Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía,

Física y Computación

INFORME FINAL

Metodología y Práctica de la Enseñanza

Título: UNA PROPUESTA PARA APRENDER A ARGUMENTAR EN GEOMETRÍA CON ALUMNOS DE SEGUNDO AÑO DEL NIVEL SECUNDARIO.

Autoras: Lovaiza, Paula Abril; Marchesini, María Verónica
Equipo responsable de MyPE: Esteley, Cristina B.; Coirini Carreras, Araceli; Dipierri, Iris C.; Gerez Cuevas, Nicolás; Mina, María del Valle; Smith, Silvina.
Profesora Responsable de Prácticas: Mina, María del Valle
Carrera: Profesorado en Matemática
Fecha: 16-11-17

Clasificación:

97G Mathematics education.

Palabras claves:

Argumentación, definiciones, congruencia de figuras, GeoGebra, triángulos,

relaciones entre pares de àngulos

Resumen

El presente informe expone la experiencia de las autoras durante la práctica profesional docente realizada en dos cursos de 2° año en un colegio de la Ciudad de Córdoba. Los contenidos abordados corresponden a la unidad de Geometría: Ángulos y Triángulos. A lo largo de este informe, el lector podrá encontrar una descripción de aspectos generales sobre la institución, los cursos asignados, los estudiantes y la planificación propuesta. Ademàs presentamos el análisis de una propuesta de enseñanza para promover las capacidades de visualizar, explicar, conjeturar, argumentar y demostrar, junto con el análisis del rol que cumplen las TIC en este proceso.

Abstract

This report describes an experience about our professional teaching training that occurred in two 2nd year classrooms at a secondary school, situated in the city of Cordoba. The taught topics belongs to a Geometry Unit, that is, angles and triangles. In this report, the reader will encounter a brief description of the school institution and the assigned classrooms, students´ semblance, and the teaching proposal. Additionally, we analyze an activity designed to promote activities of visualization, explaining, conjecturing, and proving, in the students. The role of ICTs in these activities completes our presentation.

AGRADECIMIENTOS

Nos encantó poder mediar las clases durante este pequeño período en los cursos asignados, disfrutamos y aprendimos mucho, por eso queremos agradecer:

A la institución donde realizamos las prácticas, por abrirnos las puertas a toda su historia;

A los docentes de los cursos por abrirnos las puertas del aula y hacer del ambiente de trabajo un espacio ameno y colaborativo;

A los preceptores y el jefe de preceptores de la institución, por facilitar todas las herramientas necesarias para las clases, y esperarnos cada clase en la puerta del aula para recibirnos;

A los docentes de Metodología y Práctica de la Enseñanza por todos los conocimientos que nos brindaron;

A la docente tutora, por enseñarnos tanto, por ser sumamente positiva, por el apoyo y el acompañamiento que nos brindó;

Y por sobre todo a los estudiantes que nos enseñaron muchísimo y nos hicieron crecer enormemente.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

Introducción

1. 1. La Institución

El colegio en el que se realizaron las prácticas se encuentra ubicado en el centro de la Ciudad de Córdoba, Argentina. Es una institución educativa preuniversitaria, de gestión estatal, dependiente de la Universidad Nacional de Córdoba.

Ofrece desde su creación en 1687, una alternativa curricular de nivel secundario. La formación que brinda es la de un Bachillerato Humanista de siete años, con un Plan de Estudios que une conocimientos de asignaturas clásicas y contemporáneas de los estudios humanistas. A su vez cuenta con un nivel de Posgrado, el cual ofrece las carreras de Martillero y Corredor Público, Tecnicatura Superior en Bromatología y Comunicación Visual, además de ofrecer distintos cursos como el de Preceptor.

La estructura edilicia de dicha institución cuenta con planta baja, primer y segundo piso; presenta un estilo totalmente colonial. Este aspecto se percibe desde sus anchas paredes, sus techos tejados y barrotes en las amplias puertas y ventanas que dan a la calle, hasta el ingreso, por el que se accede a un zaguán que comunica con un primer patio interno llamado Patio Principal (Figura 1).

Figura 1. Patio principal de la institución (Imagen tomada desde el segundo piso).

Este patio se encuentra rodeado por aulas, el Museo del Colegio, la sala de profesores, la Dirección, la Regencia y la preceptoría de 6° y 7° año; posee una fuente central y árboles con una altura mayor al del edificio de la institución.

Seguido a este patio se halla otro de similares características (Figura 2), donde funcionan el Centro de Estudiantes y varias secretarías, como la Secretaría de Asuntos Académicos, la Secretaría de Asuntos Económicos y el Departamento de Pedagogía. En este patio se encuentran también unos baños.

Figura 2. Fuente del patio secundario.

Cabe destacar dos aspectos edilicios que influyeron en el desarrollo de nuestras prácticas:

- El edificio se ubica al lado de una Iglesia, por lo que durante la jornada escolar se oyen campanadas, similares a las utilizadas para marcar los recreos o cambios de hora, lo cual confunde a docentes y alumnos sobre los horarios de recreo.
- En la institución hay una tradición: todos los viernes, a mitad de la jornada, los alumnos de 7° año se juntan en el patio principal, bailan y cantan alrededor la fuente que aparece en la Figura 2; este rito es atractivo para los alumnos de

los otros cursos, quienes dejan la clase minutos antes para correr/asomarse a verlos; los docentes lo permiten, ya que parece ser un hábito instituido.

En el primer piso encontramos las Preceptorías y Aulas de 3°, 4° y 5° año, el Salón de Actos, la Sala de Reuniones, la Sala de Música, el Salón de Plástica, la Biblioteca, la Cantina y otros baños.

Por último, en el segundo piso se encuentran las Aulas y Preceptoría de 1° y 2° año, un kiosco más pequeño que la cantina ubicada en el primer piso y grandes balcones que dan al patio principal, donde los estudiantes disfrutan sus recreos. Nuestras prácticas se desarrollaron en las aulas 20 y 22, correspondientes a los cursos de “2° año G y H”, ubicadas al final del segundo piso.

1. 2 Caracterización de los cursos

Los cursos en donde realizamos nuestras prácticas fueron “2° año G y H”, ambos en el turno tarde y con distintos docentes a cargo del espacio curricular Matemática. Es pertinente aclarar que en esta institución la escolaridad es de 1ro a 7mo año, es decir, que los estudiantes ingresan al nivel secundario un año antes que el resto de los jóvenes de la provincia y, por lo tanto, los estudiantes de estos 2do año se corresponden con los de 1er año de cualquier otra institución.

Las aulas de ambas divisiones tienen la misma infraestructura: los bancos de los alumnos son de madera y se encuentran atornillados al suelo y numerados: cada estudiante se debe sentar en el banco correspondiente al orden asignado en la planilla (aunque esto depende de la flexibilidad del docente a cargo). Al frente del curso, y al lado del pizarrón, se ubica el escritorio del docente (sin atornillar), con su respectiva silla. Cuentan con un pizarrón de color negro, amplio y con un crucifijo colgado sobre él; además, se observa un proyector colgado del techo, con su respectiva pantalla, dispuesta sobre el pizarrón, y una esterilla (donde se agregan noticias, horarios, cronograma anual, etc).

El entorno del aula se encuentra en buen estado, las paredes y bancos aparecen libres de rayones y roturas. El ambiente tiene buena iluminación y ventilación, brindada por diez tubos fluorescentes junto con cinco amplias ventanas (con postigones) y tres ventiladores. Además, el aula cuenta con percheros (que los alumnos utilizan para colgar los abrigos) y un cesto de basura de madera, atornillado a la pared, que contribuyen a la limpieza y orden áulico (Ver Figuras 3 y 4).

Figura 3. Aula tomada desde el exterior.

Figura 4. Aula de 2° G.

A continucación presentamos un criquis de las aulas, con la ubcaicòn de los bancos y demás elementos del aula (Figura 5).

Figura 5. Croquis de las aulas.

En estos cursos la cantidad total de estudiantes es similar, y se observa una equitativa distribución por sexo en cada uno de ellos:

- Cantidad de estudiantes en "2° G": 28, de los cuales son 14 varones y 14 mujeres.
- Cantidad de estudiantes en "2° H": 30, de los cuales son 17 mujeres y 13 varones.

En relación a los espacios curriculares, la intitución en donde realizamos nuestras prácticas no todos los cursos tienen una asignatura denominada "Matemática". En 5to año, por ejemplo, las asignaturas con contenido matemático son dos: "Matemática V - Álgebra" y "Estadística y Probabilidades" (Ver Tabla 1).

Año	Asignatura con contenido matemático
1ro	Matemática I (4 hs.)
2do	Matemática II (4 hs.)
3ro	Matemática III (5 hs.)
4to	Matemática IV (5 hs.)
5to	"Matemática V - Álgebra" (3 hs.) y "Estadística y Probabilidades" (3 hs.)
6to	"Matemática VI - Trigonometría" (2 hs.) y "Geometría" (2 hs.)
7mo	"Análisis Matemático y Geometría Analítica" (4 hs.)

Tabla 1. Espacios curriculares con contenido matemático, extraído de la planificación de la institución.

En segundo año el espacio curricular correspondiente a matemática se denomina "Matemática II". La distribución horaria de dicha asignatura curricular para los cursos "2°G y 2° H" ocurre en tres días semanales, de no más de dos horas-cátedra por día (y un total de cuatro horas-cátedra por semana). En la Tabla 2 presentada abajo se muestran los días y horarios en los que realizamos nuestras prácticas.

	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
12:50 - 13:30		2° año H			
13:30 - 14:10					
14:15 - 14:55					
15:00 - 15:40				2° año H	
15:45 - 16:25				2° año H	2° año G
16:35 - 17:15				2° año G	
17:20 - 18:00		2° año G			
18:05 - 18:45		2° año G	2° año H		

Tabla 2. Horarios de prácticas en ambos cursos.

Los alumnos del turno tarde comienzan sus actividades todos los días a las 13:30 hs. y se retiran a las 18:45, a excepción de los días martes donde "2° H" tiene una "pre-hora" e ingresa a las 12:50 hs. Todos los estudiantes asisten con regularidad a clases, a excepción de la pre-hora donde se observan algunas llegadas tardes o inasistencias de parte de los alumnos, ya que está fuera del horario "normal" de clases. Esto provoca un desfasaje cuando se compara en el desarrollo de contenidos para los alumnos de ambas secciones de segundo año. Para minimizar esta disparidad causada por las faltas, la docente de este curso, utiliza las pre-horas para repasar, resolver dudas y corregir/revisar ejercicios.

Diariamente, estos cursos tienen una jornada escolar de siete horas-cátedra, de 40 minutos cada una, separados por recreos de 5 minutos, a diferencia de un recreo a mitad de jornada que tiene una duración de 10 minutos. De las 35 horas-cátedra semanales, en segundo año le corresponden cuatro horas-cátedra al espacio curricular Matemática.

1. 3 Características de la clase de matemática y medios utilizados

Durante el período de observación los estudiantes trabajaron con el libro "Entre Números 2: Actividades de Matemática" de Editorial Santillana, del cual leían definiciones y conceptos referidos a cada tema y hacían sus respectivos ejercicios. Los estudiantes utilizaban la aplicación "calculadora" de sus celulares al resolver los ejercicios. Durante el período de observación, no acostumbraban a usar el proyector, las computadoras entregadas por el "Plan Conectar Igualdad"[1], ni fotocopias. El principal recurso didáctico era el pizarrón para escribir consignas de trabajo, apoyar explicaciones orales, corregir actividades, entre otros usos. Este empleo tradicional de este recurso didáctico fue observado en las otras materias de segundo año.

En unos de los cursos, al momento de la resolución de actividades, se observaron actitudes más "autogestionadas" por los estudiantes: el profesor les daba autonomía a ellos para que lean las definiciones del libro y resuelvan las actividades solos, es decir, con mínimas intervenciones del docente a cargo (en términos generales). Cada estudiante (o grupo de estudiantes) consultaba de manera particular sus dudas y sólo algunas actividades eran puestas en común, a veces con el uso del pizarrón y a veces de manera oral. Con respecto a la proporción de los tiempos de las clases estimamos, en base a lo observado, que un 80% fue destinado a ejercitación y un 20% a explicaciones, entrada y salida del aula, organización de la clase, etc.

Las clases en el otro de los cursos eran similares al momento de la resolución de actividades: los alumnos leían por sus propios medios las definiciones para resolver las actividades, y las dudas generales fueron aclaradas por el docente de manera oral para todos. Estas clases, durante la puesta en común, fueron más expositivas, y las explicacio-

1 - "Programa Conectar Igualdad": programa surgido como iniciativa del Poder Ejecutivo Argentino, lanzado en el año 2010 mediante la firma del decreto N° 459/10. Consiste en proveer a cada estudiante secundario de una Netbook.

nes se realizaban de distintas maneras de modo que todos los alumnos pudieran comprender lo que se estaban haciendo para continuar con la tarea propuesta. El docente indagaba constantemente a los estudiantes con preguntas para que elaboren y desarrollen sus respuestas, buscando que expliquen el porqué de las mismas. Por estos motivos es que la proporción de tiempo destinado a explicación y ejercitación se observó más equilibrada.

En los dos cursos el estilo de clases era similar en lo que a contenidos y formas se refiere, ya que ambos docentes tienen como recurso de guía, tanto para las clases como para la materia, el libro de texto. Los profesores cambian de un ciclo electivo a otro y, en consecuencia, hay contenidos, formas y abordajes distintos. Además, al pasar de un año escolar a otro, los alumnos de las distintas divisiones son "mezclados", es decir, en un mismo curso coexisten alumnos de dos divisiones anteriores. Estos hechos contribuyen a la presencia de diversidad de conocimientos previos y relaciones entre los estudiantes.

1. 4 Los alumnos y sus actitudes con los distintos docentes

Los estudiantes se muestran siempre respetuosos, responsables, atentos y muy educados en su comportamiento, tanto con sus compañeros como con los docentes de las diferentes asignaturas. Es natural en ellos la actitud de pararse al comienzo de la clase y saludar al docente correspondiente, guardar silencio ante los pedidos, y resolver las tareas diariamente.

En "2° año G", los alumnos, como mencionamos en la sección anterior, son autónomos a la hora de aprender, independientes y muy curiosos. Se observa que relacionan los contenidos de las diferentes materias, por lo cual surgieron comentarios en una clase sobre otras asignaturas.

Por ejemplo, algunos estudiantes establecieron relaciones entre la noción de simetría vista en plástica y la trabajada en matemática, las novelas policiales leídas en lengua y los textos argumentativos de matemática, entre otras situaciones. Los estudiantes son muy participativos en las clases, proponen y cuestionan constantemente los conocimientos presentados por los docentes y sus respectivos compañeros, se preguntan y explican entre ellos. Estas acciones pueden describirse como autónoma e independiente.

En "2° año H", se puede apreciar que los estudiantes recurren con frecuencia a un andamiaje[2] para exteriorizar su potencial a la hora de aprender. Estos alumnos son más tímidos que sus compañeros del "2° G" para participar en las clases, pero esto no los detiene en su participación en las actividades de aprendizaje: responden cuando se les pregunta algo y pasan al frente cuando el docente lo solicita.

En general, durante nuestras observaciones de día completo, se pudo apreciar una gran capacidad de adaptación, por parte los alumnos de ambas divisiones, a las distintas metodologías, ritmos, tiempos y contenidos dictados por cada docente de las asignaturas a las cuales asistimos. En ambos cursos, se observó una clara tendencia al trabajo en equipo (como curso completo) o en grupo. A pesar de que algunas actividades fueron propuestas para ser resueltas de manera individual, los estudiantes tienden, espontáneamente, a realizarlas en conjunto.

Los alumnos de ambos cursos sostenían una buena relación con sus respectivos docentes de matemática, lo que hacían las clases amenas. Notamos una particular confianza por parte de los alumnos en el trato con ambos docentes de esta asignatura, y viceversa, ya que los profesores proponen desafíos con nuevos aprendizajes de manera continua.

2 - En este caso se refiere al término de andamiaje propio de Vygotsky: es necesario que uno de los participantes sea un individuo experto o más experto, capaz de transmitir conocimientos al menos experto. Estudios recientes sobre interacción en el aula, demuestran que el andamiaje puede darse entre iguales, es decir, entre aprendientes con un grado similar de conocimientos; es lo que se ha denominado "andamiaje colectivo". https://goo.gl/m1jpoZ.

CAPÍTULO 2

Planificación de Nuestras Prácticas

2. Diseño de la práctica e implementación en el aula

En este capítulo presentamos, en primer lugar, una breve descripción de la planificación anual de los docentes de los cursos, junto con un análisis de la unidad asignada. Luego, desarrollaremos la planificación de nuestras prácticas, distribuida en tres unidades didácticas, junto con un cronograma de la organización y tiempos destinados a la implementación de cada una de ellas. Seguidamente, describimos cada unidad didáctica especificando los temas tratados en ellas, y los recursos utilizados. Culminamos el capítulo con un análisis de las evaluaciones propuestas a los estudiantes, realizadas en cada uno de los cursos.

2.1 Análisis de la planificación anual de los profesores de los cursos y vinculación con el tema de la práctica

El programa anual de Matemática II correspondiente a segundo año de la institución en donde realizamos la práctica contaba con las siguientes cinco unidades:

UNIDAD N° 1 - Representaciones gráficas

UNIDAD N° 2 - Cuerpos geométricos: Áreas y Volúmenes

UNIDAD N° 3 - Números enteros

UNIDAD N° 4 - Números racionales

UNIDAD N° 5 - Ángulos y triángulos

Estas cinco unidades aparecen respondiendo a tres ejes temáticos explicitados en la planificación: Álgebra y Funciones (Unidad 1), Geometría y Medida (Unidades 2 y 5), Números y Operaciones (Unidades 3 y 4).

La práctica se llevó a cabo siguiendo la Unidad 5 de la planificación anual del curso. Transcribimos a continuación los temas incluidos en la unidad Ángulos y Triángulos [3]:

• Noción de ángulos convexos. Pares de ángulos especiales: complementarios, suplementarios, consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice, su concepto, trazado y cálculo.

3 - Durante el periodo de prácticas fueron trabajados todos los temas de la unidad, a excepción del ítem correspondiente a mediatriz y bisectriz.

• **Ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante**. Reconocimiento, trazado y cálculo de las medidas o relaciones que se establezcan respecto a sus medidas.

• **Clasificación de triángulos** según sus medidas y según sus lados. **Propiedades de los triángulos: suma de ángulos interiores, relación entre los lados, y relación entre los lados y sus respectivos ángulos opuestos**; su concepto y utilización en la resolución de ejercicios y problemas.

• **Concepto y construcción con regla y compás de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo. Construcción de ángulos con igual amplitud.**

• **Triángulos congruentes**, concepto y construcción. **Criterios de congruencia de triángulos**, su concepto y utilización para argumentar la congruencia de triángulos en contextos diversos.

En la planificación anual se declara una enseñanza de la matemática desde el desarrollo integral de los estudiantes, brindándoles la posibilidad de adquirir y fortalecer las capacidades del pensamiento abstracto, crítico y argumentativo como herramienta para enfrentar y resolver situaciones problemáticas. Esto es, por ejemplo, enseñar "cuáles son las propiedades que justifican las operaciones que se realizan, cómo interpretar los resultados de esas operaciones en el contexto del problema, cómo obtener la información necesaria, cómo argumentar y comunicar los resultados". Además, se propone un modelo pedagógico-didáctico integrado en una propuesta de trabajo "flexible, amplio, que incorpore distintas estrategias metodológicas y que permita la apropiación del conocimiento en la diversidad del alumnado", sin más precisiones ya que, al igual que los recursos y métodos de evaluación a utilizar, son aspectos que se dejan a criterio del docente.

2.1.1. Una breve intervención antes de comenzar las prácticas

Previamente a nuestras prácticas, durante el año lectivo, los estudiantes trabajaron con representaciones gráficas de funciones, funciones de proporcionalidad (directa e inversa) y números enteros; temas correspondientes a las Unidades 1 y 3 mencionadas anteriormente. En el primer año cursado por estos estudiantes, se adquirieron conocimientos básicos de figuras planas, sus clasificaciones, cálculos de áreas y perímetros. Según pudimos apreciar durante el período de observaciones, el dominio de estos conocimientos previos era diverso entre los estudiantes de ambos cursos debido al reasignamiento anual que la institución realiza con las diferentes divisiones de los cursos (ver Sección 1.3). El hecho de que los estudiantes ya tuvieran conocimientos (aunque en distinta medida) de figuras planas, clasificación de ángulos, clasificación de triángulos y sus respectivas propiedades, resultó un fuerte condicionante de nuestras prácticas, y nos motivó a planificar una propuesta que complemente estos saberes previos, es decir, algo que enriqueciera el espectro de conocimientos de los estudiantes sobre la temática.

La unidad desarrollada por los docentes de los cursos durante el período de observación, fue la de “Números Enteros” correspondiente al eje “Números y Operaciones”. En este desarrollo observamos cierta dificultad por parte de los estudiantes ante la llamada “regla de los signos” para el producto en este conjunto numérico. Debido a esto, acordamos con los docentes de ambos cursos contarles/mostrarles a los estudiantes una pequeña demostración teórica de dicha regla. Consideramos que este momento representó un acercamiento de los estudiantes con una demostración formal matemática, y como se verá en los capítulos siguientes, se constituyó en un avance de nuestra propuesta de práctica.

La demostración presentada a los estudiantes fue la siguiente:

Demostración de la regla de los signos para el producto en el conjunto de los números enteros:

El producto de dos números enteros contempla tres casos: Producto de dos enteros positivos, producto entre un entero negativo y uno positivo, y producto de enteros negativos.

(a) Producto de enteros positivos:

La multiplicación, se define como una extensión de la suma en el conjunto de los números naturales: si son enteros positivos la multiplicación es una suma repetida. Por ejemplo:

$$5 \times 6 = 6+6+6+6+6 = 30$$

Por lo tanto, es simple concluir que un número entero positivo por otro número entero positivo es positivo $(+)\times(+) = (+)$.

(b) Producto entre un entero negativo y uno positivo:

Si se multiplica un entero positivo por un número entero negativo, consideramos una suma repetida del número negativo, tantos sumandos como indique el sumando positivo. Por ejemplo:

$$(+5)\times(-6) = (-6)+(-6)+(-6)+(-6)+(-6) = -30.$$

Como la multiplicación es conmutativa, entonces:

$$(+5)\times(-6) = (-6)\times(+5) = -30$$

Es decir que $(+)\times(-) = (-)\times(+) = (-)$.

(c) Producto de dos números entero negativos:

Para este caso, probamos primero que $(-1)\times(-1) = 1$, para luego ver que $(-p)\times(-q)=p\times q$.

Sabemos que -1 es el inverso aditivo de 1, entonces, por definición se verifica que:

$$1 + (-1) = 0$$

Multiplicamos por (-1) ambos miembros de la expresión anterior,

$$(-1)\times(1 + (-1)) = (-1)\times 0$$

Pero, por propiedad del elemento absorbente, sabemos que 0 multiplicado por cualquier número es 0, entonces

$$(-1)\times(1 + (-1)) = 0$$

Por propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma:

$$(-1) + (-1)\times(-1) = 0$$

Sumamos 1 a ambos miembros de la ecuación:

$$1 + (-1) + (-1)\times(-1) = 1$$

Como $1 + (-1) = 0$ entonces

$$0 + (-1)\times(-1) = 1$$

Por lo tanto,

$$(-1)\times(-1) = 1$$

Ahora, todo número $-p < 0$ (siendo p un número entero positivo) se puede expresar por $(-1)\times p$. Entonces si multiplicamos dos números negativos se verifica

$$(-p)\times(-q) = (-1)\times p\times(-1)\times q$$

Por propiedad conmutativa y asociativa en la multiplicación esto equivale a

$$(-p)\times(-q) =((-1)\times(-1))\times(p\times q)$$

Pero $(-1)\times(-1) = 1$, entonces

$$(-p)\times(-q) = 1\times(p\times q)$$

Pero 1 es el neutro multiplicativo, entonces

$$(-p)\times(-q) = p\times q$$

Consideramos pertinente resaltar que construir con los estudiantes esta demostración, fue una experiencia muy importante para nosotras ya que representó una motivación para orientar nuestra propuesta hacia la intención de brindar oportunidades y herramientas de argumentación a los estudiantes a lo largo de la práctica.

2.2 Planificación de nuestras prácticas

Cualquier diseño para la enseñanza debe tomar en cuenta una serie de cuestiones o variables; estas variables son las cosas o aspectos de la realidad del aula en las que debemos pensar si queremos planificar y desarrollar una actividad sistemática de enseñanza (Gvirtz & Palamidessi, 1998). A lo largo de esta sección del Capítulo 2 describiremos estas variables de nuestra planificación.

Al planificar, lo hicimos respondiendo al siguiente objetivo para nuestras prácticas: generar una propuesta de enseñanza que abarque los conocimientos de la disciplina requeridos en el plan de estudios de la institución, teniendo en cuenta la importancia asignada por la misma al desarrollo del pensamiento crítico y argumentativo de los estudiantes.

Optamos, además, porque nuestra planificación esté atravesada por el uso de tecnologías para nuestros estudiantes. Pues si bien, "(...) la tecnología no produce automáticamente una buena educación, la falta de tecnología garantiza automáticamente una mala educación (...)" (Papert; citado en Villarreal, 2013, p. 98)

Luego de leer el plan de estudios de la institución, notamos el énfasis que se colocaba en las capacidades argumentativas de sus estudiantes. Consultando con distintos actores en la institución, obtuvimos la información de que, en particular, la escritura de "textos argumentativos" recién era tratado en 4to año y dentro de la asignatura "Lengua". Entonces, decidimos que la elaboración de textos que argumentan ideas matemáticas podía constituirse en objeto de enseñanza en las clases de matemática enriqueciendo los aprendizajes para la Unidad Ángulos y Triángulos.

Decidimos organizar la planificación de nuestras prácticas en base a tres núcleos principales o unidades didácticas que denominamos: *Definiciones, Argumentación y Congruencia de triángulos*, respectivamente. A continuación, describimos estas unidades en que dividimos nuestra propuesta. En las secciones siguientes presentaremos con mayor detalle cada una.

Comenzando pensando qué base de conocimientos debían tener nuestros estudiantes para poder apropiarse de nuestra propuesta y qué era importante trabajar en el aula para poder generar el escenario óptimo. Luego de analizar varios aspectos, concluimos en que una base que debíamos brindar a los estudiantes eran "buenas definiciones" sobre las cuales después ellos pudieran construir argumentos.

En la primer Unidad Didáctica se trataron las características de las *Definiciones* como objeto de enseñanza: qué son, para qué sirven, cuáles son las partes que las componen, cómo generar ejemplos y contraejemplos de un concepto. Diseñamos una propuesta de enseñanza para el análisis de estos aspectos en las definiciones correspondientes a ángulos y su clasificación en base a su relación numérica (las relaciones entre las amplitudes de pares de ángulos: ángulos complementarios, suplementarios o de igual amplitud) y su relación espacial (relaciones entre pares de ángulos que dependen de cómo se ubican uno respecto del otro en el plano: consecutivos, adyacentes, y opuestos por el vértice); se aplicó, el análisis de las definiciones, a la de congruencia entre figuras y se trabajó con la propiedad de transitividad de este concepto mediante actividades.

La segunda Unidad Didáctica colocó el foco en la *Argumentación o justificación* de las ideas matemáticas. Diseñamos actividades de análisis de definiciones para sustentar una argumentación, para armar argumentaciones o justificaciones sobre la validez de una situación, por ejemplo: *"Si se cumple que..., entonces..."*.

Se desarrollaron los conceptos y relaciones entre ángulos definidos por dos rectas paralelas y una transversal (ángulos correspondientes, alternos internos y externos, y conjugados internos y externos), aplicando las ideas sobre definiciones de la primer Unidad Didáctica. Se elaboraron actividades de naturaleza argumentativa con respecto a estos conceptos.

Propusimos actividades para la construcción de argumentaciones escritas y orales por parte de los estudiantes, validando las propias y ajenas, utilizando como recurso didáctico gráficos de figuras geométricas y animaciones de GeoGebra[4] que relacionaban los ángulos vistos, que serán detalladas en las secciones siguientes.

Congruencia de triángulos fue la tercer Unidad Didáctica planificada, donde se aplicó el concepto de congruencia, trabajado en la primer unidad, a los triángulos. Se propusieron actividades para realizar con la noción de conjetura. Diseñamos actividades de construcción de triángulos congruentes usando GeoGebra como recurso didáctico para elaborar conjeturas acerca de las propiedades y criterios de congruencia de triángulos.

4 - GeoGebra: Programa Dinámico para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas para educación en todos sus niveles. Este software permite la exploración de relaciones geométricas, algebraicas, del análisis matemático y estadística en un único entorno sencillo a nivel operativo como potente. (https://www.geogebra.org/)

Con respecto a la implementación de la planificación, en la Tabla 3 presentamos los detalles de la organización y secuenciación de los contenidos dentro de las tres unidades didácticas, detallando los objetivos, temas/contenidos, actividades desarrolladas, evaluaciones administradas, recursos utilizados y tiempos requeridos. Estos componentes de nuestra planificación serán desarrollados en detalle en las próximas secciones.

Unidades Didácticas	Objetivos	Temas/contenidos	Actividades desarrolladas	Recursos utilizados	Tiempo (en módulos)
N°1 Definiciones	Analizar las definiciones de los ángulos, sus relaciones, congruencia y transitividad comprendiendo las partes, usos, ejemplos y contraejemplos	Definiciones, ángulos y su clasificación según sus relaciones numéricas y espaciales	Análisis de Lista 1 de definiciones y resolución de actividades	Power Point Proyector Material propio Libro de texto Pizarrón	80 minutos
		Congruencia de figuras y propiedad de transitividad	Análisis de Lista 2 de definiciones, resolución y corrección de actividades		40 minutos
N°2 Argumentación	Analizar, evaluar y crear argumentos matemáticos orales y escritos, utilizando lo aprendido sobre definiciones	Textos argumentativos y ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal	-Análisis de la segunda parte de la Lista 2 de definiciones - Corrección actividades - Resolución de actividades Lista 2 -Resolución actividades de repaso	Power Point GeoGebra Material propio Proyector Pizarrón Libro de texto	80 minutos
					40 minutos
		-	Trabajo Práctico (TP) evaluativo grupal		40 minutos
N°3 Congruencia de triángulos	Utilizar GeoGebra para construir, conjeturar y deducir los criterios de congruencia de Triángulos, argumentando y utilizando las definiciones	Construir y conjeturar. Triángulos, Clasificación y propiedades. Uso de GeoGebra	-Lista 3 de definiciones -Resolución actividades	Proyector Libro de texto Pizarrón Material propio GeoGebra	80 minutos
		Definición de triángulos congruentes	-Revisión de los TP -Revisión de actividades		80 minutos
		Criterios de congruencia de Triángulos	Actividad exploratoria		80 minutos
			Puesta en común y conclusiones		80 minutos
		-	Evaluación		40 minutos
			-Revisión de la evaluación -Repaso para el Trimestral		80 minutos
Trimestral	Evaluar la integración de los contenidos	-	Examen trimestral		60 minutos
		-	Devolución examen trimestral	Pizarrón	40 minutos

Tabla 3. Organización y secuenciación de los contenidos.

Los recursos y materiales didácticos utilizados en el aula para la implementación de esta propuesta fueron: el libro de texto con el que acostumbraban trabajar los estudiantes de segundo año, material de texto de naturaleza teórica producido por nosotras (provistos en fotocopias a los estudiantes), pizarrón y tiza, proyector, software Power Point, computadoras y teléfonos celulares de los estudiantes, software GeoGebra, hojas de calcar, reglas, compás, transportador y fotocopias con actividades y definiciones.

El uso del proyector se empleó tanto para exposición de contenidos como para puestas en común de las actividades resueltas. En el caso del software de geometría dinámica GeoGebra fue utilizado por todos los participantes de las clases: las practicantes lo utilizamos para desarrollar la propuesta de enseñanza y los estudiantes para realizar las actividades solicitadas (elaborar conjeturas, inducir propiedades, visualizar relaciones, etc.). Para realizar estas manipulaciones, como no todos los estudiantes disponían de una computadora, se les permitió y facilitó el uso de teléfonos celulares. El material producido[5] , ya sea información en Power Point o revisiones de actividades, se brindó a los estudiantes mediante fotocopias que, junto con el libro de texto, fueron utilizados para acompañar las actividades con papel, lápiz, regla y compás. Ejemplos de estos recursos se muestran en la Figura 6.

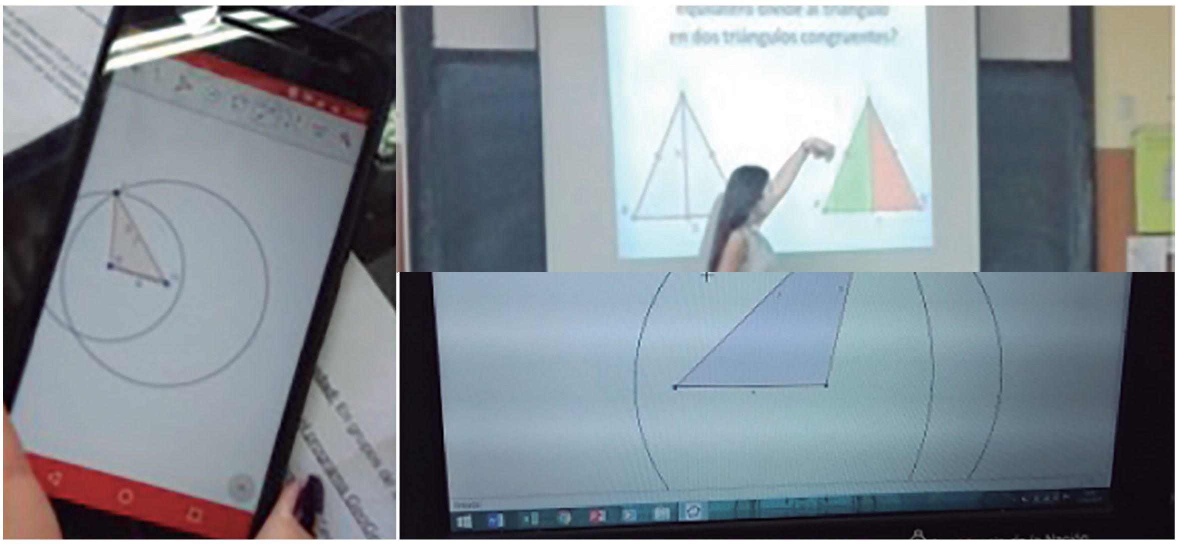


Figura 6. Recursos utilizados en el aula durante el período de práctica (celular, proyección, hoja de calcar y netbook).

5 - Sobre el final de la práctica, todo el material elaborado para los estudiantes, fue publicado en un sitio web exclusivo de la institución que están disponible para su uso.

Con el objetivo de llevar un registro del avance en nuestra propuesta por parte de los estudiantes, para así realizar los cambios que sean necesarios y favorecer y enriquecer su aprendizaje, decidimos evaluar los contenidos desarrollados durante el período de prácticas mediante tres instancias evaluativas. Estas evaluaciones serán analizadas en la Sección 2.2.4.

2.2.1 Unidad Didáctica N° 1: Definiciones

En esta sección presentamos una descripción de lo que denominamos Unidad Didáctica N°1: Definiciones. Los temas correspondientes a esta unidad fueron: noción de definición, ángulo, ángulo convexo, ángulos complementarios, suplementarios, consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice, congruencia de figuras y relación de transitividad.

Teniendo en cuenta los objetivos generales establecidos por los docentes a cargo de los cursos para la enseñanza de los contenidos seleccionados de la unidad de práctica y el objetivo principal de nuestra práctica (desarrollar habilidades de argumentación en el aula de matemática), los objetivos específicos que nos planteamos para esta unidad fueron:

Que los estudiantes:

- comprendan la importancia de una buena definición en matemática;
- reconozcan criterios (las partes, la utilidad, los ejemplos y contraejemplos) para distinguir el texto de una buena definición;
- analicen con estos criterios las definiciones de ángulo, ángulo convexo, ángulos complementarios, suplementarios, consecutivos, adyacentes y opuestos por el vértice (ver definiciones en Lista 1 del Anexo), y la definición de relación entre congruencia de figuras.
- analicen la propiedad de transitividad de la congruencia.

El propósito principal de esta unidad consistió en construir en nuestros estudiantes la idea de que, para aprender matemática, es importante entender la forma y funcionamiento de una definición, ya que éstas permiten organizar el pensamiento, nos ayudan a entender y a apropiarse del sentido de una idea, y demostrar el dominio de la misma. Además, el conocimiento de la estructura textual de una definición permite la lectura de textos matemáticos y posibilita el explicar a otros una idea matemática[6].

Al comenzar esta Unidad Didáctica realizamos una presentación sobre las definiciones en PowerPoint. Desarrollamos actividades de aprendizaje acerca del concepto mismo de definición: qué es una definición, para qué sirve, cuáles son las partes que la componen, cómo identificar "buenas" o "malas" estructuras textuales de una definición, cómo generar ejemplos y contraejemplos de un concepto a partir del análisis de las notas distintivas que lo caracterizan, qué son el antecedente y el consecuente en una proposición (considerando el trabajo con propiedades y sus consecuencias, para que los estudiantes puedan justificar ejemplos y contraejemplos).

El material elaborado consistió en un PowerPoint con la siguiente información. Con ayuda de las tres primeras diapositivas (Figura 7) se explicó el significado de una definición en matemática: "esta es una estructura propia del lenguaje matemático importante para el registro de ideas matemáticas", y un listado de lo que ellas permiten hacer.

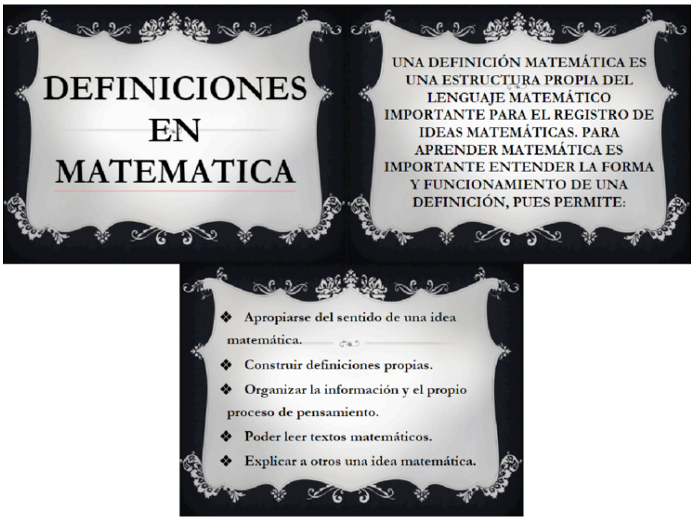


Figura 7. Definiciones en matemática: ¿Qué son? ¿Qué nos permiten hacer?

6 - El contenido de estos aspectos generales fue elaborado en base a material brindado por la docente supervisora de prácticas.

Las diapositiva siguiente (Figura 8) mostró cómo está formada una definición, pensada como estructura textual: cuenta con un ítem, la idea que se va a definir; una clase, que indica a qué conjunto pertenece el ítem; y presenta características, aspectos que diferencian al ítem del resto de los ítems del conjunto al que pertenece.

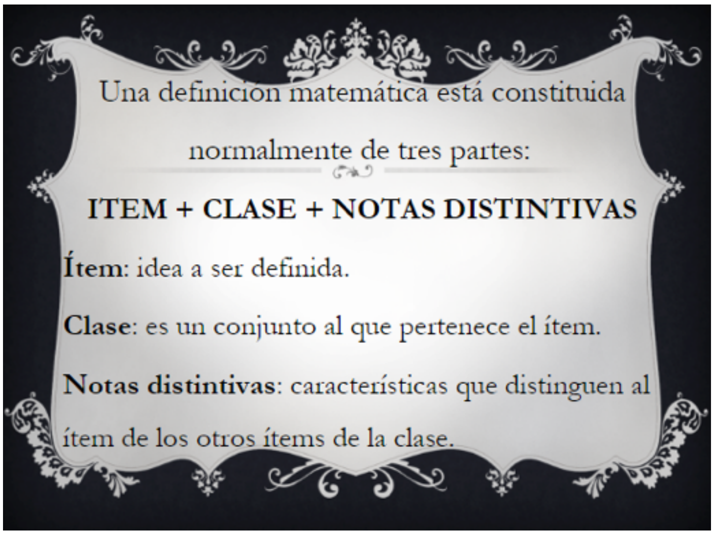


Figura 8. Composición usual de una definición en matemática.

Las diapositivas de la Figura 9, presentaron un ejemplo sencillo para poner en evidencia esta estructura, de modo que sirviera como ejemplo de análisis para los estudiantes.

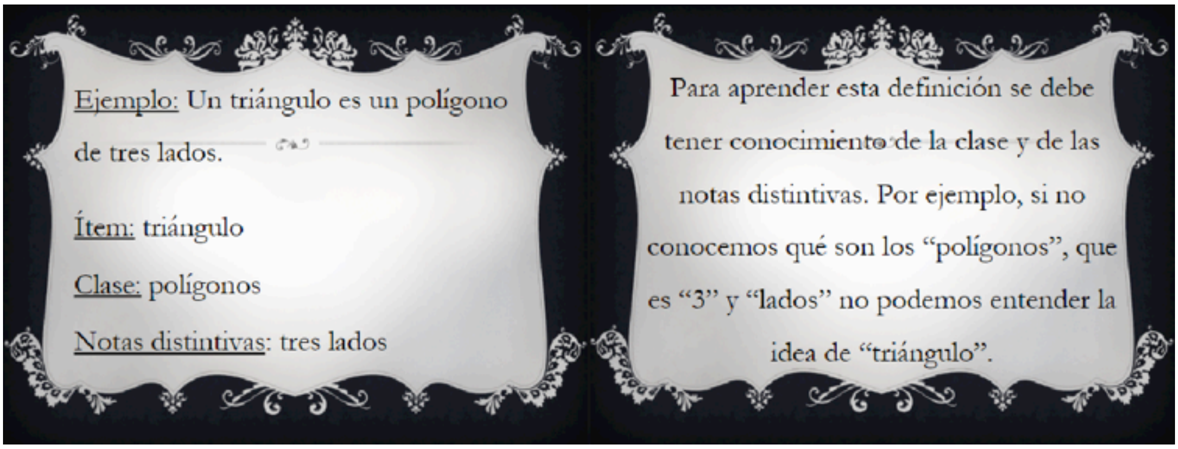


Figura 9. Ejemplo de composición de una definición en matemática, para el caso especial del triángulo.

Este ejemplo consistió en identificar, en una definición dada, el ítem, la clase y las características. Cabe aclarar que, durante la gestión de esta presentación en el aula, el análisis de estos tres componentes aparecieron en las diapositivas de manera secuencial[7] luego de que los estudiantes deliberaran sobre la respuesta y la adelantaran de manera oral. Por otro lado, el ejemplo también nos permitió aprehender la comprensión de los temas expuestos por parte de los estudiantes.

Finalmente, la última diapositiva (Figura 10) muestra la manera de generar ejemplos y contraejemplos para el concepto trabajado en el ejemplo, tal como lo presentamos a los estudiantes.

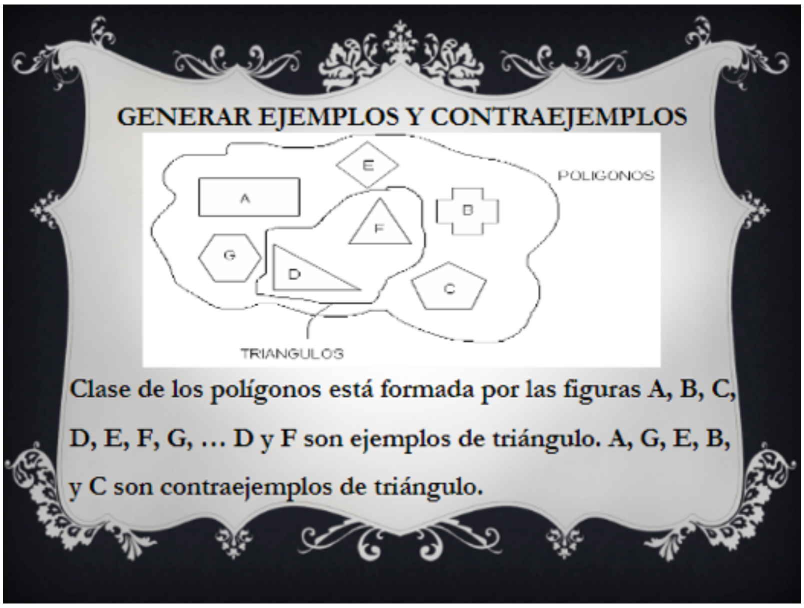


Figura 10. Ejemplos y contraejemplos de una definición matemática, para el caso particular de los polígonos.

Este marco de referencia acerca de las definiciones sirvió para ayudar a interpretar los conceptos de relaciones entre pares de ángulos, aproximarse a estos contenidos, realizar análisis de los mismos e incentivar/motivar el pensamiento crítico de los estudiantes sobre el tema. De este modo se preparó el escenario para el abordaje de los textos argumentativos de la Unidad Didáctica N°2.

7 - El software PowerPoint permite que, con el apretado de una tecla, aparezcan textos o figuras que no se presentan al observador desde el comienzo de la presentación. De este modo, se podía construir, junto con el estudiante, el discurso deseado.

Se trabajó con una lista de definiciones (ver Lista 1 en el Anexo X) antes mencionada que incluyó las definiciones de: ángulo, ángulo convexo, ángulos complementarios, ángulos suplementarios, ángulos consecutivos, ángulos adyacentes y ángulos opuestos por el vértice.

A modo de ejemplo sobre la gestión de la clase, para el análisis de la definición de ángulos consecutivos seguimos la siguiente secuencia didáctica:

1. Solicitamos a un estudiante que leyera la definición en voz alta.
2. Pedimos a todos los estudiantes que identifiquen las partes de esta definición, del mismo modo que se hizo en el ejemplo presentado en la diapositiva que aparece en la Figura 9.
3. Invitamos a los estudiantes que propusieran diversos ejemplos y contraejemplos de este concepto.
4. Cada propuesta de ejemplo o contraejemplo debía ser explicada de manera oral siguiendo las notas distintivas contenidas en la definición.
5. Los mismos compañeros validaron o refutaron las explicaciones de sus propios pares. Realizamos preguntas para indagar sobre el alcance de esta definición (por ejemplo, si la definición de ángulos consecutivos excluye a los pares de ángulos suplementarios).

Con el resto de las definiciones se procedió de manera similar.

Junto a los contenidos señalados arriba sobre relaciones entre pares de ángulos, aplicamos en esta primera parte el concepto de congruencia a figuras, concepto que luego sería recuperado en la Unidad Didáctica 3: ("dos figuras son congruentes si al superponerlas coinciden en todos sus puntos"); y la propiedad de transitividad de la congruencia.

Para ilustrar la congruencia entre dos figuras creamos figuras en un documento de GeoGebra[8] donde se observaba que, al superponerlas, todos sus puntos coincidían. Entre estas figuras había dos segmentos (rojo y negro, en Figura 11) congruentes entre sí y cuya

8 - Figuras congruentes: https://ggbm.at/PGv4V8cx.

longitud coincidía con la longitud de un lado de uno de los triángulos. Estos tres elementos matemáticos (segmento rojo, segmento negro y triángulo lila) fueron usados para explicar la propiedad de transitividad.

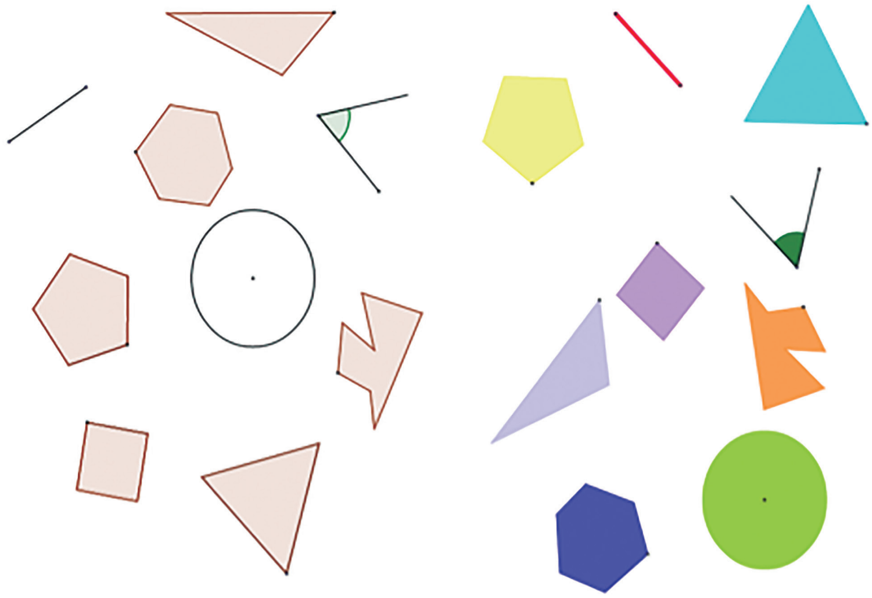


Figura 11. Imagen de archivo de un archivo de GeoGebra con ejemplos de Figuras Congruentes.

Actividades para los estudiantes:

Para que los estudiantes pudieran analizar los vínculos entre dos conceptos, por ejemplo, la relación entre ángulos consecutivos y ángulos opuestos por el vértice, elaboramos, el listado de preguntas que aparecen a continuación en la Figura 12.

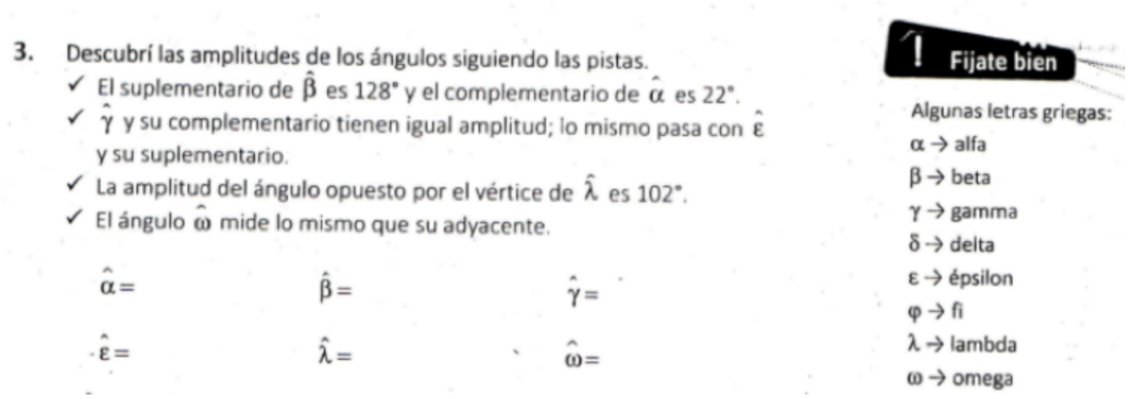
Para seguir analizando...

- ¿Pueden dos ángulos complementarios ser consecutivos a la vez?
- ¿Pueden dos ángulos complementarios ser adyacentes a la vez?
- ¿Pueden dos ángulos complementarios ser opuestos por el vértice a la vez?
- ¿Pueden dos ángulos consecutivos ser suplementarios a la vez?
- ¿Pueden dos ángulos consecutivos ser complementarios a la vez?
- ¿Pueden dos ángulos consecutivos ser adyacentes a la vez?
- ¿Pueden dos ángulos consecutivos ser opuestos por el vértice a la vez?
- ¿Pueden dos ángulos adyacentes ser complementarios a la vez?
- ¿Pueden dos ángulos suplementarios ser consecutivos a la vez?
- ¿Pueden dos ángulos suplementarios ser adyacentes a la vez?

Figura 12. Actividad para analizar vínculos entre dos conceptos referidos a relaciones entre pares de ángulos.

Se destinó un tiempo durante la clase para que realizaran esta actividad en grupos pequeños, habilitando la discusión entre los integrantes del grupo acerca de las posibles soluciones. Estos debates internos dentro de cada grupo fueron expresados luego a todo el curso durante la discusión y corrección de la actividad, con ayuda del pizarrón para mostrar los ejemplos que fueran necesarios. La voz principal, en este caso, se procuró que sea la de los estudiantes.

Como complemento a estas preguntas, seleccionamos actividades del libro de texto de los estudiantes que se muestran en las Figuras 13 y 14.


3. **Descubrí las amplitudes de los ángulos siguiendo las pistas.**

- ✓ El suplementario de $\hat{\beta}$ es 128° y el complementario de $\hat{\alpha}$ es 22°.
- ✓ $\hat{\gamma}$ y su complementario tienen igual amplitud; lo mismo pasa con $\hat{\varepsilon}$ y su suplementario.
- ✓ La amplitud del ángulo opuesto por el vértice de $\hat{\lambda}$ es 102°.
- ✓ El ángulo $\hat{\omega}$ mide lo mismo que su adyacente.

$\hat{\alpha}=$ $\hat{\beta}=$ $\hat{\gamma}=$

$\hat{\varepsilon}=$ $\hat{\lambda}=$ $\hat{\omega}=$

! Fijate bien

Algunas letras griegas:
α → alfa
β → beta
γ → gamma
δ → delta
ε → épsilon
φ → fi
λ → lambda
ω → omega

Figura 13. Actividad para establecer relaciones entre las características de pares de ángulos y sus amplitudes.

Con las cuestiones de la actividad de la Figura 13 esperamos que los estudiantes pusieran en práctica los criterios adquiridos con el análisis de las definiciones y establecieran relaciones para calcular el valor numérico de distintos tipos de ángulos. Debido a que durante su resolución, los estudiantes no presentaron dudas sobre ellas, no nos detuvimos por mucho tiempo en su corrección.

La actividad de la Figura 14, también extraída del libro de texto, permite determinar la validez o falsedad de proposiciones dadas a partir de un análisis de la definición de cada relación entre pares de ángulos, mediante el análisis de una definición brindados a los estudiantes y expuestos más arriba.

Consigna actividad 4: Tres amigos juegan a cuánto sabes sobre ángulos. Cada participante recibe en su turno tres tarjetas de un mismo color para completar. Al término de cada mano suman 10 puntos por cada tarjeta correcta. ¿Quién ganó la mano? ¿Quién sacó menos puntos?

Juani	Agus	Santi
El adyacente de un ángulo obtuso siempre es agudo	El suplementario de un ángulo recto siempre es	Dos ángulos consecutivos siempre son
El complementario de un ángulo agudo siempre es agudo	El adyacente de un ángulo agudo siempre es agudo	Dos ángulos adyacentes a un tercero son Opuestos por el vértice
El adyacente de un ángulo recto siempre es recto	El suplementario de un ángulo agudo a veces es	El suplementario de un ángulo obtuso siempre es agudo

Figura 14. Actividad para aplicar el análisis sobre una definición de relaciones entre pares de ángulos (transcripta para ganar legibilidad).

Con respecto al concepto de congruencia de figuras, creamos la actividad mostrada en la Figura 15, con el fin de que los estudiantes aplicaran este concepto mediante la selección de ejemplos.

Actividad Lista 2 primera parte:

1) Nombre y/o dibuje figuras que cumplan las siguientes condiciones:

a) Que tenga dos lados congruentes.

b) Que tenga dos ángulos congruentes.

c) Que tenga dos pares de lados congruentes.

d) Que tenga tres ángulos congruentes.

Figura 15. Actividad para reflexionar sobre la congruencia entre los elementos de una figura.

Esta actividad fue entregada en fotocopias a los estudiantes para que la realizaran cada uno en su casa como tarea. La corrección en la clase siguiente de esta tarea resultó interesante puesto que permitió ver las concepciones que tenían los estudiantes con respecto a la noción de figuras geométricas clásicas vistas en el trayecto escolar (cuadrado, rectángulo, triángulo). Sin embargo, luego de un par de ejemplos realizados en el pizarrón, los estudiantes pudieron reconocer que la respuesta a cada una de las actividades que plantea la actividad no era única.

La participación durante la revisión fue notoria puesto que “todos pedían pasar” a dar su solución. Resulta interesante resaltar el hecho de que, si bien la actividad daba la opción de nombrar o dibujar una figura con las condiciones pedidas, todos los estudiantes optaron por realizar dibujos.

2.2.2 Unidad Didáctica N° 2: Argumentación

En esta sección del Capítulo 2 se abordarán aspectos relacionados a lo que llamamos Unidad Didáctica N°2: Argumentación. Cabe aclarar que algunos aspectos de esta unidad serán objeto de análisis en el Capítulo 3.

Teniendo en consideración los contenidos seleccionados para esta Unidad , los objetivos específicos que nos planteamos para la Unidad Didáctica N°2 fueron:

Que los estudiantes:

- sean capaces de elaborar, analizar, evaluar y validar argumentos matemáticos (propios y ajenos) comprendiendo su importancia y utilidad en el área;
- sean capaces de elaborar, analizar, evaluar y validar conjeturas matemáticas;
- sean capaces de apreciar el valor de la notación matemática y el papel que cumple en la escritura de una argumentación;
- desarrollen habilidades de escritura formal para elaborar breves textos argumentativos;
- desarrollen habilidades de expresión oral para construir justificaciones de sus ideas;
- analicen, empleando los criterios vistos sobre definiciones en la Unidad Didáctica Definiciones, las distintas clasificaciones de ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal.

En esta segunda unidad se desarrollaron aspectos relativos a la argumentación, es decir, qué es argumentar, qué es un argumento, cómo se argumenta en matemática, y las características de un texto argumentativo. Nos propusimos transmitir a nuestros estudiantes la importancia de la argumentación o justificación en matemáticas y de una buena comunicación para propiciar el diálogo y motivar el pensamiento crítico.

Para iniciar la segunda Unidad, y de manera similar a la introducción de la unidad sobre ***Definiciones***, diseñamos para los estudiantes en PowerPoint una presentación sobre algunos aspectos importantes sobre la argumentación.

En la primera diapositiva (Figura 16) se mostraron ideas acerca de argumentar y justificar. La decisión de colocar ambas descripciones se debió a que, por lo general, suelen ser usadas como dos procesos diferentes. Durante las prácticas, estas dos palabras aparecieron como sinónimos.

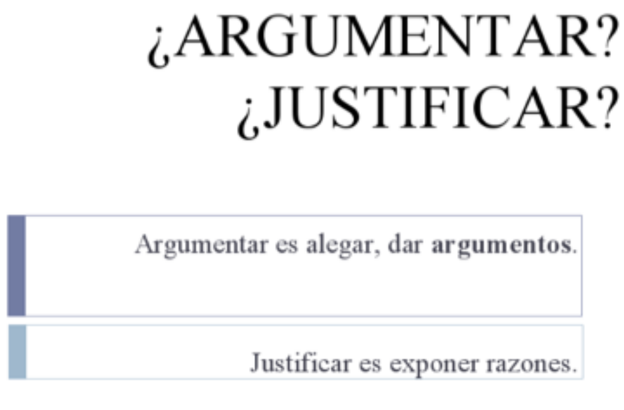


Figura 16. Argumentar y justificar, ¿son lo mismo?

Para que los estudiantes se aproximen a la idea de qué es argumentar, en la segunda diapositiva (Figura 17) decidimos incorporar qué es un argumento. Este material fue elaborado luego de revisar distintos sitios web con el objetivo de comprender la utilidad de la argumentación.

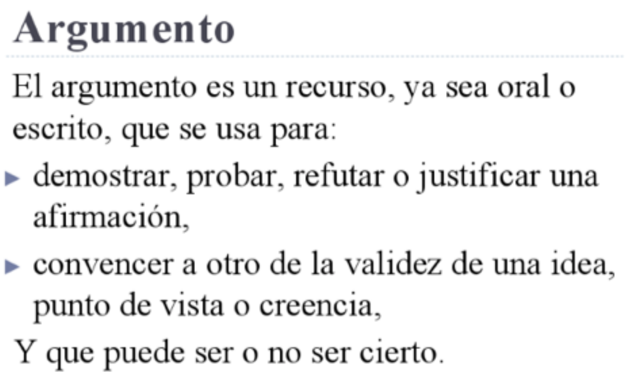


Figura 17. ¿Qué es un argumento?

Durante la presentación trabajamos con analogías entre los argumentos en un juicio (debido a que los estudiantes habían trabajado con novelas policiales) y los de la clase de matemática; en esa instancia surgió, entre otras, la idea de que pueden, o no, ser ciertos hecho que refleja la importancia de validar los argumentos propios y ajenos.

Las diapositivas siguientes (Figura 18) contienen qué es, entonces, argumentar para el caso particular de la matemática, y cuál es la estructura de un texto argumentativo ("un texto argumentativo en matemática tiene la función de presentar ideas 'matemáticamente' relacionadas entre sí, de modo que podamos convencer a otra persona de la verdad que estamos diciendo y pueda ella verificarla también"). Es importante señalar que estas expresiones fueron pensadas para que pudieran ser comprendidas por alumnos de 12 años de edad.

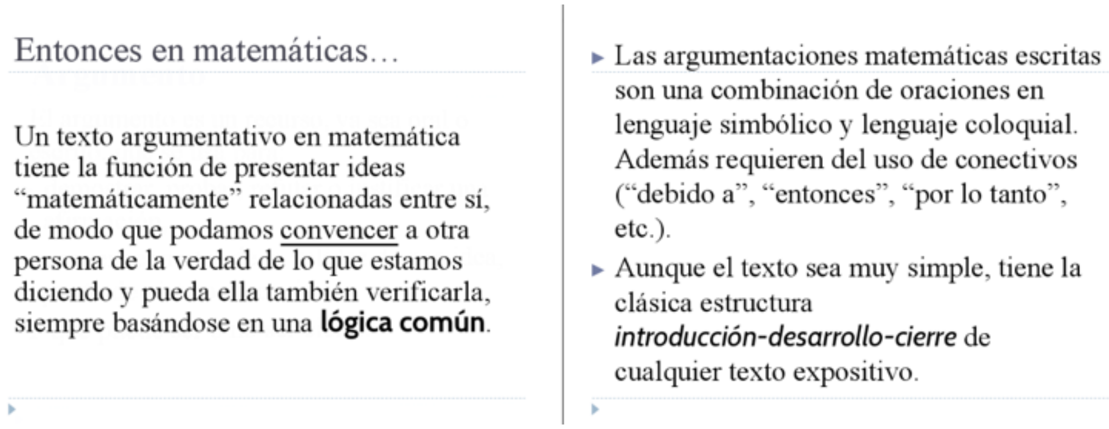


Figura 18. Argumentar en matemática.

Las dos últimas diapositivas, (Figura 19), presentan dos ejemplos de textos argumentativos.

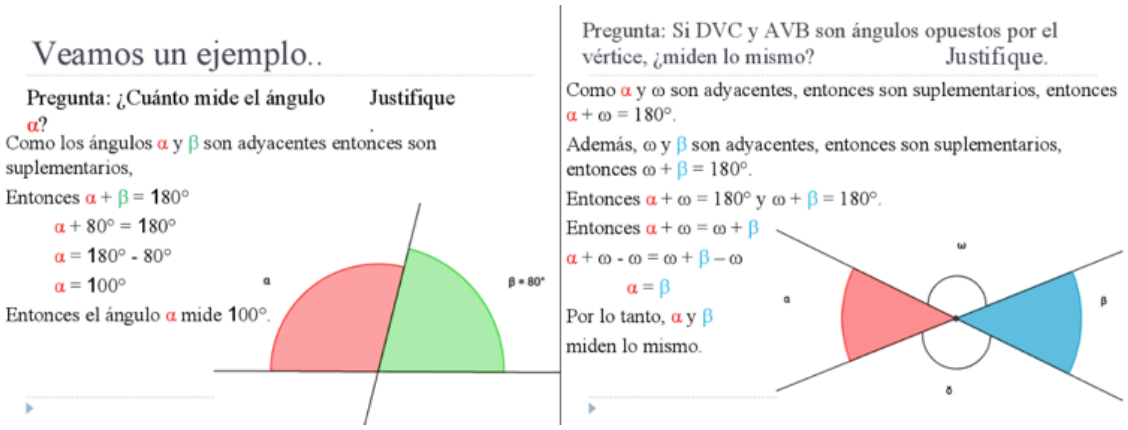


Figura 19. Ejemplos de textos argumentativos en matemática presentados a los estudiantes.

Cabe señalar que estos ejemplos no fueron presentadas directamente, como un texto ya elaborado, a los estudiantes sino que la presentación estuvo organizada de modo tal que para que, cada renglón de los textos argumentativos apareciera en pantalla, se debía presionar una tecla en la computadora. De este modo, al igual que con la presentación de la justificación de ejemplos y contraejemplos mostrada en la sección anterior, las posibilidades de PowerPoint permitieron recrear una situación de "construcción conjunta", junto con el estudiante, de un argumento. El objetivo de presentar los ejemplos de este modo consistió en crear una invitación a los estudiantes a que realicen sus aportes, los analicen, elaboren preguntas y generen debates hasta llegar a un consenso sobre el argumento en cuestión. Consideramos que, esta es una estrategia para promover la argumentación de forma oral de los estudiantes y se constituye en una importante oportunidad didáctica para formar el lenguaje matemático apropiado.

La tecnología y la construcción de argumentaciones

Con el objetivo de favorecer la comprensión acerca de las relaciones entre pares de ángulos y profundizar en la producción de textos argumentativos, se presentó a los estudiantes, con ayuda del proyector, algunas animaciones en GeoGebra para observar la relación de congruencia de los pares de ángulos correspondientes[9], alternos internos[10] y alternos externos[11]. Estas animaciones fueron analizadas como paso previo a la construcción del argumento, con respecto a las concruencia entre estos pares de ángulos.

El primer par de ángulos analizado, empleando estos recursos, fue el de los ángulos correspondientes (Figura 20).

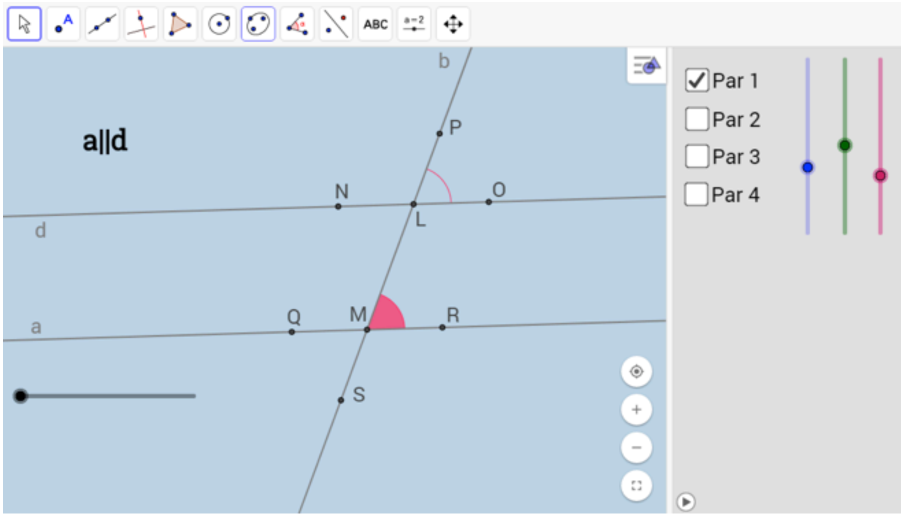


Figura 20. Imagen de la animación en GeoGebra utilizada para estudiar la congruencia de los ángulos correspondientes entre dos rectas paralelas.

Esta animación en GeoGebra presenta a su derecha cuatro casillas (en color blanco y con el nombre de “Par 1”, “Par 2”, etc.) y tres deslizadores[12] (azul, verde y rojo), colocados a la derecha de la Figura 20. Las casillas se corresponden con cada par de ángulos correspondientes que aparecen determinados en la figura; los deslizadores permiten cambiar la dirección de la recta transversal (con el deslizador azul), cambiar la dirección de las rectas paralelas (con el verde), y modificar la distancia entre estas dos rectas (con el rosa).

La introducción de esta animación tuvo dos objetivos. Uno de ellos consistió en la intención de generar entre los estudiantes un debate mediante el cual los mismos intenten explicar o argumentar por qué es válida la congruencia entre los ángulos corres-

9 - https://www.geogebra.org/m/esPBcwR3
10 - https://www.geogebra.org/o/fwCa2RUv
11 - https://www.geogebra.org/m/BenEP39t
12 - Es una representación gráfica de un número o ángulo libre, cuyo valor cambia deslizando el control respectivo con el mouse.

pondientes, como paso previo a una explicación formal. Por otro lado, luego de escuchar las ideas de los estudiantes, el objetivo se dirigió hacia la necesidad de tomar como válidas ciertas ideas sin demostración y que se constituyen en la base sobre la que se construyen otras demostraciones.

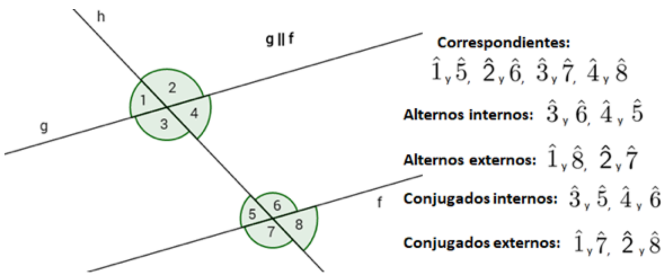
Haciendo uso de animaciones similares a la descrita arriba, se mostraron relaciones que permitieron conjeturar las propiedades para ángulos alternos internos y alternos externos. Luego de la exposición oral de justificacion, estudiantes y docentes elaboramos un texto argumentativo en el pizarrón para probar/justificar la congruencia de estos ángulos. No nos extendemos más en las decisiones didácticas de estas estrategias puesto que serán objeto de reflexión en el Capítulo 3 de este informe.

Se desarrollaron en esta unidad las definiciones de ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal, internos y externos, ángulos correspondientes, ángulos alternos internos y externos, ángulos conjugados internos y externos (ver la Lista 2, Anexo). Se diseñaron actividades para que los estudiantes pudieran reconocer estos tipos de ángulos, abstraer las relaciones que se establecen respecto a sus aplitudes y calcularlas. Se esperaba que los estudiantes utilizaran lo aprendido en la unidad anterior sobre definiciones para analizar, y así comprender con mayor profundidad, estas nuevas definiciones. Para este desarrollo, la gestión de la clase resultó similar a la descripta en la sección anterior para el tratamiento de la definición de ángulos consecutivos.

Actividades para los estudiantes

Se propuso a los estudiantes distinguir las características o notas distintivas en las definiciones de los ángulos definidos por dos rectas paralelas paralelas y una transversal. En la Figura 21 se muestra una diapositiva resultado del análisis de los estudiantes acerca de estas definiciones.

En la diapositiva se observa que los estudiantes aplicaron lo aprendido en la Unidad Didáctica anterior, reconociendo las partes de sus definiciones, pudiendo extraer las notas distintivas o condiciones correspondientes a cada par de ángulos.



Correspondientes:
- Igual semiplano
- Uno externo y uno interno
- No adyacentes

Alternos:
- Distinto semiplano

Internos:
- Dos internos

Externos:
- Dos externos

Conjugados:
- Igual semiplano

Internos:
- Dos internos

Externos:
- Dos externos

Figura 21. Diapositiva con notas distintivas que aparecen en las definiciones de ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal, tal como lo realizaron los estudiantes.

Para trabajar con el cálculo de las medidas de los ángulos, reconociendo las relaciones que existe entre ellos, seleccionamos actividades del libro de texto de los estudiantes (Figuras 22 y 23) y que fueron dadas como tarea.

La actividad de la Figura 22 requirió el uso de los de criterios de análisis de definiciones aprendidos en la primera Unidad Didáctica para los incisos (a) y (b) de esta actividad, y los conocimientos sobre argumentación para el (c). Ésta actividad combinó contenidos tratados tanto en la primera unidad didáctica como en la segunda, convirtiéndose en actividad de síntesis para los estudiantes.

6. Cada chico eligió un par de ángulos.

a. Leé lo que dicen y marcá en el dibujo cuáles pueden ser.

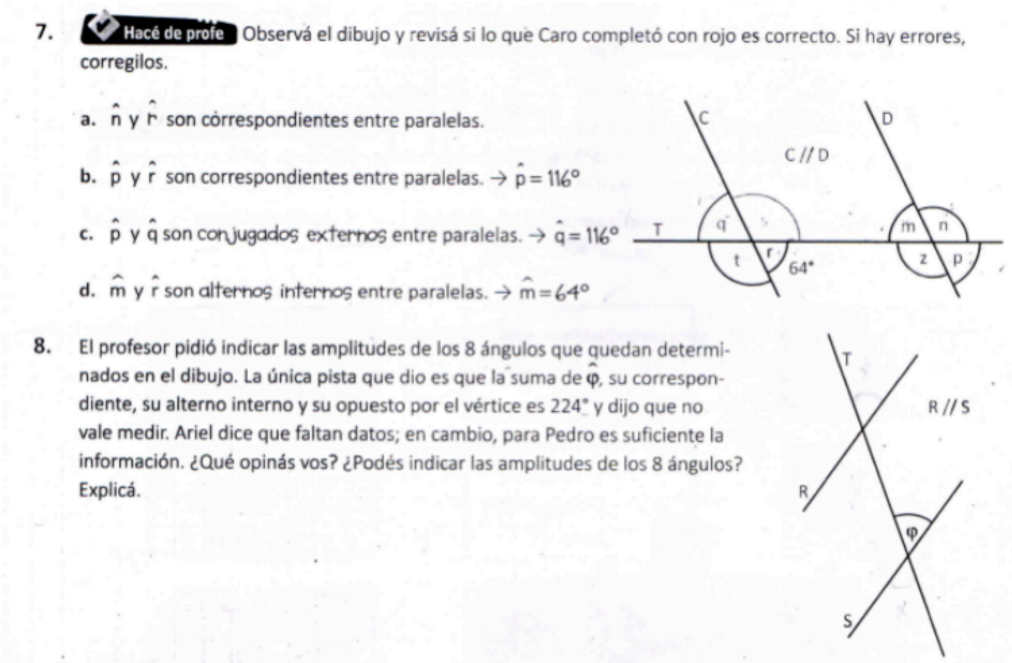
Martín: "Los míos son $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$. Están uno a cada lado de la recta T, tienen igual amplitud y los dos son internos".
Alex: "Yo elegí dos que están del mismo lado con respecto a la recta T. Uno es interno y el otro es externo. Se llaman $\hat{\gamma}$ y $\hat{\delta}$ y no son adyacentes.
Facu: "Los que elegí yo son $\hat{\varepsilon}$ y $\hat{\varphi}$; están del mismo lado con respecto a T y los dos son externos".

b. ¿Quién eligió un par de correspondientes? ¿Y de alternos internos?

c. Uno de los ángulos que eligió Facu mide 52°. Escribí su amplitud en el dibujo y luego indicá cuánto mide cada uno de los otros cinco ángulos. Justificá cómo lo supiste sin usar el transportador.

Figura 22. Actividad para analizar las definiciones de relaciones entre pares de ángulos y argumentar acerca de éstas.

Las Figura 23 presenta dos actividades propuestas en esta unidad. En la primer actividad el estudiante necesitó determinar la validez o falsedad de las afirmaciones dadas mediante el uso y análisis de las definiciones de los conceptos involucrados. La segunda actividad, demandó analizar el alcance de las propiedades de los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal para calcular sus amplitudes.


7. Hacé de profe Observá el dibujo y revisá si lo que Caro completó con rojo es correcto. Si hay errores, corregilos.

a. $\hat{n}$ y $\hat{r}$ son correspondientes entre paralelas.

b. $\hat{p}$ y $\hat{r}$ son correspondientes entre paralelas. → $\hat{p} = 116°$

c. $\hat{p}$ y $\hat{q}$ son conjugados externos entre paralelas. → $\hat{q} = 116°$

d. $\hat{m}$ y $\hat{r}$ son alternos internos entre paralelas. → $\hat{m} = 64°$

8. El profesor pidió indicar las amplitudes de los 8 ángulos que quedan determinados en el dibujo. La única pista que dio es que la suma de $\hat{\varphi}$, su correspondiente, su alterno interno y su opuesto por el vértice es 224° y dijo que no vale medir. Ariel dice que faltan datos; en cambio, para Pedro es suficiente la información. ¿Qué opinás vos? ¿Podés indicar las amplitudes de los 8 ángulos? Explicá.

Figura 23. Actividades para determinar el valor de verdad de afirmaciones sobre ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal, y el alcance de las propiedades de estos ángulos.

2.2.3 Unidad didáctica N° 3: Congruencia de Triángulos

En esta sección describiremos la Unidad Didáctica N°3 que denominamos *Congruencia de triángulos.*

Como lo realizamos en las secciones anteriores, comenzamos presentando los objetivos específicos y los contenidos de la misma: triángulos; clasificación según las medidas de sus ángulos y sus lados; propiedad de la suma de ángulos interiores, desigualdad triangular, y relación entre los lados y sus respectivos ángulos opuestos; construcción de triángulos; triángulos congruentes; criterios de congruencia de triángulos.

Los objetivos específicos que nos planteamos fueron:

- Que los estudiantes:
- sean capaces de elaborar conjeturas;
- adquieran nociones básicas sobre el manejo de GeoGebra;
- conjeturen la propiedad de la Desigualdad triangular de los triángulos, usando como recurso una construcción en GeoGebra;
- reconozcan a GeoGebra como herramienta útil para elaborar conjeturas acerca de las figuras representadas;
- deduzcan los criterios de congruencia de triángulos, mediante discusiones en pequeños grupos;
- apliquen, las herramientas de análisis acerca de una definición, en las distintas clasificaciones de triángulos.

En esta unidad, colocamos la atención en la elaboración de ***conjeturas***, como actividad íntimamente relacionada con la argumentación matemática.

Para la propuesta de enseñanza de esta unidad, planificamos actividades en las que los estudiantes debían utilizar el software GeoGebra para realizar construcciones, para elaborar conjeturas a partir de ellas. Es por ello que consideramos pertinente introducir una descripción de ***construir*** y su importancia para el conjeturar, invitando a los estudiantes a explorar las herramientas básicas de GeoGebra, reconociendo situaciones o actividades en donde las mismas resultan apropiadas.

Con anterioridad al desarrollo de esta Unidad Didáctica, con ayuda del proyector, les mostramos a los estudiantes sólo algunas herramientas básicas de GeoGebra para que, de este modo, el dominio de la herramienta resultara transparente para exploración personal de cada estudiante. Se sugirió a los estudiantes que, con anterioridad, realicen una libre exploración de este software, por lo que algunos lo tenía descargado en sus teléfonos celulares y otros lo llevaron en sus computadoras para la clase siguiente.

Según nos propusimos a lo largo de nuestra planificación, también comenzamos en esta última Unidad Didáctica con una breve presentación en PowerPoint en la que explicamos sobre las acciones de ***construir y conjeturar***. Estas dos nociones, junto con la de conjetura, fueron analizadas con los estudiantes con el recurso de las diapositivas que aparecen en la Figura 24. Elaboramos esta presentación reconstruyendo las nociones de construir y conjeturar/conjetura, luego de leer distintos textos sobre el tema; su fin fue motivar a los estudiantes a realizar construcciones con GeoGebra y a elaborar conjeturas sobre las mismas.

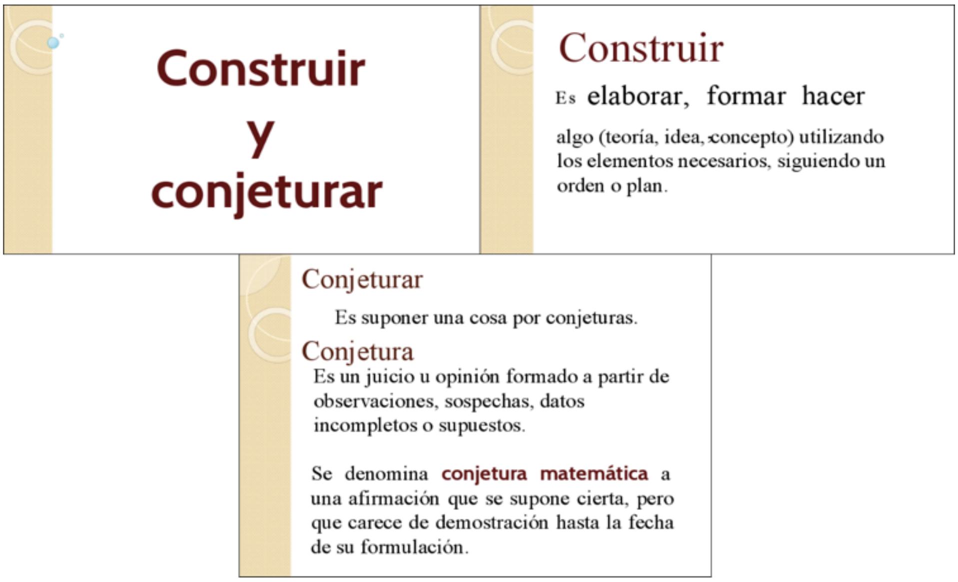


Figura 24. Diapositivas que muestran las ideas acerca de construir y de conjeturar, presentadas a los estudiantes.

Las diapositivas de la Figura 25 fueron preparadas con el objetivo de presentar a los estudiantes ejemplos de conjeturas.

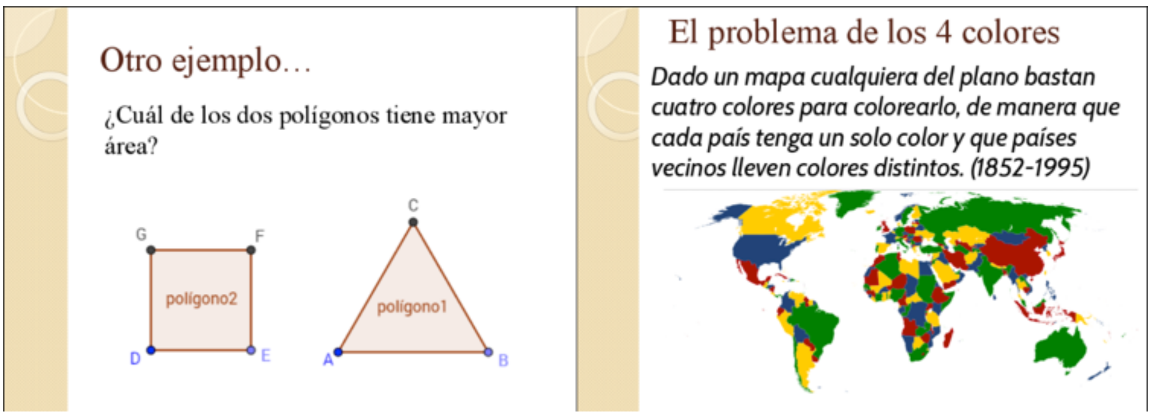


Figura 25. Ejemplos de situaciones de conjeturas presentadas a los estudiantes.

Los ejemplos seleccionados intentaron acercar a los estudiantes una idea general de lo que es una conjetura. Para ello, se buscó un ejemplo que resulte familiar (elaborar un enunciado acerca de la relación entre las áreas del triángulo y del cuadrado) y otro que genere curiosidad (***el problema de los cuatro colore***[13]). En la presentación de estos ejemplos, se generaron discusiones con los estudiantes cuando comparaban las áreas de los polígonos que aparecen en la Figura 25. El problema de los cuatro colores se explicó a modo informativo.

Destacamos aquí que, esta Unidad Didáctica N° 3, tiene una naturaleza de síntesis de los aprendizajes propuestos en las Unidades N° 1 y N° 2, anteriores. Por ello, el lector notará que las descripciones que siguen a continuación recuperan estrategias didácticas y de gestión que aparecen en las secciones anteriores.

Durante esta Unidad se diseñaron actividades didácticas para abordar los contenidos que aparecen en la Lista 3 de definiciones (ver Anexo). Esta lista incluyó, en una primera parte, la definición de triángulo, su clasificación según sus lados (equilátero, isósceles y escaleno) y su clasificación según sus ángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo). La segunda parte de la Lista 3 corresponde a las propiedades de los triángulos: suma de la medida de los ángulos interiores, relación entre los lados y sus respectivos ángulos opuestos, y desigualdad triangular. Estas propiedades no fueron presentadas directamente a los estudiantes, sino que sus enunciados fueron elaborados por ellos, luego de debatir en la clase, con sus compañeros, sobre la validez de las mismas.

Para reconstruir las dos primeras propiedades de los triángulos, suma de la medida de los ángulos interiores y relación entre los lados y sus respectivos ángulos opuestos, se les presentaron a los estudiantes dos documentos[14] de GeoGebra creados por nosotras para aprovechar las representaciones dinámicas que permite este software e incentivar a que los estudiantes elaboren sus propias conjeturas.

---

13 - El problema de los cuatro colores afirma que bastan cuatro colores para colorear un mapa geopolítico plano, sin que dos países con frontera común tengan el mismo color.

14 - Archivos disponibles en https://ggbm.at/naaEb7xY (suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo) y https://ggbm.at/ePrG6bzv (relación entre los lados de un triángulo y sus respectivos ángulos opuestos).

La gestión de la clase, para la deducción de la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, siguió la siguiente secuencia didáctica:

1. Presentamos a los estudiantes un documento en GeoGebra (Figura 26), pedimos a todos los estudiantes que buscaran regularidades en las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo, y escuchamos y analizamos sus conjeturas.

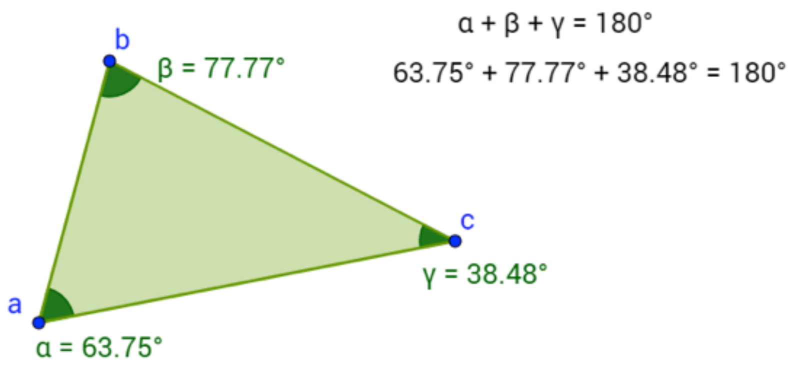


Figura 26. Archivo de GeoGebra para hacer conjeturas s la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

2. Con ayuda de un nuevo documento[15], también de GeoGebra (Figura 27), y aprovechando su protocolo de construcción[16], la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo fue demostrada aplicando conocimientos previos relativos a ángulos formados por dos rectas paralelas y una transversal aprendidos anteriormente.

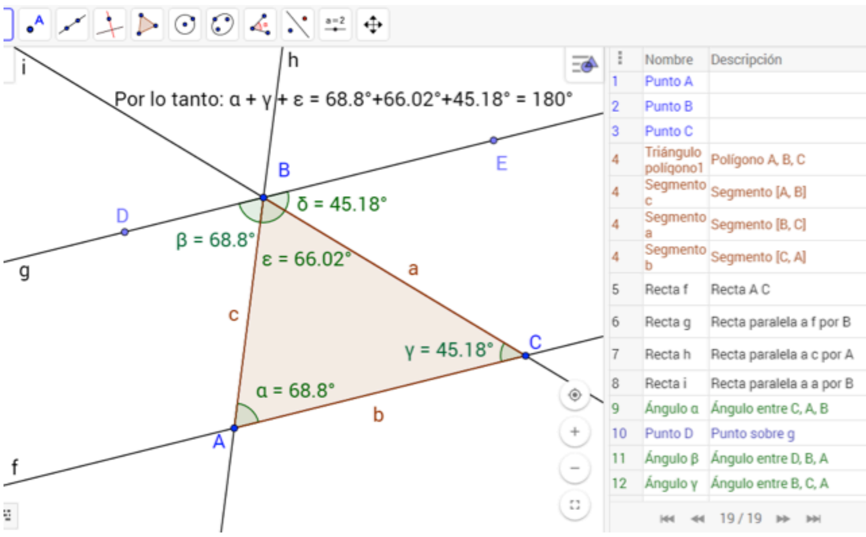


Figura 27. Demostración de la propiedad de suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo mediante el argumento de la congruencia de ángulos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal en GeoGebra. En la figura, a la derecha, aparece el protocolo de construcción de la misma.

15 - Archivo disponible en https://ggbm.at/naaEb7xY

16 - El Protocolo de Construcción se encuentra en una ventana separada que aparece en el extremo derecho y da acceso a una tabla interactiva que expone todos los pasos de construcción y permite revisar/analizar el boceto/figura o construcción realizada, paso a paso.

Los primeros pasos del proceso de construcción de la figura de apoyo, que aparece en la Figura 27, para la demostración de la propiedad de la suma de los ángulos interiores del triángulo fueron explicados por nosotras. Iniciamos la demostración (ver Figura 27) de esta propiedad trazando las rectas paralelas, g y f, y las rectas transversales, h e i, y establecimos una primera relación, entre los ángulos **α** y **β** (son ángulos alternos internos). Como consecuencia de esta relación, los ángulos **α** y **β** son congruentes. Los estudiantes culminan la demostración, con un argumento similar entre los ángulos restantes (**δ** y **γ**), guiados por nuestras preguntas.

Por otro lado, para que los estudiantes pudieran deducir la propiedad de la desigualdad triangular analizando la construcción pertinente se les entregó una actividad guiada, para realizar usando GeoGebra (Figura 28).

Actividad: Utilizando GeoGebra, construir la figura que se describe en este instructivo:

- Trace un segmento AB de 5 cm.
- Con centro en B, trace una circunferencia de 3 cm de radio.
- Marque un punto C sobre el segmento AB, que se encuentre más cerca de B que de A. Trace una circunferencia con centro en A y que pase por C.
- Dibuje un triángulo con vértices en A, B y el punto de intersección de ambas circunferencias. Queda así dibujado el triángulo ABD.

a) ¿Se puede saber, sin medir, cuál es la longitud de cada uno de los lados el triángulo ABD? Justifique.

b) Mueva el punto C, acercándolo o alejándolo de B. ¿Cómo cambia la longitud de los lados del triángulo ABD? Explique.

c) Moviendo el punto C, busquen ubicaciones en las que se formen triángulos y otras en las que no se forme ninguno. ¿Es cierto que para que se formen triángulos, el lado AD debe ser mayor que 2 cm? ¿Por qué?

Figura 28. Actividad con GeoGebra para elaborar una conjetura sobre la propiedad de desigualdad triangular de los triángulos a partir de una construcción.

Esta actividad se resolvió en clase: los estudiantes se organizaron en grupos para trabajar, procurando que cada uno de ellos dispusiera de una netbook o teléfono celular con GeoGebra instalado. La gestión de la misma se desarrolló en dos momentos: en el primero, los estudiantes, realizaron una construcción con el software GeoGebra, guiada mediante las instrucciones que aparecen en la actividad que muestra la Figura 27; y luego se realizó, entre todos, una breve puesta en común sobre lo construido.

El segundo momento, consistió en la elaboración de respuestas a las tres preguntas (a, b y c) mediante la exploración, la prueba y el "juego" con la construcción realizada en el primer momento. Durante la tarea, las practicantes recorrimos el aula respondiendo dudas de los estudiantes, en su mayoría sobre el manejo de este software.

La corrección de esta actividad se realizó al frente de la clase con ayuda del proyector. Algunos estudiantes pasaron a realizar la construcción frente a sus compañeros, mientras el resto comentaba sus respuestas, solicitando la justificación pertinente. Al finalizar, la actividad culminó en el enunciado de la conjetura de la propiedad de desigualdad triangular.

La congruencia de triángulos: un contenido propicio para elaborar conjeturas acerca de la posibilidad, y unicidad, de la construcción de una figura.

En esta unidad, propusimos actividades para que la congruencia de figuras, presentada en la Unidad Didáctica N° 1, se aplique al caso particular de los triángulos.

Utilizamos una diapositiva en PowerPoint (Figura 29) para que los estudiantes visualicen la correspondencia entre los lados, y los ángulos, de dos triángulos congruentes.

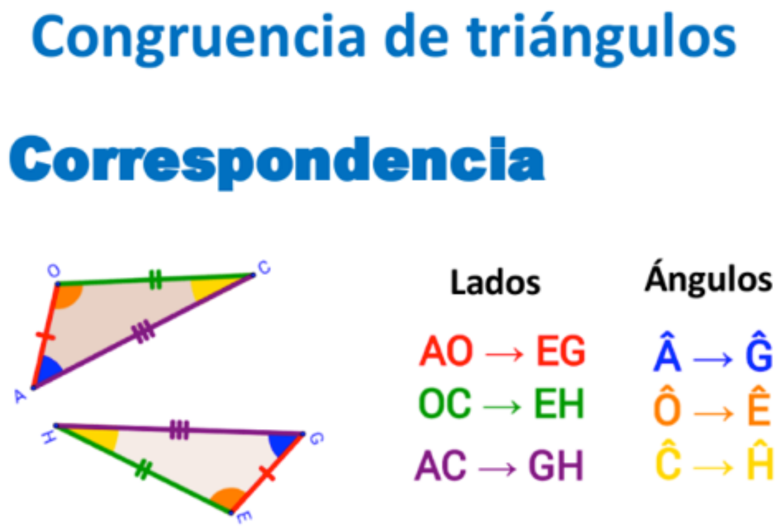


Figura 29. Diapositiva con la correspondencia de lados y ángulos entre dos triángulos congruentes.

Es interesante destacar que, al presentar la diapositiva, sólo aparecen las imágenes en blanco y negro de dos triángulos (AOC y HGE) congruentes y, durante la explicación, los lados y ángulos de estos triángulos van cambiando de color, de modo que los lados que se corresponden se pintan de un mismo color; y lo mismo sucede con los ángulos. De este modo, se obtienen, como resultado final, la diapositiva de la Figura 23. Consideramos importante usar esta posibilidad de PowerPoint como recurso didáctico para la comprensión de la idea de correspondencia entre elementos de figuras congruentes.

Con el objetivo de que los estudiantes dedujeran los criterios de congruencia de triángulos, elaboraran conjeturas y argumentaciones, con el uso de distintos recursos, creamos la actividad mostrada en la Figura 30.

Nuevamente, los estudiantes se reunieron en grupos para realizar la actividad y cada uno dispuso de una netbook o un teléfono celular con el software GeoGebra instalado para realizar las exploraciones, utilizar instrumentos de geometría y hojas de papel transparente provistas por nosotras.

Actividad

Utilizando el programa GeoGebra:

1- Utilizar el programa GeoGebra para construir y elaborar conjeturas con respecto a los siguientes enunciados y decidir si son Verdaderos (V) o Falsos (F). Si hay alguno falso, justificar con un contraejemplo:

a. Es posible construir un único triángulo sabiendo la medida de dos de sus ángulos.
b. Es posible construir un único triángulo sabiendo la medida de uno de sus lados y los ángulos con vértices sobre los extremos de dicho lado.
c. Se puede construir un único triángulo sabiendo la medida de dos de sus lados.
d. Se puede construir un único triángulo sabiendo la medida de los tres lados.
e. Es posible construir un único triángulo sabiendo la medida de uno de sus ángulos y de dos cualquiera de sus lados.
f. Se puede construir un único triángulo sabiendo la medida de dos de sus ángulos y uno cualquiera de sus lados.

2- Usar GeoGebra para construir triángulos que cumplan con los siguientes datos:

a. Las longitudes de los lados son: 4, 5 y 7.
b. Las longitudes de los lados son 5 y 6, y el ángulo comprendido es de 60°.
c. Las longitudes de los lados son: 2, 7 y 3.

Verifiquen cómo son estos triángulos con respecto a los de sus compañeros.

Utilizando regla, compás y papel de calcar:

3- Construir un triángulo sabiendo que dos de sus lados miden 3 cm y 5 cm, y uno de sus ángulos mide 30°. Calquen el triángulo que construyeron y superpónganlo con el realizado por dos o tres de los otros grupos formados por sus compañeros. ¿Cómo son los triángulos?

Figura 30. Actividad para la exploración de los criterios de congruencia de dos triángulos, con la mediación de distintos recursos didácticos.

Esta actividad es un ejemplo, entre los ejercicios propuestos, en donde se pide construir un triángulo con medidas dadas para dos de sus lados, y se invita a reflexionar al estudiante acerca de la unicidad de esa construcción; se espera que los estudiantes identifiquen que no es suficiente considerar solamente los lados para determinar un triángulo congruente con otro, y que reconozcan que a estos datos habría que agregar, por ejemplo, el ángulo comprendido entre estos lados proporcionados.

Es ahí donde se hace interesante la pregunta sobre la unicidad o no de la construcción; ¿si se modifica la posición de uno de los lados de un triángulo, sin variar su longitud, se obtiene otro triángulo distinto?. Seguida de: ¿Cómo hacemos para identificar que la construcción no es única?,¿Es posible construirlos todos?, ¿Cuántos son los triángulos que podrían construirse con las condiciones dadas?.

Es en este tipo de actividades de indagación de parte del estudiante, precisamente, donde la tecnología se vuelve sumamente valiosa al brindar la oportunidad de que los estudiantes puedan construir con gran facilidad muchos y diversos triángulos, y que además pueden mover y modificar sus representaciones para elaborar conjeturas e inferir propiedades.

Esta descripción de triángulo "único" congruente a otro fue debatida con los estudiantes durante la resolución y la puesta en común de la actividad. Esta noción de "único" hace referencia a que, si con una determinada cantidad de datos bridados, las construcciones que se obtienen son congruentes o no.

Haciendo referencia a la definición de figuras congruentes, para que dos triángulos sean congruentes, deberíamos verificar que se cumplan las seis correspondencias que aparecen en la Figura 23.

Sin embargo, estos criterios nos sirven para ver que no es necesario verificar siempre todas estas correspondencias, sino que ciertas combinaciones son suficiente. La intención de estas actividades consistió en promover un análisis para identificar cuáles son realmente los criterios que debemos dar para indicar la construcción única de un triángulo. Con criterios nos referimos a las condiciones mínimas y necesarias para determinar que dos triángulos son congruentes.

Este tipo de discusiones que se intentan motivar entre los estudiantes fueron necesarias para los objetivos que nos propusimos (la producción de conjeturas promovida por las experiencias de construcciones con GeoGebra, el reconocimiento de propiedades, la determinación de la unicidad en las construcciones, entre otros) y para crear nuevas situaciones donde los estudiantes produzcan textos argumentativos.

Luego de la puesta en común de la actividad, como resultado de las exploraciones anteriores, se construyó una síntesis a partir de las propuestas de los estudiantes; como resultado se establecieronlos criterios de congruencia de triángulos, lo cuales consensuamos que fueran enunciados como se muestra en la Figura 31.

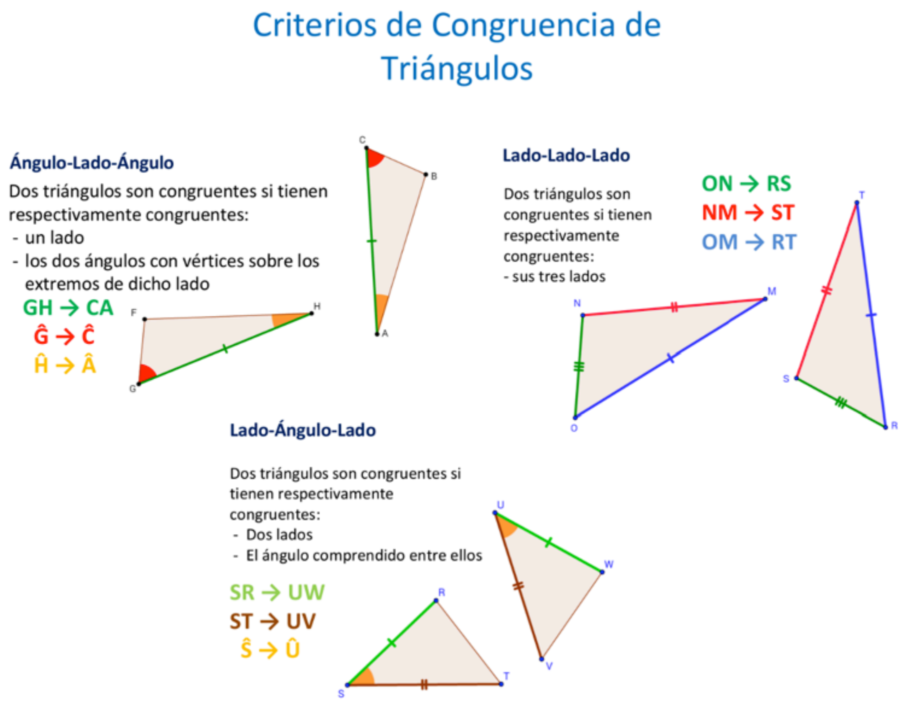
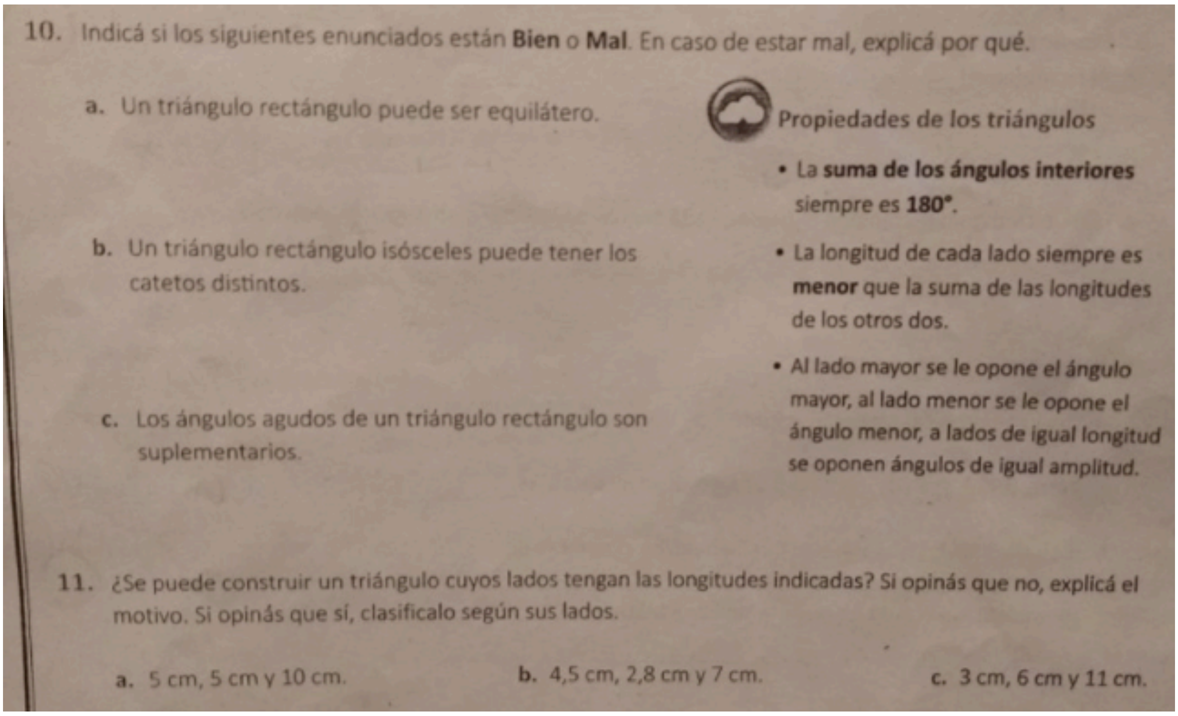


Figura 32. Criterios de congruencia como resultado de las actividades de exploración.

Actividades para los estudiantes

Tal como realizamos en las Unidades Didácticas anteriores, se propusieron actividades de aplicación de los criterios de congruencia, junto con actividades seleccionadas del libro de texto. A su vez, estas actividades requerían del estudiante la elaboración de conjeturas y la elaboración de textos argumentativos, habilidades trabajadas a lo largo de la propuesta. Estas actividades fueron sugeridas como tarea, de modo que no participamos en el proceso de su resolución.

La Figura 33 presenta dos de estas actividades. La primera actividad (Ejercicio 10) consistió en justificar sobre la veracidad o falsedad de las afirmaciones presentadas, las cuales combinaban las distintas clasificaciones de los triángulos. La segunda actividad (Ejercicio 11) era similar, sólo que en este caso, entre las construcciones de triángulos que había que determinar si era posible o no su realizaciòn.



10. Indicá si los siguientes enunciados están **Bien** o **Mal**. En caso de estar mal, explicá por qué.

a. Un triángulo rectángulo puede ser equilátero.

b. Un triángulo rectángulo isósceles puede tener los catetos distintos.

c. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son suplementarios.

Propiedades de los triángulos

- La **suma de los ángulos interiores** siempre es **180°**.
- La longitud de cada lado siempre es **menor** que la suma de las longitudes de los otros dos.
- Al lado mayor se le opone el ángulo mayor, al lado menor se le opone el ángulo menor, a lados de igual longitud se oponen ángulos de igual amplitud.

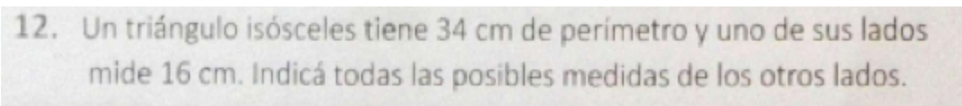
11. ¿Se puede construir un triángulo cuyos lados tengan las longitudes indicadas? Si opinás que no, explicá el motivo. Si opinás que sí, clasificalo según sus lados.

a. 5 cm, 5 cm y 10 cm. **b.** 4,5 cm, 2,8 cm y 7 cm. **c.** 3 cm, 6 cm y 11 cm.

Figura 33. Actividades para el usar las propiedades de los triángulos y establecer vínculos con sus clasificaciones.

Con estas actividades esperamos que los estudiantes, además de que reconocieran las propiedades de los triángulos, las relacionen con las distintas clasificaciones de estas figuras (según sus lados y según sus ángulos).

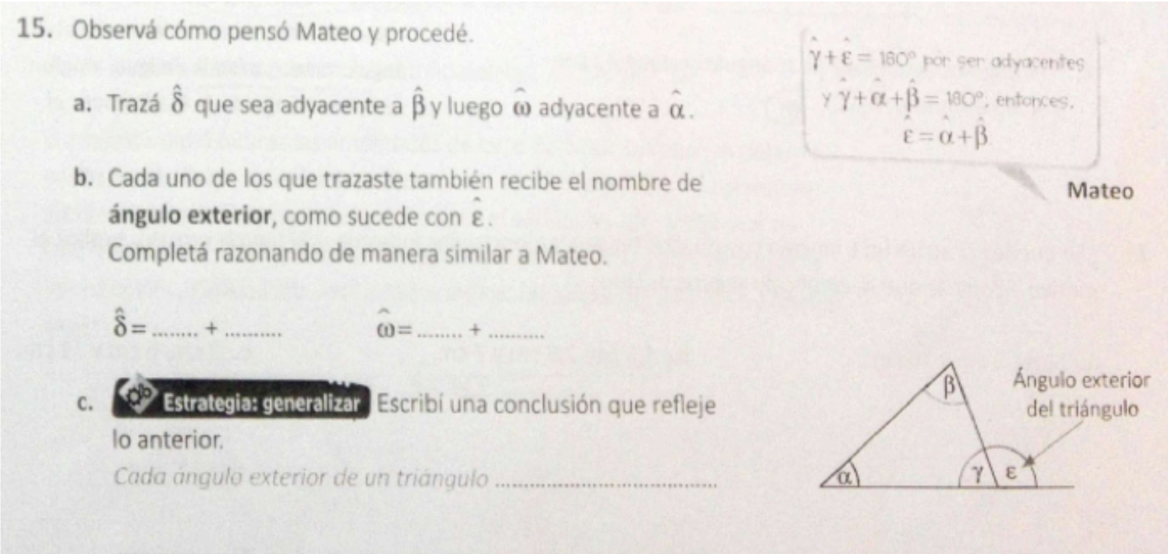
La actividad de la Figura 34 propuso la construcción de un triángulo, pero sólo proporciona la medida de uno de sus lados y el perímetro de la figura. Esta construcción tiene dos posibles soluciones, por lo que la actividad fue seleccionada con el propósito de que los estudiantes reconocieran, nuevamente, que en determinadas situaciones, no son suficientes sólo algunos datos para la construcción.



12. Un triángulo isósceles tiene 34 cm de perímetro y uno de sus lados mide 16 cm. Indicá todas las posibles medidas de los otros lados.

Figura 34. Actividad para estudiar los datos suficientes y necesarios para construir un triángulo.

La actividad de la Figura 35 muestra la reflexión de un niño en la que concluye que la medida de uno de los ángulos adyacentes a un ángulo interior de un triángulo es igual a la medida de la suma de los dos ángulos interiores restantes.


15. Observá cómo pensó Mateo y procedé.

a. Trazá $\hat{\delta}$ que sea adyacente a $\hat{\beta}$ y luego $\hat{\omega}$ adyacente a $\hat{\alpha}$.

b. Cada uno de los que trazaste también recibe el nombre de **ángulo exterior**, como sucede con $\hat{\varepsilon}$.
Completá razonando de manera similar a Mateo.

$\hat{\delta}$= .... + ... $\hat{\omega}$= .... + ...

c. Estrategia: generalizar Escribí una conclusión que refleje lo anterior.
Cada ángulo exterior de un triángulo ....

Figura 35. Actividad para reconocer los ángulos exteriores de un triángulo y sus propiedades.

La actividad invita a seguir el mismo razonamiento con los otros dos ángulos interiores y concluye en que estos ángulos adyacentes a los ángulos interiores de los triángulos se denominan "ángulos exteriores" del triángulo. Como último paso, los estudiantes debían escribir esta propiedad de los ángulos exteriores.

Esta actividad fue seleccionada con el propósito de presentar a los estudiantes los ángulos exteriores de un triángulo y poner en práctica la escritura de textos matemáticos.

Sobre las actividades anteriores, los estudiantes expresaron que no tuvieron mayores dificultades para resolverlas de manera individual, por lo que no fueron corregidas con todo el grupo.

Para aplicar los criterios de congruencia de triángulos en la demostración de propiedades de ciertas figuras se desarrollaron junto con los estudiantes dos argumentos (ver Figura 36 y 37).

La Figura 36 muestra la demostración de que la altura de un triángulo isósceles lo divide en dos triángulos congruentes. La Figura 37, aparece el argumento que justifica que la diagonal de un cuadrado lo divide en dos triángulos congruentes.

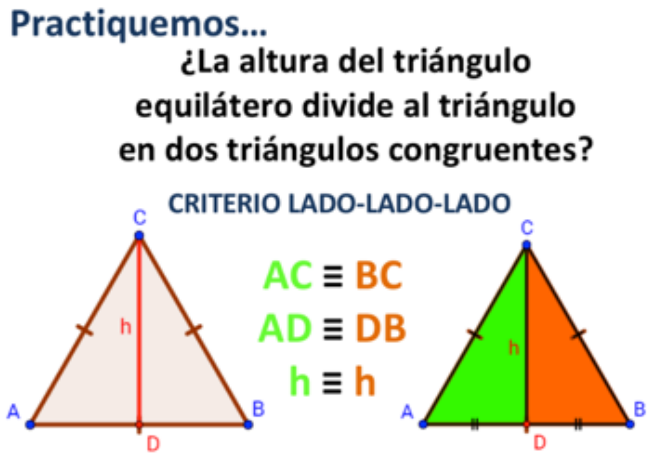


Figura 36. Criterios de congruencia: aplicación a la altura del triángulo isósceles.

Figura 37. Criterios de congruencia: segundo ejemplo de aplicación.

Siguiendo con nuestra estrategia de construir junto con los estudiantes un texto argumentativo para demostrar propiedades y usando el recurso de introducir uno a uno los argumentos en una diapositiva de PowerPoint, pudimos aplicar contenidos y procedimientos de las tres Unidades Didácticas.

En un primer momento, solicitamos a los estudiantes que justifiquen el criterio de congruencia de triángulos pertinente a cada caso, dependiendo de la información disponible. En este momento, conducimos el debate oral de los estudiantes. Una vez acordado entre todos el criterio apropiado para demostar la congruencia entre estos dos triángulos, los estudiantes expresaban de manera oral las relaciones que aparecen en las Figuras 36 y 37, y nosotras las "hacíamos aparecer" en nuestro PowerPoint. De este modo, realizamos la elaboración de los textos argumentativos. Para finalizar, cada estudiante los copió en sus carpetas.

En el caso de que los argumentos admitieran más de un criterio de congruencia, esto se discutía con los estudiantes.

2.2.4 Evaluación de los aprendizajes

Durante el periodo de prácticas se establecieron tres momentos evaluativos formales, representados por tres instrumentos: en una primera instancia se tomó un trabajo práctico evaluativo grupal, en una segunda instancia una evaluación escrita individual y, al finalizar el trimestre, una evaluación escrita de naturaleza integradora y trimestral.

> "(...) La evaluación es una exigencia esencial de control en toda institución educativa, pero es también la forma en que el docente puede ir obteniendo información sobre el estado en que se encuentran los alumnos en relación al contenido y a los fines promovidos por la enseñanza (...)" (Gvirtz & Palamidessi, 1998, p.21)

Las dos primeras instancias evaluativas, como expresan Gvirtz & Palamidessi, fueron tanto formativas como sumativas. Es decir, fueron sumativas ya que incorporan resultados finales de aprendizaje, más que procesos; fueron calificadas con un valor numérico que luego, promediados, corresponden al 50% de la nota final del trimestre; fueron formativas puesto que no quedaron sólo en la obtención de una calificación, sino que luego de cada instancia se dedicó tiempo a la identificación de problemas comunes, aclaración de dudas, búsqueda de soluciones y adaptación de la propuesta educativa en base a los resultados.

A diferencia de esto, el examen trimestral es de carácter integrador, es decir, de tipo sumativo puesto que simboliza un cierre de un ciclo, certifica cuando una etapa se ha culminado (en este caso un trimestre).

En general la elección de las actividades designadas en los tres momentos evaluativos formales fue pensando en integrar conceptos, en valorar argumentaciones propias y ajenas, comparar situaciones, aplicar conceptos en diversas situaciones, calcular usando conocimiento de las definiciones, pero por sobre todo en la capacidad de combinar conceptos, producir y argumentar los producido.

Para el registro de notas en cada instancia optamos por elaborar planillas de Microsoft Excel. Para cada instancia se elaboró una tabla con los puntajes totales asignados a cada actividad, una tabla con el porcentaje de puntaje de cada actividad destinado a cada criterio de evaluación establecido, y finalmente una tabla para cada estudiante en la que se consignó el puntaje obtenido en cada actividad y la nota total del examen.

Trabajo Práctico Evaluativo Grupal

La primera de las actividades de evaluación, en orden cronológico, la constituyó el trabajo práctico grupal, al finalizar la segunda Unidad Didáctica. Este momento evaluativo tuvo una duración de 40 minutos e incluyó un total de 4 actividades destinadas tanto a la producción de textos argumentativos como al cálculo numérico. Durante todo el desarrollo de esta instancia se proyectó sobre el pizarrón la animación a la que hace referencia la Actividad 4 de la misma.

Los criterios de evaluación que mantuvimos fueron:

- Interpretación de las consignas: no se respondieron dudas acerca de las consignas, los estudiantes debían interpretarlas y responder a ellas coherentemente.
- Justificación de las respuestas: se esperaba que las respuestas fueran debidamente justificadas/argumentadas cuando fuera necesario y/o solicitado.
- Coherencia en los textos argumentativos: Se evaluó lo visto en clase con respecto a la estructura de los textos argumentativos y uso de propiedades en momentos pertinentes.
- Uso del lenguaje matemático adecuado en cada situación, incluyendo simbología y terminología adecuada.
- Presentación: presentación ordenada, señalamiento de cada actividad, letra clara.

Una síntesis de estos criterios fue especificada en el encabezado del trabajo práctico.

A continuación presentamos las actividades que se incorporaron a este trabajo práctico, junto con un breve análisis:

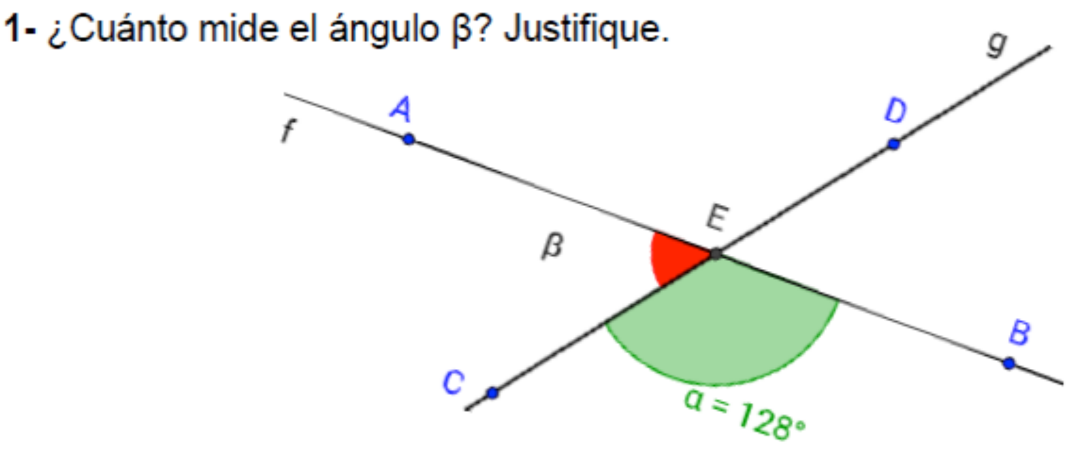
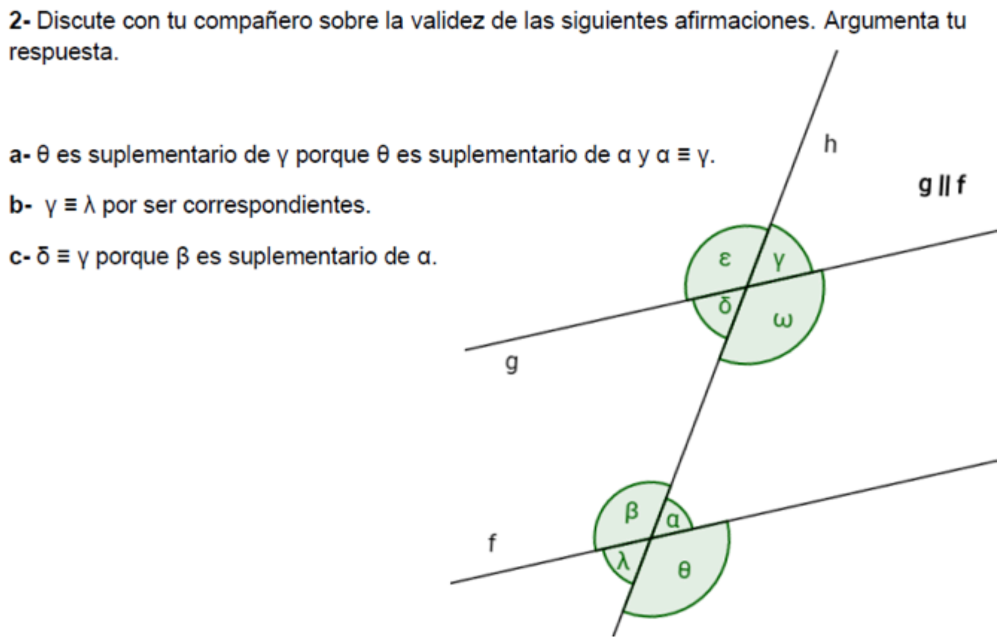


Figura 38. Actividad para calcular y argumentar.

En la actividad de la Figura 38 pudimos observar una combinación entre lo que es, por un lado, el cálculo de la medida del ángulo **β** en base a relaciones o definiciones conocidas y, por otro lado, la justificación sobre la validez del razonamiento realizado. Se esperaba que los estudiantes pudieran combinar y utilizar en una misma actividad los criterios de análisis sobre definiciones tratados en la primera unidad didáctica junto con los textos argumentativos tratados en la segunda unidad para así realizar una producción coherente que justifique su procedimiento para obtener la solución a la pregunta.

El puntaje asignado a esta actividad fue particionado, una porción fue destinada al cálculo o resultado numérico y otra a la justificación dada. Como la argumentación o justificación se encontraba dentro de los objetivos planteados para la práctica, la porción mayor del puntaje fue destinada a este aspecto.


2- Discute con tu compañero sobre la validez de las siguientes afirmaciones. Argumenta tu respuesta.

a- θ es suplementario de γ porque θ es suplementario de α y α ≡ γ.

b- γ ≡ λ por ser correspondientes.

c- δ ≡ γ porque β es suplementario de α.

Figura 39. Actividad para argumentar razonamientos ajenos.

La Actividad 2 del trabajo grupal (Figura 39) se pretendió evaluar la capacidad de decidir sobre la validez de uno u otro razonamiento, y argumentar esta decisión. Podemos ver como el ejercicio combinaba saberes con respecto a las dos primeras unidades didácticas, por ejemplo, definiciones de ángulos suplementarios y determinados por dos paralelas cortadas por una transversal; y argumentación.

Al igual que en la primera actividad, el puntaje total asignado aquí fue dividido en dos: una porción fue destinada a la argumentación dada y la otra al cálculo o resultado numérico, siendo la argumentación el aspecto con mayor puntaje.

3- Calcule la medida de cada uno de los ángulos:

β =
γ =
δ =
ε =
λ =
θ =
ω =

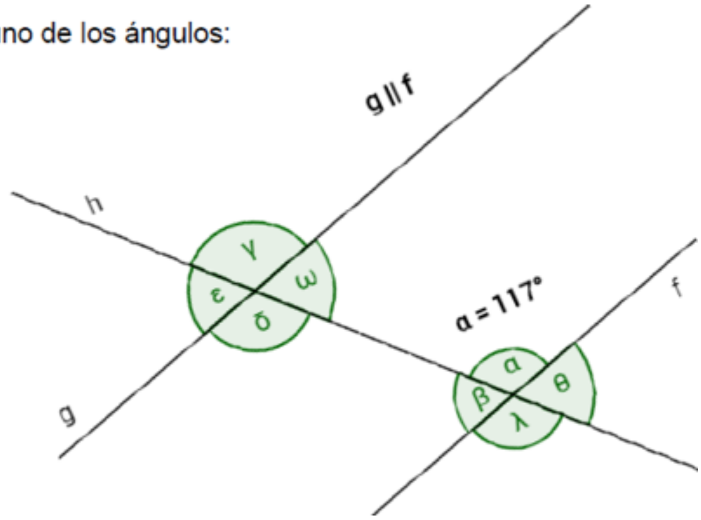


Figura 40. Actividad para calcular el valor numérico de los ángulos.

El la tercera actividad (Figura 40), se esperaba que los estudiantes realizaran los cálculos de las amplitudes de los ángulos y no requiere ningún tipo de justificación. Todo el puntaje de esta actividad fue destinado al cálculo o resultado numérico.

4- Con ayuda de la animación proyectada al frente, elaborar un texto argumentativo donde se justifique porqué los pares de ángulos alternos internos son congruentes.

Figura 41. Actividad para producir un texto argumentativo.

En la última actividad (Figura 41 y 42) se pidió a los estudiantes que redactaran un texto argumentativo, por lo que entraron en juego: los conocimientos de estructura y formato del mismo, la comprensión sobre los conceptos "ángulos alternos internos entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal" y "congruencia", el aprendizaje sobre argumentación y la interpretación de la animación de GeoGebra (Figura 42).

Algunos conocimientos que atravesaron todo el Trabajo Práctico fueron: notación y lenguaje pertinente de escritura, capacidad de combinar contenidos, interpretación de consignas e información sobre la posición relativa de distintos pares de ángulos en un dibujo, e identificación de antecedente y consecuente en una implicación.

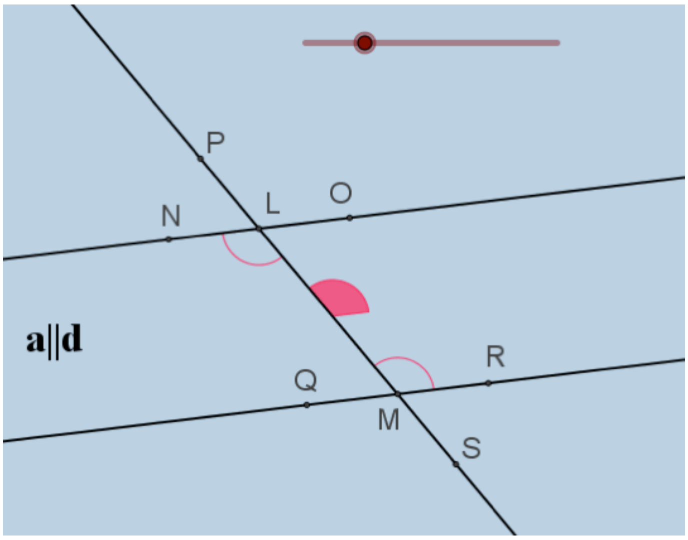


Figura 42. Animación de GeoGebra sobre ángulos alternos internos[17].

A continuación, presentamos una tabla con la distribución de puntajes en las actividades del Trabajo Práctico grupal (Tabla 4).

Ejercicios	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	4	Total
Puntos	2	1	1	1	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	3	9,96
Justificación	1,2	0,8	0,8	0,8	0	0	0	0	0	0	0	3	6,6
Cálculo	0,8	0,2	0,2	0,2	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28	0	3,36

Tabla 4. Distribución de puntajes en las actividades del trabajo práctico grupal.

Fueron disociados dos aspectos de la resolución de las actividades: por un lado, la respuesta o resultado numérico y, por otro lado, la justificación o argumentación del mismo. No todas las actividades poseyeron puntaje en ambos aspectos. Podemos observar que, por ejemplo, la actividad 3 (Figura 30) sólo tenía puntaje de cálculo, a diferencia de la actividad 4 (Figura 31) que todo su puntaje fue asignado a la capacidad de argumentación.

Realizando un análisis de los puntajes representados en la Tabla 4, obtenemos que el puntaje total del examen representó en un 40% al cálculo u obtención de valores o respuestas numéricas, y en un 60% a la justificación y argumentación de enunciados. Esto muestra

17 - Animación disponicle en https://ggbm.at/uqwESFNs.

el corrimiento del objetivo de aprendizaje mencionado anteriormente, debido a los saberes previos de los estudiantes y objetivos del plan de estudios de la institución.

A continuación presentamos un gráfico con los resultados cuantitativos de los trabajos prácticos grupales (Figura 43), donde podemos observar que más del 80% aprobó esta primer instancia evaluativa formal, discriminados por cursos. Es importante aclarar que en esta institución los estudiantes promueven a partir del 7 (siete), calificación equivalente al 70% del puntaje total.

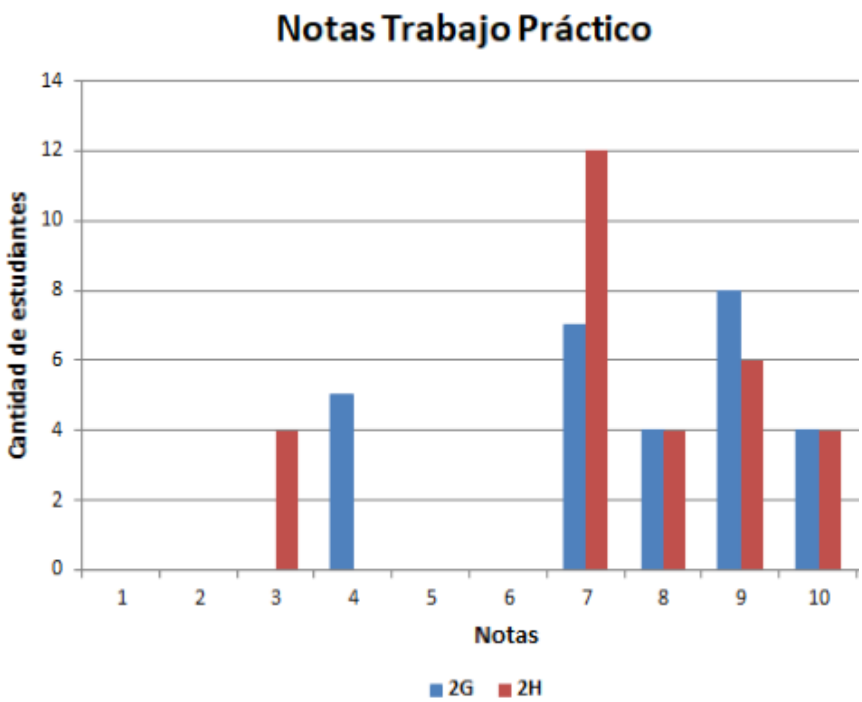


Figura 43. Gráfico de barras de las notas reportadas en ambos cursos en el trabajo práctico grupal.

Evaluación escrita individual

La evaluación escrita individual se realizó al finalizar la Unidad Didáctica N°3. Este examen tuvo un tiempo de duración de 40 minutos, contó con 3 actividades y fue de carácter individual. Se conservaron los criterios de evaluación establecidos para la primera instancia evaluativa y fueron nuevamente especificados en el encabezado del examen.

A continuación presentamos las actividades, junto con un breve análisis:

Con esta actividad (Figura 44) se buscaba evaluar la capacidad de los estudiantes de identificar las relaciones entre los objetos presentes en la imágen, interpretarlas, aplicar el criterio de congruencia de triángulos pertinente y comunicar la argumentación de forma escrita, teniendo en cuenta los formatos y recursos trabajados en clase.

1) (2 puntos) Usar los criterios de congruencia que considere necesarios para argumentar la siguiente afirmación:

Los triángulos ADE y ABC son congruentes.

____

____

____

____

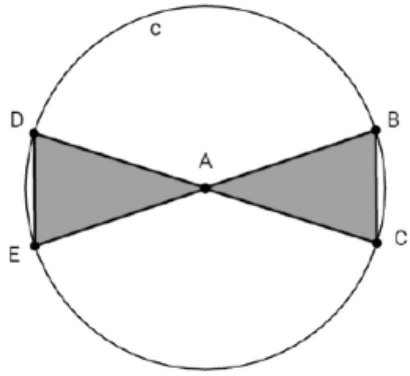


Figura 44. Actividad para usar criterios de congruencia y argumentar.

2) (6 puntos) Determinar si con la información que se proporciona en cada uno de los siguientes enunciados es posible o no realizar la construcción. Justifica tu respuesta.

a) Un triángulo con dos lados de 4,5 cm y los tres ángulos de diferentes amplitudes.

____

____

b) Un triángulo con lados de 3 cm, 5 cm y 8 cm.

____

____

c) Un triángulo acutángulo con dos ángulos de 20°.

____

____

d) Un triángulo equilátero con un ángulo de 80°.

____

____

e) Un triángulo con ángulos de 67°, 34° y 84°.

____

____

Figura 45. Actividad para aplicar propiedades de los triángulos.

Con la actividad de la Figura 45 se intentó que los estudiantes pusieran en evidencia sus conocimientos sobre la construcción de triángulos, pretendiendo evaluar la capacidad de los estudiantes al validar y evaluar razonamientos ajenos, y argumentar sobre el valor de verdad de las proposiciones; utilizando las propiedades exploradas previamente en GeoGebra (revisar la sección 2.2.3).

3) (2 puntos) Marque con una cruz la o las opciones correctas:

a) ¿Cuál/es de estos tipos de triángulos no existe?

- ☐ Isósceles rectángulo.
- ☐ Acutángulo escaleno.
- ☐ Escaleno obtusángulo.
- ☐ Equilátero obtusángulo.
- ☐ Rectángulo escaleno.

b) Dos de los ángulos de un triángulo miden 39° y 47°, entonces el triángulo es:

- ☐ Escaleno acutángulo.
- ☐ Obtusángulo escaleno.
- ☐ Isósceles obtusángulo.
- ☐ Rectángulo escaleno.

Figura 46. Actividad para determinar clasificaciones posibles de los triángulos.

La actividad 3 de esta evaluación (Figura 46) tuvo el formato de múltiple choice o de selección múltiple. No evaluaba la capacidad o la calidad de escritura del estudiante puesto que ya fue evaluada en las actividades anteriores, sino que valoraba conocimientos concretos, y su tiempo de resolución y corrección es menor.

A continuación se presenta una tabla con la distribución del puntaje en las actividades de la evaluación (Tabla 5). Podemos observar que no hay puntaje asignado al cálculo numérico como en el trabajo práctico grupal, debido a que la evaluación refiere específicamente a valorar competencias argumentativas.

Ejercicios	1	2a	2b	2c	2d	2e	3a	3b	Total
Puntos	2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1	1	10

Table 5. Distribución de puntajes en las actividades de la evaluación.

Cabe resaltar que al no haber en la evaluación puntaje destinado al cálculo, los resultados obtenidos son puramente por capacidades argumentativas, lo que da indicio de una mayor adaptación y apropiación por parte de los alumnos de los contenidos en relación a la primera instancia evaluativa. Podemos observar en el gráfico de barras (Figura 47) que nuevamente más del 80% aprobó el exámen.

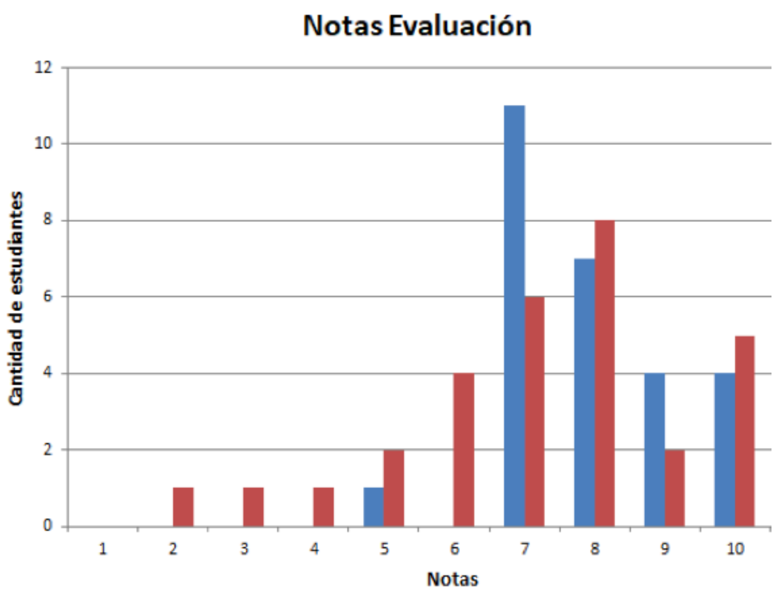


Figura 47. Gráfico de barras de las notas reportadas en ambos cursos en la evaluación escrita individual.

Examen trimestral o de carácter integrador

El trimestral es un examen individual establecido por la institución que se realiza al finalizar cada trimestre. Durante una semana y media, los estudiantes asisten a la institución sólo para rendir estos exámenes, antes de dar apertura al nuevo trimestre.

Este examen tiene una duración de 60 minutos; es de especial importancia en la institución ya que incorpora todos los contenidos desarrollados durante el trimestre correspondiente, y su puntaje representa el 50% de la calificación final del mismo.

La culminación de nuestras prácticas coincidió con el final del segundo trimestre, por lo que los docentes de ambos cursos convergieron en que sería una buena instancia para adquirir más experiencia y nos permitieron tomar este examen.

Las figuras de la 48 a la 53 a continuación muestran los criterios de evaluación y las actividades incorporadas en el trimestral. Estas actividades fueron seleccionadas y modificadas de una lista de actividades más extensa propuesta, en base a criterios expresados por los docentes correspondientes a ambos cursos en reuniones previas al examen. Cabe aclarar que si bien el examen fue preparado en base a una primera lista de actividades sugeridas por nosotras, optamos porque la selección y modificaciones de las actividades definitivas sea realizada por los docentes de los cursos debido al gran valor que la institución le otorga a este examen.

A evaluar:

Integración de contenidos y uso de propiedades, relaciones y correspondencias entre objetos estudiados y sus elementos (triángulos y ángulos) en diversas situaciones.

Figura 48. Criterio de evaluación del examen trimestral.

1-(2 puntos) Calcule el valor de ĥ, ŝ e ŷ. Justifique.

____

____

____

____

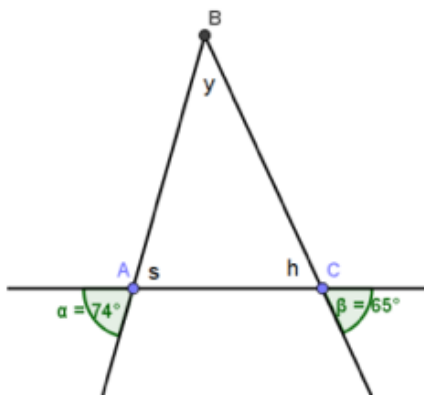


Figura 49. Actividad para calcular, aplicar propiedades de ángulos y triángulos y argumentar.

2- (3 puntos) Mirando el gráfico, calcule el valor de los siguientes ángulos y **explique brevemente** cómo obtuvo cada resultado.

a) El ángulo η y el ángulo θ.
b) El ángulo κ y el ángulo λ.

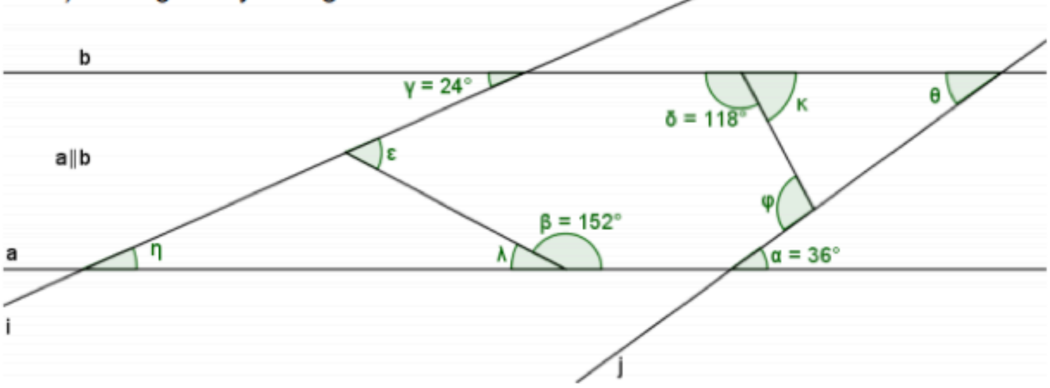


Figura 50. Actividad para calcular, aplicar propiedades de ángulos y triángulos y explicar.

3- (1 punto) En la imagen, ABCD es un rectángulo, AC y BD son sus diagonales. Marque la/las opciones verdaderas.

a) ΔAED ≡ ΔCEB

b) ΔAEB ≡ ΔCEB

c) ΔACD ≡ ΔBDC

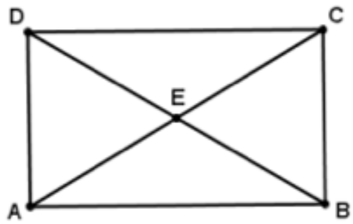


Figura 51. Actividad para evidenciar la comprensión de congruencia de triángulos.

4- (2 puntos) El hexágono inscripto en la circunferencia es regular. Justifique por qué los triángulos ΔAGB y ΔCGD son congruentes. Escribe un texto argumentativo.

____

____

____

____

____

____

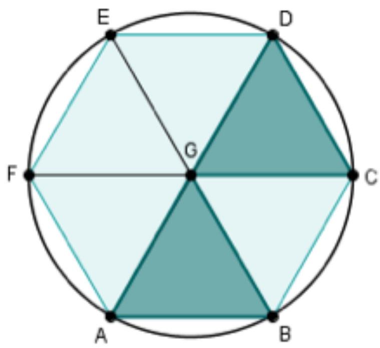


Figura 52. Actividad para argumentar la congruencia de triángulos.

5- (2 puntos) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justifique brevemente** sus respuestas.

a) Existe un triángulo isósceles con un ángulo de 60° y otro de 80°.

b) No existe un triángulo rectángulo equilátero.

Figura 53. Actividad para vislumbrar la comprensión de las distintas clasificaciones de triángulos.

A continuación presentamos una tabla con los puntajes correspondientes a las distintas actividades de la evaluación trimestral (Tabla 6). Estos puntajes fueron asignados por decisión conjunta con los docentes titulares de ambos cursos, además de optar por mantener la proporción, cálculo 40% y justificación 60%, en la distribución de los mismos.

Ejercicios	1	2a	2a	2b	2b	3	4	5a	5b	Total
Puntos	2	0,75	0,75	0,8	0,75	1	2	1	1	10
Justificación	1	0,4	0,4	0,4	0,4	0	2	0,7	0,7	6
Cálculo	1	0,35	0,35	0,4	0,35	1	0	0,3	0,3	4

Tabla 6. Distribución de puntajes en las actividades del trimestral.

Podemos apreciar como los puntajes obtenidos por los estudiantes subieron notablemente en el trimestral, donde sólo 2 alumnos desaprobaron, es decir que más del 95% obtuvo notas de 7 o más puntos (Figura 54).

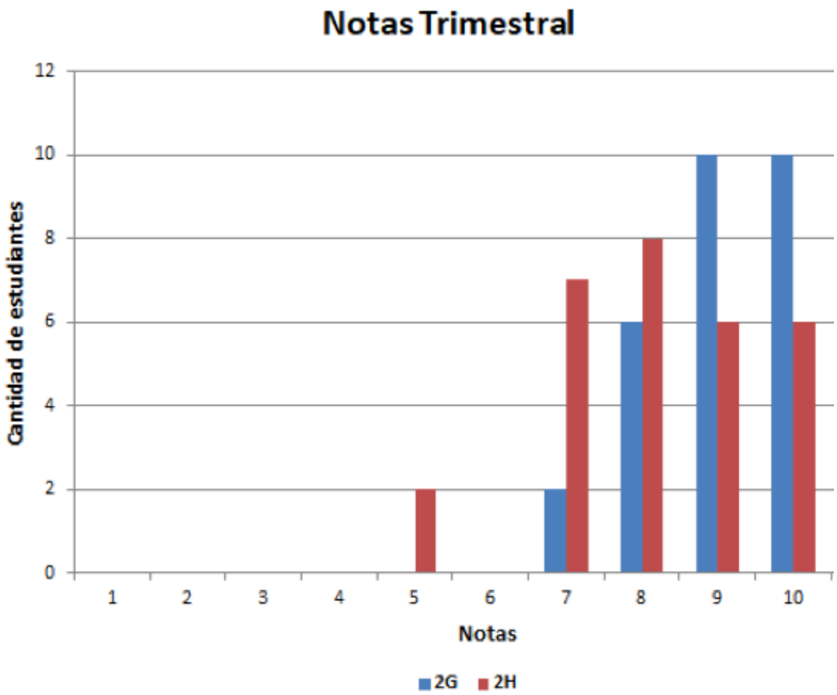


Figura 54. Gráfico de barras de la distribución de notas reportadas en ambos cursos en el examen trimestral.

CAPÍTULO 3

Análisis de una actividad propuesta para promover el desarrollo de las capacidades argumentativas en los estudiantes

3.1 Introducción

En este capítulo analizamos una actividad de nuestra propuesta de enseñanza colocando la atención en el desarrollo de las capacidades argumentativas de nuestros estudiantes.

Entre los objetivos del plan de estudios de la institución en donde realizamos nuestras prácticas, aparece el desarrollo del pensamiento crítico y la formación argumentativa de sus estudiantes. Este hecho nos resultó interesante debido a que la argumentación se encuentra de manera explícita en los Diseños Curriculares.

Otro aspecto que se encuentra presente en los diseños curriculares y que utilizamos en nuestras prácticas para congeturar y motivar argumentaciones formales, fue la tecnología.

Sin embargo, llamó nuestra atención los testimonios de profesores de la institución que afirmaban que la elaboración de textos argumentativos es tratada en 4to año, dentro de la asignatura Lengua. Además, observamos que los estudiantes experimentaron un proceso de evolución en su capacidad de argumentar manifiesta a lo largo de las evaluaciones que propusimos en la práctica: desde calcular la amplitud de ángulos correctamente y justificar de manera precaria, hasta elaborar breves demostraciones formales para el caso de justificar la congruencia de triángulos.

Estos hechos nos llevaron plantearnos las siguientes preguntas: Nuestra propuesta de enseñanza se focalizó en, ¿las explicaciones, argumentaciones o demostraciones?; ¿Cómo podemos evaluar el uso de tecnologías digitales como recurso en la transición de la prueba empírica a la formal?

Aclaramos que, si bien el título de este capítulo refiere a capacidades, esclarecemos a qué nos referimos cuando hablamos de competencias, ya que consideramos a la competencia como la capacidad y disposición de un buen desempeño en contextos complejo.

3.1.1 La capacidad de argumentar en la formación de los estudiantes de secundaria

La argumentación es una actividad esencial en el quehacer matemático, establecida para la educación obligatoria, y en particular, en el aula de matemática. Esta actividad, en la formación de los estudiantes, cumple un rol fundamental en el proceso de enseñanza, guía la acción educativa, genera procesos de comunicación entre pares, y entre el educador y el educando (Bermúdez, 2014). A su vez, la argumentación, propicia el trabajo colaborativo en el aula, definiendo una tarea particular para el profesor en cuanto mediador en la interacción que emerge cuando se elaboran justificaciones.

Coincidimos con Bermúdez, en que "la argumentación es un estilo de enseñanza que ***garantiza el pensamiento racional, consciente y duradero*** del estudiante, porque todo lo que construye en esa actividad lo hace desde la acción, el proceso, y la reflexión hasta llegar a la construcción misma del objeto matemático" (Bermúdez, 2014, p. 3).

Dentro de los objetivos, relacionados con nuestra temática, establecidos para 2do año en el Diseño Curricular del *Ciclo Básico de La Educación Secundaria* del Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba (2011-2015) se encuentra: (a) la elaboración de argumentaciones acerca de la validez de las propiedades de las figuras bidimensionales (triángulos, cuadriláteros y círculos) para analizar afirmaciones; (b) la producción de argumentaciones con base en propiedades para justificar construcciones de rectas paralelas y (c) la elaboración de argumentaciones sobre condiciones necesarias y suficientes para congruencia de triángulos construidos.

Además, en estos Diseños Curriculares, observamos que la argumentación no se presenta independiente de ciertos recursos didácticos: "*Producir y analizar construcciones geométricas -utilizando cuando sea posible software geométrico- acudiendo a argumentos deductivos, según ciertas condiciones y propiedades puestas en juego, reconociendo el límite*

de las pruebas empíricas. " (p. 37). Entendemos por conocimiento empírico al aprendizaje adquirido a través de las experiencias y observaciones personales o colectivas.

Por otro lado, coincidimos con (Clark & Sampson, 2007; De Vries, Lund & Baker, 2002; Jonassen, 2010; Leitão, 2007, Chávez, Caicedo; 2014) quienes dicen que la argumentación posee diversos aspectos favorables o positivos: propicia la clarificación y organización del pensamiento, facilita la identificación y reparación de vacíos conceptuales, posibilita la solución de problemas complejos, brinda herramientas para el análisis riguroso de información, exige actividad cognitiva superior, promueve la construcción de conocimiento, y se constituye en una actividad fundamental para la enseñanza y ejercicio de las ciencias.

La elaboración de argumentos no es el único aspecto de esta actividad. Por ejemplo, De Gamboa, Planas y Edo (2010) sostienen que es esencial el trabajo de prácticas argumentativas donde se aprenda, también, a reconocer argumentos válidos y que, junto con el desarrollo de razonamientos analíticos, permiten la adquisición progresiva de estas habilidades.

En resumen, el currículum prescribe explícitamente la necesidad de implementar clases donde los estudiantes aprendan a argumentar en el aula de matemática. Además, se señala la importancia de los recursos como las tecnologías para el aprendizaje de esta capacidad. El núcleo de este capítulo gira en torno al concepto de argumentación en el aula de matemática, quedando de esta manera justificada la relevancia y el interés en profundizar en el estudio de este aspecto de nuestra práctica.

3.1.2 ¿Qué es una capacidad?

A continuación, presentamos una breve referencia con respecto a la noción de capacidad, empleando el término más amplio de competencia.

La UNESCO define una competencia como: el conjunto de comportamientos socioafectivos y habilidades cognoscitivas, psicológicas, sensoriales y motoras que permiten llevar a cabo adecuadamente un desempeño, una función, una actividad o una tarea. (1996)

Entonces, inferimos que una competencia refiere a:

"(...) una capacidad que incluye saber (datos, conceptos, conocimientos), saber hacer (habilidades, destrezas, métodos de actuación), saber ser (actitudes y valores que guían el comportamiento) y saber estar (capacidades relacionada con la comunicación interpersonal y el trabajo cooperativo) (...)" (Giral, F.; Giral, A.; Giral, J.; 2017; p.147)

En resumen, las competencias son el conjunto de capacidades que el sujeto pone en juego para realizar una tarea.

3.1.3 Explicar, argumentar o demostrar

Una cuestión que surgió durante la lectura de distintos autores y los Diseños Curriculares consiste en la distinción entre las actividades de explicar, argumentar y demostrar, que aparecen relacionados entre los objetivos para la enseñanza de las matemática de secundaria. Una cuestión a dirimir es el rol que cada una de éstas debe jugar en ese contexto.

En relación a la explicación, Balacheff (1982) expresa que consiste en una una idea primitiva de la cual derivan las de prueba y demostración; la explicación es un discurso que "pretende hacer inteligible el carácter de verdad, adquirido para el locutor, de una proposición o de un resultado" (Balacheff, 1982; citado en Crespo, 2014, p. 25). Por otro lado, tanto Codina y Lupiáñez (1999) como Goizueta (2013) presentan definiciones similares sobre la explicación: ambos autores coinciden en que la explicación tiene una función primordialmente descriptiva. Goizueta (2013) afirma, además, que explicar implica hacer comprensible un hecho o fenómeno presentándolo en conexión con otros hechos o que resultan coherentes en una situación particular.

Estos autores, Goizueta (2013) y Codina y Lupiañez (1999), parten de la definición presentada por Duval (1993)que hace referencia a que en la explicación los enunciados tienen una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento.

En relación a la argumentación

Para Duval en esa actividad se trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición. Se propone lograr la convicción del otro o de sí mismo, respetando criterios de pertinencia de los argumentos en la situación particular (Duval, 1993).

Goizueta (2013), al igual que Boero, Douek y Ferrari (2002) y Douek (2007), define argumentación (en general) siguiendo al Webster Dictionary[18]: “el acto o proceso de formar razones y sacar conclusiones y aplicarlas al caso en discusión”.

Un argumento es, siguiendo en coincidencia con los autores mencionados, una razón o razones ofrecidas a favor o en contra de una proposición, opinión o medida. De ahí, una argumentación es el acto de formar razones ofrecidas a favor o en contra de una proposición, opinión o medida (Goizueta, 2013).

La argumentación es un proceso donde el estudiante debe hacer referencia al porqué de lo que hace mediante la exposición de razonamientos para justificar un procedimiento o idea matemáticos. El proceso argumentativo se realiza desde dos habilidades propias del lenguaje: la oralidad y la escritura. La argumentación es una forma de participación en el aula que permite la interacción, el razonamiento, los juicios de valor, la justificación de los procedimientos que en ella se realizan. A su vez, la argumentación permite inferir la forma en cómo comprenden un concepto matemático los estudiantes.(Bermúdez, 2014; p.4)

En relación a la demostración

Duval (1993) utiliza el término demostración para referirse a una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas. Según Duval, el objeto de una demostración es la verdad y, por lo tanto, obedece a criterios de validez.

Por otro lado, los autores Godino y Recio (2001) coinciden en que una demostración es aquello que los matemáticos aceptan como demostración: “prueba es una explicación aceptada por una comunidad en un momento dado, (...), y si un enunciado se conoce como verdadero

18 - Véase: http://www.merriam-webster.com/dictionary/argumentation (consultado en octubre de 2017).

y bien definido, a estas pruebas las llamaremos demostraciones" (Balacheff, 1982; citado en Codina & Lupiañez, 1999, p.3)

Entonces, en una demostración, el centro de atención es la prueba formal de la demostración.

Entre los matemáticos profesionales la noción de demostración se encuentra, de algún modo, en discusión debido al creciente uso de las nuevas tecnologías en la investigación en matemáticas y la aceptación de las denominadas "matemáticas experimentales" (Goizueta, 2013, p. 9). Una nueva perspectiva acerca de la conjetura y, la aceptación por parte de publicaciones especializadas de trabajos "menos rigurosos", estaría cambiando la noción inicial de algunos matemáticos sobre la demostración por una más "laxa" (Goizueta, 2013).

3.1.4 El rol de las tecnologías

Diversas investigaciones coinciden en sus conclusiones en que los entornos tecnológicos poseen una gran potencialidad para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Drijvers, Kieran y Mariotti; en Rojano, 2014), la cual se traduce en:

* Un impacto en el nivel epistemológico.
* La posibilidad de un acercamiento experimental y práctico al aprendizaje de la geometría.
* La factibilidad de una iniciación temprana al aprendizaje del álgebra y el estudio de la matemática de la variación.
* El logro de la transversalidad en la enseñanza de distintas materias de estudio
* La emergencia de nuevas prácticas en el aula.
* La posibilidad de la inclusión de nuevos temas en el currículum de matemáticas de distintos niveles escolares (por ejemplo, recursividad, generalización y matemática

del cambio en la educación básica, y geometría tridimensional y estadística inferencial en la educación preuniversitaria y Universitaria, manipulando datos auténticos). (p. 15).

En consecuencia, entendemos que las tecnologías de la información y la comunicación contribuyen al aprendizaje de los estudiantes en matemática, les permite una mejor comprensión de los temas, a descubrir por sí mismos conceptos y, por ende, desarrollar en ellos un aprendizaje significativo de las competencias propias de esta ciencia.

En situación de enseñanza, es valioso contar con material didáctico, actuar sobre este material, manipularlo y observar las relaciones que aparecen al experimentar con ellos, comparar acciones y resultados, distinguir aquellos que se mantienen de lo que se transforma, reconocer similitudes y diferencias. Y, a partir de las acciones y observaciones, registrar ideas, abstraer, conjeturar, justificar y validar operando a las posibilidades de quienes están aprendiendo y/o a las particularidades del entorno escolar (Esteley, Marguet, Cristante; 2012).

Esta perspectiva aplicada al trabajo geométrico en el ámbito escolar, es compatible con las recomendaciones presentes en los actuales Diseños Curriculares. En aspectos como el enfasis en la validación como actividad matemática y en el trabajo para justificar las soluciones obtenidas de problemas geométricos. Ambos apoyan la producción de conjeturas y la validación de los resultados por parte de los estudiantes.

En este sentido, podemos indicar que, desde su aspecto geométrico, GeoGebra es un editor gráfico dinámico e interactivo que brinda la posibilidad de dibujar figuras geométricas en la pantalla de la computadora. La capacidad de arrastrar con el mouse las figuras construidas de modo tal que se obtienen distintas instancias de las mismas, favorece la búsqueda de propiedades que permanecen invariantes durante la deformación (Esteley, Marguet, y Cristante, 2012). Es entonces, en este sentido que la naturaleza de las figuras es diferente a la de las realizadas con lápiz y papel.

Desde este mismo aspecto, GeoGebra facilita: a) dudar de lo que se ve, es decir, no tomar como verdaderas relaciones percibidas en una imagen estática, sino tratar de confirmar su invariabilidad mediante el "arrastre"; b) ver más de lo que se ve, esto es, estudiar una figura para descubrir relaciones que no están presentes a simple vista (enriqueciendo las figuras con construcciones auxiliares, marcas y mediciones, lo que constituye un verdadero trabajo de experimentación) (Esteley, Marguet, y Cristante, 2012)

Teniendo en cuenta los aspectos teóricos desarrollados relativos a las capacidades de explicar, argumentar y demostrar, y el rol de la tecnología, en la próxima sección procedemos al análisis de una actividad presentada durante el desarrollo de las prácticas.

3.2 Análisis de la propuesta de enseñanza

En esta sección, nos dedicaremos al análisis de una actividad presentada a los estudiantes durante el período de nuestras prácticas, en donde analizaremos las capacidades de argumentar que incluimos en nuestra propuesta (Ver Sección 2.2.2). Resulta pertinente colocar la mirada en nuestras prácticas ya que, según Itzcovich, "La geometría constituye un muy buen lugar para que los alumnos puedan vincularse con un modo específico de producir y validar relaciones" (Itzcovich, 2005; p.41), y la temática se relacionaba con este campo de conocimiento.

Para realizar este análisis definimos las categorías de e*xplicación, argumentación* y *demostración*, es decir, indagaremos acerca de la propuesta de enseñanza en términos de cómo estas capacidades se pusieron en juego. Junto con esto analizaremos el rol que cumplió la *tecnología* en cada uno de las etapas de la actividad.

La actividad fue presentada en la Unidad Didáctica 2 durante el estudio de los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal, con el objetivo de analizar, en este caso, la congruencia de los pares de ángulos alternos internos y profundizar en la producción de textos argumentativos.

3.2.1 Primer momento de la actividad propuesta a los estudiantes: Explicar

Recordamos que *explicar* consiste en una una idea primitiva de la cual derivan las de prueba y demostración, y tiene una función primordialmente descriptiva: implica hacer comprensible un hecho, fenómeno o resultado, presentándolo en conexión con otros hechos que resultan coherentes en una situación particular (Balacheff, 1982; Codina y Lupiáñez, 1999; Duval, 1993; Goizueta, 2013).

Realizamos el primer momento de esta actividad, con ayuda del proyector, les presentamos a los estudiantes una animación[19] en GeoGebra donde aparecen representadas las relaciones correspondientes a los pares de ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal (correspondientes, opuestos por el vértice, alternos) (ver Figura 57).

19 - Animación disponible en https://ggbm.at/uqwESFNs.

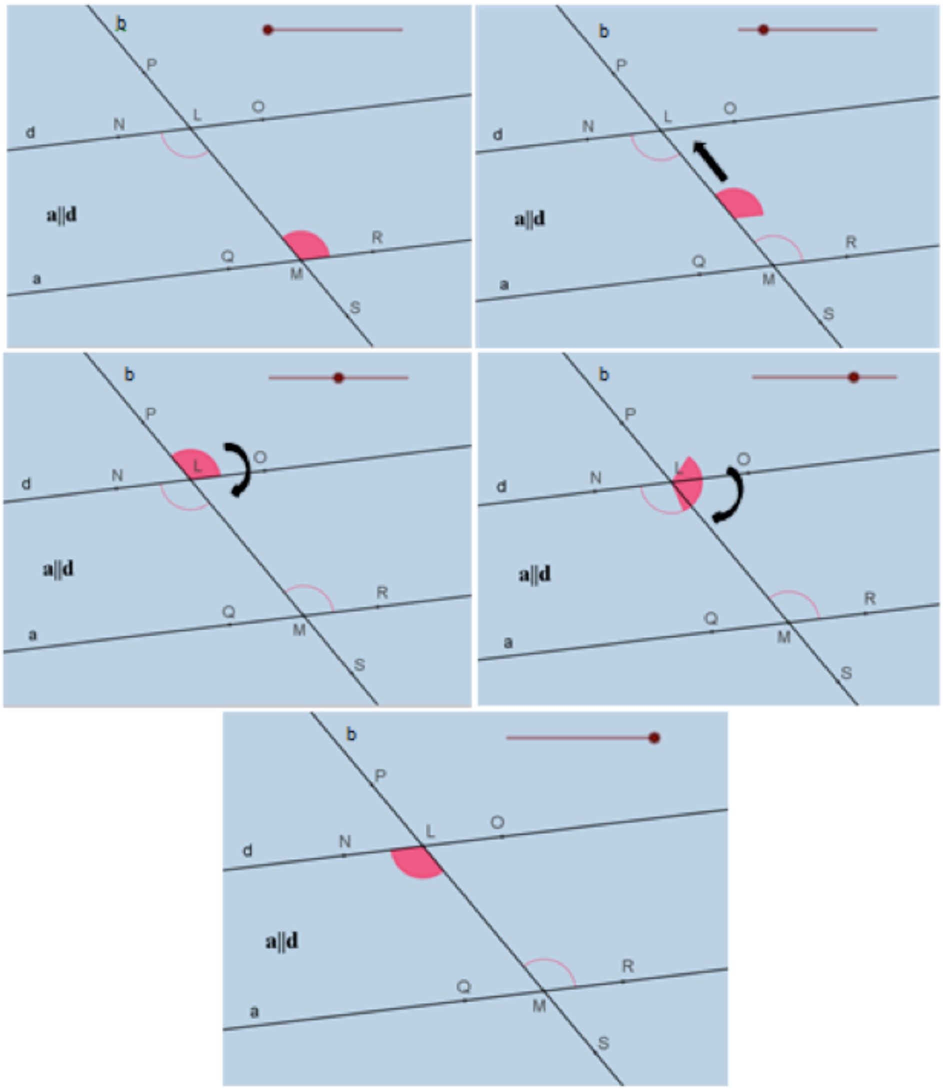


Figura 57. Secuencia de la animación de GeoGebra para observar que los ángulos alternos internos entre paralelas congruentes.

En la Figura 57 se observa la traslación de uno de los ángulos marcados (RMP), a lo largo de la recta transversal (b), hasta superponerse con su correspondiente (PLO). A continuación, el ángulo (PLO) experimenta una rotación con centro en el vértice (L) hasta superponerse con su opuesto por el vértice (MLN). La superposición de estos ángulos permite observar la congruencia entre ellos, en particular, entre los alternos internos entre paralelas.

Esto fué lo primero que se les mostró a los estudiantes, promoviendo en ellos una mirada *empírica*. Según la RAE[20] , empírico es aquello perteneciente, relativo o fundado en

20 - Real Academia Española: http://dle.rae.es/?id=EqzY2CM (Última visita 6/11/2017).

la experiencia; una prueba empírica es el resultado de la experiencia y observación de los hechos. Cuando hablamos de conocimiento empírico nos referimos al aprendizaje adquirido a través de las experiencias y observaciones personales o colectivas.

En la actividad propuesta, los estudiantes observaron las relaciones entre pares de ángulos en la animación y conjeturaron sobre esas relaciones, comenzaron describiendo de manera oral lo que veían, y aceptando la validez de las relaciones observadas ya que para ellos el movimiento y superposición que se realizaba en la misma, consistía en una prueba suficiente, más allá de ser una prueba empírica.

Preguntamos a los estudiantes sobre lo que veían, sobre lo que ocurría en la animación, qué elementos geométricos interactuaban en ella y qué propiedad cumplían los ángulos involucrados y comenzaron a explicar, es decir, describir las relaciones de los elementos matemáticos que se observaban en la animación de GeoGebra. Recordamos, lo visto en la Sección 3.1 sobre explicar de Duval (1993): en la explicación los enunciados tienen una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento.

Las primeras respuestas obtenidas estuvieron ligadas a las medidas de los ángulos, es decir, los estudiantes decían que "miden lo mismo", a pesar de no tener sus amplitudes explícitamente indicadas. Luego conjeturaron que, en base a la superposición y no por sus medidas, estos ángulos eran congruentes. Notamos como los estudiantes recurrieron a sus conocimientos previos a la hora de responder. Como señala Itzcovich, "los alumnos deben aprender a ver, pero el ver está condicionado por el conocer: se ve en función de lo que se conoce". (Itzcovich, 2005; p.52).

Es importante resaltar en este caso la importancia de la tecnología y de GeoGebra en particular. Su cualidad de dinamismo, capacidad de arrastre de las figuras construidas, el poder accionar sobre ellas, favoreció la experimentación, indagación y exploración, favoreció la búsqueda de propiedades que permanecían invariantes durante la deformación y, a partir de las acciones y observaciones, conjeturar.

3.2.2 Segundo momento de la actividad propuesta a los estudiantes: conjeturar

Concordamos, en que una conjetura es:

"Una observación hecha por una persona quien no tiene dudas acerca de su verdad. La observación de la persona deja de ser una conjetura y se convierte en un hecho según su visión una vez que la persona obtiene certeza de su verdad" (Harel y Sowder, citados en Balacheff, 2008, p. 504) (Álvarez, Bautista, Carranza y Soler-Alvarez, 2013, p. 76)

Álvarez, Bautista, Carranza y Soler-Alvarez (2013) expresan que el conjeturar puede estructurarse a partir de las actividades de visualizar; identificar patrones, relaciones, regularidades, propiedades, etc.; formular, verificar, generalizar y validar conjeturas. (Álvarez, Bautista, Carranza y Soler-Alvarez, 2013, p. 76)

Luego de que los estudiantes explicaran de manera oral las relaciones observadas en la animación de GeoGebra, concluimos en que la relación de congruencia entre los alternos internos entre paralelas se cumplía para este par de ángulos en particular. En este segundo momento de la actividad, propusimos a los estudiantes la cuestión de generalizar las relaciones observadas y sus conclusiones explicadas mediante las siguientes preguntas, "¿Qué pasa si tenemos otro par de ángulos, con amplitudes distintas a las anteriores? ¿Con posiciones distintas?, ¿Con rectas paralelas u otra transversal, que tengan distintas orientaciones en el plano? ¿Se sigue cumpliendo su conjetura con respecto a la congruencia entre los mismos?".

En este segundo momento de la actividad, en la misma animación de GeoGebra presentada en la Figura 57, aprovechamos la herramienta "deslizador" . Esta animación presenta a su derecha dos celdas y tres deslizadores (ver Figura 58). Las celdas en blanco (Par 1 y Par 2), que pueden ser seleccionadas de a una por vez, se corresponden cada una con un par de ángulos alternos internos; los deslizadores, permiten cambiar la dirección de la recta transversal (ver Figura 58), cambiar la dirección de las rectas paralelas (Figura 59), y modificar la distancia entre estas dos rectas (Figura 60).

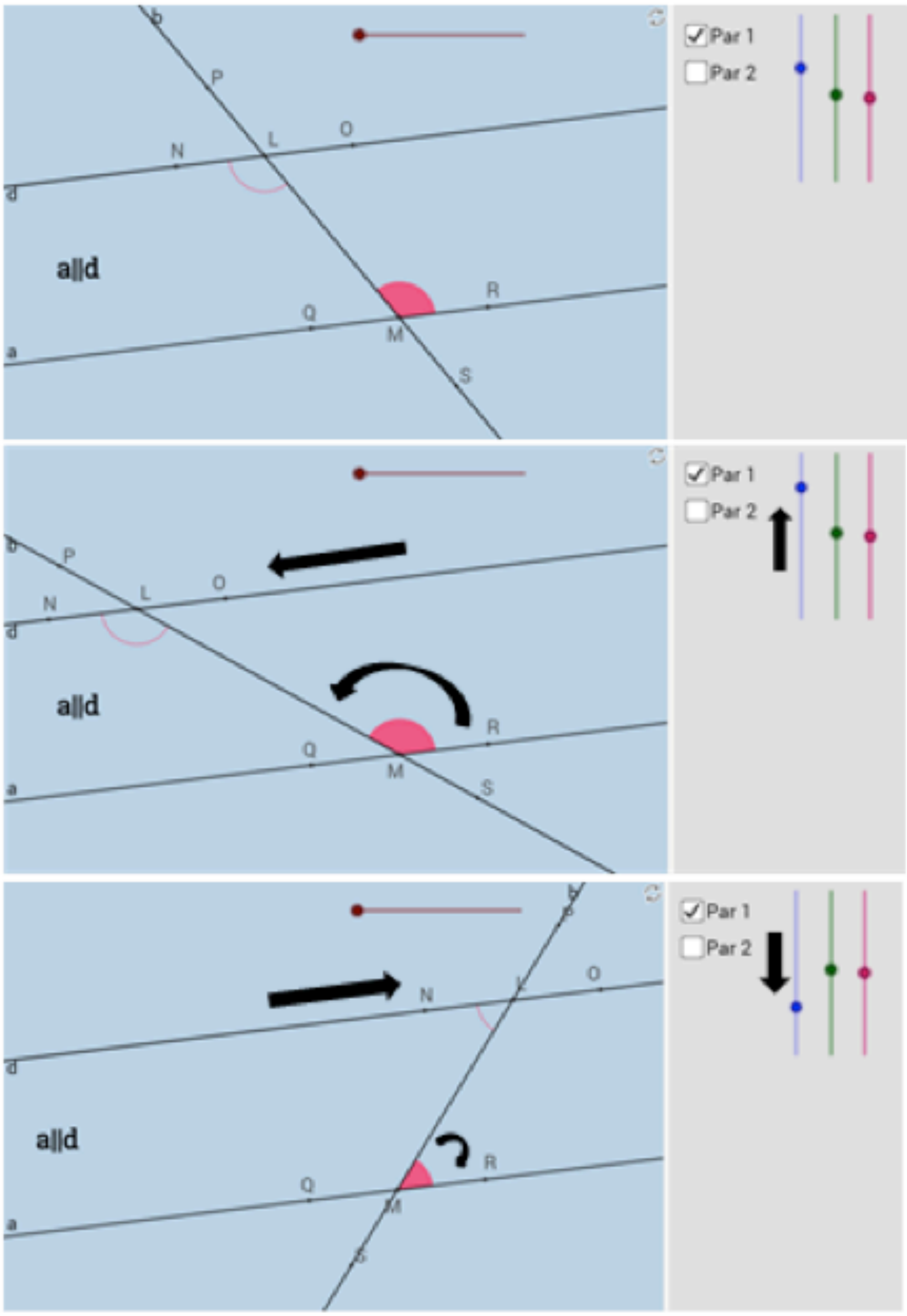


Figura 58. Secuencia del uso del primer deslizador (azul), el cual regula la pendiente de la recta transversal (b), en la animación de GeoGebra.

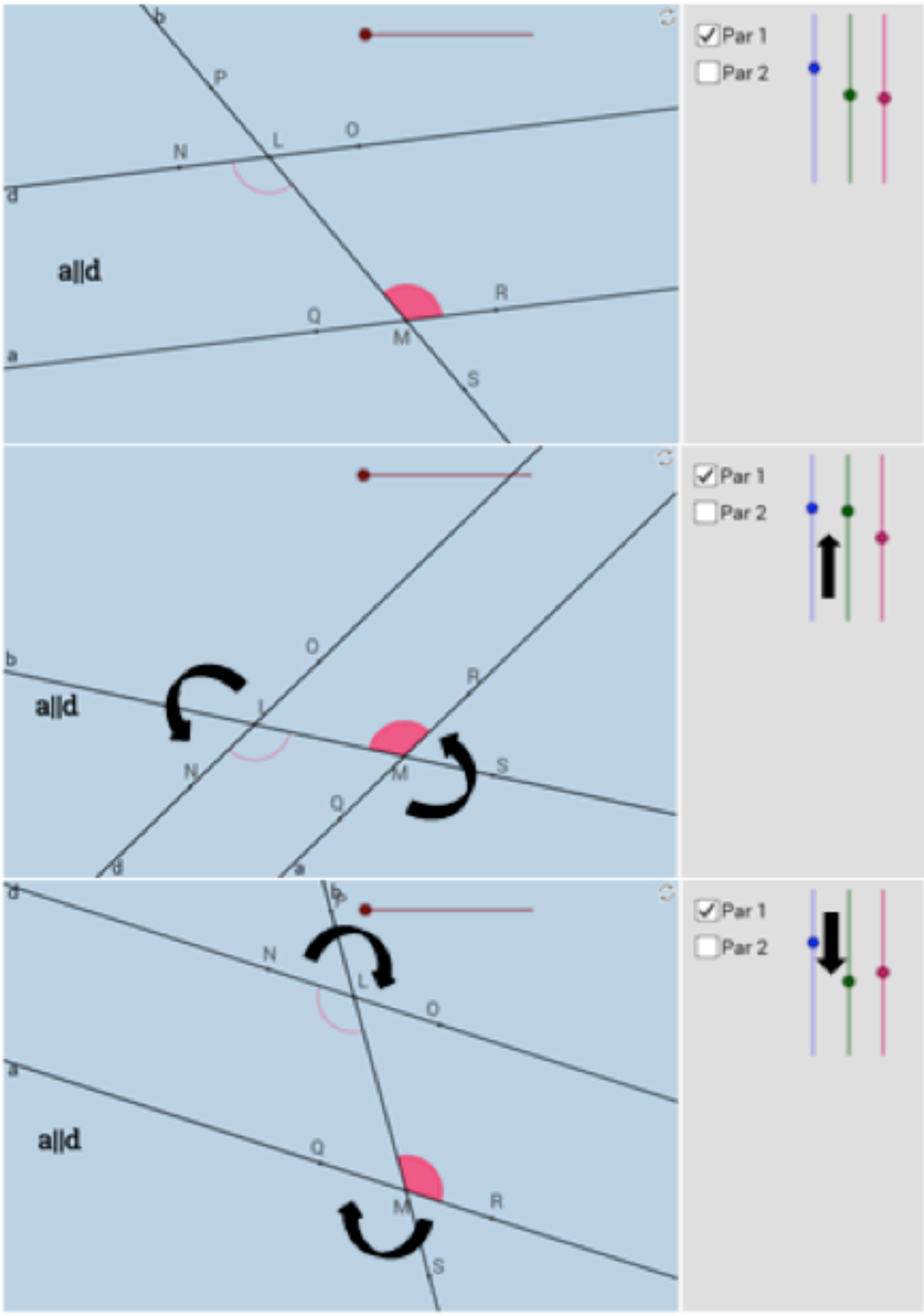


Figura 59. Secuencia del uso del segundo deslizador (verde), el cual regula la pendiente de las rectas paralelas (a y d) en la animación de GeoGebra.

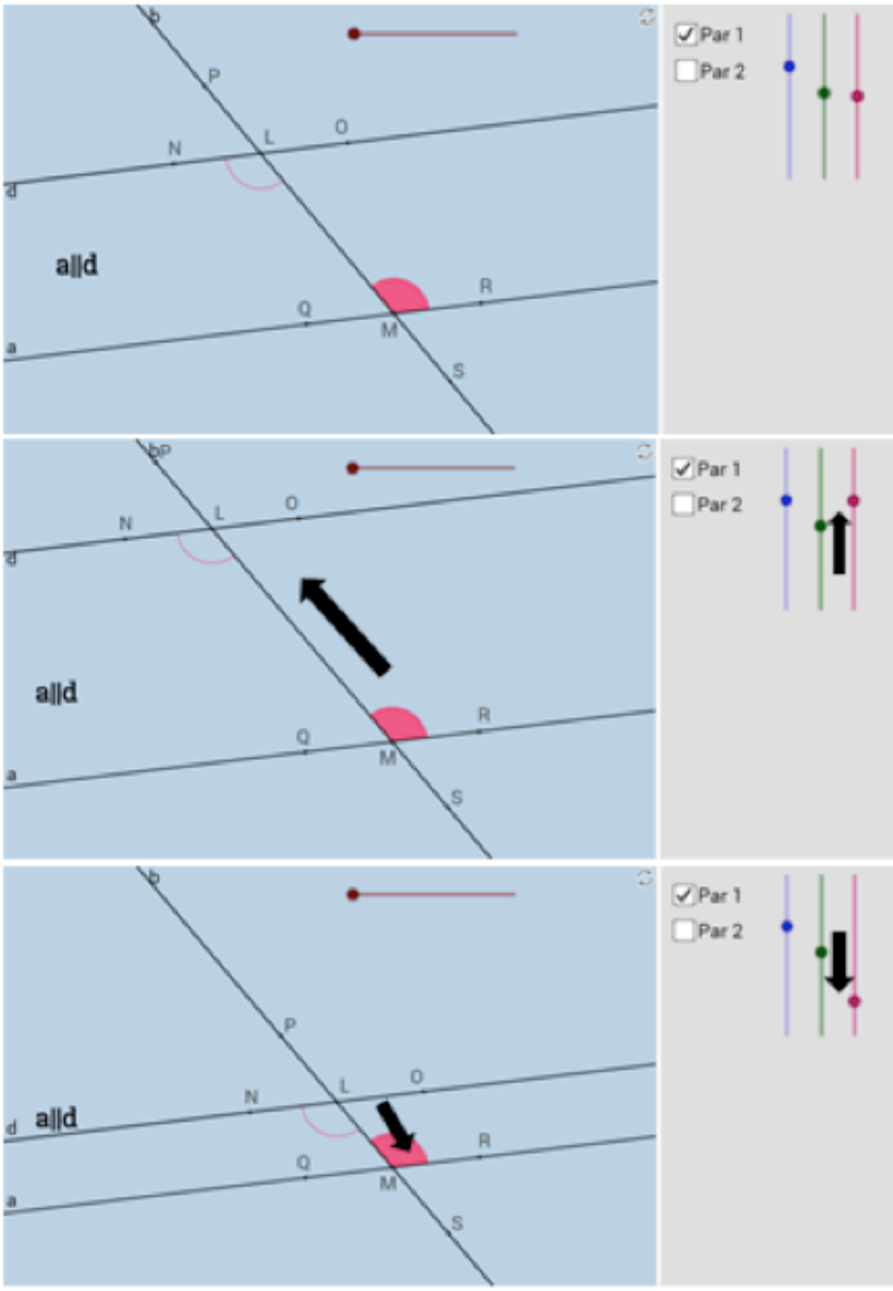


Figura 60. Secuencia del uso del tercer deslizador (rosa), el cual regula la distancia entre las rectas paralelas (a y d) en la animación de GeoGebra.

Utilizamos estos deslizadores para generar nuevas conjeturas en los estudiantes: “Si la recta transversal se inclina en otro sentido, ¿siguen siendo congruentes estos los ángulos considerados?”, “¿Y si aumentamos la distancia entre las dos rectas paralelas?”, “¿Y qué pasa si ahora las rectas paralelas ya no se encuentran en posición horizontal con respecto al borde inferior de la pantalla?”

Con la mediación de GeoGebra, los estudiantes explicaron nuevamente sobre lo observado y construyeron una conjetura a partir de esta prueba empírica. Nuevamente, invitamos a los estudiantes a debatir sobre sus ideas construidas sobre lo observado, sobre los significados y las relaciones entre los ángulos y rectas presentes en la animación. Entendemos que, este tipo de trabajo, supone la posibilidad de que los estudiantes se apoyen en propiedades ya conocidas con respecto a los objetos geométricos involucrados para comenzar a validar y cuestionar el alcance de lo observado (Itzcovich, 2005).

Finalmente, luego de ver estas animaciones y de participar en las discusiones entre estudiantes entre sí y con las docentes, los estudiantes coincidieron en que los ángulos alternos internos formados por dos rectas paralelas y una transversal son siempre congruentes; podemos decir que tenían una conjetura.

Es importante resaltar nuevamente la importancia de la utilización de GeoGebra y todas sus herramientas, en especial los deslizadores. Los estudiantes los manipulaban, analizaban la situación y conjeturaban. Los deslizadores permiteron que los estudiantes realizaran conjeturas y las generalizara, ya que al variar las pendientes y distancias entre las rectas, las posiciones y las amplitudes de los ángulos, (además de poder analizar ambos pares de ángulos alternos internos), pudimos abarcar “todos los casos” de ángulos alternos internos entre rectas paralelas cortadas por una transversal.

3.2.3 Tercer momento de la actividad propuesta a los estudiantes: construcción de una demostración o argumento formal

Una argumentación es el acto de formar razones ofrecidas a favor o en contra de una proposición, opinión o medida; se propone lograr la convicción del otro o de sí mismo (Duval, 1993; Goizueta, 2013). El proceso argumentativo se realiza desde dos habilidades propias del lenguaje: la oralidad y la escritura. La argumentación en el aula permite la interacción, el razonamiento, los juicios de valor y la justificación de los procedimientos que en ella se realizan.

Una prueba, es una explicación aceptada por una comunidad en un momento dado, y si un enunciado se conoce como verdadero y bien definido, a estas pruebas las llamaremos demostraciones (Balacheff, 1982). Una demostración es una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas cuyo objetivo es la verdad; una demostración es aquello que los matemáticos aceptan como demostración (Duval, 1993; Godino y Recio, 2001).

En este tercer momento, buscamos ayudar a los estudiantes a construir de manera oral un argumento acerca de por qué es siempre válida la congruencia entre los ángulos alternos internos entre paralelas, mediante las cuestiones: "¿Por qué siempre son congruentes esos ángulos?", "¿Se puede probar/verificar esta idea?", "¿Cómo lo justificarían? En esta animación podemos superponer los ángulos y ver que coinciden en todos los puntos, pero… ¿y si la animación no está presente?"

Una vez formados los argumentos orales que motivaron estas preguntas, el siguiente momento consistió en formalizar estos argumentos, usando la escritura propia de la matemática. Propusimos una estructura de escritura que presentaba todas las partes de un texto argumentativo, que consistía en justificar las proposiciones (antecedente-consecuente) mediante las definiciones y propiedades ya conocidas con respecto a los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal.

En la construcción del argumento de la congruencia de los ángulos alternos internos entre paralelas, se propuso a los estudiantes aceptar, sin demostración formal, que los correspondientes son congruentes, lo que conforma un paso previo en la demostración de congruencia de los ángulos alternos internos. En esta decisión, coincidimos con Itzcovich (2005) en que:

> *(...) Los alumnos pueden acceder al encadenamiento deductivo aceptando propiedades intermedias que no hayan demostrado (...). La decisión didáctica es la de generar condiciones que posibilitan poner tempranamente al alumno en contacto con el razonamiento deductivo (p.47)*

Las Figuras 61, 62, 63 muestran textos producidos por los estudiantes para demostrar que dos ángulos alternos internos entre paralelas son congruentes.

Notamos que en la primera de las producciones (Ver figura 61), los estudiantes hicieron una representación gráfica de la animación en el papel, a diferencia de las demás producciones, que hacen referencia a los mismos ángulos pero nombrandolos simbólicamente.

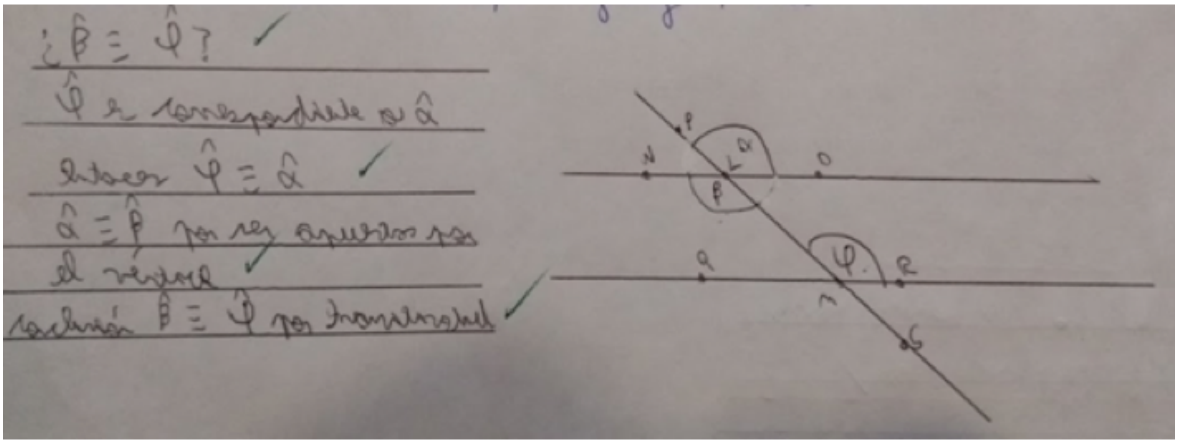
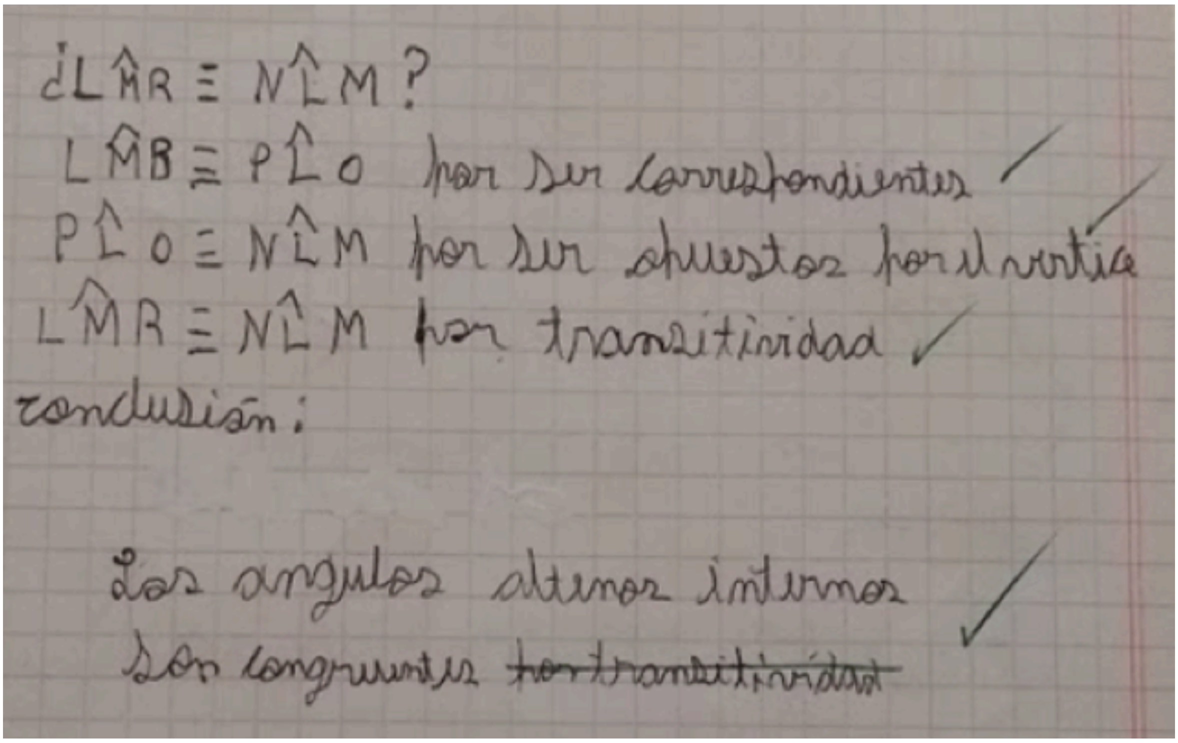


Figura 61. Demostración de un estudiante de la congruencia de los pares de ángulos alternos internos determinados por dos rectas paralelas y una transversal, como respuesta a la actividad presentada.

Por otro lado, algo común en todas las producciones es la apropiación del formato y estructura de un texto argumentativo, colocando título, desarrollo y conclusión, a su vez, se presentan distintos grados de estructuración en los mismos, podemos ver como las dos primeras producciones (Figuras 61 y 62) mantienen una estructura de escritura más formal, mientras que la tercera (Figura 63), se asemeja más a un texto narrativo.



¿$L\hat{M}R \equiv N\hat{L}M$?

$L\hat{M}B \equiv P\hat{L}O$ por ser correspondientes

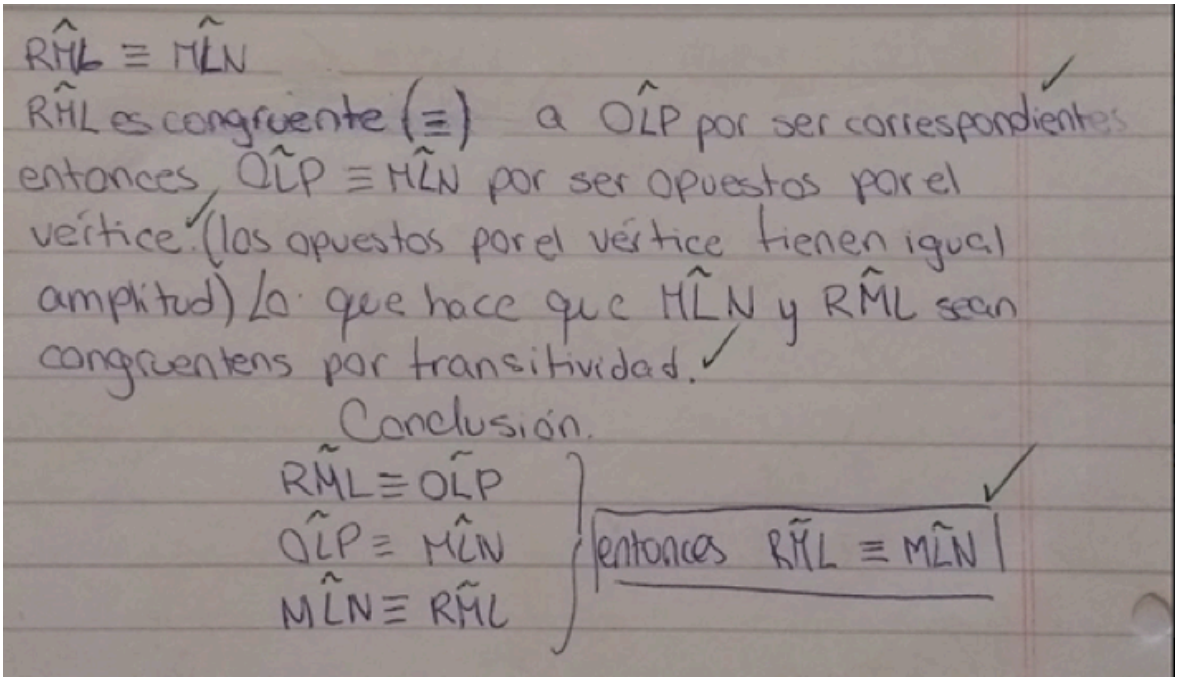
$P\hat{L}O \equiv N\hat{L}M$ por ser opuestos por el vertice

$L\hat{M}R \equiv N\hat{L}M$ por transitividad

conclusión:

Los angulos alternos internos son congruentes ~~por transitividad~~

Figura 62. Demostración de un estudiante de la congruencia de los pares de ángulos alternos internos determinados por dos rectas paralelas y una transversal, como respuesta a la actividad presentada.



$R\hat{M}L \equiv M\hat{L}N$

$R\hat{M}L$ es congruente ($\equiv$) a $O\hat{L}P$ por ser correspondientes entonces, $O\hat{L}P \equiv M\hat{L}N$ por ser opuestos por el vértice (los opuestos por el vértice tienen igual amplitud) Lo que hace que $M\hat{L}N$ y $R\hat{M}L$ sean congruentens por transitividad.

Conclusión.

$R\hat{M}L \equiv O\hat{L}P$

$O\hat{L}P \equiv M\hat{L}N$

$M\hat{L}N \equiv R\hat{M}L$

$\boxed{\text{entonces } R\hat{M}L \equiv M\hat{L}N}$

Figura 63. Demostración de un estudiante de la congruencia de los pares de ángulos alternos internos determinados por dos rectas paralelas y una transversal, como respuesta a la actividad presentada.

En matemáticas las pruebas formales poseen cierta lógica y lenguaje, por lo que el proceso de formalización se completa con la utilización de lenguaje formal, esto es un conjunto de elementos (símbolos y conceptos) y de métodos (reglas o relaciones) para la combinación o secuenciación de estos elementos; que son organizados en una estructura formal. Es aquí donde como practicantes interferimos en el debate generado en el aula, preguntando: ¿Porque esos ángulos son congruentes?, ¿Qué propiedad utilizan?, ¿Qué relación hay entre estos ángulos?, ¿Que decía la definición?, etc.

Reconocemos que, la elaboración de demostraciones no es una tarea fácil para los estudiantes. Por ejemplo, en la Figura 64 se observa un texto elaborado por un estudiante que no se despega de la prueba empírica, evidente en las expresiones “la animación nos muestra” y “al deslizar la amplitud del ángulo marcado en rojo”

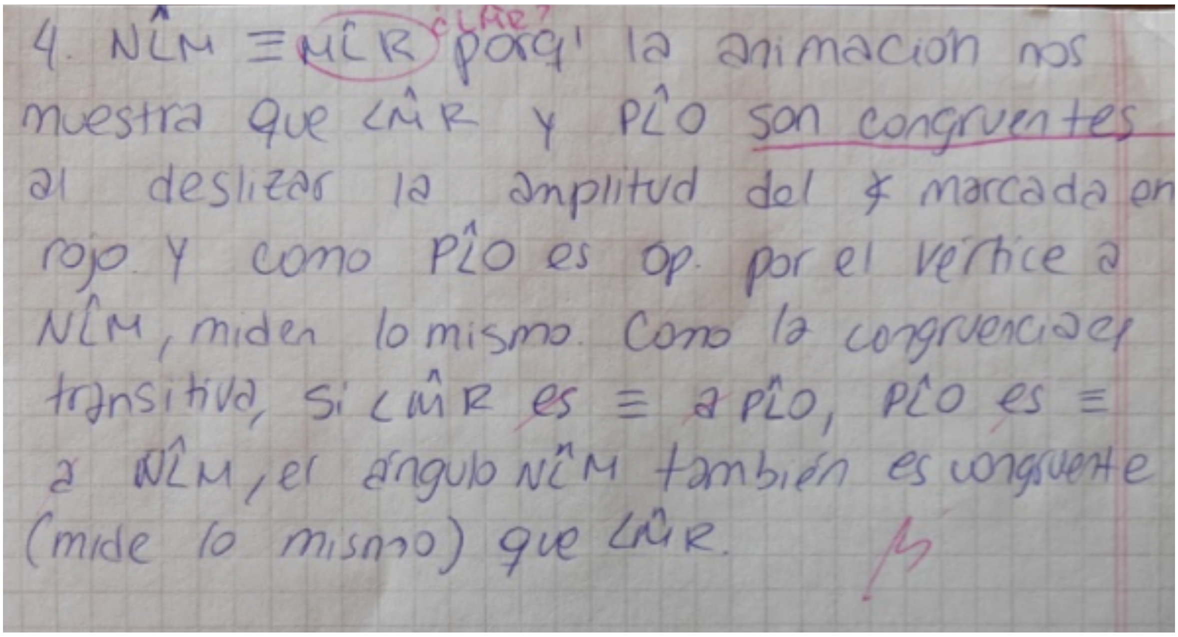

4. $N\hat{L}M \equiv M\hat{L}R$ ¿LRE? porq' la animación nos
muestra que $L\hat{M}R$ y $P\hat{L}O$ son congruentes
al deslizar la amplitud del $\measuredangle$ marcada en
rojo. Y como $P\hat{L}O$ es op. por el vértice a
$N\hat{L}M$, miden lo mismo. Como la congruencia es
transitiva, si $L\hat{M}R$ es $\equiv$ a $P\hat{L}O$, $P\hat{L}O$ es $\equiv$
a $N\hat{L}M$, el ángulo $N\hat{L}M$ también es congruente
(mide lo mismo) que $L\hat{M}R$.

Figura 64. Demostración de un estudiante de la congruencia de los pares de ángulos alternos internos determinados por dos rectas paralelas y una transversal, como respuesta a la actividad presentada.

Sin embargo, a pesar de estas dificultades, coincidimos con Itzcovich (2005) que:

“(...) en numerosas oportunidades, la enseñanza funciona como si la percepción fuera independiente de la cognición y se realizan propuestas de trabajo para establecer pro-

piedades de las figuras que se apoyan exclusivamente en observaciones de dibujos. Por este motivo las situaciones que se propongan a los alumnos con la finalidad de indagar, identificar o reconocer propiedades de las figuras deben impactar en procesos intelectuales que permiten hacer explícitas las características y propiedades de los objetos geométricos, más allá de los dibujos que se utilizan para representar dichas figuras (...)". (p.18)

Durante la enseñanza de la elaboración de textos argumentativos se presentaron situaciones donde los estudiantes no comprendían el sentido de los detalles de la escritura formal. Usamos esta circunstancia para recordar cuál es el propósito de argumentar en matemática (ver Sección 2.2.2).

Podemos observar en este momento, la función del lenguaje matemático como tecnología de la comunicación, en el sentido de que ayuda a comunicar, siempre dentro de la comunidad de práctica las conjeturas, ideas y resultados.

3.3 Conclusiones sobre los resultados de la actividad

Luego del análisis realizado, consideramos que, si bien en un primer momento los estudiantes presentaban dificultades para expresar sus ideas con un lenguaje propio de la asignatura, lograron apropiarse del lenguaje, la simbología y la estructura de los textos argumentativos tanto como de los conocimientos con respecto a las relaciones de los ángulos comprendidos entre dos rectas paralelas y una transversal, propiedad de transitividad y congruencia.

"[...] este intercambio manifiesta toda la eficacia dialógica de las conversaciones [...] todo lo que aparece en el intercambio es lo que no podría manifestarse en el monólogo", ya que el individuo es llevado a decir, frente al discurso del otro, aquello que jamás hubiera dicho solo. (Jiménez Espinosa, A.; Pineda Bohórquez, L.; 2012)

Al comenzar a analizar la actividad realizada en el marco de nuestra propuesta, nos preguntamos si el foco estaba puesto en las explicaciones, argumentaciones o demostraciones. Claramente el objetivo e intención fue fomentar en los estudiantes las competencias en argumentación. Pero, podemos decir que "llegamos un poco más allá" de lo esperado, puesto que a pesar de que la propuesta inicial era que los estudiantes realicen textos argumentativos; si miramos las definiciones analizadas anteriormente en la Sección 3.1, sobre qué es explicar, argumentar y demostrar, los resultados obtenidos se pueden catalogar/clasificar como demostraciones matemáticas. Esto significa que los estudiantes realizaron producciones típicas de una comunidad matemática.

También nos preguntamos con respecto a las tecnologías como recurso en la transición de la prueba empírica a la formal. Luego de haber analizado la experiencia, consideramos que no sólo fue indispensable el uso de las animaciones de GeoGebra, sino que potenciaron fuertemente las capacidades argumentativas de los estudiantes, además de motivarlos. De esta forma, los estudiantes lograron apropiarse de los conocimientos conceptuales de las unidades, de los conocimientos referidos a argumentaciones, de las estructuras, modos de escritura y lenguajes simbólicos adecuados.

Como consecuencia de la experiencia de estas prácticas docentes y de los resultados obtenidos con la planificación propuesta, consideramos que, si las categorías analizadas, explicar, argumentar y demostrar, son transformadas en objetos de aprendizaje en el aula desde el comienzo del año lectivo, se podrían desarrollar en mayor profundidad y, por lo tanto, los resultados que se podrían obtener serían aún más favorables.

Finalmente, coincidimos con el Diseño Curricular del CICLO BÁSICO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA en que en el hacer matemática cobra especial importancia tanto la función que cumplen las actividades en el aula como el rol del docente (el cual se modifica constantemente) en la gestión de un modo de trabajo matemático en el aula, que haga evolucionar las argumentaciones de los estudiantes hacia formas cada vez más deductivas. Así, la organización de la clase y el tipo de intervenciones del docente se constituyen en el motor de la construcción del conocimiento por parte del estudiante. Aquí radica la especial importancia de dar lugar a estas interacciones en el aula; para que los estudiantes puedan elaborar juicios críticos sobre sus procedimientos y argumentaciones, sobre los límites de las pruebas empíricas y para que aprendan a determinar en qué situaciones es útil una u otra propiedad.

CAPÍTULO 4

Reflexiones Finales

A lo largo del informe, intentamos reflejar la experiencia de nuestras prácticas, de las cuales concluimos en que el proceso de aprender a escribir textos argumentativos, y demostraciones matemáticas, es un proceso que lleva tiempo, no es instantáneo y mucho menos simple para los estudiantes. Es parte de este proceso la planificación de una clase donde los estudiantes sean protagonistas, donde los debates sean la prioridad y donde las interacciones sean guiadas y redireccionadas por intervenciones en forma de preguntas realizadas por el docente, apelando constantemente a las relaciones entre los conocimientos que disponen los alumnos, las actividades que se propongan y los nuevos conocimientos que se pretendan generar.

Consideramos que el análisis realizado resulta de utilidad para promover el planteo de estrategias de enseñanza que persigan mejorar el aprendizaje significativo de la matemática y reflexionar sobre la importancia del trabajo con argumentaciones y demostraciones en las aulas del secundario; y fundamentalmente seguir pensando nuevas formas de fomentar el pensamiento crítico y deductivo, el debate, el cuestionamiento y validación de propuestas, y sobre todo las competencias argumentativas en nuestros estudiantes.

Como dice el Diseño Curricular del CICLO BÁSICO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA, resulta fundamental que el docente gestione instancias de trabajo áulico en las que haya lugar para la confrontación, la reflexión y la justificación de lo producido. Situaciones didácticas en las que se propicie la comunicación matemática mediante un lenguaje adecuado, se valoren las diferentes formas de resolución y se aprecie el error como instancia de aprendizaje.

Durante las prácticas los estudiantes se comportaron impecablemente, fueron respetuosos y abiertamente predispuestos a aprender y a aprender distinto. Recibieron nuestras propuestas con un poco de extrañez al principio, pero con entusiasmo después; se adecuaron al modo de trabajo propuesto y a los debates en las clases.

Notamos la riqueza de los debates en clases, la potencial generación de conocimiento presente en los estudiantes, que intentamos rescatar en cada segundo. Como dice Joao Pedro da Ponte: "No es tanto por las actividades prácticas que los alumnos aprenden, sino a partir de la reflexión que realizan sobre lo que han hecho durante esas actividades prácticas". (Ponte, 2005, p. 15)

Esta forma de trabajo grupal y de debate durante la clase, incentivó la participación de todos los estudiantes, permitió que cada uno exprese sus opiniones e impulsó el intercambio y la discusión de ideas que conformaron las clases.

El uso de la tecnología fue fundamental para nuestras prácticas, atravesó y condicionó todas las unidades didácticas. Programas como Microsoft Power Point y GeoGebra permitieron a los estudiantes construir figuras, analizarlas; generar conjeturas y supuestos, cuestionarlos, validarlos; facilitó la generación de escenarios de experimentación y debate áulico que favorecieron la interacción grupal y la generación cooperativa de conocimientos como conocimientos colectivos, pertenecientes a la misma comunidad de práctica.

Otros programas que nos resultaron de mucha ayuda desde el momento previo a las prácticas para la planificación de la propuesta fueron las funciones de Google Drive, Microsoft Excel y programas de edición de imágen varios.

Como par pedagógico, trabajamos de forma colaborativa basándonos en la comunicación, aunando ideas y cooperando, con gran ayuda y apoyo de nuestra docente tutora y los docentes de la institución. Esto contribuyó a nuestro crecimiento personal, más allá de los conocimientos curriculares, fortaleciendo las bases para un futuro trabajo profesional colectivo.

Para terminar, reflexionamos con respecto a la función docente, a la función del docente de matemática y su rol en el aula. El docente presenta ideas a los estudiantes, propone actividades y formas de trabajo; y al hacerlo propone un modo de hacer matemáticas, expone un lenguaje, una simbología. Se transmite un contexto de trabajo, un método de validación, reglas que controlan la coherencia interna de la clase, y de las matemática que allí se despliegan. En fin, propone una mirada de las matemática, como un todo. Porque a la matemática se la construye en el curso, entre los participantes.

Sin embargo, es importante recordar que esta matemática propuesta por el docente es una matemática contextualizada, con rasgos distintivos que se fueron estableciendo como condiciones de pertenencia a la práctica docente, a la práctica social de enseñar y aprender matemáticas en el interior de una institución.

Consideramos que los estudiantes deben ser tratados como individuos que participan activamente en el proceso de aprendizaje, que trabajan en conjunto y aprenden en cooperación gracias a la conversación, interacción y el debate grupal. Es importante valorar la interacción y el trabajo grupal como herramienta para conocer. Por esto, es preciso promover dentro de la institución la educación en valores que permitan el enriquecimiento de virtudes y sentimientos de motivación y superación por parte de los alumnos.

REFERENCIAS

- Álvarez Alfonso, Ingrith; Bautista, Leonardo Ángel; Carranza Vargas, Edwin; Soler-Alvarez, María Nubia (2013) Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, Vol. 85, marzo de 2014, p. 75-90.

- Bermúdez, E A. (2014). La argumentación como estrategia de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. Revista Científica, Vol. 3, N°20. Disponible en http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/7687/9477

- Chávez Vescance, J. D.; Caicedo Tamayo, A. Ma. (2014). TIC y argumentación: Análisis de tareas propuestas por docentes universitarios. Estudios Pedagógicos XL, N°2, p. 83-100.

- Codina Sánchez, A., & Lupiañez, J. L. (1999). El Razonamiento Matemático: argumentaciín y demostración. . 10.13140/2.1.1466.1441.

- Crespo Crespo, C. (2014) La importancia de la argumentación matemática en el aula. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.

- De Gamboa, G.; Planas, N.; Edo, M. (2010) Argumentación matemática: Prácticas escritas e interpretaciones. SUMA 64, Junio 2010, p. 35-44.

- Diseño Curricular del Ciclo Básico de la Educación Secundaria 2011-2015 (Tomo 2). Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL003226.pdf

- Duval, Raymond, (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica, México.

- Duval, R. (2000). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? Educación Matemática, Agosto, Vol. 12, p. 149–151. Grupo Editorial Ibcroamérica. Serie Pitágora Editricc Bologna. México, D.F., 1999.

- Esteley, C.; Marguet, I.; Cristante, A. (2012) Explorando construcciones geométricas con GeoGebra. En Trabajos de Matemática 2012/61. REM XXV. Notas de Curso. p. 19-28. Córdoba: FaMAF

- Giménez, G; Subtil, C. (2015). Enseñar a argumentar en la escuela. Un estudio a través de los manuales escolares. Cuadernos de Educación, año XIII, N°13. CIFFyH - Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. ISSN 2344-9152.

- Giral, F.; Giral, A.; Giral, J. (2017) Conocimiento y Competencias. Cultura de efectividad 2.0, p. 141-149. https://goo.gl/xb3sui

- Goizueta, M. (2013) Interpretaciones sobre la argumentación en el aula de matemáticas de secundaria por parte de un grupo de profesores. Màster de recerca en didàctica de les matemàtiques i de les ciències experimentals. UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA, DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA I DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS.

- Gvirtz, S.; Palamidessi, M. (1998) El ABC de la tarea docente: Currículum y Enseñanza. p. 175-205. AIQUE, Buenos Aires, Argentina.

- Howard, S.; Solar, H. (2014) Argumentación durante la enseñanza de los números enteros: análisis de la interacción en el aula.

- Itzcovich, H. (2005). Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones. 1a ed. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

- Jiménez Espinosa, A.; Pineda Bohórquez, L. (2012) Comunicación y argumntación en clase de matemáticas. Educación y Ciencia, N°16, p. 111-116, 2013.

- Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. Educación Matemática, pp.11-30. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854002

- Villarreal, M. (2013). Humanos-con-medios: un marco para comprender la producción matemática y repensar prácticas educativas. En Edelstein, G.; Miranda, E. y Bryan, N. (Comp.) Formación de profesores, curriculum, sujetos y prácticas educativas. La perspectiva de la investigación en Argentina y Brasil. Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba. E-Book. P. 85-122. Disponible en: http://www.ffyh.unc.edu.ar/editorial/wp-content/uploads/2013/05/EBOOK_MIRANDA.pdf.

• Sitios consultados:

* Centro Virtual Cervantes: https://goo.gl/m1jpoZ

* GeoGebra: https://www.geogebra.org/

* Unesco: http://unesdoc.unesco.org/images/0021/002127/212715s.pdf

* Merriam-Webster Dictionary: http://www.merriam-webster.com/dictionary/argumentation

* Real Academia Española: http://dle.rae.es/?id=EqzY2CM

• Animaciones:

Brzezinski, Tim; HIGH SCHOOL: Geometry de Common Core State Standards Initiative for Mathematics.

ANEXO

Lista 1:

Ángulo: Un ángulo es una porción del plano comprendida entre dos semirrectas, llamadas lados del ángulo, con el mismo origen, llamado vértice.

Ángulo convexo: Un ángulo convexo es aquel ángulo cuya medida es mayor a 0° y menor a 180°.

Ángulos Complementarios: Dos ángulos son complementarios si sus medidas suman 90°.

Ángulos Suplementarios: Dos ángulos son suplementarios si sus medidas suman 180°.

Ángulos Consecutivos: Dos ángulos son consecutivos si poseen sólo un lado común y ningún otro punto en común.

Ángulos Adyacentes: Dos ángulos son adyacentes si son consecutivos y los lados no comunes son semirrectas opuestas. En consecuencia, son suplementarios.

Ángulos Opuestos por el vértice: Dos ángulos son opuestos por el vértice si los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro.

Lista 2:

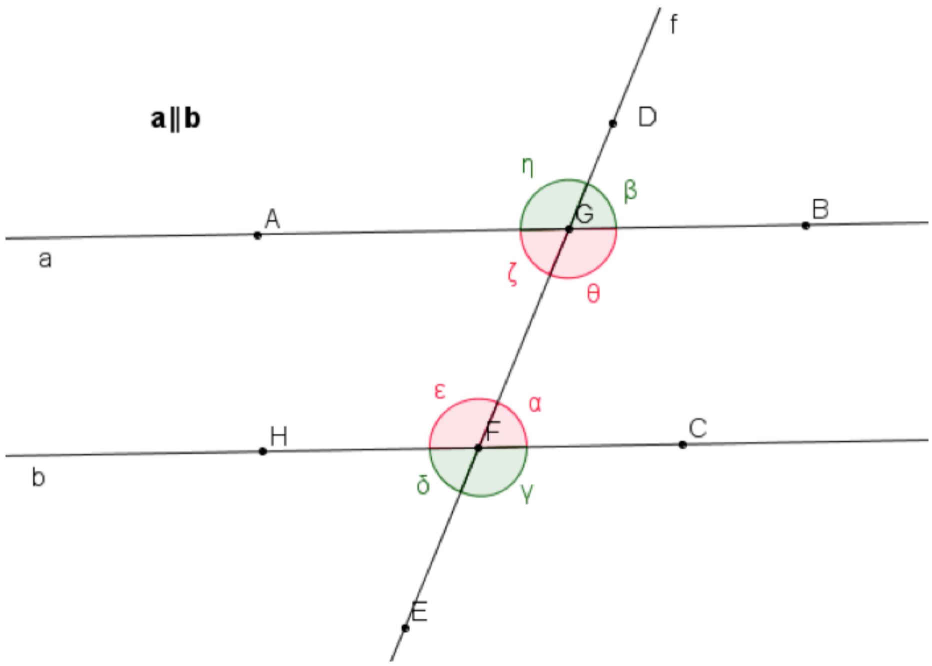
Figuras Congruentes / Congruencia: Dos figuras son congruentes si al superponerlas coinciden en todos sus puntos.

En consecuencia:

- Si dos ángulos son congruentes, entonces poseen la misma medida.
- Si dos segmentos son congruentes, entonces poseen la misma medida.

La congruencia es transitiva: Siempre que un elemento es congruente a otro y este último a un tercero, entonces el primero es congruente al tercero.

Ángulos entre paralelas y una transversal: Ángulos internos y externos entre paralelas y una transversal:



- **Ángulos Correspondientes:** Dos ángulos son correspondientes determinados por dos rectas paralelas y una transversal si están ubicados del mismo lado de la transversal, uno es interno y el otro externo, y no son adyacentes.

- Ángulos Alternos:

  - Internos: Dos ángulos son alternos internos determinados por dos rectas paralelas y una transversal si están ubicados en distinto semiplano respecto de la transversal, son internos y no son adyacentes.

  - Externos: Dos ángulos son alternos externos determinados por dos rectas paralelas y una transversal si están ubicados en distinto semiplano respecto de la transversal, son externos y no son adyacentes.

- Ángulos Conjugados:

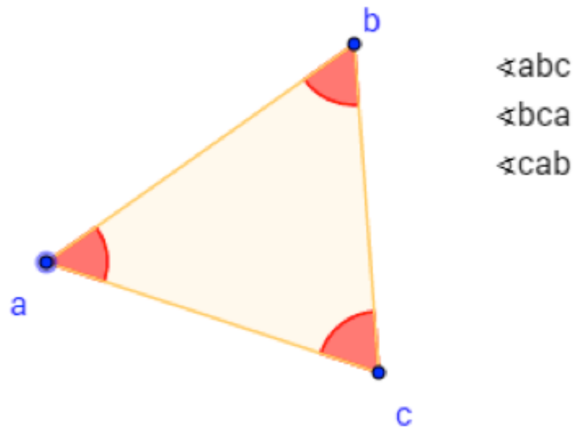
  - Internos: Dos ángulos son conjugados internos determinados por dos rectas paralelas y una transversal si están ubicados del mismo semiplano respecto de la transversal y ambos son internos.

  - Externos: Dos ángulos son conjugados externos determinados por dos rectas paralelas y una transversal si están ubicados del mismo semiplano respecto de la transversal y ambos son externos.

Lista 3:

Triángulo: Un triángulo es un polígono de tres lados.

Ángulos interiores del triángulo:



Clasificación según sus lados:

- **Triángulo Equilátero:** Un triángulo es equilátero si sus tres lados son congruentes.
- **Triángulo Isósceles:** Un triángulo es isósceles si posee dos lados congruentes.
- **Triángulo Escaleno:** Un triángulo es escaleno si no posee lados congruentes.

Clasificación según sus ángulos:

- **Triángulo Acutángulo:** Un triángulo es acutángulo si sus tres ángulos son agudos (medida menor a 90°).
- **Triángulo Rectángulo:** Un triángulo es rectángulo si posee un ángulo recto (medida de 90°).
- **Triángulo Obtusángulo:** Un triángulo es obtusángulo si posee un ángulo obtuso (medida mayor a 90° y menor a 180°).

Propiedades:

- Suma de la medida de los ángulos interiores: ______________________________

- Relación entre los lados y sus respectivos ángulos opuestos: ____________________

____

- Desigualdad Triangular: ____

____

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación del Informe Final de Prácticas de Metodología y Práctica de la Enseñanza, damos Fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por el Tribunal.