Distribución de autovalores de Hecke en cuerpos totalmente reales

Ángel Villanueva

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Marzo 2018

Director: Dr. Roberto Miatello

Resumen

Sea F un cuerpo de números totalmente real de dimensión d sobre $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_F$ el anillo de enteros y $\Gamma_0(\mathfrak{I})$ un subgrupo de congruencia de Hecke de $GL_2(\mathbb{R})$. Para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ en $\mathcal{O}_F$, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{I}$, $\mathfrak{p}$ un cuadrado en el grupo de clases estricto sea $T_\mathfrak{p}$ el operador de Hecke operando en el espacio de formas cuspidales de Maass en $\Gamma_0(\mathfrak{I})\backslash GL_2(\mathbb{R})^d$.

El objeto de este trabajo es investigar la distribución conjunta de autovalores de $T_\mathfrak{p}$ y de los operadores de Casimir C_j en cada componente arquimedeana de F. Más precisamente, dada una familia Ω_t de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$ donde Ω_t creciente si $t \to \infty$ y un intervalo $I_\mathfrak{p} \subseteq [-2, 2]$ para $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{I}$ se prueba la estimación

$$\sum_{\substack{\varpi:\lambda_\varpi \in \Omega_t \\ \lambda_{\varpi,\mathfrak{p}} \in I_\mathfrak{p}}} |c^r(\varpi)|^2 = \Phi(I_\mathfrak{p}) \frac{2\sqrt{D_F}}{(2\pi)^d} \operatorname{Vol}(\Gamma_0(\mathfrak{I})\backslash GL_2(\mathbb{R})^d) \operatorname{Pl}(\Omega_t) + o(V_1(\Omega_t))$$

donde $c^r(\varpi)$ es el coeficiente de Fourier de la representación ϖ, $\Phi(I_\mathfrak{p})$ es la medida de Sato–Tate de $I_\mathfrak{p}$, D_F es el discriminante del cuerpo F, Pl denota la medida de Plancherel y V_1 es una medida con $V_1 = O(\mathrm{Pl})$. Esto implica que

$$\lim_{t\to\infty} (\operatorname{Pl}(\Omega_t))^{-1} \sum_{\substack{\varpi:\lambda_\varpi \in \Omega_t \\ \lambda_{\varpi,\mathfrak{p}} \in I_\mathfrak{p}}} |c^r(\varpi)|^2 = \Phi(I_\mathfrak{p}) \frac{2\sqrt{D_F}}{(2\pi)^d} \operatorname{Vol}(\Gamma_0(\mathfrak{I})\backslash GL_2(\mathbb{R})^d).$$

En particular, esto dice que hay una infinidad de formas automorfas con autovalores de $T_\mathfrak{p}$ en $I_\mathfrak{p}$ distribuidas según la medida de Sato-Tate del intervalo y además con autovalor de Casimir en la región Ω_t, distribuidas según la medida de Plancherel de la región. En el caso de formas holomorfas, la estimación es muy explícita.

Esto generaliza resultados de Sarnak [**Sar87**], Serre [**Se97**], Knightly–Li [**KL08**][**KL13**] y Bruggeman–Miatello [**BM13**].

Como consecuencia, se obtiene un resultado de equidistribución pesada, con peso $|c^r(\varpi)|^2$, de los autovalores de Hecke, complementando resultados de Serre [**Se97**] y Knightly-Li [**KL08**][**KL13**].

Math. Subject Classification (2010): 11F25, 11F30, 11F41.
Palabras y frases claves: operadores de Hecke, coeficientes de Fourier de formas automorfas, formas automorfas sobre GL_2 .

Abstract

Let F be a totally real number field, $\mathcal{O}_F$ the ring of integers and $\Gamma_0(\mathfrak{I})$ a Hecke congruence subgroup of $GL_2(\mathbb{R})$. For each prime ideal $\mathfrak{p}$ in $\mathcal{O}_F$, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{I}$ let $T_\mathfrak{p}$ be the Hecke operator acting on the space of Maass cusp forms on $\Gamma_0(\mathfrak{I})\backslash GL_2(\mathbb{R})^d$.

The goal of this work is to investigate the joint distribution of eigenvalues of Hecke operators $T_\mathfrak{p}$ and of the Casimir operators C_j in each archimedean component of F. More precisely, given a family of compact subsets Ω_t of $\mathbb{R}^d$, where Ω_t grows as $t \to \infty$ and an interval $I_\mathfrak{p} \subseteq [-2, 2]$ for $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{I}$ we prove the estimation

$$\sum_{\substack{\varpi:\lambda_\varpi \in \Omega_t \\ \lambda_{\varpi,\mathfrak{p}} \in I_\mathfrak{p}}} |c^r(\varpi)|^2 = \Phi(I_\mathfrak{p}) \frac{2\sqrt{D_F}}{(2\pi)^d} \operatorname{Vol}(\Gamma\backslash GL_2(\mathbb{R})^d)\operatorname{Pl}(\Omega_t) + o(V_1(\Omega_t))$$

where $c^r(\varpi)$ is the Fourier coefficient of the representation ϖ, $\Phi(I_\mathfrak{p})$ is the Sato–Tate measure of $I_\mathfrak{p}$, D_F is the discriminant of the field F, Pl denotes the Plancherel measure and $V_1 = o(\mathrm{Pl})$. This implies that

$$\lim_{t\to\infty} (\operatorname{Pl}(\Omega_t))^{-1} \sum_{\substack{\varpi:\lambda_\varpi \in \Omega_t \\ \lambda_{\varpi,\mathfrak{p}} \in I_\mathfrak{p}}} |c^r(\varpi)|^2 = \Phi(I_\mathfrak{p}) \frac{2\sqrt{D_F}}{(2\pi)^d} \operatorname{Vol}(\Gamma_0(\mathfrak{I})\backslash GL_2(\mathbb{R})^d).$$

In particular, this says that there are infinitely many automorphic forms with eigenvalues of $T_\mathfrak{p}$ in $I_\mathfrak{p}$ distributed according to the Sato-Tate measure of the interval and furthermore with the Casimir eigenvalue in the given region Ω_t, distributed according to the Plancherel measure of the region.

This generalizes results of Sarnak [**Sar87**], Serre [**Se97**], Knightly–Li [**KL08**] [**KL13**] and Bruggeman–Miatello [**BM13**].

As a consequence, one obtains a result of weighted distribution of the Hecke eigenvalues, with weights $|c^r(\varpi)|^2$, complementing results of Knightly-Li [**KL13**].

Math. Subject Classification (2010): 11F25, 11F30, 11F41.

Key words and phrases: Hecke operators, Fourier coefficients of automorphic forms, automorphic forms on GL_2.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi director Roberto Miatello. Su generosidad y dedicación a lo largo de estos años fueron constantes y trascendieron lo estrictamente académico. Espero estar a la altura de su ejemplo y de sus enseñanzas.

Al tribunal de tesis: Ariel Pacetti, Inés Pacharoni y Román Sasyk, quienes leyeron con detalle el trabajo y aportaron comentarios e ideas que mejoraron la presentación final.

Al grupo de teoría de números, con quienes compartimos seminarios de estudio, discusiones y cursos que ayudaron a mi formación en el área. Quiero destacar especialmente a Ricardo Podestá, que fue quien me contactó con la gente de Córdoba y con Roberto puntualmente. De no haber sido por él yo no hubiera tenido la gran oportunidad de estudiar en Famaf. También destaco a Emilio Lauret. A él recurrí en muchísimas oportunidades por consejos académicos y sobre cómo afrontar los momentos complicados que surgen en el doctorado. Cada vez que lo necesité, tuvo tiempo y la mejor predisposición para aportar consejos, soluciones y palabras de aliento.

Agradezco a Daniel Jaume por haberme motivado siempre a continuar con mis estudios en matemática, durante mi licenciatura en San Luis se preocupó por abrir los horizontes en mi carrera.

Al CONICET por haberme brindado el apoyo financiero necesario para dedicarme exclusivamente a los estudios.

A la FaMAF, a los profesores y compañeros que la integran. De todos ellos aprendí e hicieron que uno se sienta cómodo en el lugar de trabajo.

A Jorge Fernández, Leonardo Gallardo y Rafael Bravo. Fueron verdaderos docentes que tuve en ajedrez el primero, y en fútbol los últimos. Desde su lugar, dejaron enseñanzas que me acompañan día tras día y me han ayudado a ser quien soy.

Por último, a las personas más importantes que tengo: mis afectos.

A mis padres, Angel y Susana, por haberme apoyado en todas las decisiones, por preocuparse por mi formación, por que no me falte nunca nada y acompañarme cuando lo he necesitado.

A mis hermanos Ignacio, Emilce y Marcos. Adoro poder compartir momentos con ellos, gustos y pasiones. Cada uno con su estilo y personalidad me ha brindado momentos de alegría, reflexión y por supuesto peleas, que me han ayudado a mejorar como hermano y persona.

A mis amigos de Mendoza. Tengo la enorme fortuna de tener un grupo que nos conocemos desde los 5 años, con los que hemos compartido tantas experiencias y momentos que verdaderamente nos sentimos hermanos. Me hace muy feliz tenerlos en mi vida.

Y dejo para el final a la persona que he elegido para compartir mi vida: mi esposa Nerina. Ella me ha acompañado y apoyado en todo, desde que decidí irme a estudiar a San Luis, luego a Córdoba y en cada decisión que tomo ella está para aconsejarme, alentarme y contenerme. Le estoy profundamente agradecido por su amor y su afecto constante. Esta tesis está dedicada a ella.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El estudio de las formas automorfas, es decir, de las funciones analíticas reales sobre un grupo de Lie semisimple G que son invariantes por un subgrupo aritmético Γ de G, es un tema de interés clásico que tiene un rol central en la teoría espectral de operadores como así también en teoría de números.

Los operadores de Hecke T_p (ver Subsección 2.1.3) definen operadores normales sobre las formas automorfas cuspidales. Además, existe una base ortonormal de autofunciones de Hecke del espacio de Hilbert $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h})$ (ver Teorema 2.22), donde $\Gamma_0(N)$ denota el subgrupo de Hecke de nivel N.

Los autovalores $\lambda(p)$ de T_p codifican información aritmética y estadística importante, por ejemplo

- el número de formas de representar un entero por una forma cuadrática dada (e.g. como suma de cuatro cuadrados);
- el número de puntos de una curva elíptica $\mathbb{Q}$-racional sobre un cuerpo finito de p elementos.

La conjetura de Ramanujan implica que $|\lambda(p)| \leq 2$ para cualquier f holomorfa cuspidal. Esta conjetura fue probada por Deligne [**De73**].

Serre [**Se68**] estudió la distribución asintótica de los autovalores de Hecke $\lambda_f(p)$ para $f \in S_k$, el espacio de formas cuspidales holomorfas primitivas normalizadas de peso k para el grupo modular $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Además, conjeturó que para cualquier $f \in S_k$ los autovalores $\lambda_f(p)$, con $p \leq x$ cuando $x \to \infty$, están equidistribuídos en el intervalo $[-2, 2]$ con respecto a *la medida de Sato-Tate*

$$d\mu_\infty(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx \qquad \text{si } x \in [-2, 2]. \tag{1.1}$$

Esta conjetura es llamada la *conjetura de Sato–Tate* o el *problema horizontal de Sato–Tate*. Fue probada por Barnet–Lamb, Geraghty, Harris y Taylor [**BGHT11**].

Otro punto de vista es el *problema vertical* de Sato–Tate, esto es, fijado el primo p, determinar la distribución de los autovalores de T_p sobre una familia parametrizada de formas cuspidales, cuando un parámetro (nivel o peso) tiende a infinito. Este problema ha sido abordado por diversos autores. Para formas de Maass por Bruggeman [**Br78**] y Sarnak [**Sar87**], para formas holomorfas por Serre [**Se97**] y Conrey–Duke–Farmer [**CDF97**] y para formas modulares de Hilbert por Li [**Li09**], Knightly–Li [**KL08**] [**KL13**] y Bruggeman–Miatello [**BM13**].

En todos los casos, una de las herramientas principales es una fórmula relativa de la traza o de tipo Kuznetsov, habiendo sido utilizadas diversas variantes de esta fórmula debidas a Eichler [**E57**], Selberg [**S56**], Kuznetsov [**Ku80**], Bruggeman [**Br78**], Arthur [**Ar78**] [**Ar05**] y Petersson [**P32**].

Posteriormente, varias versiones de la fórmula de Kuznetsov se han obtenido. Mencionamos a Bruggeman–Miatello [**BM98**][**BM13**] para el caso de formas modulares de Hilbert para SL_2 sobre un cuerpo de números, a Venkatesh [**Ve04**] para GL_2 sobre un cuerpo de números y a Knightly–Li [**KL13**] para GL_2 sobre $\mathbb{Q}$. Mága [**Ma13**] obtuvo en 2013 una versión semi-adélica de dicha fórmula.

En esta tesis abordamos el problema vertical de Sato–Tate para formas automorfas sobre un cuerpos de números totalmente reales.

Estudiamos la función

$$N^r(\Omega_t, I_\mathfrak{p}) = \sum_{\substack{\varpi, \lambda_\varpi \in \Omega_t \\ \lambda_{\mathfrak{p},\varpi} \in I_\mathfrak{p}}} |c^r(\varpi)|^2,$$

la cual suma coeficientes de Fourier $c^r(\varpi)$ sobre representaciones cuspidales de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^d$ cuyos autovalores de Casimir y de Hecke son prefijados en regiones $\Omega_t \subseteq \mathbb{R}^d$ e intervalos $I_\mathfrak{p} \subseteq [-2, 2]$ respectivamente (ver Subsección 5.3).

En el Teorema 5.5, para conjuntos Ω_t crecientes como en (5.15) probamos la estimación

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{\substack{\varpi, \lambda_\varpi \in \Omega_t \\ \lambda_{\varpi,\mathfrak{p}} \in I_\mathfrak{p}}} |c^r(\varpi)|^2 = \frac{2\sqrt{|D_F|}\,\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash G)}{(2\pi)^d} \mathrm{Pl}(\Omega_t)\Phi(I_\mathfrak{p}) + o(V_1(\Omega_t)),$$

donde $\Phi(I_\mathfrak{p})$ es un múltiplo de la medida de Sato–Tate de $I_\mathfrak{p}$ (ver (5.12)), D_F es el discriminante del cuerpo F, Pl denota la medida de Plancherel (ver (5.4)) y $V_1 = o(\mathrm{Pl})$ (ver (5.8)) .

En particular, esto dice que hay una infinidad de formas automorfas con autovalores de $T_\mathfrak{p}$ en $I_\mathfrak{p}$ distribuidas según la medida de Sato-Tate del intervalo y además con autovalor de Casimir en la región Ω_t dada para $t \gg 0$, distribuidas según la medida de Plancherel de la región (Teorema 5.5). Como explicamos en el Capítulo 6, este resultado complementa los obtenidos en [**BM13**], [**KL08**], [**Li09**], [**KL13**].

El caso clásico de formas cuspidales holomorfas es de especial interés. En este caso, restringimos las representaciones $\otimes_{j=1}^d \varpi_j$ al caso en que para toda j, $\varpi_j \in \widehat{G}$ está en la serie discreta y obtenemos un resultado de distribución asintótico para este caso (Teorema 5.9 y Teorema 5.10).

Como aplicación, obtenemos un resultado de equidistribución pesada para los autovalores de Hecke (ver Teorema 5.14) que generaliza los obtenidos en [**Se97**],[**KL08**] y [**KL13**]. Como explicamos en el Capítulo 6, la novedad respecto a trabajos anteriores, es que nuestras familias de autovalores de Hecke están parametrizadas por parámetros espectrales.

La tesis está organizada de la siguiente manera.

En el Capítulo 2 damos resultados y nociones conocidas sobre formas holomorfas y formas de Maass en el sentido clásico, definimos los adeles sobre $\mathbb{Q}$, las formas automorfas adélicas y los operadores de Hecke. Esto es para motivar el tema de estudio de esta tesis y que desarrollamos en los siguientes capítulos.

Para obtener nuestros resultados, precisamos trabajar en un contexto adélico: en el Capítulo 3 definimos las formas automorfas sobre los adeles de F, su correspondencia con las formas clásicas y la acción del grupo de clases (Sección 3.3).

En el Capítulo 4 definimos los operadores de Hecke $T_{\mathfrak{p}}$ y estudiamos su acción sobre el espacio de formas automorfas cuspidales. En la Subsección 4.2.2 obtenemos una relación entre los coeficientes de Fourier de las representaciones ϖ con los autovalores de Hecke (ver Teorema 4.7) que será de utilidad esencial en la demostración de nuestro resultado principal.

En el Capítulo 5 se encuentran los resultados principales obtenidos en la tesis. Los Teoremas 5.4 y 5.5 son sobre distribución asintótica de autovalores de Hecke y de Casimir. Como aplicación, obtenemos un resultado de equidistribución pesada de los autovalores de Hecke (ver Teorema 5.14).

Finalmente, en el Capítulo 6 comparamos nuestros resultados con los obtenidos en [**Se97**], [**KL08**], [**Li09**], [**KL13**] y [**BM13**].

Capítulo 2

Preliminares

En esta sección fijaremos la notación y los conceptos básicos que usaremos a lo largo del texto. En particular, introduciremos las nociones de formas modulares y formas de Hilbert, desde su versión clásica hasta su versión adélica, que es la que utilizaremos para obtener los resultados principales de esta tesis.

Dividiremos esta sección de la siguiente manera:

1. La teoría clásica de formas modulares: los subgrupos de congruencia, sus cúspides y la definición de forma automorfa. Definición de los operadores de Hecke y su estructura.
2. Las formas automorfas como funciones sobre el grupo de adeles de $\mathbb{Q}$: definición de adeles, grupos de congruencia, adelización de formas automorfas clásicas. Definición de operadores de Hecke adélicos y su relación con los operadores de Hecke clásicos.
3. Formas modulares de Hilbert. El caso de cuerpos de números totalmente reales.

2.1. Formas modulares clásicas

En primer lugar, introduciremos la notación en el sentido clásico que es como empezó a surgir esta teoría, para luego introducir el caso de cuerpos de números totalmente reales y las técnicas sobre los adeles.

Definición 2.1. El *subgrupo principal de congruencia de nivel* N está dado por

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}. \tag{2.1}$$

Cualquier subgrupo de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ que contiene a $\Gamma(N)$ es llamado *subgrupo de congruencia de nivel N.*

Ejemplo 2.2. El ejemplo básico es el grupo $\Gamma(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, el cual es llamado el grupo de congruencia completo o grupo modular.

Ejemplo 2.3. En esta tesis estaremos particularmente interesados en los *subgrupos de Hecke*, es decir

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

A partir de ahora, nos interesaremos en los subgrupos de Hecke, es decir, consideramos $\Gamma = \Gamma_0(N)$.

El grupo $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ actúa en el semiplano complejo superior $\mathfrak{h} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ por transformaciones de Möbius. Si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$, entonces $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Esta acción se extiende de manera trivial a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, el cual se identifica con la frontera de $\overline{\mathfrak{h}} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

Para Γ un subgrupo de congruencia, decimos que dos puntos $z_1, z_2 \in \mathfrak{h}$ son Γ-equivalentes si $\gamma z_1 = z_2$ para algún $\gamma \in \Gamma$.

Definición 2.4. Un subconjunto $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{h}$ es un *dominio fundamental* para Γ si se cumplen las siguientes condiciones.

(i) $\mathfrak{D}$ es un subconjunto abierto y conexo de $\mathfrak{h}$,
(ii) no hay puntos en $\mathfrak{D}$ que sean Γ-equivalentes,
(iii) para todo $z \in \mathfrak{h}$ existe un $z_0 \in \overline{\mathfrak{D}}$ tal que $\gamma z = z_0$ con $\gamma \in \Gamma$.

Cada $g \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ actúa por movimientos rígidos del plano hiperbólico. Podemos distinguir a cada $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \neq \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ en tres clases diferentes según sus puntos fijos.

(i) *Parabólica* si g tiene sólo un punto fijo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(g)^2 = \det(g)$.
(ii) *Hiperbólica* si g tiene dos puntos fijos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(g)^2 > \det(g)$.
(iii) *Elíptica* si g tiene un punto fijo en $\mathfrak{h}$ y otro en $\overline{\mathfrak{h}} \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(g)^2 < \det(g)$.

Definición 2.5. Se dice que un punto $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es una *cúspide de* Γ si existe un elemento parabólico de Γ que fija a x.

Los grupos Fuchsianos (i.e. subgrupos discretos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de covolumen finito), y los subgrupos de Hecke en particular, tienen un número finito de cúspides módulo Γ-equivalencia (ver [**Iw97**, Cap. 2]). Finalmente podemos definir la noción de función automorfa.

Definición 2.6. Una función $f(z) : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ se dice *forma* Γ*-automorfa de peso* k (o forma automorfa de peso k para Γ) si satisface las siguientes condiciones:

(i) $f(\gamma z) = f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$ para todo $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$;
(ii) f es holomorfa en $\mathfrak{h}$; y
(iii) f es holomorfa en todas las cúspides de Γ (ver [**Iw97**]).

Al espacio de dichas funciones lo denotamos $\mathcal{M}_k(\Gamma)$.

Para $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$, donde Γ es un subgrupo de Hecke $\Gamma_0(N)$, tenemos que $f(x) = f(x+1)$, por lo que f tiene expansión de Fourier en el ∞ de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}. \tag{2.2}$$

Definición 2.7. Una forma Γ-automorfa se dice que es una *forma cuspidal* si $a_0 = 0$ para cada cúspide de Γ. El espacio de formas Γ-cuspidales de peso k será denotado $\mathcal{S}_k(\Gamma)$.

2.1.1. Series de Eisenstein.

Definición 2.8. Sea $z = x + iy \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$. Definimos la *serie de Eisenstein* por

$$E(z,s) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}.$$

PROPOSICIÓN 2.9. *Las series de Eisenstein $E(z,s)$ convergen absoluta y uniformemente sobre conjuntos compactos para $z = x + iy \in \mathfrak{h}$ y $\mathrm{Re}(s) > 1$. Son analíticas reales en z y analíticas complejas en s. Además, satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *Sea $\epsilon > 0$. Para $x = Re(z) \geq 1 + \epsilon > 1$, existe una constante $c(\epsilon)$ tal que*

$$|E(z,s) - y^s| \leq c(\epsilon) y^{-\epsilon} \quad \textit{para todo} \quad y \geq 1.$$

(ii) $E(\frac{az+b}{cz+d}, s) = E(z,s)$ *para todo* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

(iii) $\Delta E(z,s) = s(1-s)E(z,s)$.

2.1.2. Formas de Maass. Sea f una función automorfa de peso k para $\Gamma_0(N)$. Consideraremos también el caso donde $f(z)$ no es necesariamiente una función holomorfa para $z \in \mathfrak{h}$. Este tipo de funciones aparecieron en los trabajos de Maass [**M47**], [**M49**], [**M53**].

DEFINICIÓN 2.10. Sean $N, k \in \mathbb{Z}$ con $N \geq 1$. Sea $\nu \in \mathbb{C}$. Fijamos un carácter χ (mod N). Una *forma de Maass* de tipo ν de peso k y carácter χ para $\Gamma_0(N)$ es una función suave $f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ que satisface las siguientes condiciones:

(i) $f(\gamma z) = \chi(d)(cz+d)^k f(z)$ para todo $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$, $z \in \mathfrak{h}$.

(ii) $\Delta_k f = \nu(1-\nu) f$, donde $\Delta_k = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + iky\frac{\partial}{\partial x}$ es el operador de Laplace.

(iii) f es de crecimiento moderado (ver [**GoHu1**, página 79]).

(iv) $\displaystyle\int\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h}} |f(z)|^2 \frac{dxdy}{y^2} < \infty.$

Estamos interesados en las funciones $\Gamma_0(N)$–automorfas que son de cuadrado integrables, es decir en el espacio $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h})$.

TEOREMA 2.11 (Maass). *El subespacio de $L^2\big(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h}\big)$ formado por formas de Maass de tipo ν es de dimensión finita.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Go15**, pág. 71]. □

El operador diferencial Δ_k tiene la propiedad de llevar formas automorfas de peso k en sí mismas. La *descomposición espectral de Selberg* dice que el espacio de Hilbert $L^2\big(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h}\big)$ se descompone en formas cuspidales de Maass e integrales de series de Eisenstein. Es decir

$$L^2\big(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h}\big) = \mathbb{C} \oplus L^2_{\mathrm{cusp}}\big(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h}\big) \oplus L^2_{\mathrm{cont}}\big(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h}\big)$$

donde $\mathbb{C}$ es el espacio 1–dimensional de funciones constantes, $L^2_{\mathrm{cusp}}\big(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h}\big)$ representa el espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable cuyos términos constantes son cero, y $L^2_{\mathrm{cont}}\big(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h}\big)$ representa todas las funciones cuadrado integrables que son representables como integrales de series de Eisenstein. Específicamente, sean $\eta_j(z)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ una base ortonormal de formas de Maass para $\Gamma_0(N)$. Como veremos en Teorema 2.22, podemos tomar cada η_j autofunción de todos los operadores de Hecke.

TEOREMA 2.12 (Descomposición espectral). *Para* $f \in L^2\big(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h}\big)$, *tenemos que*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, \eta_j \rangle \eta_j(z) + \frac{1}{4\pi} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \langle f, E(*,s) \rangle E(z,s) ds,$$

donde

$$\langle f, g \rangle = \int\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h}} f(z)\overline{g(z)} \frac{dxdy}{y^2}$$

es el producto interno de Petersson.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Go15**, §3.16]. □

2.1.3. Operadores de Hecke. En términos generales, los operadores de Hecke son operadores que promedian los valores de una f automorfa sobre una colección finita de coclases dobles de cierto conjunto.

DEFINICIÓN 2.13. Fijamos un entero k. Para cualquier $A \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ el *operador* $_{|}.$ está definido en funciones $f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ por

$$f_{|A}(z) = (\det A)^{k/2} j_A(z)^{-k} f(Az) \tag{2.3}$$

donde $j_A(z) = cz + d$ si $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Llamamos a $j_-(.)$ *factor de automorfía.*

Para un entero positivo n consideramos el conjunto

$$G_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \ ad - bc = n \right\}. \tag{2.4}$$

En particular, $G_1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. El grupo modular $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ actúa sobre G_n a ambos lados y $G_n = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})G_n = G_n\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

LEMA 2.14. *La colección*

$$\mathfrak{R}_n := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : ad = n, \ 0 \leq b < d \right\} \tag{2.5}$$

es un conjunto completo de representantes de coclases a derecha de G_n, *módulo* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. *Es decir*

$$G_n = \bigsqcup_{\rho \in \mathfrak{R}_n} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\rho. \tag{2.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Iw97**]. □

Notar que $\mathfrak{R}_n$ es un conjunto finito con $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ elementos.

Dado k un entero positivo, definimos el operador T_n sobre funciones $f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ por

$$T_n f = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\rho \in \mathfrak{R}_n} f_{|\rho}. \tag{2.7}$$

Por el Lema 2.14, escribimos T_n operando en f como

$$(T_n f)(z) = \frac{1}{n} \sum_{ad=n} a^k \sum_{0 \leq b < d} f\left(\frac{az+b}{d}\right). \tag{2.8}$$

Los operadores de Hecke T_n preservan el espacio de formas Γ_∞-automorfas, donde $\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ u \in \mathbb{Z} \right\}$.

TEOREMA 2.15. *El operador T_n lleva formas Γ_∞-automorfas en formas Γ_∞-automorfas.*

A continuación se expresan los coeficientes de Fourier de la forma modular $T_n f$ en términos de los coeficientes de Fourier de f. Escribimos

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a(m) e^{2\pi i m z}, \tag{2.9}$$

donde $a(m)$ son los coeficientes de Fourier de f.

PROPOSICIÓN 2.16. *Supongamos que $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$ está dada por (2.9) y que converge absolutamente en $\mathfrak{h}$. Entonces $T_n f$ está dada por la serie*

$$(T_n f)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b(m) e^{2\pi i m z} \tag{2.10}$$

cuyos coeficientes de Fourier son

$$b(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a(mnd^{-2}). \tag{2.11}$$

COROLARIO 2.17. *Para $n \geq 1$ tenemos*

$$a_n(0) = \sigma_{k-1}(n) a(0), \tag{2.12}$$

donde $\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s$.

Nos interesa especialmente la estructura del álgebra que generan estos operadores.

TEOREMA 2.18. *Para todo $m, n \geq 1$ se tiene*

$$T_m T_n = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} T_{mnd^{-2}}. \tag{2.13}$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Iw97**, Capítulo 6]. □

COROLARIO 2.19. *Para todo $m, n \geq 1$ se tiene $T_m T_n = T_n T_m$.*

Usando la inversión de Möbius en (2.13) se obtiene

$$T_{mn} = \sum_{d|(m,n)} \mu(d) d^{k-1} T_{m/d} T_{n/d}, \tag{2.14}$$

donde $\mu(d)$ es la función de Möbius. En particular,

$$T_{mn} = T_m T_n \text{ si } (m,n) = 1.$$

Si $m = p^r$ y $n = p$, usando (2.14) obtenemos la fórmula de recurrencia

$$T_{p^{r+1}} = T_p T_{p^r} - p^{k-1} T_{p^{r-1}}. \tag{2.15}$$

Llamaremos *álgebra de Hecke* al álgebra $\mathcal{H}$ sobre $\mathbb{C}$ generada por todos los operadores de Hecke T_n para $n \geq 1$. Por las propiedades enunciadas, concluimos que $\mathcal{H}$ es un álgebra conmutativa generada por los elementos T_p con p un número primo.

Como generalización del Teorema 2.15 tenemos el siguiente enunciado para los subgrupos de congruencia $\Gamma_0(N)$.

Teorema 2.20. *Los operadores de Hecke transforman formas automorfas (cuspidales) en formas automorfas (cuspidales), es decir*

$$T_n(\mathcal{M}_k(\Gamma_0(N))) \subset \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N)) \quad \big(T_n(\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))) \subset \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))\big).$$

Una propiedad fundamental es que los operadores de Hecke T_n con $(n, N) = 1$ son autoadjuntos con respecto al producto interno de Petersson. Dadas dos formas automorfas cuspidales f y g se define (ver [**KL06b**])

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{h}} f(z)\overline{g(z)}y^k d\mu z. \tag{2.16}$$

Teorema 2.21. *Sean $f, g \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ y $(n, N) = 1$. Entonces*

$$\langle T_n f, g\rangle = \langle f, T_n g\rangle. \tag{2.17}$$

Es decir, el operador T_n es autoadjunto y por lo tanto normal.

Como consecuencia de esto, tenemos el siguiente resultado fundamental.

Teorema 2.22 (Hecke). *El espacio de formas cuspidales $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ tiene una base ortonormal $\mathcal{F}$ que consiste de autofunciones de todos los operadores de Hecke T_n con $(n, N) = 1$.*

Llamamos *autofunción de Hecke* a una autofunción f de todos los T_n con $(n, N) = 1$. Se dice que una autofunción es *normalizada* si $a(1) = 1$. Las autofunciones con $a(1) = 0$ son llamadas *oldforms*, las cuales provienen de $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(M))$ para $M \mid N$. Se puede demostrar que $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ tiene una base ortogonal de autofunciones normalizadas (ver [**KL06**]).

Proposición 2.23. *Si $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a(m)e^{2\pi imz}$ es autofunción de T_n con coeficiente principal $a(1) = 1$, entonces $T_n f = a(n)f$.*

2.1.4. Polinomios de Chebyshev. En esta subsección comentaremos sobre los polinomios de Chebyshev, los cuales son muy importantes en nuestro tema ya que interconectan los operadores de Hecke y por lo tanto, los autovalores de los mismos.

Estos polinomios son muy estudiados en [**Se97**]. A continuación comentamos algunas de sus propiedades más importantes.

Supongamos que $x \in [-2, 2]$. Entonces x puede ser expresado unívocamente de la forma: $x = 2\cos\varphi$ para $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Para $x \in [-2, 2]$ y para cualquier entero $\ell \geq 0$, definimos

$$\begin{aligned} X_\ell(x) &= e^{i\ell\varphi} + e^{i(\ell-2)\varphi} + \cdots + e^{-i\ell\varphi} = \frac{e^{i(\ell+1)\varphi} - e^{-i(\ell+1)\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} \\ &= \frac{\sin(\ell+1)\varphi}{\sin\varphi}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Tenemos que $X_\ell(x) \in \mathbb{Z}[x]$ es un polinomio de grado ℓ. Como

$$\sin((\ell+1)\varphi + \varphi) + \sin((\ell+1)\varphi - \varphi) = 2\cos\varphi\sin(\ell+1)\varphi$$

estos polinomios verifican la siguiente fórmula recursiva

$$X_{\ell+1}(x) = xX_\ell(x) - X_{\ell-1}(x). \tag{2.19}$$

DEFINICIÓN 2.24. Los polinomios $X_\ell(x)$ son conocidos como los *polinomios de Chebyshev de segundo tipo.*

DEFINICIÓN 2.25. Sea

$$d\mu_\infty(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx & \text{si } x \in [-2,2], \\ 0 & \text{otros } x \end{cases} \tag{2.20}$$

la *medida de Sato-Tate.*

Esta puede escribirse en términos de φ como sigue

$$d\mu_\infty(x) = \frac{2\pi}{\sin^2\varphi} d\varphi.$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\phi}{\sin\phi}\frac{\sin(m+1)\phi}{\sin\phi}\sin^2\!\phi\; d\phi = \frac{\pi}{2}\delta_{mn},$$

lo cual implica el siguiente resultado

PROPOSICIÓN 2.26. *Los polinomios de Chebyshev son ortonormales con respecto a la medida de Sato–Tate:*

$$\int_{\mathbb{R}} X_n(x)X_m(x)d\mu_\infty(x) = \delta_{nm}. \tag{2.21}$$

Es sabido que el álgebra de Hecke está generada por los $T_\mathfrak{p}$ y los polinomios de Chebyshev nos permiten relacionar los $T_{\mathfrak{p}^\ell}$ con los $T_\mathfrak{p}$.

PROPOSICIÓN 2.27. *Los operadores de Hecke cumplen la siguiente relación*

$$T_{\mathfrak{p}^\ell} = X_\ell(T_\mathfrak{p}) \text{ para todo } \ell \in \mathbb{N}_0. \tag{2.22}$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición $T_\mathfrak{p}T_{\mathfrak{p}^\ell} = T_{\mathfrak{p}^{\ell+1}} + T_{\mathfrak{p}^{\ell-1}}$, es decir $T_{\mathfrak{p}^{\ell+1}} = T_\mathfrak{p}T_{\mathfrak{p}^\ell} - T_{\mathfrak{p}^{\ell-1}}$. La proposición sigue de la fórmula de recurrencia (2.19) e inducción.

□

Como consecuencia inmediata de lo anterior, tenemos

COROLARIO 2.28. *Sea f autofunción de Hecke con autovalor $\lambda_{p,f}$. Los autovalores de Hecke están relacionados por los polinomios de Chebyshev*

$$\lambda_{\mathfrak{p}^\ell,f} = X_\ell(\lambda_{\mathfrak{p},f}). \tag{2.23}$$

2.2. Formas automorfas sobre el grupo de adeles

En esta sección definiremos las formas automorfas sobre el grupo de adeles y veremos el procedimiento estándar para adelizar una forma automorfa clásica, esto es, asociarle una forma cuspidal adélica. Además, veremos cómo se define el álgebra de Hecke en este caso, y la conmutatividad entre las operaciones de adelización y la actuación de los operadores de Hecke. Todo esto lo haremos sobre $\mathbb{Q}$ que es el caso base y el más estudiado. Luego, lo generalizaremos al caso de cuerpos de números totalmente reales. Algunos de los textos de referencia para estos tópicos son [**GoHu1**], [**GoHu2**], [**Bu97**] y [**Ge75**].

2.2.1. Adeles sobre $\mathbb{Q}$. Definimos a continuación los cuerpos p-ádicos y los adeles sobre $\mathbb{Q}$.

El cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ tiene el clásico valor absoluto arquimedeano que denotamos $|.|_\infty$. Además, para cada primo p podemos definir los valores absolutos $|.|_p$ como sigue. Dado $x \in \mathbb{Q}$ con $x = p^k \frac{m}{n}$ con $p \nmid mn$ y $k \in \mathbb{Z}$, definimos $|x|_p = |p^k \frac{m}{n}|_p = p^{-k}$.

TEOREMA 2.29 (Ostrowski). *Cualquier valor absoluto sobre $\mathbb{Q}$ es equivalente a $|.|_\infty$ o a $|.|_p$ para algún p primo.*

La completación de $\mathbb{Q}$ con respecto al valor absoluto $|.|_\infty$ es $\mathbb{R}$. Para p un número primo, la completación de $\mathbb{Q}$ con respecto al valor absoluto p-ádico $|.|_p$ es denotada $\mathbb{Q}_p$ y la llamamos *cuerpo p-ádico.*

DEFINICIÓN 2.30. Llamaremos anillo de *enteros p-ádicos* a los elementos $x \in \mathbb{Q}_p$ que satisfacen $|x|_p \leq 1$. A este anillo lo denotamos $\mathbb{Z}_p$. Éste es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{p} := \{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p < 1\}$. Es fácil ver que $\mathfrak{p} = p\mathbb{Z}_p$.

Formalmente, el anillo de adeles sobre $\mathbb{Q}$ es el anillo determinado por el producto restringido relativo a los subgrupos $\mathbb{Z}_p$,

$$\mathbb{R} \times \prod_p{}' \mathbb{Q}_p,$$

donde casi todas (i.e. todas salvo una cantidad finitas) las componentes en el producto son iguales a $\mathbb{Z}_p$.

DEFINICIÓN 2.31. El anillo de *adeles* sobre $\mathbb{Q}$, denotado $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$, está definido como

$$\mathbb{A}_\mathbb{Q} = \{\{x_\infty, x_2, x_3, \ldots\} : \ x_p \in \mathbb{Q}_p \ \forall p \leq \infty, x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para casi todo } p\},$$

donde la suma y el producto entre $x = \{x_\infty, x_2, x_3, \ldots\}$ y $x' = \{x'_\infty, x'_2, x'_3, \ldots\}$ en $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ están dadas por

$$x + x' = \{x_\infty + x'_\infty, \ x_2 + x'_2, \ x_3 + x'_3, \ldots\},$$
$$x.x' = \{x_\infty . x'_\infty, \ x_2 . x'_2, \ x_3 . x'_3, \ldots\}.$$

Además, los *ideles* sobre $\mathbb{Q}$ son el subgrupo multiplicativo $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times$ de $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$, esto es,

$$\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times = \left\{\{x_\infty, x_2, x_3, \ldots\} : \ x_p \in \mathbb{Q}_p^\times \ \forall p \leq \infty, x_p \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ para casi todo } p\right\}.$$

Notar que $\mathbb{Q}$ se incluye diagonalmente en $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ como

$$x \mapsto \{x, x, x, \ldots\}.$$

Esto a su vez induce el embedding de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, el cual tiene imagen discreta.

DEFINICIÓN 2.32. El anillo de *adeles finitos* $\mathbb{A}_f$ sobre $\mathbb{Q}$ está definido por

$$\mathbb{A}_f = \{\{x_2, \ x_3, \ \ldots\} \ : \ x_p \in \mathbb{Q}_p \ \forall p < \infty, x_p \in \mathbb{Z}_p \text{ para casi todo } p\},$$

mientras que los *ideles finitos* sobre $\mathbb{Q}$ están definido por

$$\mathbb{A}_f^\times = \{\{x_2, \ x_3, \ \ldots\} : x_p \in \mathbb{Q}_p^\times \ \forall p < \infty, \ x_p \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ para casi todo } p\}.$$

El embedding natural de $\mathbb{A}_f$ en $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ está dado por

$$\{x_2,\ x_3,\ \ldots\} \mapsto \{0,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\}.$$

De manera similar, tenemos el embedding de $\mathbb{A}_f^\times$ en $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times$ dado por

$$\{x_2,\ x_3,\ \ldots\} \mapsto \{1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\}.$$

Hablando sin total rigurosidad, una forma automorfa adélica es una función $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ que satisface ciertas condiciones adicionales: 'suavidad', 'crecimiento moderado', 'ser K-finita a derecha' y 'ser $Z(U(\mathfrak{g}))$-finita'. Ahora procedemos a definir cada uno de ellas.

Definición 2.33. (Suavidad) Una función $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ se dice que es *suave* si para todo $g_0 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$, existe un entorno abierto U de g_0 en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ y una función suave $\phi_\infty^U : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ tal que $\phi(g) = \phi_\infty^U(g_\infty)$ para todo $g \in U$.

Sea $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ donde $a = \{a_\infty, a_2, \ldots\}$, $b = \{b_\infty, b_2, \ldots\}$, $c = \{c_\infty, c_2, \ldots\}$ y $d = \{d_\infty, d_2, \ldots\}$ están en $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$. Definimos la norma de g por

$$\|g\| = \prod_{v \leq \infty} \text{máx}\{|a_v|_v, |b_v|_v, |c_v|_v, |d_v|_v, |a_v d_v - b_v c_v|_v^{-1}\}.$$

Definición 2.34. (Crecimiento moderado) Decimos que una función $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ es de *crecimiento moderado* si existen constantes $B, C > 0$ tales que $|\phi(g)|_\mathbb{C} < C\|g\|^B$ para toda $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$.

Definición 2.35. (K-finitud) Sea $K = \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \prod_p \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ el subgrupo compacto maximal de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Una función $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ se dice que es *K-finita* a derecha si el conjunto $\{\phi(gk) | k \in K\}$ genera un espacio finito dimensional.

Definición 2.36. ($Z(U(\mathfrak{g}))$-finitud) Denotamos $Z(U(\mathfrak{g}))$ al centro del álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$. Se dice que una función suave $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ es *$Z(U(\mathfrak{g}))$-finita* si el conjunto $\{D\phi(g) | D \in Z(U(\mathfrak{g}))\}$ genera un espacio vectorial finito dimensional.

Definición 2.37. (Carácter de Hecke) Un *carácter de Hecke* de $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ está definido como un homomorfismo continuo $\omega : \mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{C}^\times$. Un carácter de Hecke se dice *unitario* si todos sus valores tienen valor absoluto 1.

Un carácter de Hecke unitario está caracterizado por las siguientes cuatro propiedades:

(i) $\omega(gg') = \omega(g)\omega(g')$ para todos $g, g' \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times$;
(ii) $\omega(\gamma g) = \omega(g)$ para todos $\gamma \in \mathbb{Q}^\times$ y $g \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times$;
(iii) ω es continuo en $(1, 1, 1, \ldots)$;
(iv) $|\omega|_\mathbb{C} = 1$.

Definición 2.38. (Forma automorfa adélica con carácter central) Fijamos un carácter de Hecke $\omega : \mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{C}^\times$. Una *forma automorfa* para $\mathrm{GL}_2(A_\mathbb{Q})$ con carácter central ω es una función suave $\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \to \mathbb{C}$ que satisface

(i) $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ para todo $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ y $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$;

(ii) $\phi(zg) = \omega(z)\phi(g)$ para todo $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ y $z \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times$;
(iii) ϕ es K-finita a derecha;
(iv) ϕ es $Z(U(\mathfrak{g}))$-finita;
(v) ϕ es de crecimiento moderado.

Definición 2.39. (Forma automorfa adélica cuspidal) Una forma automorfa adélica ϕ con carácter central ω se dice *cuspidal* si

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_\mathbb{Q}} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) du = 0 \tag{2.24}$$

para casi toda $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$. Acá $\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & u_\infty \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \ldots, \left(\begin{smallmatrix} 1 & u_p \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \ldots\}$.

A continuación describiremos la relación entre las formas modulares cuspidales clásicas y las adélicas. Para la buena definición de la forma automorfa adélica utilizamos el teorema de aproximación fuerte (TAF) para GL_2 sobre $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.40. *Cualquier matriz de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ *se puede escribir de la siguiente manera:*

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})K_0' \quad \textit{donde } K_0' = \prod_{p<\infty}{}' K_p', \tag{2.25}$$

K_p' *es cualquier elección de subgrupo compacto abierto de* $K_p := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *tal que* $K_p' = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ *para casi todo* p.

En particular, uno puede tomar

$$K_p' = K_p^N = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_p : \quad c \equiv 0 \ (N)\right\} \tag{2.26}$$

para cualquier N entero positivo.

El análogo del Teorema 2.40 para GL_1 es

$$\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_+^\times \prod_{p<\infty} \mathbb{Z}_p^\times. \tag{2.27}$$

Por (2.27) tenemos que cada carácter de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ determina un carácter de $\mathbb{A}_\mathbb{Q}^\times$ trivial sobre $\mathbb{Q}^\times$. Llamamos ψ al carácter de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Entonces ψ determina un carácter ψ_p de $\mathbb{Z}_p^\times$ por composición con el homomorfismo natural de $\mathbb{Z}_p^\times$ a $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. El producto $\prod_{p<\infty}\psi_p$ da un carácter de $\prod_{p<\infty}\mathbb{Z}_p^\times$, por lo tanto, un carácter de $\mathbb{A}^\times$ trivial sobre $\mathbb{Q}^\times$.

Sea $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$. Usando el Teorema 2.40 y el carácter de K_f que en K_p^N está dado por $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \psi_p(d)$, podemos definir una función $\phi_f(g)$ sobre $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ por

$$\phi_f(g) = f(g_\infty(i))j(g_\infty, i)^{-k}\psi(k_0) \tag{2.28}$$

para $g = \gamma g_\infty k_0$ y $\prod \psi_p = \psi$. Esta función está bien definida pues $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ y

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap G_\infty^+ \prod K_p^N = \Gamma_0(N). \tag{2.29}$$

Usando el Teorema 2.40 podemos obtener la siguiente proposición que relaciona las formas automorfas clásicas con las adélicas.

PROPOSICIÓN 2.41. *La asignación anterior* $f \mapsto \phi_f$ *da un isomorfismo entre* $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(N))$ *y el espacio de funciones* ψ *sobre* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ *que satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ *para toda* $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$*;*

(ii) $\phi(gk_0) = \phi(g)\psi(k_0)$ *para todo* $k_0 \in \prod K_p^N$*;*

(iii) $\phi(gr(\theta)) = e^{-ik\theta}\phi(g)$ *si* $r(\theta) = \left(\begin{smallmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{smallmatrix}\right)$*;*

(iv) *vista como función sobre* $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$*,* ϕ *es autofunción del operador de Laplace–Beltrami*

$$\Delta\phi = -\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2} - 1\right)\phi; \tag{2.30}$$

(v) $\phi(zg) = \phi(gz) = \psi(z)\phi(g)$ *para todo* $z \in Z_A$*;*

(vi) ϕ *es de* crecimiento moderado*, es decir, para todo* $c > 0$ *y un subconjunto compacto* K *de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ *existen constantes* C *y* N *tal que*

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \leq C\|a\|^N$$

para todo $g \in K$ *y* $a \in \mathbb{A}^\times$ *con* $|a| > c$ *.*

(vii) ϕ *es* cuspidal*, esto es*

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash A} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) dx = 0 \quad \text{para casi todo } g.$$

2.2.2. Operadores de Hecke adélicos. En esta sección veremos la versión adélica de los operadores de Hecke definidos en la Subsección 2.1.3 y su relación con los operadores de Hecke clásicos.

Sea $\Gamma = \Gamma_0(N)$ y p un primo que no divide a N. Tomamos $K_p^N = K_p = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. En $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ consideramos la doble coclase

$$H_p = K_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_p.$$

Observamos que es lo mismo tomar $K_p \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) K_p$ ya que $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in K_p$ y $w \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$.

Si ϕ es una función sobre $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ invariante a derecha por K_p, usamos $\widetilde{T}_p\phi := \phi * \chi_{H_p}$ para denotar la convolución sobre $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de ϕ con la función característica de H_p.

En particular, para cada $\phi \in L^2\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})/K_0^N\big)$,

$$\widetilde{T}_p\phi(g) = \int_{H_p} \phi(gh)dh.$$

LEMA 2.42. *Si* $\phi = \phi_f$ *con* $f \in S_k(\Gamma)$*, entonces*

$$p^{\frac{k}{2}-1}\widetilde{T}_p\phi = \phi_{T_p f}.$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Ge75**, Lema 3.7]. $\square$

Este lema nos dice que, dada $f \in S_k(\Gamma_0(N))$, las acciones de adelizar y hacer operar el álgebra de Hecke conmutan.

2.3. Formas modulares de Hilbert

En los siguientes capítulos trabajaremos con formas de Hilbert sobre cuerpos de números totalmente reales. Aquí daremos la definición de las formas holomorfas de Hilbert. En el Capítulo 3 daremos las formas de Maass y la teoría de Hecke adélica para este caso.

Sea F un cuerpo de números totalmente real (i.e. todas sus inmersiones son reales) de grado $d = [F : \mathbb{Q}]$, y sea $\mathcal{O}_F$ su anillo de enteros. Denotamos $\mathcal{O}_F^\times$ al grupo de unidades y $(\mathcal{O}_F^\times)^+$ al subgrupo de unidades totalmente positivas (i.e. positivo en todas las inmersiones).

Los lugares arquimedeanos de F serán denotados por v y los lugares no arquimedeanos por $\mathfrak{p}$. También escribiremos $v \mid \infty$ y $\mathfrak{p} < \infty$ para referirnos a lugares arquimedeanos y no arquimedeanos respectivamente. Denotamos por $\mathrm{GL}_2(F)$ el grupo de matrices 2×2 inversibles con coeficientes en F.

Definición 2.43. Sea $\mathfrak{I}$ un ideal entero de F. El *subgrupo de congruencia* $\Gamma_0(\mathfrak{I})$ de $\mathrm{GL}_2(F)$ está dado por

$$\Gamma_0(\mathfrak{I}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a, b, c, d \in \mathcal{O}_F, \ c \equiv 0 \pmod{\mathfrak{I}} \right\}. \tag{2.31}$$

Definición 2.44. Para $z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathfrak{h}^d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}^d$, $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, $g = (g_i)_{i=1}^d = \left(\left(\begin{smallmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{smallmatrix}\right)\right)_{i=1}^d \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^d$ y una función $f : \mathfrak{h}^d \to \mathbb{C}$, definimos

(a) la acción de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^d$ sobre $\mathfrak{h}^d$ por transformación de Möebius

$$gz := \left(\left(\frac{a_i z_i + b_i}{c_i z_i + d_i}\right)\right)_{i=1}^d \in \mathfrak{h}^d;$$

(b) el *factor de automorfía*

$$j(g, z) := (cz + d) \det(g)^{-1/2} = \prod_{i=1}^d (c_i z_i + d_i)(\det(g_i))^{-1/2}.$$

(c) el *operador barra* $\cdot|_k$

$$(f|_k g)(z) := j(g, z)^{-k} f(gz) = \det(g)^{k/2} (cz + d)^{-k} f(gz)$$

donde $(cz + d)^k = \prod_{i=1}^d (c_i z_i + d_i)^{k_i}$, $\det(g)^k = \prod_{i=1}^d (\det g_i)^{k_i}$.

Para toda $g, h \in \mathrm{GL}_2(F)$ y $z \in \mathfrak{h}^d \to \mathbb{C}$ se tiene que $j(gh, z) = j(g, hz) j(h, z)$ y $f|_k(gh) = (f|_k g)|_k h$.

Definición 2.45. Una *forma modular de Hilbert* de peso k para un grupo Γ con carácter χ es una función holomorfa $f : \mathfrak{h}^d \to \mathbb{C}$ que satisface $f|_k \gamma = \chi(\gamma) f$ para todo $\gamma \in \Gamma$. El espacio de tales formas será denotado por $\mathcal{M}_k(\Gamma, \chi)$.

Daremos la expansión de Fourier de dichas formas de Hilbert. El conjunto

$$\mathfrak{a} = \left\{ a \in F : \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma \right\}$$

es un ideal de F, y denotamos por $(\mathfrak{a}\mathfrak{d})'$ su dual.

PROPOSICIÓN 2.46. *(Expansión de Fourier) Sea* $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$. *Entonces* $f(z)$ *tiene una expansión de Fourier de la forma*

$$f(z) = \sum_{r \in (\mathfrak{a}\mathfrak{d})'} a_r e^{2\pi i S(rz)}, \tag{2.32}$$

donde $S(x) := \sum_i x_i$ *y* $a_r = 0$ *salvo que* $r^{(i)} \geq 0$ *para todo* i. *Además, si* $z = (x_j + iy_j)_{j=1}^d$ *se tiene*

$$a_r = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^d/\mathfrak{a})} \int_{\mathbb{R}^d/\mathfrak{a}} f(z)\, e^{-2\pi i S(rx)}\, dx_1 \ldots dx_d. \tag{2.33}$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Ga90**, §1.2]. □

OBSERVACIÓN 2.47. Todos o ninguno de los conjugados $r^{(i)}$ de r son iguales a 0. Por eso la expansión de Fourier de f tiene un término constante a_0 (que podría ser cero) y todos los otros coeficientes a_r pertenecen a elementos totalmente positivos $r \in (\mathfrak{a}\mathfrak{d})'$.

OBSERVACIÓN 2.48. La condición $[F : \mathbb{Q}] > 1$ es crucial para la validez de la proposición anterior. En el caso $F = \mathbb{Q}$, podríamos necesitar un requerimiento adicional de que f sea regular en las cúspides. Esto significa que no haya coeficientes de Fourier a_r no nulos, para $r = (r_1, \ldots, r_d)$ con algún $r_i < 0$. Si $[F : \mathbb{Q}] > 1$, el *principio de Koecher* garantiza que este requerimiento de regularidad se satisface automáticamente.

DEFINICIÓN 2.49. Una forma modular de Hilbert $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$ se dice *forma cuspidal* si para toda $\gamma \in \mathrm{GL}_2^+(F)$ el término constante en la expansión de Fourier de $f|_k\gamma$ se anula. El espacio de tales formas será denotado por $\mathcal{S}_k(\Gamma, \chi)$.

PROPOSICIÓN 2.50. *Las siguientes afirmaciones son válidas.*

(i) *Las formas modulares de Hilbert de peso 0 con carácter trivial son constantes, i.e.* $\mathcal{M}_0(\Gamma) = \mathbb{C}$ *y* $\mathcal{S}_0(\Gamma) = \{0\}$.
(ii) *Las formas modulares de Hilbert con carácter trivial que no son cuspidales existen sólo para* peso paralelo, *i.e., para* $k_1 = \cdots = k_n$. *En otras palabras,* $\mathcal{M}_k(\Gamma) = \mathcal{S}_k(\Gamma)$ *si* k *no es paralelo.*
(iii) *Una condición necesaria para la existencia de una forma modular no nula en el espacio* $\mathcal{M}_k(\Gamma, \chi)$ *es que*

$$\chi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \mathrm{sign}(a)^k \tag{2.34}$$

para toda $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$, *donde* $\mathrm{sign}(a) = (\mathrm{sign}(a^{(1)}), \ldots, \mathrm{sign}(a^{(n)}))$.

DEMOSTRACIÓN. Los incisos (i) y (ii) se pueden encontrar [**EF90**, Cap. I, §4]. Para el inciso (iii), ver [**Geb09**, pág 12]. □

Capítulo 3

Formas de Hilbert adélicas

En este capítulo definiremos las formas de Hilbert adélicas, su relación con las formas clásicas y la acción del grupo de clases.

3.1. Notación

Sea F un cuerpo de números totalmente real de dimensión d sobre $\mathbb{Q}$, es decir $[F:\mathbb{Q}] = d$. Para cada $i = 1, \ldots, d$, sean $\sigma^{(i)}$ los embeddings de F en $\mathbb{R}$. Denotamos $F_{\sigma^{(i)}} \cong \mathbb{R}$ a las completaciones de F respecto a cada embedding $\sigma^{(i)}$ y $F_\infty := \prod_{i=1}^{d} F_{\sigma^{(i)}} \cong \mathbb{R}^d$.

Denotamos $\mathcal{O}_F$ al anillo de enteros de F. Para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_F$ llamamos $F_\mathfrak{p}$ y $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ a la completación $\mathfrak{p}$–ádica de F y de $\mathcal{O}_F$ respectivamente.

Llamamos $\mathbb{A}_F$ al anillo de adeles de F, $\mathbb{A}_F^\times$ el grupo de unidades de $\mathbb{A}_F$ y $\mathbb{A}_{F,f}$ el anillo de adeles finitos. Esto es,

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_F &:= F_\infty {\prod_{\mathfrak{p}}}' F_\mathfrak{p} && \text{donde } F_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_F \text{ para casi todo } \mathfrak{p} \leq \infty,\\
\mathbb{A}_F^\times &:= F_\infty^\times {\prod_{\mathfrak{p}}}' F_\mathfrak{p}^\times && \text{donde } F_\mathfrak{p}^\times = \mathcal{O}_F^\times \text{ para casi todo } \mathfrak{p} \leq \infty,\\
\mathbb{A}_{F,f} &:= \prod_{\mathfrak{p}} F_\mathfrak{p} && \text{donde } F_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_F \text{ para casi todo } \mathfrak{p} < \infty.
\end{aligned}$$

Tenemos las siguientes inmersiones naturales de F en $\mathbb{A}_F$:

$$\begin{aligned}
i :& F \to \mathbb{A}_F, && x \mapsto \{x, x, x, \ldots\} \text{ (la inmersión diagonal);}\\
i_\infty :& F \to \mathbb{A}_F, && x \mapsto \{x_\infty, 1, 1, \ldots\} \text{ (la inmersión infinito);}\\
i_f :& F \to \mathbb{A}_F, && x \mapsto \{1_\infty, x, x, \ldots\} \text{ (la inmersión finita).}
\end{aligned}$$

Denotamos $\mathcal{C}_F$ al *grupo de clases de ideales* de F, es decir, $\mathcal{C}_F = \mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F$ donde $\mathcal{I}_F$ denota el grupo de ideales fraccionarios de F y $\mathcal{P}_F$ el subgrupo de ideales principales. Éste es un grupo abeliano finito con cardinal h_F, llamado *número de clases* de F. De manera similar, consideramos el *grupo de clases de ideales estricto* de F, $\mathcal{C}_F^+ = \mathcal{I}_F/\mathcal{P}_F^+$ donde $\mathcal{P}_F^+$ es el grupo de ideales principales generado por elementos totalmente positivos (i.e. elementos de F que en todos sus embeddings reales son positivos). Esta vez, el cardinal $\mathcal{C}_F^+$ será denotado por h_F^+ y llamado *número de clase estricto* de F.

A cada ideal fraccionario $\mathfrak{I}$ de F podemos asociarle un idele $\pi_\mathfrak{I} \in \mathbb{A}_F^\times$ que en cada lugar no arquimedeano tenga la misma valuación que $\mathfrak{I}$ (esto es, $v_\mathfrak{p}(\pi_\mathfrak{I}) = v_\mathfrak{p}(\mathfrak{I})$ para todo $\mathfrak{p} < \infty$) y sea 1 en los lugares ∞. Notar que este idele es único salvo unidades. Nosotros fijamos dicho idele correspondiente y lo denotamos $\pi_\mathfrak{I}$.

También fijamos representantes $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{h^+}$ del grupo de clases $\mathcal{C}_F^+$ donde $\mathfrak{a}_j$ es un ideal entero para todo $j \in \{1, \dots, h^+\}$ y sus correspondientes ideles asociados $\pi_{\mathfrak{a}_1}, \dots, \pi_{\mathfrak{a}_{h^+}}$. Como representante de la identidad en $\mathcal{C}_F^+$ elegimos a $\mathcal{O}_F$ y el idele asociado $\pi_{\mathcal{O}} = i(1) = \{1, 1, 1, \dots\}$.

Definimos a continuación ciertos subgrupos de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^d$. Dados $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $y = (y_1, \dots, y_d) \in (\mathbb{R}^\times)^d$ para $j = 1, \dots, d$, y $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d) \in \mathbb{R}^d$, definimos

$$\begin{aligned}
n(x) &= \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & x_d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \\
a(y) &= \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1/y \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & 1/y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_d & 0 \\ 0 & 1/y_d \end{pmatrix} \right), \\
k(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cos(\theta_d) & \sin(\theta_d) \\ -\sin(\theta_d) & \cos(\theta_d) \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Además, denotamos

$$\begin{aligned}
N &= \{n(x) : x \in \mathbb{R}^d\}, \\
A &= \{a(y) : y \in (\mathbb{R}^\times)^d\}, \text{ y} \\
K &= \{k(\theta) : \theta \in \mathbb{R}^d\}.
\end{aligned}$$

El centro Z de GL_2 es el conjunto

$$Z = \{\left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) : z \in (\mathbb{R}^\times)^d\}.$$

Notar que $Z \simeq (\mathbb{R}_{>0})^d \times \{\pm 1\}^d$.

Tenemos la siguiente igualdad $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^d = ZNAK$.

3.1.1. Subgrupos de congruencia. Definimos a continuación ciertos subgrupos de congruencia de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$, la parte finita de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. Dados $\mathfrak{I}$ un ideal fraccionario y $\mathfrak{a}$ un ideal entero de F, para cada lugar finito v de F, sea

$$K_{0,v}(\mathfrak{I}_v, \mathfrak{a}_v) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ : \ ad - bc \in \mathcal{O}_v^\times, \ c \in \mathfrak{I}_v \mathfrak{a}_v^{-1}, \ b \in \mathfrak{a}_v \right\}. \tag{3.1}$$

Sea $K_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a}) = \prod_v K_{0,v}(\mathfrak{I}_v, \mathfrak{a}_v)$ nuestro subgrupo de congruencia finito. Como caso particular, si $\mathfrak{a} = \mathcal{O}$, abreviamos $K_0(\mathfrak{I})$ en lugar de $K_0(\mathfrak{I}, \mathcal{O})$.

Observación 3.1. Sobre $\mathbb{Q}$, uno sólo necesita considerar $\mathfrak{a}_v = \mathcal{O}_v$. En el caso general, la inclusión de $\mathfrak{a}_v$ es necesaria para trabajar con cuerpos de números con número de clase mayor que 1.

También necesitamos definir ciertos grupos de congruencia clásicos. Sea

$$\Gamma_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a}) = \mathrm{GL}_2(F) \cap K_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a}) \tag{3.2}$$

donde la intersección se toma en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)_f$, es decir $\Gamma_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a})$ es el subgrupo de $\mathrm{GL}_2(F)$ tal que $i_f(\Gamma_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a})) = K_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a})$.

Explícitamente,

$$\Gamma_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathcal{O}_F, b \in \mathfrak{a}, c \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{I} \text{ y } ad - bc = u \in \mathcal{O}_F^\times \right\}. \tag{3.3}$$

Sea

$$\Gamma_N(\mathfrak{I},\mathfrak{a}) = N(F) \cap \Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a}). \tag{3.4}$$

Este subgrupo será usado para la expansión de Fourier de formas automorfas.

OBSERVACIÓN 3.2. Para $\mathfrak{a} = \mathcal{O}$, tenemos que $\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathcal{O})$ es el subgrupo de Hecke $\Gamma_0(\mathfrak{I})$.

Haremos uso del siguiente teorema de aproximación fuerte para el caso de cuerpos de números con número de clases estricto h^+ (*narrow class number*).

TEOREMA 3.3 (Aproximación Fuerte). *Tenemos las siguientes descomposiciones*

$$\mathbb{A}_F = i(F) + (F_\infty \times \prod_{\mathfrak{p}<\infty} \mathcal{O}_\mathfrak{p}),$$

$$\mathbb{A}_F^\times = \bigsqcup_{j=1}^{h^+} i(F^\times)\pi_{\mathfrak{a}_j}(F_\infty^+ \times \prod_{\mathfrak{p}<\infty} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times),$$

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) = \bigsqcup_{j=1}^{h^+} i(\mathrm{GL}_2(F)) \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{a}_j} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathrm{GL}_2^+(F_\infty) \times K_f),$$

donde K_f es cualquier subgrupo compacto abierto de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Geer88**]. □

OBSERVACIÓN 3.4. Notar la diferencia con el Teorema 2.40.

Si χ_v es un carácter ramificado (es decir, que $\chi_v(u) \neq 1$ para algún $u \in \mathcal{O}_v^\times$) de $F_v^\times$ con conductor que divide a $\mathfrak{I}_v$, éste induce un carácter (que también denotaremos χ_v) de $K_0(\mathfrak{I}_v,\mathfrak{a}_v)$ dado por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \chi_v(a_v). \tag{3.5}$$

Si χ_f es un carácter de $\mathbb{A}_{F,f}^\times$ con conductor (global) que divide a $\mathfrak{I}_v$, denotamos por χ_f al carácter de $K_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})$ definido por

$$\chi_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \prod_{v:\chi_v \text{ ramificado}} \chi_v(a_v). \tag{3.6}$$

Dado $q \in \mathbb{Z}^d$, consideramos el carácter unitario ϕ_q de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})^d$ dado por

$$\phi_q(k(\theta)) = e^{iS(q\theta)} \quad \text{para} \;\; k(\theta) \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})^d \tag{3.7}$$

donde $S(x) := \sum_{j=1}^d x_j$.

Consideramos formas automorfas sobre $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^d$ donde el centro actuará mediante un carácter central ψ que es trivial en $\left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)$ para $z \in \mathbb{R}_{>0}^d$ y en $\left(\begin{smallmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta \end{smallmatrix}\right)$ para $\zeta = \{\pm 1\}^d$, ψ está dado por

$$\psi\left(\begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \zeta_d & 0 \\ 0 & \zeta_d \end{pmatrix}\right) = \prod_{j=1}^d \zeta_j^{\xi_j} \tag{3.8}$$

donde $\xi := (\xi_1,\ldots,\xi_d) \in \{0,1\}^d$.

Elegimos un conjunto $\mathcal{P}$ de representantes de las clases de Γ-equivalencia de las cúspides de Γ.

Como representante de la cúspide ∞ tomamos al ∞. Para cada cúspide $\kappa \in \mathcal{P}$ elegimos $g_\kappa \in \mathrm{GL}_2(F)$ tal que $\kappa = g_\kappa\infty$. Para la cúspide $\kappa = \infty$ elegimos $g_\infty = \mathrm{Id}$.

3.2. Relación entre formas de Hilbert clásicas y adélicas

En esta sección daremos una correspondencia entre las formas de Hilbert clásicas y las adélicas, análogo a lo hecho en la Proposición 2.41.

El espacio $\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I})$ tiene h^+ componentes conexas parametrizadas por el grupo de clases estricto

$$\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I}) \cong \bigsqcup_{j=1}^{h^+} \left(\begin{smallmatrix} \pi_{\mathfrak{a}_j} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) i_\infty(\mathrm{GL}_2^+(F_\infty)). \tag{3.9}$$

Sea $q \in \mathbb{Z}^d$

$$\mathrm{Fun}_\chi\left(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I})\right)_q \subset L^2\big(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I})\big)$$

el espacio formado por funciones $f : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F) \to \mathbb{C}$ que cumplen

i) $\displaystyle\int_{\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/Z(\mathbb{A}_F)} |f(g)|^2 dg < \infty,$

ii) $f\left(\gamma g \left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & z\end{smallmatrix}\right) k_\infty k_f\right) = f(g)\phi_q(k_\infty)\chi_f(k_f)$ para $\gamma \in i(\mathrm{GL}_2(F))$, $z \in F_\infty^\times$, $k_\infty \in K_\infty$, $k_f \in K_0(\mathfrak{I})$.

Sea

$$\mathrm{Fun}_\chi\left(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash\mathrm{GL}_2(F_\infty)\right)_q \subset L^2\big(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash\mathrm{GL}_2(F_\infty)\big)$$

el espacio de funciones $f : \mathrm{GL}_2(F_\infty) \to \mathbb{C}$ que cumplen

i) $\displaystyle\int_{\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash\mathrm{GL}_2(F_\infty)/Z(F)} |f(g)|^2 dg < \infty,$

ii) $f(\gamma g k) = \chi_f(\gamma)^{-1}f(g)\phi_q(k)$ para $\gamma \in \Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})$, $k \in K_\infty$ donde ϕ_q es el carácter unitario del grupo compacto K_∞ definido en (3.7).

Proposición 3.5. *Tenemos el siguiente isomorfismo*

$$\mathrm{Fun}_\chi\left(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I})\right)_q \cong \bigoplus_{j=1}^{h_F^+} \mathrm{Fun}_\chi\left(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a}_j)\backslash\mathrm{GL}_2(F_\infty)\right)_q.$$

Demostración. Dada $f \in \mathrm{Fun}_\chi\left(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I})\right)_q$ definimos una aplicación $\Phi(f) = (f_{\mathfrak{a}_j})_{j=1}^{h+}$ donde $f_{\mathfrak{a}_j}$ está definida para cada $j = 1, \ldots, h^+$ por

$$f_{\mathfrak{a}_j}(g_\infty) = \overline{\chi(\pi_{\mathfrak{a}_j})} f\left(\begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{a}_j} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} g_\infty\right). \tag{3.10}$$

Queremos ver que $f_{\mathfrak{a}_j} \in \mathrm{Fun}_\chi\left(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash\mathrm{GL}_2(F_\infty)\right)_q$, esto es, $f_{\mathfrak{a}_j}$ cumple $f_{\mathfrak{a}_j}(\gamma g k) = \chi_f(\gamma)^{-1}f(g)\phi_q(k)$ para $\gamma \in \Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a}_j)$ y $k \in K_\infty$.

Por la definición de $f_{\mathfrak{a}_j}$ tenemos

$$f_{\mathfrak{a}_j}(\gamma g) = \overline{\chi(\pi_{\mathfrak{a}_j})} f\left(\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{a}_j} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\gamma g_\infty\right).$$

Como γ tiene sólo componentes en el infinito tenemos

$$f_{\mathfrak{a}_j}(\gamma g) = \overline{\chi(\pi_{\mathfrak{a}_j})} f\left(i(\gamma) i_f(\gamma^{-1})\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{a}_j} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_\infty\right).$$

Como f es invariante a izquierda por $\mathrm{GL}_2(F)$, tenemos que

$$f_{\mathfrak{a}_j}(\gamma g) = \overline{\chi(\pi_{\mathfrak{a}_j})} f\left(i_f(\gamma^{-1})\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{a}_j} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_\infty\right).$$

Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a}_j)$, $\gamma^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} d & -b\\ -c & a\end{smallmatrix}\right)$, entonces

$$i_f(\gamma^{-1})\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{a}_j} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{a}_j} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} i_f\left(\begin{pmatrix} d & -b\pi_{\mathfrak{a}_j}^{-1}\\ -c\pi_{\mathfrak{a}_j} & a\end{pmatrix}\right)$$

donde

$$i_f\left(\begin{pmatrix} d & -b\pi_{\mathfrak{a}_j}^{-1}\\ -c\pi_{\mathfrak{a}_j} & a\end{pmatrix}\right) \in K_0(\mathfrak{I})$$

pues $b \in \mathfrak{a}_j$, y por lo tanto $b\pi_{\mathfrak{a}_j} \in \mathcal{O}_v$ para todo v y además $c \in \mathfrak{a}_j^{-1}\mathfrak{I}$ por lo que $c\pi_{\mathfrak{a}_j} \in \mathfrak{I}_v$ para todo v. Luego,

$$\begin{aligned} f_{\mathfrak{a}_j}(\gamma g) =& \overline{\chi(\pi_{\mathfrak{a}_j})} f\left(\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{a}_j} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_\infty\right)\chi_f(d)\\ &= \overline{\chi(\pi_{\mathfrak{a}_j})} f\left(\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{a}_j} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_\infty\right)\chi_f(\gamma)^{-1}\\ &= f_{\mathfrak{a}_j}(g)\chi_f(\gamma)^{-1}.\end{aligned}$$

Hemos demostramos hasta aquí que

$$\mathrm{Fun}_\chi\left(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I})\right)_q \hookrightarrow \bigoplus_{j=1}^{h^+}\mathrm{Fun}_\chi\left(\Gamma_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a}_j)\backslash\mathrm{GL}_2(F_\infty)\right)_q.$$

Ahora, dada f_j forma automorfa en $\mathrm{Fun}_\chi\left(\Gamma_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a}_j)\backslash\mathrm{GL}_2(F)\right)_q$ para cada $j = 1, \ldots, h^+$, definimos $\Psi(f_1, \ldots, f_{h^+}) = f \in \mathrm{Fun}_\chi\left(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I})\right)_q$ fijando el valor de f en cada componente del espacio, esto es

$$f\left(\gamma\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{a}_j} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_\infty k_\infty k_0\right) := \chi_f(k_0) f_j(g_\infty)\phi_q(k_\infty),$$

donde $\gamma \in \mathrm{GL}_2(F)$, $g_\infty \in \mathrm{GL}_2(F_\infty)$, $k_\infty \in K_\infty$ y $k_0 \in K_0(\mathfrak{I})$.

No es difícil chequear que ambas correspondencias son una la inversa de la otra, con lo que probamos el isomorfismo. □

Debido a esta biyección, podemos asociar a cada forma automorfa adélica $f \in \mathrm{Fun}_\chi\left(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I})\right)_q$ una h^+–upla de funciones $f_{\mathfrak{a}_j} \in \mathrm{Fun}_\chi\left(\Gamma_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a}_j)\backslash\mathrm{GL}_2(F_\infty)\right)_q$ indexadas por el grupo de clases estricto de F: $f = (f_{\mathfrak{a}_j})_{j=1}^{h^+}$.

3.3. Acción del grupo de clases

En esta sección describimos la acción de los elementos de $Z(\mathbb{A}_F)$ en las componentes del espacio $\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I})$.

Utilizaremos el siguiente teorema, el cual es consecuencia de aproximación fuerte para SL_2.

TEOREMA 3.6. *Sea K un subgrupo compacto abierto de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_{F,f})$. Se tiene*

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_{F,f}) = i_f(\mathrm{SL}_2(F))K. \tag{3.11}$$

Sean $g_\infty \in \mathrm{GL}_2(F_\infty)$, $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ ideales fraccionarios de F y $\pi_\mathfrak{a}, \pi_\mathfrak{b}$ sus ideles asociados. Como consecuencia de la aproximación fuerte (en SL_2) tenemos

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{b} & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_\infty &= \begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{b}\pi_\mathfrak{a} & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{b}\end{pmatrix} g_\infty\\ &= \begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{b}^{-1} & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{b}^2\pi_\mathfrak{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_\infty\\ &= i_f(\gamma^{-1})\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{b}^2\pi_\mathfrak{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_\infty k_\gamma\end{aligned} \tag{3.12}$$

para algún $k_\gamma \in K_0(\mathfrak{I})$ y $\gamma \in \mathrm{GL}_2(F)$.

Notar que el elemento central $\left(\begin{smallmatrix}\pi_\mathfrak{b} & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{b}\end{smallmatrix}\right)$ lleva la componente $\mathfrak{a}$ a la componente $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2$. Esta acción del grupo de clases será muy útil para nuestros cálculos posteriores, por lo que es útil describir los elementos $\gamma \in \mathrm{GL}_2(F)$ que aparecen en (3.12). En [**Ve04**, §6], se muestra que

$$\gamma \in i(\mathrm{GL}_2(F)) \cap \mathrm{GL}_2(F_\infty)\begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{b}^2\pi_\mathfrak{a} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} k_\gamma \begin{pmatrix}\pi_\mathfrak{b}\pi_\mathfrak{a} & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{b}\end{pmatrix}^{-1}. \tag{3.13}$$

Denotamos por $\Gamma(\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)$ al conjunto $\{\gamma : \gamma \text{ que satisface (3.13)}\}$. Para cada $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)$ denotamos por k_γ al elemento de $K_0(\mathfrak{I})$ definido por (3.13). Ahora fijamos un elemento $\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2} \in \Gamma(\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)$.

Entonces, esta acción del grupo de clases sobre las componentes conexas del espacio $\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I})$ se traduce en una acción de los elementos del centro $Z(\mathbb{A}_{F,f})$ en $\mathrm{Fun}_\chi\left(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I})\right)$. Sea $f = (f_\mathfrak{a}) \in \mathrm{Fun}_\chi\left(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I})\right)$. Escribimos la acción del elemento $z := \left(\begin{smallmatrix}\pi_\mathfrak{b} & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{b}\end{smallmatrix}\right)$ sobre f como $z.f$. Tenemos que

$$(z.f)_\mathfrak{a}(g_\infty) = \chi(\pi_\mathfrak{b})^2\chi_f(k_{\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}})f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}(\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}g_\infty), \tag{3.14}$$

ya que por definición

$$\begin{aligned}(z.f)_\mathfrak{a}(g_\infty) &= \overline{\chi(\pi_\mathfrak{a})}f\left(\left(\begin{smallmatrix}\pi_\mathfrak{a} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\pi_\mathfrak{b} & 0\\ 0 & \pi_\mathfrak{b}\end{smallmatrix}\right)g_\infty\right)\\ &= \overline{\chi(\pi_\mathfrak{a})}f\left(i(\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}^{-1})\left(\begin{smallmatrix}\pi_\mathfrak{b}^2\pi_\mathfrak{a} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)i_\infty(\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2})g_\infty k_{\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}}\right)\\ &= \chi(\pi_\mathfrak{b}^2)\overline{\chi(\pi_\mathfrak{a}\pi_\mathfrak{b}^2)}f\left(\left(\begin{smallmatrix}\pi_{\mathfrak{b}^2}\pi_\mathfrak{a} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)i_\infty(\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2})g_\infty\right)\chi_f(k_{\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}})\\ &= \chi(\pi_\mathfrak{b}^2)f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}(i_\infty(\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2})g_\infty)\chi_f(k_{\gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2}}).\end{aligned}$$

En la segunda igualdad usamos (3.12).

LEMA 3.7. [**Ve04**, Lema14] *Se tiene que*
$\Gamma(\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : a \in \mathfrak{b}, b \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}, c \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{I}, d \in \mathfrak{b}^{-1}, ad - bc \in \mathcal{O}_F^\times \right\}.$

La descomposición de Bruhat es $\mathrm{GL}_2(F) = P_F \sqcup C_F$ donde

$$P_F = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(F) \right\}, \qquad C_F = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ c \neq 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(F) \right\}.$$

El conjunto P_F es comúnmente llamado la *celda pequeña de Bruhat*, mientras que C_F es la *celda grande de Bruhat*.

OBSERVACIÓN 3.8. El conjunto $\Gamma(\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2)$ está contenido en la celda grande de Bruhat, salvo que $\mathfrak{b}$ sea principal. Esto es, si $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2) \cap P_F$, $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ con $ad \in \mathcal{O}_F^\times$, $a \in \mathfrak{b}$, $d \in \mathfrak{b}^{-1}$. Estamos diciendo entonces que el inverso de a está en $\mathfrak{b}^{-1}$, pues $ad = u \in \mathcal{O}_F^\times$. Entonces $a^{-1}\mathfrak{b} \subseteq \mathcal{O} \Rightarrow \mathfrak{b} \subseteq a\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{b}$, es decir $\mathfrak{b} = a\mathcal{O}$.

Capítulo 4

Operadores de Hecke

A continuación definimos los operadores de Hecke adélicos y luego traducimos su acción sobre las componentes clásicas de la función dada.

4.1. Operadores de Hecke

Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo en $\mathcal{O}_F$ tal que $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{I}$. Sean $F_\mathfrak{p}$, $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$, las completaciones de F y $\mathcal{O}$ respectivamente. Sea $\pi_\mathfrak{p}$ el uniformizador del anillo local $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ y sea $\Delta(\mathfrak{p}^\ell) = \{g \in M_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p}) : \det(g) \in \pi_\mathfrak{p}^\ell \mathcal{O}_\mathfrak{p}^\times\}$. Tenemos que

$$\Delta(\mathfrak{p}^\ell) = \bigsqcup_{s=0}^{\ell} \bigsqcup_{\beta \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}/\langle \pi_\mathfrak{p}^{\ell-s}\rangle} \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^{\ell-s} & \beta \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^s \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p}) \tag{4.1}$$

(ver por ejemplo [**Bu97**, §4.6]).

Dada $f \in \mathrm{Fun}_\chi\left(\mathrm{GL}_2(F)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I})\right)$ y $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$, definimos entonces el operador de Hecke $T_{\mathfrak{p}^\ell}$ por

$$\begin{aligned} (T_{\mathfrak{p}^\ell} f)(g) &= \int_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)} f(gx)\chi_{\Delta(\mathfrak{p}^\ell)}(x)dx \\ &= \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{\beta \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}/\langle \pi_\mathfrak{p}^{\ell-s}\rangle} f\left(g \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}^{\ell-s}} & \beta \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}^s} \end{pmatrix}\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Como estamos interesados en las componentes clásicas de dichas funciones, calculamos $(T_{\mathfrak{p}^\ell} f)_\mathfrak{a}$. Vemos que

$$\begin{aligned} (T_{\mathfrak{p}^\ell} f)_\mathfrak{a}(g_\infty) &= \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{\beta \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}/\langle \pi_\mathfrak{p}^{\ell-s}\rangle} f_\mathfrak{a}\left(g_\infty \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^{\ell-s} & \beta \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^s \end{pmatrix}\right) \\ &= \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{\beta \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}/\langle \pi_\mathfrak{p}^{\ell-s}\rangle} \overline{\chi(\pi_\mathfrak{a})} f\left(\begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^{\ell-s} & \beta \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^s \end{pmatrix} g_\infty\right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Además,

$$\begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^{\ell-s} & \beta \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^{-s} & \pi_\mathfrak{a}\beta \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{a}\pi_\mathfrak{p}^\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Notamos que $\left(\begin{smallmatrix} \pi_\mathfrak{p}^{-s} & \pi_\mathfrak{a}\beta \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^s \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_{F,f})$. Entonces usamos el Teorema 3.6 para escribir

$$\begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{p}^{-s} & \pi_\mathfrak{a}\beta \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^s \end{pmatrix} = i_f(\gamma_{\beta,s})k_{\gamma_{\beta,s}},$$

donde $\gamma_{\beta,s} \in \mathrm{SL}_2(F)$ y $k_{\gamma_{\beta,s}} \in K_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a}\mathfrak{p}^\ell)$. Luego

$$\begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{a}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s} & \beta \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^s \end{pmatrix} = i_f(\gamma_{\beta,s}) \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{a}}\pi_{\mathfrak{p}}^\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}},$$

donde $\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}} \in K_0(\mathfrak{I})$ es el conjugado de $k_{\gamma_{\beta,s}}$ por $\left(\begin{smallmatrix} \pi_{\mathfrak{a}}\pi_{\mathfrak{p}}^\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Podemos agregar la componente de $\gamma_{\beta,s}$ en el infinito,

$$\begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{a}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s} & \beta \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^s \end{pmatrix} = i(\gamma_{\beta,s}) \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{a}}\pi_{\mathfrak{p}}^\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i_\infty(\gamma_{\beta,s}^{-1}) \widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}},$$

y reemplazar en (4.3), obteniendo

(4.5)

$$\begin{aligned}
(T_{\mathfrak{p}^\ell} f)_{\mathfrak{a}}(g_\infty) &= \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{\beta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\langle \pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s} \rangle} \overline{\chi(\pi_{\mathfrak{a}})} f\left(i(\gamma_{\beta,s}) \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{a}}\pi_{\mathfrak{p}}^\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i_\infty(\gamma_{\beta,s}^{-1}) g_\infty \widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}} \right) \\
&= \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{\beta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\langle \pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s} \rangle} \overline{\chi(\pi_{\mathfrak{a}})} f\left(\begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{a}}\pi_{\mathfrak{p}}^\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i_\infty(\gamma_{\beta,s}^{-1}) g_\infty \right) \chi_f(\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}}) \\
&= \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{\beta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\langle \pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s} \rangle} \chi(\pi_{\mathfrak{p}}^\ell) f_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^\ell} \left(i_\infty(\gamma_{\beta,s}^{-1}) g_\infty \right) \chi_f(\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}}).
\end{aligned}$$

Esto expresa a $(T_{\mathfrak{p}^\ell} f)_{\mathfrak{a}}$ en términos de $f_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^\ell}$.

Por lo visto en la Sección 3.3, si $\mathfrak{p}$ es un cuadrado en el grupo de clases estricto, es decir, si existe solución en el grupo de clases a la ecuación

$$[\mathfrak{p}][\mathfrak{b}]^2 = [1], \tag{4.6}$$

podemos volver de la componente $\mathfrak{a}\mathfrak{p}^\ell$ a la componente $\mathfrak{a}$.

Trabajamos a partir de ahora con ideales primos $\mathfrak{p}$ que sean cuadrados en el grupo de clases estricto. Sea $\mathfrak{b}$ un ideal entero que sea solución a la ecuación (4.6) y es decir, tal que $\mathfrak{p}\mathfrak{b}^2 = \langle \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}} \rangle$, donde $\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}} \in \mathcal{O}_F$ y es totalmente positivo.

Notar que para cada $\ell \geq 1$ tenemos $\mathfrak{p}^\ell(\mathfrak{b}^\ell)^2 = \langle \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^\ell \rangle$.

Queremos estudiar los representantes del operador de Hecke en las formas de Hilbert clásicas una vez que actuó el centro, es decir, las matrices de $\mathrm{GL}_2(F)$ que aparecen por aproximación fuerte en

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{a}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s} & \beta \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{b}}^\ell & 0 \\ 0 & \pi_{\mathfrak{b}}^\ell \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{a}}\pi_{\mathfrak{b}}^\ell\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s} & \pi_{\mathfrak{a}}\pi_{\mathfrak{b}}^\ell\beta \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^s\pi_{\mathfrak{b}}^\ell \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{b}}^{-\ell}\pi_{\mathfrak{p}}^{-s} & \pi_{\mathfrak{a}}\pi_{\mathfrak{b}}^\ell\beta \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^s\pi_{\mathfrak{b}}^\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{b}}^{2\ell}\pi_{\mathfrak{p}}^\ell\pi_{\mathfrak{a}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Como $\left(\begin{smallmatrix} \pi_{\mathfrak{b}}^{-\ell}\pi_{\mathfrak{p}}^{-s} & \pi_{\mathfrak{a}}\pi_{\mathfrak{b}}^\ell\beta \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^s\pi_{\mathfrak{b}}^\ell \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_{F,f})$, utilizamos aproximación fuerte y escribimos

$$\begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{b}}^{-\ell}\pi_{\mathfrak{p}}^{-s} & \pi_{\mathfrak{a}}\pi_{\mathfrak{b}}^\ell\beta \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^s\pi_{\mathfrak{b}}^\ell \end{pmatrix} = i_f(\gamma_{\beta,s}) k_{\gamma_{\beta,s}} \tag{4.7}$$

donde $\gamma_{\beta,s} \in (\mathrm{SL}_2(F))^d$ y $k_{\gamma_{\beta,s}} \in K_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a})$ (con abuso de notación).

Luego,

(4.8)
$$\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{a}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s} & \beta\\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^{s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{b}}^{\ell} & 0\\ 0 & \pi_{\mathfrak{b}}^{\ell}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{b}}^{-\ell}\pi_{\mathfrak{p}}^{-s} & \pi_{\mathfrak{a}}\pi_{\mathfrak{b}}^{\ell}\beta\\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^{s}\pi_{\mathfrak{b}}^{\ell}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{b}}^{2\ell}\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell}\pi_{\mathfrak{a}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$= i_f(\gamma_{\beta,s})\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{b}}^{2\ell}\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell}\pi_{\mathfrak{a}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}}$$
$$= i(\gamma_{\beta,s})\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{b}}^{2\ell}\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell}\pi_{\mathfrak{a}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}i_\infty(\gamma_{\beta,s}^{-1})\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}},$$

donde $\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}}\in K_0(\mathfrak{I})$ es el conjugado de $k_{\gamma_{\beta,s}}$ por $\left(\begin{smallmatrix}\pi_{\mathfrak{b}}^{2\ell}\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell}\pi_{\mathfrak{a}} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Como $\mathfrak{b}^{2\ell}\mathfrak{p}^{\ell}=\langle\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell}\rangle$, se tiene $\pi_{\mathfrak{b}}^{2\ell}\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell}=i_f(\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell})u$ para algún $u\in\prod_{v<\infty}\mathcal{O}_v^{\times}$, por lo tanto

(4.9)
$$\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{a}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s} & \beta\\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^{s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{b}}^{\ell} & 0\\ 0 & \pi_{\mathfrak{b}}^{\ell}\end{pmatrix}=$$
$$i(\gamma_{\beta,s})i\left(\begin{pmatrix}\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{a}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}i_\infty\left(\begin{pmatrix}\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\gamma_{\beta,s}^{-1}\right)\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}}.$$

Por (3.14), si reemplazamos la expresión anterior en (4.5) obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.1. *La siguiente relación entre $(T_{\mathfrak{p}^\ell}f)_{\mathfrak{a}}$ y $f_{\mathfrak{a}}$ es válida:*
$$(T_{\mathfrak{p}^\ell}f)_{\mathfrak{a}}(g_\infty)=\sum_{s=0}^{\ell}\sum_{\beta\in\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\langle\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s}\rangle}f_{\mathfrak{a}}\left(i_\infty\left(\begin{pmatrix}\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\gamma_{\beta,s}^{-1}\right)g_\infty\right)\chi_f(\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}}).$$

Demostración. Reemplazando (4.9) en (4.5) y usando (3.14) obtenemos
$$(T_{\mathfrak{p}^\ell}f)_{\mathfrak{a}}(g_\infty)=\sum_{s=0}^{\ell}\sum_{\beta\in\frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}{\langle\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s}\rangle}}\overline{\chi(\pi_{\mathfrak{a}})}f\left(\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{a}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s} & \beta\\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^{s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{b}}^{\ell} & 0\\ 0 & \pi_{\mathfrak{b}}^{\ell}\end{pmatrix}g_\infty\right)$$
$$=\sum_{s=0}^{\ell}\sum_{\beta\in\frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}{\langle\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s}\rangle}}\overline{\chi(\pi_{\mathfrak{a}})}f\left(i\left(\gamma_{\beta,s}\begin{pmatrix}\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{a}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}i_\infty\left(\gamma_{\beta,s}\begin{pmatrix}\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)^{-1}g_\infty\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}}\right)$$
$$=\sum_{s=0}^{\ell}\sum_{\beta\in\frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}{\langle\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s}\rangle}}\overline{\chi(\pi_{\mathfrak{a}})}f\left(\begin{pmatrix}\pi_{\mathfrak{a}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}i_\infty\left(\gamma_{\beta,s}\begin{pmatrix}\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)^{-1}g_\infty\right)\chi_f(\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}})$$
$$=\sum_{s=0}^{\ell}\sum_{\beta\in\frac{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}{\langle\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell-s}\rangle}}f_{\mathfrak{a}}\left(i_\infty\left(\gamma_{\beta,s}\begin{pmatrix}\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)^{-1}g_\infty\right)\chi_f(\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}}).$$

□

Será de utilidad estudiar las matrices $\gamma_{\beta,s}\in\mathrm{SL}_2(F)$ que aparecen en la ecuación (4.7) al hacer aproximación fuerte en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_f)$.

Hacemos distinción de dos casos: cuando $\mathfrak{p}^s\mathfrak{b}^\ell$ es principal y aquellos casos en los que no.

Si $s \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$ es tal que $\mathfrak{p}^s\mathfrak{b}^\ell$ es principal, entonces podemos tomar $\gamma_{\beta,s}$ una matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{b}^{-\ell}\pi_\mathfrak{p}^{-s} & \pi_\mathfrak{a}\pi_\mathfrak{b}^\ell\beta \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^s\pi_\mathfrak{b}^\ell \end{pmatrix} = i_f\left(\begin{pmatrix} a_s^{-1} & 0 \\ 0 & a_s \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & a_s\pi_\mathfrak{a}\pi_\mathfrak{b}^\ell\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

donde $a_s \in \mathcal{O}_F$ tal que $\langle a_s\rangle = \mathfrak{p}^s\mathfrak{b}^\ell$. Es decir, si $\mathfrak{p}^s\mathfrak{b}^\ell$ es principal, tenemos que

$$\gamma_{\beta,s}^{-1} = \begin{pmatrix} a_s & 0 \\ 0 & a_s^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(F) \text{ y} \tag{4.11}$$

$$k_{\gamma_{\beta,s}} = \begin{pmatrix} 1 & a_s\pi_\mathfrak{a}\pi_\mathfrak{b}^\ell\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K_0(\mathfrak{I}). \tag{4.12}$$

En el caso en que $\mathfrak{p}^s\mathfrak{b}^\ell$ no es principal, podemos obtener información de $\gamma_{\beta,s}$ a partir de la ecuación (4.8). En este caso tenemos

(4.13)
$$i_f(\gamma_{\beta,s}^{-1}) \in i_f(\mathrm{GL}_2(F)) \cap \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{b}^{2\ell}\pi_\mathfrak{p}^\ell\pi_\mathfrak{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_0(\mathfrak{I}) \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{b}^{-\ell}\pi_\mathfrak{p}^{s-\ell}\pi_\mathfrak{a}^{-1} & -\beta\pi_\mathfrak{b}^{-\ell}\pi_\mathfrak{p}^{-\ell} \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^{-s}\pi_\mathfrak{b}^{-\ell} \end{pmatrix}.$$

Sea $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in K_0(\mathfrak{I})$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{b}^{2\ell}\pi_\mathfrak{p}^\ell\pi_\mathfrak{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{b}^{-\ell}\pi_\mathfrak{p}^{s-\ell}\pi_\mathfrak{a}^{-1} & -\beta\pi_\mathfrak{b}^{-\ell}\pi_\mathfrak{p}^{-\ell} \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^{-s}\pi_\mathfrak{b}^{-\ell} \end{pmatrix} \\
&\quad = \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{b}^{2\ell}\pi_\mathfrak{p}^\ell\pi_\mathfrak{a}a & \pi_\mathfrak{b}^{2\ell}\pi_\mathfrak{p}^\ell\pi_\mathfrak{a}b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{b}^{-\ell}\pi_\mathfrak{p}^{s-\ell}\pi_\mathfrak{a}^{-1} & 0 \\ 0 & \pi_\mathfrak{p}^{-s}\pi_\mathfrak{b}^{-\ell} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\beta\pi_\mathfrak{p}^{-s}\pi_\mathfrak{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{b}^\ell\pi_\mathfrak{p}^s a & \pi_\mathfrak{b}^\ell\pi_\mathfrak{p}^{\ell-s}\pi_\mathfrak{a}b \\ \pi_\mathfrak{a}^{-1}\pi_\mathfrak{b}^{-\ell}\pi_\mathfrak{p}^{s-\ell}c & \pi_\mathfrak{p}^{-s}\pi_\mathfrak{b}^{-\ell}d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\beta\pi_\mathfrak{p}^{-s}\pi_\mathfrak{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

y cuando intersecamos con $i_f(\mathrm{GL}_2(F))$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{b}^\ell\pi_\mathfrak{p}^s a & \pi_\mathfrak{b}^\ell\pi_\mathfrak{p}^{\ell-s}\pi_\mathfrak{a}b \\ \pi_\mathfrak{a}^{-1}\pi_\mathfrak{b}^{-\ell}\pi_\mathfrak{p}^{s-\ell}c & \pi_\mathfrak{p}^{-s}\pi_\mathfrak{b}^{-\ell}d \end{pmatrix} \cap i_f(\mathrm{GL}_2(F)) \in i_f\begin{pmatrix} \mathfrak{p}^s\mathfrak{b}^\ell & \mathfrak{b}^\ell\mathfrak{p}^{\ell-s}\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-\ell}\mathfrak{p}^{s-\ell}\mathfrak{I} & \mathfrak{p}^{-s}\mathfrak{b}^{-\ell} \end{pmatrix}.$$

Como el determinante es una unidad, obtenemos que

$$\begin{pmatrix} \pi_\mathfrak{b}^\ell\pi_\mathfrak{p}^s a & \pi_\mathfrak{b}^\ell\pi_\mathfrak{p}^{\ell-s}\pi_\mathfrak{a}b \\ \pi_\mathfrak{a}^{-1}\pi_\mathfrak{b}^{-\ell}\pi_\mathfrak{p}^{r-\ell}c & \pi_\mathfrak{p}^{-s}\pi_\mathfrak{b}^{-\ell}d \end{pmatrix} \cap i_f(\mathrm{GL}_2(F)) \in i_f\left(\Gamma(\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell-2s} \mapsto \mathfrak{a}\mathfrak{p}^\ell\mathfrak{b}^{2\ell})\right).$$

Por otro lado,

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta\pi_\mathfrak{p}^{-s}\pi_\mathfrak{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cap i_f(\mathrm{GL}_2(F)) \in \Gamma_N(\mathfrak{I}, \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell-2s})$$

ya que $\beta \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}/\langle\pi_\mathfrak{p}^{\ell-s}\rangle$ entonces $\beta\pi_\mathfrak{p}^{-s}\pi_\mathfrak{a} \cap i(F) \in i_f\left(\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell-2s}\right)$.

Hemos obtenido la descomposición

$$i_\infty(\gamma_{\beta,s}^{-1}) = \gamma_{\alpha,s}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.14}$$

donde

$$\gamma_{\alpha,s} = \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ c_s & d_s \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathfrak{p}^s\mathfrak{b}^\ell & \mathfrak{b}^\ell\mathfrak{p}^{\ell-s}\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-\ell}\mathfrak{p}^{s-\ell}\mathfrak{J} & \mathfrak{p}^{-s}\mathfrak{b}^{-\ell} \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

$ad-bc = u \in \mathcal{O}_F^\times$, y $\alpha \in \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell-2s}$. Notar que $v_\mathfrak{p}(a_s) = s + v_\mathfrak{p}(\mathfrak{b}^\ell)$ y para los primos $\mathfrak{q}$ que dividen a $\mathfrak{b}^\ell$, $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, $v_\mathfrak{q}(a_s) = v_\mathfrak{q}(\mathfrak{b}^\ell)$ y como $\mathfrak{p}^s\mathfrak{b}^\ell$ no es principal, a_s no puede tener valuación 0 en todos los otros primos.

Antes de reemplazar esto en la Proposición 4.1 podemos decir un poco más sobre (4.15).

Lema 4.2. *Sea $\gamma_{\alpha,s}$ como en* (4.15). *Entonces*

$$\gamma_{\alpha,s} = \widetilde{\gamma_{\alpha,s}}p_{\alpha,s} \tag{4.16}$$

donde $\widetilde{\gamma_{\alpha,s}} \in \Gamma_0(\mathfrak{J}, \mathfrak{a}\mathfrak{p}^\ell\mathfrak{b}^{2\ell})$ y $p_{\alpha,s}$ es un elemento parabólico.

Demostración. Si $c = 0$ entonces no hay nada que probar.

Supongamos ahora que $c \neq 0$. Observamos que $a \neq 0$ pues si $a = 0$ entonces $bc = u$ lo que contradice a $bc \in \mathfrak{J}$. Como $a \in \mathfrak{p}^s\mathfrak{b}^\ell$ y $c \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-\ell}\mathfrak{p}^{s-\ell}\mathfrak{J}$ existe $i \in \mathfrak{J}$ tal que $iac^{-1} \in \mathfrak{a}\mathfrak{p}^\ell\mathfrak{b}^{2\ell}$. Entonces podemos descomponer

$$\gamma_{\alpha,s} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ac^{-1}i \\ ca^{-1} & i+u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -ic^{-1}+b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Como $ac^{-1}i \in \mathfrak{a}\mathfrak{p}^\ell\mathfrak{b}^{2\ell}$, $ca^{-1} \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{p}^{-\ell}\mathfrak{b}^{-2\ell}\mathfrak{J}$ e $i+u \in \mathcal{O}_F$, tenemos que $\begin{pmatrix} 1 & ac^{-1}i \\ ca^{-1} & i+u \end{pmatrix} \in \Gamma_0(\mathfrak{J}, \mathfrak{a}\mathfrak{p}^\ell\mathfrak{b}^{2\ell})$. ☐

Proposición 4.3. *Tenemos que*

$$(T_{\mathfrak{p}^\ell}f)_\mathfrak{a}(g_\infty) = \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell-2s}} f_\mathfrak{a}\left(\begin{pmatrix} \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}a_s & \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}b_s \\ 0 & a_s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_\infty \right) \tag{4.17}$$

donde $a_s \in \mathfrak{p}^s\mathfrak{b}^\ell$.

Demostración. Reemplazando en la Proposición 4.1 lo obtenido en (4.8) y en el Lema 4.2, obtenemos que

$$\begin{aligned}
(T_{\mathfrak{p}^\ell}f)_\mathfrak{a}(g_\infty) &= \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{\beta \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}/\langle \pi_\mathfrak{p}^{\ell-s}\rangle} f_\mathfrak{a}\left(i_\infty \left(\gamma_{\beta,s} \begin{pmatrix} \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} g_\infty \right) \chi_f(\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}}) \\
&= \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell-2s}} f_\mathfrak{a}\left(i_\infty \left(\begin{pmatrix} \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \gamma_{\alpha,s} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_\infty \right) \chi_f(\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}}) \\
&= \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{\alpha \in \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell-2s}}} f_\mathfrak{a}\left(i_\infty \left(\begin{pmatrix} \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^\ell & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \widetilde{\gamma_{\alpha,s}}p_{\alpha,s} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_\infty \right) \chi_f(\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}}).
\end{aligned}$$

Como el elemento $i_\infty\left(\left(\begin{smallmatrix}\eta^{\ell}_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\right)^{-1}$ conjuga elementos de $\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell}\mathfrak{b}^2)$ en elementos de $\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})$, tenemos que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\eta^{-\ell}_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}} & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{O}_F & \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell}\mathfrak{b}^2\\ \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{p}^{-\ell}\mathfrak{b}^{-2}\mathfrak{I} & \mathcal{O}_F\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\eta^{-\ell}_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}\mathcal{O}_F & \eta^{-\ell}_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell}\mathfrak{b}^2\\ \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{p}^{-\ell}\mathfrak{b}^{-2}\mathfrak{I} & \mathcal{O}_F\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\mathcal{O}_F & \mathfrak{a}\\ \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{I} & \mathcal{O}_F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta^{-\ell}_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}} & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$i_\infty\left(\begin{pmatrix}\eta^{\ell}_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)^{-1}\widetilde{\gamma_{\alpha,s}} = \widetilde{\gamma}\, i_\infty\left(\begin{pmatrix}\eta^{\ell}_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)^{-1}$$

donde $\widetilde{\gamma}\in\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})$. Esto, junto a la descripción dada sobre $p_{\alpha,s}$ demuestra la proposición. □

4.2. Relación entre términos de Fourier y autovalores de Hecke

Nuestro siguiente objetivo es relacionar los términos de Fourier de $(T_{\mathfrak{p}^\ell}f)_{\mathfrak{a}}$ con los de $f_{\mathfrak{a}}$.

4.2.1. Coeficientes de Fourier. En [**BM09**, §2.2, §2.3], se normalizan los términos de Fourier de las formas automorfas en la cúspide ∞. Esta normalización será utilizada para nuestros resultados.

Para cualquier $r\in\mathbb{R}^d$ definimos el carácter χ_r de N dado por

$$\chi_r(n(x)) = e^{2\pi i S(rx)}. \tag{4.18}$$

donde la función $S:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ está dada por $S(x)=\sum_j x_j$ es tal que extiende a la función $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}:F\to\mathbb{Q}$.

Toda función continua f sobre $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^d$ que satisface $f(\gamma g)=\chi(d)f(g)$ para toda $g\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^d$ y toda $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma$ tiene expansión de Fourier en el ∞

$$f(ng) = \sum_{r\in\mathfrak{d}^{-1}}\chi_r(n)F_rf(g)\quad (n\in N) \tag{4.19}$$

donde

$$F_rf(g) := \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^d/\mathcal{O})}\int_{\mathbb{R}^d/\mathcal{O}} e^{-2\pi i S(rx)}f(n(x)g)dx. \tag{4.20}$$

Si la función f también satisface $C_jf=(\frac14-\nu_j^2)f$ para $1\le j\le d$ con $\nu_j\in\mathbb{C}$ donde C_j denota el operador de Casimir en el j-ésimo factor de G, los términos de Fourier F_rf son también autofunciones de los operadores de Casimir. Esto, junto con la condición de crecimiento: para cada cúspide $\kappa\in\mathcal{P}$, $f(g_\kappa a(y)g)=O(N(y)^a)$ cuando $y\to\infty$ para algún a que depende de f y κ, implica para $r\neq 0$ que el término de Fourier F_rf es un múltiplo de la siguiente función

$$W_q(r,\nu;na(y)k) := \chi_r(n)\phi_q(k)\prod_{j=1}^{d}W_{q_j\,\mathrm{sign}(r_j)/2,\nu_j}(4\pi|r_j|y_j), \tag{4.21}$$

donde $W_{q_j\,\mathrm{sign}(r_j)/2,\nu_j}$ es la función de Whittaker.

Debido a la estructura de las representaciones automorfas de cuadrado integrable $\varpi = \otimes_j \varpi_j$ se puede conseguir una base ortogonal $(\psi_{\varpi,q})$ del espacio de Hilbert asociado a ϖ.

DEFINICIÓN 4.4. Definimos *el inverso del diferente* de $\mathcal{O}_F$ sobre $\mathbb{Z}$ como

$$\mathfrak{d}^{-1} = \{x \in F \ : \ S(x\xi) \in \mathbb{Z} \text{ para todo } \xi \in \mathcal{O}_F\}. \tag{4.22}$$

Este es un ideal fraccionario en F.

Definimos los coeficientes de Fourier $c^r(\varpi)$ de ϖ con orden $r \in \mathfrak{d}^{-1}$ por

$$F_r\psi_{\varpi,q}(g) = c^r(\varpi)d^r(q,\nu_\varpi)W_q(r,\nu_\varpi;g) \tag{4.23}$$

para $q \in \mathbb{Z}^d$ un peso en ϖ donde

$$d^r(q,\nu) := \frac{1}{\sqrt{2^d|D_F N(r)|}} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{\pi i q_j}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu_j + \frac{q_j}{2}\operatorname{sign}(r_j)\right)}. \tag{4.24}$$

4.2.2. Relación entre coeficientes de Fourier.

PROPOSICIÓN 4.5. *Para* $s = 0, 1, \ldots, \ell$ *sea*

$$f^{(s)}(g_\infty) := \sum_{\alpha \in \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell-2s}}} f_{\mathfrak{a}}\left(\begin{pmatrix} \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}a_s & \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}b_s \\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1\end{pmatrix} g_\infty\right) \tag{4.25}$$

con $a_s \in \mathfrak{p}^s\mathfrak{b}$. *La función* $f^{(s)}$ *es* $\Gamma_N(\mathfrak{I},\mathfrak{a})$*–invariante a izquierda y sus términos de Fourier están dados por*

$$F_r f^{(s)}(g_\infty) = \begin{cases} \frac{N(\mathfrak{p})^s N(\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell})}{N(a_s^2)} F_{\frac{r\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell}}{a_s^2}} f_{\mathfrak{a}}\left(\begin{pmatrix} a_s\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell} & b_s\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell} \\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix} g_\infty\right) & \text{si } r \in \mathfrak{p}^s\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}, \\ 0 \quad \text{otros } r. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos que $f^{(s)}$ es $\Gamma_N(\mathfrak{I},\mathfrak{a})$–invariante a izquierda. Esto es porque el conjunto

$$\bigsqcup_{\alpha \in \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell-2s}}} \Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a}) \begin{pmatrix} a_s\eta_{\pi^\ell,\mathfrak{b}}^{-1} & b_s\eta_{\pi^\ell,\mathfrak{b}}^{-1} \\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

es invariante a derecha por el grupo $\Gamma_N(\mathfrak{I},\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}) = \{n(\omega) \ : \ \omega \in \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}\}$ y este grupo contiene a $\Gamma_N(\mathfrak{I},\mathfrak{a}) = \{n(\omega) \ : \ \omega \in \mathfrak{a}\}$ ya que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}$.

Entonces $f^{(s)}$ tiene expansión de Fourier. Definimos para cualquier ideal $\mathfrak{c}$ de F, $v(\mathfrak{c}) := \operatorname{Vol}(\mathbb{R}^d/\mathfrak{c})$.

$$\begin{aligned} F_{r,\mathfrak{a}}f^{(s)}(g_\infty) &:= \frac{1}{v(\mathfrak{a})}\int_{\mathbb{R}^d/\mathfrak{a}} e^{-2\pi i S(rx)} f^{(s)}(n(x)g_\infty)dx \\ &= \frac{1}{v(\mathfrak{a})}\int_{\mathbb{R}^d/\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}} \sum_{\alpha \in \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}}{\mathfrak{a}}} e^{-2\pi i S(r(x+\alpha))} f^{(s)}(n(x+\alpha)g_\infty)dx \\ &= \frac{1}{v(\mathfrak{a})}\left(\sum_{\alpha \in \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}}{\mathfrak{a}}} e^{-2\pi i S(r\alpha)}\right)\int_{\mathbb{R}^d/\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}} e^{-2\pi i S(rx)} f^{(s)}(n(x)g_\infty)dx. \end{aligned}$$

Notar que

$$\sum_{\alpha\in\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}}{\mathfrak{a}}} e^{-2\pi i S(r\alpha)} = \begin{cases} N(\mathfrak{p}^s) \text{ si } r\in\mathfrak{p}^s\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1} \\ 0 \;\text{ otro caso }. \end{cases}$$

y que $\sum_{\alpha\in\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}}{\mathfrak{a}}} f^{(s)}(n(x+\alpha)g_\infty)$ es $\Gamma_N(\mathfrak{I},\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s})$–invariante. Basta entonces calcular los coeficientes de Fourier para $r\in\mathfrak{p}^s\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$.

$$F_{r,\mathfrak{a}}f^{(s)}(g_\infty) := \frac{N(\mathfrak{p})^s}{v(\mathfrak{a})}\int_{\mathbb{R}^d/\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}} e^{-2\pi i S(rx)} f^{(s)}(n(x)g_\infty)dx$$
$$= \frac{N(\mathfrak{p})^s}{v(\mathfrak{a})}\int_{\mathbb{R}^d/\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}} e^{-2\pi i S(rx)}\sum_{\alpha\in\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell-2s}}} f_\mathfrak{a}\left(\begin{pmatrix}\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}a_s & \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}b_s\\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix}n(x)g_\infty\right)dx$$
$$= \frac{N(\mathfrak{p})^s}{v(\mathfrak{a})}\int_{\mathbb{R}^d/\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell-2s}} e^{-2\pi i S(rx)} f_\mathfrak{a}\left(\begin{pmatrix}\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}a_s & \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}b_s\\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix}n(x)g_\infty\right)dx$$

Como

$$\begin{pmatrix}\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}a_s & \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}b_s\\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & x\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}a_s^2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_s\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell} & b_s\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}\\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix}$$

sigue que

$$F_{r,\mathfrak{a}}f^{(s)}(g_\infty) :=$$
$$\frac{N(\mathfrak{p})^s}{v(\mathfrak{a})}\int_{\mathbb{R}^d/\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell-2s}} e^{-2\pi i S(rx)} f_\mathfrak{a}\left(n(x\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}a_s^2)\begin{pmatrix}\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}a_s & \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}b_s\\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix}g_\infty\right)dx$$

Hacemos un cambio de variables $x\mapsto x\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell}a_s^{-2}$

$$F_{r,\mathfrak{a}}f^{(s)}(g_\infty) := \frac{N(\mathfrak{p})^s}{v(\mathfrak{a})}\frac{N(\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell})}{N(a_s^2)}.$$
$$\int_{\mathbb{R}^d/\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}a_s^2\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell-2s}} e^{-2\pi i S\left(\frac{rx\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell}}{a_s^2}\right)} f_\mathfrak{a}\left(n(x)\begin{pmatrix}\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}a_s & \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}b_s\\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix}g_\infty\right)dx$$

Como $\langle\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell}\rangle = \mathfrak{p}^\ell\mathfrak{b}^2$ y $a_s\in\mathfrak{p}^s\mathfrak{b}$, tenemos que $\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}a_s^2\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\ell-2s}\subseteq\mathcal{O}_F$. Luego,

$$F_{r,\mathfrak{a}}f^{(s)}(g_\infty) := \frac{N(\mathfrak{p})^s}{v(\mathfrak{a})}\frac{N(\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell})}{N(a_s^2)}$$
$$\int_{\mathbb{R}^d/\mathfrak{a}} e^{-2\pi i S\left(\frac{rx\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell}}{a_s^2}\right)} f_\mathfrak{a}\left(n(x)\begin{pmatrix}\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}a_s & \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell}b_s\\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix}g_\infty\right)dx$$
$$= \frac{N(\mathfrak{p})^s N(\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell})}{N(a_s^2)} F_{\frac{r\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{\ell}}{a_s^2}} f_\mathfrak{a}\left(\begin{pmatrix}a_s\eta_{\pi^\ell,\mathfrak{b}}^{-1} & b_s\eta_{\pi^\ell,\mathfrak{b}}^{-1}\\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix}g_\infty\right).$$

□

COROLARIO 4.6. *Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de $\mathcal{O}_F$ que no divide a $\mathfrak{I}$, y tal que $\mathfrak{p}^\ell$ es un cuadrado en el grupo de clases estricto. Sea f una forma automorfa. Tenemos la siguiente relación*

$$F_r(T_{\mathfrak{p}^\ell}f)_{\mathfrak{a}}(g_\infty) = \sum_{s=0}^{\ell} \frac{N(\mathfrak{p})^s N(\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}})}{N(a_s^2)} F_{\frac{r\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}} f_{\mathfrak{a}}\left(\begin{pmatrix} a_s\eta^{-1}_{\pi^\ell,\mathfrak{b}} & b_s\eta^{-1}_{\pi^\ell,\mathfrak{b}} \\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix} g_\infty\right).$$

DEMOSTRACIÓN. La afirmación sigue de que las $f^{(s)}$ son las sumas internas de la relación escrita en la Proposición 4.3. □

Ahora consideramos la acción de los operadores de Hecke sobre el espacio cuspidal $\mathrm{Fun}_\chi\big(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2(F_\infty)\big)_q \subset L^2\big(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2(F_\infty)\big)$ y definimos los autovalores de los operadores de Hecke que estudiamos.

Como todos los $T_{\mathfrak{p}^\ell}$ son operadores autoadjuntos acotados y conmutan con los operadores de Casimir C_j, $j = 1,\dots,d$, podemos elegir un sistema ortogonal $\{V_\varpi\}$ de subespacios cuspidales irreducibles tal que $T_{\mathfrak{p}^\ell}V_\varpi \subset V_\varpi$ para cada ϖ. De hecho, $T_{\mathfrak{p}^\ell}$ actúa por $\lambda_{\varpi,\mathfrak{p}^\ell}\mathrm{Id}.$ sobre V_ϖ donde $\lambda_{\varpi,\mathfrak{p}^\ell} \in \mathbb{R}$ es el autovalor de Hecke.

Podemos relacionar los autovalores de $T_{\mathfrak{p}^\ell}$ y los coeficientes de Fourier de las representaciones automorfas cuspidales ϖ.

TEOREMA 4.7. *Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo entero coprimo con $\mathfrak{I}$ y tal que $\mathfrak{p}^\ell$ sea un cuadrado en el grupo de clases estricto. Sea $r \in \mathfrak{d}^{-1}$. Para cada espacio cuspidal irreducible V_ϖ invariante por los operadores de Hecke $T_{\mathfrak{p}^\ell}$ tenemos la siguiente relación*

$$\lambda_{\mathfrak{p}^\ell} c^r(\varpi) = \sum_{s=0}^{\ell} N(\mathfrak{p})^s N(\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}})^{1/2} e^{2\pi i S\left(\frac{rb_s}{a_s}\right)} \chi_f(k_{\gamma_s}) c^{\frac{r\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}}(\varpi),$$

donde $\langle \eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}\rangle = \mathfrak{p}^\ell\mathfrak{b}^2$, $a_s \in \mathfrak{p}^s\mathfrak{b}$ y $b_s \in F$.

OBSERVACIÓN 4.8. Observar la analogía con la fórmula (2.11).

DEMOSTRACIÓN. Sea q un peso que aparezca en V_ϖ. Usamos (4.23) en la relación del Corolario 4.15

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathfrak{p}^\ell,\varpi} c^r(\varpi) d^r(q,\nu_\varpi;g) W_q(r,\nu_\varpi;g) = \\ \sum_{s=0}^{\ell} \frac{N(\mathfrak{p}^s)N(\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}})}{N(a_s^2)} \chi_f(k_{\gamma_s}) c^{\frac{r\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}}(\varpi) d^{\frac{r\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}}(q,\nu_\varpi) W_q\Big(\frac{r\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2},\nu_\varpi;p_s g\Big)\end{aligned}$$

donde $p_s = \begin{pmatrix} a_s\eta^{-1}_{\pi^\ell,\mathfrak{b}} & b_s\eta^{-1}_{\pi^\ell,\mathfrak{b}} \\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix}$.

Utilizando las definiciones (4.21) y (4.24) observamos que

$$W_q\Big(\frac{r\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2},\nu_\varpi;p_s g\Big) = e^{2\pi i S\left(\frac{rb_s}{a_s}\right)} W_q(r,\nu_\varpi;g) \ \text{ y}$$

$$d^{\frac{r\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}}(q,\nu_\varpi) = \frac{|N(a_s)|}{N(\eta_{\pi^\ell,\mathfrak{b}})^{1/2}} d^r(q,\nu_\varpi).$$

Luego, la proposición sigue.

□

Observación 4.9. En [**BM13**, Thm 4.5] obtienen una relación para los $T_{\mathfrak{p}^2}$ análoga a la nuestra pero que involucra coeficientes de Fourier en varias cúspides

$$\lambda_{\varpi,\mathfrak{p}^2} c^{\infty,r}(\varpi) = \sum_{\substack{s=0 \\ r\in\mathfrak{p}^s\mathfrak{d}^{-1}}}^{2} N(\mathfrak{p}^s)\chi(g_{\kappa(s)}p_s)^{-1}|N(a_s)|\Big(\prod_j \operatorname{sign}(a_{s_j})\Big) \\ e^{2\pi i S(rb_s/a_s^3)} c^{\kappa(s),r/a_s^2}(\varpi).$$

4.3. Caso $\ell = 1$. Los $T_{\mathfrak{p}}$

En esta sección haremos explícitos los resultados de la Sección 4.2 para el caso particular $\ell = 1$, es decir, para $T_{\mathfrak{p}}$.

Tenemos explícitamente, $\Delta(\mathfrak{p}) = \{g \in M_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) : \text{tal que } \det(g) \in \pi_{\mathfrak{p}}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^\times\}$, se descompone

$$\begin{aligned} \Delta(\mathfrak{p}) &= \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \\ &= \bigsqcup_{s=0}^{1} \bigsqcup_{\beta\in\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\langle\pi_{\mathfrak{p}^{1-s}}\rangle} \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}}^{1-s} & \beta \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^{s} \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \\ &= \bigsqcup_{\beta\in\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\pi_{\mathfrak{p}}} \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \bigsqcup \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \end{aligned} \tag{4.26}$$

Dada $f \in L^2\big(\mathrm{GL}_2(F)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)/K_0(\mathfrak{I})\big)$ y $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ tenemos que el operador $T_{\mathfrak{p}}$ queda

$$\begin{aligned} (T_{\mathfrak{p}}f)(g) &= \int_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)} f(gx)\chi_{\Delta(\mathfrak{p})}(x)dx \\ &= \sum_{\beta\in\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\pi_{\mathfrak{p}}} f\left(g\begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + f\left(g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix}\right) \end{aligned} \tag{4.27}$$

Como estamos interesados en las componentes clásicas de dichas funciones, describimos $(T_{\mathfrak{p}}f)_{\mathfrak{a}}$. Reemplazando $\ell = 1$ en (4.5) tenemos

$$\begin{aligned} (T_{\mathfrak{p}}f)_{\mathfrak{a}}(g_\infty) &= \sum_{s=0}^{1} \sum_{\beta\in\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\pi_{\mathfrak{p}}} f_{\mathfrak{a}}\left(g_\infty \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}}^{1-s} & \beta \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}}^{s} \end{pmatrix}\right) \\ &= \sum_{\beta\in\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\pi_{\mathfrak{p}}} f_{\mathfrak{a}}\left(g_\infty \begin{pmatrix} \pi_{\mathfrak{p}} & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + f_{\mathfrak{a}}\left(g_\infty \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix}\right) \\ &= \sum_{s=0} \sum_{\beta\in\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\pi_{\mathfrak{p}}} \chi(\pi_{\mathfrak{p}}) f_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}}(i_\infty(\gamma_{\beta,s}^{-1})g_\infty)\chi_f(\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}}) \end{aligned} \tag{4.28}$$

lo cual muestra que $T_{\mathfrak{p}}$ mueve la componente $\mathfrak{a}$ a la componente $\mathfrak{a}\mathfrak{p}$.

Como anteriormente, fijamos un ideal $\mathfrak{b}$ tal que $\mathfrak{p}\mathfrak{b}^2 = \langle\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}\rangle$ sea principal generado por un elemento totalmente positivo.

Observación 4.10. Notar que esta restricción no tiene efecto en los cuerpos con número de clases estricto impar, ya que si $|Cl^+(F)| = h^+$ es impar, entonces la ecuación $\mathfrak{p}\mathfrak{b}^2 = [1]$ tiene siempre la solución $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}^{(h^+-1)/2}$.

En el caso de los cuerpos con número de clases estricto par, podremos operar con los ideales primos principales y dependiendo del orden par, se podrá abarcar más casos. En el caso específico de cuerpos con número de clases estricto igual a 2, sólo podemos trabajar con los ideales primos principales.

Entonces, para los $\mathfrak{p}$ que tengan un cuadrado como inverso en el grupo de clases, podemos relacionar por la acción del centro (sección 3.3) a $(T_{\mathfrak{p}}f)_{\mathfrak{a}}$ con $f_{\mathfrak{a}}$. Para los $\mathfrak{p}$ que cumplan esta restricción tenemos la relación de la Proposición 4.1 para el caso $\ell = 1$

PROPOSICIÓN 4.11. *Tenemos la siguiente relación entre* $(T_{\mathfrak{p}}f)_{\mathfrak{a}}$ *y* $f_{\mathfrak{a}}$

$$(T_{\mathfrak{p}}f)_{\mathfrak{a}}(g_\infty) = \sum_{s=0}^{1} \sum_{\beta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\langle \pi_{\mathfrak{p}} \rangle} f_{\mathfrak{a}}(i_\infty(n(\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}})^{-1}\gamma_{\beta,s}^{-1})g_\infty)\chi_f(\widetilde{k_{\gamma_{\beta,s}}}). \tag{4.29}$$

Teniendo en cuenta esto, necesitamos estudiar con el mayor detalle posible los $\gamma_{\beta,s}$ representantes del álgebra de Hecke en las formas de Hilbert clásicas una vez que actuó el centro también.

En la Sección 4.2 hemos obtenido la descomposición

$$i_\infty(\gamma_{\beta,s}^{-1}) = \gamma_{\alpha,s} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

donde $\gamma_{\alpha,s} \in \Gamma(\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{1-2s} \mapsto \mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{b}^2)$ y $\alpha \in \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{1-2s}$.

También pudimos decir un poco más sobre los $\gamma_{\alpha,s}$. Como están en $\Gamma(\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{1-2s} \mapsto \mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{b}^2)$, tenemos que

$$\gamma_{\alpha,s} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathfrak{p}^s\mathfrak{b} & \mathfrak{b}\mathfrak{p}^{1-s}\mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{p}^{s-1}\mathfrak{J} & \mathfrak{p}^{-s}\mathfrak{b}^{-1} \end{pmatrix} \text{ y } ad - bc = u \in \mathcal{O}_F^\times. \tag{4.31}$$

Enunciamos un resultado análogo al Lema 4.2 de la Sección 4.2 para el caso $\ell = 1$

LEMA 4.12. *Si* $\gamma_{\alpha,s}$ *es como en* (4.31)*, se tiene la descomposición*

$$\gamma_{\alpha,s} = \widetilde{\gamma_{\alpha,s}} p_{\alpha,s} \tag{4.32}$$

donde $\widetilde{\gamma_{\alpha,s}} \in \Gamma_0(\mathfrak{J}, \mathfrak{a}\mathfrak{p}\mathfrak{b}^2)$ *y* $p_{\alpha,s}$ *es un parabólico.*

Debido a este lema, podemos refinar la Proposición 4.11

PROPOSICIÓN 4.13. *Tenemos la siguiente relación*

$$(T_{\mathfrak{p}}f)_{\mathfrak{a}}(g_\infty) = \sum_{s=0}^{1} \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}/\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{1-2s}} f_{\mathfrak{a}}\left(\begin{pmatrix} \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell} a_s & \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-\ell} b_s \\ 0 & a_s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_\infty\right) \tag{4.33}$$

donde $a_s \in \mathfrak{p}^s\mathfrak{b}$.

4.3.1. Relación entre términos de Fourier. A continuación relacionamos los términos de Fourier de $(T_{\mathfrak{p}}f)_{\mathfrak{a}}$ con los de $f_{\mathfrak{a}}$.

PROPOSICIÓN 4.14. *Para* $s = 0, 1$ *sea*

$$f^{(s)}(g_\infty) := \sum_{\alpha \in \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-s}}{\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{1-2s}}} f_{\mathfrak{a}}\left(\begin{pmatrix} \eta_{\mathfrak{p}1,\mathfrak{b}}^{-1} a_s & \eta_{\mathfrak{p}1,\mathfrak{b}}^{-1} b_s \\ 0 & a_s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_\infty\right) \tag{4.34}$$

con $a_s \in \mathfrak{p}^s\mathfrak{b}$. *Esta función es* $\Gamma_N(\mathfrak{I}, \mathfrak{a})$*–invariante a izquierda y los términos de Fourier de* $f^{(s)}$ *están dados por*

(4.35)

$$F_r f^{(s)}(g_\infty) = \begin{cases} F_{\frac{r\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}} f_{\mathfrak{a}}\left(\begin{pmatrix} a_s\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-1} & b_s\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-1} \\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix} g_\infty\right) & si \;\; r \in \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{p}^{-s}\mathfrak{d}^{-1}, \\ 0 \;\; otros\ casos\ . \end{cases}$$

Corolario 4.15. *Sea* $\mathfrak{p}$ *un ideal primo de* $\mathcal{O}_F$ *que no divide a* $\mathfrak{I}$, *y tal que* $\mathfrak{p}$ *es un cuadrado en el grupo de clases estricto. Sea* f *una forma automorfa. Tenemos la siguiente relación*

$$F_r(T_{\mathfrak{p}}f)_{\mathfrak{a}}(g_\infty) = \sum_{s=0}^{1} \frac{N(\mathfrak{p})^s N(\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}})}{N(a_s^2)} F_{\frac{r\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}} f_{\mathfrak{a}}\left(\begin{pmatrix} a_s\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-1} & b_s\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^{-1} \\ 0 & a_s^{-1}\end{pmatrix} g_\infty\right).$$

Demostración. Sigue del hecho que las $f^{(s)}$ son las sumas internas de la relación escrita en la Proposición 4.3. □

De este modo se obtiene

Teorema 4.16. *Sea* $\mathfrak{p}$ *un ideal primo entero coprimo con* $\mathfrak{I}$ *y tal que* $\mathfrak{p}$ *sea un cuadrado en el grupo de clases estricto. Sea* $r \in \mathfrak{d}^{-1}$. *Para cada espacio cuspidal irreducible* V_ϖ *invariante por los operadores de Casimir y los operadores de Hecke* $T_{\mathfrak{p}}$ *tenemos la siguiente relación*

$$\lambda_{\mathfrak{p}} c^r(\varpi) = \sum_{s=0}^{1} N(\mathfrak{p})^s N(\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}})^{1/2} e^{2\pi i S\left(\frac{rb_s}{a_s}\right)} \chi_f(k_{\gamma_s}) c^{\frac{r\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}}(\varpi).$$

Capítulo 5

Distribución de autovalores

En este capítulo demostraremos nuestros resultados principales sobre distribución conjunta de autovalores de Casimir y de Hecke (Sección 5.3, Teorema 5.5). Como caso particular, obtenemos un resultado para el caso holomorfo (Sección 5.4, Teorema 5.9). Finalmente, como aplicación damos un resultado de equidistribución de los autovalores de Hecke (Sección 5.5, Teorema 5.14).

5.1. Representaciones de GL_2

Sea $L^2\big(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^d,\chi_f\big)$ el espacio de Hilbert de funciones que transforman $f(\gamma g)=\chi_f(\gamma)f(g)$ para $\gamma\in\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})$. El grupo $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^d$ actúa unitariamente en este espacio de Hilbert por traslación a derecha. Denotamos por $L^2_\xi\big(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^d,\chi_f\big)$ al subespacio en el que el centro actúa por

$$\left(\begin{pmatrix}\zeta_1 & 0\\ 0 & \zeta_1\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}\zeta_d & 0\\ 0 & \zeta_d\end{pmatrix}\right)\mapsto\prod_{j=1}^d \zeta_j^{\xi_j},$$

donde $\zeta_j\in\{1,-1\}$. Se tiene la descomposición ortogonal

$$L^2_\xi\big(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^d,\chi_f\big)=$$
$$L^{2,\mathrm{cont}}_\xi\big(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^d,\chi_f\big)\oplus L^{2,\mathrm{discr}}_\xi\big(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^d,\chi_f\big) \tag{5.1}$$

El subespacio G–invariante $L^{2,\mathrm{cont}}_\xi\big(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^d,\chi_f\big)$ puede ser descripto por integrales de series de Eisenstein, y el complemento ortogonal $L^{2,\mathrm{discr}}_\xi\big(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^d,\chi_f\big)$ es una suma directa de subespacios cerrados irreducibles G–invariantes de multiplicidad finita. Si $\chi_f=1$, las funciones constantes forman un subespacio invariante. Los otros subespacios invariantes irreducibles tienen dimensión infinita, son cuspidales y generan el espacio $L^{2,\mathrm{cusp}}_\xi\big(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^d,\chi_f\big)$, que es el complemento ortogonal de las funciones constantes en $L^{2,\mathrm{discr}}_\xi\big(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})^d,\chi_f\big)$.

Fijamos un sistema ortogonal maximal $\{V_\varpi\}_\varpi$ de subespacios irreducibles en el espacio de Hilbert $L^{2,\mathrm{cusp}}_\xi\big(\Gamma_0(\mathfrak{I},\mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^d,\chi_f\big)$.

Cada representación automorfa irreducible ϖ de $G=\prod_{j=1}^d \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ es el producto tensorial $\otimes_{j=1}^d\varpi_j$ de representaciones irreducibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ y $\lambda_\varpi=(\lambda_{\varpi_j})_{j=1}^d$.

Se sabe que los autovalores λ_{ϖ_j} están en los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$\lambda_{\varpi_j}\in\{\tfrac{b}{2}-\tfrac{b^2}{4}:b\in\mathbb{N},b\geq 2\text{ par}\}\cup[\lambda_0,\infty)\qquad\text{si }\xi_j=0,$$
$$\lambda_{\varpi_j}\in\{\tfrac{b}{2}-\tfrac{b^2}{4}:b\in\mathbb{N},b\geq 2\text{ impar}\}\cup[\tfrac{1}{4},\infty)\qquad\text{si }\xi_j=1,$$

donde $\lambda_0 \in (0, \frac{1}{4}]$. Por una conjetura de Selberg para el caso esférico, uno espera que pueda tomarse $\lambda_0 = \frac{1}{4}$. Kim–Shahidi–Sarnak probaron $\frac{1}{4} - (\frac{1}{9})^2 \leq \lambda_0 \leq \frac{1}{4}$. Esta cota fue luego mejorada por Blomer–Brumley [**BB11**] quienes demostraron que $\lambda_0 \geq \frac{1}{4} - (\frac{7}{64})^2$.

Llamamos a $\lambda_\varpi = (\lambda_{\varpi_j})_{j=1}^d \in \mathbb{R}^d$ *vector autovalor* de la representación ϖ. Como se explica en [**BM10**, §1.1], se demuestra que el conjunto de vectores autovalores $\{\lambda_\varpi\}$ es discreto en $\mathbb{R}^d$.

A veces, en lugar de trabajar con los autovalores $\lambda_{\varpi_j} = \frac{1}{4} - \nu_{\varpi,j}^2 \in \mathbb{R}$, es conveniente utilizar los parámetros $\nu_{\varpi_j} \in (0, \infty) \cup i[0, \infty)$. Escribimos $\nu_\varpi = (\nu_{\varpi,j})_{j=1}^d$, y llamamos a ν_ϖ y $\xi_\varpi = (\xi_{\varpi,j})_{j=1}^d \in \{0,1\}^d$ *parámetros espectrales* de ϖ. Tenemos que $\nu_\varpi \in Y_\xi = \prod_{j=1}^d Y_{\xi_j}$ donde

$$Y_0 := \{\tfrac{b-1}{2} : b \geq 2 \text{ par}\} \cup i[0, \infty) \cup (0, \nu_0], \tag{5.2}$$

$$Y_1 := \{\tfrac{b-1}{2} : b \geq 2 \text{ impar}\} \cup i[0, \infty), \tag{5.3}$$

donde $\nu_0 = \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_0}$.

A continuación introducimos una tabla con todas las representaciones unitarias irreducibles del grupo de Lie $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ a menos de un carácter unitario central. La última columna da un parámetro espectral ν, con $\mathrm{Re}\,\nu \geq 0$, tal que $\lambda(\nu) = \frac{1}{4} - \nu^2$ es el autovalor del operador de Casimir.

Notación	Nombre	K_∞–tipo	ν
1	Representación trivial	0	$\frac{1}{2}$
H(s) $\quad s \in i[0, \infty)$	Serie principal unitaria	$q \in \mathbb{Z}$	$\frac{s}{2}$
H(s) $\quad s \in (0, 1)$	Serie complementaria	$q \in \mathbb{Z}$	$\frac{s}{2}$
$D_b^+ \quad b \geq 2, b \in \mathbb{Z}$	Serie discreta holomorfa	$q \geq b,\ q \in \mathbb{Z}$	$\frac{b-1}{2}$
$D_b^- \quad b \geq 2,\ b \in \mathbb{Z}$	Serie discreta antiholomorfa	$q \leq -b,\ q \in \mathbb{Z}$	$\frac{b-1}{2}$

Tabla 5.1. Ver por ejemplo [**BMP03**, Table 1] o [**La75**, Chap. 6, §6]

La *medida de Plancherel* Pl sobre $\mathbb{R}^d$ es el producto $\mathrm{Pl} = \otimes_j \mathrm{Pl}_{\xi_j}$, donde Pl_{ξ_j} es la medida sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{Pl}_0(f) = &\int_{1/4}^{\infty} f(\lambda) \tanh\left(\pi\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\right) d\lambda \\ &+ \sum_{b \geq 2, b \equiv 0 \bmod 2} (b-1) f\left(\frac{b}{2}\left(1 - \frac{b}{2}\right)\right), \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Pl}_1(f) = &\int_{1/4}^{\infty} f(\lambda) \coth\left(\pi\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}\right) d\lambda \\ &+ \sum_{b \geq 3, b \equiv 1 \bmod 2} (b-1) f\left(\frac{b}{2}\left(1 - \frac{b}{2}\right)\right). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Observación 5.1. La medida Pl_{ξ_j} tiene medida cero sobre el conjunto de *valores excepcionales* en $[\lambda_0, \frac{1}{4})$.

En la variable ν la medida de Plancherel sobre Y_ξ está dada por $\widetilde{\mathrm{Pl}}_\xi = \otimes_j \mathrm{Pl}_{\xi_j}$, donde

$$\widetilde{\mathrm{Pl}}_{\xi_j}(f) = 2\int_0^\infty f(it)\widetilde{\mathrm{pl}}_j(t)dt + 2\sum_{\beta\in\frac{\xi_j+1}{2}+\mathbb{N}_0} f(\beta)\widetilde{\mathrm{pl}}_j(\beta), \tag{5.6}$$

con $\widetilde{\mathrm{pl}}_j$ dada por

		$\widetilde{\mathrm{pl}}_j(t)$
$\xi_j = 0$	$t \in i\mathbb{R}$	$\lvert t\rvert \tanh \pi \lvert t\rvert$
$\xi_j = 1$	$t \in i\mathbb{R}$	$\lvert t\rvert \coth \pi \lvert t\rvert$
$t \equiv \frac{\xi_j-1}{2} \bmod 1$	$t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\lvert t\rvert$
$t \equiv \frac{\xi_j-1}{2} \bmod 1$	$t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	0

5.2. Distribución asintótica de autovalores del Casimir

En [**BMP03**], [**BM09**] y [**BM10**] se obtienen fórmulas asintóticas para sumas pesadas de representaciones cuspidales de SL_2 sobre un cuerpo de números totalmente real de grado d con autovalores de Casimir C_j en una región específica. Esto es, para una familia creciente de conjuntos compactos $\Omega_t \subset \mathbb{R}^d$ se estudia la función de conteo

$$N^r(\Omega_t) := \sum_{\varpi, \lambda_\varpi \in \Omega_t} |c^r(\varpi)|^2, \tag{5.7}$$

cuando $t \to \infty$, con $r \in \mathfrak{d}^{-1}\backslash\{0\}$. Las representaciones ϖ recorren el sistema ortogonal de subespacios irreducibles de $L^{2,\mathrm{cusp}}_\xi\big(\Gamma_0(\mathfrak{I})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^d, \chi_f\big)$ fijado anteriormente.

Los resultados obtenidos en [**BM10**], fueron generalizados en [**BM13**] a la función

$$N^{\kappa,r;\kappa',r'}(\Omega_t) = \sum_{\varpi,\lambda_\varpi\in\Omega_t} \overline{c^{\kappa,r}(\varpi)}c^{\kappa',r'}(\varpi),$$

que involucra coeficientes de Fourier de las cúspides κ, κ' y los órdenes r, r'. Como antes, $\Omega_t \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto compacto creciente bajo ciertas condiciones y ϖ recorre el sistema ortogonal de subespacios irreducibles de $L^{2,\mathrm{cusp}}_\xi\big(\Gamma_0(\mathfrak{I})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^d, \chi_f\big)$. Haremos uso del siguiente

Teorema 5.2. [**BM10**][**BM13**] *Sean $\kappa, \kappa' \in \mathcal{P}$ y $r, r' \in \mathfrak{d}^{-1}\setminus\{0\}$ tal que* $\operatorname{sign} r = \operatorname{sign} r'$. *Cuando $t\to\infty$ tenemos*

$$N^{\kappa,r;\kappa',r'}(\Omega_t) = \delta(\kappa,\kappa')\delta(r,r')\frac{2\operatorname{Vol}(\mathbb{R}^d/M_\kappa)\operatorname{Vol}(\Gamma\backslash G)}{(2\pi)^d}\mathrm{Pl}(\Omega_t) + o(V_1(\Omega_t)),$$

donde $\delta(\kappa,\kappa') = 1$ si $\kappa = \kappa'$ y 0 en los demás casos y $\delta(r,r') = 1$ si $r/r' \in (\mathcal{O}^\times)^2$ y 0 en los demás casos y M_κ es un ideal fraccionario de F.

La medida V_1 que aparece en el teorema tiene estructura de producto $V_1 = \otimes_j V_{1,\xi_j}$ con

$$\int hdV_{1,0} = \frac{1}{2}\int_{5/4}^{\infty} h(\lambda)d\lambda + \frac{1}{2}\int_{0}^{5/4} |\lambda - 1/4|^{-1/2} d\lambda + \sum_{\beta>0, \beta\equiv 1/2\ (1)} \beta h(1/4-\beta^2), \tag{5.8}$$

$$\int hdV_{1,1} = \frac{1}{2}\int_{5/4}^{\infty} h(\lambda)d\lambda + \frac{1}{2}\int_{1/4}^{5/4} |\lambda - 1/4|^{-1/2} d\lambda + \sum_{\beta>0, \beta\equiv 0\ (1)} \beta h(1/4-\beta^2) \tag{5.9}$$

Esta medida V_1 es positiva sobre todos los conjuntos en que los vectores autovalores pueden ocurrir, y es comparable a Pl cerca de los puntos λ para los que todas las coordenadas están a una distancia positiva del intervalo $(0, 1/4)$. Luego, la fórmula asintótica no excluye valores excepcionales λ_{ϖ_j}, pero limita su densidad. El término $o(V_1(\Omega_t))$ es pequeño en comparación con $\mathrm{Pl}(\Omega_t)$.

También podemos expresar V_1 en la variable ν. Denotamos $\widetilde{V}_1 = \otimes_j \widetilde{V}_{1,\xi_j}$ la medida sobre el espacio $\big((0,\infty) \cup i[0,\infty)\big)^d$ donde

(5.10)

$$\int hd\widetilde{V}_{1,0} = \int_1^{\infty} th(it)dt + \int_0^1 h(it)dt + \int_0^{\nu_0} h(x)dx + \sum_{\beta>0, \beta\equiv \frac{1}{2}\ (1)} \beta h(\beta),$$

$$\int hd\widetilde{V}_{1,1} = \int_1^{\infty} th(it)dt + \int_0^1 h(it)dt + \sum_{\beta>0, \beta\equiv 0\ (1)} \beta h(\beta).$$

La medida $\widetilde{V}_1$ es positiva sobre Y_ξ y $\widetilde{Pl}(\widetilde{\Omega}) \ll \widetilde{V}_1(\widetilde{\Omega})$ para todo $\widetilde{\Omega}$.

5.3. Distribución conjunta de autovalores de Hecke y de Casimir

En esta sección, trabajamos con la función $N^r(\Omega)$ pero incluyendo también condiciones sobre los autovalores de Hecke $\lambda_{\varpi,\mathfrak{p}}$ de la representación ϖ.

Esto es, dado un subintervalo $I_\mathfrak{p} \subseteq [-2, 2]$ estudiamos el comportamiento asintótico de la función

$$N^r(\Omega, I_\mathfrak{p}) = \sum_{\substack{\varpi, \lambda_\varpi \in \Omega \\ \lambda_{\varpi,\mathfrak{p}} \in I_\mathfrak{p}}} |c^r(\varpi)|^2 \tag{5.11}$$

con $r \in \mathfrak{d}^{-1} \setminus \{0\}$ y las representaciones ϖ recorren un sistema ortogonal de subespacios irreducibles de $L^{2,\mathrm{cusp}}_\xi\big(\Gamma_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^d, \chi_f\big)$.

Respecto de los autovalores de Hecke, uno espera medir su distribución respecto a la medida de Sato–Tate. Por cuestiones técnicas y siguiendo los trabajos [**KL08**] y [**Li09**], dado $r \in \mathfrak{d}^{-1}$ utilizaremos la siguiente medida

$$\Phi(x) := \sum_{\ell'=0}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(r\mathfrak{d})} X_{2\ell'}(x) d\mu_\infty(x) \tag{5.12}$$

para estudiar la distribución de autovalores de Hecke, donde $d\mu_\infty$ es la medida de Sato–Tate descripta en (2.20).

Observación 5.3. Notar que esta medida es un múltiplo de la de Sato–Tate. En el caso en que el orden de $\mathfrak{p}$ en $(r\mathfrak{d})$ es cero tenemos efectivamente la medida de Sato–Tate. Resaltamos que para cada r fijo esto ocurre para todos salvo finitos ideales $\mathfrak{p}$.

Dada una partición del conjunto de los lugares arquimedeanos de F

$$\{1, \ldots, d\} = E \sqcup Q_+ \sqcup Q_-, \tag{5.13}$$

donde $Q := Q_+ \sqcup Q_- \neq \emptyset$, consideraremos el conjunto $\mathcal{R}$ de las representaciones automorfas cuspidales ϖ en $L^2\big(\Gamma_0(\mathfrak{I}, \mathfrak{a})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^d, \chi_f\big)$ que tienen parámetros espectrales prefijados en los lugares $j \in E$ y en los otros lugares pueden tener un parámetro espectral que crece con la condición de que si $j \in Q_-$ están en la serie discreta y si $j \in Q_+$ están en la serie principal o en la serie complementaria. Esto es, consideramos el conjunto

$$\mathcal{R} = \left\{ \varpi \text{ cuspidal} := \begin{cases} \lambda_{\varpi_j} \in [a_j, b_j] & \text{para } j \in E \\ \lambda_{\varpi_j} > 0 & \text{si } j \in Q_+ \\ \lambda_{\varpi_j} \leq 0 & \text{si } j \in Q_- \end{cases} \right\} \tag{5.14}$$

A los intervalos $[a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$, se les impone la condición de que los extremos a_j, b_j no sean de la forma $\frac{b}{2}\left(1 - \frac{b}{2}\right)$ con $b \geq 1$, $b \equiv \xi_j \bmod 2$.

Sea

$$\Omega_t = \prod_{j \in E} [a_j, b_j] \times \prod_{j \in Q_+} [A_j(t), B_j(t)] \times \prod_{j \in Q_-} [C_j(t), D_j(t)], \tag{5.15}$$

donde $B_j(t) \to \infty$ para al menos algún $j \in Q_+$ o $D_j(t) \to \infty$ para algún $j \in Q_-$.

A seguir, enunciamos nuestros resultados principales

Teorema 5.4. *Sea $t \mapsto \Omega_t$ una familia de conjuntos en $\mathbb{R}^d$ como en (5.15). Sea $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{I}$, $\mathfrak{p}$ un cuadrado en el grupo de clases estricto, $\lambda_{\mathfrak{p},\varpi}$ el autovalor de $T_{\mathfrak{p}}$ y Φ es como en* (5.12). *Cuando $t \to \infty$ tenemos*

$$\sum_{\varpi, \lambda_\varpi \in \Omega_t} |c^r(\varpi)|^2 X_\ell(\lambda_{\mathfrak{p},\varpi}) = \frac{2\sqrt{|D_F|}\,\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash G)}{(2\pi)^d} \mathrm{Pl}(\Omega_t)\Phi(X_\ell) + o(V_1(\Omega_t)).$$

donde V_1 es como en (5.8) *y* (5.9).

Demostración. Como $\mathfrak{p}$ es un cuadrado en el grupo de clases estricto, tomamos $\mathfrak{b}$ un ideal entero tal que $\mathfrak{p}\mathfrak{b}^2 = \langle \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}} \rangle$, y por lo tanto, para cada $\ell \geq 0$ tenemos $\mathfrak{p}^\ell \mathfrak{b}^{2\ell} = \langle \eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^\ell \rangle$. Por el Corolario 2.28 tenemos que $X_\ell(\lambda_{\mathfrak{p}}, \varpi) = \lambda_{\mathfrak{p}^\ell,\varpi}$ y por el Teorema 4.7 tenemos la siguiente relación

$$c^r(\varpi)\lambda_{\mathfrak{p}^\ell,\varpi} = \sum_{s=0}^{\ell} N(\mathfrak{p})^s N(\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^\ell)^{1/2} e^{2\pi i S\left(\frac{r b_s}{a_s}\right)} c^{\frac{r\eta_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}^\ell}{a_s^2}}(\varpi)\chi_f(k_{\gamma_s}).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{\varpi,\lambda_\varpi\in\Omega_t}|c^r(\varpi)|^2X_\ell(\lambda_{\mathfrak{p}},\varpi) &= \sum_{\varpi,\lambda_\varpi\in\Omega_t}\overline{c^r(\varpi)}c^r(\varpi)\lambda_{\mathfrak{p}^\ell,\varpi}\\
&= \sum_{\varpi,\lambda_\varpi\in\Omega_t}\sum_{s=0}^{\ell}\overline{c^r(\varpi)}N(\mathfrak{p})^sN(\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}})^{1/2}e^{2\pi i S\left(\frac{rb_s}{a_s}\right)}\chi_f(k_{\gamma_s})c^{\frac{r\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}}(\varpi)\\
&= \sum_{s=0}^{\ell}N(\mathfrak{p})^sN(\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}})^{1/2}e^{2\pi i S\left(\frac{rb_s}{a_s}\right)}\chi_f(k_{\gamma_s})\sum_{\varpi,\lambda_\varpi\in\Omega_t}\overline{c^r(\varpi)}c^{\frac{r\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}}(\varpi).
\end{aligned}$$

Por el Teorema 5.2 tenemos

$$\sum_{\varpi,\lambda_\varpi\in\Omega_t}|c^r(\varpi)|^2X_\ell(\lambda_{\mathfrak{p}},\varpi) = \sum_{s=0}^{\ell}N(\mathfrak{p})^sN(\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}})^{1/2}e^{2\pi i S\left(\frac{rb_s}{a_s}\right)}\chi_f(k_{\gamma_s}).$$

$$\left(\delta\Big(r,\frac{r\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}\Big)\frac{2\,\mathrm{Vol}(\mathbb{R}^d/\mathfrak{a})\,\mathrm{Vol}(\Gamma_0(\mathfrak{I})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^d)}{(2\pi)^d}\mathrm{Pl}(\Omega_t)+o(V_1(\Omega_t))\right)$$

Por el Teorema 5.2 se tiene que $\delta(r,r')=1$ si y sólo si $r.r'^{-1}\in(\mathcal{O}_F^\times)^2$. En nuestro caso $\delta\left(r,\frac{r\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}\right)=1$ si y sólo si $r.\left(\frac{r\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}\right)^{-1}\in(\mathcal{O}_F^\times)^2$, es decir, si $\frac{a_s^2}{\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}=u\in(\mathcal{O}_F^\times)^2$.

Veremos que esta condición ocurre sólo en el caso en que $2s=\ell$.

Notar que si $\delta\left(r,\frac{r\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}\right)=1$, es decir, si $\frac{a_s^2}{\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}=u\in(\mathcal{O}_F^\times)^2$ entonces a_s^2 y $\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}$ generan el mismo ideal, i.e. $\langle a_s^2\rangle=\langle\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}\rangle=\mathfrak{p}^\ell(\mathfrak{b}^2)^\ell$. Esto implica que ℓ tiene que ser par, y que la valuación de a_s en $\mathfrak{p}$ tiene que ser ℓ y la valuación de a_s en los primos que ocurren en la factorización de $\mathfrak{b}$ tiene que ser la misma que $\mathfrak{b}$ multiplicada por 2ℓ. Como los elementos $a_s\in F$ fueron tomados en la ecuación (4.15) de modo tal que $v_{\mathfrak{p}}(a_s)=s+v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}^\ell)$ y $v_{\mathfrak{q}}(a_s)=v_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{b})$ para aquellos primos $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{p}$ que dividen a $\mathfrak{b}$, tenemos que es condición necesaria que $2s=\ell$. Vemos a continuación que esta condición es suficiente.

Sea ℓ par, y tomamos $s=\frac{\ell}{2}$. En este caso, $\mathfrak{p}^{\ell/2}\mathfrak{b}^\ell=\langle\eta^{\ell/2}_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}\rangle$ y por lo tanto, en la ecuación (4.10)) tenemos que $a_{\ell/2}=\eta^{\ell/2}_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}u$ con $u\in\mathcal{O}_F^\times$.

Notar entonces que en el caso $s=\frac{\ell}{2}$ en que $\delta\left(r,\frac{r\eta^\ell_{\mathfrak{p},\mathfrak{b}}}{a_s^2}\right)=1$, como $b_s=0$ (ver $\gamma_{\beta,s}$ en la ecuación (4.11)) implica que $e^{2\pi i S\left(\frac{rb_s}{a_s}\right)}=1$ y el compacto k_{γ_s} que aparece en la ecuación (4.12) tiene $\chi_f(k_{\gamma_s})=1$.

Dado que los polinomios de Chebyshev son ortonormales respecto de la medida de Sato–Tate,

$$\Phi(X_\ell)=\int_{-2}^{2}\sum_{\ell'=0}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(r\mathfrak{d})}X_{2\ell'}X_\ell d\mu_\infty=\sum_{\ell'=0}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(r\mathfrak{d})}\delta_{2\ell'\ell},$$

cuando $\ell'=\ell/2$ obtenemos nuestro resultado. $\square$

Como los polinomios de Chebyshev $\{X_\ell\}$ son una base para el espacio de todos los polinomios y éstos son densos en $C([-2,2])$, podemos reemplazar X_ℓ por cualquier función continua f en Teorema 5.4 siguiendo la prueba en [**BM13**] o en [**KL13**, Thm. 10.2].

En [**BM13**, §4.3.2] extienden este tipo de fórmula a funciones características. Como consecuencia

TEOREMA 5.5. *Sea $t \mapsto \Omega_t$ una familia de conjuntos en $\mathbb{R}^d$ como en (5.15). Sea $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{I}$, $\mathfrak{p}$ un cuadrado en el grupo de clases estricto, $\lambda_{\mathfrak{p},\varpi}$ el autovalor de $T_\mathfrak{p}$ para la representación ϖ y sea Φ como en* (5.12). *Para un intervalo $I_\mathfrak{p} \subseteq [-2,2]$, tenemos que cuando $t \to \infty$:*

$$\sum_{\substack{\varpi,\lambda_\varpi \in \Omega_t \\ \lambda_{\varpi,\mathfrak{p}} \in I_\mathfrak{p}}} |c^r(\varpi)|^2 = \frac{2\sqrt{|D_F|}\,\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash G)}{(2\pi)^d} Pl(\Omega_t)\Phi(I_\mathfrak{p}) + o(V_1(\Omega_t)). \tag{5.16}$$

En particular esto dice que hay una infinidad de formas automorfas con autovalores de $T_\mathfrak{p}$ en $I_\mathfrak{p}$ y con autovalor de Casimir en la región Ω_t dada, con densidades según la medida de Sato-Tate y la medida de Plancherel respectivamente.

OBSERVACIÓN 5.6. Este resultado incluye el obtenido por Bruggeman–Miatello en [**BM13**, Thm 1.1] y lo extiende a los autovalores reales de $\lambda_{\varpi,\mathfrak{p}}$ en vez de a los autovalores $\lambda_{\varpi,\mathfrak{p}^2}$ y usamos la medida de Sato–Tate en lugar de la variante utilizada en [**BM13**].

5.4. Distribución en regiones específicas

En [**BM10**] se generalizan los resultados asintóticos sobre $N^{r;r'}(\Omega_t)$ y $\widetilde{N}^{r;r'}(\Omega_t)$ a una gran variedad de regiones crecientes Ω_t.

Resultará de utilidad trabajar con la función

$$\widetilde{N}^r(\widetilde{\Omega}) = \sum_{\varpi,\nu_\varpi \in \widetilde{\Omega}} |c^r(\varpi)|^2, \tag{5.17}$$

para conjuntos $\widetilde{\Omega} \subset Y_\xi$.

El caso clásico de formas cuspidales holomorfas es de especial interés. Es decir, restringimos las representaciones $\otimes_{j=1}^d \varpi_j$ al caso en que $\varpi_j \in \widehat{G}$ está en la serie discreta. En este caso, los autovalores $\lambda_{\varpi_j} = \frac{b_j}{2}\left(1 - \frac{b_j}{2}\right)$ con $b_j \in \mathbb{Z}$. Se tiene

TEOREMA 5.7. [**BM10**] *Sea $\Omega_\mathbf{p}$ el singleton $\mathbf{p} = \left(\frac{b_1-1}{2}, \ldots, \frac{b_d-1}{2}\right)$. Si el producto $\prod_{j=1}^d \frac{b_j-1}{2}$ tiende a infinito, tenemos*

$$\widetilde{N}^r(\Omega_\mathbf{p}) = \frac{2\sqrt{|D_F|}}{(2\pi)^d} \prod_{j=1}^d \left(\frac{b_j-1}{2}\right) + o\left(\prod_{j=1}^d \left(\frac{b_j-1}{2}\right)^{-2}\right) \tag{5.18}$$

donde D_F es el discriminante de F. Además $\prod_{j=1}^d \frac{b_j-1}{2} = \widetilde{Pl}(\Omega_\mathbf{p})$ y $\widetilde{V}_1(\Omega_\mathbf{p}) = \prod_{j=1}^d \left(\frac{b_j-1}{2}\right)^{-2}$.

OBSERVACIÓN 5.8. En ciertos casos, el término del error se puede mejorar a $o\left(\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{b_j-1}{2}\right)^{-A}\right)$ con $A>2$, A conveniente [**BM10**, Prop.1.2]

Podemos utilizar esta fórmula en el Teorema 5.5 para el caso de la serie discreta y obtenemos

TEOREMA 5.9. *Sea* $\Omega_{\mathbf{p}}=\{\mathbf{p}\}=\left(\frac{b_1-1}{2},\dots,\frac{b_d-1}{2}\right)$. *Sea* $\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{I}$, $\mathfrak{p}$ *un cuadrado en el grupo de clases estricto,* $\lambda_{\mathfrak{p},\varpi}$ *el autovalor de* $T_{\mathfrak{p}}$ *para la representación* ϖ *y sea* $\Phi=\sum_{\ell'=0}^{ord_{\mathfrak{p}}(r\mathfrak{d})}X_{2\ell'}(x)d\mu_\infty(x)$. *Dado un intervalo* $I_{\mathfrak{p}}\subseteq[-2,2]$ *, si el producto* $\prod_{j=1}^{d}\frac{b_j-1}{2}$ *tiende a infinito tenemos*

$$\widetilde{N}(\Omega_{\mathbf{p}},I_{\mathfrak{p}})=\sum_{\substack{\varpi,\nu_\varpi\in\Omega_{\mathbf{p}}\\ \lambda_{\varpi,\mathfrak{p}}\in I_{\mathfrak{p}}}}|c^r(\varpi)|^2=\frac{2\sqrt{|D_F|}\operatorname{Vol}(\Gamma\backslash G)}{(2\pi)^d}\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{b_j-1}{2}\right)\Phi(I_{\mathfrak{p}})+o\left(\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{b_j-1}{2}\right)^{-2}\right). \tag{5.19}$$

donde $\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{b_j-1}{2}\right)=\widetilde{Pl}(\Omega_{\mathbf{p}})$ *y* $\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{b_j-1}{2}\right)^{-2}=\widetilde{V}_1(\Omega_{\mathbf{p}})$.

Tenemos una versión explícita del Teorema 5.4 para el caso holomorfo:

TEOREMA 5.10. *Sea* $\Omega_{\mathbf{p}}=\{\mathbf{p}\}=\left(\frac{b_1-1}{2},\dots,\frac{b_d-1}{2}\right)$. *Sea* $\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{I}$, $\mathfrak{p}$ *un cuadrado en* $\mathcal{C}_F^+$, $\lambda_{\mathfrak{p},\varpi}$ *el autovalor de* $T_{\mathfrak{p}}$ *para la representación* ϖ. *Si el producto* $\prod_{j=1}^{d}\frac{b_j-1}{2}$ *tiende a infinito tenemos*

$$\sum_{\varpi,\lambda_\varpi\in\Omega_{\mathbf{p}}}|c^r(\varpi)|^2X_\ell(\lambda_{\mathfrak{p},\varpi})=\begin{cases} JN(\boldsymbol{b})+o\left(N(\boldsymbol{b})^{-2}\right), \ell=2\ell' \text{ y } 0\le\ell'\le ord_{\mathfrak{p}}(m\mathfrak{d})\\ o\left(N(\mathbf{b})\right)^{-2}) \quad \textit{otros casos.}\end{cases}$$

donde $J=\frac{2\sqrt{|D_F|}\operatorname{Vol}(\Gamma\backslash G)}{(2\pi)^d}$ *y* $N(\boldsymbol{b})=\prod_{j=1}^{d}\left(\frac{b_j-1}{2}\right)$.

DEMOSTRACIÓN. En el Teorema 5.4 tomamos $\Omega_t=\Omega_{\mathbf{p}}$ y usando que

$$\Phi(X_\ell)=\begin{cases}1, \text{ si } \ell=2\ell' \text{ y } 0\le\ell'\le ord_{\mathfrak{p}}(m\mathfrak{d})\\ 0 \text{ si } \ell \text{ impar .}\end{cases}$$

□

OBSERVACIÓN 5.11. En el Capítulo 6 compararemos este resultado con los de la Proposición 6.2.

5.5. Equidistribución pesada de autovalores de Hecke

En este capítulo daremos un resultado de equidistribución pesada que complementa los obtenidos en [**Se97**] y [**KL08**].

Antes de enunciar nuestro teorema, explicaremos el concepto de *equidistribución* y de *equidistribución pesada.*

Definición 5.12. Sea (X, μ) un espacio topológico localmente compacto y μ una medida de Borel en X. Sea $S_1, S_2, \ldots$ una sucesión de subconjuntos finitos no vacíos de X, y denotemos $|S_i|$ el número de elementos de S_i. Decimos que $\{S_i\}$ está *equidistribuido* con respecto a $d\mu$, o μ-equidistribuido, si para cualquier función continua f sobre X se tiene que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{x\in S_i} f(x)}{|S_i|} = \int_X f(x)d\mu(x). \tag{5.20}$$

Ejemplo 5.13. Si $S_i = \{0, 1/i, 2/i, \ldots, 1\}$, entonces $\{S_i\}$ está equidistribuido relativo a la medida de Lebesgue sobre $X = [0, 1]$.

Si a cada elemento $x \in S_i$ le asignamos un peso $w_x \in \mathbb{R}^+$, decimos que la sucesión $\{S_i\}$ está *w-equidistribuída* o equidistribuída con peso w, si para cualquier función continua $f : X \to \mathbb{C}$, tenemos que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{x\in S_i} w_x f(x)}{\sum_{x\in S_i} w_x} = \int_X f(x)d\mu(x) \tag{5.21}$$

Como aplicación del Teorema 5.4 y del Teorema 5.5 podemos obtener un resultado de equidistribución pesada de los autovalores de Hecke.

Teorema 5.14. *Sea $t \mapsto \Omega_t$ una familia de conjuntos en $\mathbb{R}^d$ como en (5.15). Sea $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{I}$, $\mathfrak{p}$ un cuadrado en el grupo de clases estricto, $\lambda_{\mathfrak{p},\varpi}$ el autovalor de $T_{\mathfrak{p}}$ para la representación ϖ y $\Phi = \sum_{\ell'=0}^{ord_{\mathfrak{p}}(r\mathfrak{d})} X_{2\ell'}(x)d\mu_\infty(x)$. Sea f cualquier función continua sobre $\mathbb{R}$. Cuando $t \to \infty$ tenemos que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{\varpi,\lambda_\varpi\in\Omega_t} |c^r(\varpi)|^2 f(\lambda_{\mathfrak{p},\varpi})}{\sum_{\varpi,\lambda_\varpi\in\Omega_t} |c^r(\varpi)|^2} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\Phi(x). \tag{5.22}$$

Demostración. Tomamos $\ell = 0$ en el Teorema 5.4:

$$\sum_{\varpi,\lambda_\varpi\in\Omega_t} |c^r(\varpi)|^2 = \frac{2\sqrt{|D_F|}\,\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash G)}{(2\pi)^d} Pl(\Omega_t) + o(V_1(\Omega_t))$$

Para $\ell > 0$ tenemos

$$\sum_{\varpi,\lambda_\varpi\in\Omega_t} |c^r(\varpi)|^2 X_\ell(\lambda_{\mathfrak{p},\varpi}) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{|D_F|}\,\mathrm{Vol}(\Gamma\backslash G) Pl(\Omega_t)}{(2\pi)^d}\Phi(X_\ell) + o(V_1(\Omega_t)), \ell = 2\ell' \\ o(V_1(\Omega_t)) \quad \ell \text{ impar.} \end{cases}$$

Tomando el cociente entre estas últimas dos ecuaciones llegamos al resultado

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{\varpi,\lambda_\varpi\in\Omega_t} |c^r(\varpi)|^2 X_\ell(\lambda_{\mathfrak{p},\varpi})}{\sum_{\varpi,\lambda_\varpi\in\Omega_t} |c^r(\varpi)|^2} = \int_{\mathbb{R}} X_\ell(x)\Phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \ell = 2\ell' \\ 0 \quad \ell \text{ impar.} \end{cases}$$

Como el conjunto $\{X_\ell\}$ genera el espacio de todos los polinomios y a su vez el espacio de todos los polinomios es denso en $C([-2, 2])$, podemos reemplazar X_ℓ por cualquier función continua y obtenemos el resultado. □

Corolario 5.15. *Los autovalores $\{\lambda_{\varpi,\mathfrak{p}}\}$ forman un conjunto denso en $[-2, 2]$.*

Observación 5.16. Como veremos con mayor detalle en el Capítulo 6 nuestros resultados extienden los obtenidos por Serre en [**Se97**] para el caso clásico y holomorfo; y el obtenido por Knightly–Li en [**KL08**] para el caso de cuerpos de números totalmente reales y la serie discreta de peso mínimo. En este resultado, nosotros incluimos todas las representaciones unitarias irreducibles de G y el parámetro que hacemos tender a infinito es un parámetro espectral y no el nivel de Γ en G, como ocurre en los trabajos citados.

Capítulo 6

Comparación con resultados previos

A continuación comentaremos resultados previos sobre distribución asintótica y de equidistribución de autovalores de Hecke y la relación con los obtenidos en nuestro trabajo.

6.1. Resultados de distribución asintótica

En esta sección comentaremos los resultados obtenidos en [**KL13**] y [**BM13**] sobre distribución asintótica de autovalores de Hecke de formas de Maass (el primero es para $\mathbb{Q}$ y el segundo para cuerpos de números totalmente reales), y los obtenidos en [**KL08**] y [**Li09**] sobre distribución asintótica de autovalores de Hecke para formas holomorfas sobre un cuerpo de números totalmente real F.

PROPOSICIÓN 6.1. [**KL13**] *Sea h una función de prueba, $\mathcal{F}(N) = \{u_i\}$ una base de*
$L_0^2(\Gamma_0(N)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}))$. *Cuando $N \to \infty$ tenemos*

$$\sum_{u\in\mathcal{F}(N)} X_\ell(\lambda_{u,p})\frac{|a_m(u)|^2}{||u||^2} = \begin{cases} J\psi(N) + O(N^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \ \textit{si}\ \ell = 2\ell' \ \textit{y}\ 0 \le \ell' \le ord_p(m) \\ O(N^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \ \ \textit{otros casos,} \end{cases}$$

donde $a_m(u)$ es el coeficiente de Fourier de u de orden m,
$J = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\tanh(\pi t)tdt$, $\psi(N) = N\prod_{p|N}(1+\frac{1}{p})$ *y X_ℓ es el ℓ–ésimo polinomio de Chebyshev.*

En particular, demuestran la existencia de formas cuspidales con m–ésimo coeficiente de Fourier no nulo para todo nivel N suficientemente grande. La masa $J\psi(N)$ se corresponde con el término delta de la fórmula de Kuznetsov que obtienen.

En el Teorema 5.4 podemos tomar $F = \mathbb{Q}$ y de este modo obtenemos una versión complementaria de este resultado, con la diferencia de que el parámetro que tiende a infinito es espectral. En nuestro caso, la masa también se corresponde con el término delta de la fórmula de tipo Kuznetsov.

En el caso de formas holomorfas sobre cuerpos de números totalmente reales, Knightly–Li obtienen

PROPOSICIÓN 6.2. [**KL08**] *Sea $m \in \mathfrak{d}_+^{-1}$, es decir, $m \in \mathfrak{d}^{-1}$ y totalmente positivo. Sea $\mathfrak{p}$ primo, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{I}$. Para $\ell \ge 0$ y $0 < \epsilon < 1$ cuando $N(\mathfrak{I}) \to \infty$ tenemos*

$$\sum_{u\in\mathcal{F}} X_\ell(\lambda_{u,\mathfrak{p}})\frac{|a_m^u|^2}{||u||^2} = \begin{cases} J\psi(\mathfrak{I}) + O\Big(\frac{\psi(\mathfrak{I})}{N(\mathfrak{I})^{2-\epsilon}}\Big) \ \textit{si}\ \ell = 2\ell' \ \textit{y}\ 0 \le \ell' \le ord_{\mathfrak{p}}(m\mathfrak{d}) \\ O(N^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \ \ \textit{otros casos,} \end{cases}$$

donde X_ℓ es el ℓ–ésimo polinomio de Chebyshev, $|a_m^u|$ es el coeficiente de Fourier de u de orden m y

$$\psi(\mathfrak{I}) = N(\mathfrak{I}) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{I}} \left(1 + \frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right) \text{ y } J = \frac{D_F^{1/2}}{e^{4\pi \operatorname{Tr}_{\mathbb{Q}}^F(m)}} \prod_{j=1}^{d} \frac{(4\pi\sigma_j(m))^{k_j-1}}{(k_j-2)!}.$$

OBSERVACIÓN 6.3. La masa $J\psi(N)$ corresponde al término delta de la fórmula de Petersson que Knightly–Li obtienen en su trabajo. En particular, este teorema demuestra que para $N(\mathfrak{I})$ suficientemente grande existe una forma holomorfa con el coeficiente de Fourier de orden m no nulo.

La Proposición 6.2 es comparable con nuestro resultado en el Teorema 5.10. En ambos casos, tenemos que la masa es el término delta de la fórmula de Kuznetsov que utilizamos. El término de error, en el caso de Knightly–Li tiende a cero cuando el nivel tiende a infinito y en el nuestro depende de los parámetros espectrales y tiende a cero cuando algún parámetro espectral tiende a infinito.

OBSERVACIÓN 6.4. En [**Li09**, Proposition 4.3], Charles Li consigue un resultado análogo sin los pesos. Esto lo logra por utilizar una fórmula de la traza para los operadores de Hecke que generaliza la fórmula de Eichler–Selberg a cuerpos de números totalmente reales.

En [**BM13**] se da un resultado de distribución conjunta de autovalores del Casimir y de autovalores de los operadores de Hecke $T_{\mathfrak{p}^2}$ para el caso de formas automorfas sobre un cuerpo de números totalmente real F.

Consideraron el grupo de Lie $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^d$ como el producto de $\mathrm{SL}_2(F_{\sigma_j})$ para todas las completaciones arquimedeanas $F_{\sigma_j} \simeq \mathbb{R}$ de F.

En su trabajo, se hace uso de las expansiones de Fourier de las formas automorfas en todas sus cúspides. Aquí no precisamos involucrarnos con otras cúspides que no sea el ∞.

A diferencia de [**BM13**] trabajamos con los $T_{\mathfrak{p}}$ (para $\mathfrak{p}$ que sea un cuadrado en $\mathcal{C}_F^+$) en lugar de los $T_{\mathfrak{p}^2}$. Utilizamos una medida que es múltiplo de la Sato–Tate e incluimos conjuntos Ω_t más generales que en [**BM13**] (ver (5.15)) en el espíritu de [**BM10**]. En particular, esto nos permitió incluir un estudio detallado del caso holomorfo en la Sección 5.4.

6.2. Resultados de equidistribución pesada

Serre consideró el problema vertical de Sato–Tate (ver Introducción) para formas holomorfas cuspidales sobre $\mathbb{Q}$.

Dado $N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ par, sea $S_k(\Gamma_0(N))$ el espacio de formas cuspidales holomorfas. Sea p primo fijo, cuando el nivel N y el peso k varían, los autovalores $\lambda_{f,p}$ del operador de Hecke T_p siguen leyes de distribución.

TEOREMA 6.5. [**Se97**] *Sean N, k enteros positivos tal que k es par, $N + k \to \infty$ y p es un primo tal que $p \nmid N$ para ningún N. Entonces los autovalores normalizados $\lambda_{f_{k,N},p}$ de Hecke están equidistribuídos en el intervalo $\Omega = [-2, 2]$ con respecto a la medida p-ádica de Sato–Tate dada por*

$$\mu_p := \frac{p+1}{\pi} \cdot \frac{(1 - x^2/4)^{1/2}}{(p^{1/2} + p^{-1/2})^2 - x^2} dx.$$

COROLARIO 6.6. *Los autovalores* $\lambda_{f_{k,N},p}$ *son densos en* $[-2, 2]$.

La demostración del teorema de Serre utiliza la fórmula de la traza de Eichler–Selberg para el operador de Hecke T_{p^m}.

El resultado de Serre vale para $F = \mathbb{Q}$, para formas holomorfas y sin la aparición de pesos en la fórmula final. En nuestro caso, se obtiene una fórmula de equidistribución con pesos, válida para formas holomorfas, formas de Maass o formas mixtas en el caso en que F es cualquier cuerpo de números totalmente real y usando un múltiplo de la medida de Sato–Tate.

Mencionamos que hay versiones efectivas del Teorema 6.5, calculando la velocidad de convergencia a la integral (ver [**MuSi09**], [**LW11**]) .

En [**KL13**] utilizan una medida que es múltiplo de la Sato–Tate pero la equidistribución es con los coeficientes de Fourier como pesos.

TEOREMA 6.7. [**KL13**] *Fijamos un primo* p *y un entero positivo* m. *Para cada* $i = 1, 2, \ldots,$

- *sean* N_i *enteros positivos coprimos con* p, *tal que* $\lim_{i\to\infty} N_i = \infty$,
- *sea* $\mathcal{F}_i = \{u_j^{(i)}\}$ *una base ortogonal para* $L_0^2(\Gamma_0(N_i)\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}))$ *de autofunciones de Maass, y*
- *definimos el multiconjunto* $S_i = \{\lambda_p^u | u \in \mathcal{F}_i\}$.

La sucesión $\{S_i\}$ *es equidistribuída con peso* $\frac{|a_m(u_j^{(i)})|^2}{||u_j^{(i)}||^2}$ *con respecto a la medida* $d\mu(x) = \sum_{\ell'=0}^{ord_p(m)} X_{2\ell'}(x) d\mu_\infty(x)$, *donde* $a_m(u_j^{(i)})$ *es el coeficiente de Fourier de* $u_j^{(i)}$ *de orden* m, $d\mu_\infty(x)$ *es la medida de Sato–Tate y* $X_\ell(x)$ *es el* ℓ*–ésimo polinomio de Chebyshev.*

OBSERVACIÓN 6.8. (i) Si tomamos m tal que $p \nmid m$, entonces $d\mu = d\mu_\infty$ la medida de Sato–Tate. En este caso, la medida es independiente de p.

(ii) El teorema también implica que los autovalores de Hecke λ_p^u son densos en el intervalo $[-2, 2]$.

En el Teorema 5.14 extendemos este resultado al caso de cuerpos de números totalmente reales y el parámetro que tiende a infinito es espectral y el nivel está fijo.

Para el caso holomorfo sobre cuerpos de números totalmente reales Knightly–Li demuestran

TEOREMA 6.9. [**KL08**] *Sea* $m \in \mathfrak{d}_+^{-1}$, $\mathfrak{p}$ *un ideal primo de* F *y sea* $k = (k_1, \ldots k_d)$ *un vector peso con* $k_j > 2$ *para todo* $j = 1, \ldots, d$. *Para cada* $i = 1, 2, \ldots$ *consideramos*

(i) $\mathfrak{I}_i$ *un ideal coprimo con* $\mathfrak{p}$ *con* $\lim_{i\to\infty} N(\mathfrak{I}_i) = \infty$, *donde* $N(\mathfrak{I}_i)$ *es la norma del ideal, y*
(ii) $\mathcal{F}_i$ *una base ortogonal para el espacio de formas holomorfas* $S_k(\mathfrak{I})$.

La sucesión $S_i = \{\lambda_{\mathfrak{p},u}\}_{u\in\mathcal{F}}$ *es equidistribuída con peso* $\frac{|a_m(u_j^{(i)})|^2}{||u_j^{(i)}||^2}$ *relativo a la medida* $d\mu(x) = \sum_{l=0}^{ord_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{d}m)} X_{2\ell}(x) d\mu_\infty(x)$ *donde* $d\mu_\infty(x)$ *es la medida de Sato–Tate y* $X_\ell(x)$ *es el* ℓ*–ésimo polinomio de Chebyshev y* $a_m(u_j^{(i)})$ *es el coeficiente de Fourier de* u *de orden* m.

Observamos que cuando $\mathfrak{p} \nmid (m\mathfrak{d})$, la medida μ coincide con la medida de Sato–Tate y es independiente de $\mathfrak{p}$.

COROLARIO 6.10. *Los autovalores de Hecke* $\lambda_{\mathfrak{p},u}$ *son densos en el intervalo* $[-2, 2]$.

En el Corolario 5.15 probamos que la familia de autovalores $\{\lambda_{\varpi,\mathfrak{p}}\}$, con $\varpi \in \Omega_t$ variando y nivel $\mathfrak{I}$ fijo, también está equidistribuída respecto de la medida $d\mu$.

Bibliografía

[AL70] A.O.L. Atkin and J. Lehner. *Hecke operators on $\Gamma_0(m)$.* Math. Ann. 185, 134–160. (1970). DOI: 10.1007/BF01359701

[Ar78] James G. Arthur *A trace formula for reductive groups. I: Terms associated to classes in $G(\mathbb{Q})$.*Duke Math. J. Vol 45. 915–952.(1978).

[Ar05] James Arthur. *An introduction to the trace formula.* In: "Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties". Clay Math. Proc. 4, 1–263 (2005).

[ArGe91] James Arthur and Stephen Gelbart. *Lectures on automorphic L-functions.* L-functions and arithmetic, Proc. Symp., Durham/UK 1989, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 153, 1-59 (1991).

[B08] Valentin Blomer. *Sums of Hecke eigenvalues over values of quadratic polynomials.* Int. Math. Res. Not.

[BB11] V. Blomer and F. Brumley. *On the Ramanujan conjecture over number fields.* Ann. Math. (2) 174, No. 1, 581–605 (2011).

[BGHT11] T. Barnet-Lamb, D. Geraghty, M. Harris, R. Taylor. *A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy. II.*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **47**:1 (2011), 29–98.

[BH] Valentin Blomer and Gergely Harcos. *Twisted L-functions over number fields and Hilbert's eleventh problem.* Geom. Funct. Anal. 20, 1–52. (2010). DOI: 10.1007/s00039-010-0063-x

[Br78] R. W. Bruggeman, Fourier coefficients of cusp forms., Invent. Math. 45, 1–18 (1978).

[BM98] R. W. Bruggeman and R. J. Miatello. *Sum formula for SL_2 over a number field and Selberg type estimates for exceptional eigenvalues.* Geom. Funct. Anal. 8, No. 4, 627–655 (1998).

[BM09] R. W. Bruggeman and R. J. Miatello. *Sum formula for SL_2 over a totally real number field.* Mem. Am. Math. Soc. 919, 81 p. (2009).

[BM10] R. W. Bruggeman and R. J. Miatello. *Density results for automorphic forms on Hilbert modular groups. II.* Trans. Am. Math. Soc. 362, No. 7, 3841–3881 (2010).

[BM13] R. W. Bruggeman and R. J. Miatello. *Eigenvalues of Hecke operators on Hilbert modular groups.* Asian J. Math. 17, No. 4, 729–758 (2013).

[BMP01] R.W. Bruggeman and R.J. Miatello and I. Pacharoni. *Estimates for Kloosterman sums for totally real number fields.* J. Reine Angew. Math. 535, 103–164. (2001).

[BMP03] R. W. Bruggeman and R. J. Miatello and I. Pacharoni. *Density results for automorphic forms on Hilbert modular groups.* Geom. Funct. Anal. 13, Nro. 4, 681–719. (2003).

[Bu97] D. Bump. Automorphic forms and representations. *Cambridge: Cambridge University Press*, 1997.

[CDF97] J.B. Conrey and W. Duke and D.W. Farmer. *The distribution of the eigenvalues of Hecke operators.* Acta Arith. 78, No. 4, 405–409 (1997).

[DI82] J.-M. Deshouillers and H. Iwaniec. *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms.* Invent. Math. 70, 219–288. (1982). DOI: 10.1007/BF01390728

[De73] P. Deligne. *La conjecture de Weil. I.* Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **43** (1973), 273–307.

[DemDo08] LASSINA DEMBÉLÉ and STEVE DONNELLY. *Computing Hilbert modular forms over fields with nontrivial class group.*. Algorithmic number theory. 8th international symposium, ANTS-VIII Banff, Canada, May 17–22, 2008 Proceedings, 371–386. (2008).

[E57] M. EICHLER. *Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale.* Math. Z. 67 ,267–298.

[EF90] EBERHARD FREITAG. *Hilbert modular forms.* Pages: viii + 250. Berlin etc.: Springer-Verlag. (1990).

[Ga90] P.B. GARRETT. Holomorphic Hilbert modular forms. *Pacific Grove, CA: Wadsworth &— Brooks/Cole Advanced Books &— Software*, 1990.

[Ge75] STEPHEN S. GELBART.*Automorphic forms on adele groups.* Annals of Mathematics Studies. No.83. Princeton, N. J.: Princeton University Press and University of Tokyo Press. X, 267 p. (1975).

[Ge96] STEPHEN GELBART. *Lectures on the Arthur-Selberg trace formula.* Providence, RI: AMS, American Mathematical Society, ix + 99. (1996).

[Geb09] GEBHARDT, UTE. *Explicit construction of spaces of Hilbert modular cusp forms using quaternionic theta series.* PhD thesis. Saarbrücken.(2009)

[Geer88] G. VAN DER GEER.*Hilbert modular surfaces.* Berlin etc.: Springer-Verlag (1988).

[GJ79] STEPHEN GELBART and HERVE JACQUET. *Forms of GL(2) from the analytic point of view.* Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Symp. Pure Math. Am. Math. Soc., Corvallis/Oregon 1977, Proc. Symp. Pure Math. 33, 1, 213-251 (1979).

[Go15] D. GOLDFELD.*Automorphic forms and L-functions for the group $GL(n,\mathbb{R})$. With an appendix by Kevin A. Broughan.* Reprint of the 2006 hardback edition. Pages: xiii + 493. Cambridge University Press. (2015).

[GoHu1] D. GOLDFELD and J. HUNDLEY.*Automorphic representations and L-functions for the general linear group. Volume 1. With exercises by Xander Faber.* Pages: xix + 550. Cambridge: Cambridge University Press (2011).

[GoHu2] D. GOLDFELD and J. HUNDLEY.*Automorphic representations and L-functions for the general linear group. Volume 2. With exercises by Xander Faber.*Pages: xix + 188. Cambridge: Cambridge University Press (2011).

[Iw95] H. IWANIEC. *Introduction to the spectral theory of automorphic forms.* Madrid: Biblioteca de la Revista Matemática Iberoamericana (1995).

[Iw97] H. IWANIEC.*Topics in classical automorphic forms.* Providence, RI: American Mathematical Society (1997).

[Iw02] H. IWANIEC. *Spectral methods of automorphic forms.* 2nd ed. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Madrid: Revista Matemática Iberoamericana (2002)

[Ja96] GERALD J. JANUSZ. *Algebraic number fields. 2nd ed.*, Providence, RI: AMS, American Mathematical Society, x + 276. (1996).

[JL70] H. JACQUET and R.P. LANGLANDS. *Automorphic forms on GL(2).* Lecture Notes in Mathematics. 114. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. VII, 548 p. DM 24. (1970).

[Kl27] H.D. KLOOSTERMAN. *On the representation of numbers in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$.* Acta Math. 49, 407–464. (1927). DOI: 10.1007/BF02564120

[KL06] A. KNIGHTLY and C. LI.*A relative trace formula proof of the Petersson trace formula.* Acta Arith. 122, No. 3, 297–313 (2006).

[KL06b] A. KNIGHTLY and C. LI, *Traces of Hecke operators.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) (2006).

[KL08] A. KNIGHTLY and C. LI. *Petersson's trace formula and the Hecke eigenvalues of Hilbert modular forms.* in: Modular forms on Schiermonnikoog. Based on the conference on modular forms, Schiermonnikoog, Netherlands, October 2006. Cambridge: Cambridge University Press. 145–187 (2008).

[KL13] A. KNIGHTLY and C. LI. *Kuznetsov's trace formula and the Hecke eigenvalues of Maass forms.* Mem. Am. Math. Soc. 1055, iii-v, 132 p. (2013).

[Ku80] N. V. Kuznetsov. *The Petersson conjecture for cusp forms of weight zero and the Linnik conjecture. Sums of Kloosterman sums.* (Russian). Mat. Sb. (N.S.) 111(153) , no. 3, 334-383, 479. (1980).

[L04] Robert P. Langlands. *Beyond endoscopy.* Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory, 611–697, Johns Hopkins University, Baltimore, MD, 2004.

[La75] Serge Lang. $SL_2(\mathbb{R})$. Addison-Wesley, 1975.

[Li04] C. Li. *Kuznietsov trace formula and weighted distribution of Hecke eigenvalues.*J. Number Theory 104, No. 1, 177–192 (2004).

[Li09] C. Li.*On the distribution of Satake parameters of GL_2 holomorphic cuspidal representations.* Isr. J. Math. 169, 341–373 (2009).

[LLW11] Yuk-Kam Lau and Guangshi Lü and Jie Wu. *Integral power sums of Hecke eigenvalues.* Acta Arith. 2, Vo 150, 193–207. (2011).

[LLW14] Yuk-Kam Lau and Charles Li and Yingnan Wang. *Quantitative analysis of the Satake parameters of* GL_2 *representations with prescribed local representations.* Acta Arith. 164, No. 4, 355–379 (2014).

[LW11] Y.-K. Lau and Y. Wang.*Quantitative version of the joint distribution of eigenvalues of the Hecke operators.* J. Number Theory 131, No. 12, 2262–2281 (2011).

[LZ12] Yuk-Kam Lau and Lilu Zhao. *On a variance of Hecke eigenvalues in arithmetic progressions.* J. Number Theory 5, Vol 132, 869–887. (2012).

[M47] Hans Maass. *Über automorphe Funktionen von mehreren Veränderlichen und die Bestimmung von Dirichletschen Reihen durch Funktionalgleichungen.* (German). Ber. Math.-Tagung Tübingen 1946, 100-102 (1947).

[M49] Hans Maass. *Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen.* Math. Ann. 121,141–183. (1949).

[M53] Hans Maass. *Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen.* Math. Ann. 125, 235–263. (1953).

[Mi71] T. Miyake. *On automorphic forms on GL_2 and Hecke operators.*. Ann. Math. (2), 90, 174–189. (1971).

[Ma13] P. Maga. *A semi-adelic Kuznetsov formula over number fields.* Int. J. Number Theory 9, No. 7, 1649–1681 (2013).

[Mar77] Daniel A. Marcus. *Number fields.* Universitext. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag. VIII, 279 p. (1977).

[MaOm09] Sami Omar and Kamel Mazhouda. *Equirépartition des coefficients de Fourier des fonctions L de carrés et de cubes symétriques.* Ramanujan J. 20, 1, 81–89. (2009).

[MiMu11] S. J. Miller and M. R. Murty.*Effective equidistribution and the Sato-Tate law for families of elliptic curves.* J. Number Theory 131, No. 1, 25–44 (2011).

[MuSi09] M. R. Murty and K. Sinha.*Effective equidistribution of eigenvalues of Hecke operators.* J. Number Theory 129, No. 3, 681–714 (2009).

[P32] Hans Petersson. *Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen.* Acta Math. 58, 169–215. (1932).

[P39] Hans Petersson.*Über eine Metrisierung der ganzen Modulformen.* Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 49, 49–75. (1939).

[PR94] Vladimir Platonov and Andrei Rapinchuk. *Algebraic groups and number theory.* Transl. from the Russian by Rachel Rowen, xi + 614. Boston, MA: Academic Press. (1994).

[RaVa99] Dinakar Ramakrishnan and Robert J. Valenza. *Fourier analysis on number fields.* Graduate Texts in Mathematics 186, Springer, New York, 1999.

[Sar87] Peter Sarnak. *Statistical properties of eigenvalues of the Hecke operators.* Analytic number theory and diophantine problems, Proc. Conf., Stillwater/Okla. 1984, Prog. Math. 70, 321-331 (1987).

[Sar90] Peter Sarnak. *Some applications of modular forms.* Cambridge University Press. (1990)

[S56] Atle Selberg. *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series.* J. Indian Math. Soc., New Ser. 20, 47–87. (1956).

[S65] Atle Selberg. *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms.* Proc. Sympos. Pure Math. 8, 1-15 (1965).

[Se68] J.-P. Serre. *Abelian l-adic representations and elliptic curves.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam. (1968).

[Se97] J.-P. Serre.*Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke T_p.* J. Am. Math. Soc. 10, No. 1, 75–102 (1997).

[Shi94] Goro Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions.* Princeton, NJ: Princeton Univ. Press. (1994).

[TW16] H. Tang and Y. Wang.*Quantitative versions of the joint distributions of Hecke eigenvalues.* J. Number Theory 169, 295–314 (2016).

[Ve04] A. Venkatesh.*Beyond Endoscopy and special forms on* GL(2). J. Reine Angew. Math. 577, 23–80 (2004).

[W14] Y. Wang.*The quantitative distribution of Hecke eigenvalues.* Bull. Aust. Math. Soc. 90, No. 1, 28–36 (2014).

[Wu09] Jie Wu. *Power sums of Hecke eigenvalues and application.* Acta Arith. 4, Vol 137, 333–344. (2009).

[We48] André Weil. *On some exponential sums.* Proc. Natl. Acad. Sci. 34, 204–207. (1948). DOI: 10.1073/pnas.34.5.204

[WX15] Jie Wu and Zhao Xu. *Power sums of Hecke eigenvalues of Maass cusp forms.* Ramanujan J. 3, Vol 36, 439–453. (2015).

[WZ13] J. Wu and W. Zhai.*Distribution of Hecke eigenvalues of newforms in short intervals.* Q. J. Math. 64, No. 2, 619–644 (2013).

[Xu17] Zhao Xu. *Sign changes of Hecke eigenvalue of primitive cusp forms.* J. Number Theory, 172, 32–43. (2017).