

# Dinámica de Satélites Irregulares de Saturno.

Martín Manuel Moyano

Director: Alejandro Martín Leiva

Observatorio Astronómico de Córdoba  
Universidad Nacional de Córdoba

10 de agosto de 2011

# Índice general

<b>1. Satélites Irregulares de los Planetas Gigantes.</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción. . . . .	7
1.2. Teorías de Formación . . . . .	11
1.2.1. Modelo de NICE. . . . .	12
1.3. Algunas características Físicas relevantes. . . . .	13
1.3.1. Satélites Irregulares de Saturno. . . . .	14
<b>2. Dinámica de Satélites Irregulares</b>	<b>17</b>
2.1. Introducción. . . . .	17
2.2. Perturbaciones Solares. . . . .	18
2.2.1. Resonancias de movimientos medios. . . . .	18
2.2.2. Resonancia de Lidov-Kozai . . . . .	19
2.2.3. Evección . . . . .	20
2.3. Satélites de Saturno . . . . .	20
<b>3. Herramientas</b>	<b>23</b>
3.1. Movimiento regular y caótico . . . . .	23
3.1.1. Exponente máximo de Lyapunov . . . . .	23
3.1.2. Función Megno . . . . .	25
3.2. Dinámica Resonante . . . . .	26
3.3. Filtros digitales . . . . .	29
<b>4. Estructura del Espacio de Fases.</b>	<b>32</b>
4.1. Exponente de Lyapunov versus Megno. . . . .	32
4.2. Mapa dinámico Megno. . . . .	33
4.2.1. Testeando el integrador . . . . .	34
4.2.2. Mapas dinámicos Megno para satélites de Saturno. . . . .	34
<b>5. Análisis de Estructuras: Lidov-Kozai</b>	<b>40</b>
5.1. Introducción . . . . .	40
5.2. Dinámica Secular . . . . .	41
5.3. Identificando el mecanismo de Lidov-Kozai . . . . .	43
<b>6. Análisis de Estructuras: RMM</b>	<b>48</b>
6.1. Identificando RMM . . . . .	50
6.2. Análisis y Resultados . . . . .	51
6.2.1. Órbita 4 . . . . .	51

6.2.2. Órbita 5 . . . . .	55
6.2.3. Órbita 7 . . . . .	55
6.2.4. Órbita 8 . . . . .	56
6.2.5. Órbita 10 . . . . .	58
<b>A.</b>	<b>62</b>
A.1. Transformaciones de coordenadas . . . . .	62
A.2. Ecuaciones de movimiento y Ecuaciones variacionales. . . . .	65
A.3. Ecuaciones Planetarias de Lagrange . . . . .	66
A.4. Hamiltoniano Secular (Yokoyama et al. 2010) . . . . .	67
A.5. Dinámica de Lidov-Kozai: Ejemplos numéricos. . . . .	68
A.6. Satélites Irregulares. Condiciones Iniciales en mapa Megno. . . . .	72

# Índice de figuras

1.1.	Satélites naturales de Saturno . . . . .	8
1.2.	Satélites conocidos en función del tiempo . . . . .	9
1.3.	Distribución de elementos orbitales . . . . .	10
1.4.	Diagrama polar de elementos orbitales . . . . .	11
1.5.	Distribución de satélites de Saturno . . . . .	15
1.6.	Diagrama polar de satélites de Saturno . . . . .	16
4.1.	Mapa Megno para satélites de Júpiter. . . . .	33
4.2.	Órbita regular . . . . .	34
4.3.	Órbita caótica . . . . .	35
4.4.	Órbita casiperiódica . . . . .	35
4.5.	Reproducción del Mapa Megno de Júpiter . . . . .	36
4.6.	Mapa Megno para satélites de Saturno - I . . . . .	37
4.7.	Mapa Megno para satélites de Saturno - II . . . . .	38
4.8.	Ampliaciones . . . . .	39
5.1.	Esquema: Resonancia de Lidov-Kozai . . . . .	42
5.2.	Condiciones iniciales seleccionadas . . . . .	44
5.3.	Variación de los elementos orbitales ( $I=140^\circ$ ) . . . . .	44
5.4.	Evidencia numérica del Mecanismo de Lidov Kozai $I=0^\circ$ . . . . .	46
5.5.	Excentricidad en función del tiempo ( $I = 110^\circ$ ) . . . . .	47
6.1.	Posiciones nominales de RMM. . . . .	49
6.2.	$j_4$ y $\varphi_{\mathcal{J}}$ . Órbita 4, filtro $< 20$ años . . . . .	52
6.3.	$j_4$ y $\varphi_{\mathcal{J}}$ . Órbita 4, filtro $< 20, 100$ y $140$ años . . . . .	53
6.4.	Excentricidad en función del tiempo de la órbita 4 . . . . .	54
6.5.	Semieje Mayor en función del tiempo de la órbita 4 . . . . .	54
6.6.	$\varphi_{\mathcal{J}} = 9\lambda_1 + 2\lambda - 8\varpi - 3\Omega$ para la órbita 5, filtro $< 60$ años. . . . .	55
6.7.	Argumento $\varphi_{\mathcal{J}} = 14\lambda_1 + 3\lambda - 10\varpi - 7\Omega$ para la órbita 5, filtro $< 60$ años . . . . .	56
6.8.	Argumento $\varphi_{\mathcal{J}} = 14\lambda_1 + 3\lambda - 15\varpi - 2\Omega$ para la órbita 7, filtros $<60, 100$ y $140$ años. . . . .	57
6.9.	Argumento $\varphi_{\mathcal{J}} = 14\lambda_1 + 3\lambda - 17\varpi$ para la órbita 8, filtros $<60$ y $100$ años . . . . .	57
6.10.	Argumento $\varphi_{\mathcal{J}} = 5\lambda_1 + \lambda - 6\varpi$ , $a$ y $e$ para la órbita 8. . . . .	58
A.1.	Mecanismo Lidov-Kozai: $H = \pm 0,05L$ . . . . .	68
A.2.	Mecanismo Lidov-Kozai: $H = \pm 0,3L$ . . . . .	69
A.3.	Mecanismo Lidov-Kozai: $H = \pm 0,6L$ . . . . .	70
A.4.	Mecanismo Lidov-Kozai: $H = \pm 0,8L$ . . . . .	71

# Índice de cuadros

1.1. Fechas de descubrimiento de algunos satélites naturales. . . . .	8
1.2. Número de satélites . . . . .	9
2.1. Elementos planetocéntricos respecto de la Eclíptica . . . . .	21
2.2. Elementos planetocéntricos respecto de la órbita planetocéntrica del Sol. . . . .	22
6.1. Elementos orbitales iniciales de las órbitas seleccionadas. . . . .	49
A.1. Elementos orbitales sobre los mapas Megno. . . . .	72

# Resumen

Actualmente, los satélites naturales de los planetas gigantes se clasifican en dos grandes grupos. Uno de ellos está compuesto por los *satélites regulares* los cuales en general, se mueven en sentido directo, en órbitas casi circulares y cercanas al plano ecuatorial del planeta huésped. Al otro grupo lo componen los *satélites irregulares*, los cuales presentan movimientos directos y retrógrados con trayectorias altamente excéntricas y grandes inclinaciones. A diferencia de los satélites regulares, los satélites irregulares de los planetas gigantes son exteriores, y se caracterizan por grandes semiejes mayores. Por este motivo, sus órbitas son perturbadas por los otros planetas y principalmente por el Sol. Estas perturbaciones separan el espacio de fase en regiones bien diferenciadas que contienen trayectorias regulares y caóticas. Cualitativamente, el caos se identifica con el comportamiento aleatorio y desordenado de los sistemas físicos. Desde un punto de vista cuantitativo, el caos se puede definir como la *impredecibilidad* de la evolución de un sistema físico debida a la sensibilidad a sus condiciones iniciales.

En este trabajo, mediante el problema de tres cuerpos restringido Saturno-Sol-Satélite, la implementación de sofisticadas herramientas de detección de caos y la elaboración de mapas dinámicos de alta resolución, se describe la estructura del espacio de fase de los satélites naturales de Saturno y se analizan los posibles mecanismos dinámicos que afectan el movimiento de los mismos y que definen las regiones de movimiento regular y movimiento caótico.

Este análisis cualitativo del espacio de fase del movimiento de los satélites irregulares de Saturno constituye un primer paso necesario para estudios posteriores más detallados de los mismos.

# Agradecimientos

A Alejandro Martín Leiva por su paciencia, consejo y colaboración.

A los residentes de la casita de Cristián, que me ayudaron de una u otra forma.

A Luis Forlín, quien me acompañó en parte del trayecto.

A Sebastián Heredia, amigo y compañero de estudio.

# Capítulo 1

## Satélites Irregulares.

### 1.1. Introducción.

La existencia de satélites naturales alrededor de los planetas gigantes del Sistema Solar es conocida desde que Galileo descubrió las cuatro Lunas interiores de Júpiter en el Siglo XVII. Tiempo después, con el reconocimiento de la teoría heliocéntrica, fueron descubiertos nuevos cuerpos celestes y se desarrollaron mejores técnicas de observación.

Desde entonces, alrededor de los planetas gigantes del Sistema Solar, se han identificado satélites naturales caracterizados por diversas propiedades físicas y dinámicas, que han permitido clasificarlos cualitativamente en satélites regulares, y satélites irregulares.

Los satélites regulares son aquellos que se mueven en órbitas directas y prácticamente circulares, cercanas al plano ecuatorial de sus respectivos planetas. Es el caso de las Lunas interiores de Júpiter. Por otro lado, se dice que todos aquellos satélites que no se encuentran incluidos dentro de este grupo son irregulares.

Debido a las características de cada grupo, la inclinación de los satélites regulares se mide respecto del ecuador del planeta, mientras que la inclinación de los satélites irregulares se mide respecto del plano orbital del planeta.

Otra distinción entre ambos grupos se debe a que los movimientos de los satélites regulares son de corto período, es decir, son interiores a diferencia de los satélites irregulares que presentan grandes valores de semieje mayor y se encuentran orbitando en la región externa del sistema. Además, entre los dos grupos se observan diferencias de tamaño y forma. Los satélites irregulares son más pequeños que los regulares, y presentan formas aleatorias, mientras que los satélites regulares se caracterizan por ser aproximadamente esféricos. Ésto, sumado al hecho de que la mayoría de los satélites irregulares presentan una magnitud visual extremadamente débil justifica el porque los satélites irregulares fueron descubiertos casi tres siglos después que los primeros satélites regulares.

A modo de comparación, la Tabla 1.1 muestra la magnitud visual instrumental y el año en que fueron descubiertos los primeros seis satélites naturales de los planetas gigantes y dos famosos satélites irregulares de Júpiter (Burns y Matthews, 1986). Sin embargo, como se mencionó anteriormente, la clasificación expuesta es cualitativa, y en la actualidad no existe una definición precisa para satélites regulares e irregulares.

En la Figura 1.1 se muestran las imágenes de dos satélites de Saturno. La imagen izquierda corresponde al satélite regular Mimas descubierto por William Herschel en



Cuadro 1.1: Fechas de descubrimiento de algunos satélites naturales.

Año	Satélite	Planeta	Descubridor	País	Mag. Visual
1610	Io	Júpiter	Galileo	Italia	5, 0
1610	Europa	Júpiter	Galileo	Italia	5, 3
1610	Ganymede	Júpiter	Galileo	Italia	4, 6
1610	Callisto	Júpiter	Galileo	Italia	5, 6
1655	Titan	Saturno	Huygens	Holanda	8, 3
1671	Iapetus	Saturno	Cassini	Francia	10, 2
1904/5	Himalia	Júpiter	Perrin	USA	15
1938	Carme	Júpiter	Nicholson	USA	17, 9

1789. Sus elementos orbitales principales son  $a = 0,00124UA$ ,  $e = 0,0221$ ,  $i = 27,62^\circ$  (Ep. 2005). La inclinación de la órbita de Saturno respecto de la eclíptica es  $\sim 2,48^\circ$  y presenta una oblicuidad de  $\sim 26,73^\circ$ . Así, del valor de la inclinación de Mimas se deduce que su plano orbital es cercano al plano ecuatorial del planeta. Este satélite presenta una forma aproximadamente esférica. La imagen derecha corresponde al satélite irregular Phoebe, el cuál presenta una magnitud visual de 16,5 y fue descubierto por W. Pickering en 1898. Phoebe es el primer satélite irregular descubierto. Sus elementos orbitales son  $a = 0,08689UA$ ,  $e = 0,1524$ ,  $i = 173,15^\circ$  (Ep. 2005). Contrariamente al ejemplo anterior, se aprecian diferencias significativas entre las inclinaciones del plano orbital del satélite y el plano ecuatorial del planeta. Además, Phoebe se encuentra más alejado del planeta y está animado de un movimiento retrógrado. Ambos satélites presentan cráteres de impacto. Después del descubrimiento de Phoebe, en los siguientes 16 años se descubrieron

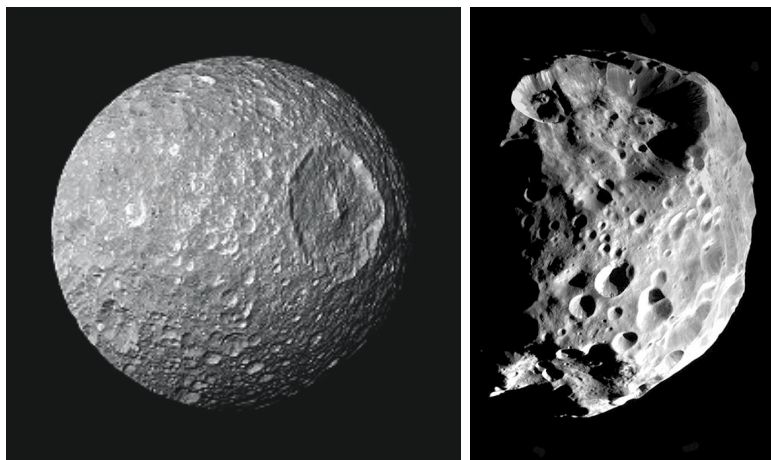


Figura 1.1: Satélites naturales de Saturno: *Izq.*: Mimas. *Der.*: Phoebe. Las imágenes fueron extraídas de <http://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog>, y se corresponden con la clasificación PIA12570.jpg (2010) y PIA06064.jpg (2004) respectivamente (Credit: NASA/JPL/Space Science Institute).

los satélites irregulares Himalia, Elara, Pasiphae y Sinope de Júpiter.

La mayoría de los satélites irregulares actualmente conocidos fueron detectados por

telescopios ópticos de gran apertura dedicados a programas de inspección. En los últimos años, este número se ha incrementado en forma explosiva debido a la búsqueda profunda de imágenes realizadas con cámaras CCD de campo ancho en telescopios de gran apertura (Nicholson et al. 2008). La Figura 1.2 muestra el crecimiento del número de satélites irregulares conocidos a través del tiempo.

De las fuentes de observación moderna se infiere una población total aproximada de 100 satélites irregulares en Júpiter. En la Tabla 1.2 se indica la cantidad de satélites irregulares actualmente conocidos en cada planeta.

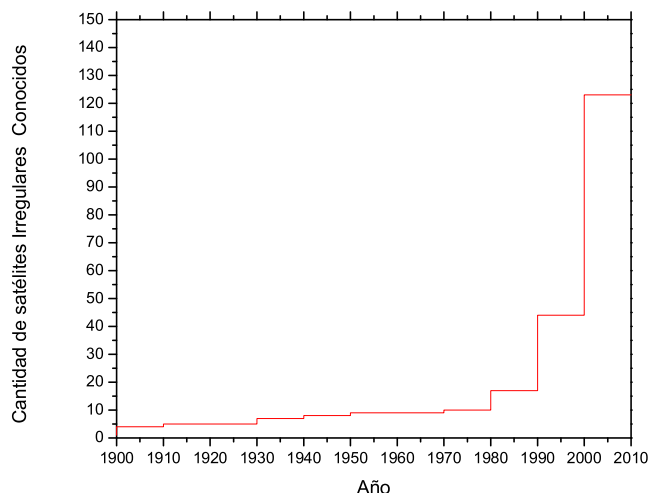


Figura 1.2: Satélites conocidos en función del tiempo, desde 1900 hasta 2010.

Cuadro 1.2: Número de satélites irregulares en cada planeta.

Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
55	45	12	12

Al ser exteriores, los satélites irregulares se encuentran fuertemente perturbados por el Sol. Para estudiar su dinámica, en una primera aproximación, resulta útil considerar un sistema restringido de 3 cuerpos, en el cual, el satélite natural de masa despreciable, evoluciona alrededor del planeta huésped o masa primaria y es perturbado por el Sol (masa secundaria). En la literatura, referida al problema restringido de 3 cuerpos, es muy conocido el concepto de esfera de Hill (Szevehely 1967; Patter y Lissauer 2001). La misma, constituye el límite de la región de dominio gravitacional de la masa primaria sobre la masa perturbadora. La esfera de Hill es una esfera centrada en la masa primaria con el siguiente radio:

$$R_H = \left( \frac{1}{3} \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \right)^{\frac{1}{3}} r_{12} \quad (1.1)$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son los valores de la masa primaria y la masa secundaria respectivamente, y  $r_{12}$  es la distancia entre la primaria y la secundaria.

Con el objetivo de establecer una comparación entre las distribuciones de los elementos orbitales de los satélites naturales de los planetas gigantes, se normalizan los valores de los semiejes mayores  $a$  con los radios de Hill de sus respectivos planetas  $a/R_H$ .

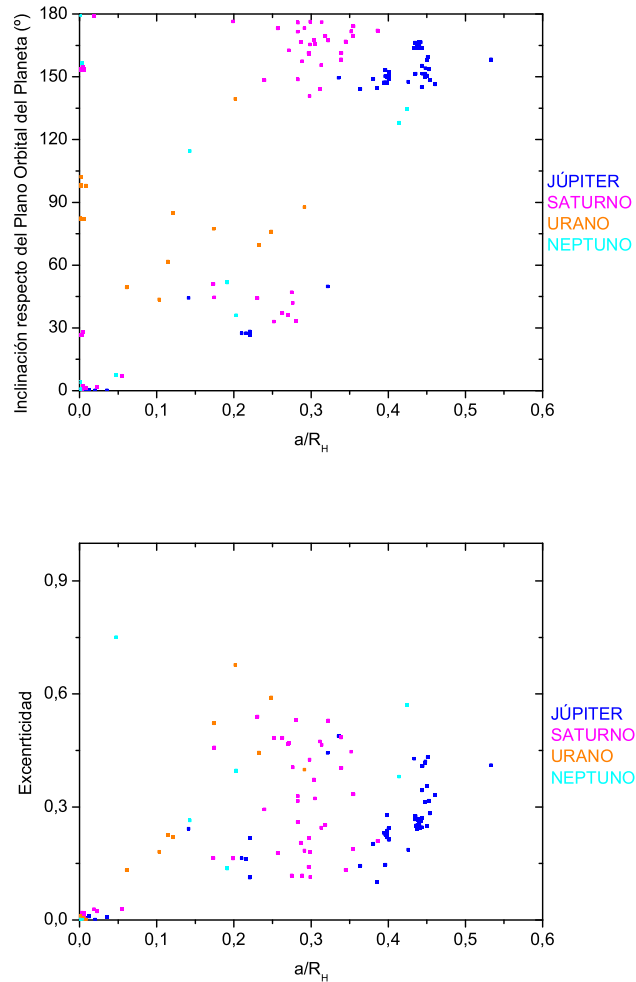


Figura 1.3: Inclinación y excentricidad de los satélites naturales según el semieje mayor normalizado. Júpiter (Azul), Saturno (Magenta), Urano (Naranja) y Neptuno (Celeste).

La Figura 1.3 muestra la distribución de los elementos orbitales de los satélites naturales de los planetas gigantes del Sistema Solar. Las inclinaciones orbitales respecto de la órbita planetaria con valores menores o iguales a  $90^\circ$  corresponden a satélites animados con movimiento directo. Por el contrario, inclinaciones mayores a  $90^\circ$  indican movimiento retrógrado. Teniendo en cuenta las características de la clasificación utilizada para cada grupo, los diagramas presentados permiten distinguir claramente entre satélites regulares e irregulares. Por otro lado, el gráfico superior revela que la mayor parte de los satélites irregulares son retrógrados. Estos satélites presentan gran dispersión en excentricidades.

Para un mejor análisis y comprensión se utiliza una representación en coordenadas polares, en donde la coordenada radial  $r$ , representa la distancia del satélite a su planeta

huésped normalizada al correspondiente radio de Hill y la coordenada angular es equivalente a la inclinación  $I$  respecto del plano orbital del planeta. Esta representación fue implementada por primera vez por Nesvorný et al. 2003.

Debido a la excentricidad orbital  $e$ , la distancia entre el satélite y el planeta huésped varía con el tiempo, siendo la distancia media igual al semieje mayor de la órbita. Entonces, a cada satélite le corresponde un conjunto de coordenadas radiales  $r(t)$ , todas asociadas a un mismo ángulo  $I$ , el cuál, se corresponderá con un segmento que yace sobre una recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas. Considerando que las distancias mínima y máxima entre cada satélite y su planeta huésped a lo largo de un período orbital completo serán  $a/R_H (1 - e)$  y  $a/R_H (1 + e)$  respectivamente, la longitud de cada segmento estará relacionada con el valor de la excentricidad y resultará igual a  $2ea/R_H$ . Mediante esta representación bidimensional podemos visualizar simultáneamente los tres principales elementos orbitales de cada satélite (ver Fig. 1.4).

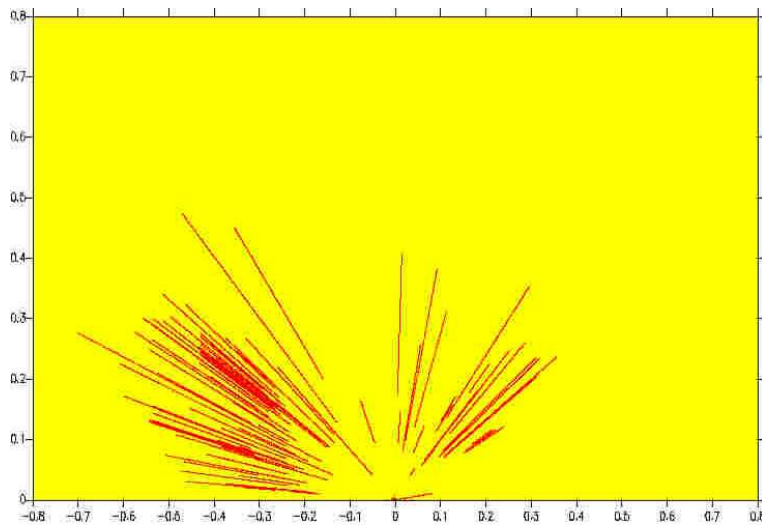


Figura 1.4: Diagrama polar de elementos orbitales. La distancia al origen representa la distancia de un satélite a su respectivo planeta normalizada al radio de Hill correspondiente. La coordenada angular es la inclinación  $I$ . La longitud de cada segmento corresponde al valor  $2ea/R_H$ .

## 1.2. Teorías de Formación

Según el modelo estándar, los satélites regulares se formaron por acreción de dos o más cuerpos en la nebulosa circumplanetaria, del mismo modo que los planetas se originaron en la nebulosa Solar.

Este modelo de formación NO puede ser aplicado a los satélites irregulares por 3 motivos:

1. Por lo general, los satélites irregulares se encuentran alejados del sistema de satélites regulares, motivo por el cuál, resulta improbable que se hayan formado en la misma nebulosa circumplanetaria.
2. Las órbitas altamente excéntricas son incompatibles con la formación por el proceso de acreción directa.

3. La mayoría tienen órbitas retrógradas y por lo tanto no pudieron formarse en el mismo disco que los satélites regulares.

Así, se piensa que a partir de sus órbitas heliocéntricas, los satélites irregulares fueron capturados por los planetas gigantes. Sin embargo, debido a la reversibilidad temporal de las leyes de movimiento de Newton, sus órbitas actuales no pueden deberse a una captura puramente gravitacional. Si la hipótesis de captura es correcta, presumiblemente algún proceso de disipación provocó una captura permanente (Nesvorný et al. 2003).

Se propusieron tres escenarios principales para la formación de satélites irregulares de los planetas gigantes. Originalmente se propuso un escenario colisional para la formación de los 4 satélites irregulares directos y los 4 satélites irregulares retrógrados de Júpiter conocidos antes del año 2000. Las Lunas de cada grupo presentan órbitas parecidas y pueden ser el resultado de la fragmentación de 2 cuerpos que impactaron entre sí. En 1971, Colombo y Franklin propusieron que los 8 satélites se originaron en un encuentro simple entre un objeto temporalmente capturado en una órbita Joviana y un cuerpo moviéndose en una órbita Heliocéntrica (Nicholson et al. 2008). La captura colisional conduce a la formación de grupos dinámicos. Los fragmentos resultantes de una colisión en la vecindad próxima de un planeta constituirán una población de satélites irregulares que tendrán los mismos colores y composición química y presentarán superficies irregulares. Así, como consecuencia de su rotación y de sus formas elongadas e irregulares se esperarían variaciones temporales en sus brillos (Maris et al. 2007).

Una nueva hipótesis fue presentada por Heppenheimer y Porco (1977). Ellos propusieron que los satélites irregulares fueron capturados por la masa de un planeta en formación. En este escenario, conocido como captura *pull-down*, los satélites inicialmente se encontraban en una resonancia de movimientos medios 1 : 1 con su planeta huésped. Debido al crecimiento de la masa planetaria, los satélites lentamente migraron desde sus órbitas heliocéntricas a órbitas planetocéntricas. La captura *pull-down* no implica que exista una correlación entre propiedades físicas y dinámicas, ya que esta captura es de carácter individual. Una debilidad importante de esta hipótesis radica en el hecho de que este mecanismo no produciría satélites irregulares directos (Nicholson et al. 2008).

En 1979, Pollack, Burns y Tauber asumieron que la captura de satélites irregulares fue consecuencia de la pérdida de energía causada por rozamiento de los mismos con el gas circumplanetario. Sin embargo, este mecanismo aparentemente carece de validez cuando se considera que un objeto, luego de ser capturado por fricción con el gas circumplanetario, detiene su movimiento en muy poco tiempo y cae al planeta. Las interacciones con el gas afectan más fuertemente a los cuerpos pequeños y entonces, la hipótesis resultará válida si los cuerpos involucrados tienen un tamaño específico tal que puedan ser capturados sin colapsar. En 2004, Cuk y Burns probaron numéricamente la hipótesis de Pollack y colaboradores, encontrando que este mecanismo pudo actuar eficientemente sobre los mayores satélites irregulares jovianos, siendo Himalia el candidato más probable para este tipo de captura (Nesvorný et al. 2003).

### 1.2.1. Modelo de NICE.

Un soporte adicional para la teoría de captura tardía de satélites irregulares proviene de los resultados obtenidos por Jewitt y Sheppard en 2005, quienes por observaciones

inferen que todos los planetas externos tienen poblaciones similares de satélites irregulares. Tal resultado no se esperaría si los satélites fuesen capturados por el rozamiento con una nube de gas, escenario en el cual, la eficiencia de captura depende de la cantidad de gas que rodea al planeta (Nesvorný et al. 2007).

En 2007, Nesvorný y colaboradores propusieron que los satélites irregulares podrían haber sido capturados por los planetas gigantes en un encuentro de tres cuerpos mediante los siguientes casos:

1. Un intercambio en el cuál, un sistema binario ingresa en la esfera de Hill del planeta. Uno de sus miembros queda atrapado mientras que el otro escapa.
2. Un cuerpo masivo atraviesa la esfera de Hill del planeta gigante y gravitacionalmente remueve la población de planetesimales que transitan temporalmente dentro de la misma, dejando atrapada a una minoría.

Para que funcione el primer modelo, la velocidad orbital del sistema binario original debe ser comparable con la velocidad de encuentro. Debido a que los encuentros rápidos suelen tener una velocidad de unos pocos kilómetros por segundo, se requiere que el mismo tenga una masa relativamente grande.

La idea del segundo modelo está basada en la posibilidad de que los satélites pudieron ser capturados durante encuentros cercanos entre los planetas gigantes. Tales encuentros son descritos por el modelo de Nice, el cual postula que los cuatro planetas exteriores inicialmente se formaron en una configuración compacta a una distancia de entre  $\sim 5$  y  $\sim 20$  UA del Sol, y mediante perturbaciones mutuas migraron a través del disco de planetesimales hacia sus posiciones actuales (Nesvorný et al. 2007).

Nesvorný y colaboradores demostraron que las órbitas de los cuerpos capturados en este proceso son, en líneas generales, similares a las órbitas de los satélites irregulares actuales.

### 1.3. Algunas características Físicas relevantes.

Los satélites irregulares pertenecen a una región estable del Sistema Solar y pueden ser los únicos que tal vez se encuentren cerca de la posición en la que se originaron. Los métodos e instrumentos de observación moderna permiten no sólo observar los satélites naturales de los planetas gigantes, antes desconocidos, sino también determinar algunas de sus propiedades físicas más importantes, las cuales brindan información acerca de los mecanismos de su formación y origen.

Los mayores satélites irregulares de Júpiter tienen muy bajos albedos, de aproximadamente 0,04 o 0,05, y que, de acuerdo a sus colores, son consistentes con el carbón. En relación con el flujo observado de los mismos, el albedo nos permite conocer la composición química de los satélites irregulares y nos permite conocer su tamaño. Considerando el primer valor, a excepción de Himalia, los diámetros de los satélites irregulares directos de Júpiter son mayores a 4 km y menores a 75 km. En el año 2003, se suponía sin mucho desacierto, que el albedo de Himalia era 0,05, así, sus dimensiones resultaban de 150 km por 200 km. Tiempo después, la sonda espacial Cassini obtuvo imágenes de Himalia, confirmando que su albedo es 0,05 pero las observaciones revelaron que sus dimensiones correspondían a un cuerpo alargado con extensiones medias de 120 km por 150 Km.

Comparando sus espectros, los satélites irregulares directos de Júpiter se parecen. Sus colores visuales son grises, por lo tanto es concebible que estos satélites sean fragmentos de asteroides capturados. En contraste, los satélites retrógrados de Júpiter son más pequeños (entre 2 km y 60 km de diámetro) y exhiben una mayor diversidad de colores (Nesvorný et al. 2007).

Existen casos particulares como los satélites Tritón y Nereida de Neptuno que satisfacen algunos, pero no todos los criterios de irregularidad. La órbita de Tritón es retrógrada y aproximadamente circular pero cercana a Neptuno mientras que Nereida, evoluciona a grandes distancias del planeta y es altamente excéntrica aunque existen conjeturas que especulan acerca de que Nereida podría no haber sido capturada. En 1966, McCord propuso que Tritón es realmente un satélite capturado y su órbita originalmente excéntrica fue circularizada por efecto de la disipación tidal. Por otro lado, Goldreich propuso en 1989 que Tritón fue capturado desde su órbita heliocéntrica por una colisión con un satélite preexistente y su órbita inicial, altamente inclinada, evolucionó a causa de la disipación tidal. Además, sugirió que la captura de Tritón desplazó a la originalmente regular Nereida hacia una órbita irregular. Esto explicaría no solo el carácter directo de la órbita de Nereida, sino también su espectro helado y abriría la posibilidad de que existan otros cuerpos, más pequeños, en órbitas similares (Nicholson et al. 2008).

La evolución temporal de las órbitas de los satélites irregulares exhibe una dinámica caótica y cuasi-periódica. En particular en los Capítulos 3 y 4 se analizará este comportamiento y la dinámica orbital de los satélites irregulares de Saturno.

### 1.3.1. Satélites Irregulares de Saturno.

Como se mencionó anteriormente, el concepto de satélites irregulares es relativamente nuevo y en particular, poco se conoce acerca de los satélites irregulares de Saturno. Por este motivo, en este trabajo se describirá la dinámica de la región de movimiento de los mismos. En las Figuras 1.5 y 1.6 se representan sólo los elementos orbitales de los satélites naturales de Saturno. Se observan algunas similitudes entre elementos orbitales, y considerando como único perturbador al Sol, los satélites irregulares de Saturno se mueven en órbitas más interiores que los satélites irregulares de Júpiter, Urano y Neptuno. En unidades de Radio de Hill, el rango de semeje mayor de los mismos es  $(0, 17R_H - 0, 36R_H)$ . Aparentemente, los satélites irregulares de Saturno son más pequeños que los de Júpiter. Asumiendo un albedo de 0,06, estos satélites tienen entre 6 km y 32 km de diámetro, excepto Phoebe cuyo radio medio es  $106 \pm 1$  km con un albedo promedio de 0,08. Antes del año 2000, se detectó agua congelada en Phoebe, motivo por el cual se cree que Phoebe se originó en el Sistema Solar externo (Nesvorný et al. 2007).

En los siguientes capítulos se describirán las principales características dinámicas conocidas de los satélites irregulares de Saturno y las herramientas matemáticas que se utilizarán en este trabajo para referirse a ellas.

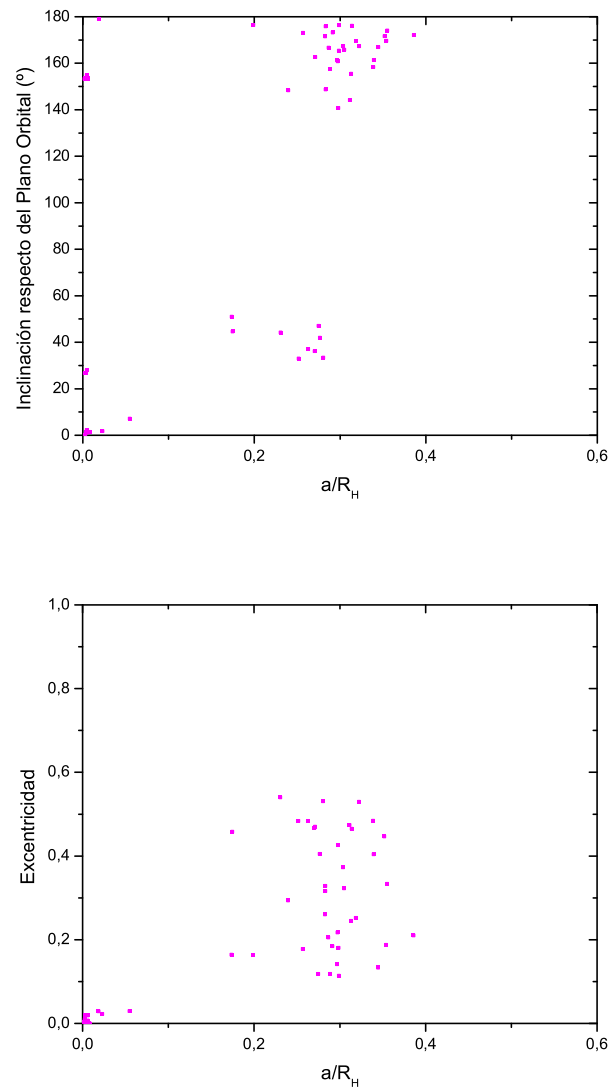


Figura 1.5: Inclinación y excentricidad de los satélites naturales de Saturno según el semieje mayor normalizado. La mayor parte de los satélites irregulares de Saturno son retrógrados.



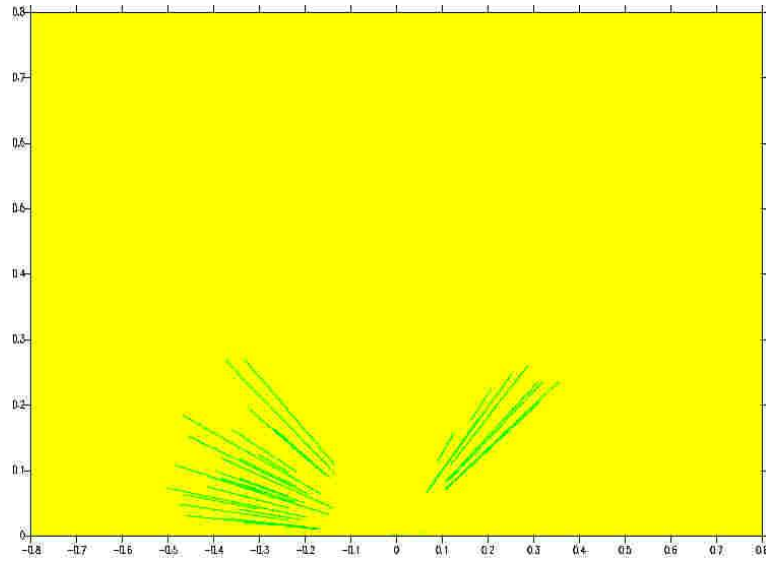


Figura 1.6: Diagrama polar de elementos orbitales de los satélites de Saturno.

## Capítulo 2

# Dinámica de Satélites Irregulares

### 2.1. Introducción.

Los satélites irregulares muestran una interesante jerarquía de órbitas. En particular, cuando se analiza la distribución de los elementos orbitales de los satélites retrógrados se observan aglomeraciones o subgrupos. Estos subgrupos persisten a pesar de las perturbaciones solares y planetarias, que dificultan la identificación de familias. Se dice que un grupo de satélites conforma una *familia* si se originó en la disrupción colisional de un mismo cuerpo. En Júpiter, se observa un aparente ejemplo de familia, el cuál es dominado por el gigante Himalia y se compone de cinco satélites directos que se mueven en órbitas similares, con semiejes mayores de aproximadamente  $0,22R_H$ , con excentricidades acotadas en el rango  $0,1 < e < 0,2$  e inclinaciones respecto de la eclíptica cercanas a  $30^\circ$  (Nesvorný et al. 2007).

Otros subgrupos de satélites irregulares observados en Júpiter se agrupan alrededor de las lunas retrógradas Ananke y Carme. Alrededor de la primera, se aglomeran las órbitas de seis satélites retrógrados, mientras que otros ocho tienen órbitas similares a Carme, una luna de aproximadamente 46 km de diámetro. La dispersión de velocidades de estos grupos es compatible con la esperada de una ruptura colisional simple (Nesvorný et al. 2003). Las diferencias espectrales entre Carme y Ananke sugieren que no tendrían un ancestro común, sino que sus orígenes colisionales provendrían de dos satélites capturados. Los miembros de estas familias tienen espectros homogéneos, lo cual indica que se originaron por fragmentación de cuerpos homogéneos. Teniendo en cuenta la probabilidad de colisión de los satélites irregulares de Júpiter y la cantidad de cráteres observados en Carme y Ananke, la probabilidad de que sus familias sean producto de una colisión es de 0,15 y 0,07 respectivamente. Es probable que su escenario de formación haya sido la edad temprana del Sistema Solar, cuando las colisiones entre cuerpos en órbitas heliocéntricas eran más numerosas (Nesvorný et al. 2003).

Saturno ostenta tres grupos de satélites irregulares caracterizados por inclinaciones similares. A diferencia de Júpiter, los satélites retrógrados de Saturno no forman grupos bien definidos sino que sólo se agrupan en inclinación. El pequeño grupo de Phoebe, por ejemplo, tiene una inclinación cercana a  $175^\circ$ .

## 2.2. Perturbaciones Solares.

### 2.2.1. Resonancias de movimientos medios.

Las mayores perturbaciones en las órbitas de los satélites irregulares provienen del Sol. Considerando que la región de estabilidad de largo período es un poco menor al volumen encerrado por la esfera de Hill, se puede decir que las perturbaciones solares determinan el límite superior de la distancia entre los satélites irregulares y sus respectivos planetas (Nicholson et al. 2008).

Además de determinar la magnitud de las perturbaciones solares sobre las órbitas de los satélites irregulares, las distancias de los mismos a sus planetas huéspedes pueden determinar la existencia de resonancias de movimientos medios. Las resonancias de movimientos medios entre el Sol y los satélites irregulares pueden afectar fuertemente sus movimientos y consecuentemente pueden determinar regiones estables e inestables.

Se dice que dos cuerpos moviéndose en torno a un cuerpo central se encuentran en una resonancia de movimientos medios si el cociente de sus períodos orbitales es un número racional. La condición de resonancia de movimientos medios también se puede representar en función de las velocidades angulares medias. Consideremos dos cuerpos  $A$  y  $B$  en una resonancia de movimientos medios tal que sus períodos orbitales  $T_A = 2\pi/n_A$  y  $T_B = 2\pi/n_B$  cumplen la relación

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{\Gamma_2 + \Gamma_1}{\Gamma_1}. \quad (2.1)$$

donde  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son números enteros.

Si respecto del cuerpo central los cuerpos  $A$  y  $B$  se encuentran en una conjunción en el instante de tiempo  $t = t_0$ , entonces la condición de resonancia conducirá a una nueva conjunción en un tiempo

$$t_1 = t_0 + \frac{2\pi}{n_B - n_A} = t_0 + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \frac{2\pi}{n_A} = t_0 + \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} T_A = t_0 + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\Gamma_2} T_B$$

Así, queda determinado el *período de conjunción*,  $T_{CON} = 2\pi/(n_B - n_A)$  y se cumple la siguiente relación:

$$\Gamma_2 T_{CON} = \Gamma_1 T_A = (\Gamma_1 + \Gamma_2) T_B. \quad (2.2)$$

Para ejemplificar las consecuencias de la Ec. (2.2) podemos mencionar que cada cuerpo completará una cantidad entera de revoluciones alrededor de la masa central entre dos conjunciones consecutivas cuando  $\Gamma_2 = 1$  y así, todas las conjunciones ocurrirán en una misma longitud. Si el valor de  $\Gamma_2 = 2$  la longitud de conjunción se repetirá cada 2 de ellas.

Para comprender como actúa esta resonancia, consideremos el caso de un cuerpo de masa despreciable moviéndose en una órbita excéntrica interior alrededor de un cuerpo central, y un cuerpo perturbador moviéndose en una órbita exterior circular alrededor del mismo cuerpo central. Ambos cuerpos moviéndose en el mismo sentido y en una resonancia de movimientos medios. Por ser interior, la velocidad angular media del cuerpo perturbado es mayor que la velocidad angular media del perturbador.

Si las conjunciones ocurriesen en el apocentro o en el pericentro de su órbita, la fuerza neta tangencial a la órbita sobre el cuerpo interior ejercida por perturbador sería nula. Si las conjunciones ocurriesen cerca del pericentro pero antes de pasar por el mismo, la fuerza tangencial a la órbita ejercida antes de la conjunción sería mayor a la fuerza tangencial a la órbita ejercida después de la conjunción, ya que en el pericentro, la distancia entre el cuerpo perturbado y el perturbador es máxima. De esta forma, luego de la conjunción, la velocidad tangencial del cuerpo perturbado es mayor, disminuyendo el tiempo de interacción con el perturbador. El momento angular, y por lo tanto el semieje mayor del cuerpo perturbado aumentan, provocando una disminución de la velocidad angular media, lo que conduce a que la próxima conjunción ocurra más cerca del pericentro.

Si las conjunciones ocurriesen cerca del pericentro pero después de pasar por el mismo, la fuerza tangencial a la órbita ejercida antes de la conjunción sería menor a la fuerza tangencial a la órbita ejercida después de la conjunción, ya que luego de pasar por el pericentro el cuerpo interior se acerca al exterior. De esta forma, luego de la conjunción, la velocidad tangencial del cuerpo perturbado es menor, aumentando el tiempo de interacción con el perturbador. La disminución de la velocidad angular instantánea del cuerpo interior provoca una disminución del momento angular, y por lo tanto del semieje mayor, con lo cual, la velocidad angular media aumenta, y al igual que en el caso anterior, la próxima conjunción ocurrirá más cerca del pericentro. Así, en una resonancia de movimientos medios, este sistema tiende a que las conjunciones ocurran en el pericentro. Del mismo modo, se puede probar que las conjunciones ocurren cada vez más lejos del apocentro (Murray y Dermott, 1999). Además, cuando las conjunciones ocurran siempre en el pericentro se producirá una disminución de la aceleración centrípeta del cuerpo perturbado, y el pericentro se moverá en el mismo sentido que el cuerpo interior hacia una posición posterior.

### 2.2.2. Resonancia de Lidov-Kozai

Se observan dos claras tendencias entre las órbitas de los satélites irregulares:

- evitan las inclinaciones cercanas a  $90^\circ$
- los satélites directos nunca se separan del planeta huésped más que  $R_H/3$ , mientras que los satélites retrógrados llegan a tener semiejes mayores aproximadamente iguales a  $R_H/2$ .

Una posible causa de la ausencia de satélites irregulares con inclinaciones cercanas a  $90^\circ$  respecto de la órbita planetaria es atribuida a la resonancia de Lidov-Kozai (Lidov R., 1961; Kozai Y., 1962). Consecuencia de las perturbaciones solares, el mecanismo de Lidov-Kozai juega un rol extremadamente importante en el movimiento de los satélites irregulares. Esta perturbación afecta sólo a objetos con órbitas significativamente inclinadas. El ángulo relevante sobre el que actúa este mecanismo es el argumento del pericentro  $\omega$ , el cual describe la orientación de la línea de los ápsides relativa a la línea de los nodos de la órbita planetaria.

Satélites con inclinaciones superiores a  $40^\circ$  e inferiores a  $140^\circ$  pueden exhibir oscilaciones del argumento del pericentro alrededor de  $90^\circ$  o  $270^\circ$ . Los primeros satélites encontrados

en esta resonancia fueron Ijiraq y Kiviuq, de Saturno. Satélites en este tipo de libraciones actualmente son conocidos en los 4 planetas gigantes (Nicholson et al. 2008). En particular, en Yokoyama et al. 2003, se estudian las variaciones de la excentricidad y la inclinación de los satélites irregulares de Júpiter a través de esta resonancia.

El mecanismo de Lidov-Kozai será estudiado y descrito en detalle en el Capítulo 5.

### 2.2.3. Evección

La más importante perturbación solar de corto período que actúa sobre las órbitas de los satélites irregulares es la *evección*. Esta perturbación esta asociada con el doble de la diferencia entre la longitud verdadera del Sol y la longitud del pericentro del satélite observadas desde el planeta, ésto es:

$$2(\lambda_{\odot} - \omega).$$

El período de esta perturbación es aproximadamente igual a la mitad del período orbital planetario (para satélites directos un poco mayor y para satélites retrógrados, un poco menor). La evección, induce variabilidad en todos los elementos orbitales, pero su efecto es más notable en la excentricidad, la cual será mayor cuando el Sol se encuentre a lo largo de la línea de los ápsides de la órbita del satélite, y menor cuando el Sol se encuentre en una dirección perpendicular a ella (Nicholson et al. 2008).

## 2.3. Satélites de Saturno

Con el objetivo de estudiar la dinámica de los satélites naturales de Saturno (Cap. 4, 5 y 6), en esta sección, se determinan los elementos orbitales planetocéntricos de los satélites respecto de la órbita planetaria a partir de los elementos orbitales planetocéntricos conocidos para la época Enero de 2005 respecto del plano de la eclíptica (Enero 2000).

Para ello, es necesario considerar los elementos orbitales de Saturno para Enero de 2005, respecto de la eclíptica (Enero de 2000), los cuales resultan iguales a:  $a = 9,56960$  UA,  $e = 0,0562$ ,  $I_{SE} = 2,486131$ ,  $l_{SE} = 16,982^{\circ}$  (anomalía media),  $\omega_{SE} = 340,7037^{\circ}$  y  $\Omega_{SE} = 113,6246^{\circ}$ .

Los procedimientos y detalles de las transformaciones de coordenadas que se realizan se detallan en el Apéndice A.1.

Las Tablas 2.1 y 2.2 muestran los elementos orbitales planetocéntricos respecto de la Eclíptica media de (Ep. 2000) para Enero de 2005 y planetocéntricos respecto de la órbita del Sol alrededor del planeta para (Enero de 2005).

Cuadro 2.1: Elementos orbitales planetocéntricos de los satélites de Saturno respecto de la Eclíptica media (Ep. 2000) para Enero de 2005.

Satélite	a (UA)	$e$	$I$ ( $^{\circ}$ )	$l$ ( $^{\circ}$ )	$\omega$ ( $^{\circ}$ )	$\Omega$ ( $^{\circ}$ )
Mimas	0,001244	0,022117	27,617257	26,490820	134,775364	172,745242
Enceladus	0,001594	0,004230	28,045869	94,398684	47,682945	169,501200
Tethys	0,001972	0,001162	27,203914	7,714358	331,253648	168,039894
Dione	0,002524	0,002387	28,044247	310,173896	315,290036	169,576732
Rhea	0,003524	0,001290	27,970819	317,318704	169,421387	168,798054
Titan	0,008168	0,028794	27,713285	357,991641	166,794304	169,148276
Hyperion	0,009884	0,112079	27,090155	86,980820	114,102448	168,425495
Iapetus	0,023800	0,028379	17,252088	217,791978	228,880241	139,299261
Phoebe	0,086891	0,152410	173,146171	159,146918	7,642937	263,765393
Janus	0,001016	0,002980	28,207323	150,020876	296,896636	169,400463
Epimetheus	0,001016	0,013091	28,390605	331,762627	19,327910	169,732487
Helene	0,002523	0,007913	28,231840	4,905539	323,893286	169,287596
Telesto	0,001972	0,000996	26,880100	12,486803	26,791162	169,163342
Calypso	0,001972	0,001459	28,163502	353,658349	283,354873	166,347589
Atlas	0,000925	0,005165	28,053839	347,897675	203,863558	169,523321
Prometheus	0,000936	0,006736	28,054946	353,013684	299,573719	169,511033
Pandora	0,000952	0,005926	28,075318	43,529948	290,847072	169,615550
Pan	0,000897	0,005060	28,061088	0,000000	298,296819	169,511513
Ymir	0,154569	0,355721	172,300250	16,512695	38,076651	214,119337
Paaliaq	0,099594	0,435203	45,814586	184,992913	242,961711	346,523491
Tarvos	0,120982	0,549751	35,285666	260,573740	280,064132	92,348592
Ijiraq	0,076144	0,342024	49,887875	47,038897	70,664603	149,008614
Suttungr	0,130906	0,135983	174,441942	256,834437	53,099437	253,967711
Kiviuq	0,075731	0,156819	48,666617	195,670246	93,470041	349,924880
Mundilfari	0,122971	0,198488	169,672460	80,279573	294,527096	80,378004
Albiorix	0,110146	0,513386	38,173119	148,635897	55,191657	109,297614
Erriapo	0,117165	0,535352	38,025465	319,934625	304,304284	130,928826
Skathi	0,103946	0,246812	149,365631	282,022462	220,533391	285,915126
Siarnaq	0,120183	0,473470	45,758080	202,483539	68,885123	60,138243
Thrymr	0,138836	0,459685	174,713658	251,976629	81,996616	250,626780
Narvi	0,129648	0,319019	136,657326	55,163321	175,521139	184,812836
2004S08	0,147395	0,213549	167,995431	249,215985	18,546817	269,426878
2004S07	0,131359	0,579939	165,159742	278,181304	106,545558	347,267387
2004S09	0,132400	0,235096	157,536070	188,987904	334,950909	146,013465
2004S10	0,129339	0,241015	166,927798	222,448102	284,223606	196,522544
2004S11	0,112752	0,334243	40,926547	234,276328	9,379924	192,869892
2004S12	0,131218	0,401154	164,027058	274,969209	97,787959	313,808954
2004S13	0,122568	0,271663	167,419902	20,258832	8,111236	221,858131
2004S14	0,131881	0,294749	162,645510	92,699588	20,047567	323,370705
2004S16	0,147787	0,135338	162,979005	285,731307	142,156464	239,112412
2004S15	0,124408	0,184166	156,903571	231,809563	154,922102	215,162939
2004S17	0,124171	0,260060	166,615838	153,031855	176,276700	19,823175
2004S18	0,131256	0,797792	147,368957	133,235471	83,936767	288,400947

Cuadro 2.2: Elementos orbitales planetocéntricos de los satélites de Saturno respecto de la órbita del Sol alrededor del planeta para Enero de 2005.

Satélite	a (UA)	$e$	$I$ ( $^{\circ}$ )	$l$ ( $^{\circ}$ )	$\omega$ ( $^{\circ}$ )	$\Omega$ ( $^{\circ}$ )
Mimas	0,001244	0,022117	26,420800	26,490800	129,976000	262,693000
Enceladus	0,001594	0,004230	26,724100	94,398700	43,102900	259,240000
Tethys	0,001972	0,001162	25,830400	7,714360	326,610000	257,868000
Dione	0,002524	0,002387	26,725400	310,174000	310,706000	259,319000
Rhea	0,003524	0,001290	26,623000	317,319000	164,864000	258,521000
Titan	0,008168	0,028794	26,379400	357,992000	162,178000	258,932000
Hyperion	0,009884	0,112079	25,731400	86,980800	109,419000	258,292000
Iapetus	0,023800	0,028379	15,048800	217,792000	224,729000	228,959000
Phoebe	0,086891	0,152410	170,906000	159,147000	359,790000	357,216000
Janus	0,001016	0,002980	26,881300	150,021000	292,347000	259,107000
Epimetheus	0,001016	0,013091	27,076500	331,763000	14,790900	259,421000
Helene	0,002523	0,007913	26,901500	4,905540	319,353000	258,985000
Telesto	0,001972	0,000996	25,549600	12,486800	22,034400	259,103000
Calypso	0,001972	0,001459	26,725100	353,658000	278,953000	255,927000
Atlas	0,000925	0,005165	26,732900	347,898000	199,284000	259,262000
Prometheus	0,000936	0,006736	26,733600	353,014000	294,995000	259,249000
Pandora	0,000952	0,005926	26,757800	43,529900	286,266000	259,354000
Pan	0,000897	0,005060	26,739700	0,000000	293,719000	259,249000
Ymir	0,154569	0,355721	171,491000	16,512700	21,323100	316,380000
Paaliaq	0,099594	0,435203	47,346500	184,993000	245,658000	70,341700
Tarvos	0,120982	0,549751	32,979700	260,574000	281,721000	176,648000
Ijiraq	0,076144	0,342024	47,876900	47,038900	68,723900	235,957000
Suttungr	0,130906	0,135983	172,362000	256,834000	41,078200	351,584000
Kiviuq	0,075731	0,156819	50,077900	195,670000	96,167200	73,840100
Mundilfari	0,122971	0,198488	171,641000	80,279600	303,942000	156,758000
Albiorix	0,110146	0,513386	35,694500	148,636000	55,513000	194,712000
Erriapo	0,117165	0,535352	35,658400	319,935000	303,036000	217,616000
Skathi	0,103946	0,246812	146,900000	282,022000	219,923000	12,105500
Siarnaq	0,120183	0,473470	44,313900	202,484000	71,745700	143,788000
Thrymr	0,138836	0,459685	172,696000	251,977000	68,540600	349,676000
Narvi	0,129648	0,319019	137,407000	55,163300	172,043000	273,030000
2004S08	0,147395	0,213549	165,692000	249,216000	14,421200	359,117000
2004S07	0,131359	0,579939	163,566000	278,181000	113,639000	66,107300
2004S09	0,132400	0,235096	159,594000	188,988000	331,130000	235,243000
2004S10	0,129339	0,241015	167,003000	222,448000	273,189000	292,946000
2004S11	0,112752	0,334243	40,523300	234,276000	5,619380	281,392000
2004S12	0,131218	0,401154	161,674000	274,969000	100,516000	36,873000
2004S13	0,122568	0,271663	166,438000	20,258800	357,992000	317,389000
2004S14	0,131881	0,294749	160,449000	92,699600	23,735000	45,543800
2004S16	0,147787	0,135338	161,428000	285,731000	135,789000	330,848000
2004S15	0,124408	0,184166	156,288000	231,810000	148,855000	306,403000
2004S17	0,124171	0,260060	166,230000	153,032000	186,753000	95,309300
2004S18	0,131256	0,797792	144,893000	133,235000	83,543300	14,399500

# Capítulo 3

## Herramientas

### 3.1. Movimiento regular y caótico

A diferencia de los satélites regulares, los satélites irregulares exhiben movimientos impredecibles y desordenados. Esta impredecibilidad está asociada al concepto de caos, y está presente en la mayor parte de los sistemas dinámicos. Cualitativamente, el caos se identifica con el comportamiento aleatorio de un sistema físico. También se lo puede definir como la *sensibilidad a las condiciones iniciales* de tal sistema.

Sin embargo, no todos los satélites irregulares están sujetos a movimientos caóticos. Muchos de ellos permanecen en órbitas regulares, cuya evolución se puede deducir a pesar de los pequeños errores en las condiciones iniciales observadas. Por otro lado, una ínfima desviación en las condiciones iniciales observadas de una órbita caótica puede provocar grandes diferencias entre la trayectoria calculada y la real. Por lo tanto, para determinar si la evolución orbital de un satélite irregular es predecible o no, es necesario determinar también si la órbita es caótica o regular.

Un indicador que permite discriminar entre órbitas regulares y caóticas es el máximo exponente de Lyapunov. Los exponentes de Lyapunov juegan un rol importante en la teoría de sistemas dinámicos, ya que proveen una medida cuantitativa del grado de estocasticidad de una trayectoria. En el espacio de fases, la distancia entre dos trayectorias *regulares* infinitesimalmente próximas crecerá proporcional al tiempo ( $d(t) \sim t$ ). Por el contrario, para trayectorias *caóticas*, la distancia crecerá exponencialmente ( $d(t) \sim \exp(\sigma t)$ ). Así, para una trayectoria dada, el máximo exponente de Lyapunov  $\sigma$  caracteriza la velocidad media de divergencia exponencial de las trayectorias cercanas a ella (Lichtenberg y Leiberman, 1983). En la práctica, el cálculo del exponente de Lyapunov para una trayectoria necesita gran tiempo de cómputo. En los últimos años se ha desarrollado el indicador de caos Megno (Cincotta y Simó, 2000) que permite extraer más información con menos esfuerzo computacional. Este indicador será descripto en detalle en la Sección 3.1.2.

#### 3.1.1. Exponente máximo de Lyapunov

Consideremos un sistema dinámico descripto por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}) \quad (3.1)$$



y una solución conocida  $\vec{x}(t) = \vec{x}_0(t)$  de (3.1) con condiciones iniciales  $\vec{x}_0(0) = \vec{\phi}_0$ . Podemos estudiar la dinámica alrededor de  $\vec{x}_0(t)$  a partir de analizar la evolución de trayectorias que inicialmente se encuentren desplazadas en una cantidad infinitesimal  $\vec{\delta}$  de la solución conocida. Ésto es equivalente a considerar una solución de la forma

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0(t) + \vec{y}(t) \quad (3.2)$$

con las condiciones iniciales  $\vec{x}(0) = \vec{\phi}_0 + \vec{\delta}$ .

Reemplazando (3.2) en la Ec. (3.1) y desarrollando en serie de Taylor hasta primer orden alrededor de  $\vec{x}_0(t)$  obtenemos

$$\frac{d\vec{x}_0}{dt} + \frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}_0 + \vec{y}) = \vec{F}(\vec{x}_0) + D_{\vec{x}}(\vec{F}(\vec{x}_0)) \bullet \vec{y} \quad (3.3)$$

donde  $D_{\vec{x}}(\vec{F}(\vec{x}_0))$  representa la matriz Jacobiana de la función  $\vec{F}$  evaluada a lo largo de la trayectoria de interés.

Así, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para el apartamiento  $\vec{y}(t)$  constituye una aproximación lineal de la dinámica alrededor de  $\vec{x}_0(t)$

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = D_{\vec{x}}(\vec{F}(\vec{x}_0(t))) \bullet \vec{y}(t) \quad (3.4)$$

En la literatura, el sistema (3.4) es conocido como *sistema de ecuaciones variacionales* de la trayectoria  $\vec{x}_0(t)$ .

Con lo expuesto anteriormente, se define la velocidad exponencial media de divergencia de ambas trayectorias como (Lichtenberg y Lieberman, 1983)

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\|\vec{y}(t)\|}{\|\vec{\delta}\|} \right) \quad (3.5)$$

La velocidad exponencial media de divergencia existe y es finita, y se puede expresar de la forma integral

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{|\frac{d\vec{y}}{d\tau}|}{|\vec{y}(\tau)|} d\tau \quad (3.6)$$

Si el vector  $\vec{x}$  es periódico y se encuentra en un espacio de dimensión  $\mathcal{U}$ , entonces existe una base del vector desviación  $\vec{y}$ , la cual está compuesta por los  $\mathcal{U}$  autovectores linealmente independientes de la matriz Jacobiana  $D_{\vec{x}}(\vec{F}(\vec{x}_0))$ . Se definen los exponentes característicos de Lyapunov,  $\sigma_i$ , como factores proporcionales al logaritmo natural de cada uno de los autovalores de  $D_{\vec{x}}(\vec{F}(\vec{x}_0))$ . Si el vector separación inicial  $\vec{\delta}$  es proporcional a uno de los autovectores de  $D_{\vec{x}}(\vec{F}(\vec{x}_0))$ , entonces  $\sigma$  será equivalente al mismo exponente característico de Lyapunov. De manera que  $\sigma$  está acotado superiormente por el máximo exponente característico de Lyapunov, y considerando la evolución de  $\vec{y}$  en un tiempo suficientemente grande,  $\sigma$  alcanzará el valor del exponente característico de Lyapunov correspondiente al máximo autovalor positivo de  $D_{\vec{x}}(\vec{F}(\vec{x}_0))$  considerado en  $\vec{\delta}$ . Por lo tanto, para casi todos los vectores de separación inicial  $\vec{\delta}$ , la velocidad exponencial media de divergencia de las trayectorias resultantes es equivalente al máximo exponente

característico de Lyapunov (Lichtenberg y Lieberman, 1983).

Para una solución no periódica, no se pueden definir autovalores y autovectores de la matriz Jacobiana de  $\vec{F}$ . Sin embargo, en 1968, Oseledec probó la existencia de una base vectorial del espacio de las posibles desviaciones, y de los exponentes de Lyapunov para órbitas no periódicas.

Los cálculos analíticos y numéricos de los exponentes característicos de Lyapunov son muy utilizados como una medida del grado de estocasticidad de trayectorias calculadas a partir de sistemas de ecuaciones casi o aproximadamente integrables.

La definición matemática de movimiento caótico, según la velocidad exponencial media de divergencia de dos trayectorias de condiciones iniciales infinitesimalmente próximas, es

$$\sigma > 0 \quad (3.7)$$

Si el máximo exponente de Lyapunov es positivo, entonces una separación inicial  $\vec{\delta}$  crecerá exponencialmente con el tiempo con velocidad  $e^{\sigma t}$ . Por otro lado, si el máximo exponente de Lyapunov es nulo, el movimiento será regular o casi-periódico. El tiempo de Lyapunov se define como  $t_L = \sigma^{-1}$ , y denota el tiempo necesario para que se manifieste el caos. En tiempos menores a  $t_L$  no se puede detectar el caos y la trayectoria evoluciona como si fuera regular.

El máximo exponente de Lyapunov provee una definición de movimiento caótico que, a pesar de ser muy usada, no es la única. A continuación se define otro indicador de caos, elaborado más recientemente y estrechamente relacionado al máximo exponente de Lyapunov (Cincotta y Simó, 2000).

### 3.1.2. Función Megno

La función *Mean Exponential Growth Factor of Nearby Orbits* se denota comunmente por la sigla Megno, y es un indicador de caos que puede determinar la estocasticidad de cualquier trayectoria solución de un sistema dinámico arbitrario. Dicha trayectoria constituye la variable independiente de la función Megno, la cual está parametrizada por el caos presente en el sistema de ecuaciones que describe el sistema dinámico. Dado un sistema de ecuaciones arbitrario, cada condición inicial determina una trayectoria solución distinta de las demás, y el valor de la función Megno determina la estocasticidad de la misma. Dicha estocasticidad es una característica innata de la condición inicial de la solución. A partir de la Ec. (3.6) se definen las funciones Megno y Megno promediado como (Cincotta y Simó, 2000, 2002)

$$W(\vec{x}(t)) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\left| \frac{d\vec{y}}{d\tau} \right|}{|\vec{y}(\tau)|} \tau d\tau \quad (3.8)$$

$$\overline{W} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\left| \frac{d\vec{y}}{d\tau} \right|}{|\vec{y}(\tau)|} \tau d\tau dt \quad (3.9)$$

Para cada trayectoria, la función Megno asumirá un único valor. Su definición está muy relacionada al máximo exponente de Lyapunov, y provee un método numérico eficiente para detectar regiones del espacio de fase caracterizadas por condiciones iniciales caóticas o periódicas. En su definición, la velocidad relativa de cambio del vector separación esta

pesada con el tiempo durante la integración, dando preferencia a la memoria de evolución tardía. El factor de peso  $\tau$  que aparece en la integral (3.8) introduce una amplificación de cualquier comportamiento estocástico, permitiendo la detección de regiones hiperbólicas en un intervalo de tiempo menor al demandado para el cálculo del máximo exponente de Lyapunov (Hinse et al. 2010). En la práctica, este tiempo puede ser dos o tres órdenes de magnitud menor que el necesario para determinar el exponente característico de Lyapunov. Para grandes valores de  $T$ , la función Megno aplicada a una solución regular tiende a 2, mientras que aplicada a soluciones caóticas, tanto la función Megno como Megno promediado crecen linealmente con  $T$  respectivamente con una pendiente proporcional a  $\sigma$ . El comportamiento asintótico de la función Megno Promediado puede ser descrito como

$$\overline{W} = aT + d \quad (3.10)$$

Si la solución  $\vec{x}(t)$  es estocástica o irregular los coeficientes de la expresión anterior toman los valores (Cincotta y Simó, 2002)

$$a = \frac{\sigma}{2} \quad ; \quad d \cong 0$$

Por el contrario, si la solución  $\vec{x}(t)$  es estable o casi-periódica los coeficientes toman los valores

$$a = 0 \quad ; \quad d \cong 2$$

además, si el movimiento es casi-periódico, entonces Megno exhibirá oscilaciones alrededor de 2.

## 3.2. Dinámica Resonante

El movimiento de los satélites irregulares alrededor de sus planetas huéspedes se encuentra afectado por distintos perturbadores. En este trabajo se estudiará el efecto de las perturbaciones solares sobre los satélites irregulares de Saturno. Ya que a los fines prácticos se supone que los satélites irregulares de los planetas gigantes son cuerpos sin masa, se considerará cada satélite como la masa perturbada de un sistema restringido de tres cuerpos, en el cual el planeta es la masa primaria y el Sol la secundaria. Considerando la ley universal de gravitación de Newton, las ecuaciones de movimiento del problema restringido de tres cuerpos se expresan de la forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= -k^2 m_0 \frac{\vec{r}}{r^3} + k^2 m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} - k^2 m_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \\ \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= -k^2 (m_0 + m_1) \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde  $\vec{r}$  representa la posición respecto del cuerpo central del cuerpo perturbado,  $k^2$  es la constante gravitacional de Gauss,  $\vec{r}_1$  es la posición del perturbador respecto del cuerpo central,  $m_1$  es la masa del perturbador y  $m_0$  es la masa del cuerpo central. La primera ecuación se puede expresar como el gradiente de una función potencial

$$\Psi = \frac{k^2 m_0}{r} + \frac{k^2 m_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{k^2 m_1 \vec{r} \cdot \vec{r}_1}{r_1^3} \quad (3.12)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \nabla\Psi \quad (3.13)$$

Esta función potencial  $\Psi$ , a su vez, se compone de un potencial central

$$U = \frac{k^2 m_0}{r} \quad (3.14)$$

que describe la atracción gravitacional del cuerpo central sobre la masa perturbada, y una función perturbadora

$$R = \frac{k^2 m_1}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|} - \frac{k^2 m_1 \vec{r} \cdot \vec{r}_1}{r_1^3} \quad (3.15)$$

originada en las perturbaciones sobre el sistema de dos cuerpos. El potencial central  $U$  es el mismo que describe el movimiento de dos cuerpos aislados, tomando como origen de coordenadas a uno de ellos. Por otro lado, la función perturbadora  $R$  no se emplea sólo para describir la perturbación en un sistema restringido de tres cuerpos, sino que puede estar referida a cualquier perturbación que altere el movimiento orbital de un cuerpo alrededor de otro, como por ejemplo la oblicuidad planetaria. Obviando el comportamiento descrito por el gradiente del potencial  $U$ , el movimiento de la masa perturbada obedece a la función perturbadora  $R$ , la cual determinará la variación de sus elementos orbitales en función del tiempo. En este caso particular, la función perturbadora está referida a la perturbación sobre un cuerpo sin masa orbitando alrededor de la primaria ejercida por un cuerpo masivo también en órbita alrededor de la primaria. Esta función perturbadora se compone de una parte directa que describe la atracción gravitacional de  $m_1$  sobre la masa perturbada y es representada por el primer término de  $R$ , y una parte indirecta, representada por el segundo término, debida a la elección de un origen de coordenadas no inercial en  $m_0$ .

Con el objetivo de establecer el efecto del perturbador sobre los elementos orbitales de la masa perturbada, la función perturbadora  $R$  se expande en polinomios de Legendre. Para ello se define el ángulo  $\gamma$  como el ángulo entre la masa perturbada y perturbador observados desde la primaria. Debido a las diferencias entre las velocidades medias, y a la inclinación entre las órbitas, este ángulo varía rápidamente. Los cambios provenientes del resto de los elementos orbitales son más lentos. Si  $r < r_1$ , considerando que  $\mathfrak{P}_i$  denota el polinomio de Legendre de orden  $i$ , entonces

$$\frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|} = \frac{1}{r_1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^i \mathfrak{P}_i(\cos(\gamma))$$

La parte directa resulta equivalente a una combinación lineal de polinomios de Legendre dependientes de la variable  $\cos(\gamma)$  y la parte indirecta resulta proporcional solo al polinomio de Legendre de primer orden,

$$\vec{r} \cdot \vec{r}_1 = rr_1 \cos(\gamma) = rr_1 \mathfrak{P}_1(\cos(\gamma))$$

Así, la función perturbadora queda expresada como:

$$R = \frac{k^2 m_1}{r_1} \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^i \mathfrak{P}_i(\cos(\gamma)) \quad (3.16)$$

El ángulo  $\gamma$  entre los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}_1$  es función de todos los elementos orbitales de la masa perturbada y el perturbador, a excepción de las anomalías medias,  $a$  y  $a_1$ . Para encontrar las variaciones temporales de los elementos orbitales se debe expresar  $R$  en función de los mismos. Con este objeto, se definen los argumentos  $\varphi_{\vec{J}}$ , parametrizados por todos los vectores  $\vec{J} = (j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6)$

$$\varphi_{\vec{J}} = j_1\lambda_1 + j_2\lambda + j_3\varpi_1 + j_4\varpi + j_5\Omega_1 + j_6\Omega$$

con componentes  $j_i$  enteras, que cumplen con la relación de D'Álembert:

$$\sum_{i=1}^6 j_i = 0$$

Al igual que  $\gamma$ , los argumentos  $\varphi_{\vec{J}}$  dependen de los ángulos del perturbador y la masa perturbada donde la longitud media es  $\lambda = \varpi + l$ .

Una expresión de la función perturbadora  $R$  análoga a la Ecuación 3.16 es proporcionada por una combinación lineal de estos argumentos, con coeficientes dependientes de la inclinación, la excentricidad y la anomalía media de la masa perturbada, y parametrizada por los mismos elementos orbitales del perturbador (Murray y Dermott, 1999):

$$R = \sum S(a, e, I, \vec{J}) \cos(\varphi_{\vec{J}}) \quad (3.17)$$

Esta expansión de la función perturbadora indica la dependencia de la misma en función de los elementos orbitales. Para cuantificar la variación resultante en los elementos orbitales del cuerpo perturbado se usan las ecuaciones planetarias de Lagrange. Las mismas constituyen la mejor aproximación a una formulación canónica usando elementos orbitales, y se exhiben en el Apéndice A.2.

De la definición de los argumentos  $\varphi_{\vec{J}}$ , se puede ver que la expansión completa de la función perturbadora contiene infinitos términos, sin embargo, el módulo de los coeficientes  $S(a, e, I, \vec{J})$  es inversamente proporcional a la suma de los módulos de las componentes  $j_i$  del vector  $\vec{J}$ , por lo cual, unos pocos argumentos de la función perturbadora  $R$  serán relevantes para el movimiento de la masa perturbada.

En un sistema no perturbado la longitud media  $\lambda$  se incrementa linealmente con velocidad  $n$ . En contraste, el resto de los elementos orbitales permanecen constantes. Esto implica que en el sistema perturbado  $\lambda$  y  $\lambda_1$  varían rápidamente, mientras que el resto de los ángulos son lentos. Entonces, cualquier argumento válido que no contenga las anomalías medias será lento. Ésto, dará origen a los términos seculares o de largo período. Sin embargo, no todos los términos que contienen a  $\lambda$  y  $\lambda_1$  son de corto período. Dado un argumento arbitrario  $\varphi_{\vec{J}}$  si los semiejes mayores son tales que se cumple  $j_1 n_1 + j_2 n \approx 0$ , entonces este argumento no estará afectado por las rápidas variaciones de las anomalías medias, y por lo tanto también será de largo período. Esto ocurre cuando hay conmensurabilidad entre los movimientos medios. Este argumento puede dar lugar a un término resonante.

Según las leyes de Kepler, el período del perturbador alrededor de la masa primaria es

$$T_1 = 2\pi \left( \frac{a_1^3}{k^2(m_0 + m_1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Por otro lado, despreciando el efecto del perturbador, se puede suponer que el período del movimiento de la masa perturbada alrededor de la primaria es

$$T = 2\pi \left( \frac{a^3}{k^2 m_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

De lo cual se deduce que la condición equivalente a una conmensurabilidad entre los movimientos medios es

$$a = \left( \frac{|j_1|}{|j_2|} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^{\frac{1}{3}} a_1$$

Surge una resonancia, si dos períodos o frecuencias están en una proporción numérica simple. Si  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son dos enteros positivos que cumplen con  $(\Gamma_2 + \Gamma_1)n_1 + \Gamma_1 n \approx 0$ , entonces se define la localización nominal  $a_n$  de la resonancia  $\frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{\Gamma_1} = -\frac{n}{n_1}$  como el valor del semieje mayor del cuerpo perturbado que cumple con la relación

$$a_n = \left( \frac{|\Gamma_1 + \Gamma_2|}{|\Gamma_1|} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^{\frac{1}{3}} a_1$$

y se dice que  $\Gamma_2$  es el orden de la resonancia. Por lo general, esta relación provee una localización aproximada de la resonancia en el problema perturbado. Se dice que un cuerpo perturbado está en una resonancia exacta cuando la variación temporal de un argumento resonante  $\varphi_{\mathcal{J}}$  es exactamente 0, es decir

$$\dot{\varphi}_{\mathcal{J}} = j_1 \dot{\lambda}_1 + j_2 \dot{\lambda} + j_3 \dot{\varpi}_1 + j_4 \dot{\varpi} + j_5 \dot{\Omega}_1 + j_6 \dot{\Omega} = 0$$

Esto implica que existe una combinación lineal particular de movimientos medios y precesiones tales que  $\dot{\varphi}_{\mathcal{J}} = 0$ . Si además se cumple que

$$\ddot{\varphi} = 0$$

entonces el movimiento está afectado por tal resonancia.

El conocimiento de la forma de la función perturbadora permite aislar los argumentos seculares y resonantes de los términos de corto período. En efecto, se asume que todos los argumentos no resonantes dependientes de las longitudes medias son de corto período y su efecto promediado es nulo. Esto es lo que se conoce como *Principio de Promediación* y se demuestra que es una buena aproximación para determinar el movimiento global de la masa perturbada. Por lo tanto, aunque los términos de corto período existan, sus efectos son despreciables (Murray y Dermott, 1999).

De las ecuaciones planetarias se deduce que, asumiendo variaciones suficientemente lentas de los coeficientes  $S(a, e, I, \vec{J})$ , las resonancias de  $\varphi_{\mathcal{J}}$  conducen a valores estacionarios de las derivadas temporales de los principales elementos orbitales, y pueden provocar importantes cambios en el movimiento global del cuerpo perturbado.

### 3.3. Filtros digitales

Gran cantidad de magnitudes físicas son representadas por funciones complejas, cuyo comportamiento es difícil de analizar. Por este motivo, se suelen aplicar filtros digitales

que simplifican el problema, siendo las transformadas de Fourier la herramienta más utilizada. A menudo las transformadas de Fourier son empleadas para eliminar las frecuencias no deseadas de ciertas funciones, y de esta forma llevar a cabo un análisis global o local de las mismas. Este método es utilizado, sobre todo, para apreciar las variaciones de menor amplitud por sobre las de mayor amplitud.

Dada una función arbitraria  $V(\alpha)$ , su transformada de Fourier  $B(\beta)$  representa la amplitud de  $V(\alpha)$  en cada frecuencia  $\beta$  respecto de la variable  $\alpha$ .

La expresión matemática de la transformada de Fourier es

$$B(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\alpha) e^{-2\pi i \beta \alpha} d\alpha \quad (3.18)$$

Conociendo la transformada  $B(\beta)$ , la función  $V(\alpha)$  se puede expresar de la forma

$$V(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\beta) e^{2\pi i \beta \alpha} d\beta \quad (3.19)$$

Esta expresión de la función  $V(\alpha)$  permite eliminar de la misma las variaciones de frecuencia no deseada, anulando la función  $B(\beta)$  en esos valores de su dominio. De las definiciones se puede ver que, a su vez,  $V(\alpha)$  es la transformada de Fourier de  $B(\beta)$ .

Por lo tanto, filtrar las frecuencias de  $V(\alpha)$  es equivalente a filtrar el dominio de  $B(\beta)$ . Para ello se define la función de Heaviside, la cual anula los valores de cualquier función en un rango determinado del mismo. La función de Heaviside se define como

$$\Theta(\beta, \beta_0) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \beta \leq \beta_0 \\ 0 & \text{Si } \beta > \beta_0 \end{cases}$$

donde  $\beta_0$  es el valor del dominio a partir del cual se anula la función.

La transformada de Fourier de la función de Heaviside resulta trivial y se denota  $A(\alpha)$

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\beta, \beta_0) e^{-2\pi i \alpha \beta} d\beta$$

Sin embargo, las transformadas de Fourier por sí solas pueden no representar una simplificación del problema a resolver, ya que a menudo resulta muy inviable calcular la transformada de la función cuyas frecuencias se desean filtrar. Una herramienta muy utilizada para evitar este inconveniente es el producto de convolución. El mismo se vale del Teorema de Convolución para aplicar el filtro deseado prescindiendo del cálculo de la transformada.

Se define el producto de convolución de dos funciones arbitrarias  $Q_1(\alpha)$  y  $Q_2(\alpha)$  de la forma

$$\hbar(\alpha) = (Q_1 * Q_2) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_1(\alpha - t) Q_2(t) dt \quad (3.20)$$

El teorema de convolución establece que la transformada de Fourier de  $\hbar$  es el producto de las transformadas de Fourier de  $Q_1$  y  $Q_2$  (Chui, 1992).

Por lo expuesto anteriormente, la función  $V(\alpha)$  filtrada de sus frecuencias mayores a  $\beta_0$ , denotada como  $V^{\beta_0}(\alpha)$ , es equivalente a la transformada de Fourier del producto entre la función de Heaviside y  $B(\beta)$ . A la vez, por el teorema de convolución, esta transformada resulta idéntica al producto de convolución entre  $V(\alpha)$  y la función  $A(\alpha)$ .

$$V^{\beta_0}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\beta)\Theta(\beta, \beta_0)e^{-2\pi i\beta\alpha}d\beta = (V(\alpha) * A(\alpha)) \quad (3.21)$$

Si el objetivo es filtrar las frecuencias menores a  $\beta_0$ , se usa el teorema de convolución para calcular la transformada del producto entre  $B(\beta)$  y la función  $(1 - \Theta(\beta, \beta_0))$ . Si ahora  $\tilde{A}(\beta)$  es la transformada de  $(1 - \Theta(\beta, \beta_0))$

$$\tilde{A}(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \Theta(\alpha, \alpha_0))e^{-2\pi i\beta\alpha}d\alpha$$

entonces, la expresión para  $V(\alpha)$  filtrada de sus frecuencias menores a  $\beta_0$  es

$$V_{\beta_0}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\beta)(1 - \Theta(\beta, \beta_0))e^{-2\pi i\beta\alpha}d\beta = (V(\alpha) * \tilde{A}(\alpha)) \quad (3.22)$$

Filtrar las frecuencias no deseadas permite esclarecer el comportamiento de funciones complejas, y distinguir entre movimientos de corto y largo período. Por este motivo constituye un método muy útil para analizar la dinámica de los satélites irregulares.

Las herramientas descritas en este capítulo serán aplicadas en los distintos análisis de los siguientes capítulos. En particular, en los Capítulos 5 y 6 se usará una versión numérica discreta del filtro digital descrito por las Ecuaciones (3.21) y (3.22).



# Capítulo 4

## Estructura del Espacio de Fases.

En 2010, Hinse y colaboradores presentaron un análisis detallado de la estructura de la región del espacio de fases correspondiente a los satélites naturales de Júpiter. Este análisis fue basado en la construcción de mapas dinámicos de alta resolución implementando la función Megno para identificar regiones de movimiento regular y caótico, y considerando las variaciones máximas observadas en la excentricidad y semieje mayor a partir de reconstruir numéricamente  $\sim 35000$  trayectorias. Para la confección de estos mapas se utilizó una grilla de condiciones iniciales uniformemente distribuidas en los elementos orbitales inclinación  $I$  y semieje mayor  $a$  con las siguientes características

$$\begin{aligned} \Delta a = 0,0008 \text{ UA} & \quad ; \quad 0,04 \text{ UA} \leq a \leq 0,2 \text{ UA} \\ \Delta I = 1^\circ & \quad ; \quad 0^\circ \leq I \leq 180^\circ \end{aligned}$$

asumiendo valores fijos para el resto de los elementos orbitales iniciales;  $e = 0,2$ ,  $l = 90^\circ$  y  $\omega = \Omega = 0^\circ$ .

Las integraciones numéricas se realizaron considerando la evolución de partículas de prueba bajo el enfoque del problema restringido de tres cuerpos Júpiter-Sol-Satélite por un tiempo equivalente a  $\sim 60000$  años (5000 períodos de Júpiter). Una descripción de las estructuras y subestructuras del espacio de fases de los satélites irregulares de Júpiter se muestra en la Figura 4.1. El mapa dinámico fue construido a partir de considerar los valores de la función Megno promediada (Ec. 3.9). Puede verse claramente la complejidad del problema. Las estructuras en forma de *espigas* en la parte superior de la imagen están asociadas a resonancias de movimientos medios de alto orden que separan regiones de movimiento regular y caótico. Para más detalle consultar el trabajo original de Hinse et al. 2010.

### 4.1. Exponente de Lyapunov versus Megno.

Como se mencionó en la Sección 3.1, en la práctica, la determinación del máximo exponente de Lyapunov insuere gran tiempo de cómputo. Esto resulta contraproducente cuando se desean elaborar mapas dinámicos de alta resolución que involucran gran cantidad de condiciones iniciales. Así, resulta más adecuado utilizar la función Megno, la cual converge más rápidamente y al mismo tiempo brinda más información respecto del carácter de la trayectoria.

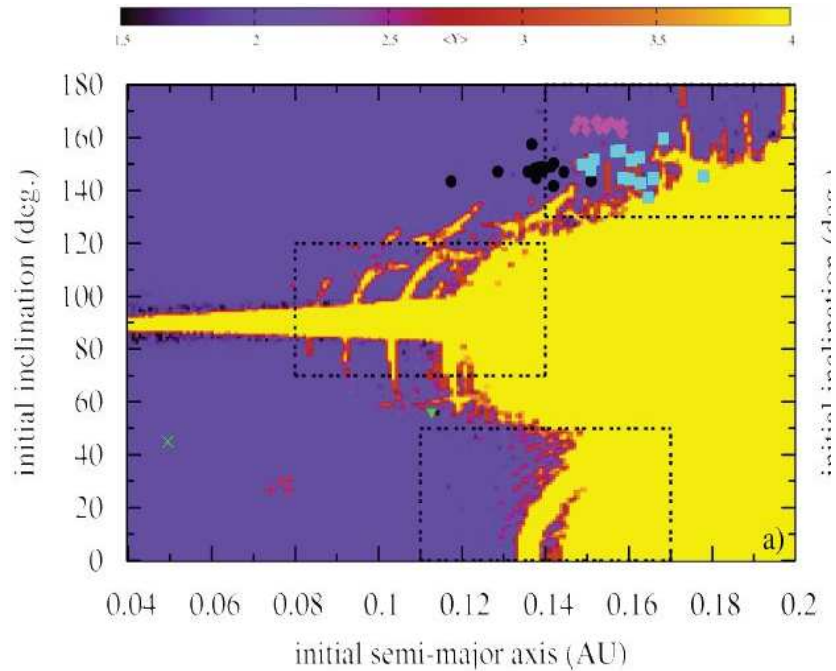


Figura 4.1: Mapa Megno para satélites de Júpiter. Las regiones azules se corresponden con condiciones iniciales que producen soluciones regulares. Por el contrario, las zonas amarillas producen soluciones caóticas. (Extraído del trabajo de Hinse et al. 2010).

Para ejemplificar lo expuesto anteriormente se presentan tres casos particulares en los que, bajo el problema de tres cuerpos restringido Saturno-Sol-Satélite, se han seleccionado partículas de prueba que describen un movimiento regular, caótico y casi-periódico. Para cada caso, las Figuras 4.2 a 4.4 muestran la evolución temporal del logaritmo del exponente máximo de Lyapunov  $\log(\sigma)$  y la función Megno promediada. En las integraciones se asumieron los valores de  $a_1 = 9,54$  UA,  $e_1 = 0,054$ ,  $I_1 = \omega_1 = \Omega_1 = 0^\circ$ , y  $l_1 = 180^\circ$  para los elementos orbitales planetocéntricos del Sol.

## 4.2. Mapa dinámico Megno.

Siguiendo las ideas del trabajo de Hinse y colaboradores, para analizar la dinámica de los satélites irregulares de Saturno, se confeccionaron mapas Megno de alta resolución de la región del espacio de fases correspondientes a los satélites de Saturno a partir de integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento del problema restringido de 3 cuerpos y las correspondientes ecuaciones variacionales. Todas las integraciones numéricas se realizaron implementando un código de *N-cuerpos* en lenguaje Fortran, llamado N-corp, el cual utiliza un algoritmo de Burlisch-Stoer de precisión  $10^{-11}$  (Press et al., 1986). Una descripción detallada de las ecuaciones se presenta en el apéndice A.2.

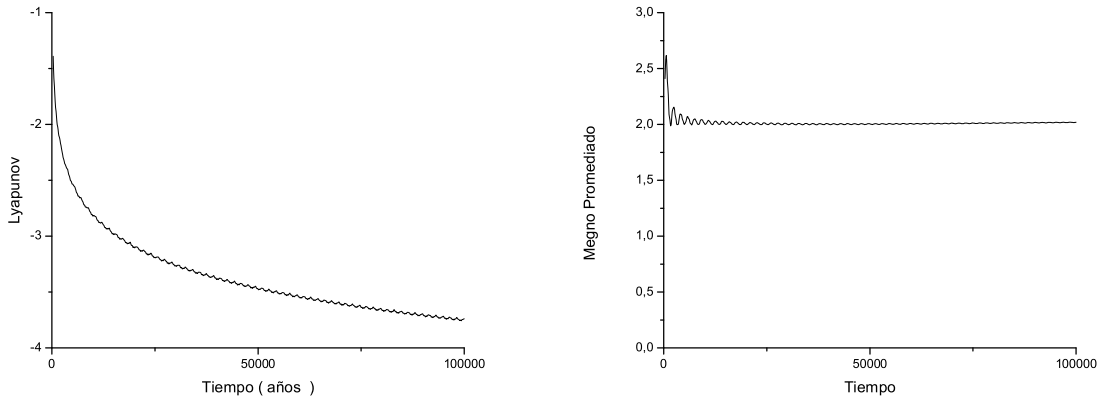


Figura 4.2: Órbita regular. *Izq.*: Exponente máximo de Lyapunov. *Der.*: Megno Promediado. Los parámetros orbitales iniciales son  $a = 0,07 \text{ UA}$ ,  $e = 0,25$ ,  $I = 45^\circ$ ,  $l = 90^\circ$ ,  $\omega = \Omega = 0^\circ$ .

#### 4.2.1. Testeando el integrador

Con el objetivo de testear la validez del código, se reprodujo una pequeña fracción del mapa Megno de la Figura 4.1, pero aumentando la resolución y el tiempo de integración (100000 años). Se utilizó una grilla de 10101 condiciones iniciales con las siguientes características:

$$\begin{aligned} \Delta a &= 0,0002 \text{ UA} & ; & & 0,15 \text{ UA} \leq a \leq 0,17 \text{ UA} \\ \Delta I &= 0,2^\circ & ; & & 130^\circ \leq I \leq 150^\circ \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos son compatibles con los obtenidos por Hinse et al. (2010) y se muestran en la Figura 4.5. En esta figura, las regiones rojas se corresponden con condiciones iniciales asociadas a movimiento caótico, mientras que las regiones azules y celestes indican condiciones iniciales asociadas con movimientos regulares.

Además, se aprecian bien definidas las subregiones con forma de *espiga* asociadas a resonancias de movimientos medios de alto orden, las cuales presentan gran extensión en valores de inclinación, pero resultan muy angostas en valores de semieje mayor.

#### 4.2.2. Mapas dinámicos Megno para satélites de Saturno.

Para caracterizar la estructura del espacio de fases de los satélites de Saturno se confeccionaron dos mapas dinámicos de alta resolución considerando, en cada caso, una grilla de 36381 condiciones iniciales uniformemente distribuidas en valores de semieje mayor e inclinación con las siguientes características:

$$\begin{aligned} \Delta a &= 0,001 \text{ UA} & ; & & 0,05 \text{ UA} \leq a \leq 0,25 \text{ UA} \\ \Delta I &= 1^\circ & ; & & 0^\circ \leq I \leq 180^\circ \end{aligned}$$

Debido a que la población de satélites irregulares presenta altas excentricidades, se utilizaron para cada mapa los valores de excentricidades iniciales  $e = 0,2$ , y  $0,25$  respectivamente. Para los ángulos iniciales se asumieron los valores  $l = 90^\circ$ ,  $\omega = 0^\circ$  y  $\Omega = 0^\circ$ . El

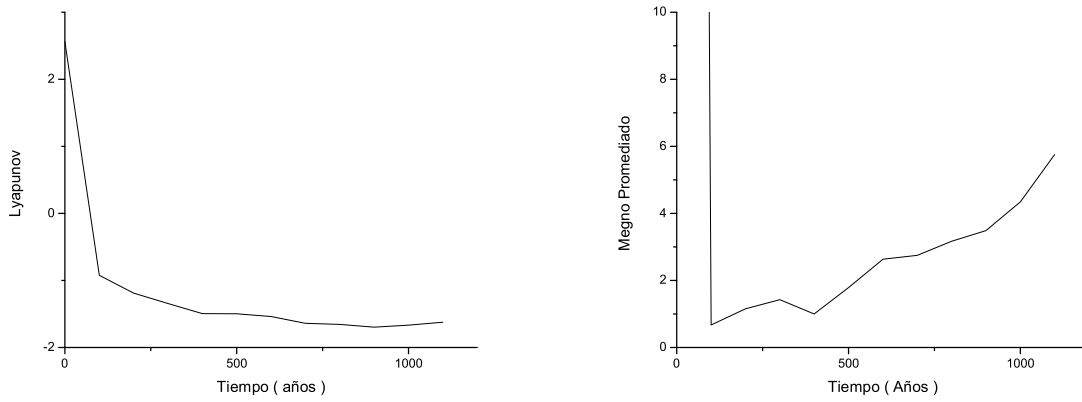


Figura 4.3: Órbita caótica. *Izq.*: Exponente máximo de Lyapunov. *Der.*: Megno Promediado. Los parámetros orbitales iniciales son  $a = 0,20$  UA,  $e = 0,25$ ,  $I = 30^\circ$ ,  $l = 90^\circ$ ,  $\omega = \Omega = 0^\circ$ .

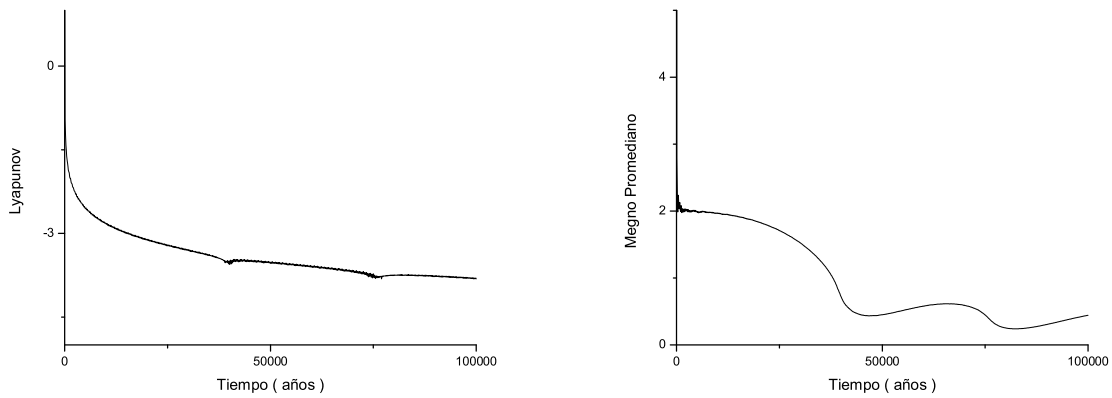


Figura 4.4: Órbita casiperiódica. *Izq.*: Exponente máximo de Lyapunov. *Der.*: Megno Promediado. Los parámetros orbitales iniciales son  $a = 0,22$  UA,  $e = 0,25$ ,  $I = 174^\circ$ ,  $l = 90^\circ$ ,  $\omega = \Omega = 0^\circ$ .

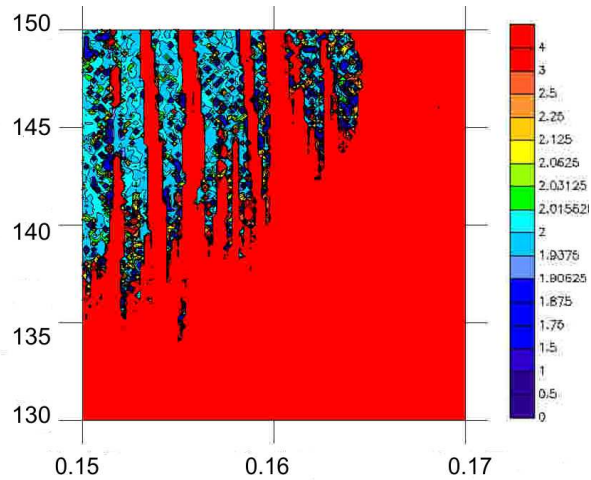


Figura 4.5: Ampliación de una región del mapa Megno para satélites de Júpiter obtenido pro Hinse et al. 2010. Las regiones rojas (azules) contienen condiciones iniciales caóticas (regulares).

plano de referencia de los elementos orbitales en estas integraciones, y por lo tanto en la grilla de condiciones iniciales, es el plano de la órbita de Saturno. En este marco de referencia, la inclinación del Sol (masa perturbadora) es nula. La anomalía media inicial del Sol se asumió como  $l_{\odot} = 180^{\circ}$ .

Al igual que en la reproducción de la subregión del mapa Megno de Hinse de la Figura 4.5, las integraciones se extendieron por un intervalo de tiempo equivalente a 100000 años y se realizaron con un código de *N-cuerpos* que implementa un algoritmo de Burlisch-Stoer de precisión  $10^{-11}$ . Para Saturno se asumió un semieje mayor de 9,5367 UA, una excentricidad  $e = 0,053862$  (Jet Propulsion Laboratory - JPL), y una masa  $m_0 = 0,000286M_{\odot}$  (Smart, 1962).

Las Figuras 4.6 y 4.7 muestran los resultados obtenidos. A cada valor de la función Megno Promediado se le asignó un color, indicado en el señalador adyacente a cada mapa.

En ambos mapas se observan bien diferenciadas las regiones de movimiento caótico (zonas amarillas) y regular (zonas azules). Al igual que el mapa de Hinse representado en la Figura 4.1, sendos mapas revelan una zona caótica en un rango de inclinaciones iniciales alrededor de  $I = 90^{\circ}$  que abarca todo el rango de semiejes mayores iniciales. La estocasticidad de estas condiciones iniciales es producto del mecanismo de Lidov-Kozai, el cual será descrito en detalle en el capítulo 5.

También se observa, en la región de las órbitas directas, un abrupto límite determinado por el semieje mayor entre la zona caótica y regular. Las órbitas directas cuyos semiejes mayores son inferiores a  $0,17UA$  son regulares, mientras que órbitas con semiejes mayores superiores a esa cota son caóticas. Esto significa que los satélites de Saturno con inclinaciones inferiores a  $70^{\circ}$  y cuya distancia al planeta sea inferior al límite de  $0,17UA$ , a pesar de las perturbaciones solares, tendrán movimientos predecibles y uniformes al menos durante 100000 años. Por el contrario, satélites con semiejes mayores que excedan este límite exhibirán movimientos impredecibles debido a la sensibilidad a sus condiciones iniciales. Por otra parte, la estocasticidad de las órbitas retrógradas no sólo depende

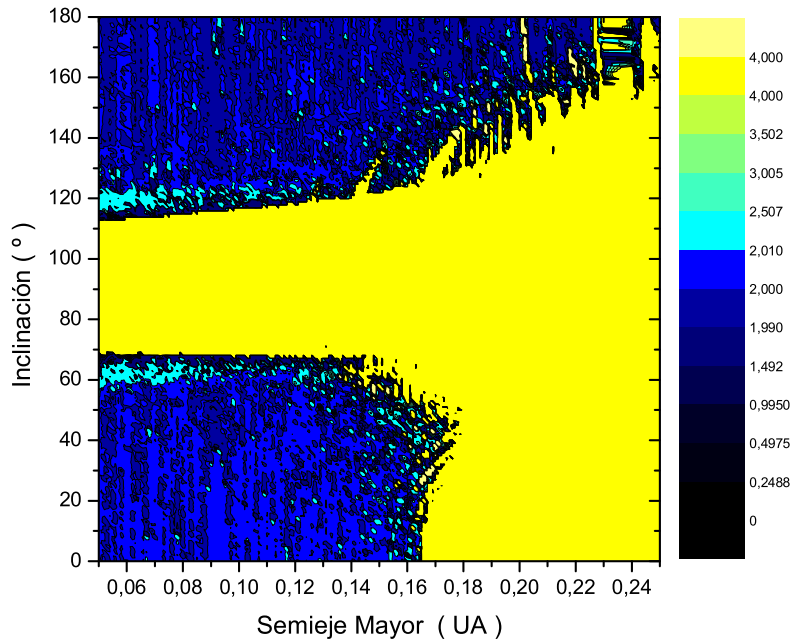


Figura 4.6: Mapa Megno para satélites de Saturno con excentricidad inicial  $e = 0,2$ . Las zonas amarillas indican condiciones iniciales de trayectorias caóticas, y las regiones azules indican condiciones iniciales que se corresponden con órbitas regulares.

del semieje mayor sino también de la inclinación de las mismas. La regularidad de las órbitas retrógradas se ve interrumpida en angostos rangos caóticos de semieje mayor, coincidentes con localizaciones nominales de resonancias de movimientos medios. Estas franjas caóticas son muy extensas en inclinación, pudiendo abarcar todo el rango de dicho elemento orbital y serán estudiadas en detalle en el Capítulo 6. Un ejemplo de las mismas se observa en la Figura 4.7, donde la zona caótica es más ancha alrededor del semieje mayor  $a = 0,2492$ . Este semieje mayor se corresponde con la localización nominal de la resonancia de movimientos medios  $\frac{n}{n_1} = -4$  descrita por la ecuación 3.2. Por lo tanto, dicha ampliación de la zona caótica entre la órbitas retrógradas ocurre si el período de Saturno es equivalente a aproximadamente 4 veces el período de las mismas. Esta es la resonancia de movimientos medios de más bajo orden presente en el mapa. También se observa que las órbitas retrógradas inicialmente paralelas a la órbita planetaria cuya velocidad media se relaciona a la velocidad media del Sol por la proporción entera  $\frac{n}{n_1} = -\frac{11}{2}$  son caóticas. La localización nominal de esta resonancia de movimientos medios es  $a = 0,201538$ , y a medida que la inclinación disminuye desde  $180^\circ$  la zona caótica alrededor del semieje mayor resonante se desplaza en este elemento orbital en sentido positivo.

En el mapa Megno correspondiente al valor de excentricidad inicial  $e = 0,25$  (Figura 4.7) los puntos rosas representan los satélites conocidos de Saturno. Estas posiciones fueron determinadas integrando numéricamente las trayectorias de los satélites a partir de los elementos orbitales presentados en la Tabla 2.2. Para que los valores sean representativos, las integraciones se continuaron hasta obtener los valores angulares iniciales

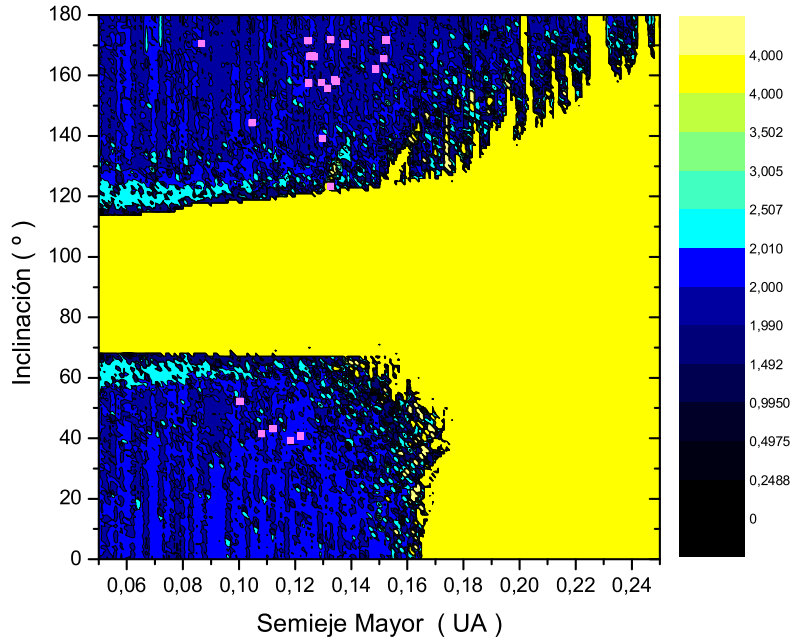


Figura 4.7: Mapa Megno para satélites de Saturno con excentricidad inicial  $e = 0,25$ . Las zonas amarillas indican condiciones iniciales de trayectorias caóticas, y las regiones azules indican condiciones iniciales que se corresponden con órbitas regulares. Los puntos rosas indican las posiciones osculadoras de los satélites conocidos.

asumidos para la confección del mapa, ésto es,  $l = 90^\circ$  y  $\omega = \Omega = 0^\circ$ . En todos los casos, los errores permitidos fueron menores a  $1^\circ$ . Los elementos orbitales de los satélites de Saturno al momento en el cual sus ángulos coinciden con las condiciones iniciales del mapa Megno se muestran la Tabla A.1 del Apéndice A.6.

En las secciones siguientes, este mapa será tomado como referencia para los distintos análisis. Como complemento, para este caso particular, se presentan tres ampliaciones que permiten ver con más detalle las estructuras y subestructuras existentes (Fig. 4.8).

Estas regiones se corresponden con los siguientes valores de inclinación y semieje mayor iniciales :

$$\begin{aligned}
 0,20 \text{ UA} \leq a \leq 0,25 \text{ UA} & \quad ; \quad 150^\circ \leq I \leq 180^\circ \\
 0,12 \text{ UA} \leq a \leq 0,18 \text{ UA} & \quad ; \quad 110^\circ \leq I \leq 150^\circ \\
 0,14 \text{ UA} \leq a \leq 0,18 \text{ UA} & \quad ; \quad 0^\circ \leq I \leq 50^\circ
 \end{aligned}$$

La primera ampliación fue realizada integrando numéricamente una grilla de trayectorias con 101 semiejes mayores iniciales y 61 inclinaciones iniciales, mientras que para la segunda se consideraron 121 semiejes mayores iniciales y 81 inclinaciones iniciales. Ambas ampliaciones se llevaron a cabo integrando en un tiempo equivalente a 100000 años.

La tercera ampliación consta de una red de órbitas con 51 semiejes mayores iniciales y 51 inclinaciones iniciales, integradas por un tiempo equivalente a 200000 años.

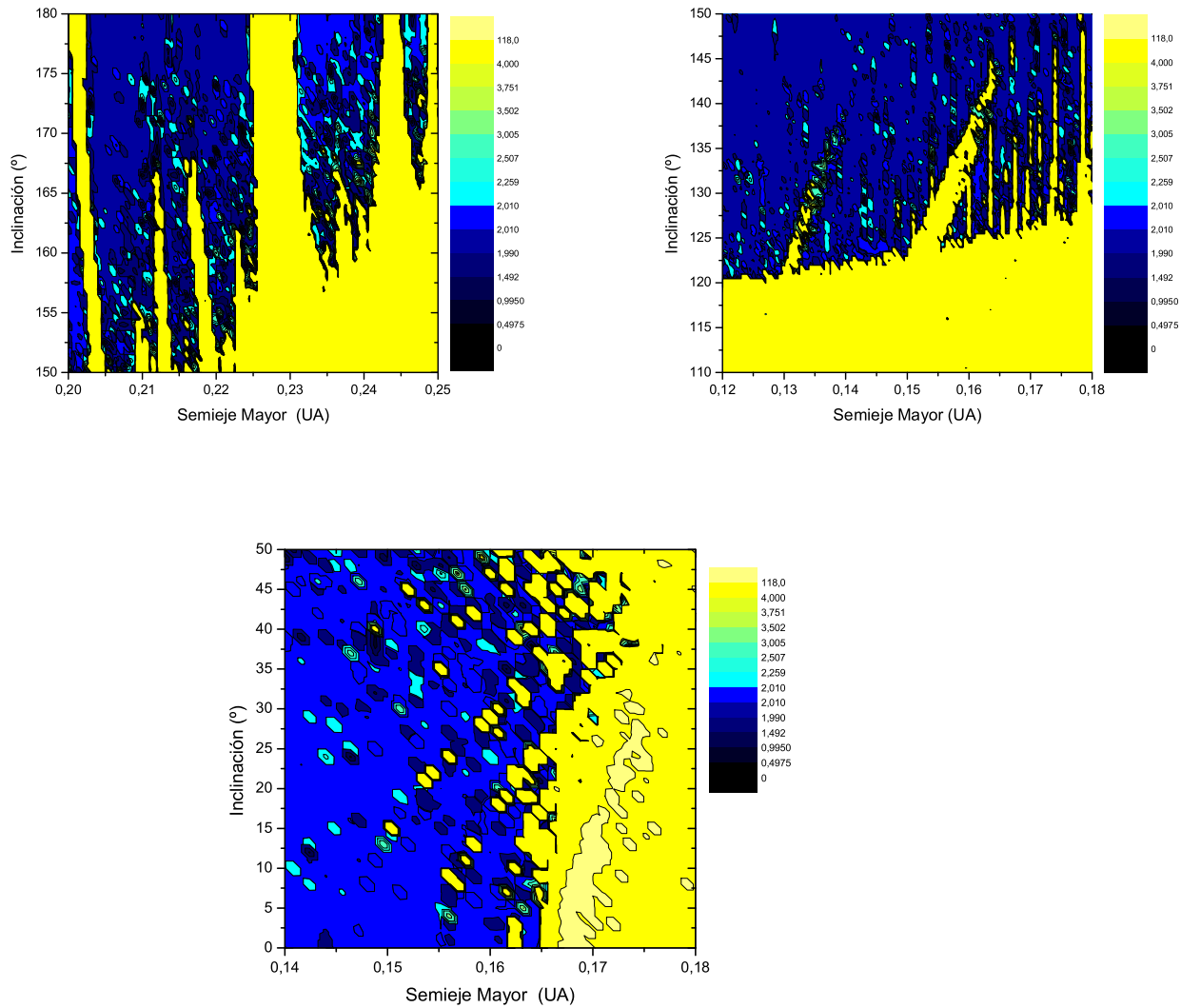


Figura 4.8: Ampliación de tres regiones del mapa Megno con  $e = 0,25$ .



# Capítulo 5

## Análisis de Estructuras: Resonancia de Lidov-Kozai

### 5.1. Introducción

La ausencia de satélites irregulares de los planetas gigantes en órbitas cercanas a los planos perpendiculares a la órbita planetaria es un resultado observacional muy conocido. Considerando las perturbaciones solares sobre los mismos, las inclinaciones cercanas a  $90^\circ$  dan lugar al mecanismo secular de Lidov-Kozai, que actúa en sistemas de tres cuerpos sobre órbitas excesivamente inclinadas respecto del movimiento del perturbador alrededor de la primaria. Su efecto más notable sobre tales órbitas consiste en incrementar su excentricidad hacia valores muy altos, pudiendo provocar una colisión con la masa primaria.

El mecanismo de Lidov-Kozai consta de una correlación de largo período entre la excentricidad  $e$  y el argumento del pericentro  $\omega$  de la masa perturbada, y para determinados valores de las condiciones iniciales implica libraciones de este ángulo alrededor de  $90^\circ$  o  $270^\circ$ .

En el mapa dinámico expuesto en la Figura 4.7 se observa que todas las órbitas integradas con inclinaciones iniciales cercanas a  $90^\circ$  son caóticas. Las condiciones iniciales utilizadas pertenecen a órbitas retrógradas y directas, y determinan una gran zona en el mapa que, debido a su extensión, quizás constituye la característica más relevante. Como se verá a continuación, el gran rango en inclinaciones observado en esta región es una consecuencia directa del mecanismo de Lidov-Kozai.

La forma general de la función perturbadora  $R$  descrita en el Capítulo 3 expresada como función de los elementos orbitales sólo permite deducir el movimiento de la masa perturbada a través de las ecuaciones planetarias de Lagrange (Apéndice A.3), las cuales resultan inadecuadas para cuantificar el mecanismo de Lidov-Kozai.

Por este motivo, se introducen las variables canónicas de Delaunay

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{k^2 m_0 a} & ; & \quad l = \lambda \\ G &= \sqrt{k^2 m_0 a (1 - e^2)} & ; & \quad g = \omega \\ H &= \sqrt{k^2 m_0 a (1 - e^2)} \cos(I) & ; & \quad h = \Omega \end{aligned} \tag{5.1}$$

El momento conjugado  $H$  es proporcional a la componente perpendicular al plano de

referencia del momento angular de la masa perturbada, y será positivo o negativo según la órbita sea directa o retrógrada.

La función de Hamilton resultante de expresar la función perturbadora  $R$  del sistema restringido de tres cuerpos descrito en el Capítulo 3 en función de las variables canónicas de Delaunay será:

$$F(L, G, H, l, g, h) = R(a_1, e_1, i_1, \lambda_1, \omega_1, \Omega_1, a, e, i, \lambda, \omega, \Omega)$$

La función  $F(L, G, H, l, g, h)$  permite describir el movimiento de la masa perturbada mediante las ecuaciones canónicas

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial L} & ; & & \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial l} \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial G} & ; & & \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial g} \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial H} & ; & & \frac{dH}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial h} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Con el objetivo de analizar la dinámica secular, se aplica la teoría de perturbaciones y mediante el método de media, promediando el Hamiltoniano original sobre las anomalías medias del perturbador y la masa perturbada (Morbidelli, 2001), se obtiene el Hamiltoniano del problema secular  $\bar{F}$ .

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F d\lambda d\lambda_1 \quad (5.3)$$

En función de las variables canónicas de Delaunay, el Hamiltoniano Secular  $\bar{F}$  es independiente de la coordenada  $l$ , por este motivo  $L$  será una integral de movimiento y el semieje mayor medio un parámetro constante. Así, en la dinámica secular, las variaciones de corto período en los elementos orbitales restantes no son consideradas. Las nuevas ecuaciones canónicas de movimiento son:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial G} & ; & & \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial g} \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial H} & ; & & \frac{dH}{dt} &= -\frac{\partial \bar{F}}{\partial h} \end{aligned} \quad (5.4)$$

## 5.2. Dinámica Secular

En 2009 Yokoyama y colaboradores obtuvieron un desarrollo del Hamiltoniano Secular del problema restringido de tres cuerpos, truncado a cuarto orden en la razón de semiejes mayores de la masa perturbada y el perturbador,  $a/a_1$ , y hasta segundo orden en excentricidades. Dicho desarrollo, expresado en función de los elementos orbitales, se exhibe en el Apéndice A.4.

El mapa Megno expuesto en la Figura 4.7 está referido a una región del espacio de fase en la cual, considerando las perturbaciones solares sobre los satélites de Saturno, el Hamiltoniano secular obtenido por Yokoyama y colaboradores se puede aproximar como

$$\bar{F} \simeq \frac{k^2 a^2}{a_1^3 (1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) (3 \cos^2(I) - 1) + \frac{15}{16} e^2 \sin^2(I) \cos(2w) \right] \quad (5.5)$$

y su expresión equivalente mediante las variables canónicas de Delaunay

$$\bar{F} = \frac{L^4}{(km_0)^2} \frac{1}{a_1^3 (1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{8} \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{G}{L} \right)^2 \right) \right] \left( 3 \left( \frac{H}{G} \right)^2 - 1 \right) + \frac{15}{16} \left[ 1 - \left( \frac{G}{L} \right)^2 \right] \left( 1 - \left( \frac{H}{G} \right)^2 \right) \cos(2g) \right\} \quad (5.6)$$

Además de  $\bar{F}$  existe otra integral de movimiento, como consecuencia de que  $h$  no aparece explícitamente en el Hamiltoniano secular. De las ecuaciones canónicas se deduce que el momento conjugado  $H$  también es constante, lo que resulta en un acoplamiento entre la excentricidad y la inclinación de la órbita.

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial h} = 0 \quad \rightarrow \quad H = cte.$$

$$H = \sqrt{k^2 m_0 a (1 - e^2(t_0))} \cos(I(t_0)) = \sqrt{k^2 m_0 a (1 - e^2(t))} \cos(I(t)) \quad (5.7)$$

Así, queda establecida la siguiente relación entre la excentricidad y la inclinación:

$$e = \sqrt{1 - \left( \frac{H}{L \cos(I)} \right)^2} \quad (5.8)$$

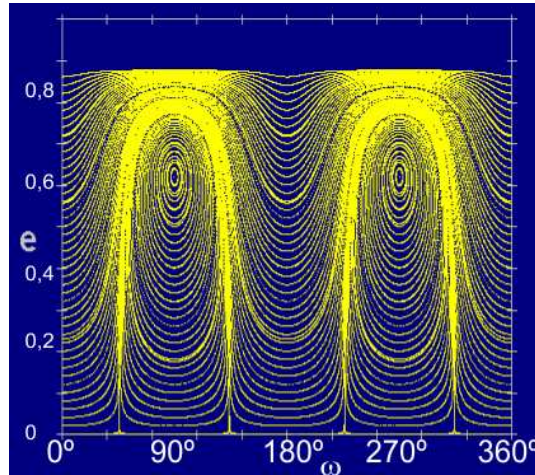


Figura 5.1: Diagrama de flujo para la resonancia de Lidov-Kozai. Para grandes inclinaciones aparecen dos puntos de equilibrio centrados en  $\omega = 90^\circ$  y  $\omega = 270^\circ$ . En las regiones de libración y circulación la excentricidad puede sufrir grandes excitaciones.

El Hamiltoniano  $\bar{F}$  describe la dinámica de 1 grado de libertad en las variables  $(g, G)$  parametrizada por el momento conjugado  $H$ . Para ciertos valores de las integrales de

movimiento  $\bar{F}$  y  $H$ , las ecuaciones de movimiento admiten dos puntos de equilibrio que se corresponderán con los valores angulares para  $g$  de  $90^\circ$  y  $270^\circ$ . Estos puntos de equilibrio existirán para valores de inclinaciones altas. En la Figura 5.1 se muestra un esquema del flujo de las trayectorias en el espacio de parámetros  $(\omega, e)$  cuando aparecen estos puntos de equilibrio. Así, el mecanismo de Lidov-Kozai produce regiones de libración y regiones de circulación. Para gran cantidad de trayectorias la excentricidad es excitada hasta alcanzar valores extremos que pueden hacer que la trayectoria se aproxime significativamente al planeta huésped.

La resonancia de Lidov-Kozai impide la existencia de satélites irregulares con inclinaciones orbitales respecto de la órbita planetaria cercanas a  $90^\circ$ , ya que una pequeña variación de este elemento orbital es acompañada de grandes variaciones en la excentricidad, lo cual provoca que los mismos escapen o choquen con Saturno. Por tal motivo, en el mapa dinámico expuesto en la Figura 4.7 se observa que las órbitas con inclinaciones iniciales mayores a  $70^\circ$  y menores a  $110^\circ$  son caóticas. Por otro lado, al considerar valores superiores del semieje mayor del cuerpo perturbado, este mecanismo se hace más intenso como lo evidencian las Figuras 4.6 y 4.7.

### 5.3. Identificando el mecanismo de Lidov-Kozai

Con el objetivo de detectar la influencia del mecanismo de Lidov-Kozai sobre el movimiento de los satélites irregulares de Saturno, se analizaron 7 trayectorias de partículas de prueba cuyas condiciones iniciales están presentes en el mapa dinámico Megno de la Figura 4.7, esto es,  $a = 0,1UA$ ,  $e = 0,25$ ,  $l = 90^\circ$ ,  $\omega = 0^\circ$ ,  $\Omega = 0^\circ$  con los siguientes valores de inclinación inicial:

Partícula	1	2	3	4	5	6	7
$I$	$0^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$110^\circ$	$120^\circ$	$140^\circ$	$160^\circ$

La Figura 5.2 muestra las condiciones iniciales de las trayectorias seleccionadas. A partir de cada condición inicial, se integraron numéricamente las ecuaciones de movimiento del problema restringido de 3 cuerpos por un tiempo equivalente a 10000 años, asumiendo como masa primaria a Saturno y como perturbador al Sol. Para el perturbador (Sección 4.2) se asumen los mismos parámetros orbitales considerados en la confección del mapa, es decir,  $a_1 = 9,537UA$ ,  $e_1 = 0,0539$ ,  $I_1 = 0^\circ$ ,  $l_1 = 180^\circ$ ,  $\omega_1 = \Omega = 0^\circ$ .

A modo de ejemplo, la Figura 5.3 muestra la evolución de los elementos orbitales de la órbita 6 ( $I = 140^\circ$ ). Se distingue claramente entre variaciones orbitales de corto período y las variaciones seculares, presentando las segundas amplitudes mayores que las primeras. En la parte superior, se presentan los resultados cada intervalos de tiempo de 0,1 año. En la parte inferior, se presentan los resultados aplicando un filtro digital que elimina las variaciones de corto período menores a 100 años (Capítulo 3).

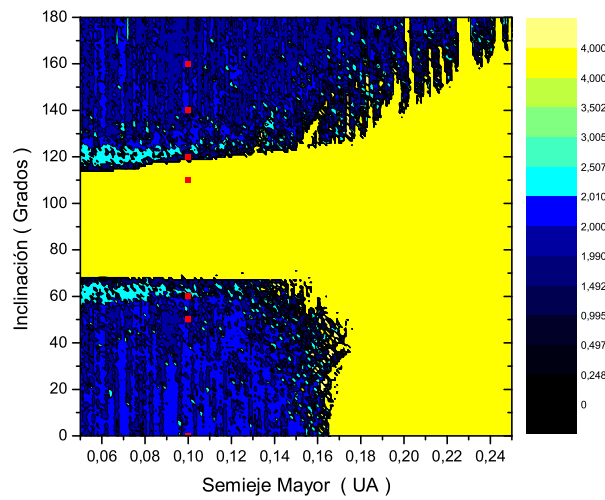


Figura 5.2: Condiciones iniciales seleccionadas. (Mapa Megno de la Figura 4.7)

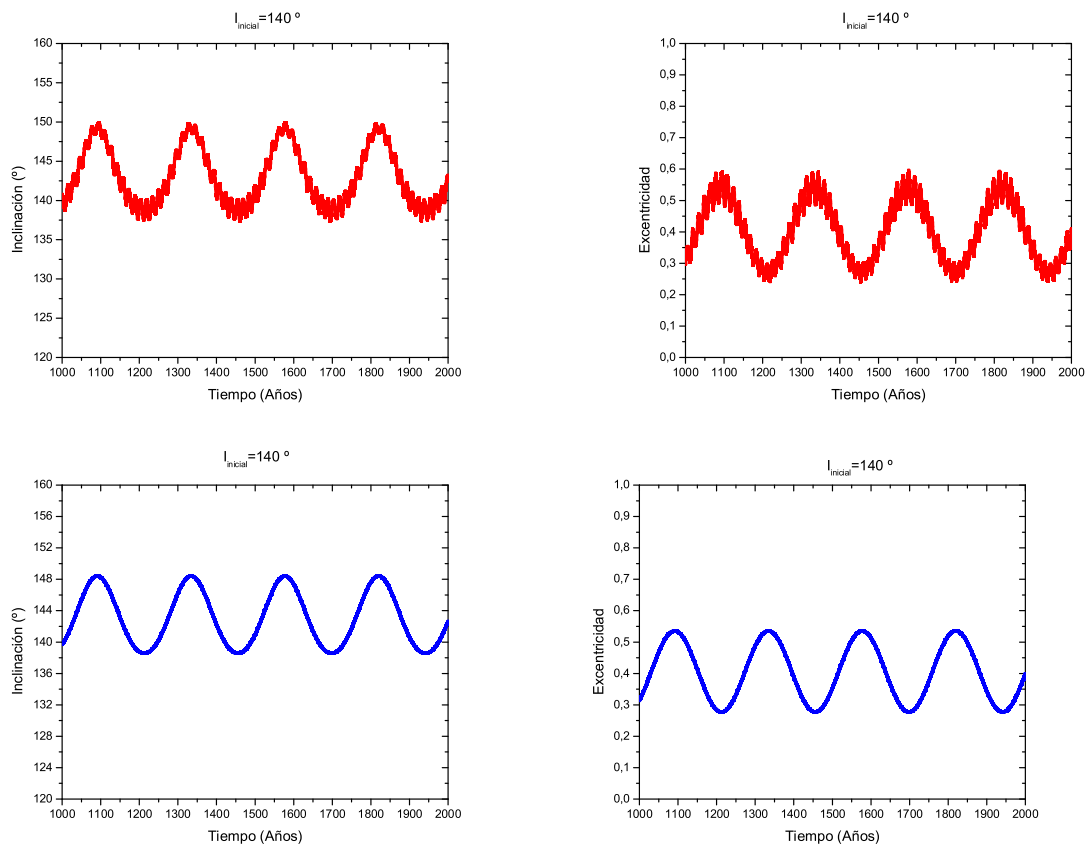


Figura 5.3: Elementos orbitales de la órbita 6 en función del tiempo ( $I = 140^\circ$ ). *Arriba:* Elementos orbitales sin filtrar. *Abajo:* Variaciones seculares aplicando un filtro digital que elimina variaciones de corto período  $< 100$  años.

La similitud observada entre la evolución sin filtrar y la evolución hallada luego de descartar las variaciones de corto período revela que, en la región del mapa correspondiente a trayectorias de movimiento regular determinadas por semiejes mayores inferiores a  $0,17UA$ , las variaciones orbitales de corto período son de una amplitud mucho menor a la de las variaciones orbitales seculares. Así, la evolución de estas trayectorias estará gobernada por la dinámica secular.

Al mismo tiempo, el comportamiento secular muestra la relación entre la excentricidad y el argumento del pericentro. Se observa la misma dependencia predicha por el mecanismo de Lidov-Kozai.

A excepción de la órbita 4, la Figura 5.4 exhibe la relación secular de la excentricidad  $e$  y el argumento de pericentro  $\omega$  de las órbitas resultantes de las integraciones numéricas.

Claramente se ve como a medida que la inclinación aumenta los picos de excentricidad centrados en  $\omega = 90^\circ$  y  $\omega = 270^\circ$  se hacen más notorios. En órbitas suficientemente inclinadas y con valores iniciales de  $\omega$  cercanos a los mencionados se manifiesta el mecanismo de Lidov-Kozai.

En las órbitas resultantes de las integraciones numéricas el valor inicial del argumento del pericentro  $\omega$  no es compatible con el mecanismo de Lidov-Kozai. Por lo tanto, si la inclinación orbital es alta las variaciones en excentricidad son considerables, mientras que si la inclinación es baja las variaciones en excentricidad son mínimas. Por este motivo, debido al gran incremento en excentricidad, las órbitas con inclinación inicial cercanas a  $90^\circ$  son caóticas, como lo indica el mapa dinámico expuesto en la Figura 4.7.

Como observación final la Figura 5.5 muestra los valores de la excentricidad en función del tiempo de la órbita 4 ( $I = 110^\circ$ ) sin filtrar. Se aprecian grandes variaciones que alcanzan valores que hacen posible que la trayectoria sufra encuentros próximos con Saturno o escape de la esfera de Hill. Por este motivo, no existen satélites irregulares con inclinaciones orbitales respecto de la órbita planetaria cercanas a  $90^\circ$ .

Las 7 trayectorias numéricamente determinadas permiten demostrar la preponderante influencia de la relación entre la excentricidad y el argumento del pericentro, predicha por el mecanismo de Lidov-Kozai, sobre el movimiento secular de los satélites irregulares de Saturno. Por este motivo, la amplitud de las variaciones de las excentricidades de los satélites irregulares de Saturno depende de sus inclinaciones orbitales, siendo muy amplia si la inclinación es alta, y pequeña si la inclinación es baja.

También se demuestra que, sobre las órbitas regulares con foco en Saturno cuyo semieje mayor medio es inferior a  $0,17UA$  no prevalecen las variaciones de corto período, mientras que las variaciones seculares tienen relevante influencia en sus parámetros orbitales. Además, en este rango de semieje mayor medio, si la inclinación inicial es nula las variaciones seculares sobre los tres principales elementos orbitales ( $a, e, I$ ) también lo son.

La Figura 4.1 revela que la resonancia de Kozai también afecta el movimiento de los cuerpos en órbita alrededor de Júpiter, aunque de una forma mucho menos pronunciada.

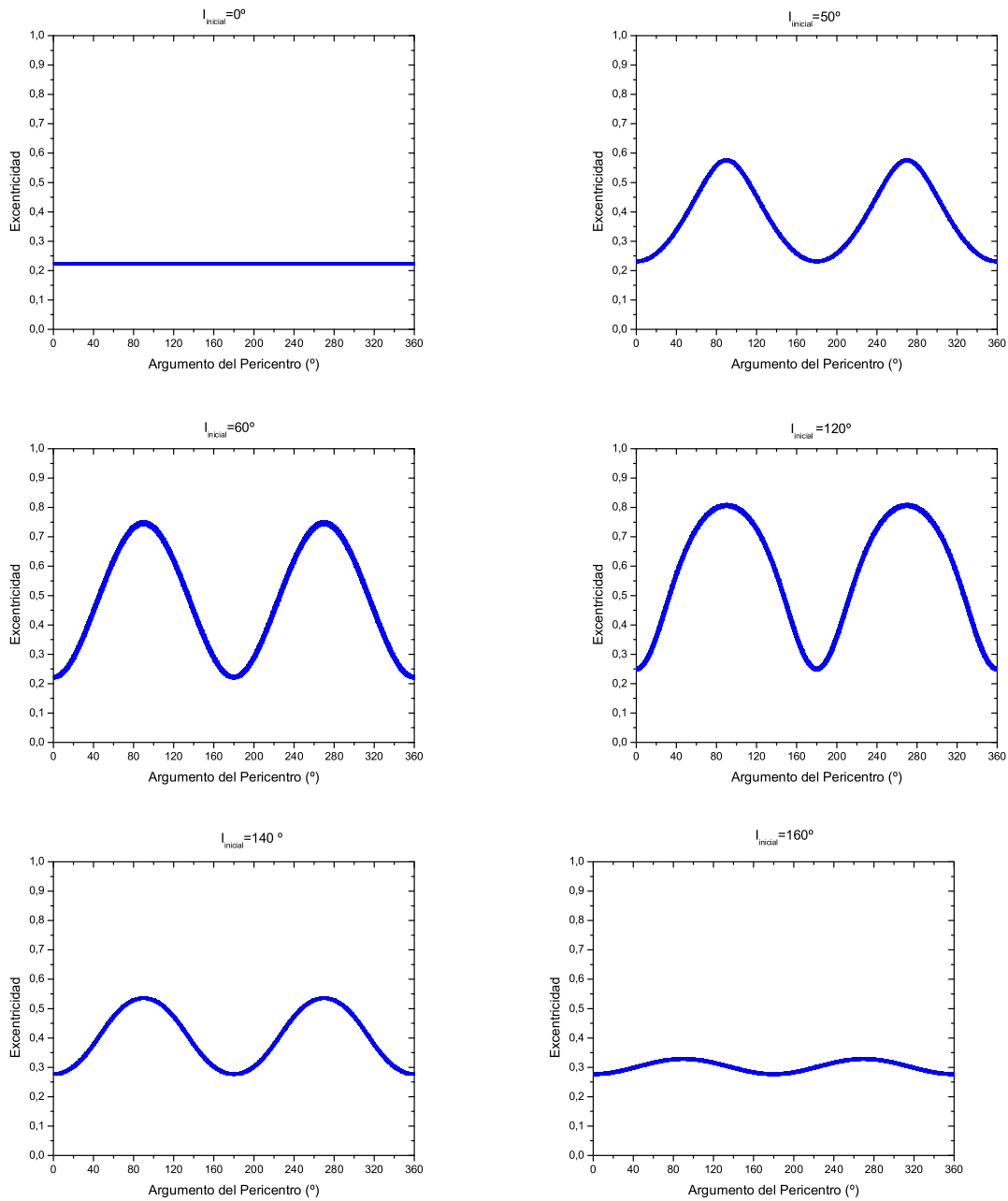


Figura 5.4: Si la inclinación de la masa perturbada respecto de la órbita del perturbador es nula, entonces el Mecanismo de Lidov-Kozai no se manifiesta.

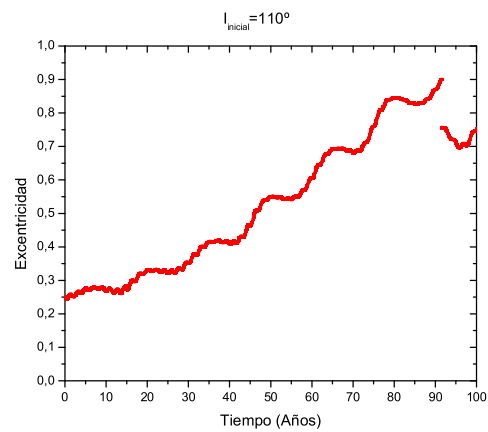


Figura 5.5: Excentricidad en función del tiempo de la órbita 4 ( $I = 110^\circ$ ). Si la inclinación orbital es cercana a  $90^\circ$  el Mecanismo de Lidov-Kozai desestabiliza el movimiento.



# Capítulo 6

## Análisis de Estructuras: Resonancias de Movimientos Medios

Un análisis de la Figura 4.7 permite ver que la extensión de las regiones del espacio de fase asociadas con movimientos regulares es mayor para satélites con órbitas retrógradas respecto de los satélites con órbitas directas. Sin embargo, para grandes inclinaciones y para valores de semieje mayor  $a > 0,17UA$  (parte superior derecha de la Fig. 4.7) se observan conjuntos de condiciones iniciales en forma de *espigas* que dan lugar a órbitas caóticas. Estas regiones quedan delimitadas por regiones de movimiento regular. En particular, gran parte de estas espigas coinciden con las posiciones nominales de resonancias de movimientos medios (RMM) como consecuencia de la conmensurabilidad entre los períodos de las órbitas seleccionadas y el período orbital del Sol alrededor de Saturno (ver Fig. 6.1).

Con el objetivo de analizar e identificar las posibles RMM presentes en esta región se seleccionaron 11 condiciones iniciales cercanas a los límites entre movimiento caótico y regular. A partir de estas condiciones iniciales se integraron numéricamente las ecuaciones de movimiento del problema restringido de 3 cuerpos, considerando como masa primaria a Saturno y como perturbador al Sol. Estas trayectorias se integraron numéricamente por un tiempo equivalente a 10000 años asumiendo para el movimiento del Sol los mismos parámetros orbitales utilizados en la confección del mapa Megno de la Sección 4.2, esto es,  $a_1 = 9,5696$ ,  $e_1 = 0,0562$ ,  $I_1 = 0^\circ$ ,  $l_1 = 180^\circ$ ,  $\omega_1 = 0^\circ$ , y  $\Omega_1 = 0^\circ$ . La Tabla 6 muestra los valores del semieje mayor  $a$ , la excentricidad  $e$  y la inclinación  $I$  de las 11 condiciones iniciales seleccionadas. Para los parámetros angulares anomalía media, argumento de pericentro y longitud del nodo se asumieron, en todos los casos, los valores iniciales  $l = 90^\circ$ ,  $\omega = 0^\circ$  y  $\Omega = 0^\circ$  respectivamente, los cuales coinciden con las condiciones iniciales consideradas en la confección del Mapa Megno. En la Figura 6.1 se detallan, sobre el mapa Megno, las condiciones iniciales de las trayectorias seleccionadas y las posiciones nominales de algunas RMM existentes en dicha región.

Como se mencionó en el Capítulo 3, las consecuencias dinámicas de las perturbaciones solares sobre una trayectoria alrededor de Saturno pueden ser descritas por el gradiente de una función perturbadora  $R$ , la cual, en su forma general, puede expresarse en función de los elementos orbitales como

$$R = \sum S(a, e, I, \vec{J}) \cos(\varphi_{\vec{J}})$$

Cuadro 6.1: Elementos orbitales iniciales de las órbitas seleccionadas.

Órbita	$a$ (UA)	$e$	$I(^{\circ})$
1	0,247246	0,25	172,7252
2	0,243750	0,25	174,9863
3	0,239936	0,25	165,4505
4	0,234746	0,25	162,5996
5	0,228708	0,25	163,3861
6	0,221081	0,25	155,0300
7	0,218114	0,25	156,7995
8	0,215148	0,25	157,5860
9	0,212394	0,25	155,6198
10	0,208386	0,25	147,9519
11	0,203708	0,25	154,0969

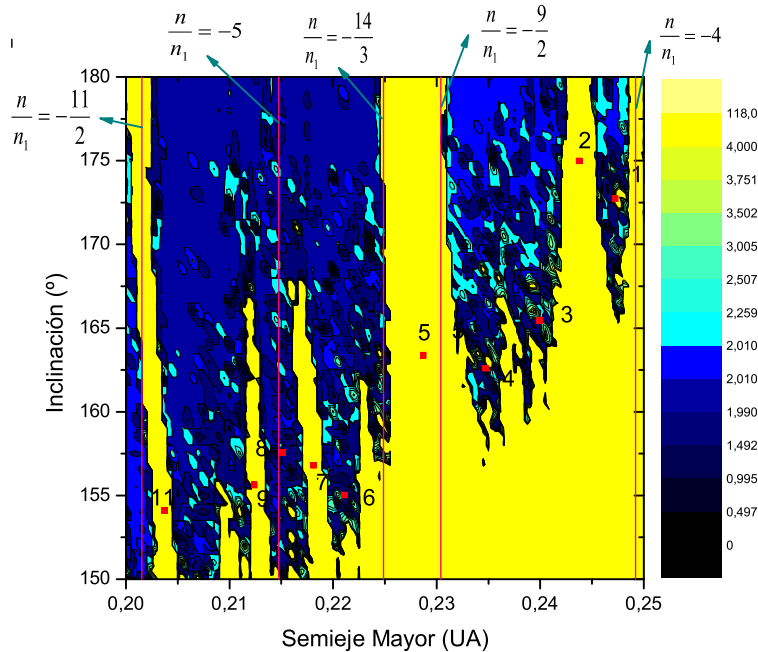


Figura 6.1: Región analizada. Los puntos rojos indican las condiciones iniciales seleccionadas. Las líneas verticales rosas señalan las posiciones nominales de algunas resonancias de movimientos medios.

donde

$$\varphi_{\mathcal{J}} = j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda + j_3 \varpi_1 + j_4 \varpi + j_5 \Omega_1 + j_6 \Omega$$

Siendo el argumento del pericentro y la longitud del nodo del Sol constantes, la derivada respecto del tiempo de cualquier argumento de la función perturbadora  $R$  es equivalente a

$$\dot{\varphi}_{\mathcal{J}} = j_1 \dot{\lambda}_1 + j_2 \dot{\lambda} + j_3 \dot{\varpi}_1 + j_4 \dot{\varpi} + j_5 \dot{\Omega}_1 + j_6 \dot{\Omega} = j_1 \dot{\lambda}_1 + j_2 \dot{\lambda} + j_4 \dot{\varpi} + j_6 \dot{\Omega} \quad (6.1)$$

Por tal motivo, los argumentos resonantes de las órbitas seleccionadas no dependen de

los elementos orbitales del Sol,  $\varpi_1$  y  $\Omega_1$ .<sup>1</sup> Así, las trayectorias sólo serán afectadas por argumentos de la función perturbadora de la forma

$$\varphi_{\mathcal{J}} = j_1\lambda_1 + j_2\lambda + j_4\varpi + j_6\Omega \quad (6.2)$$

donde los coeficientes enteros  $j_i$  cumplen la regla de D'Alembert (Murray y Dermott, 1999):

$$j_1 + j_2 + j_4 + j_6 = 0 \quad (6.3)$$

Las RMM están asociadas a una conmensurabilidad de los movimientos medios dada por

$$j_1n_1 + j_2n = 0 \quad (6.4)$$

En nuestro caso, la velocidad angular media del Sol alrededor de Saturno resulta  $n_1 \simeq 17,05^\circ/\text{año}$  y, dado que las órbitas seleccionadas son retrógradas,  $n$  siempre será negativo.

## 6.1. Identificando RMM

Con el objetivo de determinar las posibles RMM que afectan las órbitas resultantes de las trayectorias numéricamente determinadas, se calcularon, en cada una de ellas, las derivadas temporales de los ángulos  $\lambda_1$ ,  $\lambda$ ,  $\varpi$  y  $\Omega$ . Para distintos valores de los coeficientes  $j_1$  y  $j_2$  que representan las RMM nominales presentes en la región, mediante las Ecuaciones (6.1) y (6.3), y asumiendo como incógnitas a  $j_4$  y  $j_6$ , se consideró el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} j_4\dot{\varpi} + j_6\dot{\Omega} &= -j_1\dot{\lambda}_1 - j_2\dot{\lambda} \\ j_4 + j_6 &= -j_1 - j_2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

el cual tiene soluciones enteras en los instantes en que la trayectoria atraviesa una resonancia exacta. Este procedimiento permitió identificar para cada trayectoria la cantidad de argumentos resonantes asociados con la RMM asumida  $(j_1, j_2)$  y los correspondientes valores de los enteros  $j_4$  y  $j_6$ . En general, en las integraciones numéricas realizadas, se observa que las derivadas temporales calculadas de los ángulos  $\lambda_1$ ,  $\lambda$ ,  $\varpi$  y  $\Omega$  muestran variaciones temporales rápidas, que dificultan identificar condiciones resonantes. Por este motivo, con el objetivo de eliminar estas variaciones, se aplicaron distintos filtros digitales (Capítulo 3). Las frecuencias filtradas dependieron de cada caso particular.

Por otro lado, se observó que muchas trayectorias atraviesan rápidamente distintas condiciones resonantes sin permanecer en las mismas por grandes intervalos de tiempo.

Como un análisis final, se reconstruyeron numéricamente los ángulos  $\varphi_{\mathcal{J}}$  en función del tiempo para cada uno de los valores  $(j_1, j_2, j_4, j_6)$  calculados. Este procedimiento se complementó aplicando distintos filtros a estos ángulos, los cuales eliminaron variaciones

---

<sup>1</sup>Mas aún, considerando que en todas las integraciones numéricas se toma como plano de referencia la órbita del Sol alrededor de Saturno, los parámetros angulares  $\varpi_1$  y  $\Omega_1$  carecen de significado físico, y no tienen influencia alguna sobre las órbitas perturbadas.

temporales rápidas de períodos múltiples de 10 años, lo que permitió identificar 6 RMM que afectan fuertemente el movimiento en esta región.

## 6.2. Análisis y Resultados

En esta sección se exhiben los argumentos resonantes de cada una de las órbitas afectadas por los mismos, y se describe, además, la forma en que fueron identificadas estas resonancias. Se hallaron en total 6 resonancias exactas de los argumentos de la función perturbadora en 5 de las 11 órbitas resultantes de las integraciones numéricas. Se demuestra asimismo que estas resonancias perturban la evolución secular de los elementos orbitales de 2 de las 5 órbitas afectadas. Todas las trayectorias se integraron numéricamente por un tiempo equivalente a 10000 años, con una salida cada 0,1 años.

### 6.2.1. Órbita 4

Debido a la amplia fluctuación de su semieje mayor, la órbita 4 abarca diversas resonancias de movimientos medios. En particular, la localización nominal de la resonancia de movimientos medios  $\frac{n}{n_1} = -4$  es muy cercana al semieje mayor medio de esta órbita. Por tal motivo, considerando los valores  $j_1 = 4$  y  $j_2 = 1$  se calcularon, para cada instante de tiempo y luego de filtrar las variaciones de  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\omega}$ , y  $\dot{\Omega}$  menores a 20, 50, 100 y 140 años los correspondientes valores de  $j_4$  y  $j_6$ .

Prescindiendo de las variaciones de período inferior a 20 años en las velocidades angulares, se observa que los valores de  $j_4$  y  $j_6$  resultantes de las Ecuaciones (6.5) oscilan alrededor de  $j_4 = -5$  y  $j_6 = 0$ . Para confirmar la existencia de esta resonancia se eliminaron las variaciones de período menor a 20 años en el correspondiente argumento

$$\varphi_{\mathcal{J}} = 4\lambda_1 + \lambda - 5\varpi$$

También se atraviesan esporádicamente otras condiciones resonantes como por ejemplo  $(j_4, j_6) = (-4, -1)$  y  $(j_4, j_6) = (-6, +1)$ .

En la Figura 6.2 se pueden ver, en función del tiempo, los valores de  $j_4$  (Izq.) y del argumento resonante  $\varphi_{\mathcal{J}}$  filtrado de sus variaciones de período inferior a 20 años (Der). El argumento alterna entre intervalos de libración de aproximadamente 300 años e intervalos de 200 años de rápida circulación. Estas libraciones implican resonancias, ya que son de baja amplitud y abarcan largos intervalos de tiempo.

El valor de  $j_4$  también fluctúa alrededor de  $-5$  prescindiendo de las variaciones de las velocidades angulares de período inferior a 50, 100, y 140 años.

A medida que aumenta el rango de frecuencias filtradas disminuye la amplitud de fluctuación. La Figura 6.3 ilustra los valores de  $j_4$  en función del tiempo calculados tras la previa eliminación de las variaciones en las velocidades angulares de períodos inferiores a 50, 100 y 140 años, junto con los correspondientes valores en función del tiempo del argumento  $\varphi_{\mathcal{J}}$  resultantes de aplicar los mismos filtros a los ángulos

Se observa que, como resultado de filtrar las variaciones de período menor a 50 años, este argumento alterna entre circulaciones, de aproximadamente 250 años de período, y libraciones del mismo período y amplitud creciente. En particular, a partir del instante

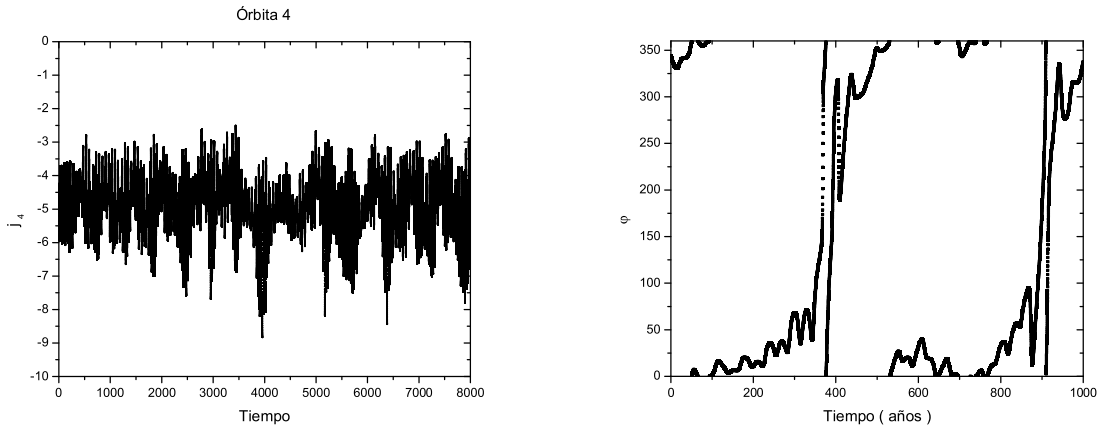


Figura 6.2: Variación temporal de  $j_4$  y  $\varphi_{\mathcal{J}} = 4\lambda_1 + \lambda - 5\varpi$  para la Órbita 4 tras filtrar las variaciones rápidas menores a 20 años.

550 años y durante un período de 200 años el argumento  $\varphi_{\mathcal{J}}$  se mantiene casi constante, oscilando lentamente alrededor de  $0^\circ$ . A su vez, como resultado de filtrar las variaciones menores a 100 años,  $\varphi_{\mathcal{J}}$  alterna entre circulaciones, de aproximadamente 250 años de período, y libraciones del mismo período y amplitud creciente. Por último, luego de filtrar los períodos menores a 140 años, se observa un comportamiento similar al descrito tras aplicar los filtros anteriores, alternado entre una libración de aproximadamente 1000 años con un período de 250 años y una amplitud de  $90^\circ$ .

Para comprobar el efecto de esta resonancia sobre el movimiento de la trayectoria seleccionada se analizaron las variaciones temporales del semieje mayor y la excentricidad. Descartando las variaciones con períodos inferiores a 50 años se observa una correlación entre el argumento resonante y la excentricidad. La Figura 6.4 revela una fluctuación irregular de la excentricidad entre los valores 0,39 y 0,5. Se observan 2 intervalos que presentan oscilaciones de alta amplitud y baja frecuencia alrededor de un valor bajo de la excentricidad coincidentes con libraciones de alta amplitud del argumento resonante.

Como resultado de filtrar las variaciones menores a 140 años se puede apreciar más claramente que el semieje mayor también se encuentra sujeto a esta resonancia. Entre un valor mínimo de  $0,239UA$  y un valor máximo de  $0,246UA$ , este elemento orbital se mantiene aproximadamente estacionario alrededor de  $0,240UA$  en dos intervalos de tiempo en los cuales se observa la libración de  $\varphi_{\mathcal{J}}$ . La fluctuación del semieje mayor en estos intervalos de tiempo es de una amplitud mucho menor a las amplitudes de oscilación observadas a lo largo de toda la trayectoria numéricamente determinada. Este comportamiento se ilustra en la Figura 6.5.

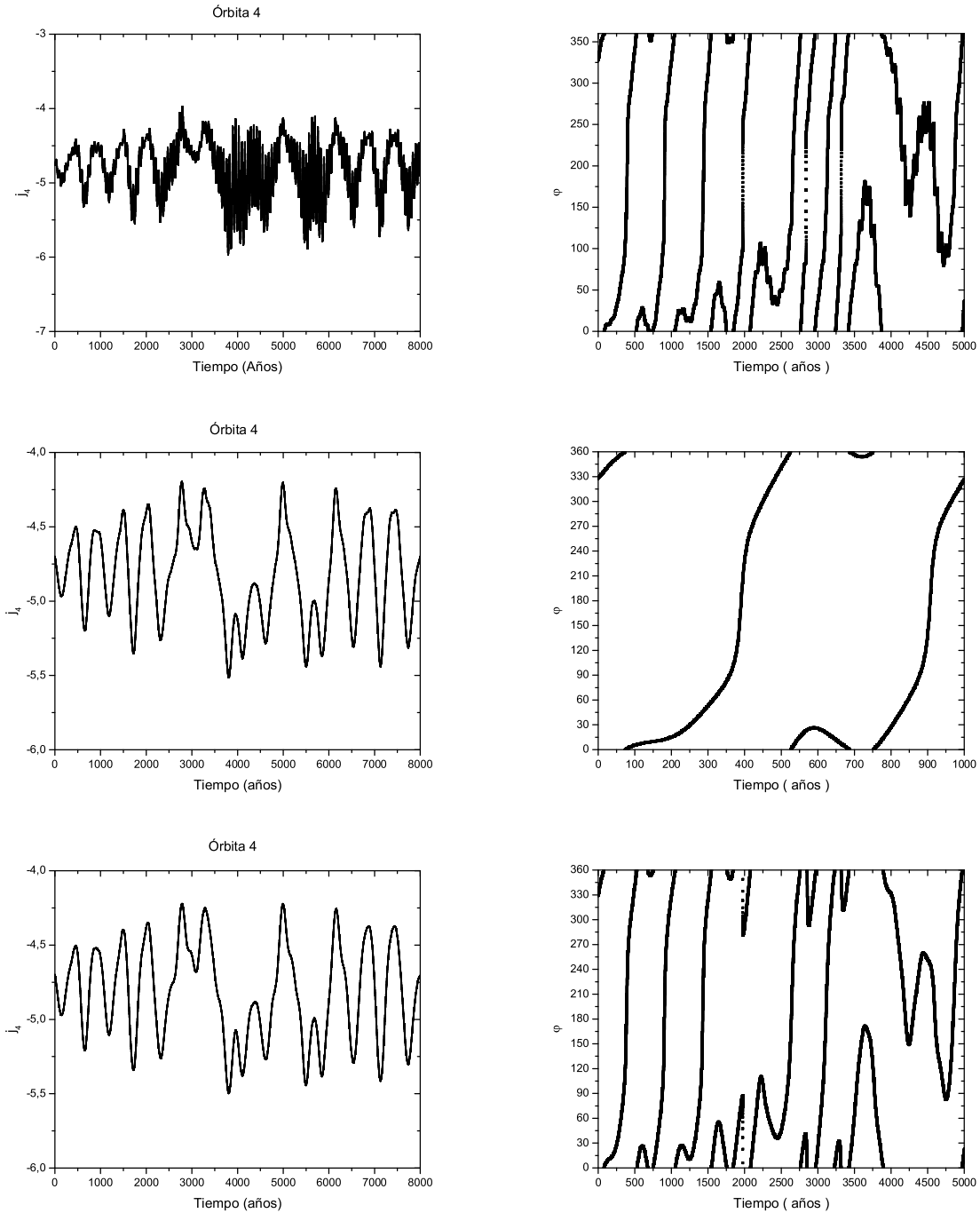


Figura 6.3: Variación temporal de  $j_4$  y  $\varphi_{\bar{J}} = 4\lambda_1 + \lambda - 5\varpi$  para la Órbita 4 tras filtrar las variaciones rápidas menores a (Sup.) 50, (Centro) 100 y (Inf.) 140 años.

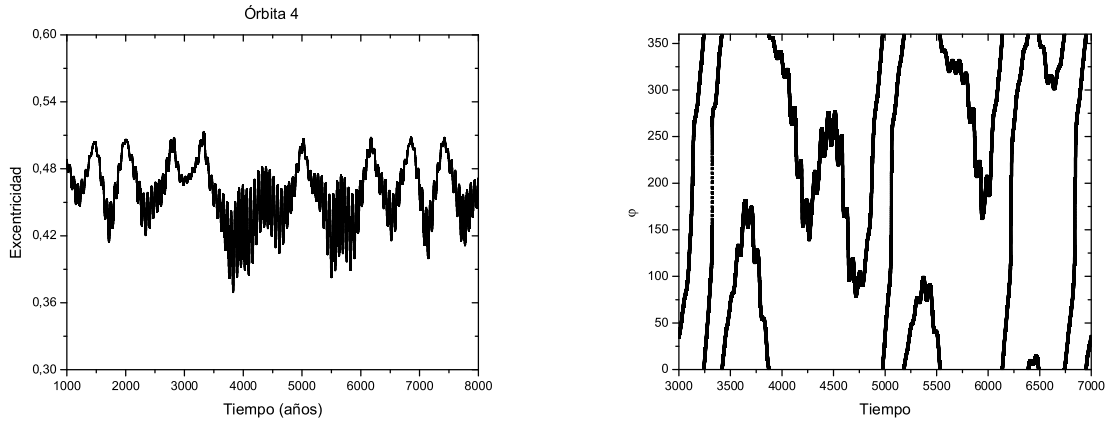


Figura 6.4: Variación temporal de la excentricidad  $e$  y  $\varphi_{\bar{J}} = 4\lambda_1 + \lambda - 5\varpi$  para la Órbita 4 tras filtrar las variaciones rápidas menores a 50 años.

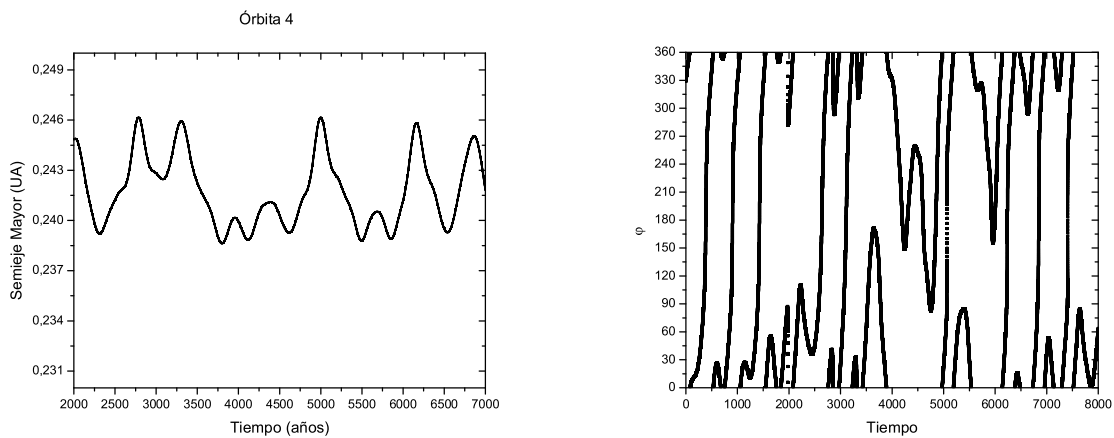


Figura 6.5: *Izq.*: Semieje Mayor en función del tiempo de la órbita 4 resultante de descartar sus variaciones de período inferior a 140 años. *Der.*:  $\varphi_{\bar{J}}$  filtrado de sus variaciones inferiores a 140 años.

### 6.2.2. Órbita 5

La conmensurabilidad de movimientos medios  $\frac{n}{n_1} = -\frac{9}{2}$  posibilita una resonancia del argumento  $\varphi_{\bar{J}} = 9\lambda_1 + 2\lambda - 8\varpi - 3\Omega$  para la órbita 5. Descartando las variaciones temporales menores a 60 años se observa que  $\varphi_{\bar{J}}$  circula con un período aproximado de  $\sim 500$  años, alternando con una libración de  $130^\circ$  con un período de  $\sim 200$  años. A su vez, luego de filtrar las variaciones de período menor a 140 años solo subsiste una circulación de  $\sim 800$  años. La Figura 6.6 ilustra este comportamiento.

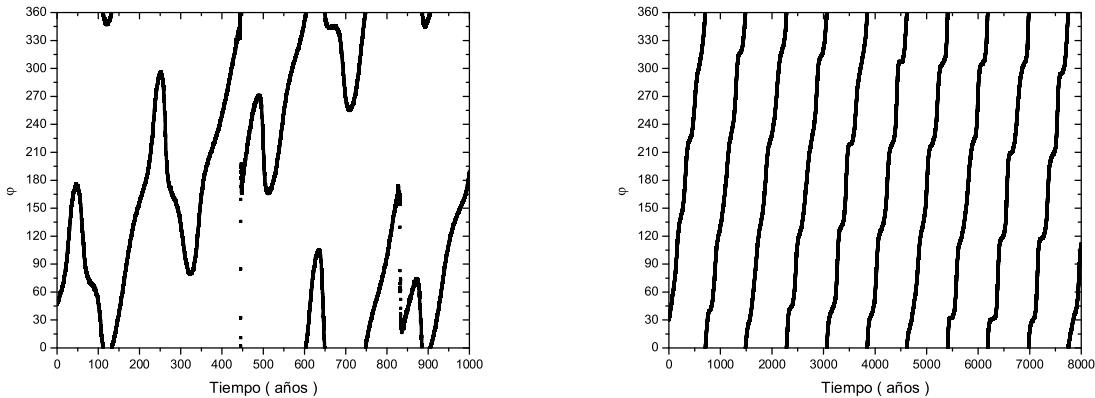


Figura 6.6: Variación del argumento  $\varphi_{\bar{J}} = 9\lambda_1 + 2\lambda - 8\varpi - 3\Omega$  para la órbita 5. *Izq.*: filtrando las variaciones con períodos inferiores a 60 años. *Der.*: filtrando las variaciones con períodos inferiores a 140 años.

Por otro lado, cuando se considera la conmensurabilidad de movimientos medios  $\frac{n}{n_1} = -\frac{14}{3}$  ocurren resonancias exactas de distintos argumentos  $\varphi_{\bar{J}}$ . En particular, se observó que para los valores  $j_1 = 14$  y  $j_2 = 3$  del argumento resonante, el valor de  $j_4$  resultante de resolver el sistema (6.5) presenta una fluctuación alrededor del valor  $-10$ . Esto motivo el cálculo del correspondiente argumento de la función perturbadora. Prescindiendo de las variaciones de período menores a 60 años, el argumento  $\varphi_{\bar{J}} = 14\lambda_1 + 3\lambda - 10\varpi - 7\Omega$  alterna entre libraciones de  $\sim 100$  años de período que muestran amplitudes de  $\sim 90^\circ$ , y circulaciones de  $\sim 100$  años de período. Este comportamiento se muestra en la Figura 6.7.

Cuando se aplica un filtro que elimina las variaciones de período menores a 100 años solo se observa que el argumento circula con  $\sim 200$  años de período. Lo mismo se observa eliminando los movimientos de período menor a 140 años.

### 6.2.3. Órbita 7

La órbita 7 se halla fuertemente afectada por la conmensurabilidad de movimientos medios  $\frac{n}{n_1} = -\frac{14}{3}$ . En particular, cuando se filtran las variaciones temporales con períodos menores a 60 años, en el argumento resonante  $\varphi_{\bar{J}} = 14\lambda_1 + 3\lambda - 15\varpi - 2\Omega$  se observan transiciones rápidas entre circulaciones y libraciones de distinta amplitud y no se puede asignar a tales movimientos algún valor de período. Pero cuando se filtran las variaciones



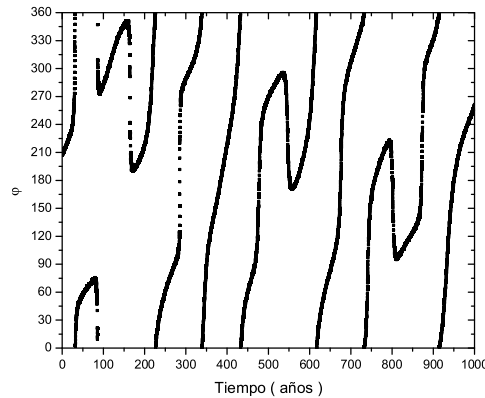


Figura 6.7: Variación del argumento  $\varphi_{\mathcal{J}} = 14\lambda_1 + 3\lambda - 10\varpi - 7\Omega$  para la órbita 5 filtrando las variaciones con períodos inferiores a 60 años.

menores a 100 años y 140 años, el argumento circula y libra en forma intercalada, con un período aproximado de  $\sim 250$  años en cada caso. Para las libraciones se obtienen amplitudes de  $\sim 60^\circ$ . La Figura 6.8 ilustra la variación temporal del argumento  $\varphi_{\mathcal{J}}$  para esta órbita 7 cuando se aplica a la trayectoria integrada cada uno de los filtros mencionados.

#### 6.2.4. Órbita 8

También la órbita 8 se ve afectada por la conmensurabilidad de movimientos medios  $\frac{n}{n_1} = -\frac{14}{3}$ . Considerando los valores  $j_1 = 14$  y  $j_2 = 3$  se observa una fluctuación de  $j_4$  alrededor de -17 lo que se corresponde con el argumento resonante  $\varphi_{\mathcal{J}} = 14\lambda_1 + 3\lambda - 17\varpi$ . Ya que  $\varphi_{\mathcal{J}}$  no depende de  $\Omega$ , esta es la resonancia de más bajo orden identificada con esta conmensurabilidad.

Filtrando de las variaciones de períodos menores a 60 años, el argumento  $\varphi_{\mathcal{J}}$  libra con un período levemente superior a  $\sim 100$  años con una amplitud aproximada de  $\sim 60^\circ$ . Estas libraciones se ven interrumpidas por circulaciones en ambos sentidos. Cuando se eliminan las variaciones con períodos inferiores a 100 años y 140 años, se observan circulaciones en ambos sentidos seguidas de libraciones con distintos períodos y amplitudes. Es difícil distinguir entre movimientos de circulación y libración, debido a las altas amplitudes y períodos de las mismas. Durante un intervalo de  $\sim 1000$  años,  $\varphi_{\mathcal{J}}$  fluctúa lentamente alrededor de  $\sim 60^\circ$  con una amplitud de  $\sim 90^\circ$ . Estos comportamientos se muestran en la Figura 6.9.

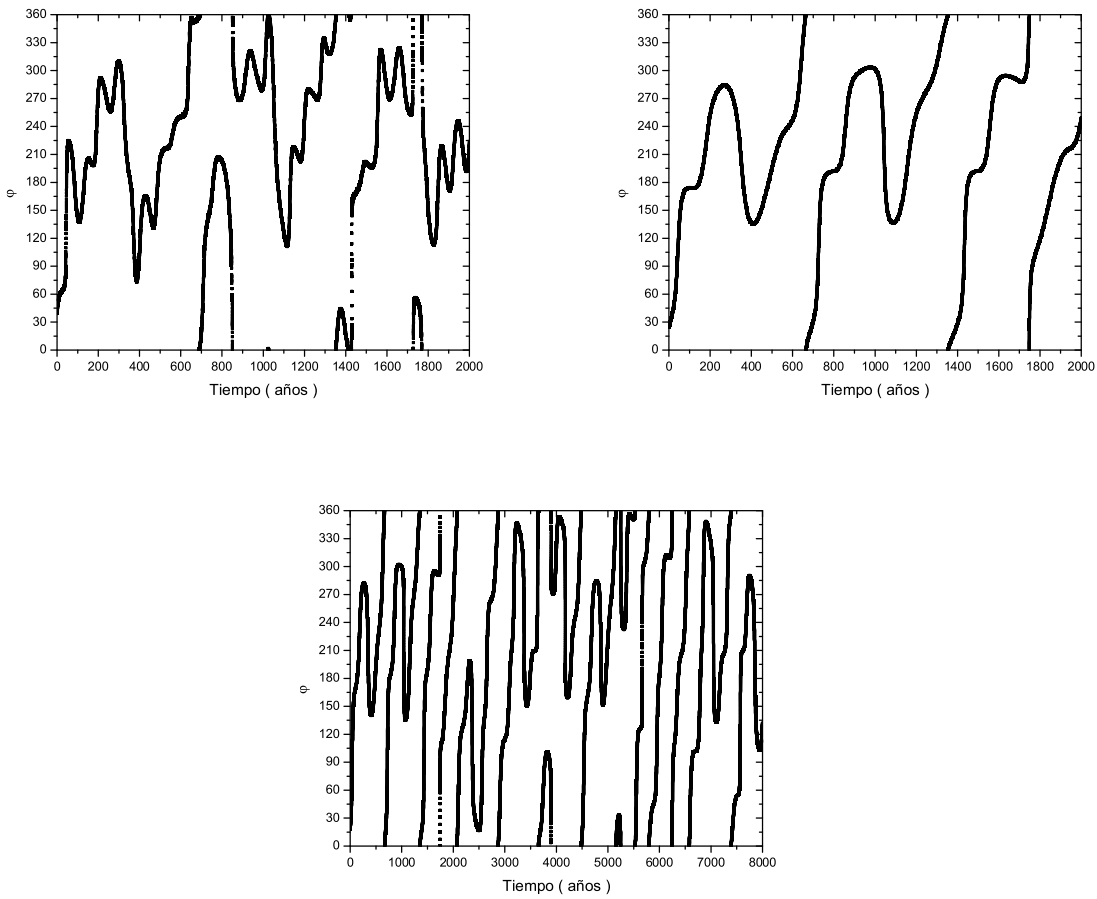


Figura 6.8: Variación del argumento  $\varphi_J = 14\lambda_1 + 3\lambda - 15\varpi - 2\Omega$  para la órbita 7 filtrando las variaciones con períodos inferiores a 60, 100 y 140 años.

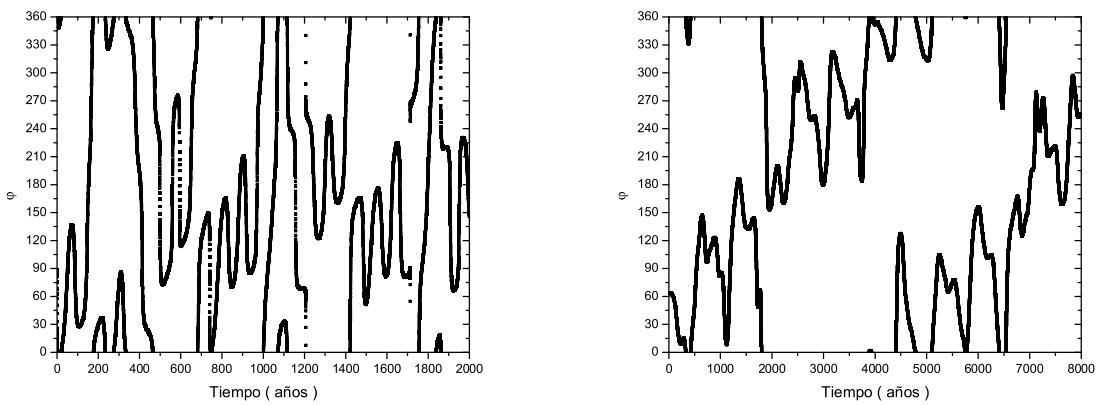


Figura 6.9: Variación del argumento  $\varphi_J = 14\lambda_1 + 3\lambda - 17\varpi$  para la órbita 8. *Izq.*: filtrando las variaciones con períodos inferiores a 60 años. *Der.*: filtrando las variaciones con períodos inferiores a 100 años.

### 6.2.5. Órbita 10

Asumiendo, en la Ecuación 6.5, los valores  $j_1 = 5$  y  $j_2 = 1$ , se encuentra que la órbita 10 es afectada por la resonancia del argumento  $\varphi_{\mathcal{J}} = 5\lambda_1 + \lambda - 6\varpi$ . Filtrando las variaciones con períodos inferiores a 100 años se observa una lenta circulación del argumento, de  $\sim 500$  años de período, interrumpida por intervalos de libración de  $\sim 1000$  años que registran amplitudes aproximadas de  $\sim 45^\circ$ . Durante casi 1300 años,  $\varphi_{\mathcal{J}}$  fluctúa lentamente alrededor de  $330^\circ$  con una amplitud de  $60^\circ$ . Al ser de bajo orden,

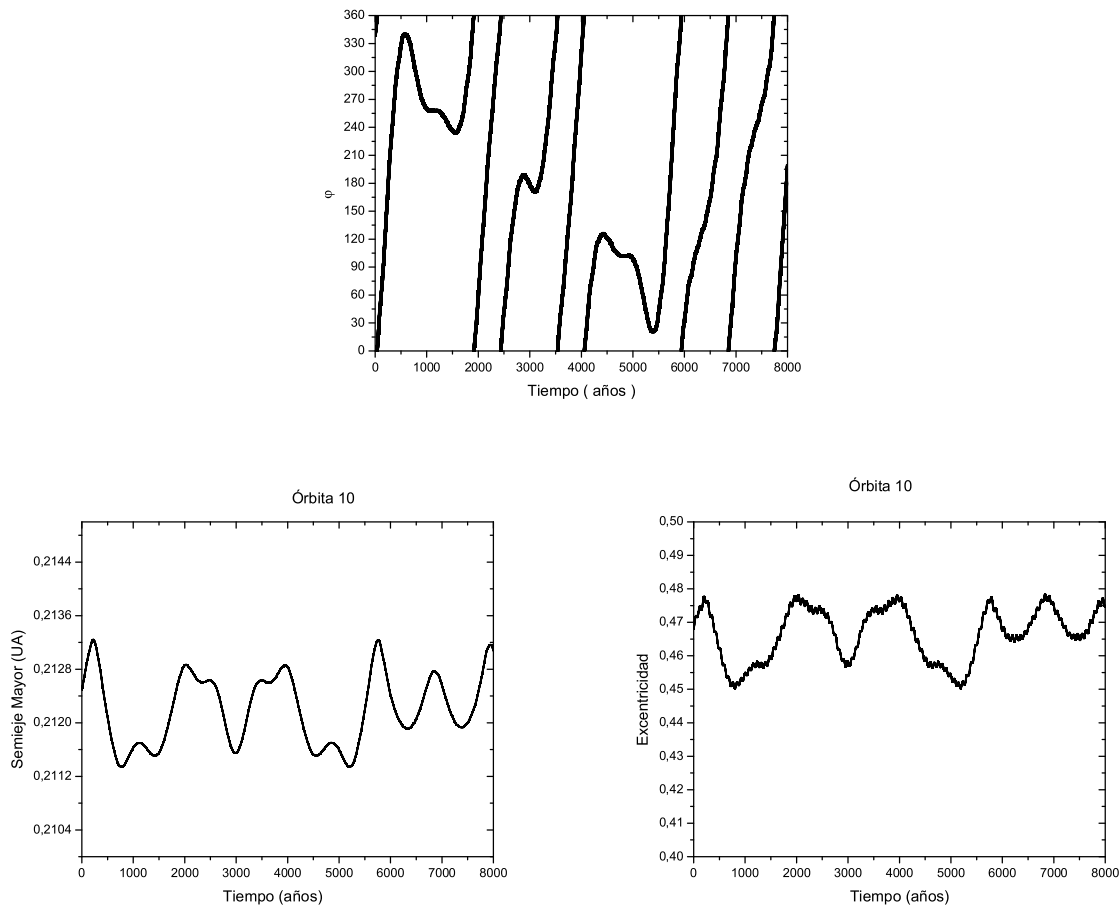


Figura 6.10: Variación del argumento  $\varphi_{\mathcal{J}} = 5\lambda_1 + \lambda - 6\varpi$  (*Sup.*),  $a$  (*Inf. izq.*) y  $e$  (*Inf. der.*) para la órbita 10, filtrando las variaciones con períodos inferiores a 100 años.

esta resonancia tiene una gran influencia en el movimiento descrito por la órbita 10. Tal influencia se detecta eliminando las variaciones de período menor a 100 años en los elementos orbitales. De esta forma, se observa que las libraciones coinciden con mínimos absolutos de la excentricidad y el semieje mayor.

El valor de la excentricidad solo oscila entre 0,45 y 0,46 mientras  $\varphi_{\mathcal{J}}$  libra. Finalizadas las libraciones del argumento resonante, la excentricidad oscila alrededor de 0,47 con amplitud 0,01.

Por otro lado, el semieje mayor, que fluctúa entre 0,2114UA y 0,2132UA, oscila alrededor de 0,2116UA durante las libraciones de  $\varphi_{\mathcal{J}}$ . Finalizadas las mismas oscila

alrededor de un valor claramente superior a su media.

Por lo tanto, se observa que la resonancia del ángulo  $\varphi_{\mathcal{J}}$  limita el movimiento y lo sitúa por debajo del valor medio de sus elementos orbitales. En la Figura 6.10 se muestran las variaciones temporales del argumento, el semieje mayor y la excentricidad para esta órbita cuando se aplica el filtro mencionado anteriormente.

# Conclusiones Finales y discusión

Este trabajo estuvo basado en la elaboración de 2 mapas dinámicos Megno de condiciones iniciales referidos al espacio de fase del movimiento de los satélites irregulares de Saturno. Ambos mapas Megno fueron confeccionados considerando el mismo rango de semieje mayor normalizado al radio de Hill que el mapa Megno realizado en 2010 por Hinse y colaboradores para satélites irregulares de Júpiter, en el cual estuvieron inspirados.

De esta forma se evidenció la diferencia entre el espacio de fase del movimiento de los satélites irregulares de Júpiter y el espacio de fase del movimiento de los satélites irregulares de Saturno, diferencia que con mucha probabilidad se traslade a los movimientos orbitales, y se comprobó numéricamente que las trayectorias de los satélites irregulares de Saturno son, por lo general, regulares.

En ambos mapas se observó una franja de condiciones iniciales caóticas alrededor de las inclinaciones cercanas a  $90^\circ$  de órbitas retrógradas y directas. A pesar de que esta franja atraviesa cada uno de los mapas, desde el mínimo hasta el máximo semieje mayor inicial considerado en su elaboración, sólo es perceptible en semiejes mayores inferiores al límite de  $0,17UA$ . Excediendo esta cota del semieje mayor, todas las órbitas directas son caóticas, mientras que la región regular de las órbitas retrógradas se reduce notablemente.

Se describió el mecanismo de Lidov-Kozai, y se demostró que es la causa, no sólo de la estocasticidad de las órbitas con inclinaciones iniciales cercanas a  $90^\circ$  respecto de la órbita planetaria, sino también de la ausencia de satélites irregulares en las mismas.

Se comprobó numéricamente que, en distancias al planeta inferiores a  $0,17UA$  las variaciones de corto período son insignificantes respecto de las variaciones seculares, las cuales son gobernadas por el mecanismo de Lidov-Kozai. Además, la evolución del semieje mayor secular es nula en este rango del mismo elemento orbital.

En la región del mapa referido a semiejes mayores iniciales superiores al límite de  $0,17UA$  se observan conjuntos de condiciones iniciales adyacentes caóticas que interrumpen la regularidad de órbitas retrógradas. Estos conjuntos, limitados por condiciones iniciales de órbitas retrógradas regulares, constituyen espigas muy extensas en inclinación y angostas en semieje mayor. Numéricamente, se comprobó que la intermitencia entre condiciones iniciales caóticas y regulares en esta región del mapa es debida a resonancias de movimientos medios de alto orden entre el Sol y las órbitas resultantes, que facilitan resonancias exactas de los argumentos de la función perturbadora. Estas resonancias provocan variaciones en el semieje mayor secular de las órbitas afectadas,

así sean caóticas o regulares.

De esta forma, el análisis del mecanismo de Lidov-Kozai, llevado a cabo en el Capítulo 5, en conjunto con el análisis del efecto de las resonancias de movimientos medios de alto orden sobre órbitas retrógradas, realizado en el Capítulo 6, nos permite concluir que, en la región de movimiento regular, la evolución secular del semieje mayor de las órbitas perturbadas se mantiene constante si es menor a  $0,17UA$ , mientras que puede oscilar o librar en forma irregular si es mayor a  $0,17UA$ .

En resumen, se realizó un análisis cualitativo del espacio de fase del movimiento de los satélites irregulares de Saturno que constituye un primer paso necesario para posteriores estudios cuantitativos o específicos y detallados de los mismos.

Posibles perspectivas futuras son, continuar el análisis de las espigas caóticas en medio de las órbitas regulares retrógradas, ya que no todas fueron analizadas, y esclarecer la notable diferencia entre órbitas directas con condiciones iniciales próximas y semiejes mayores cercanos a  $0,17UA$ .

A través del Mapa Megno se estudiarán los mecanismos que pudieron conducir a la captura de satélites irregulares retrógrados y directos. Por otro lado se analizará la relación entre los satélites regulares de Saturno y los satélites irregulares directos. La evolución de los primeros puede brindar importante información acerca de la formación de los segundos.

# Apéndice A

## A.1. Transformaciones de coordenadas

En esta sección se describen las transformaciones de coordenadas que se utilizaron en el Capítulo 4 para determinar los elementos orbitales de los satélites irregulares respecto de la órbita del planeta.

Conocida la anomalía media  $l$  y la excentricidad  $e$  de la órbita del satélite irregular, mediante la resolución de la ecuación de Kepler

$$l = E - e \sin(E) \quad (\text{A.1})$$

se determina la anomalía excentrica  $E$ . Con la relación

$$\tan\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right) \quad (\text{A.2})$$

obtenemos la anomalía verdadera  $v$  (Murray y Dermott, 1999).

A partir de la anomalía verdadera  $v$ , las coordenadas cartesianas rectangulares respecto de un sistema de coordenadas eclipticales resultan (Ferraz Mello, 1979):

- Si la inclinación orbital es menor a  $90^\circ$

$$\begin{aligned} X_{Ecl} &= r(\cos(\Omega_{Ecl}) \cdot \cos(v + \omega_{Ecl}) - \cos(I_{Ecl}) \cdot \text{sen}(\Omega_{Ecl}) \cdot \text{sen}(v + \omega_{Ecl})) \\ Y_{Ecl} &= r(\text{sen}(\Omega_{Ecl}) \cdot \cos(v + \omega_{Ecl}) + \cos(I_{Ecl}) \cdot \cos(\Omega_{Ecl}) \cdot \text{sen}(v + \omega_{Ecl})) \\ Z_{Ecl} &= r \text{sen}(I_{Ecl}) \cdot \text{sen}(v + \omega_{Ecl}) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

- Si la inclinación orbital es mayor a  $90^\circ$

$$\begin{aligned} X_{Ecl} &= r(\cos(\Omega_{Ecl}) \cdot \cos(-v + \omega_{Ecl}) + \cos(I_{Ecl}) \cdot \text{sen}(\Omega_{Ecl}) \cdot \text{sen}(-v + \omega_{Ecl})) \\ Y_{Ecl} &= r(\text{sen}(\Omega_{Ecl}) \cdot \cos(-v + \omega_{Ecl}) - \cos(I_{Ecl}) \cdot \cos(\Omega_{Ecl}) \cdot \text{sen}(-v + \omega_{Ecl})) \\ Z_{Ecl} &= r \text{sen}(I_{Ecl}) \cdot \text{sen}(-v + \omega_{Ecl}) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

donde el prefijo  $Ecl$  hace referencia a los elementos orbitales tabulados y determinados respecto del sistema de coordenadas eclipticales y  $r$  es el radio vector que une el satélite con el planeta:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(v)} \quad (\text{A.5})$$

Fácilmente se demuestra que, dadas 2 órbitas arbitrarias  $A$  y  $B$  en planos de referencia distintos, la suma del argumento del pericentro de la órbita  $A$  respecto del plano orbital de  $B$  con la longitud del Nodo de la órbita  $B$  respecto del plano de referencia de  $A$  es  $180^\circ$ . De esta forma, conociendo los valores de los elementos orbitales de Saturno respecto de la Eclíptica (en nuestro caso para la época Enero de 2000), se determinan el argumento del pericentro y la longitud del Nodo de la órbita de la eclíptica respecto de la órbita de Saturno. Estos elementos resultan  $I_{ES} = 2,486131^\circ$ ,  $\omega_{ES} = 293,62^\circ$  y  $\Omega_{ES} = 160,7^\circ$ .

Mediante las matrices auxiliares  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  determinadas por los ángulos que indican la posición de la eclíptica respecto de la órbita de Saturno

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\omega_{ES}) & -\text{sen}(\omega_{ES}) & 0 \\ \text{sen}(\omega_{ES}) & \cos(\omega_{ES}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(I_{ES}) & -\text{sen}(I_{ES}) \\ 0 & \text{sen}(I_{ES}) & \cos(I_{ES}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} \cos(\Omega_{ES}) & -\text{sen}(\Omega_{ES}) & 0 \\ \text{sen}(\Omega_{ES}) & \cos(\Omega_{ES}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se determinan las coordenadas cartesianas de los satélites respecto del plano de la órbita de Saturno (Murray y Dermott, 1999)

$$\begin{pmatrix} X_{SAT} \\ Y_{SAT} \\ Z_{SAT} \end{pmatrix} = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \begin{pmatrix} X_{Ecl} \\ Y_{Ecl} \\ Z_{Ecl} \end{pmatrix}$$

La relación entre las coordenadas cartesianas y los elementos orbitales respecto de la órbita de Saturno son idénticas a la relaciones (A.3) y (A.4):

- Si la inclinación orbital es menor a  $90^\circ$

$$\begin{aligned} X_{SAT} &= r(\cos(\Omega_{SAT}) \cdot \cos(v + \omega_{SAT}) - \cos(I_{SAT}) \cdot \text{sen}(\Omega_{SAT}) \cdot \text{sen}(v + \omega_{SAT})) \\ Y_{SAT} &= r(\text{sen}(\Omega_{SAT}) \cdot \cos(v + \omega_{SAT}) + \cos(I_{SAT}) \cdot \cos(\Omega_{SAT}) \cdot \text{sen}(v + \omega_{SAT})) \\ Z_{SAT} &= r\text{sen}(I_{SAT}) \cdot \text{sen}(v + \omega_{SAT}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

- Si la inclinación orbital es mayor a  $90^\circ$

$$\begin{aligned} X_{SAT} &= r(\cos(\Omega_{SAT}) \cdot \cos(-v + \omega_{SAT}) + \cos(I_{SAT}) \cdot \text{sen}(\Omega_{SAT}) \cdot \text{sen}(-v + \omega_{SAT})) \\ Y_{SAT} &= r(\text{sen}(\Omega_{SAT}) \cdot \cos(-v + \omega_{SAT}) - \cos(I_{SAT}) \cdot \cos(\Omega_{SAT}) \cdot \text{sen}(-v + \omega_{SAT})) \\ Z_{SAT} &= r\text{sen}(I_{SAT}) \cdot \text{sen}(-v + \omega_{SAT}) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Respecto de la eclíptica, las velocidades vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

- Si la inclinación orbital es menor a  $90^\circ$

$$\begin{aligned} \dot{X}_{Ecl} &= r(-\cos(\Omega_{Ecl})\text{sen}(v + \omega_{Ecl}) - \cos(I_{Ecl})\text{sen}(\Omega_{Ecl})\cos(v + \omega_{Ecl}))\dot{v} \\ \dot{Y}_{Ecl} &= r(-\text{sen}(\Omega_{Ecl})\text{sen}(v + \omega_{Ecl}) + \cos(I_{Ecl})\cos(\Omega_{Ecl})\cos(v + \omega_{Ecl}))\dot{v} \\ \dot{Z}_{Ecl} &= r\text{sen}(I_{Ecl})\cos(v + \omega_{Ecl})\dot{v} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$



- Si la inclinación orbital es mayor a  $90^\circ$

$$\begin{aligned}\dot{X}_{Ecl} &= r(\cos(\Omega_{Ecl})\text{sen}(-v + \omega_{Ecl}) - \cos(I_{Ecl})\text{sen}(\Omega_{Ecl})\cos(-v + \omega_{Ecl}))\dot{v} \\ \dot{Y}_{Ecl} &= r(\text{sen}(\Omega_{Ecl})\text{sen}(-v + \omega_{Ecl}) + \cos(I_{Ecl})\cos(\Omega_{Ecl})\cos(-v + \omega_{Ecl}))\dot{v} \\ \dot{Z}_{Ecl} &= -r\text{sen}(I_{Ecl})\cos(-v + \omega_{Ecl})\dot{v}\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

Las velocidades cartesianas respecto del plano orbital de Saturno se determinan de la misma manera que las coordenadas cartesianas:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_{SAT} \\ \dot{Y}_{SAT} \\ \dot{Z}_{SAT} \end{pmatrix} = P_1 \bullet P_2 \bullet P_3 \bullet \begin{pmatrix} \dot{X}_{Ecl} \\ \dot{Y}_{Ecl} \\ \dot{Z}_{Ecl} \end{pmatrix}$$

Para determinar las nuevas coordenadas angulares que orientan la órbita en el sistema planetocéntrico resulta útil considerar el momento angular por unidad de masa  $\vec{\ell} = (\ell_x, \ell_y, \ell_z)$  donde las componentes son

$$\begin{aligned}\ell_x &= (Y_{SAT}\dot{Z}_{SAT} - Z_{SAT}\dot{Y}_{SAT}) \\ \ell_y &= (Z_{SAT}\dot{X}_{SAT} - X_{SAT}\dot{Z}_{SAT}) \\ \ell_z &= (X_{SAT}\dot{Y}_{SAT} - Y_{SAT}\dot{X}_{SAT})\end{aligned}\quad (\text{A.10})$$

El módulo del vector momento angular también se puede escribir en función de los elementos orbitales

$$\ell = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2} = r^2|\dot{v}| \quad (\text{A.11})$$

De las expresiones anteriores se determinan los elementos orbitales  $I_{SAT}$ ,  $\Omega_{SAT}$  y  $\omega_{SAT}$ .

$$\cos(I_{SAT}) = \frac{\ell_z}{\ell} \quad (\text{A.12})$$

- Si  $\ell_z > 0$

$$\begin{aligned}\text{sen}(\Omega_{SAT}) &= \frac{\ell_x}{\ell\text{sen}(I_{SAT})} \\ \cos(\Omega_{SAT}) &= \frac{-\ell_y}{\ell\text{sen}(I_{SAT})}\end{aligned}$$

- Si  $\ell_z < 0$

$$\begin{aligned}\text{sen}(\Omega_{SAT}) &= \frac{-\ell_x}{\ell\text{sen}(I_{SAT})} \\ \cos(\Omega_{SAT}) &= \frac{\ell_y}{\ell\text{sen}(I_{SAT})}\end{aligned}$$

- Si  $I_{SAT} < 90^\circ$

$$\begin{aligned}\text{sen}(\omega_{SAT} + v) &= \frac{Z_{SAT}}{r\text{sen}(I_{SAT})} \\ \cos(\omega_{SAT} + v) &= \sec(\Omega_{SAT})\left(\frac{X_{SAT}}{r} + \text{sen}(\Omega_{SAT})\text{sen}(\omega_{SAT} + v)\cos(I_{SAT})\right)\end{aligned}$$

- Si  $I_{SAT} > 90^\circ$

$$\begin{aligned} \text{sen}(\omega_{SAT} - v) &= \frac{Z_{SAT}}{r \text{sen}(I_{SAT})} \\ \text{cos}(\omega_{SAT} - v) &= \text{sec}(\Omega_{SAT}) \left( \frac{X_{SAT}}{r} - \text{sen}(\Omega_{SAT}) \text{sen}(\omega_{SAT} - v) \text{cos}(I_{SAT}) \right) \end{aligned}$$

Notar que  $\dot{v}$  se simplifica en las últimas ecuaciones, por lo tanto no es necesario conocer su valor para calcular los elementos orbitales respecto de la órbita de Saturno.

## A.2. Ecuaciones de movimiento y Ecuaciones variacionales.

El problema restringido de tres cuerpos considera la evolución de una masa infinitesimal  $m$  bajo la influencia gravitatoria de dos masas primarias  $m_0$  y  $m_1$ , las cuales describen una trayectoria *cónica* que resulta de considerar un problema de dos cuerpos.

Considerando un sistema de coordenadas con origen en una de las masas primarias ( $m_0$ ) y asumiendo  $m = 0$ , las ecuaciones de movimiento para la masa infinitesimal resultan

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k^2 m_0 \frac{\vec{r}}{r^3} + k^2 m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} - k^2 m_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \quad (\text{A.13})$$

donde  $k^2$  representa la constante de gravitación y los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}_1$  son los vectores posición de la masa infinitesimal y  $m_1$ .

Las Ec. (A.13) pueden expresarse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= -k^2 m_0 \frac{\vec{r}}{r^3} + k^2 m_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|^3} - k^2 m_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

donde  $\vec{v}$  es el vector velocidad de la masa infinitesimal.

Sea  $\vec{x}_0(t) = (\vec{v}_0(t), \vec{r}_0(t))$  una solución de (A.14). De lo expuesto en la Sección ??, a través de la dinámica linealizada alrededor de la solución conocida, la evolución de una condición que inicialmente se encuentre infinitesimalmente próxima de  $\vec{x}_0(0)$  podrá analizarse a partir de solución de las ecuaciones variacionales, ésto es:

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = D_{\vec{x}}(\vec{F}(\vec{x}_0)) \bullet \vec{y}(t)$$

donde  $y(t)$  es la evolución temporal del apartamiento respecto de  $x_0(t)$ .

En nuestro caso, la matrix  $D_{\vec{x}}(\vec{F}(\vec{x}_0))$  queda expresada como

$$D_{\vec{x}}(\vec{F}(\vec{x}_0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & d & e \\ 0 & 0 & 0 & d & b & f \\ 0 & 0 & 0 & e & f & c \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

con

$$\begin{aligned}
 a &= -k^2 m_0 \left( \frac{1}{r^3} - 3 \frac{x^2}{r^5} \right) + k^2 m_1 \left( \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^3} - 3 \frac{(x_1 - x)^2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^5} \right) \\
 b &= -k^2 m_0 \left( \frac{1}{r^3} - 3 \frac{y^2}{r^5} \right) + k^2 m_1 \left( \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^3} - 3 \frac{(y_1 - y)^2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^5} \right) \\
 c &= -k^2 m_0 \left( \frac{1}{r^3} - 3 \frac{z^2}{r^5} \right) + k^2 m_1 \left( \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^3} - 3 \frac{(z_1 - z)^2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^5} \right) \\
 d &= -k^2 m_0 \left( \frac{1}{r^3} - 3 \frac{xy}{r^5} \right) + k^2 m_1 \left( \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^3} - 3 \frac{(x_1 - x)(y_1 - y)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^5} \right) \\
 e &= -k^2 m_0 \left( \frac{1}{r^3} - 3 \frac{xz}{r^5} \right) + k^2 m_1 \left( \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^3} - 3 \frac{(x_1 - x)(z_1 - z)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^5} \right) \\
 f &= -k^2 m_0 \left( \frac{1}{r^3} - 3 \frac{yz}{r^5} \right) + k^2 m_1 \left( \frac{1}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^3} - 3 \frac{(y_1 - y)(z_1 - z)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|^5} \right)
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

### A.3. Ecuaciones Planetarias de Lagrange

Con el objetivo de establecer las Ecuaciones Planetarias de Lagrange se define la longitud media de la época como

$$\epsilon = \varpi - n\tau$$

donde  $\tau$  indica el instante de tiempo en el cual la masa perturbada pasa por el pericentro. Considerando esta nueva variable, las ecuaciones planetarias de Lagrange para la variación de los elementos orbitales son (Murray y Dermott, 1999) :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \epsilon}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial R}{\partial \epsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varpi}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan(I/2)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin(I)} \frac{\partial R}{\partial I}$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan(I/2)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\tan(I/2)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \varpi} + \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \right) - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin(I)} \frac{\partial R}{\partial \Omega}$$

## A.4. Hamiltoniano Secular (Yokoyama et al. 2010)

A continuación se presenta la expresión completa del Hamiltoniano determinado por Yokoyama et al. 2010 para describir la dinámica secular de una masa infinitesimal orbitando alrededor de una masa primaria cuando es perturbada por una masa secundaria (problema restringido de tres cuerpos). Este desarrollo fue realizado hasta cuarto orden en la razón de semiejes mayores  $a/a_1$  y hasta segundo orden en las excentricidades  $e$  y  $e_1$ .

La expresión del Hamiltoniano secular  $\bar{R}$  se puede expresar como

$$\bar{R} = C_1 R_2 + C_2 R_3 + C_3 R_4 \quad (\text{A.17})$$

donde las constantes  $C_i$  quedan expresadas según

$$C_1 = \frac{k^2 a^2}{a_1^3 (1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}} ; \quad C_2 = \frac{a}{a_1} \frac{e_1}{1 - e_1^2} C_1 ; \quad C_3 = \left( \frac{a}{a_1} \right)^2 \frac{1}{(1 - e_1^2)^2} C_1,$$

y las funciones  $R_i$  son:

$$R_2 = \frac{1}{8} \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) (3 \cos^2(I) - 1) + \frac{15}{16} e^2 \sin^2(I) \cos(2w) \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} R_3 = & \frac{1}{64} ((-3 + 33 \cos(I) + 15 \cos^2(I) - 45 \cos^3(I)) \left( -\frac{5}{2} e - \frac{15}{8} e^3 \right) \cos(\varpi_1 - \Omega + \omega) + \\ & + (-3 - 33 \cos(I) + 15 \cos^2(I) + 45 \cos^3(I)) \left( -\frac{5}{2} e - \frac{15}{8} e^3 \right) \cos(\varpi_1 - \Omega - \omega) + \\ & + (15 - 15 \cos(I) - 15 \cos^2(I) + 15 \cos^3(I)) \left( -\frac{35}{8} e^3 \right) \cos(\varpi_1 - \Omega + 3\omega) + \\ & + (15 + 15 \cos(I) - 15 \cos^2(I) - 15 \cos^3(I)) \left( -\frac{35}{8} e^3 \right) \cos(\varpi_1 - \Omega - 3\omega)) \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_4 = & \frac{3}{16} (2 + 3e_1^2) \left( 1 + 5e^2 + \frac{15}{8} e^4 \right) - \frac{495}{1024} e_1^2 - \frac{135}{256} \cos^2(i) - \frac{165}{512} + \frac{315}{512} \cos^4(I) + \\ & + \frac{945}{1024} \cos^4(I) e_1^2 - \frac{405}{512} \cos^2(I) e_1^2 + \left( \frac{105}{512} \cos^4(I) + \frac{315}{1024} e_1^2 - \frac{105}{256} \cos^2(I) + \frac{105}{512} \right. \\ & \quad \left. - \frac{315}{512} \cos^2(I) e_1^2 + \frac{315}{1024} \cos^4(I) e_1^2 \right) \frac{63}{8} e^4 \cos(4\omega) + \frac{105}{512} \left( \cos^3(I) - \cos(I) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \cos^4(I) + \frac{1}{2} \right) \frac{63}{8} e^4 e_1^2 \cos(4\omega + 2\varpi_1 - 2\Omega) + \frac{105}{512} \left( -\cos^3(i) + \cos(I) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \cos^4(I) + \frac{1}{2} \right) \frac{63}{8} e^4 e_1^2 \cos(4\omega - 2\varpi_1 - 2\Omega) + \left( \frac{45}{64} \cos^2(i) - \frac{45}{512} - \frac{315}{512} \cos^4(I) \right) \\ & \quad e_1^2 \cos(2\varpi_1 - 2\Omega) + \left( \frac{15}{16} \cos^2(i) + \frac{45}{32} \cos^2(I) e_1^2 - \frac{45}{256} e_1^2 - \frac{15}{128} - \frac{315}{256} \cos^4(i) e_1^2 - \right. \\ & \quad \left. - \frac{105}{128} \cos^4(i) \right) \left( \frac{21}{8} e^2 (2 + e^2) \right) \cos(2w) + \left( \frac{15}{256} - \frac{45}{128} \cos^2(I) + \frac{75}{256} \cos(i) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{105}{256} \cos^4(I) - \frac{105}{256} \cos^3(I) \left( \frac{21}{8} e^2 (2 + e^2) \right) e_1^2 \cos(2\omega + 2\varpi_1 - 2\Omega) + \left( \frac{15}{256} - \frac{45}{128} \cos^2(i) - \right. \\
 & \left. - \frac{75}{256} \cos(i) + \frac{105}{256} \cos^4(i) + \frac{105}{256} \cos^3(I) \right) \left( \frac{21}{8} e^2 (2 + e^2) \right) e_1^2 \cos(2\omega - 2\varpi_1 + 2\Omega). \quad (\text{A.20})
 \end{aligned}$$

Para más detalles consultar el trabajo original.

## A.5. Dinámica de Lidov-Kozai: Ejemplos numéricos.

A partir de la aproximación obtenida en en Capítulo 5 se integran numéricamente algunas trayectorias individuales asumiendo distintos valores de las constantes  $\bar{F}$  y  $H$  para describir cualitativamente los efectos del mecanismo de Lidov-Kozai sobre los elementos orbitales excentricidad  $e$ , inclinación  $I$  y argumento del pericentro  $w$ , como así también la relación entre ellos.

Las Figuras A.1 a A.4 muestran, para distintos valores de  $\bar{F}$ , los resultados obtenidos al considerar los valores  $H = \pm 0,05L$ ,  $H = \pm 0,3L$ ,  $H = \pm 0,6L$  y  $H = \pm 0,8L$ . La

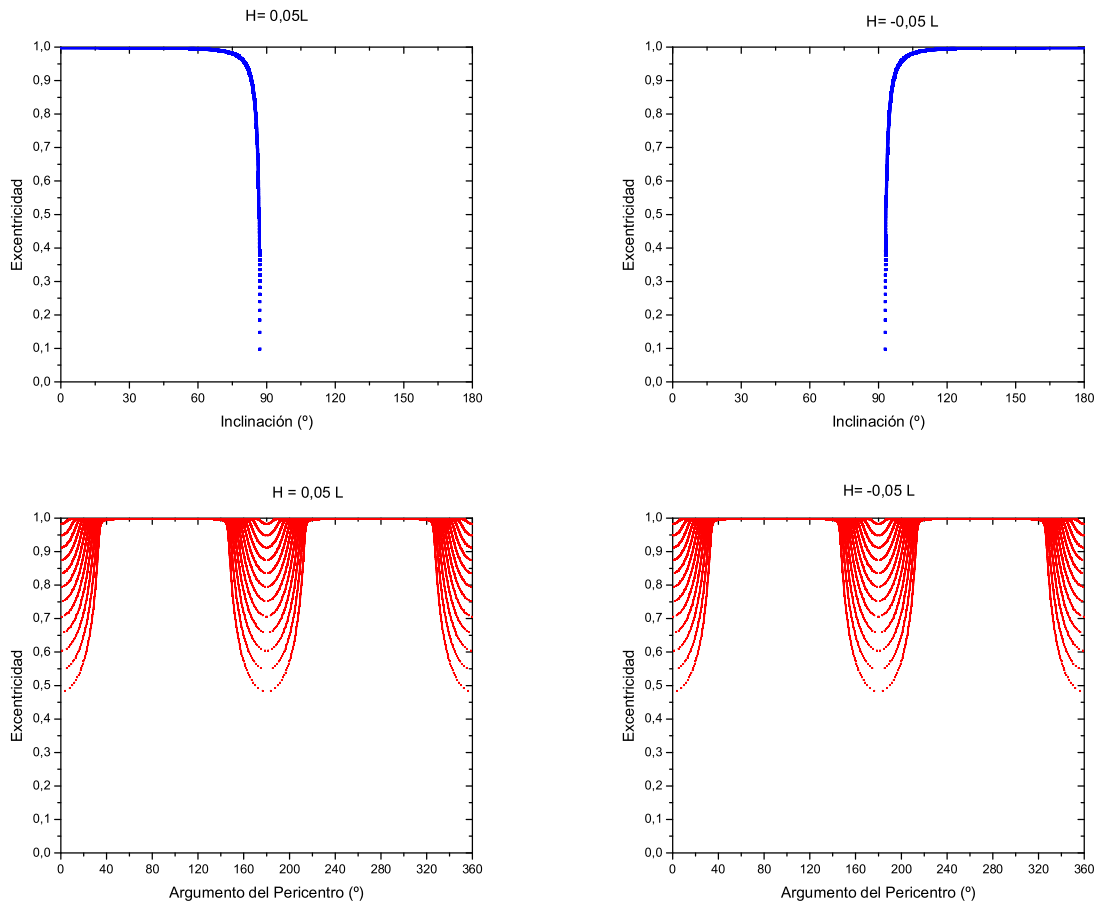


Figura A.1: Trayectorias obtenidas asumiendo  $H = \pm 0,05L$ .

dinámica secular de Kozai presenta simetría cuando se consideran movimientos directos

( $H > 0$ ) y retrógrados ( $H < 0$ ).

Para pequeños valores de  $H$ , la excentricidad pueden sufrir grandes variaciones. Las trayectorias que presentan grandes inclinaciones son compatibles con valores pequeños de  $\bar{F}$  (ver Fig. A.1). En todos los casos se observa claramente que las inclinaciones cercanas a  $90^\circ$  conducen a grandes valores de la excentricidad. A medida que  $H$  aumenta, se observa que los valores máximos que alcanza la excentricidad alrededor de los valores  $\omega = 90^\circ$  y  $\omega = 270^\circ$  aumentan a medida que disminuye  $\bar{F}$ . El acople entre la excentricidad y la inclinación es compatible con lo expuesto en la Sección 5.2, ésto es, pequeñas inclinaciones son compatibles con bajas excentricidades.

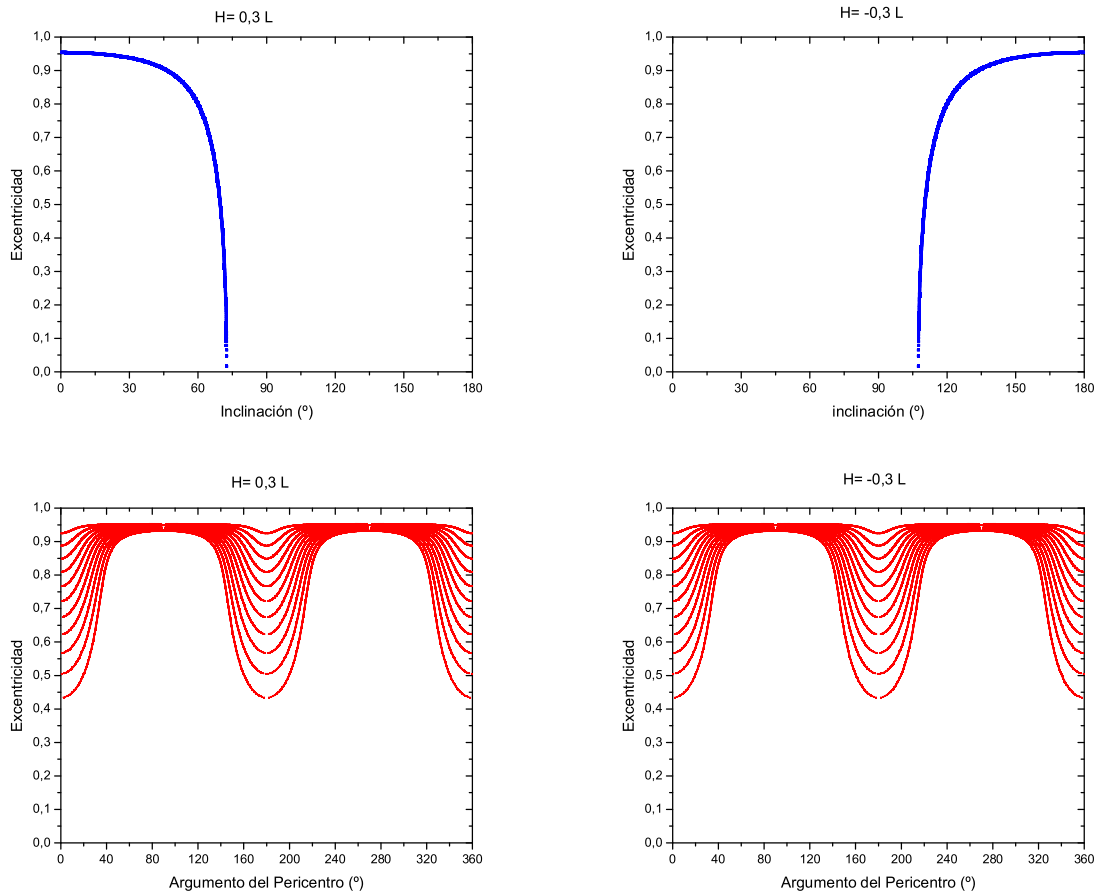


Figura A.2: Trayectorias obtenidas asumiendo  $H = \pm 0,3L$ .

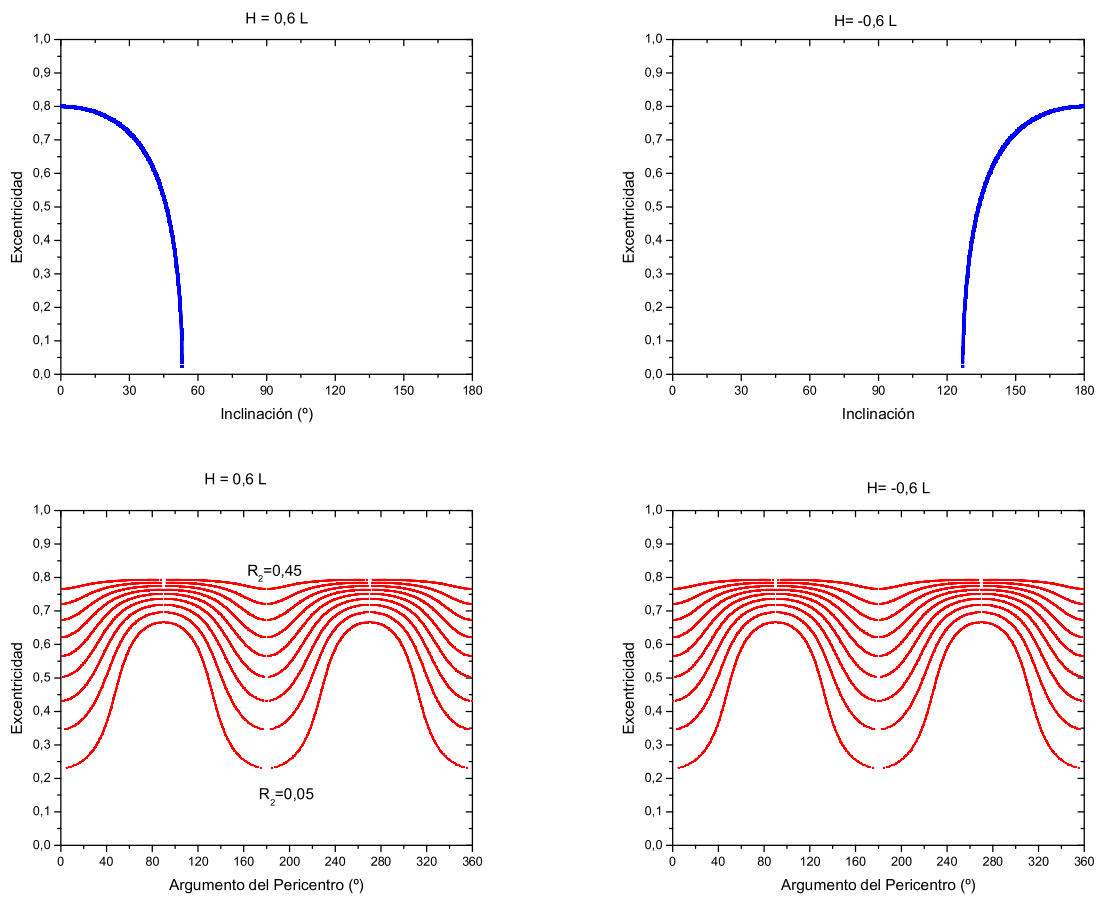


Figura A.3: Trayectorias obtenidas asumiendo  $H = \pm 0,6L$ .

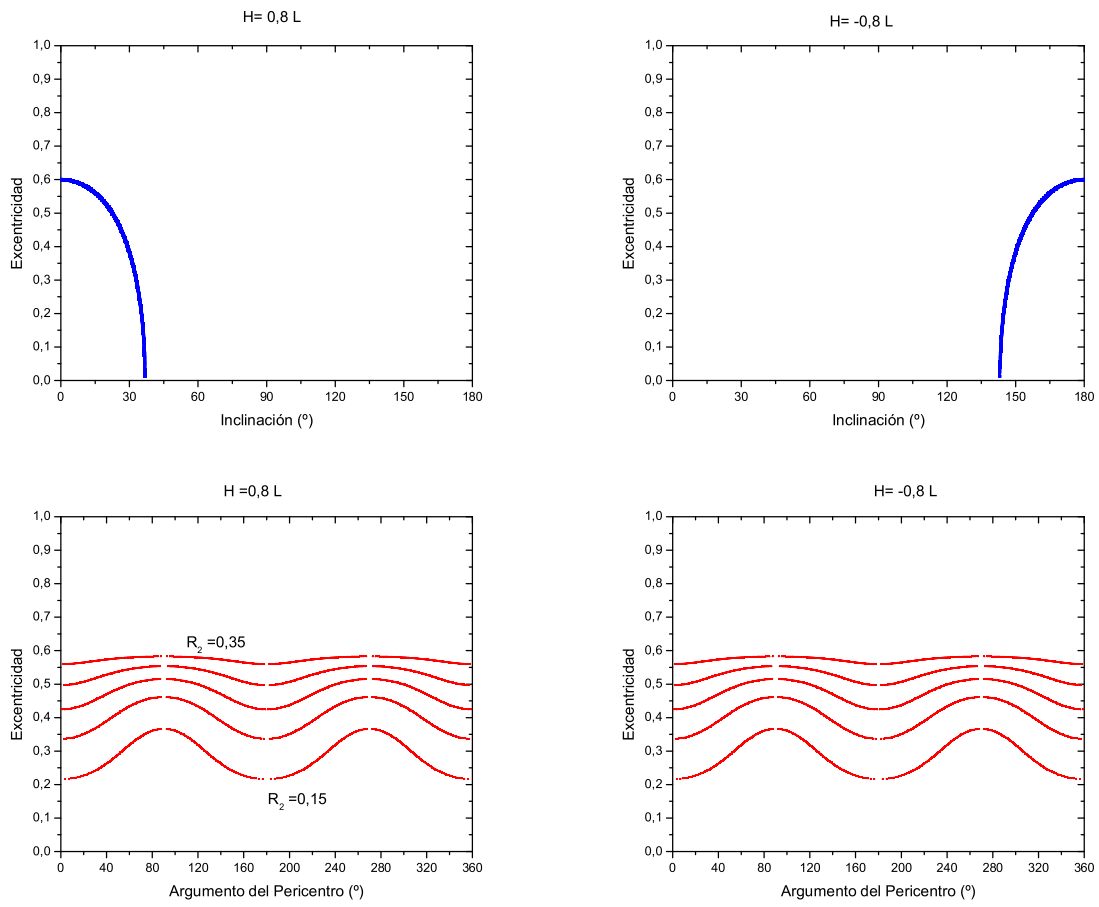


Figura A.4: Trayectorias obtenidas asumiendo  $H = \pm 0,8L$ .



## A.6. Satélites Irregulares. Condiciones Iniciales en mapa Megno.

La Tabla A.1 muestra los valores de los elementos orbitales planetocéntricos correspondientes a los satélites irregulares de Saturno. Éstos fueron determinados numéricamente a partir de las condiciones iniciales expuestas en la Tabla 2.1 de manera tal que sus valores angulares  $l$ ,  $\omega$  y  $\Omega$  coincidan con los valores asumidos para la confección de los Mapas Megno expuestos en el Capítulo 4. En todos los casos, se consideró un error absoluto en los ángulos menor a  $1^\circ$ , ésto es:

$$|l - 90^\circ| < 1^\circ \quad ; \quad |\omega| < 1^\circ \quad ; \quad |\Omega| < 1^\circ.$$

Además, desde la época Enero de 2005, la Tabla muestra el tiempo equivalente  $t_E$  en años en el cual cada satélite irregular cumplió ésta condición.

Cuadro A.1: Elementos Orbitales de los Satélites Irregulares cuando alcanzan las condiciones asumidas para los mapas Megno del Capítulo 4.

Satélite	$t_E$ (años)	$a(UA)$	$e$	$I(^\circ)$	$l(^\circ)$	$\omega(^\circ)$	$\Omega(^\circ)$
Phoebe	964021,8001	0,0867	0,1855	170,5532	89,2769	359,7985	359,2215
Ymir	277029,0000	0,1524	0,3038	171,7541	89,3074	359,6358	359,9054
Paaliaq	333986,9000	0,1002	0,1237	52,2562	90,1857	359,6591	359,0018
Tarvos	391901,3180	0,1219	0,3695	40,6559	89,0122	0,5866	0,2567
Suttungr	184053,1000	0,1327	0,1205	171,8451	90,6360	0,3374	0,4185
Mundilfari	236409,2000	0,1246	0,1903	171,4905	90,4754	0,2296	359,6008
Albiorix	427177,6000	0,1081	0,3810	41,4654	90,6342	359,3132	0,1130
Erriapo	197373,1340	0,1183	0,3220	39,2737	89,1298	359,4881	0,7914
Skathi	24456,0290	0,1046	0,2281	144,3120	89,1471	359,6134	0,4630
Thrymr	37111,0390	0,1376	0,4299	170,2807	89,2006	0,6040	0,6376
Narvi	920891,5001	0,1296	0,2663	139,1927	89,3255	359,2020	0,8033
2004S08	926144,6001	0,1517	0,1888	165,5703	90,4857	0,3883	359,6241
2004S07	1372786,6001	0,1316	0,5136	155,8425	89,9761	359,2097	0,7691
2004S09	240736,1000	0,1340	0,2404	158,5332	89,9477	0,4197	0,3278
2004S10	282922,0250	0,1269	0,2374	166,1869	89,0838	359,7769	0,5008
2004S11	457960,0630	0,1120	0,3877	43,1105	89,0506	0,5316	359,4838
2004S12	706451,8000	0,1293	0,2965	157,7035	89,7832	0,0145	359,6326
2004S13	246623,7000	0,1252	0,2809	166,4690	90,7975	0,4257	359,5176
2004S14	105837,5000	0,1347	0,3795	158,1984	90,2179	359,6200	359,9432
2004S16	222496,4000	0,1487	0,1175	162,0282	90,4303	0,5299	359,6478
2004S15	227393,0340	0,1249	0,1507	157,3828	89,0140	0,4309	359,7456
2004S17	2236519,7002	0,1259	0,2475	166,4861	89,5352	359,3482	0,6639
2004S18	264712,4000	0,1326	0,1387	123,3712	90,8826	0,1346	0,4989

# Bibliografía

Lidov R., 1961, Analiz Evolucii Orbit Iskustvennich Sputnikov, Problemi Dvigienia Iskustvennich Nebesnich Tel. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscow, p. 119

Kozai Y., 1962, AJ, 67, 591

Smart W. M., 1962, *Text-Book on Spherical Astronomy*.

Szebehely V., 1967, *Theory of Orbits* Academic Press, New York.

Ferraz-Melo S., 1979 , *Dynamics of the Galilean Satellites*.

Lichtenberg, A. J. and Lieberman, M. A.: 1983, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, Nueva York.

Burns Joseph A. y Matthews Mildred Shapley, 1986, *SATELLITES*.

Verhulst, F.: 1990, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlín.

Chui Charles K., 1992, *An Introduction to Wavelets*.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P.: 1992, *Numerical Recipes 2nd Edition*, Cambridge University Press, Nueva York.

Murray C. D., Dermott S. F., 1999, *Solar System Dynamics* Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Cincotta P. M., Sim´o C., 2000, A&A, 147, 205

Morbidelli Alessandro, 2001, *MODERN CELESTIAL MECHANICS*.

De Patter Imke y Lissauer Jack J., 2001, *PLANETARY SCIENCES*.

Cincotta, P. M. , Giordano, C. M. and Simo, C., 2003, Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits, Physica D, 182, 151.

Nesvorný D., Beauge C., y Dones L., 2003, COLLISIONAL ORIGIN OF FAMILIES OF IRREGULAR SATELLITES, *The Astronomical Journal*, 127:1768,1783.

Nesvorný David, Alvarellos José L. A., Dones Luke, y Levison Harold F., 2003, ORBITAL AND COLLISIONAL EVOLUTION OF THE IRREGULAR SATELLITES, *The Astronomical Journal*, 126, 398.

Yokoyama T., Santos M. T., Cardin G., Winter O. C., 2003, On the orbits of the outer satellites of Jupiter, *A&A*, 401, 763

C'uk M., Burns J. A., 2004, *AJ*, 128, 2518

Maris M., Carraro G., y Parisi M., 2007, Light curves and colours of the faint Uranian irregular satellites Sycorax, Prospero, Stephano, Setebos, and Trinculo, *A A* 472, 311-319.

Nesvorný David, Vokrouhlicky David, y Morbidelli Alessandro, 2007, CAPTURE OF IRREGULAR SATELLITES DURING PLANETARY ENCOUNTERS, *The Astronomical Journal*, 133:1962 Y 1976.

Nicholson P. D., Cuk M., Sheppard S. S., Nesvorný D. y Johnson T. V.: 2008. Irregular Satellites of the Giant Planets, *The Solar System Beyond Neptune*, 411-424.

Hinse, T. C., Christou, A. A. and Alvarellos, J. L., 2010, Application of the MEGNO technique to the dynamics of Jovian irregular satellites *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 404,837.

*Jet Propulsion Laboratory (JPL) Solar System Ephemeris*, available on-line at NASA JPL site: <http://www.ssd.jpl.nasa.gov/?ephemerides#planets>.