Operadores Diferenciales de tipo Lunts-Rosenberg de álgebras de matrices polinómicas, álgebras de caminos y álgebras de matrices triangulares formales

por:
Fredy Alexander Restrepo Blandon

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional de Córdoba

Directora:
Dra. Esther Galina

CÓRDOBA ARGENTINA
MARZO DE 2019

Resumen

En este trabajo estudiamos el anillo $\mathbb{N}_0$-filtrado de operadores diferenciales sobre $\Bbbk$-álgebras no conmutativas, $\mathrm{D}_\Bbbk(A) = \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{D}_\Bbbk^n(A)$. Dicho anillo fue definido por primera vez por Lunts y Rosenberg de forma intrínseca [LR97], de la siguiente manera: sea $\lambda : A \to \mathrm{End}_\Bbbk(A)$ la representación natural obtenida de la multiplicación a izquierda con elementos de A. Se considera $\mathrm{D}_\Bbbk^{-1}(A) = 0$, y para cada $n \geq 0$, $\mathrm{D}_\Bbbk^n(A)$ es el espacio vectorial generado por los operadores $\{\lambda_a \nabla \lambda_b \in \mathrm{End}_\Bbbk(A) : \nabla \in \mathrm{Z}_\Bbbk^n(A), a, b \in A\}$, donde

$$\nabla \in \mathrm{Z}_\Bbbk^n(A) \text{ si y solo si } \nabla\lambda_a - \lambda_a\nabla \in \mathrm{D}_\Bbbk^{n-1}(A),\ \forall a \in A.$$

Iniciamos este trabajo estudiando los operadores diferenciales del álgebra de matrices polinómicas $M_m(\mathbb{C}[X])$, y mostramos que los operadores diferenciales $\mathrm{D}_\mathbb{C}(\mathbb{C}[X])$ y $\mathrm{D}_\mathbb{C}(M_m(\mathbb{C}[X]))$, son equivalentes Morita. Más aún, al estudiar el anillo de polinomios $B[X]$, con coeficientes en una $\Bbbk$-álgebra B de dimensión finita, mostramos que, $\mathrm{D}_\Bbbk(B[X]) = \mathrm{D}_\Bbbk(B) \otimes \mathrm{D}_\Bbbk(\Bbbk[X])$, y con esta estructura extendemos de manera efectiva herramientas de la teoría de módulos sobre la n-álgebra de Weyl, al contexto de los $\mathrm{D}_\Bbbk(B[X])$-módulos.

Luego estudiamos los operadores diferenciales de familias de álgebras de caminos sobre un carcaj finito, acíclico y conexo $\Gamma_\Bbbk(Q)$. Con estas estructura obtenemos ejemplos de álgebra de dimensión finta tales que $\mathrm{D}_\Bbbk(\Gamma(Q)) \neq \mathrm{End}_\Bbbk(\Gamma(Q))$. Por otra parte, realizamos cómputos explícitos de la dimensión del primer grupo de cohomología de Hochschild $\mathrm{H}^1(\Gamma(Q))$, y con esto, revelamos el bajo impacto de $\dim \mathrm{H}^1(\Gamma(Q))$ sobre el acotamiento superior para la filtración del anillo $\mathrm{D}_\Bbbk(\Gamma(Q))$. Vale destacar, que encontramos álgebras de caminos donde, $\mathrm{H}^1(\Gamma(Q)) \neq 0$ y $\mathrm{D}_\Bbbk(\Gamma(Q)) = \mathrm{D}_\Bbbk^0(\Gamma(Q))$. Dichos sea de paso, es la primera vez que se documenta un ejemplo con esta propiedad, a la luz de la teoría de D-módulos. Además, con estos cómputos abrimos el telón a nuevos objetos para evaluar la afirmación de la Dra. Iyer [I02], esta es; *si* $\mathrm{H}^1(\Gamma(Q)) = 0$, *entonces* $\mathrm{D}_\Bbbk(\Gamma(Q)) = \mathrm{D}_\Bbbk^0(\Gamma(Q))$.

Finalmente, estudiamos los operadores diferenciales del álgebra de matrices triangulares formales $\mathrm{T}_L = \begin{bmatrix} R & 0 \\ B & S \end{bmatrix}$, inducida por dos $\Bbbk$-álgebras R, S y un bimódulo ${}_SB_R$. Describimos el anillo $\mathrm{D}_\Bbbk(\mathrm{T}_L)$, extendiendo las propiedades encontradas en las álgebras de caminos $\mathrm{D}_\Bbbk(\Gamma(Q))$. Para ello, construimos recursivamente tres familias de subespacios $\{\Omega_{11}^n \subseteq \mathrm{D}_\Bbbk^n(R)\}_{n\geq 0}$, $\{\Omega_{22}^n \subseteq \mathrm{D}_\Bbbk^n(B)\}_{n\geq 0}$ y $\{\Omega_{21}^n \subseteq \mathrm{Hom}(R, B)\}_{n\geq 0}$. Luego, exhibimos las relaciones entre estos subespacios, que nos permiten recuperar el anillo completo de operadores matriciales $\mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$. Más aún, $\Omega_{11}^* = \bigcup_{n\geq 0} \Omega_{11}^n$, $\Omega_{22}^* = \bigcup_{n\geq 0} \Omega_{22}^n$ y $\Omega_{21}^* = \bigcup_{n\geq 0} \Omega_{21}^n$, son refinamientos de $\mathrm{D}_\Bbbk(R)$, $\mathrm{D}_\Bbbk(B)$ y $\mathrm{Hom}(R, B)$, y a partir de ellos, logramos formular la $\mathbb{N}_0$-inclusión de estas estructuras en $\mathrm{D}_\Bbbk(\mathrm{T}_L)$, problema que nació de la lectura del articulo [SIK16].

Palabras Clave. Álgebras asociativas, anillos de operadores diferenciales.

2010 Mathematics Subject Classification: 16S32

Abstract

In this work, we study the $\mathbb{N}_0$-filtering ring of differential operators on non commutative $\Bbbk$-algebras, $\mathrm{D}_{\Bbbk}(A) = \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(A)$. This ring was defined for the first time by Lunts and Rosenberg in an intrinsic way [LR97] as follows: be $\lambda : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(A)$ the natural representation obtained from left multiplication with elements of A. It is considered $\mathrm{D}^{-1}_{\Bbbk}(A) = 0$ and for each $n \geq 0$, $\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(A)$ is the vectorial space generated by operators $\{\lambda_a \nabla \lambda_b \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(A) : \nabla \in \mathrm{Z}^n_{\Bbbk}(A), a, b \in A\}$ where

$$\nabla \in \mathrm{Z}^n_{\Bbbk}(A) \text{ si y solo si } \nabla\lambda_a - \lambda_a\nabla \in \mathrm{D}^{n-1}_{\Bbbk}(A),\ \forall a \in A.$$

We begin this work by studying the differential operators of the polynomial matrix algebra $M_m(\mathbb{C}[X])$, and we show that the differential operators $\mathrm{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X])$ and $\mathrm{D}_{\mathbb{C}}(M_m(\mathbb{C}[X]))$, are Morita equivalents. More over, when studying the polynomials ring $B[X]$, with coefficients in a finite-dimensional $\Bbbk$-algebra B, we show that $\mathrm{D}_{\Bbbk}(B[X]) = \mathrm{D}_{\Bbbk}(B) \otimes \mathrm{D}_{\Bbbk}(\Bbbk[X])$ and with this structure we effectively extend the tools of the modules theory on Weyl n-algebra, to the context of the $\mathrm{D}_{\Bbbk}(B[X])$-modules.

Then, we study the differential operators of path algebra over a finite, acyclic and connected quiver $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$. With these structures, we get examples of finite dimensional algebra such that $\mathrm{D}_{\Bbbk}(\Gamma(Q)) \neq \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Gamma(Q))$. On the other hand, we made explicit computations of the dimention of the first Hochschild cohomology group $\mathrm{H}^1(\Gamma(Q))$ and with this, we reveal the low impact of $\dim \mathrm{H}^1(\Gamma(Q))$ on the upper boundary for the filtering of $\mathrm{D}_{\Bbbk}(\Gamma(Q))$ ring. It is worth mentioning, that we find path algebras where $\mathrm{H}^1(\Gamma(Q)) \neq 0$ and $\mathrm{D}_{\Bbbk}(\Gamma(Q)) = \mathrm{D}^0_{\Bbbk}(\Gamma(Q))$. Incidentally, it is the first time that an example is documented with this property, in light of the theory of D-modules. Also, with these computations we open the curtain to new objects to evaluate the Dr. Iyer's affirmation [I02], this is *if* $\mathrm{H}^1(\Gamma(Q)) = 0$, *then* $\mathrm{D}_{\Bbbk}(\Gamma(Q)) = \mathrm{D}^0_{\Bbbk}(\Gamma(Q))$.

Finally, we study the differential operators of the formal triangular matrices algebra $\mathrm{T}_L = \begin{bmatrix} R & 0 \\ B & S \end{bmatrix}$, induced by two $\Bbbk$-algebras R, S and a bimodule ${}_S B_R$. We discribe the ring $\mathrm{D}_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$ by extending the properties found in path algebras $\mathrm{D}_{\Bbbk}(\Gamma(Q))$. To do this, we build recursively three families of subspaces $\{\Omega^n_{11} \subseteq \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(R)\}_{n\geq 0}$, $\{\Omega^n_{22} \subseteq \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(B)\}_{n\geq 0}$ and $\{\Omega^n_{21} \subseteq \mathrm{Hom}(R, B)\}_{n\geq 0}$. Then, we show the relationships between these subspaces, that allow us to recover the complete ring of matrix operators $\mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$. Even more, $\Omega^*_{11} = \bigcup_{n\geq 0} \Omega^n_{11}$, $\Omega^*_{22} = \bigcup_{n\geq 0} \Omega^n_{22}$ and $\Omega^*_{21} = \bigcup_{n\geq 0} \Omega^n_{21}$ are refinements of $\mathrm{D}_{\Bbbk}(R)$, $\mathrm{D}_{\Bbbk}(B)$ y $\mathrm{Hom}(R, B)$, and from them, we manage to formulate the $\mathbb{N}_0$-injection of these structures in $\mathrm{D}_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$, problem that emerge from reading the article [SIK16].

KEYS WORDS: Associatives rings and algebras, Rings of differential operators

2010 MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION: 16S32

Agradecimientos

- A mi directora: Dra. Esther
- A la comisión asesora: Dr Paulo y Dr. Jorge
- Al jurado: Dra. Andrea Solotar, Dra. Carina Boyallian y Dr. Eduardo Hulett
- A la Universidad Nacional de Córdoba
- A la facultad FaMAF
- Al CONICET
- A la comunidad docente, administrativo y extensión de FaMAF
- Al cuerpo de estudiantes
- A mi familia

Índice general

Introducción

Este trabajo de tesis doctoral tiene como marco de referencia la *Teoría Algebraica de los Sistemas Diferenciales Lineales*, o mejor conocida como *Teoría de los* D*-módulos*. Desde 1970, la teoría de D-módulos se ha desarrollado de la mano de los matemáticos M. Sato, M. Kashiwara, T. Kaway, J. Bernstein, J-E. Björk, B. Malgrange y A. Beilingson (ver [B79], [B93], [C95]). Esta teoría encuentra sus fundamentos en la *Geometría Algebraica* propinada por A. Grothendieck. Este enfoque de caracter global es muy distinto al dado por el análisis funcional para el estudio de los operadores diferenciales. La definición canónicamente establecidas del anillo de operadores diferenciales sobre álgebra conmutativas, es la siguiente; dada A una $\Bbbk$-álgebra conmutativa, se obtienen el anillo de operadores diferenciales $\mathrm{D}_{\Bbbk}(A) = \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(A)$, tal que,

$$\nabla \in \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(A) \Longleftrightarrow [\nabla, \lambda_\alpha] \in \mathrm{D}^{n-1}_{\Bbbk}(A), \forall \alpha \in A$$

donde, λ_a es el endomorfismo inducido por la multiplicación a izquierda por $a \in A$.

Por otra parte, encontramos en los trabajos de Grünbaum, Tirao y Pacharoni (ver [GPT02], [T03], [GT07]), una estructura distinguida de operadores diferenciales $\mathcal{D}(W)$, asociada al álgebra de matrices cuadradas de orden $m \times m$ con entradas en el anillo de polinomios en una variable con coeficientes en los números complejos, $M_m(\mathbb{C}[x])$. A grandes rasgos se define de la siguiente manera; sean $\lambda, \rho : M_m(\mathbb{C}[x]) \to \mathrm{End}(M_m(\mathbb{C}[x]))$, tales que, $\lambda_{f(x)}$ es la transformación lineal inducida por la multiplicación a izquierda, y $\rho_{f(x)}$ es la transformación lineal inducida por la multiplicación a derecha. Ahora, en [GT07, Proposition 2. 6. pg. 457], se estudian ecuaciones diferenciales del tipo

$$\sum_{i=1}^{N} \partial^i(p_n) f_i = q_n p_n, \forall n \in \mathbb{N}_0, \Longleftrightarrow (\sum_{i=1}^{N} \rho_{f_i}\partial^i - \lambda_{q_n})(p_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

para ciertas sucesiones distinguidas de polinomios $\{q_n; p_n \in M_m(\Bbbk[x])\}$. Con estos en mente, nos surge como motivación primera encontrar un anillo de operadores $\mathcal{D}$, que admita una formulación inherente al anillo no conmutativo $M_m(\mathbb{C}[x])$. El cual con permita implementar las técnicas de carácter global, propias de la la teoría de $\mathcal{D}$-módulo, y a su vez, $\mathcal{D}$ sea el espacio ambiente para los operadores diferenciales del tipo $\nabla_\rho = \rho_{f(x)}\partial^i$ y $\nabla_\lambda = \lambda_{g(x)}\partial^j$. De esta forma, $\mathcal{D}$ se presenta como un nuevo objeto de estudio para la teoría de representaciones.

En 1997, los matemáticos V. Lunts y A. Rosenberg publican un primer trabajo [LR97], en el cual se proponen tres tipos de anillos de operadores asociados a las álgebras no conmutativos estos son los *operadores diferénciales* $\mathrm{D}(A)$, los *β-operadores diferenciales* $\mathrm{D}_\beta(A)$ y los *operadores diferenciales cuánticos* $\mathrm{D}_q(A)$. El primero de ellos brinda una extensión no trivial de la teoría de D-módulos de tipo Grothendieck, al contexto de las álgebras no conmutativas, más aún, al contexto de los esquemas no conmutativos. Este anillo se define de la siguiente manera: dada una $\Bbbk$-álgebra no conmutativa A, sea $\mathrm{D}_{\Bbbk}(A) = \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(A)$, donde, $D^n_{\Bbbk}(A)$ es el espacio generado por el conjunto de operadores

$$\{\lambda_a \nabla \lambda_b \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(A) \mid \nabla \in Z^n_{\Bbbk}(A), a, b \in A\}$$

tal que,

$$\nabla \in Z^n_{\Bbbk}(A) \Longleftrightarrow [\nabla, \lambda_\alpha] \in D^{n-1}_{\Bbbk}(A),\ \forall \alpha \in A$$

donde, $\lambda : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(A)$, es el morfismo inducido por la multiplicación a izquierda por elementos de A. Vale mencionar que los trabajos posteriores de Lunts y Rosenberg se enfocan en la consolidación de una teoría general de esquemas no conmutativos, y son sus discípulos Uma N. Iyer y T. C. McCune, los que más han publicado sobre operadores diferenciales para el contexto de álgebras no conmutativas (ver [I01], [I02], [I05], [I06], [IMc12],[SIK16]).

En el presente trabajo hacemos una recopilación de muchos de los resultados publicados en los artículos que hemos mencionado. De esta manera, presentamos en un mismo texto las herramientas pertinentes para el estudio de las propiedades básicas de los operadores diferenciales de álgebras no conmutativas de tipo Lunts-Rosenberg.

Iniciamos nuestro estudio con la n-álgebra de Weyl, la cual se define como el anillo de operadores diferenciales de tipo Grothendieck del álgebra de polinomios de n-variables sobre un cuerpo $\Bbbk$ con característica cero, es decir, $A_n(\Bbbk) = D_{\Bbbk}(\Bbbk[X])$, donde X denota el conjunto de variables indeterminadas $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Con esta idea en mente, tomamos el anillo de polinomios $B[X]$, con B una $\Bbbk$-álgebra no conmutativa de dimensión finita, y le calculamos los operadores diferenciales de tipo Lunts-Rosenberg, y de esta forma, proponemos un paralelo entre los A_n-módulos y los $D(B[X])$-módulos. En primer lugar, obtenemos que $D_{\Bbbk}(B[X]) = D_{\Bbbk}(B) \otimes A_n$. Por otra parte, es de conocimiento general que $A_n = \mathrm{Sum}_{\Bbbk}\{\lambda_{f(x)}\rho_{g(x)}\partial^\alpha \mid f(x), g(x) \in \Bbbk[X],\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$, teniendo presente que $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$, y ∂_i es el operador definido como la derivada parcial. Luego, extendemos naturalmente al contexto de $D(B[X])$, la formulación anterior, es decir,

$$D(B[X]) = \mathrm{Sum}\{\lambda_{f(x)}\rho_{g(x)}\partial^\alpha \mid f(x), g(x) \in B[X],\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

Con esto en mente, replicamos la definición del conjunto solución asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales sobre A_n-módulos al contexto de los $D(B[X])$-módulos, de esta manera; Fijado un conjunto de operadores $\{\nabla_i \in D(B[X]) : 1 \leq i \leq l\}$, y dado Γ un $D(B[X])$-módulo izquierdo, se define el conjuto solución como $Sol_\Gamma(\nabla_i) = \{f \in \Gamma : \nabla_i(f) = 0, \forall i = 1, \ldots, l\}$. Entonces, replicamos la descripción del conjunto $Sol_\Gamma(\nabla_i)$ en términos puramente algebraicos,

$$Sol_\Gamma(\nabla_i) = \mathrm{Hom}_{D(B[X])}(D(B[X])/J, \Gamma),$$

donde, $J = \sum_{i=1}^{l} D(B[X])\nabla_i$ denota el ideal generado por el conjunto de operadores $(\nabla_1, \ldots, \nabla_l)$ en $D(B[X])$. En el caso particular $B = M_m(\mathbb{C})$, los resultados previamente mencionados dan respuesta a la motivación primera. Más aún, logramos dar cuenta de los operadores diferenciales para el álgebra de matrices con entradas en el anillo de polinomios de n-variables, y a su vez obtenemos que, $D(M_m(\Bbbk[X]))$ es equivalente Morita a $A_n(\Bbbk)$. Esto se sigue de la igualdad $D(M_m(\Bbbk[X])) = M_{m^2}(A_n(\Bbbk))$.

Estas primeras indagaciones nos motivan a comprender con mayor profundidad la estructura de aquellas álgebras B tales que, $D_{\Bbbk}(B) = D^0_{\Bbbk}(B)$ y a buscar ejemplos donde eso no suceda. En esta dirección la Dra. U. N. Iyer en [I02] formula el siguiente problema abierto,

si B es una $\Bbbk$-álgebra tal que el primer grupo de cohomología de Hochschild es cero, entonces $D(B) = D^0(B)$.

Nosotros abordamos este problema, estudiando el anillo de operadores diferenciales de álgebras de caminos generadas por un carcaj Q finito, acíclico y conexo. En este contexto, formulamos como pregunta de trabajo,

¿Es una condición suficiente y necesaria que el primer grupo de cohomología de Hochschild sea cero, para que todos los operadores diferenciales sean interiores, es decir, $\mathrm{D}(B) = \mathrm{D}^0(B)$*?*

Es notorio que encontramos familias de álgebras cuyo anillo de operadores diferenciales rompen con los preconceptos que se generan de la teoría de D-módulos sobre álgebras conmutativas. Por ejemplo, presentamos una $\Bbbk$-álgebra de caminos B, cuyo primer grupo de cohomología de Hochschild es distinto de cero, pero a su vez todos los operadores diferenciales son de orden cero. Es decir que el espacio de las derivaciones exteriores $\mathrm{Der}_\lambda(B)$ es distinto al espacio de las derivaciones interiores $\mathrm{Int}(B)$, y al mismo tiempo se da la inclusión $\mathrm{Der}_\lambda(B) \subseteq \mathrm{D}^0(B)$.

Por otra parte, los cálculos explícitos que realizamos para obtener una descripción del anillo de operadores diferenciales de algunas familias de álgebras de caminos, estudiadas en el `Capítulo` 3 de esta tesis, nos brindaron las herramientas para describir los operadores diferenciales de álgebras más generales, tal es el caso de las matrices triangulares formales $\mathrm{T}_L(R, B, S)$. Las mismas están definidas por un par de $\Bbbk$-álgebras (R, S), y un (S, R)-bimódulo B, cuya estructura de álgebra es la multiplicación natural de matrices de esta manera,

$$\mathrm{T}_L(R, B, S) = \begin{bmatrix} R & 0 \\ B & S \end{bmatrix}$$

La clave para calcular $\mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L)$, consiste en dos ingredientes fundamentales, una de ellos fue identificar con precisión tres familias de subespacios,

$$\{\Omega^n_{11} \subseteq \mathrm{D}^n(R) : n \in \mathbb{N}_0\}, \quad \{\Omega^n_{22} \subseteq \mathrm{D}^n(B) : n \in \mathbb{N}_0\}, \quad \{\Omega^n_{21} \subseteq \mathrm{Hom}(R, B) : n \in \mathbb{N}_0\}$$

tales que los siguientes diagramas son inyectivos para cada $n \geq 0$,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}^n(R) \arrow[r, hook] & \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) & \mathrm{D}^n(B) \arrow[r, hook] & \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) & \mathrm{Hom}(R,B) \arrow[r, hook] & \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) \\
\Omega^n_{11} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, dotted] & \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) \arrow[u, hook] & \Omega^n_{22} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, dotted] & \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) \arrow[u, hook] & \Omega^n_{21} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, dotted] & \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Luego, se demuestra la igualdad

$$\mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} \Omega^n_{11} & 0 & 0 \\ \Omega^n_{21} & \Omega^n_{22} & \mathrm{D}^n(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^n(S) \end{bmatrix}$$

El segundo ingrediente, fue detectar las estructuras adecuadas para $\mathrm{Z}^n_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$ en forma inductiva.

El contenido de este proyecto de tesis está organizado de la siguiente manera:

En el `Capítulo` 1 se exponen los preliminares básicos de álgebras y módulos. Luego introducimos una estructura distinguida de A-bimódulo sobre los espacios de transformaciones $\Bbbk$-lineales $\mathrm{Hom}(M, N)$, $\mathrm{End}_k(M)$ y $\mathrm{End}_k(A)$, inducida por el homomorfismo $\lambda : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(A)$ multiplicación a izquierda por elementos de A. Brindamos las definición de operadores diferenciales de tipo Lunts-Rosenberg, para luego cerrar con una lista de resultados generales sobre operadores diferenciales recopilados de distintos artículos.

En el `Capítulo` 2 estudiamos los operadores diferenciales del anillo de polinomios con coeficientes en una $\mathbb{k}$-álgebra no conmutativa B de dimensión finita, $\mathrm{D}(B[X])$, obteniendo en este caso que, $\mathrm{D}(B[X]) = \mathrm{D}(B) \otimes \mathrm{D}(\mathbb{k}[X])$. Luego centramos nuestra atención sobre álgebras B, tales que $\mathrm{D}(B) = \mathrm{D}^0(B)$, condición que rescatamos como un propiedad que generaliza los resultados obtenidos del estudio de los operadores diferenciales del álgebra de matrices polinomiales, $M_m(\mathbb{C}[X])$, y el anillo de polinomios con coeficientes en las álgebras de Clifford (números hipercomplejos), $\mathrm{Cl}_m[X]$. Por otra parte, extendemos naturalmente varios objetos de la categoría de módulos izquierdos sobre la n-álgebra de Weyl, a la categoría de módulos izquierdos sobre $\mathrm{D}(B[X])$. Cerramos el capítulo, evidenciando la riqueza y complejidad que presenta la clasificación de la categoría de álgebras cuyos operadores diferenciales son todos interiores, es decir, $\mathrm{D}(B) = \mathrm{D}^0(B)$.

En el `Capítulo` 3 realizamos cálculos explícitos del anillo de operadores diferenciales sobre familias de álgebras de caminos $\{\Gamma_{\mathbb{k}}(Q_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$, inducidas por un carcaj Q_n, finito, acíclico y conexo. Teniendo como pregunta directriz la validez de la afirmación siguiente: si $\mathrm{H}^1(A)$ es primer grupo de cohomología de Hochschild, entonces,

$$\dim \mathrm{H}^1(A) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{D}^n(A) = \mathrm{D}^0(A),\ \forall n \geq 0$$

Familias y propiedades obtenidos en este capítulo:

- La n-álgebra de Kronecker;

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1) = \begin{bmatrix} \mathbb{k} & 0 \\ \mathbb{k}^n & \mathbb{k} \end{bmatrix} \\
&\mathrm{D}^0(\Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \neq \mathrm{D}(\Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \neq \mathrm{End}(\Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \\
&\mathrm{D}^1(\Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) \oplus \mathrm{Der}_{\lambda}(\Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \\
&\mathrm{H}^1(\Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{D}^1(\Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) / \mathrm{D}^0(\Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) \\
&\dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = 2n + 3 \\
&\dim \mathrm{D}(\Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = n^2 + 2n + 2 \\
&\dim \mathrm{H}^1(\Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = n^2 - 1.
\end{aligned}$$

- Una extensión natural de la n-álgebra de Kronecker;

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{(1,n)} := \Gamma_{\mathbb{k}}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \begin{bmatrix} \Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) & 0 \\ \mathbb{k}^{n+1} & \mathbb{k} \end{bmatrix} \\
&\mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)}) \neq \Gamma_{(1,n)} \oplus \mathrm{Der}_{\lambda}(\Gamma_{(1,n)}) \\
&\mathrm{D}^0(\Gamma_{(1,n)}) \neq \mathrm{D}(\Gamma_{(1,n)}) \neq \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)}) \\
&\dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{(1,n)}) = 6n + 9 \\
&\dim \mathrm{D}(\Gamma_{(1,n)}) = \dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)}) = 3n^2 + 6n + 6 \\
&\dim \mathrm{H}^1(\Gamma_{(1,n)}) = n^2 - 1.
\end{aligned}$$

- El álgebra de matrices triangulares inferiores;

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ML}_{n+1}(\Bbbk) = \begin{bmatrix} \mathrm{ML}_n(\Bbbk) & 0 \\ \Bbbk^n & \Bbbk \end{bmatrix} \\
&\dim \mathrm{H}^1(\mathrm{ML}_n(\Bbbk)) = 0 \\
&\mathrm{D}(\mathrm{ML}_n) = \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n) \\
&\mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n) = \begin{bmatrix} \mathrm{MU}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{MU}_{21} & \mathrm{MU}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{MU}_{31} & \mathrm{MU}_{32} & \mathrm{MU}_{33} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \mathrm{MU}_{n,1} & \mathrm{MU}_{n,2} & \mathrm{MU}_{n,3} & \dots & \mathrm{MU}_{n,n} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

- El álgebra de caminos Γ_1, inducida por el carcaj

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \arrow[dl] \\
\bullet & \bullet
\end{tikzcd}
$$

  es un ejemplo donde $\mathrm{Der}_\lambda(\Gamma_1) \subseteq \mathrm{D}^0(\Gamma_1)$, a pesar que, $\mathrm{Int}(\Gamma_1) \neq \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma_1)$. Esto revela un echo relevante no documentado hasta la fecha, este es, existe una derivación que no es clásicamente interior, pero, dicha derivación si es un operador diferencial interior de tipo Lunts-Rosenberg. Cerramos el `Capítulo` 3 con una pregunta aun abierta, la cual extiende la propiedad distinguida del carcaj anterior, así:

  Dada el álgebra de caminos Γ_n inducida por n-copias del carcaj anterior

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \arrow[dl] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \arrow[dl] & \cdots & \bullet \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \arrow[dl] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \arrow[dl] \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet
\end{tikzcd}
$$

  Afirmamos que todos los operadores diferenciales de Γ_n son interiores, esto es

$$
\mathrm{D}^m(\Gamma_n) = \mathrm{D}^0(\Gamma_n)\,, \forall m \geq 0.
$$

  Ya se sabe que $\dim \mathrm{H}^1(\Gamma_n) = n$, y esto implica que $\mathrm{Int}(\Gamma_n) \neq \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma_n)$. Si consideramos nuestra afirmación verdadera, obtenemos que $\mathrm{Der}_\lambda(\Gamma_n) \subseteq \mathrm{D}^0(\Gamma_n)$.

En el `Capítulo` 4 estudiamos los operadores diferenciales del álgebra de matrices triangulares inferiores,

$$
\mathrm{T}_L(R,B,S) = \begin{bmatrix} R & 0 \\ B & S \end{bmatrix}
$$

donde (R,S) son álgebras y B un (S,R)-bimódulo. Hacemos notar, que esta álgebra nos permite generalizar las estructuras de álgebras de caminos estudiadas en el `Capítulo` 3, pero, a su vez, el estudio de dichos ejemplos concretos nos permitió identificar las relaciones y estructuras necesarias para obtener la descripción de los espacios de operadores $\mathrm{Z}^n_\Bbbk(\mathrm{T}_L)$ y $\mathrm{D}^n_\Bbbk(\mathrm{T}_L)$, para cada $n \geq 0$. Cerramos este capítulo respondiendo a un problema técnico que encontramos en el artículo [SIK16], el cual ameritaba un tratamiento cuidadoso y detallado. El problema consiste en describir la estructura heredada de los espacios $\mathrm{D}_\Bbbk(R)$, $\mathrm{D}_\Bbbk(R)$ y $\mathrm{Hom}(R,B)$, al verse como subespacios de $\mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$. Para ello, propusimos un refinamiento para cada uno de estos espacios, $\Omega^*_{11} \subseteq \mathrm{D}_\Bbbk(R)$, $\Omega^*_{22} \subseteq \mathrm{D}_\Bbbk(B)$ y $\Omega^*_{21} \subseteq \mathrm{Hom}(R,B)$, tales que, $\mathrm{D}_\Bbbk(R) \cong \Omega^*_{11} \subset \mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$, $\mathrm{D}_\Bbbk(B) \cong \Omega^*_{22} \subset \mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$ y $\mathrm{Hom}(R,B) \cong \Omega^*_{21} \subset \mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$.

Capítulo 1

Operadores diferenciales de tipo Lunts-Rosenberg

En este capítulo recordamos definiciones y propiedades básicas sobre álgebras, módulos y sus morfismos, con el ánimo de fijar la notación pertinente a nuestra linea de trabajo. Posteriormente, exponemos la definición de los operadores diferenciales de tipo Lunts-Rosenberg para módulos y álgebras. Dichos operadores resultan en una generalización de la teoría de D-módulos, para el contexto de álgebras no conmutativas y módulos. Cerramos este capítulo con una lista de resultados generales, con el animo de documentar y sintetizar en un solo texto los resultados más relevantes obtenidos en esta área, por otra parte, condensamos en una sección un banco de herramientas que usaremos a lo largo de todo nuestro trabajo.

SECCIÓN 1.1

Preliminares

Los contenidos de esta sección son ampliamente conocidos en el estudio de la teoría de anillos y módulos, hemos adaptado las definiciones y propiedades a las necesidades de este proyecto (ver [McR97], [R91],[R06],[R08]).

Hacemos notar que todos los objetos algebraicos mencionados en este trabajo tendrán por defecto una estructura de $\Bbbk$-espacio vectorial, donde, $\Bbbk$ denota un cuerpo (por comodidad con característica cero, salvo que se diga lo contrario). Similarmente, todos los morfismos entre objetos serán por defecto transformaciones $\Bbbk$-lineales. En términos formales, todos los objetos y morfismos de nuestro interés formarán una subcategoría de la categoría de $\Bbbk$-espacios vectoriales.

1.1.1. Álgebras y módulos

Sea $\Bbbk$ un cuerpo, una $\Bbbk$-**álgebra** es un anillo A unitario $(1 \in A)$ tal que A posee estructura de $\Bbbk$-espacio vectorial y satisface

$$r(ab) = (ra)b = a(rb)$$

para cualquier $a, b \in A$ y para cualquier $r \in \Bbbk$.

En general, estamos interesados en trabajar sobre álgebras no conmutativas. Sea A una $\Bbbk$-álgebra, el **álgebra opuesta** A^{op} se obtiene con la estructura de $\Bbbk$-espacio vectorial de A, y cuya regla de multiplicación es; si $a, b \in A$, entonces $a^o b^o = (ba)^o$. Aquí, a^o denota el elemento $a \in A$, considerado como elemento de A^{op}. Por otra parte, el **centro** de A se define como el espacio

$$\mathrm{C}(A) = \{c \in A \mid ac - ca = 0, \ \forall\, a \in A\}.$$

Con esto en mente, diremos que una $\Bbbk$-álgebra A es conmutativa si $A = \mathrm{C}(A)$.

Sea S un subconjuto de A, $S \subseteq A$, el subespacio vectorial generado por S en A se define como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas con elementos en S, y será denotado por $\mathrm{Sum}_{\Bbbk}(S)$ o simplemente $\mathrm{Sum}(S)$. Similarmente, la subálgebra generada por S en A se define como el conjunto de todas la multiplicaciones posibles entre las combinaciones lineales finitas de elementos en S, y será denotada por $\mathrm{Gen}_{\Bbbk}(S)$ o simplemente $\mathrm{Gen}(S)$. En general, sabemos que $\mathrm{Sum}(S)$ es subespacio vectorial de $\mathrm{Gen}(S)$.

Diremos que A es de **dimensión finita** si existe un conjunto finito de elementos $\{a_1, \ldots, a_n\}$ tal que $\mathrm{Sum}_{\Bbbk}\{a_1, \ldots, a_n\} = A$; es decir, si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\dim_{\Bbbk}(A) \leq n$. Similarmente, diremos que A es una **$\Bbbk$-álgebra finitamente generada** si existe un subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ tal que $\mathrm{Gen}_{\Bbbk}\{a_1, \ldots, a_n\} = A$. Vale mencionar, para cada número natural $m \geq 0$, tenemos los multi-índices con norma m, dados por

$$\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m.$$

A su vez, denotaremos al conjunto de permutaciones de n elementos, con

$$[n!] := \{\sigma := (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \mid \sigma \text{ permutación}\}.$$

De esta forma, podemos escribir cómodamente al conjunto de monomios generadores por un conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$, dados por,

$$a_\sigma^\alpha := a_{\sigma_1}^{\alpha_1}\, a_{\sigma_2}^{\alpha_2} \cdots a_{\sigma_n}^{\alpha_n}$$

Ahora, se sigue fácilmente que

$$\mathrm{Gen}_{\Bbbk}\{a_1, \ldots, a_n\} = \bigcup_{m \geq 0} \ \bigcup_{\sigma \in [n!]} \{a_\sigma^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

Sean A, B un par de $\Bbbk$-álgebras, la **suma directa** se define con el conjunto

$$A \oplus B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

dotado de la estructura natural de suma y producto, es decir;

$$\begin{aligned}
&(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),\\
&(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2),\\
&r(a_1, b_1) = (ra_1, rb_1)
\end{aligned}$$

para cada $a_i \in A$, $b_j \in B$ y $r \in \Bbbk$. En particular, A^n denota la suma directa de n copias de A. Por otra parte, el producto tensorial $A \otimes_{\Bbbk} B$ tiene una estructura natural de $\Bbbk$-álgebra, donde el producto se obtiene al extender $\Bbbk$-bilinealmente las expresiones del tipo,

$$\begin{aligned}
(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) &= (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2),\\
r(a_1 \otimes b_2) &= (ra_1) \otimes b_1 = a_1 \otimes (rb_1)
\end{aligned}$$

para cada $a_i \in A$, $b_j \in B$ y $r \in \Bbbk$. La unidad es $1_A \otimes 1_B$. En particular, $A^{\otimes n}$ denota el producto tensorial de n copias de A. En estos términos, obtenemos el **álgebra extendida** $A^e = A \otimes A^{op}$, tal que,

$$(a_1 \otimes b_1^o)(a_2 \otimes b_2^o) = (a_1a_2) \otimes (b_1^o b_2^o) = (a_1a_2) \otimes (b_2b_1)^o$$

para cualquier $(a_i, b_i^o) \in A \times A^o$.

Sea A una $\Bbbk$-álgebra, un A-**módulo izquierdo** M (o simplemente A-módulo), es un $\Bbbk$-espacio vectorial M con una acción de A en M tal que

$$\begin{aligned}
&a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2\\
&(a_1 + a_2)m = a_1m + a_2m\\
&(a_1a_2)m = a_1(a_2m)\\
&1m = m
\end{aligned}$$

para cada $a_i \in A$, $m_j \in M$. Similarmente, un A-**módulo derecho** N es un $\Bbbk$-espacio vectorial unido con una acción de A en N tal que

$$\begin{aligned}
&(n_1 + n_2)a = n_1a + n_2a\\
&n(a_1 + a_2) = na_1 + na_2\\
&n(a_1a_2) = (na_1)a_2\\
&n1 = n
\end{aligned}$$

para cada $a_i \in A$, $n_j \in N$. En estos términos, si A, B son un par de álgebras entonces un (A, B)-**bimódulo** M, es un $\Bbbk$-espacio vectorial con una estructura de A-módulo izquierdo, junto con una estructura de B-módulo derecho, tal que, si $m \in M$, $a \in A$ y $b \in B$, entonces

$$a(mb) = (am)b$$

Vale mencionar, la estructura destacada de los operadores diferencias es de $\Bbbk$-álgebra $\mathbb{N}_0$-filtrada, y por tal motivo, se hace necesario brindar la siguiente lista de definiciones.

Definición 1.1.1. Sea A una $\Bbbk$-álgebra. Diremos que A es un $\Bbbk$-álgebra $\mathbb{N}_0$**-graduada**, si existe una familia de subespacios vectoriales $\{A_i \subseteq A\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ tales que

$$\begin{aligned}
&A = \oplus_{i\in\mathbb{N}_0} A_i\\
&A_iA_j \subseteq A_{i+j}\,, \forall i, j \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

Al subespacio A_i se le llama **componente homogénea de grado** i de A.

Si A, B son $\Bbbk$-álgebras, entonces un **homomorfismo** $f : A \to B$ es una transformación $\Bbbk$-lineal tal que

$$f(a_1a_2) = f(a_1)f(a_2),\ f(1_A) = 1_B$$

para cada $a_i \in A$. Similarmente, definiremos los homomorfismo entre álgebras graduadas.

Definición 1.1.2. Sean $A = \oplus_{i\in\mathbb{N}_0} A_i$ y $B = \oplus_{i\in\mathbb{N}_0} B_i$ un par de $\Bbbk$-álgebras $\mathbb{N}_0$-graduadas, un homomorfismo de $\Bbbk$-álgebra $f : A \to B$ se dice $\mathbb{N}_0$**-graduado**, si $f(A_i) \subseteq B_i$ para cada $i \in \mathbb{N}_0$.

Definición 1.1.3. Sea $A = \oplus_{i\in\mathbb{N}_0} A_i$ una $\Bbbk$-álgebra $\mathbb{N}_0$-graduada. Un A**-módulo izquierdo** M **es** $\mathbb{N}_0$**-graduado**, si existe una familia de subespacios $\{M_i \subseteq M\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ tal que

$$\begin{aligned}
&M = \oplus_{i\in\mathbb{N}_0} M_i\\
&A_iM_j \subseteq M_{i+j}\,, \forall i, j \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Al subespacio M_i se le llama **componente homogénea de grado** i de M.

Definición 1.1.4. Sea A una $\Bbbk$-álgebra. Diremos que A es un $\Bbbk$-álgebra **$\mathbb{N}_0$-filtrada**, si existe una familia de subespacios vectoriales $\{\Lambda_i \subseteq A\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ tales que

$$\begin{aligned}&\Lambda_i \subseteq \Lambda_{i+1}\,, \quad \forall i \in \mathbb{N}_0\\ &\Lambda_i\Lambda_j \subseteq \Lambda_{i+j}\,, \quad \forall i,j \in \mathbb{N}_0\\ &A = \cup_{i\in\mathbb{N}_0}\Lambda_i.\end{aligned}$$

Al espacio $\mathrm{Gr}_0(A) = \Lambda_0$ se lo llama **componente homogénea de grado cero asociada al álgebra filtrada** A, y al espacio cociente,

$$\mathrm{Gr}_i(A) = \Lambda_i/\Lambda_{i-1}\,, \quad \forall i \geq 1$$

se le llama **componente homogénea de grado** i **asociado al álgebra filtrada** A.

Proposición 1.1.1. *[C95, pg 56] Sea A es una $\Bbbk$-álgebra $\mathbb{N}_0$-filtrada, donde, $A = \cup_{i\in\mathbb{N}_0}\Lambda_i$. Sean $\mathrm{Gr}_0(A) = \Lambda_0$ y $\mathrm{Gr}_i(A) = \Lambda_i/\Lambda_{i-1}$, $\forall i \geq 1$, entonces $\mathrm{Gr}(A) = \oplus_{i\in\mathbb{N}_0}\mathrm{Gr}_i(A)$ es una $\Bbbk$-álgebra graduada.*

Definición 1.1.5. Sea $A = \cup_{i\in\mathbb{N}_0}\Lambda_i$ una $\Bbbk$-álgebra $\mathbb{N}_0$-filtrada. Un **A-módulo izquierdo** M **es $\mathbb{N}_0$-filtrado**, si existe una familia de subespacios $\{\Gamma_i \subseteq M\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ tales que

$$\begin{aligned}&\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}\,, \quad \forall i \in \mathbb{N}_0\\ &\Lambda_i\Gamma_j \subseteq \Gamma_{i+j}\,, \quad \forall i,j \in \mathbb{N}_0,\\ &M = \cup_{i\in\mathbb{N}_0}\Gamma_i.\end{aligned}$$

1.1.2. Operadores y derivaciones

Sean M y N un par de A-módulos izquierdos, el espacio de transformaciones $\Bbbk$-lineales de M en N será denotado por $\mathrm{Hom}(M,N)$. Similarmente, el espacio de las transformaciones A-lineales de M en N será denotado por $\mathrm{Hom}_A(M,N)$. Se sigue de la definición que $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ es un subespacio de $\mathrm{Hom}(M,N)$. Por otra parte, si $\varphi : M \to N$ es una transformación $\Bbbk$-lineal, entonces el espacio imagen de φ se denota con $\mathrm{Im}(\varphi)$ y el espacio nulidad o núcleo de φ, se denota con $\mathrm{Nu}(\varphi)$. Si $\varphi \in \mathrm{Hom}(M,N)$ y $\psi \in \mathrm{Hom}(N,H)$ entonces $\psi \circ \varphi \in \mathrm{Hom}(M,H)$ (o simplemente $\psi\varphi$) denota la composición entre transformaciones. En particular, el álgebra de **endomorfismos** $\mathrm{End}(M) = \mathrm{Hom}(M,M)$, se obtiene al considerar el producto como la composición $\psi\varphi$, y al endomorfismo identidad Id_M como su unidad.

Ahora consideremos la representación natural $\lambda : A \to \mathrm{End}(M)$ definida por la multiplicación a izquierda, donde, para cada $a \in A$, se obtiene $\lambda_a \in \mathrm{End}(M)$ tal que $\lambda_a(m) = am$, $\forall m \in M$. Se sigue de la definición las siguientes propiedades,

$$\begin{aligned}&\lambda_{ab} = \lambda_a\lambda_b,\\ &\lambda_{ra+b} = r\lambda_a + \lambda_b,\\ &\lambda_1 = \mathrm{Id}_M\end{aligned}$$

para cualquier, $a,b \in A$, $m \in M$ y $r \in \Bbbk$. De estas relaciones se deduce que $\lambda : A \to \mathrm{End}(M)$ es un homomorfismo de $\Bbbk$-álgebras, y más aún, $\lambda : A \to \mathrm{End}(A)$ es un homomorfismo inyectivo.

Definición 1.1.6. Sea A una $\Bbbk$-álgebra y sean M,N un par de A-módulos izquierdos. Si $a \in A$, entonces para cada $\varphi \in \mathrm{Hom}(M,N)$ se define la transformación $\lambda_a\varphi \in \mathrm{Hom}(M,N)$ tal que

$$(\lambda_a\varphi)(m) = a\varphi(m),\ \forall m \in M$$

Similarmente, se obtiene la transformación $\varphi\lambda_a \in \operatorname{Hom}(M, N)$ tal que

$$(\varphi\lambda_a)(m) = \varphi(am), \ \forall m \in M.$$

Notemos que las acciones previamente definidas admiten una descripción equivalente en términos de la composición de transformaciones, de esta forma, para cada elemento $a \in A$ se tienen los endomorfismos

$$\lambda_{(a,N)} : N \to N, \text{ tal que } \lambda_{(a,N)}(n) = an$$

y similarmente,

$$\lambda_{(a,M)} : M \to M, \text{ tal que } \lambda_{(a,M)}(m) = am$$

y de esta forma, $\lambda_a\varphi = \lambda_{(a,N)}\varphi$ y $\varphi\lambda_a = \varphi \circ \lambda_{(a,M)}$.

Proposición 1.1.2. *Si M, N son A-módulos izquierdos, entonces* $\operatorname{Hom}(M, N)$ *tiene una estructura de A-bimódulo.*

Demostración. Sean $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(M, N)$ y $a, b \in A$, entonces

$$\lambda_a(\varphi + \psi) = \lambda_{(a,N)}(\varphi + \psi) = \lambda_{(a,N)}\varphi + \lambda_{(a,N)}\psi = \lambda_a\varphi + \lambda_a\psi$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
&\lambda_{a+b} = \lambda_a + \lambda_b \implies \lambda_{a+b}\varphi = (\lambda_a + \lambda_b)\varphi = \lambda_a\varphi + \lambda_b\varphi \\
&\lambda_{ab} = \lambda_a\lambda_b \implies \lambda_{ab}\varphi = (\lambda_a\lambda_b)\varphi = \lambda_a(\lambda_b\varphi) \\
&\lambda_1 = \operatorname{Id}_N \implies \lambda_1\varphi = \operatorname{Id}_N \varphi = \varphi.
\end{aligned}$$

De las relaciones anteriores se deduce que $\operatorname{Hom}(M, N)$ es un A-módulo izquierdo. Similarmente, se demuestra que $\operatorname{Hom}(M, N)$ es un A-módulo derecho empleando para ello el endomorfimo $\lambda_{(a,M)}$. finalmente, de la propiedad asociativa de la composición entre transformaciones se obtiene la compatibilidad de las ambas acciones, de esta forma,

$$\lambda_{(a,N)}(\varphi\lambda_{(b,M)}) = (\lambda_{(a,N)}\varphi)\lambda_{(b,M)} \iff \lambda_a(\varphi\lambda_b) = (\lambda_a\varphi)\lambda_b$$

□

Definición 1.1.7. Si M, N son A-módulos izquierdos, entonces para cada $\varphi \in \operatorname{Hom}(M, N)$ y $a \in A$ se define un corchete $[\varphi, \lambda_a] \in \operatorname{Hom}(M, N)$, inducido por el conmutador entre operadores,

$$[\varphi, \lambda_a] = \varphi\lambda_a - \lambda_a\varphi$$

Proposición 1.1.3. *Sea M, N un par de A-módulos izquierdos. Si $a, b \in A$ y $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(M, N)$, entonces*

$$\begin{aligned}
[\lambda_b\psi, \lambda_a] &= \lambda_{[b,a]}\psi + \lambda_b[\psi, \lambda_a] \\
[\varphi\lambda_b, \lambda_a] &= [\varphi, \lambda_a]\lambda_b + \varphi\lambda_{[b,a]} \\
[\varphi + \psi, \lambda_a] &= [\varphi, \lambda_a] + [\psi, \lambda_a]
\end{aligned}$$

Demostración. Teniendo presente la estructura de $\Bbbk$-espacio vectorial de $\operatorname{Hom}(M, N)$, junto con la compatibilidad de la estructura de A-bimódulo previamente definida, obtenemos que,

$$\begin{aligned}\lambda_{[b,a]}\psi + \lambda_b[\psi, \lambda_a] &= (\lambda_{ba} - \lambda_{ab})\psi + \lambda_b(\psi\lambda_a - \lambda_a\psi)\\ &= \lambda_{ba}\psi - \lambda_{ab}\psi + \lambda_b\psi\lambda_a - \lambda_b\lambda_a\psi\\ &= (\lambda_b\psi\lambda_a - \lambda_{ab}\psi) + (\lambda_{ba}\psi - \lambda_b\lambda_a\psi)\\ &= (\lambda_b\psi)\lambda_a - \lambda_a(\lambda_b\psi) + (\lambda_b\lambda_a\psi - \lambda_b\lambda_a\psi)\\ &= [\lambda_b\psi, \lambda_a]\end{aligned}$$

teniendo presente la notación, $[b, a] = ba - ab$. Similarmente,

$$\begin{aligned}[\varphi, \lambda_a]\lambda_b + \varphi\lambda_{[b,a]} &= (\varphi\lambda_a - \lambda_a\varphi)\lambda_b + \varphi(\lambda_{ba} - \lambda_{ab})\\ &= \varphi\lambda_a\lambda_b - \lambda_a\varphi\lambda_b + \varphi\lambda_b\lambda_a - \varphi\lambda_a\lambda_b\\ &= \varphi\lambda_b\lambda_a - \lambda_a\varphi\lambda_b\\ &= [\varphi\lambda_b, \lambda_a]\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}[\varphi + \psi, \lambda_a] &= (\varphi + \psi)\lambda_a - \lambda_a(\varphi + \psi)\\ &= (\varphi\lambda_a - \lambda_a\varphi) + (\psi\lambda_a - \lambda_a\psi)\\ &= [\varphi, \lambda_a] + [\psi, \lambda_a]\end{aligned}$$

□

Ahora, si M es un A-módulo izquierdo consideremos la transformación natural $\rho : M \to \operatorname{Hom}(A, M)$ inducida por la multiplicación a derecha, donde, para cada $m \in M$, se obtiene $\rho_m \in \operatorname{Hom}(A, B)$, tal que $\rho_m(a) = am, \forall a \in A$. Se verifican fácilmente las siguientes propiedades,

$$\begin{aligned}&\rho_{ab} = \rho_b\rho_a \Longleftrightarrow \rho_{b^o a^o} = \rho_b\rho_a\\ &\rho_{ra+b} = r\rho_a + \rho_b\\ &\rho_1 = \mathrm{Id}_A\end{aligned}$$

De estas relaciones se deduce que $\rho : A^o \to \operatorname{End}(A)$ es un homomorfismo inyectivo de $\Bbbk$-álgebras.

Definición 1.1.8. Sea A una $\Bbbk$-álgebra y M un A-módulo. Se define el espacio de las **λ-derivaciones** sobre A, como

$$\operatorname{Der}_\lambda(A) = \{\delta \in \operatorname{End}(A) \mid \delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b, \forall (a, b) \in A \times A\}$$

Similarmente, se define el espacio de las **ρ-derivaciones** sobre M, como

$$\operatorname{Der}_\rho(M) = \{\Delta \in \operatorname{Hom}(A, M) \mid \Delta(ab) = a\Delta(b) + b\Delta(a), \forall (a, b) \in A \times A\}$$

Proposición 1.1.4. *Sea A es una $\Bbbk$-álgebra. Entonces,*

$$\delta \in \operatorname{Der}_\lambda(A) \Longleftrightarrow [\delta, \lambda_a] = \lambda_{\delta(a)}, \forall a \in A$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\delta \in \operatorname{Der}_\lambda(A) &\Longleftrightarrow \delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b, \forall (a, b) \in A \times A\\ &\Longleftrightarrow \delta(ab) - a\delta(b) = \delta(a)b, \forall (a, b) \in A \times A\\ &\Longleftrightarrow [\delta, \lambda_a] = \lambda_{\delta(a)}, \forall a \in A\end{aligned}$$

□

Similarmente, podemos describir las ρ-derivaciones sobre un módulo en términos del corchete inducido por las acciones de A sobre los operadores $\mathrm{End}(M)$.

Proposición 1.1.5. *Sea M un A-módulo izquierdo. Entonces,*

$$\Delta \in \mathrm{Der}_\rho(M) \iff [\Delta, \lambda_a] = \rho_{\Delta(a)}, \forall a \in A$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \Delta \in \mathrm{Der}_\rho(M) &\iff \Delta(ab) = a\Delta(b) + b\Delta(a), \forall (a,b) \in A \times A \\ &\iff \Delta(ab) - a\Delta(b) = b\Delta(a), \forall (a,b) \in A \times A \\ &\iff [\Delta, \lambda_a] = \rho_{\Delta(a)}, \forall a \in A \end{aligned}$$

□

En general, los espacios $\mathrm{Der}_\lambda(A)$ y $\mathrm{Der}_\rho(A)$ son distintos. No obstante, para el caso en el que $A = \mathrm{C}(A)$ sea conmutativa, si se puede garantizar la igualdad.

Proposición 1.1.6. *Si M un A-módulo izquierdo, entonces $\mathrm{Der}_\lambda(A)$ y $\mathrm{Der}_\rho(M)$ son $\mathrm{C}(A)$-módulos.*

Demostración. Sea $c \in \mathrm{C}(A)$. Se sigue entonces que $[\lambda_c, \lambda_a] = \lambda_{[c,a]} = 0, \forall a \in A$. Por otra parte, si $\delta \in \mathrm{Der}_\lambda(A)$ y considerando la `Prop.`1.1.3 se obtiene que

$$[\lambda_c\delta, \lambda_a] = \lambda_{[c,a]}\delta + \lambda_c[\delta, \lambda_a] = \lambda_c\lambda_{\delta(a)} = \lambda_{c\delta(a)}, \forall a \in A$$

Esto implica que $\lambda_c\delta \in \mathrm{Der}_\lambda(A)$. Similarmente, si $\Delta \in \mathrm{Der}_\rho(M)$ entonces

$$[\lambda_c\Delta, \lambda_a] = \lambda_{[c,a]}\Delta + \lambda_c[\Delta, \lambda_a] = \lambda_c\rho_{\Delta(a)} = \rho_{c\Delta(a)}, \forall a \in A$$

Esto implica que $\lambda_c\Delta \in \mathrm{Der}_\rho(M)$. □

Proposición 1.1.7. *Si $\delta \in \mathrm{Der}_\lambda(A) \cap \mathrm{Der}_\rho(A)$, entonces $\mathrm{Im}(\delta) \subseteq \mathrm{C}(A)$.*

Demostración. Sea $\delta \in \mathrm{Der}_\lambda(A) \cap \mathrm{Der}_\rho(A)$, si $a \in A$ entonces

$$\begin{aligned} [\delta, \lambda_a] = \lambda_{\delta(a)} &\implies \delta(ax) - a\delta(x) = \delta(a)x\,, \forall x \in A \\ [\delta, \lambda_a] = \rho_{\delta(a)} &\implies \delta(ax) - a\delta(x) = x\delta(a)\,, \forall x \in A \end{aligned}$$

Se sigue entonces que $\delta(a)x - x\delta(a) = 0$, $\forall x \in A$, esto es, $\delta(a) \in \mathrm{C}(A)$. □

Definición 1.1.9. Sea A una $\Bbbk$-álgebra. Se define el espacio de las **derivaciones interiores**, como

$$\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Sum}\{\mathrm{ad}_a = \lambda_a - \rho_a \mid a \in A\}$$

Proposición 1.1.8. *Si A es una $\Bbbk$-álgebra, entonces $\mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Der}_\lambda(A)$.*

Demostración. Sea $a \in A$ y consideremos el operador $\mathrm{ad}_a = \lambda_a - \rho_a$. Notemos, para cada $b \in A$ se cumple la igualdad

$$\mathrm{ad}_a(b) = [a,b]$$

En efecto, dado que $\mathrm{ad}_a(b) = \lambda_a(b) - \rho_a(b) = ab - ba = [a,b]$. Por otra parte, para cualquier $a, b \in A$,

$$\lambda_a\rho_b = \rho_b\lambda_a \iff [\rho_a, \lambda_b] = 0$$

con esto en mente justificamos las igualdades,

$$[\mathrm{ad}_a, \lambda_b] = \lambda_{[a,b]}$$

En efecto, $[\mathrm{ad}_a, \lambda_b] = [\lambda_a - \rho_a, \lambda_b] = [\lambda_a, \lambda_b] - [\rho_a, \lambda_b] = \lambda_{[a,b]}$. Obtenemos de lo anterior, $[\mathrm{ad}_a, \lambda_b] = \lambda_{\mathrm{ad}_a(b)}$ y con esta igualdad se demuestra que $\mathrm{ad}_a \in \mathrm{Der}_\lambda(A)$. □

Proposición 1.1.9. *Si A es una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita, entonces*

$$\dim \mathrm{Int}(A) = \dim A - \dim \mathrm{C}(A)$$

Demostración. Supongamos que $\dim A = n$, y $\dim C(A) = m$. Luego, fijemos una base $\{c_1, \ldots, c_m\}$ para el centro $\mathrm{C}(A)$, y a su vez, consideremos una extensión de dicha base $\{a_1, \ldots, a_s\}$, tal que, $m + s = n$, de esta forma,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sum}\{c_1, \ldots, c_m\} = C(A)\\
&\mathrm{Sum}\{a_1, \ldots, a_s\} = W\\
&\{c_1, \ldots, c_m, a_1, \ldots, a_s\} \text{ base para } A\\
&C(A) \oplus W = A
\end{aligned}$$

Ahora, si $c \in \mathrm{C}(A)$ entonces $\mathrm{ad}_c = 0$. Con esto en mente se demuestra que $\{\mathrm{ad}_{a_1}, \ldots, \mathrm{ad}_{a_s}\}$ es una base para el espacio $\mathrm{Int}(A)$. En efecto, dado que, si $a \in A$ entonces

$$a = \sum_{i=1}^{m} r_i c_i + \sum_{j=1}^{s} r_j a_j \implies \mathrm{ad}_a = \sum_{i=1}^{m} r_i \,\mathrm{ad}_{c_i} + \sum_{j=1}^{s} r_j \,\mathrm{ad}_{a_j} = \sum_{j=1}^{s} r_j \,\mathrm{ad}_{a_j}$$

Por otra parte, si $\sum_{j=1}^{s} r_j \,\mathrm{ad}_{a_j} = 0$ entonces

$$\mathrm{ad}_{\sum_{j=1}^{s} r_j a_j} = \sum_{j=1}^{s} r_j \,\mathrm{ad}_{a_j} = 0 \implies \sum_{j=1}^{s} r_j a_j \in C(A)$$

De esta forma, $\sum_{j=1}^{s} r_j a_j \in C(A) \cap W$, y por construcción obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{s} r_j a_j = 0 \implies r_j = 0\,, \forall j = 1, \ldots, s$$

□

Cerraremos esta sección describiendo el espacio $\mathrm{Hom}_A(M, N)$, en función del corchete definido sobre $\mathrm{Hom}(M, N)$.

Proposición 1.1.10. *Se M, N es un par de A-módulos izquierdos. Entonces,*

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N) \iff [\varphi, \lambda_a] = 0, \forall a \in A$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N) &\iff \varphi(am) = a\varphi(m), \forall a \in A, \forall m \in M\\
&\iff \varphi(am) - a\varphi(m) = 0, \forall a \in A, \forall m \in M\\
&\iff \varphi\lambda_a - \lambda_a\varphi = 0, \forall a \in A\\
&\iff [\varphi, \lambda_a] = 0, \forall a \in A
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.1.11. *Si M es un A-módulo izquierdo, entonces $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ si y solo si $\varphi = \rho_m$ para algún $m \in M$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \varphi \in \mathrm{Hom}_A(A, M) &\iff \varphi(a) = a\varphi(1), \forall a \in A \\ &\iff \varphi = \rho_m \text{ , donde } m = \varphi(1) \end{aligned}$$

□

SECCIÓN 1.2

Operadores diferenciales

A grandes rasgos, en el artículo [LR97] Lunts y Rosenberg definen una familia infinito numerable de functores dirigidos $\{\mathrm{Diff}_n(\cdot) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, tales que, para cada A-bimódulo Ω, se obtiene su parte diferencial

$$\mathrm{Diff}(\Omega) = \cup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Diff}_n(\Omega)$$

y dicho objeto es un nuevo A-bimódulo con una estructura adicional de $\mathbb{N}_0$-filtración. Vale mencionar que Lunts y Rosenberg realizan una generalización no trivial de los operadores diferenciales regulares sobre `Esquemas no conmutativos`, extensible a su vez, a la configuración de categorías monoidales trenzadas.

Para los objetivos de este proyecto de investigación, estamos interesados en el A-bimódulo de transformaciones $\Bbbk$-lineales definidas entre un par de A-módulos izquierdos, $\Omega = \mathrm{Hom}(M, N)$, (ver `Def.`1.1.6). De esta forma, se obtienen los operadores diferenciales de M en N, como $\mathrm{Diff}(\mathrm{Hom}(M, N))$. Similarmente, se define el anillo de operadores diferenciales de una $\Bbbk$-álgebra A, como la parte diferencial del A-bimódulo de sus endomorfismo, esto es, $\mathrm{Diff}(\mathrm{End}(A))$.

1.2.1. Operadores diferenciales entre módulos

A continuación brindaremos una definición recursiva de los operadores diferenciales entre módulos izquierdos sobre una $\Bbbk$-álgebra A no conmutativa, como bien lo propone la Dra. Uma Iyer en sus trabajos [I05], [I06], [IMc12] y [SIK16]. Esta definición es una adaptación de la formulación por Lunts-Rosenber para el caso particular de álgebras y módulos. Es notorio, que en dichos trabajos todas las demostraciones se focalizan en el caso de álgebras y poco es lo que se hace en el contexto de módulos, por esa razón vemos pertinente adaptar las demostraciones al contexto de los módulos. Por otra parte, estos objetos serán de vital importancia para los resultados que hemos obtenidos en el `Capítulo` 4.

Definición 1.2.1. [LR97, pg. 2] - [I05, pg. 1]. Sean M, N un par de A-módulos izquierdos, se define primero el subespacio $\mathrm{Z}^0_{\Bbbk}(M,_A N) \subseteq \mathrm{Hom}(M, N)$, tal que,

$$\nabla \in \mathrm{Z}^0_{\Bbbk}(M,_A N) \iff [\nabla, \lambda_a] = 0, \forall a \in A$$

El espacio de los **operadores diferenciales interiores** $\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(M,_A N)$, se obtiene como el A-bimódulo generado por $\mathrm{Z}^0_{\Bbbk}(M,_A N)$, de esta forma,

$$\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(M,_A N) = \mathrm{Sum}_{\Bbbk}\{\lambda_a \nabla \lambda_b \in \mathrm{Hom}(M, N) \mid \nabla \in \mathrm{Z}^0_{\Bbbk}(M,_A N), a, b \in A\}$$

Proposición 1.2.1. *Sean M, N un par de A-módulos izquierdos. Se verifican las siguientes relaciones:*

1. $\mathrm{Z}^0_{\Bbbk}(M,_A N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$.
2. *Si* $\nabla \in \mathrm{Z}^0_{\Bbbk}(M,_A N)$, *entonces* $\lambda_a \nabla \lambda_b = \lambda_{ab}\nabla$, *para cualquier par* $a, b \in A$.
3. $\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(M,_A N) = \mathrm{Sum}_{\Bbbk}\{\lambda_a \nabla \mid \nabla \in \mathrm{Hom}_A(M, N), a \in A\}$

Demostración. La igualdad $\mathrm{Z}^0_{\Bbbk}(M,_A N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$ se sigue de la `Prop.`1.1.10. Para demostrar el `item(2)`, basta considerar un operador $\nabla \in \mathrm{Z}^0_{\Bbbk}(M,_A N)$ y luego usar las propiedades del corchete formuladas en la `Prop.`1.1.3, y con esto obtener,

$$\lambda_a \nabla \lambda_b = \lambda_a(\lambda_b \nabla + [\nabla, \lambda_b]) = \lambda_a \lambda_b \nabla = \lambda_{ab}\nabla$$

El `item(3)`, se sigue de la `Def.`1.2.1, junto con los resultados previos `item(1) e item(2)`. □

Ahora, se definen los operadores diferenciales de orden superior $\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(M,_A N)$ de manera inductiva, teniendo presente la buena definición de los operadores diferenciales inferiores $\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(M,_A N)$.

Definición 1.2.2. Sean M, N un par de A-módulos izquierdos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el espacio de **operadores n-centrales**, $\mathrm{Z}^n_{\Bbbk}(M,_A N) \subseteq \mathrm{Hom}(M, N)$, tal que,

$$\nabla \in \mathrm{Z}^n_{\Bbbk}(M,_A N) \iff [\nabla, \lambda_a] \in \mathrm{D}^{n-1}_{\Bbbk}(M,_A N),\ \forall a \in A$$

El espacio de los **operadores diferenciales de orden** n, $\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(M,_A N)$ se obtiene como el A-bimódulo generado por $\mathrm{Z}^n_{\Bbbk}(M,_A N)$, de esta forma,

$$\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(M,_A N) = \mathrm{Sum}_{\Bbbk}\{\lambda_a \nabla \lambda_b \in \mathrm{Hom}(M, N) \mid \nabla \in \mathrm{Z}^n_{\Bbbk}(M,_A N), a, b \in A\}$$

Proposición 1.2.2. *Sean M, N y H A-módulos izquierdos y $n, m \in \mathbb{N}_0$, entonces se verifican las siguientes relaciones:*

1. *Si* $\nabla \in \mathrm{Z}^n(M,_A N)$ *y* $a, b \in A$, *entonces existe un operador* $\nabla' \in \mathrm{D}^{n-1}(M,_A N)$ *tal que* $\lambda_a \nabla \lambda_b = \lambda_{ab}\nabla + \nabla'$.
2. $\mathrm{D}^n(M,_A N) \subseteq \mathrm{Z}^{n+1}(M,_A N) \subseteq \mathrm{D}^{n+1}(M,_A N)$.
3. $\mathrm{D}^n(M,_A N) = \mathrm{Sum}\{\lambda_a \nabla \mid \nabla \in \mathrm{Z}^n(M,_A N), a \in A\}$.
4. *Si* $\Delta \in \mathrm{D}^m(N,_A H)$ *y* $\nabla \in \mathrm{D}^n(M,_A N)$, *entonces* $\Delta\nabla \in \mathrm{D}^{m+n}(M,_A H)$.

Demostración. Veamos el `item(1)`. Si $\nabla \in \mathrm{Z}^n(M,_A N)$ se sigue de la `Def.`1.2.2 que

$$[\nabla, \lambda_b] \in \mathrm{D}^{n-1}(M,_A N),\ \forall b \in A$$

Luego, para cada $a \in A$ se tiene la igualdad

$$\lambda_a \nabla \lambda_b = \lambda_{ab}\nabla - \lambda_a[\nabla, \lambda_b]$$

En efecto, $\lambda_a \nabla \lambda_b = \lambda_a(\lambda_b \nabla - [\nabla, \lambda_b]) = \lambda_{ab}\nabla - \lambda_a[\nabla, \lambda_b]$ (propiedades del corchete `Prop.`1.1.3). Finalmente, consideremos $\nabla' = -\lambda_a[\nabla, \lambda_b]$, y dado que $\mathrm{D}^{n-1}(M,_A N)$ es un A-bimódulo (ver `Def.`1.2.2), obtenemos que $\nabla' \in \mathrm{D}^{n-1}(M,_A N)$ y de esta forma se demuestra lo que queríamos.

Veamos el `item(2)`. Primero veamos que

$$\mathrm{Z}^{n+1}(M,_A N) \subseteq \mathrm{D}^{n+1}(M,_A N), \forall n \geq 0$$

Por comodidad, usaremos la notación $\mathrm{Z}^{n+1} = \mathrm{Z}^{n+1}(M,_A N)$ y $\mathrm{D}^{n+1} = \mathrm{D}^{n+1}(M,_A N)$. Luego, recordemos que los operadores id_M y id_N son de la forma λ_1, se sigue entonces

$$\mathrm{Z}^{n+1} = \mathrm{Sum}\{\mathrm{id}_N \nabla \mathrm{id}_M \mid \nabla \in \mathrm{Z}^{n+1}\} \subseteq \mathrm{D}^{n+1}$$

Para demostrar la otra inclusión $\mathrm{D}^n(M,_A N) \subseteq \mathrm{Z}^{n+1}(M,_A N), \forall n \geq 0$, vamos a razonar por inducción. Para ver el caso base, $\mathrm{D}^0(M,_A N) \subseteq \mathrm{Z}^1(M,_A N)$, recordemos primero la igualdad $\mathrm{D}^0 = \mathrm{Sum}\{\lambda_a \nabla \mid \nabla \in \mathrm{Z}^0, a \in A\}$ (ver `Prop.`1.2.1). Teniendo en mente la igualdad anterior, basta demostrar que

$$\nabla \in \mathrm{Z}^0 \implies \lambda_a \nabla \in \mathrm{Z}^1, \forall a \in A$$

Si $a \in A$ y $\nabla \in \mathrm{Z}^0$ entonces $[\nabla, \lambda_b] = 0$ y $\lambda_{[a,b]} \nabla \in \mathrm{D}^0$. Luego,

$$[\lambda_a \nabla, \lambda_b] = \lambda_{[a,b]} \nabla + \lambda_a [\nabla, \lambda_b] = \lambda_{[a,b]} \nabla, \forall b \in A$$

Esto implica $\lambda_a \nabla \in \mathrm{Z}^1$ (ver `Def.`1.2.2), y con esto queda demostrado el paso base. Ahora, supongamos que $\mathrm{D}^n(M,_A N) \subseteq \mathrm{Z}^{n+1}(M,_A N)$. Notemos que, para ver la inclusión $\mathrm{D}^{n+1}(M,_A N) \subseteq \mathrm{Z}^{n+2}(M,_A N)$, basta con demostrar,

$$\nabla \in \mathrm{Z}^{n+1} \implies \lambda_a \nabla \lambda_b \in \mathrm{Z}^{n+2}, \forall a, b \in A$$

En efecto, dado que $\mathrm{D}^{n+1} = \mathrm{Sum}_{\Bbbk}\{\lambda_a \nabla \lambda_b \mid \nabla \in \mathrm{Z}^{n+1}, a, b \in A\}$ (ver `Def.`1.2.2). Ya sabemos que $\mathrm{Z}^{n+1} \subseteq \mathrm{D}^{n+1}$, $\forall n \geq 0$, y teniendo en cuenta que D^{n+1} es un A-bimódulo, se sigue entonces

$$\begin{aligned} \nabla \in \mathrm{Z}^{n+1} &\implies [\lambda_a \nabla \lambda_b, \lambda_c] \in \mathrm{D}^{n+1}, \forall a, b, c \in A \\ &\implies \lambda_a \nabla \lambda_b \in \mathrm{Z}^{n+2}, \forall a, b \in A \end{aligned}$$

De lo anterior queda demostrada la inclusión que buscábamos, esta es, $\mathrm{D}^{n+1} \subseteq \mathrm{Z}^{n+2}$.

Veamos el `item(3)`. Recordemos que $\mathrm{Id}_M = \lambda_1$ esto implica $\mathrm{Sum}\{\lambda_a \nabla \lambda_1 \mid \nabla \in \mathrm{Z}^n, a \in A\} \subseteq \mathrm{D}^n$. Por otra parte, la doble inclusión se obtiene de la siguiente forma;

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^n &= \mathrm{Sum}\{\lambda_a \nabla \lambda_b \mid \nabla \in \mathrm{Z}^n, a, b \in A\} && \texttt{Def.}1.2.1 \\ &= \mathrm{Sum}\{\lambda_{ab} \nabla + \nabla' \mid \nabla \in \mathrm{Z}^n, \nabla' \in \mathrm{D}^{n-1}, a, b \in A\} && \texttt{item(1)} \\ &\subseteq \mathrm{Sum}\{\lambda_\alpha \nabla \mid \nabla \in \mathrm{Z}^n, \alpha \in A\} && \texttt{item(2)} \end{aligned}$$

Veamos el `item(4)`. Razonemos por inducción sobre la suma de los ordenes, de la siguiente forma, si $k = m + n$, entonces

$$\nabla \in \mathrm{D}^m(M,_A N), \Delta \in \mathrm{D}^n(N,_A H) \implies \Delta \nabla \in \mathrm{D}^k(M,_A H)$$

Demostremos el caso base de la `Prop.`1.2.1-`item(3)` sabemos que

$$\mathrm{D}^0(M,_A N) = \mathrm{Sum}\{\lambda_a \nabla \mid \nabla \in \mathrm{Hom}_A(M, N), a \in A\}$$

y similarmente,

$$\mathrm{D}^0(N,_A H) = \mathrm{Sum}\{\lambda_a \Delta \mid \Delta \in \mathrm{Hom}_A(N, H), a \in A\}$$

Luego, veamos que la afirmación es verdadera para cualquier par de generadores de

$\mathrm{D}^0(M,_A N)$ y $\mathrm{D}^0(N,_A H)$, respectivamente. Con esto en mente, sean $\lambda_a\Delta_1$ y $\lambda_b\nabla_2$, donde, $\Delta_1 \in \mathrm{Hom}_A(N,H)$ $\nabla_2 \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ y $a,b \in A$. Por otra parte, sabemos que

$$\begin{aligned} \lambda_a\Delta_1\lambda_b\nabla_2 &= \lambda_a\lambda_b\Delta_1\nabla_2 && \texttt{Prop.}1.1.10 \\ &= \lambda_{ab}(\Delta_1\nabla_2) \in \mathrm{D}^0(M,_A H) && \texttt{Prop.}1.2.1 \end{aligned}$$

Se demuestra con lo anterior lo que buscábamos. Ahora, consideremos como hipótesis, si $k = m + n$ entonces

$$\Delta \in \mathrm{D}^n(N,_A H), \nabla \in \mathrm{D}^m(M,_A N) \implies \Delta\nabla \in \mathrm{D}^k(M,_A H)$$

Luego, supongamos que $k+1 = m+n$ y veamos que la afirmación inductiva se cumple para cualquier par de generadores de los espacios $\Delta \in \mathrm{D}^n(N,_A H)$ y $\nabla \in \mathrm{D}^m(M,_A N)$, respectivamente. Primero, consideremos un par de operadores centrales $\Delta_1 \in \mathrm{Z}^n(N,_A H)$, y $\nabla_2 \in \mathrm{Z}^m(M,_A N)$. De las propiedades del corchete se tiene la igualdad,

$$\boxed{[\Delta_1\nabla_2, \lambda_a] = [\Delta_1, \lambda_a]\nabla_2 + \Delta_1[\nabla_2, \lambda_a],\ \forall a \in A}$$

De la $\texttt{Def.}$1.2.2 se sigue, $[\Delta_1, \lambda_a] \in \mathrm{D}^{n-1}(N,_A H)$, y, $[\nabla_2, \lambda_a] \in \mathrm{D}^{m-1}(M,_A N)$. Ahora, de la hipótesis inductiva obtenemos que,

$$\begin{aligned} &[\Delta_1, \lambda_a]\nabla_2 \in \mathrm{D}^{n-1}(N,_A H)\,\mathrm{Z}^m(M,_A N) \subseteq \mathrm{D}^{n-1}(N,_A H)\,\mathrm{D}^m(M,_A N) \\ &\implies \boxed{[\Delta_1, \lambda_a]\nabla_2 \in \mathrm{D}^k(M,_A H)} \end{aligned}$$

y similarmente,

$$\begin{aligned} &\Delta_1[\nabla_2, \lambda_a] \in \mathrm{Z}^n(N,_A H)\,\mathrm{D}^{m-1}(M,_A N) \subseteq \mathrm{D}^n(N,_A H)\,\mathrm{D}^{m-1}(M,_A N) \\ &\implies \boxed{\Delta_1[\nabla_2, \lambda_a] \in \mathrm{D}^k(M,_A H)} \end{aligned}$$

Se sigue de lo anterior,

$$\Delta_1 \in \mathrm{Z}^n(N,_A H), \nabla_2 \in \mathrm{Z}^m(M,_A N) \implies \Delta_1\nabla_2 \in \mathrm{Z}^{k+1}(M,_A H)$$

Por otra parte, consideremos generadores para $\mathrm{D}^n(N,_A H)$ y $\mathrm{D}^m(M,_A N)$, de la forma, $\lambda_a\Delta_1$ y $\lambda_b\nabla_2$, donde $\Delta_1 \in \mathrm{Z}^n(N,_A H)$, $\nabla_2 \in \mathrm{Z}^m(M,_A N)$ y $a,b \in A$. Luego, del `item(1)` sabemos de la existencia de $\Delta_1' \in \mathrm{D}^{n-1}(N,_A H)$, tal que,

$$\lambda_a\Delta_1\lambda_b\nabla_2 = (\lambda_{ab}\Delta_1 + \Delta_1')\nabla_2 = \lambda_{ab}\Delta_1\nabla_2 + \Delta_1'\nabla_2$$

Ahora, ya sabemos que $\Delta_1\nabla_2 \in \mathrm{Z}^{k+1}(M,_A H)$, y con esto obtenemos que el operador $\lambda_{ab}\Delta_1\nabla_2 \in \mathrm{D}^{k+1}(M,_A H)$. Por otra lado, gracias a la hipótesis inductiva tenemos que, $\Delta_1'\nabla_2 \in \mathrm{D}^{n-1}(M,_A H)\,\mathrm{Z}^n(M,_A H) \subseteq \mathrm{D}^k(M,_A H)$. Obtenemos por lo tanto que, si $k+1 = m+n$ entonces

$$\begin{aligned} &\lambda_a\Delta_1\lambda_b\nabla_2 = \lambda_{ab}\Delta_1\nabla_2 + \Delta_1'\nabla_2 \in \mathrm{D}^{k+1}(M,_A H) + \mathrm{D}^k(M,_A H) \\ &\implies \boxed{\lambda_a\Delta_1\lambda_b\nabla_2 \in \mathrm{D}^{k+1}(M,_A H)} \end{aligned}$$

□

Definición 1.2.3. Sean M, N un par de A-módulos izquierdos. Se define el A-bimódulo $\mathbb{N}_0$-filtrado de **operadores diferenciales** $\mathrm{D}(M,_A N)$, con la unión de todos los espacios de operadores diferenciales de orden n, esto es,

$$\mathrm{D}(M,_A N) = \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{D}^n(M,_A N)$$

Notemos, de la `Prop.`1.2.2, se verifica de inmediato que $\mathrm{D}(M,_A N)$ es un espacio vectorial $\mathbb{N}_0$-filtrado, ver `Def.`1.1.5.

1.2.2. Operadores diferenciales de álgebras

Iniciaremos con la definición del anillo de operadores diferenciales para un A-módulo, el cual se obtiene del A-bimódulo N_0-filtrado $\mathrm{D}(M,_A N)$, considerando $N = M$. Similarmente, se define el anillo de operadores diferenciales para la misma $\Bbbk$-álgebra A considerando $N = M = A$.

Definición 1.2.4. Sea A una $\Bbbk$-álgebra y M un A-módulo izquierdo. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se define el espacio de operadores diferenciales n-centrales

$$\mathrm{Z}^n_{\Bbbk}(_A M) = \mathrm{Z}^n_{\Bbbk}(M,_A M)$$

A su vez, se define el A-bimódulo de operadores diferenciales de orden n

$$\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(_A M) = \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(M,_A M)$$

Corolario 1.2.3. *Sea M un A-módulo izquierdo, entonces se verifican las siguientes relaciones:*

1. $\mathrm{Z}^0_{\Bbbk}(_A M) = \mathrm{End}_A(M)$ *es una $\Bbbk$-álgebra.*
2. $\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(_A M) = A\mathrm{End}_A(M)$ *es una $\Bbbk$-álgebra.*
3. $\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(_A M) \subseteq \mathrm{Z}^{n+1}_{\Bbbk}(_A M) \subseteq \mathrm{D}^{n+1}_{\Bbbk}(_A M)\, \forall n \geq 0$
4. $\mathrm{D}^n(_A M)\,\mathrm{D}^m(_A M) \subseteq \mathrm{D}^{n+m}(_A M)$, $\forall n, m \geq 0$.
5. $\mathrm{D}^n(_A M)$ *es un* $\mathrm{D}^0(_A M)$*-bimódulo, para cada* $n \geq 0$.
6. *Si* $\mathrm{D}(_A M) = \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{D}^n(_A M)$*, entonces* $\mathrm{D}(_A M)$ *es una $\Bbbk$-álgebra, $\mathbb{N}_0$-filtrada.*
7. *Si M, N son A-módulos izquierdos, entonces* $\mathrm{D}(M,_A N)$ *es un* $(\mathrm{D}(_A N); \mathrm{D}(_A M))$*-bimódulo $\mathbb{N}_0$-filtrado.*

Demostración. Notemos que los resultados enumerados son una consecuencia inmediata de la `Prop.`1.2.1. □

Vale la pena hacer un par de comentarios sobre la notación. Para el caso de los operadores diferenciales interiores, estamos identificando el álgebra A con la subálgebra de endomorfismos $\mathrm{Im}(\lambda)$, esto es,

$$\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(_A M) = A\mathrm{End}_A(M) = \mathrm{Sum}\{\lambda_a \nabla \mid \nabla \in \mathrm{End}(_A M), a \in A\}$$

Por otra parte, es bien sabido que los endomorfismos A-lineales forman una subálgebra de $\mathrm{End}(M)$, en tal caso $\mathrm{Z}^0_{\Bbbk}(_A M) = \mathrm{End}_A(M)$ es una $\Bbbk$-álgebra. Para el caso de los operadores diferenciales interiores, basta recordar la `Prop.`1.2.1, con la cual se demuestra que, si $\Delta, \nabla \in \mathrm{Z}^0_{\Bbbk}({}_A M)$, entonces

$$\lambda_a \Delta \lambda_b \nabla = \lambda_{ab}(\Delta\nabla)$$

y de esta forma, $\mathrm{D}^0({}_A M)$ tiene estructura de $\Bbbk$-álgebra.

Definición 1.2.5. Sea A una $\Bbbk$-álgebra. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se define el espacio de operadores diferenciales n-centrales

$$\mathrm{Z}^n_{\Bbbk}(A) = \mathrm{Z}^n_{\Bbbk}({}_A A)$$

A su vez se define el A-bimódulo de operadores diferenciales de orden n

$$\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(A) = \mathrm{D}^n_{\Bbbk}({}_A A)$$

Corolario 1.2.4. *Sea A una $\Bbbk$-álgebra y A^{op} su álgebra opuesta, entonces se verifican las siguientes relaciones:*

1. $\mathrm{Z}^0_{\Bbbk}(A) = \mathrm{Gen}\{\rho_a \mid a \in A\} = A^o$ *es una $\Bbbk$-álgebra.*
2. $\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(A) = \mathrm{Gen}\{\lambda_a \rho_b \mid a, b \in A\} = AA^o$ *es una $\Bbbk$-álgebra.*
3. $\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(A) \subseteq \mathrm{Z}^{n+1}_{\Bbbk}(A) \subseteq \mathrm{D}^{n+1}_{\Bbbk}(A)$, $\forall n \geq 0$
4. $\mathrm{D}^n(A)\,\mathrm{D}^m(A) \subseteq \mathrm{D}^{n+m}(A)$, $\forall n, m \geq 0$.
5. $\mathrm{D}^n(A)$ *es un* $\mathrm{D}^0(A)$*-bimódulo, para cada* $n \geq 0$.
6. *Si* $\mathrm{D}(A) = \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{D}^n(A)$*, entonces* $\mathrm{D}(A)$ *es una $\Bbbk$-álgebra, $\mathbb{N}_0$-filtrada. Más aún,* $\mathrm{D}(A)$ *es un* $\mathrm{D}^0(A)$*-bimódulo $\mathbb{N}_0$-filtrado.*
7. *Si M es un A-módulo izquierdo, entonces* $\mathrm{D}({}_A M)$ *es un* $\mathrm{D}(A)$*-bimódulo $\mathbb{N}_0$-filtrado.*

Demostración. Notemos que los resultados enumerados son de una consecuencia inmediata de la `Prop.`1.2.1. □

Vale hacer las siguientes aclaraciones, dado que $\mathrm{Z}^0_{\Bbbk}(A) = \mathrm{End}_A(A)$ y teniendo en cuenta la formulación en la `Prop.`1.1.11, podemos hacer naturalmente la siguiente identificación $\mathrm{Im}(\rho) = \mathrm{End}_A(A)$. Por otra parte, de la propiedades de la multiplicación a derecha, podemos considerar al álgebra opuesta, A^{op}, como una subálgebra de $\mathrm{End}(A)$, justamente con la identificación $A^o = \mathrm{Im}(\rho)$. De igual forma, se trabaja con los operadores diferenciales interiores, donde, $\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(A) = \mathrm{Gen}\{\lambda_a\rho_b \mid a, b \in A\} = \mathrm{Im}(\lambda)\,\mathrm{Im}(\rho) = AA^o$.

1.2.3. Propiedades generales

A continuación exponemos las propiedades más relevantes para nuestro proyecto de investigación, teniendo como material de referencia los trabajos de la Dra. Uma Iyer (ver [I01], [I02], [I05], [I06] y [IMc12]).

Proposición 1.2.5. *Sean A, B un par de $\Bbbk$-álgebras, se verifican las siguientes propiedades:*

1. *[I02, pg. 128 - Proposition 3.3.1]. El bimódulo de operadores diferenciales de orden n para el álgebra $A \oplus B$ se obtiene de la igualdad*

$$\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(A \oplus B) = \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(A) \oplus \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(B)$$

$$\mathrm{D}_{\Bbbk}(A \oplus B) = \mathrm{D}_{\Bbbk}(A) \oplus \mathrm{D}_{\Bbbk}(B)$$

2. *[I02, pg. 126 - Theorem 3.1.1]. Si A, B son finitamente generadas, entonces el bimódulo de operadores diferenciales de orden n para el álgebra $A \otimes B$, se obtiene de la identificación*

$$\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(A \otimes B) = \sum_{i+j=n} \mathrm{D}^i_{\Bbbk}(A) \otimes \mathrm{D}^j_{\Bbbk}(B)$$

$$\mathrm{D}_{\Bbbk}(A \otimes B) = \mathrm{D}_{\Bbbk}(A) \otimes \mathrm{D}_{\Bbbk}(B)$$

3. *[I01, pg. 6 - Corollary 3.1.3]. Sea R un anillo conmutativo. Si $M_m(R)$ es el álgebra de matrices cuadradas de orden $m \times m$, con entradas en R, entonces*

$$\mathrm{D}^n(M_m(R)) = M_{m^2}(\mathrm{D}^n(R))$$

4. *[I01, pg. 3 - Corollary 2.0.3]. El homomorfismo entre $\Bbbk$-álgebras,*

$$\begin{aligned} A \otimes A^o &\to \mathrm{D}^0_{\Bbbk}(A) \\ a \otimes b^o &\mapsto \lambda_a \rho_b \end{aligned}$$

   es sobreyectivo.

5. *[I01, pg. 3 - Corollary 2.0.5]. Sea R una subálgebra central de A, esto es, $R \subseteq \mathrm{C}(A)$. El espacio de operadores diferenciales de orden n para el álgebra A, es un subespacio del R-módulo de operadores diferenciales de ${}_RA$, esto es,*

$$\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(A) \subseteq \mathrm{D}^n_{\Bbbk}({}_RA)$$

6. *[I01, pg. 3 - Remark 2.0.6]. Si A una $\Bbbk$-álgebra conmutativa, entonces*

$$\nabla \in \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(A) \iff [[\ldots[[\nabla, \lambda_{a_0}]\lambda_{a_1}]\ldots]\lambda_{a_n}] = 0,\ \forall (a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}) \in A^{n+1}.$$

Brindaremos a continuación una lista de proposiciones, con el ánimo de revelar algunas relaciones entre el espacio de las derivaciones y los operadores diferenciales, dado que, los espacios $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Der}_{\lambda}(A)$ y $\mathrm{Der}_{\rho}(A)$, brindan una primera aproximación para el estudio de $\mathrm{D}(A)$.

Proposición 1.2.6. *Si A es una $\Bbbk$-álgebra, entonces se verifican las siguientes relaciones;*

1. $\mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Der}_{\lambda}(A) \cap \mathrm{D}^0_{\Bbbk}(A)$

2. $\mathrm{Der}_{\lambda}(A) \subseteq \mathrm{Z}^1_{\Bbbk}(A)$ *y* $\mathrm{Der}_{\rho}(A) \subseteq \mathrm{Z}^1_{\Bbbk}(A)$

Demostración. Para ver el `item`(1), ecordemos que

$$\mathrm{Int}(A) = \mathrm{Sum}\{\mathrm{ad}_a = \lambda_a - \rho_a \mid a \in A\} \subseteq \mathrm{D}^0(A) \text{ ver } \texttt{Corol.}1.2.4$$

Por otra parte, para cada $a \in A$, se cumple que

$$\begin{cases} [\mathrm{ad}_a, \lambda_b] = [\lambda_a, \lambda_b] - [\rho_a, \lambda_b] = \lambda_{[a,b]},\ \forall b \in A \\ \mathrm{ad}_a(b) = [a, b],\ \forall b \in A \end{cases}$$

$$\implies \boxed{\mathrm{ad}_a \in \mathrm{Der}_{\lambda}(A)} \quad \text{ver } \texttt{Prop.}1.1.4$$

Para demostrar el `item`(2). Basta ver que

$$\begin{aligned} \delta \in \mathrm{Der}_\lambda(A) &\implies [\delta, \lambda_a] = \lambda_{\delta(a)},\ \forall a \in A, \quad \text{ver } \texttt{Prop.}1.1.4 \\ &\implies [\delta, \lambda_a] = \lambda_{\delta(a)} \in \mathrm{D}^0(A),\ \forall a \in A, \quad \text{ver } \texttt{Corol.}1.2.4 \\ &\implies \delta \in \mathrm{Z}^1(A) \quad \text{ver } \texttt{Def.}1.2.5 \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \Delta \in \mathrm{Der}_\rho(A) &\implies [\delta, \lambda_a] = \rho_{\delta(a)},\ \forall a \in A, \quad \text{ver } \texttt{Prop.}1.1.5 \\ &\implies [\delta, \lambda_a] = \rho_{\delta(a)} \in \mathrm{D}^0(A),\ \forall a \in A \quad \text{ver } \texttt{Corol.}1.2.4 \\ &\implies \delta \in \mathrm{Z}^1(A) \quad \text{ver } \texttt{Def.}1.2.5 \end{aligned}$$

□

Corolario 1.2.7. *Si A es una $\Bbbk$-álgebra, entonces*

$$\mathrm{D}^0_\Bbbk(A) + \mathrm{Der}_\lambda(A) + \mathrm{Der}_\rho(A) \subseteq \mathrm{Z}^1_\Bbbk(A)$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la proposición anterior, ver `Prop.`1.2.6. □

Vale la pena describir el comportamiento de estas estructuras, cuando A es una $\Bbbk$-álgebra conmutativa.

Corolario 1.2.8. *Sea A una $\Bbbk$-álgebra conmutativa, entonces se verifican las siguienres relaciones;*

1. $\mathrm{D}^0_\Bbbk(A) = A \subseteq \mathrm{End}(A)$
2. $\mathrm{Z}^1_\Bbbk(A) = \mathrm{D}^1_\Bbbk(A)$
3. $\mathrm{Der}_\lambda(A) = \mathrm{Der}_\rho(A)$
4. $\mathrm{D}^0_\Bbbk(A) \oplus \mathrm{Der}(A) = \mathrm{D}^1_\Bbbk(A)$

Demostración. Los tres primeros `items` son una consecuencia directa de la definición de las respectivas estructuras, y el hecho mismo que A es conmutativa. Para demostrar el `item`(4), hace falta ver la doble inclusión. Notemos primero que

$$\mathrm{Z}^1(A) = \mathrm{D}^1(A), \quad \mathrm{D}^0_\Bbbk(A) \cap \mathrm{Der}(A) = 0 \implies \mathrm{D}^0_\Bbbk(A) \oplus \mathrm{Der}(A) \subseteq \mathrm{D}^1_\Bbbk(A)$$

Por otra parte, sea $\nabla \in \mathrm{D}^1(A)$ y consideremos el operador

$$\delta = \nabla - \lambda_{\nabla(1)}$$

Se sigue de los resultados previos que $\nabla = \delta + \lambda_{\nabla(1)} \in \mathrm{D}^1(A)$. Luego, para cada $a \in A$, existe $b \in A$, tal que, $[\nabla, \lambda_a] = \lambda_b$, esto implica la relación

$$[\nabla, \lambda_a](x) = \lambda_b(x) = bx = \lambda_b(1)x,\ \forall x \in A$$

Luego, si $a \in A$, tenemos el operador $[\delta, \lambda_a]$ y al compararlo con el operador $\lambda_{\delta(a)}$ obtenemos que,

$$\begin{aligned}
([\delta, \lambda_a] - \lambda_{\delta(a)})(x) &= [\delta, \lambda_a](x) - \lambda_{\delta(a)}(x) = \delta(ax) - a\delta(x) - \delta(a)x \\
&= (\nabla(ax) - \nabla(1)ax) - a(\nabla(x) - \nabla(1)x) - (\nabla(a) - \nabla(1)a)x \\
&= \nabla(ax) - \nabla(1)ax - a\nabla(x) + a\nabla(1)x - \nabla(a)x + \nabla(1)ax \\
&= (\nabla(ax) - a\nabla(x)) - (\nabla(a)x - a\nabla(1)x) \\
&= [\nabla, \lambda_a](x) - (\nabla(a1) - a\nabla(1))x \\
&= [\nabla, \lambda_a](x) - ([\nabla, \lambda_a](1))x \\
&= \lambda_b(x) - \lambda_b(1)x = 0
\end{aligned}$$

Se sigue que, $[\delta, \lambda_a] = \lambda_{\delta(a)}$, $\forall a \in A$ y de esta forma queda demostrado que $\delta \in \mathrm{Der}_\lambda(A)$, (ver `Prop.`1.1.4). □

Ahora, consideraremos la siguiente notación para el espacio

$$\mathrm{Der}_\lambda(A) \oplus \mathrm{Sum}\{\mathrm{id}_A\} = \mathrm{Der}_{(\lambda,\mathrm{id})}(A)$$

A partir del cual, definiremos fácilmente el álgebra generada por las λ-derivaciones.

Definición 1.2.6. Sea A una $\Bbbk$-álgebra. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se define la siguiente sucesión de subespacios de operadores lineales,

$$\Delta_\lambda^0(A) = \mathrm{D}^0(A)$$

Se define $\Delta_\lambda^1(A)$ como el $\mathrm{D}^0(A)$-bimódulo generado por $\Delta_\lambda^0(A)\mathrm{Der}_{(\lambda,\mathrm{id})}(A)$, esto es,

$$\Delta_\lambda^1(A) = \mathrm{Sum}\{\lambda_{a_1}\rho_{b_1}\nabla\delta\lambda_{a_2}\rho_{b_2} \mid \nabla \in \Delta_\lambda^0(A), \delta \in \mathrm{Der}_{(\lambda,\mathrm{id})}(A), a_i, b_j \in A\}$$

Similarmente, para cada $n \geq 1$, se define $\Delta_\lambda^{n+1}(A)$ como el $\mathrm{D}^0(A)$-bimódulo, generado por $\Delta_\lambda^n(A)\mathrm{Der}_{(\lambda,\mathrm{id})}(A)$, esto es,

$$\Delta_\lambda^{n+1}(A) = \mathrm{Sum}\{\lambda_{a_1}\rho_{b_1}\nabla\delta\lambda_{a_2}\rho_{b_2} \mid \nabla \in \Delta_\lambda^n(A), \delta \in \mathrm{Der}_{(\lambda,\mathrm{id})}(A), a_i, b_j \in A\}$$

Corolario 1.2.9. *Si A es una $\Bbbk$-álgebra, entonces $\Delta_\lambda^{n+1}(A) = \Delta_\lambda^n(A)\Delta_\lambda^1(A)$, $\forall n \geq 0$.*

Demostración. Se verifica directamente al tener en cuenta que, $\Delta_\lambda^n(A)$ y $\Delta_\lambda^1(A)$ son $\mathrm{D}_\Bbbk^0(A)$-bimódulos, más el hecho de que $\mathrm{Der}_{(\lambda,\mathrm{id})}(A) \subseteq \Delta_\lambda^1(A)$. □

Proposición 1.2.10. *Si A es una $\Bbbk$-álgebra, entonces $\Delta_\lambda^n(A) \subseteq \Delta_\lambda^{n+1}(A)$, $\forall n \geq 0$. Más aún, $\Delta_\lambda^n(A)\Delta_\lambda^m(A) \subseteq \Delta_\lambda^{n+m}(A)$, $\forall n, m \geq 0$.*

Demostración. Dado que $\mathrm{id}_A \in \Delta_\lambda^1(A)$, entonces para cada $n \geq 1$, se cumple que

$$\Delta_\lambda^n(A) \subseteq \Delta_\lambda^n(A)\Delta_\lambda^1(A) = \Delta_\lambda^{n+1}(A)$$

Para el caso más general razonemos inductivamente sobre la suma de los parámetros de esta forma, si $n + m = k$, entonces $\Delta_\lambda^n(A)\Delta_\lambda^m(A) \subseteq \Delta_\lambda^k(A)$. Si $n + m = 0$, se sigue que $n = m = 0$, entonces $\Delta_\lambda^0(A) = \mathrm{D}_\Bbbk^0(A)$ y con ello, $\Delta_\lambda^n(A)\Delta_\lambda^m(A) = \mathrm{D}_\Bbbk^0(A)\,\mathrm{D}_\Bbbk^0(A) = \mathrm{D}_\Bbbk^0(A) = \Delta_\lambda^0(A)$, dado que $\mathrm{D}_\Bbbk^0(A)$ es un álgebra, ver `Prop.`1.2.4`-item(2)`. Ahora, supongamos que, si $n + m = k$, entonces $\Delta_\lambda^n(A)\Delta_\lambda^m(A) \subseteq \Delta_\lambda^k(A)$, y veamos el paso inductivo. Sean $n, m \geq 0$, tales que, $n+m=k+1$, entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_\lambda^n(A)\Delta_\lambda^m(A) &= \Delta_\lambda^n(A)\Delta_\lambda^{m-1}(A)\Delta_\lambda^1(A) && \texttt{Corol.}1.2.9\\
&\subseteq \Delta_\lambda^{n+(m-1)}(A)\Delta_\lambda^1(A) && \texttt{Hip. Ind.}\ n+(m-1)=k\\
&\subseteq \Delta_\lambda^{n+(m-1)+1}(A) && \texttt{Corol.}1.2.9\\
&\subseteq \Delta_\lambda^{k+1}(A) && \texttt{Hip.}\ n+m=k+1
\end{aligned}$$

□

Corolario 1.2.11. *Si A es una $\Bbbk$-álgebra, entonces $\Delta_\lambda(A)=\bigcup_{n\geq 0}\Delta_\lambda^n(A)$, es una $\Bbbk$-álgebra $\mathbb{N}_0$-filtrada.*

Demostración. Se sigue de inmediato de la `Prop.`1.2.10. □

Proposición 1.2.12. *Sea A una $\Bbbk$-álgebra, entonces $\Delta_\lambda^n(A)\subseteq \mathrm{D}_\Bbbk^n(A)$, para cada $n\geq 0$.*

Demostración. Razonemos por inducción, para $n=0$ se tienen por definición que $\Delta_\lambda^0(A)=\mathrm{D}^0(A)$. Por otra parte, como $\mathrm{Der}_{(\lambda,\mathrm{id})}(A)\subseteq \mathrm{D}_\Bbbk^1(A)$ y $\mathrm{D}_\Bbbk^1(A)$ es un $\mathrm{D}_\Bbbk^0(A)$-bimódulo, entonces,

$$\Delta_\lambda^1(A)=\mathrm{D}_\Bbbk^0(A)\mathrm{Der}_{(\lambda,\mathrm{id})}(A)\,\mathrm{D}_\Bbbk^0(A)\subseteq \mathrm{D}_\Bbbk^0(A)\,\mathrm{D}_\Bbbk^1(A)\,\mathrm{D}_\Bbbk^0(A)\subseteq \mathrm{D}_\Bbbk^1(A)$$

Ahora, supongamos que $\Delta_\lambda^n(A)\subseteq \mathrm{D}_\Bbbk^n(A)$, y veamos el paso inductivo. Notemos que

$$\Delta_\lambda^{n+1}(A)=\Delta_\lambda^n(A)\Delta_\lambda^1(A)\subseteq \mathrm{D}_\Bbbk^n(A)\,\mathrm{D}_\Bbbk^1(A)\subseteq \mathrm{D}_\Bbbk^{n+1}(A)$$

□

Corolario 1.2.13. *Si A es una $\Bbbk$-álgebra, entonces $\Delta_\lambda(A)\subseteq \mathrm{D}_\Bbbk(A)$ es una $\Bbbk$-subálgebra $\mathbb{N}_0$-filtrada.*

Demostración. Se sigue de la proposición anterior. □

Para finalizar este capítulo, recordemos el `Teorema-PBW` (ver [McR97]), del cual se desprende la siguiente formulación

$$\Delta_\lambda^n(A)=\mathrm{Sum}\{\lambda_a\rho_b(\delta_1^{\alpha_1}\cdots\delta_n^{\alpha_n})\mid \delta_i\in \mathrm{Der}_\lambda(A), a,b\in A, \sum_{i=1}^n\alpha_i\leq n\}.$$

De forma análoga podemos definir el álgebra generada por las ρ-derivaciones sobre A, la cual denotaremos de forma natural $\Delta_\rho(A)=\bigcup_{n\geq 0}\Delta_\rho^n(A)$, y similarmente, el espacio Δ_ρ^n se puede describir con la formulación

$$\Delta_\rho^n(A)=\mathrm{Sum}\{\lambda_a\rho_b(\delta_1^{\alpha_1}\cdots\delta_n^{\alpha_n})\mid \delta_i\in \mathrm{Der}_\rho(A), a,b\in A, \sum_{i=1}^n\alpha_i\leq n\}.$$

Capítulo 2

Operadores diferenciales del álgebra de polinomios con coeficientes no conmutativos

En esta capítulo estudiaremos los operadores diferenciales del anillo de polinomios con coeficientes en una $\Bbbk$-álgebra no conmutativa B, de dimensión finita, $\mathrm{D}(B[X])$. Con esta estructura, extenderemos naturalmente varios objetos de la categoría de módulos sobre la A_n álgebra de Weyl, al contexto de los $\mathrm{D}(B[X])$-módulos.

SECCIÓN 2.1

D-módulos y ecuaciones diferenciales polinómicas

En esta sección introduciremos la n-álgebra de Weyl como el anillo de operadores diferenciales del anillo de polinomios en varias variables y coeficientes en un cuerpo $\Bbbk$ con característica cero, es decir, $A_n = \mathrm{D}_{\Bbbk}(\Bbbk[X])$. De la misma forma, usaremos los operadores diferenciales de tipo Lunts-Rosemberg para obtener el anillo $\mathrm{D}(B[X])$.

2.1.1. Conjunto solución de un sistema de ecuaciones diferenciales

Denotaremos con $\Bbbk[X]$ al anillo de polinomios de n-variables con coeficientes en un cuerpo $\Bbbk$. Iniciaremos exponiendo algunas definiciones y propiedades de los módulos sobre el n-álgebra de Weyl, para luego extender dichas propiedades de manera natural al contexto de los módulos sobre $\mathrm{D}(B[X])$.

Definición 2.1.1. Se define la ***n*-álgebra de Weyl** $A_n(\Bbbk)$ sobre $\Bbbk$, como el anillo de operadores diferenciales del álgebra de polinomios $\Bbbk[X]$, esto es

$$A_n(\Bbbk) = \mathrm{D}(\Bbbk[X])$$

Consideremos las siguientes propiedades básicas sobre el álgebra de Weyl.

Proposición 2.1.1. *(ver [C95])*

1. *Sea* $\partial_i \in \mathrm{End}(\Bbbk[X])$ *el operador diferencial dado por la derivada parcial formal, con respecto a la variable* x_i. *Si* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *y* $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$, *entonces,*

$$A_n(\Bbbk) = \mathrm{Sum}\{g_\alpha \partial^\alpha \mid g_\alpha \in \Bbbk[X], \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$$

2. $A_n(\Bbbk)$ *es un dominio, simple y Noetheriano.*

Ahora, fijemos un conjunto finito de operadores diferenciales en $A_n(\Bbbk)$,

$$(P_1, P_2, \ldots, P_l) \mid P_i \in A_n(\Bbbk)$$

De esta forma, podemos definir con naturalidad el conjunto solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo inducido por los operadores $(P_1, P_2, \ldots, P_l)$, relativos a un A_n-módulo izquierdo Γ como:

$$Sol_\Gamma(P_1, P_2, \ldots, P_l) = \{f \in \Gamma \mid P_i(f) = 0\,, \forall i = 1, \ldots, l\}$$

Vale mencionar que el A_n-módulo Γ puede ser definido de manera clásica, esto es, como un espacio de funciones polinómicas o como un espacio de funciones infinitamente diferenciables . Pero gracias a la construcción propuesta desde la teoría de A_n-módulos, Γ puede ser pensado como un espacio de objetos formales, tal es el caso de las series formales, de las distribuciones, de las hiperfunciones o de las microfunciones. En esta dirección, uno de los primeros resultados notorios de la teoría de A_n-módulo, es la descripción puramente algebraica del conjunto solución en el espacio Γ asociado a un sistema de operadores diferenciales $(P_1, \ldots, P_l)$. De esta forma, si consideramos el ideal a izquierda $J = \sum_{i=1}^{l} A_n P_i$, junto con el módulo cociente A_n/J, entonces existe un isomorfismo de espacios vectorial que valida la formula

$$Sol_\Gamma(P_1, \ldots, P_l) = \mathrm{Hom}_{A_n}(A_n/J, \Gamma)$$

Ahora recrearemos estas ideas para el anillo de polinomios $B[X]$, donde B es una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita no conmutativa. De esta forma, si el álgebra de Weyl A_n se obtiene como el anillo de operadores diferenciales de $\Bbbk[X]$, es natural pensar en el anillo de operadores diferenciales de tipo Lunts-Rosenberg $\mathrm{D}(B[X])$ como sustituto de A_n, para luego extender el concepto de conjunto solución asociado a un sistema de operadores diferenciales en $\mathrm{D}(B[X])$. En este sentido, consideremos

$$\begin{cases} (P_1, P_2, \ldots, P_l) \mid P_i \in \mathrm{D}(B[X]) \\ \Gamma \text{ un } \mathrm{D}(B[X]) - \text{módulo izquierdo} \\ Sol_\Gamma(P_1, P_2, \ldots, P_l) = \{f \in \Gamma \mid P_i(f) = 0\,, \forall i = 1, \ldots, l\} \end{cases}$$

Proposición 2.1.2. *Sea* Γ *un* $\mathrm{D}(B[X])$*-módulo izquierdo. Si* $J = \sum_{i=1}^{l} \mathrm{D}(B[X])P_i$ *es el ideal a izquierda generado por los operadores* $(P_1, P_2, \ldots, P_l)$, *entonces*

$$Sol_\Gamma(P_1, P_2, \ldots, P_l) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(B[X])}(\mathrm{D}(B[X])/J, \Gamma)$$

Demostración. Fijemos un conjunto finito de operadores $(P_1, P_2, \ldots, P_l)$, tales que $P_i \in \mathrm{D}(B[X])$. Luego consideremos el ideal izquierdo $J = \sum_{i=1}^{l} \mathrm{D}(B[X])P_i$. Ahora, definamos la función $\varphi : Sol_\Gamma(P_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(B[X])}(\mathrm{D}(B[X])/J, \Gamma)$, tal que a cada $f \in Sol_\Gamma(P_i)$, le asigna la transformación $\varphi_f : \mathrm{D}(B[X])/J \to \Gamma$, definida de la siguiente manera

$$\varphi_f(\nabla + J) = \nabla(f),\ \forall \nabla \in \mathrm{D}(B[X])$$

Veamos que φ_f esta bien definida, para ello, hace falta ver que φ_f no depende del representante. Sean $\nabla_1, \nabla_2 \in \mathrm{D}(B[X])$, tales que

$$\nabla_1 - \nabla_2 \in J \implies \nabla_1 - \nabla_2 = \sum_{i=1}^{l} \Delta_i P_i$$

Luego como $f \in Sol_\Gamma(P_i)$ entonces $P_i(f) = 0$, $\forall i$. Se sigue entonces que

$$(\nabla_1 - \nabla_2)(f) = \sum_{i=1}^{l} \Delta_i P_i(f) = 0 \implies \nabla_1(f) = \nabla_2(f)$$

De esta forma, queda demostrado que φ_f esta bien definido. Ahora veamos que φ_f es en realidad un morfismo entre $\mathrm{D}(B[X])$-módulos, esto es, para cualquier operador $\Delta \in \mathrm{D}(B[X])$, demostremos que

$$\varphi_f(\Delta(\nabla + J)) = \Delta\varphi_f(\nabla + J),\ \forall \nabla \in \mathrm{D}(B[X])$$

En efecto, se sigue de la composición de operadores que,

$$\varphi_f(\Delta(\nabla + J)) = \varphi_f(\Delta\nabla + J) = (\Delta\nabla)(f) = \Delta(\nabla(f)) = \Delta(\varphi_f(\nabla + J))$$

Notemos que si $f, g \in Sol(P_i)$, entonces para cualquier $r \in \Bbbk$ y $\nabla \in \mathrm{D}(B[X])$, se cumple la linealidad,

$$\varphi_{f+rg}(\nabla + J) = \nabla(f + rg) = \nabla(f) + r\nabla(g) = \varphi_f(\nabla + J) + r\varphi_g(\nabla + J)$$

Por otra parte, definamos $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(B[X])}(\mathrm{D}(B[X])/J, \Gamma) \to Sol_\Gamma(P_i)$, tal que,

$$\psi(\sigma) = \sigma(1 + J),\ \forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(B[X])}(\mathrm{D}(B[X])/J, \Gamma)$$

Veamos que ψ esta bien definido, para ello demostremos que

$$\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(B[X])}(\mathrm{D}(B[X])/J, \Gamma) \implies \sigma(1 + J) \in Sol_\Gamma(P_i)$$

En efecto, dado que $P_i \in J$, $\forall i$, $\sigma(1 + J) \in \Gamma$ y $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(B[X])}(\mathrm{D}(B[X])/J, \Gamma)$ entonces

$$P_i + J = J \implies P_i(\sigma(1 + J)) = \sigma(P_i + J) = \sigma(J) = 0$$

Ahora veamos que φ es un isomorfismo entre espacios vectorial, para ello, basta demostrar

$$\begin{cases} \varphi_{\psi(\sigma)} = \sigma, & \forall \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(B[X])}(\mathrm{D}(B[X])/J, \Gamma) \\ \psi(\varphi_f) = f, & \forall f \in Sol_\Gamma(P_i) \end{cases}$$

Si $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(B[X])}(\mathrm{D}(B[X])/J, \Gamma)$ entonces

$$\begin{aligned} &\varphi_{\psi(\sigma)}(\nabla + J) = \nabla(\psi(\sigma)) = \nabla(\sigma(1 + J)) = \sigma(\nabla + J),\ \forall \nabla \in \mathrm{D}(B[X]) \\ &\implies \boxed{\varphi_{\psi(\sigma)} = \sigma} \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} &f \in Sol_\Gamma(P_i) \implies \psi(\varphi_f) = \varphi_f(1 + J) = 1(f) = f \\ &\implies \boxed{\psi(\varphi_f) = f} \end{aligned}$$

De esta forma queda caracterizado el conjunto solución de un sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo, $Sol_\Gamma(P_1, P_2, \ldots, P_l) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(B[X])}(\mathrm{D}(B[X])/J, \Gamma)$ □

SECCIÓN 2.2

Operadores diferenciales de $B[X]$

Hasta el momento solo hemos pedido que el anillo de coeficientes B sea una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita. Se sigue de ello lo siguiente.

Lema 2.2.1. *Sea B una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita, entonces $\exists N \in \mathbb{N}_0$, tal que*

$$\boxed{\mathrm{D}(B[X]) = \mathrm{D}^N(B) \otimes A_n(\Bbbk)}$$

Demostración. Dado que B es un álgebra de dimensión finita y $\mathrm{D}(B)$ es un anillo N_0-filtrado se sigue, la existencia de un entero $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mathrm{D}^i(B) = \mathrm{D}^N(B)$, $\forall i \geq N$. Por otra parte, gracias a la `Prop.`1.2.5 - [I02, pg. 126 - Theorem 3.1.1], sabemos que, $\mathrm{D}(B[X]) = \mathrm{D}(B) \otimes \mathrm{D}(\Bbbk[X])$. Finalmente, de la `Prop.` 2.1.1 obtenemos $\mathrm{D}(\Bbbk[X]) = A_n$. □

2.2.1. Operadores diferenciales de $M_m(\mathbb{C})[X]$

Vale la pena mencionar que a la luz del [I01, pg. 6 - Corollary 3.1.3] es fácil calcular los operadores diferenciales del álgebra de matrices $M_m(\mathbb{C}[X])$, dado que el anillo de polinomios $\mathbb{C}[X]$ es conmutativo entonces

$$\mathrm{D}(M_m(\mathbb{C}[X])) = M_{m^2}(\mathrm{D}(\mathbb{C}[X])) = M_{m^2}(A_n)$$

No obstante, esta descripción no nos permite ver con claridad cual es el papel de los operadores que se definen en los trabajos de Tirao, Grünbaum y Pacharoni [GPT02], cuyos coeficientes se obtienen con la multiplicación a izquierda y a derecha de polinomios, obteniendo dos clases distinguidas de operadores, esto son

$$P_\rho = \sum \rho_{a_{\alpha\beta}} x^\beta \partial^\alpha, \quad a_{\alpha\beta} \in M_m(\mathbb{C}),\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n,$$
$$P_\lambda = \sum \lambda_{a_{\alpha\beta}} x^\beta \partial^\alpha, \quad a_{\alpha\beta} \in M_m(\mathbb{C}),\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$$

Es por esta razón que proponemos la siguiente descomposición tensorial para el anillo $M_m(\mathbb{C}[X])$,

$$M_m(\mathbb{C}[X]) = M_m(\mathbb{C})[X] \implies M_m(\mathbb{C}[X]) = M_m(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[X]$$

Veamos ahora que los operadores diferenciales del álgebra de matrices $M_m(\mathbb{C})$ son todos interiores, y para ello, proponemos una demostración independientes a la que propone la Dra. U. N. Iyer, en la cual, usa herramientas muy generales y no logran resolver nuestras motivaciones, como ya lo he mencionado un par de lineas atrás.

Proposición 2.2.2. *Todos los operadores diferenciales del álgebra de matrices $M_m(\mathbb{C})$ son interiores, esto es,*

$$\mathrm{D}^i(M_m(\mathbb{C})) = \mathrm{D}^0(M_m(\mathbb{C})),\ \forall i \geq 0$$

Más aún, $\mathrm{D}(M_m(\mathbb{C})) = \mathrm{End}(M_m(\mathbb{C})) = M_{m^2}(\mathbb{C}) = M_m(\mathbb{C}) \otimes M_m(\mathbb{C})^o$.

Demostración. Sea $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m\}$ la base canónica de $M_m(\mathbb{C})$, cuya ley de multiplicación esta dada por

$$E_{ij}E_{rs} = \delta_{jr}E_{is}$$

Luego, para cada par de índices (α, β) se tienen los operadores diferenciales interiores $\lambda_{\alpha\beta}$, $\rho_{\alpha\beta} \in \mathrm{End}(M_m(\mathbb{C}))$, definidos por la multiplicación a izquierda y a derecha, respectivamente. De esta forma

$$\lambda_{\alpha\beta}(E_{ij}) = E_{\alpha\beta}E_{ij} = \delta_{\beta i}E_{\alpha j}$$
$$\rho_{\alpha\beta}(E_{ij}) = E_{ij}E_{\alpha\beta} = \delta_{j\alpha}E_{i\beta}$$

Por otra parte, consideremos una base para el espacio $\mathrm{End}(M_m(\mathbb{C}))$, definida de la siguiente manera. Para cada pareja de duplas $(\alpha\beta)$ y $(\alpha'\beta')$, tenemos el operador lineal $\varphi^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'}$, tal que

$$\varphi^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'}(E_{ij}) = \begin{cases} E_{\alpha\beta} & \text{si } (\alpha',\beta') = (i,j) \\ 0 & \text{si } (\alpha',\beta') \neq (i,j) \end{cases}$$

Ahora veamos que $\varphi^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = \lambda_{\alpha\alpha'}\rho_{\beta'\beta}$. En efecto, dado que

$$\begin{aligned} \varphi^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'}(E_{ij}) &= \delta_{\alpha' i}\delta_{\beta' j}E_{\alpha\beta} = \delta_{\beta' j}(\delta_{\alpha' i}E_{\alpha\beta}) \\ &= \delta_{\beta' j}\lambda_{\alpha\alpha'}(E_{i\beta}) = \lambda_{\alpha\alpha'}(\delta_{\beta' j}E_{i\beta}) \\ &= \lambda_{\alpha\alpha'}\rho_{\beta'\beta}(E_{ij}) \end{aligned}$$

Finalmente, hemos demostrado que

$$\mathrm{End}(M_m(\mathbb{C})) = \mathrm{Sum}\{\varphi^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'}\} = \mathrm{Sum}\{\lambda_{\alpha\alpha'}\rho_{\beta'\beta}\} = \mathrm{D}^0(M_m(\mathbb{C}))$$

Por lo tanto, $\mathrm{D}^i(M_m(\mathbb{C})) = \mathrm{D}^0(M_m(\mathbb{C})) = \mathrm{End}(M_m(\mathbb{C}))$, $\forall i \geq 0$. □

Corolario 2.2.3. *Sea A_n la n-álgebra de Weyl. Entonces*

$$\mathrm{D}(M_m(\mathbb{C})[X]) = M_m(\mathbb{C}) \otimes M_m(\mathbb{C})^o \otimes A_n$$

Más aún, $\mathrm{D}(M_m(\mathbb{C})[X]) = M_m(\mathbb{C}[X]) \otimes_{\mathbb{C}[X]} M_m(\mathbb{C}[X])^o \otimes_{\mathbb{C}[X]} \mathrm{Sum}\{\partial^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$.

Demostración. Se sigue del `Lema` 2.2.1 y de la `Prop.`2.2.2. Para ver la segunda descripción, basta con tener presente que $\mathbb{C}[X]$ es un subalgebra central de $M_m(\mathbb{C}) \otimes M_m(\mathbb{C})^o \otimes A_n$. □

Con el trabajo realizado, vemos con naturalidad que el anillo de operadores diferenciales de tipo Lunts-Rosenberg, $\mathrm{D}(M_m(\mathbb{C})[X])$, resulta ser una estructura natural en la cual habitan los operadores diferenciales del tipo P_ρ y P_λ, junto con los operadores obtenidos con la composición de estos, $\nabla = P_\lambda P_\rho$. De esta manera, obtenemos una estructura ambiente idónea para describir el conjunto solución $Sol_\Gamma(\nabla_1, \ldots, \nabla_l)$, asociado a un $\mathrm{D}(M_m(\mathbb{C})[X])$-módulo izquierdo Γ, donde,

$$\nabla_i = \sum \lambda_{a_{(i,\alpha,\beta)}}\rho_{b_{(i,\alpha,\beta)}} x^\beta \partial^\alpha$$

tal que; $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, a_{(i,\alpha,\beta)}, b_{(i,\alpha,\beta)} \in M_m(\mathbb{C})$.

2.2.2. Operadores diferenciales de $\mathrm{Cl}_m(\mathbb{R})[X]$

Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales, $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos y $\mathbb{H}$ la $\mathbb{R}$-álgebra de cuaterniones. Ahora consideremos la sucesión de $\mathbb{R}$-álgebras de Clifford Cl_m, como una familia de anillos de división que extienden la terna $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$, de esta forma

$$\begin{cases} \mathrm{Cl}_0 = \mathbb{R},\ \mathrm{Cl}_1 = \mathbb{C},\ \mathrm{Cl}_2 = \mathbb{H} \\ \mathrm{Cl}_m : m \geq 0,\ \text{álgebra de división} \end{cases}$$

Ahora proponemos estudiar los operadores diferenciales del anillo de polinomios de n-variables, $\mathrm{Cl}_m[X]$.

Definición 2.2.1. Se define la $\mathbb{R}$-**álgebra de Clifford** Cl_m como el $\mathbb{R}$-espacio vectorial generado por los elementos básicos $\{e_1, \ldots, e_m\}$, junto con la siguiente regla de multiplicación

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Consideremos las siguientes propiedades relevantes sobre el álgebra de Clifford.

Proposición 2.2.4. *(ver [Lam04],[B02])*

1. *El conjunto* $\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq m, 0 \leq r \leq m\}$, *es una base para* Cl_m.
2. Cl_m *es una* $\mathbb{R}$*-álgebra de división con* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Cl}_m) = 2^m$.
3. *Para cada* $m \geq 0$, *el álgebra* Cl_{m+8}, *es isomorfa al álgebra de matrices* $M_{16}(\mathrm{Cl}_m)$, *esto nos permite hacer la identificación entre álgebras,*
$$\mathrm{Cl}_{m+8} = M_{16}(\mathrm{Cl}_m) = M_{16}(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{Cl}_m$$
4. *Las primeras ocho álgebras de Clifford son de la forma,*
$$\begin{aligned} &\mathrm{Cl}_0 = \mathbb{R},\ \mathrm{Cl}_1 = \mathbb{C},\ \mathrm{Cl}_2 = \mathbb{H}, \\ &\mathrm{Cl}_3 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H},\ \mathrm{Cl}_4 = M_2(\mathbb{H}),\ \mathrm{Cl}_5 = M_4(\mathbb{C}), \\ &\mathrm{Cl}_6 = M_8(\mathbb{R}),\ \mathrm{Cl}_7 = M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R}),\ \mathrm{Cl}_8 = M_{16}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Notemos que de [I01, pg. 6 - Corollary 3.1.3] sabemos que $\mathrm{D}(M_m(R)) = M_{m^2}(\mathrm{R})$, siempre y cuando, R sea una $\Bbbk$-álgebra conmutativa. Ahora sabemos que $\mathrm{Cl}_{m+8} = M_{16}(\mathrm{Cl}_m)$, y como Cl_m no es conmutativa para $m \geq 2$, entonces no podemos describir tan directamente los operadores diferenciales del álgebra de Clifford. No obstante, vuelve a ser pertinente usar la descomposición tensorial.

Proposición 2.2.5. *Todos los operadores diferenciales del álgebra de Clifford son interiores, esto es,*

$$\mathrm{D}^i(\mathrm{Cl}_m) = \mathrm{D}^0(\mathrm{Cl}_m),\ \forall i \geq 0$$

Más aún, existen $m \in \mathbb{N}_0$ *tales que* $\mathrm{D}^0(\mathrm{Cl}_m) \neq \mathrm{End}(\mathrm{Cl}_m)$,

Demostración. Dado que $\mathrm{Cl}_{m+8} = M_{16}(\mathrm{Cl}_m)$, obtenemos de [I02, pg. 126 - Theorem 3.1.1] que $\mathrm{D}(\mathrm{Cl}_{m+8}) = \mathrm{D}^0(M_{16}(\mathbb{R})) \otimes \mathrm{D}(\mathrm{Cl}_m)$. Basta ver que las primeras ocho álgebras de Clifford Cl_m, admiten una descomposición tensorial $\mathrm{Cl}_m = A_1 \otimes \cdots \otimes A_k$, tales que $\mathrm{D}(A_j) = \mathrm{D}^0(A_j)$. De lo que se sigue, $\mathrm{D}^i(\mathrm{Cl}_m) = \mathrm{D}^0(A_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{D}^0(A_k)$, $\forall i \geq 0$.

Para el caso, $\mathrm{Cl}_0 = \mathbb{R}$, se obtiene trivialmente que $\mathrm{D}(\mathrm{Cl}_0) = \mathrm{D}^0(\mathrm{Cl}_0) = \mathrm{End}(\mathbb{R})$. Para el caso $\mathrm{Cl}_1 = \mathbb{C}$, dado que $\mathbb{C}$ es una $\mathbb{R}$-álgebra conmutativa, se sigue del `Corol.` 1.2.8,

$$\mathrm{D}^0(\mathbb{C}) = \mathbb{C}, \quad \mathrm{D}^1(\mathbb{C}) = \mathrm{D}^0(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Der}(\mathbb{C})$$

Basta ver que $\mathrm{Der}(\mathbb{C}) = \{0\}$, y con ello, obtenemos

$$\mathrm{D}^1(\mathbb{C}) = \mathrm{D}^0(\mathbb{C}) \implies \mathrm{D}^i(\mathrm{Cl}_1) = \mathrm{D}^0(\mathrm{Cl}_1) = \mathbb{C},\ \forall i \geq 0$$

Sea $\delta \in \mathrm{Der}(\mathbb{C})$, notemos que $\delta(1) = \delta(i) = 0$. En efecto, dado que

$$1 = 1^2 \implies \delta(1) = \delta(1^2) = 1\delta(1) + \delta(1)1 \implies \delta(1) = 0$$
$$-1 = i^2 \implies 0 = \delta(-1) = \delta(i^2) = i\delta(i) + \delta(i)i \implies \delta(i) = 0$$

Finalmente, para cada $z \in \mathbb{C}$, $\delta(z) = \delta(a + bi) = a\delta(1) + b\delta(i) = 0$. Por lo tanto, toda derivación en $\mathbb{C}$, es idénticamente nula. Para el caso $\mathrm{Cl}_2 = \mathbb{H}$, consideremos la base ordenada para los cuaterniones $\{1, i, j, k\}$, cuyas relaciones de multiplicación son: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. De esta manera, identificamos el anillo de endomorfismos con el álgebra de matrices, $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = M_4(\mathbb{R}) = \mathrm{Gen}\{E_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq 4\}$. Luego, las transformaciones asociadas a la multiplicación a izquierda son de la forma:

$$\lambda_1 = E_{11} + E_{22} + E_{33} + E_{44},\ \lambda_i = (E_{21} + E_{43}) - (E_{12} + E_{34})$$
$$\lambda_i = (E_{24} + E_{31}) - (E_{13} + E_{42}),\ \lambda_i = (E_{32} + E_{41}) - (E_{14} + E_{23})$$

A su vez, las transformaciones asociadas a la multiplicación a derecha son de la forma;

$$\rho_1 = E_{11} + E_{22} + E_{33} + E_{44},\ \rho_i = (E_{21} + E_{34}) - (E_{21} + E_{43})$$
$$\rho_j = (E_{31} + E_{42}) - (E_{13} + E_{24}),\ \rho_k = (E_{23} + E_{41}) - (E_{14} + E32)$$

Ahora, del `Corol` 1.2.4 sabemos que $\mathrm{Z}^0(\mathbb{H}) = \mathrm{Gen}\{\rho_1, \rho_i, \rho_j, \rho_k\}$, y $\mathrm{D}^0(\mathbb{H}) = \mathrm{Gen}\{\lambda_a\rho_b \mid a, b \in \mathbb{H}\}$. Al hacer las multiplicaciones pertinentes se obtiene

$$\mathrm{Gen}\{\lambda_a\rho_b \mid a, b \in \mathbb{H}\} = M_4(\mathbb{R})$$

Por lo tanto, $\mathrm{D}^0(\mathbb{H}) = \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$, y esto fuerza la igualdad, $\mathrm{D}(\mathbb{H}) = \mathrm{D}^0(\mathbb{H})$. Para los caso restantes basta usar las propiedades functoriales de los operadores diferenciales de álgebras, de esta manera:

$$\mathrm{Cl}_3 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \implies \mathrm{D}(\mathrm{Cl}_3) = \mathrm{D}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{D}(\mathbb{H}) = \mathrm{D}^0(\mathrm{Cl}_3)$$
$$\mathrm{Cl}_4 = M_2(\mathbb{H}) = M_2(\mathbb{R}) \otimes (H) \implies \mathrm{D}(\mathrm{Cl}_4) = \mathrm{D}(M_2(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{D}(\mathbb{H}) = \mathrm{D}^0(\mathrm{Cl}_4)$$
$$\mathrm{Cl}_5 = M_4(\mathbb{C}) \implies \mathrm{D}(\mathrm{Cl}_5) = \mathrm{D}(M_4(\mathbb{C})) = \mathrm{D}^0(\mathrm{Cl}_5)$$
$$\mathrm{Cl}_6 = M_8(\mathbb{R}) \implies \mathrm{D}(\mathrm{Cl}_6) = \mathrm{D}(M_8(\mathbb{R})) = \mathrm{D}^0(\mathrm{Cl}_6)$$
$$\mathrm{Cl}_7 = M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R}) \implies \mathrm{D}(\mathrm{Cl}_7) = \mathrm{D}(M_8(\mathbb{R})) \oplus \mathrm{D}(M_8(\mathbb{R})) = \mathrm{D}^0(\mathrm{Cl}_7)$$

□

Corolario 2.2.6. *Los operadores diferenciales del álgebra de polinomios* $\mathrm{Cl}_m[X]$ *son de la forma*

$$\mathrm{D}(\mathrm{Cl}_m[X]) = \mathrm{D}^0(\mathrm{Cl}_m) \otimes A_n(\mathbb{R})$$

Demostración. Se sigue del `Lema` 2.2.1 y la `Prop.`2.2.5. □

Teniendo en mente lo previamente estudiado, es fácil deducir como son los operadores diferenciales de $B[X]$, siempre y cuando B se pueda descomponer como sumando directo de álgebras de matrices. De esta forma, teniendo presente el Teorema de Wedderburn-Artin-Molien, podemos analizar $\mathrm{D}(B[X])$ con B una $\mathbb{k}$-álgebra semisimple de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado.

Teorema 2.2.7 (Wedderburn-Artin-Molien). *[DKV94, pg.39] Sea* $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ *un cuerpo álgebraicamente cerrado. Si* B *es una* $\mathbb{k}$*-álgebra semisimple y de dimensión finita, entonces* B *es isomorfa a una suma directa de álgebras de matrices, es decir, existen* $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$B = M_{n_1}(\mathbb{k}) \oplus \cdots \oplus M_{n_l}(\mathbb{k})$$

Proposición 2.2.8. *Si B es un álgebra semisimple y de dimensión finita sobre un cuerpo $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ algebraicamente cerrado, entonces $\mathrm{D}(B[X]) = \mathrm{D}^0(B) \otimes A_n(\Bbbk)$. Más aún, par cada $i \geq 0$,*

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^i(B[X]) &= \mathrm{Sum}\{\lambda_a \rho_b x^\beta \partial^\alpha \mid a, b \in B, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leq i, \, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\} \\ &= \mathrm{Sum}\{\lambda_p \rho_q \partial^\alpha \mid p, q \in B[X], \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leq i, \, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}\end{aligned}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema de Wedderburn-Artin-Molien, sabemos que, $B = M_{n_1}(\Bbbk) \oplus \cdots \oplus M_{n_l}(\Bbbk)$. Se sigue de la `Prop.`1.2.5, que $\mathrm{D}(M_{n_i}(\Bbbk)) = \mathrm{D}^0(M_{n_i}(\Bbbk))$, para cada $i = 1, \ldots, l$. Luego

$$\mathrm{D}(B) = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathrm{D}^0(M_{n_i}(\Bbbk)) = \mathrm{D}^0(B) \implies \mathrm{D}(B[X]) = \mathrm{D}^0(B) \otimes A_n(\Bbbk)$$

Finalmente, sabemos que $\mathrm{D}^0(B) = \mathrm{Sum}\{\lambda_a \rho_b \mid a, b \in B\}$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^i(B[X]) &= \mathrm{D}^0(B) \otimes \mathrm{Sum}\{x^\beta \partial^\alpha \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leq i\} \\ &= \mathrm{Sum}\{\lambda_a \rho_b x^\beta \partial^\alpha \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leq i, a, b \in B\}\end{aligned}$$

□

Podemos sintetizar con amplia generalidad lo estudiado en esta sección de la siguiente manera.

Proposición 2.2.9. *Sea B una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita, tal que todos sus operadores diferenciales son interiores, esto es, $\mathrm{D}(B) = \mathrm{D}^0(B)$. Si A_n denota la n-álgebra de Weyl entonces $\mathrm{D}(B[X]) = \mathrm{D}^0(B) \otimes A_n$. Más aún, para cada $i \geq 0$, se cumple,*

$$\begin{aligned}D^i(B[X]) &= \mathrm{Sum}\{\lambda_a \rho_b x^\beta \partial^\alpha \mid a, b \in B, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leq i, \, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\} \\ &= \mathrm{Sum}\{\lambda_p \rho_q \partial^\alpha \mid p, q \in B[X], \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leq i, \, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}\end{aligned}$$

Demostración. Se demuestra de la misma manera que en la `Prop.` 2.2.8. □

SECCIÓN 2.3

Morita equivalencia y los $\mathrm{D}(B[X])$-módulos

Como ya lo hemos mencionado antes, si $B = M_m(\Bbbk)$ entonces $\mathrm{D}(M_m[\Bbbk[X]) = M_{m^2}(A_n)$. Ahora, esta última descripción de los operadores diferenciales nos revela una equivalencia de tipo Morita, entre el álgebra de Weyl A_n y el álgebra $\mathrm{D}(M_m(\Bbbk[X])$. Para ver esto con mas claridad consideremos las siguientes definiciones y resultado generales.

Definición 2.3.1. Dos categorías $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ son llamadas **equivalentes**, si existe un par de functores $\mathcal{F}:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ y $\mathcal{G}:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$, tales que $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}$ es naturalmente equivalente al functor identidad $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, y a su vez, $\mathcal{G}\circ\mathcal{F}$ es naturalmente equivalente al functor identidad $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$.

Definición 2.3.2 (Equivalencia Morita)**.** Un par de anillos R y S, son llamados **equivalentes Morita**, si las categorías ${}_R\,\mathrm{Mod}$ y ${}_S\,\mathrm{Mod}$, son equivalentes.

Proposición 2.3.1. *[Lam99, pg. 470] Sea R es un anillo. Si $M_m(R)$ es el álgebra de matrices con entradas en R, entonces R y $M_m(R)$ son equivalentes Morita.*

Si implementamos la `Prop.` 2.3.1 en nuestro caso, veremos que, la equivalencia entre las categorías de módulos izquierdos ${}_{A_n}\,\mathrm{Mod}$ y ${}_{M_{m^2}(A_n)}\,\mathrm{Mod}$, se obtiene a través de los functores

$$\mathcal{M}_{m^2}:{}_{A_n}\,\mathrm{Mod}\to{}_{M_{m^2}(A_n)}\,\mathrm{Mod}$$

$$\begin{array}{ccc} X \rightsquigarrow \mathcal{M}_{m^2}(X)=X^{m^2} & & [x_1,\dots,x_{m^2}] \\ \varphi\downarrow \qquad\qquad \downarrow\mathcal{M}_{m^2}(\varphi) & & \downarrow \\ Y \rightsquigarrow \mathcal{M}_{m^2}(Y)=Y^{m^2} & & [\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_{m^2})] \end{array}$$

y

$$\mathcal{P}_1:{}_{M_{m^2}(A_n)}\,\mathrm{Mod}\to{}_{A_n}\,\mathrm{Mod}$$

$$\begin{array}{ccc} V \rightsquigarrow \mathcal{P}_1(V)=E_{11}V & & E_{11}v \\ \psi\downarrow \qquad\qquad \downarrow\mathcal{P}_1(\psi) & & \downarrow \\ W \rightsquigarrow \mathcal{P}_1(W)=E_{11}W & & E_{11}\psi(v) \end{array}$$

Notemos que para el caso en que B es álgebra finita y semisimple sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, obtenemos una situación similar. Dado que $B=M_{n_1}(\Bbbk)\oplus\cdots\oplus M_{n_l}(\Bbbk)$, entonces $B[X]=M_{n_1}(\Bbbk[X])\oplus\cdots\oplus M_{n_l}(\Bbbk[X])$. Por lo tanto, $\mathrm{D}(B[X])$ será equivalente Morita a $A_n^l=\bigoplus_{i=1}^l A_n$.

De esta manera podemos garantizar todo conjunto de soluciones homogéneas sobre un módulo izquierdo Γ, asociado a un sistema de operadores diferenciales $(\nabla_1,\nabla_2,\dots,\nabla_l)$ de $\mathrm{D}(B[X])$, los podemos analizar como un sistema sistema de ecuaciones en la categoría de módulos sobre el álgebra de Weyl, dado que, los functores $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{M}_{m^2}$, traducen fielmente la información de los ideales, cocientes y morfismo que intervienen en la igualdad, $Sol_\Gamma(\nabla_1,\nabla_2,\dots,\nabla_l)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(M_m(\Bbbk[X]))}(\mathrm{D}(B[X])/J,\Gamma)$, por lo cual la teoría se reduce al estudio clásico de A_n-módulos.

Notemos que a la luz del estudio de las representaciones del anillo de operadores $\mathrm{D}(B[X])$, es pertinente escapar del contexto de equivalencia Morita, para garantizar el estudio de representaciones de nuevos objeto. Es por ello que nos surgió el interés de obtener ejemplos de álgebras B tales que,

$$\mathrm{D}^0(B)\neq\mathrm{D}(B)\neq\mathrm{End}(B)$$

No obstante, como ya lo hemos sugerido, el contexto de Morita es conveniente como método para solucionar sistemas de operadores en $\mathrm{D}(B[X])$.

Por otra parte, en la `Prop.` 2.2.9 vemos una situación interesante para seguir trabajando. Esta es, si B es una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita tal que $\mathrm{D}(B)=\mathrm{D}^0(B)$, entonces los operadores diferenciales $\nabla \in \mathrm{D}(B[X])$ son de la forma

$$\nabla = \sum \lambda_{p_\alpha} \rho_{q_\alpha} \partial^\alpha, \text{ tal que, } p_\alpha, q_\alpha \in B[X]$$

Se motiva naturalmente el estudio de las álgebras de dimensión finita B cuyos operadores diferenciales sean todos interiores. En esta dirección la Dra. Uma Iyer en su artículo [I02], sugiere como punto de partida estudiar el primer grupo de cohomología de Hochschild, formulando la siguiente pregunta aun abierta: *¿Existe una $\Bbbk$-álgebra B, tal que el primer grupo de cohmología de Hochschild sea cero, y a su vez, dicha álgebra admita operadores diferenciales no interiores?*

Con esto en mente, nosotros presentamos en el `Capítulo` 3 cálculos explícitos del anillo de operadores diferenciales de álgebra de caminos y sus relaciones con el primer grupo de cohomología de Hochschild.

Capítulo 3

Operadores diferenciales de álgebras de caminos

En este capítulo realizaremos cálculos explícitos del anillo de operadores diferenciales sobre álgebras de caminos $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$, inducidas por un carcaj Q finito, acíclico y conexo. Con esta estructura en particular, tendremos una herramienta diagramática para calcular la dimensión del primer grupo de cohomologia de Hochschild. Con esto en mente, evaluaremos la veracidad de la proposición

$$\dim \mathrm{H}^1(\Gamma_{\Bbbk}(Q)) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{D}^n(\Gamma_{\Bbbk}(Q)) = \mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(Q)), \forall n \geq 0.$$

Por otra parte, el anillo de operadores diferenciales de las álgebras de caminos $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$ que son estudiadas en este capítulo, no alcanzan al espacio $\mathrm{End}_{\Bbbk}(\Gamma(Q))$, es decir,

$$\mathrm{D}_{\Bbbk}(\Gamma_{\Bbbk}(Q)) \neq \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(Q)).$$

Esta propiedad es una característica de todas las álgebras de caminos $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$, siempre y cuando, Q sea un carcaj finito, acíclico y conexo. No obstante, las herramientas que nos permitirán demostrar esta afirmación, serán generadas en el `Capítulo` 4.

SECCIÓN 3.1

Álgebras de caminos

En esta sección exponemos los preliminares básicos para introducirnos en el estudio de las **álgebras de caminos $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$, inducidas por un carcaj Q, finito, acíclico y conexo** (bibliográfica de referencia [CLS82] y [ASS06]). Vale mencionar, que estas álgebras de caminos $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$ admiten una identificación natural con matrices triangulares inferiores formales, y con las propiedades de dicha estructura matricial, calcularemos el anillo de operadores diferenciales $\mathrm{D}(\Gamma(Q))$.

3.1.1. Definiciones y propiedades

Definición 3.1.1. Un **carcaj** es un diagrama orientado, $Q = (Q_0, Q_1; s, t)$, el cual consta de dos conjuntos Q_0 y Q_1 y dos funciones $s, t : Q_1 \to Q_0$. Donde Q_0 es llamado conjunto de **vértices** y Q_1 conjunto de **flechas**. A cada flecha $\alpha \in Q_1$ se le asigna un **vértice inicial**

$s(\alpha) = i \in Q_0$ y un **vértice final** $t(\alpha) = j \in Q_0$. Cada flecha $\alpha \in Q_1$ será denotado con un segmento dirigido, $\alpha : i \to j$ o $i \xrightarrow{\alpha} j$.

Un carcaj Q se dice **finito** si Q_0 y Q_1 son finitos. Se define el **grafo subyacente** $\overline{Q}$ de un carcaj Q, como el grafo obtenido al olvidar las orientaciones de las flechas. Un carcaj Q se dice **conexo** si $\overline{Q}$ es un grafo conexo.

Ejemplo 1. Son ejemplos de carcaj

.

Definición 3.1.2. Fijemos un par de vértices $i, j \in Q_0$. Un **camino de longitud** $l \geq 1$ que inicia en i y termina en j, es una secuencia del tipo $(i \mid \alpha_1 \cdots \alpha_l \mid j)$ tal que

$$\alpha_k \in Q_1, \quad s(\alpha_1) = i, \quad t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1}), \quad t(\alpha_l) = j$$

Usaremos la notación $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l$ cuando no se genere ninguna ambigüedad y el grafo correspondiente es

$$i = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_l} a_{l-1} \xrightarrow{\alpha_l} a_l = j \ .$$

Al conjunto de todos los caminos de longitud l lo denotaremos con Q_l. Notemos que al conjunto de vértices Q_0 lo podemos identificar con el conjunto de caminos de longitud $l = 0$, donde para cada vértice $i \in Q_0$, le asignamos el camino trivial

$$\epsilon_i = (i \mid\mid i)$$

Similarmente, el conjunto de flechas Q_1 se identifica naturalmente con los caminos de longitud $l = 1$.

Por otra parte, un camino de longitud $l \geq 1$ es llamado **ciclo** si el vértice de inicio coincide con el vértice final, esto es, si $s(\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l) = t(\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l)$, y todo ciclo de longitud $l = 1$ es llamado **lazo**. Por lo tanto, diremos que un carcaj Q es **acíclico** si no posee ciclos.

Definición 3.1.3. Sea Q un carcaj. El **álgebra de caminos** $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$ es una $\Bbbk$-álgebra, cuya base como $\Bbbk$-espacio vectorial es el conjunto de todos los caminos $\alpha_1 \cdots \alpha_l$ con $l \geq 0$ en Q, esto es,

$$\Gamma_{\Bbbk}(Q) = \mathrm{Sum}_{\Bbbk}\{(i \mid \alpha_1 \cdots \alpha_l \mid j) \mid \alpha_1 \cdots \alpha_l \in \cup_{l \geq 0} Q_l\}.$$

El producto entre dos elementos básicos esta dado por

$$(i \mid \alpha_1 \cdots \alpha_l \mid j) * (h \mid \beta_1 \cdots \beta_m \mid k) = \delta_{jh}(i \mid \alpha_1 \cdots \alpha_l\beta_1 \cdots \beta_m \mid k).$$

donde δ_{jh} denota la delta de *Kronecker*, la cual se define como

$$\delta_{jh} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq h \\ 1 & \text{si } j = h \end{cases}.$$

Por último, este producto se extiende bilinealmente a todo el espacio vectorial $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$, obteniendo de esta forma el álgebra de caminos como

$$\Gamma_{\Bbbk}(Q) = \mathrm{Gen}_{\Bbbk}\{(i \mid \alpha_1 \cdots \alpha_l \mid j) \mid \alpha_1 \cdots \alpha_l \in \cup_{l \geq 0} Q_l\}.$$

Ejemplo 2. Consideremos el carcaj, $Q = (\bullet_2 \xrightarrow{\alpha} \bullet_1)$. Se sigue que,

$$\Gamma_{\Bbbk}(\bullet_2 \xrightarrow{\alpha} \bullet_1) = \mathrm{Gen}_{\Bbbk}\{\epsilon_1 = (1 \mid\mid 1), \epsilon_2 = (2 \mid\mid 2), \alpha = (2 \mid \alpha \mid 1)\}$$

Su tabla de multiplicar esta dada por las siguientes relaciones;

$$\begin{aligned}
&\epsilon_1\epsilon_2 = (1 \mid\mid 1)(2 \mid\mid 2) = 0, \quad \epsilon_2\epsilon_1 = (2 \mid\mid 2)(1 \mid\mid 1) = 0,\\
&\epsilon_1\alpha = (1 \mid\mid 1)(2 \mid \alpha \mid 1) = 0, \quad \epsilon_2\alpha = (2 \mid\mid 2)(2 \mid \alpha \mid 1) = \alpha,\\
&\alpha\epsilon_1 = (2 \mid \alpha \mid 1)(1 \mid\mid 1) = \alpha, \quad \alpha\epsilon_2 = (2 \mid \alpha \mid 1)(2 \mid\mid 2) = 0,\\
&\epsilon_1^2 = (1 \mid\mid 1)(1 \mid\mid 1) = \epsilon_1, \quad \epsilon_2^2 = (2 \mid\mid 2)(2 \mid\mid 2) = \epsilon_2, \quad \alpha^2 = (2 \mid \alpha \mid 1)(2 \mid \alpha \mid 1) = 0,\\
&\epsilon_1 + \epsilon_2 = (1||1) + (2||2) = 1.
\end{aligned}$$

Por otra parte, podemos ver con naturalidad que la transformación lineal definida de la siguiente forma,

$$\epsilon_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{(11)},\ \epsilon_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{(22)},\ \alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{(21)}.$$

induce un isomorfismo entre las $\Bbbk$-álgebras,

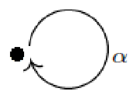
$$\mathrm{Gen}_{\Bbbk}\{\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha\} = \mathrm{Gen}_{\Bbbk}\{E_{(11)}, E_{(22)}, E_{(21)}\}.$$

De esta forma, obtenemos que

$$\Gamma_{\Bbbk}(\bullet_2 \xrightarrow{\alpha} \bullet_1) = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ \Bbbk & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Hacemos notar que toda álgebra de caminos $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$ admite una identificación como álgebra de matrices triangulares, siempre y cuando, el carcaj Q sea finito, acíclico y conexo. Este resultado se presentará mas adelante.

Ejemplo 3. Consideremos el carcaj Q, dado por el lazo



Se tiene que $\Gamma_{\Bbbk}(Q) = \mathrm{Sum}_{\Bbbk}\{\epsilon_\bullet = (\bullet \mid\mid \bullet), \alpha^n = (\bullet \mid \underbrace{\alpha \cdots \alpha}_{n} \mid \bullet) \mid n \in \mathbb{N}\}$, y su tabla de multiplicación es:

$$\epsilon_\bullet\alpha^n = \alpha^n\epsilon_\bullet = \alpha^n, \quad \alpha^n\alpha^m = \alpha^{n+m}, \quad \epsilon_\bullet = 1.$$

Se deduce fácilmente que la transformación lineal definida como

$$\epsilon_\bullet \mapsto 1,\ \alpha \mapsto x$$

induce un isomorfismo entre las álgebra, $\Gamma_{\Bbbk}(Q) = \Bbbk[x]$. Donde, $\Bbbk[x]$ es el álgebra de polinomios en la variable x.

Hacemos notar que si el carcaj Q tiene por lo menos un lazo o un ciclo, entonces su álgebra de caminos es de dimensión infinita. En nuestro caso, estamos interesados en el estudio de los operadores diferenciales del álgebra de caminos asociado a un carcaj acíclico.

Proposición 3.1.1. *[ASS06, pg. 45 - Lemma.1.4.] Sea Q un carcaj y $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$ su álgebra de caminos. Entonces se verifican las siguientes relaciones:*

1. *$\Gamma_{\Bbbk}(Q)$ tiene elemento identidad si y solo si Q_0 es finito y $1 = \sum_{i \in Q_0} \epsilon_i$.*
2. *$\Gamma_{\Bbbk}(Q)$ es de dimensión finita si y solo si Q es finito y acíclico.*
3. *Si Q es finito entonces $\{\epsilon_i \mid i \in Q_0\}$ es un sistema completo de idempotentes ortogonales primitivos de $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$.*
4. *Sea Q un carcaj finito. El álgebra de caminos $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$ es conexa si y solo si Q es un carcaj conexo.*

3.1.2. Matrices formales

A esta altura de la sección ya contamos con las definiciones y herramientas básicas para presentar con naturalidad nuestro campo de trabajo, este es: las álgebras de caminos $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$ sobre un carcaj Q finito, acíclico y conexo. Nuestro próximo objetivo, es definir las **matrices formales** y con ellas, daremos una representación matricial a las álgebras de caminos sobre un carcaj.

Consideremos, un conjunto de álgebras $\{A_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ y un conjunto de (A_i, A_j)-bimódulos $\{M_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ tales que $M_{ii} = A_i$ para cada i. Supongamos que para cada terna de índices (i, j, k), se tiene una transformación de (A_i, A_k)-bimódulos, dado por, $\varphi^j_{ik} : M_{ij} \otimes M_{jk} \to M_{ik}$, tal que

$$\varphi^k_{il}(\varphi^j_{ik} \otimes 1) = \varphi^j_{il}(1 \otimes \varphi^k_{jl})$$

para cualquier (i, j, k, l). Esta relación se expresa con la conmutatividad del diagrama,

$$\begin{tikzcd}
M_{ij} \otimes M_{jk} \otimes M_{kl} \arrow[r, "1\otimes\varphi^k_{jl}"] \arrow[d, "\varphi^j_{ik}\otimes 1"'] & M_{ij} \otimes M_{jl} \arrow[d, "\varphi^j_{il}"] \\
M_{ik} \otimes M_{kl} \arrow[r, "\varphi^k_{il}"'] & M_{il}
\end{tikzcd}$$

Definición 3.1.4. Con las condiciones previamente mencionadas, se define la $\Bbbk$-álgebra de **matrices formales** de orden $n \times n$, inducida por las familias (A_i, M_{ij}), como el $\Bbbk$-espacio vectorial

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix} = \mathrm{Sum}_{\Bbbk}\{(x_{ij}) \mid x_{ij} \in M_{ij} \text{ con } 1 \leq i, j \leq n\}$$

cuya multiplicación entre sus generadores se define como

$$(x_{ij}) \cdot (y_{ij}) = \big(c_{ij}\big) \text{ tal que } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \varphi^k_{ij}(x_{ik} \otimes y_{kj}).$$

Definición 3.1.5. Si Q es un carcaj finito, conexo y acíclico, al conjunto de vértices se le puede enumerar de la forma $Q_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$, donde la relación de orden esta dada por el criterio

$$j \leq i, \text{ siempre y cuando exista un camino que inicia en } i \text{ y termina en } j.$$

Luego, para el álgebra de camino $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$, se obtiene el bimódulo $M_{ij} = \epsilon_i \Gamma_{\Bbbk}(Q)\epsilon_j$, para cada $1 \leq i, j \leq n$.

Proposición 3.1.2. *[ASS06, pg. 51 - Lemma. 1.12] Sea Q un carcaj finito, conexo y acíclico, con vértices enumerados convenientemente $Q_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces, $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$ se puede identificar naturalmente con una $\Bbbk$-álgebra de matrices formales triangulares e inferiores, donde,*

$$\Gamma_{\Bbbk}(Q) \cong \begin{bmatrix} \epsilon_1\Gamma(Q)\epsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \epsilon_2\Gamma(Q)\epsilon_1 & \epsilon_2\Gamma(Q)\epsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_n\Gamma(Q)\epsilon_1 & \epsilon_n\Gamma(Q)\epsilon_2 & \cdots & \epsilon_n\Gamma(Q)\epsilon_n \end{bmatrix}.$$

3.1.3. Cohomología de Hochschild para $\Gamma_{\Bbbk}(Q)$

Sea A una $\Bbbk$-álgebra, y consideremos su álgebra extendida, $A^e = A \otimes A^o$. Recordemos que todo A-bimódulo se puede identificar de forma natural con un A^e-módulo izquierdo. A continuación se define el n-grupo de cohomología de Hochschild, en términos del functor Ext, pero, exhibiremos un resultado de tipo diagramático que nos permitirá calcular fácilmente la dimensión del primer grupo de cohomología H^1.

Definición 3.1.6. Sea M un A^e-módulo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define **el grupo de cohomología de Hochschild**, $\mathrm{H}^n(A, M) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M)$. Para el caso $A = M$, lo denotaremos simplemente con $\mathrm{H}^n(A)$.

Recordemos que, $\mathrm{C}(A)$ es el centro del álgebra A. Por otra parte, si M, N son un par de subespacios vectoriales entonces M/N denota el espacio cociente. Ahora exhibiremos un resultado que nos permita calcular los primeros grupos de cohomología H^0 y H^1 de la siguiente manera.

Proposición 3.1.3. *[C00]-[C88]. Sea A una $\Bbbk$-álgebra, entonces*

$$\mathrm{H}^0(A) = \mathrm{C}(A) \quad y \quad \mathrm{H}^1(A) = \mathrm{Der}_{\lambda}(A)/\mathrm{Int}(A).$$

Definición 3.1.7. Sea Q un carcaj y Q_l el conjunto de caminos de longitud $l \geq 0$. Consideremos el conjunto $Q_* = \bigcup_{l \geq 0} Q_l$. Se define el conjunto de **caminos paralelos al conjunto de flechas** como

$$Q_*//Q_1 = \{(\gamma, \alpha) \in Q_* \times Q_1 : s(\gamma) = s(\alpha), t(\gamma) = t(\alpha)\}.$$

Proposición 3.1.4. *[C00]-[C88]. Si Q es un carcaj finito, conexo y acíclico, entonces*

$$\dim_{\Bbbk} \mathrm{H}^1(\Gamma(Q)) = 1 - \mid Q_0 \mid + \mid Q_*//Q_1 \mid.$$

SECCIÓN 3.2

La n-Álgebra de Kronecker, $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$

En esta sección calculamos el anillo de operadores diferenciales de la llamada n-álgebra de Kronecker. De esta manera obtenemos una familia infinito numerable de álgebras de dimensión finita, $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$ con tres propiedades distinguidas: Primero, el anillo de operadores diferenciales es un subespacio propio del anillo de endomorfismo y a su vez, distinto de los operadores diferenciales interiores, esto es

$$\mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \neq \mathrm{D}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \neq \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)).$$

Segundo, los operadores diferenciales de grado uno, se pueden reconstruir en función de las λ-derivaciones y la representación del álgebra, vía multiplicación a izquierda,

$$\mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) \oplus \mathrm{Der}_{\lambda}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$$

recreando de esta forma una propiedad distinguida de las álgebras conmutativas, ver `Corol.`1.2.8. Tercero, el primer grupo de cohomología de Hochschild se recupera con el primer módulo graduado inducido por los operadores diferenciales

$$\mathrm{H}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) / \mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)).$$

3.2.1. Cálculos iniciales

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el carcaj $Q = (\bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)$, constituido por dos puntos, $Q_0 = \{\epsilon_1 = (1 \mid\mid 1), \epsilon_2 = (2 \mid\mid 2)\}$, junto a un conjunto de n-flechas de longitud uno, paralelas y con la misma orientación,

$$Q_1 = \{(2 \mid \alpha_i \mid 1) : 1 \leq i \leq n\}.$$

Definición 3.2.1. Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Se define la n-**álgebra de Kronecker** con el álgebra de camino $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)$.

Dado que el carcaj $Q = (\bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)$ es finito, acíclico y conexo, sabemos que la n-álgebra de Kronecker es de dimensión finita, ver `Prop.`3.1.1. Por otra parte, su tabla de multiplicar se construye de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
&\epsilon_i\epsilon_j = (i \mid\mid i)(j \mid\mid j) = \delta_{ij}\epsilon_j, \quad i,j = 1,2\\
&\alpha_i\alpha_j = (2 \mid \alpha_i \mid 1)(2 \mid \alpha_j \mid 1) = 0, \quad i,j = 1,\dots,n\\
&\epsilon_i\alpha_j = (i \mid\mid i)(2 \mid \alpha_j \mid 1) = \delta_{i2}\alpha_j, \quad i = 1,2, j = 1,\dots,n\\
&\alpha_j\epsilon_i = (2 \mid \alpha_j \mid 1)(i \mid\mid i) = \delta_{i1}\alpha_j, \quad i = 1,2, j = 1,\dots,n\\
&\epsilon_1 + \epsilon_2 = (1||1) + (2||2) = 1.
\end{aligned}$$

Proposición 3.2.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifican las siguiente igualdades,*

1. $\dim \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = n+2$, $\dim \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = (n+2)^2$.
2. $\dim \mathrm{Int}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = n+1$, $\dim \mathrm{H}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = n^2 - 1$.
3. $\dim \mathrm{Der}_{\lambda}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = n^2 + n$.

Demostración. Para ver el `item(1)`, basta recordar la `Def.`3.1.3, en la cual, se define al conjunto $\bigcup_{l \geq 0} Q_i$, como base del álgebra de caminos del carcaj. En este caso particular, tenemos que la base para $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$, esta dada por $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Esto implica, $\dim \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = n+2$. Luego, como $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$ es un espacio de dimensión finita, es bien sabido que la dimensión del espacio de endomorfismo, se obtiene con el cuadrado de la dimensión del espacio base, es decir, $\dim \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = (n+2)^2$.

Para ver el `item(2)` usamos la `Prop.`1.1.9, por la cual, $\dim \operatorname{Int}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) = \dim \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet) - \dim C(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))$. Ahora el centro del álgebra de caminos es justamente el generado por la identidad, es decir, $\dim C(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) = 1$. De esta forma obtenemos lo que buscábamos, esto es $\dim \operatorname{Int}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) = n+1$. Por otra parte, la dimensión del $H^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))$ la podemos calcular de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
&Q_*//Q_1 = \{(\gamma,\alpha) \in Q_* \times Q_1 : s(\gamma) = s(\alpha), t(\gamma) = t(\alpha)\} && \texttt{Def.}3.1.7\\
&Q = (\bullet \overset{n}{\to} \bullet) \implies Q_*//Q_1 = Q_1 \times Q_1 &&\\
&\dim H^1(\Gamma(Q)) = 1- \mid Q_0 \mid + \mid Q_*//Q_1 \mid && \texttt{Prop.}3.1.4\\
&\dim H^1(\Gamma(Q)) = 1 - 2 + n^2 = n^2 - 1 && .
\end{aligned}$$

Finalmente, el `item(3)` se obtiene así

$$\begin{aligned}
&H^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) = \operatorname{Der}_{\lambda}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))/\operatorname{Int}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) && \texttt{Prop.}3.1.3\\
&\dim H^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) = \dim \operatorname{Der}_{\lambda}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) - \dim \operatorname{Int}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) &&\\
&\dim \operatorname{Der}_{\lambda}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) = (n^2-1) + (n+1) = n^2 + n && \texttt{item(1) y (2).}
\end{aligned}$$

□

Nuestra primera aproximación al estudio de los operadores diferenciales de la n-álgebra de Kronecker, fue calculando explícitamente bases para cada uno de los espacios de nuestro interés,

$$\Gamma_{\Bbbk}(\bullet_2 \overset{n}{\to} \bullet_1), \quad \operatorname{Int}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet_2 \overset{n}{\to} \bullet_1)), \quad \operatorname{Der}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet_2 \overset{n}{\to} \bullet_1)),$$

$$\operatorname{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet_2 \overset{n}{\to} \bullet_1), \quad D(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet_2 \overset{n}{\to} \bullet_1), \quad H^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet_2 \overset{n}{\to} \bullet_1)).$$

De esta forma exponemos el comportamiento de las dimensiones de dichos espacios, para las primeras ocho álgebras de Kronecker, notando que el anillo de operadores diferenciales se trunca en $D^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet_2 \overset{n}{\to} \bullet_1)$.

Carcaj	$\Gamma_{\Bbbk}$	$\operatorname{Int}(\Gamma_{\Bbbk})$	$\operatorname{Der}(\Gamma_{\Bbbk})$	$D^0(\Gamma_{\Bbbk})$	$D^1(\Gamma_{\Bbbk})$	$\operatorname{End}(\Gamma_{\Bbbk})$	H^1
$\bullet \overset{1}{\to} \bullet$	3	2	2	5	5	9	0
$\bullet \overset{2}{\to} \bullet$	4	3	6	7	10	16	3
$\bullet \overset{3}{\to} \bullet$	5	4	12	9	17	25	8
$\bullet \overset{4}{\to} \bullet$	6	5	20	11	26	36	15
$\bullet \overset{5}{\to} \bullet$	7	6	30	13	37	49	24
$\bullet \overset{6}{\to} \bullet$	8	7	42	15	50	64	35
$\bullet \overset{7}{\to} \bullet$	9	8	56	17	65	81	48
$\bullet \overset{8}{\to} \bullet$	10	9	72	19	82	100	63
$\bullet \overset{n}{\to} \bullet$	$n+2$	$n+1$	$n(n+1)$	??	??	$(n+2)^2$	n^2-1

Con esta información parcial formulamos las siguientes afirmaciones, las cuales serán demostradas con todo el rigor al final de la sección.

Nota. Sea $n \in \mathbb{N}$, se verifican

1. Todos los operadores diferenciales de la n-álgebra de Kronecker son a lo sumo de orden uno, es decir,
$$m \geq 1 \implies \mathrm{D}^m(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)).$$
2. Vale mencionar, que para el caso $n = 1$, todos los operadores diferenciales son interiores, esto es, $\mathrm{D}^m(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)), \quad \forall m \geq 0$.
3. La función dimensión aplicada sobre los operadores diferenciales describe un par de fórmulas polinómicas, de la siguiente manera,
$$\dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = 2n+3, \quad \dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = n^2+2n+2.$$

3.2.2. Operadores interiores

Iniciaremos esta subsección identificando la n-álgebra de Kronecker con su matriz triangular formal, ver `Prop.`3.1.2.

Proposición 3.2.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tienen el isomorfismo de álgebras,*
$$\Gamma_{\Bbbk}(\bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1) = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ \Bbbk^n & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Demostración. Como ya se ha mencionado, de la `Prop.`3.1.2 se sigue que, la n-álgebra de Kronecker es de la forma
$$\Gamma(\bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1) = \begin{bmatrix} \epsilon_1\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)\epsilon_1 & 0 \\ \epsilon_2\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)\epsilon_1 & \epsilon_2\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)\epsilon_2 \end{bmatrix}.$$
Ahora, teniendo presente la tabla de multiplicar de esta álgebra obtenemos las siguientes igualdades,
$$\epsilon_1\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)\epsilon_1 = \mathrm{Sum}\{\epsilon_1\} = \epsilon_2\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)\epsilon_2 = \mathrm{Sum}\{\epsilon_2\} = \Bbbk$$
$$\epsilon_2\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)\epsilon_1 = \mathrm{Sum}\{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n\} = \Bbbk^n.$$
Notemos que si $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ denota los vectores de la base canónica para $\Bbbk^n$, entonces la identificación de la n-álgebra de Kronecker con el álgebra de matrices formales, se obtiene con las siguientes transformaciones lineales,
$$\epsilon_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \epsilon_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \alpha_i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$
□

Por otra parte, de la `Prop.`3.2.2 se ve fácilmente el isomorfismo entre espacio vectorial, $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$, y en estos términos obtenemos las siguientes identificaciones:

1. Para cada $t \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$, existe una única terna $(r, b, s) \in \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$ tal que
$$t = (r, b, s) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ b & s \end{pmatrix} \quad y \quad 1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 = (1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Si $t_1, t_2 \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$, entonces la multiplicación se expresa en los siguientes términos,
$$t_1 t_2 = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ b_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & 0 \\ b_2 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 r_2 & 0 \\ b_1 r_2 + s_1 b_2 & s_1 s_2 \end{pmatrix}.$$
Similarmente,
$$t_1 t_2 = (r_1, b_1, s_1)(r_2, b_2, s_2) = (r_1 r_2, b_1 r_2 + s_1 b_2, s_1 s_2).$$

3. El álgebra de endomorfismo de $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$ también se puede identificar con un álgebra de matrices formales, teniendo presente la descomposición del `item(1)`; de esta forma, los operadores lineales los veremos como matrices cuadradas con la siguiente forma
$$\operatorname{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \begin{bmatrix} \operatorname{End}(\Bbbk) & \operatorname{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \operatorname{End}(\Bbbk) \\ \operatorname{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) & \operatorname{End}(\Bbbk^n) & \operatorname{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ \operatorname{End}(\Bbbk) & \operatorname{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \operatorname{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$
Donde la composición de operadores lineales se identifica naturalmente con la multiplicación de matrices.

Ahora brindaremos una descripción matricial para los operadores interiores de la n-álgebra de Kronecker.

Proposición 3.2.3. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces la representación multiplicar a izquierda, $\lambda : \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) \to \operatorname{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$, le asigna a cada elemento*
$$t = (r, b, s) \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$$
el operador matricial
$$\lambda_{(r,b,s)} = \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ \lambda_b & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \operatorname{End}(\Bbbk) & \operatorname{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \operatorname{End}(\Bbbk) \\ \operatorname{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) & \operatorname{End}(\Bbbk^n) & \operatorname{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ \operatorname{End}(\Bbbk) & \operatorname{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \operatorname{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Si $t = (r, b, s) \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$, asumiendo algunas identificaciones evidentes, se tiene que
$$\begin{aligned} \lambda_{(r,b,s)}((x, v, y)) &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ b & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ v & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx & 0 \\ bx + sv & sy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ \lambda_b & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
siempre que, $(x, v, y) \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$. Por otra parte, se verifica fácilmente que $\lambda_{t_1}\lambda_{t_2} = \lambda_{t_1 t_2}$, para cada $t_i \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$. □

Con el resultado anterior, podemos identificar el álgebra $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$ con la subalgebra $\operatorname{Im}(\lambda)$ del anillo de endomorfismo $\operatorname{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$.

Corolario 3.2.4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que,*
$$\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \operatorname{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ \lambda_b & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \in \operatorname{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \mid (r, b, s) \in \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk \right\}.$$

Demostración. Basta ver que el homomorfismo $\lambda : \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) \to \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ es inyectivo. Esto se obtiene fácilmente, dado que, sea $(r,b,s) \in \mathrm{Ker}(\lambda)$, esto es, $\lambda_{(r,b,s)}$ es el operador idénticamente nulo. Luego

$$\lambda_{(r,b,s)}((1,0,1)) = (r,b,s)(1,0,1) = (r1, b1+s0, s1) = (r,b,s) = (0,0,0).$$

Se obtienen de esta forma que $\mathrm{Ker}(\lambda) = \{(0,0,0) \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk\}$. □

Proposición 3.2.5. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces la representación multiplicar a derecha, $\rho : \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)^{op} \to \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$, toma a cualquier elemento del álgebra opuesta, $t^{op} = (r,b,s) \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)^{op} = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$ y le asigna el operador matricial*

$$\rho_{(r,b,s)} = \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_r & \lambda_b \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \\ \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ \mathrm{End}(\Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Si $t = (r,b,s) \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$ entonces,

$$\begin{aligned} \rho_{(r,b,s)}((x,v,y)) &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ v & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ b & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xr & 0 \\ vr + yb & ys \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx & 0 \\ rv + by & sy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_r & \lambda_b \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

siempre que $(x,v,y) \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$. Por otra parte, se verifica fácilmente que $\rho_{t_1^o}\rho_{t_2^o} = \rho_{t_1}\rho_{t_2} = \rho_{t_2 t_1} = \rho_{(t_1 t_2)^o}$, para cada $t_i \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$. □

Con el resultado anterior, podemos describir el espacio de operadores centrales $Z^0(\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ con la subálgebra $\mathrm{Im}(\rho)$ del anillo de endomorfismo $\mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$.

Corolario 3.2.6. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que*

$$Z^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_r & \lambda_b \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \mid (r,b,s) \in \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk \right\}.$$

Demostración. Del `Corol.`1.2.4, sabemos que

$$Z^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{Sum}\{\rho_t \mid t^o \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)^{op}\}$$

y junto al resultado anterior, `Prop.`3.2.5 se verifica la igualdad que buscamos. Por otra parte, el homomorfismo $\rho : \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)^{op} \to \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ es inyectivo. Esto se obtiene fácilmente, dado que, si $(r,b,s) \in \mathrm{Ker}(\rho)$ entonces $\rho_{(r,b,s)}$ es el operador idénticamente nulo. Luego

$$\rho_{(r,b,s)}((1,0,1)) = (1,0,1)(r,b,s) = (r,b,s) = (0,0,0)$$

Se obtienen de esta forma que $\mathrm{Ker}(\rho) = \{(0,0,0) \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk\}$. □

Ya contamos con todos los ingredientes para brindar un conjunto de generadores que nos permiten describir el anillo de operadores diferenciales interiores de la n-álgebra de Kronecker como un subespacio de operadores matriciales formales.

Teorema 3.2.7. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica la igualdad*

$$\mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{r_1} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1} & \lambda_{r_2} & \lambda_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{r_3} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \mid r_i \in \Bbbk, b_j \in \Bbbk^n \right\}.$$

Demostración. Del Corol.1.2.4, obtenemos la igualdad

$$\mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{Gen}\{\lambda_{t_1}\rho_{t_2} \mid t_i \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)\}.$$

Luego, si $t_1 = (r_1, b_1, s_1)$ y $t_2 = (r_2, b_2, s_2)$ elementos en $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$, entonces gracias a la Prop.3.2.3 junto con la Prop.3.2.5, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda_{t_1}\rho_{t_2} &= \begin{pmatrix} \lambda_{r_1} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1} & \lambda_{s_1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{s_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{r_2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{r_2} & \lambda_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{r_1}\lambda_{r_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\lambda_{r_2} & \lambda_{s_1}\lambda_{r_2} & \lambda_{s_1}\lambda_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_1}\lambda_{s_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_{r_1 r_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1 r_2} & \lambda_{s_1 r_2} & \lambda_{s_1 b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_1 s_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos la primera inclusión

$$\mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \subseteq \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{r_1} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1} & \lambda_{r_2} & \lambda_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{r_3} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \mid r_i \in \Bbbk, b_j \in \Bbbk^n \right\}.$$

Por otra parte, para ver la doble inclusión, si $r_i \in \Bbbk$ y $v_j \in \Bbbk^n$, entonces

$$\begin{pmatrix} \lambda_{r_1} & 0 & 0 \\ \lambda_{v_1} & \lambda_{r_2} & \lambda_{v_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{r_3} \end{pmatrix} = \lambda_{(r_1,v_1,r_2)}\rho_{(1,0,0)} + \lambda_{(0,0,1)}\rho_{(0,v_2,r_3)}$$

esto implica que todo operador matricial $\begin{pmatrix} \lambda_{r_1} & 0 & 0 \\ \lambda_{v_1} & \lambda_{r_2} & \lambda_{v_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{r_3} \end{pmatrix}$ es un operador diferencial interior. □

Corolario 3.2.8. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple la igualdad*

$$\mathrm{D}^0(\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) & \mathrm{Sum}\{\mathrm{Id}_{\Bbbk^n}\} & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ 0 & 0 & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Si tenemos presente la descripción de los operadores diferenciales interiores propuesta en el Teor.3.2.7. Basta con ver las siguientes identificaciones:

$$\begin{aligned} &\mathrm{End}(\Bbbk) = \Bbbk = \mathrm{Sum}\{r_1 \mid r_1 \in \Bbbk\} = \mathrm{Sum}\{r_3 \mid r_3 \in \Bbbk\} \\ &\mathrm{Sum}\{\mathrm{Id}_{\Bbbk^n}\} = \Bbbk = \mathrm{Sum}\{r_2 \mid r_2 \in \Bbbk\} \\ &\mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) = \mathrm{Sum}\{\lambda_b \mid b \in \Bbbk^n\} \end{aligned}$$

□

3.2.3. Operadores diferenciales

En esta subsección demostraremos que el anillo de todos los operadores diferenciales de la n-álgebra de Kronecker son a lo sumo de orden uno.

Teorema 3.2.9. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, verifica la igualdad*

$$Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ 0 & 0 & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Primero, sabemos que para cada $t \in \Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$ existe $(r, b, s) \in \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$ tales que $t = (r, b, s)$ y el operador λ_t es de la forma

$$\lambda_{(r,b,s)} = \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ \lambda_b & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, cada operador $\nabla \in \mathrm{End}(\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ admite una expresión matricial de la forma

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & \nabla_{12} & \nabla_{13} \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ \nabla_{31} & \nabla_{32} & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \\ \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ \mathrm{End}(\Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Luego, de la `Def.`1.2.2 sabemos que, $\nabla \in Z^1(\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ si y solo si $[\nabla, \lambda_t] \in D^0(\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$, $\forall t \in \Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$. Ahora la expresión matricial para el corchete $[\nabla, \lambda_{(r,b,s)}]$ se obtiene de la multiplicación de operadores matriciales, de la siguiente manera

$$\nabla\lambda_{(r,b,s)} = \begin{pmatrix} \nabla_{11}\lambda_r + \nabla_{12}\lambda_b & \nabla_{12}\lambda_s & \nabla_{13}\lambda_s \\ \nabla_{21}\lambda_r + \nabla_{22}\lambda_b & \nabla_{22}\lambda_s & \nabla_{23}\lambda_s \\ \nabla_{31}\lambda_r + \nabla_{32}\lambda_b & \nabla_{32}\lambda_s & \nabla_{33}\lambda_s \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{(r,b,s)}\nabla = \begin{pmatrix} \lambda_r\nabla_{11} & \lambda_r\nabla_{12} & \lambda_r\nabla_{13} \\ \lambda_b\nabla_{11} + \lambda_s\nabla_{21} & \lambda_b\nabla_{12} + \lambda_s\nabla_{22} & \lambda_b\nabla_{13} + \lambda_s\nabla_{23} \\ \lambda_s\nabla_{31} & \lambda_s\nabla_{32} & \lambda_s\nabla_{33} \end{pmatrix}$$

$$[\nabla, \lambda_{(r,b,s)}] = \begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_r] + \nabla_{12}\lambda_b & \nabla_{12}\lambda_s - \lambda_r\nabla_{12} & \nabla_{13}s - \lambda_r\nabla_{13} \\ \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & [\nabla_{22}, \lambda_s] - \lambda_b\nabla_{12} & [\nabla_{23}, \lambda_s] - \lambda_b\nabla_{13} \\ \nabla_{31}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{31} + \nabla_{32}\lambda_b & [\nabla_{32}, \lambda_s] & [\nabla_{33}, \lambda_s] \end{pmatrix}$$

Ahora, como ∇_{ij} es transformación $\Bbbk$-lineal, se obtiene que, $\forall r, s \in \Bbbk$

$$\begin{aligned} &[\nabla_{ij}, \lambda_r] = [\nabla_{ij}, \lambda_s] = 0, \\ &\nabla_{ij}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{ij} = (r - s)\nabla_{ij}, \\ &\nabla_{ij}\lambda_s - \lambda_r\nabla_{ij} = (s - r)\nabla_{ij}. \end{aligned}$$

Con lo cual, obtenemos una expresión más cómoda para el corchete $\forall (r, b, s) \in \Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$,

$$[\nabla, \lambda_{(r,b,s)}] = \begin{pmatrix} \nabla_{12}\lambda_b & (s - r)\nabla_{12} & (s - r)\nabla_{13} \\ (r - s)\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & -\lambda_b\nabla_{12} & -\lambda_b\nabla_{13} \\ (r - s)\nabla_{31} + \nabla_{32}\lambda_b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veamos la primera inclusión, del `Corol.`3.2.8. Sabemos que

$$D^0(\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) & \mathrm{Sum}\{\mathrm{Id}_{\Bbbk^n}\} & \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \\ 0 & 0 & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}$$

luego, si $\nabla \in Z^1(\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ entonces $(s-r)\nabla_{12} = 0$ y $(s-r)\nabla_{13} = 0$. En particular, podemos considerar $(s-r) \neq 0$, y con ello obtenemos que los operadores

$$\nabla_{12} = 0 \quad y \quad \nabla_{23} = 0.$$

Similarmente, se tiene que $(r-s)\nabla_{31} + \nabla_{32}\lambda_b = 0$. En particular, si consideramos $b = 0$, y $(r-s) \neq 0$ entonces $\nabla_{32}\lambda_b = 0$ y a su vez,

$$(r-s)\nabla_{31} + \nabla_{32}\lambda_0 = (r-s)\nabla_{31} = 0 \implies \nabla_{31} = 0$$

de esta forma, obtenemos que $\nabla_{32}\lambda_b = 0$, $\forall b \in \Bbbk^n$. Luego como $\nabla_{32} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk^n,\Bbbk)$ y $\nabla_{32}\lambda_b \in \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk)$ entonces

$$\nabla_{32}(b) = (\nabla_{32}\lambda_b)(1) = 0, \forall b \in \Bbbk^n \implies \nabla_{32} = 0.$$

Por lo tanto, podemos decir que todo operador $\nabla \in Z^1(\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ admite una forma matricial del tipo

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \\ 0 & 0 & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Ahora veamos la doble inclusión, como ya sabemos,

$$\mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n,\Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \\ \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \\ \mathrm{End}(\Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n,\Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Luego, si

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \\ 0 & 0 & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}$$

entonces el corchete $[\nabla, \lambda_{(r,b,s)}]$ es de la forma

$$[\nabla, \lambda_{(r,b,s)}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (r-s)\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para que $[\nabla, \lambda_{(r,b,s)}] \in D^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$, $\forall (r,b,s) \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$, gracias a la expresión matricial de los operadores diferenciales interiores, `Corol.`3.2.8, basta ver que

$$(r-s)\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} &\nabla_{21} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \implies (r-s)\nabla_{21} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \\ &\nabla_{22} \in \mathrm{End}(\Bbbk^n) \quad y \quad \lambda_b \in \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \implies \nabla_{22}\lambda_b \in \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \\ &\nabla_{11} \in \mathrm{End}(\Bbbk) \quad y \quad \lambda_b \in \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \implies \lambda_b\nabla_{11} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \end{aligned}$$

obtenemos entonces que todo operador de la forma

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)).$$

□

Como conclusión de la demostración propinada previamente, obtenemos una descripción más cómoda de $Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$.

Corolario 3.2.10. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que*

1. $Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \left\{\nabla \in \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \mid \nabla_{12} = \nabla_{13} = \nabla_{31} = \nabla_{32} = 0\right\}$.
2. $Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ *es una $\Bbbk$-álgebra.*
3. $Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ *es un $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$-bimódulo, más aún, $Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ es un $D^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$-bimódulo.*

Demostración. Notemos que el `item(1)` es una consecuencia inmediata del `Teor.`3.2.9. Ahora, para ver el `item(2)`, basta con realizar el siguiente producto de operadores matriciales,

$$\begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & 0 & 0 \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ 0 & 0 & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{11}\Delta_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21}\Delta_{11} + \nabla_{22}\Delta_{21} & \nabla_{22}\Delta_{22} & \nabla_{22}\Delta_{23} + \nabla_{23}\Delta_{33} \\ 0 & 0 & \nabla_{33}\Delta_{33} \end{pmatrix}.$$

Por ultimo, el `item(3)` se demuestra usando la `Prop.`1.2.2-`item(2)`, con la cual podemos garantizar la inclusión,

$$D^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \subseteq Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$$

Luego, como $Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ es una álgebra, entonces

$$D^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))\, Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \subseteq Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$$

y similarmente,

$$Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))\, D^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \subseteq Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$$

Obtenemos de esta forma, que $Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ es un $D^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$-bimódulo. Notemos, gracias a la identificación de $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \mathrm{Im}(\lambda)$, `Corol.`3.2.4, podemos ver naturalmente que $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) \subseteq D^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$, `Teor.`3.2.7. De lo que se sigue, $Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ es un $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$-bimódulo. □

Teorema 3.2.11. $D^m(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = Z^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$, *para cada $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Teniendo en cuenta el `Corol.`1.2.4, sabemos de la validez de la inclusión

$$\mathrm{D}^m(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) \subseteq \mathrm{Z}^{m+1}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, sabemos que $\mathrm{Z}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))$ es un $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)$-bimódulo gracias al `Corol.`3.2.10. Luego, por `Prop.`1.2.2,

$$\mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) = \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)\, \mathrm{Z}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) \subseteq \mathrm{Z}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))$$

y teniendo en cuenta que $\mathrm{Z}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))$ siempre esta icluido en $\mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))$, obtenemos la igualdad $\mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) = \mathrm{Z}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))$.

Ahora basta ver $\mathrm{Z}^2(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) \subseteq \mathrm{Z}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))$, para demostrar que todos los operadores diferenciales de la n-álgebra de Kronecker son a los sumo de orden uno. Si $\nabla \in \mathrm{Z}^2(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))$, se sigue de la `Def.`1.2.2, que para cada $(r, b, s) \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)$ el corchete $[\nabla, \lambda_{(r,b,s)}] \in \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))$, pero en este contexto, sabemos que $\mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) = \mathrm{Z}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))$, y por ende, podemos refrescar la formulación de la siguiente manera,

$$[\nabla, \lambda_{(r,b,s)}] \in \mathrm{Z}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)), \quad \forall (r, b, s) \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet).$$

Por otra parte, la expresión matricial para este corchete ya la hemos calculado en demostraciones anteriores, donde

$$[\nabla, \lambda_{(r,b,s)}] = \begin{pmatrix} \nabla_{12}\lambda_b & (s-r)\nabla_{12} & (s-r)\nabla_{13} \\ (r-s)\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & -\lambda_b\nabla_{12} & -\lambda_b\nabla_{13} \\ (r-s)\nabla_{31} + \nabla_{32}\lambda_b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la formulación propuesta en el `Corol.`3.2.10`-item(1)`, obtenemos que $\forall r, s \in \Bbbk$,

$$(s-r)\nabla_{12} = (s-r)\nabla_{13} = 0.$$

Basta entonces con tomar $s \neq r$, para obtener $\nabla_{12} = \nabla_{13} = 0$. Por otro lado, tenemos que $(r-s)\nabla_{31} + \nabla_{32}\lambda_b = 0$. Si consideramos $b = 0$ entonces $\nabla_{32}\lambda_b = 0$, a su vez, si $r - s \neq 0$ entonces

$$(r-s)\nabla_{31} + \nabla_{32}\lambda_0 = (r-s)\nabla_{31} = 0 \implies \nabla_{31} = 0.$$

Ahora, si tenemos en cuenta que $\nabla_{32} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk)$ y $\nabla_{32}\lambda_b \in \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk)$ entonces

$$\nabla_{32}(b) = ((r-s)0 + \nabla_{32}\lambda_b)(1) = 0, \forall b \in \Bbbk^n \implies \nabla_{32} = 0.$$

Finalmente, todo operador $\nabla \in \mathrm{Z}^2(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))$, esta forzado a cumplir que $\nabla_{12} = \nabla_{13} = \nabla_{31} = \nabla_{32} = 0$. Por lo tanto, $\nabla \in \mathrm{Z}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))$. □

Con la lista de resultados de esta sección podemos dar respuesta cabal a las afirmaciones conjeturadas en la `Nota` 3.2.1, de esta forma podemos decir.

Corolario 3.2.12. *Para la n-álgebra de Kronecker, $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)$ se verifican*

1. *Todos los operadores diferenciales de $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)$ son a lo sumo de grado uno, más aún, $\mathrm{D}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) = \mathrm{Z}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet))$.*
2. $\dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) = 2n + 3, \quad \dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \overset{n}{\to} \bullet)) = n^2 + 2n + 2.$
3. *En particular, para $n = 1$, se obtiene la igualdad,*

$$\mathrm{D}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet)) = \mathrm{Z}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet)) = \mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet)).$$

4. *La dimensión del primer grupo de cohomología de Hochschild se puede calcular en función de los operadores diferenciales, donde,*

$$\dim \mathrm{H}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) - \mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)).$$

Demostración. Para ver el `item(1)`, basta ver

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) &= \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{D}^m(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) && \texttt{Def.}1.2.3 \\ &= \mathrm{Z}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) && \texttt{Teor.}3.2.11. \end{aligned}$$

Ahora, para ver el `item(2)`, recordemos primero el `Corol.`3.2.8, en donde se brinda una descripción matricial de los operadores diferenciales interiores, de esta manera,

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) &= 2\dim \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) + 2\dim \mathrm{End}(\Bbbk) + \dim \mathrm{Sum}\{\mathrm{Id}_{\Bbbk}^n\} \\ &= 2n + 2 + 1 \\ &= 2n + 3. \end{aligned}$$

Similarmente, recordemos la descripción matricial para $\mathrm{Z}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$, formulada en el `Teor.`3.2.9, y de esta forma,

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) &= 2\dim \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) + 2\dim \mathrm{End}(\Bbbk) + \dim \mathrm{End}(\Bbbk^n) \\ &= 2n + 2 + n^2 \\ &= n^2 + 2n + 2. \end{aligned}$$

Para ver el `item(3)`, basta particularizar en $n = 1$ y tener presente

$$\mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{1} \bullet)) \subseteq \mathrm{Z}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{1} \bullet)) = \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{1} \bullet)).$$

Luego la igualdad se resuelve calculando las respectivas dimensiones, en este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) &= 2(1) + 3 = 5 \\ \dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) &= (1)^2 + 2(1) + 2 = 5. \end{aligned}$$

Para ver el `item(4)`, basta recordar la `Prop.`3.2.1, donde tenemos el cálculo explícito de la dimensión del primer grupo de cohomologia, de esta forma,

$$\dim \mathrm{H}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = n^2 - 1.$$

Por otra parte,

$$\dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) - \dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = n^2 + 2n + 2 - 2n - 3 = n^2 - 1.$$

□

3.2.4. Derivaciones

Ahora estudiaremos el espacio de las λ-derivaciones de la n-álgebra de Kronecker y con este espacio, recuperaremos el anillo de operadores diferenciales. A su vez, brindaremos una linda formulación para el primer grupo de cohomologia de Hochschild.

Proposición 3.2.13. *El espacio de las λ-derivaciones de la n-álgebra de Kronecker admite la siguiente descripción matricial*

$$\mathrm{Der}_{\lambda}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{Sum}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b & \varphi & -\lambda_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \Bbbk^n, \varphi \in \mathrm{End}(\Bbbk^n) \right\}.$$

Demostración. Primero, recordemos la `Prop.`3.2.1, en la cual, formulamos la dimensión del espacio de las λ-derivaciones, de esta forma

$$\dim \mathrm{Der}_{\lambda}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = n^2 + n.$$

Por otra parte, la dimensión del espacio que proponemos verifica la siguiente igualdad,

$$\dim \mathrm{Sum}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b & \varphi & -\lambda_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \Bbbk^n, \varphi \in \mathrm{End}(\Bbbk^n) \right\} = \dim \mathrm{End}(\Bbbk^n) + \dim \Bbbk^n = n^2 + n.$$

Para ver la igualdad, basta con demostrar que todo operador matricial de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b & \varphi & -\lambda_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una λ-derivación, siempre que $b \in \Bbbk^n$ y $\varphi \in \mathrm{End}(\Bbbk^n)$.

Notemos primero que, para cada $b \in \Bbbk^n$ se cumple la igualdad

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b & 0 & -\lambda_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_b & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_b \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_{(1,b,1)} - \rho_{(1,b,1)} = \mathrm{ad}_{(1,b,1)}.$$

Claramente, $\mathrm{ad}_{(1,b,1)} \in \mathrm{Int}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \subseteq \mathrm{Der}_{\lambda}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$. Ahora, consideremos el operador $\nabla = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego, de la `Prop.`1.1.4, podemos determinar que ∇ es una λ-derivación si demostramos la relación

$$[\nabla, \lambda_t] = \lambda_{\nabla(t)}, \forall t \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$$

Por una parte, para cada $t = (r, v, s) \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$ se cumple que

$$\nabla(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ v \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(v) \\ 0 \end{pmatrix} \implies \lambda_{\nabla(t)} = \lambda_{(0,\varphi(v),0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{\varphi(v)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, para cada $t = (r, v, s) \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$ se tiene que

$$\begin{aligned} [\nabla, \lambda_t] &= \nabla \lambda_{(r,v,s)} - \lambda_{(r,v,s)} \nabla \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ \lambda_v & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ \lambda_v & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varphi\lambda_v & [\varphi, \lambda_s] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notemos que dado que φ es $\Bbbk$-lineal y $s \in \Bbbk$, entonces $[\varphi, \lambda_s] = 0$. Ahora teniendo en cuenta que $\lambda_{\varphi(v)}, \varphi\lambda_v \in \operatorname{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n)$ entonces para cada $\alpha \in \Bbbk$ se cumple la igualdad,

$$\lambda_{\varphi(v)}(\alpha) = \varphi(v)\alpha = \varphi(v\alpha) = (\varphi\lambda_v)(\alpha).$$

Concluimos entonces que

$$[\nabla, \lambda_t] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{\varphi(v)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varphi\lambda_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_{\nabla(t)}, \forall t = (r, v, s) \in \Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet).$$

Por lo tanto, si $b \in \Bbbk^n$ y $\varphi \in \operatorname{End}(\Bbbk^n)$ entonces el operador matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b & \varphi & -\lambda_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \nabla + \operatorname{ad}_{(1,b,1)} \in \operatorname{Der}_\lambda(\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)).$$

□

Corolario 3.2.14. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumplen*

1. $\operatorname{Der}_\lambda(\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ *es una $\Bbbk$-subálgebra asociativa del anillo de endomorfismos.*
2. $\operatorname{Der}_\lambda(\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ *es un $\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$-submódulo izquierdo de* $\operatorname{End}(\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$. *Más aún,* $\operatorname{Der}_\lambda(\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ *es un $\operatorname{D}^0(\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$-submódulo izquierdo de* $\operatorname{End}(\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$.
3. $\operatorname{Der}_\lambda(\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \cap \Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = 0$,
4. *Se cumple la igualdad entre $\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$-módulos izquierdos,*

$$\operatorname{D}^1(\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) \oplus \operatorname{Der}_\lambda(\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)).$$

Demostración. Para ver el `item(1)`, sean $b, v \in \Bbbk$ y $\varphi, \psi \in \operatorname{End}(\Bbbk^n)$, y recordemos de la demostración anterior la igualdad de operadores

$$\varphi\lambda_v = \lambda_{\varphi(v)} \quad \text{en} \quad \operatorname{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n).$$

Ahora basta con multiplicar los operadores matriciales

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b & \varphi & -\lambda_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_v & \psi & -\lambda_v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varphi\lambda_v & \varphi\psi & -\varphi\lambda_v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{\varphi(v)} & \varphi\psi & -\lambda_{\varphi(v)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para ver el `item(2)`, sean $t = (r, b, s) \in \Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$, $v \in \Bbbk$ y $\varphi \in \operatorname{End}(\Bbbk^n)$. Luego, recordemos que estamos trabajando con la identificación

$$\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \operatorname{Gen}\{\lambda_t \mid t \in \Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)\}.$$

Ahora basta que realicemos la multiplicación de operadores matriciales,

$$\begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ \lambda_b & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_v & \varphi & -\lambda_v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s\lambda_v & \lambda_s\varphi & -\lambda_s\lambda_v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{sv} & s\varphi & -\lambda_{sv} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para ver que $\operatorname{Der}_\lambda(\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ es un $\operatorname{D}^0(\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$-submódulo izquierdo, hace falta tomar generadores matriciales para $\operatorname{D}^0(\Gamma_\Bbbk(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$, ver `Teor.`3.2.7, esto implica, considerar $r_i \in \Bbbk$, $b_j, v \in \Bbbk^n$ y $\varphi \in \operatorname{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$. Luego basta con hacer la multiplicación de operadores matriciales

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\lambda_{r_1} & 0 & 0\\ \lambda_{b_1} & \lambda_{r_2} & \lambda_{b_2}\\ 0 & 0 & \lambda_{r_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \lambda_v & \varphi & -\lambda_v\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \lambda_{r_2}\lambda_v & \lambda_{r_2}\varphi & -\lambda_{r_2}\lambda_v\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \lambda_{r_2 v} & r_2\varphi & -\lambda_{r_2 v}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Para ver el `item(3)`, notemos primero qué sucede con las combinaciones lineales entre los generadores de $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$, visto como subálgebra de endomorfismo, de esta forma,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{t_i} = \lambda_{\sum_i t_i}.$$

Similarmente, veamos como se comportan las combinaciones lineales entre los generadores de $\operatorname{Der}_\lambda(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \lambda_{v_i} & \varphi_i & -\lambda_{v_i}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \sum_{i=1}^m \lambda_{v_i} & \sum_{i=1}^m \varphi_i & -\sum_{i=1}^m \lambda_{v_i}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \lambda_{\sum_{i=1}^m v_i} & \sum_{i=1}^m \varphi_i & -\lambda_{\sum_{i=1}^m v_i}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Se deduce entonces que basta suponer la existencia de $t = (r, b, s) \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$, $v \in \Bbbk^n$ y $\varphi \in \operatorname{End}(\Bbbk^n)$, tales que,

$$\lambda_t = \begin{pmatrix}\lambda_r & 0 & 0\\ \lambda_b & \lambda_s & 0\\ 0 & 0 & \lambda_s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \lambda_v & \varphi & -\lambda_v\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \implies \begin{cases} r = s = 0\\ \lambda_b = \lambda_v = 0\end{cases}.$$

Pero como el homomorfimos $\lambda : \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) \to \operatorname{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ es inyectivo, entonces $v = b = 0$. Por lo tanto, el único operador λ_t que a su vez es una λ-derivación es el operador nulo.

Finalmente, para ver el `item(4)`, dado que $\operatorname{Der}_\lambda(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \cap \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = 0$, y recordando que $\operatorname{Der}_\lambda(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$ y $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$ están en $\mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$, ver `Corol.`1.2.7, entonces basta demostrar que la dimensión del espacio suma es igual a la dimensión del espacios de operadores diferenciales de orden uno. De esta forma obtenemos gracias al `Corol.`3.2.12,

$$\dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = n^2 + 2n + 2$$

y por otra parte,

$$\begin{aligned}&\dim \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = n + 2 && \texttt{Prop.}3.2.1\\ &\dim \operatorname{Der}_\lambda(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = n^2 + n && \texttt{Prop.}3.2.1\\ &\dim \Big(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) \cap \operatorname{Der}_\lambda(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))\Big) = 0 && \texttt{item(3)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) \oplus \operatorname{Der}_\lambda(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$. □

Teorema 3.2.15. $\mathrm{H}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) / \mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$.

Demostración. Gracias a la `Prop.`3.1.3, sabemos que el primer grupo de cohomología Hochschild sobre un álgebra se obtiene de la siguiente forma

$$\mathrm{H}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))/\mathrm{Int}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)).$$

Por otra parte, tenemos una buena descripción matricial de las λ-derivaciones y de las derivaciones interiores, donde

$$\mathrm{Der}_\lambda(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{Sum}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b & \varphi & -\lambda_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \Bbbk^n, \varphi \in \mathrm{End}(\Bbbk^n)\right\} \qquad \texttt{Prop.}3.2.13$$

$$\mathrm{Int}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{Sum}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b & \lambda_r & -\lambda_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \Bbbk^n, r \in \Bbbk\right\} \qquad \texttt{Prop.}3.2.3 \text{ y } 3.2.5.$$

Luego, como el cociente es sobre la estructura de espacios vectorial y los espacios de matrices son sumas directas, entonces el cociente de matrices se obtiene cocientando las estructuras correspondientes a cada componente, de esta forma,

$$\mathrm{H}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{End}(\Bbbk^n)/\mathrm{Sum}\{\mathrm{Id}_{\Bbbk^n}\} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, la descripción que tenemos de los operadores diferenciales es la siguiente,

$$\mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \\ 0 & 0 & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix} \qquad \texttt{Teor.}3.2.9$$

$$\mathrm{D}^0(\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) & \mathrm{Sum}\{\mathrm{Id}_{\Bbbk^n}\} & \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \\ 0 & 0 & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix} \qquad \texttt{Corol.}3.2.8.$$

Similarmente, como el cociente es sobre la estructura de espacios vectorial y los espacios de matrices son sumas directas, entonces el cociente de matrices se obtiene cocientando las estructuras correspondientes a cada componente, de esta forma,

$$\mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))/\,\mathrm{D}^0(\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{End}(\Bbbk^n)/\mathrm{Sum}\{\mathrm{Id}_{\Bbbk^n}\} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\mathrm{H}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))/\,\mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$. □

SECCIÓN 3.3

La extensión, $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)$

En esta sección tenemos como objetivo calcular el anillo de operadores diferenciales del álgebra de caminos, $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)$. Esta álgebra es una extensión natural de la n-álgebra de Kronecker $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet)$, de la cual, ya conocemos su anillo de operadores diferénciales, $\mathrm{D}(\Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$.

Vale mencionar, que el cálculo efectivo del anillo de operadores diferenciales de esta extensión, lo hemos logrado, gracias a la siguiente identificación,

$$\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \begin{bmatrix} \Gamma(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) & 0 \\ \Bbbk^{n+1} & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Y del conocimiento previo de los operadores diferenciales de la n-álgebra de Kronecker, obtenemos una descripción del anillo $\mathrm{D}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet))$.

Por otra parte, este es un ejemplo de $\Bbbk$-álgebra tal que,

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \neq \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet) \oplus \mathrm{Der}_{\lambda}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \\ &\mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \neq \mathrm{D}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)) \neq \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)). \end{aligned}$$

3.3.1. Cálculos iniciales

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el carcaj $Q = (\bullet_3 \to \bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)$, constituido por el conjunto de puntos, $Q_0 = \{\epsilon_1 = (1 \mid\mid 1), \epsilon_2 = (2 \mid\mid 2), \epsilon_3 = (3 \mid\mid 3)\}$ un conjunto de flechas de longitud uno $Q_1 = \{(2 \mid \alpha_i \mid 1) : 1 \leq i \leq n\} \cup \{(3 \mid \beta \mid 2)\}$, y el conjunto de flechas de longitud dos $Q_2 = \{(3 \mid \beta\alpha_i \mid 1) : 1 \leq i \leq n\}$. Luego, como el carcaj $Q = (\bullet_3 \to \bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)$ es finito, acíclico y conexo, entonces su álgebra de caminos $\Gamma(\bullet_3 \to \bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)$ es de dimensión finita, ver `Prop.`3.1.1. Su respectiva tabla de multiplicación esta dada por las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} &\epsilon_i\epsilon_j = (i \mid\mid i)(j \mid\mid j) = \delta_{ij}\epsilon_j, \quad \forall i,j = 1,2,3, \\ &\epsilon_i\beta = (i \mid\mid i)(3 \mid \beta \mid 2) = \delta_{i3}\beta, \quad \forall i = 1,2,3 \\ &\beta\epsilon_i = (3 \mid \beta \mid 2)(i \mid\mid i) = \delta_{i2}\beta, \quad \forall i = 1,2,3 \\ &\epsilon_i\alpha_j = (i \mid\mid i)(2 \mid \alpha_j \mid 1) = \delta_{i2}\alpha_j, \quad \forall i = 1,2,3, \forall j = 1,\ldots,n \\ &\alpha_j\epsilon_i = (2 \mid \alpha_j \mid 1)(i \mid\mid i) = \delta_{i1}\alpha_j, \quad \forall i = 1,2,3, \forall j = 1,\ldots,n \\ &\alpha_i\alpha_j = (2 \mid \alpha_i \mid 1)(2 \mid \alpha_j \mid 1) = 0, \quad \forall i,j = 1,\ldots,n \\ &\beta\alpha_j = (3 \mid \beta \mid 2)(2 \mid \alpha_j \mid 1) = \beta\alpha_j, \quad \forall j = 1,\ldots,n \\ &\alpha_j\beta = (2 \mid \alpha_j \mid 1)(3 \mid \beta \mid 2) = 0, \quad \forall j = 1,\ldots,n \\ &\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = (1||1) + (2||2) + (3||3) = 1. \end{aligned}$$

Proposición 3.3.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifican las siguientes igualdades,*

1. $\dim \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet) = 2n + 4.$
2. $\dim \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = (2n + 4)^2.$
3. $\dim \mathrm{Int}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = 2n + 3.$
4. $\dim \mathrm{H}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = n^2 - 1.$
5. $\dim \mathrm{Der}_{\lambda}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = n^2 + 2n + 2.$

Demostración. Razonaremos de forma análoga al caso de la n-álgebra de Kronecker. Para ver el `item(1)`, basta recordar la `Def.`3.1.3, en la cual, se define al conjunto $\bigcup_{l \geq 0} Q_l$, como base de generadores del álgebra de caminos del carcaj. En este caso particular, tenemos que, la base para $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)$, esta dada por, $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \beta, \alpha_i, \beta\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Esto implica, $\dim \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet) = 2n+4$. El `item(2)` se obtiene con el cuadrado de la dimensión del espacio base, es decir, $\dim \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet)) = (2n+4)^2$. Para ver el `item(3)` usamos la `Prop.`1.1.9, con la cual se valida la igualdad,

$$\dim \mathrm{Int}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet)) = \dim \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet) - \dim \mathrm{C}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet)).$$

Ahora el centro del álgebra de caminos es justamente el generado por la identidad, es decir, $\dim \mathrm{C}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet)) = 1$. De esta forma obtenemos lo que buscábamos, esto es $\dim \mathrm{Int}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet)) = 2n+3$. Para ver el `item(4)`, recordemos que la dimensión del $\mathrm{H}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet))$ la podemos calcular de la siguiente forma,

$$\begin{array}{ll}
Q_*//Q_1 = \{(\gamma,\alpha) \in Q_* \times Q_1 : s(\gamma) = s(\alpha), t(\gamma) = t(\alpha)\} & \texttt{Def.}3.1.7 \\
Q = (\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet) \implies Q_*//Q_1 = \{(\alpha_i,\alpha_j); (\beta,\beta)\} & \\
\dim_{\Bbbk} \mathrm{H}^1(\Gamma(Q)) = 1 - \mid Q_0 \mid + \mid Q_*//Q_1 \mid & \texttt{Prop.}3.1.4 \\
\dim_{\Bbbk} \mathrm{H}^1(\Gamma(Q)) = 1 - 3 + n^2 + 1 = n^2 - 1 & .
\end{array}$$

Finalmente, el `item(3)` se obtiene así

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{H}^1(Q) = \mathrm{Der}_\lambda(Q)/\mathrm{Int}(Q) & \texttt{Prop.}3.1.3 \\
\dim \mathrm{H}^1(Q) = \dim \mathrm{Der}_\lambda(Q) - \dim \mathrm{Int}(\mathbb{Q}) & \\
\dim \mathrm{Der}_\lambda(Q) = (n^2-1) + (2n+3) = n^2 + 2n + 2 & \texttt{item}(3) \text{ y } (4).
\end{array}$$

□

De la misma forma que en el caso de la n-álgebra de Kronecker, nuestra primera aproximación al estudio de los operadores diferenciales de estas álgebras fue calculando explícitamente bases para cada uno de los espacios de nuestro interés

$$\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet), \quad \mathrm{End}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet))$$

$$\mathrm{Int}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet)), \quad \mathrm{Der}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet))$$

$$\mathrm{D}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet)), \quad \mathrm{H}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet)).$$

De esta forma exponemos el comportamiento de las dimensiones de dichos espacios, hacemos notar que, para las primeras cuatro álgebras, el anillo de operadores diferenciales se trunca en $\mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet))$.

Carcaj	$\Gamma_{\Bbbk}$	$\mathrm{Int}(\Gamma_{\Bbbk})$	$\mathrm{Der}_\lambda(\Gamma_{\Bbbk})$	$\mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk})$	$\mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk})$	$\mathrm{End}_{\Bbbk}(\Gamma_{\Bbbk})$	H^1
$\bullet \to \bullet \stackrel{1}{\to} \bullet$	6	5	5	15	15	6^2	0
$\bullet \to \bullet \stackrel{2}{\to} \bullet$	8	7	10	21	30	8^2	3
$\bullet \to \bullet \stackrel{3}{\to} \bullet$	10	9	17	27	51	10^2	8
$\bullet \to \bullet \stackrel{4}{\to} \bullet$	12	11	26	33	78	12^2	15
$\bullet \to \bullet \stackrel{n}{\to} \bullet$	$2n+4$	$2n+3$	$(n+1)^2+1$	??	??	$(2n+4)^2$	n^2-1

Con esta tabla de cálculos parciales, realizamos las las siguientes afirmaciones:

Nota. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifican:

1. Si $m \geq 1$, entonces $\mathrm{D}^m(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet))$.
2. $\dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = 6n + 9$,
   $\dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = 3n^2 + 6n + 6$.
3. $\dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = 3 \dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$,
   $\dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet)) = 3 \dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$.

3.3.2. Operadores interiores

Primero vamos a usar la `Prop.`3.1.2, con la cual obtendremos una expresión matricial para el álgebra de caminos que estamos estudiando.

Proposición 3.3.2. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\Gamma(\bullet_3 \to \bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1) = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 \\ \Bbbk^n & \Bbbk & 0 \\ \Bbbk^n & \Bbbk & \Bbbk \end{bmatrix}$$

Demostración. De la `Prop.`3.1.2 obtenemos

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1\Gamma(\bullet_3 \to \bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)\epsilon_1 & 0 & 0 \\ \epsilon_2\Gamma(\bullet_3 \to \bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)\epsilon_1 & \epsilon_2\Gamma(\bullet_3 \to \bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)\epsilon_2 & 0 \\ \epsilon_3\Gamma(\bullet_3 \to \bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)\epsilon_1 & \epsilon_3\Gamma(\bullet_3 \to \bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)\epsilon_2 & \epsilon_3\Gamma(\bullet_3 \to \bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)\epsilon_3 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \epsilon_i\Gamma(\bullet_3 \to \bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)\epsilon_i &= \mathrm{Sum}\{\epsilon_i\} = \Bbbk\,, i = 1,2,3 \\ \epsilon_2\Gamma(\bullet_3 \to \bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)\epsilon_1 &= \mathrm{Sum}\{\alpha_j\} = \Bbbk^n\,, j = 1,\ldots,n \\ \epsilon_3\Gamma(\bullet_3 \to \bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)\epsilon_1 &= \mathrm{Sum}\{\beta\alpha_j\} = \Bbbk^n\,, j = 1,\ldots,n \\ \epsilon_3\Gamma(\bullet_3 \to \bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1)\epsilon_2 &= \mathrm{Sum}\{\beta\} = \Bbbk. \end{aligned}$$

Sea $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ base canónica de $\Bbbk^n$, entonces la identificación de la extensión de la n-álgebra de Kronecker con el álgebra de matrices formales, se obtiene con las siguientes transformacines lineales

$$\epsilon_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \epsilon_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \epsilon_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \beta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \beta\alpha_i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_i & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \forall i = 1,\ldots,n.$$

□

Corolario 3.3.3. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \begin{bmatrix} \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) & 0 \\ \Bbbk^{n+1} & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Demostración. Basta con descomponer la matriz de la Prop.3.3.2 en bloques y recordar la identificación $\Gamma_{\Bbbk}(\bullet_2 \xrightarrow{n} \bullet_1) = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ \Bbbk^n & \Bbbk \end{bmatrix}$, ver prop.3.2.2. De esta forma obtenemos

$$\begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 \\ \Bbbk^n & \Bbbk & 0 \\ \Bbbk^n & \Bbbk & \Bbbk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ \Bbbk^n & \Bbbk \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Bbbk^n & \Bbbk \end{bmatrix} & \Bbbk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) & 0 \\ \Bbbk^{n+1} & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Queda por demostrar que el espacio $\Bbbk^{n+1}$ tiene una estructura natural de $(\Bbbk, \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet))$-bimódulo.

Si $b \in \Bbbk^{n+1}$ y $s \in \Bbbk$, entonces

$$b = (\vec{b}_1, b_2) \in \Bbbk^n \oplus \Bbbk \implies sb = s(\vec{b}_1, b_2) = (s\vec{b}_1, sb_2).$$

Si $m = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ \vec{m}_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet) = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$, entonces

$$bm = (\vec{b}_1, b_2) \begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ \vec{m}_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = (\vec{b}_1 m_{11} + b_2 \vec{m}_{21}, b_2 m_{22}).$$

□

Ahora, por comodidad consideremos la siguiente notación

$$\Gamma_{(1,n)} = \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet) \quad y \quad \Gamma_n = \Gamma_{\Bbbk}(\bullet \xrightarrow{n} \bullet).$$

Por otra parte, del Corol.3.3.3 se ve fácilmente el isomorfismo entre espacios vectoriales,

$$\Gamma_{(1,n)} = \Gamma_n \oplus \Bbbk^{n+1} \oplus \Bbbk$$

y en estos términos obtenemos las siguientes identificaciones. Para cada $t \in \Gamma_{(1,n)}$, existe una única terna $(m, b, s) \in \Gamma_n \oplus \Bbbk^{n+1} \oplus \Bbbk$ tal que

$$t = (m, b, s) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ b & s \end{pmatrix} \quad y \quad 1 = (1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, si $t_1, t_2 \in \Gamma_{(1,n)}$, entonces la multiplicación esta dada por,

$$t_1 t_2 = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ b_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 & 0 \\ b_2 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 m_2 & 0 \\ b_1 m_2 + s_1 b_2 & s_1 s_2 \end{pmatrix}$$

y esta a su vez, se puede expresar de la siguiente forma,

$$t_1 t_2 = (m_1, b_1, s_1)(m_2, b_2, s_2) = (m_1 m_2, b_1 m_2 + s_1 b_2, s_1 s_2).$$

El álgebra de endomorfismo $\mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)})$ se puede identificar con un álgebra de matrices formales, teniendo presente la descomposición $\Gamma_{(1,n)} = \Gamma_n \oplus \Bbbk^{n+1} \oplus \Bbbk$. De esta forma, los operadores lineales los veremos como matrices formales del tipo

$$\mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)}) = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Gamma_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^{n+1}, \Gamma_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Gamma_n) \\ \mathrm{Hom}(\Gamma_n, \Bbbk^{n+1}) & \mathrm{End}(\Bbbk^{n+1}) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^{n+1}) \\ \mathrm{Hom}(\Gamma_n, \Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^{n+1}, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Donde, la composición de operadores lineales se identifica naturalmente con la multiplicación de matrices.

Ahora, brindaremos una descripción matricial para los operadores interiores para la extensión de la n-álgebra de Kronecker.

Proposición 3.3.4. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces el homomorfismo multiplicación a izquierda $\lambda : \Gamma_{(1,n)} \to \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)})$, asigna a cualquier elemento $t = (m,b,s) \in \Gamma_{(1,n)} = \Gamma_n \oplus \Bbbk^{n+1} \oplus \Bbbk$, el operador matricial*

$$\lambda_{(m,b,s)} = \begin{pmatrix} \lambda_m & 0 & 0 \\ \lambda_b & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Gamma_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^{n+1}, \Gamma_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Gamma_n) \\ \mathrm{Hom}(\Gamma_n, \Bbbk^{n+1}) & \mathrm{End}(\Bbbk^{n+1}) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^{n+1}) \\ \mathrm{Hom}(\Gamma_n, \Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^{n+1}, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Si $t = (m,b,s) \in \Gamma_{(1,n)}) = \Gamma_n \oplus \Bbbk^{n+1} \oplus \Bbbk$ entonces,

$\forall (x,y,z) \in \Gamma_{(1,n)} = \Gamma_n \oplus \Bbbk^{n+1} \oplus \Bbbk$, se cumple

$$\lambda_{(m,b,s)}((x,y,z)) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ b & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx & 0 \\ bx + sy & sz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_m & 0 & 0 \\ \lambda_b & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Finalmente, recordando las primeras observaciones de la sección `Operadores y Derivaciones` en el primer capítulo, obtenemos, $\lambda_{t_1}\lambda_{t_2} = \lambda_{t_1 t_2}$, con $t_i \in \Gamma_{(1,n)}$. □

Corolario 3.3.5. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\Gamma_{(1,n)} = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_m & 0 & 0 \\ \lambda_b & \lambda_r & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)}) \mid (m,b,r) \in \Gamma_n \oplus \Bbbk^{n+1} \oplus \Bbbk \right\}.$$

Demostración. Veamos que $\lambda : \Gamma_{(1,n)} \to \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)})$ es inyectivo. Sea $(m,b,r) \in \Gamma_{(1,n)}$ tal que,

$$\lambda_{(m,b,r)}(x,y,z) = (0,0,0), \forall (x,y,z) \in \Gamma_{(1,n)}$$

En particular, si $(x,y,z) = (1,0,1)$, entonces

$$\lambda_{(m,b,r)}((1,0,1)) = (m,b,r)(1,0,1) = (m1, b1 + r0, r1) = (m,b,r) = (0,0,0)$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Ker}(\lambda) = \{(0,0,0) \in \Gamma_{(1,n)}\}.$$

□

Proposición 3.3.6. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces el homomorfismo multiplicación a derecha $\rho : \Gamma^{op}_{(1,n)} \to \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)})$, asigna a cada $t = (m,v,r) \in \Gamma^{op}_{(1,n)} = \Gamma_n \oplus \Bbbk^{n+1} \oplus \Bbbk$, el operador matricial*

$$\rho_{(m,v,r)} = \begin{pmatrix} \rho_m & 0 & 0 \\ 0 & \rho_m & \lambda_v \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Gamma_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^{n+1}, \Gamma_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Gamma_n) \\ \mathrm{Hom}(\Gamma_n, \Bbbk^{n+1}) & \mathrm{End}(\Bbbk^{n+1}) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^{n+1}) \\ \mathrm{Hom}(\Gamma_n, \Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^{n+1}, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Sea $t = (m,v,r) \in \Gamma_{(1,n)} = \Gamma_n \oplus \Bbbk^{n+1} \oplus \Bbbk$, luego,

$\forall (x,y,z) \in \Gamma_{(1,n)}$, se cumple

$$\rho_{(m,v,r)}((x,y,z)) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ v & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xm & 0 \\ ym + zv & zr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_m & 0 & 0 \\ 0 & \rho_m & \lambda_v \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que para cada $t_i \in \Gamma_{(1,n)}$, se cumple, $\rho_{t_1^o t_2^o} = \rho_{(t_2 t_1)^o} = \rho_{t_1^o}\rho_{t_2^o}$. □

Ya contamos con todos los ingredientes para brindar generadores matriciales para el álgebra $Z^0(\Gamma_{(1,n)})$.

Corolario 3.3.7. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$Z^0(\Gamma_{(1,n)}) = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} \rho_m & 0 & 0 \\ 0 & \rho_m & \lambda_v \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \in \text{End}(\Gamma_{(1,n)}) \mid (m,v,r) \in \Gamma_n \oplus \mathbb{k}^{n+1} \oplus \mathbb{k} \right\}.$$

Demostración. Basta recordar el `Corol.`1.2.4, con el cual obtenemos que $Z^0(\Gamma_{(1,n)}) = \text{Gen}\{\rho_t \mid t \in \Gamma^{op}_{(1,n)}\}$. Veamos que el homomorfismo $\rho : \Gamma^{op}_{(1,n)} \to \text{End}(\Gamma_{(1,n)})$ es inyectivo. Sea $(m,v,r) \in \Gamma_{(1,n)}$ tal que,

$$\lambda_{(m,v,r)}(x,y,z) = (0,0,0)\,, \forall (x,y,z) \in \Gamma_{(1,n)}.$$

En particular, si $(x,y,z) = (1,0,1)$, entonces

$$\rho_{(m,v,s)}((1,0,1)) = (1,0,1)(m,v,s) = (m,v,s) = (0,0,0).$$

Por lo tanto, $\text{Ker}(\rho) = \{(0,0,0) \in \Gamma_{(1,n)}\}$. □

Continuamos entonces con la descripción matricial del anillo de operadores diferenciales interiores.

Teorema 3.3.8. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica la igualdad*

$$D^0(\Gamma_{(1,n)}) = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{m_1}\rho_{m_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\rho_{m_3} & \rho_{m_4} & \lambda_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \in \text{End}(\Gamma_{(1,n)}) \mid m_i \in \Gamma_n, b_j \in \mathbb{k}^{n+1}, r \in \mathbb{k} \right\}.$$

Demostración. Para ver la primera inclusión, basta recordar el `Corol.`1.2.4, donde,

$$D^0(\Gamma_{(1,n)}) = \text{Gen}\{\lambda_{t_1}\rho_{t_2} \mid t_i \in \Gamma_{(1,n)}\}$$

Ahora, recordemos la `Prop.`3.3.4 y la `Prop.`3.3.6. Luego, si $t_i = (m_i, v_i, r_i) \in \Gamma_{(1,n)}$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda_{t_1}\rho_{t_2} &= \begin{pmatrix} \lambda_{m_1} & 0 & 0 \\ \lambda_{v_1} & \lambda_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{r_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{m_2} & \lambda_{v_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{r_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_{m_1}\rho_{m_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{v_1}\rho_{m_2} & \lambda_{r_1}\rho_{m_2} & \lambda_{r_1}\lambda_{v_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{r_1}\lambda_{r_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{m_1}\rho_{m_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{v_1}\rho_{m_2} & \rho_{r_1 m_2} & \lambda_{r_1 v_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{r_1 r_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obtenemos de esta forma que,

$$D^0(\Gamma_{(1,n)}) \subseteq \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{m_1}\rho_{m_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\rho_{m_3} & \rho_{m_4} & \lambda_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \in \text{End}(\Gamma_{(1,n)}) \mid m_i \in \Gamma_n, b_j \in \mathbb{k}^{n+1}, r \in \mathbb{k} \right\}.$$

Para ver la doble inclusión, si $m_i \in \Gamma_n$, $b_j \in \Bbbk^{n+1}$ y $s \in \Bbbk$, entonces

$$\begin{pmatrix} \lambda_{m_1}\rho_{m_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\rho_{m_3} & \rho_{m_4} & \lambda_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} = \lambda_{(m_1,0,0)}\rho_{(m_2,0,0)} + \lambda_{(0,b_1,0)}\rho_{(m_3,0,0)}$$
$$+ \lambda_{(0,0,1)}\rho_{(m_4,0,0)} + \lambda_{(0,0,1)}\rho_{(0,b_2,0)} + \lambda_{(0,0,s)}\rho_{(0,0,1)}$$
$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_{m_1}\rho_{m_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\rho_{m_3} & \rho_{m_4} & \lambda_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \in \mathrm{D}^0(\Gamma_{(1,n)}).$$

□

Corolario 3.3.9. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\mathrm{D}^0(\Gamma_{(1,n)}) = \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(\Gamma_n) & 0 & 0 \\ \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} & \Gamma_n^{op} & \Bbbk^{n+1} \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Demostración. Gracias al `Teor.`3.3.8, basta realizar los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}^0(\Gamma_n) = \Gamma_n\Gamma_n^{op} = \mathrm{Gen}\{\lambda_{m_1}\rho_{m_2} \in \mathrm{End}(\Gamma_n) \mid m_i \in \Gamma_n\}, \quad \text{ver } \texttt{Corol.}1.2.4 \\
&\Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} = \mathrm{Sum}\{\lambda_{b_1}\rho_{m_3} \in \mathrm{Hom}(\Gamma_n, \Bbbk^{n+1}) \mid b_1 \in \Bbbk^{n+1}, m_3 \in \Gamma_n\} \\
&\Gamma_n^{op} = \mathrm{Gen}\{\rho_{m_4} \in \mathrm{End}(\Bbbk^{n+1}) \mid m_4 \in \Gamma_n\} \\
&\Bbbk^{n+1} = \mathrm{Sum}\{\lambda_{b_2} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^{n+1}) \mid b_2 \in \Bbbk^{n+1}\} \\
&\mathrm{End}(\Bbbk) = \mathrm{Gen}\{r \in \Bbbk\} = \Bbbk.
\end{aligned}$$

□

3.3.3. Operadores diferenciales

En esta subsección demostraremos que el anillo de todos los operadores diferenciales de la extensión para la n-álgebra de Kronecker, son a lo sumo de orden uno.

Vale la pena hacer las siguientes observaciones, con las cuales aliviaremos la notación y marcaremos con exactitud las estructuras distinguidas al momento de hacer las demostraciones. Primero consideremos los isomorfismos entre espacios vectoriales

$$\Gamma_n = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk, \quad \Bbbk^{n+1} = \Bbbk^n \oplus \Bbbk, \quad \Gamma_{(1,n)} = \Gamma_n \oplus \Bbbk^{n+1} \oplus \Bbbk.$$

Gracias a estas descomposiciones en sumandos directos, podemos considerar natural a las álgebras de endomorfismo de la siguiente manera,

$$\mathrm{End}(\Bbbk^{n+1}) = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{End}(\Gamma_n) = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \\ \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ \mathrm{End}(\Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

$$\operatorname{End}(\Gamma_{(1,n)}) = \begin{bmatrix} \operatorname{End}(\Gamma_n) & \operatorname{Hom}(\Bbbk^{n+1},\Gamma_n) & \operatorname{Hom}(\Bbbk,\Gamma_n) \\ \operatorname{Hom}(\Gamma_n,\Bbbk^{n+1}) & \operatorname{End}(\Bbbk^{n+1}) & \operatorname{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^{n+1}) \\ \operatorname{Hom}(\Gamma_n,\Bbbk) & \operatorname{Hom}(\Bbbk^{n+1},\Bbbk) & \operatorname{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

y de las secciones anteriores tenemos

$$\mathrm{D}(\Gamma_n) = \mathrm{D}^1(\Gamma_n) = \mathrm{Z}^1(\Gamma_n) = \operatorname{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \operatorname{End}(\Gamma_n) \right\}$$

$$\mathrm{D}^0(\Gamma_{(1,n)}) = \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(\Gamma_n) & 0 & 0 \\ \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} & \Gamma_n^{op} & \Bbbk^{n+1} \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \subseteq \operatorname{End}(\Gamma_{(1,n)}).$$

Ahora, usando las propiedades expuestas en el primer capítulo, podemos afirmar,

$$\Bbbk^{n+1} \text{ visto como álgebra } \implies \mathrm{D}(\Bbbk^{n+1}) = \mathrm{D}^0(\Bbbk^{n+1}) = \Bbbk^{n+1},$$

$$\Bbbk^{n+1} \text{ visto como } \Bbbk\text{-módulo } \implies \mathrm{D}({}_{\Bbbk}\Bbbk^{n+1}) = \mathrm{D}^0({}_{\Bbbk}\Bbbk^{n+1}) = \operatorname{End}(\Bbbk^{n+1}).$$

Por otra parte, consideremos los siguientes resultados para luego abordar con naturalidad el resultado relevantes de esta sección.

Lema 3.3.10. *Si* $\Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} \subseteq \operatorname{Hom}(\Gamma_n,\Bbbk^{n+1})$, *entonces*

$$\Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} = \left\{ \begin{pmatrix} * & \lambda_s & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \operatorname{Hom}(\Gamma_n,\Bbbk^{n+1}) \mid s \in \Bbbk \right\}$$
$$\dim \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} = 2n+2.$$

Demostración. Sean $b = (b_1, b_2) \in \Bbbk^n \oplus \Bbbk$ y $m = (m_{11}, m_{21}, m_{22}) \in \Gamma_n = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$. Luego, para cada $(x,y,z) \in \Gamma_n = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$, se verifican

$$\begin{aligned} \lambda_b\rho_m((x,y,z)) &= (b_1,b_2)\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \\ &= (b_1xm_{11} + b_2ym_{11} + b_2zm_{21}, b_2zm_{22}) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_{b_1m_{11}} & \lambda_{b_2m_{11}} & \lambda_{b_2m_{21}} \\ 0 & 0 & \lambda_{b_2m_{22}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, de la independencia de las variables (b_1, b_2) y (m_{11}, m_{21}, m_{22}), se deduce fácilmente que,

$$\Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} = \operatorname{Sum}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{v_1} & \lambda_{r_1} & \lambda_{v_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{r_2} \end{pmatrix} \in \operatorname{Hom}(\Gamma_n,\Bbbk^{n+1}) \mid v_i \in \Bbbk^n, r_j \in \Bbbk \right\}.$$

□

Lema 3.3.11. *Si* $\Gamma_n^{op} \subseteq \operatorname{End}(\Bbbk^{n+1})$, *entonces*

$$\Gamma_n^{op} = \operatorname{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_r & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \operatorname{End}(\Bbbk^{n+1}) \mid r \in \Bbbk\} \right\}.$$

Demostración. Sea $m = (m_{11}, m_{21}, m_{22}) \in \Gamma_n = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$. Luego, para cada $(x, y) \in \Bbbk^n \oplus \Bbbk$, se verifican

$$\begin{aligned}\rho_m((x,y)) &= (x,y)\begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix} \\ &= (xm_{11} + ym_{21}, ym_{22}) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_{m_{11}} & \lambda_{m_{21}} \\ 0 & \lambda_{m_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ahora, de la independencia de las variables (m_{11}, m_{21}, m_{22}), se deduce fácilmente

$$\Gamma_n^{op} = \mathrm{Gen}\left\{\begin{pmatrix} m_{11}\,\mathrm{Id}_{\Bbbk^n} & \lambda_{m_{21}} \\ 0 & m_{22}\end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Bbbk^{n+1}) \mid (m_{11}, m_{21}, m_{22}) \in \Gamma_n = \Bbbk \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk\right\}.$$

□

Lema 3.3.12. *Si $t = (m, b, s) \in \Gamma_{(1,n)} = \Gamma_n \oplus \Bbbk^{n+1} \oplus \Bbbk$ y $\nabla \in \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)})$, entonces*

$$\nabla\lambda_t = \begin{pmatrix} \nabla_{11}\lambda_m + \nabla_{12}\lambda_b & \nabla_{12}\lambda_s & \nabla_{13}\lambda_s \\ \nabla_{21}\lambda_m + \nabla_{22}\lambda_b & \nabla_{22}\lambda_s & \nabla_{23}\lambda_s \\ \nabla_{31}\lambda_m + \nabla_{32}\lambda_b & \nabla_{32}\lambda_s & \nabla_{33}\lambda_s \end{pmatrix}$$

$$\lambda_t\nabla = \begin{pmatrix} \lambda_m\nabla_{11} & \lambda_m\nabla_{12} & \lambda_m\nabla_{13} \\ \lambda_b\nabla_{11} + \lambda_s\nabla_{21} & \lambda_b\nabla_{12} + \lambda_s\nabla_{22} & \lambda_b\nabla_{13} + \lambda_s\nabla_{23} \\ \lambda_s\nabla_{31} & \lambda_s\nabla_{32} & \lambda_s\nabla_{33} \end{pmatrix}$$

$$[\nabla, \lambda_t] = \begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_m] + \nabla_{12}\lambda_b & (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{12} & (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{13} \\ \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & -\lambda_b\nabla_{12} & -\lambda_b\nabla_{13} \\ \nabla_{31}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{32}\lambda_b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Sea $t = (m, b, s)$, de la `Prop.`3.3.4 sabemos que

$$\lambda_{(m,b,s)} = \begin{pmatrix} \lambda_m & 0 & 0 \\ \lambda_b & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

Se sigue de la multiplicación de matrices las expresiones propuestas para $\nabla\lambda_t$ y $\lambda_t\nabla$. Para el corchete, hace falta tener presente que $[\nabla_{ij}, \lambda_s] = 0\,, \forall s \in \Bbbk$, de esta forma,

$$\begin{aligned}[\nabla, \lambda_{(m,b,s)}] &= \begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_m] + \nabla_{12}\lambda_b & \nabla_{12}\lambda_s - \lambda_m\nabla_{12} & \nabla_{13}\lambda_s - \lambda_m\nabla_{13} \\ \nabla_{21}\lambda_m - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & [\nabla_{22}, \lambda_s] - \lambda_b\nabla_{12} & [\nabla_{23}, \lambda_s] - \lambda_b\nabla_{13} \\ \nabla_{31}\lambda_m - \lambda_s\nabla_{31} + \nabla_{32}\lambda_b & [\nabla_{32}, \lambda_s] & [\nabla_{33}, \lambda_s] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_m] + \nabla_{12}\lambda_b & (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{12} & (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{13} \\ \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & -\lambda_b\nabla_{12} & -\lambda_b\nabla_{13} \\ \nabla_{31}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{32}\lambda_b & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Brindamos a continuación una descripción de los operadores diferenciales 1-centrales.

Teorema 3.3.13. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces, $\nabla \in Z^1(\Gamma_{(1,n)})$ si y solo si*

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)}) \text{ tal que } (\star) = \begin{cases} \nabla_{11} \in Z^1(\Gamma_n) \\ \nabla_{21} \in \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} \\ \nabla_{22}^{11} - \nabla_{11}^{22} \in \Bbbk\{\mathrm{Id}_{\Bbbk^n}\} \\ \nabla_{22}^{21} = 0 \end{cases}$$

$$\text{donde } \nabla_{11} = \begin{pmatrix} \nabla_{11}^{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{11}^{21} & \nabla_{11}^{22} & \nabla_{11}^{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{11}^{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_n) \text{ y } \nabla_{22} = \begin{pmatrix} \nabla_{22}^{11} & \nabla_{22}^{12} \\ \nabla_{22}^{21} & \nabla_{22}^{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Bbbk^{n+1}).$$

Demostración. Consideremos un operador

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)})$$

que cumple las relaciones propuestas en $(\star)$. Ahora, al tener presente las observaciones exhibidas al inicio de la subsección, las relaciones $(\star)$ se traducen de la siguiente forma

$$\nabla_{11} = \begin{pmatrix} \nabla_{11}^{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{11}^{21} & \nabla_{11}^{22} & \nabla_{11}^{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{11}^{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_n)$$

$$\nabla_{21} = \begin{pmatrix} \nabla_{21}^{11} & \nabla_{21}^{12} & \nabla_{21}^{13} \\ 0 & 0 & \nabla_{21}^{23} \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}(\Gamma_n, \Bbbk^{n+1}), \text{ tal que } \nabla_{21}^{12} \in \Bbbk\,\mathrm{Id}_{\Bbbk^n}$$

$$\nabla_{22} = \begin{pmatrix} \nabla_{22}^{11} & \nabla_{22}^{12} \\ 0 & \nabla_{22}^{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Bbbk^{n+1}), \text{ tal que } \nabla_{22}^{11} - \nabla_{11}^{22} \in \Bbbk\,\mathrm{Id}_{\Bbbk^n}$$

Veamos entonces que $\nabla \in Z^1(\Gamma_{(1,n)})$. Primero, sea $t = (m, b, s) \in \Gamma_{(1,n)}$. De la formulación propuesta en el Lema3.3.12, sobre el corchete $[\nabla, \lambda_t]$, tenemos que,

$$[\nabla, \lambda_t] = \begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_m] & 0 & 0 \\ \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segundo, $\nabla_{11} \in D^1(\Gamma_n)$ y del Teor.3.2.11 sabemos que $D^1(\Gamma_n) = Z^1(\Gamma_n)$, entonces $[\nabla_{11}, \lambda_m] \in D^0(\Gamma_n)$. Tercero, del Lema.3.3.10, sabemos que el operador $\nabla_{21} \in \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op}$, esto implica $\nabla_{21} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{b_i}\rho_{m_i}$ y por ende,

$$\begin{aligned} \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_{b_i}\rho_{m_i}(\lambda_m - \lambda_s) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{b_i}(\lambda_m - \lambda_s)\rho_{m_i} \\ &= \sum_{i=1}^{N} (\lambda_{b_i m} - \lambda_{b_i s})\rho_{m_i} \\ &\implies \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) \in \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op}. \end{aligned}$$

Luego, dado que $\nabla_{22}^{11} - \nabla_{11}^{22} \in \Bbbk\{\mathrm{Id}_{\Bbbk^n}\}$, entonces existe un $r \in \Bbbk$ tal que

$$\nabla_{22}^{11} - \nabla_{11}^{22} = \lambda_r.$$

Ahora, veamos la expresión matricial para $\nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11}, \forall b = (b_1, b_2) \in \Bbbk^n \oplus \Bbbk$, dada por

$$\begin{pmatrix} \nabla_{22}^{11}\lambda_{b_1} & b_2\nabla_{22}^{11} & b_2\nabla_{22}^{11} + b_2\nabla_{22}^{12} \\ 0 & 0 & b_2\nabla_{22}^{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_{b_1}\nabla_{11}^{11} & b_2\nabla_{11}^{22} & b_2\nabla_{11}^{23} + b_2\nabla_{11}^{33} \\ 0 & 0 & b_2\nabla_{11}^{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \nabla_{22}^{11}\lambda_{b_1} - \lambda_{b_1}\nabla_{11}^{11} & b_2(\nabla_{22}^{11} - \nabla_{11}^{22}) & b_2\nabla_{22}^{11} + b_2\nabla_{22}^{12} - b_2\nabla_{11}^{23} - b_2\nabla_{11}^{33} \\ 0 & 0 & b_2\nabla_{22}^{22} - b_2\nabla_{11}^{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & b_2\lambda_r & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op}, \forall b \in \Bbbk^{n+1}.$$

De los resultados anteriores se deducen,

$$[\nabla_{11}, \lambda_m] \in \mathrm{D}^0(\Gamma_n), \forall m \in \Gamma_n$$

$$\nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op}, \forall (m, b, s) \in \Gamma_{(1,n)}.$$

De esta forma, se obtiene

$$\begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_m] & 0 & 0 \\ \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(\Gamma_n) & 0 & 0 \\ \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} & \Gamma_n^{op} & \Bbbk^{n+1} \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow [\nabla, \lambda_t] \in \mathrm{D}^0(\Gamma_{(1,n)}), \forall t \in \Gamma_{(1,n)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\nabla \in \mathrm{Z}^1(\Gamma_{(1,n)})}.$$

Ahora, veamos la doble inclusión. Sea

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & \nabla_{12} & \nabla_{13} \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ \nabla_{31} & \nabla_{32} & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)}).$$

tal que $\nabla \in \mathrm{Z}^1(\Gamma_{(1,n)})$. Demostraremos que se cumplen las relaciones exigidas en $(\star)$. Como ya lo hemos mencionado antes, primero usamos la forma matricial del corchete para el operador ∇, como se expone en el `Lema`3.3.12, de esta forma

$$[\nabla, \lambda_{(m,b,s)}] = \begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_m] + \nabla_{12}\lambda_b & (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{12} & (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{13} \\ \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & -\lambda_b\nabla_{12} & -\lambda_b\nabla_{13} \\ \nabla_{31}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{32}\lambda_b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, recordamos la forma matricial para los operadores diferenciales interiores obtenida en `Corol.`3.3.9, junto con la definición de operador diferencial 1-central, para obtener con ello lo siguiente, $\forall t = (m, b, s) \in \Gamma_{(1,n)} = \Gamma_n \oplus \Bbbk^{n+1} \oplus \Bbbk$

$$\begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_m] + \nabla_{12}\lambda_b & (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{12} & (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{13} \\ \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & -\lambda_b\nabla_{12} & -\lambda_b\nabla_{13} \\ \nabla_{31}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{32}\lambda_b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\in \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(\Gamma_n) & 0 & 0 \\ \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} & \Gamma_n^{op} & \Bbbk^{n+1} \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Ahora veamos que los operadores $\nabla_{12} = \nabla_{13} = \nabla_{31} = \nabla_{32} = 0$. Para ello, podemos considerar el caso particular $\lambda_m = 0$ y $s = 1$ y de esta forma conseguimos

$$\nabla_{12} = (1-0)\nabla_{12} = (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{12} = 0 \implies \boxed{\nabla_{12} = 0}.$$

Similarmente,

$$\nabla_{13} = (1-0)\nabla_{13} = (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{13} = 0 \implies \boxed{\nabla_{13} = 0}.$$

Ahora consideremos $\lambda_m = \lambda_b = 0$ y $s = -1$ entonces

$$\nabla_{31} = \nabla_{31}(0 - (-1)) + \nabla_{32}0 = \nabla_{31}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{32}\lambda_b = 0 \implies \boxed{\nabla_{31} = 0}.$$

Por otra parte, como ya sabemos que $\nabla_{31} = 0$ entonces

$$\nabla_{32}\lambda_b = \nabla_{31}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{32}\lambda_b = 0\,, \forall b \in \Bbbk^{n+1}.$$

Luego, como $\nabla_{32} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk^{n+1}, \Bbbk)$ entonces

$$\nabla_{32}(b) = (\nabla_{32}\lambda_b)(1) = 0\,, \forall b \in \Bbbk^{n+1} \implies \boxed{\nabla_{32} = 0}.$$

Con las igualdades recién obtenidas podemos refrescar la expresión matricial para el operador ∇ de esta forma

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)}).$$

A su vez, si $\forall t = (m, b, s) \in \Gamma_{(1,n)}$ se cumple

$$\begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_m] & 0 & 0 \\ \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(\Gamma_n) & 0 & 0 \\ \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} & \Gamma_n^{op} & \Bbbk^{n+1} \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix} = \mathrm{D}^0(\Gamma_{(1,n)}).$$

Se sigue de inmediato que

$$[\nabla_{11}, \lambda_m] \in \mathrm{D}^0(\Gamma_n)\,, \forall m \in \Gamma_n \implies \boxed{\nabla_{11} \in \mathrm{Z}^1(\Gamma_n) = \mathrm{D}^1(\Gamma_n)}.$$

Ahora consideremos $\lambda_m = \lambda_b = 0$ y $s = -1$ entonces

$$\begin{aligned} \nabla_{21} &= \nabla_{22}(0 - (-1)) + \nabla_{22}0 - 0\nabla_{11} \\ &= \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} \\ &\implies \boxed{\nabla_{21} \in \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op}} \end{aligned}$$

Por otra parte, si consideramos $\lambda_m = s = 0$ entonces

$$\begin{aligned}\nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} &= \nabla_{21}(0-0) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11}\\ &= \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11}\\ &\Longrightarrow \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op}, \forall b \in \Bbbk^{n+1}\end{aligned}$$

Ahora, si $b = (b_1, b_2) \in \Bbbk^n \oplus \Bbbk$ tal que $b_2 = 1$, entonces

$$\begin{aligned}&\nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} =\\ &= \begin{pmatrix} \nabla_{22}^{11}\lambda_{b_1} & b_2\nabla_{22}^{11} & b_2\nabla_{22}^{11} + b_2\nabla_{22}^{12} \\ \nabla_{22}^{21}\lambda_{b_1} & \nabla_{22}^{21}\lambda_{b_1} & b_2\nabla_{22}^{22}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_{b_1}\nabla_{11}^{11} & b_2\nabla_{11}^{22} & b_2\nabla_{11}^{23} + b_2\nabla_{11}^{33} \\ 0 & 0 & b_2\nabla_{11}^{33}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \nabla_{22}^{11}\lambda_{b_1} - \lambda_{b_1}\nabla_{11}^{11} & b_2(\nabla_{22}^{11} - \nabla_{11}^{22}) & b_2\nabla_{22}^{11} + b_2\nabla_{22}^{12} - b_2\nabla_{11}^{23} - b_2\nabla_{11}^{33} \\ \nabla_{22}^{21}\lambda_{b_1} & b_2\nabla_{22}^{21} & b_2\nabla_{22}^{22} - b_2\nabla_{11}^{33}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} * & \nabla_{22}^{11} - \nabla_{11}^{22} & * \\ \nabla_{22}^{21}\lambda_{b_1} & b_2\nabla_{22}^{21} & * \end{pmatrix} \in \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op}\\ &\texttt{Lema.}3.3.10 \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{\nabla_{22}^{11} - \nabla_{11}^{22} \in \Bbbk\{\mathrm{Id}_{\Bbbk^n}\}} \\ \\ \boxed{\nabla_{22}^{21} = 0} \end{cases}.\end{aligned}$$

Finalmente, todo operador $\nabla \in Z^1(\Gamma_{(1,n)})$ es de la forma

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33}\end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)}) \text{ tal que } \begin{cases} \nabla_{11} \in Z^1(\Gamma_n), \\ \nabla_{21} \in \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op}, \\ \nabla_{22}^{11} - \nabla_{11}^{22} \in \Bbbk\{\mathrm{Id}_{\Bbbk^n}\}, \nabla_{22}^{21} = 0 \end{cases}.$$

□

Teorema 3.3.14. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si* $\Phi = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \Bbbk^n \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \subseteq \mathrm{End}(\Bbbk^{n+1})$, *entonces*

$$D^1(\Gamma_{(1,n)}) = \begin{bmatrix} D^1(\Gamma_n) & 0 & 0 \\ \Bbbk^{n+1} D^1(\Gamma_n) + \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} + \Phi\Bbbk^{n+1} & \Phi & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^{n+1}) \\ 0 & 0 & \mathrm{End}(\Bbbk)\end{bmatrix}.$$

Demostración. Del $\texttt{Teor.}$3.3.13 podemos ver fácilmente, que el espacio de operadores diferenciales $Z^1(\Gamma_{(1,n)})$ esta generado por las matrices

$$\begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_{33}\end{pmatrix}$$

tales que $\nabla_{21} \in \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op}$, $\nabla_{23} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^{n+1})$, $\nabla_{33} \in \mathrm{End}(\Bbbk)$, $\nabla_{11} \in Z^1(\Gamma_n)$, y

$$\nabla_{22} = \begin{pmatrix} \nabla_{11}^{22} + \lambda_r & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \Phi.$$

para algún $r \in \Bbbk$. Ahora veamos que para cualquier $(m_i, b_i, s_i) \in \Gamma_n \oplus \Bbbk^{n+1} \oplus \Bbbk$, el espacios de operadores diferenciales $D^1(\Gamma_{(1,n)})$ esta generado por el siguiente conjunto de matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda_{m_1}\nabla_{11}\lambda_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\nabla_{11}\lambda_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_1\nabla_{22}\lambda_{b_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_1\nabla_{22}\lambda_{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_1\nabla_{21}\lambda_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1\nabla_{23}\lambda_{s_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1\nabla_{33}\lambda_{s_2} \end{pmatrix}$$

tales que,

$$\begin{cases} \nabla_{11} \in Z^1(\Gamma_n), \quad \nabla_{21} \in \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} \\ \nabla_{22} \in \Phi, \quad \nabla_{23} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^{n+1}), \quad \nabla_{33} \in \mathrm{End}(\Bbbk), \end{cases}.$$

En efecto, basta recurrir al `Lema.`3.3.12 con el cual describimos las acciones $\lambda_{t_1}\nabla\lambda_{t_2}$ sobre los generadores de $Z^1(\Gamma_{(1,n)})$, para obtener de esta forma, los generadores propuestos para $D^1(\Gamma_{(1,n)})$.

Notemos que

$$\lambda_{(m_1,b_1,s_1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_{(m_2,b_2,s_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_1\nabla_{21}\lambda_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_{(m_1,b_1,s_1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_{(m_2,b_2,s_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1\nabla_{23}\lambda_{s_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_{(m_1,b_1,s_1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \lambda_{(m_2,b_2,s_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_1\nabla_{33}\lambda_{s_2} \end{pmatrix}$$

Por otra parte,

$$\begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_{(1,0,0)} \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in D^1(\Gamma_{(1,n)})$$

y similarmente,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_{(0,0,1)} \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in D^1(\Gamma_{(1,n)}).$$

Se sigue entonces,

$$\lambda_{(m_1,b_1,s_1)} \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_{(m_2,b_2,s_2)} = \begin{pmatrix} \lambda_{m_1}\nabla_{11}\lambda_{m_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\nabla_{11}\lambda_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \lambda_{(1,0,0)} \begin{pmatrix} \lambda_{m_1}\nabla_{11}\lambda_{m_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\nabla_{11}\lambda_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{m_1}\nabla_{11}\lambda_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in D^1(\Gamma_{(1,n)})$$
$$\Longrightarrow \lambda_{(0,0,1)} \begin{pmatrix} \lambda_{m_1}\nabla_{11}\lambda_{m_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\nabla_{11}\lambda_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\nabla_{11}\lambda_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in D^1(\Gamma_{(1,n)})$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
&\lambda_{(m_1,b_1,s_1)}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\nabla_{22}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\lambda_{(m_2,b_2,s_2)}=\begin{pmatrix}0&0&0\\s_1\nabla_{22}\lambda_{b_2}&s_1\nabla_{22}\lambda_{s_2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\
\Longrightarrow&\begin{pmatrix}0&0&0\\s_1\nabla_{22}\lambda_{b_2}&s_1\nabla_{22}\lambda_{s_2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\lambda_{(0,0,1)}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&s_1\nabla_{22}\lambda_{s_2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in \mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)})\\
\Longrightarrow&\begin{pmatrix}0&0&0\\s_1\nabla_{22}\lambda_{b_2}&s_1\nabla_{22}\lambda_{s_2}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\lambda_{(1,0,0)}=\begin{pmatrix}0&0&0\\s_1\nabla_{22}\lambda_{b_2}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in \mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)}).
\end{aligned}$$

Luego, tener en cuenta el `Lema.`3.3.10, para ver que $\Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op}$ es un Γ_n-módulo derecho, y de esta forma es fácil ver que, $\{\lambda_{b_1}\nabla_{11}\lambda_{m_2}, s_1\nabla_{21}\lambda_{m_2}, s_1\nabla_{22}\lambda_{b_2}\}$ tales que $\nabla_{11}\in \mathrm{Z}^1(\Gamma_n)$, $\nabla_{21}\in \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op}$, $\nabla_{22}\in\Phi$, y $(m_i,b_i,s_i)\in\Gamma_n\oplus\Bbbk^{n+1}\oplus\Bbbk$, es un conjunto de generadores para el espacio $\Bbbk^{n+1}\,\mathrm{D}^1(\Gamma_n)+\Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op}+\Phi\Bbbk^{n+1}$. Por ultimo,

$$\Phi=\begin{bmatrix}\mathrm{End}(\Bbbk^n)&\Bbbk^n\\0&\Bbbk\end{bmatrix}=\{\nabla_{22}=\begin{pmatrix}\varphi&*\\0&*\end{pmatrix}\in\mathrm{End}(\Bbbk^{n+1})\mid \varphi\in\mathrm{End}(\Bbbk^n)\}.$$

□

Corolario 3.3.15. *Sea* $\nabla\in\mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)})$. *Entonces*

$$\nabla\in\mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)})\Longleftrightarrow\nabla=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}*&0&0\\ *&*&*\\0&0&*\end{pmatrix}&0&0\\ \begin{pmatrix}*&*&*\\0&0&*\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}*\\ *\end{pmatrix}\\0&0&*\end{pmatrix}.$$

Demostración. Como ya sabemos que podemos descomponer al espacio de los operadores en sus respectivas componentes, basta entonces con recordar como están constituidos sus respectivos subespacios. Notemos que dado que $\Gamma_n=\Bbbk\oplus\Bbbk^n\oplus\Bbbk$ y $\Bbbk^{n+1}=\Bbbk^n\oplus\Bbbk$, entonces

$$\mathrm{D}^1(\Gamma_n)=\left\{\begin{pmatrix}*&0&0\\ *&*&*\\0&0&*\end{pmatrix}\in\mathrm{End}(\Gamma_n)\right\}$$

$$\Phi=\left\{\begin{pmatrix}*&*\\0&*\end{pmatrix}\in\mathrm{End}(\Bbbk^{n+1})\right\}.$$

Por otra parte,

$$\mathrm{Hom}(\Gamma_n,\Bbbk^{n+1})=\begin{bmatrix}\mathrm{Hom}(\Bbbk^n,\Bbbk)&\mathrm{End}(\Bbbk^n,\Bbbk^n)&\mathrm{Hom}(\Bbbk^n,\Bbbk)\\\mathrm{End}(\Bbbk)&\mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n)&\mathrm{End}(\Bbbk)\end{bmatrix}.$$

Luego, para cada $b=(b_1,b_2)\in\Bbbk^{n+1}$ y $\nabla\in\mathrm{D}^1(\Gamma_n)$ se cumple

$$\begin{aligned}
&\Bbbk^{n+1}\,\mathrm{D}^1(\Gamma_n)=\mathrm{Sum}\left\{\lambda_b\nabla=\begin{pmatrix}\lambda_{b_1}\nabla_{11}&b_2\nabla_{22}&b_2\nabla_{23}+b_2\nabla_{33}\\0&0&b_2\nabla_{33}\end{pmatrix}\in\mathrm{Hom}(\Gamma_n,\Bbbk^{n+1})\right\}\\
\Longrightarrow&\begin{bmatrix}\mathrm{Hom}(\Bbbk^n,\Bbbk)&\mathrm{End}(\Bbbk^n,\Bbbk^n)&0\\0&0&\mathrm{End}(\Bbbk)\end{bmatrix}\subseteq\Bbbk^{n+1}\,\mathrm{D}^1(\Gamma_n)\subseteq\mathrm{Hom}(\Gamma_n,\Bbbk^{n+1}).
\end{aligned}$$

Recordemos el `Lema`3.3.10, donde

$$\Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{v_1} & r_1 \operatorname{Id}_{\Bbbk^n} & \lambda_{v_2} \\ 0 & 0 & r_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Hom}(\Gamma_n, \Bbbk^{n+1}) \mid v_i \in \Bbbk^n, r_j \in \Bbbk \right\}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & \operatorname{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \subseteq \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} \subseteq \begin{bmatrix} \operatorname{Hom}(\Bbbk^n,\Bbbk) & \operatorname{End}(\Bbbk^n,\Bbbk^n) & \operatorname{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \\ 0 & 0 & \operatorname{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}$$

Ahora, basta tener presente que para cada $b = (b_1, b_2) \in \Bbbk^{n+1}$ y $\nabla \in \Phi$ se cumple

$$\Phi\Bbbk^{n+1} = \left\{ \nabla\lambda_b = \begin{pmatrix} \nabla_{11}\lambda_{b_1} & b_2\nabla_{11} & b_2\nabla_{11} + b_2\nabla_{12} \\ 0 & 0 & b_2\nabla_{22} \end{pmatrix} \in \operatorname{Hom}(\Gamma_n, \Bbbk^{n+1}) \right\}$$

$$\Longrightarrow \Phi\Bbbk^{n+1} \subseteq \begin{bmatrix} \operatorname{Hom}(\Bbbk^n,\Bbbk) & \operatorname{End}(\Bbbk^n,\Bbbk^n) & \operatorname{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \\ 0 & 0 & \operatorname{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Finalmente, se verifica la igualdad

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Hom}(\Bbbk^n,\Bbbk) & \operatorname{End}(\Bbbk^n,\Bbbk^n) & \operatorname{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \\ 0 & 0 & \operatorname{End}(\Bbbk) \end{bmatrix} = \Bbbk^{n+1}\operatorname{D}^1(\Gamma_n) + \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} + \Phi\Bbbk^{n+1}.$$

De esta manera queda demostrado lo que queríamos. □

Teorema 3.3.16. *Todos los operadores diferenciales de $\Gamma_{(1,n)}$ son a lo sumo de orden uno, esto es, $\operatorname{D}^m(\Gamma_{(1,n)}) = \operatorname{D}^1(\Gamma_{(1,n)})$, $\forall m \geq 1$.*

Demostración. Del `Corol.`1.2.3, sabemos que

$$\operatorname{D}^1(\Gamma_{(1,n)}) \subseteq \operatorname{Z}^2(\Gamma_{(1,n)}).$$

Por otra parte,

$$\operatorname{D}^2(\Gamma_{(1,n)}) = \Gamma_{(1,n)}\operatorname{Z}^2(\Gamma_{(1,n)})\Gamma_{(1,n)}$$

entonces, para ver que todos los operadores diferenciales de $\Gamma_{(1,n)}$ son a lo sumo de orden uno, basta demostrar que, $\operatorname{Z}^2(\Gamma_{(1,n)}) \subseteq \operatorname{D}^1(\Gamma_{(1,n)})$, dado que, $\operatorname{D}^1(\Gamma_{(1,n)})$ es un $\Gamma_{(1,n)}$-bimódulo.

Sea

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & \nabla_{12} & \nabla_{13} \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ \nabla_{31} & \nabla_{32} & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \operatorname{End}(\Gamma_{(1,n)}) \text{ tal que } \nabla \in \operatorname{Z}^2(\Gamma_{(1,n)})$$

$$\Longrightarrow [\nabla, \lambda_t] \in \operatorname{D}^1(\Gamma_{(1,n)}), \forall t \in \Gamma_{(1,n)}.$$

Luego, del `Lema.`3.3.12 conocemos la expresión matricial para dicho corchete, donde, para todo $t = (m, b, s) \in \Gamma_{(1,n)} = \Gamma_n \oplus \Bbbk^{n+1} \oplus \Bbbk$, se cumple

$$[\nabla, \lambda_t] = \begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_m] + \nabla_{12}\lambda_b & (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{12} & (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{13} \\ \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & -\lambda_b\nabla_{12} & -\lambda_b\nabla_{13} \\ \nabla_{31}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{32}\lambda_b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, tenemos la expresión obtenida en el `Teor.`3.3.14 para los operadores diferenciales de orden uno

$$\mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)}) = \begin{bmatrix} \mathrm{D}^1(\Gamma_n) & 0 & 0 \\ \Bbbk^{n+1}\,\mathrm{D}^1(\Gamma_n) + \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} + \Phi\Bbbk^{n+1} & \Phi & \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^{n+1}) \\ 0 & 0 & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

donde, $\Phi = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \Bbbk^n \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \subseteq \mathrm{End}(\Bbbk^{n+1})$. De lo previamente mencionado obtenemos las siguientes restricciones para el operador ∇,

$$\begin{cases} (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{12} = (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{13} = \nabla_{31}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{32}\lambda_b = 0 \\ [\nabla_{11}, \lambda_m] + \nabla_{12}\lambda_b \in \mathrm{D}^1(\Gamma_n) \\ \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Bbbk^{n+1}\,\mathrm{D}^1(\Gamma_n) + \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} + \Phi\Bbbk^{n+1} \\ -\lambda_b\nabla_{12} \in \Phi, \quad -\lambda_b\nabla_{13} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^{n+1}) \end{cases}.$$

Ahora, razonaremos de forma similar a las demostraciones anteriores, veamos primero que los operadores $\nabla_{12} = \nabla_{13} = \nabla_{31} = \nabla_{32} = 0$. Para ello, podemos considerar un caso particular donde $\lambda_m = 0$ y $s = 1$, así obtenemos,

$$\nabla_{12} = (1-0)\nabla_{12} = (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{12} = 0 \implies \boxed{\nabla_{12} = 0}.$$

Similarmente,

$$\nabla_{13} = (1-0)\nabla_{13} = (\lambda_s - \lambda_m)\nabla_{13} = 0 \implies \boxed{\nabla_{13} = 0}.$$

Ahora, consideremos $\lambda_m = \lambda_b = 0$ y $s = -1$ entonces

$$\nabla_{31} = \nabla_{31}(0+1) + \nabla_{32}0 = \nabla_{31}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{32}\lambda_b = 0 \implies \boxed{\nabla_{31} = 0}.$$

Por otra parte, como ya sabemos que $\nabla_{31} = 0$ entonces

$$\nabla_{32}\lambda_b = \nabla_{31}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{32}\lambda_b = 0\,, \forall b \in \Bbbk^{n+1}.$$

Luego, como $\nabla_{32} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk^{n+1},\Bbbk)$ entonces

$$\nabla_{32}(b) = (\nabla\lambda_b)(1) = 0\,, \forall b \in \Bbbk^{n+1} \implies \boxed{\nabla_{32} = 0}.$$

Con las igualdades recién obtenida podemos refrescar la expresión matricial para el operador ∇, de esta forma

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)})$$

y por otra parte del `Teor.`3.3.14 podemos obtener que, $\forall t = (m,b,s) \in \Gamma_{(1,n)}$,

$$\begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_m] & 0 & 0 \\ \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\in \begin{bmatrix} \mathrm{D}^1(\Gamma_n) & 0 & 0 \\ \Bbbk^{n+1}\,\mathrm{D}^1(\Gamma_n) + \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} + \Phi\Bbbk^{n+1} & \Phi & \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^{n+1}) \\ 0 & 0 & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Se sigue ahora que $[\nabla_{11}, \lambda_m] \in \mathrm{D}^1(\Gamma_n)$, esto implica que $\nabla_{11} \in \mathrm{Z}^2(\Gamma_n)$, pero del Teor. 3.2.11 sabemos que $\mathrm{Z}^2(\Gamma_n) = \mathrm{D}^1(\Gamma_n)$, entonces $\boxed{\nabla_{11} \in \mathrm{D}^1(\Gamma_n)}$. Luego consideremos $\lambda_m = \lambda_b = 0$ y $s = -1$, se sigue

$$\begin{aligned}
\nabla_{21} &= \nabla_{22}(0+1) + \nabla_{22}0 - 0\nabla_{11} \\
&= \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Bbbk^{n+1}\,\mathrm{D}^1(\Gamma_n) + \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} + \Phi\Bbbk^{n+1} \\
&\Longrightarrow \boxed{\nabla_{21} \in \Bbbk^{n+1}\,\mathrm{D}^1(\Gamma_n) + \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} + \Phi\Bbbk^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Notemos, $\Bbbk^{n+1}\,\mathrm{D}^1(\Gamma_n) + \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} + \Phi\Bbbk^{n+1}$ es Γ_n-invariante a derecha, entonces

$$\nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) \in \Bbbk^{n+1}\,\mathrm{D}^1(\Gamma_n) + \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} + \Phi\Bbbk^{n+1}.$$

Por otra parte, como $\nabla_{11} \in \mathrm{D}^1(\Gamma_n)$ entonces

$$\lambda_b\nabla_{11} \in \Bbbk^{n+1}\,\mathrm{D}^1(\Gamma_n) + \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} + \Phi\Bbbk^{n+1}, \forall b \in \Bbbk^{n+1}$$

y a su vez

$$\begin{aligned}
&\nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_s) + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Bbbk^{n+1}\,\mathrm{D}^1(\Gamma_n) + \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} + \Phi\Bbbk^{n+1} \\
\Longrightarrow\ &\nabla_{22}\lambda_b \in \Bbbk^{n+1}\,\mathrm{D}^1(\Gamma_n) + \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} + \Phi\Bbbk^{n+1}, \forall b \in \Bbbk^{n+1}
\end{aligned}$$

Ahora, dado que

$$\begin{aligned}
&\nabla_{22} = \begin{pmatrix} \nabla_{22}^{11} & \nabla_{22}^{12} \\ \nabla_{22}^{21} & \nabla_{22}^{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Bbbk^{n+1}) \\
\Longrightarrow\ &\forall b = (b_1, b_2) \in \Bbbk^{n+1}, \nabla_{22}\lambda_b = \begin{pmatrix} \nabla_{22}^{11}\lambda_{b_1} & b_2\nabla_{22}^{11} & b_2\nabla_{22}^{11} + b_2\nabla_{22}^{12} \\ \nabla_{22}^{21}\lambda_{b_1} & b_2\nabla_{22}^{21} & b_2\nabla_{22}^{21} + b_2\nabla_{22}^{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

en particular

$$\begin{aligned}
&\nabla_{22}\lambda_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & \nabla_{22}^{11} & \nabla_{22}^{11} + \nabla_{22}^{12} \\ 0 & \nabla_{22}^{21} & \nabla_{22}^{21} + \nabla_{22}^{22} \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk^n, \Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ 0 & 0 & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix} \\
\Longrightarrow\ &\nabla_{22}^{21} = 0 \\
\Longrightarrow\ &\boxed{\nabla_{22} = \begin{pmatrix} \nabla_{22}^{11} & \nabla_{22}^{12} \\ 0 & \nabla_{22}^{22} \end{pmatrix} \in \Phi}.
\end{aligned}$$

Obtenemos finalmente que todo operador diferencial $\nabla \in \mathrm{Z}^2(\Gamma_{(1,n)})$ verifica

$$\begin{aligned}
&\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{D}^1(\Gamma_n) & 0 & 0 \\ \Bbbk^{n+1}\,\mathrm{D}^1(\Gamma_n) + \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} + \Phi\Bbbk^{n+1} & \Phi & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^{n+1}) \\ 0 & 0 & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix} \\
\Longrightarrow\ &\boxed{\nabla \in \mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)})}.
\end{aligned}$$

Demostramos de esta forma que $\mathrm{Z}^2(\Gamma_{(1,n)}) \subseteq \mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)})$. □

Corolario 3.3.17. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifican las siguientes propiedades*

1. $\dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{(1,n)}) = 6n + 9$,
2. $\dim \mathrm{Z}^1(\Gamma_{(1,n)}) = n^2 + 6n + 8$, $\quad \dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)}) = 3n^2 + 6n + 6$.
3. $\dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{(1,n)}) = 3 \dim \mathrm{D}^0(\Gamma_n)$, $\quad \dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)}) = 3 \dim \mathrm{D}^1(\Gamma_n)$.

Demostración. Para ver el `item(1)`, basta recordar que

$$\mathrm{D}^0(\Gamma_{(1,n)}) = \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(\Gamma_n) & 0 & 0 \\ \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} & \Gamma_n^{op} & \Bbbk^{n+1} \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix},$$

$$\Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} = \left\{ \begin{pmatrix} * & \nabla_{12} & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}(\Gamma_n, \Bbbk^{n+1}) \mid \nabla_{12} \in \Bbbk\{\mathrm{Id}_{\Bbbk^n}\} \right\}$$

$$\Longrightarrow \dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{(1,n)}) = \dim \mathrm{D}^0(\Gamma_n) + \dim \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} + \dim \Gamma_n^{op} + \dim \Bbbk^{n+1} + \dim \Bbbk.$$

Ahora, del `Corol.`3.2.12 obtenemos que $\dim \mathrm{D}^0(\Gamma_n) = 2n + 3$. Del `Lema.`3.3.10 sabemos que $\dim \Bbbk^{n+1}\Gamma_n^{op} = 2n + 2$. Y de la `Prop.`3.2.2 se sigue $\dim \Gamma_n^{op} = n + 2$. De esta forma,

$$\begin{aligned} &\dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{(1,n)}) = (2n+3) + (2n+2) + (n+2) + (n+1) + 1 \\ \Longrightarrow\ &\boxed{\dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{(1,n)}) = 6n + 9}. \end{aligned}$$

Ahora, para calcular la dimensión de $\mathrm{Z}^1(\Gamma_{(1,n)})$ y demostrar el `item(2)`, basta recordar el `Teor.`3.3.13 con el cual obtenemos, que para cada $\nabla \in \mathrm{End}(\Bbbk^n)$ y para cualquier par de escalares $r, s \in \Bbbk$,

$$\mathrm{Z}^1(\Gamma_{(1,n)}) = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & \nabla & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} * & \lambda_s & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \nabla + \lambda_r & * \\ 0 & * \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)}) \right\}.$$

donde, $r, s \in \Bbbk$, y

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & \nabla & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_n) = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk) \\ \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) \\ \mathrm{End}(\Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * & \lambda_s & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}(\Gamma_n, \Bbbk^{n+1}) = \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ \mathrm{End}(\Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \nabla + \lambda_r & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Bbbk^{n+1}) = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Se sigue entonces

$$\begin{aligned} &\dim \mathrm{Z}^1(\Gamma_{(1,n)}) = (n^2 + 2n + 2) + (2n+2) + (n+2) + (n+1) + 1 \\ \Longrightarrow\ &\boxed{\dim \mathrm{Z}^1(\Gamma_{(1,n)}) = n^2 + 6n + 8}. \end{aligned}$$

Por otra parte, para calcular la dimisión de $\mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)})$, basta recordar el `Teor.`3.3.14, donde

$$\mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)}) = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)}) \right\}.$$

Similarmente, se deduce

$$\dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)}) = (n^2+2n+2) + (n^2+2n+1) + (n^2+n+1) + (n+1) + 1$$
$$\Longrightarrow \boxed{\dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)}) = 3n^2+6n+6}.$$

Finalmente, el `item(3)` es una consecuencia inmediata de los `items(1) y (2)`, junto con el `Corol.`3.2.12, en el cual se calcularon las dimensiones

$$\dim \mathrm{D}^0(\Gamma_n) = 2n+3, \text{ y }, \dim \mathrm{D}^1(\Gamma_n) = n^2+2n+2$$
$$\Longrightarrow \dim \mathrm{D}^0(\Gamma_{(1,n)}) = 6n+9 = 3(2n+3)$$
$$\Longrightarrow \dim \mathrm{D}^1(\Gamma_{(1,n)}) = 3n^2+6n+6 = 3(n^2+2n+2).$$

□

Cerramos esta subsección mencionando, que el estudio del espacios de las λ-derivaciones será tratado nuevamente en el capítulo cuatro con mayor generalidad.

SECCIÓN 3.4

Matrices Triangulares sobre un cuerpo, $\mathrm{ML}_n(\Bbbk)$

En esta sección estudiaremos los operadores diferenciales del álgebra de caminos inducida por el carcaj

$$\bullet_n \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \bullet_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\alpha_2} \bullet_2 \xrightarrow{\alpha_1} \bullet_1 .$$

Dicha álgebra de caminos es isomorfa al álgebra de matrices triangulares inferiores sobre un cuerpo $\Bbbk$, de orden $n \times n$, denotada como $\mathrm{ML}_n(\Bbbk)$, ver `Prop.`3.4.1.

Nuestra primera motivación, consiste en consolidar un procedimiento efectivo y sistemático para calcular el anillo de operadores diferenciales. Dicho procedimiento lo hemos implementado por primera vez con $\mathrm{D}(\Gamma_{\Bbbk}(\bullet \to \bullet \xrightarrow{n} \bullet))$, y este consta de los siguiente pasos; primero, iniciamos con una identificación matricial formal, en este caso,

$$\mathrm{ML}_{n+1}(\Bbbk) = \begin{bmatrix} \mathrm{ML}_n(\Bbbk) & 0 \\ \Bbbk^n & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Segundo, identificamos el álgebra de endomorfismo con un álgebra de matrices formales,

$$\mathrm{End}(\mathrm{ML}_{n+1}) = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\mathrm{ML}_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \mathrm{ML}_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \mathrm{ML}_n) \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Y finalmente, describimos las relaciones existentes entre $\mathrm{D}(\mathrm{ML}_{n+1}(\Bbbk))$, $\mathrm{D}(\mathrm{ML}_n(\Bbbk))$ y $\mathrm{D}({}_{\Bbbk}\Bbbk^n)$, teniendo presente las estructuras heredadas por sus respectivas inyecciones en $\mathrm{D}(\mathrm{ML}_{n+1}(\Bbbk))$.

Vale la pena mencionar que en el artículo [SIK16], los matemáticos M. Sumanth Datta, Uma N. Iyer y G. Koteswara Raoa, calculan el anillo de operadores diferenciales del álgebra de matrices triangulares superiores sobre un cuerpo $\mathrm{MU}_n(\Bbbk)$. En dicho trabajo, los autores exponen ingeniosamente una base de generadores para el álgebra $\mathrm{D}(\mathrm{MU}_n(\Bbbk))$. De esta forma, su demostración queda fuertemente confinada al contexto de $\mathrm{MU}_n(\Bbbk)$.

Como se verá en el `Capítulo` 4, las estrategias que hemos empleado para calcular el anillo de operadores diferenciales sobre estas familias de álgebras de caminos, admiten una generalización natural al contexto de las matrices triangulares formales, y más aún, brindaremos nuevos resultados sobre dichos objetos, por ejemplo, en esta sección brindaremos una descripción altamente recursiva del anillo de operadores diferénciale $\mathrm{D}(\mathrm{ML}_n(\Bbbk))$, dada por la representación matricial formal

$$\mathrm{D}(\mathrm{ML}_n) = \begin{bmatrix} \mathrm{MU}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{MU}_{21} & \mathrm{MU}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{MU}_{31} & \mathrm{MU}_{32} & \mathrm{MU}_{33} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \mathrm{MU}_{n,1} & \mathrm{MU}_{n,2} & \mathrm{MU}_{n,3} & \dots & \mathrm{MU}_{n,n} \end{bmatrix}.$$

3.4.1. Cálculos iniciales

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el carcaj

$$\mathrm{L}_n = (\bullet_n \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \bullet_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\alpha_2} \bullet_2 \xrightarrow{\alpha_1} \bullet_1).$$

constituido por un conjunto de n puntos ordenados $\mathrm{L}_{(n,0)} = \{1, 2, \dots, n\}$, como se describe en la `Def.`3.1.5. Un conjunto de $n-1$ flechas

$$\mathrm{L}_{(n,1)} = \{\alpha_i = (i+1 \mid \alpha_i \mid i) : 1 \le i \le n-1\}.$$

Luego, como el carcaj L_n es finito, acíclico y conexo entonces su álgebra de camino $\Gamma(\mathrm{L}_n)$ resulta ser finita y unitaria, con su ley de multiplicación dada por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
&\epsilon_i\epsilon_j = (i \mid\mid i)(j \mid\mid j) = \delta_{ij}\epsilon_j \\
&\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n = 1 \\
&\alpha_i\alpha_j = (i+1 \mid \alpha_i \mid i)(j+1 \mid \alpha_j \mid j) = \delta_{i(j+1)}(i+1 \mid \alpha_i\alpha_j \mid j) \\
&\epsilon_i\alpha_j = (i \mid\mid i)(j+1 \mid \alpha_j \mid j) = \delta_{i(j+1)}\alpha_j \\
&\alpha_j\epsilon_i = (j+1 \mid \alpha_j \mid j)(i \mid\mid i) = \delta_{ij}\alpha_j.
\end{aligned}$$

Por otra parte, el conjunto de flechas de longitud l, para el carcaj L_n, lo denotaremos como, $\mathrm{L}_{(n,l)}$, y este caso admite la siguiente caracterización,

$$\beta \in \mathrm{L}_{(n,l)} \Leftrightarrow \exists k \leq n \mid \beta = (k+l \mid \alpha_{k+l}\alpha_{k+l-1}\cdots\alpha_k \mid k).$$

Ahora consideremos el álgebra de matrices triangulares inferiores de orden $n \times n$,

$$\mathrm{ML}_n(\Bbbk) = \{[r_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \mid r_{ij} \in \Bbbk, r_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}.$$

Ahora veamos como de la `Prop.`3.1.2 obtenemos que $\Gamma(\mathrm{L}_n) = \mathrm{ML}_n(\Bbbk)$.

Proposición 3.4.1. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(\mathrm{L}_n) = \mathrm{ML}_n(\Bbbk)$.*

Demostración. Como ya lo mencionamos, de la `Prop.`3.1.2 sabemos que

$$\Gamma(\mathrm{L}_n) = \{[a_{ij}] \mid a_{ij} \in \epsilon_i\Gamma(\mathrm{L}_n)\epsilon_j, 1 \leq i,j \leq n\}.$$

Ahora, si $i < j$ entonces no existe cadena $\beta \in \bigcup_{l\geq 0}, \mathrm{L}_{(n,l)}$, tal que β inicie i y termine en j. Se sigue entonces que $\epsilon_i\Gamma(\mathrm{L}_n)\epsilon_j = 0$. Por otra parte, si $i \geq j$ entonces existe una única $\beta \in \bigcup_{l\geq 0}, \mathrm{L}_{(n,l)}$, tal que β inicia en i y termina en j. Se sigue entonces que

$$\epsilon_i\Gamma(\mathrm{L}_n)\epsilon_j = \Bbbk\{(i \mid \beta \mid j)\}.$$

Luego, el isomorfismo que buscamos envía a $(i \mid \beta \mid j) \mapsto E_{ij}$, donde $\{E_{ij} \mid i \geq j\}$ es la base canónica de $\mathrm{ML}_n(\Bbbk)$. □

Corolario 3.4.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$, entonces*

1. $\dim \Gamma(\mathrm{L}_n) = t_n$, $\dim \mathrm{End}(\Gamma(\mathrm{L}_n)) = t_n^2$.
2. $\dim \mathrm{H}^1(\Gamma(\mathrm{L}_n)) = 0$.
3. $\dim \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(\mathrm{L}_n)) = \dim \mathrm{Int}(\Gamma(\mathrm{L}_n)) = t_n - 1$.

Demostración. El `item(1)` se sigue fácilmente de la `Prop.`3.1.2, dado que

$$\dim \Gamma(\mathrm{L}_n) = \dim \mathrm{ML}_n(\Bbbk) = t_n$$

y a su vez, $\dim \mathrm{End}(\Gamma(\mathrm{L}_n)) = t_n^2$. Para ver el `item(2)` basta calcular

$$\begin{aligned} &Q_*//Q_1 = \{(\gamma,\alpha) \in Q_* \times Q_1 : s(\gamma) = s(\alpha), t(\gamma) = t(\alpha)\} && \texttt{Def.}3.1.7 \\ &\Longrightarrow \mathrm{L}_{(n,*)} // \mathrm{L}_{(n,1)} = \{(\alpha_i,\alpha_i) \mid 1 \leq i \leq n-1\} \\ &\dim \mathrm{H}^1(\Gamma(\mathrm{L}_n)) = 1- \mid \mathrm{L}_{(n,0)} \mid + \mid \mathrm{L}_{(n,*)} // \mathrm{L}_{(n,1)} \mid && \texttt{Prop.}3.1.4 \\ &\Longrightarrow \dim \mathrm{H}^1(\Gamma(\mathrm{L}_n)) = 1 - n + (n-1) = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, para ver el `item(3)` basta tener presente la igualdad

$$\begin{aligned} &\dim \mathrm{H}^1(\Gamma(\mathrm{L}_n)) = \dim \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(\mathrm{L}_n)) - \dim \mathrm{Int}(\Gamma(\mathrm{L}_n)) && \texttt{Prop.}3.1.3 \\ &\Longrightarrow \dim \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(\mathrm{L}_n)) = \dim \mathrm{Int}(\Gamma(\mathrm{L}_n)) \\ &\dim \mathrm{Int}(\Gamma(\mathrm{L}_n)) = \dim \Gamma(\mathrm{L}_n) - \dim \mathrm{C}(\Gamma(\mathrm{L}_n)) && \texttt{Prop.}1.1.9 \\ &\Longrightarrow \dim \mathrm{Int}(\Gamma(\mathrm{L}_n)) = t_n - 1. \end{aligned}$$

□

Cerramos esta subsección con la siguiente observación. Para el caso particular, $n = 2$ tenemos $\Gamma(\mathrm{L}_2)) = \Gamma(\bullet \to \bullet)$. Esto implica, que $\Gamma(\mathrm{L}_2))$ es justamente el álgebra de Kronecker, y como ya sabemos, todos sus operadores diferenciales son interiores. Es decir,

$$\Gamma(\mathrm{L}_2) = \Gamma(\bullet \to \bullet) = \mathrm{ML}_2(\Bbbk) = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ \Bbbk & \Bbbk \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D}^m(\mathrm{ML}_2(\Bbbk)) = \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_2(\Bbbk)), \forall m \geq 0$$

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_2(\Bbbk)) = \begin{bmatrix} \Bbbk & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Bbbk \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Mostraremos a lo largo de toda esta sección que las propiedades previamente mencionadas se extienden a todas las álgebras $\Gamma(\mathrm{L}_n)$, y por lo tanto, a las álgebras de matrices triangulares $\mathrm{ML}_n(\Bbbk)$. Por comodidad, en lo sucesivo denotaremos al álgebra de matrices triangulares inferiores de ornde $n \times n$ sobre un cuerpo $\Bbbk$, con ML_n.

3.4.2. Operadores diferenciales para $\mathrm{ML}_n(\Bbbk)$

Iniciaremos esta subsección identificando al álgebra de matrices triangulares ML_n con una matriz triangular formal, la cual se obtiene de una descomposición por bloques.

Proposición 3.4.3. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\mathrm{ML}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathrm{ML}_n & 0 \\ \Bbbk^n & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Demostración. Primero, al álgebra de matrices triangulares ML_{n+1} se deja descomponer por bloques en la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathrm{ML}_n & 0 \\ \Bbbk^n & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Ahora, para que la identificación de ML_{n+1} como álgebra de matrices formales este bien definida, hace falta mostrar que el bloque correspondiente a $\Bbbk^n$ admite una estructura natural de $(\Bbbk, \mathrm{ML}_n)$-bimódulo. Para ver esto, consideremos $\{e_l \in \Bbbk^n \mid 1 \leq l \leq n\}$ base canónica de $\Bbbk^n$, ordenada de manera natural, junto a $\{E_{ij} \in \mathrm{ML}_n \mid 1 \leq j \leq i \leq n\}$ base para ML_n, con el orden lexicográfico, esto es,

$$(i,j) \leq (h,k) \Longleftrightarrow i < h \quad \text{ó} \quad i = h \quad \text{y} \quad j \leq k.$$

Luego recordemos las siguientes relaciones estructurales:

$$E_{ij}E_{hk} = \delta_{jh}\, E_{ik}, \quad e_l E_{ij} = \delta_{li}\, e_j.$$

De esta forma, se definen las acciones de $(\Bbbk, \mathrm{ML}_n)$ sobre $\Bbbk^n$, donde,

$$
\begin{aligned}
v = \sum_{l=1}^{n} v_l e_l \in \Bbbk^n, \quad m = \sum_{1\le j\le i\le n} m_{ij}E_{ij} \in \mathrm{ML}_n, \quad \forall r, v_l, m_{ij} \in \Bbbk \\
\implies r\,v\,m = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j\le i} r v_l m_{ij} e_l E_{ij} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j\le i} r v_l m_{ij}\delta_{li} e_j \\
\implies r\,v\,m = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{j\le l} r v_l m_{lj}\right) e_j.
\end{aligned}
$$

□

Ahora observemos que si $t \in \mathrm{ML}_{n+1}$, entonces existe una única terna $(m, v, t) \in \mathrm{ML}_n \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$, tal que

$$
t = (m, v, r) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ v & r \end{pmatrix} \quad y \quad 1 = (1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Por otra parte, si $t_i = (m_i, v_i, r_i) \in \mathrm{ML}_n \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$, entonces la multiplicación admite las siguientes expresión

$$
\begin{aligned}
t_1t_2 = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ v_1 & r_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_2 & 0 \\ v_2 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1m_2 & 0 \\ v_1m_2 + r_1v_2 & r_1r_2 \end{pmatrix} \\
\implies t_1t_2 = (m_1, v_1, r_1)(m_2, v_2, r_2) = (m_1m_2, v_1m_2 + r_1v_2, r_1r_2).
\end{aligned}
$$

Luego, si consideramos

$$
\mathrm{ML}_{n+1} = \mathrm{ML}_n \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk
$$

entonces el álgebra de endomorfismo admite la siguiente identificación matricial,

$$
\mathrm{End}(\mathrm{ML}_{n+1}) = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\mathrm{ML}_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \mathrm{ML}_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \mathrm{ML}_n) \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.
$$

Nuestro siguiente objetivo es calcular un conjunto de generadores para el anillo de operadores diferenciales interiores de ML_{n+1}. Para ello, basta estudiar los homomorfismos multiplicar a izquierda, $\lambda : \mathrm{ML}_{n+1} \to \mathrm{End}(\mathrm{ML}_{n+1})$, y el homomorfismo multiplicar a derecha, $\rho : \mathrm{ML}_{n+1}^{op} \to \mathrm{End}(\mathrm{ML}_{n+1})$.

Proposición 3.4.4. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces el homomorfismo $\lambda : \mathrm{ML}_{n+1} \to \mathrm{End}(\mathrm{ML}_{n+1})$, toma a cada elemento $t = (m, v, r) \in \mathrm{ML}_{n+1} = \mathrm{ML}_n \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$, y le asigna el operador*

$$
\lambda_{(m,v,r)} = \begin{pmatrix} \lambda_m & 0 & 0 \\ \lambda_v & r\,\mathrm{Id}_{\Bbbk^n} & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\mathrm{ML}_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \mathrm{ML}_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \mathrm{ML}_n) \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.
$$

Similarmente, el homomorfismo $\rho : \mathrm{ML}_{n+1}^{op} \to \mathrm{End}(\mathrm{ML}_{n+1})$, toma a cada elemento $t = (m, v, r) \in \mathrm{ML}_{n+1} = \mathrm{ML}_n \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$, y le asigna el operador

$$
\rho_{(m,v,r)} = \begin{pmatrix} \rho_m & 0 & 0 \\ 0 & \rho_m & \lambda_v \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\mathrm{ML}_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \mathrm{ML}_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \mathrm{ML}_n) \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.
$$

Demostración. Para cada terna $(x,y,z) \in \mathrm{ML}_{n+1}$, se tiene que

$$\lambda_{(m,v,r)}((x,y,z)) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ v & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx & 0 \\ vx+ry & rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_m & 0 & 0 \\ \lambda_v & \lambda_r & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Similarmente,

$$\rho_{(m,v,r)}((x,y,z)) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ v & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xm & 0 \\ ym+zv & zr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_m & 0 & 0 \\ 0 & \rho_m & \lambda_v \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

□

Corolario 3.4.5. *si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\mathrm{ML}_{n+1} = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_m & 0 & 0 \\ \lambda_v & \lambda_r & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathrm{ML}_{n+1}) \mid (m,v,r) \in \mathrm{ML}_n \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk \right\}$$

$$\mathrm{Z}^0(\mathrm{ML}_{n+1}) = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} \rho_m & 0 & 0 \\ 0 & \rho_m & \lambda_v \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathrm{ML}_{n+1}) \mid (m,v,r) \in \mathrm{ML}_n \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk \right\}.$$

Demostración. Se usa primero la `Prop.`3.4.4 y luego, hace falta ver que los homomorfismo $\lambda : \mathrm{ML}_{n+1} \to \mathrm{End}(\mathrm{ML}_{n+1})$ y $\rho : \mathrm{ML}_{n+1}^{op} \to \mathrm{End}(\mathrm{ML}_{n+1})$, son inyectivos. Para ello, basta replicar los cálculos realizado en las demostración del `Corol.`3.3.5 y del `Corol.`3.3.7, teniendo presente que las variables $(m,v,r) \in \mathrm{ML}_n \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$. □

Teorema 3.4.6. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_{n+1}) = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{m_1}\rho_{m_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\rho_{m_3} & \rho_{m_4} & \lambda_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathrm{ML}_{n+1}) \mid m_i \in \mathrm{ML}_n, b_j \in \Bbbk^n, r \in \Bbbk \right\}.$$

Demostración. Basta recrear los cálculos de la demostración presentada en el `Teor.`3.3.8, junto con el cambio pertinente de las variables $m_i \in \mathrm{ML}_n, b_j \in \Bbbk^n, r \in \Bbbk$. □

Corolario 3.4.7. *Si $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_{n+1}) = \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n) & 0 & 0 \\ \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op} & \mathrm{ML}_n^{op} & \Bbbk^n \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Demostración. Nuevamente, basta recrear los cálculos propuestos en el `Corol.`3.3.9, donde

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n) = \mathrm{ML}_n\,\mathrm{ML}_n^{op} = \mathrm{Gen}\{\lambda_{m_1}\rho_{m_2} \in \mathrm{End}(\mathrm{ML}_n) \mid m_i \in \mathrm{ML}_n\}$$
$$\Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op} = \mathrm{Sum}\{\lambda_{b_1}\rho_{m_3} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n) \mid b_1 \in \Bbbk^n, m_3 \in \mathrm{ML}_n\}$$
$$\mathrm{ML}_n^{op} = \mathrm{Gen}\{\rho_{m_4} \in \mathrm{End}(\Bbbk^n) \mid m_4 \in \mathrm{ML}_n\}$$
$$\Bbbk^n = \mathrm{Sum}\{\lambda_{b_2} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \mid b_2 \in \Bbbk^n\}$$
$$\mathrm{End}(\Bbbk) = \mathrm{Gen}\{r \in \Bbbk\} = \Bbbk$$

. □

Para encarar el resultado central de está sección, el cual consiste en demostrar que todos los operadores diferenciales del álgebra ML_n son interiores, veamos antes las siguientes observaciones.

Lema 3.4.8. *Si $n \in \mathbb{N}$, y $\{e_i \in \Bbbk^n \mid 1 \le i \le n\}$ es la base canónica de $\Bbbk^n$, entonces*

$$\mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) = \mathrm{Sum}\{\lambda_{e_i} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \mid 1 \le i \le n\}.$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n)$ un transformación $\Bbbk$-lineal. Luego, existen $\varphi_i \in \Bbbk$ tales que $\varphi(1) = \sum_{i=1}^n \varphi_i e_i$. Se sigue entonces,

$$\varphi(t) = t\varphi(1) = \sum_{i=1}^{n} t\varphi_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i e_i)t\,, \forall t \in \Bbbk \iff \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \lambda_{e_i} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n).$$

□

Por otra parte, si consideremos la base $\{E_{ij} \in \mathrm{End}(\Bbbk^n) \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le n\}$, con el orden lexicográfico para $\mathrm{End}(\Bbbk^n)$, donde, más que una base para el espacio vectorial, es un conjunto de generadores para el álgebra de endomorfismo, entonces

$$\mathrm{End}(\Bbbk^n) = \mathrm{Gen}\{E_{ij} \in \mathrm{End}(\Bbbk^n) \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le n\}.$$

Lema 3.4.9. *Sea $n \in \mathbb{N}$, y $\{E_{ij} \in \mathrm{End}(\Bbbk^n) \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le n\}$ base canónica de $\mathrm{End}(\Bbbk^n)$, entonces $\mathrm{End}(\Bbbk^n) = \mathrm{ML}_n^{op} \oplus \mathrm{W}_{22}$, donde*

$$\begin{aligned} \mathrm{ML}_n^{op} &= \mathrm{Sum}\left\{E_{ij} \in \mathrm{End}(\Bbbk^n) \mid 1 \le i \le j \le n\right\} \\ \mathrm{W}_{22} &= \mathrm{Sum}\left\{E_{ij} \in \mathrm{End}(\Bbbk^n) \mid n \ge i > j \ge 1\right\}. \end{aligned}$$

Demostración. Recordemos que $\mathrm{ML}_n^{op} = \{\rho_m \in \mathrm{End}(\Bbbk^n) \mid m \in \mathrm{ML}_n\}$. Luego, si $m \in \mathrm{ML}_n$, tal que $m = [m_{ij}]_{1 \le j \le i \le n}$ entonces

$$\begin{aligned} \rho_m(v) = (v_1, \ldots, v_n)[m_{ij}] = [m_{ij}]^t \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \forall v \in \Bbbk^n \\ \iff \rho_m = \sum_{1 \le i \le j \le n} m_{ji}\, E_{ij} \in \mathrm{End}(\Bbbk^n). \end{aligned}$$

Se deduce entonces que $\mathrm{ML}_n^{op} = \mathrm{Sum}\left\{E_{ij} \in \mathrm{End}(\Bbbk^n) \mid 1 \le i \le j \le n\right\}$ y por otra parte, $\mathrm{W}_{22} = \mathrm{Sum}\left\{E_{ij} \in \mathrm{End}(\Bbbk^n) \mid n \ge i > j \ge 1\right\}$ es un sumando directo del subespacio ML_n^{op} en $\mathrm{End}(\Bbbk^n)$. □

Nuevamente, consideremos $\{e_l \in \Bbbk^n \mid 1 \le l \le n\}$ base canónica de $\Bbbk^n$, ordenada de manera natural, junto a $\{E_{ij} \in \mathrm{ML}_n \mid 1 \le j \le i \le n\}$ base para ML_n, con el orden lexicográfico. Luego podemos inducir naturalmente una base para el espacio $\mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n)$, de la siguiente manera. Para cada terna (l, i, j) tales que $1 \le l \le n$ y $1 \le j \le i \le n$, se define la transformación $\Bbbk$-lineal $E_{ij}^l \in \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n)$, donde

$$\begin{aligned} E_{ij}^l(E_{hk}) = \delta_{hi}\, \delta_{kj}\, e_l,\ \forall (h,k) : 1 \le k \le h \le n \\ \iff E_{ij}^l(E_{hk}) = \begin{cases} e_l & \text{si } (i,j) = (h,k) \\ 0 & \text{si } (i,j) \neq (h,k) \end{cases}. \end{aligned}$$

Se deduce con naturalidad que el conjunto

$$\{E^l_{ij} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \mathbb{k}^n) \mid 1 \leq l \leq n, 1 \leq j \leq i \leq n\}$$

es una base ordenada para el espacio vectorial, $\mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \mathbb{k}^n)$, donde la relación de orden vuelve a ser el lexicográfico, es decir,

$$(l,i,j) \leq (l',i',j') \Longleftrightarrow l < l' \text{ ó } l = l' \text{ y } i < i' \text{ ó } (l,i) = (l',i') \text{ y } j \leq j'.$$

Lema 3.4.10. *Sea $n \in \mathbb{N}$, y $\{E^l_{ij} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \mathbb{k}^n) \mid 1 \leq l \leq n, 1 \leq j \leq i \leq n\}$ la base ordenada de $\mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \mathbb{k}^n)$, entonces $\mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \mathbb{k}^n) = \mathbb{k}^n\,\mathrm{ML}_n^{op} \oplus \mathrm{W}_{21}$, donde,*

$$\mathbb{k}^n\,\mathrm{ML}_n^{op} = \mathrm{Sum}\{E^\gamma_{\alpha\beta} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \mathbb{k}^n) \mid 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha\}$$

$$\mathrm{W}_{21} = \mathrm{Sum}\{E^\gamma_{\alpha\beta} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \mathbb{k}^n) \mid 1 \leq \alpha \leq n, n \geq \gamma > \beta, 1 \leq \beta \leq \alpha\}.$$

Demostración. Recordemos

$$\mathbb{k}^n\,\mathrm{ML}_n^{op} = \{\lambda_v \rho_m \in \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \mathbb{k}^n) \mid v \in \mathbb{k}^n, m \in \mathrm{ML}_n\}$$

Luego, para cada $e_\alpha \in \mathbb{k}^n$, con $1 \leq \alpha \leq n$ y $m = \sum_{1\leq\gamma\leq\beta\leq n} m_{\beta\gamma} E_{\beta\gamma}$, se verifican las siguientes igualdades, si $x = \sum_{1\leq k\leq h\leq n} x_{hk} E_{hk}$ entonces

$$\begin{aligned}
(\lambda_{e_\alpha}\rho_m)(x) &= e_\alpha\, x\, m \\
&= \sum_{k\leq h}\sum_{\gamma\leq\beta} e_\alpha\,(x_{hk}\,E_{hk})\,(m_{\beta\gamma}\,E_{\beta\gamma}) = \sum_{k\leq h}\sum_{\gamma\leq\beta} (x_{hk} m_{\beta\gamma})\, e_\alpha\, E_{hk}\, E_{\beta\gamma} \\
&= \sum_{k\leq h}\sum_{\gamma\leq\beta} (x_{hk} m_{\beta\gamma})\, \delta_{h\alpha}\, e_k\, E_{\beta\gamma} = \sum_{k\leq h}\sum_{\gamma\leq\beta} (x_{hk} m_{\beta\gamma})\, \delta_{h\alpha}\delta_{k\beta}\, e_\gamma.
\end{aligned}$$

Ahora, notemos que

$$\begin{cases} \delta_{h\alpha}\delta_{k\beta}\, e_\gamma = E^\gamma_{\alpha\beta}(E_{hk}) & \gamma \leq \beta \leq \alpha \\ \delta_{h\alpha}\delta_{k\beta}\, e_\gamma = 0 & \texttt{e.o.p} \end{cases}.$$

Se sigue entonces

$$\begin{aligned}
(\lambda_{e_\alpha}\rho_m)(x) &= \sum_{\gamma\leq\beta\leq\alpha}\sum_{k\leq h} (x_{hk} m_{\beta\gamma})\, E^\gamma_{\alpha\beta}(E_{hk}) \\
&= \sum_{\gamma\leq\beta\leq\alpha}\sum_{k\leq h} m_{\beta\gamma}\, E^\gamma_{\alpha\beta}\,(x_{hk} E_{hk}) \\
&= \sum_{\gamma\leq\beta\leq\alpha} \left(m_{\beta\gamma}\, E^\gamma_{\alpha\beta}\right)(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier $\alpha = 1, \ldots, n$ obtenemos que,

$$\boxed{\lambda_{e_\alpha}\rho_m = \sum_{1\leq\gamma\leq\beta\leq\alpha\leq n} m_{\beta\gamma}\, E^\gamma_{\alpha\beta} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \mathbb{k}^n)}.$$

Se deduce entonces que

$$\Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op} = \mathrm{Sum}\{E_{\alpha\beta}^{\gamma} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n) \mid 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha\}$$

y a su vez,

$$\mathrm{W}_{21} = \mathrm{Sum}\{E_{\alpha\beta}^{\gamma} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n) \mid 1 \leq \alpha \leq n, n \geq \gamma > \beta, 1 \leq \beta \leq \alpha\}$$

es un sumando directo del subespacio $\Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op}$ en $\mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n)$. □

Teorema 3.4.11. *[SIK16, pg. 7 - Theorem 4.1] Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces todos los operadores diferenciales del álgebra ML_n son interiores.*

Hacemos notar, que la Dra. Iyer y compañía [SIK16], brindan un resultado equivalente en el contexto de las matrices triangulares superiores MU_n. No obstante, nosotros brindamos una demostración distinta, aprovechando la estructura intrínseca propinada por la descomposición conveniente como álgebra de matrices formales.

Demostración. Gracias al `Corol.`1.2.4, ya tenemos que

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n) \subseteq \mathrm{Z}^1(\mathrm{ML}_n).$$

Basta ver entonces la otra inclusión, para ello, razonemos por inducción sobre el parámetro $n \in \mathbb{N}$. Como ya lo hemos discutido al inicio de esta sección, para $n = 1$ tenemos que

$$\mathrm{ML}_2 = \Gamma(\mathrm{L}_2) = \Gamma(\bullet \to \bullet) \text{ y por } \texttt{Corol.}3.2.12$$
$$\implies \mathrm{D}^m(\mathrm{ML}_2) = \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_2)\,, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ahora supongamos que el anillo de operadores diferenciales del álgebra ML_n son todos interiores, esto es,

$$\mathrm{D}^m(\mathrm{ML}_n) = \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n(\Bbbk))\,, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Veamos entonces, que los operadores diferenciales del álgebra ML_{n+1} también son interiores. Sea $\nabla \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{ML}_{n+1})$, se sigue de la definición de operadores diferencial 1-central, que

$$[\nabla, \lambda_t] \in \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_{n+1})\,, \forall t \in \mathrm{ML}_{n+1}\,.$$

Por otra parte, al considerar $\mathrm{ML}_{n+1} = \mathrm{ML}_n \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$ sabemos que el operador ∇ admite una expresión matricial de la forma

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & \nabla_{12} & \nabla_{13} \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ \nabla_{31} & \nabla_{32} & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{End}(\mathrm{ML}_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \mathrm{ML}_n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \mathrm{ML}_n) \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n) & \mathrm{End}(\Bbbk^n) & \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n) \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk) & \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk) & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Luego, gracias a la `Prop.`3.4.4, sabemos que, para cada $t = (m, v, r) \in \mathrm{ML}_n \oplus \Bbbk^n \oplus \Bbbk$ el operadora λ_t admite la expresión matricial,

$$\lambda_{(m,v,r)} = \begin{pmatrix} \lambda_m & 0 & 0 \\ \lambda_v & \lambda_r & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

Se sigue entonces,

$$[\nabla, \lambda_{(m,v,r)}] = \begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_m] + \nabla_{12}\lambda_v & (\lambda_r - \lambda_m)\nabla_{12} & (\lambda_r - \lambda_m)\nabla_{13} \\ \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_r) + \nabla_{22}\lambda_v - \lambda_v\nabla_{11} & -\lambda_v\nabla_{12} & -\lambda_v\nabla_{13} \\ \nabla_{31}(\lambda_m - \lambda_r) + \nabla_{32}\lambda_v & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, recordemos la expresión matricial de $\mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_{n+1})$, dada en el `Corol.`3.4.7,

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_{n+1}) = \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n) & 0 & 0 \\ \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op} & \mathrm{ML}_n^{op} & \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \\ 0 & 0 & \mathrm{End}(\Bbbk) \end{bmatrix}.$$

Ahora, dado que $[\nabla, \lambda_t] \in \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_{n+1})\,, \forall t \in \mathrm{ML}_{n+1}$, entonces obtenemos las siguientes restricciones para el operador ∇,

$$\begin{cases} (\lambda_r - \lambda_m)\nabla_{12} = (\lambda_r - \lambda_m)\nabla_{13} = \nabla_{31}(\lambda_m - \lambda_r) + \nabla_{32}\lambda_v = 0 \\ [\nabla_{11}, \lambda_m] + \nabla_{12}\lambda_v \in \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n) \\ \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_r) + \nabla_{22}\lambda_v - \lambda_v\nabla_{11} \in \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op} \\ -\lambda_v\nabla_{12} \in \mathrm{ML}_n^{op}, \quad -\lambda_v\nabla_{13} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk,\Bbbk^n) \end{cases}.$$

Vale mencionar, que las ideas y cálculo que se exponen a continuación, son similares a los que realizamos en la demostración del `Teor.`3.3.16. Teniendo este referente, nuestro primer paso consiste en demostrar que

$$\nabla_{12} = \nabla_{13} = \nabla_{31} = \nabla_{32} = 0.$$

Para ver esto, consideremos

$$\lambda_m = 0, r = 1$$
$$\implies \begin{cases} \nabla_{12} = (1-0)\nabla_{12} = (\lambda_r - \lambda_m)\nabla_{12} = 0 \implies \boxed{\nabla_{12} = 0} \\ \nabla_{13} = (1-0)\nabla_{13} = (\lambda_r - \lambda_m)\nabla_{13} = 0 \implies \boxed{\nabla_{13} = 0} \end{cases}$$

Similarmente,

$$\lambda_m = \lambda_v = 0, r = -1$$

$$\implies \begin{cases} \nabla_{31} = \nabla_{31}(0+1) + \nabla_{32}0 = \nabla_{31}(\lambda_m - r) + \nabla_{32}\lambda_v = 0 \implies \boxed{\nabla_{31} = 0} \\ \nabla_{32}(v) = (\nabla_{32}\lambda_v)(1) = (\nabla_{31}(\lambda_m - \lambda_r) + \nabla_{32}\lambda_v)\,(1) = 0 \implies \boxed{\nabla_{32} = 0} \\ \nabla_{21} = \nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_r) + \nabla_{22}\lambda_v - \lambda_v\nabla_{11} \in \Bbbk^{n+1}\,\mathrm{ML}_n^{op} \implies \boxed{\nabla_{21} \in \Bbbk^{n+1}\,\mathrm{ML}_n^{op}} \end{cases}.$$

Nuestro segundo paso es usar la restricción impuesta sobre ∇, sabiendo que $\nabla_{12} = 0$,

$$[\nabla_{11}, \lambda_m] \in \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n)\,, \forall m \in \mathrm{ML}_n \implies \nabla_{11} \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{ML}_n)$$

y gracias a la hipótesis inductiva obtenemos que

$$\mathrm{Z}^1(\mathrm{ML}_n) = \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n) \implies \boxed{\nabla_{11} \in \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n)}.$$

El tercer paso consiste en usar la otra restricción sobre ∇,

$$\nabla_{21}(\lambda_m - \lambda_r) + \nabla_{22}\lambda_v - \lambda_v\nabla_{11} \in \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op}$$

y considerar $(m, r) \in \mathrm{ML}_n \oplus \Bbbk$ tales que, $(\lambda_m - \lambda_r) = 0$, para obtener así,

$$\nabla_{22}\lambda_v - \lambda_v\nabla_{11} \in \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op}\,, \forall v \in \Bbbk^n.$$

Ahora exponemos la parte más delicada de la demostración, donde haremos el cálculo explícito de la expresión matricial $\nabla_{22}\lambda_v - \lambda_v\nabla_{11}$. Para esto, usaremos los `Lemas` enunciados al inicio de la subsección. Sinteticemos lo que ya sabemos del operador ∇ hasta el momento:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\mathrm{ML}_{n+1}) \text{ tal que}$$

$$\begin{cases} \nabla_{11} \in \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n) \implies \exists m_i \in \mathrm{ML}_n : \nabla_{11} = \lambda_{m_1}\rho_{m_2} \\ \nabla_{21} \in \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op} \implies \exists v_1 \in \Bbbk^n, \exists m_3 \in \mathrm{ML}_n : \nabla_{21} = \lambda_{v_1}\rho_{m_3} \\ \nabla_{23} \in \mathrm{Hom}(\Bbbk, \Bbbk^n), (\texttt{ Lema.}3.4.8\ ) \implies \exists v_2 \in \Bbbk^n : \nabla_{23} = \lambda_{v_2} \\ \nabla_{33} \in \mathrm{End}(\Bbbk) \implies \exists s \in \Bbbk : \nabla_{33} = \lambda_s \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{22} \in \mathrm{End}(\Bbbk^n), (\texttt{ Lema.}3.4.9\ ) \implies \exists r_0, s_{\alpha\beta} \in \Bbbk \text{ tales que,} \\ \qquad\qquad \nabla_{22} = r_0\rho_{m_4} + \sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta} \in \mathrm{ML}_n^{op}(\Bbbk) \oplus W_{22} \\ \nabla_{22}\lambda_v - \lambda_v\nabla_{11} \in \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op}(\Bbbk)\,, \forall v \in \Bbbk^n \end{cases}$$

Se sigue entonces, que para cada $v \in \Bbbk^n$

$$\begin{aligned} \nabla_{22}\lambda_v - \lambda_v\nabla_{11} &= \left(r_0\rho_{m_4} + \sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}\right)\lambda_v - \lambda_v(\lambda_{m_1}\rho_{m_2}) \\ &= (r_0\rho_{m_4}\lambda_v - \lambda_v\lambda_{m_1}\rho_{m_2}) + \sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}\lambda_v \\ &= (\lambda_{r_0 v}\rho_{m_4} - \lambda_{v m_1}\rho_{m_2}) + \sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}\lambda_v. \end{aligned}$$

Notemos que para cerrar con la demostración basta ver que los escalares

$$s_{\alpha\beta} = 0\,, \forall\beta < \alpha \implies \nabla_{22} = r_0\rho_{m_4} \in \mathrm{ML}_n^{op}\,.$$

Para lograr nuestro objetivo usaremos el `Lema.`3.4.10, en donde, tenemos la descomposición $\mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n) = \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op} \oplus \mathrm{W}_{21}$, tal que,

$$\mathrm{W}_{21} = \mathrm{Sum}\{E_{\alpha\beta}^{\gamma} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n) \mid 1 \le \alpha \le n, n \ge \gamma > \beta, 1 \le \beta \le \alpha\}.$$

De los cálculos anteriores se deduce

$$\begin{aligned} &\nabla_{22}\lambda_v - \lambda_v\nabla_{11} \in \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op},\ \text{y}\ , (\lambda_{r_0 v}\rho_{m_4} - \lambda_{v m_1}\rho_{m_2}) \in \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op} \\ &\implies \sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}\lambda_v = (\nabla_{22}\lambda_v - \lambda_v\nabla_{11}) - (\lambda_{r_0 v}\rho_{m_4} - \lambda_{v m_1}\rho_{m_2}) \\ &\implies \boxed{\sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}\lambda_v \in \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op}}. \end{aligned}$$

Por otra parte, para cada elemento de la base canónica $e_\alpha \in \Bbbk^n$, tenemos que $\lambda_{e_\alpha}\rho_m \in \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_{n+1}$, y del `Lema.`3.4.10 obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} m = \sum_{j\le i} m_{ij}E_{ij} &\implies \lambda_{e_\alpha}\rho_m = \sum_{1\le j\le i\le\alpha} m_{ij}E_{\alpha i}^{j} \\ 1 = \sum_{j=1}^{n} E_{jj} &\implies \boxed{\lambda_{e_\alpha} = \lambda_{e_\alpha}\rho_1 = \sum_{1\le j\le\alpha\le n} E_{\alpha j}^{j}}. \end{aligned}$$

Ahora, la composición entre operadores $E_{ij} \in \mathrm{End}(\Bbbk^n)$ y $E^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n(\Bbbk), \Bbbk^n)$ se expresa de la siguiente manera,

$$
\begin{aligned}
&E_{ij}E^{\gamma}_{\alpha\beta} = \delta_{\gamma j}E^{i}_{\alpha\beta}\\
&\implies E_{\alpha\beta}\lambda_{e_i} = E_{\alpha\beta}\sum_{j\leq i} E^{j}_{ij} = \sum_{j\leq i} E_{\alpha\beta}E^{j}_{ij}\\
&\implies \boxed{E_{\alpha\beta}\lambda_{e_i} = \sum_{j\leq i} \delta_{\beta j}E^{\alpha}_{ij}}.
\end{aligned}
$$

Ya disponemos de todos los ingredientes para justificar los siguientes cálculos, si $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \in \Bbbk^n$ entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}\lambda_v &= \sum_{\beta<\alpha}\sum_{i=1}^{n} (s_{\alpha\beta}v_i)\, E_{\alpha\beta}\lambda_{e_i}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta<\alpha}\sum_{j\leq i}(s_{\alpha\beta}v_i\delta_{j\beta})E^{\alpha}_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta\leq i}\sum_{\beta<\alpha}(s_{\alpha\beta}v_i)E^{\alpha}_{i\beta}.
\end{aligned}
$$

Analicemos ahora las relaciones de orden entre los índices de la última sumatoria, en ella, tenemos que $\forall i = 1, \ldots n$ se cumple que $\alpha > \beta$ y a su vez, $\beta \leq i$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}\lambda_v \in \mathrm{Sum}\{E^{\gamma}_{\alpha\beta} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n) \mid 1 \leq \alpha \leq n, n \geq \gamma > \beta, 1 \leq \beta \leq \alpha\}\\
&\implies \boxed{\sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}\lambda_v \in \mathrm{W}_{21}}
\end{aligned}
$$

Luego, recurriendo al `Lema.`3.4.10, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n\ \Bbbk^n) = \Bbbk^n\, \mathrm{ML}_n^{op} \oplus \mathrm{W}_{21} \ \text{ y } \sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}\lambda_v \in \Bbbk^n\, \mathrm{ML}_n^{op} \cap \mathrm{W}_{21}\\
&\implies \sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}\lambda_v = 0\,, \forall v \in \Bbbk^n\\
&\implies \left(\sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}\right)(v) = \left(\sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta}\lambda_v\right)(1) = 0\,, \forall v \in \Bbbk^n\\
&\implies \sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta} = 0 \ \text{ y sabemos que } \{E_{\alpha\beta}\} \text{ es un conjunto L.I en } \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n)\\
&\implies \boxed{s_{\alpha\beta} = 0\,, 1 \leq \beta < \alpha \leq n}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, el operador $\nabla_{22} = r_0\rho_{m_4} + \sum_{\beta<\alpha} s_{\alpha\beta}E_{\alpha\beta} = r_0\rho_{m_4}$ y de esta manera queda demostrado, que todo operador $\nabla \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{ML}_{n+1})$ es de la forma

$$
\nabla = \begin{pmatrix} \lambda_{m_1}\rho_{m_2} & 0 & 0\\ \lambda_{v_1}\rho_{m_3} & r_0\rho_{m_4} & \lambda_{v_2}\\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \in \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_{n+1}).
$$

Por lo tanto, todos los operadores diferenciales de ML_{n+1} son interiores. $\square$

Con el siguiente resultado brindamos una descripción inédita para el anillo de operadores diferenciales del álgebra ML_{n+1}. Para ello, queremos exponer las siguientes observaciones. De la demostración del `Teor.`3.4.11, podemos decir en particular que los operadores diferenciales de ML_3, son de la forma:

$$\mathrm{D}(\mathrm{ML}_3) = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Bbbk & \Bbbk & \Bbbk & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Bbbk & 0 & 0 & 0 \\ \Bbbk & \Bbbk & \Bbbk & \Bbbk & \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & 0 & \Bbbk & 0 & \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Bbbk & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Bbbk \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Bbbk \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Ahora, de los bloques de matrices previamente sugeridos es pertinente considerar la siguiente notación,

$$\begin{aligned} &\mathrm{MU}_{11} = \Bbbk \\ &\mathrm{MU}_{21} = \begin{bmatrix} \Bbbk \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{MU}_{22} = \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \\ &\mathrm{MU}_{31} = \begin{bmatrix} \Bbbk \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{MU}_{32} = \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{MU}_{33} = \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se verifica naturalmente la igualdad de espacios vectoriales

$$\dim \mathrm{ML}_j(\Bbbk) = \dim \mathrm{MU}_{ij} = t_j = \frac{j(j+1)}{2}, \forall i.$$

De esta manera podemos brindar una descripción de los operadores diferenciales, con un interesante valor estético, por su auto-similitud. Por otra parte, queda claramente manifiesto el cálculo efectivo de la dimensión, de esta forma,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(\mathrm{ML}_3) &= \begin{bmatrix} \mathrm{MU}_{11} & 0 & 0 \\ \mathrm{MU}_{21} & \mathrm{MU}_{22} & 0 \\ \mathrm{MU}_{31} & \mathrm{MU}_{32} & \mathrm{MU}_{33} \end{bmatrix} \\ \dim \mathrm{D}(\mathrm{ML}_3) &= 3t_1 + 2t_2 + t_3. \end{aligned}$$

Ahora, para cada par $1 \leq \alpha \leq \beta \leq n+1$, definimos el arreglo rectangular formal de orden $\alpha \times \beta$,

$$\mathrm{MU}_{\alpha\beta} = [\Bbbk_{ij}]_{1\leq i\leq\alpha,\, 1\leq j\leq\beta}, \text{ tal que, } \begin{cases} j < i \leq \alpha \implies \Bbbk_{ij} = 0 \\ i \leq j \leq \beta \implies \Bbbk_{ij} = \Bbbk \end{cases}.$$

Se sigue de la definición que $\dim \mathrm{ML}_\beta = \dim \mathrm{MU}_{\alpha\beta} = t_\beta = \frac{\beta(\beta+1)}{2}$.

Teorema 3.4.12. *Los operadores diferenciales de* $\mathrm{ML}_n(\Bbbk)$, *verifican la igualdad*

$$\mathrm{D}(\mathrm{ML}_n) = \begin{bmatrix} \mathrm{MU}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{MU}_{21} & \mathrm{MU}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{MU}_{31} & \mathrm{MU}_{32} & \mathrm{MU}_{33} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \mathrm{MU}_{n,1} & \mathrm{MU}_{n,2} & \mathrm{MU}_{n,3} & \dots & \mathrm{MU}_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Demostración. Razonemos por inducción. Como ya lo hemos mencionado antes, para el caso ML_2 tenemos,

$$\mathrm{D}(\mathrm{ML}_2) = \begin{bmatrix} \Bbbk & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Bbbk \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{MU}_{11} & 0 \\ \mathrm{MU}_{21} & \mathrm{MU}_{22} \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, vale la pena hacer las siguientes observaciones, las cuales replicaremos en el paso inductivo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\mathrm{ML}_3) &= \begin{bmatrix} \mathrm{D}(\mathrm{ML}_2) & 0 & 0 \\ \Bbbk^2\,\mathrm{ML}_2^{op} & \mathrm{ML}_2^{op} & \Bbbk^2 \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix} && \texttt{Corol.}3.4.7 \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{D}(\mathrm{ML}_2) & 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Bbbk \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Bbbk \\ \Bbbk \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \Bbbk \end{bmatrix} && \texttt{Lema.}3.4.10 \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{MU}_{11} & 0 \\ \mathrm{MU}_{21} & \mathrm{MU}_{22} \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} \Bbbk \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \end{bmatrix} && \texttt{hip.ind.} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{MU}_{11} & 0 & 0 \\ \mathrm{MU}_{21} & \mathrm{MU}_{22} & 0 \\ \mathrm{MU}_{31} & \mathrm{MU}_{32} & \mathrm{MU}_{33} \end{bmatrix} && \text{Def. } \mathrm{MU}_{3,j}\,.
\end{aligned}$$

Ahora, para extender los cálculos anteriores al contexto inductivo hace falta tener presente,

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_{n+1}) = \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n) & 0 & 0 \\ \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op} & \mathrm{ML}_n^{op} & \Bbbk^n \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Luego, podemos deducir de las definiciones que

$$\begin{bmatrix} \mathrm{ML}_n^{op} & \Bbbk^n \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} = \mathrm{MU}_{n+1,n+1} \qquad (*).$$

Por último, hace falta demostrar que el subespacio $\Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op} \subseteq \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n)$ admite una descomposición en sumandos directos, de la forma

$$\Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op} = \mathrm{MU}_{n,1} \oplus \mathrm{MU}_{n,2} \oplus \ldots \oplus \mathrm{MU}_{n,n} \qquad (*)$$

En efecto, para cada $\alpha = 1, \ldots, n$ tenemos la transformación $T_\alpha : \mathrm{ML}_n \to \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op}$, tal que $T_\alpha(m) = \lambda_{e_\alpha}\rho_m = \sum_{1\le\gamma\le\beta\le n} r_{\beta\gamma}\, E_{\alpha\beta}^{\gamma} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n)$ (ver `Lema.`3.4.10). Gracias a la formulación anterior podemos destacar

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}(T_\alpha) = \mathrm{MU}_{n,\alpha}\,, \forall\alpha \\
&\mathrm{Im}(T_\alpha) \cap \mathrm{Im}(T_\beta) = 0\,, \forall\alpha \neq \beta \\
&\Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op} = \oplus_{\alpha=1}^{n}\, \mathrm{Im}(T_\alpha).
\end{aligned}$$

Para ver con más claridad la descomposición anterior, notemos que para cada $m = \sum_{j\leq i} m_{ij} \in \mathrm{ML}_n$ se verifican,

$$T_1(m) = \sum_{1\leq\gamma\leq\beta\leq n} m_{\beta\gamma}\, E^{\gamma}_{1\beta} = m_{11}E^1_{11} \implies \mathrm{Im}(T_1) = \mathrm{MU}_{n,1} \subseteq \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n).$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} T_2(m) &= \sum_{1\leq\gamma\leq\beta\leq n} m_{\beta\gamma}\, E^{\gamma}_{2\beta} = m_{11}E^1_{21} + m_{12}E^1_{22} + m_{22}E^2_{22} \\ &\implies \mathrm{Im}(T_2) = \mathrm{MU}_{n,2} \subseteq \mathrm{Hom}(\mathrm{ML}_n, \Bbbk^n). \end{aligned}$$

Teniendo estas observaciones presentes podemos cerrar la demostración de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_{n+1}) &= \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n) & 0 & 0 \\ \Bbbk^n\,\mathrm{ML}_n^{op} & \mathrm{ML}_n^{op} & \Bbbk^n \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix} && \texttt{Corol.3.4.7} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n) & 0 \\ \begin{bmatrix} \mathrm{MU}_{n,1} & \mathrm{MU}_{n,2} & \dots & \mathrm{MU}_{n,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathrm{ML}_n^{op} & \Bbbk^n \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \end{bmatrix} && (*) \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(\mathrm{ML}_n) & 0 \\ [\mathrm{MU}_{n+1,1} \quad \mathrm{MU}_{n+1,2} \quad \dots \quad \mathrm{MU}_{n+1,n}] & \mathrm{MU}_{n+1,n+1} \end{bmatrix} && \texttt{Def. } \mathrm{MU}_{n+1,j} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{MU}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{MU}_{21} & \mathrm{MU}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{MU}_{31} & \mathrm{MU}_{32} & \mathrm{MU}_{33} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \mathrm{MU}_{n,1} & \mathrm{MU}_{n,2} & \mathrm{MU}_{n,3} & \dots & \mathrm{MU}_{n,n} \end{bmatrix} & 0 \\ [\mathrm{MU}_{n+1,1} \quad \mathrm{MU}_{n+1,2} \quad \dots \quad \mathrm{MU}_{n+1,n}] & \mathrm{MU}_{n+1,n+1} \end{bmatrix} && \texttt{hip. ind.}
\end{aligned}$$

De esta forma demostramos lo que queríamos ver, para todas las álgebras $\mathrm{D}(\mathrm{ML}_{n+1})$. □

Corolario 3.4.13. *Si $n \in \mathbb{N}$ y $t_\beta = \frac{\beta(\beta+1)}{2}$, entonces*

$$\dim \mathrm{D}(\mathrm{ML}_{n+1}) = \sum_{\beta=1}^{n+1} (n+2-\beta)t_\beta = (n+1)t_1 + nt_2 + \dots + t_{n+1}.$$

Demostración. El cálculo de la dimensión para los operadores diferenciales de ML_{n+1} lo podemos realizar de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{D}(\mathrm{ML}_{n+1}) &= \sum_{\beta=1}^{n+1} \sum_{\alpha=1}^{n+2-\beta} \dim \mathrm{MU}_{\alpha\beta} && \texttt{Teor.3.4.12} \\
&= \sum_{\beta=1}^{n+1} \sum_{\alpha=1}^{n+2-\beta} t_\beta && \dim \mathrm{MU}_{\alpha\beta} = t_\beta, \forall\alpha \\
&= \sum_{\beta=1}^{n+1} (n+2-\beta)t_\beta.
\end{aligned}$$

□

SECCIÓN 3.5

Fenómeno distinguido: Int$(\Gamma) \neq$ Der$_\lambda(\Gamma) \subseteq \mathrm{D}^0(\Gamma)$

En esta sección, mostraremos ejemplos distinguidos de $\Bbbk$-álgebras de caminos Γ tales que

$$\begin{cases} \mathrm{H}^1(\Gamma) \neq 0, \text{ pero } \mathrm{D}^n(\Gamma) = \mathrm{D}^0(\Gamma), \forall n \geq 1 \\ \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q_n)) \subseteq \mathrm{D}^0(\Gamma(Q_n)) \end{cases} .$$

Estos ejemplos marcan un precedente en el estado del arte de la teoría de D-módulos de tipo Lunts-Rosenberg, por cuanto, mostramos que no es suficiente que el primer grupo de cohomología sea distinto de cero, para que el anillo de operadores diferenciales tenga orden mayor a cero. Más aún, presentamos por primera vez en la literatura una familia de álgebras de caminos $\Gamma(Q_n)$, de las cuales conjeturamos la siguiente propiedad,

$$\begin{gathered} \mathrm{Int}(\Gamma(Q_n)) \neq \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q_n)) \subseteq \mathrm{D}^0(\Gamma(Q_n)) \\ \mathrm{D}^0(\Gamma(Q_n)) = \mathrm{D}(\Gamma(Q_n)) \neq \mathrm{End}(\Gamma(Q_n)). \end{gathered}$$

3.5.1. Primer caso

Consideremos el carcaj Q de la forma

$$\begin{tikzcd} \bullet^3 \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet^4 \arrow[d] \arrow[dl] \\ \bullet_1 & \bullet_2 \end{tikzcd} .$$

Nuestro objetivo es demostrar, que el álgebra de caminos $\Gamma(Q)$ verifica la relación anti-intuitiva,

$$\mathrm{Int}(\Gamma(Q)) \neq \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q)) \subseteq \mathrm{D}^0(\Gamma(Q)).$$

Más aún, mostraremos que, $\mathrm{D}^n(\Gamma(Q)) = \mathrm{D}^0(\Gamma(Q)), \forall n \in \mathbb{N}$. La tabla de multiplicar del álgebra $\Gamma(Q)$, está dada por

$$\begin{aligned} &Q_0 = \{\epsilon_1 = (1||1), \epsilon_2 = (2||2), \epsilon_3 = (3||3), \epsilon_4 = (4||4)\}, \\ &Q_1 = \{(3|\alpha|1), (3|\alpha|2), (4|\alpha|1), (4|\alpha|2)\} \\ &\epsilon_i\epsilon_j = \delta_{ij}\epsilon_i, \quad (i|\alpha|j)(h|\alpha|k) = \delta_{jh}(i|\alpha|k) = 0, \\ &\epsilon_i(h|\alpha|k) = \delta_{ih}(i|\alpha|k), \quad (h|\alpha|k)\epsilon_i = \delta_{ki}(h|\alpha|i), \quad \sum_{i=1}^{4} \epsilon_i = 1. \end{aligned}$$

Proposición 3.5.1. *El álgebra de caminos $\Gamma(Q)$ es isomorfa al álgebra de matrices*

$$\begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 & 0 \\ \Bbbk & \Bbbk & \Bbbk & 0 \\ \Bbbk & \Bbbk & 0 & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Demostración. De la Prop.3.1.2, sabemos que

$$\Gamma(Q) = \{[a_{ij}] \mid a_{ij} \in \epsilon_i \Gamma(Q) \epsilon_j, 1 \leq i, j \leq n\}$$

Basta entonces con exponer las siguientes igualdades, las cuales se deducen directamente de la tabla de multiplicar previamente exhibida:

$$\begin{aligned}
&\epsilon_i \Gamma(Q) \epsilon_i = \mathbb{k}\{\epsilon_i\} \; \forall i = 1,2,3,4 \\
&\epsilon_i \Gamma(Q) \epsilon_j = 0, \forall i < j \\
&\epsilon_2 \Gamma(Q) \epsilon_1 = \epsilon_4 \Gamma(Q) \epsilon_1 = 0 \\
&\epsilon_i \Gamma(Q) \epsilon_j = \mathbb{k}\{(i|\alpha|j)\} \text{ si } (i,j) \in \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.5.2. *Sean* $R = \begin{bmatrix} \mathbb{k} & 0 \\ 0 & \mathbb{k} \end{bmatrix}$ *y* $M = \begin{bmatrix} \mathbb{k} & \mathbb{k} \\ \mathbb{k} & \mathbb{k} \end{bmatrix}$*, entonces, el álgebra de caminos* $\Gamma(Q)$ *es isomorfa al álgebra de matrices formales,* $\begin{bmatrix} R & 0 \\ M & R \end{bmatrix}$.

Demostración. Basta con hacer una descomposición por bloques del álgebra

$$\begin{bmatrix} \mathbb{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{k} & 0 & 0 \\ \mathbb{k} & \mathbb{k} & \mathbb{k} & 0 \\ \mathbb{k} & \mathbb{k} & 0 & \mathbb{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{k} & 0 \\ 0 & \mathbb{k} \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbb{k} & \mathbb{k} \\ \mathbb{k} & \mathbb{k} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbb{k} & 0 \\ 0 & \mathbb{k} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

De esta forma, obtenemos una estructura natural de R-bimódulo sobre el álgebra de matrices M y a su vez, para cada elemento $t \in \Gamma(Q)$, existen únicos $(r, m, s) \in R \oplus M \oplus R$, tales que $t = (r, m, s) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ m & s \end{pmatrix}$. Más aún,

$$\begin{aligned}
&t_i = (r_i, m_i, s_i) \in \Gamma(Q) = R \oplus M \oplus R \\
&\implies t_1 t_2 = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ m_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & 0 \\ m_2 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 r_2 & 0 \\ m_1 r_2 + s_1 m_2 & s_1 s_2 \end{pmatrix} \\
&\implies 1 = (1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Ahora identificamos el álgebra de endomorfismo de $\Gamma(Q)$ en función de la descomposición previa, como ya lo hemos realizado antes, de esta forma

$$\operatorname{End}(\Gamma(Q)) = \begin{bmatrix} \operatorname{End}(R) & \operatorname{Hom}(M,R) & \operatorname{End}(R) \\ \operatorname{Hom}(R,M) & \operatorname{End}(M) & \operatorname{Hom}(R,M) \\ \operatorname{End}(R) & \operatorname{Hom}(M,R) & \operatorname{End}(R) \end{bmatrix}.$$

Hacemos notar que el álgebra $R = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix}$ es conmutativa. No obstante, la estructura de R-bimódulo sobre $M = \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ \Bbbk & \Bbbk \end{bmatrix}$ no es central, esto significa, que la acción por izquierda λ_r, es en general distinta de la acción por derecha ρ_r. Salvo, claro está, que $r \in \{c \in R \mid cm - mc = 0, \forall m \in M\}$. Por otra parte, es claro que R es una subálgebra de M, y la estructura de R-bimódulo se obtiene por la restricción del producto.

Proposición 3.5.3. *Sean $R = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix}$ y $M = \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ \Bbbk & \Bbbk \end{bmatrix}$. Entonces, el homomorfismo $\lambda : \Gamma(Q) \to \mathrm{End}(\Gamma(Q))$, toma a cada elemento $t = (r, m, s) \in \Gamma(Q) = R \oplus M \oplus R$, y le asigna el operador*

$$\lambda_{(r,m,s)} = \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ \lambda_m & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{End}(R) & \mathrm{Hom}(M,R) & \mathrm{End}(R) \\ \mathrm{Hom}(R,M) & \mathrm{End}(M) & \mathrm{Hom}(R,M) \\ \mathrm{End}(R) & \mathrm{Hom}(M,R) & \mathrm{End}(R) \end{bmatrix}.$$

Similarmente, el homomorfismo $\rho : \Gamma(Q) \to \mathrm{End}(\Gamma(Q))$, toma a cada elemento $t = (r, m, s) \in \Gamma(Q) = R \oplus M \oplus R$, y le asigna el operador

$$\rho_{(r,m,s)} = \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \rho_r & \rho_m \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{End}(R) & \mathrm{Hom}(M,R) & \mathrm{End}(R) \\ \mathrm{Hom}(R,M) & \mathrm{End}(M) & \mathrm{Hom}(R,M) \\ \mathrm{End}(R) & \mathrm{Hom}(M,R) & \mathrm{End}(R) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Para cada terna $(x, y, z) \in \Gamma(Q) = R \oplus M \oplus R$, se tiene que

$$\lambda_{(r,m,s)}((x,y,z)) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ m & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx & 0 \\ mx + sy & sz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ \lambda_m & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Similarmente, al tener presente que R es conmutativa entonces

$$\rho_{(r,m,s)}((x,y,z)) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ m & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xr & 0 \\ yr + zm & zs \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \rho_r & \rho_m \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

□

Corolario 3.5.4. *Sean $R = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix}$ y $M = \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ \Bbbk & \Bbbk \end{bmatrix}$. Entonces*

$$\Gamma(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ \lambda_m & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma(Q)) \mid (r,m,s) \in R \oplus M \oplus R \right\}$$

$$\mathrm{Z}^0(\Gamma(Q)) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \rho_r & \rho_m \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma(Q)) \mid (r,m,s) \in R \oplus M \oplus R \right\}.$$

Demostración. Las ideas ya las hemos trabajado en secciones anteriores, basta usar la `Prop.`3.5.3 . □

Teorema 3.5.5. *Sean* $R = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix}$ *y* $M = \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ \Bbbk & \Bbbk \end{bmatrix}$. *Entonces*

$$\mathrm{D}^0(\Gamma(Q)) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{r_1} & 0 & 0 \\ \lambda_{m_1} & \lambda_{r_2}\rho_{r_3} & \rho_{m_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{r_4} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma(Q)) \mid r_i \in R, m_j \in M \right\}$$

$$\implies \mathrm{D}^0(\Gamma(Q)) = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ M & RR^{op} & M^{op} \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}.$$

Demostración. Basta con calcular la matriz asociada al producto de los operadores $\lambda_{t_1}\rho_{t_2}$, donde $t_i = (r_i, m_i, s_i) \in R \oplus M \oplus R$, de esta forma,

$$\begin{aligned} \lambda_{t_1}\rho_{t_2} &= \begin{pmatrix} \lambda_{r_1} & 0 & 0 \\ \lambda_{m_1} & \lambda_{s_1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{s_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{r_2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{r_2} & \rho_{m_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_{r_1 r_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{m_1 r_2} & \lambda_{s_1}\rho_{r_2} & \lambda_{s_1}\rho_{m_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_1 s_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

`Nota`. $\lambda_{s_1}\rho_{m_2}(r) = s_1 r m = r(s_1 m_2) = \rho_{s_1 m_2}(r), \forall r \in R$. Se sigue entonces,

$$\lambda_{t_1}\rho_{t_2} = \begin{pmatrix} \lambda_{r_1 r_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{m_1 r_2} & \lambda_{s_1}\rho_{r_2} & \rho_{s_1 m_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_1 s_2} \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathrm{D}^0(\Gamma(Q)) \subseteq \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ M & RR^{op} & M^{op} \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

Para ver la otra inclusión basta tomar un generador matricial y descomponerlo como una combinación lineal de operadores interiores, de la siguiente forma,

$$\begin{pmatrix} \lambda_{r_1} & 0 & 0 \\ \lambda_{m_1} & \lambda_{r_2}\rho_{r_3} & \rho_{m_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{r_4} \end{pmatrix} = \lambda_{(r_1,m_1,0)}\rho_{(1,0,0)} + \lambda_{(0,0,r_2)}\rho_{(r_3,0,0)} + \lambda_{(0,0,1)}\rho_{(0,m_2,r_4)}.$$

□

Corolario 3.5.6. *Sean* $R = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix}$ *y* $M = \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ \Bbbk & \Bbbk \end{bmatrix}$. *Entonces,*

$$\mathrm{D}^0(\Gamma(Q)) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk \\ \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Bbbk & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\dim \mathrm{D}^0(\Gamma(Q)) = 16.$$

Demostración. Como ya sabemos del `Teor.`3.5.5 los operadores diferenciales interiores de $\Gamma(Q)$ son de la forma,

$$\mathrm{D}^0(\Gamma(Q)) = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ M & RR^{op} & M^{op} \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}.$$

Ahora recordemos que la identificación de $M \subseteq \mathrm{Hom}(R, M)$ esta dada por la multiplicación a izquierda, donde, $M = \{\lambda_m \in \mathrm{Hom}(R, M) \mid m \in M\}$. Luego, para cada $r = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in R$ y para cada $m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in M$, se verifican las siguientes igualdades,

$$\lambda_m(r) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}x & m_{12}y \\ m_{21}x & m_{22}y \end{pmatrix}$$

Fijar la base canónica$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ para M

$$\implies \lambda_m = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{12} \\ m_{21} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, la identificación de $M^{op} \subseteq \mathrm{Hom}(R, M)$ esta dada por la multiplicación a derecha, donde $M^{op} = \{\rho_m \in \mathrm{Hom}(R, M) \mid m \in M\}$. Luego, para cada $r = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in R$ y para cada $m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in M$, se verifican las siguientes igualdades,

$$\rho_m(r) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xm_{11} & xm_{12} \\ ym_{21} & ym_{22} \end{pmatrix}$$

Fijar la base canónica$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ para M

$$\implies \rho_m = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ m_{12} & 0 \\ 0 & m_{21} \\ 0 & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Similarmente, la identificación de $RR^{op} \subseteq \mathrm{End}(M)$ se logra a través de la igualdad $RR^{op} = \{\lambda_r \rho_s \in \mathrm{End}(M) \mid r, s \in R\}$. Luego, si $r = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}$ y $s = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix}$, entonces, para cualquier $m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, se verifican las siguientes igualdades,

$$\lambda_r \rho_s(m) = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}m_{11}s_{11} & r_{11}m_{12}s_{22} \\ r_{22}m_{21}s_{11} & r_{22}m_{22}s_{22} \end{pmatrix}$$

Fijar la base canónica$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ para M

$$\implies \lambda_r \rho_m = \begin{pmatrix} r_{11}s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{11}s_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{22}s_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{22}s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix}.$$

Por último, notemos que, para cualquier $(x,y,z,w) \in \Bbbk^4$ obtenemos la igualdad entre operadores

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix} = \lambda_{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}^{\rho} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} + \lambda_{\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}^{\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

De esta forma demostramos lo que queríamos. □

Teorema 3.5.7. *Sean* $R = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix}$ *y* $M = \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ \Bbbk & \Bbbk \end{bmatrix}$. *Entonces todos los operadores diferenciales de* $\Gamma(Q)$ *son interiores, esto es,*

$$\mathrm{D}^n(\Gamma(Q)) = \mathrm{D}^0(\Gamma(Q))\,, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Notemos primero que si $M = \begin{bmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ \Bbbk & \Bbbk \end{bmatrix}$ y $R = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix}$, entonces

$$\mathrm{D}^n(R) = \mathrm{D}^0(R) = R\,, \forall n \in \mathbb{N}$$

En efecto, como $R = \Bbbk \oplus \Bbbk$ como $\Bbbk$-álgebra entonces podemos usar la `Prop.`1.2.5 del primer capítulo. De esta forma,

$$\mathrm{D}(R) = \mathrm{D}(\Bbbk \oplus \Bbbk) = \mathrm{D}(\Bbbk) \oplus \mathrm{D}(\Bbbk) = \Bbbk \oplus \Bbbk = R.$$

Por otra parte, se demuestra que $\mathrm{D}^0(R,_R M) = RM^{op} = M^{op}$. Basta recordar la `Prop.`1.2.1, donde, $\mathrm{D}^0(R,_R M) = R\,\mathrm{Hom}_R(R,M)$. Luego, usar la `Prop.`1.1.11, para obtener

$$\mathrm{Hom}_R(R,M) = \rho(M) = M^{op}$$

Por último, como R es un álgebra conmutativa, para cada $(r,m) \in R \oplus M$, se cumple que, $\lambda_r \rho_m(s) = r(sm) = s(rm) = \rho_{rm}\,, \forall s \in R$. Esto implica que

$$\mathrm{D}^0(R,_R M) = R\,\mathrm{Hom}_R(R,M) = RM^{op} = M^{op}.$$

El siguiente paso será demostrar que $\mathrm{Z}^1(\Gamma(Q)) \subseteq \mathrm{D}^0(\Gamma(Q))$. Para ello, consideremos primero la identificación de $\Gamma(Q) = R \oplus M \oplus R$, para obtener una representación matricial para los endomorfismo $\nabla, \lambda_{(r,m,s)}, [\nabla, \lambda_{r,m,s}] \in \mathrm{End}(\Gamma(Q))$, de esta forma,

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & \nabla_{12} & \nabla_{13} \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ \nabla_{31} & \nabla_{32} & \nabla_{33} \end{pmatrix} \quad y \quad \lambda_{(r,m,s)} = \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ \lambda_m & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix} \quad y$$

$$[\nabla, \lambda_{(r,m,s)}] =$$

$$\begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_r] + \nabla_{12}\lambda_m & \nabla_{12}\lambda_s - \lambda_r \nabla_{12} & \nabla_{13}\lambda_s - \lambda_r \nabla_{13} \\ \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s \nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_m - \lambda_m \nabla_{11} & [\nabla_{22}, \lambda_s] - \lambda_m \nabla_{12} & [\nabla_{23}, \lambda_s] - \lambda_m \nabla_{13} \\ \nabla_{31}\lambda_r - \lambda_s \nabla_{31} + \nabla_{32}\lambda_m & [\nabla_{32}, \lambda_s] & [\nabla_{33}, \lambda_s] \end{pmatrix}.$$

Ahora, si $\nabla \in \mathrm{Z}^1(\Gamma(Q))$, entonces $[\nabla, \lambda_{(r,m,s)}] \in \mathrm{D}^0(\Gamma(Q))\,, \forall (r,m,b) \in \Gamma(Q)$. Luego, por el `Corol.`3.5.6 obtenemos,

$$[\nabla, \lambda_{(r,m,s)}] \in \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ M & RR^{op} & M^{op} \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}.$$

Se sigue entonces la siguiente lista de restricciones,

$$\forall (r,m,s) \in R \oplus M \oplus R \implies \begin{cases} \nabla_{12}\lambda_s - \lambda_r\nabla_{12} = \nabla_{13}\lambda_s - \lambda_r\nabla_{13} = 0 \\ \nabla_{31}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{31} + \nabla_{32}\lambda_m = [\nabla_{32}, \lambda_s] = 0 \\ [\nabla_{11}, \lambda_r] + \nabla_{12}\lambda_m \in R, [\nabla_{33}, \lambda_s] \in R \\ \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_m - \lambda_m\nabla_{11} \in M \\ [\nabla_{22}, \lambda_s] - \lambda_m\nabla_{12} \in RR^{op} \\ [\nabla_{23}, \lambda_s] - \lambda_m\nabla_{13} \in M^{op} \end{cases}.$$

Notemos que en particular,

$$s = 1, r = 0 \implies \begin{cases} \nabla_{12} = \nabla_{12}\lambda_s - \lambda_r\nabla_{12} = 0 \implies \boxed{\nabla_{12} = 0} \\ \nabla_{13} = \nabla_{13}\lambda_s - \lambda_r\nabla_{13} = 0 \implies \boxed{\nabla_{13} = 0} \end{cases}.$$

Similarmente,

$$r = 1, s = 0, m = 0 \implies \nabla_{31} = \nabla_{31}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{31} + \nabla_{32}\lambda_m = 0 \implies \boxed{\nabla_{31} = 0}.$$

Dado que $\nabla_{31} = 0$, entonces podemos demostrar que ∇_{32} también es nulo. En efecto,

$$m = 1 \in M \implies \nabla_{32} = \nabla_{31}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{31} + \nabla_{32}\lambda_m = 0 \implies \boxed{\nabla_{32} = 0}.$$

Con lo anterior podemos refrescar la notación y obtener lo siguiente, si $\nabla \in \mathrm{Z}^1(\Gamma(Q))$ entonces para cualquier terna $(r,m,s) \in R \oplus M \oplus R$,

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{cases} [\nabla_{11}, \lambda_r] \in R, [\nabla_{33}, \lambda_s] \in R \\ \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_m - \lambda_m\nabla_{11} \in M \\ [\nabla_{22}, \lambda_s] \in RR^{op} \\ [\nabla_{23}, \lambda_s] \in M^{op} \end{cases}.$$

Ahora, la primera condición sobre los corchetes $[\nabla_{11}, \lambda_r]$ y $[\nabla_{33}, \lambda_s]$ es equivalente a $\nabla_{11} \in \mathrm{Z}^1(R)$, y similarmente, para $\nabla_{33} \in \mathrm{Z}^1(R)$. Pero, ya hemos visto al inicio de esta demostración que $\mathrm{D}(R) = \mathrm{D}^0(R) = R$. Por lo tanto,

$$\nabla_{11}, \nabla_{33} \in \mathrm{Z}^1(R) = \mathrm{D}^0(R) \implies \boxed{\nabla_{11}, \nabla_{33} \in R}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} r = 1, s = 0, m = 0 &\implies \nabla_{21} = \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_m - \lambda_m\nabla_{11} \in M \\ &\implies \boxed{\nabla_{21} \in M}. \end{aligned}$$

Para continuar, consideremos a $R = \Bbbk^2$ y a $M = \mathrm{Sum}\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, y de esta forma podemos identificar a $\mathrm{Hom}(R, M)$ con las matrices rectangulares de orden $\mathrm{Mat}_{4\times 2}(\Bbbk)$, y a su vez, $\mathrm{End}(M) = \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\Bbbk)$. De esta forma obtenemos una nueva descripción matricial para $\nabla_{23} \in \mathrm{Hom}(R, M)$ y $\nabla_{22} \in \mathrm{End}(M)$, tales que

$$\nabla_{23} = \begin{pmatrix} \nabla_{23}^{11} & \nabla_{23}^{12} \\ \nabla_{23}^{21} & \nabla_{23}^{22} \\ \nabla_{23}^{31} & \nabla_{23}^{32} \\ \nabla_{23}^{41} & \nabla_{23}^{42} \end{pmatrix} \quad y \quad \nabla_{22} = \begin{pmatrix} \nabla_{22}^{11} & \nabla_{22}^{12} & \nabla_{22}^{13} & \nabla_{22}^{14} \\ \nabla_{22}^{21} & \nabla_{22}^{22} & \nabla_{22}^{23} & \nabla_{22}^{24} \\ \nabla_{22}^{31} & \nabla_{22}^{32} & \nabla_{22}^{33} & \nabla_{22}^{34} \\ \nabla_{22}^{41} & \nabla_{22}^{42} & \nabla_{22}^{43} & \nabla_{22}^{44} \end{pmatrix}.$$

Luego, para cualquier $s = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix} \in R$ tenemos que,

$$\lambda_s = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(R) \quad y \quad \lambda_s = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(M)$$

y teniendo en cuenta el `Corol.`3.5.6, podemos ver que

$$M^{op} = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \subseteq \mathrm{Hom}(R, M)$$

De esta forma, se deducen

$$[\nabla_{23}, \lambda_s] = \begin{pmatrix} 0 & -(s_{11}-s_{22})\nabla_{23}^{12} \\ 0 & -(s_{11}-s_{22})\nabla_{23}^{22} \\ (s_{11}-s_{22})\nabla_{23}^{31} & 0 \\ (s_{11}-s_{22})\nabla_{23}^{41} & 0 \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \end{bmatrix}$$

$$s_{11} \neq s_{22} \implies \nabla_{23}^{12} = \nabla_{23}^{22} = \nabla_{23}^{31} = \nabla_{23}^{41} = 0 \implies \boxed{\nabla_{23} \in M^{op}}.$$

Similarmente, gracias al `Corol.`3.5.6 sabemos que

$$RR^{op} = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Bbbk & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \subseteq \mathrm{End}(M)$$

y dado que, $[\nabla_{22}, \lambda_s] \in RR^{op}$ se obtiene que

$$[\nabla_{22}, \lambda_s] = \begin{pmatrix} 0 & -(s_{11}-s_{22})\nabla_{22}^{12} & -(s_{11}-s_{22})\nabla_{22}^{13} & -(s_{11}-s_{22})\nabla_{22}^{14} \\ (s_{11}-s_{22})\nabla_{22}^{21} & 0 & -(s_{11}-s_{22})\nabla_{22}^{23} & -(s_{11}-s_{22})\nabla_{22}^{24} \\ (s_{11}-s_{22})\nabla_{22}^{31} & (s_{11}-s_{22})\nabla_{22}^{32} & 0 & -(s_{11}-s_{22})\nabla_{22}^{34} \\ (s_{11}-s_{22})\nabla_{22}^{41} & (s_{11}-s_{22})\nabla_{22}^{42} & -(s_{11}-s_{22})\nabla_{22}^{43} & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{11} \neq s_{22} \implies \nabla_{22}^{ij} = 0, \forall i \neq j \implies \boxed{\nabla_{22} \in RR^{op}}.$$

Finalmente, podemos demostrar que si $\nabla \in \mathrm{Z}^1(\Gamma(Q))$ entonces

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ M & RR^{op} & M^{op} \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} = \mathrm{D}^0(\Gamma(Q)).$$

Por lo tanto, todos los operadores diferenciales del álgebra de caminos $\Gamma(Q)$ son interiores. □

Ahora, estudiaremos los espacios de derivaciones de $\Gamma(Q)$.

Corolario 3.5.8. *La dimensión del primer grupo de cohomología del álgebra $\Gamma(Q)$ es uno, esto es,*

$$\dim \mathrm{H}^1(\Gamma(Q)) = 1 \implies \mathrm{Int}(\Gamma(Q)) \neq \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q)).$$

Por otra parte, como todos los operadores diferenciales de $\Gamma(Q)$ son interiores, entonces

$$\mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q)) \subseteq \mathrm{Z}^1(\Gamma(Q)) \implies \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q)) \subseteq \mathrm{D}^0(\Gamma(Q)).$$

Demostración. Para calcular la dimensión de $\mathrm{H}^1(\Gamma(Q))$, hace falta determinar al conjunto de flechas paralelas sobre el carcaj Q, y usar la igualdad propuesta en la Prop.3.1.4. De esta forma,

$$\begin{tikzcd} \bullet^3 \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\alpha_2" near start] & \bullet^4 \arrow[d, "\alpha_4"] \arrow[dl, "\alpha_3"' near start] \\ \bullet_1 & \bullet_2 \end{tikzcd}$$

entonces $Q_*//Q_1 = \{(\alpha_i, \alpha_i) \mid i = 1,2,3,4\}$ y $Q_0 = \{\bullet_i \mid i = 1,2,3,4\}$. Luego,

$$\dim_{\mathbb{k}} \mathrm{H}^1(\Gamma(Q)) = 1- \mid Q_0 \mid + \mid Q_*//Q_1 \mid = 1.$$

Por otra parte, de la Prop.1.2.6 sabemos que $\mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q)) \subseteq \mathrm{Z}^1(\Gamma(Q))$, y como todos los operadores diferenciales de $\Gamma(Q)$ son interiores, entonces $\mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q)) \subseteq \mathrm{D}^0(\Gamma(Q))$. □

Cerramos el estudio del álgebra de caminos $\Gamma(Q)$ exhibiendo generadores matriciales para los espacios $\mathrm{Int}(\Gamma(Q))$ y $\mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q))$.

Primero, recordemos que

$$\Gamma(Q) = \mathrm{Gen}\,\{E_{11}, E_{22}, E_{31}, E_{32}, E_{33}, E_{41}, E_{42}, E_{44}\}.$$

Luego, consideremos

$$R = \mathrm{Gen}\{E_{11}, E_{22}\}, \quad R' = \mathrm{Gen}\{E_{33}, E_{44}\}$$

$$M = \mathrm{Sum}\{E_{31}, E_{32}, E_{41}, E_{42}\}$$

Se verifica fácilmente que las álgebras R y R' son isomorfas. De esta forma, obtenemos la descomposición de $\Gamma(Q)$ como suma directa $R \oplus M \oplus R'$, dada por,

$$\Gamma(Q) = \mathrm{Gen}\{E_{11}, E_{22}\} \oplus \mathrm{Sum}\{E_{31}, E_{32}, E_{41}, E_{42}\} \oplus \mathrm{Gen}\{E_{33}, E_{44}\}$$

Segundo, si δ_k^h denota la delta de Kronecker, entonces definamos el operador $\delta \in \mathrm{End}(\Gamma(Q))$, tal que

$$\delta(E_{ij}) = \delta_3^i \delta_2^j E_{ij} = \begin{cases} E_{32} & \text{si } (ij) = (32) \\ 0 & \text{si } (ij) \neq (32) \end{cases}.$$

Ahora, veamos las siguientes proposición

Proposición 3.5.9.

1. *δ es una λ-derivación que no es interior, esto es,*

$$\delta \in \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q)), \quad \delta \notin \mathrm{Int}(\Gamma(Q))$$

2. *Si consideramos la descomposición*

$$\Gamma(Q) = \mathrm{Gen}\{E_{11}, E_{22}\} \oplus \mathrm{Sum}\{E_{31}, E_{32}, E_{41}, E_{42}\} \oplus \mathrm{Gen}\{E_{33}, E_{44}\}$$

y con esta, identificamos el álgebra $\mathrm{End}(\Gamma(Q))$ *como una matriz formal, como ya lo hemos venido trabajando previamente, entonces el operador* δ *tienen la siguiente expresión matricial*

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{33}\rho_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

teniendo en cuenta que λ_{33}*, denota al operador* $\lambda_{E_{33}}$ *y* ρ_{22} *denota al operador* $\rho_{E_{22}}$.

3. *Consideremos los operadores* $\lambda_{(0,0,E_{33})}, \rho_{(E_{22},0,0)} \in \mathrm{End}(\Gamma(Q))$*, entonces*

$$\lambda_{(0,0,E_{33})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{pmatrix}, \quad \rho_{(E_{22},0,0)} = \begin{pmatrix} \lambda_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Más aún, obtenemos la igualdad de operadores $\delta = \lambda_{(0,0,E_{33})}\rho_{(E_{22},0,0)}$.

Demostración. Para demostrar el `item(1)` veamos que

$$\delta(E_{ij}E_{hk}) = E_{ij}\delta(E_{hk}) + \delta(E_{ij})E_{hk}$$

Por un lado tenemos que,

$$\begin{aligned} \delta(E_{ij}E_{hk}) &= \delta(\delta_j^h E_{ik}) = \delta_j^h \delta_3^i \delta_2^k E_{ik} \\ &= \begin{cases} \delta_j^h E_{32} & (ik) = (32) \\ 0 & (ik) \neq (32) \end{cases} \\ &= \begin{cases} E_{32} & (ik) = (32), j = h \in \{2,3\} \\ 0 & e.o.p \end{cases} \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} E_{ij}\delta(E_{hk}) + \delta(E_{ij})E_{hk} &= (\delta_3^h\delta_2^k + \delta_3^i\delta_2^j)E_{ij}E_{hk} = (\delta_3^h\delta_2^k + \delta_3^i\delta_2^j)\delta_j^h E_{ik} \\ &= \begin{cases} (\delta_3^h\delta_2^k + \delta_2^j)\delta_j^h E_{3k} & i = 3 \\ (\delta_3^h + \delta_3^i\delta_2^j)\delta_j^h E_{i2} & k = 2 \\ 0 & e.o.p \end{cases} \\ &= \begin{cases} \delta_2^k E_{3k} & i = 3, j = h = 2 \\ \delta_3^i E_{i2} & k = 2, j = h = 3 \\ 0 & e.o.p \end{cases} \\ &= \begin{cases} E_{32} & (ik) = (32), j = h \in \{2,3\} \\ 0 & e.o.p \end{cases}. \end{aligned}$$

Para demostrar el `item(2)` basta tomar una terna $(E_{\alpha\beta}, E_{ij}, E_{\mu\nu}) \in R \oplus M \oplus R'$, para luego,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{33}\rho_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\alpha\beta} \\ E_{ij} \\ E_{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{33}\rho_{22}(E_{ij}) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{33}E_{ij}E_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_3^i\delta_2^j E_{ij} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para demostrar el `item(3)` basta con hacer los siguientes cálculos

$$\lambda_{(0,0,E_{33})}\rho_{(E_{11},0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{33}\rho_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Con las afirmaciones anteriores en mente, podemos ver con toda naturalidad la siguiente proposición

Proposición 3.5.10. *Si* $R = \mathrm{Gen}\{E_{11}, E_{22}\}$, $R' = \mathrm{Gen}\{E_{33}, E_{44}\}$, $M = \mathrm{Sum}\{E_{31}, E_{32}, E_{41}, E_{42}\}$ *y* $\Gamma(Q) = R \oplus M \oplus R'$, *entonces,*

$$\mathrm{Int}(\Gamma(Q)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_m & \lambda_s - \rho_r & -\rho_m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (r, m, s) \in R \oplus M \oplus R' \right\}$$

$$\mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q)) = \mathrm{Int}(\Gamma(Q)) \oplus \mathrm{Sum}\{\delta\}.$$

Demostración. La demostración es inmediata de las afirmaciones enumeradas previamente. □

3.5.2. Segundo caso

En la subsección anterior hemos presentado el álgebra de caminos $\Gamma(Q)$, definida por el carcaj

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \arrow[dl] \\ \bullet & \bullet \end{tikzcd}.$$

El cual se presenta como un ejemplo desconcertante, por cuanto, hemos demostrados tres propiedades que no se han publicado hasta la fecha, y estas son,

$$\mathrm{Int}(\Gamma(Q)) \neq \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q)) \subseteq \mathrm{D}^0(\Gamma(Q))$$

$$\mathrm{D}(\Gamma(Q)) = \mathrm{D}^0(\Gamma(Q))$$

$$\dim \mathrm{H}^1(\Gamma(Q_2)) = 1.$$

Mostramos de esta forma, que la teoría de D-módulo de tipo Lunts-Rosenberg no solo extiende las definiciones propinadas por Grothendieck para el anillo de operadores diferenciales sobre álgebras conmutativo, sino que, incorpora objetos con nuevas propiedades que no existen en el contexto conmutativo. Por otra parte, queremos mostrarle al lector, que el estudio de los operadores diferenciales sobre la categoría de álgebras de caminos inducidos por un carcaj es muy prometedora. A continuación, exponemos una cadena numerable de álgebras de caminos que presentan la misma patología previamente mencionada.

Consideremos el carcarj Q_2, el cual se obtiene con la réplica del carcaj Q, de esta forma,

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \arrow[dl] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \arrow[dl] \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{tikzcd}.$$

Brevemente, podemos mencionar que,

$$\Gamma(Q_2) = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Bbbk & 0 & 0 & 0 \\ \Bbbk & 0 & \Bbbk & \Bbbk & 0 & 0 \\ \Bbbk & \Bbbk & 0 & 0 & \Bbbk & 0 \\ \Bbbk & \Bbbk & \Bbbk & 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & \Bbbk \\ \Bbbk & \Bbbk & 0 \\ \Bbbk & \Bbbk & \Bbbk \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

y su anillo de operadores diferenciales tienen la siguiente expresión

$$\mathrm{D}(Q_2) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix}$$

donde,

$$M_{11} = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix} \quad M_{33} = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Bbbk \\ \Bbbk & 0 & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 \\ \Bbbk & 0 & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix}, \quad y \quad M_{22} = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Bbbk & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Bbbk & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Bbbk & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Bbbk & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix}, \quad y \quad M_{23} = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 \\ \Bbbk & 0 & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 \\ 0 & \Bbbk & 0 \\ 0 & 0 & \Bbbk \\ 0 & 0 & \Bbbk \\ 0 & 0 & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Vale mencionar, que el álgebra $\Gamma(Q_2)$ replica las propiedades distinguidas de $\Gamma(Q)$, donde

$$\mathrm{Int}(\Gamma(Q_2)) \neq \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q_2)) \subseteq \mathrm{D}^0(\Gamma(Q_2))$$
$$\mathrm{D}(\Gamma(Q_2)) = \mathrm{D}^0(\Gamma(Q_2))$$

con una peculiaridad más, su cohomología aumenta, de esta forma,

$$\dim \mathrm{H}^1(\Gamma(Q_2)) = 2.$$

En esta subsección no haremos una demostración de estos hechos. Nuestro objetivo es enunciar una pregunta de investigación de actual pertinencia, y su formulación es la siguiente: Sea Q_n el carcaj que se obtiene con n réplicas del carcaj Q es decir,

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \arrow[dl] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \arrow[dl] & \cdots & \bullet \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \arrow[dl] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \arrow[dl] \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet \end{tikzcd}$$

entonces, las siguientes afirmaciones son verdaderas:

$$\mathrm{Int}(\Gamma(Q_n)) \neq \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q_n)) \subseteq \mathrm{D}^0(\Gamma(Q_n)) \qquad \texttt{Af.(1)}$$

$$\dim \mathrm{H}^1(\Gamma(Q_n)) = n \qquad \texttt{Af.(2)}$$

$$\mathrm{D}(\Gamma(Q_n)) = \mathrm{D}^0(\Gamma(Q_n)) \qquad \texttt{Af.(3)}.$$

Vale mencionar que usando la `Prop.`3.1.4 y algunos argumentos de conteo sobre el carcaj Q_n, se puede ver con naturalidad la veracidad de la `Af.(2)`, y de esta forma se obtiene

$$\dim \mathrm{H}^1(\Gamma(Q_n)) = n \implies \mathrm{Int}(\Gamma(Q_n)) \neq \mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q_n)).$$

Actualmente estamos trabajando en una demostración completa de estas propiedades tan singulares del álgebra de caminos $\Gamma(Q_n)$, en particular, tenemos una demostración parcial de la inclusión $\mathrm{Der}_\lambda(\Gamma(Q_n)) \subseteq \mathrm{D}^0(\Gamma(Q_n))$, y para esta, usamos resultados obtenidos en el capítulo cuatro de este trabajo de investigación.

Capítulo 4

Operadores diferenciales de matrices triangulares formales

Recordemos que para calcular el anillo de operadores diferenciales $D_{\Bbbk}(\Gamma(Q))$ usamos fuertemente su descripción matricial, dada por

$$\Gamma(Q) = \{[\epsilon_i \Gamma(Q) \epsilon_j] : 1 \leq j \leq i \leq n\}.$$

Luego realizamos una descomposición conveniente de dicha álgebra de matrices para calcular con mayor comodidad los operadores diferenciales. Vale destacar que las técnicas que empleamos para describir $D_{\Bbbk}(\Gamma(Q))$, pueden ser extendidas con naturalidad al contexto de las álgebras de matrices triangulares inferiores formales. De esta forma, tomaremos un álgebra del tipo

$$T_L(R, B, S) = \begin{bmatrix} R & 0 \\ B & S \end{bmatrix}$$

donde (R, S) son un par de $\Bbbk$-álgebras, y B es un bimódulo, izquierdo por la acción de S y derecho por la acción de R. Luego replicaremos las estrategias que implementamos en las álgebras de caminos estudiadas en el `Capítulo` 3, para estudiar los operadores diferenciales $D_{\Bbbk}(T_L(R, B, S))$.

Vale la pena mencionar que ya existen precedentes en esta dirección, un ejemplo relevante es el artículo [SIK16], en el cual se estudian los operadores diferenciales del álgebra de matrices triangulares superiores formales $T_U(S, B, R)$. Estas álgebras son de la forma

$$T_U(S, B, R) = \begin{bmatrix} S & B \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

Hacemos notar que la transformación $\Bbbk$-lineal $\mathcal{T} : T_U(S, B, R) \to T_L(R, B, S)$, tal que

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} s & b \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ b & s \end{pmatrix}$$

resulta ser un isomorfismo de álgebra. En efecto, por un lado tenemos que

$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} s_1 & b_1 \\ 0 & r_1 \end{pmatrix} \mathcal{T} \begin{pmatrix} s_2 & b_2 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ b_1 & s_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & 0 \\ b_2 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 r_2 & 0 \\ b_1 r_2 + s_1 b_2 & s_1 s_2 \end{pmatrix}$$

y por otro lado,

$$\mathcal{T}\left(\begin{pmatrix} s_1 & b_1 \\ 0 & r_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_2 & b_2 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{T}\begin{pmatrix} s_1s_2 & s_1b_2 + b_1r_2 \\ 0 & r_1r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1r_2 & 0 \\ b_1r_2 + s_1b_2 & s_1s_2 \end{pmatrix}$$

sin entrar mucho en los detalles, se cumple que $\mathcal{T}(t_1)\mathcal{T}(t_2) = \mathcal{T}(t_1t_2), \forall t_i \in \mathrm{T}_U(S, B, R)$.

En este trabajo de investigación logramos describir el espacio de los operadores diferenciales n-centrales $\mathrm{Z}^n(\mathrm{T}_L)$, los cuales no son estudiados en el artículo [SIK16]. Más aún, brindamos un conjunto de generadores para $\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L(R, B, S))$, con los cuales podemos describir correctamente los morfismos de inyección de $\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(R)$, $\mathrm{D}^n(S)_{\Bbbk}$, $\mathrm{D}^n_{\Bbbk}({}_SB)$ y $\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(S,{}_S B)$, en el álgebra de operadores matriciales $\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L(R, B, S))$, mejorando de esta manera, la formulación propinada en la `Prop.3.3` del artículo [SIK16, pg.5]. A su vez, construimos ejemplos que revelan ciertas dificultades técnicas, que los autores no visualizan en el `Teor.3.1` [SIK16, pg.6]. No obstante, nosotros logramos brindar demostraciones independientes a los argumentos propinados en [SIK16], salvando por completo dichas dificultades técnicas.

SECCIÓN 4.1

Álgebras triangulares $\mathrm{T_L}(R, B, S)$

Definición 4.1.1. Sean (R, S) un par de $\Bbbk$-álgebras y B un (S, R)-bimódulo. Definimos el **álgebra de matrices triangulares inferiores formales** generada por (R, B, S), como el espacio vectorial

$$\mathrm{T}_L(R, B, S) = \left\{\begin{pmatrix} r & 0 \\ b & s \end{pmatrix} \mid (r, b, s) \in R \oplus B \oplus S\right\} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ B & S \end{bmatrix}$$

donde la suma y la multiplicación se definen naturalmente, como la suma y el producto entre matrices, a saber,

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ b_1 & s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_2 & 0 \\ b_2 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & 0 \\ b_1 + b_2 & s_1 + s_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ b_1 & s_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_2 & 0 \\ b_2 & s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1r_2 & 0 \\ b_1r_2 + s_1b_2 & s_1s_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

En lo sucesivo, denotaremos el álgebra de matrices triangulares inferiores formales inducidas par la terna (R, B, S), tan solo con T_L, siempre y cuando no genere ninguna ambigüedad.

Ahora, si consideramos el isomorfismo entre espacio vectoriales $\mathrm{T}_L = R \oplus B \oplus S$, podemos describir el anillo de endomorfismo $\Bbbk$-lineales $\mathrm{End}(\mathrm{T}_L)$, como un álgebra de matrices de la forma

$$\mathrm{End}(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} \mathrm{End}(R, R) & \mathrm{Hom}(B, R) & \mathrm{Hom}(S, R) \\ \mathrm{Hom}(R, B) & \mathrm{End}(B) & \mathrm{Hom}(S, B) \\ \mathrm{Hom}(R, S) & \mathrm{Hom}(B, S) & \mathrm{End}(S) \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, tenemos el homomorfismo de multiplicación a izquierda $\lambda : \mathrm{T}_L \to \mathrm{End}(\mathrm{T}_L)$, tal que, para cada $(r, b, s) \in R \oplus B \oplus S$, se tiene el operador matricial

$$\lambda_{(r,b,s)} = \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ \lambda_b & \lambda_s & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

Como ya lo hemos discutido antes, esta expresión matricial para el operador $\lambda_{(r,b,s)}$ se obtiene de las reglas de multiplicación sobre T_L. Por otra parte, hacemos notar que los operadores correspondientes a las componente (22) y (33) de dicha matriz, son denotados de la misma forma λ_s, dado que ambos actúan por multiplicación a izquierda, pero técnicamente son distintos, porque el operador de la componente (22) es un endomorfismo del bimódulo B, donde, $\lambda_s(b) = sb, \forall b \in B$.. Mientras que, el operador de la componente (33), es un endomorfismo del álgebra S, donde, $\lambda_s(s') = ss', \forall s' \in S$.

Similarmente, tenemos el homomorfismo multiplicación a derecha, $\rho : \mathrm{T}_L^{op} \to \mathrm{End}(\mathrm{T}_L)$, tal que para cada $(r, b, s) \in R \oplus B \oplus S$, se tiene el operador matricial

$$\rho_{(r,b,s)} = \begin{pmatrix} \rho_r & 0 & 0 \\ 0 & \rho_r & \rho_b \\ 0 & 0 & \rho_s \end{pmatrix}.$$

Nuevamente, hacemos notar el abuso de notación, en los operadores de la componente (11) y (22). Son denotados de la misma forma ρ_r, dado que ambos actúan por multiplicación a derecha, pero uno de ellos es un endormorfismo de R y el otro, es un endomorfismo de B.

Lema 4.1.1. *Sea $\nabla \in \mathrm{End}(\mathrm{T}_L)$ un operador lineal de la forma*

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & \nabla_{12} & \nabla_{13} \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ \nabla_{31} & \nabla_{32} & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{End}(R,R) & \mathrm{Hom}(B,R) & \mathrm{Hom}(S,R) \\ \mathrm{Hom}(R,B) & \mathrm{End}(B) & \mathrm{Hom}(S,B) \\ \mathrm{Hom}(R,S) & \mathrm{Hom}(B,S) & \mathrm{End}(S) \end{bmatrix}$$

Si $t = (r, b, s) \in R \oplus B \oplus S$, entonces se verifican siguientes igualdades,

$$\nabla\lambda_t = \begin{pmatrix} \nabla_{11}\lambda_r + \nabla_{12}\lambda_b & \nabla_{12}\lambda_s & \nabla_{13}\lambda_s \\ \nabla_{21}\lambda_r + \nabla_{22}\lambda_b & \nabla_{22}\lambda_s & \nabla_{23}\lambda_s \\ \nabla_{31}\lambda_r + \nabla_{32}\lambda_b & \nabla_{32}\lambda_s & \nabla_{33}\lambda_s \end{pmatrix}$$

$$\lambda_t\nabla = \begin{pmatrix} \lambda_r\nabla_{11} & \lambda_r\nabla_{12} & \lambda_r\nabla_{13} \\ \lambda_b\nabla_{11} + \lambda_s\nabla_{21} & \lambda_b\nabla_{12} + \lambda_s\nabla_{22} & \lambda_b\nabla_{13} + \lambda_s\nabla_{23} \\ \lambda_s\nabla_{31} & \lambda_s\nabla_{32} & \lambda_s\nabla_{33} \end{pmatrix}$$

$$[\nabla, \lambda_t] =$$

$$\begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_r] + \nabla_{12}\lambda_b & \nabla_{12}\lambda_s - \lambda_r\nabla_{12} & \nabla_{13}\lambda_s - \lambda_r\nabla_{13} \\ \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & -\lambda_b\nabla_{12} + [\nabla_{22}, \lambda_s] & -\lambda_b\nabla_{13} + [\nabla_{23}, \lambda_s] \\ \nabla_{31}\lambda_r + \nabla_{32}\lambda_b - \lambda_s\nabla_{31} & [\nabla_{32}, \lambda_s] & [\nabla_{33}, \lambda_s] \end{pmatrix}.$$

Demostración. Estas expresiones matriciales se siguen de la identificación del producto entre matrices formales y la composición entre los operadores $\lambda_t\nabla$, $\nabla\lambda_t$ y $[\nabla, \lambda_t] = \nabla\lambda_t - \lambda_t\nabla$. □

4.1.1. Operadores interiores de $\mathrm{T_L}(R,B,S)$

Como ya lo hemos estudiado antes, para obtener una descripción de $\mathrm{Z}^0(A)$, basta conocer como se identifica su álgebras opuesta en el anillo $\mathrm{End}(A)$, via la multiplicación a derecha, ver `Corol.`1.2.4. En este caso, si (R,S) son $\Bbbk$-álgebras y B un (S,R)-bimódulo, de acuerdo a los comentarios de la sección anterior, los operadores diferenciales centrales de orden cero del álgebra T_L generada por (R,B,S) son de la forma,

$$\mathrm{Z}^0(\mathrm{T}_L) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_r & 0 & 0 \\ 0 & \rho_r & \rho_b \\ 0 & 0 & \rho_s \end{pmatrix} \mid r \in R,\ b \in B,\ s \in S \right\}.$$

Lema 4.1.2. *Sea* T_L *el álgebra generada por* (R,B,S), *entonces*

$$\mathrm{Z}^0(\mathrm{T}_L) \subset \begin{bmatrix} \mathrm{Z}^0(R) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Z}^0({}_SB) & \mathrm{Z}^0(S,{}_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{Z}^0(S). \end{bmatrix}$$

Demostración. Para ver la inclusión propuesta, hace falta recordar el `Corol.`1.2.3 del primer capítulo. Al considerar las respectivas estructuras de álgebras y módulos izquierdos, obtenemos las siguientes identificaciones

$$R^{op} = \mathrm{Z}^0(R), \quad R^{op} \subseteq \mathrm{Z}^0({}_SB), \quad B^{op} = \mathrm{Z}^0(S,{}_S B), \quad S^{op} = \mathrm{Z}^0(S).$$

Sea $\nabla \in \mathrm{Z}^0(\mathrm{T}_L)$, como ya lo mencionamos previamente, sabemos de la existencia de una terna $(r,b,s) \in R \oplus B \oplus S$, tal que,

$$\nabla = \begin{pmatrix} \rho_r & 0 & 0 \\ 0 & \rho_r & \rho_b \\ 0 & 0 & \rho_s \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} R^{op} & 0 & 0 \\ 0 & R^{op} & B^{op} \\ 0 & 0 & S^{op} \end{bmatrix} \subset \begin{bmatrix} \mathrm{Z}^0(R) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Z}^0({}_SB) & \mathrm{Z}^0(S,{}_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{Z}^0(S) \end{bmatrix}.$$

□

Vale mencionar, el espacio de matrices

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Z}^0(R) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Z}^0({}_SB) & \mathrm{Z}^0(S,{}_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{Z}^0(S) \end{bmatrix}$$

en general no es un subespacio de $\mathrm{D}^1_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$. Dado que, la condición

$$[\nabla, \lambda_t] \in \mathrm{D}^0(\mathrm{T}_L),\ \forall t \in \mathrm{T}_L$$

induce una relación entre los operadores ∇_{11} y ∇_{22}. Es decir, si $(\nabla, \Delta) \in Z^0(R) \times Z^0({}_SB)$, diremos que

$$\nabla \sim \Delta \iff \exists r \in R \text{ tal que } \begin{cases} \nabla = \rho_r \in \mathrm{End}(R) \\ \Delta = \rho_r \in \mathrm{End}(B) \end{cases}.$$

Con esta relación, brindaremos una nueva caracterización de $\mathrm{Z}^0(\mathrm{T}_L)$, la cual será extendida a los operadores diferenciales-centrales de orden superior.

Corolario 4.1.3. *Sea* T_L *el álgebra de matrices generada por* (R,B,S). *Sea* $\nabla \in \mathrm{End}(\mathrm{T}_L)$ *tal que,*

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & \nabla_{12} & \nabla_{13} \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ \nabla_{31} & \nabla_{32} & \nabla_{33} \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\nabla \in \mathrm{Z}^0(\mathrm{T}_L) \iff \begin{cases} \nabla_{12} = \nabla_{13} = \nabla_{21} = \nabla_{31} = \nabla_{32} = 0 \\ (\nabla_{11}, \nabla_{22}) \in \mathrm{Z}^0(R) \times \mathrm{Z}^0({}_SB) \mid \nabla_{11} \sim \nabla_{22} \\ \nabla_{23} \in \mathrm{Z}^0(S,{}_S B), \quad \nabla_{33} \in \mathrm{Z}^0(S) \end{cases}$$

Más aún, $\mathrm{Z}^0(\mathrm{T}_L)$ *admite una descomposición como suma directa de subesapcios de* $\mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$,

$$\mathrm{Z}^0(\mathrm{T}_L) = \left\{ \nabla \in \begin{bmatrix} \mathrm{Z}^0(R) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Z}^0({}_SB) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid \nabla_{11} \sim \nabla_{22} \right\} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Z}^0(S,{}_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{Z}^0(S) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Se sigue de las observaciones previas junto con el `Lema.`4.1.2. Por otra parte, para ver que la suma es directa, basta demostrar que la relación definida para toda dupla de operadores es invariante bajo la suma y la multiplicación por un escalar. Sean $(\nabla_1, \Delta_1), (\nabla_2, \Delta_2) \in \mathrm{Z}^0(R) \times \mathrm{Z}^0({}_SB)$, tal que, $\nabla_1 \sim \Delta_1$ y $\nabla_2 \sim \Delta_2$). Esto implica la existencia de $r, s \in R$ tales que,

$$\nabla_1 = \rho_r, \nabla_2 = \rho_s \in \mathrm{End}(R) \quad y \quad \Delta_1 = \rho_r, \Delta_2 = \rho_s \in \mathrm{End}(B).$$

Luego, para cada $c \in \Bbbk$ tenemos que

$$(\nabla_1 + c\nabla_2) = \rho_{r+cs} \in \mathrm{End}(R) \quad y \quad (\Delta_1 + c\Delta_2) = \rho_{r+cs} \in \mathrm{End}(B)$$

esto implica que $(\nabla_1 + c\nabla_2) \sim (\Delta_1 + c\Delta_2)$. □

Vale la pena mencionar, que el siguiente lema es equivalente a la `Prop.3.1`[SIK16, pg. 3]. Tiene como valor agregado, que en esta formulación revelamos las relaciones existentes entre los operadores de cada una de las componentes del operador matricial.

Lema 4.1.4. *Sea* T_L *el álgebra de matrices generada por* (R,B,S). *Entonces, los operadores diferenciales admiten la siguiente descripción*

$$\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{r_1}\rho_{r_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\rho_{r_2} & \lambda_{s_1}\rho_{r_2} & \lambda_{s_1}\rho_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_1}\rho_{s_2} \end{pmatrix} \mid r_i \in R,\ b_j \in B,\ s_k \in S \right\}.$$

Demostración. Sabemos de la `Def.`1.2.5 que, $\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L) = \mathrm{T}_L\, \mathrm{Z}^0(\mathrm{T}_L)\, \mathrm{T}_L$. Basta entones con estudiar el espacio de operadores generados por la multiplicación a izquierda y a derecha, de esta forma,

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{T}_L) = \mathrm{Gen}\{\lambda_{t_1}\rho_{t_2}\lambda_{t_3} \mid t_i = (r_i, b_i, s_i) \in R \oplus B \oplus S\}.$$

Si tenemos en cuenta la conmutabilidad entre estos operadores $\lambda_{t_1}\rho_{t_2} = \rho_{t_2}\lambda_{t_1}$, junto con las propiedades de representación obtenemos que

$$\lambda_{t_1}\lambda_{t_2} = \lambda_{t_1t_2}, \quad \rho_{t_1}\rho_{t_2} = \rho_{t_2t_1}, \quad \lambda_{(1,0,1)} = \rho_{(1,0,1)} = 1$$

$$(\lambda_{t_1}\rho_{t_2})(\lambda_{t_3}\rho_{t_4}) = (\lambda_{t_1}\lambda_{t_3})(\rho_{t_2}\rho_{t_4}) = \lambda_{(t_1t_3)}\rho_{(t_2t_4)}.$$

Se sigue entonces que

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{T}_L) = \{\lambda_{t_1}\rho_{t_2} \mid t_i = (r_i, b_i, s_i) \in R \oplus B \oplus S\}.$$

Por otra parte, para cada $(r_i, b_i, s_i) \in R \oplus B \oplus S$ sabemos que

$$\lambda_{(r_1,b_1,s_1)} = \begin{pmatrix} \lambda_{r_1} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1} & \lambda_{s_1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{s_1} \end{pmatrix} \qquad y \qquad \rho_{(r_2,b_2,s_2)} = \begin{pmatrix} \rho_{r_2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{r_2} & \rho_{b_2} \\ 0 & 0 & \rho_{s_2} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\lambda_{(r_1,b_1,s_1)}\rho_{(r_2,b_2,s_2)} = \begin{pmatrix} \lambda_{r_1}\rho_{r_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\rho_{r_2} & \lambda_{s_1}\rho_{r_2} & \lambda_{s_1}\rho_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_1}\rho_{s_2} \end{pmatrix}.$$

□

Como puede verse, el resultado anterior es una consecuencia directa de la definición del los operadores diferenciales interiores. No obstante, con los estudios realizado en el capítulo tres, podemos brindar una formulación más refinada para el anillo $\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$, dada por el siguiente teorema.

Teorema 4.1.5. *Sea* T_L *el álgebra de matrices triangulares generada por* (R, B, S)*. Entonces,*

$$\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} RR^{op} & 0 & 0 \\ BR^{op} & SR^{op} & SB^{op} \\ 0 & 0 & SS^{op} \end{bmatrix}$$

como $\Bbbk$*-álgebras. Más aún,*

$$\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L) \subset \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(R) & 0 & 0 \\ BR^{op} & \mathrm{D}^0({}_SB) & \mathrm{D}^0(S,{}_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^0(S) \end{bmatrix}.$$

Demostración. Recordemos que

$$\begin{bmatrix} RR^{op} & 0 & 0 \\ BR^{op} & SR^{op} & SB^{op} \\ 0 & 0 & SS^{op} \end{bmatrix} = \mathrm{Sum}\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{r_1}\rho_{r_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\rho_{r_3} & \lambda_{s_1}\rho_{r_4} & \lambda_{s_2}\rho_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_3}\rho_{s_4} \end{pmatrix} \mid r_i \in R,\ b_j \in B,\ s_k \in S \right\}$$

Luego, este subespacio tiene estructura de subálgebra de $\mathrm{End}(\mathrm{T}_L)$, dado que,

$$\begin{pmatrix} \lambda_{r_1}\rho_{r_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\rho_{r_3} & \lambda_{s_1}\rho_{r_4} & \lambda_{s_2}\rho_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_3}\rho_{s_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{r'_1}\rho_{r'_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b'_1}\rho_{r'_3} & \lambda_{s'_1}\rho_{r'_4} & \lambda_{s'_2}\rho_{b'_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s'_3}\rho_{s'_4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{r_1}\rho_{r_2}\lambda_{r'_1}\rho_{r'_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\rho_{r_3}\lambda_{r'_1}\rho_{r'_2} + \lambda_{s_1}\rho_{r_4}\lambda_{b'_1}\rho_{r'_3} & \lambda_{s_1}\rho_{r_4}\lambda_{s'_1}\rho_{r'_4} & \lambda_{s_1}\rho_{r_4}\lambda_{s'_2}\rho_{b'_2} + \lambda_{s_2}\rho_{b_2}\lambda_{s'_3}\rho_{s'_4} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_3}\rho_{s_4}\lambda_{s'_3}\rho_{s'_4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{r_1r'_1}\rho_{r'_2r_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1r'_1}\rho_{r'_2r_3} + \lambda_{s_1b'_1}\rho_{r'_3r_4} & \lambda_{s_1s'_1}\rho_{r'_4r_4} & \lambda_{s_1s'_2}\rho_{b'_2r_4} + \lambda_{s_2s'_3}\rho_{s'_4b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_3s'_3}\rho_{s'_4s_4} \end{pmatrix}.$$

Se sigue entonces

$$\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_{r_1}\rho_{r_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\rho_{r_2} & \lambda_{s_1}\rho_{r_2} & \lambda_{s_1}\rho_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_1}\rho_{s_2} \end{pmatrix} \mid r_i \in R,\ b_j \in B,\ s_k \in S \right\} \qquad \texttt{Lema.4.1.4}$$

$$\subseteq \begin{bmatrix} RR^{op} & 0 & 0 \\ BR^{op} & SR^{op} & SB^{op} \\ 0 & 0 & SS^{op} \end{bmatrix}.$$

Para ver la otra inclusión, basta tomar $(r_i, b_i, s_i) \in R \oplus B \oplus S$ y realizar la siguiente descomposición,

$$\begin{pmatrix} \lambda_{r_1}\rho_{r_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{r_1}\rho_{r_2} & 0 & 0 \\ \lambda_0\rho_{r_2} & \lambda_0\rho_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_{(r_1,0,0)}\rho_{(r_2,0,0)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\rho_{r_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0\rho_{r_3} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\rho_{r_3} & \lambda_0\rho_{r_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_{(0,b_1,0)}\rho_{(r_3,0,0)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{s_1}\rho_{r_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0\rho_{r_4} & 0 & 0 \\ \lambda_0\rho_{r_4} & \lambda_{s_1}\rho_{r_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_{(0,0,s_1)}\rho_{(r_4,0,0)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{s_2}\rho_{b_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{s_2}\rho_0 & \lambda_{s_1}\rho_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_2}\rho_0 \end{pmatrix} = \lambda_{(0,0,s_2)}\rho_{(0,b_2,0)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{s_3}\rho_{s_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{s_3}\rho_0 & \lambda_{s_3}\rho_0 \\ 0 & 0 & \lambda_{s_3}\rho_{s_4} \end{pmatrix} = \lambda_{(0,0,s_3)}\rho_{(0,0,s_4)}.$$

De lo anterior obtenemos que cualquier operador matricial de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_{r_1}\rho_{r_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\rho_{r_3} & \lambda_{s_1}\rho_{r_4} & \lambda_{s_2}\rho_{b_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_3}\rho_{s_4} \end{pmatrix} = \lambda_{(r_1,0,0)}\rho_{(r_2,0,0)} + \lambda_{(0,b_1,0)}\rho_{(r_3,0,0)}$$
$$+ \lambda_{(0,0,s_1)}\rho_{(r_4,0,0)} + \lambda_{(0,0,s_2)}\rho_{(0,b_2,0)} + \lambda_{(0,0,s_3)}\rho_{(0,0,s_4)}$$

es un operador diferencial interior.

Para demostrar la inclusión de $\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$ en el espacio matricial propuesto, es suficiente ver

$$RR^{op} = \{\lambda_{r_1}\rho_{r_2} \in \mathrm{End}(R) \mid r_i \in R\} = \mathrm{D}^0_{\Bbbk}(R) \qquad \texttt{Corol.1.2.4}$$

$$SS^{op} = \{\lambda_{s_1}\rho_{s_2} \in \mathrm{End}(S) \mid s_i \in S\} = \mathrm{D}^0_{\Bbbk}(S) \qquad \texttt{Corol.1.2.4}$$

$$\mathrm{Z}^0(S,_S B) = \mathrm{Hom}_S(S,B) = \{\rho_b \in \mathrm{Hom}(S,B) \mid b \in B\} \qquad \texttt{Prop.1.2.1}$$

$$\Longrightarrow\ SB^{op} = \{\lambda_s\rho_b \mid b \in B, s \in S\} = S\,\mathrm{Z}^0(S,_S B) \subseteq \mathrm{D}^0_{\Bbbk}(S,_S B)$$

Similarmente, $\mathrm{Z}^0(_S B) = \mathrm{End}_S(_S B)$ y $R^{op} = \{\rho_r \in \mathrm{End}(_S B) \mid r \in R\} \subseteq \mathrm{Z}^0(_S B)$ entonces $SR^{op} \subseteq S\,\mathrm{Z}^0(_S B) \subseteq \mathrm{D}^0_{\Bbbk}(_S B)$. □

Nuevamente, vale mencionar que en general $\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$, esta contenido estrictamente en el espacio de matrices,

$$\begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(R) & 0 & 0 \\ BR^{op} & \mathrm{D}^0({}_SB) & \mathrm{D}^0(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^0(S) \end{bmatrix}.$$

Basta comparar los espacios de la componente (22) de ambas estructuras, donde en general $SR^{op} \neq \mathrm{D}^0({}_SB)$ y esto nos impide garantizar la igualdad entre $\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$ y el espacio matricial previamente exhibido. No obstante, dicho espacio matricial será un buen ambiente para estudiar el espacio de operadores.

Ahora, dedicaremos nuestros esfuerzos para extender los resultados previamente demostrados, a los operadores diferenciales de orden superior. Vale mencionar que en [SIK16, pg. 5 - Proposition.3.2], los autores demuestran que; si $\nabla \in \mathrm{D}_{\Bbbk}(\mathrm{T}_U)$ es un operadores diferenciales matricial, entonces $\nabla_{12} = \nabla_{13} = \nabla_{31} = \nabla_{32} = 0$. No obstante, nosotros logramos mejorar dicha formulación, por cuanto, exhibimos las estructura que componen cada una de las entradas de los operadores matriciales, tanto de $\mathrm{Z}^n(\mathrm{T}_L)$ como de $\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$. Y dicho conocimiento, nos permitirá avanzar en el estudio de $\mathrm{D}_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$. Por otra parte, las herramientas argumentativas que empleamos son constructivas.

Proposición 4.1.6. *Si T_L es el álgebra de matrices triangulares generada por (R, B, S), entonces*

$$\mathrm{Z}^n(\mathrm{T}_L) \subset \begin{bmatrix} \mathrm{Z}^n(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R,B) & \mathrm{Z}^n({}_SB) & \mathrm{Z}^n(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{Z}^n(S) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L) \subset \begin{bmatrix} \mathrm{D}^n(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R,B) & \mathrm{D}^n({}_SB) & \mathrm{D}^n(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^n(S) \end{bmatrix}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Realicemos una inducción sobre el orden de los operadores, de esta forma, el paso base se deduce directamente de los resultados obtenidos al inicio de la subsección, a saber, `Lema.`4.1.2 y `Teor.`4.1.5. Ahora, supongamos que el T_L-bimódulo de operadores diferenciales de orden $n \geq 0$ verifica la inclusión

$$\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L) \subset \begin{bmatrix} \mathrm{D}^n(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R,B) & \mathrm{D}^n({}_SB) & \mathrm{D}^n(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^n(S) \end{bmatrix}.$$

Veamos entonces que

$$\mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L) \subset \begin{bmatrix} \mathrm{Z}^{n+1}(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R,B) & \mathrm{Z}^{n+1}({}_SB) & \mathrm{Z}^{n+1}(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{Z}^{n+1}(S) \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D}^{n+1}_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L) \subset \begin{bmatrix} \mathrm{D}^{n+1}(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R,B) & \mathrm{D}^{n+1}({}_SB) & \mathrm{D}^{n+1}(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n+1}(S) \end{bmatrix}.$$

Si $\nabla \in \mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L)$ se sigue de la definición que $[\nabla, \lambda_t] \in \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L), \forall t \in \mathrm{T}_L$. Luego, del `Lema.`4.1.1 obtenemos la fórmula del corchete para los operadores matriciales,

$$[\nabla, \lambda_t] = \begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_r] + \nabla_{12}\lambda_b & \nabla_{12}\lambda_s - \lambda_r\nabla_{12} & \nabla_{13}\lambda_s - \lambda_r\nabla_{13} \\ \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & -\lambda_b\nabla_{12} + [\nabla_{22}, \lambda_s] & -\lambda_b\nabla_{13} + [\nabla_{23}, \lambda_s] \\ \nabla_{31}\lambda_r + \nabla_{32}\lambda_b - \lambda_s\nabla_{31} & [\nabla_{32}, \lambda_s] & [\nabla_{33}, \lambda_s] \end{pmatrix}.$$

Ahora, si hacemos $b = s = 0$ entonces, para cada $r \in R$ se cumplen

$$[\nabla, \lambda_{(r,0,0)}] = \begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_r] & -\lambda_r\nabla_{12} & -\lambda_r\nabla_{13} \\ \nabla_{21}\lambda_r & 0 & 0 \\ \nabla_{31}\lambda_r & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$$

y gracias a la hipótesis inductiva se sigue, por un lado, que

$$[\nabla_{11}, \lambda_r] \in \mathrm{D}^n(R), \forall r \in R \iff \boxed{\nabla_{11} \in \mathrm{Z}^{n+1}(R)}$$

y por otra lado,

$$-\lambda_r\nabla_{12} = -\lambda_r\nabla_{13} = \nabla_{31}\lambda_r = 0.$$

Si hacemos $r = -1$ obtenemos que

$$\nabla_{12} = -\lambda_r\nabla_{12} = 0, \quad \nabla_{13} = -\lambda_r\nabla_{13} = 0.$$

Similarmente, si hacemos $r = 1$ se obtiene que $\nabla_{31} = \nabla_{31}\lambda_r = 0$. De esta forma conseguimos que

$$\boxed{\nabla_{12} = \nabla_{13} = \nabla_{31} = 0}.$$

Si hacemos $r = s = 0$ entonces para cada $b \in B$ se tienen que

$$[\nabla, \lambda_{(0,b,0)}] = \begin{pmatrix} \nabla_{12}\lambda_b & 0 & 0 \\ \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & -\lambda_b\nabla_{12} & -\lambda_b\nabla_{13} \\ \nabla_{32}\lambda_b & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L).$$

Se sigue de la hipótesis inductiva que , $\nabla_{32}\lambda_b = 0, \forall b \in B$. Como $\nabla_{32} \in \mathrm{Hom}(B, S)$ entonces podemos evaluar el operador, de esta forma,

$$\nabla_{32}(b) = (\nabla_{32}\lambda_b)(1) = 0, \forall b \in B \implies \boxed{\nabla_{32} = 0}.$$

Nuevamente, si hacemos $r = b = 0$ entonces, para cada $s \in S$,

$$[\nabla, \lambda_{(0,0,s)}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_s\nabla_{21} & [\nabla_{22}, \lambda_s] & [\nabla_{23}, \lambda_s] \\ 0 & 0 & [\nabla_{33}, \lambda_s] \end{pmatrix} \in \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$$

y de la hipótesis inductiva se deduce que

$$[\nabla_{33}, \lambda_s] \in \mathrm{D}^n(S), \forall s \in S \iff \boxed{\nabla_{33} \in \mathrm{Z}^{n+1}(S)}$$

$$[\nabla_{23}, \lambda_s] \in \mathrm{D}^n(S,_S B), \forall s \in S \iff \boxed{\nabla_{23} \in \mathrm{Z}^{n+1}(S,_S B)}$$

$$[\nabla_{22}, \lambda_s] \in \mathrm{D}^n(_S B), \forall s \in S \iff \boxed{\nabla_{22} \in \mathrm{Z}^{n+1}(_S B)}.$$

Por lo tanto, para cada $\nabla \in \mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L)$ se cumple que

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathrm{Z}^{n+1}(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R, B) & \mathrm{Z}^{n+1}(_S B) & \mathrm{Z}^{n+1}(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{Z}^{n+1}(S) \end{bmatrix}.$$

Ahora, veamos que el bimódulo generado por $\mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L)$ verifica la contención que buscamos. Para cada $t_1, t_2 \in \mathrm{T}_L$ y $\nabla \in \mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L)$, tenemos del Lema.4.1.1 junto con la descripción recién hecha para los operadores diferenciales centrales que,

$$\lambda_{t_1}(\nabla\lambda_{t_2}) = \begin{pmatrix} \lambda_{r_1}(\nabla_{11}\lambda_{r_2}) & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}(\nabla_{11}\lambda_{r_2}) + \lambda_{s_1}(\nabla_{21}\lambda_{r_2} + \nabla_{22}\lambda_{b_2}) & \lambda_{s_1}(\nabla_{22}\lambda_{s_2}) & \lambda_{s_1}(\nabla_{23}\lambda_{s_2}) \\ 0 & 0 & \lambda_{s_1}(\nabla_{33}\lambda_{s_2}) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \lambda_{t_1}(\nabla\lambda_{t_2}) \in \begin{bmatrix} \mathrm{D}^{n+1}(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R,B) & \mathrm{D}^{n+1}({}_SB) & \mathrm{D}^{n+1}(S,{}_SB) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n+1}(S) \end{bmatrix}.$$

Finalmente, obtenemos lo que esperábamos ver, dado que,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{T}_L) &= \mathrm{Sum}\{\lambda_{t_1}\nabla\lambda_{t_2} \mid t_i \in \mathrm{T}_L, \nabla \in \mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L)\} \\ &\subset \begin{bmatrix} \mathrm{D}^{n+1}(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R,B) & \mathrm{D}^{n+1}({}_SB) & \mathrm{D}^{n+1}(S,{}_SB) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n+1}(S) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Vale la pena hacer las siguientes aclaraciones. Por una lado, los subespacios de endomorfismo lineales

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Z}^{n}(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R,B) & \mathrm{Z}^{n}({}_SB) & \mathrm{Z}^{n}(S,{}_SB) \\ 0 & 0 & \mathrm{Z}^{n}(S) \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} \mathrm{D}^{n}(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R,B) & \mathrm{D}^{n}({}_SB) & \mathrm{D}^{n}(S,{}_SB) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n}(S) \end{bmatrix}$$

en general no son subespacios de los operadores diferenciales $\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$, pero serán de utilidad para aliviar los cálculos, y más aún, estos espacios nos brindarán un marco de referencia linealmente independiente sobre el cual describiremos las relaciones que nos permitirán comprender la estructura interna de los operadores diferenciales.

Por otra parte, en general la inclusión que se propone en la Prop.4.1.6 es estricta. Basta con recordar el caso de los operadores diferenciales interiores, donde en general $SR^{op} \subsetneq \mathrm{D}^0(B)$, y por ende,

$$\mathrm{D}^0_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} RR^{op} & 0 & 0 \\ BR^{op} & SR^{op} & SB^{op} \\ 0 & 0 & SS^{op} \end{bmatrix} \subsetneq \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R,B) & \mathrm{D}^0(B) & \mathrm{D}^0(S,B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^0(S) \end{bmatrix}.$$

Con base en el resultado anterior, podemos reformular las relaciones del conmutador para los operadores diferenciales del álgebra de matrices triangulares inferiores.

Corolario 4.1.7. *Si* $\nabla \in \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$, *para algún* $n \in \mathbb{N}_0$, *entonces para cualquier* $t = (r,b,s) \in R \oplus B \oplus S$ *se cumplen*

$$\nabla\lambda_{(r,b,s)} = \begin{pmatrix} \nabla_{11}\lambda_r & 0 & 0 \\ \nabla_{21}\lambda_r + \nabla_{22}\lambda_b & \nabla_{22}\lambda_s & \nabla_{23}\lambda_s \\ 0 & 0 & \nabla_{33}\lambda_s \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{(r,b,s)}\nabla = \begin{pmatrix} \lambda_r\nabla_{11} & 0 & 0 \\ \lambda_b\nabla_{11} + \lambda_s\nabla_{21} & \lambda_s\nabla_{22} & \lambda_s\nabla_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_s\nabla_{33} \end{pmatrix}$$

$$[\nabla,\lambda_{(r,b,s)}] = \begin{pmatrix} [\nabla_{11},\lambda_r] & 0 & 0 \\ \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & [\nabla_{22},\lambda_s] & [\nabla_{23},\lambda_s] \\ 0 & 0 & [\nabla_{33},\lambda_s] \end{pmatrix}.$$

Demostración. Primero, de la `Prop.`4.1.6 obtenemos que, para cada $\nabla \in \mathrm{End}(\mathrm{T}_L)$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & \nabla_{12} & \nabla_{13} \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ \nabla_{31} & \nabla_{32} & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{D}^n_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L) \implies \nabla_{12} = \nabla_{13} = \nabla_{31} = \nabla_{32} = 0$$

luego, usando el `Lema.`4.1.1 para refrescar las relaciones del conmutador $[\nabla,\lambda_t]$, para cualquier $t \in \mathrm{T}_L$. □

4.1.2. Operadores diferenciales de $\mathrm{T_L}(R,B,S)$

Nuestro siguiente objetivo consiste en describir el bimódulo de operadores diferenciales $\mathrm{D}^n_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$, junto con $\mathrm{Z}^n(\mathrm{T}_L)$, en función de las estructuras inherentes a cada una de las componentes matriciales. Recordemos que $\mathrm{End}(R)$, es un R-bimódulo, y similarmente, $\mathrm{Hom}(S,B)$, $\mathrm{End}(S)$ y $\mathrm{End}(B)$ son S-bimódulo, dado que, tanto S como B son S-módulos izquierdos. Por otra parte, el espacio $\mathrm{Hom}(R,B)$ admite una estructura de (R,S)-bimódulo (inducida por la multiplicación a izquierda), y como no hemos pedido ninguna condición sobre las álgebras R y S entonces, no tenemos a priori, una estructura natural sobre $\mathrm{Hom}(R,B)$ para inducir operadores diferénciales sobre dicho espacio.

Por otra parte, vale la pena mencionar que en el artículo [SIK16], los matemáticos M. Sumanth Datta, Uma N. Iyer y G. Koteswara Raoa, no caracterizan los espacios de operadores diferenciales centrales de las matrices triangulares superiores formales. A su vez, presentan algunos detalles formales que reclaman ser explicados, y es en esa dirección que presentamos las siguientes definiciones y resultados propios de nuestro trabajo de investigación.

Sea S una $\Bbbk$-álgebra y B un S-módulo izquierdo. Recordemos que $\mathrm{End}(B)$ admite una estructura natural de S-bimódulo, inducida por la representación $\lambda : S \to \mathrm{End}(B)$, ver `Def.`1.1.6.

Definición 4.1.2. Sea $\Omega \subseteq \mathrm{End}(B)$ un subespacio de operadores, definimos el espacio $\mathrm{Z}^\star_B\,\Omega$ por

$$\mathrm{Z}^\star_B\,\Omega = \{\Delta \in \mathrm{End}(B) \mid [\Delta,\lambda_s] \in \Omega,\ \forall s \in S\}.$$

Se sigue a continuación una lista de propiedades básicas para el espacio previamente definida.

Proposición 4.1.8. *Sea B un S-módulo izquierdo y $\Omega_i \subseteq \operatorname{End}(B)$ subespacio vectorial.*

1. *Si $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \operatorname{End}(B)$, entonces $Z^\star_B\,\Omega_1 \subseteq Z^\star_B\,\Omega_2$.*
2. *Para cualquier subespacio $\Omega \subseteq \operatorname{End}(B)$, se cumple que, $Z^0({}_SB) \subseteq Z^\star_B\,\Omega$.*
3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, $Z^\star_B(D^n({}_SB)) = Z^{n+1}({}_SB)$.*
4. *Más general aún, Si $\Omega \subseteq D^n({}_SB)$, entonces $Z^\star_B\,\Omega \subseteq Z^{n+1}({}_SB)$.*

Demostración. Para demostrar el `item(1)`, sea $\nabla \in Z^\star_B\,\Omega_1$, de la `Def.`4.1.2 tenemos que, $[\nabla, \lambda_s] \in \Omega_1\,, \forall s \in S$. Si $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ entonces $[\nabla, \lambda_s] \in \Omega_2\,, \forall s \in S$, se sigue de esta forma que, $\nabla \in Z^\star_B\,\Omega_2$.

Para demostrar el `item(2)`, basta ver $Z^0({}_SB) = Z^\star_B\{0\}$. En efecto, por una parte

$$\nabla \in Z^0({}_SB) \iff [\nabla, \lambda_s] = 0, \forall s \in S \iff \nabla \in Z^\star_B\{0\}$$

por otro lado, dado que $\{0\} \subseteq \Omega$ para cualquier subesapcio $\Omega \subseteq \operatorname{End}(B)$ entonces $Z^0({}_SB) = Z^\star_B\{0\} \subseteq Z^\star_B\,\Omega$.

Para demostrar el `item(3)y(4)`, razonamos similarmente,

$$\begin{aligned} \nabla \in Z^{n+1}({}_SB) &\iff [\nabla, \lambda_s] \in D^n({}_SB), \forall s \in S && \texttt{Def.}1.2.4 \\ &\iff \nabla \in Z^\star_B(D^n({}_SB)) && \texttt{Def.}4.1.2 \end{aligned}$$

Más general, si $\Omega \subseteq D^n({}_SB)$, se sigue de la primera parte, que $Z^\star_B\,\Omega \subseteq Z^\star_B\,D^n({}_SB)$. De la tercer parte tenemos la igualdad, $Z^\star_B(D^n({}_SB)) = Z^{n+1}({}_SB)$, obteniendo de esta forma que $Z^\star_B\,\Omega \subseteq Z^{n+1}({}_SB)$. □

Nuestro siguiente objetivo será formular una descripción para el espacio $Z^n(T_L)$ y para ello, razonaremos de forma análoga al `Corol.`4.1.3. En donde definimos una relación entre pares de operadores $(\nabla, \Delta) \in Z^0(R) \times Z^0({}_SB)$, dado por,

$$\begin{aligned} \nabla \sim \Delta &\iff \exists r \in R \text{ tal que } \begin{cases} \nabla = \rho_r \in \operatorname{End}(R) \\ \Delta = \rho_r \in \operatorname{End}(B) \end{cases} \\ &\iff \nabla\lambda_b - \lambda_b\Delta = 0 \in \operatorname{Hom}(R, B)\,, \forall b \in B. \end{aligned}$$

Y luego demostrar que

$$\nabla \in Z^0(T_L) \iff \begin{cases} (\nabla_{11}, \nabla_{22}) \in Z^0(R) \times Z^0({}_SB) : \nabla_{11} \sim \nabla_{22}. \\ \nabla_{23} \in Z^0(S,{}_SB) \quad y \quad \nabla_{33} \in Z^0(S). \\ \nabla_{12} = \nabla_{13} = \nabla_{31} = \nabla_{32} = 0. \end{cases}$$

Definición 4.1.3. Sea B un R-módulo derecho y $\Gamma \subseteq \operatorname{Hom}(R, B)$ un subespacio vectorial. Para cada par de operadores $(\nabla, \Delta) \in \operatorname{End}(R) \times \operatorname{End}(B)$, definimos la relación

$$\nabla \sim_{(B,\Gamma)} \Delta \iff \Delta\lambda_b - \lambda_b\nabla \in \Gamma, \forall b \in B.$$

Proposición 4.1.9. *Sea B un R-módulo derecho y $\Gamma \subseteq \mathrm{Hom}(R, B)$ un subespacio vectorial. Entonces, el conjunto de pares ordenados*

$$\{(\nabla, \Delta) \in \mathrm{End}(R) \times \mathrm{End}(B) \mid \nabla \sim_{(B,\Gamma)} \Delta\}$$

es un subespacio de $\mathrm{End}(R) \oplus \mathrm{End}(B)$.

Demostración. Sea $\Gamma \subseteq \mathrm{Hom}(R, B)$ un subespacio. Veamos primero que $0 \sim_{(B,\Gamma)} 0$. En efecto,

$$0\lambda_b - \lambda_b 0 = 0 \in \Gamma, \forall b \in B.$$

Veamos ahora que este conjunto de pares ordenados es cerrado en la suma y en la multiplicación por un escalar. Sean $(\nabla, \Delta) \in \mathrm{End}(R) \times \mathrm{End}(B)$, tales que, $\nabla \sim_{(B,\Gamma)} \Delta$. Luego, para cualquier $c \in \Bbbk$ se cumple,

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_b - \lambda_b\nabla \in \Gamma, \forall b \in B &\iff c(\Delta\lambda_b - \lambda_b\nabla) \in \Gamma, \forall b \in B \\
&\iff (c\Delta)\lambda_b - \lambda_b(c\nabla) \in \Gamma, \forall b \in B \\
&\iff (c\nabla) \sim_{(B,\Gamma)} (c\Delta)
\end{aligned}$$

donde claramente $c(\nabla, \Delta) = (c\nabla, c\Delta) \in \mathrm{End}(R) \oplus \mathrm{End}(B), \forall c \in \Bbbk$. Similarmente, si $\nabla_1 \sim_{(B,\Gamma)} \Delta_1$ y $\nabla_2 \sim_{(B,\Gamma)} \Delta_2$ entonces

$$\begin{aligned}
&\Delta_1\lambda_b - \lambda_b\nabla_1 \in \Gamma, \forall b \in B \quad y \quad \Delta_2\lambda_b - \lambda_b\nabla_2 \in \Gamma, \forall b \in B \\
&\implies (\Delta_1\lambda_b - \lambda_b\nabla_1) + (\Delta_2\lambda_b - \lambda_b\nabla_2) \in \Gamma, \forall b \in B \\
&\implies (\Delta_1 + \Delta_2)\lambda_b - \lambda_b(\nabla_1 + \nabla_2) \in \Gamma, \forall b \in B \\
&\implies (\nabla_1 + \nabla_2) \sim_{(B,\Gamma)} (\Delta_1 + \Delta_2)
\end{aligned}$$

donde claramente $(\nabla_1, \Delta_1) + (\nabla_2, \Delta_2) = (\nabla_1 + \nabla_2, \Delta_1 + \Delta_2) \in \mathrm{End}(R) \oplus \mathrm{End}(B)$. □

Vale la pena recordar la descripción que obtuvimos para el espacio $Z^1(\Gamma_{(1,n)})$, para que veamos cual es el papel de la relación entre operadores $\nabla \sim_{(B,\Gamma)} \Delta$, previamente definida. Sabemos del `Capítulo` 3 que,

$$Z^1(\Gamma_{(1,n)}) = \left\{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & \varphi & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} * & \lambda_s & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \varphi + \lambda_r & * \\ 0 & * \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(\Gamma_{(1,n)}) \right\}.$$

En este caso $\Gamma_{(1,n)} = \begin{bmatrix} \Gamma_n & 0 \\ \Bbbk^{n+1} & \Bbbk \end{bmatrix}$ entonces $R = \Gamma_n$, $S = \Bbbk$ y $B = \Bbbk^{n+1}$. Por otra parte, consideremos los operadores

$$\nabla = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & \varphi & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \begin{pmatrix} \varphi + \lambda_r & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Sabemos del `Capítulo` 3, que para cada $b = (b_1, b_2) \in \Bbbk^n \oplus \Bbbk = B$, se cumple que

$$\Delta\lambda_b - \lambda_b\nabla = \begin{pmatrix} * & b_2(\varphi + \lambda_r) & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} * & b_2\varphi & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \lambda_{b_2 r} & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Finalmente, si consideramos el subespacio

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} * & \lambda_s & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \operatorname{Hom}(R,B) : s \in \Bbbk \right\},$$

se sigue de los cálculos anteriores que, $\nabla \sim_{(B,\Omega)} \Delta$.

Ahora contamos con todos los ingredientes para formular y demostrar el resultado central de este capítulo.

Teorema 4.1.10. *Sea T_L el álgebra de matrices triangulares inferiores generada por (R,B,S). Para cada $n \geq 0$ existen tres subespacios*

$$\Omega_{11}^n \subseteq \mathrm{D}^n(R), \quad \Omega_{21}^n \subseteq \operatorname{Hom}(R,B), \quad \Omega_{22}^n \subseteq \mathrm{D}^n({}_S B)$$

tales que;

$$\textit{Prop.(1)}. \quad \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} \Omega_{11}^n & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^n & \Omega_{22}^n & \mathrm{D}^n(S,{}_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^n(S) \end{bmatrix}$$

Prop.(2). $\nabla \in \mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L)$ *si y solo si*

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \textit{ tal que } \begin{cases} \nabla_{21} \in \Omega_{21}^n \\ (\nabla_{23}, \nabla_{33}) \in \mathrm{Z}^{n+1}(S,{}_S B) \times \mathrm{Z}^{n+1}(S) \\ (\nabla_{11}, \nabla_{22}) \in \mathrm{Z}_R^\star \Omega_{11}^n \times \mathrm{Z}_B^\star \Omega_{22}^n : \nabla_{11} \sim_{(B,\Omega_{21}^n)} \nabla_{22} \end{cases}$$

Más aún, la cadena de espacios $\{(\Omega_{11}^n, \Omega_{21}^n, \Omega_{22}^n) : n \in \mathbb{N}_0\}$, admiten una descripción recursiva e independiente a la estructura del álgebra de matrices, de la siguiente forma:

$$\Omega_{11}^0 = RR^{op} \subseteq \mathrm{D}^0(R),\ \Omega_{21}^0 = BR^{op} \subseteq \operatorname{Hom}(R,B),\ \Omega_{22}^0 = SR^{op} \subseteq \mathrm{D}^0({}_S B)$$

Y a partir de los subespacios $\Phi_{11}^{n+1} \subseteq \mathrm{Z}^n(R)$ y $\Phi_{22}^{n+1} \subseteq \mathrm{Z}^n(B)$, dados por

$$\Phi_{11}^{n+1} = \{\nabla \in \mathrm{Z}_R^\star \Omega_{11}^n \mid \nabla \sim_{(B,\Omega_{21}^n)} \Delta, \textit{ para algún } \Delta \in \mathrm{Z}_B^\star \Omega_{22}^n\}$$

$$\Phi_{22}^{n+1} = \{\Delta \in \mathrm{Z}_B^\star \Omega_{22}^n \mid \nabla \sim_{(B,\Omega_{21}^n)} \Delta, \textit{ para algún } \nabla \in \mathrm{Z}_R^\star \Omega_{11}^n\}$$

se construyen los espacios de nivel $n+1$:

$$\begin{aligned} \Omega_{11}^{n+1} &= R\Phi_{11}^{n+1}R \subseteq \mathrm{D}^{n+1}(R) \\ \Omega_{22}^{n+1} &= S\Phi_{22}^{n+1}S \subseteq \mathrm{D}^{n+1}({}_S B) \\ \Omega_{21}^{n+1} &= B\Phi_{11}^{n+1}R + S\Omega_{21}^n R + S\Phi_{22}^{n+1}B \subseteq \operatorname{Hom}(R,B) \end{aligned}$$

Demostración. Razonemos por inducción sobre el orden de los operadores diferenciales. Para el caso $n = 0$, definamos los subespacios

$$\Omega_{11}^0 = \mathrm{D}^0(R), \quad \Omega_{21}^0 = BR^{op}, \quad \Omega_{22}^0 = SR^{op}$$

Veamos primero que se cumple la `Prop.(1)`. Para ello, usaremos el `Teor.`4.1.5 del cual obtenemos

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} RR^{op} & 0 & 0 \\ BR^{op} & SR^{op} & SB^{op} \\ 0 & 0 & SS^{op} \end{bmatrix} \subset \begin{bmatrix} \mathrm{D}^0(R) & 0 & 0 \\ BR^{op} & \mathrm{D}^0({}_S B) & \mathrm{D}^0(S,{}_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^0(S) \end{bmatrix}$$

Luego, usemos el `Corol.`1.2.4 para obtener

$$\mathrm{D}^0(R) = \mathrm{Gen}\{\lambda_{r_1}\rho_{r_2} \in \mathrm{End}(R) \mid r_i \in R\} = RR^{op}$$
$$\Longrightarrow \boxed{\Omega_{11}^0 = RR^{op}}$$
$$\mathrm{D}^0(S) = \mathrm{Gen}\{\lambda_{s_1}\rho_{s_2} \in \mathrm{End}(S) \mid s_i \in S\}$$
$$\Longrightarrow \boxed{\mathrm{D}^0(S) = SS^{op}}$$

Por otra parte, las siguientes estructuras están bien definidas gracias a la composición de transformaciones,

$$BR^{op} = \mathrm{Sum}\{\lambda_b\rho_r \in \mathrm{Hom}(R, B) \mid b \in B, r \in R\}$$
$$SR^{op} = \mathrm{Sum}\{\lambda_s\rho_r \in \mathrm{End}(B) \mid s \in B, r \in R\}$$
$$SB^{op} = \mathrm{Sum}\{\lambda_s\rho_b \in \mathrm{Hom}(S, B) \mid s \in S, b \in B\}$$

Asimismo, veamos que $SB^{op} = \mathrm{D}^0(S,_S B)$. En efecto, si $\nabla \in \mathrm{Z}^0(S,_S B)$ entonces $[\nabla, \lambda_s] = 0, \forall s \in S$. Esto implica que ∇ es una transformación S-lineal, por consiguiente, $\nabla = \rho_b$, con $b = \nabla(1)$. Notemos, los argumentos anteriores nos muestran que todo operador del tipo ρ_b es interior. De la doble inclusión se sigue la igualdad, $B^{op} = \mathrm{Z}^0(S,_S B)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathrm{D}^0(S,_S B) &= S\,\mathrm{Z}^0(S,_S B)S = \mathrm{Sum}\{\lambda_{s_1}\rho_b\lambda_{s_2} \mid s_i \in S, b \in B\}\\ &= \mathrm{Sum}\{\lambda_s\rho_b \mid s \in S, b \in B\} = SB^{op}\\ &\Longrightarrow \boxed{SB^{op} = \mathrm{D}^0(S,_S B)}\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos que $\Omega_{11}^0 \subseteq \mathrm{D}^0(R)$, $\Omega_{21}^0 \subseteq \mathrm{Hom}(R, N)$ y $\Omega_{22}^0 \subseteq \mathrm{D}^0(B)$ tales que

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} RR^{op} & 0 & 0 \\ BR^{op} & SR^{op} & SB^{op} \\ 0 & 0 & SS^{op} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{11}^0 & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^0 & \Omega_{22}^0 & \mathrm{D}^0(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^0(S) \end{bmatrix}.$$

Ahora, para demostrar la `Prop.(2)` estudiemos los operadores 1-centrales. Sea $\nabla \in \mathrm{Z}^1(\mathrm{T}_L)$, de la misma definición obtenemos que,

$$[\nabla, \lambda_{(r,b,s)}] \in \mathrm{D}^0(\mathrm{T}_L), \forall (r, b, s) \in R \times B \times S.$$

Teniendo presente el `Corol.`4.1.7, donde se describe la forma matricial del corchete para los operadores, junto con la descripción matricial de la `Prop.(1)` para $\mathrm{D}^0(\mathrm{T}_L)$, obtenemos que, para cada $(r, b, s) \in R \times B \times S$,

$$\begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_r] & 0 & 0 \\ \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & [\nabla_{22}, \lambda_s] & [\nabla_{23}, \lambda_s] \\ 0 & 0 & [\nabla_{33}, \lambda_s] \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \Omega_{11}^0 & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^0 & \Omega_{22}^0 & \mathrm{D}^0(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^0(S) \end{bmatrix}.$$

Notemos entonces, que de esta última fórmula podemos deducir las siguientes conclusiones. De la Def. 4.1.2 sabemos que

$$[\nabla_{11}, \lambda_r] \in \Omega^0_{11}, \forall r \in R \iff \boxed{\nabla_{11} \in Z^\star_R \Omega^0_{11}}$$

$$[\nabla_{22}, \lambda_s] \in \Omega^0_{22}, \forall s \in S \iff \boxed{\nabla_{22} \in Z^\star_B \Omega^0_{22}}$$

Por otra parte, de la Def. 1.2.4 obtenemos que

$$[\nabla_{23}, \lambda_s] \in \mathrm{D}^0(S,_S B), \forall s \in S \iff \boxed{\nabla_{23} \in \mathrm{Z}^1(S,_S B)}$$

$$[\nabla_{33}, \lambda_s] \in \mathrm{D}^0(S), \forall s \in S \iff \boxed{\nabla_{33} \in \mathrm{Z}^1(S)}.$$

Ahora, dado que $\nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Omega^0_{21}, \forall (r,b,s) \in R \times B \times S$, podemos considerar el caso $r = s = 0$, para obtener

$$\nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Omega^0_{21} \forall b \in B \implies \boxed{\nabla_{11} \sim_{(B,\Omega^0_{21})} \nabla_{22}}.$$

Por otra parte, si hacemos $b = s = 0$ y $r = 1$, obtenemos $\boxed{\nabla_{21} \in \Omega^0_{21}}$. De esta forma demostramos que

$$\mathrm{Z}^1(\mathrm{T}_L) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} Z^\star_R \Omega^0_{11} & 0 & 0 \\ \Omega^0_{21} & Z^\star_B \Omega^0_{22} & \mathrm{Z}^1(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{Z}^1(S) \end{bmatrix} : \nabla_{11} \sim_{(B,\Omega^0_{21})} \nabla_{22} \right\}.$$

Ahora, para ver la igualdad basta con demostrar que, $\forall\, (r,b,s) \in R \times B \times S$

$$\begin{cases} \nabla_{11} \sim_{(B,\Omega^0_{21})} \nabla_{22} \\ \\ \nabla_{21} \in \Omega^0_{21} \end{cases} \implies \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Omega^0_{21}$$

Notemos, si $\nabla_{21} \in \Omega^0_{21} = BR^{op}$ entonces existen $(r_i, b_i) \in R \times B$, tales que $\nabla_{21} = \sum \lambda_{b_i}\rho_{r_i}$. Luego, para cualquier $(r,s) \in (R,S)$ se cumple

$$\begin{aligned} \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} &= (\sum \lambda_{b_i}\rho_{r_i})\lambda_r - \lambda_s(\sum \lambda_{b_i}\rho_{r_i}) \\ &= \sum \lambda_{b_i}\lambda_r\rho_{r_i} - \sum \lambda_s\lambda_{b_i}\rho_{r_i} \\ &= \sum \lambda_{b_i r}\rho_{r_i} - \sum \lambda_{s b_i}\rho_{r_i} \in \Omega^0_{21} \\ &\implies \boxed{\nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} \in \Omega^0_{21}\,, (r,s) \in (R,S)} \end{aligned}$$

Por otra parte, si $\nabla_{11} \sim_{(B,\Omega^0_{21})} \nabla_{22}$, se sigue de la Def. 4.1.3 que

$$\boxed{\nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Omega^0_{21}, \forall b \in B}$$

Entonces, $(\nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21}) + (\nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11}) \in \Omega^0_{21}\,, \forall (r,b,s) \in R \times B \times S$.

Con lo anterior podemos garantizar la igualdad

$$\mathrm{Z}^1(\mathrm{T}_L) = \left\{ \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} Z^\star_R \Omega^0_{11} & 0 & 0 \\ \Omega^0_{21} & Z^\star_B \Omega^0_{22} & \mathrm{Z}^1(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{Z}^1(S) \end{bmatrix} : \nabla_{11} \sim_{(B,\Omega^0_{21})} \nabla_{22} \right\}$$

y de esta forma, demostramos la relación de equivalencia que se formula en la `Prop.(2)`.

Ahora realicemos el paso inductivo, supongamos que para $n \geq 0$ existen subespacios

$$\Omega_{11}^n \subseteq \mathrm{D}^n(R), \quad \Omega_{21}^n \subseteq \mathrm{Hom}(R,B), \quad \Omega_{22}^n \subseteq \mathrm{D}^n({}_S B)$$

tales que

$$\texttt{Prop.(1).} \quad \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} \Omega_{11}^n & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^n & \Omega_{22}^n & \mathrm{D}^n(S,{}_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^n(S) \end{bmatrix}$$

$\texttt{Prop.(2).}$ $\nabla \in \mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L)$ si y solo si

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \text{ tal que} \begin{cases} (\nabla_{21}, \nabla_{23}, \nabla_{33}) \in \Omega_{21}^n \times \mathrm{Z}^{n+1}(S,{}_S B) \times \mathrm{Z}^{n+1}(S) \\ (\nabla_{11}, \nabla_{22}) \in \mathrm{Z}_R^\star \, \Omega_{11}^n \times \mathrm{Z}_B^\star \, \Omega_{22}^n : \nabla_{11} \sim_{(B,\Omega_{21}^n)} \nabla_{22} \end{cases}.$$

Demostremos entonces la existencia de otros tres subespacios

$$\Omega_{11}^{n+1} \subseteq \mathrm{D}^{n+1}(R), \quad \Omega_{21}^{n+1} \subseteq \mathrm{Hom}(R,B), \quad \Omega_{22}^{n+1} \subseteq \mathrm{D}^{n+1}({}_S B)$$

los cuales verifiquen `Prop.(1)y(2)`. Para esto, consideremos primero el espacio de pares ordenados

$$\{(\nabla, \Delta) \in \mathrm{Z}_R^\star \, \Omega_{11}^n \times \mathrm{Z}_B^\star \, \Omega_{22}^n \mid \nabla \sim_{(B,\Omega_{21}^n)} \Delta\} \subseteq \mathrm{End}(R) \oplus \mathrm{End}(B).$$

Luego, adoptemos la siguiente notación, $\Phi_{11}^{n+1} \subseteq \mathrm{End}(R)$ y $\Phi_{22}^{n+1} \subseteq \mathrm{End}(B)$, para sus respectivas proyecciones, es decir,

$$\Phi_{11}^{n+1} = \{\nabla \in \mathrm{Z}_R^\star \, \Omega_{11}^n \mid \nabla \sim_{(B,\Omega_{21}^n)} \Delta, \text{ para algún } \Delta \in \mathrm{Z}_B^\star \, \Omega_{22}^n\}$$

$$\Phi_{22}^{n+1} = \{\Delta \in \mathrm{Z}_B^\star \, \Omega_{22}^n \mid \nabla \sim_{(B,\Omega_{21}^n)} \Delta, \text{ para algún } \nabla \in \mathrm{Z}_R^\star \, \Omega_{11}^n\}.$$

De esta forma, podemos definir Ω_{11}^{n+1} como el R-bisubmódulo de $\mathrm{End}(R)$, generado por Φ_{11}^{n+1},

$$\Omega_{11}^{n+1} = R\Phi_{11}^{n+1}R = \mathrm{Sum}\{\lambda_{r_1} \nabla \lambda_{r_2} \in \mathrm{End}(R) \mid r_i \in R, \nabla \in \Phi_{11}^{n+1}\}$$

y similarmente, Ω_{22}^{n+1} es el S-bisumódulo de $\mathrm{End}(B)$, generado por Φ_{22}^{n+1},

$$\Omega_{22}^{n+1} = S\Phi_{22}^{n+1}S = \mathrm{Sum}\{\lambda_{s_1} \nabla \lambda_{s_2} \in \mathrm{End}(B) \mid s_i \in S, \nabla \in \Phi_{22}^{n+1}\}.$$

Por otra parte, gracias a la composición de operadores lineales podemos identificar a las siguientes estructuras con subespacios de $\mathrm{Hom}(R,B)$,

$$B\Phi_{11}^{n+1}R = \mathrm{Sum}\{\lambda_b \nabla \lambda_r \in \mathrm{Hom}(R,B) \mid (b, \nabla, r) \in B \times \Phi_{11}^{n+1} \times R\}$$

$$S\Omega_{21}^n R = \mathrm{Sum}\{\lambda_s \nabla \lambda_r \in \mathrm{Hom}(R,B) \mid (s, \nabla, r) \in S \times \Omega_{21}^n \times R\}$$

$$S\Phi_{22}^{n+1}B = \mathrm{Sum}\{\lambda_s \nabla \lambda_b \in \mathrm{Hom}(R,B) \mid (s, \nabla, b) \in S \times \Phi_{22}^{n+1} \times B\}.$$

De esta forma, podemos definir $\Omega_{11}^{n+1} \subseteq \mathrm{Hom}(R,B)$ con la suma de estos subespacios, es decir,

$$\Omega_{21}^{n+1} = B\Phi_{11}^{n+1}R + S\Omega_{21}^n R + S\Phi_{22}^{n+1}B.$$

Ahora, nos daremos a la tarea de demostrar que los tres espacios Ω_{11}^{n+1}, Ω_{22}^{n+1}, y Ω_{21}^{n+1}, verifican todas y cada una de las condiciones que se proponen en el teorema. Veamos primero que se verifican las inclusiones

$$\Omega_{11}^{n+1} \subseteq \mathrm{D}^{n+1}(R), \quad \Omega_{22}^{n+1} \subseteq \mathrm{D}^{n+1}({}_S B), \quad \Omega_{21}^{n+1} \subseteq \mathrm{Hom}(R, B).$$

En efecto, $\Omega_{21}^{n+1} \subseteq \mathrm{Hom}(R, B)$ de la misma construcción, y junto a la hipótesis inductiva tenemos que $\Omega_{11}^{n} \subseteq \mathrm{D}^{n}(R)$ y $\Omega_{22}^{n} \subseteq \mathrm{D}^{n}({}_S B)$. Luego, usamos la `Prop.`4.1.8`-item`(3) para obtener

$$\mathrm{Z}_R^{\star}\,\Omega_{11}^{n} \subseteq \mathrm{Z}^{n+1}(R), \qquad \mathrm{Z}_B^{\star}\,\Omega_{22}^{n} \subseteq \mathrm{Z}^{n+1}({}_S B).$$

Por otra parte, por construcción de Φ_{11}^{n+1} y Φ_{22}^{n+1} sabemos que

$$\Phi_{11}^{n+1} \times \Phi_{22}^{n+1} \subseteq \mathrm{Z}_R^{\star}\,\Omega_{11}^{n} \times \mathrm{Z}_B^{\star}\,\Omega_{22}^{n}.$$

Esto implica,

$$\Omega_{11}^{n+1} = R\Phi_{11}^{n+1}R \subseteq R\,\mathrm{Z}_R^{\star}\,\Omega_{11}^{n}R \subseteq R\,\mathrm{Z}^{n+1}(R)R = \mathrm{D}^{n+1}(R)$$

y similarmente,

$$\Omega_{22}^{n+1} = S\Phi_{22}^{n+1}S \subseteq S\,\mathrm{Z}_B^{\star}\,\Omega_{22}^{n}S \subseteq S\,\mathrm{Z}^{n+1}({}_S B)S = \mathrm{D}^{n+1}({}_S B).$$

De lo anterior podemos ver la inclusión entre los espacios matriciales

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11}^{n+1} & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^{n+1} & \Omega_{22}^{n+1} & \mathrm{D}^{n+1}(S,{}_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n+1}(S) \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} \mathrm{D}^{n+1}(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R,B) & \mathrm{D}^{n+1}({}_S B) & \mathrm{D}^{n+1}(S,{}_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n+1}(S) \end{bmatrix}.$$

De esta forma, demostramos que el álgebra de matrices conformada por los espacios de operadores propuestos, está incluída en el mismo espacio ambiente que el de los operadores diferenciales $\mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{T}_L)$. Nuestro siguiente objetivo es demostrar la igualdad

$$\mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} \Omega_{11}^{n+1} & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^{n+1} & \Omega_{22}^{n+1} & \mathrm{D}^{n+1}(S,{}_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n+1}(S) \end{bmatrix}.$$

Para ello, usamos primero la definición del bimódulo $\mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{T}_L)$, donde,

$$\mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{T}_L) = \mathrm{T}_L\,\mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L)\,\mathrm{T}_L\,.$$

Esto nos lleva al estudio de los operadores $(n+1)$-centrales, sea $\nabla \in \mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L)$. Gracias a la hipótesis inductiva sabemos que

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{cases} (\nabla_{21}, \nabla_{23}, \nabla_{33}) \in \Omega_{21}^{n} \times \mathrm{Z}^{n+1}(S,{}_S B) \times \mathrm{Z}^{n+1}(S) \\ (\nabla_{11}, \nabla_{22}) \in \mathrm{Z}_R^{\star}\,\Omega_{11}^{n} \times \mathrm{Z}_B^{\star}\,\Omega_{22}^{n} : \nabla_{11} \sim_{(B,\Omega_{21}^{n})} \nabla_{22} \end{cases}.$$

Notemos, de la construcción de Φ_{11}^{n+1} y Φ_{22}^{n+1} la segunda fila de la proposición anterior, se sigue que

$$(\nabla_{11}, \nabla_{22}) \in \mathrm{Z}_R^{\star}\,\Omega_{11}^{n} \times \mathrm{Z}_B^{\star}\,\Omega_{22}^{n} : \nabla_{11} \sim_{(B,\Omega_{21}^{n})} \nabla_{22} \implies (\nabla_{11}, \nabla_{22}) \in \Phi_{11}^{n+1} \times \Phi_{22}^{n+1}.$$

Luego, para cualquier $(r_i, b_i, s_i) \in R \oplus B \oplus S$, tenemos la expresión matriciales del operador $\lambda_{(r_1,b_1,s_1)}\nabla\lambda_{(r_2,b_2,s_2)}$, obtenida del `Corol.`4.1.7, esta es,

$$\lambda_{(r_1,b_1,s_1)}\nabla\lambda_{(r_2,b_2,s_2)} = \begin{pmatrix} \lambda_{r_1}\nabla_{11}\lambda_{r_2} & 0 & 0 \\ \lambda_{b_1}\nabla_{11}\lambda_{r_2} + \lambda_{s_1}\nabla_{21}\lambda_{r_2} + \lambda_{s_1}\nabla_{22}\lambda_{b_2} & \lambda_{s_1}\nabla_{22}\lambda_{s_2} & \lambda_{s_1}\nabla_{23}\lambda_{s_2} \\ 0 & 0 & \lambda_{s_1}\nabla_{33}\lambda_{s_2} \end{pmatrix}.$$

Se siguen entonces las siguientes relaciones

$$\nabla_{11} \in \Phi_{11}^{n+1} \implies \lambda_{r_1}\nabla_{11}\lambda_{r_2} \in R\Phi_{11}^{n+1}R \implies \boxed{\nabla_{11} \in \Omega_{11}^{n+1}}$$

$$\nabla_{22} \in \Phi_{22}^{n+1} \implies \lambda_{s_1}\nabla_{22}\lambda_{s_2} \in S\Phi_{22}^{n+1}S \implies \boxed{\nabla_{22} \in \Omega_{22}^{n+1}}$$

Similarmente,

$$\nabla_{23} \in \mathrm{Z}^{n+1}(S,_S B) \implies \lambda_{s_1}\nabla_{23}\lambda_{s_2} \in S\,\mathrm{Z}^{n+1}(S,_S B)S \implies \boxed{\nabla_{23} \in \mathrm{D}^{n+1}(S,_S B)}$$

$$\nabla_{33} \in \mathrm{Z}^{n+1}(S) \implies \lambda_{s_1}\nabla_{33}\lambda_{s_2} \in S\,\mathrm{Z}^{n+1}(S)S \implies \boxed{\nabla_{33} \in \mathrm{D}^{n+1}(S)}$$

y de la misma forma,

$$\begin{aligned} &\text{Si } \Delta = \lambda_{b_1}\nabla_{11}\lambda_{r_2} + \lambda_{s_1}\nabla_{21}\lambda_{r_2} + \lambda_{s_1}\nabla_{22}\lambda_{b_2} \\ &\implies \Delta \in B\Phi_{11}^{n+1}R + S\Omega_{21}^{n}R + S\Phi_{22}^{n+1}B \\ &\implies \boxed{\Delta \in \Omega_{21}^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ahora, como todo operador diferencial en $\mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{T}_L)$ es combinación lineal de operadores del tipo $\lambda_{(r_1,b_1,s_1)}\nabla\lambda_{(r_2,b_2,s_2)}$, entonces obtenemos una primera inclusión

$$\mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{T}_L) \subseteq \begin{bmatrix} \Omega_{11}^{n+1} & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^{n+1} & \Omega_{22}^{n+1} & \mathrm{D}^{n+1}(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n+1}(S) \end{bmatrix}.$$

Para ver la otra inclusión, estudiemos primero los siguientes casos:

Si $\nabla \in \Phi_{11}^{n+1}$ y $r_i \in R$, entonces existe $\Delta \in \Phi_{22}^{n+1}$, tal que, $\nabla \sim_{(B,\Omega_{21}^n)} \Delta$. Se sigue que,

$$\begin{pmatrix} \lambda_{r_1}\nabla\lambda_{r_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_{(r_1,0,0)} \begin{pmatrix} \nabla & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_{(r_2,0,0)} \in \mathrm{T}_L\,\mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L)\,\mathrm{T}_L\,.$$

Si $\nabla \in \Phi_{11}^{n+1}$, $b \in B$ y $r \in R$, entonces existe $\Delta \in \Phi_{22}^{n+1}$, tal que, $\nabla \sim_{(B,\Omega_{21}^n)} \Delta$. Se sigue que,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_b\nabla\lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_{(0,b,0)} \begin{pmatrix} \nabla & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_{(r,0,0)} \in \mathrm{T}_L\,\mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L)\,\mathrm{T}_L\,.$$

Si $\nabla \in \Omega_{21}^{n}$, $s \in S$ y $r \in R$ entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_s\nabla\lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_{(0,0,s)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nabla & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_{(r,0,0)} \in \mathrm{T}_L\,\mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L)\,\mathrm{T}_L\,.$$

Si $\Delta \in \Phi_{22}^{n+1}$, $b \in B$ y $s \in S$, entonces existe $\nabla \in \Phi_{11}^{n+1}$, tal que $\nabla \sim_{(B,\Omega_{21}^{n})} \Delta$. Luego,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_s \Delta \lambda_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_{(0,0,s)} \begin{pmatrix} \nabla & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_{(0,b,0)} \in \mathrm{T}_L \, \mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L) \, \mathrm{T}_L \, .$$

Si $\Delta \in \Phi_{22}^{n+1}$, y $s_i \in S$ entonces existe $\nabla \in \Phi_{11}^{n+1}$, tal que $\nabla \sim_{(B,\Omega_{21}^{n})} \Delta$. Luego,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{s_1} \Delta \lambda_{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_{(0,0,s_1)} \begin{pmatrix} \nabla & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_{(0,0,s_2)} \in \mathrm{T}_L \, \mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L) \, \mathrm{T}_L \, .$$

Si $\nabla \in \mathrm{Z}^{n+1}(S,_S B)$, y $s_i \in S$, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{s_1} \nabla \lambda_{s_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_{(0,0,s_1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_{(0,0,s_2)} \in \mathrm{T}_L \, \mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L) \, \mathrm{T}_L \, .$$

Si $\nabla \in \mathrm{Z}^{n+1}(S)$, y $s_i \in S$, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{s_1} \nabla \lambda_{s_2} \end{pmatrix} = \lambda_{(0,0,s_1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \end{pmatrix} \lambda_{(0,0,s_2)} \in \mathrm{T}_L \, \mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L) \, \mathrm{T}_L \, .$$

Notemos, todo operador matricial del espacio

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11}^{n+1} & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^{n+1} & \Omega_{22}^{n+1} & \mathrm{D}^{n+1}(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n+1}(S) \end{bmatrix}$$

es una combinación lineal de los operadores previamente estudiados, y como hemos demostrado, cada uno de ello se encuentra en $\mathrm{T}_L \, \mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L) \, \mathrm{T}_L$. Por lo tanto, queda demostrada que los espacios Ω_{11}^{n+1}, Ω_{22}^{n+1} y Ω_{21}^{n+1}, cumple con la `Prop.(1)`, esta es,

$$\mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{T}_L) = \mathrm{T}_L \, \mathrm{Z}^{n+1}(\mathrm{T}_L) \, \mathrm{T}_L = \begin{bmatrix} \Omega_{11}^{n+1} & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^{n+1} & \Omega_{22}^{n+1} & \mathrm{D}^{n+1}(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n+1}(S) \end{bmatrix} .$$

Ahora, veamos que los espacios Ω_{11}^{n+1}, Ω_{22}^{n+1} y Ω_{21}^{n+1}, cumplen con la `Prop.(2)`, esto es, $\nabla \in \mathrm{Z}^{n+2}(\mathrm{T}_L)$ si y solo si

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \text{ tal que} \begin{cases} (\nabla_{21}, \nabla_{23}, \nabla_{33}) \in \Omega_{21}^{n+1} \times \mathrm{Z}^{n+2}(S,_S B) \times \mathrm{Z}^{n+2}(S) \\ (\nabla_{11}, \nabla_{22}) \in \mathrm{Z}_R^{\star} \, \Omega_{11}^{n+2} \times \mathrm{Z}_B^{\star} \, \Omega_{22}^{n+2} : \nabla_{11} \sim_{(B,\Omega_{21}^{n+1})} \nabla_{22} \end{cases} .$$

Primero, de la Prop.4.1.6 obtenemos la inclusión

$$\mathrm{Z}^{n+2}(\mathrm{T}_L) \subseteq \begin{bmatrix} \mathrm{Z}^{n+2}(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R, B) & \mathrm{Z}^{n+2}({}_S B) & \mathrm{Z}^{n+2}(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{Z}^{n+2}(S) \end{bmatrix}.$$

Luego, Si $\nabla \in \mathrm{Z}^{n+2}(\mathrm{T}_L)$, se sigue de su definición que

$$[\nabla, \lambda_{(r,b,s)}] \in \mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{T}_L), \forall (r, b, s) \in R \times B \times S$$

Teniendo presente la forma matricial del corchete Corol.4.1.7, junto con la expresión matricial para $\mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{T}_L)$ propuesta en la Prop.(1), obtenemos que, para cada $(r, b, s) \in R \times B \times S$,

$$\begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_r] & 0 & 0 \\ \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & [\nabla_{22}, \lambda_s] & [\nabla_{23}, \lambda_s] \\ 0 & 0 & [\nabla_{33}, \lambda_s] \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \Omega_{11}^{n+1} & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^{n+1} & \Omega_{22}^{n+1} & \mathrm{D}^{n+1}(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n+1}(S) \end{bmatrix}.$$

Se sigue entonces la veracidad de las siguientes afirmaciones

$$(\circledast) = \begin{cases} [\nabla_{23}, \lambda_s] \in \mathrm{D}^{n+1}(S,_S B), \forall s \in S \quad y \quad [\nabla_{33}, \lambda_s] \in \mathrm{D}^{n+1}(S), \forall s \in S \\ [\nabla_{11}, \lambda_r] \in \Omega_{11}^{n+1}, \forall r \in R \quad y \quad [\nabla_{22}, \lambda_s] \in \Omega_{22}^{n+1}, \forall s \in S \\ \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Omega_{21}^{n+1}, \forall (r, b, s) \in R \times B \times S \end{cases}.$$

Nuestro siguiente objetivo sera demostrar

$$(\circledast) \iff \begin{cases} (\nabla_{23}, \nabla_{33}) \in \mathrm{Z}^{n+2}(S,_S B) \times \mathrm{Z}^{n+2}(S) \\ \nabla_{21} \in \Omega_{21}^{n+1} \\ (\nabla_{11}, \nabla_{22}) \in \mathrm{Z}_R^{\star}\,\Omega_{11}^{n+2} \times \mathrm{Z}_B^{\star}\,\Omega_{22}^{n+2} : \nabla_{11} \sim_{(B, \Omega_{21}^{n+1})} \nabla_{22} \end{cases}.$$

Notemos, de la definición de operador diferencial central se obtiene que

$$\begin{cases} [\nabla_{23}, \lambda_s] \in \mathrm{D}^{n+1}(S,_S B), \forall s \in S \\ \\ [\nabla_{33}, \lambda_s] \in \mathrm{D}^{n+1}(S), \forall s \in S \end{cases} \iff \begin{cases} \nabla_{23} \in \mathrm{Z}^{n+2}(S,_S B) \\ \\ \nabla_{33} \in \mathrm{Z}^{n+2}(S) \end{cases}$$

y similarmente, usando la Def.4.1.2 obtenemos

$$\begin{cases} [\nabla_{11}, \lambda_r] \in \Omega_{11}^{n+1}, \forall r \in R \\ \\ [\nabla_{22}, \lambda_s] \in \Omega_{22}^{n+1}, \forall s \in S \end{cases} \iff \begin{cases} \nabla_{11} \in \mathrm{Z}_R^{\star}\,\Omega_{11}^{n+1} \\ \\ \nabla_{22} \in \mathrm{Z}_B^{\star}\,\Omega_{22}^{n+1} \end{cases}.$$

Basta entonces, demostrar que

$$\texttt{Prop.(a)} := \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Omega_{21}^{n+1}, \forall (r, b, s)$$

si y solo si

$$\texttt{Prop.(b)} := \begin{cases} \nabla_{21} \in \Omega_{21}^{n+1} \\ \\ (\nabla_{11}, \nabla_{22}) \in \mathrm{Z}_R^{\star}\,\Omega_{11}^{n+2} \times \mathrm{Z}_B^{\star}\,\Omega_{22}^{n+2} : \nabla_{11} \sim_{(B, \Omega_{21}^{n+1})} \nabla_{22} \end{cases}.$$

De esta forma, supongamos primero que Prop.(a) es verdadera, luego, si hacemos

$r = s = 0$ obtenemos

$$\nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Omega_{21}^{n+1}, \forall b \in B \Longleftrightarrow \nabla_{11} \sim_{(B,\Omega_{21}^{n+1})} \nabla_{22} \quad \texttt{Def.}4.1.3$$

por otra parte, si hacemos $b = s = 0$ y $r = 1$, obtenemos que $\nabla_{21} \in \Omega_{21}^{n+1}$. Veamos ahora su recíproco, para ello supongamos que `Prop.(b)` es verdadera; luego, si $\nabla_{21} \in \Omega_{21}^{n+1}$, entonces por construcción tenemos que

$$\Omega_{21}^{n+1} = B\Phi_{11}^{n+1}R + S\Omega_{21}^{n}R + S\Phi_{22}^{n+1}B$$

de esta forma, el operador ∇_{21} es combinación lineal del conjunto

$$\{\lambda_b\Delta_1\lambda_r, \lambda_s\Delta_2\lambda_r, \lambda_s\Delta_3\lambda_b \mid \Delta_1 \in \Phi_{11}^{n+1}, \Delta_2 \in \Omega_{21}^{n}, \Delta_3 \in \Phi_{22}^{n+1}, \forall(r,b,s)\}.$$

Ahora, veamos primero que $\nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} \in \Omega_{21}^{n+1}, \forall(s,r) \in S \times R$, basta con demostrarla para cada uno de los generadores. Entonces, para cualquier $r' \in R$ y $s' \in S$ se verifican los siguientes casos:

$$(\lambda_b\Delta_1\lambda_r)\lambda_{r'} - \lambda_{s'}(\lambda_b\Delta_1\lambda_r) = \lambda_b\Delta_1\lambda_{rr'} - \lambda_{s'b}\Delta_1\lambda_r \in \Omega_{21}^{n+1}$$

similarmente,

$$(\lambda_s\Delta_2\lambda_r)\lambda_{r'} - \lambda_{s'}(\lambda_s\Delta_2\lambda_r) = \lambda_s\Delta_2\lambda_{rr'} - \lambda_{s's}\Delta_2\lambda_r \in \Omega_{21}^{n+1}$$

y de igual forma,

$$(\lambda_s\Delta_3\lambda_b)\lambda_{r'} - \lambda_{s'}(\lambda_s\Delta_3\lambda_b) = \lambda_s\Delta_3\lambda_{br'} - \lambda_{s's}\Delta_3\lambda_b \in \Omega_{21}^{n+1}.$$

Por otra parte, si $(\nabla_{11}, \nabla_{22}) \in Z_R^\star\,\Omega_{11}^{n+2} \times Z_B^\star\,\Omega_{22}^{n+2} : \nabla_{11} \sim_{(B,\Omega_{21}^{n+2})} \nabla_{22}$, entonces por `Def.`4.1.3 se sigue que, $\nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Omega_{21}^{n+1}, \forall b \in B$. Por último, se suman las expresiones anteriores, $(\nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21})$ y $(\nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11})$ para obtener el resultado que buscábamos, este es,

$$\nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} \in \Omega_{21}^{n+1}, \forall(r,b,s) \in R \times B \times S.$$

Finalmente, se demuestra así que los espacios Ω_{11}^{n+1}, Ω_{22}^{n+1} y Ω_{21}^{n+1}, cumplen con la `Prop.(2)`, y por lo tanto, estos espacios cumplen con todos los requerimientos que se formulan en el teorema. □

Vale la pena cerrar esta subsección con algunos comentarios. Primero, la descripción de los operadores diferenciales previamente demostrada, nos revela una descomposición en sumandos directos de los operadores diferenciales, donde;

$$Z^{n+1}(\mathrm{T}_L) = \left\{ \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (\nabla_{11}, \nabla_{22}) \in \Phi_{11}^{n+1} \times \Phi_{22}^{n+1}, \nabla_{11} \sim_{(B,\Omega_{21}^{n})} \nabla_{22} \right\}$$
$$\oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z^{n+1}(S,_S B) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z^{n+1}(S) \end{bmatrix}.$$

A su vez,

$$\mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} \Omega_{11}^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_{22}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^n(S,_S B) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^n(S) \end{bmatrix}.$$

Segundo, la construcción que brindamos a la secuencia de espacios $\{(\Omega_{11}^n, \Omega_{21}^n, \Omega_{22}^n) : n \in \mathbb{N}_0\}$, respeta la estructura intrínseca de cada uno de ellos, propinada por las inclusiones,

$$\Omega_{11}^n \subseteq \mathrm{D}^n(R),\ \Omega_{21}^n \subseteq \mathrm{Hom}(R, B),\ \Omega_{22}^n \subseteq \mathrm{D}^n({}_S B).$$

De tal forma, que dicha estructura es compatible con la identificación de dichos subespacios en el álgebra de operadores matriciales $\mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L)$, es decir, las siguientes transformaciones lineales son compatibles con las estructura ambiente heredada de $\mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$,

$$\varphi_{11} : \Omega_{11}^n \hookrightarrow \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) \quad \text{tal que} \quad \nabla \mapsto \begin{pmatrix} \nabla & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{22} : \Omega_{22}^n \hookrightarrow \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) \quad \text{tal que} \quad \nabla \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{21} : \Omega_{21}^n \hookrightarrow \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) \quad \text{tal que} \quad \nabla \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nabla & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ya estudiaremos con mayor atención esta cuestión, en la sección de Inyecciones estructurales de $\mathrm{D}_{\Bbbk}(\mathrm{T}_L)$.

4.1.3. Derivaciones de $\mathrm{T_L}(R, B, S)$

Primero realizaremos las siguientes observaciones, sea B es un bimódulo izquierdo por la acción de S y derecho por la acción de R. Se sigue la buena definición del espacio de las transformaciones S-lineales, denotado con, $\mathrm{Hom}_S(S, B)$. Similarmente, tenemos el espacio de operadores S-lineales a izquierda, $\mathrm{End}_S(B)$, y de forma dual, tenemos el espacio de operadores R-lineales a derecha, denotado con $\mathrm{End}_{R^{op}}(B)$. Por otra parte, usaremos la notación $\mathrm{End}_{(S,R^{op})}(B)$, para designar al espacio de operadores S-lineales a izquierda, y a su vez, R-lineales a derecha, es decir,

$$\mathrm{End}_{(S,R^{op})}(B) = \mathrm{End}_S(B) \cap \mathrm{End}_{R^{op}}(B).$$

Asimismo, como ya se demostró en la `Prop.`1.2.6, $\mathrm{Der}_\lambda(\mathrm{T}_L) \subseteq \mathrm{Z}^1(\mathrm{T}_L)$. Luego, de la `Prop.`4.1.6 sabemos que todo operador diferencial ∇ de $\mathrm{End}(\mathrm{T}_L)$ admite una expresión matricial de la forma

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix}.$$

Contamos entonces con todos los ingrediente para formular una descripción matricial del espacio $\mathrm{Der}_\lambda(\mathrm{T}_L)$.

Teorema 4.1.11. *Sea* T_L *el álgebra de matrices triangulares inferiores generada por* (R, B, S) *y sea* $\nabla \in \mathrm{End}(T_L)$ *de la forma*

$$\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix}.$$

Se sigue entonces,

$$\nabla \in \mathrm{Der}_\lambda(T_L) \Longleftrightarrow \begin{cases} \nabla_{11} \in \mathrm{Der}_\lambda(R), \quad \nabla_{33} \in \mathrm{Der}_\lambda(S) \\ \nabla_{23} \in \mathrm{Hom}_S(S, B), \quad \nabla_{21} = \lambda_{\nabla_{23}(-1)} \\ \nabla_{22} \in \mathrm{End}_{(S,R^{op})}(B) \end{cases}.$$

Demostración. Veamos la primera implicación, supongamos que $\nabla \in \mathrm{Der}_\lambda(T_L)$, se sigue de la `Prop.`1.1.4, que

$$[\nabla, \lambda_t] = \lambda_{\nabla(t)}\,, \forall t \in T_L\,.$$

Ahora, calculemos la matriz asociada al operador $\lambda_{\nabla(t)}$, para ello, consideremos $t = (r, b, s) \in R \oplus B \oplus S$. Luego,

$$\nabla(t) = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ b \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{11}(r) \\ \nabla_{21}(r) + \nabla_{22}(b) + \nabla_{23}(s) \\ \nabla_{33}(s) \end{pmatrix}$$

entonces $\nabla(t) = (\nabla_{11}(r), \nabla_{21}(r) + \nabla_{22}(b) + \nabla_{23}(s), \nabla_{33}(s)) \in R \oplus B \oplus S$. De esta forma, basta con recordar la forma matricial del operador multiplicación a izquierda, donde,

$$\lambda_{\nabla(t)} = \begin{pmatrix} \lambda_{\nabla_{11}(r)} & 0 & 0 \\ \lambda_{\nabla_{21}(r)+\nabla_{22}(b)+\nabla_{23}(s)} & \lambda_{\nabla_{33}(s)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\nabla_{33}(s)} \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, usemos el `Corol.`4.1.7 para obtener la expresión matricial del corchete, de esta forma,

$$[\nabla, \lambda_{(r,b,s)}] = \begin{pmatrix} [\nabla_{11}, \lambda_r] & 0 & 0 \\ \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11} & [\nabla_{22}, \lambda_s] & [\nabla_{23}, \lambda_s] \\ 0 & 0 & [\nabla_{33}, \lambda_s] \end{pmatrix}.$$

De la igualación de estas matrices, obtenemos que todo operador ∇ que verifica la siguiente lista de relaciones es si o si una λ-derivación en T_L;

$$(\star) = \begin{cases} [\nabla_{11}, \lambda_r] = \lambda_{\nabla_{11}(r)}\,, \forall r, \quad [\nabla_{33}, \lambda_s] = \lambda_{\nabla_{33}(s)}\,, \forall s \\ [\nabla_{23}, \lambda_s] = 0\,, \forall s \quad [\nabla_{22}, \lambda_s] = \lambda_{\nabla_{33}(s)}\,, \forall s \\ \lambda_{\nabla_{21}(r)+\nabla_{22}(b)+\nabla_{23}(s)} = \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s\nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b - \lambda_b\nabla_{11}\,, \forall (r, b, s) \end{cases}.$$

Notemos, que de la primera fila de $(\star)$ se deduce fácilmente que

$$\boxed{\nabla_{11} \in \mathrm{Der}_\lambda(R)} \quad y \quad \boxed{\nabla_{33} \in \mathrm{Der}_\lambda(S)}.$$

Por otra parte,

$$[\nabla_{23}, \lambda_s] = 0\,, \forall s\ (\star) \Longrightarrow \boxed{\nabla_{23} \in \mathrm{Hom}_S(S, B)} \qquad \texttt{Prop.}1.1.10.$$

Luego, si consideramos $r = b = 0$ y $s = 1$ en la tercera fina de $(\star)$ obtenemos que

$$\lambda_{\nabla_{23}(1)} = -\lambda_1 \nabla_{21} \implies \boxed{\lambda_{\nabla_{23}(-1)} = \nabla_{21}}.$$

Ahora, consideremos los operadores

$$\delta = \begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_{33} \end{pmatrix} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & \nabla_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que δ verifica $(\star)$, esto implica que $\delta \in \mathrm{Der}_\lambda(\mathrm{T}_L)$ y como hemos supuesto que $\nabla \in \mathrm{Der}_\lambda(\mathrm{T}_L)$, entonces $\Delta = (\nabla - \delta) \in \mathrm{Der}_\lambda(\mathrm{T}_L)$. Se sigue de esta manera que Δ esta forzado a verificar $(\star)$, y esto nos permite refrescar las relaciones propuestas en $(\star)$ considerando el caso $\nabla_{11} = \nabla_{33} = 0$, de esto manera obtenemos

$$\begin{cases} [\nabla_{22}, \lambda_s] = 0\,, \forall s \iff \boxed{\nabla_{22} \in \mathrm{End}_S(B)} \\ \lambda_{\nabla_{21}(r) + \nabla_{22}(b) + \nabla_{23}(s)} = \nabla_{21}\lambda_r - \lambda_s \nabla_{21} + \nabla_{22}\lambda_b\,, \forall (r, b, s) \end{cases}.$$

Luego, si $r = s = 0$ entonces $\lambda_{\nabla_{22}(b)} = \nabla_{22}\lambda_b\,, \forall b$. Notemos que esta es una igualdad entre operadores de $\mathrm{Hom}(R, B)$, entonces podemos evaluar los operadores en cualquier $r \in R$, de esta forma

$$(\lambda_{\nabla_{22}(b)})(r) = \nabla_{22}(b) r\, \forall b, r$$

similarmente,

$$(\nabla_{22}\lambda_b)(r) = \nabla_{22}(br)\,, \forall b, r$$

y dada la igualdad entre los operadores $\lambda_{\nabla_{22}(b)}(r) = \nabla_{22}\lambda_b(r)\,, \forall b, r$, se sigue que,

$$\nabla_{22}(b) r = \nabla_{22}(br)\,, \forall b, r \quad \iff \boxed{\nabla_{22} \in \mathrm{End}_{R^{op}}(B)}$$

. Finalmente, hemos demostrados lo que buscábamos. □

SECCIÓN 4.2

$\mathbb{N}_0$-Inyección estructural en $\mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$

Dada un álgebra de matrices triangulares inferiores T_L, generada por la terna (R, B, S), es pertinente dar una descripción de la inyección de cada uno de los espacios $\mathrm{D}(R)$, $\mathrm{D}({}_S B)$, $\mathrm{D}(S,{}_S B)$ y $\mathrm{D}(S)$ en el álgebra de operadores diferenciales matriciales $\mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$. Para ello, consideremos primero las siguientes inyecciones

$$\varphi^n_{11} : \mathrm{D}^n(R) \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) \quad \text{tal que} \quad \nabla \mapsto \begin{pmatrix} \nabla & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^n_{22} : \mathrm{D}^n(B) \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) \quad \text{tal que} \quad \nabla \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^n_{33} : \mathrm{D}^n(S) \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) \quad \text{tal que} \quad \nabla \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \end{pmatrix}$$

Similarmente,

$$\varphi_{21}^{n} : \mathrm{Hom}(R, B) \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) \quad \text{tal que} \quad \nabla \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \nabla & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{23}^{n} : \mathrm{D}^n(S,_S B) \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) \quad \text{tal que} \quad \nabla \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La situación problema se presenta al restringir la imagen de φ_{ij}^{n} sobre $\mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L)$, es decir, para cada $n \geq 0$, consideremos los espacios $\mathrm{D}_{11}^{n} = \mathrm{D}^n(R)$, $\mathrm{D}_{21}^{n} = \mathrm{Hom}(R, B)$, $\mathrm{D}_{22}^{n} = \mathrm{D}^n({}_S B)$, $\mathrm{D}_{23}^{n} = \mathrm{D}^n(S,_S B)$ y $\mathrm{D}_{33}^{n} = \mathrm{D}^n(S)$, correspondientes a la $\mathbb{N}_0$-filtración de los dominios para cada φ_{ij}^{n}. En general puede suceder que $\varphi_{ij}^{n}(\mathrm{D}_{ij}^{n}) \not\subset \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L)$ o aún peor,

$$\varphi_{ij}^{n}(\mathrm{D}_{ij}^{n}) \not\subset \mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$$

Ahora, nuestro objetivo es describir con precisión las condiciones suficientes para que las transformaciones φ_{ij}^{n}, admita una restricción compatible estructuralmente con la estructura $\mathbb{N}_0$-filtrada de los operadores diferenciales $\mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$.

Vale la pena mencionar, que la motivación a este trabajo la encontramos en el artículo [SIK16]. Los autores de dicho artículo recurren a la estructura $\mathbb{N}_0$-filtrada de cada uno de los morfismos $\varphi_{ij}^{n} : \mathrm{D}_{ij}^{n} \hookrightarrow \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_U)$, presuponiendo de esta forma, que siempre es válida la inclusión, $\varphi_{ij}^{n}(\mathrm{D}_{ij}^{n}) \subseteq \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_U)$. Y con esta idea en mente, realizan una inducción sobre el orden de los operadores diferenciales, con el cual, demuestran `Prop.3.2,pg5` y `Teor.3.1,pg6`.

4.2.1. Ejemplo distinguido

En esta subsección exponemos una álgebra de matrices triangulares inferiores, T_L, generada por (R, B, S), donde el homomorfismo $\varphi_{22} : \mathrm{D}(S_B) \to \mathrm{D}(T_L)$ no respeta la estructura $\mathbb{N}_0$-filtrada de los operadores diferenciales. Posteriormente, mostraremos la existencia de un par $(\Omega_{22}^{*}, \varphi_{22}^{*})$ tales que, Ω_{22}^{*} es un refinamiento de $\mathrm{D}(S_B)$, y $\varphi_{22}^{*} : \Omega_{22}^{*} \to \mathrm{D}(T_L)$ es un homomorfismo que si respeta la filtración, es decir,

$$\varphi_{22}^{*}(\Omega_{22}^{n}) \subseteq \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L),\ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

y a su vez, hace conmutar el diagrama de álgebras $\mathbb{N}_0$-filtradas

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D}({}_S B) \arrow[r, hook, "\varphi_{22}"] & \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) \\ \Omega_{22}^{*} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, dotted, "\varphi_{22}^{*}"'] & \mathrm{D}(\mathrm{T}_L) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} .$$

Consideremos el álgebra de matrices formales

$$\mathrm{T}_L = \begin{bmatrix} M_2(\mathbb{C}) & 0 \\ M_2(\mathbb{C}) & \mathbb{C} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbb{C}$ denota el cuerpo de los números complejos y $M_2(\mathbb{C})$ denota el álgebra de matrices cuadradas de orden 2×2. Ahora, usemos la notación $R = M_2(\mathbb{C})$, $S = \mathbb{C}$ para las $\mathbb{C}$-álgebras y $B = M_2(\mathbb{C})$ para denotar el $(\mathbb{C}, M_2(\mathbb{C}))$-bimódulo. Vale mencionar, que el álgebra T_L admite operadores diferenciales de orden uno, a pesar que, los operadores diferenciales de sus generadores $(M_2(\mathbb{C}), M_2(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ son interiores.

Proposición 4.2.1. *Los operadores diferenciales de* $\mathrm{T}_L = \begin{bmatrix} M_2(\mathbb{C}) & 0 \\ M_2(\mathbb{C}) & \mathbb{C} \end{bmatrix}$*, son de la forma*

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & 0 & 0 \\ M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2^{op}(\mathbb{C}) \\ 0 & 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D}^1(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & 0 & 0 \\ M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2^{op}(\mathbb{C}) \\ 0 & 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) = \mathrm{D}^1(\mathrm{T}_L)\,, \forall n \geq 1.$$

Demostración. Primero, usemos el `Teor.`4.1.5, donde,

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} RR^{op} & 0 & 0 \\ BR^{op} & SR^{op} & SB^{op} \\ 0 & 0 & SS^{op} \end{bmatrix}.$$

Ahora, de la `Prop.`1.2.5 podemos ver que

$$\mathrm{D}^n(R) = \mathrm{D}^0(R)\,, \forall n \geq 0 \implies \mathrm{D}(R) = RR^{op} = M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C})$$

$$\mathrm{D}^n(S) = \mathrm{D}^0(S)\,, \forall n \geq 0 \implies \mathrm{D}^0(S) = SS^{op} = \mathbb{C}$$

$$\mathrm{D}({}_S B) = \mathrm{D}(B) = \mathrm{D}(R) \implies \mathrm{D}^n({}_S B) = \mathrm{D}^0({}_S B) = M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C})\,, \forall n \geq 0$$

$$\mathrm{D}^0(S,_S B) = SB^{op} = \mathbb{C} \cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) = M_2^{op}(\mathbb{C})$$
$$\implies \mathrm{D}^n(S,_S B) = \mathrm{D}^0(S,_S B) = M_2^{op}(\mathbb{C})\,, \forall n \geq 0$$

$$BR^{op} = M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C})$$

$$SR^{op} = \mathbb{C} \cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) = M_2^{op}(\mathbb{C}).$$

Luego,

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & 0 & 0 \\ M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2^{op}(\mathbb{C}) \\ 0 & 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}.$$

Ahora, veamos que $\Phi_{11}^1 \times \Phi_{22}^1 = M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) \times M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C})$. En efecto, dado que,

$$\mathrm{Z}_R^\star\,\Omega_{11}^0 = \mathrm{Z}_R^\star\,\mathrm{D}^0(R) = \mathrm{Z}^1(R) = M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C}).$$

similarmente,

$$\mathrm{Z}_B^\star\,\Omega_{22}^0 = M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C})$$

Por otra parte,

$$\Omega_{21}^0 = BR^{op} = M_2(\mathbb{C}) \cdot M_2^{op}(\mathbb{C}).$$

Finalmente, como $M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) = \mathrm{End}(M_2(\mathbb{C}))$ se verifica de inmediato que, todo par de operadores $(\nabla,\Delta) \in \mathrm{Z}_R^{\star}\,\Omega_{11}^0 \times \mathrm{Z}_B^{\star}\,\Omega_{22}^0$, están trivialmente $\sim_{(B,\Omega_{21}^0)}$ relacionado. Para ello, basta ver que,

$$\nabla\lambda_b - \lambda_b\Delta \in \Omega_{21}^0 = \mathrm{End}(M_2(\mathbb{C})),\ \forall b \in B.$$

Se sigue entonces $\Phi_{11}^1 \times \Phi_{22}^1 = \mathrm{Z}_R^{\star}\,\Omega_{11}^0 \times \mathrm{Z}_B^{\star}\,\Omega_{22}^0$. Luego, $\Omega_{11}^1 = R\Phi_{11}^1 R = M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C})$ y $\Omega_{22}^1 = M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C})$. De esta forma, tenemos todos los ingrediente para demostrar que

$$\mathrm{D}^1(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} \Omega_{11}^1 & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^1 & \Omega_{22}^1 & \mathrm{D}^1(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^1(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & 0 & 0 \\ M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2^{op}(\mathbb{C}) \\ 0 & 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, de la Prop. 4.1.6 sabemos que todos los operadores diferenciales tienen como espacio ambiente,

$$\begin{bmatrix} \mathrm{D}(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R,B) & \mathrm{D}(_S B) & \mathrm{D}(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & 0 & 0 \\ M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2^{op}(\mathbb{C}) \\ 0 & 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}$$

se sigue entonces que los operadores diferenciales de orden uno, se corresponden con todos los operadores posibles, es decir,

$$\mathrm{D}^1(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} \mathrm{D}(R) & 0 & 0 \\ \mathrm{Hom}(R,B) & \mathrm{D}(_S B) & \mathrm{D}(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}(S) \end{bmatrix}$$
$$\Longrightarrow \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) = \mathrm{D}^1(\mathrm{T}_L)\,, \forall n \geq 1.$$

□

Corolario 4.2.2. *Sean* $R = B = M_2(\mathbb{C})$, $S = \mathbb{C}$ *y* $\mathrm{T}_L = \begin{bmatrix} M_2(\mathbb{C}) & 0 \\ M_2(\mathbb{C}) & \mathbb{C} \end{bmatrix}$.
Si $\varphi_{22} : \mathrm{D}(_S B) \hookrightarrow \mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$ *es el homomorfismo de inyección, entonces*

$$\varphi_{22}(\mathrm{D}^0(_S B)) \not\subset \mathrm{D}^0(\mathrm{T}_L).$$

Demostración. De la proposición anterior, sabemos que

$$\mathrm{D}(_S B) = \mathrm{D}^0(_S B) = M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}).$$

Por otra parte, $\mathrm{D}(\mathrm{T}_L) = \mathrm{D}^0(\mathrm{T}_L) \cup \mathrm{D}^1(\mathrm{T}_L)$, donde,

$$\mathrm{D}^0(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & 0 & 0 \\ M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2^{op}(\mathbb{C}) \\ 0 & 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D}^1(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & 0 & 0 \\ M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2^{op}(\mathbb{C}) \\ 0 & 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}.$$

Luego, $\varphi_{22}(\mathrm{D}^0({}_SB)) \not\subset \mathrm{D}^0(\mathrm{T}_L)$. En efecto, como $M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) \not\subset M_2^{op}(\mathbb{C})$ vistos como subespacios de $\mathrm{End}(M_2(\mathbb{C}))$, entonces,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \not\subset \begin{bmatrix} M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & 0 & 0 \\ M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2^{op}(\mathbb{C}) & M_2^{op}(\mathbb{C}) \\ 0 & 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}.$$

□

Ahora, el álgebra $\mathrm{D}({}_SB)$ admite un refinamiento, dado por,

$$\Omega_{22}^0 = M_2^{op}(\mathbb{C}), \quad \Omega_{22}^1 = M_2(\mathbb{C})\cdot M_2^{op}(\mathbb{C}).$$

Luego, consideremos $\Omega_{22}^* = \Omega_{22}^0 \cup \Omega_{22}^1 = \mathrm{D}({}_SB)$. De esta forma obtenemos el homomorfismo inyección, $\varphi_{22}^* : \Omega_{22}^* \hookrightarrow \mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$, el cual respeta la $\mathbb{N}_0$-filtración de las álgebras Ω_{22}^* y $\mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$. Más aún, verifica la conmutatividad del diagrama,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D}({}_SB) \arrow[r, hook, "\varphi_{22}"] & \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) \\ \Omega_{22}^* \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, dotted, "\varphi_{22}^*"'] & \mathrm{D}(\mathrm{T}_L) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

4.2.2. Refinamiento y teorema de inyección

Considéreme un álgebra de matrices triangulares T_L, generada por (R, B, S), teniendo presente que (R, S) son $\mathbb{k}$-álgebras, B es un bimódulo, derecho por la acción de S e izquierdo por la acción de R. Gracias al `Teor.`4.1.10 sabemos de la existencia de tres familias de subespacios de operadores $\{\Omega_{11}^n \subseteq \mathrm{D}^n(R) : n \in \mathbb{N}_0\}$, $\{\Omega_{22}^n \subseteq \mathrm{D}^n(B) : n \in \mathbb{N}_0\}$ y $\{\Omega_{21}^n \subseteq \mathrm{Hom}(R, B) : n \in \mathbb{N}_0\}$, biunívocamente relacionados con la sucesión de operadores diferenciales $\{\mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) : n \in \mathbb{N}_0\}$, donde, para cara $n \in \mathbb{N}_0$ obtenemos

$$\mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) = \begin{bmatrix} \Omega_{11}^n & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^n & \Omega_{22}^n & \mathrm{D}^n(S, {}_SB) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^n(S) \end{bmatrix}.$$

Ahora, revelaremos algunas propiedades de la terna $(\Omega_{11}^n, \Omega_{21}^n, \Omega_{22}^n)_{n\geq 0}$.

Proposición 4.2.3. *Sea T_L el álgebra de matrices triangulares inferiores generada por (R, B, S). Sea $(\Omega_{11}^n, \Omega_{21}^n, \Omega_{22}^n)$ la terna de subespacios de operadores, asociada al álgebra $\mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L)$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades;*

1. *Las sucesiones $(\Omega_{11}^n)_{n\geq 0}$ y $(\Omega_{22}^n)_{n\geq 0}$ son filtraciones, es decir, para cualquier par $0 \leq n \leq m$ se cumplen*

$$\Omega_{11}^n \subseteq \Omega_{11}^m \quad y \quad \Omega_{11}^n\Omega_{11}^m \subseteq \Omega_{11}^{n+m}$$
$$\Omega_{22}^n \subseteq \Omega_{22}^m \quad y \quad \Omega_{22}^n\Omega_{22}^m \subseteq \Omega_{22}^{n+m}$$

2. *La sucesión $(\Omega_{21}^n)_{n\geq 0}$ es (Ω_{22}^n)-filtrada por izquierda y (Ω_{11}^n)-filtrado por derecha, es decir, para cualquier par $0 \leq n \leq m$ se cumple*

$$\Omega_{21}^n \subseteq \Omega_{21}^m \quad y \quad \Omega_{22}^n\Omega_{21}^m \subseteq \Omega_{21}^{n+m} \quad y \quad \Omega_{21}^n\Omega_{11}^m \subseteq \Omega_{21}^{n+m}$$

3. *El anillo* $\Omega_{11}^{*} = \bigcup_{n\geq 0} \Omega_{11}^{n}$ *es una subálgebra filtrada de* $\mathrm{D}(R)$*. Similarmente, el anillo* $\Omega_{22}^{*} = \bigcup_{n\geq 0} \Omega_{22}^{n}$ *es una subálgebra filtrada de* $\mathrm{D}(B)$*.*

4. *El módulo* $\Omega_{21}^{*} = \bigcup_{n\geq 0} \Omega_{21}^{n}$ *es un* $(\Omega_{22}^{*}, \Omega_{11}^{*})$*-bimódulo* $\mathbb{N}_0$*-filtrado.*

Demostración. Este resultado se obtiene directamente del `Teor.`4.1.10, junto con las propiedades de $\mathbb{N}_0$-filtración que ya poseen los operadores diferenciales $\mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$. De esta forma, si

$$\begin{pmatrix} \nabla_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21} & \nabla_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \Omega_{11}^{n} & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^{n} & \Omega_{22}^{n} & \mathrm{D}^{n}(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n}(S) \end{bmatrix} = \mathrm{D}^{n}(\mathrm{T}_L)$$

y

$$\begin{pmatrix} \Delta_{11} & 0 & 0 \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \Omega_{11}^{m} & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^{m} & \Omega_{22}^{m} & \mathrm{D}^{m}(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{m}(S) \end{bmatrix} = \mathrm{D}^{m}(\mathrm{T}_L)$$

basta hacer la multiplicación de matrices para obtener lo que buscamos

$$\begin{pmatrix} \nabla_{11}\Delta_{11} & 0 & 0 \\ \nabla_{21}\Delta_{11} + \nabla_{22}\Delta_{21} & \nabla_{22}\Delta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{bmatrix} \Omega_{11}^{n+m} & 0 & 0 \\ \Omega_{21}^{n+m} & \Omega_{22}^{n+m} & \mathrm{D}^{n+m}(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n+m}(S) \end{bmatrix} = \mathrm{D}^{n+m}(\mathrm{T}_L).$$

□

Contamos entonces con todos los ingredientes para enunciar correctamente lo que hemos llamado la ecualización de los morfismos de inclusión, mencionado al principio de esta subsección. Recordemos que tenemos las inyecciones naturales

$$\begin{aligned} &\varphi_{11} : \mathrm{D}(R) \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{T}_L), \quad && \varphi_{21} : \mathrm{Hom}(R, B) \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) \\ &\varphi_{22} : \mathrm{D}(B) \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{T}_L), && \varphi_{23} : \mathrm{D}(S,_S B) \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) \\ &\varphi_{33} : \mathrm{D}(S) \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{T}_L). \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es describir los espacios $\mathrm{Im}(\varphi_{ij}) \cap \mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$, de tal forma, que dicha imagen nos brinde una correcta identificación de la estructura $\mathbb{N}_0$-filtrada de los dominios de φ_{ij} en $\mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$. Teniendo esto en mente, para los casos de φ_{23} y φ_{33} no se presenta ningún contratiempo, gracias a la inclusión

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n}(S,_S B) \\ 0 & 0 & \mathrm{D}^{n}(S) \end{bmatrix} \subseteq \mathrm{D}^{n}(\mathrm{T}_L).$$

Se sigue entonces que, el siguientes diagrama entre estructura $\mathbb{N}_0$-filtradas conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D}(S,_S B) \arrow[r, hook, "\varphi_{23}"] & \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) \\ \mathrm{D}(S,_S B) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, dotted, "\varphi_{23}"'] & \mathrm{D}(\mathrm{T}_L) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathrm{D}(S) \arrow[r, hook, "\varphi_{33}"] & \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) \\ \mathrm{D}(S) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, dotted, "\varphi_{33}"'] & \mathrm{D}(\mathrm{T}_L) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

$$\varphi_{23}(\mathrm{D}^n(S,_S B)) \subseteq \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) \qquad y \qquad \varphi_{33}(\mathrm{D}^n(S)) \subseteq \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L).$$

Por comodidad, adoptemos la siguiente notación

$$\mathrm{D}^n_{11} = \mathrm{D}^n(R), \quad \mathrm{D}^n_{22} = \mathrm{D}^n(B), \quad ,\mathrm{D}^n_{21} = \mathrm{Hom}(R, B),$$

de esta forma, podemos referirnos tranquilamente a los tres homomorfismo faltantes con la notación, $\varphi_{ij} : \mathrm{D}_{ij} \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{T}_L)$.

Teorema 4.2.4. *Para cada homomorfismo de álgebras $\varphi_{ij} : \mathrm{D}_{ij} \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{T}_L)$, con $(ij) \in \{(11), (21), (22)\}$, existe un homomorfismo inyectivo $\varphi^*_{ij} : \Omega^*_{ij} \hookrightarrow \mathrm{D}(\mathrm{T}_L)$, tal que, $\varphi^*_{ij}(\Omega^n_{ij}) \subseteq \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L)$, y más aún, hace conmutar el diagrama,$\forall n \geq 0$*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D}^n_{ij} \arrow[r, hook, "\varphi_{ij}"] & \mathrm{End}(\mathrm{T}_L) \\ \Omega^n_{ij} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, dotted, "\varphi^*_{ij}"'] & \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L) \arrow[u, hook] \end{tikzcd} .$$

Demostración. Basta ver la inclusión entre los espacios de operadores matriciales

$$\begin{bmatrix} \Omega^n_{11} & 0 & 0 \\ \Omega^n_{21} & \Omega^n_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \subseteq \mathrm{D}^n(\mathrm{T}_L)$$

propinada por el `Teor.`4.1.10, junto con las propiedades mencionadas en el `Corol.`4.2.3. $\square$

Bibliografía

[ASS06] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1 Techniques of Representation Theory*. Cambridge University Press, 2006.

[B79] J-E, Björk, *Rings of Differential Operators*, North Holland Publishing Company 1979.

[B93] J-E, Björk, *Analytic D-modules and applications*, Editor: Dordrecht : Kluwer, 1993.

[B02] A. Baker, *Matrix Groups: An introduction to Lie Group Theory*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2002.

[CLS82] C. Cibils, F. Larrión and L. Salmerón, *Diagrammatic Methods in Representation Theory of Algebras*. Monografía No. 11 del Instituto de Matemáticas de la UNAM, 1982.

[C88] C. Cibils, *On the Hochschild cohomology of finite dimensional algebras*. Commun. Algebra, 16, 645-649, 1988.

[C00] C. Cibils, *On H^1 of finite dimensional algebras*. Bol. Acad. Nac. Cienc. (Córdoba) 65, 73-80, 2000.

[C01] C. Cibils, *The First Cohomology Group of an Algebra with Coefficients in a Bimodule*. Journal of Algebra, Volume 237, Issue 1, 121-141, 1 March 2001.

[C12] C. Cibils, *A finite dimensional algebra of the diagram of a knot*. Proceedings of the American Mathematical Society 142 (11), 3741-3746, 2012.

[C95] S. C. Coutinho, *A primer of algebraic D-modules*, Cambridge University, 1995.

[CT06] M. M. Castro and F. A. Grünbaum *The Algebra of diffetential Operators Associated to a Family of Matrix-Valued Orthogonal Polynomials: Five Instructive Examples*, International Mathematics Research Notices, Vol. 2006.

[DKV94] Y. A. Drozd, V. Kirichenco, and V. Dlab, *Finite dimensional algebras* , Editor: Berlin : Springer, 1994.

[GPT02] F. A. Grünbaum, I. Pacharoni, and J. A. Tirao, *Matrix valued spherical functions associated to the complex projective plane*, J. Functional Analysis 188, 2002.

[GT07] F. A. Grünbaum, and J. A. Tirao, *The Algebra of Differential Operators Associated to a Weight Matrix*, Integr. equ. oper. theory 58, 2007.

[G15] H. Giraldo, *Una introducción a la teoría de representaciones de álgebras: An introduction to the representation of algebras theory*. Lecturas Matemáticas, Volumen 36 (1), páginas 33–67, ISSN 0120–1980, 2015.

[I01] U. N. Iyer, *Differential Operators on Azumaya Algebras and Heisenberg Algebras*, Communications in Algebra, Volume 29, Issue 7, 2001.

[I02] U. N. Iyer, *Differential operators on Hopf algebras and some functorial properties*. Manuscripta Math. 109, 2002.

[I05] U. N. Iyer, *Differential operators on derivation rings*, J. Ramanujan Math. Soc. 20, 2005.

[I06] U. N. Iyer, *Volichenko algebras as algebras of differential operators*, J. Nonlinear Math. Phys. 13, 2006.

[IMc12] U. N. Iyer; T. C. McCune, *Differential operators on the free algebras*. Selecta Math. (N.S.) 18, 2012.

[J96] N. Jacobson, *Finite-dimensional division algebras over fields*. Editorial: Berlin : Springer, 1996.

[LR97] V. Lunts, and A. Rosenberg, *Differential Operators on Noncommutative Rings*, Selecta Math.(N.S) 3, 335-359, 1997.

[L99] A. C. Locateli, *Hochschild Cohomology of Truncated Quiver Algebras*, Comunication in Algebras, Volume 27, number 2, 1999.

[Lam04] T. Y. Lam, *Introduction to Quandratic Forms over Fields*, Graduate Studies in Mathematics Vol 67, American Mathematical Society, 2004.

[Lam99] T. Y. Lam, *Lectures on modules and rings*, Graduate Studies in Mathematics vol. 189, New York : Springer, 1999.

[McR97] J. C. McConeell and J. C. Robson, *Noncommutative Noethrian Rings*, Series Pure and applied mathematics. A Wiley-Interscience series of texts, monographs and tracts. Editor: Chichester : Wiley J., 1997.

[PJ07] I. Pacharoni and J. Tirao, *Matrix Valued Orthogonal Polynimials Arisings from the Complex Projective Space*. Constr. Approx., 2007.

[R91] L. H. Rowen, *Ring Theory*, Student Edition, Academic Press, Inc., 1991.

[R06] L. H. Rowen, *Graduate algebra : commutative view*, Series Graduate studies in mathematics ; v. 73, American Mathematical Society, 2006.

[R08] L. H. Rowen, *Graduate algebra : noncommutative view*, Series Graduate studies in mathematics ; v. 91, American Mathematical Society, 2008.

[S06] A. Savage, *Finite-dimensional algebras and quivers*. Encyclopedia of Mathematical Physics, eds. J.-P. Francoise, G.L. Naber and Tsou S.T. Oxford: Elsevier, volume 2, 313-320, 2006.

[SIK16] M. S. Datta; U. N. Iyer and G. K. Raoa, *Operators on triangular algebras*. Linear Algebra and its Applications, Volume 501, 254-262, 15 July 2016.

[T03] J. Tirao, *The matrix valued hypergeometric equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.,100 nr. 14, 2003.