FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Trabajo Final de Grado

El comportamiento asintótico del flujo pluriclosed en grupos de Lie de dimensión 4

Septiembre 2018

Autor: Esteban Federico Costanza
Directora: Romina M. Arroyo

Resumen

En este trabajo estudiamos un flujo geométrico de variedades hermitianas introducido por Jeffrey Streets y Gang Tian llamado flujo pluriclosed, que evoluciona estructuras hermitianas SKT (una clase especial de variedades hermitianas). Más precisamente, estudiamos el intervalo maximal de existencia de soluciones del mismo y la convergencia a soluciones autosimilares empezando en estructuras SKT invariantes a izquierda en grupos de Lie solubles no unimodulares de dimensión 4. Encontramos que todas las soluciones son inmortales (i.e. están definidas para todo tiempo positivo) y convergen a pluriclosed solitons algebraicos de expansión (soluciones autosimilares con una gran cantidad de información algebraica) que a su vez son métricas Kähler.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 53C44, 22E25, Geometría diferencial, Ecuaciones de evolución geométricas, Grupos de Lie solubles y nilpotentes.
Palabras clave: solitons, flujo pluriclosed, grupo de Lie soluble.

In this paper we study a geometric flow on Hermitian manifolds introduced by Jeffrey Streets and Gang Tian called pluriclosed flow, which evolves Hermitian SKT structures (an special class of Hermitian manifolds). Specifically, we study the maximal time interval of existence and convergence to its selfsimilar solutions starting at a left invariant SKT structure on non unimodular solvable Lie group of dimension 4. We found that all solutions are immortal (i.e. they are defined for all positive times) and converge to algebraic expanding pluriclosed solitons (selfsimilar solutions with a large amount of algebraic information) that are also Kähler metrics.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 53C44, 22E25, Differential geometry, Geometric evolution equations, Solvable and nilpotent Lie groups.
Key words: solitons, pluriclosed flow, solvable Lie group.

Indice

1 Introducción

Con el objetivo de estudiar la geometría y la topología de las variedades hermitianas, diferentes flujos geométricos han aparecido en los últimos años en la literatura. En 2011 Jeffrey Streets y Gang Tian introdujeron en [ST11] una familia de flujos geométricos que evolucionan estructuras hermitianas en una variedad diferenciable dada. Uno de estos flujos es el llamado el *flujo pluriclosed*, una ecuación diferencial en derivadas parciales para una curva de 2-formas fundamentales $\omega(t)$ ($\omega(t) = g(t)(J\cdot, \cdot)$, $g(t)$ métricas hermitianas compatibles con J) en una variedad compleja dada (M, J), donde las métricas $g(t)$ satisface la condición pluriclosed o también llamada SKT (Strong Kähler with Torsion en inglés), esto quiere decir que $dc^B(t) = 0$, donde $c^B(t)(X, Y, Z) = g(t)(X, T^B(t)(Y, Z))$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $T^B(t)$ denota el tensor de torsión de la conexión de Bismut asociada a la variedad hermitiana $(M, J, g(t))$. La ecuación de evolución que satisfacen las soluciones $\omega(t)$ del flujo pluriclosed es

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -(\rho_\omega^B)^{1,1}, \quad \omega(0) = \omega_0,$$

donde ρ_ω^B denota a la forma de Ricci de la conexión de Bismut de (M, J, ω), y $(\rho_\omega^B)^{1,1}$ es la proyección de ρ_ω^B en $\Omega^{1,1}(M)$.

El objetivo de este trabajo es obtener resultados que colaboren con el estudio del comportamiento asintótico del flujo pluriclosed en el caso de grupos de Lie con estructuras hermitianas invariantes a izquierda. Más precisamente, en esta tesis analizamos el flujo pluriclosed en grupos de Lie solubles no unimodulares de dimensión 4. Resultados previos del estudio del flujo pluriclosed en dimensión real 4 pueden encontrarse en [Bol16], donde un estudio detallado del comportamiento asintótico de soluciones homogéneas en superficies complejas compactas es dado.

El principal resultado de este trabajo es el siguiente:

Teorema 1.1 *Si $(\omega(t))_{[0,T)}$ es una solución maximal de métricas SKT invariantes a izquierda en un grupo de Lie (G, J) soluble simplemente conexo no unimodular de dimensión 4, con una estructura compleja invariante a izquierda J, entonces es inmortal (i.e. $T = \infty$). Además, normalizando de manera adecuada la solución converge en el sentido Cheeger-Gromov a un pluriclosed soliton Kähler de expansión $(G, \bar{J}, \bar{g})$. Más aún, si G admite una métrica SKT estática, el pluriclosed soliton de expansión es Kähler – Einstein.*

Un *pluriclosed soliton* es una métrica SKT que tiene la particularidad de que su evolución por el flujo pluriclosed está dada por una pullbacks de una familia monoparamétrica de biholomorfismos y multiplicación por escalares, i.e. $\omega(t) = c(t)\varphi_t^*\omega_0$, donde $c(t) \in \mathbb{R}$ y φ_t son biholomorfismos de la variedad compleja. Una clase especial de estas métricas son las métricas *estáticas*, que satisfacen que $(\rho_\omega^B)^{1,1} = \lambda\omega$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ y son las análogas a las métricas de Einstein en el contexto SKT. En los casos en que el grupo de Lie G admita más de una estructura compleja invariante a izquierda, ésta puede cambiar en el límite. En el caso compacto, la clasificación de los solitones para el flujo pluriclosed en superficies complejas fue recientemente estudiada en [S18]. La convergencia Cheeger-Gromov en Teorema 1.1 es una convergencia de variedades riemannianas, la cual es invariante por difeomorfismos (ver [T06, L12] para más información).

Como corolario inmediato del teorema anterior también se obtiene

Corolario 1.2 *Todo grupo de Lie soluble no unimodular de dimensión* 4 *que admite una estructura SKT, admite también un pluriclosed soliton.*

La principal herramienta utilizada para obtener nuestros resultados es un flujo llamado *flujo de corchetes*, una ecuación diferencial para una curva de álgebras de Lie. Esta ecuación fue introducida por Jorge Lauret en [L11, L13] para el estudio del flujo de Ricci en variedades homogéneas riemannianas y luego fue adaptado para estudiar la evolución de otros flujos geométricos en variedades homogéneas complejas y simplécticas en [L15, L16]. En el caso homogéneo, y en particular de grupos de Lie, este flujo es equivalente de una manera natural y específica al flujo pluriclosed (ver [L15, AL17]). Este enfoque propone variar corchetes de Lie en lugar de variar métricas SKT, utilizando la gran cantidad de información algebraica que poseen las variedades complejas que queremos estudiar.

Este trabajo está organizado como sigue. En Sección 2 daremos algunas definiciones básicas que utilizaremos a lo largo de todo el trabajo. En Sección 3 introduciremos el flujo pluriclosed y sus soluciones auto similares. También estudiaremos el flujo y sus solitones en el caso particular de grupos de Lie. Explicaremos brevemente la idea de Jorge Lauret de variar corchetes de Lie y definiremos al flujo de corchetes. En Sección 4 daremos un breve resumen de la clasificación de estructuras hermitianas SKT invariantes a izquierdas en grupos de Lie solubles (no unimodulares) de dimensión real 4. Finalmente, en Sección 5 analizaremos el comportamiento asintótico del flujo pluriclosed que comienza en las métricas SKT descriptas en Sección 4.

2 Variedades SKT

En esta sección daremos definiciones básicas sobre el flujo pluriclosed y las estructuras que se preservan a lo largo de éste, es decir, las estructuras SKT o también llamadas pluriclosed.

Definición 2.1 *Sea M una variedad diferenciable. Una aplicación C^∞, $p \mapsto J_p \in \operatorname{End}(T_pM)$, tal que $J_p^2 = -\operatorname{Id}_{T_pM}$ para todo $p \in M$ es llamada una estructura casi compleja en M. Llamaremos al par (M, J) una variedad casi compleja.*

Observación. Sólo las variedades de dimensión par pueden admitir una estructura casi compleja, ya que $0 < \det(J_p)^2 = \det(-\operatorname{Id}_{T_pM}) = (-1)^{\dim M}$.

Definición 2.2 *Sea (M, J) una variedad casi compleja. Definimos al tensor de Nijenhuis N^J, asociado a una estructura casi compleja J, como*

$$N^J(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY].$$

Si $N^J = 0$ decimos que J es una estructura compleja y que (M, J) es una variedad compleja.

La definición dada de una variedad compleja resulta ser equivalente a la existencia de un atlas holomorfo, es decir un atlas tal que los cambios de coordenadas son funciones holomorfas. Este resultado viene dado por el famoso teorema de Newlander-Niremberg.

Definición 2.3 *Sea M una variedad diferenciable. Una aplicación C^∞, $p \mapsto g_p$ tal que para todo $p \in M$, g_p es un producto interno en T_pM es llamada una métrica riemanniana en M. Llamamos al par (M, g) una variedad riemanniana.*

Las equivalencias entre variedades riemannianas son llamadas isometrías, y como es natural pensar, son difeomorfismos que preservan la métrica, es decir, si (M, g), (N, h) son variedades riemannianas, un difeomorfismo $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ es una isometría si $\varphi^* h = g$.

Con la intención de estudiar variedades diferenciables equipadas con una estructura compleja y una métrica riemanniana, vamos a requerir que la estructura compleja y la métrica riemanniana sean compatibles en algún sentido y este va a ser el que está dado en la siguiente definición.

Definición 2.4 *Sean M una variedad diferenciable, y g y J una métrica riemanniana y una estructura compleja en M, respectivamente. Decimos que (M, g, J) es una variedad hermitiana si J_p es una isometría de T_pM para todo $p \in M$.*

Definición 2.5 *Sea (M, g, J) es una variedad hermitiana. Definimos a la 2-forma fundamental de (M, g, J) como $\omega(\cdot, \cdot) := g(J\cdot, \cdot)$.*

Observación. Cabe remarcar que cada par de la 3-upla (g, J, ω) define naturalmente al restante.

En [G97], Paul Gauduchon probó que dada una variedad hermitiana (M, g, J) existe una familia monoparamétrica de conexiones hermitianas en M, es decir, g y J son paralelas ($\nabla g = 0, \nabla J = 0$), y en [Bis89] Jean-Michel Bismut probó que existe una única conexión hermitiana llamada conexión de Bismut tal que

$$c^B(X, Y, Z) := g(X, T^B(Y, Z)), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

es una 3-forma, y esta conexión resulta ser la correspondiente a la conexión $t = -1$ de la familia de Gauduchon. Aquí T^B es el tensor de torsión de la conexión de Bismut. Denotaremos ∇^B a la conexión de Bismut y a los tensores asociados los denotaremos con supraíndices B.

Definición 2.6 *Sea (M, g, J) una variedad hermitiana. Decimos que (g, J) es una estructura SKT (Strong Kähler with Torsion) o pluriclosed en M si $dc^B = 0$.*

Definición 2.7 *Sea (M, g, J) una variedad hermitiana con forma fundamental ω. Decimos que (M, g, J) es Kähler si $d\omega = 0$.*

Observación. Se puede ver que $c^B = d\omega(J\cdot, J\cdot, J\cdot)$, por lo que las estructuras Kähler son también estructuras SKT.

3 El flujo pluriclosed y sus solitones en grupos de Lie

En esta sección nos dedicaremos a estudiar el flujo pluriclosed y sus solitones en el caso de grupos de Lie con estructuras invariantes a izquierda. Introduciremos un flujo que evoluciona álgebras de Lie, llamado flujo de corchetes, que es equivalente al flujo pluriclosed en el caso de grupos de Lie con estructuras invariantes a izquierda, y luego enunciaremos algunos resultados sobre éste y sus soluciones autosimilares.

3.1 Forma de Bismut-Ricci

Dada (M, g, J) definimos la forma de Ricci de la conexión de Bismut (forma de Bismut-Ricci) como

$$\rho^B(X,Y) = -\sum_{j=1}^{n} g(R^B(X,Y)X_j, JX_j),$$

donde $\{X_j, JX_j\}$ es un marco local g-ortonormal, y $R^B(X,Y) = [\nabla^B_X, \nabla^B_Y] - \nabla^B_{[X,Y]}$ es el tensor de curvatura de Riemann de la conexión de Bismut. También denotamos por $(\rho^B)^{1,1}$ a la componente complexifiacada (o J-invariante) de ρ^B, dada por

$$(\rho^B)^{1,1}(\cdot,\cdot) := \tfrac{1}{2}(\rho^B(\cdot,\cdot) + \rho^B(J\cdot, J\cdot)).$$

3.2 El flujo pluriclosed y sus soluciones autosimilares

Definición 3.1 *Sea M una variedad diferenciable con una estructura SKT (g, J). Decimos que g es una métrica SKT estática si la forma fundamental ω es proporcional a la parte (1,1) de la forma de Bismut-Ricci, es decir*

$$\lambda\omega = (\rho^B)^{1,1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En [ST10], Jeffrey Streets y Gang Tian introdujeron un flujo geométrico, llamado flujo pluriclosed, que evoluciona estructuras SKT en una variedad compleja dada (M, J). El flujo pluriclosed viene dado por la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -(\rho^B)^{1,1}, \qquad \omega(0) = \omega_0, \tag{1}$$

con $\omega(t)$ una curva de 2-formas fundamentales.

En [ST10] ellos probaron existencia y unicidad en tiempo corto. También probaron que en (M, g, J) las soluciones de este flujo preservan la condición SKT para todo t en el intervalo de definición. Más aún, en el caso en que el flujo pluriclosed empieza en una métrica Kähler ω_0, la solución permanece Kähler en su evolución y el flujo pluriclosed coincide con el bien conocido flujo de Kähler-Ricci.

Una clase particular de métricas para este flujo son las métricas SKT estáticas $((\rho^B)^{1,1} = \lambda\omega)$, que son análogas a las métricas de Einstein ($\mathrm{Ric}(g) = \lambda g$) para el flujo de Ricci.

Generalizando a las métricas SKT estáticas, en este trabajo vamos a considerar soluciones de la forma $\omega(t) = c(t)\varphi_t^*\omega_0$, donde $c(t) \in \mathbb{R}$ y φ_t es una familia monoparamétrica de biholomorfismos de (M, J). Estas soluciones son importantes para el flujo pluriclosed porque no cambian su geometría en la evolución, y de ello obtienen el nombre de soluciones autosimilares, o también llamadas *pluriclosed solitons.*

3.3 El flujo pluriclosed en grupos de Lie y el flujo de corchetes

Consideremos un grupo de Lie simplemente conexo G con una estructura hermitiana invariante a izquierda (g, J). Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G, con corchete μ, la variedad hermitiana (G, g, J) está completamente determinada por $\mathfrak{g}$, J_e, g_e y μ. El corchete de Lie μ, de $\mathfrak{g}$, será considerado como un elemento de la variedad algebraica $V(\mathfrak{g})$ definida por

$$V(\mathfrak{g}) \;:=\; \begin{array}{ll}\{\mu \in \Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} : & \mu(\mu(X,Y),Z) + \mu(\mu(Z,X),Y) \\ & +\mu(\mu(Y,Z),X) = 0,\ \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}\}\end{array}.$$

En general, para enfatizar el corchete, nos referiremos a $\mathfrak{g}$ como a un espacio vectorial subyacente y denotaremos a una estructura de álgebra de Lie por $(\mathfrak{g},\mu)$. Aquí con G_μ denotaremos al correspondiente grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $(\mathfrak{g},\mu)$ y (g_μ, J_μ) la estructura hermitiana invariante a izquierda en G_μ determinada por (g,J) en $(\mathfrak{g},\mu)$.

La idea de variar corchetes consiste en fijar (g,J) en $\mathfrak{g}$. Toda métrica J-hermitiana $\bar{g}$ invariante a izquierda en G, es de la forma

$$\bar{g}(\cdot,\cdot) = g(h\cdot, h\cdot), \qquad h \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}, J),$$

donde $\mathrm{GL}(\mathfrak{g},J)$ es el grupo de automorfismos holomorfos de $\mathfrak{g}$, es decir, los automorfismos de $\mathfrak{g}$ que conmutan con J. De esto concluimos que $(G,\bar{g},J)$ queda determinado por $(\mathfrak{g},\mu,\bar{g},J)$ y tenemos un isomorfismo

$$h : (\mathfrak{g},\mu,\bar{g},J) \to (\mathfrak{g}, h\cdot\mu, h\cdot\bar{g}, h\cdot J),$$

donde

$$\begin{array}{rcl} h\cdot\mu(\cdot,\cdot) &=& h\mu(h^{-1}\cdot, h^{-1}\cdot), \\ h\cdot J &=& hJh^{-1} \;=\; J, \\ h\cdot\bar{g}(\cdot,\cdot) &=& g(h^{-1}h\cdot, h^{-1}h\cdot) \;=\; g(\cdot,\cdot). \end{array} \tag{2}$$

De esto obtenemos una equivalencia entre estructuras hermitianas invariantes a izquierda

$$\varphi : (G_\mu, \bar{g}_\mu, J_\mu) \to (G_{h\cdot\mu}, g_{h\cdot\mu}, J_{h\cdot\mu}), \qquad (d\varphi)_e = h,$$

es decir, φ es un isomorfismo de grupos de Lie tal que $\varphi^* g_{h\cdot\mu} = \bar{g}_\mu$, $\varphi^* J_{h\cdot\mu} = J_\mu$ y es también equivariante con respecto a la acción de G. De esto se sigue directamente la siguiente proposición.

Proposición 3.2 *[AL17, Proposición 2.1] Sea G un grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $(\mathfrak{g},\mu)$, entonces fijando (g,J) en $\mathfrak{g}$, el espacio de estructuras hermitianas invariantes a izquierda en G puede ser parametrizado por la órbita $\mathrm{GL}(\mathfrak{g},J)\cdot\mu$ en $V(\mathfrak{g})$.*

Ahora es natural preguntarse qué forma tiene el flujo pluriclosed para estructuras hermitianas invariantes a izquierda en el espacio de los corchetes, y esto viene dado por el flujo de corchetes

$$\mu' = \delta_\mu(P_\mu), \qquad \mu(0) = \mu_0, \tag{3}$$

un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para una curva $\mu = \mu(t)$ en $V(\mathfrak{g})$, $P_\mu \in \mathrm{End}(\mathfrak{g},J) = \{A \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}) : AJ - JA = 0\}$, con $P_\mu = P_\mu^t$, definido implícitamente por

$$\omega(P_\mu\cdot,\cdot) = \tfrac{1}{2}(\rho^B)^{1,1}(\cdot,\cdot),$$

y $-\delta$ es la representación inducida por la acción de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}, J)$ en $V(\mathfrak{g})$ definida por $\delta_\mu(A) = \mu(A\cdot,\cdot) + \mu(\cdot, A\cdot) - A\mu(\cdot,\cdot)$, $A \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

De [EFV15, Teorema 4.2] y [L15, Teorema 5.1] se sigue que la única solución del flujo de corchetes (3), μ, define una familia de variedades hermitianas que coinciden salvo pullbacks por biholomorfismos que dependen del tiempo con el flujo pluriclosed empezando en la correspondiente estructura SKT.

Ahora introduciremos un nuevo flujo para los corchetes, llamado flujo de corchetes calibrado, que será de gran utilidad para el estudio del flujo pluriclosed. La motivación del mismo viene dada por lo que sigue: Si en (2) tomamos $h \in U(\mathfrak{g}, J) = \{A \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}, J) : A^{-1} = A^t\}$, entonces $h \cdot J = J$ y $h \cdot \bar{g} = \bar{g}$, con lo cual μ y $h \cdot \mu$ definen variedadades hermitianas equivalentes.

El flujo de corchetes calibrado viene dado por la siguiente ecuación diferencial

$$\bar{\mu}' = \delta(P_{\bar{\mu}} - U_{\bar{\mu}})\bar{\mu}, \qquad \bar{\mu}(0) = \mu_0, \tag{4}$$

donde $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{g}, J) = \{A \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}, J) : A^t = -A\}$ y $\bar{\mu} \mapsto U_{\bar{\mu}}$ es C^∞. A $U_{\bar{\mu}}$ lo llamaremos calibración. Una buena elección de una calibración $U_{\bar{\mu}}$ es crucial para reducir la cantidad de variables del flujo de corchetes, facilitando su análisis.

El flujo de corchetes y el flujo de corchetes calibrado están relacionados, y su relación viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 3.3 *[AL17, Teorema 2.3] Sea (g_0, J) una estructura SKT invariante a izquierda en un grupo de Lie simplemente conexo G, con corchete $\mu_0 \in V(\mathfrak{g})$. Sea $\omega(t)(\cdot,\cdot) = g(t)(J\cdot,\cdot)$ y $\bar{\mu}(t)$, las respectivas soluciones de (1) y (4). Entonces ambas soluciones existen en el mismo intervalo de tiempo $I \subseteq \mathbb{R}$, y si $(G_{\bar{\mu}}, g_{\bar{\mu}}, J_{\bar{\mu}})$ denota la variedad hermitiana asociada a $\bar{\mu}$, entonces existen difeomorfismos equivariantes que dependen del tiempo*

$$\varphi_t : (G, g(t), J) \to (G_{\bar{\mu}(t)}, g_{\bar{\mu}(t)}, J_{\bar{\mu}(t)}),$$

tales que $\varphi_t^* J_{\bar{\mu}(t)} = J$ y $\varphi_t^* g_{\bar{\mu}(t)} = g(t)$ para todo $t \in I$.

Para poder entender el comportamiento asintótico de flujos geométricos es importante el estudio de normalizaciones de los mismos. En el caso del flujo calibrado de corchetes consideraremos normalizaciones de la forma $\bar{\mu}(t)/||\bar{\mu}(t)||$.

Lema 3.4 *[AL17, Lema 2.5] Si $\bar{\mu}$ es una solución de (4) entonces, salvo reparametrización, la familia $\nu(t) := \bar{\mu}(t)/||\bar{\mu}(t)||$ es una solución del flujo de corchetes calibrado y normalizado*

$$\nu' = \delta(P_\nu - U_\nu + r_\nu \mathrm{Id})\nu \tag{5}$$

con $r_\nu := -\langle \delta(P_\nu - U_\nu)\nu, \nu\rangle$.

Aquí $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno de $\Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ que hace a una base $\{(e^i \wedge e^j) \otimes e_k\}$ de $\Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ ortonormal.

3.4 Pluriclosed solitons

Las soluciones distinguidas del flujo pluriclosed, en las que no cambia su geometría al evolucionar, son las llamadas pluriclosed solitons. Estas métricas especiales son candidatas a ser atractores del flujo pluriclosed, por lo que procederemos a dar una definición natural en el caso homogéneo, inspirada por trabajos de Jorge Lauret en el flujo de Ricci.

Definición 3.5 *Decimos que un grupo de Lie G, con una estructura pluriclosed invariante a izquierda (J, g), es un pluriclosed soliton algebraico si $P \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, definida por $\omega(P\cdot, \cdot) = \frac{1}{2}(\rho^B)^{1,1}$ satisface*

$$P = \alpha \mathrm{Id} + \tfrac{1}{2}(D + D^t), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, J),$$

Para algún α y alguna D. Diremos que (G, g, J) es de expansión, estable o de contracción si $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ o $\alpha > 0$ respectivamente.

Las siguientes proposiciones nos aseguran que los pluriclosed soliton algebraicos son precisamente los puntos fijos de (5) y que a su vez son también pluriclosed solitons.

Proposición 3.6 *[AL17, Proposición 2.9] Una estructura pluriclosed (J, g) invariante a izquierda en un grupo de Lie G es un pluriclosed soliton algebraico si y sólo si es un punto fijo del flujo de corchetes normalizado (5), para alguna calibración.*

Proposición 3.7 *[AL17, Proposición 2.10] Si (G, J, ω_0) es un pluriclosed soliton algebraico entonces la solución $\omega(t)$ al flujo pluriclosed (1) está dada por $\omega(t) = c(t)\varphi_t^*\omega_0$, con $c(t) \in \mathbb{R}$, y φ_t es una familia monoparamétrica de automorfismos de la variedad compleja (G, J) que a su vez son automorfismos de G.*

3.5 Forma de Bismut-Ricci en grupos de Lie

En esta sección describiremos brevemente a la forma de Bismut-Ricci en grupos de Lie, dando una ecuación para su cálculo explícito.

Sea (G, g, J) un grupo de Lie con una estructura hermitiana invariante a izquierda y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base g-ortonormal de $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie de G. Es bien conocido que la forma de Bismut-Ricci $\rho^B(\omega)$ es siempre cerrada y puede escribirse como la derivada exterior de la siguiente 1-forma

$$\theta(X) = -\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X \circ J) + \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, JX) + 2\langle \omega, dX^\sharp \rangle), \tag{6}$$

donde $X \in \mathfrak{g}$, $X^\sharp = g(X, \cdot) \in \mathfrak{g}^*$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en $\Lambda^2\mathfrak{g}^*$ que hace al conjunto $\{e^i \wedge e^j\}_{i<j}$ una base ortonormal ($e^j = g(e_j, \cdot)$) (ver [V13]). Este resultado es un caso particular de [V13, Teorema 4.1] cuando consideramos la conexión de Bismut, este caso es en el que $t = -1$.

Aquí estamos utilizando la identificación de las 1-formas invariantes a izquierda con $\mathfrak{g}^*$ y $d\theta(X, Y) = -\mu(X, Y)$, con $X, Y \in \mathfrak{g}$, es decir, la derivada exterior de 1-formas invariantes a izquierda evaluada en campos vectoriales invariantes a izquierda.

4 Estructuras SKT invariantes a izquierda en grupos de Lie solubles de dimensión 4

En esta sección introduciremos las estructuras SKT invariantes a izquierda en los grupos de Lie solubles simplemente conexos de dimensión 4. Al considerar solamente a los grupos de Lie simplemente conexos basta estudiar a sus álgebras y a las estructuras SKT en ellas. Con este fin, haremos un breve resumen de [MS11], donde Thomas Madsenn y Andrew Swann clasificaron las estructuras SKT en las álgebras de Lie solubles de dimensión 4.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble de dimensión 4 y sea $\mathfrak{g}^*$ su dual. Si $\{V_j\}$, $j = 1, \ldots, 4$ es una filtración de $\mathfrak{g}^*$ tal que $\dim V_j = j$ y $dV_j \subseteq \mathcal{I}(V_{j-1})$ con $\mathcal{I}(V_j)$ el ideal en $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ generado por V_j, vamos a decir que estamos en un caso complejo si se puede elegir una filtración tal que $V_2 = JV_2$, y en caso contrario decimos que estamos en un caso real.

La clasificación de estructuras SKT en álgebras de Lie solubles de dimensión 4 está dada por los siguientes lemas:

Lema 4.1 *[MS11, Lema 3.1] Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble de dimensión 4. Si (g, J) es una estructura hermitiana en $\mathfrak{g}$ entonces existe un conjunto ortonormal $\{a, b\}$ en $\mathfrak{g}^*$ tal que $\{a, Ja, b, Jb\}$ es una base de $\mathfrak{g}^*$ y*

Caso complejo: *$\mathfrak{g}$ tiene ecuaciones de estructura*

$$da = 0, \quad dJa = x_1 a \wedge Ja,$$
$$\begin{aligned} db &= y_1 a \wedge Ja + y_2 a \wedge b + y_3 a \wedge Jb + z_1 b \wedge Ja + z_2 Ja \wedge Jb, \\ dJb &= u_1 a \wedge Ja + u_2 a \wedge b + u_3 a \wedge Jb + v_1 b \wedge Ja + v_2 Ja \wedge Jb + w_1 b \wedge Jb, \end{aligned}$$

o

Caso real: *$\mathfrak{g}$ tiene ecuaciones de estructura*

$$\begin{aligned} da &= 0, \\ dJa &= x_1 a \wedge Ja + x_2(a \wedge b + Ja \wedge Jb) + x_3(a \wedge Jb + b \wedge Ja) + y_2 b \wedge Jb, \\ db &= z_1 a \wedge Ja + z_2 a \wedge b + z_3 a \wedge Jb, \\ dJb &= u_1 a \wedge Ja + u_2 a \wedge b + u_3 a \wedge Jb + v_1 b \wedge Ja + v_2 b \wedge Jb + w_1 Ja \wedge Jb. \end{aligned}$$

En el caso complejo $\{a, Ja, b, Jb\}$ puede ser tomado ortonormal y $\omega = a \wedge Ja + b \wedge Jb$. En el caso real $\omega = a \wedge Ja + b \wedge Jb + s(a \wedge b + Ja \wedge Jb)$, con $s \in (-1, 1)$.

Lema 4.2 *[MS11, Lema 3.2] Las ecuaciones de estructura del Lema 4.1 dan origen a una estructura SKT en un álgebra de Lie soluble si y sólo si las siguientes cantidades son nulas*

Caso complejo:

$$\begin{gathered} y_2 - z_2 - u_3 + v_1, \qquad y_3 - z_1 + u_2 - v_2, \qquad x_1 z_1 - y_3 v_1 - z_2 u_2, \\ z_2(x_1 - y_2 + u_3) - y_3(z_1 + v_2), \qquad y_2 w_1, \qquad y_3 w_1, \qquad z_1 w_1, \qquad z_2 w_1, \\ v_1(x_1 + y_2 - u_3) - u_2(z_1 + v_2) + u_1 w_1, \qquad x_1 v_1 + y_1 w_1 - y_3 v_1 - z_2 u_2, \\ (x_1 + y_2 + u_3)(y_2 + u_3) + (z_1 - v_2)^2 - u_1 w_1. \end{gathered}$$

Caso real:

$$\begin{gathered} z_2 - u_3 + v_1, \qquad z_3 + u_2 - w_1, \qquad x_2 u_2 - x_3(z_2 - v_1) - y_2 u_1, \\ y_2(-x_1 + z_2 + u_3) + x_2^2 + x_3(x_3 - v_2), \qquad x_2 u_3 - x_3(w_1 + z_3) + y_2 z_1, \\ v_1(x_1 + z_2 - u_3) - u_1(x_3 - v_2) - u_2 w_1, \qquad x_2 v_2 - y_2 w_1, \qquad x_3 z_1 + z_3 v_1, \\ y_2 z_1 + z_3 v_2, \qquad x_2 z_1 + z_3 w_1, \qquad x_2 v_1 - x_3 w_1, \\ x_2 w_1 + x_3 v_1 - y_2 u_1 + z_2 v_2, \qquad x_1 w_1 - x_2 u_1 + z_1 v_2 - z_3 v_1, \\ (x_1 + z_2 + u_3)(-y_2 + z_2 + u_3) + x_2(x_2 - z_1 + s v_2) + (x_3 - u_1 - s(u_2 - w_1))(x_3 + v_2) + w_1^2. \end{gathered}$$

En algunos casos las estructuras SKT son a su vez Kähler, y esto pasa si y sólo si se cumple lo siguiente

Caso complejo:

$$y_1 = u_1 = 0, \qquad u_3 + y_2 = 0, \qquad v_2 - z_1 = 0,$$

Caso real:

$$x_2 - z_1 - s(x_1 + u_3) = 0, \qquad x_3 - u_1 + su_2 = 0,$$
$$y_2 - z_2 - u_3 - sx_2, \qquad w_1 - s(x_3 + v_2).$$

En [MS11, Teorema 4.1] se listan todos los grupos de Lie solubles simplemente conexos de dimensión 4 que admiten una estructura SKT invariante a izquierda.

En el siguiente teorema enunciaremos la clasificación de estructuras SKT invariantes a izquierda en grupos de Lie solubles no unimodulares simplemente conexos de dimensión 4. La misma es extraída del [MS11, Teorema 4.1] cambiando la notación de la siguiente manera: tomaremos $\{e^1 = a, e^2 = Ja, e^3 = b, e^4 = Jb\}$ como base de $\mathfrak{g}^*$, y $\{e_1, \ldots, e_4\}$ a la base de $\mathfrak{g}$ dual a esta. La estructuras SKT en las álgebras de Lie no unimodulares listadas anteriormente vienen dadas en forma de corchetes por la Tabla 1.

Teorema 4.3 *[MS11, Teorema 4.1] Sea G un grupo de Lie soluble, no unimodular, simplemente conexo y de dimensión 4, entonces G admite una estructura SKT invariante a izquierda si y sólo si su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,0}$, $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}(\lambda > 0)$, $\mathfrak{d}_{4,2}$, $\mathfrak{d}_{4,1/2}$, o $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}(\lambda > 0)$. Más aún, la clasificación de tales, salvo equivalencia, está descripta en la Tabla 1.*

En este trabajo estamos interesados en estudiar los grupos de Lie no unimodulares listados en el Teorema 4.3. Éstos grupos son los que tienen como álgebra de Lie, en el caso complejo a $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,0}$, $\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}$ y $\mathfrak{d}_{4,2}$, y en el caso real a $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{d}_{4,1/2}$ y $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$.

Para ver la clasificación de las álgebras de Lie solubles de dimensión 4, ver [ABDO05, Teorema 1.5].

Las álgebras de Lie solubles no unimodulares de dimensión 4 del Teorema 4.3 son las siguientes

$\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,0}$	$[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = [e_1, e_4] = [e_2, e_3] = [e_2, e_4] = 0,$ $[e_3, e_4] = e_4.$
$\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}(\lambda > 0)$	$[e_1, e_2] = \lambda e_2,\ [e_1, e_3] = -e_4,\ [e_1, e_4] = e_3,$ $[e_2, e_3] = [e_2, e_4] = [e_3, e_4] = 0.$
$\mathfrak{d}_{4,2}$	$[e_1, e_2] = 2e_2,\ [e_1, e_3] = -e_3,\ [e_1, e_4] = e_4,$ $[e_2, e_3] = e_4,\ [e_2, e_4] = [e_3, e_4] = 0.$
$\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$	$[e_1, e_2] = -e_2, [e_3, e_4] = e_4,$ $[e_1, e_3] = [e_1, e_4] = [e_2, e_3] = [e_2, e_4] = 0.$
$\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$	$[e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2,\ [e_1, e_3] = \frac{1}{2}e_3,\ [e_1, e_4] = e_4,$ $[e_2, e_3] = e_4,\ [e_2, e_4] = [e_3, e_4] = 0.$
$\mathfrak{d}'_{4,\lambda}(\lambda > 0)$	$[e_1, e_2] = \lambda e_2 - e_3,\ [e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3,$ $[e_1, e_4] = 2\lambda e_4,\ [e_2, e_3] = e_4,$ $[e_2, e_4] = [e_3, e_4] = 0.$

Observación 1. La notación para las álgebras de Lie del Teorema 4.3 es la misma notación usada en [MS11] y en [ABDO05].

Observación 2. Las tres primeras álgebras de Lie de la Tabla 1 corresponden a casos complejos, mientras que las últimas tres corresponden a casos reales.

Observación 3. Las bases en $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,0}$, $\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}$, $\mathfrak{d}_{4,2}$, $\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$ y $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ pueden ser tomadas ortonormales, mientras que en $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ no podemos asegurar esto.

$\mathfrak{g}$	$[\cdot,\cdot]$		Restricciones	ω	Kähler
$\mathbb{R}\times\mathfrak{r}_{3,0}$	$[e_1,e_2]=-xe_4,$ $[e_1,e_4]=-\sqrt{xy}e_4,$ $[e_2,e_4]=0,$	$[e_1,e_3]=0,$ $[e_2,e_3]=\sqrt{xy}e_4,$ $[e_3,e_4]=-ye_4.$	$x\geq 0, y>0.$	$e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4$	$x=0,\ y>0.$
$\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}$	$[e_1,e_2]=-xe_2-ye_3,$ $[e_1,e_4]=-ze_3,$ $[e_2,e_4]=0,$	$[e_1,e_3]=ze_4,$ $[e_2,e_3]=0,$ $[e_3,e_4]=0.$	$x>0,\ y\geq 0,$ $\lambda=\lvert x/z\rvert,$ $z\neq 0.$	$e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4$	$x>0,$ $y=0,$ $z\neq 0.$
$\mathfrak{d}_{4,2}$	$[e_1,e_2]=-xe_2-ye_3-ze_4,$ $[e_1,e_4]=-\frac{1}{2}xe_4,$ $[e_2,e_4]=0,$	$[e_1,e_3]=\frac{1}{2}xe_3,$ $[e_2,e_3]=xe_4,$ $[e_3,e_4]=0.$	$x>0,\ y,z\in\mathbb{R}.$	$e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4$	$x>0,\ y,z=0$.
$\mathfrak{aff}(\mathbb{R})\times\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$	$[e_1,e_2]=-2xye_2,$ $[e_1,e_4]=0,$ $[e_2,e_4]=0,$	$[e_1,e_3]=0,$ $[e_2,e_3]=0,$ $[e_3,e_4]=-2xze_4.$	$x,y>0,$ $z<0,$ $y/z\in(-1,0).$	$e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4$ $+s(e^1\wedge e^3+e^2\wedge e^4),$ $s\in(-1,1).$	$x,y>0,$ $z<0,\ s=0,$ $y/z\in(-1,0).$
$\mathfrak{d}_{4,1/2}$	$[e_1,e_2]=x(1+y^2)e_2-\frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2)e_4,$ $[e_1,e_4]=xyze_2+x(\frac{1}{2}-y^2)e_4,$ $[e_2,e_4]=0,$	$[e_1,e_3]=\frac{1}{2}xe_3,$ $[e_2,e_3]=-xyze_2+xy^2e_4,$ $[e_3,e_4]=xz^2e_2-xyze_4.$	$x\neq 0,$ $y^2+z^2=1,$ $z>0.$	$e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4$	$x\neq 0,$ $y=0,$ $z=1.$
$\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$	$[e_1,e_2]=x(1+y^2)e_2-\frac{wy}{z}e_3-\frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2)e_4,$ $[e_1,e_4]=xyze_2-we_3+x(\frac{1}{2}-y^2)e_4,$ $[e_2,e_4]=0,$	$[e_1,e_3]=\frac{1}{2}xe_3+we_4,$ $[e_2,e_3]=-xyze_2+xy^2e_4,$ $[e_3,e_4]=xz^2e_2-xyze_4.$	$w,x\neq 0,$ $y^2+z^2=1,$ $z>0,\ \lambda=\lvert x/2w\rvert.$	$e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4$	$w,x\neq 0,$ $y=0,$ $z=1.$

Table 1: Estructuras SKT en álgebras de Lie solubles no unimodulares de dimensión 4.

5 El comportamiento asintótico del flujo pluriclosed

El objetivo de esta sección es estudiar el comportamiento asintótico del flujo pluriclosed en grupos de Lie solubles no unimodulares de dimensión 4.

En esta sección denotaremos a la base de $\mathfrak{g}^*$ dada por la clasificación de [MS11] (Tabla 1) como $\{e^1, \dots, e^4\}$ y por $\{e_1, \dots, e_4\}$ a la base de $\mathfrak{g}$ que es dual a $\{e^1, \dots, e^4\}$.

Nuestra principal herramienta será el flujo de corchetes calibrado. En cada caso estudiaremos un flujo de corchetes calibrado encontrando una calibración adecuada de manera tal que las familias de estructuras SKT descriptas en Tabla 1 sean invariantes por el flujo.

5.1 $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,0}$

Esta álgebra tiene las siguientes ecuaciones de estructura

$$\begin{array}{lcllcl} \mu(e_1,e_2) & = & -xe_4, & \mu(e_1,e_3) & = & 0, \\ \mu(e_1,e_4) & = & -\sqrt{xy}e_4, & \mu(e_2,e_3) & = & \sqrt{xy}e_4, \\ \mu(e_2,e_4) & = & 0, & \mu(e_3,e_4) & = & -ye_4. \end{array}$$

con $x \geq 0$ y $y > 0$ (ver Tabla 1).

Proposición 5.1 *La forma de Bismut-Ricci ρ^B de una estructura SKT en $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,0}$, en la base $\{e^j\}$ está dada por*

$$\rho^B = -(x+y)(xe^1 \wedge e^2 + \sqrt{xy}e^1 \wedge e^4 - \sqrt{xy}e^2 \wedge e^3 + ye^3 \wedge e^4),$$

y $(\rho^B)^{1,1} = \rho^B$.

Demostración: Primero calculemos θ (ver Sección 3.3). Las matrices de $\mathrm{ad} e_j$ y $\mathrm{ad} e_j \circ J$ en la base $\{e_1, \dots, e_4\}$ son

$$\mathrm{ad}e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & -\sqrt{xy} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & \sqrt{xy} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{ad}e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{xy} & 0 & -y \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{xy} & 0 & y & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathrm{ad}e_1 \circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & -\sqrt{xy} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}e_2 \circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & -\sqrt{xy} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{ad}e_3 \circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{xy} & 0 & -y & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}e_4 \circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{xy} & 0 & -y \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_j \circ J + \mathrm{ad}Je_j) = 0$, $j = 1, \ldots, 4$ y $e_j^\sharp = e^j$, por lo que

$$\begin{array}{rclrcl} \langle \omega, de^1 \rangle &=& 0, & \langle \omega, de^2 \rangle &=& 0, \\ \langle \omega, de^3 \rangle &=& 0, & \langle \omega, de^4 \rangle &=& x+y, \end{array}$$

y de esto obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \theta &=& -(x+y)e^4, \\ \rho^B &=& -(x+y)(xe^1 \wedge e^2 + \sqrt{xy}e^1 \wedge e^4 - \sqrt{xy}e^2 \wedge e^3 + ye^3 \wedge e^4). \end{array}$$

Como las componentes de ρ^B en $e^1 \wedge e^4$ y $e^2 \wedge e^3$ difieren sólo en su signo tenemos $\rho^B = (\rho^B)^{1,1}$.

$\square$

El siguiente resultado se sigue directo de Proposición 5.1.

Corolario 5.2 $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,0}$ *no admite métricas SKT estáticas.*

Conociendo $(\rho^B)^{1,1}$ podemos calcular P_μ dado implícitamente por $\omega(P_\mu \cdot, \cdot) = \frac{1}{2}(\rho^B)^{1,1}$, entonces

$$\begin{array}{rcccc} \omega(P_\mu e_1, e_2) &=& p_{11} &=& -\frac{1}{2}(x+y)x, \\ \omega(P_\mu e_1, e_3) &=& -p_{41} &=& 0, \\ \omega(P_\mu e_1, e_4) &=& p_{31} &=& -\frac{1}{2}(x+y)\sqrt{xy}, \\ \omega(P_\mu e_3, e_4) &=& p_{33} &=& -\frac{1}{2}(x+y)y, \end{array}$$

y tenemos que la matriz de P_μ en la base $\{e_1, \ldots, e_4\}$ es

$$P_\mu = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x(x+y) & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{xy}(x+y) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}x(x+y) & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{xy}(x+y) \\ -\frac{1}{2}\sqrt{xy}(x+y) & 0 & -\frac{1}{2}y(x+y) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{xy}(x+y) & 0 & -\frac{1}{2}y(x+y) \end{pmatrix}.$$

Elegimos una calibración $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,0}, J)$ de la siguiente forma

$$U_{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{xy}(x+y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{xy}(x+y) \\ \frac{1}{2}\sqrt{xy}(x+y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{xy}(x+y) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y de esto obtenemos

$$P_{\bar{\mu}} - U_{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x(x+y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}x(x+y) & 0 & 0 \\ -\sqrt{xy}(x+y) & 0 & -\frac{1}{2}y(x+y) & 0 \\ 0 & -\sqrt{xy}(x+y) & 0 & -\frac{1}{2}y(x+y) \end{pmatrix}.$$

Proposición 5.3 *El flujo de corchetes calibrado por la calibración* $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,0}, J)$ *que empieza en un corchete de* $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,0}$ *está definido para todo* $t \in [0, \infty)$ *y* $\bar{\mu}(t) \to 0$ *cuando* $t \to \infty$*, es decir, el flujo converge al álgebra abeliana.*

Demostración: De $\bar{\mu}' = \delta_{\bar{\mu}}(P_{\bar{\mu}} - U_{\bar{\mu}})$ obtenemos

$$
\begin{array}{rcl}
\bar{\mu}'(e_1,e_2) &=& \frac{1}{2}x(x+y)(2x+3y)e_4,\\
\bar{\mu}'(e_1,e_3) &=& 0,\\
\bar{\mu}'(e_1,e_4) &=& \frac{1}{2}(x+y)\sqrt{xy}(x+2y)e_4,\\
\bar{\mu}'(e_2,e_3) &=& -\frac{1}{2}(x+y)\sqrt{xy}(x+2y)e_4,\\
\bar{\mu}'(e_2,e_4) &=& 0,\\
\bar{\mu}'(e_3,e_4) &=& \frac{1}{2}y^2(x+y)e_4.
\end{array}
$$

Reescribiendo obtenemos el sistema de ecuaciones deseado

$$
\left\{\begin{array}{rclrcl}
x' &=& -\frac{1}{2}(2x^3+3x^2y+xy^2), & x(0) &=& x_0,\\
y' &=& -\frac{1}{2}(xy^2+y^3), & y(0) &=& y_0,
\end{array}\right. \tag{7}
$$

con $x_0 \geq 0$ e $y_0 > 0$. Notemos que

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2) &=& xx'+yy'\\
&\leq& 0
\end{array}
$$

por lo que $(x,y)(t) \in \bar{B}(r_0,0)$, con $r_0 = ||(x_0,y_0)||$, para todo $t \geq 0$ y al ser la bola compacta tenemos que la solución está definida en $[0,\infty)$ y $(x,y)(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

□

Proposición 5.4 *El flujo de corchetes calibrado por $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathbb{R}\times\mathfrak{r}_{3,0},J)$ normalizado por la norma que empieza en un corchete en $\mathbb{R}\times\mathfrak{r}_{3,0}$ converge a un pluriclosed soliton algebraico de expansión.*

Demostración: Consideremos el flujo de corchetes calibrado y normalizado ν_y que mantiene constante a y. Este flujo, salvo reparametrización del tiempo, coincide con (7) sumando un multiplo de la identidad, luego se sigue que ν_y resuelve $\nu_y' = \delta(P_{\nu_y} - U_{\nu_y} + r_{\nu_y}\mathrm{Id})$ dado por

$$
\begin{array}{rcl}
\nu_y'(e_1,e_2) &=& \frac{1}{2}x(x+y)(2x+3y)e_4 - xr_{\nu_y}e_4,\\
\nu_y'(e_1,e_3) &=& 0,\\
\nu_y'(e_1,e_4) &=& \frac{1}{2}(x+y)\sqrt{xy}(x+2y)e_4 - \sqrt{xy}r_{\nu_y}e_4,\\
\nu_y'(e_2,e_3) &=& -\frac{1}{2}(x+y)\sqrt{xy}(x+2y)e_4 + \sqrt{xy}r_{\nu_y}e_4\\
\nu_y'(e_2,e_4) &=& 0,\\
\nu_y'(e_3,e_4) &=& \frac{1}{2}y^2(x+y)e_4 - yr_{\nu_y}e_4,
\end{array}
$$

que es equivalente a

$$
\left\{\begin{array}{rclrcl}
x' &=& -\frac{1}{2}(2x^3+3x^2y+xy^2)+xr_{\nu_y}, & x(0) &=& x_0,\\
y' &=& -\frac{1}{2}(xy^2+y^3)+yr_{\nu_y}, & y(0) &=& y_0,
\end{array}\right.
$$

Eligiendo $r_{\nu_y} = \frac{1}{2}(xy+y^2)$, tenemos

$$
\left\{\begin{array}{rclrcl}
x' &=& -x(x+y)^2, & x(0) &=& x_0,\\
y' &=& 0, & y(0) &=& y_0,
\end{array}\right. \tag{8}
$$

por lo que $y(t) = y_0$ y $x' < -x^3$. La ecuación $\dot{u} = -u^3$, $u(0) = x_0$ tiene solución $u(t) = x_0(2x_0^2t+1)^{-\frac{1}{2}}$, y por el teorema de comparación la solución de $\dot{x} = -x(x+y_0)^2$, $x(0) = x_0$, satisface $x(t) < u(t)$. Como $u(t) \to 0$, $t \to \infty$, y $(0,y_0)$ es un punto crítico de (8), tenemos que el flujo converge a $(0,y_0)$.

De esto podemos concluir que el flujo normalizado ν_y converge a $\nu_\infty \neq 0$ dado por

$$\begin{array}{rclrcl} \nu_\infty(e_1,e_2) &=& 0, & \nu_\infty(e_1,e_3) &=& 0,\\ \nu_\infty(e_1,e_4) &=& 0, & \nu_\infty(e_2,e_3) &=& 0,\\ \nu_\infty(e_2,e_4) &=& 0, & \nu_\infty(e_3,e_4) &=& -y_0e_4. \end{array}$$

Si $\nu(t)=\bar{\mu}(t)/||\bar{\mu}(t)||$, el hecho de que $\nu_y\to\nu_\infty\neq 0$ cuando $t\to\infty$ implica que $\nu(t)=\nu_y(t)/||\nu_y(t)||\to\nu_\infty/||\nu_\infty||$, el cual difiere de ν_∞ sólo por un multiplo.

$\square$

Observación. La métrica ω a la que converge el flujo es Kähler (ver Tabla 1) y ν_∞ es un pluriclosed soliton algebraico de expansión. Tenemos que

$$P_{\nu_\infty}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}y_0^2&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}y_0^2\end{pmatrix},$$

y tomando $\alpha=-\frac{1}{2}y_0^2$ y

$$D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}y_0^2&0&0&0\\0&\frac{1}{2}y_0^2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

es inmediato que $D\in\mathrm{Der}(\mathbb{R}\times\mathfrak{r}_{3,0},J)$ y $P_{\nu_\infty}=\alpha\mathrm{Id}+D$. Como $\alpha<0$, tenemos que ν_∞ es un soliton pluriclosed algebraico de expansión.

5.2 $\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}$

Recordemos que esta álgebra tiene las siguientes ecuaciones de estructura

$$\begin{array}{rclrcl} \mu(e_1,e_2) &=& -xe_2-ye_3, & \mu(e_1,e_3) &=& ze_4,\\ \mu(e_1,e_4) &=& -ze_3, & \mu(e_2,e_3) &=& 0,\\ \mu(e_2,e_4) &=& 0, & \mu(e_3,e_4) &=& 0, \end{array}$$

con $x>0$, $y\geq 0$, $z\neq 0$ y $\lambda=|\frac{x}{z}|$ (ver Tabla 1).

Proposición 5.5 *La forma de Bismut-Ricci ρ^B de una estructura SKT en $\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}$, $(\lambda=|\frac{x}{z}|)$ en la base $\{e^1,\dots e^4\}$ está dada por*

$$\rho^B=-(x^2+y^2)e^1\wedge e^2-yze^1\wedge e^4,$$

y

$$(\rho^B)^{1,1}=-(x^2+y^2)e^1\wedge e^2+\tfrac{1}{2}yz(e^2\wedge e^3-e^1\wedge e^4).$$

Demostración: Las matrices de $\mathrm{ad}e_j$ en la base $\{e_1,\dots,e_4\}$ son

$$\mathrm{ad}e_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-x&0&0\\0&-y&0&-z\\0&0&z&0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{ad}e_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\x&0&0&0\\y&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{ad}e_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-z&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{ad}e_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\z&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

entonces $\mathrm{ad}e_j \circ J$ en la base $\{e_1, \ldots, e_4\}$ están dadas por

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}e_1 \circ J &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z \end{pmatrix}, &\quad \mathrm{ad}e_2 \circ J &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathrm{ad}e_3 \circ J &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \end{pmatrix}, &\quad \mathrm{ad}e_4 \circ J &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De ésto obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_1 \circ J + \mathrm{ad}Je_1) &= -2z, & \mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_2 \circ J + \mathrm{ad}Je_2) &= 0, \\
\mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_3 \circ J + \mathrm{ad}Je_3) &= 0, & \mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_4 \circ J + \mathrm{ad}Je_4) &= 0,
\end{aligned}$$

y de $e_j^\sharp = e^j$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \omega, de^1 \rangle &= 0, & \langle \omega, de^2 \rangle &= x, \\
\langle \omega, de^3 \rangle &= y, & \langle \omega, de^4 \rangle &= 0,
\end{aligned}$$

por lo que θ y ρ^B están dadas por

$$\begin{aligned}
\theta &= ze^1 - xe^2 - ye^3, \\
\rho^B &= -(x^2 + y^2)e^1 \wedge e^2 - yze^1 \wedge e^4.
\end{aligned}$$

Por último obtenemos

$$(\rho^B)^{1,1} = -(x^2 + y^2)e^1 \wedge e^2 + \tfrac{1}{2}yz(e^2 \wedge e^3 - e^1 \wedge e^4).$$

□

El siguiente resultado se sigue de Proposición 5.5.

Corolario 5.6 $\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}$ *no admite métricas SKT estáticas.*

Ahora conociendo $(\rho^B)^{1,1}$ podemos encontrar P_μ

$$\begin{aligned}
\omega(P_\mu e_1, e_2) &= p_{11} &= -\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2), \\
\omega(P_\mu e_1, e_3) &= -p_{41} &= 0, \\
\omega(P_\mu e_1, e_4) &= p_{31} &= -\tfrac{1}{4}yz, \\
\omega(P_\mu e_3, e_4) &= p_{33} &= 0,
\end{aligned}$$

por lo que la matriz de P_μ en la base $\{e_1, \ldots, e_4\}$ es

$$P_\mu = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) & 0 & -\frac{1}{4}yz & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) & 0 & -\frac{1}{4}yz \\ -\frac{1}{4}yz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}yz & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elegimos una calibración $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}, J)$ de la siguiente forma

$$U_{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4}yz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}yz \\ \frac{1}{4}yz & 0 & 0 & \frac{1}{2}xz \\ 0 & \frac{1}{4}yz & -\frac{1}{2}xz & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que obtenemos

$$P_{\bar{\mu}} - U_{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x^2+y^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(x^2+y^2) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}yz & 0 & 0 & -\frac{1}{2}xz \\ 0 & -\frac{1}{2}yz & \frac{1}{2}xz & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 5.7 *El flujo el flujo de corchetes calibrado por la calibración $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}, J)$ que empieza en un corchete de $\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}$ está definido para todo $t \in [0,\infty)$ y $\bar{\mu}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, es decir, el flujo converge al álgebra abeliana.*

Demostración: De $\bar{\mu}' = \delta_{\bar{\mu}}(P_{\bar{\mu}} - U_{\bar{\mu}})$ obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \bar{\mu}'(e_1,e_2) & = & \frac{1}{2}x(x^2+y^2)e_2 + y(x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2)e_3, \\ \bar{\mu}'(e_1,e_3) & = & -\frac{1}{2}z(x^2+y^2)e_4, \\ \bar{\mu}'(e_1,e_4) & = & \frac{1}{2}z(x^2+y^2)e_3, \\ \bar{\mu}'(e_2,e_3) & = & 0, \\ \bar{\mu}'(e_2,e_4) & = & 0, \\ \bar{\mu}'(e_3,e_4) & = & 0. \end{array}$$

Reescribiendo, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para los parámetros

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} \dot{x} & = & -\frac{1}{2}x(x^2+y^2), & x(0) & = & x_0, \\ \dot{y} & = & -y(x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2), & y(0) & = & y_0, \\ \dot{z} & = & -\frac{1}{2}z(x^2+y^2), & z(0) & = & z_0. \end{array} \right.$$

Como $x \neq 0$ y $z \neq 0$ tenemos que

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{z}}{z},$$

e integrando obtenemos $x = \lambda|z|$, es decir, la condición se preserva a lo largo del flujo, por lo que podemos reescribir la ecuación anterior de la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} \dot{x} & = & -\frac{1}{2}x(x^2+y^2), & x(0) & = & x_0, \\ \dot{y} & = & -y(\xi x^2+y^2), & y(0) & = & y_0, \\ \dot{z} & = & -\frac{1}{2}z(x^2+y^2), & z(0) & = & z_0, \end{array} \right. \tag{9}$$

donde $\xi = 1 + \frac{1}{2\lambda^2}$.

Notemos que $\dot{x} < -x^3$, $\dot{y} < -y^3$ y $\dot{z} < -z^3$, por lo que

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2) & = & x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \\ & < & -(x^4+y^4+z^4) \\ & < & 0 \end{array}$$

por lo que $(x,y,z)(t) \in \bar{B}(r_0,0)$, con $r_0 = ||(x_0,y_0,z_0)||$, y la solución está definida para todo $t \in [0,\infty)$, más aun las soluciones tienen a 0 cuando $t \to \infty$.

$\square$

Proposición 5.8 *El flujo de corchetes calibrado por la calibración $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}, J)$ y normalizado por la norma que empieza en un corchete de $\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}$ converge a un pluriclosed soliton algebraico de expansión.*

Demostración: Consideremos el flujo de corchetes calibrado y normalizado $\nu_{x,z}$ que mantiene a x y z constantes. Este flujo, salvo reparametrización en el tiempo, coincide con (9) sumando un múltiplo de la identidad, luego se sigue que $\nu_{x,z}$ resuelve $\nu'_{x,z} = \delta(P_{\nu_{x,z}} - U_{\nu_{x,z}} + r_{\nu_{x,z}}\mathrm{Id})$ dado por

$$\begin{array}{rcl}
\nu'_{x,z}(e_1,e_2) &=& \frac{1}{2}x(x^2+y^2)e_2 + y(x^2+y^2+\frac{1}{2}z^2)e_3 - (xe_2+ye_3)r_{\nu_{x,z}},\\
\nu'_{x,z}(e_1,e_3) &=& -\frac{1}{2}z(x^2+y^2)e_4 + zr_{\nu_{x,z}}e_4,\\
\nu'_{x,z}(e_1,e_4) &=& \frac{1}{2}z(x^2+y^2)e_3 - zr_{\nu_{x,z}}e_3,\\
\nu'_{x,z}(e_2,e_3) &=& 0,\\
\nu'_{x,z}(e_2,e_4) &=& 0,\\
\nu'_{x,z}(e_3,e_4) &=& 0,
\end{array}$$

y fácilmente se obtienen las ecuaciones para los parámetros

$$\left\{\begin{array}{rclrcl}
\dot{x} &=& -\frac{1}{2}x(x^2+y^2)+xr_{\nu_{x,z}}, & x(0) &=& x_0 > 0,\\
\dot{y} &=& -y(\xi x^2+y^2)+yr_{\nu_{x,z}}, & y(0) &=& y_0 \geq 0,\\
\dot{z} &=& -\frac{1}{2}z(x^2+y^2)+zr_{\nu_{x,z}}, & z(0) &=& z_0 \neq 0.
\end{array}\right.$$

Tomando $r_{\nu_{x,z}} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ tenemos

$$\left\{\begin{array}{rclrcl}
\dot{x} &=& 0, & x(0) &=& x_0,\\
\dot{y} &=& -\frac{1}{2}y((2\xi-1)x^2+y^2), & y(0) &=& y_0,\\
\dot{z} &=& 0, & z(0) &=& z_0,
\end{array}\right. \qquad (10)$$

entonces $x(t) = x_0$ y $z(t) = z_0$. La ecuación $\dot{u} = -u^3$, $u(0) = y_0$ tiene solución $u(t) = y_0(2y_0^2t+1)^{-\frac{1}{2}}$, como $2\xi - 1 > 0$ tenemos que $\dot{y} < \dot{u}$ y por el teorema de comparación la solución de $\dot{y} = -\frac{1}{2}y((2\xi-1)x^2+y^2)$, $y(0) = y_0$, satisface $y(t) < u(t)$. Como $u(t) \to 0$, $t \to \infty$, y $(x_0,0,z_0)$ es un punto crítico de la ecuación anterior, tenemos que el flujo converge a $(x_0,0,z_0)$.

Podemos concluir que el flujo normalizado $\nu_{x,z}(t) \to \nu_\infty \neq 0$ cuando $t \to \infty$ dado por

$$\begin{array}{rclrcl}
\nu_\infty(e_1,e_2) &=& -x_0e_2, & \nu_\infty(e_1,e_3) &=& z_0e_4,\\
\nu_\infty(e_1,e_4) &=& -z_0e_3, & \nu_\infty(e_2,e_3) &=& 0,\\
\nu_\infty(e_2,e_4) &=& 0, & \nu_\infty(e_3,e_4) &=& 0,
\end{array}$$

Si $\nu(t) = \bar{\mu}(t)/||\bar{\mu}(t)||$, como $\nu_{x,z} \to \nu_\infty \neq 0$ cuando $t \to \infty$ obtenemos que $\nu(t) = \nu_{x,z}(t)/||\nu_{x,z}(t)|| \to \nu_\infty/||\nu_\infty||$, y sólo difiere de ν_∞ por un múltiplo.

$\square$

Observación. La métrica ω a la que converge el flujo resulta ser Kähler (ver Tabla 1) y ν_∞ es un pluriclosed soliton algebraico de expansión. Tenemos

$$P_{\nu_\infty} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}x_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Análogamente al caso anterior tomando $\alpha = -\frac{1}{2}x_0^2$ y

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}x_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x_0^2 \end{pmatrix}$$

tenemos que $P_{\nu_\infty} = \alpha \mathrm{Id} + \frac{1}{2}(D + D^t)$, con $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}, J)$, por lo tanto tenemos un soliton pluriclosed algebraico, y como $\alpha < 0$, es de expansión.

5.3 $\mathfrak{d}_{4,2}$

Tenemos ecuaciones de estructura

$$\begin{array}{rclrcl} \mu(e_1, e_2) & = & -xe_2 - ye_3 - ze_4, & \mu(e_1, e_3) & = & \frac{1}{2}xe_3, \\ \mu(e_1, e_4) & = & -\frac{1}{2}xe_4, & \mu(e_2, e_3) & = & xe_4, \\ \mu(e_2, e_4) & = & 0, & \mu(e_3, e_4) & = & 0. \end{array}$$

con $x > 0$, $y, z \in \mathbb{R}$ (ver Tabla 1).

Proposición 5.9 *La forma de Bismut-Ricci ρ^B de una estructura SKT en $\mathfrak{d}_{4,2}$, en la base $\{e^1, \dots, e^4\}$ es de la forma*

$$\rho^B = -(\tfrac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2)e^1 \wedge e^2 + \tfrac{1}{2}xye^1 \wedge e^3 - \tfrac{1}{2}xze^1 \wedge e^4 + xze^2 \wedge e^3$$

y

$$(\rho^B)^{1,1} = -(\tfrac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2)e^1 \wedge e^2 + \tfrac{1}{4}xye^1 \wedge e^3 - \tfrac{3}{4}xze^1 \wedge e^4 + \tfrac{3}{4}xze^2 \wedge e^3 + \tfrac{1}{4}xye^2 \wedge e^4.$$

Demostración: Recordemos que $\rho^B = d\theta$, por lo que primero tenemos que calcular θ. Tenemos que $\mathrm{ad}e_j$, $j = 1, \dots, 4$ en la base $\{e_1, \dots, e_4\}$ son

$$\mathrm{ad}e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & -y & \frac{1}{2}x & 0 \\ 0 & -z & 0 & -\frac{1}{2}x \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{ad}e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $\mathrm{ad}e_j \circ J$ en la base $\{e_1, \dots, e_4\}$ están dadas por

$$\mathrm{ad}e_1\circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ -x & 0 & 0 & 0\\ -y & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x\\ -z & 0 & -\frac{1}{2}x & 0\end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}e_2\circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -x & 0 & 0\\ 0 & -y & 0 & 0\\ 0 & -z & 0 & -x\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{ad}e_3\circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}x & 0 & 0\\ -x & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}e_4\circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}x & 0 & 0\end{pmatrix},$$

y sus trazas

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_1\circ J+\mathrm{ad}Je_1) &= 0,\\
\mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_2\circ J+\mathrm{ad}Je_2) &= -x,\\
\mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_3\circ J+\mathrm{ad}Je_3) &= 0,\\
\mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_4\circ J+\mathrm{ad}Je_4) &= 0.
\end{aligned}$$

Ahora calculemos $\langle\omega, de_j^\sharp\rangle$. Como $e_j^\sharp = e^j$ tenemos

$$\begin{aligned}
\langle\omega, de^1\rangle &= 0, & \langle\omega, de^2\rangle &= x,\\
\langle\omega, de^3\rangle &= y, & \langle\omega, de^4\rangle &= z,
\end{aligned}$$

y finalmente se tiene $\theta = -\frac{1}{2}xe^2 - ye^3 - ze^4$,

$$\rho^B = -(\tfrac{1}{2}x^2+y^2+z^2)e^1\wedge e^2 + \tfrac{1}{2}xye^1\wedge e^3 - \tfrac{1}{2}xze^1\wedge e^4 + xze^2\wedge e^3$$

y $(\rho^B)^{1,1}$ viene dada por

$$(\rho^B)^{1,1} = -(\tfrac{1}{2}x^2+y^2+z^2)e^1\wedge e^2 + \tfrac{1}{4}xye^1\wedge e^3 - \tfrac{3}{4}xze^1\wedge e^4 + \tfrac{3}{4}xze^2\wedge e^3 + \tfrac{1}{4}xye^2\wedge e^4.$$

□

El siguiente resultado se sigue directamente de Proposición 5.9.

Corolario 5.10 $\mathfrak{d}_{4,2}$ *no admite métricas SKT estáticas.*

De $\frac{1}{2}(\rho^B)^{1,1} = \omega(P_\mu\cdot,\cdot)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\omega(P_\mu e_1, e_2) &= p_{11} &&= -\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}x^2+y^2+z^2),\\
\omega(P_\mu e_1, e_3) &= -p_{41} &&= \tfrac{1}{8}xy,\\
\omega(P_\mu e_1, e_4) &= p_{31} &&= -\tfrac{3}{8}xz,\\
\omega(P_\mu e_3, e_4) &= p_{33} &&= 0,
\end{aligned}$$

por lo que la matriz de P_μ es

$$P_\mu = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2+y^2+z^2) & 0 & -\frac{3}{8}xz & -\frac{1}{8}xy\\ 0 & -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2+y^2+z^2) & \frac{1}{8}xy & -\frac{3}{8}xz\\ -\frac{3}{8}xz & \frac{1}{8}xy & 0 & 0\\ -\frac{1}{8}xy & -\frac{3}{8}xz & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Tomaremos una calibración $U_{\bar\mu}\in\mathfrak{u}(\mathfrak{d}_{4,2},J)$ de la siguiente forma

$$U_{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{8}xz & -\frac{1}{8}xy \\ 0 & 0 & \frac{1}{8}xy & -\frac{3}{8}xz \\ \frac{3}{8}xz & -\frac{1}{8}xy & 0 & 0 \\ \frac{1}{8}xy & \frac{3}{8}xz & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$P_{\bar{\mu}} - U_{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2) & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4}xz & \frac{1}{4}xy & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}xy & -\frac{3}{4}xz & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 5.11 *El flujo de corchetes calibrado por la calibración $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{d}_{4,2}, J)$ que empieza en un corchete de $\mathfrak{d}_{4,2}$ está definido para todo $t \in [0, \infty)$ y $\bar{\mu}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, es decir, el flujo converge al álgebra abeliana.*

Demostración: De $\bar{\mu}' = \delta_{\bar{\mu}}(P_{\bar{\mu}} - U_{\bar{\mu}})$ tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\mu}'(e_1, e_2) &= (\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{1}{2}xy^2 + \tfrac{1}{2}xz^2)e_2 + (\tfrac{7}{8}x^2y + y^3 + yz^2)e_3 \\ &\quad + (\tfrac{11}{16}x^2z + y^2z + z^3)e_4, \\ \bar{\mu}'(e_1, e_3) &= -(\tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{1}{4}xy^2 + \tfrac{1}{4}xz^2)e_3, \\ \bar{\mu}'(e_1, e_4) &= (\tfrac{1}{8}x^3 + \tfrac{1}{4}xy^2 + \tfrac{1}{4}xz^2)e_4, \\ \bar{\mu}'(e_2, e_3) &= -(\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{1}{2}xy^2 + \tfrac{1}{2}xz^2)e_4, \\ \bar{\mu}'(e_2, e_4) &= 0, \\ \bar{\mu}'(e_3, e_4) &= 0. \end{aligned}$$

Reescribiendo, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones para los parámetros

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2), & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = -y(\frac{7}{8}x^2 + y^2 + z^2), & y(0) = y_0, \\ \dot{z} = -z(\frac{11}{16}x^2 + y^2 + z^2), & z(0) = z_0. \end{cases} \tag{11}$$

Análogamente a los casos anteriores, tenemos que $\dot{x} < -x^3$, $\dot{y} < -y^3$ y $\dot{z} < -z^3$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + z^2) &= x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \\ &\leq -(x^4 + y^4 + z^4) \end{aligned}$$

por lo que la solución de (11), queda contenida en $\bar{B}(r_0, 0)$, $r_0 = ||(x_0, y_0, z_0)||$, para tiempos positivos y están definidas al menos en $[0, \infty)$, más aún, al ser 0 un punto crítico de (11) tenemos $(x, y, z)(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

□

Proposición 5.12 *El flujo de corchetes calibrado por $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{d}_{4,2}, J)$ y normalizado por la norma que empieza en un corchete de $\mathfrak{d}_{4,2}$ converge a un pluriclosed soliton algebraico de expansión.*

Demostración: Consideremos el flujo de corchetes calibrado y normalizado ν_x que mantiene constante a x. Este flujo, salvo reparametrización en el tiempo, coincide con (11) sumando un multiplo de la identidad, luego se sigue que ν_x resuelve $\nu_x' = \delta_{\nu_x}(P_{\nu_x} - U_{\nu_x} + r_{\nu_x}\mathrm{Id})$ dado por

$$
\begin{array}{rcl}
\nu_x'(e_1,e_2) &=& (\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{2}xz^2)e_2+(\frac{7}{8}x^2y+y^3+yz^2)e_3\\
&& +(\frac{11}{16}x^2z+y^2z+z^3)e_4-(xe_2+ye_3+ze_4)r_{\nu_x},\\
\nu_x'(e_1,e_3) &=& -(\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{4}xy^2+\frac{1}{4}xz^2)e_3+\frac{1}{2}xr_{\nu_x}e_3,\\
\nu_x'(e_1,e_4) &=& (\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{4}xy^2+\frac{1}{4}xz^2)e_4-\frac{1}{2}xr_{\nu_x}e_4,\\
\nu_x'(e_2,e_3) &=& -(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{2}xz^2)e_4+xr_{\nu_x}e_4,\\
\nu_x'(e_2,e_4) &=& 0,\\
\nu_x'(e_3,e_4) &=& 0,
\end{array}
$$

y de esto obtenemos

$$
\begin{cases}
\dot{x}=-x(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2)+r_{\nu_x}x, & x(0)=x_0,\\
\dot{y}=-y(\frac{7}{8}x^2+y^2+z^2)+r_{\nu_x}y, & y(0)=y_0,\\
\dot{z}=-z(\frac{11}{16}x^2+y^2+z^2)+r_{\nu_x}z, & z(0)=z_0.
\end{cases}
$$

Tomando $r_{\nu_x}=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2$ tenemos

$$
\begin{cases}
\dot{x}=0, & x(0)=x_0,\\
\dot{y}=-y(\frac{5}{8}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2), & y(0)=y_0,\\
\dot{z}=-z(\frac{19}{12}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2), & z(0)=z_0,
\end{cases}
\tag{12}
$$

entonces tenemos $x(t)=x_0$ para todo t, y considerando el sistema

$$
\begin{cases}
\dot{y}=-y(\frac{5}{8}x_0^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2), & y(0)=y_0,\\
\dot{z}=-z(\frac{19}{12}x_0^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2), & z(0)=z_0,
\end{cases}
$$

nuevamente podemos ver que la norma de (y,z) tiene derivada negativa, por lo que la solución de (12) converge a $(x_0,0,0)$ cuando $t\to\infty$.

Ahora podemos concluir que el flujo normalizado ν_x converge a $\nu_\infty\neq 0$ dado por

$$
\begin{array}{rclrcl}
\nu_\infty(e_1,e_2) &=& -x_0e_2, & \nu_\infty(e_1,e_3) &=& \frac{1}{2}x_0e_3,\\
\nu_\infty(e_1,e_4) &=& -\frac{1}{2}x_0e_4, & \nu_\infty(e_2,e_3) &=& x_0e_4,\\
\nu_\infty(e_2,e_4) &=& 0, & \nu_\infty(e_3,e_4) &=& 0,
\end{array}
$$

Si $\nu(t)=\bar{\mu}(t)/||\bar{\mu}(t)||$, como $\nu_x(t)\to\nu_\infty\neq 0$ cuando $t\to\infty$ obtenemos que $\nu(t)=\nu_x(t)/||\nu_x(t)||\to\nu_\infty/||\nu_\infty||$, el cual difiere de ν_∞ solamente por un múltiplo.

$\square$

Observación. La métrica ω a la que converge el flujo es Kähler (ver Tabla 1) y ν_∞ es un puriclosed soliton algebraico de expansión. Tenemos que P_{ν_∞} viene dada por

$$
P_{\nu_\infty}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}x_0^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}x_0^2 & 0 & 0\\ 0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.
$$

Al igual que en los casos anteriores, tomando $\alpha=-\frac{1}{4}x_0^2$ y

$$
D=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{4}x_0^2&0\\0&0&0&\frac{1}{2}x_0^2\end{pmatrix}
$$

se ve fácilmente que $D\in\mathrm{End}(\mathfrak{d}_{4,2},J)$ y $P_{\nu_\infty}=\alpha\mathrm{Id}+\frac{1}{2}(D+D^t)$. Al ser $\alpha<0$ tenemos un soliton pluriclosed algebraico de expansión.

5.4 $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$

Ésta álgebra tiene ecuaciones de estructura

$$\begin{array}{rclrcl} \mu(e_1,e_2) & = & -2xye_2, & \mu(e_1,e_3) & = & 0, \\ \mu(e_1,e_4) & = & 0, & \mu(e_2,e_3) & = & 0, \\ \mu(e_2,e_4) & = & 0, & \mu(e_3,e_4) & = & 2xze_4, \end{array}$$

con $x, y > 0$, $z < 0$ y $\frac{y}{z} \in (-1,0)$. En este caso la forma fundamental ω es de la forma $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 + s(e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4)$, $s = g(e_2,e_3) \in (-1,1)$ (ver Tabla 1).

Proposición 5.13 *La forma de Bismut-Ricci ρ^B de una estructura SKT en $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, en una base ortonormal $\{q^1,\ldots,q^4\}$ es de la forma*

$$\rho^B = -\tfrac{4x^2y^2}{1-s^2}q^{12} + \tfrac{4sx^2y^2}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}q^{13} + \tfrac{4sx^2y^2}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}q^{24} - \tfrac{4x^2}{(1-s^2)^2}(s^2y^2+z^2)q^{34}$$

y $(\rho^B)^{1,1} = \rho^B$.

Demostración: Ortonormalizando las bases $\{e_1,\ldots,e_4\}$ y $\{e^1,\ldots,e^4\}$ obtenemos

$$\begin{array}{rclrcl} q_1 & = & e_1, & q^1 & = & e^1 - se^4, \\ q_2 & = & e_2, & q^2 & = & e^2 + se^3, \\ q_3 & = & \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}(e_3 - se_2), & q^3 & = & \sqrt{1-s^2}e^3, \\ q_4 & = & \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}(e_4 + se_1). & q^4 & = & \sqrt{1-s^2}e^4, \end{array}$$

las ecuaciones de estructura en la base $\{q^1,\ldots,q^4\}$ son

$$\begin{array}{rcl} dq^1 & = & \frac{2sxz}{1-s^2}q^{34}, \\ dq^2 & = & 2xy(q^{12} - \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}q^{13} - \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}q^{24} + \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}}q^{34}), \\ dq^3 & = & 0, \\ dq^4 & = & -\frac{2xz}{\sqrt{1-s^2}}q^{34}, \end{array}$$

y $Jq_1 = q_2$, $Jq_3 = q_4$. Tenemos que $\mathrm{ad}q_j$ en la base $\{q_1,\ldots,q_4\}$ vienen dados por

$$\mathrm{ad}q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2xy & \frac{2sxy}{\sqrt{1-s^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2xy & 0 & 0 & \frac{2sxy}{\sqrt{1-s^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{ad}q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2sxz}{1-s^2} \\ -\frac{2sxy}{\sqrt{1-s^2}} & 0 & 0 & -\frac{2s^2xy}{\sqrt{1-s^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2xz}{\sqrt{1-s^2}} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}q_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2sxz}{1-s^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2sxy}{\sqrt{1-s^2}} & \frac{2s^2xy}{\sqrt{1-s^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2xz}{\sqrt{1-s^2}} & 0 \end{pmatrix},$$

y $\mathrm{ad}q_j \circ J$ vienen dados por

$$\mathrm{ad}q_1 \circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2xy & 0 & 0 & -\frac{2sxy}{\sqrt{1-s^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}q_2 \circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2xy & \frac{2sxy}{\sqrt{1-s^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{ad}q_3 \circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2sxz}{1-s^2} & 0 \\ 0 & \frac{2sxy}{\sqrt{1-s^2}} & -\frac{2s^2xy}{\sqrt{1-s^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2xz}{\sqrt{1-s^2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}q_4 \circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2sxz}{\sqrt{1-s^2}} \\ \frac{2sxy}{\sqrt{1-s^2}} & 0 & 0 & -\frac{2s^2xy}{\sqrt{1-s^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2xz}{\sqrt{1-s^2}} \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\mathrm{ad}q_1 \circ J + \mathrm{ad}Jq_1) &= 0, \\ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}q_2 \circ J + \mathrm{ad}Jq_2) &= 0, \\ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}q_3 \circ J + \mathrm{ad}Jq_3) &= 0, \\ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}q_4 \circ J + \mathrm{ad}Jq_4) &= 0. \end{aligned}$$

Como $\{q^j\}$ es ortonormal, la forma fundamental en esta base es $\omega = q^1 \wedge q^2 + q^3 \wedge q^4$, por lo que

$$\begin{aligned} \langle \omega, dq^1 \rangle &= \tfrac{2sxz}{1-s^2}, & \langle \omega, dq^2 \rangle &= 2xy(1+\tfrac{s^2}{1-s^2}), \\ \langle \omega, dq^3 \rangle &= 0, & \langle \omega, dq^4 \rangle &= -\tfrac{2xz}{\sqrt{1-s^2}}, \end{aligned}$$

entonces $\theta = -\frac{2sxz}{1-s^2}q^1 - 2xy(1+\frac{s^2}{1-s^2})q^2 + \frac{2xz}{\sqrt{1-s^2}}q^4$, y

$$\rho^B = -\tfrac{4x^2y^2}{1-s^2}q^{12} + \tfrac{4sx^2y^2}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}q^{13} + \tfrac{4sx^2y^2}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}q^{24} - \tfrac{4x^2}{(1-s^2)^2}(s^2y^2+z^2)q^{34}$$

por lo que $(\rho^B)^{1,1} = \rho^B$.

□

Se sigue de Proposición 5.13 el siguiente corolario.

Corolario 5.14 $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ *admite métricas SKT estáticas y éstas son en las que* $s = 0$ *e* $y = -z$*.*

Ahora conociendo $(\rho^B)^{1,1}$ podemos encontrar P_μ dado implícitamente por $\omega(P_\mu\cdot,\cdot) = \frac{1}{2}(\rho^B)^{1,1}(\cdot,\cdot)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \omega(P_\mu q_1, q_2) &= p_{11} &&= -\tfrac{2x^2y^2}{1-s^2}, \\ \omega(P_\mu q_1, q_3) &= -p_{41} &&= \tfrac{2sx^2y^2}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \omega(P_\mu q_1, q_4) &= p_{31} &&= 0, \\ \omega(P_\mu q_3, q_4) &= p_{33} &&= -\tfrac{2x^2}{(1-s^2)^2}(s^2y^2+z^2), \end{aligned}$$

por lo que la matriz de P_μ es

$$P_\mu = \begin{pmatrix} -\frac{2x^2y^2}{1-s^2} & 0 & 0 & -\frac{2sx^2y^2}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 & -\frac{2x^2y^2}{1-s^2} & \frac{2sx^2y^2}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{2sx^2y^2}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{2x^2}{(1-s^2)^2}(s^2y^2+z^2) & 0 \\ -\frac{2sx^2y^2}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 & 0 & -\frac{2x^2}{(1-s^2)^2}(s^2y^2+z^2) \end{pmatrix}.$$

Tomamos $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R}), J)$ de la siguiente forma

$$U_{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2sx^2y^2}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 0 & 0 & -\frac{2sx^2y^2}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{2sx^2y^2}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 & 0 \\ -\frac{2sx^2y^2}{(1-s^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 5.15 *El flujo de corchetes calibrado por la calibración $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R}), J)$ que empieza en un corchete de $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ está definido para todo $t \in [0, \infty)$ y $\bar{\mu}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, es decir, el flujo converge a un álgebra abeliana.*

Demostración: El corchete en la base $\{q_j\}$ está dado por

$$\begin{array}{rclrcl} \mu(q_1,q_2) & = & -2xyq_2, & \mu(q_1,q_3) & = & \frac{2sxy}{\sqrt{1-s^2}}q_2, \\ \mu(q_1,q_4) & = & 0, & \mu(q_2,q_3) & = & 0, \\ \mu(q_2,q_4) & = & \frac{2sxy}{\sqrt{1-s^2}}q_2, & \mu(q_3,q_4) & = & -\frac{2sxz}{1-s^2}q_1 - \frac{2s^2xy}{1-s^2}q_2 + \frac{2xz}{\sqrt{1-s^2}}q_4. \end{array}$$

De $\bar{\mu}' = \delta_{\bar{\mu}}(P_{\bar{\mu}} - U_{\bar{\mu}})$ obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \bar{\mu}'(q_1,q_2) & = & p_{11}\bar{\mu}(q_1,q_2), \\ \bar{\mu}'(q_1,q_3) & = & p_{23}\bar{\mu}(q_1,q_2) + p_{33}\bar{\mu}(q_1,q_3), \\ \bar{\mu}'(q_1,q_4) & = & 0, \\ \bar{\mu}'(q_2,q_3) & = & 0, \\ \bar{\mu}'(q_2,q_4) & = & p_{23}\bar{\mu}(q_1,q_2) + p_{33}\bar{\mu}(q_2,q_4), \\ \bar{\mu}'(q_3,q_4) & = & 2p_{33}\bar{\mu}(q_3,q_4) + 2p_{23}\bar{\mu}(q_1,q_3) + (p_{23}\bar{\mu}_{34}^4 - p_{11}\bar{\mu}_{34}^1)q_1 \\ & & -p_{11}\bar{\mu}_{34}^2 q_2 - p_{33}\bar{\mu}_{34}^4 q_4, \end{array}$$

con $\bar{\mu}_{ij}^k = g(\bar{\mu}(q_i,q_j), e_k)$. Haciendo el cambio de variables $u = xy$, $v = xz$, tenemos las ecuaciones para los parámetros

$$\begin{cases} \dot{u} = -\frac{2u^3}{1-s^2}, & u(0) = u_0, \\ \dot{v} = -\frac{2v^3}{1-s^2}, & v(0) = v_0, \\ \dot{s} = -\frac{2s}{1-s^2}(u^2+v^2), & s(0) = s_0. \end{cases} \tag{13}$$

Tenemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(s^2+u^2+v^2) = -\frac{2s^2}{1-s^2}(u^2+v^2) - \frac{2u^4}{1-s^2} - \frac{2v^4}{1-s^2} \leq 0$$

por lo que $(u, v, s)(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

□

Proposición 5.16 *El flujo de corchetes calibrado por* $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R}), J)$ *normalizado por la norma que empieza en un corchete de* $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ *converge a un pluriclosed soliton algebraico de expansion.*

Demostración: Consideremos el flujo de corchetes calibrado y normalizado ν_u que mantiene constante a u. Este flujo salvo reparametrización del tiempo, coincide con (13) sumando un multiplo de la identidad, luego se sigue que ν_u resuelve $\nu_u' = \delta(P_{\nu_u} - U_{\nu_u} + r_{\nu_u}\mathrm{Id})$ dado por

$$\begin{array}{rcl}
\nu_u'(q_1, q_2) &=& p_{11}\nu_u(q_1, q_2) + r_{\nu_u}\nu_u(q_1, q_2), \\
\nu_u'(q_1, q_3) &=& p_{23}\nu_u(q_1, q_2) + p_{33}\nu_u(q_1, q_3) + r_{\nu_u}\nu_u(q_1, q_2), \\
\nu_u'(q_1, q_4) &=& 0, \\
\nu_u'(q_2, q_3) &=& 0, \\
\nu_u'(q_2, q_4) &=& p_{23}\nu_u(q_1, q_2) + p_{33}\nu_u(q_2, q_4) + r_{\nu_u}\nu_u(q_2, q_4), \\
\nu_u'(q_3, q_4) &=& 2p_{33}\nu_u(q_3, q_4) + 2p_{23}\nu_u(q_1, q_3) + (p_{23}\nu_{u34}^4 - p_{11}\nu_{u-34}^1)q_1 \\
& & -p_{11}\nu_{u34}^2 q_2 - p_{33}\nu_{u34}^4 q_4 + r_{\nu_u}\nu_u(q_3, q_4),
\end{array}$$

por lo que la ecuación para los parámetros es

$$\begin{cases}
\dot{u} = -\frac{2u^3}{1-s^2} + ur_{\nu_u}, & u(0) = u_0 \\
\dot{v} = -\frac{2v^3}{1-s^2} + (1-s^2)vr_{\nu_u}, & v(0) = v_0 \\
\dot{s} = -\frac{2s}{1-s^2}(u^2 + v^2) + s(1-s^2)r_{\nu_u}, & s(0) = s_0
\end{cases}$$

Tomando $r_{\nu_u} = \frac{2u^2}{1-s^2}$ tenemos $\dot{u} = 0$ y $u(t) = u_0$. Por otra parte

$$\dot{s} = -\frac{2s}{1-s^2}(s^2u^2 + v^2)$$

por lo que $s(t) \to 0$. Por último

$$\dot{v} = \frac{2v}{1-s^2}((1-s^2)u_0^2 - v^2)$$

Como $v_0^2 > u_0^2$ y $s(t) \to 0$, tenemos $v(t) \to -u_0$, y $(u, v, s)(t) \to (u_0, -u_0, 0)$ cuando $t \to \infty$.

Concluimos que el flujo normalizado ν_u converge a $\nu_\infty \neq 0$ dado por

$$\begin{array}{rclrcl}
\nu_\infty(q_1, q_2) &=& -2u_0q_2, & \nu_\infty(q_1, q_3) &=& 0, \\
\nu_\infty(q_1, q_4) &=& 0, & \nu_\infty(q_2, q_3) &=& 0, \\
\nu_\infty(q_2, q_4) &=& 0, & \nu_\infty(q_3, q_4) &=& -2u_0q_4.
\end{array}$$

Si $\nu(t) = \bar{\mu}(t)/||\bar{\mu}(t)||$, el hecho de que $\nu_u \to \nu_\infty \neq 0$ cuando $t \to \infty$ implica que $\nu(t) = \nu_u(t)/||\nu_u(t)|| \to \nu_\infty/||\nu_\infty||$, el cual difiere de ν_∞ por un multiplo.

□

Observación. La métrica ω a la que converge el flujo es Kähler (ver Tabla 1) y ν_∞ es un pluriclosed soliton algebraico de expansión. Tenemos que P_{ν_∞} viene dada por

$$P_{\nu_\infty} = \begin{pmatrix} -2u_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2u_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2u_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2u_0^2 \end{pmatrix}$$

por lo que $P_{\nu_\infty} = \alpha\mathrm{Id}$ con $\alpha = -2u_0^2 < 0$, entonces tenemos un soliton pluriclosed algebraico de expansión.

5.5 $\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$

Las ecuaciones de estructura de esta álgebra son

$$\begin{array}{rclrcl} \mu(e_1,e_2) & = & x(1+y^2)e_2 - \frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2)e_4, & \mu(e_1,e_3) & = & \frac{1}{2}xe_3, \\ \mu(e_1,e_4) & = & xyze_2 + x(\frac{1}{2}-y^2)e_4, & \mu(e_2,e_3) & = & -xyze_2 + xy^2e_4, \\ \mu(e_2,e_4) & = & 0, & \mu(e_3,e_4) & = & xz^2e_2 - xyze_4. \end{array}$$

con $x \neq 0$, $y^2+z^2=1$ y $z>0$ (ver Tabla 1).

Proposición 5.17 *La forma de Bismut-Ricci ρ^B de una estructura SKT en $\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$ en la base $\{e^1,\dots,e^4\}$ es de la forma*

$$\begin{array}{rcl} \rho^B & = & -\frac{x^2}{z^2}(\frac{1}{4}y^2+\frac{3}{2}z^2+y^2z^2+(y^2+z^2)^2+2y^4z^2+y^2z^4+y^6)e^1\wedge e^2 \\ & & +\frac{x^2y}{z}(\frac{1}{4}-z^2-(y^2+z^2)^2)e^1\wedge e^4 \\ & & +\frac{x^2y}{z}(\frac{1}{2}(y^2+z^2)+z^2+(y^2+z^2)^2)e^2\wedge e^3 \\ & & -x^2(\frac{1}{2}(y^2+z^2)+z^2+(y^2+z^2)^2)e^3\wedge e^4, \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} (\rho^B)^{1,1} & = & -\frac{x^2}{z^2}(\frac{1}{4}y^2+\frac{3}{2}z^2+y^2z^2+(y^2+z^2)^2+2y^4z^2+y^2z^4+y^6)e^1\wedge e^2 \\ & & +\frac{1}{8}\frac{x^2y}{z}(1-8z^2-2(y^2+z^2)-8(y^2+z^2)^2)e^1\wedge e^4 \\ & & +\frac{1}{8}\frac{x^2y}{z}(8z^2+2(y^2+z^2)+8(y^2+z^2)^2-1)e^2\wedge e^3 \\ & & -x^2(\frac{1}{2}(y^2+z^2)+z^2+(y^2+z^2)^2)e^3\wedge e^4. \end{array}$$

Demostración: Tenemos que $\mathrm{ad}e_j$ $j=1,\dots,4$ en la base $\{e_1,\dots,e_4\}$ vienen dados por

$$\mathrm{ad}e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x(1+y^2) & 0 & xyz \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}x & 0 \\ 0 & -\frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2) & 0 & x(\frac{1}{2}-y^2) \end{pmatrix} \quad \mathrm{ad}e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x(1+y^2) & 0 & -xyz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2) & 0 & xy^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ad}e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & xyz & 0 & xz^2 \\ -\frac{1}{2}x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -xy^2 & 0 & -xyz \end{pmatrix} \quad \mathrm{ad}e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -xyz & 0 & -xz^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x(\frac{1}{2}-y^2) & 0 & xyz & 0 \end{pmatrix}$$

y $\mathrm{ad}e_j\circ J$, $j=1,\dots,4$ en la base $\{e_1,\dots,e_4\}$ vienen dados por

$$\mathrm{ad}e_1\circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x(1+y^2) & 0 & xyz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x \\ -\frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2) & 0 & x(\frac{1}{2}-y^2) & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{ad}e_2\circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x(1+y^2) & 0 & xyz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2) & 0 & -xy^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ad}e_3\circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ xyz & 0 & xz^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}x & 0 & 0 \\ -xy^2 & 0 & -xyz & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{ad}e_4\circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & xyz & 0 & xz^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x(\frac{1}{2}-y^2) & 0 & -xyz \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_1\circ J+\mathrm{ad}Je_1) & = & 0, \\ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_2\circ J+\mathrm{ad}Je_2) & = & -x, \\ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_3\circ J+\mathrm{ad}Je_3) & = & 0, \\ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_4\circ J+\mathrm{ad}Je_4) & = & 0. \end{array}$$

Ahora calculemos $\langle \omega, de_j^\sharp \rangle$. Como $e_j^\sharp = e^j$ tenemos

$$\begin{array}{rclcrcl} \langle \omega, de^1 \rangle & = & 0, & \langle \omega, de^2 \rangle & = & -x(1+y^2+z^2), \\ \langle \omega, de^3 \rangle & = & 0, & \langle \omega, de^4 \rangle & = & \frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2+z^2). \end{array}$$

entonces $\theta = x(\frac{3}{2}+y^2+z^2)e^2 - \frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2+z^2)e^4$ y

$$\begin{array}{rcl} \rho^B & = & -\frac{x^2}{z^2}(\frac{1}{4}y^2+\frac{3}{2}z^2+y^2z^2+(y^2+z^2)^2+2y^4z^2+y^2z^4+y^6)e^1\wedge e^2 \\ & & +\frac{x^2y}{z}(\frac{1}{4}-z^2-(y^2+z^2)^2)e^1\wedge e^4 \\ & & +\frac{x^2y}{z}(\frac{1}{2}(y^2+z^2)+z^2+(y^2+z^2)^2)e^2\wedge e^3 \\ & & -x^2(\frac{1}{2}(y^2+z^2)+z^2+(y^2+z^2)^2)e^3\wedge e^4, \end{array}$$

por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} (\rho^B)^{1,1} & = & -\frac{x^2}{z^2}(\frac{1}{4}y^2+\frac{3}{2}z^2+y^2z^2+(y^2+z^2)^2+2y^4z^2+y^2z^4+y^6)e^1\wedge e^2 \\ & & +\frac{1}{8}\frac{x^2y}{z}(1-8z^2-2(y^2+z^2)-8(y^2+z^2)^2)e^1\wedge e^4 \\ & & +\frac{1}{8}\frac{x^2y}{z}(8z^2+2(y^2+z^2)+8(y^2+z^2)^2-1)e^2\wedge e^3 \\ & & -x^2(\frac{1}{2}(y^2+z^2)+z^2+(y^2+z^2)^2)e^3\wedge e^4. \end{array}$$

□

De Proposición 5.17 se sigue el siguiente corolario.

Corolario 5.18 $\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$ *admite estructuras SKT estáticas, y éstas son en las que* $y=0$ *y* $z=1$.

Ahora conociendo $(\rho^B)^{1,1}$ podemos encontrar P_μ dado por $\omega(P_\mu\cdot,\cdot) = \frac{1}{2}(\rho^B)^{1,1}(\cdot,\cdot)$. Tenemos que

$$\begin{array}{rclcl} \omega(P_\mu e_1, e_2) & = & p_{11} & = & -\frac{1}{2}\frac{x^2}{z^2}(\frac{1}{4}y^2+\frac{3}{2}z^2+y^2z^2+(y^2+z^2)^2+2y^4z^2+y^2z^4+y^6), \\ \omega(P_\mu e_1, e_3) & = & -p_{41} & = & 0, \\ \omega(P_\mu e_1, e_4) & = & p_{31} & = & \frac{1}{16}\frac{x^2y}{z}(1-8z^2-2(y^2+z^2)-8(y^2+z^2)^2), \\ \omega(P_\mu e_3, e_4) & = & p_{33} & = & -\frac{1}{2}x^2(\frac{1}{2}(y^2+z^2)+z^2+(y^2+z^2)^2), \end{array}$$

por lo que la matriz de P_μ queda

$$P_\mu = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & p_{13} & 0 \\ 0 & p_{11} & 0 & p_{13} \\ p_{13} & 0 & p_{33} & 0 \\ 0 & p_{13} & 0 & p_{33} \end{pmatrix}$$

Tomamos la calibración $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}, J)$ de la siguiente forma

$$U_{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{13} \\ -p_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$P_{\bar{\mu}} - U_{\bar{\mu}} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & 0 & 0 \\ 2p_{13} & 0 & p_{33} & 0 \\ 0 & 2p_{13} & 0 & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Proposición 5.19 *El flujo de corchetes calibrado por la calibración $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}, J)$ que empieza en un corchete de $\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$ está definido para todo $t \in [0, \infty)$ y $\bar{\mu}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, es decir, el flujo converge a un álgebra abeliana.*

Demostración: De $\bar{\mu}' = \delta_{\bar{\mu}}(P_{\bar{\mu}} - U_{\bar{\mu}})$ obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \bar{\mu}'(e_1, e_2) & = & 2p_{11}\bar{\mu}(e_1, e_2) + 2p_{13}(\bar{\mu}(e_1, e_4) - \bar{\mu}(e_2, e_3)) \\ & & -x(1 + y^2)(p_{11}e_2 + 2p_{13}e_4) + p_{33}\frac{xy}{z}(\frac{1}{2} + y^2)e_4, \\ \bar{\mu}'(e_1, e_3) & = & p_{11}\bar{\mu}(e_1, e_3), \\ \bar{\mu}'(e_1, e_4) & = & (p_{11} + p_{33})\bar{\mu}(e_1, e_4) + 2p_{13}\bar{\mu}(e_3, e_4) \\ & & -xyz(p_{11}e_2 + 2p_{13}e_4) - p_{33}x(\frac{1}{2} - y^2)e_4, \\ \bar{\mu}'(e_2, e_3) & = & (p_{11} + p_{33})\bar{\mu}(e_1, e_4) - 2p_{13}\bar{\mu}(e_3, e_4) \\ & & +xyz(p_{11}e_2 + 2p_{13}e_4) - p_{33}xy^2e_4, \\ \bar{\mu}'(e_2, e_4) & = & 0, \\ \bar{\mu}'(e_3, e_4) & = & 2p_{33}\bar{\mu}(e_3, e_4) - xz^2(p_{11}e_2 + 2p_{13}e_4) + p_{33}xyze_4, \end{array}$$

y reescribiendo este sistema obtenemos las ecuaciones para los parámetros

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} \dot{x} & = & p_{11}x, & x(0) & = & x_0, \\ \dot{y} & = & 2p_{13}z, & y(0) & = & y_0, \\ \dot{z} & = & (p_{33} - p_{11})z, & z(0) & = & z_0. \end{array} \right.$$

Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} p_{11}(0) & = & -\frac{1}{8}\frac{x_0^2}{1-y_0^2}(10 + 3y_0^2 - 4y_0^4) \\ p_{33}(0) & = & -\frac{1}{8}\frac{x_0^2}{1-y_0^2}(10 - 14y_0^2 + 4y_0^4) \\ (p_{33} - p_{11})(0)z_0^2 & = & -\frac{1}{8}x_0^2y_0^2(8y_0^2 - 17) \\ 2p_{13}y_0z_0 & = & \frac{1}{8}x_0^2y_0^2(8y_0^2 - 17) \end{array}$$

como $\frac{1}{2}(y^2 + z^2)' = 2p_{13}yz + (p_{33} - p_{11})z^2$, tenemos que $\frac{1}{2}(y^2 + z^2)'(0) = 0$ y podemos concluir que la condición $y^2 + z^2 = 1$ se mantiene para todo t, y basta analizar solamente las ecuaciones para x e y.

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} \dot{x} & = & -\frac{1}{8}\frac{x^3}{1-y^2}(10 + 3y^2 - 4y^4), & x(0) & = & x_0, \\ \dot{y} & = & \frac{1}{8}x^2y(8y^2 - 17), & y(0) & = & y_0. \end{array} \right. \tag{14}$$

Tenemos que para $x > 0$ $y \in [0, 1)$, $\dot{x}, \dot{y} < 0$, por lo que $(x, y)(t) \to 0$. Los demás casos son análogos.

$\square$

Proposición 5.20 *El flujo de corchetes calibrado por $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}, J)$ normalizado por la norma que empieza en un corchete de $\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$ converge a un pluriclosed soliton algebraico de expansión.*

Demostración: Consideremos el flujo de corchetes calibrado y normalizado ν_x que mantiene a x constante. Este flujo, salvo reparametrización del tiempo coincide con (14) sumando un múltiplo de la identidad, luego se sigue que ν_x es solución de $\nu_x' = \delta(P_{\nu_x} - U_{\nu_x} + r_{\nu_x}\mathrm{Id})$. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl}
\nu_x'(e_1,e_2) & = & 2p_{11}\nu_x(e_1,e_2) + 2p_{13}(\nu_x(e_1,e_4) - \nu_x(e_2,e_3)) + r_{\nu_x}\nu_x(e_1,e_2) \\
 & & -x(1+y^2)(p_{11}e_2 + 2p_{13}e_4) + p_{33}\frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2)e_4, \\
\nu_x'(e_1,e_3) & = & p_{11}\nu_x(e_1,e_3) + r_{\nu_x}\nu_x(e_1,e_3), \\
\nu_x'(e_1,e_4) & = & (p_{11}+p_{33})\nu_x(e_1,e_4) + 2p_{13}\nu_x(e_3,e_4) + r_{\nu_x}\nu_x(e_1,e_4) \\
 & & -xyz(p_{11}e_2 + 2p_{13}e_4) - p_{33}x(\frac{1}{2} - y^2)e_4, \\
\nu_x'(e_2,e_3) & = & (p_{11}+p_{33})\nu_x(e_1,e_4) - 2p_{13}\nu_x(e_3,e_4) + r_{\nu_x}\nu_x(e_2,e_3) \\
 & & +xyz(p_{11}e_2 + 2p_{13}e_4) - p_{33}xy^2e_4, \\
\nu_x'(e_2,e_4) & = & 0, \\
\nu_x'(e_3,e_4) & = & 2p_{33}\nu_x(e_3,e_4) + r_{\nu_x}\nu_x(e_3,e_4) - xz^2(p_{11}e_2 + 2p_{13}e_4) + p_{33}xyze_4,
\end{array}$$

por lo que la ecuación para los parámetros es

$$\left\{\begin{array}{rclrcl}
\dot{x} & = & -\frac{1}{8}\frac{x^3}{1-y^2}(10+3y^2-4y^4) + xr_{\nu_x}, & x(0) & = & x_0, \\
\dot{y} & = & \frac{1}{8}x^2y(8y^2-17), & y(0) & = & y_0.
\end{array}\right.$$

Tomando $r_{\nu_x} = \frac{1}{8}\frac{x^2}{1-y^2}(10+3y^2-4y^4)$ tenemos $\dot{x}=0$ y $x(t)=x_0$. Como la normalización no afecta a la ecuación para y, como antes obtenemos $y(t)\to 0$ cuando $t\to\infty$ y $(x,y)(t)\to(x_0,0)$.

De este resultado obtenemos que $z(t)\to 1$, por lo que $\nu_x \to \nu_\infty \neq 0$ cuando $t\to\infty$, dado por

$$\begin{array}{rclrcl}
\nu_\infty(e_1,e_2) & = & x_0e_2, & \nu_\infty(e_1,e_3) & = & \frac{1}{2}x_0e_3, \\
\nu_\infty(e_1,e_4) & = & \frac{1}{2}x_0e_4, & \nu_\infty(e_2,e_3) & = & 0, \\
\nu_\infty(e_2,e_4) & = & 0, & \nu_\infty(e_3,e_4) & = & x_0e_2.
\end{array}$$

Si $\nu(t) = \bar{\mu}(t)/||\bar{\mu}(t)||$, del hecho de que $\nu_x\to\nu_\infty\neq 0$ cuando $t\to\infty$ obtenemos que $\nu(t) = \nu_x(t)/||\nu_x(t)|| \to \nu_\infty/||\nu_\infty||$, el cual difiere de ν_∞ sólo por un múltiplo.

$\square$

Observación. La métrica ω a la que converge el flujo resulta ser Kähler (ver Tabla 1) y ν_∞ es un pluriclosed soliton algebraico de expansión. Tenemos que P_{ν_∞} es de la forma

$$P_{\nu_\infty} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}x_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4}x_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4}x_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4}x_0^2 \end{pmatrix}$$

y $P_{\nu_\infty} = \alpha\mathrm{Id}$ con $\alpha = -\frac{5}{4}x_0^2 <$, por lo que es un soliton pluriclosed algebraico de expansión.

5.6 $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$

Ésta álgebra tiene ecuaciones de estructura

$$
\begin{array}{rclrcl}
\mu(e_1,e_2) &=& x(1+y^2)e_2-\frac{wy}{z}e_3-\frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2)e_4, & \mu(e_1,e_3) &=& \frac{1}{2}xe_3+we_4,\\
\mu(e_1,e_4) &=& xyze_2-we_3+x(\frac{1}{2}-y^2)e_4, & \mu(e_2,e_3) &=& -xyze_2+xy^2e_4,\\
\mu(e_2,e_4) &=& 0, & \mu(e_3,e_4) &=& xz^2e_2-xyze_4.
\end{array}
$$

con $w,x\neq 0$, $\lambda=|x/2w|$, $y^2+z^2=1$ y $z>0$ (ver Tabla 1).

Proposición 5.21 *La forma de Bismut-Ricci ρ^B de una estructura SKT en $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ en la base $\{e^1,\ldots,e^4\}$ está dada por*

$$
\begin{array}{rcl}
\rho^B &=& -\frac{1}{4}\frac{1}{z^2}(4w^2y^2+4x^2y^6+8x^2y^4z^2+4x^2y^4+4x^2y^2z^4\\
&& +12x^2y^2z^2+x^2y^2+4x^2z^4+6x^2z^2)e^1\wedge e^2\\
&& +\frac{wxy}{z}(y^2+z^2+1)e^1\wedge e^3\\
&& -\frac{1}{4}\frac{y}{z}(4w^2+4x^2y^4+8x^2y^2z^2+4x^2z^4+4x^2z^2-x^2)e^1\wedge e^4\\
&& +\frac{1}{2}\frac{x^2y}{z}(2y^4+4y^2z^2+y^2+2z^4+3z^2)e^2\wedge e^3\\
&& -\frac{1}{2}x^2(2y^4+4y^2z^2+y^2+2z^4+3z^2)e^3\wedge e^4,
\end{array}
$$

y

$$
\begin{array}{rcl}
(\rho^B)^{1,1} &=& -\frac{1}{4}\frac{1}{z^2}(4w^2y^2+4x^2y^6+8x^2y^4z^2+4x^2y^4+4x^2y^2z^4\\
&& +12x^2y^2z^2+x^2y^2+4x^2z^4+6x^2z^2)e^1\wedge e^2\\
&& +\frac{1}{2}\frac{wxy}{z}(y^2+z^2+1)e^1\wedge e^3\\
&& -\frac{1}{8}\frac{y}{z}(4w^2+8x^2y^4+16x^2y^2z^2+2x^2y^2+8x^2z^4+10x^2z^2-x^2)e^1\wedge e^4\\
&& +\frac{1}{8}\frac{y}{z}(4w^2+8x^2y^4+16x^2y^2z^2+2x^2y^2+8x^2z^4+10x^2z^2-x^2)e^2\wedge e^3\\
&& +\frac{1}{2}\frac{wxy}{z}(y^2+z^2+1)e^2\wedge e^4\\
&& -\frac{1}{2}x^2(2y^4+4y^2z^2+y^2+2z^4+3z^2)e^3\wedge e^4.
\end{array}
$$

Demostración: Tenemos que $\mathrm{ad}e_j$ y $\mathrm{ad}e_j\circ J$, $j=1,\ldots,4$ en la base $\{e_1,\ldots,e_4\}$ vienen dados por

$$
\mathrm{ad}e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x(1+y^2) & 0 & xyz\\ 0 & -\frac{wy}{z} & \frac{1}{2}x & -w\\ 0 & -\frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2) & w & x(\frac{1}{2}-y^2) \end{pmatrix} \qquad
\mathrm{ad}e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ -x(1+y^2) & 0 & -xyz & 0\\ \frac{wy}{z} & 0 & 0 & 0\\ \frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2) & 0 & xy^2 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathrm{ad}e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & xyz & 0 & xz^2\\ -\frac{1}{2}x & 0 & 0 & 0\\ -w & -xy^2 & 0 & -xyz \end{pmatrix} \qquad
\mathrm{ad}e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ -xyz & 0 & -xz^2 & 0\\ w & 0 & 0 & 0\\ -x(\frac{1}{2}-y^2) & 0 & xyz & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathrm{ad}e_1\circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ x(1+y^2) & 0 & xyz & 0\\ -\frac{wy}{z} & 0 & -w & -\frac{1}{2}x\\ -\frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2) & 0 & x(\frac{1}{2}-y^2) & -w \end{pmatrix} \qquad
\mathrm{ad}e_2\circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x(1+y^2) & 0 & xyz\\ 0 & -\frac{wy}{z} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{xy}{z}(\frac{1}{2}+y^2) & 0 & -xy^2 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathrm{ad}e_3\circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ xyz & 0 & xz^2 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}x & 0 & 0\\ -xy^2 & w & -xyz & 0 \end{pmatrix} \qquad
\mathrm{ad}e_4\circ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & xyz & 0 & xz^2\\ 0 & -w & 0 & 0\\ 0 & x(\frac{1}{2}-y^2) & 0 & -xyz \end{pmatrix}
$$

por lo que

$$
\begin{array}{rclrcl}
\mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_1\circ J+\mathrm{ad}Je_1) &=& -2w, & \mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_2\circ J+\mathrm{ad}Je_2) &=& -x,\\
\mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_3\circ J+\mathrm{ad}Je_3) &=& 0, & \mathrm{tr}(\mathrm{ad}e_4\circ J+\mathrm{ad}Je_4) &=& 0.
\end{array}
$$

Ahora calculemos $\langle\omega, de_j^\sharp\rangle$. Como $e_j^\sharp=e^j$ tenemos

$$\begin{array}{rclrcl} \langle \omega, de^1 \rangle & = & 0, & \langle \omega, de^2 \rangle & = & -x(1+y^2+z^2), \\ \langle \omega, de^3 \rangle & = & \frac{wy}{z}, & \langle \omega, de^4 \rangle & = & \frac{1}{2}\frac{xy}{z}(1+2y^2+2z^2), \end{array}$$

entonces $\theta = we^1 + x(\frac{3}{2}+y^2+z^2)e^2 - \frac{wy}{z}e^3 - \frac{1}{2}\frac{xy}{z}(1+2y^2+2z^2)e^4$ y

$$\begin{array}{rcl} \rho^B & = & -\frac{1}{4}\frac{1}{z^2}(4w^2y^2 + 4x^2y^6 + 8x^2y^4z^2 + 4x^2y^4 + 4x^2y^2z^4 \\ & & +12x^2y^2z^2 + x^2y^2 + 4x^2z^4 + 6x^2z^2)e^1 \wedge e^2 \\ & & +\frac{wxy}{z}(y^2+z^2+1)e^1 \wedge e^3 \\ & & -\frac{1}{4}\frac{y}{z}(4w^2 + 4x^2y^4 + 8x^2y^2z^2 + 4x^2z^4 + 4x^2z^2 - x^2)e^1 \wedge e^4 \\ & & +\frac{1}{2}\frac{x^2y}{z}(2y^4 + 4y^2z^2 + y^2 + 2z^4 + 3z^2)e^2 \wedge e^3 \\ & & -\frac{1}{2}x^2(2y^4 + 4y^2z^2 + y^2 + 2z^4 + 3z^2)e^3 \wedge e^4, \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl} (\rho^B)^{1,1} & = & -\frac{1}{4}\frac{1}{z^2}(4w^2y^2 + 4x^2y^6 + 8x^2y^4z^2 + 4x^2y^4 + 4x^2y^2z^4 \\ & & +12x^2y^2z^2 + x^2y^2 + 4x^2z^4 + 6x^2z^2)e^1 \wedge e^2 \\ & & +\frac{1}{2}\frac{wxy}{z}(y^2+z^2+1)e^1 \wedge e^3 \\ & & -\frac{1}{8}\frac{y}{z}(4w^2 + 8x^2y^4 + 16x^2y^2z^2 + 2x^2y^2 + 8x^2z^4 + 10x^2z^2 - x^2)e^1 \wedge e^4 \\ & & +\frac{1}{8}\frac{y}{z}(4w^2 + 8x^2y^4 + 16x^2y^2z^2 + 2x^2y^2 + 8x^2z^4 + 10x^2z^2 - x^2)e^2 \wedge e^3 \\ & & +\frac{1}{2}\frac{wxy}{z}(y^2+z^2+1)e^2 \wedge e^4 \\ & & -\frac{1}{2}x^2(2y^4 + 4y^2z^2 + y^2 + 2z^4 + 3z^2)e^3 \wedge e^4. \end{array}$$

□

El siguiente corolario es resultado directo de Proposición 5.21.

Corolario 5.22 $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ *admite estructuras SKT estáticas, y éstas son en las que* $y = 0$ *y* $z = 1$.

Ahora conociendo $(\rho^B)^{1,1}$ podemos encontrar P_μ dado implícitamente por $\omega(P_\mu\cdot,\cdot) = \frac{1}{2}(\rho^B)^{1,1}(\cdot,\cdot)$. Tenemos

$$\begin{array}{rcl} \omega(P_\mu e_1, e_2) & = & p_{11} \\ & = & -\frac{1}{8}\frac{1}{z^2}(4w^2y^2 + 4x^2y^6 + 8x^2y^4z^2 + 4x^2y^4 + 4x^2y^2z^4 \\ & & +12x^2y^2z^2 + x^2y^2 + 4x^2z^4 + 6x^2z^2) \\ \omega(P_\mu e_1, e_3) & = & -p_{41} \\ & = & -\frac{1}{4}\frac{wxy}{z}(y^2+z^2+1) \\ \omega(P_\mu e_1, e_4) & = & p_{31} \\ & = & -\frac{1}{16}\frac{y}{z}(4w^2 + 8x^2y^4 + 16x^2y^2z^2 + 2x^2y^2 + 8x^2z^4 + 10x^2z^2 - x^2) \\ \omega(P_\mu e_3, e_4) & = & p_{33} \\ & = & -\frac{1}{4}x^2(2y^4 + 4y^2z^2 + y^2 + 2z^4 + 3z^2), \end{array}$$

por lo que la matriz de P_μ queda

$$P_\mu = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & p_{13} & p_{14} \\ 0 & p_{11} & -p_{14} & p_{13} \\ p_{13} & -p_{14} & p_{33} & 0 \\ p_{14} & p_{13} & 0 & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Tomamos una calibración $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{d}'_{4,\lambda}, J)$ de la siguiente forma

$$U_{\bar\mu}=\begin{pmatrix}0&0&p_{13}&p_{14}\\0&0&-p_{14}&p_{13}\\-p_{13}&p_{14}&0&2\frac{z}{y}p_{14}\\-p_{14}&-p_{13}&-2\frac{z}{y}p_{14}&0\end{pmatrix},$$

por lo que

$$P_{\bar\mu}-U_{\bar\mu}=\begin{pmatrix}p_{11}&0&0&0\\0&p_{11}&0&0\\2p_{13}&-2p_{14}&p_{33}&-2\frac{z}{y}p_{14}\\2p_{14}&2p_{13}&2\frac{z}{y}p_{14}&p_{33}\end{pmatrix}.$$

Proposición 5.23 *El flujo de corchetes calibrado por la calibración $U_{\bar\mu}\in\mathfrak{u}(\mathfrak{d}'_{4,\lambda},J)$ que empieza en un corchete de $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ está definido para todo $t\in[0,\infty)$ y $\bar\mu(t)\to 0$ cuando $t\to\infty$, es decir, el flujo converge a un álgebra abeliana.*

Demostración: De $\bar\mu'=\delta_{\bar\mu}(P_{\bar\mu}-U_{\bar\mu})$ obtenemos

$$\begin{array}{rcl}
\bar\mu'(e_1,e_2)&=&2p_{11}\bar\mu(e_1,e_2)-2p_{14}\bar\mu(e_1,e_3)+2p_{13}\bar\mu(e_1,e_4)-2p_{13}\bar\mu(e_2,e_3)\\
&&-\bar\mu_{12}^2(p_{11}e_2-2p_{14}e_3+2p_{13}e_4)-\bar\mu_{12}^3(p_{33}e_3+2\frac{z}{y}p_{14}e_4)\\
&&-\bar\mu_{12}^4(-2\frac{z}{y}p_{14}e_3+p_{33}e_4),\\
\bar\mu'(e_1,e_3)&=&(p_{11}+p_{33})\bar\mu(e_1,e_3)+2\frac{z}{y}p_{14}\bar\mu(e_1,e_4)-2p_{14}\bar\mu(e_3,e_4)\\
&&-\bar\mu_{13}^3(p_{33}e_3+2\frac{z}{y}p_{14}e_4)-\bar\mu_{13}^4(-2\frac{z}{y}p_{14}e_3+p_{33}e_4),\\
\bar\mu'(e_1,e_4)&=&-2\frac{z}{y}p_{14}\bar\mu(e_1,e_3)+(p_{11}+p_{33})\bar\mu(e_1,e_4)+2p_{13}\bar\mu(e_3,e_4)\\
&&-\bar\mu_{14}^2(p_{11}e_2-2p_{14}e_3+2p_{13}e_4)-\bar\mu_{14}^3(p_{33}e_3+2\frac{z}{y}p_{14}e_4)\\
&&-\bar\mu_{14}^4(-2\frac{z}{y}p_{14}e_3+p_{33}e_4),\\
\bar\mu'(e_2,e_3)&=&(p_{11}+p_{33})\bar\mu(e_2,e_3)-2p_{13}\bar\mu(e_3,e_4)\\
&&-\bar\mu_{23}^2(p_{11}e_2-2p_{14}e_3+2p_{13}e_4)\\
&&-\bar\mu_{23}^4(-2\frac{z}{y}p_{14}e_3+p_{33}e_4),\\
\bar\mu'(e_2,e_4)&=&0,\\
\bar\mu'(e_3,e_4)&=&2p_{33}\bar\mu(e_3,e_4)-\bar\mu_{34}^2(p_{11}e_2-2p_{14}e_3+2p_{13}e_4)\\
&&-\bar\mu_{34}^4(-2\frac{z}{y}p_{14}e_3+p_{33}e_4),
\end{array}$$

y reescribiendo esto obtenemos las ecuaciones para los parámetros

$$\left\{\begin{array}{rclrcl}
w'&=&wp_{11}, & w(0)&=&w_0,\\
x'&=&xp_{11}, & x(0)&=&x_0,\\
y'&=&2zp_{13}, & y(0)&=&y_0,\\
z'&=&z(p_{33}-p_{11}), & z(0)&=&z_0.
\end{array}\right.$$

Veamos que la condición $y^2+z^2=1$ se preserva a lo largo del flujo. Tenemos que

$$\begin{array}{rcl}
(y^2+z^2)'&=&4yzp_{13}+2z^2(p_{33}-p_{11})\\
&=&-\frac{1}{4}x^2(4(y^2+z^2)^3-2(y^4-z^4)-2(y^2+z^2)-4z^2)
\end{array}$$

con $(y^2+z^2)(0)=y_0^2+z_0^2=1$, pero $4y_0z_0p_{13}(0)+2z_0^2(p_{33}(0)-p_{11}(0))=0$, por lo que $y^2+z^2=1$ para todo t. Ahora veamos que $\lambda=|x/2w|$ se preserva a lo largo del flujo.

Si $wx>0$ tenemos que $\lambda=x/2w$ y

$$\lambda'=\frac{1}{2}\frac{1}{w^2}(wx'-w'x)=\frac{1}{2}\frac{1}{w^2}(wxp_{11}-wxp_{11})=0.$$

Análogamente, si $wx < 0$, $\lambda = -x/2w$ y $\lambda' = 0$, por lo que $\lambda = |x/2w|$ para todo t. De esto tenemos que

$$\begin{array}{rcl} p_{11} & = & -\frac{1}{8}\frac{x^2}{1-y^2}(10 + (\lambda^{-2}+3)y^2 - 4y^4), \\ 2zp_{13} & = & -\frac{1}{8}x^2 y(\lambda^{-2} + 17 - 8y^2). \end{array}$$

Reescribiendo las ecuaciones para x e y tenemos

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} x' & = & -\frac{1}{8}\frac{x^2}{1-y^2}(10 + (\lambda^{-2}+3)y^2 - 4y^4), & x(0) & = & x_0, \\ y' & = & -\frac{1}{8}x^2 y(\lambda^{-2} + 17 - 8y^2), & y(0) & = & y_0. \end{array} \right. \tag{15}$$

Como $x' < 0$ y si $y_0 > 0$, $y' < 0$ tenemos que $(x, y)(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. En el caso en que $y_0 < 0$, $y' > 0$ y nuevamente $(x, y)(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

□

Proposición 5.24 *El flujo de corchetes calibrado por $U_{\bar{\mu}} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{d}'_{4,\lambda}, J)$ normalizado por la norma que empieza en un corchete de $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ converge a un pluriclosed soliton algebraico de expansión.*

Demostración: Consideremos el flujo de corchetes calibrado y normalizado ν_x que mantiene a x constante. Este flujo, salvo reparametrización del tiempo, coincide con (15) sumando un múltiplo de la identidad, luego se sigue que ν_x es solución de $\nu_x' = \delta(P_{\nu_x} - U_{\nu_x} + r_{\nu_x}\mathrm{Id})$ dado por

$$\begin{array}{rcl} \nu_x'(e_1,e_2) & = & 2p_{11}\nu_x(e_1,e_2) - 2p_{14}\nu_x(e_1,e_3) + 2p_{13}\nu_x(e_1,e_4) - 2p_{13}\nu_x(e_2,e_3) \\ & & -\nu^2_{x_{12}}(p_{11}e_2 - 2p_{14}e_3 + 2p_{13}e_4) - \nu^3_{x_{12}}(p_{33}e_3 + 2\frac{z}{y}p_{14}e_4) \\ & & -\nu^4_{x_{12}}(-2\frac{z}{y}p_{14}e_3 + p_{33}e_4) + r_{\nu_x}\nu_x(e_1,e_2), \\ \nu_x'(e_1,e_3) & = & (p_{11}+p_{33})\nu_x(e_1,e_3) + 2\frac{z}{y}p_{14}\nu_x(e_1,e_4) - 2p_{14}\nu_x(e_3,e_4) \\ & & -\nu^3_{x_{13}}(p_{33}e_3 + 2\frac{z}{y}p_{14}e_4) - \nu^4_{x_{13}}(-2\frac{z}{y}p_{14}e_3 + p_{33}e_4) + r_{\nu_x}\nu_x(e_1,e_3), \\ \nu_x'(e_1,e_4) & = & -2\frac{z}{y}p_{14}\nu_x(e_1,e_3) + (p_{11}+p_{33})\nu_x(e_1,e_4) + 2p_{13}\nu_x(e_3,e_4) \\ & & -\nu^2_{x_{14}}(p_{11}e_2 - 2p_{14}e_3 + 2p_{13}e_4) - \nu^3_{x_{14}}(p_{33}e_3 + 2\frac{z}{y}p_{14}e_4) \\ & & -\nu^4_{x_{14}}(-2\frac{z}{y}p_{14}e_3 + p_{33}e_4) + r_{\nu_x}\nu_x(e_1,e_4), \\ \nu_x'(e_2,e_3) & = & (p_{11}+p_{33})\nu_x(e_2,e_3) - 2p_{13}\nu_x(e_3,e_4) \\ & & -\nu^2_{x_{23}}(p_{11}e_2 - 2p_{14}e_3 + 2p_{13}e_4) \\ & & -\nu^4_{x_{23}}(-2\frac{z}{y}p_{14}e_3 + p_{33}e_4) + r_{\nu_x}\nu_x(e_2,e_3), \\ \nu_x'(e_2,e_4) & = & 0, \\ \nu_x'(e_3,e_4) & = & 2p_{33}\nu_x(e_3,e_4) - \nu^2_{x_{34}}(p_{11}e_2 - 2p_{14}e_3 + 2p_{13}e_4) \\ & & -\nu^4_{x_{34}}(-2\frac{z}{y}p_{14}e_3 + p_{33}e_4) + r_{\nu_x}\nu_x(e_3,e_4), \end{array}$$

y de esto tenemos que las ecuaciones para los parámetros son

$$\left\{ \begin{array}{rclrcl} x' & = & -\frac{1}{8}\frac{x^2}{1-y^2}(10 + (\lambda^{-2}+3)y^2 - 4y^4) + xr_{\nu_x}, & x(0) & = & x_0, \\ y' & = & -\frac{1}{8}x^2 y(\lambda^{-2} + 17 - 8y^2), & y(0) & = & y_0. \end{array} \right.$$

Tomando $r_{\nu_x} = -p_{11}$ tenemos $x' = 0$, por lo que $x(t) = x_0$. Como la ecuación para y no cambia, tenemos $y(t) \to 0$, por lo que $(x, y)(t) \to (x_0, 0)$. Podemos concluir que $(w, x, y, z)(t) \to (x_0/2\lambda, x_0, 0, 1)$ y que $\nu_x(t) \to \nu_\infty \neq 0$, dado por

$$\begin{array}{rclrcl}
\nu_\infty(e_1,e_2) &=& x_0e_2, & \nu_\infty(e_1,e_3) &=& \frac{1}{2}x_0e_3+\frac{x_0}{2\lambda}e_4,\\
\nu_\infty(e_1,e_4) &=& -\frac{x_0}{2\lambda}e_3+\frac{1}{2}x_0e_4, & \nu_\infty(e_2,e_3) &=& 0,\\
\nu_\infty(e_2,e_4) &=& 0, & \nu_\infty(e_3,e_4) &=& x_0e_2.
\end{array}$$

Si $\nu(t)=\bar{\mu}(t)/||\bar{\mu}(t)||$, el hecho de que $\nu_x\to\nu_\infty\neq 0$ cuando $t\to\infty$ implica que $\nu(t)=\nu_x(t)/||\nu_x(t)||\to\nu_\infty/||\nu_\infty||$, el cual difiere de ν_∞ solamente por un múltiplo.

□

Observación. La métrica ω a la que converge el flujo es Kähler (ver Tabla 1) y ν_∞ es un pluriclosed soliton algebraico de expansión. Tenemos que P_{ν_∞} es de la forma

$$P_{\nu_\infty}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{2}x_0^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{5}{2}x_0^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{5}{2}x_0^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2}x_0^2\end{pmatrix}.$$

Al tener que $P_{\nu_\infty}=\alpha\mathrm{Id}$, con $\alpha=-\frac{5}{2}x_0^2<0$, ν_∞ es un soliton pluriclosed algebraico de expansión.

Los resultados de este trabajo, es decir, del estudio del comportamiento asintótico del flujo pluriclosed en los grupos de Lie simplemente conexos solubles no unimodulares de dimensión 4 quedan resumidos en el siguiente teorema.

Teorema 5.25 *Las soluciones del flujo pluriclosed de estructuras SKT invariantes a izquierda en grupos de Lie solubles no unimodulares de dimensión 4 son todas inmortales, es decir, están definidas para todo $t\in[0,\infty)$. Las soluciones de los flujos de corchetes calibrados $\bar{\mu}$ por una calibración adecuada siempre convergen al álgebra abeliana y las correspondientes normalizaciones por la norma $\bar{\mu}/||\bar{\mu}||$ convergen a álgebras de Lie isomorfas a la inicial que dan lugar a pluriclosed solitons algebraicos de expansión, los cuales son Kähler (ver Tabla 2).*

Nota. Las métricas SKT estáticas listadas en Tabla 2 son también Kähler-Einstein. En [E12, Teorema 3.1] se probó que si (G,g,J) es un grupo de Lie simplemente conexo de dimensión 4, con una métrica SKT estática, entonces, (G,g,J) es también Kähler-Einstein o el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G es isomorfa a $\mathfrak{su}(2)\times\mathbb{R}$. Al no ser $\mathfrak{su}(2)\times\mathbb{R}$ soluble, efectivamente las métricas listadas en Tabla 2 son Kähler-Einstein.

$\mathfrak{g}$	$\lim_{t\to\infty} \bar{\mu}(t)/\|\bar{\mu}(t)\|$	Observaciones
$\mathbb{R}\times\mathfrak{r}_{3,0}$	$[e_3,e_4]=-e_4.$	Kähler
$\mathfrak{r}'_{4,\lambda,0}$	$[e_1,e_2]=-\lambda\|z_0\|e_2,\ [e_1,e_3]=z_0e_4,$ $[e_1,e_4]=-z_0e_3.$	Kähler
$\mathfrak{d}_{4,2}$	$[e_1,e_2]=-e_2,\ [e_1,e_3]=\frac{1}{2}e_3,$ $[e_1,e_4]=-\frac{1}{2}e_4,\ [e_2,e_3]=e_4.$	Kähler
$\mathfrak{aff}(\mathbb{R})\times\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$	$[q_1,q_2]=-q_2,\ [q_3,q_4]=-q_4.$	SKT estática, Kähler-Einstein.
$\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,e_3]=\frac{1}{2}e_3,$ $[e_1,e_4]=\frac{1}{2}e_4,\ [e_3,e_4]=e_2.$	SKT estática, Kähler-Einstein.
$\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,e_3]=\frac{1}{2}e_3+\frac{1}{2\lambda}e_4,$ $[e_1,e_4]=-\frac{1}{2\lambda}e_3+\frac{1}{2}e_4,\ [e_3,e_4]=e_2.$	SKT estática, Kähler-Einstein.

Table 2: Flujo pluriclosed en grupos de Lie solubles no unimodulares de dimensión 4.

Referencias

[ABDO05] A. Andrada, M. L. Barberis, I. G. Dotti y G. P. Ovando, *Product structures on four dimensional solvable Lie algebras*, Homology, Homotopy and Applications, **7** (2005), no. 1, 9-37.

[AL17] Romina Arroyo y Ramiro Lafuente, *The long-time behavior of the homogeneous pluriclosed flow*, arxiv: 1712:02075v1 (2017).

[Bis89] Jean-Michel Bismut, *A local index theorem for non-Kähler manifolds*, Math. Ann. **284** (1989), no. 4, 681-699.

[Bol16] Jess Bolling, *Homogeneous solutions of the pluriclosed flow on closed complex surfaces*, J. Geom. Anal. **26** (2016), no. 3, 2130-2154.

[E12] Nicola Enrietti, *Static SKT metrics on Lie groups*, Manuscripta Math. **140** (2013) no. 557-571.

[EFV12] Nicola Enrietti, Anna Fino and Luigi Vezzoni, *Tamed symplectic forms and strong Kähler with torsion metrics*, J. Symplectic Geometry. **10** (2012), no. 2, 203-223.

[EFV15] Nicola Enrietti, Anna Fino and Luigi Vezzoni *The pluriclosed flow on nilmanifolds and tamed symplectic forms*, J. Geom. Anal. **25** (2015) no. 2, 883-909.

[G97] Paul Gauduchon, *Hermitian connections and Dirac operators*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **11** (1997), no. 2, suppl.,1 257-288.

[L11] Jorge Lauret, *The Ricci flow for simply connected nilmanifolds*, Comm. Anal. Geom.**19** (2011), no. 5, 831–854.

[L12] Jorge Lauret, *Convergence of homogeneous manifolds*, J. London Math. Soc. **86** (2012), no. 2, 701–727.

[L13] Jorge Lauret, *Ricci flow of homogeneous manifolds*, Math. Z. **274** (2013), no. 1– 2, 373–403.

[L15] Jorge Lauret, *Curvature flows for almost-hermitian Lie groups*, Tran. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 10, 7453-7480.

[L16] Jorge Lauret, *Geometric flows and their solitons on homogeneous spaces*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **74** (2016), no. 1– 2, 55–93.

[MS11] Thomas Brunn Madsen and Andrew Swann, *Invariant Strong KT Geometry on Four-Dimensional Solvable Lie Groups*, Journal of Lie Theory, **21** (2011) no. 1, 55-70.

[S18] Jeffrey Streets *Clasification of solitons for pluriclosed flow on complex surfaces*, arxiv: 1802.00170v1 (2018).

[ST10] Jeffrey Streets and Gang Tian, *A parabolic flow of pluriclosed metrics*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2010), no. 16, 3101-3133.

[ST11] Jeffrey Streets and Gang Tian, *Hermitian curvature flow*, Journal of the European Mathematical Society **13** (2011), no. 3, 601-634.

[T06] Peter Topping, *Lectures on the Ricci flow*, London Mathematical Society Lecture Note Series **325** (2006), Cambridge University Press, Cambridge.

[V13] Luigi Vezzoni, *A note on canonical Ricci form on 2-step nilmanifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 1, 325-333.

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación de tesis, damos fé que el presente ejemplar impreso, se corresponde por con el aprobado por este Tibunal.