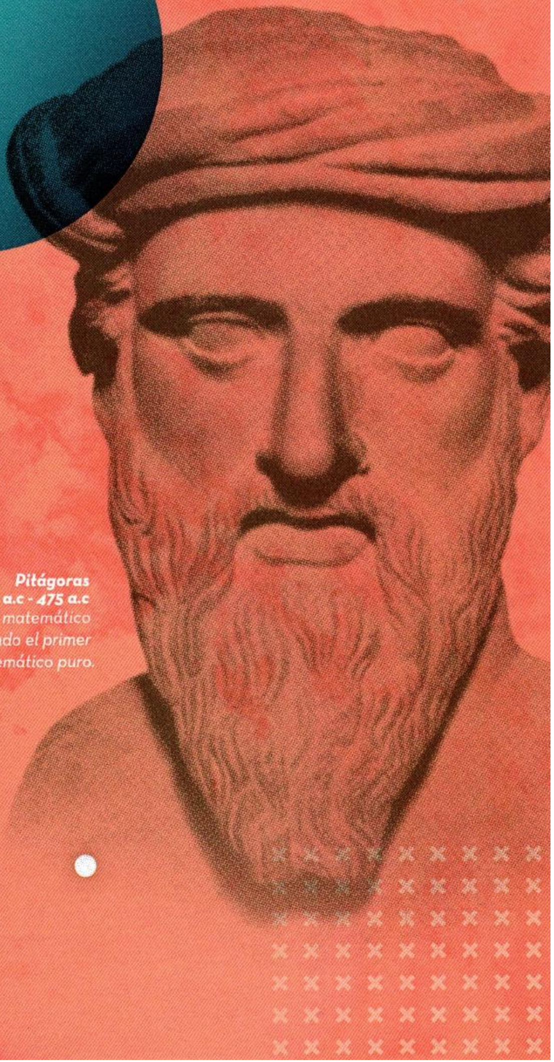
Universidad Nacional de Córdoba

TRABAJO FINAL DE PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA

Profesorado en Matemática



Pitágoras
569 a.c - 475 a.c
Filósofo y matemático griego considerado el primer matemático puro.

UNC Universidad Nacional de Córdoba

FAMAF
FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Proceso de modelización matemática aplicado al estudio de la función exponencial

Trabajo Final de Prácticas Profesionales Docentes

Manuela Lois

María Julieta Diaz

Supervisión de práctica profesional e informe final: Prof. Marianela Asinari

Equipo responsable de MyPE: Prof. Marianela Asinari, Prof. Araceli Coirini Carreras, Mg. María Mina, Lic. Silvina Smith

Carrera: Profesorado en Matemática

Fecha: 21-11-2019

Clasificación

97 Mathematical Education

97D Education and instruction in mathematics

Palabras Claves

Función exponencial, proceso de modelización matemática, formulación de problemas, *GeoGebra.*

Resumen

El presente trabajo está enmarcado en la asignatura Metodología y Práctica de la Enseñanza, correspondiente a la carrera de Profesorado en Matemática de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF). El mismo narra la planificación, desarrollo y análisis de las prácticas profesionales docentes llevadas a cabo en dos secciones de un 5° año de Educación Secundaria de un colegio de la ciudad de Córdoba. El tema desarrollado fue Función Exponencial, y para abordar el mismo se implementó un Proceso de Modelización Matemática.

Abstract

This work is part of the Methodology and Practice of Teaching course, corresponding to the career of Professor in Mathematics at the Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF). It narrates the planning, development and analysis of professional teaching practices carried out in two sections of a 5th year of a Secondary School in the city of Cordoba. The Mathematical Topic was Exponential Function and, in order to address it, a Mathematical Modeling Process was implemented.

Índice

1. Introducción 3

1.1. La institución 3

1.1.1 Características generales de la institución 3

1.1.2 Características generales de las aulas 3

1.1.3. Hábitos de trabajo en la institución 5

1.2 Organización general del curso 8

1.3 Las clases 9

1.4. Observación de jornada completa 15

2. Diseño de la práctica e implementación en el aula 17

2.1 Programa Anual de Matemática en 5° año 18

2.2 Contenidos previos y posteriores 20

2.3 Variables de la planificación de la enseñanza 21

2.3.1 Metas, objetivos o expectativas de logro 21

2.3.2 Selección, organización y secuenciación de los contenidos 22

2.3.4 Tareas y actividades 24

2.3.5 Selección de materiales y recursos 26

2.3.6 Participación de los alumnos 27

2.3.7 Organización del escenario 28

2.3.8 Evaluación de los aprendizajes 29

2.4 Estructura de las prácticas 30

2.4.1 Proceso de Modelización Matemática 34

2.4.1.1 Presentación 35

2.4.1.2 Investigación y planteamiento del problema 42

2.4.1.3 Recolección de datos 45

2.4.1.4 Construcción del modelo matemático y resolución del problema 50

2.4.1.5 Redacción del informe 53

2.4.1.6 Cierre 55

2.4.2 Estudio de la Función Exponencial 58

2.4.3 Evaluaciones 69

3. Elección y análisis de una problemática 77

3.1 Elección de una problemática 77

3.2 Análisis de la problemática 80

3.3 Conclusión del análisis 97

4. Reflexiones finales 100

5. Referencias 102

6. Anexos 104

6.1 Anexo A: Instrumento de evaluación utilizado por la docente titular 104

6.2 Anexo B: Criterios de evaluación del informe del PMM 105

6.3 Anexo C: Instrumentos de evaluación 107

6.4 Anexo D: Criterios de evaluación de la evaluación sumativa 111

6.5 Anexo E: Actividades propuestas que no se muestran en el informe 115

6.5.1: Problema del fósil 115

6.5.2: Actividades de la Guía 116

6.5.3: Actividades de la clase de repaso 117

1. Introducción

1.1. La institución

1.1.1 Características generales de la institución

La institución en la cual realizamos las observaciones y las prácticas profesionales docentes está ubicada en el barrio Centro, al sudeste del área central de la Ciudad de Córdoba. Está emplazada en un predio donado por el Gobierno de Córdoba en el año 1957 de, aproximadamente, 18.000 metros cuadrados, de los cuales 12.000 son cubiertos. Cuenta con 4 pabellones con aulas, un natatorio cubierto y climatizado, un salón de usos múltiples, un gabinete de Ciencias Naturales, Física y Tecnología, una biblioteca, una cantina, un comedor, una librería y una capilla. También cuenta con un campo de deportes ubicado en las afueras de la Ciudad de Córdoba.

Es una escuela pública de gestión privada, confesional y mixta que ofrece los tres niveles educativos: inicial, primaria y secundaria. De los cuatro pabellones con aulas que mencionamos anteriormente, dos están asignados al nivel secundario, uno al nivel primario y uno al nivel inicial. Cada aula está designada a un único curso pues todos los niveles asisten a clase en el mismo turno: turno mañana. El nivel secundario cuenta con cuatro divisiones por año, de las cuales solo dos están subvencionadas por el Estado. La institución ofrece para los estudiantes del ciclo orientado la especialidad en Humanidades con orientación a Ciencias Sociales. Si bien la escuela cuenta con una dirección general, cada nivel cuenta, a su vez, con un director y dos vicedirectores a cargo.

Como mencionamos anteriormente, es una escuela confesional y está dirigida por una asociación religiosa que agrupa a colegios en distintos países del mundo. En Argentina, las escuelas de esta comunidad se encuentran en Córdoba, Buenos Aires y Tucumán. A fin de honrar al fundador de esta asociación, tanto en los pasillos como en todos los otros espacios de la escuela, se puede observar su imagen y fragmentos de discursos dados por él.

1.1.2 Características generales de las aulas

Las aulas son amplias y bien iluminadas. Tienen cuatro ventanas que dan al exterior por las cuales entra luz durante casi toda la mañana. Las aulas de los cursos observados están una al lado de la otra y tienen una ventana interna desde la cual se puede ver el otro curso. Sin embargo, esta ventana está fija y las características edilicias hacen que no se escuchen los ruidos ni del aula de al lado ni del exterior. Esto es sumamente importante pues la escuela se encuentra sobre una avenida principal de la Ciudad de Córdoba, por la cual pasan colectivos y muchos autos y las aulas dan, en parte, a esa avenida, sin embargo, no se escucha ningún ruido del exterior. En el interior del aula los bancos son individuales, sin embargo están dispuestos de forma tal que los estudiantes se encuentran agrupados de a dos. Por el tamaño del aula, los pasillos son amplios y permiten la circulación de la docente o de los alumnos sin inconvenientes (ver Figura N°1). Incluso, entre la última fila de bancos y la pared queda un gran espacio por el cual la docente transita habitualmente (ver Figura N°1).

Figura N°1: Aula perteneciente a 5°C.

Todas las aulas cuentan con ventiladores y equipos de aire acondicionado frío-calor. Así mismo todas tienen una pizarra de tiza y una pizarra digital que está conectada a un proyector y a una computadora que se encuentra en el escritorio del docente. La pizarra digital puede usarse de manera interactiva por medio de un lápiz óptico. Bajo las pizarras se encuentra una tarima de aproximadamente 30 cm de altura a la cual una persona debe subirse si va a escribir en alguna de las pizarras. Sobre esta tarima también se encuentra el escritorio del docente. Todas las aulas poseen acceso a internet que es fundamental para el buen funcionamiento de la institución pues todos los docentes trabajan con aula virtual.

1.1.3. Hábitos de trabajo en la institución

Como mencionamos anteriormente, todos los niveles educativos concurren a la escuela en el turno mañana, particularmente el nivel secundario comienza las clases a las 7:30. En ese momento, las puertas de entrada del colegio se encuentran abiertas y es posible entrar sin mayores inconvenientes. Sin embargo, luego de que toca el timbre que indica el inicio de la jornada, todas las puertas se cierran y para pasar del pasillo de ingreso al sector principal de la escuela es necesario hacerlo con una llave magnética, la cual poseen docentes y no-docentes de la institución. La persona que no cuente con dicha llave debe, en primer lugar, presentarse en la mesa de entradas de la institución y anunciar cual es el motivo de visita y, una vez autorizada a ingresar, un encargado habilita la entrada al sector principal.

Durante el período observado no hubo formación en la primera hora a causa del frío. Sin embargo, cuando el clima acompaña, los estudiantes se dirigen al patio a formar e izar la bandera. Dicha formación se realiza un día específico de la semana, lo cual hace que los alumnos pierdan parte de las horas de una misma materia cada semana. Si bien las clases comienzan a las 7:30 hay un timbre anterior, a las 7:25 con el fin de que todos los miembros se preparen para el comienzo de clases: los estudiantes ingresan a sus respectivas aulas junto al preceptor y los docentes comienzan a dirigirse a las mismas. De este modo, a las 7:30, los profesores ingresan a las aulas en las cuales cada alumno se encuentra ubicado en su respectivo banco. Cuando se produce el ingreso a las aulas de cualquier autoridad, los estudiantes se ponen de pie para saludar.

Todos los días, algún docente debe encargarse de que los estudiantes hagan el *rezo del día*. En esta instancia, además de rezar, se les da espacio a los estudiantes para que hagan una oración de petición a Dios. Dentro de la planta docente se encuentran docentes laicos y religiosos. Quienes están a cargo del rezo del día, son los docentes religiosos. Durante el período de observación nunca se realizó el rezo durante la clase de Matemática.

Como requisito de ingreso a primer año del secundario, los estudiantes deben comprar una tablet para que puedan utilizarla en las clases hasta sexto año. La institución cuenta con un aula virtual muy utilizada por los docentes para subir material y guías de estudio. Como las aulas cuentan con buena conectividad de Wi-Fi y los estudiantes tienen tablets o, en su defecto, celulares smartphones, el uso de fotocopias es poco frecuente. Es por ello que el uso del celular está permitido durante las clases. Sin embargo, en el reglamento escolar se explicita que "*El uso del celular en hora de clase, sin la autorización explícita de la autoridad a cargo, es siempre una falta disciplinaria"* (Reglamento Interno del Secundario). Por lo tanto, cuando un docente detecta que un estudiante está usando el celular para fines no académicos, el procedimiento habitual del docente es pedirle el celular al estudiante y dejarlo en el banco del docente hasta que finaliza la hora. Durante la hora de clase, los estudiantes tienen permitido salir al baño.

En la institución hay un preceptor cada dos cursos que se encarga, entre otras cosas, del seguimiento académico y disciplinar de los estudiantes. Por lo tanto, este seguimiento puede hacerse bastante individualizado por la cantidad de alumnos que están a su cargo. Las preceptorías se encuentran muy cerca de las puertas de las aulas e incluso desde las de quinto año se pueden ver ambos cursos sin salir de la preceptoría. Es el preceptor el encargado de cerrar con llave las aulas en el momento del recreo. De esta manera, todos los estudiantes deben salir hacia las zonas comunes: patios, cantina, biblioteca, etc. Los preceptores recorren dichas zonas supervisando lo que sucede con el estudiantado durante los recreos. Si bien los estudiantes de todos los niveles asisten a la escuela en el mismo horario, los recreos no se superponen. Más aún, cada nivel tiene un patio asignado y los alumnos no tienen permitido ir a otro patio que no sea el propio. Los estudiantes de nivel secundario tienen tres recreos: los dos primeros de quince minutos y el tercero de 25 minutos. El tercer recreo se destina, por muchos estudiantes, a almorzar. Los estudiantes pueden llevar comida de sus casas o almorzar en la cantina o el comedor. La cantina tiene una política de *recreos saludables*; si bien los estudiantes pueden comprar todo lo típico de una cantina escolar, en el lugar en donde los atienden hay frutas, yogurt, granola y otras colaciones de ese estilo (ver Figura N°2). En el comedor se ofrece un menú diario que los padres o alumnos pueden consultar en la página web de la escuela.

Figura N°2: Carteles que se observan en una de las paredes de la cantina del colegio.

Otra cosa que también puede consultarse en la página web de la escuela es el Acuerdo Escolar de Convivencia (AEC) y el Reglamento Interno del Secundario (RIS). En estos documentos se establecen las normas de convivencia y las penalidades que tendrá cada posible falta de disciplina. Las faltas se catalogan, según el RIS, en: leves, moderadas, graves y gravísimas. Siendo estas últimas, según lo establecido por el AEC, motivo de expulsión de la institución. En el AEC se establece la conformación del Consejo Escolar de Convivencia en el cual participan directivos, padres, alumnos, docentes, preceptores y no-docentes que se reúnen dos veces al año para revisar el AEC. También pueden reunirse extraordinariamente para resolver algunos casos de faltas de disciplina que pueden considerarse gravísimos. Durante el período de observaciones no notamos faltas de disciplina importantes. Los únicos inconvenientes sucedieron cuando un alumno estaba usando el celular con fines extra-escolares o cuando a otro alumno le habían escondido la cartuchera. En el primer caso, la docente lo resolvió con el mismo estudiante dentro del aula y en el segundo caso, llamó al preceptor quien pidió a los estudiantes implicados que salieran del aula y resolvió el conflicto en preceptoría. Es importante señalar que ninguno de los hechos supuso una alteración en el normal desarrollo de la clase.

El libro de temas está a cargo el preceptor, quien es el encargado de llevarlo al aula al comienzo del día escolar y guardarlo cuando finaliza. Allí debe dejar asentado al comienzo de cada clase, qué alumnos se encuentran ausentes. Esta hoja es particularmente importante cuando se hacen los simulacros de incendio. En estos momentos, el docente a cargo debe conducir a sus alumnos hasta el punto de encuentro asignado y debe llevar consigo el libro de temas para poder tomar lista y asegurarse de que todos los alumnos que se encontraban en el aula al comenzar su clase, están en el punto de encuentro. En las hojas asignadas a cada asignatura, el docente a cargo debe consignar el número de clase, unidad o eje temático, según su planificación, tema de la clase del día y actividad que realizan los estudiantes. Hay un espacio destinado a dejar asentado si la actividad realizada no se hizo en el aula. Por lo general, los docentes completan el libro de temas en momentos en que le dan actividades a los estudiantes para que trabajen solos.

Como mencionamos anteriormente, los alumnos acostumbran a ponerse de pie cuando el profesor entra al aula para saludarlo y es poco frecuente que no todos los estudiantes presentes se encuentren dentro de la clase. Más aún, a medida que los docentes se dirigen al aula, si encuentran algún estudiante del curso en el camino, es habitual que los llamen para que ingresen. En este sentido, cabe destacar que es natural para los estudiantes ser llamados por su nombre por los docentes, directivos y preceptores.

1.2 Organización general del curso

Como mencionamos previamente, los cursos en los cuales realizamos las observaciones fueron dos quinto años del ciclo orientado, en particular las secciones “B” y “C”. En la siguiente tabla podemos observar la cantidad de estudiantes para cada una de las divisiones observadas.

Año	Cantidad total de estudiantes	Cantidad de mujeres	Cantidad de varones
5°B	31	8	23
5°C	25	13	12

Tabla N°1: Cantidad de alumnos por curso y distribución por género.

Si bien ambos cursos son mixtos, cabe destacar que en 5°B es notoria la diferencia entre la cantidad de estudiantes varones y estudiantes mujeres. En cambio, en 5°C las cantidades son similares.

Como dijimos en secciones anteriores, en ambos cursos los estudiantes se ubican en bancos individuales, en seis filas agrupadas de a dos, como se muestra en los siguientes esquemas.

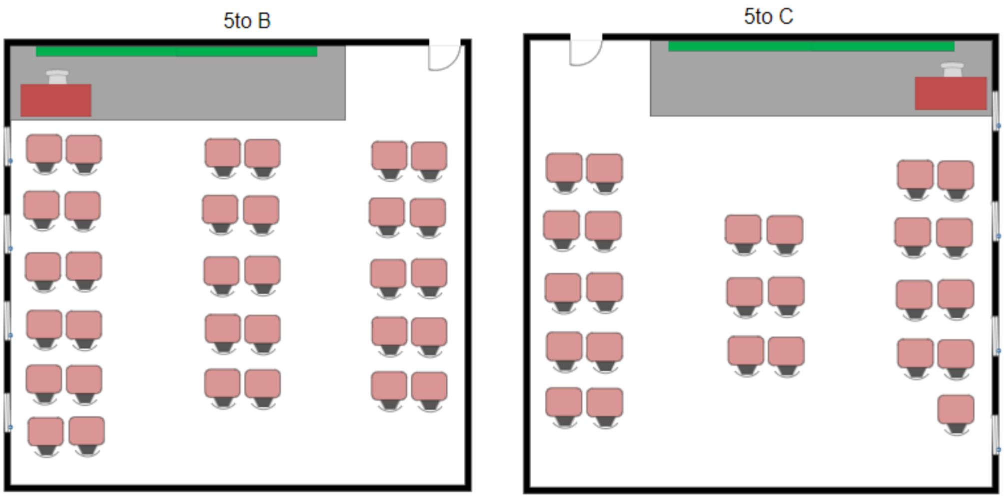


Figura N°3: Esquemas de las aulas de 5° año “B” y “C”, respectivamente.

Luego de varias clases observadas pudimos notar que los alumnos de 5°C mantienen la misma ubicación dentro del aula, mientras que los estudiantes de 5°B suelen cambiarse de lugar, entre una clase y otra. Lo común en ambas divisiones es que en aquellos momentos en los que deben trabajar en grupos o realizar actividades, es normal que algunos alumnos corran sus bancos para ubicarse cerca de algún compañero.

Puesto que hemos planificado que en nuestras prácticas los alumnos desarrollen un proyecto de modelización matemática, es importante destacar que las aulas de ambos cursos son amplias y los bancos no son fijos, lo cual posibilita que los estudiantes trabajen en grupos sin inconvenientes.

Si bien en ninguno de los cursos hay alumnos integrados, entre los estudiantes de 5°C hay un alumno que, por problemas de salud, asistió a la escuela un mes y, luego de recuperarse, se reincorporó una vez culminado el receso de invierno. En relación a esto, la escuela decidió que los docentes deberán hacer un acompañamiento particular con el objetivo de que no pierda el año lectivo.

1.3 Las clases

Las observaciones que realizamos comenzaron el 15 de mayo de 2019 y finalizaron el 27 de mayo del mismo año, observándose un total de cuatro clases de Matemática y una jornada completa para cada una de las secciones. Ambos cursos, como todos los del ciclo orientado con especialidad en Ciencias sociales y Humanidades en la provincia de Córdoba, destinan cuatro horas cátedras semanales a la asignatura Matemática. En la siguiente tabla se explicitan los horarios de la materia Matemática para los cursos en cuestión.

Hora\Día	**Lunes**	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**
7:30 a 8:10				5°B	
8:10 a 8:50				5°B	
8:50 a 9:25					
9:25 a 9:40	Recreo				
9:40 a 10:20			5°C	5°C	
10:20 a 11:00			5°C	5°C	
11:00 a 11:15	Recreo				
11:15 a 11:55					
11:55 a 12:35					
12:35 a 13:00	Almuerzo				
13:00 a 13:40	5°B				
13:40 a 14:20	5°B				
14:20 a 15:00					

Tabla N°2: Distribución de las horas de Matemática.

Como modo de sistematizar la información generamos la Tabla N°3, en la cual se consigna, para cada una de las clases de matemática observadas, los temas desarrollados, los materiales utilizados y las actividades que se realizaron. Es importante destacar que la docente trabaja prácticamente las mismas actividades en los dos cursos.

Clase	Curso	Contenido	Recursos	Actividades desarrolladas
1	5°C (20 minutos)	Función valor absoluto y raíz cuadrada.	Cuaderno y lápiz.	Gráfico y análisis de las funciones $f(x) = \|x\|$ y $f(x) = \sqrt{x}$.
	5°B (80 minutos)	Función valor absoluto y raíz cuadrada.	Pizarra digital, *GeoGebra*, pizarra de tiza, cuaderno y lápiz.	Gráfico y análisis de las funciones $f(x) = \|x\|$ y $f(x) = \sqrt{x}$. Análisis del comportamiento de las funciones $f(x) = \|x - a\| + b$ y $f(x) = \sqrt{(x-a)} + b$ al modificar sus parámetros.
2	5°C (60 minutos)	Función valor absoluto y raíz cuadrada.	Pizarra digital, *GeoGebra*, pizarra de tiza, cuaderno, lápiz y aula virtual.	Análisis del comportamiento de las funciones $f(x) = \|x - a\| + b$ y $f(x) = \sqrt{(x-a)} + b$ al modificar sus parámetros.
	5°B (80 minutos)	Función valor absoluto y raíz cuadrada. Funciones definidas por partes	Pizarra digital, *GeoGebra*, pizarra de tiza, cuaderno, lápiz y aula virtual.	Corrección de actividades de la clase anterior. Gráfico y análisis de funciones definidas por partes.
3	5°C (55 minutos)	Funciones definidas por partes	Pizarra digital, pizarra de tiza, cuaderno, lápiz y aula virtual.	Gráfico y análisis de funciones definidas por partes. Corrección de actividades en el pizarrón.
	5°B (80 minutos)	Funciones definidas por partes	Pizarra digital, pizarra de tiza, cuaderno y	Corrección de actividades de la clase anterior.

			lápiz.	
4	5°C (20 minutos)	Funciones	Cuaderno y lápiz.	Docente despejó dudas individuales para la prueba de la próxima clase.
	5°B (80 minutos)	Funciones	Cuaderno, lápiz y pizarra de tiza.	Evaluación individual.

Tabla N°3: Horarios, temas, recursos empleados y actividades realizadas en cada una de las clases de Matemática observadas.

Como podemos notar en la tabla, en ninguna de las clases observadas de 5°C se dieron los 80 minutos completos. En la primera clase estaba programado un simulacro de incendio y un “abrazo al colegio” por el aniversario del mismo, en la segunda clase los alumnos tenían misa, en la tercera la docente debía tomar un examen a un estudiante y, en la cuarta clase se realizó un acto en conmemoración a los 80 años de la institución.

Durante el período de observación notamos que, en ambos cursos, las clases de Matemática comenzaron aproximadamente cinco minutos más tarde del horario de toque de timbre. Esto se debe a que, como mencionamos anteriormente, la docente no ingresaba al aula hasta que todos los estudiantes se encontraban en el interior de la misma. Esto, sumado a que los alumnos tardaban en acomodarse en sus respectivos bancos, generaba una pequeña demora en el comienzo de las clases.

La mayor parte de las clases presenciadas, iniciaron con la docente titular dictando alguna consigna a trabajar o pidiéndoles a los estudiantes que ingresen al aula virtual de la asignatura y busquen la actividad desde allí. En ninguna de las clases observadas hubo un momento de introducción en el cual la docente recuperara lo trabajado anteriormente o comentara sobre lo que se iba a trabajar. Si bien todas las clases se centraron en graficar y analizar funciones, no todas las funciones eran del mismo tipo: hubo funciones de valor absoluto, lineales, etc. Dado que las observaciones se realizaron al final del primer trimestre del ciclo lectivo, la mayoría de las clases fueron repaso de los contenidos vistos para la evaluación prevista para el 27 de mayo en 5°B y para el 29 de mayo en 5°C.

La mayor parte de la clase se destinaba al desarrollo de las actividades que planteaba la docente titular y a la corrección de las mismas en la pizarra. Los estudiantes trabajaban en grupos, individualmente o de a dos, según las preferencias de cada uno. Durante ese momento, la docente completaba el libro de temas o pasaba por los bancos respondiendo algunas preguntas de los alumnos.

Con respecto al tipo de tareas que se propusieron en las clases, podemos clasificarlas según Skovsmose (2000), en el ambiente de aprendizaje tipo 1; es decir, en un contexto de matemática pura y en el paradigma del ejercicio, pues las actividades se refieren exclusivamente a las matemáticas, sin ninguna vinculación con posibles realidades. Además son tareas propuestas por un agente externo a los estudiantes, con una y solo una respuesta correcta.

Según Ponte (2005), podemos clasificarlas como tareas cerradas y de desafío más bien reducido para los estudiantes, por lo tanto, son ejercicios. Mientras observamos las clases, consideramos que hubo una única actividad que podría clasificarse como de exploración. En la misma, los estudiantes debían graficar una función en *GeoGebra*, haciendo uso de deslizadores, y conjeturar acerca de lo que sucedía cuando se modificaban los parámetros de dicha función.

En relación a la corrección de las actividades observamos que en algunas ocasiones los alumnos pasaban voluntariamente a escribir el resultado de la tarea en alguna de las pizarras mientras que, otras veces, la profesora decidía quién debía pasar. Sin embargo, a ninguno de los estudiantes que pasó al frente se lo notaba nervioso o con ansiedad por estar en esa situación, lo cual indica que para ellos es natural mostrar la resolución de los ejercicios en la pizarra. Cada alumno elegía si usar la pizarra digital o el pizarrón; no notamos ninguna preferencia en particular.

Durante las puestas en común presenciadas, un estudiante pasaba al frente y resolvía el ejercicio en el pizarrón sin dar demasiadas explicaciones acerca del procedimiento de resolución del mismo, y sus compañeros corroboraban sus respuestas. En caso de que algún alumno tuviera alguna duda, la docente titular tomaba la palabra y le explicaba, lo mismo sucedía cuando había un error en la respuesta dada por el alumno que estaba al frente del aula.

Con respecto al cierre de la clase, podemos decir que este momento no se logra identificar ya que la mayoría de las veces tocaba el timbre de cambio de hora o recreo, antes de que se pueda realizar algún tipo de cierre. Sin embargo, es importante destacar que en aquellas circunstancias en las que algún estudiante se encontraba dando las respuestas del ejercicio en la pizarra, la profesora les pedía a los alumnos que esperen a que su compañero/a termine de exponer para luego poder irse al recreo y los estudiantes tenían buena respuesta a ese pedido: permanecían en sus bancos en silencio. Una vez que el estudiante finalizaba, la docente les permitía retirarse del curso, sin ninguna instancia de reflexión sobre lo que sucedió durante la clase o sobre los temas que se desarrollaron.

En general, si alguna actividad quedaba sin resolver en el horario de clase, la docente les comunicaba oralmente a los alumnos que la misma quedaba de tarea. En la clase siguiente se realizaba la corrección de la misma y, en ciertas ocasiones, la profesora controlaba que los alumnos la hayan realizado. En estos casos llamaba a cada uno de los estudiantes para que se acerquen a su escritorio y así poder corroborar y registrar si realizaron o no los deberes.

Las interrupciones internas que se dieron en las clases se deben, principalmente, a los pedidos de los alumnos para ir al baño. En relación a esto observamos que los docentes no tenían inconvenientes en dejarlos salir y que, además, los alumnos no se demoraban en regresar. Las interrupciones externas que se dieron durante el tiempo que se realizaron las observaciones se deben, principalmente, por la llegada tarde de algún estudiante, el ingreso del preceptor al aula o de algún estudiante externo que busca a la delegada del curso. Una de las interrupciones externas más significativa sucedió cuando sonó la alarma para realizar un simulacro de incendio en toda la institución y, posterior a ello, se realizó un pequeño acto institucional en el cual se dijeron algunas palabras en conmemoración al aniversario del colegio. Luego de esto hubo un abrazo a la escuela. Esta interrupción, si bien estaba avisada, resultó en que la clase culminara de manera abrupta pues cuando finalizó el abrazo a la escuela, a los estudiantes se les dio, desde dirección, recreo. Por lo tanto, no regresaron a tener Matemática al aula.

Con respecto al comportamiento de los estudiantes podemos decir que los alumnos de 5° año B son más "revoltosos". Tienden a hablar más, se distraen fácilmente y un estudiante puede llegar a cambiarse de banco más de una vez durante una misma clase. En cambio, los alumnos de 5°C son más callados, e incluso la docente de Matemática nos advirtió que la forma en la que se sientan responde a las notas que tienen: se sientan juntos quienes tienen notas similares por decisión de los mismos estudiantes. Esta característica nos hizo pensar que, probablemente, sea más sencillo trabajar con 5°C que con 5°B. Sin embargo, docentes que dictan clases en ambos cursos perciben que los estudiantes de 5°B son más participativos y que, incluso cuando parece que no están prestando atención por estar conversando, responden a las consignas sin ningún inconveniente. Según las palabras de una de las docentes, "*a los alumnos de 5°C hay que estar permanentemente motivándolos ya que si no, no participan en clases*".

En términos generales podemos decir que los estudiantes en ambos cursos tienen buen comportamiento, buena respuesta a los docentes y cumplen con todas las consignas que los mismos les plantean, tanto disciplinares como actitudinales.

El último día de observaciones coincidió con la evaluación de Matemática en 5°B. Antes de comenzar la evaluación, la docente les informó a los estudiantes que debían colocar sus teléfonos celulares en un banco dispuesto delante de todo con tal fin. La evaluación debía ser resuelta en lápiz y papel y no estaba permitido el uso de las tablets. La docente nos permitió acceder al instrumento de evaluación (ver Anexo A), el cual está compuesto por dos actividades. La primera de ellas consiste en la representación gráfica y análisis de una función definida por partes y la segunda actividad está conformada por ocho preguntas de múltiple opción. Ambas actividades reflejan lo trabajado en clase, sin embargo no se permitió el uso de *GeoGebra* y este fue uno de los recursos más utilizados durante las clases. En la evaluación no se explicitaron los criterios de evaluación ni los puntajes asignados a cada una de las actividades.

1.4. Observación de jornada completa

En la siguiente sección haremos referencia a la observación de la jornada completa de cada una de las divisiones. En la tabla que se muestra a continuación se detallan los horarios de las asignaturas de los días lunes, para 5° año B y C, respectivamente.

Hora	**5°B**	**5°C**
7:30 a 8:10	Psicología	Física
8:10 a 8:50	Psicología	Física
8:50 a 9:25	Sociología	Física
9:25 a 9:40	Recreo	
9:40 a 10:20	Física	Lengua y Literatura
10:20 a 11:00	Física	Lengua y Literatura
11:00 a 11:15	Recreo	

11:15 a 11:55	Lengua y Literatura	Sociología
11:55 a 12:35	Lengua y Literatura	Sociología
12:35 a 13:00	Almuerzo	
13:00 a 13:40	Matemática	Formación Cristiana y Gestión de las Organizaciones Sociales
13:40 a 14:20	Matemática	Formación Cristiana y Gestión de las Organizaciones Sociales
14:20 a 15:00	-	Formación Cristiana

Tabla N°4: Horario de clases del día que se realizó la observación de jornada completa.

Con respecto a las actitudes de los alumnos notamos que los mismos prácticamente se comportan de igual manera en todas las asignaturas que pudimos observar: trabajan en grupo, participan de forma activa, charlan, y se evidencian relaciones de respeto y confianza con todos los profesores. Un punto a destacar es que únicamente en Psicología se les dio tarea a los estudiantes para que hagan en sus casas.

Las clases de Lengua y Literatura fueron desarrolladas por el preceptor de uno de los cursos. Puesto que la intención de la docente a cargo de la materia era que, en las clases siguientes, los estudiantes realicen la lectura de una adaptación de la novela “Don Quijote de la Mancha”, en la cual uno de los análisis literarios posibles es *la locura*, decidió invitar al preceptor, Licenciado en Psicología e investigador de la historia de la Psicología, para que exponga a la clase acerca de la “evolución del concepto de locura”. Los alumnos se mostraron muy interesados en todo momento, esto se hizo evidente no sólo por haberse mantenido en silencio mientras el preceptor hablaba, sino también porque, una vez finalizada la exposición, los estudiantes realizaron muchas preguntas vinculadas a la temática.

Otro punto a destacar es que en la clase de Sociología y en la de Gestión de las Organizaciones Sociales / Formación Cristiana de 5°C, los estudiantes estaban llevando a cabo proyectos en grupos. Lo interesante es que se pudo evidenciar que los alumnos se agruparon de forma completamente distinta para un trabajo que para otro, eso nos llevó a pensar que la relación entre los estudiantes es buena y no tienen problema de trabajar con cualquiera de sus compañeros. Al preguntarles a los docentes respecto a la forma en la que se formaron los grupos, en ambos casos nos dijeron que los habían decidido los alumnos, sin ninguna influencia de ellos. En Sociología los estudiantes estaban llevando a cabo un trabajo sobre género que tenía como punto final la propuesta de posibles acciones que se puedan desarrollar en la escuela tendientes a la igualdad de género. Los estudiantes se mostraban muy motivados y compenetrados con la tarea propuesta. Es interesante destacar que fue ese docente quien hizo el rezo del día con los estudiantes y luego del rezo comentó que habían sido publicadas las cifras oficiales de femicidios del año 2019, comentó la cifra y luego los estudiantes pidieron que la petición a Dios estuviera dirigida, entre otras cosas, a todas las víctimas de violencia de género. Esto deja en evidencia que la escuela ofrece a los estudiantes la reflexión y el trabajo con temas actuales que son de gran importancia para la formación de los estudiantes.

En contraposición, en la clase de Sociología de 5° B estaba programada una evaluación formal, escrita e individual para el día de la observación de jornada completa. Al ingresar al aula, el docente inmediatamente les informó a los estudiantes que debían cambiar la disposición de los bancos. Los bancos individuales que estaban dispuestos de a dos debían separarse. Además les dijo que debíann guardar todas sus pertenencias en la mochila; en el banco sólo podía quedar la lapicera y el líquido corrector. Las hojas necesarias para resolver la evaluación fueron provistas por el docente.

Por último, en relación a los recursos utilizados, sólo pudimos evidenciar el uso de la pantalla digital a modo de pizarra en Física y Matemática, es decir, se utilizaba la pizarra de forma interactiva. En el resto de las materias observadas la pantalla se utilizó únicamente para proyectar, ya sean archivos del aula virtual o diapositivas del propio docente.

2. Diseño de la práctica e implementación en el aula

En la presente sección haremos referencia, por un lado, al diseño de nuestras prácticas profesionales docentes y, por otro lado, a la descripción y análisis de las mismas. Para dar cuenta de esto, la sección se encuentra dividida en cuatro subsecciones, en las cuales describimos el programa anual de Matemática, los contenidos previos y posteriores a la práctica, las variables que tuvimos en cuenta en el momento de planificar y la estructura de las clases llevadas a cabo.

2.1 Programa Anual de Matemática en 5° año

El programa anual elaborado por la docente titular es el mismo para ambas secciones y está conformado por cinco partes:

- Fundamentación
- Objetivos
- Contenidos
- Criterios de evaluación
- Bibliografía/Webgrafía

El tema que se nos propuso desarrollar durante nuestras prácticas fue "Función Exponencial", el mismo se ubica dentro de la Unidad N°4 del programa, como podemos observar en la siguiente tabla:

Número y título de la unidad	Contenidos conceptuales
Unidad N°1: Conjunto de los números complejos	Conjunto de los números complejos. Números imaginarios. Números complejos. Representación gráfica de los números complejos. Operaciones con números complejos: suma, resta, multiplicación y división. Inverso y conjugado de un número complejo. Raíces n-ésimas de la unidad. Módulo de un número complejo. Resolución de problemas y ecuaciones.
Unidad N°2: Funciones	Funciones. Concepto de función. Clasificación función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Dominio e imagen de una función. Análisis de funciones. Ceros o raíces de funciones. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Conjuntos de ceros, de positividad y negatividad. Ordenada al origen. Función afín. Función afín a trozos. Función potencia entera negativa con n = -1, -2. Función raíz cuadrada. Traslación. Funciones valor absoluto de la función afín. Límites. Concepto de límite. Límites laterales. Límite de una función en un punto. Límites en el infinito. Continuidad.

Unidad N°3: Funciones cuadráticas	Función cuadrática. Representación gráfica. Análisis de la Función cuadrática. Desplazamiento vertical y horizontal de la gráfica. Dominio e imagen. Máximos, mínimos, ceros, crecimiento y decrecimiento. Intervalos de positividad y negatividad. Formas de escribir una función cuadrática: forma factorizada, forma canónica y forma polinómica. Comportamiento de parámetros. Resolución de ecuaciones cuadráticas. Análisis del discriminante. Propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática. Resolución de ecuaciones. Resolución de sistemas mixtos de ecuaciones. Utilización de programas graficadores para facilitar el análisis de funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas y del conjunto solución.
Unidad N°4: Funciones exponenciales y logarítmicas	Función exponencial. Análisis de la función exponencial. Desplazamiento de la gráfica. Dominio e imagen. Crecimiento y decrecimiento. Conjuntos de positividad y negatividad. Asíntota horizontal. Logaritmo: concepto. Propiedades de los logaritmos. Cambio de base. Logaritmo natural y decimal. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Función logarítmica. Análisis de la función logarítmica. Desplazamiento de la gráfica. Dominio e imagen. Crecimiento y decrecimiento. Conjuntos de positividad y negatividad. Asíntota vertical. Relación entre la función exponencial y logarítmica. Utilización de programas graficadores para facilitar el análisis de funciones logarítmicas y exponenciales.
Unidad N°5: Funciones racionales	Función de proporcionalidad inversa. Representación gráfica. Dominio e imagen. Conjunto de positividad y negatividad. Asíntotas horizontales y verticales. Función homográfica. Representación gráfica. Análisis de funciones homográficas. Dominio e imagen. Conjunto de ceros, de positividad y negatividad. Ordenada al origen.

	Asíntotas horizontales y verticales. Función inversa. Representación gráfica. Ecuaciones racionales. Utilización de programas graficadores para facilitar el análisis de las funciones racionales.

Tabla N°5: Unidades y contenidos del programa anual de Matemática en 5° año.

Dado que la docente titular de ambas secciones nos indicó que desarrollemos únicamente el tema Función Exponencial y no Función Logarítmica, los contenidos que finalmente debíamos trabajar son los que se muestran a continuación:

- Función Exponencial.
- Análisis de la función exponencial.
- Desplazamiento de la gráfica.
- Dominio e imagen.
- Crecimiento y decrecimiento.
- Conjuntos de positividad y negatividad.
- Asíntota horizontal.
- Utilización de programas graficadores para facilitar el análisis de funciones exponenciales.

2.2 Contenidos previos y posteriores

Los contenidos trabajados previamente son aquellos que abarcan las unidades N°1, N°2 y N°3 del programa anual. Consideramos que hubo contenidos de dichas unidades que fueron condicionantes para el desarrollo de nuestras prácticas ya que era necesario que los estudiantes estén familiarizados con conceptos tales como: función, dominio e imagen de una función, intervalos de crecimiento y decrecimiento, ceros de una función, ordenada al origen, intervalos de positividad y de negatividad, límites en el infinito y parámetros de una función. Si bien hubo ciertos contenidos que tuvieron que ser explicados nuevamente para algunos estudiantes, nos fue de mucha ayuda que gran parte de los alumnos los manejara con naturalidad.

Una vez finalizadas nuestras prácticas, la docente titular del curso continuó desarrollando los contenidos de la Unidad N°4 que involucran la función logarítmica.

2.3 Variables de la planificación de la enseñanza

Teniendo en cuenta el texto de Gvirtz y Palamidessi (2008), a continuación describiremos las variables que tuvimos en cuenta para el diseño de la planificación de la enseñanza: las metas, objetivos o expectativas de logro; la selección, secuenciación y organización de los contenidos; las tareas y actividades; la selección de materiales y recursos; la participación de los alumnos; la organización del escenario y la evaluación de los aprendizajes.

2.3.1 Metas, objetivos o expectativas de logro

Para orientar la planificación y en función de los aprendizajes y contenidos que esperábamos que los estudiantes logren alcanzar, se fijaron objetivos generales y específicos, los cuales listamos a continuación.

Objetivos generales:

- Contribuir en la construcción del sentido de los conceptos matemáticos para los alumnos.
- Desarrollar la motivación y el interés por la matemática en los estudiantes.
- Presentar situaciones en las que los alumnos encuentren relación entre el mundo real y el matemático.
- Fomentar el trabajo colaborativo.
- Motivar en los estudiantes la valoración de sus propias producciones matemáticas.
- Alentar los espacios de reflexión colectiva, favoreciendo la construcción del conocimiento matemático como construcción social.
- Llevar a cabo actividades en las cuales se priorice la exploración y la escritura de conjeturas.
- Utilizar recursos tecnológicos que permitan un acercamiento experimental al contenido a trabajar en clase y que faciliten la comprensión de los conceptos.
- Lograr la interacción y participación de todos los estudiantes en las clases.

Objetivos específicos:

Que los estudiantes logren:

- Construir el concepto de función exponencial a través de la modelización matemática.
- Construir un modelo matemático que pueda dar respuesta a un problema.
- Obtener conclusiones de un problema, basándose en los resultados matemáticos obtenidos.
- Descubrir las relaciones entre las diferentes formas de representación de la función exponencial.
- Utilizar las funciones exponenciales para resolver situaciones problemáticas de semi-realidad, eligiendo el modelo más adecuado.
- Analizar el comportamiento de las funciones exponenciales, interpretando sus parámetros a través de la exploración con *GeoGebra*.

2.3.2 Selección, organización y secuenciación de los contenidos

Si bien no tuvimos injerencia en la selección de los temas a tratar durante las prácticas; ya que la docente que tiene a cargo el dictado de la asignatura nos indicó lo que debíamos desarrollar, consideramos interesante que los estudiantes vivencien un Proceso de Modelización Matemática (PMM) como modo de introducción a la función exponencial. Plantear una situación en la cual los estudiantes puedan trabajar con un fenómeno de la realidad y, a la vez, poner en juego sus conocimientos matemáticos, es una oportunidad para la construcción del sentido de la matemática. Además, creemos que la propuesta posibilita el acceso a un hacer matemático para todos. En relación a esto, Charlot (1986) afirma:

> A esta idea de una matemática dada, bajo una u otra forma, contrapongo la idea de una matemática construida [...]. Los conceptos matemáticos no son un bien cultural trasmitido hereditariamente como un don o socialmente como un capital, sino el resultado de un trabajo del pensamiento [..]. Democratizar la enseñanza de la matemática supone en principio que se rompa con una concepción elitista de un mundo abstracto que existiría por sí mismo y que sólo sería accesible a algunos, y que se piense en cambio la actividad matemática como un trabajo cuyo dominio sea accesible a todos mediante el respeto de ciertas reglas. (p. 1).

Siguiendo a Schoenfeld (1992) y a Sadovsky (2005), pensar en la forma en que se concibe la matemática tiene un correlato directo con el modo en el que se abordarán los conocimientos, esto es, la forma en la que se concibe el conocimiento matemático influye en la pedagogía. Nuestra propuesta de organización y secuenciación de los contenidos, entonces, se basa en la concepción de la matemática propuesta por Charlot (1986). Bajo esta mirada, Schoenfeld (1992) plantea a la matemática como la "ciencia de los patterns" y, en este sentido, la modelización matemática cobra central importancia. En este proceso, el docente debe considerar a sus alumnos sujetos autónomos y productores de conocimiento. Es tarea de él guiar al estudiante en la reconstrucción de un conocimiento que tal vez no sepa que tiene.

Desde esta perspectiva, diseñamos una secuencia de situaciones de enseñanza que propician la conceptualización de la función exponencial desde una dinámica de estudio en la cual es el alumno el que tiene un papel central en el aula. El eje vector de nuestra secuenciación es la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes a través de la modelización matemática y la resolución de problemas. En relación a esto, Sureda, Otero y Donvito (2017) afirman:

> Así, el abordaje de la función exponencial a partir de un problema [...] no sólo hace posible el estudio con sentido, de la función en la escuela; sino que además proporciona un contexto, que al poder ser abordado desde diferentes sistemas de representación y de variadas maneras; ofrece una buena cantidad de situaciones para su conceptualización. (p. 15).

Finalmente, los contenidos que se planificaron trabajar estaban organizados y secuenciados de la siguiente forma:

- Modelo Matemático.
- Proceso de Modelización Matemática.
- Definición de función exponencial completa.
- Problemas de aplicación de la función exponencial.
- Gráfico de la función exponencial.
- Análisis de la función exponencial (dominio, imagen, cortes con los ejes coordenados, asíntota vertical, crecimiento, decrecimiento, conjunto de positividad, conjunto de negatividad y límites).
- Desplazamiento de la función exponencial al modificar sus parámetros.

2.3.4 Tareas y actividades

A modo de organización de las tareas y actividades que se planificaron para cada una de las clases, presentamos la Tabla N°6:

Clase	5° B	5° C
1	Lunes 22/07	Miércoles 24/07
	Presentación acerca de la flor de la abundancia. Teatralización para comprender el funcionamiento del fenómeno. Construcción de la definición de modelo matemático. Presentación del Esquema para realizar un PMM basado en Davis y Hersh (1988).	
2	Jueves 25/07	Jueves 25/07
	Inicio del PMM. Investigación sobre el tema propuesto. Planteo de posibles problemas vinculados al tema.	
3	Lunes 29/07	Miércoles 31/07
	Recolección y sistematización de los datos necesarios para resolver el problema.	
4	Jueves 1/08	Jueves 1/08
	Construcción del modelo matemático subyacente y resolución del problema.	
5	Lunes 5/08	Miércoles 7/08
	Presentación a modo de cierre del PMM. Escritura del informe del PMM	
6	Jueves 8/08	Jueves 8/08
	Presentación de la definición de función exponencial completa. Resolución de problemas de aplicación de la función exponencial.	
	Lunes 12/08	Miércoles 21/08

7	Resolución de problemas de aplicación de la función exponencial.	Retomar lo visto anteriormente. Resolución de problemas de aplicación de la función exponencial.
8	Lunes 26/08	Miércoles 28/08
	Retomar lo visto anteriormente. Actividades de análisis de funciones exponenciales.	Actividades de análisis de funciones exponenciales.
9	Jueves 29/08	Jueves 29/08
	Actividades de estudio de los parámetros de la función exponencial.	
10	Lunes 2/09	Miércoles 4/09
	Trabajo Práctico Evaluativo	

Tabla N°6: Tareas y actividades que planificamos.

Es importante aclarar que los estudiantes de ambas secciones tenían programado un viaje educativo a la Ciudad de Buenos Aires entre el 13 y el 20 de agosto, punto que determinó la forma en que se organizaron las tareas. Decidimos que el PMM debía culminar antes del viaje ya que consideramos que sería muy complicado para los alumnos retomar el proceso habiendo retornado. Por lo tanto nuestras prácticas estuvieron diseñadas en dos bloques: el primero de ellos sería el PMM y, el segundo, el estudio de la función exponencial (definición, propiedades, análisis, gráfico, etc.).

Para la primera parte de las prácticas, la de modelización matemática, propusimos el tema con el cual trabajar, luego los estudiantes debieron plantearse problemáticas, hacer la recolección de datos y la construcción del modelo subyacente. El tema que seleccionamos fue *“la flor de la abundancia”*, la elección del mismo se debe a que, por un lado, es un tema de la actualidad que genera controversias entre quienes están a favor y quienes están en contra y es útil para que los alumnos puedan posicionarse a través de una argumentación basada en la matemática. Por otro lado, es un claro ejemplo de crecimiento exponencial y a partir de la comprensión de este fenómeno, los estudiantes pueden construir esta noción y el modelo que la representa: la función exponencial.

Para la segunda parte de las prácticas propusimos el estudio de problemas de semi-realidad en los cuales los alumnos debían encontrar el modelo matemático adecuado para dar respuesta a los problemas planteados. Además, para el estudio del análisis de funciones y de los parámetros que intervienen en la función exponencial planteamos utilizar el software *GeoGebra*, con actividades que permitieran a los estudiantes manipular, experimentar, explorar, comparar acciones y resultados, conjeturar, argumentar y validar. Asimismo, *GeoGebra* permite observar las dos representaciones de un mismo objeto, la gráfica y la analítica. En este sentido, Esteley, Marguet y Cristante (2012) afirman:

> [...] en relación a GeoGebra, podemos indicar que [...] Permite una permanente conexión entre los símbolos algebraicos y las construcciones geométricas; visualiza a la vez un punto en el plano cartesiano y sus coordenadas numéricas, una circunferencia y su ecuación, la gráfica de una función y su expresión analítica, etc. Es decir, GeoGebra permite la doble percepción de los objetos. (p. 3).

2.3.5 Selección de materiales y recursos

Siguiendo a Villarreal (2013),

> [...] la producción de conocimiento se ve condicionada por los medios utilizados. Tales medios definen las prácticas, los contenidos y las formas de conocer. Asumimos así que el sujeto epistémico es en realidad un colectivo constituido por seres humanos-con-medios. La noción de humanos-con-medios trae dos ideas centrales: por un lado, que la cognición no es una empresa individual, sino social (por eso humanos) y, por otro, que la cognición incluye herramientas, medios con los cuales se produce el conocimiento y este componente del sujeto epistémico no es auxiliar o suplementario, sino esencial. (p. 86).

De esta forma, la elección de las herramientas y recursos genera indefectiblemente una organización particular del pensamiento matemático, de la actividad del estudiante, del papel del docente, de la gestión de la clase, de los propios contenidos y su organización curricular.

Como mencionamos anteriormente, todas las aulas poseen, además del pizarrón de tiza tradicional, una pizarra digital y los estudiantes usan indistintamente uno u otro. A su vez, cuentan con un cañón conectado a una computadora de escritorio que se encuentra en el banco del docente y se puede elegir que proyecte lo que está sucediendo en esa computadora o que la imagen se “congele”. Todas las aulas poseen conexión Wi-Fi y, sumado a esto, los alumnos disponen de tablets y notebooks que deben llevar todos los días, aunque varios no lo hacen pero utilizan el celular en su lugar.

A partir de estas características singulares de las aulas, la estrecha relación que tienen los estudiantes con las tecnologías digitales y considerando al sujeto epistémico como humanos-con-medios, es que decidimos hacer uso de los recursos brindados por la institución. Más específicamente, como se mencionó anteriormente, diseñamos actividades para que los estudiantes utilicen sus computadoras/tablets/celulares con el objetivo de graficar funciones a través del software *GeoGebra* y poder analizarlas a partir de los gráficos que ellos mismos generan. Además, planificamos que los alumnos utilicen la pizarra digital y/o de tiza para mostrar sus soluciones y, de esta manera, poder socializar sus razonamientos con el resto de la clase; siendo ellos los protagonistas de su propio aprendizaje y el de sus compañeros. Esta idea va en consonancia con lo que expresa Trouche, citado en Rojano (2014):

> La experiencia de introducir la tecnología a la escuela ha dado pie a una multiplicidad de modelos de uso, los cuales en muchos casos se han acompasado con las innovaciones tecnológicas. Por ejemplo, el uso de calculadoras y computadoras personales en el salón de clases se ha complementado con el uso del pizarrón electrónico. De este modo, se puede combinar el trabajo individual o por equipos pequeños con el despliegue en pantalla grande de las producciones de los alumnos, creándose condiciones propicias para discusiones grupales, contrastación de soluciones, puestas en común, institucionalización del saber (Trouche, 2004), entre otras prácticas de construcción social del conocimiento. (p. 20).

Por otra parte, la escuela cuenta con aula virtual de la asignatura, la cual pretendíamos utilizar durante el PMM para la entrega y devolución de los avances de cada clase de los alumnos y, durante todo el período de prácticas, para subir las actividades de cada clase y las explicaciones que nos parezcan necesarias. Como los alumnos utilizan el aula virtual para muchas materias, tienen internalizado el ingreso diario al aula, de modo que también pensábamos utilizarlo para comunicar lo que sea necesario.

2.3.6 Participación de los alumnos

Como sostienen Girvtz y Palamidessi (2008), el docente debe desarrollar distintas estrategias para lograr atender a la heterogeneidad de intereses y capacidades que presentan los alumnos. Entendemos que el tiempo disponible, la cantidad de tareas que conlleva la docencia, y el número de alumnos y de cursos de los cuales se hace cargo un mismo docente, son diversos factores que afectan la posibilidad de poder hacer un seguimiento muy personalizado de cada alumno. Aún en nuestra situación, en la cual tuvimos un único curso y contamos con el acompañamiento del par pedagógico, resultó difícil poner en práctica estrategias individualizadas. No obstante sí habíamos planteado algunas acciones a seguir que creemos que pudieron ayudar en este sentido. En primer lugar, nos pareció importante prestar atención a la práctica habitual que tienen los estudiantes de explicarse entre ellos. No solo prestar atención sino potenciarla, pues de esa forma logramos que la centralidad del proceso aprendizaje-enseñanza esté en el estudiante. Este es uno de los motivos más fuertes de proponer clases en las cuales el tiempo destinado a la explicación del docente y del alumno esté invertido (con respecto a la tradición escolar). La intención fue que nuestro papel sea secundario (no por eso menos importante), es decir, planificamos tratar de ser guías o apoyo de los estudiantes para que sean ellos mismos quienes lleguen, en conjunto, a la construcción del conocimiento. A su vez, planificamos presentarles a los estudiantes, distintas actividades que les permitan poner en juego diferentes habilidades: modelización, actividades de exploración, problemas de semi-realidad, etc.

2.3.7 Organización del escenario

Si bien la institución cuenta con laboratorio de computación, éste es utilizado principalmente por los alumnos de la escuela primaria. Dado que los estudiantes del secundario disponen de computadoras, tablets o celulares propios, se planificó que las clases se dieran siempre en las aulas.

Los bancos que utilizan los estudiantes son individuales y están colocados en seis filas agrupados de a dos. Los lugares han sido asignados por ellos mismos a principio del ciclo lectivo pero puede llegar a haber posibles cambios impulsados por los docentes o los preceptores, según comportamiento o rendimiento académico. Sin embargo, en ninguno de los dos cursos fue necesario hacer ningún cambio. Más allá de esta característica, en 5° año B los lugares eran más flexibles. Si bien, en cada clase la gran mayoría permanecía en el primer lugar en el que se ubicó (que puede ya no ser el lugar asignado) durante la misma clase algunos estudiantes cambiaban de lugar e incluso movían solo la silla y se sentaban de a tres con otros compañeros. Este movimiento se veía como natural y no generaba ninguna interrupción de la clase. En 5° año C los lugares eran bastante más fijos; incluso, como dijimos anteriormente, el rendimiento académico es uno de los condicionantes del lugar que eligieron para sentarse. Como sostienen Gvirtz y Palamidessi (2008):

> Los agrupamientos pueden ser fijos y permanentes o flexibles y circunstanciales, dependientes del tipo de tarea que se realice. Podemos decir, a grandes rasgos, que los agrupamientos flexibles tienen como ventaja que permiten que los alumnos jueguen distintos roles, según su capacidad, su interés y que se acostumbren a funcionar con diferentes compañeros de trabajo. (p. 20).

En este sentido, cabe destacar dos cuestiones; por un lado, nos parecía importante permitirles a los estudiantes continuar con los cambios de banco que ellos desearan realizar, ya sea durante una clase como entre una clase y otra. Y por otro lado, en las jornadas en las que se les propondría realizar trabajos grupales, en los cuales no sería central la socialización de resultados, como por ejemplo durante el PMM, el agrupamiento de los bancos no sería el habitual sino que se organizarían en grupos de acuerdo a la cantidad de integrantes que tuviese cada uno.

Por último, otro de los factores que consideran Gvirtz y Palamidessi es el tiempo. Como se puede observar al principio del informe, en la Tabla N°1, en ambos cursos contábamos con cuatro horas cátedras semanales distribuidas en dos días, cada día con 80 minutos seguidos, sin cortes por recreos, lo que nos permitiría planificar actividades más largas. Sin embargo, entendíamos que a los estudiantes clases expositivas por parte del docente o clases en las cuales debiesen realizar muchos ejercicios similares podrían no convocarlos. Y aquí es, nuevamente, donde nos pareció importante generar actividades por las cuales pudiesen sentirse motivados y a partir de las cuales sean ellos mismos quienes construyesen los conocimientos.

2.3.8 Evaluación de los aprendizajes

Para comenzar con este apartado, nos parece interesante traer a colación lo que establece el Encuadre General del Diseño Curricular de la Provincia de Córdoba (2011-2020) respecto a las evaluaciones:

> [...] la evaluación no es una cuestión exclusivamente instrumental sino que incluye la perspectiva política y ética [...], la evaluación está llamada a ponerse al servicio de sus protagonistas, basarse en el consenso /acuerdo de criterios y sentidos, ser un ejercicio transparente, formar parte de un continuum; a no atomizarse, ser procesal e integradora, conservar siempre su esencia formativa,

> motivadora, orientadora, preocuparse por aplicar técnicas de triangulación – esto es, no basarse en una única mirada- asumir y exigir la responsabilidad de cada una de las partes involucradas, orientarse a la comprensión y al aprendizaje y no al examen, centrarse en la forma en que el adolescente/joven aprende, sin descuidar la calidad de lo que se enseña. (p.20).

Creemos que esta cita es (casi) un resumen de la idea de evaluación que teníamos la intención de proponer. Sin embargo, sólo se trata de la evaluación del docente hacia el alumno. Es importante también pensar el modo en que nos evaluaremos a nosotras mismas en nuestras prácticas, al contenido y a la forma de apropiarse del mismo por parte de los alumnos.

En primer lugar, como dijimos a lo largo del informe, es nuestra intención que los estudiantes sean los actores principales de sus procesos de aprendizaje-enseñanza. En este sentido, habíamos planteado que sean ellos quienes realicen preguntas, conjeturas que puedan ser validadas o no y luego confrontadas con las hipótesis de sus compañeros. Durante el PMM y luego, al darle el espacio del pizarrón a los alumnos y dedicar una parte importante del tiempo de la clase a estas instancias, se tendría la posibilidad de hacer un seguimiento continuo de los estudiantes.

Diseñamos dos instancias evaluativas de las cuales pretendíamos que surja una sola nota que podría ser usada por la docente del curso como una de las notas del trimestre. Habíamos planificado que la primera instancia sea un informe escrito realizado a partir del trabajo desarrollado en cada una de las etapas del PMM. Para evaluar esto tendríamos en cuenta, además de la confección del informe, el trabajo en clase de los estudiantes. La segunda instancia evaluativa que diseñamos sería un trabajo práctico escrito e individual el último día de nuestras prácticas, de carácter sumativo e integrador de todo lo visto una vez culminado el PMM.

2.4 Estructura de las prácticas

A continuación exponemos el cronograma implementado en cada uno de los cursos. La Tabla N°7 corresponde a 5°B y la Tabla N°8 a 5°C. En dichas tablas detallamos, para cada una de las clases, los contenidos trabajados, las actividades desarrolladas y los recursos y materiales utilizados.

Clase	Fecha	Contenidos trabajados	Actividades desarrolladas	Recursos y materiales utilizados
1	Lunes 22/07	Modelo matemático. Esquema de Davis y Hersh (1988) PMM.	Presentación de “la flor de la abundancia”. Simulación destinada a comprender su funcionamiento. Elaboración de una definición de “modelo matemático”.	Proyector, pizarra de tiza, tiza, lápiz, papel, billetes en fotocopia, celulares, computadoras y tablets.
2	Jueves 25/07	PMM: etapa de investigación y planteo de problemas.	Búsqueda de información y elección de problemas vinculados al tema.	Cartulina, lápiz, papel, proyector, celulares, computadoras y tablets.
3	Lunes 29/07	PMM: etapa de planteo de problemas y recolección de datos.	Se terminan de definir los problemas a resolver y se realiza la recolección y el registro de la información.	Flores realizadas con cartulina, papel, lápiz, proyector, celulares, computadoras y tablets.
4	Jueves 1/08	PMM: etapa de construcción del modelo matemático y de resolución del problema.	Construcción del modelo matemático subyacente y resolución del problema.	Proyector, papel, lápiz, celulares, computadoras y tablets.
5	Lunes 5/08	Definición de función exponencial.	Presentación a modo de cierre del PMM e introducción a la función exponencial. Desarrollo de la actividad sobre la población de bacterias. Actividad del fósil de tarea.	Proyector, fotocopias, papel, lápiz, tiza y pizarrón de tiza.
6	Jueves 8/08	Desplazamiento de la gráfica de una función exponencial al	Corrección de la actividad de tarea. Desarrollo de la actividad de parámetros.	Proyector, fotocopias, celulares, computadoras, tablets, software de

		modificar sus parámetros.[1]	Puesta en común de los primeros dos incisos.	*GeoGebra*, lápiz y papel.
7	Lunes 12/08	Desplazamiento de la gráfica. Análisis de la función exponencial.	Puesta en común de las actividades de tarea.	Proyector, software de GeoGebra, tiza, pizarra de tiza, lápiz y papel.
8	Lunes 26/08	Análisis y gráfico de una función exponencial.	Corrección y puesta en común de la guía de actividades.	Proyector, pizarra de tiza, tiza, papel, lápiz.
9	Jueves 29/08	Función exponencial: todos los temas estudiados.	Desarrollo y puesta en común de actividades de repaso.	Pizarra de tiza, tiza, pizarra digital, lápiz, papel y fotocopias.
10	Lunes 2/09	Función exponencial: todos los temas estudiados.	Evaluación escrita individual.	Fotocopias, calculadoras, lápiz y papel.

Tabla N°7: Cronograma implementado en 5°B.

Clase	**Fecha**	**Contenidos trabajados**	**Actividades desarrolladas**	**Recursos y materiales utilizados**
1	Miércoles 24/07	Modelo matemático. Esquema de Davis y Hersh (1988). PMM.	Presentación de “la flor de la abundancia”. Simulación destinada a comprender su funcionamiento. Elaboración de una definición de “modelo matemático”.	Proyector, pizarra de tiza, tiza, lápiz, papel, billetes en fotocopia, celulares computadoras y tablets.

[1] Cabe mencionar que en la planificación se iba a dar primero el análisis de las funciones exponenciales y luego el análisis de los parámetros. Sin embargo, como muestra esta tabla, al momento de implementar la planificación decidimos invertir el orden de estas actividades dado que nos pareció adecuado que el primer acercamiento de los estudiantes al gráfico de la función exponencial sea a través de una actividad exploratoria de parámetros en los cuales debieran conjeturar respecto al comportamiento de la función al variar los parámetros y validarla o no.

2	Jueves 25/07	PMM: etapa de investigación y planteo de problemas.	Búsqueda de información y elección de problemas vinculados al tema.	Cartulina, lápiz, papel, proyector, celulares, computadoras y tablets.
3	Miércoles 31/07	PMM: etapa de planteo de problemas y recolección de datos.	Se terminan de definir los problemas a resolver y se realiza la recolección y el registro de la información.	Flores realizadas con cartulina, papel, lápiz, proyector, celulares, computadoras y tablets.
4	Jueves 1/08	PMM: etapa de construcción del modelo matemático y de resolución del problema.	Construcción del modelo matemático subyacente y resolución del problema.	Proyector, papel, lápiz, celulares, computadoras y tablets.
5	Miércoles 7/08	Definición de función exponencial.	Presentación a modo de cierre del PMM e introducción a la función exponencial. Desarrollo de la actividad sobre la población de bacterias y la actividad del fósil.	Proyector, fotocopias, papel, lápiz, tiza y pizarrón de tiza.
6	Jueves 8/08	Desplazamiento de la gráfica de una función exponencial al modificar sus parámetros. Análisis de la función exponencial.	Desarrollo de la actividad de parámetros. Puesta en común de la misma. Se comienza a desarrollar la actividad sobre gráfico y análisis de funciones exponenciales.	Proyector, fotocopias, celulares, computadoras, tablets, software de *GeoGebra*, lápiz, papel, tiza y pizarrón de tiza.
7	Miércoles 21/08	Desplazamiento de la gráfica. Análisis de la función exponencial y gráfico de la misma.	Desarrollo de la guía de actividades que eran de tarea y puesta en común de las mismas.	Proyector, computadora, software de *GeoGebra*, tiza, pizarra de tiza, pizarra digital, lápiz y papel.
8	Miércoles	Análisis, gráfico y	Corrección y puesta en	Proyector, computadora,

	28/08	propiedades de una función exponencial.	común de la guía de actividades.	pizarra de tiza, tiza, pizarra digital, papel y lápiz.
9	Jueves 29/08	Función exponencial: todos los temas estudiados.	Desarrollo y puesta en común de actividades de repaso.	Pizarra de tiza, tiza, pizarra digital, lápiz, papel y fotocopias.
10	Miércoles 4/09	Función exponencial: todos los temas estudiados.	Evaluación escrita individual.	Fotocopias, calculadoras, lápiz y papel.

Tabla N°8: Cronograma implementado en 5°C.

En la siguiente subsección intentaremos dar cuenta de cómo sucedieron las clases efectivamente, cuáles fueron las potencialidades y qué instancias presentaron más dificultades. También señalaremos cuáles fueron las modificaciones que se hicieron en la planificación inicial y por qué. En primer lugar, presentaremos el PMM con las etapas transitadas por los estudiantes y, a continuación, haremos referencia a las siguientes cinco clases de nuestras prácticas, en las cuales se estudiaron las características y propiedades de la función exponencial y cómo modelar situaciones de semi-realidad. Por último se presentará la evaluación de los aprendizajes.

2.4.1 Proceso de Modelización Matemática

Para el PMM habíamos planificado utilizar cinco clases, en la primera se les introduciría en el tema elegido, en las siguientes tres clases se llevaría a cabo alguna de las etapas del proceso: investigación y planteamiento del problema, recolección de datos, construcción del modelo matemático; y, en la quinta clase se realizaría la escritura del informe y cierre del proceso. Como mencionamos anteriormente, el tema fue elegido por nosotras y era “la flor de la abundancia”[2].

Cada clase, antes de comenzar con la etapa de MM que correspondía, les comentábamos a los estudiantes qué actividad se iba a realizar y proyectábamos los objetivos de la clase junto con algunos puntos que debían tener en cuenta para la

[2] Para conocer más de este fenómeno se puede consultar el siguiente video de la Procuración General de la Nación: https://www.youtube.com/watch?v=pXY_pXWY4kQ.

realización de la carpeta grupal: cada grupo debía armar una carpeta en la cual iban anotando todo lo que hacían durante el PMM. Esta carpeta podía ser tanto en formato papel como en formato digital. En este caso, todos los grupos eligieron hacer la carpeta en forma digital y solo para una de las etapas, la de la recolección de datos, hubo tres grupos (de los 14) que decidieron entregar esa parte en papel. Al finalizar cada clase, los grupos debían hacer entrega de esa carpeta a través del aula virtual y nosotras las corregíamos y colocábamos comentarios a tener en cuenta. Las devoluciones se entregaban al principio de la clase siguiente y debían considerarse para poder continuar con la siguiente etapa del proceso.

En la planificación inicial, la quinta clase estaba destinada a que los estudiantes realizaran la escritura del informe final. De esta manera, también podíamos observar el proceso completo[3] de los estudiantes. Sin embargo, por motivos externos a nosotras, no se pudo llevar a cabo lo planificado y el PMM se realizó en cuatro clases. Por lo tanto, los estudiantes debieron hacer el informe fuera del horario de clases. Esto tuvo repercusiones en el modo de evaluar el proceso, cuestión que detallaremos más adelante.

En las próximas subsecciones presentaremos cómo se llevaron a cabo cada una de las etapas del PMM.

2.4.1.1 Presentación

El primer objetivo de esta clase fue introducir a los estudiantes en el PMM. Puesto que el tema que elegimos para que lleven a cabo este proceso era la flor de la abundancia como un caso particular de las economías piramidales, el segundo objetivo fue que los alumnos logren comprender el funcionamiento de este fenómeno.

La primera actividad efectuada fue una presentación realizada por nosotras, la cual comenzaba con la siguiente pregunta: *¿alguna vez escucharon hablar de la flor de la abundancia?* A esta pregunta, un alumno de 5° B respondió que era *"...una red de confianza en la cual se hace un aporte inicial y se obtienen beneficios (...) y a su vez alguien que entra puede traer gente de afuera"*. El resto de los estudiantes manifestó no conocer este fenómeno. Seguido a esto les comentamos a los estudiantes que nuestro primer

[3] Entendemos por PMM completo, aquel en el cual los estudiantes deban transitar por todas las etapas propuestas por Bassanezi (1994): elección de un tema, investigación del tema, formulación de un problema, experimentación, construcción de un modelo matemático (abstracción), solución analítica o numérica, validación y aplicación.

acercamiento a dicho fenómeno fue en el año 2016 cuando en Argentina el mismo se publicitaba prometiendo que, con una primera inversión de 2.000 pesos, era posible ganar 16.000 pesos.

Luego expusimos algunas noticias vinculadas a la temática como se muestran en la Figura N°4.

Figura N°4: Noticias presentadas a los estudiantes.

Por último, presentamos un esquema explicativo de la flor de la abundancia como el de la Figura N°5.

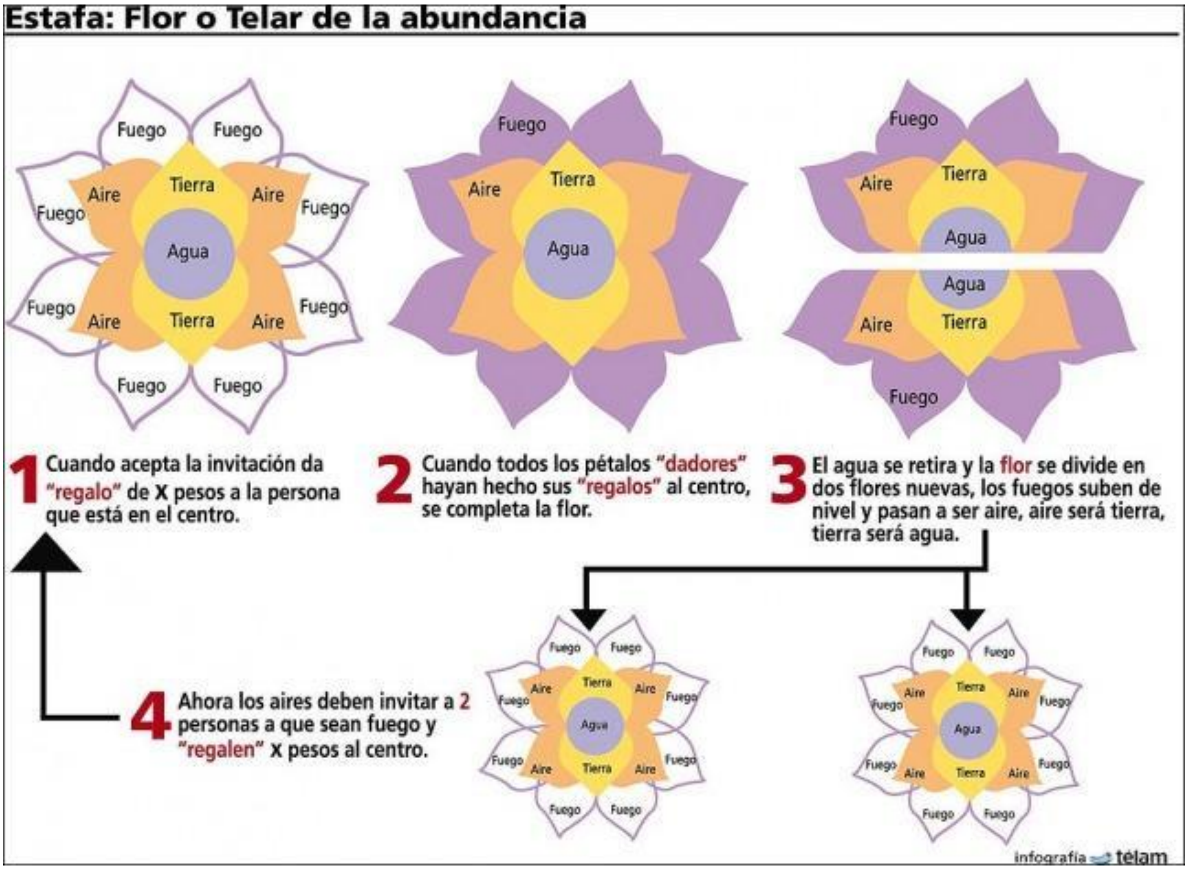


Figura N°5: Esquema explicativo de la flor de la abundancia.

Este esquema posibilitó que los estudiantes puedan ver de manera gráfica el funcionamiento del fenómeno. Sin embargo, consideramos que dicha presentación no sería suficiente; debíamos asegurarnos que antes de comenzar el PMM todos los alumnos tuvieran una correcta representación de algunos puntos claves del funcionamiento de la flor de la abundancia: cómo se estructura la flor, cuándo y cómo se divide, cuántas personas forman parte de cada flor, etc. Es por ello que realizamos una simulación con los estudiantes de cada curso. Elegimos a siete alumnos para representar los niveles: agua, tierra y aire de la primera flor y al resto del grupo clase les repartimos billetes impresos de 1.000 pesos. Cada uno de los que ocupaba el nivel aire, debía convencer a dos compañeros para que se uniera a la flor, dándole sus billetes a quien tenía el lugar de agua. Lo interesante de esta experiencia fue el compromiso que asumieron los estudiantes con la tarea: efectivamente quienes eran potenciales sujetos de entrar a la flor pedían ser convencidos, muchos incluso se resistían a darle sus billetes a quien estaba en el lugar de agua y generaba que quienes debían convencerlos debían hacer mayores esfuerzos. Al finalizar la simulación, todos los alumnos regresaron a sus bancos y pedimos que levantaran la mano primero quienes habían ganado plata y luego quienes habían perdido. De esta manera se evidenció que eran más quienes perdían que quienes ganaban. Además creemos que, dado que la mayoría de los estudiantes nunca había escuchado acerca de este fenómeno, el tener que simularlo generó, no solo que todos pudieran comprender efectivamente cómo funcionaba, sino también que todos tuvieran la misma representación del fenómeno. Esto se hizo evidente al leer los informes puesto que, en general, contenían una parte en la cual se explicaba el funcionamiento de la flor de la abundancia y esta parte estaba escrita por los mismos estudiantes, no hubo necesidad de buscar en internet cómo funcionaba, recurrieron a su propia experiencia para explicarlo.

Una vez finalizada la simulación, comenzamos a adentrarnos en la idea de modelo matemático y de PMM. Para lo cual, les pedimos a los estudiantes que realicen la siguiente actividad:

Actividad:

¿Qué es un “modelo matemático”?

Elaborar una definición a partir de información encontrada en internet.

Figura N°6: Consigna de la actividad que se les presentó a los estudiantes.

De esta manera buscamos no ser nosotras quienes daban *la* definición, sino que los mismos estudiantes puedan construirla a partir de la búsqueda consciente de información. Y la construcción no fue individual sino también colectiva dado que pasados entre cinco y diez minutos procedimos a realizar una puesta en común en la cual los estudiantes leyeron las definiciones que habían construido y, mientras tanto, nosotras íbamos escribiendo en el pizarrón de tiza las ideas principales de cada una de las definiciones. La intención de esta tarea era que los alumnos pudieran construir una definición que abarque gran parte de las ideas encontradas y que además surja de su propia investigación. En ambos cursos aparecieron palabras claves similares, sin embargo en ninguno de los cursos se desarrolló la actividad de la forma que pensábamos ya que al momento de implementarla, cada practicante tomó microdecisiones distintas. Por un lado, en 5°B dictamos la definición que escribimos en la planificación, que era la siguiente:

> Un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que procura traducir, de alguna forma, un fenómeno en cuestión o problema de situación real, se denomina "modelo matemático". [...] Un modelo puede ser formulado en términos familiares, utilizando expresiones numéricas o

fórmulas, diagramas, gráficos o representaciones geométricas, ecuaciones algebraicas, tablas, programas computacionales, etc. [...] un modelo matemático retrata, aunque en una visión simplificada, aspectos de la situación investigada. (Biembengut y Hein, 1999, p.120).

En 5°C construimos una definición a partir de las palabras clave propuestas por los estudiantes pero esta construcción se hizo, en mayor parte, por la practicante a cargo. En la Figura N°7 podemos observar las palabras clave y la definición construida en 5°C.

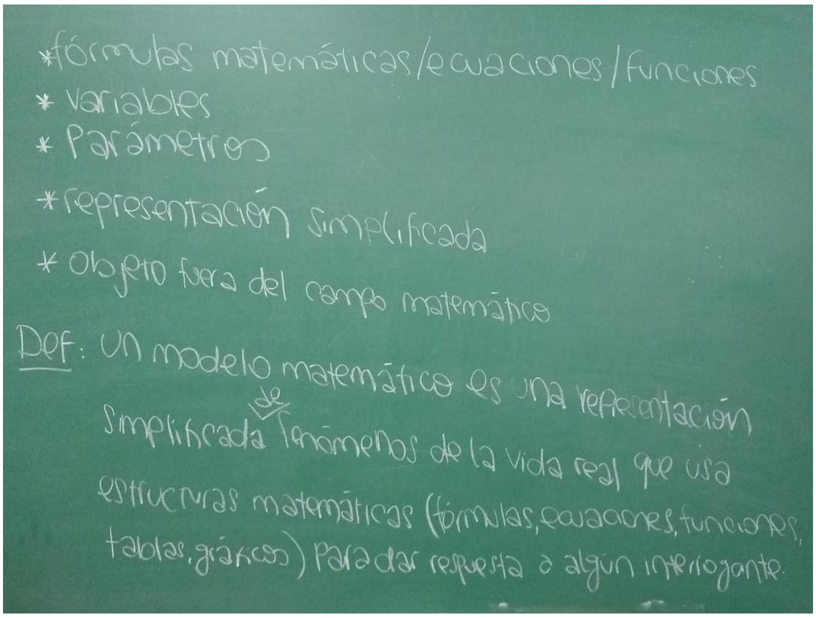


Figura N°7: Definición de modelo matemático construida con los estudiantes de 5°C.

Una vez finalizada esta actividad, les presentamos a los estudiantes el esquema de modelización matemática propuesto por los autores Davis y Hersh (1988) (ver Figura N°8). Dado que nuestro objetivo no era hacer de la modelización matemática un objeto de estudio en sí mismo, recurrimos a este esquema en el cual no se encuentran las distintas etapas de la modelización sino que se focaliza en uno de los aspectos más importantes de la misma: la existencia de dos mundos: un mundo real / físico y un mundo ideal / matemático; y la relación entre ellos.

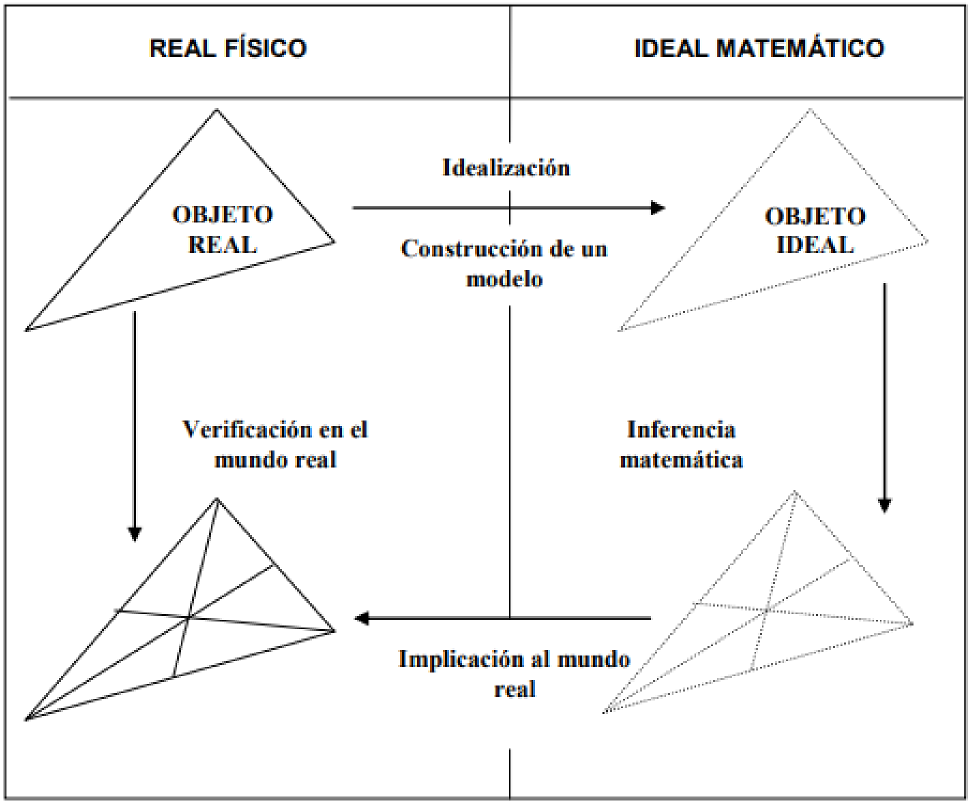


Figura N°8: Diagrama del PMM propuesto por los autores Davis y Hersh (1988).

Una de las modificaciones que se hicieron con respecto a lo que habíamos planificado fue la incorporación y explicación de un ejemplo sencillo de un modelo matemático. El motivo de tomar esta decisión fue que en 5°B observamos que los estudiantes no habían comprendido del todo cuáles eran estos dos mundos de los que hablábamos y, menos aún, cómo se llegaba de uno a otro. El ejemplo seleccionado se encuentra en el artículo de Blomhoj (2004) y es el que se muestra en la Figura N°9. Elegimos este en particular pues los estudiantes estaban viendo temas similares en la asignatura Física.

Ejemplo de modelo matemático:

Una familia de vacaciones maneja 1180 kilómetros en 12 horas. La velocidad promedio (98 km/h) para este viaje puede ser calculada dividiendo la distancia total por el tiempo transcurrido. Tal cálculo puede ser percibido como un modelo matemático.

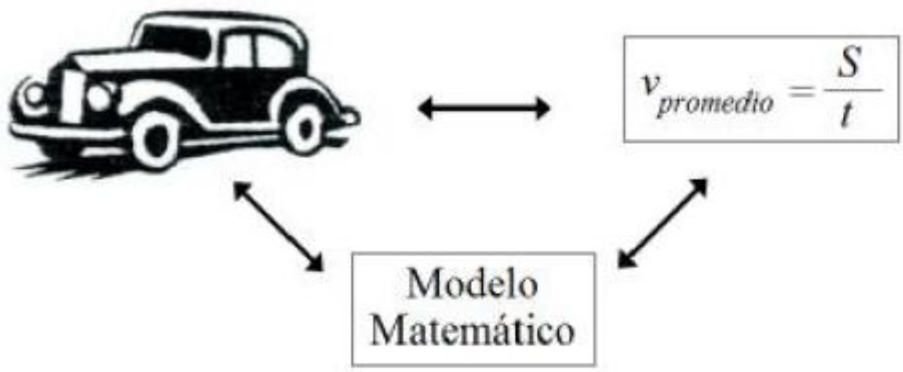


Figura N°9: Ejemplo de modelo matemático explicado.

Una vez finalizada la presentación, les comentamos a los estudiantes que debían formar grupos de cuatro integrantes para trabajar en su propio modelo matemático. En ambos cursos dimos especificaciones respecto a la cantidad de grupos y al número de personas por grupo y, sin embargo, en ambos cursos debimos flexibilizar nuestros pedidos. En las dos divisiones se formaron siete grupos pero lo que varió fue la cantidad de integrantes de cada uno. En la siguiente tabla podemos observar esta variabilidad:

	Cantidad de grupos de cinco	Cantidad de grupos de cuatro	Cantidad de grupos de tres	Cantidad de grupos de dos
5°B	3	4	-	-
5°C	-	5	1	1

Tabla N°9: Cantidad de grupos conformados en cada sección según la cantidad de integrantes.

Para comprender los próximos subtítulos es necesario aclarar que la evaluación que habíamos planificado para esta etapa de las prácticas era continua y la nota final sería individual, más allá de que el trabajo fuese grupal. Más aún, proyectamos en pantalla los criterios que tendríamos en cuenta en relación al trabajo en clase (ver Figura N°10).

Durante el trabajo en clase se tendrá en cuenta:

- *Cumplimiento de los objetivos de cada clase.*
- *La capacidad de trabajar en equipo.*
- *Tomar las sugerencias de las docentes como disparadoras para un avance significativo.*

Figura N°10: Criterios de evaluación del trabajo en clase.

Al finalizar cada clase realizábamos anotaciones de lo que habíamos observado de cada alumno y en nuestras casas corregíamos la entrega grupal que correspondía a la etapa del PMM en la que se encontraban los estudiantes. Además, al principio de cada clase les indicábamos el objetivo que esperábamos que los alumnos alcancen durante la misma y las pautas que debían tener en cuenta para realizar la entrega parcial que debían subir al aula virtual al finalizar la clase. En cada una de las clases en las que se trabajó con MM los alumnos se agrupaban con los compañeros que pertenecían a su grupo sin demorar demasiado, y nosotras íbamos pasando por los distintos grupos con el fin de orientarlos, guiarlos y responder cualquier duda que pudiera surgir.

2.4.1.2 Investigación y planteamiento del problema

Como mencionamos anteriormente, en la segunda clase de nuestras prácticas se propuso comenzar con el PMM, en particular, con la etapa de investigación del tema y el planteamiento de problemas vinculados. En la siguiente figura se muestran los objetivos de la clase:

Objetivo de la clase:

Investigar sobre economías piramidales y, en particular, la flor de la abundancia y plantear posibles problemáticas a resolver.

Puntos a tener en cuenta para el registro en la carpeta grupal:

- *Colocar títulos claros que separen la información recolectada de los problemas planteados.*
- *Sobre la investigación:*
    - *La información recolectada debe ayudarlos a entender qué es una economía piramidal y, en particular, cómo funciona la flor de la abundancia.*
    - *Se deben citar todas las fuentes de información según normas APA (estas normas se pueden buscar en internet).*
    - *Copiar información no es investigar. Deben procesar la información obtenida: resumirla y/o escribirla con sus propias palabras.*
    - *En caso de copiar textualmente, debe estar debidamente citado según normas APA.*
    - *El mínimo de páginas a escribir deberán ser 2 (dos).*
- *Sobre el planteamiento del problema:*
    - *Pueden plantear más de uno.*
    - *Tiene que guardar relación con la información recolectada.*
    - *Debe ser planteado en forma de pregunta.*
    - *Escribir una breve introducción de cómo llegaron a plantear ese problema y/o por qué lo plantearon.*

Figura N°11: Objetivos de la segunda clase y aspectos a tener en cuenta por los estudiantes.

Para la investigación, todos los grupos recurrieron a la búsqueda en internet. Fue notorio que todos los grupos buscaron en más de una página web; es decir, no se quedaron con lo primero que encontraron sino que continuaron buscando y unieron la información de varias fuentes.

Una de las primeras cosas que notamos al corregir la primera entrega parcial fue que los estudiantes afirmaban que la flor de la abundancia era una estafa (ver Figura N°12). Esto se debe a que, al realizar una búsqueda en internet, prácticamente todas las noticias y notas están destinadas a concientizar acerca de los posibles peligros que pueden surgir al ingresar a una economía del tipo piramidal.

Una Pirámide financiera es un esquema fraudulento de negocios que se sustenta debido al rápido crecimiento de sus clientes. Este crecimiento es impulsado por los clientes que perciben intereses por encima de lo que puede pueden pagar empresas formales de inversión

Está piramide es considerada una estafa ya que la empresa , persona o grupo de personas que prometen estos altos futuros rendimientos nunca serán cumplidos.

Estas pirámides son consideradas estafas o timos y se conocen por muchos otros nombres populares, tales como: timos en pirámide, nubes, círculos de la plata, células de la abundancia.

Figura N°12: Fragmentos de la investigación realizada por tres grupos diferentes.

Si bien no tomamos como incorrectas esas afirmaciones, sí les dijimos a los estudiantes que la investigación debía ser lo más objetiva posible y que todo lo que escribieran debía estar debidamente argumentado. En ese sentido, les comentamos que, si les interesaba, podían proponerse como objetivo final del trabajo demostrar que la flor de la abundancia era (o no) una estafa y que esa argumentación debía tener un sustento matemático. Esta observación tiene directa correlación con el planteamiento de los problemas - punto en el cual profundizaremos en la sección tres -. Pero es preciso señalar que la única condición que les pusimos a los grupos para esta etapa fue que los problemas estuvieran formulados en modo de pregunta y que debían escribir una breve introducción de cómo habían llegado a plantear los mismos. Además no se les limitó la cantidad de preguntas que se plantearan ni el tenor de las mismas. Por lo tanto, al momento de corregir encontramos que muchas de las preguntas que se planteaban podían ser respondidas con una búsqueda en internet: *¿Si esta se acaba quien se hace responsable?* [sic] *¿Cuáles son los verdaderos daños que deja esta estafa?* También había varias preguntas que eran muy generales y debían acotarse o que antes de responderse debían dar respuesta a otras preguntas anteriores: *¿Hay alguna táctica para no atorarse en la Flor de la Abundancia?*; *¿Podría una flor de la abundancia en el cual el agua estaría en la última fase, es decir que sea regresiva?* [sic]. Sin embargo, en los mismos trabajos se encontraban preguntas bien formuladas o bien orientadas: *¿Cuántas fases se necesitan para que el número de personas supere la población de nuestro país (44,27 millones)?; ¿Cuántas personas se ven beneficiadas y cuantas no en una fase?* [sic]. En la sección N°3 ahondaremos con mayor profundidad en el planteamiento de los problemas.

Otro aspecto que apareció con frecuencia y que, por lo tanto, tuvimos que comentarlo oralmente en ambos cursos, fue la incorrecta utilización de las normas APA en la redacción de los escritos, principalmente al colocar figuras y citar frases textualmente. Esto nos sorprendió ya que, cuando les preguntamos a los estudiantes si sabían a qué nos referíamos con dichas normas, nos dijeron que sí las conocían y que, incluso, las utilizaban cada vez que tenían que realizar un informe para alguna materia.

Es destacable el compromiso que mostraron los estudiantes con el trabajo. En todas las investigaciones hubo párrafos escritos por ellos y más de una pregunta planteada. En general, los párrafos que estaban escritos en su completitud por los estudiantes eran aquellos en los cuales explicaban el funcionamiento de la flor de la abundancia. Esto fue una demostración de que la clase de presentación había generado una buena base para la comprensión y el futuro estudio del fenómeno.

2.4.1.3 Recolección de datos

En la tercera clase y, segunda del PMM, cada grupo debía comenzar con la recolección y sistematización de la información que les permitiera resolver la problemática que se plantearon anteriormente. Pero, antes de iniciar esta etapa, les dimos un tiempo para que cada grupo realice las correcciones correspondientes al planteamiento del problema en función a las sugerencias que nosotras les hicimos, o bien, terminen de definir con qué problema iban a trabajar. En particular, en 5°B esta clase duró bastante menos de lo esperado ya que los alumnos debieron realizar la formación antes de comenzar la jornada, la cual duró aproximadamente cincuenta minutos.

Luego de asegurarnos de que todos los grupos tuvieran definidos correctamente los problemas, proyectamos la imagen que se muestra en la Figura N°13 con el objetivo de la clase y puntos que debían tener en cuenta para registrar esta etapa.

Objetivo de la clase:

Recolectar y sistematizar datos que ayuden a resolver el problema.

Puntos a tener en cuenta para el registro en la carpeta grupal:

- *Colocar títulos claros que separen esta etapa del proceso de las anteriores.*
- *Sobre la recolección de datos:*
    - *Los datos recolectados deben ayudarlos a responder el problema elegido.*
    - *Deben registrar, de la manera que les parezca conveniente, todos los datos recolectados.*

Figura N°13: Objetivos de la clase 3 y aspectos a tener en cuenta por los estudiantes.

Para la recolección de datos, le entregamos a cada grupo 32 flores realizadas en cartulina (ver Figura N°14), a fin de que los estudiantes pudieran manipular y explorar el fenómeno de la *flor de la abundancia*.

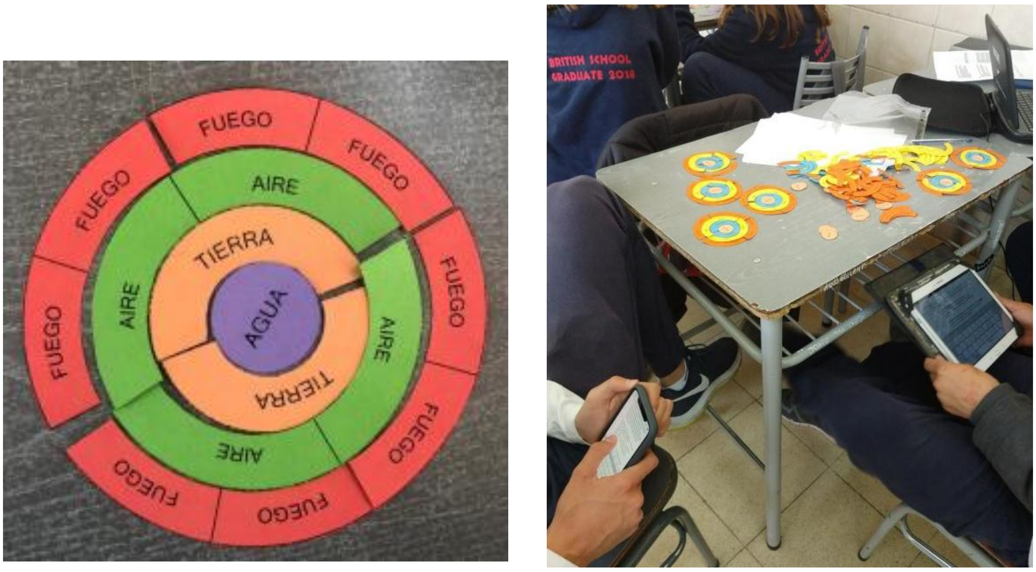


Figura N°14: Flores realizadas en cartulina y entregadas a los grupos (izquierda) y estudiantes realizando la recolección de datos (derecha).

La razón por la cual les entregamos 32 flores a cada uno de los grupos fue que, de esta manera, podrían dar cuenta de las cinco primeras fases del fenómeno para luego tratar de entender cuántas flores habría en la fase siguiente. En la Figura N°15 podemos observar que uno de los grupos consideró conveniente realizar el proceso en el piso del aula ya que, de esta forma, tenían más espacio para ir colocando las distintas flores a medida que avanzaba el fenómeno.

Figura N°15: Recolección de datos realizada por uno de los grupos en el piso del aula.

Es importante señalar que no todos los grupos hicieron uso de este recurso para recoger la información necesaria, por ejemplo, uno de ellos optó por confeccionar un esquema como se puede observar en la Figura N°16, sin apelar a las flores que les entregamos. En el mismo iban colocando, por fase, la cantidad de flores, de personas y el número de perdedores y ganadores en cada una.

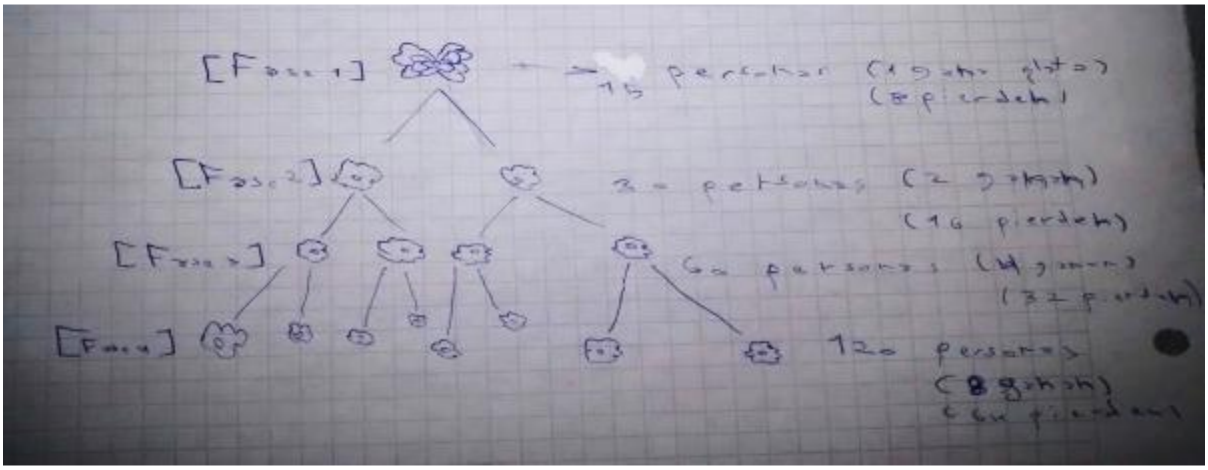


Figura N°16: Esquema realizado por uno de los grupos de 5°B en la etapa de recolección de datos.

En relación al modo de sistematizar la información, la mayoría de los grupos lo hizo a través de una tabla elaborada en formato digital, cuyas columnas representaban las distintas variables a considerar en el problema, y las filas el valor que asumen dichas variables para cada una de las fases del proceso. Sin embargo, hubo algunos grupos (minoría) que decidieron organizar la información de una manera distinta, además de utilizar papel en lugar de computadora, tablet o celular. En las figura N°17 y N°18 podemos observar dos ejemplos distintos de sistematización de datos: en uno de ellos se elaboró una tabla como mencionamos antes y en otro se fue colocando la información separada por barras (/).

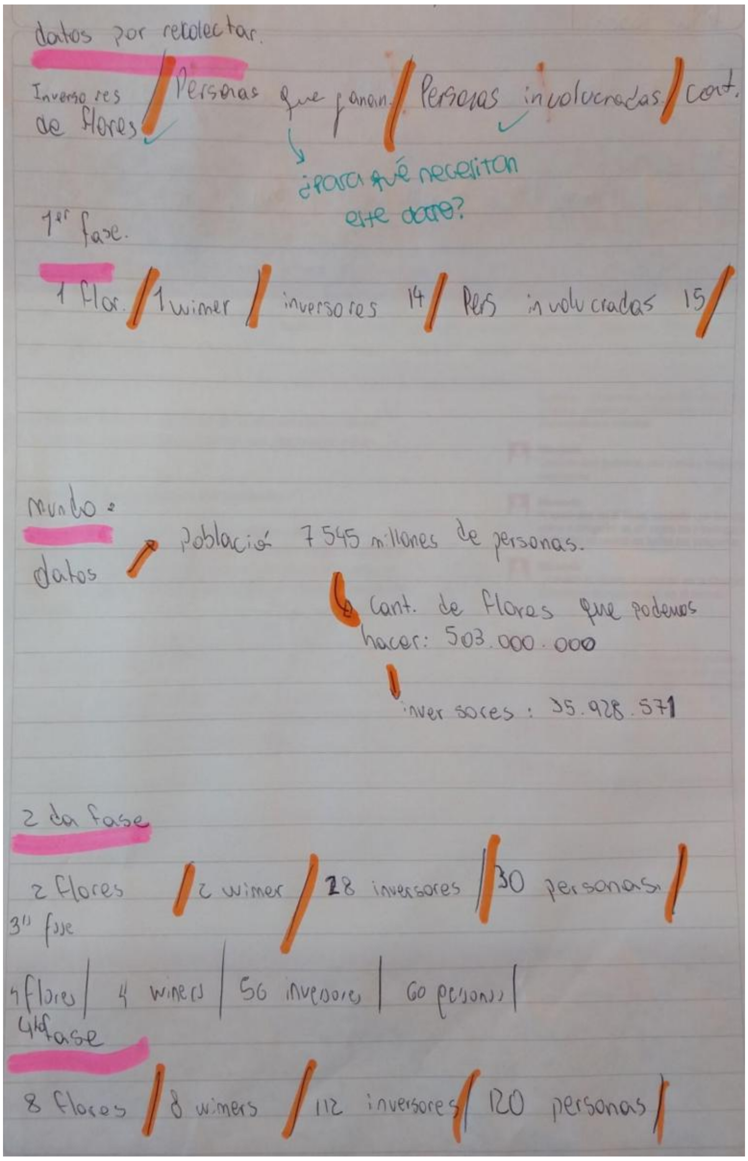
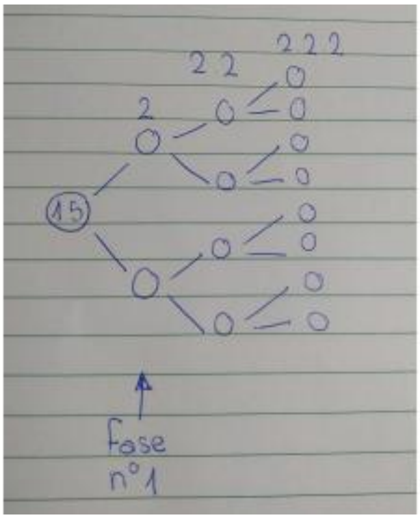

datos por recolectar.
Inversores de flores / Personas que ganan / Personas involucradas / cant.
¿para qué necesitan este dato?
1er fase.
1 flor / 1 wimer / inversores 14 / Pers involucradas 15 /
Mundo:
datos
Población 7 545 millones de personas.
Cant. de flores que podemos hacer: 503.000.000
inversores: 35.928.571
2 da fase
2 flores / 2 wimer / 28 inversores / 30 personas /
3° fase
4 flores / 4 winers / 56 inversores / 60 personas /
4tafase
8 flores / 8 wimers / 112 inversores / 120 personas /

Figura N°17: Sistematización de datos realizada por uno grupo en papel.

Fases	Flores	Participantes	Ganadores	Inversores
1	1	15	1	14
2	2	30	2	28
3	4	60	4	56
4	8	120	8	112
5	16	240	16	224
6	32	480	32	448
7	64	960	64	896
8	128	1920	128	1792

Figura N°18: Tabla confeccionada por uno de los grupos en computadora.

Si bien la mayor parte de los grupos consideraron la fase N°1 del proceso el momento en el cual se completa la primera flor, otros tomaron que la primera fase se daba una vez que la primera flor se reproduce en dos. En las siguientes imágenes se muestra lo realizado por un grupo en particular.



P	fa	F
30	1	2
60	2	4
120	3	8
240	4	16
480	5	32
960	6	64
1920	7	128

Figura N°19: Esquema y tabla construida por uno de los grupos, en donde F representa la cantidad de flores, P la cantidad de personas involucradas y Fa la fase del proceso.

Fue necesario hacer especial énfasis en que los encabezados de las tablas sean claros y expliquen bien la variable que se está representado. Además, en el momento de realizar las correcciones, vimos que muchos de los grupos colocaban información de más, es decir, recolectaban datos que no eran necesarios para intentar dar respuesta a la problemática planteada; por lo tanto, tuvimos que indicarles que sólo coloquen información indispensable, para evitar confusión.

Otro aspecto recurrente fue que algunos grupos hallaron tablas ya elaboradas en internet, como por ejemplo, la tabla que se encuentra en la página de Wikipedia cuyo título es “Células de la abundancia” (ver Tabla N°10). Al respecto, les indicamos a los estudiantes que, si bien podían colocar dichas tablas como parte de la recolección de datos, era necesario que, de alguna manera, realicen una validación de las mismas, es decir, que verifiquen que efectivamente la información presentada esté correcta y que además sea lo que ellos precisan para poder resolver el problema original.

Fases	N° de células creadas	Total personas implicadas	Total personas que cobran	Cantidad de personas que no cobran	Personas necesarias para continuar el proceso
1	1	15	1	14	16
2	2	30	2	28	32
3	4	60	4	56	64
4	8	120	8	112	128
5	16	240	16	224	256
6	32	480	32	448	512
7	64	960	64	896	1024
8	128	1920	128	1792	2048
9	256	3840	256	3584	4096
10	512	7680	512	7168	8192

Tabla N°10: Tabla recuperada de la página de Wikipedia.

2.4.1.4 Construcción del modelo matemático y resolución del problema

En la cuarta clase los estudiantes llevaron a cabo la cuarta etapa del PMM, es decir, la construcción del modelo matemático. Antes de comenzar hicimos entrega de las correcciones realizadas en relación a la etapa anterior (recolección de datos) y proyectamos en pantalla los objetivos de la clase y algunos puntos importantes que los alumnos debían tener presentes para el desarrollo de la carpeta grupal (ver Figura N°20).

Objetivo de la clase:

Construcción de un modelo matemático y resolución del problema.

Recuerden:

Un modelo matemático puede ser una fórmula, una tabla, un diagrama, una ecuación o cualquier estructura matemática que les ayude a resolver el problema.

Puntos a tener en cuenta para el registro en la carpeta grupal:

- *Colocar títulos claros que separen esta etapa del proceso de las anteriores.*
- *Debe quedar claro cuáles son las variables que intervienen en el modelo.*
- *Pensar si el resultado obtenido es consistente con el problema planteado.*

Figura N°20: Objetivos de la cuarta clase y aspectos que los estudiantes debían tener en cuenta.

Además hicimos hincapié en que debía estar expresado en el informe no sólo el modelo matemático, sino también la explicación de cómo habían llegado al mismo. En relación a este aspecto, algunos grupos expresaron con sus palabras los pasos que fueron siguiendo hasta encontrar el modelo (ver Figura N°21), mientras que otros lo indicaron matemáticamente (ver Figura N°22).

> Para determinar la cantidad de flores que hay por fase, observamos la tabla número 1 y llegamos a la conclusión de que la fórmula para descubrir este dato es : $2^{x-1} = g(x)$, siendo "x" la cantidad de fases y "g" la cantidad de flores .
>
> Para llegar a dicha fórmula primero observamos la tabla de valores donde tomamos la cantidad de fases como variable independiente (x) y la cantidad de flores como variable dependiente (g). Luego buscamos la relaciones entre dichas variables y nos dimos cuenta que la cantidad de flores siempre era un número múltiplo de dos y que si haciamos 2^{x}, es decir, dos elevado al número de fase, el resultado era muy cercano al número de flor que correspondía. Pensamos un rato y llegamos a la fórmula correcta:
>
> $$2^{x-1} = g(x)$$

Figura N°21: Explicación de un grupo acerca de cómo obtuvieron el modelo matemático.

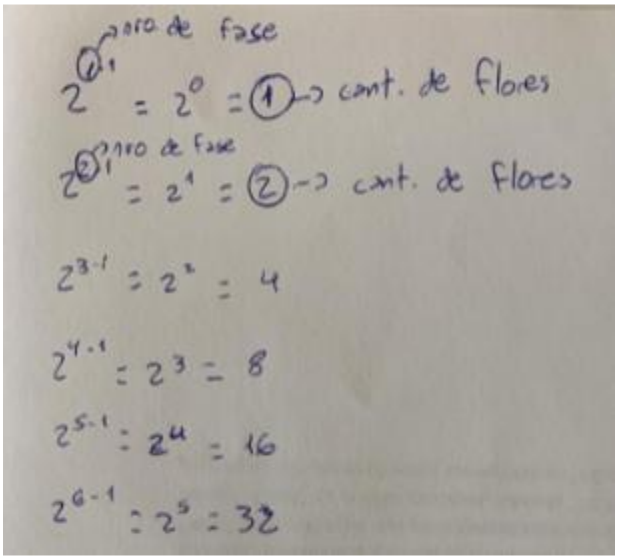


Figura N°22: Razonamiento de uno de los grupos para obtener el modelo matemático.

Algunos grupos lograron responder varias o todas las preguntas que se habían planteado inicialmente, para lo cual fue necesario que obtengan más de un modelo matemático, aunque todos éstos se podían derivar de la relación existente entre el número de fase y la cantidad de flores que hay en la misma. Un ejemplo de esto se ilustra en la Figura N°23.

Fórmula para saber la cantidad de flores por fase:
2^(Fase-1)
Fórmula para cantidad de personas implicadas:
15*2^(Fase-1)
Fórmula para total de personas que ganan dinero:
2^(Fase-1)
Fórmula para total de personas que no cobran:
15*2^(Fases-1)-2^(Fases-1)
Fórmula para cantidad de personas necesarias para continuar el proceso:
(15*2^(Fases-1))+(2^(Fase-1))

Figura N°23: Modelos matemáticos construidos por un grupo.

Una vez construidos los modelos matemáticos necesarios, cada grupo debía utilizarlos para poder dar respuesta a la pregunta planteada. En el caso particular de los grupos que se habían preguntado cuántas fases eran necesarias para que el número de personas involucradas en el proceso de la flor de la abundancia supere la población de una determinada población, se requería despejar el valor de la variable independiente de la fórmula, la cual se encontraba en el exponente de la potencia. Para superar este obstáculo, algunos grupos optaron por ir probando distintos valores de la variable independiente, es decir, la cantidad de fases, hasta alcanzar el valor necesario (ver Figura N°24), mientras que otros grupos recurrieron a *PhotoMaths*, una aplicación que permite resolver ecuaciones matemáticas (ver Figura N°25).

El modelo que elaboramos fue el siguiente: 2^(n-1)*15, siendo *n* la fase del proceso.

Para averiguar la fase primero igualamos la ecuación a 40.117.096, ya que esta era la cantidad de personas para las que queríamos conocer la fase, dejando 2^(n-1)*15 = 40.117.096.

A continuación, despejamos la ecuación lo máximo posible, llegando a 2^n = 5348946,14. Desde este punto, fuimos probando que valor de *n* era el más apropiado para el valor que necesitamos, llegando a la conclusión de que se necesitan 23 fases para que la cantidad de personas involucradas supere la población de nuestro país (en la fase 22 hay involucradas 2^(22-1)*15 = 2^(21)*15 = 31.457.280 personas, mientras que en la 23 hay 2^(23-1)*15 = 2^(22)*15 = 62.914.560 personas, lo que ya supera la población de nuestro país).

Figura N°24: Explicación dada por uno de los grupos en relación a cómo obtuvieron la solución al problema.

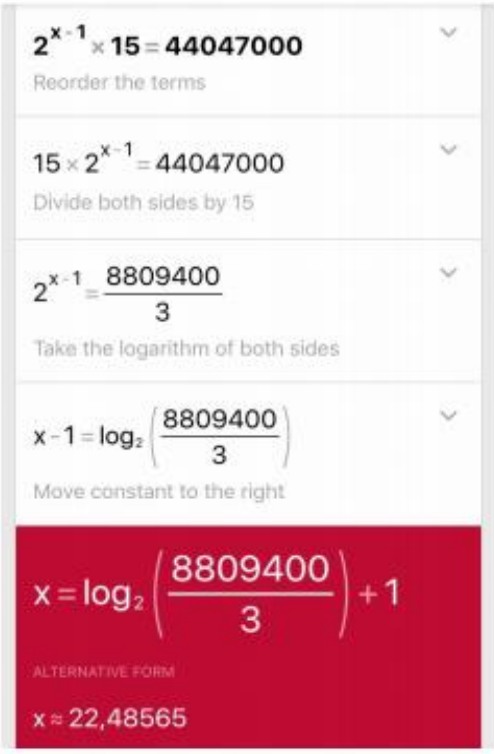


Figura N°25: Captura de pantalla del resultado de la ecuación exponencial utilizando *PhotoMaths.*

2.4.1.5 Redacción del informe

Como mencionamos anteriormente los informes del PMM fueron realizados por los alumnos en sus casas. Como esto no se había planificado y consideramos importante poder guiar a los alumnos en la confección de los mismos, les pedimos que entregaran una primera versión del informe final en una determinada fecha (5/08 para 5°B y 7/08 para 5°C) y, luego de enviarles las respectivas correcciones, les dimos una nueva fecha (23/08 para 5°B y 26/08 para 5°C) para entregar la versión definitiva. En el aula virtual de la materia se explicitaron los criterios de evaluación del informe y las secciones que éste debía contener (ver Figura N°26).

En este espacio deben subir el informe final del proceso de modelización matemática. Recuerden que la estructura debe ser la misma que la de los informes pedidos en las otras materias. Es **muy importante** que suban el archivo en formato **.pdf** y que lo nombren: **informefinal_apellidosdelosintegrantes**. **El nombre del archivo no debe contener tildes** para que se pueda descargar sin problemas. Recuerden también considerar las devoluciones hechas de todas las entregas.

Además, el informe **debe contener los siguientes apartados**:

1. Problema. Establecer el problema planteado.
2. Recolección de datos. Informar el modo en que se recolectó la información y qué datos se obtuvieron.
3. Construcción del modelo. Relatar cómo se realizó.
4. Resultados. Analizar la respuesta que provee el modelo a la pregunta formulada.

Y los **criterios de evaluación** son:

- Contiene las secciones indicadas anteriormente.
- Exploración e investigación del tema.
- Formulación del problema a modo de pregunta y en forma clara.
- Menciona las variables que intervienen y el método de recolección de datos.
- Presentar algún modelo matemático.
- Resolución matemáticamente correcta.
- Razonabilidad en los resultados.
- Redacción adecuada. Ideas claras y ordenadas.

- Ortografía.
- Entrega en tiempo y forma.

Figura N°26: Consigna para la entrega del informe final colocada en el aula virtual.

Una de las dificultades que observamos en relación a esto último fue que, como a los estudiantes se les había dado un formato de informe, el cual deben respetar en todas las asignaturas (esto es parte del proyecto institucional de la escuela), varios grupos mezclaban y confundían las secciones que debe tener dicho informe con las que nosotras les pedimos; lo cual generó que no respetaran el orden de las etapas que efectivamente habían vivenciado en el PMM (investigación, planteo de problema, recolección de datos, construcción del modelo y resolución del problema).

2.4.1.6 Cierre

Dado que se debía comenzar con la segunda etapa de nuestras prácticas pero a la vez era necesario realizar un cierre del PMM llevado a cabo por los estudiantes, en la quinta clase se expuso una presentación cuyo objetivo era recuperar lo realizado por los alumnos en el proceso y, al mismo tiempo, introducir la definición de función exponencial formalmente. En dicha presentación se mostró el recorrido que los alumnos hicieron, es decir:

1. Investigación del tema.
2. Planteamiento del problema vinculado al tema.
3. Recolección de datos.
4. Construcción del modelo matemático.
5. Resolución del problema.

La Figura N°27 muestra la filmina correspondiente a la construcción del modelo matemático, en ella se plasmó gran parte de los modelos arribados por los estudiantes.

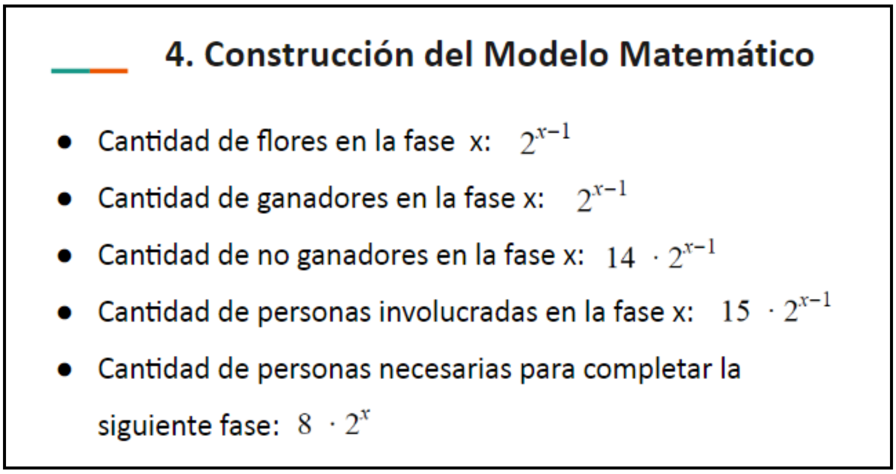


Figura N°27: Una de las filminas correspondiente a la presentación realizada.

Con esta filmina proyectada, se les preguntó a los estudiantes qué aspectos tenían en común los modelos expuestos, a lo cual respondieron que la variable independiente se encontraba en el exponente. A continuación se les explicó a los alumnos el concepto de crecimiento exponencial y se les presentó la definición de función exponencial que se muestra en la Figura N°28.

Definición:
Una función es exponencial si se expresa de la forma $f(x) = k\,a^{x+c} + b$.
Donde:
- $a \in R, a > 0 \; y \; a \neq 1$
- $k \in R, k \neq 0$
- $b, c \in R$

El nombre ***exponencial*** *proviene de que la variable independiente* x *figura en el exponente.*
Los parámetros que intervienen son: $a, b, c \; y \; k$.

Figura N°28: Definición de función exponencial presentada.

En relación a las condiciones que deben cumplir los parámetros que intervienen en la definición, se les preguntó a los alumnos por qué consideraban que no pueden darse las condiciones opuestas y, siguiendo un razonamiento por el absurdo, se llegó a las correspondientes contradicciones. En la Figura N°29 se puede observar el caso particular del parámetro a.

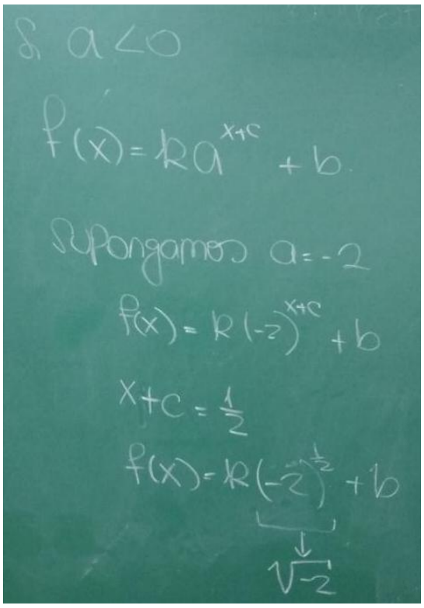


Figura N°29: Razonamiento expuesto en pizarra para comprender por qué el parámetro a debe ser positivo.

Con el objetivo de conocer la opinión de los estudiantes acerca de la experiencia de realizar un PMM, les pedimos que respondieran de forma anónima las preguntas que se muestran en la Figura N°30.

- ¿Qué les pareció la experiencia de realizar un proceso de modelización matemática?
- Si tuvieran que elegir, ¿repetirían la experiencia?
- ¿Qué aspectos destacarían como positivos de la misma? ¿y como negativos?
- ¿Consideran que aprendieron? ¿cuánto y qué aprendieron?

Figura N°30: Preguntas que respondieron los estudiantes en relación a la experiencia.

En 5°C les dimos cinco minutos de una de las clases para que respondieran dichas preguntas, por lo tanto, todos los estudiantes nos entregaron sus respuestas; pero, lamentablemente en 5°B no hubo tiempo de clases destinado para ello, por lo cual les pedimos a los alumnos que trajeran las respuestas para la clase siguiente. Sólo algunos lo hicieron y, en consecuencia, obtuvimos muy poca información acerca de la opinión de ese curso en relación al PMM.

Al analizar las respuestas de los estudiantes notamos dos corrientes bien distintas. Algunos alumnos afirmaban que la experiencia les había gustado y/o les había parecido interesante, mientras que otros decían que les aburría y/o les había parecido confuso. Sin embargo, en ambos casos argumentaban lo mismo: era algo a lo que no estaban habituados. A quienes les había gustado hacer un PMM rescataban que era una nueva forma de aprender más dinámica y que colaboraba para estar más atentos. También destacaron la particularidad de que podían encontrar un vínculo entre la materia y el mundo real. Por otro lado, quienes no habían disfrutado de la experiencia argumentaban que les gustaba más la *forma anterior* de las clases; que preferían resolver ecuaciones y no tanto problemas y que les había resultado confuso porque no entendían qué estaban haciendo.

En la segunda pregunta hubo una mezcla entre PMM y la temática particular de esta experiencia, es decir, la flor de la abundancia. Si bien la mayoría de los estudiantes contestó que sí repetiría la experiencia, muchos de los que contestaron que no, argumentaron que el tema ya se había agotado, que exactamente la misma experiencia sería aburrida. Es decir, pensaron que estábamos preguntando si repetirían el PMM con la flor de la abundancia cuando nosotras nos referíamos a si volverían a hacer un PMM.

Con respecto a la cuarta pregunta, todos los estudiantes consideraron que sí habían aprendido. La respuesta más frecuente estuvo dirigida a cuestiones propias del tema y a la posibilidad de poder tomar una postura con respecto a este tipo de economías ya que habían podido comprender el funcionamiento. Otras respuestas estuvieron dirigidas al modo de enseñanza-aprendizaje; si bien entendían que no habían aprendido algo tan *teórico*, sí destacaban que habían "aprendido a razonar".

2.4.2 Estudio de la Función Exponencial

En esta sección haremos referencia a la segunda parte de nuestras prácticas profesionales, para la cual se destinaron un total de cinco clases que incluye el día de la evaluación escrita. Como mencionamos previamente, durante estas clases se llevó a cabo el estudio de la función exponencial. Propusimos, en primer lugar, que los estudiantes resolvieran problemas de la semi-realidad en los cuales debían interpretar las variables en juego y construir la función exponencial subyacente. Con estos problemas de aplicación también teníamos la intención de que los alumnos interpretaran y utilizaran la fórmula matemática construida para dar respuesta a nuevos interrogantes. En la Figura N°31 se muestra uno de los problemas que se propusieron en clase y que preserva las características mencionadas.

Actividad 1

En un lago del sur de la Argentina un grupo de científicos acaba de descubrir una nueva especie de bacterias que se estaría reproduciendo muy rápido y podría causar muchas enfermedades en la población. Estudios recientes revelaron que esta especie se reproduce cada una hora partiéndose en tres (tripartición) y que inicialmente todo habría comenzado con una bacteria.

a. Completen el siguiente cuadro para saber cuánto crecerá la población de bacterias a medida que pasen las horas:

Tiempo	*Población de bacterias*
0 hs.	*1*
1 hs.	*3*
2 hs.	

3 hs.	
4 hs.	
5 hs.	

b. ¿Cuántas bacterias habrá a las ocho horas?
c. ¿Cuántas bacterias habrá a las doce horas?
d. Encontrar una fórmula que relacione el tiempo y la cantidad de bacterias (Ayuda: puede servir agregar más filas a la tabla)
e. Los biólogos calcularon que si la población de bacterias crece hasta alcanzar los 387.420.489 ejemplares, correríamos un grave peligro de contaminación. ¿Cuántas horas deberían pasar para que ocurra este desastre?
f. ¿Qué sucede si la población inicial es de 2 bacterias? Encuentren una fórmula que relacione el tiempo y la cantidad de bacterias en este caso.

Figura N°31: Actividad de semi-realidad propuesta a los estudiantes.

Para la resolución de esta actividad algunos estudiantes fueron resolviendo los incisos de manera ordenada, es decir, respetando el orden de las preguntas, mientras que otros hallaban primero la fórmula de la función que relaciona las variables involucradas en el problema y luego respondían el resto de los incisos. Esto fue una sorpresa para nosotras ya que pensábamos que los estudiantes obtendrían el modelo a partir de la tabla, similarmente a como hicieron con la flor de la abundancia; por lo tanto, en los problemas siguientes decidimos no colocar tablas para que completen, sino que sean ellos quienes las confeccionen, en caso de que lo consideren necesario.

Una vez finalizado el tiempo para la resolución de la actividad 1, se llevó a cabo la puesta en común, en la cual le indicamos a un estudiante que pase al frente y muestre sus resultados en cualquiera de las pizarras (la de tiza o la digital). Además de escribir las respuestas le pedimos que explique qué razonamientos siguió para resolver dicha actividad.

En general, las puestas en común que se desarrollaron en ambos cursos se llevaban a cabo de la manera descrita anteriormente, en caso de que hubiese algún error, interveníamos para que quien estaba al frente se percatara del mismo y lo corrigiera.

En la Figura N°32 se muestran las soluciones de los items de la actividad de las bacterias realizadas por los estudiantes durante la socialización.

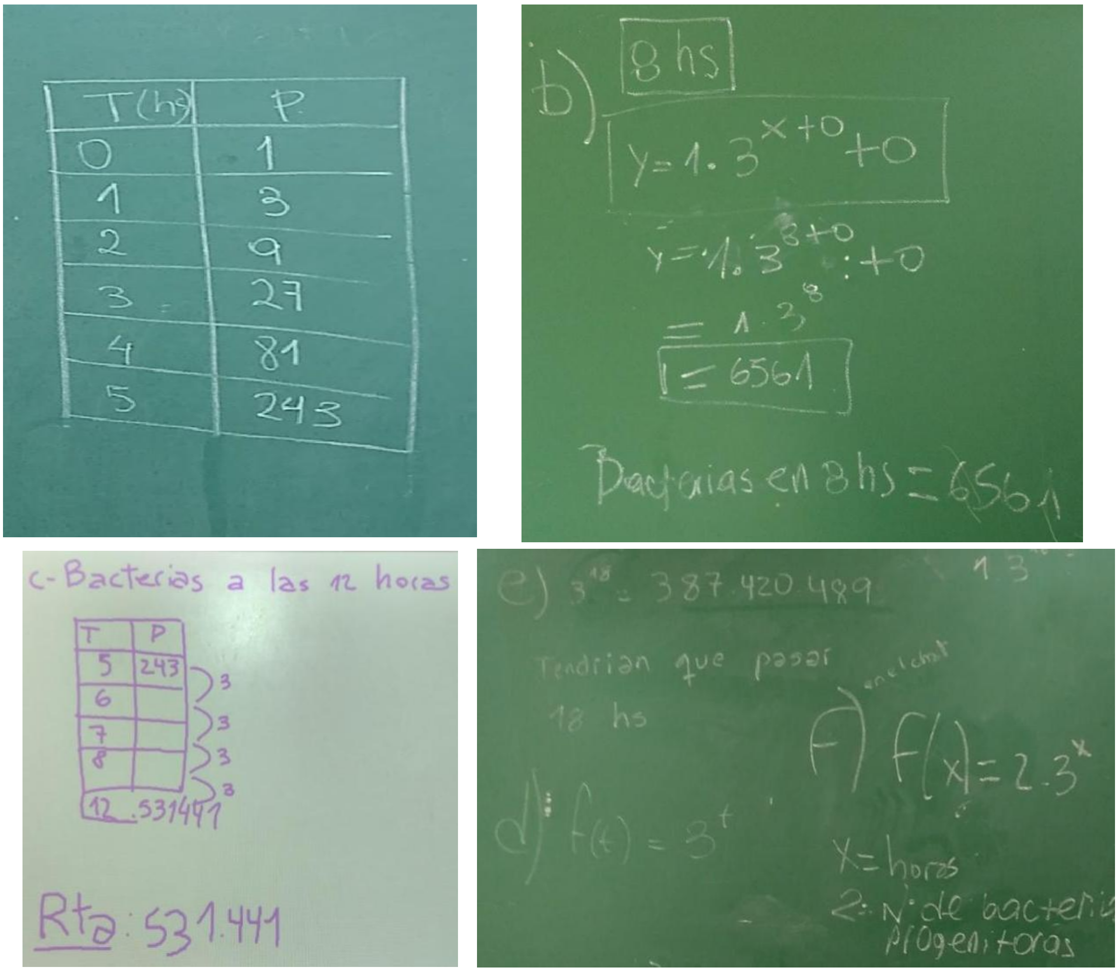


Figura N°32: Soluciones de los incisos a (izquierda superior), b (derecha superior), c (izquierda inferior), d, e y f (derecha inferior) realizada por los alumnos.

Una vez estudiados los problemas de aplicación de la función exponencial, procedimos a trabajar con los parámetros de la misma. Para ello propusimos actividades vinculadas al uso del software *GeoGebra* como la que se observa en la siguiente figura:

Actividad 3

<u>Objetivo</u>: estudiar cómo se modifica el gráfico de la función exponencial al variar los parámetros de su fórmula.

1) *En GeoGebra, creen un deslizador con nombre "a" que varíe de -5 a 5. Luego, ingresen en el campo de entrada la función $f(x) = a^x$ y respondan:*

   a) ¿Qué sucede con la función cuando el parámetro "a" toma valores mayores a 1?, ¿y cuando "a" toma valores entre 0 y 1? Escriban las conclusiones en *la carpeta.*

b) *¿Qué sucede con la función cuando "a" toma el valor 0?, ¿y cuando $a = 1$?, ¿y cuando "a" toma valores negativos? Escriban las conclusiones en la carpeta.*

2) *Creen otro deslizador de nombre "c"que varíe de -10 a 10. Luego ingresen en el campo de entrada la función $f(x) = a^{x+c}$con a fijo y $a > 0$ y $a \neq 1$. ¿Qué sucede con el gráfico cuando varían el parámetro"c"? Escriban las conclusiones en la carpeta.*

3) *Creen un nuevo deslizador de nombre "k" que varíe de -5 a 5. Luego ingresen en el campo de entrada la función $f(x) = ka^{x+c}$ y fijen $c = 0$.*

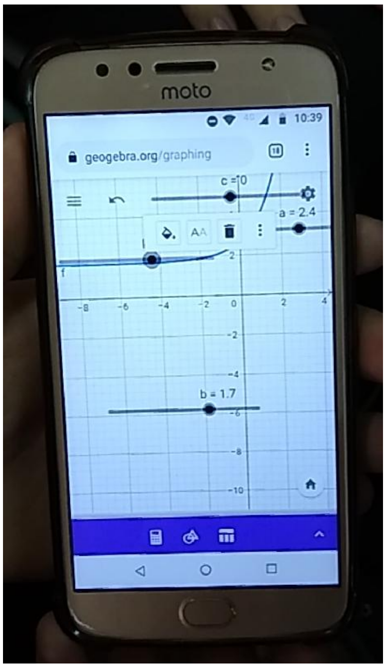
   a) *Con "a" fijo, $a > 1$ respondan:*
   ¿Qué sucede con la función cuando varían el parámetro "k"?, ¿cómo se relaciona el signo de "k" con la función? Escriban las conclusiones en la carpeta.

   b) *Con "a" fijo, $0 < a < 1$ respondan:*
   ¿Qué sucede con la función cuando varían el parámetro "k"?, ¿cómo se relaciona el signo de "k" con la función? Escriban las conclusiones en la carpeta.

4) *Creen un nuevo deslizador de nombre "b" que varíe de -5 a 5. Luego ingresen en el campo de entrada la función $f(x) = ka^{x+c} + b$ y fijen $c = 0$, $k = 1$ y $a > 0$ y $a \neq 1$. ¿Qué sucede con el gráfico cuando varían el parámetro"b"? ¿Qué relación tiene el comportamiento de la asíntota horizontal con la variación de "b"? Escriban las conclusiones en la carpeta.*

Figura N°33: Actividad propuesta a los estudiantes en relación al análisis de parámetros de la función exponencial.

Para la resolución de esta tarea, algunos estudiantes utilizaron celulares y otros tablets (ver Figura N°34). Debido a que habían trabajado previamente con este software, no observamos grandes dificultades en el momento de utilizarlo, a excepción de algunos alumnos quienes no sabían cómo construir un *Deslizador*.



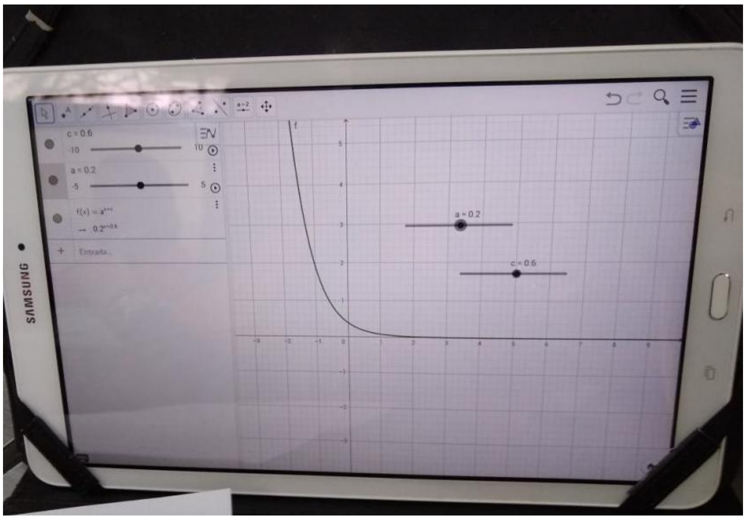


Figura N°34: Producción en GeoGebra de un alumno utilizando su celular (izquierda) y de una estudiante utilizando su tablet (derecha)

Si bien los estudiantes utilizaron *GeoGebra* para resolver la actividad, la consigna pedía que escriban las conclusiones en las carpetas ya que, de este modo, no había necesidad de volver a generar los gráficos para comprender lo que sucede al modificar los parámetros. El uso de este editor interactivo para el estudio de los parámetros trajo muchas ventajas: facilitó la visualización de la gráfica, favoreció la comprensión de los efectos que se producen sobre la misma ante la variación de los parámetros y permitió la conexión entre dos representaciones: la algebraica y la gráfica.

Además de utilizar *GeoGebra* para el estudio de los parámetros de la función exponencial, propusimos actividades en las cuáles los alumnos tenían que graficar distintas funciones y, a partir de los gráficos generados, analizar las mismas. Sin embargo, consideramos que también era importante que los estudiantes sean capaces de graficar funciones exponenciales por sí mismos, es decir, sin utilizar un software matemático. Por lo tanto, había tareas destinadas a graficar - con y sin *GeoGebra* - como la que podemos observar en la Figura N°35.

Actividad 4

A. Usando GeoGebra realicen los gráficos y analicen las siguiente funciones:

a. $f(x) = \frac{5}{2} \cdot 4^{x-1} + 1$

b. $g(x) = (\frac{1}{3})^{x+2} - 9$

B. Ahora realicen los gráficos y analicen las siguientes funciones pero sin utilizar GeoGebra:

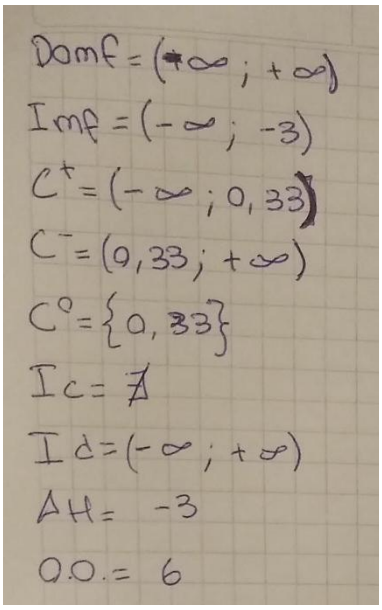
c. $f(x) = 3 \cdot 2^{x} - 6$

d. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x} - 16$

RECORDAR que deben analizar: dominio, imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, ceros de la función, ordenada al origen, asíntota horizontal, conjunto de negatividad y de positividad. TODAS LAS RESPUESTAS DEBEN ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADAS.

Figura N°35: Actividad de gráfico y análisis de funciones exponenciales propuesta a los estudiantes.

Actividades similares al punto A de la figura anterior fueron resueltas sin ningún inconveniente por los estudiantes puesto que venían trabajando con el análisis de distintas funciones a lo largo de todo el año (funciones lineales, cuadráticas, función módulo, por partes, etc.). Más aún, los alumnos hacían uso de la misma notación para representar los distintos aspectos que se quería analizar, como podemos apreciar en las siguientes imágenes recuperadas de la segunda instancia evaluativa:



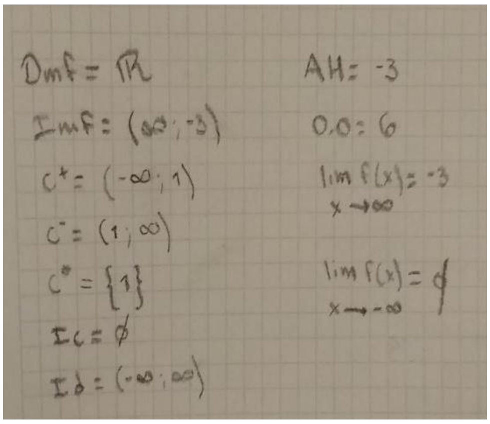


Figura N°36: Análisis de una misma función realizada por dos estudiantes distintos de 5°B.

En relación a las actividades que piden realizar el gráfico de la función sin utilizar el software (punto B de la Figura Nº 35), fue necesario orientar mucho más a los estudiantes con respecto a las actividades anteriores. Esperábamos que una parte considerable de los alumnos hubiese hecho la gráfica de la función elaborando una tabla, ubicando los puntos de la misma en un sistema de ejes coordenados y, finalmente, uniendo dichos puntos; sin embargo muy pocos siguieron esos pasos. Si bien ésta era una opción totalmente válida decidimos explicarles a los estudiantes cómo graficar una función exponencial utilizando la información que brindan los parámetros de la misma y, ubicando los cortes de la gráfica con ambos ejes coordenados. En la Figura N°37 podemos observar un ejemplo de esto.

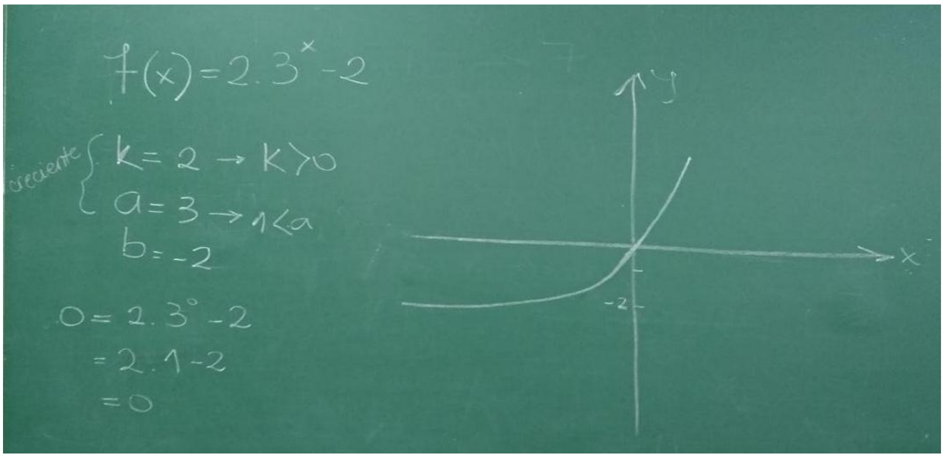


Figura N°37: Gráfico construido teniendo en cuenta la información que brindan los parámetros.

La clase anterior al viaje de estudio que tenían planificado los estudiantes, subimos una guía de actividades al aula virtual de la materia y les dijimos que, para la próxima clase, debían traerla hecha. Como no todos los alumnos viajaron a Buenos Aires, algunos de ellos tuvieron clase de matemática a cargo de la docente titular, en la cual no se avanzó con temas nuevos sino que, se les dio tiempo a los estudiantes para que realicen las actividades de dicha guía.

Entre las actividades que figuraban en la guía se encuentran problemas de semi-realidad, en los cuales se debía encontrar la función exponencial que modeliza la situación, actividades de análisis y realización de gráficos de funciones y tareas que permitían repasar las propiedades vistas de la función exponencial (ver Figuras N°38 y N°39).

Actividad 1

Consideren la función $f(x) = k \cdot a^{x+c} + b$ y completen los espacios en blanco:

- *Ecuación de la asíntota horizontal: ________________________________*
- *Ordenada al origen: ____*
- *¿Cuál es el conjunto imagen en los siguientes casos?*

k>0	*k<0*

- *¿En qué casos la función es creciente y en cuáles es decreciente?*

	k>0	*k<0*
a>1		
0<a<1		

- *¿Hacia dónde se desplaza en los siguientes casos?*

b>0	
b>0	

- *¿Hacia dónde se desplaza en los siguientes casos?*

c>0	
c<0	

Figura N°38: Actividad N°1 perteneciente a la guía de actividades que se dejó de tarea.

Actividad 5:

En una ciudad de 200.000 habitantes se esparce un rumor de modo que cada día se cuadruplica la cantidad de personas que se enteran del mismo. Si al comienzo 3 personas sabían el rumor,

a. *¿Qué función representa esta situación?*
b. *¿Cuántas personas conocerán el rumor al cabo de 3 días? ¿y al cabo de 7 días?*
c. *¿Es una función creciente o decreciente?, ¿por qué?*

d. *¿Cuántos días tendrán que pasar para que toda la ciudad se entere?*

e. *Realizar el gráfico, sin utilizar GeoGebra, y analizarlo. Deben analizar: dominio, imagen, ordenada al origen, conjunto de ceros, conjunto de positividad, conjunto de negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, asíntota horizontal,* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Figura N°39: Actividad N°5 de la guía de actividades que se dejó de tarea.

Al retomar las clases, luego del viaje de estudio, lo primero que les propusimos a ambos grupos fue realizar la puesta en común de la guía de actividades. En 5°B la mayoría de los estudiantes había realizado al menos una parte de la tarea, en cambio, en 5°C sólo un par de alumnos la había hecho. Por lo tanto, mientras que en un curso se comenzó inmediatamente con la corrección, en el otro les dimos a los alumnos tiempo de clases para realizarla.

La mayor parte de las actividades de la guía fueron realizadas en la pizarra por los estudiantes durante la puesta en común. No sólo le pedíamos al alumno que estaba al frente que compartiera la resolución de la actividad, sino que también le solicitábamos que explicara sus razonamientos al resto de sus compañeros. Cabe destacar el caso particular de una alumna de 5°C quien, al percatarse de que sus compañeros no comprendían una de las actividades, explicó tan claramente la resolución de la misma que, al finalizar, todos sus compañeros la aplaudieron con entusiasmo.

Una de las actividades que fue resuelta en conjunto con los estudiantes en la pizarra pero que, efectivamente fuimos nosotras quienes escribimos las respuestas de la misma, fue la actividad de verdadero-falso (ver Figura N°40). Tomamos esta decisión ya que anteriormente no se les había dado a los estudiantes actividades de este tipo y necesitábamos asegurarnos de que los alumnos supieran cómo esperábamos que justifiquen la veracidad de afirmaciones vinculadas a las propiedades de la función exponencial.

Actividad 2

Determinen, sin realizar el gráfico de la función, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifiquen su respuesta:

a) *La función* $f(x) = -3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x - 4$ *es decreciente.*

b) *La imagen de la función* $f(x) = -3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x - 4$ *es* $(-\infty\,;\,-4)$.

c) *El gráfico de la función* $f(x) = 9^x - \frac{1}{3}$ *no corta al eje de las abscisas.*

d) *El gráfico de la función* $f(x) = k \cdot a^x + b$ *corta al eje de las ordenadas en el punto* $(0\ ;\ b)$.

e) *La función* $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ *no tiene asíntota horizontal.*

f) *El conjunto de positividad de la función* $f(x) = 5^{x-1} - 25$ *es* $(3, \infty)$.

Figura N°40: Actividad N°2 de la guía de actividades que se propuso de tarea.

En la novena clase de nuestras prácticas, y última antes de la evaluación escrita, les presentamos a los estudiantes una serie de actividades de repaso de todos los contenidos estudiados hasta el momento, sin considerar los temas vinculados a la modelización matemática. Destinamos aproximadamente la mitad de la clase para que los alumnos realizaran las actividades y la otra mitad para la puesta en común de las mismas. Como nuestra intención era que los estudiantes pudieran practicar para la prueba y, nos interesaba particularmente hacer notar los posibles errores que ellos pudieran cometer, para poder corregírselos y evitar que los vuelvan a cometer en el examen, consideramos conveniente que sean ellos quienes pasen al frente a resolver las actividades. En las figuras N°41 y N°42 podemos observar las resoluciones hechas en el pizarrón por estudiantes de ambas secciones.

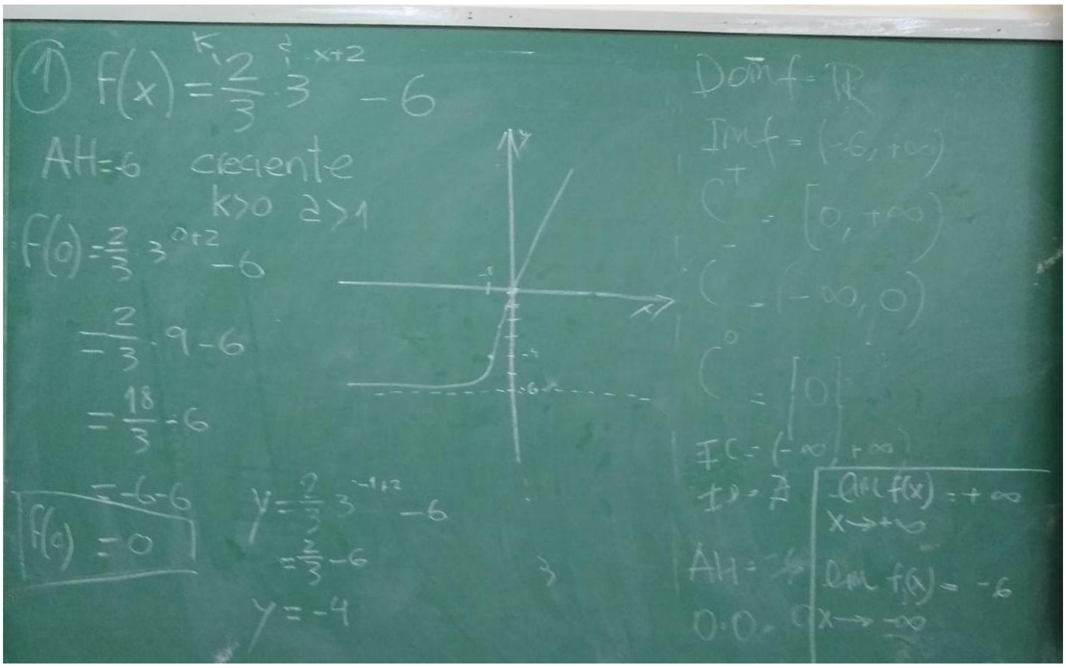


Figura N°41: Desarrollo de actividad N°1 de la guía de repaso realizada por un estudiante de 5°B.

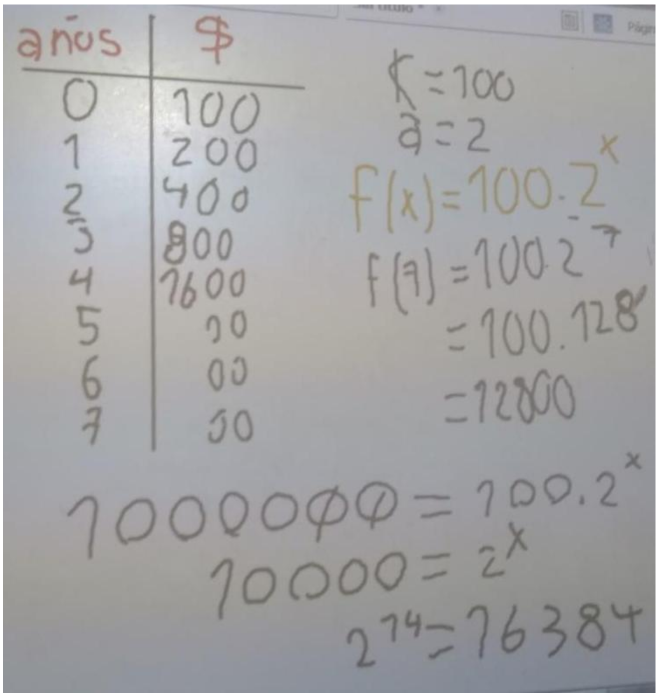


Figura N°42: Resolución del problema de la guía de repaso realizada por dos estudiantes de 5°C en la pizarra digital.

2.4.3 Evaluaciones

La evaluación, como habíamos planificado, tuvo dos instancias correspondientes a los dos momentos de las prácticas; una primera evaluación se hizo durante y al finalizar el PMM y otra se hizo en la segunda parte de las prácticas, la de clases más tradicionales. El proceso de modelización matemática se terminó evaluando a partir de la corrección del informe, y al final de las prácticas (décima clase) se tomó una evaluación escrita e individual en la cual se evaluaron los contenidos propios de la función exponencial vistos en las últimas cinco clases.

Si bien habíamos planificado que los estudiantes obtengan una única nota que sería una combinación de las notas alcanzadas en el trabajo del PMM y la evaluación escrita, por pedido de la docente titular colocamos dos notas independientes, una para cada una de las instancias evaluativas. Otra de las modificaciones que realizamos en relación a lo planificado, fueron las características de la nota; habíamos planificado que la nota fuera individual pero, como mencionamos anteriormente, la cantidad de clases destinadas al PMM se modificó durante las mismas prácticas y llevó a que una parte del proceso no pueda ser trabajado en clase. Como consecuencia, no pudimos observar de qué manera llevaron adelante esta etapa: ¿se dividieron las tareas?, ¿trabajaron en grupo?, ¿todos participaron en la confección del trabajo? Esto también tuvo implicancia en otro de los criterios: el trabajo en clase. Como se había planificado que todo el proceso se diera en clase, tenía sentido pensar en cómo habían trabajado y evaluar fuertemente también esa habilidad, pero como los alumnos debieron realizar una importante parte del proceso en sus casas, el trabajo en clase no podía tener el mismo peso. Además, particularmente en 5°B, hubo mucho ausentismo por parte de los estudiantes; por enfermedad, por viajes, etc., y quienes faltaban no eran siempre los mismos. Había varios casos de estudiantes que se habían ausentado pero cuando iban a clase eran muy participativos y teníamos la certeza de que habían trabajado mucho para hacer el informe final. Entonces, toda esta conjunción de factores resultó en que decidiéramos que la nota fuera grupal y no individual y que el trabajo en clase fuera evaluado en conjunto con trabajo en equipo.

En el Anexo B, exponemos los criterios de evaluación que finalmente se tuvieron en cuenta en el momento de realizar la corrección de los informes del PMM.

El hecho de haber cortado el PMM antes de finalizarlo como habíamos planificado, tuvo grandes incidencias en la forma de evaluar. Al no poder guiarlos o no tener un espacio de discusión con los grupos acerca de cómo afrontar la instancia de escritura del informe final, muchos de los criterios no solo debieron modificarse sino que los puntajes asignados también debieron alterarse. Incluso consideramos que este hecho fue clave para que muchos de los estudiantes no pudieran comprender del todo lo que habían realizado, no habían logrado hacer un cierre del proceso y, por lo tanto, tomamos como decisión que los criterios se flexibilizaran. Si bien la mayoría de los criterios son los que aparecían en clases, el peso que tenían fue modificado; por ejemplo, consideramos que el hecho de que el informe contenga los cuatro apartados correspondientes a las etapas del PMM era suficiente para tener dos puntos (en la Tabla N°11 del Anexo B podemos observar que el hecho de contener cada uno de esos apartados valía medio punto). Por otro lado evaluamos la coherencia entre el subtítulo y lo que presentaba su párrafo correspondiente. Los criterios que más peso tuvieron eran aquellos en los que habíamos insistido durante las clases y que entendíamos que la mayoría de los grupos había logrado comprender y explicar; por ejemplo, si en la etapa de investigación estaba explicado qué era una economía piramidal y cómo funcionaba la flor de la abundancia o si en la etapa de recolección de datos, los datos eran pertinentes a su problema o en la etapa de construcción del modelo si el modelo servía para contestar a su pregunta y si se explicaba cómo se llegaba al modelo. Caso contrario sucedió, por ejemplo, con los criterios que tenían que ver con la conclusión; al no haber podido trabajar con los estudiantes en clase qué esperábamos en relación a la misma o qué cosas deberían considerar en el momento de escribirla, el puntaje asignado era mucho menor. Los tres criterios de evaluación que corresponden a la conclusión suman 0.6 puntos, de los cuales 0.4 se obtenían por haber escrito alguna conclusión y que esté diferenciado del resto del informe con un subtítulo. Los restantes 0.2 puntos correspondían a si habían retomado los problemas que se plantearon y habían logrado alguna reflexión al respecto.

Finalmente, en la Figura N°43 se observan los histogramas de los resultados del informe del PMM. Todos los grupos aprobaron esta instancia y las notas obtenidas fueron 7, 8 y 9, con mayor cantidad de grupos que alcanzaron los 8 puntos.

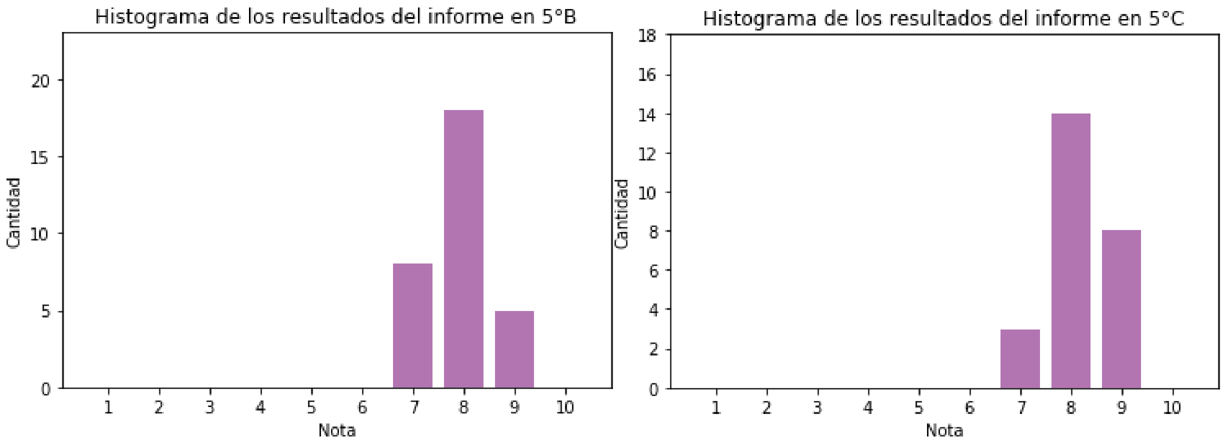


Figura N°43: Histograma de los resultados obtenidos del informe del PMM en 5°B (izquierda) y en 5°C (derecha).

Como podemos observar, los resultados obtenidos en los informes fueron muy buenos. En la primera corrección que hicimos del informe final nos habían surgido varias dudas respecto a lo que los estudiantes habían comprendido del PMM. Había algunos indicadores que sugerían la posibilidad de que los alumnos no habían comprendido realmente qué era un PMM y, menos aún, para qué lo habían hecho. Ejemplos de esto son que en algunos informes, los apartados no estaban en el orden en que se habían presentado las etapas; para nosotras había un orden lógico y *natural* de las etapas que no todos los grupos habían logrado comprender, o que las preguntas formuladas no tenían relación con las preguntas contestadas. Sin embargo, luego de la primera corrección y una conversación con los estudiantes, estas situaciones pudieron ser salvadas. Merece una mención aparte, como dijimos anteriormente, el compromiso de los alumnos con la tarea y las ganas que demostraban de mejorar. Esto nos facilitó mucho la tarea pues finalmente, los informes estuvieron muy bien organizados y logramos que la gran mayoría pudiera poner en palabras lo que había hecho.

En relación a la segunda instancia evaluativa, se elaboraron dos instrumentos, uno para cada una de las secciones. Consideramos que no era necesario confeccionar varios temas para un mismo curso ya que los bancos son individuales, con lo cual había una distancia considerable entre los estudiantes y, además, éramos tres personas quienes estábamos observando lo que sucedía en el aula durante el examen (nosotras las practicantes y la docente titular).

En el Anexo C se pueden observar los instrumentos evaluativos de ambos cursos. La estructura es la misma: una parte teórica, una parte práctica y una actividad optativa. Cabe destacar que, en un principio, no habíamos planificado evaluar teórico o, al menos, no separar de esa manera entre teórico y práctico pero fue un pedido de la docente titular que así se haga. Otro detalle no menor es que el examen suma un total de once puntos en lugar de diez; esto se debe a la incorporación de una actividad optativa que valía un punto y era elección de los estudiantes realizarla o no. La razón por la cual decidimos agregarla es que, durante las clases, les habíamos dado tarea para hacer en la casa a los estudiantes. Desde un principio les habíamos aclarado que la tarea también era parte de la nota final y que quien no la hacía, tenía menos puntos en el examen escrito. Sin embargo, gran parte de los estudiantes (principalmente en 5°C) iba a clase sin realizar la tarea y, por lo tanto, tenían un punto menos. De todas formas, la mayoría de las veces, la tarea que les pedíamos a los estudiantes no era necesariamente una decisión nuestra y también estaba supeditada a la cantidad de tiempo que teníamos. Toda esta conjunción de factores generó una lectura errónea de la forma de trabajar de los alumnos; esperábamos que tuvieran una mayor autonomía a la hora de enfrentarse a ciertos problemas y por lo tanto, si bien muchas veces la tarea no era hecha por falta de interés, otras veces no se realizaba porque genuinamente no comprendían qué debían hacer. Esto es lo que conllevó a que agregáramos un punto más en la evaluación; consideramos que debíamos darle una oportunidad de *recuperar* ese punto perdido y no castigarlos definitivamente por no hacer una tarea que no estábamos seguras de por qué no la habían realizado.

En el Anexo D detallamos los criterios que tuvimos en cuenta para la corrección de las evaluaciones escritas.

En la Figura N°44 se muestra un histograma con los resultados de las evaluaciones para cada uno de los cursos. Como podemos advertir, en ambas secciones se obtuvieron resultados positivos y sólo hubo un alumno reprobado en 5°B y una alumna en 5°C.

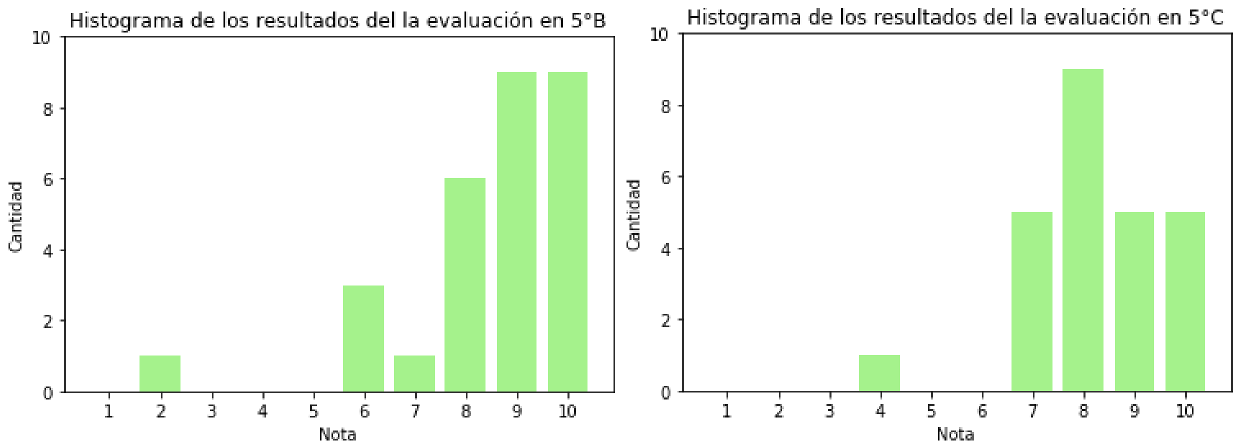


Figura N°44: Histograma de los resultados obtenidos de la evaluación escrita.

Es importante aclarar que en 5°B dos estudiantes estuvieron ausentes y, por lo tanto, no pudieron ser evaluados, mientras que en 5°C todos los alumnos estuvieron presentes el día del examen.

Con respecto a los resultados por ejercicio encontramos que en la parte teórica se obtuvieron mejores resultados que en la parte práctica. En el primer punto, la mayoría de los estudiantes escribieron una buena definición de la función exponencial e incluso aquellos que no sabían la definición formal, esbozaron una definición propia con las características principales de la función en cuestión (ver Figura N°45).

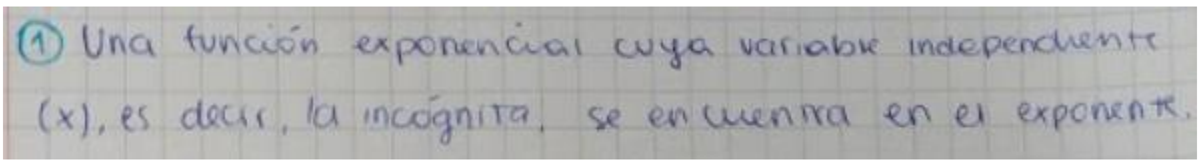
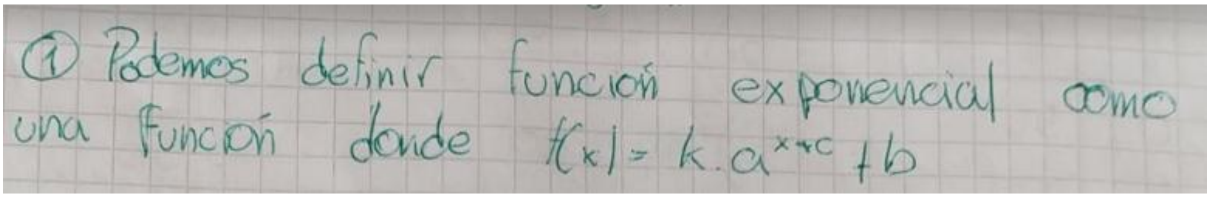

① Una función exponencial cuya variable independiente (x), es decir, la incógnita, se encuentra en el exponente.

Figura N°45: Respuesta de la actividad 1 dada por un estudiante

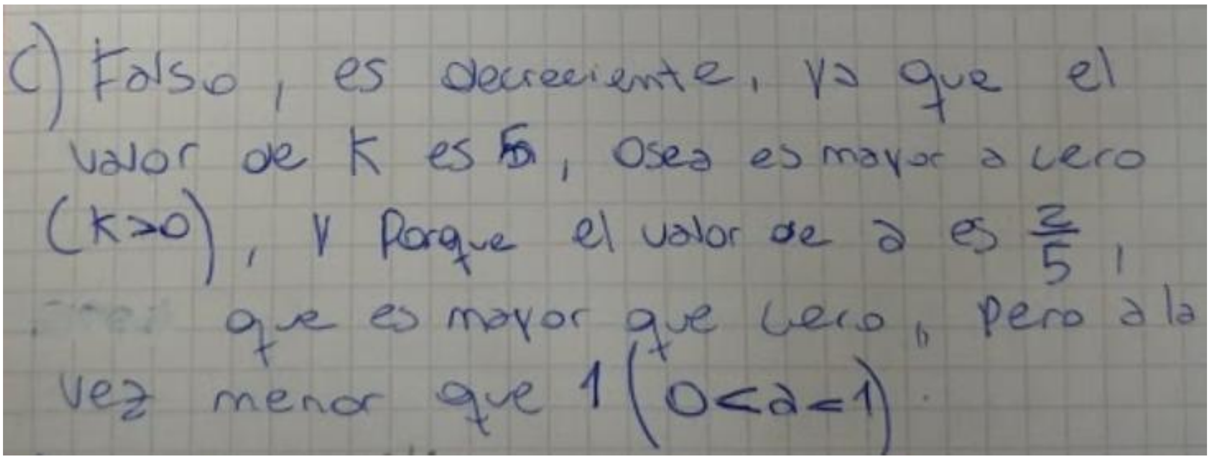
Otro error frecuente fue escribir la definición completa, es decir, colocar la fórmula de la ecuación pero no expresar qué condiciones deben cumplir los parámetros, podemos ver un ejemplo de esto en la Figura N°46.



① Podemos definir función exponencial como una función donde $f(x) = k.a^{x+c} + b$

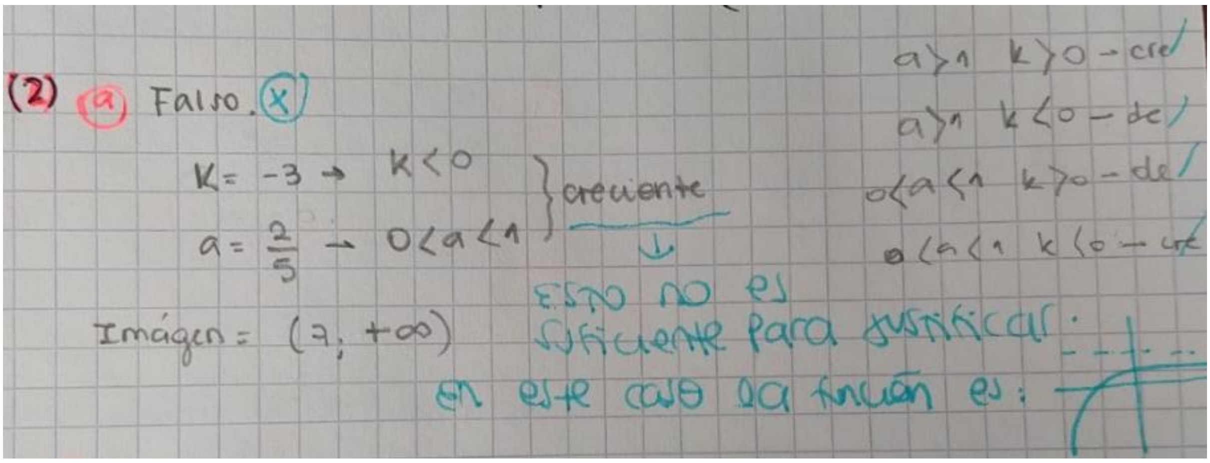
Figura N°46: Respuesta de la actividad 1 dada por un estudiante.

En la segunda actividad los alumnos tenían dos tareas: primero debían determinar la veracidad o falsedad de las afirmaciones y luego justificar su decisión. Nuevamente, la mayor parte de los estudiantes no tuvo grandes inconvenientes en esta actividad pero sí llamó la atención que, si bien se habían practicado en clases actividades muy similares a esta, los errores cometidos podían entenderse como un error de distracción o que realmente no estaban comprendiendo qué estaban haciendo. Fue notorio que más de un alumno respondió que era verdadero y justificó como falso o viceversa. Ejemplos de esto se pueden encontrar en las figuras N°47 y N°48.



c) Falso, es decreciente, ya que el valor de K es 5, osea es mayor a cero ($k>0$), y porque el valor de a es $\frac{2}{5}$, que es mayor que cero, pero a la vez menor que 1 ($0<a<1$).

Figura N°47: Respuesta de un alumno que respondió que era falso y justificó como verdadero.



(2) (a) Falso. (X)

$\left.\begin{array}{l} K = -3 \rightarrow k<0 \\ a = \frac{2}{5} \rightarrow 0<a<1 \end{array}\right\}$ creciente ↓

Imágen = $(7; +\infty)$

Esto no es suficiente para justificar: en este caso la función es:

$a>1$ $k>0$ – cre

$a>1$ $k<0$ – de

$0<a<1$ $k>0$ – de

$0<a<1$ $k<0$ – cre

Figura N°48: Respuesta de una alumna de 5°C a la actividad 2 a) de la evaluación.

En la actividad en la cual debían resolver un problema, si bien todos fueron capaces de hallar el modelo de la función exponencial en el inciso a) del problema que se proponía, muy pocos justificaron aunque esto fuera criterio de evaluación y fuera aclarado en el examen. Entre los mismos cursos se encontraron diferencias importantes a la hora de resolver este ejercicio. En 5°C fue más frecuente la utilización de tablas para “llegar” al modelo aunque no se comprendiera del todo cómo habían logrado llegar de una a otra. En cambio, en 5°B, la resolución de la actividad la hacían colocando simplemente la fórmula sin explicar cómo habían llegado a la misma. En las figuras N°49 y N°50 mostramos ejemplos donde se puede visualizar esto.

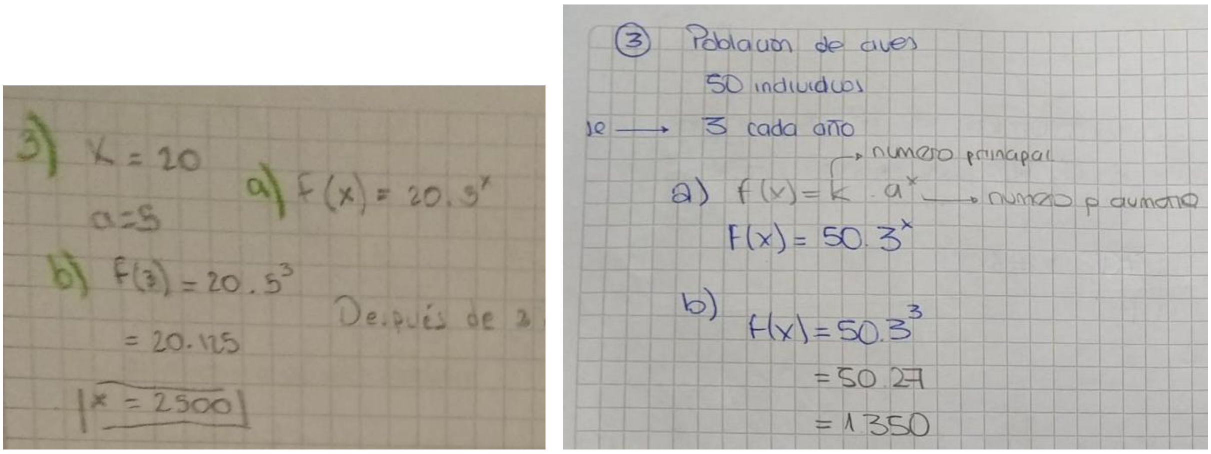
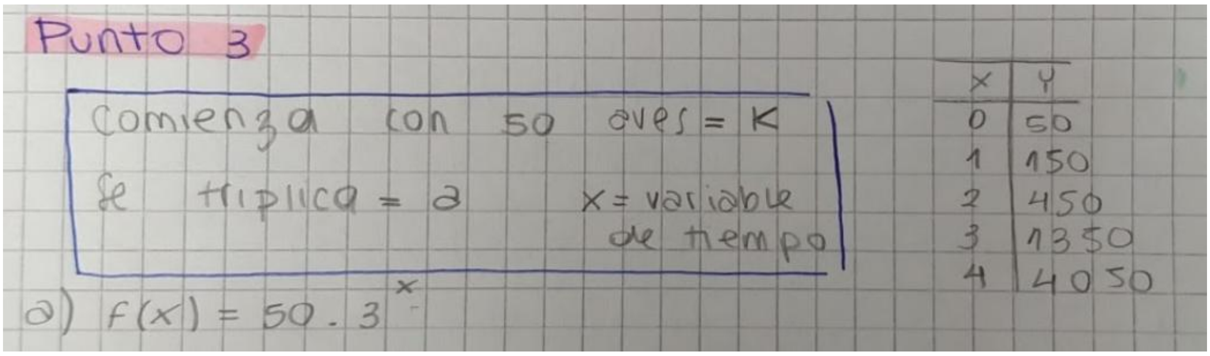


Figura N°49: Respuestas de la actividad del problema dadas por dos estudiantes de 5°B.



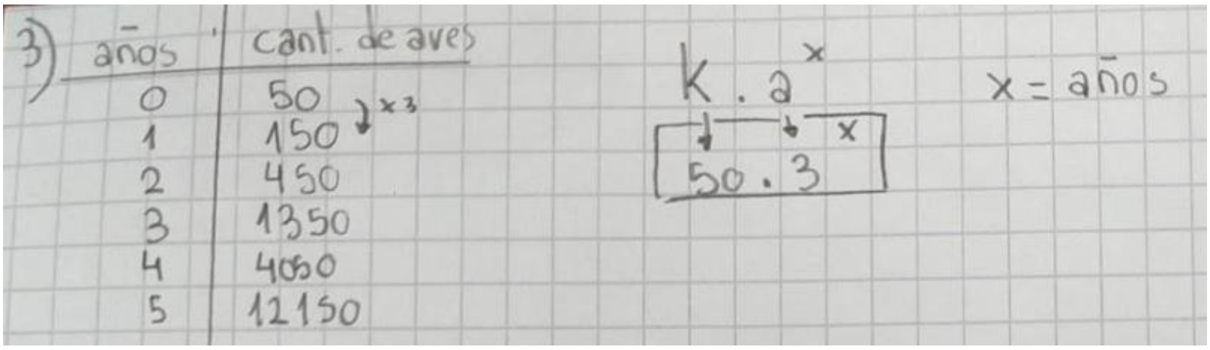


Figura N°50: Respuestas de la actividad del problema dadas por dos estudiantes de 5°C.

De todas formas, esta diferencia en el modo de resolver los ejercicios no fue algo sorpresivo para nosotras dado que durante las clases mismas, los alumnos de 5°C generalmente necesitaban más explicaciones y debían razonar más las preguntas para llegar a las respuestas. En cambio, los estudiantes de 5°B parecían ser más expeditivos, resolvían la ejercitación sin hacer tantos pasos y tenían, en general, menos errores.

La manera también de resolver el primer inciso de esta actividad determinó el próximo apartado. Como los estudiantes de 5°C (o la mayoría de ellos) habían hecho una tabla, la usaban para dar respuesta a los próximos apartados. En cambio, los alumnos de 5°B hicieron más uso de la fórmula obtenida. De todas formas, no se encontraron mayores dificultades en esta actividad.

En el ejercicio en el cual debían hacer una gráfica y analizarla también se obtuvieron buenos resultados. Un punto a destacar de la resolución de los estudiantes es que ellos estaban acostumbrados a realizar gráficos con tablas y nuestra forma de darles gráficos no fue esa. Si bien no se les corregía si decidían hacerla con tabla, se les mostró que analizando los parámetros era posible esbozar una gráfica y que eso era suficiente para poder analizarla. Lo destacable es, justamente, que ningún alumno optó por el método de la tabla, todos pudieron hacer un análisis de los parámetros y razonar cómo debía dibujarse el gráfico. Hubo simplemente errores en algunos gráficos por lo que entendemos que fueron distracciones: hacían la función creciente en vez de decreciente cuando el mismo análisis de los parámetros había sido hecho correctamente en puntos anteriores o algunos errores de cálculo que daban lugar a raíces u ordenadas al origen que no correspondían. Sin embargo, el análisis de la función se les corrigió de acuerdo al gráfico que habían hecho aunque no estuviera bien.

Por último, en el ejercicio optativo los estudiantes obtuvieron mucha ayuda nuestra en el mismo momento del examen. Si bien este tipo de ejercicios había sido dado con anterioridad en las clases e incluso, en 5°C fue explicado de manera excepcional por una de las estudiantes, la mayoría de los alumnos lograba interpretar correctamente el dato que daba la asíntota horizontal para poder dar con el parámetro b pero una vez que llegaban a eso no lograban saber cómo continuar. No podían interpretar qué otros datos les estaba dando la gráfica e incluso hubo muchos estudiantes que preguntaron respecto a qué puntos estaban marcados y porqué. Les costaba mucho la lectura de puntos en el plano y, con ello, pares ordenados que eran parte de la función. Una vez que podían comprender eso y que como parte de la función, esos datos podían utilizarse en la fórmula dada, la mayoría de los estudiantes lograba continuar la actividad solos e incluso llegaban a buenos resultados.

3. Elección y análisis de una problemática

3.1 Elección de una problemática

En el presente capítulo abordaremos una problemática surgida a partir de las propias prácticas y que se evidenció con mayor fuerza durante el PMM.

Una de las etapas del mismo es el planteamiento de un problema, lo cual es parte fundamental para llevar a cabo un PMM completo ya que a partir de éste se desencadenan el resto de las etapas. Un problema que no está bien formulado (más adelante ahondaremos sobre qué significa *bien formulado* pero por ahora entenderemos que debe ser claro y tener una estructura que permita el trabajo sobre el mismo, es decir, que no se responda con una simple búsqueda en internet) tendrá consecuencias, indefectiblemente, sobre el resto de las etapas. Por supuesto que con esto no nos referimos a que la etapa correspondiente al planteamiento del problema sea *la* etapa más importante del PMM ni tampoco que sea una etapa acabada sino que justamente, por ser parte de un PMM que se caracteriza por ser cíclico, las líneas divisoras entre etapas son, muchas veces, difusas e incluso siempre existe la posibilidad de tener que volver sobre una etapa anterior para modificarla; es decir, si bien el PMM tiene etapas, se debe ver el proceso completo y no se debe considerar ninguna etapa como cerrada hasta tanto no se finaliza con el proceso. Justamente por esto mismo es que las falencias que genera un problema mal formulado afloran en etapas posteriores.

En el caso particular de nuestras prácticas, si bien el PMM realizado por los estudiantes no fue, en el sentido dado anteriormente, completo (pues los alumnos no formaron parte de la decisión respecto del tema elegido), sí se tuvieron que enfrentar a la etapa del planteamiento del problema y esto supuso una doble tarea: por un lado, los alumnos debían hacerse una pregunta relacionada a un tema propuesto por nosotras y, por otro lado, dicha pregunta debía estar bien formulada. Esta primera tarea no es menor, puesto que, en general, las habilidades que desarrolla un estudiante durante su etapa educativa guardan relación con responder preguntas y no con hacérselas. Con esto no nos referimos a que los docentes fomentan esa capacidad y son los estudiantes quienes se resisten a aprenderlo sino todo lo contrario: la escuela no se encarga de enseñarles a los alumnos a formular problemas. Esto está en concordancia con el Diseño Curricular de la Provincia de Córdoba (2012-2020) en donde no se considera a la formulación de problemas como objeto de enseñanza en sí mismo sino como una actividad apéndice de la resolución de problemas.

Por lo tanto, el hecho de tener que preguntarse algo, de tener que generar un interrogante que después ellos mismos, los estudiantes, sean quienes deban responderlo, es un desafío en sí mismo. Además de eso, el interrogante debe estar formulado de manera tal que no tenga *huecos*, es decir, que sea posible de responder y que tenga sentido hacerlo. Entonces, no solo el estudiante debe ser capaz de preguntarse *algo* sino que ese *algo* debe tener sentido y más aún debe ser él mismo quien, al querer dar respuesta a esa pregunta, debe entender y/o darse cuenta del alcance del problema y de su formulación y, en caso de que sea necesario, reformularlo para que quede *bien formulado*. Incluso, otro desafío más es que, como dijimos anteriormente, este tipo de procesos implican, la mayoría de las veces, más de una reformulación del interrogante. Es siempre, a nuestro entender, una de las tareas más difíciles de afrontar pero, al mismo tiempo, es una tarea que tiene un valor incalculable. En este sentido, Singer, Ellerton y Cai (2015) expresan:

> La era de la tecnología de la información y la comunicación crea nuevos entornos y necesidades sociales. Al vivir en un mundo donde la interdependencia y la dinámica se convierten en características principales de la sociedad global, las generaciones jóvenes tienen que enfrentar cambios impredecibles con los que deben aprender a lidiar. En consecuencia, los sistemas educativos de todo el mundo apoyan (o al menos deberían prestar atención) a un proceso muy rápido de cambio de prioridades. Inherentemente, las estrategias de enseñanza y aprendizaje están influenciadas por este contexto. Como práctica de aprendizaje y pensamiento, el planteamiento de problemas puede desempeñar un papel esencial en este cambio.[4] (p. 7).

[4] Traducción propia.

Bajo esta perspectiva y comprendiendo la importancia que tiene, como futuras docentes, formar estudiantes capaces, no solo de resolver problemas sino, en un paso previo, formularlos, es que nos interesó investigar acerca de planteamientos de problemas. Es decir, si nuestra intención es ayudar a estudiantes a plantearse problemas, nos preguntamos: ¿qué características tienen los problemas que los estudiantes de nuestras prácticas plantearon si no estuvieron condicionados por nosotras como docentes? Es decir, la única indicación que recibieron de nuestra parte fue, como mencionamos anteriormente, que el problema debía estar formulado en forma de pregunta y con una contextualización previa que explicara cómo y/o por qué habían llegado a formularlo. Así pues a los estudiantes no se les había dado instrucción previa de qué significaba un problema bien formulado dado que nuestra intención era que fueran ellos mismos quienes, con ayuda de nosotras, pudieran comprender las fallas que tenían los problemas formulados y de qué manera podían remediarlas.

Para intentar dar respuesta al interrogante que planteamos decidimos utilizar como insumo los problemas que los grupos propusieron en la primera entrega del PMM. Si bien hubo varias instancias en las cuales nosotras realizamos correcciones e hicimos sugerencias para que modifiquen las preguntas, decidimos analizar únicamente los problemas propuestos inicialmente.

En relación a las consignas que les dimos a los estudiantes en el momento de realizar esta etapa de planteamiento del problema (Ver Figura N°51) podemos mencionar: que el interrogante estuviese vinculado a la temática de la flor de la abundancia, que coloquen una breve introducción acerca de cómo llegaron a plantearse dicha pregunta y/o porqué la plantearon, y que la misma estuviese formulada a modo de pregunta. Los grupos tenían la libertad de proponer la cantidad de preguntas que quisieran, algunos lograron responderlas a todas mientras que otros grupos no, por falta de tiempo.

- *Sobre el planteamiento del problema:*
  - *Pueden plantear más de uno.*
  - *Tiene que guardar relación con la información recolectada.*
  - *Debe ser planteado en forma de pregunta.*
  - *Escribir una breve introducción de cómo llegaron a plantear ese problema y/o por qué lo plantearon.*

Figura N°51: Consigna que les dimos a los estudiantes.

3.2 Análisis de la problemática

Para poder llevar a cabo el análisis de las problemáticas planteadas por los estudiantes en su primera entrega del PMM, proponemos cuatro categorías de análisis las cuales enunciamos y describimos a continuación:

Formulación del problema

En esta categoría nos interesa analizar, como su nombre lo indica, aquello referido a la formulación del problema, es decir, si el enunciado es comprensible o no, si tiene coherencia y está redactado correctamente, si se realizan apreciaciones personales, si presenta un contexto que permita entender cómo surgió el problema y/o por qué. Esperamos con este análisis observar algunas características que nos permitan dar cuenta de la *buena formulación* de los problemas.

A partir de las características antes mencionadas y las consignas que les dimos a los estudiantes consideramos que un problema está bien formulado cuando:

- El problema sea comprensible, esto quiere decir que quien lo lea no tenga la necesidad de hacerse preguntas cuyas respuestas le permitirían entender el problema.
- El interrogante presente un contexto (que describa por ejemplo el tiempo, las personas, el espacio físico), ya que éste facilita el entendimiento del propio problema.
- Tanto la forma de resolver el interrogante como su respuesta no sean evidentes, sino que impliquen un desafío para el estudiante.

Naturaleza del problema

En relación a esta categoría, nos interesa clasificar el tipo de problema que los estudiantes plantearon, de acuerdo a si la pregunta es abierta o cerrada. Cuando hablamos de pregunta abierta nos referimos a aquella que admite más de una respuesta, mientras que, pregunta cerrada será aquella que posee una única respuesta. A su vez, en esta categoría observamos si la solución al problema es evidente o no (es decir, si la respuesta a la pregunta es inmediata y resolverlo no implica un PMM), y si requiere buscar información en otras fuentes para resolverlo, además de las que proporciona el problema en sí.

Vínculo con la realidad

En esta categoría nos interesa analizar, como su nombre lo indica, de qué manera se relaciona el problema planteado con la realidad. Para esto miraremos, principalmente, el tipo de referencia[5] del problema (realidad, semi-realidad, matemática pura) y de qué manera se vincula el tipo de referencia con la especificidad del problema. Es decir, las variables que toman los estudiantes para plantear el problema y los datos que presenta el mismo, ¿generan que el problema se ubique en la semirrealidad cuando, modificando los datos, podría ubicarse en la realidad? Más aún, ¿la pregunta está formulada como podría hacerse en la realidad?

Relevancia matemática:

Finalmente, en esta categoría analizamos, a grandes rasgos, si los problemas son matematizables o no. Dado que al momento de plantear problemas no les dimos ninguna indicación a los estudiantes a excepción de que debían formular los problemas en forma de pregunta, nos interesa observar si se requieren utilizar herramientas matemáticas, en particular la función exponencial, para la resolución de las preguntas planteadas.

Dado que en la clase destinada para el planteamiento del problema hubo dos grupos de 5°B que no enviaron los archivos correspondientes y en 5°C un grupo lo entregó en blanco, los problemas que investigamos son los presentados por 11 grupos, 5 de 5°B y 6 de 5°C.

En las siguientes páginas expondremos los problemas planteados por cada uno de los 11 grupos y analizaremos las categorías mencionadas anteriormente, para luego destacar aquellos aspectos que consideramos más importantes y/o recurrentes.

Grupo N°1

En la Figura N°52 presentamos la etapa del planteamiento del problema que realizó el grupo N°1[6]:

[5] Ponte, J. P. (2005)

[6] No hay correspondencia alguna entre los estudiantes que conforman un cierto grupo y la numeración del mismo, simplemente los enumeramos con el objetivo de ordenarlos.

Situación problemática

Frente a esto la problemática que queremos resolver es ¿Cuáles son los verdaderos daños que deja esta estafa? Con la finalidad de responder este interrogante debemos conseguir la respuesta de las siguientes preguntas:

¿Cuánta gente se incorpora por nivel avanzado?

¿Cuanta gente pierde completamente su dinero?

¿Cuánta gente gana dinero? ¿Cuánto dinero?

En esta problemática se plantean variables como: cantidad de gente que se convence, cantidad de plata que se pide y cantidad de niveles que se alcanza antes de que este sistema colapse. Todas estas variables dependen de la pirámide que se plantea pero tomando a modo de ejemplo una pirámide ideal se puede llegar a un modelo matemático que pueda resolver estas problemática referidas a cualquier pirámide.

Figura N°52: Problemas planteados por el grupo N°1.

En cuanto a la primera categoría observamos que las alumnas no realizan una contextualización de las preguntas, incluso no hay alusión alguna a la flor de la abundancia. Sin embargo, destacamos que las estudiantes formulan una primera pregunta global que si bien, en principio, le falta ser acotada, las siguientes cuatro preguntas son las que le dan sentido a la primera. Es decir, la primera pregunta funciona como objetivo del trabajo y las otras cuatro son el modo de poder alcanzar ese objetivo. Incluso, si la primera pregunta estuviese sola, sí podríamos considerar que hay apreciaciones personales al mencionar *los daños* y la *estafa*. Pero justamente que hayan planteado las otras cuatro preguntas es lo que genera que se pase de apreciación personal a objetivo; la intención del trabajo es demostrar eso, no se parte de que es una estafa sino que la conclusión será esa.

A pesar de ello, al analizar las cuatro preguntas últimas observamos que, como era de esperar, les falta ser trabajadas: cuando preguntan sobre la cantidad de gente que gana o pierde dinero no se explicita en qué momento o fase del proceso de la flor de la abundancia se va a medir eso. Es decir, falta agregar alguna variable que permita decidir en función de qué se medirá esa cantidad de gente.

Además, se preguntan sobre la gente que pierde *completamente* su dinero. Ante esto, pareciera que es posible perder solo una parte y eso no es cierto; quien ingresa a la flor de la abundancia invierte todo su dinero y solo ganará cuando esté en el nivel de agua, antes no. De la misma manera, al último problema en el cual se preguntan sobre la cantidad de dinero que ganará quien resulte beneficiado, le falta información y la respuesta es directa. Una vez que se sabe con cuánto dinero se ingresa a la flor, esa respuesta es evidente; basta con multiplicar ese número por la cantidad de pétalos que hay en el nivel fuego.

Esto se relaciona con la segunda categoría de análisis que refiere a la naturaleza de los problemas. En este sentido podemos decir que el problema guía es distinto a los otros: su resolución dependerá de a qué se considere daño y, por lo tanto, es un problema amplio y abierto que requiere ser desmenuzado para lograr responderlo. En cambio, las otras preguntas si bien aún falta delimitarlas, son de naturaleza cerrada y servirán como medio para argumentar en la respuesta de la primera pregunta.

Con respecto al vínculo con la realidad observamos que la referencia dependerá de la manera en que afronten los problemas. Como dijimos anteriormente, a los últimos cuatro problemas les falta ser acotados. La manera en que se acoten hará que el tipo de referencia sea realidad o semi-realidad. Por ejemplo, si deciden que el dinero invertido es $2, será semi-realidad. Pero si investigan cuánto dinero se invertía en las flores de la abundancia que sucedieron en Argentina este año, la referencia del problema será realidad. Más allá de eso, la pregunta objetivo está completamente vinculada con la realidad y con un interrogante que les surgió a las alumnas respecto a un tema del cual había mucha información en internet.

Por último, con respecto a la relevancia matemática de los problemas podemos decir que la pregunta objetivo no es matematizable en sí misma sino que a partir de los resultados obtenidos al responder las otras preguntas, es que se dará respuesta a ese problema. En el caso de los otros cuatro problemas sí es necesario hacer un modelo matemático específico para poder darles respuesta pero en el último en el cual se preguntan respecto de la cantidad de dinero, el modelo es una función lineal en la cual se multiplicará por 8 (o por la cantidad de personas en el nivel fuego) la cantidad de dinero que se "invierte" al ingresar. Esto es así porque las estudiantes consideraron la cantidad de dinero como una variable.

Grupo N°2

A continuación (ver Figura N°53) mostramos el trabajo realizado por el segundo grupo en relación al planteamiento del problema.

Introducción:

Luego de investigar y buscar información acerca de lo que es una economía piramidal, nos planteamos si, a escala mundial, este sistema podría llegar a ser infinito o, en caso contrario, cuál sería el lapso de tiempo para que colapse. Además, nos interesó el hecho de que existen múltiples rumores de que estas economías son una gran estafa, por esto, tenemos la intención de comprobar si realmente funcionan y cuál es la mayor probabilidad de expansión de la mencionada “flor de la abundancia”.
A su vez, encontramos que, en la actualidad, en Argentina se formó una “nueva flor de la abundancia” conformada únicamente por mujeres que apoyan una ideología feminista radical (que pretende erradicar al sistema capitalista). Es así que las inversionistas son convencidas de que derrocarán a este sistema con un nuevo modelo económico que consiste en una economía piramidal. Sin embargo, nos interesó investigar si esta población femenina, es suficiente para realizar un sistema o que tan grande puede llegar a ser. Tenemos una concepción de que, debido a rumores, toda la población Argentina no obtiene grandes frutos, y resulta contradictorio que la las mujeres que comparten esta ideología feminista sean suficientes para permitir el funcionamiento de la flor.
Muchas personas son persuadidas y deciden formar parte de este modelo debido a que cuando los primeros reciben lo prometido, estos anhelan octuplicar sus ganancias al igual que ellos y así la cantidad de gente involucrada en la flor crece. Sin embargo, el problema ocurre cuando no se encuentran suficientes “fuegos” y el sistema deja de funcionar estafando a muchas personas.
Problema:

¿El sistema de economía piramidal denominado "Flor de la abundancia" puede ser infinito? ¿En qué momento colapsa el sistema y por qué razón?
¿La población argentina feminista radical es suficiente para crear un sistema de la “flor de la abundancia” exitoso? ¿Y la población feminista mundial?

Figura N°53: Problemas planteados por el grupo N°2.

Al observar este planteamiento vemos que hay dos subtítulos: introducción y problema. Cabe aclarar que la introducción presentada es introducción a la problemática, no al trabajo. En relación a la primera categoría destacamos que los problemas presentados por las estudiantes de este grupo guardan relación con la investigación realizada previamente acerca de la flor de la abundancia. Su interés está íntimamente relacionado con las búsquedas que realizaron en internet sobre la temática, lo cual no sólo le proporciona un marco a las preguntas planteadas sino que también muestra la necesidad de resolverlas. De la misma manera que en el grupo N°1, las alumnas presentan un primer problema, más general, y luego un segundo problema más concreto, en el cual fijan una cierta población (población argentina feminista radical). Observamos que, si bien las preguntas presentan un contexto, no son del todo comprensibles ya que, por ejemplo, no queda claro a qué se refieren con *población feminista radical*, no se proporciona una definición al respecto ni algún parámetro que determine quiénes conforman dicha población. Lo mismo ocurre cuando, en el segundo problema, plantean "*un sistema de la flor de la abundancia exitoso*", aquí no se especifica qué quiere decir que dicho sistema sea exitoso o cuándo ocurriría esto. Por lo tanto podemos decir que, desde nuestro punto de vista, los problemas no se encuentran completamente bien formulados, se requiere definir previamente ciertos conceptos para que la comprensión sea absoluta.

Además, notamos que las estudiantes realizan apreciaciones personales al indicar que "*el sistema deja de funcionar estafando a muchas personas*". Lo correcto aquí sería establecer según quién o qué fuente esto es así. Sin embargo, destacamos que, en ciertas partes del párrafo hacen referencia a que existen *rumores* acerca de que los sistemas piramidales son una estafa.

En cuanto a la naturaleza de las preguntas podemos decir que, si bien es necesario definir el significado de determinados conceptos para que las mismas tengan sentido (como por ejemplo qué quiere decir que un sistema sea *infinito* o que *colapse*), todas las preguntas son de naturaleza cerrada, puesto que admiten una única respuesta. Incluso la mayoría están planteadas de forma tal que las respuestas son del tipo dicotómicas (sí/no).

Con respecto a la categoría de análisis "vínculo con la realidad", podemos advertir que las estudiantes formularon los problemas en base a las noticias que leyeron en el momento de realizar la investigación de la temática, por lo cual identificamos el tipo de referencia de los problemas con la realidad. Por último, en cuanto a la relevancia matemática consideramos que, para dar respuesta a las preguntas propuestas es necesario, por un lado buscar información en otras fuentes para poder resolverlo (por ejemplo la población mundial) y, por otro lado, implica la construcción de un modelo matemático. Más aún, dicho modelo se corresponde con una función exponencial.

Grupo N°3

En la Figura N°54 mostramos los problemas presentados por el grupo N°3.

Problemáticas:

Al buscar información y experimentar el proceso de la flor de la abundancia nos dimos cuenta que muchas veces se pierde o se gana dinero, Por eso nos planteamos estas preguntas:

- ¿ Se acabarían los inversores en un pueblo de 100 habitantes ?

Pensamos que si hubiera 100 personas en un pueblo y todas utilizan esta economía piramidal llegaría un punto en el cual se saturaría de pirámides y pueden llegar a quedarse sin inversores, entonces este sistema se rompería y para los de más alto nivel o rango la ganancia será mucho menor del esperado y para los recién unidos no tendría ganancia sino que hubieran perdido esa inversión.

- ¿ Si esta se acaba quien se hace responsable ?

En el caso de que este sistema se acabara ya sea porque no tienen suficientes participantes nuevos o por alguna otra causa nadie se hace responsable sino que los inversores perderían su dinero y los de rango mas altos ganarian menos.

- ¿ Se pueden acabar las flores o estas son infinitas ?

Esto dependerá en donde pongamos a prueba este sistema, por ejemplo si lo hacemos en un lugar donde haya pocas personas como puede ser un pueblo pequeño, un colegio, etc llegará un punto en el que se saturaria de flores en el casos de la flor de la abundancia, y entonces al haber muchas flores no quedarían inversores, pero si lo hacemos en el mundo completo ya seria mucho mas complicado que se acabe porque hay mucha más personas que invirtieron.

Figura N°54: Problemas planteados por el grupo N°3.

Lo interesante de los problemas planteados por dicho grupo es que, no solamente hicieron preguntas sino que esbozaron respuestas que podrían tener el lugar de las hipótesis: cuál esperaban que sea el resultado que surja de su modelo matemático. Es en estas hipótesis en donde se observa la contextualización que hacen de los problemas y en donde, a su vez, se aclara de qué están hablando. En estas mismas hipótesis dan cuenta de que falta acotar los problemas o que la respuesta no depende de la construcción de un modelo matemático. Por ejemplo, en la segunda pregunta dan cuenta de que la *responsabilidad* no es algo que puedan medir con un modelo matemático sino que la respuesta es directa: nadie se hace responsable. Y, por lo tanto, quienes "invirtieron" y no llegaron a estar en la posición de agua pierden su dinero. Esa pregunta no genera más interrogantes y se responde con una investigación acerca de distintos casos de este fenómeno y cómo se resolvieron. No hay en la respuesta a la pregunta una matematización por detrás. Sin embargo, el vínculo con la realidad es fuerte pues es una pregunta que surge de su misma investigación y de la necesidad de comprender qué sucede en el caso de que el proceso de la flor de la abundancia no pueda continuar y quede trunco: ¿quién se hace cargo?

En cambio, en la tercera pregunta en donde se preguntan si las flores pueden *ser infinitas*, entendemos que los alumnos se refieren a que el proceso de la flor de la abundancia sea infinito, es decir, que sea una economía que funcione - alternativa al capitalismo -. Ahí la hipótesis que realizan da a entender que falta acotar su pregunta pues afirman que el colapso del sistema dependerá de la cantidad de gente que haya disponible para ingresar a esta economía. Lo interesante es que la primera pregunta es la misma pero acotada a una posible población de 100 habitantes. Por supuesto, que esta población es ficticia y no se encuentran evidencias de que hayan recurrido a alguna referencia propia en la realidad para proponer esta población y, por eso, se ubica dentro de la semi-realidad. En cambio, la tercera pregunta pareciera tener la intención de quedar dentro de una referencia a la realidad pero debe ser acotada para poder ser respondida. Más allá del tipo de referencia, ambas preguntas (la primera y la tercera) son matematizables e incluso responden a modelos exponenciales.

Por último, nos llamó la atención que no parece haber una relación directa entre la motivación, es decir, la breve introducción que los estudiantes presentan antes de cada pregunta, y los problemas planteados, por lo tanto, no nos queda claro de qué manera surgieron sus preguntas.

Grupo N°4

En la siguiente figura se encuentra lo realizado por el grupo N°4 en relación a la etapa en cuestión.

Planteamiento del problema:

Introducción de cómo llevamos al problema:

Luego de leer sobre la flor de la abundancia y las economías piramidales nos interesó saber cómo funcionan matemáticamente las flores y poder dar cuenta de cuándo es que estas se terminan y se terminan transformando en una "estafa" para los últimos inversores

Preguntas problemáticas:

¿Cuál es el modelo matemático que sigue la flor?¿Es un modelo autosustentable?

¿Cuándo termina colapsando el sistema en una supuesta población de 1000 habitantes?

Figura N°55: Problemas planteados por el grupo N°4.

Al observar la etapa del planteamiento del problema realizado por dicho grupo, una de las primeras cuestiones que nos llamó la atención es que ambos problemas poseen como tipo de referencia la semi-realidad. Esto se debe a que, si bien se trata de un tema de la realidad, al mencionar la frase *modelo matemático* el problema inmediatamente deja de formularse del modo en que se haría en una situación de la vida cotidiana. Asimismo, el hecho de suponer que se está considerando una población con un valor numérico de exactamente 1000 habitantes, hace que se trabaje con una población con un tamaño idealizado y, probablemente, inexistente. En cuanto a la formulación podemos decir que el primer problema que plantearon los alumnos no es completamente comprensible ya que no está claro a qué se refieren con el término *autosustentable*. Además los estudiantes realizan algunas apreciaciones personales al mencionar que "*se terminan transformando en una estafa para los últimos inversores*" sin especificar según quién o quiénes esto es así.

Con respecto a la relevancia matemática de los problemas planteados pensamos que, más allá de que es necesario modificar las preguntas para que tengan sentido y se entiendan, al plantearse directamente cuál es el modelo matemático que sigue la flor de la abundancia, claramente se está poniendo énfasis en la matematización. Además, la segunda pregunta responde a un modelo matemático que es, en efecto, del tipo exponencial.

Grupo N°5

Lo realizado por el grupo N°5 se puede ver en la Figura N°56 que se muestra a continuación:

Problemática:

¿Por que hay más gente que gana que la que pierde?
¿Siempre colapsan las flores de la abundancia?
En el caso que esto suceda ¿Por que ocurre esto? ¿Que pasa con los últimos inversores?

Figura N°56: Problemas planteados por el grupo N°5.

Lo primero que llama la atención de los problemas planteados por estas alumnas es que no tienen introducción, no hay ninguna justificación o explicación de por qué o cómo llegaron a plantearse estos problemas en particular y no otros, aunque la consigna decía explícitamente que debían hacerlo.

Con respecto a la formulación encontramos que el primer problema asume que es más gente la que gana que la que pierde. Antes de esta pregunta debería haber una previa en la cual se muestre que eso es efectivamente cierto y, esa pregunta anterior, es la que daría lugar a la matematización. Preguntar el por qué serviría para explicar ese modelo y cuál es el motivo que lleva a que el resultado se de. Esta pregunta, de la forma en que está hecha, genera que quien la lea pueda responder de acuerdo a su interpretación.

En el segundo caso de preguntas sí tienen la estructura que mencionamos anteriormente: antes de preguntar el por qué se cuestionan si efectivamente sucede. De esta manera, quien lee estas preguntas comprende que primero se va a realizar un análisis sobre el funcionamiento de este sistema y luego se explicarán los motivos detrás que llevan a que el resultado suceda. Sin embargo, observamos que se menciona que lo que colapsa son *las flores de la abundancia*, y estrictamente hablando, lo que colapsa es el "sistema económico" que surge a partir de este fenómeno. Además, la última pregunta: *¿qué pasa con los últimos inversores?* tiene las mismas características de las que hablamos anteriormente: es una pregunta que puede responderse sin necesidad de una matematización y con una investigación de casos de personas que ingresaron a este tipo de "economías" y no se vieron beneficiados.

De todas formas, todas las preguntas se referencian en la realidad y, por lo tanto, se vinculan con la misma no sólo al querer encontrar características del funcionamiento de este tipo de sistemas sino al procurar analizar la respuesta y poder comprender el porqué del fenómeno. Estas últimas preguntas (las que quieren explicar el porqué) no tienen una matematización directa, en cambio, aquellas que quieren probar un hecho (*¿siempre colapsan las flores de la abundancia?*) sí se matematizan directamente, sin embargo, se debe definir previamente qué se entiende por colapsar. Dado que el colapso tiene que ver, indefectiblemente, con la evolución en el número de flores y esta evolución es un crecimiento exponencial, el modelo matemático que dará respuesta tendrá involucrado una función exponencial.

<u>Grupo N°6</u>

Continuamos con el análisis del sexto grupo, cuyo trabajo podemos observar en la siguiente figura:

Conclusión:

A partir de lo investigado la problemática que decidimos plantear es el hecho de que en el hipotético caso de que participaremos en una economía Piramidal no tendríamos una garantía de que pudiésemos recuperar nuestra inversión.En el caso de que ingresamos a una economía Piramidal abierta quedaría a nuestro criterio si el invertir o no, y al ser abierta y ser conscientes de ello no podríamos quejarnos en el supuesto caso de que está sature, ya que desde un principio conocíamos los riesgos de nuestra inversión.Diferente sería el caso de entrar sin saberlo a una economía Piramidal cerrada ya que podríamos denunciar nuestra pérdida de dinero debido a que nuestro aporte económico al sistema habría sido inducido a partir de una falsa propuesta de inversión, lo cual es denunciable por fraude.

Figura N°57: Problemas planteados por el grupo N°6.

En el caso de este grupo observamos que, en primer lugar, los estudiantes colocaron como título de la etapa correspondiente al planteamiento del problema la palabra *conclusión*. Interpretamos que esto se debe a que el planteamiento surge como consecuencia de haber realizado previamente la investigación sobre la flor de la abundancia y economías piramidales y el énfasis está puesto en lo que los estudiantes concluyeron de dicha investigación. En segundo lugar, en el texto no está claro cuál es el problema que se plantearon, más allá de que no hay una pregunta, se realizan distintas afirmaciones a lo largo del párrafo que no permiten dilucidar el problema que se quiere abordar. A partir de esto también notamos que los alumnos realizan apreciaciones personales el expresar que en una economía piramidal cerrada se pierde dinero y que, por lo tanto, es un fraude.

Dado que los estudiantes no formularon ningún problema, no nos fue posible continuar con el análisis, es decir, investigar en función a las cuatro categorías de análisis mencionadas anteriormente.

Grupo N°7

Los problemas presentados por el grupo N°7 son los que aparecen en la Figura N°58.

PROBLEMAS:

- ¿Qué pasa si una vez que terminó la 1era fase del proceso no hay gente que quiera invertir?
- En una fase hay 15 personas implicadas , y 14 de estas no cobran, si se encuentran 7680 personas ¿ Cuántas no cobran y cuántas se necesitan para continuar el proceso?
- ¿Cuántas fases se necesitan para que el número de personas supere la población de nuestro país (44,27 millones)? ¿Cuánto dinero habría involucrado? ¿De cuántas células estaríamos hablando?
- ¿Cuántas fases se necesitan para que el número de personas supere el total de la población mundial (7000 millones, aproximadamente)? ¿Cuánto dinero habría involucrado? ¿De cuántas células estaríamos hablando?

Figura N°58: Problemas planteados por el grupo N°7.

En las preguntas que plantearon los alumnos es notoria la especificidad de los datos que aparecen; la población no es una variable sino que está fija. Es decir, los problemas son más acotados que los que proponen otros grupos. Más allá de eso, no presentan una introducción acerca de la manera en que llegaron a plantear dichos problemas. Introducción que podría servir para aclarar el número que figura en la segunda problemática: 7680. Sin una explicación ese número es completamente aleatorio y descontextualizado. Si bien se colocan otros valores (como la población argentina y la población mundial), éstos aparecen de manera tangencial, no son lo principal de la pregunta, lo que importa no es tanto el número en sí, que incluso los colocan entre paréntesis, sino lo que dichos números representan, que son las poblaciones que quieren estudiar.

De todos modos, es interesante observar que el hecho de que las poblaciones se encuentren fijas, los acerca a la etapa de construcción del modelo matemático, presentar esos números acotan los problemas y les permite aproximarse a un problema que sea modelizable matemáticamente. Esto no sucede con la primera pregunta cuya respuesta es directa y no depende del número de fase que se esté considerando: en cualquiera de ellas, si no hay más inversores el sistema se rompe. Las consecuencias de la ruptura de ese sistema se pueden encontrar con una simple investigación de casos en donde esto sucedió.

Los dos últimos problemas son en realidad los mismos, lo único que cambia es la población que se está considerando, ambos están conformados, a su vez, por tres preguntas. Las primeras son a las que nos referimos en el párrafo anterior pero las otras dos tienen características distintas. Para que el interrogante acerca de la cantidad de dinero que habría involucrado sea comprensible, es necesario definir cuánto dinero se pedirá para ingresar al sistema, es decir, falta acotar el problema. A su vez, a la pregunta acerca de la cantidad de células que habría formadas le falta, nuevamente, contextualizar. Hasta el momento, siempre se había hablado de flores, no de células.

En cuanto al vínculo con la realidad encontramos que los tipos de referencia son de realidad y semi-realidad. Incluso aquellos que son de semi-realidad, por ejemplo, la segunda problemática y las preguntas acerca de la cantidad de dinero involucrado, podrían trasladarse a una referencia en la realidad si estuvieran contextualizados y/o estuvieran más acotados.

Por último, en aquellos problemas que sí son matematizables, el modelo que está por detrás es el de una función exponencial.

Grupo N°8

Observemos primero los problemas presentados por el grupo N°8, antes de proceder a su respectivo análisis.

Generación	Inversores	Beneficiados	Personas que no cobran	Relación entre los que cobran y los que no
1	15	1	14	14
2	31	3	28	9,333333333
3	63	7	56	8
4	127	15	112	7,466666667
5	255	31	224	7,225806452
6	511	63	448	7,111111111
7	1023	127	896	7,05511811
8	2047	255	1792	7,02745098
9	4095	511	3584	7,01369863
10	8191	1023	7168	7,00684262
11	16383	2047	14336	7,003419638
12	32767	4095	28672	7,001709402
13	65535	8191	57344	7,000854597
14	131071	16383	114688	7,000427272
15	262143	32767	229376	7,00021363

Problemas:

1) ¿En qué otras fases , se repite que la relación entre los que cobra y los que no se repite que está sea un número natural ?
2) Ya que la relación es cada vez menor de las personas que pierden con las que ganan cuantas fases o generaciones tienen que pasar para que la relación Entre los que cobran y los que no ,sea menor a 6
3) En la fase 10, ¿cuánto dinero han recaudado las personas que estuvieron en el puesto de agua?

Figura N°59: Problemas planteados por el grupo N°8.

Con respecto a este grupo, lo primero que notamos es que todas las preguntas que plantearon están generadas a partir de analizar la tabla anterior, la cual fue encontrada en internet por los propios estudiantes. El problema que esto conllevó fue que, si bien las preguntas que propusieron resultan muy interesantes y de relevancia matemática, los alumnos interpretaron mal la tabla, puesto que no se percataron de que, para cada generación, las variables "*Inversores", "Beneficiados", "Personas que no cobran y Relación entre los que cobran y los que no"*, están pensadas como lo acumulado hasta dicha generación. Por ejemplo, los estudiantes consideraron que en la generación 2 había 31 inversores, cuando en realidad hay 31 inversores *en total*, 15 de la primera generación y 16 de la segunda.

Esta incorrecta interpretación de la tabla generó que las preguntas presentadas carezcan de sentido y que, por lo tanto, sus respuestas fuesen inmediatas; no era necesario construir un modelo matemático para responder a las preguntas. A modo de ejemplo, notar que la relación entre los que cobran y los que no siempre es 14 (y por lo tanto siempre es un número natural). Esto se debe a que en cada flor hay 15 participantes, de los cuales 14 pierden y uno gana.

Más allá de esto, los problemas presentados no se encuentran contextualizados puesto que el grupo no realiza ninguna introducción acerca de cómo llegaron a plantearse los mismos y/o por qué lo hicieron. Entendemos que los problemas se generaron a partir de observar la tabla pero no está expresado cómo hallaron la misma ni en el marco de qué.

En cuanto al vínculo con la realidad podemos decir que todos los problemas se encuentran en el contexto de la semi-realidad, si bien parten de la temática de la flor de la abundancia, no son preguntas que se formulen así en la vida real.

Grupo N°9

En la Figura N°60 exponemos lo realizado por el grupo N°9 y, posteriormente, realizamos su correspondiente análisis.

∆SOBRE EL PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Luego de investigar sobre la flor de la abundancia y de analizar muchos casos de gente que ha sido estafada con esta táctica llegamos a esta pregunta:
¿Hay alguna táctica para no atorarse en la Flor de la Abundancia?

Figura N°60: Problemas planteados por el grupo N°9.

En relación al problema planteado por este grupo, podemos decir que el mismo presenta una contextualización muy poco detallada. Si bien en la consigna de la actividad les pedíamos que la introducción (la cual debía dar pie para poder entender por qué y/o cómo se plantearon dicha pregunta) sea breve, la misma es fundamental para poder ubicar al lector.

En cuanto a la formulación de la pregunta notamos que no está claro a qué se refieren las estudiantes con el término *atorar*, lo cual hace que el enunciado del problema no sea del todo comprensible. Si atorar significa para las alumnas perder dinero, entonces antes de esta pregunta deberían plantearse si es posible perder dinero al ingresar a un sistema como el de la flor de la abundancia. Más allá de esto, la respuesta a esta pregunta parece inmediata puesto que, en caso de no reunir a las personas necesarias, el sistema no puede continuar y, por lo tanto, todos los integrantes de la flor, pierden su dinero.

Un punto del problema planteado que nos llamó la atención es que las estudiantes utilizan la palabra *táctica* dos veces en el párrafo, pero haciendo referencia a dos aspectos distintos: por un lado, al propio sistema de la flor de la abundancia y, por otro lado, como sinónimo de estrategia o método. Nos parece que esto, en lugar de aclarar, genera confusión. Sería conveniente utilizar otras palabras para mejorar el entendimiento del lector.

Por último, la pregunta formulada por las alumnas no implica una matematización para ser respondida, sin embargo, podría ser realizada en una situación de la vida real de la misma forma en que está planteada. Esto hace que posea un tipo de referencia de realidad.

Grupo N°10

A continuación podemos observar el problema planteado por el grupo N°10 (ver Figura N°61).

Problemática:
*Vamos a intentar demostrar a la gente que la flor de la abundancia es una estafa mostrando la cantidad de inversores los cuales serían necesarios para que este modelo funcione un tiempo prolongado.

Figura N°61: Problemas planteados por el grupo N°10.

En cuanto a la primera categoría, advertimos que esta problemática no tiene ninguna introducción ni está formulado en forma de pregunta, que eran dos criterios que los estudiantes debían tener en cuenta. En primer lugar, determinan el objetivo de su trabajo: demostrar que el sistema *flor de la abundancia* es una estafa. Sin embargo, el cómo lo van a hacer no está debidamente explicado. Quieren ver la cantidad de inversores que serían necesarios para que este sistema funcione *un tiempo prolongado*, pero no especifican qué es un tiempo prolongado o cómo lo medirían. Y si no consideran que haya un final para ese tiempo, entonces no sería una estafa. Es decir, si el sistema pudiese sostenerse ad eternum, todos los inversores pasarían eventualmente a ser aguas de alguna flor y, entonces, no perderían plata. Pero puede suceder que los estudiantes no consideren por *estafa* lo mismo que consideramos nosotras. El hecho de que el problema se preste a estas libres interpretaciones es lo que demuestra la falta de claridad que posee.

Sin embargo, es interesante ver la estructura que tiene el problema. Como ya hemos visto anteriormente, antes de describir qué es específicamente lo que quieren ver, plantean una pregunta objetivo que guiará todo el resto de las decisiones. Los problemas que se plantean después tendrán el objetivo de responder a esa pregunta guía. Y en este objetivo último del trabajo se hace evidente el vínculo con la realidad: los estudiantes quieren demostrar algo que han visto en muchas noticias: que el sistema económico que se propone a través del fenómeno de la flor de la abundancia es una estafa. No les alcanzó con la investigación que realizaron, quieren ser ellos quienes den argumentos que sostengan esa afirmación. De esta manera, el vínculo con la realidad es muy estrecho pero hasta no tener una pregunta formulada correctamente no podríamos decir cuál es el tipo de referencia en la que se encuentra. De la misma manera, la relevancia matemática dependerá de la pregunta que se hagan. En principio, la relación entre la fase en la que se encuentra el sistema y la cantidad de inversores involucrados responde a un modelo exponencial. Es decir, con este interrogante, los estudiantes podrían llegar a un modelo del tipo que pretendíamos nosotras con el PMM.

Grupo N°11

Finalmente, haremos referencia al análisis de los problemas propuestos por el último grupo (ver Figura N°62).

PREGUNTAS:

1. ¿Podría una flor de la abundancia en el cual el agua estaría en la última fase, es decir que sea regresiva?
2. ¿Cuantas flores de la abundancia se deberían hacer para que más de la mitad gane?
3. ¿Teniendo una flor de la abundancia en Argentina, qué se puede hacer para que haya menor gente estafada?
4. ¿En la fase n°13, cuántas flores se hicieron?¿Quien estaría en el primer puesto?

Figura N°62: Problemas planteados por el grupo N°11.

Al observar lo realizado por este grupo, lo primero que nos dimos cuenta es que los estudiantes no realizaron ninguna introducción, simplemente expusieron las preguntas sin comentar cómo les surgieron las mismas.

En la primera pregunta no se comprende a qué hacen referencia con el término *regresiva*, más allá de la intención de que esto quede claro al expresar que es "*una flor de la abundancia en el cual el agua estaría en la última fase*". En la formulación de la segunda pregunta no se entiende a qué mitad se están remitiendo, no se especifica la población que se está considerando. Sin embargo, para responder a esta pregunta, se puede construir una función exponencial y, por lo tanto, es un problema matematizable. Con respecto a la tercera pregunta, la misma es de naturaleza abierta ya que puede admitir muchas respuestas, sin embargo sugiere que, de llevarse a cabo un sistema como el de la flor de la abundancia, habría gente estafada, siendo esto una apreciación personal de los estudiantes. Por último, en la cuarta pregunta nos llamó la atención el valor numérico que los estudiantes plantearon, ¿por qué pensaron en la fase 13?, además no está claro qué significa *estar en el primer puesto*, ya que los ganadores se llevan siempre la misma cantidad de dinero, independientemente de la fase en la que se encuentren. Quizás este grupo no haya comprendido del todo cómo es el funcionamiento de la flor de la abundancia que les presentamos en la clase anterior y por ello se plantearon dicha pregunta.

En cuanto al contexto de los problemas consideramos que tanto el segundo como el cuarto se encuentran en el entorno de la semi-realidad, mientras que la tercera pregunta está formulada como podría hacerse en la realidad.

3.3 Conclusión del análisis

Como conclusión podemos decir que al analizar los problemas que surgieron de los estudiantes en su primera aproximación a planteamientos de problemas observamos algunas características comunes.

Todos los grupos presentaron problemas con una fuerte vinculación con la realidad, la motivación que los llevaba a plantear esos problemas tenía que ver con su propia investigación y experimentación con el fenómeno de la flor de la abundancia. Podemos conectar esta característica al hecho de la forma en que presentamos el tema y la información que aparecía en internet; fue a partir de hechos reales y noticias e incluso los mismos estudiantes pudieron experimentar el fenómeno en el aula a partir de la simulación. Esto tuvo una fuerte influencia no solo en la forma en que se presentaban los problemas sino en las temáticas abordadas; encontramos evidencia de la preocupación de los estudiantes por explicar que este tipo de economías era una estafa o por comprender si era posible que el sistema colapse o no. Esto también se vio influenciado por la cantidad de noticias que hay en internet respecto a este hecho.

En relación a esto, cabe destacar la importancia que tiene la Modelización Matemática como herramienta de aprendizaje. No es un dato menor la creciente cantidad de trabajos de investigación que hay en relación a esta práctica pedagógica. El paradigma de la enseñanza matemática tradicional sostenido, por un lado, en la idea de que la matemática debe ser descubierta y no producida y por otro lado, en el papel del docente como responsable de lograr que el alumno acceda a ese mundo matemático, un ente alejado de la realidad, al cual él ya accedió, comienza a dejar lugar a un nuevo paradigma en el cual se considera a la matemática como una construcción social y a la actividad matemática como una actividad de producción. Bajo este presupuesto el punto de partida de la actividad matemática no son las definiciones matemáticas sino los problemas (Charlot, 1986).

Partiendo de esta idea, al realizar el análisis pudimos observar la dificultad que tuvieron los estudiantes para poder plantear un problema acabado y potable para ser pensado y trabajado matemáticamente. Esto es, en parte, consecuencia de que los problemas analizados fueron aquellos surgidos del primer acercamiento de los estudiantes a plantear problemas sobre esta temática. Sin embargo, debemos destacar que a medida que se avanzó en el PMM, los estudiantes fueron afinando los problemas hasta que lograron plantearlos con las características necesarias. Además la dificultad mencionada anteriormente se relaciona justamente con el hecho de que no se considera a la formulación de problemas como parte esencial del proceso de enseñanza-aprendizaje y como tal, debe comprenderse como un proceso que debe trabajarse, ineludiblemente, en todos los niveles educativos. Siguiendo a Einstein e Infeld:

> La formulación de un problema es a menudo más esencial que su solución, que puede ser simplemente una cuestión de habilidad matemática o experimental. Plantear nuevas preguntas, nuevas posibilidades, considerar las viejas preguntas desde un nuevo ángulo, requiere imaginación creativa y marca un verdadero avance en la ciencia. (citado en Getzels. 1979, p. 168).[7]

Bajo esta perspectiva, la formulación de un problema genera un salto cognitivo distinto y más profundo que resolver situaciones problemáticas presentadas por un tercero. Tener una inquietud y poder formularla como problema a ser resuelto es un aprendizaje en sí mismo. Un estudiante que desarrolla esta habilidad es un estudiante que aumenta su cognición del mundo que lo rodea y, por lo tanto, es un tema de aprendizaje y de enseñanza por derecho propio (Getzelz, 1979).

A pesar de la importancia y el valor que posee que los estudiantes tengan la oportunidad de plantearse problemas, en el Diseño Curricular de la Educación Secundaria de la Provincia de Córdoba encontramos escasas instancias en las cuales se hace referencia a la actividad de plantear problemas, no así a la tarea de resolución de situaciones problemáticas. Más aún, en el Diseño Curricular de la Educación Secundaria, orientación

[7] Traducción propia.

en Ciencias Sociales y Humanidades (2012-2020), se menciona escasas veces, en particular en la sección correspondiente al espacio curricular de Matemática, dice: “Es posible considerar diferentes contextos (internos o externos a la matemática), que permitan plantear problemas en los que la resolución requiera el uso de conocimientos matemáticos.” (p. 20).

En este sentido y, como modo de continuar investigando acerca de esta problemática, nos preguntamos: ¿por qué en el Diseño Curricular se hace poco foco en el planteamiento de problemas matemáticos siendo que hay una cantidad significativa de trabajos relacionadas con este tema?

Siguiendo a Cutiño, R. (2017):

> [...] el profesor de Matemática no solo necesita saber formular problemas matemáticos, también debe saber enseñar a formular problemas matemáticos, por cuanto los estudiantes de secundaria básica y del preuniversitario, según las exigencias actuales de estos niveles de enseñanza, deben formular y resolver problemas matemáticos donde se refleje la actividad económica y social del país, el progreso de la ciencia y la tecnología, así como, los problemas medio ambientales. (p. 210).

En relación a esta última cita, nos planteamos: ¿cómo puede contribuir un docente a la formulación, por parte de los estudiantes, de problemas matemáticos en la Educación Secundaria? Y más aún, ¿Qué estrategias pedagógicas puede utilizar un docente para llevar a cabo un proceso de enseñanza-aprendizaje en el cual se trabaje la formulación de problemas por parte del estudiante?

4. Reflexiones finales

Para finalizar el presente informe nos parece oportuno hacer una breve reflexión sobre nuestras prácticas profesionales.

Es interesante hacer especial mención a una de las estrategias pedagógicas desarrolladas en nuestras prácticas: la modelización matemática. Tenemos una fuerte convicción de que es importante proponer esta metodología de enseñanza-aprendizaje en el aula porque consideramos que, entre otras cosas, propicia en los estudiantes el desarrollo de la alfabetización matemática como competencia. En este sentido, Skovsmose (2000) afirma que: "Esta alfabetización matemática no sólo se refiere a unas destrezas matemáticas, sino también a la competencia para interpretar y actuar en una situación social y política que ha sido estructurada por las matemáticas." (p. 4).

Vivenciar un PMM contribuye a la construcción del sentido de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes ya que les permite comprender que, a través de la matemática, es posible describir y resolver situaciones de la vida real. También, la modelización matemática permite a los estudiantes mejorar las capacidades de lectura, interpretación y formulación y resolución de problemas. Son muchos los autores que hacen referencia a las potencialidades de trabajar con procesos de modelización, al respecto Molina Mora, (2017) afirma:

> Las ventajas que ofrece la modelación matemática incluyen la posibilidad de representar un problema, tomar decisiones, generar y verificar hipótesis, hacer predicciones y dar interpretaciones en un contexto específico, lo cual en general favorece el aprendizaje por descubrimiento y por cooperación, así como el desarrollo de habilidades y actitudes positivas relacionadas con la toma de decisiones e interacción entre pares.

Los alumnos de nuestras prácticas mostraron compromiso, interés y motivación en la propuesta, lo cual vimos reflejado en los resultados de los informes que presentaron. Además es destacable la mejora en capacidades de formulación de problemas. Sin embargo tuvimos algunas dificultades vinculadas a la falta de tiempo para finalizar el proceso de la forma en que habíamos planificado

A pesar de las dificultades seguimos apostando a desarrollar estrategias pedagógicas que coloquen al estudiante en un papel protagónico y que evidencien el carácter social y cultural de la matemática como sostiene Sadovsky (2005). En este sentido y siguiendo a esta misma autora, la modelización matemática contribuye a tener una visión más integrada de la actividad matemática y ofrece la posibilidad de actuar sobre una porción de la realidad a través de un aparato teórico. La idea de modelización conlleva la idea de producción de conocimiento lo cual permite situar el aspecto central al que se apunta a través de la enseñanza. Es decir, apostamos a dejar de lado la noción de la matemática como un *algo* ya dado, heredado, para pensarla entonces, como el resultado de procesos sociales-históricos-políticos y, en ese sentido, construida. En donde el objetivo no sea solamente dar respuestas a interrogantes ya planteados sino la elaboración de hipótesis, conjeturas que sean contrastadas y validadas o no, pero sosteniendo al alumno como constructor de ese conocimiento. Como sostiene Charlot (1986):

> Democratizar la enseñanza de la matemática supone en principio que se rompa con una concepción elitista de un mundo abstracto que existiría por sí mismo y que sólo sería accesible a algunos, y que se piense en cambio la actividad matemática como un trabajo cuyo dominio sea accesible a todos [...] (p. 3).

5. Referencias

Bassanezi, R. (1994). Modelling as a teaching-learning strategy. *For the Learning of Matehematics*. (14)2, 31-35.

Blomhøj, M. (2004). *Mathematical modelling - A theory for practice*. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby & K. Walby (Eds.), International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics, (pp. 145-159). Suecia: National Center for Mathematics Education. Existe traducción de este artículo en Revista de Educación Matemática, 23(2), 20-35. Córdoba.

Charlot, B. (1986). *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas*. Conferencia dictada en Cannes.

Cutiño Reinaldo, A. J., Concha Yero, L. y Noguera Matos, J. L. (2017). Formulación de problemas matemáticos a partir de la respuesta esperada. *Roca,* 13(4), 207-218.

Davis, P. y Hersh, D. (1989). *Experiencia Matemática*. Barcelona: Editorial Labor.

Diseño Curricular Educación Secundaria. Encuadre General 2011-2020. Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba.

Diseño Curricular del Ciclo Orientado de la Educación Secundaria – Ciencias Sociales y Humanidades. Documento de trabajo 2012-2020. Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba.

Esteley, C., Marguet, A. y Cristante, A. (2012). *Explorando construcciones geométricas con GeoGebra*. En J. Adrover y G. García, Serie "B" Trabajos de Matemática. XXXV Reunión de Educación Matemática Argentina. Notas de Cursos, (pp. 19-28). Córdoba: FAMAF.

Getzels, J. W. (1979). Problem Finding: a Theoretical Note. *Cognitive Science,* (3)2, 167-172.

Gvirtz, S. y Palamidessi, M. (2008). *El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza*. Buenos Aires: Editorial Aique.

Molina Mora, J. A. (2017). Experiencia de modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de tópicos de cálculo. *Uniciencia,* (31)2, 19-36. doi: http://dx.doi.org/10.15359/ru.31-2.2

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. En Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (11-34). Lisboa: APM.

Rojano, T. (2014). *El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de la investigación en el campo*. Educación Matemática, 25 años, marzo de 2014, 11-30.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Libros del Zorzal. Buenos Aires.

Salett Biembengut, M. y Hein, N. (1999). Modelación Matemática: Estrategia para enseñar y aprender matemáticas. *Educación Matemática,* (11)1, 119-134.

Salett Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación Matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, (16)2, 105-125.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics, in *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, (Ed.) Grouws, Macmillan, New York. Se dispone de traducción al español.

Singer, F. M., Ellerton, N. F. y Cai, J. (2015). *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice.* New York: Springer.

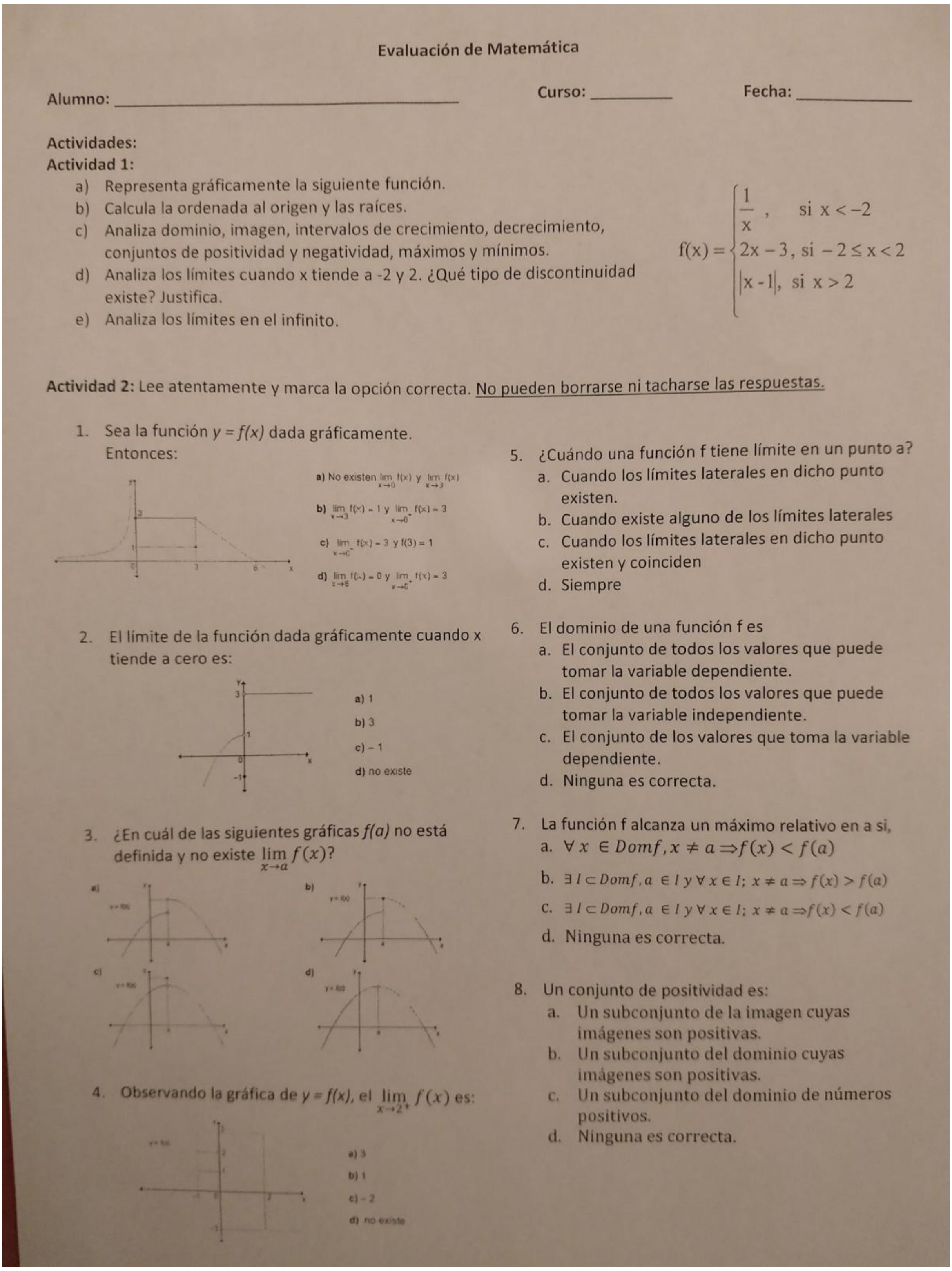
Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3-26.

Sureda, P., Otero, M. R. y Donvito, A. (2017). *Secuencia Didáctica para enseñar las funciones exponenciales en la Escuela Secundaria: Una propuesta diseñada en el Marco de la Teoría de los Campos Conceptuales*. Buenos Aires.

Villarreal, M. (2013) Humanos-con-medios: un marco para comprender la producción matemática y repensar prácticas educativas. En E. Miranda y N. Bryan (Comp.), *Formación de profesores, curriculum, sujetos y prácticas educativas. La perspectiva de la investigación en Argentina y Brasil*, (pp. 85- 122). Córdoba: UNC.

6. Anexos

6.1 Anexo A: Instrumento de evaluación utilizado por la docente titular



Evaluación de Matemática

Alumno: ____________________ Curso: ________ Fecha: __________

Actividades:

Actividad 1:

a) Representa gráficamente la siguiente función.
b) Calcula la ordenada al origen y las raíces.
c) Analiza dominio, imagen, intervalos de crecimiento, decrecimiento, conjuntos de positividad y negatividad, máximos y mínimos.
d) Analiza los límites cuando x tiende a -2 y 2. ¿Qué tipo de discontinuidad existe? Justifica.
e) Analiza los límites en el infinito.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x < -2 \\ 2x - 3, & \text{si } -2 \le x < 2 \\ |x - 1|, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Actividad 2: Lee atentamente y marca la opción correcta. No pueden borrarse ni tacharse las respuestas.

1. Sea la función $y = f(x)$ dada gráficamente. Entonces:
   a) No existen $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $\lim_{x \to 3} f(x)$
   b) $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$
   c) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 3$ y $f(3) = 1$
   d) $\lim_{x \to 6} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$

2. El límite de la función dada gráficamente cuando x tiende a cero es:
   a) 1
   b) 3
   c) – 1
   d) no existe

3. ¿En cuál de las siguientes gráficas $f(a)$ no está definida y no existe $\lim_{x \to a} f(x)$?
   a) b) c) d)

4. Observando la gráfica de $y = f(x)$, el $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ es:
   a) 3
   b) 1
   c) – 2
   d) no existe

5. ¿Cuándo una función f tiene límite en un punto a?
   a. Cuando los límites laterales en dicho punto existen.
   b. Cuando existe alguno de los límites laterales
   c. Cuando los límites laterales en dicho punto existen y coinciden
   d. Siempre

6. El dominio de una función f es
   a. El conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente.
   b. El conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente.
   c. El conjunto de los valores que toma la variable dependiente.
   d. Ninguna es correcta.

7. La función f alcanza un máximo relativo en a si,
   a. $\forall x \in Dom f, x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a)$
   b. $\exists I \subset Dom f, a \in I$ y $\forall x \in I;\ x \neq a \Rightarrow f(x) > f(a)$
   c. $\exists I \subset Dom f, a \in I$ y $\forall x \in I;\ x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a)$
   d. Ninguna es correcta.

8. Un conjunto de positividad es:
   a. Un subconjunto de la imagen cuyas imágenes son positivas.
   b. Un subconjunto del dominio cuyas imágenes son positivas.
   c. Un subconjunto del dominio de números positivos.
   d. Ninguna es correcta.

Figura N°63: Instrumento de evaluación de Matemática.

6.2 Anexo B: Criterios de evaluación del informe del PMM

Etapa	Criterios de evaluación	Puntaje asignado
Investigación	¿El informe contiene la etapa de investigación con título?	0,5
	¿Toman las correcciones que se les hicieron?	0,2
	¿La primera entrega la hacen en tiempo y forma?	0,2
	¿Citan las fuentes de información según las normas APA?	0,2
	La información recolectada, ¿ayuda a entender qué es un esquema piramidal y, en particular, cómo funciona la flor de la abundancia?	0,5
	Coherencia entre subtítulo y lo que contiene el párrafo	0,1
Planteamiento del problema	¿El informe contiene la etapa de planteamiento del problema con título?	0,5
	¿Escriben una breve introducción de cómo llegaron a plantear los problemas?	0,3
	¿Los problemas están planteados en forma de pregunta?	0,3
	Coherencia entre subtítulo y lo que contiene el párrafo	0,1
Recolección de datos	¿El informe contiene la etapa de recolección de datos?	0,5
	¿Registran de alguna manera conveniente los datos recolectados?	0,2
	¿Es pertinente la recolección de datos? Es decir, ¿hay datos de más o de menos?	0,5
	¿Está explicada la forma en la que recolectaron los datos?	0,4
	¿La entrega 2 se realizó en tiempo y forma?	0,2
	Coherencia entre subtítulo y lo que contiene el párrafo	0,1

Construcción del modelo	¿El informe contiene la etapa de construcción del modelo?	0,5
	¿Construyen un modelo matemático que ayude a resolver el problema?	0,5
	¿Explicitan cuáles son las variables que intervienen en el modelo?	0,2
	¿Está explicado cómo llegaron a construir el modelo?	0,2
	¿Está explicado de forma completa y clara cómo llegaron a construir el modelo?	0,4
	¿El modelo matemático es correcto?	0,4
	¿La entrega 3 se realizó en tiempo y forma?	0,2
	Coherencia entre subtítulo y lo que contiene el párrafo	0,1
Aspectos generales	Capacidad de trabajo en equipo	0,4
	¿El informe contiene la bibliografía?	0,2
	¿Resuelven el/los problemas?	0,4
	Redacción	0,2
	Ortografía	0,2
	¿Es razonable el resultado?	0,2
	¿Contiene una conclusión?	0,2
	¿La conclusión está diferenciada del resto del informe por un subtítulo claro?	0,2
	En la conclusión, ¿retoman los problemas y explican de qué manera les sirvió el PMM para responderlos?	0,2
	¿Toman las sugerencias de la primera entrega del informe final para un avance significativo?	0,3
	Las entregas de informe final, ¿se realizaron en tiempo y forma?	0,2

Tabla N°11: Criterios de evaluación del informe del PMM.

6.3 Anexo C: Instrumentos de evaluación

Evaluación de Matemática

Curso: 5° año "C"

Nombre y apellido:..

Tema a evaluar: Función exponencial

Pu

nta

jes

1 1.2 pts.	2				3			4 3 pts.	Opt. 1 pts.	Total 11 pts.
	a 0.7 pts.	b 0.7 pts.	c 0.7 pts.	d 0.7 pts.	a 1.5 pts.	b 0.75 pts.	c 0.75 pts.			

Criterios de evaluación:

- ❑ **Interpretación de consignas**
- ❑ **Correcta justificación de las respuestas dadas y los cálculos realizados**
- ❑ **Registro de los cálculos parciales**
- ❑ **Razonabilidad en los resultados**
- ❑ **Prolijidad, legibilidad y ortografía**
- ❑ **Colocar respuestas en lenguaje coloquial**

Parte teórica

1) Dar la definición de función exponencial vista en clase.
2) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar todas sus respuestas.
   a) La imagen de la función $f(x) = -3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + 7$ es $(-\infty; 7)$
   b) La ecuación de la asíntota horizontal de la función $f(x) = 3^{x-4} - 5$ es $y = -4$
   c) La función $f\ (x) = 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x$ es una función decreciente.

d) La función $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 3$ corta al eje de las ordenadas en y = -1

<u>Parte práctica</u>

3) Resolver el siguiente problema:

Una población de aves, cuenta inicialmente con 50 individuos y se triplica cada año.

a) ¿Cuál es la función que representa el crecimiento de la población de aves?

b) ¿Cuántas aves hay después de 3 años?

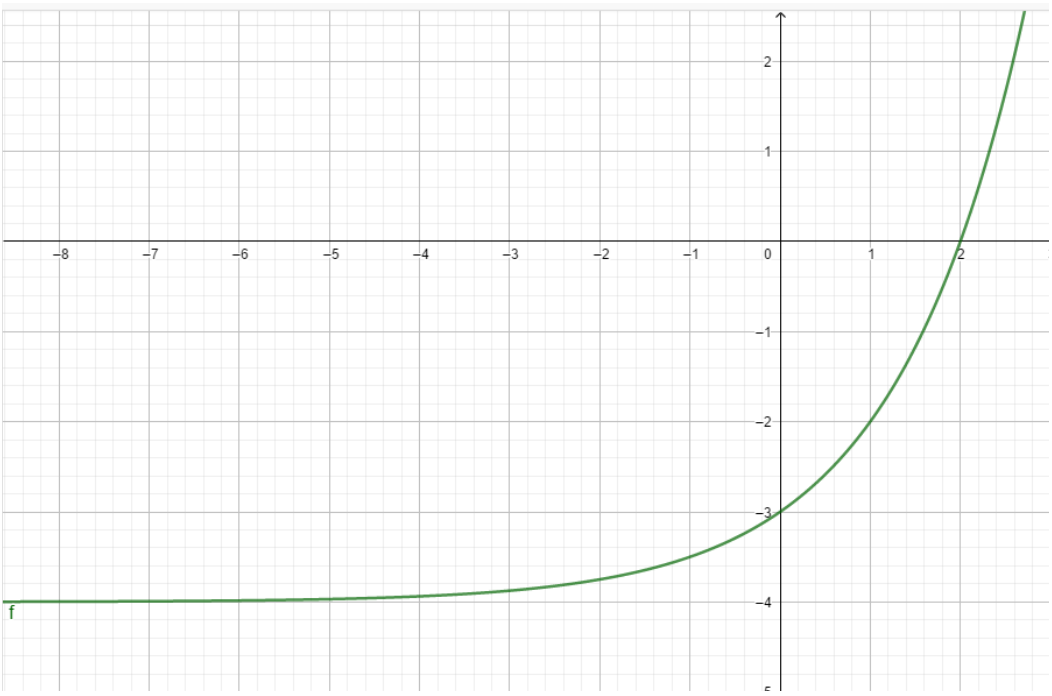
c) ¿Después de cuántos años la población de aves será de 12.150 individuos?

4) Realizar la gráfica de la función exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 2^x - 1$ y analizar dominio, imagen, conjunto de positividad, conjunto de negatividad, conjunto de ceros, intervalo de crecimiento, intervalo de decrecimiento, asíntota horizontal, ordenada al origen y $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

<u>Optativa</u>

Escribir la función exponencial que le corresponde al siguiente gráfico sabiendo que la función es de la forma $f(x) = a^x + b$.

<u>Eva</u>
<u>lua</u>
<u>ció</u>
<u>n</u>
<u>de</u>
<u>Ma</u>
<u>tem</u>
<u>átic</u>
<u>a</u>



Cur
so: 5° año “B”
Nombre y apellido: ....

Tema a evaluar: Función exponencial

Pu

nta

jes

1	2				3			4	Opt.	Total
1.2 pts.	a 0.7 pts.	b 0.7 pts.	c 0.7 pts.	d 0.7 pts.	a 1.5 pts.	b 0.75 pts.	c 0.75 pts.	3 pts.	1 pts.	11 pts.

Criterios de evaluación:

- ❑ **Interpretación de consignas**
- ❑ **Correcta justificación de las respuestas dadas y los cálculos realizados**
- ❑ **Registro de los cálculos parciales**
- ❑ **Razonabilidad en los resultados**
- ❑ **Prolijidad, legibilidad y ortografía**
- ❑ **Colocar respuestas en lenguaje coloquial**

Parte teórica

1) Dar la definición de función exponencial vista en clase.
2) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar todas sus respuestas.
   a) La ecuación de la asíntota horizontal de la función $f(x) = 2^{x-4} - 7$ es $y = -4$.
   b) La función $f(x) = 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x$ es una función creciente.
   c) La imagen de la función $f(x) = 2 \cdot 4^x - 5$ es $(-5 ; \infty)$.
   d) La función $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 3$ corta al eje de las ordenadas en $y = 1$.

Parte práctica

3) Resolver el siguiente problema:

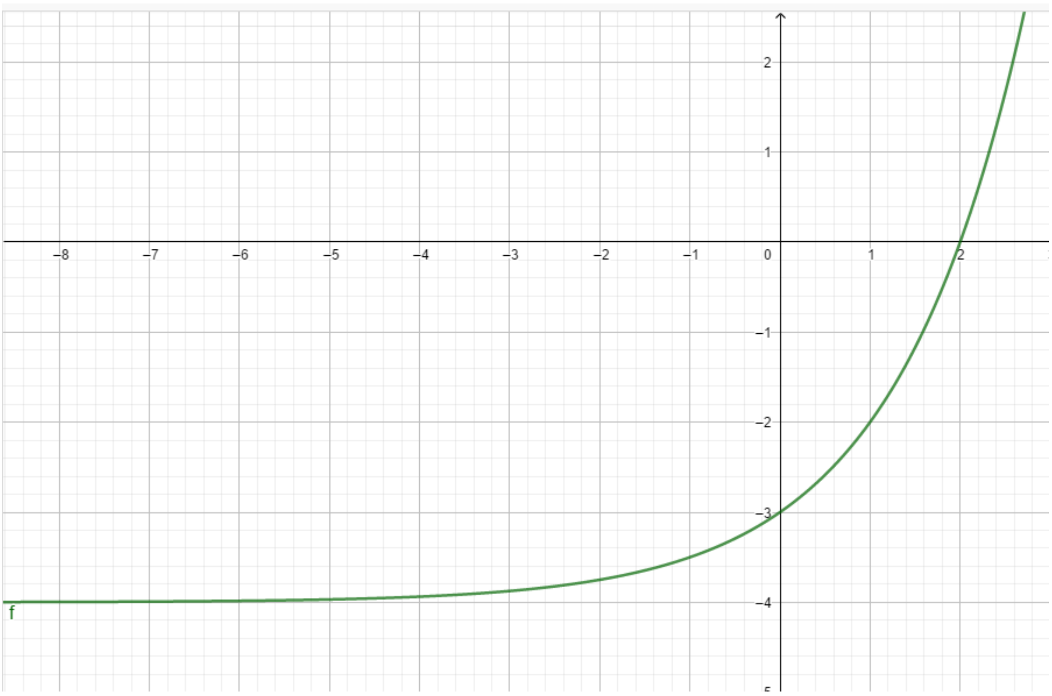
Una población de moscas, cuenta inicialmente con 20 individuos y se quintuplica cada día.

a) ¿Cuál es la función que representa el crecimiento de la población de moscas?
b) ¿Cuántas moscas hay después de 3 días?
c) ¿Después de cuántos días la población de moscas será de 62500 individuos?

4) Realizar la gráfica de la función exponencial $f(x) = 9 \cdot (\frac{1}{3})^x - 3$ y analizar dominio, imagen, conjunto de positividad, conjunto de negatividad, conjunto de ceros, intervalo de crecimiento, intervalo de decrecimiento, asíntota horizontal, ordenada al origen y $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Optativa

Escribir la función exponencial que le corresponde al siguiente gráfico, sabiendo que la función es de la forma $f(x) = a^x + b$.



6.4 Anexo D: Criterios de evaluación de la evaluación sumativa

Act.	Ítem	Objetivos	Posibles resoluciones	Pts.
1		Definir de manera correcta y completa la función exponencial	Escribe sólo la fórmula	0,4
			Escribe las condiciones del parámetro *a*	0,2
			Escribe las condiciones del parámetro *b*	0,2
			Escribe las condiciones del parámetro *c*	0,2
			Escribe las condiciones del parámetro *k*	0,2
2	a)	Determinar la veracidad de una afirmación	Responde correctamente si la afirmación es Verdadera o Falsa	0,2
		Identificar el parámetro b y la información que brinda acerca de la asíntota horizontal	Justifica de forma incompleta	0,1
		Justificar correctamente de acuerdo a lo visto en clase	Justifica de forma completa	0,4
	b)	Determinar la veracidad de una afirmación	Responde correctamente si la afirmación es Verdadera o Falsa	0,2
		Identificar los parámetros *a* y *k* y la información que brindan acerca del crecimiento o decrecimiento de la función	Justifica de forma incompleta	0,1

		Justificar correctamente de acuerdo a lo visto en clase	Justifica de forma completa	0,4
	c)	Determinar la veracidad de una afirmación	Responde correctamente si la afirmación es Verdadera o Falsa	0,2
		Identificar los parámetros *k* y *b* y la información que brindan acerca de la imagen de la función	Justifica de forma incompleta	0,1
		Justificar correctamente de acuerdo a lo visto en clase	Justifica de forma completa	0,4
	d)	Determinar la veracidad de una afirmación	Responde correctamente si la afirmación es Verdadera o Falsa	0,2
		Comprender la definición de ordenada al origen y operar algebraicamente para obtenerla	Justifica de forma incompleta	0,1
		Justificar correctamente de acuerdo a lo visto en clase	Justifica de forma completa	0,4
3	a)	Interpretar la información que brinda el problema	Interpreta de forma correcta los parámetros	1
		Utilizar adecuadamente los datos que brinda la consigna	Justifica de forma correcta la fórmula obtenida	0,5
		Expresar matemáticamente un fenómeno de crecimiento exponencial con o sin ayuda de una tabla de valores		
	b)	Interpretar la fórmula obtenida en el ítem anterior y usarla de manera correcta	Opera correctamente	0,15

		Operar algebraicamente sobre la fórmula obtenida en el ítem anterior de manera correcta	Usa adecuadamente la fórmula	0,5
		Dar una respuesta razonable en lenguaje coloquial	Responde en lenguaje coloquial	0,1
	c)	Interpretar la fórmula obtenida en el ítem anterior y usarla de manera correcta	Opera correctamente	0,15
		Operar algebraicamente sobre la fórmula obtenida en el ítem anterior de manera correcta	Usa adecuadamente la fórmula	0,5
		Dar una respuesta razonable en lenguaje coloquial	Responde en lenguaje coloquial	0,1
4		Utilizar adecuadamente los parámetros de una función exponencial para graficarla	Realiza la gráfica	0,75
			Justifica la construcción de la gráfica	0,49
			Determina dominio correctamente	0,16
		Hacer corresponder un gráfico y una expresión matemática	Determina imagen correctamente	0,16
			Determina raíces correctamente	0,16
		Operar algebraicamente para calcular puntos que pertenecen a una función	Determina OAO correctamente	0,16
			Determina conjunto de positividad correctamente	0,16
		Reconocer que la función exponencial	Determina conjunto de	0,16

		tiene ciertas características	negatividad correctamente	
			Determina intervalo de crecimiento correctamente	0,16
		Coherencia entre el gráfico obtenido, el análisis realizado y el teórico visto en clase	Determina intervalo de decrecimiento correctamente	0,16
			Determina asíntota horizontal correctamente	0,16
		Analizar la gráfica en forma clara de acuerdo a lo trabajado en clase	Determina límite cuando x va a infinito correctamente	0,16
			Determina límite cuando x se va a menos infinito correctamente	0,16
Op.		Reconstruir la función a partir de la información que brinda un gráfico	Identifica correctamente puntos en el gráfico	0,2
			Utiliza correctamente los puntos identificados para determinar el parámetro *b*	0,2
		Determinar parámetros de una función a partir de un gráfico	Opera correctamente para la obtención del parámetro *b*	0,1
			Utiliza correctamente los puntos identificados para determinar el parámetro *a*	0,2
		Operar algebraicamente	Opera correctamente para la obtención del parámetro *a*	0,1

			Da la función completa	0,2

Tabla N°12: Criterios de evaluación utilizados para la evaluación sumativa.

6.5 Anexo E: Actividades propuestas que no se muestran en el informe

6.5.1: Problema del fósil

Actividad 2

Un fósil contiene una masa de carbono 14, que es una sustancia radiactiva, igual a un gramo. Después de un período de aproximadamente 6000 años, llamado período de semidesintegración, la masa radiactiva se reduce a la mitad, ya que la otra se fue desintegrando en forma continua a lo largo de ese período. Al cabo de otro período similar, queda solo la mitad de la mitad anterior, y así sucesivamente.

a. Construir una tabla con los valores de la masa de carbono 14 en los períodos de desintegración 0, 1, 2, 3, 4, 5.
b. Obtener la fórmula que relaciona la masa de carbono con el período.
c. ¿Puede la variable "período" tomar valores enteros negativos? ¿Por qué?
d. En caso de haber respondido que sí en la pregunta anterior, explicar el significado de p= - 1, - 2, - 3, y hallar los correspondientes valores de la masa de C-14.
e. ¿Puede la variable "período" asumir valores racionales no enteros? ¿Por qué?
f. En caso de haber contestado que sí en la pregunta anterior, hallar el número de años y los valores de la masa C-14 que corresponden a p = $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{10}$; $-\frac{2}{3}$.
g. Completar la tabla del punto a) con los pares de valores obtenidos en d) y f), y representarlos en un gráfico cartesiano. ¿Tiene sentido unir los puntos con una curva continua?
h. ¿Qué sucede si consideramos que la masa en p=0 es de 0,4 gramos en lugar de 1 gramo? Hallar la fórmula y graficar.

Figura N°64: Problema del fósil propuesto a los estudiantes.

6.5.2: Actividades de la Guía

Actividad 3

Analizar y graficar las siguientes funciones exponenciales sin utilizar GeoGebra:

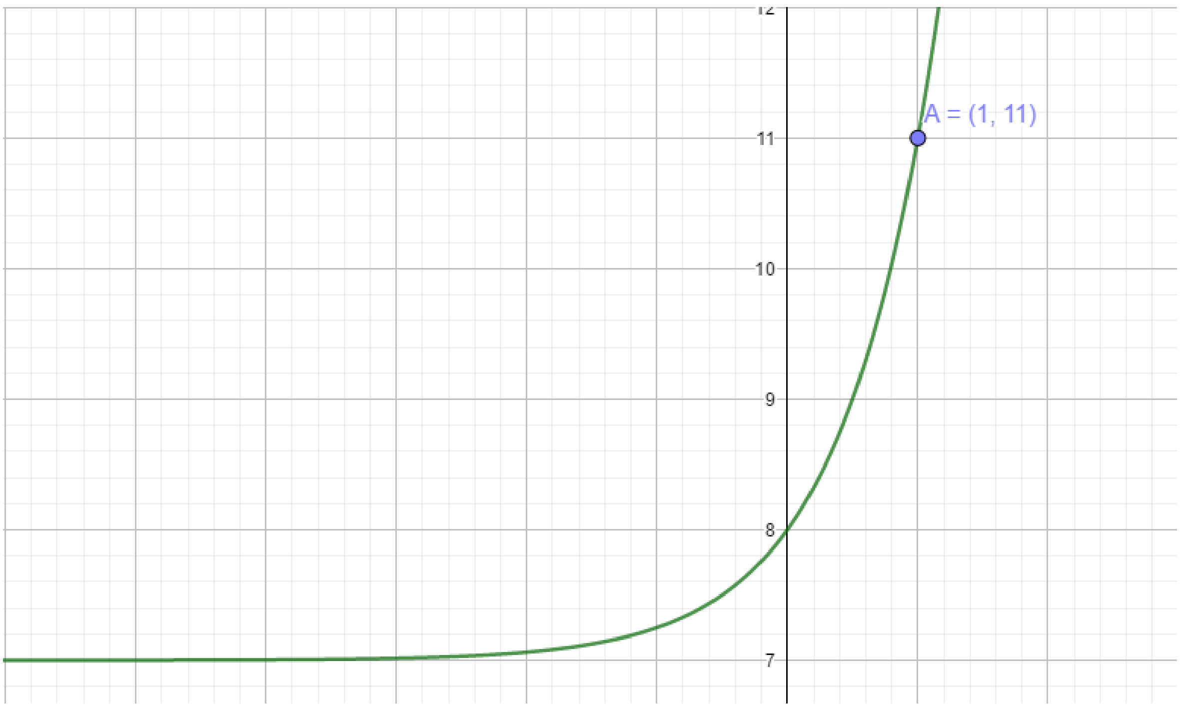
a. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

b. $f(x) = 2 \cdot 3^x - 2$

Actividad 4

Escribir la función que le corresponde a cada gráfico sabiendo que:

a. La función es de la forma $f(x) = a^x + b$



b. La función es de la forma $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+c} + b$

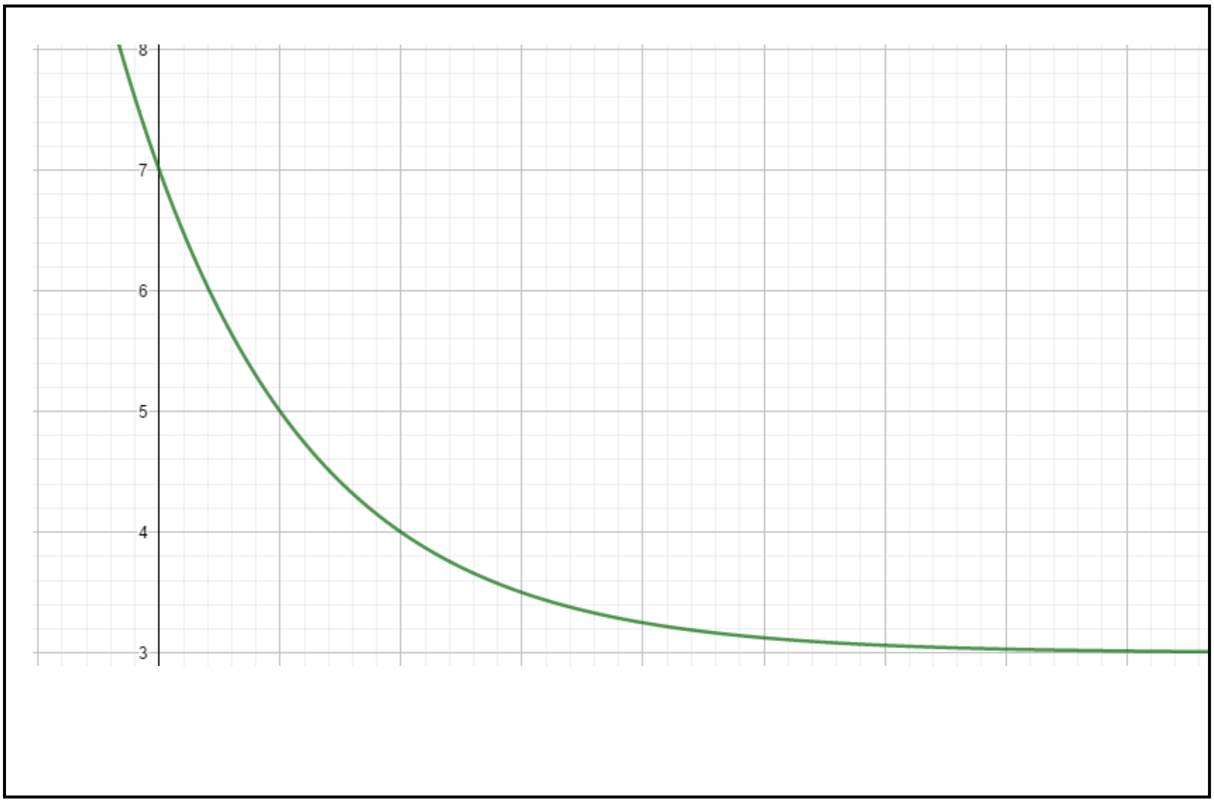


Figura N°65: Actividades de la guía.

6.5.3: Actividades de la clase de repaso

Actividad 1

Realizar la gráfica de la función exponencial $f(x) = \frac{2}{3} \cdot 3^{x+2} - 6$ y analizar dominio, imagen, conjunto de positividad, conjunto de negatividad, conjunto de ceros, intervalo de crecimiento, intervalo de decrecimiento, asíntota horizontal, ordenada al origen, $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Actividad 2

Un inversionista deposita un capital de 100 pesos en un banco y cada un año el dinero acumulado se duplica.

a. Hallar la función que relaciona el tiempo (en años) y el dinero acumulado.
b. ¿Cuánto dinero acumulado tendrá al cabo de 7 años?
c. ¿Cuántos años deben pasar para que el inversionista obtenga un millón de pesos?

Actividad 3

Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.

a. La base de una función exponencial puede ser cualquier número real.

b. La imagen de la función $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 4$ es $(-4\ ;\ \infty)$

Figura N°66: Actividades de la clase de repaso.

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación del Trabajo Final de Prácticas de Metodología y Práctica de la Enseñanza, damos Fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por el Tribunal.

UNC
Universidad
Nacional
de Córdoba

FAMAF
FAMAF
Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación

www.famaf.unc.edu.ar
Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria
CP: X5000HUA, Córdoba, Argentina
Tel: +54 351 4334051 (rotativas)
Fax: +54 351 4334054