FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Trabajo Final de Licenciatura en Matemática

Deformaciones lineales de álgebras de Lie: una nueva construcción

Marzo 2017

Autor: Ana Josefina Barrionuevo
Director: Paulo Andrés Tirao

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0 Internacional.

1. Introducción

Este trabajo se enmarca en el estudio de deformaciones de álgebras de Lie, reales o complejas. Esto es el estudio de la variación continua del corchete que define un álgebra de Lie dada junto con la pregunta: ¿es posible hallar corchetes no isomorfos con variaciones muy pequeñas?

Inspirados en contribuir a responder afirmativamente la pregunta planteada para la familia de álgebras de Lie nilpotentes, nos interesa la construcción explícita de deformaciones no triviales (respuesta afirmativa) para familias grandes de álgebras de Lie.

Hay un relación más o menos estrecha entre la posibilidad de deformar un álgebra dada y su cohomología adjunta en grado 2. Por ejemplo, si el segundo grupo de cohomología adjunta de un álgebra dada se anula, entonces esa álgebra no tiene deformaciones no triviales. Por otro lado se puede interpretar a los 2-cociclos de la cohomología adjunta como la parte infinitesimal de una deformación dada.

Las álgebras de Lie nilpotentes tienen en general cohomología grande y quizá sea ésta la razón más importante por la cual se espera que no haya álgebras nilpotentes *rígidas*, es decir sin deformaciones no triviales. Esta afirmación se conoce como *Conjetura de Vergne* y es un problema abierto desde 1970.

Al día de hoy se sabe muy poco sobre deformaciones de álgebras de Lie. Algunos resultados interesantes sobre rigidez de álgebras de Lie fueron probados por Carles en [C]. Por otro lado Grunewald y O'Halloran dieron en [GH] un método simple para construir deformaciones lineales de un álgebra dada a partir de una derivación de un ideal de codimensión 1 de la misma. A partir de estos datos construyen un 2-cociclo que es siempre un corchete de Lie. Una virtud de esta contrucción es que permite mostrar, en muchos casos de manera muy simple, que la deformación construida es no trivial. Por ejemplo, si el álgebra original es nilpotente y tiene un ideal de codimensión 1 con una derivación semisimple (esto equivale a tener una derivación no nilpotente o con al menos un autovalor no nulo), la deformación resultante es soluble no nilpotente y por lo tanto no trivial.

Muy recientemente Sonia Vera en su tesis doctoral [VS] propuso un nuevo método para la construcción de deformaciones lineales, a partir de una derivación de un ideal de codimensión 2, que aplicó con éxito a la familia de álgebras nilpotentes filiformes. Este método es similar al de Grunewald-O'Halloran.

Este trabajo se inició motivados por la expectativa de construir deformaciones lineales no triviales de álgebras de Lie metabelianas "split", a partir de ciertas clases de homología contruidas por Pouseele y Tirao en [PT]. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}$, donde $\mathfrak{a}$ es ideal abeliano maximal y $\mathfrak{h}$ es subálgebra abeliana de dimensión m, entonces se define un mapa inyectivo de $\Lambda^p \mathfrak{z} \to H_{p+m}(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{z}$ el centro de $\mathfrak{g}$). Esa contrucción se puede extender al caso de coeficientes adjuntos $H_{p+m}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Para $p + m = n - 2$, donde $\dim \mathfrak{g} = n$, a partir de estas clases y usando los isomorfismos

$$H_{n-2}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \simeq H^{n-2}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)^* \simeq H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$$

construimos las clases de 2-cohomología que nos interesan. Este camino resultó

exitoso y pudimos generalizar esta construcción fuera del marco incial.

El trabajo tiene una primera parte, los Capítulos 2 y 3, en la que listamos los resultados preliminares sobre álgebras de Lie y deformaciones de álgebras de Lie necesarios para su desarrollo. En el Capítulo 4, presentamos dos construcciones de deformaciones lineales de álgebras de Lie. La primera, está relacionada de manera más o menos directa con la situación inspiradora y es un caso particular de la segunda. En el último capítulo mostramos diversos ejemplos de clases de álgebras de Lie nilpotentes para las cuales la segunda construcción produce deformaciones no triviales. Nos resultó más o menos fácil hallar estas familias y tenemos la impresión de que podremos hallar muchas más. No sabemos en este momento qué alcance tiene la construcción principal presentada en este trabajo. En las aplicaciones, para asegurar la no trivialidad de la deformación construida, nos hemos guiado solo buscando ejemplos en los que la serie central descendente se vea alterada por la deformación. Esperamos continuar profundizando el estudio de esta contrucción y sus aplicaciones confiando en que producirá nuevos resultados de interés al problema de no rigidez de álgebras de Lie nilpotentes.

2. Álgebras de Lie

Este capítulo contiene los preliminares sobre álgebras de Lie necesarios para el desarrollo de este trabajo. Las definiciones y resulados básicos se pueden encontrar en cualquier texto sobre álgebras de Lie, como por ejemplo [J].

2.1. Álgebras de Lie

En todo el trabajo asumiremos sin mencionarlo explícitamente, salvo cuando resulte necesario, que los espacios vectoriales y álgebras de Lie consideradas son reales o complejas. Denotaremos por $\mathbb{K}$ indistintamente a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 2.1. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ junto a un producto bilineal $\mu : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, llamado *corchete*, que satisface las siguiente propiedades:

- Antisimetría: $\mu(x, y) = -\mu(y, x)$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$.
- La identidad de Jacobi:

$$\circlearrowleft \mu(\mu(x, y), z) := \mu(\mu(x, y), z) + \mu(\mu(y, z), x) + \mu(\mu(z, x), y) = 0,$$

$\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Nota. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con corchete μ, muchas veces denotaremos por simplicidad $[,] = \mu(,)$. En algunos casos, cuando el corchete esté sobreentendido, por simplicidad nos referiremos sólo a $\mathfrak{g}$. En otros casos, cuando el espacio vectorial subyacente no sea tan importante, nos referiremos sólo a μ.

Definición 2.2.

1. Una *subálgebra* de Lie de $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ tal que,

$$\mu(x, y) \in \mathfrak{h}, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{h}.$$

2. Un *ideal* de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial $I \subseteq \mathfrak{g}$ tal que,

$$\mu(x, y) \in I, \qquad \forall x \in \mathfrak{g}, y \in I.$$

3. Si $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ son álgebras de Lie con corchetes μ_1 y μ_2 respectivamente, entonces diremos que la aplicación $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ es un *homomorfismo de álgebras de Lie*, si φ es lineal y

$$\varphi(\mu_1(x, y)) = \mu_2(\varphi(x), \varphi(y)), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}_1.$$

   Un homomorfismo de un álgebra de Lie en sí misma se denomina *endomorfismo*. Un *isomorfismo* es un homomorfismo biyectivo.

Observación 2.3. Sea $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$, un homomorfismo de álgebras de Lie, su núcleo es un ideal de $\mathfrak{g}_1$ y su imagen es una subálgebra de $\mathfrak{g}_2$.

Un ejemplo muy relevante de álgebra de Lie es el espacio de endomorfismos de un espacio vectorial V, donde el corchete de dos endomorfismos T y S no es la composición, sino el *conmutador*

$$[T, S] = TS - ST.$$

Es fácil verificar que éste, además de ser bilineal y antisimétrico, satisface la identidad de Jacobi. De ahora en más, $\mathfrak{gl}(V)$ referirá a esta álgebra de Lie.

Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con corchete μ, el operador $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, definido por

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)(y) = \mu(x, y), \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g},$$

es un homomorfismo de Lie. Al núcleo de este homomorfismo, lo llamamos el *centro* de $\mathfrak{g}$ y es

$$Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : \mu(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

2.1.1. Álgebras solubles y nilpotentes

Se definen dos sucesiones de ideales de $\mathfrak{g}$ denominadas *serie de derivada* y *serie central descendente* respectivamente,

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \;\; \mathfrak{g}^{(1)} = \mu(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), \;\; \mathfrak{g}^{(2)} = \mu(\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}) \;\; \dots \;\; \mathfrak{g}^{(k)} = \mu(\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}) \;\; \dots$$

$$\mathfrak{g}^{0} = \mathfrak{g}, \;\; \mathfrak{g}^{1} = \mu(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}), \;\; \mathfrak{g}^{2} = \mu(\mathfrak{g}^{1}, \mathfrak{g}) \;\; \dots \;\; \mathfrak{g}^{k} = \mu(\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}) \;\; \dots$$

Definición 2.4.

1. Si $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para algún k, $\mathfrak{g}$ es denomina *álgebra de Lie soluble*. Además, diremos que $\mathfrak{g}$ es k-pasos soluble, si $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ y $\mathfrak{g}^{(k-1)} \neq 0$.

2. Si $\mathfrak{g}^k = 0$ para algún k, $\mathfrak{g}$ se denomina *álgebra de Lie nilpotente*. Además, diremos que $\mathfrak{g}$ es k-pasos nilpotente, si $\mathfrak{g}^k = 0$ y $\mathfrak{g}^{k-1} \neq 0$.

Observación 2.5.

1. Notemos que si $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ es isomorfismo de Lie, entonces
$$\mathfrak{g}_2^{(i)} = \varphi(\mathfrak{g}_1)^{(i)} = \varphi(\mathfrak{g}_1^{(i)}), \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}$$
$$\mathfrak{g}_2^i = \varphi(\mathfrak{g}_1)^i = \varphi(\mathfrak{g}_1^i), \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$
Luego, resulta que las dimensiones de los términos de las series derivada y central descendente son invariantes por isomorfismos de álgebras de Lie. (Esta observación resultará muy útil luego).

2. El k-ésimo término de la serie derivada $\mathfrak{g}^{(k)}$ está contenido en el correspondiente k-ésimo término de la serie central descendente $\mathfrak{g}^k$. Por lo tanto, podemos notar que todas las álgebras nilpotentes son solubles. La recíproca no es válida. Por ejemplo, el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \langle x, y \rangle$, con corchete dado (en esta base) por $[x, y] = y$, es soluble y no es nilpotente.

3. Observemos que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie k-pasos soluble, entonces $\dim(\mathfrak{g}^{(i)}) - \dim(\mathfrak{g}^{(i+1)}) \geq 1$, para $0 \leq i \leq k-1$. Similarmente, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie k-pasos nilpotente, entonces $\dim(\mathfrak{g}^i) - \dim(\mathfrak{g}^{i+1}) \geq 1$, para $0 \leq i \leq k-1$. Más aún, se sabe que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente, entonces $\dim(\mathfrak{g}^0) - \dim(\mathfrak{g}^1) \geq 2$. Luego, tenemos que, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es a lo sumo $\dim(\mathfrak{g}) - 1$-pasos nilpotente. En la sección que sigue presentaremos las álgebras de Lie filiformes. Ésta es una familia de álgebras de Lie nilpotentes que son ejemplo de lo recién mencionado.

Definición 2.6. Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie. Decimos que $x \in \mathfrak{g}$ es $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-nilpotente, si $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es un operador nilpotente.

Proposición 2.7. *Si $\mathfrak{g}$ álgbra de Lie nilpotente y $x \in \mathfrak{g}$, entonces x es $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-nilpotente.*

Demostración. La condición para que $\mathfrak{g}$ sea nilpotente se puede reescribir de la siguiente manera: para algún número natural r y cualquier conjunto de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_r, y \in \mathfrak{g}$, tenemos que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x_1\, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x_2 \cdots \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x_r(y) = 0$. En particular, $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x))^r = 0$. Luego, si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ es en operador nilpotente, $\forall x \in \mathfrak{g}$. $\square$

Nota. La recíproca de la proposición anterior es el Teorema de Engel.

2.1.2. Álgebras de Lie filiformes

Definición 2.8. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, decimos que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie *filiforme* si es $(\dim(\mathfrak{g})-1)$-pasos nilpotente.

Ejemplo (Filiforme estándar). El siguiente es el ejemplo más sencillo de álgebra de Lie filiforme para una dimensión dada. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos el álgebra de Lie μ_0 con espacio vectorial subyacente $\langle x_0, x_1, ..., x_n\rangle$ y corchete dado por

$$\mu_0(x_0, x_i) = x_{i+1}, \text{ para } 1 \leq i \leq n-1.$$

Observemos que su serie central descendente es

$$\mu_0^0 = \langle x_0, ..., x_n\rangle, \quad \mu_0^i = \langle x_{i+1}, ..., x_n\rangle, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-1, \quad \mu_0^n = \{0\}.$$

μ_0 es el álgebra de Lie *filiforme estándar* de dimensión $n+1$.

La siguiente descripción de todas las filiformes complejas de dimensión $n+1$ puede verse en [GJK] y se remonta a [V].

Dada un álgebra filiforme compleja μ, existe una base *adaptada* $\{x_0, \ldots, x_n\}$ en la que μ se escribe como

$$\mu = \mu_0 + \Psi,$$

donde μ_0 es la filiforme estándar y Ψ es un 2-cociclo de μ_0. Más aún

$$\Psi = \sum_{(k,r)\in\Delta} a_{k,r}\psi_{k,r},$$

para ciertos $a_{k,r} \in \mathbb{C}$, donde

$$\Delta = \{(k,r) : 1 \leq k \leq n-1,\ 2k+1 < r \leq n\} \cup \left\{\left(\left[\frac{n-1}{2}\right], n\right)\right\}$$

y el cociclo $\psi_{k,r}$ está definido por

$$\psi_{k,r}(x_i, x_j) = -\psi_{k,r}(x_j, x_i) = (-1)^{k-i}\binom{j-k-1}{k-i}x_{i+j+r-2k-1},$$

si $1 \leq i \leq k < j \leq n$ y $\psi_{k,r}(x_i, x_j) = 0$ en otro caso.

Observación 2.9. Observemos que si $n \in \mathbb{N}$ es par, entonces

$$\left(\left[\frac{n-1}{2}\right], n\right) \in \{(k,r) : 1 \leq k \leq n-1,\ 2k+1 < r \leq n\},$$

y por lo tanto en este caso

$$\Delta = \{(k,r) : 1 \leq k \leq n-1,\ 2k+1 < r \leq n\}.$$

2.2. Derivaciones

Definición 2.10. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con corchete μ. Una aplicación lineal $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es una *derivación*, si para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ se verifica que

$$D\mu(x, y) = \mu(Dx, y) + \mu(x, Dy).$$

Observación 2.11. El conjunto de todas las derivaciones de $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, es una subálgebra del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. En efecto, si $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ y $x, y \in \mathfrak{g}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2]\mu(x, y) &= D_1D_2(\mu(x, y)) - D_2D_1(\mu(x, y)) \\
&= D_1(\mu(D_2x, y) + \mu(x, D_2y)) - D_2(\mu(D_1x, y) + \mu(x, D_1y)) \\
&= \mu(D_1D_2x, y) + \mu(D_2x, D_1y) + \mu(D_1x, D_2y) + \mu(x, D_1D_2y) \\
&\quad -\mu(D_2D_1x, y) - \mu(D_1x, D_2y) - \mu(D_2x, D_1y) - \mu(x, D_2D_1y) \\
&= \mu(D_1D_2x, y) + \mu(x, D_1D_2y) - \mu(D_2D_1x, y) - \mu(x, D_2D_1y) \\
&= \mu([D_1, D_2]x, y) + \mu(x, [D_1, D_2]y).
\end{aligned}$$

Se sigue de la identidad de Jacobi para $\mathfrak{g}$, que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es una derivación para todo $x \in \mathfrak{g}$, usualmente llamada *derivación interior*. El conjunto de derivaciones interiores de $\mathfrak{g}$ es un ideal de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. En efecto, si D es una derivación y $x \in \mathfrak{g}$, entonces $[D, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)]$ es una derivación interior, ya que:

$$\begin{aligned}
[D, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)](y) &= D\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)(y) - \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)(Dy) \\
&= D\mu(x, y) - \mu(x, Dy) \\
&= \mu(Dx, y) + \mu(x, Dy) - \mu(x, Dy) \\
&= \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(Dx)(y).
\end{aligned}$$

2.2.1. Una clase de extensiones

A partir de un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ con corchete μ y una derivación D de $\mathfrak{h}$, es usual considerar la siguiente extensión $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{h}$, de dimensión igual a $\dim \mathfrak{h} + 1$, dada como sigue:
Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{h}$ como espacio vectorial, con $\langle x \rangle = \mathbb{C}$. Consideramos el corchete μ' de $\mathfrak{g}$ dado por:

$$\mu'(x, h) = D(h), \quad \mu'(h_1, h_2) = \mu(h_1, h_2), \quad \text{para todo } h, h_1, h_2 \in \mathfrak{h}.$$

Si $\mathfrak{h}$ es nilpotente, es muy fácil verificar que $\mathfrak{g}$ es soluble. Más aún, $\mathfrak{g}$ es nilpotente si y sólo si D es nilpotente como transformación lineal. Equivalentemente, si D es semisimple o tiene un autovalor no nulo, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble no nilpotente.

Nota. Esta construcción es un caso particular de producto semidirecto.

2.3. Producto semidirecto

Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{h}$ dos álgebras de Lie con corchetes $\mu_{\mathfrak{a}}$ y $\mu_{\mathfrak{h}}$ respectivamente, y un homorfismo de Lie $\rho : \mathfrak{a} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$. Se puede construir una nueva álgebra de Lie, el *producto semidirecto de* $\mathfrak{a}$ *por* $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{h}$, cuyo espacio vectorial subyacente es $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}$ y cuyo corchete de Lie μ, está

dado por

$$\mu(a_1+h_1, a_2+h_2) = \mu_{\mathfrak{a}}(a_1, a_2)+\rho(a_1)(h_2)-\rho(a_2)(h_1)+\mu_{\mathfrak{h}}(h_1, h_2), \quad \text{para } a_1, a_2 \in \mathfrak{a}, h_1, h_2 \in \mathfrak{h}.$$

Por ser ρ homomorfismo de Lie con espacio de llegada $\mathrm{Der}(\mathfrak{h})$, resulta que $\mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{h}$ es álgebra de Lie.

Observación 2.12. Dadas un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ y $D_1, ..., D_m \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$, con $[D_i, D_j] = 0,$ para $1 \leq i, j \leq m$, consideramos el álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{a} = \langle a_1, ..., a_m \rangle$ y el homomorfismo de Lie $\rho : \mathfrak{a} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$, que resulta de completar linealmente la aplicación $\rho(a_i) = D_i,$ para $1 \leq i \leq m$. (Resulta que ρ es homomorfismo de Lie, porque $[D_i, D_j] = 0,$ para $1 \leq i, j \leq m$ y $\mathfrak{a}$ es abeliana. Además, $\rho(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$, pues $D_i \in \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$). Luego, $\mathfrak{a} \ltimes \mathfrak{h}$ es álgebra de Lie.

Nota. Esta última construcción resultará muy útil luego.

2.4. La variedad $\mathcal{L}^n$

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dada $\mu : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ bilineal, sus coeficientes de estructura son los coeficentes c_{ij}^k dados, para una base fija $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ de $\mathbb{K}^n$, y para $0 \leq i, j \leq n-1$, por:

$$\mu(x_i, x_j) = \sum_{k=0}^{n-1} c_{ij}^k x_k.$$

Ahora, μ es corchete de Lie si y solo si, sus coeficientes de estructura satisfacen las siguientes ecuaciones polinomiales, para $0 \leq i, j, k \leq n-1$:

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k \qquad \text{(Antisimetría)}$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} c_{ji}^l c_{lk}^k + c_{jk}^l c_{li}^k + c_{ki}^l c_{jl}^k = 0 \qquad \text{(Identidad de Jacobi)}$$

Llamamos $\mathcal{L}^n$ al conjunto de todos los corchetes μ de $\mathbb{K}^n$. Si identificamos a cada $\mu \in \mathcal{L}^n$ con sus coeficientes de estructura, resulta que el conjunto $\mathcal{L}^n$ es una subvariedad algebraica afín de las funciones bilineales de $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^n$. Así $\mathcal{L}^n$ es la variedad algebraica de las álgebras de Lie de dimensión n. En este trabajo consideramos a $\mathcal{L}^n$ con la topología (relativa) euclídea. Recordamos que $\mathcal{L}^n$ también tiene como toda variedad algebraica, otra topología, la topología de Zariski.

El grupo $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})$ actúa naturalmente en $\mathcal{L}^n$ por cambio de base:

$$(g \bullet \mu)(x, y) = g\, \mu(g^{-1}x, g^{-1}y)$$

Definición 2.13. La órbita de μ es, $\mathcal{O}(\mu) = \{G \bullet \mu \mid G \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{C})\}$.

Observación 2.14. $\mu' \in \mathcal{O}(\mu) \Longleftrightarrow \mu \cong \mu'$.

3. Deformaciones de álgebras de Lie

En un sentido general, una deformación de un corchete de Lie es una modificación continua de sus constantes de estructura, que sige resultando corchete de Lie. Así, se pueden considerar deformaciones de μ dadas como curvas (continuas) μ_t en $\mathcal{L}^n$, con $t \in \mathbb{K}$, que comienzan en $\mu_0 = \mu$. Observemos que mientras t se va moviendo, esta 'curva' puede mantenerse dentro de la órbita de μ o no.

En este trabajo nos interesa construir deformaciones no triviales para familias de álgebras de Lie, esto es que tan cerca de 0 como se quiera, haya una μ_t no isomorfa a μ.

3.1. Álgebras de Lie rígidas y deformaciones lineales

Definición 3.1. Un álgebra de Lie $\mu \in \mathcal{L}^n$ es *rígida* si su órbita $\mathcal{O}(\mu)$ es abierta.

Una deformación μ_t de μ es *trivial* si μ_t es isomorfa a μ para todo t en un entorno de 0, caso contrario se dice que es no trivial. Así, un álgebra de Lie con una deformación μ_t no trivial, no es rígida.

Definición 3.2. Una *deformación lineal* de $\mu \in \mathcal{L}^n$ es una curva continua $\mu_t \in \mathcal{L}^n$ tal que

$$\mu_t = \mu + t\varphi,$$

donde φ es una aplicación bilineal y alternante.

Dados dos mapas bilineales y alternantes μ y φ, denotamos $\mu \circ \varphi$ a la aplicación trilineal definida por:

$$\begin{aligned} \mu \circ \varphi(x, y, z) &= \circlearrowleft \mu(\varphi(x, y), z) \\ &= \mu(\varphi(x, y), z) + \mu(\varphi(y, z), x) + \mu(\varphi(z, x), y) \end{aligned}$$

Es inmediato que $\mu \circ \varphi$ es lineal en μ y en φ.

Observación 3.3. La identidad de Jacobi para μ es $\mu \circ \mu = 0$.

Definición 3.4. Dada μ, si φ es bilineal, alternante y cumple $\mu \circ \varphi + \varphi \circ \mu = 0$ decimos que φ es un 2-cociclo de μ.

Nota. Esta definición de 2-cociclo es la misma que la de 2-cociclo de la cohomología adjunta de μ.

Proposición 3.5. *Si $\mu \in \mathcal{L}^n$, entonces $\mu_t = \mu + t\,\varphi$ es una deformación lineal de μ si y sólo si φ es un corchete de Lie y un 2-cociclo de μ.*

Demostración. μ_t es corchete de Lie si y sólo si $\mu_t \circ \mu_t = 0$ para todo t. Ahora, como $\mu \circ \mu = 0$, pues μ es álgebra de Lie,

$$\mu_t \circ \mu_t = t(\mu \circ \varphi + \varphi \circ \mu) + t^2(\varphi \circ \varphi).$$

Se sigue entonces que si $\mu_t \circ \mu_t = 0$ para todo t, entonces $\mu \circ \varphi + \varphi \circ \mu = 0$ y $\varphi \circ \varphi = 0$. La reciproca es obvia. $\square$

A continuación una observación que luego será útil.

Observación 3.6. Si $\mu \in \mathcal{L}^n$, es el álgebra de Lie abeliana, con $n \geq 2$, entonces μ no es rígida.

Esto es porque si tomamos $a_1, a_2 \in \mathbb{K}^n$ linealmente independientes, podemos completar hasta obtener una base de $\mathbb{K}^n$, $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Luego consideramos el corchete de Lie φ dado por extender bilineamente la aplicación $\varphi(a_1, a_2) = a_1, \varphi(a_2, a_1) = -a_1, \varphi(a_i, a_j) = 0$, para el resto de los elementos de la base de $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$. Resulta que φ es trivialmente 2-cociclo de μ. Por la proposición anterior, $\mu + t\varphi$ es una deformación lineal de μ. Y resulta no trivial porque $\dim((\mu + t\varphi)^1) = 1 > 0 = \dim(\mu^1)$.

3.2. La construcción de Grunewald-O'Halloran

Presentamos a continuación la construcción de deformaciones lineales de Grunewald-O'Halloran [GH], de la cual se sigue que cierta familia de álgebra nilpotentes no son rígidas.

Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con corchete μ y $\mathfrak{h}$ un ideal de codimensión 1 de $\mathfrak{g}$. Sea D una derivación de $\mathfrak{h}$ y sea $x \notin \mathfrak{h}$, de manera que $\mathfrak{g} = \langle x \rangle \oplus \mathfrak{h}$. Entonces la aplicación bilineal y alternante φ_D definida por

$$\begin{aligned} \varphi_D(x, h) &= D(h), \qquad \text{para todo } h \in \mathfrak{h} \\ \varphi_D(h, h') &= 0, \qquad \text{para todo } h, h' \in \mathfrak{h}, \end{aligned}$$

es un corchete de Lie y un 2-cociclo de μ. En efecto, por un lado

$$\begin{aligned} \varphi_D \circ \varphi_D(h_1, h_2, x) &= \varphi_D(\varphi_D(h_1, h_2), x) + \varphi_D(\varphi_D(h_1, x), h_2) + \varphi_D(\varphi_D(x, h_2), h_1) \\ &= \varphi_D(0, x) - \varphi_D(\varphi_D(h_1), h_2) + \varphi_D(\varphi_D(h_2), h_1) \\ &= 0; \end{aligned}$$

es decir, φ_D es álgebra de Lie. Por otro lado,

$$\begin{aligned} (\mu \circ \varphi_D + \varphi_D \circ \mu)(h_1, h_2, x) &= \mu(\varphi_D(h_1, h_2), x) + \mu(\varphi_D(h_2, x), h_1) + \mu(\varphi_D(x, h_1), h_2) \\ &\quad + \varphi_D(\mu(h_1, h_2), x) + \varphi_D(\mu(h_2, x), h_1) + \varphi_D(\mu(x, h_1), h_2) \\ &= \mu(0, x) - \mu(D(h_2), h_1) + \mu(D(h_1), h_2) - \varphi_D(x, \mu(h_1, h_2)) \\ &= \mu(h_1, D(h_2)) + \mu(D(h_1), h_2) - \varphi_D(x, \mu(h_1, h_2)) \\ &= 0 \qquad \text{(pues } D \text{ es derivación)} \end{aligned}$$

para $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$; y como claramente $(\mu \circ \varphi_D + \varphi_D \circ \mu)(h_1, h_2, h_3) = 0$ para $h_1, h_2, h_3 \in \mathfrak{h}$, resulta que φ_D es un 2-cociclo de μ.

Se sigue entonces que

$$\mu_t = \mu + t\varphi_D$$

es una deformación lineal de μ.

Si el álgebra $\mathfrak{g}$ es nilpotente y la derivación D del ideal $\mathfrak{h}$ es semisimple (basta que tenga un autovalor no nulo), la transformación lineal $\mathrm{ad}_{\mu_t}(x)$, no es nilpotente.

Por lo tanto μ_t no es un álgebra de Lie nilpotente (es soluble no nilpotente) y la deformación μ_t es no trivial. Notamos que tener una derivación con un autovalor no nulo es equivalente a tener una derivación semisimple (la parte semisimple). Estos son los argumentos que prueban el siguiente teorema.

Teorema 3.7 (Grunewald-O'Halloran)**.** *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente, $\mathfrak{h}$ un ideal de codimensión 1 de $\mathfrak{g}$ y D una derivación semisimple de $\mathfrak{h}$, entonces $\mathfrak{g}$ tiene una deformación lineal no trivial.*

Nota. Recientemente Sonia Vera en su tesis [VS], presentó una nueva construcción de deformaciones lineales de álgebras de Lie a partir de un ideal de codimensión 2 y una derivación de éste con ciertas restricciones. Usando esta construcción mostró que no hay álgebras filiformes rígidas en dimensiones bajas.

4. Construcción de nuevas deformaciones

Recordemos que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie con corchete μ, entonces $\mu + t\varphi$ es una deformación lineal de μ si y sólo si φ es un corchete de Lie y un 2-cociclo de μ.

En este capítulo presentamos dos construcciones de deformaciones lineales de álgebras de Lie. La primera es bastante restrictiva en sus hipótesis, pero tiene como virtud que podemos asegurar que la deformación obtenida es no trivial. Mientras que la segunda, a pesar de ser mucho menos restrictiva, no asegura la no trivialidad de la deformación obtenida.

En el capítulo siguiente mostramos cómo esta útima construcción produce deformaciones no triviales para diversas familias de álgebras de Lie.

El espacio vectorial $C = \{w : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \mid \mathfrak{g} \text{ es bilineal y alternante}\}$ es isomorfo a $\bigwedge^2(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathfrak{g}$ via la aplicación (inversa de) F dada por

$$F(a_i^* \wedge a_j^* \otimes a_k)(x_1, x_2) = (a_i^*(x_1)a_j^*(x_2) - a_j^*(x_1)a_i^*(x_2))\, a_k, \quad \text{para } x_1, x_2 \in \mathfrak{g},$$

donde $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es una base de $\mathfrak{g}$ y $\{a_1^*, \ldots, a_n^*\}$ es la base dual. Dados a_1, a_2 e $y \in \mathfrak{g}$, denotamos por $a_1^* \wedge a_2^* \otimes y$ al mapa bilineal alternante $F(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Así,

$$(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)(x_1, x_2) = (a_1^*(x_1)a_2^*(x_2) - a_2^*(x_1)a_1^*(x_2))y = \det([a_i^*(x_j)])y, \quad \text{para } x_1, x_2 \in \mathfrak{g}.$$

Lema 4.1. *Sean a_1, a_2 e $y \in \mathfrak{g}$. Si $a_1^*(y) = a_2^*(y) = 0$, entonces $\varphi = a_1^* \wedge a_2^* \otimes y$ satisface la identidad de Jacobi; es decir, es un corchete de Lie.*

Demostración. Evaluamos $\varphi \circ \varphi$. Dados $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{g}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \circlearrowleft \varphi(\varphi(x_1, x_2), x_3) &= (a_1^*(\varphi(x_1, x_2))a_2^*(x_3) - a_2^*(\varphi(x_1, x_2))a_1^*(x_3) + \\ &\quad a_1^*(\varphi(x_2, x_3))a_2^*(x_1) - a_2^*(\varphi(x_2, x_3))a_1^*(x_1) + \\ &\quad a_1^*(\varphi(x_3, x_1))a_2^*(x_2) - a_2^*(\varphi(x_3, x_1))a_1^*(x_2))y \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pues, $a_k^*(\varphi(x_{l_1}, x_{l_2})) = a_k^*(\det(\{a_i^*(x_{l_j}\})\, y) = \det([a_i^*(x_{l_j})])a_k^*(y) = 0$, para $1 \leq k, l_1, l_2 \leq 3$. $\square$

A continuación presentamos la primera construcción mencionada. Como dijimos, sus hipótesis son altamente restrictivas, pero tiene como virtud que produce una deformación claramente no trivial. Además esta primer construcción sirvió de punto inicial para luego construir deformaciones en situaciones menos restrictivas.

Proposición 4.2. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con corchete μ, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra abeliana e $I \subseteq \mathfrak{g}$ un ideal abeliano tales que como espacios lineales $\mathfrak{g} = I \oplus \mathfrak{h}$. Si $Z(\mathfrak{g}) \subset I$ y la codimensión de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ es 2, $y \in \mathfrak{h}$ y $a_1, a_2 \in I$ son tales que $\mathfrak{g} = I \oplus \mathfrak{h} =< a_1, a_2 > \oplus Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$, y además $\forall h \in \mathfrak{h}$, $a_1^*(\mu(a_1, h)) = -a_2^*(\mu(a_2, h))$, entonces $\varphi = a_1^* \wedge a_2^* \otimes y$ es un 2-cociclo de μ.*

Demostración. Por comodidad, en esta prueba denotaremos $\mu(,) = [,]$.

Recordemos que

$$(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)(x_1, x_2) = \det([a_i^*(x_j)])\, y.$$

Luego, sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{g}$; queremos ver que $([,] \circ \varphi + \varphi \circ [,])\,(x_1, x_2, x_3) = 0$. Observemos que, $x_i = a_1^*(x_i)a_1 + a_2^*(x_i)a_2 + z_i + h_i$, con $z_i \in Z(\mathfrak{g}), h_i \in \mathfrak{h}$, para $i = 1, 2, 3$.

Ahora,

$$\begin{aligned}([,] \circ \varphi + \varphi \circ [,])\,(x_1, x_2, x_3) &= [\varphi(x_1, x_2), x_3] + [\varphi(x_2, x_3), x_1] + [\varphi(x_3, x_1), x_2] + \\ &\quad \varphi([x_1, x_2], x_3) + \varphi([x_2, x_3], x_1) + \varphi([x_3, x_1], x_2).\end{aligned}$$

Veamos que $A = [\varphi(x_1, x_2), x_3] + [\varphi(x_2, x_3), x_1] + [\varphi(x_3, x_1), x_2] = 0$.

$$\begin{aligned}A &= [(a_1^*(x_1)a_2^*(x_2) - a_2^*(x_1)a_1^*(x_2))y, a_1^*(x_3)a_1 + a_2^*(x_3)a_2 + z_3 + h_3] + \\ &\quad [(a_1^*(x_2)a_2^*(x_3) - a_2^*(x_2)a_1^*(x_3))y, a_1^*(x_1)a_1 + a_2^*(x_1)a_2 + z_1 + h_1] + \\ &\quad [(a_1^*(x_3)a_2^*(x_1) - a_2^*(x_3)a_1^*(x_1))y, a_1^*(x_2)a_1 + a_2^*(x_2)a_2 + z_2 + h_2] \\ &= (a_1^*(x_1)a_2^*(x_2) - a_2^*(x_1)a_1^*(x_2))(a_1^*(x_3))[y, a_1] + \\ &\quad (a_1^*(x_1)a_2^*(x_2) - a_2^*(x_1)a_1^*(x_2))(a_2^*(x_3))[y, a_2] + \\ &\quad (a_1^*(x_2)a_2^*(x_3) - a_2^*(x_2)a_1^*(x_3))(a_1^*(x_1))[y, a_1] + \\ &\quad (a_1^*(x_2)a_2^*(x_3) - a_2^*(x_2)a_1^*(x_3))(a_2^*(x_1))[y, a_2] + \\ &\quad (a_1^*(x_3)a_2^*(x_1) - a_2^*(x_3)a_1^*(x_1))(a_1^*(x_2))[y, a_1] + \\ &\quad (a_1^*(x_3)a_2^*(x_1) - a_2^*(x_3)a_1^*(x_1))(a_2^*(x_2))[y, a_2] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Observemos que aquí usamos que $z_i \in Z(\mathfrak{g})$ y que $\mathfrak{h}$ es abeliana.

Resta ver que $B = \varphi([x_1, x_2], x_3) + \varphi([x_2, x_3], x_1) + \varphi([x_3, x_1], x_2) = 0$. Para ello, notemos que $[x_i, x_j] = a_1^*(x_i)[a_1, h_j] + a_2^*(x_i)[a_2, h_j] + a_1^*(x_j)[h_i, a_1] + a_2^*(x_j)[h_i, a_2]$. Luego como φ es bilineal, resulta que

$$
\begin{aligned}
B &= a_1^*(x_1)\varphi([a_1,h_2],x_3) + a_2^*(x_1)\varphi([a_2,h_2],x_3) + \\
&\quad a_1^*(x_2)\varphi([h_1,a_1],x_3) + a_2^*(x_2)\varphi([h_1,a_2],x_3) + \\
&\quad a_1^*(x_2)\varphi([a_1,h_3],x_1) + a_2^*(x_2)\varphi([a_2,h_3],x_1) + \\
&\quad a_1^*(x_3)\varphi([h_2,a_1],x_1) + a_2^*(x_3)\varphi([h_2,a_2],x_1) + \\
&\quad a_1^*(x_3)\varphi([a_1,h_1],x_2) + a_2^*(x_3)\varphi([a_2,h_1],x_2) + \\
&\quad a_1^*(x_1)\varphi([h_3,a_1],x_2) + a_2^*(x_1)\varphi([h_3,a_2],x_2) \\
&= a_1^*(x_1)(a_1^*([a_1,h_2])a_2^*(x_3) - a_2^*([a_1,h_2])a_1^*(x_3))y + \\
&\quad a_2^*(x_1)(a_1^*([a_2,h_2])a_2^*(x_3) - a_2^*([a_2,h_2])a_1^*(x_3))y + \\
&\quad a_1^*(x_2)(a_1^*([h_1,a_1])a_2^*(x_3) - a_2^*([h_1,a_1])a_1^*(x_3))y + \\
&\quad a_2^*(x_2)(a_1^*([h_1,a_2])a_2^*(x_3) - a_2^*([h_1,a_2])a_1^*(x_3))y + \\
&\quad a_1^*(x_2)(a_1^*([a_1,h_3])a_2^*(x_1) - a_2^*([a_1,h_3])a_1^*(x_1))y + \\
&\quad a_2^*(x_2)(a_1^*([a_2,h_3])a_2^*(x_1) - a_2^*([a_2,h_3])a_1^*(x_1))y + \\
&\quad a_1^*(x_3)(a_1^*([h_2,a_1])a_2^*(x_1) - a_2^*([h_2,a_1])a_1^*(x_1))y + \\
&\quad a_2^*(x_3)(a_1^*([h_2,a_2])a_2^*(x_1) - a_2^*([h_2,a_2])a_1^*(x_1))y + \\
&\quad a_1^*(x_3)(a_1^*([a_1,h_1])a_2^*(x_2) - a_2^*([a_1,h_1])a_1^*(x_2))y + \\
&\quad a_2^*(x_3)(a_1^*([a_2,h_1])a_2^*(x_2) - a_2^*([a_2,h_1])a_1^*(x_2))y + \\
&\quad a_1^*(x_1)(a_1^*([h_3,a_1])a_2^*(x_2) - a_2^*([h_3,a_1])a_1^*(x_2))y + \\
&\quad a_2^*(x_1)(a_1^*([h_3,a_2])a_2^*(x_2) - a_2^*([h_3,a_2])a_1^*(x_2))y \\
&= a_1^*(x_1)a_1^*([a_1,h_2])a_2^*(x_3)y \\
&\quad -a_2^*(x_1)a_2^*([a_2,h_2])a_1^*(x_3)y \\
&\quad -a_1^*(x_2)a_1^*([a_1,h_1])a_2^*(x_3)y + \\
&\quad a_2^*(x_2)a_2^*([a_2,h_1])a_1^*(x_3))y + \\
&\quad a_1^*(x_2)a_1^*([a_1,h_3])a_2^*(x_1)y \\
&\quad -a_2^*(x_2)a_2^*([a_2,h_3])a_1^*(x_1)y \\
&\quad -a_1^*(x_3)a_1^*([a_1,h_2])a_2^*(x_1)y + \\
&\quad a_2^*(x_3)a_2^*([a_2,h_2])a_1^*(x_1)y + \\
&\quad a_1^*(x_3)a_1^*([a_1,h_1])a_2^*(x_2)y \\
&\quad -a_2^*(x_3)a_2^*([a_2,h_1])a_1^*(x_2)y \\
&\quad -a_1^*(x_1)a_1^*([a_1,h_3])a_2^*(x_2)y + \\
&\quad a_2^*(x_1)a_2^*([a_2,h_3])a_1^*(x_2)y.
\end{aligned}
$$

Como a_1^* y a_2^* son lineales y $[,]$ es bilineal, resulta que

$$\begin{aligned}
B &= (\, a_1^*([a_1, (a_1^*(x_3)a_2^*(x_2) - a_1^*(x_2)a_2^*(x_3))h_1 \\
&\quad +(a_1^*(x_1)a_2^*(x_3) - a_1^*(x_3)a_2^*(x_1))h_2 \\
&\quad +(a_1^*(x_2)a_2^*(x_1) - a_1^*(x_1)a_2^*(x_2))h_3]) \\
&\quad + a_2^*([a_2, (a_1^*(x_3)a_2^*(x_2) - a_1^*(x_2)a_2^*(x_3))h_1 \\
&\quad +(a_1^*(x_1)a_2^*(x_3) - a_1^*(x_3)a_2^*(x_1))h_2 \\
&\quad +(a_1^*(x_2)a_2^*(x_1) - a_1^*(x_1)a_2^*(x_2))h_3])\, y \\
&= (\, a_1^*([a_1, \underbrace{c_1h_1 + c_2h_2 + c_3h_3}_{\in \mathfrak{h}}]) \;+\; a_2^*([a_2, \underbrace{c_1h_1 + c_2h_2 + c_3h_3}_{\in \mathfrak{h}}])\,)\, y \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Aquí usamos que $a_1^*([a_1, h]) = -a_2^*([a_2, h])$, para todo $h \in \mathfrak{h}$. □

Como consecuencia inmediata del Lema 4.1 y la Proposición 4.2, tenemos que $\mu + t(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)$ es una deformación lineal de μ. El siguiente corolario afirma que dicha deformación lineal es no trivial.

Corolario 4.3. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con corchete μ, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra abeliana e $I \subseteq \mathfrak{g}$ un ideal abeliano tales que como espacios lineales $\mathfrak{g} = I \oplus \mathfrak{h}$. Si $Z(\mathfrak{g}) \subset I$ de codimensión 2, $y \in \mathfrak{h}$ y $a_1, a_2 \in I$ son tales que $\mathfrak{g} = I \oplus \mathfrak{h} =< a_1, a_2 > \oplus Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{h}$, y además $\forall h \in \mathfrak{h}$, $a_1^*(\mu(a_1, h)) = -a_2^*(\mu(a_2, h))$, entonces $\mu + t(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)$ es una deformación lineal no trivial de μ.*

Demostración. Por ser I ideal y $\mathfrak{h}$ subálgebra abeliana, tenemos que $\mathfrak{g}^1 \subset I$.

Sea $\mathfrak{g}_t$ el álgebra de Lie con espacio vectorial subyacente $\mathfrak{g}$ y corchete μ_t, dado por
$\mu_t = \mu + t(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)$. Tenemos que si $t > 0$, $\mathfrak{g}_t^1 = \langle \{\mathfrak{g}^1\} \cup \{y\} \rangle$, con $y \in \mathfrak{h}$. Luego, para $t > 0$

$$\dim(\mathfrak{g}_t^1) = \dim(\mathfrak{g}^1) + 1,$$

y por lo tanto la deformación obtenida es no trivial. □

Intentamos debilitar las hipótesis de la Proposicón 4.2 en busca de un resultado más general. La que sigue es la segunda construcción mencionada y es uno de los resultados centrales de este trabajo, que da lugar a las aplicaciones que nos interesan.

Teorema 4.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con corchete μ, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra de codimensión 2, $y \in Z(\mathfrak{h})$ y $a_1, a_2 \in \mathfrak{g}$ tales que (como espacios lineales), $\mathfrak{g} =< a_1, a_2 > \oplus \mathfrak{h}$. Si además $\forall h \in \mathfrak{h}$, $a_1^*(\mu(a_1, h)) = -a_2^*(\mu(a_2, h))$, entonces $\varphi = a_1^* \wedge a_2^* \otimes y$ es un 2-cociclo de μ.*

Demostración. Por comodidad, en esta prueba denotaremos $\mu(,) = [,]$.

Recordemos que

$$(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)(x_1, x_2) = \det([a_i^*(x_j)])\, y$$

Luego, sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathfrak{g}$; queremos ver que $([,] \circ \varphi + \varphi \circ [,])\,(x_1, x_2, x_3) = 0$. Observemos que, $x_i = a_1^*(x_i)a_1 + a_2^*(x_i)a_2 + h_i$, con $h_i \in \mathfrak{h}$, para $i = 1, 2, 3$.

Ahora,

$$\begin{aligned}([,] \circ \varphi + \varphi \circ [,])\,(x_1, x_2, x_3) &= [\varphi(x_1, x_2), x_3] + [\varphi(x_2, x_3), x_1] + [\varphi(x_3, x_1), x_2] + \\ &\quad \varphi([x_1, x_2], x_3) + \varphi([x_2, x_3], x_1) + \varphi([x_3, x_1], x_2).\end{aligned}$$

Veamos que $A = [\varphi(x_1, x_2), x_3] + [\varphi(x_2, x_3), x_1] + [\varphi(x_3, x_1), x_2] = 0$.

$$\begin{aligned}A &= [(a_1^*(x_1)a_2^*(x_2) - a_2^*(x_1)a_1^*(x_2))y, a_1^*(x_3)a_1 + a_2^*(x_3)a_2 + h_3] + \\ &\quad [(a_1^*(x_2)a_2^*(x_3) - a_2^*(x_2)a_1^*(x_3))y, a_1^*(x_1)a_1 + a_2^*(x_1)a_2 + h_1] + \\ &\quad [(a_1^*(x_3)a_2^*(x_1) - a_2^*(x_3)a_1^*(x_1))y, a_1^*(x_2)a_1 + a_2^*(x_2)a_2 + h_2] \\ &= (a_1^*(x_1)a_2^*(x_2) - a_2^*(x_1)a_1^*(x_2))(a_1^*(x_3))[y, a_1] + \\ &\quad (a_1^*(x_1)a_2^*(x_2) - a_2^*(x_1)a_1^*(x_2))(a_2^*(x_3))[y, a_2] + \\ &\quad (a_1^*(x_2)a_2^*(x_3) - a_2^*(x_2)a_1^*(x_3))(a_1^*(x_1))[y, a_1] + \\ &\quad (a_1^*(x_2)a_2^*(x_3) - a_2^*(x_2)a_1^*(x_3))(a_2^*(x_1))[y, a_2] + \\ &\quad (a_1^*(x_3)a_2^*(x_1) - a_2^*(x_3)a_1^*(x_1))(a_1^*(x_2))[y, a_1] + \\ &\quad (a_1^*(x_3)a_2^*(x_1) - a_2^*(x_3)a_1^*(x_1))(a_2^*(x_2))[y, a_2] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Observemos que aquí usamos que $y \in Z(\mathfrak{h})$.

Resta ver que $B = \varphi([x_1, x_2], x_3) + \varphi([x_2, x_3], x_1) + \varphi([x_3, x_1], x_2) = 0$. Para ello, observemos que $[x_i, x_j] = a_1^*(x_i)a_2^*(x_j)[a_1, a_2] + a_1^*(x_i)[a_1, h_j] + a_2^*(x_i)a_1^*(x_j)[a_2, a_1] + a_2^*(x_i)[a_2, h_j] + a_1^*(x_j)[h_i, a_1] + a_2^*(x_j)[h_i, a_2] + [h_i, h_j]$. Luego como φ es bilineal, resulta que

$$\begin{aligned}B &= a_1^*(x_1)a_2^*(x_2)\varphi([a_1, a_2], x_3) + a_1^*(x_1)\varphi([a_1, h_2], x_3) + \\ &\quad a_2^*(x_1)a_1^*(x_2)\varphi([a_2, a_1], x_3) + a_2^*(x_1)\varphi([a_2, h_2], x_3) + \\ &\quad a_1^*(x_2)\varphi([h_1, a_1], x_3) + a_2^*(x_2)\varphi([h_1, a_2], x_3) + \varphi([h_1, h_2], x_3) + \\ &\quad a_1^*(x_2)a_2^*(x_3)\varphi([a_1, a_2], x_1) + a_1^*(x_2)\varphi([a_1, h_3], x_1) + \\ &\quad a_2^*(x_2)a_1^*(x_3)\varphi([a_2, a_1], x_1) + a_2^*(x_2)\varphi([a_2, h_3], x_1) + \\ &\quad a_1^*(x_3)\varphi([h_2, a_1], x_1) + a_2^*(x_3)\varphi([h_2, a_2], x_1) + \varphi([h_2, h_3], x_1) + \\ &\quad a_1^*(x_3)a_2^*(x_1)\varphi([a_1, a_2], x_2) + a_1^*(x_3)\varphi([a_1, h_1], x_2) + \\ &\quad a_2^*(x_3)a_1^*(x_1)\varphi([a_2, a_1], x_2) + a_2^*(x_3)\varphi([a_2, h_1], x_2) + \\ &\quad a_1^*(x_1)\varphi([h_3, a_1], x_2) + a_2^*(x_1)\varphi([h_3, a_2], x_2) + \varphi([h_3, h_1], x_2).\end{aligned}$$

Como $\mathfrak{h}$ es subálgebra, $\varphi([h_i, h_j], x_k) = 0$, para $i, j, k = 1, 2, 3$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} B &= a_1^*(x_1)a_2^*(x_2)\varphi([a_1, a_2], x_3) + a_1^*(x_1)\varphi([a_1, h_2], x_3) + \\ & a_2^*(x_1)a_1^*(x_2)\varphi([a_2, a_1], x_3) + a_2^*(x_1)\varphi([a_2, h_2], x_3) + \\ & a_1^*(x_2)\varphi([h_1, a_1], x_3) + a_2^*(x_2)\varphi([h_1, a_2], x_3) + \\ & a_1^*(x_2)a_2^*(x_3)\varphi([a_1, a_2], x_1) + a_1^*(x_2)\varphi([a_1, h_3], x_1) + \\ & a_2^*(x_2)a_1^*(x_3)\varphi([a_2, a_1], x_1) + a_2^*(x_2)\varphi([a_2, h_3], x_1) + \\ & a_1^*(x_3)\varphi([h_2, a_1], x_1) + a_2^*(x_3)\varphi([h_2, a_2], x_1) + \\ & a_1^*(x_3)a_2^*(x_1)\varphi([a_1, a_2], x_2) + a_1^*(x_3)\varphi([a_1, h_1], x_2) + \\ & a_2^*(x_3)a_1^*(x_1)\varphi([a_2, a_1], x_2) + a_2^*(x_3)\varphi([a_2, h_1], x_2) + \\ & a_1^*(x_1)\varphi([h_3, a_1], x_2) + a_2^*(x_1)\varphi([h_3, a_2], x_2). \end{aligned}$$

Ahora, agrupando tenemos

$$\begin{aligned} B &= a_1^*(x_1)a_2^*(x_2)\varphi([a_1, a_2], x_3) + a_2^*(x_1)a_1^*(x_2)\varphi([a_2, a_1], x_3) + \\ & a_1^*(x_2)a_2^*(x_3)\varphi([a_1, a_2], x_1) + a_2^*(x_2)a_1^*(x_3)\varphi([a_2, a_1], x_1) + \\ & a_1^*(x_3)a_2^*(x_1)\varphi([a_1, a_2], x_2) + a_2^*(x_3)a_1^*(x_1)\varphi([a_2, a_1], x_2) + \\ & a_1^*(x_1)\varphi([a_1, h_2], x_3) + a_2^*(x_1)\varphi([a_2, h_2], x_3) + \\ & a_1^*(x_2)\varphi([h_1, a_1], x_3) + a_2^*(x_2)\varphi([h_1, a_2], x_3) + \\ & a_1^*(x_2)\varphi([a_1, h_3], x_1) + a_2^*(x_2)\varphi([a_2, h_3], x_1) + \\ & a_1^*(x_3)\varphi([h_2, a_1], x_1) + a_2^*(x_3)\varphi([h_2, a_2], x_1) + \\ & a_1^*(x_3)\varphi([a_1, h_1], x_2) + a_2^*(x_3)\varphi([a_2, h_1], x_2) + \\ & a_1^*(x_1)\varphi([h_3, a_1], x_2) + a_2^*(x_1)\varphi([h_3, a_2], x_2). \end{aligned}$$

Luego, $B = \alpha + \beta$, con

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1^*(x_1)a_2^*(x_2)\varphi([a_1, a_2], x_3) + a_2^*(x_1)a_1^*(x_2)\varphi([a_2, a_1], x_3) + \\ & a_1^*(x_2)a_2^*(x_3)\varphi([a_1, a_2], x_1) + a_2^*(x_2)a_1^*(x_3)\varphi([a_2, a_1], x_1) + \\ & a_1^*(x_3)a_2^*(x_1)\varphi([a_1, a_2], x_2) + a_2^*(x_3)a_1^*(x_1)\varphi([a_2, a_1], x_2). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \beta &= a_1^*(x_1)\varphi([a_1, h_2], x_3) + a_2^*(x_1)\varphi([a_2, h_2], x_3) + \\ & a_1^*(x_2)\varphi([h_1, a_1], x_3) + a_2^*(x_2)\varphi([h_1, a_2], x_3) + \\ & a_1^*(x_2)\varphi([a_1, h_3], x_1) + a_2^*(x_2)\varphi([a_2, h_3], x_1) + \\ & a_1^*(x_3)\varphi([h_2, a_1], x_1) + a_2^*(x_3)\varphi([h_2, a_2], x_1) + \\ & a_1^*(x_3)\varphi([a_1, h_1], x_2) + a_2^*(x_3)\varphi([a_2, h_1], x_2) + \\ & a_1^*(x_1)\varphi([h_3, a_1], x_2) + a_2^*(x_1)\varphi([h_3, a_2], x_2). \end{aligned}$$

Veamos que $\alpha = 0$

$$\begin{aligned}
\alpha &= a_1^*(x_1)a_2^*(x_2)(a_1^*([a_1,a_2])a_2^*(x_3) - a_2^*([a_1,a_2])a_1^*(x_3))y + \\
&\quad a_2^*(x_1)a_1^*(x_2)(a_1^*([a_2,a_1])a_2^*(x_3) - a_2^*([a_2,a_1])a_1^*(x_3))y + \\
&\quad a_1^*(x_2)a_2^*(x_3)(a_1^*([a_1,a_2])a_2^*(x_1) - a_2^*([a_1,a_2])a_1^*(x_1))y + \\
&\quad a_2^*(x_2)a_1^*(x_3)(a_1^*([a_2,a_1])a_2^*(x_1) - a_2^*([a_2,a_1])a_1^*(x_1))y + \\
&\quad a_1^*(x_3)a_2^*(x_1)(a_1^*([a_1,a_2])a_2^*(x_2) - a_2^*([a_1,a_2])a_1^*(x_2))y + \\
&\quad a_2^*(x_3)a_1^*(x_1)(a_1^*([a_2,a_1])a_2^*(x_2) - a_2^*([a_2,a_1])a_1^*(x_2))y \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora, veamos que $\beta = 0$

$$\begin{aligned}
\beta &= a_1^*(x_1)(a_1^*([a_1,h_2])a_2^*(x_3) - a_2^*([a_1,h_2])a_1^*(x_3))y + \\
&\quad a_2^*(x_1)(a_1^*([a_2,h_2])a_2^*(x_3) - a_2^*([a_2,h_2])a_1^*(x_3))y + \\
&\quad a_1^*(x_2)(a_1^*([h_1,a_1])a_2^*(x_3) - a_2^*([h_1,a_1])a_1^*(x_3))y + \\
&\quad a_2^*(x_2)(a_1^*([h_1,a_2])a_2^*(x_3) - a_2^*([h_1,a_2])a_1^*(x_3))y + \\
&\quad a_1^*(x_2)(a_1^*([a_1,h_3])a_2^*(x_1) - a_2^*([a_1,h_3])a_1^*(x_1))y + \\
&\quad a_2^*(x_2)(a_1^*([a_2,h_3])a_2^*(x_1) - a_2^*([a_2,h_3])a_1^*(x_1))y + \\
&\quad a_1^*(x_3)(a_1^*([h_2,a_1])a_2^*(x_1) - a_2^*([h_2,a_1])a_1^*(x_1))y + \\
&\quad a_2^*(x_3)(a_1^*([h_2,a_2])a_2^*(x_1) - a_2^*([h_2,a_2])a_1^*(x_1))y + \\
&\quad a_1^*(x_3)(a_1^*([a_1,h_1])a_2^*(x_2) - a_2^*([a_1,h_1])a_1^*(x_2))y + \\
&\quad a_2^*(x_3)(a_1^*([a_2,h_1])a_2^*(x_2) - a_2^*([a_2,h_1])a_1^*(x_2))y + \\
&\quad a_1^*(x_1)(a_1^*([h_3,a_1])a_2^*(x_2) - a_2^*([h_3,a_1])a_1^*(x_2))y + \\
&\quad a_2^*(x_1)(a_1^*([h_3,a_2])a_2^*(x_2) - a_2^*([h_3,a_2])a_1^*(x_2))y + \\
&= a_1^*(x_1)a_1^*([a_1,h_2])a_2^*(x_3)y \\
&\quad -a_2^*(x_1)a_2^*([a_2,h_2])a_1^*(x_3)y \\
&\quad -a_1^*(x_2)a_1^*([a_1,h_1])a_2^*(x_3)y + \\
&\quad a_2^*(x_2)a_2^*([a_2,h_1])a_1^*(x_3))y + \\
&\quad a_1^*(x_2)a_1^*([a_1,h_3])a_2^*(x_1)y \\
&\quad -a_2^*(x_2)a_2^*([a_2,h_3])a_1^*(x_1)y \\
&\quad -a_1^*(x_3)a_1^*([a_1,h_2])a_2^*(x_1)y + \\
&\quad a_2^*(x_3)a_2^*([a_2,h_2])a_1^*(x_1)y + \\
&\quad a_1^*(x_3)a_1^*([a_1,h_1])a_2^*(x_2)y \\
&\quad -a_2^*(x_3)a_2^*([a_2,h_1])a_1^*(x_2)y \\
&\quad -a_1^*(x_1)a_1^*([a_1,h_3])a_2^*(x_2)y + \\
&\quad a_2^*(x_1)a_2^*([a_2,h_3])a_1^*(x_2)y.
\end{aligned}$$

Como a_1^* y a_2^* son lineales y $[,]$ es bilineal, resulta que

$$\begin{aligned}
\beta &= (\, a_1^*([a_1, (a_1^*(x_3)a_2^*(x_2) - a_1^*(x_2)a_2^*(x_3))h_1 \\
&\quad +(a_1^*(x_1)a_2^*(x_3) - a_1^*(x_3)a_2^*(x_1))h_2 \\
&\quad +(a_1^*(x_2)a_2^*(x_1) - a_1^*(x_1)a_2^*(x_2))h_3]) \\
&\quad + a_2^*([a_2, (a_1^*(x_3)a_2^*(x_2) - a_1^*(x_2)a_2^*(x_3))h_1 \\
&\quad +(a_1^*(x_1)a_2^*(x_3) - a_1^*(x_3)a_2^*(x_1))h_2 \\
&\quad +(a_1^*(x_2)a_2^*(x_1) - a_1^*(x_1)a_2^*(x_2))h_3])\, y \\
&= (\, a_1^*([a_1, \underbrace{c_1h_1 + c_2h_2 + c_3h_3}_{\in \mathfrak{h}}]) \;+\; a_2^*([a_2, \underbrace{c_1h_1 + c_2h_2 + c_3h_3}_{\in \mathfrak{h}}])\,)\, y \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Aquí usamos que $a_1^*([a_1, h]) = -a_2^*([a_2, h])$, para todo $h \in \mathfrak{h}$. □

Como consecuencia inmediata del Lema 4.1 y el Teorema 4.4, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.5. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con corchete μ, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra de codimensión 2, $y \in Z(\mathfrak{h})$ y $a_1, a_2 \in \mathfrak{g}$ tales que (como espacios lineales), $\mathfrak{g} =< a_1, a_2 > \oplus \mathfrak{h}$. Si además $\forall h \in \mathfrak{h}$, $a_1^*(\mu(a_1, h)) = -a_2^*(\mu(a_2, h))$, entonces $\mu + t(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)$ es una deformación lineal de μ.*

Para el caso $\mathfrak{g}$ nilpotente, el corolario anterior queda enunciado de la siguiente manera.

Corolario 4.6. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente con corchete μ, $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra de codimensión 2, $y \in Z(\mathfrak{h})$ y $a_1, a_2 \in \mathfrak{g}$ tales que (como espacios lineales), $\mathfrak{g} =< a_1, a_2 > \oplus \mathfrak{h}$. Entonces $\mu + t(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)$ es una deformación lineal de μ.*

Demostración. Basta ver que si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces $a_1^*(\mu(a_1, h)) = -a_2^*(\mu(a_2, h))$, para todo $h \in \mathfrak{h}$.

Como $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces $\mathfrak{h}$ es nilpotente. Luego, ambas son álgebras de Lie unimodulares; es decir, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)) = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$ y $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(h)) = 0$, para todo $h \in \mathfrak{h}$.

Ahora, sea $h \in \mathfrak{h}$, sabemos que

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(h)) = a_1^*(\mu(a_1, h)) + a_2^*(\mu(a_2, h)) + \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(h)),$$

entonces

$$a_1^*(\mu(a_1, h)) = -a_2^*(\mu(a_2, h)).$$

□

Observación 4.7. Sea $\mathfrak{g}$ como alguna de las hipótesis anteriores. Observemos que si escribimos el corchete $\mu_t = \mu + t(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)$ en la base $\{a_1, a_2, h_1, ..., h_m\}$, con $\{h_1, ..., h_m\}$ alguna base de $\mathfrak{h}$, entonces el único corchete que se ve modificado respecto de μ es

$$\mu(a_1, a_2)_t = \mu(a_1, a_2) + t\, y.$$

Ejemplos. A continuación daremos ejemplos en los que el Corolario 4.6 proporciona una deformación no trivial:

1. Consideramos el álgebra de Lie de dimension 6, $\mathfrak{g} = \langle a, b, c, d, e, f\rangle$, con corchete definido por

   $$[a, b] = c, [a, c] = e, [a, e] = f, [b, d] = e, [c, d] = f.$$

   Observemos que su serie central descendente es

   $$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^1 = \langle c, e, f\rangle, \quad \mathfrak{g}^2 = \langle e, f\rangle, \quad \mathfrak{g}^3 = \langle f\rangle, \quad \mathfrak{g}^4 = \{0\}.$$

   Luego, $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente. Para dar la deformación no trivial, usaremos el Corolario 4.6. Tomamos $a_1 = a$, $a_2 = d$, $y = b$. Resulta que $\mathfrak{h} = \langle b, c, e, f\rangle$ es subálgebra de $\mathfrak{g}$ y $b \in Z(\mathfrak{h})$. Luego, por el Corolario 4.6 $[,]_t = [,] + t(a^* \wedge d^* \otimes b)$ es deformación de $[,]$.

   Llamamos $\mathfrak{g}_t$ al álgebra de Lie con espacio vectorial subyacente $\langle a, b, c, d, e, f\rangle$ y corchete $[,]_t$. Observemos que el corchete $[,]_t$ en esta base, está dado por

   $$[a, b]_t = c, [a, c]_t = e, [a, d]_t = tb, [a, e]_t = f, [b, d]_t = e, [c, d]_t = f.$$

   La deformación resulta no trivial pues, para $t > 0$, la serie central descendente de g_t es

   $$\mathfrak{g}_t^0 = \mathfrak{g}_t, \quad \mathfrak{g}_t^1 = \langle b, c, e, f\rangle, \quad \mathfrak{g}_t^2 = \langle c, e, f\rangle, \quad \mathfrak{g}_t^3 = \langle e, f\rangle, \quad \mathfrak{g}_t^4 = f, \quad \mathfrak{g}_t^5 = \{0\}.$$

   (Las dimensiones de los términos de la serie central descendente son invariantes por isomorfismos de Lie).

2. Recordemos que el álgebra de Lie filiforme estándar de dimension $n + 1$, μ_0, está dada por el espacio vectorial $\langle x_0, x_1, ..., x_n\rangle$ y corchete

   $$[x_0, x_i] = x_{i+1}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n - 1.$$

   Su serie central descendente es

   $$\mu_0^0 = \langle x_0, ..., x_n\rangle, \quad \mu_0^i = \langle x_{i+1}, ..., x_n\rangle, \text{ para } 1 \leq i \leq n - 1, \quad \mu_0^n = \{0\}.$$

   Luego, μ_0 es un álgebra de Lie nilpotente. Para dar la deformación no trivial, usaremos el Corolario 4.6. Tomamos $a_1 = x_0$, $a_2 = x_n$, $y = x_1$. Resulta que $\mathfrak{h} = \langle x_1, ..., x_{n-1}\rangle$ es subaĺgebra de μ_0 y $x_1 \in Z(\mathfrak{h})$. Luego, por el Corolario 4.6 $\mu_{0_t} = \mu_0 + t(x_0^* \wedge x_n^* \otimes x_1)$ es deformación lineal de μ_0.

Llamamos μ_{0_t} al álgebra de Lie con espacio vectorial subyacente $\langle x_0, x_1, ...x_n\rangle$ y corchete μ_{0_t}. Observemos que el corchete μ_{0_t} en esta base, está dado por

$$\mu_{0_t}(x_0, x_i) = x_{i+1}, \quad \text{para } 1 \leq i \leq n-1, \quad \mu_{0_t}(x_0, x_n) = tx_1.$$

La deformación resulta no trivial, pues para $t > 0$, la serie central descendente de μ_{0_t} es

$$\mu_{0_t}^0 = \langle x_0, ..., x_n\rangle, \quad \mu_{0_t}^i = \langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

(Las dimensiones de los términos de la serie central descendente son invariantes por isomorfismos de Lie, además μ_{0_t} no es nilpotente).

5. Aplicaciones

En este capítulo mostramos diversos ejemplos de clases de álgebras de Lie nilpotentes para las cuales la construcción principal presentada en el capítulo anterior produce deformaciones no triviales, y luego muestra que esas álgebras no son rígidas.

Cabe aclarar que dada $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie nilpotente, no está sistematizado el método para detectar qué elementos a_1, a_2 e $y \in \mathfrak{g}$ cumplen las hipótesis del Corolario 4.6 y además producen una deformacion no trivial.

En cada caso, dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con corchete μ y alguna característica particular, intentamos seleccionar a_1, a_2 e $y \in \mathfrak{g}$ de manera tal que cumplan las hipótesis del Corolario 4.6 y que además la dimensión de algún término de la serie central descendente de $\mu_t = \mu + t(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)$ difiera de la dimensión del término correspondiente de la serie central descendente de μ. Así, para cada familia, pudimos concluir que las deformaciones producidas son no triviales.

5.1. Álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor o igual a 5

Tomamos del artículo [G] las clases de isomorfismos de álgebras de Lie nilpotentes de dimensión menor o igual a 5. En ésta sección tomaremos cada clase de isomorfismo μ, e identificaremos a_1, a_2 e $y \in \mu$, para los cuales se cumplen las hipótesis del Corolario 4.6. Finalmente veremos que la deformación obtenida es no trivial. En todos los casos, el argumento de la no triviallidad será que algún término de la serie central descendente subió de dimensión, para $t > 0$.

En dimensión 3 hay dos álgebras de Lie nilpotentes salvo isomorfismos, $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$, con corchetes dados por

- $L_{3,1}$, el álgebra de Lie abeliana
- $L_{3,2}: \quad [x_1, x_2] = x_3$

En dimensión 4 hay tres álgebras de Lie nilpotentes salvo isomorfismos, $\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$, con corchetes dados por

- $L_{4,1} = L_{3,1} \oplus I$
- $L_{4,2} = L_{3,2} \oplus I$
- $L_{4,3}: \quad [x_1, x_2] = x_3,\ [x_1, x_3] = x_4$

(Donde I es un ideal abeliano de dimensión 1)

En dimensioón 5 hay 9 clases de isomorfismos de álgebras de Lie nilpotentes salvo isomorfismos, $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle$, con corchetes dados por

- $L_{5,1} = L_{4,1} \oplus I$
- $L_{5,2} = L_{4,2} \oplus I$
- $L_{5,3} = L_{4,3} \oplus I$
- $L_{5,4}: \quad [x_1, x_2] = x_5,\ [x_3, x_4] = x_5$
- $L_{5,5}: \quad [x_1, x_2] = x_3,\ [x_1, x_3] = x_5,\ [x_2, x_4] = x_5$
- $L_{5,6}: \quad [x_1, x_2] = x_3,\ [x_1, x_3] = x_4,\ [x_1, x_4] = x_5,\ [x_2, x_3] = x_5$
- $L_{5,7}: \quad [x_1, x_2] = x_3,\ [x_1, x_3] = x_4,\ [x_1, x_4] = x_5$
- $L_{5,8}: \quad [x_1, x_2] = x_4,\ [x_1, x_3] = x_5$
- $L_{5,9}: \quad [x_1, x_2] = x_3,\ [x_1, x_3] = x_4,\ [x_2, x_3] = x_5$

(Donde I es un ideal abeliano de dimensión 1)

El siguiente lema, nos permitirá obviar los casos $L_{k,i} \oplus I$, si ya hemos identificado a_1, a_2 e $y \in L_{k,i}$, tales que cumplan las hipótesis del Corolario 4.6 y tales que la dimensión de algún término de la serie central descendente de L_{k,i_t} difiera de la de $L_{k,i}$.

Lema 5.1. *Sean a_1, a_2 e $y \in L_{k,i}$, tales que cumplen las hipótesis del Corolario 4.6 y la deformación obtenida produjo cambios en la serie central descendente, entonces a_1, a_2 e $y \in L_{k,i} \oplus I$ también cumplen las hipotesis del Colario 4.6 y la deformación obtenida en este caso, también produce cambios en la serie central descendente.*

Nota. En el enunciado del lema anterior, a_1, a_2 e $y \in L_{k,i} \oplus I$ hacen referencia a $\iota(a_1), \iota(a_2)$ e $\iota(y) \in L_{k,i} \oplus I$, donde $\iota : L_{k,i} \to L_{k,i} \oplus I$ es la inclusión.

Demostración. Observemos primero que si $\mathfrak{h}$ es subálgebra de $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{h} \oplus I$ es subálgebra de $\mathfrak{g} \oplus I$. Además, si $y \in Z(\mathfrak{h})$, entonces $y \in Z(\mathfrak{h} \oplus I)$.

Luego, si $L_{k,i} = \langle a_1, a_2 \rangle \oplus \mathfrak{h}$ con $\mathfrak{h}$ subálgebra de $L_{k,i}$, e $y \in Z(\mathfrak{h})$. Entonces $L_{k,i} \oplus I = \langle a_1, a_2 \rangle \oplus \mathfrak{h} \oplus I$, con $\mathfrak{h} \oplus I$ subálgebra de $L_{k,i} \oplus I$, e $y \in Z(\mathfrak{h} \oplus I)$. Por lo tanto, si a_1, a_2 e $y \in L_{k,i}$ cumplen las hipótesis del Corolario 4.6, entonces a_1, a_2 e $y \in L_{k,i} \oplus I$ también cumplen las hipotesis del Colario 4.6.

Observemos que para toda álgebra de Lie μ, si $\iota : \mu \to \mu \oplus I$ es la inclusión canónica, entonces para todo $j \in \mathbb{N}$

$$\dim(\mu^j) = \dim((\mu \oplus I)^j).$$

Además, si a_1, a_2 e $y \in \mathfrak{g}$, entonces $\mu_t \oplus I = (\mu + t(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y) \oplus I \cong (\mu \oplus I) + t(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y) = (\mu \oplus I)_t$. Y por lo tanto,

$$\mu_t \oplus I \cong (\mu \oplus I)_t.$$

Luego, si a_1, a_2 e $y \in \mu$ son tales que $\dim(\mu^j) \neq \dim(\mu_t^j)$, para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces $\dim((\mu \oplus I)^j) = \dim(\mu^j) \neq \dim(\mu_t^j) = \dim((\mu_t \oplus I)^j) = \dim((\mu \oplus I)_t^j)$. Y por lo tanto

$$\dim((\mu \oplus I)^j) \neq \dim(((\mu \oplus I)_t)^j).$$

Tomemos $\mu = L_{k,i}$ en el párrafo anterior. Luego, tenemos que si a_1, a_2 e $y \in L_{k,i}$ son tales que la deformación obtenida produjo cambios de dimensión en algún término de la serie central descendente, entonces a_1, a_2 e $y \in L_{k,i} \oplus I$ también produce cambios de dimensión de algún término de la serie central descendente. $\square$

Teorema 5.2. *Si μ es álgebra de Lie nilpotente de dimensión menor o igual a 5, entonces μ no es rígida.*

Demostración. Gracias al Lema 5.1 y a la Observación 3.6, sólo debemos probar que las álgebras de Lie $L_{3,2}, L_{4,3}, L_{5,4}, L_{5,5}, L_{5,6}, L_{5,7}, L_{5,8}, L_{5,9}$ no son rígidas. Para cada $\mu = L_{n,i}$ elegiremos a_1, a_2 e $y \in \mathbb{K}^n$ de modo que se cumplan las hipótesis del Corolario 4.6. Para probar que la deformación $\mu_t = \mu + t(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)$ es no trivial, daremos las dimensiones de μ^1, μ_t^1, μ^2 y μ_t^2, las cuales asegurarán que la deformación obtenida es no trivial. Presentamos la información en la siguiente tabla.

μ	a_1	a_2	y	$\dim(\mu^1)$	$\dim(\mu_t^1)$	$\dim(\mu^2)$	$\dim(\mu_t^2)$
$L_{3,2}$	x_1	x_3	x_2	1	2	0	2
$L_{4,3}$	x_1	x_4	x_2	2	3	1	3
$L_{5,4}$	x_1	x_3	x_2	1	2	0	1
$L_{5,5}$	x_1	x_4	x_2	2	3	1	2
$L_{5,6}$	x_1	x_3	x_2	3	3	2	3
$L_{5,7}$	x_1	x_5	x_2	3	4	2	4
$L_{5,8}$	x_2	x_3	x_1	2	3	0	0
$L_{5,9}$	x_2	x_3	x_1	3	3	2	3

$\square$

5.2. Una curva de álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7

En esta sección usamos el Corolario 4.6 para dar una deformación no trivial de cierta familia de álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7, parametrizada por una variabe compleja. Ésta curva fue extraída del artículo [S], en el cual se clasifican las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7.

Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, consideramos el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \langle a, b, c, d, e, f, g \rangle$ con corchete dado en esta base por

$$[a, b] = c + d, \quad [a, d] = e, \quad [a, e] = g, \quad [a, f] = g,$$

$$[b, c] = f, \quad [b, e] = g, \quad [b, f] = \alpha g,$$

$$[c, d] = -g.$$

La serie central descendente de $\mathfrak{g}$ es

$$\mathfrak{g}^0 = \langle a, b, c, d, e, f, g \rangle, \quad \mathfrak{g}^1 = \langle c{+}d, e, f, g \rangle, \quad , \mathfrak{g}^2 = \langle e, f, g \rangle, \quad \mathfrak{g}^3 = \langle g \rangle, \quad \mathfrak{g}^4 = \{0\}.$$

Podemos tomar $a_1 = b, a_2 = d, y = c$, que cumplen las hipótesis del Corlario 4.6. Luego, tenemos que $[,]_t = [,] + t(b^* \wedge d^* \otimes c)$ es una deformación lineal de $[,]$. Llamamos $\mathfrak{g}_t$ al álgebra de Lie con espacio vectorial subyacente $\langle a, b, c, d, e, f, g \rangle$ y corchete $[,]_t$. El corchete $[,]_t$ está dado en ésta base por

$$[a, b]_t = c + d, \quad [a, d]_t = e, \quad [a, e]_t = g, \quad [a, f]_t = g,$$

$$[b, c]_t = f, \quad [b, d]_t = tc, \quad [b, e]_t = g, \quad [b, f]_t = \alpha g,$$

$$[c, d]_t = -g.$$

La serie central descendente de $\mathfrak{g}_t$ es

$$\mathfrak{g}_t^0 = \langle a, b, c, d, e, f, g \rangle, \quad \mathfrak{g}_t^1 = \langle c, d, e, f, g \rangle, \quad , \mathfrak{g}_t^2 = \langle c, e, f, g \rangle, \quad \mathfrak{g}_t^3 = \langle f, g \rangle, \quad \mathfrak{g}_t^4 = \langle g \rangle, \quad \mathfrak{g}_t^5 = \{0\}.$$

Luego, resulta que la deformación obtenida es no trivial, independientemente del $\alpha \in \mathbb{C}$ escogido.

5.3. Una familia de álgebras nilpotentes con $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^1 \geq 3$

En esta sección presentaremos una subfamilia de las álgebras de Lie nilpotentes, para las cuales el Corolario 4.6 provee una deformación no trivial.

Cabe aclarar que este resultado surgió de intentar generalizar una de las situaciones que se pesentó en los ejemplos concretos anteriores. Así como aquí, se podrían generalizar las demás situaciones que se dieron.

Observación 5.3. Sea μ un álgebra de Lie k-pasos nilpotente, podemos tomar una base B_{k-1} de μ^{k-1} y completarla a una base B_{k-2} de μ^{k-2} y así hasta obtener

$$B_0 \supset ... \supset B_{k-1}, \text{ con } B_i \text{ base de } \mu^i, \text{ para } 0 \leq i \leq k-1.$$

Observemos que si a_1, a_2 e $y \in B_0$ son tales que cumplen las hipótesis del Corolario 4.6, si llamamos $\mu_t = \mu + t(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)$, y sea

$$C_{a_1,a_2} = \{\mu(b,c) : (b,c) \in (B_0 \times B_0) - \{(a_1,a_2),(a_2,a_1)\}\},$$

entonces

$$\mu^1 = \langle C_{a_1,a_2} \cup \{\mu(a_1,a_2)\}\rangle \quad \text{y} \quad \mu_t^1 = \langle C_{a_1,a_2} \cup \{\mu(a_1,a_2) + ty\}\rangle.$$

La siguiente proposición aprovecha esta observación para asegurar que cierta subfamilia de las álgebras de Lie nilpotentes posee una deformación no trivial.

Proposición 5.4. *Si μ es un álgebra de Lie nilpotente en la que existen $a_1, a_2, y \in B_0 - B_1$ tales que $\mu(a_1,a_2) \in \langle C_{a_1,a_2}\rangle$ y $\mu(y,b) = 0$, para todo $b \in B_0 - \{a_1,a_2\}$, entonces μ posee una deformación no trivial.*

Demostración. Tomamos $\mathfrak{h} = \langle B_0 - \{a_1,a_2\}\rangle$ en el Corolario 4.6. Como $\mu^1 \subseteq \mathfrak{h}$, tenemos que $\mathfrak{h}$ es subálgebra de μ. Como $\mu(y,b) = 0$, para todo $b \in B_0 - \{a_1,a_2\}$, entonces $y \in Z(\mathfrak{h})$. Luego, se cumplen las hipótesis del Corolario 4.6 y por lo tanto $\mu_t = \mu + t(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)$ es una deformación lineal de μ.

Por la observación anterior tenemos que $\mu^1 = \langle C_{a_1,a_2} \cup \{\mu(a_1,a_2)\}\rangle$, y por hipótesis $\mu(a_1,a_2) \in \langle C_{a_1,a_2}\rangle$, entonces

$$\mu^1 = \langle C_{a_1,a_2}\rangle.$$

Por la observación anterior tenemos que $\mu_t^1 = \langle C_{a_1,a_2} \cup \{\mu(a_1,a_2) + ty\}\rangle$ y por hipótesis $\mu(a_1,a_2) \in \langle C_{a_1,a_2}\rangle$, entonces

$$\mu_t^1 = \langle C_{a_1,a_2} \cup \{y\}\rangle = \langle \mu^1 \cup \{y\}\rangle.$$

Luego, como $y \notin \mu^1$, entonces $\dim(\mu_t^1) = \dim(\mu^1) + 1$. Y por lo tanto μ_t es una deformación no trivial de μ. $\square$

5.4. Extensiones de álgebras con factor abeliano

A continuación presentaremos dos métodos para construir álgebras de Lie en las que el Corolario 4.5 da una deformación no trivial. Cabe aclarar, que el primer método no es muy interesante, ya que el álgebra obtenida posee un factor abeliano sobre el cuál deformamos. Pero este primer método sirvió para producir el segundo, en el que no necesariamente, deformamos sobre un factor abeiano.

Primer método:

1. Tomamos un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ con corchete $[,]$.

2. Tomamos dos derivaciones de $\mathfrak{h}$, D_1 y D_2 que conmuten.

3. Le adjuntamos a $\mathfrak{h}$ un faltor abeliano y obtenemos $\mathfrak{h} \oplus \langle y\rangle$.

4. Consideramos $\langle a_1, a_2\rangle \ltimes (\mathfrak{h} \oplus \langle y\rangle)$, con $\langle a_1, a_2\rangle$ abeliana, y la representación, $\rho(a_1) = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\rho(a_1) = \begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Afirmación 1: $\rho(a_1)$ y $\rho(a_2)$ son derivaciones de $\mathfrak{h} \oplus \langle y\rangle$ que conmutan. Luego $\mathfrak{g} = \langle a_1, a_2\rangle \ltimes (\mathfrak{h} \oplus \langle y\rangle)$ es álgebra de Lie, con corchete llamado μ. Además, por como definimos μ, $a_1^*(\mu(a_1, h)) = a_2^*(\mu(a_2, h))$, para todo $h \in \mathfrak{h} \oplus \langle y\rangle$. Pues, dados $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} \rho(a_i)\left([h_1, h_2]\right) &= D_i\left([h_1, h_2]\right) \\ &= [D_i(h_1), h_2] + [h_1, D_i(h_2)] \\ &= [\rho(a_i)(h_1), h_2] + [h_1, \rho(a_i)(h_2)] \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \rho(a_i)\left([h_1, y]\right) &= \rho(a_i)(0) \\ &= 0 \\ &= [D_i(h_1), y] + [h_1, 0] \\ &= [D_i(h_1), y] + [h_1, D_i(y)] \\ &= [\rho(a_i)(h_1), y] + [h_1, \rho(a_i)(y)] \end{aligned}$$

Y también,

$$\begin{aligned} \rho(a_1)\rho(a_2) &= \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_1D_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_2D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \rho(a_2)\rho(a_1) \end{aligned}$$

Afirmación 2: $\mathfrak{h}$ es subálgebra e $y \in Z(\mathfrak{h})$.

Afirmación 3: $\mu_t = \mu + t(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)$ es una deformación no trivial de μ. Esto es porque $\mu(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ y $\mu_t(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \oplus \langle y\rangle$. El conmutador subió una dimensión, y luego $\mu \ncong \mu_t$, para todo $t > 0$.

Segundo método:

1. Tomamos un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ con corchete $[,]$.

2. Tomamos dos derivaciones de $\mathfrak{h}$, D_1 y D_2 que conmuten.

3. Le adjuntamos a $\mathfrak{h}$ un faltor abeliano y obtenemos $h \oplus \langle y\rangle$.

4. Tomo $v \in D_1(Z(\mathfrak{h})) \cap D_2(Z(\mathfrak{h}))$, y $z_1, z_2 \in Z(\mathfrak{h})$ tal que $v = D_1(z_2) = D_2(z_1)$.

5. Consideramos $\langle a_1, a_2\rangle \ltimes (h \oplus \langle y\rangle)$, con $\langle a_1, a_2\rangle$ abeliana, y la representación, $\rho(a_1) = \begin{pmatrix} D_1 & z_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\rho(a_1) = \begin{pmatrix} D_2 & z_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Afirmación 1: $\rho(a_1)$ y $\rho(a_2)$ son derivaciones de $\mathfrak{h} \oplus \langle y \rangle$ que conmutan. Luego $\mathfrak{g} = \langle a_1, a_2 \rangle \ltimes (\mathfrak{h} \oplus \langle y \rangle)$ es álgebra de Lie, con corchete llamado μ. Además, por como definimos μ, $a_1^*(\mu(a_1, h)) = a_2^*(\mu(a_2, h))$, para todo $h \in \mathfrak{h} \oplus \langle y \rangle$.
Pues, dados $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} \rho(a_i)\left([h_1, h_2]\right) &= D_i\left([h_1, h_2]\right) \\ &= [D_i(h_1), h_2] + [h_1, D_i(h_2)] \\ &= [\rho(a_i)(h_1), h_2] + [h_1, \rho(a_i)(h_2)] \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \rho(a_i)\left([h_1, y]\right) &= \rho(a_i)(0) \\ &= 0 \\ &= [D_i(h_1), y] + [h_1, z_i] \\ &= [D_i(h_1), y] + [h_1, D_i(y)] \\ &= [\rho(a_i)(h_1), y] + [h_1, \rho(a_i)(y)] \end{aligned}$$

Y también,

$$\begin{aligned} \rho(a_1)\rho(a_2) &= \begin{pmatrix} D_1 & z_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_2 & z_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_1 D_2 & D_1 z_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_2 D_1 & D_2 z_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_2 & z_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & z_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \rho(a_2)\rho(a_1) \end{aligned}$$

Afirmación 2: $\mathfrak{h}$ es subálgebra e $y \in Z(\mathfrak{h})$.

Afirmación 3: $\mu_t = \mu + t(a_1^* \wedge a_2^* \otimes y)$ es una deformación no trivial de μ
Esto es porque $\mu(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ y $\mu_t(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \oplus \langle y \rangle$. El conmutador subio una dimensión, y luego $\mu \ncong \mu_t$, para todo $t > 0$.

Nota. Observemos que si partimos de una $\mathfrak{h}$ álgebra de Lie no nilpotente, obtenemos $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie no nilpotente. Luego, siguiendo los pasos de esta construcción, podemos encontrar álgebras de Lie no necesariamente nilpotentes que sean aplicación del Corolario 4.5.

5.5. Álgebras de Lie filiformes de dimensión impar

En esta sección probaremos que para cierta subfamilia de álgebras de Lie filiformes de dimensión impar el Corolario 4.6 provee una deformación no trivial. Cabe aclarar que nos enfocamos en dimensión impar sólo por simplicidad.

De ahora en más, μ será el álgebra de Lie filiforme de dimensión $n + 1$,

$$\mu = \mu_0 + \sum_{(k,r) \in \Delta} a_{k,r} \psi_{k,r},$$

para $a_{k,r} \in \mathbb{C}$ fijos y n par. (Recordemos la descripción dada en §2.1.2.)

La siguiente proposición da condiciones sobre los $a_{k,r}$ para que se cumplan las hipótesis del Corolario 4.6 con $a_1 = x_0$, $a_2 = x_{\frac{n}{2}}$, e $y = x_{\frac{n}{2}-1}$. Cabe aclarar que esta elección de a_1, a_2 e y asegura que la deformación obtenida es no trivial.

Proposición 5.5. *Si μ es un álgebra de Lie filiforme de dimensión impar, con $a_{k,r} = 0$ para cada par $(k,r) \in \Delta$ tal que $r - 2k - 1 \leq \frac{n}{2}$, entonces $\mathfrak{h} = \langle x_1, ..., \widehat{x_{\frac{n}{2}}}, ..., x_n \rangle$ es subálgebra de μ y $x_{\frac{n}{2}-1} \in Z(\mathfrak{h})$.*

Demostración. Probemos primero que $\mathfrak{h} = \langle x_1, ..., \widehat{x_n}, ..., x_n \rangle$ es subálgebra de μ. Para ésto, recordemos que

$$\Delta = \{(k,r) : \, 1 \leq k \leq n-1, \, 2k+1 < r \leq n\},$$

y que

$$\psi_{k,r}(x_i, x_j) = (-1)^{k-i} c_{j-k-1}^{k-i} x_{i+j+r-2k-1} \in \langle x_{i+j+r-2k-1} \rangle, \; si 1 \leq i \leq k < j \leq n.$$

Por otro lado, para $(k,r) \in \Delta$ con $a_{k,r}$ no necesariamente nulo, sucede que

$$\frac{n}{2} < r - 2k - 1$$

$$\Rightarrow i + j + \frac{n}{2} < i + j + r - 2k - 1$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} < i + j + r - 2k - 1$$

Luego, para $(k,r) \in \Delta$ con $a_{k,r}$ no necesariamente nulo,

$$\{\psi_{k,r}(x_i, x_j)\} \cap \langle x_{\frac{n}{2}} \rangle = \emptyset.$$

Y por lo tanto $\mathfrak{h}$ es subálgebra.

Probemos ahora que $x_{\frac{n}{2}-1} \in Z(\mathfrak{h})$. Para ésto, observemos que siempre $x_{\frac{n}{2}-1}$ conmuta con $\langle x_{\frac{n}{2}+1}, ..., x_n \rangle$, pues si

$$\frac{n}{2} + 1 \leq j \leq n$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{2} + 1 + r - 2k - 1 \leq \frac{n}{2} - 1 + j + r - 2k - 1$$

$$\Rightarrow n + r - 2k - 1 \leq \frac{n}{2} - 1 + j + r - 2k - 1$$

$$\Rightarrow n < \frac{n}{2} - 1 + j + r - 2k - 1$$

$$\Rightarrow \psi_{k,r}(x_{\frac{n}{2}-1}, x_j) = 0$$

Ahora veamos que en este caso particular,$x_{\frac{n}{2}-1}$ conmuta con $\langle x_1, ..., x_{\frac{n}{2}-2} \rangle$. Pues para $(k,r) \in \Delta$ con $a_{k,r}$ no necesariamente nulo, sucede que

$$\frac{n}{2} < r - 2k - 1$$

$$\Rightarrow j + \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{2} < j + \frac{n}{2} - 1 + r - 2k - 1$$
$$\Rightarrow j + n - 1 < j + \frac{n}{2} - 1 + r - 2k - 1$$
$$\Rightarrow n < j + \frac{n}{2} - 1 + r - 2k - 1$$
$$\Rightarrow \psi_{k,r}(x_j, x_{\frac{n}{2}-1}) = 0.$$

Y por lo tanto $x_{\frac{n}{2}-1} \in Z(\mathfrak{h})$. □

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos que $\mu + t\left(x_0 \wedge x_{\frac{n}{2}} \otimes x_{\frac{n}{2}-1}\right)$ es una deformación lineal de μ. La siguiente proposición asegura que dicha deformación es no trivial.

Proposición 5.6. *Sea μ álgebra de Lie filiforme de dimensión impar, con $a_{k,r} = 0$ para cada par $(k, r) \in \Delta$, que cumple $r - 2k - 1 \leq \frac{n}{2}$. Entonces,*

$$\mu_t = \mu + t\left(x_0^* \wedge x_{\frac{n}{2}}^* \otimes x_{\frac{n}{2}-1}\right)$$

es una deformación no trivial de μ.

Demostración. Lo haremos probando que μ_t no es álgebra de Lie nilpotente, si $t > 0$. Para ésto, observemos que la matriz adjunta de x_0 en la base $\langle x_0, x_1, ..., x_n \rangle$ de μ_t es

$$ad_{\mu_t}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & t & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual no es nilpotente, si $t > 0$. Luego, gracias a la Proposición 2.7, μ_t no es álgebra de Lie nilpotente, si $t > 0$. □

Nota. La deformación μ_t es la misma cantidad de pasos soluble que μ. Esto es porque x_0 no pertenece a la serie derivada.

Referencias

[C] Carles R., *Rigidité dans les variétés d'algèbres de Lie et composantes irréductibles*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **286** (1978), no. 25, A1223–A1226.

[G] de Graaf W., *Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2*. J. Algebra **309** (2007), no. 2, 640–653.

[GH] Grunewald F. and O'Halloran J., *Deformations of Lie algebras*. J. Algebra **162** (1993), no. 1, 210–224.

[GJK] Gómez, J., Jimenéz-Merchán, A., and Khakimdjanov, Y., *Low-dimensional filiform Lie algebras*. J. Pure Appl. Algebra **130** (1998), no. 2, 133–158.

[J] Jacobson N. Lie algebras. Republication of the 1962 original. Dover Publications, Inc., New York, 1979. ix+331 pp. ISBN: 0-486-63832-4 17-01.

[PT] Pouseele H. y Tirao P., *Constructing Lie algebra homology classes*. J. Algebra **292** (2005), no. 2, 585–591.

[S] Seeley C., *7-dimensional nilpotent Lie algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. Volume 335, Number 2, February 1993.

[VS] Vera Sonia, . Tesis doctoral FaMAF 2017.

[V] Vergne M., *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes*. Bull. Soc. Math. France **98** (1970) 81–116.

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación de tesis, damos Fe que el presente ejemplar impreso, se corresponde con el aprobado por éste Tribunal: