UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

TESIS DOCTORAL

Estructuras Killing-Yano invariantes en Variedades Homogéneas

---

Autor:
Andrea Cecilia Herrera

Directora:
Dra. Isabel Dotti

Tesis presentada como parte de los requisitos para optar al grado de Doctor en Matemática

Marzo 2018

Resumen

Estructuras Killing-Yano invariantes en Variedades Homogéneas

por Andrea Cecilia Herrera

En esta tesis nos centramos en primer lugar en el estudio de 2-formas de Killing-Yano invariantes a izquierda sobre grupos de Lie, ó equivalentemente, sobre álgebras de Lie. Más particularmente, clasificamos las álgebras de Lie de dimensión 4 que admitan tales estructuras, y para cada una de tales álgebras, listamos todas las posibles estructuras de Killing-Yano (salvo equivalencia). Realizando extensiones centrales de estas álgebras obtenemos ejemplos de 2-formas de Killing-Yano Conformes en dimensión 5. Las álgebras de Lie obtenidas resultan ser aquellas álgebras de Lie sasakianas (de dimensión 5) con centro no trivial.

En segundo lugar para variedades homogéneas G/K que admitan una métrica G-invariante, analizamos tensores de Killing-Yano, que son G-invariantes. Más específicamente estudiamos la ecuación de Killing-Yano en variedades bandera generalizadas y damos ejemplos concretos en variedades bandera maximales de dimensiones 6, 8 y 12.

Para ambos casos observamos el comportamiento de la estructura casi compleja asociada a la estructura Killing-Yano, y estudiamos las propiedades que hereda de ésta.

Un caso particular de las 2-formas de Killing-Yano se presentan en las variedades nearly Kähler. Es conocido que toda variedad de dimensión cuatro que es nearly Kähler es en efecto Kähler. Consideramos la versión análoga de este resultado con la propiedad de ser Killing-Yano y la propiedad de ser paralelo. Obtenemos algunas respuestas en dimensión cuatro.

Palabras Claves: estructuras Killing-Yano, estructura casi compleja asociada, variedades homogéneas, métricas invariantes.

Abstract

Estructuras Killing-Yano invariantes en Variedades Homogéneas

by Andrea Cecilia Herrera

In this thesis, we focus first in the study of left invariant Killing-Yano 2-forms on Lie groups. This is equivalent to work at the Lie algebra level. In particular, we classify four dimensional Lie algebras that admit such structures, and for each of them we list all the possibles Killing-Yano structures (up to equivalence). Doing central extensions on the obtained Lie algebras, we find examples of Conformal Killing-Yano tensors in dimension five. Further, the obtained central extensions are Sasakian Lie algebras of dimension five with no trivial center.

In the second place we analyse G-invariant Killing-Yano tensors on homogeneous spaces G/K that admits a G-invariant metric. As an application we study the Killing-Yano equation on Generalized flag manifolds and we find examples of invariant Killing Yano tensors on full flag manifolds of dimension six, eight and twelve. In both cases, we look at the behaviour of the associated almost complex structure and we study their inherited properties.

One particular case of manifolds carrying Killing-Yano 2-forms are the nearly Kähler manifolds. It's known that nearly Kähler manifolds of dimension four are Kähler. We consider the analogous version of this result in the homogeneous setting. We find some answers.

Key words: Killing-Yano structure, associated almost complex structure, homogeneous manifolds, invariant metrics.

Agradecimientos

Llegar a la culminación de este trabajo ha sido fruto del apoyo de muchísima gente e instituciones que estuvieron involucrados en todo este proceso. Es por eso que deseo expresar mi mayor agradecimiento a todos los que me acompañaron durante todos estos años.

Me siento muy agradecida a Dios por haber podido llegar hasta aquí, me bendijo con momentos felices y me acompaño en los difíciles.

Quiero agradecer a mi directora Isabel Dotti, de quien he aprendido muchísimo, no solo como matemática sino como persona. Quien me ha tenido mucha paciencia y valoró todos mis esfuerzos e intentos, siempre motivandomé y alentandomé a seguir. Con quien he compartido mucho más que matemática, su consejos y charlas han sido valorables para mi.

Quiero expresar mi agradecimiento al tribunal de esta tesis: Jorge Lauret, Jorge Vargas y Silvio Reggiani, por sus detalladas y valiosas correcciones.

Quiero agradecer de forma especial también a Adrián Andrada, quien siempre ha estado predispuesto a escuchar mis dudas y consultas. También a Laura Barberis, este último tiempo por sus observaciones.

Estoy muy agradecida a CONICET, me sentí muy afortunada de poder obtener una beca y sin ella no hubiera tenido los medios para la realización de un doctorado.

Quiero resaltar el apoyo de las autoridades de Facultad de Agronomía y Agroindustrias de la UNSE, quienes hicieron posible mi licencia todos estos años y respaldaron mis estudios desde el comienzo.

A todos los profesores del FAMAF con los cuales cursé y rendí materias. Sus clases, exigencias y consultas han sido importantes en mi formación.

A mis amigas santiagueñas del FAMAF, Sonia y Johanna, por ser especiales, por reírnos cada vez que nos juntamos y estar siempre presentes.

A mis compañeros doctorandos y de oficina con quienes compartí cursos, qualifying, pasillos, mates y charlas. Cada uno fue parte de todo este proceso.

A mi familia, por estar siempre cerca, a mi mamá por ser alguien incondicional, a mi papá porque es quien me enseño con su ejemplo a esforzarme. A mi abuela, por preocuparse y orar siempre por mi, a mi tía Rut, tía Ale y tío Julio a quienes les tengo un gran aprecio.

A mi esposo Diego, a quien quiero cada día más. Por ser mi amigo, mi compañero, quien me escucha, me anima y me hace reír todos los días.

A todos los que fueron parte de este proceso de llegar hasta aquí, **Muchas Gracias**!!

Índice general

Resumen III

Abstract V

Agradecimientos VII

1. Panorama general de la tesis 1
- 1.1. El uso del álgebra tensorial en variedades diferenciables 1
- 1.2. Principales motivaciones 3
  - 1.2.1. p-formas paralelas y p-formas Killing Yano 3
  - 1.2.2. Variedades Kähler vs Variedades nearly Kähler 4
- 1.3. Problema y resultados obtenidos 5

2. Preliminares generales 9
- 2.1. Estructura compleja en un espacio vectorial 9
- 2.2. Variedades casi complejas 11
- 2.3. Variedades casi hermitianas 14
  - Conexiones 15
  - Derivada exterior 17
- 2.4. Variedades Kähler 19
- 2.5. Variedades nearly Kähler 21
- 2.6. Las dieciséis clases de variedades casi hermitianas 23
  - 2.6.1. Tensores de tipo $(0,3)$ particulares 23
  - 2.6.2. La clasificación de variedades casi hermitianas 27

3. Estructuras paralelas y estructuras Killing-Yano. Caracterización general 31
- 3.1. Endomorfismos antisimétricos en un espacio vectorial 31
- 3.2. Tensores tipo $(1,1)$ paralelos y Killing Yano 32
- 3.3. Curvatura de Ricci 35
- 3.4. Tensores H tipo $(1,1)$ en la complexificación de cada espacio tangente 36
- 3.5. Estructura casi compleja asociada 37

4. Estructuras KY invariantes en Grupos de Lie de dimensión cuatro 39
- 4.1. Métricas y tensores invariantes a izquierda: Consideraciones generales 39
- 4.2. Tensores de Killing-Yano no inversibles en álgebras de Lie de dimensión cuatro 42
- 4.3. Tensores paralelos inversibles en álgebras de Lie de dimensión cuatro . 43
  - Caso: $\mathfrak{v} \cong \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}e_0 \ltimes_{\mathrm{ad}\, e_0} \mathbb{R}^3$ 48
  - Caso: $\mathfrak{v} \cong \mathfrak{h}_3$, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}e_0 \ltimes_{\mathrm{ad}_{e_0}} \mathfrak{h}_3$ 51
  - Caso: $\mathfrak{v} \cong \mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}e_0 \ltimes_{\mathrm{ad}\, e_0} \mathfrak{e}(2)$ 59
  - Caso: $\mathfrak{v} \cong \mathfrak{e}(1,1)$, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}e_0 \ltimes_{\mathrm{ad}\, e_0} \mathfrak{e}(1,1)$ 61
- 4.4. Distinción de estructuras paralelas en álgebras de Lie de dimensión cuatro 64

Invariantes de álgebras de Lie con producto interno 65
Diferenciación de las estructuras paralelas del Teorema 4.3.7 . . 66
4.5. Extensiones Centrales de un álgebra de Lie. Ejemplos de 2-formas CKY 72
4.5.1. 2-formas Killing-Yano Conformes 72
4.5.2. Extensiones centrales 73
4.6. Estructuras casi complejas asociadas a estructuras paralelas invariantes en álgebras de Lie de dimensión cuatro 77
4.6.1. Propiedades de una estructura compleja asociada 77
4.6.2. Generalización de algunos teoremas 80

5. Estructuras Killing-Yano en Espacios Homogéneos 83
5.1. Espacios Homogéneos 83
Preliminares básicos sobre representaciones 83
Espacios homogéneos 85
Ejemplo de espacios homogéneos: Variedades bandera 85
La representación Isotrópica 87
5.2. Métricas G-invariantes en G/K 88
5.3. Tensores tipo $(1,1)$ G-Invariantes en espacios homogéneos 91
5.4. Conexiones afines G-invariantes en espacios homogéneos 94
5.5. Espacios homogéneos con Tensores KY 96
La 2-forma ω y su derivada exterior 96
La derivada covariante de H 97
El tensor de Ninjehuis 97
La ecuación KY en un espacio homogéneo 98
Tensores Killing-Yano G-invariantes en espacios homogéneos G/K de dimensión cuatro 99
5.6. Tensores KY invariantes en variedades bandera 100
5.6.1. Variedades bandera generalizadas. Definición y propiedades . 100
La representación de isotropía en $\mathbb{F}_\Theta$ 102
5.6.2. Endomorfismos y productos internos $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariantes en $\mathbb{F}_\Theta$ 103
5.6.3. El tensor de Nijenhuis en $\mathbb{F}_\Theta$ 105
5.6.4. Las 2-formas ω_0 y μ_0 107
5.6.5. Estructuras paralelas en $\mathbb{F}$ 111
Caso U/T y generalizaciones 111
5.6.6. Condición Killing Yano en una Variedad Bandera 113
La función conexión riemanniana en $\mathbb{F}_\Theta$ 114
5.7. Ejemplos: Algunas soluciones a la ecuación KY en Variedades Bandera Maximales 116
5.7.1. El ejemplo de $SU(3)/S(U(1)\times U(1)\times U(1))$ 120
Caso Inversible 120
Métricas de Einstein 122
Caso no inversible 123
5.7.2. El ejemplo de $SU(4)/S(U(1)\times U(1)\times U(1)\times U(1))$ 124
5.7.3. El ejemplo de $SO(5,\mathbb{R})/T$ 125
5.8. La clasificación de Gray-Hervella en Variedades Bandera 129
5.8.1. La estructura casi compleja asociada en los ejemplos vistos . . . 129

A mis padres y mi abuela Irma

Capítulo 1

Panorama general de la tesis

1.1. El uso del álgebra tensorial en variedades diferenciables

Uno de los aspectos sorprendentes en variedades diferenciables es que gran parte de la teoría es trasladada al álgebra multilineal y al cálculo tensorial. La mayoría de las definiciones que se presentan son abstractas pero el uso de estas dos herramientas nos permiten simplificar y obtener una visión más concreta y maleable. Antes de entrar al problema de la tesis, analizaremos los principales conceptos usados a lo largo del trabajo desde el punto de vista del cálculo tensorial.

Denotamos siempre por T_pM al espacio tangente en el punto p de una variedad diferenciable M, y por $\mathbf{T}_pM$ al **álgebra tensorial**, definida como $\mathbf{T}_pM = \sum_{r,s} T_p^{r,s}M$, donde $T_p^{r,s}M$ es el espacio tensorial de tipo (r,s) sobre T_pM, es decir

$$T_p^{r,s}M := \underbrace{T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM}_{r} \otimes \underbrace{(T_pM)^* \otimes \cdots \otimes (T_pM)^*}_{s}.$$

También denotamos por TM, $T^{r,s}M$ y $\mathbf{T}M$ a los correspondiente fibrados. Un tensor de tipo (r,s) es una sección C^∞ del fibrado $T^{r,s}M$, es decir, una función $K : M \to T^{r,s}M$ que es C^∞ y tal que $K_p := K(p)$ es un elemento de $T_p^{r,s}M$.

Los tensores de tipo (1,0) son los campos vectoriales. Al conjunto de todos estos lo denotamos por $\mathfrak{X}(M)$. Este conjunto tienen estructura de $C^\infty(M)$-módulo.

A su vez un tensor de tipo $(0,r)$ puede ser considerado como una función $C^\infty(M)$-multilineal

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{r} \to C^\infty(M).$$

De manera similar, un tensor de tipo $(1,r)$ puede ser considerado como una función $C^\infty(M)$-multilineal

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{r} \to \mathfrak{X}(M)$$

Los principales conceptos usados en esta tesis se pondrán en términos de los siguientes tipos de tensores:

- Los **tensores** H **de tipo** $(1,1)$, es decir, aplicaciones $C^\infty(M)$-lineales $H : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Un caso particular son las **estructuras casi complejas** J, la cuales satisfacen $J^2 = -I$.

- Las r**- formas** ω, las cuales son tensores tipo $(0,r)$ antisimétricos respecto de cualquier permutación, es decir:

  $$\omega(X_1, ..., X_r) = \mathrm{sig}(\sigma)\omega(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(r)}), \text{ con } \sigma \in \mathbb{S}_r,$$

  donde $\mathbb{S}_r$ es el grupo simétrico en r elementos.

- Las **métricas riemannianas** g en M son tensores tipo $(0,2)$ tal que para cada $p \in M$, g_p es un producto interno en T_pM.

p-formas destacadas

En lo que sigue vamos a fijar una variedad riemanniana (M,g). Denotaremos por ∇ a la conexión de Levi-Civita, la cual es una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, cuyo valor $\nabla(X,Y)$ se denota $\nabla_X Y$ (ver 2.3). Si K es un tensor de tipo $(0,s)$ y X es un campo vectorial, entonces la derivada covariante de K en dirección de X es el tensor de tipo $(0,s)$ que satisface:

$$\nabla_X K(X_1,\dots,X_s) = X(K(X_1,...,X_s)) - \sum_{i=1}^{s} K(X_1,\dots,X_{i-1},\nabla_X X_i, X_{i+1},\dots,X_s).$$

1. Un tensor K de tipo $(0,s)$ en M se dice **paralelo** si

$$\nabla_X K = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

2. Una p-forma ω en M se dice de **Killing-Yano** si satisface la ecuación

$$\nabla_X \omega = \frac{1}{p+1}\iota(X)d\omega, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M),$$

donde d denota la derivada exterior e ι la contracción. Se puede ver que esta condición equivale a la siguiente:

$$\nabla_X \omega(Y,Z_1,\dots,Z_{p-1}) + \nabla_Y \omega(X,Z_1,\dots,Z_{p-1}) = 0, \quad \forall X,Y,Z_1,\dots,Z_{p-1} \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.1.1}$$

Notar que una p-forma paralela es también de Killing-Yano.

En particular una 1-forma ω es de Killing-Yano si satisface

$$\nabla_X \omega(Y) + \nabla_Y \omega(X) = 0, \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Si Z es el (único) campo tal que $g(Z,U) = \omega(U)$, $\forall U \in \mathfrak{X}(M)$, usando propiedades de la conexión obtenemos que la condición sobre ω se traduce en:

$$g(\nabla_X Z, Y) + g(X, \nabla_Y Z) = 0.$$

Un campo Z que satisface la condición anterior se conoce comúnmente como **campo de Killing**. Así, la noción de p-forma de Killing-Yano generaliza la noción de campo de Killing.

Consideremos ahora una 2-forma ω en M. Notar que existe un único tensor de tipo $(1,1)$, $H : TM \to TM$ tal que $\omega(X,Y) = g(HX,Y)$, $\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, el cual resulta antisimétrico. Recíprocamente, un tal tensor define una 2-forma ω en M. Usando propiedades de la conexión, la condición de Killing-Yano (1.1.1), en términos de H, resulta

$$\nabla_X HY - H\nabla_X Y + \nabla_Y HX - H\nabla_Y X = 0. \tag{1.1.2}$$

Un tensor antisimétrico H de tipo (1,1) que satisface la condición anterior se dice también de Killing-Yano.

Si para un tensor antisimétrico H de tipo (1,1) y un campo X uno define $\nabla_X H$ como el tensor (1,1) definido por

$$(\nabla_X H)Y := \nabla_X HY - H\nabla_X Y,$$

entonces la condición de Killing-Yano (1.1.2) sobre H se reescribe como

$$(\nabla_X H)Y + (\nabla_Y H)X = 0, \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M);$$

o equivalentemente,

$$(\nabla_X H)X = 0, \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}(M).$$

Como ejemplo, consideremos una variedad casi Hermitiana (M, g, J), es decir, J es un tensor (1,1) antisimétrico respecto de la métrica g tal que $J^2 = -I$ y $g(JX, JY) = g(X, Y)$ para todo par de campos X, Y en M. La 2-forma asociada $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ es la forma de Kähler. Luego J es de Killing-Yano si y solo si $(\nabla_X J)X = 0$ para cualquier campo X en M. En este caso (M, g, J) se dice que es nearly Kähler. De manera similar, si J es paralela, se dice que (M, g, J) es de Kähler.

1.2. Principales motivaciones

1.2.1. p-formas paralelas y p-formas Killing Yano

Tanto el estudio de formas paralelas como de formas Killing Yano en una variedad riemanniana nos dicen "algo" de la variedad que nos permite conocerla un poco más.

En primer lugar, se observa que la existencia de objetos paralelos impone restricciones en la geometría de la variedad. Entre algunas de las restricciones destacamos el siguiente teorema:

Teorema 1.2.1. *Una variedad riemanniana n-dimensional sin r-formas paralelas con $0 < r < n$, resulta irreducible, o sea, no se descompone como producto riemanniano de dos variedades de dimensión menor.*

Notar que la forma volumen es siempre una forma paralela. Una prueba de este hecho sigue del principio general de holonomía (ver pág. 33 de [Agr06]).

En segundo lugar, existe un vínculo fuerte entre formas paralelas y formas Killing-Yano, siendo la primera un caso especial de la segunda. El gran interrogante es ver cuando en una variedad riemanniana estas formas coinciden (es decir son simplemente paralelas) o cuando hay una fuerte restricción que nos permite definir formas Killing-Yano estrictas (no paralelas). Entre uno de los resultados sobresalientes, destacamos el trabajo de Bochner que muestra que en algunas variedades riemannianas solo las 1-formas paralelas satisfacen la ecuación de Killing-Yano.

Teorema 1.2.2 (Bochner, 1946 [Boch46])**.** *Sea (M, g) una variedad riemanniana compacta con curvatura de Ricci r. Si $r = 0$ entonces todo campo de Killing es paralelo.*

Otros resultados generales en este sentido son:

Teorema 1.2.3 (Moroianu-Semmelmann, 2005 [MS05])**.** *Toda p-forma de Killing-Yano en una variedad compacta quaterniónica Kähler es automáticamente paralela ($p \geq 2$).*

Teorema 1.2.4 (Belgun-Moroianu-Semmelmann, 2006 [BMS06])**.** *Un espacio simétrico compacto simplemente conexo posee una p-forma no paralela de Killing- Yano ($p \geq 2$) si y solamente si es isométrico a un producto riemanniano $S^k \times N$, donde S^k es la esfera estándar y $k > p$.*

1.2.2. Variedades Kähler vs Variedades nearly Kähler

Es interesante observar la "historia"de estas dos clases de variedades, las idas y vueltas, las coincidencias y diferencias que se encuentran en diferentes ejemplos. Esta es una de nuestras principales motivaciones, observar el comportamiento de ellas nos lleva a preguntarnos si sucede lo mismo cuando las generalizamos a 2-formas paralelas o 2-formas Killing Yano.

Claramente una variedad Kähler es una variedad nearly Kähler pero la recíproca no siempre es válida. En el año 1969 Alfred Gray probó en [Gray69] que si (M, J, g) es nearly Kähler y además $\dim M = 4$ entonces (M, J, g) es Kähler. Este resultado muestra que no hay distinción entre variedades Kähler y nearly Kähler de dimensión cuatro.

La primera diferencia importante aparece en dimensión seis. En el año 1955, T. Fukami y S.Ishihara construyen una estructura casi compleja no integrable en S^6 ([FK55]), dando el primer ejemplo de estructura estrictamente nearly Kähler. En 1976, nuevamente Alfred Gray en [Gray70] encuentra propiedades interesantes para variedades estrictamente nearly Kähler. Una de ellas es que toda variedad estrictamente nearly Kähler de dimensión seis es Einstein.

Más tarde en 1968, Joseph Wolf y Alfred Gray en [WG68] descubren más ejemplos de métricas nearly Kähler en espacios homogéneos G/H con G grupo de Lie compacto y conexo, H subgrupo de rango maximal, para los cuales se plantea la siguiente conjetura que intenta caracterizar a las variedades estrictamente nearly Kähler en este tipo de espacios homogenéos:

Asumamos que G actúa de forma efectiva en G/H y que G/H admite una estructura casi compleja G-invariante. Supongamos además que G/H no es un espacio simétrico hermitiano. Entonces, existe una métrica casi hermitiana invariante g tal que (M, g) es nearly Kähler estricto si y solo si $\mathrm{Lie}(H)$ es igual a los puntos fijos de un automorfismo de orden 3 en $Lie(G)$.

En el año 2002, Paul-Andi Nagy prueba que toda variedad nearly Kähler estricta es localmente el producto riemanniano de variedades Kähler, espacios 3 simétricos, espacios twistores sobre variedades cuaterniónicas Kähler de curvatura escalar positiva y variedades nearly Kähler estrictas de dimensión seis. Este trabajo de Nagy en [Na02] reduce la conjetura planteada por Wolf-Gray a dimensión seis. Usando este resultado en el año 2005, Jean-Baptiste Butruille en [Bu05] resuelve la conjetura y encuentra todos los espacios homogéneos de dimensión seis que son nearly Kähler estrictos, ellos son:

- $(SU(2) \times SU(2))/\{1\} = S^3 \times S^3$
- $G_2/SU(3) = S^6$
- $Sp(2)/SU(2)U(1) = \mathbb{C}P^3$
- $SU(3)/S(U(1) \times U(1) \times U(1)) = \mathbb{F}^3$

Cada uno de ellos admite una única estructura nearly Kähler estricta invariante salvo homotecias.

Simultáneamente en los años cercanos al trabajo de Nagy, Luiz San Martin y Caio Negreiros en [SMN03] realizan una prueba parcial de la conjetura para variedades bandera maximales. Luego Rita Cassia y San Martin en el año 2006 completan la demostración para variedades banderas generalizadas en [SMC06].

Si bien se conocen ejemplos de estructuras nearly Kähler estrictas en variedades homogéneas, para el resto de las variedades sigue siendo una pregunta abierta. Muy reciéntemente, observando la ausencia de ejemplos de variedades nearly Kähler estrictas no homogéneas completas en dimensión 6, Lorenzo Foscolo y Mark Haskins en [FH17] muestran la existencia de estructuras nearly Kähler estrictas en S^6 y en $S^3 \times S^3$ con métricas no homogéneas.

1.3. Problema y resultados obtenidos

Análogamente al caso Kähler-nearly Kähler, analizamos el comportamiento y las diferencias entre 2-formas paralelas y 2-formas Killing-Yano en una variedad riemanniana (M, g). Recordemos que una 2-forma ω es una 2-forma paralela si para todo par de campos X, Y en M, $\nabla_X \omega(Y, Z) = 0$, y es KY (Killing-Yano) si $\nabla_X \omega(X, Y) = 0$.

Dada una 2-forma ω denotamos por H al tensor (antisimétrico) de tipo $(1, 1)$ tal que $\omega(x, y) := g(Hx, y)$. Decimos H es paralelo (resp. KY) si ω lo es. Equivalentemente, H es paralelo si $(\nabla_X H)Y = 0$, para X, Y campos cualesquiera en M y H es KY si $(\nabla_X H)X = 0$, para cualquier campo X en M.

Diremos que (M, g) posee una estructura paralela si admite un tensor H tipo $(1, 1)$ antisimétrico y paralelo; y (M, g) posee una estructura KY si existe un tensor H tipo $(1, 1)$ antisimétrico y KY.

Observar que una 2-forma paralela es KY. Nos interesa conocer en qué casos vale la recíproca. En [AD18] se consideran ternas (G, g, H), donde G es un grupo de Lie, g una métrica invariante a izquierda, y H es un tensor KY invariante a izquierda, es decir, $HdL_g = dL_g H$ para todo punto g en G. Se prueba en ese trabajo (sin usar la clasificación) que si G tiene dimensión 4 y H es inversible, entonces H es necesariamente paralelo. Más generalmente en [ABM16] está probado que para variedades de dimensión cuatro toda 2-forma KY no degenerada con norma constante resulta paralela. Con todos los hechos mencionados los problemas a considerar son los siguientes:

1. Determinar cuáles son los grupos de Lie G (de dimensión 4) que admiten una métrica g invariante a izquierda y un tensor KY invariante H que además es inversible.

2. Para tales grupos G, clasificar las ternas (G, g, H) como antes, salvo equivalencia. Decimos que (G, g, H) y (G, g', H') son equivalentes si existe un automorfismo de Lie $\mu : G \to G'$ que es isometría y tal que $d\mu H = H' d\mu$.

3. Existencia de tensores KY no inversibles no paralelos en grupos de Lie de dimensión cuatro con métrica invariante a izquierda.

4. Existencia de tensores KY invariantes que sean inversibles y no inversibles en espacios homogéneos. Más precisamente en variedades bandera con métricas G-invariantes.

Los dos primeros puntos se reducen a analizar ternas $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle, H)$, donde $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión cuatro, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno, y $H : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es un endomorfismo antisimétrico paralelo (pues por [AD18] todo tensor KY invariante en álgebras de Lie de dimensión cuatro es paralelo). El problema en (1) fue resuelto en [AD18] en el caso de álgebras con centro no trivial. En esta tesis obtenemos una prueba alternativa y abarcamos también el caso de álgebras con centro trivial. Además, se resuelve completamente el problema planteado en (2).

Obtenida la clasificación de todas las álgebras de Lie (sobre $\mathbb{R}$) de dimensión 4 que admiten tensores paralelos (KY) inversibles (con respecto a un producto interno), realizamos extensiones centrales para obtener álgebras de dimensión cinco. Encontramos allí ejemplos de tensores que son Killing-Yano conformes. Estos ejemplos resultan ser todas las álgebras de Lie sasakianas con centro no trivial.

En el presente trabajo mostramos que las 2-formas ω KY degeneradas en grupos de Lie de dimensión cuatro (construidas a partir de una métrica invariante a izquierda), son paralelas resolviendo (3).

Saliendo del caso invariante, hay ejemplos recientes en [GM17] de variedades diferenciables de dimensión cuatro que admiten 2-formas KY estrictas (no paralelas) y no degeneradas . Es aún una pregunta pendiente conocer si existen 2-formas KY estrictas degeneradas para este caso.

Consideraremos en forma general tensores KY estrictos en variedades homogéneas, con métricas y tensores invariantes. Notar que todo espacio homogéneo G/K que admite una métrica G-invariante es reductivo (ver observación 5.2.7). En espacios homogéneos G/K con métricas G-invariantes planteamos la ecuación KY. De forma similar a grupos de Lie de dimensión cuatro, probamos que todo tensor H KY inversible G-invariante en un espacio homogéneo G/K de dimensión cuatro con métrica G-invariante, es paralelo.

Al considerar espacios homogéneos G/K con G grupo de Lie compacto, conexo y simple, y K subgrupo de rango maximal, demostramos que todo tensor H inversible, antisimétrico (respecto de una métrica g) y paralelo es múltiplo de una estructura casi compleja J tal que (J, g) es Kähler. La prueba esta basada simplemente en artículos publicados y proposiciones conocidas en la geometría riemanniana. También encontramos una prueba alternativa de este hecho para el caso particular de las variedades bandera maximales.

Buscando ejemplos concretos de tensores KY G-invariantes estrictos (no paralelos) en espacios homogéneos con métrica G-invariante, nos detenemos en variedades bandera y obtenemos algunos ejemplos en dimensión seis, ocho y doce en banderas maximales. Particularmente encontramos en el ejemplo de dimensión seis un tensor KY no inversible, de esta forma se obtienen algunas respuestas para (4). Estos últimos resultados son parte del trabajo [DH].

Describimos brevemente el contenido de la tesis, la cual está dividida en cinco capítulos: el segundo capítulo son los contenidos básicos para abordar la tesis, el tercer capítulo está focalizada en definiciones y propiedades generales de 2-formas ω paralelas y KY en una variedad riemanniana; el cuarto capítulo se centra en el trabajo con grupos de Lie de dimensión cuatro y el quinto capítulo contiene todo lo relacionado a espacios homogenéas G/K y los ejemplos en variedades bandera. Más detalladamente:

- Capítulo 2: Preliminares Generales

  Consta de conceptos básicos como estructura casi complejas, variedades casi hermitianas, variedades Kähler y nearly Kähler. Se dan las pruebas de los teoremas y proposiciones conocidas y necesarias para el seguimiento de toda la tesis. Caracterizamos las propiedades y relaciones sobresalientes de variedades Kähler y nearly Kähler. Se enuncia y se prueban algunas propiedades sobre la clasificación de variedades casi hermitianas.

- Capítulo 3: Estructuras paralelas y estructuras KY. Caracterización general

  Definimos y caracterizamos estos tensores en una variedad riemanniana cualquiera. Asociamos a él una estructura casi compleja.

- Capítulo 4: Estructuras KY invariantes en Grupos de Lie de dimensión cuatro

  Enunciamos y demostramos el Teorema de Clasificación de álgebras de Lie de dimensión cuatro con estructuras KY(paralelas)(ver Teorema 4.3.7). Clasificamos salvo equivalencias las estructuras obtenidas para cada álgebra.

  Con los ejemplos obtenidos en el teorema de clasificación de estructuras KY extendemos a álgebras de Lie de dimensión cinco y encontramos ejemplos de 2-formas Killing-Yano Conformes; más aún se prueba que las álgebras obtenidas son sasakianas con centro no trivial.

  Se enuncia y prueba que todo tensor H KY invariante y no inversible en un grupo de Lie de dimensión cuatro con métrica invariante a izquierda es en efecto paralelo (Teorema 4.2.1).

  Presentamos en forma general el comportamiento de las estructuras complejas asociadas a estructuras Killing Yano (ver sección 3.5) invariantes en Grupos de Lie de dimensión cuatro. Probamos que si H es un tensor KY(paralelo) inversible, su estructura casi compleja asociada J es Kähler (Corolario 4.6.8).

- Capítulo 5 : Estructuras KY en espacios homogéneos:

  Estudiamos espacios homogéneos G/K con G grupo de Lie y K subgrupo cerrado de G. Se estudian métricas G-invariantes, conexiones riemannianas G-invariantes y tensores tipo $(1,1)$ G-invariantes. Analizamos la ecuación de Killing Yano en espacios homogéneos con métrica G-invariante. Probamos que en todo espacio homogéneo de dimensión cuatro con métrica G-invariante toda 2-forma KY no degenerada G-invariante es paralela (Teorema 5.5.13).

  Particularizamos la ecuación de Killing Yano para variedades bandera generalizadas y encontramos ejemplos en variedades bandera maximales con estructura KY invariante estricta (no paralela):

  - $SU(3)/S(U(1) \times U(1) \times U(1))$: Mostramos ejemplos de tensores H paralelos invertibles, KY inversibles estrictos y también KY no inversibles.
  - $SU(4)/S(U(1) \times U(1) \times U(1) \times U(1))$: Este ejemplo no posee estructura nearly Kähler invariante [SMN03], sin embargo encontramos un ejemplo de una estructura KY estricta inversible para una métrica particular.
  - $SO(5,\mathbb{R})/T$: Este ejemplo no admite estructura nearly Kähler invariante [SMN03], pero encontramos todas las métricas para las cuales posee estructuras KY estrictas inversibles.

  En los ejemplos obtenidos en este último capítulo, observamos la estructura casi compleja J asociada a los tensores H inversibles. Teniendo en cuenta la clasificación de variedades casi hermitianas (ver [GH80]) para variedades banderas con estructura casi hermitianas invariantes en [Cass03], determinamos a que clase corresponde la estructura casi compleja asociada en los ejemplos vistos.

Capítulo 2

Preliminares generales

En este capítulo repasamos las definiciones y propiedades importantes que usaremos a lo largo de todo el trabajo. También analizamos en detalle la clasificación de las variedades casi hermitianas, un resultado de Alfred Gray y Luis Hervella.

2.1. Estructura compleja en un espacio vectorial

En lo que sigue, V denota un espacio vectorial real.

Definición 2.1.1. Una **estructura compleja** en V es un endomorfismo $J : V \to V$ que satisface $J^2 = -I$, siendo I la identidad.

Proposición 2.1.2. *Si V posee una estructura compleja J, entonces V admite estructura de espacio vectorial complejo de modo que $iv = Jv$. En particular la dimensión real de V es par, y si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base de V sobre $\mathbb{C}$, entonces $\{x_1, \ldots, x_n, Jx_1, \ldots, Jx_n\}$ es una base de V sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración. Definimos la multiplicación por escalares complejos como sigue:

$$(a + ib)x = ax + bJx, \quad \forall\, a + ib \in \mathbb{C}, \quad x \in V$$

Es fácil ver que esta multiplicación por escalar define en V una estructura de espacio vectorial complejo. $\square$

En lo que sigue, $V^{\mathbb{C}}$ denota la complexificación de V, es decir, $V^{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C} = V + iV$. Si J es una estructura compleja en V, denotamos por $J^{\mathbb{C}}$ a su extensión $\mathbb{C}$-lineal a $V^{\mathbb{C}}$, es decir,

$$J^{\mathbb{C}}(x_1 + ix_2) = Jx_1 + iJx_2$$

Para $J^{\mathbb{C}}$ también se cumple que $(J^{\mathbb{C}})^2 = -I$. Notar que los autovalores de $J^{\mathbb{C}}$ son i y $-i$. Denotamos

$$V^{(1,0)} = \{z \in V^{\mathbb{C}} : J^{\mathbb{C}}z = iz\}$$
$$V^{(0,1)} = \{z \in V^{\mathbb{C}} : J^{\mathbb{C}}z = -iz\}$$

Proposición 2.1.3. *Si J es una estructura compleja en V se tiene:*

1. $V^{(1,0)} = \{x - iJx : x \in V\}$.

2. $V^{(0,1)} = \{x + iJx : x \in V\}$.

3. $V^{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$.

4. *La conjugación compleja en $V^{\mathbb{C}}$ define un isomorfismo real entre $V^{(1,0)}$ y $V^{(0,1)}$.*

Demostración. Para (1), sea $x+iy \in V^{(1,0)}$. Entonces $J^{\mathbb{C}}(x+iy) = i(x+iy) = -y+ix$, pero por definición de $J^{\mathbb{C}}$, $J^{\mathbb{C}}(x+iy) = Jx+iJy$, luego igualando ambas expresiones, resulta $y = -Jx$. Recíprocamente, todo vector de la forma $x - iJx$ es claramente un elemento de $V^{(1,0)}$. (2) se prueba similar. Para (3) notemos que todo $z \in V^{\mathbb{C}}$ puede escribirse como $z = \frac{1}{2}(z - iJz) + \frac{1}{2}(z + iJz)$, el primer sumando pertenece a $V^{(1,0)}$ y el segundo a $V^{(0,1)}$.

La conjugación envía a cada elemento $x + iy$ al elemento $x - iy$ en $V^{\mathbb{C}}$. Luego la conjugación es un isomorfismo lineal entre $V^{(1,0)}$ y $V^{(0,1)}$. □

Denotamos por V^* al dual de V. Notar que $(V^*)^{\mathbb{C}} \cong (V^{\mathbb{C}})^*$ canónicamente. La descomposición $V^{\mathbb{C}} = V^{(1,0)} \oplus V^{(0,1)}$ induce una descomposición de $(V^*)^{\mathbb{C}} = (V^{\mathbb{C}})^*$:

$$(V^*)^{\mathbb{C}} = V_{(1,0)} \oplus V_{(0,1)}$$

donde

$$V_{(1,0)} = \{x^* \in (V^{\mathbb{C}})^* : x^*(y) = 0 \text{ si } y \in V^{(0,1)}\}$$

y

$$V_{(0,1)} = \{x^* \in (V^{\mathbb{C}})^* : x^*(y) = 0 \text{ si } y \in V^{(1,0)}\}.$$

Definición 2.1.4. Sea J una estructura compleja en V. Un producto interno (real) h en V se dice **hermitiano** si satisface $h(Jx, Jy) = h(x, y)$ para todos $x, y \in V$.

Notar que si h es hermitiano, entonces J es ortogonal respecto de h y además J resulta antisimétrico. Recíprocamente, si h es un producto interno en V con respecto al cual J es antisimétrico, entonces h resulta hermitiano. Finalmente, notemos que $h(Jx, x) = -h(x, Jx)$ y por lo tanto $h(x, Jx) = 0$, en otra palabras, $\mathbb{R}x$ y $\mathbb{R}Jx$ son ortogonales.

Proposición 2.1.5. *Sea J una estructura compleja en V y sea h un producto interno hermitiano. Entonces existen $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ tal que $\{x_1, x_2, ..., x_n, Jx_1, Jx_2, ..., Jx_n\}$ es base ortonormal de V*

Demostración. Sabemos que $\dim V = 2n$ para algún entero n. Haremos la demostración por inducción en n. Para $n = 1$, escojemos $x_1 \in V$ tal que $|x_1| = 1$. Hemos visto ya que $h(x_1, Jx_1) = 0$. Además Jx_1 es unitario pues J es ortogonal. Deducimos por lo tanto que $\{x_1, Jx_1\}$ es una base ortonormal de V. Sea ahora $n > 1$ y escojamos $x_1 \in V$ de norma 1. Denotamos $W = \{x_1, Jx_1\}$ y consideramos su complemento ortogonal $W^{\perp}$, de modo que $V = W \oplus W^{\perp}$. Observar que $W^{\perp}$ es invariante por J pues si $w \in W^{\perp}$, $h(Jw, x_1) = -h(w, Jx_1) = 0$ y $h(Jw, Jx_1) = h(w, x_1) = 0$. Resulta entonces que la restricción de J a $W^{\perp}$ es una estructura compleja y la restricción de h resulta claramente hermitiana. Como $\dim W^{\perp} = 2(n-1)$, por hípotesis inductiva existen $x_2, ..., x_n \in W^{\perp}$ tal que $\{x_2, ..., x_n, Jx_2, ..., Jx_n\}$ es base ortonormal de V. Luego se tiene la proposición. □

Proposición 2.1.6. *Sea J una estructura compleja en V. Si h es un producto interno, entonces h se extiende a $V^{\mathbb{C}}$ como una forma $\mathbb{C}$-bilineal simétrica $h^{\mathbb{C}}$ que cumple con las siguientes propiedades:*

1. $h^{\mathbb{C}}(\overline{z}, \overline{w}) = \overline{h(z, w)}$ *para todos* $z, w \in V^{\mathbb{C}}$.
2. $h^{\mathbb{C}}(\overline{z}, z) > 0$ *para todo* $z \neq 0$.
3. $h^{\mathbb{C}}(z, \overline{w}) = 0$ *para todo* $z \in V^{(1,0)}$ *y* $w \in V^{(0,1)}$.

Recíprocamente toda forma bilineal simétrica en $V^{\mathbb{C}}$ que cumple los ítems anteriores es una extensión de un producto interno hermitiano en V.

Demostración. Extendemos h a $V^{\mathbb{C}}$ de la siguiente forma:

$$h^{\mathbb{C}}(x+iy, z+iw) = h(x,z) - h(y,w) + i[h(x,w) + h(y,z)]$$

Los ítems 1,2,3 son fáciles de verificar. Ahora supongamos que $B : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ es una forma bilineal simétrica que satisface 1,2,3; y definimos h como la restricción de B a $V \times V$. La condición 1 garantiza que h toma valores reales, y la condición 2 garantiza que h es un producto interior en V. Nos queda ver que J es ortogonal respecto de h. Notemos que $B(x,y) - B(Jx, Jy) = Re(B(x - iJx, y - iJy)) = 0$, lo cual concluye la demostración. □

2.2. Variedades casi complejas

Trasladaremos los conceptos y propiedades anteriores a variedades diferenciables reales.

Definición 2.2.1. Una **estructura casi compleja** en una variedad diferencible M es un tensor $J : TM \to TM$ tal que $J^2 = -I$, es decir, para cada punto $p \in M$, el endomorfismo lineal $J_p : T_pM \to T_pM$ satisface ${J_p}^2 = -I$. Al par (M, J) se lo llama variedad casi compleja.

Sea M es una variedad compleja. Luego M es de manera natural una variedad diferenciable real si usamos la identificación $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ dada por $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, donde $z_j = x_j + iy_j$. A esta estructura de variedad diferenciable la llamamos inducida. A $\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ los identificamos como vectores de T_pM visto como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, mientras que $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ los identificamos como vectores de T_pM visto como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann dicen que

$$i\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Dado que la multiplicación por i es intrínseca a T_pM y no depende del sistema coordenado $(z_1, \ldots, z_n)$, obtenemos entonces que la multiplicación por i en cada TM define una estructura compleja J la cual satisface

$$J\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}$$

siempre y cuando $(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$ sea un sistema coordenado complejo de M.

Definición 2.2.2. Una estructura casi compleja J en una variedad diferenciable M es una estructura compleja si satisface lo siguiente:

1. existe una estructura de variedad compleja en M tal que su estructura de variedad diferenciable real es la inducida por la anterior.

2. J se obtiene a partir de la estructura de variedad compleja en 1. como en el párrafo anterior.

En lo que sigue se enunciarán proposiciones en las que se darán condiciones para que una variedad casi compleja sea una variedad compleja.

Proposición 2.2.3. *Una variedad casi compleja tiene dimensión par y es orientable.*

Demostración. Dado que para cada $p \in M$, J_p es una estructura compleja en T_pM, este debe tener dimensión par, digamos $2n$.

Dado $p \in M$, escojemos campos $X_1^{(p)}, \ldots, X_n^{(p)}$ en M tales que $(X_1^{(p)})_p, \ldots, (X_n^{(p)})_p$ forman una base de T_pM visto como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Luego existe un entorno $U^{(p)}$ de p tal que para todo $q \in U^{(p)}$, el conjunto $\{(X_1^{(p)})_q, \ldots, (X_n^{(p)})_q\}$ es una base de T_qM visto como $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Por la Proposición 2.1.2, para todo $q \in U^{(q)}$, $\{(X_1^{(p)})_q, \ldots, (X_n^{(p)})_q, (JX_1^{(p)})_q, \ldots, (JX_n^{(p)})_q\}$ es una base de T_qM como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Podemos restringir $U^{(p)}$ si es necesario de modo que se pude definir funciones coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ en $U^{(p)}$ tales que $\frac{\partial}{\partial x_i}|_q = (X_i^{(p)})_q$ y $\frac{\partial}{\partial y_i}|_q = (JX_i^{(p)})_q$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Puesto que los abiertos $U^{(p)}$, $p \in M$, forman un cubrimiento de M, para probar que M es orientable basta ver que dados $p, p' \in M$, la diferencial del cambio de coordenadas en $U^{(p)} \cap U^{(p')}$ tiene determinante positivo. Para $q \in U^{(p)} \cap U^{(p')}$, lo anterior equivale a probar que la matriz de cambio de base entre

$$\mathcal{B}_q = \{(X_1^{(p)})_q, \ldots, (X_n^{(p)})_q, (JX_1^{(p)})_q, \ldots, (JX_n^{(p)})_q\}$$

y

$$\mathcal{B}'_q := \{(X_1^{(p')})_q, \ldots, (X_n^{(p')})_q, (JX_1^{(p')})_q, \ldots, (JX_n^{(p')})_q\}$$

tiene determinante positivo.

Si P es el cambio de base, entonces

$$P(X_i^{(p)})_q = (X_i^{(p')})_q, \;\text{ y }\; P(J_q(X_i^{(p)})_q)) = J_q(X_i^{(p')})_q$$

es decir, $PJ_q = J_qP$. La matriz de J_q en la base $\mathcal{B}_q$ es

$$\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto la matriz de P respecto de la misma base es de la forma:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}.$$

Por propiedad de determinante de matrices por bloque se tiene que $\det P = (\det A)^2 + (\det B)^2 > 0$. Esto concluye la demostración. □

En lo que sigue, dados campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, denotamos por $[X, Y]$ al corchete de campos. Recordar que es antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi. Además $[X, gY] = X(g)Y + g[X, Y]$ para $g \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición 2.2.4. Sea J una estructura casi compleja en una variedad diferenciable M. La torsión de J es la aplicación $N_J : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - J([JX, Y] + [X, JY]) - [X, Y], \;\; \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

También es conocido como el Tensor de Nijenhuis. Si $N_J = 0$ decimos que la estructura casi compleja J es **integrable**.

Proposición 2.2.5. *Se verifica lo siguiente:*

1. $N_J(X,Y) = -N_J(Y,X)$.
2. N_J *es un tensor, es decir, es* $\mathbb{R}$*-bilineal y* $N_J(fX,gY) = fgN_J(X,Y)$.

Demostración. Es inmediato de la definición que N_J es $\mathbb{R}$-bilineal y que $N_J(X,Y) = -N_J(Y,X)$. Luego, para probar que es $C^\infty(M)$-bilineal basta ver que $N_J(X,gY) = gN_J(X,Y)$ para $g \in C^\infty(M)$. Usando la propiedad $[X,gY] = X(g)Y + g[X,Y]$ del corchete de Lie se obtiene que

$$\begin{aligned} N_J(X,gY) - gN_J(X,Y) &= (JX)(f)JY - J((JX)(f)Y) - J(X(f)JY) - X(f)Y \\ &= (JX)(f)JY - (JX)(f)JY - X(f)J^2Y - X(f)Y \\ &= X(f)Y - X(f)Y = 0. \end{aligned}$$

□

Dado un sistema coordenado $(U,(x_1,...,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{2n}))$ de la variedad M, si escribimos

$$J\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{h=1}^{2n} J_i^h \frac{\partial}{\partial x_h} \tag{2.2.1}$$

y

$$N_J(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k}) = \sum_{i=1}^{2n} N_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.2.2}$$

no es difícil de verificar que

$$N_{jk}^i = \sum_{h=1} J_j^h \partial_h J_k^i - J_k^h \partial_h J_j^i - J_h^i \partial_j J_k^h + J_h^i \partial_k J_j^h, \tag{2.2.3}$$

donde $\partial_h = \dfrac{\partial}{\partial x_h}$.

El siguiente teorema muestra que la condición $N_J = 0$ es necesaria y suficiente para que una estructura casi compleja J en una variedad sea una estructura compleja. El hecho de que esta condición es necesaria es fácil y vamos a incluir una demostración para el mismo. La recíproca es mucho más compleja y es el contenido del Teorema de Newlander y Nirenberg, una prueba de este teorema está en el apéndice de [KobNomII].

Teorema 2.2.6. *Una estructura casi compleja J en una variedad diferenciable M es compleja si y solo si es integrable, es decir $N_J = 0$.*

Demostración. Sólo demostraremos que en una variedad compleja $N_J = 0$. Recordar que para cada $p \in M$, T_pM tiene estructura de espacio vectorial complejo. Consideremos un sistema de coordenado $(z_1,\ldots,z_n)$ de M como variedad compleja. Escribiendo $z_i = x_i + iy_i$ obtenemos un sistema coordenado $(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ de M como variedad diferenciable y

$$\begin{aligned} J\frac{\partial}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial y_i} \\ J\frac{\partial}{\partial y_i} &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Resulta entonces que los coeficientes J_i^h en la expresión (2.2.1) son funciones constantes, y por lo tanto mirando la expresión de N_{jk}^i en (2.2.3) obtenemos que $N_{jk}^i = 0$. Luego $N_J = 0$. □

Sea J una estructura casi compleja en una variedad diferenciable M. Luego cada espacio tangente T_pM es un espacio vectorial real con estructura compleja, por lo tanto su complexificación, de ahora en más denotada por $T_pM^{\mathbb{C}}$, tiene la descomposición y las propiedades descritas en la Proposición 2.1.3. Llamamos a cada elemento en $T_pM^{\mathbb{C}}$ un vector tangente complejo. Un tal vector es de tipo (1,0) si es un autovector de J_p de autovalor i, y es de tipo (0,1) si es autovector de J_p de autovalor $-i$. De la Proposición 2.1.3 resulta:

Lema 2.2.7. *Un vector tangente complejo $z \in T_pM^{\mathbb{C}}$ es de tipo $(1,0)$ (resp. de tipo $(0,1)$) si y solo si $z = x - iJx$ (resp. $z = x + iJx$) para algún vector tangente real x.*

También se puede considerar un fibrado $T_M^{\mathbb{C}}$ sobre M de modo que la fibra en cada punto $p \in M$ es $T_pM^{\mathbb{C}}$. A una sección de este fibrado la llamamos campo complejo. Todo campo complejo Z puede escribirse en la forma $Z = X + iY$ con $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. El corchete de campos complejos $Z_1 = X_1 + iY_1$ y $Z_2 = X_2 + iY_2$ es

$$[Z_1, Z_2] = ([X_1, X_2] - [Y_1, Y_2]) + i([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1]).$$

Diremos que un campo complejo Z_i es de tipo (1,0) (resp. de tipo (0,1)) si $(Z_i)_p$ es un vector tangente complejo de tipo (1,0) (resp. de tipo (0,1)). Resulta entonces que los campos complejos de tipo (1,0) son de la forma $Z = X - iJX$, para $X \in \mathfrak{X}(M)$ y los de tipo (0,1) son de la forma $Z = X + iJX$, para algún $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Teorema 2.2.8. *Sea M una variedad con estructura casi compleja J. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *El corchete de campos complejos de tipo $(1,0)$ es también de tipo $(1,0)$.*
2. *El corchete de campos complejos de tipo $(0,1)$ es también de tipo $(0,1)$.*
3. *$N_J = 0$.*

Demostración. Dados dos campos de tipo (1,0), digamos $Z = X - iJX$ y $W = Y - iJY$, el corchete es

$$[Z, W] = [X, Y] - [JX, JY] - i([X, JY] + [JX, Y]).$$

Este es un campo complejo de tipo (1,0) si y sólo si $J([X, Y] - [JX, JY]) = [X, JY] + [JX, Y]$, o equivalentemente, $[X, Y] - [JX, JY] = -J([X, JY] + [JX, Y])$, es decir, $N_J(X, Y) = 0$. Esto prueba que 1 y 3 son equivalentes. La equivalencia de 2 y 3 es similar. □

2.3. Variedades casi hermitianas

Definición 2.3.1. Una métrica hermitiana en una variedad casi compleja (M, J) es una métrica riemanniana g tal que

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

En tal caso decimos que (M, J, g) es un variedad casi hermitiana. Si J es además una estructura compleja en M, decimos que (M, J, g) es una variedad hermitiana.

Notar que $g(JX,Y) = g(JJX,JY) = -g(X,JY)$ o sea J es un tensor tipo $(1,1)$ antisimétrico respecto la métrica. La **2-forma fundamental** o **forma de Kähler** de una variedad casi hermitiana (M,J,g) se define como

$$\omega(X,Y) = g(JX,Y), \ \forall \ X,Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Notar que ω es invariante por J. En efecto, $\omega(JX,JY) = g(J^2X,JY) = -g(X,JY) = g(JX,Y) = \omega(X,Y)$.

Conexiones

Vamos a repasar algunos conceptos relacionados con conexiones. Una **conexión** en una variedad diferenciable M es un mapa bilineal

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X,Y) &\mapsto \nabla_X Y, \end{aligned}$$

tal que $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ y $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$. Se dice que la conexión es **libre de torsión** si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Dado un tensor J de tipo (1,1) en M y un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos $\nabla_X J$ como el tensor de tipo (1,1) dado por

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J\nabla_X Y, \ \ Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Notar que $\nabla_X J$ es realmente un tensor pues

$$(\nabla_X J)(fY) = \nabla_X(J(fY)) - J\nabla_X(fY) = \nabla_X(fJY) - J(X(f)Y + f\nabla_X Y) \tag{2.3.1}$$
$$= X(f)JY + f\nabla_X JY - X(f)JY - fJ\nabla_X Y = f(\nabla_X J)Y. \tag{2.3.2}$$

Como consecuencia de esto resulta que la aplicación $(X,Y) \mapsto (\nabla_X J)Y$ es un tensor de tipo $(1,2)$. A $\nabla_X J$ se lo llama derivada covariante de J respecto de X (y de la conexión).

De manera similar, dada una 2-forma K en M, la derivada covariante respecto de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ (y respecto de la conexión afín) es la aplicación $\nabla_X K : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$ definida como

$$\nabla_X K(Y,Z) = X(K(Y,Z)) - K(\nabla_X Y, Z) - K(Y, \nabla_X Z).$$

No es díficil ver que $\nabla_X K$ es antisimétrica y $C^\infty(M)$-bilineal, es decir, $\nabla_X K$ es una 2-forma.

Dada una variedad riemanniana (M,g), existe una única conexión afín ∇ que es libre de torsión y satisface $\nabla_X g = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, es decir,

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

A esta conexión se la conoce como la **conexión de Levi-Civita.** Además esta conexión satisface la llamada **"fórmula de Koszul"** $\forall\ X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = {} & X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) \\ & - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y) \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Lema 2.3.2. *Si ∇ es una conexión libre de torsión en una variedad casi compleja (M, J), $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene:*

$$N(X, Y) = -J(\nabla_X J)Y + J(\nabla_Y J)X - (\nabla_{JY} J)X + (\nabla_{JX} J)Y.$$

Demostración. Notar que $J(\nabla_X J)Y = J\nabla_X JY + \nabla_X Y$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y] \\ &= \nabla_{JX} JY - \nabla_{JY} JX - J(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y JX) - J(\nabla_X JY - \nabla_{JY} X) - \nabla_X Y + \nabla_Y X \\ &= -(\nabla_X Y + J\nabla_X JY) + J\nabla_Y JX + \nabla_Y X + (J\nabla_{JY} X - \nabla_{JY} JX) + \\ &\quad + (\nabla_{JX} JY - J\nabla_{JX} Y) \\ &= -J(\nabla_X J)Y + J(\nabla_Y J)X - (\nabla_{JY} J)X + (\nabla_{JX} J)Y. \end{aligned}$$

□

Resumimos en la siguiente proposición identidades importantes para una variedad casi hermitiana.

Proposición 2.3.3. *Sea (M, J, g) una variedad casi hermitiana, sea ω la forma fundamental y sea ∇ la conexión de Levi-Civita. Entonces se satisface lo siguiente.*

1. $\nabla_X \omega(Y, Z) = g((\nabla_X J)Y, Z)$*, para todos* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*.*
2. $(\nabla_X J)$ *es antisimétrico para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$*.*
3. $J(\nabla_X J)JY = (\nabla_X J)Y$*, o equivalentemente,* $(\nabla_X J)J = -(J\nabla_X J)$*, para todos* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*.*

Demostración. En el primer punto:

$$\begin{aligned} \nabla_X \omega(Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) - \omega(Y, \nabla_X Z) - \omega(\nabla_X Y, Z) \\ &= X(g(JY, Z)) - g(JY, \nabla_X Z) - g(J\nabla_X Y, Z) \\ &= g(\nabla_X JY, Z) + g(JY, \nabla_X Z) - g(JY, \nabla_X Z) - g(J\nabla_X Y, Z) \\ &= g(\nabla_X JY, Z) - g(J\nabla_X Y, Z) \\ &= g((\nabla_X J)Y, Z). \end{aligned}$$

Para el punto 2,

$$\begin{aligned} g((\nabla_X J)Y, Z) &= g(\nabla_X JY, Z) - g(J\nabla_X Y, Z) = g(\nabla_X JY, Z) + g(\nabla_X Y, JZ) \\ &= X(g(JY, Z)) - g(JY, \nabla_X Z) + X(g(Y, JZ)) - g(Y, \nabla_X JZ) \\ &= X(g(JY, Z)) + g(Y, J\nabla_X Z) - X(g(JY, Z)) - g(Y, \nabla_X JZ) \\ &= g(Y, J\nabla_X Z - \nabla_X JZ) = -g(Y, (\nabla_X J)Z). \end{aligned}$$

Para el punto 3,

$$\begin{aligned} g(J(\nabla_X J)JY, Z) &= -g((\nabla_X J)JY, JZ) = -g(\nabla_X J^2 Y, JZ) + g(J\nabla_X JY, JZ) \\ &= g(\nabla_X Y, JZ) - g(\nabla_X JY, J^2 Z) = -g(J\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X JY, Z) \\ &= g((\nabla_X J)Y, Z). \end{aligned}$$

□

Lema 2.3.4. *Sea (M, J, g) una variedad casi hermitiana y sea $N = N_J$ el tensor de Nijenhuis. Entonces para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se verifica lo siguiente.*

1. $N(X, JX) = 0$
2. $N(X, Y) + N(Y, X) = 0$
3. $N(X, Y) + N(JX, JY) = 0$
4. $g(N(X, JY), JZ) - g(N(X, Y), JZ) = 0$

Demostración. Para 1. usando el Lema 2.3.2 y la Proposición 2.3.3, 3, se tiene

$$\begin{aligned} N(X, JX) &= -J(\nabla_X J)JX + J(\nabla_{JX} J)X - (\nabla_{J^2X} J)X + (\nabla_{JX} J)JX \\ &= -(\nabla_X J)X + J(\nabla_{JX} J)X + (\nabla_X J)X - J(\nabla_{JX} J)X = 0. \end{aligned}$$

La segunda afirmación es inmediato de la fórmula para $N(X, Y)$ dada en el Lema 2.3.2. En 3. usamos nuevamente el Lema 2.3.2 y la Proposición 2.3.3,3, para escribir

$$\begin{aligned} N(JX, JY) &= -J(\nabla_{JX} J)JY + J(\nabla_{JY} J)JX - (\nabla_{J^2Y} J)JX + (\nabla_{J^2X} J)JY \\ &= -(\nabla_{JX} J)Y + (\nabla_{JY} J)X - J(\nabla_Y J)X + J(\nabla_X J)Y = -N(X, Y). \end{aligned}$$

En la última afirmación, del Lema 2.3.2 y el ítem 3. de la Proposición 2.3.3 resulta

$$\begin{aligned} J(N(X, JY)) &= J(-J(\nabla_X J)JY + J(\nabla_{JY} J)X + (\nabla_Y J)X + (\nabla_{JX} J)JY) \\ &= -J((\nabla_X J)Y + J(\nabla_{JY} J)X + (\nabla_Y J)X - J(\nabla_{JX} J)Y) \\ &= -J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JY} J)X + J(\nabla_Y J)X + (\nabla_{JX} J)Y. \end{aligned}$$

Luego, usando el segundo punto de la Proposición 2.3.3, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} g(N(X, JY), JZ)) &= g(-(\nabla_X J)Y + J(\nabla_{JY} J)X + (\nabla_Y J)X - J(\nabla_{JX} J)Y, Z) \\ &= g(N(X, Y), JZ). \end{aligned}$$

□

Derivada exterior

Recordemos que la derivada exterior de una 2-forma ω en una variedad M es la 3-forma $d\omega$ definida como

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) + Y(\omega(Z, X)) + Z(\omega(X, Y)) \\ &\quad - \omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y). \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Proposición 2.3.5. *Sea (M, g, J) como antes y ω la 2-forma de Kähler. Entonces*

$$d\omega(X, Y, Z) = \nabla_X \omega(Y, Z) + \nabla_Y \omega(Z, X) + \nabla_Z \omega(X, Y).$$

Demostración. Por un lado obtenemos

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= X(g(JY, Z)) + Y(g(JZ, X)) + Z(g(JX, Y)) + \\ &\quad + g([X, Y], JZ) + g([Y, Z], JX) + g([Z, X], JY) \\ &= \sum_{\text{cíclica}} X(g(JY, Z)) + g(\nabla_X Y, JZ) - g(\nabla_Y X, JZ). \end{aligned}$$

Por otro lado, el término de la derecha resulta

$$\sum_{\text{cíclica}} \nabla_X\omega(Y,Z) = \sum_{\text{cíclica}} X(g(JY,Z)) + g(\nabla_X Y, JZ) - g(\nabla_Y X, JZ).$$

La igualdad de los dos miembros resulta clara. □

Proposición 2.3.6. *Sea (M,J,g) una variedad casi hermitiana, sea ω la 2-forma de Kähler y sea ∇ la conexión de Levi-Civita. Entonces para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ se verifica:*

$$2g\left((\nabla_X J)Y, Z\right) = -d\omega(X,JY,JZ) + d\omega(X,Y,Z) + g(N(Y,Z),JX).$$

Demostración. De la definición ω y de su derivada exterior obtenemos

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y,Z) &= X(g(JY,Z)) + Y(g(JZ,X)) + Z(g(JX,Y)) + \\ &\quad + g([X,Y],JZ) + g([Y,Z],JX) + g([Z,X],JY) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d\omega(X,JY,JZ) &= -X(g(Y,JZ)) - JY(g(J^2Z,X)) + JZ(g(JX,JY)) - \\ &\quad - g([X,JY],Z) + g([JY,JZ],JX) - g([JZ,X],Y) \\ &= -X(g(Y,JZ)) + JY(g(Z,X)) + JZ(g(JX,JY)) - \\ &\quad - g([X,JY],Z) + g([JY,JZ],JX) - g([JZ,X],Y). \end{aligned}$$

Usando la fórmula de Koszul (2.3.3) obtenemos

$$\begin{aligned} 2g\left((\nabla_X J)Y, Z\right) &= 2[g(\nabla_X JY,Z) - g(J\nabla_X Y,Z)] = 2[g(\nabla_X JY,Z) + g(\nabla_X Y,JZ)] \\ &= X(g(JY,Z)) + JY(g(X,Z)) - Z(g(JY,X)) \\ &\quad + g([X,JY],Z) - g([JY,Z],X) + g([Z,X],JY) \\ &\quad + X(g(Y,JZ)) + Y(g(JZ,X)) - JZ(g(Y,X)) \\ &\quad + g([X,Y],JZ) - g([Y,JZ],X) + g([JZ,X],Y) \\ &= d\omega(X,Y,Z) - d\omega(X,JY,JZ) - g([Y,Z],JX) - \\ &\quad - g([JY,Z],X) + g([JY,JZ],JX) - g([Y,JZ],X) \\ &= d\omega(X,Y,Z) - d\omega(X,JY,JZ) + g(N(Y,Z),JX). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.3.7. *Sea (M,J,g) una variedad casi hermitiana, ∇ su conexión de Levi-Civita y N_J el tensor de Nijenhuis. Entonces $N_J = 0$ si y solo si $(\nabla_{JX}J)Y = J(\nabla_X J)Y$, $\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demostración. Por el Lema 2.3.2, si $(\nabla_{JX}J)Y = J(\nabla_X J)Y$, entonces $N(X,Y) = 0$. Esto prueba una implicación. Para probar la recíproca llamamos $A(X,Y,Z) = g((\nabla_{JX}J)Y - J(\nabla_X J)Y, Z)$. Si $N = 0$, del Lema 2.3.2 se sigue que $A(X,Y,Z) = A(Y,X,Z)$, es decir, A es símetrica en las dos primeras variables. Veremos ahora que

A es antisimétrica en las dos últimas variables usando las propiedades de la Proposición 2.3.3:

$$\begin{aligned} A(X,Y,Z) &= g((\nabla_{JX}J)Y,Z) - g(J(\nabla_X J)Y,Z) \\ &= -g(Y,(\nabla_{JX}J)Z) - g(Y,(\nabla_X J)JZ) \\ &= -g(Y,(\nabla_{JX}J)Z) + g(Y,J(\nabla_X J)Z) \\ &= -A(X,Z,Y). \end{aligned}$$

Concluímos que $A(X,Y,Z) = A(Y,X,Z) = -A(Y,Z,X) = -A(Z,Y,X) = A(Z,X,Y) = A(X,Z,Y) = -A(X,Y,Z)$, es decir, $A(X,Y,Z) = 0$ para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$. Por lo tanto, $(\nabla_{JX}J)Y = J(\nabla_X J)Y$, como queríamos demostrar. □

2.4. Variedades Kähler

Teorema 2.4.1. *Sea (M,J,g) una variedad casi hermitiana, ∇ la conexión Levi-Civita y N_J el tensor de Nijenhuis. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\nabla J = 0$, *es decir* $\nabla_X J = J\nabla_X$ *para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$.
2. $\nabla\omega = 0$, *es decir* $X(\omega(Y,Z)) = \omega(\nabla_X Y,Z) + \omega(Y,\nabla_X Z)$.
3. $d\omega = 0$ *y* $N_J = 0$.

Demostración. De la Proposición 2.3.3 se sigue que $\nabla_X\omega(Y,Z) = g((\nabla_X J)Y,Z)$, por lo tanto las primeras dos afirmaciones son equivalentes.

El Lema 2.3.2 implica que si $\nabla J = 0$ entonces $N = 0$, y luego la Proposición 2.3.5 muestra que si $\nabla\omega = 0$ entonces $d\omega = 0$. Recíprocamente si $d\omega = 0$ y $N = 0$, por la Proposición 2.3.6 se obtiene que $\nabla J = 0$. □

Definición 2.4.2. Una variedad casi hermitiana (M,J,g) es Kähler si cualquiera de las afirmaciones de la Proposición 2.4.1 se verifican.

Si $\nabla J = 0$ decimos que J es **paralela** respecto de la conexión Levi-Civita.

Fijemos una variedad riemanniana (M,g) con conexión de Levi-Civita ∇. Recordaremos los conceptos de tensor de curvatura, curvatura de Ricci y curvatura escalar. Más adelante caracterizaremos su comportamiento en variedades Kähler.

Definición 2.4.3. El tensor curvatura de curvatura en (M,g) es el tensor de tipo $(1,3)$ dado por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \quad X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.4.1}$$

También denotamos $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$.

Es bien conocido que para $p \in M$, el vector $(R(X,Y)Z)_p$ depende solo de los valores de X, Y y Z en p. Por ello, dados vectores $x,y,z \in T_pM$, tiene sentido definir $R(x,y)z$ como $(R(X,Y)Z)_p$ donde $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ satisfacen $X_p = x$, $Y_p = y$ y $Z_p = z$. De manera similar podemos definir $R(x,y,z,w)$ para vectores $x,y,z,w \in T_pM$.

Enunciamos las siguientes propiedades. Para una demostración detallada citamos a [Mor07] y a [Lee97].

Proposición 2.4.4. 1. $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$.

2. $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$.
3. $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$.
4. $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$.
5. $(\nabla_X R)(Y, Z, W, T) + (\nabla_Y R)(Z, X, W, T) + (\nabla_Z R)(X, Y, W, T) = 0$.

Las primeras dos ecuaciones nos dicen que es antisimétrico respecto de las dos primeras variables y las dos últimas. La tercera cambia el orden de las dos primeras y dos últimas. La cuarta y la quinta se conocen como primera y segunda identidad de Bianchi.

Definición 2.4.5. El **tensor de Ricci** Rc es un tensor de tipo $(0, 2)$ tal que para cada $p \in M$, $(\mathrm{Rc})_p$ es un mapa bilineal simétrico tal que

$$(\mathrm{Rc}(x, y))_p = \sum_{i=1}^{n} g(R(x_i, x)y, x_i) \tag{2.4.2}$$

con $\{x_i\}$ base ortonormal en T_pM.

El **operador de Ricci** Ric es un mapa lineal simétrico tal que $\forall p \in M$

$$(\mathrm{Rc})_p(x, y) = g(\mathrm{Ric}\, x, y)\ \forall x, y \in T_pM.$$

La curvatura escalar es el mapa $S : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$S(p) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Ric})_p. \tag{2.4.3}$$

Proposición 2.4.6. *En una variedad de Kähler (M, J, g), se tienen las siguientes identidades:*

- $R(X, Y)JZ = JR(X, Y)Z$,
- $R(X, Y, JZ, JW) = R(X, Y, Z, W) = R(JX, JY, Z, W)$,
- $\mathrm{Rc}(JX, JY) = \mathrm{Rc}(X, Y)$,

válidas para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. Por definición de variedad de Kähler, $J\nabla_X = \nabla_X J$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, luego el primer ítem es claro. Usando este mismo ítem obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(X, Y, JZ, JW) &= g(\mathrm{R}(X, Y)JZ, JW) = g(J\,\mathrm{R}(X, Y)Z, JW) = g(\mathrm{R}(X, Y)Z, W) \\ &= \mathrm{R}(X, Y, Z, W), \end{aligned}$$

lo cual prueba la primera igualdad del segundo ítem. De esta identidad y del ítem 3 de la Proposición 2.4.4, se deduce

$$\mathrm{R}(JX, JY, Z, W) = \mathrm{R}(Z, W, JX, JY) = R(Z, W, X, Y) = R(X, Y, Z, W).$$

Para la última identidad observemos que de las identidades anteriores se obtiene

$$R(Z, JX, JY, Z) = R(J^2Z, JX, JY, J^2Z)) = R(JZ, X, Y, JZ).$$

Si $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ es una base ortonormal de T_pM, también lo es $\{Je_1, \ldots, Je_{2n}\}$, y por lo tanto la identidad es una consecuencia de la igualdad anterior y (2.4.2). $\square$

Proposición 2.4.7. *El tensor de Ricci en una variedad Kähler (M, g, J) satisface*

$$\mathrm{Rc}(x, y) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}(R(x, Jy) \circ J),\ \forall x, y \in T_pM,\ p \in M. \tag{2.4.4}$$

Demostración. Fijamos una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ para T_pM. Usamos en el siguiente razonamiento la identidad (2.4.2), las identidades de la Proposición 2.4.4 y de la Proposición 2.4.6, y el hecho de que $\{Je_1, \ldots, J_{e_{2n}}\}$ es también ortonormal:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rc}(x, y) &= \sum_{i=1}^{2n} R(e_i, x, y, e_i) = \sum_{i=1}^{2n} R(e_i, x, Jy, Je_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{2n} R(x, Jy, e_i, Je_i) - \sum_{i=1}^{2n} R(Jy, e_i, x, Je_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{2n} R(x, Jy, Je_i, J^2e_i) - \sum_{i=1}^{2n} R(J^2y, Je_i, x, Je_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} R(x, Jy, Je_i, e_i) + \sum_{i=1}^{2n} R(y, Je_i, x, Je_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} R(x, Jy, Je_i, e_i) - \sum_{i=1}^{2n} R(Je_i, y, x, Je_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} R(x, Jy, Je_i, e_i) - \mathrm{Rc}(y, x) \\
&= \mathrm{Tr}(R(x, Jy) \circ J) - \mathrm{Rc}(x, y).
\end{aligned}$$

□

2.5. Variedades nearly Kähler

Definición 2.5.1. Una variedad nearly Kähler es una variedad casi hermitiana (M, J, g) tal que

$$(\nabla_X J)X = 0,\ \forall\ X \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.5.1}$$

Una definición equivalente está dada en el siguiente lema

Lema 2.5.2. *Una variedad casi hermitiana (M, J, g) es nearly Kähler si y solo si*

$$(\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X = 0,\ \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.5.2}$$

Demostración. Si (M, J, g) es nearly Kähler entonces

$$\begin{aligned}
0 = (\nabla_{X+Y} J)(X + Y) &= (\nabla_X J)X + (\nabla_Y J)Y + (\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X \\
&= (\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X.
\end{aligned}$$

La recíproca es inmediata. □

Notar que si (M, J, g) es variedad Kähler, entonces es una variedad nearly Kähler. Decimos que (M, J, g) es una variedad estrictamente nearly Kähler si es nearly Kähler y si $\nabla_X J \neq 0$ para algún $X \in \mathfrak{X}(M)$. El estudio de variedades estrictamente nearly Kähler sigue teniendo incógnitas y preguntas sin resolver. Son pocos los ejemplos que se conocen de variedades estrictamente nearly Kähler, pero sí existen criterios que permiten caracterizarlas. Demostraremos y enunciaremos teoremas importantes sobre esto.

Lema 2.5.3. *Si (M, J, g) es nearly Kähler, entonces se satisface*

$$(\nabla_{JX}J)Y = -J(\nabla_X J)Y, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.5.3}$$

Demostración. Usando la Proposición 2.3.3 y la definiciones de variedad nearly Kähler obtenemos:

$$(\nabla_{JX}J)Y = -(\nabla_Y J)JX = J(\nabla_Y J)X = -J(\nabla_X J)Y.$$

□

Proposición 2.5.4. *Si (M, J, g) es nearly Kähler, entonces*

$$N(X, Y) = 4J(\nabla_Y J)X, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.5.4}$$

Demostración. Usaremos la Proposición 2.3.3, 2. Del Lema 2.3.2 y de la definición de variedad nearly Kähler resulta:

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= -J(\nabla_X J)Y + J(\nabla_Y J)X - (\nabla_{JY}J)X + (\nabla_{JX}J)Y \\ &= J(\nabla_Y J)X + J(\nabla_Y J)X + (\nabla_X J)JY - (\nabla_Y J)JX \\ &= J(\nabla_Y J)X + J(\nabla_Y J)X - J(\nabla_X J)Y + J(\nabla_Y J)X \\ &= J(\nabla_Y J)X + J(\nabla_Y J)X + J(\nabla_Y J)X + J(\nabla_Y J)X. \end{aligned}$$

□

Como consecuencia resulta el siguiente corolario:

Corolario 2.5.5. *Si (M, J, g) es una variedad nearly Kähler y además J es integrable, entonces (M, J, g) es Kähler.*

Teorema 2.5.6. *Si (M, J, g) es nearly Kähler de dimensión cuatro, entonces es Kähler.*

Demostración. Fijemos $p \in M$. El objetivo es probar que para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos que $(\nabla_X J)_p Y_p = 0$, es decir, $(\nabla_X JY)_p = J_p(\nabla_X Y)_p$.

Dado que J_p es una estructura compleja en T_pM y g_p es un producto interno hermitiano respecto de J_p, por el Lema 2.1.5 existe una base ortonormal de T_pM de la forma $\{e_1, e_2, J_p e_1, J_p e_2\}$.

Fijemos campos X_1, X_2 en M tales que $(X_1)_p = e_1$, $(X_2)_p = e_2$. Podemos elegir los campos X_1, X_2 de modo que $\{(X_1)_q, (X_2)_q\}$ es un conjunto ortonormal y tal que $\{(X_1)_q, (X_2)_q, (JX_1)_q, (JX_2)_q\}$ es una base de T_qM para todo punto q en un entorno U de p.

Para probar que $(\nabla_X J)_p = 0$, basta probar que $(\nabla_{X_i} J)_p = 0$ y que $(\nabla_{JX_i} J)_p = 0$, para $i = 1, 2$. Esto es pues $\nabla_X J$ es $C^\infty(M)$-lineal en X. Por el Lema 2.5.3, en realidad basta probar que $(\nabla_{X_1} J)_p = (\nabla_{X_2} J)_p = 0$. Dada la simetría, es suficiente ver que $(\nabla_{X_1} J)_p = 0$.

Notemos ahora que $(\nabla_{X_1} J)Y$ es $C^\infty(M)$-lineal en Y pues $(\nabla_{X_1} J)Y = -(\nabla_Y J)X_1$, por ser la variedad nearly Kähler. Luego para probar que $(\nabla_{X_1} Y)_p = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, es suficiente hacerlo con $Y = X_1, X_2, JX_1, JX_2$.

Sabemos que $(\nabla_{X_1} J)X_1 = 0$ y además $(\nabla_{X_1} J)JX_1 = -J(\nabla_{X_1} J)X_1 = 0$. De manera similar, $(\nabla_{X_1} J)JX_2 = -J(\nabla_{X_1} J)X_2$. Luego, sólo resta ver que $((\nabla_{X_1} J)X_2)_p =$

0. Para ello mostraremos que $g_p(\nabla_{X_1}J)X_2, Y) = 0$ para $Y = X_1, X_2, JX_1, JX_2$. Usaremos el hecho de que $\nabla_X J$ es antisimétrico y que anticonmuta con J (Proposición 2.3.3).

$$\begin{aligned}
g((\nabla_{X_1}J)X_2, X_1) &= -g(X_2, (\nabla_{X_1}J)X_1) = 0. \\
g((\nabla_{X_1}J)X_2, X_2) &= -g(X_2, (\nabla_{X_1}J)X_2) \Longrightarrow g((\nabla_{X_1}J)X_2, X_2) = 0. \\
g((\nabla_{X_1}J)X_2, JX_1) &= -g(X_2, (\nabla_{X_1}J)JX_1) = 0 \\
g((\nabla_{X_1}J)X_2, JX_2) &= -g(J(\nabla_{X_1}J)X_2, X_2) = g((\nabla_{X_1}J)JX_2, X_2) \\
&= -g((\nabla_{X_1}J)X_2, JX_2) \Longrightarrow g((\nabla_{X_1}J)X_2, JX_2) = 0.
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Definición 2.5.7. Una métrica riemanniana g en una variedad M es una **métrica de Einstein** si su tensor de Ricci Rc es de la forma $\mathrm{Rc} = \lambda g$ para alguna función $\lambda \in C^\infty(M)$. En tal caso decimos que (M, g) es una variedad de Einstein. Si $\dim M \geq 3$ resulta que λ es necesariamente constante.

Teorema 2.5.8 ([Gray76])**.** *Si (M, g, J) es una variedad nearly Kähler estricta de dimensión seis, entonces (M, g) es un variedad de Einstein.*

2.6. Las dieciséis clases de variedades casi hermitianas

En 1980 los matemáticos Alfred Gray y Luis Hervella publican el trabajo [GH80] en el cual sistematizan de forma general las variedades casi hermitianas identificando las variedades Kähler, nearly Kähler, almost Kähler, quasi Kähler, entre otras ya conocidas, como parte de un espacio W. Bajo la representación del grupo unitario $U(n)$ en W, se conocen cuatro subespacios invariantes e irreducibles de tal forma que W se escribe como suma directa de estas componentes. De esta manera resultan 16 subespacios invariantes y cada subespacio corresponde a una clase de variedad casi hermitiana.

Dedicaremos en esta sección a enunciar y demostrar algunas partes de este resultado sobresaliente en la Geometría riemanniana. Más adelante daremos la interpretación de estos resultados a un caso particular: las variedades bandera, haciendo referencia a [Cass03]. Esto nos servirá para identificar las estructuras J asociadas a tensores H Killing-Yano, los cuales son el objeto principal de estudio en esta tesis.

2.6.1. Tensores de tipo $(0, 3)$ particulares

Sea (M, g, J) una variedad casi hermitiana. Sea ∇ la conexión de Levi-Civita y sea ω la forma de Kähler. La aplicación $(X, Y, Z) \mapsto \nabla_X\omega(Y, Z)$ es un tensor de tipo $(0, 3)$ que satisface:

1. $\nabla_X(Z, Y) = -\nabla_X\omega(Y, Z)$.
2. $\nabla_X\omega(JY, JZ) = -\nabla_X\omega(Y, Z)$.

Notar que el ítem 1. es inmediato y el ítem 2. resulta del ítem 3. la Proposición 2.3.3. Estudiaremos los tensores de tipo $(0, 3)$ que satisfacen las condiciones mencionadas.

Analizamos primeros la situación en un punto. Sea V un espacio vectorial real de dimensión par, digamos $2n$, sea J una estructura compleja en V, y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno hermitiano, es decir, tal que $\langle Jx, Jy \rangle = \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in V$.

Consideremos el espacio $V^* \otimes V^* \otimes V^*$, el cual se identifica con el espacio de funciones multilineales $V \times V \times V \to \mathbb{R}$. El espacio a considerar es

$$W = \{\alpha \in V^* \otimes V^* \otimes V^* : \ \alpha(x,y,z) = -\alpha(x,z,y) = -\alpha(x,Jy,Jz), \ \ \forall\, x,y,z \in V\} \tag{2.6.1}$$

Sea $\{e_1, ..., e_{2n}\}$ una base ortonormal de V (respecto de $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Se define para cada $\alpha \in W$ la siguiente funcional lineal:

$$\overline{\alpha}(z) = \sum_{i=1}^{2n} \alpha(e_i, e_i, z), \ \forall\, z \in V \tag{2.6.2}$$

Esta funcional es independiente de la base ortonormal elegida. En efecto, sea $\alpha_z : V \times V \to \mathbb{R}$ la función bilineal dada por $\alpha_z(x,y) = \alpha(x,y,z)$, y sea $T_z : V \to V$ el único operador lineal tal que $\alpha_z(x,y) = \langle T_z x, y \rangle$. Entonces $\overline{\alpha}(z) = \mathrm{Tr}(T_z)$.

Fijemos nuevamente una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ en V. Se define una forma bilineal en W de la siguiente forma:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i,j,k=1}^{2n} \alpha(e_i, e_j, e_k)\beta(e_i, e_j, e_k) \tag{2.6.3}$$

No es difícil ver que este es un producto interno que no depende de la base ortonormal elegida.

Definimos ahora cuatro subespacios de W:

$$W_1 = \{\alpha \in W : \ \alpha(x,x,y) = 0, \ \forall\, x,y \in V\}.$$
$$W_2 = \{\alpha \in W : \ \alpha(x,y,z) + \alpha(y,z,x) + \alpha(z,x,y) = 0, \ \forall\, x,y \in V\}.$$
$$W_3 = \{\alpha \in W : \alpha(x,y,z) - \alpha(Jx,Jy,z) = \overline{\alpha}(z) = 0, \ \forall\, x,y,z \ \in V\}.$$

$$\begin{aligned} W_4 = \{\alpha \in W : \alpha(x,y,z) &= -\frac{1}{2(n-1)} \left(\langle x,y \rangle \overline{\alpha}(z) - \langle x,z \rangle \overline{\alpha}(y) - \right. \\ &\left. -\langle x,Jy \rangle \overline{\alpha}(Jz) + \langle x,Jz \rangle \overline{\alpha}(Jy) \right), \ \ \forall x,y,z \in V \right\}. \end{aligned}$$

Consideremos ahora el grupo

$$U(V) = \{T \in GL(V) : \ TJ = JT, \ \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle, \ \forall x,y \in V\}.$$

Si fijamos una base ortonormal de la forma $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, Je_1, \ldots, Je_n\}$ y escribimos a los elementos de $U(V)$ en término de sus matrices en la base, entonces $U(V)$ se identifica con el grupo unitario $U(n)$. En efecto, J se escribe como

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

y los elementos de $U(V)$ son las matrices ortogonales de la forma

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$$

y a una tal matriz se le asocia la matriz $C \in U(n)$ tal que $U_{rs} = A_{rs} + iB_{rs}$.

Consideramos ahora la acción inducida de $U(V)$ en $V^* \otimes V^* \otimes V^*$, es decir, para $T \in U(V)$ y αW definimos $T \cdot \alpha$ como

$$(T \cdot \alpha)(x, y, z) := \alpha(T^{-1}x, T^{-1}y, T^{-1}z).$$

Notemos que W es invariante por la acción de $U(V)$. En efecto, si $\alpha \in W$, entonces

$$(T \cdot \alpha)(x, z, y) = \alpha(T^{-1}x, T^{-1}z, T^{-1}y) = -\alpha(T^{-1}x, T^{-1}y, T^{-1}z) = -(T \cdot \alpha)(x, y, z),$$

$$\begin{aligned}(T \cdot \alpha)(x, Jy, Jz) = \alpha(T^{-1}x, T^{-1}Jy, T^{-1}Jz) &= \alpha(T^{-1}z, JT^{-1}y, JT^{-1}z) \\ = -\alpha(T^{-1}x, T^{-1}y, T^{-1}z) &= -(T \cdot \alpha)(x, y, z).\end{aligned}$$

Teorema 2.6.1. *[GH80, Theorem 2.1] Los subespacios W_i son ortogonales entre sí e invariantes bajo la representación inducida de $U(V)$. Más aún*

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4 \tag{2.6.4}$$

y la acción de $U(V)$ en W_i es irreducible. Para $n = 2$, se tiene que $W_3 = W_1 = 0$, y por lo tanto $W = W_2 \oplus W_4$.

No demostraremos todo el teorema, los detalles están en [GH80], solo mostraremos que los subespacios W_i son $U(n)$-invariantes para $i = 1, \dots, 4$ y que cuando $\dim V = 4$, $W_3 = W_1 = 0$.

Lema 2.6.2. *La representación de $U(V)$ en W es ortogonal y deja invariantes a las subespacios W_1, W_2, W_3, W_4.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in W$ y sea $T \in U(V)$. Entonces para una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ de V tenemos

$$\langle T \cdot \alpha, T \cdot \beta \rangle = \sum_{i,j,k=1}^{2n} \alpha(T^{-1}e_i, T^{-1}e_j, T^{-1}e_k)\beta(T^{-1}e_i, T^{-1}e_j, T^{-1}e_k) = \langle \alpha, \beta \rangle,$$

donde la última igualdad es porque $\{T^{-1}e_1, \dots, T^{-1}e_{2n}\}$ es también una base ortonormal de V.

La invarianza de W_1 y W_2 por la acción de $U(V)$ es evidente. La invarianza de W_3 y W_4 sale del hecho de que cualquier $T \in U(V)$ conmuta con J y del hecho de que $\overline{T \cdot \alpha} = \overline{\alpha}T^{-1}$, que mostraremos a continuación: Dada una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ de V tenemos

$$\overline{T \cdot \alpha}(z) = \sum_{i=1}^{2n}(T \cdot \alpha)(e_i, e_i, z) = \sum_{i=1}^{2n} \alpha(T^{-1}e_i, T^{-1}e_i, T^{-1}z) = \overline{\alpha}(T^{-1}z),$$

donde la última igualdad resulta del hecho de que $\{T^{-1}e_1, \dots, T^{-1}e_{2n}\}$ es también ortonormal. □

Enunciaremos algunas propiedades que se dan en W_1 y W_3.

Lema 2.6.3. *Para todo $\alpha \in W$ y para todos $x, y \in V$ se tiene:*

1. $\alpha(x, y, y) = 0$.

2. $\alpha(x, y, Jy) = 0$.

Demostración. El primer ítem sale de la definición de W. Para el segundo, $\alpha(x,y,Jy) = -\alpha(x,Jy,J^2y) = \alpha(x,Jy,y) = -\alpha(x,y,Jy)$, y entonces $\alpha(x,y,Jy) = 0$. □

Lema 2.6.4. *Para todo $\alpha \in W_1$ y para todos $x, y \in V$ se tiene:*

1. $\alpha(x,y,z) = -\alpha(y,x,z)$.
2. $\alpha(x,y,x) = 0$.
3. $\alpha(x,Jx,z) = 0$.

Demostración. La primera sale de considerar la igualdad $\alpha(x+y,x+y,z) = 0$ y de $\alpha(x,x,z) = \alpha(y,y,z) = 0$. La segunda es inmediata de la definición de W_1 y de W. El último ítem $\alpha(x,Jx,z) = -\alpha(x,J^2x,Jz) = \alpha(x,x,Jz) = 0$. □

Suponemos ahora que la dimensión de V es igual a 4. Siendo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto interior hermitiano respecto de J, es posible encontrar una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, f_1, e_2, f_2\}$ tal que $f_i = Je_i$. La matriz de J en esta base resulta

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Proposición 2.6.5. *Si $n = 2$, entonces $W_1 = 0$*

Demostración. Dado $\alpha \in W_1$ debemos probar que $\alpha(x,y,z) = 0$ para todos $x,y,z \in V$. Por *1.* del Lema 2.6.3 y 2. del Lema 2.6.4,

$$\alpha(x,y,y) = \alpha(x,x,y) = \alpha(x,y,x) = 0$$

Es decir, si dos vectores son iguales α es cero en esta situación. Luego resta ver que $\alpha(x,y,z) = 0$ siempre que x,y,z sean vectores distintos en el conjunto $\{e_1,e_2,f_1,f_2\}$. Notar que necesariamente deben estar e_1 y f_1 o bien e_2 y f_2 entre los elementos x,y,z. Por el ítem 2 del Lema 2.6.3, se tiene $\alpha(x,e_1,f_1) = 0$ y $\alpha(x,e_2,f_2) = 0$; y por la antisimétria de α respecto a la segunda y tercera componente $\alpha(x,f_1,e_1) = \alpha(x,f_2,e_2) = 0$.

Usando el ítem 3 del Lema 2.6.4 $\alpha(e_1,f_1,x) = \alpha(f_1,e_1,x) = 0$ y $\alpha(e_2,f_2,x) = \alpha(f_2,e_2,x) = 0$, por lo tanto $\alpha(e_1,x,f_1) = \alpha(f_1,x,e_1) = \alpha(e_2,x,f_2) = \alpha(f_2,x,e_2) = 0$.

Por lo tanto $\alpha(x,y,z) = 0$ para todos $x,y,z \in V$. □

Para el siguiente lema, fijamos una base ortonormal de V, $\{e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n\}$ con $f_i = Je_i$.

Lema 2.6.6. *Para todo $\alpha \in W_3$ y para todos $x,y,z \in V$ se verifican:*

1. $\alpha(x,y,Jy) = 0$.
2. $\alpha(x,Jx,z) + \alpha(Jx,x,z) = 0$.
3. $\alpha(e_i,e_i,z) - \alpha(f_i,f_i,z) = 0$, $i = 1,\dots,n$.
4. $\sum_{i=1}^n \alpha(e_i,e_i,z) = \sum_{i=1}^n \alpha(f_i,f_i,z) = 0$.

Demostración. Para 1., con $z = Jy$ se tiene

$$0 = \alpha(x, y, z) - \alpha(Jx, Jy, z) = \alpha(x, y, z) - \alpha(Jx, z, z) = \alpha(x, y, z)$$

Para 2., con $y = Jx$ se tiene

$$0 = \alpha(x, y, z) - \alpha(Jx, Jy, z) = \alpha(x, y, z) + \alpha(y, x, z).$$

El ítem 3 es inmediato de la definición de W_3 pues $Je_i = f_i$. Para el ítem 4 usamos 3. y el hecho de que $\overline{\alpha}(z) = 0$. Resulta así que

$$0 = \overline{\alpha}(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i, e_i, z) + \sum_{i=1}^{n} \alpha(f_i, f_i, z) = 2\sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i, e_i, z).$$

□

Volvemos al caso en que V es de dimensión 4 y consideramos la base ortonormal $\{e_1, f_1, e_2, f_2\}$ con $f_i = Je_i$.

Proposición 2.6.7. *Si $n = 2$, entonces $W_3 = 0$.*

Demostración. Sea $\alpha \in W_3$. Por el Lema 2.6.3, $\alpha(x, x, x) = \alpha(x, y, y) = 0$ para todos $x, y \in V$. Veamos ahora que $\alpha(x, x, z) = 0$ si $x \in \{e_1, e_2, f_1, f_2\}$ y $z \in V$. Dado que $\alpha(x, x, z) = \alpha(Jx, Jx, z) = 0$, basta suponer que $x \in \{e_1, e_2\}$, y por simetría basta considerar el caso $x = e_1$.

Sabemos que $\alpha(e_1, e_1, e_1) = 0$, y por 4. del Lema 2.6.6 tenemos que $\alpha(e_1, e_1, e_2) = -\alpha(e_2, e_2, e_2) = 0$. Por 3. del Lema 2.6.6 se tiene que $\alpha(e_1, e_1, f_1) = \alpha(f_1, f_1, f_1) = 0$ y por 3. y 4. del mismo lema, $\alpha(e_1, e_1, f_2) = -\alpha(e_2, e_2, f_2) = -\alpha(f_2, f_2, f_2) = 0$.

Hasta ahora hemos demostrado que $\alpha(x, y, z) = 0$ para $x, y, z \in \{e_1, f_1, e_2, f_2\}$ en los casos $x = y = z$, $x = y$, e $y = z$. También se deduce para el caso $x = z$ pues $\alpha(x, y, x) = -\alpha(x, x, y)$, de la definición de W.

Resta ver que $\alpha(x, y, z) = 0$ siempre que x, y, z son elementos distintos en el conjunto $\{e_1, f_1, e_2, f_2\}$. Notar que o bien e_1 y f_1 están entre los x, y, z, o bien e_2 y f_2 están entre los elementos x, y, z.

De *1.* del Lema 2.6.6 se sigue que $\alpha(x, e_1, f_1) = \alpha(x, e_2, f_2) = \alpha(x, f_1, e_1) = \alpha(x, f_2, e_2) = 0$. Tambień tenemos que $\alpha(e_1, f_1, z) = -\alpha(e_1, Jf_1, Jz) = \alpha(e_1, e_1, Jz)$ que ya vimos que es cero. De manera similar $\alpha(e_2, f_2, z) = 0$. Usando 2. del Lema 2.6.6 se tiene que $\alpha(f_1, e_1, z) = \alpha(f_2, e_2, z) = 0$. Finalmente usamos que $\alpha(x, y, z) = -\alpha(x, z, y)$ para concluir que $\alpha(e_1, y, f_1) = \alpha(f_1, y, e_1) = \alpha(e_2, y, f_2) = \alpha(f_2, y, e_2) = 0$. Esto completa la prueba. □

2.6.2. La clasificación de variedades casi hermitianas

Trasladaremos el análisis que hicimos a nivel de espacios vectoriales al estudio de una variedad casi hermitiana.

Sea (M, J, g) una variedad casi hermitiana. Sea ∇ la conexión de Levi-Civita, y sea ω la 2-forma de Kähler. Definimos

$$\alpha(X, Y, Z) = \nabla_X \omega(Y, Z)$$

Hemos visto ya que α es un tensor de tipo $(0, 3)$ y por lo que el valor de $\alpha(X, Y, Z)$ en un punto p sólo depende de los valores de X, Y y Z en el punto. De esta manera, para cada $p \in M$ se tiene una función trilineal

$$\alpha_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}.$$

tal que $\alpha_p(x, y, z) = (\nabla_X \omega(Y, Z))_p$ donde X, Y, Z son campos tales que $X_p = x$, $Y_p = y$ y $Z_p = z$. Hemos visto en la introducción de la sección anterior que α_p es un elemento del espacio W asociado a T_pM que hemos estudiado en la sección anterior. De ahora en más a este espacio lo denotamos por W_p.

La coderivada de ω, denotada por $\delta\omega$ es la 1-forma tal que

$$(\delta\omega(Z))_p = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_p(e_i, e_i, Z_p) \tag{2.6.5}$$

donde $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ es una base ortonormal de T_pM. Notar que para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, la aplicación $(X, Y) \mapsto \nabla_X \omega(Y, Z)$ es $C^\infty(M)$-bilineal y por lo tanto existe un único tensor T_Z de tipo (1,1) tal que $\nabla_X \omega(Y, Z) = g(T_Z X, Y)$. Resulta entonces que

$$\delta\omega(Z) = \mathrm{Tr}(T_Z).$$

Notemos que

$$(\delta\omega(Z))_p = \overline{\alpha_p}(Z_p).$$

Denotamos por Θ a la 1-forma de Lee, que se define de la siguiente forma

$$\Theta(X) = \frac{-1}{n-1} \delta\omega(JX). \tag{2.6.6}$$

En cada espacio tangente T_pM tenemos una descomposición del espacio W_p

$$W_p = (W_1)_p \oplus (W_2)_p \oplus (W_3)_p \oplus (W_4)_p$$

respecto a la acción del grupo unitario $U(n)$, que lo hemos identificado con el grupo de operadores ortogonales $T : T_pM \to T_pM$ que conmutan con J_p. Como hemos dicho antes, α_p es un elemento de W_p para cada $p \in W$.

Definición 2.6.8. Dado $(e_1, e_2, e_3, e_4) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$, denotamos por $e_1\mathcal{W}_1 + e_2\mathcal{W}_2 + e_3\mathcal{W}_3 + e_4\mathcal{W}_4$ a la clase de todas las variedades casi hermitianas (M, J, g) tales que $\alpha_p = (\nabla\omega)_p$ pertenece a $e_1(W_p)_1 + e_2(W_p)_2 + e_3(W_p)_3 + e_4(W_p)_4$ para todo $p \in M$.

Notación

$\{0\} = \mathcal{K} =$ Clase de variedades Kähler (Kähler manifolds).
$\mathcal{W}_1 = \mathcal{NK} =$ Clase de variedades aproximadamente Kähler (nearly Kähler manifolds) .
$\mathcal{W}_2 = \mathcal{AK} =$ Clase de variedades casi Kähler (almost Kähler manifolds).
$\mathcal{W}_3 = \mathcal{H} \cap \mathcal{SK} =$ Clase de variedades hermitianas semi-Kähler
(Hermitian semi Kähler manifolds).
$\mathcal{W}_4 =$ Clase de variedades casi hermitianas que contiene a las variedades localmente conforme Kähler (A class which contains locally conformal Kähler manifolds).
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathcal{QK} =$ Clase de variedades quasi Kähler (quasi Kähler manifolds).
$\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 = \mathcal{H} =$ Clase de variedades Hermitianas (Hermitian manifolds).
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4 =$ Clase de variedades casi hermitianas que contienen a variedades casi Kähler localmente conformes
(A class which contains locally conformal almost Kähler manifolds).
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 = \mathcal{SK} =$ Clase de variedades semi-Kähler (semi Kähler manifolds).
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 = \mathcal{G}_1$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 = \mathcal{G}_2$
$\mathcal{W} =$ Clase de variedades casi hermitianas (almost Hermitian manifolds).

Las clases $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ fueron estudiadas en [HV76].

Enunciamos otro teorema importante del trabajo de Gray y Hervella, que permite identificar en forma explicita las dieciséis clases para una variedad casi hermitiana.

Teorema 2.6.9. *[GH80, Theorem 2.3] Las relaciones que definen cada una de las dieciséis en clases en el caso* $\dim M \geq 6$ *están dadas en el cuadro 2.1:*

Clase	Condiciones
$\mathcal{K}$	$\nabla\omega = 0$
$\mathcal{W}_1 = \mathcal{NK}$	$\nabla\omega(X, X, Y) = 0 \,\forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ (o $3\nabla\omega = d\omega$)
$\mathcal{W}_2 = \mathcal{AK}$	$d\omega = 0$
$\mathcal{W}_3 = \mathcal{SK} \cap \mathcal{H}$	$N = \delta\omega = 0$
$\mathcal{W}_4$	$\nabla\omega(X, Y, Z) = -\frac{1}{2(n-1)}\left(\langle X, Y\rangle\delta\omega(Z) - \langle X, Z\rangle\delta\omega(Y)\right.$ $\left.-\langle X, JY\rangle\delta\omega(JZ) + < X, JZ > \delta\omega(JY)\right), \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathcal{QK}$	$\nabla\omega(X, Y, Z) + \nabla\omega(JX, JY, Z) = 0$
$\mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 = \mathcal{H}$	$N = 0$ o $\nabla\omega(X, Y, Z) - \nabla\omega(JX, JY, Z) = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$	$\nabla\omega(X, X, Y) - \nabla\omega(JX, JX, Y) = \delta\omega = 0$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$	$d\omega = \omega \wedge \Theta$ o $\mathcal{S}_{X,Y,Z}\{\nabla\omega(X, Y, Z) - \frac{1}{n-1}\omega(X, Y)\delta\omega(JZ)\} = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$	$\nabla\omega(X, X, Y) = -\frac{1}{2(n-1)}\left(\|X\|^2\delta\omega(Y) - \langle X, Y\rangle\delta\omega(y) -\right.$ $\left.-\langle JX, Y\rangle\delta\omega(JX)\right)$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$	$\mathcal{S}_{X,Y,Z}\{\nabla\omega(X, Y, Z) + \nabla\omega(JX, JY, Z)\} = \delta\omega = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 = \mathcal{SK}$	$\delta\omega = 0$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$	$\nabla\omega(X, Y, Z) + \nabla\omega(JX, JY, Z) = \frac{-1}{n-1}[\langle X, Y\rangle\delta\omega(Z)$ $-\langle X, Z\rangle\delta\omega(Y) - \langle X, JY\rangle\delta\omega(JZ) + \langle X, JZ\rangle\delta\omega(JY)]$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 = \mathcal{G}_1$	$\nabla\omega(X, X, Y) - \nabla\omega(JX, JX, Y) = 0$ o $< N(X, Y), X >= 0$
$\mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 = \mathcal{G}_2$	$\mathcal{S}_{X,Y,Z}\nabla\omega(X, Y, Z) - \nabla\omega(JX, JY, Z) = 0$ o $\mathcal{S}_{X,Y,Z} < N(X, Y), JZ >= 0$

CUADRO 2.1: Variedades casi hermitianas de dimensión ≥ 6

Teorema 2.6.10. *[GH80, Theorem 2.4] Las relaciones que definen las cada clase en el caso* $\dim M = 4$ *están dadas en el cuadro 2.2.*

Clase	Condiciones
$\mathcal{K}$	$\nabla\omega = 0$
$\mathcal{W}_2 = \mathcal{AK}$	$d\omega = 0$
$\mathcal{W}_4 = \mathcal{H}$	$N = 0$

CUADRO 2.2: Variedades casi hermitianas de dimensión 4

Capítulo 3

Estructuras paralelas y estructuras Killing-Yano. Caracterización general

Sea H un tensor tipo $(1,1)$ en una variedad riemanniana (M,g), el cual es antisimétrico respecto de la métrica g. Estudiamos las propiedades que posee el tensor H y su comportamiento en la complexificación. En el caso en que H es invertible asociaremos al mismo una estructura casi compleja J.

3.1. Endomorfismos antisimétricos en un espacio vectorial

Sea V un espacio vectorial real con producto interno $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ y sea $H : V \to V$ un endomorfismo inversible y antisimétrico respecto del producto interno. Siendo H antisimétrico e inversible, existe una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, f_1, ..., e_n, f_n\}$ de V tal que

$$[H]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & ... & ... & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & ... & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & ... & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & ... & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & 0 & -a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & a_n & 0 \end{bmatrix} \text{con } a_1, a_2, ..., a_n \neq 0 \qquad (3.1.1)$$

Podemos suponer que $a_i > 0$ para todo i. Notemos que los reales $a_1, \ldots, a_n$ pueden repetirse.

Consideramos ahora $V^{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C} = V \oplus iV$, la complexificación de V, y sea $H^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ la extensión de H a un mapa $\mathbb{C}$-lineal, es decir, $H^{\mathbb{C}}(x+iy) = H(x)+iH(y)$ para todos $x, y \in V$. Notar que loas autovalores de

Distinguimos dos conjuntos, una correspondiente al conjunto de autovalores sin repetición de un operador lineal y otro en donde se lista todos los autovalores con repetición. Al primer conjunto se lo conoce como espectro y al segundo como multiconjunto de autovalores. En símbolos, si A es un operador lineal, $S(A)$ denotará el espectro y $M(A)$ el multiconjunto de autovalores.

Notemos que $[H^2]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}\left[-a_1^2, -a_1^2, -a_2^2, -a_2^2, ..., -a_n^2, -a_n^2\right]$ y los autovectores son los elementos de la base $\mathcal{B}$.

De esta forma los siguientes conjuntos representan el espectro y el multiconjunto de autovalores de H^2:

$$S(H^2) = (-a_1^2, -a_2^2, ..., -a_n^2), \; M(H^2) = (-a_1^2, -a_1^2, -a_2^2, -a_2^2, ..., -a_n^2, -a_n^2)$$

Rescribiendo de acuerdo a la notación, $H^2 = \mathrm{diag}[M(H^2)]$. Observar que a diferencia de H^2, H no es diagonalizable pero sí lo es $H^{\mathbb{C}}$ y $S(H^{\mathbb{C}}) = (\pm a_1 i, \pm a_2 i, ..., \pm a_n i)$.

Proposición 3.1.1. *$\forall\, ai \in S(H^{\mathbb{C}})$, se verifican:*

1. $V^{(a,0)} := \{Z \in V^{\mathbb{C}} : H^{\mathbb{C}}(Z) = aiZ\} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_k - if_k \;: a_k = a\}$
2. $V^{(0,a)} := \{Z \in V^{\mathbb{C}} : H^{\mathbb{C}}(Z) = -aiZ\} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_k + if_k : a_k = a\}$
3. $V^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{ai \in S(H^{\mathbb{C}})} (V^{(a,0)} \oplus V^{(0,a)})$.
4. *La conjugación en $V^{\mathbb{C}}$ define un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal entre $V^{(0,a)}$ y $V^{(a,0)}$.*

Demostración. La descomposición en 3. es clara pues es la descomposición de $V^{\mathbb{C}}$ en autoespacios de $H^{\mathbb{C}}$. Es fácil verificar que si $a_k = a$ entonces $H^{\mathbb{C}}(e_k - if_k) = ai(e_k - if_k)$ y $H^{\mathbb{C}}(e_k + if_k) = -ai(e_k + if_k)$. Dado que $\{e_k - if_k\}_{k=1}^n \cup \{e_k + if_k\}_{k=1}^n$ es una base de $V^{\mathbb{C}}$, entonces obtenemos 1. y 2.

Para 4., dado $a_j i \in S(H^{\mathbb{C}})$ y $Z = e_j - if_j \in V^{(a,0)}$, entonces $H_{\mathbb{C}}(\overline{Z}) = H(e_j) + iH(f_j) = a_j f_j - a_j e_j = -a_j i(e_j + if_j)$. La conjugación envía elementos de $V^{(a,0)}$ a $V^{(0,a)}$, más aún es una transformación $\mathbb{R}$-lineal inversible.

$\square$

Corolario 3.1.2. *Si $\sharp S(H^{\mathbb{C}}) = 2n$, es decir $a_j i \neq a_k i \;\forall\, j \neq k$ entonces :*

1. $V^{(a_k,0)} := \{Z \in V^{\mathbb{C}} : H^{\mathbb{C}}(Z) = a_k iZ\} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_k - if_k\}$.
2. $V^{(0,a_k)} := \{Z \in V^{\mathbb{C}} : H^{\mathbb{C}}(Z) = -a_k iZ\} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_k + if_k\}$.
3. $\dim_{\mathbb{C}} V^{(a_j,0)} = \dim_{\mathbb{C}} V^{(0,a_j)} = 1$.
4. $V^{\mathbb{C}} = V^{(a_1,0)} \oplus V^{(0,a_1)} \oplus ... \oplus V^{(a_n,0)} \oplus V^{(0,a_n)}$.

3.2. Tensores tipo $(1,1)$ paralelos y Killing Yano

Extenderemos los conceptos de la sección anterior a una (M,g) variedad riemanniana. Sea H un tensor antisimétrico de tipo $(1,1)$, es decir $H : TM \to TM$ es C^∞ y para cada punto p de M, H_p es un endomorfismo antisimétrico en T_pM. Asociamos a H la 2-forma:

$$\omega(X,Y) = g(HX,Y), \;\forall\, X,Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{3.2.1}$$

Si H es invertible podemos definir la siguiente 2-forma:

$$\mu(X,Y) = g(H^{-1}X,Y), \;\forall\, X,Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{3.2.2}$$

Denotamos siempre por ∇ a la conexión de Levi- Civita,

Lema 3.2.1. *Sea (M,g,H) como antes. Entonces se verifica para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

1. $\nabla_X \omega(Y,Z) = g((\nabla_X H)Y,Z)$.
2. *$\nabla_X H$ es antisimétrico.*

Demostración. La prueba es la misma que la de los ítems 1. y 2. de la Proposición 2.3.3 dado que allí no hemos usado el hecho de que $J^2 = -I$. □

El tensor de Nijenhuis N asociado a H se define como:

$$N(X,Y) = [HX, HY] - H([HX, Y] + [X, HY]) + H^2[X, Y]. \tag{3.2.3}$$

Este es realmente un tensor, en el sentido que $N(\mu X, \lambda Y) = \mu\lambda N(X,Y)$ para $\mu, \lambda \in C^\infty(M)$. Para mostrar esto, dado que N es claramente antisimétrico, podemos suponer que $\mu \equiv 1$. Luego

$$\begin{aligned} N(X,\lambda Y) - \lambda N(X,Y) &= (HX)(\lambda Y) - H((HX)(\lambda)Y + X(\lambda)HY) + H^2(X(\lambda)Y) \\ &= (HX)(\lambda Y) - (HX)(\lambda)HY - X(\lambda)H^2Y + H^2(X(\lambda)Y) = 0. \end{aligned}$$

Definición 3.2.2. Decimos que H es integrable si $N = 0$.

Lema 3.2.3. *Sea (M, g, H) como antes. Para cualquier conexión libre de torsión se verifica:*

$$N(X,Y) = (\nabla_{HX}H)Y - H(\nabla_X H)Y - (\nabla_{HY}H)X + H(\nabla_Y H)X. \tag{3.2.4}$$

Demostración. La demostración es similar a la del Lema 2.3.2. □

Proposición 3.2.4. *Sea (M, g, H) como antes. Entonces*

$$d\omega(X,Y,Z) = \nabla_X\omega(Y,Z) + \nabla_Y\omega(Z,X) + \nabla_Z\omega(X,Y).$$

Demostración. La proposición sigue de cambiar J por H en la Proposición 2.3.5. □

Definición 3.2.5. Decimos que H es un **tensor paralelo** respecto de ∇ (conexión de Levi Civita) si $\nabla H = 0$, es decir si para todo par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $(\nabla_X H)Y = 0$. Equivalentemente, $\nabla_X H = H\nabla_X$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposición 3.2.6. *Para todo H invertible antisimétrico y $\forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se verifican:*

1. $(\nabla_X H^{-1})Y = -H^{-1}(\nabla_X H)(H^{-1}Y)$.
2. $2g((\nabla_X H)Y, Z) = d\mu(X, HY, HZ) + d\omega(X,Y,Z) - g(N_H(Y,Z), H^{-1}X)$.
3. $d\mu(HX, HY, HZ) = (\nabla_{HX}\omega)(Y,Z) + (\nabla_{HY}\omega)(Z,X) + (\nabla_{HZ}\omega)(X,Y)$.

Demostración. Para la primera identidad

$$\begin{aligned} (\nabla_X H^{-1})Y &= \nabla_X H^{-1}Y - H^{-1}\nabla_X Y = H^{-1}H\nabla_X H^{-1}Y - H^{-1}\nabla_X Y \\ &= -H^{-1}(-H\nabla_X H^{-1}Y + \nabla_X Y) = -H^{-1}(\nabla_X H)H^{-1}Y. \end{aligned}$$

Para el punto 2. desarrollamos

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y,Z) &= Xg(HY,Z) + Yg(HZ,X) + Zg(HX,Y) \\ &\quad + g([X,Y],HZ) + g([Y,Z],HX) + g([Z,X],HY), \\ d\mu(X,HY,HZ) &= Xg(Y,HZ) + HYg(Z,X) - HZg(X,Y) \\ &\quad + g([X,HY],Z) + g([HY,HZ],H^{-1}X) + g([HZ,X],Y), \\ g(N_H(Y,Z),H^{-1}X) &= g([HY,HZ],H^{-1}X) + g([HY,Z],X) + \\ &\quad + g([Y,HZ],X) + g([Y,Z],HX). \end{aligned}$$

Luego sumando las dos primeras identidades y restando la tercera se tiene

$$\begin{aligned}
&d\omega(X,Y,Z) + d\mu(X,HY,HZ) - g(N(Y,Z),H^{-1}X)\\
&= Xg(HY,Z) + Yg(HZ,X) + Zg(HX,Y) + g([X,Y],HZ) + g([Y,Z],HX)\\
&+ g([Z,X],HY) + Xg(Y,HZ) + (HY)g(Z,X) - (HZ)g(X,Y) + g([X,HY],Z)\\
&+ g([HY,HZ],H^{-1}X) + g([HZ,X],Y) - g([HY,HZ],H^{-1}X)\\
&- g([HY,Z],X) - g([Y,HZ],X) - g([Y,Z],HX)\\
&= Xg(HY,Z) + (HY)g(Z,X) + Zg(HX,Y) + g([X,HY],Z)\\
&- g([HY,Z],X) + g([Z,X],HY) + Xg(Y,HZ) + Yg(HZ,X)\\
&- (HZ)g(X,Y) + g([X,Y],HZ) - g([Y,HZ],X) + g([HZ,X],Y)\\
&= 2g(\nabla_X HY,Z) + 2g(\nabla_X Y,Z) = 2g((\nabla_X H)Y,Z)
\end{aligned}$$

El último ítem sale usando el primero y la Proposición 3.2.4. □

El siguiente corolario es consecuencia de la proposición anterior, muestra las equivalencias en la definición de paralelo cuando H es invertible.

Corolario 3.2.7. *Sea H un endomorfismo antisimétrico invertible. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. $\nabla H = 0$
2. $d\omega = d\mu = 0$ *y* $N_H = 0$
3. $\nabla\omega = 0$

Demostración. La equivalencia de 1. y 3. es consecuencia del Lema 3.2.1. Asumamos 1. y 3. Por lema 3.2.3 se tiene $N_H = 0$; de la Proposición 3.2.4 se sigue que $d\omega = 0$; y del ítem 3 de la Proposición 3.2.6, obtenemos que $d\mu = 0$. Luego se verifica 2. Recíprocamente, asumiendo 2., del ítem 2 de la Proposición 3.2.6, obtenemos que $\nabla H = 0$, es decir, se verifica 1. □

Dado un tensor (1,1) invertible H en (M,g), observar que como $(H^{-1})^T = (H^T)^{-1}$, entonces H es antisimétrico si y solo si H^{-1} es también antisimétrico. Usando la Proposición 3.2.6,1, se deduce:

Corolario 3.2.8. *Si H es un tensor inversible en (M,g), entonces H es antisimétrico y paralelo si y solo si H^{-1} es también antisimétrico y paralelo.*

Definición 3.2.9. Decimos que un tensor (1,1) antisimétrico H en una variedad riemaniana (M,g) es un **tensor de Killing-Yano (KY)** si se satisface la condición:

$$(\nabla_X H)X = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Decimos que una 2-forma K es una 2-forma de Killing-Yano si

$$\nabla_X K(X,Z) = 0, \quad \forall X,Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Del Lema 3.2.1 resulta que un tensor (1,1) antisimétrico H en (M,g) es de Killing-Yano si y sólo si la 2-forma asociada $\omega(X,Y) = g(HX,Y)$ es de Killing-Yano.

Definición 3.2.10. Decimos que una variedad riemanniana (M,g) admite una **estructura paralela (resp. de Killing-Yano)** si existe un tensor de tipo $(1,1)$ antisimétrico y paralelo (de Killing-Yano).

Lema 3.2.11. *Sea H un tensor (1,1) antisimétrico en una variedad riemaniana (M, g). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *H es de Killing-Yano.*
2. *$(\nabla_X H) Y = -(\nabla_Y H) X, \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*
3. *$\nabla_X \omega(Y, Z) + \nabla_Y \omega(X, Z) = 0, \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*
4. *$d\omega(X, Y, Z) = 3 (\nabla_X \omega)(Y, Z)$*

Demostración. Asumamos 1. y probemos 2.

$$
\begin{aligned}
0 &= (\nabla_{X+Y} H)(X+Y) = \nabla_{X+Y} H(X+Y) - H\nabla_{X+Y} X + Y) = \nabla_{X+Y}(HX + HY) - \\
&- H(\nabla_X X + \nabla_X Y + \nabla_Y X + \nabla_Y Y) \\
&= \nabla_X HX + \nabla_X HY + \nabla_Y HX + \nabla_Y HY - H\nabla_X X - H\nabla_X Y - H\nabla_Y X - H\nabla_Y Y \\
&= (\nabla_X H)X + (\nabla_Y H)Y + (\nabla_X H)Y + (\nabla_Y H)X \\
&= (\nabla_X H)Y + (\nabla_Y H)X.
\end{aligned}
$$

Por el Lema 3.2.1, resulta que 2. y 3. son equivalentes. Veamos ahora que 2. implica 4. Como ω es KY, por la Proposición 3.2.4, el Lema 3.2.1 y la antisimetría de $\nabla_X H$ obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
d\omega(X, Y, Z) &= (\nabla_X \omega)(Y, Z) + (\nabla_Y \omega)(Z, X) + (\nabla_Z \omega)(X, Y) \\
&= g((\nabla_X H)Y, Z) + g((\nabla_Y H)Z, X) + g((\nabla_Z H)X, Y) \\
&= g((\nabla_X H)Y, Z) - g(Z, (\nabla_Y H)X) - g(X, (\nabla_Z H)Y) \\
&= g((\nabla_X H)Y, Z) + g((\nabla_X H)Y, Z) + g(X, (\nabla_Y H)Z) \\
&= g((\nabla_X H)Y, Z) + g((\nabla_X H)Y, Z) - g((\nabla_Y H)X, Z) \\
&= g((\nabla_X H)Y, Z) + g((\nabla_X H)Y, Z) + g((\nabla_X H)Y, Z) \\
&= 3g((\nabla_X H)Y, Z) = 3(\nabla_X \omega)(Y, Z)
\end{aligned}
$$

Finalmente veamos que 4. implica 1. De la igualdad $d\omega(X, Y, Z) = 3 (\nabla_X \omega)(Y, Z)$, poniendo $X = Y$ resulta:

$$
0 = d\omega(X, X, Z) = 3 (\nabla_X \omega)(X, Z),
$$

por lo cual ω es de Killing-Yano, o equivalentemente, H es de Killing-Yano. □

3.3. Curvatura de Ricci

Recordar la definición del tensor de curvatura $\mathrm{R}(X, Y)Z$ dada en la Definición 2.4.3.

Proposición 3.3.1. *Sea (M, g) una variedad riemanniana y sea H un tensor de tipo $(1, 1)$ invertible, antisimétrico y paralelo. Entonces para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ se verifican:*

1. *$R(X, Y)HZ = HR(X, Y)$.*
2. *$R(X, Y, HZ, HW) = -g(H^2 R(X, Y)Z, W)$.*
3. *$R(X, Y, HZ, H^{-1}W) = R(HX, H^{-1}Y, Z, W) = R(X, Y, H^{-1}Z, HW)$ $= R(H^{-1}X, HY, Z, W) = -R(X, Y, Z, W)$.*

Demostración. El ítem 1. sale de la definición de $R(X,Y)Z$ y el hecho de que H es paralelo y por lo tanto conmuta con ∇_X para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. El punto 2. es una consecuencia 1. y de la antisimetría de H. Para el último punto, usamos los ítems anteriores y la Proposición 2.4.4:

$$\begin{aligned} R(X,Y,HZ,H^{-1}W) &= g(R(X,Y)HZ,H^{-1}W) = g(HR(X,Y)Z,H^{-1}W) \\ &= -g(R(X,Y)Z,W) = -R(X,Y,Z,W). \\ R(HX,H^{-1}Y,Z,W) &= R(Z,W,HX,H^{-1}Y) = -R(Z,W,X,Y) = -R(X,Y,Z,W). \end{aligned}$$

Las últimas dos salen de lo anterior aplicado a H^{-1} en vez de H. Para ello usamos el Corolario 3.2.8 que dice que H^{-1} es también paralelo. □

Proposición 3.3.2. *El tensor de Ricci en una variedad riemanniana (M,g) con H tensor tipo $(1,1)$ invertible, antisimétrico y paralelo satisface para todos $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ la siguiente ecuación:*

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{R}(X,HY)\circ H^{-1}) + \mathrm{Ric}(H^{-1}X,HY) \tag{3.3.1}$$

Demostración. Fijemos $p \in M$ y una base ortonormal $\{e_1,....,e_{2n}\}$ para T_pM. Usando la Proposición 3.3.1 y las propiedades en la Proposición 2.4.4, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X_p,Y_p) &= \sum_i \mathrm{R}(e_i,X_p,Y_p,e_i) = -\sum_i \mathrm{R}(e_i,X_p,H_pY_p,H_p^{-1}e_i) \\ &= \sum \mathrm{R}(X_p,H_pY_p,e_i,H^{-1}e_i) + \sum \mathrm{R}(H_pY_p,e_i,X_p,H_p^{-1}e_i) \\ &= -\sum \mathrm{R}(X_p,H_pY_p,H_p^{-1}e_i,e_i) - \sum \mathrm{R}(H_pY_p,e_i,H_p^{-1}X_p,e_i) \\ &= -\sum \mathrm{R}(X_p,H_pY_p,H_p^{-1}e_i,e_i) + \sum \mathrm{R}(e_i,H_pY_p,H_p^{-1}X_p,e_i) \\ &= -\mathrm{Tr}(\mathrm{R}(X_p,Y_p)\circ H_p^{-1}) + \mathrm{Ric}(H_p^{-1}X_p,H_pY_p). \end{aligned}$$

□

3.4. Tensores H tipo $(1,1)$ en la complexificación de cada espacio tangente

Sea (M,g) una variedad riemanniana. Consideramos la complexificación del fibrado tangente TM, denotada por $T^{\mathbb{C}}M$. Este resulta un fibrado tal que para cada $p \in M$, $(T^{\mathbb{C}}M)_p = T_pM^{\mathbb{C}}$. Las secciones de este fibrado, llamados campos complejos, son de la forma $X+iY$, donde $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$. Al conjunto de campos complejos lo denotamos $\mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M)$.

Sea $H : TM \to TM$ un tensor antisimétrico. Luego para cada punto $p \in M$, $H_p : T_pM \to T_pM$ es un endomorfismo antisimétrico. Denotemos por $H_p^{\mathbb{C}}$ a la extensión lineal de H_p a la complexificación $T_pM^{\mathbb{C}}$ de T_pM, es decir,

$$H_p^{\mathbb{C}}(x+iy) := H_p(x) + iH_p(y), \quad x,y \in T_pM.$$

Obtenemos así un endomorfismo $H^{\mathbb{C}} : TM^{\mathbb{C}} \to TM^{\mathbb{C}}$.

De igual forma extendemos la meťrica, a un tensor complejo (0,2):

$$g^{\mathbb{C}}(X+iY,Z+iW) = g(X,Z) - g(Y,W) + i[g(X,W)+g(Y,Z)].$$

Finalmente extendemos la conexión de Levi-Civita en la complexificación $\forall\, X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ definimos:

$$\nabla^{\mathbb{C}}_{X+iY}(Z+iW) = \nabla_X Z - \nabla_Y W + i[\nabla_X W + \nabla_Y Z]$$

Decimos que $H^{\mathbb{C}}$ es paralelo si conmuta con $\nabla^{\mathbb{C}}_Z$ para todo $Z \in \mathfrak{X}^{\mathbb{C}}(M)$. Equivalentemente, si denotamos

$$(\nabla^{\mathbb{C}}_Z H^{\mathbb{C}})Z' := \nabla^{\mathbb{C}}_Z(H^{\mathbb{C}}(Z')) - H^{\mathbb{C}}(\nabla^{\mathbb{C}}_Z Z'),$$

entonces $H^{\mathbb{C}}$ es paralelo si y sólo si $(\nabla^{\mathbb{C}}_{X+iY} H^{\mathbb{C}})(W+iZ) = 0$.

Proposición 3.4.1. *H es paralelo si y solo si $H^{\mathbb{C}}$ es paralelo*

Demostración. La siguiente identidad es fácil de verificar.

$$(\nabla^{\mathbb{C}}{}_{X+iY} H^{\mathbb{C}}(Z+iW)) = (\nabla_X H)Z - (\nabla_Y H)W + i[(\nabla_X H)W + (\nabla_Y H)Z]. \quad (3.4.1)$$

De esta expresión se sigue inmediatamente que si H es paralelo, entonces $H^{\mathbb{C}}$. Para la recíproca, basta tomar $Y = W = 0$ en la expresión anterior. □

Decimos que $H^{\mathbb{C}}$ es de Killing-Yano (o que es KY) si $(\nabla_{X+iY} H^{\mathbb{C}}))(X+iY) = 0$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposición 3.4.2. *H es KY si y solo si $H^{\mathbb{C}}$ es KY*

Demostración. Poniendo $X + iY = Z + iW$ en la expresión 3.4.1 resulta:

$$(\nabla^{\mathbb{C}}{}_{X+iY} H^{\mathbb{C}}(X+iY)) = (\nabla_X H)X - (\nabla_Y H)Y + i[(\nabla_X H)Y + (\nabla_Y H)X] = 0.$$

Resulta inmediato de esta expresión y del Lema 3.2.11 que si H es KY, también lo es $H^{\mathbb{C}}$. La recíproca sale de la expresión anterior tomando $Y = 0$. □

3.5. Estructura casi compleja asociada

Sea (M, g) una variedad riemanniana y sea $H : TM \to TM$ un tensor antisimétrico (respecto de g) e invertible. El objetivo es asociar a H una estructura casi compleja J. Comenzaremos primero a nivel de espacios vectoriales.

Consideremos un espacio con producto interno $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y fijemos un automorfismo lineal antisimétrico $H : V \to V$. Asociada a la terna $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, H)$ tenemos una 2-forma $\omega \in \wedge^2 V^*$ dada por $\omega(x, y) = \langle Hx, y\rangle$, para todos $x, y \in V$.

Dado que H es invertible, ω es no degenerada. En otras palabras, (V, ω) es un par simpléctico.

Decimos que una estructura compleja J en V es compatible con ω si la forma bilineal $(x, y) \mapsto \omega(x, Jy)$ es un producto interno.

La siguiente proposición asocia a cada terna (V, g, H) una estructura compleja J compatible con ω.

Proposición 3.5.1. *Toda terna $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle, H)$ como antes tiene una estructura compleja J compatible con la 2-forma ω.*

Demostración. Sea $\mathfrak{B} = \{e_1, f_1, ..., e_n, f_n\}$ base ortonormal para la cual H se escribe como en 3.1.1 con $a_i > 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

En la base anterior, HH^T es una matriz diagonal $\operatorname{diag} M(HH^T)$, con $M(HH^T) = (a_1^2, a_1^2, \ldots, a_n^2, a_n^2)$ (Ver notación en sección 3.1).

En la misma base definimos $A := \sqrt{HH^T} = \operatorname{diag}\sqrt{M(HH^T)}$, con $\sqrt{M(HH^T)} = (a_1, a_1, \ldots, a_n, a_n)$. Es fácil ver que es simétrica, definida positiva e inversible.

Sea $J := A^{-1}H$, entonces $H = AJ$ y esta es la **descomposición polar de** H. Notemos que en la base anterior J resulta ser la siguiente transformación:

$$[J]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.5.1}$$

Claramente J es antisimétrica y ortogonal respecto de la base dada. Más aún es una estructura compleja.

Afirmamos que J y H conmutan, en efecto

$$\begin{aligned} JH &= A^{-1}HH = (\sqrt{HH^T})^{-1}HH = \sqrt{HH^T}^{-1}(-HH^T) \\ &= -\sqrt{HH^T} = \sqrt{HH^T}JJ = HJ. \end{aligned}$$

Probaremos ahora que ω es compatible con J. Esto es equivalente a probar que $(x, y) \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle = \omega(x, Jy)$ es un producto interno. Chequearemos primero la simetría

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_H &= \omega(x, Jy) = \langle Hx, Jy \rangle = -\langle JHx, y \rangle = -\langle HJx, y \rangle \\ &= \langle Jx, Hy \rangle = \omega(y, Jx) = \langle y, x \rangle_H. \end{aligned}$$

En segundo lugar verificaremos que es definido positivo

$$\langle x, x \rangle_H = \omega(x, Jx) = \langle Hx, Jx \rangle = -\langle JHx, x \rangle = \langle \sqrt{HH^T}x, x \rangle > 0.$$

□

Observación 3.5.2. Notar que este nuevo producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_H = \omega(\cdot, J\cdot)$ que define la compatibilidad de J con ω es diferente de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Además J es antisimétrico y ortogonal respecto de este nuevo producto interno. En efecto,

$$\begin{aligned} \langle Jx, y \rangle_H &= \omega(Jx, Jy) = \langle HJx, Jy \rangle = \langle JHx, Jy \rangle \\ &= \langle Hx, y \rangle = -\omega(x, J^2y) = -\langle x, Jy \rangle_H, \\ \langle Jx, Jy \rangle_H &= -\langle x, J^2y \rangle_H = \langle x, y \rangle_H. \end{aligned}$$

Por lo tanto J es también estructura compleja compatible respecto de la nueva métrica.

Capítulo 4

Estructuras KY invariantes en Grupos de Lie de dimensión cuatro

En este capítulo estudiamos tensores de Killing Yano invariantes a izquierda en grupos de Lie de dimensión cuatro con métricas invariantes a izquierda. En primer lugar veremos que estos tensores son necesariamente paralelos. La existencia y descripción de estos tensores pueden estudiarse al nivel del álgebra de Lie. Las álgebras de Lie de dimensión cuatro con producto interno que admiten un tensor paralelo inversible son necesariamente solubles. Describiremos estas álgebras, y para cada una de ellas analizaremos todos los posibles productos internos y tensores paralelos inversibles que se pueden construir (salvo equivalencia). Luego usaremos estos resultados para encontrar ejemplos de 2-formas Killing-Yano conforme en álgebras de dimensión cinco.

4.1. Métricas y tensores invariantes a izquierda: Consideraciones generales

Para un grupo de Lie G y $a \in G$, denotamos siempre por $L_a : G \to G$ a la multiplicación a izquierda, el cual es un difeomorfismo. Un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ se dice *invariante a izquierda* si

$$dL_a X \circ L_{a^{-1}} = X, \ \ \forall a \in G,$$

es decir

$$dL_a X_p = X_{ap}, \ \ \forall a, p \in G.$$

Los campos invariantes a izquierda forman una subálgebra de $\mathfrak{X}(G)$ y se la llama el *álgebra de Lie de G*. Como espacio vectorial es isomorfo a T_eG, donde e es la identidad de G. En efecto, dado $x \in T_eG$, existe un único campo invariante a izquierda X tal que $X_e = x$. El valor de X en un punto a cualquiera viene dado por

$$X_a = dL_a x, \ \ a \in G.$$

Usando esta identificación de T_eG con el álgebra de Lie de G, podemos definir un corchete de Lie en T_eG. A T_eG con este corchete lo denotamos por $\mathfrak{g}$. Luego $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie canónicamente isomorfa al álgebra de Lie de campos invariantes a izquierda de G.

Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ es una base de $\mathfrak{g} = T_eG$, y para cada i, sea X_i el campo invariante a izquierda tal que $(X_i)_e = x_i$. Entonces $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una base del $C^\infty(G)$-módulo $\mathfrak{X}(G)$. En efecto, dado $a \in G$, como cada L_a es un difeomorfismo, resulta que $\{(X_1)_a, \dots, (X_n)_a\} = \{dL_a x_1, \dots, dL_a x_n\}$ es una base de T_aG.

Definición 4.1.1. Una métrica riemanniana g en un grupo de Lie G se dice invariante a izquierda si para cada $p \in G$, $g_{ap}(dL_a x, dL_a y) = g_p(x, y)$ para todo $x, y \in T_pG$, es decir, si L_a es una isometría $\forall\, a \in G$.

Una métrica invariante a izquierda g en G define en particular un producto interno $g_e = \langle \cdot, \cdot \rangle$ en el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_eG$. Recíprocamente, dado un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $\mathfrak{g} = T_eG$, existe una única métrica riemanniana invariante a izquierda g en G tal que $g_e = \langle \cdot, \cdot \rangle$. La misma, en un punto $a \in G$, viene dada por

$$g_a(x, y) := \langle dL_{a^{-1}}x, dL_{a^{-1}}y \rangle, \quad x, y \in T_eG.$$

En otras palabras,

Proposición 4.1.2. *Existe una correspondencia uno a uno entre métricas riemannianas invariantes a izquierda en un grupo de Lie G y productos internos en $\mathfrak{g} = T_eG$.*

Sean X, Y, Z campos invariantes a izquierda en un grupo de Lie G y sea g una métrica invariante a izquierda. Entonces para cada $a \in G$ tenemos $g_a(Y, Z) := g_a(Y_a, Z_a) = g_a(dL_aY_e, dL_aZ_e) = g_e(Y_e, Z_e)$. Por lo tanto la función $a \mapsto g_a(Y, Z)$ es constante y en particular $X(g(Y, Z)) = 0$. Luego, si ∇ es la conexión de Levi-Civita, para X, Y, Z invariantes a izquierda resulta

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) = 0 \tag{4.1.1}$$

y la fórmula de Koszul 2.3.3 para estos campos se reduce a

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y). \tag{4.1.2}$$

Con estos hechos, es fácil de probar la siguiente proposición.

Proposición 4.1.3. *En el marco anterior, si X y Y son campos invariantes a izquierda, entonces también lo es $\nabla_X Y$.*

En particular podemos definir una función bilineal $(x, y) \mapsto \nabla_x y$ en $\mathfrak{g} = T_eG$ del siguiente modo: Dados $x, y \in \mathfrak{g}$, sean X, Y los respectivos campos invariantes a izquierda asociados, es decir, tales que $X_e = x$ y $Y_e = y$. Entonces definimos $\nabla_x y$ como $(\nabla_X Y)_e$. La identidad (4.1.1) se traduce en que la aplicación $\nabla_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que a un y le asocia $\nabla_x y$, es antisimétrica respecto del producto interno $\langle\ ,\ \rangle = g_e$.

En vista de lo anterior y de la fórmula (4.1.2), podemos definir lo siguiente.

Definición 4.1.4. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real, y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno (real). La conexión de Levi-Civita asociada a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la aplicación bilineal $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, cuyo valor en (x, y) denotamos $\nabla_x y$, definida por la siguiente identidad de Koszul:

$$2\langle \nabla_x y, z \rangle = \langle [x, y], z \rangle - \langle [y, z], x \rangle + \langle [z, x], y \rangle, \quad x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Proposición 4.1.5. *Sea ∇ la conexión de Levi-Civita de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entonces ∇ satisface*

1. $[x, y] = \nabla_x y - \nabla_y x$.
2. $\langle \nabla_x y, z \rangle = -\langle y, \nabla_x z \rangle$.

Demostración. Sale inmediatamente de la definición de ∇. □

Sea G un grupo de Lie, g una métrica invariante a izquierda, y sea ∇ la conexión de Levi-Civita. Por lo visto anteriormente, ∇ induce un mapa bilineal en $\mathfrak{g} = T_eG$. Con la definición anterior resulta que esta aplicación bilineal es la conexión de Levi-Civita del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada al producto interno g_e.

Definición 4.1.6. Un tensor H de tipo $(1,1)$ en un grupo de Lie G se dice invariante a izquierda si $HdL_a = dL_aH$ para todo $a \in G$. Una 2-forma ω en G se dice invariante a izquierda si $\omega_{ap}(dL_ax, dL_ay) = \omega_p(x,y)$ para todo $x, y \in T_pG$.

Dado un tensor $H : TG \to TG$ invariante a izquierda, en particular tenemos un endomorfismo de espacios vectoriales $H_e : \mathfrak{g}(= T_eG) \to \mathfrak{g}$, y recíprocamente, dado un endomorfismo de espacios vectoriales $H_0 : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, existe un único tensor $H : TG \to TG$ invariante a izquierda tal que $H_e = H_0$. En efecto, para cada $a \in G$, $H_a : T_aG \to T_aG$ está definido como $H_a := (dL_a)_eH_0(dL_a)^{-1}{}_e$. De manera similar, las 2-formas invariantes a izquierda en G se corresponden con bilineales alternantes $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Si G posee además una métrica invariante a izquierda g, un tensor H invariante a izquierda es antisimétrico respecto a g si y sólo si H_e es antisimétrico respecto del producto interno g_e. En tal caso la 2-forma $\omega(X,Y) = g(HX,Y)$ es invariante a izquierda. Además H es inversible si y sólo si H_e es inversible. La siguiente proposición es también inmediata usando los mismos argumentos que venimos usando para pasar del grupo al álgebra.

Proposición 4.1.7. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_eG$, sea g una métrica invariante a izquierda en G y sea ∇ la conexión de Levi-Civita. Denotemos $\langle\cdot,\cdot\rangle := g_e$ y denotemos también por ∇ a la conexión de Levi-Civita del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sea $H : TG \to TG$ un tensor antisimétrico invariante a izquierda.*

1. *H es paralelo si y sólo si $H_e\nabla_x = \nabla_xH_e$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

2. *H es de Killing-Yano si y sólo si $H_e\nabla_xx = \nabla_xH_ex$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

En vista a la proposición anterior, hacemos la siguiente definición.

Definición 4.1.8. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto en $\mathfrak{g}$, y denotemos por ∇ a la conexión de Levi-Civita. Sea $H : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ un endomorfismo antisimétrico.

1. Decimos que H es paralelo (respecto del producto interno) si $\nabla_xH = H\nabla_x$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

2. Decimos que H es de Killing-Yano si $\nabla_xHx = H\nabla_xx$. Esto es equivalente a la condición
$$\nabla_xHy + \nabla_yHx = H(\nabla_xy + \nabla_yx). \tag{4.1.3}$$

La proposición anterior se traduce como sigue: en un grupo de Lie G con métrica invariante a izquierda g, un tensor $H : TG \to TG$ antisimétrico invariante a izquierda es paralelo (resp. de Killing-Yano) si y sólo si $H_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es paralelo (resp. de Killing-Yano) respecto del producto interno g_e.

De esta forma, todo el estudio de tensores paralelos ó Killing Yano invariantes a izquierda se puede estudiar a nivel del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_eG$, y esto es la forma en que se trabajará en las siguientes secciones.

4.2. Tensores de Killing-Yano no inversibles en álgebras de Lie de dimensión cuatro

Teorema 4.2.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real de dimensión cuatro, sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto interno, y sea $H:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ un endomorfismo lineal no nulo. Si H es no inversible de Killing-Yano, entonces H es paralelo.*

Demostración. Por ser H antisimétrico, existe una base ortonormal $\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que H se representa con la matriz

$$H=\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&-x\\ 0&0&x&0 \end{bmatrix}, \text{con } x\neq 0. \tag{4.2.1}$$

El objetivo es probar que las matrices de $\nabla_{e_0},\nabla_{e_1},\nabla_{e_2},\nabla_{e_3}$ escritas respecto de la base $\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$ conmutan con la matriz de H. Por la Proposición 4.1.5 sabemos que estas matrices son antisimétricas.

Por empezar notemos que

$$\mathrm{Ker}(H)=\mathrm{Span}\{e_0,e_1\},\quad \mathrm{Im}(H)=\mathrm{Span}\{e_2,e_3\},$$

y estos son subespacios ortogonales complementarios de $\mathfrak{g}$. Además, si $v\in\mathrm{Ker}(H)$, entonces $\nabla_v v\in\mathrm{Ker}(H)$ pues por ser H de Killing-Yano se tiene $H\nabla_v v=\nabla_v Hv=\nabla_v 0=0$. De aquí se sigue que $\nabla_{e_0}e_0,\nabla_{e_1}e_1\in\mathrm{Span}\{e_0,e_1\}$. Por la antisimetría de ∇_{e_0} y de ∇_{e_1} obtenemos

$$\nabla_{e_0}e_0=ae_1,\quad \nabla_{e_1}e_1=be_0$$

para ciertos reales a,b.

Usamos ahora la condición de Killing-Yano (4.1.3) aplicada a los vectores de la base $\{e_0,e_1,e_2,e_3\}$:

$$H(\nabla_{e_i}e_j+\nabla_{e_j}e_i)=\nabla_{e_i}He_j+\nabla_{e_j}He_i,\quad 0\le i<j\le 3.$$

Desarrollando cada una de ellas y usando que $He_1=He_2=0$, $He_3=xe_4$ y $He_4=-xe_3$, obtenemos

$$H(\nabla_{e_0}e_1+\nabla_{e_1}e_0)=0 \tag{4.2.2}$$
$$H(\nabla_{e_0}e_2+\nabla_{e_2}e_0)=x\nabla_{e_0}e_3 \tag{4.2.3}$$
$$H(\nabla_{e_0}e_3+\nabla_{e_3}e_0)=-x\nabla_{e_0}e_2 \tag{4.2.4}$$
$$H(\nabla_{e_1}e_2+\nabla_{e_2}e_1)=x\nabla_{e_1}e_3 \tag{4.2.5}$$
$$H(\nabla_{e_1}e_3+\nabla_{e_3}e_1)=-x\nabla_{e_1}e_2 \tag{4.2.6}$$
$$H(\nabla_{e_2}e_3+\nabla_{e_3}e_2)=x(\nabla_{e_3}e_3-\nabla_{e_2}e_2). \tag{4.2.7}$$

De las relaciones anteriores y del hecho de que $x\neq 0$ se sigue que

$$\begin{aligned} \nabla_{e_0}e_1+\nabla_{e_1}e_0&\in\mathrm{Span}\{e_0,e_1\}\\ \nabla_{e_0}e_3,\nabla_{e_0}e_2,\nabla_{e_1}e_3,\nabla_{e_1}e_2,\nabla_{e_3}e_3-\nabla_{e_2}e_2&\in\mathrm{Span}\{e_2,e_3\}. \end{aligned}$$

Resulta entonces que

$$g(\nabla_{e_0}e_1, e_2) = -g(\nabla_{e_0}e_2, e_1) = 0, \;\; g(\nabla_{e_0}e_1, e_3) = -g(\nabla_{e_0}e_3, e_1) = 0$$
$$g(\nabla_{e_1}e_0, e_2) = -g(\nabla_{e_1}e_2, e_0) = 0, \;\; g(\nabla_{e_1}e_0, e_3) = -g(\nabla_{e_1}e_3, e_0) = 0.$$

Hemos concluído que $\nabla_{e_0}e_0, \nabla_{e_0}e_1, \nabla_{e_1}e_0, \nabla_{e_1}e_1 \in \mathrm{Span}\{e_0, e_1\}$, y como ∇_{e_0} y ∇_{e_1} son antisimétricos, resulta que sus matrices en la base ortonormal $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ tienen la forma

$$\nabla_{e_0} = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix} \text{ con } a, c \in \mathbb{R}, \quad \nabla_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 0 & d & 0 \end{bmatrix} \text{ con } b, d \in \mathbb{R}\ .$$

De las expresiones anteriores obtenemos $\nabla_{e_0}e_2$, $\nabla_{e_0}e_3$, $\nabla_{e_1}e_2$ y $\nabla_{e_1}e_3$, y reemplazando estos en 4.2.3, 5.7.2, 4.2.5 y 4.2.6 resulta que

$$H(\nabla_{e_2}e_0) = H(\nabla_{e_3}e_0) = H(\nabla_{e_2}e_1) = H(\nabla_{e_3}e_1) = 0,$$

es decir, $\nabla_{e_2}e_0, \nabla_{e_3}e_0, \nabla_{e_2}e_1, \nabla_{e_3}e_1 \in \mathrm{Ker}(H) = \mathrm{Span}\{e_0, e_1\}$. Dado que ∇_{e_2} y ∇_{e_3} son antisimétricos, sus matrices en la base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ tienen la forma

$$\nabla_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & -e & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix} \text{ con } e, f \in \mathbb{R}, \quad \nabla_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & -h & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \text{ con } h, i \in \mathbb{R}$$

Dado a que las matrices de $\nabla_{e_0}, \nabla_{e_1}, \nabla_{e_2}, \nabla_{e_3}$ que hemos obtenido conmutan con la matriz de H, entonces la demostración del teorema está completa. □

4.3. Tensores paralelos inversibles en álgebras de Lie de dimensión cuatro

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión cuatro con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sea $H : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ un endomorfismo antisimétrico. De la definición se sigue que si H es paralelo, entonces es de Killing-Yano (esto es válido en cualquier dimensión). En la sección anterior hemos probado la recíproca en el caso en que H es no inversible. El caso inversible se conoce recientemente:

Teorema 4.3.1. *([ABM16] y [AD18]) Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie real de dimensión cuatro con producto interno, y $H : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es un endomorfismo lineal inversible de Killing-Yano, entonces H es paralelo.*

En la primera fuente citada se prueba un resultado mucho más general que abarca a los tensores Killing-Yano en variedades riemannianas de dimensión cuatro. En ese trabajo se afirma que toda variedad de dimensión cuatro que admite una 2-forma Killing-Yano conforme no degenerada de norma constante es paralela. Las 2-formas Killing-Yano son un caso particular de las 2-formas Killing-Yano conformes. Esto lo veremos con más detalle en las próximas secciones de este capítulo. En la segunda cita se demuestra que toda 2-forma Killing Yano conforme invariante y no degenerada en grupos de Lie es paralela.

En esta sección describiremos cuáles son las álgebras de Lie de dimensión cuatro que admiten un endomorfismo lineal inversible paralelo respecto a algún producto interno. Más aún para una tal álgebra, describiremos cuales son todos los posibles endomorfismos inversibles paralelos.

La siguiente proposición da una primera restricción sobre la estructura de $\mathfrak{g}$.

Proposición 4.3.2. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión cuatro. Si existe automorfismo lineal antisimétrico $H : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ respecto a un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que es paralelo, entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.*

Demostración. La 2-forma $\omega(x, y) = g(Hx, y)$ es no degenerada pues H es inversible. Además del Corolario 3.2.7 se tiene que ω es cerrada. Luego ω es una 2-forma simpléctica. Aplicando [Chu74, Theorem 9], resulta que $\mathfrak{g}$ es soluble. □

La siguiente proposición da una descripción de las álgebras de Lie solubles de dimensión cuatro. Recordemos que un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice unimodular si los operadores ad_x tienen traza cero para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Proposición 4.3.3. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble real de dimensión cuatro, entonces $\mathfrak{g}$ posee un ideal de dimensión 3 que es un álgebra de Lie unimodular.*

Demostración. Sea $\chi : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ el mapa $\chi(x) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x)$. Este es claramente un homomorfismo de álgebras de Lie y por lo tanto $\operatorname{Ker} \chi = \{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_x) = 0\}$ es un ideal. Notar que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \operatorname{Ker} \chi$ y de aquí se sigue que $\operatorname{Ker} \chi$ es unimodular.

Si $\mathfrak{g}$ no es unimodular entonces $\chi \neq 0$, por lo que $\dim \operatorname{Ker} \chi = 3$, y por lo tanto $\operatorname{Ker} \chi$ es el ideal buscado.

Supongamos ahora que $\mathfrak{g}$ es unimodular. Dado que $\mathfrak{g}$ es soluble, su conmutador $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es un ideal nilpotente (y por lo tanto unimodular) con $\dim \mathfrak{g} \leq 3$. Cualquier subespacio $\mathfrak{v}$ de dimensión tres que contenga a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es un ideal, y como $\mathfrak{g}$ es unimodular y $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{v}$, se sigue que $\mathfrak{v}$ también lo es. □

De esta manera, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie real soluble de dimensión cuatro con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces siempre es posible encontrar una base ortonormal $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ tal que $\mathrm{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$ es un álgebra de Lie soluble unimodular de dimensión tres y

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_0 \ltimes \mathrm{Span}\{e_1, e_2, e_3\}.$$

Pasamos a describir ahora las álgebras de Lie reales solubles unimodulares de dimensión tres. Antes introducimos la notación que usaremos para identificar algunas álgebras de Lie reales sobresalientes.

- $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) : [e_1, e_2] = e_2,$ el álgebra de Lie no abelianana de dimensión dos.
- $\mathfrak{h}_3 : [e_1, e_2] = e_3,$ el álgebra de Heisenberg de dimensión tres.
- $\mathfrak{r}_{3,\lambda} : [e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = \lambda e_3.$
- $\mathfrak{r}'_{3,\lambda} : [e_1, e_2] = \lambda e_2 - e_3, [e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3.$

Observación 4.3.4. Notar que $\mathfrak{r}_{3,-1}$ es $\mathfrak{e}(1, 1)$, el álgebra de Lie del grupo de movimientos rígidos del plano de Minkowski. Además $\mathfrak{r}_{3,0} = \mathbb{R} \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ y $\mathfrak{r}'_{3,0}$ es $\mathfrak{e}(2)$, el álgebra de Lie del grupo de movimientos rígidos del espacio euclídeo de dimensión 2.

Teorema 4.3.5 (Milnor [Mil76]). *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real soluble unimodular de dimensión 3, y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno. Entonces existe una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que*

$$[e_1, e_2] = \lambda e_3, \quad [e_2, e_3] = 0, \quad [e_3, e_1] = \mu e_2$$

donde λ, μ son reales tales tales que $\lambda \geq 0$ y tal que $\lambda > 0$ si $\mu < 0$. La clase de isomorfismo del álgebra está determinada por los signos de λ, μ de acuerdo al siguiente cuadro:

λ	μ	*álgebra de Lie*
>0	>0	$\mathfrak{e}(2) = \mathfrak{r}'_{3,0}$
>0	<0	$\mathfrak{e}(1,1) = \mathfrak{r}_{3,-1}$
>0	$=0$	$\mathfrak{h}_3$
$=0$	$=0$	$\mathbb{R}^3$

Consideremos ahora las álgebras de Lie solubles de dimensión cuatro. Existen varios artículos que tratan sobre el tema. Aquí utilizaremos la clasificación y notación propuesta en [ABDO05].

Teorema 4.3.6 ([ABDO05]). *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble real de dimensión cuatro. Entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfo a una de las siguientes álgebras de Lie: $\mathbb{R}^4$, $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_3$, $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_3$, $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,\lambda}$, $|\lambda| \leq 1$, $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}'_{3,\lambda}$, $\lambda \geq 0$, ó una de las siguientes álgebras de Lie cuyos corchetes se dan en una base e_0, e_1, e_2, e_3.*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}_4 &: [e_0, e_1] = e_2,\ [e_0, e_2] = e_3;\\
\mathfrak{aff}(\mathbb{C}) &: [e_0, e_2] = e_2,\ [e_0, e_3] = e_3,\ [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = -e_2,\\
\mathfrak{r}_4 &: [e_0, e_1] = e_1,\ [e_0, e_2] = e_1 + e_2,\ [e_0, e_3] = e_2 + e_3;\\
\mathfrak{r}_{4,\lambda} &: [e_0, e_1] = e_1,\ [e_0, e_2] = \lambda e_2,\ [e_0, e_3] = e_2 + \lambda e_3;\\
\mathfrak{r}_{4,\mu,\lambda} &: [e_0, e_1] = e_1,\ [e_0, e_2] = \mu e_2,\ [e_0, e_3] = \lambda e_3,\\
&\quad \mu\lambda \neq 0,\ -1 < \mu \leq \lambda \leq 1 \text{ ó } -1 = \mu \leq \lambda < 0;\\
\mathfrak{r}'_{4,\mu,\lambda} &: [e_0, e_1] = \mu e_1,\ [e_0, e_2] = \lambda e_2 - e_3,\ [e_0, e_3] = e_2 + \lambda e_3,\ \mu > 0;\\
\mathfrak{d}_4 &: [e_0, e_1] = e_1,\ [e_0, e_2] = -e_2,\ [e_1, e_2] = e_3,\ ;\\
\mathfrak{d}_{4,\lambda} &: [e_0, e_1] = \lambda e_1,\ [e_0, e_2] = (1-\lambda) e_2,\ [e_0, e_3] = e_3,\ [e_1, e_2] = e_3,\ \lambda \geq 0;\\
\mathfrak{d}'_{4,\lambda} &: [e_0, e_1] = \lambda e_1 - e_2,\ [e_0, e_2] = e_1 + \lambda e_2,\ [e_0, e_3] = 2\lambda e_3,\ [e_1, e_2] = e_3,\ \lambda \geq 0;\\
\mathfrak{h}_4 &: [e_0, e_1] = e_1,\ [e_0, e_2] = e_1 + e_2,\ [e_0, e_3] = 2e_3,\ [e_1, e_2] = e_3
\end{aligned}$$

Enunciamos ahora el teorema principal de este capítulo que describe los tensores inversibles paralelos en las álgebras de Lie de dimensión cuatro y las álgebras de Lie que admiten tales tensores.

Teorema 4.3.7. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real no abeliana de dimensión cuatro. Fijemos un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si $\mathfrak{g}$ admite un endomorfismo antisimétrico inversible y paralelo $H : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de las siguientes álgebras de Lie solubles: $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,0}$, $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}'_{3,0}$, $\mathfrak{r}'_{4,\mu,0}$, $\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$, $\mathfrak{d}_{4,2}$, $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$, $\lambda > 0$, $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$.*

Más aún, dada $\mathfrak{g}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como antes, existe una base ortonormal $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ tal que $\mathfrak{v} := \mathrm{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y tal que se da una de las siguientes situaciones:

1. *$\mathfrak{g} \cong \mathbb{R} \times \mathfrak{r}_{3,0}$, $\mathfrak{v} = \mathbb{R}^3$ y en la base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$:*

$$\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $\lambda > 0$ y $c, d > 0$.

2. $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R} \times \mathfrak{r}'_{3,0}$, $\mathfrak{v} = \mathbb{R}^3$ *y en la base* $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$

$$\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix}$$

donde $t, a, f > 0$.

3. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{r}'_{4,|\mu|,0}$, $\mathfrak{v} = \mathbb{R}^3$ *y en la base* $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$

$$\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix}$$

donde $t, a, f > 0$, *y* $\mu \neq 0$.

4. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$ *y* $\mathfrak{v} \cong \mathfrak{h}_3$. *Se tiene* $[e_1, e_2] = te_3$ *con* $t > 0$, $[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$, *y las matrices de* $\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}}$ *y* H *en la base* $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ *son*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} \frac{t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

donde $c > 0$.

5. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{d}_{4,2}$ *y* $\mathfrak{v} \cong \mathfrak{h}_3$. *Se tiene* $[e_1, e_2] = te_3$ *con* $t > 0$, $[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$, *y las matrices de* $\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}}$ *y* H *en la base* $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ *son*

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a & 0. \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{t}{2} \end{bmatrix}$$

donde $a > 0$.

6. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ *y* $\mathfrak{v} \cong \mathfrak{h}_3$. *Se tiene* $[e_1, e_2] = te_3$ *con* $t > 0$, $[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$, *y las matrices de* $\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}}$ *y* H *en la base* $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ *son*

$$\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} \frac{t}{2} & b_1 & 0 \\ -b_1 & \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & t. \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0. \end{bmatrix}$$

donde $c > 0$ *y* $|b_1| > 0$. *El valor de* λ *está determinado como* $\lambda = \frac{t}{2|b_1|}$.

7. $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R} \times \mathfrak{e}(2) \cong \mathbb{R} \times \mathfrak{r}'_{3,0}$, *y* $\mathfrak{v} \cong \mathfrak{e}(2)$. *Se tiene* $[e_1, e_2] = te_3$, $[e_2, e_3] = 0$, $[e_3, e_1] = te_2$, *con* $t > 0$, *y las matrices de* $\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}}$ *y* H *en la base* $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ *son*

$$\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 \\ 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix}$$

donde $a, f > 0$.

8. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ *y* $\mathfrak{v} \cong \mathfrak{e}(1,1)$. *Se tiene* $[e_1, e_2] = 0$, $[e_2, e_3] = te_1$, $[e_3, e_1] = -te_2$, *con* $t > 0$, *y las matrices de* $\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}}$ *y* H *en la base* $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ *son*

$$\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_2}{\lambda_1}e - \frac{a_1}{\lambda_1}f & -\frac{a_1}{\lambda_1}e - \frac{a_2}{\lambda_1}f & 0 \\ \frac{a_2}{\lambda_1}e + \frac{a_1}{\lambda_1}f & 0 & 0 & -e \\ \frac{a_1}{\lambda_1}e + \frac{a_2}{\lambda_1}f & 0 & 0 & -f \\ 0 & e & f & 0 \end{bmatrix},$$

donde $a_1 > 0$, $e > f \geq 0$, *y se verifica* $t^2 + a_2^2 = a_1^2$.

La demostración será dada en diferentes etapas y nos ocupará el resto de la sección.

De la Proposición 4.3.3, obtenemos una descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_0 \ltimes_{\mathrm{ad}_{e_0}} \mathfrak{v},$$

donde $\mathfrak{v}$ es un álgebra de Lie real soluble unimodular de dimensión tres y e_0 es un vector no nulo ortogonal a $\mathfrak{v}$. Por el Teorema 4.3.5 sabemos que $\mathfrak{v}$ es isomorfa a $\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{h}_3$, $\mathfrak{e}(1,1)$ o $\mathfrak{e}(2)$.

En lo que sigue, dado un vector $x \in \mathfrak{g}$, denotamos por $\overline{x}$ su proyección ortogonal a $\mathfrak{v}$. Denotemos por $\overline{\nabla}$ a la conexión de Levi-Civita del álgebra de Lie $\mathfrak{v}$ con el producto interno de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ restringido. Afirmamos que $\overline{\nabla}_x y = \overline{\nabla_x y}$ para todo $x, y \in \mathfrak{v}$. En efecto, de la definición de la conexión de Levi-Civita resulta

$$\langle \nabla_x y, z \rangle = \langle \overline{\nabla}_x y, z \rangle, \quad x, y, z \in \mathfrak{v}.$$

y nuestra afirmación se sigue de esto.

Lema 4.3.8. *([Mil76, Section 5]) En las condiciones anteriores, se verifican las siguientes igualdades*

1. $\nabla_{e_0} e_0 = 0$,
2. $\nabla_{e_0} u = Au, \forall u \in \mathfrak{v}$,
3. $\nabla_u e_0 = -Su, \ \forall\, u \in \mathfrak{v}$,
4. $\nabla_u v = \overline{\nabla}_u v + \langle Su, v \rangle e_0 = \overline{\nabla_u v} + \langle Su, v \rangle e_0, \ \forall\, u, v \in \mathfrak{v}$,

donde S *y* A *son las partes simétricas y antisimétricas de* $\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}}$ *respectivamente.*

$$A = \frac{\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} - \mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}}^T}{2}, \quad S = \frac{\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} + \mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}}^T}{2}$$

y $\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}}^T$ *denota el operador traspuesto de* $\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}}$.

Notar que por ser H paralelo, $0 = H\nabla_{e_0} e_0 = \nabla_{e_0} He_0$, por lo que $He_0 \in \operatorname{Ker} \nabla_{e_0}$. Además He_0 y e_0 son ortogonales pues H es antisimétrica. Luego $\{e_0, He_0\}$ es un conjunto linealmente independiente y ortogonal en el subespacio vectorial $\operatorname{Ker} \nabla_{e_0}$. La dimensión de este subespacio puede ser 2 ó 4 pues ∇_{e_0} es antisimétrico. Analizaremos estas posibilidades para cada clase de isomorfismo del álgebra $\mathfrak{v}$:

Caso: $\mathfrak{v} \cong \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}e_0 \ltimes_{\mathrm{ad}\, e_0} \mathbb{R}^3$

a. $\dim \mathrm{Ker}\, \nabla_{e_0} = 4$

Del ítem 2 del Lema 4.3.8, se sigue que $A = 0$ y por lo tanto $\mathrm{ad}_{e_0} |_{\mathfrak{v}} = \mathrm{ad}_{e_0} |_{\mathfrak{v}}{}^T$. Luego existe una base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathfrak{v}$ tal que la matriz de $\mathrm{ad}_{e_0} |_{\mathfrak{v}}$ en esta base es diagonal, es decir,

$$\mathrm{ad}_{e_0} |_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{4.3.1}$$

Podemos suponer que $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3|$. Existen diferentes posibilidades en cuanto a los valores que pueden tomar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Siguiendo la demostración del Teorema 4.3.6 en [ABDO05], obtenemos:

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, entonces $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^4$.
- Si $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_3 \neq 0$, entonces $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{r}_{3,\lambda} \times \mathbb{R}$, donde $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$.
- Si $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, entonces $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{r}_{4,\mu,\lambda}$ para ciertos reales μ, λ tales que $-1 \leq \mu \leq \lambda \leq 1$.

El primer caso es el álgebra de Lie abeliana, la cual no estamos considerando. Por esa razón suponemos $\lambda_3 \neq 0$. Usaremos el Lema 4.3.8. Notar que

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad A = 0 \ .$$

Tengamos en cuenta que como el ideal $\mathfrak{v}$ es abeliano, la conexión de Levi Civita es siempre cero en $\mathfrak{v}$, es decir $\overline{\nabla_{v_i} v_j} = 0 \ \forall\ i, j$. Resulta entonces que la expresiones matriciales de $\nabla_{v_1}, \nabla_{v_2}, \nabla_{v_3}$ respecto de la base $\{e_0, v_1, v_2, v_3\}$ son

$$\nabla_{v_1} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{v_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dado que H es antisimétrico, su matriz respecto de la base ortonormal $\{e_0, v_1, v_2, v_3\}$ tiene la forma

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -d & -e \\ b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.3.2}$$

La condición de paralelismo sobre H equivale a que las matrices de ∇_{v_i} y de H conmuten para todo $i = 1, 2, 3$. Esto se traduce en que:

$$\lambda_1 c = \lambda_1 d = \lambda_2 a = \lambda_2 f = \lambda_2 d = \lambda_2 c = \lambda_2 b = \lambda_3 e = \lambda_3 f = \lambda_3 a = \lambda_3 b = 0.$$

Puesto que $\lambda_3 \neq 0$, las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$\lambda_1 c = \lambda_1 d = \lambda_2 d = \lambda_2 c = e = f = a = b = 0.$$

De esta forma

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y siendo H inversible, se tiene que $c \neq 0$ y $d \neq 0$. De las ecuaciones anteriores se tiene que $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_1 = 0$. Concluimos así que el álgebra $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_{3,0} \times \mathbb{R}$.

Escribimos finalmente el resultado:

$$\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cambiando e_0 por $-e_0$ si es necesario podemos suponer $\lambda_3 > 0$. Cambiando e_2 por $-e_2$ y e_3 por $-e_3$ podemos suponer también que $c, d > 0$.

b. $\dim \mathrm{Ker}\, \nabla_{e_0} = 2$

Llamaremos $W = \mathrm{Ker}\, \nabla_{e_0}$ y $W^\perp$ a su complemento ortogonal. Para este caso $\left\{e_0, \frac{He_0}{\|He_0\|}\right\}$ constituye una base ortonormal de $\mathrm{Ker}\, \nabla_{e_0}$. Notar que H preserva W y $W^\perp$ pues H es antisimétrica y conmuta con ∇_{e_0}.

Sea $u \in W^\perp$ un vector unitario. Luego $\{u, \frac{Hu}{\|H\|}\}$ es una base ortonormal de $W^\perp$ y por lo tanto $\left\{e_0, \frac{He_0}{\|He_0\|}, u, \frac{Hu}{\|Hu\|}\right\}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{g}$. Es fácil ver que la matriz de H en la base dada es

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -\|He_0\| & 0 & 0 \\ \|He_0\| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\|Hu\| \\ 0 & 0 & \|Hu\| & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.3.3}$$

Para una mayor claridad denotamos:

$$w_0 = e_0, \quad w_1 = \frac{He_0}{\|He_0\|}, \quad w_2 = u, \quad w_3 = \frac{Hu}{\|Hu\|}.$$

De modo que $\mathrm{Ker}(\nabla_{w_0}) = \mathrm{Span}\{w_0, w_1\}$. Además escribimos

$$\mathrm{ad}_{w_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \tag{4.3.4}$$

Por lo tanto:

$$S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2a_1 & b_1 + a_2 & c_1 + a_3 \\ a_2 + b_1 & 2b_2 & c_2 + b_3 \\ a_3 + c_1 & b_3 + c_2 & 2c_3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(b_1 - a_2) & \frac{1}{2}(c_1 - a_3) \\ \frac{1}{2}(a_2 - b_1) & 0 & \frac{1}{2}(c_2 - b_3) \\ \frac{1}{2}(a_3 - c_1) & \frac{1}{2}(b_3 - c_2) & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $w_1 \in \mathrm{Ker}(\nabla_{w_0})$, del ítem 2 del Lema 4.3.8, deducimos que $Aw_1 = \nabla_{w_0} w_1 = 0$. Esto implica que $a_2 = b_1$ y $a_3 = c_1$. En particular

$$\nabla_{w_0} w_2 = Aw_2 = \frac{1}{2}(b_3 - c_2) w_3, \quad \nabla_{w_0} w_3 = \frac{1}{2}(c_2 - b_3) w_2.$$

Luego la Matriz de ∇_{w_0} en la base $\{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ es

$$\nabla_{w_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_2 - b_3) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(b_3 - c_2) & 0 \end{bmatrix}$$

y esta matriz claramente conmuta con la matriz de H.

Planteamos ahora la condición $\nabla_{w_1} H w_0 = H \nabla_{w_1} w_0$. Usamos el Lema 4.3.8 para escribir la matriz (antisimétrica) de ∇_{w_1}. Obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{w_1} w_0 &= -Sw_1 = -a_1 w_1 - \frac{1}{2}(a_2 + b_1) w_2 - \frac{1}{2}(a_3 + c_1) w_3 = -a_1 - a_2 w_2 - a_3 w_3, \\
\nabla_{w_1} w_1 &= \langle Sw_1, w_1 \rangle w_0 = a_1 w_0, \\
\nabla_{w_1} w_2 &= \langle Sw_1, w_2 \rangle w_0 = \frac{b_1 + a_2}{2} w_0 = a_1 w_0, \\
\nabla_{w_1} w_3 &= \langle Sw_1, w_3 \rangle w_0 = \frac{c_1 + a_3}{2} w_0 = a_3 w_0.
\end{aligned}$$

La matriz de ∇_{w_1} resulta

$$\nabla_{w_1} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es fácil verificar que para que esta matriz conmute con la matriz de H debe suceder que $a_2 = a_3 = 0$. Entonces, hasta ahora hemos obtenido

$$a_2 = b_1 = a_3 = c_1 = 0.$$

Planteamos ahora la condición $\nabla_{w_2} H = H \nabla_{w_2}$. Nuevamente usamos el Lema 4.3.8 usando las restricciones que hemos obtenido hasta ahora. Usaremos también la identidad $\nabla_x y - \nabla_y x = [x, y]$, la cual es cero si $x, y \in \mathfrak{v}$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\nabla_{w_2} w_0 &= -Sw_2 = -b_2 w_2 - \frac{b_3 + c_2}{2} w_3, \\
\nabla_{w_2} w_1 &= \nabla_{w_1} w_2 = 0, \\
\nabla_{w_2} w_2 &= \langle Sw_2, w_2 \rangle w_0 = b_2 w_0, \\
\nabla_{w_2} w_3 &= \langle Sw_2, w_3 \rangle w_0 = \frac{c_2 + b_3}{2} w_0.
\end{aligned}$$

Luego la matriz de ∇_{w_2} es

$$\nabla_{w_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_2 & \frac{b_3 + c_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b_3 + c_2}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No es difícil ver que esta matriz conmuta con la matriz de H precisamente cuando

$$b_2 = b_3 + c_2 = 0.$$

Luego $\nabla_{w_2} = 0$. Finalmente consideramos la condición $H\nabla_{w_3} = \nabla_{w_3} H$. Usando el Lema 4.3.8 y la relación $\nabla_x y - \nabla_y x = [x, y]$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{w_3} w_0 &= -Sw_3 = -c_3 w_3,\\
\nabla_{w_3} w_1 &= \nabla_{w_1} w_3 = 0,\\
\nabla_{w_3} w_2 &= \nabla_{w_2} w_3 = 0,\\
\nabla_{w_3} w_3 &= \langle Sw_3, w_3\rangle w_0 = c_3 w_0
\end{aligned}$$

y por lo tanto la matriz de ∇_{w_3} es

$$\nabla_{w_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No es difícil ver que esta matriz conmuta con H si y sólo si $c_3 = 0$. Luego $\nabla_{w_3} = 0$. Resumiendo, las matrices de $\mathrm{ad}_{w_0}|_{\mathfrak{v}}$ y de H en la base ortonormal $\{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ tienen la forma

$$\mathrm{ad}_{w_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix}$$

donde a y f son reales positivos. Notemos que $t \neq 0$ pues si fuera nulo, tendríamos $A = 0$ y por el Lema 4.3.8 se tendría que $\nabla_{w_0} = 0$, pero estamos suponiendo que $\operatorname{Ker} \nabla_{w_0}$ tiene dimensión 2. Intercambiando $\{w_0, w_1\}$ por $\{-w_0, -w_1\}$ si es necesario podemos suponer que $t > 0$.

Siguiendo la demostración del Teorema 4.3.6 dada en [ABDO05], obtenemos la siguiente conclusión:

- Si $\mu = 0$, entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathfrak{r}'_{3,0}$.
- Si $\mu \neq 0$, se puede suponer que es positivo y en tal caso $\mathfrak{g}$ es isomorfo a $\mathfrak{r}'_{4,\mu,0}$.

Caso: $\mathfrak{v} \cong \mathfrak{h}_3$, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}e_0 \ltimes_{\mathrm{ad}_{e_0}} \mathfrak{h}_3$

Por el Teorema 4.3.5, existe una base ortonormal de $\mathfrak{v}$ y un número real positivo t tal que

$$[e_1, e_2] = te_3, \quad [e_2, e_3] = 0, \quad [e_3, e_1] = 0\ .$$

Denotemos por $\overline{\nabla}$ a la conexión de Levi-Civita de $\mathfrak{v}$. Un simple cálculo usando la fórmula de Koszul muestra que la representación matricial de $\overline{\nabla}_{e_1}, \overline{\nabla}_{e_2}, \overline{\nabla}_{e_3}$ está dada por

$$\overline{\nabla}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{t}{2} \\ 0 & \frac{t}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\nabla}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{t}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{t}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\nabla}_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{t}{2} & 0 \\ -\frac{t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0. \end{bmatrix} \tag{4.3.5}$$

De acuerdo a [ABDO05, Lemma 1.2], la matriz de la derivación $\mathrm{ad}_{e_0}\ |_{\mathfrak{v}}$ en la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ tiene la forma

$$\mathrm{ad}_{e_0}\ |_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & a_1 + b_2 \end{bmatrix} \tag{4.3.6}$$

Analicemos las posibilidades según el valor de $\dim \mathrm{Ker}\, \nabla_{e_0}$ que puede ser 2, ó 4 pues e_0 ya es un elemento del kernel por el Lema 4.3.8.

a. $\dim \mathrm{Ker}\, \nabla_{e_0} = 4$

Del ítem 2 del Lema 4.3.8, (usando la notación del mismo) se tiene que $A = 0$ y por lo tanto $\mathrm{ad}_{e_0}\ |_{\mathfrak{v}} = \mathrm{ad}_{e_0}\ |_{\mathfrak{v}}{}^T$. Luego la matriz de $\mathrm{ad}_{e_0}\ |_{\mathfrak{v}}$ en la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ es simétrica y concluímos así que $a_3 = b_3 = 0$ y que $D = \mathrm{ad}_{e_0}\ |_{\{e_1,e_2\}}$ es una matriz simétrica. Denotamos por λ_1 y λ_2 los autovalores de D y sea $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormal de autovectores de la matriz D tal que $Dv_i = \lambda_i v_i$.

Escribimos a v_1 y v_2 como combinaciones lineales de e_1, e_2:

$$v_1 = x_1 e_1 + a_2 y_1, \quad v_2 = x_2 e_1 + y_2 e_2$$

Cambiando v_1 por $-v_1$ si es necesario, podemos suponer que $a_1 b_2 - a_2 b_1$, el determinante de la matriz (ortogonal) de cambio de base, es igual a 1. Definamos también $v_0 = e_0$ y $v_3 = e_3$. Entonces los corchetes de Lie en la nueva base $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ resultan:

$$\begin{aligned} [v_1, v_2] &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) t v_3 = t v_3 \\ [v_1, v_3] &= [v_2, v_3] = 0 \end{aligned}$$

y además la matriz de ad_{v_0} es

$$\mathrm{ad}\, v_0\ |_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix}, \tag{4.3.7}$$

De acuerdo a la demostración del Teorema 4.3.6 dada en [ABDO05] se tienen las siguientes alternativas respecto a la estructura de $\mathfrak{g}$.

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \mathfrak{g} \cong \mathbb{R} \times \mathfrak{h}_3$.
2. $\lambda_1 = -\lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{g} \cong \mathfrak{d}_4$.
3. $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{g} \cong \mathfrak{d}_{4,\lambda} \cong \mathfrak{d}_{4,1-\lambda}$, donde $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

A continuación escribiremos las matrices de $\nabla_{v_0}, \nabla_{v_1}, \nabla_{v_2}, \nabla_{v_3}$ respecto de la base $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ usando el Lema 4.3.8. También haremos uso de la fórmula $\nabla_x y - \nabla_y x = [x, y]$.

Por hipótesis tenemos que $\nabla_{v_0} = 0$. Luego

$$\begin{aligned} &\nabla_{v_1} v_0 = [v_1, v_0] - \nabla_{v_0} v_1 = -\mathrm{ad}_{v_0} v_1 = -\lambda_1 v_1. \\ &\nabla_{v_1} v_1 = \langle \nabla_{v_1} v_1, v_1 \rangle v_1 + \langle \nabla_{v_1} v_1, v_2 \rangle v_2 + \langle \nabla_{v_1} v_1, v_3 \rangle v_3 + \langle \mathrm{ad}_{v_0} v_1, v_1 \rangle v_0. \end{aligned}$$

Primero notemos que $\langle \nabla_{v_1} v_1, v_1 \rangle = 0$. Luego usando la fórmula de Koszul obtenemos

$$2\langle \nabla_{v_1} v_1, v_2 \rangle = \langle [v_1, v_1], v_2 \rangle - \langle [v_1, v_2], v_1 \rangle + \langle [v_2, v_1], v_1 \rangle = 0.$$

De manera similar

$$2\langle \nabla_{v_1} v_1, v_3\rangle = \langle [v_1, v_1], v_3\rangle - \langle [v_1, v_3], v_1\rangle + \langle [v_3, v_1], v_1\rangle = 0.$$

Resulta así que $\nabla_{v_1} v_1 = \lambda_1 v_0$. Por la antisimetría de ∇_{v_1} obtenemos que $\nabla_{v_1} v_2$ y $\nabla_{v_1} v_3$ sólo tienen componentes en $\mathrm{Span}\{v_2, v_3\}$. Luego

$$\begin{aligned} \nabla_{v_1} v_2 &= \langle \nabla_{v_1} v_2, v_2\rangle v_2 + \langle \nabla_{v_1} v_2, v_3\rangle v_3, \\ \nabla_{v_1} v_3 &= \langle \nabla_{v_1} v_3, v_2\rangle v_2 + \langle \nabla_{v_1} v_3, v_3\rangle v_3. \end{aligned}$$

Usando la fórmula de Koszul obtenemos que

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{v_1} v_2, v_2\rangle &= \langle [v_1, v_2], v_2\rangle - \langle [v_2, v_2], v_1\rangle + \langle [v_2, v_1], v_2\rangle = 0, \\ 2\langle \nabla_{v_1} v_2, v_3\rangle &= \langle [v_1, v_2], v_3\rangle - \langle [v_2, v_3], v_1\rangle + \langle [v_3, v_1], v_2\rangle = t. \end{aligned}$$

Obtenemos finalmente que la matriz de ∇_{v_1} es

$$\nabla_{v_1} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{t}{2} \\ 0 & 0 & \frac{t}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculamos ahora las matriz de ∇_{v_2}. Se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_{v_2} v_0 &= [v_2, v_0] + \nabla_{v_0} v_2 = -\operatorname{ad}_{v_0} v_2 = -\lambda_2 v_2, \\ \nabla_{v_2} v_1 &= [v_2, v_1] + \nabla_{v_1} v_2 = -t v_3 + \frac{t}{2} v_3 = -\frac{t}{2} v_3. \end{aligned}$$

Por la antisimetría de ∇_{v_2} y dados los cálculos anteriores, obtenemos que

$$\nabla_{v_2} v_2 = \lambda_2 v_0 + \langle \nabla_{v_2} v_2, v_3\rangle v_3.$$

Usando la fórmula de Koszul se verifica rápidamente que

$$2\langle \nabla_{v_2} v_2, v_3\rangle = 0.$$

Luego la matriz de ∇_{v_2} es

$$\nabla_{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t}{2} \\ -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{t}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \nabla_{v_3} v_0 &= -\operatorname{ad}_{v_0} v_3 + \nabla_{v_0} v_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2) v_3, \\ \nabla_{v_3} v_1 &= [v_3, v_1] + \nabla_{v_1} v_3 = -\frac{t}{2} v_2, \\ \nabla_{v_3} v_2 &= [v_3, v_2] + \nabla_{v_2} v_3 = \frac{t}{2} v_1. \end{aligned}$$

Dado que ∇_{v_3} es antisimétrico, resulta que su matriz es

$$\nabla_{v_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1+\lambda_2 \\ 0 & 0 & \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{t}{2} & 0 & 0 \\ -(\lambda_1+\lambda_2) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz de H en la base $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ tiene la forma dada en 4.3.2. La condición de que H sea paralelo se traduce en las ecuaciones $\nabla_{v_i} H = H\nabla_{v_i}$, $i = 1, 2, 3$. Desarrollando estas igualdades resulta que

$$\begin{array}{lll} (1)\ c\frac{t}{2} = d\lambda_1, & (5)\ d\lambda_2 = c\frac{t}{2}, & (9)\ e(\lambda_1+\lambda_2) = b\frac{t}{2}, \\ (2)\ -e\lambda_1 = b\frac{t}{2}, & (6)\ -a\frac{t}{2} = -\lambda_2 f, & (10)\ -a\frac{t}{2} = f(\lambda_1+\lambda_2), \\ (3)\ b\lambda_1 = -e\frac{t}{2}, & (7)\ f\frac{t}{2} = a\lambda_2, & (11)\ a(\lambda_1+\lambda_2) = -f\frac{t}{2}, \\ (4)\ c\lambda_1 = d\frac{t}{2}, & (8)\ c\lambda_2 = d\frac{t}{2}, & (12)\ e\frac{t}{2} = b(\lambda_1+\lambda_2). \end{array}$$

En el caso 1. en que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, es decir $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R} \times \mathfrak{h}_3$, de las ecuaciones anteriores deducimos que $H = 0$ pues $t > 0$. Luego no existe H paralelo inversible.

En el caso 2. y 3., es decir donde por lo menos uno de los valores λ_1, λ_2 es distinto de cero, comparando (1) y (5), (4) y (8), (3) y (12), (2) y (9), (6) y (10), y finalmente (7) y (11), obtenemos las siguientes igualdades.

$$\begin{array}{lll} (13)\ d(\lambda_1-\lambda_2) = 0, & (15)\ b(2\lambda_1+\lambda_2) = 0, & (17)\ f(\lambda_1+2\lambda_2) = 0, \\ (14)\ c(\lambda_1-\lambda_2) = 0, & (16)\ e(2\lambda_1+\lambda_2) = 0, & (18)\ a(\lambda_1+2\lambda_2) = 0. \end{array}$$

En el caso 2. en que $\lambda_1 = -\lambda_2 \neq 0$, reemplazando λ_2 por $-\lambda_1$ en (13) a (18), obtenemos

$$d\lambda_1 = c\lambda_1 = b\lambda_1 = e\lambda_1 = f\lambda_1 = a\lambda_1 = 0$$

de donde concluímos que $a = b = c = d = e = f = 0$ y por lo tanto $H = 0$, y por lo tanto no existe tensores paralelos en este caso.

Consideremos ahora el caso 3, es decir, el caso donde $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Para ello vamos a considerar las distintas posibilidades sobre los valores que pueden tomar $\lambda_1 - \lambda_2,\ 2\lambda_1 + \lambda_2,\ \lambda_1 + 2\lambda_2$. Es fácil ver que si dos de ellos son iguales a cero, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, lo cual contradice que $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Luego, por lo menos dos de ellos tiene que ser distintos de cero. Supongamos que los tres son distintos de cero. Usando las ecuaciones de (13) a (18) concluímos que $H = 0$, lo cual contradice que H sea inversible. Restan solo considerar tres casos:

- $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, $2\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ y $\lambda_1 + 2\lambda_2 \neq 0$. O equivalentemente, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$. Notar que en este caso $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$.

  Las ecuaciones de (15) a (18) implican que $b = e = a = f = 0$. Luego existe H inversible si y sólo si $cd \neq 0$.

  Por (1) y (5) resulta que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{ct}{2d}$; mientras que de (4) y (8) resulta que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{dt}{2c}$. Igualando resulta $d^2 = c^2$. Se abren dos casos

- Si $c = d$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{t}{2}$. Notar que

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{v_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} \frac{t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}.$$

  Notar que cambiando $\{v_2, v_3\}$ por $\{-v_2, -v_3\}$ si es necesario podemos suponer que c es positivo.

- Si $c = -d$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{t}{2}$.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{v_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} -\frac{t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{bmatrix}.$$

Notar que podemos pasar del segundo al primer caso cambiando v_0 por $-v_0$.

- $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, $2\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ y $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$. Notar que de aquí se deduce que $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$.

  De las ecuaciones (13)-(16) resulta que $c = d = e = b = 0$. Para que H resulte inversible debemos tener que $af \neq 0$. De (6) y (7) se deduce que $a^2 = f^2$. Se abren dos casos

  - Si $a = f$, de (10) y (11) obtenemos que $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{t}{2}$, y así $\lambda_2 = \frac{t}{2}$ y $\lambda_1 = -t$. Por lo tanto $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{-t}{-t/2} = 2$. Luego $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{d}_{4,2}$. Notar que

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a & 0. \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{v_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{t}{2} \end{bmatrix}.$$

    Notar que cambiando $\{v_2, v_3\}$ por $\{-v_2, -v_3\}$ si es necesario podemos suponer $a > 0$.

  - Si $a = -f$, de (10) y (11) obtenemos que $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{t}{2}$ y por lo tanto $\lambda_2 = -\frac{t}{2}$ y $\lambda_1 = t$. Luego $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{t}{t/2} = 2$. Luego también $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{d}_{4,2}$. Notar que

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & -a & 0. \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{v_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t}{2} \end{bmatrix}.$$

  Notar que podemos pasar del segundo al primer caso cambiando v_0 por $-v_0$.

- $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ y $\lambda_1 + 2\lambda_2 \neq 0$. Notar que necesariamente $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$.

  De (13), (14), (17) y (18) deducimos que $d = c = a = f = 0$. Dado que H es inversible necesariamente $be \neq 0$. Luego de (2) y (3) deducimos que $e^2 = b^2$. De aquí se abren dos casos:

- Si $e = b$, de (9) y (12) deducimos que $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{t}{2}$. Luego $\lambda_1 = -\frac{t}{2}$ y $\lambda_2 = t$. Luego $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{-t/2}{t/2} = -1$ y por lo tanto $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{d}_{4,-1} = \mathfrak{d}_{4,2}$. Notar que

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0. \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{v_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} -\frac{t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t}{2} \end{bmatrix}$$

  Notar que haciendo cambiando $\{v_2, v_3\}$ por $\{-v_2, -v_3\}$ si es necesario podemos suponer $b > 0$. Más aún, notar que si intercambiamos v_1 y v_2 y cambiamos v_3 por $-v_3$ volvemos al caso en que $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, $2\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ y $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ que ya hemos tratado anteriormente.
- Si $e = -b$, de (9) y (12) deducimos que $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{t}{2}$ y por lo tanto $\lambda_1 = \frac{t}{2}$ y $\lambda_2 = -t$. Luego $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = -1$ y nuevamente $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{d}_{4,-1} = \mathfrak{d}_{4,2}$. Notar que

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0. \end{bmatrix}, \quad \mathrm{ad}_{v_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} \frac{t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{t}{2} \end{bmatrix}.$$

  Notar que siempre se puede pasar del segundo al primer caso.

b. $\dim \mathrm{Ker}\, \nabla_{e_0} = 2$

Notar que en este caso $\mathrm{Ker}\, \nabla_{e_0} = \mathrm{Span}\{e_0, He_0\}$. En efecto $e_0 \in \mathrm{Ker}\, \nabla_{e_0}$ por el Lema 4.3.8, y por lo tanto $He_0 \in \mathrm{Ker}\, \nabla_{e_0}$ pues H conmuta con ∇_{e_0} y entonces preserva el kernel. Suponemos H se escribe de la siguiente forma para la base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ con $\mathrm{span}\{e_1, e_2, e_2\} \simeq \mathfrak{h}_3$.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -d & -e \\ b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \end{bmatrix}$$

Usamos las expresiones 4.3.6 y 4.3.5 junto con el Lema 4.3.8 para obtener las expresiones de $\nabla_{e_0}, \nabla_{e_1}, \nabla_{e_2}, \nabla_{e_3}$ en la base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. Resulta que

$$\nabla_{e_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_1-a_2}{2} & -\frac{a_3}{2} \\ 0 & \frac{a_2-b_1}{2} & 0 & -\frac{b_3}{2} \\ 0 & \frac{a_3}{2} & \frac{b_3}{2} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \nabla_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & \frac{a_2}{2} & \frac{a_3}{2} \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_2+b_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{t}{2} \\ -\frac{a_3}{2} & 0 & \frac{t}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\nabla_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_2+b_1}{2} & b_2 & \frac{b_3}{2} \\ -\frac{a_2+b_1}{2} & 0 & 0 & \frac{t}{2} \\ -b_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b_3}{2} & -\frac{t}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \nabla_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_3}{2} & \frac{b_3}{2} & \frac{a_1+b_2}{2} \\ -\frac{a_3}{2} & 0 & \frac{t}{2} & 0 \\ -\frac{b_3}{2} & -\frac{t}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{a_1+b_2}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lema 4.3.9. $a = b = e = f = a_3 = b_3 = 0$.

Demostración. Notar que $H\nabla_{e_0} e_0 = 0$. Dado que $H\nabla_{e_0} = \nabla_{e_0} H$ tenemos

$$0 = \langle \nabla_{e_0} He_0, e_3 \rangle = -\langle \nabla_{e_0} e_3, He_0 \rangle = \frac{aa_3}{2} + \frac{bb_3}{2},$$

es decir,

$$aa_3 + bb_3 = 0 \tag{4.3.8}$$

En el cálculo anterior y en el que sigue usamos las expresiones matriciales de H y de ∇_{e_i}. Desarrollamos ahora la igualdad $\langle H\nabla_{e_3}e_1, e_2\rangle = \langle \nabla_{e_3}He_1, e_2\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle H\nabla_{e_3}e_1, e_2\rangle &= -\langle \nabla_{e_3}e_1, He_2\rangle = \frac{a_3b}{2},\\ \langle \nabla_{e_3}He_1, e_2\rangle &= -\langle \nabla_{e_3}e_2, He_1\rangle = \frac{ab_3}{2}.\end{aligned}$$

Concluímos así que

$$ba_3 - ab_3 = 0 \tag{4.3.9}$$

Juntando 4.3.8 y 4.3.9 obtenemos que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0.$$

El determinante de la matriz de este sistema es $-a^2 - b^2$. Si es igual a cero, entonces $a = b = 0$ y por lo tanto de la expresión matricial de H obtenemos $He_0 = ce_3$. Pero entonces, e_3 está en el kernel de ∇_{e_0} y de la expresión de ∇_{e_0} obtenemos que $a_3 = b_3 = 0$. Si el determinante fuese distinto de cero, entonces necesariamente $a_3 = b_3 = 0$ y de la expresión matricial de ∇_{e_0} obtenemos $\nabla_{e_0}e_3 = 0$, es decir, $e_3 \in \mathrm{Ker}(\nabla_{e_0}) = \mathrm{Span}\{e_0, He_0\}$. Dado que tanto e_3 como He_0 son perpendiculares a e_0, concluímos que He_0 es múltiplo de e_3. Pero entonces $a = b = 0$, lo cual es un absurdo. Luego concluímos que $a = b = a_3 = b_3 = 0$.

Sólo resta probar que $e = f = 0$. Para ello desarrollamos primero la igualdad $\langle H\nabla_{e_0}e_1, e_3\rangle = \langle \nabla_{e_0}He_1, e_3\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle H\nabla_{e_0}e_1, e_3\rangle &= -\langle \nabla_{e_0}e_1, He_3\rangle = f\frac{a_2 - b_1}{2}\\ \langle \nabla_{e_0}He_1, e_3\rangle &= -\langle \nabla_{e_0}e_3, He_1\rangle = -\langle 0, He_1\rangle = 0\end{aligned}$$

Dado que $a_2 - b_1 \neq 0$, pues $\nabla_{e_0} \neq 0$, deducimos que $f = 0$. Desarrollamos ahora la igualdad $\langle H\nabla_{e_0}e_2, e_3\rangle = \langle \nabla_{e_0}He_2, e_3\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle H\nabla_{e_0}e_2, e_3\rangle &= -\langle \nabla_{e_0}e_2, He_3\rangle = e\frac{b_1 - a_2}{2}\\ \langle \nabla_{e_0}He_2, e_3\rangle &= -\langle He_2, \nabla_{e_0}e_3\rangle = -\langle He_2, 0\rangle = 0.\end{aligned}$$

Otra vez, por ser $b_1 - a_2 \neq 0$ deducimos que $e = 0$. Esto completa la demostración del Lema. $\square$

Hasta ahora tenemos que las matrices de H y de ∇_{e_i}, $i = 0, 1, 2, 3$ en la base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ son

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\nabla_{e_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_1-a_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a_2-b_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \nabla_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & \frac{a_2}{2} & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_2+b_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{t}{2} \\ 0 & 0 & \frac{t}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\nabla_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_2+b_1}{2} & b_2 & 0 \\ -\frac{a_2+b_1}{2} & 0 & 0 & \frac{t}{2} \\ -b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{t}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \nabla_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{a_1+b_2}{2} \\ 0 & 0 & \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{t}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{a_1+b_2}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es fácil ahora desarrollar las ecuaciones $H\nabla_{e_i} - \nabla_{e_i}H = 0$. Escribimos las ecuaciones que resultan a continuación:

(1) $d(a_2+b_1) = 0$, (3) $ca_1 - \frac{1}{2}dt = 0$, (5) $c(a_2+b_1) = 0$,

(2) $-da_1 + \frac{1}{2}ct = 0$, (4) $db_2 - \frac{1}{2}ct = 0$, (6) $cb_2 - \frac{1}{2}dt = 0$.

Notar que $cd \neq 0$. Por ello, (1) y (5) se transforman en $a_2 = -b_1$. De acuerdo a (2), y (3) las condiciones (4) y (6) pueden reemplazarse por $a_1 = b_2$. Luego las condiciones se reducen a

$$a_1 = b_2, \ \ a_2 = -b_1, \ \ ca_1 = \frac{1}{2}dt, \ \ da_1 = \frac{1}{2}ct.$$

Notar que a_1 es necesariamente distinto de cero. Las últimas dos ecuaciones se traducen fácilmente a $c^2 = d^2$ y $a_1 = \frac{1}{2}\frac{c}{d}t \pm \frac{1}{2}t$, donde el signo es el signo de $\frac{c}{d}$. Consideremos los dos casos de la ecuación $c^2 = d^2$:

- Caso $c = d$. Luego $a_1 = \frac{1}{2}t$, las matrices de ad_{e_0} y de H en la base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ son

$$\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} \frac{t}{2} & b_1 & 0 \\ -b_1 & \frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & t. \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

  Notar que pasando de $\{e_2, e_3\}$ a $\{-e_2, e_3\}$ si es necesario podemos suponer que $c > 0$.

- Caso $c = -d$. Luego $a_1 = -\frac{1}{2}t$, las matrices de ad_{e_0} y de H en la base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ son

$$\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} -\frac{t}{2} & b_1 & 0 \\ -b_1 & -\frac{t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -t. \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0. \end{bmatrix}$$

Notar que podemos pasar de un caso a otro cambiando $\{e_1, e_2\}$ por $\{-e_1, -e_2\}$. Luego siempre podemos suponer que estamos en el primer caso. El valor de b_1 es un real distinto de cero pues dijimos ya que $0 \neq b_1 - a_2 = 2b_1$. El valor de c es también un real distinto de cero. De acuerdo a la demostración del Teorema 4.3.6 dada en [ABDO05] el álgebra de Lie subyacente es isomorfa a $\mathfrak{d}'_{4,\lambda}$ donde $\lambda = \frac{t}{2|b_1|}$ y este puede ser cualquier real positivo.

Caso: $\mathfrak{v} \cong \mathfrak{e}\,(2)$, $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}e_0 \ltimes_{\operatorname{ad} e_0} \mathfrak{e}\,(2)$

De acuerdo al Teorema 4.3.5 existe una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{v}$ tal que

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = 0, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2 \text{ con } \lambda_2 > 0 \text{ y } \lambda_3 > 0 \ .$$

Denotamos por $\overline{\nabla}$ a la conexión de Levi-Civita de $\mathfrak{v}$ con la métrica restringida. No es difícil ver, usando la fórmula de Koszul que las matrices de $\overline{\nabla}_{e_i}$, $i = 1, 2, 3$, son

$$\overline{\nabla}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda_3+\lambda_2}{2} \\ 0 & \frac{\lambda_3+\lambda_2}{2} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \overline{\nabla}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{-\lambda_3+\lambda_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\lambda_3+\lambda_2}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\overline{\nabla}_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\lambda_2-\lambda_3}{2} & 0 \\ \frac{\lambda_2-\lambda_3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denotemos a las matrices de ad_{e_0} y de H en la base dada por

$$\operatorname{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -d & -e \\ b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \end{bmatrix}$$

No es difícil ver, usando la identidad de Jacobi, que en realidad la matriz anterior tiene la forma

$$\operatorname{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & -\frac{b_3\lambda_2}{\lambda_3} \\ a_3 & b_3 & b_2 \end{bmatrix}.$$

En la notación del Lema 4.3.8 se tiene

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_2}{2} & \frac{a_3}{2} \\ \frac{a_2}{2} & b_2 & \frac{b_3(\lambda_3-\lambda_2)}{2\lambda_3} \\ \frac{a_3}{2} & \frac{b_3(\lambda_3-\lambda_2)}{2\lambda_3} & b_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_2}{2} & -\frac{a_3}{2} \\ \frac{a_2}{2} & 0 & -\frac{b_3(\lambda_2+\lambda_3)}{2\lambda_3} \\ \frac{a_3}{2} & \frac{b_3(\lambda_2+\lambda_3)}{2\lambda_3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando el lema recién mencionado, las expresiones matriciales de $\overline{\nabla}_{e_i}$ y las de S y A obtenemos las siguientes representaciones matriciales de $\nabla_{e_0}, \nabla_{e_1}, \nabla_{e_2}, \nabla_{e_4}$:

$$\nabla_{e_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_2}{2} & -\frac{a_3}{2} \\ 0 & \frac{a_2}{2} & 0 & -\frac{b_3}{2\lambda_3}(\lambda_2+\lambda_3) \\ 0 & \frac{a_3}{2} & \frac{b_3}{2\lambda_3}(\lambda_2+\lambda_3) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\nabla_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{a_2}{2} & \frac{a_3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_2}{2} & 0 & 0 & -\frac{\lambda_2+\lambda_3}{2} \\ -\frac{a_3}{2} & 0 & \frac{\lambda_2+\lambda_3}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\nabla_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_2}{2} & b_2 & \frac{b_3}{2\lambda_3}(\lambda_3-\lambda_2) \\ -\frac{a_2}{2} & 0 & 0 & \frac{\lambda_3-\lambda_2}{2} \\ -b_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b_3}{2\lambda_3}(\lambda_3-\lambda_2) & -\frac{\lambda_3-\lambda_2}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\nabla_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_3}{2} & \frac{b_3}{2\lambda_3}(\lambda_3-\lambda_2) & b_2 \\ -\frac{a_3}{2} & 0 & \frac{\lambda_3-\lambda_2}{2} & 0 \\ -\frac{b_3}{2\lambda_3}(\lambda_3-\lambda_2) & -\frac{\lambda_3-\lambda_2}{2} & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proponemos H como en la ecuación 4.3.2 H conmuta con ∇_{e_0}, ∇_{e_1}, ∇_{e_2}, ∇_{e_3} Planteando las ecuaciones $H\nabla_{e_i} = \nabla_{e_i}H$ uno obtiene que

(1) $ba_2 + ca_3 = 0,$

(2) $\frac{aa_2}{2} = \frac{cb_3}{2\lambda_3}(\lambda_2+\lambda_3),$

(3) $\frac{aa_3}{2} = -\frac{bb_3}{2\lambda_3}(\lambda_2+\lambda_3),$

(4) $\dfrac{eb_3}{2\lambda_3}(\lambda_2+\lambda_3) = \frac{fa_3}{2},$

(5) $\dfrac{fa_2}{2} = \dfrac{db_3}{2\lambda_3}(\lambda_2+\lambda_3),$

(6) $\dfrac{da_3}{2} = \dfrac{ea_2}{2},$

(7) $\dfrac{da_2}{2} + \dfrac{ea_3}{2} = 0,$

(8) $\dfrac{aa_2}{2} = \dfrac{e(\lambda_2+\lambda_3)}{2},$

(9) $\dfrac{aa_3}{2} + \dfrac{d(\lambda_2+\lambda_3)}{2} = 0,$

(10) $\dfrac{fa_3}{2} = -\dfrac{c(\lambda_2+\lambda_3)}{2},$

(11) $\dfrac{fa_2}{2} = -\dfrac{b(\lambda_2+\lambda_3)}{2},$

(12) $\dfrac{ca_2}{2} = \dfrac{ba_3}{2},$

(13) $db_2 + eb_3\dfrac{\lambda_3-\lambda_2}{2\lambda_3} = \dfrac{c(\lambda_3-\lambda_2)}{2},$

(14) $\dfrac{f(\lambda_3-\lambda_2)}{2} = \dfrac{a_2 d}{2},$

(15) $\dfrac{a(\lambda_3-\lambda_2)}{2} = \dfrac{a_2 e}{2} + fb_2,$

(16) $b_2 a = \dfrac{ba_2}{2} - \dfrac{f(\lambda_2-\lambda_3)}{2},$

(17) $\dfrac{ca_2}{2} = \dfrac{ab_3(\lambda_3-\lambda_2)}{2\lambda_3},$

(18) $cb_2 = \dfrac{bb_3(\lambda_3-\lambda_2)}{2\lambda_3} - \dfrac{d(\lambda_2-\lambda_3)}{2},$

(19) $-\dfrac{b(\lambda_2-\lambda_3)}{2} = \dfrac{db_3(\lambda_3-\lambda_2)}{2\lambda_3} + eb_2,$

(20) $\dfrac{a(\lambda_2-\lambda_3)}{2} = fb_2 - \dfrac{da_3}{2},$

(21) $\dfrac{ea_3}{2} + \dfrac{fb_3(\lambda_3-\lambda_2)}{2\lambda_3} = 0,$

(22) $\dfrac{ca_3}{2} + \dfrac{f(\lambda_2-\lambda_3)}{2} = b_2 a,$

(23) $\dfrac{cb_3(\lambda_3-\lambda_2)}{2\lambda_3} - \dfrac{e(\lambda_3-\lambda_2)}{2} = bb_2,$

(24) $\dfrac{ba_3}{2} = \dfrac{ab_3(\lambda_3-\lambda_2)}{2\lambda_3}.$

Comparando (3) y (9), y luego (5) y (11) deducimos

(25) $\frac{bb_3}{2\lambda_3}(\lambda_2+\lambda_3) = \dfrac{d(\lambda_2+\lambda_3)}{2}$, lo cual implica $bb_3 = d\lambda_3$.

(26) $-\dfrac{b(\lambda_2+\lambda_3)}{2} = \dfrac{db_3}{2\lambda_3}(\lambda_2+\lambda_3)$, lo cual implica $db_3 = -b\lambda_3$.

Es decir,

$$\begin{bmatrix} b & -d \\ d & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Como $\lambda_3 \neq 0$, deducimos que el determinante del sistema, es decir b^2+d^2, es igual a cero. Deducimos así que $b = d = 0$.

De la misma forma, comparando (2) y (8) y luego (4) y (10), razonando como antes se obtiene $c = e = 0$. Como ya hemos obtenido que $b = d = 0$, para que H sea invertible debemos tener que $af \neq 0$.

Con lo obtenido anteriormente, de (2) y (3) deducimos ahora que $a_2 = a_3 = 0$. Luego de (15) obtenemos $\lambda_3 = \lambda_2$, y esto junto con (15) implica que $b_2 = 0$. De esta forma

$$\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_3 \\ 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix}.$$

Cambiando e_0 por $-e_0$ si es necesario podemos suponer que a, f tienen el mismo signo. Luego cambiando $\{e_1, e_2\}$ por $\{-e_1, -e_2\}$ si es necesario podemos suponer $a, f > 0$.

Descubramos ahora la clase de isomorfismo del álgebra de Lie. Cambiando e_0 por $e_0{}' = e_0 - \frac{b_3}{\lambda_2}e_1$ se tiene que

$$\mathrm{ad}_{e_0'}\, e_1 = \mathrm{ad}\, e_0' e_2 = \mathrm{ad}_{e_0'}\, e_3 = 0$$

El álgebra obtenida es isomorfa a $\mathbb{R} \times \mathfrak{e}(2)$. Esta misma álgebra ya fue obtenida al evaluar el caso $\mathfrak{v} \cong \mathbb{R}^3$.

Caso: $\mathfrak{v} \cong \mathfrak{e}\,(1,1)$**,** $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}e_0 \ltimes_{\mathrm{ad}\, e_0} \mathfrak{e}\,(1,1)$

Por el Teorema 4.3.5 existe una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{v}$ tal que

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = -\lambda_2 e_2 \ \text{, con } \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Denotamos por $\overline{\nabla}$ a la conexión de Levi-Civita de $\mathfrak{v}$ con la métrica restringida. No es difícil ver, usando la fórmula de Koszul, que las matrices de $\overline{\nabla}_{e_i}$, $i = 1, 2, 3$, son

$$\overline{\nabla}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \\ 0 & \frac{-\lambda_1-\lambda_2}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\nabla}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\lambda_1-\lambda_2}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\nabla}_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2} & 0 \\ \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Denotemos a las matrices de ad_{e_0} y de H en la base dada por

$$\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -d & -e \\ b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \end{bmatrix}.$$

No es difícil ver, usando la identidad de Jacobi, que en realidad la matriz de ad_0 tiene la forma

$$\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} a_1 & \frac{a_2\lambda_1}{\lambda_2} & c_1 \\ a_2 & a_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En la notación del Lema 4.3.8 se tiene

$$S = \begin{bmatrix} a_1 & \frac{a_2(\lambda_2+\lambda_1)}{2\lambda_2} & \frac{c_1}{2} \\ \frac{a_2(\lambda_2+\lambda_1)}{2\lambda_2} & a_1 & \frac{c_2}{2} \\ \frac{c_1}{2} & \frac{c_2}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_2(\lambda_2-\lambda_1)}{2\lambda_2} & -\frac{c_1}{2} \\ \frac{a_2(\lambda_2-\lambda_1)}{2\lambda_2} & 0 & \frac{c_2}{2} \\ -\frac{c_1}{2} & -\frac{c_2}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando estas matrices, las matrices de $\overline{\nabla}_{e_i}$ y el Lema 4.3.8, se obtiene fácilmente

$$\nabla e_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_2(\lambda_2-\lambda_1)}{2\lambda_2} & \frac{c_1}{2} \\ 0 & \frac{a_2(\lambda_2-\lambda_1)}{2\lambda_2} & 0 & \frac{c_2}{2} \\ 0 & -\frac{c_1}{2} & -\frac{c_2}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla e_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & \frac{a_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2} & \frac{c_1}{2} \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2} & 0 & 0 & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \\ -\frac{c_1}{2} & 0 & \frac{-\lambda_1-\lambda_2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\nabla e_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2} & a_1 & \frac{c_2}{2} \\ -\frac{a_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2} & 0 & 0 & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_2}{2} & \frac{-\lambda_1-\lambda_2}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla e_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_1}{2} & \frac{c_2}{2} & 0 \\ -\frac{c_1}{2} & 0 & \frac{-\lambda_1+\lambda_2}{2} & 0 \\ -\frac{c_2}{2} & \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Al plantear las ecuaciones $H\nabla_{e_i} = \nabla_{e_i}H$, $i = 0,1,2,3$, obtenemos las siguientes ecuaciones

(1) $\frac{cc_1}{2} = \frac{ba_2(\lambda_2-\lambda_1)}{2\lambda_2}$,

(2) $\frac{cc_2}{2} = -\frac{aa_2(\lambda_2-\lambda_1)}{2\lambda_2}$,

(3) $\frac{bc_2}{2} = -\frac{ac_1}{2}$,

(4) $\frac{fc_1}{2} = \frac{ec_2}{2}$,

(5) $\frac{fa_2(\lambda_2-\lambda_1)}{2\lambda_2} = -\frac{dc_2}{2}$,

(6) $\frac{ec_2}{2} = \frac{fc_1}{2}$,

(7) $\frac{dc_1}{2} + \frac{ea_2(\lambda_2-\lambda_1)}{2\lambda_2} = 0$,

(8) $\frac{da_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2} + \frac{ec_1}{2} = 0$,

(9) $\frac{c(\lambda_1+\lambda_2)}{2} = -da_1 + \frac{fc_1}{2}$,

(10) $ea_1 + \frac{fa_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2} = \frac{b(\lambda_1+\lambda_2)}{2}$,

(11) $ba_1 = \frac{aa_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2} + \frac{e(\lambda_1+\lambda_2)}{2}$,

(12) $\frac{ac_1}{2} = ca_1 + \frac{d(\lambda_1+\lambda_2)}{2}$,

(13) $\frac{bc_1}{2} = \frac{ca_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2}$,

(14) $\frac{c(\lambda_1+\lambda_2)}{2} = \frac{ec_2}{2} + da_1$,

(15) $\frac{fc_2}{2} = \frac{da_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2}$,

(16) $\frac{a(\lambda_1+\lambda_2)}{2} = fa_1 + \frac{ea_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2}$,

(17) $aa_1 = \frac{ba_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2} + \frac{f(\lambda_1+\lambda_2)}{2}$,

(18) $\frac{ac_2}{2} = \frac{ca_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2}$,

(19) $ca_1 = \frac{bc_2}{2} + \frac{d(\lambda_1+\lambda_2)}{2}$,

(20) $\frac{dc_2}{2} = -\frac{b(\lambda_1-\lambda_2)}{2}$,

(21) $\frac{a(\lambda_1-\lambda_2)}{2} = -\frac{dc_1}{2}$,

(22) $-\frac{ec_1}{2} = \frac{fc_2}{2}$,

(23) $\frac{ac_2}{2} = \frac{bc_1}{2}$,

(24) $\frac{cc_1}{2} + \frac{f(\lambda_1-\lambda_2)}{2} = 0$,

(25) $\frac{cc_2}{2} = \frac{e(\lambda_1-\lambda_2)}{2}$.

La ecuación (3) dice que $\frac{bc_2}{2} = -\frac{ac_1}{2}$ y de (12) se obtiene $ca_1 = \frac{ac_1}{2} - \dfrac{d(\lambda_1 + \lambda_2)}{2}$. Reemplazamos estas expresiones en (19) y como resultado obtenemos $ac_1 = d(\lambda_1 + \lambda_2)$. Pero esto junto con (12) implica

$$ca_1 = 0.$$

No puede ser $a_1 \neq 0$ pues de lo contrario de (11) y (16) se deduce que

$$\begin{bmatrix} \frac{a_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2} & \frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{2} \\ \frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{2} & -\frac{a_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ e \end{bmatrix} = 0.$$

Notar que el determinante de este sistema es $-(\frac{a_2(\lambda_1+\lambda_2)}{2\lambda_2})^2 - (\frac{(\lambda_1+\lambda_2)}{2})^2$, el cual es distinto de cero. Luego $a = e = 0$. Usando (12) obtenemos $d\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = 0$ lo cual implica $d = 0$, lo cual contradice la hipótesis de que H es inversible. Entonces $a_1 \neq 0$ y por lo tanto $c = 0$.

De (24) y (25) obtenemos $f(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$ y $e(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$. Si fuese $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$, tendríamos $e = f = 0$, y dado que $c = 0$ llegaríamos a que H es no inversible. Por lo tanto debemos tener necesariamente $\lambda_1 = \lambda_2$. Por esto y porque $c = 0$, de (7) y (13) obtenemos $bc_1 = dc_1 = 0$. Si fuese $c_1 \neq 0$, tendríamos $b = d = 0$, y luego por (9) tendríamos $f = 0$, lo cual contradice que H sea inversible. Entonces, entonces $c_1 = 0$. Luego de (12) deducimos $d = 0$. Finalmente, de (3) y (18) se tiene $bc_2 = ac_2 = 0$. Si fuese $c_2 \neq 0$ tendríamos $b = a = 0$, y dado que $c = 0$, llegaríamos a que H es no inversible. Luego concluímos también que $c_2 = 0$. En resumen, hasta ahora hemos obtenido

$$c = 0, \qquad \lambda_1 = \lambda_2, \qquad c_1 = 0, \qquad d = 0, \qquad c_2 = 0, \quad a_1 \neq 0.$$

Luego de este reemplazo las condiciones se reescriben

$$\begin{aligned} ba_2 + f\lambda_1 - aa_1 = 0, &\quad fa_1 + ea_2 - a\lambda_1 = 0, \\ aa_2 + e\lambda_1 - ba_1 = 0, &\quad -b\lambda_1 + ea_1 + fa_2 = 0. \end{aligned}$$

Escribimos a estas ecuaciones como un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con incógnitas a, b, e, f. La matriz del sistema es

$$M = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & 0 & a_2 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Como H es inversible, no pude ser $a = b = e = f = 0$, y por lo tanto el determinante de la matriz M debe ser igual a cero. Dado que $\det M = \dfrac{({\lambda_1}^2 + {a_2}^2 - {a_1}^2)^2}{a_1\lambda_1}$ entonces obtenemos ${\lambda_1}^2 + {a_2}^2 = {a_1}^2$. Usando esta igualdad, resulta fácil ver que el sistema anterior se resuelve como

$$a = \tfrac{a_2}{\lambda_1}e + \tfrac{a_1}{\lambda_1}f, \quad b = \tfrac{a_1}{\lambda_1}e + \tfrac{a_2}{\lambda_1}f.$$

Obtenemos así las siguientes expresiones para $\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}}$ y para H:

$$\mathrm{ad}_{e_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_2}{\lambda_1}e - \frac{a_1}{\lambda_1}f & -\frac{a_1}{\lambda_1}e - \frac{a_2}{\lambda_1}f & 0 \\ \frac{a_2}{\lambda_1}e + \frac{a_1}{\lambda_1}f & 0 & 0 & -e \\ \frac{a_1}{\lambda_1}e + \frac{a_2}{\lambda_1}f & 0 & 0 & -f \\ 0 & e & f & 0 \end{bmatrix}.$$

Advertimos aquí que a_1 es siempre distinto de cero y se lo puede tomar positivo cambiando e_0 por $-e_0$ si es necesario. Notar que cambiando $\{e_1, e_3\}$ por $\{-e_1, -e_3\}$ en las matrices anteriores, a_2 se cambia por $-a_2$ y f por $-f$. Luego podemos suponer que e y f tienen el mismo signo. Finalmente, cambiando $\{e_1, e_2\}$ por $\{-e_1, -e_2\}$ si es necesario, podemos suponer que $e, f > 0$.

Además $\lambda_2 = \lambda_1$ y el valor de a_2 está restringido por la condición $\lambda_1^2 + a_2^2 = a_1^2$. Finalmente, el valor del determinante de H es

$$\det H = (e^2 - f^2)^2 \frac{a_1^2}{\lambda_1^2}$$

y como debe ser distinto de cero pues H es invertible, debemos tener $e^2 \neq f^2$. Finalmente, afirmamos que se pude asumir que $e > f$. En efecto, si se intercambian e_1 y e_2, se pude observar que las matrices de ad_{e_0} y ad_{e_3} son las mismas y H se mantiene igual salvo un intercambio de e y f.

Analizamos ahora la clase de isomorfismo del álgebra de Lie obtenida. Para ello hacemos el siguiente cambio de base:

$$v_0 = e_0 - (a_1 + a_2)v_1 + (a_1 + a_2)v_2, \quad v_1 = e_1 + e_2 - \frac{e_3}{\lambda}, \quad v_2 = e_1 + e_2, \quad v_3 = e_1 - e_2$$

Observamos que

$$[v_1, v_2] = v_2, \quad [v_1, v_3] = -v_3, \quad [v_2, v_3] = 0$$

y además

$$\mathrm{ad}_{v_0}|_{\mathfrak{v}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_1 \end{bmatrix}.$$

De la demostración del Teorema 4.3.6 dada en [ABDO05], se obtiene que $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$.

4.4. Distinción de estructuras paralelas en álgebras de Lie de dimensión cuatro

En la sección anterior, describimos todas las álgebras de Lie de dimensión cuatro que admiten un producto interno y un endomorfismo antisimétrico inversible y paralelo. Fijada tal álgebra y un producto interno, hemos exhibido una base ortonormal del álgebra y todos los endomorfismos antisimétricos paralelos escritos en esa base, tal como se muestra en el Teorema 4.3.7. Resta analizar si todos estos casos exhibidos son no equivalentes entre sí en un sentido que precisaremos a continuación.

En este sección encontramos todas las clases de equivalencias respecto de la clasificación obtenida en la sección anterior.

Invariantes de álgebras de Lie con producto interno

En lo que sigue consideraremos triples $(\mathfrak{g}, H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ donde $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno, y $H : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es un endomorfismo lineal antisimétrico y paralelo respecto del producto interno.

Definición 4.4.1. Decimos que dos triples como antes $(\mathfrak{g}_1, H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(\mathfrak{g}_2, H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ son **equivalentes** si existe un isomorfismo isométrico de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ tal que $\phi H_1 = H_2 \phi$.

En el Teorema 4.3.7 se exhiben triples $(\mathfrak{g}, H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tal que cualquier otro triple $(\mathfrak{g}', H', \langle\cdot,\cdot\rangle')$ es isomorfo a uno de los del Teorema. Resta saber si en los triples exhibidos no hay dos que son equivalentes entre sí. En los siguientes lemas veremos condiciones necesarias para que dos triples sean equivalentes. Sus demostraciones son sencillas usando elementos básicos del álgebra lineal.

Lema 4.4.2. *Sea $\phi : V_1 \to V_2$ un isomorfismo de espacios vectoriales, y sean T_1 y T_2 endomorfismos en V_1 y V_2 respectivamente tales que $\phi T_1 = T_2 \phi$. Entonces T_1 y T_2 tienen los mismos polinomios característicos. En particular, T_1 y T_2 tienen las mismas trazas y los mismos determinantes.*

Corolario 4.4.3. *En las condiciones del lema anterior, los polinomios característicos de T_1^n y T_2^n coinciden para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Lema 4.4.4. *Sea $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ un isomorfismo de álgebras de Lie y sean T_1 y T_2 endomorfismos lineales en V_1 y V_2 respectivamente tales que $\phi T_1 = T_2 \phi$.*

1. *Si $T_1([\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]) \subset [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$ entonces $T_2([\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2]) \subset [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2]$. Además $T_1|_{[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]}$ y $T_2|_{[\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_2]}$ tienen los mismos polinomios característico. En particular tienen la misma traza y el mismo determinante.*

2. *Vale la misma afirmación anterior reemplazando conmutador por centro.*

Definición 4.4.5. Sea $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un álgebra de Lie con producto interno. Definimos la ad-norma de $\mathfrak{g}$, y la denotamos $\|\mathfrak{g}\|$, de la siguiente manera:

$$\|\mathfrak{g}\| := \max_{\|x\|=1} \|\operatorname{ad}_x\|$$

donde $\|x\|$ denota la norma del vector $x \in \mathfrak{g}$ y $\|\operatorname{ad}_x\|$ es la norma del operador ad_x, es decir, $\|\operatorname{ad}_x\| = \max_{\|y\|=1} \|\operatorname{ad}_x y\|$.

Lema 4.4.6. *Si $\phi : (\mathfrak{g}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1) \to (\mathfrak{g}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ es un isomorfismo isométrico de álgebras de Lie con producto interno, entonces $\|\mathfrak{g}_1\| = \|\mathfrak{g}_2\|$.*

Observación 4.4.7. También se pueden definir otros invariantes, tales como $\|\mathfrak{g}\|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}$ y $\|\mathfrak{g}\|_{\mathfrak{z}(\mathfrak{g})}$. Por ejemplo, el primero se define como el máximo de $\|\operatorname{ad}_x\|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]} = \max\{\|[x,y]\| : y \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\ \|y\| = 1\}$, donde x recorre los vectores de $\mathfrak{g}$ de norma uno. El segundo se define de manera similar. El lema anterior también vale para estos invariantes.

A continuación redefinimos las nociones de tensores de curvatura que introducimos en el capítulo de preliminares, pero aquí lo hacemos en el contexto algebraico. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, definimos el tensor curvatura $\mathrm{R_m}$ y la curvatura de Ricci $\mathrm{R_c}$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$ como sigue:

$$\mathrm{R_m}(x,y)z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x,y]} z$$

$$\mathrm{R_c}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{R_m}(e_i,x)y, e_i\rangle \text{ para } \{e_i\} \text{ base ortonormal}$$

El operador de Ricci, denotado por Ric, es el que satisface

$$\mathrm{R_c}(x,y) = \langle \mathrm{Ric}(x), y\rangle.$$

Los siguientes lemas son conocidos en la geometría riemanniana y fáciles de probar.

Lema 4.4.8. *Dadas álgebras de Lie con producto internos $(\mathfrak{g}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(\mathfrak{g}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$, denotamos por ∇^1 y ∇^2 las respectivas conexiones de Levi-Civita. Si $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ es un isomorfismo isométrico de álgebras de Lie, entonces $\phi(\nabla^1_x y) = \nabla^2_{\phi(x)}\phi(y)$ para todos $x, y \in \mathfrak{g}$.*

Lema 4.4.9. *Dados dos álgebras de Lie con producto internos $(\mathfrak{g}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(\mathfrak{g}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$, denotemos por R^i_m y por R_c respectivamente al tensor de curvatura y al operador de Ricci asociado a $(\mathfrak{g}_i, \langle\ ,\ \rangle_i$, $i = 1, 2$. Si $\phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ es isomorfismo isométrico de álgebras de Lie, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\mathrm{R}^2_m(\phi x, \phi y)\phi z = \phi\, \mathrm{R}^1_m(x,y)z$
2. $\langle \mathrm{R}^2_m(\phi x, \phi y)\phi z, \phi w\rangle_2 = \langle \mathrm{R}^1_m(x,y)z, w\rangle$.
3. $\mathrm{R}^2_c(\phi x, \phi y) = \mathrm{R}^1{}_c(x,y)$
4. $\langle \mathrm{Ric}^2\, \phi x, \phi y\rangle_2 = \langle \mathrm{Ric}^1\, x, y\rangle_1$
5. $\phi\, \mathrm{Ric}^1 = \mathrm{Ric}^2\, \phi$

Corolario 4.4.10. *En las condiciones del lema anterior, los polinomios característicos de Ric^1 y Ric^2 coinciden.*

Para resolver nuestro problema de distinguir ternas paralelas usaremos los criterios enunciados anteriormente. Dadas dos estructuras paralelas $(\mathfrak{g}_1, H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ y $(\mathfrak{g}_2, H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ que son equivalentes, hemos visto en los lemas anteriores que muchos operadores asociados a estas ternas poseen igual polinomio característico. Por ejemplo los polinomios característicos de H_1 y H_2 deben coincidir, por lo tanto poseen los mismos autovalores. En particular H_1 y H_2 deben tener la misma traza y el mismo determinante. De manera similar, los autovalores, la trazas y el determinante del operador de Ricci asociado a la primera terna deben coincidir con los del operador de la segunda terna.

Diferenciación de las estructuras paralelas del Teorema 4.3.7

A continuación distinguiremos las estructuras paralelas descritas en el Teorema 4.3.7. Es suficiente hacerlo caso por caso desde 1. hasta 8. (en la notación del Teorema) de acuerdo a la clase de isomorfismo del álgebra, con excepción de los casos 2. y 7. que tienen la misma álgebra. Se probará que toda estructura paralela en 7. es equivalente a una que se describe en 2.

Usaremos la notación dada en el Teorema 4.3.7

1. $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}e_0 \ltimes_{\mathrm{ad}_{e_0}} \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$

   Afirmamos que todas las estructuras paralelas que se dan en 1. del Teorema 4.3.7, parametrizadas por ternas de reales positivos (λ, c, d), son no equivalentes entre sí. En efecto, notemos que el centro de $\mathfrak{g}$ está generado por $\{e_1, e_2\}$. Notemos también que H^2 es la matriz $\mathrm{diag}[-c^2, -d^2, -d^2, -c^2]$ por lo que su restricción al centro es $\operatorname{diag}[-d^2, -d^2]$. Por el Lema 4.4.4 obtenemos que $-d^2$ es un invariante, por lo tanto d es un invariante pues asumimos que $d > 0$. Veamos ahora que c es también un invariante. En efecto, el determinante de H es c^2d^2 y este es un invariante por el Lema 4.4.2. Dado que d es un invariante y $c > 0$, se tiene que c es un invariante. Finalmente veamos que λ es un invariante. En efecto, resulta inmediato que λ es igual a la norma de $\mathfrak{g}$ (ver Definición 4.4.5) y por el Lema 4.4.6, λ resulta invariante.

2. $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R} \times \mathfrak{r}'_{3,0}$

   Afirmamos que todas las estructuras paralelas expuestas en 2. del Teorema 4.3.7, parametrizadas por ternas de reales positivos t, a, f, son no equivalentes entre sí. En efecto, el conmutador de $\mathfrak{g}$ está generado por $\{e_2, e_3\}$ y es preservado por H. El determinante de la restricción de H al conmutador es f^2 y es un invariante por el Lema 4.4.4. Como asumimos que $f > 0$, entonces f es también un invariante. Por otro lado el determinante de H, que es igual a a^2f^2, es también un invariante por el Lema 4.4.2. Como f^2 es un invariante, entonces a^2 es también un invariante, como así también lo es a pues asumimos que $a > 0$. Finalmente, es fácil ver que t (al ser positivo) es igual a la norma de $\mathfrak{g}$, y por el Lema 4.4.6.

3. $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}e_0 \ltimes_{\operatorname{ad}_{e_0}} \mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{r}'_{4,\mu,0}$

   Afirmamos que todas las estructuras paralelas en 3. del Teorema 4.3.7, parametrizadas por $t, a, f > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$, son no equivalentes entre sí. En efecto, al igual que en el item anterior se puede probar que a y f son invariantes. Para probar que t es invariante notamos que $\mathfrak{a} = \operatorname{Span}\{e_2, e_3\}$ es el único subespacio de dimensión 2 contenido en $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ que es invariante por H y además es un ideal. Es claro que $\| \operatorname{ad}_x |_{\mathfrak{a}} \|$, para $\|x\| = 1$, es como máximo t. Concluímos que t es un invariante. Veamos finalmente que μ es un invariante. Notar que H tiene exactamente dos subespacios invariantes, $\operatorname{Span}\{e_0, e_1\}$ y $\operatorname{Span}\{e_2, e_3\}$, siendo el último el único contenido en el conmutador. Dado que un isomorfismo ϕ, entre la estructura correspondiente a (μ, λ, a, f) y la correspondiente a (μ', λ, a, f) debe preservar estos subespacios, vemos que la matriz de ϕ en la base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ debe ser una matriz ortogonal de la forma

$$\phi = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & v \\ 0 & 0 & w & z \end{bmatrix}$$

   donde $x_0, x_1 \in \{\pm 1\}$ y $\begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$ es ortogonal. Esta matriz 2×2 y ortogonal debe conmutar con $\begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix}$ y esta condición se traduce a que $u = z$ y $v = -w$. A su vez la matriz $\begin{bmatrix} x_0 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}$ debe conmutar con $\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ y esto se traduce a que $x_0 = x_1 = \pm 1$. Notar que

$$\phi([e_0, e_1]) = \phi(\mu e_1) = x_0 \mu e_1$$
$$[\phi(e_0), \phi(e_1)] = [x_0 e_0, x_0 e_1] = \mu' e_1$$

de donde se sigue que $\mu' = \mu x_0$. Finalmente, observamos que

$$\begin{aligned}\phi([e_0, e_2]) &= \phi(te_3) = t(-we_2 + ue_3)\\ [\phi(e_0), \phi(e_2)] &= [x_0e_0, ue_2 + we_3] = x_0ute_3 - x_0wte_2\\ \phi([e_0, e_3]) &= \phi(-te_2) = -t(ue_2 + we_3)\\ [\phi(e_0), \phi(e_3)] &= [x_0e_0, -we_2 + ue_3] = -x_0wte_3 - tx_0ue_2.\end{aligned}$$

De esto deducimos que $x_0w = w$, $x_0u = u$, $w = x_0w$ y $u = x_0u$. De estas igualdades deducimos que $x_0 = 1$. Por lo tanto $\mu = \mu'$.

4. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$

   Afirmamos que las estructuras paralelas dadas en 4. del Teorema 4.3.7, parametrizadas por $c, t > 0$, son no equivalentes entre sí. En efecto, ci y $-ci$ son autovalores de H, los cuales son invariantes. Concluímos que c es un invariante pues se lo asume positivo. Finalmente, no es difícil ver, usando que la norma de una matriz diagonal es el máximo de la normas de sus autovalores, que la norma de $\mathfrak{g}$ es igual a t. Concluímos por el Lema 4.4.6 que t es un invariante.

5. $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R} \ltimes_{\mathrm{ad}_{e_0}} \mathfrak{h}_3 \cong \mathfrak{d}_{4,2}$

   Afirmamos que todas las estructuras paralelas expuestas en 5. del Teorema 4.3.7, parametrizadas por $a, t > 0$, son no equivalentes. En efecto, ai y $-ai$ son los autovalores de H. Luego a es un invariante pues se lo supone positivo. Finalmente, al igual que el ítem anterior, es fácil ver que t es igual a la norma de $\mathfrak{g}$, la cual es un invariante por el Lema 4.4.6.

6. $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}e_0 \ltimes_{\mathrm{ad}_{e_0}} \mathfrak{h}_3 \cong \mathfrak{d}'_{4,\lambda}$

   En el punto 6. del Teorema 4.3.7 se muestra una familia de álgebras parametrizadas por $\lambda > 0$ de modo que dos álgebras con distintos parámetros son no isomorfas, y para cada λ se dan estructuras paralelas en la correspondiente álgebra, parametrizadas por reales $t, c > 0$ y por un real b_1 que satisface $|b_1| = \frac{t}{2\lambda}$. Veremos que todas estas estructuras paralelas son no equivalentes entre sí.

   En primer lugar, c^4 es igual al determinante de H, el cual por el Lema 4.4.2 es un invariante. Luego c es un invariante. El centro del conmutador de $\mathfrak{g}$, denotado por $\mathfrak{a}$, está generado por e_3, y no es díficil ver que $\|\mathfrak{g}\|_{\mathfrak{a}} = t$. Luego t es un invariante. Resta probar que si b_1 y b'_1 son reales distintos de cero tales que existe un isomorfismo entre la estructura parametrizada por (b_1, t, c) y (b'_1, t, c), entonces $b_1 = b'_1$. En efecto, si hubiese una equivalencia ϕ entre estas estructuras, la misma debería preservar $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathrm{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$, el centro de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, es decir $\mathbb{R}e_3$. También debería preservar los subespacios invariantes de H, que son $\mathrm{Span}\{e_0, e_3\}$ y $\mathrm{Span}\{e_1, e_2\}$. De todo esto se concluye que la matriz de ϕ en la base $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ debería ser una matriz ortogonal de la forma

$$\phi = \begin{bmatrix} x_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{12} & 0 \\ 0 & x_{21} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} \end{bmatrix}$$

   Observar la matriz 2×2 central, esta debe conmutar con la restricción de H al subespacio $\mathrm{Span}\{e_1, e_2\}$, y esto se traduce a que $x_{11} = x_{22}$ y $x_{21} = -x_{12}$. De manera similar, la restricción de H a $\mathrm{Span}\{e_0, e_3\}$ debería conmutar con

$\begin{bmatrix} x_{00} & 0 \\ 0 & x_{33} \end{bmatrix}$. Esto implica que $x_{00} = x_{33} = \pm 1$. Veamos que $x_0 = 1$. En efecto, $\phi([e_0, e_3]) = \phi(te_3) = tx_0e_3$, mientras que $[\phi(e_0), \phi(e_3)] = [x_0e_0, x_0e_3] = te_3$, y por lo tanto $x_0 = 1$.

Se tiene

$$\begin{aligned} \phi([e_0, e_1]) &= \phi(\frac{t}{2}e_1 - b_1e_2) = \frac{t}{2}(x_{11}e_1 + x_{21}e_2) - b_1(-x_{21}e_1 + x_{11}e_2) \\ &= (\frac{t}{2}x_{11} + b_1x_{21})e_1 + (\frac{t}{2}x_{21} - b_1x_{11})e_2. \\ [\phi(e_0), \phi(e_1)] &= [x_0e_0, x_{11}e_1 + x_{21}e_2] = x_0x_{11}(\frac{t}{2}e_1 - b_1'e_2) + x_0x_{21}(b_{21}'e_1 + \frac{t}{2}e_2) \\ &= (x_0x_{11}\frac{t}{2} + x_0x_{21}b_{21}')e_1 + (-x_0x_{11}b_1' + x_0x_{21}\frac{t}{2})e_2 \end{aligned}$$

De las expresiones anteriores y usando que $x_0 = 1$, se concluye que $b_1' = b_1$.

7. $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R} \times \mathfrak{e}(2)$

   Afirmamos que las estructuras listadas en 7. del Teorema 4.3.7 ya fueron obtenidas en el punto 2. En efecto, fijemos una tal estructura con parámetros (b_3, t, a, f), donde $t, a, f > 0$ y b_3 es un número real cualquiera. Definimos

$$y := \frac{1}{\sqrt{\frac{b_3^2}{t^2} + 1}}$$

   y luego definimos x como $\frac{yb_3}{t}$. No es difícil ver que la matriz $\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$ es ortogonal. Además, definiendo $e_0' = xe_0 + ye_1$ y $e_1' = -ye_0 + xe_1$, obtenemos que $\mathrm{Span}\{e_1', e_2, e_3\}$ es un ideal abeliano y la matriz de $\mathrm{ad}_{e_0'}$ respecto de la base $\{e_1', e_2, e_3\}$ es

$$\mathrm{ad}_{e_0'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{t}{y} \\ 0 & \frac{t}{y} & 0 \end{bmatrix}$$

   Finalmente, la matriz de H se mantiene igual que antes de haber hecho el cambio de variable. Concluímos que la estructura correspondiente a los parámetros (b_3, t, a, f) es equivalente a la estructura descrita en 2. con parámetros $(t\sqrt{\frac{b_3^2}{t^2} + 1}, a, f)$.

8. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$

   Afirmamos que las estructuras paralelas exhibidas en 8. del Teorema 4.3.7, parametrizadas por (t, a_1, a_2, e, f) tales que $t > 0$, $a_1^2 = t^2 + a_2^2$, $e > f \geq 0$, son todas no equivalentes entre sí. Empecemos mostrando que t, a_1 y a_2^2 son invariantes de la estructura. No es difícil calcular el operador de Ricci del álgebra con la métrica dada. El resultado es

$$\mathrm{Ric} = \begin{bmatrix} -2(a_1^2 + a_2^2) & 0 & 0 & 2a_2\lambda \\ 0 & -2a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a_1^2 & 0 \\ 2a_2t & 0 & 0 & -2t^2 \end{bmatrix}.$$

Por el Corolario 4.4.10, sabemos que la traza y el determinante de Ric son invariantes de la estructura paralela. La traza está dada por $-2(a_1^2+a_2^2+2a_1^2+t^2) = -2(2a_1^2-t^2+2a_1^2+t^2) = -8a_1^2$. Dado que estamos asumiendo que $a_1 > 0$, obtenemos que a_1 es un invariante. Por otro lado $\det \mathrm{Ric} = 16a_1^4(a_1^1+a_2^2)(a_1^2-a_2^2) = 16a_1^4(a_1^4-a_2^4)$. Dado que ya sabemos que a_1^4 es un invariante, deducimos de aquí que $|a_2|$ es un invariante. Finalmente, de la condición $t^2 + a_2^2 = a_1^2$ y dado que se asume $t > 0$, obtenemos que t es un invariante.

Planteamos ahora la existencia de una equivalencia ϕ entre la estructura paralela asociada a los parámetros (t, a_1, a_2, e, f) y la estructura asociada a los parámetros (t, a_1, a_2', e', f'). Se denota por $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ la base ortonormal asociada a ambas estructuras. Dado que $\mathrm{Span}\{e_1, e_2\}$ es siempre el conmutador, ϕ debe preservarlo pues es isomorfismo de álgebras de Lie, y dado que ϕ es también isometría, obtenemos que la matriz de ϕ debe tener la forma

$$\phi = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & z & w & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

donde $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ son matrices ortogonales. Planteamos $[\phi(e_1), \phi(e_3)]' = \phi([e_1, e_3])$ y $[\phi(e_2), \phi(e_3)]' = \phi([e_2, e_3])$.

$$\begin{aligned} [\phi(e_1), \phi(e_3)]' &= [xe_1 + ze_2, be_0 + de_3]' = xb[e_1, e_0]' + xd[e_1, e_3]' + \\ &+ zb[e_2, e_0]' + zd[e_2, e_3]' \\ &= xb(-a_1e_1 - a_2'e_2) + xdte_2 + zb(-a_2'e_1 - a_1e_2) + zdte_1 \\ &= (-a_1xb - a_2'zb + tzd)e_1 + (-a_2'xb + txd - a_1zb)e_2 \\ \phi([e_1, e_3]) &= \phi(te_2) = t(ye_1 + we_2) = tye_1 + twe_2 \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$-a_1xb - a_2'zb + tzd = ty \qquad -a_2'xb + txd - a_1zb = tw \tag{4.4.1}$$

$$\begin{aligned} [\phi(e_2), \phi(e_3)]' &= [ye_1 + we_2, be_0 + de_3]' = yb[e_1, e_0]' + yd[e_1, e_3]' + wb[e_2, e_0]' + \\ &+ wd[e_2, e_3]' \\ &= yb(-a_1e_1 - a_2'e_2) + ydte_2 + wb(-a_2'e_1 - a_1e_2) + wdte_1 \\ &= (-a_1yb - a_2'wb + twd)e_1 + (-a_2'yb + tyd - a_1wb)e_2 \\ \phi([e_2, e_3]) &= \phi(te_1) = t(xe_1 + ze_2) = txe_1 + tze_2 \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$-a_1yb - a_2'wb + twd = tx, \qquad -a_2'yb + tyd - a_1wb = tz \tag{4.4.2}$$

Dado que $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ es ortogonal, se tienen dos posibilidades: $x = -w,\ y = z$ ó $x = w,\ y = -z$.

Asumamos el primer caso. Reemplazando w por $-x$ y z por y en (4.4.1) y en (4.4.2) obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned} -a_1zb + a_2'xb - txd = tx = a_2'xb - txd + a_1zb \\ -a_1xb - a_2'yb + tzd = tz = -a_2'zb + tzd + a_1xb. \end{aligned}$$

De estas igualdades deducimos que $a_1zb = a_1xb = 0$ y por lo tanto $b = 0$ dado que por lo menos uno de los dos x y z son distintos de cero. Luego $d \neq 0$ y de las igualdades de arriba, reemplazando b por 0, obtenemos que $-txd = tx$ y $tzd = tz$. Deducimos entonces que si $z \neq 0$ entonces $x = 0$ y $d = 1$, y si $z = 0$ entonces $x \neq 0$ y luego $d = -1$.

Asumamos ahora el segundo caso, es decir, $x = w,\ y = -z$. Reemplazando w por x y z por $-y$ en (4.4.1) y en (4.4.2) obtenemos

$$\begin{aligned} a_1xb + a_2'zb - tzd = tz = a_2'zb - tzd - a_1xb \\ -a_2'xb + txd - a_1zb = tx = a_1zb - a_2'xb + txd. \end{aligned}$$

de donde se deduce que $a_1zb = a_1xb = 0$. Luego $b = 0$ y mirando las igualdades de arriba se obtiene que si $z \neq 0$ entonces $x = 0$ y $d = -1$, mientras que si $z = 0$ entonces $x \neq 0$ y $d = 1$.

En cualquier caso se obtiene $b = 0$ y por lo tanto c debe ser también igual a cero.

En resumen, podemos afirmar que la matriz de ϕ tiene una de las siguientes cuatro formas

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon z & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix},$$

donde $\epsilon \in \{1, -1\}$. Determinamos el valor de a y de a_2' en cada caso verificando la condición $[\phi(e_0), \phi(e_1)]' = \phi([e_0, e_1])$.

Los valores de $\phi([e_0, e_1]) = \phi(a_1e_1 + a_2e_2) = a_1\phi(e_1) + a_2\phi(e_2)$ en cada caso son respectivamente

$$a_1ze_2 + \epsilon a_2ze_1, \quad a_1xe_1 + \epsilon a_2xe_2.$$

Por otro lado, los valores de $[\phi(e_0), \phi(e_1)] = a[e_0, \phi(e_1)]'$ en cada caso son respectivamente

$$az(a_2'e_1 + a_1e_2), \quad ax(a_1e_1 + a_2'e_2).$$

Comparando las respectivas expresiones, obtenemos siempre $a = 1$ y $a_2' = \epsilon a_2$.

Vamos ahora a descartar el primer caso para $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Notemos que en tal caso tenemos

$$\begin{aligned} &\langle H'\phi e_1, e_3\rangle = \langle H'ze_2, e_3\rangle = zf' \\ &\langle \phi He_1, e_3\rangle = \epsilon e \end{aligned}$$

lo cual implica $zf' = \epsilon e$ y por lo tanto $e = f'$ pues $e, f' \geq 0$ y $\epsilon, z \in \{1, -1\}$. Por otro lado

$$\begin{aligned}\langle H'\phi e_2, e_3\rangle &= \langle \epsilon z H' e_1, e_3\rangle = \epsilon z e' \\ \langle \phi H e_2, e_3\rangle &= \epsilon f\end{aligned}$$

lo cual implica $\epsilon z e' = \epsilon f$, es decir $e' = f$ pues $e, f' \geq 0$ y $\epsilon, z \in \{1, -1\}$. Pero entonces $e = f' < e' = f$, lo cual es absurdo pues $e > f$.

Consideramos ahora el segundo caso. Se tiene

$$\begin{aligned}\langle H'\phi e_2, e_3\rangle &= \langle H' \epsilon x e_2, e_3\rangle = \epsilon x f' \\ \langle \phi H e_2, e_3\rangle &= \epsilon f.\end{aligned}$$

Se deduce que $f = f'$ pues $\epsilon, x \in \{1, -1\}$. Se deduce también que $x = 1$. Finalmente, ya que sabemos que $x = 1$, calculamos

$$\begin{aligned}\langle H'\phi e_1, e_3\rangle &= \langle H' e_1, e_3\rangle = e' \\ \langle \phi H e_1, e_3\rangle &= \epsilon e\end{aligned}$$

y de aquí deducimos que $e = e'$ pues ambos son positivos, y también deducimos que $\epsilon = 1$. Concluímos así que ϕ es la identidad, $a_2' = a_2$, $e' = e$ y $f' = f$.

4.5. Extensiones Centrales de un álgebra de Lie. Ejemplos de 2-formas CKY

Los resultados obtenidos los trasladaremos a la construcción de 2-formas Killing-Yano Conformes (CKY) en álgebras de Lie de dimensión cinco.

4.5.1. 2-formas Killing-Yano Conformes

Definición 4.5.1. Sea (M, g) una variedad riemaniana de dimensión n y ω una 2-forma. Decimos que ω es una **2-forma Killing Yano Conforme** (CKY) si $\forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ se satisface la siguiente ecuación:

$$(\nabla_X \omega)(Y, Z) = \frac{1}{3}\iota(X) d\omega(X, Y, Z) - \frac{1}{n-1} X^* \wedge \delta\omega(X, Y, Z) \tag{4.5.1}$$

Donde X^* es la 1-forma dual a X, δ es la codiferencial (ver 2.6.5) e ι el producto interno. Cuando ω es cocerrada, es decir $\delta\omega = 0$, entonces ω es una **2-forma Killing Yano**.

De acuerdo [Sem03], una 2-forma ω es CKY si y solo si existe una 1-forma θ en M tal que $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:

$$\nabla_X \omega(Y, Z) + \nabla_Y \omega(X, Z) = 2g(X, Y)\theta(Z) - g(X, Z)\theta(Y) - g(Y, Z)\theta(X),$$

Más aún esta 1-forma esta dada por la siguiente ecuación

$$\theta = -\frac{1}{n-1}\delta\omega.$$

Un ejemplo de variedades que admiten 2-formas CKY son las variedades sasakianas demostrado en [Sem03]. En grupos de Lie con métrica invariante a izquierda en [ABD15] y en [BDS12] se encuentran ejemplos de 2- formas Killing Yano Conformes invariantes a izquierda.

4.5.2. Extensiones centrales

Definición 4.5.2. Sea $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie real, y sea $\sigma \in (\bigwedge \mathfrak{g})^*$ una 2-forma cerrada invariante a izquierda (ver Definición 4.1.6). Sea ξ un vector cualquiera que genera un álgebra de Lie trivial de dimensión uno. Fijamos un nuevo corchete $[\cdot,\cdot]_\sigma$ de tal forma que:

$$[\mathfrak{h}, \xi]_\sigma = 0$$

$$[x, y]_\sigma = [x, y] + \sigma(x, y)\xi \; \forall \; x, y \; \in \mathfrak{h}$$

Esta nueva álgebra de Lie construida se llama **extensión central de** $\mathfrak{h}$ por la 2-forma σ y la denotamos $\mathfrak{h} \oplus_\sigma \mathbb{R}\xi$.

En el contexto que venimos trabajando, G grupo de Lie con métrica invariante a izquierda g, y $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie , se enuncia el siguiente teorema que nos permitirá construir ejemplos de 2-formas CKY invariantes, la demostración está en [AD18].

Teorema 4.5.3 ([AD18]). *Sea H un tensor KY invariante e invertible en un álgebra de Lie $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tal que la 2-forma $\mu(x, y) = \langle H^{-1}x, y\rangle$ es cerrada. Si se construye $\mathfrak{g} := \mathfrak{h} \oplus_\mu \mathbb{R}\xi$ con el corchete $[\cdot,\cdot]_\mu$ dado por:*

$$[\mathfrak{h}, \xi]_\mu = 0$$

$$[x, y]_\mu = [x, y] - 2\mu(x, y) \; \forall x, y \in \mathfrak{h}$$

y el producto interno obtenido por la extensión de $\mathfrak{h}$ tal que $\langle \mathfrak{h}, \xi\rangle = 0$, $\|\xi\| > 0$, entonces el endomorfismo T de $\mathfrak{g}$ dado por $T|_{\mathfrak{h}} = H$ y $T\xi = 0$ es un tensor CKY en $\mathfrak{g}$.

Sabiendo que por 4.3 un tensor KY invertible en un álgebra de Lie de dimensión cuatro es un tensor paralelo, entonces $d\mu = 0$. Realizando la extensión propuesta en el teorema anterior encontramos nuevos ejemplos de 2-formas CKY en álgebras de Lie de dimensión 5. Además encontramos que son Sasakianas.

Definición 4.5.4. Sea (M, g) variedad riemanniana de dimensión $2n + 1$. Decimos que M posee una **estructura métrica de casi contacto** si existen un campo vectorial no nulo ξ, una 1-forma α y un tensor Φ de tipo $(1, 1)$ tal que $\alpha(\xi) = 1$, $\Phi^2 = -I + \xi \otimes \alpha$ y $g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \alpha(X)\alpha(Y)$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Se denota a (Φ, α, ξ, g) a la estructura métrica de casi contacto en M.

Una **estructura Sasakiana** es una estructura métrica de casi contacto (Φ, α, ξ, g) tal que $N_\Phi = -d\alpha \otimes \xi$ y $d\alpha = 2\omega$. Donde N_Φ es el tensor de Nijenhuis en Φ.

En lo que sigue usaremos la clasificación de las álgebras de Lie sasakianas con centro no trivial en dimensión cinco.

Teorema 4.5.5 ([AFV09]). *Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie con centro no trivial de dimensión cinco. Si $\mathfrak{g}$ admite una estructura Sasakiana invariante a izquierda, entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de* *las siguientes álgebras de Lie:*

$$\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{h}_5 : [e_1, e_2] = -e_5, [e_3, e_4] = -e_5,$$
$$\mathfrak{g}_2 \cong \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{h}_3 : [e_1, e_2] = e_2 - e_5, [e_3, e_4] = -e_5,$$
$$\mathfrak{g}_3 \cong \mathbb{R} \ltimes (\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}) : [e_1, e_3] = e_2, [e_1, e_2] = -e_3, [e_1, e_4] = -e_5,\ [e_2, e_3] = -e_5,$$
$$\mathfrak{g}_4 \cong \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : [e_1, e_2] = e_2 - e_5, [e_3, e_4] = e_4 - e_5,$$
$$\mathfrak{g}_5 \cong \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \ltimes \mathfrak{h}_3) : [e_1, e_2] = e_3 - e_5, [e_3, e_4] = -e_3 + e_5, [e_1, e_4] = -\frac{1}{2}e_1, \quad [e_2, e_4] = -\frac{1}{2}e_2,$$
$$\mathfrak{g}_6 \cong \mathbb{R} \times \mathfrak{n}_4 : [e_1, e_2] = e_3, [e_3, e_4] = -e_3, [e_1, e_4] = -2e_1 - e_5, [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_2, e_3] = -e_5,$$
$$\mathfrak{g}_7^{\delta} : [e_1, e_2] = -e_5 + e_3, [e_1, e_4] = -\frac{\delta}{2}e_1 + e_2, [e_2, e_4] = -e_1 - \frac{\delta}{2}e_2, \quad [e_3, e_4] = -\delta e_3 + \delta e_5 \textit{ con } \delta > 0,$$
$$\mathfrak{g}_8^{\delta} : [e_1, e_4] = -e_1 - e_5, [e_2, e_3] = -e_5, [e_2, e_4] = \delta e_3,\ [e_3, e_4] = -\delta e_2, \textit{con } \delta > 0.$$

Corolario 4.5.6. *Las extensiones centrales de álgebras de Lie de dimensión cuatro con tensor invariante H, antisimétrico, invertible y paralelo, resultan ser álgebras de Lie Sasakianas con centro no trivial.*

Demostración. Para la prueba de este corolario extendemos cada álgebra de Lie obtenida en el Teorema 4.3.7, y luego vemos a qué álgebra del listado del Teorema 4.5.5 es isomorfa. Solo haremos la extensión de $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, y veremos a que álgebra es isomorfa. Para el resto se procede de la misma forma.

En primer lugar necesitamos la inversa de H, pues con ella se define μ. Computando se obtiene:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{tf}{a_1(e^2-f^2)} & \frac{et}{a_1(e^2-f^2)} & 0 \\ \frac{tf}{a_1(e^2-f^2)} & 0 & 0 & \frac{a_1e+a_2f}{a_1(e^2-f^2)} \\ -\frac{et}{a_1(e^2-f^2)} & 0 & 0 & -\frac{a_2e+a_1f}{a_1(e^2-f^2)} \\ 0 & -\frac{a_1e+a_2f}{a_1(e^2-f^2)} & \frac{a_2e+a_1f}{a_1(e^2-f^2)} & 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos la extensión central, añadiendo el vector e_4:

$$[e_0, e_1]_\mu = a_1e_1 + a_2e_2 - 2\frac{ft}{a_1(e^2 - f^2)}e_4,\ [e_0, e_2]_\mu = a_2e_1 + a_1e_2 + 2\frac{et}{a_1(e^2 - f^2)}e_4,$$

$$[e_1, e_3]_\mu = te_2 + 2\frac{a_1e + a_2f}{a_1(e^2 - f^2)}e_4, \quad [e_2, e_3]_\mu = te_1 - 2\frac{a_2e + a_1f}{a_1(e^2 - f^2)}e_4$$

Mostraremos el isomorfismo para esta nueva álgebra. Haremos dos cambios de base, primero llamamos:

$$v_1 = e_1 + e_2 - \tfrac{1}{t}e_3, \qquad v_2 = e_1 + e_2, \qquad v_3 = e_1 - e_2,$$
$$v_4 = e_4, \qquad v_0 = e_0 - (a_1 + a_2)v_1 + (a_1 + a_2)v_2.$$

Los corchetes para esta nueva base son:

$$[v_1, v_2] = v_2 + \tfrac{2(a_1-a_2)(e-f)}{ta_1(e^2-f^2)}v_4, \quad [v_1, v_3] = -v_3 + \tfrac{2(a_1+a_2)(e+f)}{ta_1(e^2-f^2)}v_4, \quad [v_2, v_3] = 0$$

$$[v_0, v_1] = 0, \quad [v_0, v_2] = 0, \quad [v_0, v_3] = 2a_1v_3 - \tfrac{2(e+f)}{ta_1(e^2-f^2)}(t^2 + (a_1 + a_2)^2)v_4$$

Note que como $a_1^2 = t^2 + a_2^2$, se deduce que $a_1 - a_2 \neq 0$ y $a_1 + a_2 \neq 0$. Más aún ambos poseen igual signo.

Cambiando nuevamente la base,

$$\{v_0, v_1, v_2, v_3, e_4\} \to \left\{\frac{v_0}{2a_1}, v_1 + \frac{v_0}{2a_1}, v_2, v_3, v_4\right\}$$

$$[\tfrac{v_0}{2a_1}, v_3] = v_3 - 2\tfrac{(a_1+a_2)}{a_1t(e-f)}v_4, \quad [\tfrac{v_0}{2a_1}, v_1 + \tfrac{v_0}{2a_1}] = 0, \quad [\tfrac{v_0}{2a_1}, v_2] = 0$$

$$[v_1 + \tfrac{v_0}{2a_1}, v_3] = 0, \quad [v_1 + \tfrac{v_0}{2a_1}, v_2] = v_2 + \tfrac{2(a_1-a_2)}{ta_1(e+f)}v_4, \quad [v_2, v_3] = 0 \ .$$

Renombrando a

$$\{f_0 = \frac{v_0}{2a_1}, f_3 = \frac{e-f}{a_1+a_2}v_3, f_1 = v_1 + \frac{v_0}{2a_1}, f_2 = -\frac{e+f}{a_1-a_2}v_2, f_4 = \frac{2}{a_1t}v_4\}$$

Se obtiene que,

$$[f_1, f_2] = f_2 - f_4, \quad [f_0, f_3] = f_3 - f_4.$$

Luego esta extensión central resulta ser isomorfa a $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. □

La siguiente lista contiene las extensiones de cada álgebra de Lie de dimensión cuatro con tensor paralelo indicando a que álgebra sasakiana es isomorfa y el tensor T CKY.

- $\big(\mathbb{R}^2 \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})\big) \oplus_\mu \mathbb{R}e_4 \simeq \mathfrak{g}_2 :\ [e_0, e_3]_\mu = \lambda e_3 + 2c^{-1}e_4,\ [e_1, e_2]_\mu = 2d^{-1}e_4,$

  con $c, d, \lambda > 0$

$$T\mid_{\{e_0,e_1,e_2,e_3\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Te_4 = 0.$$

- $(\mathbb{R} \times \mathfrak{e}(2)) \oplus_\mu \mathbb{R}e_4 \simeq \mathfrak{g}_3 :\ [e_0, e_1]_\mu = 2a^{-1}e_4,\ [e_0, e_2]_\mu = te_3,$

  $[e_2, e_3]_\mu = 2f^{-1}e_4,\ [e_0, e_3]_\mu = -te_2$ con $a, f, t > 0$

$$T\mid_{\{e_0,e_1,e_2,e_3\}} = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix}, \qquad Te_4 = 0.$$

- $\mathfrak{r}'_{4,\mu,0} \oplus_\mu \mathbb{R}e_4 \simeq \mathfrak{g}_8 :\ [e_0, e_1]_\mu = \mu e_1 + 2a^{-1}e_4,\ [e_0, e_2]_\mu = te_3,$

  $[e_0, e_3]_\mu = -te_2,\ [e_2, e_3]_\mu = 2f^{-1}e_4$ con $a, f, t > 0$ y $\mu \neq 0$

$$T\mid_{\{e_0,e_1,e_2,e_3\}} = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix}, \qquad Te_4 = 0.$$

- $\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}} \oplus_\mu \mathbb{R}e_4 \simeq \mathfrak{g}_5 :\ [e_0, e_1]_\mu = \tfrac{t}{2}e_1,\ [e_0, e_2]_\mu = \tfrac{t}{2}e_2,$

$$[e_0, e_3]_\mu = te_3 + 2c^{-1}e_4,\ [e_1, e_2]_\mu = te_3 + 2c^{-1}e_4 \text{ con } c, t > 0$$

$$T\mid_{\{e_0,e_1,e_2,e_3\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Te_4 = 0.$$

- $\mathfrak{d}_{4,2} \oplus_\mu \mathbb{R}e_4 \simeq \mathfrak{g}_6 :\ [e_0, e_1]_\mu = -te_1 + 2a^{-1}e_4,\ [e_0, e_2]_\mu = \frac{t}{2}e_2,\ [e_0, e_3]_\mu = -\frac{t}{2}e_3,$

$$[e_1, e_2]_\mu = te_3,\ [e_2, e_3]_\mu = 2a^{-1}e_4 \text{ con } t, a > 0$$

$$T\mid_{\{e_0,e_1,e_2,e_3\}} = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \qquad Te_4 = 0.$$

- $\mathfrak{d}'_{4,\lambda} \oplus_\mu \mathbb{R}e_4 \simeq \mathfrak{g}_7 : [e_0, e_1]_\mu = \frac{t}{2}e_1 - b_1e_2,\ [e_0, e_2]_\mu = b_1e_1 + \frac{t}{2}e_2$

$$[e_0, e_3]_\mu = te_3 + 2c^{-1}e_4,\ [e_1, e_2]_\mu = te_3 + 2c^{-1}e_4 \text{ con } t, c > 0 \text{ y } |b_1| > 0,$$

$$T\mid_{\{e_0,e_1,e_2,e_3\}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Te_4 = 0.$$

- $(\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{aff}(\mathbb{R})) \oplus_\mu \mathbb{R}e_4 \simeq \mathfrak{g}_4 :$

$$[e_0, e_1]_\mu = a_1e_1 + a_2e_2 - 2\frac{ft}{a_1(e^2 - f^2)}e_4,\ [e_0, e_2]_\mu = a_2e_1 + a_1e_2 + 2\frac{et}{a_1(e^2 - f^2)}e_4,$$

$$[e_1, e_3]_\mu = te_2 + 2\frac{a_1e + a_2f}{a_1(e^2 - f^2)}e_4, \qquad [e_2, e_3]_\mu = te_1 - 2\frac{a_2e + a_1f}{a_1(e^2 - f^2)}e_4,$$

con $a_1 > 0$, $e > f \geq 0$, y se verifica $t^2 + a_2^2 = a_1^2$.

$$T\mid_{\{e_0,e_1,e_2,e_3\}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_2}{\lambda_1}e - \frac{a_1}{\lambda_1}f & -\frac{a_1}{\lambda_1}e - \frac{a_2}{\lambda_1}f & 0 \\ \frac{a_2}{\lambda_1}e + \frac{a_1}{\lambda_1}f & 0 & 0 & -e \\ \frac{a_1}{\lambda_1}e + \frac{a_2}{\lambda_1}f & 0 & 0 & -f \\ 0 & e & f & 0 \end{bmatrix}, \qquad Te_4 = 0.$$

Observación 4.5.7. Note que para $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^4$, todo endomorfismo H antisimétrico respecto de una base ortogonal es paralelo. Más aún si H es inversible existe una base ortonormal $\mathfrak{B}$ tal que

$$[H]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Realizando la extensión central con la 2-forma μ tal como en el Teorema 4.5.3 se obtiene un álgebra de Lie de dimensión cinco isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{g}_1$ del Teorema 4.5.5. Esto completa la lista enumerada de todas las álgebras de Lie sasakianas con centro no trivial.

4.6. Estructuras casi complejas asociadas a estructuras paralelas invariantes en álgebras de Lie de dimensión cuatro

Estudiamos las propiedades intrínsecas de una estructura casi compleja asociada a la terna $(\mathfrak{g}, H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con $\dim \mathfrak{g} = 4$ y H endomorfismo en $\mathfrak{g}$ inversible, antisimétrico y paralelo. El análisis se hace en forma general para un álgebra de Lie arbitraria que cumpla con estas características. Encontramos que las estructuras complejas asociadas le dan una estructura Kähler invariante a cualquier álgebra que satisfaga las condiciones de paralelismo.

4.6.1. Propiedades de una estructura compleja asociada

Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie de dimensión cuatro, con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ producto interno en $\mathfrak{g}$.

Supongamos que existe una base ortonormal denotada por $\mathfrak{B} = \{e_1, f_1, e_2, f_2\}$ tal que el endomorfismo antisimétrico H y su inversa se escriben de las siguiente manera:

$$[H]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}, \quad [H^{-1}]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 0 & a^{-1} & 0 & 0 \\ -a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{-1} \\ 0 & 0 & -b^{-1} & 0 \end{bmatrix} \text{ con } a, b > 0. \tag{4.6.1}$$

En función del endomorfismo H escribimos la 2-forma ω y el tensor de Nijenhuis asociado a H $\forall\, x, y \in \mathfrak{g}$. Asociada a H^{-1} escribimos la 2-forma μ en $\mathfrak{g}$:

$$\omega = ae^1 \wedge f^1 + be^2 \wedge f^2, \quad N(x, y) = [Hx, Hy] - H([Hx, y] + [x, Hy]) + H^2[x, y]$$

$$\mu = -a^{-1}e^1 \wedge f^1 - b^{-1}e^2 \wedge f^2.$$

Por la sección 3.5, la estructura casi compleja asociada en la base $\mathfrak{B}$:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Asociamos a ella la 2-forma de Kähler y el tensor de Nijenhuis los cuales denotamos ω_J y N_J respectivamente, tal que $\forall\, x, y \in \mathfrak{g}$:

$$\omega_J(x, y) = g(Jx, y), \quad N_J(x, y) = [Jx, Jy] - J([Jx, y] + [x, Jy]) - [x, y]\ .$$

A continuación veremos que propiedades J hereda de H y contestaremos a la siguiente pregunta ¿Si H es paralelo, es J paralelo?. Enunciaremos los siguientes lemas y proposiciones que nos dan una respuesta afirmativa a la pregunta.

Lema 4.6.1. *Sea la estructura $(\mathfrak{g}, H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con H un endomorfismo inversible y antisimétrico y ω la 2-forma asociada a H. Si $d\omega = d\mu = 0$ entonces la 2-forma ω_J es cerrada.*

Demostración. Escribimos a H tal como la ecuación 4.6.1 para alguna base ortonormal y las derivadas exteriores de ω y μ.

$$d\omega = ad(e^1 \wedge f^1) + bd(e^2 \wedge f^2), \;\; d\mu = -a^{-1}d(e^1 \wedge f^1) - b^{-1}d(e^2 \wedge f^2).$$

Si $d\omega = d\mu = 0$ entonces en la primera ecuación se tiene $d(e^2 \wedge f^2) = -\frac{a}{b}d(e^1 \wedge f^1)$. Reemplazando esta identidad en la segunda ecuación obtenemos $-a^{-1}d(e^1 \wedge f^1) -$

$b^{-1}(-\frac{a}{b})d(e^1 \wedge f^1) = 0$ y así $(a^2 - b^2)d(e^1 \wedge f^1) = 0$. Existen dos posibilidades en los valores a y b de H: $a = b$ ó $a \neq b$.

En el primer caso $H = aJ$ y entonces $d\omega = ad\omega_J = 0$. En el segundo caso como $a^2 - b^2 \neq 0$, resulta $d(e^1 \wedge f^1) = 0$ y luego $d(e^2 \wedge f^2) = 0$; por lo tanto $d\omega_J = 0$. □

Lema 4.6.2. *Sea la estructura $(\mathfrak{g}, H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con H un endomorfismo inversible antisimétrico y paralelo que se escribe como 4.6.1 para alguna base ortonormal. Si $a = b$ entonces $\nabla J = 0$.*

Demostración. En este caso $H = aJ$, si $\nabla H = 0$ entonces $a\nabla J = 0$, como $a \neq 0$, J es paralela. □

Lema 4.6.3. *Si $d\omega = 0$ y $d\mu = 0$ y $a \neq b$ los subespacios generados por $\{e_1, f_1\}$ y $\{e_2, f_2\}$ son subálgebras de Lie.*

Demostración. Para la prueba de usaremos la ecuaciones Maurer Cartan (ver [AF02, Teorema 2]). Por conveniencia en subíndices para este caso supongamos que tenemos una base ortonormal $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, para la cual H se escribe como antes.

Describimos los corchetes usando las constantes de estructura del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2] &= C_{12}^1 x_1 + C_{12}^2 x_2 + C_{12}^3 x_3 + C_{12}^4 x_4 \\
[x_1, x_3] &= C_{13}^1 x_1 + C_{13}^2 x_2 + C_{13}^3 x_3 + C_{13}^4 x_4 \\
[x_1, x_4] &= C_{14}^1 x_1 + C_{14}^2 x_2 + C_{14}^3 x_3 + C_{14}^4 x_4 \\
[x_2, x_3] &= C_{23}^1 x_1 + C_{23}^2 x_2 + C_{23}^3 x_3 + C_{23}^4 x_4 \\
[x_2, x_4] &= C_{24}^1 x_1 + C_{24}^2 x_2 + C_{24}^3 x_3 + C_{24}^4 x_4 \\
[x_3, x_4] &= C_{34}^1 x_1 + C_{34}^2 x_2 + C_{34}^3 x_3 + C_{34}^4 x_4.
\end{aligned}$$

Tomando a x^1, x^2, x^3, x^4 la base dual de $\mathfrak{g}$, podemos calcular dx^1, dx^2, dx^3 y dx^4 usando las ecuaciones de Maurer Cartan: $dx^i = -\sum_{j<k} C_{jk}^i x^j \wedge x^k$. Luego,

$$\begin{aligned}
dx^1 &= -C_{12}^1 x^1 \wedge x^2 - C_{13}^1 x^1 \wedge x^3 - C_{14}^1 x^1 \wedge x^4 - C_{23}^1 x^2 \wedge x^3 - C_{24}^1 x^2 \wedge x^4 - C_{34}^1 x^3 \wedge x^4 \\
dx^2 &= -C_{12}^2 x^1 \wedge x^2 - C_{13}^2 x^1 \wedge x^3 - C_{14}^2 x^1 \wedge x^4 - C_{23}^2 x^2 \wedge x^3 - C_{24}^2 x^2 \wedge x^4 - C_{34}^2 x^3 \wedge x^4 \\
dx^3 &= -C_{12}^3 x^1 \wedge x^2 - C_{13}^3 x^1 \wedge x^3 - C_{14}^3 x^1 \wedge x^4 - C_{23}^3 x^2 \wedge x^3 - C_{24}^3 x^2 \wedge x^4 - C_{34}^3 x^3 \wedge x^4 \\
dx^4 &= -C_{12}^4 x^1 \wedge x^2 - C_{13}^4 x^1 \wedge x^3 - C_{14}^4 x^1 \wedge x^4 - C_{23}^4 x^2 \wedge x^3 - C_{24}^4 x^2 \wedge x^4 - C_{34}^4 x^3 \wedge x^4.
\end{aligned}$$

Si ω y μ son cerradas obtenemos que $d(x^1 \wedge x^2) = d(x^3 \wedge x^4) = 0$. Esto implica que $dx^1 \wedge x^2 = x^1 dx^2$ y $dx^3 \wedge x^4 = x^3 dx^4$. Luego obtenemos $C_{34}^1 = C_{34}^2 = 0$ y $C_{12}^3 = C_{12}^4 = 0$ y esto hace que $\{x_1, x_2\}$ y $\{x_3, x_4\}$ sean subálgebras. □

Proposición 4.6.4. *Sea la estructura $(\mathfrak{g}, H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con H un endomorfismo inversible antisimétrico. Si $N = 0$ entonces $N_J = 0$, con J la estructura casi compleja asociada a H.*

Demostración. Siendo H antisimétrico e inversible, entonces H se escribe para alguna base ortonormal de la forma dada en la ecuación 4.6.1.

Si $a = b$, como $N = aN_J$ entonces $N = 0$ si y solo si $N_J = 0$.

Asumamos que $a \neq b$.

Observar que $N_J(e_1, f_1) = N_J(e_2, f_2) = 0$. Resta ver $N_J(e_1, e_2)$, $N_J(e_1, f_2)$, $N_J(f_1, e_2)$ y $N_J(f_1, f_2)$. Si $N = 0$, entonces obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$N(e_1, e_2) = ab[f_1, f_2] - aH[f_1, e_2] - bH[e_1, f_2]) + H^2[e_1, e_2] = 0 \tag{4.6.2}$$
$$N(e_1, f_2) = -ab[f_1, e_2] - aH[f_1, f_2] + bH[e_1, e_2] + H^2[e_1, f_2] = 0 \tag{4.6.3}$$
$$N(f_1, e_2) = -ab[e_1, f_2] + aH[e_1, e_2] - bH[f_1, f_2] + H^2[f_1, e_2] = 0 \tag{4.6.4}$$
$$N(f_1, f_2) = ab[e_1, e_2] + aH[e_1, f_2] + bH[f_1, e_2] + H^2[f_1, f_2] = 0. \tag{4.6.5}$$

Agrupamos 4.6.2 y 4.6.5

$$\begin{cases} ab[f_1, f_2] - aH[f_1, e_2] - bH[e_1, f_2]) + H^2[e_1, e_2] = 0 \\ ab[e_1, e_2] + aH[e_1, f_2] + b[f_1, e_2] + H^2[f_1, f_2] = 0 \end{cases}$$

Reemplazamos H por AJ con $A = \sqrt{HH^T}$, (ver 3.5) y ordenamos:

$$ab[f_1, f_2] - aAJ[f_1, e_2] - bAJ[e_1, f_2] + (AJ)^2[e_1, e_2] = 0$$
$$ab[e_1, e_2] + aAJ[e_1, f_2] + bAJ[f_1, e_2] + (AJ)^2[f_1, f_2] = 0$$

Como $(AJ)^2 = -A^2$, tenemos:

$$ab[f_1, f_2] - A^2[e_1, e_2] = AJ(a[f_1, e_2] + b[e_1, f_2])$$
$$A^2[f_1, f_2] - ab[e_1, e_2] = AJ(a[e_1, f_2] + b[f_1, e_2])$$

Sumamos miembro a miembro

$$\left(A^2 + abI\right)([f_1, f_2] - [e_1, e_2]) = (a + b)AJ([f_1, e_2] + [e_1, f_2])$$

Notar que $A^2 + abI = (a + b)A$, entonces al dividir por $a + b$ en ambos miembros,

$$A([f_1, f_2] - [e_1, e_2]) = AJ([f_1, e_2] + [e_1, f_2])$$

Siendo A inversible, $([f_1, f_2] - [e_1, e_2]) - J([f_1, e_2] - J[e_1, f_2]) = 0$. Por lo tanto $N_J(e_1, e_2) = 0$, y como $N_J(f_1, f_2) = -N(e_1, e_2)$, tenemos $N_J(f_1, f_2) = 0$. De manera análoga agrupando las ecuaciones 4.6.3 y 4.6.4, obtenemos $N_J(e_1, f_2) = N_J(f_1, e_2) = 0$.

□

El corolario que continúa es consecuencia de la proposición anterior y Lema 4.6.1.

Corolario 4.6.5. *Sea la estructura $(\mathfrak{g}, H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con H endomorfismo inversible, antisimétrico. Si H es paralelo, entonces $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es una estructura Kähler con J la estructura compleja asociada a H.*

Demostración. Recordemos que $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es Kähler si $\nabla J = 0$ o equivalentemente $d\omega_J = 0$ y $N_J = 0$.

Suponemos H como en ecuación 4.6.1 en la base ortonormal $\{e_1, f_1, e_2, f_2\}$, con J su estructura casi compleja asociada. Si $a = b$ entonces por Lema 4.6.2 J es paralelo.

Si $a \neq b$, por el Lema 4.6.1 y la proposición 4.6.4 se tiene $N_J = 0$ y $d\omega_J = 0$. Luego J es paralela. □

Observación 4.6.6. Con el resultado del Corolario 4.6.5, podemos decir que la lista de álgebras de Lie obtenidas en el Teorema 4.3.7 admiten una estructura Kähler. Estas álgebras coinciden con los resultados en [Ov14], en donde se clasifican todos los pares (J, ω), con J es una estructura compleja, y ω una estructura simpléctica compatible (es decir $\omega(Jx, Jy) = \omega(x, y)$, $\forall\, x, y \in \mathfrak{g}$). Estas estructuras inducen una pseudométrica g tal que $g(x, y) = \omega(Jx, y)$, $\forall\, x, y \in \mathfrak{g}$ para la cual $\nabla J = 0$.

Corolario 4.6.7. *Sea la estructura $(\mathfrak{g}, H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con H endomorfismo inversible y antisimétrico. Si se supone que H es paralelo y que $\mathfrak{g}$ es una álgebra de Lie nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es abeliana.*

Demostración. Dado el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, es posible extender a una métrica invariante a izquierda g en el grupo de Lie G tal que $Lie(G) = \mathfrak{g}$. Por el corolario anterior $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es una estructura Kähler con J la estructura casi compleja asociada a H. J también se extiende a un tensor tipo $(1, 1)$ invariante a izquierda en G. De tal forma que (G, g, J) es Kähler. Pero por [Han57], si G es nilpotente y admite una estructura Kähler invariante a izquierda entonces G es abeliano. Luego $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^4$. □

Corolario 4.6.8. *Sea $(\mathfrak{g}, g, H)$ una estructura KY, con H un endomorfismo antisimétrico. Si H es inversible entonces la estructura casi compleja J asociada a H es paralela.*

Demostración. Por [AD18] toda 2-forma KY no degenerada es paralela y por corolario 4.6.5 el resultado se tiene. □

4.6.2. Generalización de algunos teoremas

Consideramos en esta parte las estructuras $(\mathfrak{g}, H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con $\dim \mathfrak{g} = 2n$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ producto interno y H endomorfismo inversible y antisimétrico que admite una base ortonormal $\mathfrak{B} = \{e_1, f_1, ..., e_n, f_n\}$ tal que H se escribe como en la ecuación 3.1.1. Tal como en la sección 3.1, $[H^2]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}\left[-a_1^2, -a_1^2, -a_2^2, -a_2^2, ..., -a_n^2, -a_n^2\right]$ y los autovectores son los elementos de la base $\mathcal{B}$. Los siguientes conjuntos representan el espectro y el multiconjunto de autovalores de H^2:

$$S(H^2) = (-a_1^2, -a_2^2, ..., -a_n^2),\ M(H^2) = (-a_1^2, -a_1^2, -a_2^2, -a_2^2, ..., -a_n^2, -a_n^2).$$

Lema 4.6.9. *Si $N = 0$ entonces $N_J(e_i, f_i) = 0$ $\forall i = 1, ..., n$. Además si $a_i \neq a_j$, $\forall i \neq j$ entonces los autoespacios asociados de H^2 son subálgebras de Lie y $\mathfrak{g}$ es suma directa de subálgebras de Lie.*

Demostración. Sea J la estructura casi compleja asociada tal como la ecuación 3.5.1. Note que $N_J(e_i, f_i) = (J^2 + 1)[e_i, f_i] = 0$, $\forall i = 1, .., n$.

Además como H es integrable entonces $N(e_i, f_i) = 0$ para todo $i = 1, ..., n$, esto implica que :

$$\begin{aligned}
[He_i, Hf_i] - H([He_i, f_i] + [e_i, Hf_i]) + H^2[e_i, f_i] &= 0 \\
-a_i^2[f_i, e_i] - H([a_i f_i, f_i] + [e_i, -a_i e_i]) + H^2[e_i, f_i] &= 0 \\
(H^2 + a_i^2 I)[e_i, f_i] &= 0
\end{aligned}$$

Observar que $H^2 = \operatorname{diag}(-a_1^2, -a_1^2, -a_2^2, -a_2^2, ..., -a_n^2, -a_n^2)$ y $\operatorname{Span}\{e_i, f_i\}$ generan los autoespacios de autovalor $-a_i^2$ $\forall i = 1, ..., n$. Entonces $[e_i, f_i]$ es un autovector de autovalor $-a_i^2$ de H^2. Luego $[e_i, f_i]$ pertenece a $\operatorname{Span}\{e_i, f_i\}$. Por lo tanto $\operatorname{Span}\{e_i, f_i\}$ forman una subálgebra de Lie para cada $i = 1, .., n$. Denotamos a estas subálgebras como $\mathfrak{g}_i$. Luego $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_n$.

□

Teorema 4.6.10. *Sea la estructura $(\mathfrak{g}, g, H)$ tal que $\sharp S(H^2) \leq 2$. Si $d\omega = d\mu = 0$ entonces $d\omega_J = 0$*

Demostración. Sean a, b los dos valores que se repiten en H. Ordenamos la base de tal forma de separar bloques antisimétricos distintos con $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 = \{e_1, f_1, ..., e_t, f_t\} \cup \{e_{t+1}, f_{t+1}, ..., e_n.f_n\}$ tal que

$$H_{\mathfrak{B}'} = \begin{bmatrix} H_a & 0 \\ 0 & H_b \end{bmatrix} \tag{4.6.6}$$

Con

$$[H_a]_{\mathfrak{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & -a & ... & 0 & 0 \\ a & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & -a \\ 0 & 0 & ... & a & 0 \end{bmatrix}, \quad [H_b]_{\mathfrak{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & -b & ... & 0 & 0 \\ b & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & -b \\ 0 & 0 & ... & b & 0 \end{bmatrix}$$

La 2-forma ω y la 2-forma μ se escriben:

$$\omega = a(e^1 \wedge f^1 + e^2 \wedge f^2 + ... + e^t \wedge f^t) + b(e^{t+1} \wedge f^{t+1} + ... + e^n \wedge f^n)$$
$$\mu = -a^{-1}(e^1 \wedge f^1 + e^2 \wedge f^2 + ... + e^t \wedge f^t) - b^{-1}(e^{t+1} \wedge f^{t+1} + ... + e^n \wedge f^n)$$

Se procede de igual forma que la demostración del Lema 4.6.1.

□

Teorema 4.6.11. *Sea la estructura $(\mathfrak{g}, g, H)$ tal que $\sharp S(H^2) \leq 2$. Si $N = 0$ entonces $N_J = 0$, J es la estructura casi compleja asociada.*

Demostración. H se define como la ecuación 4.6.6, donde $a, b > 0$. Consideraremos dos casos, el primero $a = b$, entonces $N = aN_J$, luego $N = 0$ si y solo si $N_J = 0$.

Veremos ahora el caso en que $a \neq b$, llamamos a $\mathfrak{g}_a = \mathrm{Span}\{e_1, f_1, ..., e_t, f_t\}$ y $\mathfrak{g}_b = \mathrm{Span}\{e_{t+1}, f_{t+1}, ..., e_n, f_n\}$. Notar que cada subespacio está compuesto por los autovectores de H^2 asociados al autovalor $-a^2$, $-b^2$ respectivamente.

Observe que siempre se tiene que $N_J(e_i, f_i) = 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Y además: $\forall\, i, j \in \{1, ..., t\}$

$$N(e_i, f_j) = aN_J(e_i, f_j),\ N(e_i, e_j) = aN_J(e_i, e_j),\ N(f_i, f_j) = aN_J(f_i, f_j)$$

$\forall\, i, j \in \{t+1, ..., n\}$

$$N(e_i, f_j) = aN_J(e_i, f_j),\ N(e_i, e_j) = aN_J(e_i, e_j),\ N(f_i, f_j) \qquad = aN_J(f_i, f_j).$$

Luego

$$N|\mathfrak{g}_a \times \mathfrak{g}_a = 0 \Leftrightarrow N_J|\mathfrak{g}_a \times \mathfrak{g}_a = 0$$
$$N|\mathfrak{g}_b \times \mathfrak{g}_b = 0 \Leftrightarrow N_J|\mathfrak{g}_b \times \mathfrak{g}_b = 0$$

Quedan evaluar: $N_J(e_i, e_j), N_J(f_i, f_j), N_J(e_i, f_j), N_J(f_i, e_j)$ con $i \in \{1, ..., t\}$ y $j \in \{t+1, ..., n\}$.

Con las ecuaciones que resultan de ver $N(e_i, e_j) = N(f_i, f_j) = N(e_i, f_j) = N(f_i, e_j) = 0$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
ab[f_i, f_i] - aH[f_i, e_j] - bH[e_i, f_j]) + H^2[e_i, e_j] &= 0 \\
ab[e_i, e_j] + aH[e_i, f_j] + bH[f_i, e_j] + H^2[f_i, f_j] &= 0 \\
ab[e_j, f_i] - aH[f_i, f_j] + bH[e_i, f_j] + H^2[e_i, f_j] &= 0 \\
-ab[e_i, f_j] + aH[e_i, e_j] - bH[f_i, f_j] + H^2[f_i, e_j] &= 0
\end{aligned}
$$

Siguiendo el mismo procedimiento que para dimensión cuatro, agrupamos las dos primeras y las dos últimas. Reemplazando $H = AJ$ en cada ecuación y luego identificando $A^2+abI = (a+b)A$, se tiene $N(e_i, f_j) = N(f_i, e_j) = 0$ para $i \in \{1, ..., t\}$ y $j \in \{t+1, ..., n\}$. □

Proposición 4.6.12. *Sea la estructura $(\mathfrak{g}, H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tal que H^2 posee sólo dos autovalores distintos $-a^2, -b^2$. Si además los espacios de autovectores $\mathfrak{g}_a$ y $\mathfrak{g}_b$ de H^2 con respecto a los autovalores $-a^2$ y $-b^2$ son subálgebras tales que $[\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b] = 0$ entonces $N = 0$ si y solo si $N_J = 0$, en donde J es la estructura casi compleja asociada a H.*

Demostración. Planteamos H tal como los casos anteriores en una base ortonormal $\{e_1, f_1, ..., e_t, f_t, e_{t+1}, f_{t+1}, ..., e_n, f_n\}$, donde $\mathfrak{g}_a = \text{Span}\{e_i, f_i\}_{i=1}^t$ y $\mathfrak{g}_b = \text{Span}\{e_j, f_j\}_{j=t+1}^n$.

Para la prueba de la implicación directa uso el Teorema 4.6.11. En la implicación recíproca, para vectores x y y que corresponden a subálgebras $\mathfrak{g}_a$ y $\mathfrak{g}_b$ respectivamente se tiene fácilmente que $N(x, y) = 0$, usando la hipótesis de que $[\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b] = 0$. Queda ver si $N = 0$ en cada una de las subálgebras $\mathfrak{g}_a$ y$\mathfrak{g}_b$.

Observar que $N(e_i, f_j) = aN_J(e_i, f_j)$, $N(e_i, e_j) = aN_J(e_i, e_j)$, $N(f_i, e_j) = aN_J(f_i, e_j)$ y $N(f_j, e_i) = aN_J(f_j, e_i)$ $\forall i, j \in \{1, ..., t\}$. Luego si $N_J = 0$ se tiene que $N = 0$ en $\mathfrak{g}_a$. De igual manera se prueba que H es integrable en $\mathfrak{g}_b$.

□

De forma análoga, al caso en dimensión cuatro, de las proposiciones anteriores se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 4.6.13. *Sea la estructura $(\mathfrak{g}, H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tal que $a_i = a$ ó $a_i = b\, \forall\, i \in \{1, ..., n\}$ con a, b ambas constantes positivas. Si $(\mathfrak{g}, H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es estructura paralela entonces $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es estructura Kähler, J la estructura casi compleja asociada.*

Corolario 4.6.14. *Las mismas condiciones que el Corolario 4.6.13 y además $\mathfrak{g}$ nilpotente. Si $(\mathfrak{g}, H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es estructura paralela entonces $\mathfrak{g}$ es abeliano.*

Capítulo 5

Estructuras Killing-Yano en Espacios Homogéneos

En este capítulo repasamos algunas definiciones y propiedades de espacios homogéneos. Nos enfocamos en espacios homogéneos con métricas y conexiones G-invariantes y estudiamos tensores G-invariantes de tipo $(1, 1)$. Presentamos la ecuación Killing-Yano para este caso. Más específicamente, estudiamos el comportamiento de la ecuación Killing-Yano en variedades bandera generalizadas y damos ejemplos concretos en variedades bandera maximales.

5.1. Espacios Homogéneos

Preliminares básicos sobre representaciones

Sea G un grupo de Lie y V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ que puede ser $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$. Una **representación** (π, V) es un homomorfismo de grupos de Lie $\pi : G \to GL(V)$. Si W es un subespacio de V, decimos que W es π-**invariante** si $\pi(g)(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$.

Una representación (π, V) tiene siempre al menos dos subespacios invariantes, a decir $\{0\}$ y V. A estos se los llama subespacios triviales. Decimos que la representación es **irreducible** si los únicos subespacios invariantes son los triviales.

Notar que toda representación (π, V) define una **acción** $\Phi : G \times V \to V$ tal que $\Phi(g, v) = \pi(g)v$. De esta forma V resulta un G-módulo.

Dos representaciones $\pi : G \to GL(V)$ y $\rho : G \to GL(W)$ se dicen equivalentes si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $\alpha : V \to W$ tal que $\alpha \circ \pi(g) = \rho(g) \circ \alpha \; \forall \, g \in G$.

Análogamente, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, un homomorfismo de álgebras de Lie $\pi : \mathfrak{g} \to gl(V)$ se denomina **representación del álgebra de Lie** $\mathfrak{g}$. Todas las definiciones anteriores se trasladan de manera análoga en este contexto.

Si $\pi : G \to GL(V)$ es una representación de un grupo de Lie, y si $\mathfrak{g} \cong T_eG$ es el álgebra de Lie de G, entonces el homomorfismo derivado $d\pi_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, es decir, se obtiene una representación de $\mathfrak{g}$ en V.

Proposición 5.1.1 (Lema de Schur). *Sea G un grupo de Lie y sean (π, V) y (ρ, V') dos representaciones irreducibles de G. Si $\phi : V \to V'$ es un mapa lineal tal que $\rho(g)\phi = \phi\pi(g) \; \forall \, g \in G$, entonces ϕ es isomorfismo lineal ó $\phi = 0$.*

Demostración. Ver [Kna, Proposition 4.8] □

Corolario 5.1.2. *Sea (π, V) una representación irreducible de un grupo de Lie G en un espacio vectorial complejo V. Si $T : V \to V$ es un mapa lineal tal que $\pi(g)T = T\pi(g) \; \forall \, g \in G$, entonces T es un múltiplo de la identidad.*

Demostración. Ver [Kna, Corolario 4.9] □

Una representación natural asociada a un grupo de Lie es la representación adjunta. Dado un grupo de Lie G y un elemento $a \in G$, siempre vamos a denotar por I_a a la conjugación por a, es decir, I_a es el automorfismo de grupos de Lie

$$I_a : G \to G \text{ tal que } I_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$$

siendo L_a y R_a las traslaciones a izquierda y derecha respectivamente. Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G, que en este caso la identificamos con T_eG, donde e es la identidad de G. Luego se tiene un automorfismo de álgebras de Lie $(dI_a)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Se define la representación adjunta como el homomorfismo de grupos $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ tal que $Ad(a) = (dI_a)_e$.

Lema 5.1.3. Ad *es un homomorfismo de grupos de Lie.*

Demostración. Ver [Dot87, Corolario 4.2]. □

A la derivada de Ad se la denota por $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$, y se la llama la representación adjunta del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Esta no es otro que la representación adjunta usual de álgebras de Lie.

Proposición 5.1.4. *Sea $\pi : H \to G$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\pi"] & G \\
\mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\pi"] & \mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

donde $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{g}$ denotan las álgebras de Lie de H y G respectivamente.

Demostración. Ver [War83, Teorema 3.32]. □

Proposición 5.1.5. *Sea (H, π) subgrupo de Lie de G y $x \in \mathfrak{g}$. Si $x \in d\pi(\mathfrak{h})$ entonces* $\exp(tx) \in \pi(H)\ \forall\, t$.

Recíprocamente si $\exp(tx) \in \pi(H)$ *para todo t en intervalo I, entonces $x \in d\pi(\mathfrak{h})$.*

Demostración. Ver [War83, Proposición 3.33] □

Proposición 5.1.6. *Sea G es un grupo de Lie, $\pi : G \to GL(V)$ una representación, $(d\pi)_e : \mathfrak{g} \to gl(V)$ la representación derivada y W un subespacio de V. Si W es π-invariante entonces es $(d\pi)_e$-invariante. La recíproca es verdadera si G es conexo.*

Demostración. Ver [Dot87, Proposición 4.4] □

Como consecuencia, para la representación adjunta tenemos:

Corolario 5.1.7. *Sea G grupo de Lie conexo y $\mathfrak{m}$ subespacio de $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathfrak{m}$ es* Ad*-invariante si y solo si es* ad*-invariante.*

Espacios homogéneos

Definición 5.1.8. Una variedad diferenciable M se dice **variedad homogénea** si admite una acción de un grupo de Lie, la cual transitiva y C^∞.

Sea G un grupo de Lie y sea K un subgrupo cerrado de G. Consideramos el espacio G/K de coclases a izquierda de K con la topología cociente, y sea $\pi : G \to G/K$ la proyección canónica.

El siguiente teorema hace que G/K admita una estructura de variedad diferenciable.

Teorema 5.1.9. *Con las consideraciones anteriores, el espacio G/K posee una única estructura de variedad diferenciable C^∞ tal que:*

1. *π es C^∞*

2. *Existen secciones locales C^∞ de G/K en G, es decir si $gK \in G/K$ existe un entorno W de gK y el mapa $\sigma : W \to G$ es C^∞ tal que $\pi \circ \sigma = Id$.*

Demostración. Ver [War83, Teorema 3.58] ó [Dot87, Teorema 6.4]. □

Definición 5.1.10. El espacio G/K con las condiciones del teorema anterior, lo llamamos **espacio homogéneo**.

Dado un grupo de Lie G y K un subgrupo cerrado de G, existe una acción natural por izquierda de G en el espacio homogéneo G/K:

$$\tau : G \times G/K \to G/K, \; \tau(g, aK) = gaK = \tau(g)aK$$

Es fácil ver que τ es una acción transitiva. Además $\tau(g)$ son difeomorfismos de G/K que verifican:

$$\tau(a) \circ \pi = \pi \circ L_a \tag{5.1.1}$$

Sea M una variedad homogénea. Luego existe un grupo de Lie G y una acción transitiva C^∞ η tal que para todo $p \in M$ y $g \in G$, $\eta(g, p) \in M$. Denotamos $\eta_g(p) = \eta(g, p)$. Decimos que la acción es **efectiva** si $e \in G$ es el único elemento de G para el cual η_e es la identidad en M.

Dado $p \in M$, al subgrupo $G_p := \{g \in G : \eta(g, p) = p\}$ se lo conoce como grupo de isotropía de p. Este es un subgrupo cerrado de G.

Teorema 5.1.11. *Sea M variedad homogénea y sea $K = G_p$. Entonces el mapa $\beta : G/K \to M$ con $\beta(gK) = \eta(g, p)$ es un difeomorfismo.*

Demostración. Ver [War83, Teorema 3.62]. □

De esta forma podemos escribir a cualquier variedad homogénea M como $M = G/K$, y esta es la presentación de M como espacio homogéneo.

Ejemplo de espacios homogéneos: Variedades bandera

Un ejemplo de espacios homogéneos son los grupos de Lie G, con la acción $G \times G \to G$ dada por las traslaciones a izquierda de G. Otro ejemplo sobre el que trabajaremos más adelante son las variedades bandera full (ó maximales) y las variedades bandera generalizadas.

Definición 5.1.12. Una **bandera full** en $\mathbb{C}^n$ es una colección creciente de subespacios complejos

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n \tag{5.1.2}$$

tal que $\dim V_i = i \; \forall \; i = 1, ..., n$. Al **conjunto de todas las banderas full** se lo denota $\mathbb{F}_n$.

Consideremos en $\mathbb{C}^n$ el producto interno canónico. El grupo $SU(n)$ actúa en $\mathbb{F}_n$ de la siguiente forma:

$$(A, (V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n)) \mapsto (AV_0 \subset AV_1 \subset ... \subset AV_n)$$

Esta acción es transitiva, en efecto fijemos la bandera $p_0 = (V_0^0 \subset V_1^0 \subset ... \subset V_n^0))$, donde $V_i^0 = \mathrm{Span}\{e_1, ..., e_i\}$, y $e_1, \ldots, e_i$ son i los vectores de la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Sea $p = (V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n)$ otra bandera cualquiera.

Elegimos $v_1 \in V_1$ con $|v_1| = 1$. Por inducción en k podemos ir definiendo vectores $v_2, \ldots, v_k$ tales que $\{v_1, ..., v_k\}$ es base ortonormal en V_k. En particular, $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base ortonormal de $V_n = \mathbb{C}^n$. Luego escribiendo a cada vector $v_i = \sum a_{ij} e_j$ y llamando $A = (a_{ij})$, se ve que $A \in SU(n)$ y además $Ap_0 = p$. Por lo tanto la acción es transitiva.

El grupo de isotropía asociado a p_0, es decir, $SU(n)_{p_0} = \{A \in SU(n) : Ap_0 = p_0\}$, es precisamente el grupo de las matrices diagonales en $SU(n)$, es decir, $S(U(1) \times ... \times U(1))$, y el cual es un toro maximal de $SU(n)$. Luego, $\mathbb{F}_n = SU(n)/S(U(1) \times ... \times U(1))$ y por lo tanto podemos pensar a $\mathbb{F}_n$ como un espacio homogéneo. Llamamos a $\mathbb{F}_n$ variedad bandera maximal (o full). En forma general, definimos:

Definición 5.1.13. Una **variedad bandera full** es un espacio homogéneo G/T con G grupo de Lie semisimple, compacto y T toro maximal de G.

Definición 5.1.14. Sea n un entero positivo, y sean $n_1, \ldots, n_s$ enteros positivos tales que $n_1 + \ldots + n_s = n$. Una **bandera parcial de tipo** $(n_1, ..., n_s)$ es una colección creciente de subespacios complejos de $\mathbb{C}^n$

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_s = \mathbb{C}^n \tag{5.1.3}$$

tal que $\dim V_i = n_1 + ... + n_i, \forall \; i = 1, ..., s$

Denotamos por $\mathbb{F}(n_1, ..., n_s)$ al **conjunto de todas las banderas parciales de tipo** $(n_1, \ldots, n_s)$. Notemos que las banderas full son las banderas de tipo $(1, 1, \ldots, 1)$.

Al igual que en el caso full, $SU(n)$ actúa transitivamente en $\mathbb{F}(n_1, ..., n_s)$. En este caso el grupo de isotropía asociado a la bandera canónica p_0, es decir los elementos de $SU(n)$ que dejan fijo a $p_0 = (V_1^0 \subset V_2^0 \subset ... \subset V_n^0)$ con $V_i^0 = \mathrm{Span}\{e_1, ..., e_{n_i}\}$ ($\{e_1, \ldots, e_n\}$ son los vectores de la base canónica), es el grupo $S(U(n_1) \times ... \times U(n_s))$ de matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & A_s \end{bmatrix} \in SU(n)$$

donde $A_i \in U(n_i)$ y $\prod_{i=1}^s \det A_i = 1$. Este grupo es el centralizador de un toro. Así $\mathbb{F}(n_1, ..., n_s) = SU(n)/S(U(n_1) \times ... \times U(n_s))$, y entonces podemos pensar a $\mathbb{F}(n_1, \ldots, n_s)$ como un espacio homogéneo. Para este caso, $\mathbb{F}(n_1, ..., n_s)$ se denomina variedad bandera compleja.

En forma general, se define:

Definición 5.1.15. Una variedad bandera generalizada es un espacio homogéneo de la forma $G/C(S)$, con G grupo de Lie semisimple compacto, y $C(S)$ el centralizador de algún toro en G no necesariamente maximal.

La representación Isotrópica

Sea $M = G/K$ espacio homogéneo. Sea $\pi : G \to G/K$ el mapa cociente y sea τ la acción de G en M. Denotemos con $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{k}$ a las álgebras de Lie de G y K respectivamente. Identificamos siempre de manera natural $\mathfrak{k}$ con una subálgebra de $\mathfrak{g}$.

Notar que $d\pi_e : \mathfrak{g} \to T_{eK}(G/K)$ es una transformación lineal sobreyectiva cuyo kernel es exactamente $\mathfrak{k}$. De este modo, $d\pi_e$ induce una identificación

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \cong T_{eK}(G/K). \tag{5.1.4}$$

Si $\mathfrak{m}$ es un subespacio complementario de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{g}$, la restricción de $(d\pi)_e$ induce un isomorfismo de espacios vectoriales

$$(d\pi)_e : \mathfrak{m} \cong T_{eK}(G/K) \tag{5.1.5}$$

Sea $x \in T_eG = \mathfrak{g}$ identificamos con X al campo invariante a izquierda tal que $X(e) = x$. El grupo monoparamétrico de difeomorfismos asociado a X esta dado por $\tau(\exp tX) \in \mathrm{Diff}(G/K)$, y a partir del mismo se define un campo vectorial X^+ en G/K de la siguiente forma:

$$X^+_{aK} := \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \pi \circ R_a(\exp(tX)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \exp(tX)aK, \forall\, a \in\ G \tag{5.1.6}$$

Lema 5.1.16. *Dado $x \in T_eG = \mathfrak{g}$, $X^+_{eK} = (d\pi)_e(x)$. En particular, $X^+_{eK} = 0$ si y solo si $x \in \mathfrak{k}$.*

Para la siguiente definición, notemos que para todo $k \in K$, $\tau(k)$ deja fijo el punto $eK \in G/K$.

Definición 5.1.17. La representación $K \to GL(T_{eK}(G/K))$ dada por $k \to d\tau\,(k)\,|_{eK}$ se llama **representación Isotrópica del espacio Homogéneo** G/K.

Lema 5.1.18. *Para todo $k \in K$, $\mathrm{Ad}(k)\mathfrak{k} = \mathfrak{k}$*

Demostración. En efecto, como K es un subgrupo de G, para todo $k \in K$, $I_k(K) = K$. □

Como consecuencia, para todo $k \in K$, el automorfismo $\mathrm{Ad}(k)$ induce un automorfismo $\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$, que por abuso de notación lo seguimos denotando por $\mathrm{Ad}(k)$. Se obtiene así una representación:

$$\mathrm{Ad} : K \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}). \tag{5.1.7}$$

Lema 5.1.19. $\forall\, k \in K$, $x \in \mathfrak{g}$

$$d\tau(k)|_{eK} X^+_{eK} = (\mathrm{Ad}(k)x)^+_{eK}.$$

Demostración. Notar que $\pi L_k = \pi I_k$ (donde $I_k = L_k R_{k^{-1}}$). Usando el Lema 5.1.16, podemos escribir

$$d\tau(k)|_{eK} X^+_{eK} = (d\tau(k))_{eK}(d\pi)_e(x) = d(\tau(k)\pi)_e(x) = d(\pi L_k)_e(x).$$

Por oro lado,

$$(\mathrm{Ad}(k)x)^+_{eK} = (d\pi)_e(dI_k)_e(x) = (d\pi I_k)_e(X) = (d\pi L_k)_e(x).$$

Luego ambas igualdades coinciden, por lo tanto se tiene el enunciado. □

Definición 5.1.20. : Un **espacio homogéneo** G/K **es reductivo** si existe un complemento $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ con $\mathrm{Ad}(K)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$.

Observación 5.1.21. Notar que un espacio homogéneo G/K con K compacto es reductivo, pues es posible tomar un producto interno $\mathrm{Ad}(K)$-invariante tal que $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{k}$ sean ortogonales (ver [KobNomII, pág. 199]). Más generalmente, es suficiente pedir que la clausura $\mathrm{Ad}(K)$ sea compacta.

Observación 5.1.22. El Lema 5.1.19 dice que el isomorfismo de espacios vectoriales $\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \equiv T_{eK}G/K$, es un isomorfismo entre la representación adjunta de K en $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ (5.1.7) y la representación isotrópica de K en $T_{eK}(G/K)$. Si además, G/K es reductivo y $\mathfrak{m}$ es un complemento $\mathrm{Ad}(K)$-invariante de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{m}$ es una subrepresentación de la representación adjunta de K en $\mathfrak{g}$, y el isomorfismo lineal $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ inducido por la proyección al cociente, es ahora un isomorfismo de representaciones de K.

Esto nos permitirá ir de una representación a otra usando las identificaciones $\mathfrak{m} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \cong T_e(G/K)$.

5.2. Métricas G-invariantes en G/K

Antes de definir métricas invariantes en espacios homogéneos daremos algunas definiciones y propiedades de importancia para una variedad riemanniana M arbitraria.

Definición 5.2.1. Un campo vectorial X en una variedad riemanniana M, es una **campo de Killing** si el grupo monoparamétrico de difeomorfismos asociados a él son isometrías locales.

Proposición 5.2.2. *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, son equivalentes:*

1. *X es campo de Killing.*
2. *$\mathcal{L}_X g = 0$, donde $\mathcal{L}$ denota la derivada de Lie.*
3. *Para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, se cumple que:*

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0 \tag{5.2.1}$$

donde ∇ es la conexión Levi-Civita.

Demostración. Ver [Bess87, Teorema 1.81]. □

Proposición 5.2.3. *Para todos X, Y, Z campos de Killing en (M, g), se verifica:*

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Y, Z], X) - g([Z, X], Y) \tag{5.2.2}$$

Definición 5.2.4. Una métrica riemanniana g en un espacio homogéneo G/K es G-invariante si para todo $a \in G$, $\tau(a)$ es una isometría, es decir:

$$g_{apK}\left(d\tau(a)_{pK}v, d\tau(a)_{pK}u\right) = g_{pK}(v, u), \ \forall\, v, u \in T_{pK}(G/K)$$

Teorema 5.2.5. *Un espacio homogéneo G/K admite una métrica G-invariante si y solo si $\overline{\mathrm{Ad}(K)} \subset GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ es compacta. Más, aún, la aplicación $g \mapsto g_{eK}$ define una biyección entre las métricas G-invariantes en G/K y los productos internos K-invariantes en $T_e(G/K)$, donde K actúa por la representación isotrópica.*

Demostración. Ver [Lau15, Teorema 3.2.1] o [Dot87, Proposición 1.5 (i)]. □

Aclaramos que decir que un producto interno en $T_e(G/K)$ es K-invariante significa que la acción isotrópica de K en $T_e(G/K)$ se realiza por isometrías.

Observación 5.2.6. Dado que hay un isomorfismo entre la representación adjunta de K en $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ y la representación isotrópica de K en T_eG, del teorema anterior se induce una biyección entre métricas G-invariantes en G/K y producto internos $\mathrm{Ad}(K)$-invariantes en $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ (ver 5.1.22). Si además G/K es reductivo y $\mathfrak{m}$ es un complemento $\mathrm{Ad}(K)$-invariante de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{g}$, entonces del teorema anterior se induce una correspondencia biyectiva entre métricas G-invariantes en G/K y productos internos $\mathrm{Ad}(K)$-invariantes en $\mathfrak{m}$. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno $\mathrm{Ad}(K)$-invariante en $\mathfrak{m}$ que corresponde a una métrica G-invariante g en G/K, entonces para todo $x, y \in \mathfrak{m}$,

$$\langle x, y \rangle = g_{eK}((d\pi)_e x, (d\pi)_e y), \tag{5.2.3}$$

$$g_{aK}((d\tau(a))_{eK}(d\pi)_e x, (d\tau(a))_{eK}(d\pi)_e y) = \langle x, y \rangle \tag{5.2.4}$$

Observación 5.2.7. Por la [Dot87, Proposición 1.3], si G/K es un espacio homogéneo que admite una métrica G-invariante, entonces G/K resulta isométrico a un espacio homogéneo G_1/K_1 con métrica G_1-invariante y la acción de G_1 en G_1/K_1 es efectiva. Más aún por la [Dot87, Proposición 1.5 (ii)], la clausura de $\mathrm{Ad}(K_1)$ es compacta. Luego por la Observación 5.1.21, el espacio homogéneo G_1/K_1 es reductivo, y G/K es isométrico a un espacio homogéneo reductivo con acción efectiva.

Lema 5.2.8. *Para cualquier métrica G-invariante en G/K , los campos vectoriales de G/K inducidos por el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como en 5.1.6 son campos de Killing.*

El siguiente lema muestra en particular que el conjunto de campos de la forma X^+ en G/K forman una subálgebra de Lie del álgebra de Lie de campos vectoriales en G/K. Muestra también que la aplicación $X \mapsto X^+$ es un antihomomorfismo de álgebras de Lie.

Lema 5.2.9. *Sean $x, y \in \mathfrak{g}$, denotemos por X^+, Y^+ a los campos de Killing en G/K asociados. Entonces el corchete de campos en G/K entre X^+ y Y^+ está dado por*

$$[X^+, Y^+] = -[X, Y]^+ \tag{5.2.5}$$

Demostración. Ver ([Bess87, 7.21]) □

En lo que sigue de la sección estudiaremos espacios homogéneos G/K con métricas G-invariantes g, que por la Observación 5.2.7 podemos suponer que G/K es reductivo y además con acción efectiva. Fijamos una descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ y por la Observación 5.2.6 la métrica g está en correspondencia con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\mathrm{Ad}(K)$-invariante en $\mathfrak{m}$.

Teorema 5.2.10. *Sea G/K un espacio homogéneo con métrica G-invariante g, con las mismas suposiciones que el párrafo precedente. Sean $x, y \in \mathfrak{m}$ y sean X^+, Y^+ los campos de Killing en $\mathfrak{X}(G/K)$ asociados a x e y respectivamente. Entonces*

$$(\nabla_{X^+} Y^+)_{eK} = (d\pi)_e \left(-\frac{1}{2}[x, y]_{\mathfrak{m}} + U(x, y) \right) \tag{5.2.6}$$

con $U : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ *la aplicación bilineal tal que* $\forall\ z \in \mathfrak{m}$*:*

$$\langle 2U(x,y), z\rangle = \langle [z,x]_{\mathfrak{m}}, y\rangle + \langle [z,y]_{\mathfrak{m}}, x\rangle \tag{5.2.7}$$

Demostración. Ver [Bess87, Proposición 7.28]. □

Lema 5.2.11. *Sea* G/K *un espacio homogéneo con métrica* G*-invariante y sea* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ *su descomposición reductiva. Sea* $\langle \cdot,\cdot \rangle$ *el un producto interno* $\mathrm{Ad}(K)$*-invariante asociado a* g*, entonces para todo* $x \in \mathfrak{k}$*,* $\mathrm{ad}_x|_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ *es antisimétrico. La recíproca vale si* K *es conexo.*

Proposición 5.2.12. *Con las hipótesis del lema anterior. Entonces* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}_s$ *con* $\mathfrak{m}_j$ *componentes irreducibles* $\mathrm{Ad}(K)$*-invariantes y ortogonales entre si.*

En las condiciones anteriores dado un espacio homogéneo G/K con métrica G-invariante, tenemos un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ $\mathrm{Ad}(K)$-invariante. Sea $(\cdot,\cdot)$ otro producto interno en $\mathfrak{m}$. A este podemos escribirlo como $(\cdot,\cdot) = \langle Q\cdot,\cdot\rangle =: \langle\cdot,\cdot\rangle_Q$, con $Q : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ isomorfismo simétrico y definido positivo respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Es decir, podemos identificar a cada producto interno $(\cdot,\cdot)$ como un elemento del conjunto $\{\langle\cdot,\cdot\rangle_Q : Q^t = Q, Q > 0\}$. Nos interesa estudiar productos $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ que son $\mathrm{Ad}(K)$-invariantes. El siguiente lema caracterizará a estos productos:

Lema 5.2.13. *En la notación anterior,* $\langle x,y\rangle_Q = \langle Qx,y\rangle$*, con* $Q>0$*, es* $\mathrm{Ad}(K)$*-invariante si y solo si* $[Q, \mathrm{Ad}(k)] = 0, \forall\ k \in K$*.*

Demostración. Suponemos $(x,y) = \langle x,y\rangle_Q$ producto interno $\mathrm{Ad}(K)$-invariante. Entonces,

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle_Q = \langle \mathrm{Ad}(k)x, \mathrm{Ad}(k)y\rangle_Q &\Leftrightarrow \langle Q\,\mathrm{Ad}(k)x, \mathrm{Ad}(k)y\rangle = \langle Qx,y\rangle\\ &\Leftrightarrow \langle \mathrm{Ad}(k)^t Q\,\mathrm{Ad}(k)x, y\rangle = \langle Qx,y\rangle\end{aligned}$$

Como $\mathrm{Ad}(k)^{-1} = \mathrm{Ad}(k)^T$, de lo anterior resulta que $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ es $\mathrm{Ad}(K)$-invariante si y sólo si $(\mathrm{Ad}(k))^{-1}Q\,\mathrm{Ad}(k) = Q$ para todo $k \in K$. □

Definición 5.2.14. Un endomorfismo $T : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ se dice $\mathrm{Ad}(K)$-invariante si $[T, \mathrm{Ad}(k)] = 0$ para todo $k \in K$.

Lema 5.2.15. *Un endomorfismo* $\mathrm{Ad}(K)$*-invariante en* $\mathfrak{m}$ *conmuta con* $\mathrm{ad}(x)$ $\forall x \in\ \mathfrak{k}$*.*

Demostración. Sea T un endomorfismo $\mathrm{Ad}(K)$-invariante en $\mathfrak{m}$. Consideremos $x\ \in \mathfrak{k}$, escribimos $\mathrm{ad}_x = \frac{d}{dr}\big|_0 \mathrm{Ad}(\exp rx)$. Luego,

$$\mathrm{ad}(x)H = \left.\frac{d}{dr}\right|_0 \mathrm{Ad}(\exp(rx))H = \left.\frac{d}{dr}\right|_0 H\,\mathrm{Ad}(\exp(rx)) = H\,\mathrm{ad}(x)$$

□

Continuamos en el contexto de un espacio homogenéo G/K con g métrica G-invariante, el cual es reductivo, donde $\mathfrak{m}$ denota un complemento $\mathrm{Ad}(K)$-invariante de $\mathfrak{k}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto interno $\mathrm{Ad}(K)$-invariante en $\mathfrak{m}$ asociado a g . Por la Proposición 5.2.12 podemos descomponer a $\mathfrak{m}$ como suma de subrepresentaciones irreducibles de K (es decir, $\mathrm{Ad}(K)$-irreducibles)

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}_s.$$

Podemos suponer que las primeras q componentes no son no equivalentes dos a dos, y por lo tanto luego de agrupar las componentes equivalentes entre sí obtenemos

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1{}^{n_1} \oplus ... \oplus \mathfrak{m}_q{}^{n_q} \tag{5.2.8}$$

donde n_i es el número de veces que se repite $\mathfrak{m}_i$. Las subrepresentaciones $\mathfrak{m}_i^{n_i}$ se las llama componentes isotípicas de la representación.

El caso más sencillo es cuando la representación es libre de multiplicidad es decir, es decir cuando $n_i = 1,\ \forall\, i$. Este caso no se da en todos los espacios homogéneos, estudiaremos más adelante que para variedades bandera sí existe esta descomposición.

Lema 5.2.16. *Sea $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{m}_s$ la descomposición de $\mathfrak{m}$ en componentes irreducibles. Asumamos que $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ es $\mathrm{Ad}(K)$-invariante. Entonces $Q(\mathfrak{m}_i) = \mathfrak{m}_i$ para todo i y además*

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{\mathfrak{m}_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{\mathfrak{m}_2} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_s I_{\mathfrak{m}_s} \end{bmatrix} \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, i = 1, ..., s \tag{5.2.9}$$

Demostración. Como Q es simétrico y definido positivo, entonces podemos descomponer a $\mathfrak{m}$ en suma de los autoespacios de V, digamos $\mathfrak{m} = V_{\mu_1} \oplus ... \oplus V_{\mu_r}$, donde $\mu_1, \dots, \mu_r$ son los distintos autovalores de Q. Como $[\mathrm{Ad}(a), Q] = 0$ para todo $a \in K$, entonces $\mathrm{Ad}(a)$ preserva los autoespacios de Q. Luego las componentes irreducibles $\mathfrak{m}_i$, $i = 1, \dots, s$ se agrupan en los autoespacios V_{μ_i}. Es decir, podemos escribir $V_{\mu_j} = \sum_{i=1}^{n_j} m_{j_i}$. Dado que $Q|_{V_{\mu_j}} = \mu_j I_{V_{\mu_j}}$, entonces $Q\ |_{m_{j_i}} = \mu_j I_{m_{j_i}}$ para todo $1 \leq i \leq n_j$. Variando j, los m_{j_i} dan todas las componentes irreducibles de $\mathfrak{m}$ y el lema resulta llamando $\lambda_i = \mu_i$.

□

5.3. Tensores tipo $(1,1)$ G-Invariantes en espacios homogéneos

Definición 5.3.1. Decimos que un tensor de tipo $(1,1)$ H en un espacio homogéneo G/K es G-invariante si $H d\tau(a) = d\tau(a) H$ para todo $a\ \in G$.

Teorema 5.3.2. *Sea G/K espacio homogéneo. Entonces la aplicación $H \mapsto H_{eK}$ define una biyección entre el conjunto de tensores H de tipo $(1,1)$ en G/K que son G-invariantes y el conjunto de endomorfismos en $T_e(G/K)$ que conmutan con los $(d\tau(k))_{eK}$ para todo $k \in K$.*

Demostración. La demostración es similar a la demostración del Teorema 5.2.5. □

Observación 5.3.3. Por la Observación 5.1.22, podemos deducir del teorema anterior una correspondencia biyectiva entre las tensores (1,1) G-invariantes y los endomorfismos $\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ que conmutan con $\mathrm{Ad}(k)$ para todo $k \in K$. Si además G/K es reductivo y $\mathfrak{m}$ es un complemento $\mathrm{Ad}(K)$-invariante de $\mathfrak{k}$, entonces hay una correspondencia uno a uno entre tensores (1,1) G-invariantes y endomorfismos $\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ que conmutan con $\mathrm{Ad}(k)$ para todo $k \in K$, es decir, endomorfismos $\mathrm{Ad}(K)$-invariantes. Si $H_0 : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ es el endomorfismo $\mathrm{Ad}(K)$-invariante asociado a un tensor de tipo $(1,1)$ G-invariante H en G/K, entonces

$$(d\pi)_e H_0(x) = H_{eK}((d\pi)_e(x))$$

para todo $x \in \mathfrak{m}$. En resumen, para espacios homogéneos reductivos es suficiente definir endomorfismos $\mathrm{Ad}(K)$-invariantes en $\mathfrak{m}$ para determinar tensores tipo $(1,1)$ G-invariantes en G/K. Por el Lema 5.2.15, estos endomorfismos conmutan con ad_x para todo $x \in \mathfrak{k}$.

En lo que resta de la sección, vamos a fijar un espacio homogéneo G/K con métrica G-invariante, y un complemento $\mathrm{Ad}(K)$-invariante $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$. También fijaremos un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathfrak{m}$ que es $\mathrm{Ad}(K)$-invariante.

Sea $H_0 : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ un endomorfismo $\mathrm{Ad}(K)$-invariante. Extendemos linealmente a H_0 a la complexificación de $\mathfrak{m}$, es decir, definimos $H_0^{\mathbb{C}} : \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ como

$$H_0^{\mathbb{C}}(x+iy) = Hx + iHy, \ \forall\, x,y \in \mathfrak{m}.$$

Fijemos ahora un operador simétrico, definido positivo y $\mathrm{Ad}(K)$-invariante $Q : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$, de modo que $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ es un nuevo producto interno $\mathrm{Ad}(K)$-invariante (ver el Lema 5.2.13). Extendemos también $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ a la complexificación de $\mathfrak{m}$ complexificando Q:

$$\begin{aligned}\langle x+iy, z+iw\rangle_{Q^{\mathbb{C}}} = \langle Q^{\mathbb{C}}(x+iy), z+iw\rangle = \langle Qx+iQy, z+iw\rangle = \langle Qx,z\rangle - \langle Qy,w\rangle + \\ + i(\langle Qx,w\rangle + \langle Qy,z\rangle)\end{aligned}$$

Notar que $\langle\cdot,\cdot\rangle_{Q^{\mathbb{C}}}$ no es un producto interno, solo es una forma bilineal simétrica y no degenerada.

Lema 5.3.4. *Si H_0 es antisimétrico respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$, entonces $H_0^{\mathbb{C}}$ es antisimétrico respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{Q^{\mathbb{C}}}$*

Demostración. Sean $x,y,z,w \in \mathfrak{m}$,

$$\begin{aligned}
\langle H_0^{\mathbb{C}}(x+iy), z+iw\rangle_{Q^{\mathbb{C}}} &= \langle H_0x + iH_0y, z+iw\rangle_{Q^{\mathbb{C}}} = \langle Q^{\mathbb{C}}(Hx+iHy), z+iw\rangle \\
&= \langle QH_0x + iQH_0y, z+iw\rangle \\
&= \langle QH_0x, z\rangle - \langle QH_0y, w\rangle + i(\langle QH_0x, w\rangle + \langle QH_0y, z\rangle) \\
&= \langle H_0x, z\rangle_Q - \langle H_0y, w\rangle_Q + i(\langle H_0x, w\rangle_Q + \langle H_0y, z\rangle_Q) \\
&= -\langle x, H_0z\rangle_Q + \langle y, H_0w\rangle_Q - i(\langle x, H_0w\rangle_Q + \langle y, H_0z\rangle_Q) \\
&= -\langle x, H_0z + iH_0w\rangle - \langle y, -H_0w + iH_0z\rangle_Q \\
&= -\langle x, H_0^{\mathbb{C}}(z+iw) - \langle y, i(iH_0w + H_0z)\rangle \\
&= -\langle x, H_0^{\mathbb{C}}(z+iw) - i\langle y, H_0^{\mathbb{C}}(z+iw)\rangle \\
&= -\langle x+iy, H_0^{\mathbb{C}}(z+iw)\rangle.
\end{aligned}$$

□

Recordemos de la Proposición 5.1.6 que las componentes irreducibles de $\mathfrak{m}$ respecto de la representación adjunta de K son subespacios ad_x invariantes para todo $x \in \mathfrak{k}$.

Lema 5.3.5. *Sea $\mathfrak{m}_i$ una componente irreducible de $\mathfrak{m}$ y sea $H_0 : \mathfrak{m}_i \to \mathfrak{m}_i$ un endomorfismo $\mathrm{Ad}(K)$- invariante, inversible y antisimétrico respecto de algún producto interno $\mathrm{Ad}(K)$-invariante. Entonces*

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & -a & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a \\ 0 & 0 & \dots & a & 0 \end{bmatrix}$$

en alguna base ortonormal $\mathfrak{B} = \{e_1, f_1, ..., e_n, f_n\}$ *de* $\mathfrak{m}_i$.

Demostración. Como H_0 es antisimétrico e inversible, existe una base $\{e_1, f_1, ..., e_n, f_n\}$ ortonormal tal que:

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & ... & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & -a_n \\ 0 & 0 & ... & a_n & 0 \end{bmatrix}$$

Donde los valores $a_i \in \mathbb{R} - \{0\}$, los cuales pueden ser todos diferentes ó repetirse en algunos bloques. Supongamos que por lo menos hay dos valores distintos. Sean $\{e_1, f_1, ..., e_l, f_l\}$ los vectores asociados a los bloques con a_1. Llamemos directamente $a = a_1$. Probaremos que $\mathrm{Span}\{e_1, f_1, ..., e_l, f_l\}$ es $\mathrm{Ad}(K)$-invariante y con esto llegaremos a una contradicción.

En efecto, sean $e_1 + if_1$, $e_1 - if_1$,...,$e_l + if_l$, $e_l - if_l$ vectores en $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, los cuales son autovectores de la complexificación de $H_0^{\mathbb{C}}$ con autovalor $\pm ai$. Pues, $\forall j = 1, ..., l$:

$$H_0^{\mathbb{C}}(e_j + if_j) = H_0 e_j + iH_0 f_j = af_j - iae_j = -ai(e_j + if_j)$$

$$H_0^{\mathbb{C}}(e_j - if_j) = H_0 e_j - iH_0 f_j = af_j + iae_j = ai(e_j - if_j)$$

Es así que $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_j + if_j\}_{j=1}^{l}$ generan al espacio de autovectores de autovalor $-ai$ y $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_j - if_j\}_{j=1}^{l}$ generan al espacio de autovectores de autovalor ai.

Cada $\mathrm{Ad}(k)$ con $k \in K$ es un operador en $\mathfrak{m}$, y también podemos considerar su complexificación en $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Es claro que si H_0 y $\mathrm{Ad}(k)$ conmutan $\forall k \in K$, también lo harán $H^{\mathbb{C}}$ y $\mathrm{Ad}(k)^{\mathbb{C}}$. Entonces los autoespacios de $H_0^{\mathbb{C}}$ quedan invariantes bajo $\mathrm{Ad}(k)^{\mathbb{C}}$ $\forall k \in K$. Luego $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1 + if_1, e_1 - if_1, ..., e_l + if_l, e_l - if_l\}$ es invariante bajo $\mathrm{Ad}(k)^{\mathbb{C}}$ $\forall k \in K$.

Notar que $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, f_1, ..., e_l, f_l\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1 + if_1, e_1 - if_1, ..., e_l + if_l, e_l - if_l\}$ y que $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, f_1, ..., e_l, f_l\} \cap \mathfrak{m} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1, f_1, ..., e_l, f_l\}$.

Sea ahora $x \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1, f_1, ..., e_l, f_l\} \subset \mathfrak{m}$ y sea $k \in K$. Como x pertenece a $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, f_1, ..., e_l, f_l\}$ y este espacio es $\mathrm{Ad}(k)^{\mathbb{C}}$-invariante, entonces $\mathrm{Ad}(k)x = \mathrm{Ad}(k)^{\mathbb{C}}(x)$ pertenece a $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, f_1, ..., e_l, f_l\}$. Dado que $\mathrm{Ad}(k)(x)$ está en $\mathfrak{m}$, entonces concluímos que está en la intersección, es decir en $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1, f_1, ..., e_l, f_l\}$. Concluímos que $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1, f_1, ..., e_l, f_l\}$ es $\mathrm{Ad}(K)$-invariante, lo cual contradice que $\mathfrak{m}_i$ sea irreducible. Luego $a_i = a_1$ para todo i. □

Teorema 5.3.6. *Sea* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{m}_s$ *la descomposición de* $\mathfrak{m}$ *en componentes irreducibles y asumamos que las componentes* $\mathfrak{m}_i$ *son dos a dos no equivalentes. Sea* $H_0 : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ *un endomorfismo* $\mathrm{Ad}(K)$*- invariante, inversible y antisimétrico respecto de algún producto interno* $\mathrm{Ad}(K)$*-invariante. Entonces* $H_0(\mathfrak{m}_i) = \mathfrak{m}_i$ *para todo* $i = 1, \ldots, s$*. Además para cada i existe una base ortonormal* $\mathcal{B}_i$ *de* $\mathfrak{m}_i$ *tal que la matriz de* $H_0|_{\mathfrak{m}_i}$ *tiene la forma*

$$[H_{0j}]_{\mathcal{B}_j} = \begin{bmatrix} 0 & -v_j & ... & 0 & 0 \\ v_j & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & -v_j \\ 0 & 0 & ... & v_j & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3.1}$$

Demostración. Como H_0 es $\mathrm{Ad}(K)$-invariante, es decir $H_0\,\mathrm{Ad}(k) = \mathrm{Ad}(k)H_0\ \forall\, k \in K$, entonces H_0 es un automorfismo de la representación adjunta y por lo tanto $H_0\mathfrak{m}_i =$

$\mathfrak{m}_j$. Si j fuera distinto de i, entonces H_0 induciría un isomorfismo de representaciones entre $\mathfrak{m}_i$ y $\mathfrak{m}_j$, lo cual contradice la hipótesis de que $\mathfrak{m}_i$ no es equivalente a $\mathfrak{m}_j$. Luego $H_0(\mathfrak{m}_i) = \mathfrak{m}_i$, $\forall i = 1, ..., s$. Para completar la demostración, basta aplicar el lema anterior a la restricción de H_0 en cada $\mathfrak{m}_i$. □

5.4. Conexiones afines G-invariantes en espacios homogéneos

En esta sección veremos que existe una correspondencia biunívoca entre conexiones G-invariantes en espacios homogéneos reductivos y funciones conexión $\Lambda : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$. Es decir funciones bilineales $\mathrm{Ad}(K)$-invariantes.

En la bibliografía existente y trabajos reconocidos respecto de espacios homogéneos se observan dos definiciones de la función conexión: una deriva de tomar campos de Killing X^+ inducidos por campos invariantes a izquierda en G ([Bess87] y el Teorema 5.2.6) y la otra deriva de trabajar con una identificación de campos invariantes a izquierda en G, con campos en G/K definidos en un entorno de eK ([Nom54]). En nuestro trabajo usamos la función conexión usada en [KobNomII] y en [Nom54].

Definición 5.4.1. Sea G/K un espacio homogéneo. Una conexión en G/K se dice G-invariante si para todo $g \in G$ se tiene y $pK \in G/K$ se tiene

$$\left(\nabla_{d\tau(g)X\tau(g^{-1})} d\tau(g)Y\tau(g^{-1})\right)_{gpK} = d\tau(g)_{pK}(\nabla_X Y)_{pK}$$

Al campo $d\tau(g)X\tau(g^{-1})$ lo denotaremos siempre por $X^{\tau(g)}$, de modo que la condición de G-invarianza para la conexión ∇ queda formulada como

$$(\nabla_X Y)^{\tau(g)} = \nabla_{X^{\tau(g)}} Y^{\tau(g)}, \quad \forall g \in G.$$

Asumamos ahora que G/K es un espacio homogéneo reductivo, y sea $\mathfrak{m}$ un complemento $\mathrm{Ad}(K)$-invariante de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{g}$.

Definición 5.4.2. Una función bilineal $\Lambda : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ se dice $\mathrm{Ad}(K)$-invariante si $\Lambda(\mathrm{Ad}(k)x, \mathrm{Ad}(k)y) = \Lambda(x, y)$ para todo $x, y \in \mathfrak{m}$ y para todo $k \in K$. De ahora en más, a $\Lambda(x, y)$ lo denotaremos $\Lambda(x)y$.

Fijemos de ahora un espacio homogéneo reductivo G/K con un complemento $\mathrm{Ad}(K)$-invariante $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{k}$ en $\mathfrak{g}$, de modo que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$, donde suponemos que los primeros m elementos pertenecen a $\mathfrak{m}$ y los restantes a $\mathfrak{k}$. Dado que estamos pensando a $\mathfrak{g}$ como el espacio tangente de G en la identidad, a al campo invariante a izquierda asociado a un vector de $\mathfrak{g}$ lo denotaremos usando mayúscula. Por ejemplo, el campo invariante a izquierda asociado a $x \in \mathfrak{g}$ se lo denote X.

Por [Che46] existe un entorno coordenado $(U, u_1, \ldots, u_n)$ de $e \in G$, tal que U es el producto topológico de los siguientes conjuntos

$$U_1 = \{g \in U : u_{m+1}(g) = u_{m+2}(g) = ... = u_n(g) = 0\}$$
$$U_2 = \{g \in U : u_1(g) = u_2(g) = ... = u_m(g) = 0\}.$$

Ver capítulo IV de [Che46] para más detalles. Observar también que $U_2 \subset K$ es un entorno abierto en K de la identidad, y que $\pi : U_1 \to \pi(U_1)$ es un homeomorfismo diferenciable suryectivo, de modo que $\pi(U_1)$ un entorno de eK en G/K.

Para cada $x \in \mathfrak{m}$ definimos un campo X^* en $cK \in \pi(U_1)$ de la siguiente manera

$$X^*_{cK} = d\tau(c)_{eK} d\pi_e x. \tag{5.4.1}$$

Notemos que $X^*_{eK} = (d\pi)_e(x)$. Se sigue de aquí que $\{(X^*_1)_{eK}, \ldots, (X^*_m)_{eK}\}$ es un base de $T_{eK}(G/K)$. De esto se deduce que:

Lema 5.4.3. *Para todo $cK \in \pi(U)$, el conjunto $\{(X^*_i)_{cK}\}_{i=1}^m$ es una base de $T_{cK}(G/K)$.*

Estamos listo para enunciar:

Teorema 5.4.4. *Sea G/K espacio homogéneo reductivo con una descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$. Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de conexiones G-invariantes afines en G/K y el conjunto de funciones bilineales $Ad(K)$- invariantes en $\mathfrak{m}$. La correspondencia es de modo que si Λ corresponde a ∇, entonces*

$$d\pi_e(\Lambda(x)y) = (\nabla_{X^*} Y^*)_{eK} \tag{5.4.2}$$

Demostración. Ver ([Nom54]). □

Los tensores curvatura y la torsión de una conexión G-invariante ∇ en un espacio reductivo G/K son también G-invariantes, y por lo tanto están determinados por sus valores en eK (ver [Nom54]). Por lo tanto, su comportamiento lo podemos estudiar en $\mathfrak{m}$. El siguiente teorema expresa a los tensores curvatura y la torsión de la conexión en términos de Λ.

Teorema 5.4.5. *Sea G/K un espacio homogéneo reductivo con descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$. Sea Λ la función bilineal $\mathrm{Ad}(K)$-invariante asociada a una conexión G-invariante ∇ en G/K. Identificando $\mathfrak{m}$ con $T_e(G/K)$, la torsión y el tensor curvatura de ∇ evaluados en el punto eK se expresan con las siguientes identidades:*

1. $T(x,y) = \Lambda(x)y - \Lambda(y)x - [x,y]_{\mathfrak{m}}, \forall\, x, y \in \mathfrak{m}$
2. $R(x,y)z = \Lambda(x)(\Lambda(y)z) - \Lambda(y)(\Lambda(x)z) - \Lambda([x,y]_{\mathfrak{m}})z - [[x,y]_{\mathfrak{k}}, z], \forall\, x, y, z \in \mathfrak{m}$

donde para un vector $x \in \mathfrak{g}$, $x_{\mathfrak{m}}$ y $x_{\mathfrak{k}}$ denotan las componentes de x en $\mathfrak{m}$ y en $\mathfrak{k}$ respectivamente.

Demostración. Ver ([Nom54]). □

Observación 5.4.6. Notar que en los teoremas anteriores sólo se uso como hipótesis que el espacio homogéneo G/K sea reductivo, no se trabajo con métricas invariantes.

Teorema 5.4.7 ([Nom54])**.** *Sea G/K un espacio homogéneo reductivo con descomposición reductiva $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$ y sea g una métrica G-invariante en G/K. Entonces la conexión de Levi-Civita ∇ asociada a la métrica es G-invariante. Además si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno $\mathrm{Ad}(K)$-invariante en $\mathfrak{m}$ asociado con g y Λ es la función bilineal $\mathrm{Ad}(K)$-invariante asociada con ∇, entonces*

$$\Lambda(x)y = \frac{1}{2}[x,y]_{\mathfrak{m}} + U(x,y), \tag{5.4.3}$$

donde $U(x,y) : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ es la forma bilineal simétrica tal que para todos $x, y, z \in \mathfrak{m}$ se cumple que:

$$\langle 2U(x,y), z \rangle = \langle [z,x]_{\mathfrak{m}}, y \rangle + \langle [z,y]_{\mathfrak{m}}, x \rangle \tag{5.4.4}$$

5.5. Espacios homogéneos con Tensores KY

En toda esta sección fijaremos G/K, un espacio homogéneo con métrica G-invariante g. Por Observación 5.2.7, G/K es reductivo, por lo tanto existe un complemento $\mathrm{Ad}(K)$-invariante tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$. Denotamos como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ al producto interno en $\mathfrak{m}$ $\mathrm{Ad}(K)$-invariante asociado a g. Sea $H_0 : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ un endomorfismo antisimétrico $\mathrm{Ad}(K)$-invariante, el cual está en correspondencia con un tensor G-invariante $H : T(G/K) \to T(G/K)$ por el Teorema 5.3.2.

La 2-forma ω y su derivada exterior

Consideremos la 2-forma ω asociada a H, es decir, $\omega(R,S) = g(HR,S)$ para todo par de campos $R, S \in \mathfrak{X}(G/K)$.

Proposición 5.5.1. *En las condiciones anteriores*

1. *ω es G-invariante.*
2. *$d\omega$ es G-invariante.*
3. *Si $x, y, z \in \mathfrak{m}$, entonces*

$$\omega_{eK}((d\pi)_e x, (d\pi)_e y) = \langle H_0 x, y \rangle = \omega_0(x,y)$$
$$d\omega_{eK}((d\pi)_e x, (d\pi y)_e, (d\pi)_e z) = \langle [x,y]_{\mathfrak{m}}, H_0 z \rangle + \langle [y,z]_{\mathfrak{m}}, H_0 x \rangle + \langle [z,x]_{\mathfrak{m}}, H_0 y \rangle$$

Demostración. La demostración resulta de la G-invarianza de la métrica g, del tensor H y de la conexión. □

Definimos la derivada exterior de una 2-forma ω_0 en $\mathfrak{m}$ como la 3-forma $d\omega_0$ tal que para $x, y, z \in \mathfrak{m}$:

$$d\omega_0(x,y,z) = \langle [x,y]_{\mathfrak{m}}, H_0 z \rangle + \langle [y,z]_{\mathfrak{m}}, H_0 x \rangle + \langle [z,x]_{\mathfrak{m}}, H_0 y \rangle \tag{5.5.1}$$

De la proposición anterior concluímos:

Corolario 5.5.2. *En las condiciones de la Proposición 5.5.1, se tiene que la 2-forma ω es cerrada si y solo si ω_0 es* cerrada *en $\mathfrak{m}$, es decir $\forall\, x, y, z \in \mathfrak{m}$:*

$$\langle [x,y]_{\mathfrak{m}}, H_0 z \rangle + \langle [y,z]_{\mathfrak{m}}, H_0 x \rangle + \langle [z,x]_{\mathfrak{m}}, H_0 y \rangle = 0$$

De manera similar, si $H_0 : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ es además inversible, el tensor G-invariante asociado H es inversible y la la 2-forma μ tal que $\mu(X,Y) = g(H^{-1}X, Y)$ queda totalmente determinada por la forma bilineal $\mu_0 : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathbb{R}$ tal que $\mu_0(x,y) = \langle H_0^{-1} x, y \rangle$, y la derivada exterior de μ es G-invariante y su valor en $T_e(G/K) \cong \mathfrak{m}$, está dado por derivada exterior de μ_0, es decir,

$$d\mu_0(x,y,z) = \langle [x,y]_{\mathfrak{m}}, H_0^{-1} z \rangle + \langle [y,z]_{\mathfrak{m}}, H_0^{-1} x \rangle + \langle [z,x]_{\mathfrak{m}}, H_0^{-1} y \rangle \tag{5.5.2}$$

Corolario 5.5.3. *La 2-forma μ es cerrada si y solo si μ_0 es cerrada en $\mathfrak{m}$, es decir $\forall\, x, y, z \in \mathfrak{m}$:*

$$\langle [x,y]_{\mathfrak{m}}, H_0^{-1} z \rangle + \langle [y,z]_{\mathfrak{m}}, H_0^{-1} x \rangle + \langle [z,x]_{\mathfrak{m}}, H_0^{-1} y \rangle = 0$$

La derivada covariante de H

Sea $\Lambda : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ la función bilineal $\mathrm{Ad}(K)$-invariante asociada a la conexión de Levi-Civita ∇ de la métrica g.

Proposición 5.5.4. *Las condiciones y la notación son como en el principio de la sección.*

1. *El tensor $(X, Y) \mapsto S(X, Y) := (\nabla_X H)Y$ es G-invariante.*

2. *Si $x, y \in \mathfrak{m}$, entonces*

$$S_{eK}((d\pi)_e x, (d\pi)_e y) = (d\pi)_e((\Lambda(x)H_0)y),$$

donde $(\Lambda(x)H_0)y := \Lambda_x H_0 y - \Lambda_y H_0 x$.

Demostración. Recordando que H conmuta con $d\tau(a)$ $\forall a \in G$, se tiene

$$\begin{aligned} S(X^{\tau(a)}, Y^{\tau(a)}) &= \nabla_{X^{\tau(a)}} H Y^{\tau(a)} - \nabla_{Y^{\tau(a)}} H X^{\tau(a)} \\ &= \nabla_{X^{\tau(a)}} (HY)^{\tau(a)} - \nabla_{Y^{\tau(a)}} (HX)^{\tau(a)} \\ &= (\nabla_X HY - \nabla_Y HX)^{\tau(a)} = (S(X, Y))^{\tau(a)}. \end{aligned}$$

La prueba de 2. sale de usar la G-invarianza de H, g y la conexión Levi-Civita. □

Para $x, y \in \mathfrak{m}$ escribimos:

$$\langle(\Lambda(x)H_0)y = \Lambda(x)H_0 y - H_0\Lambda(x)(y) \tag{5.5.3}$$

Corolario 5.5.5. *Para que H* ***sea paralelo*** *es necesario y suficiente que H_0* ***sea paralelo****, es decir, $(\Lambda(x)H_0)y = 0$ para todo $x, y \in \mathfrak{m}$. Para que H* ***sea Killing-Yano*** *es necesario y suficiente que H_0* ***sea Killing-Yano****, es decir, $(\Lambda(x)H_0)x = 0$ para todo $x \in \mathfrak{m}$.*

El tensor de Ninjehuis

Proposición 5.5.6. *Las hipótesis y la notación son como en el principio de la sección.*

1. *El tensor de Nijenhuis N asociado a H es G-invariante.*

2. *Para $x, y \in \mathfrak{m}$ se tiene*

$$N_{eK}((d\pi)_e x, (d\pi)_e y) = (d\pi)_e \left([H_0 x, H_0 y]_{\mathfrak{m}} - H_0[H_0 x, y]_{\mathfrak{m}} - H_0[x, H_0 y]_{\mathfrak{m}} + H_0^2[x, y]_{\mathfrak{m}}\right).$$

Demostración. Por el Lema 3.2.3, se tiene

$$N(X, Y) = (\nabla_{HX} H)Y - H(\nabla_X H)Y - (\nabla_{HY} H)X + H(\nabla_Y H)X$$

En la notación de la Proposición 5.5.4, el primer término en la suma de la derecha es $S(HX, Y)$. Este término es G-invariante pues según la Proposición 5.5.4 el tensor S es G-invariante y por hipótesis H es G-invariante. Más precisamente,

$$S(HX^{\tau(a)}, Y^{\tau(a)}) = S((HX)^{\tau(a)}, Y^{\tau(a)}) = (S(HX), Y)^{\tau(a)}.$$

Los demás términos se trabajan de manera similar. Finalmente, argumentando como en la parte final de la demostración de la Proposición 5.5.1, obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} N_{eK}((d\pi)_e x, (d\pi)_e y) = (d\pi)_e \, ((\Lambda(H_0 x)H_0)y - H_0((\Lambda(x)H_0)y). \\ -(\Lambda(H_0 y)H_0)x + H_0((\Lambda(y)H_0)x)) \, . \end{aligned}$$

No es difícil trabajar esta fórmula usando la fórmula para Λ dada en el Teorema 5.4.7, y obtener así la versión final para $N_{eK}((d\pi)_e x, (d\pi)_e y)$ que se enuncia en la Proposición. □

Corolario 5.5.7. *H **es integrable** si y solo si el endomorfismo H_0 **es integrable**, es decir*

$$[H_0 x, H_0 y]_{\mathfrak{m}} - H_0[H_0 x, y]_{\mathfrak{m}} - H_0[x, H_0 y]_{\mathfrak{m}} + H_0^2[x, y]_{\mathfrak{m}} = 0, \forall \, x, y \in \mathfrak{m}.$$

La ecuación KY en un espacio homogéneo

En lo que sigue para $x, y, z \in \mathfrak{m}$ llamamos:

$$\beta(x, y, z) := \langle (\Lambda(x)H_0)y, z\rangle = \langle \Lambda(x)H_0 y - H_0\Lambda(x)(y), z\rangle. \tag{5.5.4}$$

Destacamos la siguiente expresión para β:

Lema 5.5.8. $\forall \, x, y, z \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned} \beta(x, y, z) = \frac{1}{2}\langle [x, H_0 y]_{\mathfrak{m}}, z\rangle + \frac{1}{2}\langle [z, x]_{\mathfrak{m}}, H_0 y\rangle + \frac{1}{2}\langle [z, Hy]_{\mathfrak{m}}, x\rangle + \\ + \frac{1}{2}\langle [x, y]_{\mathfrak{m}}, H_0 z\rangle + \frac{1}{2}\langle [H_0 z, x]_{\mathfrak{m}}, y\rangle + \frac{1}{2}\langle [H_0 z, y]_{\mathfrak{m}}, x\rangle \end{aligned}$$

Demostración. Usaremos la ecuación de Λ en 5.4.3.

$$\begin{aligned} \beta(x, y, z) &= \langle (\Lambda(x)H_0)y, z\rangle = \langle \Lambda(x)H_0 y - H_0\Lambda(x)y, z\rangle \\ &= \langle \frac{1}{2}[x, H_0 y]_{\mathfrak{m}} + U(x, H_0 y), z\rangle + \langle \frac{1}{2}[x, y]_{\mathfrak{m}} + U(x, y), H_0 z\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle [x, H_0 y]_{\mathfrak{m}}, z\rangle + \frac{1}{2}\langle [z, x]_{\mathfrak{m}}, H_0 y\rangle + \frac{1}{2}\langle [z, H_0 y]_{\mathfrak{m}}, x\rangle + \\ &+ \frac{1}{2}\langle [x, y]_{\mathfrak{m}}, H_0 z\rangle + \frac{1}{2}\langle [H_0 z, x]_{\mathfrak{m}}, y\rangle + \frac{1}{2}\langle [H_0 z, y]_{\mathfrak{m}}, x\rangle. \end{aligned}$$

□

Observación 5.5.9. Del Corolario 5.5.5, resulta que H es paralelo si y sólo si $\beta(x, y, z) = 0$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{m}$, es decir, de acuerdo al lema anterior, si

$$\begin{aligned} \langle [x, Hy]_{\mathfrak{m}}, z\rangle + \langle [z, x]_{\mathfrak{m}}, Hy\rangle + \langle [z, Hy]_{\mathfrak{m}}, x\rangle + \\ + \langle [x, y]_{\mathfrak{m}}, Hz\rangle + \langle [Hz, x]_{\mathfrak{m}}, y\rangle + \langle [Hz, y]_{\mathfrak{m}}, x\rangle = 0 \end{aligned}$$

Listamos ahora algunas propiedades que satisface β.

Lema 5.5.10. *Sea H_0 endomorfismo inversible, antisimétrico y $\mathrm{Ad}(K)$-invariante en $\mathfrak{m}$. Entonces β cumple con las siguientes propiedades:*

1. $\beta(x, y, z) = -\beta(x, z, y)$
2. $\beta(z, x, x) = 0$
3. $\beta(x, y, z) = 0$ *para x, y, z tales que $Hy = az$ y $Hz = -ay$*

Demostración. Estas propiedades son inmediatas dado que el tensor $(X, Y, Z) \mapsto g((\nabla_X H)Y, Z)$ tiene las propiedades análogas. $\square$

Llamamos ahora α a la función trilineal tal que $\forall x, y, z \in \mathfrak{m}$:

$$\alpha(x, y, z) = \beta(x, y, z) + \beta(y, x, z) \tag{5.5.5}$$

Observación 5.5.11. Notar que $\alpha(x, y, z) = 0$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{m}$ si y sólo si $\beta(x, x, z) = 0$ para todo $x, z \in \mathfrak{m}$. Resulta entonces que H es Killing-Yano si y sólo si $\alpha \equiv 0$.

Listamos algunas propiedades para α.

Lema 5.5.12. *Propiedades para* α

1. $\alpha(x, y, z) = \alpha(y, x, z)$
2. $\alpha(x, y, x) = \beta(x, y, x)$

Demostración. Para 1. $\alpha(x, y, z) = \beta(x, y, z) + \beta(y, x, z) = (\beta(y, x, z) + \beta(x, y, z) = \alpha(y, x, z)$. En 2. $\alpha(x, y, x) = \beta(x, y, x) + \beta(y, x, x) = \beta(x, y, x)$. $\square$

Tensores Killing-Yano G-invariantes en espacios homogéneos G/K de dimensión cuatro

Usamos todos los resultados de la sección para dar una prueba al siguiente resultado.

Teorema 5.5.13. *Sea G/K un espacio homogéneo con métrica G-invariante g. Si* $\dim G/K = 4$ *entonces todo tensor* $(1, 1)$ *G-invariante Killing-Yano inversible es paralelo.*

Demostración. Consideremos la descomposición reductiva de $\mathfrak{g}$, es decir, $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{k}$. Por todo lo visto a lo largo de la sección, el teorema se reduce a lo siguiente. Dado un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\mathrm{Ad}(K)$-invariante en $\mathfrak{m}$ y un endomorfismo H_0 inversible, antisimétrico respecto de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y que conmuta con cada $\mathrm{Ad}(k)$, si H_0 satisface la condición $\alpha(x, y, z) = 0$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{m}$, entonces $\beta(x, y, z) = 0$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{m}$.

Tomamos una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{m}$ tal que H_0 se escribe de la siguiente forma:

$$[H_0]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \text{con } a, b \neq 0$$

donde $\mathcal{B} = \{e_1, f_1, e_2, f_2\}$. Nuestro interés es probar que $\beta(x, y, z) = 0, \forall\, x, y, z \in \mathfrak{m}$. Por propiedad 1 de 5.5.10 tenemos que $\beta(x, y, y) = 0\ \forall\, x, y$. De la propiedad 5.5.12 se deduce que para todo $x, y \in \mathfrak{m}$, $\beta(x, y, x) = 0$. Luego $\beta(x, x, y) = 0$. Resta evaluar los casos para x, y, z distintos. Por propiedad 2 de 5.5.10, $\forall\, x \in \mathfrak{m}$:

$$\beta(x, e_1, f_1) = \beta(x, f_1, e_1) = \beta(x, e_2, f_2) = \beta(x, f_2, e_2) = 0.$$

Usando la ecuación 5.5.5 en este resultado:

$$\beta(e_1, x, f_1) = \beta(f_1, x, e_1) = \beta(e_2, x, f_2) = \beta(f_2, x, e_2) = 0.$$

Tomando x, y, z del conjunto $\{e_1, f_1, e_2, f_2\}$, notamos que necesariamente deben estar e_1 y f_1 ó bien e_2 y f_2 entre los elementos x, y, z. De esta forma caemos en los casos ya vistos y todos ellos son de valor cero. Por lo tanto $\beta(x, y, z) = 0\ \forall x, y, z \in \mathfrak{m}$. Es decir $(\Lambda(x)H_0)y = 0, \forall x, y, \in \mathfrak{m}$. Por el Corolario 5.5.5 H resulta paralelo.

□

Observación 5.5.14. Este resultado ya está probado para un caso más general en [ABM16], en donde toda 2-forma Conforme Killing no degenerada en una variedad riemaniana M de dimensión cuatro con norma constante resulta paralela. Recordar que la 2-forma asociada a H_0 viene dada por $\omega_0(x, y) = \langle H_0 x, y\rangle$. Siendo la métrica y el tensor H ambos G-invariantes, se tiene que ω es también G-invariante. Por lo tanto para nuestro caso la norma de la 2-forma ω es constante en cada punto $p \in M = G/K$.

5.6. Tensores KY invariantes en variedades bandera

En esta sección daremos en forma general la ecuación de Killing Yano en una variedad bandera y presentaremos tres ejemplos de ellas con estructura KY estricta: $SU(3)/S(U(1) \times U(1) \times U(1))$, $SU(4)/S(U(1) \times U(1) \times U(1) \times U(1))$ y $SO(5, \mathbb{R})/T$.

5.6.1. Variedades bandera generalizadas. Definición y propiedades

Existen muchas definiciones equivalentes de variedades bandera, cada una de ellas enfocada desde puntos de vista distintos. Ya vimos una en la primera parte de este capítulo, tomaremos de ahora en adelante la definición desde el punto de vista de la teoría de Lie.

Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie compleja semisimple, G un grupo de Lie complejo y conexo, tal que $\mathrm{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. Llamamos $\mathfrak{h}$ a la subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, R a su sistema de raíces y $\mathfrak{g}_\alpha$ a los autoespacios raíces, tales que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$.

Fijamos Σ un sistema de raíces simples y denotamos por $R^+ \subset R$ al conjunto de raíces positivas. Sea $\Theta \subset \Sigma$ un subconjunto para el cual se definen:

$$R_\Theta := \langle \Theta \rangle = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\Theta\} \cap R,\ R^\pm_\Theta := \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\Theta\} \cap R^\pm.$$

Llamamos conjunto complementario de raíces a $R_M = R - \langle\Theta\rangle$, y denotamos por R^+_M al conjunto de raíces complementarias positivas.

Definimos una subálgebra de $\mathfrak{g}$ generada por Θ de la siguiente forma:

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\beta \in R^+_\Theta} \mathfrak{g}_{-\beta}. \tag{5.6.1}$$

La subálgebra $\mathfrak{p}_\Theta$ es una subálgebra parabólica, pues contiene a la subálgebra de Borel $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Denotamos por P_Θ al subgrupo de G correspondiente a la subálgebra $\mathfrak{p}_\Theta$ el cual está definido como el normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ en G. Es decir $P_\Theta = \{g \in G : \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p}_\Theta\}$.

Definición 5.6.1. Una **variedad bandera generalizada** asociada a un álgebra de Lie compleja semisimple $\mathfrak{g}$ y a un subconjunto Θ del conjunto de raíces simples Σ, es el espacio homogéneo

$$\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$$

donde G es grupo de Lie complejo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y P_Θ es el normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ en G.

Si $\Theta = \varnothing$ entonces $\mathbb{F} = G/B$, donde B el normalizador de $\mathfrak{b}$ en G. Esta bandera es conocida como **bandera maximal (ó full)**.

Denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a la forma de Killing de $\mathfrak{g}$. La restrición de la forma de Killing a $\mathfrak{h}$ es no degenerada, esto implica que para cada $\alpha \in R$, existe un único $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $\alpha(\cdot) = \langle h_\alpha, \cdot \rangle$.

Trabajaremos con una base de Weyl, la cual esta formada por los elementos $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ con $\alpha \in R$ que satisfacen con las siguientes propiedades:

- $\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = 1$
- $[h, X_\alpha] = \alpha(h)X_\alpha, \forall h \in \mathfrak{h}$
- $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = h_\alpha$
- $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$ si $\alpha + \beta \in R$, caso contrario es nulo.
- $m_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$ y $m_{\alpha,\beta} = -m_{-\alpha,-\beta}$

Definimos para todo $\alpha \in R$, los vectores: $A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$, $iS_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha})$.

Con estos vectores es posible definir una forma real compacta de $\mathfrak{g}$ simbolizada por $\mathfrak{u}$ tal que:

$$\mathfrak{u} = \mathrm{Span}\{A_\alpha, iS_\alpha, i\mathfrak{h}_\mathbb{R}\}_{\alpha \in R^+}$$

donde $i\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \{ih_\alpha : \alpha \in R\}$ es la forma real de $\mathfrak{h}$. Sea $U = \exp(\mathfrak{u})$ el grupo de Lie asociado a $\mathfrak{u}$, el cual es una forma real compacta de G. Llamamos K_Θ a la intersección de U y P_Θ. Es claro que $K_\Theta \subset U$, más aún es el centralizador de un toro de G. Como U es compacto, K_Θ es conexo (ver [Kna]). Además U también actúa transitivamente en $\mathbb{F}_\Theta$, por lo tanto $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta = U/K_\Theta$. Si $\Theta = \varnothing$, $\mathbb{F} = G/B = U/T$, donde $T = U \cap B$ es un toro maximal de U.

De esta forma expresamos a toda variedad bandera $\mathbb{F}_\Theta$ como el espacio homogéneo U/K_Θ.

Los siguientes lemas corresponden a propiedades de los elementos $m_{\alpha,\beta}$, ih_α, X_α, A_α, iS_α con $\alpha \in R$. Los mismos serán muy usados en cálculos posteriores. Sus demostraciones pueden ser vistas en [SM].

Lema 5.6.2. *Sean $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, entonces $m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\gamma} = m_{\gamma,\alpha}$.*

Lema 5.6.3. *Si $\alpha, \beta \in R$ entonces se cumplen las siquientes igualdades*

$$[A_\alpha, iS_\alpha] = 2ih_\alpha, \quad [ih_\alpha, A_\beta] = \beta(h_\alpha)iS_\beta, \quad [ih_\alpha, iS_\beta] = -\beta(h_\alpha)iA_\beta$$

$$\begin{aligned}
[A_\alpha, A_\beta] &= m_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} - m_{\alpha,-\beta}A_{\alpha-\beta} \\
[iS_\alpha, iS_\beta] &= -m_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} - m_{\alpha,-\beta}A_{\alpha-\beta} \\
[A_\alpha, iS_\beta] &= m_{\alpha,\beta}iS_{\alpha+\beta} + m_{\alpha,-\beta}iS_{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

$$\langle ih_\alpha, A_\beta \rangle = \langle ih_\alpha, iS_\beta \rangle = \langle A_\alpha, iS_\beta \rangle = 0, \quad \langle A_\alpha, A_\alpha \rangle = \langle iS_\alpha, iS_\alpha \rangle = -2 \ .$$

Notar que $A_{-\alpha} = -A_\alpha$, $iS_\alpha = iS_{-\alpha}$ y $X_\alpha = \frac{A_\alpha - i(iS_\alpha)}{2}$.

La representación de isotropía en $\mathbb{F}_\Theta$

Si $\mathfrak{k}_\Theta$ denota al álgebra de Lie de K_Θ, entonces escribimos $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}_\Theta$. Esta intersección es el conjunto de puntos fijos del mapa conjugación Ω de $\mathfrak{g}$ restringido a $\mathfrak{p}_\Theta$, tal que $\Omega(X_\alpha) = -X_{-\alpha}$. Por lo cual,

$$\mathfrak{k}_\Theta = i\mathfrak{h}_\mathbb{R} \oplus \sum_{\alpha \in R_\Theta} \mathrm{Span}\{A_\alpha, iS_\alpha\}.$$

Su complexificación resulta:

$$\mathfrak{k}_\Theta^\mathbb{C} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in R_\Theta^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in R_\Theta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}. \tag{5.6.2}$$

Recordando que el espacio tangente de $\mathbb{F}_\Theta$ en eK_Θ se identifica con el complemento ortogonal de $\mathfrak{k}_\Theta$, observamos que:

$$T_{eK_\Theta}\mathbb{F}_\Theta \cong \mathfrak{m}_\Theta = \sum_{\alpha \in R_M} \mathrm{Span}\{A_\alpha, iS_\alpha\} = \sum_{\alpha \in R_M} \mu_\alpha,$$

donde llamamos a $\mu_\alpha = \mathrm{Span}\{A_\alpha, iS_\alpha\}$. Complexificando se obtiene:

$$\mathfrak{m}_\Theta^\mathbb{C} = \sum_{\alpha \in R_M} \mathbb{C}\mathfrak{g}_\alpha \tag{5.6.3}$$

De esta forma tenemos una caracterización general de los elementos que forman parte de $\mathfrak{m}_\Theta$ y de $\mathfrak{m}_\Theta^\mathbb{C}$.

Siendo U compacto y semisimple la forma de Killing $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es definida negativa. Luego $-\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno, más aún es $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante. Por lo tanto U/K_Θ es reductivo. Entonces, es posible obtener una descomposición del espacio $\mathfrak{m}_\Theta$ en componentes irreducibles, trasladaremos toda la teoría desarrollada en las secciones anteriores para este caso.

Recordar que la representación de isotropía $K \to \mathrm{GL}(T_{eK}(G/K_\Theta))$ se identifica con $\mathrm{Ad} : K \to \mathrm{GL}(\mathfrak{m}_\Theta)$. Por el Corolario 5.1.7 consideramos la representación $\mathrm{ad} : \mathfrak{k}_\Theta \to \mathrm{End}(\mathfrak{m}_\Theta)$. Podemos descomponer a $\mathfrak{m}_\Theta$ en $\mathrm{ad}(\mathfrak{k}_\Theta)$-submódulos irreducibles de $\mathfrak{m}_\Theta$, tal que $\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}_s$.

A simple vista, no es fácil identificar quienes son estas componentes irreducibles. Por esta razón se observa la representación de $\mathfrak{k}_\Theta^\mathbb{C}$ en $\mathfrak{m}_\Theta^\mathbb{C}$ y se define el siguiente conjunto:

$$\mathfrak{t} := \mathfrak{z}(\mathfrak{k}_\Theta) \cap i\mathfrak{h}_\mathbb{R}.$$

Tomando por $i\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ y $\mathfrak{t}^*$ a los espacios duales de $i\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ y $\mathfrak{t}$ respectivamente, se considera el siguiente mapa lineal $\mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : (i\mathfrak{h})^* &\to \mathfrak{t}^* \\ \mathcal{K}(\alpha) &:= \alpha|_\mathfrak{t} \end{aligned}$$

Llamamos $\mathfrak{t}$-raíces a todo elemento del conjunto $\mathcal{K}(R_M) = R_\mathfrak{t}$ y denotamos por $R_\mathfrak{t}^+ = \mathcal{K}(R_M^+)$ a las $\mathfrak{t}$-raíces positivas. El siguiente teorema explica una correspondencia entre $\mathfrak{t}$-raíces y $\mathrm{ad}(\mathfrak{k}^\mathbb{C})$-submódulos irreducibles en $\mathfrak{m}_\Theta^\mathbb{C}$.

Proposición 5.6.4. *[AP86] Existe una correspondencia biúnivoca entre $\mathfrak{t}$-raíces y submódulos η_γ $\mathrm{ad}(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}})$-invariantes e irreducibles y no equivalentes entre si, dada por:*

$$\gamma \in R_{\mathfrak{t}} \Leftrightarrow \eta_\gamma = \sum_{\beta/\mathcal{K}(\beta)=\gamma} \mathbb{C}\mathfrak{g}_\beta.$$

En consecuencia:

$$\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}} = \sum_{\gamma\in R_{\mathfrak{t}}} \mathbb{C}\eta_\gamma.$$

Notar que las componentes irreducibles están formadas por espacios raíces, es decir:

$$\eta_\gamma = \{X_\beta : \mathcal{K}(\beta) = \gamma\},\ \forall\, \gamma \in R_{\mathfrak{t}}.$$

El operador conjugación intercambia los submódulos η_γ y $\eta_{-\gamma}$. Denotando a $(V)^\Omega$ como el conjunto de puntos fijos en un subespacio $V \subset \mathfrak{g}$ bajo la operación conjugación Ω, tenemos lo siguiente:

$$\mathfrak{m}_\Theta = \sum_{\gamma\in R_{\mathfrak{t}}^+} (\eta_\gamma + \eta_{-\gamma})^\Omega = \sum_{\gamma\in R_{\mathfrak{t}}^+} \mathfrak{m}_\gamma.$$

Entonces los elementos en cada componente irreducible $\mathfrak{m}_\gamma$ serán:

$$\mathfrak{m}_\gamma = \mathrm{Span}\{A_\beta, iS_\beta : \mathcal{K}(\beta) = \gamma\},\ \forall\, \gamma \in R_{\mathfrak{t}}^+.$$

Para mayor detalle ver [AP86].

5.6.2. Endomorfismos y productos internos $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariantes en $\mathbb{F}_\Theta$

En lo que sigue trabajaremos con el espacio homogéneo $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ describiendo el comportamiento de tensores y métricas U-invariantes. Recordar $\mathfrak{m}_\Theta$ es libre de multiplicidad, es decir se descompone en componentes irreducibles no equivalentes entre si (visto en la sección anterior). Supondremos en lo que resta de la tesis que

$$\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m}_{\gamma_1} \oplus \mathfrak{m}_{\gamma_2} \oplus ...\mathfrak{m}_{\gamma_s}$$

donde $\mathfrak{m}_{\gamma_j}$ son las componentes irreducibles tal que $\mathfrak{m}_{\gamma_j} = \mathrm{span}\{A_\beta, iS_\beta : \mathcal{K}(\beta) = \gamma_j\}$ $\forall j = 1, ..., s$.

Sea g una métrica U-invariante en $\mathbb{F}_\Theta$. Por el Teorema 5.2.6 la métrica esta completamente determinada por un producto interno $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante en $\mathfrak{m}_\Theta$. Fijamos un producto interno $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante en $\mathfrak{m}_\Theta$ y lo escribimos como $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q = -\langle Q\cdot,\cdot\rangle$, donde Q es un mapa lineal de $\mathfrak{m}_\Theta$ en $\mathfrak{m}_\Theta$, simétrico y definido positivo. Por el Lema 5.2.13 la $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariancia de $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ hace que $\mathrm{Ad}(k)Q = Q\,\mathrm{Ad}(k)$ $\forall\, k \in K_\Theta$. Luego por el Lema 5.2.16:

$$Q = \begin{bmatrix} \lambda_{\gamma_1} I_{\mathfrak{m}_{\gamma_1}} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_{\gamma_2} I_{\mathfrak{m}_{\gamma_2}} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_s I_{\mathfrak{m}_{\gamma_s}} \end{bmatrix},\ \text{con } \lambda_{\gamma_j} > 0\ \forall j = 1, ..., s$$

Cada componente irreducible $\mathfrak{m}_{\gamma_j}$ tiene como base ortogonal a

$$\mathfrak{B}_j = \{A_{\beta_{j1}}, iS_{\beta_{j1}}, ..., A_{\beta_{jk_i}}, iS_{\beta_{ik_i}} : \mathcal{K}(\beta_{jk}) = \gamma_j, \forall k = 1, ..., n_j\},$$

y estos son autovectores correspondientes al autovalor λ_{γ_j}.

Lema 5.6.5. *$\forall \alpha \in R_M$, se tiene que $\lambda_{-\alpha} = \lambda_\alpha$.*

Demostración. Por un lado, usando 5.6.3 se tiene,

$$\langle A_\alpha, A_\alpha \rangle_Q = -\langle \lambda_\alpha A_\alpha, A_\alpha \rangle = 2\lambda_\alpha$$

Por otro lado escribimos

$$\begin{aligned} \langle A_\alpha, A_\alpha \rangle_Q &= \langle -A_{-\alpha}, A_\alpha \rangle_Q = \langle \lambda_{-\alpha} A_{-\alpha}, A_\alpha \rangle = \lambda_{-\alpha} \langle A_{-\alpha}, A_\alpha \rangle \\ &= \lambda_{-\alpha} \langle -A_\alpha, A_\alpha \rangle = 2\lambda_{-\alpha}. \end{aligned}$$

Igualando ambos miembros se llega que $\lambda_{-\alpha} = \lambda_\alpha$. □

Por lo tanto toda métrica U-invariante en $\mathbb{F}_\Theta$ esta completamente determinada por un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ tal que $\forall \alpha \in R_M$, A_α y iS_α son autovectores de autovalor λ_α de Q. Notar también que al considerar la complexificación de Q a través de una extensión lineal, se observa claramente que $Q^{\mathbb{C}} X_\alpha = \lambda_\alpha X_\alpha$, $\forall \alpha \in R_M$, es decir X_α es un autovector de autovalor λ_α de $Q^{\mathbb{C}}$.

Siguiendo la notación empleada en [SMC06] y [SMN03], caracterizaremos a $Q^{\mathbb{C}}$ en función de su conjunto multilineal de autovalores, denotando $Q^{\mathbb{C}} = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in R_M}$. Por otro lado caracterizaremos con abuso de notación a todo producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante como $Q = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in R_M^+}$ tal que:

1. $\lambda_\alpha > 0 \; \forall \alpha \in R_M$.
2. $\lambda_\alpha = \lambda_{-\alpha} \; \forall \alpha \in R_M$.
3. $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$ si los autovectores correspondientes a las raíces α y β están en la misma componente irreducible de $\mathfrak{m}_\Theta$.

Sea $H : T(\mathbb{F}_\Theta) \to T(\mathbb{F}_\Theta)$, un tensor U-invariante y antisimétrico respecto de g. Por el Teorema 5.3.2 (y la Observación 5.3.3) esto es equivalente a un endomorfismo $H_0 : \mathfrak{m}_\Theta \to \mathfrak{m}_\Theta$, antisimétrico y $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante. Haciendo uso del Teorema 5.3.6, escribimos a H_0 en una forma simple:

$$H_0 = \begin{bmatrix} (H_0)_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (H_0)_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (H_0)_s \end{bmatrix}$$

donde $(H_0)_j$ son matrices antisimétricas para $j = 1, ..., s$. Notar que cada $(H_0)_j$ tiene autovalores imaginarios puros.

Para describir a cada $(H_0)_j$, usaremos una base con los elementos que ya se conocen. Recordemos que los elementos de las componentes irreducibles η_{γ_j} en ${\mathfrak{m}_\Theta}^{\mathbb{C}}$ son los $X_{\beta_{jk}}$ con $\mathcal{K}(\beta_{jk}) = \gamma_j$. Notar que $H_0^{\mathbb{C}}$ deja invariante a cada componente irreducible en $\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}$, más aún por el Lema de Schur $H_0^{\mathbb{C}} \mid_{\eta_{\gamma_j}} = iv_j I_{\eta_{\gamma_j}}$, con $v_j \in \mathbb{R}$. Entonces $(H_0)^{\mathbb{C}} X_{\beta_{jk}} = iv_j X_{\beta_{jk}}$, es decir los elementos $X_{\beta_{jk}}$ son autovectores de $(H_0)^{\mathbb{C}}$ de autovalor complejo iv_j. Luego escribiendo a $X_{\beta_{jk}} = \frac{A_{\beta_{jk}} - i(iS_{\beta_{jk}})}{2}$, se tiene que $H_0 A_{\beta_{jk}} = v_j iS_{\beta_{jk}}$ y $H_0 iS_{\beta_{jk}} = -v_j A_{\beta_{jk}}$. De esta forma el bloque $(H_0)_j$ en la base $\mathfrak{B}_j$

se expresa como:

$$[(H_0)_j]_{\mathcal{B}_j} = \begin{bmatrix} 0 & -v_{\alpha_j} & \dots & 0 & 0 \\ v_{\alpha_j} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -v_{\alpha_j} \\ 0 & 0 & \dots & v_{\alpha_j} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.6.4}$$

Lema 5.6.6. *Si H_0 es antisimétrica respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ entonces $v_{-\alpha} = -v_\alpha$ para todo $\alpha \in R_M$.*

Demostración. En primer lugar tenemos:

$$\langle H_0 A_\alpha, iS_\alpha\rangle_Q = -\langle v_\alpha iS_\alpha, QiS_\alpha\rangle_Q = -\langle v_\alpha iS_\alpha, \lambda_\alpha iS_\alpha\rangle = 2v_\alpha\lambda_\alpha.$$

Por otro lado, usando que $iS_\alpha = iS_{-\alpha}$ y $A_{-\alpha} = -A_\alpha$:

$$\begin{aligned} \langle H_0 A_\alpha, iS_\alpha\rangle_Q &= -\langle A_\alpha, H_0 iS_{-\alpha}\rangle_Q = \langle QA_\alpha, -v_{-\alpha}A_{-\alpha}\rangle \\ &= \langle \lambda_\alpha A_\alpha, -v_{-\alpha}A_\alpha\rangle = \lambda_\alpha\langle -A_{-\alpha}, -v_{-\alpha}A_\alpha\rangle \\ &= -2\lambda_\alpha v_{-\alpha}. \end{aligned}$$

Así $v_{-\alpha} = -v_\alpha$. □

Nuevamente siguiendo la notación en [SMC06] y [SMN03], caracterizaremos al endomorfismo $H_0^{\mathbb{C}}$ en función de su conjunto multilineal de autovalores imaginarios, el cual expresamos como $\{iv_\alpha\}_{\alpha\in R_M}$ donde los autovectores son los elementos X_α, $\alpha \in R_M$ de los espacios raíces. Por otro lado, H_0 se expresa en forma matricial en cada componente irreducible $\mathfrak{m}_j$ como la ecuación 5.6.4 con respecto de la base $\mathfrak{B}_j$. Con abuso de notación describimos a H_0 como $H_0 = \{v_\alpha\}_{\alpha\in R_M^+}$ tal que:

1. $v_{-\alpha} = -v_\alpha \ \forall\ \alpha \in R_M$.
2. $v_\alpha = v_\beta$ si los autovectores de $H_0^{\mathbb{C}}$ correspondientes a las raíces α y β están en la misma componente irreducible de $\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}$.

5.6.3. El tensor de Nijenhuis en $\mathbb{F}_\Theta$

Dados $x, y \in \mathfrak{m}_\Theta$, recordemos al tensor de Nijenhuis en $\mathbb{F}_\Theta$:

$$N(x,y) = [H_0x, H_0y]_{\mathfrak{m}_\Theta} - H_0[H_0x, y]_{\mathfrak{m}_\Theta} - H_0[x, H_0y]_{\mathfrak{m}_\Theta} + H_0^2[x,y]_{\mathfrak{m}_\Theta}$$

Proposición 5.6.7. *Sean $\alpha, \beta \in R_M$, entonces*

$$\begin{aligned} N(A_\alpha, A_\alpha) &= N(iS_\alpha, iS_\alpha) = N(A_\alpha, iS_\alpha) = 0 \\ N(A_\alpha, A_\beta) &= c_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} + d_{\alpha,\beta}A_{\alpha-\beta} \\ N(A_\alpha, iS_\beta) &= c_{\alpha,\beta}iS_{\alpha+\beta} - d_{\alpha,\beta}iS_{\alpha-\beta} \\ N(iS_\alpha, iS_\beta) &= -c_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} + d_{\alpha,\beta}A_{\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

Con $c_{\alpha,\beta}$, $d_{\alpha,\beta}$ definidos tales que:

$$c_{\alpha,\beta} = \begin{cases} m_{\alpha,\beta}\left(v_{\alpha+\beta} - v_\alpha\right)\left(v_\beta - v_{\alpha+\beta}\right), \ si\ \alpha+\beta \in R_M \\ 0, \ si\ \alpha+\beta \notin R_M \end{cases} \tag{5.6.5}$$

$$d_{\alpha,\beta} = \begin{cases} m_{\alpha,-\beta}\left(v_{\alpha-\beta}-v_\alpha\right)\left(v_{\alpha-\beta}+v_\beta\right) \; si \;\; \alpha-\beta \in R_M \\ 0, \; si \; \alpha-\beta \notin R_M \end{cases} \tag{5.6.6}$$

Demostración. Como $N(x,x)=0$ se tiene $N(A_\alpha,A_\alpha)=N(iS_\alpha,iS_\alpha)=0$. Siendo que $[A_\alpha,iS_\alpha]_{\mathfrak{m}_\Theta}=0$, se sigue que $N(A_\alpha,iS_\alpha)=0, \forall\alpha\in R_M$; para los tres casos restantes, si $\alpha+\beta\in R_M$ se tiene:

$$N(A_\alpha,A_\beta) = \underbrace{m_{\alpha,\beta}\left(v_{\alpha+\beta}-v_\alpha\right)\left(v_\beta-v_{\alpha+\beta}\right)}_{c_{\alpha,\beta}} A_{\alpha+\beta} + \underbrace{m_{\alpha,-\beta}\left(v_{\alpha-\beta}-v_\alpha\right)\left(v_{\alpha-\beta}+v_\beta\right)}_{d_{\alpha,\beta}} A_{\alpha-\beta}$$

$$N(iS_\alpha,iS_\beta) = \underbrace{m_{\alpha,\beta}\left(v_{\alpha+\beta}-v_\alpha\right)\left(v_\beta-v_{\alpha+\beta}\right)}_{c_{\alpha,\beta}} A_{\alpha+\beta} + \underbrace{m_{\alpha,-\beta}\left(-v_{\alpha-\beta}+v_\alpha\right)\left(v_{\alpha-\beta}+v_\beta\right)}_{-d_{\alpha,\beta}} A_{\alpha-\beta}$$

$$N(A_\alpha,iS_\beta) = \underbrace{m_{\alpha,\beta}\left(-v_{\alpha+\beta}+v_\alpha\right)\left(-v_\beta+v_{\alpha+\beta}\right)}_{-c_{\alpha,\beta}} iS_{\alpha+\beta} + \underbrace{m_{\alpha,-\beta}\left(-v_{\alpha-\beta}+v_\alpha\right)\left(v_{\alpha-\beta}+v_\beta\right)}_{d_{\alpha,\beta}} iS_{\alpha-\beta}.$$

□

Definimos también el tensor de Nijenhuis en la complexificación de $\mathfrak{m}_\Theta$, $\forall\, x_1$, x_2, x_3, $x_4 \in \mathfrak{m}_\Theta$:

$$N^{\mathbb{C}}(x_1+ix_2,x_3+ix_4) := N(x_1,x_3)-N(x_2,x_4)+iN(x_1,x_4)+iN(x_2,x_3) \tag{5.6.7}$$

Es fácil probar que:

Lema 5.6.8. *Para todos $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathfrak{m}_\Theta$, entonces*

$$N^{\mathbb{C}}(x_1+ix_2,x_3+ix_4) = [H_0^{\mathbb{C}}(x_1+ix_2),H^{\mathbb{C}}(x_3+ix_4)] - H_0^{\mathbb{C}}[H_0^{\mathbb{C}}(x_1+ix_2),x_3+ix_4] - \\ - H_0^{\mathbb{C}}[x_1+ix_2,H_0^{\mathbb{C}}(x_3+ix_4)] + (H_0^{\mathbb{C}})^2[x_1+ix_2,x_3+ix_4].$$

Lema 5.6.9. *$\forall\, X_\alpha,X_\beta\in\mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}$, con $\alpha,\beta\in R_M$ y $\alpha+\beta\in R_M$ se tiene lo siguiente:*

$$N^{\mathbb{C}}(X_\alpha,X_\beta) = im_{\alpha,\beta}(v_{\alpha+\beta}-v_\alpha)(v_\beta-v_{\alpha+\beta})X_{\alpha+\beta}.$$

Demostración.

$$N^{\mathbb{C}}(X_\alpha,X_\beta) = [H_0^{\mathbb{C}}X_\alpha,H_0^{\mathbb{C}}X_\beta] - H_0^{\mathbb{C}}([H_0^{\mathbb{C}}X_\alpha,X_\beta]+[X_\alpha,H^{\mathbb{C}}X_\beta]) + (H^{\mathbb{C}})^2[X_\alpha,X_\beta] = \\ = im_{\alpha,\beta}(v_{\alpha+\beta}-v_\alpha)(v_\beta-v_{\alpha+\beta})X_{\alpha+\beta}$$

□

Teorema 5.6.10. *Sea $H_0=\{v_\alpha\}_{\alpha\in R_M^+}$ un endomorfismo inversible $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante y antisimétrico respecto de una producto $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante $Q=\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in R_M^+}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i. *H_0 es integrable.*

ii. *$\forall\alpha,\beta\in R_M$ tal que $\alpha+\beta\in R_M$ ó $\alpha-\beta\in R_M$, $N(A_\alpha,A_\beta)=N(A_\alpha,iS_\beta)=N(iS_\alpha,iS_\beta)=0$.*

iii. *$\forall\,\alpha,\beta\in R_M$ tal que $\alpha+\beta\in R_M$ ó $\alpha-\beta\in R_M$, $c_{\alpha,\beta}=0$ ó $d_{\alpha,\beta}=0$.*

iv. *$\forall\,\alpha,\beta,\gamma\in R_M$ tal que $\alpha+\beta+\gamma=0$*

$$(v_{\delta_3}+v_{\delta_1})(v_{\delta_2}+v_{\delta_3})=0. \tag{5.6.8}$$

para $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

v. $H_0^{\mathbb{C}}$ *es integrable.*

vi. $\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in R_M$ *tal que* $\alpha + \beta + \gamma = 0$*, los valores de* $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma$ *son iguales en valor absoluto y uno de ellos es distinto en signo.*

Demostración. Por la Proposición 5.6.7 resulta $i \Leftrightarrow ii \iff iii$. Para $iii \Rightarrow iv$ reemplazamos β por $-\beta$ en 5.6.6, y obtenemos que $d_{\alpha,-\beta} = -a_{\alpha,\beta}$. Por lo tanto basta considerar solo una de ellas, llamando $\gamma = -(\alpha + \beta)$ independientemente del signo de β, obtenemos en forma general para todo triple de raíces $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ en R_M tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, se verifica la ecuación

$$(v_\gamma + v_\alpha)(v_\beta + v_\gamma) = 0.$$

Pero considerando todos los ordenes posibles en el conjunto $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, se tiene iv. La implicación $iv \Rightarrow iii$ es inmediata. Por transitividad se obtiene $i \iff iv$. Por el Lema 5.6.9 y llamando $-\gamma = \alpha + \beta$ se tiene $iv \iff v$. Para la última afirmación, probaremos que $iv \Leftrightarrow vi$. En efecto, consideramos las siguientes ecuaciónes posibles que se deducen de cambiar el orden en la suma de las raíces $\alpha, \beta, \gamma \in R_M$ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

$$(v_\gamma + v_\alpha)(v_\beta + v_\gamma) = 0 \tag{5.6.9}$$
$$(v_\beta + v_\alpha)(v_\gamma + v_\beta) = 0 \tag{5.6.10}$$
$$(v_\alpha + v_\beta)(v_\gamma + v_\alpha) = 0. \tag{5.6.11}$$

Si $v_\gamma = -v_\alpha$ en la primera ecuación, la tercera ecuación se cumple por lo tanto reemplazando en la segunda ecuación resulta $v_\beta^2 - v_\alpha^2 = 0$, por lo tanto tenemos las siguientes alternativas:

1. $v_\beta = v_\alpha = -v_\gamma$
2. $-v_\alpha = v_\beta = v_\gamma$

Si $v_\gamma = -v_\beta$, la segunda ecuación se verifica, de la tercera ecuación obtenemos $v_\alpha^2 - v_\gamma^2 = 0$ y las posibilidades son:

3. $v_\alpha = -v_\beta = v_\gamma$
4. $-v_\alpha = -v_\beta = v_\gamma$.

En cada posibilidad observar que $|v_\alpha| = |v_\beta| = |v_\gamma|$ y una de ellas difiere en signo. Notar que vi implica iv es inmediato. □

5.6.4. Las 2-formas ω_0 y μ_0

Si H_0 es inversible, expresamos la inversa de H_0

$$H_0^{-1} = \begin{bmatrix} (H_0)_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (H_0)_2^{-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (H_0)_s^{-1} \end{bmatrix} \tag{5.6.12}$$

con $(H_0)_j^{-1}$ endomorfismos en $\mathfrak{m}_j$ antisimétricos invertibles tales que:

$$[(H_0)_i^{-1}]_{\mathcal{B}_i} = \begin{bmatrix} 0 & -v_{\alpha_i}^{-1} & ... & 0 & 0 \\ v_{\alpha_i}^{-1} & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & -v_{\alpha_i}^{-1} \\ 0 & 0 & ... & v_{\alpha_i}^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.6.13}$$

Para $\mathfrak{B}_i = \{A_{\beta_{i1}}, iS_{\beta_{i1}}, ..., A_{\beta_{ik_i}}, iS_{\beta_{ik_i}} : \mathcal{K}(\beta_{ij}) = \gamma_i, \forall j = 1, ..., k_i\}$ base ortogonal en $\mathfrak{m}_{\gamma_i}$.

Recordemos que la 2-forma ω_0 y la 2-forma μ_0 en $\mathfrak{m}_\Theta$ se definen como: $\omega_0(x,y) = \langle H_0 x, y\rangle_Q$, $\mu_0(x,y) = \langle H_0^{-1}x, y\rangle$.

Proposición 5.6.11. *Para $\alpha, \beta \in R_M$*

$$\begin{aligned} \omega_0(A_\alpha, A_\beta) = \omega_0(iS_\alpha, iS_\beta) = \mu_0(A_\alpha, A_\beta) = \mu_0(iS_\alpha, iS_\beta) = 0 \\ \omega_0(A_\alpha, iS_\beta), \mu_0(A_\alpha, iS_\beta) \neq 0 \textit{ si y solo si } \beta = \pm\alpha. \end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \omega_0(A_\alpha, A_\beta) &= \langle H_0 A_\alpha, A_\beta\rangle_Q = -\langle H_0 A_\alpha, QA_\beta\rangle = -\langle v_\alpha iS_\alpha, \lambda_\beta iA_\beta\rangle = 0 \\ \omega_0(iS_\alpha, iS_\beta) &= -\langle H_0 iS_\alpha, QiS_\beta\rangle = -\langle -v_\alpha A_\alpha, \lambda_\beta iS_\beta\rangle = 0 \\ \omega_0(A_\alpha, iS_\beta) &= \langle H_0 A_\alpha, iS_\beta\rangle_Q = -\langle v_\alpha iS_\alpha, QiS_\beta\rangle = -v_\alpha\lambda_\beta\langle iS_\alpha, iS_\beta\rangle. \end{aligned}$$

La cual es no nula si y solo si $\beta = \pm\alpha$. Análogamente se analiza para μ_0. □

Teorema 5.6.12. *Para $\alpha, \beta, \gamma \in R_M$, la derivada exterior de ω_0 en los vectores A_α, A_β, A_γ, iS_α, iS_β, iS_γ está dado por:*

$$\begin{aligned} d\omega_0(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) &= d\omega_0(A_\alpha, iS_\beta, iS_\gamma) = 0 \\ d\omega_0(A_\alpha, A_\beta, iS_\gamma) &= d\omega_0(iS_\alpha, iS_\beta, iS_\gamma) = \begin{cases} e_{\alpha,\beta} \textit{ si } \gamma = \alpha+\beta \\ -e_{\alpha,-\beta} \textit{ si } \gamma = \alpha-\beta \end{cases} \end{aligned}$$

con

$$e_{\alpha,\beta} = 2m_{\alpha,\beta}(-\lambda_{\alpha+\beta}v_{\alpha+\beta} + \lambda_\alpha v_\alpha + \lambda_\beta v_\beta).$$

Demostración. Usando ecuación 5.5.1, y la propiedades enunciadas en 5.6.3, computamos:

$$\begin{aligned}
d\omega_0(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) &= \langle [A_\alpha, A_\beta]_{\mathfrak{m}_\Theta}, H_0 A_\gamma\rangle + \langle [A_\beta, A_\gamma]_{\mathfrak{m}_\Theta}, H_0 A_\alpha\rangle + \\
&+ \langle [A_\gamma, A_\alpha]_{\mathfrak{m}_\Theta}, H_0 A_\beta\rangle \\
&= \langle [A_\alpha, A_\beta], v_\gamma iS_\gamma\rangle + \langle [A_\beta, A_\gamma]_{\mathfrak{m}_\Theta}, v_\alpha iS_\alpha\rangle + \\
&+ \langle [A_\gamma, A_\alpha]_{\mathfrak{m}_\Theta}, v_\beta iS_\beta\rangle = 0 \\
d\omega_0(A_\alpha, iS_\beta, iS_\gamma) &= \langle [A_\alpha, iS_\beta]_{\mathfrak{m}_\Theta}, H_0 iS_\gamma\rangle + \langle [d\pi_e iS_\beta, iS_\gamma], H_0 A_\alpha\rangle + \\
&+ \langle [iS_\gamma, A_\alpha]_{\mathfrak{m}_\Theta}, H_0 iS_\beta\rangle \\
&= \langle [A_\alpha, iS_\beta]_{\mathfrak{m}_\Theta}, -v_\gamma A_\gamma\rangle + \langle [iS_\beta, iS_\gamma]_{\mathfrak{m}_\Theta}, v_\alpha iS_\alpha\rangle + \\
&+ \langle [iS_\gamma, A_\alpha]_{\mathfrak{m}_\Theta}, -v_\beta A_\beta\rangle = 0 \\
d\omega_0(A_\alpha, A_\beta, iS_\gamma) &= \langle [A_\alpha, A_\beta]_{\mathfrak{m}_\Theta}, H_0 iS_\gamma\rangle + \langle [A_\beta, iS_\gamma]_{\mathfrak{m}_\Theta}, H_0 A_\alpha\rangle + \\
&+ \langle [iS_\gamma, A_\alpha], H_0 A_\beta\rangle \\
&= \langle [A_\alpha, A_\beta]_{\mathfrak{m}_\Theta}, -v_\gamma A_\gamma\rangle + \langle [A_\beta, iS_\gamma]_{\mathfrak{m}_\Theta}, v_\alpha iS_\alpha\rangle + \\
&+ \langle [iS_\gamma, A_\alpha]_{\mathfrak{m}_\Theta}, v_\beta iS_\beta\rangle.
\end{aligned}$$

Si $\gamma = \alpha + \beta$

$$\begin{aligned}
d\omega_0(A_\alpha, A_\beta, iS_\gamma) &= -v_\gamma \langle m_{\alpha,\beta} A_{\alpha+\beta} - m_{\alpha,-\beta} A_{\alpha-\beta}, A_\gamma\rangle + \\
&+ v_\alpha \langle m_{\beta,\gamma} iS_{\gamma+\beta} + m_{\beta,-\gamma} iS_{\beta-\gamma}, iS_\alpha\rangle - \\
&- v_\beta \langle m_{\alpha,\gamma} iS_{\alpha+\gamma} + m_{\alpha,-\gamma} iS_{\alpha-\gamma}, iS_\beta\rangle \\
&= -2v_{\alpha+\beta} m_{\alpha,\beta}\lambda_{\alpha+\beta} + 2v_\alpha m_{\beta,-(\alpha+\beta)}\lambda_\alpha - 2v_\beta m_{\alpha,-(\alpha+\beta)}\lambda_\beta \\
&= 2m_{\alpha,\beta}(-v_{\alpha+\beta}\lambda_{\alpha+\beta} + \lambda_\alpha v_\alpha + v_\beta\lambda_\beta) = e_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}$$

Si $\gamma = \alpha - \beta$

$$\begin{aligned}
d\omega_0(A_\alpha, A_\beta, iS_\gamma) &= v_\gamma \langle m_{\alpha,\beta} A_{\alpha+\beta} - m_{\alpha,-\beta} A_{\alpha-\beta}, A_\gamma\rangle + \\
&+ v_\alpha \langle m_{\beta,\gamma} iS_{\gamma+\beta} + m_{\beta,-\gamma} iS_{\beta-\gamma}, iS_\alpha\rangle - \\
&- v_\beta \langle m_{\alpha,\gamma} iS_{\alpha+\gamma} + m_{\alpha,-\gamma} iS_{\alpha-\gamma}, iS_\beta\rangle \\
&= -2v_\gamma m_{\alpha,\beta}\lambda_{\alpha-\beta} + 2v_\alpha m_{\beta,\gamma}\lambda_\alpha - 2v_{-\beta} m_{\alpha,-\gamma}\lambda_\beta \\
&= 2m_{\alpha,-\beta} v_{\alpha-\beta}\lambda_{\alpha-\beta} - 2m_{\beta,-(\alpha-\beta)} v_\alpha\lambda_\alpha + v_\beta m_{-(\alpha+\beta),\alpha}\lambda_\beta \\
&= 2m_{\alpha,-\beta}(v_{\alpha-\beta}\lambda_{\alpha-\beta} - v_\alpha\lambda_\alpha + v_\beta\lambda_\beta) \\
&= 2m_{\alpha,-\beta}(v_{\alpha-\beta}\lambda_{\alpha-\beta} - v_\alpha\lambda_\alpha - v_{-\beta}\lambda_\beta) = -e_{\alpha,-\beta}.
\end{aligned}$$

□

Corolario 5.6.13. *ω_0 es cerrada si y solo si $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in R_M$ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$*

$$\lambda_\gamma v_\gamma + \lambda_\alpha v_\alpha + \lambda_\beta v_\beta = 0. \tag{5.6.14}$$

Demostración. Se deduce del Teorema 5.6.12, llamando a $\alpha + \beta = -\gamma$. □

Análogamente para la 2-forma μ_0 se obtienen propiedades y condiciones similares para que esta sea cerrada. En efecto tenemos:

Lema 5.6.14. *Para todo $\alpha, \beta \in R_M$,*

$$d\mu_0(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma) = d\mu_0(A_\alpha, iS_\beta, iS_\gamma) = 0$$
$$d\mu_0(A_\alpha, A_\beta, iS_\gamma) = d\mu_0(iS_\alpha, iS_\beta, iS_\gamma) = \begin{cases} f_{\alpha,\beta} \text{ si } \gamma = \alpha+\beta \\ -f_{\alpha,-\beta} \text{ si } \gamma = \alpha-\beta \end{cases}$$

con

$$f_{\alpha,\beta} = m_{\alpha,\beta}(-\lambda_{\alpha+\beta} v_{\alpha+\beta}^{-1} + \lambda_\alpha v_\alpha^{-1} + \lambda_\beta v_\beta^{-1}).$$

Corolario 5.6.15. *μ_0 es cerrada si y solo si $\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in R_M$ tal que $\alpha+\beta+\gamma = 0$*

$$\lambda_\gamma v_\gamma^{-1} + \lambda_\alpha v_\alpha^{-1} + \lambda_\beta v_\beta^{-1} = 0 \tag{5.6.15}$$

Proposición 5.6.16. *Si H_0 es integrable entonces $d\omega_0 = 0$ si y solo si $d\mu_0 = 0$*

Demostración. Por el Teorema 5.6.10, $\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in R_M$, los valores de v_α, v_β y v_γ son iguales en valor absoluto y uno es diferente en un signo. Los valores de v_α^{-1}, v_β^{-1} y v_γ^{-1} también tienen iguales valores absolutos y sus signos son exactamente los mismos a los de v_α , v_β y v_γ. Luego las ecuaciones 5.6.14 y 5.6.15 son equivalentes . □

Las derivadas exteriores para las 2-formas $\omega_0^{\mathbb{C}}$ y $\mu_0^{\mathbb{C}}$ vienen dadas por las siguiente ecuaciones para z_1, z_2, z_3 vectores cualesquiera en $\mathfrak{m}_\Theta{}^{\mathbb{C}}$.

$$d\omega_0^{\mathbb{C}}(z_1,z_2,z_3) = \langle H_0^{\mathbb{C}}[z_1,z_2], Q^{\mathbb{C}} z_3\rangle - \langle H_0^{\mathbb{C}}[z_1,z_3], Q^{\mathbb{C}} z_2\rangle + \langle H_0^{\mathbb{C}}[z_2,z_3], Q^{\mathbb{C}} z_1\rangle$$
$$d\mu_0^{\mathbb{C}}(z_1,z_2,z_3) = \langle (H_0^{-1})^{\mathbb{C}}[z_1,z_2], Q^{\mathbb{C}} z_3\rangle - \langle (H_0^{-1})^{\mathbb{C}}[z_1,z_3], Q^{\mathbb{C}} z_2\rangle + \langle (H_0^{-1})^{\mathbb{C}}[z_2,z_3], Q^{\mathbb{C}} z_1\rangle.$$

Teorema 5.6.17. *La derivada exterior de las 2-formas $\omega_0^{\mathbb{C}}$ y $\mu_0^{\mathbb{C}}$ es cero salvo para los vectores $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma$ con $\alpha, \beta, \gamma \in R_M$ tal que $\alpha+\beta+\gamma = 0$ en este caso las derivadas exteriores vienen dadas por las siguientes identidades:*

$$d\omega_0^{\mathbb{C}}(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -i m_{\alpha,\beta}\left(\lambda_\alpha v_\alpha + \lambda_\beta v_\beta + \lambda_\gamma v_\gamma\right)$$
$$d\mu_0^{\mathbb{C}}(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -i m_{\alpha,\beta}\left(\lambda_\alpha v_\alpha^{-1} + \lambda_\beta v_\beta^{-1} + \lambda_\gamma v_\gamma^{-1}\right).$$

Demostración. Solo demostramos para el caso de ω_0, con μ_0 es exactamente el mismo procedimiento. Sean $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ raíces en R_M, si $\alpha+\beta+\gamma = 0$, desarrollamos:

$$\begin{aligned} d\omega_0^{\mathbb{C}}(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= \langle H_0^{\mathbb{C}}[X_\alpha, X_\beta], Q^{\mathbb{C}} X_\gamma\rangle - \langle H_0^{\mathbb{C}}[X_\alpha, X_\gamma], Q^{\mathbb{C}} X_\beta\rangle + \\ &+ \langle H_0^{\mathbb{C}}[X_\beta, X_\gamma], Q^{\mathbb{C}} X_\alpha\rangle \\ &= \langle m_{\alpha,\beta} H_0^{\mathbb{C}} X_{\alpha+\beta}, \lambda_\gamma X_\gamma\rangle - \langle m_{\alpha,\gamma} H_0^{\mathbb{C}} X_{\alpha+\gamma}, \lambda_\beta X_\beta\rangle + \\ &+ \langle m_{\beta,\gamma} H_0^{\mathbb{C}} X_{\beta+\gamma}, \lambda_\alpha X_\alpha\rangle \\ &= \langle m_{\alpha,\beta} i v_{\alpha+\beta} X_{\alpha+\beta}, \lambda_\gamma X_\gamma\rangle - \langle m_{\alpha,\gamma} i v_{\alpha+\gamma} X_{\alpha+\gamma}, \lambda_\beta X_\beta\rangle \\ &+ \langle m_{\beta,\gamma} i v_{\beta+\gamma} X_{\beta+\gamma}, \lambda_\alpha X_\alpha\rangle. \end{aligned}$$

Por los Lemas 5.6.2, 5.7.6,

$$\begin{aligned}
d\omega_0^{\mathbb{C}}(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= \langle m_{\alpha,\beta} i v_{-\gamma} X_{-\gamma}, \lambda_\gamma X_\gamma\rangle - \langle m_{\alpha,\gamma} i v_{-\beta} X_{-\beta}, \lambda_\beta X_\beta\rangle + \\
&+ \langle m_{\beta,\gamma} i v_{-\alpha} X_{-\alpha}, \lambda_\alpha X_\alpha\rangle \\
&= -m_{\alpha,\beta}\lambda_\gamma i v_\gamma \langle X_{-\gamma}, X_\gamma\rangle + m_{\alpha,\gamma}\lambda_\beta i v_\beta \langle X_{-\beta}, X_\beta\rangle - \\
&- m_{\beta,\gamma}\lambda_\alpha i v_\alpha \langle X_{-\alpha}, X_\alpha\rangle \\
&= -m_{\alpha,\beta}\lambda_\gamma i v_\gamma - m_{\gamma,\alpha}\lambda_\beta i v_\beta - m_{\beta,\gamma}\lambda_\alpha i v_\alpha \\
&= -i m_{\alpha,\beta}(\lambda_\gamma v_\gamma + \lambda_\beta v_\beta + \lambda_\alpha v_\alpha).
\end{aligned}$$

□

Con este resultado los siguientes corolarios son inmediatos.

Corolario 5.6.18. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La 2-forma ω_0 es cerrada.*
2. *La 2-forma $\omega_0^{\mathbb{C}}$ es cerrada.*
3. *$\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in R_M$ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$:*

$$\lambda_\alpha v_\alpha + \lambda_\beta v_\beta + \lambda_\gamma v_\gamma = 0. \tag{5.6.16}$$

De igual manera, son equivalentes:

1. *La 2-forma μ_0 es cerrada.*
2. *La 2-forma $\mu_0^{\mathbb{C}}$ es cerrada.*
3. *$\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in R_M$ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$:*

$$\lambda_\alpha v_\alpha^{-1} + \lambda_\beta v_\beta^{-1} + \lambda_\gamma v_\gamma^{-1} = 0. \tag{5.6.17}$$

5.6.5. Estructuras paralelas en $\mathbb{F}$

El propósito de esta subsección es caracterizar de forma única a las estructuras paralelas en variedades bandera maximales $\mathbb{F} = G/B = U/T$ con G grupo de Lie complejo semisimple, B subgrupo de Borel , U una forma real compacta de G y T toro maximal en U.

Probaremos que las estructuras paralelas invertibles e invariantes en $\mathbb{F} = U/T$, con G grupo de Lie complejo simple, son múltiplos de una estructura Kähler invariante. Estos resultados obtenidos podrán extenderse al caso semisimple, al considerar las componentes simples.

Caso U/T y generalizaciones

Suponemos en toda esta subsección que G grupo de Lie complejo simple.

Observación 5.6.19. Recordar que en las variedades bandera maximales $\Theta = \varnothing$, por lo tanto $R_M = R$ y la subálgebra parabólica es la subálgebra de Borel B. Luego $\mathbb{F} = U/T$ con U una forma real compacta de G y T un toro maximal en U. Siendo $\Theta = \varnothing$, denotamos por $\mathfrak{m}$ al complemento ortogonal de $\mathfrak{t}$, el álgebra de Lie de T. En este caso, $\mathfrak{m}$ se descompone de una forma sencilla:

$$\mathfrak{m} = \sum_{\alpha \in R} \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{A_\alpha, iS_\alpha\} = \sum_{\alpha \in R^+} \mu_\alpha$$

donde μ_α, $\alpha \in R^+$ son las componentes irreducibles no equivalentes entre si.

Teorema 5.6.20. *Sea $\mathbb{F} = G/B = U/T$ con G grupo de Lie complejo simple, B subgrupo de Borel de G, U una forma real compacta de G y T un toro maximal de U. Sea $H_0 = \{v_\alpha\}_{\alpha \in R^+}$ un endomorfismo en $\mathfrak{m}$ inversible, $\mathrm{Ad}(T)$-invariante y antisimétrico respecto de un producto interno $\mathrm{Ad}(T)$-invariante $Q = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in R^+}$.*

Entonces H_0 es integrable si y solo si $\forall\ \alpha,\ \beta, \gamma \in R$ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ existe y es único $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $H_0 \mid_{\mu_\alpha \oplus \mu_\beta \oplus \mu_\gamma} = cJ \mid_{\mu_\alpha \oplus \mu_\beta \oplus \mu_\gamma}$ con $J \mid_{\mu_\alpha \oplus \mu_\beta \oplus \mu_\gamma} = \{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma\}$ estructura casi compleja integrable en $\mathrm{Span}\,\{A_\alpha, iS_\alpha, A_\beta, iS_\beta, A_\gamma, iS_\gamma\}$, donde $\varepsilon_\alpha = \pm 1$, $\varepsilon_\beta = \pm 1$ y $\varepsilon_\gamma = \pm 1$.

Más aún para todo variedad bandera maximal con las hipótesis anteriores, $H_0 = cJ$, con J estructura compleja invariante en $\mathbb{F} = U/T$.

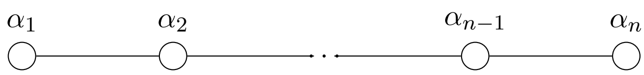
Demostración. Es conocida la clasificación de todas las álgebras de Lie complejas simples, esto será lo fundamental en la prueba.

La descomposición de $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ en este caso, $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{m} = \sum_{\alpha \in R} \mu_\alpha = \mathrm{Span}\{A_\alpha, iS_\alpha\}_{\alpha \in R^+}$.

Dada cualquier raíz no simple β se puede expresar como suma de raíces simples, es decir para un sistema de raíces simples $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$, escribimos $\beta = \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + ... + \alpha_{i_j}$ con $i_1, i_2, ..., i_n \subseteq \{1, 2, ..., n\}$, además las sumas $\alpha_{i_1} + ... + \alpha_{i_k}$ son raíces para todo $i_k \leq i_j$.

Escribimos
$$\beta - \left(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + ... + \alpha_{i_{j-1}}\right) - \alpha_{i_j} = 0$$
La condición de integrabilidad (ítem *vi* del Teorema 5.6.10) nos lleva a afirmar que $|v_\beta| = |v_{\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + ... + \alpha_{i_{j-1}}}| = |v_{\alpha_{i_j}}|$. Por lo tanto conocer el valor absoluto de v_β equivale a conocer el valor absoluto de v_{α_i} para algún $\alpha_i \in \Sigma$.

Haremos la demostración para $SL(n+1)$, el resto de los casos se analiza de forma similar, usando siempre la conexidad de los diagramas de Dynkin.



Cada punto es una raíz simple y $\alpha_i + \alpha_{i+1} \in R$. Como $\alpha_1 + \alpha_2$ es raíz, y H_0 es integrable, se tiene que $|v_{\alpha_1}| = |v_{\alpha_2}|$, de forma similar $\alpha_2 + \alpha_3$ es raíz lo cual implica que $|v_{\alpha_2}| = |v_{\alpha_3}|$. Sucesivamente se tiene que $|v_{\alpha_{n-1}}| = |v_{\alpha_n}|$. Con lo cual $|v_{\alpha_i}| = |v_{\alpha_j}|$ para todo i, j y además $|v_\beta| = |v_{\alpha_i}|$ para todo β raíz.

Por lo tanto dado cualquier triple de raíces $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, si H_0 es integrable $|v_\alpha| = |v_\beta| = |v_\gamma|$ y uno de ellos difiere en signo. Luego $(H_0)_{\alpha,\beta,\gamma} = c(J)_{\alpha,\beta,\gamma}$ con $c = v_{\alpha_i}$ constante, y $J_{\alpha,\beta,\gamma}$ es una estructura casi compleja integrable en $\mathrm{Span}\,\{A_\alpha, iS_\alpha, A_\beta, iS_\beta, A_\gamma, iS_\gamma\}$. Esto sucede para cada triple de raíces $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Por lo tanto c es un factor H_0 para cada triple, y existe una estructura casi compleja J, la cual es integrable (porque H_0 lo es). Así $H_0 = cJ$.

La recíproca es inmediata. □

Recordamos de acuerdo a 3.2.7 y adaptando a lo expuesto anteriormente: si $H_0 = \{v_\alpha\}_{\alpha \in R_M^+}$ un endomorfismo $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante e **inversible** en $\mathfrak{m}_\Theta$ y antisimétrico respecto de un producto interno $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante $Q = \{v_\alpha\}_{\alpha \in R_M^+}$, diremos que la estructura $(H_0 = \{v_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha \in R_M^+}$ es paralela si H_0 es integrable y $d\omega_0 = d\mu_0 = 0$.

Teorema 5.6.21. *[Caracterización de estructuras paralelas invariantes en $\mathbb{F}$]*

Con las mismas hipótesis del teorema anterior. Son equivalentes:

1. $(H_0 = \{v_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha\in R^+}$ *es una estructura paralela*

2. H_0 *es integrable y* $d\omega_0 = 0$

3. $\forall\, \alpha,\ \beta,\ \gamma \in\ R$ *tal que* $\alpha+\beta+\gamma = 0$, *si* $v_\alpha = v_\beta$ *y* $v_\gamma = -v_\alpha$ *entonces* $\lambda_\gamma = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$.

Demostración. Para $1 \Longrightarrow 2$ si H es paralela implica que $d\omega = d\mu = 0$ y $N = 0$. Pero por la Proposición 5.6.16 solo es necesario que $d\omega = 0$. Recíprocamente si H es integrable y ω cerrada, nuevamente por la Proposición 5.6.16 se tiene $d\mu = 0$ y $1 \Rightarrow 2$.

En $2 \Longrightarrow 3$, si H es integrable entonces $|v_\alpha| = |v_\beta| = |v_\gamma|$ siempre que $\alpha+\beta+\gamma = 0$ y uno de ellos es opuesto en signo. Si suponemos $v_\alpha = v_\beta$ y $v_\gamma = -v_\alpha$. Luego reemplazando en la ecuación 5.6.14 se tiene $\lambda_\gamma = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$. El recíproco es inmediato pues satisface la condición de integrabilidad del Teorema 5.6.10 y la ecuación 5.6.14 . Luego por transitividad se tiene $1 \Leftrightarrow 3$. □

El siguiente corolario es consecuencia del Teorema 5.6.20 y del Teorema 5.6.21.

Corolario 5.6.22. *Con las mismas hipótesis del Teorema 5.6.20. Si* $(H_0 = \{v_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha\in R^+}$ *es una estructura paralela entonces existe un único* $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ *tal que* $H = cJ$ *con* $(J = \{\varepsilon_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha\in R^+}$ *estructura Kähler, donde* $\varepsilon_\alpha = \pm 1$.

Este corolario nos lleva a afirmar que las estructuras paralelas invariantes en una variedad bandera maximal $\mathbb{F} = G/B$ con G simple, son múltiplos de estructuras Kähler invariantes.

Otra demostración del corolario anterior es consecuencia del siguiente resultado general:

Teorema 5.6.23. *Sea* G/K *espacio homogéneo,* G *grupo de Lie simple, compacto, conexo y* K *subgrupo de rango maximal. Si* H *tensor* $(1,1)$ *antisimétrico* ***inversible*** *respecto de una métrica* g *y* $\nabla H = 0$ *con* ∇ *la conexión Levi Civita; entonces* H *es múltiplo de una estructura casi compleja* J *tal que* (J, g) *es Kähler.*

La demostración del Teorema 5.6.23 es consecuencia de los siguientes definiciones y teoremas que mencionaremos a continuación.

Definición 5.6.24. El rango de un grupo de Lie conexo y compacto es la dimensión de su toro maximal

Teorema 5.6.25. *[Pet06] Sea* (M, g) *una variedad riemanniana irreducible con* H *un tensor tipo* $(1,1)$ *no nulo y antisimétrico respecto de* g*. Si* H *es paralelo respecto de la conexión Levi Civita entonces* H *induce una estructura Kähler* (J, g) *tal que* $J = cH$.

El siguiente teorema es un resultado de Hano y Matsushima :

Teorema 5.6.26. *[HM57] Si* G/K *es un espacio homogéneo con* G *grupo de Lie compacto, simple y la característica de Euler de* G/K *es no nula, es decir* $\chi(G/K) \neq 0$, *entonces* G/K *es una variedad riemanniana irreducible.*

Decir que la característica de Euler de G/K es no nula es equivalente a decir que K contiene un subgrupo toral maximal [HS41], ó que G y K posean el mismo rango. Uniendo ambos resultados demostramos el Teorema 5.6.23.

5.6.6. Condición Killing Yano en una Variedad Bandera

Muchas de las propiedades analizadas anteriormente en $\mathfrak{m}_\Theta \equiv T_{eK}(U/K_\Theta)$ se reducen a observar el comportamiento en la complexificación de $\mathfrak{m}_\Theta$. Usaremos nuevamente la complexificación de $\mathfrak{m}_\Theta$ para obtener caracterizaciones generales en las ecuación KY.

La función conexión riemanniana en $\mathbb{F}_\Theta$

Dado $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q = -\langle\cdot Q,\cdot\rangle$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ la forma de Killing) un producto interno $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante, asociamos a él una función conexión riemanniana $\Lambda : \mathfrak{m}_\Theta \times \mathfrak{m}_\Theta \to \mathfrak{m}_\Theta$, $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante. Esta función conexión esta en correspondencia con una conexión riemanniana G-invariante.

Recordemos que $\forall\, x, y \in \mathfrak{m}_\Theta$

$$\Lambda(x)y = \frac{1}{2}[x,y]_{\mathfrak{m}_\Theta} + U(x,y)$$

Con U definido tal que,

$$\langle 2U(x,y),z\rangle_Q = \langle [z,x]_{\mathfrak{m}_\Theta}, y\rangle + \langle [z,y]_{\mathfrak{m}_\Theta}, x\rangle_Q.$$

Escribiendo $[x,y] = [x,y]_{\mathfrak{m}_\Theta} + [x,y]_{\mathfrak{k}_\Theta}$ y reemplazando obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle 2U(x,y),z\rangle_Q &= \langle [z,x]_{\mathfrak{m}_\Theta}, y\rangle + \langle [z,y]_{\mathfrak{m}_\Theta}, x\rangle \\
-2\langle QU(x,y),z\rangle &= -\langle [z,x]_{\mathfrak{m}_\Theta}, Qy\rangle - \langle [z,y]_{\mathfrak{m}_\Theta}, Qx\rangle \\
2\langle QU(x,y),z\rangle &= \langle [z,x] - [z,x]_{\mathfrak{k}_\Theta}, Qy\rangle + \langle [z,y] - [z,y]_{\mathfrak{k}_\Theta}, Qx\rangle \\
2\langle QU(x,y),z\rangle &= \langle [z,x], Qy\rangle + \langle [z,y], Qx\rangle \\
2\langle QU(x,y),z\rangle &= \langle z, [x,Qy]\rangle + \langle z, [y,Qx]\rangle \\
2\langle QU(x,y),z\rangle &= \langle [x,Qy],z\rangle - \langle [Qx,y],z\rangle.
\end{aligned}$$

Luego

$$U(x,y) = \frac{1}{2}Q^{-1}\left([x,Qy]_{\mathfrak{m}_\Theta} - [Qx,y]_{\mathfrak{m}_\Theta}\right)$$

Integrando ambas expresiones

$$\Lambda(x)y = \frac{1}{2}\left([x,y]_{\mathfrak{m}_\Theta} + Q^{-1}\left([x,Qy]_{\mathfrak{m}_\Theta} - [Qx,y]_{\mathfrak{m}_\Theta}\right)\right)$$

Tomaremos la función conexión en $\mathfrak{m}_\Theta$ y la complexificaremos, en efecto:

$$\begin{aligned}
\Lambda(x_1+ix_2)y_1+iy_2 = \frac{1}{2}\Big([x_1+ix_2, y_1+iy_2]_{\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}} + (Q^{-1})^{\mathbb{C}}\Big([x_1+ix_2, Q^{\mathbb{C}}(y_1+iy_2)]_{\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}} - \\
-[y_1+iy_2, Q^{\mathbb{C}}(x_1+ix_2)]_{\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}}\Big)\Big)
\end{aligned}$$

Lema 5.6.27. *$\forall\alpha,\beta \in R_M$ tal que $\alpha+\beta \in R_M$ y X_α, X_β, $X_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{m}_\Theta^{\mathbb{C}}$ los elementos en la base de Weyl. Entonces:*

$$\Lambda^{\mathbb{C}}(X_\alpha)X_\beta = \frac{m_{\alpha,\beta}}{2\lambda_{\alpha+\beta}}\left(\lambda_{\alpha+\beta} + \lambda_\beta - \lambda_\alpha\right)X_{\alpha+\beta}. \tag{5.6.18}$$

Lema 5.6.28. *En variedades bandera la complexificación de las funciones trilineales α y β definidas en las ecuaciones 5.5.4 y 5.5.5 respectivamente, satisfacen:*

$$\begin{aligned}
\beta^{\mathbb{C}}(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= i\frac{m_{\alpha,\beta}(v_\beta+v_\gamma)}{2}\left(\lambda_\gamma + \lambda_\beta - \lambda_\alpha\right) \\
\alpha^{\mathbb{C}}(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= -\frac{im_{\alpha,\beta}}{2}\left[(v_\beta - v_\alpha)\lambda_\gamma + (v_\alpha + v_\beta + 2v_\gamma)(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)\right].
\end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\beta^{\mathbb{C}}(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &=< (\Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{m}}(X_\alpha)H^{\mathbb{C}})X_\beta, X_\gamma >_{Q^{\mathbb{C}}} \\
&=< \Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{m}}(X_\alpha)H^{\mathbb{C}}X_\beta, X_\gamma >_{Q^{\mathbb{C}}} - < H^{\mathbb{C}}\Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{m}}(X_\alpha)X_\beta, X_\gamma >_{Q^{\mathbb{C}}} \\
&=< \Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{m}}(X_\alpha)H^{\mathbb{C}}X_\beta, X_\gamma >_{Q^{\mathbb{C}}} + < \Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{m}}(X_\alpha)X_\beta, H^{\mathbb{C}}X_\gamma >_{Q^{\mathbb{C}}} \\
&=< iv_\beta\Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{m}}(X_\alpha)X_\beta, X_\gamma >_{Q^{\mathbb{C}}} + iv_\gamma < \Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{m}}(X_\alpha)X_\beta, X_\gamma >_{Q^{\mathbb{C}}} \\
&= i(v_\beta + v_\gamma)\Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{m}}(X_\alpha)X_\beta, X_\gamma >_{Q^{\mathbb{C}}} \\
&= i(v_\beta + v_\gamma) < \frac{m_{\alpha,\beta}}{2\lambda_\gamma}\left(\lambda_\gamma + \lambda_\beta - \lambda_\alpha\right) X_{\alpha+\beta}, X_\gamma >_{Q^{\mathbb{C}}} \\
&= i\frac{(v_\beta + v_\gamma)m_{\alpha,\beta}}{2}\left(\lambda_\gamma + \lambda_\beta - \lambda_\alpha\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^{\mathbb{C}}(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &=< (\Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{m}}(X_\alpha)H^{\mathbb{C}})X_\beta, X_\gamma >_{Q^{\mathbb{C}}} + < (\Lambda^{\mathbb{C}}_{\mathfrak{m}}(X_\beta)H^{\mathbb{C}})X_\alpha, X_\gamma >_{Q^{\mathbb{C}}} \\
&= \beta^{\mathbb{C}}(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) + \beta^{\mathbb{C}}(X_\beta, X_\alpha, X_\gamma) \\
&= i\frac{(v_\beta + v_\gamma)m_{\alpha,\beta}}{2}\left(\lambda_\gamma + \lambda_\beta - \lambda_\alpha\right) + i\frac{(v_\alpha + v_\gamma)m_{\beta,\alpha}}{2}\left(\lambda_\gamma + \lambda_\alpha - \lambda_\beta\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(m_{\alpha,\beta}(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)(v_\beta + v_\gamma) + m_{\alpha,\beta}\lambda_\gamma(v_\beta + v_\gamma) - m_{\alpha,\beta}(v_\alpha + v_\gamma)\lambda_\gamma + \right. \\
&\left. + m_{\alpha,\beta}(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)(v_\alpha + v_\gamma)\right) \\
&= \frac{im_{\alpha,\beta}}{2}\left[(v_\beta - v_\alpha)\lambda_\gamma + (v_\alpha + v_\beta + 2v_\gamma)(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)\right].
\end{aligned}$$

□

Por el Lema 3.4.2 la condición KY en $\mathfrak{m}$ es equivalente a la condición KY en $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}_\Theta$ con la complexificación de la función conexión. Esto nos permite redefinir las definiciones de estructura paralelas y KY para una variedad bandera $\mathbb{F}_\Theta$.

Definición 5.6.29. Si H_0 es un endomorfismo $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante en $\mathfrak{m}_\Theta$ y antisimétrico respecto de un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante, diremos que la estructura $(H_0 = \{v_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha\in R^+_M}$ es paralela (resp. KY), es decir si $\beta^{\mathbb{C}} = 0$ (resp. $\alpha^{\mathbb{C}} = 0$).

Teorema 5.6.30. *Sea H_0 un endomorfismo en $\mathfrak{m}_\Theta$ $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante y antisimétrico respecto de un producto interno $\mathrm{Ad}(K_\Theta)$-invariante en $\mathfrak{m}_\Theta$.*

H_0 es KY si y solo si se verifican las siguientes ecuaciones en $\forall\ \alpha$, β y $\gamma \in R_M$ tales que $\alpha + \beta + \gamma = 0$:

$$(v_\beta - v_\alpha)\lambda_\gamma + (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)(v_\alpha + v_\beta + 2v_\gamma) = 0 \tag{5.6.19}$$

$$(v_\gamma - v_\alpha)\lambda_\beta + (v_\alpha + v_\gamma + 2v_\beta)(\lambda_\gamma - \lambda_\alpha) = 0. \tag{5.6.20}$$

Demostración. Por el Lema 3.4.2 basta ver la condición KY en $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}_\Theta$ con la complexificación de la función conexión. Luego $\alpha^{\mathbb{C}} = 0$ y usando el Lema 5.6.28 al considerar la suma $\alpha + \beta + \gamma = 0$ con α, β y $\gamma \in R_M$, obtenemos:

$$(v_\beta - v_\alpha)\lambda_\gamma + (v_\alpha + v_\beta + 2v_\gamma)(\lambda_\beta - \lambda_\alpha) = 0.$$

Invirtiendo el orden en $\alpha + \gamma + \beta = 0$, es decir al considerar las siguientes relaciones $\alpha + \gamma + \beta = 0$ y $\beta + \gamma + \alpha = 0$, resultan de reemplazar las siguientes expresiones:

$$(v_\gamma - v_\alpha)\lambda_\beta + (v_\alpha + v_\gamma + 2v_\beta)(\lambda_\gamma - \lambda_\alpha) = 0$$

$$(v_\gamma - v_\beta)\lambda_\alpha + (v_\beta + v_\gamma + 2v_\alpha)(\lambda_\gamma - \lambda_\beta) = 0.$$

Notamos que si tomamos dos ecuaciones indistintamente, la restante se deduce de estas dos. Por esa razón solo nos quedamos con dos de ellas. □

Proposición 5.6.31. *Con las hipótesis del teorema anterior y suponiendo H_0 KY. Entonces, H_0 es integrable si y solo si H_0 es paralelo.*

Esta proposición vale en general en cualquier variedad riemaniana (M, g) con un tensor tipo $(1,1)$ en el fibrado tangente, inversible y antisimétrico respecto de g. Su prueba está en [AD18].

5.7. Ejemplos: Algunas soluciones a la ecuación KY en Variedades Bandera Maximales

Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie compleja semisimple, $\mathfrak{h}$ subálgebra de Cartan tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in R} \mathfrak{g}_\alpha$, donde R es su sistema de raíces y $\mathfrak{g}_\alpha$ los espacios raíces. En toda esta sección consideramos $R_\Theta = \varnothing$, es decir $R_M = R$. Por lo tanto $\mathbb{F} = G/B = U/T$ con G el grupo de Lie complejo, B subálgebra de Borel, U una forma real compacta de G y T un toro maximal de U. Simbolizamos con $\mathfrak{m} \cong T_{eT}(U/T)$ al complemento ortogonal de $\mathfrak{t}$ el álgebra de Lie de T. En este caso los submódulos $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$-invariantes en $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ son los espacios raíces. Por lo tanto $\mathfrak{m}$ se descompone de una forma sencilla:

$$\mathfrak{m} = \sum_{\alpha\in R} \mathrm{Span}\{A_\alpha, iS_\alpha\} = \sum_{\alpha\in R^+} \mu_\alpha$$

donde μ_α, $\alpha \in R^+$ son las componentes irreducibles no equivalentes entre si.

Sea $H_0 : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ un endomorfismo $\mathrm{Ad}(K)$-invariante antisimétrico respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$, con $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la forma de Killing. En cada μ_α, tenemos:

$$[H_0]_{\mu_\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -v_\alpha \\ v_\alpha & 0 \end{bmatrix} \tag{5.7.1}$$

Ordenaremos las ecuaciones KY para las raíces α, β y γ tal que su suma es cero. Escribiremos las tres ecuaciones que resultan de considerar la suma de α, β y $\gamma \in R$, y las reescribiremos de modo que resulte un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned}
(v_\beta - v_\alpha)\lambda_\gamma + (v_\alpha + v_\beta + 2v_\gamma)(\lambda_\beta - \lambda_\alpha) = 0 \\
(v_\gamma - v_\alpha)\lambda_\beta + (v_\alpha + v_\gamma + 2v_\beta)(\lambda_\gamma - \lambda_\alpha) = 0 \\
(v_\gamma - v_\beta)\lambda_\alpha + (v_\beta + v_\gamma + 2v_\alpha)(\lambda_\gamma - \lambda_\beta) = 0
\end{aligned}$$

Separando a v_α, v_β y v_γ, se tiene:

$$\begin{aligned}
v_\alpha(-\lambda_\gamma + \lambda_\beta - \lambda_\alpha) + v_\beta(\lambda_\gamma + \lambda_\beta - \lambda_\alpha) + 2v_\gamma(\lambda_\beta - \lambda_\alpha) = 0 \\
v_\alpha(-\lambda_\beta + \lambda_\gamma - \lambda_\alpha) + 2v_\beta(\lambda_\gamma - \lambda_\alpha) + v_\gamma(\lambda_\beta + \lambda_\gamma - \lambda_\alpha) = 0 \\
2v_\alpha(\lambda_\gamma - \lambda_\beta) + v_\beta(\lambda_\gamma - \lambda_\beta - \lambda_\alpha) + v_\gamma(\lambda_\alpha + \lambda_\gamma - \lambda_\beta) = 0
\end{aligned}$$

Llamando:

$$\begin{aligned}
a^\beta = -\lambda_\gamma + \lambda_\beta - \lambda_\alpha, \quad a^\alpha = -\lambda_\gamma - \lambda_\beta + \lambda_\alpha, \quad a^\beta - a^\alpha = 2(\lambda_\beta - \lambda_\alpha) \\
a^\gamma = -\lambda_\beta + \lambda_\gamma - \lambda_\alpha, \quad a^\gamma - a^\alpha = 2(\lambda_\gamma - \lambda_\alpha), \quad a^\gamma - a^\beta = 2(\lambda_\gamma - \lambda_\beta)
\end{aligned}$$

Nuevamente reescribiendo las ecuaciones anteriores,

$$a^{\beta}v_{\alpha} - a^{\alpha}v_{\beta} + (a^{\beta} - a^{\alpha})v_{\gamma} = 0$$

$$a^{\gamma}v_{\alpha} + (a^{\gamma} - a^{\alpha})v_{\beta} - a^{\alpha}v_{\gamma} = 0$$

$$(a^{\gamma} - a^{\beta})v_{\alpha} + a^{\gamma}v_{\beta} - a^{\beta}v_{\gamma} = 0 \tag{5.7.2}$$

De esta forma obtuvimos un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con incógnitas v_{α}, v_{β}, v_{γ} y coeficientes a^{α}, a^{β}, a^{γ} que dependen de valores de la métrica. Como vimos que una de estas ecuaciones se deduce de dos restantes, tomamos solamente dos de ellas.

$$a^{\beta}v_{\alpha} - a^{\alpha}v_{\beta} + (a^{\beta} - a^{\alpha})v_{\gamma} = 0 \tag{5.7.3}$$
$$a^{\gamma}v_{\alpha} + (a^{\gamma} - a^{\alpha})v_{\beta} - a^{\alpha}v_{\gamma} = 0 \tag{5.7.4}$$

En base a lo descrito anteriormente, enunciamos el siguiente lema y proposición.

Lema 5.7.1. *Sean $\alpha, \beta, \gamma \in R$ tal que $\alpha+\beta+\gamma = 0$ y sea H_0 un endomorfismo antisimétrico $\mathrm{Ad}(K)$-invariante en $\mathfrak{m}$ que satisface la ecuación KY. A lo sumo uno de los parámetros $\{a^{\alpha}, a^{\beta}, a^{\gamma}\}$ es cero.*

Demostración. Si $a^{\alpha} = a^{\beta} = 0$, entonces $\lambda_{\alpha} = \lambda_{\gamma} + \lambda_{\beta}$ y $\lambda_{\beta} = \lambda_{\gamma} + \lambda_{\alpha}$. Reemplazando λ_{α} en la segunda ecuación, obtenemos $\lambda_{\beta} = \lambda_{\gamma} + \lambda_{\gamma} + \lambda_{\beta}$. Luego $2\lambda_{\gamma} = 0$, lo cual es absurdo. De igual manera si elegimos $a^{\alpha} = a^{\gamma} = 0$ o $a^{\beta} = a^{\gamma} = 0$. □

Proposición 5.7.2. *Sea H_0 un endomorfismo inversible antisimétrico $\mathrm{Ad}(K)$-invariante en $\mathfrak{m}$ que satisface la ecuación KY y sean $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ raíces en R tales que su suma es nula. Entonces:*

1. *H_0 es paralelo en $\mathrm{Span}\{A_{\alpha}, iS_{\alpha}, A_{\beta}, iS_{\beta}, A_{\gamma}, iS_{\gamma}\}$ si y solo si existe $\delta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ tal que $a^{\delta} = 0$.*

2. *$\lambda_{\alpha} = \lambda_{\beta} = \lambda_{\gamma}$, si y solo si $v_{\alpha} = v_{\beta} = v_{\gamma}$.*

Demostración. Para el primer ítem, suponemos H_0 paralelo en el subespacio generado por los vectores $\{A_{\alpha}, iS_{\alpha}, A_{\beta}, iS_{\beta}, A_{\gamma}, iS_{\gamma}\}$. Por el Teorema 5.6.21, algunos de los coeficientes a^{α}, a^{β}, a^{γ} es nulo. Recíprocamente si uno de los coeficientes es cero, por el lema anterior los dos restantes son no nulos. Por lo tanto si uno es cero, los otros dos son no nulos. Analizamos las distintas alternativas:

- $a^{\alpha} = 0$

  Es claro que $a^{\beta}, a^{\gamma} \neq 0$. Entonces en 5.7.3 y 5.7.4:

  $$a^{\beta}v_{\alpha} + a^{\beta}v_{\gamma} = 0, \; a^{\gamma}v_{\alpha} + a^{\gamma}v_{\beta} = 0$$

  Luego en la primera ecuación $v_{\gamma} = -v_{\alpha}$; y segunda ecuación $v_{\beta} = -v_{\alpha}$. Es decir $v_{\beta} = v_{\gamma} = -v_{\alpha}$.

- $a^{\beta} = 0$

  Como no pueden ser dos coeficientes nulos, $a^{\alpha}, a^{\gamma} \neq 0$. Luego en 5.7.3 y 5.7.4:

  $$-a^{\alpha}v_{\beta} - a^{\alpha}v_{\gamma} = 0, \; a^{\gamma}v_{\alpha} + (a^{\gamma} - a^{\alpha})v_{\beta} - a^{\alpha}v_{\gamma} = 0$$

  Por lo tanto $v_{\beta} = -v_{\gamma}$ en la primera ecuación. Sustituyendo en la segunda obtenemos $v_{\alpha} = v_{\gamma}$. Y así $v_{\alpha} = v_{\gamma} = -v_{\beta}$

- $a^\gamma = 0$

  Al reemplazar en 5.7.3 y 5.7.4, se obtiene:

  $$a^\beta v_\alpha - a^\alpha v_\beta + (a^\beta - a^\alpha)v_\gamma = 0, \; -a^\alpha v_\beta - a^\alpha v_\gamma = 0$$

  Usando que a^α y a^β son no nulos, en la segunda ecuación $v_\beta = -v_\gamma$. Reemplazando en la primera ecuación se tiene $v_\alpha = -v_\gamma$. Entonces $v_\beta = v_\alpha = -v_\gamma$.

Notar que en cada caso evaluado se satisface el ítem 3. del Teorema 5.6.21, luego H_0 es paralelo en $\mathrm{Span}\{A_\alpha, iS_\alpha, A_\beta, iS_\beta, A_\gamma, iS_\gamma\}$ en todas las opciones evaluadas.

Por último para el segundo ítem de la proposición suponemos $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma$. Entonces $a^\alpha = -\lambda_\alpha$, $a^\beta = -\lambda_\alpha$ y $a^\gamma = -\lambda_\alpha$. Reemplazando en las ecuaciones 5.7.3 y 5.7.4 obtenemos $-\lambda_\alpha v_\alpha + \lambda_\alpha v_\beta = 0$ y $-\lambda_\alpha v_\alpha + \lambda_\alpha v_\gamma = 0$. Así $v_\alpha = v_\beta = v_\gamma$.

Recíprocamente si $v_\alpha = v_\beta = v_\gamma$ reemplazando en las ecuaciones 5.7.3 y 5.7.4 se obtiene $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma$

□

Observación 5.7.3. Notar que el ítem 1 de la Proposición 5.7.2 las estructuras paralela en $\mu_\alpha \oplus \mu_\beta \oplus \mu_\gamma$ son múltiplos de estructuras Kähler. Por ejemplo si la estructura paralela es $(H_0 = \{v_\alpha, v_\alpha, -v_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\alpha + \lambda_\beta\})$ es claramente múltiplo de la estructura Kähler $(J_0 = \{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha, -\varepsilon_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\alpha + \lambda_\beta\})$ con $\varepsilon_\alpha = \pm 1$. El segundo ítem del mismo teorema, la estructura KY en $\mu_\alpha \oplus \mu_\beta \oplus \mu_\gamma$ viene dada por $(H_0 = \{v_\alpha, v_\alpha, v_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha, \lambda_\alpha, \lambda_\alpha\})$, la cual es un múltiplo de una estructura nearly Kähler $(J_0 = \{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha, \lambda_\alpha, \lambda_\alpha\})$ con $\varepsilon_\alpha = \pm 1$.

Teorema 5.7.4. *Sea H_0 un endomorfismo antisimétrico $\mathrm{Ad}(K)$-invariante en $\mathfrak{m}$. Si H_0 es un tensor Killing Yano inversible entonces se tiene una de las siguientes posibilidades $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ tales que su suma es nula:*

- *$(H_0 = \{v_\alpha, v_\beta, v_\gamma\}, Q = \{\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma\})$ en $\mu_\alpha \oplus \mu_\beta \oplus mu_\gamma$ es paralelo.*
- *$(H_0 = \{v_\alpha, v_\beta, v_\gamma\}, Q = \{\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma\})$ es una estructura KY estricta en $\mu_\alpha \oplus \mu_\beta \oplus \mu_\gamma$ si y solo si:*

  $$\begin{array}{rl} a^\alpha, \; a^\beta, \; a^\gamma \neq 0, & a^\alpha a^\gamma + a^\beta a^\gamma - a^\alpha a^\beta \neq 0, \\ a^\alpha a^\gamma - a^\beta a^\gamma - a^\alpha a^\beta \neq 0 \;\;, & a^\alpha a^\beta - a^\beta a^\gamma + a^\gamma a^\alpha \neq 0. \end{array} \tag{5.7.5}$$

  Más aún si se dan estas condiciones, se tiene que:

  $$v_\alpha = \frac{a^\beta(a^\alpha - a^\gamma) + a^\alpha a^\gamma}{a^\beta(a^\gamma - a^\alpha) + a^\alpha a^\gamma} v_\gamma \tag{5.7.6}$$

  $$v_\beta = \frac{a^\beta(a^\alpha + a^\gamma) - a^\alpha a^\gamma}{a^\beta(a^\gamma - a^\alpha) + a^\alpha a^\gamma} v_\gamma. \tag{5.7.7}$$

Demostración. Evaluamos coeficientes $a^\alpha, a^\beta, a^\gamma$. Si uno de ellos es cero, por la Proposición 5.7.2, H_0 resulta paralelo. Luego si H_0 es KY estricto entonces $a^\alpha, a^\beta, a^\gamma \neq 0$. Dividiendo la ecuación 5.7.3 por a^β, obtenemos

$$v_\alpha = \frac{a^\alpha}{a^\beta} v_\beta + \frac{a^\alpha - a^\beta}{a^\beta} v_\gamma$$

Reemplazando en 5.7.4, se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{a^\gamma a^\alpha + a^\beta a^\gamma - a^\alpha a^\beta}{a^\beta} v_\beta + \frac{a^\gamma a^\alpha - a^\beta a^\gamma - a^\alpha a^\beta}{a^\beta} v_\gamma = 0$$

Notar que como H_0 es inversible, los coeficientes que acompañan a esta última ecuación son nulos o bién ambos distintos de cero. Si ambos son nulos al igualar ambas expresiones se llega a que $a^\beta a^\gamma = 0$. Pero como a^β, a^γ son no nulos. Esto es una contradicción. Si H_0 es KY estricto entonces $a^\gamma a^\alpha + a^\beta a^\gamma - a^\alpha a^\beta \neq 0$ y $a^\gamma a^\alpha - a^\beta a^\gamma - a^\alpha a^\beta \neq 0$. En consecuencia,

$$v_\beta = \frac{a^\beta(a^\alpha + a^\gamma) - a^\alpha a^\gamma}{a^\beta(a^\gamma - a^\alpha) + a^\alpha a^\gamma} v_\gamma.$$

Sustituyendo v_β en la primera expresión obtenida de v_α, resulta la ecuación 5.7.6 , con $a^\beta(a^\alpha - a^\gamma) + a^\alpha a^\gamma \neq 0$, pues H_0 es inversible. Recíprocamente si se cumplen las condiciones 5.7.5, H_0 es KY estricto. □

Lema 5.7.5. *Sea H_0 endomorfismo antisimétrico $\mathrm{Ad}(K)$-invariante en $\mathfrak{m}$. H_0 es KY es no inversible si y solo si $v_\alpha = 0$ para algún $\alpha \in R$.*

Teorema 5.7.6. *Sea H_0 endomorfismo antisimétrico $\mathrm{Ad}(K)$-invariante y KY en $\mathfrak{m} = \mu_\alpha \oplus \mu_\beta \oplus \mu_\gamma$, donde $\alpha, \beta, \gamma \in R$ tales que $\alpha + \beta + \gamma = 0$.*

- *$H_0 \mid_{\mu_\alpha \oplus \mu_\beta \oplus \mu_\gamma}$ es no invertible si y solo si $v_\delta = 0$ para algún $\delta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$.*
- *Si H_0 es no invertible y $a^\delta = 0$ para algún $\delta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ entonces $H_0 = 0$.*
- *Si H_0 es no inversibles y no nulo en $\mu_\alpha \oplus \mu_\beta \oplus m_\gamma$, entonces si $v_{\delta_1} = 0$ con $\delta_1 \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ entonces*
$$a^{\delta_2} a^{\delta_3} - a^{\delta_1} a^{\delta_2} - a^{\delta_1} a^{\delta_3} = 0$$
con $\delta_2, \delta_3 \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ tal que $\delta_2, \delta_3 \neq \delta_1$ y $v_{\delta_2} = \frac{a^{\delta_2}}{a^{\delta_3}} v_{\delta_3}$.

Demostración. El primer ítem, por el Lema 5.7.5. H_0 es no inversible si y solo si para alguna de la raíces $\delta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $v_\delta = 0$.

En el segundo ítem, supongamos $v_\alpha = 0$ y $a^\beta = 0$, entonces las ecuaciones 5.7.3, 5.7.4 y 5.7.2 se reducen las siguientes expresiones:

$$-a^\alpha v_\beta - a^\alpha v_\gamma = 0, \quad (a^\gamma - a^\alpha) v_\beta - a^\alpha v_\gamma = 0, \quad a^\gamma v_\beta = 0 \ .$$

Por el Lema 5.7.1, $a^\alpha, a^\gamma \neq 0$. Entonces, $v_\beta = 0$ en la tercera ecuación y reemplazando en primera ecuación $v_\gamma = -v_\beta = 0$. Luego $H_0 = 0$. Similarmente si suponemos $a^\alpha = 0$ ó $a^\gamma = 0$ obtenemos $H_0 = 0$. De la misma forma si se supone $v_\beta = 0$ analizando $a^\delta = 0$ con $\delta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ en las ecuaciones 5.7.3, 5.7.4 y 5.7.2, se deduce que $H_0 = 0$. Ídem con $v_\gamma = 0$.

Para el último ítem, suponemos que $v_\alpha = 0$. Como H es KY se satisfacen las ecuaciones 5.7.3, 5.7.4, 5.7.2, reemplazando y reescribiéndolas:

$$-a^\alpha v_\beta + (a^\beta - a^\alpha) v_\gamma = 0 \tag{5.7.8}$$
$$(a^\gamma - a^\alpha) v_\beta - a^\alpha v_\gamma = 0 \tag{5.7.9}$$
$$a^\gamma v_\beta - a^\beta v_\gamma = 0. \tag{5.7.10}$$

Como buscamos una solución no trivial, $a^\alpha, a^\beta, a^\gamma \neq 0$ por el segundo ítem. Por ecuación 5.7.10 $v_\beta = \frac{a^\beta}{a^\gamma} v_\gamma$. Reemplazando en las ecuaciones restantes obtenemos la misma expresión en ambas :

$$(a^{\gamma}a^{\beta} - a^{\alpha}a^{\beta} - a^{\alpha}a^{\gamma})v_{\gamma} = 0.$$

Siendo que $H_0 \neq 0$, $v_\gamma \neq 0$, entonces $a^{\gamma}a^{\beta} - a^{\alpha}a^{\beta} - a^{\alpha}a^{\gamma} = 0$.

Análogamente para el caso $v_\beta = 0$ se tiene $a^{\gamma}a^{\beta} + a^{\alpha}a^{\beta} - a^{\alpha}a^{\gamma} = 0$ y $v_\alpha = \frac{a^\alpha}{a^\delta}v_\gamma$. De la misma forma si $v_\gamma = 0$ resulta $a^{\gamma}a^{\beta} - a^{\alpha}a^{\beta} + a^{\alpha}a^{\gamma} = 0$ y $v_\alpha = \frac{a^\alpha}{a^\beta}v_\beta$.

□

5.7.1. El ejemplo de $SU(3)/S(U(1)\times U(1)\times U(1))$

$$SL(3,\mathbb{C})/B \equiv SU(3)/S(U(1)\times U(1)\times U(1))$$

Se denota con $\mathfrak{sl}(3)$ al álgebra de Lie de las matrices complejas de orden 3×3 de traza cero. Describiremos su descomposición de Cartan identificando su principales elementos.

En este caso $\mathfrak{sl}(3) = \mathfrak{h} \oplus \sum_{i\neq j} \mathbb{C}E_{ij}$, donde E_{ij} denota a la matriz cuadrada con entrada igual a 1 en el elemento de la fija i y columna j y cero en el resto de los elementos. Los elementos de $\mathfrak{h}$ están generados por los $h_i = E_{ii} - E_{i+1\,i+1}$, $i = 1,2$.

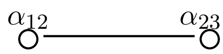
Llamamos e_i a las funcionales lineales tal que $e_i : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$ donde $e_i(h)$ corresponde al i-ésimo elemento de la diagonal en $h \in \mathfrak{h}$.

Tenemos que $[h, E_{ij}] = (e(i) - e(j))E_{ij}$, y llamamos a α_{ij} a la funcional lineal $\alpha_{ij} = e_i - e_j$.

Las funcionales lineales α_{ij} denotarán al conjunto de raíces, es decir

$$R = \{\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{21}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \alpha_{32}\}\,.$$

Fijamos como raíces simples a $\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}$, y su diagrama de Dynkin asociado es:



Por lo tanto las raíces positivas son $R^+ = \{\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}\}$. Observar que $\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31} = 0$, y esta es la única suma de raíces igual a cero, para esta variedad bandera. En este caso $\mathfrak{m} = \mu_{\alpha_{12}} \oplus \mu_{\alpha_{23}} \oplus \mu_{\alpha_{13}}$ y $\dim \mathfrak{m} = 6$.

Caso Inversible

Este caso es completamente adaptable al Teorema 5.7.4 pues solo existen estas tres raíces cuya suma es cero. Para estructuras KY inversibles solo tenemos dos posibilidades en este caso:

- **Estructura paralela**

  Basta suponer que algunos de los coeficientes $a^{\alpha_{23}}$, $a^{\alpha_{12}}$, $a^{\alpha_{13}}$ es nulo y obtenemos las soluciones:

  1. $a^{\alpha_{23}} = 0 \Rightarrow \lambda_{\alpha_{23}} = \lambda_{\alpha_{12}} + \lambda_{\alpha_{13}} \Rightarrow v_{\alpha_{23}} = -v_{\alpha_{31}} = -v_{\alpha_{12}}$
  2. $a^{\alpha_{12}} = 0 \Rightarrow \lambda_{\alpha_{12}} = \lambda_{\alpha_{23}} + \lambda_{\alpha_{31}} \Rightarrow v_{\alpha_{31}} = v_{\alpha_{23}} = -v_{\alpha_{12}}$
  3. $a^{\alpha_{13}} = 0 \Rightarrow \lambda_{\alpha_{31}} = \lambda_{\alpha_{12}} + \lambda_{\alpha_{23}} \Rightarrow v_{\alpha_{12}} = v_{\alpha_{23}} = -v_{\alpha_{31}}$.

- **KY estricto (no Kähler)**

  Las condiciones para obtener este tipo de estructura son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
a^{\alpha_{23}} \neq 0,\ a^{\alpha_{12}} \neq 0,\ a^{\alpha_{31}} &\neq 0 \\
a^{\alpha_{23}}(a^{\alpha_{31}} - a^{\alpha_{12}}) - a^{\alpha_{12}}a^{\alpha_{31}} &\neq 0 \\
a^{\alpha_{23}}(a^{\alpha_{31}} - a^{\alpha_{12}}) + a^{\alpha_{12}}a^{\alpha_{31}} &\neq 0 \\
a^{\alpha_{31}}(a^{\alpha_{23}} - a^{\alpha_{12}}) + a^{\alpha_{12}}a^{\alpha_{23}} &\neq 0.
\end{aligned}
$$

  Para $\lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{31}$, las condiciones 5.7.5 se satisfacen, y por 5.7.2 se tiene $v_{\alpha_{12}} = v_{\alpha_{23}} = v_{\alpha_{31}}$. Este ejemplo es un múltiplo de una estructura nearly Kähler invariante. Esta es la estructura conocida y muy estudiada por ser un ejemplo fuerte de estructura nearly Kähler no Kähler. Nos interesa conocer si existe aparte de esta otra solución KY estricta. En efecto supongamos $\lambda_{\alpha_{31}} = 1$, entonces

$$
\left.
\begin{aligned}
a^{\alpha_{23}} &= \lambda_{\alpha_{23}} - \lambda_{\alpha_{12}} - 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_{\alpha_{23}} \neq 1 + \lambda_{\alpha_{12}} \\
a^{\alpha_{12}} &= -1 - \lambda_{\alpha_{23}} + \lambda_{\alpha_{12}} \neq 0 \Rightarrow \lambda_{\alpha_{23}} \neq \lambda_{\alpha_{12}} - 1 \\
a^{\alpha_{31}} &= 1 - \lambda_{\alpha_{23}} - \lambda_{\alpha_{12}} \neq 0 \Rightarrow \lambda_{\alpha_{23}} \neq 1 - \lambda_{\alpha_{12}}
\end{aligned}
\right. \implies \lambda_{\alpha_{23}} \neq \{1 + \lambda_{\alpha_{12}}, \lambda_{\alpha_{12}} - 1\}
$$

  Evaluando $a^{\alpha_{23}}(a^{\alpha_{31}} - a^{\alpha_{12}}) - a^{\alpha_{12}}a^{\alpha_{31}} \neq 0$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&2(\lambda_{\alpha_{23}} - \lambda_{\alpha_{12}} - 1)(1 - \lambda_{\alpha_{12}}) + (1 - \lambda_{\alpha_{23}} - \lambda_{\alpha_{12}})(1 + \lambda_{\alpha_{23}} - \lambda_{\alpha_{12}}) \neq 0 \\
&2\lambda_{\alpha_{23}}(1 - \lambda_{\alpha_{12}}) - 2(1 + \lambda_{\alpha_{12}})(1 - \lambda_{\alpha_{12}}) + (1 - \lambda_{\alpha_{23}})(1 + \lambda_{\alpha_{23}}) - \lambda_{\alpha_{12}}(1 - \lambda_{\alpha_{23}}) - \\
&- \lambda_{\alpha_{12}} - \lambda_{\alpha_{12}}\lambda_{\alpha_{23}} + \lambda_{\alpha_{12}}^2 \neq 0 \\
&2\lambda_{\alpha_{23}}(1 - \lambda_{\alpha_{12}}) - 2(1 - \lambda_{\alpha_{12}}^2) + 1 - \lambda_{\alpha_{23}}^2 - \lambda_{\alpha_{12}} + \lambda_{\alpha_{12}}\lambda_{\alpha_{23}} - \lambda_{\alpha_{12}} - \lambda_{\alpha_{12}}\lambda_{\alpha_{23}} + \\
&+ \lambda_{\alpha_{12}}^2 \neq 0 \\
&2\lambda_{\alpha_{23}}(1 - \lambda_{\alpha_{12}}) - 2 + 2\lambda_{\alpha_{12}}^2 + 1 - \lambda_{\alpha_{23}}^2 - 2\lambda_{\alpha_{12}} + \lambda_{\alpha_{12}}^2 \neq 0 \\
&- \lambda_{\alpha_{23}}^2 + 2\lambda_{\alpha_{23}}(1 - \lambda_{\alpha_{12}}) + 3\lambda_{\alpha_{12}}^2 - 2\lambda_{\alpha_{12}} - 1 \neq 0.
\end{aligned}
$$

  Esto implica que $\lambda_{\alpha_{23}} \neq 1 - \lambda_{\alpha_{12}} \pm 2\sqrt{\lambda_{\alpha_{12}}(\lambda_{\alpha_{12}} - 1)}$.
  Para $a^{\alpha_{23}}(a^{\alpha_{31}} - a^{\alpha_{12}}) + a^{\alpha_{12}}a^{\alpha_{31}} \neq 0$, computamos:

$$
\begin{aligned}
&2(\lambda_{\alpha_{23}} - \lambda_{\alpha_{12}} - 1)(1 - \lambda_{\alpha_{12}}) - (1 - \lambda_{\alpha_{23}} - \lambda_{\alpha_{12}})(1 + \lambda_{\alpha_{23}} - \lambda_{\alpha_{12}}) \neq 0 \\
&2\lambda_{\alpha_{23}}(1 - \lambda_{\alpha_{12}}) - 2(1 + \lambda_{\alpha_{12}})(1 - \lambda_{\alpha_{12}}) - (1 - \lambda_{\alpha_{23}})(1 + \lambda_{\alpha_{23}}) + \\
&+ \lambda_{\alpha_{12}}(1 - \lambda_{\alpha_{23}}) + \lambda_{\alpha_{12}} + \lambda_{\alpha_{12}}\lambda_{\alpha_{23}} - \lambda_{\alpha_{12}}^2 \neq 0 \\
&2\lambda_{\alpha_{23}}(1 - \lambda_{\alpha_{12}}) - 2 + 2\lambda_{\alpha_{12}}^2 - 1 + \lambda_{\alpha_{23}}^2 + \lambda_{\alpha_{12}} - \lambda_{\alpha_{12}}\lambda_{\alpha_{23}} + \lambda_{\alpha_{12}} + \lambda_{\alpha_{12}}\lambda_{\alpha_{23}} - \lambda_{\alpha_{12}}^2 \neq 0 \\
&\lambda_{\alpha_{23}}^2 + 2\lambda_{\alpha_{23}}(1 - \lambda_{\alpha_{12}}) + \lambda_{\alpha_{12}}^2 + 2\lambda_{\alpha_{12}} - 3 \neq 0.
\end{aligned}
$$

  Por lo tanto $\lambda_{\alpha_{23}} \neq \lambda_{\alpha_{12}} - 1 \pm 2\sqrt{1 - \lambda_{\alpha_{12}}}$.

Por último con la condición $a^{\alpha_{31}}(a^{\alpha_{23}} - a^{\alpha_{12}}) + a^{\alpha_{12}}a^{\alpha_{23}} \neq 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&2(1-\lambda_{\alpha_{23}}-\lambda_{\alpha_{12}})(\lambda_{\alpha_{23}}-\lambda_{\alpha_{12}})-(\lambda_{\alpha_{23}}-\lambda_{\alpha_{12}}-1)(\lambda_{\alpha_{23}}-\lambda_{\alpha_{12}}+1)\neq 0\\
&2\lambda_{\alpha_{23}}-2\lambda_{\alpha_{12}}-2(\lambda_{\alpha_{23}}+\lambda_{\alpha_{12}})(\lambda_{\alpha_{23}}-\lambda_{\alpha_{12}})-(\lambda_{\alpha_{23}}-\lambda_{\alpha_{12}})^2-\lambda_{\alpha_{23}}+\lambda_{\alpha_{12}}+\\
&+\lambda_{\alpha_{23}}-\lambda_{\alpha_{12}}+1\neq 0\\
&2\lambda_{\alpha_{23}}-2\lambda_{\alpha_{12}}-2\lambda_{\alpha_{23}}^2+2\lambda_{\alpha_{12}}^2-\lambda_{\alpha_{23}}^2+2\lambda_{\alpha_{12}}\lambda_{\alpha_{23}}-\lambda_{\alpha_{12}}^2+1\neq 0\\
&-3\lambda_{\alpha_{23}}^2+2\lambda_{\alpha_{23}}(1+\lambda_{\alpha_{12}})+\lambda_{\alpha_{12}}^2-2\lambda_{\alpha_{12}}+1\\
&-3\lambda_{\alpha_{23}}^2+2\lambda_{\alpha_{23}}(1+\lambda_{\alpha_{12}})+(\lambda_{\alpha_{12}}-1)^2\neq 0.
\end{aligned}$$

Luego $\lambda_{\alpha_{23}} \neq \dfrac{1+\lambda_{\alpha_{12}} \pm 2\sqrt{\lambda_{\alpha_{12}}^2-\lambda_{\alpha_{12}}+1}}{3} = \dfrac{1+\lambda_{\alpha_{12}} \pm 2\sqrt{\lambda_{\alpha_{12}}(\lambda_{\alpha_{12}}-1)+1}}{3}$.
En resumen obtenemos que $\lambda_{\alpha_{23}}$ es distinto del siguiente conjunto:

$$\left\{1+\lambda_{\alpha_{12}}, \lambda_{\alpha_{12}}-1, 1-\lambda_{\alpha_{12}} \pm 2\sqrt{\lambda_{\alpha_{12}}(\lambda_{\alpha_{12}}-1)},\ \lambda_{\alpha_{12}}-1\pm 2\sqrt{1-\lambda_{\alpha_{12}}}, \frac{1+\lambda_{\alpha_{12}} \pm 2\sqrt{\lambda_{\alpha_{12}}^2-\lambda_{\alpha_{12}}+1}}{3}\right\}$$

con $0 < \lambda_{\alpha_{12}}$.

Para un ejemplo más concreto, supongamos que $\lambda_{12} = \lambda_{13} = 1$. Por lo anterior, se tiene que: $\lambda_{23} \neq \{2, \frac{4}{3}\}$. Luego $\lambda_{23} \in (0, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, 2) \cup (2, +\infty)$. Notar que si $\lambda_{23} = 1$, tenemos la métrica nearly Kähler y $v_{12} = v_{23} = v_{31}$.

Por lo tanto asignando valores a $\lambda_{\alpha_{23}}$ en el conjunto $\lambda_{23} \in (0,1) \cap (1, \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}, 2) \cup (2, +\infty)$, tendremos infinitas soluciones KY estrictas no nearly Kähler. Para este caso los valores de los coeficientes son $a^{\alpha_{23}} = \lambda_{23} - 2$, $a^{\alpha_{12}} = -\lambda_{23}$ y $a^{\alpha_{13}} = -\lambda_{23}$. Entonces $v_{\alpha_{12}} = v_{\alpha_{31}}$ y $v_{\alpha_{23}} = \frac{4-3\lambda_{23}}{\lambda_{23}}$. En particular si $\lambda_{23} = 3$, tenemos $v_{\alpha_{12}} = v_{\alpha_{31}}$ y $v_{\alpha_{23}} = -\frac{5}{3}v_{\alpha_{31}}$. Resumimos el ejemplo obtenido, usando la notación de la sección 5.6.2 en la base $\mathfrak{B} = \{A_{\alpha_{12}}, iS_{\alpha_{12}}, A_{\alpha_{23}}, iS_{\alpha_{23}}, A_{\alpha_{13}}, iS_{\alpha_{13}}\}$:

$$Q = \{1, 3, 1\}, \quad H_0 = \{v_{12}, -\frac{5}{3}v_{12}, -v_{12}\}.$$

Métricas de Einstein

Una pregunta natural para este caso sería ¿Hay ejemplos KY estrictos con métricas Einstein?

Tomamos la base ortonormal: $e_{ij} = \frac{A_{\alpha_{ij}}}{\sqrt{2\lambda_{ij}}}$, $f_{ij} = \frac{iS_{\alpha_{ij}}}{\sqrt{2\lambda_{ij}}}$ con $i < j$, $i = 1, 2$ y $j = 2, 3$. La clasificación de métricas Einstein en este caso esta resuelto en [Sak99]. Describimos la métricas Einstein:

$$\lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{13}, \quad \lambda_{13} = \lambda_{12} + \lambda_{23}, \quad \lambda_{23} = \lambda_{12} + \lambda_{13}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{23} + \lambda_{13} \ .$$

Por la Proposición 5.7.2 estas opciones corresponden tensores H_0 KY y paralelos. Esto nos lleva a enunciar la siguiente proposición:

Proposición 5.7.7. *Para métricas $Q = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in R^+}$ Ricci Einstein no existen tensores tipo $(1,1)$ invariantes KY estrictos no nearly Kähler en $SU(3)/S(U(1) \times U(1) \times U(1))$.*

Caso no inversible

Buscamos un endomorfismo no inversible, antisimétrico y no nulo que cumpla las condiciones KY. Por el Teorema 5.7.6, si $v_\alpha = 0$ entonces obtenemos la condición $a^\gamma a^\beta - a^\alpha a^\beta - a^\alpha a^\gamma = 0$.

Reemplazando en las expresiones $a^\alpha, a^\beta, a^\gamma$, se tiene:

$$2(\lambda_\beta - \lambda_\alpha - \lambda_\gamma)(\lambda_\gamma - \lambda_\alpha) + (\lambda_\gamma - \lambda_\alpha - \lambda_\beta)(\lambda_\gamma + \lambda_\beta - \lambda_\alpha) = 0$$

Computando se reduce a la expresión :

$$3\lambda_\alpha^3 - 2\lambda_\alpha(\lambda_\beta + \lambda_\gamma) - (\lambda_\beta - \lambda_\alpha)^2 = 0$$

Para los valores $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma$ que cumplan con la ecuación anterior, existirán soluciones no triviales para v_β y v_γ.

Buscando una solución más clara expresamos la ecuación anterior como una ecuación cuadrática en la variable λ_α. Denotando $A = 3$, $B = -2(\lambda_\beta + \lambda_\gamma)$ y $C = -(\lambda_\beta - \lambda_\alpha)^2$. Observar que el discriminante de la ecuación cuadrática es:

$$B^2 - 4AC = \lambda_\beta^2 + \lambda_\gamma^2 - \lambda_\beta\lambda_\gamma \tag{5.7.11}$$

Si el discriminante es negativo, no hay soluciones reales para la ecuación. Como nos interesan soluciones reales positivas, descartamos este caso. Si el discriminante es cero, hay una única solución real para λ_α, pero en este caso, para la ecuación anterior del discriminante no existen valores reales de λ_β y λ_β que hagan a esta ecuación igual a cero. No consideramos este caso.

Por último si el discriminante es positivo, existirán dos valores posibles para la variable λ_α. Por lo tanto nos interesan los casos en que:

$$\lambda_\beta^2 + \lambda_\gamma^2 - \lambda_\beta\lambda_\gamma > 0 \tag{5.7.12}$$

Para este caso el valor de λ_α viene dado por la fórmula cuadrática, con la cual podemos expresar la solución de la variable λ_α en función de las variables λ_β y λ_γ sujetas a la condición 5.7.12:

$$\lambda_\alpha = \frac{(\lambda_\beta + \lambda_\gamma) \pm 2\sqrt{\lambda_\beta^2 + \lambda_\gamma^2 - \lambda_\beta\lambda_\gamma}}{3}.$$

Si se supone además $\lambda_\beta = 1$, el discriminante se reduce a la ecuación $1 + \lambda_\gamma^2 - \lambda_\gamma = 0$, la cual es una ecuación cuadrática en la variable λ_γ, que para cualquier valor de λ_γ real , $1 + \lambda_\gamma^2 - \lambda_\gamma > 0$ siempre. Para este caso particular :

$$\lambda_\alpha = \frac{(1 + \lambda_\gamma) \pm 2\sqrt{1 + \lambda_\gamma^2 - \lambda_\gamma}}{3}.$$

Notar que cuando $\lambda_\gamma = 1$, $\lambda_\alpha = \frac{4}{3}$. Para este caso particular $v_\beta = \frac{a^\beta}{a^\gamma} v_\gamma = v_\gamma = v \neq 0$

Si particularizamos en el ejemplo dado de tal forma que:

$$\alpha_{12} \rightarrow \ \gamma, \ \alpha_{23} \rightarrow \alpha, \ \alpha_{31} \rightarrow \beta$$

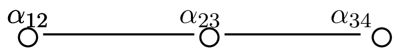
El producto interno dado por Q y el endomorfismo H_0 en $\mu_{\alpha_{12}} \oplus \mu_{\alpha_{23}} \oplus \mu_{\alpha_{13}}$ son $Q = \{1, \frac{4}{3}, 1\}$ y $H_0 = \{v, 0, -v\}$.

5.7.2. El ejemplo de $SU(4)/S(U(1) \times U(1) \times U(1) \times U(1))$

$$SL(4,\mathbb{C})/B \equiv SU(4)/S(U(1) \times U(1) \times U(1) \times U(1))$$

Siguiendo el ejemplo anterior, $h_i = E_{ii} - E_{i+1\ i+1}$ $i = 1, 2, 3$, son los elementos que generan a $\mathfrak{h}$, y E_{ij} los elementos de los espacios raíces. Para este caso fijamos como raíces simples a $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}$. Así las raíces positivas son $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{13}, \alpha_{24}, \alpha_{14}$.

El diagrama de Dynkin en $\mathfrak{sl}(4)$ es :



Suponiendo $\Theta = 0$, $\mathfrak{m} = \mu_{12} \oplus \mu_{23} \oplus \mu_{13} \oplus \mu_{34} \oplus \mu_{24} \oplus \mu_{24} \oplus \mu_{14}$ y $\dim \mathbb{F} = 12$. Para plantear las ecuaciones KY, necesitamos saber cuantos triples de raíces $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ con $\alpha + \beta + \gamma = 0$, tiene este caso.

Las siguientes sumas de raíces dan cero:

$$\begin{aligned} \alpha_{12} + \alpha_{23} - \alpha_{13} = 0, &\quad \alpha_{13} + \alpha_{34} - \alpha_{14} = 0 \\ \alpha_{23} + \alpha_{34} - \alpha_{24} = 0, &\quad \alpha_{12} + \alpha_{24} - \alpha_{14} = 0 \end{aligned}$$

Para cada una de estas relaciones si queremos que H_0 sea un tensor KY se debe cumplir la ecuación 5.6.19. Al permutar el orden de los sumandos para cada suma de raíces obtenemos tres ecuaciones. Recordar que una de las ecuaciones se deduce de las dos restantes. En vista de esto, por cada suma de raíces tenemos dos ecuaciones. Denotaremos v_{ij} a los autovalores de $H_0^{\mathbb{C}}$ asociados a $X_{\alpha_{ij}}$.

$$(v_{23} - v_{12})\lambda_{13} + (v_{12} + v_{23} - 2v_{13})(\lambda_{23} - \lambda_{12}) = 0 \tag{5.7.13}$$
$$(-v_{13} - v_{12})\lambda_{23} + (v_{12} - v_{13} + 2v_{23})(\lambda_{13} - \lambda_{12}) = 0 \tag{5.7.14}$$
$$(v_{34} - v_{13})\lambda_{14} + (v_{13} + v_{34} - 2v_{14})(\lambda_{34} - \lambda_{13}) = 0 \tag{5.7.15}$$
$$(-v_{14} - v_{13})\lambda_{34} + (-v_{14} + v_{13} + 2v_{34})(\lambda_{14} - \lambda_{13}) = 0 \tag{5.7.16}$$
$$(v_{34} - v_{23})\lambda_{24} + (v_{34} + (v_{23} - 2v_{24})(\lambda_{34} - \lambda_{23}) = 0 \tag{5.7.17}$$
$$(-v_{24} - v_{23})\lambda_{34} + (-v_{24} + v_{23} + 2v_{34})(\lambda_{24} - \lambda_{23}) = 0 \tag{5.7.18}$$
$$(v_{24} - v_{12})\lambda_{14} + (v_{24} + v_{12} - 2v_{14})(\lambda_{24} - \lambda_{12}) = 0 \tag{5.7.19}$$
$$(-v_{14} - v_{12})\lambda_{24} + (-v_{14} + v_{12} + 2v_{24})(\lambda_{14} - \lambda_{12}) = 0 \tag{5.7.20}$$

Suponiendo $v_{12} = v_{23} = v_{34} = v$, $\lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{34} = \lambda$ y además $v_{13} = v_{24} = w$, $\lambda_{13} = \lambda_{24} = \mu$ se hacen cero las ecuaciones 5.7.13 y 5.7.17. Además 5.7.15 coincide con 5.7.19; y 5.7.14 con 5.7.18 quedando solo cuatro ecuaciones para considerar: 5.7.14, 5.7.15, 5.7.16 y 5.7.20.

$$\begin{aligned} (-w - v)\lambda + (v - w + 2v)(\mu - \lambda) &= 0 \\ (v - w)\lambda_{14} + (w + v - 2v_{14})(\lambda - \mu) &= 0 \\ (-v_{14} - w)\lambda + (-v_{14} + w + 2v)(\lambda_{14} - \mu) &= 0 \\ (-v_{14} - v)\mu + (-v_{14} + v + 2w)(\lambda_{14} - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Notar que las suposiciones anteriores se refieren a que las raíces α_{ij} de igual altura respecto a Σ posean el mismo coeficiente en v_{ij} en H_0 y λ_{ij} en Q. Si se supone además que $v_{14} = 2v$ se obtiene: $w = \frac{3}{2}v, \mu = \frac{8}{3}\lambda$ y $\lambda_{14} = 5\lambda$ lo que da una solución al sistema anterior.

En resumen tenemos escribiendo de acuerdo a la notación de la sección 5.6.2, $Q = \{\lambda, \lambda, \frac{8}{3}\lambda, \lambda, \frac{8}{3}\lambda, 5\lambda\}$ y $H_0 = \{v, v, \frac{3}{2}v, v, \frac{3}{2}v, 2v\}$.

Con este resultado, afirmamos que existe una solución KY estricta en este caso. Nos preguntamos si existen más ejemplos y si se podría conocer todas las métricas que hacen que admitan un tensor KY, esto sigue siendo una pregunta pendiente en nuestro trabajo.

5.7.3. El ejemplo de $SO(5,\mathbb{R})/T$

$$SO(5,\mathbb{C})/B \equiv SO(5,\mathbb{R})/T, \text{ con } T \text{ toro maximal en } SO(5,\mathbb{R})$$

El álgebra de Lie asociada a $SO(5,\mathbb{C})$ es el álgebra de matrices complejas antisimétricas de orden 5×5 denotada por $\mathfrak{so}(5)$. En este caso se tiene la siguiente descomposición $\mathfrak{so}(5) = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha\in R} \mathfrak{g}_\alpha$. Los elementos h_1, h_2 forman una base de $\mathfrak{h}$, tal que $h_i = E_{2i-1,2i} - E_{2i,2i-1}$ para $i = 1,2$.

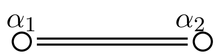
Definiendo $F_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$, se determina:

$$\begin{aligned}
G^+_{j,k} &= F_{2j-1,2k} + F_{2j,2k} + i(F_{2j-1,2k} - F_{2j,2k-1}),\ 1 \le j \ne k \le 2\\
G^-_{j,k} &= F_{2j-1,2k-1} - F_{2j,2k} + i(F_{2j-1,2k} + F_{2j,2k-1}),\ 1 \le j \ne k \le 2\\
D^\pm_j &= F_{2j-1,5} \pm iF_{2j,5}, j = 1,2
\end{aligned}$$

Los funcionales lineales $e_j : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ se definen como $e_j(h_k) = -i\delta_{kj}$, tales que

$$\begin{aligned}
[h, G^+_{jk}] &= (e_j(h) - e_k(h))G^+_{jk},\ 1 \le j \ne k \le 2\\
[h, G^-_{jk}] &= -(e_j(h) - e_k(h))G^-_{jk},\ 1 \le j < k \le 2\\
[h, G^-_{jk}] &= -(e_j(h) - e_k(h))G^-_{jk},\ 1 \le k < j \le 2\\
[h, D^\pm_j] &= \mp e_j(h)D^\pm_j,\ j = 1,2
\end{aligned}$$

El conjunto de raíces de $\mathfrak{so}(5)$ esta dado por $R = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm(e_1-e_2), \pm(e_1+e_2)\}$. Tomamos como raíces simples a $\Sigma = \{e_1 - e_2, e_2\} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, y el diagrama de Dynkin asociado al sistema de raíces es:



De acuerdo a nuestra elección de raíces simples, las raíces positivas son $\{e_1, e_2, e_1-e_2, e_1+e_2\}$. Recordemos que suponemos en este caso también $R_M = R$, o equivalentemente que $\Theta = \varnothing$. Llamaremos a $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\alpha_2 = e_2$, $\alpha_3 = e_1$ y $\alpha_4 = e_1 + e_2$. Para este caso tenemos la siguiente descomposición: $\mathfrak{m} = \mu_{\alpha_1} \oplus \mu_{\alpha_2} \oplus \mu_{\alpha_3} \oplus \mu_{\alpha_4}$ y $\dim \mathfrak{m} = 8$.

Notar que,

$$e_1 = (e_1 - e_2) + e_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad e_1 + e_2 = ((e_1 - e_2) + e_2) + e_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2$$

Luego las relaciones que quedan son:

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \quad \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0$$

Siendo H_0 un endomorfismo KY inversible y antisimétrico y con la propiedad de ser $\mathrm{Ad}(K)$-invariante, por 5.6.19 para cada una de las relaciones entre raíces se tiene el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales con variables v_1, v_2, v_3, v_4:

$$\begin{aligned}(\lambda_2-\lambda_1-\lambda_3)v_1+(\lambda_3+\lambda_2-\lambda_1)v_2-2(\lambda_2-\lambda_1)v_3&=0\\(\lambda_3-\lambda_1-\lambda_2)v_1+2v_2(\lambda_3-\lambda_1)+(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)v_3&=0\\(-\lambda_4-\lambda_2+\lambda_3)v_2+(\lambda_4+\lambda_3-\lambda_2)v_3+2(\lambda_2-\lambda_3)v_4&=0\\(\lambda_4-\lambda_3-\lambda_2)v_2+2(\lambda_4-\lambda_2)v_3+(-\lambda_3-\lambda_4+\lambda_2)v_4&=0\end{aligned}$$

Denotando a:

$$\begin{aligned}a^{\alpha_2}&=(\lambda_2-\lambda_1-\lambda_3),\ a^{\alpha_1}=(-\lambda_3-\lambda_2+\lambda_1),\ a^{\alpha_3}=(\lambda_3-\lambda_1-\lambda_2),\\a^{\alpha_2}-a^{\alpha_1}&=2(\lambda_2-\lambda_1),a^{\alpha_3}-a^{\alpha_1}=2(\lambda_3-\lambda_1)\\b^{\alpha_3}&=(-\lambda_4-\lambda_2+\lambda_3),b^{\alpha_2}=(-\lambda_4-\lambda_3+\lambda_2),b^{\alpha_4}=(\lambda_4-\lambda_3-\lambda_2),\\b^{\alpha_3}-b^{\alpha_2}&=2(\lambda_3-\lambda_2),b^{\alpha_4}-b^{\alpha_2}=2(\lambda_4-\lambda_2)\end{aligned}$$

Reescribimos las ecuaciones,

$$a^{\alpha_2}v_1-a^{\alpha_1}v_2-(a^{\alpha_2}-a^{\alpha_1})v_3=0 \tag{5.7.21}$$
$$a^{\alpha_3}v_1+(a^{\alpha_3}-a^{\alpha_1}c)v_2+a^{\alpha_1}v_3=0 \tag{5.7.22}$$
$$b^{\alpha_3}v_2-b^{\alpha_2}v_3-(b^{\alpha_3}-b^{\alpha_2})v_4=0 \tag{5.7.23}$$
$$b^{\alpha_4}v_2+(b^{\alpha_4}-b^{\alpha_2})v_3+b^{\alpha_2}v_4=0 \tag{5.7.24}$$

Las dos primeras ecuaciones corresponden a la primera relación de raíces, y las dos últimas a la segunda relación entre raíces.

Resulta difícil encontrar todas las soluciones de este sistema de ecuaciones lineales, pues sus coeficientes dependen de otras variables. Decir que este caso admite una solución KY distinta de la trivial implica que el determinante de la matriz asociada al sistema lineal es nulo. Ese determinante estará expresado en función de los coeficientes a^{α_1}, a^{α_2}, a^{α_3}, b^{α_1}, b^{α_2} y b^{α_3}.

La solución de la ecuación del determinante de la matriz de coeficientes del sistema nos dirá cuales son todas las métricas para las cuales se admite un tensor KY invariante (inversible o no inversible).

En lo siguiente descartaremos algunos casos, para disminuir la complejidad, analizando en cada triple de raíces $\{\alpha,\beta,\gamma\}\in R$ tal que $\alpha+\beta+\gamma=0$. En este caso tenemos dos triples posibles $\{\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_3\}$ y $\{\alpha_2,\alpha_3,-\alpha_4\}$.

Lema 5.7.8. *Sea H_0 un endomorfismo inversible antisimétrico y $\mathrm{Ad}(K)$-invariante en $\mathfrak{m}$. Si uno de los triples es paralelo, el segundo lo es también*

Demostración. Si suponemos que la primera relación entre las raíces $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0$ posee métrica paralela por lo tanto por el Lema 5.7.2 $a^{\alpha_1}=0$ ó $a^{\alpha_2}=0$ ó $a^{\alpha_3}=0$. La segunda relación tendrá una métrica que hace a H_0 KY en esas raíces, analizamos las distintas opciones. Si $a^{\alpha_2}=0$ se tiene $-v_1=v_2=v_3$, reemplazando 5.7.23, obtenemos $(b^{\alpha_3}-b^{\alpha_2})(v_2-v_4)=0$. Notar que como $a^{\alpha_2}=0$, entonces $\lambda_2=\lambda_1+\lambda_3$. Por lo tanto $(b^{\alpha_3}-b^{\alpha_2})\neq 0$ entonces $v_2=v_4$. Reemplazando en 5.7.24 $b^{\alpha_4}=0$ y la segunda relación resulta paralela.

De la misma forma si $a^{\alpha_1}=0$, se tiene $v_1=v_3$ y por 5.7.22 $v_2=-v_3$. Reemplazando en 5.7.24 obtenemos la ecuación $b^{\alpha_2}(v_2+v_4)=0$. Si suponemos $b^{\alpha_2}\neq 0$ entonces $b^{\alpha_3}v_3=0$ entonces $b^{\alpha_3}=0$ y resulta paralelo. Caso contrario si $b^{\alpha_2}=0$,entonces $\lambda_2=\lambda_3+\lambda_4$. Luego $b^{\alpha_3}\neq 0$ y en 5.7.23 obtenemos $v_4=-v_3$. Notar que siempre que suponga $a^{\alpha_1}=0$ la segunda relación es paralelo.

Si $a^{\alpha_3} = 0$ tenemos $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$, reemplazando en 5.7.22, se tiene $a^{\alpha_1}(v_2 - v_3) = 0$. Luego $v_2 = v_3$. En 5.7.21 $a^{\alpha_2}(v_1 - v_2) = 0$, por lo tanto $v_1 = v_2 = v_3$. En 5.7.23, notar que si $a^{\alpha_3} = 0$ entonces $b^{\alpha_3} - b^{\alpha_2} = 2\lambda_1 \neq 0$. En consecuencia $v_2 = v_4$. Finalmente en 5.7.24 $b^{\alpha_4} = 0$ y la solución a la segunda relación es paralela.

De forma análoga si consideramos la segunda relación paralela, la primera será paralela también.

□

Evaluando si ambos triples son paralelos obtenemos las siguientes posibilidades:

1. $-v_1 = v_2 = v_3 = v_4$, $\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_3$, $\lambda_4 = \lambda_1 + 2\lambda_3$
2. $v_1 = -v_2 = v_3 = v_4$, $\lambda_1 = 2\lambda_2 + \lambda_4$, $\lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_4$.
3. $v_1 = -v_2 = v_3 = -v_4$, $\lambda_1 = 2\lambda_3 + \lambda_4$, $\lambda_2 = \lambda_4 + \lambda_3$
4. $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$, $\lambda_4 = 2\lambda_2 + \lambda_1$, $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$

El caso a ver es cuando ambos triples son KY no paralelos es decir a^{α_1}, a^{α_2}, a^{α_3}, b^{α_1}, b^{α_1} y b^{α_3} no nulos. En primer lugar probaremos porque este ejemplo no posee una estructura nearly Kähler invariante, usando las proposiciones y los teoremas desarrollados en esta tesis.

Lema 5.7.9. *$SO(5,\mathbb{R})/T$ no admite estructura nearly Kähler invariante estricta*

Demostración. Supongamos que el ejemplo mencionado admite una estructura nearly Kähler estricta invariante. Recordar que las estructuras nearly Kähler son un caso particular de las estructuras KY inversibles, entonces las ecuaciones 5.7.3 y 5.7.4 se deben satisfacer. Si la estructura es nearly Kähler estricta, entonces pedimos que H_0 sea una estructura casi compleja no integrable (pues si es integrable sería paralelo 5.6.31). Los triples de raíces $\{\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3\}$, $\{\alpha_2, \alpha_3, -\alpha_4\}$ tales que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0$$

Recordar que aquí $v_\alpha = \pm 1$ para todo raíz en R, para que sea estructura casi compleja. En este caso tenemos dos triples de raíces. Cada uno de ellos satisface la ecuación de Killing Yano. Por el Teorema 5.7.4 cada triple posee una estructura paralela ó bien una estructura KY estricta. Si alguno de los triples posee estructura paralela, por el Lema 5.7.8, el segundo triple es paralelo también. Esto nos daría una estructura paralela, que en este caso sería Kähler. Por lo tanto ambos triples deben satisfacer la solución KY estricta del Teorema 5.7.4. Pedimos además que cada triple no sea integrable, esto implica que:

$$v_{\alpha_1} = v_{\alpha_2} = v_{-\alpha_3},\; v_{\alpha_2} = v_{\alpha_3} = v_{-\alpha_4}$$

Pero notar que $v_{\alpha_2} = v_{-\alpha_3} = v_{\alpha_3}$ lo cual es absurdo. El absurdo proviene de suponer que el ejemplo tiene estructura nearly Kähler invariante nearly Kähler. □

El resultado anterior ya fue mostrado por Luiz San Martin y Rita de Cassia en [SMC06] para variedades bandera generalizadas . Usando las estructuras descritas en función de raíces logran demostrar:

Teorema 5.7.10 ([SMC06]). *La variedad bandera generalizada $\mathbb{F}_\Theta$ admite una estructura nearly Kähler estricta invariante (J, Q) si y solo si $h_\Theta = 2$.*

Donde $h_\Theta(\alpha)$ es la altura de las raíces $\alpha \in R_M$ con respecto a las raíces simples en $\Sigma - \Theta$ y $h_\Theta = \max_{\alpha \in R_M} h_\Theta(\alpha)$.

Observación 5.7.11. Note que en este ejemplo la altura máxima es 3. Observar que α_4 es la raíz de mayor altura pues, $\alpha_4 = \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

Los lemas anteriores nos permiten descartar casos ya conocidos, con el propósito de encontrar ejemplos de estructuras KY estrictas. En primer lugar suponemos que los coeficientes a^{α_1}, a^{α_2}, a^{α_3}, b^{α_2}, b^{α_3} y b^{α_4} son todos no nulos.

En segundo lugar descartamos las posibilidad de que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ó $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$.

En forma general escribimos el determinante del sistema de ecuaciónes 5.7.21, 5.7.22, 5.7.23, 5.7.24.

$$\det\left(\begin{bmatrix} a^{\alpha_2} & -a^{\alpha_1} & -(a^{\alpha_2} - a^{\alpha_1}) & 0 \\ a^{\alpha_3} & a^{\alpha_3} - a^{\alpha_1} & a^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & b^{\alpha_3} & -b^{\alpha_2} & -(b^{\alpha_3} - b^{\alpha_2}) \\ 0 & b^{\alpha_4} & b^{\alpha_4} - b^{\alpha_2} & b^{\alpha} \end{bmatrix}\right) = 0$$

Computando queda la siguiente ecuación:

$$[a^{\alpha_1} b^{\alpha_4}(b^{\alpha_3} - b^{\alpha_2})(a^{\alpha_2} - a^{\alpha_3}) + a^{\alpha_2} a^{\alpha_3} b^{\alpha_2} b^{\alpha_3}] = 0 \tag{5.7.25}$$

Trataremos de encontrar alguna familia de soluciones a esta ecuación. Supongamos que $\lambda_1 = \lambda_2$ y que $\lambda_3 = \lambda_4$, entonces escribimos los coeficientes,

$$\begin{array}{lll} a^{\alpha_2} = -\lambda_3, & a^{\alpha_1} = -\lambda_3, & a^{\alpha_3} = \lambda_3 - 2\lambda_1, \\ b^{\alpha_2} = \lambda_1 - 2\lambda_3, & b^{\alpha_3} = -\lambda_1, & b^{\alpha_4} = -\lambda_1 \end{array}$$

Reemplazando en la ecuación 5.7.25

$$\lambda_1\lambda_2[4(\lambda_3 - \lambda_1)^2 + \lambda_1\lambda_3(\lambda_3 - 2\lambda_1)(2\lambda_3 - \lambda_1)] = 0$$

Luego resulta la siguiente ecuación:

$$6\lambda_1^2 + 6\lambda_3^2 - 13\lambda_1\lambda_3 = 0.$$

Tomándola como una ecuación cuadrática en la variable λ_3, obtenemos: $\lambda_3 = \frac{13\lambda_1 \pm 5\lambda_1}{12}$. Fijando $\lambda_1 = t > 0$, $t \in \mathbb{R}$, se obtienen $\lambda_3 = \frac{2}{3}t$ ó $\lambda_3 = \frac{3}{2}t$.

En cualquiera de las opciones obtenemos:

$$v_1 = \frac{-\lambda_3}{-3\lambda_3 + 4\lambda_1} v_3, \quad v_2 = -\frac{-\lambda_3}{-3\lambda_3 + 4\lambda_1} v_3, \quad v_2 = \frac{3\lambda_1 - 4\lambda_3}{\lambda_1} v_4, \quad v_3 = -1 v_4.$$

Para $\lambda_3 = \frac{2}{3}$, escribimos en la métrica de acuerdo al endomorfismo $Q = (t, t, \frac{2}{3}t, \frac{2}{3}t)$ respecto de la base ortogonal $\{A_{\alpha_1}, iS_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, iS_{\alpha_2}, A_{\alpha_3}, iS_{\alpha_3}, A_{\alpha_4}, iS_{\alpha_4}\}$

Obteniendo el siguiente sistema en este caso

$$v_1 = \frac{-1}{3} v_3, \; v_2 = -\frac{1}{3} v_3, \quad v_2 = \frac{1}{3} v_4, \quad v_3 = -1 v_4.$$

Equivalentemente $v_1 = v_2 = -\frac{1}{3} v_3$, $v_3 = -v_4$, o bién $H_0 = \{-\frac{1}{3} v_3, -\frac{1}{3} v_3, v_3, -v_3\}$.

Para el segundo valor $\lambda_3 = \frac{3}{2}$, $Q = \{t, t, \frac{3}{2}t, \frac{3}{2}t\}$. Obteniendo los siguientes valores en este caso

$$v_1 = 3v_3, \quad v_2 = 3v_3, \quad v_2 = -3v_4, \quad v_3 = -1 v_4$$

Equivalentemente podemos escribir $v_1 = v_2 = 3v_3$, $v_3 = -v_4$ o bién $H_0 = \{3v_3, 3v_3, v_3, -v_3\}$.

Resolviendo la ecuación 5.7.25 con Maple encontramos todas las métricas para las cuales $SO(5,\mathbb{C})/B$ admite tensores KY estricto. Ellas son:

1. $\lambda_4 = -\frac{\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-3\lambda_2^2+2\lambda_2\lambda_3+\lambda_3^2}{\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3}$
2. $\lambda_4 = \frac{\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2^2-2\lambda_2\lambda_3+3\lambda_3^2}{\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}$

Siendo las soluciones anteriores obtenidas un caso particular de esta solución general.

Nos preguntamos si existe alguna métrica de Einstein para la cual se satisfagan las ecuaciones KY estrictas. El trabajo de [Sak99] clasifica todas las métricas de Einstein salvo homotecias para este ejemplo, enunciamos sus resultados, los cuales fueron obtenidos usando base de Gröbner:

1. $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 4,$
2. $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 2,$
3. $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3,\ \lambda_4 = 4,$
4. $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3,\ \lambda_4 = 2,$
5. $\lambda_3 = 1, \lambda_1 = \lambda_4 = \dfrac{24 \pm 4\sqrt{6}}{15},$
   $\lambda_2 = \dfrac{7 \pm 2\sqrt{6}}{5}.$

De la clasificación notamos que las primeras cuatro son métricas de Kähler, nos interesa las no Kähler. Analizando el comportamiento de las ecuaciones KY en 5.7.21, 5.7.22, 5.7.23 y 5.7.24 llegamos a la siguiente proposición:

Proposición 5.7.12. *Para $SO(5,\mathbb{R})/T$ no existen métricas de Einstein que hagan que H_0 sea un tensor KY estricto.*

5.8. La clasificación de Gray-Hervella en Variedades Bandera

Estos resultados están en el trabajo de tesis de Rita de Cassia (ver [Cass03]), las dieciséis clases de la clasificación en [GH80] colapsan a seis clases en variedades bandera expresadas en términos de sus raíces, por equivalencias existentes entre las clases.

En el siguiente teorema se consideran las estructuras casi complejas invariantes $(J = \{\varepsilon_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha\in R_M^+}$, con $\varepsilon_\alpha = \pm 1$.

Teorema 5.8.1. *[Cass03] En una variedad bandera $\mathbb{F}_\Theta$, tenemos las siguientes clases de variedades casi hermitianas invariantes con las siguientes condiciones mostradas en el cuadro 5.1.*

Para ver con detalle cada una de las equivalencias el cuadro anterior ver [Cass03, Capítulo 4 y 5].

5.8.1. La estructura casi compleja asociada en los ejemplos vistos

Para los ejemplos obtenidos en la sección anterior, buscaremos su estructura casi compleja asociada y determinamos a qué clase corresponde.

Asociaremos a las estructuras $(H_0 = \{v_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha\in R^+}$ encontradas en la sección anterior el par $(J = \{\varepsilon_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha\in R^+}$, donde J es la estructura casi compleja asociada a H_0 con $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ para todo $\alpha \in R^+$. En la siguiente proposición evaluamos el tipo de estructura que $(J = \{\varepsilon_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha\in R^+}$ puede tener de acuerdo a las clases del cuadro visto.

Clase	**Condiciones**
Kähler $\mathcal{K} \equiv \mathcal{AK} \equiv \mathcal{W}_4 \equiv \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$	$\forall\ \{\alpha, \beta, \gamma\}$ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -\varepsilon_\gamma$ y $\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0$
Nearly Kähler $\mathcal{NK} \equiv \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$	$\forall\ \{\alpha, \beta, \gamma\}$ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -\varepsilon_\gamma$ y $\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0$ ó bien $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$ y $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma$
$(1,2)$**-simpléctica** $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \equiv \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_4$	$\forall\ \{\alpha, \beta, \gamma\}$ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ Si $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -\varepsilon_\gamma$ entonces $\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma = 0$
Integrables $\mathcal{W}_3 \equiv \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4 \equiv \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \equiv \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	$\forall\ \{\alpha, \beta, \gamma\}$ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -\varepsilon_\gamma$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \equiv \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	$\forall\ \{\alpha, \beta, \gamma\}$ tal que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, con $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$ se satisface $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = \lambda_\gamma$
$\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \equiv \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$	$\delta\omega = 0$

CUADRO 5.1: Clasificación de las variedades casi hermitianas en variedades banderas

Teorema 5.8.2. *Sea* $\mathbb{F} = U/T$ *y* $\dim \mathbb{F} \geq 6$. *Sea* $(H_0 = \{v_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha \in R^+}$ *una estructura KY inversible estricta y que no es múltiplo de una estructura nearly Kähler . La estructura casi compleja asociada no pertenece a* $\mathcal{K}$ *ni a* $\mathcal{NK}$.

Demostración. A cada par $(H_0 = \{v_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha \in R^+}$ se le asocia $(J = \{\varepsilon_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha \in R^+}$, estructura casi compleja. Determinamos a qué clase puede pertenecer. Notar que ambas poseen la misma métrica. Descartamos las estructuras paralelas, pues estas no son KY estrictas. Si el $(J = \{\varepsilon_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha \in R^+}$ es nearly Kähler estricto por [SMN03], la única variedad bandera maximal que admite estructura nearly Kähler estricta es $\mathbb{F} = SU(3)/S(U(1) \times U(1) \times U(1))$. Por lo tanto por cuadro $\lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{13}$ ó bien una de estos valores es igual a la suma del resto. Pero por la Proposición 5.7.2 y la Observación 5.7.3, la estructura KY $(H_0 = \{v_{\alpha_{12}}, v_{\alpha_{23}}, v_{\alpha_{13}}\}, Q = \{\lambda_{\alpha_{12}}, \lambda_{\alpha_{23}}, \lambda_{\alpha_{13}}\})$ en $\mu_{\alpha_{12}} \oplus \mu_{\alpha_{23}} \oplus \mu_{\alpha_{13}}$, es un múltiplo de una estructura nearly Kähler ó Kähler. Lo cual contradice, pues suponemos que las estructuras son KY estrictas no nearly Kähler. Si $(J = \{\varepsilon_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha \in R^+}$ es Kähler, siguiendo el cuadro y nuevamente por la Proposición 5.7.2 se tiene que $(H_0 = \{v_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha \in R^+}$ es paralela. Lo cual es absurdo. Luego la estructura $(J = \{\varepsilon_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha \in R^+}$ asociada a $(H_0 = \{v_\alpha\}, Q = \{\lambda_\alpha\})_{\alpha \in R^+}$ no es Kähler ni nearly Kähler. □

- $SU(3)/S(U(1) \times U(1) \times U(1))$

  Para el ejemplo de KY estricto no nearly Kähler visto en la subsección 5.7.1, si tomamos $v_{\alpha_{12}} > 0$, la estructura casi compleja asociada a $H_0 = \{v_{12}, -\frac{5}{3}v_{12}, -v_{12}\}$ con métrica $Q = \{1, 3, 1\}$ en la base $\mathfrak{B} = \{A_{\alpha_{12}}, iS_{\alpha_{12}}, A_{\alpha_{23}}, iS_{\alpha_{23}}, A_{\alpha_{13}}, iS_{\alpha_{13}}\}$: $J = \{1, -1, -1\}$

  Llamaremos ε_α a los valores de J en los vectores correspondientes a la raíz α. En la suma $\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31} = 0$. Para J se tiene $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{31} = -\varepsilon_{23}$ lo cual hace que J sea integrable. Para este ejemplo los parámetros de la métrica son $Q = \{1, 3, 1\}$, los cuales hacen que $(J, Q) \in \mathcal{W}_3$.

- $SU(4)/S(U(1) \times U(1) \times U(1) \times U(1))$

  En el ejemplo visto en la subsección 5.7.2, si tomamos $v > 0$, la estructura casi compleja asociada a $H_0 = \{v, v, \frac{3}{2}v, v, \frac{3}{2}v, 2v\}$ con métrica $Q = \{\lambda, \lambda, \frac{8}{3}\lambda, \lambda, \frac{8}{3}\lambda, 5\lambda\}$ es :

  $$J = \{1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

  Para ver a qué clase pertenece miramos las sumas de raíces que dan cero.

  $$\alpha_{12} + \alpha_{23} - \alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{13} + \alpha_{34} - \alpha_{14} = 0$$
  $$\alpha_{23} + \alpha_{34} - \alpha_{24} = 0, \quad \alpha_{12} + \alpha_{24} - \alpha_{14} = 0$$

  En la primera suma tenemos $\varepsilon_{\alpha_{12}} = \varepsilon_{\alpha_{23}} = -\varepsilon_{-\alpha_{13}}$ y su métrica es $Q = \{\lambda, \lambda, \frac{8}{3}\lambda\}$.

  En la segunda suma de raíces se obtiene $\varepsilon_{\alpha_{13}} = \varepsilon_{\alpha_{34}} = -\varepsilon_{-\alpha_{14}}$ y su respectiva métrica es $Q = \{\frac{8}{3}\lambda, \lambda, 5\lambda\}$.

  Para la tercera suma de raíces, se ve que $\varepsilon_{\alpha_{23}} = \varepsilon_{\alpha_{34}} = -\varepsilon_{-\alpha_{24}}$, con su métrica $Q = \{\lambda, \lambda, \frac{8}{3}\}$.

  Por último $\varepsilon_{\alpha_{12}} = \varepsilon_{\alpha_{24}} = -\varepsilon_{-\alpha_{14}}$ y $Q = \{\lambda, \frac{8}{3}\lambda, 5\lambda\}$.

  Observamos que en todos los casos los triples de raíces pertenecen a la clase $\mathcal{W}_3$, es decir todos son integrables. Por lo tanto $(J, Q) \in \mathcal{W}_3$.

- $SO(5, \mathbb{R})/T$

  Recordemos los resultados del ejemplo de la estructura KY estricta en este caso. Su tensor KY $H_0 = \{-\frac{1}{3}v_3, -\frac{1}{3}v_3, v_3, v_3\}$ y métrica $Q = \{t, t, \frac{2}{3}t, \frac{2}{3}t\}$, en la base $\{A_{\alpha_1}, iS_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, iS_{\alpha_2}, A_{\alpha_3}, iS_{\alpha_3}, A_{\alpha_4}, iS_{\alpha_4}\}$.

  Si $v_3 > 0$, $J = \{-1, -1, 1, -1\}$.

  Para las raíces α_1, α_2, α_3 tal que $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$, tenemos $\varepsilon_{\alpha_1} = \varepsilon_{\alpha_2} = \varepsilon_{-\alpha_3} = -1$ y su métrica en esas raíces es $Q = \{t, t, \frac{2}{3}t\}$.

Para las raíces α_2, α_3, α_4 tal que $\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0$, se ve que $1 = -\varepsilon_{\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_3} = \varepsilon_{-\alpha_4}$ y su métrica en estos vectores es $Q = \{t, \frac{2}{3}t, \frac{2}{3}t\}$.

Notar que este último triple es integrable, mientras que el primero no lo es. Analizando las opciones de la tabla del Teorema 5.8.1, vemos que $(J, Q) \in \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$.

Bibliografía

[Agr06] I. AGRICOLA, *The Srní lectures on non-integrable geometries with torsion*, Arch. Math. (Brno) **42** (2006), 5–84.

[ABD15] A. ANDRADA, M.L. BARBERIS, I.DOTTI, *Invariant solutions to the conformal Killing-Yano equation on Lie groups*, J. Geom. and Phys. **94**(2015) 199–208.

[ABDO05] A. ANDRADA, M. L. BARBERIS, I. DOTTI, G. OVANDO, *Product structures on four dimensional solvable Lie algebras*, Homology Homotopy Appl. **7** (2005), 9–37.

[ABM16] A. ANDRADA, M.L. BARBERIS and A. MOROIANU, *Conformal Killing 2-forms on 4-dimensional Manifolds* Ann Glob Anal Geom (2016) 1–14.

[AD18] A. ANDRADA, I. DOTTI, *Conformal Killing-Yano 2-forms*, Diff. Geo. and its App. **58** (2018), 103–119.

[AF02] I. AGRICOLA, T. FRIEDRICH, *Global analysis: Differential forms in Analysis, Geometry and Physics*, Grad. Studies in Maths. (52) Am. Math. Soc. Rhode Island, (2002).

[AFV09] A. ANDRADA, A. FINO, L. VEZZONI, *A class of sasakian 5 manifolds*, Transf. Groups, **14** (2009), 493–512.

[AP86] D. V. ALEKSEEVSKII, A. M. PERELOMOV, *Invariant Kähler–Einstein metrics on compact homogeneous spaces* Funct. Anal. Appl., **20:3** (1986), 171–182.

[BDS12] M.L. BARBERIS, I. DOTTI, O. SANTILLÁN, *The Killing-Yano equation on Lie groups*, Class. Quantum Grav. **29** (2012) 1–10.

[Bess87] A. BESSE, *Einstein manifolds*, Classics in Maths, Berlin, Springer (1987).

[BMS06] F.BELGUN, A. MOROIANU, U. SEMMELMANN, *Killing forms on symmetric spaces*, Diff. Geo. and its App. **24**,(2006), n° 24 , 215–222.

[Boch46] S. BOCHNER, *Vector fields and Ricci curvature*, Bull. Amer. Math. Soc. **52**, (1946), n° 9 , 776-797.

[Bu05] J-B. BUTRUILLE, *Classification of homogeneous nearly Kähler manifolds*, Ann. Global Anal. Geom., **27** (2005) 201–225.

[Cass03] R. DE CASSIA DE J. SILVA, *Estructuras quase hermitianas invariantes em espa¢os homogeneos de grupos semisimples*, Tesis de Doctorado, Universidade Estadual de Campinas (2003).

[Che46] C. CHEVALLEY, *Theory of Lie groups I*, Princenton University Press, (1946).

[Chu74] BON-YAO CHU, *Symplectic homogeneous spaces*, Trans. AMS, **197** (1974).

[DH] I. DOTTI, A.C. HERRERA, *Invariant Killing-Yano 2-forms on Homogeneos spaces*, in preparation.

[Dot87] I. DOTTI, *Tópicos de geometria riemanniana homogénea*, Trabajos de Matematica, Serie B, **3** (1987), FAMAF-UNC.

[FH17] L. FOSCOLO, M. HASKINS, *New G_2 holonomy cones and exotic nearly Kähler structures on the 6-sphere and the product of two 3-spheres*, Ann. Math. **185** (2017), n° 1, 59–130.

[FK55] T. FUKAMI, S.ISHIHARA, *Almost hermitian structure on S^6*, Tahoku Math. J. , **7** (1955), 151–156.

[Gei96] H.GEIGES, *Symplectic couples on 4-manifolds*, Duke Math. J. 85 (1996), 701-711.

[GH80] A. GRAY, L. HERVELLA, *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*, Ann. Mat. Pura Appl. , **123** (1980), 35–58.

[GM17] P. GAUDUCHON, A. MOROIANU, *Killing 2-forms in dimension four* Special Metrics and Group Actions in Geometry, Springer INdAM Series, **23**. Springer, Cham, (2017), 161-205.

[GNO16] L.GRAMA, C.NEGREIROS, A.OLIVERA, *Invariant almost complex geometry on flag manifolds: geometric formality and Chern numbers*, Ann. di Matematica (2016).

[Gray69] A. GRAY, *Vector cross products on manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., **141** (1969), 465–504.

[Gray70] A. GRAY, *Nearly Kähler manifolds*, J. Differential Geom., N° 3, **4** (1970), 283–309.

[Gray76] A. GRAY, *The Structure of Nearly Kähler Manifolds* Math. Ann. **223** (1976), 233–248.

[Han57] JUN-ICHI HANO, *On Kaehlerian Homogeneous Spaces of Unimodular Lie Groups*, Am. J. of Maths., **79** (1957), n°4 885–900.

[HM57] JUN-ICHI HANO, YOZÔ MATSUSHIMA, *Some studies on Kaehlerian homogeneous space*, Nagoya Math. J. **11** (1957), 77-92.

[HS41] H.HOPF, H. SAMELSON, *Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen*, Comm. Math. Helv., **(13)**, (1941), 240–251.

[HV76] L. HERVELLA E. VIDAL, *Nouvelles géométries pseudo-Kählériennes $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$*, C.R. Acd. Sci. Paris, **283** (1976), 115-118.

[Kna] A. KNAPP, *Lie groups beyond an introduction* , Progress in Maths. **(140)**, Springer, Boston (2002).

[KobNomI] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Inter. Tracts in Pure and Apl. Math., **15, I**, New York (1963).

[KobNomII] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Inter. Tracts in Pure and Apl. Math., **15, II**, New York (1963).

[Lau15] J. LAURET, *Notas de curso de Variedades Homogéneas*, 2015.

[Lee97] J. LEE, *Riemannian manifolds*, Graduate texts in Maths, **176**, Springer (1997).

[Mil76] J. MILNOR, *Curvatures of left invariant metrics on Lie groups* Adv. Math. **21** (1976), 293–329.

[Mor07] A. MOROIANU, *Lectures in Kähler geometry*, London Math. Soc. Student Texts **69**, Cambridge University Press (2007).

[MS05] A. MOROIANU, U. SEMMELMANN, *Killing Forms on Quaternion-Kähler Manifolds* Ann. of Global Anal. and Geo. **28**, (2005), n°4, 319–335.

[Na02] P-A NAGY, *Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations* Asian J. Math., **6**. (2002), 481–504.

[Nom54] K. NOMIZU, *Invariant Affine Connections on Homogeneous Spaces*, Am. J. of Math. **76**, No. 1 (1954), pp. 33–65.

[Ov14] G. OVANDO, *Invariant pseudo Kähler metrics*, Diff. Geometry and Applications **36** (2014), 44–55.

[Ov06] G. OVANDO, *Four dimensional Symplectic Lie algebras*, Beiträge zur Algebra und Geometrie 47.2 (2006), 419–434.

[Pet06] P. PETERSEN, *Riemannian geometry*, Grad. texts in Maths., **171**, Springer (2006).

[Sak99] Y. SAKANE, *Homogeneous einstein metrics on flag manifolds*, Lobachevskii J. of Math. **4** (1999) 71–87.

[Sem03] U. SEMMELMANN, *Conformal Killing forms on riemannian manifolds*, Math. Z. **245** (2003), n°3, 503–527.

[SM] L.A.B. SAN MARTIN, *Álgebras de Lie*, Unicamp, Campinas 1999.

[SMC06] L.A.B SAN MARTIN, R. CASSIA DE J. SILVA, *Invariant nearly-Kähler structures*, Geom Dedicata (2006) **121** 143–154.

[SMN03] L.A.B. SAN MARTIN, C.J.C. NEGREIROS, *Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds*, Adv. Math. **178** (2003), 277–310.

[WG68] J. WOLF, A.GRAY, *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms. I,II*, J. Diff. Geom. **2** (1968),77–114, 115–159.

[War83] FRANK W. WARNER, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate texts in Maths, **97**, Springer (1983).

[YaKo84] K. YANO, M. KON, *Structures in Manifolds*, Series in Pure Maths. (3) World Sci. Publising Co Pte Ltd, Singapore, 1984.

[Yano52] K. YANO, *Some remarks on tensor fields and curvature*, Ann. of Math. **2**, (1952) 328–347.

[Yano65] K. YANO, *Differential geometry on complex and almost complex spaces*, Int. Series of Mono. in Pure and App. Maths., **49**, Pergamon Press , New York, (1965).