Uso de conceptos fundamentales en física

*Osvaldo M. Moreschi**

1. Introducción

En toda ciencia se encuentran conceptos fundamentales que contribuyen a la construcción del aparato teórico de la misma. Nos concentraremos en esta ocasión en la noción de 'distancia', más específicamente en la de distancia espacial.

Como el concepto de distancia también se usa en el lenguaje coloquial, este término puede ser considerado tanto presupuesto como específico[3]. Nuestra preocupación es en el uso específico del término distancia en la explicación de una particular situación experimental. Esto resulta un tanto complejo pues a diferencia de lo que sería estudiar un término específico en el contexto de un determinado marco teórico, cuando se estudia una situación experimental real, como la que estudiaremos más adelante, puede ocurrir que contribuyan distintos marcos teóricos a la descripción de la misma. Es así que el uso de un dado término será aceptable o no dependiendo de que sea compatible con la noción que involucre en los marcos teóricos intervinientes. Vemos entonces que el tema que nos concierne involucra tanto el problema del significado de este término teórico[3] como el apropiado uso del mismo en una específica situación empírica.

En las próximas secciones haremos un rápido repaso de cómo aparece la noción de distancia en distintos marcos teóricos de la física, para finalmente estudiar el uso de este concepto en la explicación de un arreglo experimental específico.

2. Marco teórico newtoniano

En la física newtoniana, se usa el espaciotiempo galileano M_G que puede entenderse como el producto de una variedad temporal T por el espacio euclideano E^3, esto es:

$$M_G = T \times E^3 \qquad (1)$$

En este caso la noción de distancia puede ser puesta en relación uno a uno con la noción geométrica de distancia provista por el espacio euclidiano. Explícitamente, dados dos puntos p y q en el espacio, la distancia d_{pq} puede ser definida por

$$d_{pq}{}^2 = (x_p{}^1 - x_q{}^1)^2 + (x_p{}^2 - x_q{}^2)^2 + (x_p{}^3 - x_q{}^3)^2, \qquad (2)$$

donde $(x_p{}^i, x_q{}^i)$, i=1,2,3, son las coordenadas cartesianas de los puntos p y q respectivamente.

El hecho de que cualquier medida de una distancia involucra un error experimental, no constituye una dificultad conceptual, puesto que dentro del marco teórico newtoniano, uno puede siempre asumir que se puede mejorar las técnicas de medición para hacer que el error experimental sea tan pequeño como se desee.

* Universidad Nacional de Córdoba. CONICET

3. Marco teórico de la relatividad especial

Para describir los fenómenos en relatividad especial se hace uso del espaciotiempo de Minkowski. En este caso no existe la noción de tiempo absoluto, debido a lo cual la noción de longitud de un objeto, depende de su estado de movimiento.

Aparentemente, esto causó algunas dificultades de comprensión en los tiempos en que la teoría era presentada. Sin embargo, todo es claro si se piensa en términos geométricos.

Repasemos brevemente la noción de distancia aplicada a la determinación de la longitud de un objeto, digamos de una barra metálica. Un observador que está en reposo con la barra, determinará la longitud a algún tiempo $t=t_0$, en el sistema de referencia en reposo. Otro observador, que ve a la barra moviéndose con velocidad v, determinará su longitud realizando una medición a un tiempo $t'=t'_0$. Pero mientras el arreglo experimental del primer observador especifica dos eventos p y q, que son los extremos de la barra al tiempo $t=t_0$, el arreglo del segundo observador determina otro par de eventos p' y q'. Lo que es importante notar es que si se prepara todo para que los eventos p y p' coincidan, luego para $v\neq 0$ los eventos q y q' no coincidirán. Esta es la razón por la cual las dos mediciones dan diferente resultados.

Sin embargo, cabe remarcar, que dados dos eventos p y q separados espacialmente, todos los observadores concuerdan en la noción de distancia d_{pq} entre estos eventos; dado que se puede usar el invariante lorentziano

$$d_{pq}^{\ 2} = -\eta_{\mu\nu}(x_p^{\ \mu} - x_q^{\ \mu})(x_p^{\ \nu} - x_q^{\ \nu}), \qquad (3)$$

donde $\mu,\nu=0,1,2,3$ y estamos usando la signatura -2 para la métrica lorentziana η.

Similarmente a lo que ocurre en el caso no relativista, los errores experimentales en la determinación de una distancia, no introducen ninguna dificultad; dado que dentro del marco teórico de la relatividad especial, se puede siempre asumir que es posible mejorar las técnicas de medición para hacer el error tan pequeño como uno desee.

4. Marco teórico de la física cuántica

4.1 Régimen no relativista

Cuando se considera la mecánica cuántica otros aspectos de la noción de distancia aparecen.

Para comenzar, conviene recalcar que si Δx es la indeterminación en la coordenada cartesiana x de una partícula, digamos un electrón, al tiempo t y Δp_x es la indeterminación del correspondiente momento, luego argumentos generales conducen a la llamada relación de incertidumbre de Heisenberg[2], que es la desigualdad

$$\Delta x \Delta p_x \geq h, \qquad (4)$$

donde h es la constante de Planck.

Siendo un poco más precisos con la noción de las incertesas Δx y Δp_x se puede probar[5] una desigualdad más precisa

$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \frac{\eta}{2'} \qquad (5)$$

donde $\eta = \dfrac{h}{2\pi}$.

Esto genera diversas cuestiones. El hecho de que una partícula no sea caracterizada por un punto sino por un paquete de ondas, ya nos confronta con la pregunta de si tiene sentido usar la noción de distancia en el contexto de la mecánica cuántica

En principio uno podría asociar la noción de distancia a la determinación de la posición de dos partículas; llamémoslas A y B. Luego, si al tiempo t uno puede determinar la posición de la partícula A en x_A y similarmente para B en x_B, uno podría definir, en el régimen no relativista, la distancia d_{AB}, usando la geometría euclidiana subyacente, esto es

$$d_{AB}^2=(x_A - x_B)^2; \qquad (6)$$

donde por simplicidad estamos considerando una sola dimensión.

Las determinaciones de x_A y x_B satisfacerán relaciones de la forma (4), por lo que la distancia d_{AB} también tendrá una indeterminación inherente. Sin embargo, en principio es posible para un experimento dado, el hacer que Δx sea tan pequeño como uno quiera. Por lo tanto, en el régimen no relativista, uno puede todavía tener un significado físico preciso de la noción de distancia.

4.2 Régimen relativista

Cuando se consideran sistemas cuánticos relativistas ulteriores aspectos deben tenerse en consideración en la discusión de la noción de distancia.

Conviene remarcar que en el régimen no relativista, mientras el tiempo se toma como un parámetro de la teoría, la posición de una partícula es representada por un operador $\vec{X}$, que constituye un *observable* de la teoría.

Sin embargo, en el régimen relativista, las nociones de tiempo y el espacio provienen de una única variedad espaciotemporal, por lo que las coordenadas temporales y las espaciales son consideradas como parámetros de la teoría. Luego, no queda claro que se pueda extender una noción física de distancia al régimen relativista.

Realicemos una aproximación simplista a la noción de distancia considerando los argumentos de Heisenberg[2], aplicados ahora a un sistema de campos cuánticos relativistas.

Se reproduce así una versión de la ecuación (4) Uno luego trataría de hacer Δx tan pequeño como sea posible; lo que implica un incremento de Δp_x. Sin embargo, en el régimen relativista, cuando Δp_x es del orden de mc, donde m es la masa de la partícula y c la velocidad de la luz, se puede producir la creación de partículas en el proceso de la medición. Debido a esto, la misma noción de la posición de 'una' partícula deja de tener un sentido inambiguo. La longitud característica asociada a esta situación es la llamada longitud de onda de Compton, dada por

$$\lambda = \frac{h}{mc} \qquad (7)$$

En otras palabras, aún cuando se toma una visión un tanto simplista, se encuentra el hecho de que la determinación de la posición de una partícula no puede realizarse con una precisión mayor que su longitud de onda de Compton.

5. Marco teórico de la gravedad relativista: relatividad general

En relatividad general, la estructura del espaciotiempo queda determinada por el par (M,g_{ab}), donde (M) representa la variedad diferencial del espaciotiempo y g_{ab} la métrica lorentziana del mismo. A primera vista uno podría cree entonces que valen las mismas consideraciones que para el espaciotiempo plano de Minkowski, considerado anteriormente en el caso de la relatividad especial, sin embargo, en este caso aparece una nueva complicación.

Supongamos que p y q son dos eventos separados espacialmente. Como la resta de coordenadas en un espaciotiempo curvo, en general no tiene un significado geométrico, nos preguntamos. ¿Cuál es la relación análoga a la ecuación (3)? La manera natural de responder a esto es estudiar las geodésicas que contengan a p y q. La complicación es que si estos puntos están lo suficientemente separados, entonces puede ser que tengamos más de una geodésica que contengan a p y q. Nuevamente la manera usual de dar una noción de distancia a la separación entre estos puntos es con la longitud mínima del conjunto de geodésica que empiezan en p y terminan en q.

6. Marco teórico de la gravedad cuántica

En este caso los eventos (puntos) del espaciotiempo, que son caracterizados localmente por coordenadas de tipo temporal y espacial, son elementos no triviales de la teoría. En particular, asociado a la noción de superficie, volumen o longitud, hay respectivamente un operador, y los cálculos indican[1] que cada uno de estos operadores tiene un espectro discreto.

Esto significa, que en este marco teórico, la noción de distancia está cuantizada. En particular, uno no espera tener mayor precisión en la determinación de una distancia que el límite dado por la distancia de Planck. $\lambda_P = \left(\frac{G\eta}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} = 1{,}616 \times 10^{-35}\,\mathrm{m}$.

7. Unidades para la determinación de distancia

Sería incompleta la discusión de la noción de distancia si no incluyésemos, aunque más no sea brevemente, una referencia al tema de la unidades

De acuerdo al International System of Units[1] el metro es la longitud del camino recorrido por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299 792 458 segundos. Mientras que el 'segundo' es la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles en el estado fundamental del átomo de cesio 133.

Notemos que de esta forma la velocidad de la luz tiene el valor exacto de $c = 299792458\,\frac{m}{s}$.

Vemos entonces que las unidades para medir distancia son en realidad definidas en término de las unidades de tiempo, dada la constante universal c, como debe suceder en épocas relativistas

8. Uso de la noción de distancia en un experimento particular

Detección de ondas gravitacionales por medios interferométricos

La idea básica para la detección es el uso de antenas en forma de L consistentes en dos tubos al vacío, en cuyo interior hay cuatro espejos ubicados en los extremos de cada brazo de la L. Lo que se pretende medir es la variación relativa de la distancia entre los espejos como función del tiempo.

Hay varios proyectos en construcción en el mundo; entre ellos podemos mencionar al LIGO en Estados Unidos con dos observatorios, cuyos brazos tienen 4km de largo; un observatorio está en el estado de Washington y el otro en el estado de Louisiana. También podemos mencionar al proyecto VIRGO que involucra una colaboración francesa-italiana, con un interferómetro de 3km en construcción en las cercanías de la ciudad de Pisa. El interferómetro GEO que es de 600m, se construye bajo una colaboración inglesa-alemana cerca de la ciudad de Hannover. El observatorio TAMA, de 300m, está ubicado cerca de Tokio. También existe un proyecto para construir un detector interferométrico de ondas gravitacionales en el espacio, llamado LISA.

En la descripción de las ondas gravitacionales que podrían ser detectadas, en el sitio de Internet de LIGO, se encuentra el párrafo.[2]

> "Detecting a gravitational wave requires the construction of an L-shaped antenna approximately aligned with the polarization of the wave so that it is capable of detecting the squeezing of space along one arm of the antenna and the simultaneous stretching of space along the other arm."

Si uno se pregunta. ¿Cuan pequeña es la variación en la distancia entre espejos que se espera medir?; nuevamente en el sitio de LIGO se encuentra.[3]

> "The amount of stretching and squeezing of space which is predicted to occur due to events such as the coalescence of a pair of neutron stars within about 100 million light-years from Earth is about one part in 10^{-22}. Observing this fantastically tiny effect is equivalent to detecting the motion of Saturn if it were to move closer to the sun by the diameter of a single hydrogen atom!"

Más precisamente, para dos objetos separados por una distancia x, la onda gravitacional provocará una variación Δx; luego, en el observatorio LIGO I, que está en construcción, se espera medir con una precisión dada por

$$\frac{\Delta x}{x} \approx 10^{-21}; \qquad (8)$$

mientras que en el observatorio LIGO II, que es el proyecto de la nueva generación de observatorios interferométricos, se espera medir señales con una precisión del orden de

$$\frac{\Delta x}{x} \approx 10^{-22}. \qquad (9)$$

Una preocupación importante en el diseño de esta clase de detectores es el control de los diferentes tipos de ruidos[6] que afectan la señal; entre ellos podemos mencionar: el ruido sísmico, el ruido térmico, el 'shot noise' en los lasers, etc.

Nuestra preocupación es en el uso del término físico *distancia* en la descripción de estos experimentos.

Los cuerpos de prueba en estos experimentos son los espejos que están ubicados en los extremos de cada brazo de los detectores. En el proyecto LIGO II, se planea construir los espejos de zafiro. La composición química del zafiro es Al_2O_3.

El radio atómico del aluminio Al y del oxígeno O son respectivamente 143.2×10^{-12}m y 60.4×10^{-12}m. Luego, en orden de magnitud, la dimensión de una celda en el arreglo del zafiro será de $\lambda_S=143.2\times10^{-12}\text{m}+60.4\times10^{-12}\text{m}=2.036\times10^{-10}\text{m}$

En el observatorio LIGO los brazos tienen 4km de largo, por lo que se espera medir variaciones en la distancia del orden de

$$\Delta x_{LIGO} \approx 10^{-21} \times 4km = 4\times10^{-18}\text{m}. \qquad (10)$$

Luego, la relación entre la dimensión característica de una celda en el zafiro λ_S y la variación de distancia Δx_{LIGO} es

$$\frac{\lambda_S}{\Delta x_{LIGO}} \approx 5\ 1 \times 10^7; \qquad (11)$$

en otras palabras se supone que en LIGO se medirían variaciones de distancia Δx_{LIGO} que son 51 millones de veces más pequeñas que las dimensiones de una celda de zafiro (!)

Para enfatizar nuestro punto, notemos que al comparar la variación de distancia esperada en el arreglo experimental de LIGO Δx_{LIGO} con la longitud de onda de Compton del protón λ_e=1.321×10^{-15}m se obtiene

$$\frac{\lambda_e}{\Delta x_{LIGO}} \approx 330, \qquad (12)$$

o sea, en palabras, la variación de distancia esperada es 330 veces más pequeña que la longitud de onda de Compton del protón

Estas relaciones nos señala al menos dos cuestiones. Una está asociada a las dificultades experimentales inherentes en un proyecto con tan ambiciosos objetivos Por ejemplo, un físico experimental experto en estos temas comienza un artículo con las oraciones[7]:

> "In this article I would like to take a very particular point of view on gravitational wave detection, that of an experimental physicist who marvels at the audacity of the attempt. The detection of gravitational waves is *nearly* impossible."

El énfasis en la palabra 'nearly' es original, pero se podría también enfatizar las palabras 'audacity' e 'impossible.' Si bien esta cuestión aparece como fundamental, depositamos toda nuestra confianza en nuestros colegas experimentales para hacer que esta empresa alcance los objetivos buscados

La otra cuestión que motiva este trabajo corresponde a la pregunta de si el uso de la noción de 'distancia' para describir este experimento es físicamente justificado.

De la misma manera que todo marco teórico tiene un rango de aplicabilidad, todo término usado en una construcción teórica también tiene un rango de aplicabilidad. Tenemos la impresión que en este caso, se está forzando el uso del término 'distancia' a través del límite de su rango de aplicabilidad.

Aquí hemos señalado algunos puntos fundamentales que sugieren nuestra afirmación. Existen otros aspectos que no hemos tocado que también nos indican lo mismo, ver por ejemplo la referencia [7].

En relación con esto, conviene recordar el pensamiento de G.W. Leibniz, quien, obviando sus afirmaciones sobre los átomos, escribía[4]:

> "In general, place, position and quantity, such as number and proportion, are merely relations, and result from other things which by themselves either constitute or determinate a change. To be in a place seems, abstractly at any rate, to imply nothing but position. But in actuality, that which has a place must express place in itself; so

that distance and the degree of distance involves also a degree of expressing in the thing itself a remote thing, either of affecting it or of receiving an affection from it."

Rescatamos aquí la necesidad de que el término 'distancia' deba tener una relación consistente con el resto del lenguaje que se use para describir completamente la situación física que se esté estudiando.

Es interesante notar que una descripción detallada del arreglo experimental no involucra variaciones de distancia, dado que servomecanismos están encargados de mantener la posición de los espejos para que no ocurra ningún desfasaje en los patrones interferométricos con la luz proveniente de cada brazo. La medición, en realidad se hace sobre la intensidad de la señal que se debe usar en estos mecanismos para mantener esta situación cuando una onda gravitacional pasa por el observatorio.

Sin embargo, como hemos visto, la descripción usual del detector es en término de la noción de 'distancia.'

Reconocimientos

Agradecemos ayuda de SeCyT-UNC y CONICET.

Notas

[1] http://physics.nist.gov/cuu/Units/current.html

[2] http://www.ligo-la.caltech.edu/Posters/poster11.html

[3] http://www.ligo-la.caltech.edu/Posters/poster12.html

Referencias

[1] A. Ashtekar and J. Lewandowski. Quantum theorey of geometry I. Area operator. *Class. Quantum Grav.*, 14. A55-A81, 1997

[2] Werner Heisenberg. *The Physical Principles of the Quantum Theory*. Dover Pub. Inc., New York, 1949.

[3] Gregorio Klimovsky. *Las desventuras del conocimiento científico*. A Z Editora, Buenos Aires, cuarta edition, 1999

[4] Gottfried Wilhelm Leibniz. On the principle of indiscernibles. In G.H.R. Parkinson, editor, *Philosophical Writings*. J.M. Dent & Sons Ltd., London, 1973

[5] Eugene Merzbacher. *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1970.

[6] Norna A. Robertson. Laser interferometric gravitational wave detectors. *Class. Quantum Grav.*, 17. R19-R40, 2000.

[7] Peter R. Saulson. Interferometric gravtitational wave detection: accomplishing the impossible. *Class. Quantum Grav.*, 17. 2441-2448, 2000.