

Estabilización de Órbitas Periódicas en Hamiltonianos T-periódicos

Raúl Ezequiel Floreani

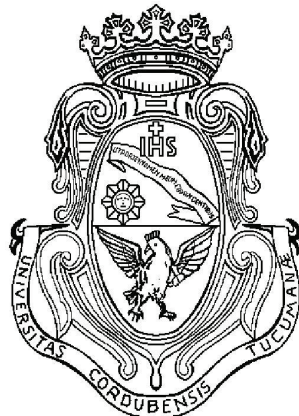
Directores:

Dr. Carlos B. Briozzo

Dr. Alejandro M. Leiva

*Trabajo especial presentado para acceder al grado de
Licenciado en Física*

*Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba*



MMXIX



Estabilización de órbitas periódicas en Hamiltonianos T -periódicos por Floreani, Raúl E., Briozzo Carlos B., Leiva Alejandro M. se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución - No Comercial - Sin Obra Derivada 4.0 Internacional.

Resumen

En este trabajo se pretende generalizar el método de control desarrollado por Leiva y Briozzo [5] a fin de hacerlo aplicable a la estabilización de órbitas periódicas inestables en Hamiltonianos periódicos en el tiempo, para el caso tridimensional general. Se presenta un nuevo formalismo teórico para controlar órbitas en la variedad central, que hasta el momento en la literatura no se hizo mención sobre como hacerlo y se prueba que es realmente necesario ejercer control sobre dicha variedad. El método a desarrollar es luego puesto a prueba aplicándolo a una selección de ejemplos provenientes de la Astronomía Dinámica, que pueden ser órbitas de transferencia entre la Tierra y la Luna u órbitas periódicas cerca de los puntos de Lagrange L_1 o L_2 para estabilizar las órbitas, por ejemplo, de una nave espacial o satélite. Además se verifica la robustez del método teniendo en cuenta las perturbaciones producidas por el Sol y los planetas, donde se consideró la atracción gravitatoria de Júpiter, que actúa como perturbación externa de la órbita periódica. Por último el método también permite obtener el consumo o impulso medio anual requerido para mantener las órbitas (de la nave o satélite) controladas durante aproximadamente 80 años y que resultaron extremadamente bajos, probando así el éxito del método de control.

Palabras claves: Caos; Método de control; Órbitas periódicas; Control de órbitas periódicas; Variedades estables e inestables; Astronomía Dinámica.

PACS: 05.45.Gg; 05.45.Pq; 45.20.Jj; 45.50.Jf; 45.50.Pk; 91.10.Sp

Abstract

In this work we intend to generalize the control method developed by Leiva and Briozzo [5] in order to make it applicable to the stabilization of unstable periodic orbits in periodic Hamiltonians in time, for the general three-dimensional case. A new theoretical formalism is presented to control orbits in the central manifold, which up to now in the literature there was no mention of how to do it and it is proved that it is really necessary to control this manifold. The method developed is then tested by applying a selection of examples from the Dynamical Astronomy, which can be transfer orbits between Earth and the Moon or periodic orbits around the Lagrange points L_1 or L_2 to stabilize the orbits, for example, a spacecraft or satellite. In addition the robustness of the method is verified taking into account the disturbances produced by the Sun and the planets, where the gravitational attraction of Jupiter was considered, which acts as external perturbation of the periodic orbit. Finally, the method also allows for consumption or the average annual boost to maintain orbit (spacecraft or satellite) controlled for about 80 years and were extremely low, proving the success of the control method.

Keywords: Chaos; Control method; Periodic orbits; Control of periodics orbits; Stable and unstable manifolds; Dynamical Astronomy.

PACS: 05.45.Gg; 05.45.Pq; 45.20.Jj; 45.50.Jf; 45.50.Pk; 91.10.Sp

Dedicado a mi familia, por su apoyo desmedido e incondicional a lo largo de este camino recorrido.

A la memoria de mi padre, por ser mi guía y un faro luminoso desde hace mucho tiempo.

Agradecimientos

En primer lugar quiero mencionar y agradecer al Dr. Carlos Briozzo, por su gran disposición, dedicación y paciencia, que desde el primer momento se vió motivado y entusiasmado por iniciar éste trabajo; su amor a la ciencia y el apoyo que me dió a lo largo de éste tiempo fueron fuente de inspiración para continuar siempre.

Al Dr. Martín Leiva, codirector de éste trabajo, por facilitarme y permitirme manipular su tesis doctoral sin tener problema alguno, por sus sugerencias y tomarse el tiempo de leer con sumo detalle cada línea aquí presentada.

A mi familia que, con su amor infinito, me apoyaron en buenos y malos momentos a lo largo de éstos años sin permitirme que me rindiera y bajara los brazos.

A mis amigos, los que estuvieron desde siempre y los que conocí en mi paso por la FaMAF, gracias por estar siempre, por cada palabra de aliento, las horas de estudio compartidas y las innumerables anécdotas vividas.

A todos, ¡MUCHAS GRACIAS!

Índice general

| | |
|---|----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Astronomía Dinámica | 3 |
| 2. Desarrollo teórico | 5 |
| 2.1. El Hamiltoniano linealizado | 5 |
| 2.1.1. La estructura de la Lagrangiana linealizada | 7 |
| 2.1.2. La estructura del Hamiltoniano linealizado | 9 |
| 2.1.3. La estructura de las ecuaciones de movimiento linealizadas | 9 |
| 2.2. El sistema linealizado | 10 |
| 2.3. Propiedades fundamentales | 11 |
| 2.4. La simplecticidad de M | 13 |
| 2.5. Clasificación de las dinámicas | 16 |
| 2.5.1. Un grado de libertad | 16 |
| 2.5.2. Dos grados de libertad | 19 |
| 2.5.3. Tres grados de libertad | 22 |
| 2.6. El sistema autónomo equivalente | 22 |
| 2.6.1. Un grado de libertad | 22 |
| 2.6.2. Dos y tres grados de libertad | 25 |
| 2.7. El “teorema fundamental” | 26 |
| 2.8. Ecuaciones de movimiento | 27 |
| 2.8.1. Matrices fundamental y de monodromía | 27 |
| 2.8.2. El sistema autónomo equivalente (SAE) | 29 |
| 2.8.3. Relación entre el SAE y el sistema T -periódico | 31 |
| 2.8.4. Dinámica para un grado de libertad | 32 |
| 2.8.5. Dinámica para dos y tres grados de libertad | 33 |
| 2.9. Autovalores y autovectores de M_L y A | 35 |
| 2.9.1. Normalización de los autovectores | 36 |
| 2.10. Bases reales para 3 g.l. | 37 |
| 2.11. Método de control para 3 g.l. | 40 |

| | |
|--|------------|
| 3. Caso especial 2D | 49 |
| 3.1. Sistemas linealizados | 49 |
| 3.2. Caso especial de sistema lineal | 50 |
| 3.3. Autovalores, autovectores y subespacios | 51 |
| 3.4. Análisis en dimensión 2 | 52 |
| 3.4.1. Silla-Silla | 53 |
| 3.4.2. Centro-Centro | 56 |
| 3.4.3. Silla-Centro | 58 |
| 3.4.4. Silla-Foco | 60 |
| 3.5. Método de control 2D | 61 |
| 3.5.1. Caso Silla-Silla | 62 |
| 3.5.2. Caso Centro-Centro | 64 |
| 3.5.3. Caso Silla-Centro | 64 |
| 3.6. Ejemplos numéricos en 2D | 66 |
| 4. Aplicación a sistemas reales | 73 |
| 4.1. Selección de órbitas | 77 |
| 4.2. Resultados numéricos | 78 |
| 4.3. Discusión | 84 |
| 5. Conclusiones y perspectivas | 87 |
| 5.1. Aspectos teóricos | 87 |
| 5.2. Implementación numérica y aplicación | 89 |
| 5.3. Perspectivas a futuro | 92 |
| A. Sobre Hamilton y Lagrange | 95 |
| A.1. Del Hamiltoniano linealizado a la Lagrangiana linealizada . . . | 95 |
| A.2. De la Lagrangiana linealizada al Hamiltoniano linealizado . . . | 97 |
| B. Clasificación de las dinámicas 2D y 3D | 103 |
| B.1. Clasificación de las dinámicas en 2 g.l. | 103 |
| B.2. Clasificación en 2 g.l. para el SAE | 105 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 2.1. Representación gráfica de las variedades | 15 |
| 3.1. Transición entre dinámicas | 61 |
| 3.2. Dinámica 2D para el caso SS | 68 |
| 3.3. Dinámica 2D para el caso sf | 69 |
| 3.4. Dinámica 2D para el caso CC | 70 |
| 3.5. Dinámica 2D para el caso SC | 71 |
| 4.1. Sistema de coordenadas sinódico | 74 |
| 4.2. Sistema de coordenadas sinódico (PBC) | 76 |
| 4.3. Sistema de coordenadas sinódico (PBC) con la perturbación externa de Júpiter | 78 |
| 4.4. Ilustraciones para las órbitas planares controladas | 79 |
| 4.5. Ilustraciones para las órbitas 3D controladas | 86 |

ÍNDICE DE FIGURAS

Índice de tablas

| | |
|---|----|
| 2.1. Método de control | 48 |
| 4.1. Condiciones iniciales de las OPs estabilizadas | 80 |
| 4.2. Características de las OPs estabilizadas | 81 |
| 4.3. Resultados del control | 82 |

ÍNDICE DE TABLAS

Capítulo 1

Introducción

En su origen a finales del siglo XIX, cuando Henri Poincaré (1854-1912) estudiaba los sistemas conservativos probó la no integrabilidad de las ecuaciones de Newton del problema de tres cuerpos y la existencia de innumerables fenómenos que no eran completamente aleatorios, sino que no respondían a una dinámica lineal. De esta manera introdujo la noción de *caos* y que fue considerado una propiedad indeseable para la mayoría de las aplicaciones prácticas de los Sistemas Dinámicos, ya que la sensibilidad extrema a las condiciones iniciales dificultaba predecir estados futuros de los sistemas, y mantener a éstos en las trayectorias o regiones deseadas requería frecuentes y sutiles “impulsos” de control. Sin embargo, a partir del trabajo pionero de Ott, Grebogi y Yorke [1], el panorama cambió radicalmente, y en la actualidad el control del caos es un área de investigación muy activa, con aplicaciones que incluyen estabilización de láseres y otros sistemas ópticos no-lineales, sistemas electrónicos, reacciones químicas, sistemas biológicos, tránsito, astronáutica, y diversas aplicaciones a la ingeniería [2, 3].

En el caso de sistemas Hamiltonianos, el caos involucra la existencia de un conjunto denso de *Órbitas Periódicas Inestables* (OPIs) [4]; la evolución temporal de una trayectoria particular resulta de la interacción directa con las variedades dinámicas de cada OPI, siendo atraída hacia cada una de ellas a lo largo de sus variedades estables, y luego repelida a lo largo de las variedades inestables. Fijada una OPI de interés, un posible método de control para mantener algún comportamiento siempre cerca de esta OPI de referencia consiste en sacar ventaja de la sensibilidad a las condiciones iniciales para alterar la trayectoria real aplicando pequeños impulsos de control de manera tal de posicionarla sobre la variedad estable de la OPI logrando, a partir de intervenciones controladas, la estabilidad dinámica alrededor de la órbita de referencia. Este programa fue llevado a cabo parcialmente en trabajos previos y aplicado a *OPIs de transferencia en el sistema Tierra-Luna* [5, 6, 7], modelado mediante el *Problema Cuasi-Bicircular Sol-Tierra-Luna* [14]. Sin embargo, en dichos trabajos sólo se consideraron casos bastante

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

restringidos, en particular el caso planar.

En éste trabajo se desarrollará el marco teórico del método de control tridimensional en forma general y luego a modo de aplicación se lo pondrá a prueba en ejemplos provenientes de la Astronomía Dinámica. En dicho marco teórico se estudiarán las condiciones que deberá cumplir el método de control a partir de la linealización del sistema alrededor de la órbita periódica; donde se dará una clasificación completa (en sistemas no degenerados), es decir, teniendo en cuenta el tipo de dinámica que describa el sistema linealizado, las cuales pueden ser, *hiperbólica* o *elíptica*, coloquialmente llamadas *silla* (S) o *centro* (C) en una dimensión, respectivamente. En dos dimensiones las dinámicas pueden ser *silla-foco* o *silla-foco de reflexión* (sf o \bar{sf}), *centro-centro* (CC), *silla-centro* o *centro-silla* (SC o CS) y *silla-silla* (SS). Mientras que en tres dimensiones, las dinámicas son combinaciones del caso unidimensional y bidimensional.

Se mostrará, además, que en todos los casos la matriz de monodromía M correspondiente puede interpretarse como el mapa- T , que representa la linealización del mapa de Poincaré alrededor de un punto fijo, de un adecuado sistema Hamiltoniano lineal y autónomo, lo que permite simplificar el desarrollo del método de control. La matriz M puede pensarse como la matriz fundamental (solución) Φ de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), evaluada al período T de los coeficientes del sistema. En el Capítulo 2 ésta matriz será necesaria para analizar las soluciones periódicas de un sistema de EDOs a partir de la teoría de Floquet [19].

A este respecto y debido al carácter caótico de los sistemas en cuestión, las simulaciones numéricas jugarán un rol crucial para plasmar las ideas en un sentido fáctico, es decir, debemos implementar numéricamente un método de control lo bastante eficaz y que permita integrar las trayectorias con la mejor precisión posible para evitar que eventuales acumulaciones de errores numéricos tiendan a diverger dichas trayectorias o en una convergencia imprecisa de las mismas. Una vez logrado éste objetivo, en primera instancia se pondrá a prueba el método para controlar órbitas periódicas en dos grados de libertad para un sistema de “juguete” (que no necesariamente representa un sistema físico real), eligiendo y variando al azar los parámetros del sistema, logrando así un barrido por las distintas dinámicas posibles (SS, SC (o CS), CC, sf y las respectivas \bar{S} o \bar{s} para los casos de puntos silla de reflexión). Luego, al momento de analizar las órbitas controladas para el caso tridimensional en éste sistema de “juguete”, primero se probará que para ciertos parámetros la dinámica se desacopla en un movimiento de dos grados de libertad idéntico al anterior más un movimiento en una dirección ortogonal, es decir, se recupera la dinámica en 2D mencionada anteriormente y se agrega un movimiento extra en una dirección ortogonal, probando así la consistencia del método en 3D llevado al caso bidimensional.

Para los problemas de interés en Astronomía Dinámica y en particular para el problema de tres cuerpos, queremos alterar el sistema aplicando

constantemente impulsos de control Δv_i , $i = x, y, z$ a las órbitas para lograr que el sistema se mantenga lo más próximo a la dirección estable de la dinámica silla (S) y anulando su componente en la dirección inestable, permitiendo mantener así al sistema bien controlado en alguna región de interés. A partir de esto y considerando, a nuestro criterio, necesario controlar en las distintas dinámicas que aparecen en el sistema, en el método de control 3D (y por lo tanto el 2D) se presenta una alternativa nueva para ejercer control sobre las variedades centrales¹ (C), que consiste en la minimización de la energía respecto a los impulsos Δv_i , lo que nos permitiría ubicarnos sobre superficies de energías menores, requisito que también se desea para el método (menor consumo de recursos); y en los casos que existan dinámicas que sean combinaciones de C y S ésta nueva alternativa de control consiste en minimizar la energía de la dinámica C respecto a Δv_i pero ahora sujeto a la condición de, como antes, posicionar la órbita sobre la dirección estable de la dinámica S. Para llevar a cabo esto último se implementa el método de los multiplicadores de Lagrange.

Si vamos a la literatura y hacemos hincapié particularmente en el libro de G. Gómez [16], con el que se basaron para realizar importantes misiones espaciales (p. ej. las órbitas Halo en torno a L_1 fueron usadas en las misiones ISEE-3 o SOHO), vemos que en ningún capítulo hace mención o implementa un método de control en las variedades centrales (C) y solo lo hace para los casos de dinámica silla (S). En particular, hasta donde el autor sabe, en la actualidad esto sigue siendo así.

Basándonos ahora en nuestra nueva propuesta para ejercer control en las variedades centrales mediante la minimización de la energía, una pregunta que puede surgir naturalmente es: ¿Qué sucede si no controlamos en la variedad central y sólo lo hacemos en la variedad silla? Abordaremos ésta pregunta más adelante y probaremos con algunos ejemplos que *no es inocuo* no controlar en la variedad central.

1.1. Astronomía Dinámica

En general, cuando intentamos resolver un problema complejo, utilizamos como paso intermedio los resultados obtenidos en modelos simplificados. En particular, el modelo del *Problema circular de tres cuerpos restringido Tierra-Luna* (PC3CR) ha permitido desarrollar extensos tratados acerca de órbitas periódicas y familias de órbitas periódicas, y sus resultados han contribuido de manera significativa en el campo de la Mecánica Celeste. Éste modelo, que describe el movimiento de dos masas primarias m_T y m_L en órbitas coplanares circulares alrededor de su centro de masa y de una tercera masa m infinitesimal, que no afecta el movimiento de las primarias, será im-

¹Representada por una familia (en torno al punto fijo) de elipses de energía constante en el espacio de las fases.

plementado como herramienta preliminar para aproximarnos a la solución de un caso más “realista” que consistirá en estabilizar órbitas periódicas de transferencia entre la Tierra y la Luna (p. ej. de una nave espacial o un satélite) mediante el método de control o para estabilizar órbitas en torno a los puntos de Lagrange (o libración) L_1 y/o L_2 , que son los puntos de equilibrio del PC3CR. Euler y Lagrange probaron la existencia de cinco puntos de equilibrio: tres puntos colineales sobre el eje que une el centro de las dos masas primarias, generalmente denotados L_1 , L_2 y L_3 , y dos puntos equilaterales denotados L_4 y L_5 . Por supuesto, debemos considerar que el objeto a poner en órbita en torno a los puntos Lagrangeanos está equipado con algún sistema de propulsión que le permita impulsarse y posicionarse sobre la órbita estable cuando así lo requiera.

Como ya dijimos, cuando uno desea obtener soluciones a problemas físicos cada vez más realistas, el costo que debemos abonar es proporcional, y como los resultados predichos por el PC3CR no coinciden con los observados en la realidad, necesariamente debemos recurrir a nuevos modelos. Por lo tanto, posterior a la implementación de éste, y con el objetivo de obtener las soluciones más precisas tratadas en el presente trabajo, se extenderá dicho modelo al denominado *Problema Bicircular* (PBC).

El PBC es un problema de cuatro cuerpos. Considera tres masas primarias m_T , m_L , m_S (en este caso, la Tierra, la Luna y el Sol) y una cuarta masa infinitesimal m (nave espacial o satélite) que no afecta el movimiento de las mismas. Las trayectorias de las masas primarias yacen en un plano; m_T y m_L se mueven en órbitas circulares alrededor de su baricentro B_{TL} y a su vez, el baricentro B_{TL} y m_S se mueven en órbitas circulares alrededor del centro de masas del sistema B . Al modelo PBC, como se verá más adelante, se lo pensar como una perturbación del modelo PC3CR.

De esta manera, podemos observar que el tratamiento del problema en cuestión se puede volver tan complejo como uno quisiera a medida que se agregan otros cuerpos masivos. En efecto y con el fin de ser un poco más meticulosos, al final del trabajo, llevaremos el PBC a un grado mayor de dificultad considerando también la influencia gravitatoria del planeta Júpiter como una perturbación externa de la órbita periódica, cuyos efectos deberán ser compensados por el método de control.

Una descripción más refinada de los modelos usados y de las implementaciones numéricas se detallarán en el Capítulo 4 cuando se analicen los ejemplos de aplicación a la Astronomía Dinámica.

Capítulo 2

Desarrollo teórico y método de control

Cuando se desea estudiar y analizar cualitativamente la dinámica de cualquier sistema físico tan rigurosamente como sea posible, por más simple que este sea, la idea es desarrollar un algoritmo que pueda ser ejecutado computacionalmente, es decir, en forma numérica, para así obtener las soluciones más precisas (hasta cierto límite) del sistema en cuestión. Pero como es sabido, primeramente debemos tener plasmado el problema con sus ecuaciones de movimiento en un marco teórico antes de sentarse a programar.

Con tal fin, como primera instancia, en este capítulo vamos a deducir las formas más generales posibles para un sistema Hamiltoniano o un sistema Lagrangiano, es decir, se presentarán las herramientas matemáticas y el formalismo necesario para obtener las ecuaciones de movimiento y a partir de éstas, la linealización de un sistema T -periódico alrededor de una órbita periódica.

Finalmente y con éste propósito, una vez que estén plasmadas las herramientas, pasaremos a obtener el desarrollo teórico del método de control en 1, 2 y 3 grados de libertad, que será de vital importancia para implementar numéricamente dicho método.

2.1. El Hamiltoniano linealizado

Consideremos un Hamiltoniano con n grados de libertad (n g.l.) T -periódico $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = H(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $H(\mathbf{x}, t_0 + T) = H(\mathbf{x}, t_0) \forall t_0$.¹

Las ecuaciones de Hamilton serán²

$$\dot{\mathbf{x}} = \Omega \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \Omega (\nabla_{\mathbf{x}} H)^T \quad (2.1)$$

¹Por generalidad asumiremos que una función constante es T -periódica $\forall T$.

²El símbolo T en las ecuaciones de Hamilton denota la *transpuesta*.

donde

$$\Omega := \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

y satisface

$$\Omega^{-1} = \Omega^T = -\Omega. \quad (2.3)$$

En este caso 0_n y I_n son las matrices nula e identidad $n \times n$, respectivamente. Consideremos también una solución periódica (período T) de las ecuaciones de Hamilton, $\phi(t) = (\phi_q(t), \phi_p(t))^T$, $\phi(t_0 + T) = \phi(t_0) \forall t_0$,

$$\dot{\phi}(t) = \Omega \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\phi(t), t) \right)^T. \quad (2.4)$$

Linealizaremos las ecuaciones de movimiento alrededor de $\phi(t)$ usando $\mathbf{x} = \phi(t) + \mathbf{y}$, desarrollando la ec. (2.4), y truncando a primer orden se obtiene

$$\dot{\mathbf{y}} = \Omega \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2}(\phi(t), t) \right)^T \mathbf{y}.$$

Tenemos entonces un sistema lineal de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes periódicos

$$\dot{\mathbf{y}} = \Omega \mathbf{H}(t) \mathbf{y}, \quad \mathbf{H}(t) := \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2}(\phi(t), t) \right)^T, \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{H}(t)$ es una matriz $2n \times 2n$, T -periódica, es decir, $\mathbf{H}(t_0 + T) = \mathbf{H}(t_0) \forall t_0$ y por construcción es *simétrica*, así que podemos reescribir

$$\mathbf{H}(t) = \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2}(\phi(t), t). \quad (2.6)$$

Vamos a suponer que la linealización es no-degenerada, es decir,

$$\det(\mathbf{H}(t)) \neq 0 \quad \forall t, \quad (2.7)$$

y además la solución periódica $\phi(t)$ es *aislada* [19].

Nótese que las *únicas* hipótesis introducidas hasta aquí son:

- (I) que el sistema es Hamiltoniano;
- (II) que el Hamiltoniano es T -periódico en t ;
- (III) que existe una solución T -periódica de las ecuaciones de Hamilton;
- (IV) la linealización alrededor de ella es no-degenerada. Por lo tanto $\phi(t)$ es aislada.

2.1.1. La estructura de la Lagrangiana linealizada

Nos interesará reducir el Hamiltoniano del sistema (2.5) a una estructura lo más “simple” posible. Sin embargo, las transformaciones a realizar resultan más sencillas en la formulación Lagrangiana, por lo que consideraremos primero ésta. Los detalles de los cálculos se muestran en el Apéndice A.

Si partimos de una Lagrangiana T -periódica, y linealizamos alrededor de una solución T -periódica aislada de las ecuaciones de Euler-Lagrange, la Lagrangiana más general que obtendremos tendrá la forma³

$$L = \frac{1}{2}a_{ij}(t)\dot{q}_i\dot{q}_j + b_{ij}(t)\dot{q}_iq_j - \frac{1}{2}c_{ij}(t)q_iq_j \quad (2.8)$$

con $a_{ij}(t)$ y $c_{ij}(t)$ simétricas, y a_{ij} definida positiva y no-singular. Vemos también que no es necesario que b_{ij} sea antisimétrica para que la transformación de Legendre lleve a un sistema Hamiltoniano linealizado. Sin embargo si definimos

$$\mathbf{b}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{b}^T), \quad \mathbf{b}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{b}^T), \quad (2.9)$$

y descomponemos $\mathbf{b} = \mathbf{b}_s + \mathbf{b}_a$, vemos que la contribución simétrica puede ponerse

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{b}_s(t) \mathbf{q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{b}_s(t) \mathbf{q} \right) - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{b}}_s(t) \mathbf{q}.$$

El primer término es una derivada total respecto de t de una función sólo de \mathbf{q} y t , y puede descartarse sin alterar las ecuaciones de movimiento. El segundo término puede absorberse en el potencial linealizado, redefiniendo

$$\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \dot{\mathbf{b}}_s(t) \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{c}(t) \mathbf{q} \longrightarrow \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{c}(t) \mathbf{q},$$

es decir, $\dot{\mathbf{b}}_s + \mathbf{c} \longrightarrow \mathbf{c}$, lo cual evidentemente no altera la simetría de $c_{ij}(t)$ ni su periodicidad. Podemos asumir entonces, sin perder generalidad que $b_{ij}(t)$ es *antisimétrica*.

Ahora notando que $a_{ij}(t)$ es una matriz real y simétrica, vemos que puede ser diagonalizada por una transformación de semejanza ortogonal, es decir,

$$\exists \mathbf{s} / \mathbf{s}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{s} = \mathbf{s}^T \mathbf{a} \mathbf{s} = \mathbf{a}_d = \text{diag}(a_1, \dots, a_n), \quad (2.10)$$

con $a_i(t) > 0$ los autovalores de $\mathbf{a}(t)$. Tanto $\mathbf{s}(t)$ como $a_i(t)$ son T -periódicas. Usando $\mathbf{s}^T \mathbf{s} = \mathbf{I}$ ponemos ahora

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{s} \mathbf{s}^T \mathbf{a} \mathbf{s} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{s} \mathbf{s}^T \mathbf{b} \mathbf{s} \mathbf{s}^T \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{s} \mathbf{s}^T \mathbf{c} \mathbf{s} \mathbf{s}^T \mathbf{q}. \quad (2.11)$$

Definiendo las “coordenadas normales”

$$\mathbf{Q} := \mathbf{s}^T \mathbf{q} \Rightarrow \dot{\mathbf{q}}^T = \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{s}^T + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{s}}^T, \quad (2.12)$$

³Se utiliza el convenio de suma sobre índices.

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEÓRICO

se puede verificar que

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{a}_d \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{a}_d (\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}}) \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}^T (\mathbf{s}^T \mathbf{b}_s) \mathbf{Q} \\ + \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{s}) \mathbf{a}_d (\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}}) \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{s}) (\mathbf{s}^T \mathbf{b}_s) \mathbf{Q} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T (\mathbf{s}^T \mathbf{c}_s) \mathbf{Q}.$$

Notemos primero que $\mathbf{s}^T \mathbf{c}_s$ es simétrica y $\mathbf{s}^T \mathbf{b}_s$ es antisimétrica, y que usando

$$\mathbf{s}^T \mathbf{s} = 1 \rightarrow \dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = 0 \Rightarrow (\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{s})^T = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = -\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{s},$$

se puede ver que $\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{s}$ es antisimétrica. Esto implica que $\frac{1}{2} \mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{s}) \mathbf{a}_d (\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}}) \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{s}) (\mathbf{s}^T \mathbf{b}_s) \mathbf{Q}$ es la contracción de \mathbf{Q} con una matriz simétrica T -periódica, y que puede absorberse en $\frac{1}{2} \mathbf{Q}^T (\mathbf{s}^T \mathbf{c}_s) \mathbf{Q}$. Por otro lado $\dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{a}_d (\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}}) \mathbf{Q}$ involucra una matriz antisimétrica, y puede absorberse en $\dot{\mathbf{Q}}^T (\mathbf{s}^T \mathbf{b}_s) \mathbf{Q}$. En definitiva, redefiniendo

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T \mathbf{q} &\longrightarrow \mathbf{q}, \\ \mathbf{s}^T \mathbf{a}_s &\longrightarrow \mathbf{a} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n), \\ (\mathbf{s}^T \mathbf{a}_s) (\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}}) + \mathbf{s}^T \mathbf{b}_s &\longrightarrow \mathbf{b}, \\ -(\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{s}) (\mathbf{s}^T \mathbf{a}_s) (\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}}) - 2(\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{s}) (\mathbf{s}^T \mathbf{b}_s) + \mathbf{s}^T \mathbf{c}_s &\longrightarrow \mathbf{c}, \end{aligned}$$

reducimos la Lagrangiana linealizada a la forma

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{b} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{c} \mathbf{q} = \frac{1}{2} a_i(t) \dot{q}_i^2 + b_{ij}(t) \dot{q}_i q_j - \frac{1}{2} c_{ij}(t) q_i q_j, \quad (2.13)$$

con la energía cinética diagonalizada, b_{ij} antisimétrica y c_{ij} simétrica, y todas T -periódicas.

Una última reducción consiste en reescalar las “coordenadas normales” para absorber los coeficientes $a_i(t) > 0$, como en (2.12) con

$$\mathbf{s}^T := \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{a_1(t)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n(t)}} \right) = \mathbf{s} \quad (2.14)$$

evidentemente simétrica y $\mathbf{s} \mathbf{a} \mathbf{s} = 1$. Luego se puede probar que la Lagrangiana tendrá la forma

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{I} \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{s} \mathbf{a} \dot{\mathbf{s}} \mathbf{Q} + \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{s} \mathbf{b}_s \mathbf{Q} + \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{s}} \mathbf{a} \dot{\mathbf{s}} \mathbf{Q} \\ + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{s}} \mathbf{b}_s \mathbf{Q} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{s} \mathbf{c}_s \mathbf{Q}.$$

Notemos que siendo \mathbf{s} diagonal, $\dot{\mathbf{s}}$ también lo es, y por lo tanto es simétrica. Luego $\mathbf{s} \mathbf{b}_s$ y $\dot{\mathbf{s}} \mathbf{b}_s$ son antisimétricas, mientras que $\mathbf{s} \mathbf{c}_s$, $\dot{\mathbf{s}} \mathbf{a} \dot{\mathbf{s}}$ y $\mathbf{s} \mathbf{a} \dot{\mathbf{s}}$ son simétricas. Por lo tanto el término $\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{s}} \mathbf{b}_s \mathbf{Q}$ es la contracción de \mathbf{Q} con una matriz

antisimétrica y se anula, mientras que $\frac{1}{2}\mathbf{Q}^T\dot{\text{sa}}\mathbf{Q}$ es la contracción de \mathbf{Q} con una matriz simétrica y puede absorberse en $\frac{1}{2}\mathbf{Q}\text{scs}\mathbf{Q}$. Por otro lado

$$\dot{\mathbf{Q}}^T\text{sa}\mathbf{Q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{Q}^T\text{sa}\mathbf{Q}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{Q}^T\frac{d}{dt}(\text{sa})\mathbf{Q},$$

así que puede absorberse también en $\frac{1}{2}\mathbf{Q}\text{scs}\mathbf{Q}$. En definitiva, redefiniendo

$$\begin{aligned} \mathbf{sq} &\longrightarrow \mathbf{q}, \\ \text{sa} &\longrightarrow \mathbf{l}, \\ \text{sbs} &\longrightarrow \mathbf{b}, \\ -\dot{\text{sa}} + \frac{d}{dt}(\text{sa}) + \text{scs} &\longrightarrow \mathbf{c}, \end{aligned}$$

reducimos la Lagrangiana linealizada a la forma

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{b}\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{c}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\dot{q}_i^2 + b_{ij}(t)\dot{q}_i q_j - \frac{1}{2}c_{ij}(t)q_i q_j, \quad (2.15)$$

con los coeficientes de la energía cinética todos iguales a la unidad, b_{ij} antisimétrica, c_{ij} simétrica, y ambas T -periódicas.

2.1.2. La estructura del Hamiltoniano linealizado

Todas las transformaciones realizadas en la Sección 2.1.1, son *transformaciones puntuales* y, por lo tanto, las inducidas por ellas en el espacio de fases son *transformaciones canónicas* [20]. Podemos entonces, limitarnos a utilizar la relación hallada entre los coeficientes de H y los de L para escribir la correspondiente expresión a la que podemos reducir el Hamiltoniano (ver Ap. A.2). Usando que \mathbf{b} es antisimétrica, es decir, $\mathbf{b}^T = -\mathbf{b}$ y que $\mathbf{a} = \mathbf{l}$, tendremos

$$\mathbf{H}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^T\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{c} & -\mathbf{b}^T\mathbf{a}^{-1} \\ -\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} & \mathbf{a}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} - \mathbf{b}^2 & \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} & \mathbf{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{l} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

y por consiguiente

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{B}\mathbf{p} - \frac{1}{2}\mathbf{p}^T\mathbf{B}\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{C}\mathbf{q}, \quad (2.17)$$

con $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ antisimétrica, $\mathbf{C} = \mathbf{c} - \mathbf{b}^2$ simétrica y ambas T -periódicas.

2.1.3. La estructura de las ecuaciones de movimiento linealizadas

De las ecuaciones de Hamilton,

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{l} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

es decir,

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= -B_{ij}q_j + p_i, \\ \dot{p}_i &= -C_{ij}q_j - B_{ij}p_j,\end{aligned}$$

tendremos

$$\ddot{q}_i = -2B_{ij}\dot{q}_j - (\dot{B}_{ij} + C_{ij} + B_{ik}B_{kj})q_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Por otro lado, de las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtiene

$$\ddot{q}_i = -2b_{ij}\dot{q}_j - (\dot{b}_{ij} + c_{ij})q_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Vemos que ambas versiones son equivalentes (como era de esperar) ya que $B_{ij} = b_{ij}$ y $C_{ij} = c_{ij} - b_{ik}b_{kj}$. Vemos también que en el caso general, donde b_{ij} o B_{ij} dependen de t , el término “potencial” $-(\dot{b}_{ij} + c_{ij})q_j$ de las ecuaciones de Euler-Lagrange contendrá una contribución antisimétrica no-trivial (y T -periódica), debida a la presencia de \dot{b}_{ij} ; sin embargo en el período del sistema dicha contribución es evidentemente de media nula, ya que

$$\frac{1}{T} \int_0^T \dot{b}_{ij}(t) dt = \frac{b_{ij}(T) - b_{ij}(0)}{T} = 0$$

por periodicidad. Éste es justamente el caso en Leiva [5].

Finalmente notemos que en muchos casos (p.ej. Leiva [5]) los coeficientes de la energía cinética resultan $a_{ij} = \delta_{ij}$, ya que partimos de las ecuaciones de movimiento para una partícula de masa m .

2.2. El sistema linealizado

Como hemos visto, si partimos de un Hamiltoniano con n g.l. T -periódico $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = H(\mathbf{x}, t)$, $H(\mathbf{x}, t_0 + T) = H(\mathbf{x}, t_0) \forall t_0$, donde $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, y linealizamos alrededor de una solución $\phi(t)$ T -periódica $\phi(t_0 + T) = \phi(t_0) \forall t_0$ aislada de las ecuaciones de Hamilton, poniendo $\mathbf{x} = \phi(t) + \mathbf{y}$ y desarrollando hasta primer orden en \mathbf{y} , el Hamiltoniano lineal T -periódico con n g.l. quedará en el caso más general posible en la forma

$$H_{lin} = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{H}(t) \mathbf{y}, \quad (2.19)$$

con $\mathbf{H}(t)$ una matriz real $2n \times 2n$ T -periódica, independiente de \mathbf{y} y no-singular, de la forma

$$\mathbf{H}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

donde \mathbf{I} es la identidad $n \times n$, $\mathbf{B}(t)$ y $\mathbf{C}(t)$ son matrices T -periódicas $n \times n$ reales, $\mathbf{B}(t)$ es antisimétrica y $\mathbf{C}(t)$ es simétrica ($\forall t$). Ésto hace que $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{y}$ sean variables canónicas y que $\Omega \mathbf{H}(t)$ sea una matriz Hamiltoniana [18, 21],

ya que $\mathbf{H}(t)$ es una matriz $2n \times 2n$ real y simétrica ($\forall t$). El Hamiltoniano se escribirá entonces

$$H_{lin} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{B} \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{B}^T \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}, \quad (2.21)$$

y las correspondientes ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\mathbf{y}} = \Omega \mathbf{H}(t) \mathbf{y}, \quad (2.22)$$

formarán un sistema (Hamiltoniano) lineal a coeficientes periódicos.

2.3. Propiedades fundamentales

Vamos a resumir varios resultados relevantes sobre estos sistemas [17, 18, 19, 20], algunos evidentes y otros no tanto.

(I) El mapa $\mathbf{x}(t_0) \mapsto \mathbf{x}(t)$ es *simpléctico*, ya que la evolución temporal (bajo el flujo generado por $H(\mathbf{x}, t)$ en este caso) es una transformación canónica [20]. En particular el mapa- T , $\mathbf{x}(t_0) \mapsto \mathbf{x}(t_0 + T)$, es *simpléctico* dado un t_0 , y es el *mapa de Poincaré* $\mathbf{P}_{t_0} : \mathbf{x}(t_0) \mapsto \mathbf{x}(t_0 + T)$ adecuado a este problema.

(II) $\phi(t_0)$ es un *punto fijo* de \mathbf{P}_{t_0} , ya que $\phi(t_0) = \phi(t_0 + T)$ [19].

(III) El sistema lineal $\dot{\mathbf{y}} = \Omega \mathbf{H}(t) \mathbf{y}$ es *Hamiltoniano*, con Hamiltoniano

$$H_{lin}(\mathbf{y}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{H}(t) \mathbf{y}, \quad (2.23)$$

que es una forma cuadrática en \mathbf{y} . Luego el mapa $\mathbf{y}(t_0) \mapsto \mathbf{y}(t)$ también es *simpléctico*, y también lo es el mapa- T $\mathbf{y}(t_0) \mapsto \mathbf{y}(t_0 + T)$.

(IV) El mapa- T $\mathbf{M}_{t_0} : \mathbf{y}(t_0) \mapsto \mathbf{y}(t_0 + T)$ es la *linealización* de \mathbf{P}_{t_0} alrededor del punto fijo $\phi(t_0)$. Esto se demuestra de la siguiente manera: partimos de

$$\mathbf{P}_{t_0}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{x}(t_0 + T),$$

y ponemos

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t) + \mathbf{y}(t),$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{t_0}(\phi(t_0) + \mathbf{y}(t_0)) &= \mathbf{P}_{t_0}(\phi(t_0)) + \frac{\partial \mathbf{P}_{t_0}}{\partial \mathbf{x}}(\phi(t_0)) \mathbf{y}(t_0) + \dots \\ &= \phi(t_0 + T) + \mathbf{y}(t_0 + T), \end{aligned}$$

y usando $\mathbf{P}_{t_0}(\phi(t_0)) = \phi(t_0)$ (por ser punto fijo) y $\phi(t_0) = \phi(t_0 + T)$ (por ser solución T -periódica),

$$\frac{\partial \mathbf{P}_{t_0}}{\partial \mathbf{x}}(\phi(t_0)) \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}(t_0 + T);$$

luego, de la definición

$$\mathbf{M}_{t_0}(\mathbf{y}(t_0)) = \mathbf{y}(t_0 + T),$$

es inmediato que

$$\mathbf{M}_{t_0}(\mathbf{y}(t_0)) = \frac{\partial \mathbf{P}_{t_0}}{\partial \mathbf{x}}(\phi(t_0))\mathbf{y}(t_0). \quad (2.24)$$

(v) El mapa- T \mathbf{M}_{t_0} es *lineal* y *simpléctico*, y la matriz $2n \times 2n$

$$\mathbf{M}_{t_0} := \frac{\partial \mathbf{P}_{t_0}}{\partial \mathbf{x}}(\phi(t_0)), \quad (2.25)$$

es *simpléctica* $\forall t_0$, ya que implementa la transformación (lineal)

$$\mathbf{y}(t_0 + T) = \mathbf{M}_{t_0}\mathbf{y}(t_0), \quad (2.26)$$

que es canónica por ser $\dot{\mathbf{y}} = \Omega\mathbf{H}(t)\mathbf{y}$ un sistema Hamiltoniano.

(vi) Tomando $2n$ soluciones L.I. $\phi_i(t)$, $i = 1, \dots, 2n$ del sistema $\dot{\mathbf{y}} = \Omega\mathbf{H}(t)\mathbf{y}$ y formando la *matriz fundamental* $2n \times 2n$

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \cdots & \phi_{2n}(t) \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

vemos que

$$\Phi(t_0 + T) = \mathbf{M}_{t_0}\Phi(t_0), \quad (2.28)$$

luego la matriz \mathbf{M}_{t_0} es por definición la *matriz de monodromía* del sistema $\dot{\mathbf{y}} = \Omega\mathbf{H}(t)\mathbf{y}$ (ver Verhulst, Sección 6.3[19]). En adelante cuando no haya posibilidad de confusión, la escribiremos simplemente \mathbf{M} .

(vii) Como con toda matriz de monodromía, existe una matriz *constante* $2n \times 2n$, que por conveniencia (sin perder generalidad) escribiremos como $\Omega\mathbf{B}$ (ver [19], Sección 6.3), tal que

$$\mathbf{M} = e^{T\Omega\mathbf{B}}. \quad (2.29)$$

Como \mathbf{M} es simpléctica, la matriz $e^{T\Omega\mathbf{B}}$ también lo es, y en general $\mathbf{M}^n = e^{nT\Omega\mathbf{B}}$ es simpléctica $\forall n \in \mathbb{Z}$. Esto por sí solo *no implica* que $\Omega\mathbf{B}$ sea una matriz Hamiltoniana, en el sentido de que no siempre es simétrica [21].

(viii) La matriz fundamental puede escribirse de acuerdo a Floquet ([19], Sección 6.3)

$$\Phi(t) = \mathbf{P}(t)e^{t\Omega\mathbf{B}}, \quad (2.30)$$

donde $\mathbf{P}(t)$ es una matriz $2n \times 2n$ T -periódica.

(IX) Pongamos (sin perder generalidad) $t_0 = 0$ y $\Phi(0) = I$; entonces $\phi_i(t)$, $i = 1, \dots, 2n$ son soluciones de $\dot{\mathbf{y}} = \Omega H(t)\mathbf{y}$ correspondientes respectivamente a las C.I. $\phi_{i,j}(0) = \delta_{ij}$. La solución $\phi(t)$ correspondiente a C.I. arbitrarias $\phi(0)$ se escribe entonces

$$\phi(t) = \Phi(t)\phi(0). \quad (2.31)$$

Como el sistema lineal $\dot{\mathbf{y}} = \Omega H(t)\mathbf{y}$ es Hamiltoniano, la evolución temporal $\phi(0) \rightarrow \phi(t)$ implementada por el mapa lineal $\Phi(t) : \phi(0) \rightarrow \phi(t) = \Phi(t)\phi(0)$ es una transformación canónica (T.C.). Esto basta para mostrar que $\Phi(t)$ es una matriz *simpléctica* $\forall t$.

2.4. La simplecticidad de M

Antes de analizar las consecuencias de que la matriz de monodromía M sea simpléctica, daremos una descripción acerca de las variedades del sistema que aparecerán más adelante.

La estabilidad lineal de una órbita periódica (OP) puede ser estudiada directamente sobre la sección Σ_{t_0} del mapa de Poincaré al analizar la estabilidad lineal del punto fijo $\phi(t_0)$, que está determinado por los autovalores de M. Los autovalores vienen de a pares tales que si λ es un autovalor, λ^{-1} también lo es (esto se verá más adelante en esta Sección). Entonces la sección Σ_{t_0} puede dividirse en dos variedades 2D asociadas a cada par de autovalores $\{\lambda_k, \lambda_k^{-1}\}$, $k = 1, 2$ y una variedad 4D asociada a los autovalores $\{\lambda, \lambda^{-1}, \lambda^*, (\lambda^*)^{-1}\}$, donde λ^* es el complejo conjugado de λ . Éstas variedades pueden ser silla (S) (silla de reflexión \bar{S}), centro (C) o silla-foco (sf) (silla-foco de reflexión \bar{sf}).

- I. Silla (S) o silla de reflexión (\bar{S}): En esta estructura se tiene un par de autovalores reales con $|\lambda_k| > 1$, es decir, $\lambda_k > 1$ o $\lambda_k < 1$, y obtenemos trayectorias hiperbólicas. En el primer caso, las iteraciones evolucionan únicamente sobre algunas de las ramas hiperbólicas (*punto hiperbólico ordinario o silla*); en el segundo caso, las trayectorias evolucionan alternándose en cada iteración entre las dos ramas (*punto hiperbólico de reflexión o silla de reflexión*). Los correspondientes autovectores \mathbf{e}_s y \mathbf{e}_u son reales y tangentes a las variedades estable e inestable de $\phi(t_0)$, respectivamente. El mapa de Poincaré linealizado sobre la variedad lineal 2D generado por \mathbf{e}_s y \mathbf{e}_u es hiperbólico, y sus conjuntos invariantes son hipérbolas con asíntotas a lo largo de los autovectores. El punto fijo y la OP son linealmente inestables.
- II. Centro (C): En esta estructura se tiene un par de autovalores complejos conjugados con $|\lambda_k| = 1$ y obtenemos trayectorias elípticas estables alrededor del punto fijo. El punto fijo se denomina *punto elíptico o*

centro. Los correspondientes autovectores \mathbf{e}_e y \mathbf{e}_e^* son complejos conjugados el uno del otro. El mapa de Poincaré linealizado sobre la variedad lineal 2D generado por $\text{Re}(\mathbf{e}_e)$ y $\text{Im}(\mathbf{e}_e)$ es elíptico, y sus conjuntos invariantes son elipses con sus ejes principales a lo largo de estos vectores reales. El punto fijo y la OP son orbitalmente estables (Verhulst, 1996 [19]) bajo la dinámica linealizada, pero la dinámica no lineal debe ser considerada completamente para estudiar su estabilidad.

- III. Silla-foco (sf) o silla-foco de reflexión ($\bar{\text{sf}}$): En esta estructura los autovalores vienen en pares conjugados con $|\lambda| \neq 1$ y $\text{Im}(\lambda) \neq 0$; estos aparecen como un cuarteto de autovalores que son simétricos con respecto al eje real y al círculo unidad; de ésta manera también tenemos cuatro autovectores en \mathbb{C}^4 que vienen de a pares conjugados. El punto fijo se denomina *silla-foco ordinario*. Tenemos una variedad estable 2D, donde las trayectorias espiralan hacia el punto fijo, y una variedad inestable 2D, donde las trayectorias espiralan hacia afuera desde el punto fijo; ambas variedades 2D son mutuamente ortogonales y comparten como único punto, el punto fijo. Pese a la imposibilidad de representar gráficamente esta situación un esquema simplificado se muestra en la Figura 2.1.

Una representación esquemática de las variedades se puede ver en la Figura 2.1.

El éxito del método de control dependerá de una buena elección de éstas variedades; en particular para la estructura silla el método consistirá en anular las componentes en las direcciones inestables \mathbf{e}_u y posicionar la órbita sobre la dirección estable \mathbf{e}_s . Mientras que para la estructura centro consistirá en la minimización de la energía debido a que no existe una dirección estable o inestable. No brindaremos más detalles debido a que esto será material de estudio de secciones posteriores.

Vamos a estudiar ahora algunas consecuencias de que M sea simpléctica. Mucho de lo que diremos está tomado de Liechtenberg & Lieberman, (1983) [17] (ver Sección 3.3a).

1. Sea \mathbf{v} un autovector a derecha de M con autovalor λ , es decir,

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (2.32)$$

Luego λ es una solución de la ecuación característica

$$\det(M - \lambda I) = 0, \quad (2.33)$$

donde $\det(M - \lambda I)$ es un polinomio en λ a coeficientes reales (porque M es real), de grado $2n$. Se puede probar transponiendo la ecuación característica, que λ es también autovalor de M^T . Luego $\exists \mathbf{w}$ tal que

$$M^T\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} \quad (2.34)$$

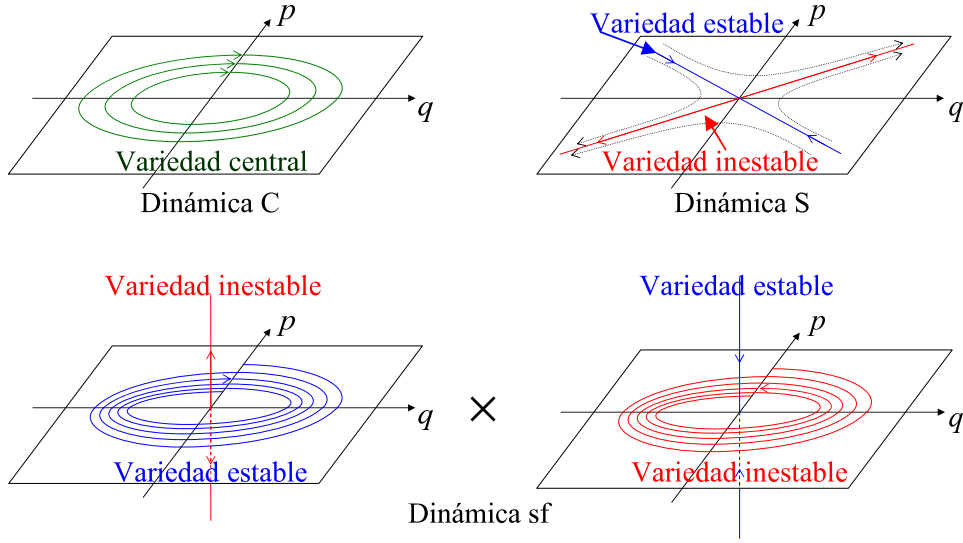


Figura 2.1: Representación esquemática de las diferentes dinámicas. Arriba izquierda: dinámica centro (C); en verde la variedad central 2D. Arriba derecha: dinámica silla (S); en azul la variedad estable 1D, en rojo la variedad inestable 1D. Abajo: dinámica silla-foco (sf); en azul la variedad estable 2D, en rojo la variedad inestable 2D.

2. Invertiendo la última relación tenemos

$$\frac{1}{\lambda} \mathbf{w} = M^{-T} \mathbf{w} \quad (2.35)$$

(por ser M simpléctica, M^T también lo es, y por lo tanto es no-singular e invertible). Pero por ser M^T simpléctica, tenemos

$$M \Omega M^T = \Omega, \quad (2.36)$$

luego, es directo, usando (2.36) que

$$M \Omega \mathbf{w} = \lambda^{-1} \Omega \mathbf{w}, \quad (2.37)$$

es decir, $\mathbf{v} = \Omega \mathbf{w}$ es autovector de M con autovalor λ^{-1} . Luego si λ es autovalor de M , λ^{-1} también lo es.

3. Por ser M real, si λ es autovalor, λ^* también lo es.

4. En consecuencia, los autovalores de M pueden darse como:

- 1) pares λ, λ^{-1} de autovalores reales; el subespacio invariante es 2D, con dinámica de silla ordinaria (S) si $\lambda > 0$, o de silla de reflexión (\bar{S}) si $\lambda < 0$;

³Notación: $M^{-T} = (M^T)^{-1}$

- II) pares λ, λ^* de autovalores conjugados de módulo unidad, $|\lambda| = 1$, de modo que $\lambda^{-1} = \lambda^*$; el subespacio es invariante 2D, con dinámica centro (C);
- III) cuartetos $\lambda, \lambda^*, \lambda^{-1}, \lambda^{-*}$ de autovalores⁴ complejos con $|\lambda| \neq 1$; el subespacio es invariante 4D, con dinámica silla-foco ordinaria (sf) si $\text{Re}(\lambda) > 0$, o de silla-foco de reflexión ($\bar{\text{sf}}$) si $\text{Re}(\lambda) < 0$.

Descartamos aquí la posibilidad de pares (degenerados) de autovalores 1 ó -1. Para la clasificación de las dinámicas, ver p. ej. Gonchenko, Turaev & Shilnikov (2004) [22].

5. Clasificando las posibilidades para diferentes grados de libertad, tenemos:
 - i) para 1 g.l., M es 2×2 y las únicas dinámicas posibles son S ó C;
 - ii) para 2 g.l., M es 4×4 y podemos tener SS, SC(ó CS), CC, ó sf;
 - iii) para 3 g.l., M es 6×6 y podemos tener SSS, SSC (ó SCS ó CSS), SCC (ó CSC ó CCS), Ssf (ó sfS), ó Csf (ó sfC).

En todos los casos cada S o s puede ser \bar{S} o \bar{s} , respectivamente. Supondremos que todos los autovalores son diferentes, p. ej., si tenemos 3 g.l. con dinámica SSS, λ_1, λ_2 y λ_3 son todos distintos. O bien, si existe el caso en que haya autovalores repetidos, los autovectores correspondientes aún forman base, es decir, que M es diagonalizable.

2.5. Clasificación de las dinámicas

Con los resultados precedentes ya podemos proceder a clasificar las dinámicas linealizadas posibles para 1, 2 y 3 g.l.

2.5.1. Un grado de libertad

Para un sistema de un 1 g.l. tenemos:

Dinámica C: los autovalores (multiplicadores característicos) de M pueden escribirse $\lambda = e^{-i\omega T}$, $\lambda^{-1} = e^{i\omega T}$; el origen es un punto elíptico; los correspondientes autovectores serán \mathbf{v} y $\mathbf{v}^* \in \mathbb{C}^2$, con

$$M\mathbf{v} = e^{-i\omega T}\mathbf{v}, \quad M\mathbf{v}^* = e^{i\omega T}\mathbf{v}^*.$$

Notando

$$M(\text{Re}(\mathbf{v})) = M\left(\frac{\mathbf{v} + \mathbf{v}^*}{2}\right) = \cos(\omega T)\text{Re}(\mathbf{v}) + \sin(\omega T)\text{Im}(\mathbf{v}),$$

$$M(\text{Im}(\mathbf{v})) = M\left(\frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}^*}{2i}\right) = -\sin(\omega T)\text{Re}(\mathbf{v}) + \cos(\omega T)\text{Im}(\mathbf{v}),$$

⁴Notación: $\lambda^{-*} = (\lambda^*)^{-1}$

2.5. CLASIFICACIÓN DE LAS DINÁMICAS

vemos que en la base *real* $\{\text{Re}(\mathbf{v}), \text{Im}(\mathbf{v})\}$ la matriz se expresa

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos(\omega T) & \sin(\omega T) \\ -\sin(\omega T) & \cos(\omega T) \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

es decir la matriz de rotación en ωT en sentido negativo (i.e. horario). Notando que

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \omega T \\ -\omega T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega T) & \sin(\omega T) \\ -\sin(\omega T) & \cos(\omega T) \end{pmatrix}$$

vemos que en esa base

$$\mathbf{M} = e^{T\Omega\mathbf{B}}, \quad (2.39)$$

con

$$\Omega\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix},$$

donde la primera matriz es evidentemente Hamiltoniana y la segunda es evidentemente simétrica. También es evidente que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{v} &= e^{T\Omega\mathbf{B}}\mathbf{v} = e^{-i\omega T}\mathbf{v} \Rightarrow \Omega\mathbf{B}\mathbf{v} = -i\omega\mathbf{v}, \\ \mathbf{M}\mathbf{v}^* &= e^{T\Omega\mathbf{B}}\mathbf{v}^* = e^{i\omega T}\mathbf{v}^* \Rightarrow \Omega\mathbf{B}\mathbf{v}^* = i\omega\mathbf{v}^*, \end{aligned}$$

es decir, \mathbf{v} y \mathbf{v}^* son autovectores de $\Omega\mathbf{B}$ con autovalores $-i\omega$ y $i\omega$ (módulo $2\pi i$), respectivamente.

Dinámica S: los autovalores de \mathbf{M} pueden escribirse $\lambda = e^{\eta T}$, $\lambda^{-1} = e^{-\eta T}$; el origen es un punto hiperbólico ordinario; los correspondientes autovectores serán \mathbf{v}_+ y $\mathbf{v}_- \in \mathbb{R}^2$, con

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_+ = e^{\eta T}\mathbf{v}_+, \quad \mathbf{M}\mathbf{v}_- = e^{-\eta T}\mathbf{v}_-.$$

Definiendo

$$\mathbf{V}_+ := \frac{\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-}{2}, \quad \mathbf{V}_- := \frac{\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-}{2},$$

que son los correspondientes autovectores reales y tangentes a las variedades inestable y estable de $\phi(t_0)$, respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{V}_+ &= \cosh(\eta T)\mathbf{V}_+ + \sinh(\eta T)\mathbf{V}_-, \\ \mathbf{M}\mathbf{V}_- &= \sinh(\eta T)\mathbf{V}_+ + \cosh(\eta T)\mathbf{V}_-, \end{aligned}$$

y vemos que en la base real $\{\mathbf{V}_+, \mathbf{V}_-\}$ la matriz se expresa

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta T) & \sinh(\eta T) \\ \sinh(\eta T) & \cosh(\eta T) \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

es decir la matriz de distorsión hiperbólica en ηT . Notando que

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \eta T \\ \eta T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta T) & \sinh(\eta T) \\ \sinh(\eta T) & \cosh(\eta T) \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEÓRICO

vemos que en esa base, la matriz de monodromía está dada también por (2.39) con

$$\Omega\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\eta & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix},$$

donde la primera matriz es evidentemente Hamiltoniana y la segunda es evidentemente simétrica. También es evidente que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{v}_+ &= e^{T\Omega\mathbf{B}}\mathbf{v}_+ = e^{\eta T}\mathbf{v}_+ \Rightarrow \Omega\mathbf{B}\mathbf{v}_+ = \eta\mathbf{v}_+, \\ \mathbf{M}\mathbf{v}_- &= e^{T\Omega\mathbf{B}}\mathbf{v}_- = e^{-\eta T}\mathbf{v}_- \Rightarrow \Omega\mathbf{B}\mathbf{v}_- = -\eta\mathbf{v}_-, \end{aligned}$$

es decir, \mathbf{v}_+ y \mathbf{v}_- son autovectores de $\Omega\mathbf{B}$ con autovalores η y $-\eta$, respectivamente.

Dinámica $\bar{\mathbf{S}}$: los autovalores de \mathbf{M} pueden escribirse $\lambda = -e^{\eta T} = e^{\eta T + i\pi}$, $\lambda^{-1} = -e^{-\eta T} = e^{-\eta T + i\pi}$; el origen es un punto hiperbólico de reflexión; los correspondientes autovectores serán \mathbf{v}_+ y $\mathbf{v}_- \in \mathbb{R}^2$, con

$$\mathbf{M}\mathbf{v}_+ = -e^{\eta T}\mathbf{v}_+, \quad \mathbf{M}\mathbf{v}_- = -e^{-\eta T}\mathbf{v}_-.$$

Definiendo como antes

$$\mathbf{V}_+ := \frac{\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-}{2}, \quad \mathbf{V}_- := \frac{\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-}{2},$$

que nuevamente son los correspondientes autovectores reales y tangentes a las variedades inestable y estable de $\phi(t_0)$, respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{V}_+ &= -\cosh(\eta T)\mathbf{V}_+ - \sinh(\eta T)\mathbf{V}_-, \\ \mathbf{M}\mathbf{V}_- &= -\sinh(\eta T)\mathbf{V}_+ - \cosh(\eta T)\mathbf{V}_-, \end{aligned}$$

y vemos que en la base real $\{\mathbf{V}_+, \mathbf{V}_-\}$ la matriz se expresa

$$\mathbf{M} = - \begin{pmatrix} \cosh(\eta T) & \sinh(\eta T) \\ \sinh(\eta T) & \cosh(\eta T) \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

es decir la matriz de distorsión hiperbólica en ηT , pero agregando una reflexión respecto al origen. Como antes

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & \eta T \\ \eta T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta T) & \sinh(\eta T) \\ \sinh(\eta T) & \cosh(\eta T) \end{pmatrix}$$

vemos que en esa base, la matriz de monodromía está dada por

$$\mathbf{M} = -e^{T\Omega\mathbf{B}}, \quad (2.42)$$

con las mismas matrices del caso \mathbf{S} , es decir, la primera Hamiltoniana y la segunda simétrica. También es evidente que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{v}_+ &= -e^{T\Omega\mathbf{B}}\mathbf{v}_+ = -e^{\eta T}\mathbf{v}_+ \Rightarrow \Omega\mathbf{B}\mathbf{v}_+ = \eta\mathbf{v}_+, \\ \mathbf{M}\mathbf{v}_- &= -e^{T\Omega\mathbf{B}}\mathbf{v}_- = -e^{-\eta T}\mathbf{v}_- \Rightarrow \Omega\mathbf{B}\mathbf{v}_- = -\eta\mathbf{v}_-, \end{aligned}$$

es decir, \mathbf{v}_+ y \mathbf{v}_- son autovectores de $\Omega\mathbf{B}$ con autovalores η y $-\eta$, respectivamente, como en un punto hiperbólico ordinario.

Alternativamente podríamos usar que

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \eta T + i\pi \\ \eta T + i\pi & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \cosh(\eta T) & \sinh(\eta T) \\ \sinh(\eta T) & \cosh(\eta T) \end{pmatrix},$$

y poner en la misma base

$$\mathbf{M} = e^{T\Omega\mathbf{B}'},$$

con

$$\Omega\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 0 & \eta + \frac{i\pi}{T} \\ \eta + \frac{i\pi}{T} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} -(\eta + \frac{i\pi}{T}) & 0 \\ 0 & -(\eta + \frac{i\pi}{T}) \end{pmatrix},$$

donde la primera matriz es evidentemente Hamiltoniana y la segunda evidentemente simétrica, pero *no reales*. En este caso también es evidente que

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{v}_+ &= e^{T\Omega\mathbf{B}'}\mathbf{v}_+ = -e^{\eta T}\mathbf{v}_+ \Rightarrow \Omega\mathbf{B}'\mathbf{v}_+ = (\eta + \frac{i\pi}{T})\mathbf{v}_+, \\ \mathbf{M}\mathbf{v}_- &= e^{T\Omega\mathbf{B}'}\mathbf{v}_- = -e^{-\eta T}\mathbf{v}_- \Rightarrow \Omega\mathbf{B}'\mathbf{v}_- = -(\eta - \frac{i\pi}{T})\mathbf{v}_-, \end{aligned}$$

es decir, \mathbf{v}_+ y \mathbf{v}_- son autovectores de $\Omega\mathbf{B}'$ con autovalores $(\eta + \frac{i\pi}{T})$ y $-(\eta + \frac{i\pi}{T})$, respectivamente.

Por último otra alternativa distinta sería usar que

$$\exp\begin{pmatrix} i\pi & \eta T \\ \eta T & i\pi \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \cosh(\eta T) & \sinh(\eta T) \\ \sinh(\eta T) & \cosh(\eta T) \end{pmatrix},$$

que nos da otra $\Omega\mathbf{B}'$ diferente (pero que *tampoco es real*), por supuesto con los mismos autovalores (módulo $2\pi i$) y autovectores. Veremos más adelante que la imposibilidad de escribir en este caso $\mathbf{M} = e^{T\Omega\mathbf{B}}$ con $\Omega\mathbf{B}$ real, no tiene consecuencias relevantes para el desarrollo del método de control.

2.5.2. Dos grados de libertad

Para un sistema de 2 g.l. las posibles dinámicas serán combinaciones de una silla y un centro del caso precedente de 1 g.l., es decir, podrán ser silla-silla (SS), silla-centro (SC) (o centro-silla (CS)) o centro-centro (CC). Por lo tanto, para éstos casos la dinámica se desarrolla independientemente en dos subvariedades lineales 2D de \mathbb{C}^4 (dos planos ortogonales entre sí). La única novedad para un sistema de 2 g.l. es la posibilidad de que la dinámica se desarrolle por completo en una sola variedad de \mathbb{C}^4 , caso que se denomina

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEÓRICO

silla-foco (sf). Cabe recordar que en todas las dinámicas que contengan una silla, son también posibles una silla de reflexión y por lo tanto existe una dinámica *silla-foco de reflexión*, que llamaremos $\bar{s}f$.

Analícemos entonces las “nuevas” dinámicas que aparecen para éstos sistemas, es decir, los casos sf y $\bar{s}f$. El resto de los casos en 2 g.l. se detallan en el Apéndice B.1.

Dinámica sf: los autovalores de M pueden escribirse $\lambda = e^{(\eta-i\omega)T}$, $\lambda^* = e^{(\eta+i\omega)T}$, $\lambda^{-*} = e^{-(\eta+i\omega)T}$, $\lambda^{-1} = e^{-(\eta-i\omega)T}$; el origen es una silla-foco ordinaria; los correspondientes autovectores serán $(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_+^*, \mathbf{v}_-, \mathbf{v}_-^*) \in \mathbb{C}^4$, con

$$\begin{aligned} M\mathbf{v}_+ &= e^{(\eta-i\omega)T}\mathbf{v}_+, & M\mathbf{v}_+^* &= e^{(\eta+i\omega)T}\mathbf{v}_+^*, \\ M\mathbf{v}_- &= e^{-(\eta+i\omega)T}\mathbf{v}_-, & M\mathbf{v}_-^* &= e^{-(\eta-i\omega)T}\mathbf{v}_-^*. \end{aligned}$$

Notando

$$\begin{aligned} M(\operatorname{Re}(\mathbf{v}_+)) &= e^{\eta T}(\cos(\omega T)\operatorname{Re}(\mathbf{v}_+) + \sin(\omega T)\operatorname{Im}(\mathbf{v}_+)), \\ M(\operatorname{Im}(\mathbf{v}_+)) &= e^{\eta T}(-\sin(\omega T)\operatorname{Re}(\mathbf{v}_+) + \cos(\omega T)\operatorname{Im}(\mathbf{v}_+)), \\ M(\operatorname{Re}(\mathbf{v}_-)) &= e^{-\eta T}(\cos(\omega T)\operatorname{Re}(\mathbf{v}_-) + \sin(\omega T)\operatorname{Im}(\mathbf{v}_-)), \\ M(\operatorname{Im}(\mathbf{v}_-)) &= e^{-\eta T}(-\sin(\omega T)\operatorname{Re}(\mathbf{v}_-) + \cos(\omega T)\operatorname{Im}(\mathbf{v}_-)), \end{aligned}$$

vemos que en la base *real* $\{\operatorname{Re}(\mathbf{v}_+), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_+), \operatorname{Re}(\mathbf{v}_-), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_-)\}$ la matriz se expresa

$$M = \begin{pmatrix} e^{\eta T} \cos(\omega T) & e^{\eta T} \sin(\omega T) & 0 & 0 \\ -e^{\eta T} \sin(\omega T) & e^{\eta T} \cos(\omega T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\eta T} \cos(\omega T) & e^{-\eta T} \sin(\omega T) \\ 0 & 0 & -e^{-\eta T} \sin(\omega T) & e^{-\eta T} \cos(\omega T) \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

es decir dos rotaciones de ángulo ωT en sentido negativo, una con expansión en ηT y la otra con contracción en ηT , en dos planos mutuamente ortogonales. Calculando por bloques es inmediato que

$$\exp \begin{pmatrix} \eta T & \omega T & 0 & 0 \\ -\omega T & \eta T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta T & \omega T \\ 0 & 0 & -\omega T & -\eta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\eta T} \cos(\omega T) & e^{\eta T} \sin(\omega T) & 0 & 0 \\ -e^{\eta T} \sin(\omega T) & e^{\eta T} \cos(\omega T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\eta T} \cos(\omega T) & e^{-\eta T} \sin(\omega T) \\ 0 & 0 & -e^{-\eta T} \sin(\omega T) & e^{-\eta T} \cos(\omega T) \end{pmatrix}$$

y vemos que en esa base la matriz de monodromía está dada por (2.39), con

$$\Omega B = \begin{pmatrix} \eta & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & -\eta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & \eta \\ \eta & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & \eta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.5. CLASIFICACIÓN DE LAS DINÁMICAS

donde la primera matriz es evidentemente Hamiltoniana y la segunda es simétrica. También vemos que

$$\begin{aligned} M\mathbf{v}_+ &= e^{T\Omega\mathbf{B}}\mathbf{v}_+ = e^{(\eta-i\omega)T}\mathbf{v}_+ \Rightarrow \Omega\mathbf{B}\mathbf{v}_+ = (\eta-i\omega)\mathbf{v}_+, \\ M\mathbf{v}_+^* &= e^{T\Omega\mathbf{B}}\mathbf{v}_+^* = e^{(\eta+i\omega)T}\mathbf{v}_+^* \Rightarrow \Omega\mathbf{B}\mathbf{v}_+^* = (\eta+i\omega)\mathbf{v}_+^*, \\ M\mathbf{v}_- &= e^{T\Omega\mathbf{B}}\mathbf{v}_- = e^{-(\eta+i\omega)T}\mathbf{v}_- \Rightarrow \Omega\mathbf{B}\mathbf{v}_- = -(\eta+i\omega)\mathbf{v}_-, \\ M\mathbf{v}_-^* &= e^{T\Omega\mathbf{B}}\mathbf{v}_-^* = e^{-(\eta-i\omega)T}\mathbf{v}_-^* \Rightarrow \Omega\mathbf{B}\mathbf{v}_-^* = -(\eta-i\omega)\mathbf{v}_-^*, \end{aligned}$$

es decir, $(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_+^*, \mathbf{v}_-, \mathbf{v}_-^*)$ son autovectores de $\Omega\mathbf{B}$ con autovalores $(\eta-i\omega)$, $(\eta+i\omega)$, $-(\eta+i\omega)$, $-(\eta-i\omega)$, respectivamente.

Dinámica \mathfrak{sf} : procediendo de manera similar que antes, para este caso los autovalores de \mathbf{M} pueden escribirse $\lambda = -e^{(\eta-i\omega)T}$, $\lambda^* = -e^{(\eta+i\omega)T}$, $\lambda^{-*} = -e^{-(\eta+i\omega)T}$, $\lambda^{-1} = -e^{-(\eta-i\omega)T}$; el origen es una silla-foco de reflexión; los correspondientes autovectores serán $(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_+^*, \mathbf{v}_-, \mathbf{v}_-^*) \in \mathbb{C}^4$, con

$$\begin{aligned} M\mathbf{v}_+ &= -e^{(\eta-i\omega)T}\mathbf{v}_+, & M\mathbf{v}_+^* &= -e^{(\eta+i\omega)T}\mathbf{v}_+^*, \\ M\mathbf{v}_- &= -e^{-(\eta+i\omega)T}\mathbf{v}_-, & M\mathbf{v}_-^* &= -e^{-(\eta-i\omega)T}\mathbf{v}_-^*. \end{aligned}$$

Notando

$$\begin{aligned} M(\operatorname{Re}(\mathbf{v}_+)) &= -e^{\eta T}(\cos(\omega T)\operatorname{Re}(\mathbf{v}_+) + \sin(\omega T)\operatorname{Im}(\mathbf{v}_+)), \\ M(\operatorname{Im}(\mathbf{v}_+)) &= -e^{\eta T}(-\sin(\omega T)\operatorname{Re}(\mathbf{v}_+) + \cos(\omega T)\operatorname{Im}(\mathbf{v}_+)), \\ M(\operatorname{Re}(\mathbf{v}_-)) &= -e^{-\eta T}(\cos(\omega T)\operatorname{Re}(\mathbf{v}_-) + \sin(\omega T)\operatorname{Im}(\mathbf{v}_-)), \\ M(\operatorname{Im}(\mathbf{v}_-)) &= -e^{-\eta T}(-\sin(\omega T)\operatorname{Re}(\mathbf{v}_-) + \cos(\omega T)\operatorname{Im}(\mathbf{v}_-)), \end{aligned}$$

vemos que en la base *real* $\{\operatorname{Re}(\mathbf{v}_+), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_+), \operatorname{Re}(\mathbf{v}_-), \operatorname{Im}(\mathbf{v}_-)\}$ la matriz se expresa

$$\mathbf{M} = - \begin{pmatrix} e^{\eta T} \cos(\omega T) & e^{\eta T} \sin(\omega T) & 0 & 0 \\ -e^{\eta T} \sin(\omega T) & e^{\eta T} \cos(\omega T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\eta T} \cos(\omega T) & e^{-\eta T} \sin(\omega T) \\ 0 & 0 & -e^{-\eta T} \sin(\omega T) & e^{-\eta T} \cos(\omega T) \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

es decir dos rotaciones de ángulo ωT en sentido negativo, una con expansión en ηT y la otra con contracción en ηT , en dos planos mutuamente ortogonales, más una reflexión respecto del origen. Calculando por bloques es inmediato que

$$\exp \begin{pmatrix} \eta T & \omega T & 0 & 0 \\ -\omega T & \eta T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta T & \omega T \\ 0 & 0 & -\omega T & -\eta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\eta T} \cos(\omega T) & e^{\eta T} \sin(\omega T) & 0 & 0 \\ -e^{\eta T} \sin(\omega T) & e^{\eta T} \cos(\omega T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\eta T} \cos(\omega T) & e^{-\eta T} \sin(\omega T) \\ 0 & 0 & -e^{-\eta T} \sin(\omega T) & e^{-\eta T} \cos(\omega T) \end{pmatrix}$$

y vemos que en esa base la matriz de monodromía está dada por (2.42) con

$$\Omega\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \eta & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & -\eta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & \eta \\ \eta & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & \eta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

donde la primera matriz es evidentemente Hamiltoniana y la segunda es simétrica como antes. También vemos que como en el caso sf, $(\mathbf{v}_+, \mathbf{v}_+^*, \mathbf{v}_-, \mathbf{v}_-^*)$ son autovectores de $\Omega\mathbf{B}$ con autovalores $(\eta - i\omega)$, $(\eta + i\omega)$, $-(\eta + i\omega)$, $-(\eta - i\omega)$, respectivamente.

Un resultado notable que puede probarse es que en este caso *sí existe* una matriz Hamiltoniana *real* cuya exponencial es la matriz de monodromía, a diferencia del caso $\bar{\mathbf{S}}$: basta tomar la matriz $\Omega\mathbf{B}$ del caso sf y reemplazar ω por $\omega + \frac{\pi}{T}$. Sin embargo, por uniformidad con el tratamiento del caso $\bar{\mathbf{S}}$ en 1D, preferimos utilizar las expresiones (2.44) y (2.45)

2.5.3. Tres grados de libertad

Para un sistema de 3 g.l. no hay ninguna novedad relevante, sólo se puede decir que las combinaciones de los casos precedentes para sistemas de 1 y 2 g.l. darán forma a todas las dinámicas que se puedan obtener, es decir, podrán ser: SSS, SSC (o SCS o CSS), SCC (o CSC o CCS) y CCC, que se desarrollan independientemente en tres subvariedades lineales 2D de \mathbb{C}^6 . Las otras dinámicas posibles son: sf $\bar{\mathbf{S}}$ (o Ssf) y sfC (o Csf), las cuales se desarrollan independientemente en dos subvariedades lineales, 4D para el caso sf y 2D para $\bar{\mathbf{S}}$ o C, de \mathbb{C}^6 . Cabe recordar que en todos los casos que aparece una dinámica $\bar{\mathbf{S}}$ o sf es también posible una $\bar{\mathbf{S}}$ o $\bar{\text{sf}}$, respectivamente.

Vemos entonces que la dinámica para un sistema de 3 g.l. se puede desacoplar como un sistema de 2 g.l. *más* un sistema de 1 g.l. Estas dinámicas no las explicitaremos debido a la extensión de escribir autovectores y autovalores para matrices 6×6 y a que, como mencionamos antes, no hay nada nuevo en estas dinámicas ya que se las pueden expresar en términos de las estudiadas en 1 y 2 g.l.

2.6. El sistema autónomo equivalente

Vamos a ver ahora que, para 1, 2 ó 3 g.l. podemos interpretar la matriz de monodromía \mathbf{M} del sistema linealizado, como la matriz fundamental $\Phi_{eq}(t)$ de un *sistema autónomo equivalente* (SAE) evaluada a $t = T$.

2.6.1. Un grado de libertad

Procedemos de acuerdo a la clasificación de las dinámicas.

Dinámica C: Hemos visto que en la base real $\{\text{Re}(\mathbf{v}), \text{Im}(\mathbf{v})\}$, donde

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = e^{-i\omega T}\mathbf{v}, \quad \mathbf{M}\mathbf{v}^* = e^{i\omega T}\mathbf{v}^*,$$

tenemos

$$\mathbf{M} = e^{T\Omega\mathbf{B}}, \tag{2.46}$$

2.6. EL SISTEMA AUTÓNOMO EQUIVALENTE

con

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos(\omega T) & \sin(\omega T) \\ -\sin(\omega T) & \cos(\omega T) \end{pmatrix}, \quad \Omega\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}.$$

Consideremos el Hamiltoniano autónomo

$$H_{eq} = \frac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbf{B}\mathbf{z}, \quad (2.47)$$

cuyas ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{\mathbf{z}} = \Omega\mathbf{B}\mathbf{z}, \quad (2.48)$$

lineales y autónomas. Su matriz fundamental “canónica”⁵ será

$$\Phi_{eq}(t) = e^{t\Omega\mathbf{B}}, \quad (2.49)$$

de modo que evidentemente tendremos

$$\mathbf{M} = \Phi_{eq}(T) \quad (2.50)$$

Dinámica S: Hemos visto que en la base real $\mathbf{V}_+ = \left(\frac{\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-}{2}\right)$, $\mathbf{V}_- = \left(\frac{\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-}{2}\right)$, tenemos una matriz de monodromía dada por (2.46), pero ahora con

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta T) & \sinh(\eta T) \\ \sinh(\eta T) & \cosh(\eta T) \end{pmatrix}, \quad \Omega\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\eta & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}.$$

Se puede probar que si consideramos el Hamiltoniano autónomo con sus ecuaciones lineales y la matriz fundamental “canónica”, es decir, $\dot{\mathbf{z}} = \Omega\mathbf{B}\mathbf{z}$ y $\Phi_{eq}(t) = e^{t\Omega\mathbf{B}}$, respectivamente, recuperamos la matriz de monodromía que en el caso de la dinámica centro, es decir, obtenemos $\mathbf{M} = \Phi_{eq}(T)$.

Dinámica $\bar{\mathbf{S}}$: Realizando un análisis similar que en el caso para la dinámica silla ordinaria, obtenemos la misma base real, pero ahora la matriz de monodromía es

$$\mathbf{M} = -e^{T\Omega\mathbf{B}},$$

con

$$\mathbf{M} = -\begin{pmatrix} \cosh(\eta T) & \sinh(\eta T) \\ \sinh(\eta T) & \cosh(\eta T) \end{pmatrix}, \quad \Omega\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\eta & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix},$$

de modo que si consideramos el Hamiltoniano autónomo con sus ecuaciones lineales y la matriz fundamental “canónica” tendremos

$$\mathbf{M} = -\Phi_{eq}(t).$$

En este caso debemos agregar explícitamente una reflexión respecto del origen, pero como las variedades estable $E_s = \text{Span}\{\mathbf{v}_-\}$ e inestable $E_u =$

⁵Se reduce a la identidad para $t = 0$.

$\text{Span}\{\mathbf{v}_+\}$ del sistema linealizado⁶ son *invariantes bajo reflexión* respecto del origen, los “vectores de control” del método de control (ver Sección 2.11) podrán construirse exactamente como para una dinámica S . Es decir, a este respecto podemos ignorar la distinción entre puntos hiperbólicos ordinarios y de reflexión.

Por otro lado, ya hemos visto que podemos construir matrices Hamiltonianas $\Omega\mathbf{B}$ constantes y tales que $\mathbf{M} = e^{T\Omega\mathbf{B}}$, sin explicitar la reflexión, pero en este caso *no son reales*. Notablemente, podemos construir un sistema Hamiltoniano lineal y *real* cuya matriz fundamental satisface $\mathbf{M} = \Phi_{eq}(T)$, pero sólo en cierto sentido será *autónomo*. Veamos como hacerlo:

Consideremos el sistema T -periódico

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2,$$

con

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \eta \sin(\frac{2\pi}{T}t) & \eta \cos(\frac{2\pi}{T}t) + \frac{\pi}{T} \\ \eta \cos(\frac{2\pi}{T}t) - \frac{\pi}{T} & -\eta \sin(\frac{2\pi}{T}t) \end{pmatrix}, \quad \Omega^{-1}\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{T} - \eta \cos(\frac{2\pi}{T}t) & \eta \sin(\frac{2\pi}{T}t) \\ \eta \sin(\frac{2\pi}{T}t) & \frac{\pi}{T} + \eta \cos(\frac{2\pi}{T}t) \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{A}(t)$ es T -periódica. Notemos que como $\Omega^{-1}\mathbf{A}(t)$ es simétrica, entonces $\mathbf{A}(t)$ es Hamiltoniana. Siguiendo a Verhulst (Sección 6.3) [19], definamos

$$\Phi(t) := \mathbf{P}(t)e^{t\Omega\mathbf{B}}, \quad \mathbf{P}(t) := \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{T}t) & \sin(\frac{\pi}{T}t) \\ -\sin(\frac{\pi}{T}t) & \cos(\frac{\pi}{T}t) \end{pmatrix}, \quad \Omega\mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}.$$

Es inmediato verificar por substitución que

$$\dot{\Phi} = \mathbf{A}(t)\Phi, \quad \Phi(0) = \mathbf{I},$$

así que $\Phi(t)$ es la matriz fundamental “canónica” del sistema $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$. Pero hay que notar también que la descomposición $\Phi(t) := \mathbf{P}(t)e^{t\Omega\mathbf{B}}$ *no* es (exactamente) la del Teorema de Floquet (ver Verhulst, Sección 6.3) [19], ya que $\mathbf{P}(t)$ es $2T$ -periódica en lugar de T -periódica, y en particular $\mathbf{P}(T) = -\mathbf{I}$. Sin embargo si definimos (como en el Teorema de Floquet) nuevas variables $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ como $\mathbf{y} = \mathbf{P}(t)\mathbf{z}$, un cálculo directo y completamente análogo al de Floquet muestra que $\dot{\mathbf{z}} = \Omega\mathbf{B}\mathbf{z}$. Éste es un sistema *Hamiltoniano, real, autónomo y lineal*, con solución general y matriz fundamental “canónica” dadas por

$$\mathbf{z}(t) = e^{t\Omega\mathbf{B}}\mathbf{z}(0), \quad \Phi_{lin}(t) = e^{t\Omega\mathbf{B}}.$$

Luego, la matriz fundamental y la matriz de monodromía del problema original pueden ponerse

$$\Phi(t) = \mathbf{P}(t)\Phi_{lin}(t), \quad \mathbf{M} = \Phi(T),$$

⁶La variedad estable de un sistema lineal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con \mathbf{A} una matriz $n \times n$, está definida como el subespacio lineal E_s de \mathbb{R}^n que es igual a la suma sobre los autoespacios generalizados con autovalores λ que tienen parte real *negativa*. Similarmente, para la variedad inestable E_u de un sistema lineal sumamos sobre los autovalores λ con parte real *positiva*.

que es justamente el resultado que queremos.

Vemos entonces que también en este caso *existe* un sistema Hamiltoniano autónomo equivalente, que es justamente $\dot{\mathbf{z}} = \Omega\mathbf{B}\mathbf{z}$, con matriz fundamental “canónica” $\Phi_{lin}(t) = e^{t\Omega\mathbf{B}}$, pero debemos tomar al estilo del Teorema de Floquet

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}(T)\Phi_{lin}(T), \quad (2.51)$$

y como $\mathbf{P}(T) = -\mathbf{I}$, esto es equivalente a lo que pusimos al principio. Sin embargo, y quizá más importante, tenemos el resultado de que $\mathbf{P}(t)$ es *simpléctica* ($\forall t$): $\mathbf{P}^T(t)\Omega\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \Omega$.

Debido a esto, la transformación $\mathbf{y} = \mathbf{P}(t)\mathbf{z}$ es canónica, y por lo tanto lleva el sistema Hamiltoniano original (lineal y T -periódico) $\dot{\mathbf{y}} = \Omega\mathbf{H}(t)\mathbf{y}$ con Hamiltoniano $\frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{H}(t)\mathbf{y}$, al sistema Hamiltoniano lineal y autónomo $\dot{\mathbf{z}} = \Omega\mathbf{B}\mathbf{z}$ con Hamiltoniano $\frac{1}{2}\mathbf{z}^T\mathbf{B}\mathbf{z}$. Lo más ventajoso de este resultado es que, como $\mathbf{P}(T) = -\mathbf{I}$, los autovalores λ de \mathbf{M} siguen guardando la relación $\lambda = -e^{T\mu}$ con los autovalores de $\Omega\mathbf{B}$ y, más importante aún, los autovectores de \mathbf{M} siguen siendo autovectores de $\Omega\mathbf{B}$ y viceversa, lo que permite determinar el espectro y base natural de \mathbf{M} a partir del espectro y la base natural de $\Omega\mathbf{B}$.

Versión unificada

A partir de lo expuesto anteriormente, podemos unificar formalmente los tres casos, poniendo siempre

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}(T)\Phi_{lin}(T) = \mathbf{P}(T)e^{T\Omega\mathbf{B}}, \quad (2.52)$$

donde la matriz $\mathbf{P}(T)$ será $-\mathbf{I}$ para el caso $\bar{\mathbf{S}}$ e \mathbf{I} para cualquier otro caso.

2.6.2. Dos y tres grados de libertad

Para éstos sistemas no hay diferencia en lo que respecta al de un g.l., como ya se dijo, éstos sistemas serán combinaciones de las distintas dinámicas y a lo sumo tendrán una sf o $\bar{\text{sf}}$ en una subvariedad lineal 4D de \mathbb{C}^4 o una subvariedad lineal 4D más una lineal 2D de \mathbb{C}^6 para 2 o 3 g.l., respectivamente.

Por lo tanto, al igual que antes podemos unificar formalmente todos los casos poniendo siempre la matriz de monodromía como en (2.52), donde obviamente cambiarán $\mathbf{P}(T)$ y \mathbf{B} según el tipo de dinámica y de cuantos grados de libertad tenga el sistema. En particular, $\mathbf{P}(T)$ es diagonal por bloques 2×2 que son $-\mathbf{I}$ para una dinámica $\bar{\mathbf{S}}$ o $\bar{\text{sf}}$, o \mathbf{I} para cualquier otro caso.

2.7. El “teorema fundamental”

Podemos resumir (algunos de) los resultados hallados hasta ahora en el siguiente

Teorema:

Dado un Hamiltoniano real $H(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$, T -periódico, i.e., $H(\mathbf{x}, t_0 + T) = H(\mathbf{x}, t_0) \forall t_0$ con n g.l. ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$), y una solución T -periódica aislada $\mathbf{x} = \phi(t)$ de las correspondientes ecuaciones de Hamilton,

- 1) el sistema linealizado alrededor de $\phi(t)$, con $\mathbf{x} = \phi(t) + \mathbf{y}$ tenemos que el sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = \Omega \mathbf{H}(t) \mathbf{y}, \quad (2.53)$$

es Hamiltoniano, lineal y T -periódico, con Hamiltoniano

$$H_{lin}(\mathbf{y}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{H}(t) \mathbf{y}, \quad \mathbf{H}(t) = \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2}(\phi(t), t); \quad (2.54)$$

- 2) siempre existe una transformación canónica que deja la matriz T -periódica $\mathbf{H}(t)$ en la forma

$$\mathbf{H}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}(t) & \mathbf{B}(t) \\ -\mathbf{B}(t) & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

con $\mathbf{B}(t)$ y $\mathbf{C}(t)$ T -periódicas, $\mathbf{B}(t)$ antisimétrica y $\mathbf{C}(t)$ simétrica;

- 3) siempre existe una transformación canónica

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}(t) \mathbf{z}, \quad (2.56)$$

con $\mathbf{P}(t)$ simpléctica y $2T$ -periódica (esto incluye $\mathbf{P}(t)$ constante) que lleva el sistema $\dot{\mathbf{y}} = \Omega \mathbf{H}(t) \mathbf{y}$ al sistema equivalente Hamiltoniano, real, lineal y autónomo de n g.l.

$$\dot{\mathbf{z}} = \Omega \mathbf{B} \mathbf{z}, \quad (2.57)$$

con Hamiltoniano

$$H_{eq}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z}, \quad (2.58)$$

y $\Omega \mathbf{B}$ una matriz Hamiltoniana $2n \times 2n$ constante;

- 4) la matriz de monodromía \mathbf{M} del sistema $\dot{\mathbf{y}} = \Omega \mathbf{H}(t) \mathbf{y}$ es simpléctica, y en su “base natural” (real) tiene la forma

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}(T) e^{T \Omega \mathbf{B}}, \quad (2.59)$$

donde $\mathbf{P}(T)$ es diagonal por bloques 2×2 que son o bien $-\mathbf{I}$ para dinámicas $\bar{\mathcal{S}}$ o \mathcal{S} , o bien \mathbf{I} para cualquier otro caso.

2.8. Ecuaciones de movimiento

Vamos a estudiar ahora algunas de las consecuencias de lo anterior, respecto a las ecuaciones de movimiento linealizadas y sus soluciones, tanto en la formulación Hamiltoniana como en la Lagrangiana.

2.8.1. Matrices fundamental y de monodromía

Ya hemos visto que las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix},$$

llevan al sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden T -periódico

$$\ddot{q}_i = -2b_{ij}\dot{q}_j - (\dot{B}_{ij} + C_{ij} + B_{ik}B_{kj})q_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange llevan al sistema

$$\ddot{q}_i = -2b_{ij}\dot{q}_j - (\dot{b}_{ij} + c_{ij})q_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

equivalente ya que $B_{ij} = b_{ij}$ y $C_{ij} = c_{ij} - b_{ik}b_{kj}$. Estos sistemas pueden escribirse matricialmente como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{U} & \bar{\Omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix},$$

donde \mathbf{U} y $\bar{\Omega}$ son ambas T -periódicas y están dadas por:

$$\begin{aligned} U_{ij}(t) &= -(\dot{B}_{ij} + C_{ij} + B_{ik}B_{kj}) = -(\dot{b}_{ij} + c_{ij}), \\ \bar{\Omega}_{ij}(t) &= -2B_{ij} = -2b_{ij}. \end{aligned}$$

La *transformación de Legendre* de $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ a (\mathbf{q}, \mathbf{p}) y su inversa vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}(t) & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}(t) & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Sea $\Phi_H(t)$ la matriz fundamental “canónica” del sistema Hamiltoniano que satisface

$$\dot{\Phi}_H = \begin{pmatrix} -\mathbf{B}(t) & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C}(t) & -\mathbf{B}(t) \end{pmatrix} \Phi_H, \quad \Phi_H(0) = \mathbf{I}, \quad (2.61)$$

y sea $\Phi_L(t)$ una matriz fundamental del sistema Lagrangiano, que satisface

$$\dot{\Phi}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{U}(t) & \bar{\Omega}(t) \end{pmatrix} \Phi_L, \quad (2.62)$$

CAPÍTULO 2. DESARROLLO TEÓRICO

con C.I. no especificadas aún. Es inmediato que la multiplicación (a derecha) de una matriz fundamental por una matriz constante no-singular arbitraria Ψ dará otra matriz fundamental. Ahora, las columnas de Φ_H y de $\Phi_L\Psi$ son, respectivamente, soluciones (L.I.) de las ecuaciones de Hamilton y de Euler-Lagrange; así que la relación entre ellas dada por la transformación de Legendre hace que

$$\Phi_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{B}(t) & 1 \end{pmatrix} \Phi_L \Psi, \quad \Phi_L \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{B}(t) & 1 \end{pmatrix} \Phi_H. \quad (2.63)$$

Luego, si queremos que $\Phi_L(t)$ sea la matriz fundamental “canónica” del sistema Lagrangiano, debemos tener

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{B}(0) & 1 \end{pmatrix} \Psi^{-1} = 1 \Rightarrow \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{B}(0) & 1 \end{pmatrix}.$$

La relación entre las matrices fundamentales “canónicas” de ambos sistemas es entonces

$$\begin{aligned} \Phi_H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{B}(t) & 1 \end{pmatrix} \Phi_L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{B}(0) & 1 \end{pmatrix}, \\ \Phi_L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{B}(t) & 1 \end{pmatrix} \Phi_H \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{B}(0) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notemos que si $\mathbf{B}(t)$ fuera *constante*, ambas matrices fundamentales “canónicas” serían *semejantes*, a través de una transformación de la forma $\Phi_L = \mathbf{S}^{-1} \Phi_H \mathbf{S}$. Mas aún, aunque $\mathbf{B}(t)$ dependa del tiempo es por hipótesis T -periódica, $\mathbf{B}(t_0 + T) = \mathbf{B}(t_0) \forall t_0$. Definamos las matrices

$$\mathbf{L}_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{B}(0) & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_0^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{B}(0) & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

que implementan las transformaciones de Legendre y su inversa a $t = 0$. Luego las matrices de monodromía Hamiltoniana y Lagrangiana son *semejantes*:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_H &= \Phi_H(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{B}(0) & 1 \end{pmatrix} \Phi_L(T) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{B}(0) & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{L}_0 \mathbf{M}_L \mathbf{L}_0^{-1}, \\ \mathbf{M}_L &= \Phi_L(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{B}(0) & 1 \end{pmatrix} \Phi_H(T) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{B}(0) & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{L}_0^{-1} \mathbf{M}_H \mathbf{L}_0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Esto permite aplicar todo lo que hemos deducido para la matriz de monodromía \mathbf{M}_H del sistema Hamiltoniano a la matriz de monodromía \mathbf{M}_L del sistema Lagrangiano, *directamente y sin modificación alguna*, ya que \mathbf{M}_H y \mathbf{M}_L son simplemente representaciones del *mismo operador lineal* en dos

bases diferentes y (entre otras propiedades), tienen los mismos autovalores $\lambda_i, = 1, \dots, n$, y sus autovectores guardan la relación:

$$\begin{aligned} M_H \mathbf{v}_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i \Leftrightarrow M_L L_0^{-1} \mathbf{v}_i = \lambda_i L_0^{-1} \mathbf{v}_i, \\ M_L \mathbf{w}_j &= \lambda_j \mathbf{w}_j \Leftrightarrow M_H L_0 \mathbf{w}_j = \lambda_j L_0 \mathbf{w}_j, \end{aligned}$$

es decir, si \mathbf{v}_i es autovector de M_H al autovalor λ_i , $\mathbf{w}_i = L_0^{-1} \mathbf{v}_i$ es autovector de M_L al mismo autovalor. Una ventaja de este hecho es que podemos calcular la matriz de monodromía integrando numéricamente el sistema que más nos guste (en general usaremos el Lagrangiano). Otra, y más importante, es que dada la matriz

$$S_H := \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

que diagonaliza M_H como

$$S_H^{-1} M_H S_H = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

la matriz

$$S_L := L_0^{-1} S_H = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \cdots & \mathbf{w}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

diagonalizará M_L , ya que

$$S_H^{-1} M_H S_H = S_H^{-1} L_0 M_L L_0^{-1} S_H = (L_0^{-1} S_H)^{-1} M_L (L_0^{-1} S_H) = S_L^{-1} M_L S_L,$$

y en consecuencia *el sistema autónomo equivalente será el mismo* sin importar que partamos del sistema Hamiltoniano o del Lagrangiano. Esto era físicamente de esperar, ya que ambos sistemas representan la misma dinámica.

2.8.2. El sistema autónomo equivalente (SAE)

Si volvemos casi al principio, de igual manera que en la Sección 2.1, donde dedujimos la forma más general posible para un Hamiltoniano T -periódico linealizado alrededor de una solución T -periódica, vemos que lo mismo puede aplicarse a la linealización de un Hamiltoniano autónomo alrededor de un punto crítico o solución de equilibrio.

Consideremos un Hamiltoniano autónomo con n grados de libertad $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Las ecuaciones de Hamilton serán

$$\dot{\mathbf{x}} = \Omega \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \Omega (\nabla_{\mathbf{x}} H)^T.$$

Consideremos también una solución de equilibrio $\phi = (\phi_q, \phi_p)^T$, y ahora linealizando las ecs. de movimiento alrededor de ϕ tomando $\mathbf{x} = \phi + \mathbf{y}$ y truncando a primer orden, se obtiene el sistema lineal autónomo

$$\dot{\mathbf{y}} = \Omega H_{eq} \mathbf{y}, \quad H_{eq} := \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2}(\phi) \right)^T = \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2}(\phi),$$

donde H_{eq} es una matriz $2n \times 2n$ constante, que por construcción es *simétrica*. Como antes, vamos a suponer que la linealización es no-degenerada, es decir $\det(H_{eq}) \neq 0 \forall t$, y por lo tanto la solución ϕ es un punto crítico *aislado* [19].

De aquí en adelante todas las propiedades que dedujimos para el Hamiltoniano, la Lagrangiana y el sistema T -periódico, se deducen exactamente de la misma forma para el Hamiltoniano, la Lagrangiana y el sistema autónomo. En particular:

- 1) La Lagrangiana linealizada puede reducirse a la forma

$$L_{eq} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \bar{\mathbf{b}} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \bar{\mathbf{c}} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \ddot{q}_i^2 + \bar{b}_{ij} \dot{q}_i q_j - \frac{1}{2} \bar{c}_{ij} q_i q_j,$$

con los coeficientes de la energía cinética todos iguales a 1, \bar{b}_{ij} antisimétrica, \bar{c}_{ij} simétrica, y ambas constantes.

- 2) EL correspondiente Hamiltoniano linealizado se reduce a la forma

$$H_{eq} = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{q},$$

con $\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{b}}$ antisimétrica, $\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{c}} - \bar{\mathbf{b}}^2$ simétrica y ambas constantes.

- 3) Las ecuaciones de Hamilton quedan

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{\mathbf{B}} & \mathbf{I} \\ -\bar{\mathbf{C}} & -\bar{\mathbf{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix},$$

de donde tendremos

$$\ddot{q}_i = -2\bar{B}_{ij} \dot{q}_j - (\bar{C}_{ij} + \bar{B}_{ik} \bar{B}_{kj}) q_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

- 4) Las ecuaciones de Euler-Lagrange quedan

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \ddot{q}_i + 2\bar{b}_{ij} \dot{q}_j + \bar{c}_{ij} q_j = 0,$$

luego

$$\ddot{q}_i = -2\bar{b}_{ij} \dot{q}_j - \bar{c}_{ij} q_j, \quad 1, \dots, n.$$

- 5) Ambas versiones son equivalentes (como era de esperar) ya que $\bar{B}_{ij} = \bar{b}_{ij}$ y $\bar{C}_{ij} = \bar{c}_{ij} - \bar{b}_{ik} \bar{b}_{kj}$, y el término “potencial” $-c_{ij} q_j$ de las ecuaciones de Euler-Lagrange es puramente simétrico.

- 6) El sistema Lagrangiano autónomo puede ponerse en la forma

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{U} & \bar{\mathbf{\Omega}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix},$$

donde \mathbf{U} es $n \times n$ simétrica, $\bar{\mathbf{\Omega}}$ es $n \times n$ antisimétrica, ambas son constantes y están dadas por

$$\begin{aligned} U_{ij} &= -(\bar{C}_{ij} + \bar{B}_{ik} \bar{B}_{kj}) = -\bar{c}_{ij}, \\ \bar{\Omega}_{ij} &= -2\bar{B}_{ij} = -2\bar{b}_{ij}. \end{aligned}$$

2.8.3. Relación entre el SAE y el sistema T -periódico

Supongamos que tenemos un sistema T -periódico dado con matriz de monodromía Lagrangiana y el SAE en la forma

$$M_L = P(T)e^{T\Omega B}, \quad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (2.68)$$

con

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & I \\ U & \bar{\Omega} \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Del “teorema fundamental” y los resultados que le siguen, es inmediato que las matrices $2n \times 2n$ constantes ΩB y A deben ser *semejantes*; si ambas están escritas en la misma base, entonces, deben ser *iguales*:

$$\Omega B = A. \quad (2.70)$$

Por lo tanto si

$$A\mathbf{x}_i = \mu_i\mathbf{x}_i, \quad i = 1, \dots, 2n,$$

y

$$S_{eq}^{-1}AS_{eq} = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_{2n}), \quad S_{eq} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_{2n} \\ \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix},$$

entonces

$$S_{eq}^{-1}e^{T\Omega B}S_{eq} = S_{eq}^{-1}e^{TA}S_{eq} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}), \quad (2.71)$$

con

$$\lambda_i = e^{T\mu_i}, \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (2.72)$$

Es más, si recordamos que $M = \Phi(T) = P(T)e^{T\Omega B}$, tendremos para la matriz de monodromía Lagrangiana⁷

$$M_L = T_L M T_L^{-1} = T_L P(T) T_L^{-1} e^{TA_L},$$

y si suponemos $M_L \mathbf{X}_i = \lambda_i \mathbf{X}_i \Leftrightarrow A_L \mathbf{X}_i = \mu_i \mathbf{X}_i$, $i = 1, \dots, 6$ tomando por ejemplo uno de los autovalores como $\lambda_1 = \pm\lambda$ recuperamos

$$M_L \mathbf{X}_1 = \pm \mathbf{X}_1.$$

Esto implica que el signo del autovalor no tiene ningún efecto sobre los autovectores, sino que dicho signo puede “sacarse” fuera en forma de constante multiplicativa sin alterar la estructura del autovector. Esto será ventajoso más adelante para probar que no hay distinción entre los vectores de control para las dinámicas S y \bar{S} , y sf y \bar{sf} .

Por otro lado, la base donde la dinámica es más directa de analizar es aquella donde M adopa la “forma canónica” real diagonal por bloques; por ser M_L y M_H semejantes, esta forma es alguna de las mismas que ya determinamos como posibles para M_H . Existirá por tanto una segunda transformación de semejanza, que lleve directamente A a su “forma canónica” real. Vamos a proceder ahora a determinarla, de acuerdo al número n de g.l. y de acuerdo a las diferentes dinámicas.

⁷El mismo procedimiento es válido para la matriz de monodromía Hamiltoniana M_H .

2.8.4. Dinámica para un grado de libertad

Recordando las expresiones ya obtenidas para M , B y Ω en la Sección 2.5.1 podemos obtener los autovalores y autovectores de ΩB para cada dinámica.

Dinámica C: Los autovalores μ_i y autovectores \mathbf{w}_i de ΩB son

$$\mu_1 = i\omega \leftrightarrow \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = -i\omega \leftrightarrow \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Luego poniendo

$$S_C = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad S_C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

tenemos

$$S_C^{-1}(\Omega B)S_C = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2).$$

Por otro lado debemos tener

$$A\mathbf{x}_i = \mu_i\mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2,$$

con

$$S_{eq}^{-1}AS_{eq} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2), \quad S_{eq} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$S_C^{-1}(\Omega B)S_C = S_{eq}^{-1}AS_{eq} \Rightarrow \Omega B = (S_{eq}S_C^{-1})^{-1}A(S_{eq}S_C^{-1}),$$

de donde es inmediato que la transformación de semejanza que reduce A a ΩB viene dada por

$$T = S_{eq}S_C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2} & \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{2i} \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix},$$

y su inversa T^{-1} , es decir,

$$T^{-1}AT = \Omega B = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Dinámica S: Los autovalores μ_i y autovectores \mathbf{w}_i de ΩB son

$$\mu_1 = \eta \leftrightarrow \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = -\eta \leftrightarrow \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Luego poniendo

$$S_S = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

tenemos

$$S_S^{-1}(\Omega B)S_S = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & -\eta \end{pmatrix} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2).$$

Por otro lado debemos tener

$$A\mathbf{x}_i = \mu_i\mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2,$$

con

$$S_{eq}^{-1}AS_{eq} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2), \quad S_{eq} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$S_S^{-1}(\Omega B)S_S = S_{eq}^{-1}AS_{eq} \Rightarrow \Omega B = (S_{eq}S_S^{-1})^{-1}A(S_{eq}S_S^{-1}),$$

de donde es inmediato que la transformación de semejanza que reduce A a ΩB viene dada por

$$T = S_{eq}S_S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2} & \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{2} \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix},$$

y su inversa T^{-1} , es decir,

$$T^{-1}AT = \Omega B = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}.$$

Dinámica \bar{S} : Los autovalores μ_i y los autovectores \mathbf{w}_i de ΩB son los mismos del caso S, y el resto del desarrollo sigue igual; lo único que cambia es $P(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Tendremos entonces

$$T^{-1}AT = \Omega B = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}.$$

con la misma T del caso S.

2.8.5. Dinámica para dos y tres grados de libertad

Al igual que para 1 g.l., puede probarse para 2 y 3 g.l. que los casos con una dinámica \bar{S} o $\bar{s}f$ pueden asimilarse, en lo que hace al SAE, a los correspondientes a dinámicas S o sf respectivamente. Se puede probar que todos los casos resultan combinaciones de las dinámicas de 1 y 2 g.l. ya analizadas.

Siguiendo los casos seleccionados en la Sección 2.5.2 cuando se determinaron las matrices \mathbf{M} y \mathbf{B} (por consiguiente $\Omega\mathbf{B}$), se da sólo una descripción para los casos sf y $\bar{\text{sf}}$. Explícitamente las dinámicas restantes para 2 g.l. se detallan en el Apéndice B.2.

Dinámica sf: Los autovalores μ_i y autovectores \mathbf{w}_i de $\Omega\mathbf{B}$ son

$$\begin{aligned}\mu_1 = \eta - i\omega &\leftrightarrow \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mu_2 = \eta + i\omega &\leftrightarrow \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mu_3 = -\eta - i\omega &\leftrightarrow \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, & \mu_4 = -\eta + i\omega &\leftrightarrow \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Luego poniendo

$$\mathbf{S}_{sf} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{w}_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{sf}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix},$$

tenemos

$$\mathbf{S}_{sf}^{-1}(\Omega\mathbf{B})\mathbf{S}_{sf} = \begin{pmatrix} \eta - i\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta + i\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta - i\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta + i\omega \end{pmatrix} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4).$$

Por otro lado debemos tener

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mu_i\mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

y

$$\mathbf{S}_{eq}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}_{eq} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4), \quad \mathbf{S}_{eq} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{S}_{sf}^{-1}(\Omega\mathbf{B})\mathbf{S}_{sf} = \mathbf{S}_{eq}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}_{eq} \Rightarrow \Omega\mathbf{B} = (\mathbf{S}_{eq}\mathbf{S}_{sf}^{-1})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{S}_{eq}\mathbf{S}_{sf}^{-1}),$$

de donde es inmediato que la transformación de semejanza que reduce \mathbf{A} a $\Omega\mathbf{B}$ viene dada por

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_{eq}\mathbf{S}_{sf}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2} & -\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{2i} & \frac{\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4}{2} & -\frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4}{2i} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix},$$

y su inversa \mathbf{T}^{-1} , es decir,

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \Omega\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \eta & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & -\eta \end{pmatrix}.$$

Dinámica $\bar{\text{sf}}$: Los autovalores μ_i y autovectores \mathbf{w}_i de $\Omega\mathbf{B}$ son entonces los mismos del caso sf, así que tenemos

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \Omega\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \eta & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & -\eta \end{pmatrix},$$

con la misma \mathbf{T} del caso sf. Lo único que cambia para este caso es $\mathbf{P}(\mathbf{T}) = -\mathbf{I}$.

2.9. Autovalores y autovectores de M_L y A

El sistema autónomo equivalente siempre puede escribirse como

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (2.73)$$

con

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{U} & \bar{\Omega} \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

Podemos asumir sin perder generalidad que estamos en la base que diagonaliza \mathbf{U} , y escribir para el caso de 3 g.l.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \nu_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí hay que notar que por ser \mathbf{U} simétrica tendremos $\nu_1^2, \nu_2^2, \nu_3^2 \in \mathbb{R}$, pero pese a la notación (elegida por comodidad), cada uno de ellos puede ser negativo o positivo. El polinomio característico de \mathbf{A} será entonces:

$$\begin{aligned} \wp_3(\mu) &= \det(\mu^2 \mathbf{I} - \mu \bar{\Omega} - \mathbf{U}) = (\mu^2 - \nu_1^2)(\mu^2 - \nu_2^2)(\mu^2 - \nu_3^2) + \Omega^2 \mu^2 (\mu^2 - U_\Omega) \\ &= \mu^6 + (A + \Omega^2)\mu^4 + (B - \Omega^2 U_\Omega)\mu^2 + C, \end{aligned}$$

donde

$$U_\Omega = \frac{\nu_1^2 \Omega_1^2 + \nu_2^2 \Omega_2^2 + \nu_3^2 \Omega_3^2}{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2}, \quad \Omega^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2$$

y

$$A = -(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2), \quad B = (\nu_1^2 \nu_2^2 + \nu_1^2 \nu_3^2 + \nu_2^2 \nu_3^2), \quad C = -\nu_1^2 \nu_2^2 \nu_3^2.$$

Supongamos ahora que los autovalores de \mathbf{A} son $\pm\mu_1, \pm\mu_2, \pm\mu_3 \in \mathbb{C}$. Los correspondientes autovectores $\mathbf{X}_{\pm i}$ deben satisfacer

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_{\pm i} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{U} & \bar{\Omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\pm i} \\ \mathbf{v}_{\pm i} \end{pmatrix} = \pm\mu_i \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\pm i} \\ \mathbf{v}_{\pm i} \end{pmatrix}.$$

De donde se tiene la ecuación característica $(\mathbf{U} \pm \mu_i \bar{\Omega} - \mu_i^2 \mathbf{I})\mathbf{x}_{\pm i} = \mathbf{0}$ o en componentes

$$\begin{pmatrix} \mu_i^2 - \mu_1^2 & \pm\mu_i \Omega_3 & \mp\mu_i \Omega_2 \\ \mp\mu_i \Omega_3 & \mu_i^2 - \mu_2^2 & \pm\mu_i \Omega_1 \\ \pm\mu_i \Omega_2 & \mp\mu_i \Omega_1 & \mu_i^2 - \mu_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\pm i} \\ y_{\pm i} \\ z_{\pm i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En el caso general, sólo dos de las filas de esta matriz son L.I.; elegiremos las dos que no contienen el respectivo μ_i , para evitar la anulación de elementos si $\Omega^2 = 0$. Es fácil probar que:

1) Para $i = 1$ tenemos

$$\mathbf{x}_{\pm 1} = \begin{pmatrix} \mu_1^2 \Omega_1^2 + (\mu_1^2 - \nu_2^2)(\mu_1^2 - \nu_3^2) \\ \mu_1^2 \Omega_1 \Omega_2 \pm \mu_1 \Omega_3 (\mu_1^2 - \nu_3^2) \\ \mu_1^2 \Omega_1 \Omega_3 \mp \mu_1 \Omega_2 (\mu_1^2 - \nu_2^2) \end{pmatrix}.$$

2) Para $i = 2$ tenemos

$$\mathbf{x}_{\pm 2} = \begin{pmatrix} \mu_2^2 \Omega_2 \Omega_1 \mp \mu_2 \Omega_3 (\mu_2^2 - \nu_3^2) \\ \mu_2^2 \Omega_2^2 + (\mu_2^2 - \nu_1^2)(\mu_2^2 - \nu_3^2) \\ \mu_2^2 \Omega_2 \Omega_3 \pm \mu_2 \Omega_1 (\mu_2^2 - \nu_1^2) \end{pmatrix}.$$

3) Para $i = 3$ tenemos

$$\mathbf{x}_{\pm 3} = \begin{pmatrix} \mu_3^2 \Omega_3 \Omega_1 \pm \mu_3 \Omega_2 (\mu_3^2 - \nu_2^2) \\ \mu_3^2 \Omega_3 \Omega_2 \mp \mu_3 \Omega_1 (\mu_3^2 - \nu_1^2) \\ \mu_3^2 \Omega_3^2 \pm (\mu_3^2 - \nu_1^2)(\mu_3^2 - \nu_2^2) \end{pmatrix}.$$

En el caso particular $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ tendremos que los autovectores “espaciales” se reducen omitiendo factores comunes a

$$\mathbf{x}_{\pm 1} = \begin{pmatrix} \mu_1^2 - \nu_2^2 \\ \pm \mu_1 \Omega_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\pm 2} = \begin{pmatrix} \mp \mu_2 \Omega_3 \\ \mu_2^2 - \nu_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{\pm 3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_3^2 \Omega_3^2 + (\mu_3^2 - \nu_1^2)(\mu_3^2 - \nu_2^2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nótese que en este caso la dinámica se separa en el plano (z, \dot{z}) con 1 g.l. y el espacio (x, y, \dot{x}, \dot{y}) con 2 g.l. Ésto se pondrá en evidencia en el próximo capítulo cuando estudiemos el caso particular de forma exacta para un sistema de 2 g.l.

Cabe mencionar que éste desarrollo y el que sigue son puramente formales: en la práctica los utilizaremos únicamente para verificar resultados, y los autovalores μ_1, μ_2, μ_3 y los correspondientes autovectores se determinarán numéricamente a partir de la linealización de la órbita periódica.

2.9.1. Normalización de los autovectores

Guiándonos por los casos particulares anteriores, vamos a buscar una parametrización de los autovectores que sea consistente con ellos. Recordemos que la norma de los autovectores es arbitraria, así que parece tener sentido comenzar reduciéndolos a vectores unitarios. Para ello es importante tener en cuenta que $\pm \mu_i$, y por consiguiente $\mathbf{x}_{\pm i}$, pueden ser complejos. La expresión $\|\mathbf{x}_{\pm i}\| = \sqrt{\mathbf{x}_{\pm i}^* \cdot \mathbf{x}_{\pm i}}$ es válida en todos los casos. Vamos a suponer que $\mu_3^2 \in \mathbb{R}$ en todos los casos y recordemos que por definición $\nu_i^2 \in \mathbb{R}$.

Luego, podemos escribir

$$N_{\pm i}^2 := \|\mathbf{x}_{\pm i}\|^2 = \mathbf{x}_{\pm i}^* \cdot \mathbf{x}_{\pm i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.75)$$

De ésta manera obtenemos los vectores normalizados

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\pm 1} &= \frac{1}{N_{\pm 1}} \begin{pmatrix} \mu_1^2 \Omega_1^2 + (\mu_1^2 - \nu_2^2)(\mu_1^2 - \nu_3^2) \\ \mu_1^2 \Omega_1 \Omega_2 \pm \mu_1 \Omega_3 (\mu_1^2 - \nu_3^2) \\ \mu_1^2 \Omega_1 \Omega_3 \mp \mu_1 \Omega_2 (\mu_1^2 - \nu_2^2) \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_{\pm 2} &= \frac{1}{N_{\pm 2}} \begin{pmatrix} \mu_2^2 \Omega_2 \Omega_1 \mp (\mu_2 \Omega_3)(\mu_2^2 - \nu_3^2) \\ \mu_2^2 \Omega_2^2 + (\mu_2^2 - \nu_1^2)(\mu_2^2 - \nu_3^2) \\ \mu_2^2 \Omega_2 \Omega_3 \pm \mu_2 \Omega_1 (\mu_2^2 - \nu_1^2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_{\pm 3} &= \frac{1}{N_{\pm 3}} \begin{pmatrix} \mu_3^2 \Omega_3 \Omega_1 \pm \mu_3 \Omega_2 (\mu_3^2 - \nu_2^2) \\ \mu_3^2 \Omega_3 \Omega_2 \mp \mu_3 \Omega_1 (\mu_3^2 - \nu_1^2) \\ \mu_3^2 \Omega_3^2 \pm (\mu_3^2 - \nu_1^2)(\mu_3^2 - \nu_2^2) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

donde las componentes de cada uno de los autovectores cumplirán ahora la relación $|x_{\pm i}|^2 + |y_{\pm i}|^2 + |z_{\pm i}|^2 = 1$.

Con lo anterior, los autovectores “completos” $\mathbf{X}_{\pm i} \in \mathbb{C}^6$ se escribirán

$$\mathbf{X}_{\pm i} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\pm i} \\ \pm \mu_i \mathbf{x}_{\pm i} \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

2.10. Bases reales para 3 g.l.

Para obtener la base real en las diferentes dinámicas donde M_L y A adoptan su “forma canónica”, utilizaremos los autovectores normalizados de la sección anterior, los cuales recombinaremos de forma similar a la Sección 2.8.4. Sólo se detallan algunas dinámicas particulares a fin de entender como es el procedimiento.

Si bien las expresiones a obtener se utilizarán para desarrollar la teoría del método de control, cabe destacar que en las aplicaciones tanto los autovectores como las matrices de transformación se calculan numéricamente a partir de las matrices A o M_L .

Dinámica CCC: Los autovalores y autovectores de A son

$$\begin{aligned}\pm \mu_1 &= \pm i \omega_1 \longleftrightarrow \mathbf{X}_{\pm 1} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\pm 1} \\ \pm i \omega_1 \mathbf{x}_{\pm 1} \end{pmatrix}, \\ \pm \mu_2 &= \pm i \omega_2 \longleftrightarrow \mathbf{X}_{\pm 2} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\pm 2} \\ \pm i \omega_2 \mathbf{x}_{\pm 2} \end{pmatrix}, \\ \pm \mu_3 &= \pm i \omega_3 \longleftrightarrow \mathbf{X}_{\pm 3} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\pm 3} \\ \pm i \omega_3 \mathbf{x}_{\pm 3} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\pm 1} &= \frac{1}{N_{\pm 1}} \begin{pmatrix} -\omega_1^2 \Omega_1^2 + (-\omega_1^2 - \nu_2^2)(-\omega_1^2 - \nu_3^2) \\ -\omega_1^2 \Omega_1 \Omega_2 \pm i \omega_1 \Omega_3 (-\omega_1^2 - \nu_3^2) \\ -\omega_1^2 \Omega_1 \Omega_3 \mp i \omega_1 \Omega_2 (-\omega_1^2 - \nu_2^2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_{\pm 2} &= \frac{1}{N_{\pm 2}} \begin{pmatrix} -\omega_2^2 \Omega_2 \Omega_1 \mp i \omega_2 \Omega_3 (-\omega_2^2 - \nu_3^2) \\ -\omega_2^2 \Omega_2^2 + (-\omega_2^2 - \nu_1^2)(-\omega_2^2 - \nu_3^2) \\ -\omega_2^2 \Omega_2 \Omega_3 \pm i \omega_2 \Omega_1 (-\omega_2^2 - \nu_1^2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_{\pm 3} &= \frac{1}{N_{\pm 3}} \begin{pmatrix} -\omega_3^2 \Omega_3 \Omega_1 \pm i \omega_3 \Omega_2 (-\omega_3^2 - \nu_2^2) \\ -\omega_3^2 \Omega_3 \Omega_2 \mp i \omega_3 \Omega_1 (-\omega_3^2 - \nu_1^2) \\ -\omega_3^2 \Omega_3^2 \pm (-\omega_3^2 - \nu_1^2)(-\omega_3^2 - \nu_2^2) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Con ésto podemos construir los vectores reales

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{+1} &= \frac{\mathbf{X}_{+1} + \mathbf{X}_{-1}}{2}, & \mathbf{Y}_{+2} &= \frac{\mathbf{X}_{+2} + \mathbf{X}_{-2}}{2}, & \mathbf{Y}_{+3} &= \frac{\mathbf{X}_{+3} + \mathbf{X}_{-3}}{2}, \\ \mathbf{Y}_{-1} &= \frac{\mathbf{X}_{+1} - \mathbf{X}_{-1}}{2i}, & \mathbf{Y}_{-2} &= \frac{\mathbf{X}_{+2} - \mathbf{X}_{-2}}{2i}, & \mathbf{Y}_{-3} &= \frac{\mathbf{X}_{+3} - \mathbf{X}_{-3}}{2i}, \end{aligned}$$

y con ellos la matriz de transformación de semejanza (por lo tanto su inversa) y la matriz energía ⁸ en su forma normal

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{+1} & \mathbf{Y}_{-1} & \mathbf{Y}_{+2} & \mathbf{Y}_{-2} & \mathbf{Y}_{+3} & \mathbf{Y}_{-3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}, \\ \mathbf{E}_{CCC} &:= \begin{pmatrix} \omega_1 \mathbb{I}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \omega_2 \mathbb{I}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \omega_3 \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

con \mathbb{I}_2 y $\mathbf{0}_2$ las matrices identidad y nula 2×2 , respectivamente.

Dinámica SCC: Los autovalores y autovectores de \mathbf{A} son

$$\begin{aligned} \pm\mu_1 &= \pm\eta \longleftrightarrow \mathbf{X}_{\pm 1} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\pm 1} \\ \pm\eta \mathbf{x}_{\pm 1} \end{pmatrix}, \\ \pm\mu_2 &= \pm i\omega_2 \longleftrightarrow \mathbf{X}_{\pm 2} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\pm 2} \\ \pm i\omega_2 \mathbf{x}_{\pm 2} \end{pmatrix}, \\ \pm\mu_3 &= \pm i\omega_3 \longleftrightarrow \mathbf{X}_{\pm 3} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\pm 3} \\ \pm i\omega_1 \mathbf{x}_{\pm 3} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\pm 1} &= \frac{1}{N_{\pm 1}} \begin{pmatrix} \eta_1^2 \Omega_1^2 + (\eta_1^2 - \nu_2^2)(\eta_1^2 - \nu_3^2) \\ \eta_1^2 \Omega_1 \Omega_2 \pm \eta \Omega_3 (\eta_1^2 - \nu_3^2) \\ \eta_1^2 \Omega_1 \Omega_3 \mp \eta \Omega_2 (\eta_1^2 - \nu_2^2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_{\pm 2} &= \frac{1}{N_{\pm 2}} \begin{pmatrix} -\omega_2^2 \Omega_2 \Omega_1 \mp i\omega_2 \Omega_3 (-\omega_2^2 - \nu_3^2) \\ -\omega_2^2 \Omega_2^2 + (-\omega_2^2 - \nu_1^2)(-\omega_2^2 - \nu_3^2) \\ -\omega_2^2 \Omega_2 \Omega_3 \pm i\omega_2 \Omega_1 (-\omega_2^2 - \nu_1^2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_{\pm 3} &= \frac{1}{N_{\pm 3}} \begin{pmatrix} -\omega_3^2 \Omega_3 \Omega_1 \pm i\omega_3 \Omega_2 (-\omega_3^2 - \nu_2^2) \\ -\omega_3^2 \Omega_3 \Omega_2 \mp i\omega_3 \Omega_1 (-\omega_3^2 - \nu_1^2) \\ -\omega_3^2 \Omega_3^2 \pm (-\omega_3^2 - \nu_1^2)(-\omega_3^2 - \nu_2^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nuevamente, con ésto podemos construir los vectores reales

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{+1} &= \frac{\mathbf{X}_{+1} + \mathbf{X}_{-1}}{2}, & \mathbf{Y}_{+2} &= \frac{\mathbf{X}_{+2} + \mathbf{X}_{-2}}{2}, & \mathbf{Y}_{+3} &= \frac{\mathbf{X}_{+3} + \mathbf{X}_{-3}}{2}, \\ \mathbf{Y}_{-1} &= \frac{\mathbf{X}_{+1} - \mathbf{X}_{-1}}{2}, & \mathbf{Y}_{-2} &= \frac{\mathbf{X}_{+2} - \mathbf{X}_{-2}}{2i}, & \mathbf{Y}_{-3} &= \frac{\mathbf{X}_{+3} - \mathbf{X}_{-3}}{2i}, \end{aligned}$$

⁸La definición y uso de la matriz de energía se detallan más adelante, en la Sección 2.11 del método de control.

y con ellos la matriz de transformación de semejanza (por lo tanto su inversa) y la matriz energía en su forma normal

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{+1} & \mathbf{Y}_{-1} & \mathbf{Y}_{+2} & \mathbf{Y}_{-2} & \mathbf{Y}_{+3} & \mathbf{Y}_{-3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_{SCC} := \begin{pmatrix} \mathbf{E}_S & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{E}_{C1} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{E}_{C2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 \end{pmatrix}.$$

con \mathbf{E}_S , \mathbf{E}_{C1} y \mathbf{E}_{C2} las matrices de energía 2×2 correspondientes a los subespacios silla y cada uno de los dos centros, respectivamente.

Dinámica sfC: Los autovalores y autovectores de \mathbf{A} son

$$\begin{aligned} \pm\mu_1 &= \eta \pm i\omega \longleftrightarrow \mathbf{X}_{\pm 1} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\pm 1} \\ (\eta \pm i\omega)\mathbf{x}_{\pm 1} \end{pmatrix}, \\ \pm\mu_2 &= -\eta \pm i\omega \longleftrightarrow \mathbf{X}_{\pm 2} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\pm 2} \\ (\eta \pm i\omega)\mathbf{x}_{\pm 2} \end{pmatrix}, \\ \pm\mu_3 &= \pm i\omega' \longleftrightarrow \mathbf{X}_{\pm 3} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\pm 3} \\ \pm i\omega'\mathbf{x}_{\pm 3} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\pm 1} &= \frac{1}{N_{\pm 1}} \begin{pmatrix} (\eta \pm i\omega)^2 \Omega_1^2 + ((\eta \pm i\omega)^2 - \nu_2^2)((\eta \pm i\omega)^2 - \nu_3^2) \\ (\eta \pm i\omega)^2 \Omega_1 \Omega_2 \pm (\eta \pm i\omega) \Omega_3 ((\eta \pm i\omega)^2 - \nu_3^2) \\ (\eta \pm i\omega)^2 \Omega_1 \Omega_3 \mp (\eta \pm i\omega) \Omega_2 ((\eta \pm i\omega)^2 - \nu_2^2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_{\pm 2} &= \frac{1}{N_{\pm 2}} \begin{pmatrix} (-\eta \pm i\omega)^2 \Omega_1^2 + ((-\eta \pm i\omega)^2 - \nu_2^2)((-\eta \pm i\omega)^2 - \nu_3^2) \\ (-\eta \pm i\omega)^2 \Omega_1 \Omega_2 \pm (-\eta \pm i\omega) \Omega_3 ((-\eta \pm i\omega)^2 - \nu_3^2) \\ (-\eta \pm i\omega)^2 \Omega_1 \Omega_3 \mp (-\eta \pm i\omega) \Omega_2 ((-\eta \pm i\omega)^2 - \nu_2^2) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_{\pm 3} &= \frac{1}{N_{\pm 3}} \begin{pmatrix} -\omega'^2 \Omega_3 \Omega_1 \pm i\omega' \Omega_2 (-\omega'^2 - \nu_2^2) \\ -\omega'^2 \Omega_3 \Omega_2 \mp i\omega' \Omega_1 (-\omega'^2 - \nu_1^2) \\ -\omega'^2 \Omega_3^2 + (-\omega'^2 - \nu_1^2)(-\omega'^2 - \nu_2^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nuevamente, con ésto podemos construir los vectores reales

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{+1} &= \frac{\mathbf{X}_{+1} + \mathbf{X}_{-1}}{2}, & \mathbf{Y}_{+2} &= \frac{\mathbf{X}_{+2} + \mathbf{X}_{-2}}{2}, & \mathbf{Y}_{+3} &= \frac{\mathbf{X}_{+3} + \mathbf{X}_{-3}}{2}, \\ \mathbf{Y}_{-1} &= -\frac{(\mathbf{X}_{+1} - \mathbf{X}_{-1})}{2i}, & \mathbf{Y}_{-2} &= -\frac{(\mathbf{X}_{+2} - \mathbf{X}_{-2})}{2i}, & \mathbf{Y}_{-3} &= \frac{\mathbf{X}_{+3} - \mathbf{X}_{-3}}{2i}, \end{aligned}$$

y con ellos la matriz de transformación de semejanza, (por lo tanto su inversa) y la matriz energía en su forma normal

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{+1} & \mathbf{Y}_{-1} & \mathbf{Y}_{+2} & \mathbf{Y}_{-2} & \mathbf{Y}_{+3} & \mathbf{Y}_{-3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_{sfC} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & \eta & 0 & 0 \\ \eta & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega' \end{pmatrix}.$$

2.11. Método de control para 3 g.l.

En ésta Sección se desarrollará el método de control en su forma más general para el caso de 3 g.l. Plantearemos el método en primera instancia para una estructura tipo hiperbólica o silla (S o \bar{S}), luego para una estructura tipo elíptica o centro (C), y finalmente para una estructura silla-foco (sf o \bar{sf}). La principal novedad en éste trabajo se verá reflejado al momento de implementarlo sobre una estructura elíptica, donde necesitaremos la información de la Sección anterior, es decir, haremos uso de las matrices de transformación de semejanza, su inversa y la matriz de energía.

Dada una OP y una órbita real cercana, el objetivo del algoritmo de control es aplicar impulsos de control que modifiquen la órbita real de tal manera que la dinámica subsiguiente la lleve más cerca de la OP. Diseñaremos un algoritmo de control lineal que incluya un solo impulso de control en cada período orbital.

A partir de Leiva (ver (Sección 4.2)) [5], la linealización de la dinámica alrededor de una OP permite separar Σ en tres variedades bidimensionales⁹, o una cuatridimensional y una bidimensional, independientes que se intersectan en el punto fijo $\phi(t_0)$, que llamaremos en adelante \mathbf{r}^* ; cada una es invariante bajo la acción de \mathbf{M} y tendrá alguna de las estructuras hiperbólica, elíptica o silla-foco. Estas variedades lineales son tangentes en \mathbf{r}^* a las variedades del sistema no-lineal completo. En principio, uno podría pensar que ésto permite diseñar un algoritmo de control sencillo compuesto de dos o tres algoritmos independientes, cada uno actuando sobre cada variedad. En ésta Sección veremos que, en general, éste no es el camino adecuado.

Consideremos los vectores

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^* &= (x^*, y^*, z^*, \dot{x}^*, \dot{y}^*, \dot{z}^*)^T = (x, y, z, u, v, w)^T. \\ \delta\mathbf{r} &= (\delta x, \delta y, \delta z, \delta u, \delta v, \delta w)^T. \\ \Delta\mathbf{r} &= (0, 0, 0, \Delta u, \Delta v, \Delta w)^T.\end{aligned}\tag{2.77}$$

Aquí $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}_0 \in \Sigma_{t_0}$ es un punto fijo del mapa de Poincaré sobre la sección Σ_{t_0} , correspondiente a una dada órbita periódica $\mathbf{r}(t; \mathbf{r}_0, t_0)$, el punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}^* + \delta\mathbf{r}$ representa una trayectoria vecina que presenta un pequeño desplazamiento $\delta\mathbf{r}$ respecto de \mathbf{r}^* y el vector $\Delta\mathbf{r}$ corresponde al impulso de control que queremos aplicar sobre esta trayectoria.

Las tres primeras componentes de $\Delta\mathbf{r}$ son nulas debido a que solo podemos cambiar instantáneamente el valor de la velocidad de la órbita actual. Como veremos a continuación, esta condición restringe la separación del algoritmo de control en algoritmos independientes que actúen sobre cada variedad.

⁹ Σ es la sección del mapa de Poincaré.

Primero, consideremos el caso de una variedad con una estructura silla (S). El desplazamiento en Σ_{t_0} que se obtiene para una trayectoria vecina quedará expresado como $\delta \mathbf{r} = \zeta \mathbf{e}_u + \eta \mathbf{e}_s + \mathbf{d}$, donde ζ y η son números reales arbitrarios, \mathbf{e}_u y \mathbf{e}_s son los autovectores de \mathbf{A} (y por consiguiente de \mathbf{M}) que generan la subvariedad S correspondientes a los autovalores reales μ y $-\mu$ respectivamente, y el vector \mathbf{d} es una combinación lineal arbitraria de los autovectores restantes de \mathbf{A} . Para ejercer control sobre esta variedad independientemente de las demás, debemos aplicar a $\delta \mathbf{r}$ un impulso $\Delta \mathbf{r} \in S$ para posicionar la órbita sobre la dirección lineal estable \mathbf{e}_s ,¹⁰ esto significa que deberemos determinar el valor η' tal que $\delta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} = \eta' \mathbf{e}_s$. Sin embargo, los autovectores linealmente independientes \mathbf{e}_u y \mathbf{e}_s están separados proporcionalmente en componentes de coordenadas y velocidades según

$$\mathbf{e}_u = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_u \\ \mu \mathbf{u}_u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ -\mu \mathbf{u}_s \end{pmatrix},$$

donde \mathbf{u}_u y \mathbf{u}_s son vectores tridimensionales linealmente independientes. Con todo lo expuesto resulta $\zeta \mathbf{u}_u + (\eta - \eta') \mathbf{u}_s = 0$, lo cual implica que $\zeta = 0$ y $\eta = \eta'$. Así, sólo podremos ejercer control de manera independiente en el caso trivial en el que $\delta \mathbf{r}$ no tenga componentes en la dirección de \mathbf{e}_u . Así, en el caso general, no podremos lograr el control de manera independiente sobre esta estructura. La única forma de lograr el control es, entonces, eliminar el requerimiento de independencia que limita $\Delta \mathbf{r}$ a estar en S. El mismo fenómeno se encuentra para variedades C o sf. Debemos elaborar entonces un algoritmo de control que actúe *simultáneamente* sobre todas las variedades mediante la aplicación de un único impulso.

Consideremos tres *vectores de control* reales y linealmente independientes \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} en Σ_{t_0} , cuya elección especificaremos más adelante. Estos vectores generan una variedad lineal tridimensional $W \subset \Sigma_{t_0}$ que contiene a \mathbf{r}^* . El objetivo del algoritmo es encontrar un impulso de control $\Delta \mathbf{r}$ que posicione al punto $\delta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ sobre W . Tendremos entonces que

$$\mathbf{r}^* - \delta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}^* + \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c},$$

lo que implica

$$\Delta \mathbf{r} = -\delta \mathbf{r} + \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}, \quad (2.78)$$

donde α , β y γ son constantes a determinar.

Escribiendo explícitamente las componentes de \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} como

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (x_a, y_a, z_a, \dot{x}_a, \dot{y}_a, \dot{z}_a)^T, \\ \mathbf{b} &= (x_b, y_b, z_b, \dot{x}_b, \dot{y}_b, \dot{z}_b)^T, \\ \mathbf{c} &= (x_c, y_c, z_c, \dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{z}_c)^T, \end{aligned} \quad (2.79)$$

¹⁰En la práctica, lo más próximo de la variedad estable \mathbf{e}_s

podemos escribir la ec. (2.78) como el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \\ \Delta\dot{z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \\ \dot{x}_a & \dot{x}_b & \dot{x}_c \\ \dot{y}_a & \dot{y}_b & \dot{y}_c \\ \dot{z}_a & \dot{z}_b & \dot{z}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

en las variables desconocidas α , β , γ , $\Delta\dot{x}$, $\Delta\dot{y}$ y $\Delta\dot{z}$. Asumiendo que

$$\det \begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{pmatrix} \neq 0, \quad (2.81)$$

las tres primeras ecuaciones pueden ser resueltas separadamente, dando el valor de las constantes α , β y γ como

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Una vez que tenemos determinadas las constantes, fácilmente podemos resolver el segundo grupo de las ecuaciones (2.80) que dará los valores correspondientes al impulso $\Delta\mathbf{r}$:

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \\ \Delta\dot{z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \delta\dot{x} \\ \delta\dot{y} \\ \delta\dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x}_a & \dot{x}_b & \dot{x}_c \\ \dot{y}_a & \dot{y}_b & \dot{y}_c \\ \dot{z}_a & \dot{z}_b & \dot{z}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Ésta última ecuación es precisamente la ley de control que buscábamos. En particular, para OPs planas, ($z = \dot{z} = 0$), una de las variedades lineales es automáticamente el plano (z, \dot{z}) , desarrollado por los vectores $(0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$ y $(0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$.

Vamos a discutir ahora la selección de los vectores de control. Para cada variedad 2D S o \bar{S} , es evidente que debemos elegir el correspondiente vector de control como el autovector estable de \mathbf{A} , que desarrolla la variedad estable (unidimensional) de S o \bar{S} . Para una variedad sf o \bar{sf} , también es evidente que debemos elegir como vectores de control los dos autovectores estables de \mathbf{A} , que desarrollan la variedad estable (bidimensional) de sf o \bar{sf} .

Consideremos ahora una variedad C bidimensional, sobre la que la dinámica es tipo centro. Podría pensarse que en este caso no hay necesidad de ejercer control, debido a que nos encontramos ante un caso de estabilidad orbital [16]. Sin embargo, esta característica es derivada del análisis lineal y la dinámica completa del sistema no lineal puede ser inestable alrededor de \mathbf{r}^* . Más aún, desde un punto de vista práctico, esta estabilidad neutral puede

conducir a la acumulación de perturbaciones externas y de errores numéricos que alejen la trayectoria actual de la vecindad de \mathbf{r}^* . Pero el factor determinante que impone la necesidad de ejercer control sobre esta variedad se debe a que, como se mostró anteriormente, en general para lograr la estabilización tenemos que ejercer control sobre todas las variedades simultáneamente.

En una variedad C no existen direcciones estables e inestables y no podemos exigir que la dinámica actúe de manera tal que la trayectoria se acerque a \mathbf{r}^* , pero podemos imponer que los impulsos aplicados mantengan el movimiento sobre C lo más cerca posible del punto fijo, debido a que, sobre C los conjuntos invariantes del mapa- T dado por M son elipses que mantienen una proporción fija [17]. Así, podemos imponer como condición de estabilización que el movimiento se desarrolle sobre una elipse que resulte lo más pequeña posible.

Como ya se mencionó al principio de esta Sección, para llevar a cabo el método de control en la variedad central, necesitamos lo obtenido en la Sección 2.10. Denotaremos por \mathbf{Q} las coordenadas donde A adopta su forma canónica real. Éstas juegan el mismo papel que las *coordenadas normales* usuales, por ejemplo, en problemas de pequeñas oscilaciones [20], y conservaremos esa nomenclatura.

Tendremos

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ q_2 \\ p_2 \\ q_3 \\ p_3 \end{pmatrix} = \mathbb{T}^{-1} \mathbf{X} = \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \delta \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \delta p_1 \\ \delta q_2 \\ \delta p_2 \\ \delta q_3 \\ \delta p_3 \end{pmatrix} = \mathbb{T}^{-1} \delta \mathbf{X} = \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

de donde es inmediato que

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \delta \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x + \Delta v_x \\ v_y + \Delta v_y \\ v_z + \Delta v_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}' = \mathbf{Q} + \delta \mathbf{Q} = \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x + \Delta v_x \\ v_y + \Delta v_y \\ v_z + \Delta v_z \end{pmatrix}. \quad (2.85)$$

Definiendo en forma general la matriz de energía como E_{din} , donde *din* representa las distintas dinámicas posibles en 3 g.l., es decir, las que se definieron también en la Sección 2.10, podemos escribir el escalar de energía como la contracción de \mathbf{Q}'^T y \mathbf{Q}' con la matriz de energía

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{X}'^T \mathbb{T}^{-T} E_{din} \mathbb{T}^{-1} \mathbf{X}' = \frac{1}{2} \mathbf{Q}'^T E_{din} \mathbf{Q}', \quad (2.86)$$

donde \mathbf{X}' y \mathbf{Q}' son los vectores a partir del cual obtendremos los vectores de control en coordenadas cartesianas y en coordenadas normales, respectivamente.

Definidas éstas herramientas, estamos en condiciones de implementar el método de control para cualquier tipo de dinámica. Como mencionamos

antes, para dinámicas tipo silla el método consiste en posicionar la órbita sobre la variedad lineal estable, mientras que para dinámicas tipo C la condición para la estabilización es la minimización de la energía respecto a Δv_i , $i = x, y, z$, ya que no existen direcciones estables e inestables.

Por lo tanto, cuando la dinámica sea combinaciones de sillas/sillas de reflexión (S/ \bar{S}) y centros (C) ó silla-foco/silla-foco de reflexión (sf/ \bar{sf}) y centro (C), el método de control consistirá, en hacer ambos *simultáneamente*. A este propósito el camino que elegimos es el de utilizar el método de los *multiplicadores de Lagrange*, es decir, *minimizar la energía de la variedad central sujeto al vínculo de que la órbita se posicione sobre la variedad estable de las sillas o sillas-foco*.

A fin de entender lo precedente y no extendernos tanto, vamos a dar sólo algunos ejemplos para ciertas dinámicas, en particular para las que estudiamos en la Sección 2.10.

Dinámica CCC: A partir de la matriz de energía E_{CCC} definida en la Sección 2.10 tenemos el escalar de energía

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{Q}'^T \mathbb{T}^{-T} E_{CCC} \mathbb{T}^{-1} \mathbf{Q}',$$

y la condición de minimización de la energía respecto a Δv_i , $i = x, y, z$ implica

$$\frac{\partial E}{\partial(\Delta v_i)} = \frac{\partial E}{\mathbf{Q}'} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial \Delta v_i} = \mathbf{Q}'^T E_{CCC} \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_{ix} \\ \delta_{iy} \\ \delta_{iz} \end{pmatrix} = 0, \quad i = x, y, z,$$

donde δ_{ij} , $i, j = x, y, z$ son deltas de Kronecker.

Además de ésta última condición, si recordamos que $\mathbf{Q}' = \mathbb{T}^{-1} \mathbf{X}'$ y que por ser diagonal la matriz de energía, $E_{CCC}^{-T} = E_{CCC}^{-1}$, se obtienen los vectores de control

$$\mathbb{T} E_{CCC}^{-1} \mathbb{T}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{T} E_{CCC}^{-1} \mathbb{T}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{T} E_{CCC}^{-1} \mathbb{T}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dinámica SCC: A partir de la matriz de energía E_{SCC} definida en la Sección 2.10 tenemos el escalar de energía

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{Q}'^T \mathbb{T}^{-T} E_{SCC} \mathbb{T}^{-1} \mathbf{Q}'.$$

Además, el *vínculo* de posicionar la órbita sobre la dirección estable de la variedad silla (S) viene dado por

$$\mathbf{Q}'^T \mathbb{T}^{-1} \mathbf{X}_{+1} = \mathbf{Q}'^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.87)$$

Para encontrar los vectores de control que minimizan la energía, aún debemos agregar este vínculo, es decir, debemos minimizar

$$\begin{aligned} E' &= E + \lambda_1 \mathbf{Q}'^T \mathbb{T}^{-1} \mathbf{X}_{+1} \\ &= E + \lambda_1 \mathbf{X}_{+1}^T \mathbb{T}^{-T} \mathbf{Q}', \end{aligned}$$

donde λ_1 es un multiplicador de Lagrange a determinar pero, como veremos, para nuestro propósito no es imprescindible determinarlo *a priori*, ya que el método de control depende sólo de la dirección de los vectores de control, y no de su norma.

Derivando E' respecto a Δv_i , $i = x, y, z$, usando que $\mathbf{Q}' = \mathbb{T}^{-1} \mathbf{X}'$ y $\mathbf{E}_{SCC}^{-1} = \mathbf{E}_{SCC}^{-T}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'}{\partial(\Delta v_i)} &= \frac{\partial E'}{\mathbf{Q}'} \cdot \frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial \Delta v_i} \\ &= [\mathbf{X}'^T + \lambda_1 \mathbf{X}_{+1}^T \mathbb{T}^{-T} \mathbf{E}_{SCC}^{-1} \mathbb{T}^T] \mathbb{T}^{-T} \mathbf{E}_{SCC} \mathbb{T}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_{i1} \\ \delta_{i2} \\ \delta_{i3} \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De ésto último y utilizando la condición del vínculo (2.87) se obtiene

$$\mathbf{X}' = \mathbb{T} \mathbf{E}_{SCC}^{-1} \left(-\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{T}^T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

donde α , β y γ son constantes a determinar.

Podríamos decir un poco más si trasponemos la condición para el vínculo (2.87)

$$\begin{aligned} (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \mathbb{T}^{-1} \mathbf{X}' &= (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \mathbf{E}_{SCC}^{-1} \left(-\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{T}^T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{\eta} \mathbf{X}_{-1}^T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Si recordamos la expresión $\mathbf{X}_{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{-1} \\ -\eta_1 \mathbf{x}_{-1} \end{pmatrix}$ (ver Sec. 2.9.1), la última igualdad nos da la condición que el vector $(\alpha, \beta, \gamma)^T$ debe ser ortogonal al vector \mathbf{x}_{-1} , es decir,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda_2 (\mathbf{x}_{-1} \wedge \mathbf{y}_{-2}) + \lambda_3 (\mathbf{x}_{-1} \wedge \mathbf{y}_{-3}) \in \mathbb{R}^3,$$

con $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ y donde \mathbf{y}_{-2} y \mathbf{y}_{-3} son dos vectores ortogonales a \mathbf{x}_{-1} . Así, tendremos

$$\mathbf{X}' = \lambda'_1 \mathbf{X}_{-1} + \lambda_2 \mathbb{T} \mathbb{E}_{SCC}^{-1} \mathbb{T}^T \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{-1} \wedge \mathbf{y}_{-2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \lambda_3 \mathbb{T} \mathbb{E}_{SCC}^{-1} \mathbb{T}^T \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{-1} \wedge \mathbf{y}_{-3} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.88)$$

con $\lambda'_1 = \frac{\lambda_1}{\eta_1}$, $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. (Éstas dos últimas constantes las podríamos reabsorber, si quisieramos, dentro de la matriz de energía inversa, ya que no alteran la estructura de los vectores de control). Entonces los vectores de control serán \mathbf{X}_{-1} , $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{-1} \wedge \mathbf{y}_{-2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{-1} \wedge \mathbf{y}_{-3} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Dinámica sfC: A partir de la matriz de energía E_{sfC} definida en la Sección 2.10 tenemos el escalar de energía

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{Q}'^T \mathbb{T}^{-T} \mathbb{E}_{sfC} \mathbb{T}^{-1} \mathbf{Q}'.$$

Nuevamente, la idea es minimizar la energía, pero ahora sujeto a los vínculos

$$\mathbf{Q}'^T \mathbb{T}^{-1} \mathbf{Y}_{+1} = 0, \quad \mathbf{Q}'^T \mathbb{T}^{-1} \mathbf{Y}_{-1} = 0, \quad (2.89)$$

ya que \mathbf{Y}_{+1} e \mathbf{Y}_{-1} desarrollan la variedad estable de la silla-foco. Es decir, debemos minimizar

$$E' = E + \lambda_1 \mathbf{Q}'^T \mathbb{T}^{-1} \mathbf{Y}_{+1} + \lambda_2 \mathbf{Q}'^T \mathbb{T}^{-1} \mathbf{Y}_{-1}.$$

La condición $\frac{\partial E'}{\partial (\Delta v_i)} = 0$, $i = x, y, z$ implica, después de un poco de álgebra y de recordar $\mathbf{Q}' = \mathbb{T}^{-1} \mathbf{X}'$, que

$$\mathbf{X}' = -\lambda_1 \mathbb{T} \mathbb{E}_{sfC}^{-1} \mathbb{T}^{-1} \mathbf{Y}_{+1} - \lambda_2 \mathbb{T} \mathbb{E}_{sfC}^{-1} \mathbb{T}^{-1} \mathbf{Y}_{-1} + \mathbb{T} \mathbb{E}_{sfC}^{-1} \mathbb{T}^T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde α , β y γ son constantes a determinar. De ésto último y usando la condición para los vínculos (2.89) se obtiene

$$\mathbf{X}' = \mathbb{T} \mathbb{E}_{sfC}^{-1} \left(-\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{T}^T \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Al igual que para el caso SCC, si trasponemos las condiciones para los vínculos (donde ahora obviamente tenemos dos en vez de uno), se llega a

$$(\alpha \beta \gamma 0 0 0)(\eta \mathbf{Y}_{+2} - \omega \mathbf{Y}_{-2}) = 0, \quad (\alpha \beta \gamma 0 0 0)(\omega \mathbf{Y}_{+2} + \eta \mathbf{Y}_{-2}) = 0.$$

Buscando un vector simultáneamente ortogonal a éstos dos para calcular $(\alpha \beta \gamma 0 0 0)^T$ llegamos a una expresión para los vectores de control de la forma

$$\mathbf{X}' = -\lambda_1 (\eta \mathbf{Y}_{+2} - \omega \mathbf{Y}_{-2}) - \lambda_2 (\omega \mathbf{Y}_{+2} + \eta \mathbf{Y}_{-2}) + \lambda'_3 \mathbb{T} \mathbb{E}_{sfC}^{-1} \mathbb{T}^T \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{+2} \wedge \mathbf{y}_{-2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

2.11. MÉTODO DE CONTROL PARA 3 G.L.

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3' \in \mathbb{R}$.

Si bien no detallamos todos los casos posibles, a modo de tener una clasificación completa para el método en 3 g.l., resumiremos los vectores de control para todas las dinámicas en la Tabla 2.1.

| Método de control | | | | | | | | | |
|-------------------|-------------|--------------|-------------|--------------|-------------|--------------|---|--|---|
| Dinámica | μ_1 | μ_2 | μ_3 | μ_4 | μ_5 | μ_6 | V_1 | V_2 | V_3 |
| SSS | η_1 | $-\eta_1$ | η_2 | $-\eta_2$ | η_3 | $-\eta_3$ | $Y_{+1} - Y_{-1}$ | $Y_{+2} - Y_{-2}$ | $Y_{+3} - Y_{-3}$ |
| SSC | η_1 | $-\eta_1$ | η_2 | $-\eta_2$ | $i\omega$ | $-i\omega$ | $Y_{+1} - Y_{-1}$ | $Y_{+2} - Y_{-2}$ | $TE_{SSC}^{-1} T^T \left((Y_{+1} - Y_{-1}) \times (Y_{+2} - Y_{-2}) \right)$ |
| SCC | η | $-\eta$ | $i\omega_1$ | $-i\omega_1$ | $i\omega_2$ | $-i\omega_2$ | $Y_{+1} - Y_{-1}$ | $TE_{SCC}^{-1} T^T \left((Y_{+1} - Y_{-1}) \times Y_{-2} \right)$ | $TE_{SCC}^{-1} T^T \left((Y_{+1} - Y_{-1}) \times Y_{-3} \right)$ |
| CCC | $i\omega_1$ | $-i\omega_1$ | $i\omega_2$ | $-i\omega_2$ | $i\omega_3$ | $-i\omega_3$ | $TE_{CCC}^{-1} T^T \left(Y_{-1} \right)$ | $TE_{CCC}^{-1} T^T \left(Y_{-2} \right)$ | $TE_{CCC}^{-1} T^T \left(Y_{-3} \right)$ |
| sfs | η | η | $-\eta$ | $-\eta$ | η' | $-\eta'$ | Y_{+2} | Y_{-2} | $Y_{+3} - Y_{-3}$ |
| sfc | η | η | $-\eta$ | $-\eta$ | $i\omega'$ | $-i\omega'$ | Y_{+2} | Y_{-2} | $TE_{sfc}^{-1} T^T \left(Y_{+2} \times Y_{-2} \right)$ |

Tabla 2.1: Vectores de control V_i para todas las dinámicas en 3 g.l. Notemos que el método involucra únicamente los autovectores de M_L (a través de los Y_i o la matriz T), y los autovalores μ_i (a través de la matriz E_{din}). Por consiguiente es independiente de si una dinámica es S o \bar{S} (respectivamente sf o \bar{sf}), y el mismo en ambos casos.

Capítulo 3

Método de control: caso especial 2D

En este capítulo estudiaremos una consecuencia directa del desarrollo teórico en 3 g.l. del método de control descrito en el Capítulo 2. Recordemos que el trabajo previo realizado es meramente teórico y siempre hicimos hincapié en que la estructura de los vectores de control obtenidos en la Tabla 2.1 para todas las dinámicas posibles, se los calcularía numéricamente dadas la matrices de transformación de semejanza \mathbf{T} y de energía \mathbf{E}_{din} , y sus inversas \mathbf{T}^{-1} y \mathbf{E}_{din}^{-1} , respectivamente. Esto es así debido a la complejidad de obtener analíticamente las raíces (autovalores) del polinomio característico $\varphi(\mu)$ de \mathbf{A} (ver Sec. 2.9).

En particular, consideraremos el caso de 2 g.l. y obtendremos los vectores de control en las distintas dinámicas en forma analítica, donde aquí sí es posible calcular explícitamente los autovalores de \mathbf{A} .

3.1. Sistemas linealizados

Vamos a considerar el sistema linealizado de tiempo continuo más general que esperamos encontrar. Éste tendrá la forma de una partícula de masa unidad en \mathbb{R}^3 , en un potencial estático $U(x, y, z)$ con punto crítico en el origen, en un sistema que rota con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x \hat{\mathbf{x}} + \Omega_y \hat{\mathbf{y}} + \Omega_z \hat{\mathbf{z}}$ (por ahora constante). Las ecs. de movimiento para el vector posición $\mathbf{u} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ son

$$\ddot{\mathbf{u}} = -\nabla U + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}) + 2\dot{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (3.1)$$

La linealización cerca del origen aproxima el potencial como

$$U(\mathbf{u}) = U(\mathbf{0}) + \frac{\partial U(\mathbf{0})}{\partial u_i} u_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U(\mathbf{0})}{\partial u_i \partial u_j} u_i u_j.$$

El primer término es constante y podemos “tirarlo”, y el segundo se anula por ser el origen un punto crítico. Las ecs. de movimiento quedan entonces

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{U}\mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}) + 2\dot{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\Omega},$$

donde

$$\mathbf{U} = [U_{ij}] = - \left[\frac{\partial^2 U(\mathbf{0})}{\partial u_i \partial u_j} \right].$$

El término centrífugo se puede expresar como

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega}) = \begin{pmatrix} \Omega_y^2 + \Omega_z^2 & -\Omega_x \Omega_y & -\Omega_x \Omega_z \\ -\Omega_x \Omega_y & \Omega_x^2 + \Omega_z^2 & -\Omega_y \Omega_z \\ -\Omega_x \Omega_z & -\Omega_y \Omega_z & \Omega_x^2 + \Omega_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

Así el sistema (3.1) también puede escribirse como

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{U}\mathbf{u} + 2\dot{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (3.2)$$

con

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_{xx} + \Omega_y^2 + \Omega_z^2 & U_{xy} - \Omega_x \Omega_y & U_{xz} - \Omega_x \Omega_z \\ U_{xy} - \Omega_x \Omega_y & U_{yy} + \Omega_x^2 + \Omega_z^2 & U_{yz} - \Omega_y \Omega_z \\ U_{xz} - \Omega_x \Omega_z & U_{yz} - \Omega_y \Omega_z & U_{zz} + \Omega_x^2 + \Omega_y^2 \end{pmatrix}.$$

3.2. Caso especial de sistema lineal

Por simplicidad y a manera de distinción del sistema de la Sección 3.1, en lo que sigue vamos a considerar simplemente un sistema de la forma

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{U}\mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (3.3)$$

El sistema puede escribirse como uno de primer orden en \mathbb{R}^6 en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.4)$$

con

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (3.5)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{U} & \bar{\boldsymbol{\Omega}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que \mathbf{U} es real y simétrica y $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ es real y antisimétrica. Existen dos bases cartesianas de \mathbb{R}^3 que simplifican el problema.

Notemos que \mathbf{U} es diagonalizable, y la transformación que la diagonaliza es simplemente una rotación en \mathbb{R}^3 , que no altera la estructura de $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$. Por

3.3. AUTOVALORES, AUTOVECTORES Y SUBESPACIOS

otro lado podemos no diagonalizar \mathbf{U} , pero aplicar una rotación que alineé $\mathbf{\Omega}$ con el eje z , es decir, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}\hat{\mathbf{z}}$.

Podemos hallar también relaciones útiles entre los elementos de las matrices en ambas bases. Notando que una rotación no debe cambiar los invariantes algebraicos de $\bar{\mathbf{\Omega}}$, que son los coeficientes de su polinomio característico, vemos que debemos tener

$$\det \begin{pmatrix} \mu & \Omega & 0 \\ -\Omega & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mu & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & \mu & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & \mu \end{pmatrix},$$

de donde deducimos que

$$\Omega^2 = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2$$

(la rotación no cambia la norma de $\mathbf{\Omega}$). Por otro lado, una rotación tampoco debe alterar los invariantes algebraicos de \mathbf{U} . Entonces

$$\det \begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mu - \nu_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \nu_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \nu_3^2 \end{pmatrix},$$

donde ν_i^2 son los autovalores de \mathbf{U} y por lo tanto reales. (No estamos asumiendo que \mathbf{U} sea definida positiva, así que sus autovalores no serán necesariamente positivos, pese a la notación). De ésta última igualdad se deduce

$$\begin{aligned} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}, \\ \nu_1^2 \nu_2^2 + \nu_2^2 \nu_3^2 + \nu_3^2 \nu_1^2 &= U_{xx}U_{yy} + U_{yy}U_{zz} + U_{zz}U_{xx} - U_{xy}^2 - U_{xz}^2 - U_{yz}^2, \\ \nu_1^2 \nu_2^2 \nu_3^2 &= U_{xx}U_{yy}U_{zz} + 2U_{xy}U_{xz}U_{yz} - U_{zz}U_{xy}^2 - U_{yy}U_{xz}^2 - U_{xx}U_{yz}^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

En ambos casos, el sistema original puede reescribirse como

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{U}\mathbf{u} + \bar{\mathbf{\Omega}}\mathbf{v}, \tag{3.7}$$

o también, eliminando \mathbf{v} , como

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{U}\mathbf{u} + \bar{\mathbf{\Omega}}\dot{\mathbf{u}}. \tag{3.8}$$

3.3. Autovalores, autovectores y subespacios

El problema puede plantearse indiferentemente como el sistema de primer orden en \mathbb{R}^6 o como el problema de segundo orden en \mathbb{R}^3 . En el segundo caso proponemos soluciones de la forma

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}e^{\mu t}, \quad \mathbf{U} \in \mathbb{C}^3, \quad \mu \in \mathbb{C}, \tag{3.9}$$

donde \mathbf{U} y μ son constantes.

Para tener soluciones no triviales en la base que diagonaliza \mathbf{U} , debemos substituir este *ansatz* en (3.8) y anular el polinomio característico

$$\wp(\mu) = \det(\mu^2 - \mu\bar{\Omega} - \mathbf{U}). \quad (3.10)$$

Calculando los polinomios característicos en la base que diagonaliza \mathbf{U} , en la base en donde $\bar{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{z}}$ y usando que (3.6) son separadamente invariantes bajo rotaciones y por lo tanto el coeficiente de μ^2 también debe serlo, tenemos que

$$\begin{aligned} \wp(\mu) &= \mu^6 - (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 - \Omega^2)\mu^4 + (\nu_1^2\nu_2^2 + \nu_2^2\nu_3^2 + \nu_3^2\nu_1^2 - \Omega^2U_{zz})\mu^2 \\ &\quad - \nu_1^2\nu_2^2\nu_3^2 \\ &= (\mu^2 - \nu_1^2)(\mu^2 - \nu_2^2)(\mu^2 - \nu_3^2) + \Omega^2\mu^2(\mu^2 - U_{zz}). \end{aligned}$$

Notemos que U_{zz} podemos interpretarlo como “la curvatura del potencial (o gradiente de fuerzas) en la dirección de $\bar{\Omega}$ ”. Esta última ecuación es precisamente lo obtenido en la Sección 2.9.

Consideremos el caso de tres raíces reales, en el que tendremos

$$\begin{aligned} \wp(\mu) &= (\mu^2 - \nu_1^2)(\mu^2 - \nu_2^2)(\mu^2 - \nu_3^2) + \Omega^2\mu^2(\mu^2 - U_{zz}) \\ &= (\mu^2 - \mu_1^2)(\mu^2 - \mu_2^2)(\mu^2 - \mu_3^2), \end{aligned}$$

con $\mu_i^2 \in \mathbb{R}$, y supondremos las tres distintas y no nulas. Para cada μ_i tenemos entonces dos casos posibles y mutuamente excluyente,

$$\begin{aligned} \mu_i^2 > 0 &\Rightarrow \mu_{i\pm} = \pm\eta, \quad \eta \in \mathbb{R}, \\ \mu_i^2 < 0 &\Rightarrow \mu_{i\pm} = \pm i\omega, \quad \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

En ambos casos, el problema de autovectores $(\mu^2 - \mu\bar{\Omega} - \mathbf{U})\mathbf{U} = 0$ tendrán soluciones no-triviales que serán L.I. entre ambas para el primer caso y además de L.I. mutuamente conjugadas para el segundo, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned} \mu_{i\pm} = \pm\eta &\leftrightarrow \mathbf{U}_{i\pm} \in \mathbb{C}^3 \\ &\text{y} \\ \mu_{i\pm} = \pm i\omega &\leftrightarrow \mathbf{U}_{i\pm} \in \mathbb{C}^3. \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.4. Análisis en dimensión 2

Como hicimos mención al principio en este capítulo, analizaremos el caso particular de un sistema en 2D, donde las dinámicas posibles son: silla-silla (SS), silla-centro (SC) (o CS), centro-centro (CC) y silla-foco (sf).

En general para todos los casos, consideraremos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.13)$$

con

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (3.14)$$

y en la base que diagonaliza \mathbf{U} ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{U} & \bar{\Omega} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \nu_1^2 & 0 \\ 0 & \nu_2^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico viene dado por

$$\wp(\mu) = (\mu^2 - \nu_1^2)(\mu^2 - \nu_2^2) + \Omega^2 \mu^2,$$

y sus autovalores por

$$\mu^2 = \frac{1}{2} \left(\nu_1^2 + \nu_2^2 - \Omega^2 \right) \pm \sqrt{(\nu_1^2 + \nu_2^2 - \Omega^2)^2 - 4\nu_1^2 \nu_2^2}, \quad (3.15)$$

que serán reales y diferentes si $(\nu_1^2 + \nu_2^2 - \Omega^2)^2 > 4\nu_1^2 \nu_2^2$, lo que asumiremos en adelante. También es fácil ver que como $(\mu^2 - \nu_1^2)(\mu^2 - \nu_2^2) = -\Omega^2 \mu^2$, si $\mu^2 > 0$ el producto $(\mu^2 - \nu_1^2)(\mu^2 - \nu_2^2)$ debe ser negativo, y viceversa.

Para Ω chico vemos que

$$\mu^2 = \frac{1}{2} \left((\nu_1^2 + \nu_2^2) \pm (\nu_1^2 - \nu_2^2) - \frac{(\nu_1^2 - \nu_2^2) \pm (\nu_1^2 + \nu_2^2)}{\nu_1^2 - \nu_2^2} \Omega^2 + O(\Omega^4) \right), \quad (3.16)$$

de donde es evidente que

$$\mu_+^2 = \nu_1^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2} + O(\Omega^4) \right), \quad \mu_-^2 = \nu_2^2 \left(1 + \frac{\Omega^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2} + O(\Omega^4) \right), \quad (3.17)$$

y que para $\Omega \rightarrow 0$ resulta $\mu_+^2 = \nu_1^2$ y $\mu_-^2 = \nu_2^2$.

3.4.1. Silla-Silla

En este caso los μ^2 dados por (3.15) son ambos positivos; esto requiere $\nu_1^2 \nu_2^2 > 0$ y $\nu_1^2 + \nu_2^2 > \Omega^2$ (por lo tanto $\nu_1^2 > 0$ y $\nu_2^2 > 0$), y hace que $(\mu^2 - \nu_1^2)(\mu^2 - \nu_2^2) < 0$ para cada autovalor μ . Las cuatro raíces puede ponerse como

$$\mu = \pm \eta_{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\nu_1^2 + \nu_2^2 - \Omega^2) \pm \sqrt{(\nu_1^2 + \nu_2^2 - \Omega^2)^2 - 4\nu_1^2 \nu_2^2}} \quad (3.18)$$

donde obviamente $\eta_+ > \eta_- > 0$, y consistentemente asumiremos $\nu_1 > \nu_2$.

Para que η_+^2 y η_-^2 sean reales debemos tener

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 - \Omega^2 > 2\nu_1\nu_2 \Rightarrow \nu_1 - \nu_2 > \Omega$$

También de (3.17) podemos ver que η_+^2 decrece desde ν_1^2 y η_-^2 crece desde ν_2^2 al aumentar Ω , hasta que eventualmente se cruzan cuando $\Omega = \nu_1 - \nu_2$ donde

$$\eta_+^2 = \eta_-^2 = \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2 - \Omega^2) = \nu_1\nu_2.$$

Así que los rangos admisibles podemos ordenarlos como $0 < \nu_2^2 < \eta_-^2 < \nu_1\nu_2 < \eta_+^2 < \nu_1^2$. La expresión para los autovectores asociado a cada autovalor serán:

I). $\underline{\mu = \eta_+}$: Las soluciones normalizadas pueden ponerse como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(\eta_+^2 - \nu_2^2)^2 + \Omega^2\eta_+^2}} \begin{pmatrix} \eta_+^2 - \nu_2^2 \\ \Omega\eta_+ \end{pmatrix},$$

donde sabemos que $\eta_+^2 - \nu_2^2 > 0$, $\eta_+ > 0$ y poniendo

$$\cos(\chi_+) := \frac{\eta_+^2 - \nu_2^2}{\sqrt{(\eta_+^2 - \nu_2^2)^2 + \Omega^2\eta_+^2}}, \quad \sin(\chi_+) := \frac{\Omega\eta_+}{\sqrt{(\eta_+^2 - \nu_2^2)^2 + \Omega^2\eta_+^2}},$$

$$\tan(\chi_+) := \frac{\Omega\eta_+}{\eta_+^2 - \nu_2^2},$$

podemos poner en definitiva la solución (que obviamente tiene norma unidad) como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\chi_+) \\ \sin(\chi_+) \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

II). $\underline{\mu = -\eta_+}$: Procediendo como antes, es decir, definiendo el mismo ángulo χ_+ obtenemos la solución normalizada

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\chi_+) \\ -\sin(\chi_+) \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

III). $\underline{\mu = \eta_-}$: Las soluciones normalizadas pueden ponerse como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(\eta_-^2 - \nu_1^2)^2 + \Omega^2\eta_-^2}} \begin{pmatrix} \Omega\eta_- \\ -(\eta_-^2 - \nu_1^2) \end{pmatrix},$$

donde sabemos que $\eta_-^2 - \nu_1^2 < 0$, $\eta_- > 0$ y poniendo

$$\cos(\chi_-) := -\frac{\eta_-^2 - \nu_1^2}{\sqrt{(\eta_-^2 - \nu_1^2)^2 + \Omega^2\eta_-^2}}, \quad \sin(\chi_-) := \frac{\Omega\eta_-}{\sqrt{(\eta_-^2 - \nu_1^2)^2 + \Omega^2\eta_-^2}},$$

$$\tan(\chi_-) := \frac{\Omega\eta_-}{-(\eta_-^2 - \nu_1^2)},$$

podemos poner en definitiva la solución (que obviamente tiene norma unidad) como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\chi_-) \\ \cos(\chi_-) \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

IV). $\mu = -\eta_-$: Procediendo como antes, es decir, definiendo el mismo ángulo χ_- obtenemos la solución normalizada

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\chi_-) \\ \cos(\chi_-) \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Tenemos entonces

$$\mu = \pm\eta_+ \leftrightarrow \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos(\chi_+) \\ \pm \sin(\chi_+) \end{pmatrix}, \quad \mu = \pm\eta_- \leftrightarrow \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \pm \sin(\chi_-) \\ \cos(\chi_-) \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

con

$$\tan(\chi_+) := \frac{\Omega\eta_+}{\eta_+^2 - \nu_2^2}, \quad \tan(\chi_-) := \frac{\Omega\eta_-}{\nu_1^2 - \eta_-^2}. \quad (3.24)$$

Los autovectores $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^4$ deben construirse como siempre con los correspondientes $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^2$ en coordenadas, y el correspondiente autovalor por ese mismo \mathbf{U} en velocidades, lo que deja

$$\mu = \pm\eta_+ \leftrightarrow \mathbf{X}_+^\pm = \begin{pmatrix} \cos \chi_+ \\ \pm \sin \chi_+ \\ \pm \eta_+ \cos \chi_+ \\ \eta_+ \sin \chi_+ \end{pmatrix}, \quad \mu = \pm\eta_- \leftrightarrow \mathbf{X}_-^\pm = \begin{pmatrix} \pm \sin \chi_- \\ \cos \chi_- \\ \eta_- \sin \chi_- \\ \pm \eta_- \cos \chi_- \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Aquí también, para cada par $\pm\eta_+$ y $\pm\eta_-$ los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_+^+ &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_+^+ + \mathbf{X}_+^-) = \begin{pmatrix} \cos \chi_+ \\ 0 \\ \eta_+ \sin \chi_+ \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{Y}_+^- &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_+^+ - \mathbf{X}_+^-) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \chi_+ \\ \eta_+ \cos \chi_+ \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Y}_-^+ &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_-^+ + \mathbf{X}_-^-) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \chi_- \\ \eta_- \sin \chi_- \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{Y}_-^- &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_-^+ - \mathbf{X}_-^-) = \begin{pmatrix} \sin \chi_- \\ 0 \\ \eta_- \cos \chi_- \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

no son autovectores, pero son (o pueden elegirse) reales, aunque ya no son mutuamente ortogonales, ni puramente coordenadas o puramente velocidades. Estos vectores definen los ejes de simetría de las órbitas.

Las soluciones fundamentales (L.I.) son

$$\mathbf{x}(t) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \chi_+ \\ \sin \chi_+ \\ \eta_+ \cos \chi_+ \\ \eta_+ \sin \chi_+ \end{pmatrix} e^{\eta_+ t}, \begin{pmatrix} \cos \chi_+ \\ -\sin \chi_+ \\ -\eta_+ \cos \chi_+ \\ \eta_+ \sin \chi_+ \end{pmatrix} e^{-\eta_+ t}, \begin{pmatrix} \sin \chi_- \\ \cos \chi_- \\ \eta_- \sin \chi_- \\ \eta_- \cos \chi_- \end{pmatrix} e^{\eta_- t}, \begin{pmatrix} -\sin \chi_- \\ \cos \chi_- \\ \eta_- \sin \chi_- \\ -\eta_- \cos \chi_- \end{pmatrix} e^{-\eta_- t} \right\}$$

pero pueden recombinarse como

$$\mathbf{y}_+^+(t) = \begin{pmatrix} \cos(\chi_+) \cosh(\eta_+ t) \\ \sin(\chi_+) \sinh(\eta_+ t) \\ \eta_+ \cos(\chi_+) \sinh(\eta_+ t) \\ \eta_+ \sin(\chi_+) \cosh(\eta_+ t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_+^-(t) = \begin{pmatrix} \cos(\chi_+) \sinh(\eta_+ t) \\ \sin(\chi_+) \cosh(\eta_+ t) \\ \eta_+ \cos(\chi_+) \cosh(\eta_+ t) \\ \eta_+ \sin(\chi_+) \sinh(\eta_+ t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_-^+(t) = \begin{pmatrix} \sin(\chi_-) \sinh(\eta_- t) \\ \cos(\chi_-) \cosh(\eta_- t) \\ \eta_- \sin(\chi_-) \cosh(\eta_- t) \\ \eta_- \cos(\chi_-) \sinh(\eta_- t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_-^-(t) = \begin{pmatrix} \sin(\chi_-) \cosh(\eta_- t) \\ \cos(\chi_-) \sinh(\eta_- t) \\ \eta_- \sin(\chi_-) \sinh(\eta_- t) \\ \eta_- \cos(\chi_-) \cosh(\eta_- t) \end{pmatrix},$$

Aquí $\mathbf{y}_\pm^\pm(t)$ corresponden para $-\infty < t < \infty$ a órbitas hiperbólicas en el plano desarrollado por los vectores \mathbf{Y}_+^+ e \mathbf{Y}_+^- , que son sus ejes de simetría “horizontal” (+) o “vertical”(-), con “tiempo característico” $-\frac{1}{\eta_+}$; e $\mathbf{y}_\pm^\pm(t)$ corresponden a órbitas análogas en el plano desarrollado por los vectores \mathbf{Y}_-^+ e \mathbf{Y}_-^- , con “tiempo característico” $\frac{1}{\eta_-}$; en ambos casos la propiedad de traslación nos permite poner t_0 en lugar de t , de modo de tener el vértice de las hipérbolas para $t = t_0$ en lugar de $t = 0$. Vemos que la dinámica se desarrolla independientemente en dos subvariedades lineales 2D de \mathbb{R}^4 , los planos $\text{Span}\{\mathbf{Y}_+^+, \mathbf{Y}_+^-\}$ y $\text{Span}\{\mathbf{Y}_-^+, \mathbf{Y}_-^-\}$.

Notemos que para $\Omega \rightarrow \nu_1 - \nu_2$, tendremos $\eta_+^2 \downarrow \nu_1 \nu_2$ y $\eta_-^2 \uparrow \nu_1 \nu_2$, y por lo tanto

$$\tan(\chi_+) \rightarrow \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_2}}, \quad \tan(\chi_-) \rightarrow \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}},$$

de modo que en general ($\nu_1 \neq \nu_2$) los autovectores no se vuelven paralelos en ese límite.

3.4.2. Centro-Centro

En este caso los μ^2 dados por (3.15) son ambos reales y negativos, lo que hace que $(\mu^2 - \nu_1^2)(\mu^2 - \nu_2^2) > 0$ para cada autovalor μ . Esto requiere $\nu_1^2 \nu_2^2 > 0$, y $\nu_1^2 + \nu_2^2 < \Omega^2$, así que dado un $\Omega > 0$ podríamos tener $\nu_1^2 > 0$ y $\nu_2^2 > 0$; sin embargo si deben ser distintos como asumiremos, para $\Omega \rightarrow 0$ ambos deben ser negativos. Las cuatro raíces pueden ponerse como

$$\mu = \pm i\omega_\pm = \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{(\Omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(\Omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2 \omega_2^2}}, \quad (3.26)$$

donde $\omega_1^2 = -\nu_1^2 > 0$ y $\omega_2^2 = -\nu_2^2 > 0$, y obviamente $\omega_+ > \omega_- > 0$, y consistentemente asumiremos $|\nu_1^2| > |\nu_2^2|$.

Para que ω_+^2 y ω_-^2 sean reales debemos tener

$$\Omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 > 2\omega_1^2 \omega_2^2 \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 > -\Omega.$$

A partir de (3.17) se ve que ω_+^2 crece desde ω_1^2 y ω_-^2 decrece desde ω_2^2 al aumentar Ω ; ω_+^2 crece sin cota, y ω_-^2 tiende a cero

Para Ω grande las expresiones son

$$\omega_+^2 \asymp \Omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad \omega_-^2 \asymp \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\Omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2}. \quad (3.27)$$

Así que los rangos admisibles son $0 < \omega_-^2 < \omega_2^2 < \omega_1^2 < \omega_+^2 < \infty$.

Haciendo ahora un análisis similar al caso SS, podemos obtener la estructura de los autovectores asociados a cada autovalor:

$$\mu = \pm i\omega_+ \leftrightarrow \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos(\chi_+) \\ \pm i \sin(\chi_+) \end{pmatrix}, \quad \mu = \pm i\omega_- \leftrightarrow \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \pm i \sin(\chi_-) \\ \cos(\chi_-) \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

con

$$\begin{aligned} \cos(\chi_+) &:= \frac{\omega_2^2 - \omega_+^2}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega_+^2)^2 + \Omega^2 \omega_+^2}}, & \cos(\chi_-) &:= -\frac{\omega_1^2 - \omega_-^2}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_-^2)^2 + \Omega^2 \omega_-^2}}, \\ \sin(\chi_+) &:= \frac{\omega_+ \Omega}{\sqrt{(\omega_2^2 - \omega_+^2)^2 + \Omega^2 \omega_+^2}}, & \sin(\chi_-) &:= -\frac{\omega_- \Omega}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_-^2)^2 + \Omega^2 \omega_-^2}}, \\ \tan(\chi_+) &:= \frac{\omega_+ \Omega}{\omega_2^2 - \omega_+^2}, & \tan(\chi_-) &:= -\frac{\omega_- \Omega}{\omega_1^2 - \omega_-^2}. \end{aligned}$$

Los autovectores $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^4$ deben construirse como siempre con los correspondientes $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^2$ en coordenadas, y el correspondiente autovalor por ese mismo \mathbf{U} en velocidades, lo que deja

$$\mu = \pm i\omega_+ \leftrightarrow \mathbf{X}_+^\pm = \begin{pmatrix} \cos \chi_+ \\ \pm i \sin \chi_+ \\ \pm i\omega_+ \cos \chi_+ \\ -\omega_+ \sin \chi_+ \end{pmatrix}, \quad \mu = \pm i\omega_- \leftrightarrow \mathbf{X}_-^\pm = \begin{pmatrix} \pm i \sin \chi_- \\ \cos \chi_- \\ -\omega_- \sin \chi_- \\ \pm i\omega_- \cos \chi_- \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Aquí también, para cada par $\pm i\omega_+$ y $\pm i\omega_-$ los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_+^+ &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_+^+ + \mathbf{X}_+^-) = \begin{pmatrix} \cos \chi_+ \\ 0 \\ -\omega_+ \sin \chi_+ \end{pmatrix}, & \mathbf{Y}_+^- &= \frac{1}{2i}(\mathbf{X}_+^+ - \mathbf{X}_+^-) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \chi_+ \\ \omega_+ \cos \chi_+ \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Y}_-^+ &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_-^+ + \mathbf{X}_-^-) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \chi_- \\ -\omega_- \sin \chi_- \end{pmatrix}, & \mathbf{Y}_-^- &= \frac{1}{2i}(\mathbf{X}_-^+ - \mathbf{X}_-^-) = \begin{pmatrix} \sin \chi_- \\ 0 \\ \omega_- \cos \chi_- \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

no son autovectores, pero son (o pueden elegirse) reales, aunque ya no son mutuamente ortogonales, ni puramente coordenadas o puramente velocidades. Estos vectores definen los ejes de simetría de las órbitas.

Las soluciones fundamentales (L.I.) son

$$\mathbf{x}(t) = \left\{ \begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos \chi_+ \\ i \sin \chi_+ \\ i\omega_+ \cos \chi_+ \\ -\omega_+ \sin \chi_+ \end{pmatrix} e^{i\omega_+ t}, \begin{pmatrix} \cos \chi_+ \\ -i \sin \chi_+ \\ -i\omega_+ \cos \chi_+ \\ -\omega_+ \sin \chi_+ \end{pmatrix} e^{-i\omega_+ t}, \\ &\begin{pmatrix} i \sin \chi_- \\ \cos \chi_- \\ -\omega_- \sin \chi_- \\ i\omega_- \cos \chi_- \end{pmatrix} e^{i\omega_- t}, \begin{pmatrix} -i \sin \chi_- \\ \cos \chi_- \\ -\omega_- \sin \chi_- \\ -i\omega_- \cos \chi_- \end{pmatrix} e^{-i\omega_- t} \end{aligned} \right\}$$

pero pueden recombinarse como

$$\mathbf{y}_+^\pm(t) = \begin{pmatrix} \cos(\chi_+) \cos(\omega_+ t) \\ -\sin(\chi_+) \sin(\omega_+ t) \\ -\omega_+ \cos(\chi_+) \sin(\omega_+ t) \\ -\omega_+ \sin(\chi_+) \cos(\omega_+ t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_+^-(t) = \begin{pmatrix} \cos(\chi_+) \sin(\omega_+ t) \\ \sin(\chi_+) \cos(\omega_+ t) \\ \omega_+ \cos(\chi_+) \cos(\omega_+ t) \\ -\omega_+ \sin(\chi_+) \sin(\omega_+ t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_-^\pm(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\chi_-) \sin(\omega_- t) \\ \cos(\chi_-) \cos(\omega_- t) \\ -\omega_- \sin(\chi_-) \cos(\omega_- t) \\ -\omega_- \cos(\chi_-) \sin(\omega_- t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_-^-(t) = \begin{pmatrix} \sin(\chi_-) \cos(\omega_- t) \\ \cos(\chi_-) \sin(\omega_- t) \\ -\omega_- \sin(\chi_-) \sin(\omega_- t) \\ \omega_- \cos(\chi_-) \cos(\omega_- t) \end{pmatrix},$$

Aquí $\mathbf{y}_\pm^\pm(t)$ corresponden para $-\infty < t < \infty$ a órbitas elípticas en el plano desarrollado por los vectores \mathbf{Y}_+^+ e \mathbf{Y}_+^- , que son sus ejes de simetría, semiejes 1 y ω_+ y frecuencia ω_+ , y una desfasada $\frac{\pi}{2}$ respecto de la otra; e $\mathbf{y}_\pm^\pm(t)$ corresponden a órbitas análogas en el plano desarrollado por los vectores \mathbf{Y}_-^+ e \mathbf{Y}_-^- , con semiejes 1 y ω_- y frecuencia ω_- ; en ambos casos la propiedad de traslación nos permite poner t_0 en lugar de t , de modo de acomodar la fase como nos guste. Vemos que la dinámica se desarrolla independientemente en dos subvariedades lineales 2D de \mathbb{R}^4 , los planos $\text{Span}\{\mathbf{Y}_+^+, \mathbf{Y}_+^-\}$ y $\text{Span}\{\mathbf{Y}_-^+, \mathbf{Y}_-^-\}$.

Notemos que para $\Omega \rightarrow \infty$, tendremos a partir de (3.27)

$$\tan(\chi_+) \rightarrow -\left(1 - \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\Omega^2}\right), \quad \tan(\chi_-) \rightarrow -\sqrt{\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}} \left(1 - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\Omega^2}\right),$$

de modo que en general ($\omega_1 \neq \omega_2$) los autovectores no se vuelven paralelos en ese límite.

3.4.3. Silla-Centro

En este caso los μ^2 de (3.15) deben ser positivos y negativos, respectivamente. Esto requiere que $\nu_1 \nu_2 < 0$ ($\nu_1^2 > 0$ y $\nu_2^2 < 0$ o $\nu_1^2 < 0$ y $\nu_2^2 > 0$) y $\nu_1^2 + \nu_2^2 > \Omega^2$.

Dado $\Omega > 0$ podríamos tener $\nu_1^2 > 0$ y $\nu_2^2 < 0 \Rightarrow \nu_1^2 > 0 > \nu_2^2$ con $|\nu_1^2| > |\nu_2^2|$.

Definiendo $\nu_1^2 := \eta_1^2$ y $\nu_2^2 := -\omega_2^2$ tenemos las cuatro raíces

$$\mu = \begin{cases} \mu_1 = \pm \eta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\eta_1^2 - \omega_2^2 - \Omega^2) + \sqrt{(\eta_1^2 - \omega_2^2 - \Omega^2)^2 + 4\eta_1^2 \omega_2^2}} \\ \mu_2 = \pm i\omega = \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{(\Omega^2 - \eta_1^2 + \omega_2^2) + \sqrt{(\Omega^2 - \eta_1^2 + \omega_2^2)^2 + 4\eta_1^2 \omega_2^2}} \end{cases} \quad (3.30)$$

Un análisis para $\Omega \rightarrow 0$ arroja

$$\eta^2 \asymp \eta_1^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\eta_1^2 + \omega_2^2} + O(\Omega^4)\right)$$

$$\omega^2 \asymp \omega_2^2 \left(1 + \frac{\Omega^2}{\eta_1^2 + \omega_2^2} + O(\Omega^4)\right).$$

En particular para $\Omega = 0$ recuperamos $\mu_1 = \pm\eta = \pm\eta_1$ y $\mu_2 = \pm i\omega = \pm\omega_2$.
Análogamente, para $\Omega \rightarrow \infty$ tenemos

$$\begin{aligned}\eta^2 &\asymp \frac{(\eta_1^2 + \omega_2^2)^2}{4\Omega^2} \\ \omega^2 &\asymp \Omega^2 - \eta_1^2 + \omega_2^2.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Haciendo ahora un análisis similar a los casos precedentes, podemos obtener la estructura de los autovectores asociados a cada autovalor:

$$\mu_1 = \pm\eta \leftrightarrow \mathbf{U}_{1\pm} = \begin{pmatrix} \cos(\chi_1) \\ \pm \sin(\chi_1) \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = \pm i\omega \leftrightarrow \mathbf{U}_{2\pm} = \begin{pmatrix} \pm i \sin(\chi_2) \\ \cos(\chi_2) \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

con

$$\begin{aligned}\cos(\chi_1) &:= \frac{\eta_2^2 + \omega_2^2}{\sqrt{(\eta_2^2 + \omega_2^2)^2 + \Omega^2 \eta^2}}, & \cos(\chi_2) &:= \frac{\omega^2 + \eta_1^2}{\sqrt{(\omega^2 + \eta_1^2)^2 + \Omega^2 \omega^2}}, \\ \sin(\chi_1) &:= \frac{\eta\Omega}{\sqrt{(\eta^2 + \omega_2^2)^2 + \Omega^2 \eta^2}}, & \sin(\chi_2) &:= \frac{\omega\Omega}{\sqrt{(\omega^2 + \eta_1^2)^2 + \Omega^2 \omega^2}}, \\ \tan(\chi_1) &:= \frac{\eta\Omega}{\eta^2 + \omega_2^2}, & \tan(\chi_2) &:= \frac{\omega\Omega}{\omega^2 + \eta_1^2}.\end{aligned}$$

Los autovectores $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^4$ deben construirse como siempre con los correspondientes $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^2$ en coordenadas, y el correspondiente autovalor por ese mismo \mathbf{U} en velocidades, lo que deja

$$\mu_1 = \pm\eta \leftrightarrow \mathbf{X}_1^\pm = \begin{pmatrix} \cos \chi_1 \\ \pm \sin \chi_1 \\ \pm \eta \cos \chi_1 \\ \eta \mp \sin \chi_1 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = \pm i\omega \leftrightarrow \mathbf{X}_2^\pm = \begin{pmatrix} \pm i \sin \chi_2 \\ \cos \chi_2 \\ -\omega \sin \chi_2 \\ \pm i\omega \cos \chi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Aquí también, para cada par $\pm\eta$ y $\pm i\omega$ los vectores

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_1^+ &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_1^+ + \mathbf{X}_1^-) = \begin{pmatrix} \cos \chi_1 \\ 0 \\ \eta \sin \chi_1 \\ \eta \end{pmatrix}, & \mathbf{Y}_1^- &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_1^+ - \mathbf{X}_1^-) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \chi_1 \\ \eta \cos \chi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Y}_2^+ &= \frac{1}{2}(\mathbf{X}_2^+ + \mathbf{X}_2^-) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \chi_2 \\ -\omega \sin \chi_2 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{Y}_2^- &= \frac{1}{2i}(\mathbf{X}_2^+ - \mathbf{X}_2^-) = \begin{pmatrix} \sin \chi_2 \\ 0 \\ \omega \cos \chi_2 \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

no son autovectores, pero son (o pueden elegirse) reales, aunque ya no son mutuamente ortogonales, ni puramente coordenadas o puramente velocidades. Estos vectores definen los ejes de simetría de las órbitas.

Las soluciones fundamentales (L.I.) son

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos \chi_1 \\ \sin \chi_1 \\ \eta \cos \chi_1 \\ \eta \sin \chi_1 \end{pmatrix} e^{\eta t}, \begin{pmatrix} \cos \chi_1 \\ -\sin \chi_1 \\ -\eta \cos \chi_1 \\ \eta \sin \chi_1 \end{pmatrix} e^{-\eta t}, \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} i \sin \chi_2 \\ \cos \chi_2 \\ -\omega \sin \chi_2 \\ i\omega \cos \chi_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}, \begin{pmatrix} -i \sin \chi_2 \\ \cos \chi_2 \\ -\omega \sin \chi_2 \\ -i\omega \cos \chi_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \right\},\end{aligned}$$

pero pueden recombinarse como

$$\mathbf{y}_1^+(t) = \begin{pmatrix} \cos(\chi_1) \cosh(\eta t) \\ \sin(\chi_1) \sinh(\eta t) \\ \eta \cos(\chi_1) \sinh(\eta t) \\ \eta \sin(\chi_1) \cosh(\eta t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_1^-(t) = \begin{pmatrix} \cos(\chi_1) \sinh(\eta t) \\ \sin(\chi_1) \cosh(\eta t) \\ \eta \cos(\chi_1) \cosh(\eta t) \\ \eta \sin(\chi_1) \sinh(\eta t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_2^+(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\chi_2) \sin(\omega t) \\ \cos(\chi_2) \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\chi_2) \cos(\omega t) \\ -\omega \cos(\chi_2) \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2^-(t) = \begin{pmatrix} \sin(\chi_2) \cos(\omega t) \\ \cos(\chi_2) \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\chi_2) \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\chi_2) \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Aquí $\mathbf{y}_1^\pm(t)$ corresponden para $-\infty < t < \infty$ a órbitas hiperbólicas en el plano desarrollado por los vectores \mathbf{Y}_1^+ e \mathbf{Y}_1^- , que son sus ejes de simetría “horizontal” (+) o “vertical” (-), con tiempo característico $-\frac{1}{\eta}$. Mientras que $\mathbf{y}_2^\pm(t)$ corresponden para $-\infty < t < \infty$ a órbitas elípticas centradas en el plano desarrollado por los vectores \mathbf{Y}_2^+ e \mathbf{Y}_2^- , con semiejes 1 y ω y frecuencia ω , una desfasada en $\frac{\pi}{2}$ respecto de la otra. En ambos casos la propiedad de traslación nos permite poner $t - t_0$ en lugar de t , de modo de tener el vértice de las hipérbolas para $t = t_0$ en lugar de t para el primer caso y de modo de acomodar la fase como nos guste en el segundo caso. Vemos que la dinámica se desarrolla independientemente en dos subvariedades lineales 2D de \mathbb{R}^4 , los planos $\text{Span}\{\mathbf{Y}_1^+, \mathbf{Y}_1^-\}$ y $\text{Span}\{\mathbf{Y}_2^+, \mathbf{Y}_2^-\}$.

Notemos que para $\Omega \rightarrow \infty$, tendremos a partir de (3.31)

$$\tan(\chi_1) \rightarrow \frac{\eta^2 + \omega_2^2}{2\omega_2^2}, \quad \tan(\chi_2) \rightarrow 1 - \frac{\eta_1^2 + \omega_2^2}{2\Omega^2}.$$

3.4.4. Silla-Foco

Para este caso no detallaremos la estructura analítica de los autovalores en función de Ω y los ν_i , $i = 1, 2$, debido a que no es trivial obtenerlos, y por lo tanto tampoco nos referiremos a los autovectores asociados a cada uno. Lo que hay que notar es que esta dinámica es la transición entre las dinámicas SS y CC a medida que incrementa Ω , es decir, $\text{SS} \rightarrow \text{sf} \rightarrow \text{CC}$. Una vez que se produce la transición a la dinámica CC, ésta se mantiene inalterada para cualquier valor mayor de Ω .

Como se puede apreciar en la Sección 2.5.2, los autovalores en forma general se los escribe como $(\eta - i\omega)$, $(\eta + i\omega)$, $-(\eta + i\omega)$ y $-(\eta - i\omega)$, llamados cuádrupletes. Una representación gráfica de ellos se puede ver en la Figura 3.1; en azul se muestra la dinámica SS donde los ν_i son reales, vienen en pares opuestos y se mueven a lo largo del eje horizontal; en rojo se muestra la dinámica CC donde los ν_i son imaginarios, vienen en pares conjugados y se mueven a lo largo del eje vertical; en verde aparece la dinámica sf representada por los autovalores mencionados antes, que como ya dijimos es el límite entre las transiciones y se mueven a lo largo de un círculo de radio $\sqrt{\nu_1 \nu_2}$. Para ser más explícitos, cuando $\Omega = 0$ los autovalores son $\pm\nu_1$, $\pm\nu_2$; a medida que Ω crece, se desplazan en la dirección de las flechas azules,

hasta colapsarse por pares; al seguir creciendo Ω , se desdoblan en un cuadruplete y se desplazan sobre el círculo en la dirección de las flechas verdes, hasta colapsar nuevamente por pares sobre el eje imaginario; finalmente, al seguir creciendo Ω se desdoblan nuevamente, ahora en pares conjugados, y se desplazan en la dirección de las flechas rojas.

Hay que remarcar que, al colapsar los autovalores por pares, los autovectores de cada par se colapsan en uno solo y a lo máximo que podemos aspirar es descomponer el sistema a una forma normal de Jordan. Si bien esto es teóricamente posible, en la práctica este caso límite no aparece, por ende no daremos más detalles.

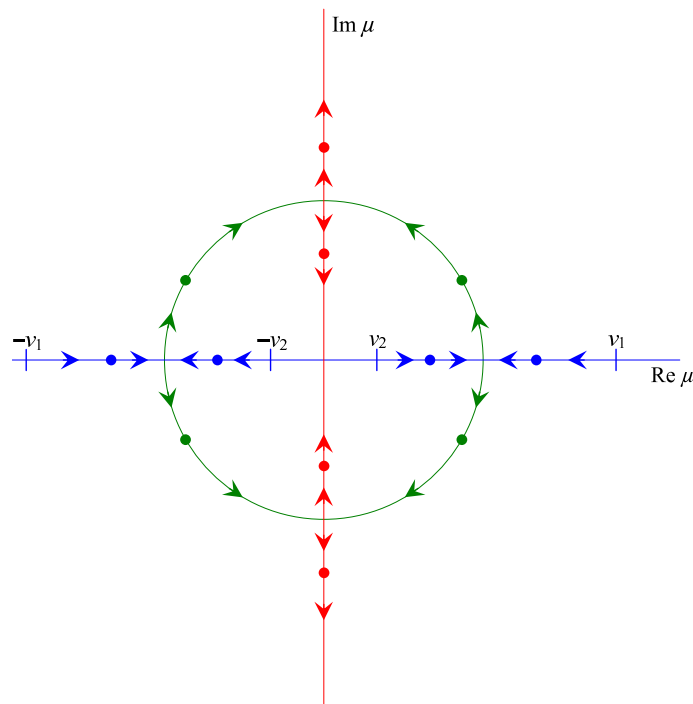


Figura 3.1: Gráfico donde se muestran como al variar Ω , y por lo tanto los autovalores, se produce la transición entre las dinámicas.

3.5. Método de control 2D

En esta sección presentaremos el método de control resuelto en forma analítica para el caso de 2 g.l. de las dinámicas estudiadas en la Sección 3.4, es decir, se darán las expresiones explícitas para los vectores de control. No vamos a dar las cuentas explícitas, sólo mencionaremos los principales resultados.

3.5.1. Caso Silla-Silla

En este caso $\mathbf{X} = (x, y, v_x, v_y)^T$ es dato y queremos determinar $\Delta\mathbf{X} = (0, 0, \Delta v_x, \Delta v_y)^T$ sabiendo que el método debe imponer que la órbita se posicione sobre las variedades estables y no tenga componentes sobre las direcciones inestables:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}' &= \mathbf{X} + \Delta\mathbf{X} = \alpha\mathbf{X}_{-1} + \beta\mathbf{X}_{-2}, \\ &\text{y} \\ \mathbf{Q}' &= \mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q} = \alpha\mathbb{T}^{-1}\mathbf{X}_{-1} + \beta\mathbb{T}^{-1}\mathbf{X}_{-2},\end{aligned}\tag{3.34}$$

donde α y β son constantes a determinar y la matriz de transformación de semejanza viene dada por

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \cos(\chi_1) & 0 & 0 & \eta_1 \sin(\chi_1) \\ 0 & \sin(\chi_1) & \eta_1 \cos(\chi_1) & 0 \\ 0 & \cos(\chi_2) & \eta_2 \sin(\chi_2) & 0 \\ \sin(\chi_2) & 0 & 0 & \eta_2 \cos(\chi_2) \end{pmatrix}.$$

De la primera ec. de (3.34) podemos obtener los parámetros α , β , Δv_x y Δv_y :

$$\begin{aligned}\alpha &= \rho(\sin(\chi_2)y + \cos(\chi_2)x), \\ \beta &= \rho(\cos(\chi_1)y + \sin(\chi_1)x), \\ \Delta v_x &= \rho \left((\eta_2 - \eta_1) \sin(\chi_2) \cos(\chi_1)y - \frac{x}{\rho_2} \right) - v_x, \\ \Delta v_y &= \rho \left((\eta_1 - \eta_2) \cos(\chi_2) \sin(\chi_1)x - \frac{y}{\rho_1} \right) - v_y,\end{aligned}\tag{3.35}$$

con

$$\left. \begin{aligned}\rho &= (\cos(\chi_1 + \chi_2))^{-1} \\ \rho_1 &= (\eta_2 \cos(\chi_1) \cos(\chi_2) - \eta_1 \sin(\chi_1) \sin(\chi_2))^{-1} \\ \rho_2 &= (\eta_1 \cos(\chi_1) \cos(\chi_2) - \eta_2 \sin(\chi_1) \sin(\chi_2))^{-1}\end{aligned}\right\}$$

Por lo tanto, invirtiendo la matriz de transformación de semejanza (\mathbb{T}^{-1}) y reemplazando éstos parámetros en la segunda ec. de (3.34) obtenemos

$$\mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} \rho_1 \eta_2 \cos(\chi_2)x - \rho \rho_1 (\eta_1 - \eta_2) \sin(\chi_2) \sin(\chi_1) \cos(\chi_2)x + \rho \sin(\chi_2)y \\ -\rho_2 \eta_2 \sin(\chi_2)y + \rho \rho_2 \cos(\chi_2) \sin(\chi_2) \cos(\chi_1) (\eta_2 - \eta_1)y - \rho \cos(\chi_2)x \\ \rho_2 \eta_1 \cos(\chi_1)y - \rho \rho_2 \sin(\chi_1) \sin(\chi_2) \cos(\chi_1) (\eta_2 - \eta_1)y + \rho \sin(\chi_1)x \\ -\rho_1 \eta_1 \sin(\chi_1)x + \rho \rho_1 (\eta_1 - \eta_2) \cos(\chi_2) \sin(\chi_1) \cos(\chi_1)x - \rho \cos(\chi_1)y \end{pmatrix}.\tag{3.36}$$

Veamos ahora la equivalencia con el método de Leiva & Briozzo [5]: Recordemos que debemos determinar $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \Delta\mathbf{X} = \alpha\mathbf{X}_{-1} + \beta\mathbf{X}_{-2}$, donde

$$\mathbf{X}_{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\chi_1) \\ -\sin(\chi_1) \\ -\eta_1 \cos(\chi_1) \\ \eta_1 \sin(\chi_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_{-2} = \begin{pmatrix} -\sin(\chi_2) \\ \cos(\chi_2) \\ \eta_2 \sin(\chi_2) \\ -\eta_2 \cos(\chi_2) \end{pmatrix},$$

son la direcciones estables sobre las que queremos posicionar la órbita.

3.5. MÉTODO DE CONTROL 2D

Para determinar el impulso de control, nos basaremos en lo descrito en la Sección 2.11: Consideremos separadamente las ecuaciones que involucran las posiciones y velocidades, donde asumimos para esto que

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\chi_1) & -\sin(\chi_2) \\ -\sin(\chi_1) & \cos(\chi_2) \end{pmatrix} \neq 0.$$

De esta manera podemos obtener los primeros dos parámetros asociados a las posiciones (α, β) en función de las posiciones iniciales (x, y)

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos(\chi_2) & \sin(\chi_2) \\ \sin(\chi_1) & \cos(\chi_1) \end{pmatrix}, \quad \rho = (\cos(\chi_1 + \chi_2))^{-1}. \quad (3.37)$$

Volviendo al segundo conjunto de ecuaciones de \mathbf{X}' asociados sólo a las velocidades, podemos determinar el impulso de control $(\Delta v_x, \Delta v_y)$ en función de los impulsos iniciales (v_x, v_y) ; para ello reemplazamos (3.37) en el nuevo conjunto de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} v_x + \Delta v_x \\ v_y + \Delta v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_1 \cos(\chi_1) & \eta_2 \sin(\chi_2) \\ \eta_2 \sin(\chi_1) & -\eta_2 \cos(\chi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Obteniendo ahora si todos los parámetros $\alpha, \beta, \Delta v_x$ y Δv_y

$$\begin{aligned} \alpha &= \rho(\sin(\chi_2)y + \cos(\chi_2)x), \\ \beta &= \rho(\cos(\chi_1)y + \sin(\chi_1)x), \\ \Delta v_x &= \rho \left((\eta_2 - \eta_1) \sin(\chi_2) \cos(\chi_1)y - \frac{x}{\rho_2} \right) - v_x, \\ \Delta v_y &= \rho \left((\eta_1 - \eta_2) \cos(\chi_2) \sin(\chi_1)x - \frac{y}{\rho_1} \right) - v_y, \end{aligned} \quad (3.38)$$

con

$$\left. \begin{aligned} \rho &= (\cos(\chi_1 + \chi_2))^{-1} \\ \rho_1 &= (\eta_2 \cos(\chi_1) \cos(\chi_2) - \eta_1 \sin(\chi_1) \sin(\chi_2))^{-1} \\ \rho_2 &= (\eta_1 \cos(\chi_1) \cos(\chi_2) - \eta_2 \sin(\chi_1) \sin(\chi_2))^{-1} \end{aligned} \right\}$$

Por lo tanto, aplicando a \mathbf{T}^{-1} a \mathbf{X}' , es decir, calculando $\mathbf{Q}' = \mathbf{T}^{-1}(\alpha \mathbf{X}_{-1} + \beta \mathbf{X}_{-2})$ tenemos

$$\mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} \rho_1 \eta_2 \cos(\chi_2)x - \rho \rho_1 (\eta_1 - \eta_2) \sin(\chi_2) \sin(\chi_1) \cos(\chi_2)x + \rho \sin(\chi_2)y \\ -\rho_2 \eta_2 \sin(\chi_2)y + \rho \rho_2 \cos(\chi_2) \sin(\chi_2) \cos(\chi_1) (\eta_2 - \eta_1)y - \rho \cos(\chi_2)x \\ \rho_2 \eta_1 \cos(\chi_1)y - \rho \rho_2 \sin(\chi_1) \sin(\chi_2) \cos(\chi_1) (\eta_2 - \eta_1)y + \rho \sin(\chi_1)x \\ -\rho_1 \eta_1 \sin(\chi_1)x + \rho \rho_1 (\eta_1 - \eta_2) \cos(\chi_2) \sin(\chi_1) \cos(\chi_1)x - \rho \cos(\chi_1)y \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Por lo tanto, recuperamos lo mismo que en el primer análisis (ver Sección 2.11). De ésta manera probamos la equivalencia entre ambos métodos.

3.5.2. Caso Centro-Centro

Como antes, $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \Delta\mathbf{X} = (x, y, v_x + \Delta v_x, v_y + \Delta v_y)^T$, donde la idea es determinar los impulsos Δv_x y Δv_y y para eso debemos imponer que $E = E_1 + E_2$ sea *mínima*, donde E_1 y E_2 son las energías de cada subvariedad, y vienen dadas por

$$E_i = \frac{1}{2}\omega_i ((q_i + \Delta q_i)^2 + (p_i + \Delta p_i)^2), \quad i = 1, 2. \quad (3.40)$$

Notemos que las expresiones para las energías están dadas en coordenadas normales, por ende tenemos que transformar las coordenadas originales a las coordenadas normales vía la aplicación de la transformación de semejanza inversa \mathbb{T}^{-1} , es decir, $\mathbf{Q}' = \mathbb{T}^{-1}\mathbf{X}'$ donde para este caso

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \cos(\chi_1) & 0 & 0 & \sin(\chi_2) \\ 0 & \sin(\chi_1) & \cos(\chi_2) & 0 \\ 0 & \omega_1 \cos(\chi_1) & -\omega_2 \sin(\chi_2) & 0 \\ -\omega_1 \sin(\chi_1) & 0 & 0 & \omega_2 \cos(\chi_2) \end{pmatrix}.$$

Luego de invertir \mathbb{T} y reemplazar en (3.40) se obtiene una expresión para la energía en término de los parámetros x , y , v_x y v_y , que son datos y más precisamente las componentes de \mathbf{X} ; y de los impulsos Δv_x y Δv_y que queremos determinar.

Imponiendo la restricción de minimizar la energía respecto a los impulsos Δv_x y Δv_y , es decir, $\frac{\partial E}{\partial(\Delta v_x)} = 0$ y $\frac{\partial E}{\partial(\Delta v_y)} = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= \frac{\omega_1 \omega_2 \sin(\chi_1 - \chi_2) \cos(\chi_1 + \chi_2)}{\omega_1 \cos^2(\chi_2) + \omega_2 \sin^2(\chi_1)} y - v_x \\ \Delta v_y &= \frac{\omega_1 \omega_2 \sin(\chi_2 - \chi_1) \cos(\chi_1 + \chi_2)}{\omega_1 \sin^2(\chi_2) + \omega_2 \cos^2(\chi_1)} x - v_y, \end{aligned}$$

y por ende, con éstos impulsos, podemos determinar $\mathbf{Q}' = \mathbb{T}^{-1}\mathbf{X}'$ en función solo de x e y

$$\mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} \omega_2 \cos(\chi_1) \alpha x \\ \omega_2 \sin(\chi_1) \beta y \\ \omega_1 \cos(\chi_2) \beta y \\ \omega_1 \sin(\chi_2) \alpha x \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

donde α y β vienen dados por

$$\alpha = (\omega_1 \sin^2(\chi_2) + \omega_2 \cos^2(\chi_1))^{-1}, \quad \beta = (\omega_1 \cos^2(\chi_2) + \omega_2 \sin^2(\chi_1))^{-1}.$$

3.5.3. Caso Silla-Centro

En este caso buscamos $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \Delta\mathbf{X} = \alpha\mathbf{X}_{-1} + \beta\mathbf{Y}_{+2} + \gamma\mathbf{Y}_{-2}$, donde \mathbf{X}_{-1} es la dirección estable de la variedad hiperbólica y los \mathbf{Y}_i son los vectores reales que definen el eje de simetría de la órbita en la variedad elíptica. Esto es así debido a que queremos eliminar la dirección inestable de la variedad hiperbólica, y en particular vamos a imponer el *vínculo*:

$\mathbf{Q}' \perp (1, 1, 0, 0)^T$. Para encontrar el impulso de control vamos a *minimizar* la energía, $E_2 = \frac{1}{2}\omega [(q_2 + \Delta q_2)^2 + (p_2 + \Delta p_2)^2]$, correspondiente a la variedad elíptica respecto a Δv_x y Δv_y pero sujeto al vínculo ya mencionado, donde haremos uso de los multiplicadores de Lagrange.

El paso a coordenadas normales lo hacemos vía la transformación de semejanza inversa, \mathbb{T}^{-1} , que en este caso se obtiene de invertir

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \cos(\chi_1) & 0 & 0 & \sin(\chi_2) \\ 0 & \sin(\chi_1) & \cos(\chi_2) & 0 \\ 0 & \eta \cos(\chi_1) & -\omega \sin(\chi_2) & 0 \\ \eta \sin(\chi_1) & 0 & 0 & \omega \cos(\chi_2) \end{pmatrix}.$$

Además es directo probar que

$$\mathbf{Q}' = \mathbb{T}^{-1}\mathbf{X}' = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

De esta manera tendremos las siguientes condiciones:

1) Función a minimizar:

$$E_2(\Delta v_x, \Delta v_y) = \frac{1}{2}\omega \left[\rho_1^2 (-\eta \sin(\chi_1)x + \cos(\chi_1)v_y + \cos(\chi_1)\Delta v_y)^2 + \rho_2^2 (\eta \cos(\chi_1)y - \sin(\chi_1)v_x - \sin(\chi_1)\Delta v_x)^2 \right],$$

donde ρ_1 y ρ_2 son constantes que aparecen al invertir la transformación de semejanza \mathbb{T} y que vienen dados por:

$$\rho_1 = (\omega \cos(\chi_1) \cos(\chi_2) - \eta \sin(\chi_1) \sin(\chi_2))^{-1},$$

$$\rho_2 = (\eta \cos(\chi_1) \cos(\chi_2) + \omega \sin(\chi_1) \sin(\chi_2))^{-1}.$$

2) Vínculo:

$$g(\Delta v_x, \Delta v_y) = \mathbf{Q}' \cdot (1, 1, 0, 0) = \mathbb{T}^{-1}\mathbf{X}' \cdot (1, 1, 0, 0) = 0.$$

Y por lo tanto debemos encontrar el mínimo de la función $\mathcal{L}(\Delta v_x, \Delta v_y) = E_2(\Delta v_x, \Delta v_y) + \lambda g(\Delta v_x, \Delta v_y)$ respecto a Δv_x , Δv_y y λ , donde este último es el multiplicador de Lagrange. Esta condición implica que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Delta v_x} = 0$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Delta v_y} = 0$ y $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$. Luego se obtiene

$$\Delta v_x = -\frac{\cos(\chi_1)(\rho_1 \cos(\chi_2)x + \rho_2 \sin(\chi_2)y)}{\rho_1 \rho_2 (\sin^2(\chi_1) \sin^2(\chi_2) + \cos^2(\chi_1) \cos^2(\chi_2))} - v_x,$$

$$\Delta v_y = \frac{\sin(\chi_1)(\rho_1 \cos(\chi_2)x + \rho_2 \sin(\chi_2)y)}{\rho_1 \rho_2 (\sin^2(\chi_1) \sin^2(\chi_2) + \cos^2(\chi_1) \cos^2(\chi_2))} - v_y,$$

$$\lambda = \frac{\omega \sin(\chi_1) \cos(\chi_1) (\sin(\chi_1)x + \cos(\chi_1)y)}{(\sin^2(\chi_1) \sin^2(\chi_2) + \cos^2(\chi_1) \cos^2(\chi_2))}.$$

De esta manera, podemos obtener el vector de control que tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' = & \theta (\sin(\chi_1) \sin^2(\chi_2)y - \cos(\chi_1) \cos^2(\chi_2)x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \theta (\cos(\chi_1)y + \sin(\chi_1)x) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\chi_1)\cos(\chi_2) \\ \sin(\chi_1)\sin(\chi_2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

con

$$\theta := (\sin^2(\chi_1) \sin^2(\chi_2) + \cos^2(\chi_1) \cos^2(\chi_2))^{-1}.$$

3.6. Ejemplos numéricos en 2D

A fin de entender el funcionamiento del algoritmo de control, en esta Sección daremos ejemplos numéricos de aplicación en dos dimensiones para algunas dinámicas particulares. Los autovalores y autovectores obtenidos en la Sección 3.4 fueron verificados mediante el cálculo numérico de éstos ejemplos, es decir, que son realmente un caso particular del método de control 3D general desarrollado en la Sección 2.11.

En todos los casos las órbitas tendrán un período de $T = 2,1$ y se aplicará un impulso de control por período y a lo largo de $N = 100$ períodos, es decir, el método implementará cien puntos de control. Nótese que en estos ejemplos asumiremos que la dinámica está dada directamente por un SAE T -periódico, por lo que conocemos su evolución a todo tiempo y donde se integró para tiempos largos comparadas con los tiempos característicos de las dinámicas involucradas; la elección del período T es arbitraria, y sólo a los fines de poner a prueba el método de control, por lo cual se eligió $T = 2,1$ ya que en ese caso el sistema no tiene resonancia de bajo orden con ningún autovalor ν_i , $i = 1, 2$.

Los parámetros que variarán serán las componentes ν_i , $i = 1, 2$, de la matriz \mathbf{U} que definen la “curvatura del potencial” y el valor del momento angular Ω que se eligió a lo largo de la dirección z , por lo tanto se corresponderá con $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, y $\Omega_3 = \Omega$ de la matriz $\tilde{\Omega}$. Todos los parámetros se los tomarán adimensionales.

El algoritmo obtiene las ecs. de movimiento a partir de integrar el sistema

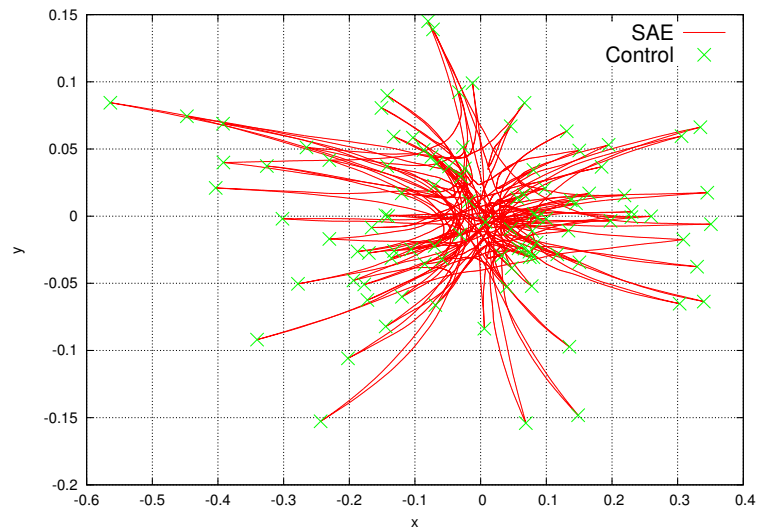
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \sqrt{D} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \zeta(t) \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

donde $\zeta(t) = \begin{pmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{pmatrix}$ cumplen que $\langle \zeta_i(t) \rangle = 0$, $\langle \zeta_i(t)\zeta_j(t') \rangle = \delta_{ij}\delta(t - t')$, es decir, perturbamos con “ruido blanco gaussiano”; el parámetro \sqrt{D} representa la intensidad del ruido de la distribución y se ejecutaron las simulaciones numéricas con $D = 0,001$.

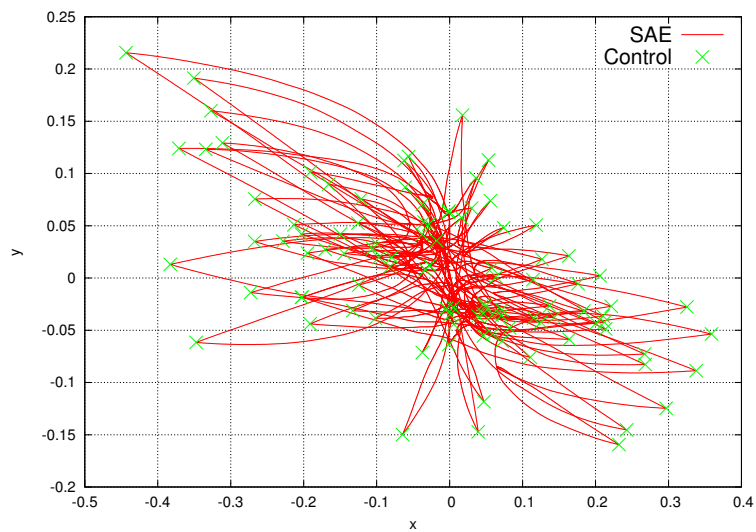
3.6. EJEMPLOS NUMÉRICOS EN 2D

En las Figuras 3.2-3.4 se muestran y detallan las dinámicas particulares elegidas, en el orden que se producen las transiciones entre dinámicas al aumentar Ω , es decir, $SS \rightarrow sf \rightarrow CC$ para $\nu_1 = 2$ y $\nu_2 = 1$. Para el último ejemplo, mostrado en la Figura 3.5, correspondiente al caso SC se eligieron $\nu_1 = 2$ y $\nu_2 = i$. Con éstas imágenes queda en evidencia que el método de control funciona muy bien, acorde a lo esperado: la dinámica arranca en una región cercana al origen y se va acotando cada vez más en cada período. Nótese además que el punto fijo del mapa- T correspondiente a la OP del sistema T -periódico es a la vez un punto crítico del SAE y que se corresponde con el origen de coordenadas en las distintas ilustraciones.

Figura 3.2: Dinámica planar tipo SS a lo largo de 100 períodos (puntos de control) con parámetros $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$ y $T = 2,1$.



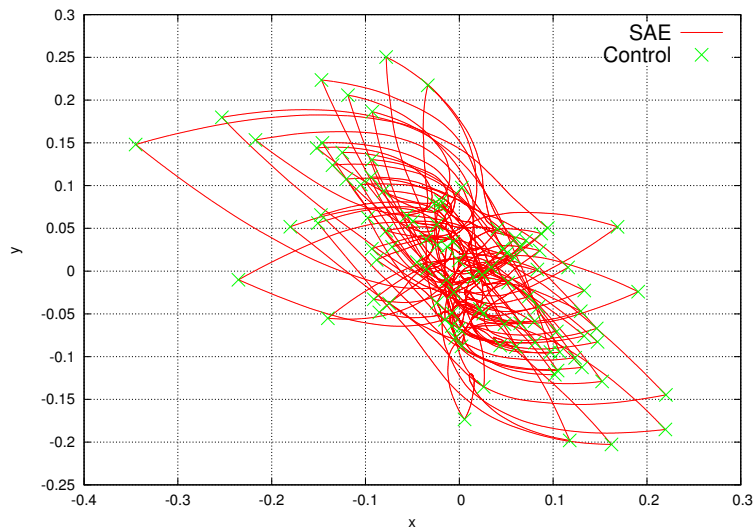
(a) Dinámica con $\Omega = 0,0$.



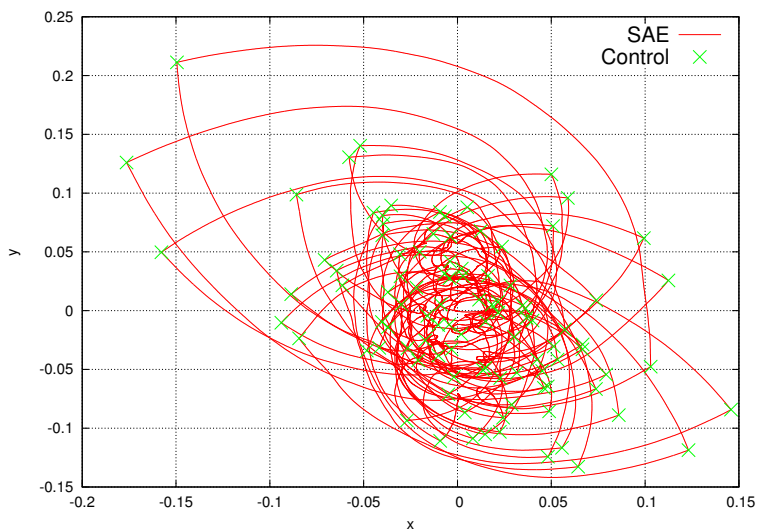
(b) Dinámica con $\Omega = 0,5$.

3.6. EJEMPLOS NUMÉRICOS EN 2D

Figura 3.3: Dinámica planar tipo sf a lo largo de 100 períodos (puntos de control) con parámetros $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$ y $T = 2,1$.

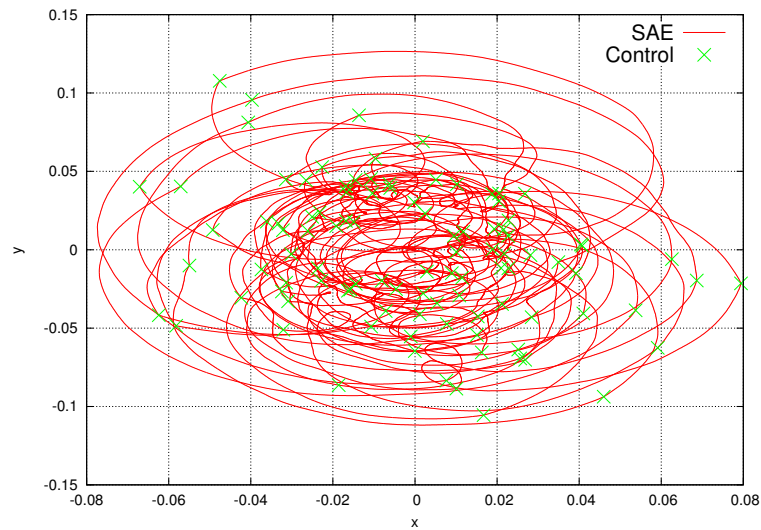


(a) Dinámica con $\Omega = 1,5$.

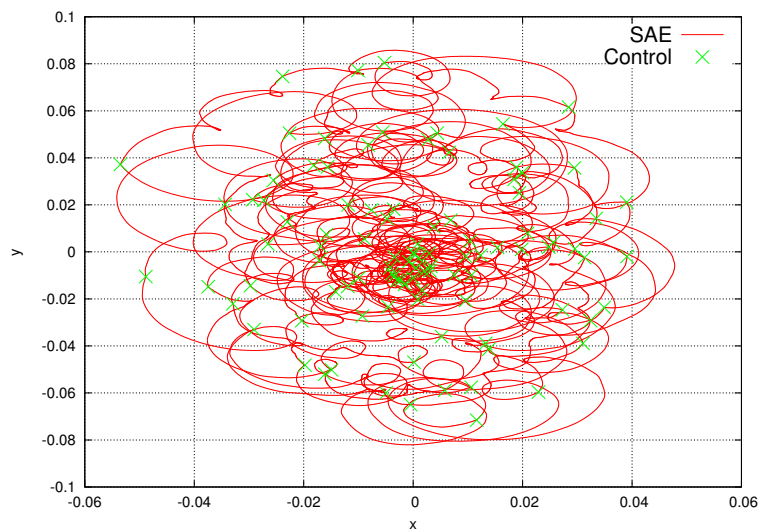


(b) Dinámica con $\Omega = 2,5$.

Figura 3.4: Dinámica planar tipo CC a lo largo de 100 períodos (puntos de control) con parámetros $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$ y $T = 2,1$.



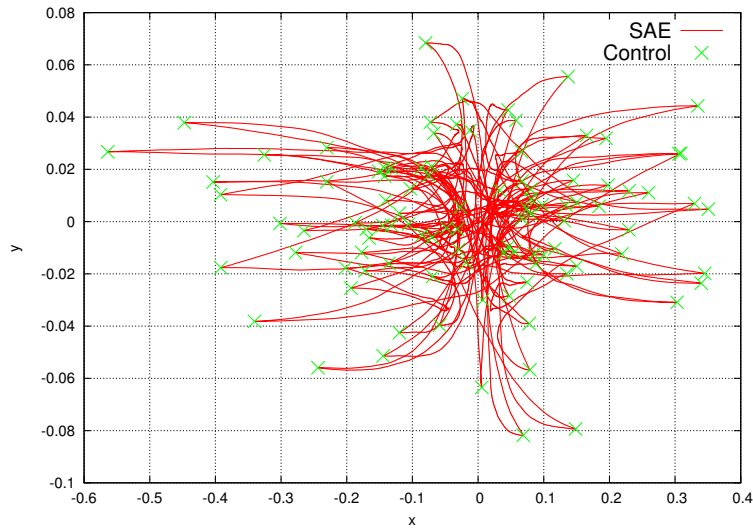
(a) Dinámica con $\Omega = 3,5$.



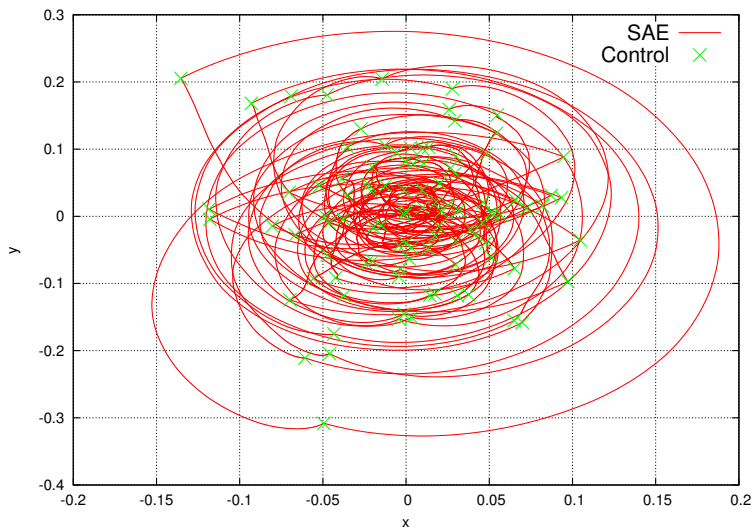
(b) Dinámica con $\Omega = 6,0$.

3.6. EJEMPLOS NUMÉRICOS EN 2D

Figura 3.5: Dinámica planar tipo SC a lo largo de 100 períodos (puntos de control) con parámetros $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = i$ y $T = 2,1$.



(a) Dinámica con $\Omega = 0,0$.



(b) Dinámica con $\Omega = 2,5$.

Capítulo 4

Aplicación a Problemas de Dinámica Astronómica

En el Capítulo 3 estudiamos el caso completo para sistemas en 2D, esto es, pudimos ser capaces de dar una descripción general para los autovalores y autovectores de forma analítica para cada una de las dinámicas. Luego, una vez obtenidos estos vectores, construimos una base de vectores reales y con ellos elaboramos el método de control correspondiente. Por último, para cerrar dicho capítulo se puso a prueba el método de control en un conjunto de ejemplos de “juguete”, es decir, ejemplos numéricos, que no necesariamente representan un sistema físico real, a fin de ver como aplica el método los impulsos requeridos para cada dinámica; y se pudo ver el buen funcionamiento, ya que en todos los casos después de cada impulso de control (período), la dinámica subsiguiente se fue acotando a una región cada vez más cercana al origen.

En lo que respecta al método de control 3D, por una cuestión de no extendernos demasiado con ejemplos de prueba, no vamos a mostrar resultados en 3D para estos sistemas de “juguetes”; aunque si es necesario remarcar que se hicieron extensivas pruebas y pudimos probar que el método mostró un funcionamiento como se esperaba y que el método 2D es un caso particular de éste último.

Ahora estamos interesados en sistemas un poco más realistas que puedan asemejarse a lo que sucede en la naturaleza y que obviamente tienen libertad de moverse en el espacio tridimensional; para estos sistemas si será necesario implementar el método de control 3D. En particular, se tomará una selección de ejemplos provenientes de la Astronomía Dinámica, algunos de los cuales van a consistir en retomar las órbitas periódicas estudiadas en la Tesis Doctoral de A. M. Leiva [5] y aplicarles el método de control. Pero primero, antes de entrar en detalles, hay que repasar algunas cuestiones.

A este punto llegamos motivados con la idea de poder modelar misio-

nes de larga duración en el sistema Tierra-Luna, ya sea mediante órbitas periódicas de transferencia rápida y/o de baja energía entre éstas u órbitas periódicas cerca de los puntos Lagrangeanos L_1 o L_2 , pero que todas tengan en común un gasto mínimo de recursos (combustible para el caso de una nave o satélite).

Los modelos propuestos en Leiva [5] se resumen en tres:

- 1) Problema circular de tres cuerpos restringido (PC3CR): es un caso especial del problema general de tres cuerpos. Como se mencionó en el Capítulo 1, dos masas primarias m_T y m_L correspondientes a la Tierra y la Luna, respectivamente describen órbitas coplanares circulares alrededor de su centro de masa y una tercera masa infinitesimal m (nave o satélite), que no afecta el movimiento de las primarias, se mueve en el campo gravitatorio de éstas. Las órbitas de las masas primarias yacen en el plano xy con su centro de masa en el origen. Se normalizan las unidades de masa y de distancia, $m_T = 1 - \mu$ con $m_L = \mu \simeq 0,0121505$; $d_{TL} = 1$ y se adopta para la constante de gravitación de Newton el valor $k^2 = 1$. Se elige un sistema de coordenadas rotante con velocidad angular $n = 1$ (sistema sinódico) con origen en el centro de masa, de manera tal que las masas primarias queden fijas en el eje de las abcisas. Utilizamos la orientación $(x_T, y_T) = (-\mu, 0)$ y $(x_L, y_L) = (1 - \mu, 0)$ (Figura 4.1) y es el que se implementa para determinar las órbitas periódicas. Los valores unitarios de distancia, velocidad y tiempo resultan equivalentes a ~ 384400 km, ~ 1024 m/s y ~ 104 hs (un mes sidéreo/ 2π), respectivamente.

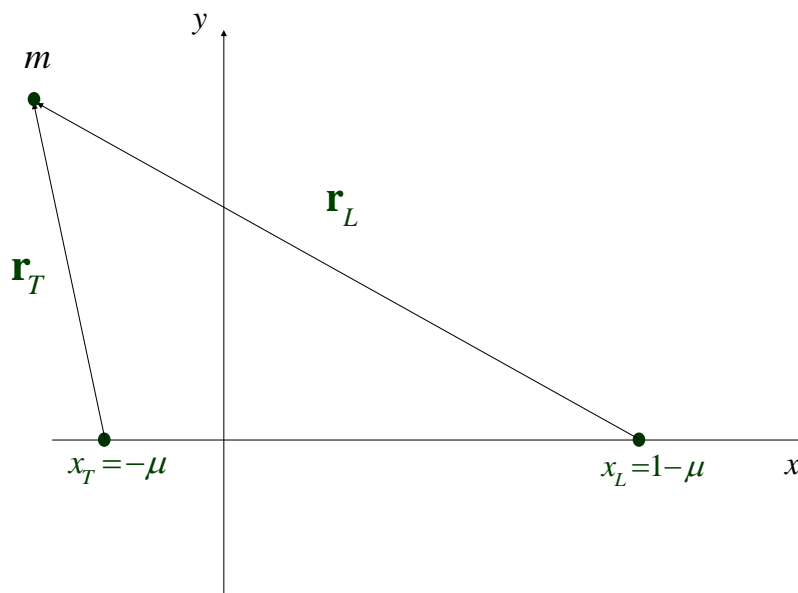


Figura 4.1: Sistema de coordenadas sinódico.

El Hamiltoniano de la masa infinitesimal m es autónomo y en el sistema de coordenadas sinódico queda expresado según V. Szebehely [15]:

$$H_{PC3CR} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}, \quad (4.1)$$

donde $p_x = \dot{x} - y$, $p_y = \dot{y} + x$, $p_z = \dot{z}$, $r_1^2 = (x - x_T)^2 + y^2 + z^2$ y $r_2^2 = (x - x_L)^2 + y^2 + z^2$.

Entonces las ecuaciones de movimiento para m son:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y} + x - (1-\mu)\frac{x-x_T}{r_T^3} - \mu\frac{x-x_L}{r_L^3}, \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - (1-\mu)\frac{y}{r_T^3} - \mu\frac{y}{r_L^3}, \\ \ddot{z} &= -(1-\mu)\frac{z}{r_T^3} - \mu\frac{z}{r_L^3}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

con las distancias entre m y las primarias dadas por

$$\begin{aligned} r_T^2 &= (x + \mu)^2 + y^2 + z^2, \\ r_L^2 &= (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

El sistema tiene cinco puntos de equilibrio relativos; tres de ellos yacen sobre el eje x y se los conoce como *puntos de libración colineales*. Usualmente denotados por L_1 , L_2 y L_3 , éstos puntos son inestables. Sus coordenadas x para el sistema Tierra-Luna son $x_{L1} = 0,8369153$, $x_{L2} = 1,1556825$ y $x_{L3} = -1,0050627$.

Si bien, cuando se consideran trayectorias de transferencias entre las masas primarias, el PC3CR es un modelo simple de tratar, no se pueden despreciar las perturbaciones producidas por las acciones gravitatorias del Sol, la excentricidad de la órbita lunar, etc. Por lo tanto, este modelo sirve como paso intermedio para los modelos de cuatro cuerpos: Problema BiCircular (PBC) y Problema CuasiBiCircular (PCBC).

- 2) Problema BiCircular (PBC): Fue presentado también en el Capítulo 1 y es un problema de cuatro cuerpos, donde considera como masas primarias a la Tierra, la Luna y el Sol, y una cuarta masa infinitesimal (nave o satélite) que no afecta el movimiento de las primarias. Las trayectorias de las masas primarias m_T y m_L viven en un plano y se mueven en órbitas circulares alrededor de su baricentro B_{TL} y a su vez, el baricentro B_{TL} y el Sol m_S se mueven en órbitas circulares alrededor del centro de masas del sistema B (Figura 4.2). El PBC es un sistema dinámico no-autónomo, es decir, el Hamiltoniano depende del tiempo, y en particular para nuestro propósito será T -periódico. El movimiento de las primarias es “artificial”, en el sentido de que no es solución del problema de tres cuerpos en general y en particular la energía no se conserva.

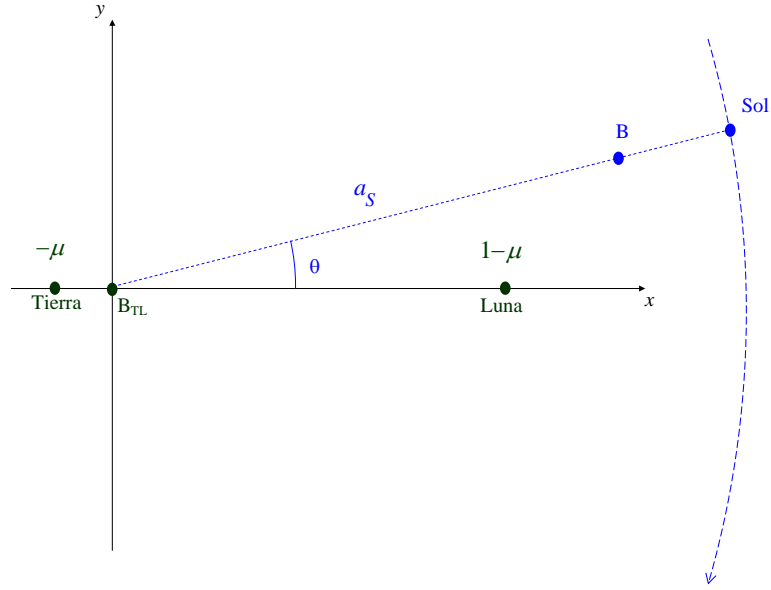


Figura 4.2: Sistema de coordenadas sinódico (PBC).

A partir de un marco de referencia inercial, se realiza un cambio de variables para expresar las ecuaciones de movimiento de m en coordenadas sinódicas Tierra-Luna. Estas ecuaciones quedan expresadas en una forma similar a las ecuaciones obtenidas en el PC3CR y así, podemos considerar al PBC como una perturbación (que no es pequeña) del PC3CR.

Sean a_S , n_S y ω_S , la distancia entre el baricentro Tierra-Luna B_{TL} y m_S , y las velocidades angulares medidas en los sistemas de coordenadas inercial y sinódico respectivamente. Estos parámetros cumplen las siguientes relaciones [14]:

$\omega_S = 1 - n_S$: es la velocidad angular media del Sol en el sistema sinódico. En el sistema inercial, la velocidad angular de la Luna es 1.

$a_S^3 n_S^2 = 1 + m_S$: es consecuencia de la tercera ley de Kepler.

$\theta = \omega_S t + \phi_S$: θ es el ángulo entre la dirección Tierra-Luna y el Sol y ϕ_S es la fase solar inicial ($t = 0$) en el sistema sinódico.

siendo $a_S = 388,81114$, $\omega_S = -0,925195985520347$ y $m_S = a_S^3 n_S^2 - 1 \simeq 328900,54$.

El Hamiltoniano de la masa infinitesimal m es no autónomo y 2π -periódico en θ :

$$H_{PBC} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y - \frac{1-\mu}{r_T} - \frac{\mu}{r_L} - m_S \left(\frac{1}{r_S} - \frac{1}{r_{S_0}} \right), \quad (4.3)$$

donde $p_x = \dot{x} - y$, $p_y = \dot{y} + x$, $r_T^2 = (x - \mu)^2 + y^2 + z^2$, $r_L^2 = (x - \mu + 1)^2 + y^2 + z^2$, $r_S^2 = (x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + z^2$, $r_{S_0} = x_S^2 + y_S^2$; aquí $x_S = a_S \cos(\omega_S t + \phi_S)$ y $y_S = a_S \sin(\omega_S t + \phi_S)$ representan las coordenadas del Sol (ver Fig. 4.2).

- 3) Problema CuasiBiCircular (PCBC): Al igual que el BCP este es un problema de cuatro cuerpos en donde las primarias (Sol, Tierra, Luna) se mueven en órbitas cuasi-circulares, es decir, se consideran las excentricidades de las órbitas, y el cuarto cuerpo es una masa infinitesimal. Sustituyendo en las ecuaciones del Problema de Tres Cuerpos Sol-Tierra-Luna desarrollos en serie de Fourier alrededor del BCP, se obtiene una solución cerrada aproximada para el movimiento de las primarias, que en esa aproximación es periódico. Para éste modelo no daremos detalles explícitos sobre los valores de los parámetros que lo rigen ya que en este trabajo no se lo implementó.

Si nos basamos en el “sentido común” y en lo mencionado en las líneas anteriores, lo primero que razonaríamos sería la idea de implementar el modelo PCBC para obtener las soluciones que mejor aproximan al del problema de tres cuerpos general para las primarias. Sin embargo, este modelo es un tanto complicado de llevar a cabo y para nuestro propósito, que es probar el funcionamiento del método de control, no aporta mucha más información que el PBC que solo aproximar de manera más precisa la solución al problema general. Por lo tanto, nuestra elección será el modelo PBC, que si bien no es el más realista, es muy simple de implementar.

4.1. Selección de órbitas

Como mencionamos al comienzo, vamos a retomar algunas de las órbitas estudiadas en Leiva [5] y le vamos a aplicar el método de control 3D. Las órbitas periódicas seleccionadas son 146A, 013, T_222 y T_045, las cuales en dicho trabajo fueron extendidas del PC3CR al PCBC mediante la continuación numérica de soluciones periódicas obtenidas en el PC3CR. Los valores adecuados de la fase solar fueron encontrados luego de hacer una extensión de una órbita T -periódica del PC3CR al PBC, asumiendo que el PCBC representa una pequeña perturbación del PBC y usando el hecho de que la variación de la energía a lo largo de un período completo de la órbita es nula. Esto último es una versión simplificada de las condiciones de periodicidad genérica [19]. En este trabajo utilizaremos las mismas órbitas, pero continuadas al PBC en lugar del PCBC. Todas ellas se desarrollan en el plano xy (Sol-Tierra-Luna), y se muestran en la Figura 4.4.

Aparte de estas, se aplicó el método de control a dos órbitas más; por búsqueda directa en el PC3CR usando condiciones de simetría se obtuvo una familia de OPs, de las cuales se realizó una continuación al PBC de un

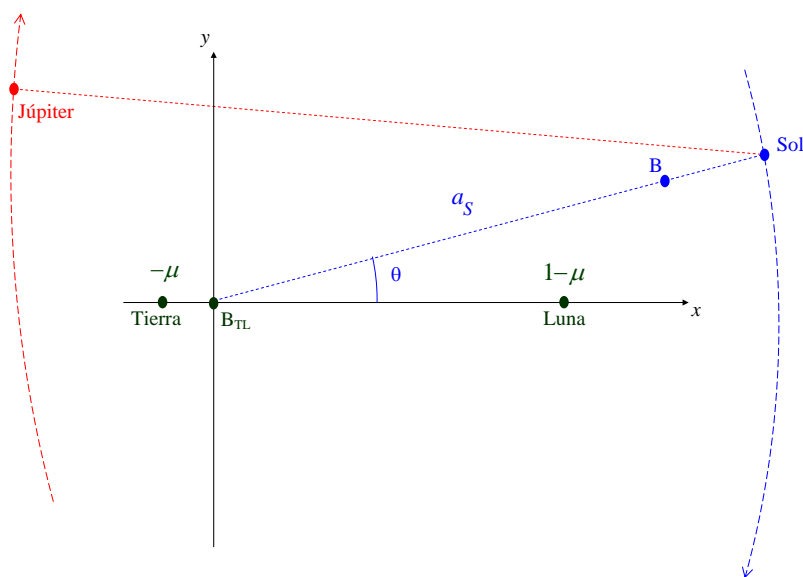


Figura 4.3: Ilustración del sistema de coordenadas sinódico (PBC) teniendo en cuenta la atracción gravitatoria de Júpiter como una perturbación externa.

miembro de esta familia que tiene el período solar $T = T^\odot$, y que satisface la condición de fase. Esta órbita es la S001 y se desarrolla por fuera del sistema Tierra-Luna. La otra órbita que se controló se obtuvo de continuar un miembro de la familia Halo Norte L_2 [16] del PC3CR al PBC, es la L2NH2 que tiene también un período $T = T^\odot$. A diferencia de las anteriores, estas dos órbitas son tridimensionales, y se muestran en la Figura 4.5.

Para todas las órbitas mencionadas se verificó su periodicidad con error relativo $< 10^{-15}$ mediante un algoritmo Newton-Raphson del mapa- T [23]. Los valores de tiempo, coordenadas y velocidades iniciales para cada una se muestran en la Tabla 4.1, en unidades sinódicas para el PBC; en todos los casos la fase solar es $-\pi$ a $t = 0$. La estructura de la dinámica linealizada alrededor de cada órbita y los autovalores de la correspondiente matriz de monodromía M_{t_0} , que implementa el mapa- T linealizado sobre la sección de Poincaré Σ_{t_0} , se muestran en la Tabla 4.2.

4.2. Resultados numéricos

Para cada una de las OP mostradas en la Tabla 4.1, se comenzó por integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento del PBC a partir de la correspondiente condición inicial, conjuntamente con la correspondiente ecuación variacional [23] con condiciones iniciales “canónicas”, desde t_0 has-

4.2. RESULTADOS NUMÉRICOS

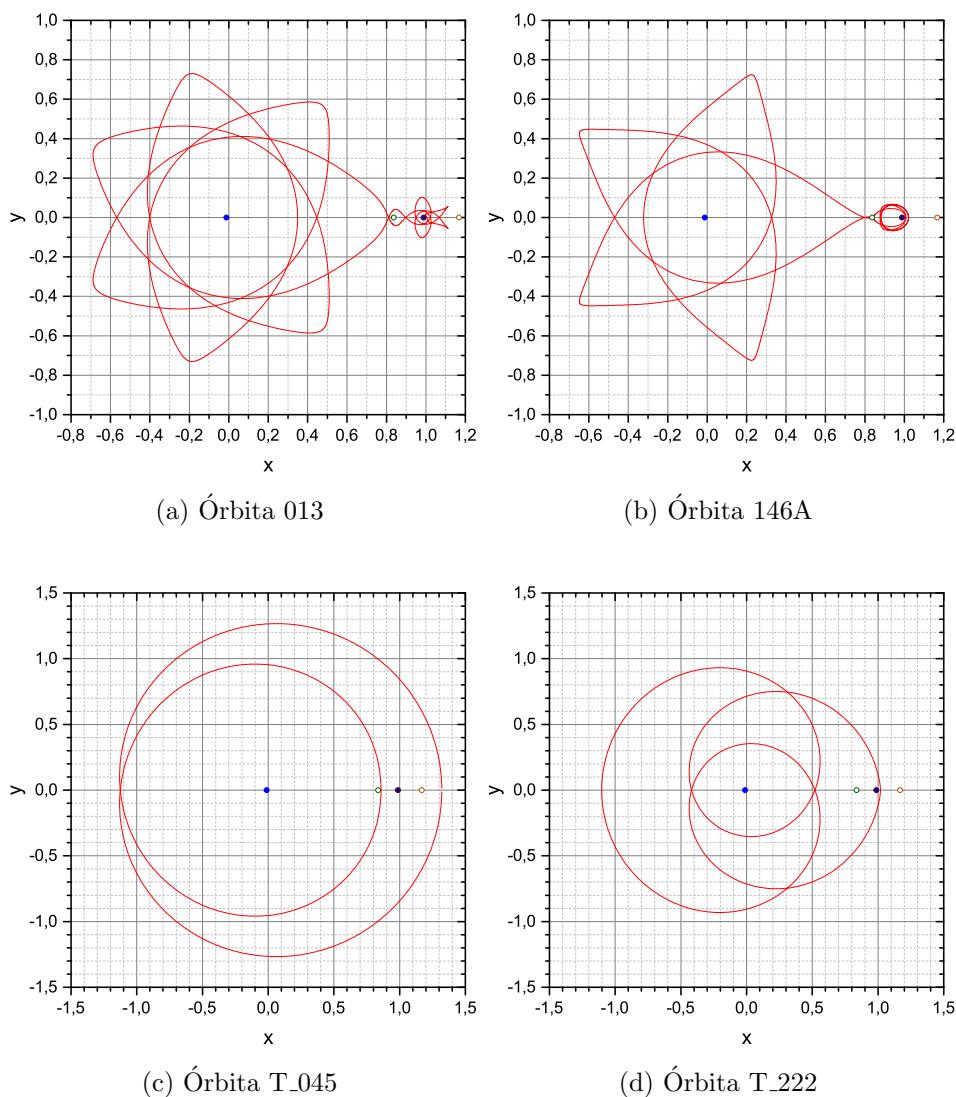


Figura 4.4: Ilustraciones de las distintas órbitas planares controladas, en coordenadas y unidades sinódicas. Las líneas rojas representan las órbitas. Los círculos llenos muestran la posición de la Tierra (izquierda) y la Luna (derecha). Los círculos vacíos muestran la posición de los puntos Lagrangianos colineales L_1 (izquierda) y L_2 (derecha).

ta $t_0 + T$, donde T es el período de la OP (T^\odot para las órbitas T_045, T_222, S001 y L2NH2, $3T^\odot$ para la 146A y $4T^\odot$ para la 013). Esta integración se realizó mediante un método de Bulirsch-Stoer con precisión relativa local 10^{-15} [24]. El resultado de la integración de la ecuación variacional provee entonces una aproximación numérica a la matriz de monodromía M_{t_0} , a partir de la cual se calcularon sus autovalores (mostrados en la Tabla 4.2) y los

| Condiciones iniciales de las OPs estabilizadas | | | | |
|--|----------------------|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| OP | t_0 T/T^\odot | x_0 \dot{x}_0 | y_0 \dot{y}_0 | z_0 \dot{z}_0 |
| T_045 | 2,97454291590 1 | 0,50035979542 1,59400725697 | 0,75152890645 -1,26134617358 | 0,00000000000 0,00000000000 |
| T_222 | 0,13582387744 1 | 0,96114426617 -0,66689826921 | -0,23761154498 -1,62789938952 | 0,00000000000 0,00000000000 |
| 146A | 0,21052701003 3 | 0,84485912307 0,05334120270 | -0,00894943681 -0,05043006328 | 0,00000000000 0,00000000000 |
| 013 | 26,79805101855 4 | 0,81449965811 0,05776429415 | 0,00764582676 0,11929694200 | 0,00000000000 0,00000000000 |
| S001 | 3,22581708916 1 | 1,05588789024 0,64097149834 | 0,34357570537 -1,94745212773 | -0,17632669059 -0,04035939686 |
| L2NH2 | 6,74365551480 1 | 1,07494382713 0,07900320159 | 0,08384722658 -0,19862041239 | 0,17944343754 0,04442075246 |

Tabla 4.1: Tiempo inicial t_0 , coordenadas iniciales x_0 , y_0 , z_0 , y velocidades iniciales \dot{x}_0 , \dot{y}_0 , \dot{z}_0 , en el PBC y en unidades sinódicas, para las órbitas empleadas en este trabajo. En todos los casos la fase solar es $-\pi$ a $t = 0$.

correspondientes autovectores. A partir de ellos se calcularon numéricamente la matriz de transformación \mathbb{T} y la matriz energía E_{din} como se detalla en la Sección 2.10, y con ellas se calcularon los vectores de control de acuerdo a la Tabla 2.1 de la Sección 2.11.

A continuación, partiendo nuevamente de las condiciones iniciales de la Tabla 4.1, se realizaron para cada órbita 1000 integraciones sucesivas, cada una sobre un período orbital, de las ecuaciones de movimiento del PBC pero ahora incluyendo la atracción gravitatoria de Júpiter, que actúa como perturbación externa de la OP. La órbita de Júpiter se modeló como una circunferencia de radio $778,57 \times 10^9$ m centrada en la posición instantánea del Sol, e inclinada respecto al plano Sol-Tierra-Luna del PBC en un ángulo de $7,5^\circ$, que es el mayor valor de la inclinación relativa del plano orbital de Júpiter respecto al plano orbital del sistema Tierra-Luna en el sistema solar real (ver Figura 4.3). El período orbital de Júpiter alrededor del Sol se tomó como 4332,59 días, y su masa como 317,83 masas terrestres.

El Hamiltoniano tendrá una estructura similar al del PBC descrito en (4.3), pero ahora considerando la perturbación externa de Júpiter, es decir,

$$\begin{aligned}
 H_{PBC} = & \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y - \frac{1-\mu}{r_T} - \frac{\mu}{r_L} - m_S \left(\frac{1}{r_S} - \frac{1}{r_{S_0}} \right) \\
 & - m_J \left(\frac{1}{r_J} - \frac{1}{r_{J_0}} \right),
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde ahora $r_J^2 = (x - x_J)^2 + (y - y_J)^2 + (z - z_J)^2$ y $r_{J_0} = x_J^2 + y_J^2 + z_J^2$.

| Características de las OPs estabilizadas | | | | | | | |
|--|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| OP | Estructura | 1er. Autovalor | 2do. Autovalor | 3er. Autovalor | 4to. Autovalor | 5to. Autovalor | 6to Autovalor |
| T_045 | $S \times S \times C$ | 1,31553135838 | 0,76014911665 | 1,37356239844 | 0,72803390741 | 0,63437172551 +0,77302814560i | 0,63437172551 -0,77302814560i |
| T_222 | $\bar{S} \times S \times S$ | -5,73512707247 | -0,17436405286 | 1,36500313565 | 0,73259904968 | 9,50655458566 | 0,10519058098 |
| 146A | $S \times \bar{S} \times C$ | 379,467154654852 | 0,00263527419 | -16,48615806435 | -0,06065694601 | 0,76794180335 +0,64051962239i | 0,76794180335 -0,64051962239i |
| 013 | $sf \times C$ | 76,36595957893 +2,41894997022i | 76,36595957893 -2,41894997022i | 0,013081714126 +0,00041437277i | 0,013081714126 -0,00041437277i | 0,85067361874 +0,52569420235i | 0,85067361874 -0,52569420235i |
| S001 | $S \times C \times C$ | 1,06045267621 | 0,94299351817 | 0,78581291068 +0,61846428305i | 0,78581291068 -0,61846428305i | 0,91305854023 +0,40782852048i | 0,91305854023 -0,40782852048i |
| L2NH2 | $\bar{S} \times C \times C$ | -68,86244848235 | -0,01452170264 | 0,25769359371 +0,96622668757i | 0,25769359371 -0,96622668757i | 0,96939263906 +0,24551560306i | 0,96939263906 -0,24551560306i |

Tabla 4.2: Estructura de la dinámica linealizada alrededor de cada órbita empleada en este trabajo, y autovalores de la correspondiente matriz de monodromía M que implementa el mapa- T linealizado sobre la sección de Poincaré Σ_{t_0} .

| Resultados del control | | | | | | | |
|------------------------|------------|-------------------|------------------|------------------|---------------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| OP | T | Duración (año) | ΔV_{min} | ΔV_{err} | ΔV_{acc} (m/s) | $\Delta V/año$ (m/s) | $\langle \Delta V \rangle$ (m/s) |
| T_045 | T^\odot | ~ 80 | 0,0003 | 0,00003 | 126,70 | 1,58 | 0,42 |
| T_222 | T^\odot | ~ 80 | 0,0003 | 0,00003 | 644,90 | 8,06 | 1,00 |
| 146A | $3T^\odot$ | ~ 240 | 0,00003 | 0,000003 | 1593,00 | 6,64 | 1,67 |
| 013 | $4T^\odot$ | ~ 320 | 0,00003 | 0,000003 | 427,21 | 1,34 | 0,45 |
| S001 | T^\odot | ~ 80 | 0,0002 | 0,00002 | 39,46 | 0,49 | 0,30 |
| L2NH2 | T^\odot | ~ 80 | 0,00005 | 0,000005 | 546,02 | 6,82 | 0,58 |

Tabla 4.3: Resultados de aplicar el método de control a las OPs seleccionadas.

Las componentes de la posición de Júpiter se obtienen a partir de

$$\begin{pmatrix} x_J \\ y_J \\ z_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_J \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y en este caso los ángulos y los parámetros en el sistema sinódico vienen dados por $\phi = -t + \phi_J$, $\theta = 7,5^\circ$, $\psi = \omega_J t + \psi_J$ y $a_J = 2025,4215$, $\omega_J = 0,0063060804$, $m_J = 313,96819$, respectivamente.

Las integraciones se realizaron mediante un método de Runge-Kutta-Cash-Karp con precisión relativa local 10^{-15} [24]. Al finalizar cada una de estas integraciones, se calculó la desviación del vector de estado (posición y velocidad) en la sección de Poincaré Σ_{t_0} respecto a la OP, se aplicó a esta desviación el método de control de la Sección 2.11, y se aplicó la corrección de velocidad $\Delta \mathbf{v}$ así calculada, procediéndose a la siguiente integración a partir del nuevo vector de estado así construido.

A fin de obtener resultados más realistas, se implementaron dos variaciones respecto del método de control “ideal”. La primera consistió en no aplicar el impulso de control si el cambio de velocidad resultante es menor que una cota prefijada ΔV_{min} . Ello es debido a que los motores de posición reales tienen cotas mínimas por debajo de las cuales el impulso aplicado es propenso a grandes errores relativos [16]; estas cotas eran de aproximadamente 20 cm/s ($\sim 0,0002$ en unidades sinódicas) para motores de combustible líquido, pero en los 20 años transcurridos entre la publicación de estos datos [16] y la actualidad, la tecnología de estos motores ha mejorado al punto de que errores de unos pocos cm/s son hoy posibles; además, el desarrollo e introducción de motores iónicos ha reducido aún más estos valores, a unos pocos mm/s o aún menos. Sin embargo, con el propósito de tener impulsos de control lo más realistas posible y que sean comparables con los de trabajos previos [5], siempre se intentó aplicar impulsos no menores a 20 cm/s, y sólo se admitieron valores menores de ΔV_{min} cuando la OP no pudo estabilizarse sin hacerlo.

La segunda variación respecto al control “ideal” consistió en emular los errores inherentes al funcionamiento de un motor de posición real. Para ello se agregó al impulso de control ya calculado una variable aleatoria Gaussiana en cada componente, de media nula y amplitud ΔV_{err} igual al 10 % del valor de ΔV_{min} . Pese a los avances en la tecnología desde la publicación de Gómez [16] de éstos valores, nuevamente preferimos ser conservadores al respecto.

Una tercera variación respecto al control “ideal” consistiría en emular los errores de telemetría, introduciendo variaciones aleatorias en el vector de estado pasado al algoritmo de control. Sin embargo los errores en coordenadas y velocidades serían muy pequeños, aún para el estado de la tecnología de hace veinte años [16], por lo que ésta variación no ha sido implementada.

En la Tabla 4.3 se muestran los resultados de aplicar el método de control a las OPs seleccionadas. Se detallan: el impulso mínimo para ejercer control ΔV_{min} , el error en el impulso de control ΔV_{err} y el impulso acumulado

ΔV_{acc} a lo largo de los 1000 períodos orbitales, todos en unidades sinódicas; también se muestra el consumo o impulso medio anual $\Delta V/\text{año}$ en m/s, y el valor medio de cada impulso $\langle \Delta V \rangle$ en m/s.

No se incluyen figuras aparte mostrando las órbitas controladas sobre 1000 períodos, ya que resultan visualmente indistinguibles de las Figuras 4.4 y 4.5 de las OP no perturbadas.

4.3. Discusión

El método de control fue implementado con éxito en todos los casos, permitiendo estabilizar diversas OPs en el sistema Tierra-Luna, en el marco del BCP Sol-Tierra-Luna, sobre intervalos de tiempo mucho mayores ($1000T^\odot$) al requerido en implementaciones prácticas y utilizando valores de impulsos mínimos muy realistas ΔV_{min} entre 20 y 30 cm/s en algunos casos (OPs T_045, T_222 y S001) y para el resto con impulsos mínimos entre 3 y 5 cm/s (OPs 146A, 013 y L2NH2) como se muestra en la Tabla 4.3. De allí también puede verse que los consumos promedio por año $\Delta V/\text{año}$ fueron aproximados o menores a 8 m/s en el peor de los casos mostrados (OPs T_222, 146A y L2NH2), y bastante menores en otras (OPs T_045, 013 y S001), es decir, resultó extremadamente bajo como deseábamos. Vale la pena remarcar que este consumo podría optimizarse aún más aumentando la cantidad de puntos de control a lo largo del período de la OP como lo hace Leiva [5], en vez de usar uno solo como en nuestro caso.

Estos consumos son comparables (mismo orden de magnitud) e incluso menores a los obtenidos por Leiva [5] y por G. Gómez [16] para órbitas Halo en torno a L_1 y L_2 que son de algunos m/s por año, pese a que en su trabajo, Leiva considera múltiples puntos de control (entre 8 y 15 aproximadamente) a lo largo del período de una dada órbita T -periódica.

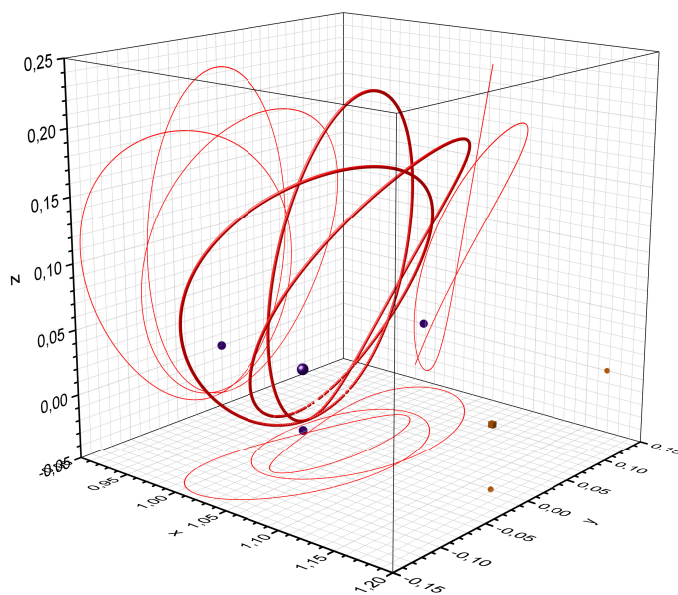
Por otro lado en el caso de la órbita T_045, si bien seleccionamos un impulso mínimo de ~ 30 cm/s a fines de comparar con otros trabajos, ésta órbita es muy bien comportada ya que pasa lejos de las primarias y pudo estabilizarse incluso con un impulso mínimo de ~ 80 cm/s.

A modo de aclaración, en lo que respecta al consumo promedio por impulso $\langle \Delta V \rangle$ hay que notar que para todas las OPs se observó una cierta variabilidad numérica al correr la misma simulación varias veces. Esto se debió a que el código genera los errores ΔV_{err} del impulso de control mediante un generador de números aleatorios. Éste hecho no trae mayores complicaciones ya que todos los valores arrojados conservaban el orden de magnitud.

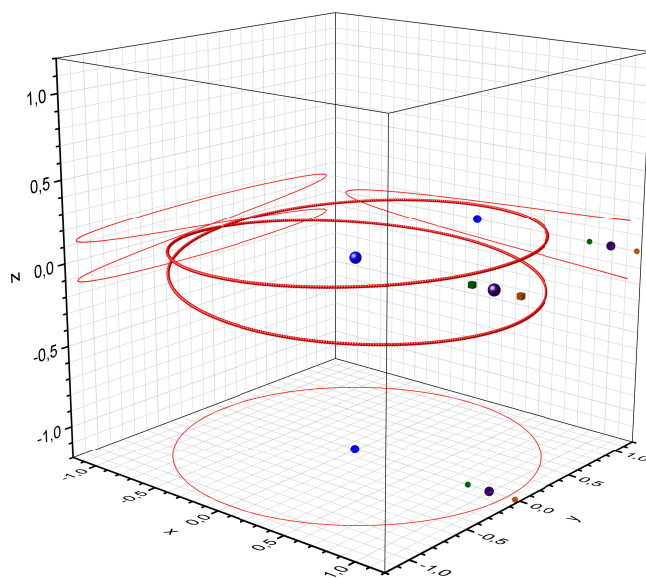
Por otro lado, la restricción del método de control a la aproximación lineal tiene el inconveniente de que el impulso de control mínimo admisible ΔV_{min} tiene que estar dentro de su región de validez alrededor del punto fijo. Cuando no lo está, los impulsos de control no se calculan de acuerdo con la

ley de control lineal (2.83) y la órbita se vuelve rápidamente incontrolada. Este es el caso de las órbitas periódicas 146A, 013 y L2NH2, donde tuvimos que tomar un ΔV_{min} más pequeño para lograr el control. Otro caso en el que el algoritmo de control introducido aquí puede fallar, es cuando los autovectores comunes de M y A son casi paralelos. En estos casos, imprecisiones en los impulsos aplicados pueden posicionar la órbita cerca de, o incluso sobre las variedades inestables del sistema.

A pesar de estos inconvenientes, el algoritmo también tiene ventajas atractivas. Una de ellas es la simplicidad de la ley de control (2.83) que tiene la misma forma para cualquier combinación de estructuras S , C o sf y se ha demostrado capaz de controlar órbitas de muy diferentes tipos (satélites, Lagrangeanas y órbitas de transferencia) y con dinámicas muy diversas (sfC , $S\bar{S}C$, SSC , SSS , $\bar{S}CC$ y SCC) por períodos de tiempo mucho más largos que los requeridos por cualquier misión realista (más de 80 años). Además, en cualquier punto de control dado, la transformación (ley de control) que mapea el desplazamiento $\delta\mathbf{r}$ al impulso de control $\Delta\mathbf{r}$ depende sólo de los parámetros de la órbita de periódica de referencia (a través de los autovalores y autovectores de M), y no del $\delta\mathbf{r}$ mismo, comportamiento característico de un mapa lineal que es heredado por la ley de control lineal (2.83).



(a) Órbita L2NH2



(b) Órbita S001

Figura 4.5: Ilustraciones de las órbitas 3D controladas, en coordenadas y unidades sinódicas. Las líneas rojas representan las órbitas y sus proyecciones sobre los planos coordenados. Las esferas y círculos muestran la posición de la Tierra (izquierda) y la Luna (derecha) y sus respectivas proyecciones; los cubos y cuadrados muestran la posición de los puntos Lagrangianos colineales L_1 (izquierda) y L_2 (derecha) y sus respectivas posiciones. La Tierra y L_1 no aparecen en la Figura 4.5a debido a la escala adoptada.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

A lo largo de todo este trabajo estuvimos motivados con la idea de desarrollar un método que nos permita estabilizar órbitas para sistemas Hamiltonianos T -periódicos debido a que juegan un papel importante en la teoría de los sistemas dinámicos,¹ especialmente en aplicaciones a la Mecánica, y en particular a la Mecánica Celeste y la Astronáutica. En nuestro caso el caos surge al momento de intentar integrar las ecuaciones de Newton para el problema de tres cuerpos, ya que al contrario del problema de dos cuerpos,² éstas no tienen solución analítica. El sistema Tierra-Luna-Sol es un caso muy parecido al de tres cuerpos en este aspecto, y es también una aproximación cualitativamente razonable al sistema solar real, para movimientos en o cerca del sistema Tierra-Luna. Por ese motivo adoptamos el PBC como objeto de estudio para modelar el problema de cuatro cuerpos donde se consideró el movimiento de una masa infinitesimal m en el campo gravitatorio de la Tierra, la Luna y el Sol; donde luego se agregó la perturbación externa de Júpiter.

5.1. Aspectos teóricos

En el marco del Capítulo 2 dedujimos las formas más generales para un Hamiltoniano o una Lagrangiana T -periódicos linealizados alrededor de una solución T -periódica, formalismo que nos permitió obtener las ecuaciones de movimiento para un sistema general de este tipo. En nuestro caso la linealización de las ecuaciones de un sistema T -periódico alrededor de una órbita periódica, nos permitió realizar un desarrollo teórico completo del método de control, ayudados por el hecho de que la matriz de monodromía \mathbf{M} del sistema linealizado es la matriz fundamental de un *sistema autónomo equivalente* (SAE) evaluada a $t = T$, $\mathbf{M} = \Phi(T)$. Asimismo, la simplecticidad de \mathbf{M} nos dió información acerca de sus autovalores y por ende del tipo de

¹El caos, en particular, es un área de estudio dentro de los sistemas dinámicos.

²Tiene solución cerrada por cuadraturas integrales.

dinámica que desarrolla (S, C, sf, etc.). Pudimos encontrar una relación de semejanza, vía una transformación de Legendre, entre las matrices fundamentales “canónicas” Hamiltoniana y Lagrangiana, y por lo tanto de las matrices de monodromía M_H y M_L , respectivamente. Esto permite aplicar todo lo que hemos deducido para la matriz de monodromía M_H del sistema Hamiltoniano a la matriz de monodromía M_L del sistema Lagrangiano, *directamente y sin modificación alguna*, ya que M_H y M_L son simplemente representaciones del *mismo operador lineal* en dos *bases diferentes*. Por otro lado, una característica muy importante es que, el SAE será el mismo en cualquiera de las dos formulaciones, Hamiltoniana o Lagrangiana y esto es así ya que físicamente representan la misma dinámica. Por otro lado, una consecuencia del “teorema fundamental” (ver Sección 2.7) es que nos permitió encontrar una relación entre el SAE y el sistema T -periódico donde las matrices ΩB y A son *semejantes*, y si están escritas en la misma base, entonces deben ser *iguales*: $\Omega B = A$. De ésta manera obtuvimos la transformación de semejanza T *real* que reduce A a ΩB en 1, 2 y 3 g.l.; ésta transformación fue fundamental para el desarrollo del método de control 3D (ver Tabla 2.1). Precisamente uno de los aportes novedosos de este trabajo es haber demostrado la existencia de un SAE Hamiltoniano y real aún en el caso de una dinámica \bar{S} (punto hiperbólico de reflexión), caso en el que el Teorema 1.1 del trabajo de L. Dieci [21] parece prohibirlo. A este respecto debemos destacar que dicho Teorema es perfectamente válido; lo que no resulta válido es la interpretación que usualmente parece hacerse del mismo: El Teorema afirma que para una dinámica \bar{S} no existe H Hamiltoniana y real tal que $M = \exp(H)$; esto es cierto pero pudimos probar tres cosas:

- I) Existe $P(t)$, $2T$ -periódica tal que $M = P(T) \exp(H)$.
- II) Existe un SAE que se puede construir a partir de la transformación $z = P(t)y$.
- III) La presencia de $P(t)$ en M es irrelevante para el método de control.

Por otro lado, para el caso \bar{sf} se puede construir un SAE sin $P(t)$, pero sólo a costa de empeorar la forma de los exponentes característicos, lo cual es inadecuado para el método de control; así que en este caso preferimos también implementar $P(t)$.

Otro aporte novedoso de este trabajo, también en el Capítulo 2, es la introducción de un método para ejercer control en la variedad central, que consiste en la minimización de la energía correspondiente a ésta variedad, sujeto al vínculo de posicionar la órbita sobre las direcciones estables de las variedades sillas o sillas-foco. Esto se hizo efectivo mediante el método de los *multiplicadores de Lagrange*. A este respecto debemos destacar lo siguiente: En G. Gómez [16], y hasta donde se ha podido verificar, en toda la literatura actual se afirma que no es necesario ejercer control en la variedad central.

Para las órbitas planares de este trabajo 013, 146A y 045, cuya estructura incluye *una* variedad $C(z, \dot{z})$, hemos podido verificar que en gran medida ésto es correcto: si al impulso de control calculado se le quita su proyección sobre la variedad central, ni la estabilidad de la órbita ni los valores de la Tabla 4.3 cambian mucho; simplemente, la dispersión en (z, \dot{z}) de los estados antes de cada impulso de control aumenta, aproximadamente en un factor 10, pero aún así sigue siendo extremadamente pequeña, típicamente $\sim 10^{-4}$ en unidades sinódicas. Sin embargo para las órbitas 3D S001 y L2NH2, cuya estructura incluye *dos* variedades C , si dejamos de ejercer control en dichas variedades la órbita abandona la vecindad lineal del punto de control, e incluso la vecindad del sistema Tierra-Luna, *en unos pocos meses*. Concluimos de ello que la comunmente postulada “inocuidad” de no ejercer control en la variedad central, es más una afirmación sobre la clase de órbitas y de métodos de control usualmente utilizados, que sobre la dinámica y los métodos de control en general. En algunos casos, como hemos hallado en este trabajo, no ejercer control en la variedad central puede resultar desastroso³.

En el Capítulo 3 se estudió en forma analítica explícita el método de control en el caso 2D. Pudimos probar, además, que la dinámica para un sistema en 3 g.l. se puede desacoplar siempre como un sistema de 2 g.l. *más* un sistema de 1 g.l. Se presentó luego una selección de ejemplos de “juguete” (numérico) de tiempo continuo para poner a prueba el método, donde tomamos $T = 2, 1$, $\mathbf{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$ y vimos como el sistema transiciona por las distintas dinámicas a medida que variamos los ν_i , $i = 1, 2$ (componentes de \mathbf{U} que definen la “curvatura del potencial”) y aumentamos Ω (componente de $\bar{\mathbf{\Omega}}$ que define la “velocidad angular”); éstos ejemplos se aprecian en las Figuras (3.2)-(3.5) y son indicativos de que el método de control funciona muy bien ya que permite tener acotado al sistema en una región cercana al origen a medida que crece el número de períodos (hasta $N=100$), donde por cada período tenemos un punto de control, es decir, una acumulación total de 100 puntos. A demás, se pone en evidencia como el sistema general se desacopla en un sistema 2D más un sistema 1D al elegir la dirección de $\mathbf{\Omega}$ perpendicular al plano xy .

5.2. Implementación numérica y aplicación

En el Capítulo 4 presentamos un conjunto de ejemplos de aplicación de nuestro método de control 3D a órbitas periódicas reales, donde las órbitas T_045, T_222, 146A y 013 fueron extraídas de la Tesis Doctoral de A. M.

³El mismo comportamiento se observó en las simulaciones numéricas de sistemas 3D “de juguete”, que no se reportan en detalle en el Capítulo 2: Los sistemas con una *única* variedad C permanecen controlados aún si se deja de ejercer control en ella; mientras que los sistemas con dos o tres variedades C se descontrolan rápidamente.

Leiva [5] (continuadas allí de PC3CR al PCBC y aquí al PBC); y las órbitas S001 y L2NH2 que fueron continuadas directamente del PC3CR al PBC en este trabajo. En éste último modelo que usamos por simplicidad, el PBC, se consideró además la perturbación generada por Júpiter a fin de hacer más realistas las simulaciones, en el sentido de incluir perturbaciones comparables a las que se hallarían en el sistema solar real.

Los resultados de la Tabla 4.3 dan cuenta del buen funcionamiento del método de control sobre las mencionadas OPs, donde se logró un consumo medio anual $\Delta V/\text{año}$ extremadamente bajo, teniendo en cuenta impulsos de control ΔV_{min} realistas de entre ~ 20 y 30 cm/s para algunas órbitas y no realistas de entre ~ 3 y 5 cm/s para otras. Si se pretende obtener un ΔV_{min} mayor, el algoritmo puede optimizarse sí, dada una OP, reconstruimos las variedades estables e inestables del sistema no-lineal completo. Ésto, obviamente permitiría estabilizar nuevas trayectorias que no pueden ser estabilizadas según la aproximación lineal, mejorar los consumos obtenidos e implementar impulsos ΔV_{min} mayores. Comparando con nuestro método, se mejorarían los consumos pero se aumentaría la complejidad del problema, no sólo por la dificultad que se presenta al intentar reconstruir numéricamente las variedades estables del sistema, sino porque se perdería la simplicidad y efectividad de una ley de control lineal.

Presentamos a continuación un resumen de las principales ventajas y desventajas del método de control propuesto en este trabajo:

Principales ventajas

- 1) Resulta de fácil implementación práctica, ya que elegido un dado punto de control la telemetría puede alimentarse directamente al algoritmo de control.
- 2) El consumo ($\Delta V/\text{año}$) es muy bajo, competitivo con métodos de control aplicados en misiones reales.
- 3) Podemos aumentar el número de puntos de control que se utilizan. Además, es posible determinar el número óptimo de puntos de control que estabilizan una OP (ver [5], Sección 4.5).
- 4) Dada una OP de referencia y un punto de control, la ley de control queda completamente determinada.
- 5) En general, se logra estabilizar cualquier trayectoria si se aplican impulsos suficientemente pequeños (aunque en la práctica éstos carezcan de sentido).

Principales desventajas

- 1) La linealización debe ser válida en un entorno lo bastante grande del punto de control para acomodar las perturbaciones acumuladas sobre un

período orbital (aunque esta desventaja puede aminorarse utilizando más de un punto de control).

- 2) El éxito de la estabilización depende fuertemente de la precisión con la que se determinen los vectores de control.
- 3) Si algunos vectores de control son aproximadamente paralelos, imprecisiones en los impulsos aplicados pueden posicionar la órbita sobre alguna de las variedades inestables del sistema.
- 4) En general, OPs de períodos grandes ($T \gg T^\odot$) son difíciles de controlar, ya que las perturbaciones acumuladas sobre un período pueden ser demasiado grandes (aunque, nuevamente, esta desventaja puede aminorarse utilizando más de un punto de control).

Como conclusión final, y como otro aporte original de este trabajo, la implementación del modelo PBC nos permitió probar nuestra hipótesis sobre la no trivialidad de no ejercer control en la variedad central, es decir, hallamos en algunos casos que el sistema tiende a diverger por acumulación de perturbaciones en tiempos muy breves (algunos meses) cuando no se ejerce control, a diferencia de lo que se creía por ser la variedad central un caso de estabilidad orbital [16] lo que nos permitía no controlarla. Por lo tanto, a partir de esto, estamos en condiciones de decir que es realmente necesario ejercer control sobre *todos* los tipos de dinámicas que rijan al sistema.

Por otro lado, al aplicar el método sobre las distintas órbitas en las que se lo puso a prueba, por lo general se vio una cierta tendencia que en las órbitas con dinámica SSC no hizo falta controlar en la variedad central, en el sentido de que el sistema se mantenía controlado o bien la divergencia era demasiado lenta, necesitando períodos extremadamente largos (mucho más que cualquier misión real) para hacerse notoria. Este no fue el caso para órbitas con dinámicas SCC donde el sistema mostraba una tendencia a diverger rápidamente, implicando la necesidad de ejercer control constantemente en todas las variedades.

A este respecto, en los trabajos de G. Gómez [16] no se hace mención en ningún momento acerca de como controlar en la variedad central y mucho menos se mencionaron casos de control directo sobre ésta. Existe la posibilidad que para las órbitas sobre las que trabajaron o realizaron misiones, el hecho de no controlar en la variedad central era irrelevante ya que el sistema no se apartaba demasiado de sus regiones de interés y quizás tampoco implicaba un consumo en impulsos de control mucho mayor del que se obtendría si se ejerciera control. Estos son supuestos elaborados a partir de no encontrar una respuesta a la idea intuitiva que sugiere controlar en todas las variedades del sistema.

Por éstas cuestiones también creemos que el método propuesto para controlar en la variedad central resulta exitoso y que puede ser un buen punto

de partida para implementarlo en misiones futuras en las que no sea irrelevante no ejercer control sobre ésta variedad. Por ello deseamos destacar nuevamente un aporte original de este trabajo: la implementación de un método de control lineal que ejerce control sobre *todas* las variedades de la dinámica linealizada alrededor de la OP de referencia.

5.3. Perspectivas a futuro

Como ya dijimos, existen varias cuestiones a mejorar en el tratamiento del método de control, si quisierámos obtener resultados más realistas, precisos y eficientes. Para ello, se pueden abordar varios caminos, desde ahondar más allá en el modelo bicircular propuesto y agregarle la perturbación de un planetoide como Plutón además de la de Júpiter, que no cambiaría de manera significativa lo que obtuvimos, hasta extenderlo al cuasi-bicircular con las respectivas órbitas excéntricas de las primarias considerando las perturbaciones generadas por todos los planetas del sistema solar, más otros tipos de perturbaciones como, por ejemplo, la presión de radiación producida por llamaradas solares, errores en las mediciones de las señales (telemetría), etc. O porque no, considerar el PCBC y extenderlo al sistema solar real (SSR) considerando también correcciones relativistas en la fase solar, lo que genera un retraso temporal en la perturbación del Sol. Todas éstas propuestas son buenas para hacer el método más realista, aunque obviamente considerar esto va de la mano con una complejidad tan extrema como se quisiera, no solo en las ecuaciones de movimiento y soluciones del problema, sino también en los tiempos de cómputos, lo que hace que no sea para nada trivial su implementación.

Por otro lado, se podría ir un poco más allá, al núcleo del método de control y considerar múltiples puntos de control a lo largo del período de una dada OP, en vez de uno solo como en nuestro caso. Esto sería beneficioso ya que, por ejemplo, si el autovalor inestable de las variedades sillas o sillas-foco son demasiado grandes puede darse el caso que la dinámica se haya escapado muy lejos de la región permitida por la linealización antes de que se vuelva a aplicar un impulso de control; un problema similar puede ocurrir con la variedad central debido a la acumulación de perturbaciones y errores numéricos. Aún así, esto no garantiza que el control se optimice, ya que al dividir el período de la órbita en intervalos, sin conocer donde estará el próximo punto de control, existe la posibilidad de que dicho punto caiga en una región donde hayan variedades paralelas, pudiendo la órbita posicionarse sobre las variedades inestables del sistema. Por lo tanto, habría que asegurarse de tomar los puntos (o intervalos) de forma correcta al momento de considerar la idea de aplicar múltiples puntos de control. Respecto a esto, una alternativa de trabajo podría ser tratar el caso de indicadores para los mejores puntos de control de una OP, es decir, un método que nos

permita decidir sobre cuales serían los puntos más apropiados; éste método podría ser ventajoso, ya que nos permitiría elegir puntos de control que estén lejos de las regiones localmente más inestables a lo largo de la OP, o donde se difícil la distinción entre las variedades estables e inestables.

Por último, y por completitud del método de control, se podría tratar el problema de considerar ya no un sistema T -periódico, sino el problema general de un sistema de tiempo continuo, en cuyo caso la elección de los puntos de control y los intervalos entre ellos y la construcción de un SAE sería mucho más difícil, pero permitiría a cambio elegir entre una variedad mucho mayor de órbitas de referencia, por ejemplo órbitas en el sistema solar real.

Estas y otras posibles estrategias de optimización, serán objeto de estudio de trabajos posteriores.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Apéndice A

De Hamilton a Lagrange y viceversa

En este apéndice desarrollaremos las propiedades más generales para un Hamiltoniano T -periódico, esto es, daremos las características de *simetría* del Hamiltoniano y a partir de éste construiremos el Lagrangiano de forma usual. Luego, procederemos de forma inversa, partiremos de un Lagrangiano general y a partir de éste construiremos el Hamiltoniano y veremos la equivalencia entre ambos enfoques. Este análisis es necesario para las simplificaciones usadas en el Capítulo 2 cuando se estudiaron las ecuaciones de movimiento linealizadas.

A.1. Del Hamiltoniano linealizado a la Lagrangiana linealizada

Lo que se tratará en ésta Sección está basado en el análisis para obtener la Lagrangiana linealizada a partir del Hamiltoniano linealizado. Este análisis es válido para cualquier número finito n de g.l.

Como hemos visto en la Sección 2.1, para un Hamiltoniano T -periódico *arbitrario*, la linealización de las ecuaciones de Hamilton alrededor de una solución T -periódica aislada siempre nos lleva a un sistema Hamiltoniano lineal, T -periódico y no-singular.

Consideremos entonces el Hamiltoniano lineal T -periódico más general posible con n g.l. que podremos tener,

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H}(t) \mathbf{x}, \quad (\text{A.1})$$

donde $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, y $\mathbf{H}(t)$ es una matriz real $2n \times 2n$ T -periódica, independiente de \mathbf{x} y no-singular. Este Hamiltoniano siempre llevará a ecuaciones de Hamilton lineales, las que quedarán

$$\dot{\mathbf{x}} = \Omega \mathbf{H}(t) \mathbf{x}, \quad (\text{A.2})$$

así que para que (\mathbf{q}, \mathbf{p}) sean variables canónicas $\Omega\mathbf{H}(t)$ debe ser una matriz *Hamiltoniana* y, por lo tanto, $\mathbf{H}(t)$ debe ser una matriz $2n \times 2n$ real y *simétrica* ($\forall t$). Por lo tanto podemos escribirla como

$$\mathbf{H}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}(t) & \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{B}^T(t) & \mathbf{A}(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

con $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ y $\mathbf{C}(t)$ matrices T -periódicas $n \times n$ reales, y $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{C}(t)$ *simétricas* ($\forall t$); asumiremos también que $\mathbf{A}(t)$ es *no-singular* ($\forall t$), lo que justificaremos en breve. Por simplicidad en adelante omitiremos escribir explícitamente la dependencia temporal de todas las matrices. El Hamiltoniano se escribirá entonces

$$H_{lin} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{H}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{B}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^T\mathbf{B}^T\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{C}\mathbf{q}. \quad (\text{A.4})$$

Considerando la Lagrangiana L , por definición, $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ y entonces

$$H = \mathbf{p}^T\dot{\mathbf{q}} - L \Rightarrow L = \mathbf{p}^T\dot{\mathbf{q}} - H. \quad (\text{A.5})$$

Como queremos que las ecuaciones de movimiento sean lineales también en la formulación Lagrangiana, \mathbf{p} debe ser función lineal de \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$. Asumiremos entonces

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{a}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}\mathbf{q} + \mathbf{d}, \quad (\text{A.6})$$

con lo cual integrando tenemos

$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{a}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{b}\mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{c}\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{d} + \mathbf{q}^T\mathbf{e}. \quad (\text{A.7})$$

Aquí \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son matrices $n \times n$ reales, y \mathbf{d} y \mathbf{e} son vectores en \mathbb{R}^n . Nótese que estamos admitiendo la posibilidad de términos lineales en \mathbf{q} y en $\dot{\mathbf{q}}$ en la Lagrangiana, y no estamos asumiendo nada (a priori) sobre la simetría o no de \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} .

Tenemos entonces de (A.4) y (A.5)

$$L = \mathbf{p}^T\dot{\mathbf{q}} - \left(\frac{1}{2}\mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{B}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^T\mathbf{B}^T\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{C}\mathbf{q} \right). \quad (\text{A.8})$$

Ahora, substituyendo $\mathbf{p} = \mathbf{a}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}\mathbf{q} + \mathbf{d}$ en (A.8), donde también descartamos constantes y derivadas totales respecto de t de funciones de \mathbf{q} y t , y a su vez usando $\mathbf{y}^T\mathbf{m}^T\mathbf{z} = \mathbf{z}^T\mathbf{m}\mathbf{y} \forall \mathbf{m}, \mathbf{z}, \mathbf{y}$ (porque es un escalar) y reordenando, tenemos

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T(2\mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T\mathbf{A}\mathbf{a})\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T(\mathbf{b} - \mathbf{a}^T\mathbf{A}\mathbf{b} - \mathbf{a}^T\mathbf{B}^T)\mathbf{q} \\ & - \frac{1}{2}\mathbf{q}^T(\mathbf{C} + \mathbf{b}^T\mathbf{A}\mathbf{b} + 2\mathbf{B}\mathbf{b})\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}}^T(\mathbf{I} - \mathbf{a}^T\mathbf{A})\mathbf{d} - \mathbf{q}^T(\mathbf{b}^T\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{d}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A.2. DE LA LAGRANGIANA LINEALIZADA AL HAMILTONIANO LINEALIZADO

Comparando esto último con (A.7) obtenemos entonces el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= 2\mathbf{a}^T - \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a} \\
 \mathbf{b} &= \mathbf{b} - \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{b} - \mathbf{a}^T \mathbf{B}^T \\
 \mathbf{c} &= \mathbf{C} + \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b} + 2\mathbf{B} \mathbf{b} \quad . \\
 \mathbf{d} &= (\mathbf{I} - \mathbf{a}^T \mathbf{A}) \mathbf{d} \\
 \mathbf{e} &= (\mathbf{b}^T \mathbf{A} + \mathbf{B}) \mathbf{d}
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Trasponiendo la primera relación (recordando que \mathbf{A} es simétrica) se tiene $\mathbf{a}^T = 2\mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{a}$ y luego restando ambas, implica $\mathbf{a} - \mathbf{a}^T = 0$, es decir, \mathbf{a} debe ser *simétrica*.

Luego la primera relación se reduce a $\mathbf{a} = \mathbf{a} \mathbf{A} \mathbf{a}$, es decir, $\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{I}$ o $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}$.

Usando ésto, de las demás ecuaciones (en el mismo orden) es fácil ver que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} &= -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T \\
 \mathbf{c} &= \mathbf{C} - \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T \\
 \mathbf{d} &= \mathbf{0} \\
 \mathbf{e} &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

En definitiva la expresión más general para la Lagrangiana del sistema T -periódico linealizado alrededor de una solución T -periódica aislada queda

$$\begin{aligned}
 L_{lin} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}^{-1} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T) - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T (\mathbf{C} - \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T) \mathbf{q} \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{b} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{c} \mathbf{q}
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

con $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t)$, $\mathbf{c}(t)$ matrices T -periódicas $n \times n$ reales, y $\mathbf{a}(t)$ y $\mathbf{c}(t)$ *simétricas* ($\forall t$), que en términos de las matrices del Hamiltoniano linealizado, se escriben $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}$ y el resto como en (A.11).

Vemos también que \mathbf{a} debe ser *no-singular*, ya que $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a} \dot{\mathbf{q}}$ es una energía cinética y por lo tanto definida *positiva*; en consecuencia \mathbf{A} también resulta no-singular, como habíamos asumido.

A.2. De la Lagrangiana linealizada al Hamiltoniano linealizado

Ahora vamos a proceder a la inversa, más que nada como verificación. Supongamos una Lagrangiana real, T -periódica, y a lo sumo cuadrática en q_i y \dot{q}_i , cuya forma más general podemos escribir

$$L = \frac{1}{2} a_{ij}(t) \dot{q}_i \dot{q}_j + b_{ij}(t) \dot{q}_i q_j - \frac{1}{2} c_{ij}(t) q_i q_j + d_i(t) \dot{q}_i + e_i(t) q_i, \tag{A.13}$$

donde a_{ij} , b_{ij} y c_{ij} son matrices reales $n \times n$ T -periódicas e independientes de las q_i y las \dot{q}_i , y d_i y e_i son vectores en \mathbb{R}^n T -periódicos, reales e independientes de las q_i y las \dot{q}_i .

Notemos primero que toda matriz a real puede descomponerse en la suma de sus partes simétrica \mathbf{a}_s y antisimétricas \mathbf{a}_a , definidas como

$$\mathbf{a}_s := \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^T), \quad \mathbf{a}_a := \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{a}^T), \quad (\text{A.14})$$

que obviamente satisfacen

$$\mathbf{a}_s^T = \mathbf{a}_s, \quad \mathbf{a}_a^T = -\mathbf{a}_a. \quad (\text{A.15})$$

Con ésto vemos que

$$\begin{aligned} a_{ij}(t)\dot{q}_i\dot{q}_j &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{a}_s + \mathbf{a}_a) \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a}_s \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a}_a \dot{\mathbf{q}}, \\ c_{ij}(t)\dot{q}_i\dot{q}_j &= \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c} \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{c}_s + \mathbf{c}_a) \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c}_s \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c}_a \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Pero siendo $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a} \dot{\mathbf{q}}$ y $\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c} \dot{\mathbf{q}}$ *escalares*, deben ser iguales a sus transpuestas:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a} \dot{\mathbf{q}} &= (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a} \dot{\mathbf{q}})^T = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a}^T \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a}_s^T \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a}_a^T \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a}_s \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a}_a \dot{\mathbf{q}}, \\ \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c} \dot{\mathbf{q}} &= (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c} \dot{\mathbf{q}})^T = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c}_s^T \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c}_a^T \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c}_s \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c}_a \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Luego, de las últimas igualdades de (A.17) es inmediato que

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a}_a \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{c}_a \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.18})$$

Es decir, si a_{ij} y c_{ij} tuvieran parte antisimétrica no-trivial, éstas no contribuirían a la expresión de L . Por lo tanto a_{ij} y c_{ij} pueden asumirse *simétricas* sin perder generalidad.

Por otra parte,

$$E_c := \frac{1}{2} a_{ij}(t) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (\text{A.19})$$

es una energía cinética y por consiguiente definida positiva. Vemos entonces que a_{ij} debe asumirse *no-singular*.

En cuanto a los términos lineales notaremos dos cosas:

En primer lugar:

$$d_i(t)\dot{q}_i = \frac{d}{dt}(d_i(t)q_i) - \dot{d}_i(t)q_i, \quad (\text{A.20})$$

de modo que este término puede absorberse en $e_i(t)q_i$ sin alterar las ecuaciones de movimiento; análogamente

$$e_i(t)q_i = \frac{d}{dt} \left(\int_t e_i(s)q_i ds \right) - \int_t e_i(s)\dot{q}_i ds, \quad (\text{A.21})$$

de modo que alternativamente este término puede absorberse en $d_i(t)\dot{q}_i$ sin alterar tampoco las ecuaciones de movimiento.

A.2. DE LA LAGRANGIANA LINEALIZADA AL HAMILTONIANO
LINEALIZADO

En segundo lugar, si partimos de una Lagrangiana T -periódica $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ que describa el mismo sistema que el Hamiltoniano $H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, es evidente que las ecuaciones de Euler-Lagrange admitirán una solución T -periódica $\phi(t)$, tal que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) (\phi(t), \dot{\phi}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} (\phi(t), \dot{\phi}(t), t) = \mathbf{0}, \quad \forall t. \quad (\text{A.22})$$

Si realizamos la transformación de Legendre

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \longrightarrow H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (\text{A.23})$$

ésta mapeará

$$\begin{pmatrix} \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \phi_q(t) \\ \phi_p(t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

con

$$\phi_q(t) = \phi(t), \quad \phi_p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} (\phi(t), \dot{\phi}(t), t), \quad (\text{A.25})$$

y $(\phi_q(t), \phi_p(t))$ será por definición una solución T -periódica de las correspondientes ecuaciones de Hamilton, es decir,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_q(t) &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} (\phi_q(t), \phi_p(t), t), \\ \dot{\phi}_p(t) &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} (\phi_q(t), \phi_p(t), t). \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Si ahora linealizamos el Hamiltoniano alrededor de $(\phi_q(t), \phi_p(t))$ obtendremos el sistema Hamiltoniano lineal del principio,

$$\dot{\mathbf{y}} = \Omega \mathbf{H}(t) \mathbf{y}, \quad (\text{A.27})$$

con

$$\mathbf{H}(t) = \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^2} (\phi_q(t), \phi_p(t), t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}(t) & \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{B}^T(t) & \mathbf{A}(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

una matriz real y simétrica como ya vimos, y con Hamiltoniano

$$H_{lin}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{B} \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{B}^T \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}. \quad (\text{A.29})$$

Y como ya vimos también, la transformación de Legendre inversa

$$H_{lin}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \longrightarrow L_{lin}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (\text{A.30})$$

nos lleva a una Lagrangiana linealizada de la forma

$$L_{lin} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{b} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{c} \mathbf{q}, \quad (\text{A.31})$$

que no contiene términos lineales ni en \mathbf{q} ni en $\dot{\mathbf{q}}$. Por lo tanto del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & L_{lin} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & H_{lin} \end{array}$$

vemos que la linealización directa de L alrededor de $\phi(t)$ debe generar una Lagrangiana linealizada con términos cuadráticos solamente, es decir, con

$$d_i(t) = e_i(t) = 0.$$

La Lagrangiana linealizada se escribe entonces¹

$$\begin{aligned} L_{lin} &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{a} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{b} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{c} \mathbf{q} \\ &= \frac{1}{2} a_{ij}(t) \dot{q}_i \dot{q}_j + b_{ij}(t) \dot{q}_i q_j - \frac{1}{2} c_{ij}(t) q_i q_j, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

con $a_{ij}(t)$ y $c_{ij}(t)$ simétricas.

Vamos a realizar ahora la transformación de Legendre de la Lagrangiana linealizada al Hamiltoniano linealizado. Los momentos serán

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = a_{ij}(t) \dot{q}_j + b_{ij}(t) q_j, \quad (\text{A.33})$$

luego

$$\dot{q}_i = a_{ik}^{-1}(t) (p_k - b_{km}(t) q_m). \quad (\text{A.34})$$

La función energía será

$$E = \dot{q}_i p_i - L = \frac{1}{2} a_{ij}(t) \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{1}{2} c_{ij}(t) q_i q_j. \quad (\text{A.35})$$

Luego, usando la simetría de \mathbf{a} para cambiar a_{ik} por a_{ki} , recordando que $a_{ij} a_{jl}^{-1} = \delta_{il}$ y que $\mathbf{a}^T = \mathbf{a}$, el Hamiltoniano quedará después de un poco de álgebra

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} a_{kl}^{-1}(t) (p_k - b_{km}(t) q_m) (p_l - b_{ln}(t) q_n) + \frac{1}{2} c_{ij}(t) q_i q_j \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T [\mathbf{b}^T \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{c}] \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T [\mathbf{a}^{-1}] \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T [\mathbf{a}^{-1} \mathbf{b}]^T \mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{p}^T [\mathbf{a}^{-1} \mathbf{b}] \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

De aquí podemos leer los elementos de la matriz $\mathbf{H}(t)$:

$$\mathbf{H}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^T \mathbf{a}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{c} & -\mathbf{b}^T \mathbf{a}^{-1} \\ -\mathbf{a}^{-1} \mathbf{b} & \mathbf{a}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.37})$$

¹En este Apéndice mostramos el subíndice “lin” sólo para analizar como ir de una representación a otra; en las secciones 2.1.1 y 2.1.2 omitimos escribirlo para ahorrar notación.

A.2. DE LA LAGRANGIANA LINEALIZADA AL HAMILTONIANO LINEALIZADO

Dado que \mathbf{a} y \mathbf{c} son simétricas, que $[\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}]^T = \mathbf{b}^T\mathbf{a}^{-1}$ y que $[\mathbf{b}^T\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a}]^T = \mathbf{b}^T\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$, es inmediato que $H(t)$ es simétrica, sin necesidad de imponer nada acerca de la simetría (o no) de \mathbf{b} .

Es inmediato verificar de las ecs. (A.28) y (A.37) que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{b} &= -\mathbf{a}\mathbf{B}^T = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{c} &= \mathbf{C} - \mathbf{b}^T\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T, \end{aligned} \tag{A.38}$$

las mismas relaciones que ya obtuvimos.

Apéndice B

Dinámicas en 2 y 3 g.l.

A modo de completitud, en este Apéndice se presenta primero una clasificación completa de las dinámicas en 2 g.l. que se estudiaron en la Sección 2.5.2.

Luego, una vez detalladas estas dinámicas, procederemos también a completar la clasificación de la transformación de semejanza, para todos los casos, que llevan \mathbf{A} a $\Omega\mathbf{B}$ cuando estudiamos el SAE en la Sección 2.8, donde para ello es necesario obtener los autovalores y autovectores de $\Omega\mathbf{B}$.

Si bien deberíamos seguir el mismo planteamiento para el caso de 3 g.l. presentado en la Sección 2.11, preferimos tomar la “salida rápida” y remarcar nuevamente que la clasificación completa se obtiene de una combinación de los casos en 2 g.l. que se detallan a continuación.

B.1. Clasificación de las dinámicas en 2 g.l.

Dinámica CC: los autovalores de \mathbf{M} pueden escribirse $\lambda_1 = e^{-i\omega_1 T}$, $\lambda_1^{-1} = e^{i\omega_1 T}$, $\lambda_2 = e^{-i\omega_2 T}$, $\lambda_2^{-1} = e^{i\omega_2 T}$, y suponemos $\omega_1 \neq \omega_2$; los correspondientes autovectores serán $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2^*) \in \mathbb{C}^4$, con

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{v}_1 &= e^{-i\omega_1 T} \mathbf{v}_1, & \mathbf{M}\mathbf{v}_1^* &= e^{i\omega_1 T} \mathbf{v}_1^*, \\ \mathbf{M}\mathbf{v}_2 &= e^{-i\omega_2 T} \mathbf{v}_2, & \mathbf{M}\mathbf{v}_2^* &= e^{i\omega_2 T} \mathbf{v}_2^*. \end{aligned}$$

Análogamente al caso de la dinámica C con 1 g.l., vemos que en la base *real* $\{\text{Re}(\mathbf{v}_1), \text{Im}(\mathbf{v}_1), \text{Re}(\mathbf{v}_2), \text{Im}(\mathbf{v}_2)\}$ la matriz se expresa

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 T) & \sin(\omega_1 T) & 0 & 0 \\ -\sin(\omega_1 T) & \cos(\omega_1 T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_2 T) & \sin(\omega_2 T) \\ 0 & 0 & -\sin(\omega_2 T) & \cos(\omega_2 T) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

es decir, dos rotaciones de ángulos $\omega_1 T$ y $\omega_2 T$ en sentido negativo, en dos

planos mutuamente ortogonales. Calculando por bloques es inmediato que

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 T & 0 & 0 \\ -\omega_1 T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 T \\ 0 & 0 & -\omega_2 T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 T) & \sin(\omega_1 T) & 0 & 0 \\ -\sin(\omega_1 T) & \cos(\omega_1 T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_2 T) & \sin(\omega_2 T) \\ 0 & 0 & -\sin(\omega_2 T) & \cos(\omega_2 T) \end{pmatrix},$$

y vemos que en esa base la matriz de monodromía viene dada por $M = e^{T\Omega B}$ con

$$\Omega B = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \end{pmatrix},$$

donde la primera matriz es evidentemente Hamiltoniana y la segunda es simétrica. También es evidente que

$$\begin{aligned} M\mathbf{v}_i &= e^{T\Omega B}\mathbf{v}_i = e^{-i\omega T}\mathbf{v}_i \Rightarrow \Omega B\mathbf{v}_i = -i\omega_i\mathbf{v}_i, \\ M\mathbf{v}_i^* &= e^{T\Omega B}\mathbf{v}_i^* = e^{i\omega T}\mathbf{v}_i^* \Rightarrow \Omega B\mathbf{v}_i^* = i\omega_i\mathbf{v}_i^*, \end{aligned}$$

es decir, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2^*)$ son autovectores de ΩB con autovalores $(-i\omega_1, i\omega_1, -i\omega_2, i\omega_2)$, respectivamente.

Dinámica SS: los autovalores de M pueden escribirse $\lambda_1 = e^{\eta_1 T}$, $\lambda_1^{-1} = e^{-\eta_1 T}$, $\lambda_2 = e^{\eta_2 T}$, $\lambda_2^{-1} = e^{-\eta_2 T}$, y suponemos $\eta_1 \neq \eta_2$; los correspondientes autovectores serán $(\mathbf{v}_{1+}, \mathbf{v}_{1-}, \mathbf{v}_{2+}, \mathbf{v}_{2-}) \in \mathbb{C}^4$, con

$$\begin{aligned} M\mathbf{v}_{1+} &= e^{\eta_1 T}\mathbf{v}_{1+}, & M\mathbf{v}_{1-} &= e^{-\eta_1 T}\mathbf{v}_{1-}, \\ M\mathbf{v}_{2+} &= e^{\eta_2 T}\mathbf{v}_{2+}, & M\mathbf{v}_{2-} &= e^{-\eta_2 T}\mathbf{v}_{2-}. \end{aligned}$$

Análogamente al caso de la dinámica S con 1 g.l., vemos que en la base *real* $\{\mathbf{v}_{1+}, \mathbf{v}_{1-}, \mathbf{v}_{2+}, \mathbf{v}_{2-}\}$ la matriz se expresa

$$M = \begin{pmatrix} \cosh(\eta_1 T) & \sinh(\eta_1 T) & 0 & 0 \\ \sinh(\eta_1 T) & \cosh(\eta_1 T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\eta_2 T) & \sinh(\eta_2 T) \\ 0 & 0 & \sinh(\eta_2 T) & \cosh(\eta_2 T) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

es decir, dos distorsiones hiperbólicas en $\eta_1 T$ y $\eta_2 T$, en dos planos mutuamente ortogonales. Calculando por bloques es inmediato que

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \eta_1 T & 0 & 0 \\ \eta_1 T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 T \\ 0 & 0 & \eta_2 T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\eta_1 T) & \sinh(\eta_1 T) & 0 & 0 \\ \sinh(\eta_1 T) & \cosh(\eta_1 T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\eta_2 T) & \sinh(\eta_2 T) \\ 0 & 0 & \sinh(\eta_2 T) & \cosh(\eta_2 T) \end{pmatrix},$$

y vemos que en esa base la matriz de monodromía viene dada por $M = e^{T\Omega B}$ con

$$\Omega B = \begin{pmatrix} 0 & \eta_1 & 0 & 0 \\ \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 \\ 0 & 0 & \eta_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 \end{pmatrix},$$

donde la primera matriz es evidentemente Hamiltoniana y la segunda es simétrica. También es evidente que

$$\begin{aligned} M\mathbf{v}_{i+} &= e^{T\Omega B}\mathbf{v}_{i+} = e^{\eta_i T}\mathbf{v}_{i+} \Rightarrow \Omega B\mathbf{v}_{i+} = \eta_i\mathbf{v}_{i+}, \\ M\mathbf{v}_{i-} &= e^{T\Omega B}\mathbf{v}_{i-} = e^{-i\eta T}\mathbf{v}_{i-} \Rightarrow \Omega B\mathbf{v}_{i-} = -\eta\mathbf{v}_{i-}, \end{aligned}$$

es decir, $(\mathbf{v}_{1+}, \mathbf{v}_{1-}, \mathbf{v}_{2+}, \mathbf{v}_{2-})$ son autovectores de ΩB con autovalores $(\eta_1, -\eta_1, \eta_2, -\eta_2)$, respectivamente.

Dinámicas $\bar{S}S$ y $S\bar{S}$: (si es $S\bar{S}$ la reordenamos a $\bar{S}S$). El único cambio respecto de la dinámica SS es el signo de los autovalores de M , que pasan a ser $-e^{\pm\eta_1 T}$, $e^{\pm\eta_2}$, o $-e^{\pm\eta_1 T}$, $-e^{\pm\eta_2 T}$, respectivamente.

Tenemos $M = \begin{pmatrix} -l_2 & 0_2 \\ 0_2 & l_2 \end{pmatrix} e^{T\Omega B}$ o $M = -e^{T\Omega B}$, respectivamente, con la misma B del caso SS . Los autovectores, y los autovalores de B , son también los mismos del caso SS .

Dinámicas SC y $S\bar{C}$: (si es CS o $C\bar{S}$, la reordenamos a SC o $S\bar{C}$) Podemos obtenerla combinando los casos anteriores. Los autovalores de M serán $e^{\pm\eta T}$, $e^{\pm i\omega T}$ o $-e^{\pm\eta T}$, $e^{\pm i\omega T}$ respectivamente. Tenemos respectivamente $M = \begin{pmatrix} -l_2 & 0_2 \\ 0_2 & l_2 \end{pmatrix} e^{T\Omega B}$ o $M = e^{T\Omega B}$, con

$$\Omega B = \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix},$$

en ambos casos. Los autovectores son los correspondientes a combinar las respectivas dinámicas de 1 g.l. y los autovectores de B igual.

B.2. Clasificación en 2 g.l. para el SAE

En esta Sección se presentan las transformaciones de semejanza que llevan A a su “forma canónica”, donde sabemos que ΩB y A deben ser semejantes y si, además, están escritas en la misma base, entonces deben ser iguales $\Omega B = A$. Para esto, en lo que sigue, se usarán las expresiones obtenidas para M y B (por consiguiente ΩB) en la Sección B.1 y 2.5.2.

Dinámica CC : Los autovalores μ_i y autovectores \mathbf{w}_i de ΩB son

$$\begin{aligned} \mu_1 = i\omega_1 \leftrightarrow \mathbf{w}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mu_2 = -i\omega_1 \leftrightarrow \mathbf{w}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mu_3 = i\omega_2 \leftrightarrow \mathbf{w}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, & \mu_4 = -i\omega_2 \leftrightarrow \mathbf{w}_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego poniendo

$$S_{CC} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{w}_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{pmatrix}, \quad S_{CC}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix},$$

tenemos

$$\mathbf{S}_{CC}^{-1}(\Omega\mathbf{B})\mathbf{S}_{CC} = \begin{pmatrix} i\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega_2 \end{pmatrix} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4).$$

Por otro lado debemos tener

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mu_i\mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

y

$$\mathbf{S}_{eq}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}_{eq} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4), \quad \mathbf{S}_{eq} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{S}_{CC}^{-1}(\Omega\mathbf{B})\mathbf{S}_{CC} = \mathbf{S}_{eq}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}_{eq} \Rightarrow \Omega\mathbf{B} = (\mathbf{S}_{eq}\mathbf{S}_{CC}^{-1})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{S}_{eq}\mathbf{S}_{CC}^{-1}),$$

de donde es inmediato que la transformación de semejanza que reduce \mathbf{A} a $\Omega\mathbf{B}$ viene dada por

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}_{eq}\mathbf{S}_{CC}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2}{2} & \frac{\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2}{2i} & \frac{\mathbf{x}_3+\mathbf{x}_4}{2} & \frac{\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_4}{2i} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix},$$

y su inversa \mathbf{T}^{-1} , es decir

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \Omega\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dinámica SC: Los autovalores μ_i y autovectores \mathbf{w}_i de $\Omega\mathbf{B}$ son

$$\begin{aligned} \mu_1 = \eta &\leftrightarrow \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mu_2 = -\eta &\leftrightarrow \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mu_3 = i\omega &\leftrightarrow \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, & \mu_4 = -i\omega &\leftrightarrow \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego poniendo

$$\mathbf{S}_{SC} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{w}_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{SC}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix},$$

tenemos

$$\mathbf{S}_{SC}^{-1}(\Omega\mathbf{B})\mathbf{S}_{SC} = \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega \end{pmatrix} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4).$$

Por otro lado debemos tener

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mu_i\mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

y

$$S_{eq}^{-1}AS_{eq} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4), \quad S_{eq} := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$S_{SC}^{-1}(\Omega B)S_{SC} = S_{eq}^{-1}AS_{eq} \Rightarrow \Omega B = (S_{eq}S_{SC}^{-1})^{-1}A(S_{eq}S_{SC}^{-1}),$$

de donde es inmediato que la transformación de semejanza que reduce A a ΩB viene dada por

$$T = S_{eq}S_{SC}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{x_1-x_2}{2} & \frac{x_3+x_4}{2} & \frac{x_3-x_4}{2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix},$$

y su inversa T^{-1} , es decir

$$T^{-1}AT = \Omega B = \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Dinámica $\bar{S}C$: Los autovalores μ_i y autovectores \mathbf{w}_i de ΩB son los mismos del caso SC, luego tendremos

$$T^{-1}AT = \Omega B = \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix},$$

con la misma T del caso SC. Lo único que difiere es la matriz $P(T)$.

Dinámica SS: Los autovalores μ_i y autovectores \mathbf{w}_i de ΩB son

$$\begin{aligned} \mu_1 = \eta_1 &\leftrightarrow \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mu_2 = -\eta_1 &\leftrightarrow \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mu_3 = \eta_2 &\leftrightarrow \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \mu_4 = -\eta_2 &\leftrightarrow \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego poniendo

$$S_{SS} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{w}_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_{SS}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

tenemos

$$S_{SS}^{-1}(\Omega B)S_{SS} = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta_2 \end{pmatrix} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4).$$

Por otro lado debemos tener

$$A\mathbf{x}_i = \mu_i\mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

y

$$S_{eq}^{-1}AS_{eq} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4), \quad S_{eq} := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$S_{SS}^{-1}(\Omega B)S_{SS} = S_{eq}^{-1}AS_{eq} \Rightarrow \Omega B = (S_{eq}S_{SS}^{-1})^{-1}A(S_{eq}S_{SS}^{-1}),$$

de donde es inmediato que la transformación de semejanza que reduce A a ΩB viene dada por

$$T = S_{eq}S_{SS}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{x_1-x_2}{2} & \frac{x_3+x_4}{2} & \frac{x_3-x_4}{2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix},$$

y su inversa T^{-1} , es decir

$$T^{-1}AT = \Omega B = \begin{pmatrix} 0 & \eta_1 & 0 & 0 \\ \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 \\ 0 & 0 & \eta_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dinámicas $\bar{S}S$ y $\bar{S}\bar{S}$: Los autovalores μ_i y autovectores w_i de ΩB son los mismos del caso SS , así que tendremos

$$T^{-1}AT = \Omega B = \begin{pmatrix} 0 & \eta_1 & 0 & 0 \\ \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_2 \\ 0 & 0 & \eta_2 & 0 \end{pmatrix},$$

con la misma T del caso SS . En lo único que difieren es en relación a las matrices $P(T)$ en todos los casos.

Bibliografía

- [1] E. Ott, C. Grebogi, & J. A. Yorke, *Controlling chaos*. Phys. Rev. Lett. **64**, 1196-1199 (1990).
- [2] E. Schöll & H. G. Schuster, eds., *Handbook of Chaos Control 2nd. Ed.* WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim (2008).
- [3] M. A. F. Sanjuán & C. Grebogi, *Recent Progress in Controlling Chaos*. World Scientific Publishing Co. (2010).
- [4] R. L. Devaney, *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison Wesley, New York (1989).
- [5] A. M. Leiva, *Órbitas de transferencia entre la Tierra y la Luna*. Tesis de Doctorado en Astronomía (director: C. B. Briozzo), OAC, UNC (2008).
- [6] A. M. Leiva & C. B. Briozzo, *Fast Periodic Transfer Orbits in the Sun-Earth-Moon Quasi-Bicircular Problem*. Celest. Mech. Dynam. Astron. **91**, 357-372 (2005).
- [7] A. M. Leiva & C. B. Briozzo, *Extension of fast periodic transfer orbits from the Earth-Moon RTBP to the Sun-Earth-Moon Quasi-Bicircular Problem*. Celest. Mech. Dynam. Astron. **101**, 225-245 (2008).
- [8] A. M. Leiva & C. B. Briozzo, *The Earth-Moon CR3BP: a full Atlas of low-energy fast periodic transfer orbits*, arXiv.org astro-ph/0612386 (2006).
- [9] A. M. Leiva & C. B. Briozzo, *Condiciones de fase y continuación analítica de órbitas periódicas de transferencia rápida del RTBP Tierra-Luna al Problema Cuasi-Bicircular Sol-Tierra-Luna*, BAAA, 47, 81-84 (2004).
- [10] A. M. Leiva & C. B. Briozzo, *Método general para controlar órbitas periódicas inestables en el Problema Cuasi-Bicircular Sol-Terra-Luna*, BAAA, 48, 53-56 (2005).

BIBLIOGRAFÍA

- [11] A. M. Leiva & C. B. Briozzo, *Control of chaos and fast periodic transfer orbits in the Earth-Moon CR3BP*, Acta Astronáutica **58**, 379-386 (2006).
- [12] J. P. Marcuzzi, A. M. Leiva & C. B. Briozzo, *Maniobras y control de órbitas periódicas de transferencia Tierra-Luna utilizando variedades estables e inestables*, BAAA, 49, 81-84 (2006).
- [13] A. M. Leiva & C. B. Briozzo, *Control de una trayectoria de transferencia con impulsos realistas considerando perturbaciones en el Problema Cuasi-Bicircular Sol-Tierra-Luna*, BAAA, 50, 35-38 (2007).
- [14] M. A. Andreu, *The Quasi-bicircular Problem*. Ph. D. Thesis, Dept. Matemática Aplicada i Anàlisi, Universitat de Barcelona (1998). http://www.maia.ub.es/dsg/1998/9801mangel_e.ps.gz
- [15] V. Szebehely, *Theory of Orbits, The Restricted Problem of Three bodies*, Academic Press, New York (1967).
- [16] G. Gómez, J. Llibre, R. Martínez & C. Simó, *Dynamics and Mission Design Near Libration Points. Vol. I: Fundamentals: The Case of Collinear Libration Points*. World Scientific Monograph Series in Mathematics - Vol.2 (2001).
- [17] A. J. Lichtenberg & M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*. Springer-Verlag, Berlín (1983).
- [18] V. I. Arnold, V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt, *Dynamical Systems III*. Springer-Verlag, Berlín (1993).
- [19] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems 2nd. ed.* Springer-Verlag, Berlín (1996).
- [20] L. D. Landau & E. M. Lifshitz, *Mechanics 3rd. ed. Volume 1 of Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press plc (1976).
- [21] L. Dieci, *Real hamiltonian logarithm of a symplectic matrix*, Linear Algebra and its Applications **281**,227-246 (1998).
- [22] S. V. Gonchenko, D. V. Turaev & L. P. Shilnikov. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **244**, 106-131 (2004).
- [23] Thomas S. Parker & Leon O. Chua, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag New York Inc (1989).
- [24] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling & B. P. Flannery, *Numerical Recipes 2nd Edition*, Cambridge University Pres, New York (1992).

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de evaluación de tesis, damos fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por este Tribunal.