



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA



CARRERA INGENIERIA AERONAUTICA

Tesis:

Herramienta de cálculo para la determinación de la
Carga Crítica de Pandeo en Láminas

Alumno: Victor Daniel Vilorio Nackauzi

D.N.I.: 18.800.166

Matricula: 199804808

Director de Tesis: Dr. Walter Castello

Dedicatoria:

A Dios, fuente de vida, libertad, amor, belleza, justicia y conocimiento;

A mi padre, Victor Manuel Vilorio Vera por motivarme a buscar la sabiduría;

A mi madre, Blanca Argentina Nackauzi Tejerina por ser un ejemplo de perseverancia;

A mi hermana, Natalia Lorena Vilorio Nackauzi por acompañarme a lo largo de todos estos años.

Agradecimiento:

En especial, al **Dr. Walter Castello** por su permanente dirección a lo largo del desarrollo de esta Tesis; y en manera general, a la **Universidad Nacional de Córdoba**.

Resumen:

Se desea dar una solución actualizada, al problema de encontrar La Carga Crítica de Pandeo de Láminas simplemente apoyadas, que sea una continuación de los métodos conocidos y que amplíen en cantidad y calidad los casos a resolver. Se estudió el fenómeno de Pandeo de Láminas, sus ecuaciones y el método de resolución para poder generar una herramienta de cálculo que permita primero verificar su validez, luego que realice un análisis rápido (orientado a la verificación del diseño) y por último, un estudio exhaustivo, que facilite el proceso de diseño por medio de un barrido de las variables que intervienen en el diseño. Siguiendo las ecuaciones de Donnell y el método de Galerkin utilizados en el report NACA 874 de S.B. Batdorf del 20 de Marzo de 1947 y haciendo uso del programa MATLAB[®] de The MathWorks, desarrollamos una herramienta de cálculo llamada: “CCPL.m” (Carga Critica de Pandeo de Láminas) y elaboramos un Manual de Usuario que describe su estructura y ayuda a la interpretación de los resultados. Dentro de los resultados, tenemos la validación (los resultados coinciden con otros resultados publicados), el diseño con el margen de seguridad deseado y relaciones entre las variables que intervienen en el diseño (que se expresan a través de Figuras, Tablas y Ecuaciones) que permiten un gran ahorro de tiempo, al basarse en resultados obtenidos previamente, evitando rehacer el cálculo desde el principio.

Índice General:

Dedicatoria	2
Agradecimiento	3
Resumen	4
Índice General	5
Índice de Tablas y figuras	6
Nomenclatura	9
Capítulo 1 Introducción	12
1.1 Descripción del problema	12
1.1.1 Desarrollo Histórico	12
1.1.2 Estudios de Estabilidad de Láminas	12
1.2 Hipótesis y objetivos	20
1.2.1 Validación	20
1.2.2 Verificación Rápida	20
1.2.3 Diseño	20
1.3 Contenido	21
Capítulo 2 Marco Teórico	22
2.1 Obtención de las Ecuaciones de Donnell	22
2.2 Desarrollo de las Ecuaciones de Trabajo	26
2.3 Método de Galerkin	28
Capítulo 3 Metodología	30
3.1 Breve repaso de la ecuación NACA.	30
3.2 Desarrollo de la Herramienta de Calculo	32
3.2.1 Relación Precisión – Costo de Cálculo	32
3.2.2 Resolución de algunos problemas	34
Capítulo 4 Resultados Numéricos	37
4.1 Validación Numérica	38
4.2 Verificación Rápida	52
4.2.1 Significado de las curvas	52
4.2.2 Condición de la lámina	53
4.2.3 Corrección hasta obtener margen de seguridad de diseño	55
4.2.4 Aplicación de Verificación Rápida	57
4.3 Diseño	60
4.3.1 Estudio paramétrico global	61
4.3.2 Estudio paramétrico local	69
4.3.3 Estudio paramétrico puntual	86
Capítulo 5 Conclusión	88
5.1 Introducción , Hipótesis y Objetivos	88
5.2 Marco Teórico y Metodología	88
5.3 Principales Resultados	90
5.4 Conclusiones	92
5.5 Trabajos Futuros	93
Bibliografía	95
Anexo A	
Desarrollo matemático completo desde La Ecuación de Donnell hasta la Ecuación NACA	96
Anexo B	
Comparación de los Tiempos de Cálculos con n=7 y n=15	109
Anexo C	
Tablas y figuras de La Validación de la Herramienta de Cálculo del Capítulo 4	110
Manual de Usuario:	
Herramienta de cálculo para la determinación de la Carga Crítica de Pandeo en Láminas	133

Índice de Tablas y Figuras

Tabla	Tema	Cap.	Pág.
1	Kx-n para distintos Z	3	33
2	Kx/Kx15-n para distintos Z	3	33
3	Errores relativos en función de n	3	34
4	Precisión-Costo de Calculo con n=7 y n=15	3	35
5	Listas de Resultados	4	35
6	Significado de las curvas	4	52
7	Ejemplo del cálculo del MS	4	55
8	Resultados de Carga con valores conocidos	4	57
9	Resultados de Geometría con valores conocidos	4	57
10	Resultados de Geometría con esfuerzos relacionados	4	57
11	Resultados de Geometría con esfuerzos relacionados	4	57
12	Resultados de Carga con a variable	4	58
13	Resultados de Geometría con a variable	4	58
14	Resultados de Carga con b variable	4	58
15	Resultados de Geometría b variable	4	58
16	KxG KyG y KsG en función de Z con b=cte	4	62
17	KxG KyG y KsG en función de Z con a=cte	4	62
18	Combinación de figuras 2D para obtener una figura 3D	4	62
19	Comportamiento de Kx Ky y Ks con variación de a, b y Z	4	69
20	Comparación de Métodos para MS=0%	4	77
21	Error en $Ky = f(Ks) \Big _{MS=0\%}^{Kx=0}$ para a=5, b=3 y Z=0 calculados con los coeficientes de la primera fila (n=1) de la Tabla 24 pág.82	4	77
22	Comparación de Métodos para MS=MSD	4	78
23	Error en $Ky = f(Ks) \Big _{MS=10\%}^{Kx=0}$ para a=5, b=3 y Z=0 calculados con los coeficiente de la primera fila (n=1) de la Tabla 26 pág.83.	4	78
24	Coefficientes de $Ky = f(Ks) \Big _{MS=0\%}^{Kx=cte}$	4	80
25	Coefficientes de $Ks = g(Ky) \Big _{MS=0\%}^{Kx=cte}$	4	80
26	Coefficientes de $Ky = f(Ks) \Big _{MS=10\%}^{Kx=cte}$	4	81
27	Coefficientes de $Ks = g(Ky) \Big _{MS=10\%}^{Kx=cte}$	4	81
28	Coefficientes de $Kx = f(Ks) \Big _{MS=0\%}^{Ky=cte}$	4	82
29	Coefficientes de $Ks = g(Kx) \Big _{MS=0\%}^{Ky=cte}$	4	82
30	Coefficientes de $Kx = f(Ks) \Big _{MS=10\%}^{Ky=cte}$	4	83
31	Coefficientes de $Ks = g(Kx) \Big _{MS=10\%}^{Ky=cte}$	4	83
32	Coefficientes de $Ky = f(Kx) \Big _{MS=0\%}^{Ks=cte}$	4	84
33	Coefficientes de $Kx = g(Ky) \Big _{MS=0\%}^{Ks=cte}$	4	84
34	Coefficientes de $Ky = f(Kx) \Big _{MS=10\%}^{Ks=cte}$	4	85
35	Coefficientes de $Kx = g(Ky) \Big _{MS=10\%}^{Ks=cte}$	4	85

figura	Tema	Cap.	Pág.
1	Panel aeronáutico pandeado pero en funcionamiento. José L. Pérez Aparicio y Pedro José Patón Pozo, Estudio pospandeo de placas de materiales compuestos en paneles aeronáuticos.	1	14
2	Cilindros en compresión no presurizados y presurizados.	1	15
3	Tanques con techo fijo (a) Cónico, (b) Paraguas, (c) Esférico, (d) Esférico geodésico.	1	16
4	Tanques de petróleo en construcción en el norte de la Patagonia, que colapsaron a velocidades del viento muy inferiores a las de diseño.	1	16
5	Inestabilidad en cáscaras cilíndricas local y generalizada	1	17
6	Ensayo en Túnel de Viento.	1	17
7	Relación adimensional Resultado Experimental/Resultado Teórico en cargas Críticas de pandeo en función de la relación radio/espesor.	1	18
8	Modo de Falla de Cilindros con perturbación.	1	18
9	Investigadores Internaciones y Nacionales	1	9
10	Geometría y cinemática de una placa.	2	23
11	Esfuerzos resultantes actuando en la geometría deformada	2	23
12	Equilibrio de fuerzas según x_1	2	23
13	K_x en función de n para distintos valores de Z	3	35
14	$K_x - n$ para distintos Z	3	34
15	$K_x/K_{x15} - n$ para distintos Z	3	34
16	Carga Actuante $K_{x_n=7}$	3	35
17	Carga Actuante $K_{x_n=15}$	3	35
18	Compresión Axial NACA que corresponde con la fig. 10 de pág. 10/25 de NACA 874 que muestra la carga crítica de pandeo bajo compresión axial en una tira infinitamente larga en la dirección axial	4	38
19	Compresión Axial Niu que corresponde con la Fig. 11.4.1 pag.480/810 hinged Theoretical del Niu que muestra la carga crítica de pandeo bajo compresión axial para una placa curva.	4	39
20	Tensión Circunferencial Corresponde con la Fig 1 NACA 874 pág. 3/25 cte=20. El coeficiente de tensión Crítica circunferencial para cilindros con los bordes simplemente apoyados en función de parámetro geométrico Z .	4	40
21	Tesion Crítica de Corte para placas curvadas largas Niu	4	41
22	Tesion Crítica de Corte para placas curvadas largas Tesis	4	41
23	comparacion Niu y Tesis en Tesion Crítica de Corte para Placas curvadas largas con: a) $a/b=1$; b) $a/b=1.5$; c) $a/b=2$; d) $a/b=3$; e) $a/b=\infty$;	4	42
24	Tesion Crítica de Corte para paneles curvos anchos Niu	4	43
25	Tesion Crítica de Corte para paneles curvos anchos Tesis	4	43
26	comparacion Niu y Tesis en Tesion Crítica de Corte para paneles curvos anchos con: a) $a/b=1$; b) $a/b=1.5$; c) $a/b=2$; d) $a/b=cilindro$;	4	44
27	Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial NACA	4	45
28	Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial Tesis	4	45
29	comparacion NACA y Tesis en Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial con a) $a/b=1$; b) $a/b=1.5$; c) $a/b=2$; d) $a/b=cilindro$;	4	46
30	Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circunferencial NACA	4	47
31	Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circunferencial Tesis	4	47
32	comparacion NACA y Tesis en Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circunferencial con a) $a/b=1$; b) $a/b=1.5$; c) $a/b=2$; d) $a/b=cilindro$;	4	48
33	Tesiones combinadas con $K_y=0$ NACA	4	49
34	Tesiones combinadas con $K_y=0$ Tesis	4	49
35	comparacion NACA y Tesis en Tesiones combinadas a) $Z=0$; b) $Z=5$; c) $Z=10$; d) $Z=30$;	4	50
36	Lamina curva y parametros que intervienen en el pandeo	4	52

figura	Tema	Cap.	Pág.
37	Seguro: $P1 = [1.3, 1, 3]$ tiene $MS=2\%$ porque $Kx=1.3 < Kx_n=1.4569$.	4	53
38	Rompe: $P2 = [\underline{1.7}, 1, 3]$ tiene $MS=0\%$ porque $Kx=1.7 > Kx_n=1.4569$.	4	53
39	Rompe: $P3 = [1.3, \underline{1.7}, 3]$ tiene $MS=0\%$ porque $Ky=1.7 > Ky_n=1.0574$.	4	54
40	Rompe: $P4 = [1.3, 1, \underline{3.5}]$ tiene $MS=0\%$ porque $Ks=3.5 > Ks_n=3.2412$.	4	54
41	Calculo de la Verificación Rápida: Rompe o Seguro con $MS \neq MSD (MS=1,8\%)$; (2D)	4	56
42	Calculo de la Verificación Rápida: $MS=MSD (MS=10\%)$; (2D)	4	56
43	Calculo de la Verificación Rápida: $MS=MSD (MS=10\%)$; (3D)	4	56
44	KxG en función de Z con a como parámetro. (2D)	4	63
45	KyG en función de Z con a como parámetro. (2D)	4	63
46	KsG en función de Z con a como parámetro. (2D)	4	63
47	KxG en función de Z con b como parámetro. (2D)	4	64
48	KyG en función de Z con b como parámetro. (2D)	4	64
49	KsG en función de Z con b como parámetro. (2D)	4	64
50	KxG en función de a con Z como parámetro. (2D)	4	65
51	KyG en función de a con Z como parámetro. (2D)	4	65
52	KsG en función de a con Z como parámetro. (2D)	4	65
53	KxG en función de b con Z como parámetro. (2D)	4	66
54	KyG en función de b con Z como parámetro. (2D)	4	66
55	KsG en función de b con Z como parámetro. (2D)	4	66
56	KxG en función de a y Z .(3D)	4	67
57	KyG en función de a y Z .(3D)	4	67
58	KsG en función de a y Z .(3D)	4	67
59	KxG en función de b y Z .(3D)	4	68
60	KyG en función de b y Z .(3D)	4	68
61	KsG en función de b y Z .(3D)	4	68
62	Efecto rebote para distintos valores de Z .	4	70
63	KxG KyG y KsG en función de Z	4	70
64	Corrección del Efecto Rebote, al tener en cuenta los valores máximos.	4	71
65	Corrección por cantidad (no funciona)	4	72
66	Corrección por calidad (funciona)	4	72
67	Proceso de obtencion de figura 3D	4	73
68	$Ky = f(Ks, Z) \Big _{\substack{Kx=0 \\ MS=0\%}}$ y $Ky = f(Ks, Z) \Big _{\substack{Kx=0 \\ MS=MSD(10\%)}}$	4	73
69	$Kx = f(Ks, Z) \Big _{\substack{Ky=0 \\ MS=0\%}}$ y $Kx = f(Ks, Z) \Big _{\substack{Ky=0 \\ MS=MSD(10\%)}}$	4	74
70	$Kx = f(Ky, Z) \Big _{\substack{Ks=0 \\ MS=0\%}}$ y $Kx = f(Ky, Z) \Big _{\substack{Ks=0 \\ MS=MSD(10\%)}}$	4	74
71	$Ky = f(Ks, Kx) \Big _{Z=0}$ con $MS=0\%$ y $MS=MSD (10\%)$	4	75
72	$Ky = f(Ks, Kx) \Big _{Z=5}$ con $MS=0\%$ y $MS=MSD (10\%)$	4	75
73	$Ky = f(Ks, Kx) \Big _{Z=10}$ con $MS=0\%$ y $MS=MSD (10\%)$	4	76
74	$Ky = f(Ks, Kx) \Big _{Z=50}$ con $MS=0\%$ y $MS=MSD (10\%)$	4	76
75	$Kx = f(Z, p)$	4	87
76	$Vol_K = f(Z, p)$	4	87

Nomenclatura

$\frac{\partial w}{\partial x_1}$: Derivada Parcial de (la función) w con respecto a x1

$\frac{\partial w}{\partial x_2}$: Derivada Parcial de (la función) w con respecto a x2

M_{11} es uno de los Esfuerzos Resultantes: Momento flector que tracciona/comprime el eje x1, está en la cara perpendicular a x1 y tiene dirección de x2. Convención: Tracción en la parte inferior y compresión en la parte superior es positiva y se dibuja con el sentido de x2 positivo.

M_{12} es uno de los Esfuerzos Resultantes: Momento flector que tracciona/comprime el eje x2, está en la cara perpendicular a x1 y tiene dirección de x1. Convención: Tracción en la parte inferior y compresión en la parte superior es positiva y se dibuja con el sentido de x1 positivo.

M_{22} es uno de los Esfuerzos Resultantes: Momento flector que tracciona/comprime el eje x2, está en la cara perpendicular a x2 y tiene dirección de -x1. Convención: Tracción en la parte inferior y compresión en la parte superior es positiva y se dibuja con el sentido de x1 negativo.

N_{11} es uno de los Esfuerzos Resultantes: está en la cara perpendicular a x1 y tiene la dirección de x1. Convención: Tracción es positiva y se dibuja en el sentido x1 positivo.

N_{12} es uno de los Esfuerzos Resultantes: está en la cara perpendicular a x1 y tiene la dirección de x2. Convención: Corte es positivo si el giro se realiza en el sentido horario (visto desde x3 negativo) y se dibuja en el sentido x2 positivo.

N_{22} es uno de los Esfuerzos Resultantes: está en la cara perpendicular a x2 y tiene la dirección de x2. Convención: Tracción es positiva y se dibuja en el sentido x2 positivo.

N_{13} es uno de los Esfuerzos Resultantes: está en la cara perpendicular a x1 y tiene la dirección de x3. Convención: Corte es positivo si el giro se realiza en el sentido horario (visto desde x2 positivo) y se dibuja en el sentido x3 positivo.

N_{23} es uno de los Esfuerzos Resultantes: está en la cara perpendicular a x2 y tiene la dirección de x3. Convención: Corte es positivo si el giro se realiza en el sentido antihorario (visto desde x1 positivo) y se dibuja en el sentido x3 positivo.

giro en la dirección x1 $\beta_1 = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$

giro en la dirección x2 $\beta_2 = -\frac{\partial u_3}{\partial x_2}$

p_3 : carga transversal

curvatura eje x1 $\chi_{11} = \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}$

curvatura en los 2 ejes $\chi_{12} = \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}$

curvatura eje x2 $\chi_{22} = \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}$

N_x : esfuerzo resultante de compresión en la dirección axial

$N_{x\theta}$: esfuerzo resultante de corte

N_θ : esfuerzo resultante de compresión circunferencial

u_3 : desplazamiento transversal (notación para lámina planas, placas)

W : desplazamiento transversal (notación para lámina curvas, cáscaras)

μ : coeficiente de Poisson dependiendo de la notación usada.

E : modulo de elasticidad del material.

$C = \frac{Eh}{1-\mu^2}$ rigidez membranal de la lámina

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ rigidez flexional de la lámina

Bilaplaciano de u_3 : $\nabla^4 u_3 = \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4}$

a: largo de la lámina

b: ancho de la lámina

t: espesor (altura h) de la lámina

r: radio de curvatura de la lámina

$Z = \frac{b^2}{r*t} * \sqrt{1 - \mu^2}$ Parámetro de curvatura (adimensional). Parámetro de Batdorf.

σ_X : tensión normal de compresión en el sentido axial

σ_Y : tensión normal de compresión en el sentido transversal

τ : tensión de corte

$K_X = \frac{\sigma_X * b^2 * t}{\pi^2 * D}$ parámetro adimensional de carga de compresión axial

$K_Y = \frac{\sigma_Y * b^2 * t}{\pi^2 * D}$ parámetro adimensional de carga de compresión transversal

$K_S = \frac{\tau * b^2 * t}{\pi^2 * D}$ parámetro adimensional de carga de corte

$M = \frac{\pi^2 * D}{b^2 * t}$ constante que facilita los cálculos

$$\sigma_X = K_X * M$$

$$\sigma_Y = K_Y * M$$

$$\tau = K_S * M$$

$$\sigma_{VM} = K_{VM} * M$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - \sigma_X \sigma_Y + 3\tau^2} \text{ Tensión de Von Mises para estados combinados de Carga}$$

$$K_{VM} = \sqrt{K_X^2 + K_Y^2 - K_X K_Y + 3K_S^2} \text{ Tensión adimensional asociada a la tensión de Von Mises}$$

m : número de semiondas en la dirección axial

n : número de semiondas en la dirección transversal

ε : error relativo en [%]

k_1 : coeficiente de reducción de K_x para pasar de $MS=0\%$ (estructura rompe) a $MS=MSD$ (en este caso $MSD=10\%$)

k_2 : coeficiente de reducción de K_y para pasar de $MS=0\%$ (estructura rompe) a $MS=MSD$ (en este caso $MSD=10\%$)

k_3 : coeficiente de reducción de K_s para pasar de $MS=0\%$ (estructura rompe) a $MS=MSD$ (en este caso $MSD=10\%$)

MS : Margen de Seguridad (para el estado de carga actuante)

MSD : Margen de seguridad de diseño (modificación del estado de carga inicial, para cumplir las condición $MS=MSD$, $K_{y2}=K_y*k_2$, $K_{s2}=K_s*k_3$, se calcula K_{x_f} (que tiene $MS=0\%$ en el nuevo estado de carga, estructura rompe), luego se calcula K_{x2} (que tiene $MS=MSD$ en el nuevo estado de carga) y $k_1=K_{x2}/K_{x_f}$, el coeficiente de reducción para mostrar cuanto hay que reducir K_x para lograr el MSD .

Introducción

1.1 Descripción del Problema

1.1.1 Desarrollo Histórico

El desarrollo de la Teoría de la Elasticidad para vigas y columnas (piezas unidimensionales) fue rápido y acompañado por la verificación experimental.

Este éxito, motivó a los autores a extender la teoría para que sea aplicable a láminas (piezas bidimensionales). A las láminas planas las llamaron placas y a las láminas curvas las llamaron cáscaras. Pero las predicciones teóricas no fueron acompañadas por los resultados experimentales, poniendo en duda la validez de la extensión de la teoría, de las ecuaciones de diseño, de la carga máxima, del modo de pandeo y de la explicación del proceso de falla. Las cargas críticas experimentales eran muy inferiores a los valores predichos por la Teoría Clásica Lineal y tenían mucha dispersión. La discrepancia era tan grande que no permitían un diseño que cumpla con los requisitos de seguridad.

Esto provocó una transición, buscando corregir la teoría para que se adapte a los datos experimentales. Esta transición dio como resultado, los coeficientes de reducción, que se aplicaban a las cargas críticas teóricas de piezas ideales para adaptarlas a los resultados experimentales de piezas reales, pero se consideraban muy conservadores.

Hasta que se produjo una nueva teoría, la Teoría General de la Elasticidad. Esta permanente búsqueda de acuerdo entre la teoría y la práctica, llevo a la propuesta de nuevos modelos, conceptos y procedimientos de cálculo.

La mayoría de los investigadores por mucho tiempo siguieron haciendo sus investigaciones en forma analítica, hasta que en 1970 empezaron a hacer uso de la computadora, por su gran velocidad y su gran capacidad de memoria, para resolver sus ecuaciones haciendo uso del Método de los Elementos Finitos.

1.1.2 El estudio de la Estabilidad de Láminas

Inestabilidad Geométrica:

Cuando la estructura es sometida a un determinado estado de carga se deforma. Si esta deformación no provoca, a su vez, un nuevo estado de carga se dice que hay estabilidad geométrica y la estructura no rompe. Si esta deformación provoca, a su vez, un nuevo estado de

carga y una nueva deformación, que es mayor que la deformación inicial, se dice que hay inestabilidad geométrica y el proceso continúa hasta la rotura, repentina y sin aviso de la estructura, a un estado de carga muy inferior al estado de carga asociado a la fluencia.

Se estudia la calidad de equilibrio de la estructura para determinar si tiene un equilibrio estable, indiferente o inestable.

Para ello se define la función potencial π :

$$\pi = U + V_p$$

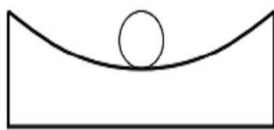
U =Energía Elástica

V_p =Trabajo de las fuerzas exteriores cambiado de signo.

donde $\frac{\partial \pi}{\partial q} = 0$ es la condición de Equilibrio para la coordenada generalizada q y

donde $\frac{\partial^2 \pi}{\partial q^2}$ es la condición de Estabilidad en la coordenada generalizada q (como ejemplo $q=\theta$).

Equilibrio Estable



$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} > 0$$

La estabilidad se ve cuando la estructura sufre una pequeña perturbación que la saca de su estado de equilibrio inicial y en la estructura se generan fuerzas que hacen que la estructura regrese a su posición de equilibrio inicial (Equilibrio Estable).

El punto de equilibrio es un punto de potencial mínimo.

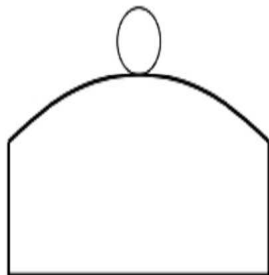
Equilibrio Indiferente



$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} = 0$$

Esta propiedad varía con el estado de carga. Al aumentar el estado de carga, encontraremos un estado de equilibrio en donde las fuerzas que hacen que la estructura regrese a su posición de equilibrio inicial sean nulas, y la estructura permanece en la posición de equilibrio asociado a la perturbación (Equilibrio indiferente). El estado de carga en donde el equilibrio es indiferente es el máximo estado de carga soportado por la estructura, y se llama carga crítica de pandeo.

Equilibrio Inestable



$$\frac{d^2 \Pi}{d\theta^2} < 0$$

Superado este estado de carga, las fuerzas ya no hacen que la estructura regrese a su posición de equilibrio inicial sino que se aleje de él, aumentando su deformación hasta la rotura de la estructura, en forma repentina sin aviso y a un estado de carga muy inferior al estado de carga de fluencia (Equilibrio Inestable). El punto de equilibrio es un punto de potencial máximo.

Para el diseño de la estructura, se busca que para el estado de carga, la estructura se encuentre siempre en un estado de equilibrio estable. Para garantizar la seguridad de la estructura, se define el margen de seguridad, que mide la distancia que existe entre el estado de carga actuante (equilibrio estable) y el estado de carga llamado carga crítica de pandeo (equilibrio indiferente). Generalmente el margen de seguridad se mide en porcentaje [%], siendo común un margen de seguridad de 10 %, que generalmente se anota así $MS=10\%$. Lo ideal sería que el estado de carga de la estructura sea igual al estado de carga asociado a la fluencia para poder aprovechar todo el periodo elástico de la estructura, y que la estructura trabaje con el menor peso.

Existen casos en donde el pandeo no es brusco y la estructura no se rompe en forma catastrófica:

- en cilindros bajo compresión axial que hay algo parecido a un “pandeo Local” y que la estructura puede seguir tomando carga después de una redistribución de tensiones (ver figura 2) y
- cuando la lámina forma parte de una estructura con varios elementos, donde después de una gran deformación de la lámina, los otros elementos toman la carga y evitan la rotura catastrófica de la lámina.

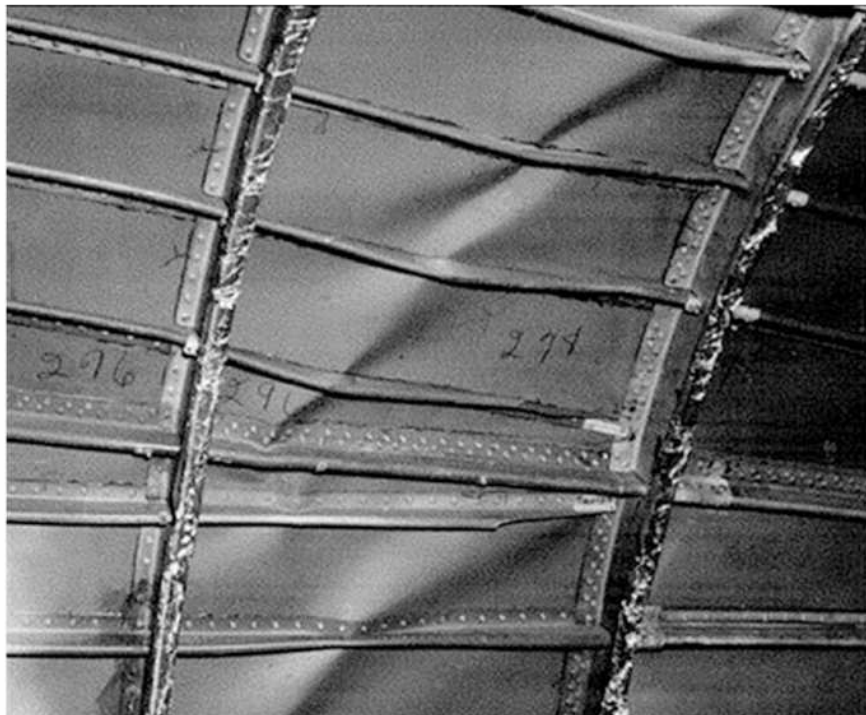
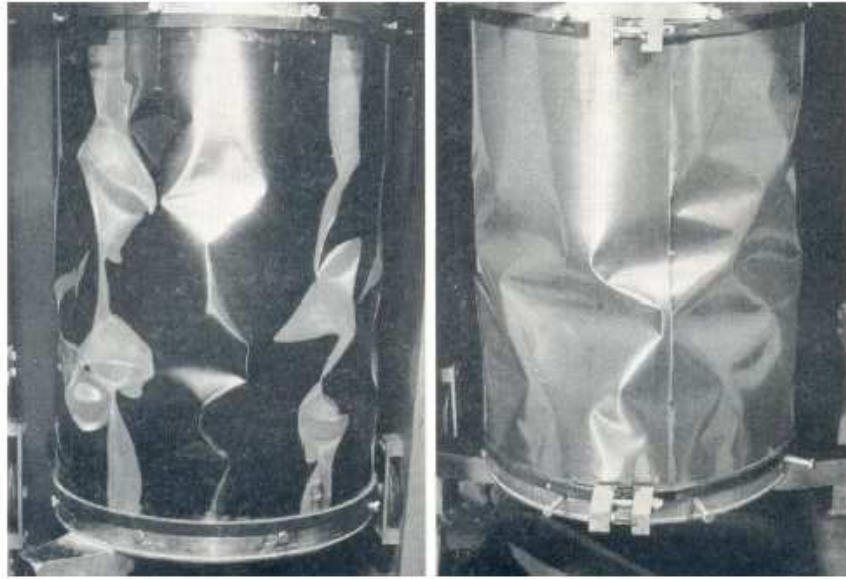


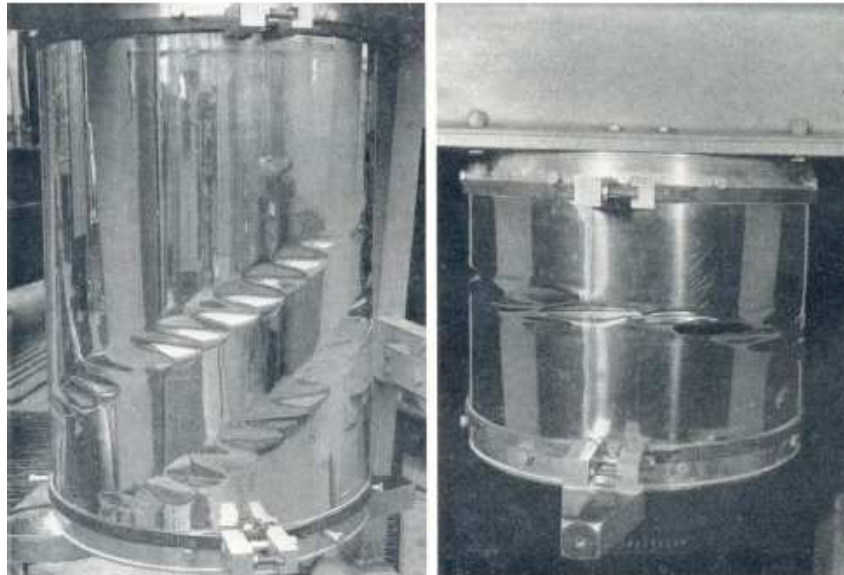
Figura 1: panel aeronáutico pandeado pero en funcionamiento. José L. Pérez Aparicio y Pedro José Patón Pozo, Estudio pospandeo de placas de materiales compuestos en paneles aeronáuticos.

El estudio de la Estabilidad de Láminas se concentró en los cilindros de pared delgada en distintas condiciones:

- 1) con diferentes apoyos (simplemente apoyados o empotrados),
- 2) con diferentes cargas (compresión axial, presión lateral, presión hidrostática, torsión, flexión, con presurización y sin presurización),



Cilindros sin presurizar



Cilindros presurizados

Figura 2: Cilindros en compresión no presurizados y presurizados. Estructuras IV: Análisis de Estructuras Cilíndricas (cilindros de paredes delgadas sometidos a compresión y presión interna) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. pág. 10/26

- 3) con diferentes geometrías (tubos, cilindros, recipientes),
- 4) con diferente tipos de espesores (espesor uniforme, espesor escalonado)
- 5) con diferentes estados constructivos (cilindros terminados y cilindros en fase de construcción)

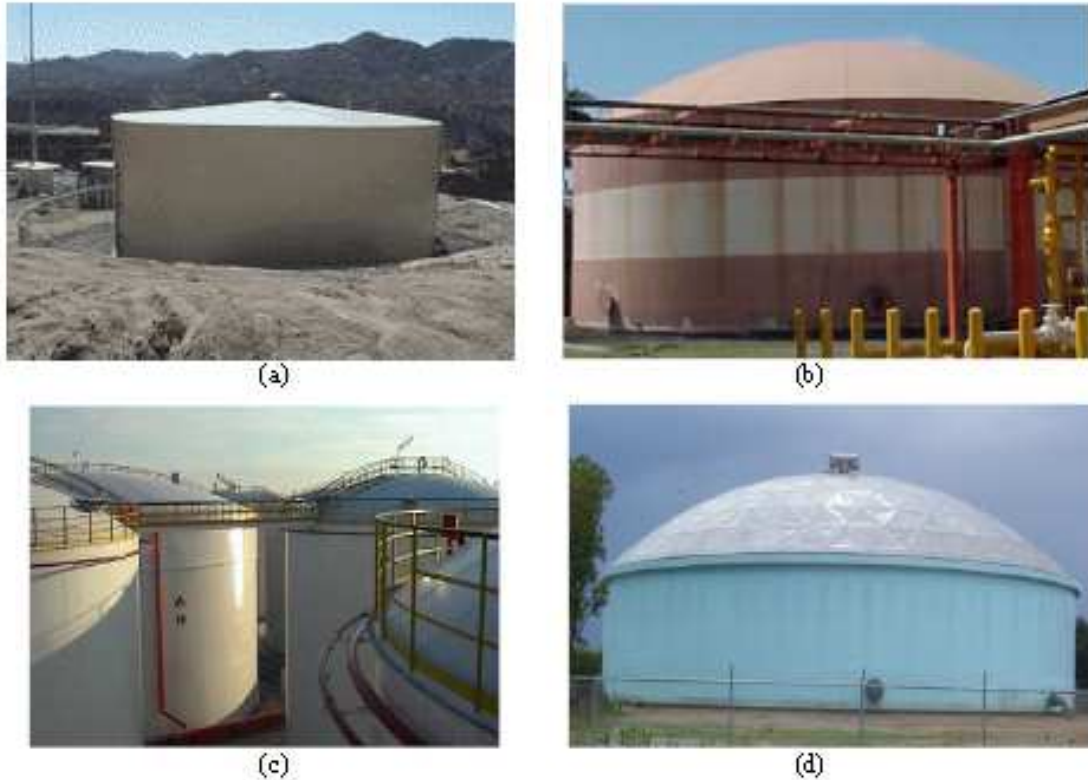


Figura 3. 3: Tanques de techo fijo: (a) Cónico, (b) Paraguas, (c) Esférico, (d) Esférico geodésico.

Figura 3: Tanques con techo fijo (a) Cónico, (b) Paraguas, (c) Esférico, (d) Esférico geodésico. Jaca, Rossana Claudia. Tesis Doctoral: Límites Inferiores en Inestabilidad de Láminas de Tanques de Pared Delgada. Presentada en La Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina; el día 22 de diciembre de 2008. Figura 3.3 pág. 35 (48/219)

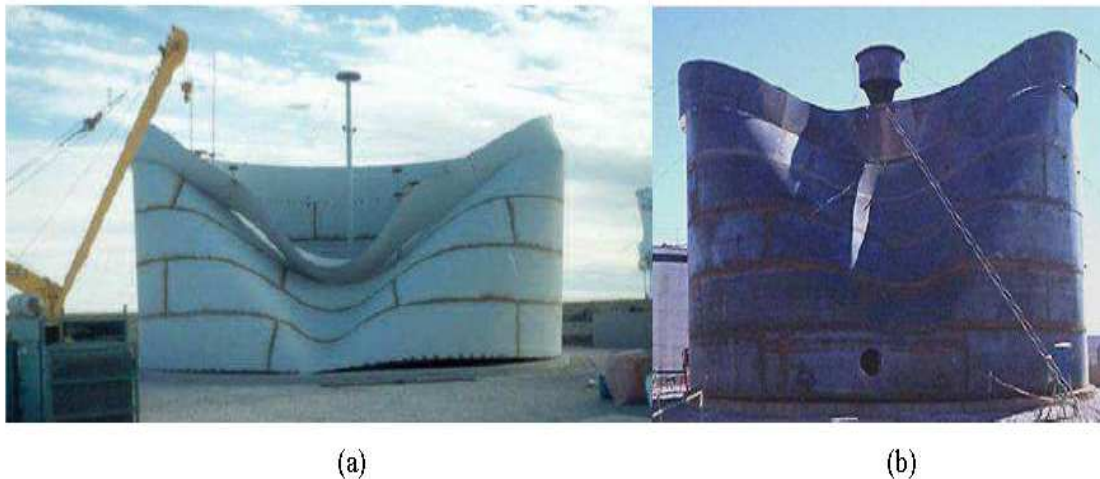


Figura 1: Tanques de petróleo en construcción en el norte de la Patagonia, que colapsaron a velocidades del viento muy inferior a las de diseño.

Figura 4: Tanques de petróleo en construcción en el norte de la Patagonia, que colapsaron a velocidades del viento muy inferiores a las de diseño. J.L.Lassig, R.C.Jaca, C.Burgos, J.E.Cicerone, L.A.Godoy. Utilización del Túnel de Viento como herramienta para el análisis de tanques de petróleo en la Norpatagonia. Figura 1, pág. 3/16.

6) con diferentes tipos de análisis (lineal y no lineal, tanto geométrico como elástico, y de límites inferiores con uso del método de la rigidez reducida en toda la estructura o en zonas de gran deformación),

7) con diferentes grados de imperfección (estructura perfecta, con imperfecciones iniciales (análisis lineal, matriz de rigidez constante), con grados de deformaciones bajo carga (análisis no lineal, matriz de rigidez actualizada), perturbaciones de amplitud variable para el estudio de sensibilidad a imperfecciones),

8) con diferentes tipos de refuerzos (cilindros sin refuerzos (análisis de estabilidad generalizada) y cilindros con refuerzos, (análisis de estabilidad local (entre refuerzo y refuerzo)) para determinar la cantidad y rigidez de los refuerzos)



Figura 1: Inestabilidad de cáscaras cilíndricas [1].



Figura 2: Inestabilidad generalizada [1].

Figura 5: Inestabilidad en cáscaras cilíndricas local y generalizada. Feijoo-Carrara, Inestabilidad de Cáscaras Reforzadas de Geometría Imperfecta. Figuras 1 y 2 pág. 3/21

9) Con diferentes materiales (isótropos (aluminio, acero, etc.), ortótropos (plásticos reforzados con fibras, láminas corrugadas y placas con refuerzos) y anisótropos (hormigón y otros)) y

10) con diferentes configuraciones (cilindros aislados o en conjunto) para determinar el efecto de la distancia de separación entre cilindros y del ángulo de incidencia del viento.

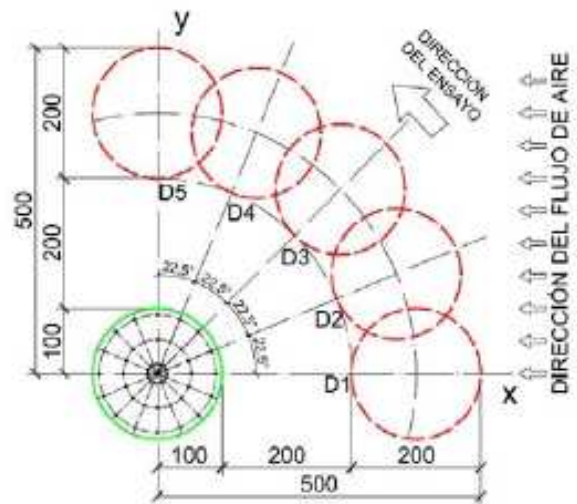


Figura 6: Ensayo en Túnel de Viento. J.L.Lassig, R.C.Jaca, C.Burgos, J.E.Cicerone, L.A.Godoy. Utilización del Túnel de Viento como herramienta para el análisis de tanques de petróleo en la Norpatagonia. Figura 9 pág. 10/16.

Para ello se desarrollaron modelos matemáticos, ensayos experimentales y resultados numéricos (obtenidos por métodos computacionales).

Resultado Experimental:

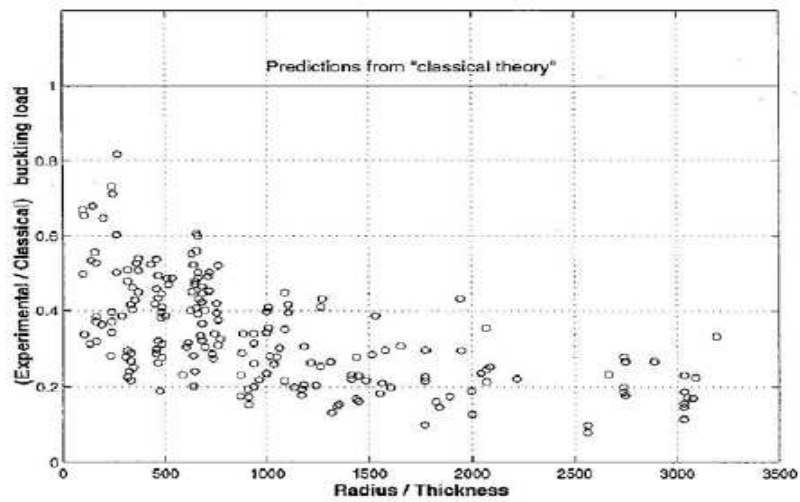


Figura 4: Distribución relaciones entre cargas críticas experimentales y clásicas [8].

Figura 7: Relación adimensional Resultado Experimental/Resultado Teórico en cargas Críticas de pandeo en función de la relación radio/espesor. Feijoo-Carrara, Inestabilidad de Cáscaras Reforzadas de Geometría Imperfecta. Figura 4 página 5.

Resultados Computacionales:

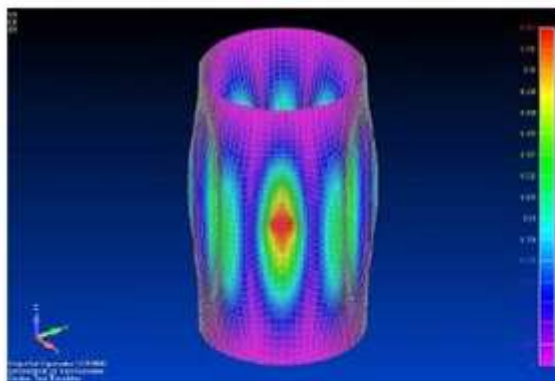


Figura 19: Modo de Falla Cilindro 1.

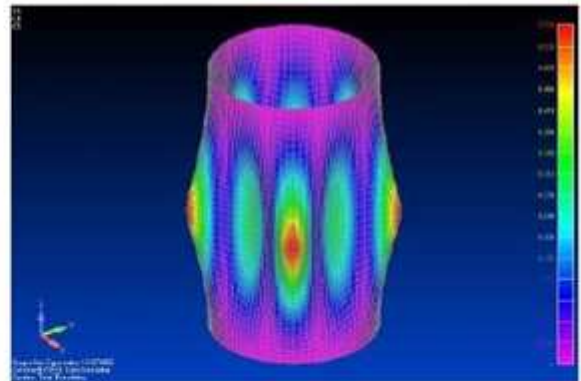


Figura 20: Modo de Falla Cilindro 2.

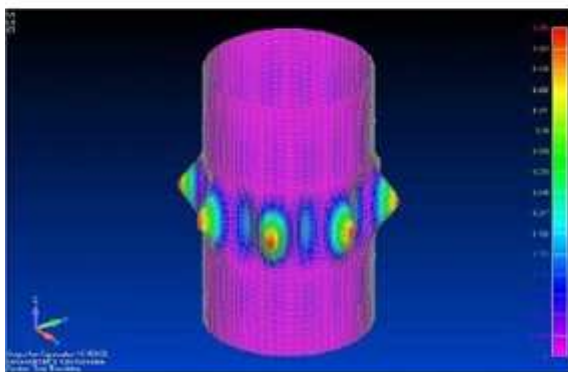


Figura 21: Modo de Falla Cilindro 3.

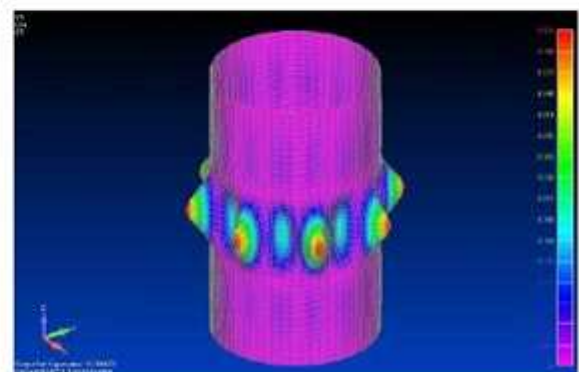


Figura 22: Modo de Falla Cilindro 4.

Figura 8: Modo de Falla de Cilindros con perturbación. Feijoo-Carrara, Inestabilidad Cáscaras Reforzadas de Geometría Imperfecta. Figuras 19, 20, 21 y 22 pág. 15-16

A lo largo de la historia muchos investigadores se esforzaron por entender y describir el fenómeno del pandeo. Entre ellos podemos mencionar a:

L.H.Donnell (1933), S. Timoshenko (1936), S.B.Batdorf (1947), W.T.Koiter (1945 pero su trabajo fue apreciado recién en 1960) y James G. A. Croll (1973), a nivel internacional y a C.A.Prato (1960), L.A.Godoy (1980), F.G.Flores (1990), R.C.Jaca (2008) en la República Argentina.



Professor Lloyd Hamilton Donnell
<https://shellbuckling.com/cv/donnell.pdf>
https://de.wikipedia.org/wiki/Lloyd_H._Donnell



Professor James G. A. Croll & Rafael
<https://shellbuckling.com/cv/croll.pdf>



In Memoriam
Warner Tjardus Koiter
<https://shellbuckling.com/cv/koiter.pdf>



Professor Carlos A. Prato
http://www.endeic.com/equipo/CV_Carlos_Prato.pdf

Figura 9: Investigadores Internacionales y Nacionales

Para conocer más datos del profesor Carlos A. Prato se puede consultar también:
http://www.famaf.unc.edu.ar/~torres/trabajosparapublicacion/23-simposio_homenaje_al_dr_carlos_prato/23-simposio_homenaje_prato-23.pdf

Este deseo de conocer el comportamiento de estructuras bidimensionales, en general, y del cilindro, en particular, se debe a su gran importancia en el diseño de estructuras con uso aeronáutico, aeroespacial, naval, civil, mecánico y nuclear.

Estos investigadores tenían los siguientes objetivos:

- 1) Encontrar una sola ecuación que permita el diseño, que relacione todas las condiciones de cargas y de apoyo con los parámetros que definen la geometría del cilindro y que cumpla con los requisitos de seguridad;
- 2) Encontrar una ecuación que muestre el modo de falla y que permita explicar el comportamiento del cilindro en estado de pandeo.

1.2 Hipótesis y Objetivos

Hipótesis: es posible desarrollar una herramienta de cálculo que permita conocer la carga crítica de pandeo para el pandeo de Láminas simplemente apoyadas en los cuatro bordes, cuyos resultados coincidan con los resultados conocidos (validación), permita una verificación rápida y facilite el diseño.

Objetivos:

- 1) desarrollar una herramienta de cálculo para la Carga Crítica de Pandeo para Láminas simplemente apoyadas en los cuatro bordes, que siga como referencia la ecuación (E5) que se encuentra en la pág.(23/25) del N.A.C.A. report N° 874, que se basa en las Ecuaciones de Donnell con la aplicación del Método de Galerkin.
- 2) cumplir con la validación de la herramienta de cálculo.
- 3) permitir una verificación rápida de la estructura.
- 4) facilitar el diseño de la estructura.

1.2.1 Validación:

Se logra la validación al comparar los resultados de la herramienta de cálculo nueva con los resultados tradicionales publicados (obtenidos por métodos teóricos o experimentales) y demostrar que los resultados son próximos. No se requiere que sean iguales porque el pandeo es un fenómeno que tiene mucha dispersión.

1.2.2 Verificación Rápida

Hay situaciones que exigen un resultado rápido. Se necesita una ecuación que permita determinar, de manera directa y de bajo costo, la condición de la pieza o estructura (“pieza segura” o “La pieza rompe”), sin recurrir a las tablas de manuales (caros, de difícil acceso y a veces incompletos) o al método de los elementos finitos (mucho tiempo de ejecución, alto costo en computadora de alta capacidad y en licencias para usos de programas).

1.2.3 Diseño

Es deseable, que el diseñador pueda conocer, para cada combinación posible de los parámetros que intervienen en el diseño, la condición de la pieza o estructura y que encuentre ciertas

relaciones entre los parámetros. Generalmente, las condiciones de apoyo y de carga vienen dadas y se debe determinar uno de los parámetros de geometría.

1.3 Contenido

En el Capítulo 2: Marco Teórico, se realiza la demostración formal para la obtención de las ecuaciones de Donnell a partir de las condiciones de equilibrio, se propone una solución en serie de seno con coeficientes indeterminados y se aplica el método Galerkin.

En el Capítulo 3: Metodología, se muestra el procedimiento para obtener las ecuaciones de trabajo partiendo de las ecuaciones de Donnell y se describen situaciones propias al desarrollo de la herramienta de cálculo.

En el Capítulo 4: Resultados, se presentan los Resultados numéricos, agrupados de la siguiente manera: Validación, Verificación y Diseño. Para poder tener evidencia la validez, funcionamiento y alcance de la herramienta de cálculo.

En el Capítulo 5: Conclusión se repasa los objetivos de la investigación, se menciona el marco teórico, se describe brevemente la metodología, se resumen los principales resultados, se presentan las conclusiones y se plantean nuevas investigaciones.

Marco Teórico

A continuación mostraremos el proceso para la obtención de la Ecuación NACA, la ecuación (E5) que se encuentra en la pág.(23/25) del NACA report N° 874. Consta de 3 pasos:

1. Partiendo de una Lámina plana (placa) con la geometría deformada y sus esfuerzos, y planteando las Ecuaciones de Equilibrio en 5 ejes (no se tiene en cuenta la torsión) se obtiene las Ecuaciones de Donnell con parámetros adimensionales.
2. Con las Ecuaciones de Donnell se hace la sustitución por la serie de senos y obtenemos la ecuación de trabajo.
3. Con la ecuación de trabajo y la aplicación del Método de Galerkin, obtenemos la ecuación NACA.

2.1 Obtención de la Ecuación de Donnell:

Las siguientes ecuaciones se derivan del estado de equilibrio de una lámina plana (placa) con las siguientes condiciones:

- 1) Retener los términos no lineales del tensor de deformación ,
- 2) Plantear las ecuaciones de equilibrio en la geometría deformada.
Las ecuaciones resultan no lineales, de difícil solución pero pueden linealizarse y convertirse en un problema de valores propios
- 3) Se mantiene la hipótesis de Kirchhoff que dice: “Las secciones planas y perpendiculares al plano medio antes de la deformación permanecen planas y perpendiculares después de la deformación.”

Se definen los giros, las curvaturas y los desplazamientos.

Se consideran pequeños desplazamientos membranales pero desplazamientos intermedios en el plano transversal.

Se define el tensor no lineal de Lagrange y se retiene solo uno de los términos cuadráticos (el correspondiente a u_3 , en el sentido transversal)

Se reemplaza en el tensor no lineal y se obtiene ecuaciones que dependen únicamente de u_1 y u_2 (desplazamiento membranar).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^* &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - x_3 * \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} ; & \varepsilon_{22}^* &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - x_3 * \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} ; & \varepsilon_{33}^* &= 0; \\ \varepsilon_{12}^* &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) - x_3 * \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} ; & \varepsilon_{13}^* &= 0; & \varepsilon_{23}^* &= 0; \end{aligned}$$

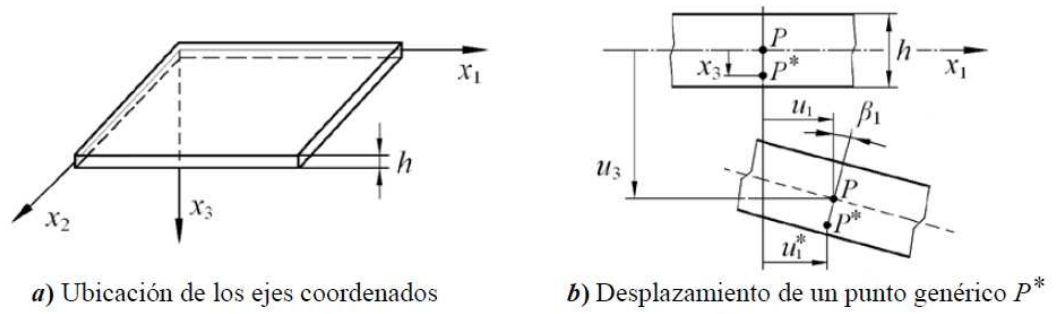


Figura 1: Geometría y cinemática de una placa

Figura 10: Geometría y cinemática de una placa. Compendio de Calculo Estructural II F.C.E.F.yN. de U.N.C., Capítulo 6: Cargas Críticas de placas, figura 1

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} ; & \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} ; & \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) ; \\ \beta_1 &= -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} ; & \beta_2 &= -\frac{\partial u_3}{\partial x_2} ; & \beta_3 &= -\frac{\partial u_3}{\partial x_3} ; \\ \chi_{11} &= -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} ; & \chi_{22} &= -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} ; & \chi_{12} &= -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} ; \end{aligned}$$

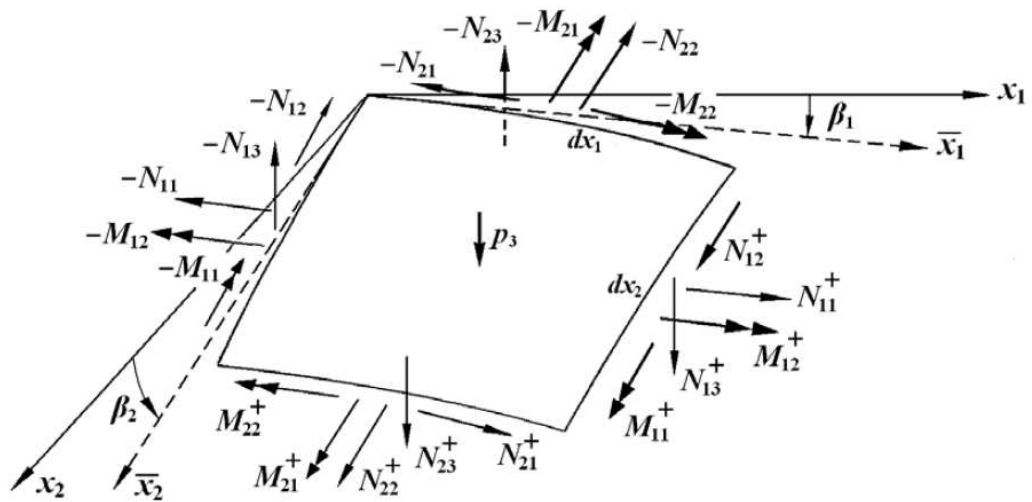


Figura 2: Esfuerzos resultantes actuando en la geometría deformada

Figura 11: Esfuerzos resultantes actuando en la geometría deformada. Compendio de Calculo Estructural II F.C.E.F.yN. de U.N.C., capítulo 6: Cargas Críticas de placas, figura 2

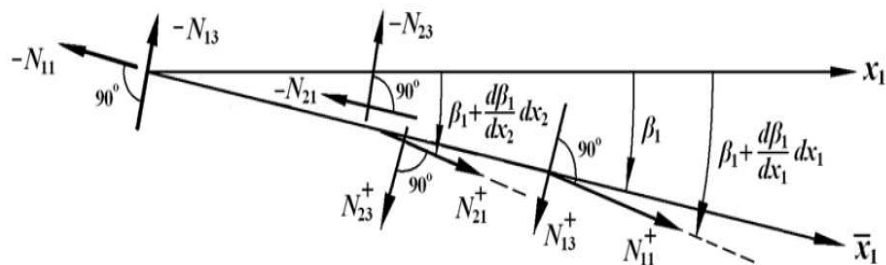


Figura 3: Equilibrio de fuerzas según x_1

Figura 12: Equilibrio de fuerzas según x_1 . Compendio de Calculo Estructural II F.C.E.F.yN. de U.N.C., capítulo 6: Cargas Críticas de placas, figura 3

Se plantean las ecuaciones en el estado deformado y se obtienen las siguientes ecuaciones: (solo se muestra el resultado final)

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - N_{13} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - N_{23} = 0 \quad (4)$$

$$- \left[N_{11} * \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + N_{12} * \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} \right) + N_{22} * \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} \right] + \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} + p_3 = 0 \quad (5)$$

Recordando la definición de Fuerza por unidad de longitud: $N_{ij} = \int_{x_3=-h/2}^{x_3=h/2} \sigma_{ij} * dx_3$;

y la definición de Momento por unidad de longitud: $M_{ij} = \int_{x_3=-h/2}^{x_3=h/2} \sigma_{ij} * x_3 * dx_3$; y

definiendo $C = \frac{Eh}{1-\mu^2}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; Bilaplaciano de u_3 : $\nabla^4 u_3 = \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4}$ (6)

y sustituyendo: $N_{11}, N_{12}, N_{22}, M_{11}, M_{12}, M_{22}$ por sus respectivas ecuaciones

Estado Membranal :	Estado Flexional :
$N_{11} = C(\varepsilon_{11} + \mu * \varepsilon_{22})$;	$M_{11} = D(\chi_{11} + \mu * \chi_{22})$;
$N_{22} = C(\varepsilon_{22} + \mu * \varepsilon_{11})$;	$M_{22} = D(\chi_{22} + \mu * \chi_{11})$;
$N_{12} = C(1 + \mu) * \varepsilon_{12}$;	$M_{12} = -D(1 - \mu) * \chi_{12}$;

Método de la Rigidez: Se puede reducir el número de ecuaciones a tres operando en las ecuaciones (3) y (4), y reemplazando luego en ecuación (5):

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} = 0 \quad (8)$$

$$-D\nabla^4 u_3 - \left[N_{11} * \chi_{11} + 2 N_{12} * \chi_{12} + N_{22} * \chi_{22} \right] + p_3 = 0 \quad (9)$$

Estas tres ecuaciones son llamadas **las ecuaciones de Donnell**, para las láminas planas (placas), que relacionan los desplazamientos transversales (u_3) con los esfuerzos Membranales (N_{11}, N_{12} y N_{22}) y la carga transversal (p_3).

Repetiendo el mismo razonamiento para láminas curvas (cáscaras) se tiene:

$$r \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (10)$$

$$r \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (11)$$

$$- \left[N_x * \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2}{r} N_{x\theta} * \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{N_\theta}{r^2} * \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] + D\nabla^4 w + \frac{N_\theta}{r} = p_3 \quad (12)$$

Estas tres ecuaciones son llamadas **las ecuaciones de Donnell**, para las láminas curvas (cáscaras), que relacionan los desplazamientos transversales (w) con los esfuerzos Membranales ($N_x, N_{x\theta}$ y N_θ) y la carga transversal (p_3).

Retomando el estudio desde la ecuación 9:

$$-D\nabla^4 u_3 - [N_{11} * \chi_{11} + 2 N_{12} * \chi_{12} + N_{22} * \chi_{22}] + p_3 = 0 \quad (9)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} w &= u_3 ; & p &= p_3 ; \\ N_{11} &= t * \sigma_x ; & N_{12} &= t * \tau ; & N_{22} &= t * \sigma_y ; \\ \chi_{11} &= -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} ; & \chi_{22} &= -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} ; & \chi_{12} &= -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} ; \end{aligned}$$

y que hubo un cambio en la definición de los ejes :

$$D\nabla^4 w + t \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + p = 0 \quad (13)$$

Que es la ecuación de equilibrio para láminas planas (placas) que corresponde con la ecuación 2 pág. 11/25 del NACA Report 874 y se obtuvo del Compendio de Calculo Estructural II F.C.E.F.yN. de U.N.C.

A partir de ahora continuamos con las ecuaciones del NACA Report N°874

$$D\nabla^4 w + t \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + p - \frac{t}{r} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \sigma_y \right) = 0 \quad (14_a)$$

$$\nabla^4 F + \frac{E}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (14_b)$$

Que es la ecuación de equilibrio para láminas planas curvadas cilíndricamente que corresponde con las ecuaciones 3 y 4 pág. 11/25 del NACA Report 874.

Partiendo de la ecuación 14_b:

$$\nabla^4 F = -\frac{E}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Como E y r son constantes

$$F = -\frac{E}{r} \nabla^{-4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Y derivando parcialmente en x, 2 veces, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, se tiene:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{E}{r} \nabla^{-4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)$$

Que reemplazando en la ecuación 14_a:

$$D\nabla^4 w + t \left(\sigma_X \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_Y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + p - \frac{t}{r} \left(-\frac{E}{r} \nabla^{-4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + \sigma_Y \right) = 0$$

Luego aplicando ∇^4 a toda la ecuación queda:

$$D\nabla^8 w + \frac{Et}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + t\nabla^4 \left(\sigma_X \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_Y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\sigma_Y}{r} \right) + \nabla^4 p = 0 \quad (15)$$

Que es la ecuación de equilibrio para láminas planas curvadas cilíndricamente que corresponde con la ecuación 5 pág. 11/25 del NACA Report 874 y que se conoce como Ecuación De Donnell, quien la publicó en el NACA Report 479 el 5 de mayo de 1933.

Como σ_Y , r y p son constantes, la ecuación 15 queda:

$$D\nabla^8 w + \frac{Et}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + t\nabla^4 \left(\sigma_X \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_Y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (16)$$

Que es la ecuación de equilibrio para láminas planas curvadas cilíndricamente que corresponde con la ecuación (E1) pág. 23/25 del NACA Report 874 .

Dividiendo en D:

$$\nabla^8 w + \frac{Et}{r^2 D} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + t\nabla^4 \left(\frac{\sigma_X}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\tau}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\sigma_Y}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

Recordando las siguientes ecuaciones:

$$D = \frac{E*t^3}{12(1-\mu^2)} \quad ;$$

$$Z = \frac{b^2}{rt} * \sqrt{1-\mu^2} \quad ; \quad \text{donde } Z^2 = \frac{b^4}{r^2 t^2} * (1-\mu^2) \quad \text{y} \quad \frac{Et}{r^2 D} = 12 \frac{Z^2}{b^4} \quad ;$$

$$K_X = \frac{\sigma_X b^2 t}{\pi^2 D} \quad ; \quad \text{donde } \frac{\sigma_X}{D} = K_X \frac{\pi^2}{b^2 t} \quad ;$$

$$K_Y = \frac{\sigma_Y b^2 t}{\pi^2 D} \quad ; \quad \text{donde } \frac{\sigma_Y}{D} = K_Y \frac{\pi^2}{b^2 t} \quad ;$$

$$K_S = \frac{\tau b^2 t}{\pi^2 D} \quad ; \quad \text{donde } \frac{\tau}{D} = K_S \frac{\pi^2}{b^2 t} \quad ;$$

$$\nabla^8 w + 12 \frac{Z^2}{b^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K_X \frac{\pi^2}{b^2} \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2K_S \frac{\pi^2}{b^2} \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + K_Y \frac{\pi^2}{b^2} \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (17)$$

Que es la ecuación de equilibrio para láminas planas curvadas cilíndricamente que corresponde con la ecuación (E2) pág. 23/25 del NACA Report .

2.2 Desarrollo de las Ecuaciones de trabajo

Definiendo el operador Q: $Q = \nabla^8 + 12 \frac{Z^2}{b^4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + K_X \frac{\pi^2}{b^2} \nabla^4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2K_S \frac{\pi^2}{b^2} \nabla^4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + K_Y \frac{\pi^2}{b^2} \nabla^4 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Entonces:

$Q(w)=0$; que corresponde con la ecuación (E3) pág. 23/25 del NACA Report 874.

Solución:

Se propone como solución, una serie de senos en los ejes x e y con coeficientes indeterminados, que se trataran de determinar, que posee las siguientes características: forman una base (son linealmente independientes, y se puede aprovechar la Ortogonalidad), son fáciles de derivar y cumplen con las condiciones de equilibrio.

$$w=f(x, y)=\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m n} * \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) * \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (18)$$

Que es la ecuación del conjunto de ecuaciones que satisfacen las condiciones de contorno (borde) para una lámina curvada cilíndricamente simplemente apoyada y que corresponde con la ecuación (E4) pág. 23/25 del NACA Report 874.

Se pueden demostrar las siguientes relaciones:

(Ver en el Anexo A pág.96 la demostración formal de las ecuaciones, partiendo de la ecuación 17 proponiendo como solución la ecuación 18, definiendo α en la ecuación 19 y C en la ecuación 20 , obteniendo la ecuación 21 y procediendo hasta llegar a la ecuación 22)

$$\nabla^8 w = \left(\frac{\pi}{a}\right)^8 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^4 w ;$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 m^4 w ;$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^6 \left(m^2 + n^2 * \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)m^2 w ;$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \left(\frac{\pi^6}{a^4 b^2}\right) \left(m^2 + n^2 * \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)n^2 w ;$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \frac{a}{b} \left(\frac{\pi}{a}\right)^6 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{mn} \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right);$$

esta última ecuación no depende de w y obligará a aplicar el Método de Galerkin.

Reemplazando en la ecuación (17):

$$\left(\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^4 + 12 \frac{z^2}{b^4} \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 m^4 + K_X \frac{a^2}{b^2} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)m^2 + K_Y \frac{a^4}{b^4} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)n^2 \right) * w$$

$$+ 2K_S \frac{a^3}{b^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0$$

Llamando:

$$\alpha = \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^4 + 12 \frac{z^2}{b^4} \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 m^4 + K_X \frac{a^2}{b^2} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)m^2 + K_Y \frac{a^4}{b^4} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)n^2 \quad (19)$$

$$C = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (20)$$

$$\text{Luego} \quad \alpha * w + 2K_S \frac{a^3}{b^3} * C = 0 \quad (21)$$

Ecuación de Trabajo que tiene su origen en la ecuación de Donnell cuando se reemplaza w.

2.3 Método de Galerkin:

El método de Galerkin fue desarrollado en 1915, se basa en Ecuaciones de Equilibrio y es muy parecido al método de Ritz que se basa en Ecuaciones de Energía.

Dada una ecuación diferencial, ordinaria o en derivadas parciales, esta se puede escribir en forma del operador Q de la siguiente manera: $Q(w)=0$

La solución w se define:

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} * f_i(x) * g_j(y)$$

que reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} * Q(f_i(x) * g_j(y)) = 0$$

y que multiplicando por $f_m(x) * g_n(y) dx dy$,

y luego integrando dos veces (una en x y otra en y) se tiene $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} * B_{mnij} = 0$;

con $B_{mnij} = \iint f_m(x) * g_n(y) * Q(f_i(x) * g_j(y)) dx dy$

Aplicando el Método de Galerkin a nuestra ecuación de trabajo (21):

$$\text{Con } f_i(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{ y } g_j(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\iint f_m(x) * g_n(y) * \left(\alpha * w + 2K_S \frac{a^3}{b^3} * C\right) dx dy = 0$$

$$\iint f_m(x) * g_n(y) * \alpha * w * dx dy + \iint f_m(x) * g_n(y) * 2K_S \frac{a^3}{b^3} * C * dx dy = 0$$

Con α y $2K_S \frac{a^3}{b^3}$ constantes, se tiene:

$$\alpha * \iint f_m(x) * g_n(y) * w * dx dy + 2K_S \frac{a^3}{b^3} * \iint f_m(x) * g_n(y) * C * dx dy = 0$$

Cálculos Auxiliares:

$$I = \iint f_m(x) * g_n(y) * w * dx dy ; \quad I = a_{mn} \frac{ab}{4} ;$$

$$II = \iint f_m(x) * g_n(y) * \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy$$

$$III = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{mn} * \iint \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dx dy$$

$$III = \int_0^a \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx * \int_0^b \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy ;$$

$$A = \int_0^a \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \frac{2ma}{(m^2-p^2)\pi} \quad \text{Condición: } m+p=2K+1 \text{ (impar; odd)}$$

$$B = \int_0^b \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy = \frac{2nb}{(n^2-q^2)\pi} \quad \text{Condición: } n+q=2K+1 \text{ (impar; odd)}$$

$$\Pi = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left(p^2 + q^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{pq} \frac{2ma}{(m^2-p^2)\pi} \frac{2nb}{(n^2-q^2)\pi} pq \quad (\text{se realizó cambio de índices})$$

$p=1:m, q=1:n$, en $\sum_{p=1}^{\infty}$ y $\sum_{q=1}^{\infty}$ se tendría que evaluar hasta m y n respectivamente, pero se conserva la notación del NACA.

$$\Pi = \frac{2a}{\pi} \frac{2b}{\pi} * \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left(p^2 + q^2 * \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{pq} \frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)}$$

Reemplazando:

$$\alpha \frac{ab}{4} a_{mn} + 2K_S \frac{a^3}{b^3} \frac{2a}{\pi} \frac{2b}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \left(p^2 + q^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)} = 0$$

Dividiendo en $\frac{ab}{4}$ y reemplazando α obtenemos la Ecuación NACA ver NACA 874 ecuación E5 pág. 23/25.

$$a_{mn} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^4 + 12 \frac{z^2 m^4 a^4}{\pi^4 b^4} + (-1)K_X m^2 \frac{a^2}{b^2} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 + (-1)K_Y n^2 \frac{a^4}{b^4} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 +$$

$$\frac{32K_S a^3}{\pi^2 b^3} * \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \left(p^2 + q^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 \frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)} = 0 \quad (22)$$

El Método de Galerkin a permitido pasar de una ecuación diferencial en derivadas parciales (de octavo orden, homogénea y a coeficientes constantes) que tiene como incógnita la función w , a un sistema de ecuaciones algebraicas que tiene como incógnitas a los a_{ij} ahorrando mucho esfuerzo de cálculo.

Metodología

3.1 Repaso breve de la Ecuación NACA

En el capítulo 2 Marco Teórico, demostramos las ecuaciones de equilibrio en el sistema deformado de la lámina plana (placa) y de la lámina curvada cilíndricamente (cáscara), luego operando obtuvimos la ecuación de Donnell, después aplicando el método de Galerkin a la ecuación de Donnell obtuvimos la Ecuación de NACA ver NACA 874 ecuación E5 pág. 23/25:

$$a_{mn} * \left(\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^4 + 12 \frac{z^2 m^4 a^4}{\pi^4 b^4} + (-1)K_X m^2 \frac{a^2}{b^2} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right) + (-1)K_Y n^2 \frac{a^4}{b^4} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \right)^2 + \frac{32K_S a^3}{\pi^2 b^3} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} \left(p^2 + q^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)} = 0 ;$$

Se tiene:

$$\alpha * a_{mn} + \frac{32 * K_S * a^3}{\pi^2 * b^3} * \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} * \beta = 0 ;$$

Con:

$$\alpha = \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^4 + 12 \frac{z^2 m^4 a^4}{\pi^4 b^4} + (-1)K_X m^2 \frac{a^2}{b^2} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 + (-1)K_Y n^2 \frac{a^4}{b^4} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 ;$$

$$\beta = \left(p^2 + q^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)} ;$$

Con las condiciones que deben cumplirse simultáneamente:

Condición 1: $m+p=2K+1$ (impar; odd)

Condición 2: $n+q=2K+1$ (impar; odd)

Cuando esta ecuación se desarrolla, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales simultáneas que tiene la forma $Ax=b$. (Para tener solución única, A debe ser una matriz cuadrada con dimensión $n \times n$) Notando que:

α está asociado al a_{ii} (depende de $\frac{a}{b}$ y Z, elemento de la diagonal principal de la matriz A, por lo tanto solo tiene sentido cuando $m=n$) y

β está asociado al a_{ij} (depende de $\frac{a}{b}$, elemento fuera de la diagonal principal de la matriz A, tiene sentido cuando $p \neq q$ Con $p=1: m$ y $q=1: n$).

Luego K_x , K_y y K_s son funciones de $\frac{a}{b}$ y Z .

El vector columna x está formado por los a_{mn} que son los coeficientes indeterminados que provienen de las funciones que se usan como base para formar la solución, tiene la dimensión $n \times 1$. (Todavía no se demuestra cual es el valor óptimo de n . Eso se hace más adelante)

El vector columna b está formado por ceros (por ecuación de equilibrio), tiene dimensión $n \times 1$.

El sistema de ecuaciones lineales es homogéneo, es decir, igualado a cero, en donde las incógnitas son linealmente dependientes, por lo tanto, una incógnita se puede escribir como combinación lineal de las otras, existen dos soluciones posibles:

- 1) El vector x nulo (solución trivial, $w=0$, no tiene sentido físico) y
- 2) El vector x distinto del vector nulo, para ello se debe resolver una ecuación donde el determinante de la matriz A sea nulo, $\det(A)=0$, esto conduce a un problema de valores y vectores propios.

Breve explicación del problema de valores y vectores propios:

Sea un sistema de ecuaciones lineales simultáneas. En una primera etapa del problema se desea encontrar el valor de x , pero en ciertas aplicaciones se desea encontrar cuales deben ser los valores de x y b para que x y b tengan una relación lineal:

Sea $x=\varphi$ y $b=\lambda\varphi$, con λ llamado autovalor (valor propio o eigenvalor) que es un escalar y φ que es el autovector (vector propio o eigenvector) que es vector columna de igual dimensión que x , reemplazando queda:

$A\varphi = \lambda\varphi$, realizando las operaciones queda:

$(A - \lambda I)\varphi = 0$, φ puede tener dos valores:

- 1) $\varphi = 0$ *vector nulo* (conduce a $w=0$, Sin sentido físico y por lo tanto no se usa) y
- 2) $\varphi \neq 0$ pero para ello se debe anular el determinante $\det(A - \lambda I) = 0$

I es la matriz identidad (tiene los elementos en la diagonal principal iguales a uno, $I_{ii}=1$ y los elementos fuera de la diagonal principal iguales a cero, $I_{ij}=0$, con $i,j=1,2,\dots,n$;) y que tiene la misma dimensión de la matriz A .

Como A tiene dimensión $(n \times n)$ existen n " λ s" y n " φ s".

Numéricamente:

Se desea encontrar x , que cumpla con la ecuación $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 17 \\ 72 \end{bmatrix}. \text{ Resolviendo encontramos que } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Como A tiene dimensión (2×2) hay 2 " λ s" y 2 " φ s".

Para encontrar λ y φ tal que cumplan con las condiciones $x=\varphi$ y $b=\lambda\varphi$, debemos hacer

$\det(A - \lambda I) = 0$. Ecuación Característica (polinomio en λ con grado n. $\lambda_i = \text{valor propio}$)

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 7 & 13 - \lambda \end{pmatrix} = 0; \quad \lambda^2 - 15 * \lambda + 5 = 0 \quad \lambda_1 = 0.3411 ; \lambda_2 = 14.6589$$

con $D = \begin{bmatrix} 0.3411 & 0 \\ 0 & 14.6589 \end{bmatrix}$ matriz que contiene en su diagonal principal a los valores propios, $D_{ii} = \lambda_i$ y todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal nulos, $D_{ij} = 0$,

y $V = \begin{bmatrix} -0.8751 & -0.2306 \\ 0.4839 & -0.9730 \end{bmatrix}$ matriz que contiene en las columnas a los vectores propios que son vectores columnas, $V(:,i) = \varphi_i$.

Como verificación se hace $A\varphi = \lambda\varphi$

Para $i=1$: $A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$

Para $i=2$: $A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.8751 \\ 0.4839 \end{bmatrix} = 0.3411 \begin{bmatrix} -0.8751 \\ 0.4839 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2306 \\ -0.9730 \end{bmatrix} = 14.6589 \begin{bmatrix} -0.2306 \\ -0.9730 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.2985 \\ 0.1651 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2985 \\ 0.1651 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3.3803 \\ -14.2632 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.3803 \\ -14.2632 \end{bmatrix}$$

En nuestro problema no calculamos x porque $b=0$, lo que nos lleva a calcular λ y φ , pero solamente calculamos D , (el conjunto de valores propios λ) y dejamos sin calcular V (el conjunto de los vectores propios).

Para que el valor propio λ (en nuestro caso, K_x , K_y y K_s), tenga significado físico (estar asociado a la carga crítica de pandeo), debe cumplir también con los siguientes requisitos:

- 1) ser un número real ($\lambda \in \mathbb{R}$),
- 2) ser un número positivo ($\lambda > 0$),
- 3) ser el menor en valor absoluto ($\min(\|\lambda_i\|) = \lambda$) y
- 4) ser menor que el valor máximo (que se obtiene cuando uno de los otros valores es cero, por ejemplo $K_x=0$, produce $K_y=K_{y\max}$ y $K_s=K_{s\max}$).

Conociendo K_x , K_y y K_s , podemos calcular el valor de la carga crítica de pandeo $\sigma_{X\text{critico}}$, $\sigma_{Y\text{critico}}$ o τ_{critico} por medio de las ecuaciones de definición.

Podemos ahora empezar a desarrollar la herramienta de cálculo.

3.2 Desarrollo de la herramienta de cálculo

3.2.1 Relación Precisión-Costo de cálculo:

Haciendo un análisis de la precisión del cálculo de K_x aumentando el número de terminos de la serie n , con $a=5$, $b=3$, $Z_f=[0,5,10,50]$, $K_y0=1$ y $K_s0=3$ se puede ver :

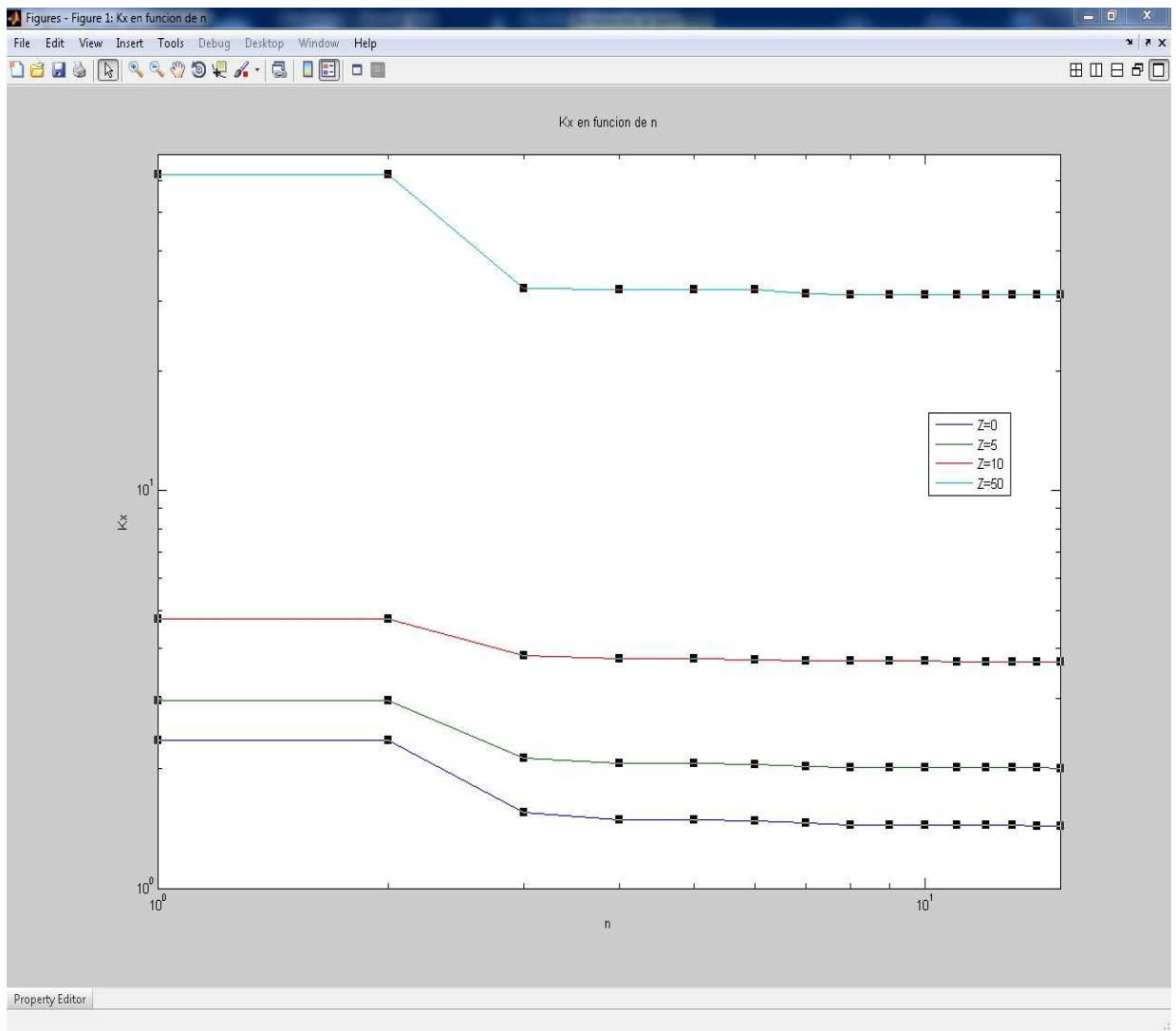


Figura 13: Kx en función de n para distintos valores de Z.

Kx en función de n				
n	Z=0	Z=5	Z=10	Z=50
1	2,3600	2,9594	4,7578	62,3041
2	2,3600	2,9594	4,7578	62,3041
3	1,5503	2,1276	3,8518	32,1054
4	1,4860	2,0593	3,7701	31,9456
5	1,4858	2,0591	3,7699	31,9417
6	1,4752	2,0486	3,7593	31,9417
7	1,4569	2,0289	3,7348	31,1512
8	1,4431	2,0154	3,7224	31,0509
9	1,4403	2,0124	3,7187	31,0408
10	1,4403	2,0124	3,7186	31,0404
11	1,4394	2,0115	3,7178	31,0402
12	1,4389	2,0109	3,7171	31,0279
13	1,4380	2,0100	3,7161	31,0160
14	1,4357	2,0076	3,7132	30,9944
15	1,4336	2,0056	3,7113	30,9786

Tabla 1: Kx-n para distintos Z

Kx/Kx15 (adimensional)				
n	Z=0	Z=5	Z=10	Z=50
1	1,6462	1,4756	1,2820	2,0112
2	1,6462	1,4756	1,2820	2,0112
3	1,0814	1,0608	1,0378	1,0364
4	1,0365	1,0268	1,0158	1,0312
5	1,0364	1,0267	1,0158	1,0311
6	1,0290	1,0215	1,0129	1,0311
7	1,0162	1,0116	1,0063	1,0056
8	1,0066	1,0049	1,0030	1,0023
9	1,0047	1,0034	1,0020	1,0020
10	1,0046	1,0034	1,0020	1,0020
11	1,0041	1,0030	1,0017	1,0020
12	1,0037	1,0027	1,0015	1,0016
13	1,0030	1,0022	1,0013	1,0012
14	1,0015	1,0010	1,0005	1,0005
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Tabla 2: Kx/Kx15-n para distintos Z

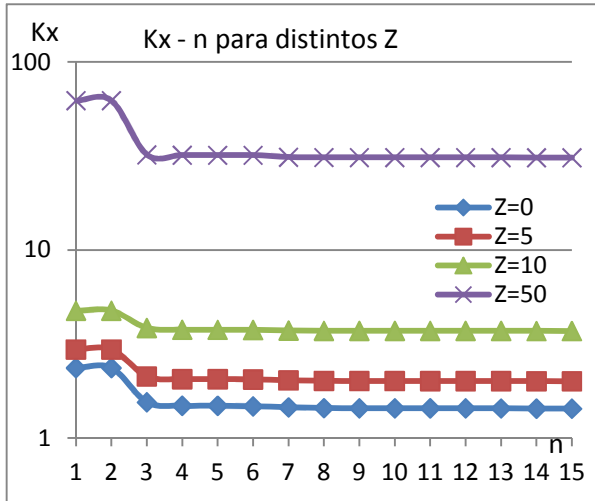


Figura 14: Kx - n para distintos Z

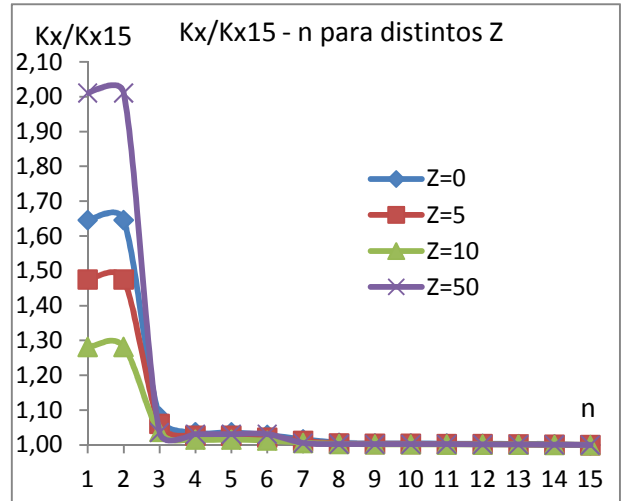


Figura 15: Kx/Kx15 - n para distintos Z

Se pueden observar 3 etapas en la figura Kx/Kx15 para Z=0:

n. etapa	Rango de n	Error relativo ϵ
1	$n < 3$	$\epsilon > 8\%$
2	$3 < n < 7$	$\epsilon > 2\%$
3	$n > 7$	$\epsilon < 1\%$

Tabla 3: Errores relativos en función de n

Para valores bajos de n ($n < 3$) hay divergencia;

Para valores intermedios de n ($3 < n < 7$) empieza la convergencia;

Para valores altos de n ($n \geq 7$) mejora la precisión.

1) Al aumentar n (número de términos en la serie) aumenta el grado de la ecuación característica, y por lo tanto el número de operaciones, el tiempo de ejecución y el uso de memoria. Nos quedamos con la raíz que sea real, positiva y de menor valor absoluto. Luego se rechazan (n-1) raíces de la ecuación característica pero que hay que calcular.

2) Al mantener $n = \text{cte}$ (con $n > 3$) se observa que Kx/Kx_{15} se acerca a 1 más rápido cuando Z aumenta. Luego para valores altos de Z se podría reducir el valor de n.

3) El valor de $Kx_{n=7}$ tiene un error relativo $\epsilon = 2\%$ en exceso, tomando como referencia el valor de $Kx_{n=15}$. $Kx_{n=7} = 1.02 * Kx_{n=15}$ (ver Tabla 2 para $n=7$ y $Z=0$, pag. 35.)

Ahora solo queda comparar el tiempo de cálculo de $Kx_{n=7}$ y $Kx_{n=15}$.

Tiempo de cálculo Kx con $n=7$: $T_{Kx_{n=7}} = 0,613 \text{ seg}$; (ver Anexo B pag.109)

Tiempo de cálculo Kx con $n=15$: $T_{Kx_{n=15}} = 2.552 \text{ seg}$; (ver Anexo B pag.109)

$$\varphi = \frac{\text{Tiempo de cálculo Kx con } n = 15}{\text{Tiempo de cálculo Kx con } n = 7} = \frac{T_{Kx_{n=15}}}{T_{Kx_{n=7}}} = \frac{2.552 \text{ seg}}{0,613 \text{ seg}} = 4.1631$$

Aumentando el tiempo de cálculo mas de 4 veces solo se mejora un 2%.

Luego con $n=7$ se tiene precisión suficiente y bajo costo de cálculo.

Se coloca una tabla de resumen de las principales diferencias y despues se grafican los resultados.

Costo de cálculo		
n	7	15
matriz	7 * 7	15*15
Grado de laEc. caracterisitca	7	15
Numero de soluciones	7	15
Tiempo de ejecucion	0,613 seg	2.552 seg
Kx para a=5; b=3; Z=0; Ky0=1; Ks0=3	1,4569 ($\epsilon=2\%$ en exceso)	1,4336
	<p>Figura 16 Carga Actuante $KX_{n=7}$</p>	<p>Figura 17 Carga Actuante $KX_{n=15}$</p>

Tabla 4: Precisión-Costo de Calculo con $n=7$ y $n=15$

3.2.2 Resolución de algunos problemas:

1) Calculo previo de los valores máximos:

La ecuación característica puede tener varios tipos de resultados: números reales y complejos, que pueden ser positivos o negativos. Para encontrar soluciones que tengan significado físico, los valores deben ser reales, positivos, inferiores a los valores máximos (que ocurren cuando alguno de los otros valores es cero) y deben ser el de menor valor absoluto.

2) Orden de operaciones:

Por ejemplo para $n=2$ tenemos que:

$\text{size}(\text{MmnX}) = [2,2]$ (significa que MmnX es una matriz de dimensión 2×2)

$\text{size}(\text{AX}) = [2,2]$ (significa que AX es una matriz de dimensión 2×2)

El elemento AX_{11} , que se calcula como $AX(1,1)$ necesita a $MmnX(1,3)$ que no está definido. Para evitar esto se evalúan desde el comienzo Lz , β , $MmnX$ para $n=K_{max}$ ($K_{max}=7$ que surge de la relación precisión-costo de cálculo) y se usan los valores según vayan siendo necesarios.

3) Orden de soluciones de los K_x , K_y y K_s :

Como la ecuación característica es de grado 7, tiene 7 soluciones. El programa no ordena en forma automática las soluciones de menor a mayor, por lo tanto se tuvo que crear una función que ordenara las soluciones de menor a mayor.

4) Las figuras se superponen:

El programa usa por defecto la menor cantidad de ventanas y empieza a “sobrescribir” en una ventana. Para ello se tuvo que crear una función que permita graficar en una determinada ventana indicando que es lo que se va a graficar y cuál es la ventana a utilizar.

5) También existen otros problemas que se presentaron en los Resultados por eso se van a comentar en el capítulo Resultados; pero hacemos un breve anticipo para mencionar que estos problemas hicieron modificaciones en el programa y que provocaron decisiones que se justificaran más adelante:

- Efecto Rebote
- Discontinuidad en la proximidad de $K_x = 0$ para distintos valores de Z .
- La discretización de las curvas 3D
- Definición y cálculo del Margen de Seguridad MS y del Factor de Aprovechamiento Vol_K .
- Estudio sobre la variación del MS y Vol_K en función de los parámetros k_2 y k_3 .
- Dimensionamiento de t (espesor de la lámina) en función de E , μ , σ_{adm} , τ_{adm} (propiedades elásticas del material).

Resultados Numéricos

En el capítulo 3 vimos la relación precisión-costo de cálculo y sacamos como conclusión que el valor que da una precisión elevada a bajo costo de cálculo era $n=7$, donde n es la cantidad de términos de la serie de senos para la solución de la Ecuación de Donnell, pero no se dijo nada acerca del valor calculado. En el punto 4.1 Validación, vamos a ir comparando las soluciones conocidas (NACA y Niu) y las soluciones obtenidas por el método de este trabajo para validar la herramienta de cálculo. A manera de índice se colocan los resultados (agrupados por tipo) y el número de la página en la tabla siguiente:

4.1	Validación Numérica	38
	1) Comprensión Axial K_x tira infinitamente larga	38
	2) Comprensión Axial K_x para placa curva	39
	3) Tensión Crítica Circunferencial K_y en cilindros	40
	4) Tensión Crítica de Corte K_s placas curvadas largas	41
	5) Tensión Crítica de Corte K_s paneles curvos anchos	43
	6) Tensión Crítica de Corte K_s dimensión circunferencial	45
	7) Tensión Crítica de Corte K_s dimensión axial	47
	8) Tensiones combinadas	49
4.2	Verificación Rápida	52
	1) Significado de las Curvas	52
	2) Condición de la lámina	53
	3) Corrección hasta obtener margen de seguridad de diseño	55
	4) Aplicación de Verificación Rápida	57
	4.1 Datos Conocidos	57
	4.2 Valores Relacionados	57
	4.3 a variable	58
	4.4 b variable	58
	4.5 $K_{x_{uso}}$	59
4.3	Diseño	60
	1) Estudio paramétrico global	61
	2) Estudio paramétrico local	69
	I) Efecto Rebote y su corrección	69
	II) Falta de continuidad en la proximidad a $K_x=0$	71
	III) Curvas de Nivel	73
	$K=cte$	73
	$Z=cte$	75
	IV) Interpolación	77
	3) Estudio paramétrico puntual	86

Tabla 5 Listas de Resultados

4.1 Validación Numérica

4.1.1 Compresión Axial en una tira infinitamente larga

En la figura 10 de la pág. 10/25 del NACA 874 se puede ver dos curvas:

- 1) La curva de Leggett $[u = 0, v = 0]$ y,
- 2) La curva del NACA 874 $[u = 0, v \neq 0]$

Tomando solo la curva del NACA 874 y haciendo la curva de este trabajo

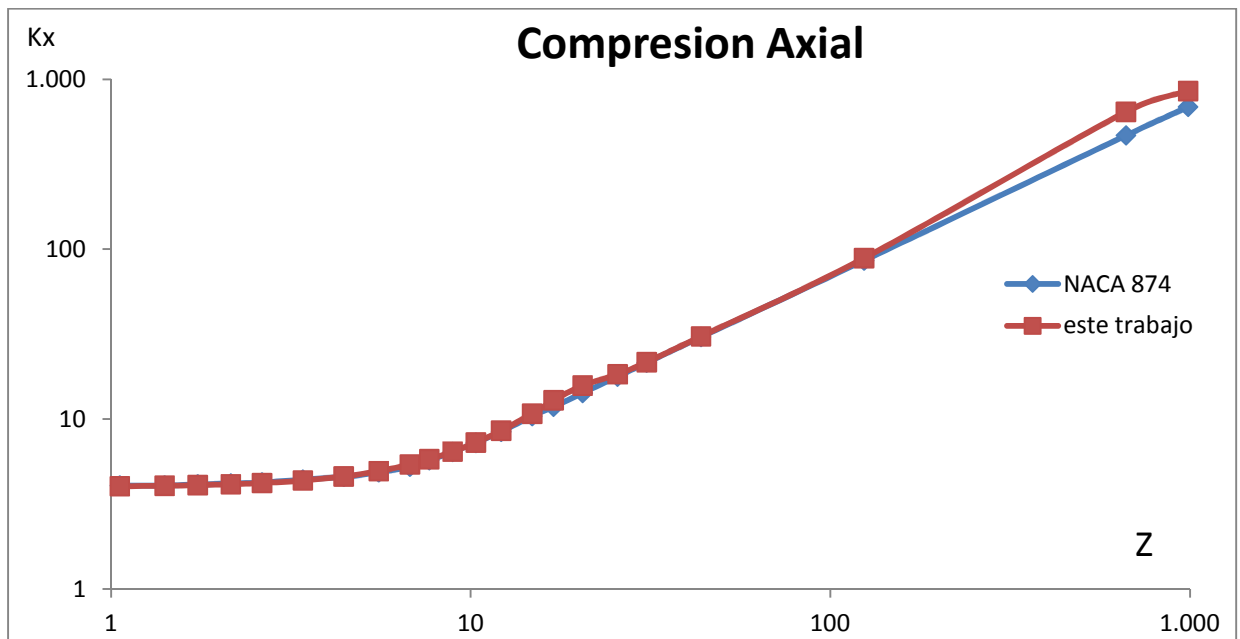


Figura 18 Compresión Axial NACA que corresponde con la fig. 10 de pág. 10/25 de NACA 874 que muestra la carga crítica de pandeo bajo compresión axial en una tira infinitamente larga en la dirección axial.

Para ver los valores con que se realizó estas figuras ver el Anexo.

Se puede ver:

- 1) El gráfico tiene los 2 ejes en escala logarítmica.
- 2) Existen pequeñas diferencias en Kx que crecen con los valores de Z .
- 3) Los valores de este trabajo son siempre mayores que los del NACA. ($Kx_{TESIS} > Kx_{NACA}$)
- 4) Los errores relativos son pequeños comparados con la gran dispersión de los valores obtenidos por ensayos.

Error Relativo máximo (positivo) = 1,04 % y

Error Relativo máximo (negativo) = -37,59 %

La herramienta de cálculo da resultados correctos para la carga crítica de pandeo bajo compresión axial en una tira infinitamente larga.

4.1.2 Compresión Axial para una placa curva

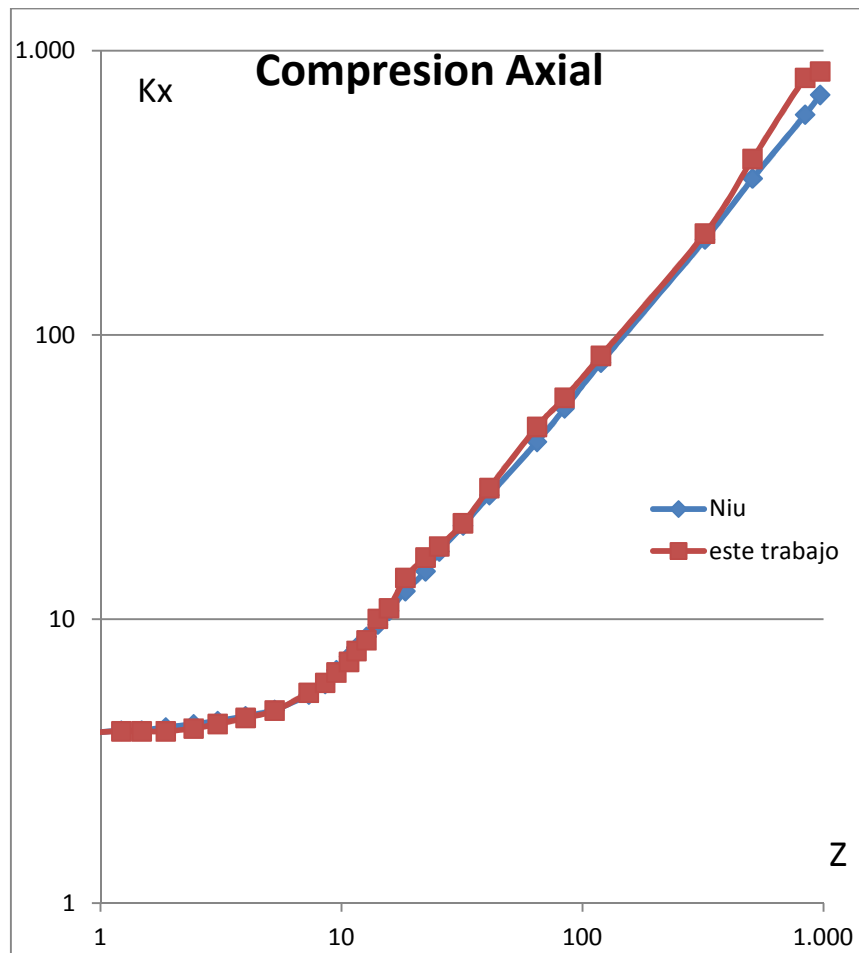


Figura 19 Compresión Axial Niu que corresponde con la Fig. 11.4.1 pag.480/810 hinged Theoretical del Niu que muestra la carga crítica de pandeo bajo compresión axial para una placa curva.

En la fig. 11.4.1 de la pág. 480/810 se ve las curvas teóricas (**Theoretical**) y recomendadas para el diseño (**recommended for desing**) agrupadas en: bordes simplemente apoyados (**hinged edges**) y bordes empotrados (**clamped edges**). Solo tomamos la curva teórica para bordes simplemente apoyados.

- 1) El grafico tiene los 2 ejes en escala logarítmica.
- 2) Existen pequeñas diferencias en Kx que crecen con los valores de Z .
- 3) Los valores de este trabajo son siempre mayores que los del Niu. ($Kx_{TESIS} > Kx_{Niu}$)
- 4) Los errores relativos son pequeños comparados con la gran dispersion de los valores obtenidos por ensayos.

Error Relativo máximo (positivo) = 34,78 % y

Error Relativo máximo (negativo) = -4,22 %.

La herramienta de cálculo da resultados correctos para la carga crítica de pandeo bajo compresión axial para una placa curva.

4.1.3 Tensión Crítica Circunferencial en Cilindros

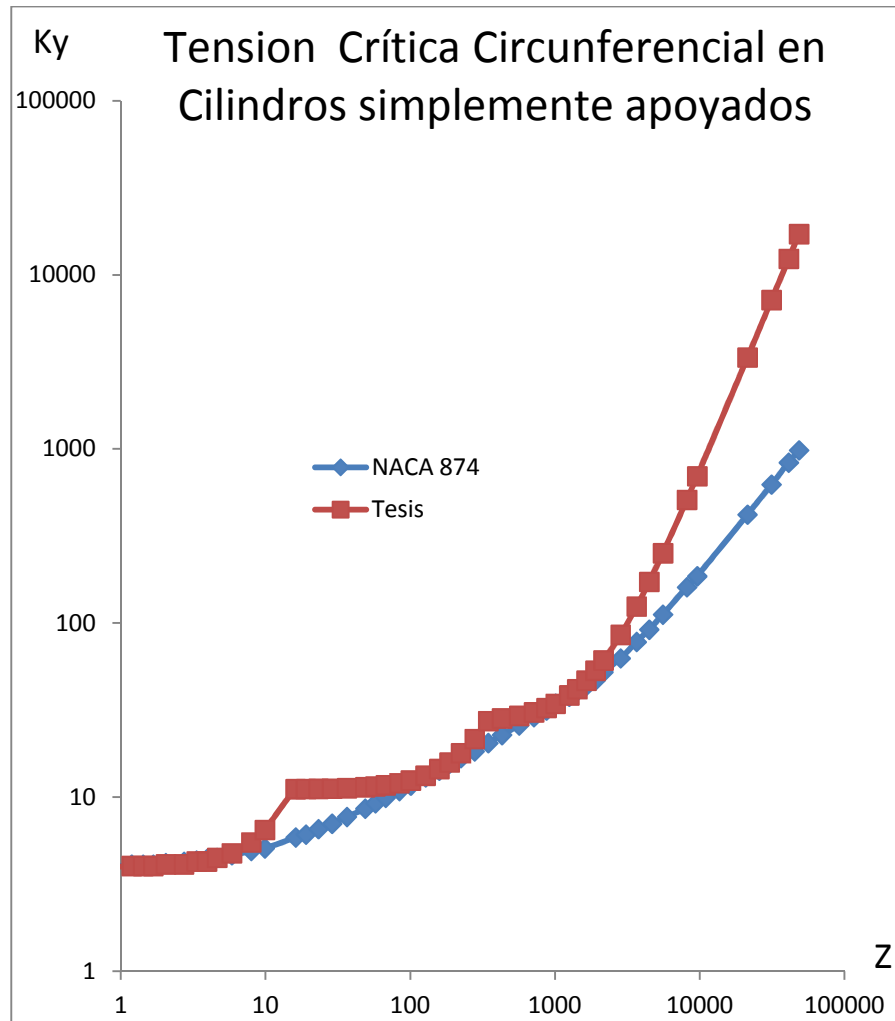


Figura 20 Tensión Circunferencial Corresponde con la Fig 1 NACA 874 pág. 3/25 cte=20. El coeficiente de tensión Crítica circunferencial para cilindros con los bordes simplemente apoyados en función de parámetro geométrico Z.

- 1) El gráfico tiene los 2 ejes en escala logarítmica.
- 2) Existen zonas con pequeñas diferencias (parte envolvente) y otras zonas con grandes diferencias (parte escalonada).
- 3) Los valores de este trabajo son siempre mayores que los del NACA. ($K_{y_{TESIS}} > K_{y_{NACA}}$)

La herramienta de calculo da resultados correctos para el cálculo del coeficiente de tensión crítica circunferencial para cilindros con los bordes simplemente apoyados.

4.1.4 Tensión Crítica de Corte para placas curvadas largas

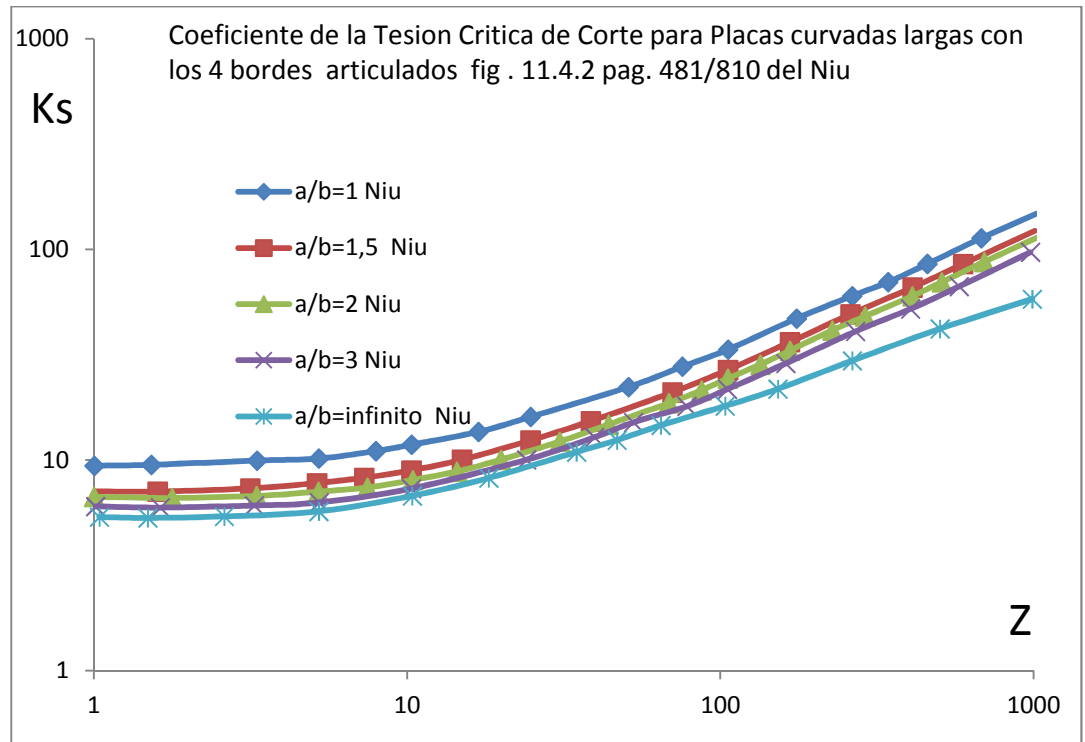


Figura 21 Tension Crítica de Corte para placas curvadas largas Niu

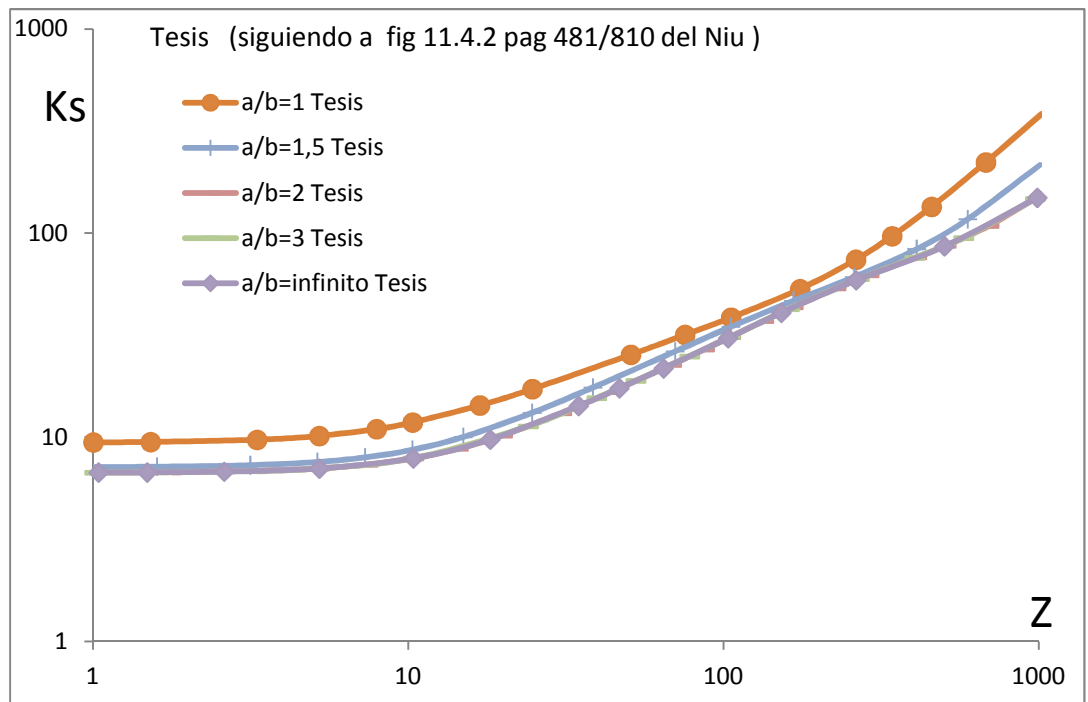
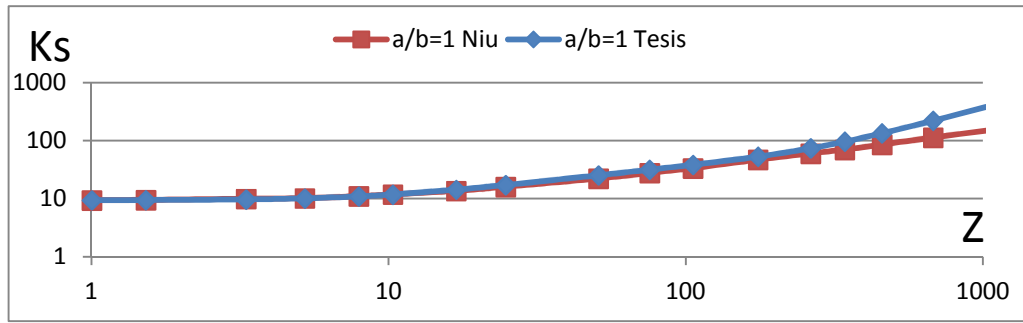
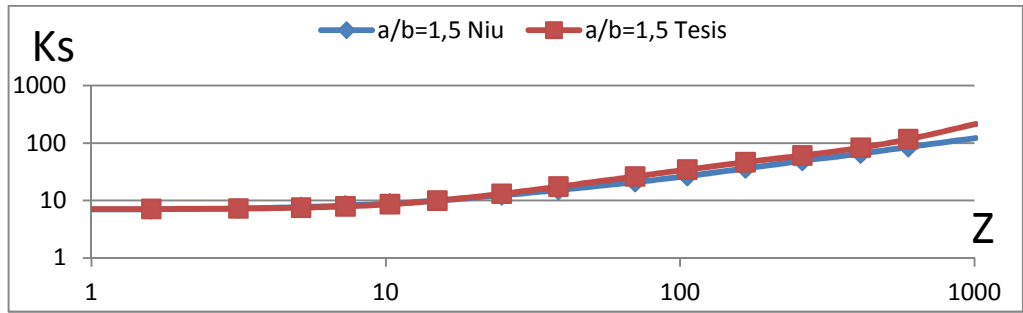


Figura 22 Tension Crítica de Corte para placas curvadas largas Tesis

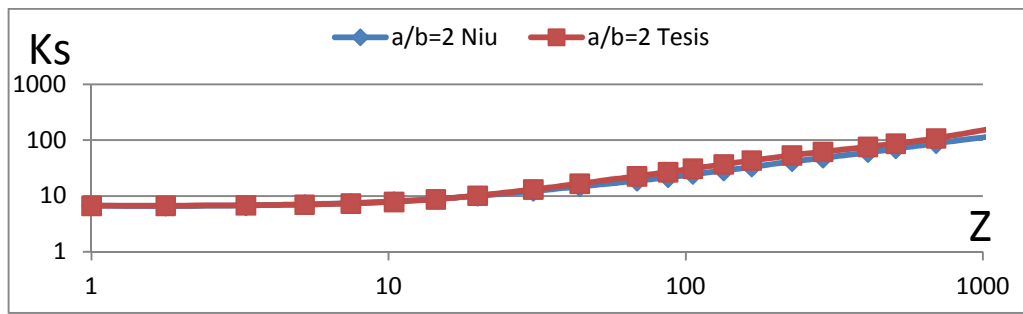
La referencia muestra todas las curvas juntas, por eso se graficó todas las curvas juntas. Para un análisis, se compara una a una las curvas NACA y las curvas Tesis, con la para una relación a/b determinada.



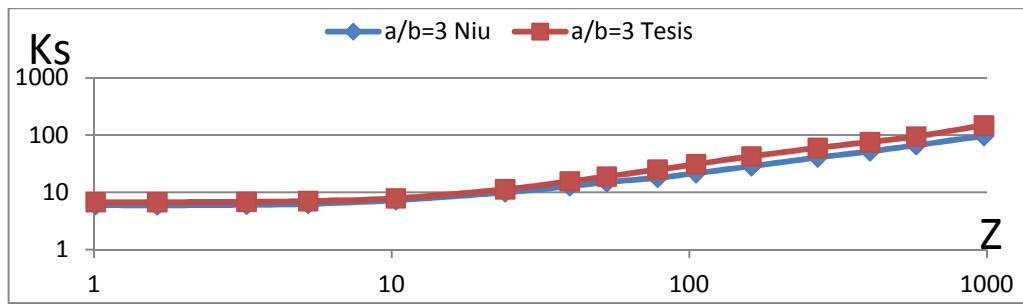
a



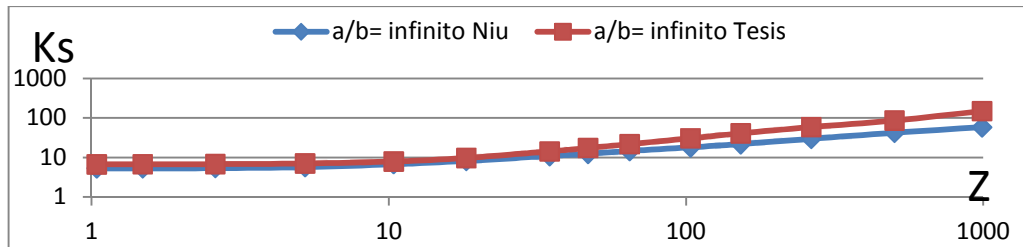
b



c



d



e

Figura 23 comparacion Niu y Tesis en Tension Crítica de Corte para Placas curvadas largas con:
a) $a/b=1$; b) $a/b=1.5$; c) $a/b=2$; d) $a/b=3$; e) $a/b=\infty$;

- 1) Cada uno de los graficos tiene los 2 ejes en escala logaritmica.
- 2) Existen zonas con pequeñas diferencias en K_s
- 3) Los valores de este trabajo son siempre proximos a los del Niu. ($K_{s_{TESIS}} \cong K_{s_{Niu}}$)

La herramienta de calculo da resultados correctos para el cálculo del coeficiente de Tensión Crítica de Corte para placas curvadas largas con los bordes simplemente apoyados.

4.1.5 Tensión Crítica de Corte para paneles curvos anchos

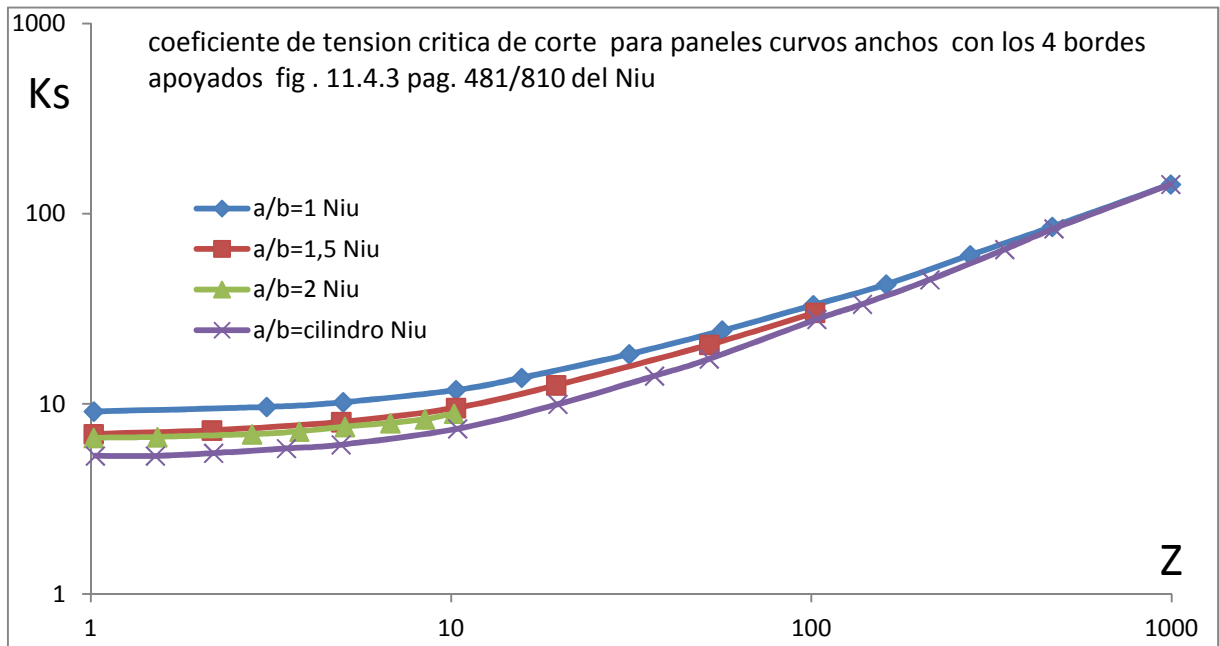


Figura 24 Tesion Crítica de Corte para paneles curvos anchos Niu

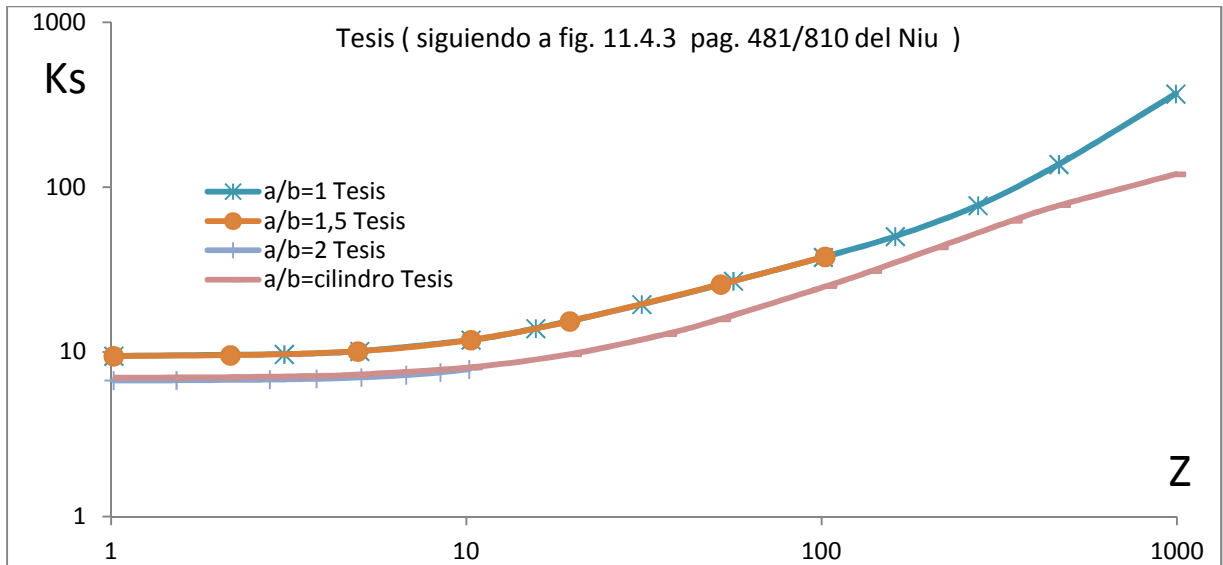


Figura 25 Tesion Crítica de Corte para paneles curvos anchos Tesis

La referencia muestra todas las curvas juntas, por eso se graficó todas las curvas juntas. Para un análisis, se compara una a una las curvas Niu y las curvas Tesis, con la para una relación a/b determinada.

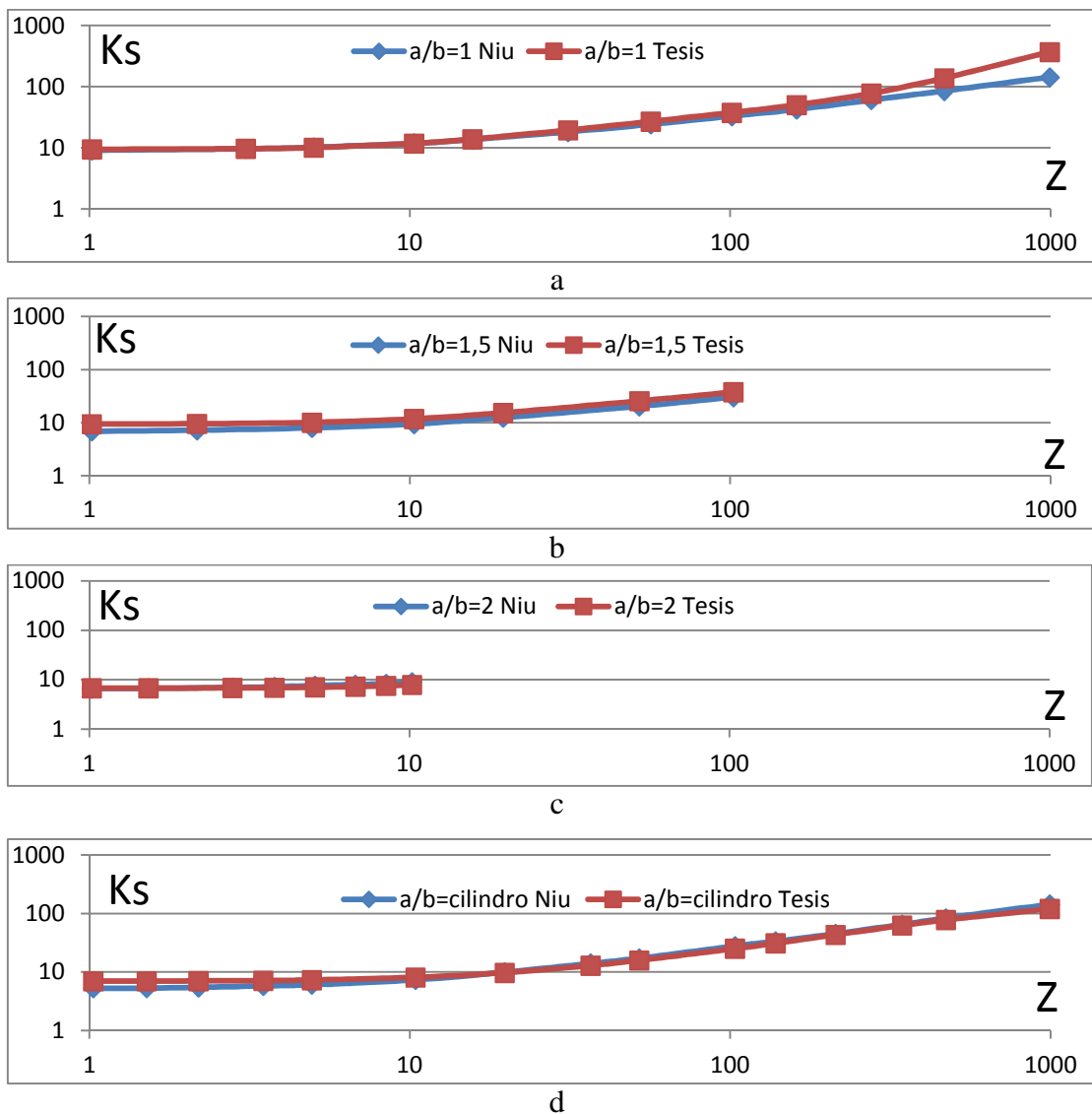


Figura 26 comparacion Niu y Tesis en Tesion Crítica de Corte para paneles curvos anchos con: a) $a/b=1$; b) $a/b=1.5$; c) $a/b=2$; d) $a/b=\text{cilindro}$;

- 1) El grafico tiene los 2 ejes en escala logaritmica.
- 2) Existen zonas con pequeñas diferencias en K_s
- 3) Los valores de este trabajo son siempre proximos a los del Niu. ($K_{s\text{TESIS}} \cong K_{s\text{Niu}}$)

La herramienta de calculo da resultados correctos para el cálculo del coeficiente de Tesión Crítica de Corte para paneles curvos anchos con los bordes simplemente apoyados.

4.1.6 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial

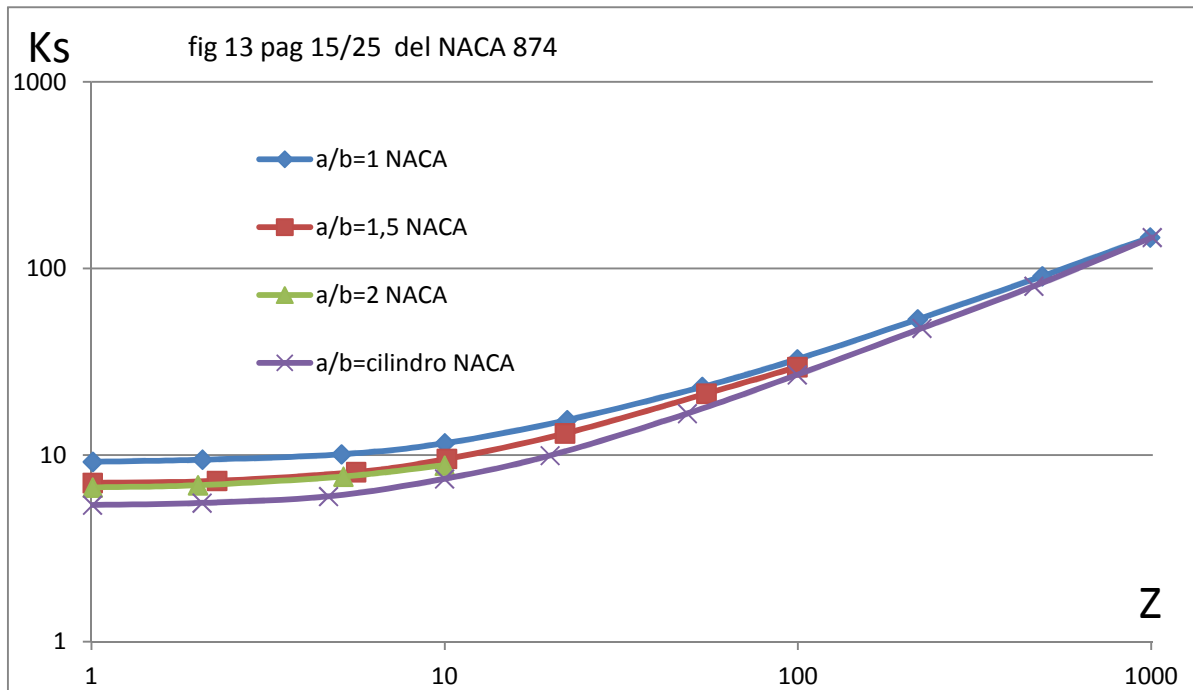


Figura 27 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial NACA

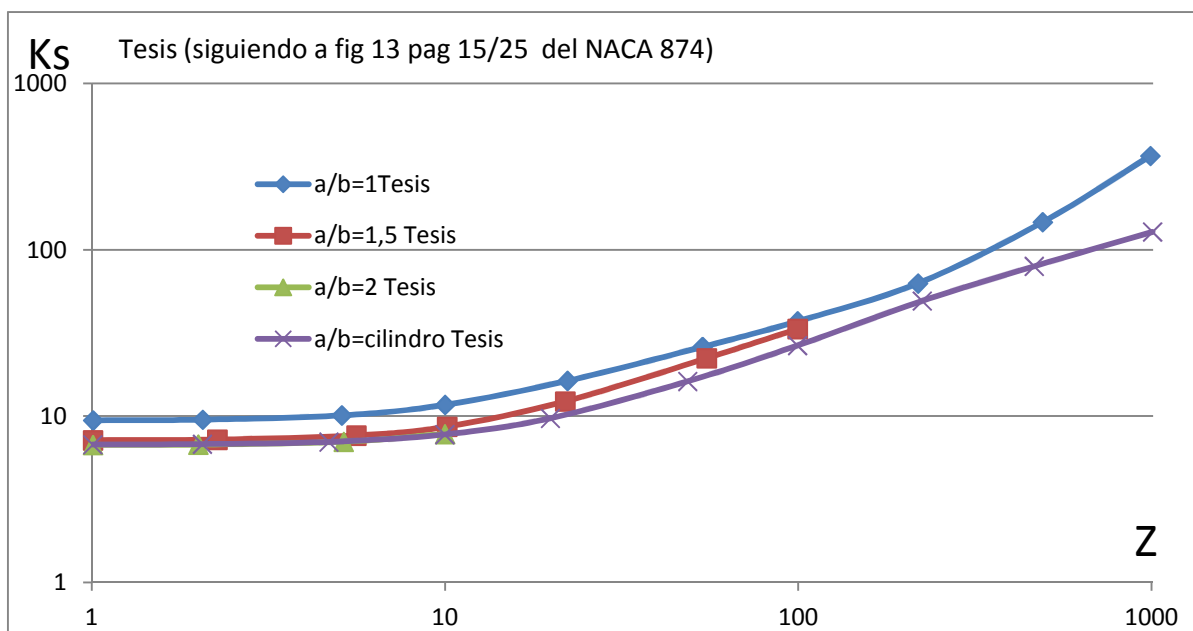


Figura 28 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial Tesis

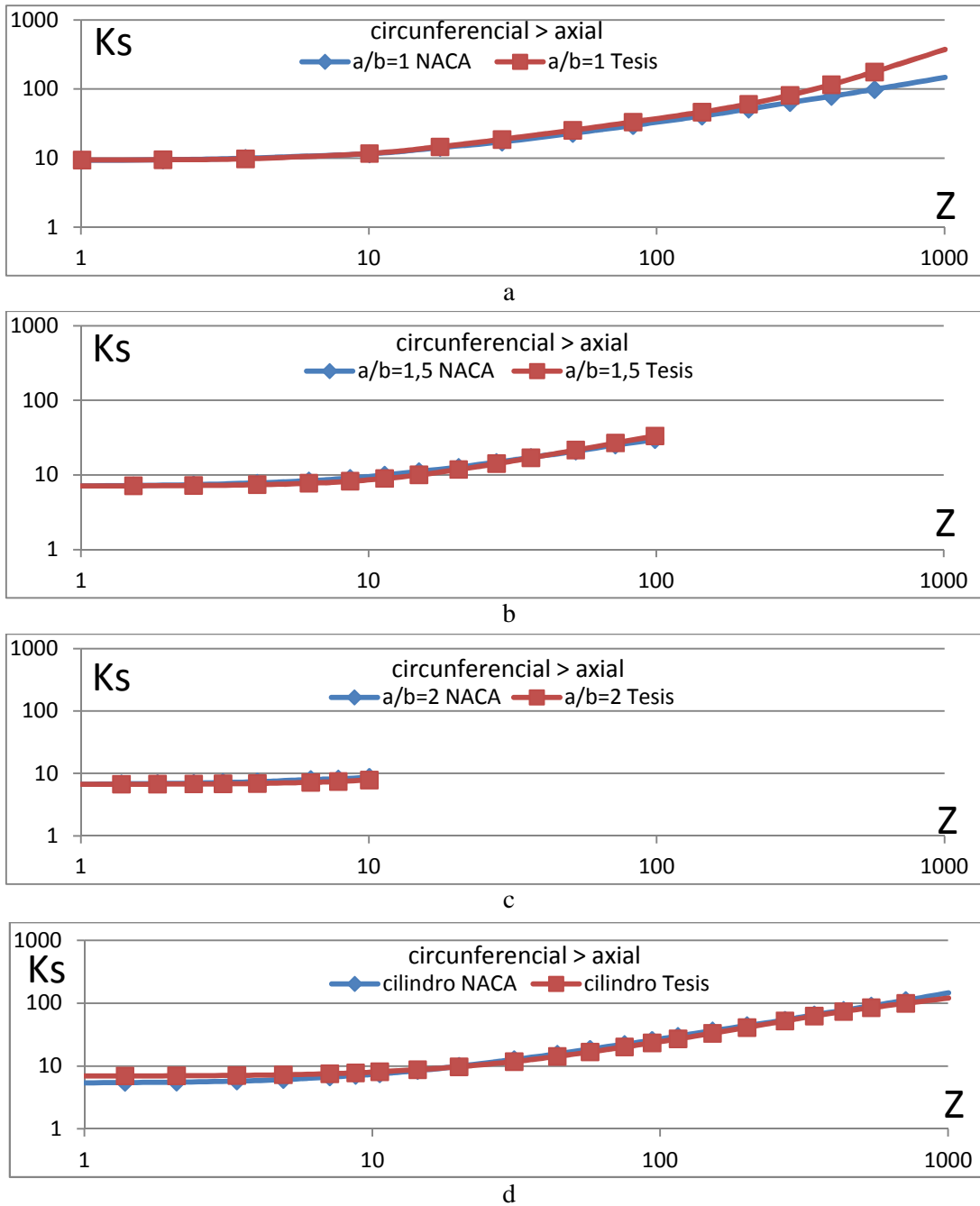


Figura 29 comparacion NACA y Tesis en Tension Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial con a) $a/b=1$; b) $a/b=1,5$; c) $a/b=2$; d) $a/b=\text{cilindro}$;

La herramienta de cálculo da resultados correctos para el cálculo de la Tensión crítica de corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial.

4.1.7 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circunferencial

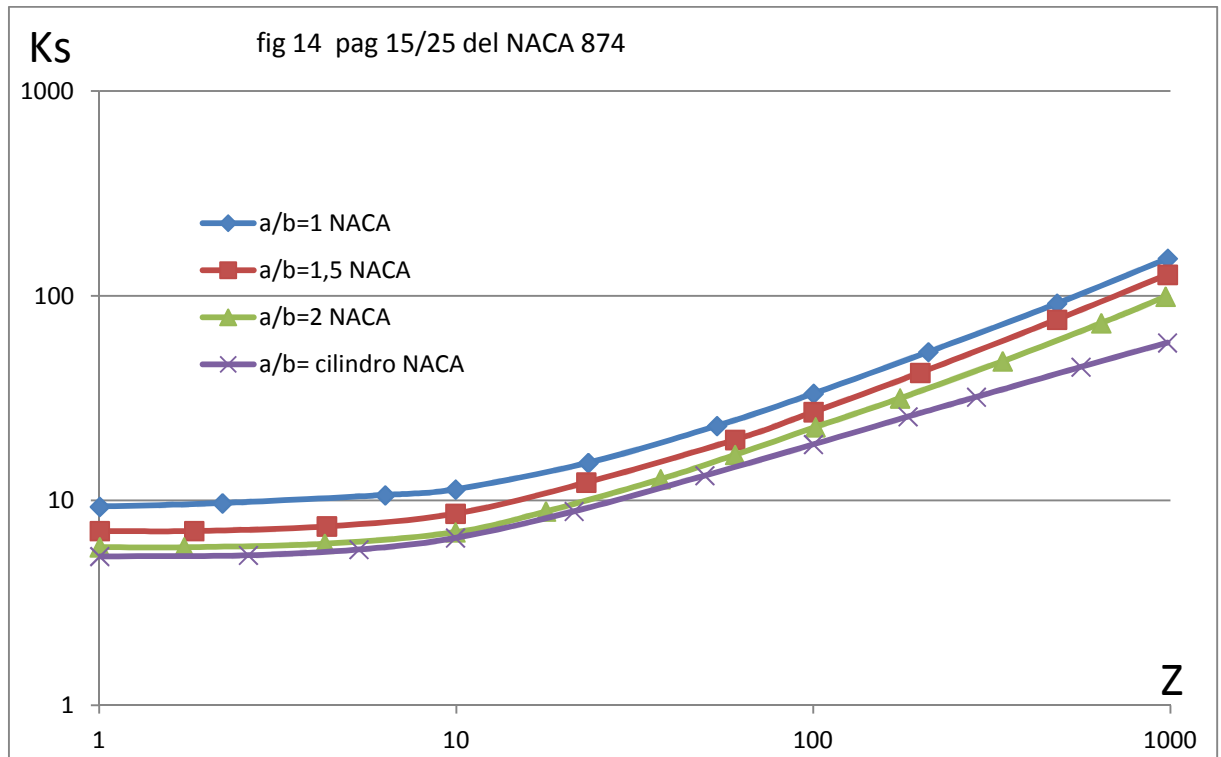


Figura 30 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circunferencial NACA

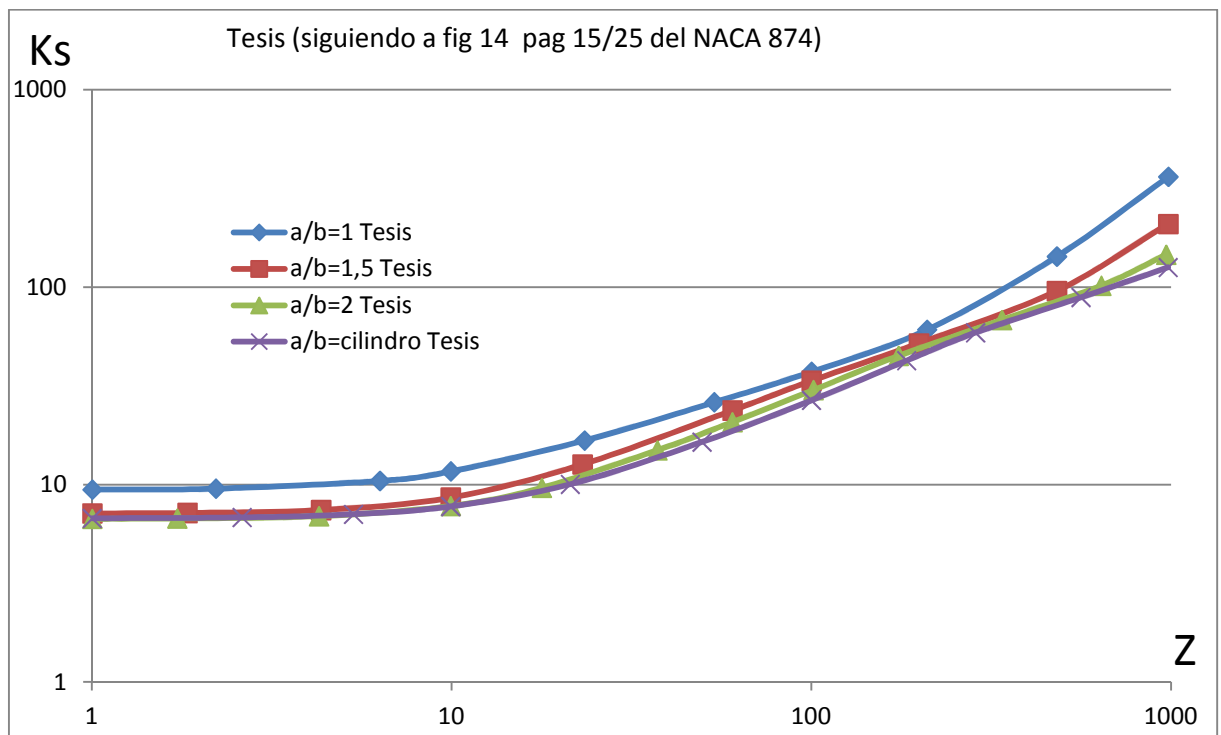


Figura 31 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circunferencial Tesis

La referencia muestra todas las curvas juntas, por eso se graficó todas las curvas juntas. Para un análisis, se compara una a una las curvas NACA y las curvas Tesis, con la para una relación a/b determinada.

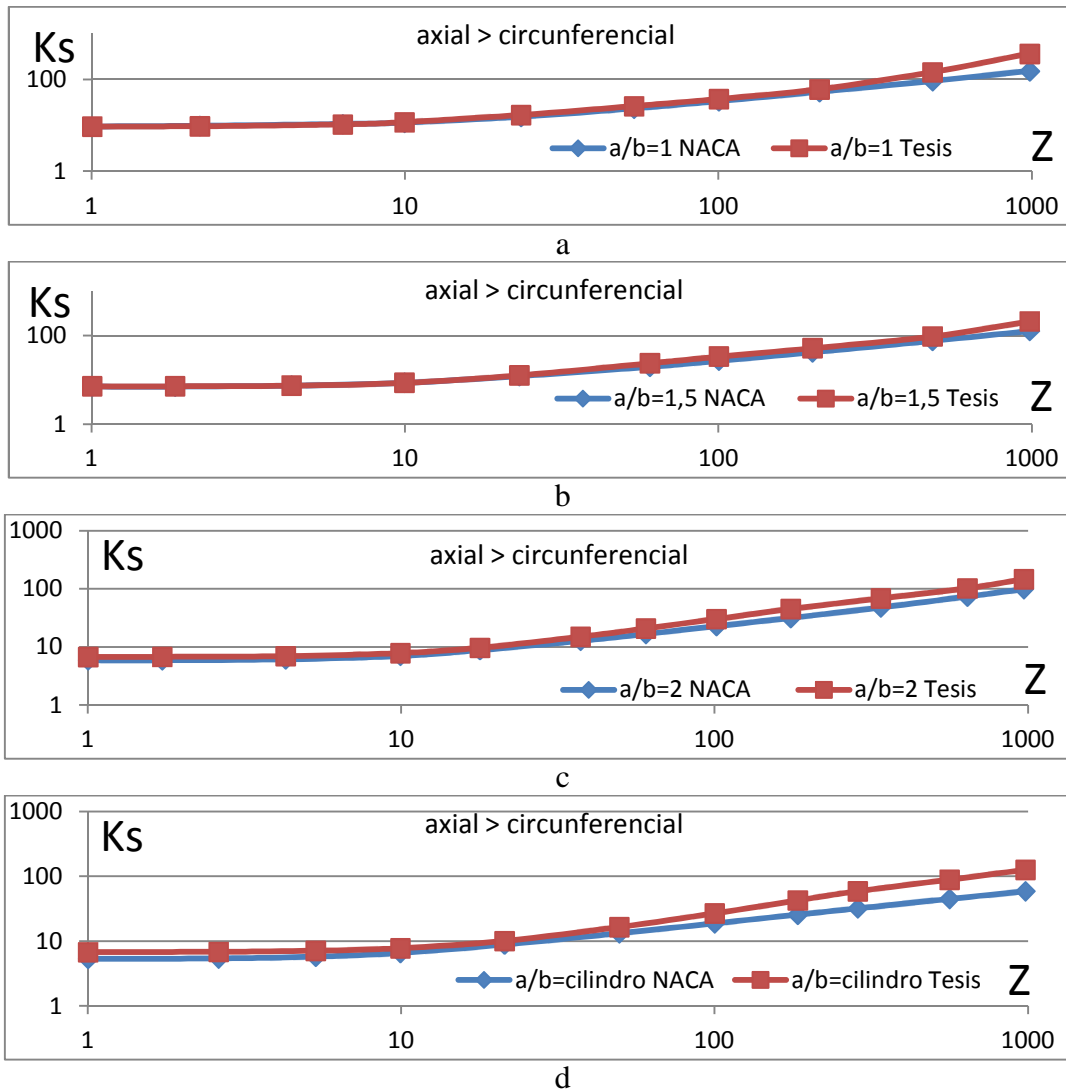


Figura 32 comparación NACA y Tesis en Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circular con a) $a/b=1$; b) $a/b=1.5$; c) $a/b=2$; d) $a/b=cilindro$;

La herramienta de cálculo da resultados correctos para el cálculo de la Tensión crítica de corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circular.

4.1.8 Tensiones Combinadas con $K_y=0$

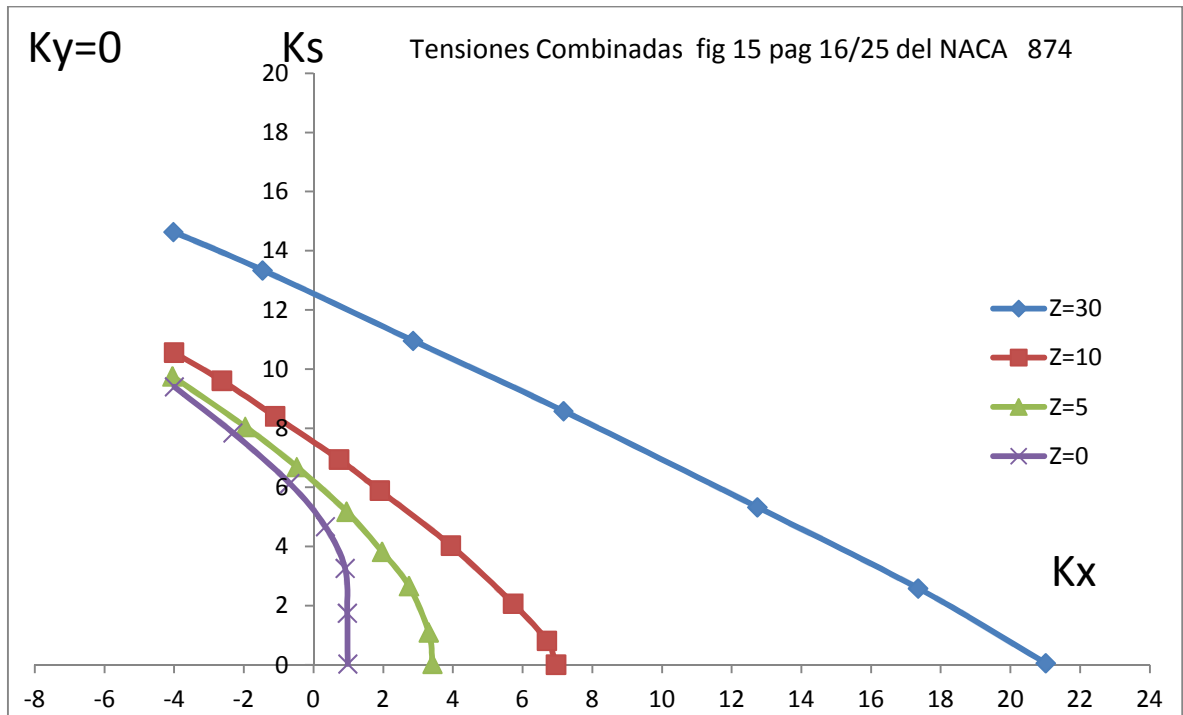


Figura 33 Tensiones combinadas con $K_y=0$ NACA

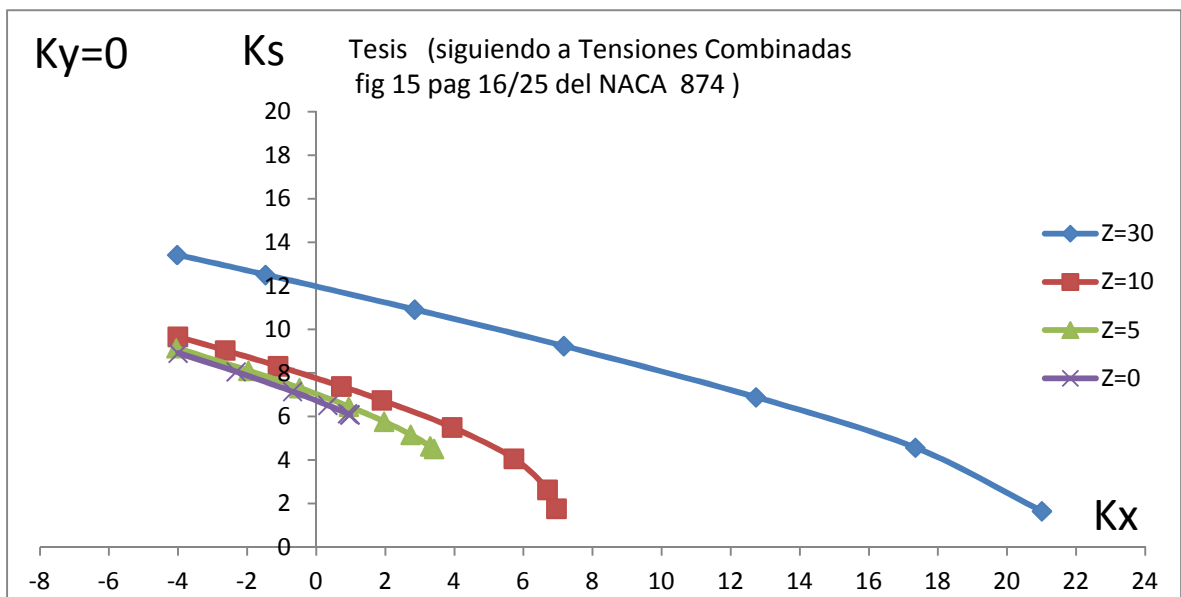


Figura 34 Tensiones combinadas con $K_y=0$ Tesis

La referencia muestra todas las curvas juntas, por eso se graficó todas las curvas juntas. Para un análisis, se compara una a una las curvas NACA y las curvas Tesis, con la para un valor Z determinado.

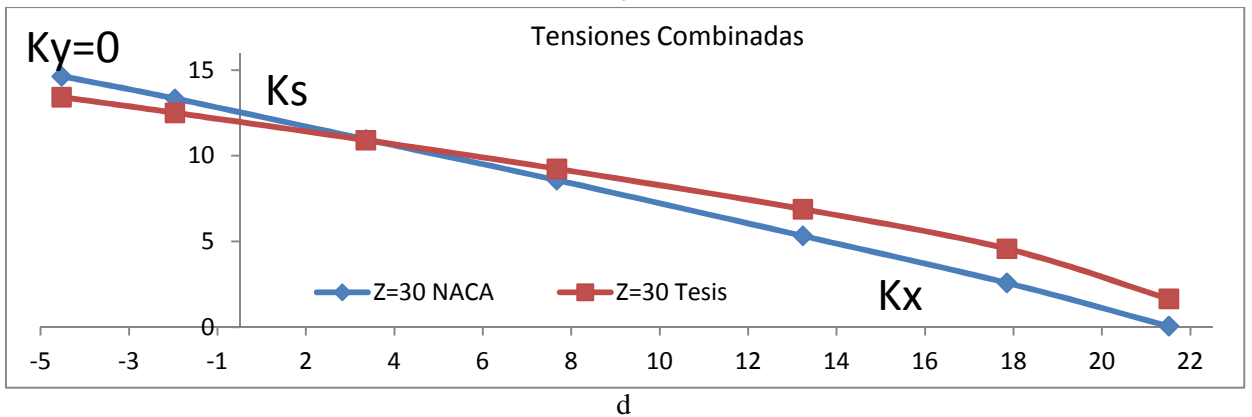
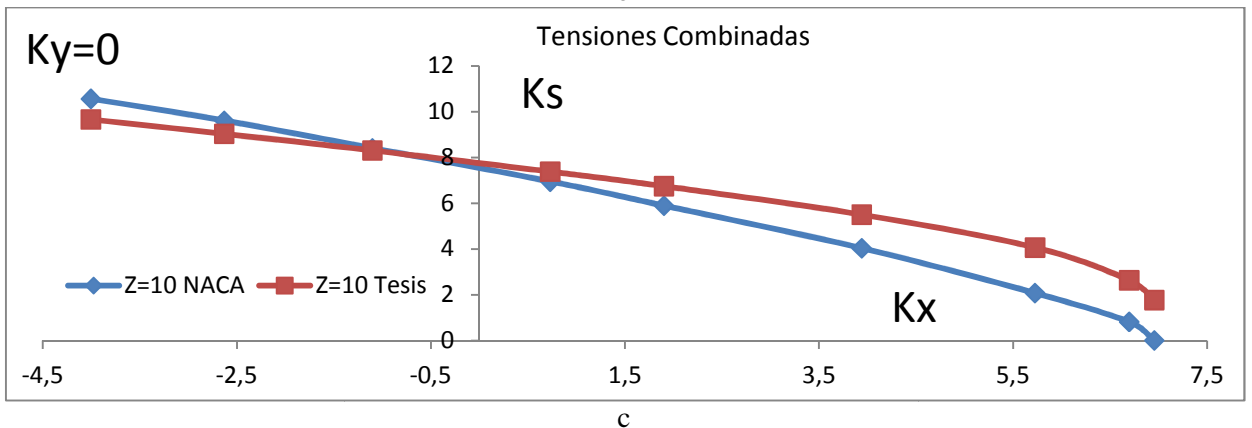
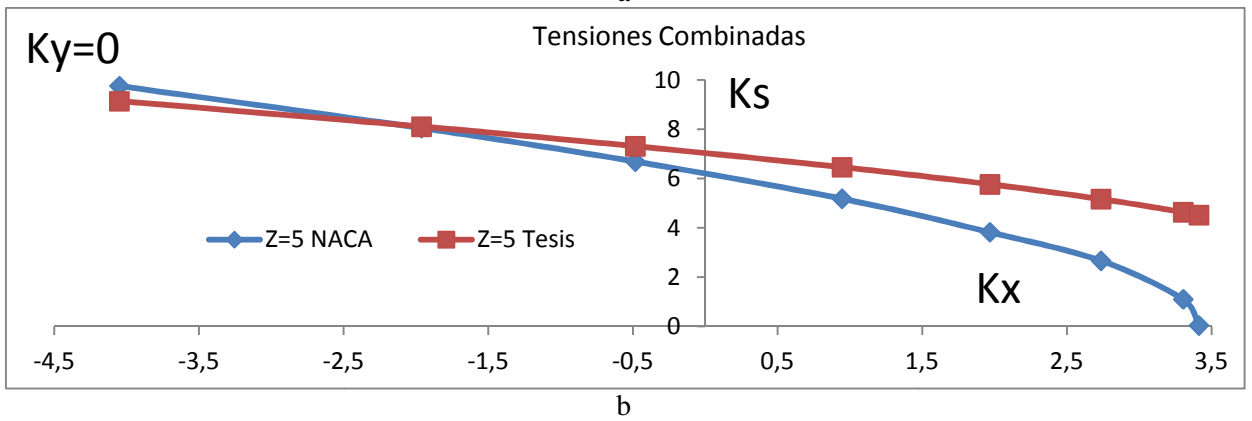
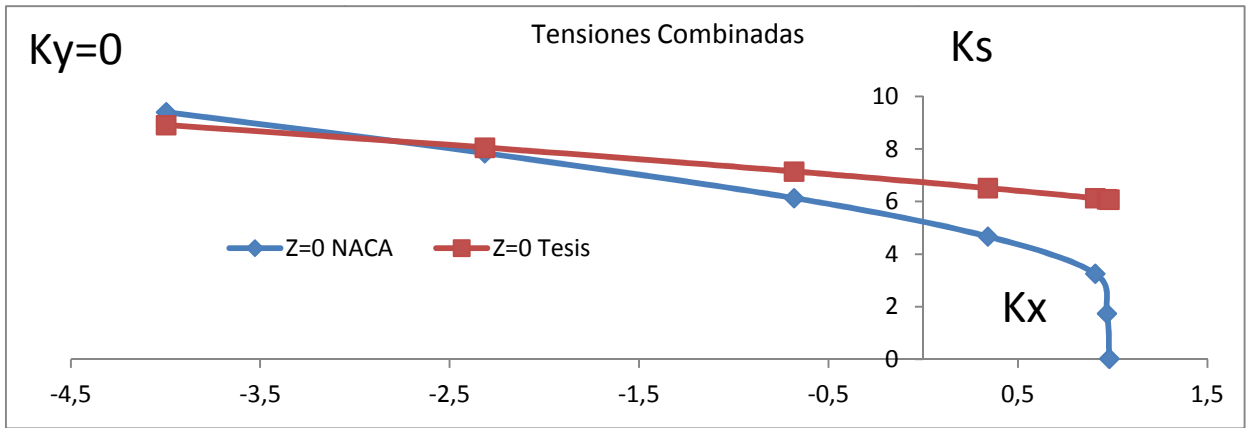


Figura 35 comparacion NACA y Tesis en Tensiones combinadas a) Z=0; b) Z=5; c) Z=10; d) Z=30;

1) $Z = 0, 0 \leq K_s \leq 10, -4,5 \leq K_x \leq 1,5$ con la condición $K_y=0$.

Para el comienzo del intervalo de K_x , la curva K_{SNACA} tiene valores superiores. A la mitad del intervalo la situación se invierte. Y al final del intervalo, vemos una gran diferencia: Los valores K_{SNACA} descienden gradualmente hasta cero por una recta de gran pendiente, pero los valores de K_{STESIS} permanecen constantes. Aquí hay que tener en cuenta que hay 2 condiciones:

1. Con respecto a los valores adimensionales ($Z=0$ y $K_y=0$) que modifican sensiblemente la ecuación característica que surge de la ecuación de Donnell resuelta por el método de Galerkin.
2. La ecuación del report NACA fue resuelta con un n diferente (supongo $n=2$ o 3 porque el texto no lo indica), este trabajo lo hizo con $n=7$.

Recordemos que en el momento de realización del report NACA, tenían limitaciones de cálculo, por cálculo manual y porque no había ecuaciones para raíces de polinomios con grados mayores a 3.

2) $Z = 5, 0 \leq K_s \leq 10, -4,5 \leq K_x \leq 3,5$ con la condición $K_y=0$

Para el comienzo del intervalo de K_x , la curva K_{SNACA} tiene valores superiores. A la mitad del intervalo la situación se invierte. Y al final del intervalo vemos que Los valores K_{SNACA} y K_{STESIS} descienden mas gradualmente que en el caso anterior para $Z=0$.

3) $Z = 10, 0 \leq K_s \leq 12, -4,5 \leq K_x \leq 7,5$ con la condición $K_y=0$

Al igual que en la figura anterior pero con la pequeña diferencia que en el intervalo final la diferencia entre las curvas parece ser constante.

4) $Z = 30, 0 \leq K_s \leq 16, -5 \leq K_x \leq 22$ con la condición $K_y=0$.

Al igual que en la figura anterior pero con la pequeña diferencia que en el intervalo final la diferencia entre las curvas parece ser constante y un poco menor.

La herramienta de cálculo da resultados correctos para el cálculo de la Tensiones combinadas con $K_y=0$ cuando se relación K_x y K_s para distintos valores de Z .

En el punto 4.1 Validación, comparamos las soluciones conocidas (NACA y Niu) y las soluciones obtenidas por el método de este trabajo para validar la herramienta de cálculo y sacamos la conclusión que la herramienta de cálculo daba muy buenos resultados.

En el punto 4.2 Verificación Rápida, se muestra el funcionamiento de la herramienta de cálculo, determinando, en un primer paso si la estructura rompe ($MS=0\%$) o es segura ($MS>0\%$). Luego, como segundo paso se determina el estado donde ($MS=MSD$, en este caso, $MSD =10\%$) y en el tercer y último paso se determina el estado optimo (que cumple simultáneamente dos condiciones, 1) $MS=MSD$ y 2) $Vol_K = Vol_K]_{max}$). Calculando en cada paso los valores K_x , K_y , K_s , KVM , σ_X , σ_Y , τ , σ_{VM} , t (espesor), V (volumen) y P (peso). Para ello se necesita los valores de $a, b, r, t, E, \mu, \sigma_{adm}$ con las definiciones $Z=f(b,r,t, \mu)$ y $\sigma_{adm} = \frac{\sigma_f}{CS}$.

4.2 Verificación Rápida

Haciendo uso de la herramienta de cálculo, con los datos de la estructura (geometría [largo a , ancho b y parámetro geométrico Z] y los parámetros adimensionales de carga [K_x , K_y y K_s]) se obtiene la figura que muestra los estados de carga (límite inferior, carga actuante y límite superior) y un mensaje con la condición de la estructura (rompe o segura). Los parámetros usados en el cálculo de la Carca Crítica de Pandeo en Láminas con los 4 bordes simplemente apoyados se muestran en la siguiente figura:

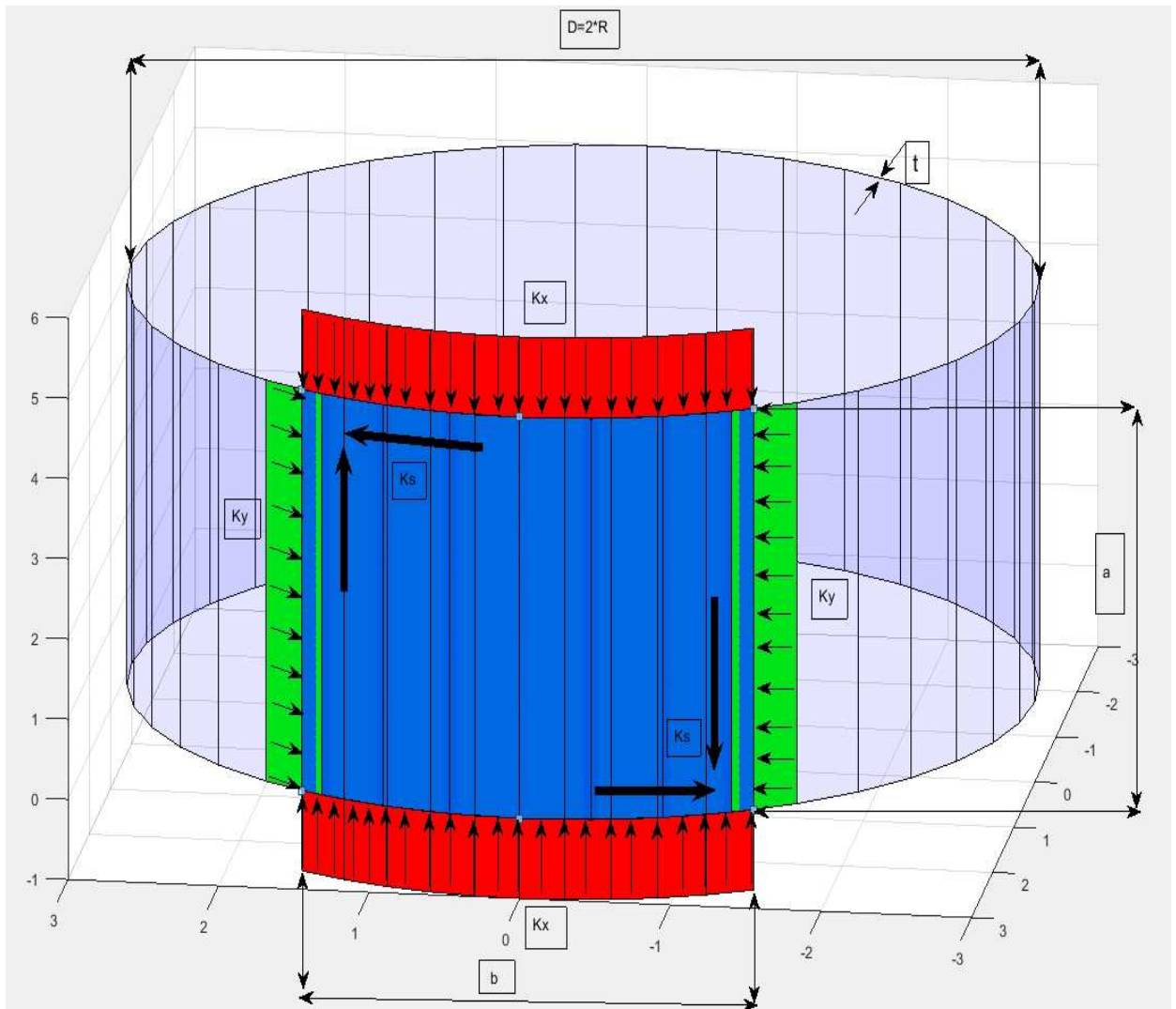


Figura 36 Lámina curva y parámetros que intervienen en el pandeo.

4.2.1 Significado de las curvas:

Color	Estado	Ecuación
Azul	Límite superior	$K_{S_{max}} = f(K_y) \big _{K_x=0}$
Verde	Carga actuante	$K_{S_{K_s0}} = f(K_y) \big _{K_x=K_{x0}}$
Roja	Límite inferior	$K_{S_{min}} = f(K_y) \big _{K_x=K_{xmax}}$

Tabla 6 Significado de las curvas

4.2.2 Condición de la lámina

Si la Curva verde está **Dentro** del intervalo azul-rojo y el Orden de los Puntos es el **correcto**, entonces la estructura es **Segura**. Si la Curva verde está **Fuera** del intervalo azul-rojo y el Orden de los Puntos es el **alterado**, entonces la estructura **Rompe**. $Kx_n = f(Ky, Ks)]_{MS=0\%}$

A continuación, se mostrarán 4 casos:

1 a 5 Kx 1,3
 b 3 Ky 1
 Z 0 Ks 3
 Condición Seguro

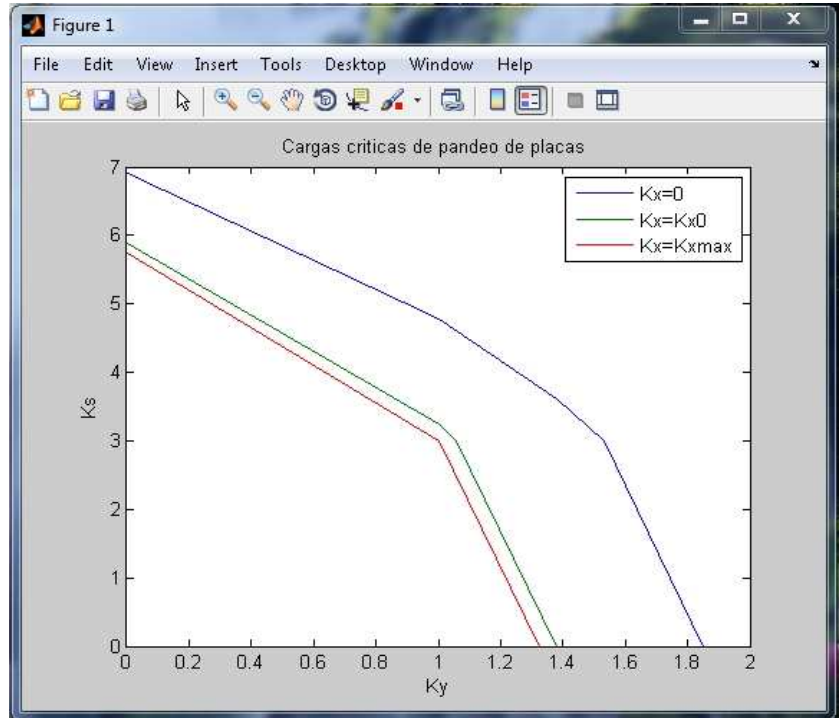
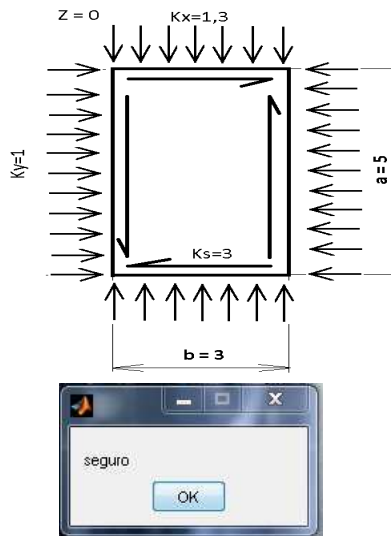


Figura 37 Seguro: P1= [1.3, 1, 3] tiene MS=2% porque $Kx=1.3 < Kx_n=1.4569$.

2 a 5 Kx 1,7
 b 3 Ky 1
 Z 0 Ks 3
 Condición Rompe

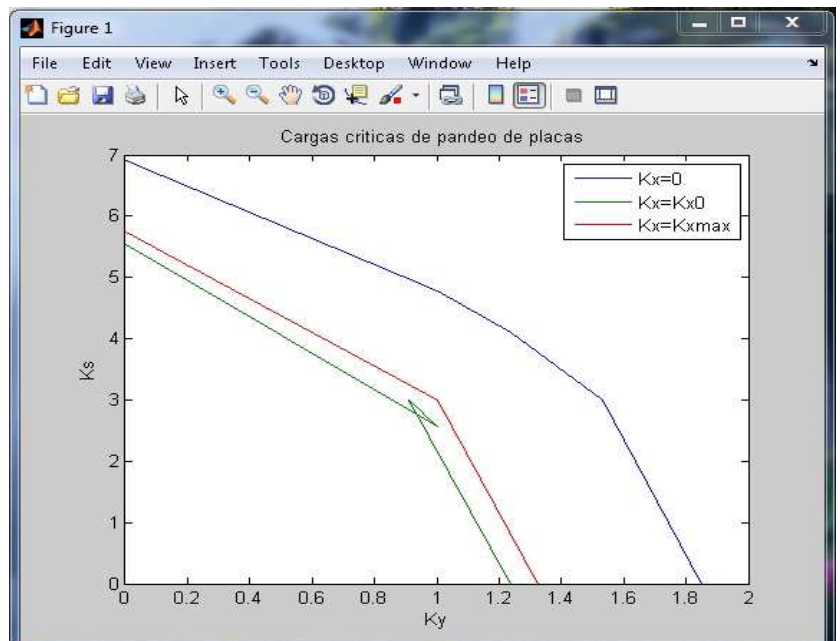
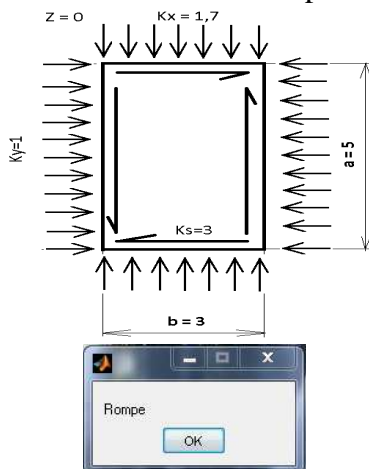


Figura 38 Rompe: P2= [1.7, 1, 3] tiene MS=0% porque $Kx=1.7 > Kx_n=1.4569$.

3 a 5 Kx 1,3
 b 3 Ky 1,7
 Z 0 Ks 3
 Condición Rompe

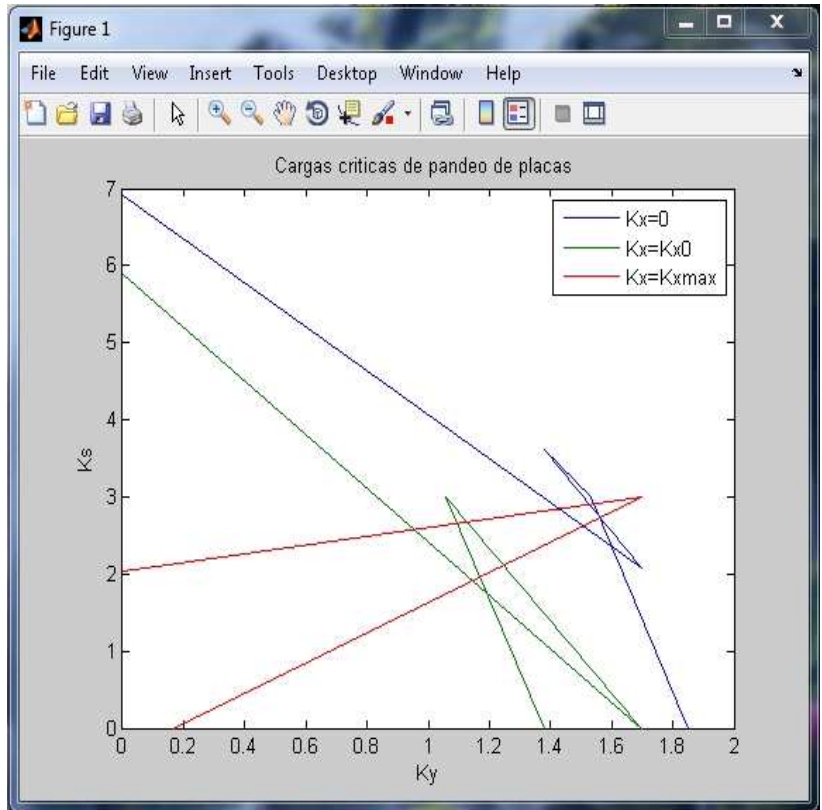
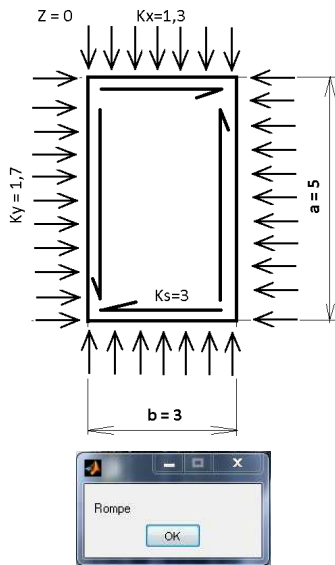


Figura 39 Rompe: P3= [1.3, 1.7, 3] tiene MS=0% porque $K_y=1.7 > K_{y_n}=1.0574$.

4 a 5 Kx 1,3
 b 3 Ky 1
 Z 0 Ks 3,5
 Condición Rompe

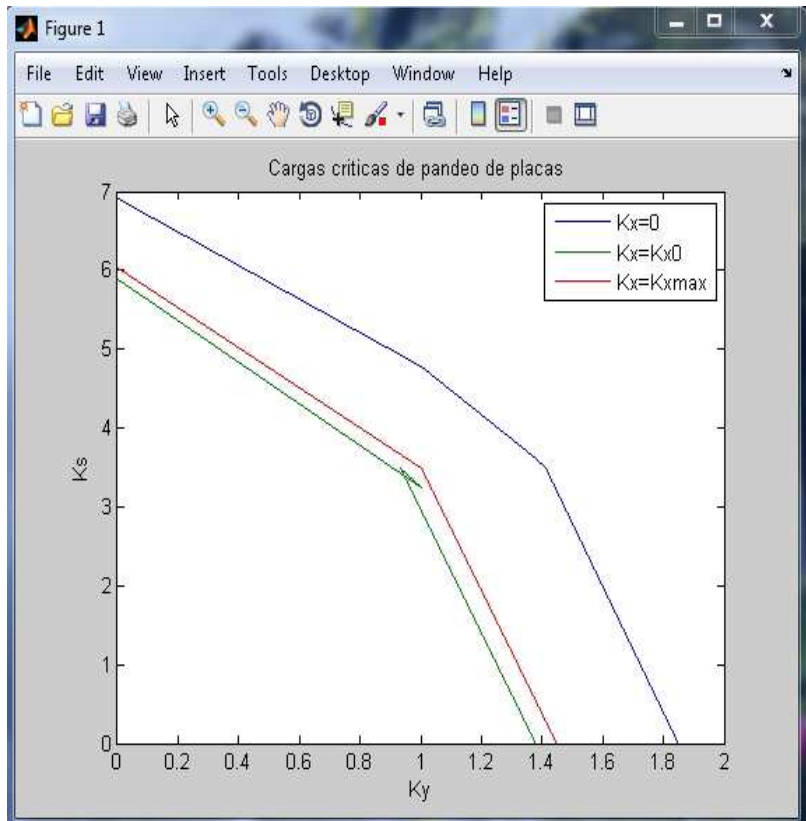
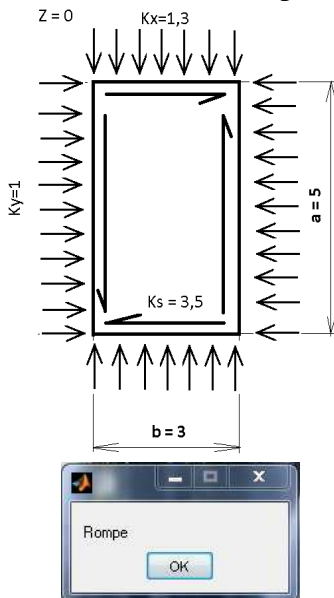


Figura 40 Rompe: P4= [1.3, 1, 3.5] tiene MS=0% porque $K_s=3.5 > K_{s_n}=3.2412$.

4.2.3. Corrección hasta obtener margen de seguridad de diseño

En la primera etapa se determina el estado de la estructura, “estructura segura” o “La estructura rompe” por medio de un mensaje. Si rompe, no tiene margen de seguridad; y si es seguro, el margen de seguridad es distinto al margen de seguridad de diseño. En una segunda etapa se obtiene un margen de seguridad igual al margen de seguridad de diseño, por medio de una corrección en la magnitud de los parámetros adimensionales de carga. (Aquí se supone que el parámetro adimensional a modificar es K_x .) El cálculo se repite pero esta vez $K_y^2=K_y*k_2$, $K_s^2=K_s*k_3$, y se calcula K_{x_n} . Luego calculando K_{x2} y $k_1=K_{x2}/K_{x_n}$ (reducción en el parámetro adimensional K_x hasta alcanzar el margen de seguridad de diseño MSD). Con $a=5$, $b=3$, $Z=0$, $k_2=0.9$, $k_3=0.9$ y $MSD=10\%$

estado	K_x	k_1	K_{x_n}	K_y	K_s	MS[%]
inicial	1.3	0.8923	1.4569	1	3	1.7997
corregido	1.1874	0.6223	1.9081	0.9	2.7	10
limite	0	0	1.9081	0.9	2.7	16.9396

Tabla 7 Ejemplo del cálculo del MS

Un $MSD=10\%$ produce una reducción de casi un 40% en el valor de K_{x_n} .

Hacer $K_x=0$, solo produce un margen de seguridad=16.9396%. Si fuera necesario un $MS=20\%$, se debe modificar k_2 y k_3 , calcular K_{x_n} por aproximaciones sucesivas.

Se toma como valor recomendado, $MS=10\%$, (pero puede modificarse). Tiene que tenerse presente que es una situación de la vida real y que se debe cumplir la norma para evitar lesiones y pérdidas de vidas humanas, y daños en máquinas y estructuras.

Ahora veamos un caso completo. Conocidos los valores iniciales de los parámetros de carga, se cálculo el MS y luego se hizo $MS=MSD$, para calcular los parámetros de carga. Se realizo la grafica en 2D y 3D. En la figura 39, la estructura no rompe pero el $MS \neq MSD$. (Ver la curva verde en el medio de las curvas azul y roja.) En la figura 41, se ve la corrección. Se hace $k_2=k_3=0.9$, y se calcula K_x . Se puede ver una mayor separación entre las curvas verdes y rojas, que corresponden a un $MS=MSD$ que es mayor a $MS=0\%$. En la figura 42, se grafica en 3D. Se muestra punto inicial en azul, (y como ayuda, la proyección del punto con los 3 ejes), luego el proceso de aumento del MS (puntos color rojo, que se mueven verticalmente hacia abajo, desde $MS=0\%$, 1%, 2%, 5%,10%) y finalmente el punto deseado en celeste ($MS=MSD$ y como ayuda, la proyección del punto con los 3 ejes). Se puede ver la reducción por los factores k_1 , k_2 y k_3 , que hacen posible que el $MS=MSD$. Si el MSD fuera un valor elevado y no se alcanzara con las reducciones k_2 y k_3 propuestas inicialmente, se debe disminuir un poco más los valores de k_2 y k_3 y repetir el cálculo. Generalmente un $MSD=10\%$ se puede obtener con $k_2=k_3=0.9$. Pero si se quiere un margen de seguridad mayor (por ejemplo del 30%) debe reducirse los valores de k_2 , k_3 a $k_2=0.6$ y $k_3=0.6$, de manera tentativa y recalculer. No hay un programa que calcule la reducción de k_2 y k_3 que permitan un $MS=MSD$, pero con unos pocos ciclos se consigue el resultado.

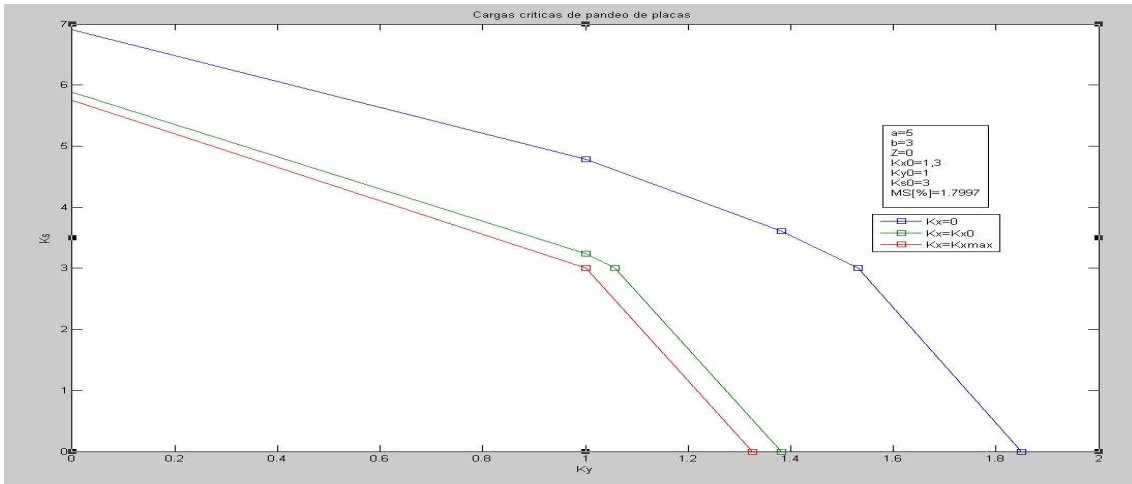


Figura 41 Cálculo de la Verificación Rápida: Rompe o Seguro con $MS \neq MSD$ ($MS=1,8\%$);

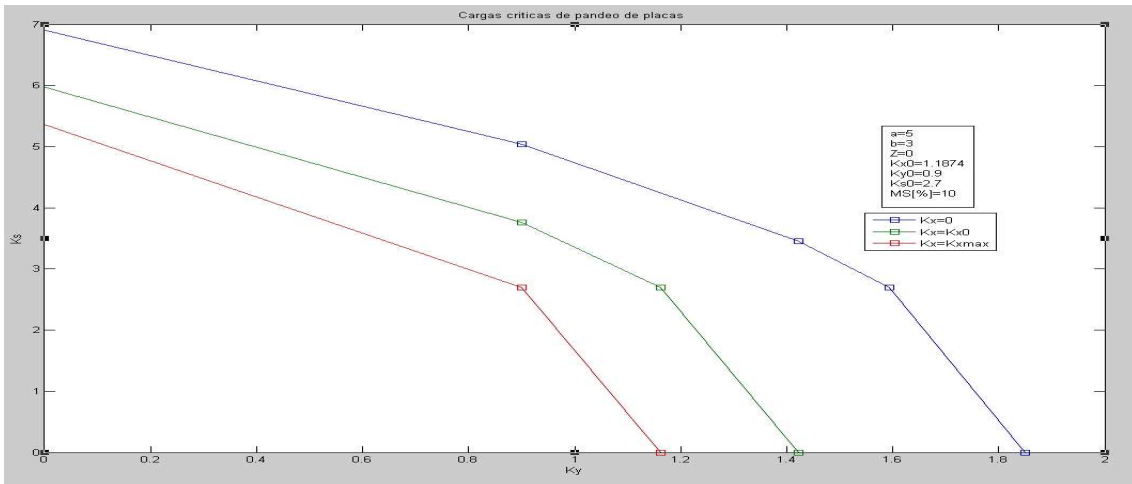


Figura 42 Cálculo de la Verificación Rápida: $MS=MSD$ ($MS=10\%$);

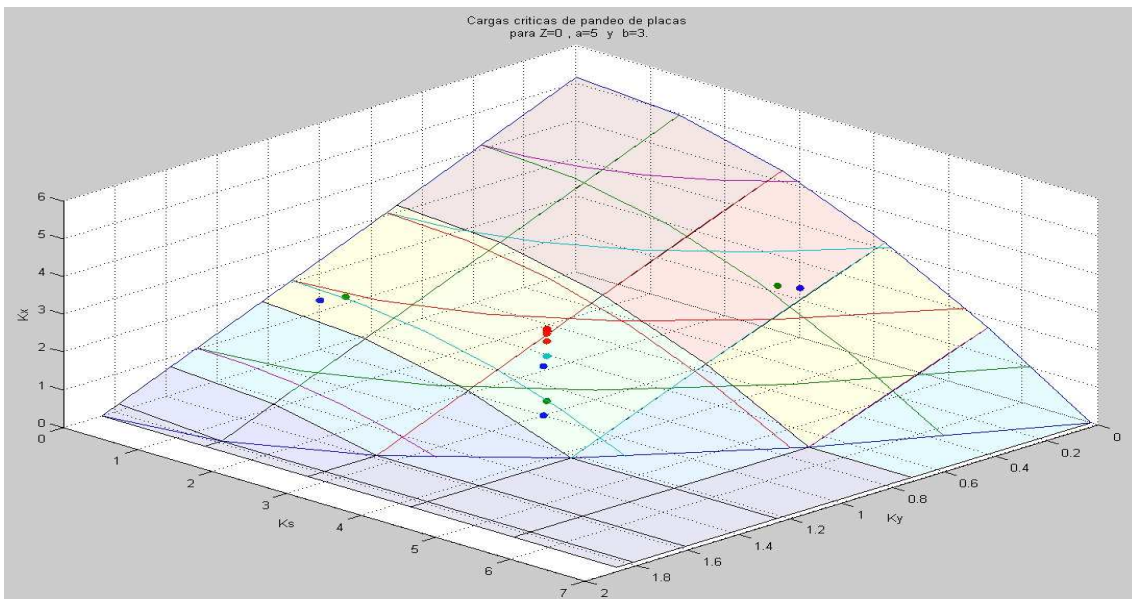


Figura 43 Cálculo de la Verificación Rápida: $MS=MSD$ ($MS=10\%$);

4.2.4. Aplicación de Verificación Rápida

Consideraciones Generales:

1. Datos: $a=5$, $b=3$, $Z=0$, $k_2=k_3=0.9$, $MSD=10\%$.
2. Se realizan 3 etapas de cálculo:
 - En Inicial: se calcula el MS ($MS=0\%$ [rompe] o $MS\neq 0\%$ [seguro]);
 - En MSD: se corrige el MS hasta que $MS=MSD$ (primera condición).
 - En optimo: se busca $Vol_K = Vol_K]_{max}$ (segunda condición).
3. Se aplica el Criterio de Von Mises para las cargas combinadas. Se determina t (espesor) y se calcula σ_X , σ_Y , τ , σ_{VM} , Vol_K y % vol.
4. Con a , b y t se puede determinar el volumen y con el peso específico determinar el peso de la lámina.
5. El punto optimo tiene las siguientes 5 propiedades:
 1. $MS=MSD$
 2. $Vol_K = Vol_K]_{max}$
 3. Menor t , Menor peso. (debe verificarse en cada caso)
 4. Menor σ_{VM} . (debe verificarse en cada caso)
 5. $[K_x, K_y, K_s]_{optimo} = f(a, b, r, t, E, \mu, \sigma_{adm})$ recordemos las definiciones $Z=f(b,r,t, \mu)$ y $\sigma_{adm} = \frac{\sigma_f}{CS}$ que permiten el uso de la herramienta de cálculo.

4.2.4.1 Verificación Rápida con valores conocidos: $K_x=1.3$; $K_y=1$; $K_s=3$.

	K_x	K_y	K_s	MS	KVM	σ_X	σ_Y	τ	σ_{VM}	Vol_K	%vol
inicial	1,3000	1,0000	3,0000	2	5,3282	301	232	696	1235	3,9000	111
MSD	1,1874	0,9000	2,7000	10	4,7981	322	244	733	1302	2,8855	82
optimo	2,0176	0,6639	2,6226	10	4,8792	534	176	694	1291	3,5128	100

Tabla 8 Resultados de Carga con valores conocidos

	$a[m]$	$b[m]$	$t[m]$	$R[m]$	Z	Volumen [m^3]	Peso [Kg]
inicial +MSD	5	3	0,04	∞	0	0,6	4710
optimo	5	3	0,04	∞	0	0,6	4710

Tabla 9 Resultados de Geometría con valores conocidos

4.2.4.2 Verificación Rápida con esfuerzos relacionados: $K_y=0.6*K_x$, $K_s=0.5*K_x$.

	K_x	K_y	K_s	MS	KVM	σ_X	σ_Y	τ	σ_{VM}	Vol_K	%vol
inicial	1,8946	1,1367	0,9473	0	2,3281	1014	608	507	1246	2,0401	58
MSD	1,7822	1,0693	0,8911	10	2,1900	1045	627	523	1285	1,6981	48
optimo	2,0176	0,6639	2,6226	10	4,8792	534	176	694	1291	3,5128	100

Tabla 10 Resultados de Carga con esfuerzos relacionados

	$a[m]$	$b[m]$	$t[m]$	$R[m]$	Z	Volumen [m^3]	Peso [Kg]
inicial +MSD	5	3	0,06	∞	0	0,9	7065
optimo	5	3	0,04	∞	0	0,6	4710

Tabla 11 Resultados de Geometría con esfuerzos relacionados

4.2.4.3 Verificación Rápida con a variable:

	a	Kx		a	Ky		a	Ks				
	5	1,4569		5	1,0574		5	3,2412				
	6	1,1436		6	0,9594		6	2,7895				
	7	0,9082		7	0,9227		7	2,5211				
	8	0,7270		8	0,9098		8	2,3467				
	9	0,5855		9	0,9070		9	2,2258				
	5,4650	1,3000		5,5026	1,0000		5,4793	3,0000				

Kx0	Kx	Ky	Ks	MS	KVM	sigmaX	sigmaY	tau	sigmaVM	Vol_K	%vol
inicial	1,3000	1,0000	3,0000	-0,0077	5,3282	301	232	696	1235	3,9000	109
MSD	1,0722	0,9000	2,7000	10,0000	4,7817	292	245	736	1304	2,6056	73
optimo	2,2502	0,6175	2,5745	10,0000	4,8929	593	163	678	1289	3,5773	100

Ky0	Kx	Ky	Ks	MS	KVM	sigmaX	sigmaY	tau	sigmaVM	Vol_K	%vol
inicial	1,3000	1,0000	3,0000	-0,1384	5,3282	301	232	696	1235	3,9000	109
MSD	1,0641	0,9000	2,7000	10,0000	4,7806	290	246	737	1304	2,5857	72
optimo	2,2689	0,6144	2,5718	10,0000	4,8963	597	162	677	1289	3,5850	100

Ks0	Kx	Ky	Ks	MS	KVM	sigmaX	sigmaY	tau	sigmaVM	Vol_K	%vol
inicial	1,3000	1,0000	3,0000	-0,0578	5,3282	301	232	696	1235	3,9000	109
MSD	1,0691	0,9000	2,7000	10,0000	4,7813	292	245	736	1304	2,5979	73
optimo	2,2573	0,6163	2,5735	10,0000	4,8941	595	162	678	1289	3,5802	100

Tabla 12 Resultados de Carga con a variable

	a[m]	b[m]	t[m]	R[m]	Z	Volumen[m ³]	Peso [Kg]
inicial +MSD	5.5	3	0,04	∞	0	0,6575	5181
optimo	5.5	3	0,04	∞	0	0,6575	5181

Tabla 13 Resultados de Geometría con a variable

4.2.4.4 Verificación Rápida con b variable:

	b	Kx		b	Ky		b	Ks				
	2,5	1,1436		2,5	0,9594		2,5	2,7895				
	2,8	1,3338		2,8	1,0108		2,8	3,0493				
	3	1,4569		3	1,0574		3	3,2412				
	3,2	1,5772		3,2	1,1148		3,2	3,4488				
	3,5	1,7535		3,5	1,2236		3,5	3,7912				
	2,7458	1,3000		2,7458	1,0000		2,7459	3,0000				

Kx0	Kx	Ky	Ks	MS	KVM	sigmaX	sigmaY	tau	sigmaVM	%vol	%vol
inicial	1,3000	1,0000	3,0000	-0,0002	5,3282	276	212	637	1131	3,9000	109
MSD	1,0727	0,9000	2,7000	10,0000	4,7818	268	225	674	1194	2,6067	73
optimo	2,2491	0,6177	2,5747	10,0000	4,8927	542	149	621	1180	3,5768	100

Ky0	Kx	Ky	Ks	MS	KVM	sigmaX	sigmaY	tau	sigmaVM	%vol	%vol
inicial	1,3000	1,0000	3,0000	-0,0001	5,3282	276	212	637	1131	3,9000	109
MSD	1,0727	0,9000	2,7000	10,0000	4,7818	268	225	674	1194	2,6067	73
optimo	2,2491	0,6177	2,5747	10,0000	4,8927	542	149	621	1180	3,5768	100

Ks0	Kx	Ky	Ks	MS	KVM	sigmaX	sigmaY	tau	sigmaVM	%vol	%vol
inicial	1,3000	1,0000	3,0000	0,0000	5,3282	276	212	637	1131	3,9000	109
MSD	1,0727	0,9000	2,7000	10,0000	4,7818	268	225	674	1194	2,6067	73
optimo	2,2491	0,6177	2,5747	10,0000	4,8927	542	149	621	1180	3,5768	100

Tabla 14 Resultados de Carga con b variable

	a[m]	b[m]	t[m]	R[m]	Z	Volumen[m ³]	Peso [Kg]
inicial +MSD	5	2.75	0,04	∞	0	0,55	4317
optimo	5	2.75	0,04	∞	0	0,55	4317

Tabla 15 Resultados de Geometría b variable

La condición de óptimo $[Kx, Ky, Ks]_{optimo}$ proporciona el menor peso, pero hay excepciones donde $[Kx, Ky, Ks]_{MSD}$ y $[Kx, Ky, Ks]_{optimo}$ tienen el mismo peso.

4.2.4.5 Kx_{uso}

En algunos ensayos, se carga las probetas de la estructura con un esfuerzo principal. En este caso, suponemos que el esfuerzo principal sea la compresión axial (asociado al parámetro adimensional de carga Kx).

Kx_{uso} : es el máximo valor de Kx para realizar los ensayos, teniendo en cuenta los valores indeseados de cargas, que participan con un porcentaje de valores máximos globales de Ky y Ks .

Con los valores $a=5$, $b=3$, $Z=0$.

1) calcular KxG , KyG y KsG , obtenemos: $KxG=5.1378$, $KyG=1.8496$, $Ks=6.9017$.

2) calcular Kx_{uso} :

$$Kx_{uso}]_{5\%} = f_{Kx}(0.05 * KyG, 0.05 * KsG) = 0.8575 * KxG = 4.4054.$$

$$Kx_{uso}]_{10\%} = f_{Kx}(0.10 * KyG, 0.10 * KsG) = 0.8007 * KxG = 4.1651.$$

Si la estructura rompe con $Kx < Kx_{uso}$, significa que existen valores de Ky y/o Ks que superan los valores del 5% y del 10%. Se debe revisar el estado de carga real de las probetas de la estructura para asegurarse que no se introduzcan esfuerzos indeseados. La dispersión de los resultados de los ensayos experimentales puede tener como causa el ingreso de una carga indeseada durante el ensayo. En la práctica, puede suceder que la carga sea mayor ($Kx > Kx_{uso}$) y significa que no se introducen esfuerzos indeseados. Lo que no debería ocurrir nunca es que la carga sea mayor a la carga máxima global ($Kx > KxG$), la única posibilidad es que la estructura tenga otro tipo de apoyo y que ocurra pandeo en el segundo Modo.

4.3 Diseño

En este punto, 4.3 Diseño, vamos a mostrar el alcance de la herramienta de cálculo, para ello, vamos a dividir nuestro estudio en tres partes:

- 1) Estudio paramétrico Global, donde se busca determinar KxG , KyG y KsG en función de a , b y Z . Recordemos que KxG , KyG y KsG son los valores máximos de Kx , Ky y Ks respectivamente para la combinación de parámetros a , b y Z , para $MS=0\%$. Definiendo:

$$KxG = f_{Kx}(a, b, Z)_{Ky=0, Ks=0}; KyG = f_{Ky}(a, b, Z)_{Kx=0, Ks=0}; KsG = f_{Ks}(a, b, Z)_{Kx=0, Ky=0}$$

- 2) Estudio paramétrico Local: se busca determinar Kx , Ky y Ks en función de a , b y Z para $MS=0\%$ y $MS=MSD$ (aquí, $MSD=10\%$).

$$(Kx, Ky, Ks)_{MS=0\%} = f(a, b, Z) \text{ y } (Kx, Ky, Ks)_{MS=MSD} = f(a, b, Z).$$

Con las restricciones: $0 < Kx < KxG$, $0 < Ky < KyG$, $0 < Ks < KsG$

- 3) Estudio paramétrico Puntual: con la condición $MS=MSD$ se busca la combinación Kx , Ky y Ks que produce el máximo valor de Vol_K . Para ello:

I) se define Vol_K : $Vol_K_{MS=0\%} = f(a, b, Z) = Kx * Ky * Ks$;

II) se determina el punto $(Kx1, Ky1, Ks1)$ con $V1 = Vol_K_{MS=0\%}^{max}$

III) se define $Vol_K_{MS=MSD} = f(k2, k3) = Kx_{MSD} * Ky_{MSD} * Ks_{MSD}$;

pero $Ky_{MSD} = k2 * Ky1$ y $Ks_{MSD} = k3 * Ks1$, reemplazando se tiene:

$$Vol_K_{MS=MSD} = f(k2, k3) = Kx_{MSD} * k2 * Ky1 * k3 * Ks1$$

$$Vol_K_{MS=MSD} = f(k2, k3) = Kx_{MSD} * k2 * k3 * \frac{V1}{Kx1} \text{ con } V1=cte \text{ y } Kx1=cte.$$

entonces queda por determinar $Kx_{MS=MSD} = f(k2, k3)$ y $Vol_K_{MS=MSD} = f(k2, k3)$.

Se pueden trazar curvas de nivel $Kx_{MS=MSD} = cte$ y $Vol_K_{MS=MSD} = cte$ donde se pone $k2$ función de $k3$. Aquí solo se lo menciona. El interés está en encontrar la combinación de $k2$ y $k3$ que produce el máximo valor de $Vol_K_{MS=MSD}$ y la combinación Kx , Ky y Ks asociada:

$$(Kx2, Ky2, Ks2) \text{ con } V2 = Vol_K_{MS=MSD}^{max} \text{ con } Ky2 = k2_{opt} * Ky1, Ks2 = k3_{opt} * Ks1 \text{ y } Kx2 = f(k2_{opt}, k3_{opt}).$$

Para nuestro ejemplo usamos los siguientes datos:

$$a=5, b=3, Kx0=1.3, Ky0=1, Ks0=3, MSD=10\%, k2=0.9, k3=0.9.$$

- 1) calcular los valores de KxG , KyG y KsG en función de Z . (ver Tabla 16 y 17 pág. 64 y la figura 62 (pág. 72)). (Estudio paramétrico Global)

- 2) determinar los valores tentativos de Z que cumplan la condición (sugerida, a manera de ejemplo y que se puede modificar con libertad de acuerdo con la experiencia):

$$KxG_{min} = 2 * Kx0, \quad KyG_{min} = 2 * Ky0, \quad KsG_{min} = 2 * Ks0$$

$$KxG_{\min} = 2 * 1.3 = 2.6, \quad KyG_{\min} = 2 * 1 = 2, \quad KsG_{\min} = 2 * 3 = 6$$

Para $Z=0$, $KxG=5.1378$, $KyG=1.8496$ (próximo), $KsG=6.9017$)

Se puede usar para un análisis $Z = [1, 1.15, 1.3, 1.5] * Z_{\min}$. En nuestro caso, $Z_{\min} = 0$ por ello tomamos $Z = [0, 5, 10, 50]$. (Estudio paramétrico Local)

3. Se hace un estudio del comportamiento de $Kx_{MS=MSD}$ y $Vol_{K_{MS=MSD}}$ en función de k_2 , k_3 y Z ; con $k_2=k_3 = [0.8, 0.85, 0.90, 0.95, 1]$ y $Z = [0, 5, 10, 50]$.

Pero se grafica $Kx_{MS=MSD}$ y $Vol_{K_{MS=MSD}}$ en función de Z :

- $Kx_{MS=MSD} = f(Z)_{k_3=cte}^{k_2=cte}$ y $Kx_{MS=0\%} = f(Z)$ (referencia) y
- $Vol_{K_{MS=MSD}} = f(Z)_{k_3=cte}^{k_2=cte}$ y $Vol_{K_{MS=0\%}} = f(Z)$ (referencia).

Recordemos que como $MS=0\%$ se tiene $k_2=k_3=1$ que se usan como referencia para sacar conclusiones.

4.3.1 Estudio paramétrico global

Se usó los siguientes valores:

$a=5$; $b=3$; $a_1 = [2,5,10,50,100,200,300]$; $b_1 = [2,5,10,50,100,200,300]$;

$Z_1 = [0.1, 5, 10, 50, 100, 1000, 10000]$;

Y se realizaron las siguientes figuras (ver Tabla 16 y Tabla 17 pág. 62):

- 1) KxG KyG y KsG en función de Z con a como parámetro. (2D) pág.63.
- 2) KxG KyG y KsG en función de Z con b como parámetro. (2D) pág.64.
- 3) KxG KyG y KsG en función de a con Z como parámetro. (2D) pág.65.
- 4) KxG KyG y KsG en función de b con Z como parámetro. (2D) pág.66.
- 5) KxG KyG y KsG en función de a y Z .(3D) pág.67.
- 6) KxG KyG y KsG en función de b y Z .(3D) pág.78.

Las figuras se realizaron de esta manera:

- 1) Con la Tabla 16 manteniendo constante la fila ($a=cte.$, parámetro) y avanzando en las columnas (Z). Se obtienen 7 curvas para cada parámetro adimensional de carga (Kx, Ky y Ks)
- 2) Con la Tabla 17 manteniendo constante la fila ($b=cte.$, parámetro) y avanzando en las columnas (Z). Se obtienen 7 curvas para cada parámetro adimensional de carga (Kx, Ky y Ks)
- 3) Con la Tabla 16 manteniendo constante la columna ($Z =cte.$, parámetro) y avanzando en las filas (a). Se obtienen 7 curvas para cada parámetro adimensional de carga (Kx, Ky y Ks)
- 4) Con la Tabla 17 manteniendo constante la columna ($Z =cte.$, parámetro) y avanzando en las filas (b). Se obtienen 7 curvas para cada parámetro adimensional de carga (Kx, Ky y Ks)
- 5) Combinando todos los resultados de la Tabla 16 obtenemos una superficie 3D
- 6) Combinando todos los resultados de la Tabla 17 obtenemos una superficie 3D

b=cte			Z						
	a	b	0,1	5	10	50	100	1000	10000
Kx	2	3	4,6947	5,3505	7,3186	35,1791	71,4078	703,3048	37657,7303
	5	3	5,1380	5,7372	7,5355	35,5371	72,8818	749,5721	8682,2886
	10	3	4,0449	4,8060	7,0904	36,5309	76,1343	909,1693	8755,7923
	50	3	32,8966	32,9902	33,2711	42,2586	70,3448	720,0958	7410,4153
	100	3	125,4649	125,4894	125,5631	127,9196	135,2837	1107,3474	7219,2807
	200	3	495,8292	495,8354	495,8540	496,4503	498,3137	744,2853	7217,0130
	300	3	1113,1120	1113,1148	1113,1231	1113,3887	1114,2187	1223,7853	11233,6716
Ky	2	3	10,5631	12,0386	14,1173	15,4313	19,5377	63,2974	3389,1957
	5	3	1,8497	2,0654	2,7128	9,7850	9,9369	26,7182	125,0250
	10	3	1,1881	1,2091	1,2721	3,2878	6,8521	10,5227	31,5209
	50	3	1,0072	1,0073	1,0074	1,0112	1,0231	2,5923	9,2260
	100	3	1,0018	1,0018	1,0018	1,0020	1,0028	1,1014	6,4974
	200	3	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005	1,0005	1,0067	1,6238
	300	3	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0002	1,0014	1,1234
Ks	2	3	16,0366	16,7987	18,6134	30,8452	43,9788	638,9068	47938,8993
	5	3	6,9018	7,2560	8,2048	19,8608	32,3120	185,8118	5344,8504
	10	3	7,1499	7,4867	8,2403	15,0082	23,4287	118,9550	1308,3266
	50	3	22,5734	22,5968	22,6667	24,6569	28,9126	63,9046	343,0191
	100	3	44,2189	44,2221	44,2316	44,5352	45,4527	77,3500	228,8757
	200	3	87,9714	87,9718	87,9730	88,0121	88,1341	101,4031	204,8274
	300	3	131,8274	131,8275	131,8279	131,8395	131,8759	136,4747	239,0879

Tabla 16 KxG KyG y KsG en función de Z con b=cte

a=cte			Z						
	a	b	0,1	5	10	50	100	1000	10000
Kx	5	2	4,1347	4,8794	7,1141	42,7952	70,2606	717,3843	7070,1365
	5	3	5,1380	5,7372	7,5355	35,5371	72,8818	749,5721	8682,2886
	5	10	6,2502	6,7428	8,2211	37,3192	70,4230	796,1800	58803,2522
	5	50	102,0100	102,0402	102,1308	105,0291	114,0864	709,9511	14336,3591
	5	100	402,0025	402,0102	402,0331	402,7686	405,0670	708,4478	7022,0940
	5	200	1602,0006	1602,0025	1602,0083	1602,1929	1602,7696	1678,8993	8330,4703
	5	300	3602,0003	3602,0011	3602,0037	3602,0858	3602,3423	3636,2012	7022,0940
Ky	5	2	1,3456	1,4042	1,5800	6,8472	9,3646	13,4991	45,2489
	5	3	1,8497	2,0654	2,7128	9,7850	9,9369	26,7182	125,0250
	5	10	18,7778	18,8102	18,9074	22,0175	31,7368	127,3888	9408,5203
	5	50	625,0000	625,0788	625,3154	632,8843	656,5371	3778,7097	315995,9749
	5	100	7225,0000	7225,1091	7225,4365	7235,9125	7268,6500	11589,9962	443724,6192
	5	200	105625,0000	105625,1194	105625,4777	105636,9430	105672,7722	110402,2171	583346,7134
	5	300	525625,0000	525625,1215	525625,4860	525637,1498	525673,5994	530484,9380	1011618,7972
Ks	5	2	6,7340	7,0327	7,7614	16,4950	26,7229	127,7521	2187,1970
	5	3	6,9018	7,2560	8,2048	19,8608	32,3120	185,8118	5344,8504
	5	10	26,3393	26,8904	28,2447	38,7714	54,2835	941,4511	81507,1892
	5	50	689,0467	689,1142	689,3167	695,7627	715,5178	2325,9354	114812,0531
	5	100	5446,2950	5446,3416	5446,4816	5450,9583	5464,9281	7112,1009	80973,8398
	5	200	41911,2963	41911,3216	41911,3973	41913,8224	41921,4000	42911,8749	108910,6162
	5	300	140406,7129	140406,7300	140406,7813	140408,4241	140413,5578	141089,8305	199265,5523

Tabla 17 KxG KyG y KsG en función de Z con a=cte

figuras 2D que forman figuras 3D		
K	con a como parámetro	con b como parámetro
Kx	Las fig. 44 y 50 forman la fig.56.	Las fig. 47 y 53 forman la fig.59.
Ky	Las fig. 45 y 51 forman la fig.57.	Las fig. 48 y 54 forman la fig.60.
Ks	Las fig. 46 y 52 forman la fig.58.	Las fig. 49 y 55 forman la fig.61.

Tabla 18 Combinación de figuras 2D para obtener una figura 3D

1) KxG KyG y KsG en función de Z con a como parámetro. (2D) pág.63.

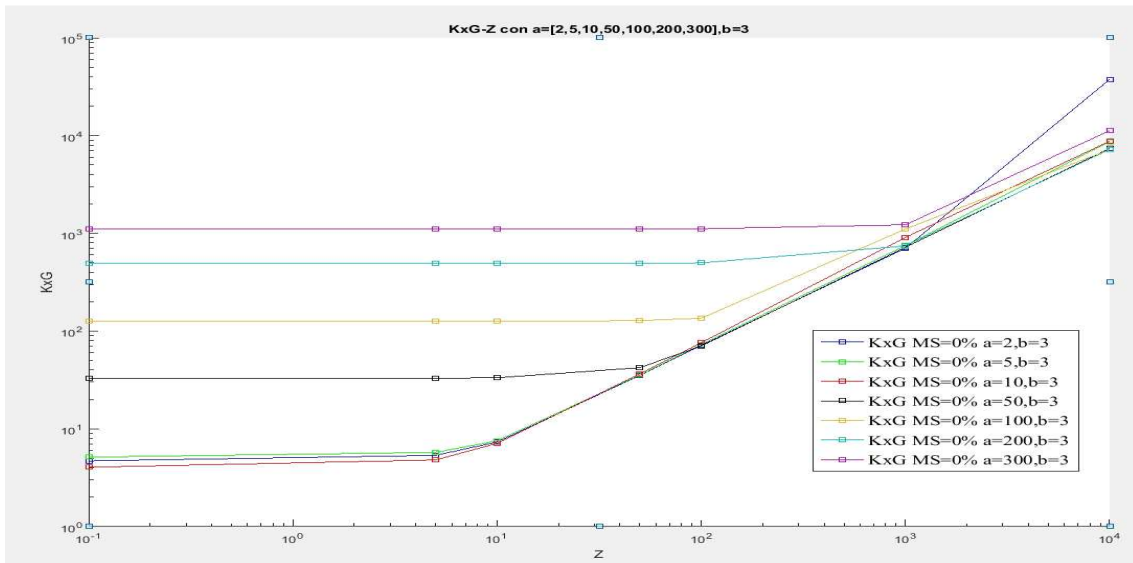


Figura 44 KxG en función de Z con a como parámetro. (2D)

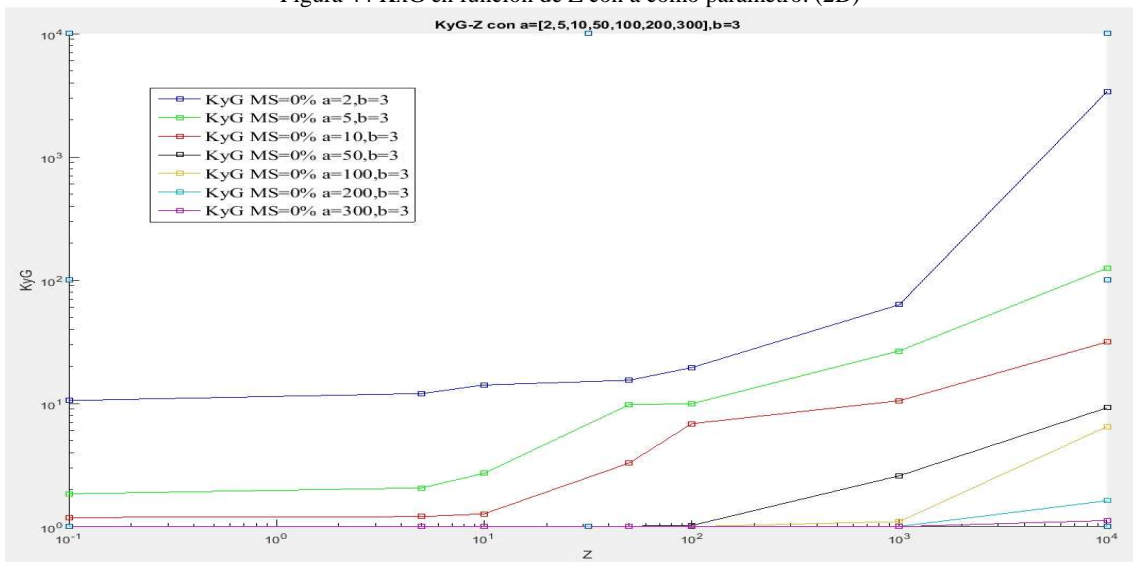


Figura 45 KyG en función de Z con a como parámetro. (2D)

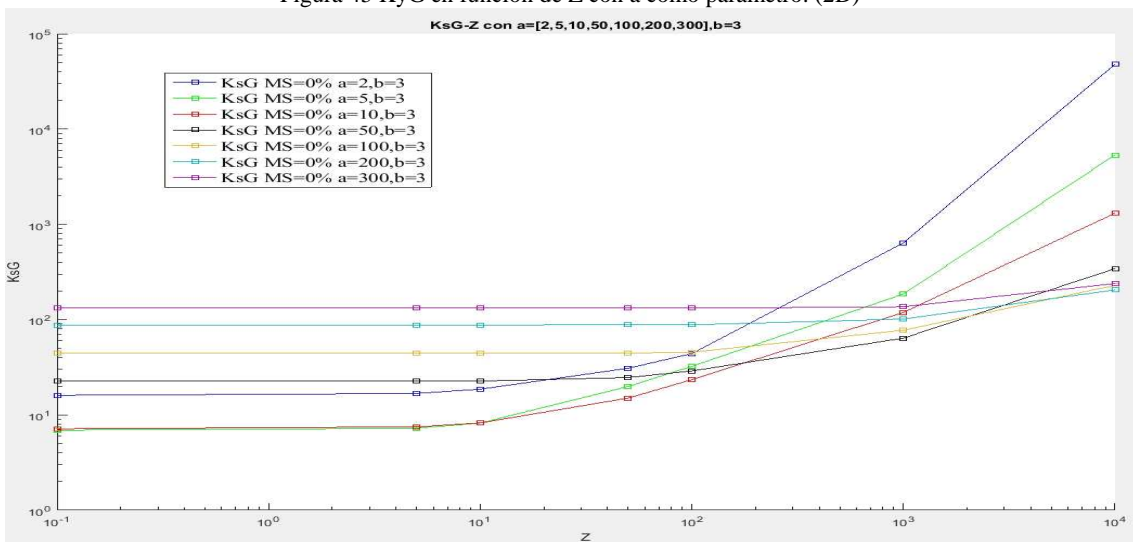


Figura 46 KsG en función de Z con a como parámetro. (2D)

2) KxG KyG y KsG en función de Z con b como parámetro. (2D) pág.64.

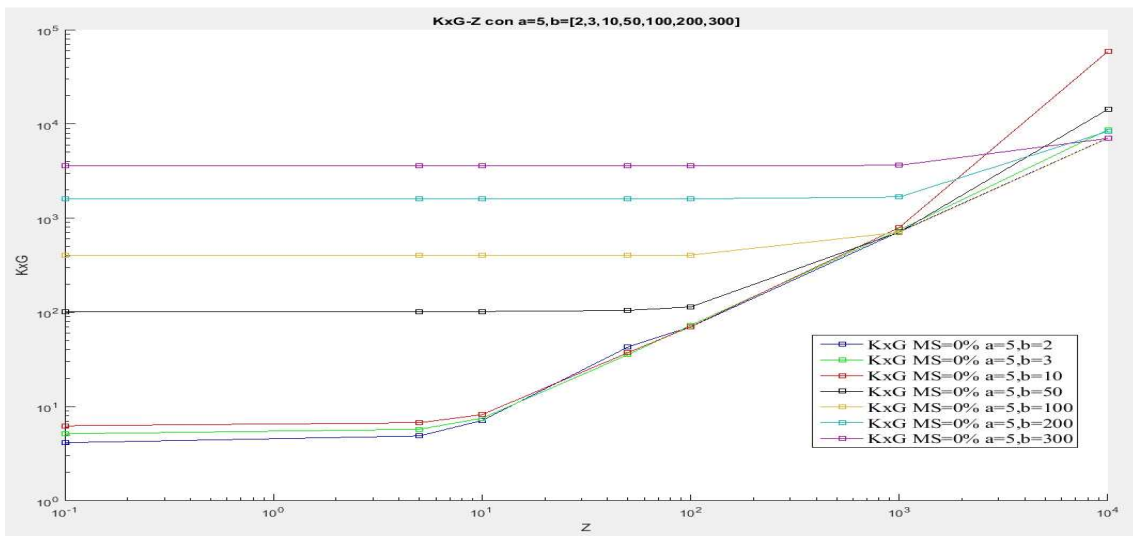


Figura 47 KxG en función de Z con b como parámetro. (2D)

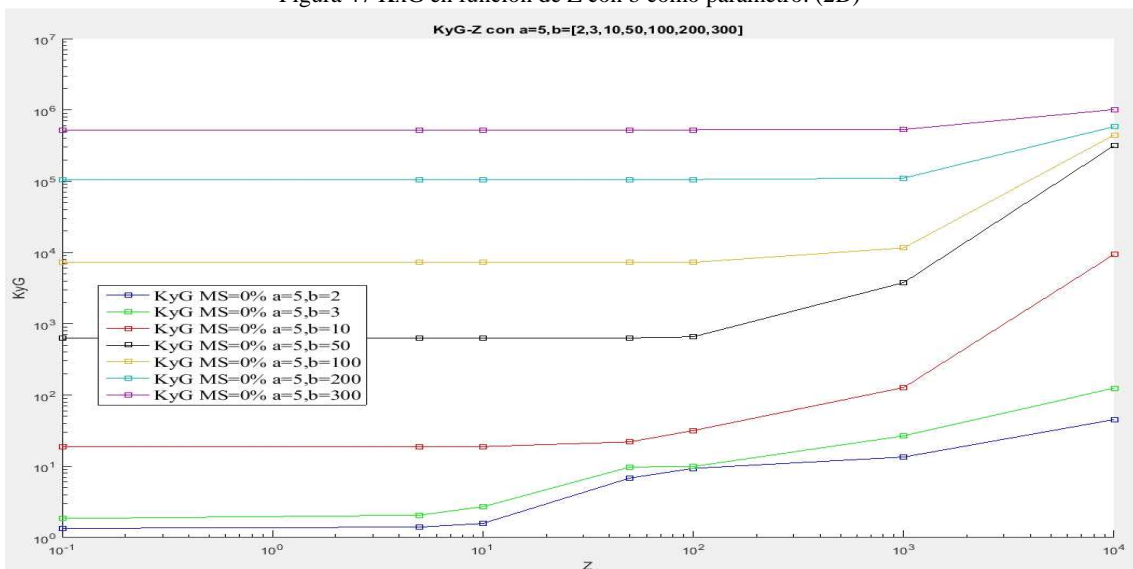


Figura 48 KyG en función de Z con b como parámetro. (2D)

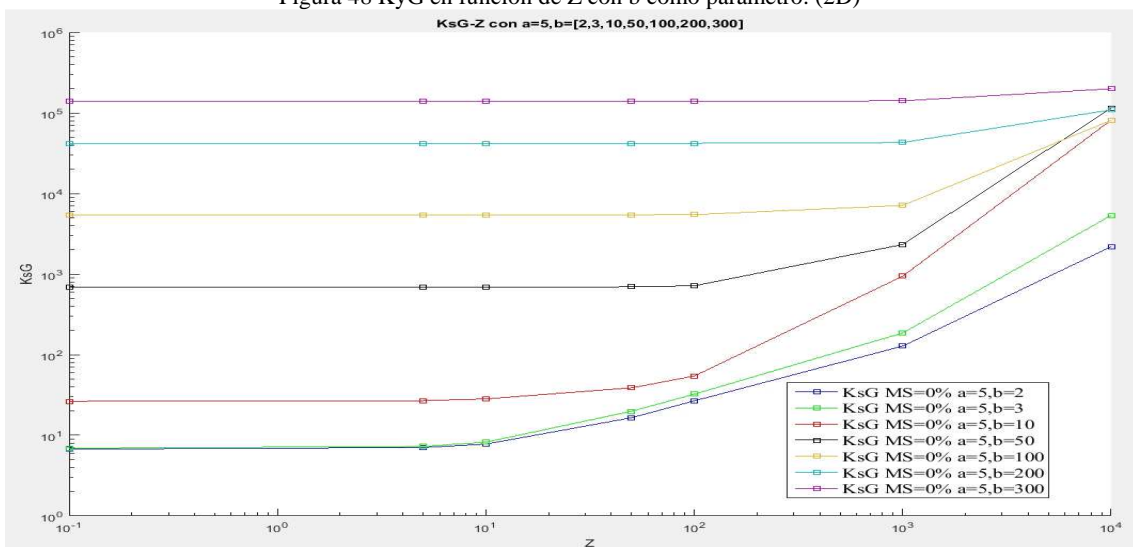
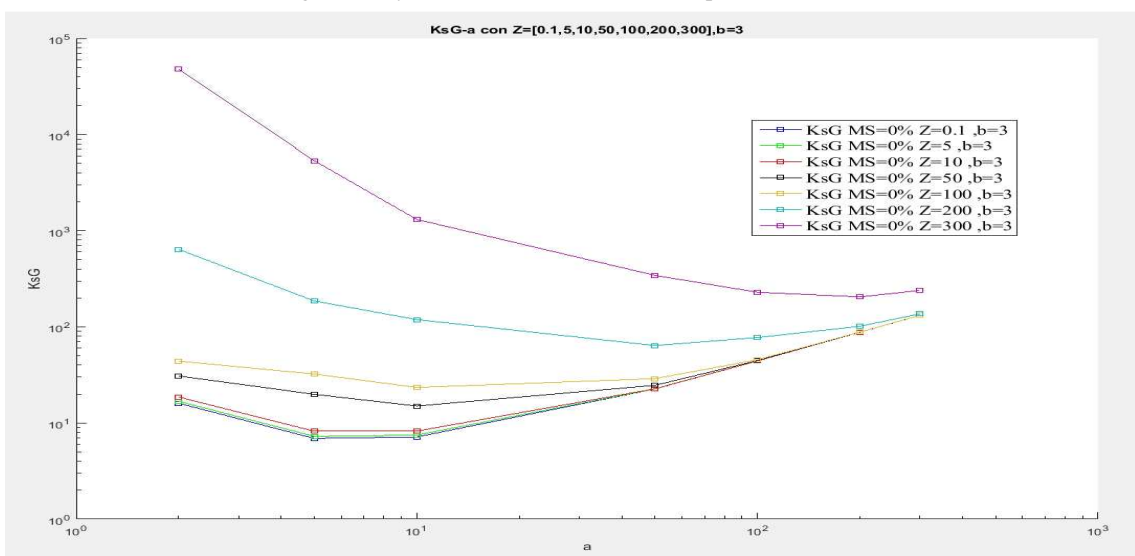
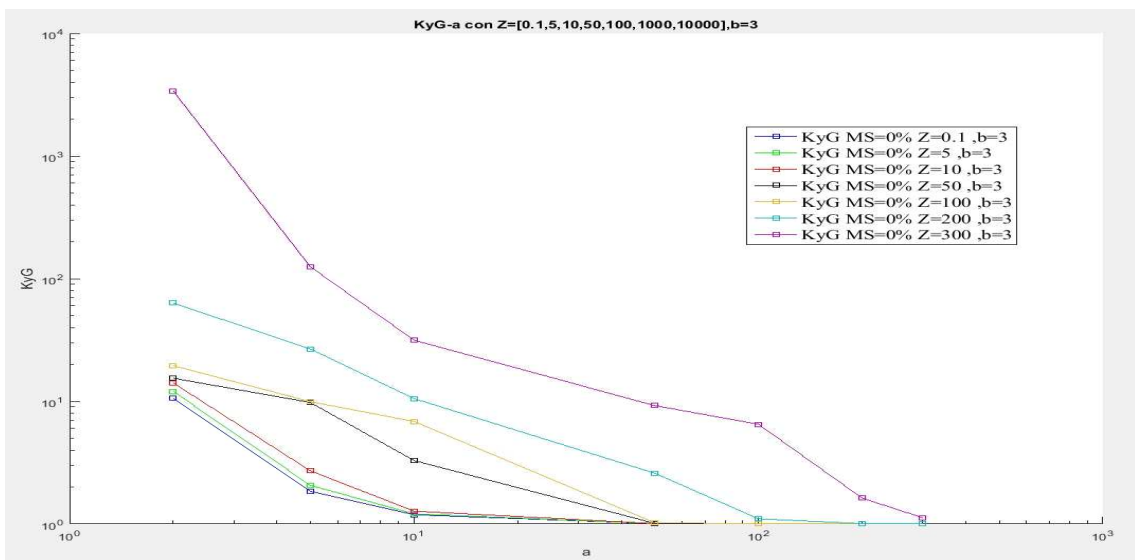
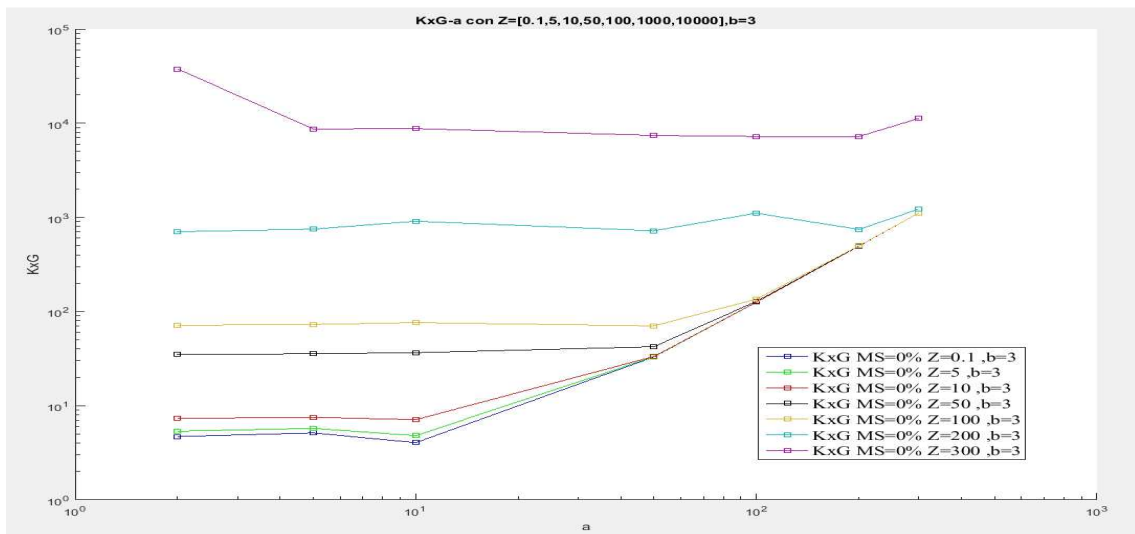


Figura 49 KsG en función de Z con b como parámetro. (2D)

3) KxG KyG y KsG en función de a con Z como parámetro. (2D) pág.65.



4) KxG KyG y KsG en función de b con Z como parámetro. (2D) pág.66.

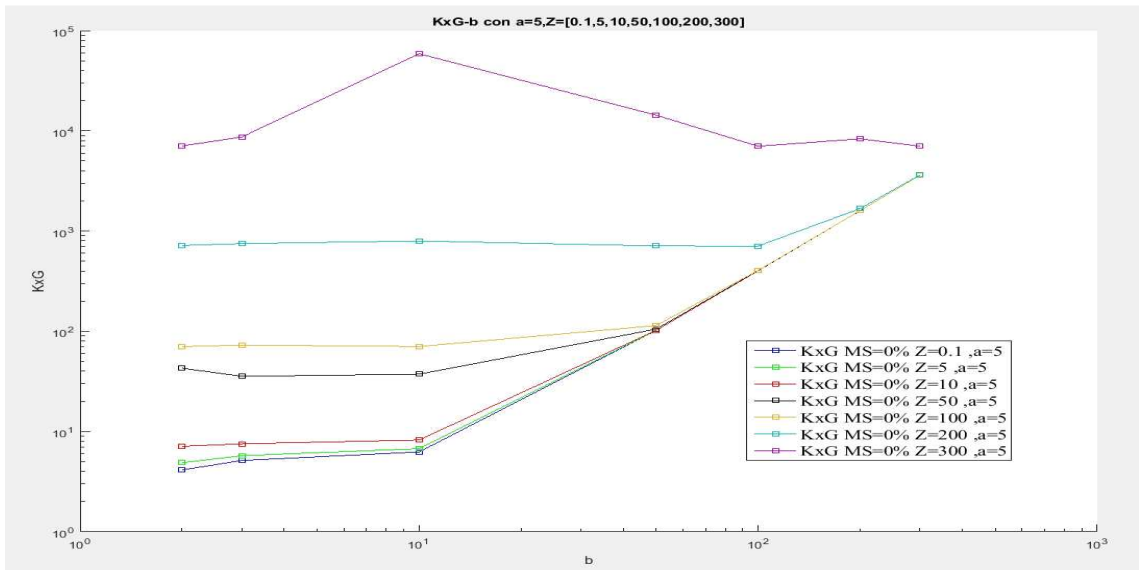


Figura 53 KxG en función de b con Z como parámetro. (2D)

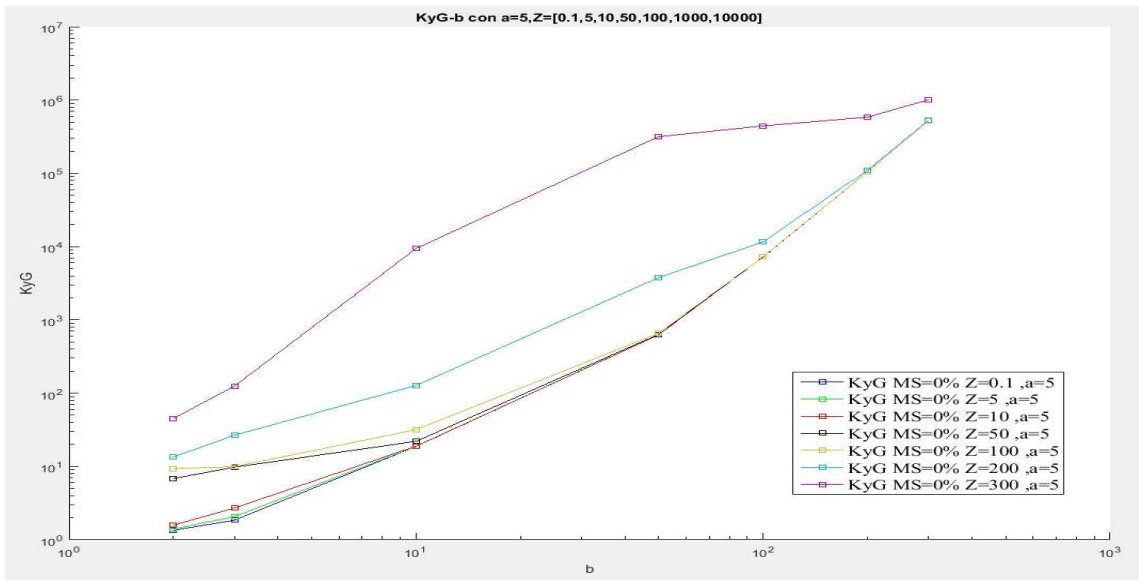


Figura 54 KyG en función de b con Z como parámetro. (2D)

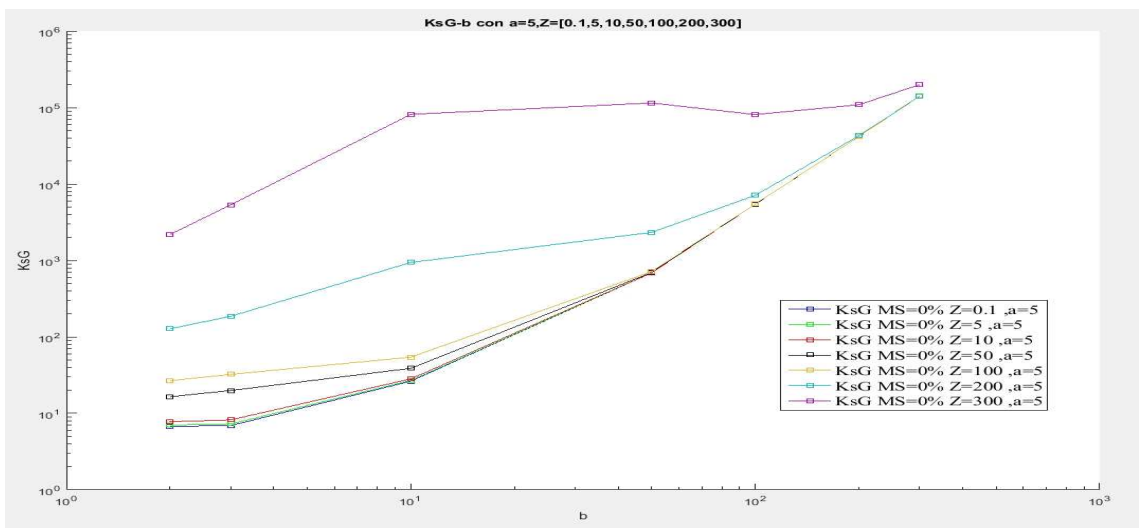


Figura 55 KsG en función de b con Z como parámetro. (2D)

5) K_xG K_yG y K_sG en función de a y Z .(3D) pág.67.

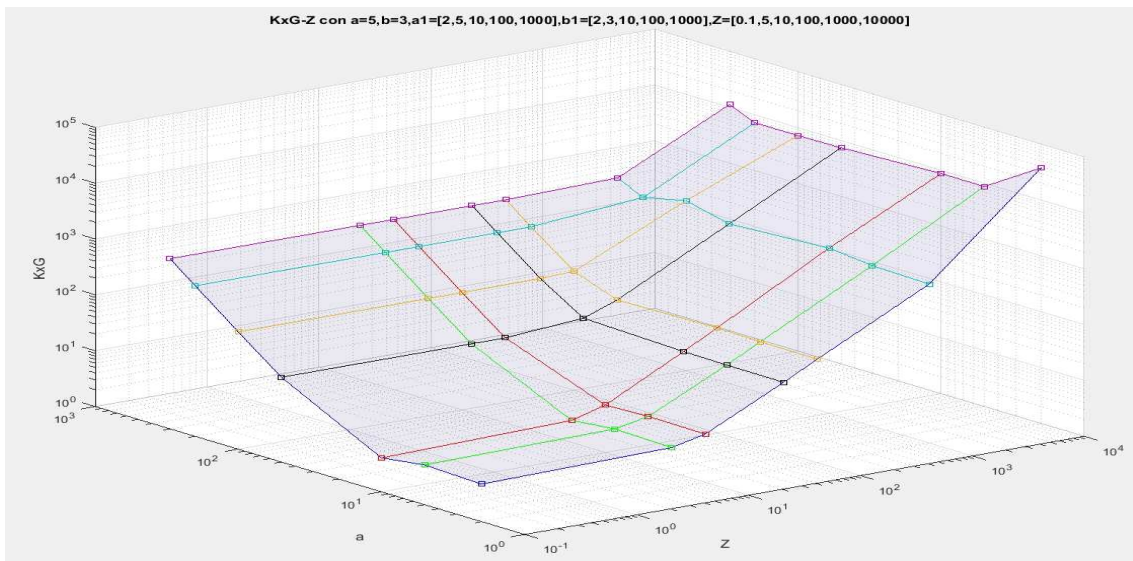


Figura 56 K_xG en función de a y Z .(3D)

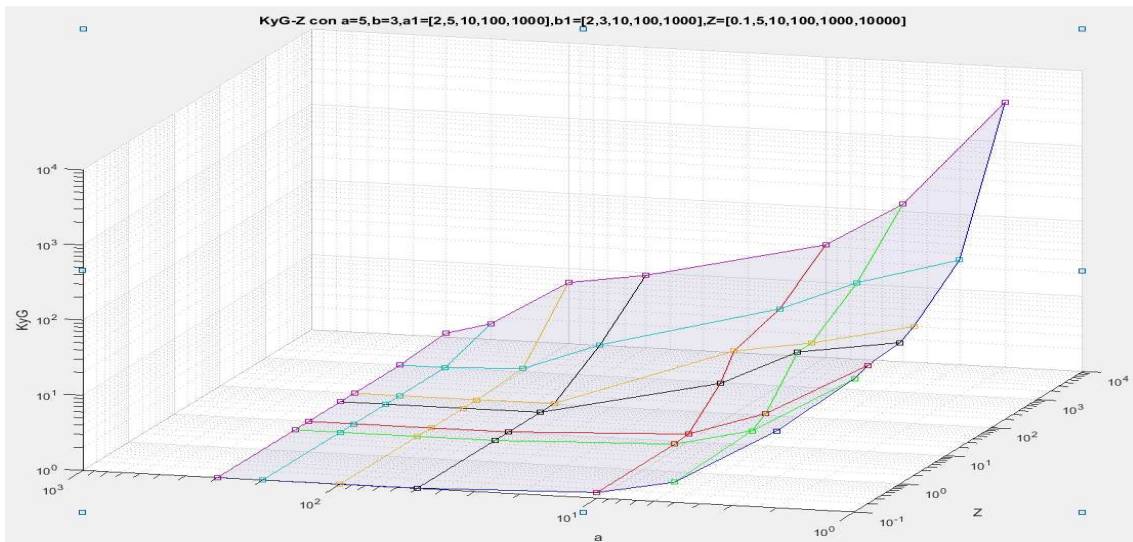


Figura 57 K_yG en función de a y Z .(3D)

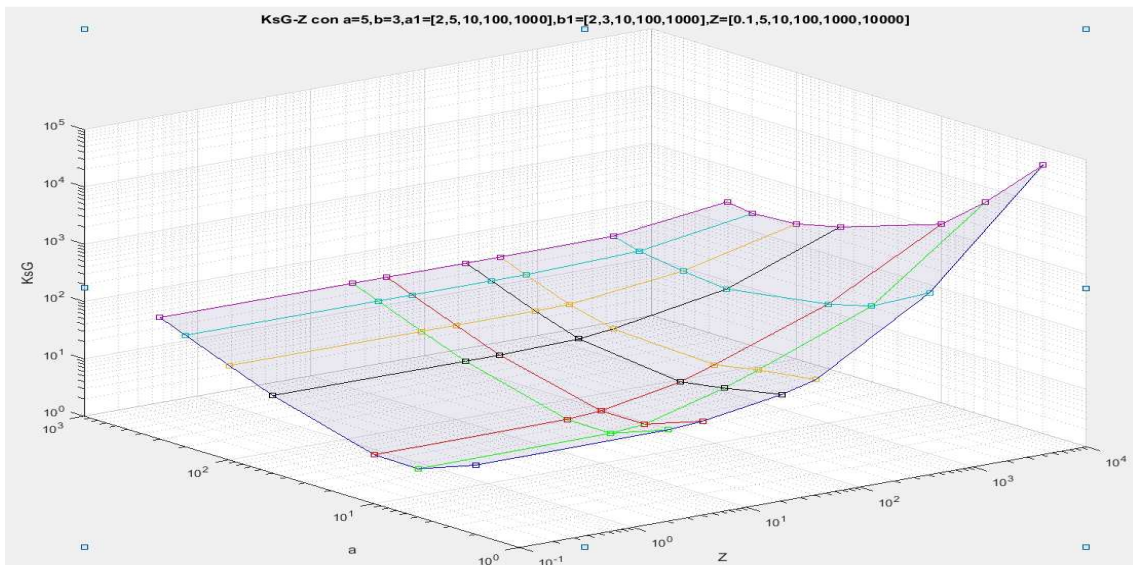


Figura 58 K_sG en función de a y Z .(3D)

6) K_xG K_yG y K_sG en función de b y Z .(3D) pág.68.

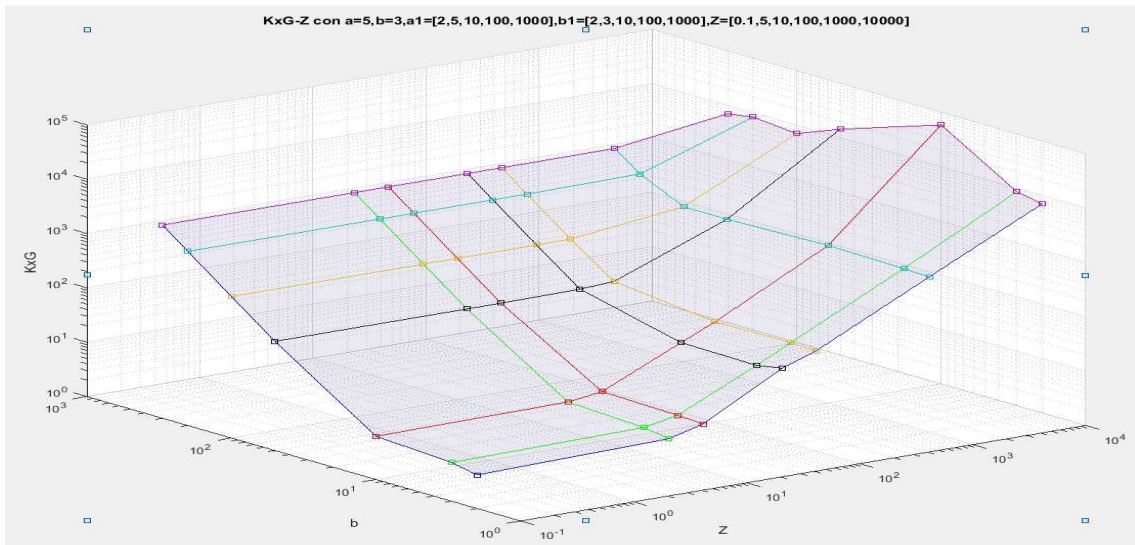


Figura 59 K_xG en función de b y Z .(3D)

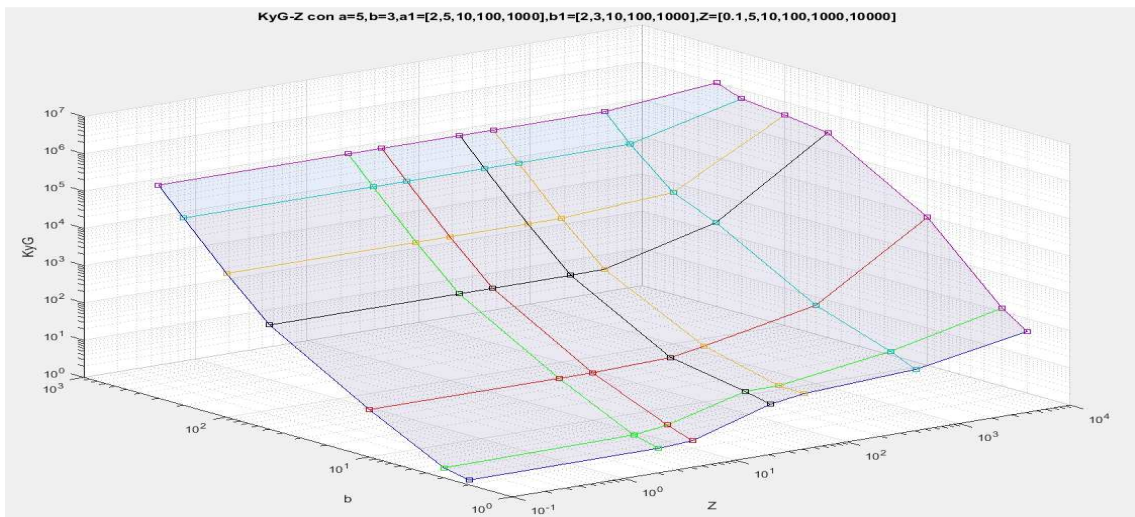


Figura 60 K_yG en función de b y Z .(3D)

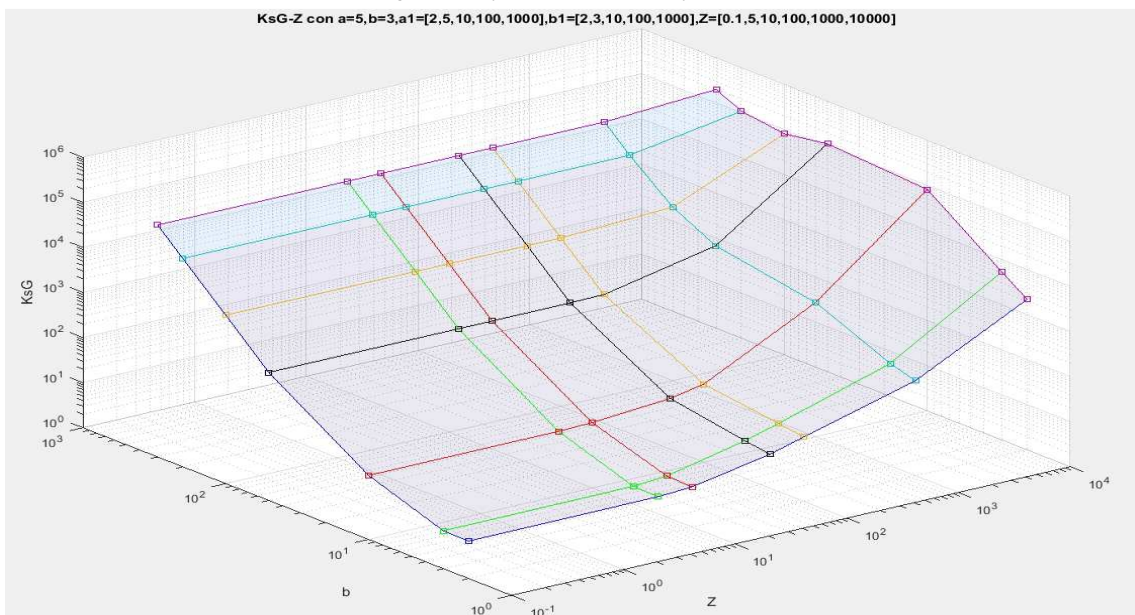


Figura 61 K_sG en función de b y Z .(3D)

Observaciones:

Fig. 2D	X	Y	Par	Observaciones
43	KxG	Z	a1	1)cte,2) lineal. Al aumentar Z aumenta KxG (a>10) Al aumentar a aumenta KxG
44	KyG	Z	a1	Al aumentar Z aumenta KyG Al aumentar a disminuye KyG
45	KsG	Z	a1	1)cte,2) lineal. Al aumentar Z aumenta KsG (a>10) Al aumentar a aumenta KsG
46	KxG	Z	b1	1)cte,2) lineal. Al aumentar Z aumenta KxG (b>5) Al aumentar b aumenta KxG
47	KyG	Z	b1	1)cte,2) lineal. Al aumentar Z aumenta KyG Al aumentar b aumenta KyG
48	KsG	Z	b1	1)cte,2) lineal. Al aumentar Z aumenta KsG Al aumentar b aumenta KsG
49	KxG	a	Z	1)cte,2) lineal. Al aumentar a aumenta KxG (Z>10) Al aumentar Z aumenta KxG
50	KyG	a	Z	Al aumentar a disminuye KyG (Z>5) Al aumentar Z aumenta KyG
51	KsG	a	Z	(a>100) Al aumentar a aumenta KsG (Z>5) Al aumentar Z aumenta KsG
52	KxG	b	Z	Al aumentar b aumenta KxG (Z>10) Al aumentar Z aumenta KxG
53	KyG	b	Z	Al aumentar b aumenta KyG (Z>10) Al aumentar Z aumenta KyG
54	KsG	b	Z	Al aumentar b aumenta KsG (Z>10) Al aumentar Z aumenta KsG

Tabla 19 Comportamiento de Kx Ky y Ks con variación de a, b y Z

4.3.2 Estudio paramétrico local

4.3.2.1 Efecto Rebote y su corrección

Se hace un estudio que genera una figura tridimensional. Cuando calculamos sin tener en cuenta los valores máximos se sufre el efecto rebote. Se ve un “rebote” (Kx pasa por un máximo luego por cero y regresa a un máximo.) Esto es así, porque cuando se superan los valores máximos, la solución de menor valor absoluto es imaginaria, se pasa a la segunda solución real.

En la figura se ve el efecto rebote por la pérdida de la continuidad de las superficies. Se soluciona anulando dichos valores. (Es decir teniendo en cuenta los valores máximos.)

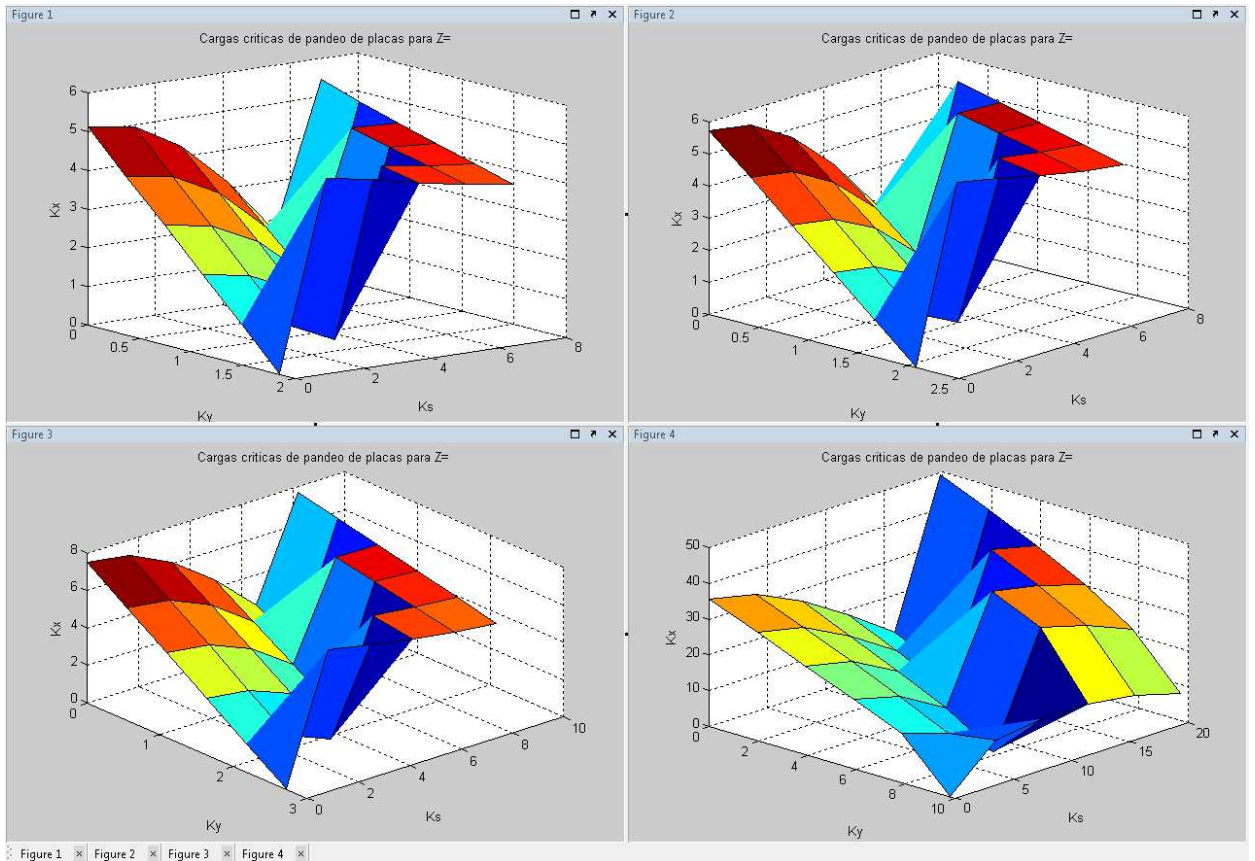


Figura 62. Efecto rebote para distintos valores de Z.

La figura siguiente (figura 62) se obtiene con los mismos valores de K_{xG} , K_{yG} y K_{sG} de las Tablas 16 y 17 (pág. 64) con $a=5$ y $b=3$.

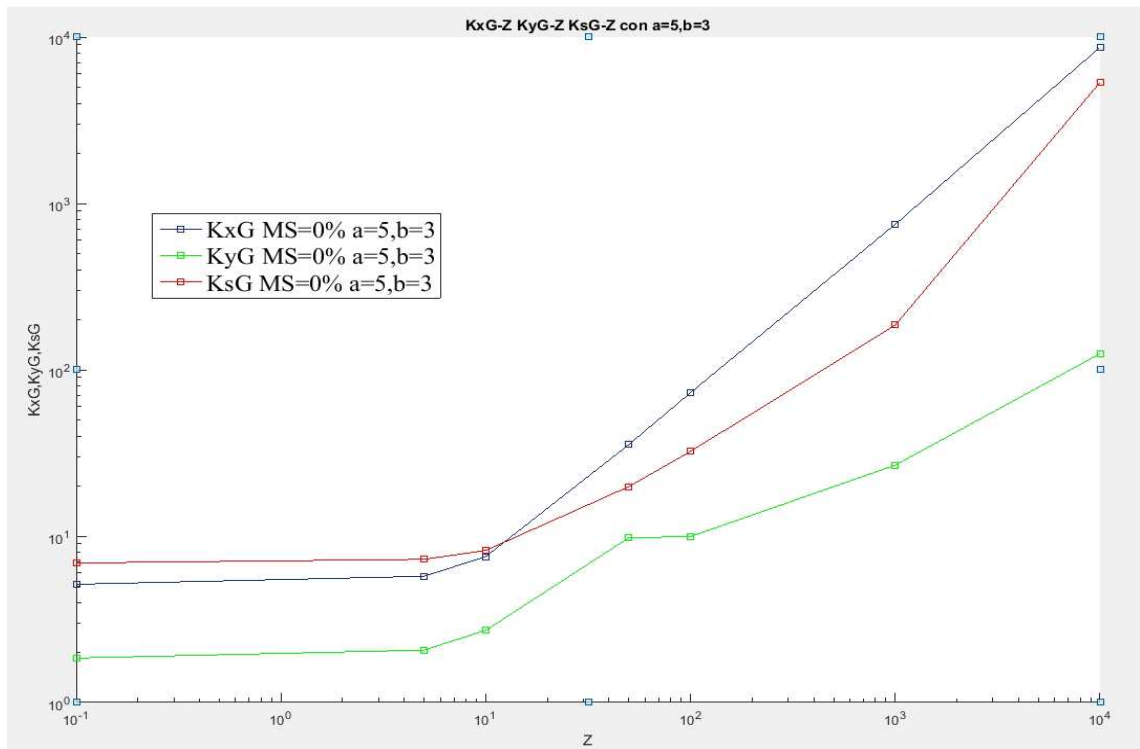


Figura 63 K_{xG} K_{yG} y K_{sG} en función de Z

Se realiza el gráfico en escala logarítmica en los dos ejes. Se puede ver cierta “linealidad” por zonas en los tres parámetros de carga. Se ve también que K_x siempre va a ser mayor K_y y que K_s es mayor que K_x en un pequeño intervalo inicial (bajos valores de Z , $0 < Z < 12$) y que para Z mayores, K_x tiene mayores valores que K_s .

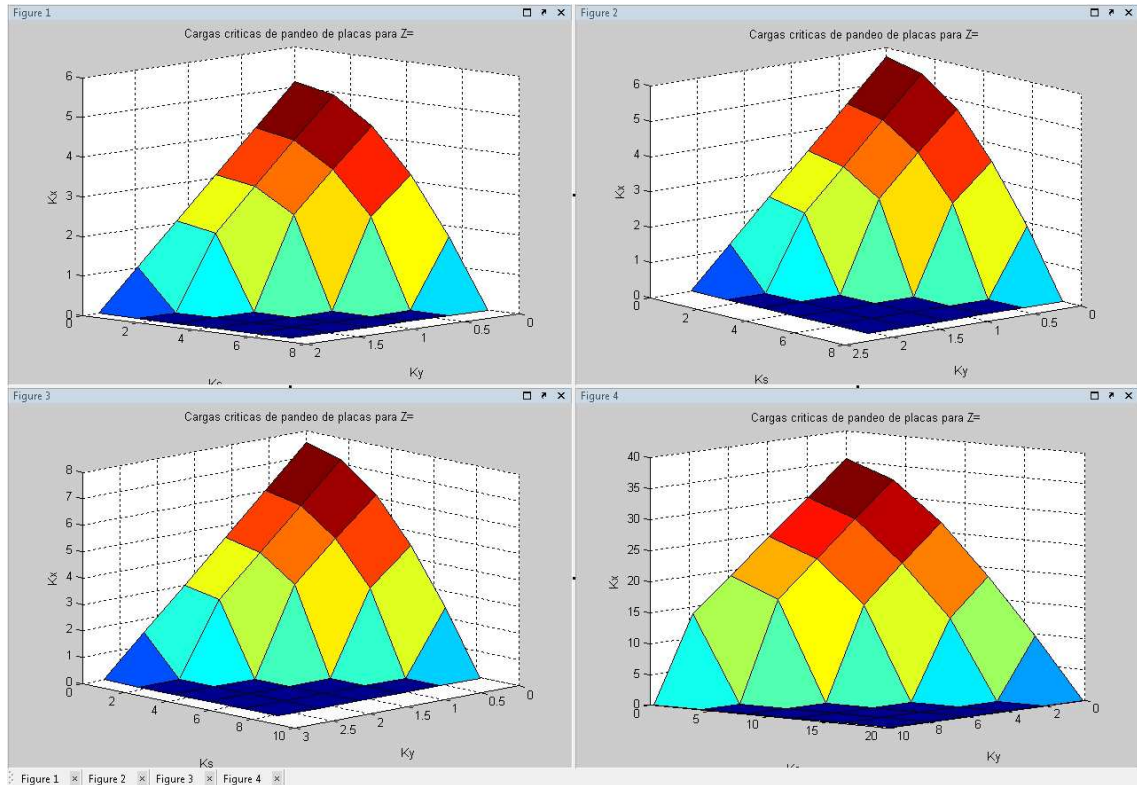


Figura 64 Corrección del Efecto Rebote, al tener en cuenta los valores máximos.

Aquí se corrigió el efecto “rebote”. La figura es continua. Comienza con un K_x máximo en el origen ($K_y = K_s = 0$) y disminuyen en forma monótonica (sin alternancia) hasta cero.

4.3.2.2 Falta de continuidad en la proximidad a $K_x=0$

Corrección por cantidad: dividiendo en un número muy grande (por ejemplo $n=15$) los intervalos de K_y y K_s . Con $n=15$ divisiones hay $n+1=16$ puntos. Los máximos siguen siendo los mismos valores y la falta de continuidad en la parte inferior permanece. Aumentar el número de divisiones n , no resuelve el problema de falta de continuidad en la figura cuando $K_x=0$ y además produce mayor costo de cálculo con la misma precisión en la determinación de los valores máximos. (Figura 64)

Corrección por calidad: con $n=5$ se considera que da valores con precisión suficiente y una gráfica continua en la mayor parte de la figura. Para corregir el problema de la continuidad de la superficie en las proximidades de $K_x=0$, se utilizó como referencia K_s , se dividió el intervalo en n partes, generando $n+1$ puntos (igual que en el caso anterior), y se calculó los K_y , con la siguiente ecuación: $K_y=f(K_s)_{K_x=0}$ (mejora). (Figura 65)

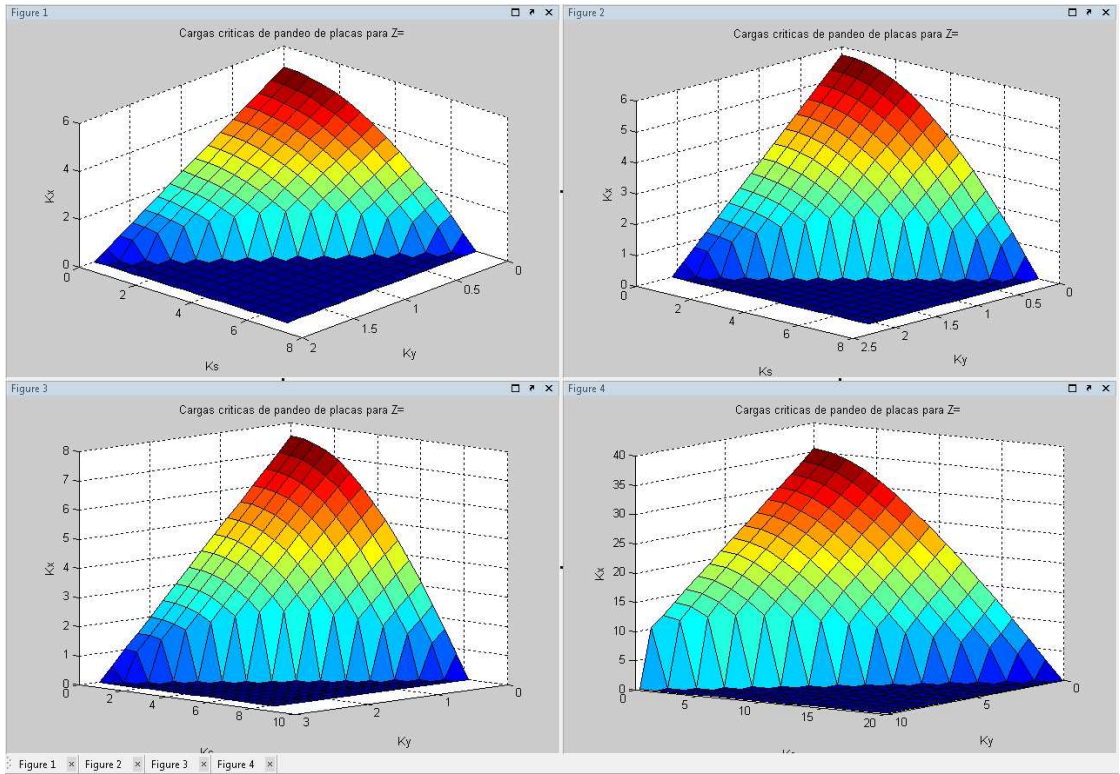


Figura 65 Corrección por cantidad (no funciona)

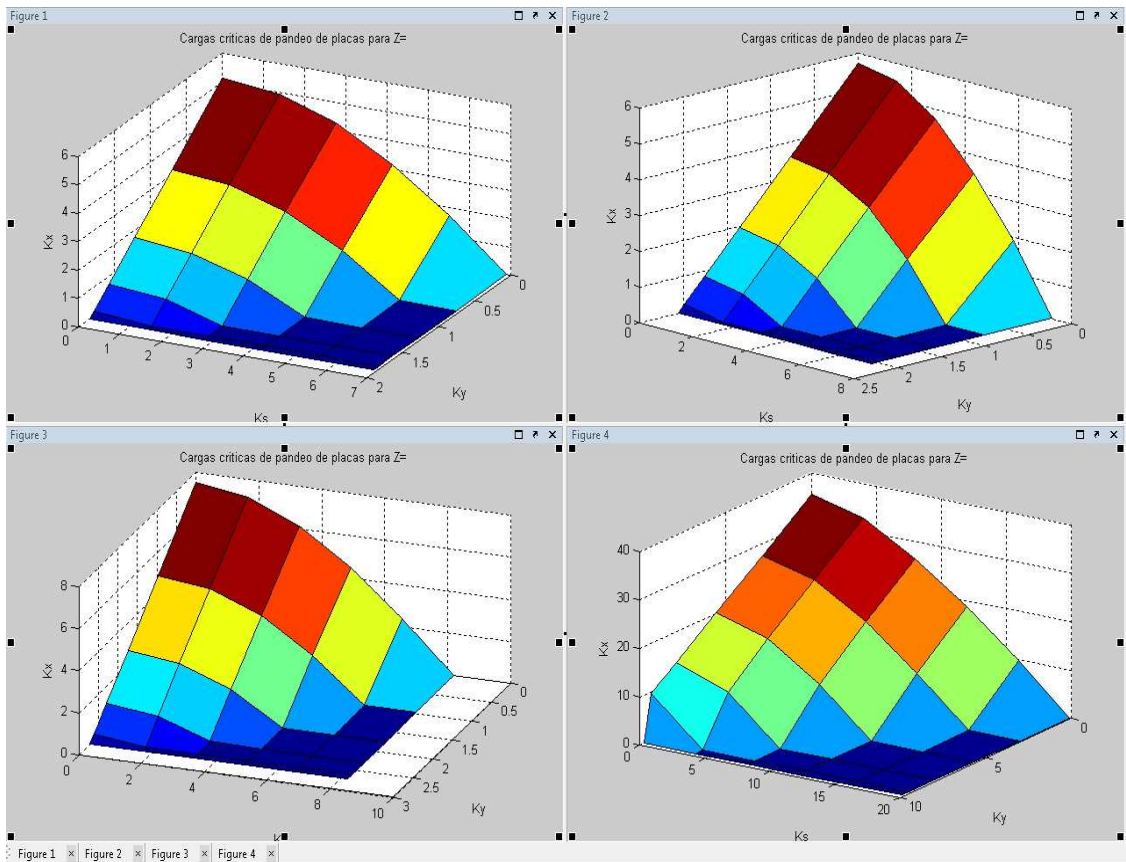


Figura 66 Corrección por calidad (funciona)

A manera de resumen, se muestra el proceso seguido para obtener la representación gráfica final (MS=MSD) de la superficie límite (3D):

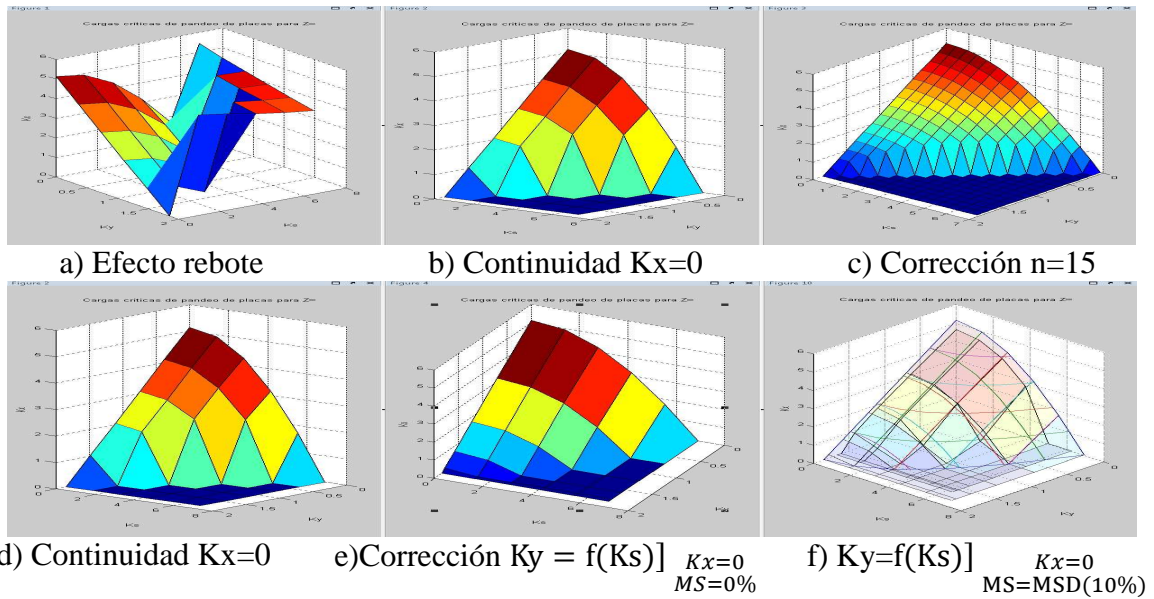


Figura 67 Proceso de obtención de figura 3D

4.3.2.3 Curvas de nivel

La ecuación de trabajo relaciona parámetros geométricos a , b y Z con los parámetros adimensionales de carga K_x , K_y y K_s para una lámina simplemente apoyada en los 4 bordes, dando como resultado curvas bidimensionales. Haremos nuestro análisis con $a=5$ y $b=3$, en 2 etapas:

$K=$ constante:

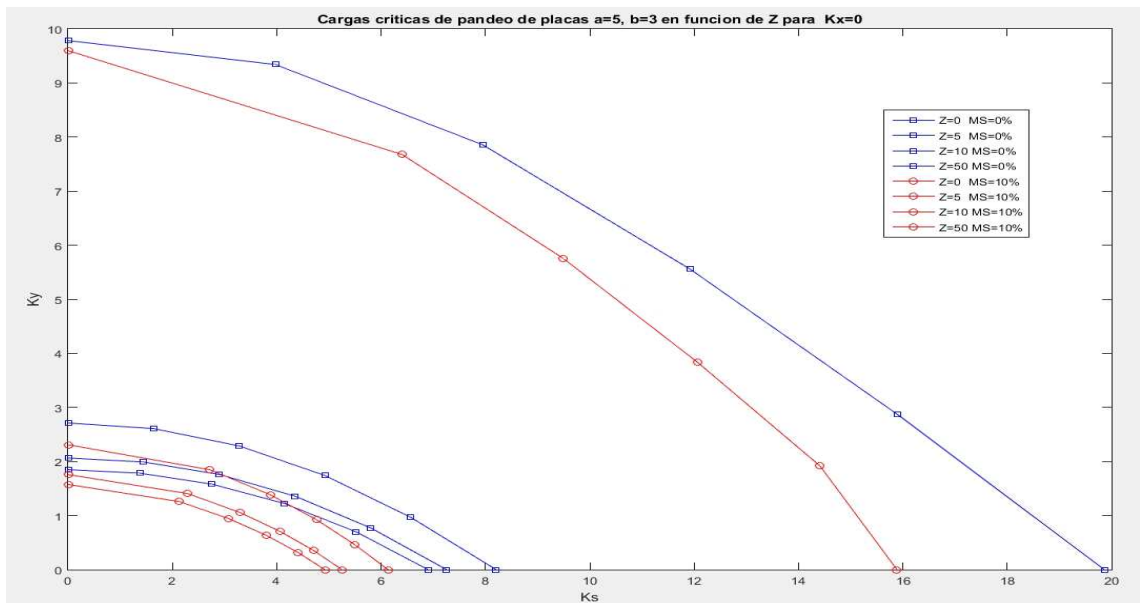


Figura 68 $K_y = f(K_s, Z)]_{K_x=0, MS=0\%}$ y $K_y = f(K_s, Z)]_{K_x=0, MS=MSD(10\%)}$

Se ve que al aumentar K_s disminuye K_y para $K_x=0$ en los dos casos.

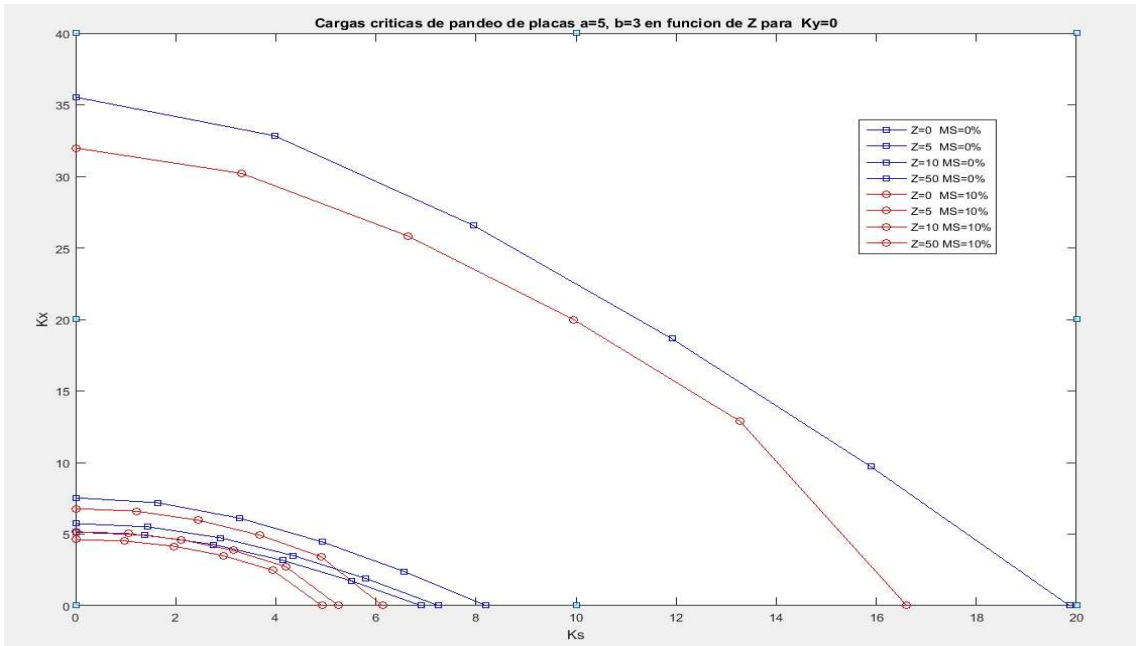


Figura 69 $K_x = f(K_s, Z) \Big|_{K_y=0} \text{ y } K_x = f(K_s, Z) \Big|_{K_y=0}$
 $MS=0\%$ $MS=MSD(10\%)$

Se ve que al aumentar K_s disminuye K_x para $K_y = 0$ en los dos casos.

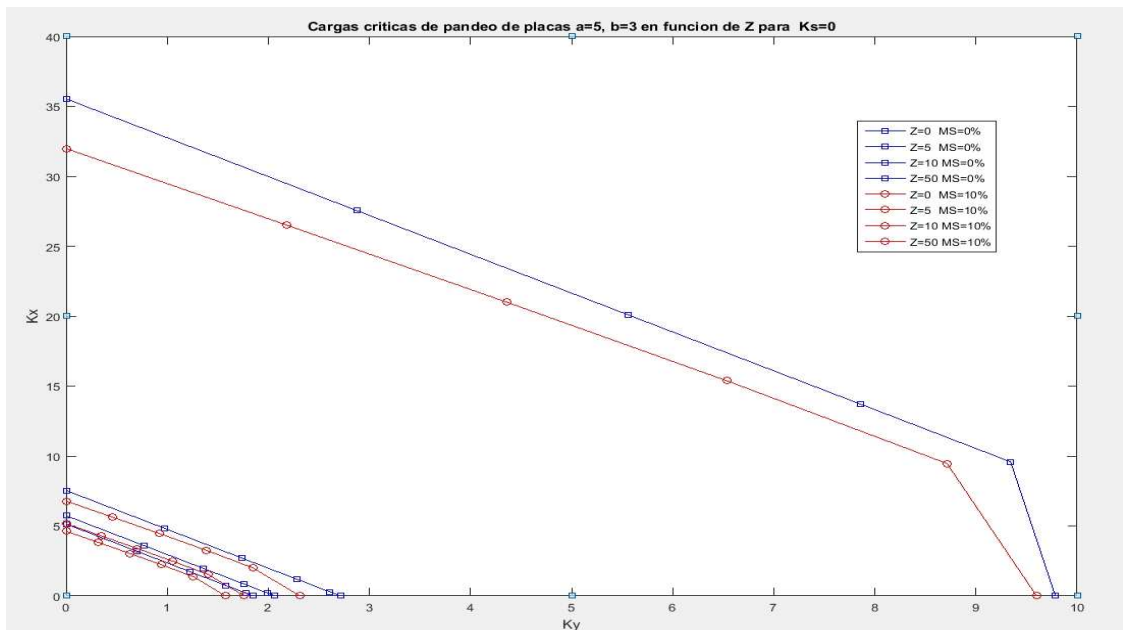


Figura 70 $K_x = f(K_y, Z) \Big|_{K_s=0} \text{ y } K_x = f(K_y, Z) \Big|_{K_s=0}$
 $MS=0\%$ $MS=MSD(10\%)$

Se ve que al aumentar K_y disminuye K_x para $K_s = 0$ en los dos casos.

En general:

- al aumentar Z aumentan los K_x , K_y y K_s .
- al aumentar K_s disminuye K_y para $K_x=0$.
- al aumentar K_s disminuye K_x para $K_y = 0$.

- al aumentar K_y disminuye K_x para $K_s = 0$.
- al aumentar MS disminuyen en los valores de K_x , K_y y K_s .

Z constante:

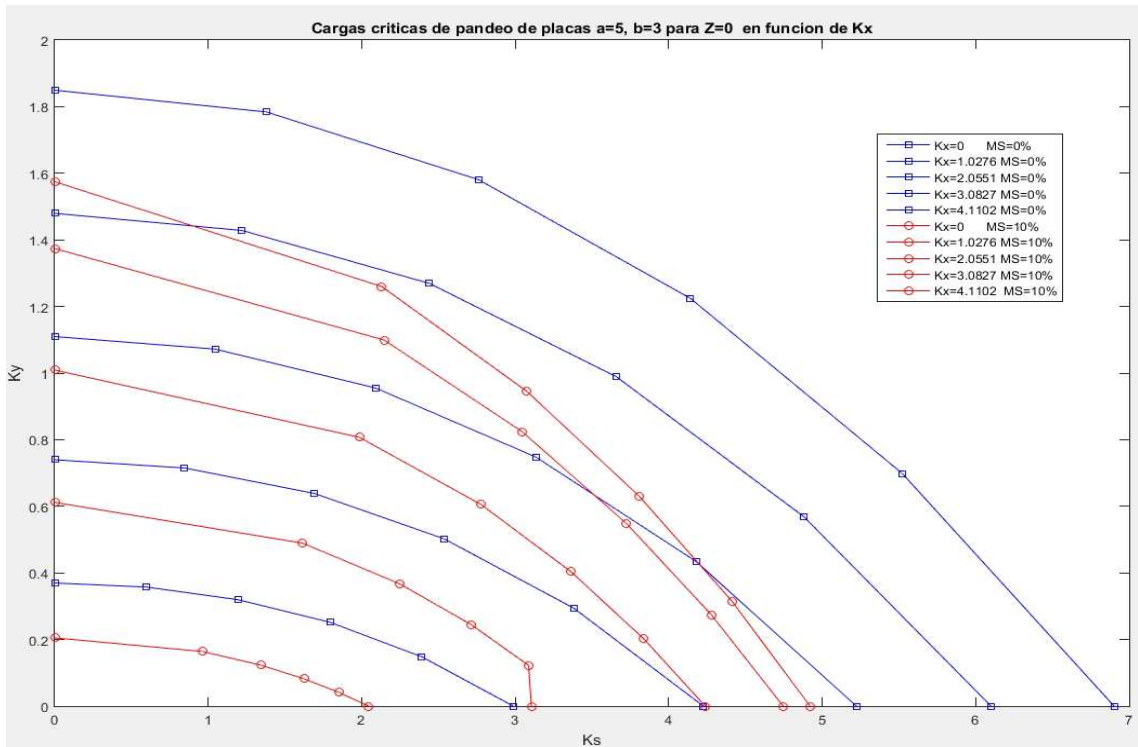


Figura 71 $K_y = f(K_s, K_x)]_{Z=0}$ con $MS=0\%$ y $MS=MSD(10\%)$

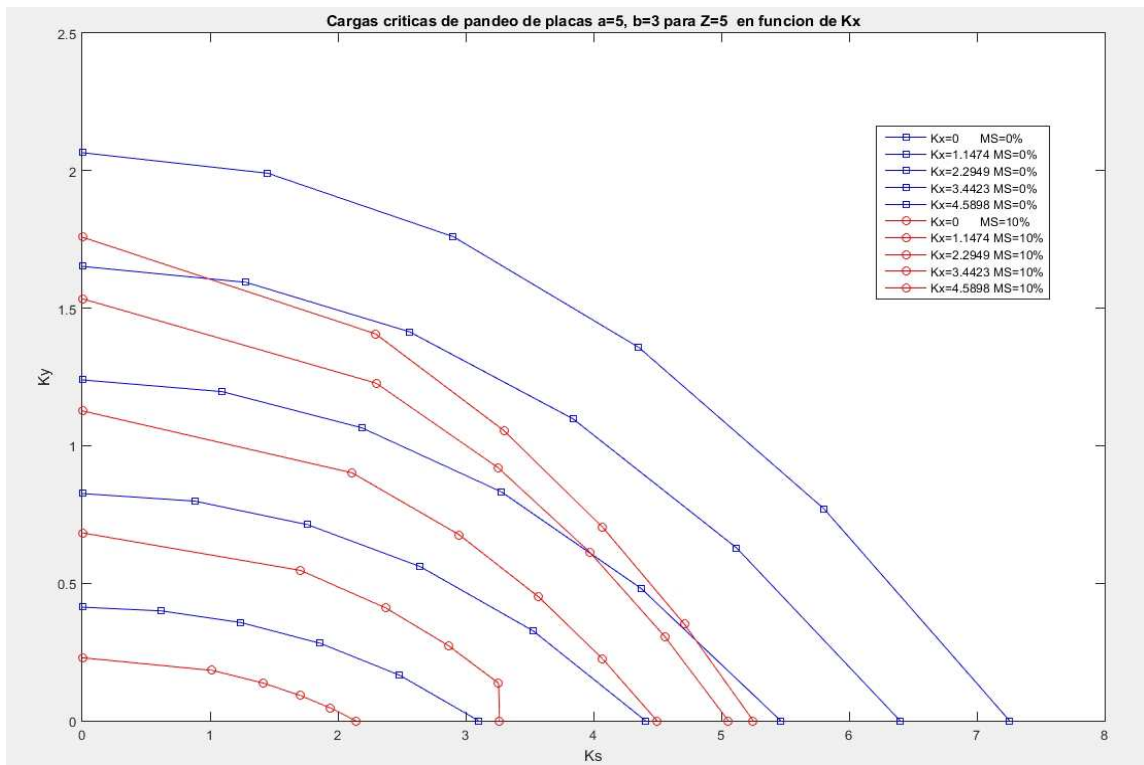


Figura 72 $K_y = f(K_s, K_x)]_{Z=5}$ con $MS=0\%$ y $MS=MSD(10\%)$

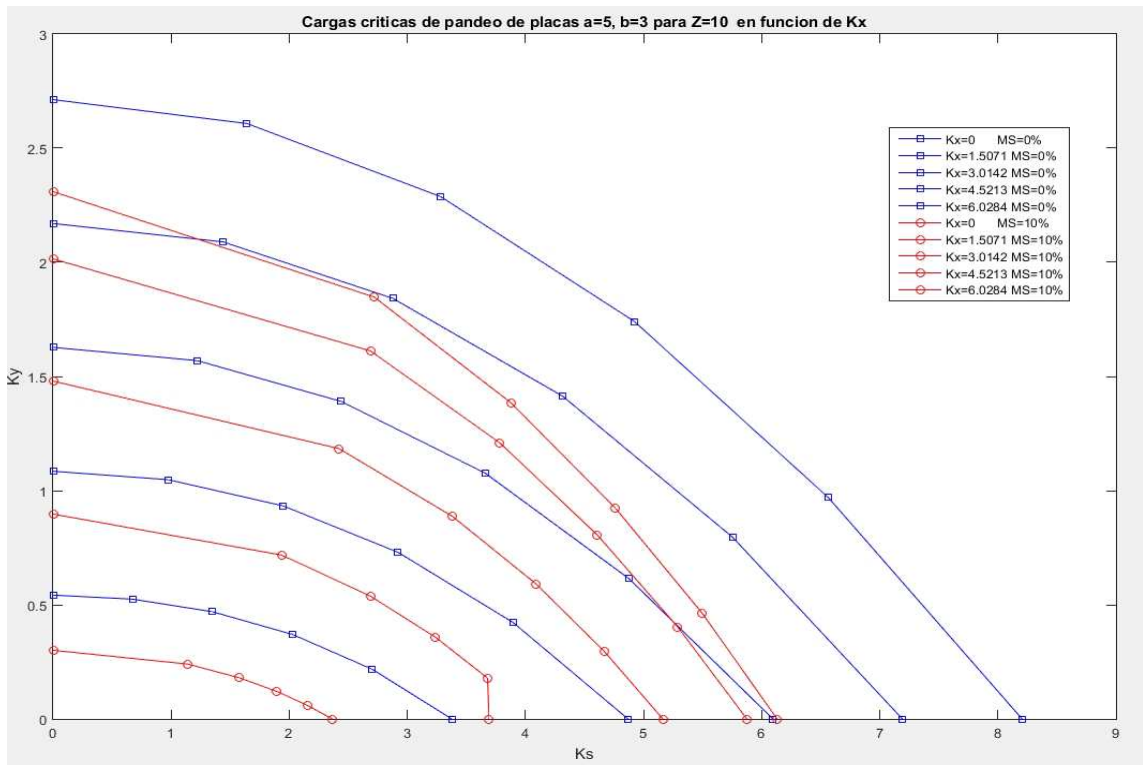


Figura 73 $K_y = f(K_s, K_x)|_{Z=10}$ con $MS=0\%$ y $MS=MSD(10\%)$

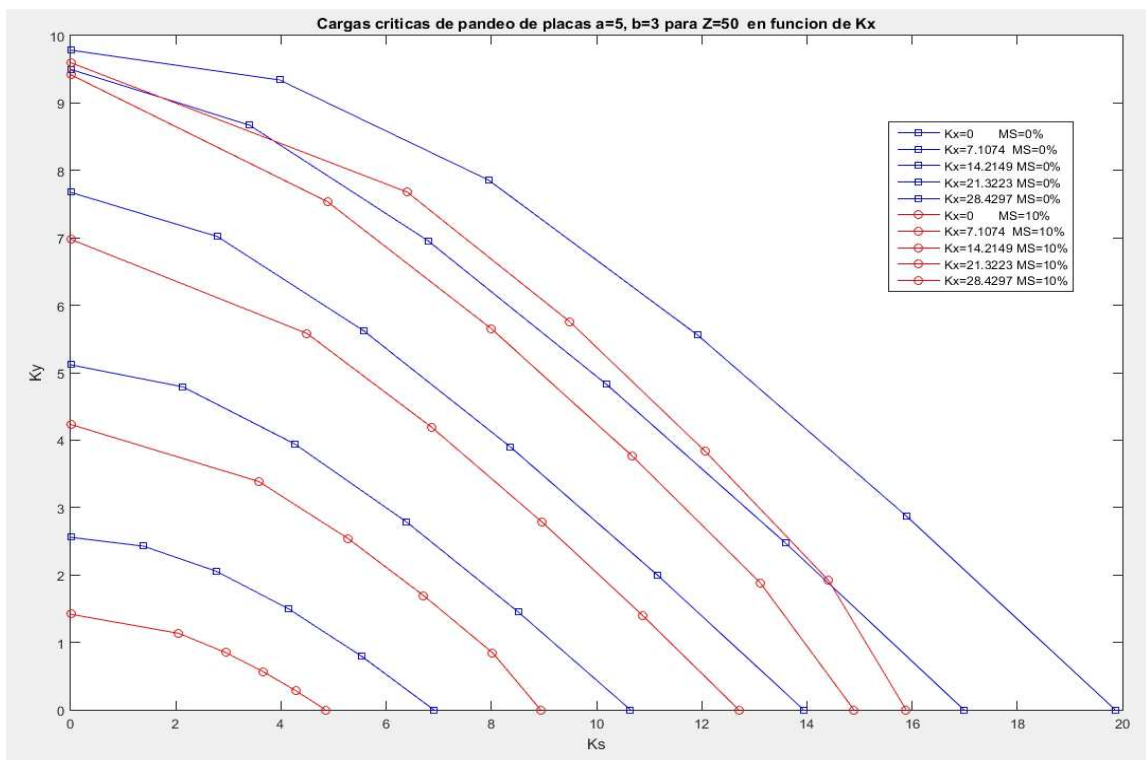


Figura 74 $K_y = f(K_s, K_x)|_{Z=50}$ con $MS=0\%$ y $MS=MSD(10\%)$

En general:

- al aumentar Z aumentan los Kx, Ky y Ks;
- al aumentar MS disminuyen los Kx, Ky y Ks.
- Al aumentar Ks disminuye Ky para Kx=cte en los dos casos.
- Al aumentar Kx disminuyen Ky y Ks en los dos casos.

4.3.2.4 Interpolación de curvas límites

El diseñador puede conocer las ecuaciones que relacionan los parámetros adimensionales de carga Kx, Ky y Ks para un determinado valor de los parámetros geométricos a, b y Z (que depende de b, r, t y μ), para una lamina simplemente apoyada en los cuatro lados, con MS=0% y MS=MSD, con k2=0.9, k3=0.9 y MSD=10% (valores que se pueden modificar a voluntad). Se puede también encontrar la relación inversa.

La ecuación con MS=0% determina la superficie límite, que separa la zona “segura” de la zona “rompe”; y la ecuación con MS=MSD determina una superficie que cumple con el margen de seguridad de diseño.

De esta manera se pueden obtener las ecuaciones que permitan un diseño directo que cumpla con las condiciones de seguridad. Con un diseño directo, queremos decir, sin tener que usar la herramienta de cálculo, lo que significa un ahorro muy importante de tiempo y esfuerzo de cálculo, aprovechando los resultados obtenidos en un cálculo anterior.

Ejemplo 1: Con a=5; b=3; Z=0; MS=0%; Kx=0=cte; Ks=3. Se desea calcular el Ky correspondiente, para ello vamos usar el método directo (usando los resultados de la herramienta de cálculo, en este caso, listaX y la función polyval del MatLab) y el método completo (usando la herramienta de cálculo, ignorando los resultados anteriores y recalculando todo desde el principio, con la función f_barridoY4.)

	Método Directo	Método Completo
Ky	1.5308	1.5308
Error	5.5073e-09	0 (referencia)
tiempo	0.001 seg	0.654 seg
Relación de tiempos	1(referencia)	654
Ecuación	Ky_1=polyval(listaX(1,4:9),3)	Ky_2=f_barridoY4(M0,1,0,3)

Tabla 20 Comparación de Métodos para MS=0%

Ks	0,0000	0,6902	1,3803	2,0705	2,7607	3,4509	4,1410	4,8312	5,5214	6,2115	6,9017
Ky_L1	1,8496	1,8334	1,7840	1,7006	1,5810	1,4232	1,2247	0,9836	0,6988	0,3704	-6,74E-07
Ky_L2	1,8496	1,8333	1,7840	1,7006	1,5810	1,4232	1,2247	0,9836	0,6988	0,3705	0
error	-2,22 E-16	4,58 E-05	-9,72 E-12	-7,12 E-06	1,64 E-12	-2,81 E-06	1,31 E-11	1,71 E-05	-8,06 E-11	-9,13 E-05	-6,74 E-07

Tabla 21 Error en $Ky = f(Ks)_{MS=0\%}^{Kx=0}$ para a=5, b=3 y Z=0 calculados con los coeficientes de la primera fila (n=1) de la Tabla 24 pág.82.

- 1) Ky_L1 se calculó por Método Directo (usando los resultados de la herramienta de cálculo, en este caso, listaX y la función polyval del MatLab)

- 2) Ky_L2 se calculó por Método Completo (usando la herramienta de cálculo, ignorando los resultados anteriores y recalculando todo desde el principio, con la función f_barridoY4.)
- 3) La Tabla 21 sigue el ejemplo de la Tabla 20 pero aplicada a 11 puntos, 6 de ellos se usaron para la interpolación (procedimiento que a partir de un conjunto de puntos permite obtener la relación entre las variables por medio de una ecuación).
- 4) Los puntos de interpolación tienen errores muy bajos (error=1.64e-12)
- 5) los valores intermedios con errores aceptables (error=1.71e-05). Los puntos de mitad de intervalo tienen mayor error, y evaluando esos errores se determina si hace falta otro punto más para obtener la precisión deseada.

Ejemplo 2: Con $a=5$; $b=3$; $Z=0$; $MS=10\%$; $Kx=0=cte$; $Ks=3$ y se desea calcular el Ky correspondiente, para ello vamos usar el método directo (usando los resultados de la herramienta de cálculo, en este caso, lista_MSX y la función polyval del MatLab) y el método completo (usando la herramienta de cálculo, ignorando los resultados anteriores y recalculando todo desde el principio, con la función f_ITE_Kylim4.)

	Método Directo	Método Completo
Ky	0.9741	0.9741
Error	1.4121e-06	0(referencia)
tiempo	0.002 seg	1.531 seg
Relación de tiempos	1(referencia)	765.5
Ecuación	Ky_3=polyval(lista_MSX(1,4:9),3)	[ITEY2]=f_ITE_Kylim4(M0,1,0,3,MSD); Ky_4=ITEY2(1,3);

Tabla 22 Comparación de Métodos para MS=MSD

Ks	0	1,0634	2,1267	2,6015	3,0763	3,4417	3,8071	4,1082	4,4092	4,6652	4,9211
Ky_L3	1,5750	1,4915	1,26	1,1152	0,945	0,796	0,63	0,4794	0,315	0,1634	-8,9 e-16
Ky_L4	1,5750	1,4914	1,26	1,1152	0,945	0,796	0,63	0,4794	0,315	0,1634	1,4 e-16
error	0	1.01 e-04	0	-2,9 e-05	-1,1 e-16	-2,9 e-06	-3,3 e-16	1,9 e-06	-3,3 e-16	-2,9 e-06	-1,03 e-15

Tabla 23 Error en $Ky = f(Ks)_{MS=10\%}^{Kx=0}$ para $a=5$, $b=3$ y $Z=0$ calculados con los coeficientes de la primera fila ($n=1$) de la Tabla 26 pág.83.

- 1) Ky_L3 se calculó por Método Directo (usando los resultados de la herramienta de cálculo, en este caso, lista_MSX y la función polyval del MatLab)
- 2) Ky_L4 se calculó por Método Completo (usando la herramienta de cálculo, ignorando los resultados anteriores y recalculando todo desde el principio, con la función f_ITE_Kylim4.)
- 3) La Tabla 23 sigue el ejemplo de la Tabla 22 pero aplicada a 11 puntos, 6 de ellos se usaron para la interpolación (procedimiento que a partir de un conjunto de puntos permite obtener la relación entre las variables por medio de una ecuación).
- 4) Los puntos de interpolación tienen errores muy bajos (error= -1.1 e-16)
- 5) los valores intermedios con errores aceptables (error=1.01e-04). Los puntos de mitad de intervalo tienen mayor error, y evaluando esos errores se determina si hace falta otro punto más para obtener la precisión deseada.

El ejemplo 1 y el ejemplo 2 tienen los mismos valores de $a=5$; $b=3$; $Z=0$; $K_x=0=cte$; y tienen poco error y no necesitaron otro punto para la interpolación; y como diferencia tenemos:

- 1) En el ejemplo 1, tenemos $tiempo_{completo}^{MS=0\%} = 654 * tiempo_{directo}^{MS=0\%}$
- 2) En el ejemplo 2, tenemos $tiempo_{completo}^{MS=MSD} = 765.5 * tiempo_{directo}^{MS=MSD}$

Nota: Usando el método directo tenemos un gran ahorro de tiempo y que este ahorro aumenta cuando usamos el método directo con $MS=MSD$.

Un polinomio de grado pequeño ($n < 5$), no describe correctamente la relación (curva) entre las variables, y un polinomio de grado muy grande ($n > 5$), tiene coeficientes muy pequeños próximos a cero y que no son significativos pero que también hay que calcular.

Se toma como grado del polinomio a $n=5$ teniendo en cuenta la correcta representación y la economía de cálculo. A continuación, se muestra en forma de tablas, la ecuación polinómica de quinto grado ($n=5$) que se forma con 6 coeficientes ($n+1=6$) que se calcula a partir de un conjunto de puntos por medio de interpolaciones.

Como se necesitan 6 ecuaciones para determinar los 6 coeficientes (incógnitas) es necesario proveer 6 pares de datos como mínimo. Si hacemos las cuentas, hay 4 valores de Z , por lo tanto, hay 4 figuras; en cada figura hay 5 curvas, ($4*5=20$ curvas) y por curva se necesitan 6 puntos porque se necesitan calcular los 6 coeficientes ($4*5*6=120$ puntos de cálculo). Si extendemos el cálculo a K_x , K_y y K_s (3 variables) en total tenemos ($4*5*6*3=360$ puntos de cálculo). Si además calculamos la relación inversa ($4*5*6*3*2=720$) y con 2 valores de MS ($4*5*6*3*2*2=1440$). Lo que permite obtener 12 tablas de 20 filas y 6 columnas ($12*20*6=1440$).

Podemos calcular el tiempo que se necesita para realizar este análisis.

$$Tiempo = 1440 \text{ operaciones} * 1.531 \frac{\text{seg}}{\text{operaciones}} = 2205 \text{ seg.} = 36 \text{ min.}$$

En realidad demora menos tiempo porque en este tiempo/operaciones se incluyen operaciones que se calculan una sola vez. Tardando aproximadamente unos 20 min.

A continuación, mostramos las tablas que se obtienen en el caso particular con los siguientes parámetros geométricos: $a=5$; $b=3$; $Z= [0; 5; 10; 50]$; agrupadas de la siguiente manera:

Tablas con $K_x = cte$

MS=0%			$K_y = f(K_s) = a_1 K_s^5 + b_1 K_s^4 + c_1 K_s^3 + d_1 K_s^2 + e_1 K_s + f_1$					
			K_s^5	K_s^4	K_s^3	K_s^2	K_s	1
n	Z	K_x	a1	b1	c1	d1	e1	f1
1	0	0,0000	0,000021	-0,0003	0,0004	-0,0347	0,0003	1,8496
2	0	1,0276	0,000031	-0,0004	0,0007	-0,0352	0,0006	1,4797
3	0	2,0551	0,000043	-0,0006	0,0010	-0,0354	0,0006	1,1098
4	0	3,0827	0,000055	-0,0008	0,0010	-0,0352	0,0004	0,7398
5	0	4,1102	0,000033	-0,0011	0,0006	-0,0346	0,0001	0,3699
6	5	0,0000	0,000017	-0,0002	0,0002	-0,0353	0,0000	2,0654
7	5	1,1474	0,000028	-0,0004	0,0006	-0,0360	0,0004	1,6523
8	5	2,2949	0,000042	-0,0006	0,0009	-0,0364	0,0006	1,2392
9	5	3,4423	0,000060	-0,0008	0,0011	-0,0364	0,0005	0,8262
10	5	4,5898	0,000050	-0,0012	0,0008	-0,0358	0,0002	0,4131
11	10	0,0000	0,000006	0,0000	-0,0006	-0,0370	-0,0013	2,7128
12	10	1,5071	0,000016	-0,0002	-0,0001	-0,0381	-0,0004	2,1702
13	10	3,0142	0,000034	-0,0004	0,0005	-0,0392	0,0003	1,6277
14	10	4,5213	0,000066	-0,0008	0,0012	-0,0400	0,0006	1,0851
15	10	6,0284	0,000103	-0,0015	0,0014	-0,0398	0,0004	0,5426
16	50	0,0000	-0,000004	0,0002	-0,0022	-0,0233	0,0049	9,7850
17	50	7,1074	0,000003	-0,0002	0,0050	-0,0759	-0,0364	9,5007
18	50	14,2149	0,000010	-0,0005	0,0090	-0,1018	-0,0123	7,6760
19	50	21,3223	0,000002	-0,0002	0,0060	-0,0894	0,0122	5,1173
20	50	28,4297	-0,000022	0,0003	0,0015	-0,0725	0,0019	2,5587

Tabla 24 Coeficientes de $K_y = f(K_s) \Big|_{MS=0\%}^{K_x=cte}$

MS=0%			$K_s = g(K_y) = a_2 K_y^5 + b_2 K_y^4 + c_2 K_y^3 + d_2 K_y^2 + e_2 K_y + f_2$					
			K_y^5	K_y^4	K_y^3	K_y^2	K_y	1
n	Z	K_x	a2	b2	c2	d2	e2	f2
1	0	0,0000	-33,4214	175,0931	-333,9459	271,6586	-80,5165	6,9017
2	0	1,0276	-97,3231	410,3899	-630,5642	413,8250	-98,8584	6,1001
3	0	2,0551	-378,5372	1204,3638	-1397,4884	693,5943	-125,2366	5,2233
4	0	3,0827	-2479,7517	5287,6719	-4115,4791	1371,8244	-166,3331	4,2261
5	0	4,1102	-56851,8487	60727,4755	-23686,6839	3959,1805	-240,8133	2,9883
6	5	0,0000	-19,0698	111,0408	-235,2285	212,3105	-69,8883	7,2560
7	5	1,1474	-56,0870	263,1138	-449,5096	327,7273	-87,0222	6,3994
8	5	2,2949	-220,8793	782,7050	-1011,1394	558,3704	-112,1976	5,4655
9	5	3,4423	-1470,9549	3498,5038	-3036,5416	1128,4135	-152,5246	4,4075
10	5	4,5898	-34557,6305	41260,4701	-17990,4980	3362,0578	-228,5892	3,1018
11	10	0,0000	-4,5219	34,0486	-93,0694	108,0106	-45,9642	8,2048
12	10	1,5071	-13,6593	83,0780	-183,6798	172,7966	-59,3908	7,1912
13	10	3,0142	-55,6653	256,5671	-430,4978	308,0789	-80,3370	6,0954
14	10	4,5213	-388,4111	1206,6272	-1366,7674	661,9535	-116,6384	4,8678
15	10	6,0284	-9816,4898	15406,1985	-8829,7914	2169,0601	-193,7751	3,3763
16	50	0,0000	-0,0098	0,2489	-2,2606	8,5661	-12,5682	19,8608
17	50	7,1074	-0,0021	0,0471	-0,3791	1,2562	-2,7937	16,9868
18	50	14,2149	-0,0054	0,0983	-0,6414	1,7205	-2,9679	13,9386
19	50	21,3223	-0,0645	0,8247	-3,7816	7,2032	-6,1919	10,6450
20	50	28,4297	-2,3643	15,8339	-38,2280	38,7049	-15,3614	6,9059

Tabla 25 Coeficientes de $K_s = g(K_y) \Big|_{MS=0\%}^{K_x=cte}$

MS=10%			$Ky=f(Ks)=a1*Ks^5 + b1*Ks^4 + c1*Ks^3 + d1*Ks^2 + e1*Ks + f1$					
			Ks^5	Ks^4	Ks^3	Ks^2	Ks	1
n	Z	Kx	a1	b1	c1	d1	e1	f1
1	0	0,0000	-0,0002	0,0013	-0,0012	-0,0680	-0,0068	1,5748
2	0	1,0276	-0,0002	0,0023	-0,0090	-0,0410	-0,0157	1,3741
3	0	2,0551	-0,0001	0,0005	-0,0020	-0,0479	-0,0010	1,0092
4	0	3,0827	-4,0682	39,3102	-139,9892	217,2309	-123,6896	0,6119
5	0	4,1102	-0,0021	0,0088	-0,0184	-0,0286	-0,0041	0,2052
6	5	0,0000	-0,0001	0,0012	-0,0021	-0,0631	-0,0078	1,7586
7	5	1,1474	-0,0002	0,0016	-0,0070	-0,0423	-0,0140	1,5344
8	5	2,2949	0,0000	-0,0011	0,0051	-0,0609	0,0092	1,1269
9	5	3,4423	-9,7102	99,1008	-372,7906	611,2585	-367,7372	0,6833
10	5	4,5898	-0,0008	0,0019	-0,0040	-0,0419	0,0005	0,2291
11	10	0,0000	-0,0001	0,0011	-0,0052	-0,0494	-0,0151	2,3098
12	10	1,5071	-0,0001	0,0007	-0,0044	-0,0433	-0,0122	2,0154
13	10	3,0142	0,0001	-0,0012	0,0053	-0,0619	0,0115	1,4802
14	10	4,5213	-4,2678	49,2212	-209,2705	387,8765	-263,8576	0,8975
15	10	6,0284	-0,0008	0,0023	-0,0065	-0,0403	-0,0007	0,3009
16	50	0,0000	-0,0001	0,0052	-0,0793	0,4856	-1,3155	9,5992
17	50	7,1074	-0,0001	0,0020	-0,0246	0,1031	-0,4988	9,4211
18	50	14,2149	0,0000	-0,0004	0,0083	-0,1009	0,0090	6,9794
19	50	21,3223	-0,0006	0,0144	-0,1198	0,3760	-0,6069	4,2332
20	50	28,4297	0,0000	-0,0003	0,0049	-0,0820	0,0117	1,4182

Tabla 26 Coeficientes de $Ky = f(Ks) \Big|_{MS=10\%}^{Kx=cte}$

MS=10%			$Ks=g(Ky)=a2*Ky^5 + b2*Ky^4 + c2*Ky^3 + d2*Ky^2 + e2*Ky + f2$					
			Ky^5	Ky^4	Ky^3	Ky^2	Ky	1
n	Z	Kx	a2	b2	c2	d2	e2	f2
1	0	0,0000	-2,2419	6,8406	-7,5438	2,9486	-1,9864	4,9208
2	0	1,0276	-4,6265	12,2717	-11,7948	4,1072	-2,1721	4,7458
3	0	2,0551	-20,7468	40,4509	-28,6234	7,4457	-2,6182	4,2382
4	0	3,0827	-120,0119	83,6144	7,5218	-20,0893	2,0700	3,1053
5	0	4,1102	-29435,9605	11668,9593	-1675,8998	88,5476	-6,2090	2,0447
6	5	0,0000	-1,4034	4,7766	-5,8803	2,5864	-1,9033	5,2500
7	5	1,1474	-2,8739	8,5100	-9,1361	3,5737	-2,0803	5,0549
8	5	2,2949	-12,7668	27,8097	-22,0007	6,4290	-2,5044	4,4966
9	5	3,4423	-71,8005	53,9099	8,1417	-17,9375	2,1310	3,2647
10	5	4,5898	-17942,8247	7948,5210	-1276,9093	75,6675	-5,8146	2,1423
11	10	0,0000	-0,4355	1,9422	-3,1338	1,8398	-1,7218	6,1303
12	10	1,5071	-0,8711	3,3860	-4,7735	2,4835	-1,8770	5,8741
13	10	3,0142	-3,7695	10,7800	-11,1962	4,3249	-2,2245	5,1626
14	10	4,5213	-21,1386	21,2279	3,4529	-11,4727	1,7712	3,6915
15	10	6,0284	-5178,9583	3011,2186	-635,3838	49,5200	-4,8120	2,3647
16	50	0,0000	-0,0005	0,0066	-0,0151	-0,1499	-0,4658	15,8867
17	50	7,1074	-0,0002	0,0010	0,0137	-0,1792	-0,6606	14,8932
18	50	14,2149	-0,0025	0,0340	-0,1659	0,3073	-1,4959	12,7054
19	50	21,3223	-0,0208	0,1438	-0,2838	-0,0872	-0,8785	8,9359
20	50	28,4297	-3,8568	10,5987	-10,5286	3,9662	-2,4975	4,8483

Tabla 27 Coeficientes de $Ks = g(Ky) \Big|_{MS=10\%}^{Kx=cte}$

Tablas con $K_y = \text{cte}$

MS=0%			$K_x = f(K_s) = a_1 \cdot K_s^5 + b_1 \cdot K_s^4 + c_1 \cdot K_s^3 + d_1 \cdot K_s^2 + e_1 \cdot K_s + f_1$					
			K_s^5	K_s^4	K_s^3	K_s^2	K_s	1
n	Z	K_y	a1	b1	c1	d1	e1	f1
1	0	0,0000	-0,0001	0,0020	-0,0087	-0,1101	0,0185	5,1378
2	0	0,3699	-0,0001	0,0030	-0,0193	-0,0665	-0,0145	4,1102
3	0	0,7398	0,0000	0,0008	-0,0083	-0,0822	-0,0063	3,0827
4	0	1,1098	0,0001	-0,0006	-0,0012	-0,0928	-0,0009	2,0551
5	0	1,4797	0,0001	-0,0009	0,0004	-0,0950	0,0001	1,0276
6	5	0,0000	-0,0001	0,0014	-0,0045	-0,1255	0,0275	5,7372
7	5	0,4131	-0,0002	0,0031	-0,0198	-0,0685	-0,0152	4,5898
8	5	0,8262	0,0000	0,0010	-0,0093	-0,0831	-0,0076	3,4423
9	5	1,2392	0,0001	-0,0005	-0,0016	-0,0951	-0,0012	2,2949
10	5	1,6523	0,0001	-0,0008	0,0004	-0,0978	0,0001	1,1474
11	10	0,0000	0,0000	0,0003	0,0049	-0,1645	0,0451	7,5355
12	10	0,5426	-0,0001	0,0031	-0,0193	-0,0799	-0,0138	6,0284
13	10	1,0851	-0,0001	0,0017	-0,0118	-0,0875	-0,0112	4,5213
14	10	1,6277	0,0000	0,0000	-0,0030	-0,1025	-0,0023	3,0142
15	10	2,1702	0,0001	-0,0006	0,0002	-0,1072	0,0000	1,5071
16	50	0,0000	0,0000	-0,0005	0,0135	-0,2287	0,0440	35,5371
17	50	1,9570	0,0000	-0,0005	0,0139	-0,2346	0,0505	30,1010
18	50	3,9140	0,0000	-0,0005	0,0136	-0,2401	0,0451	24,6649
19	50	5,8710	0,0000	-0,0003	0,0122	-0,2514	0,0312	19,2288
20	50	7,8280	0,0000	0,0004	0,0114	-0,3145	0,0168	13,7926

Tabla 28 Coeficientes de $K_x = f(K_s) \Big|_{MS=0\%}^{K_y=\text{cte}}$

MS=0%			$K_s = g(K_x) = a_1 \cdot K_x^5 + b_1 \cdot K_x^4 + c_1 \cdot K_x^3 + d_1 \cdot K_x^2 + e_1 \cdot K_x + f_1$					
			K_x^5	K_x^4	K_x^3	K_x^2	K_x	1
n	Z	K_y	a2	b2	c2	d2	e2	f2
1	0	0,0000	-0,1371	1,9136	-9,6458	20,5144	-16,0859	6,9017
2	0	0,3699	-0,4563	5,1848	-21,3460	37,2341	-23,7285	6,2126
3	0	0,7398	-1,7683	15,2142	-47,5299	63,0901	-30,5760	5,4281
4	0	1,1098	-10,9943	63,2807	-132,4061	117,8820	-38,3731	4,4854
5	0	1,4797	-237,8630	683,0349	-713,0928	316,7610	-51,5773	3,2230
6	5	0,0000	-0,0757	1,1716	-6,5476	15,4195	-13,4672	7,2560
7	5	0,4131	-0,2616	3,3051	-15,1177	29,2674	-20,7415	6,5187
8	5	0,8262	-1,0282	9,8477	-34,2319	50,5233	-27,2533	5,6841
9	5	1,2392	-6,4687	41,4974	-96,7469	95,9315	-34,7997	4,6875
10	5	1,6523	-141,4413	453,1616	-527,7932	261,4994	-47,5057	3,3617
11	10	0,0000	-0,0162	0,3229	-2,3203	6,9995	-8,0408	8,2048
12	10	0,5426	-0,0634	1,0378	-6,1366	15,3115	-14,1054	7,3248
13	10	1,0851	-0,2590	3,2255	-14,5551	27,8221	-19,5255	6,3446
14	10	1,6277	-1,6898	14,1435	-42,9804	55,4656	-26,2521	5,1961
15	10	2,1702	-38,2970	160,6472	-244,8603	158,6495	-37,7366	3,7005
16	50	0,0000	0,0000	0,0004	-0,0133	0,1704	-1,1561	19,8608
17	50	1,9570	0,0000	0,0009	-0,0241	0,2665	-1,4203	17,1798
18	50	3,9140	0,0000	0,0021	-0,0478	0,4432	-1,8211	14,3966
19	50	5,8710	-0,0001	0,0060	-0,1071	0,7935	-2,4333	11,4286
20	50	7,8280	-0,0006	0,0198	-0,2557	1,3850	-2,9828	8,0060

Tabla 29 Coeficientes de $K_s = g(K_x) \Big|_{MS=0\%}^{K_y=\text{cte}}$

MS=10%			Kx=f(Ks)= a1*Ks^5 +b1*Ks^4+c1*Ks^3+d1*Ks^2+e1*Ks+f1					
			Ks^5	Ks^4	Ks^3	Ks^2	Ks	1
n	Z	Ky	a1	b1	c1	d1	e1	f1
1	0	0,0000	-1,0358	15,0753	-81,1401	190,7747	-165,2282	4,9211
2	0	0,3150	-2,7850	34,0265	-153,9781	304,9582	-222,8535	4,4093
3	0	0,6299	-8,3730	81,6118	-294,9055	466,9597	-273,1551	3,8072
4	0	0,9449	-34,8308	250,0424	-665,9101	777,8054	-335,9309	3,0765
5	0	1,2599	-308,2284	1370,1647	-2261,0050	1637,7853	-439,0272	2,1271
6	5	0,0000	-0,5642	9,1089	-54,3450	141,5009	-135,6295	5,2499
7	5	0,3517	-1,5782	21,4285	-107,7055	236,7665	-191,9275	4,7068
8	5	0,7034	-4,8347	52,4337	-210,7399	370,9648	-241,1333	4,0704
9	5	1,0552	-20,4568	163,5628	-485,0381	630,6283	-303,0835	3,2985
10	5	1,4069	-184,9716	916,7308	-1686,3489	1361,4366	-406,6792	2,2915
11	10	0,0000	-0,1143	2,3764	-18,2185	60,7870	-74,5983	6,2084
12	10	0,4620	-0,3656	6,4237	-41,7117	118,1986	-123,3014	5,4937
13	10	0,9239	-1,1791	16,6045	-86,5516	197,2734	-165,8101	4,7585
14	10	1,3859	-5,2421	54,5897	-210,6748	356,0697	-222,2439	3,8742
15	10	1,8479	-50,4929	327,0071	-785,7001	827,9994	-322,6767	2,7171
16	50	0,0000	0,0000	0,0018	-0,0568	0,7722	-4,0235	16,7232
17	50	1,9198	0,0000	0,0037	-0,1032	1,2150	-5,3929	14,3959
18	50	3,8397	-0,0001	0,0091	-0,2095	2,0739	-7,6547	12,0561
19	50	5,7595	-0,0005	0,0272	-0,5023	3,9898	-11,7171	9,4880
20	50	7,6794	-0,0031	0,1122	-1,5099	8,7990	-18,8825	6,4495

Tabla 30 Coeficientes de $Kx = f(Ks)_{MS=10\%}^{Ky=cte}$

MS=10%			Ks=f(Kx)= a1*Kx^5 +b1*Kx^4+c1*Kx^3+d1*Kx^2+e1*Kx+f1					
			Kx^5	Kx^4	Kx^3	Kx^2	Kx	1
n	Z	Ky	a2	b2	c2	d2	e2	f2
1	0	0,0000	-0,0092	0,0897	-0,3128	0,3147	-0,1937	4,6240
2	0	0,3150	-0,0134	0,1159	-0,3626	0,3426	-0,1905	3,8341
3	0	0,6299	-0,0230	0,1696	-0,4529	0,3721	-0,1779	3,0368
4	0	0,9449	-0,0511	0,3037	-0,6517	0,4389	-0,1671	2,2239
5	0	1,2599	-0,2079	0,8524	-1,2622	0,5994	-0,1546	1,3682
6	5	0,0000	-0,0073	0,0753	-0,2783	0,2860	-0,1914	5,1635
7	5	0,3517	-0,0106	0,0983	-0,3288	0,3275	-0,1964	4,2815
8	5	0,7034	-0,0180	0,1424	-0,4071	0,3538	-0,1828	3,3911
9	5	1,0552	-0,0397	0,2531	-0,5824	0,4171	-0,1717	2,4834
10	5	1,4069	-0,1587	0,7012	-1,1186	0,5695	-0,1590	1,5278
11	10	0,0000	-0,0040	0,0482	-0,2018	0,2016	-0,1772	6,7820
12	10	0,4620	-0,0062	0,0671	-0,2627	0,2918	-0,2113	5,6235
13	10	0,9239	-0,0103	0,0953	-0,3198	0,3134	-0,1962	4,4540
14	10	1,3859	-0,0223	0,1673	-0,4527	0,3702	-0,1842	3,2618
15	10	1,8479	-0,0866	0,4543	-0,8594	0,5105	-0,1718	2,0067
16	50	0,0000	-0,0001	0,0024	-0,0198	-0,0586	-0,1983	31,9834
17	50	1,9198	-0,0001	0,0040	-0,0317	-0,0330	-0,2065	27,1709
18	50	3,8397	-0,0003	0,0073	-0,0531	0,0050	-0,2222	22,3215
19	50	5,7595	-0,0009	0,0166	-0,1007	0,0710	-0,2498	17,4045
20	50	7,6794	-0,0049	0,0621	-0,2681	0,2222	-0,3026	12,3390

Tabla 31 Coeficientes de $Ks = g(Kx)_{MS=10\%}^{Ky=cte}$

Tablas con $K_s = \text{cte}$

MS=0%			$K_y = f(K_x) = a_1 \cdot K_x^5 + b_1 \cdot K_x^4 + c_1 \cdot K_x^3 + d_1 \cdot K_x^2 + e_1 \cdot K_x + f_1$					
			K_x^5	K_x^4	K_x^3	K_x^2	K_x	1
n	Z	K_s	a1	b1	c1	d1	e1	f1
1	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,3600	1,8496
2	0	1,3803	0,0000	0,0002	-0,0006	0,0008	-0,3605	1,7840
3	0	2,7607	-0,0001	0,0008	-0,0022	0,0021	-0,3632	1,5810
4	0	4,1410	-0,0001	0,0005	-0,0016	-0,0012	-0,3712	1,2247
5	0	5,5214	-0,0001	-0,0001	-0,0013	-0,0061	-0,3915	0,6988
6	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,3600	2,0654
7	5	1,4512	0,0000	0,0002	-0,0007	0,0011	-0,3607	1,9908
8	5	2,9024	-0,0001	0,0007	-0,0022	0,0023	-0,3636	1,7603
9	5	4,3536	-0,0001	0,0004	-0,0014	-0,0011	-0,3716	1,3578
10	5	5,8048	-0,0001	0,0000	-0,0010	-0,0056	-0,3917	0,7701
11	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,3600	2,7128
12	10	1,6410	0,0000	0,0002	-0,0009	0,0018	-0,3614	2,6082
13	10	3,2819	0,0000	0,0004	-0,0018	0,0026	-0,3643	2,2880
14	10	4,9229	0,0000	0,0002	-0,0009	-0,0010	-0,3721	1,7409
15	10	6,5638	0,0000	0,0000	-0,0006	-0,0045	-0,3910	0,9698
16	50	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0184	0,0901	9,7850
17	50	3,9722	0,0000	0,0000	0,0001	-0,0139	-0,0377	9,3424
18	50	7,9443	0,0000	0,0000	0,0001	-0,0080	-0,1740	7,8588
19	50	11,9165	0,0000	0,0000	0,0001	-0,0043	-0,2419	5,5618
20	50	15,8887	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0026	-0,2737	2,8762

Tabla 32 Coeficientes de $K_y = f(K_x) \Big|_{MS=0\%}^{K_s=\text{cte}}$

MS=0%			$K_x = f(K_y) = a_1 \cdot K_y^5 + b_1 \cdot K_y^4 + c_1 \cdot K_y^3 + d_1 \cdot K_y^2 + e_1 \cdot K_y + f_1$					
			K_y^5	K_y^4	K_y^3	K_y^2	K_y	1
n	Z	K_s	a2	b2	c2	d2	e2	f2
1	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-2,7778	5,1378
2	0	1,3803	0,0087	-0,0487	0,1058	-0,1139	-2,7127	4,9373
3	0	2,7607	0,0311	-0,1667	0,3637	-0,4284	-2,4649	4,2649
4	0	4,1410	0,0180	-0,0954	0,2334	-0,3669	-2,3484	3,1626
5	0	5,5214	0,0034	-0,0257	0,0939	-0,2355	-2,3316	1,7179
6	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-2,7778	5,7372
7	5	1,4512	0,0078	-0,0482	0,1159	-0,1370	-2,6933	5,5050
8	5	2,9024	0,0233	-0,1389	0,3365	-0,4384	-2,4269	4,7348
9	5	4,3536	0,0121	-0,0716	0,1961	-0,3446	-2,3301	3,4960
10	5	5,8048	0,0022	-0,0186	0,0765	-0,2145	-2,3285	1,8915
11	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-2,7778	7,5355
12	10	1,6410	0,0056	-0,0452	0,1404	-0,2115	-2,6173	7,1901
13	10	3,2819	0,0104	-0,0810	0,2554	-0,4314	-2,3359	6,1096
14	10	4,9229	0,0042	-0,0332	0,1203	-0,2805	-2,3010	4,4584
15	10	6,5638	0,0007	-0,0084	0,0450	-0,1657	-2,3358	2,3869
16	50	0,0000	-0,0286	0,7077	-6,1790	22,1901	-29,7308	35,5371
17	50	3,9722	-0,0040	0,0869	-0,6712	2,1438	-5,1395	32,8416
18	50	7,9443	-0,0007	0,0105	-0,0622	0,1307	-2,9793	26,5856
19	50	11,9165	-0,0002	0,0014	-0,0088	-0,0231	-2,9902	18,6568
20	50	15,8887	-0,0001	-0,0002	-0,0048	-0,0524	-3,1770	9,7213

Tabla 33 Coeficientes de $K_x = g(K_y) \Big|_{MS=0\%}^{K_s=\text{cte}}$

MS=10%			Ky=f(Kx)= a1*Kx^5 +b1*Kx^4+c1*Kx^3+d1*Kx^2+e1*Kx+f1					
			Kx^5	Kx^4	Kx^3	Kx^2	Kx	1
n	Z	Ks	a1	b1	c1	d1	e1	f1
1	0	0,0000	0,0007	-0,0104	0,0661	-0,2125	-0,0388	1,5750
2	0	0,9842	0,0006	-0,0101	0,0646	-0,2125	-0,0242	1,5031
3	0	1,9683	0,0004	-0,0078	0,0549	-0,1993	-0,0020	1,3028
4	0	2,9525	0,0000	-0,0039	0,0383	-0,1710	0,0083	0,9919
5	0	3,9367	-0,0007	0,0018	0,0151	-0,1325	0,0042	0,5668
6	5	0,0000	0,0004	-0,0075	0,0529	-0,1901	-0,0391	1,7589
7	5	1,0500	0,0004	-0,0072	0,0518	-0,1903	-0,0256	1,6809
8	5	2,1000	0,0003	-0,0055	0,0440	-0,1788	-0,0050	1,4608
9	5	3,1500	0,0000	-0,0030	0,0323	-0,1578	0,0075	1,1144
10	5	4,2000	-0,0004	0,0011	0,0142	-0,1254	0,0046	0,6367
11	10	0,0000	0,0001	-0,0033	0,0307	-0,1447	-0,0391	2,3102
12	10	1,2261	0,0001	-0,0031	0,0296	-0,1435	-0,0299	2,2133
13	10	2,4521	0,0001	-0,0021	0,0247	-0,1353	-0,0135	1,9318
14	10	3,6782	0,0000	-0,0017	0,0219	-0,1305	0,0058	1,4752
15	10	4,9043	-0,0001	0,0000	0,0123	-0,1101	0,0060	0,8382
16	50	0,0000	0,0000	0,0000	0,0014	-0,0304	-0,0419	10,9044
17	50	3,1773	0,0000	0,0000	0,0014	-0,0355	0,0946	9,1027
18	50	6,3547	0,0000	0,0000	0,0010	-0,0263	-0,0027	7,7315
19	50	9,5320	0,0000	0,0000	0,0016	-0,0310	-0,0023	5,7286
20	50	12,7094	0,0000	-0,0001	0,0019	-0,0341	0,0094	3,3180

Tabla 34 Coeficientes de $Ky = f(Kx) \Big|_{MS=10\%}^{Ks=cte}$

MS=10%			Kx=f(Ky)= a1*Ky^5 +b1*Ky^4+c1*Ky^3+d1*Ky^2+e1*Ky+f1					
			Ky^5	Ky^4	Ky^3	Ky^2	Ky	1
n	Z	Ks	a2	b2	c2	d2	e2	f2
1	0	0,0000	-1,1353	3,4942	-3,8307	1,6876	-2,7573	4,6240
2	0	0,9842	-1,4955	4,3768	-4,5595	1,8889	-2,7721	4,5157
3	0	1,9683	-3,2426	8,1321	-7,2100	2,4117	-2,7313	4,1507
4	0	2,9525	-12,8153	24,5054	-16,6697	4,1874	-2,7835	3,4922
5	0	3,9367	-177,5268	194,5504	-76,8342	11,3828	-3,2441	2,4783
6	5	0,0000	-0,7254	2,4928	-3,0516	1,5010	-2,7556	5,1635
7	5	1,0500	-0,9475	3,0976	-3,5999	1,6579	-2,7600	5,0380
8	5	2,1000	-2,0044	5,6179	-5,5420	2,0282	-2,6793	4,6135
9	5	3,1500	-7,8458	16,8453	-12,8414	3,5835	-2,7237	3,8612
10	5	4,2000	-108,5501	133,6349	-59,2704	9,8535	-3,1778	2,7232
11	10	0,0000	-0,2432	1,0976	-1,7647	1,1400	-2,7550	6,7820
12	10	1,2261	-0,3065	1,3106	-1,9796	1,1612	-2,7072	6,5936
13	10	2,4521	-0,6186	2,2685	-2,8871	1,2832	-2,5345	5,9698
14	10	3,6782	-2,4104	6,8459	-6,8768	2,4825	-2,5987	4,9266
15	10	4,9043	-33,9720	55,0760	-32,1519	7,0354	-3,0514	3,4184
16	50	0,0000	-0,0005	0,0096	-0,0730	0,2221	-2,7344	31,9834
17	50	3,1773	-0,0020	0,0358	-0,2272	0,5800	-3,0204	30,3487
18	50	6,3547	-0,0029	0,0438	-0,2356	0,4976	-2,9327	26,2764
19	50	9,5320	-0,0104	0,1159	-0,4639	0,7166	-3,0710	20,7959
20	50	12,7094	-0,1285	0,8265	-1,9153	1,7082	-3,4832	14,2070

Tabla 35 Coeficientes de $Kx = g(Ky) \Big|_{MS=10\%}^{Ks=cte}$

4.3.3 Estudio paramétrico puntual

Influencia de k_2 y k_3

En este trabajo se tomó como valores principales $k_2=0.9$, $k_3=0.9$ y $MSD=10\%$, pero se permite modificar a voluntad del diseñador. En el Estudio paramétrico puntual, se busca la mejor manera de obtener $MS=MSD$ variando k_2 y k_3 (en este caso $k_2=k_3$) y calculando

$$Kx_{MS=MSD} = f(k_2, k_3) \text{ y } Vol_K_{MS=MSD} = f(k_2, k_3) .$$

Se pueden trazar curvas de nivel $Kx_{MS=MSD} = cte$ y $Vol_K_{MS=MSD} = cte$ donde se pone k_2 función de k_3 . Aquí solo se lo menciona.

El interés está en encontrar los valores de k_2 y k_3 que producen el máximo valor de $Vol_K_{MS=MSD}$, dando la combinación $(Kx_2, Ky_2, Ks_2)_{MS=MSD}$.
 $V_2=Vol_K_{max}$

Se hace un estudio del comportamiento de $Kx_{MS=MSD}$ y $Vol_K_{MS=MSD}$ en función de k_2 , k_3 y Z ; con $k_2=k_3= [0.8, 0.85, 0.90, 0.95, 1]$ y $Z = [0, 5, 10, 50]$.

Pero se grafica las siguientes curvas con Z como variable independiente:

- $Kx_{MS=MSD} = f(Z)_{k_3=cte}^{k_2=cte}$ y $Kx_{MS=0\%} = f(Z)$ (referencia) y
- $Vol_K_{MS=MSD} = f(Z)_{k_3=cte}^{k_2=cte}$ y $Vol_K_{MS=0\%} = f(Z)$ (referencia).

Recordemos: cuando $MS=0\%$ se tiene $k_2=k_3=1$. Es necesaria la referencia para sacar conclusiones.

- Al aumentar el margen de seguridad, (de $MS=0\%$ a $MS=MSD$),
 1. el valor de Kx disminuye (de curva 1 a la curva 2, figura 75).
 2. el valor de Vol_K disminuye (de curva 1 a la curva 2, figura 76).
Este resultado era el esperado.
- Con igual margen de seguridad ($MS=MSD$)
 1. cuando $k_2=k_3$ aumenta, Kx disminuye (ver figura 75)
 2. cuando $k_2=k_3$ aumenta, Vol_K disminuye. (ver figura 76)

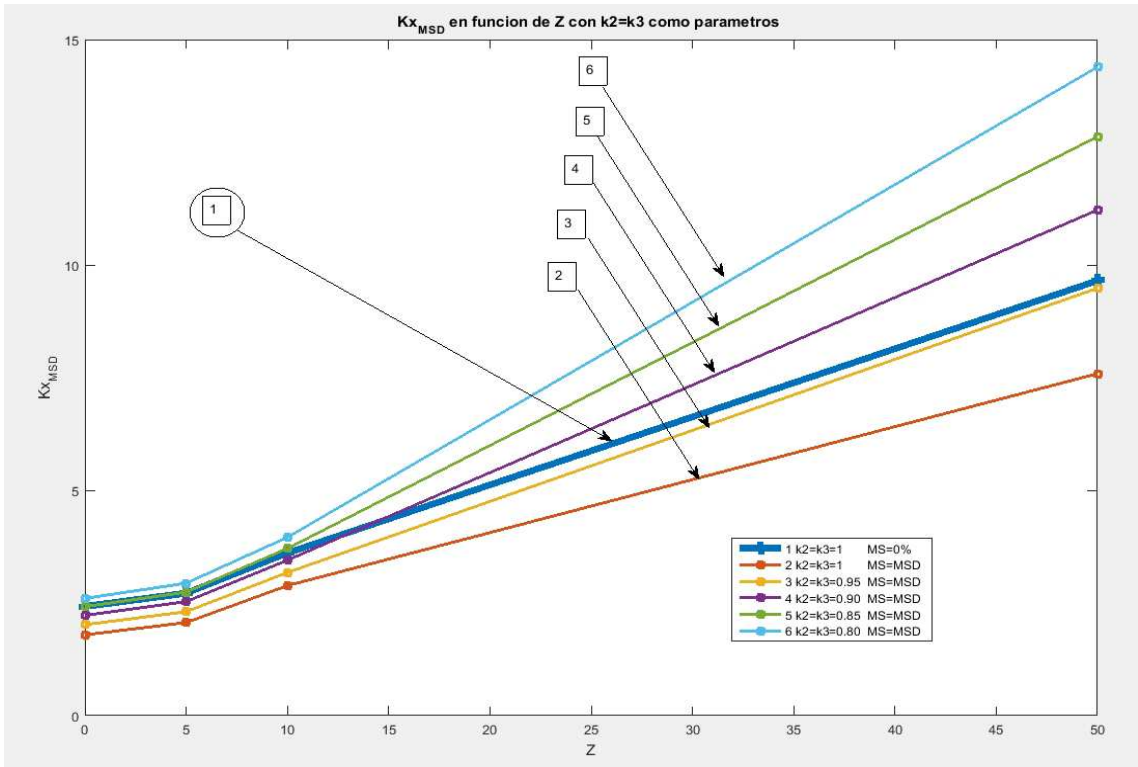


Figura 75 $Kx = f(Z, p)$

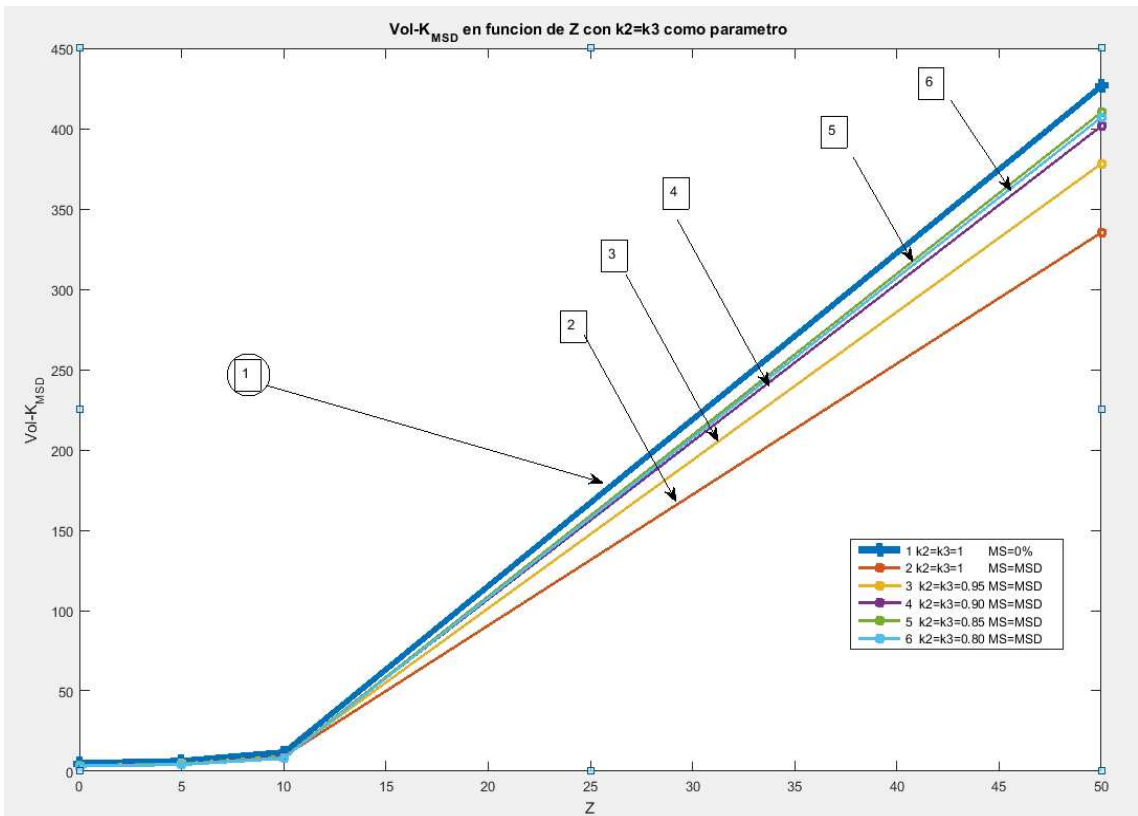


Figura 76 $Vol_K = f(Z, p)$

Conclusión

5.1 Introducción, Hipótesis y Objetivos

En la introducción:

- explicamos el fenómeno de inestabilidad,
- vimos la importancia de un correcto diseño, por lo repentino y sin aviso de la destrucción de la estructura, que puede provocar lesiones y riesgo de pérdida de vidas de humanas y daño estructural; y también por sus numerosas aplicaciones en todas las ramas de la ingeniería.
- Vimos los temas, los enfoques y los investigadores para demostrar que este es un tema importante y que merece nuestra investigación.
- Presentamos nuestras Hipótesis y objetivos.

Hipótesis: es posible desarrollar una herramienta de cálculo que permita conocer la carga crítica de pandeo para el pandeo de Láminas simplemente apoyadas, cuyos resultados coincidan con los resultados conocidos (validación), permitan una verificación rápida y faciliten el diseño.

El presente trabajo tiene tres objetivos: cumplir con la validación de la herramienta de cálculo, permitir una verificación rápida y facilitar el diseño.

5.2 Marco Teórico y Metodología

En el capítulo 2, que corresponde al Marco Teórico, se demostró como se obtenían las ecuaciones de equilibrio teniendo en cuenta dos condiciones muy importantes:

- 1) Las ecuaciones debían plantearse en la posición deformada de la lámina.
- 2) Debía retenerse los términos no lineales del tensor de deformación.

Para que un cuerpo esté en equilibrio, debe cumplir con 6 ecuaciones (3 ecuaciones de fuerza que están asociadas al desplazamiento en cada uno de los ejes y 3 ecuaciones de momento que están asociadas al giro en cada uno de los ejes). Por ser el espesor muy pequeño (comparado con el largo y el ancho), y por ser las fuerzas contenidas en el plano medio del espesor, no se calcula la ecuación de momento en el tercer eje (momento torsor). De 5 ecuaciones se podía eliminar 2 (las 2 ecuaciones de momento flector) quedando solamente 3 ecuaciones de fuerza, donde la última (la ecuación de fuerza en el tercer eje, pertenece al estado Flexional) era independiente de las 2 primeras (ecuaciones de fuerza en los dos ejes, que pertenecen al estado Membranal). La última ecuación, la ecuación de fuerza en el tercer eje (estado Flexional) es una ecuación

diferencial en derivadas parciales de octavo orden, homogénea, a coeficientes constantes. Usando como solución una serie de senos se obtiene la ecuación pero en términos de senos y cosenos. Luego aplicando el método de Galerkin, se obtuvo la ecuación generadora de un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas homogéneas (igualadas a cero) que dio origen a una matriz, a la que se quería determinar los valores propios (los parámetros adimensionales de carga) y en definitiva la carga Crítica de pandeo en un estado de carga combinado, por medio de la ecuación de definición de los parámetros adimensionales de carga. Para que esos valores propios tuvieran como significado físico estar asociados a la carga crítica de pandeo debían cumplir con ciertos requisitos:

- 1) Los valores propios debían ser valores reales.
- 2) Los valores propios debían ser positivos.
- 3) Dentro del conjunto solución de la ecuación característica, el valor propio debía ser el que tenga menor valor.
- 4) Los valores propios debían ser menores que los valores propios máximos.

Recordemos que una ecuación polinómica de grado n tiene n soluciones. De todas, se retiene la menor, porque la carga crítica de Pandeo es la menor carga posible. Las cargas superiores producen otro modo de pandeo diferente al primer modo y necesitan otras condiciones de apoyos, por eso no son analizadas aquí.

En el capítulo 3, que corresponde a la Metodología, comienza con el trabajo sobre la matriz para determinar como se definen cada uno de sus elementos, con la intención de formar la ecuación $A*x=b$.

Primero se determinó el tamaño de la matriz. Esta matriz podía ser de cualquier dimensión pero se demostró que con $n=7$ se obtenía muy buena precisión y bajo costo de cálculo.

Luego se calculó los elementos de la diagonal principal (que multiplican a a_{ii} , llamados internamente M_{mn} , dependen de $\frac{a}{b}$ y Z) y por último los elementos que no pertenecen a la diagonal principal (que multiplican a a_{ij} , llamados internamente beta, que dependen de $\frac{a}{b}$). Este cambio de nombre es importante para que no se sobrescriba la matriz A o se confundan con los a_{ij} cuando se hace el llamado del elemento cuando se usa alguna función. Los a_{ij} corresponden a los coeficientes indeterminados de la serie de senos que se usó como propuesta de solución de la ecuación diferencial y que se agrupan para formar el vector columna x . Hasta aquí tenemos el valor de la matriz cuadrada A , de tamaño 7×7 y el vector columna x , de tamaño 7×1 .

El vector b es un vector columna nulo de tamaño 7×1 , (con todos sus elementos iguales a cero). Esto es así, porque la ecuación generadora del sistema de ecuaciones simultáneas es una ecuación homogénea (igualada a cero).

Que el vector b sea un vector nulo, cambia la naturaleza del problema, del cálculo de $x=A^{-1}*b$ (donde la tarea principal es invertir la matriz A) a uno de valores propios λ y vectores propios ϕ , $\det(A-\lambda*I)=0$, (donde la tarea principal es armar la ecuación característica, que es un polinomio de grado 7 en λ , que se obtiene de anular el determinante). Los valores propios λ se agrupan para formar D (una matriz de tamaño 7×7 , con los $D_{ii}=\lambda_i$, y los $D_{ij}=0$) y los vectores propios ϕ

(vectores columnas) se agrupan para formar V (una matriz de tamaño 7×7 , con los vectores $V(:,i) = \varphi_i$).

En este caso, se dejó sin calcular los vectores propios φ , y se concentró en el cálculo de los valores propios λ (en este caso particular, los valores de K_x , K_y y K_s), porque tienen como significado físico estar asociados a la carga crítica de pandeo. K_x , K_y y K_s dependen de $\frac{a}{b}$ y Z .

El material era acero con las siguientes propiedades elásticas: $\mu = 0.3$, $E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ y $\sigma_{Limite} = 1400 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$. Para calcular el estado de carga combinado se hace uso de las ecuaciones de definición de K_x , K_y y K_s , y podemos obtener σ_x , σ_y y τ , y con el criterio de Von Mises para un estado de carga combinado obtener la tensión de comparación σ_{VM} y restringir este valor por debajo del valor σ_{Limite} lo que lleva al cálculo de el espesor t necesario.

Algunos problemas que fueron apareciendo (se mencionan solo los más importantes):

- el cálculo previo de los máximos para que las soluciones tengan sentido físico,
- se determinó el orden correcto de las operaciones para que las asignaciones de los valores sean posibles,
- se hizo una función que ordenara las soluciones para que la primera solución sea siempre la menor y
- se evitó que las figuras se sobrescribieran en la misma ventana.

5.3 Principales resultados

Los principales resultados (que pertenecen al capítulo 4) se pueden agrupar en 3 grupos:

1) Validación:

Se comparó las soluciones conocidas con las soluciones de este trabajo y se demostró que da muy buenos resultados en todos los casos estudiados.

Se enumeran los casos estudiados (Ver pág. 40-53 de este trabajo.):

- 1) Compresión Axial de una tira infinitamente larga
- 2) Compresión Axial para una placa curva
- 3) Tensión Crítica Circunferencial en Cilindros
- 4) Tensión Crítica de Corte para placas curvadas largas
- 5) Tensión Crítica de Corte para paneles curvos anchos
- 6) Tensión Crítica de Corte para paneles con dimensión circunferencial mayor a la dimensión axial
- 7) Tensión Crítica de Corte para paneles con dimensión axial mayor a la dimensión circunferencial
- 8) Tensiones Combinadas

2) Verificación:

Se busca conocer la condición de una estructura para un determinado estado de carga: “estructura segura” o “la estructura rompe”.

Se indicó las condiciones de debe cumplir la curva representativa del estado actuante (curva color verde) para la condición estructura segura (dentro del intervalo azul-rojo) y los puntos representativos debían estar en el orden correcto, y las condiciones cuando la estructura rompe (curva color verde fuera del intervalo azul-rojo) y los puntos representativos debían estar en el orden alterado.

Se debe ingresar los valores de los parámetros geométricos: largo a , el ancho b , el parámetro adimensional de curvatura de Batdorf Z ; los parámetros adimensionales de carga: K_x , K_y y K_s ; y los valores asociados al Margen de seguridad de diseño: k_2 , k_3 y MSD . (Ver pág.54-61 de este trabajo.)

El primer paso, estado inicial, donde se calcula el estado de la estructura, para determinar si la estructura rompe (no tiene Margen de Seguridad, $MS=0\%$) o si la estructura segura es (con $MS\neq 0\%$).

El segundo paso, alcanzar $MS=MSD$, mediante reducciones propuestas k_2 y k_3 , y obteniendo la reducción k_1 por calculo, porque se supone que se modifica el valor de K_x . Se puede hacer lo mismo para los otros parámetros adimensionales de carga.

El tercer paso, encontrar el óptimo, que cumple las dos condiciones simultáneamente, 1) $MS=MSD$ y 2) $Vol_K = Vol_K]_{max}$. Que permite comparar nuestro valor con MSD y el óptimo.

Cada uno de estos estados, estado inicial, $MS=MSD$ y optimo, tuvieron el cálculo del estado tensional que permite el dimensionamiento del espesor t y la determinación del peso de la estructura.

3) Diseño:

Se establecen relaciones entre los parámetros geométricos: largo a , el ancho b , el parámetro adimensional de curvatura de Batdorf Z ; los parámetros adimensionales de carga: K_x , K_y y K_s ; y los valores asociados al Margen de seguridad de diseño: k_2 , k_3 y MSD . La solución se puede presentar en tablas, figuras y ecuaciones.

En el estudio paramétrico global, las figuras 2D y 3D muestran la relación de K_xG , K_yG y K_sG como variables dependientes, con Z variable independiente y con a o b como parámetros (págs. 65 a 70).

En el estudio paramétrico local, se muestra una superficie límite en figuras 3D (ver pág. 71 a 74) y curvas de nivel en figuras 2D asociadas a K_x y Z conocidos (ver pág. 75 a 78). Y por último, se da la ecuación de cada una de estas curvas de nivel, mostrando las relaciones directas e inversas, para las dos condiciones: 1) $MS=0\%$ y 2) $MS=MSD$. (en este caso $MS=10\%$)(Ver pág. 79 a 87)

En el estudio paramétrico puntual, se ve las variaciones de K_x y Vol_K para $MS=MSD$ (variables dependientes), en función de Z (variable independiente) y como parámetros $k_2=k_3$. (Ver pág. 88 y 89)

5.4 Conclusiones

1) Se puede programar Las ecuaciones de Donnell.

La ecuación de Donnell (es una ecuación diferencial en derivadas parciales homogénea de octavo orden a coeficientes constante) cuando se aplica el método de Galerkin se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas simultaneas. Esta importante simplificación permite el tratamiento matricial y para ello usamos el programa MatLab® que es un programa de The MathWorks™ que esta optimizado para el cálculo matricial. La programación de la herramienta de cálculo debe tener en cuenta las condiciones de validez que hacen nulos ciertos elementos y el orden en que los elementos se colocan en la matriz. Una vez armada la matriz se calcula el determinante y se lo iguala a cero para obtener la ecuación característica, que se resuelve para obtener los valores propios (valores de los parámetros adimensionales de carga) y se obtiene la carga crítica de pandeo de láminas con los bordes simplemente apoyados, por medio de las ecuaciones que definen los parámetros adimensionales de carga.

2) Se obtienen los mismos resultados que Batdorf en el N.A.C.A. 874.

Como era de esperar, si usamos la misma ecuación y los mismos datos (largo a, ancho b, parámetro geométrico Z, y los parámetros de carga Kx, Ky y Ks.) se llegan a los mismos resultados. La diferencia en la precisión de la solución está asociada al número de términos n que se usan en la serie de senos para formar la solución. Demostramos que el número óptimo de n es n=7, que tenemos alta precisión y bajo costo de cálculo, que se traduce en un tiempo de cálculo bajo, y que Kx, Ky y Ks dependen de $\frac{a}{b}$ y Z.

3) Se pudo hacer una verificación rápida, “pieza segura” o “pieza rompe”. El problema del pandeo es un problema de estabilidad y la estructura puede romper con una carga mucho menor a la carga máxima esperada (puede ser carga en compresión o de corte), esta carga es llamada la carga crítica de pandeo. Con un tiempo de cálculo aproximadamente de unos minutos podemos conocer el estado de la estructura a manera de verificación. La solución se puede graficar lo que permite visualizar todos los valores importantes y determinar la zona segura y la zona donde rompe la estructura. La ecuación de Donnell siempre va a tener solución, real o compleja (se rechaza la compleja), y dentro de las reales, están las que tienen significado físico y las que no. Para que la solución tenga significado físico debe ser real, positiva, de menor valor dentro del conjunto solución y menor valor respecto al máximo admisible. En una primera etapa, se determina la condición de la estructura. La estructura es segura si la curva verde está dentro de la zona definida por las curvas azul y roja, y si los puntos representativos tienen el orden correcto (el número del punto representativo aumenta al aumentar Ky). La estructura rompe si la curva verde esta fuera de la zona definida por las curvas azul y roja, y si los puntos representativos están con el orden alterado (el número del punto representativo disminuye al aumentar Ky). Donde la curva verde representa el estado de carga actuante, la curva azul representa el estado de carga con $K_s=K_{s_max}$ y $K_x=0$ y la curva roja representa el estado de carga con $K_s=K_{s_min}$ y $K_x=K_{x_max}$. Aquí si la estructura rompe no tiene Margen de Seguridad y si la estructura es segura tiene un Margen de Seguridad distinto al Margen de seguridad de diseño. En la segunda etapa se modifica el valor del Margen de Seguridad para que sea igual al Margen de seguridad de

diseño y se calcula el valor de K_x que cumple con esta condición. Y en la tercera y última etapa se calcula el valor óptimo, que cumple simultáneamente las 2 condiciones,

$$1) MS=MSD \quad y$$

$$2) Vol_K = Vol_K]_{max} .$$

4) Con Diseño se pudo hacer un barrido de las variables y de los parámetros para permitir ver todo el conjunto de posibilidades y se obtuvieron ecuaciones de las curvas de interacción que relacionan las cargas en casos de cargas combinadas. Esto se hizo a través de graficas de superficies en figuras tridimensionales (3D) o de curvas de nivel en figuras bidimensionales (2D). Las ecuaciones permiten conocer la relación directa y la relación inversa, para la condición $MS=0\%$ y $MS=MSD$ para cada caso.

Las mejoras se encuentran en varios niveles diferentes:

- 1) La precisión en cada punto de este trabajo, es mayor que la precisión del Report N.A.C.A 874 de Batdorf, porque se trabaja con un número mayor de términos de la serie de Seno. ($n_{TESIS}=7$, $n_{NACA}=4$ en el mejor de los casos.)
- 2) La cantidad de curvas que se puede graficar es ilimitada, mientras que en el Report N.A.C.A 874 de Batdorf solo se grafican 4 en la gran mayoría y 5 en casos puntuales.
- 3) La amplitud de posibilidades para el estudio de cargas combinadas, en este trabajo se puede estudiar la relación de los 3 parámetros adimensionales de carga K_x , K_y y K_s para cualquier valor, en cambio en el Report N.A.C.A 874 de Batdorf solo se hace la relación entre 2 parámetros adimensionales de carga $K_s=f(K_x)$ para la condición $K_y=0$.
- 4) Se puede conocer el punto de mayor aprovechamiento de la Lámina, que es el punto que tiene la mejor combinación de los parámetros adimensionales de carga, especialmente útil en un estado de carga combinado, y con este punto se estudia la mejor manera de obtener $MS=MSD$ por medio de las reducciones k_2 y k_3 .
- 5) En este trabajo se puede calcular el espesor t necesario para tener una tensión de comparación de Von Mises σ_{VM} menor a la tensión limite σ_{Limite} , mientras que en el Report N.A.C.A 874 de Batdorf no se lo podía calcular o se lo consideraba incluido en el parámetro de curvatura Z .
- 6) Se puede calcular estados combinados de carga con diferente Margen de Seguridad, con solo cambiar el Margen de seguridad de diseño ($MS=MSD$). El Report N.A.C.A 874 de Batdorf solo calcula para la condición de falla ($MS=0\%$).
- 7) La última y más importante mejora, tiene que ver con el bajo tiempo de cálculo cuando se aprovecha los resultados obtenidos, que se presentan en formas de Tablas, que justifica ampliamente todo el esfuerzo realizado.

5.5 Trabajos Futuros

Se puede realizar el mismo procedimiento para encontrar las cargas críticas de pandeo de láminas con bordes empotrados. (Partir de la ecuación de Donnell, aplicar el método de Galerkin y calcular los valores propios.)

Se puede partir de una teoría más reciente (la teoría de Koiter desarrollada en 1945. Recordar que Donnel escribió el N.A.C.A. 479 en 1933 y Batdorf el N.A.C.A. 874 en 1947.) Y estudiar la influencia de los apoyos en la carga crítica de pandeo, en los 2 casos, los 4 lados simplemente apoyados y los 4 lados empotrados.

Recordemos que la diferencia entre los métodos es que el Método de Donnel determina un punto crítico y el Método de Koiter determina la trayectoria proscrita.

Lo que significa que todavía se puede investigar en este apasionante tema.

El desafío está planteado. Ahora falta encontrar el investigador. ¿Serás tú?

Bibliografía:

Donnell, L. H.: Stability of Thin-Walled Tubes under Torsión. N.A.C.A. Rep. N°. 479,1933.

Batdorf, S.B.: A Simplified Method of Elastic-Stability Analysis for Thin Cylindrical Shells. N.A.C.A. Rep. N°. 874, 1947.

Schildcrout, Murry and Stein, Manuel: Crítico combination of shear and direct axial stress for curved rectangular panels. N.A.C.A. TN 1928, 1949.

Batdorf, S.B., Schildcrout, Murry, and Stein,Manuel: Crítico Combinations of Shear and Longitudinal Direct Stress for Long Plates with Transverse Curvature. N.A.C.A. N°. 1347, 1947.

Batdorf, S.B., Stein,Manuel, and Schildcrout, Murry: Crítico Shear Stress of Curved Rectangular Panels. N.A.C.A. N°. 1348,1947.

Niu, Michael Chun-Yung: Airframe Stress Analysis and Sizing.

Compendio de Calculo Estructural II de F.C.E.F. y N. de la U.N.C. (Córdoba, Argentina)

Estructuras IV: Análisis de Estructuras Cilíndricas (cilindros de paredes delgadas sometidos a compresión y presión interna) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (Buenos Aires, Argentina)

Jaca, Rossana Claudia. Tesis Doctoral: Límites Inferiores en Inestabilidad de Láminas de Tanques de Pared Delgada. Presentada en La Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina; el día 22 de diciembre de 2008.

J.L.Lassig, R.C.Jaca, C.Burgos, J.E.Cicerone, L.A.Godoy. Utilización del Túnel de Viento como herramienta para el análisis de tanques de petróleo en la Norpatagonia.

Feijoo-Carrara, Inestabilidad de Cascaras Reforzadas de Geometría Imperfecta.

Anexo A

Desarrollo matemático completo desde La Ecuación de Donnell hasta la Ecuación NACA

Capítulo 2 página 28

$$\nabla^8 w + 12 \frac{Z^2}{b^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K_X \frac{\pi^2}{b^2} \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2K_S \frac{\pi^2}{b^2} \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + K_Y \frac{\pi^2}{b^2} \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (17)$$

$$w=f(x, y)=\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m n} * \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) * \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (18)$$

Cálculos Auxiliares:

1. $\nabla^8 w = \left(\frac{\pi}{a}\right)^8 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^4 w$;
2. $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 m^4 w$;
3. $\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^6 \left(m^2 + n^2 * \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)m^2 w$;
4. $\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^6 \left(m^2 + n^2 * \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)n^2 w$;
5. $\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \frac{a}{b} \left(\frac{\pi}{a}\right)^6 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{mn} \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right)$

Definiendo el Laplaciano: $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

Definiendo el Bilaplaciano: $\nabla^4 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)$

$$\nabla^4 = \nabla^2 * \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) * \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad \text{pero} \quad \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2}$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

Definiendo el Laplaciano a la 4 potencia: $\nabla^8 = (\nabla^2)^4 = (\nabla^4)^2 = \nabla^4 * \nabla^4$

$$\nabla^8 = \left(\frac{\partial^8}{\partial x^8} + 4 \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + 6 \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + 4 \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8}{\partial y^8}\right)$$

$$\nabla^8 = \nabla^4 * \nabla^4 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) * \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)$$

$$\begin{aligned} \nabla^8 = & \left(\frac{\partial^8}{\partial x^8} + 2 \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + 4 \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + 2 \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + 2 \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8}{\partial y^8})$$

$$\nabla^8 = \left(\frac{\partial^8}{\partial x^8} + 4 \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} + 6 \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} + 4 \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8}{\partial y^8} \right)$$

Breve repaso de las propiedades de las funciones Seno y Coseno:

$$A = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right); \quad u = \frac{m\pi x}{a}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{m\pi}{a}; \quad \frac{d^2u}{dx^2} = 0;$$

$$B = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right); \quad v = \frac{n\pi y}{b}; \quad \frac{dv}{dy} = \frac{n\pi}{b}; \quad \frac{d^2v}{dy^2} = 0;$$

Vamos a Trabajar con A y trasladar los resultados a B.

$$A = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = \sin(u)$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dA}{du} * \frac{du}{dx} \quad \text{aplicación de la "regla de la cadena" y reemplazando queda}$$

n	$A = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$	$B = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$
1	$\frac{dA}{dx} = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) * \frac{m\pi}{a}$	$\frac{dB}{dy} = \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) * \frac{n\pi}{b}$
2	$\frac{d^2A}{dx^2} = -\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) * \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 = -A * \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$	$\frac{d^2B}{dy^2} = -\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) * \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = -B * \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$
3	$\frac{d^3A}{dx^3} = -\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) * \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3$	$\frac{d^3B}{dy^3} = -\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) * \left(\frac{n\pi}{b}\right)^3$
4	$\frac{d^4A}{dx^4} = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) * \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 = A * \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4$	$\frac{d^4B}{dy^4} = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) * \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 = B * \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4$
5	$\frac{d^5A}{dx^5} = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) * \left(\frac{m\pi}{a}\right)^5$	$\frac{d^5B}{dy^5} = \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) * \left(\frac{n\pi}{b}\right)^5$
6	$\frac{d^6A}{dx^6} = -\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) * \left(\frac{m\pi}{a}\right)^6 = -A * \left(\frac{m\pi}{a}\right)^6$	$\frac{d^6B}{dy^6} = -\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) * \left(\frac{n\pi}{b}\right)^6 = -B * \left(\frac{n\pi}{b}\right)^6$
7	$\frac{d^7A}{dx^7} = -\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) * \left(\frac{m\pi}{a}\right)^7$	$\frac{d^7B}{dy^7} = -\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) * \left(\frac{n\pi}{b}\right)^7$
8	$\frac{d^8A}{dx^8} = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) * \left(\frac{m\pi}{a}\right)^8 = A * \left(\frac{m\pi}{a}\right)^8$	$\frac{d^8B}{dy^8} = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) * \left(\frac{n\pi}{b}\right)^8 = B * \left(\frac{n\pi}{b}\right)^8$

Tabla Resumen de Derivadas de la función Seno

Demostraciones:

$$W = A * B;$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(A * B) = \frac{\partial A}{\partial x} * B$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(A * B) = A * \frac{\partial B}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(A * B) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} * B$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (A * B) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} (A * B) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A * \frac{\partial}{\partial y} (B) \right) = \frac{\partial A}{\partial x} * \frac{\partial B}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (A * B) = A * \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} (A * B) = \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} * B$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} (A * B) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} * \frac{\partial B}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} (A * B) = \frac{\partial A}{\partial x} * \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} = \frac{\partial^3}{\partial y^3} (A * B) = A * \frac{\partial^3 B}{\partial y^3}$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \frac{\partial^4}{\partial x^4} (A * B) = \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} * B$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} (A * B) = \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} * \frac{\partial B}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} (A * B) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} * \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} = \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} (A * B) = \frac{\partial A}{\partial x} * \frac{\partial^3 B}{\partial y^3}$$

$$\frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{\partial^4}{\partial y^4} (A * B) = A * \frac{\partial^4 B}{\partial y^4}$$

$$\frac{\partial^5 W}{\partial x^5} = \frac{\partial^5}{\partial x^5} (A * B) = \frac{\partial^5 A}{\partial x^5} * B$$

$$\frac{\partial^5 W}{\partial x^4 \partial y} = \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} (A * B) = \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} * \frac{\partial B}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^5 W}{\partial x^3 \partial y^2} = \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} (A * B) = \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} * \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^5 W}{\partial x^2 \partial y^3} = \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} (A * B) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} * \frac{\partial^3 B}{\partial y^3}$$

$$\frac{\partial^5 W}{\partial x \partial y^4} = \frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4} (A * B) = \frac{\partial A}{\partial x} * \frac{\partial^4 B}{\partial y^4}$$

$$\frac{\partial^5 W}{\partial y^5} = \frac{\partial^5}{\partial y^5} (A * B) = A * \frac{\partial^5 B}{\partial y^5}$$

$$\frac{\partial^6 W}{\partial x^6} = \frac{\partial^6}{\partial x^6} (A * B) = \frac{\partial^6 A}{\partial x^6} * B$$

$$\frac{\partial^6 W}{\partial x^5 \partial y} = \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} (A * B) = \frac{\partial^5 A}{\partial x^5} * \frac{\partial B}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^6 W}{\partial x^4 \partial y^2} = \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} (A * B) = \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} * \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^6 W}{\partial x^3 \partial y^3} = \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} (A * B) = \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} * \frac{\partial^3 B}{\partial y^3}$$

$$\frac{\partial^6 W}{\partial x^2 \partial y^4} = \frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial y^4} (A * B) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} * \frac{\partial^4 B}{\partial y^4}$$

$$\frac{\partial^6 W}{\partial x \partial y^5} = \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^5} (A * B) = \frac{\partial A}{\partial x} * \frac{\partial^5 B}{\partial y^5}$$

$$\frac{\partial^6 W}{\partial y^6} = \frac{\partial^6}{\partial y^6} (A * B) = A * \frac{\partial^6 B}{\partial x^6}$$

$$\frac{\partial^7 W}{\partial x^7} = \frac{\partial^7}{\partial x^7} (A * B) = \frac{\partial^7 A}{\partial x^7} * B$$

$$\frac{\partial^7 W}{\partial x^6 \partial y} = \frac{\partial^7}{\partial x^6 \partial y} (A * B) = \frac{\partial^6 A}{\partial x^6} * \frac{\partial B}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^7 W}{\partial x^5 \partial y^2} = \frac{\partial^7}{\partial x^5 \partial y^2} (A * B) = \frac{\partial^5 A}{\partial x^5} * \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^7 W}{\partial x^4 \partial y^3} = \frac{\partial^7}{\partial x^4 \partial y^3} (A * B) = \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} * \frac{\partial^3 B}{\partial y^3}$$

$$\frac{\partial^7 W}{\partial x^3 \partial y^4} = \frac{\partial^7}{\partial x^3 \partial y^4} (A * B) = \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} * \frac{\partial^4 B}{\partial y^4}$$

$$\frac{\partial^7 W}{\partial x^2 \partial y^5} = \frac{\partial^7}{\partial x^2 \partial y^5} (A * B) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} * \frac{\partial^5 B}{\partial y^5}$$

$$\frac{\partial^7 W}{\partial x \partial y^6} = \frac{\partial^7}{\partial x \partial y^6} (A * B) = \frac{\partial A}{\partial x} * \frac{\partial^6 B}{\partial y^6}$$

$$\frac{\partial^7 W}{\partial y^7} = \frac{\partial^7}{\partial y^7} (A * B) = A * \frac{\partial^7 B}{\partial x^7}$$

$$\frac{\partial^8 W}{\partial x^8} = \frac{\partial^8}{\partial x^8} (A * B) = \frac{\partial^8 A}{\partial x^8} * B$$

$$\frac{\partial^8 W}{\partial x^7 \partial y} = \frac{\partial^8}{\partial x^7 \partial y} (A * B) = \frac{\partial^7 A}{\partial x^7} * \frac{\partial B}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^8 W}{\partial x^6 \partial y^2} = \frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial y^2} (A * B) = \frac{\partial^6 A}{\partial x^6} * \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^8 W}{\partial x^5 \partial y^3} = \frac{\partial^8}{\partial x^5 \partial y^3} (A * B) = \frac{\partial^5 A}{\partial x^5} * \frac{\partial^3 B}{\partial y^3}$$

$$\frac{\partial^8 W}{\partial x^4 \partial y^4} = \frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4} (A * B) = \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} * \frac{\partial^4 B}{\partial y^4}$$

$$\frac{\partial^8 W}{\partial x^3 \partial y^5} = \frac{\partial^8}{\partial x^3 \partial y^5} (A * B) = \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} * \frac{\partial^5 B}{\partial y^5}$$

$$\frac{\partial^8 W}{\partial x^2 \partial y^6} = \frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial y^6} (A * B) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} * \frac{\partial^6 B}{\partial y^6}$$

$$\frac{\partial^8 W}{\partial x \partial y^7} = \frac{\partial^8}{\partial x \partial y^7} (A * B) = \frac{\partial A}{\partial x} * \frac{\partial^7 B}{\partial y^7}$$

$$\frac{\partial^8 W}{\partial y^8} = \frac{\partial^8}{\partial y^8} (A * B) = A * \frac{\partial^8 B}{\partial x^8}$$

Demostraciones:

$$1. \nabla^8 w = \left(\frac{\pi}{a}\right)^8 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^4 w$$

$$\nabla^8 w = \left(\frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + 4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial y^2} + 6 \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial y^4} + 4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8 w}{\partial y^8}\right)$$

$$\nabla^8 w = \left(\frac{\partial^8(AB)}{\partial x^8} + 4 \frac{\partial^8(AB)}{\partial x^6 \partial y^2} + 6 \frac{\partial^8(AB)}{\partial x^4 \partial y^4} + 4 \frac{\partial^8(AB)}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8(AB)}{\partial y^8}\right)$$

$$\nabla^8 w = \left(\frac{\partial^8 A}{\partial x^8} B + 4 \frac{\partial^6 A}{\partial x^6} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + 6 \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} \frac{\partial^4 B}{\partial y^4} + 4 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \frac{\partial^6 B}{\partial y^6} + A * \frac{\partial^8 B}{\partial x^8}\right)$$

$$\begin{aligned} \nabla^8 w &= A \left(\frac{m\pi}{a}\right)^8 B + 4 \left(-A \left(\frac{m\pi}{a}\right)^6\right) \left(-B \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right) + 6A \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 B \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \\ &\quad + 4 \left(-A \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right) \left(-B \left(\frac{n\pi}{b}\right)^6\right) + AB \left(\frac{n\pi}{b}\right)^8 \end{aligned}$$

$$\nabla^8 w = w \left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^8 + 4 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^6 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + 6 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 + 4 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^6 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^8\right)$$

$$\nabla^8 w = w \left(\frac{\pi}{a}\right)^8 \left((m^2)^4 + 4(m^2)^3 \left(\frac{n^2 a^2}{b^2}\right) + 6(m^2)^2 \left(\frac{n^2 a^2}{b^2}\right)^2 + 4(m^2) \left(\frac{n^2 a^2}{b^2}\right)^3 + \left(\frac{n^2 a^2}{b^2}\right)^4\right)$$

$$\boxed{\nabla^8 w = \left(\frac{\pi}{a}\right)^8 \left(m^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2}\right)^4 w}$$

$$2. \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 m^4 w$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\partial^4}{\partial x^4} (AB) = \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} B = \left(A \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \right) B = \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 m^4 w$$

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 m^4 w}$$

$$3. \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\pi}{a} \right)^6 \left(m^2 + n^2 * \frac{a^2}{b^2} \right)^2 (-1) m^2 w$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \frac{\partial^2 (AB)}{\partial x^2}$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \frac{\partial^2 (A)B}{\partial x^2}$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \left(-A \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) B$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) AB \left(- \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^4 (AB)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 (AB)}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 (AB)}{\partial y^4} \right) \left(- \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^4 (A)}{\partial x^4} B + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + A \frac{\partial^4 (B)}{\partial y^4} \right) \left(- \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(A \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 B + 2 \left(-A \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \left(-B \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) + AB \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right) \left(- \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = AB \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right) \left(- \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^6 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right) (-1) w$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\pi}{a} \right)^6 \left((m^2)^3 + 2(m^2)^2 \left(\frac{n^2 a^2}{b^2} \right) + m^2 \left(\frac{n^2 a^2}{b^2} \right)^2 \right) (-1) w$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\pi}{a} \right)^6 \left((m^2)^2 + 2m^2 \left(\frac{n^2 a^2}{b^2} \right) + \left(\frac{n^2 a^2}{b^2} \right)^2 \right) m^2 (-1) w$$

$$\boxed{\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\pi}{a} \right)^6 \left(m^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} \right)^2 m^2 (-1) w}$$

$$4. \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \left(\frac{\pi^6}{a^4 b^2} \right) \left(m^2 + n^2 * \frac{a^2}{b^2} \right)^2 (-1) n^2 w ;$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \frac{\partial^2 (AB)}{\partial y^2}$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \frac{A \partial^2 (B)}{\partial y^2}$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) A \left(-B \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) AB \left(- \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^4(AB)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4(AB)}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4(AB)}{\partial y^4} \right) \left(- \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^4(A)}{\partial x^4} B + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + A \frac{\partial^4(B)}{\partial y^4} \right) \left(- \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(A \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 B + 2 \left(-A \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \left(-B \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) + AB \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right) \left(- \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = AB \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right) \left(- \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^6 \right) (-1)w$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\pi^6}{a^4 b^2} \left(m^4 n^2 + 2m^2 n^2 \left(\frac{n^2 a^2}{b^2} \right) + n^2 \left(\frac{n^2 a^2}{b^2} \right)^2 \right) (-1)w$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\pi^6}{a^4 b^2} \left((m^2)^2 + 2m^2 \left(\frac{n^2 a^2}{b^2} \right) + \left(\frac{n^2 a^2}{b^2} \right)^2 \right) n^2 (-1)w$$

$$\boxed{\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\pi^6}{a^4 b^2} \left(m^2 + \frac{n^2 a^2}{b^2} \right)^2 n^2 (-1)w}$$

$$5. \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \frac{a}{b} \left(\frac{\pi}{a} \right)^6 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 a_{mn} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

$$w = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \frac{\partial^2(AB)}{\partial x \partial y}$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \frac{m\pi}{a} \right) \left(\cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \frac{n\pi}{b} \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} a_{mn} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} a_{mn} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \left(\cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} a_{mn} \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right) \\ & + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} \left(\cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right) \\ & + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left(\cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right) \end{aligned} \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} a_{mn} \left(\begin{aligned} & \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \\ & + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right) \\ & + \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left(\cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right) \end{aligned} \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} a_{mn} \left(\begin{aligned} & \left(\cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) + \\ & 2 \left(-\cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right) \left(-\cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right) \\ & + \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \left(\cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right) \end{aligned} \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} a_{mn} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \left(\left(\frac{m\pi}{a} \right)^5 \frac{n\pi}{b} + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 + \frac{m\pi}{a} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^5 \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \left(\frac{m^5 n \pi^6}{a^5 b} + 2 \frac{m^3 n^3 \pi^6}{a^3 b^3} + \frac{m n^5 \pi^6}{a b^5} \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \frac{a}{b} \left(\frac{\pi}{a} \right)^6 \left(m^5 n + 2 m^3 n^3 \frac{a^2}{b^2} + m n^5 \frac{a^4}{b^4} \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \frac{a}{b} \left(\frac{\pi}{a} \right)^6 m n \left((m^2)^2 + 2 m^2 n^2 \frac{a^2}{b^2} + (n^2 \frac{a^2}{b^2})^2 \right)$$

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{b} \left(\frac{\pi}{a} \right)^6 m n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 a_{mn} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right)$$

Regresando en la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\nabla^8 w + 12 \frac{Z^2}{b^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K_X \frac{\pi^2}{b^2} \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2K_S \frac{\pi^2}{b^2} \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + K_Y \frac{\pi^2}{b^2} \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (17)$$

Y reemplazando los valores obtenidos en los Cálculos Auxiliares:

1. $\nabla^8 w = \left(\frac{\pi}{a} \right)^8 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^4 w$;
2. $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 m^4 w$;

$$\begin{aligned}
3. \quad \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^6 \left(m^2 + n^2 * \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)m^2 w ; \\
4. \quad \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \left(\frac{\pi^6}{a^4 b^2}\right) \left(m^2 + n^2 * \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)n^2 w ; \\
5. \quad \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \frac{a}{b} \left(\frac{\pi}{a}\right)^6 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{mn} \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\pi}{a}\right)^8 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^4 w + 12 \frac{z^2}{b^4} \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 m^4 w + K_X \frac{\pi^2}{b^2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^6 \left(m^2 + n^2 * \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)m^2 w \\
&+ 2K_S \frac{\pi^2}{b^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \frac{a}{b} \left(\frac{\pi}{a}\right)^6 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{mn} \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right)\right) \\
&+ K_Y \frac{\pi^2}{b^2} \left(\frac{\pi^6}{a^4 b^2}\right) \left(m^2 + n^2 * \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)n^2 w = 0
\end{aligned}$$

Agrupando los términos que tienen factor común w

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(\frac{\pi}{a}\right)^8 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^4 + 12 \frac{z^2}{b^4} \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 m^4 + K_X \frac{\pi^2}{b^2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^6 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)m^2\right. \\
&+ \left. K_Y \frac{\pi^2}{b^2} \left(\frac{\pi^6}{a^4 b^2}\right) \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)n^2\right\} w \\
&+ 2K_S \frac{\pi^2}{b^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \frac{a}{b} \left(\frac{\pi}{a}\right)^6 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{mn} \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right)\right) = 0
\end{aligned}$$

Dividiendo en $\left(\frac{\pi}{a}\right)^8$

$$\begin{aligned}
&\left\{\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^4 + 12 \frac{z^2}{b^4} \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 m^4 + K_X \frac{a^2}{b^2} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)m^2\right. \\
&+ \left. K_Y \frac{a^4}{b^4} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)n^2\right\} w \\
&+ 2K_S \frac{a^3}{b^3} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{mn} \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right)\right) = 0
\end{aligned}$$

Llamando:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^4 + 12 \frac{z^2}{b^4} \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 m^4 + K_X \frac{a^2}{b^2} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)m^2 \\
&+ K_Y \frac{a^4}{b^4} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)n^2 ; (19)
\end{aligned}$$

$$C = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{mn} \cos\left(\frac{m*\pi*x}{a}\right) \cos\left(\frac{n*\pi*y}{b}\right)\right) ; (20)$$

Luego

$$\boxed{\alpha w + 2K_S \frac{a^3}{b^3} C = 0 ; (21)}$$

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} * f_i(x) * g_j(y) ;$$

que reemplazando en la ecuación diferencial se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} * Q(f_i(x) * g_j(y)) = 0 ;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} * B_{mnij} = 0 ;$$

$$B_{mnij} = \iint f_m(x) * g_n(y) * Q(f_i(x) * g_j(y)) dx dy ;$$

Aplicando el Método de Galerkin a nuestra ecuación de trabajo (21) que surge de la Ecuación de Donnell:

$$\iint f_m(x) * g_n(y) * \left(\alpha * w + 2K_S \frac{a^3}{b^3} * C \right) dx dy = 0$$

$$\iint f_m(x) * g_n(y) * \alpha * w * dx dy + \iint f_m(x) * g_n(y) * 2K_S \frac{a^3}{b^3} * C * dx dy = 0$$

Con α y $2K_S \frac{a^3}{b^3}$ constantes, se tiene:

$$\alpha * \iint f_m(x) * g_n(y) * w * dx dy + 2K_S \frac{a^3}{b^3} * \iint f_m(x) * g_n(y) * C * dx dy = 0$$

$$\alpha * I + 2K_S \frac{a^3}{b^3} * II = 0 \quad (A)$$

Cálculos Auxiliares:

$$w = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} * \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) * \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (18)$$

$$f_i(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right); \quad g_j(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right);$$

$$I = \iint f_m(x) * g_n(y) * w * dx dy$$

$$I = a_{mn} \frac{ab}{4}$$

$$II = \iint f_m(x) * g_n(y) * C * dx dy$$

$$II = \frac{2a}{\pi} \frac{2b}{\pi} * \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(p^2 + q^2 * \frac{a^2}{b^2} \right)^2 a_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)}$$

Demostración:

$$I = \iint f_m(x) * g_n(y) * w * dx dy ;$$

$$I = \iint \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy ;$$

$$I = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \iint \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy ;$$

$$I = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \iint \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)^2 dx dy ;$$

$$I = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)^2 dx \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)^2 dy ; \quad 0 < x < a ; 0 < y < b ;$$

$$I_a = \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)^2 dx = \int_0^{m\pi} \sin(u)^2 \frac{a}{m\pi} du = \frac{a}{m\pi} \int_0^{m\pi} \sin(u)^2 du =$$

$$I_a = \frac{a}{m\pi} \int_0^{m\pi} \frac{(1 - \cos(2u))}{2} du = \frac{a}{m\pi} \int_0^{m\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2u)}{2}\right) du = \frac{a}{m\pi} \left(\frac{1}{2}u\right)_0^{m\pi} - \int_0^{m\pi} \frac{\cos(2u)}{2} du$$

$$I_a = \frac{a}{m\pi} \left(\frac{1}{2}u\right)_0^{m\pi} - \frac{1}{4} \int_0^{m\pi} \cos(2u) 2du = \frac{a}{m\pi} \left(\frac{1}{2}u\right)_0^{m\pi} - \frac{1}{4} \sin(2u)_0^{m\pi}$$

$$I_a = \frac{a}{m\pi} \left(\frac{1}{2}(m\pi - 0) - \frac{1}{4}(\sin(2m\pi) - \sin(2 \cdot 0))\right)$$

$$I_a = \frac{a}{m\pi} \left(\frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}(0 - 0)\right) = \frac{a}{m\pi} \left(\frac{1}{2}m\pi\right) = \frac{a}{2} \text{ luego}$$

$$I_a = \frac{a}{2}; \quad I_b = \frac{b}{2};$$

$$I = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \frac{a}{2} \frac{b}{2}$$

$$I = a_{mn} \frac{a}{2} \frac{b}{2}$$

$$II = \iint f_m(x) * g_n(y) * C * dx dy$$

$$II = \iint \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy$$

$$II = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{mn} * \iint \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dx dy$$

$$III = \int_0^a \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx * \int_0^b \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx ;$$

$$A = \int_0^a \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \frac{2ma}{(m^2 - p^2)\pi} \quad \text{Condición: } m+p=2K+1 \text{ (impar; odd)}$$

$$B = \int_0^b \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx = \frac{2nb}{(n^2 - q^2)\pi} \quad \text{Condición: } n+q=2K+1 \text{ (impar; odd)}$$

Demostración:

$$A = \int_0^a \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx$$

Haciendo las siguientes sustituciones:

$u_1 = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$	$v_1 = \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \left(\frac{a}{p\pi}\right)$
$du_1 = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right) dx$	$dv_1 = \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx$

$$A = \int_0^a u_1 dv_1 = [u_1 v_1]_0^a - \int_0^a v_1 du_1 \quad \text{“Integración por partes”}$$

$$A1 = [u_1 v_1]_0^a = \left[\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \left(\frac{a}{p\pi}\right) \right]_0^a = \sin(m\pi) \sin(p\pi) \left(\frac{a}{p\pi}\right) - \sin(0) \sin(0) \left(\frac{a}{p\pi}\right) = 0$$

$$A2 = \int_0^a v_1 du_1 = \int_0^a \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \left(\frac{a}{p\pi}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right) dx = \int_0^a \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{m}{p}\right) dx$$

$$A2 = \frac{m}{p} \int_0^a \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx$$

$u_2 = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$	$v_2 = -\cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \left(\frac{a}{p\pi}\right)$
$du_2 = -\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right) dx$	$dv_2 = \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) dx$

$$A2 = \frac{m}{p} \int_0^a u_2 dv_2 = \frac{m}{p} ([u_2 v_2]_0^a - \int_0^a v_2 du_2) \quad \text{“Integración por partes”}$$

$$A3 = [u_2 v_2]_0^a = - \left[\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \left(\frac{a}{p\pi}\right) \right]_0^a$$

$$A3 = - \left\{ \left(\cos(m\pi) \cos(p\pi) \left(\frac{a}{p\pi}\right) \right) - \left(\cos(0) \cos(0) \left(\frac{a}{p\pi}\right) \right) \right\}$$

$$A3 = - \left\{ \left(1 * (-1) * \left(\frac{a}{p\pi}\right) \right) - \left(1 * 1 * \left(\frac{a}{p\pi}\right) \right) \right\} = \frac{2a}{p\pi} \quad \text{Condición: } m+p=2K+1 \text{ (impar; odd)}$$

Si m es par ($m=2K_1$) entonces p tiene que ser impar ($p=2K_2+1$) y viceversa. Esto es necesario para que $\cos(m\pi) = 1$ y $\cos(p\pi) = -1$ de tal manera que $\cos(m\pi) \cos(p\pi) = -1$. Sino $A3=0$, $A=0$, $\text{III}=0$ y $\text{II}=0$.

$$m + p = (2K_1) + (2K_2 + 1) = 2K + 1 \quad \text{con } K=K_1 + K_2$$

$$A4 = \int_0^a v_2 du_2 = \int_0^a \left(-\cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \left(\frac{a}{p\pi}\right) \right) \left(-\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \left(\frac{m\pi}{a}\right) \right) dx$$

$$A4 = \frac{m}{p} \int_0^a \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \frac{m}{p} A$$

$$A2 = \frac{m}{p} (A3 - A4) = \frac{m}{p} \left(\frac{2a}{p\pi} - \frac{m}{p} A \right)$$

$$A = A1 - A2 = 0 - \frac{m}{p} \left(\frac{2a}{p\pi} - \frac{m}{p} A \right) = -\frac{2am}{p^2\pi} + \frac{m^2}{p^2} A$$

$$A\left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) = -\frac{2am}{p^2\pi}$$

$$A\left(\frac{p^2-m^2}{p^2}\right) = -\frac{2am}{p^2\pi} \text{ luego } A = \frac{2am}{\pi(m^2-p^2)}$$

$$A = \int_0^a \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \frac{2am}{\pi(m^2-p^2)}$$

$$\text{Repetiendo con B las mismas operaciones } B = \int_0^b \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy = \frac{2nb}{\pi(n^2-q^2)}$$

$$\text{Luego III} = \int_0^a \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx * \int_0^b \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy = \frac{2am}{\pi(m^2-p^2)} * \frac{2nb}{\pi(n^2-q^2)}$$

reemplazando en II

$$\text{II} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{mn} * \iint \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{b}\right) dx dy$$

Reemplazando, los índices m por p y n por q, y los resultados de III

$$\text{II} = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} pq \left(p^2 + q^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{pq} \frac{2ma}{\pi(m^2-p^2)} \frac{2nb}{\pi(n^2-q^2)} \text{ y como } a, b \text{ y } \pi \text{ son constantes}$$

$$\text{II} = \frac{2a}{\pi} \frac{2b}{\pi} * \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left(p^2 + q^2 * \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{pq} \frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)}$$

Con p=1: m, q=1: n. Para tener una matriz cuadrada, que se pueda resolver se debe hacer m=n. En el símbolo de sumatoria se debería reemplazar ∞ por m. Aquí se lo deja así para respetar la notación del material de referencia.

$$\text{Regresando a la ecuación (A)} \quad \alpha * I + 2K_S \frac{a^3}{b^3} * \text{II} = 0$$

$$\alpha * a_{mn} \frac{a}{2} \frac{b}{2} + 2K_S \frac{a^3}{b^3} * \frac{2a}{\pi} \frac{2b}{\pi} * \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left(p^2 + q^2 * \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{pq} \frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)} = 0$$

Dividiendo en $\frac{a}{2} \frac{b}{2}$

$$\alpha * a_{mn} + \frac{32K_S a^3}{\pi^2 b^3} * \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \left(p^2 + q^2 * \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{pq} \frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)} = 0$$

Y reemplazando α

$$\left\{ \left(\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^4 + 12 \frac{z^2}{b^4} \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 m^4 + K_X \frac{a^2}{b^2} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)m^2 + K_Y \frac{a^4}{b^4} \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2 (-1)n^2 \right\} * a_{mn} + \frac{32K_S a^3}{\pi^2 b^3} * \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(p^2 + q^2 * \frac{a^2}{b^2}\right)^2 a_{pq} \frac{mnpq}{(m^2-p^2)(n^2-q^2)} = 0 \quad (22)$$

Llegando a la ecuación (E5) de la pág. 23/25 del Report NACA874.

Anexo B

Comparación de los Tiempos de Cálculos con n=7 y n=15

Corresponde con la pag.36

fKx_7

Profile Summary

Generated 05-Jul-2018 11:10:24 using cpu time.

<u>Function Name</u>	<u>Calls</u>	<u>Total Time</u>	<u>Self Time*</u>
mupadmex (MEX-file)	3328	0.613 s	0.532 s

fKx_15

Profile Summary

Generated 05-Jul-2018 11:13:05 using cpu time.

<u>Function Name</u>	<u>Calls</u>	<u>Total Time</u>	<u>Self Time*</u>
mupadmex (MEX-file)	11960	2.552 s	2.322 s

Anexo C

Tablas y figuras de La Validación de la Herramienta de Cálculo del Capítulo 4

Con notación del cap. 4 y las tablas que permiten realizar las figuras.

Número	Tema	pág.
C1	Carga crítica de pandeo bajo compresión axial en una tira infinitamente larga en la dirección axial (fig 10 de pag 10/25 de NACA 874)	113
C2	Carga crítica de pandeo bajo compresión axial una placa curva Niu fig 11.4.1 pág. 480/810 hinged Theoretical	114
C3	Tensión Crítica Circunferencial en Cilindros Fig 1 NACA 874 pag 3/25 $cte=20$	115
C4	Tensión Crítica de Corte para placas curvadas largas fig 11.4.2 pag 481/810 del Niu	117
C5	Tensión Crítica de Corte para placas curvadas largas Tesis	118
C6	Tensión Crítica de Corte para paneles curvos anchos	121
C7	Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial NACA (fig. 13 pág. 15/25 NACA 874)	124
C8	Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial Tesis	125
C9	Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circunferencial NACA	128
C10	Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circunferencial Tesis	129
C11	Tensiones Combinadas con $K_y=0$ NACA (fig 15 pag 16/25 del NACA 874)	132
C12	Tensiones Combinadas con $K_y=0$ Tesis	132

4.1.1 Compresión Axial en una tira infinitamente larga (pág. 40)

NACA 874		Tesis		Diferencia		NACA 874		Tesis		Diferencia	
Z	Kx	Z	Kx	abs	rel [%]	Z	Kx	Z	Kx	abs	rel [%]
1,1	4,1	1,1	4,0	0,0	0,9	10,3	7,3	10,3	7,3	0,0	-0,4
1,4	4,1	1,4	4,1	0,0	0,4	12,2	8,4	12,2	8,6	-0,1	-1,3
1,7	4,1	1,7	4,1	0,0	0,9	14,8	10,4	14,8	10,8	-0,3	-3,3
2,2	4,2	2,2	4,1	0,0	1,0	17,0	11,8	17,0	12,9	-1,1	-9,2
2,6	4,2	2,6	4,2	0,0	0,6	20,5	14,3	20,5	15,8	-1,5	-10,6
3,4	4,4	3,4	4,4	0,0	1,0	25,6	17,8	25,6	18,4	-0,6	-3,1
4,4	4,6	4,4	4,6	0,0	-0,7	30,9	21,5	30,9	21,7	-0,2	-0,8
5,6	4,9	5,6	5,0	-0,1	-1,6	43,7	30,5	43,7	30,7	-0,2	-0,7
6,8	5,3	6,8	5,4	-0,2	-3,1	124,2	85,9	124,2	88,8	-2,9	-3,4
7,7	5,7	7,7	5,8	-0,1	-1,4	664,5	468,0	664,5	643,9	-175,9	-37,6
8,9	6,4	8,9	6,4	0,0	-0,5	988,9	688,8	988,9	854,2	-165,4	-24,0

Tabla C1 Carga crítica de pandeo bajo compresión axial en una tira infinitamente larga en la dirección axial (fig 10 de pag 10/25 de NACA 874)

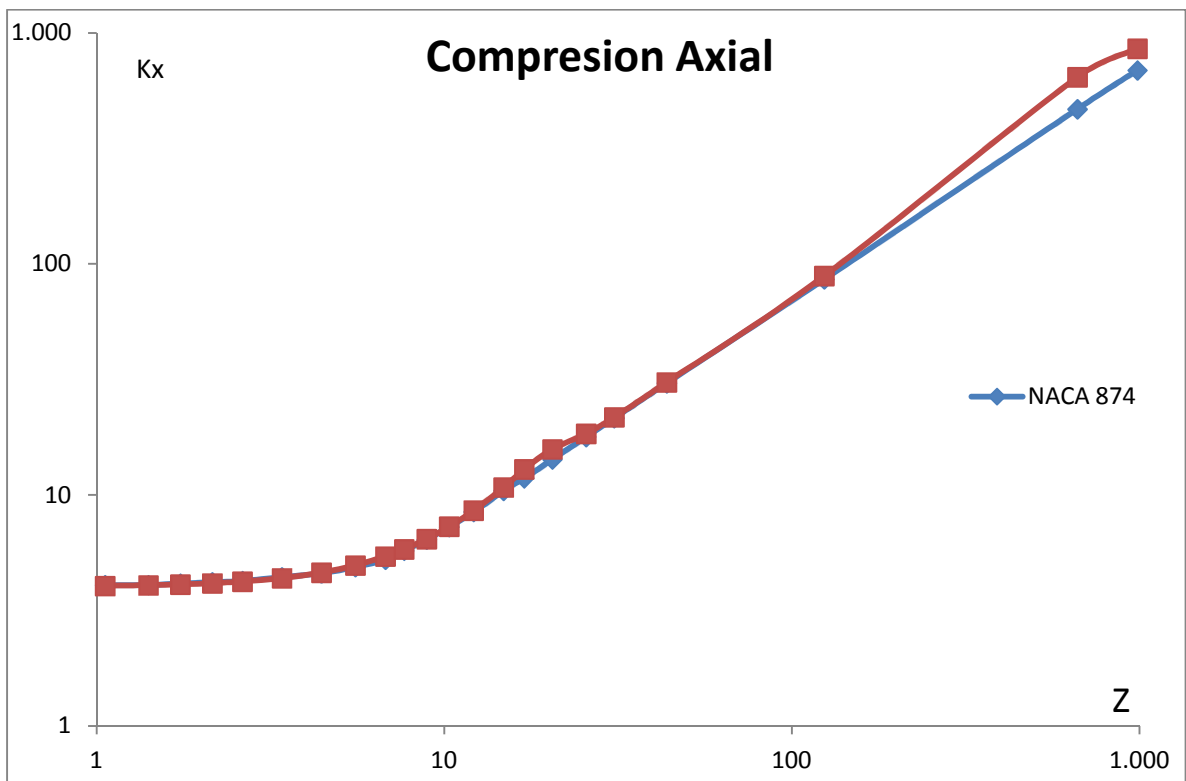


Figura 17 Compresión Axial NACA que corresponde con la fig. 10 de pág. 10/25 de NACA 874 que muestra la carga crítica de pandeo bajo compresión axial en una tira infinitamente larga en la dirección axial.

4.1.2 Compresión Axial para una placa curva (pág. 41)

Z	Kx	Z	Kx	abs	rel [%]	Z	Kx	Z	Kx	abs	rel [%]
1,00	4,00	1,00	4,00	0,00	-0,01	14,16	9,58	14,16	10,04	0,46	4,79
1,22	4,05	1,22	4,03	-0,02	-0,58	15,77	10,70	15,77	10,93	0,23	2,12
1,48	4,06	1,48	4,03	-0,03	-0,68	18,43	12,56	18,43	13,98	1,42	11,26
1,87	4,16	1,87	4,03	-0,13	-3,21	22,33	14,75	22,33	16,48	1,73	11,70
2,44	4,27	2,44	4,12	-0,15	-3,53	25,46	17,31	25,46	18,04	0,73	4,20
3,07	4,39	3,07	4,28	-0,11	-2,47	31,97	21,36	31,97	21,77	0,41	1,92
4,00	4,56	4,00	4,49	-0,06	-1,40	41,11	27,33	41,11	28,94	1,61	5,90
5,29	4,79	5,29	4,77	-0,02	-0,48	64,81	42,09	64,81	47,54	5,44	12,93
7,32	5,43	7,32	5,51	0,08	1,50	84,33	55,21	84,33	60,15	4,93	8,93
8,56	5,92	8,56	5,97	0,05	0,87	119,30	79,93	119,30	84,46	4,53	5,66
9,54	6,61	9,54	6,49	-0,12	-1,81	322,22	217,09	322,22	227,73	10,64	4,90
10,75	7,39	10,75	7,08	-0,31	-4,22	507,59	355,49	507,59	416,66	61,17	17,21
11,55	7,96	11,55	7,73	-0,23	-2,92	839,09	596,75	839,09	804,28	207,53	34,78
12,71	8,68	12,71	8,43	-0,24	-2,79	968,52	700,48	968,52	846,76	146,28	20,88

Tabla C2 Carga crítica de pandeo bajo compresión axial una placa curva Niu fig 11.4.1 pág. 480/810 hinged Theoretical

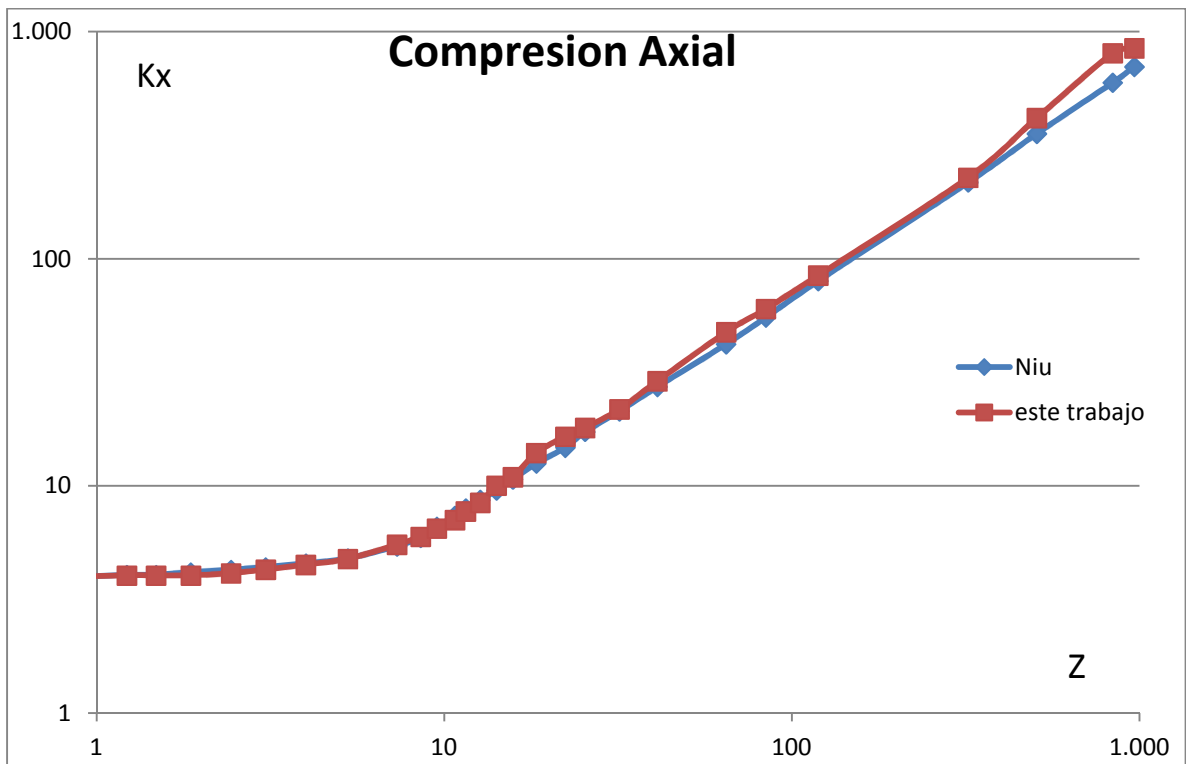


Figura 18 Compresión Axial Niu que corresponde con la Fig. 11.4.1 pag.480/810 hinged Theoretical del Niu que muestra la carga crítica de pandeo bajo compresión axial para una placa curva.

4.1.3 Tensión Crítica Circunferencial en Cilindros (pág. 42)

Z	Ky	Z	Ky	abs	rel[%]	Z	Ky	Z	Ky	abs	rel[%]
0,99	4,04	0,99	4,00	-0,04	-0,97	186,38	15,61	186,38	15,85	0,24	1,55
1,19	4,11	1,19	4,03	-0,08	-1,98	223,45	16,77	223,45	17,92	1,14	6,82
1,42	4,11	1,42	4,03	-0,08	-1,95	277,80	18,36	277,80	21,61	3,25	17,72
1,67	4,11	1,67	4,03	-0,08	-1,92	345,40	20,46	345,40	27,40	6,94	33,92
2,04	4,18	2,04	4,12	-0,06	-1,45	429,44	22,81	429,44	28,38	5,58	24,45
2,73	4,26	2,73	4,12	-0,14	-3,17	563,79	25,88	563,79	29,35	3,47	13,40
3,33	4,33	3,33	4,28	-0,06	-1,33	713,78	28,85	713,78	30,75	1,90	6,59
3,92	4,41	3,92	4,28	-0,14	-3,08	871,46	31,57	871,46	32,57	1,00	3,16
4,61	4,49	4,61	4,49	0,00	0,00	1007,74	34,56	1007,74	34,43	-0,13	-0,37
5,84	4,66	5,84	4,77	0,11	2,43	1252,83	37,83	1252,83	38,47	0,64	1,69
7,94	4,91	7,94	5,51	0,59	12,09	1422,62	40,66	1422,62	41,78	1,12	2,74
9,87	5,09	9,87	6,49	1,40	27,48	1644,92	43,71	1644,92	46,74	3,03	6,93
16,10	5,89	16,10	11,15	5,26	89,40	1901,97	46,99	1901,97	53,38	6,39	13,61
18,95	6,10	18,95	11,16	5,05	82,85	2160,14	52,38	2160,14	61,05	8,67	16,55
23,14	6,56	23,14	11,18	4,63	70,54	2836,73	62,76	2836,73	85,67	22,90	36,49
28,76	7,05	28,76	11,22	4,17	59,16	3659,11	77,99	3659,11	124,63	46,65	59,81
36,41	7,71	36,41	11,29	3,57	46,33	4469,14	91,78	4469,14	172,62	80,84	88,08
48,67	8,60	48,67	11,43	2,83	32,91	5559,26	112,00	5559,26	252,30	140,30	125,27
57,31	9,24	57,31	11,56	2,31	25,04	8145,83	160,86	8145,83	510,63	349,77	217,44
67,47	9,93	67,47	11,73	1,79	18,04	9594,44	185,92	9594,44	698,00	512,08	275,43
83,88	10,87	83,88	12,05	1,18	10,86	21369,07	419,86	21369,07	3355,65	2935,80	699,23
100,57	11,69	100,57	12,48	0,79	6,78	31317,46	625,27	31317,46	7176,21	6550,93	1047,69
127,32	13,03	127,32	13,32	0,29	2,25	41150,05	835,35	41150,05	12370,44	11535,09	1380,87
158,29	14,26	158,29	14,53	0,27	1,90	48472,56	983,15	48472,56	17153,87	16170,71	1644,78

Tabla C3 Tensión Crítica Circunferencial en Cilindros Fig 1 NACA 874 pag 3/25 cte=20

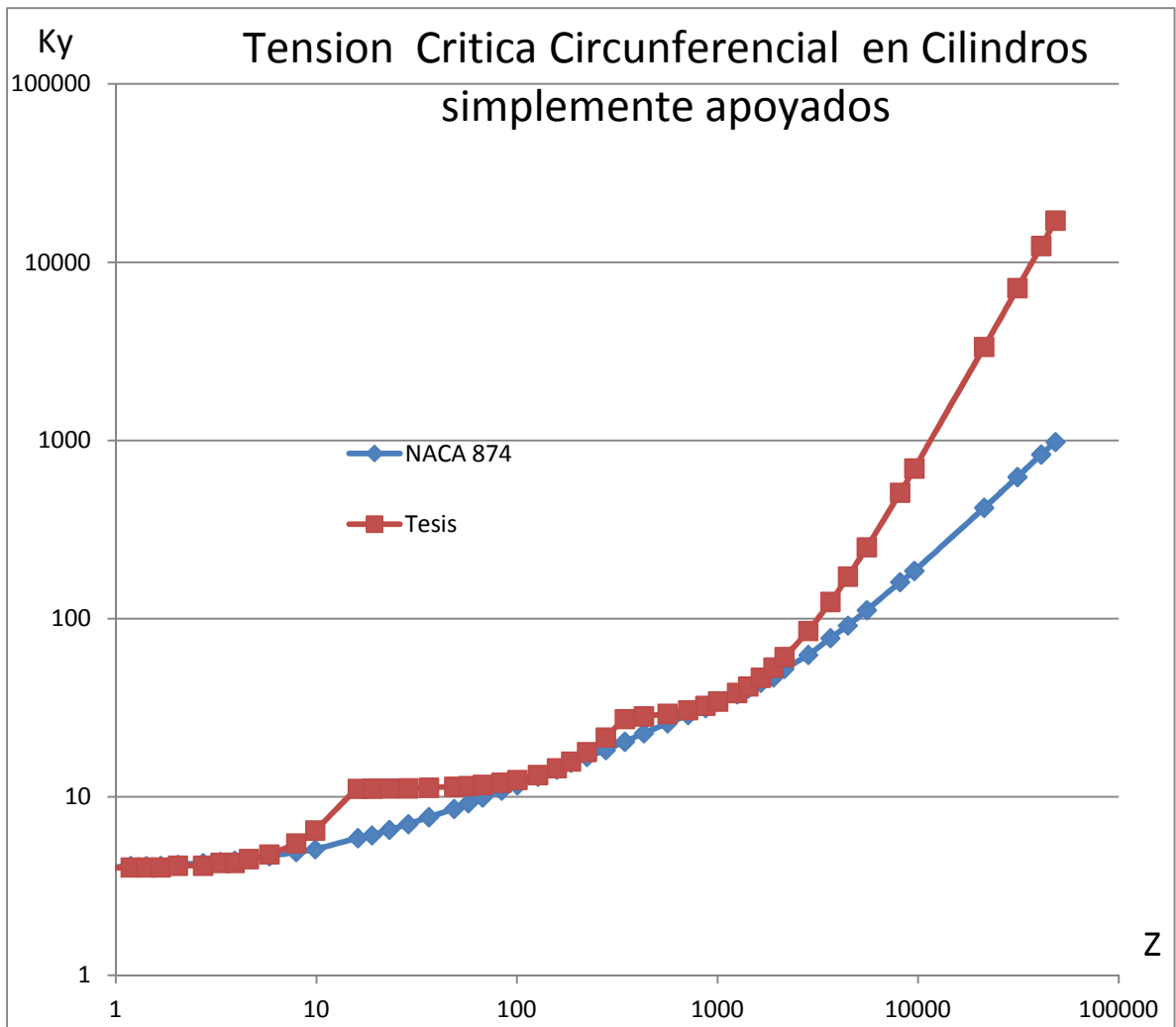


Figura 19 Tensión Circunferencial Corresponde con la Fig 1 NACA 874 pág. 3/25 cte=20. El coeficiente de tensión Crítica circunferencial para cilindros con los bordes simplemente apoyados en función de parámetro geométrico Z.

4.1.4 Tensión Crítica de Corte para placas curvadas largas (Pág. 43)

a/b=1		a/b=1,5		a/b=2		a/b=3		a/b=infinito	
Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks
1,0036	9,3938	0,9897	7,0894	1,0012	6,6855	1,0120	6,0156	1,04	5,36
1,5249	9,4979	1,5963	7,0837	1,7767	6,6011	1,6296	5,9406	1,49	5,31
3,3170	9,9409	3,1555	7,3289	3,3081	6,7507	3,2514	6,0745	2,61	5,39
5,2245	10,1690	5,1528	7,7650	5,2114	7,0695	5,2356	6,2869	5,23	5,70
7,9423	11,0312	7,2901	8,2291	7,4610	7,4045	10,3227	7,3140	10,38	6,76
10,3358	11,8301	10,3157	8,9279	10,4321	8,0334	24,0455	10,0242	18,22	8,21
16,8876	13,6066	14,9538	10,0325	14,4142	8,8188	39,6530	12,8128	34,74	10,90
24,7828	16,0241	24,7386	12,3800	19,9212	10,0276	52,7732	15,0917	46,79	12,41
50,8806	22,2258	38,5522	15,2782	30,6736	12,2312	78,1814	17,9825	64,60	14,60
75,5963	27,7549	70,2285	20,9485	43,9578	14,7468	105,2965	21,6833	103,50	18,03
105,7771	33,4646	105,6141	26,7801	68,5141	18,6310	161,6667	28,7111	152,67	21,73
175,1476	46,9809	166,6740	36,2998	87,0980	21,4378	269,7954	40,7825	263,53	29,59
263,3983	60,0595	259,9103	49,2044	105,5455	24,3818	404,4795	52,1358	502,35	41,95
342,9704	69,9199	410,1420	65,9177	134,1847	28,3859	578,1879	66,6551	989,80	58,04
457,5325	85,3053	595,1239	85,2672	166,5658	33,0489	976,4616	96,9249		
680,0583	112,9600	1009,4182	122,5426	227,6156	41,2763				
1022,8816	147,8330			289,3778	48,0549				
				409,8758	60,0144				
				508,7858	69,8731				
				695,2663	87,2678				
				1033,3326	114,2114				

Tabla C4 Tensión Crítica de Corte para placas curvadas largas fig 11.4.2 pag 481/810 del Niu

a/b=1		a/b=1,5		a/b=2		a/b=3		a/b=infinito	
Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks
1,0036	9,4367	0,9897	5,0391	1,0012	1,7833	1,0120	0,5071	1,04	0,51
1,5249	9,4746	1,5963	5,0508	1,7767	1,7864	1,6296	0,5096	1,49	0,51
3,3170	9,7166	3,1555	5,0953	3,3081	1,7976	3,2514	0,5216	2,61	0,52
5,2245	10,1414	5,1528	5,1634	5,2114	1,8201	5,2356	0,5455	5,23	0,55
7,9423	10,9645	7,2901	5,2405	7,4610	1,8584	10,3227	0,6420	10,38	0,64
10,3358	11,8176	10,3157	5,3600	10,4321	1,9267	24,0455	1,0638	18,22	0,86
16,8876	14,3259	14,9538	5,5731	14,4142	2,0459	39,6530	1,8218	34,74	1,55
24,7828	17,2228	24,7386	6,1161	19,9212	2,2549	52,7732	2,7097	46,79	2,28
50,8806	25,3562	38,5522	7,0415	30,6736	2,7812	78,1814	5,1101	64,60	3,71
75,5963	31,7327	70,2285	9,8768	43,9578	3,5958	105,2965	8,6801	103,50	8,41
105,7771	38,5386	105,6141	14,0960	68,5141	5,4596	161,6667	19,4601	152,67	17,44
175,1476	53,1895	166,6740	23,1736	87,0980	7,1455	269,7954	52,8626	263,53	50,47
263,3983	74,1300	259,9103	40,3660	105,5455	9,0585	404,4795	117,8776	502,35	181,41
342,9704	96,6091	410,1420	77,0610	134,1847	12,5324	578,1879	240,0806	989,80	702,12
457,5325	134,5268	595,1239	139,9088	166,5658	17,2485	976,4616	683,3497		
680,0583	222,1154	1009,4182	358,2576	227,6156	28,5601				
1022,8816	382,7903			289,3778	43,3500				
				409,8758	82,1233				
				508,7858	123,8411				
				695,2663	226,8467				
				1033,3326	494,8450				

Tabla C5 Tensión Crítica de Corte para placas curvadas largas Tesis

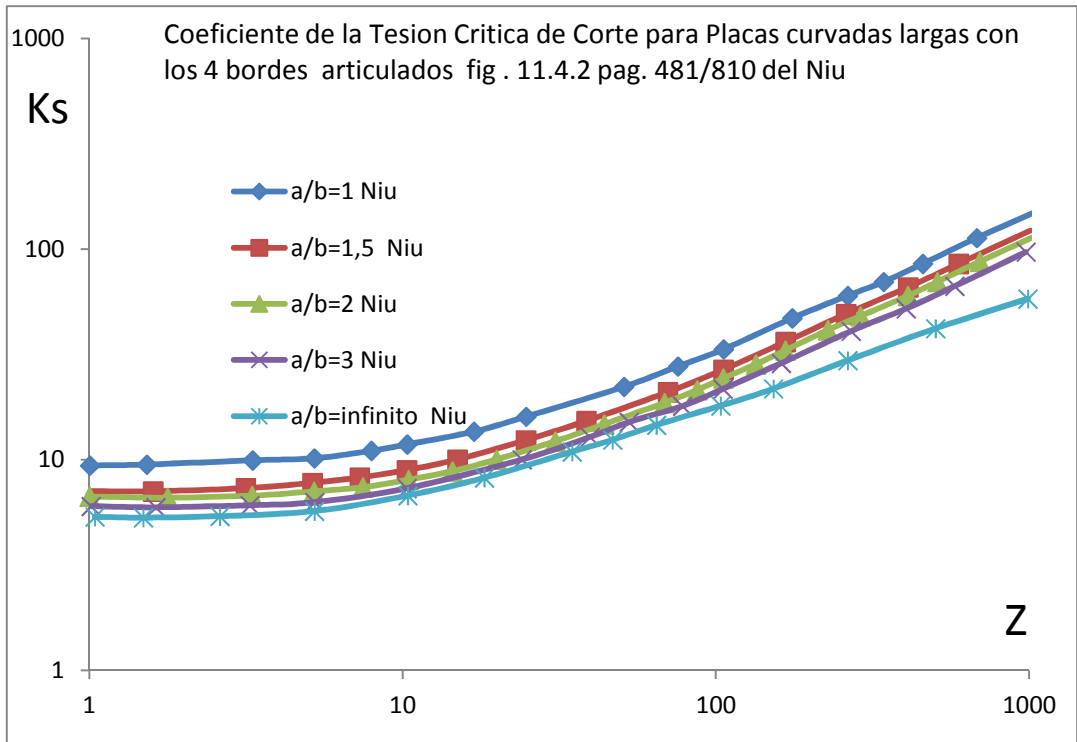


Figura 20 Tensión Crítica de Corte para placas curvadas largas Niu

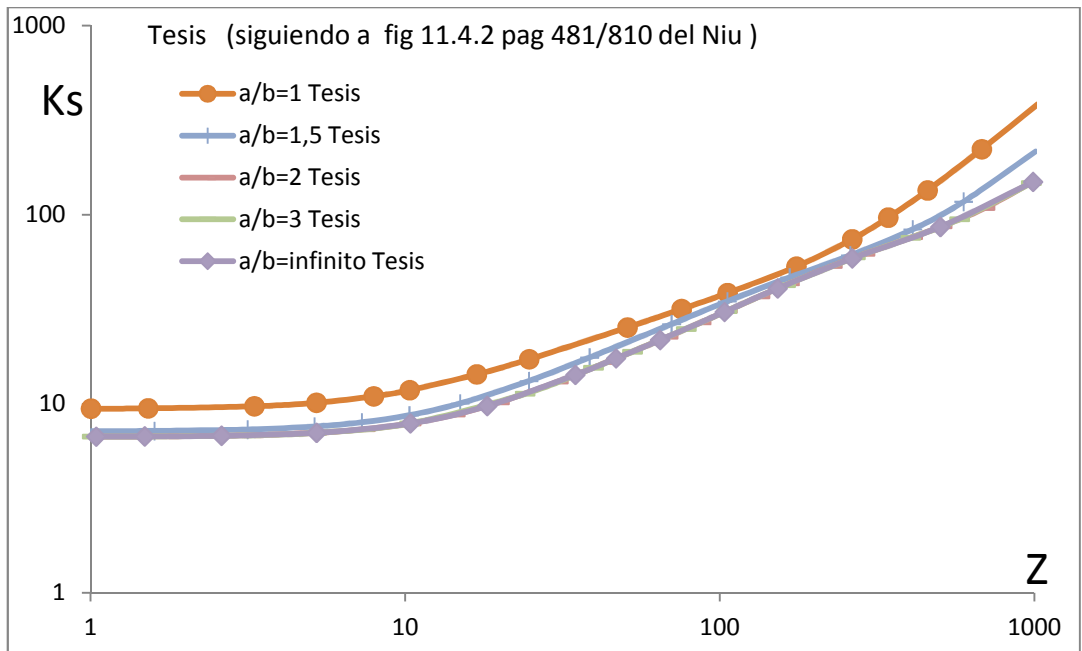


Figura 21 Tensión Crítica de Corte para placas curvadas largas Tesis

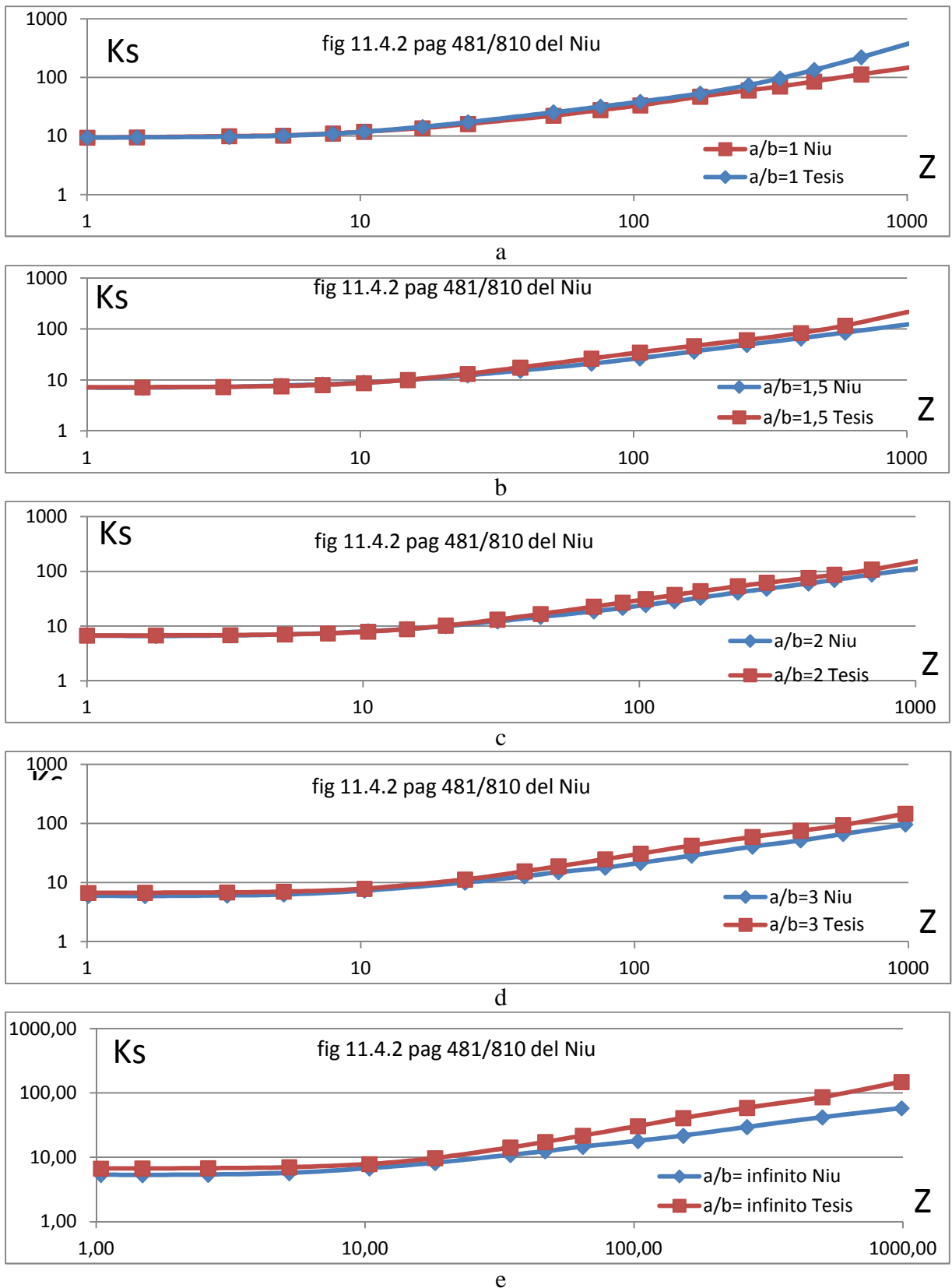


Figura 22 comparacion Niu y Tesis en Tesion Critica de Corte para Placas curvadas largas con:
a) $a/b=1$; b) $a/b=1.5$; c) $a/b=2$; d) $a/b=3$; e) $a/b=\infty$;

4.1.5 Tensión Crítica de Corte para paneles curvos anchos (pág. 45)

fig. 11.4.3 pag. 481/810 del Niu							
a/b=1		a/b=1,5		a/b=2		a/b=cilindro	
Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks
1,0193	9,124	1,0183	6,9308	1,0182	6,6204	1,0293	5,3253
3,0772	9,6442	2,1688	7,2467	1,5297	6,6921	1,5108	5,322
5,0161	10,2044	4,9541	8,0227	2,8007	6,9192	2,1922	5,5046
10,3208	11,8289	10,3132	9,5152	3,79	7,1575	3,4912	5,8246
15,6945	13,7189	19,5692	12,513	5,0697	7,5758	4,9495	6,0942
31,1993	18,2475	52,0636	20,445	6,7813	7,9272	10,425	7,3953
56,5117	24,2747	102,3366	30,1477	8,4593	8,2958	19,7829	9,9506
101,1847	33,0417			10,1916	8,8833	36,6832	14,0171
161,251	42,4796					52,0335	17,2171
275,6408	60,5372					103,5057	27,824
465,7121	85,2901					138,5142	33,405
993,4644	142,638					213,2051	44,9629
						343,877	64,8208
						471,1232	83,3566
						993,4644	142,638
Tesis							
a/b=1		a/b=1,5		a/b=2		a/b=cilindro	
Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks
1,0193	9,4377	1,0183	9,4376	1,0182	6,7153	1,0293	6,9634
3,0772	9,6747	2,1688	9,5421	1,5297	6,7314	1,5108	6,9805
5,0161	10,0878	4,9541	10,0721	2,8007	6,7990	2,1922	7,0153
10,3208	11,8120	10,3132	11,8092	3,79	6,8777	3,4912	7,1135
15,6945	13,8689	19,5692	15,3367	5,0697	7,0114	4,9495	7,2666
31,1993	19,4034	52,0636	25,6855	6,7813	7,2414	10,425	8,0792
56,5117	26,8993	102,3366	37,7960	8,4593	7,5167	19,7829	9,7126
101,1847	37,5460			10,1916	7,8444	36,6832	12,8695
161,251	50,2087					52,0335	15,8294
275,6408	77,3622					103,5057	25,1174
465,7121	137,4511					138,5142	31,0155
993,4644	367,8849					213,2051	43,2609
						343,877	62,6826
						471,1232	77,9431
						993,4644	120,1070

Tabla C6 Tensión Crítica de Corte para paneles curvos anchos

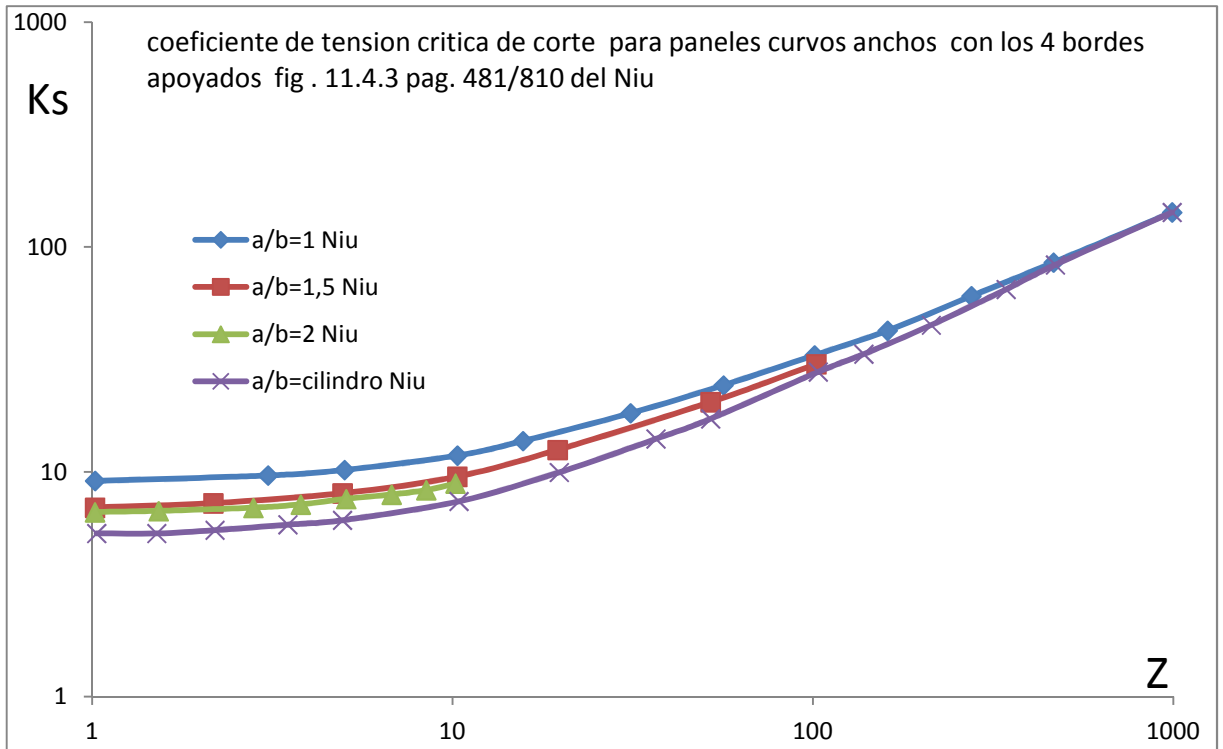


Figura 23 Tensión Crítica de Corte para paneles curvos anchos Niu

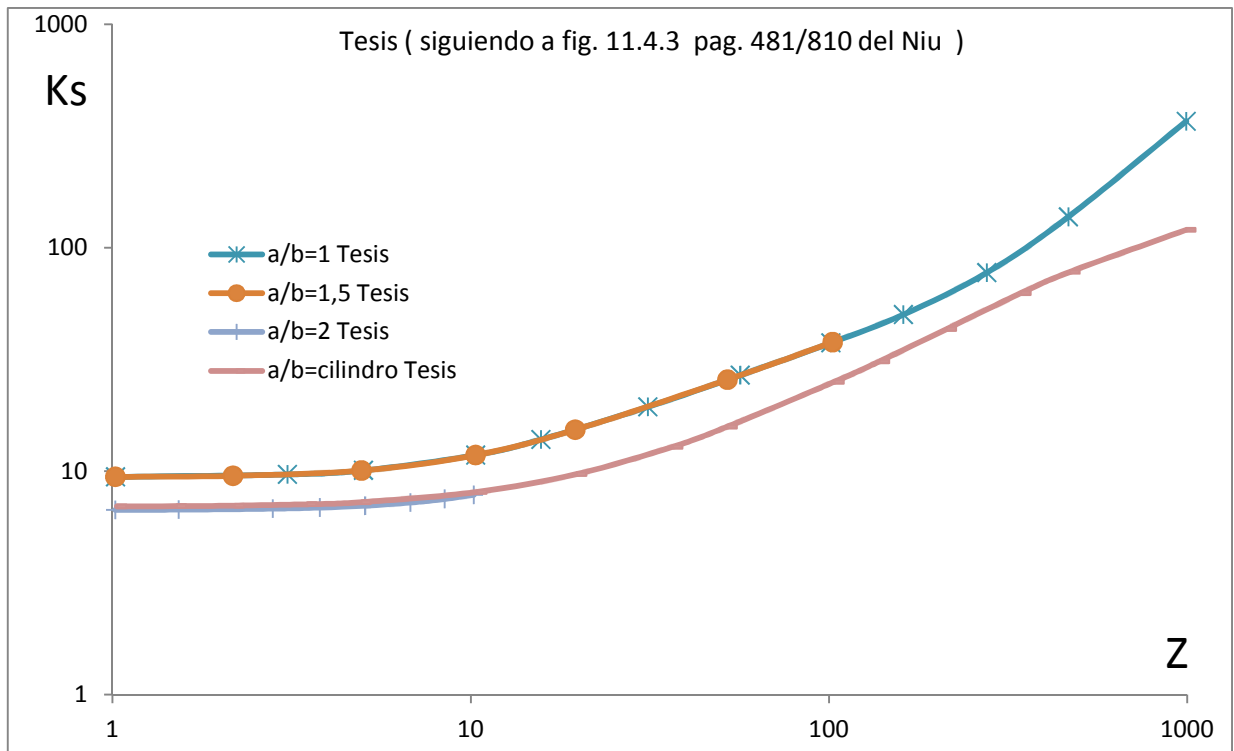


Figura 24 Tensión Crítica de Corte para paneles curvos anchos Tesis

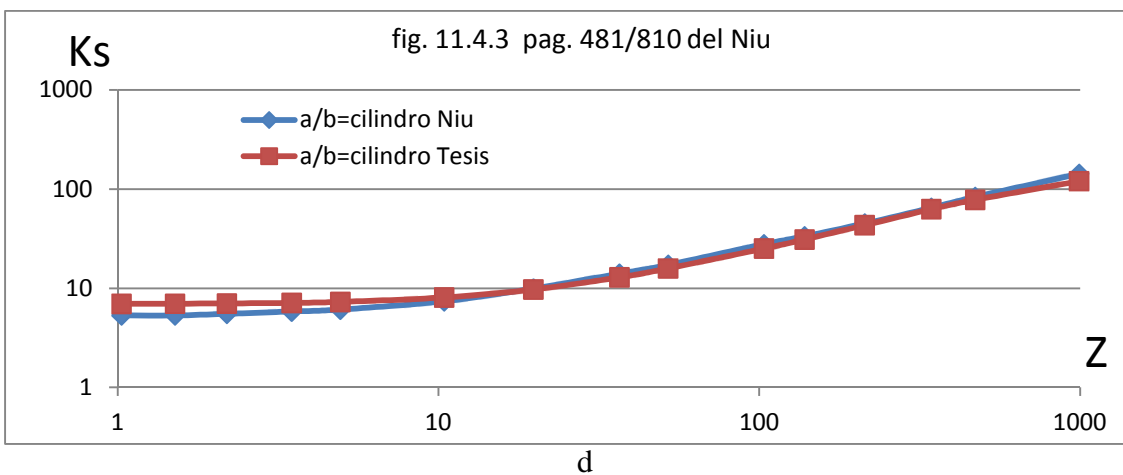
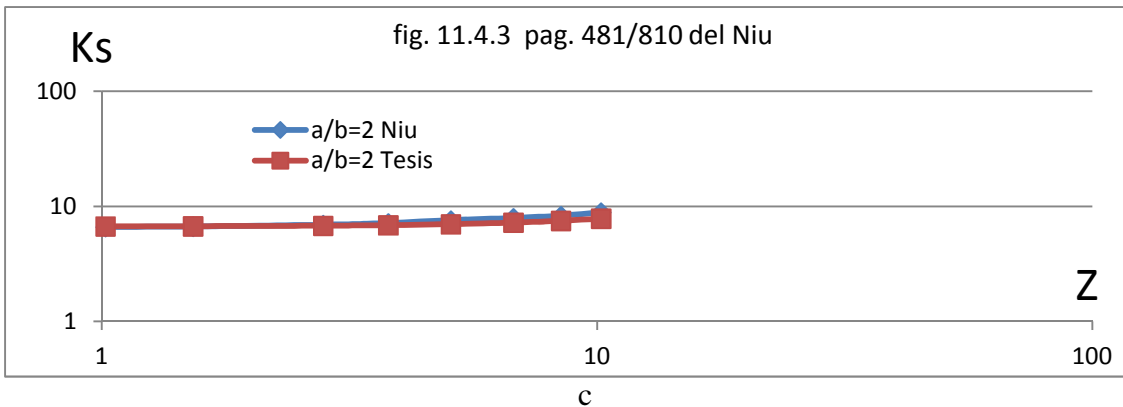
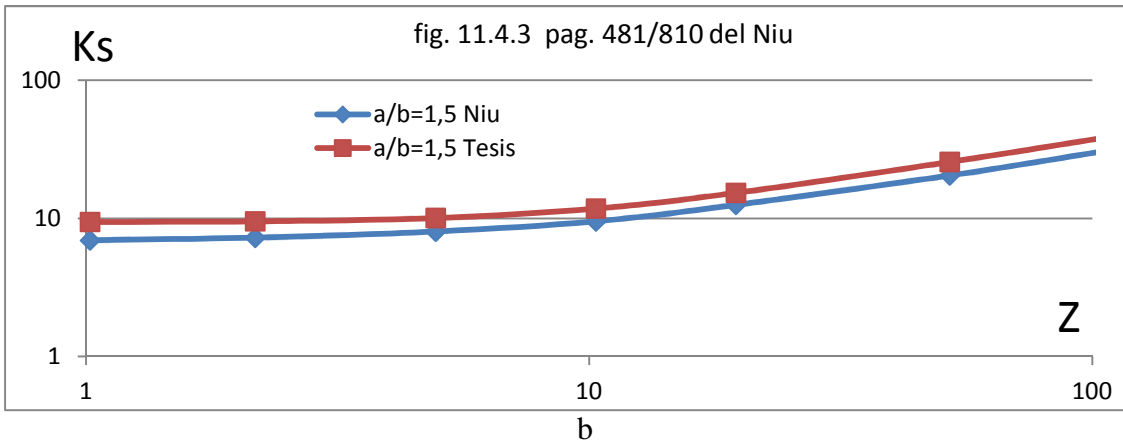
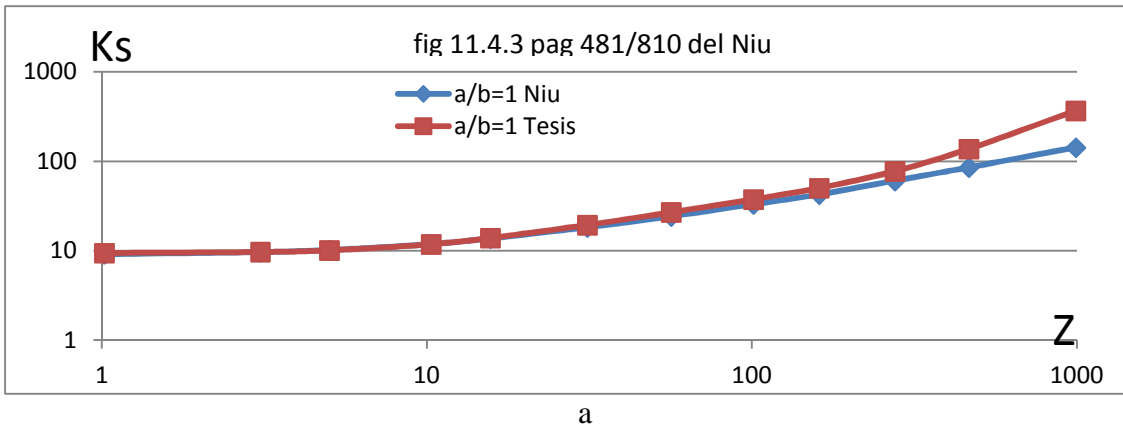


Figura 25 comparacion Niu y Tesis en Tension Crítica de Corte para paneles curvos anchos con: a) $a/b=1$; b) $a/b=1.5$; c) $a/b=2$; d) $a/b=cilindro$;

4.1.6 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial (pág. 47)

Cylinder		a/b=2		a/b=1,5		a/b=1	
Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks
0,9930	5,3970	0,9938	6,7203	0,9941	7,0990	1,0089	9,3375
1,3816	5,4679	1,3828	6,8085	1,5230	7,1909	1,9265	9,4542
2,0878	5,5388	1,8462	6,8985	2,4655	7,3836	3,7300	9,9739
3,3801	5,7657	2,4650	6,9897	4,1031	7,7919	10,0518	11,5741
4,9020	6,0862	3,1149	7,1807	6,2017	8,3377	17,6856	14,1999
7,1104	6,6941	4,1022	7,3762	8,6314	9,0464	29,0461	17,1867
8,7424	7,0684	6,2866	8,0016	11,3702	9,9519	51,1216	22,8931
10,6026	7,5669	7,8358	8,2204	14,9789	11,0991	82,8355	29,6746
14,3574	8,4387	10,0403	8,6794	20,5667	12,7215	143,8150	40,6269
19,9888	9,9407			27,8548	14,7826	208,7183	51,2488
31,0776	12,7111			36,7013	17,1787	290,6465	63,7729
43,8737	15,6016			52,5280	20,7977	404,7119	78,2774
57,0239	18,6348			72,1392	25,1811	571,4133	98,7484
75,1426	22,2571			99,0616	29,6640	1006,1345	146,7781
93,7053	25,8675						
115,2565	30,0644						
151,8863	36,4039						
200,1573	44,0802						
271,1442	54,1087						
342,8665	65,5237						
433,5134	77,2014						
540,6346	90,9627						
712,4929	111,6635						
1006,1345	146,7781						

Tabla C7 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial NACA (fig. 13 pág. 15/25 NACA 874)

Tesis							
Cylinder		a/b=2		a/b=1,5		a/b=1	
Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks
0,9930	6,9624	0,9938	6,7147	0,9941	7,1549	1,0089	9,4371
1,3816	6,9753	1,3828	6,7261	1,5230	7,1774	1,9265	9,5140
2,0878	7,0092	1,8462	6,7446	2,4655	7,2402	3,7300	9,7952
3,3801	7,1036	2,4650	6,7774	4,1031	7,4159	10,0518	11,7125
4,9020	7,2610	3,1149	6,8216	6,2017	7,7523	17,6856	14,6293
7,1104	7,5550	4,1022	6,9071	8,6314	8,2706	29,0461	18,6875
8,7424	7,8048	6,2866	7,1693	11,3702	8,9784	51,1216	25,4235
10,6026	8,1089	7,8358	7,4091	14,9789	10,0409	82,8355	33,4384
14,3574	8,7525	10,0403	7,8142	20,5667	11,8276	143,8150	46,5370
19,9888	9,7495			27,8548	14,2041	208,7183	60,6976
31,0776	11,7985			36,7013	16,9882	290,6465	81,4378
43,8737	14,2576			52,5280	21,6073	404,7119	116,3053
57,0239	16,7807			72,1392	26,8425	571,4133	177,4152
75,1426	20,1388			99,0616	33,3402	1006,1345	374,2786
93,7053	23,4273						
115,2565	27,1157						
151,8863	33,2373						
200,1573	41,1567						
271,1442	52,2991						
342,8665	62,5467						
433,5134	73,7968						
540,6346	84,9323						
712,4929	99,5742						
1006,1345	121,0114						

Tabla C8 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial Tesis

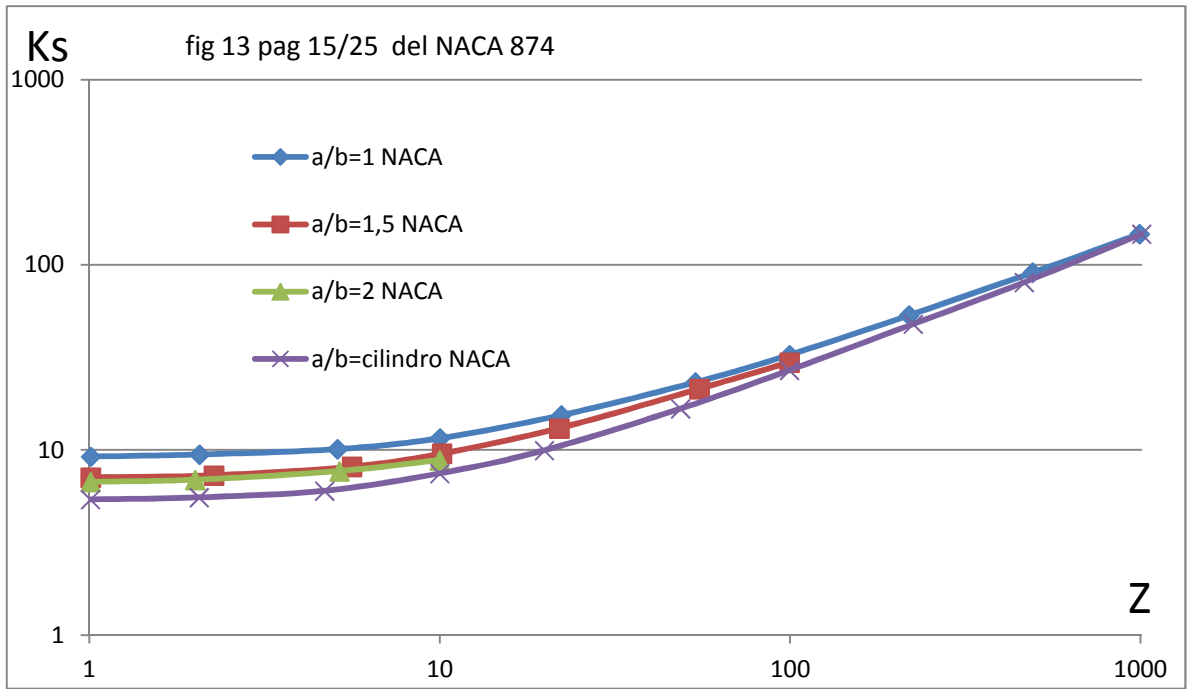


Figura 26 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial NACA

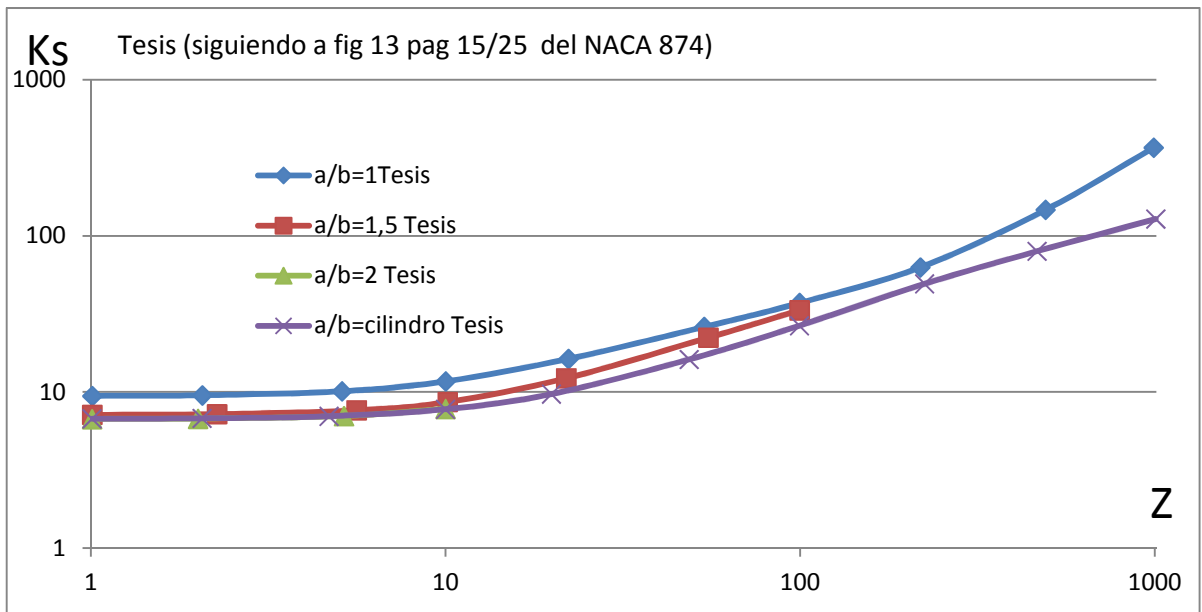


Figura 27 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial Tesis

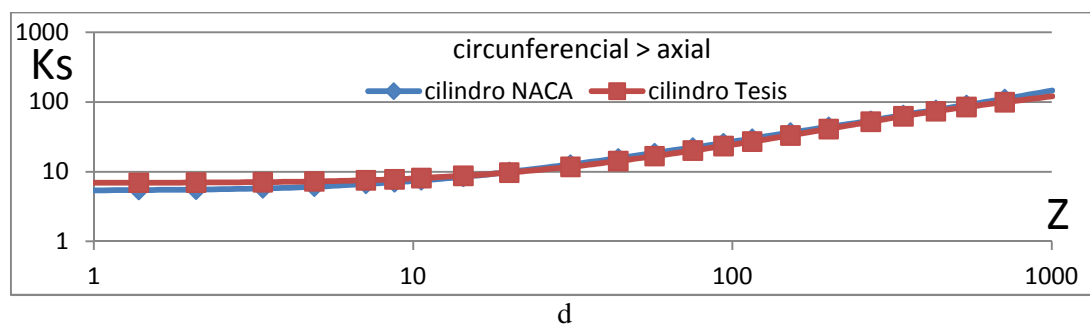
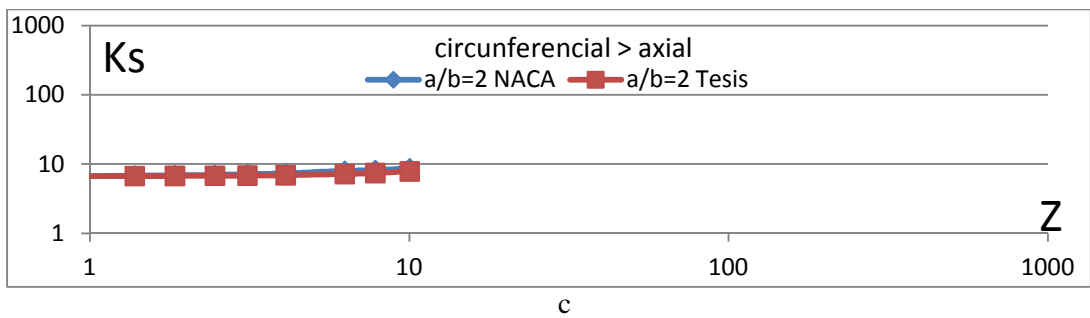
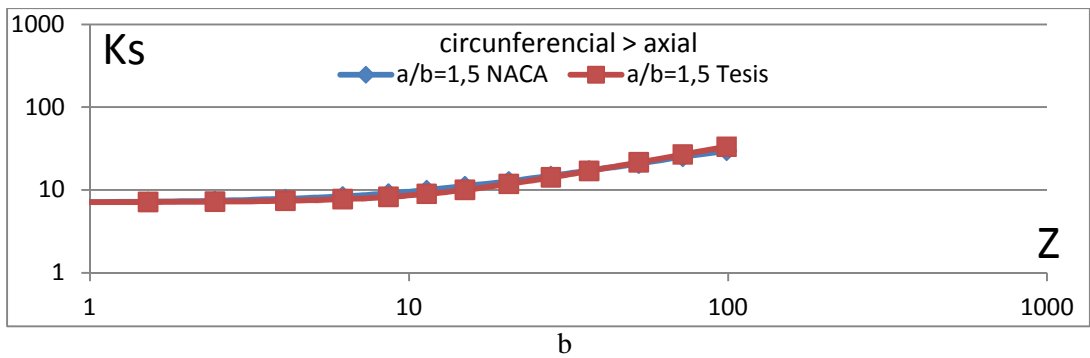
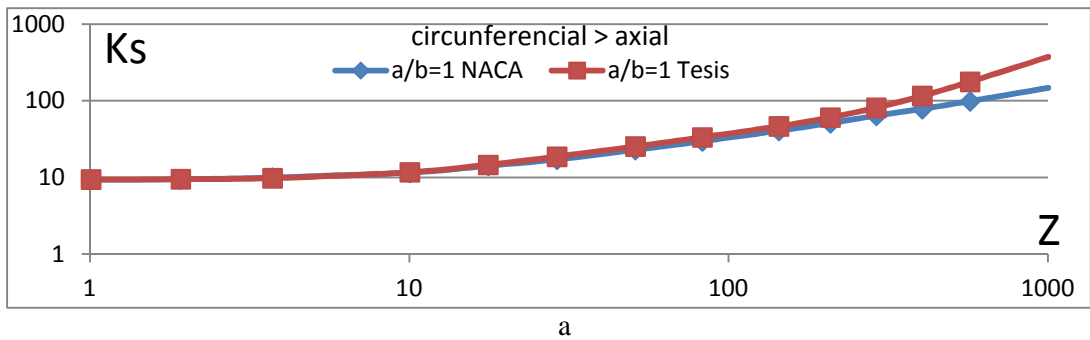


Figura 28 comparacion NACA y Tesis en Tension Crítica de Corte en paneles donde la dimensión circunferencial es mayor que la axial con a) a/b=1; b) a/b=1.5; c) a/b=2; d) a/b=cilindro;

4.1.7 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circunferencial (pág.49)

fig 14 pag 15/25 NACA 874 corte axial

a/b=∞		a/b=3		a/b=2		a/b=1,5		a/b=1	
Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks
0,9902	5,2534	0,9904	5,9034	0,9906	6,5485	0,9908	7,0781	1,0130	9,2919
1,7993	5,3279	1,6012	5,9858	1,6437	6,5423	1,6018	7,0717	1,5140	9,5359
2,7980	5,4019	2,8723	6,0705	2,7275	6,6213	2,7279	7,1568	2,7127	9,9140
4,8278	5,7694	4,9557	6,3176	4,2414	6,7896	4,0274	7,3393	4,6751	10,0433
9,8630	6,5766	9,9931	7,0170	7,0385	7,1441	6,5122	7,9257	7,3585	10,8554
14,9481	7,6892	16,5876	8,5309	9,9951	7,6173	9,9973	8,5597	10,0433	11,4330
22,6562	9,2261	26,1417	10,6426	15,5469	8,8917	14,5725	9,8643	13,7076	12,5188
39,6179	12,1248	40,6681	13,4500	23,8728	10,9318	24,8271	12,4435	19,7042	14,0675
62,4367	15,1262	58,5219	16,5606	33,9091	13,2688	39,1267	15,4974	28,3242	16,4346
99,6846	18,8710	99,7162	22,3340	51,3993	16,7420	52,0800	18,3314	40,7152	19,7042
161,2414	24,1618	172,1449	31,7235	99,7397	24,6673	74,9435	22,5401	57,0292	23,6243
321,0885	33,8869	321,2842	46,8538	138,0429	30,3329	99,7518	26,3187	75,8447	28,3242
981,8471	59,2882	519,7453	64,0060	206,5557	39,2786	139,8675	32,7849	100,8678	33,0902
		982,8043	99,5657	342,9460	54,2570	186,1764	39,2862	130,7142	38,6582
				540,5643	73,9893	244,6208	47,0779	165,0578	45,1632
				983,1158	114,8290	427,8495	69,3773	211,1436	52,7626
						640,2132	91,0097	277,1895	62,4449
						983,2355	122,5163	350,0177	72,9524
								447,7462	86,3396
								611,1057	107,6205
								771,6665	127,3696
								974,4128	150,7427

Tabla C9 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circunferencial NACA

Tesis									
a/b= ∞		a/b=3		a/b=2		a/b=1,5		a/b=1	
Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks	Z	Ks
0,9902	7,2779	0,9904	6,9623	0,9906	6,7146	0,9908	7,1548	1,0130	9,4373
1,7993	7,3110	1,6012	6,9845	1,6437	6,7359	1,6018	7,1815	1,5140	9,4736
2,7980	7,3766	2,8723	7,0618	2,7275	6,7941	2,7279	7,2628	2,7127	9,6164
4,8278	7,5826	4,9557	7,2673	4,2414	6,9209	4,0274	7,4061	4,6751	10,0036
9,8630	8,3425	9,9931	8,0076	7,0385	7,2806	6,5122	7,8115	7,3585	10,7713
14,9481	9,1996	16,5876	9,1439	9,9951	7,8053	9,9973	8,6099	10,0433	11,7094
22,6562	10,4474	26,1417	10,8727	15,5469	9,0603	14,5725	9,9161	13,7076	13,1028
39,6179	13,1534	40,6681	13,6380	23,8728	11,2618	24,8271	13,2209	19,7042	15,3869
62,4367	16,9277	58,5219	17,0643	33,9091	14,0101	39,1267	17,7248	28,3242	18,4441
99,6846	22,9225	99,7162	24,4668	51,3993	18,5507	52,0800	21,4820	40,7152	22,4021
161,2414	32,1278	172,1449	36,5819	99,7397	29,7783	74,9435	27,5552	57,0292	27,0381
321,0885	54,9520	321,2842	59,5867	138,0429	37,8789	99,7518	33,4969	75,8447	31,7923
981,8471	117,2623	519,7453	82,9150	206,5557	50,3293	139,8675	41,8123	100,8678	37,4771
		982,8043	119,3466	342,9460	68,7135	186,1764	49,8718	130,7142	43,8013
				540,5643	90,4352	244,6208	58,7679	165,0578	51,0194
				983,1158	148,0882	427,8495	86,4975	211,1436	61,2600
						640,2132	126,4197	277,1895	77,7770
						983,2355	209,1792	350,0177	98,7627
								447,7462	131,0630
								611,1057	193,3569
								771,6665	262,2474
								974,4128	358,3449

Tabla C10 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circunferencial Tesis

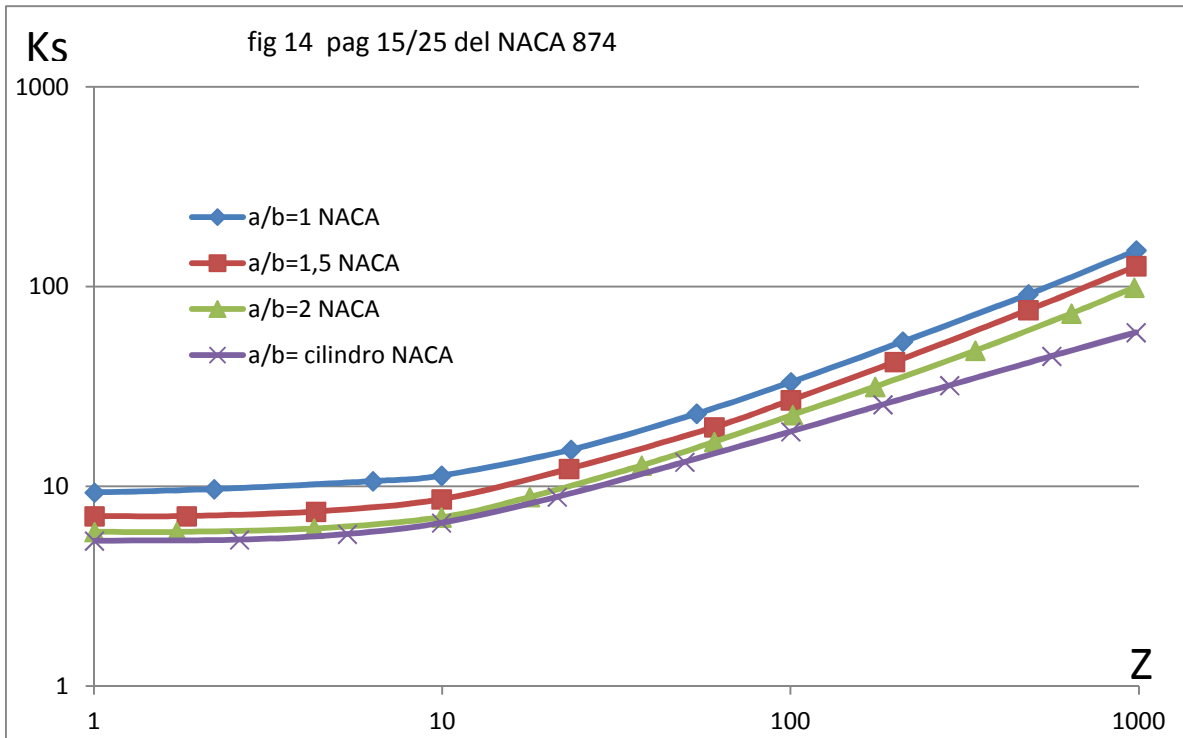


Figura 29 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circunferencial NACA

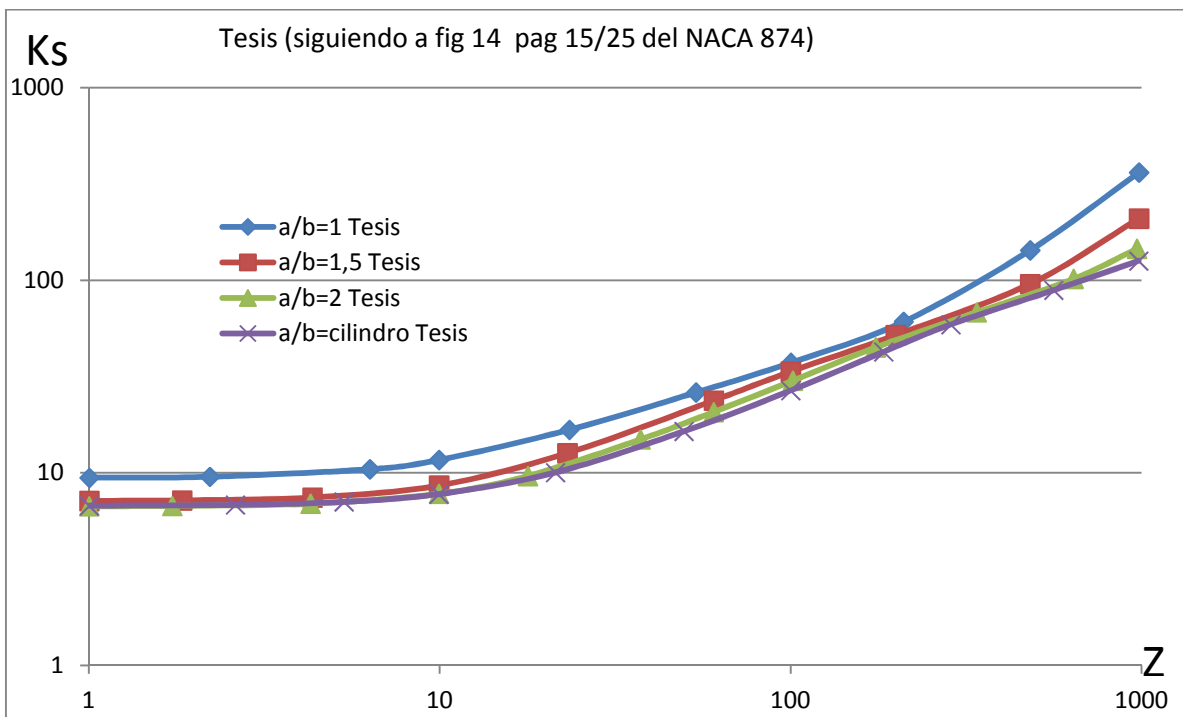


Figura 30 Tensión Crítica de Corte en paneles donde la dimensión axial es mayor que la circunferencial Tesis

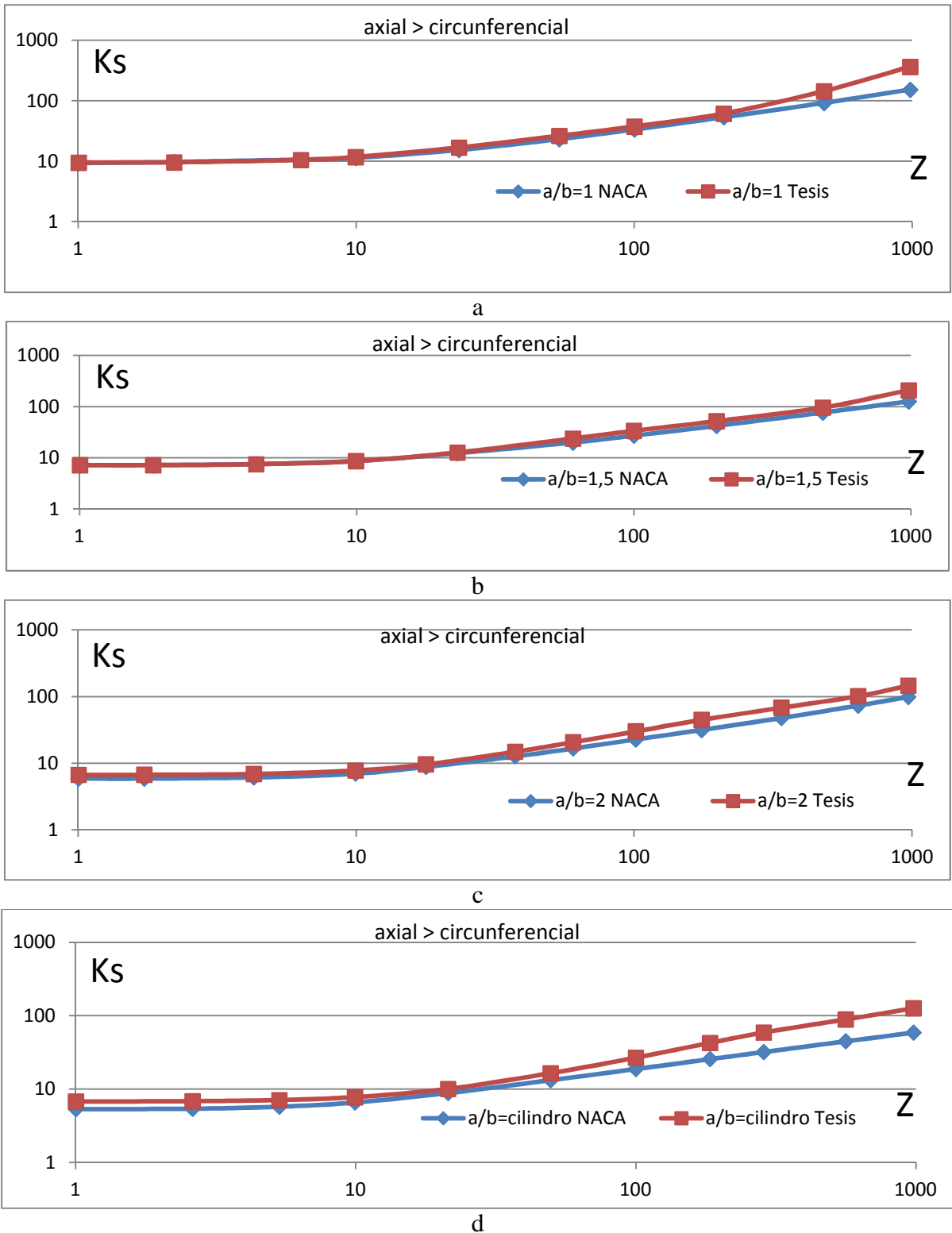


Figura 31 comparacion NACA y Tesis en Tension Critica de Corte en paneles donde la dimension axial es mayor que la circunferencial con a) $a/b=1$; b) $a/b=1.5$; c) $a/b=2$; d) $a/b=\text{cilindro}$;

4.1.8 Tensiones Combinadas con $K_y=0$ (pag.51)

Z=30		Z=10		Z=5		Z=0	
Kx	Ks	Kx	Ks	Kx	Ks	Kx	Ks
-4,0247	14,6363	-4,0051	10,5656	-4,0499	9,7573	-3,9967	9,4041
-1,4640	13,3388	-2,6314	9,6123	-1,962	8,0497	-2,3148	7,846
2,8541	10,9584	-1,1041	8,4071	-0,4841	6,6927	-0,6825	6,1363
7,1721	8,5781	0,7289	6,9508	0,9442	5,1841	0,3405	4,6763
12,7356	5,3306	1,9008	5,8955	1,9665	3,8251	0,9076	3,2647
17,3479	2,5879	3,9392	4,0361	2,7343	2,667	0,9693	1,7499
21,0110	0,0591	5,7252	2,0745	3,3025	1,1039	0,9818	0,0327
		6,6962	0,8163	3,4115	0,0438		
		6,9551	0,0094				

Tabla C11 Tensiones Combinadas con $K_y=0$ NACA (fig 15 pag 16/25 del NACA 874)

Z=30		Z=10		Z=5		Z=0	
Kx	Ks	Kx	Ks	Kx	Ks	Kx	Ks
-4,0247	13,4228	-4,0051	9,6654	-4,0499	9,1404	-3,9967	8,9123
-1,4640	12,5061	-2,6314	9,0383	-1,962	8,1051	-2,3148	8,0560
2,8541	10,9112	-1,1041	8,3114	-0,4841	7,3095	-0,6825	7,1479
7,1721	9,2359	0,7289	7,3841	0,9442	6,4603	0,3405	6,5167
12,7356	6,8848	1,9008	6,7474	1,9665	5,7695	0,9076	6,1344
17,3479	4,5721	3,9392	5,5032	2,7343	5,1672	0,9693	6,0910
21,0110	1,6559	5,7252	4,0677	3,3025	4,6359	0,9818	6,0821
		6,6962	2,6379	3,4115	4,5206		
		6,9551	1,7721				

Tabla C12 Tensiones Combinadas con $K_y=0$ Tesis

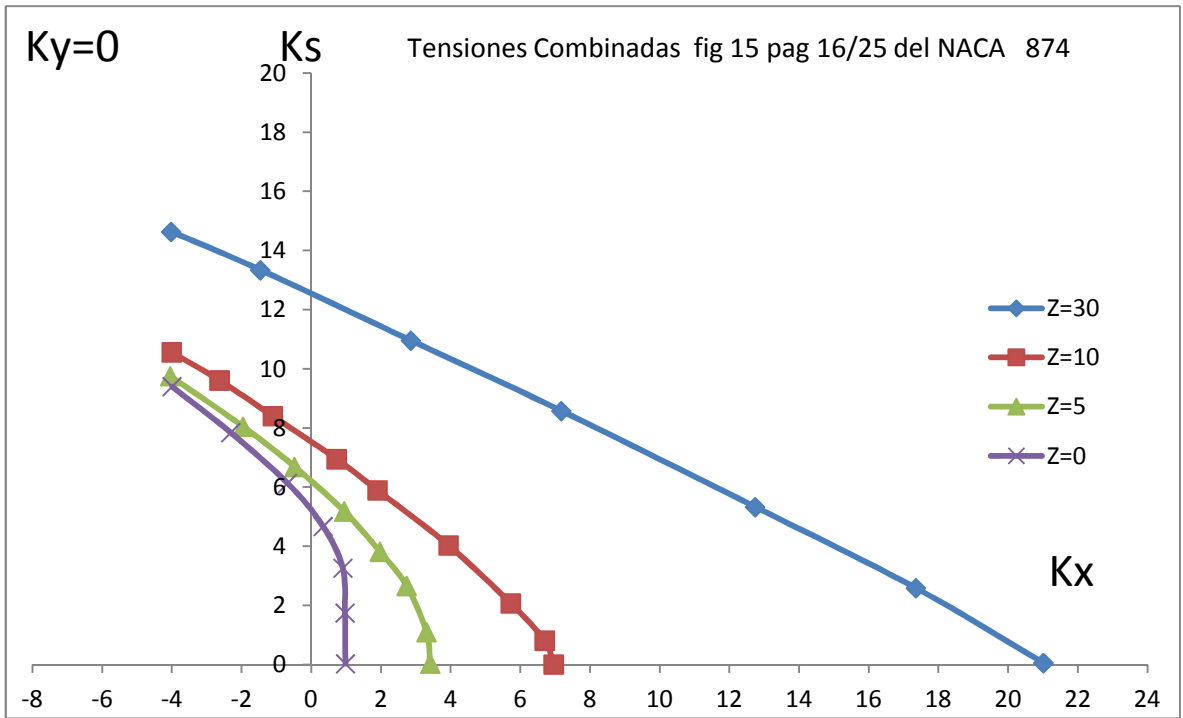


Figura 32 Tensiones Combinadas con $Ky=0$ NACA

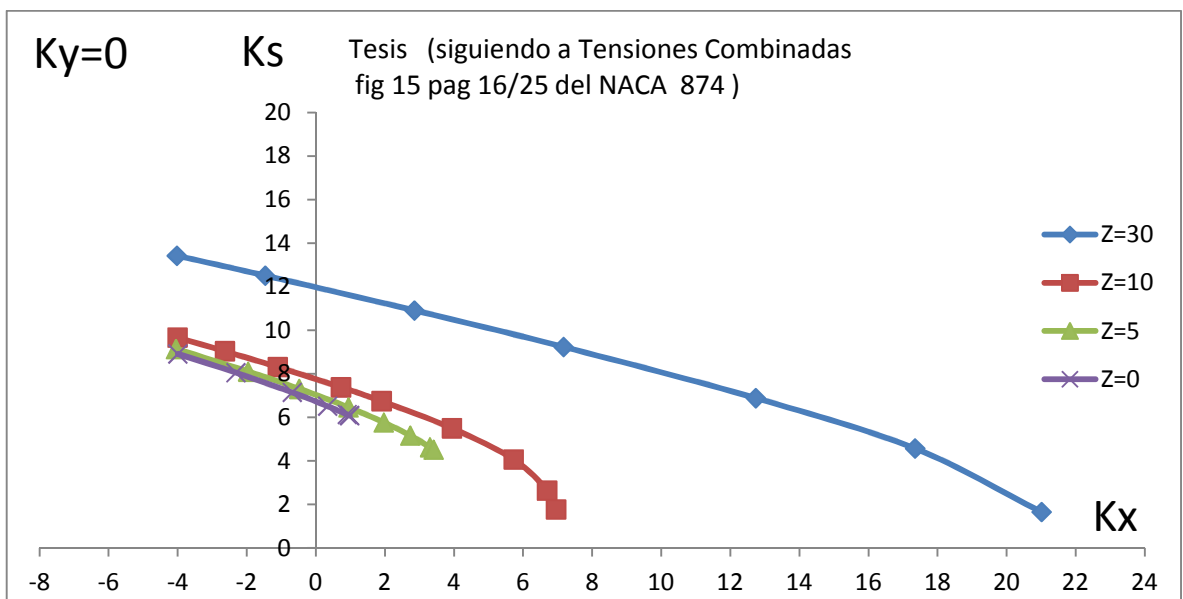


Figura 33 Tensiones Combinadas con $Ky=0$ Tesis

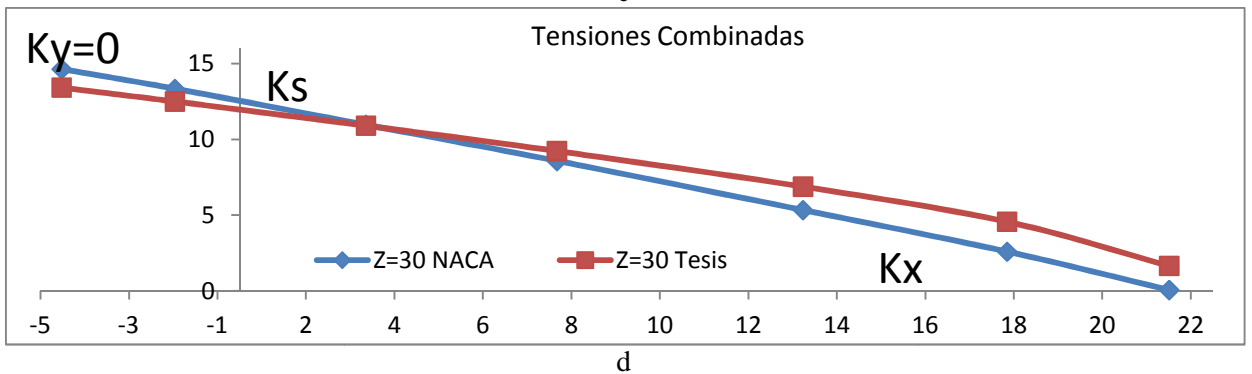
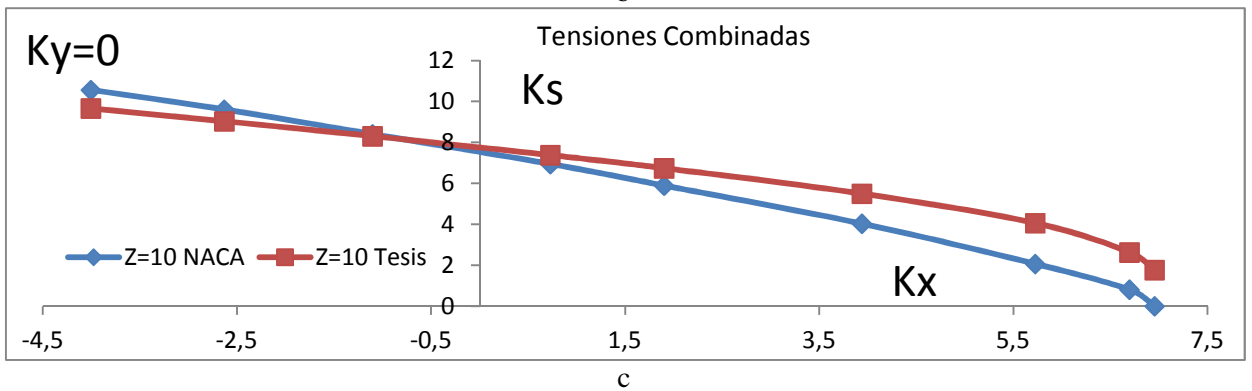
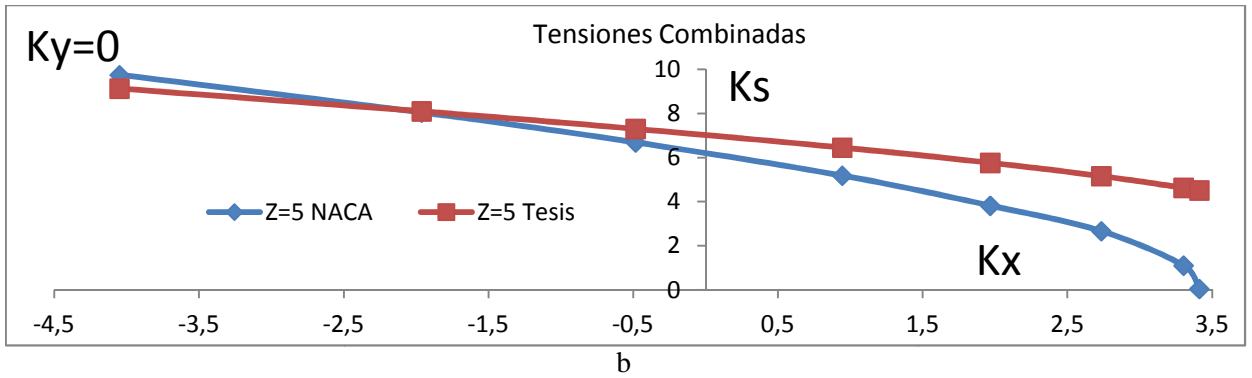
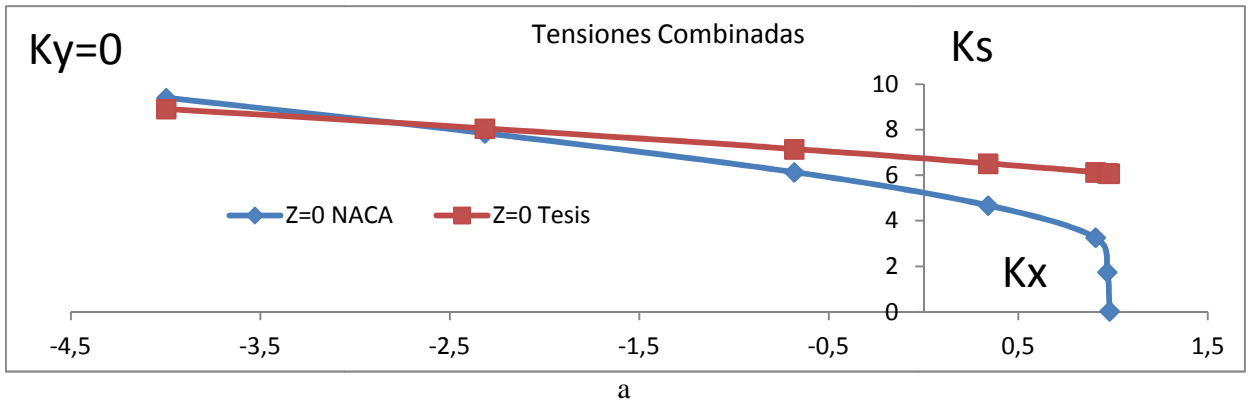


Figura 34 comparacion NACA y Tesis en Tensiones combinadas a) $Z=0$; b) $Z=5$; c) $Z=10$; d) $Z=30$;



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA



CARRERA INGENIERIA AERONAUTICA

Manual de Usuario:

Herramienta de cálculo para la determinación de la
Carga Crítica de Pandeo en Láminas

Alumno: Victor Daniel Vilorio Nackauzi

D.N.I.: 18.800.166

Matricula: 199804808

Tabla de funciones:

Función	
VR0	Entrada: a, b, Z, k2, k3, MSD, Kx0, Ky0, Ks0, E, mu, delta.
	<p>Salida:</p> <pre> M0=f_M(a,b,Z); [Kx_f1,KxD1,k01,k11,K_MSDX1]= fKxMS_3(M0,1,Kx0,k2,Ky0,k3,Ks0,MSD); [E_1,S_1,T_1,MS_3D_1, E_2,S_2,T_2,MS_3D_2, K_Final01, rta1,Salida1,X1,Y1,Z1]=VR2(a,b,Z,M0,Kx0,k2, Ky0,k3,Ks0,MSD,KxD1,K_MSDX1); [TY,TS,~,~]=f_TY_TS(Z,M0,k2,k3,MSD,5); [S_A1,S_B1,S_C1,S_D1,max_A1,max_B1, I11, I11_MSD, L_eq1,L_Kmax1, K_diseno1,Rta_Peso1, T_2dX0,listaX0, T_2dY0,listaY0, T_2dS0,listaS0]=VR3(a,b,Z,M0,Kx0,k2,Ky0,k3,Ks0,MSD,TY,TS, K_Final01,E,mu,delta); g_KxF4(S_A1,S_B1,S_C1,S_D1,3); </pre>

Función	
VRL	Entrada: a, b, Z, k2, k3, MSD, e1, e2, E, mu, delta.
	<p>Salida:</p> <pre> ML=f_M(a,b,Z); [TY,TS,~,~]=f_TY_TS(Z,ML,k2,k3,MSD,5); [KL1,Kx01,Ky01,Ks01] = f_barrido_L(a,b,Z,ML,e1,e2); [KL2,Kx11,Ky11,Ks11] = f_barrido_L_MS(a,b,Z,ML,e1,e2,k2,k3,MSD); [E_3,S_3,T_3,MS_3D_3, E_4,S_4,T_4,MS_3D_4, K_Final02, rta2,Salida2,X2,Y2,Z2]=VRL2(a,b,Z,ML,Kx01,k2,Ky01,k3,Ks01,MSD, Kx11,Ky11,Ks11,e1,e2); [S_A2,S_B2,S_C2,S_D2,max_A2,max_B2, I12, I12_MSD, L_eq2,L_Kmax2, K_diseno2,Rta_Peso2, T_2dX1,listaX1, T_2dY1,listaY1, T_2dS1,listaS1]=VRL3(a,b,Z,ML,Kx01,k2,Ky01,k3,Ks01,MSD,TY,TS, K_Final02,E,mu,delta); g_KxF4(S_A2,S_B2,S_C2,S_D2,3); </pre>

Función	
VRa	Entrada: a_f,b,r,t,k2,k3,MSD,Kx0,Ky0,Ks0,E,mu,delta,T.
	Salida:
	[a_f,Kx_a,T_a,a3,Za]=f_a3(a_f,b,r,t,Kx0,Ky0,Ks0,k2,k3,MSD,mu,T);
	Ma=f_M(a3,b,Za);
	[TY,TS,~,~]=f_TY_TS(Za,Ma,k2,k3,MSD,5);
	[Kx_f3,KxD3,k03,k13,K_MSDX3]=fKxMS_3(Ma,1,Kx0,k2,Ky0,k3,Ks0,MSD);
	[E_5,S_5,T_5,MS_3D_5, E_6,S_6,T_6,MS_3D_6, K_Final03, rta3,Salida3,X3,Y3,Z3]=VR2(a3,b,Za,Ma,Kx0,k2, Ky0,k3,Ks0,MSD,KxD3,K_MSDX3);
	[S_A3,S_B3,S_C3,S_D3,max_A3,max_B3, I13, I13_MSD, L_eq3,L_Kmax3, K_diseno3,Rta_Peso3, T_2dX2,listaX2, T_2dY2,listaY2, T_2dS2,listaS2]=VR3(a3,b,Za,Ma,Kx0,k2,Ky0,k3,Ks0,MSD,TY,TS, K_Final03,E,mu,delta);
	g_KxF4(S_A3,S_B3,S_C3,S_D3,3);
	f_D2_D3_2(T_2dX2,listaX2,T_2dY2,listaY2,T_2dS2,listaS2,3);
	g_KxF5(a_f,Kx_a,a3,Kx0,Ky0,Ks0,T,5);

Función	
VRb	Entrada: a,b_f,r,t,k2,k3,MSD,Kx0,Ky0,Ks0,E,mu,delta,T.
	Salida:
	[b_f,Kx_b,T_b,b3,Zb]=f_b3(a,b_f,r,t,Kx0,Ky0,Ks0,k2,k3,MSD,mu,T);
	Mb=f_M(a,b3,Zb);
	[TY,TS,~,~]=f_TY_TS(Zb,Mb,k2,k3,MSD,5);
	[Kx_f4,KxD4,k04,k14,K_MSDX4]=fKxMS_3(Mb,1,Kx0,k2,Ky0,k3,Ks0,MSD);
	[E_7,S_7,T_7,MS_3D_7, E_8,S_8,T_8,MS_3D_8, K_Final04, rta4,Salida4,X4,Y4,Z4]=VR2(a,b3,Zb,Mb,Kx0,k2, Ky0,k3,Ks0,MSD,KxD4,K_MSDX4);
	[S_A4,S_B4,S_C4,S_D4,max_A4,max_B4, I14, I14_MSD, L_eq4,L_Kmax4, K_diseno4,Rta_Peso4, T_2dX3,listaX3, T_2dY3,listaY3, T_2dS3,listaS3]=VR3(a,b3,Zb,Mb,Kx0,k2,Ky0,k3,Ks0,MSD,TY,TS, K_Final04,E,mu,delta);
	g_KxF4(S_A4,S_B4,S_C4,S_D4,3);
	f_D2_D3_2(T_2dX3,listaX3,T_2dY3,listaY3,T_2dS3,listaS3,3);
	g_KxF5(b_f,Kx_b,b3,Kx0,Ky0,Ks0,T,5);

Resultados:

M0(7x7,sym), ML(7x7,sym), Ma(7x7,sym), Mb(7x7,sym),M(7x7xn1,sym)

[Kx_f1=Kx_f3=Kx_f4(1x1,double,Kx_f1= Kx_{MS=0%}),

KxD1=KxD3 = KxD4(1x1,double,KxD1= Kx_{MS=MSD}),

k01= k03 = k04(1x1,double,k01=KxD1/Kx0),

k11= k13 = k14(1x1,double,k11=KxD1/Kx_f1),

K_MSDX1=K_MSDX3= K_MSDX4(1x3,double,K_MSDX1=[KxD1,Ky0*k2,Ks0*k3]) ;

[Kx01(1x1,double,Kx01= Kx_{MS=0%}),
Ky01(1x1,double,Ky01= Kx01*e1),
Ks01(1x1,double,Ks01= Kx01*e2)]

KL1(1x4)=

Kx01	Kx01*e1	Kx01*e2	MS=0%
------	---------	---------	-------

[Kx11(1x1,double,Kx11= Kx_{MS=MSD}),
Ky11(1x1,double,Ky11= Kx11*e1),
Ks11(1x1,double,Ks11= Kx11*e2)]

KL2(2x4)=

Kx _{MS=0%}	Kx11*e1	Kx11*e2	MS=0%
Kx11	Kx11*e1	Kx11*e2	MS=MSD

E_1(2x3),MS=0%, E_1=E_3=E_5=E_7=

a	b	Z
Kx0	Ky0	Ks0

E_2(2x3),MS=MSD, E_2=E_4=E_6=E_8=

a	b	Z
KxD	Ky0*k2	Ks0*k3

S_1(3x6),MS=0%, S_1=S_3=S_5=S_7=
S_2(3x6),MS=MSD,S_2=S_4=S_6=S_8=

KxG	Kx1	Kx1	Kx0	Kx0	Kx0
KyG	KyL	Ky0	Ky1	Ky0	Ky0
KsG	KsL	Ks0	Ks0	Ks1	Ks0

T_1(12x3),T_1=T_3=T_5=T_7=
T_2(12x3),T_2=T_4=T_6=T_8=

n	Kx	Ky	Ks
1	0	0	KsG
2	0	Ky0	Ks1
3	0	KyL	Ks2
4	0	Ky1	Ks0
5	0	KyG	0
6	Kx0	0	KsL
7	Kx0	Ky0	Ks3
8	Kx0	Ky2	Ks0
9	Kx0	KyL	0
10	Kx_max	0	Ks4
11	Kx_max	Ky0	Ks0
12	Kx_max	Ky3	0

MS_3D_1=MS_3D_3=MS_3D_5=MS_3D_7
 MS_3D_2=MS_3D_4=MS_3D_6=MS_3D_8

MS_3D_1 (MS=0%) =
 MS_3D_2 (MS=MSD) =

Kx0	Ky0	Ks0	MSX1
0	Ky0	Ks0	MSXmax
Kx0	Ky0	Ks0	MSY
Kx0	0	Ks0	MSYmax
Kx0	Ky0	Ks0	MSS
Kx0	Ky0	0	MSSmax

K_Final01(2x4)=

Kx0	Ky0	Ks0	MSX1
KxD	Ky0*k2	Ks0*k3	MSD

K_Final01=K_Final02=K_Final03=K_Final04

rta1(6x4)=
 rta1=rta3=rta4

Kx1	Ky0	Ks0	0%
Kx2	Ky0*k2	Ks0*k3	0%
Kx3	Ky0*k2	Ks0*k3	1%
Kx4	Ky0*k2	Ks0*k3	2%
Kx5	Ky0*k2	Ks0*k3	5%
Kx6	Ky0*k2	Ks0*k3	10%

rta2(5x4)=

Kx1	Ky0*k2	Ks0*k3	0%
Kx2	Ky0*k2	Ks0*k3	1%
Kx3	Ky0*k2	Ks0*k3	2%
Kx4	Ky0*k2	Ks0*k3	5%
Kx5	Ky0*k2	Ks0*k3	10%

Salida1=Salida2=Salida3=Salida4(8x3,double),

X1=X2=X3=X4(8x1,double),

Y1=Y2=Y3=Y4(8x1,double),

Z1=Z2=Z3=Z4(8x3,double),

S_A1(7x7,double,S_A1=S_A2=S_A3=S_A4 Kx con MS=0%), también S_A=7x7x n1

S_C1(7x7,double,S_C1=S_C2=S_C3=S_C4 Kx con MS=MSD), también S_C=7x7x n1

		Ky					
	Z	0	1/5*KyG	2/5*KyG	3/5*KyG	4/5*KyG	KyG
Ks	0	KxG	3,1966	1,7359	0,7460	0,1821	0,0000
	1/5*KsG	4,9373	3,0119	1,5530	0,5637	0,0000	0,0000
	2/5*KsG	4,2649	2,4228	0,9824	0,0000	0,0000	0,0000
	3/5*KsG	3,1626	1,4023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4/5*KsG	1,7179	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	KsG	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

S_B1(7x7,double,S_B1=S_B2=S_B3=S_B4 Vol_K con MS=0%), también S_B=7x7x n1

S_D1(7x7,double,S_D1=S_D2=S_D3=S_D4 Vol_K con MS=MSD), también S_D=7x7x n1

		Ky					
	Z	0	1/5*KyG	2/5*KyG	3/5*KyG	4/5*KyG	KyG
Ks	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1/5*KsG	0,0000	Vol_Kmax	1,5530	0,5637	0,0000	0,0000
	2/5*KsG	0,0000	2,4228	0,9824	0,0000	0,0000	0,0000
	3/5*KsG	0,0000	1,4023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4/5*KsG	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	KsG	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

max_A1= max_A2= max_A3= max_A4, max_A1(4x1)=

Z
KxG
KyG
KsG

max_B1= max_B2= max_B3= max_B4,max_B1(4x1)=

Z
KxG*(1-MSD)
TY
TS

I11(6x6,double, I11= I12= I13= I14)

I11_MSD(6x6,double, I11_MSD = I12_MSD= I13_MSD= I14_MSD)

L_eq1= L_eq2= L_eq3= L_eq4,

L_eq1(6x8)=

Z	1	1	0	KxD	KyD	KsD	Vol_K
Z	1	1	MSD	KxD	KyD	KsD	Vol_K
Z	0,95	0,95	MSD	KxD	KyD	KsD	Vol_K
Z	0,9	0,9	MSD	KxD	KyD	KsD	Vol_K
Z	0,85	0,85	MSD	KxD	KyD	KsD	Vol_K
Z	0,8	0,8	MSD	KxD	KyD	KsD	Vol_K

L_Kmax1= L_Kmax2= L_Kmax3=

L_Kmax4,

L_Kmax1(8x8)=

Z	KxG	0	0	0	0	0	0
Z	0	KyG	0	0	0	0	0
Z	0	0	KsG	0	0	0	0
Z	Kx1	Ky1	Ks1	Vol_Kmax	0	0	0
Z	KxG_2	0	0	0	MSD	k2	k3
Z	0	KyG_2	0	0	MSD	k2	k3
Z	0	0	KsG_2	0	MSD	k2	k3
Z	Kx2	Ky2	Ks2	Vol_Kmax2	MSD	p2opt	p3opt

K_diseno1=K_diseno2=K_diseno3=K_diseno4,

K_diseno1(3x11)=

inicial	Kx0	Ky0	Ks0	MS0	KV0	sigmaX0	sigmaY0	Tau0	sigmaVM0	K_vol0	Vol_Adim0
MSD	Kx1	Ky1	Ks1	MS1	KV1	sigmaX1	sigmaY1	Tau1	sigmaVM1	K_vol1	Vol_Adim1
optimo	Kx2	Ky2	Ks2	MS2	KV2	sigmaX2	sigmaY2	Tau2	sigmaVM2	K_vol2	Vol_Adim2

Rta_Peso1= Rta_Peso2=Rta_Peso3=Rta_Peso4,

Rta_Peso1(2x6)=

a	b	t1	Z	vol	p_MSD
a	b	t2	Z	vol_max	p_opt

T_2dX0(6x10,6=n2+1,10=n2*2,n2=5,double, T_2dX0=T_2dX1=T_2dX2=T_2dX3),

T_2dY0(6x10,6=n2+1,10=n2*2,n2=5,double, T_2dY0=T_2dY1=T_2dY2=T_2dY3),

T_2dS0(6x10,6=n2+1,10=n2*2,n2=5,double, T_2dS0=T_2dS1=T_2dS2=T_2dS3),

```

listaX0(5x15, n2=5,double,listaX0=listaX1=listaX2=listaX3)
listaY0(5x15, n2=5,double,listaY0=listaY1=listaY2=listaY3)
listaS0(5x15, n2=5,double,listaS0=listaS1=listaS2=listaS3)

```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_2DX0	0		1/5*KxG		2/5*KxG		3/5*KxG		4/5*KxG	
1										
2										
3										
4										
5										
6										

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_2DY0	0		1/5*KyG		2/5*KyG		3/5*KyG		4/5*KyG	
1										
2										
3										
4										
5										
6										

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_2DS0	0		1/5*KsG		2/5*KsG		3/5*KsG		4/5*KsG	
1										
2										
3										
4										
5										
6										

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
listaX0			Ky=f(Ks)=a1*Ks^5+b1*Ks^4+c1*Ks^3+d1*Ks^2+e1*Ks+f1 con MS=0%						Ks=g(Ky)=a2*Ky^5+b2*Ky^4+c2*Ky^3+d2*Ky^2+e2*Ky+f2 con MS=0%					
			a1	b1	c1	d1	e1	f1	a2	b2	c2	d2	e2	f2
1	Z	0												
2	Z	1/5*KxG												
3	Z	2/5*KxG												
4	Z	3/5*KxG												
5	Z	4/5*KxG												

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
listaY0			Kx=f(Ks)=a1*Ks^5+b1*Ks^4+c1*Ks^3+d1*Ks^2+e1*Ks+f1 con MS=0%						Ks=g(Kx)=a2*Kx^5+b2*Kx^4+c2*Kx^3+d2*Kx^2+e2*Kx+f2 con MS=0%					
			a1	b1	c1	d1	e1	f1	a2	b2	c2	d2	e2	f2
1	Z	0												
2	Z	1/5*KyG												
3	Z	2/5*KyG												
4	Z	3/5*KyG												
5	Z	4/5*KyG												

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
listaS0			Ky=f(Kx)=a1*Kx^5+b1*Kx^4+c1*Kx^3+d1*Kx^2+e1*Kx+f1 con MS=0%						Kx=g(Ky)=a2*Ky^5+b2*Ky^4+c2*Ky^3+d2*Ky^2+e2*Ky+f2 con MS=0%					
			a1	b1	c1	d1	e1	f1	a2	b2	c2	d2	e2	f2
1	Z	0												
2	Z	1/5*KsG												
3	Z	2/5*KsG												
4	Z	3/5*KsG												
5	Z	4/5*KsG												

```

n2=5; 4=n1=size(Z_f));
M(Kmax,Kmax,n1)
I1(6x2x4), 6=n2+1,n2=5,2=[x,y],4=n1=size(Z_f)),
I1_MSD(6x2x4), 6=n2+1,n2=5,2=[x,y],4=n1=size(Z_f)),
S_A(7x7x4), 7=n2+2,n2=5,4=n1=size(Z_f), S_A=S_B=S_C=S_D,
max_A=max_B=(4xn1)

```

L_eq((7*n1)x8),
4=n1=size(Z_f),

L_eq=

Z1	1	1	0	KxD	KyD	KsD	Vol_K
... se repite con los otros Z							
Z1	1	1	MSD	KxD	KyD	KsD	Vol_K
... se repite con los otros Z							
Z1	0,95	0,95	MSD	KxD	KyD	KsD	Vol_K
... se repite con los otros Z							
Z1	0,9	0,9	MSD	KxD	KyD	KsD	Vol_K
... se repite con los otros Z							
Z1	0,85	0,85	MSD	KxD	KyD	KsD	Vol_K
... se repite con los otros Z							
Z1	0,8	0,8	MSD	KxD	KyD	KsD	Vol_K
... se repite con los otros Z							
Z1	1	1	MSD	KxD	KyD	KsD	Vol_K

L_Kmax((7*n1)x8,4=n1=size(Z_f),double,

L_Kmax=[L_Kmax1; L_Kmax2; L_Kmax3; L_Kmax4]

KxT_2dX= KyT_2dY= KsT_2dS (4x6,4=n1=size(Z_f),6=n2+1, n2=5.),

KyT_2dX= KsT_2dX= KxT_2dY= KsT_2dY= KxT_2dS= KyT_2dS (6x6x4),

(cálculos auxiliares que se usan para T_2dX y listaX y otros.)

T_2dX= T_2dY = T_2dS (6x10x4,6=n2+1,n2=5,10=2*n2,4=n1=size(Z_f)), como T_2dX0.

listaX= listaY= listaS (20x15,n1*n2x15,con 4=n1=size(Z_f),5=n2), como listaX0.

L1(n1*n2*(n2+1)x3),4=n1=size(Z_f),5=n2,L1=L2=L3=(120x3)

Con L1(Ky=cte), L2(Ks=cte) y L3(Kx=cte)

lista_MSX=lista_MSY=lista_MSS((5*n1)x15,n1=size(Z_f),n2=5,double)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
lista_MSX			Ky=f(Ks)=a1*Ks^5+b1*Ks^4+c1*Ks^3+d1*Ks^2+e1*Ks+f1 con MS=0%						Ks=g(Ky)=a2*Ky^5+b2*Ky^4+c2*Ky^3+d2*Ky^2+e2*Ky+f2 con MS=0%					
			a1	b1	c1	d1	e1	f1	a2	b2	c2	d2	e2	f2
1	Z	0												
2	Z	1/5*KxG												
3	Z	2/5*KxG												
4	Z	3/5*KxG												
5	Z	4/5*KxG												
lista_MSY			Kx=f(Ks)=a1*Ks^5+b1*Ks^4+c1*Ks^3+d1*Ks^2+e1*Ks+f1 con MS=0%						Ks=g(Kx)=a2*Kx^5+b2*Kx^4+c2*Kx^3+d2*Kx^2+e2*Kx+f2 con MS=0%					
			a1	b1	c1	d1	e1	f1	a2	b2	c2	d2	e2	f2
1	Z	0												
2	Z	1/5*KyG												
3	Z	2/5*KyG												
4	Z	3/5*KyG												
5	Z	4/5*KyG												
lista_MSS			Ky=f(Kx)=a1*Kx^5+b1*Kx^4+c1*Kx^3+d1*Kx^2+e1*Kx+f1 con MS=0%						Kx=g(Ky)=a2*Ky^5+b2*Ky^4+c2*Ky^3+d2*Ky^2+e2*Ky+f2 con MS=0%					
			a1	b1	c1	d1	e1	f1	a2	b2	c2	d2	e2	f2
1	Z	0												
2	Z	1/5*KsG												
3	Z	2/5*KsG												
4	Z	3/5*KsG												
5	Z	4/5*KsG												

BB1=BB2=(n2*4)x(3+n2),n1=n2=7,28x10. 4=[Z;Kx;Ky;Ks];

BB3=BB4=CC1=CC2=(3*n2+1)x(2+n1), n1=n2=7,22x9.

p1=p2=(n1xn2x3)x3,n1=n2=7,147x3.