. Posteriormente, se dio inicio a la *Actividad 1 de la fotocopia 1* (Ver Anexo), la cual consistía en identificar del grupo de figuras geométricas que les entregamos en 2D y 3D, cuáles entran en la clasificación de polígonos. Las figuras que les entregamos a cada grupo fueron:

- 4 cuadriláteros convexos distintos. Un rectángulo, un paralelogramo, un trapezoide y un trapecio isósceles.
- 2 cuadriláteros cóncavos.
- 4 polígonos regulares de distinta cantidad de lados. Un pentágono, un heptágono, un eneágono y un decágono. Los de siete y nueve lados serán cóncavos, los otros dos convexos.
- 3 polígonos irregulares de distinta cantidad de lados. Uno será convexo, los otros dos cóncavos.
- 2 circunferencias de distinto diámetro.
- 1 elipse.
- 1 esfera de Telgopor.
- 2 cuerpos geométricos. Un cubo y un cono.
- 1 poligonal abierta de tres lados.

Posteriormente, apelando a las características que distinguen a aquellas figuras que son polígonos de las que no lo son, le solicitamos que construyan una definición de polígono teniendo en cuenta la estructura dada inicialmente de las partes de una definición.

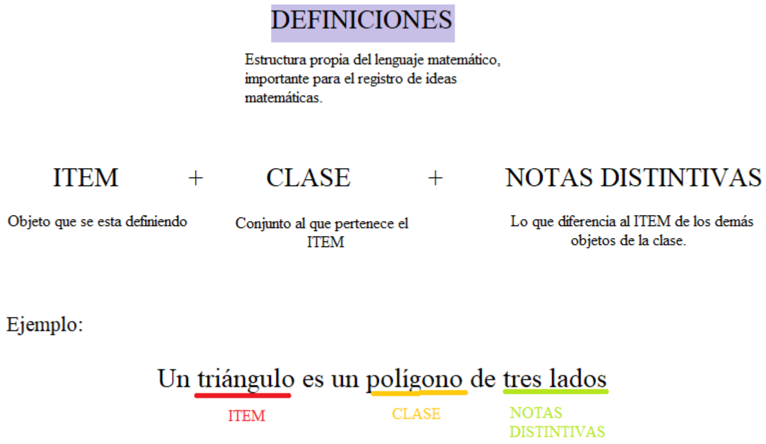


Figura 2: afiche con las partes de la definición

Luego se realizó la puesta en común de la actividad, para así institucionalizar la definición de polígono con la que trabajaríamos a lo largo del curso. La definición que acordamos a partir de los intercambios con las producciones de cada grupo fue: “Un polígono es una figura plana cerrada con 3 o más lados”. En ese momento se dio comienzo a la segunda actividad, la cual consistió en encontrar al menos 2 formas distintas de clasificar los polígonos de cartulina, con la condición de que cada figura perteneciera a una y solo una clasificación. Se esperaba que las clasificaciones que surgieran fueran en cóncavos/convexos y regulares/irregulares, luego se hizo la puesta en común de la actividad y se institucionalizaron las 2 clasificaciones antes descritas, construyendo mediante preguntas a los alumnos el mapa conceptual cuadro que se ve en la *Figura 3*. Así se despidió a los alumnos hasta la siguiente clase.

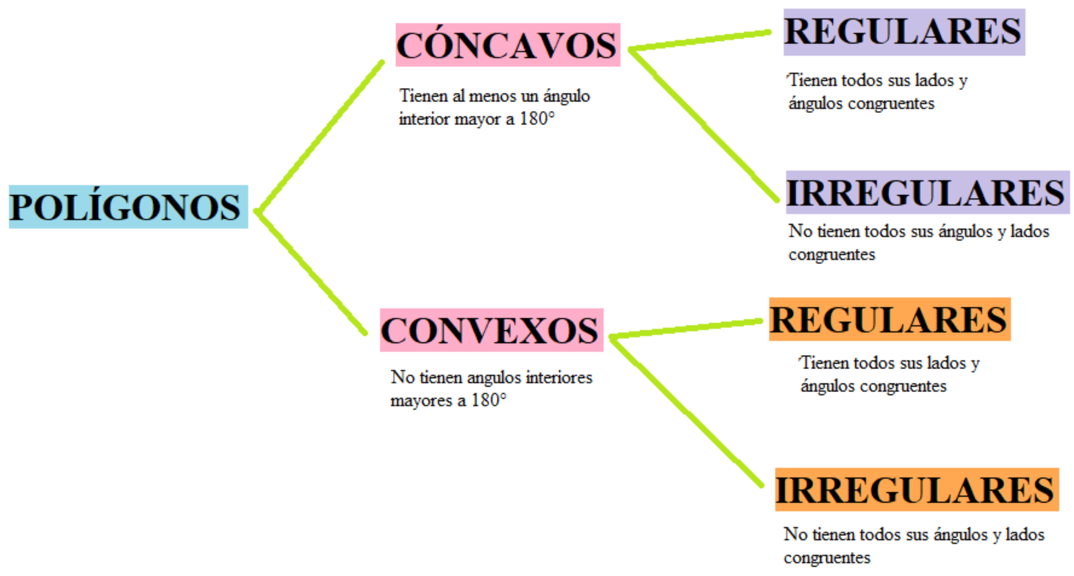


Figura 3: mapa conceptual con las clasificaciones de los polígonos construido con los alumnos.

Clase 2 de Joaquín; Clase 2 y 3 de Manuela:

Los objetivos fueron:

- Construir las definiciones de los diferentes tipos cuadriláteros apelando a las características constitutivas de una definición.

- Institucionalizar las definiciones que tomaremos como válidas para las próximas clases.

- Construir cuadriláteros en GeoGebra.

- Demostrar propiedades de los ángulos interiores de cuadriláteros.

- Verificar mediante herramientas de GeoGebra propiedades de las diagonales de cuadriláteros.

Recursos utilizados: Cuadriláteros de cartulina, papel y lápiz, pizarrón y tiza o marcador, instrumentos de geometría para trabajar en el pizarrón.

Tiempo destinado: 120 minutos

Implementación: La clase dio comienzo con un repaso del mapa conceptual de clasificación de polígonos en cóncavos/convexos y regulares/irregulares mediante preguntas a los alumnos. Luego se realizó la primera actividad, la cual consistió en, de manera grupal, comparar cuadriláteros recortados en cartulina para lograr construir la definición de uno dado. Al finalizar en el curso de 3°D se intercambiaron entre los grupos las definiciones con el objetivo de que el otro grupo adivine el cuadrilátero que se estaba definiendo. En 3°C no se llegó con el tiempo para realizar esta parte de la actividad.

Después, en 3°D se realizó la puesta en común con un Power Point con la definición de los alumnos y los posibles cuadriláteros que el grupo consideró que la cumplían, se vio cuál era el cuadrilátero descrito realmente y la practicante reformuló las definiciones dadas, para que quede la que sea unívoca para la figura descripta. De esta manera, se institucionalizaron las definiciones de los distintos cuadriláteros pidiendo a los estudiantes que las copien en la *Actividad 2 de la Fotocopia 2* (Ver Anexo). En cambio, en 3°C el practicante institucionalizó las definiciones que se habían descripto en los guiones conjeturales, pues el tiempo le jugó en contra para poder recuperar la de los alumnos.

Las definiciones construidas en 3°D fueron:

- Un **cuadrado** es un cuadrilátero regular
- Un **rombo** es un cuadrilátero que tiene dos pares de ángulos congruentes y sus lados son todos congruentes
- Un **rectángulo** es un polígono cuadrilátero, que tiene todos sus ángulos interiores rectos y dos pares de lados paralelos.
- Un **trapecio** es un cuadrilátero irregular convexo que tiene dos de sus lados opuestos paralelos, todos los lados no congruentes y no tiene ángulos rectos.
- Un **trapecio rectángulo** es un cuadrilátero irregular convexo que tiene un par de lados opuestos paralelos, y un par de ángulos rectos que no son opuestos.
- Un **romboide** es un cuadrilátero irregular que no tiene lados paralelos. Tiene dos pares de lados consecutivos congruentes y lados opuestos no congruentes.
- Un **paralelogramo** es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos y congruentes.
- Un **trapezoide** es un cuadrilátero irregular que no tiene pares de lados paralelos.
- Un **trapecio isósceles** es un polígono cuadrilátero irregular convexo que tiene un par de lados paralelos opuestos, y los lados no paralelos congruentes.

En 3°C las definiciones presentadas:

- Un **cuadrado** es un cuadrilátero que tiene cuatro lados congruentes y cuatro ángulos rectos.
- Un **rombo** es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes
- Un **rectángulo** es un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos y cuatro ángulos rectos.
- Un **trapecio** es un cuadrilátero que tiene un par de lados opuestos paralelos, todos los lados no congruentes y los lados no paralelos no perpendiculares a ninguno de los otros.
- Un **trapecio rectángulo** es un cuadrilátero que tiene solo un par de lados opuestos paralelos y un lado perpendicular a los dos paralelos.
- Un **romboide** es un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos congruentes y lados opuestos no congruentes.
- Un **trapecio isósceles** es un cuadrilátero que tiene solo un par de lados opuestos paralelos y los lados no paralelos congruentes.
- Un **trapezoide** es un cuadrilátero que no posee lados paralelos.
- Un **paralelogramo** es un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos y congruentes.

Luego, se prosiguió con el trabajo práctico de GeoGebra (*Ver Actividad 1 y 2 Fotocopia 3* del ANEXO), el cual fue grupal y no llevó una nota numérica. Se leyó y explicó la consigna, que fue: de manera grupal, construir en el software el cuadrilátero que se asignó azarosamente. Los cuadriláteros asignados podían ser: cuadrado, rombo, rectángulo, romboide, trapecio y trapecio rectángulo. A partir de la construcción, debían demostrar las propiedades de ángulos interiores y corroborar usando las herramientas del GeoGebra las propiedades de las diagonales. En la *Tabla 2* se pueden apreciar cuáles eran las propiedades que se abordaron.

Propiedades de los ángulos:	
Solo un par de ángulos opuestos congruentes	
Dos pares de ángulos opuestos congruentes	
Cuatro ángulos congruentes	

Propiedades de las diagonales:	
Solo una diagonal corta a la otra en su punto medio	
Cada diagonal corta a la otra en su punto medio	
Solo una diagonal es bisectriz de los ángulos que interseca	
Cada diagonal es bisectriz de los ángulos que interseca	
Las diagonales son perpendiculares	
Las diagonales son congruentes	
Solo una diagonal divide al cuadrilátero en triángulos congruentes	
Cada diagonal divide al cuadrilátero en triángulos congruentes	
Las diagonales dividen al cuadrilátero en cuatro triángulos congruentes	

Tabla 2: Propiedades de los cuadriláteros.

Para comenzar a trabajar con el software y debido a que la mayoría no lo conocían, se solicitó a un alumno que, a modo de ejemplo realice en la pizarra digital, con ayuda del practicante y los compañeros, la construcción de un paralelogramo. En 3°D la practicante aprovecho esta instancia para aclarar la diferencia entre construcción y dibujo. Cuando hablamos de construir y no dibujar, hacemos referencia a "[…] establecer relaciones entre los objetos que intervienen, de manera que al mover cualquier objeto inicial se mantendrán las relaciones (matemáticas) entre los objetos de la construcción" (Esteley, Marguet & Cristante, 2012, p.21). Esta aclaración no se realizó en 3°C, por lo que los practicantes tuvieron que estar más presentes en los trabajos grupales para ir mostrando esta diferencia. Los practicantes recogieron la fotocopia para corregirlas y solicitaron a los alumnos que manden las construcciones vía e-mail.

Por último y a modo de cierre, se dejó de tarea completar la *Tabla 3* de clasificación de cuadriláteros según el paralelismo de sus lados (Ver *Actividad 3 Fotocopia 2* del ANEXO).

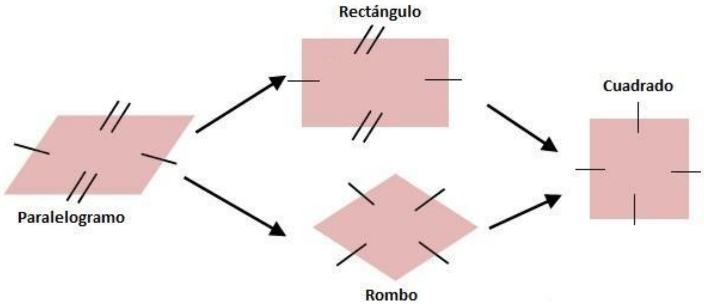
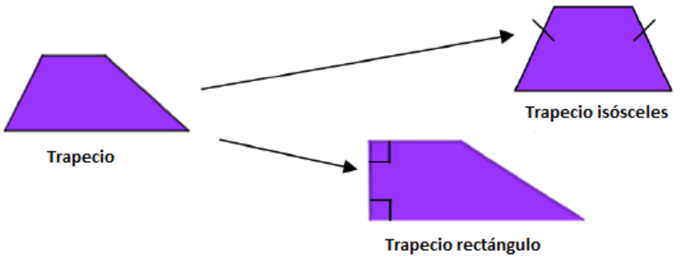
Nombre de la categoría	Descripción	Cuadriláteros que pertenecen
		
		
		

Tabla 3: Tarea – clasificación de los cuadriláteros según el paralelismo de sus lados.[1]

Clase 3 de Joaquín; Clase 4 de Manuela:

Los objetivos fueron: Lograr que mediante interacción con el gráfico de distintos polígonos los alumnos encuentren la forma de cubrirlos con la menor cantidad de triángulos para así construir en la puesta en común la fórmula para calcular la medida de la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

Recursos utilizados: Pantalla digital, proyectores, celulares con GeoGebra instalado y fotocopias.

Tiempo destinado: 80 minutos

[1] Esta actividad es una adaptación del material de los docentes de la institución

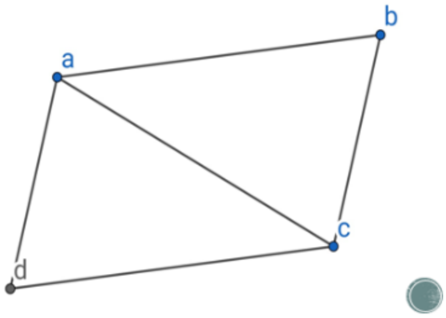
Implementación: La clase comenzó con el practicante devolviendo los trabajos prácticos y se realizó la puesta en común de un cuadro donde se presentaban todos los cuadriláteros para completar las propiedades que cumplía cada uno recuperando lo que había trabajado cada grupo de su cuadrilátero en particular (Ver *Actividad 2 de la Fotocopia 3* del ANEXO). Esto se realizó proyectando las construcciones de los alumnos en una pantalla y probando con las herramientas de *GeoGebra;* mientras en la pizarra digital se completaba el cuadro. Luego se prosiguió con la demostración de propiedades de ángulos para el trapecio isósceles, el paralelogramo y el trapezoide. Mostraremos en la *Figura 4* las diapositivas de la demostración del paralelogramo, entendiendo que de igual manera se realizaron las diapositivas de los otros dos cuadriláteros. Esto se realizó porque vimos que las demostraciones de los alumnos no eran como las esperábamos. En esta presentación se buscó mostrar a los alumnos la notación que debían usar, las propiedades que les servirían para demostrar y el modo en que se aborda una "demostración" en matemática.

PARALELOGRAMO

DOS PARES DE ÁNGULOS OPUESTOS CONGRUENTES

1- En el paralelogramo abcd trazamos la diagonal $\overline{ac}$ y vemos los triángulos $\Delta acb\ y\ \Delta acd$.

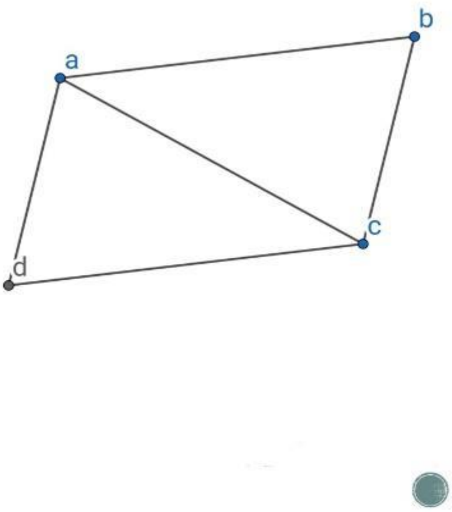
2- Sabemos que los lados $\overline{ab}$ y $\overline{dc}$ son congruentes, y los lados $\overline{ad}$ y $\overline{bc}$ también son congruentes por la definición de paralelogramo. Además, los triángulos comparten el lado $\overline{ac}$. Entonces por el criterio LLL (lado-lado-lado) de congruencia de triángulos, podemos decir que $\Delta acb\ y\ \Delta acd$ son congruentes. Por lo tanto, sus ángulos son congruentes.



3- Viendo ahora las rectas paralelas $\overleftrightarrow{ab}\ y\ \overleftrightarrow{dc}$ cortadas por la recta $\overleftrightarrow{ac}$, podemos usar lo que sabemos de ángulos entre paralelas cortadas por una secante. Como podemos ver, los ángulos $\widehat{cab}$ y $\widehat{acd}$ son congruentes por ser alternos internos.

4- Luego viendo las rectas paralelas $\overleftrightarrow{ad}\ y\ \overleftrightarrow{bc}$ cortadas por la recta $\overleftrightarrow{ac}$, y usando también congruencia entre paralelas cortadas por una secante, podemos ver que los ángulos $\widehat{dac}\ y\ \widehat{acb}$ son congruentes por ser alternos internos.

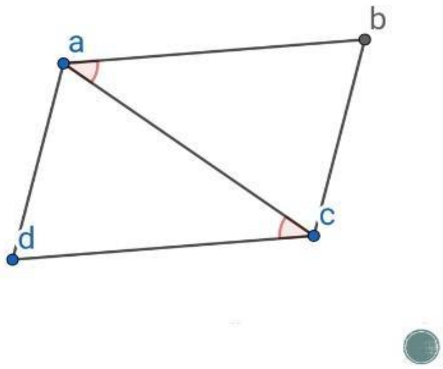
Por lo tanto, como los triángulos son congruentes, los ángulos $\widehat{adc}\ y\ \widehat{cba}$ son congruentes. O sea, los opuestos son congruentes.



3- Viendo ahora las rectas paralelas $\overleftrightarrow{ab}\ y\ \overleftrightarrow{dc}$ cortadas por la recta $\overleftrightarrow{ac}$, podemos usar lo que sabemos de ángulos entre paralelas cortadas por una secante. Como podemos ver, los ángulos $\widehat{cab}$ y $\widehat{acd}$ son congruentes por ser alternos internos.

4- Luego viendo las rectas paralelas $\overleftrightarrow{ad}\ y\ \overleftrightarrow{bc}$ cortadas por la recta $\overleftrightarrow{ac}$, y usando también congruencia entre paralelas cortadas por una secante, podemos ver que los ángulos $\widehat{dac}\ y\ \widehat{acb}$ son congruentes por ser alternos internos.

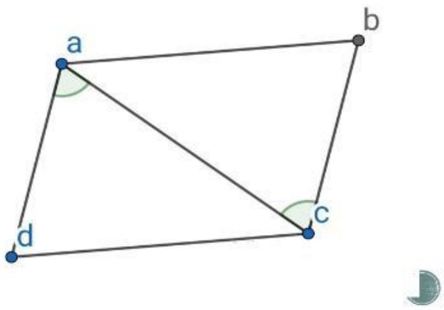
Por lo tanto, como los triángulos son congruentes, los ángulos $\widehat{adc}\ y\ \widehat{cba}$ son congruentes. O sea, los opuestos son congruentes.



3- Viendo ahora las rectas paralelas $\overleftrightarrow{ab}$ y $\overleftrightarrow{dc}$ cortadas por la recta $\overleftrightarrow{ac}$, podemos usar lo que sabemos de ángulos entre paralelas cortadas por una secante. Como podemos ver, los ángulos $\widehat{cab}$ y $\widehat{acd}$ son congruentes por ser alternos internos.

4- Luego viendo las rectas paralelas $\overleftrightarrow{ad}$ y $\overleftrightarrow{bc}$ cortadas por la recta $\overleftrightarrow{ac}$, y usando también congruencia entre paralelas cortadas por una secante, podemos ver que los ángulos $\widehat{dac}$ y $\widehat{acb}$ son congruentes por ser alternos internos.

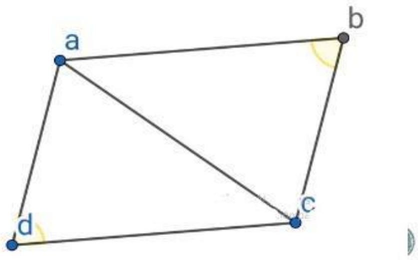
Por lo tanto, como los triángulos son congruentes, los ángulos $\widehat{adc}$ y $\widehat{cba}$ son congruentes. O sea, los opuestos son congruentes.



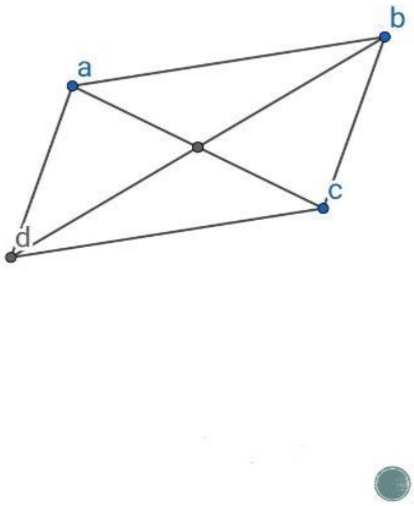
3- Viendo ahora las rectas paralelas $\overleftrightarrow{ab}$ y $\overleftrightarrow{dc}$ cortadas por la recta $\overleftrightarrow{ac}$, podemos usar lo que sabemos de ángulos entre paralelas cortadas por una secante. Como podemos ver, los ángulos $\widehat{cab}$ y $\widehat{acd}$ son congruentes por ser alternos internos.

4- Luego viendo las rectas paralelas $\overleftrightarrow{ad}$ y $\overleftrightarrow{bc}$ cortadas por la recta $\overleftrightarrow{ac}$, y usando también congruencia entre paralelas cortadas por una secante, podemos ver que los ángulos $\widehat{dac}$ y $\widehat{acb}$ son congruentes por ser alternos internos.

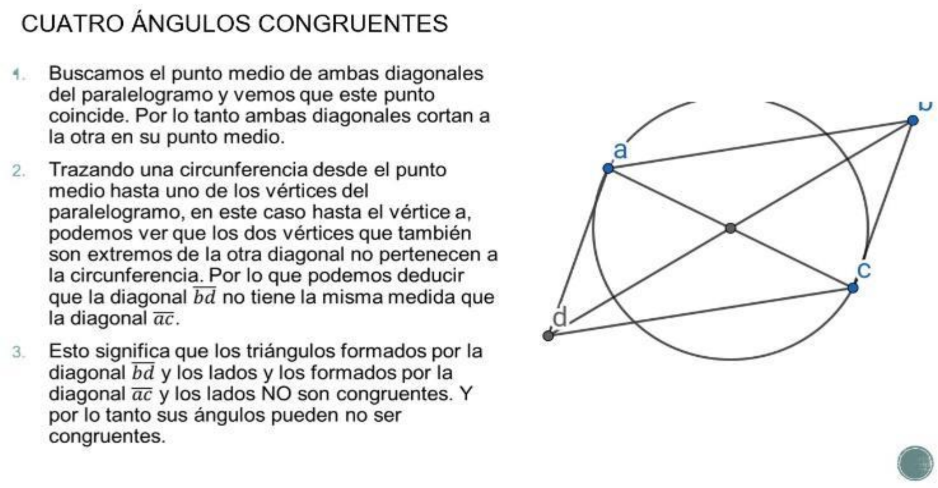
Por lo tanto, como los triángulos son congruentes, los ángulos $\widehat{adc}$ y $\widehat{cba}$ son congruentes. O sea, los opuestos son congruentes.

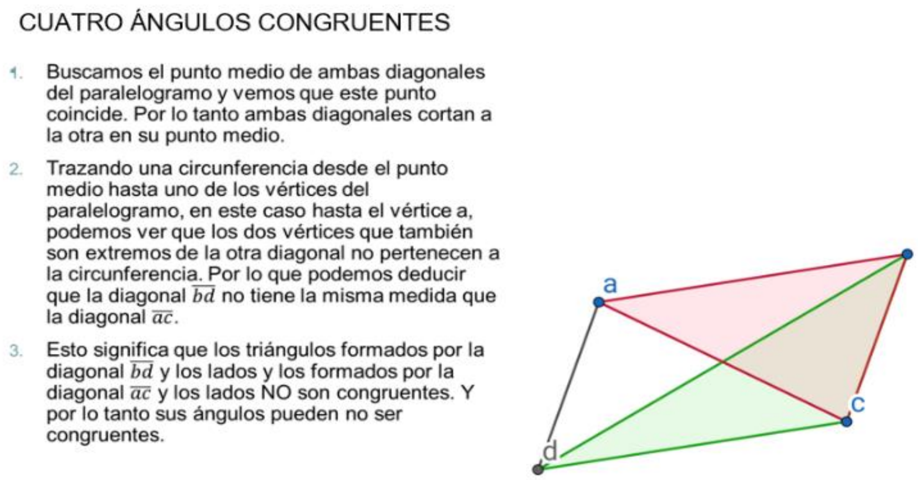


CUATRO ÁNGULOS CONGRUENTES



1. Buscamos el punto medio de ambas diagonales del paralelogramo y vemos que este punto coincide. Por lo tanto ambas diagonales cortan a la otra en su punto medio.
2. Trazando una circunferencia desde el punto medio hasta uno de los vértices del paralelogramo, en este caso hasta el vértice a, podemos ver que los dos vértices que también son extremos de la otra diagonal no pertenecen a la circunferencia. Por lo que podemos deducir que la diagonal $\overline{bd}$ no tiene la misma medida que la diagonal $\overline{ac}$.
3. Esto significa que los triángulos formados por la diagonal $\overline{bd}$ y los lados y los formados por la diagonal $\overline{ac}$ y los lados NO son congruentes. Y por lo tanto sus ángulos pueden no ser congruentes.





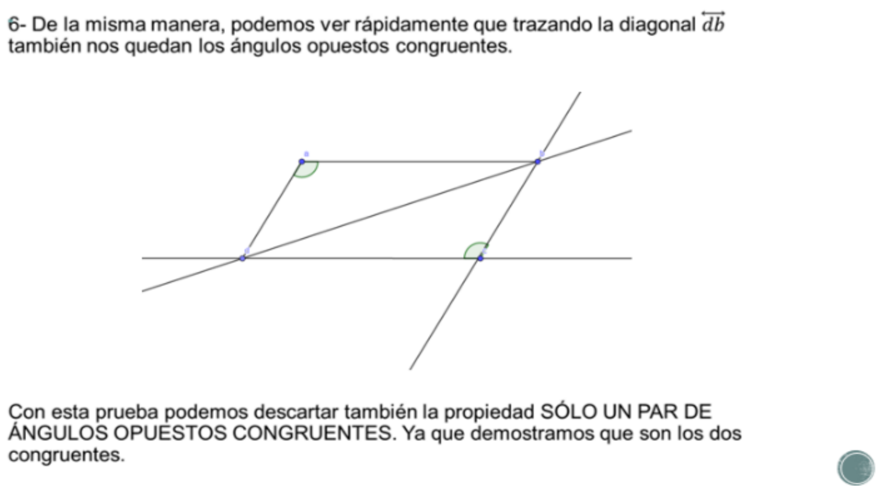


Figura 4: Diapositivas explicativas de las demostraciones de propiedades del paralelogramo.

Luego de esto, se pidió a los alumnos que rehagan de tarea las demostraciones de los cuadriláteros que se les habían asignado.

La clase siguió con la puesta en común del cuadro de clasificación de cuadriláteros según el paralelismo de sus lados que había quedado de tarea, donde mediante preguntas a los alumnos se completó el cuadro proyectándolo en la pizarra digital. Luego se presentó un *PowerPoint* con los nombres de los distintos polígonos según su cantidad de lados, donde primero se mostraban los distintos polígonos y los alumnos adivinaban el nombre y luego corroboraban la respuesta en las diapositivas.

Después se dio comienzo a la *Actividad 1 Fotocopia 4* (Ver ANEXO) que consistía en: Buscar la forma de cubrir dos polígonos entregados con la menor cantidad de triángulos posibles. Cabe aclarar que había un par de polígonos distinto para cada grupo de alumnos, donde se encontraban pentágonos, hexágonos, heptágonos, octógonos, eneágonos y decágonos, los distintos polígonos eran algunos cóncavos y otros convexos. Cuando los alumnos trabajaban, los practicantes fueron pasando por los grupos para ver quiénes encontraban la respuesta deseada. Por lo que antes que finalice la clase, los alumnos que la habían encontrado pasaron al pizarrón para que sus compañeros la tomen como referencia.

Una vez dividido el polígono, debían completar la *Tabla 4* (Ver *Actividad 2 Fotocopia 3* del ANEXO) tomando nota de cuántos lados posee cada polígono, en cuántos triángulos es posible dividirlos y cuál era la suma de los ángulos interiores del polígono en cuestión. Debido a que no todos los grupos terminaron de completar la tabla, la actividad quedó de tarea.

Cantidad de lados:	Cantidad de triángulos:	Suma de ángulos interiores:

n		

Tabla 4: Actividad 2 Fotocopia 3 que debían completar los estudiantes.

Clase 4 de Joaquín; Clase 5 y 6 de Manuela:

Los objetivos fueron:

- Revisar la suma de ángulos interiores de un polígono de n lados.
- Estudiar los elementos de los polígonos regulares inscriptos tales como centro, ángulo interior, lado, apotema, etc.
- Introducir el concepto de ángulo central de polígonos inscriptos.

Recursos utilizados: Lápiz, papel, pizarra digital, proyector y fotocopias.

Tiempo destinado: 120 minutos

Implementación: Al comenzar la clase en 3°D la practicante entregó las copias de demostración de propiedades de ángulos de los cuadriláteros para luego revisar si la otra fotocopia con la tarea fue hecha. En 3°C se empezó revisando la tarea. En ambos cursos, luego de ver el cumplimiento de los alumnos, se realizó la puesta en común de la tarea. En 3°C los alumnos no habían hecho la tarea, por lo que se decidió completarlo con ayuda de todos en la pizarra digital y que fueran completando el cuadro de sus fotocopias en ese momento. En cambio, en 3°D, un alumno pasó a completar el cuadro y lo hizo viendo su copia mientras los demás corroboraron que tuvieran lo mismo. Así se institucionalizaron las fórmulas: $Cantidad\ de\ triángulos = (n-2)$ siendo n la cantidad de lados del polígono, y la de suma de ángulos interiores de un polígono de n lados: $SAI = 180° \times (n-2)$.

En 3°D se entregó la guía de actividades sobre suma de ángulos interiores de cuadriláteros (Ver *Fotocopia 5* del ANEXO) destinando tiempo para su resolución. Los alumnos trabajaron mayormente en grupos y de manera autónoma, mientras que los practicantes, la docente supervisora y la docente del curso pasaban por las mesas del aula inteligente ayudando a resolver algunas dudas que podían tener respecto a la guía de trabajo (*Figura 5*). En 3°C debido a cuestiones de tiempo, la *Fotocopia 5* se entregó después de la actividad que se describirá en el siguiente párrafo.

Figura 5: Alumnos de 3°D realizando las actividades en el aula inteligente.

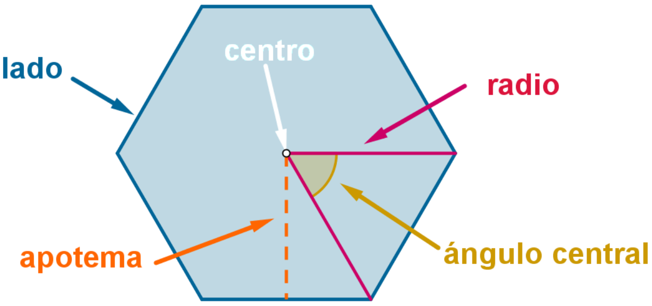


Figura 6: Partes de un hexágono regular.

El practicante presentó una imagen con las partes de un polígono regular inscrito como se puede ver en la *Figura 6*. Posteriormente pidió a los alumnos que copiaran las partes en el polígono de sus fotocopias. Luego se dio comienzo a las actividades desafío, que eran las *Actividades 1 y 2* de la *Fotocopia 6* (Ver ANEXO). En la primera debían intentar calcular la medida de uno de los ángulos interiores de un polígono regular inscrito (hexágono). Al finalizar esta tarea se hizo la puesta en común y se institucionalizaron las fórmulas. En la segunda, dado un polígono dividido en triángulos con vértices en el centro, deberían calcular la medida de los ángulos de un triángulo isósceles con vértice en el centro del polígono y que uno de sus lados fuera uno de los lados del polígono, para que por último los alumnos pudieran deducir solos la medida del ángulo central de un polígono regular. Una vez hechas las actividades desafío, se hizo una puesta en común para institucionalizar las fórmulas que los alumnos habían encontrado. Pasaron alumnos voluntariamente al pizarrón y copiaron las siguientes fórmulas (*Figura 7*):

$$Ángulo\ interior = \frac{SAI}{n} = \frac{180° \times (n-2)}{n},$$

$$Ángulo\ central = \frac{360°}{n} \quad \text{y}$$

$$Ángulo\ central = 180° - Ángulo\ interior.$$

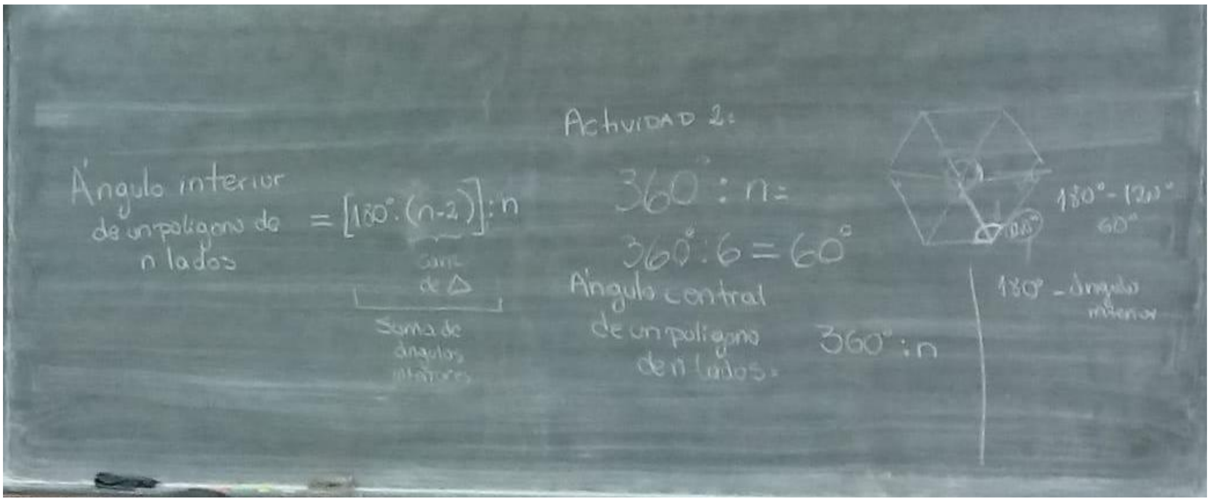


Figura 7: Fórmulas institucionalizadas en uno de los cursos.

En 3°D, luego de institucionalizar las fórmulas los alumnos tuvieron un tiempo suficiente para realizar al menos la mitad de la guía de actividades de ángulo central (*Fotocopia 6* del ANEXO). Por esta razón la practicante se llevó las copias para corregir las actividades tanto de suma de ángulos interiores como de ángulo central. En cambio, en 3°C en ese momento se entregó la guía de suma de ángulos interiores junto con la de ángulo central, y los alumnos no llegaron a hacer todo lo esperado. El practicante decidió dejarles las guías de tarea para la clase siguiente.

En ambos cursos se presentaron los temas de la evaluación y se puso fecha para la misma, ya que se debía avisar a los alumnos con al menos 5 días de anticipación.

Clase 5 de Joaquín; Clase 7 de Manuela:

<u>Los objetivos fueron:</u>

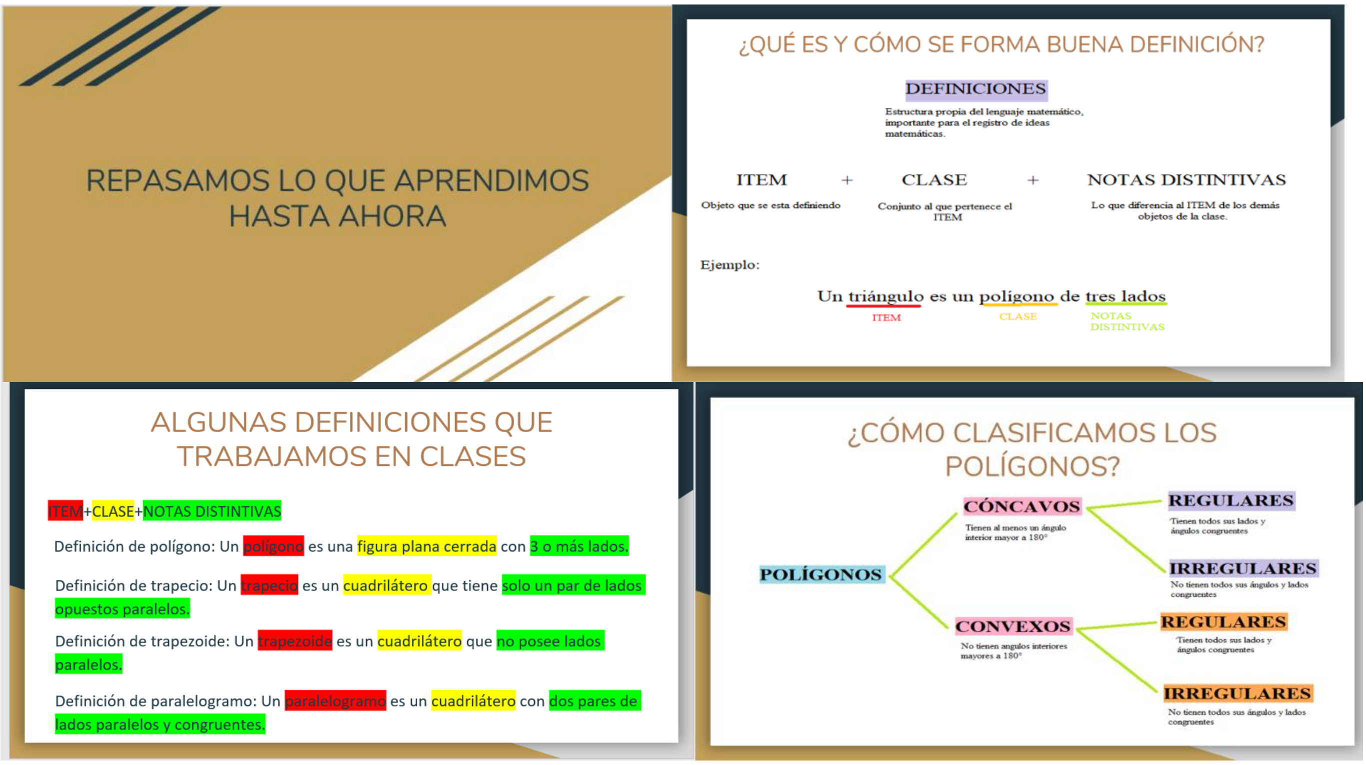
- Repasar los temas vistos hasta el momento.
- Revisar los ejercicios donde se notó más conflicto en los alumnos.

Recursos utilizados: Lápiz, papel, y fotocopias.

Tiempo destinado: 80 minutos

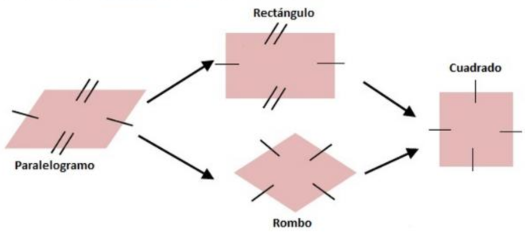
Implementación*:* En 3°D se entregaron las guías corregidas y se dio tiempo a los estudiantes para que las completen y corrijan los errores que se habían marcado, al mismo tiempo que realizaban preguntas sobre sus dudas para la evaluación de la clase siguiente. La practicante notó algunos errores generales en las guías corregidas y luego en la clase, por lo que decidió hacer la puesta en común de algunas actividades puntuales: *Fotocopia 5, Actividades 1 y 2; Fotocopia 6, Actividades 5, 7 y 9* (Ver ANEXO). Además, realizó algunas aclaraciones generales que vio necesarias para corregir los errores generales. Se logró que los alumnos participaran y despejaran sus dudas.

En cambio, en 3°C, se controló que los alumnos hubiesen hecho la tarea, y se hizo la puesta en común de la misma. Se solicitó a los alumnos que pasen a la pizarra a mostrar y explicar sus resoluciones. Al finalizar, se proyectó el *PowerPoint* de repaso (*Figura 8*), y con preguntas a los alumnos se gestionó la presentación del mismo. Luego el trabajo continuó con los ejercicios adicionales de la guía de actividades entregada la cuarta clase.



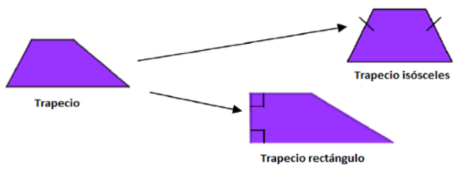
¿CÓMO CLASIFICAMOS LOS CUADRILÁTEROS?

PARALELOGRAMOS



CUADRILÁTEROS QUE POSEEN DOS PARES DE LADOS OPUESTOS PARALELOS Y CONGRUENTES

TRAPECIOS



CUADRILÁTEROS QUE POSEEN SOLO UN PAR DE LADOS OPUESTOS PARALELOS.

TRAPEZOIDES

CUADRILÁTEROS QUE NO POSEEN LADOS PARALELOS

ALGUNAS PROPIEDADES DE CUADRILÁTEROS QUE ESTUDIAMOS

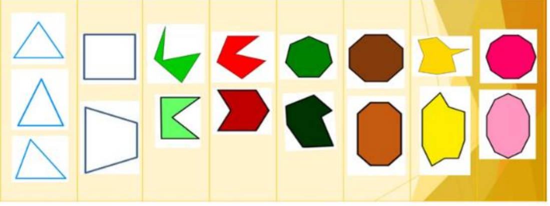
Propiedades de ángulos	Trapecio	Paralelogramo	Trapezoide
Solo un par de ángulos opuestos congruentes	no	no	no
Dos pares de ángulos opuestos congruentes	no	si	no
Cuatro ángulos congruentes	no	no	no

Propiedades de diagonales	Trapecio	Paralelogramo	Trapezoide
Solo una diagonal corta a la otra en su punto medio	no	no	no
Cada diagonal corta a la otra en su punto medio	no	si	no
Solo una diagonal es bisectriz de los ángulos que interseca	no	no	no
Cada diagonal es bisectriz de los ángulos que interseca	no	no	no
Las diagonales son perpendiculares	no	no	no
Las diagonales son congruentes	no	no	no
Solo una diagonal divide al cuadrilátero en triángulos congruentes	no	no	no
Cada diagonal divide al cuadrilátero en triángulos congruentes	no	si	no
Las diagonales dividen al cuadrilátero en cuatro triángulos congruentes	no	no	no

¿CÓMO NOMBRAMOS LOS DISTINTOS POLÍGONO?

Nombre + Cantidad de lados	TRIÁNGULO (3 lados)	CUADRI-LÁTERO (4 lados)	PENTÁGO-NO (5 lados)	HEXÁGO-NO (6 lados)	HEPTÁGO-NO (7 lados)	OCTÓGO-NO (8 lados)	ENEÁGO-NO (9 lados)	DECÁGO-NO (10 lados)

FIGURA



SUMA DE ÁNGULOS INTERIORES DE UN POLÍGONO DE n LADOS

La mínima cantidad de triángulos en los que se puede dividir un polígono de n lados es:

Cantidad de triángulos = n-2

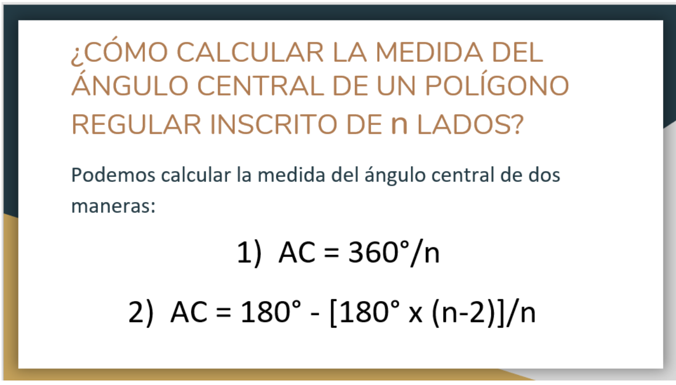
La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es:

SAI= 180° x (n-2)

¿CÓMO CALCULAR LA MEDIDA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE POLÍGONOS REGULARES DE n LADOS?

Por ser regular el polígono, sabemos que sus ángulos interiores son todos congruentes. Y sabemos que la suma de sus ángulos interiores es igual a 180°.(n-2), entonces la medida de un ángulo interior debe ser igual a:

Ángulo interior = [180° .(n-2)]/n



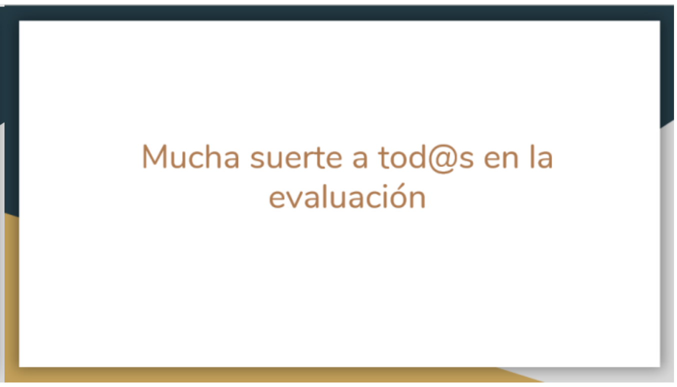


Figura 8: Diapositivas del repaso

Clase 6 de Joaquín; Clase 8 y 9 de Manuela:

Los objetivos fueron:

Evaluar los contenidos vistos hasta el momento.

- Reforzar las justificaciones sobre propiedades de ángulos interiores de cuadriláteros.

Recursos utilizados: Pizarrón, tiza o marcador, papel, lápiz, pantalla digital y proyector.

Tiempo destinado: 120 minutos

Implementación: Los primeros 40 minutos de esta clase se destinaron a la evaluación, la misma será abordada en la sección 2.2.1 de este capítulo. En el caso del curso de Joaquín, 3° C, lo que de describe en los siguientes párrafos fue el mismo día que la evaluación. En el caso del curso de Manuela, 3°D, fueron en días distintos. Por lo tanto, en este curso antes de comenzar la clase se entregaron las evaluaciones corregidas y luego se prosiguió como se describe debajo.

La actividad consistía en el "Juego de los dados" con el que se intentó retomar el tema de demostración. El juego consistió en que el practicante, desafió a los alumnos a que ellos apilen en el orden que deseen 3 dados (*Figura 9*), y él "adivinaría" cuánto es la suma de las caras no visibles, entendiendo por caras no visibles a aquellas que tuvieran contacto ya sea con la mesa o con otro dado, lo que haría imposible verla desde ningún ángulo sin desapilar los dados. El objetivo de esta actividad fue mostrarles un juego donde detrás aparecía una "demostración matemática" y que los alumnos entiendan la importancia de las demostraciones, desde una demostración sencilla, intentando también que le perderían el miedo a este tipo de tareas. En 3°D la practicante vio necesaria una la explicación de lo que es una justificación y porque se necesita justificar en matemática. Por este motivo, les habló a los estudiantes de la idea de que la justificación se realiza para que cualquier persona que lea lo que nosotros estamos probando, pueda entenderlo y creer en la validez de lo realizado. Es por eso, que se explicó la importancia de que todos los pasos de la prueba deben ser claros y completos, y que se debe escribir matemáticamente.

Figura 9: forma de apilar los dados para el juego.

Luego, en ambos cursos, se hizo una demostración formal de cómo se calcula la suma de las caras no visibles de los dados (*Figura 10*). Esta demostración se realizó con participación activa de los estudiantes y preguntas de los practicantes a ellos para que lograran una demostración completa. Al finalizarla, y para que los alumnos entren un poco más en el lenguaje matemático, se presentaron en el pizarrón una serie de símbolos utilizados en las pruebas matemáticas, como por ejemplo las notaciones de ángulo, triángulo, “por lo tanto”, “entonces”, etc.

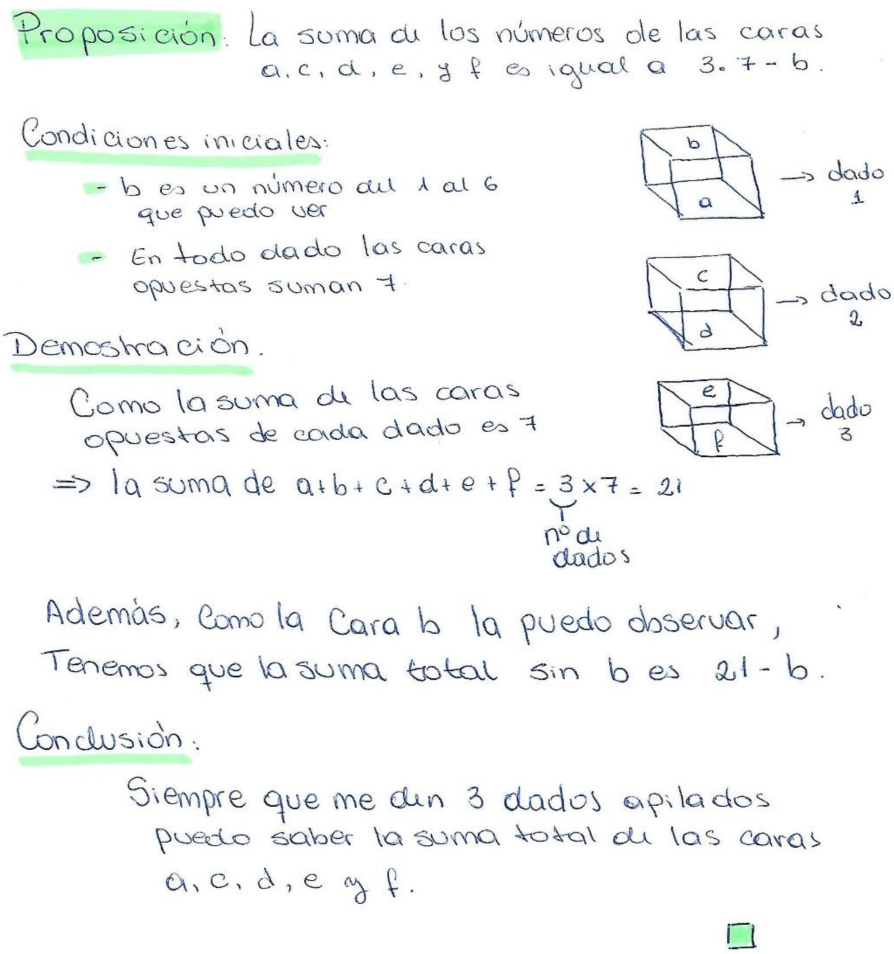
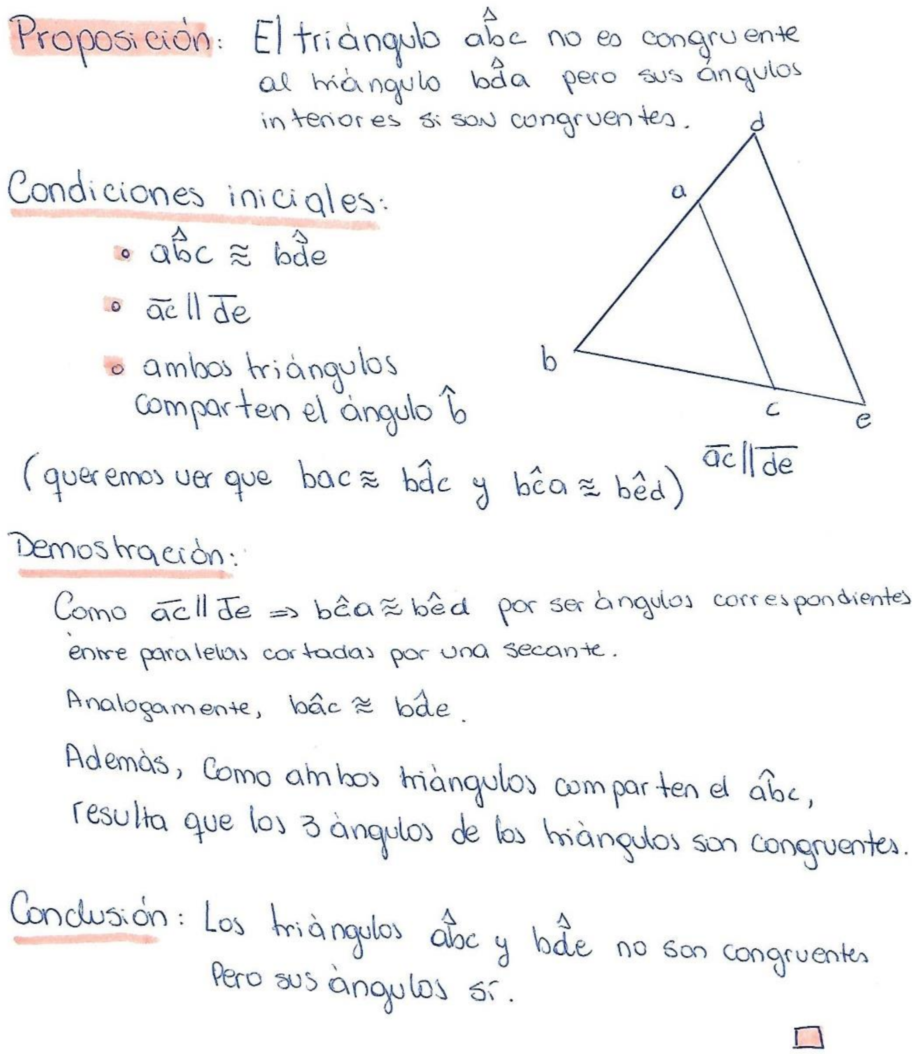


Figura 10: Demostración "Juego de los dados"

En 3°C se realizó también la demostración de la existencia de triángulos no congruentes cuyos ángulos interiores si lo fueran (*Figura* 11). Esto no sucedió en 3°D por falta de tiempo.



Proposición: El triángulo $\overset{\triangle}{abc}$ no es congruente al triángulo $\overset{\triangle}{bda}$ pero sus ángulos interiores sí son congruentes.

Condiciones iniciales:

- $\overset{\triangle}{abc} \approx \overset{\triangle}{bde}$
- $\overline{ac} \parallel \overline{de}$
- ambos triángulos comparten el ángulo $\hat{b}$

(queremos ver que $bac \approx b\hat{d}c$ y $b\hat{c}a \approx b\hat{e}d$) $\overline{ac} \parallel \overline{de}$

Demostración:

Como $\overline{ac} \parallel \overline{de} \Rightarrow b\hat{c}a \approx b\hat{e}d$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas cortadas por una secante.

Analogamente, $b\hat{a}c \approx b\hat{d}e$.

Además, como ambos triángulos comparten el $a\hat{b}c$, resulta que los 3 ángulos de los triángulos son congruentes.

Conclusión: Los triángulos $\overset{\triangle}{abc}$ y $\overset{\triangle}{bde}$ no son congruentes pero sus ángulos sí.

$\square$

Figura 11: Demostración triángulos no congruentes con ángulos interiores congruentes.

Posteriormente, se entregó a los alumnos una guía de actividades de demostraciones guiadas de propiedades de ángulos interiores para el romboide, el paralelogramo y el rombo (*Fotocopia 7* del ANEXO). Estos cuadriláteros fueron elegidos por diferentes motivos: el paralelogramo porque al estar la demostración en el *Power Point* que se mostró en la clase 3 de Joaquín, 3°C, 4 de Manuela, 3°D, podían usar la misma, junto con las preguntas de la fotocopia para entender que era lo que se estaba pidiendo; el romboide porque tenían que realizar una demostración similar a la del trapecio que se encontraba en las diapositivas, por lo tanto se podían guiar con ellas; y el rombo, pues la demostración era análoga a la del paralelogramo. Cabe destacar que la demostración del rombo no fue guiada con preguntas como las otras dos. Las tres figuras nos parecieron necesarias pues concentraban las estrategias de demostración para el resto de los cuadriláteros.

Clase 7 de Joaquín; Clase 10 de Manuela:

Los objetivos fueron:

- Repasar todos los conceptos y contenidos vistos hasta el momento para la evaluación final.

Recursos utilizados: Pizarra digital, Power Point, lápiz, papel, fotocopias.

Tiempo destinado: 80 minutos

Implementación: Se comenzó la clase recolectando las copias de la tarea y anunciando la fecha y temas de la evaluación final. Luego, se entregó a los alumnos una guía de integración (*Fotocopia 8* del ANEXO), la cual contenía todos los temas vistos hasta el momento y se agregó el planteo y resolución de ecuaciones. Los alumnos de 3°D antes de comenzar con la guía vieron el *Power Point* de repaso (*Figura 8*) que antes se había mencionado para los alumnos del otro curso, la practicante logró que este repaso se realice de manera dinámica con todos los alumnos participando de la misma. En 3°C se comenzó directamente la guía de actividades. En ambos cursos en esta instancia se aclaró a los alumnos que era la oportunidad de despejar sus dudas de cara a la evaluación final. Por lo que se dejó que los alumnos trabajaran solos o en grupo, mientras los practicantes pasaban por las mesas despejando las dudas que surgían.

Clase 8 de Joaquín; Clase 11 y 12 de Manuela:

El objetivo fue:

- Repasar todos los conceptos y contenidos vistos hasta el momento para la evaluación final de prácticas.

Recursos utilizados: Pizarra digital, Power Point, lápiz, papel, fotocopias.

Tiempo destinado: 120 minutos

Implementación: La clase comenzó con la devolución por parte del practicante de las actividades sobre demostración de propiedades para el paralelogramo y el romboide, explicando en el pizarrón los errores generales y pidiendo que los alumnos vean los errores puntuales que cada uno había tenido en sus resoluciones.

Luego se continuó con la guía de integración en ambos cursos. Los estudiantes empezaron a trabajar y si surgía alguna duda, preguntaban a alguno de los practicantes o docentes que estaban en el curso. Fue muy importante que los alumnos realicen estas actividades, ya que eran las que más costaban y pudieron preguntar todo lo necesario para entender los temas vistos. Cuando terminaron de trabajar, se realizó la puesta en común.

En 3°D la puesta en común tuvo la particularidad de que los estudiantes eligieron los ejercicios que querían poner en común. Ellos, siendo autocríticos, decidieron qué ejercicios les habían costado más y cuales todavía podían presentar dudas o alguna dificultad, y esos fueron los que se realizaron en el pizarrón. Las actividades que se escogieron fueron la 10 y 11 de la *Fotocopia 8* (Ver ANEXO) pues consideraron que fueron las que más les costaron. La practicante pidió que pasen distintos alumnos de manera voluntaria a resolver los ejercicios en el pizarrón, y luego que explicaran a sus compañeros el procedimiento realizado, para luego ver si todos estaban de acuerdo con la resolución. Esta puesta en común sirvió para que la docente tutora y la practicante pudieran ayudar a los alumnos con todas las dudas que quedaban. Se realizaron comentarios, correcciones y preguntas que ayudaron a los estudiantes. Al finalizar la misma, quedaban algunos minutos para que la clase finalice y la practicante decidió hablarles a los alumnos. Agradeció la amabilidad con la que la recibieron, la predisposición a trabajar, las ganas y la comodidad que le hicieron sentir en cada clase. Destacó que todos hicieron un buen trabajo en el aula, y que más allá de las distintas notas, estaba conforme con el rendimiento que habían tenido, ya que se notó que entendieron la unidad trabajada. Se agradeció a la docente tutora y a los alumnos por abrir las puertas de su aula y la confianza depositada en la practicante y luego de un aplauso y varios comentarios de los alumnos hacia la practicante, se dio por finalizada la clase.

Por su parte, en 3°C, los ejercicios que se pusieron en común fueron decididos por el practicante del curso. Estos fueron las *Actividades 9 a., 10 y 11 a. y c* de la *Fotocopia 8*(ver ANEXO). Los alumnos pasaron a resolver los ejercicios en el pizarrón voluntariamente o elegidos por el practicante ya que consideró que sus resoluciones podrían servir al resto de los estudiantes. Una vez que cada alumno terminaba su resolución, explicaba con detenimiento los pasos realizados y el porqué de los mismos, y así sus compañeros prestaban atención y luego decidían si estaban de acuerdo con la respuesta dada. Al terminar los ejercicios, la hora de clase finalizó y el practicante se despidió del grupo.

Clase 9 de Joaquín; Clase 13 de Manuela:

El objetivo fue:

- Evaluar los contenidos vistos hasta el momento.

Recursos utilizados: Fotocopias y lápiz.

Tiempo destinado: 80 minutos

Implementación: Se tomó la evaluación desde el inicio de la clase, a la cual nos referiremos más adelante en la sección 2.2.2 de este capítulo. En esta instancia, sólo se respondieron dudas sobre los enunciados o dudas puntuales, sin dar información a los alumnos sobre la respuesta de ninguna actividad.

2.3 Evaluación.

En los siguientes párrafos se describirán las distintas evaluaciones que se tomaron a lo largo de nuestras prácticas profesionales. En ambos cursos se utilizaron los mismos instrumentos de evaluación. Se realizaron dos instancias evaluativas: una evaluación en la mitad de la práctica, y otra al final. En la libreta de los alumnos se puso una sola nota, que fue el promedio entre las dos evaluaciones tomadas. En el caso del 3° D, siguiendo con la metodología de la profesora del curso, se llevaba un registro del cumplimiento de los estudiantes a las tareas que se indicaban de una clase a la siguiente. De esta manera aquellos alumnos que no cumplieron tres veces con la tarea se les colocó un uno que se promedió con las dos notas de las evaluaciones para tener la nota final.

2.3.1 Primera evaluación.

En esta primera evaluación, que se realizó en la tercera semana de práctica, se intentó abarcar todos los temas vistos hasta el momento: Definiciones y sus partes; polígonos y sus clasificaciones en regular/irregular, cóncavo/convexo y según su cantidad de lados; propiedades de los cuadriláteros; ángulos interiores de un cuadrilátero, y ángulo central. Esta evaluación fue formal y sumativa. Contó con 5 actividades que se muestran a continuación:

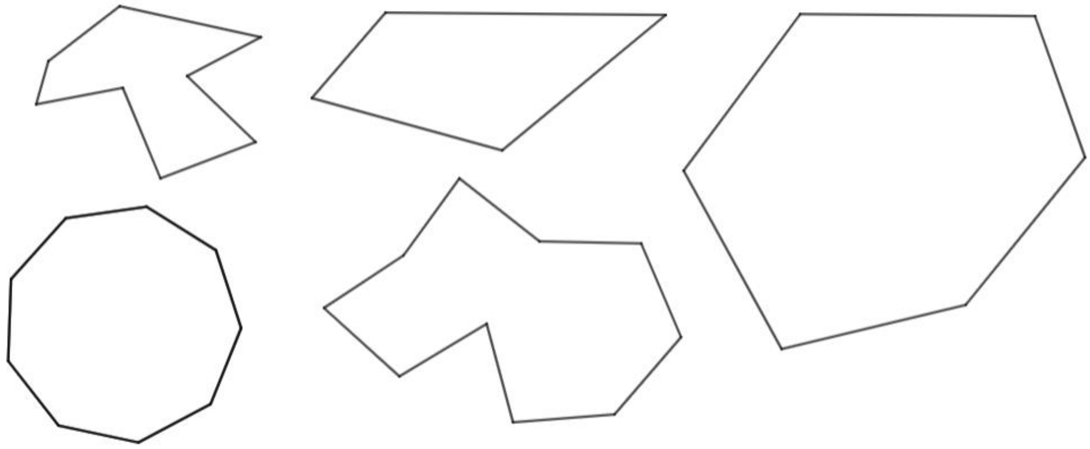
EVALUACIÓN DE MATEMÁTICA

Nombre y apellido: ____ N°: _________

Actividad 1:

a. Escribir la definición de polígono y marcar las partes de la misma.

b. Clasificar los siguientes polígonos en cóncavo/convexo, regular/irregular y nombrarlos según la cantidad de lados.



Actividad 2:

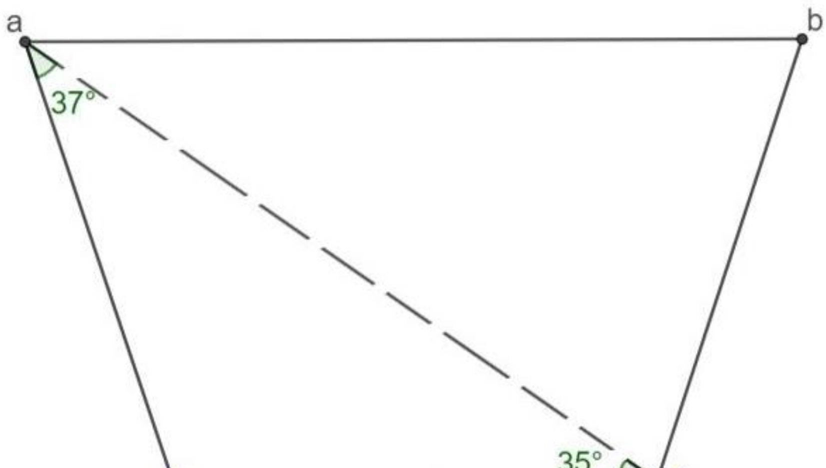
a. Dar la definición de Romboide.

b. Marcar las partes de la definición dada en el ítem a.

c. Nombrar dos propiedades del cuadrilátero antes mencionado.

Actividad 3:

a. Calcular la medida de todos los ángulos interiores del siguiente cuadrilátero:



b. Justificar el cálculo realizado en el ítem a. utilizando las propiedades del cuadrilátero.

Actividad 4:

Sabiendo que el ángulo interior de un polígono regular es de 135°:

a. Calcular la medida del ángulo central.

b. ¿Cuántos lados posee dicho polígono?

Actividad 5:

Decidir si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas. En caso de ser falsas, transformarlas en verdaderas.

a. El rombo tiene sólo una diagonal que lo divide en triángulos congruentes.

b. El trapecio rectángulo tiene un par de lados opuestos congruentes.

c. El rectángulo tiene sus dos diagonales congruentes.

d. En el paralelogramo, las dos diagonales son perpendiculares.

Los criterios que se utilizaron para seleccionar cada actividad fueron: que estuvieran todos los contenidos vistos en las clases dentro de la evaluación, intentar relacionar los distintos contenidos vistos en las actividades, que estas pongan en juego la capacidad de los alumnos de justificar cada una de sus respuestas y que evidencien si el tema está siendo entendido por los distintos alumnos de ambos cursos. Las actividades fueron construidas por los practicantes, siguiendo la modalidad de trabajo que se utilizó dentro de las clases.

La evaluación fue individual y se entregó en fotocopias, donde los alumnos podían realizar cada actividad. Los criterios de corrección que tendrían en cuenta los practicantes fueron separados en dos partes: los criterios generales, explicados y dichos oralmente antes de comenzar la evaluación; y los criterios matemáticos, que fueron lo que se esperó de los alumnos en las actividades dadas, y los que se tuvieron en cuenta a la hora de corregir cada una de estas. Los criterios fueron:

<u>Criterios generales:</u>

- Prolijidad y ortografía.
- Organización.
- Comprensión e interpretación de consignas.

- Coherencia en las justificaciones.
- Uso del lenguaje matemático - simbología y terminología.
- Respuestas completas.
- Registro de cálculos.
- Razonabilidad de resultados.

Criterios matemáticos:

- Definiciones coherentes y acertadas.
- Explicitar las partes de la definición y ser capaces de marcarlas.
- Ser capaz de clasificar los polígonos.
- Explicitar las propiedades de los cuadriláteros.
- Realizar procedimientos válidos.
- Utilizar propiedades vistas para la resolución de los ejercicios y las justificaciones.
- Ser capaces de utilizar las fórmulas vistas en clase.

Teniendo en cuenta todo lo antes mencionado y viendo las respuestas generales de los alumnos, se realizó la siguiente rúbrica con los puntajes que se designarían a cada una de las actividades de la evaluación:

RUBRICA PRIMERA EVALUACIÓN

Actividad 1: **Total**: 1,45p

Ítem a: 0,45p ----> 0,15p cada parte de la definición bien hecha / 0,10p cada nota distintiva de la definición.

Ítem b: 1p ----> Cada figura correctamente clasificada: 0,2p

Actividad 2: **Total:**1,5p

ítem a: 0,5p ------> Cada nota distintiva 0,15p / 0,05p al decir que es un cuadrilátero

Ítem b: 0,5p------> Cada parte de la definición bien marcada: 0,15p / 0,05p poner los nombres correctamente

Ítem c: 0,5p ----> Cada propiedad 0,25p

Actividad 3: **Total:** 2,75p

Ítem a: 1,5p ---.> Cada ángulo bien calculado: 0,375p

Ítem b: 1,25p -----> Se cuentan la cantidad de relaciones que utilizó el alumno en el ítem a para sacar los ángulos, y se divide 1,25 en esa cantidad. El resultado será lo que vale cada una de las justificaciones.

- Si hizo un procedimiento y no fue explicado: ½ del puntaje.
- Errores de notación bajaran 0,2p

Actividad 4: **Total**: 2,3p.

Ítem a: 1,15p ----> 0,55p por la fórmula y cuenta / 0,6p el resultado.

Ítem b: 1,15p ----> 0,55p por la fórmula y cuenta / 0,6p el resultado

Actividad 5: **Total**: 2p

Cada afirmación: 0,5p

Decidir correctamente si cada afirmación es verdadera o falsa:

- ½ de puntaje las falsas
- Puntaje total las verdaderas.

Transformar las falsas en verdaderas: ½ de puntaje.

Los resultados de esta primera evaluación fueron muy similares en cuanto a la cantidad de aprobados en ambos cursos. A continuación, en los Gráficos 1 y 2 se muestra la distribución de notas para cada división.

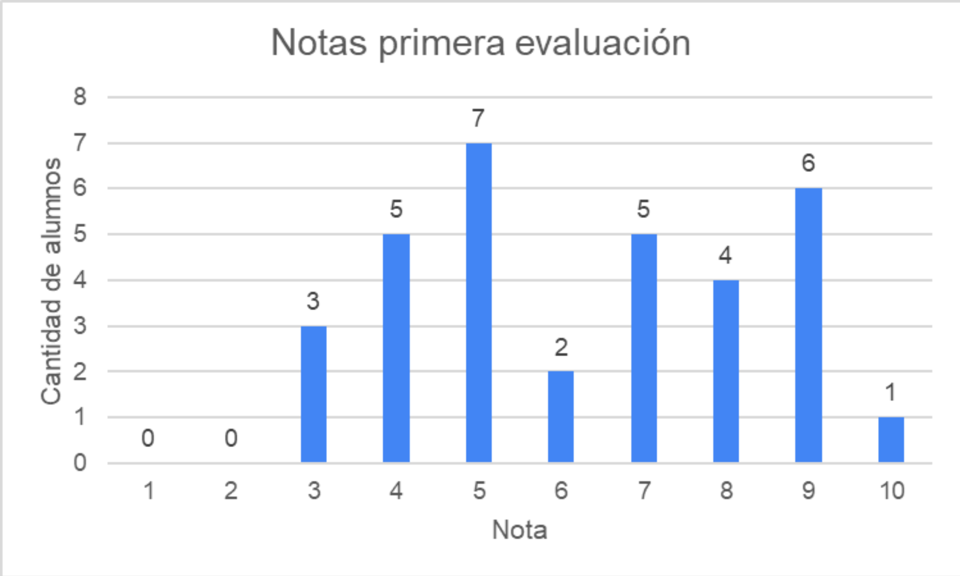


Gráfico 1: Notas de la primera evaluación de 3°C

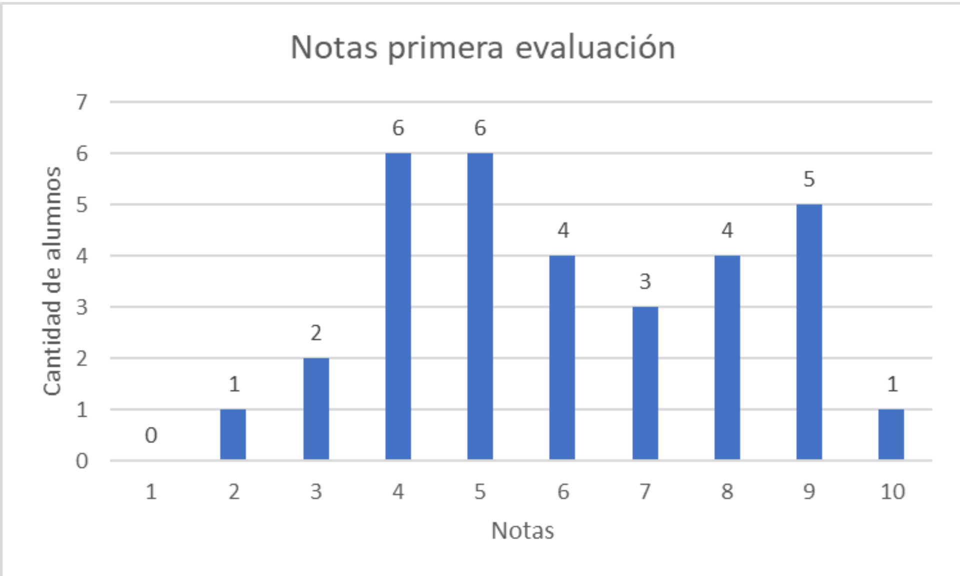


Gráfico 2: Notas de la primera evaluación de 3°D

Como se puede apreciar en los cuadros y teniendo en cuenta que en la institución se aprueba con 7 (siete), en 3°C los alumnos aprobados fueron 16 estudiantes, 48% de la clase. Mientras que los desaprobados fueron el 52%, que se refiere a 17 alumnos. En cambio, en 3°D los aprobados fueron el 41%, es decir 13 de los estudiantes, y los desaprobados 19 estudiantes que indican el 59%.

2.3.2 Evaluación final.

La evaluación final de las prácticas fue sumativa, formal e individual, tal como la primera. Los contenidos que se evaluaron en la misma fueron: Definiciones y sus partes; polígonos y sus clasificaciones en regular/irregular, cóncavo/convexo y según su cantidad de lados; propiedades de los cuadriláteros; ángulos interiores de un cuadrilátero; ángulo central de polígonos regulares; ángulos interiores de polígonos; ecuaciones y demostraciones de propiedades de los cuadriláteros. Estos contenidos son los que se vieron a lo largo de toda la práctica, y ese fue el principal criterio de selección de las consignas dadas. Además, se intentó que todos los contenidos estuvieran relacionados de alguna manera y que siguieran un orden similar al de las clases.

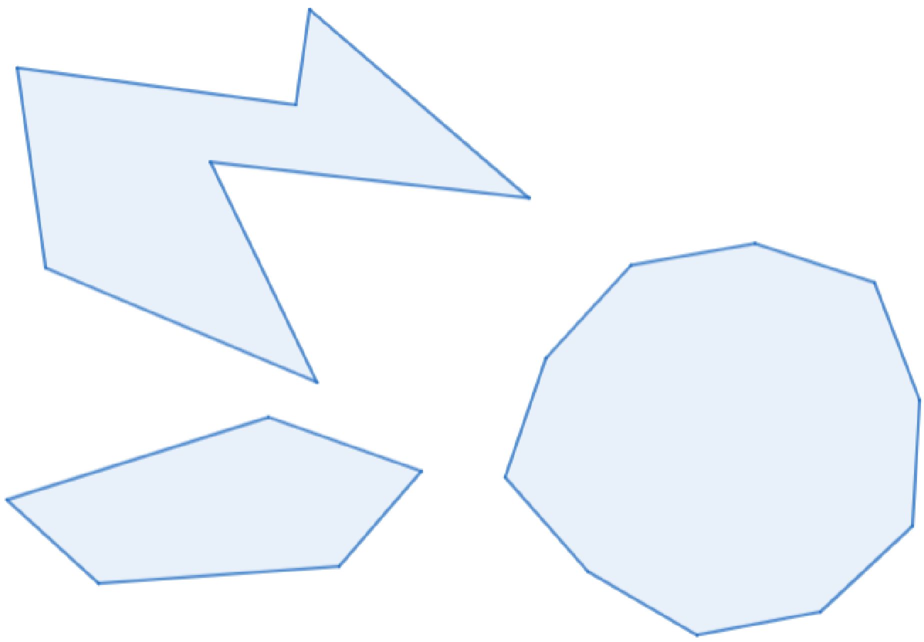
El instrumento de evaluación fue un juego de fotocopias en el que los alumnos tenían espacios para resolver las actividades. Aquí se transcribe la evaluación tomada:

EVALUACIÓN DE MATEMÁTICA

Nombre y apellido: ____N°:

Actividad 1:

Clasificar los siguientes polígonos en cóncavo/convexo, regular/irregular y escribir su nombre según la cantidad de lados:



Actividad 2:

a. Dar una definición de un cuadrilátero que esté dentro de la categoría “paralelogramos”.

b. Dar una definición de un cuadrilátero que esté dentro de la categoría “trapecio”.

c. Marcar en las tres definiciones antes dadas las partes de la definición.

Actividad 3:

Decidir quién o quienes no tienen razón. Luego, explicar por qué.

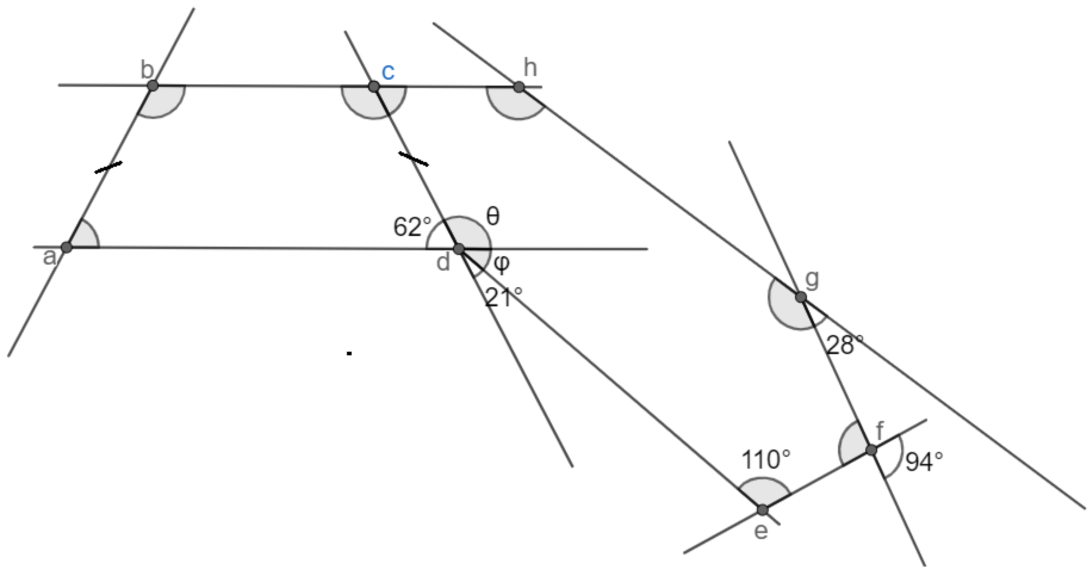
Ramiro Gastón: “Yo dibujé un paralelogramo cuyas diagonales son congruentes y ninguno de sus ángulos interiores mide 90°”

Simón Pablo: “yo dibujé un trapecio isósceles cuyos ángulos interiores son congruentes a los ángulos interiores de un rombo”

Hermenegilda: “Las diagonales de cualquier cuadrilátero que pertenezca a la clasificación de paralelogramo se cortan perpendicularmente”

Actividad 4:

a. Calcular la amplitud de todos los ángulos marcados en la figura.



b. Anotar la amplitud de cada ángulo y explicar cómo sacaste los que tienen el “porque...”.

$\hat{\theta} =$______

$\widehat{fgh} =$______

$\widehat{bad} =$ ______porque: ____

____

$\widehat{abc} =$_____porque:____
____

$\widehat{bcd} =$______porque:____
____

$\widehat{dch} =$______porque:____
____

$\hat{\varphi} =$______porque:____
____

$\widehat{efg} =$_____porque:____
____

$\widehat{ghc} =$______porque:____
____

Actividad 5:

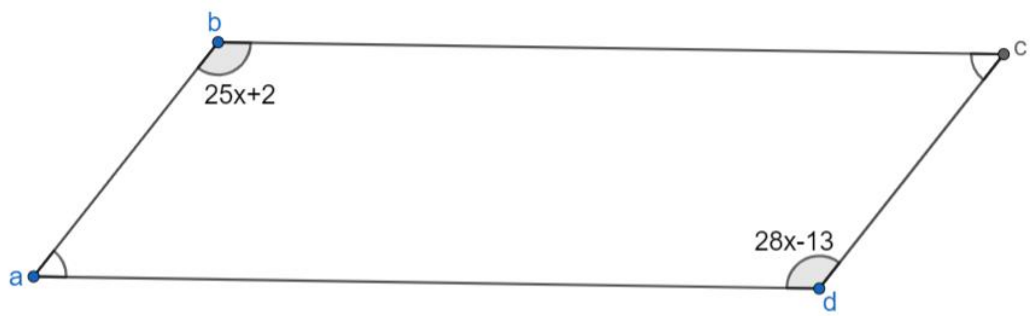
Si el ángulo central de un polígono regular es de 30°, responder las siguientes preguntas explicitando las cuentas y fórmulas que realizaron para cada una:

a. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

b. ¿Cuál será la medida de uno de sus ángulos interiores?

Actividad 6:

Calcular los ángulos interiores del siguiente paralelogramo. Escribir las condiciones iniciales y explicar con tus palabras porque hiciste cada una de las cuentas.



Condiciones iniciales:

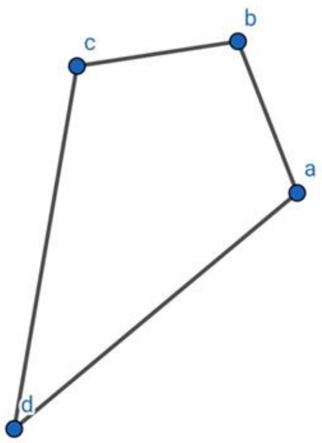
Desarrollo:

Actividad 7:

Escribir las condiciones iniciales y responder las preguntas para lograr demostrar la siguiente propiedad de ángulos interiores del romboide.

Propiedad: En un romboide los ángulos opuestos, formados por los lados no congruentes, son ángulos congruentes.

Condiciones iniciales:



a) Al trazar la diagonal $\underline{bd}$ ¿Qué podríamos decir sobre los triángulos $\widehat{cbd}$ y $\widehat{bad}$ en los que queda dividido el romboide abdc? ¿Por qué?

b) Utilizando lo que sabemos a partir de las condiciones iniciales ¿Qué podríamos decir sobre los ángulos $\widehat{bdc}$ y $\widehat{bda}$? ¿Por qué?

c) Viendo la respuesta del ítem (b) ¿Qué podríamos decir sobre los ángulos $\widehat{cbd}$ y $\widehat{abd}$? ¿Por qué?

d) Conclusión:

De manera similar que la primera evaluación, los criterios fueron separados en dos grupos, generales y matemáticos. Solo los primeros se dijeron a los alumnos antes de comenzar la evaluación, que tuvo lugar en una clase de 80 minutos. Los criterios generales fueron los mismos que en la primera evaluación, en cambio los criterios matemáticos fueron:

Criterios matemáticos:

- Definiciones coherentes y acertadas.
- Explicitar las partes de la definición y ser capaces de marcarlas.
- Ser capaz de clasificar los polígonos.
- Explicitar las propiedades de los cuadriláteros.
- Realizar procedimientos válidos.
- Utilizar propiedades vistas para la resolución de los ejercicios y las justificaciones.
- Ser capaces de utilizar las fórmulas vistas en clase.
- Ser capaces de plantear y resolver una ecuación matemática a partir de lo visto.
- Ser capaces de construir una demostración guiada de alguna propiedad de los cuadriláteros.

La rúbrica utilizada por los practicantes para corregir la evaluación fue la siguiente:

RÚBRICA SEGUNDA EVALUACIÓN

Actividad 1: **Total:** 0,9p

Clasificar en cóncavo/convexo: 0,1p

Clasificar en Regular/irregular: 0,1p

Clasificar según sus lados: 0,1p

Actividad 2: **Total**:1,1p

ítem a: 0,4p ------> Cada definición tiene que estar completa.

Ítem b: 0,4p------> Cada definición tiene que estar completa.

Ítem c: 0,3p

Actividad 3: **Total**: 1p

Decidir quién tiene razón: 0,25p

Justificación: 0,36p c/u (las dos que no tienen razón)

Actividad 4: **Total:** 3p.

Cálculo de cada ángulo: 0,16p c/u

Justificación de los 6 ángulos: 0,2p c/u

Justificación ángulo $\widehat{ghc}$: 0,36p

Se espera que:

- Si usan ángulos entre paralelas, expliquen cuáles son esas paralelas y cuál la secante.

- Solo decir congruentes no explica, ni cumple la consigna.

- $\widehat{abc}$ y $\widehat{bcd}$ explicar bien la relación. Si no, 0p en justificación. Y si en el otro dice congruentes, va la mitad del puntaje. Si dice por trapecio isósceles, va todo el puntaje.

- $\widehat{dch}$ suplementario (bajar ¼ si no dice a qué ángulo) o alternos internos (se baja ¼ si no dice entre que paralelas).

- $\hat{\varphi}$: adyacente al $\widehat{ade}$ (bien) – Opuesto por el vértice, pero restar 21° (no importa si no ponen a cuál)

- $\widehat{efg}$: opuesto por el vértice.

-$\widehat{ghc}$ SAI hexágono o cuadrilátero. Si no aparece SAI bajar 70%.

Actividad 5: **Total:** 1,5p

ítem a: 0,75p. (fórmula 0,38 – resultado 0,37)

ítem b: 0,75p. (fórmula 0,38 – resultado 0,37)

Actividad 6: **Total**:1,5p

- Condiciones iniciales: 0,5p

Tienen que aparecer: ángulos opuestos congruentes y SAI del cuadrilátero o la suma de los consecutivos mide 180°

Si se encuentra alguna falsedad se bajará 0,05p.

- Desarrollo: 1p

Planteo de la ecuación: 0,25p

Encontrar valor de x: 0,25p

Reemplazar el valor de x: 0,25p.

Explicar el procedimiento realizado: 0,25p.

Actividad 7: **Total**: 1p

Condiciones iniciales: 0,2p

Tiene que aparecer: lados congruentes, y la diagonal como bisectriz.

Si ponen “ángulos opuestos congruentes” (lo que queremos probar): 0p

Desarrollo:

a. Congruentes por criterio 0,1 p- porque se cumple el criterio 0,2p – total 0,3p

b y c. utilizar bisectriz. 0,15p c/u

Conclusión: 0,2p.

La distribución de notas de los alumnos de cada curso en esta evaluación se puede ver en los gráficos 3 y 4.

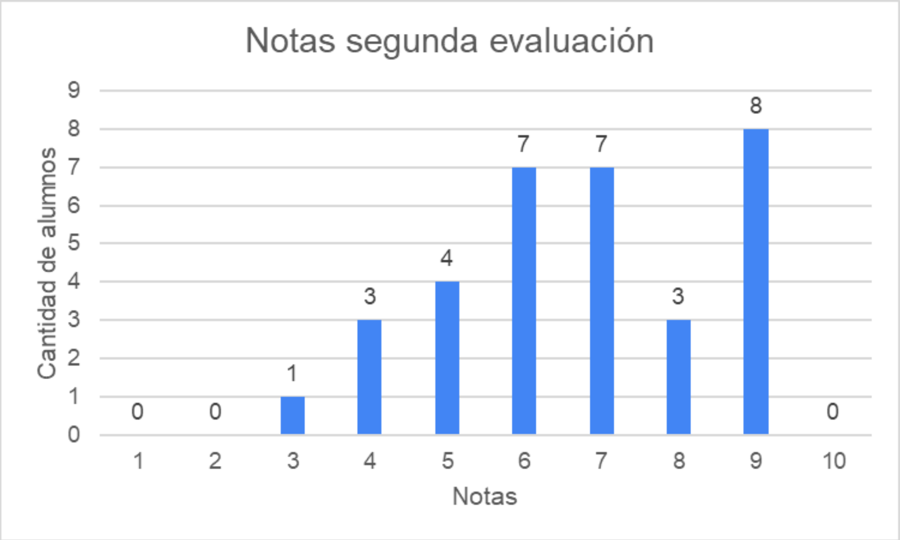


Gráfico 3: Notas de la segunda evaluación 3°C

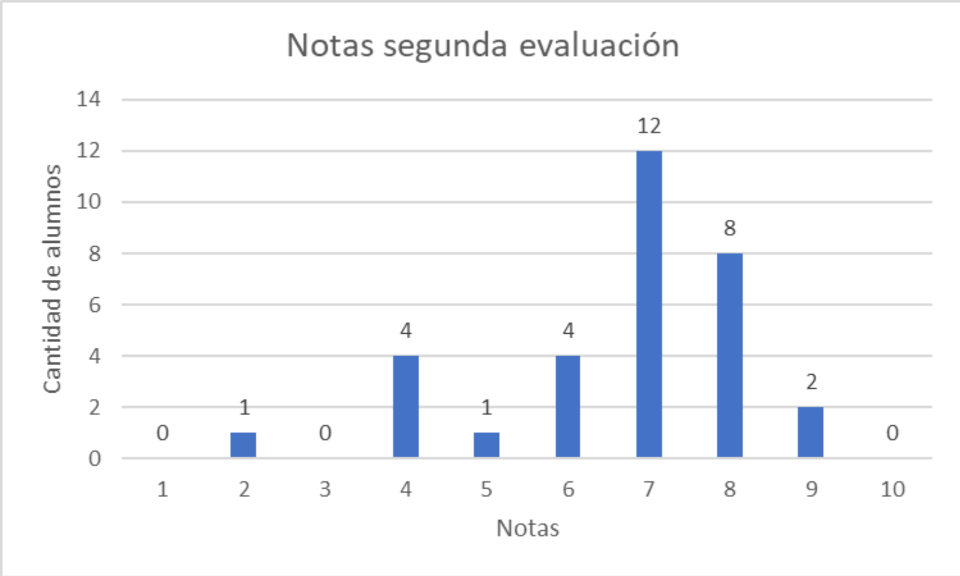


Gráfico 4: Notas de la segunda evaluación 3°D

En esta evaluación los alumnos aprobados en 3°C fueron 18, es decir 54% del total. Mientras que en 3°D los aprobados fueron 22, un 69%. El resto de los alumnos, 15 en 3°C (46%) y 10 en 3°D (31%) desaprobaron.

2.3.3 Promedios finales.

Como se dijo al principio de la sección, en la libreta de los alumnos no se pusieron las notas de las 2 evaluaciones, sino que se realizó un promedio entre ellas y eso fue lo que se transcribió. A continuación, en los Gráficos 5 y 6 se muestran los promedios de cada uno de los cursos.

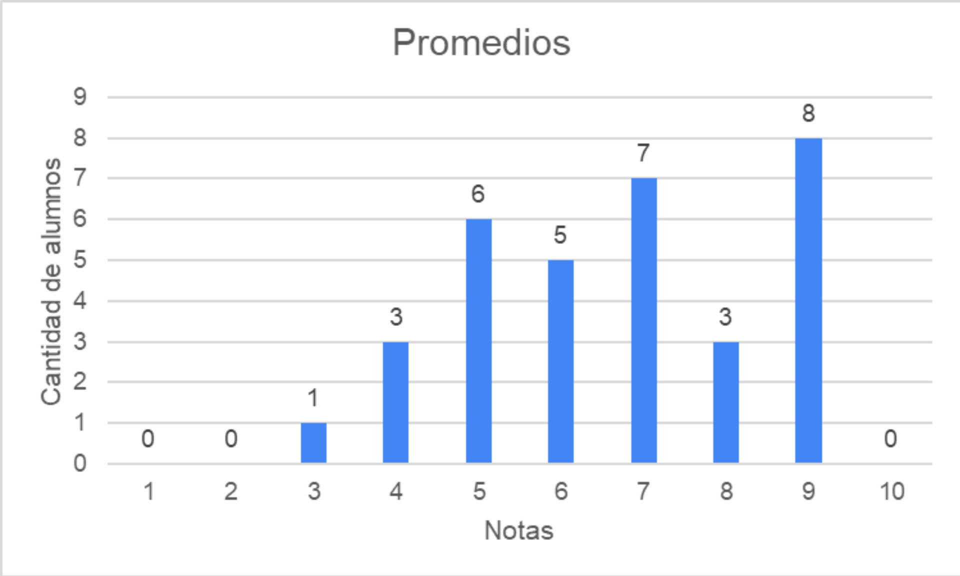


Gráfico 5: Promedios de 3°C

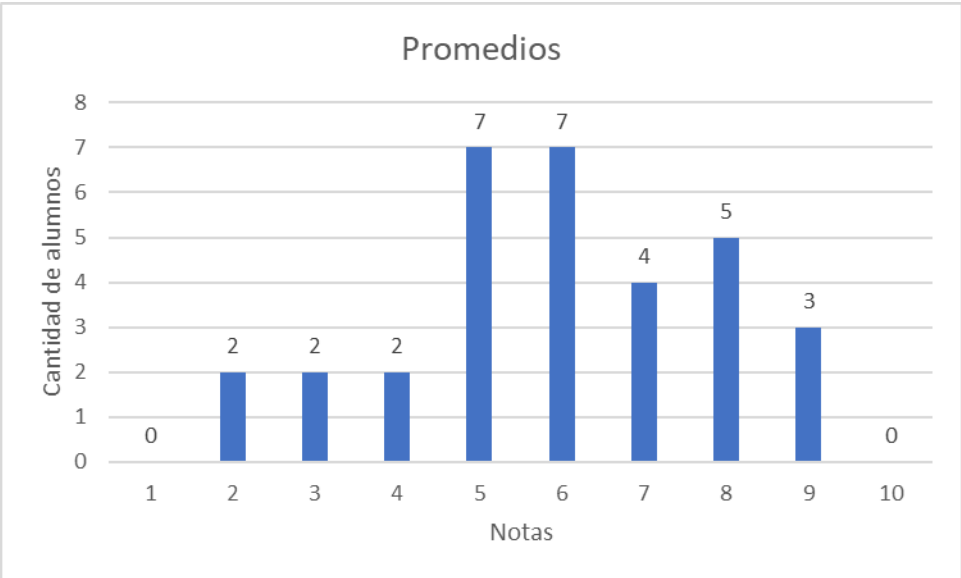


Gráfico 6: Promedios de 3°D

Analizando los promedios de los alumnos de 3°C, el 54% de ellos aprobó (es decir 18 alumnos), mientras que los 15 restantes no lograron aprobar (siendo el 46% del alumnado). En el caso de 3°D, cabe destacar que 7 alumnos tuvieron un 1 (uno) promediado en sus notas por incumplir la tarea tres veces. Así, los promedios aprobados en este curso fueron el 38% del total, que corresponde a 12 alumnos. Mientras que los no aprobados fueron 20 alumnos, siendo el 62% del alumnado.

3. ¿Cómo construyen cuadriláteros en GeoGebra nuestros alumnos?

En este capítulo se abordará una situación que nos resultó problemática en nuestro período de prácticas, y que nos pareció relevante para analizar desde sustentos teóricos y producciones de los alumnos.

3.1 Problemática

En esta sección se describirá la problemática elegida, las formas de recopilación de datos y el análisis de los mismos entre otras cosas, para intentar dilucidar si en las construcciones de los alumnos encontramos alguna generalidad.

3.1.1 ¿Cuál es y cómo elegimos nuestra problemática?

La problemática que estudiaremos en este capítulo, pretende dilucidar cuáles son las herramientas y las características de los procedimientos que implementaron nuestros alumnos, para realizar construcciones de cuadriláteros en el software *GeoGebra* de sus celulares.

Esta problemática fue elegida debido al interés por analizar los procesos de construcción de los estudiantes que por primera vez manipulaban un software de geometría dinámica e indagar las potencialidades de la incorporación de las tecnologías en la clase de matemática.

3.1.3 Acerca de *GeoGebra*

Como se describió en la sección 2.2 para la realización del trabajo práctico de construcción de cuadrilátero utilizamos el software *GeoGebra* que los estudiantes habían descargado en sus celulares. Elegimos trabajar la construcción en GeoGebra ya que este entorno ofrece múltiples potencialidades que no aparecen en el trabajo con lápiz y papel, algunas de estas son descritas por las autoras Esteley, Marguet y Cristante (2012) cuando denotan:

- Nos da la posibilidad de crear elementos básicos de la geometría, como puntos, rectas o circunferencias, con los cuales luego se pueden realizar construcciones más complejas como rectas paralelas, perpendiculares, mediatrices, etc.

- Las figuras geométricas que se realizan en el software no son estáticas, es decir permite el arrastre de las figuras construidas, y esto favorece a la búsqueda de propiedades que se mantienen invariantes en la deformación de las mismas.
- Nos permite dudar de lo que se ve, es decir no tomar como verdaderas las relaciones que se encuentran en una figura estática, sino que se puede comprobar su invariabilidad en el arrastre. También ver más de lo que se ve, analizando la figura para encontrar relaciones que pueden no estar presentes a simple vista.

Las características que tiene el software en relación a permitir una construcción dinámica lograron que el trabajo de construcción de cuadriláteros haya sido muy diferente a lo que se podría realizar con lápiz y papel. De acuerdo a Leung (2011) el modo de arrastre que permiten los ambientes de geometría dinámica, en nuestro caso el *GeoGebra*, es una herramienta única que permite a los estudiantes experimentar con objetos geométricos dinámicos y que puede llevar a los alumnos a desarrollar conjeturas matemáticas. Otra particularidad del GeoGebra es la posibilidad de visualizar el "Protocolo de construcción", esta herramienta permite ver paso a paso cuáles fueron los procedimientos realizados por los estudiantes para llegar a la construcción final. Esta herramienta nos posibilitó estudiar las relaciones conceptuales que sustentaban las producciones de los estudiantes y las cuales se constituyeron en la base a partir de la cual abordamos la problemática. En la *Figura 12* se puede ver el protocolo de la construcción del rectángulo, realizada por un grupo de alumnas.

	Nombre	Descripción	Valor	Rótulo
1	Punto A		A = (-12.1, -15)	
2	Punto B		B = (20.5, -14.2)	
3	Recta f	Recta A, B	f: y = -14.7	
4	Recta g	Recta que pasa por A perpendicular a f	g: y = -40.4x - 502.8	
5	Recta h	Recta que pasa por B perpendicular a g	h: y = -14.7	
6	Recta i	Recta que pasa por B paralela a g	i: y = -40.4x + 815.2	
7	Punto C	Punto sobre g	C = (-12.5, 2.4)	
8	Recta j	Recta que pasa por C paralela a h	j: y = 2.7	
9	Punto D	Intersección de j, i	D = (20.1, 3.2)	
10	Punto E	Intersección de g, f	E = (-12.1, -15)	
11	Recta k	Recta E, D	k: y = 0.6x - 8.2	
12	Recta l	Recta C, B	l: y = -0.5x - 3.9	

Figura 12: Protocolo de construcción de GeoGebra

3.2 Diferenciación entre construcción y dibujo

Para comenzar nos parecía necesario explicitar la diferencia entre realizar un *dibujo* o una *construcción* en GeoGebra, diferenciación que como abordamos en la Sección 2 trabajamos con nuestros alumnos. De acuerdo a Esteley, Marguet y Cristante (2012) una *construcción* a diferencia de *dibujar* supone establecer relaciones entre los objetos que intervienen, de manera que al mover cualquiera de ellos se mantengan las relaciones matemáticas entre los objetos de la construcción. Nosotros decidimos pedir a los alumnos que hagan construcciones, ya que luego debían visualizar las distintas propiedades de los cuadriláteros en ellas, y en una figura que no mantendría las relaciones matemáticas no sería posible pues al utilizar el arrastre se perderían las propiedades. Para entender mejor esta diferencia mostraremos a modo de ejemplo una construcción y un dibujo realizados por los alumnos. Cabe aclarar que si bien en ambos cursos se explicitó que la intención era que logren una construcción y no un dibujo, algunos grupos solo pudieron representar el cuadrilátero por medio de un dibujo.

En las *Figuras 13 y 14* podremos ver un ejemplo de lo que consideramos dibujo pues al realizar arrastre sobre uno de los vértices del rectángulo este se deforma formando así otra figura y por lo tanto perdiendo las propiedades propias del cuadrilátero en cuestión.

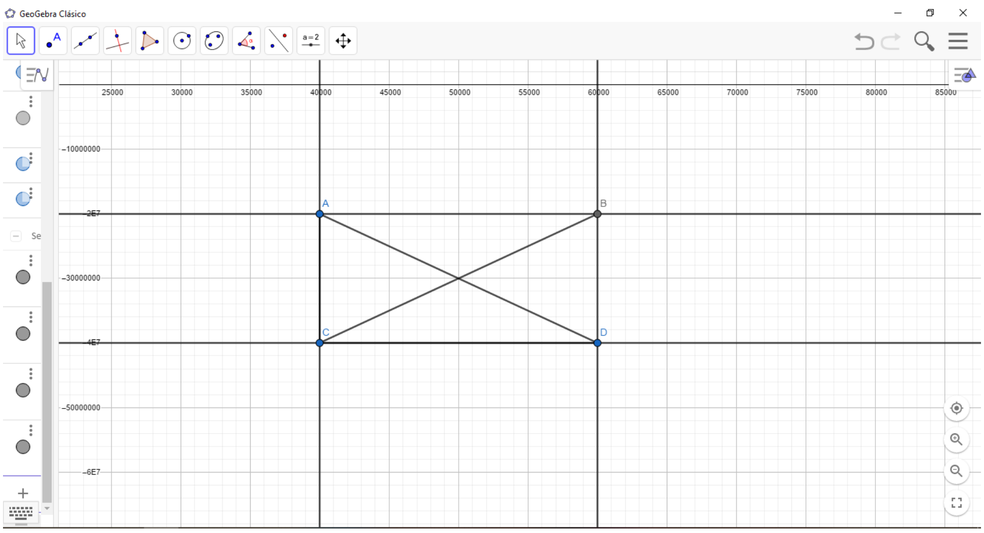


Figura 13: Ejemplo de dibujo - original

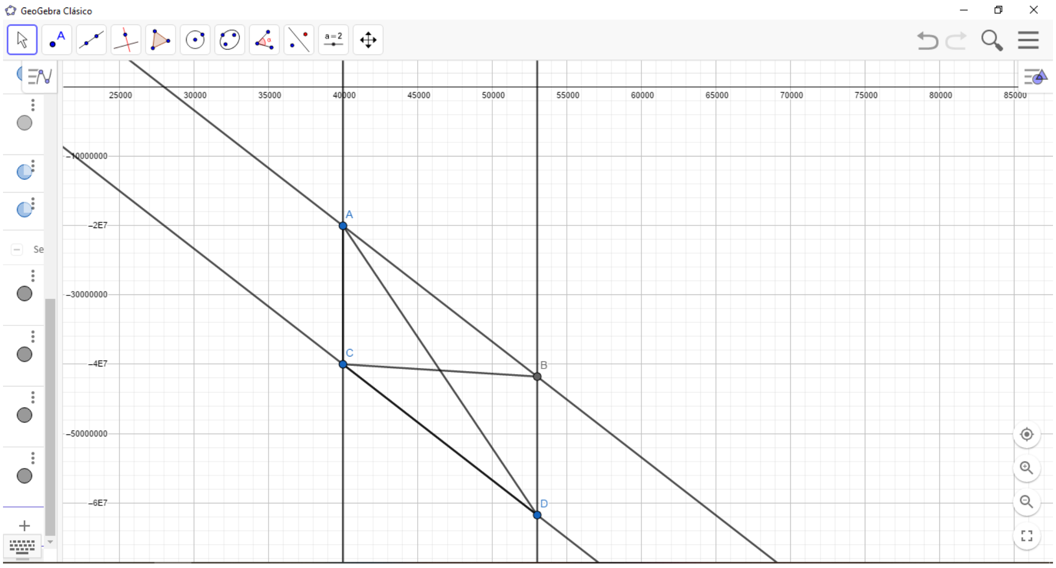


Figura 14: Ejemplo de dibujo - arrastre sobre el vértice D

Para contrastar y dejar más en claro la diferencia, mostraremos en las *Figuras 15 y 16* un ejemplo de lo que consideramos construcción y como al realizar arrastre sobre uno de sus puntos se mantiene la figura y sus propiedades.

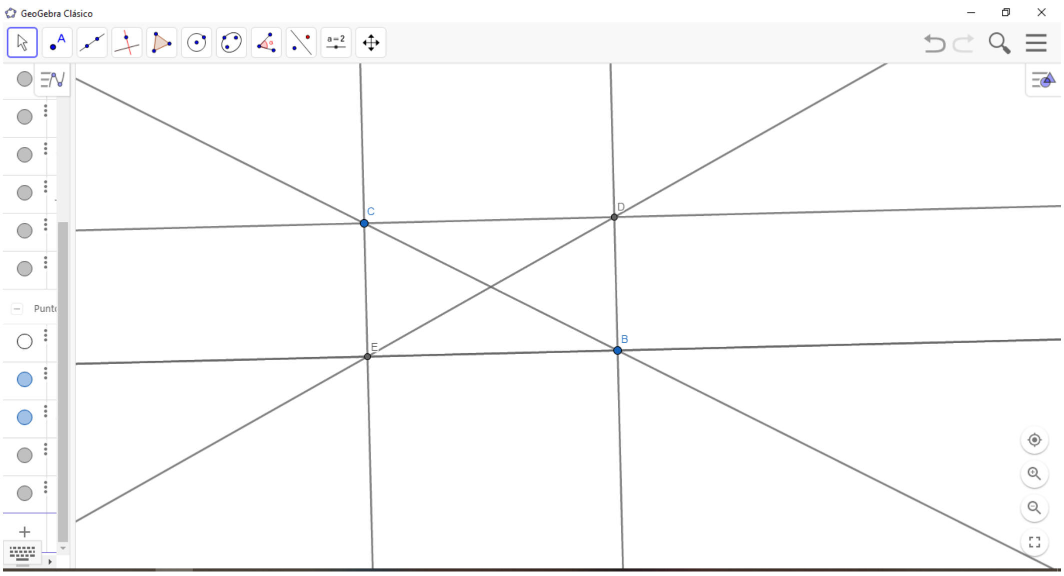


Figura 15: Ejemplo de construcción - original

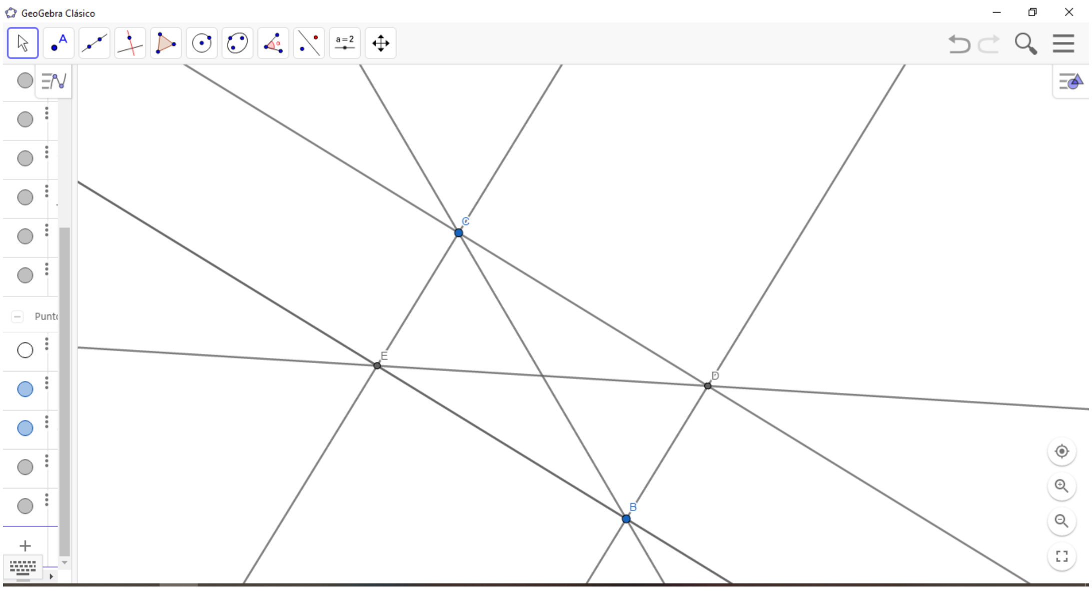


Figura 16: Ejemplo de construcción arrastre sobre el vértice D

En la próxima sección explicaremos los criterios que utilizamos para realizar los distintos análisis de los cuadriláteros que construyeron los alumnos en el trabajo.

3.3 Análisis de las construcciones de cuadriláteros de 3° C y D.

En esta subsección se explicarán los criterios utilizados para llevar a cabo el análisis de las construcciones de los alumnos, y se realizará el mismo para cada grupo de estudiantes.

3.3.1 Criterios para el análisis de las construcciones

Para cada uno de los cuadriláteros con los que trabajaron los estudiantes, elaboramos una serie de criterios que nos permitieran entender las diferencias y similitudes en las construcciones tanto entre las diferentes divisiones como en diferentes grupos de una misma división. A continuación, describiremos los criterios elaborados a partir de hacer una revisión inicial de los protocolos y otros surgidos a partir de lecturas realizadas sobre construir en GeoGebra.

Visualización o no de ejes y cuadrícula: observar si para realizar la construcción aparecen visibles o no los ejes cartesianos y la cuadrícula, que por defecto aparecen en GeoGebra.

Herramientas utilizadas: identificar las herramientas propias del software que utilizan para construir el cuadrilátero.

Propiedades utilizadas: determinar, a partir de los pasos realizados, las relaciones geométricas y/o matemáticas utilizadas para lograr la construcción.

Características de los puntos que se utilizan: observar los tipos de puntos que utilizaron para construir. Al realizar las construcciones pudimos observar la aparición de tres tipos de puntos: estos pueden ser totalmente libres, lo que significa que se les puede aplicar arrastre por todo el plano; que sean libres dentro de una recta o una circunferencia, por lo que solo se podría utilizar arrastre dentro de la misma; o que sean puntos fijos, a los cuales no se les puede aplicar ningún tipo de arrastre

Visualización tradicional o no del cuadrilátero: el tipo de visualización, el cual puede ser tradicional o no tradicional, entendiendo por tradicional que el cuadrilátero esté asentado como generalmente se lo presenta en libros de texto o búsquedas en internet.

Posibilidad de rotación final del cuadrilátero: Si es posible rotar la figura al desplazar alguno de sus puntos

Visualización final del cuadrilátero: aparecen visibles las rectas o circunferencias utilizadas para la construcción o solo es visible la figura final

Además, teniendo en cuenta que las definiciones que se trabajaron en cada curso fueron diferentes y que nos interesaba indagar sobre la influencia de las definiciones de los cuadriláteros a la hora de construirlos, realizamos una clasificación de las definiciones. Para ello recurrimos a la clasificación dada por De Villiers (2003) (citado en Freyre y Mántica 2017) donde justifica que las definiciones ***jerárquicas*** a diferencia de las particionales, los conceptos más particulares forman parte de subconjuntos más generales mientras que las ***particionales*** los subconjuntos de conceptos se caracterizan por ser disjuntos entre sí.

En las subsecciones siguientes realizaremos un análisis detallado de las construcciones de los cuadriláteros, haciendo hincapié en los criterios mencionados anteriormente.

3.3.2 Cuadrado

Las definiciones de cuadrado trabajadas en 3°C y 3°D fueron: “**cuadrilátero que tiene cuatro lados congruentes y cuatro ángulos rectos”** y “**un cuadrado es un cuadrilátero**

regular” respectivamente. Consideramos que la trabajada en 3°C es del tipo particional mientras que la trabajada en 3°D es del tipo jerárquica pues la segunda requiere de la comprensión del concepto de polígono regular y que esto implica lados y ángulos congruentes, mientras que la primera enuncia estas características de manera explícita. Lo que nos invita a pensar si por esta diferencia es que en 3°D ningún grupo logró hacer una construcción.

Antes de realizar el análisis cabe aclarar que consideraremos como visualización tradicional del cuadrado cuando este se encuentre asentado sobre una de sus bases como se ve en la *Figura 17*.

Figura 17: Visualización tradicional del cuadrado

Grupo 1 (3°C), el protocolo de construcción realizado fue: Traza un segmento AB y la recta “g” perpendicular a este por B, dibuja la circunferencia con centro B que pase por A, y busca el punto C que es la intersección de la circunferencia con la recta “g”. Y luego traza las paralelas a AB por C y a BC por A, luego busca la intersección de esas rectas para obtener la construcción. Para lograrlo se basaron en el paralelismo y la congruencia de los lados, y utilizaron las herramientas: recta paralela, segmento, recta perpendicular, circunferencia (centro, punto) e intersección. En la *Figura 18* se puede ver la visualización final del cuadrilátero.

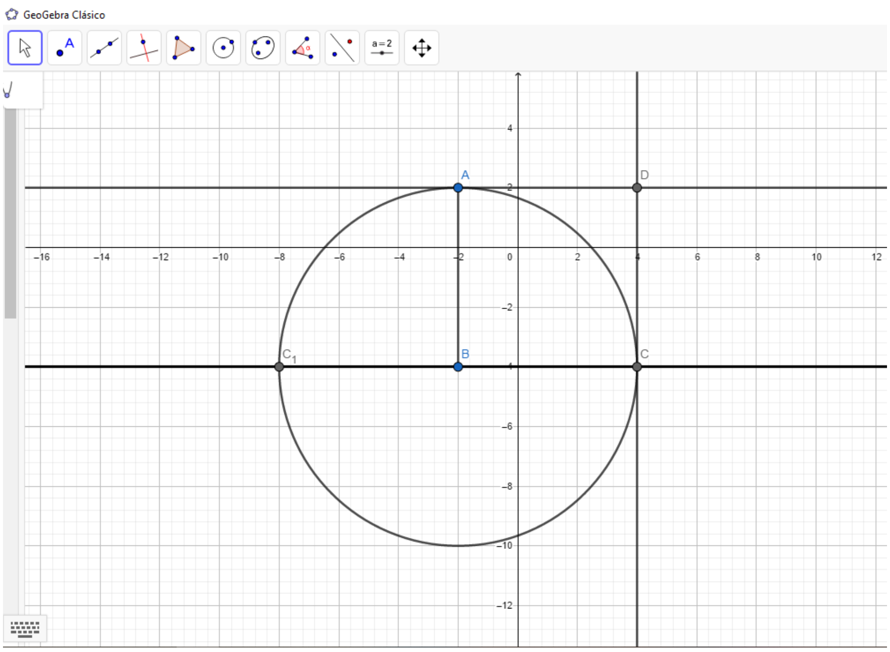


Figura 18: Construcción de cuadrado grupo 1 (3°C)

Análisis de construcción:

Vemos que la visualización final es del tipo tradicional y deja visibles las rectas y circunferencias que utiliza para realizarla, en lo que respecta a los puntos tenemos que A y B son totalmente libres, lo que nos permite rotar y variar el tamaño de la figura al realizar un arrastre de estos, obteniendo así una gran variedad de ejemplos que se pueden estudiar con esta construcción. Los otros dos puntos (C y D) son intersecciones buscadas con la herramienta “intersección”, lo que los convierte en puntos fijos. Es clara la influencia de la cuadrícula para conseguir la congruencia de los lados, ignorando los ejes ya que ninguno de los lados se posa sobre alguno de estos sino sobre las líneas de la cuadrícula.

3.3.4 Rombo

Las definiciones de rombo que se trabajaron en 3°C y 3°D fueron: un **rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados congruentes”** y **“un rombo es un cuadrilátero que tiene dos pares de ángulos congruentes y sus lados son todos congruentes** respectivamente. Consideramos que ambas son del tipo particional ya que enuncian explícitamente las condiciones necesarias para definir unívocamente al objeto, aunque la que se trabajó en 3°D agrega a la otra el hecho de tener dos pares de ángulos congruentes, pero esto es una propiedad que puede ser probada y por lo tanto se puede prescindir de ella en la definición.

Antes de comenzar con el análisis de las construcciones cabe aclarar que consideraremos visualización tradicional del rombo aquella en la que la figura está asentada sobre uno de los vértices de los ángulos interiores de menor amplitud (*Figura* 19).

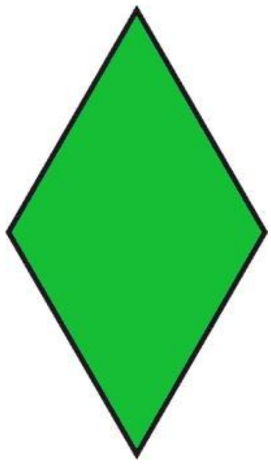


Figura 19: Visualización tradicional del rombo

Grupo 2 (3°C), el protocolo de construcción realizado fue: Crea el segmento AB y la circunferencia “g” de centro A que pasa por B, luego traza el segmento AC con C un punto sobre “g”. Después crea la circunferencia “h” con centro en B que pasa por A. Luego traza la recta “i” paralela a AC por B y busca los puntos de intersección de “i” con “h”, para luego trazar la recta paralela a AB por C y así formar el rombo. Para lograr la construcción se basaron en el paralelismo de los lados opuestos y la congruencia de los lados, y utilizaron las herramientas: Segmento, Circunferencia (centro, punto), recta paralela, intersección. En la *Figura 20* se puede ver la visualización final de la construcción.

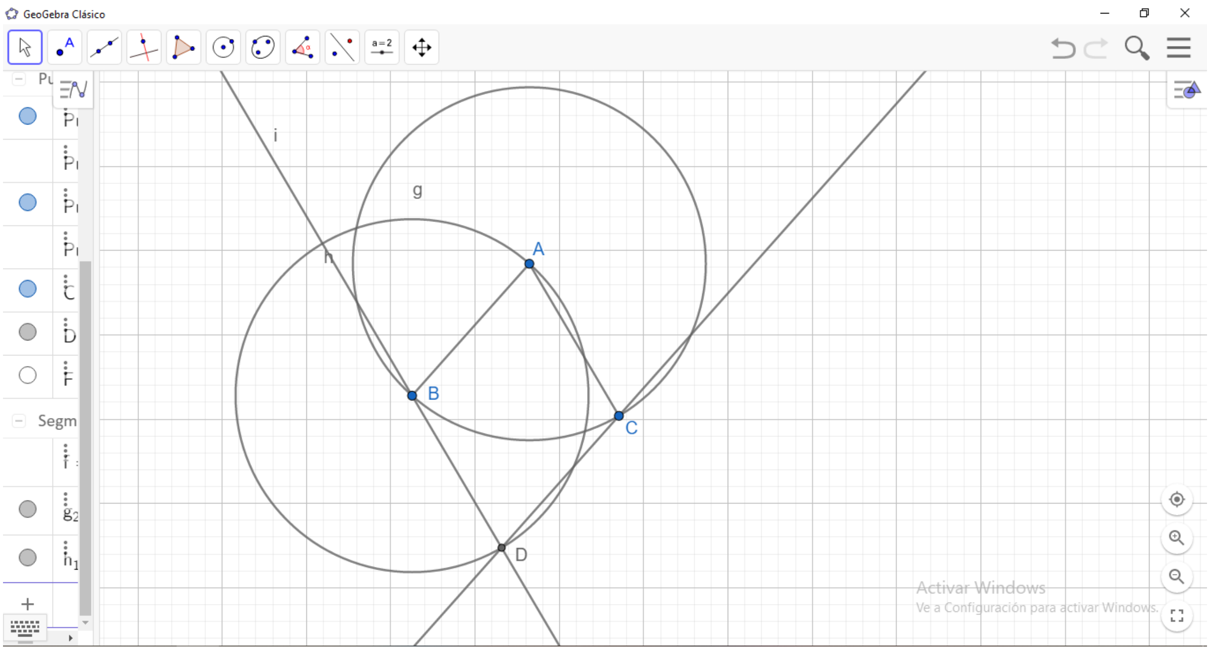


Figura 20: Construcción grupo 2 (3°C)

<u>Análisis de construcción:</u>

Vemos que la visualización final es del tipo tradicional, aunque se encuentra unos pocos grados rotada, dejan visibilizadas las rectas y circunferencias que se utilizaron para construir y una vez terminada la construcción unen los vértices con la herramienta polígono. Los puntos A y B que se crean inicialmente son totalmente libres en el plano, lo que nos permite variar y rotar la figura mediante el arrastre de estos, obteniendo así una gran variedad de ejemplos que se pueden estudiar desde esta construcción. El tercer punto que se traza es el C y es libre dentro de la circunferencia “g”, lo que nos permite rotar la figura al desplazar este punto, pero no podemos estirarla ni variar su tamaño, por último, el punto D es el punto de intersección de una circunferencia con una recta, por lo que es fijo. Finalmente queríamos destacar el hecho de que la cuadrícula está visible pero no se reconoce una utilización de esta para la construcción.

Grupo 1 (3°D), el protocolo de construcción fue: Trazan el segmento AB y las circunferencias “g” y “h” de centro A y B respectivamente y radios congruentes a AB, buscan

C como el punto de intersección de “g” con “h” y trazan el segmento AC y la recta BC. Luego trazan la recta “i” perpendicular a BC por A y la circunferencia “s” con centro en C que pasa por B. Buscan los puntos de intersección de “i” con “s” los cuales son A y D para obtener el rombo ABCD. Para lograr la construcción se basaron en la propiedad de que las diagonales se cortan perpendicularmente, y las herramientas utilizadas fueron: Segmento, Circunferencia (Centro, punto), intersección, recta perpendicular. La visualización final de la construcción se puede ver en la *Figura 21*.

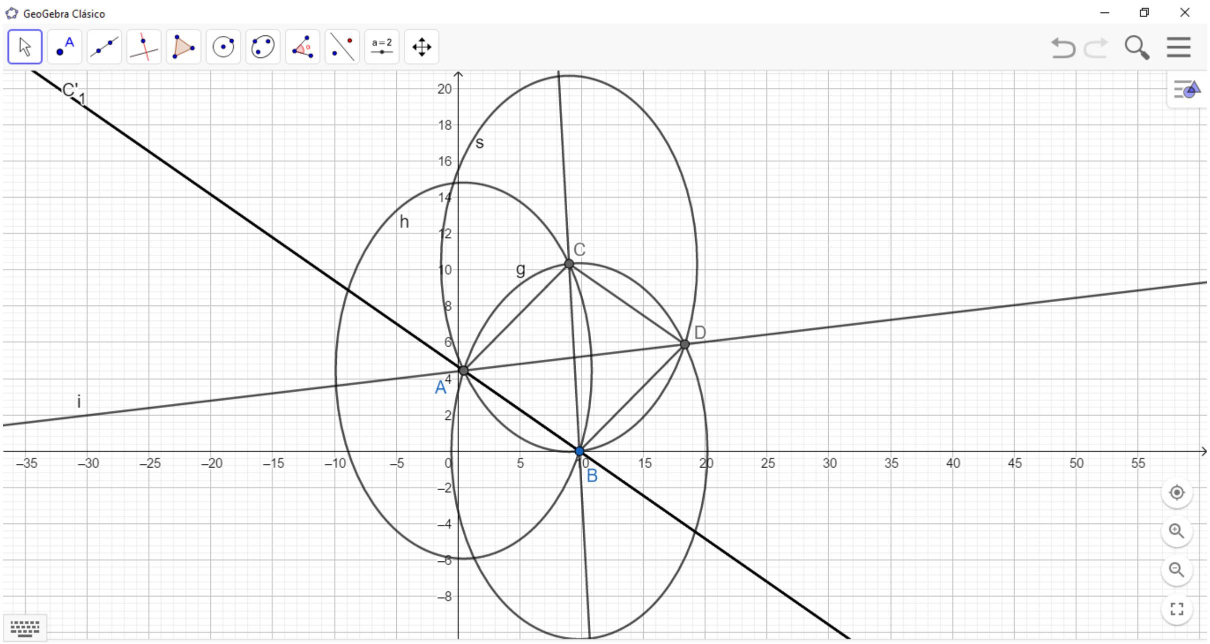


Figura 21: Construcción rombo grupo 1 (3°D)

<u>Análisis de construcción:</u>

Vemos que la visualización final se asienta sobre uno de los vértices, pero no sobre el que establecimos para considerarla del tipo tradicional, por lo que la consideraremos cómo no tradicional. Por otra parte, vemos que el punto A creado inicialmente está ubicado sobre el eje y, lo que hace que solo pueda desplazarse sobre este. El punto A permite variar el tamaño de la figura y rotarla un máximo de 90°, a diferencia del punto B que es totalmente libre por lo que lo podemos desplazar por todo el plano pudiendo rotar y variar el tamaño de la figura desplazando dicho punto, lo que permite obtener una gran variedad de ejemplos de rombos que pueden ser estudiados con esta construcción. Los dos puntos restantes (C y D) se crean buscando intersecciones, lo que los convierte en puntos fijos a los cuales no se les puede aplicar desplazamiento. Por último, en la visualización final dejan visibles las rectas y circunferencias utilizadas para la construcción.

Para el grupo 3 (3°C), el protocolo de construcción fue: Trazan el segmento AB y las circunferencias "g" y "h" de centro A y B respectivamente y radios congruentes a AB, trazan el segmento BC con C un punto sobre "h". Luego crea la circunferencia "s" con centro en C que pasa por B y buscan el punto D como la intersección de "s" con "g", y así obtienen el rombo ABCD. Para lograrla se basaron en la congruencia de los lados, y las herramientas utilizadas fueron: Segmento, Circunferencia (centro, punto), intersección. La visualización final de la construcción se puede ver en la *Figura 22*.

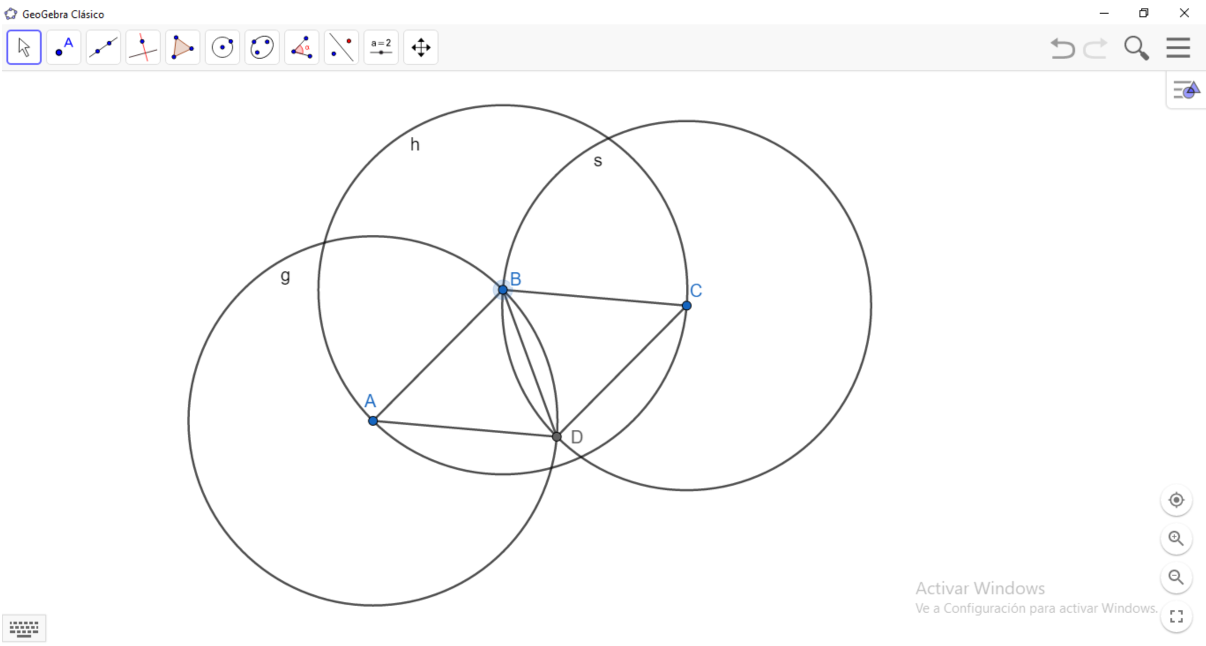


Figura 22: Construcción rombo grupo 3 (3°C)

<u>Análisis de construcción:</u>

Vemos que la visualización final es del tipo no tradicional pues se asienta sobre uno de los lados del rombo, por otra parte, aparecen invisibilizados los segmentos y las circunferencias que se utilizan para realizarla. En lo que respecta a los puntos, vemos que A y B, los cuales se crean inicialmente, son totalmente libres en el plano, lo que permite obtener una gran variedad de ejemplos de rombos al rotar y modificar el tamaño de la figura desplazando esos puntos. El tercer punto que crean es el C y es libre pero dentro de una circunferencia, lo que nos permite hacer rotaciones de la figura al arrastrar este punto, pero no nos da la posibilidad de variar el tamaño de la figura. Por último, el punto D se encuentra buscando la intersección de dos circunferencias, lo que lo convierte en un punto fijo.

Análisis general de las construcciones:

Vemos que en estas construcciones las visualizaciones finales y los procesos de construcción son variados y se basan en propiedades distintas de la figura, solo en las construcciones de 3°D podemos encontrar alguna similitud en los primeros pasos del proceso, y lo único que comparten las 3, es que en ninguna se recurre a la medida para la congruencia de los lados. También notamos que en las 3 siempre aparece algún punto fijo, se recurre a la utilización de las herramientas circunferencia e intersección y en las correspondientes a 3°D vemos que en la visualización final se ocultan las rectas que se utilizaron para la construcción. No se identifica gran influencia de los ejes o las cuadrículas ya que solo un punto de la construcción de 3°C está situado sobre uno de los ejes. Y por último destacamos que todas poseen al menos un punto totalmente libre que les permite rotar y variar el tamaño de la figura dando así gran variedad de ejemplos que puedan ser estudiados a partir de las 3 construcciones.

3.3.5 Rectángulo

Las definiciones de rectángulo trabajas en 3°C y 3°D fueron: **“cuadrilátero con dos pares de lados paralelos y cuatro ángulos rectos”** y **“un rectángulo es un polígono cuadrilátero, que tiene todos sus ángulos interiores rectos y dos pares de lados paralelos”** respectivamente. Consideramos que ambas son del tipo particional, aunque podríamos pensar que la trabajada en 3°D es un poco más particional que la trabajada en 3°C pues enuncia aspectos como ser polígono y que los ángulos rectos sean interiores, características que subyacen en la otra definición.

Antes de comenzar con el análisis de las construcciones cabe aclarar que consideraremos visualización tradicional del rectángulo cuando este se asienta sobre uno de los lados paralelos de mayor longitud como se ve en la *Figura 23*.

Figura 23: Visualización tradicional de rectángulo.

Grupo 2 (3°D), el protocolo de construcción fue: Crean las rectas AB y “g”, con “g” perpendicular a AB por A, luego crea la recta “h” paralela a “g” por B y un punto C sobre “g”. Después traza la paralela a AB por C y busca su punto de intersección con “h” (D) para así formar el rectángulo ABCD. Para lograrla se basaron en el paralelismo y perpendicularidad de los lados, y las herramientas utilizadas fueron: Recta, recta perpendicular, recta paralela, intersección. En la *Figura 24* se puede ver la visualización final de la construcción.

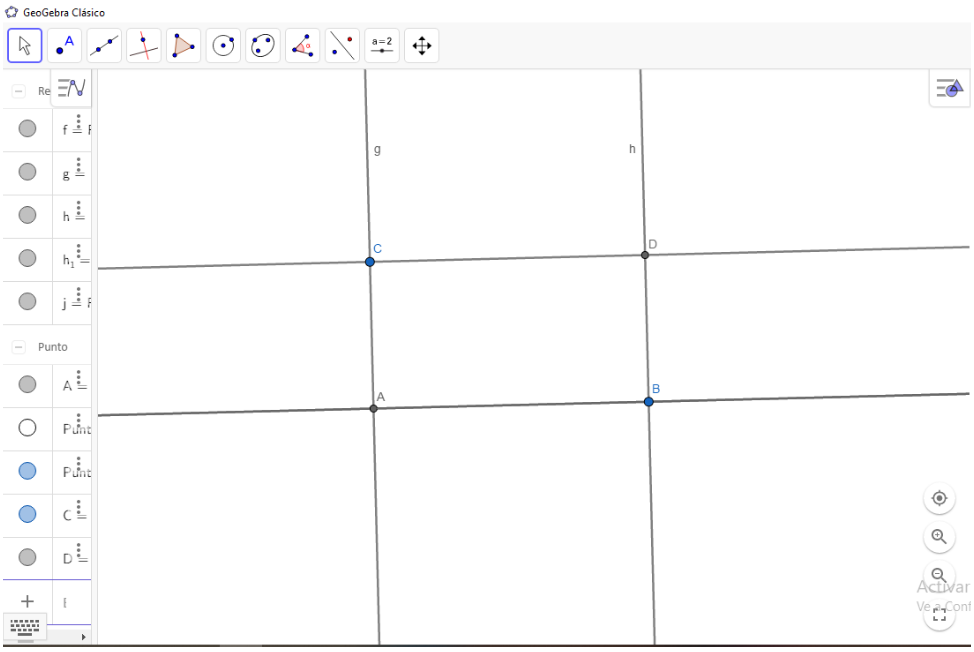


Figura 24: construcción de rectángulo grupo 2 (3°D)

<u>Análisis de construcción:</u>

Vemos que la visualización final es del tipo tradicional con una rotación de pocos grados y dejando visibles las rectas que contienen a los lados. En lo que respecta a puntos, posee uno totalmente libre (B) el cual nos permite rotar y variar el tamaño de la figura al aplicarle arrastre, generando una variedad de rectángulos. Además, cuenta con un punto que es libre (C) pero solo sobre la recta “g”, por lo que solo podemos variar la altura del rectángulo al aplicar arrastre sobre este punto, los otros dos puntos (A, D) son intersección de rectas por lo cual son fijos. No se percibe influencia de los ejes y la cuadrícula.

.

3.3.6 Trapecio

La definición de trapecio institucionalizada en 3°C fue: "**cuadrilátero que tiene un par de lados opuestos paralelos, todos los lados no congruentes y los lados no paralelos ni perpendiculares a ninguno de los otros."** Consideramos que es del tipo particional dado que nombra cada uno de los aspectos que caracterizan unívocamente al objeto de manera explícita y ninguno queda contenido en otro. Y la definición de trapecio institucionalizada en 3°D fue: **"un trapecio es un cuadrilátero irregular convexo que tiene dos de sus lados opuestos paralelos, todos los lados no congruentes y no tiene ángulos rectos".** La cual también consideramos es de tipo particional pues la única diferencia sustancial con la definición trabajada en 3ºD es el hecho de ser un cuadrilátero irregular convexo, pero no oculta otras partes de la definición.

Antes de comenzar con el análisis de las construcciones cabe aclarar que consideraremos como visualización tradicional de trapecio cuando este se asienta sobre uno de los lados paralelos como se ve en la *Figura 25.*

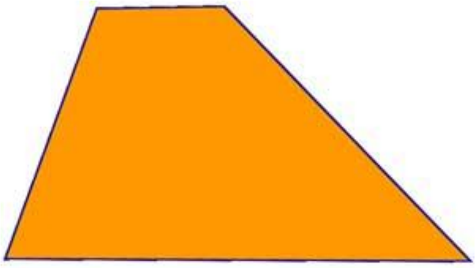


Figura 25: Visualización tradicional del trapecio

Grupo 3 (3°D), el protocolo de construcción fue: Trazan las rectas AB y "g" paralela a AB por un punto C, Luego toman dos puntos D y E sobre AB distintos de A y B y trazan el segmento DE, análogamente toman dos puntos F y G sobre "g" y trazan el segmento FG y luego los segmentos DF y EG para conseguir el trapecio DEFG. Para lograrla se basaron en la necesidad de tener un par de lados paralelos, y utilizaron las herramientas: Recta, segmento, recta paralela. La visualización final se puede ver en la *Figura 26*.

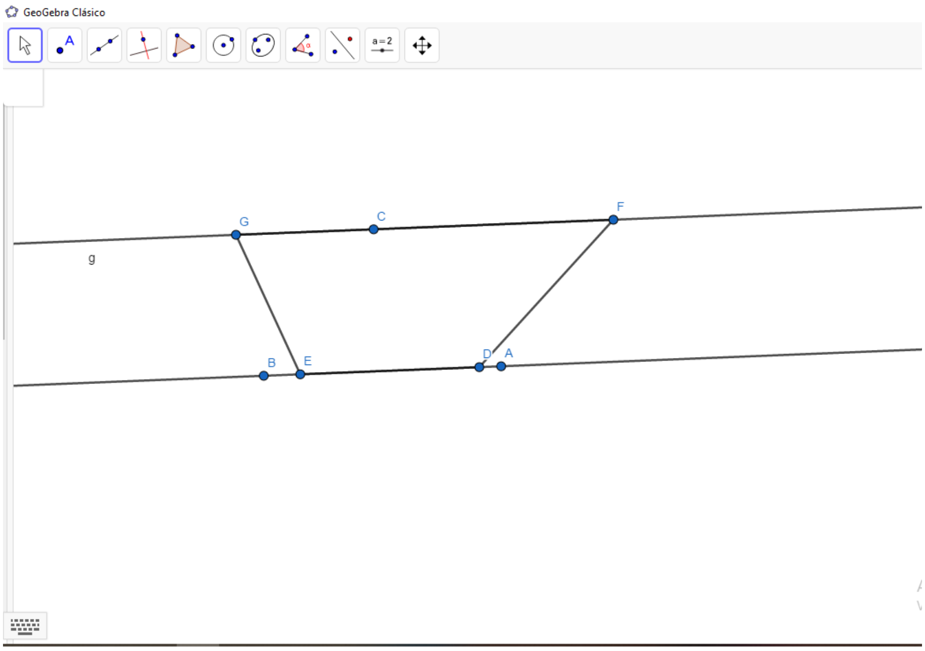


Figura 26: Construcción trapecio grupo 3 (3°D)

Análisis de construcción:

Analizando las construcciones vemos que el grupo 3 (3ºD) (*Figura 26*) realizó una construcción en la cual la visualización final es tradicional, la base superior es mayor a la base inferior y deja visibles las rectas paralelas que utiliza para la construcción, y todos los puntos que conforman los vértices son libres dentro de las rectas que los contienen, pero al no ser los puntos con los que se generaron las rectas, la figura no puede ser rotada moviendo uno de ellos, hecho que acota la cantidad de ejemplos de trapecio que pueden visualizar.

Grupo 4 (3°D), el protocolo de construcción fue: crean las rectas AB y "g" paralela a AB por un punto C, luego trazan el segmento AC y crean un punto D sobre "g" distinto de D y crean el segmento BD para así conseguir el trapecio ABCD. Para lograrla se basaron en la necesidad de tener un par de lados paralelos, y las herramientas utilizadas fueron: recta, recta paralela, segmento. La visualización final se puede ver en la *Figura 27*.

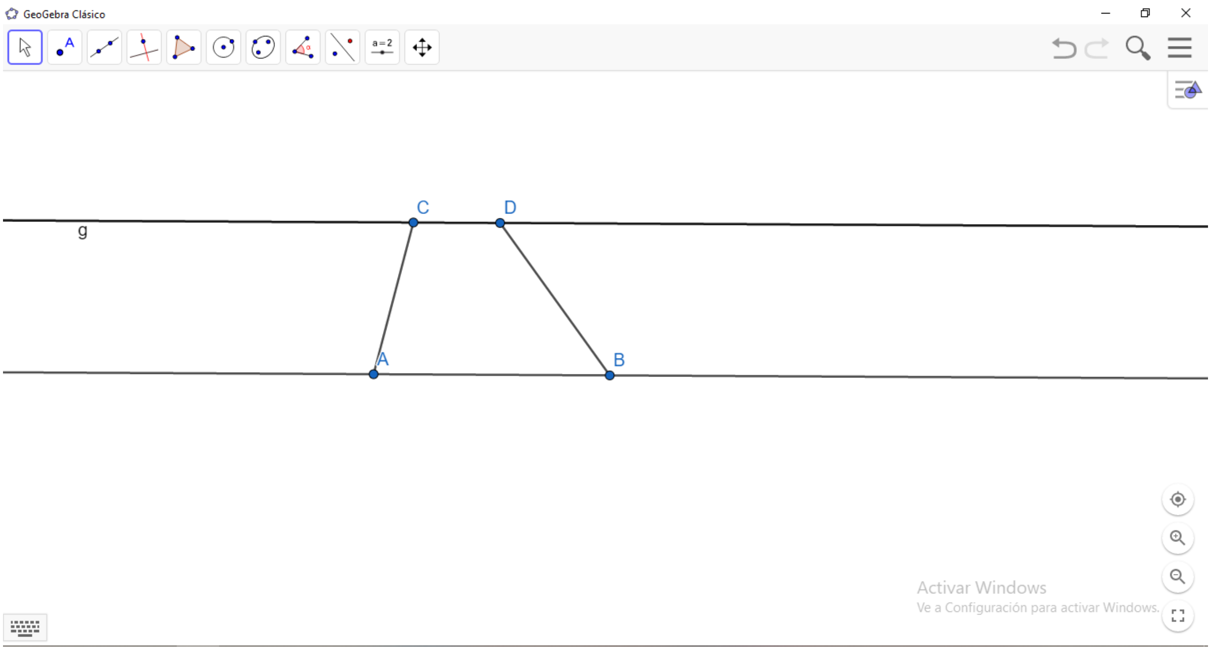


Figura 27: Construcción trapecio grupo 4 (3°D)

<u>Análisis de construcción:</u>

Viendo la construcción del grupo 4 (3°D) notamos que en este la visualización final, a diferencia del grupo 3 (3°D), es del tipo tradicional y deja la base superior menor a la base inferior aparte de dejar visibles las rectas paralelas que utiliza como base para la construcción. Por otra parte, utiliza como vértices del cuadrilátero los puntos con los cuales se generaron las rectas, lo que deja completamente libres los puntos (A, B) de la base inferior, permitiendo así hacer rotaciones de las figuras y ampliando la multiplicidad de ejemplos que podemos estudiar. Los puntos (C, D) de la base superior también son libres, pero sobre la recta que los contiene, lo que impide hacer rotaciones de la figura moviendo estos puntos.

Grupo 4 (3°C), el protocolo de construcción fue: Crean el segmento AB y la recta "g" paralela a este por un punto C. Luego colocan 2 puntos E y D sobre "g" y trazan los segmentos AE y BD para conseguir el trapecio ABED. Para lograrlo se basaron en la necesidad de tener un par de lados paralelos y utilizaron las herramientas: segmentos, recta paralela. En la *Figura 28* se puede ver la visualización final.

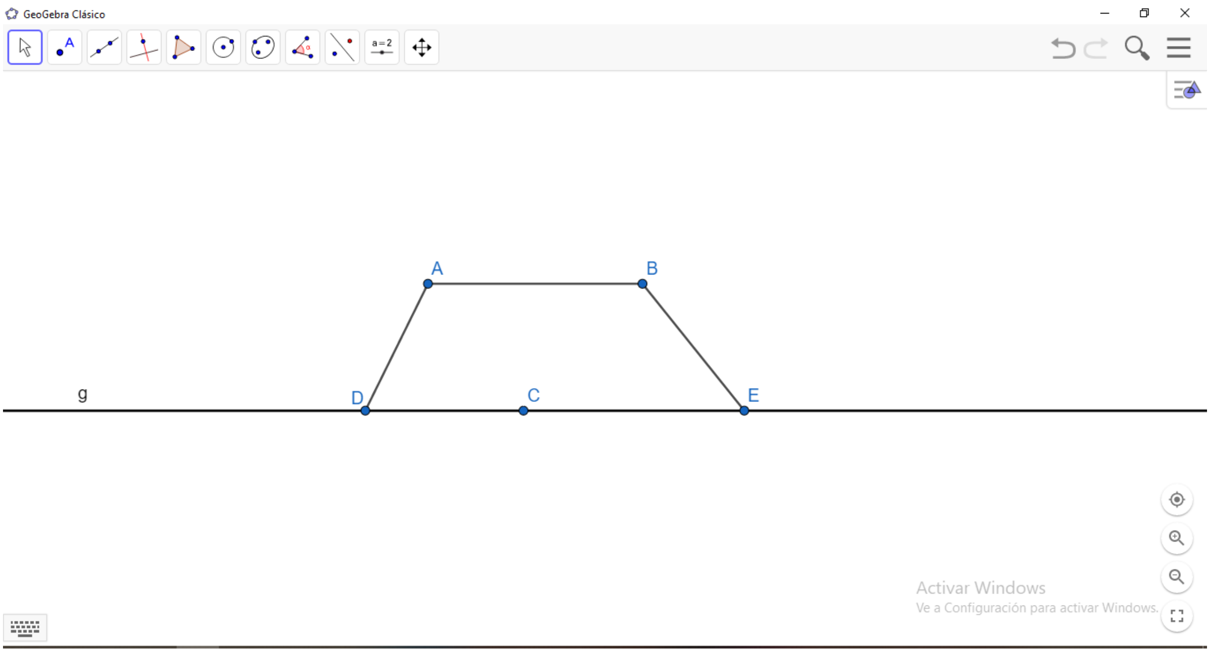


Figura 28: Construcción trapecio grupo 4 (3°C)

<u>Análisis de construcción:</u>

Vemos que la visualización final de la figura es del tipo tradicional con la base inferior mayor a la base superior, y se dejan visibles las rectas que contienen a los lados. Los vértices de la base superior (A, B) son puntos totalmente libres lo que permite hacer rotaciones de la figura moviendo estos puntos a diferencia de los de la base inferior (D, E) que solo son libres sobre la recta que los contiene.

Grupo 5 (3°C), el protocolo de construcción fue: Crean los segmentos AB y AC con C un punto fuera de AB, y la recta “g” paralela a AB por C. Luego colocan un punto D sobre “g” y trazan el segmento BD obteniendo así el trapecio ABCD. Para lograrla se basaron en la necesidad de tener un par de lados paralelos y las herramientas utilizadas fueron: segmentos, recta paralela, En la *Figura 2*9 se puede ver la visualización final de la construcción.

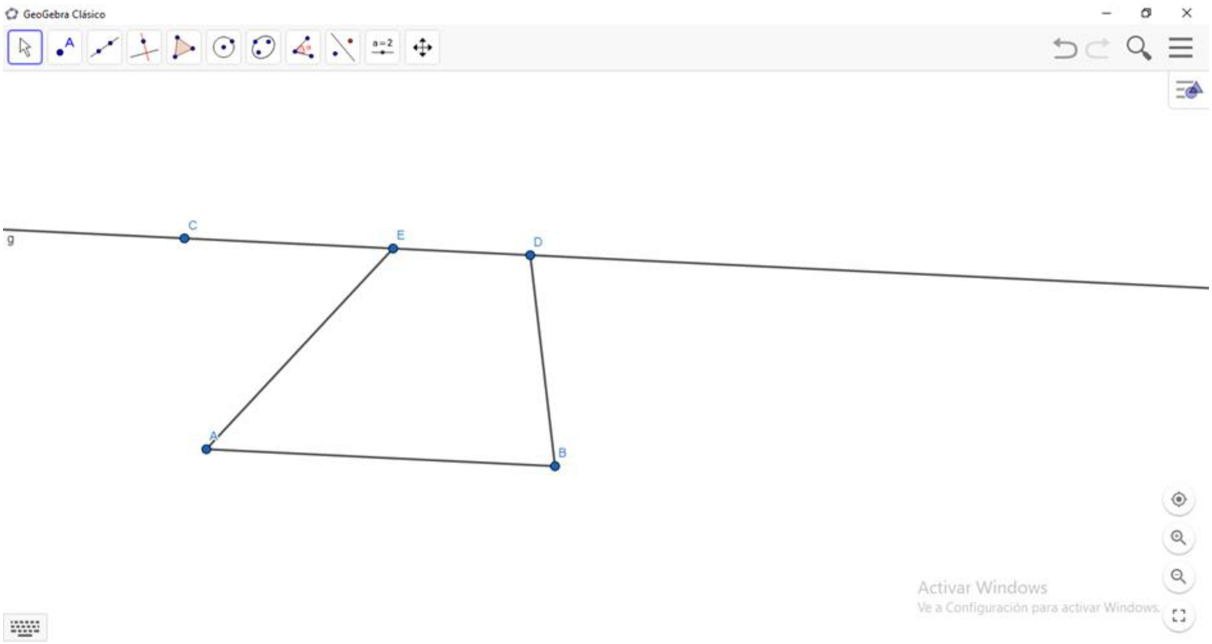


Figura 29: Construcción trapecio grupo 5 (3°C)

Análisis de construcción:

La visualización también es del tipo tradicional, con la base inferior mayor a la base superior y las rectas que contienen a los lados visibles. A diferencia de la construcción del grupo 4 (3°C) vemos que primero crean el segmento que oficia de base inferior y luego sobre la recta paralela a este colocan los puntos (E,D) que serán vértices de la base superior, lo que hace que la figura pueda ser rotada solo moviendo los vértices de la base inferior (A,B), los cuales son totalmente libres al igual que uno de la base superior (D), el otro (E) es libre pero solo dentro de la recta “g” que lo contiene.

Análisis general de las construcciones:

Notamos que en todas las construcciones la visualización final es del tipo tradicional pues asientan la figura sobre las bases paralelas, aunque el grupo 3 (3°C) hace más grande la base superior que la inferior a diferencia de los otros grupos. También vimos que en 3°D todas las construcciones tienen como punto de partida una recta y su paralela a diferencia de las de 3°C que tienen como punto de partida un segmento y la recta paralela a este. Por último, notamos que, en la visualización final de todas las construcciones, se dejan visibles las rectas paralelas y los puntos que cumplen la función de vértices de las figuras, podemos destacar que en ningún grupo hay puntos fijos y que todos se basaron en las mismas propiedades para conseguirla. Respecto a las herramientas, en todos los grupos aparece la utilización de las rectas paralelas y los segmentos, y en algunos también aparece la recta como es el caso del Grupo 3 (3°D). Por otra parte, en ninguna influyen los ejes o la cuadrícula.

3.3.7 Trapecio rectángulo

La definición de trapecio rectángulo que se institucionalizó en 3°D fue: "**un trapecio rectángulo es un cuadrilátero irregular convexo que tiene un par de lados opuestos paralelos, y un par de ángulos rectos que no son opuestos".** Y la trabajada en 3°C fue: **"cuadrilátero que tiene solo un par de lados opuestos paralelos y un lado perpendicular a los dos paralelos".** Consideramos que a pesar de ser distintas ambas son del tipo particional pues nombran de manera explícita las propiedades que definen unívocamente a la figura y ninguna queda sobreentendida u oculta bajo otra propiedad.

Antes de comenzar con el análisis cabe aclarar que consideraremos visualización tradicional del trapecio rectángulo cuando esté asentado sobre el lado paralelo de mayor longitud como se ve en la *Figura 30.*

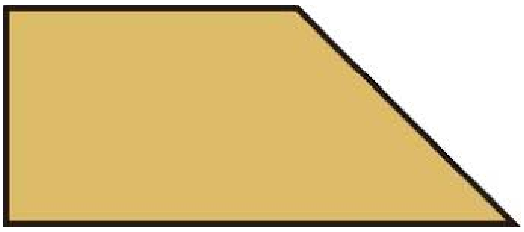


Figura 30: Visualización tradicional del trapecio rectángulo

Grupo 5 (3°C), el protocolo de construcción fue: Crean el segmento AB y la recta "g" paralela a AB por un punto C, luego toman un punto D sobre "g" y trazan el segmento BD. A continuación, trazan la recta "h" perpendicular a AB por A y buscan el punto de intersección de "g" con "h" (E) para conseguir el trapecio rectángulo ABDE. Para lograrla se basaron la necesidad de tener un par de lados opuestos paralelos y que al trazar una recta perpendicular a dos paralelas se obtienen dos ángulos rectos, y las herramientas utilizadas fueron: segmento, recta paralela, recta perpendicular, intersección. La visualización final se puede ver en la *Figura 31.*

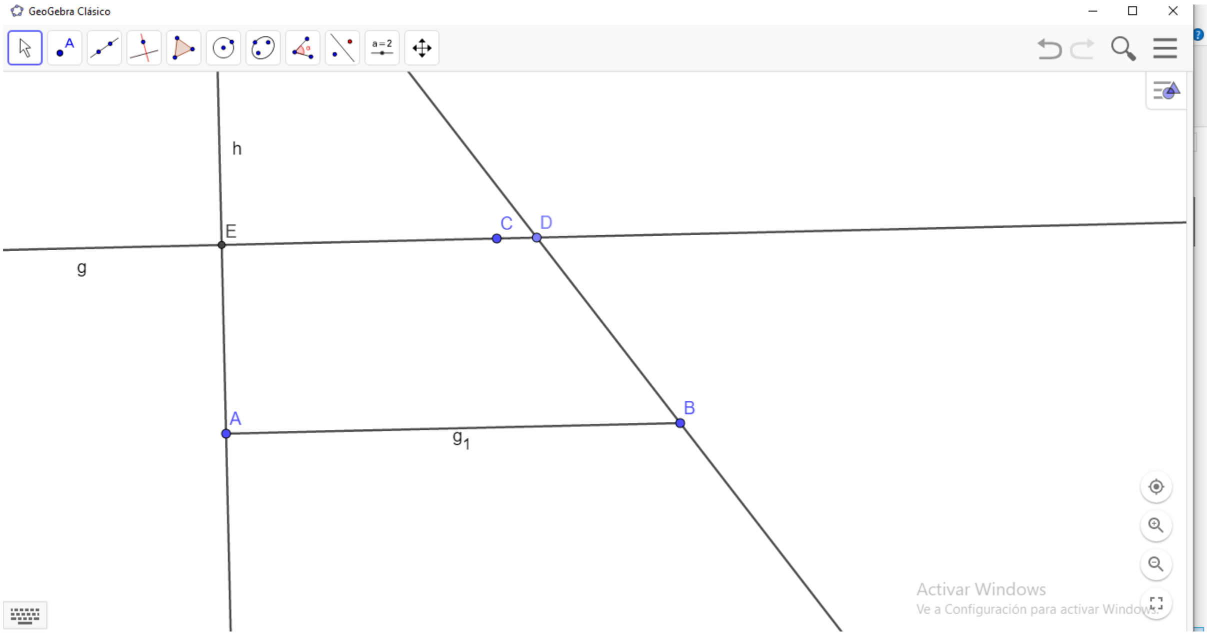


Figura 31: Construcción trapecio rectángulo grupo 5 (3°D)

Análisis de construcción:

Tiene una visualización final del tipo tradicional con la base superior menor a la base inferior, posee dos puntos totalmente libres (A, B) que son los vértices de la base inferior y moviendo estos podemos mover y rotar la figura, lo que les da la posibilidad de estudiar una gran cantidad de ejemplos de esta figura. Respecto a los otros dos puntos (E, D) que conforman la figura, uno (D) es libre solo sobre la recta que lo contiene y el otro (E) es el punto de intersección de la base superior con la recta perpendicular al segmento graficado inicialmente por lo cual es fijo.

Grupo 6 (3°D) el protocolo de construcción fue: Crean un punto A sobre el eje “x” y trazan la recta “g” paralela al eje “x” por A (el eje “x”), luego crean un punto B fuera de los ejes y crean la recta “h” paralela a “g” por B. Después toman un punto C sobre “g” y crean el segmento BC, luego buscan el punto D como la intersección de “h” con el eje “y”, y crean la recta “i” perpendicular a “g” por D, buscan el punto de intersección de “g” con “i” (E) y forman así el cuadrilátero BCED. Para lograrla se basaron en la necesidad de tener un par de lados opuestos paralelos y que al trazar una recta perpendicular a dos paralelas se obtienen dos ángulos rectos, y las herramientas utilizadas fueron: recta paralela, recta perpendicular, intersección, segmento. En la *Figura 32* se puede ver la visualización final de la construcción.

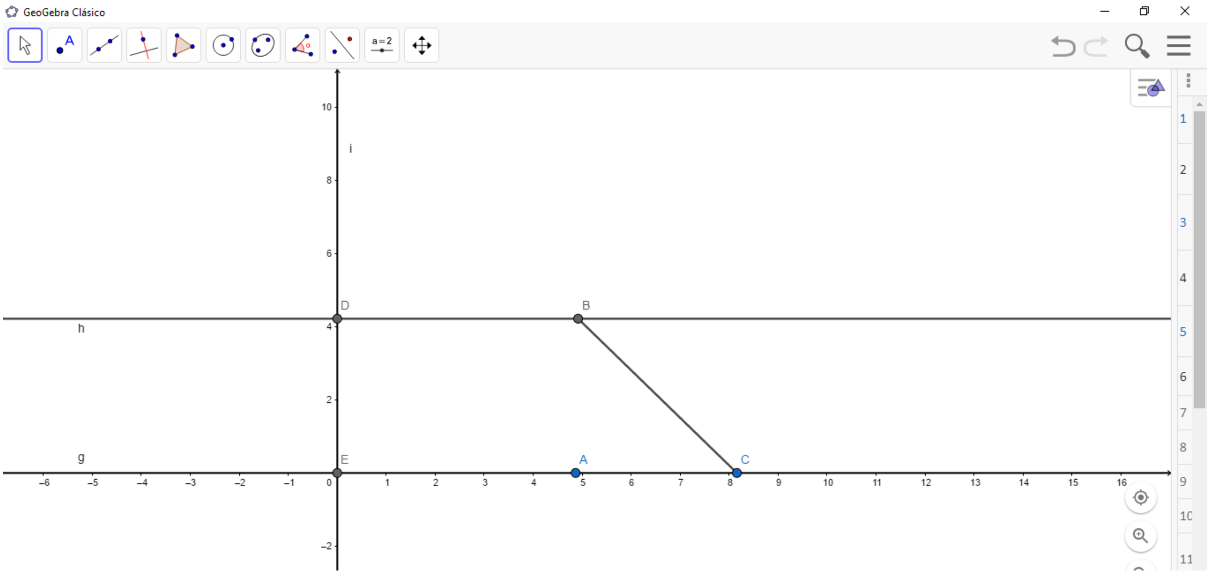


Figura 32: Construcción trapecio rectángulo grupo 6 (3°D)

<u>Análisis de construcción:</u>

La perpendicularidad de las rectas se obtiene utilizando los ejes coordenados obteniendo los vértices de los ángulos rectos como intersecciones del eje "y" con el eje "x" y del eje "y" con una recta paralela al eje "x" lo que los convierte en puntos fijos, haciendo que la figura no pueda rotarse, acotando la cantidad de ejemplos de trapecios rectángulos que se puedan abordar con esta construcción. En lo que respecta a los otros dos vértices, uno de ellos (X) es libre dentro del eje "x" y el otro es totalmente libre(X). Por otra parte, vemos que la visualización final es del tipo tradicional con la base inferior mayor a la base superior.

Grupo 6 (3°C) el protocolo de construcción fue: Crean el segmento AB y la recta "g" paralela a este por un punto C, luego crean la recta "h" perpendicular a AB por A y buscan el punto D como la intersección de "g" con "h", después crean el segmento BC y así forman el trapecio rectángulo ABCD. Para lograrla se basaron en la necesidad de tener un par de lados opuestos paralelos y que al trazar una recta perpendicular a dos paralelas se obtienen dos ángulos rectos, y las herramientas utilizadas fueron: recta paralela, recta perpendicular, segmento, intersección. La visualización final se puede ver en la *Figura 33*.

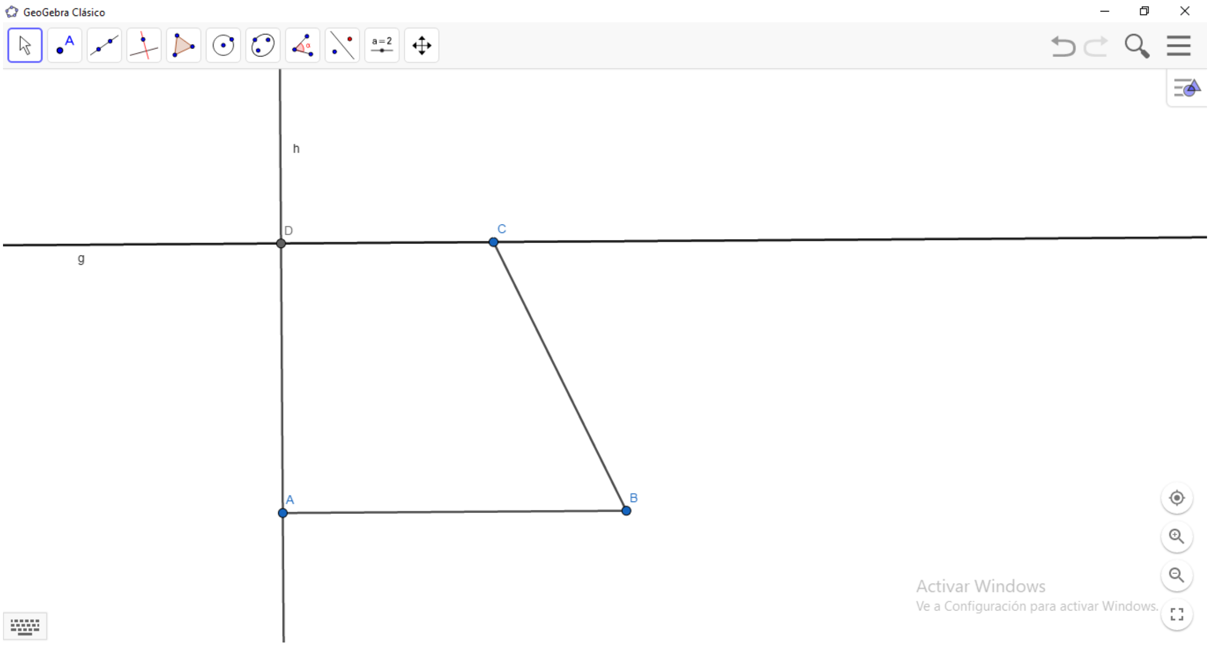


Figura 33: Construcción trapecio rectángulo grupo 6 (3°C)

Análisis de construcción:

Notamos que es muy similar a la del grupo 5 (3°D) (*Figura 31*) con la diferencia de que utilizan como vértice de la figura el punto con el cual crean la recta paralela al segmento inicial, permitiendo así que desde un vértice de la figura se pueda variar la recta. Otra diferencia es que completan la construcción con los segmentos y no las rectas que pasan por los vértices dejando así una visualización más clara de la figura. Al igual que la construcción del grupo 5 (3°D) posee el mismo punto completamente fijo, los otros 3 completamente libres, y puede ser rotada moviendo los vértices de la base inferior. La visualización final es del tipo tradicional, con la base inferior mayor a la base superior, y las rectas utilizadas para la construcción aparecen visibles.

Análisis general de las construcciones:

A pesar de tener distintas definiciones en los cursos, puesto que un habla de lados perpendiculares y la otra de ángulos rectos, no se encuentra una diferencia relacionada a este hecho dado que ninguno trabaja con la medida de los ángulos, sino con la perpendicularidad de las rectas y los protocolos de construcción son muy similares. Por último, cabe destacar que la visualización final de las 3 construcciones es del tipo tradicional con la base superior menor a la base inferior. Cabe destacar que en una de estas construcciones es visible la influencia de los ejes coordenados para la construcción de ángulos rectos, y las desventajas que trae la utilización de los mismos. Cómo es el caso del grupo 6 (3°D) (Imagen 20), donde los ejemplos que podemos analizar de la figura se ven muy reducidos por la condición de que los vértices de la figura se encuentren sobre los ejes.

3.3.8 Romboide

Las definiciones de romboide que se trabajaron en 3°C y 3°D fueron: **“un romboide es un cuadrilátero con dos pares de lados consecutivos congruentes y lados opuestos no congruentes”** y **“un romboide es un cuadrilátero irregular que no tiene lados paralelos. Tiene dos pares de lados consecutivos congruentes y lados opuestos no congruentes” respectivamente**. Consideramos que ambas son del tipo particional puesto que enuncian las características básicas que describen unívocamente al objeto, de hecho, la única diferencia entre estas es que en la trabajada en 3°D se agrega el ser irregular y no tener lados paralelos, pero la irregularidad de la figura puede deducirse del hecho de tener lados opuestos no congruentes y el no paralelismo de los lados es una propiedad que puede ser probada.[2]

Antes de comenzar con el análisis de las construcciones cabe aclarar que consideraremos como visualización tradicional cuando la figura se asienta sobre el vértice del ángulo interior de menor amplitud de los opuestos no congruentes, como se muestra en la *Figura 34.*

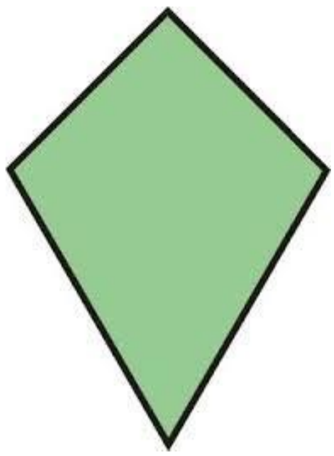


Figura 34: Visualización tradicional del romboide.

[2] Se decidió considerar al romboide como un cuadrilátero que no posee lados paralelos de acuerdo a lo solicitado por los docentes de 3° C y D además de abordar la clasificación de cuadriláteros según el paralelismo de los lados que figuraba en el material realizado por los profesores.

Grupo 7 (3°D), el protocolo de construcción fue: Crean la recta AB y la mediatriz del segmento AB, luego toman dos puntos C y D sobre la mediatriz en distintos semiplanos respecto de AB y trazan los segmentos AC, AD, BC y BD para conseguir el romboide ABCD. Para lograrla se basaron en la propiedad de tener diagonales perpendiculares, y que, al trazar segmentos desde un punto de una mediatriz de un segmento hasta los extremos de este, se obtienen segmentos congruentes, y las herramientas utilizadas fueron: recta, segmento, mediatriz. En la *Figura 35* se puede ver la visualización final.

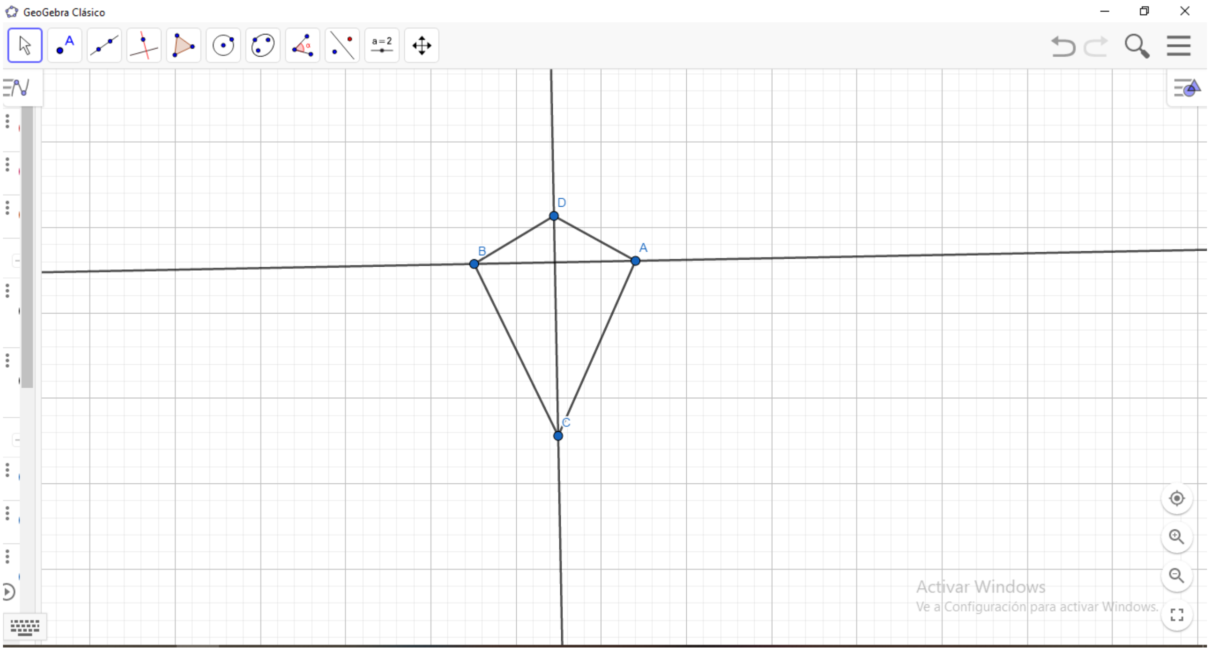


Figura 35: Construcción romboide grupo 7 (3°D)

Análisis de construcción:

Vemos que la visualización final es del tipo tradicional y deja visibles las rectas que se utilizaron para la construcción. Los puntos A y B que se construyen inicialmente son totalmente libres en el plano, lo que nos permite variar el tamaño y rotar la figura mediante el arrastre de alguno de estos puntos. Los puntos C y D en cambio son libres, pero solo dentro de la recta que los contiene, por lo que mediante el desplazamiento de estos solo podemos variar la longitud de los lados que lo tengan como vértice. Por último, cabe mencionar que la cuadrícula aparece activada pero no se identifica influencia de esta en el proceso de construcción.

Grupo 8 (3°D), el protocolo de construcción fue: Crean la recta AB y la mediatriz del segmento AB, luego toman dos puntos C y D sobre la mediatriz en distintos semiplanos respecto de AB y trazan las rectas AC, AD, BC y BD para conseguir el romboide ABCD. Para lograrla se basaron en la propiedad de tener diagonales perpendiculares, y que, al trazar segmentos desde un punto de una mediatriz de un segmento hasta los extremos de este, se obtienen segmentos congruentes, y las herramientas utilizadas fueron: recta y mediatriz. En la *Figura 36* se puede ver la visualización final.

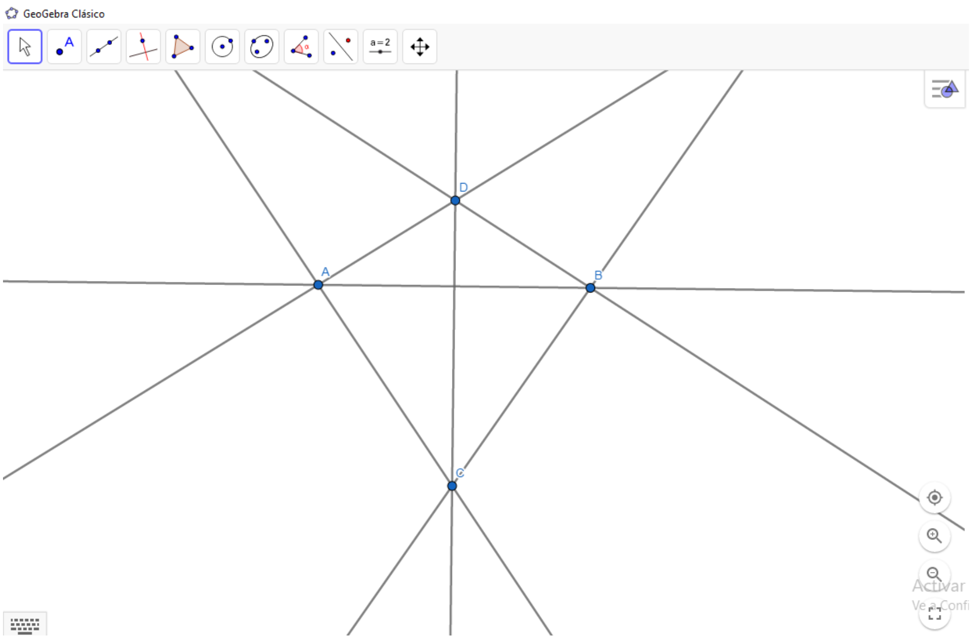


Figura 36: Construcción romboide grupo 8 (3°D)

Análisis de construcción:

Notamos que la visualización final es del tipo tradicional y deja visibles las rectas tanto que se utilizaron para construir como las que contienen a los lados del cuadrilátero. En lo que respecta a los puntos, al igual en la construcción del grupo 7 (3°D), los A y B creados inicialmente son totalmente libre. Los últimos dos puntos (C y D) en cambio son libres, pero solo dentro de la recta que los contiene, por lo que mediante el desplazamiento de estos solo podemos variar la longitud de los lados que lo tengan como vértice.

Grupo 7 (3°C), el protocolo de construcción fue: Toman un punto A sobre el eje "y" y trazan la circunferencia "g" con centro en A que pasa por B, con B un punto aleatorio, luego trazan el segmento AC con C un punto sobre "g". Después trazan la circunferencia "h" con centro en D que pasa por C, con D un punto exterior a "g", a continuación, buscan la intersección de "g" con "h" y obtienen el punto E, y con las herramientas segmento y recta forman el romboide ACDE. Para lograrla se basaron en la congruencia de los lados consecutivos, asegurada mediante intersecciones de circunferencias, y las herramientas utilizadas fueron: circunferencia (centro, punto), segmento, intersección, recta.

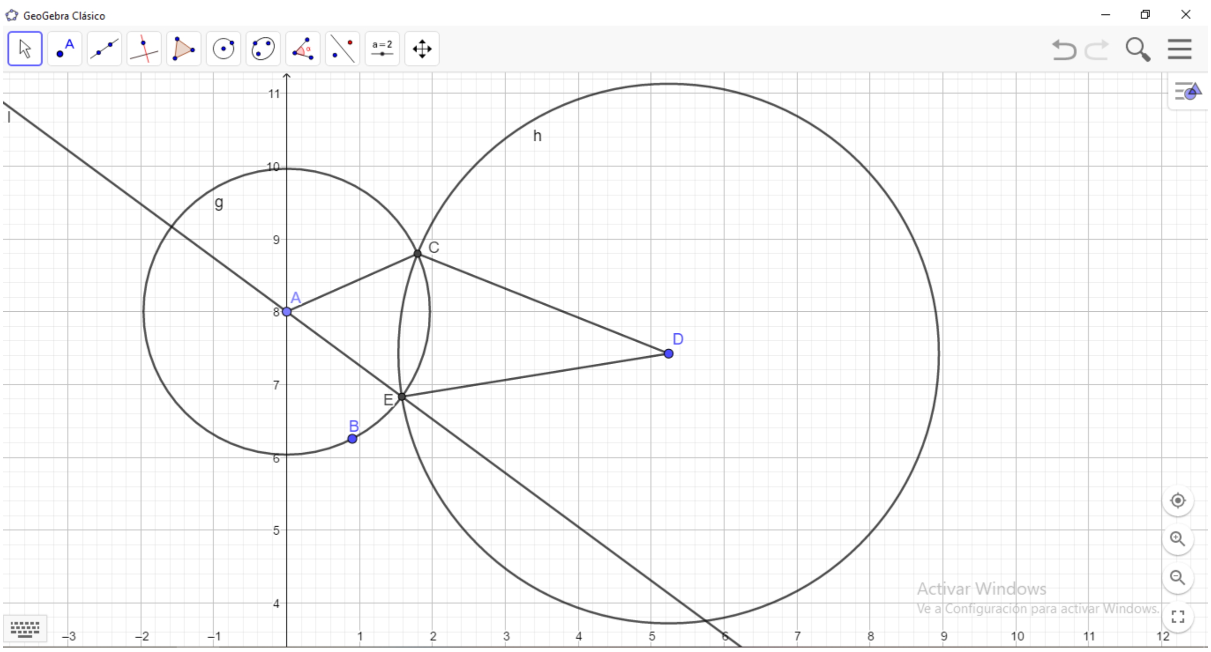


Figura 37: Construcción romboide grupo 7 (3°C)

Análisis de construcción:

Vemos que en la visualización final (*Figura 37*) la figura se asienta sobre uno de los vértices, pero no el que definimos para considerarla como tradicional, por lo que consideramos es del tipo no tradicional. También deja visible los ejes cartesianos, la cuadrícula y las rectas y circunferencias que se utilizaron para realizarla. En lo que respecta a los puntos el único completamente libre es el D el cual es el tercero que crean, esto es una diferencia sustancial con el resto de las construcciones en las cuales de haber puntos libres siempre resultaban ser los alguno de los primeros 2. Luego tienen el punto A que al haber sido creado sobre el eje "y" solo puede desplazarse sobre este, permitiendo rotar la figura una cantidad acotada de grados y variar su tamaño, luego el punto C es libre, pero sobre una circunferencia por lo que podemos hacer rotaciones al desplazar este punto, pero no podemos variar el tamaño de la figura, y por último el punto E es la intersección de dos circunferencias por lo que es un punto fijo.

Análisis general de las construcciones:

Vemos que las visualizaciones finales en las construcciones correspondientes a 3°D son del tipo tradicional a diferencia de la correspondiente a 3°C. Por otra parte, las herramientas utilizadas en 3°D son las mismas, a excepción de la utilización de segmentos en el caso del Grupo 7 (3°D), pero son sustancialmente diferentes a las utilizadas en la construcción de 3°C, ya que la única que tienen en común es la recta. Otra diferencia es que en las construcciones de 3°D no se identificó influencia de la cuadrícula y los ejes en comparación con la construcción de 3°C. Por otra parte, todas poseen al menos un punto completamente libre, lo que nos da una gran variedad de ejemplos de romboide para estudiar con las distintas construcciones. Otra diferencia a destacar en los procesos de construcción entre las pertenecientes a 3°D y 3°C, es que las dos de 3°D se basan en la propiedad de la mediatriz de un segmento y la perpendicularidad de las diagonales, mientras la de 3°C utiliza circunferencias para obtener las congruencias necesarias de los lados.

3.4 Análisis general de todas las construcciones

En lo que respecta al cuadrado, notamos ciertas diferencias en lo referente al tratamiento previo de la figura en los cursos, que creemos pueden influir en los procesos de construcción.

Creemos que el hecho de que en 3°D se trabajara con una definición del tipo jerárquica, oculta propiedades fundamentales como la necesidad de lados y ángulos congruentes, lo que dificulta el recurrir a aspectos constituyentes de la definición para realizar la construcción y hace que los alumnos acudan más a su propia percepción del objeto que a la definición trabajada.

Analizando el resto de las construcciones, creemos que el hecho de que en los procesos de construcción del rombo y el romboide hayan recurrido a propiedades distintas, a diferencia del resto de las figuras, está ligado a la representación conceptual que tienen los alumnos del objeto, trabajando este término desde el punto de vista que plantean las autoras Mántica y Freyre (2019) donde nos explican que la imagen conceptual de una figura es “el conjunto de todas las figuras mentales (gráfica, simbólica, etc.) del estudiante relacionadas con el nombre del concepto. Junto con todas las propiedades que lo caracterizan”(p.208). Puesto que utilizan propiedades como la perpendicularidad de las diagonales, que no se habían trabajado en instancias previas a la construcción pues se verían posteriormente. Lo que muestra indicios de una idea previa sobre el concepto y sus propiedades. El hecho de que los 3 procesos de construcción del rombo impliquen el manejo de distintas propiedades, demuestra que los alumnos evidencian distintas relaciones que caracterizan a esta figura a diferencia de lo que sucede con el resto.

Haciendo ahora un análisis general de las construcciones, podemos ver que el 80% poseen una visualización del tipo tradicional. A excepción de la construcción de cuadrado y la del grupo 6 (3°C) de trapecio rectángulo todas poseen al menos un punto libre dentro de alguna recta o circunferencia y el 80% de las construcciones pueden ser rotadas al aplicar arrastre sobre alguno de sus vértices. Además, todas las construcciones a excepción de la del grupo 3 (3°D) poseen al menos 1 punto totalmente libre, el 87% de las construcciones dejan visibles las rectas o circunferencias utilizadas para realizarlas, y por último en el 73% de las construcciones no se identifica influencia de la cuadrícula o los ejes coordenados. En las construcciones donde se identifica influencia de ejes o cuadrícula, vemos que afectan las libertades de los puntos, ya que un punto que podría ser libre al colocarse sobre un eje limita su movimiento a este, también en algunos casos los ejes fueron utilizados para conseguir ángulos rectos.

3.5 Conclusiones

En conclusión, en este capítulo, se intentó dilucidar si en las construcciones de los alumnos encontramos alguna generalidad. Los aspectos que tuvimos en cuenta fueron: si las visualizaciones finales son del tipo tradicional o no; las características de los puntos que ofician de vértices de las figuras; si es posible o no rotar las mismas; si hay una tendencia a dejar visibles los elementos utilizados para realizar una construcción; si influye o no tener activados los ejes y cuadrículas; y si hay similitudes entre las construcciones. Para recopilar esta información se recurrió a los protocolos de construcción de los alumnos, posteriormente sistematizamos los datos y analizamos nuestras hipótesis a partir de bibliografía sobre el tema.

Para concluir este capítulo intentaremos analizar ciertos aspectos que nos resultaron relevantes en nuestra problemática. Basándonos en lo que sostienen las autoras Mántica y Freyre (2019) las cuales plantean que "el conjunto de objetos matemáticos considerados por el estudiante como ejemplos no es necesariamente el mismo que el conjunto de objetos matemáticos determinados por la definición dada" (p.208). Y agregando lo que plantea Soler (1997) (citado en Mántica y Freyre 2019) "la imagen que uno se va formando de un concepto se afina, amplía y cambia a medida que se va ampliando el mundo de ejemplos posibles" (p.208). Planteamos como crítica a nuestra planificación que podría haber sido provechoso que previo al trabajo de construcciones, se hubiesen abordado con los alumnos más ejemplos de las distintas figuras para lograr afinar la imagen que tienen de ellas y que de este modo tengan a su alcance más propiedades y relaciones entre los elementos de la figura a las cuales recurrir para realizar las construcciones, y así tal vez los resultados sobre las de cuadrado en 3°D hubiesen sido diferentes. Además, consideramos que el presentarles a los alumnos en todas las instancias anteriores a las construcciones, cuadriláteros con la visualización tradicional, pudo haber influido en las construcciones, ya que notamos que la mayoría de ellas fueron de tipo tradicional.

Por otra parte, pensamos que el hecho de haber insistido en que realicen construcciones y no dibujos favoreció entre otras cosas la mirada crítica de los estudiantes hacia el software con el que estaban trabajando y permitió que se apropien de él, de sus potencialidades y que mediante la manipulación del mismo pongan en juego distintas relaciones y conceptos matemáticos. Tal como plantean Sessa et al. (2015) (citado en Mántica y Freyre 2019) es intención que los alumnos vayan "construyendo una mirada crítica sobre las respuestas del software, relacionándolas con los conocimientos que ellos ya tienen sobre los objetos matemáticos que se ponen juego”. (p.159)

A modo de cierre queríamos destacar la importancia de haber trabajado en *GeoGebra* por las potencialidades que este ofrece a los alumnos, tales como el arrastre, la posibilidad de crear elementos geométricos básicos, como son los puntos, las rectas o las circunferencias, y entidades geométricas como rectas paralelas o perpendiculares, mediatrices, etc. También destacamos sus potencialidades para el trabajo docente como el tener la vista del protocolo de construcción, sin el cual no hubiese sido posible llevar a cabo el análisis de las construcciones. Basados en la conclusión de la problemática consideramos que logramos dar algunas respuestas a los interrogantes planteados que nos dejan conformes con el trabajo realizado.

.

4. Reflexiones finales.

Después de haber transitado el período de prácticas y la mayor parte de la materia mirando un poco hacia atrás, podemos ver el gran proceso que atravesamos y los cambios que este nos ha generado. Cambios que consideramos son para mejorar nuestras capacidades y aptitudes docentes. Fue un año donde nos enfrentamos a múltiples desafíos como el de aprender y enseñar, el de escribir un texto formal como lo es el presente informe, el ingresar a una institución y tomar responsabilidad sobre un grupo de alumnos, el de hacer una planificación y enfrentar los retos que supone su implementación, donde se chocaron nuestras expectativas e ideas con la realidad escolar. Si bien fue un proceso largo y agotador lo consideramos muy necesario y enriquecedor, lleno de experiencias y aprendizajes.

Reflexionando sobre lo que fue el proceso de planificación e implementación, estas experiencias nos resultaron contrastantes. El proceso de planificar, aparte de necesitar responder a una diferencia de distribución horaria en los cursos, llevó plasmadas todas nuestras ilusiones y expectativas. Al ingresar a la institución educativa, esa planificación entró en juego con los tiempos y respuestas que efectivamente obtuvimos de los alumnos en el aula. Por lo tanto, la planificación debió ser constantemente revisada y adaptada a lo que ocurría día a día en la escuela, pero sin perder de vista el objetivo que teníamos para con nuestra práctica, cuestión que consideramos fundamental a tener en cuenta para nuestro futuro como docentes. Para este proceso de ida y vuelta entre lo planificado y lo que ocurría en el aula es de destacar la buena predisposición de ambos grupos de estudiantes para realizar las tareas y los trabajos. Todas estas experiencias y desafíos nos permitieron entender y aprender cómo planificar, cómo evaluar las potencialidades y tiempos de una actividad, y cómo gestionar una clase, entre otras cosas.

En relación con la problemática desarrollada en el capítulo 3, nos pareció sumamente interesante poder estudiar en profundidad los protocolos de construcción de los estudiantes por dos cuestiones. En primer lugar, para lograr un primer acercamiento a entender las ideas y herramientas a las que acudieron nuestros alumnos para lograr una construcción, lo que nos da una idea para próximas implementaciones de esta propuesta o similares. En segundo lugar, para poder indagar y comprender las potencialidades que ofrece el *GeoGebra*, para en un futuro hacer un mejor uso del software en nuestras planificaciones de aula. También nos pareció importante el hecho de que este tipo de indagación nos acerca a un trabajo de investigación, pone en juego nuestras habilidades de recopilación e interpretación de información, de análisis de situaciones de aula y producciones de los alumnos. Además, nos da la libertad de trabajar sobre temas que nos parecieron relevantes, y nos fuerza a repensar la práctica y las situaciones vividas en busca de un problema que nos parezca relevante. Consideramos que esta experiencia aumenta nuestra capacidad como docentes críticos y como futuros investigadores.

Finalmente, en lo que hace a la escritura del informe final, consideramos que esta es clave pues nos enseña no solo las reglas, normas y formas de escritura de un texto formal, sino que nos permite hacer un análisis completo de nuestro proceso de prácticas, los retos y desafíos a los que nos enfrentamos y cómo los afrontamos, nos da la posibilidad de investigar y de leer distintos autores; cuestiones que enriquecen aún más nuestros conocimientos y fomentan nuestra curiosidad.

5. Referencias:

Cristante, A., Esteley, C. & Marguet, I. (2012) Explorando construcciones geométricas con GeoGebra. *Trabajos de matemática serie "B"*, 61, 19-28.

Duval, R. (2000). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? *Revista Educación Matemática*, 12, 149-151.

Guillén Soler G. (1997). *El mundo de los poliedros*. Madrid, España: Síntesis.

Leung, A. (2011) An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM Mathematics Education* 43, 325–336.

Mántica A.M. & Freyre M.L. (2017). Constatación empírica y uso de propiedades para la validación de conjeturas utilizando GeoGebra. *Revista Números*, 95, 107-121.

Mántica A.M. & Freyre M.L. (2019). Análisis de la relación entre imagen y definición en una situación problemática mediada por GeoGebra a partir de no ejemplos del concepto del poliedro regular. *Revista Educación matemática,* 31, 205-234.

Ministerio de Educación Provincia de Buenos Aires. (2001) *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la geometría en EGB.* Disponible en http://servicios2.abc.gov.ar/docentes/capacitaciondocente/plan98/pdf/geometria.pdf

Ortega, T. & Pecharomán, C. (2015). Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 95 - 117.

Anexo

En este anexo se pueden encontrar las guías de actividades que fueron entregadas a los alumnos durante el período de prácticas en forma de fotocopia. Las mismas están separadas por número de fotocopia (de la misma manera fue nombrada para los alumnos) y contienen el tema de la misma, y la organización con la que se debía realizar cada una. En las fotocopias entregadas a los alumnos, debajo de cada actividad se dejó un espacio para la resolución de la misma, en este anexo quitamos esos espacios para que sea más amena la lectura de las actividades.

Fotocopia 1:

Tema: Polígonos y sus clases.

Organización: Conformar grupos de 4 integrantes. Cada grupo recibirá un sobre con figuras geométricas.

Actividad 1:

Distinguir cuáles de las figuras entregadas son polígonos, y anotarlas en el siguiente cuadro con los números que tienen en el inverso:

POLÍGONOS	NO POLÍGONOS

Actividad 2: A partir de la visualización de las figuras que fueron entregadas, elaborar una definición de POLÍGONO:

Definición:

Luego de la puesta en común, copiar la definición de polígono que tomaremos como válida a lo largo de la unidad:

Definición:

Actividad 3: Teniendo en cuenta los polígonos recortados que se entregaron, encontrar al menos dos formas de agruparlos distintas, de manera tal que todos los polígonos queden dentro de alguno de los grupos y ninguno este en ambos grupos a la vez. Luego, anotarlas en el cuadro con la ayuda del número al reverso de la figura y explicitar qué característica general tiene cada grupo.

Clasificación 1	Clasificación 2
GRUPO 1 - Característica general:	GRUPO 1 - Característica general:

GRUPO 2 – Característica general:	GRUPO 2 – Característica general:

Actividad 4: Copiar en el siguiente recuadro el mapa conceptual sobre polígonos que construimos en el pizarrón:

Fotocopia 2:

Tema: Cuadriláteros y su clasificación.

Organización: Conformar grupos de cuatro integrantes. Se entregarán cuadriláteros y se les asignará uno que estará escrito en el sobre. Además, se les entregará una hoja en blanco.

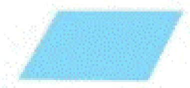
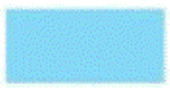
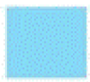
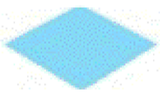
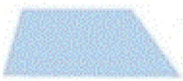
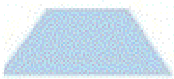
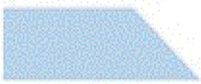
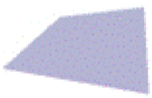
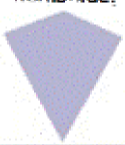
Actividad 1:

a. Debatir en el grupo cuál sería la mejor definición para el cuadrilátero asignado y copiarla en la hoja blanca entregada, sin poner el nombre del cuadrilátero.

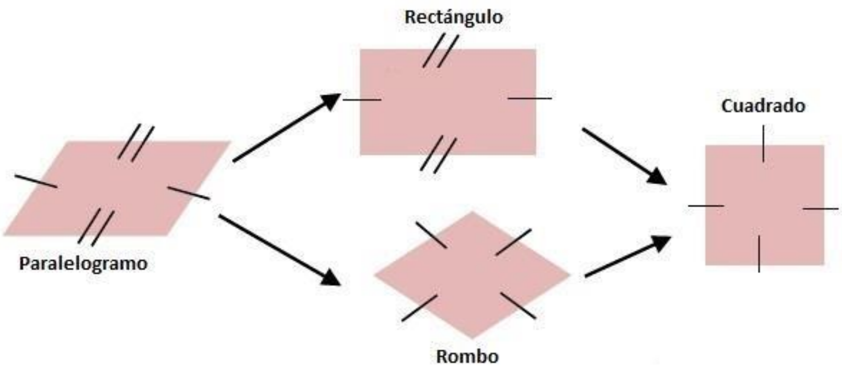
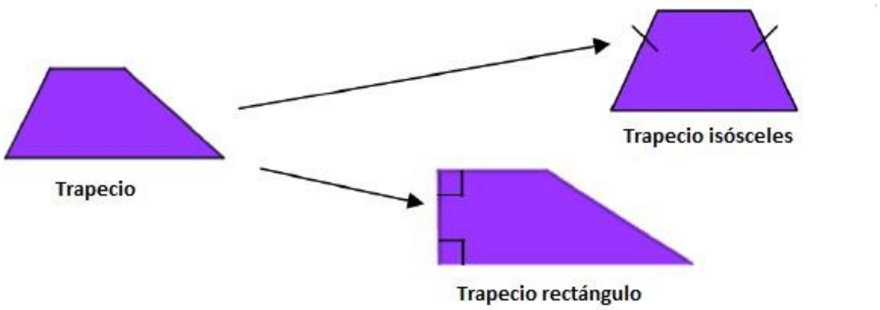
b. Luego, intercambiar su hoja con otro grupo.

c. A partir de la hoja que recibieron encontrar cuál es el cuadrilátero que corresponde a esa definición.

Actividad 2: En el siguiente cuadro anotar la definición de cada tipo de cuadrilátero que acordamos tomar como válida a lo largo de la unidad:

Cuadrilátero:	Definición:
Paralelogramo: 	
Rectángulo: 	
Cuadrado: 	
Rombo: 	
Trapecio: 	
Trapecio isósceles: 	
Trapecio rectángulo: 	
Trapezoide: 	
Romboide: 	

Actividad 3[3]: Completar el siguiente cuadro con el nombre de cada categoría, y su descripción, teniendo en cuenta que es la clasificación de los cuadriláteros según el paralelismo de sus lados.

<table>
<tr><th>Nombre de la categoría</th><th>Descripción</th><th>Cuadriláteros que pertenecen</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

[3] Nota: Esta actividad fue adaptada del apunte de clases que realizaron los docentes del colegio.

Fotocopia 3:

<u>Tema:</u> Propiedades de los cuadriláteros.

Organización: Conformar grupos de dos estudiantes, a cada grupo se le asignará un cuadrilátero que deben construir en GeoGebra.

Actividad 1: Marcar con una cruz las propiedades que cumpla dicha figura, escribiendo debajo de cada propiedad las justificaciones que utilizaron para comprobar su validez.

Propiedades de los ángulos:

Solo un par de ángulos opuestos congruentes	
Dos pares de ángulos opuestos congruentes	
Cuatro ángulos congruentes	

Actividad 2: Marcar con una cruz las propiedades de las diagonales que cumpla la figura asignada.

Propiedades de las diagonales:	
Solo una diagonal corta a la otra en su punto medio	
Cada diagonal corta a la otra en su punto medio	
Solo una diagonal es bisectriz de los ángulos que interseca	
Cada diagonal es bisectriz de los ángulos que interseca	
Las diagonales son perpendiculares	
Las diagonales son congruentes	
Solo una diagonal divide al cuadrilátero en triángulos congruentes	
Cada diagonal divide al cuadrilátero en triángulos congruentes	
Las diagonales dividen al cuadrilátero en cuatro triángulos congruentes	

Una vez realizadas las construcciones, se hará una puesta en común. Completar el siguiente cuadro con la información brindada por los compañeros sobre los demás cuadriláteros.

Propiedades de ángulos	Romboide	Trapecio	Trapecio Rectángulo	Trapecio isósceles	Paralelogramo	Rectángulo	Rombo	Cuadrado	Trapezoide
Solo un par de ángulos opuestos congruentes									
Dos pares de ángulos opuestos congruentes									
Cuatro ángulos congruentes									

Propiedades de diagonales	Romboide	Trapecio	Trapecio Rectángulo	Trapecio isósceles	Paralelogramo	Rectángulo	Rombo	Cuadrado	Trapezoide
Solo una diagonal corta a la otra en su punto medio									
Cada diagonal corta a la otra en su punto medio									
Solo una diagonal es bisectriz de los ángulos que interseca									
Cada diagonal es bisectriz de los ángulos que interseca									
Las diagonales son perpendiculares									
Las diagonales son congruentes									
Solo una diagonal divide al cuadrilátero en triángulos congruentes									
Cada diagonal divide al cuadrilátero en triángulos congruentes									
Las diagonales dividen al cuadrilátero en cuatro triángulos congruentes									

Fotocopia 4

Tema: Suma de ángulos interiores de polígonos regulares y no regulares.

Organización: Conformar grupos de dos estudiantes, a cada grupo se le entregará un polígono regular y otro irregular en una fotocopia.

Actividad 1:

a. Buscar la forma de cubrir ambos polígonos entregados con la menor cantidad de triángulos posibles. Se entregan varios polígonos para que no tengan que borrar sus intentos.

b. Luego de la puesta en común, dibujar la mejor forma de dividir que se encontró.

Actividad 2: Completar el siguiente cuadro con los datos que tengan de sus polígonos y los polígonos de sus compañeros. Al finalizar, completar la tabla para un polígono de n lados.

Cantidad de lados:	Cantidad de triángulos:	Suma de ángulos interiores:
n		

Ahora, analizando los datos de la tabla completar las siguientes propiedades de los polígonos.

La cantidad de triángulos necesarios para cubrir un polígono es igual a

____

La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es igual a:

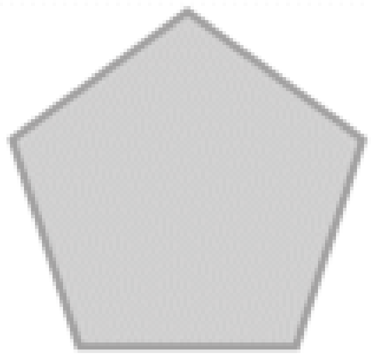
SAI = ____

Polígonos de la actividad 1 – fotocopia 4.

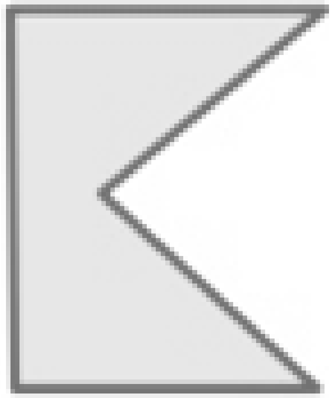
En esta sección mostraremos los polígonos que se les entregaron a los alumnos para dividir en triángulos como lo explicita la actividad 1 de la Fotocopia 4 (sección 6.4). Cabe aclarar que se entregaron dos polígonos a cada grupo de manera aleatoria.[4]

[4] Se muestra aquí una única imagen de cada polígono dado, pero a los alumnos se le entregaron cinco imágenes en cada copia.

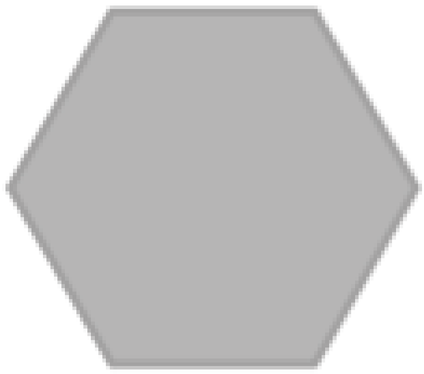
PENTÁGONO REGULAR:



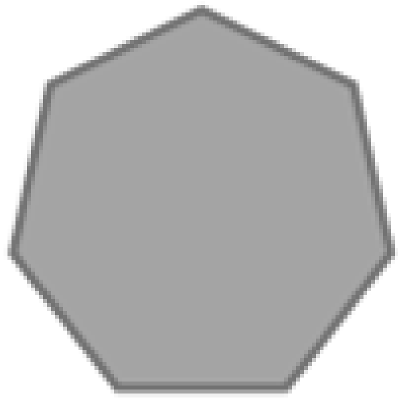
PENTÁGONO IRREGULAR:



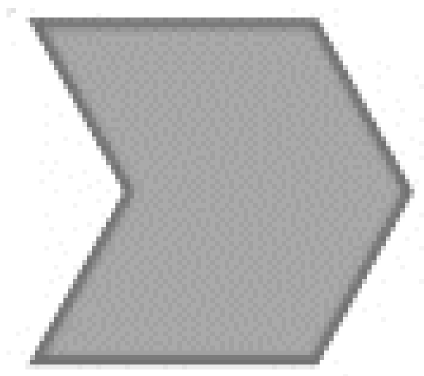
HEXÁGONO REGULAR:



HEPTÁGONO REGULAR:



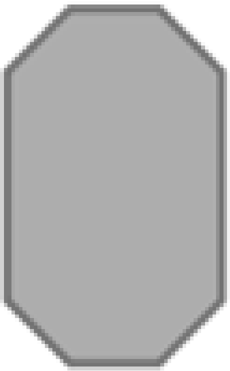
HEXÁGONO IRREGULAR:



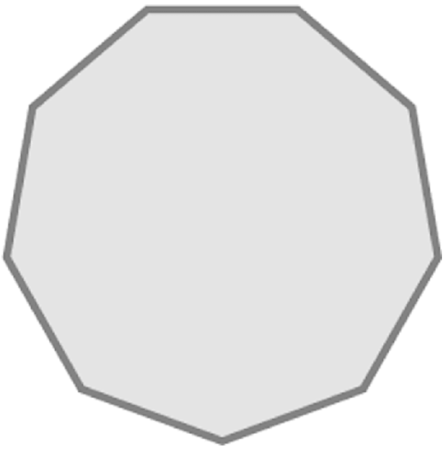
HEPTÁGONO IRREGULAR:

OCTÓGONO REGULAR:

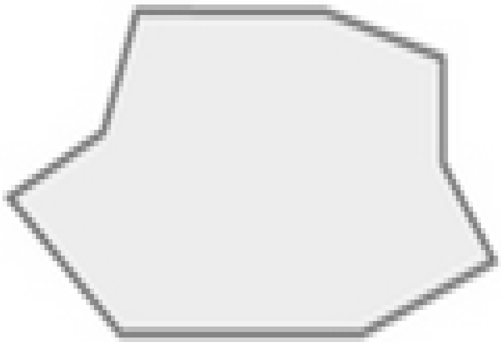
OCTÓGONO IRREGULAR:



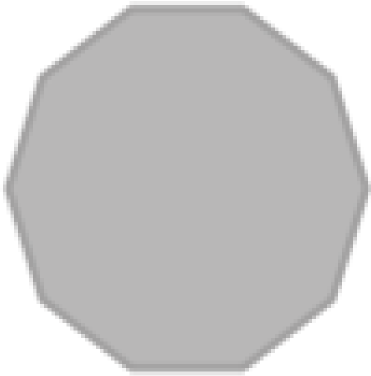
ENEÁGONO REGULAR:



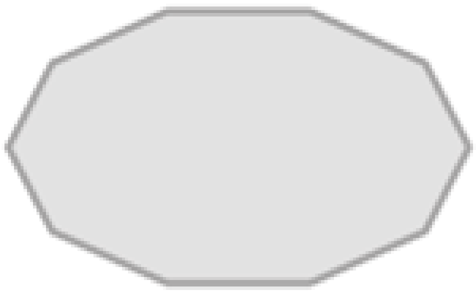
ENEÁGONO IRREGULAR:



DECÁGONO REGULAR:



DECÁGONO IRREGULAR:



Fotocopia 5:

<u>Tema:</u> Suma de ángulos interiores de polígonos.

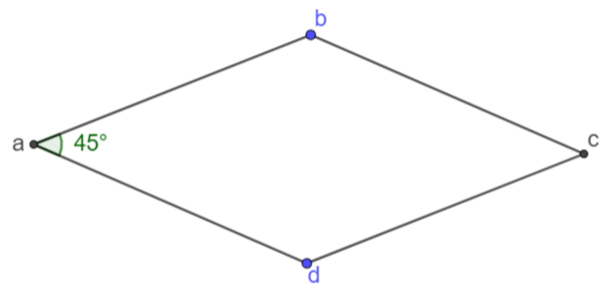
Organización: Realizar las siguientes actividades de manera individual.

Actividad 1:

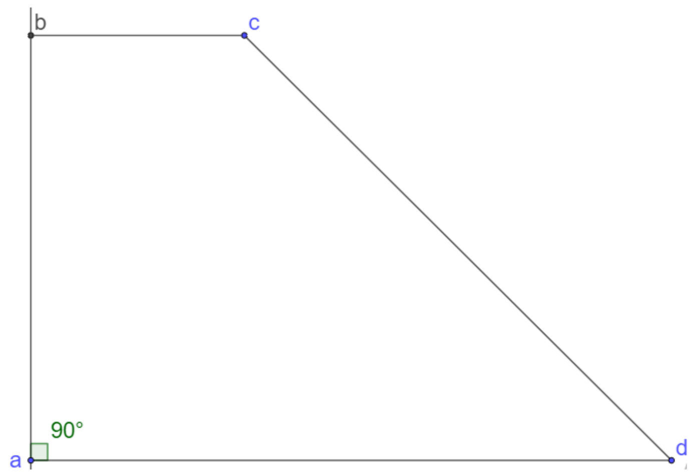
a. Para cada uno de los cuadriláteros que conocemos, determinar si es posible calcular la medida de todos sus ángulos interiores conociendo la medida de solo uno de ellos. En los casos que sea posible especificar cómo hacerlo, en los casos que no sea posible explicar por qué.

b. Para los siguientes cuadriláteros, calcular, en caso que sea posible, la medida de los ángulos interiores justificando las cuentas realizadas. En los casos que no sea posible calcularlos, especificar qué dato/s necesitaríamos agregar para poder hacerlo.

I)

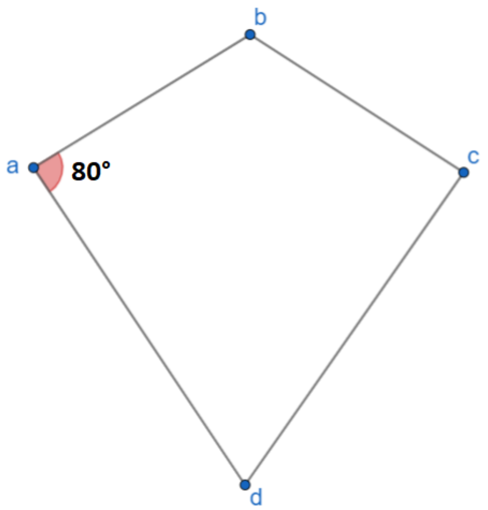


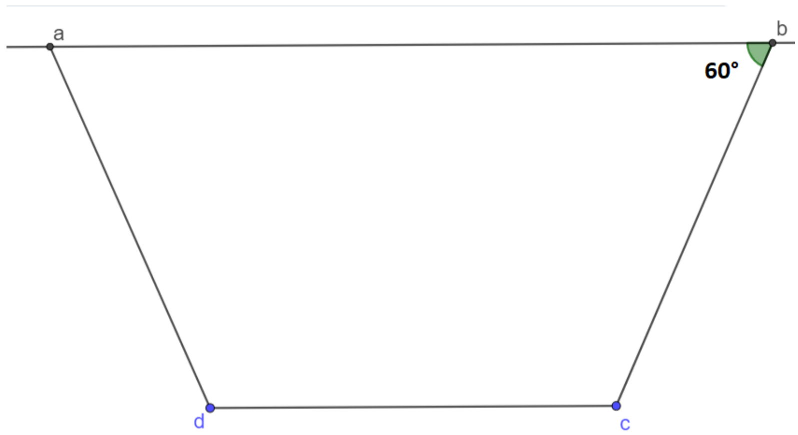
II)



III)

IV)





Actividad 2: Responder las siguientes preguntas justificando con las propiedades vistas en clases:

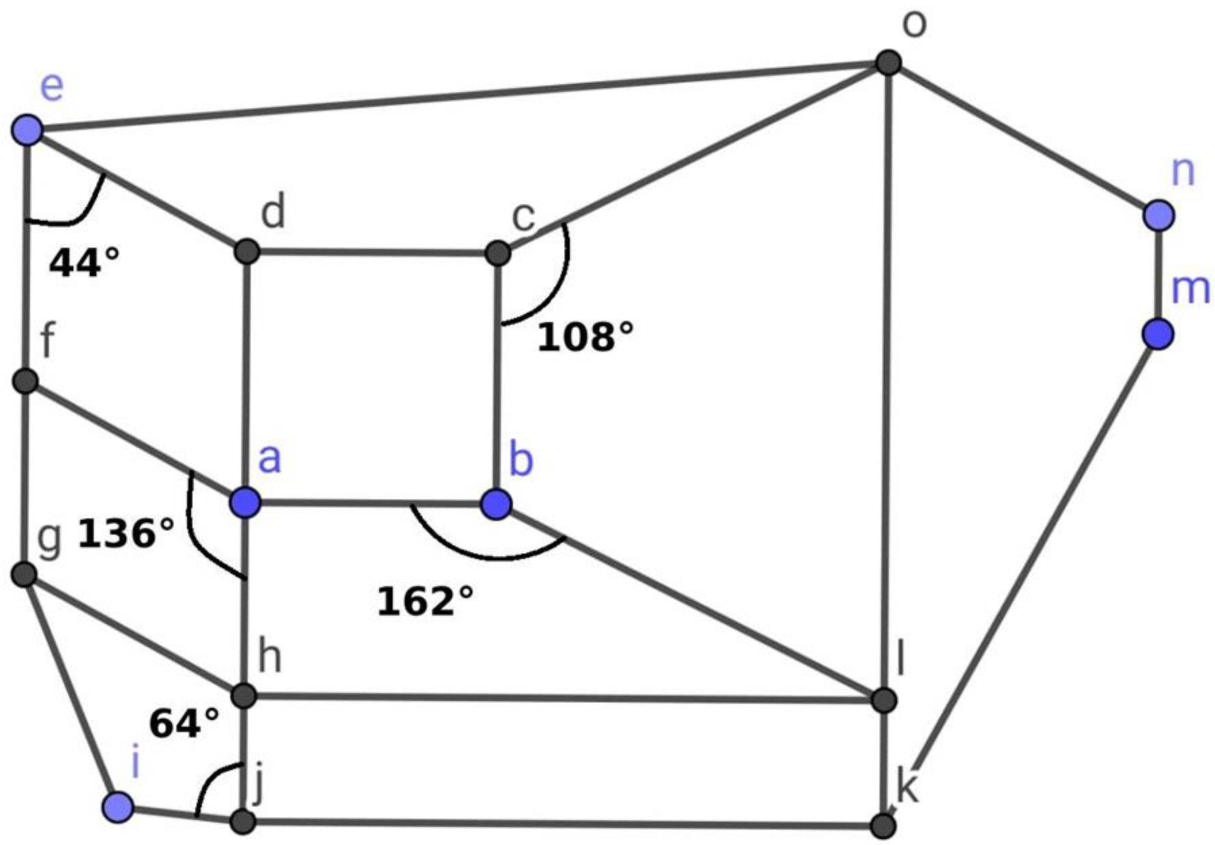
(a) Si un rombo posee un ángulo interior de 90° ¿qué podemos decir de la figura?

(b) ¿Cuál/es cuadrilátero/s podrían tener ángulos interiores cuyas medidas sean: $\hat{a}$=50°, $\hat{b}$=50°, $\hat{c}$=130° y $\hat{d}$=130° donde $\hat{a}$ es el ángulo opuesto de $\hat{b}$? ¿y si $\hat{a}$ es el ángulo opuesto de $\hat{c}$?

(c) ¿Cuál/es cuadrilátero/s podrían tener ángulos interiores cuyas medidas sean: $\hat{a}$=60°, $\hat{b}$=60°, ¿ $\hat{c}$=130° y $\hat{d}$=130°?

(d) ¿Cuál/es cuadrilátero/s podrían tener ángulos interiores cuyas medidas sean: $\hat{a}$=109°, $\hat{b}$=109°, $\hat{c}$=88° y $\hat{d}$=54° donde $\hat{a}$ es el ángulo opuesto de $\hat{b}$? ¿y si $\hat{a}$ es el ángulo opuesto de $\hat{c}$?

Actividad 3: Dada la siguiente imagen, nombrar todos los cuadriláteros que encuentre, y calcular la medida de la mayor cantidad de ángulos posibles con los datos previstos. Justifique sus cuentas con las propiedades vistas en clase.



o
e
n
d
c
m
44°
108°
f
a
b
g
136°
162°
h
l
64°
i
j
k

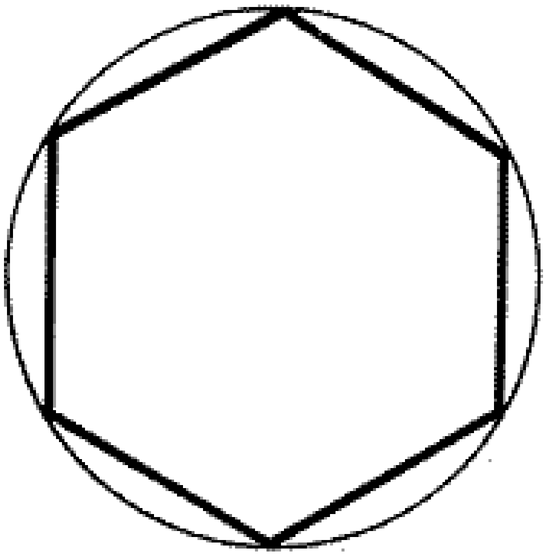
Fotocopia 6:

Tema: Ángulo central de polígonos regulares.

Actividad 1:

a- Anotar las partes del polígono en la figura que aparece debajo.

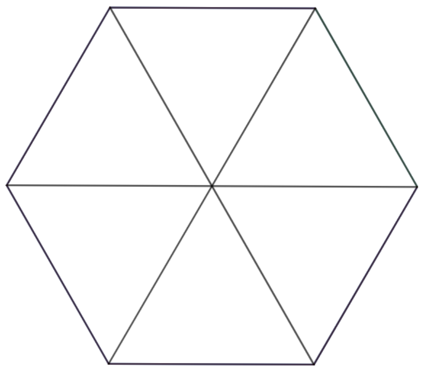
b- Calcular la medida de un ángulo interior de este polígono regular inscripto. Luego, deducir cuál sería la fórmula general para sacar la medida de un ángulo interior de un polígono de n lados.



Ángulo central de un polígono de n lados = ___________________________

Actividad 2: Dado el siguiente polígono dividido en triángulos, calcular la medida de cada uno de los ángulos del triángulo.

Un ángulo interior de un polígono de n lados =____________________________



Ahora, viendo las medidas de los ángulos que tienen vértice en el centro del polígono – llamados **ángulos centrales** - ¿podrían deducir una fórmula para obtener la medida del ángulo central de un polígono de n lados?

Actividad 3: Un ángulo central de un polígono regular mide 40° ¿De un polígono de cuántos lados hablamos?

Actividad 4: Decidir cuantos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo central sea de 30°.

Actividad 5: Elige la opción correcta y justificar:

a. En ángulo central de un octógono es:
   - 22°30’
   - 40’
   - 45°
   - Ninguna de las anteriores

b. Un polígono regular cuyo ángulo central es de 15° tiene:
   - 24 lados
   - 14 lados
   - 48 lados.
   - Ninguna de las anteriores

c. El ____________ es el único polígono regular cuyo ángulo central y ángulo interior miden lo mismo.
   - Cuadrado
   - Pentágono
   - Octógono.
   - Ninguna de las anteriores

d. Los ángulos interiores de un polígono regular:
   - Hay que calcularlos uno a uno.
   - Son todos iguales.
   - No podemos decir nada sin saber de qué polígono se habla.
   - Ninguna de las anteriores

Actividad 6: Sabiendo que el ángulo interior de un polígono regular es de 108°, calcular el ángulo central de dicho polígono. ¿Cuántos lados tiene?

Actividad 7: En cada uno de los siguientes casos, hallar el polígono regular:

a. Cuyo ángulo interior vale 120°
b. Cuya suma de ángulos interiores es 1440°
c. Cuyo ángulo interior vale 140°
d. Cuyo ángulo central vale 120°

Actividad 8: El ángulo central de un polígono regular mide 24°. Calcular cuántos lados tiene dicho polígono. ¿Cuánto mide el ángulo interior de dicho polígono?

Actividad 9: ¿Cuántos lados tiene el polígono regular en el cual la medida de cada uno de sus ángulos interiores es igual a 8 veces la medida de un ángulo central?

Fotocopia 7

En esta fotocopia demostraremos las propiedades de ángulos interiores que cumplen los cuadriláteros. Les proponemos en las actividades A y B responder las preguntas que los orientarán para realizar la demostración. La actividad C les plantea como desafío que ustedes solos realicen la demostración para el caso del rombo.

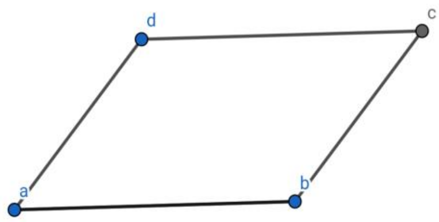
Actividad A

PARALELOGRAMO

Propiedad: Los ángulos opuestos son congruentes.

Condiciones iniciales:

- $\overline{ab}$ es congruente a $\overline{dc}$ y $\overline{ad}$ es congruente a $\overline{bc}$.
- $\overline{ab}$ es paralelo a $\overline{dc}$ y $\overline{ad}$ es paralelo a $\overline{bc}$.



a) Al trazar la diagonal $\overline{bd}$ ¿qué podríamos afirmar sobre los triángulos Δdbc y Δdba en los que queda dividido el paralelogramo abcd?

b) ¿Qué podríamos decir sobre los ángulos $\widehat{abd}$ y $\widehat{bdc}$? ¿y de los ángulos $\widehat{adb}$ y $\widehat{cbd}$?

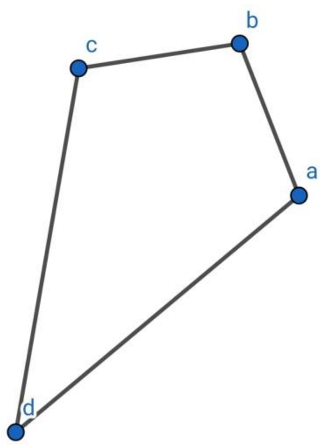
c) Con lo visto en los ítems anteriores, ¿que podríamos decir sobre los ángulos $\widehat{dcb}$ y $\widehat{dab}$?

d) ¿Qué podríamos decir sobre los ángulos $\widehat{adc}$ y $\widehat{abc}$ al trazar la diagonal $\overline{ac}$?

e) Viendo las respuestas de los ítems anteriores, ¿qué podríamos afirmar sobre los ángulos opuestos de un rombo?

<u>Actividad B:</u>

ROMBOIDE



Propiedad: En un romboide los ángulos opuestos, formados por los lados no congruentes, son ángulos congruentes.

Condiciones iniciales:

- El lado $\overline{cb}$ es congruente al lado $\overline{ba}$ y el lado $\overline{cd}$ es congruente al lado $\overline{da}$
- La diagonal $\overline{bd}$ es bisectriz de los ángulos que interseca.

a) Al trazar la diagonal $\overline{bd}$ ¿qué podemos decir sobre los triángulos Δbcd y Δbad en los que queda dividido el romboide abcd? ¿Por qué?

b) ¿Qué podríamos decir sobre los ángulos $\widehat{bdc}$ y $\widehat{bda}$?¿Por qué?

c) De manera análoga ¿Qué podríamos decir sobre los ángulos $\widehat{dba}$ y $\widehat{dbc}$?

d) Con lo visto en los ítems anteriores, ¿qué podríamos decir sobre los ángulos $\widehat{bcd}$ y $\widehat{bad}$?

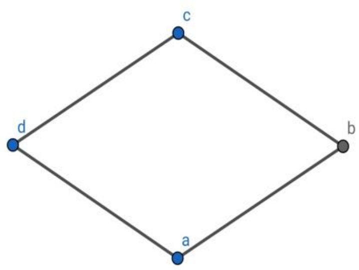
e) Viendo las respuestas de los ítems anteriores, ¿qué podríamos afirmar sobre los ángulos interiores de un romboide?

<u>Actividad C</u>

Propiedad: En un rombo los ángulos opuestos son congruentes.

Condiciones iniciales:

Demostración:



Conclusión:

Fotocopia 8

Guía de integración - Polígonos y cuadriláteros.

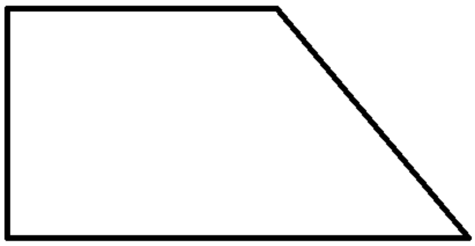
<u>Actividad 1:</u>

a. Dar las definiciones de los siguientes cuadriláteros que aparecen debajo.

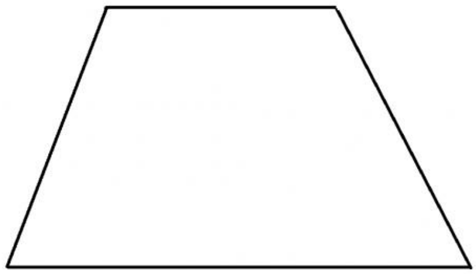
b. Marcar las partes de cada una de las definiciones.

c. Clasificarlos por el paralelismo de sus lados en Paralelogramo, trapecio o trapezoide.

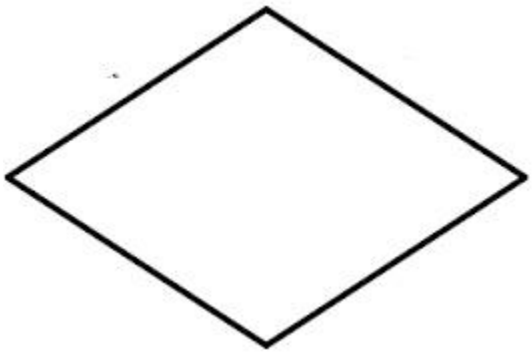
I)



III)



II)



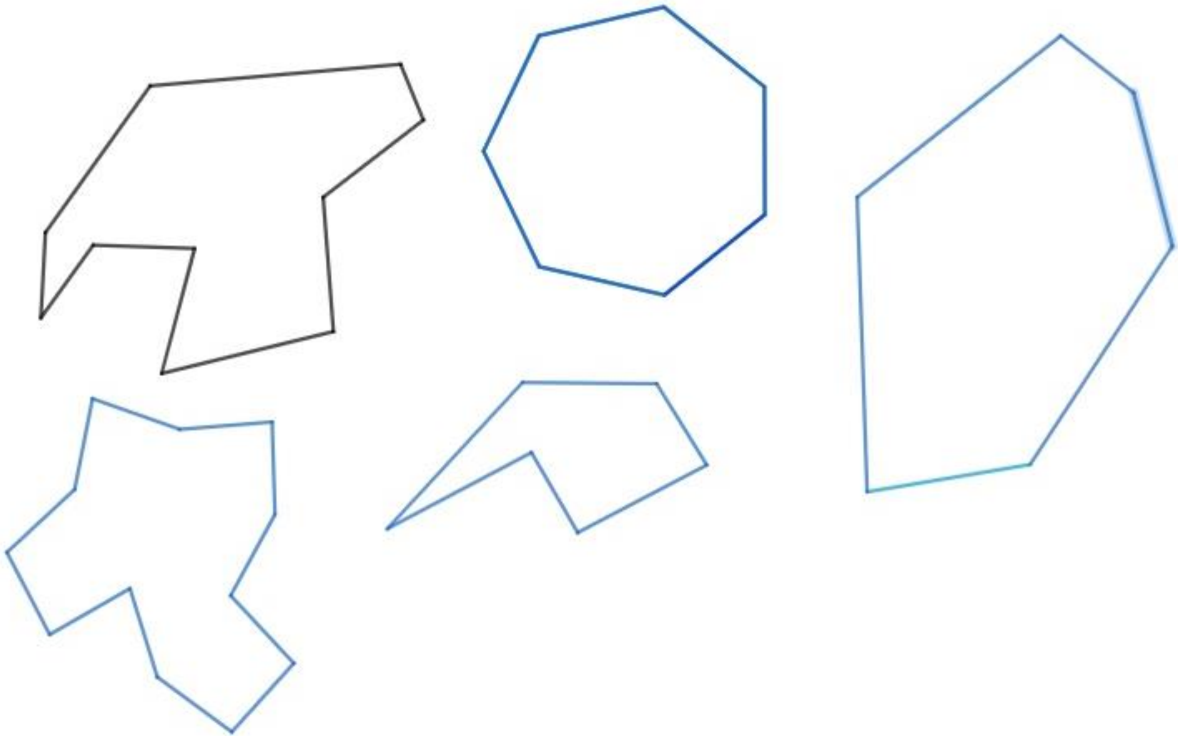
IV)

<u>Actividad 2:</u>

a. Escribir el nombre de cada uno de los siguientes polígonos según la cantidad de lados.

b. Clasificarlos en cóncavos/convexos, regulares/irregulares.

c. Marcar en cada polígono regular convexo sus partes.



Actividad 3:

Uno de los ángulos de un trapecio isósceles mide 72° ¿Puede ser que alguno de los otros ángulos mida 100°? ¿Por qué?

Actividad 4:

Gastón piensa que dos ángulos consecutivos de un paralelogramo suman 180° ¿Cómo harías para demostrarlo?

Actividad 5:

Un trapecio tiene un par de lados opuestos congruentes y un ángulo de 70°. ¿Qué clase de trapecio es? ¿Cuánto miden los otros tres ángulos?

Actividad 6:

Sólo una de las chicas dice algo correcto. ¿Quién es? ¿Cómo lo sabes?

- Noelia: "Dibujé un romboide con dos diagonales de 5,5cm"

- Luna: "Yo tracé un rombo. Uno de sus ángulos mide 42° y, otro, el doble"

- Tati: "Uno de los ángulos del paralelogramo que dibujé mide 76° y, otro, su suplemento"

Actividad 7:

Indica si cada afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explica por qué.

a. Un cuadrilátero con cuatro lados congruentes siempre es un cuadrado.

b. En cualquier rombo, solo una diagonal coincide con la bisectriz de los ángulos cuyos vértices une.

c. Se puede construir un paralelogramo que tenga sólo un ángulo recto.

d. Existen cuadriláteros con los cuatro ángulos agudos.

e. Un trapecio que tiene un ángulo de 90° será siempre un trapecio rectángulo.

f. En el trapecio isósceles las diagonales son congruentes siempre.

Actividad 8:

Averiguar quién tiene razón y explicar cómo lo descubriste.

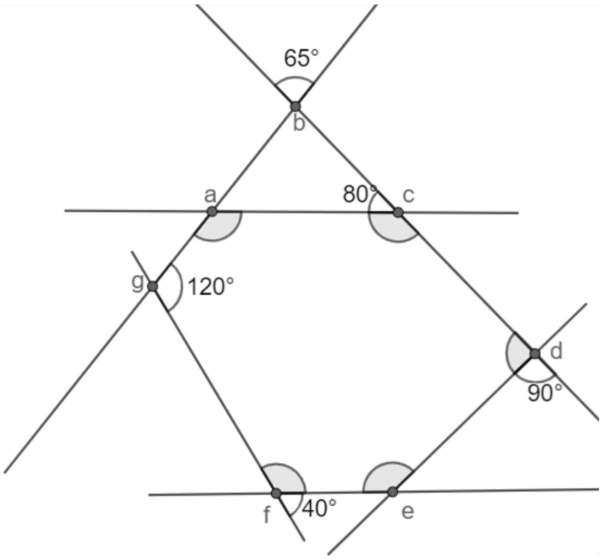
María: "En el trapecio rectángulo que dibujé me quedaron tres lados congruentes"

Pedro: "Las diagonales de mi paralelogramo miden lo mismo que las de mi romboide"

Ana: "Siempre que un cuadrilátero tenga diagonales perpendiculares va a ser un cuadrado"

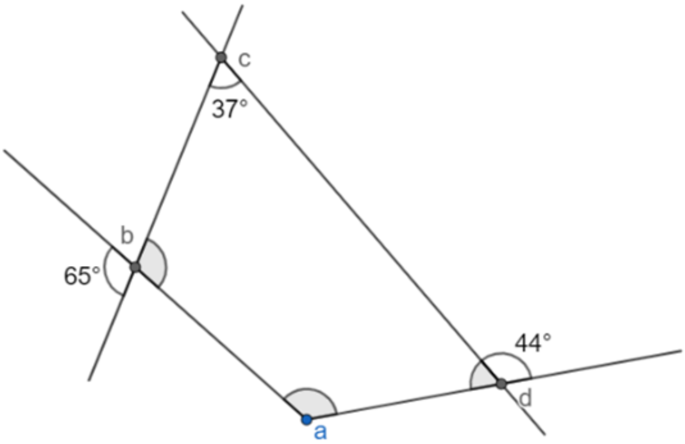
Actividad 9:

En cada una de las figuras explicar con palabras cómo calcular la amplitud de los ángulos coloreados. Expresar la respuesta final de la amplitud de cada uno de los ángulos. Utilizar la notación adecuada.

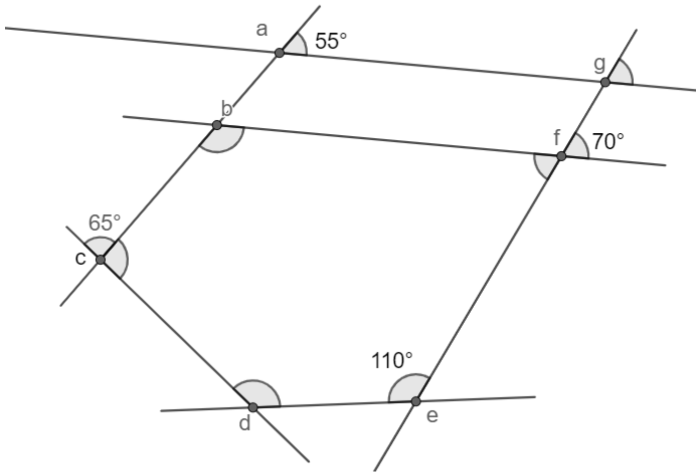


a)

b)

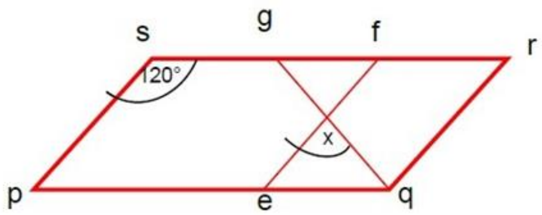


c) En esta figura $\overleftrightarrow{ag}\ //\ \overleftrightarrow{bf}$



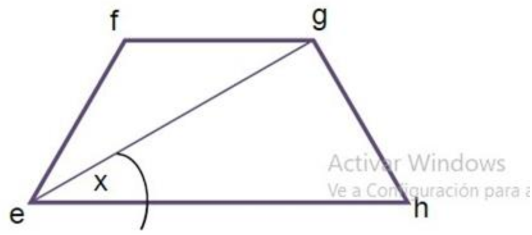
<u>Actividad 10:</u>

Calcular la amplitud de los ángulos señalados en los siguientes cuadriláteros. Justificar en palabras los pasos realizados en cada uno utilizando la estructura: condiciones iniciales, desarrollo y conclusión.



a) Siendo $pqrs$ un paralelogramo, $\overrightarrow{qg}$ es la bisectriz del ángulo $\hat{q}$ y $\overline{ef} \parallel \overline{qr}$, calcular el valor del ángulo x

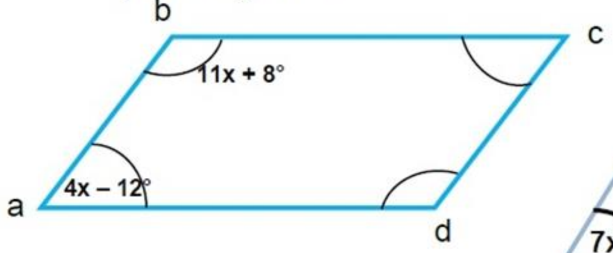
b) En el trapecio isósceles $efgh$, $\overline{ef} \cong \overline{fg} \cong \overline{gh}$ y $\hat{f} = 130°$. Calcular x



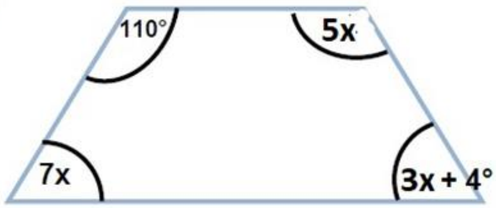
<u>Actividad 11:</u>

A partir de las propiedades de cuadriláteros vistas, plantear ecuaciones que permitan determinar el valor de, la o las incógnitas realizando una justificación del planteo. Luego calcular la amplitud de cada ángulo de los cuadriláteros.

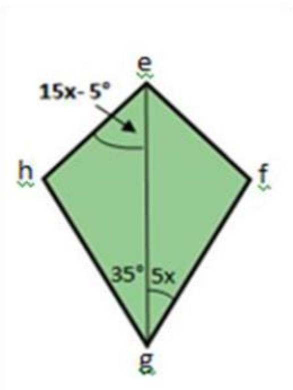
a) Sea $abcd$ un paralelogramo



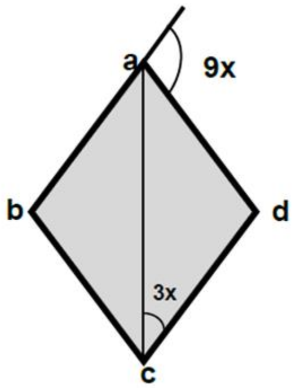
c) Dado el siguiente trapecio isósceles



b) Dado efgh romboide

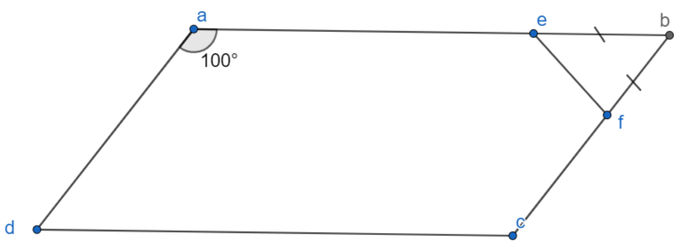


d) Sea $abcd$ un rombo



<u>Actividad 12:</u>

Averiguar la medida de $\widehat{aef}$ en este paralelogramo, sabiendo que $\overline{eb} \equiv \overline{bf}$. Explicar con palabras cómo lo resolviste.



<u>Actividad 13:</u>

Encontrar el número de lados de un polígono en que la suma de los ángulos interiores sea:

a. 1800° b. 2160° c. 3600°

Actividad 14:

En cada uno de los siguientes casos, encontrar el polígono regular que cumpla las condiciones. Especificar con qué fórmula o procedimiento fue calculado.

a. Cuyo ángulo interior vale 60°

b. Cuyo ángulo central vale 30°

c. Cuya suma de ángulos interiores es de 1620°

d. Cuyo ángulo central vale 36°

e. Cuya suma de ángulos interiores es 540°

f. Cuyo ángulo interior vale 108°

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación del Trabajo Final de Prácticas de Metodología y Práctica de la Enseñanza, damos Fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por el Tribunal.

www.famaf.unc.edu.ar
Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria
CP: X5000HUA, Córdoba, Argentina
Tel: +54 351 4334051 (rotativas)
Fax: +54 351 4334054

UNC
Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF

FAMAF
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación