

Desigualdades Geométricas para objetos en Relatividad General

Pablo Rubén Anglada ¹

A presentar ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física, y
Computación como parte de los requerimientos para la obtención del
grado de

Doctor en Física
de la
Universidad Nacional de Córdoba

Abril - 2018
FaMAF - UNC

Directores:

Dr. Omar E. Ortiz, Director 2016-2018

Dra. María E. Gabach-Clement, Codirectora 2016-2018

Dr. Sergio Dain, Director 2013-2016



Desigualdades Geométricas para objetos en Relatividad General. Por Pablo Rubén
Anglada. Se distribuye bajo una
Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 2.5 Argentina

¹panglada@famaf.unc.edu.ar

En memoria de Sergio Dain

Agradecimientos

A Edgardo Anglada, que desde siempre incentivó mi curiosidad por la ciencia y el funcionamiento del universo, y a Gisela Flores, que me enseñó a estudiar y la dicha que viene con el esfuerzo que eso implica.

A Irene Flores, que desde chico, y no sin esfuerzo, me ayudó a generar un gusto y perder el miedo por la matemática; este trabajo sería inconcebible sin esos primeros pasos. A mi abuela Rosa, por su apoyo incondicional todos estos años; en su casa siempre hay una vela prendida los días de examen.

A Nati.

A Diego y Juan.

A María, Hernán, Vane, Tania y Simon.

A Omar Ortiz y María Eugenia Gabach-Clement con quienes tuve la suerte de trabajar estos últimos años. Sin el incentivo y el apoyo que me brindaron habría sido muy difícil completar esta etapa.

A Oscar Reula y Gustavo Dotti, que junto con Sergio fueron quienes me motivaron a estudiar relatividad general.

A todos los amigos del grupo de relatividad y de la oficina 327-328, con los que tuve el lujo de compartir todos estos años.

A CONICET, que hizo posible que el estudio y la investigación sean mi trabajo.

A la universidad pública, a FaMAF, y a todos los que luchan por una educación gratuita y de calidad para todos y todas.

Resumen

El estudio de Desigualdades Geométricas para objetos compactos en Relatividad General ha cobrado mucha relevancia en las últimas décadas. Una desigualdad geométrica en este contexto es una relación entre cantidades del espacio-tiempo que tienen un significado físico claro y a la vez una definición puramente geométrica.

En este trabajo presentaremos demostraciones formales de desigualdades geométricas relacionando la carga, la masa, el momento angular y el tamaño para objetos compactos, tanto para objetos ordinarios, como una estrella de neutrones, como para agujeros negros.

Comenzamos el trabajo estudiando un problema simple: la relación entre carga y tamaño en simetría esférica. Probamos que si tomamos un dato inicial asintóticamente plano y esféricamente simétrico que contiene un objeto ordinario cargado, dos veces el radio de área \mathcal{R}_A del objeto es siempre mayor estricto que la carga Q del mismo.

$$2\mathcal{R}_A > |Q|. \quad (0.1)$$

Probamos que la desigualdad es ajustada, ningún objeto no trivial puede alcanzar la igualdad, y que la misma se satura para una secuencia de datos iniciales para la cual la carga, la masa y el tamaño del objeto tienden a cero. Además discutimos las implicaciones físicas de este resultado y presentamos ejemplos numéricos que ilustran el teorema.

Luego pasamos a un problema más complejo: la relación entre masa, momento angular y tamaño en simetría axial para objetos ordinarios. Comenzamos estudiando el caso en el que tenemos un objeto ordinario. Obtenemos una desigualdad geométrica que relaciona la masa ADM, m , el momento angular J y el tamaño del objeto. Para ello tomamos un dato inicial axialmente simétrico y asintóticamente plano y usamos la monotonía de la energía cuasi-local de Geroch en 2-superficies S_t a lo largo de un flujo de curvatura media inversa. Probamos que si elegimos una superficie particular del flujo S_T tal que la misma encierre al objeto, sea convexa y S_t sea convexa $\forall t \geq T$, entonces vale la siguiente desigualdad

$$m \geq m_T + \frac{1}{5} \frac{J^2}{\mathcal{R}_A \mathcal{R}_C^2} \quad (0.2)$$

donde \mathcal{R}_A y \mathcal{R}_C son el radio de área y el radio axial de S_T y m_T es una medida de la energía contenida en S_T . Además obtenemos ejemplos numéricos que testean cuán robustas son las hipótesis que utilizamos y el resultado que obtenemos.

En la última parte del trabajo estudiamos el problema anterior en el caso en que tenemos un agujero negro, el cual es un problema conocido: la desigualdad de Penrose con momento angular. En espaciotiempos con simetría axial se conjetura que la desigualdad de Penrose, $m \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}}$ puede ser reforzada para incluir momento angular $m \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{A}}$ donde m es la masa ADM, J el momento angular y A el área del agujero negro. Probamos una versión de esta desigualdad para horizontes aparentes futuros:

$$m \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi} + \frac{J^2}{\mathcal{R}^2}}. \quad (0.3)$$

donde \mathcal{R} es una medida particular del tamaño que depende de la norma del vector de Killing axial. Consideramos datos iniciales axialmente simétricos, asintóticamente planos y con un borde dado por un horizonte; usamos la monotonía de la energía cuasi-local de Geroch y de la energía cuasi-local de Hawking en 2-superficies a lo largo de un flujo de curvatura media inversa.

Palabras Claves:

Desigualdades Geometricas para Objetos - Desigualdad de Penrose - Momento Angular - Carga - Flujo de Curvatura Media Inversa

Clasificaci on (PACS): 04.20.-q, 02.40.Ky, 03.50.De

Índice general

Introducción	9
1. Carga vs Tamaño en Simetría Esférica	15
1.1. Motivación y conjetura	15
1.2. Resultados	17
1.3. Demostraciones	20
1.3.1. La región exterior	21
1.3.2. La desigualdad	23
1.3.3. Ejemplos	25
1.4. Resultados numéricos	31
1.4.1. Implementación	33
1.4.2. Ejemplo (a)	33
1.4.3. Ejemplo (b)	35
1.4.4. Ejemplo (c)	36
2. Masa, Momento Angular y Tamaño - Objetos Ordinarios	41
2.1. Motivación y conjetura	41
2.2. Resultados	43
2.3. Preliminares	47
2.3.1. IMCF y energía de Geroch	48
2.4. Demostraciones	49
2.5. Resultados numéricos	53
2.5.1. Cálculo de factor conforme Ψ	53
2.5.2. Tratamiento numérico del IMCF	56
2.5.3. Modelos de objeto y resultados	57
2.5.4. Discusión de los resultados numéricos	61
3. Masa, Momento Angular y Tamaño - Agujeros Negros	65
3.1. La desigualdad de Penrose con momento angular	65
3.2. Resultados	70
3.3. Preliminares	78
3.3.1. IMCF y energía de Hawking	80
3.4. Demostraciones	83
3.4.1. Propiedades de \mathcal{R}	83
3.4.2. Demostraciones para superficies minimales	84
3.4.3. Demostraciones para horizontes generales	86

Conclusiones y perspectivas futuras	91
Apéndice	96
A. Datos iniciales para las ecuaciones de Einstein	96
B. Datos iniciales esféricamente simétricos para las ecuaciones de Einstein- Maxwell	98
C. Método Conforme	101
D. Datos iniciales conformemente planos y axialmente simétricos	102
D1. Cantidades físicas	103
E. El Flujo de Curvatura Media Inversa (IMCF)	104
E1. El IMCF en datos conformemente planos	104
F. Argumento heurístico de Penrose con momento angular	106
Bibliografía	108

Introducción

Las ecuaciones de Einstein relacionan la curvatura del espacio-tiempo con el contenido de materia-energía del mismo. En particular si consideramos un objeto compacto en el contexto de la teoría de Relatividad General, cabe preguntarse si es posible encontrar relaciones sencillas entre medidas de tamaño del objeto, y cantidades que representen propiedades físicas del mismo como por ejemplo la masa o el momento angular.

En las últimas décadas se han probado varios resultados importantes en este sentido, es decir se han obtenido demostraciones formales de diversas relaciones entre cantidades físicas de un objeto; en general este tipo de relaciones tomarán la forma de desigualdades. Las cantidades involucradas en dichas desigualdades se definen de forma general, de modo tal que sean válidas para cualquier sistema de referencia, por lo que la validez de las mismas, es decir la demostración formal de dichas relaciones, nos permite obtener información acerca de las propiedades físicas del problema que estemos analizando, las cuales muchas veces quedan ocultas tras la complejidad matemática que trae aparejada la teoría de Relatividad General. Dado el carácter geométrico de la teoría las cantidades físicas involucradas tendrán una definición puramente geométrica, y las relaciones obtenidas son Desigualdades Geométricas.

El ejemplo clásico de desigualdad geométrica es la desigualdad isoperimétrica para curvas cerradas planas

$$L^2 \geq 4\pi A \tag{0.4}$$

donde L es la longitud de una curva cerrada plana C y A es el área encerrada por C . Esta desigualdad tiene un caso de rigidez, la igualdad solo se alcanza cuando la curva C es una circunferencia, es decir que la curva plana con mayor área encerrada es la circunferencia.

Las desigualdades que estudiaremos en este trabajo tendrán algunas similitudes con la desigualdad isoperimétrica, en particular veremos que, al igual que en (0.4), los casos en los que se satura una desigualdad serán casos muy especiales, tanto desde el punto de vista matemático como físico. Un ejemplo claro de este último punto es la positividad de la masa total [70, 78]

$$m \geq 0, \tag{0.5}$$

donde la igualdad se alcanza si y solo si el espacio-tiempo es plano y vacío.

Hasta el momento, el principal énfasis en el área de desigualdades geométricas en Relatividad General ha sido el estudio de agujeros negros y se han demostrado diversas relaciones entre la carga, la masa, el momento angular, el tamaño y la forma del agujero negro, [19, 42, 1, 20, 29, 71, 31], convirtiéndose en un área de investigación

muy activa. Los agujeros negros son objetos que pueden ser descriptos por unos pocos parámetros, como el área del horizonte, la masa, la carga y el momento angular, lo cual los convierte en los mejores candidatos para el estudio de desigualdades para objetos compactos. De aquí en adelante c y G denotan la velocidad de la luz y la constante de gravitación respectivamente.

Entre los ejemplos más importantes de desigualdades para agujeros negros (ver por ejemplo el artículo de revisión [24]) están la desigualdad de Penrose [60] probada por Huisken e Ilmanen en [47],

$$m \geq \frac{c^2}{G} \sqrt{\frac{A}{16\pi}} \quad (0.6)$$

donde m y A son la masa del agujero negro y el área del horizonte, respectivamente; y la desigualdad entre masa y momento angular para espacio-tiempos con simetría axial probada por Dain, [19],

$$m \geq \sqrt{\frac{c}{G}} |J| \quad (0.7)$$

donde J es el momento angular del agujero negro.

Existe una diferencia importante entre estas desigualdades y la desigualdad isoperimétrica, la desigualdad (0.4) es cuasi-local, es decir solo necesitamos analizar la curva y el espacio interior a esta, las desigualdades (0.5), (0.6) y (0.7) son desigualdades globales, esto se debe a que la masa total del espacio tiempo es una cantidad global, la misma se define en términos de cómo decae la métrica en infinito. En este contexto una cantidad se dice que es local cuando la misma está evaluada en un punto del espacio-tiempo, cuasi-local cuando se define en una región acotada, y global cuando se define en una la región es no acotada. Uno de los ejemplos más importantes de desigualdad cuasi-local para agujeros negros es la desigualdad entre área y momento angular para espacio-tiempos axialmente simétricos, demostrada por Dain y Reiris en [20]

$$\frac{c^3}{G} A \geq 8\pi |J|. \quad (0.8)$$

Esta desigualdad solo depende de cantidades definidas sobre una 2-superficie, el horizonte aparente del agujero negro, y para su demostración solo se asumen propiedades locales de dicha superficie. Existen además otro tipo de desigualdades cuasi-locales, que solo involucran cantidades definidas en una región acotada, para las cuales es necesario asumir propiedades de todo el espacio, como por ejemplo el comportamiento de la métrica en infinito. Un ejemplo de esto es el criterio de formación de agujeros negros para espacio-tiempos esféricamente simétricos demostrada por Bizon, Malec y O’Murchadha en [10]: Si tenemos una región esférica U definida en una hipersuperficie espacial esféricamente simétrica y asintóticamente plana (ver apéndice A), y la región U tiene masa cuasi-local m_U y radio geodésico L (largo de una geodésica radial desde el centro), luego si se cumple:

$$m_U \geq \frac{c^2}{G} L \quad (0.9)$$

entonces U contiene una región atrapada (ver ecuación (A10)). Cabe destacar que la obtención de un criterio general para la formación de agujeros negros es uno de los problemas abiertos en el área de desigualdades geométricas. Este problema está

inspirado en la *Conjetura de Hoop* y ha sido largamente estudiado, siendo el resultado anterior la primera demostración formal de dicha conjetura. La Conjetura de Hoop plantea que si uno es capaz de pasar un aro de radio \mathcal{R}_{Hoop} alrededor del objeto U y en cualquier dirección, y tenemos además una medida de la masa cuasi-local de U , m_U , entonces si se cumple:

$$m_U > \frac{c^2}{G} \frac{\mathcal{R}_{Hoop}}{2}. \quad (0.10)$$

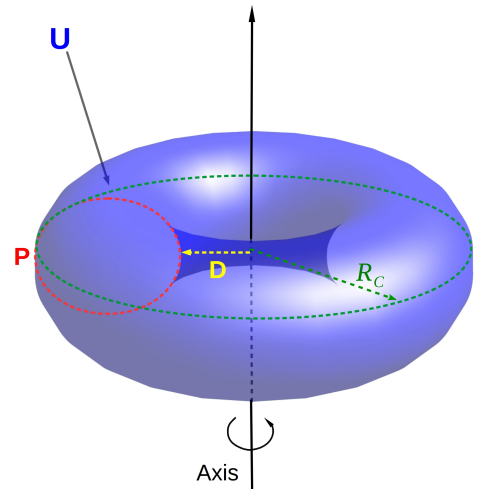
el objeto colapsará y formará un agujero negro.

Los ejemplos anteriores son solo unos pocos de los diversos ejemplos de desigualdades geométricas que se han demostrado para agujeros negros. Cabe preguntarse si es posible probar este mismo tipo de relaciones simples para objetos ordinarios, como una estrella de neutrones, es decir desigualdades entre cantidades geométricas bien definidas que representen las propiedades físicas de un objeto ordinario, su momento angular, masa, tamaño, carga. Los agujeros negros son objetos “simples” en el siguiente sentido, se pueden caracterizar con pocos parámetros y las cantidades geométricas con las que se definen dichos parámetros tienen una interpretación física clara; los objetos astrofísicos ordinarios no son simples, por lo que la respuesta a la pregunta antes planteada no es trivial. Afortunadamente en los últimos años se han logrado varios avances en relación a este punto, [23, 25, 54, 53, 66]. Los ejemplos más representativos de esto son quizás las relaciones entre tamaño, momento angular para objetos probadas por Reiris [66] y por Dain [23].

En [66] Reiris logra demostrar una serie de desigualdades para objetos ordinarios, la más relevante es la desigualdad cuasi-local entre momento angular y tamaño para el caso en el que el objeto es un toro en rotación.

$$\frac{c^3}{G} \left(1 + \frac{P}{\pi D}\right) \mathcal{R}_C^2 \geq 8\pi |J|, \quad (0.11)$$

donde J es el momento angular del objeto, \mathcal{R}_C es el radio del círculo axial más grande dentro del toro, D la distancia al eje de rotación y P el perímetro de la sección del toro. Para esta desigualdad se asume simetría axial y que la métrica decae a la métrica plana en infinito.



Para agujeros negros tenemos una medida de tamaño clara y bien definida: el área del horizonte. Sin embargo, para objetos ordinarios a priori no tenemos una medida de tamaño bien definida. Como podemos ver la desigualdad (0.11) no involucra el área del objeto, pero depende de medidas de tamaño muy simples de interpretar. Aún así, la misma no es válida por ejemplo para una estrella de neutrones dado que solo vale para objetos que no intersecan el eje. En general no es fácil encontrar una buena definición de tamaño, y mucho menos encontrar y probar la relación que tendrá con los parámetros físicos del problema. La medida de tamaño dependerá no solo del problema que estemos tratando, sino también de las herramientas que se utilicen para abordarlo.

En el trabajo [23] Dain demuestra una desigualdad en el espíritu de la anterior, asumiendo hipótesis similares, para objetos que sí pueden intersecar el eje. Si tenemos un objeto ordinario con simetría axial y densidad de materia constante, entonces vale la siguiente desigualdad

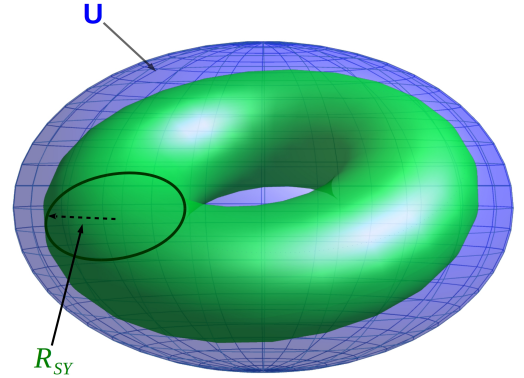
$$\frac{c^3 \pi^3}{G 24} \mathcal{R}_D^2 \geq |J|, \quad (0.12)$$

donde la medida de tamaño \mathcal{R}_D se define como

$$\mathcal{R}_D^2(U) := \frac{4}{\pi^2} \frac{\int_U \sqrt{\eta} dV}{\mathcal{R}_{SY}^2} \quad (0.13)$$

donde U es la región que ocupa el objeto y R_{SY} es el radio Schoen y Yau [68]. Al igual que en la desigualdad anterior esta desigualdad es cuasi-local, tanto J como la medida de tamaño son cantidades cuasi-locales y en ambos casos se necesita asumir que la métrica decae a la métrica plana en infinito espacial.

Dado que la desigualdad (0.12) es válida para objetos que intersecan el eje se espera que la misma se cumpla por ejemplo para una estrella de neutrones, caso en el cual la desigualdad (0.11) no es válida. El problema es que (0.12) no puede ser escrita en términos de las medidas usuales, la medida de tamaño de Schoen y Yau se define en términos del toro más grande que podemos embeber dentro de U .



De los trabajos antes mencionados se infiere que uno de los contextos más adecuados para abordar este tipo de problemas es el de *Datos Iniciales para las Ecuaciones de Einstein*. Un dato inicial está dado por una 3-variedad que tiene asociada una métrica y curvatura extrínseca, junto con dos campos de materia definidos sobre la 3-variedad, la densidad de energía y la densidad de corriente; este conjunto, para ser compatible con las ecuaciones de Einstein, debe satisfacer las ecuaciones de vínculo de Relatividad General, ver apéndice A.

En este trabajo estudiaremos la validez y presentaremos demostraciones formales de desigualdades geométricas relacionando la carga, la masa, el momento angular y el tamaño para objetos compactos aislados, tanto objetos ordinarios como agujeros negros. Para esto analizaremos datos iniciales que representen objetos aislados, y las relaciones que probaremos serán consecuencia de las ecuaciones de vínculo de Relatividad General. Comenzamos estudiando el caso más simple: la desigualdad entre carga y tamaño en simetría esférica. En el capítulo 1 probamos que si tomamos un dato inicial asintóticamente plano y esféricamente simétrico que contiene un objeto cargado, dos veces el radio de área \mathcal{R}_A del objeto es siempre mayor estricto que la carga Q del mismo:

$$\frac{c^2}{\sqrt{G}} 2\mathcal{R}_A > |Q|. \quad (0.14)$$

Para ello resolvemos las ecuaciones de vínculo de Relatividad General en simetría esférica, analizamos los casos con y sin superficies atrapadas, y utilizamos un resultado previo obtenido por Reiris [66]. Probamos también que la desigualdad es ajustada, que el caso de rigidez se alcanza al tomar una secuencia para la cual la carga, la masa y el radio del objeto tienden a cero, y que ningún objeto no trivial puede alcanzar la igualdad. Además discutimos las implicaciones físicas de este resultado y presentamos ejemplos numéricos que ilustran el teorema. Esta parte del trabajo fue realizada en colaboración con Sergio Dain y Omar E. Ortiz, y publicada en [3].

Luego pasamos a un caso más complicado: la relación entre masa, momento angular y tamaño en simetría axial; asumir simetría axial nos permite estudiar casos bastante más generales, pero no tendremos las expresiones simples que tenemos al asumir simetría esférica. El estudio de esta relación estará dividido en dos partes. La primera parte es el estudio de la relación para objetos ordinarios. En el capítulo 2 obtenemos una desigualdad geométrica que relaciona la masa ADM (ver apéndice A), m , el momento angular J y el tamaño del objeto ordinario. Para ello tomamos un dato inicial axialmente simétrico y asintóticamente plano que contenga un objeto ordinario y usamos la monotonía de la energía cuasi-local de Geroch en 2-superficies S_t a lo largo de un flujo de curvatura media inversa (IMCF, por sus siglas en inglés, ver por ejemplo [59], [47]). Probamos que si elegimos una superficie particular del flujo S_T , la cual deberá cumplir ciertas propiedades, tenemos

$$m \geq m_T + \frac{G}{c^4} \frac{1}{5} \frac{J^2}{\mathcal{R}_A \mathcal{R}_C^2} \quad (0.15)$$

donde \mathcal{R}_A y \mathcal{R}_C son el radio de área y el radio axial de S_T y m_T es una medida de la energía contenida en S_T . Dicha superficie, S_T , debe encerrar el objeto, ser convexa, y cumplir que todas las superficies del flujo a partir de ella sean convexas. Además obtenemos ejemplos numéricos que testan cuán robustas son las hipótesis que utilizamos

y el resultado que obtenemos. Esta parte del trabajo fue realizada en colaboración con María E. Gabach-Clement y Omar E. Ortiz, y publicada en [4].

La segunda parte del estudio de la relación entre masa, momento angular y tamaño en simetría axial es el caso de agujeros negros, el cual es un problema ya conocido: la desigualdad de Penrose con momento angular. En espacio-tiempos con simetría axial se conjetura que la desigualdad de Penrose (0.6) puede ser reforzada para incluir momento angular (ver por ejemplo [60]).

$$m \geq \sqrt{\frac{c^4}{G^2} \frac{A}{16\pi} + \frac{1}{c^2} \frac{4\pi J^2}{A}} \quad (0.16)$$

donde m es la masa ADM, J el momento angular y A el área del agujero negro. En el capítulo 3 consideramos datos iniciales axialmente simétricos, asintóticamente planos y con un borde dado por un horizonte, y probamos una versión de esta desigualdad para horizontes aparentes futuros. Más precisamente, obtenemos una cota inferior para la masa ADM en términos del área A de un horizonte aparente, el momento angular y una medida particular del tamaño, \mathcal{R} .

$$m \geq \sqrt{\frac{c^4}{G^2} \frac{A}{16\pi} + \frac{1}{c^2} \frac{J^2}{\mathcal{R}^2}}. \quad (0.17)$$

Para ello usamos la monotonía de la energía cuasi-local de Geroch y de la energía cuasi-local de Hawking en 2-superficies a lo largo de un flujo de curvatura media inversa. Esta parte del trabajo está parcialmente publicada en [5].

Hasta aquí las cantidades físicas estaban expresadas en el sistema de unidades **cgs**, en lo que sigue usaremos unidades geometrizadas, donde $G = c = 1$.

Capítulo 1

Carga vs Tamaño en Simetría Esférica

En este capítulo demostramos que para un objeto cargado en simetría esférica, dos veces el radio de área del objeto es siempre estrictamente mayor que su carga. Además probamos que esta desigualdad es ajustada. Finalmente discutimos las implicaciones físicas de esta desigualdad geométrica y presentamos ejemplos numéricos que ilustran este teorema. Este problema fue estudiado en colaboración con Sergio Dain y Omar E. Ortiz, y fue publicado en la revista *Physical Review D* en el año 2016 [3].

1.1. Motivación y conjetura

Consideremos un objeto con momento angular J y carga eléctrica Q , y sea \mathcal{R} una medida del tamaño del objeto. Se espera que para un objeto ordinario valga la siguiente desigualdad:

$$\frac{Q^4}{4} + c^2 J^2 \leq k^2 \frac{c^8}{G^2} \mathcal{R}^4, \quad (1.1)$$

donde G es la constante de gravitación, c es la velocidad de la luz y k es una constante universal sin dimensiones. Este tipo de desigualdades para objetos han sido presentadas en [23], las mismas están motivadas en una clase similar de desigualdades válidas para agujeros negros (ver el artículo [24] y referencias allí). Algunos resultados preliminares han sido obtenidos en [2] para el caso $Q = 0$ y en [67] para el caso $J = 0$.

Respecto al caso $Q = 0$, en [23] se presentan argumentos heurísticos que respaldan la validez de (1.1). En dicho artículo Dain demuestra una versión de la desigualdad (1.1) válida para objetos de densidad constante; para ello el autor define una medida de tamaño particular adaptada al método mediante el cual aborda el problema. Mas aún Khuri [53] ha logrado demostrar esta desigualdad en un caso mucho más general usando la medida de tamaño definida en [23]. En ambos trabajos las desigualdades obtenidas no son ajustadas ni rígidas.

Recientemente Khuri [54] también ha logrado demostrar una versión general de la desigualdad (1.1) en el caso $J = 0$ usando una medida similar (pero no idéntica) a la medida usada en [23] y [53]. Al igual que el caso anterior, la desigualdad obtenida no es ajustada y tampoco se tiene rigidez.

En las referencias mencionadas la desigualdad ha sido estudiada en dos casos separados $Q = 0$ y $J = 0$. La desigualdad completa (1.1) ha sido presentada por primera vez en [25] usando un argumento heurístico completamente distinto, la misma está motivada en la cotas de Bekenstein para la entropía de un objeto:

$$\frac{\hbar c}{2\pi k_B} \mathcal{S} \leq \sqrt{(\mathcal{E} \mathcal{R}_A)^2 - c^2 J^2} - \frac{Q^2}{2} \quad (1.2)$$

donde \mathcal{S} es la entropía, \mathcal{R}_A es el radio de área de la esfera más chica que encierre al objeto, \mathcal{E} es la energía total, k_B es la constante de Boltzman, \hbar es la constante de Plank reducida y c la velocidad de la luz. El argumento presentado por Dain es el siguiente. En primer lugar, dado que la entropía es siempre no-negativa tenemos que:

$$\frac{Q^4}{4\mathcal{R}_A^2} + \frac{c^2 J^2}{\mathcal{R}_A^2} \leq \mathcal{E}^2. \quad (1.3)$$

Luego, si pensamos en un objeto ordinario, es decir no un agujero negro, la Conjetura de Hoop impone restricciones en la cantidad de materia contenida en un objeto de acuerdo a su tamaño. Por lo tanto tenemos la siguiente cota:

$$\frac{Q^4}{4} + c^2 J^2 \leq \frac{c^8}{G^2} \mathcal{R}_A^2 \mathcal{R}_{Hoop}^2 \quad (1.4)$$

Entonces, si definimos una medida de tamaño \mathcal{R} y una constante k tal que $k\mathcal{R}^4 \geq \mathcal{R}_A^2 \mathcal{R}_{Hoop}^2$ obtenemos la relación (1.1). Esta deducción, además de ser un argumento en favor de la validez de (1.1), pone en evidencia una propiedad importante de la desigualdad: debemos determinar una única constante universal k para ambos casos $Q = 0$ y $J = 0$. Además permite conjeturar el caso de rigidez de (1.1) (ver [25]): la igualdad se alcanza si y solo si la entropía del objeto es cero. En el contexto de Relatividad General esto pareciera decir que la igualdad no puede ser alcanzada por ningún objeto no-trivial.

Nos encontramos con varias dificultades a la hora de obtener una formulación matemática precisa de la desigualdad (1.1). Probablemente la más severa sea la definición de tamaño \mathcal{R} de un objeto en un espacio-tiempo general, la definición apropiada de \mathcal{R} no es fácil de encontrar y más aún no es única. Por fortuna los espaciotiempos con simetría esférica representan una excepción: el radio de área \mathcal{R}_A de la superficie del objeto nos da una definición canónica para \mathcal{R} .

En este capítulo presentaremos resultados relativos al estudio de la desigualdad (1.1) para un objeto aislado en simetría esférica. Consideramos datos iniciales esféricamente simétricos, asintóticamente planos y tal que contengan un objeto con carga $Q \neq 0$. Notemos que si asumimos que todo el dato inicial tiene simetría esférica entonces el momento angular es cero, $J = 0$, y por lo tanto:

$$\frac{Q^4}{4} \leq k^2 \frac{c^8}{G^2} \mathcal{R}^4. \quad (1.5)$$

Suponer que el dato inicial tenga simetría esférica es una hipótesis muy restrictiva, y no es el mejor escenario que podemos tomar si queremos estudiar la validez de 1.1

para un sistema astrofísico real. Los objetos astrofísicos no son esféricos, y en general no tienen una carga eléctrica total. Estudiar este caso más simple reduce el problema a uno en el cual podemos probar la desigualdad y más aún obtener un resultado ajustado; si bien probamos varias propiedades importantes que no serán válidas en el caso general, el resultado obtenido permite inferir el contexto y las hipótesis necesarias para estudiarlo.

El primer punto importante es determinar la constante k correcta. Determinamos que, en simetría esférica y usando el radio de área como medida de tamaño, la constante más ajustada es:

$$k = 2. \tag{1.6}$$

Luego, probamos que la desigualdad (1.5) no solo es ajustada sino que además es estricta: la igualdad no puede ser alcanzada por ningún objeto no trivial. Mas aún la igualdad solo se alcanza en el límite asintótico en el cual el radio, la carga y la masa del objeto tienden a cero. Esto concuerda con el argumento presentado en [25]: la igualdad en (1.5) implica que la entropía del objeto es cero. En particular los agujeros negros no pueden alcanzar la igualdad dado que tienen entropía positiva, y por lo tanto existe un salto entre la desigualdad para objetos ordinarios y la desigualdad para agujeros negros, recordemos que la igualdad para agujeros negros $\mathcal{R}_A = Q$ se alcanza para un agujero negro de Reissner-Nordstrom extremo. Este salto está dado por una diferencia en un factor 2 entre ambas desigualdades, y es quizás el resultado más relevante de esta sección.

Finalmente probamos que el contexto apropiado para estudiar esta desigualdad es considerar un objeto aislado que no esté contenido en un agujero negro. Dentro del agujero negro la desigualdad (1.5) puede ser violada. Por lo tanto podemos inferir que la definición más apropiada de un objeto ordinario en este contexto es considerar una región esférica en un dato asintóticamente plano que no esté dentro de una superficie atrapada.

El plan de este capítulo es el siguiente. En la sección 1.2 presentaremos nuestro resultado principal, dado por el teorema 1.1, y discutimos en detalle las implicaciones físicas del mismo. En la sección 1.3 demostramos el teorema 1.1. En la sección 1.4 presentamos los ejemplos numéricos que ilustran los distintos puntos del teorema 1.1. Finalmente en el apéndice B resumimos propiedades importantes de datos iniciales con simetría esférica que nos fueron útiles para abordar el problema. En lo que sigue usaremos unidades geometrizadas, donde $G = c = 1$.

1.2. Resultados

Nos restringimos entonces a un dato inicial $(\Sigma, \bar{g}, K; E^i, B^i, \mu, j^i)$ esféricamente simétrico, asintóticamente plano y tal que Σ tiene topología \mathbb{R}^3 ; lo llamaremos *dato inicial regular esféricamente simétrico*. Este tipo de datos iniciales han sido estudiados en profundidad por Guven y Ó Murchadha [34], [35], [36]; resumimos las propiedades y definiciones básicas de estos datos en el apéndice B. Supondremos que el dato contiene una bola U centrada en el origen, que la bola tiene carga Q y que el exterior de la misma es una región de electro-vacío; asumimos además que dentro de U se satisface

la *condición de energía dominante* (A7), conocida como DEC por sus siglas en inglés. Sea ∂U el borde de U y \mathcal{R}_A el radio de área de ∂U .

Diremos que una región entre dos bolas concéntricas es *no-atrapada* si $\vartheta^+ > 0$ y $\vartheta^- > 0$ en dicha región; será una región *atrapada* si $\vartheta^+\vartheta^- < 0$, ver ecuación (A10), el borde de dicha región será un horizonte aparente y satisface $\vartheta^+\vartheta^- = 0$. Denotamos con \mathcal{R}_A^H el radio de área de dicho horizonte. Obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.1. *Sea $(\Sigma, \bar{g}, K; E^i, B^i, \mu, j^i)$ un dato inicial esféricamente simétrico y asintóticamente plano. Supongamos que el dato contiene una bola U con radio \mathcal{R}_A y carga Q , asumimos $\mathcal{R}_A > 0$ y $Q \neq 0$, y que fuera de U el dato satisface las ecuaciones de vínculo de electro-vacío y supongamos además que en U se satisface la DEC. Entonces*

(I) *Si la región exterior a U es no-atrapada, vale la desigualdad:*

$$2\mathcal{R}_A > |Q|. \quad (1.7)$$

(II) *Si existe un horizonte en la región exterior a U , entonces el radio del horizonte \mathcal{R}_A^H satisface la desigualdad:*

$$\mathcal{R}_A^H \geq |Q|. \quad (1.8)$$

La igualdad en (1.8) se alcanza para el horizonte del agujero negro de Reissner-Nordström extremo.

Además, tenemos que

- (a) *La desigualdad (1.7) es ajustada en el siguiente sentido: existe una secuencia de datos iniciales que satisfacen las hipótesis del ítem (I) tal que en el límite se alcanza la igualdad en (1.7). En este límite el radio, la carga y la masa total de la secuencia tienden a cero.*
- (b) *La hipótesis de que el dato sea asintóticamente plano es necesaria: existen ejemplos de datos iniciales que no son asintóticamente planos pero satisfacen el resto de las hipótesis de (I), para los cuales la desigualdad (1.7) no se cumple.*
- (c) *En el caso (II) existen ejemplos para los cuales el radio \mathcal{R} de la bola, la cual está dentro del horizonte, no cumple la desigualdad (1.7).*

Observaciones y Comentarios

La desigualdad (1.8) ha sido probada para horizontes generales (sin asumir nada de la simetría) en [21], es una desigualdad cuasi-local (no se asume que el dato sea asintóticamente plano) y la igualdad solo se alcanza para agujeros negros extremos.

Siendo que los agujeros negros son los objetos “más compactos”, uno tendería a pensar que, para una cantidad de carga fija, el objeto que alcance el mínimo radio posible sea un agujero negro. Llama la atención que el teorema 1.1 sugiere que, al menos en simetría esférica, esta intuición es errónea, para una carga fija Q , el ínfimo radio posible es $|Q|/2$ (y no $|Q|$ como en el caso de agujeros negros). Sin embargo el punto a (y el ejemplo a) nos dice que este radio ínfimo se alcanza en el límite asintótico

donde radio, carga y masa total del objeto (que no está dentro de un agujero negro) tienden a cero. Un objeto no trivial siempre satisface la desigualdad estricta (1.7). Esto es consistente con la discusión presentada en [25]: la igualdad en (1.7) implicaría que la entropía del objeto es cero. Los agujeros negros (aún los agujeros negros extremos) tienen siempre entropía distinta de cero, por lo tanto debe existir un salto entre las desigualdades (1.7) (para objetos) y (1.8) (para agujeros negros), dado que esta última se satura para agujeros negros extremos. El teorema 1.1 muestra que ese salto es un factor 2.

La definición canónica de radio en simetría esférica es el radio de área \mathcal{R}_A de la superficie de la esfera. Existe sin embargo otra elección posible para el radio de una bola U : la distancia geodésica al centro, usualmente conocido como radio geodésico. Este radio tiene la desventaja de que en general no puede ser usado para obtener este tipo de desigualdades para agujeros negros. Las desigualdades para agujeros negros involucran cantidades que solo dependen en la geometría del horizonte, como el área o la forma del horizonte, ver [30],[66]. El interior del agujero negro no parece tener ningún significado físico en este contexto. En particular el radio geodésico y también las medidas de tamaño usadas en [23], [54] y [53] dependen de la geometría del interior del objeto, y por lo tanto en principio no pueden ser aplicadas a agujeros negros. En el teorema 1.1, por primera vez, la misma medida de tamaño es usada para ambos, objetos y agujeros negros. Finalmente notamos que para algunas familias de datos esféricamente simétricos se puede probar que el radio geodésico es más grande que el radio de área (ver [10] [34]) y por lo tanto para esos casos la desigualdad (1.7) también se satisface para el radio geodésico.

Como mencionamos anteriormente, para demostrar la desigualdad (1.8) para agujeros negros no es necesario hacer ninguna suposición sobre el comportamiento asintótico del dato inicial. El resultado solo depende de la geometría local del horizonte. A partir de esto podríamos pensar que un resultado similar podría también ser válido para un objeto regular U , es decir utilizar hipótesis que solo hagan referencia al interior de la bola U (que sea regular y cumpla la DEC) y a la región cercana a la superficie de la esfera ∂U (que el borde sea no-atrapado). Sin embargo el punto b (y el ejemplo b) nos muestra que esto no es posible, la hipótesis de que el dato inicial sea asintóticamente plano es una condición necesaria para asegurar la validez de (1.7). El punto c (y el ejemplo c) nos muestran que dentro del agujero negro, una bola U con carga Q puede ser comprimida hasta alcanzar un radio \mathcal{R}_A que viola la desigualdad (1.7). Por lo tanto la hipótesis de que la región exterior a U tiene que ser no-atrapada también es una condición necesaria. Ambos ejemplos, c y b, nos muestran que el contexto más adecuado para estudiar la desigualdad (1.7) en el caso general (es decir sin hacer suposiciones sobre la simetría) es el siguiente: tomar un dato inicial regular y asintóticamente plano, y considerar una región U que no esté contenida en un agujero negro. En este contexto, la región U será entonces el “objeto ordinario” que queremos estudiar. Estas son justamente las hipótesis usadas en los resultados presentados en [53] y [54]. Notemos además que estas hipótesis son también necesarias para la validez de las cotas para la entropía conjeturadas por Bekenstein (ver [9] [13] y referencias allí).

Los ejemplos analíticos presentados, a, b y c, son fundamentales para el resultado, los mismos muestran que la desigualdad (1.7) es ajustada y tiene un caso de rigidez, y que todas las hipótesis que asumimos para su demostración son necesarias. Estos ejemplos se generan a partir de cáscaras delgadas, es decir asumimos que los campos de materia son distribuciones, lo cual no es una muy buena aproximación desde el punto de vista físico, una cáscara siempre tiene espesor. Los desarrollos numéricos (sección 1.4 del capítulo 1) se generan utilizando densidades de materia y corriente continuas, con lo cual podemos obtener datos iniciales que modelan objetos más realistas. Además, cambiando ligeramente los parámetros, obtenemos familias enteras de datos iniciales suaves que comparten las mismas características que los ejemplos a, b y c.

En [53] y [54] Khuri obtiene un criterio para la formación de agujeros negros en términos de la concentración de momento angular y carga que tenga una región. En el espíritu del resultado general, del teorema 1.1 obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.2. *Consideremos un dato inicial regular, con simetría esférica y asintóticamente plano. Asumamos que existe una bola U con radio \mathcal{R}_A finito tal que fuera de U el dato satisface las ecuaciones de vínculo de electro-vacío y supongamos además que en U se satisface la DEC. Sea Q la carga total de U . Si se cumple*

$$2\mathcal{R} \leq |Q|, \tag{1.9}$$

entonces existen superficies atrapadas que encierran la región U

El ejemplo c muestra que este corolario no es vacío. Notemos que en dicho ejemplo el dato inicial no es time-symmetric ni tampoco maximal.

1.3. Demostraciones

La demostración del teorema está dividida naturalmente en tres partes, presentadas en las secciones 1.3.1, 1.3.2 y 1.3.3.

Asumimos que la región exterior de la bola U es una solución de las ecuaciones de Einstein de electro-vacío, la cual es asintóticamente plana y esféricamente simétrica. Por lo tanto del Teorema de Birkhoff's (ver por ejemplo [61, 76]) deducimos que esta región está descrita por la métrica de Reissner-Nordström, la cual depende solo de dos parámetros: la masa total y la carga. La suposición de que el dato tenga simetría esférica nos permite simplificar enormemente el problema dándonos esta caracterización tan simple de la región exterior. Sin embargo no necesitamos utilizar el teorema de Birkhoff's completo, lo único que necesitamos es calcular las expansiones nulas de las esferas en términos de la masa total y la carga. Por completitud en la sub-sección 1.3.1 presentamos una demostración de este resultado; esta prueba se construye puramente en base a las ecuaciones de vínculo, en contraste con la prueba estándar del teorema de Birkhoff's en la cual se utilizan las ecuaciones de Einstein completas.

En la sub-sección 1.3.2 probamos las desigualdades (1.7) y (1.8). El ingrediente clave para ello es la monotonía de la energía de Hawking (equivalente a la energía de Misner-Sharp en simetría esférica) en regiones no-atrapadas, y fue introducido por Reiris en [66].

Finalmente en la sub-sección 1.3.3 construimos los tres ejemplos importantes a, b y c, los cuales generamos usando cáscaras esféricas cargadas.

1.3.1. La región exterior

Consideremos las ecuaciones de vínculo (B16)–(B17) en la región exterior a la bola U . La suposición de que dicha región de electro-vacío es esféricamente simétrica implica que $j = 0$, $\mu_M = 0$ y $\rho = 0$. Primero resolvemos las ecuaciones de vínculo de Maxwell (B19) en la región exterior, para el campo eléctrico obtenemos:

$$E = \frac{Q}{r^2}, \quad (1.10)$$

donde Q , dada por (B22), es la carga total de la bola U . Para el campo magnético obtenemos una solución similar y Q en (1.7) sera la suma de las cargas magneticas y electricas de U , pero en general suponemos que no hay cargas magnéticas y por lo tanto no tenemos campo magnético en simetría esférica. Entonces, si calculamos la densidad de energía en la región exterior tenemos:

$$\mu = \frac{Q^2}{8\pi r^4}, \quad (1.11)$$

y por lo tanto las ecuaciones de vínculo (B16)–(B17) se reducen a

$$K_r (K_r + 2K_l) - \frac{1}{r^2} (r'^2 + 2rr'' - 1) = \frac{Q^2}{r^4}, \quad (1.12)$$

$$K_r' + \frac{r'}{r} (K_r - K_l) = 0. \quad (1.13)$$

Primero observemos que de la ecuación (1.13) tenemos:

$$r'K_l = (K_r r)'. \quad (1.14)$$

Multiplicamos la ecuación (1.12) por $r^4 r'$ y usamos la relación previa (1.14) para obtener

$$r' r^4 K_r^2 + r^4 2K_r (K_r r)' - r'^3 r^2 - 2r^3 r' r'' + r' r^2 - r' Q^2 = 0, \quad (1.15)$$

reorganizamos los términos en (1.15) y obtenemos

$$\left((K_r r)^2 - r'^2 \right) r^2 r' + (r^2 - Q^2) r' + \left(((K_r r)^2)' - 2r' r'' \right) r^3 = 0. \quad (1.16)$$

Definimos la siguiente función $f(l)$:

$$f = \frac{r^2}{4} \vartheta^+ \vartheta^- = r'^2 - (K_r r)^2, \quad (1.17)$$

donde ϑ^+ y ϑ^- son las expansiones nulas definidas por (B23). Notemos que el primer término en (1.16) es proporcional a f . Calculamos f'

$$f' = 2r' r'' - ((K_r r)^2)'. \quad (1.18)$$

y tenemos que f' es proporcional al último término en (1.16).

Luego, usando (1.17) y (1.18) podemos escribir (1.16) de la siguiente forma:

$$-r^2 r' f - r^3 f' + (r^2 - Q^2) r' = 0. \quad (1.19)$$

Agrupamos los primeros dos términos en (1.19) como una derivada total y finalmente obtenemos:

$$-r^2 (fr)' + (r^2 - Q^2) r' = 0. \quad (1.20)$$

De esta forma la ecuación (1.20) puede ser integrada de forma exacta y la función f está dada por

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (1.21)$$

donde M es una constante.

De esta forma hemos obtenido una expresión explícita para el producto de las expansiones nulas $\vartheta^+ \vartheta^-$ en términos de los parámetros M y Q :

$$\vartheta^+ \vartheta^- = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \frac{4}{r^2}. \quad (1.22)$$

Cabe destacar esta fórmula puede ser obtenida a través del teorema de Birkhoff, pero a diferencia dicho teorema, en el cual se utilizan las ecuaciones de Einstein en una 4-variedad, la deducción que presentamos se basa únicamente en las ecuaciones de vínculo del dato inicial.

Ahora bien la energía de Misner-Sharp se define como:

$$\mathcal{E}_{MS} = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{4} \vartheta^+ \vartheta^-\right). \quad (1.23)$$

Por lo tanto usando la expresión (1.22) podemos escribir \mathcal{E}_{MS} en términos de la constante M y la carga Q .

$$\mathcal{E}_{MS} = M - \frac{Q^2}{2r}. \quad (1.24)$$

Esta fórmula, junto con la expresión para $\vartheta^+ \vartheta^-$ (1.22), son las propiedades importantes del dato que necesitaremos en los próximos pasos de la demostración. La posibilidad de obtener relaciones simples entre los parámetros que caracterizan la solución es la principal ventaja que nos ofrece la simetría esférica.

Hasta aquí todos los cálculos son locales y valen para cualquier región de electrovacío y simetría esférica. Si además asumimos que la región exterior es asintóticamente plana, la constante M que aparece en (1.21) es la masa total (Masa ADM) del dato inicial. Una forma simple de probar esta relación es usar la energía de Misner-Sharp. Una propiedad muy conocida de la energía \mathcal{E}_{MS} es que en infinito la misma es igual a la masa total m del dato inicial (ver por ejemplo [41])

$$m = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{MS}. \quad (1.25)$$

Luego, si tomamos este límite en la ecuación (1.24), obtenemos $M = m$, y por lo tanto para datos asintóticamente planos la expresión final para \mathcal{E}_{MS} está dada por

$$\mathcal{E}_{MS} = m - \frac{Q^2}{2r}. \quad (1.26)$$

1.3.2. La desigualdad

En esta sección probaremos las desigualdades (1.7) y (1.8). En la sección anterior 1.3.1 hemos probado que el producto de las expansiones nulas (i.e. la función f definida por (1.22)) está caracterizada por solo dos parámetros: la masa M y la carga eléctrica Q . Trataremos de forma separada los casos $M \geq |Q|$ y $M < |Q|$.

Caso $M \geq |Q|$

Asumamos que que el borde de la bola ∂U se encuentra ubicado en el valor l_0 de la distancia geodésica al centro, esto es $\mathcal{R}_A = r(l_0)$. La región exterior se define entonces en términos de $r(l)$ con $l \geq l_0$.

Si $M \geq |Q|$, luego f tiene dos raíces reales (o una raíz doble en el caso $M = |Q|$) en

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (1.27)$$

Notemos que $r_+ \geq r_-$.

Tenemos entonces dos posibilidades para la región exterior: o bien existe al menos un valor l_1 de la coordenada l (con $l_1 \geq l_0$) tal que $r(l_1) = r_+$, o bien no existe tal valor de coordenada. Consideremos el primer caso; dado que $f = 0$ en r_+ , la región exterior no será una región no-atrapada y nos encontramos en el caso (II) del teorema.

El horizonte en este caso se ubica de la siguiente forma. Si solo existe un valor de coordenada l_1 tal que $r_+ = r(l)$, entonces esa coordenada define el horizonte. Si hay varios valores de la coordenada l que alcanzan el valor r_+ tomamos el más exterior de todos ellos, es decir si $r(l_1) = r(l_2) = r_+$ y $l_1 > l_2$, tomamos l_1 . Sea entonces l_1 la coordenada con la que ubicamos el horizonte aparente. Dado que suponemos que el dato inicial es asintóticamente plano tenemos que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} r(l) = \infty. \quad (1.28)$$

Luego $r(l) > r_+$ para todo $l > l_1$ (pues sino tenemos una contradicción, dado que asumimos que l_1 es valor más grande de l que satisface $r(l) = r_+$). Por lo tanto no hay superficies atrapadas en la región $l > l_1$ y $r(l_1)$ es efectivamente el horizonte aparente del dato inicial. El radio de área es $\mathcal{R}_A^H = r_+$, entonces

$$\mathcal{R}_A^H = M + \sqrt{M^2 - Q^2} \geq |Q|. \quad (1.29)$$

y con esto queda demostrada la desigualdad (1.8) del teorema 1.1. Notemos que la igualdad en (1.29) se alcanza para el agujero negro de Reissner-Nordström extremo (i.e. $M = |Q|$).

Consideremos ahora el segundo caso; si no existe ningún valor l_1 de l , con $l_1 \geq l_0$, tal que $r(l_1) = r_+$, luego de la ecuación (1.28) tenemos que $r(l) > r_+$ para todo $l \geq l_0$. Por lo tanto la región exterior es no-atrapada en este caso y nos encontramos en el caso ((I)) del teorema 1.1. Por lo tanto hemos probado que

$$\mathcal{R}_A = r(l_0) > r_+ \geq |Q|. \quad (1.30)$$

Es importante notar que en este caso vale una desigualdad más fuerte que (1.7), dado que el factor 2 está ausente en (1.30).

Notemos que en el argumento previo no hemos mencionado el radio r_- , pero hemos usado que $r_- \leq r_+$. Por ejemplo la bola U puede estar dentro de la región $0 < r < r_-$ la cual es no-atrapada. Sin embargo, dado que $r_- \leq r_+$ y además asumimos la condición (1.28) si este fuera el caso tenemos que siempre va a existir un valor $l_1 \geq l_0$ tal que $r(l_1) = r_+$.

Caso $M < |Q|$

El caso $M < |Q|$ es el más relevante y ha sido probado por Reiris en su trabajo [66]. En lo que sigue esencialmente reproduciremos la demostración dada por Reiris, el ingrediente crucial es que la energía de Misner-Sharp (1.23) es monótonamente creciente en regiones no-atrapadas (ver [49]). Esto es, si asumimos que en la región $l_1 \leq l \leq l_2$ se satisface la DEC y que $\vartheta^- > 0$, $\vartheta^+ > 0$, entonces

$$\mathcal{E}_{MS}(l_1) \leq \mathcal{E}_{MS}(l_2). \quad (1.31)$$

Primero probamos el siguiente resultado, el cual es interesante en sí mismo:

Lema 1.3. *Consideremos una bola regular U tal que se satisface la DEC en U . Si la superficie de la bola ∂U es no-atrapada, luego la energía de Misner-Sharp ∂U es no negativa*

$$\mathcal{E}_{MS}(\partial U) \geq 0. \quad (1.32)$$

Notemos que en este lema no estamos asumiendo que la bola esté embebida en un dato asintóticamente plano, este es un resultado cuasi-local que solo depende del interior de la bola.

Demostración. Sea l_0 el radio geodésico de la bola U , esto es $\mathcal{R}_A = r(l_0)$. Para probar (1.32) utilizamos el siguiente argumento. Tenemos dos casos: o bien el interior de la bola es no-atrapado (i.e. $\vartheta^+ > 0$, $\vartheta^- > 0$ en U), o bien tiene regiones atrapadas. Consideremos el primer caso, es bien conocido que en el límite $l \rightarrow 0$ la energía de Misner-Sharp es no negativa (ver por ejemplo [74] sección 6.1.2), recordemos que U es regular. Entonces, como la región U es no-atrapada, usamos la ecuación (1.31) con $l_1 = 0$ y $l_2 = l_0$, y obtenemos

$$0 \leq \mathcal{E}_{MS}(0) \leq \mathcal{E}_{MS}(l_0). \quad (1.33)$$

Para el segundo caso, dado que supusimos que la superficie ∂U es no-atrapada, por continuidad tenemos que en una región cercana al borde de U también tendremos $\vartheta^+\vartheta^- > 0$. Luego, si el interior de la bola tiene regiones atrapadas tiene que existir un radio $r(l_1)$, con $l_0 > l_1$, tal que $\vartheta^+\vartheta^- = 0$. De la expresión (1.23) tenemos que la energía en $r(l_1)$ es no negativa

$$0 \leq \mathcal{E}_{MS}(l_1) = \frac{r(l_1)}{2}. \quad (1.34)$$

y como la región $l_1 < l \leq l_0$ es no-atrapada podemos usar (1.31) y obtenemos:

$$0 \leq \mathcal{E}_{MS}(l_1) \leq \mathcal{E}_{MS}(l_0). \quad (1.35)$$

□

Continuando con la demostración, notemos que dado que asumimos que $M < |Q|$ toda la región exterior es no-atrapada, y por lo tanto nos encontramos en el caso (I) del teorema 1.1. Calculamos explícitamente la energía \mathcal{E}_{MS} del borde de la bola ∂U , usamos la fórmula (1.24), el lema 1.3, y obtenemos

$$\mathcal{E}_{MS}(\partial U) = M - \frac{Q^2}{2\mathcal{R}_A} \geq 0. \quad (1.36)$$

Esta última desigualdad implica:

$$\mathcal{R}_A \geq \frac{Q^2}{2M}. \quad (1.37)$$

y usando que $M < |Q|$ en (1.37) obtenemos la desigualdad deseada:

$$2\mathcal{R}_A \geq Q. \quad (1.38)$$

Para finalizar probamos que la desigualdad (1.38) es estricta, esto es, ningún objeto material puede alcanzar la igualdad en (1.38). Argumentamos por contradicción, supongamos que existe una bola U tal que $2\mathcal{R} = |Q|$. Por suposición la región exterior es no-atrapada y por lo tanto la función f es positiva en dicha región. Tenemos dos casos: $M \geq Q$ o $M < |Q|$. Para el primero ya hemos probado anteriormente que vale la desigualdad estricta (1.30), y por lo tanto no es posible cumplir la condición $2\mathcal{R} = |Q|$ para este caso. Consideremos entonces el segundo caso $M < |Q|$. Calculamos la energía \mathcal{E}_{MS} en el borde ∂U :

$$\mathcal{E}_{MS}(\partial U) = M - \frac{Q^2}{2\mathcal{R}} = M - |Q| < 0, \quad (1.39)$$

donde hemos usado que $2\mathcal{R} = |Q|$. Entonces, la energía es negativa y esto contradice el lema 1.3.

1.3.3. Ejemplos

En esta sección construimos los ejemplos de datos iniciales correspondientes a los puntos (a), (b) y (c) del teorema 1.1. Todos los ejemplos y gran parte de la intuición que nos llevó a formular el teorema 1.1 se extrajeron del estudio de cáscaras delgadas cargadas hecho por Boulware [12]. En esta referencia se estudia y caracteriza toda la dinámica de cáscaras delgadas cargadas en un espacio-tiempo esférico. Sin embargo, en esta sección construiremos datos iniciales (no nos ocuparemos de todo el espacio-tiempo) resolviendo las ecuaciones de vínculo de una forma auto-contenida; haremos contacto con el enfoque espacio-temporal solo para visualizar mejor los ejemplos.

(a) Consideremos la siguiente métrica esférica:

$$\bar{g} = dl^2 + r^2(l)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.40)$$

tal que la función radial está dada por

$$r(l) = \begin{cases} l & \text{para } l \leq \mathcal{R}_A, \\ r_{RN}(l) & \text{para } l \geq \mathcal{R}_A, \end{cases} \quad (1.41)$$

donde $\mathcal{R}_A > 0$ es una constante arbitraria y $r_{RN}(l)$ es la función radio de área correspondiente a la métrica de Reissner-Nordström con masa M y carga Q . Esto es, $r_{RN}(l)$ es la solución a la siguiente ecuación diferencial:

$$r'_{RN}(l) = \left(1 - \frac{2M}{r_{RN}} + \frac{Q^2}{r_{RN}^2} \right)^{1/2}. \quad (1.42)$$

La constante de integración en (1.42) se fija pidiendo que $r_{RN}(\mathcal{R}_A) = \mathcal{R}_A$ y por lo tanto la función $r(l)$ definida por (1.41) es continua.

Tomamos entonces un dato inicial con la métrica (1.40) y con cero curvatura extrínseca (time-symmetric). La métrica (1.40) describe una cáscara delgada cargada de radio \mathcal{R}_A : el interior $l \leq \mathcal{R}_A$ es plano y la región exterior está dada por la métrica de Reissner-Nordström. La métrica depende de tres parámetros: (\mathcal{R}, M, Q) , pero si asumimos que vale la DEC para la métrica estos parámetros no son libres. Imponer la condición dominante de energía para un dato time-symmetric es equivalente a pedir $R \geq 0$, donde R es el escalar de curvatura de \bar{g} . Para calcular R primero tenemos que calcular la primera y segunda derivadas de la función $r(l)$ definida en (1.41). Para la primer derivada obtenemos

$$r'(l) = \Theta(l - \mathcal{R}) \left(\left(1 - \frac{2M}{r_{RN}} + \frac{Q^2}{r_{RN}^2} \right)^{1/2} - 1 \right) + 1, \quad (1.43)$$

donde $\Theta(x)$ es la función escalón definida por $\Theta(x) = 0$ para $x < 0$ y $\Theta(x) = 1$ para $x > 0$. Para la segunda derivada tenemos:

$$r''(l) = \delta(l - \mathcal{R}) \left(\left(1 - \frac{2M}{r_{RN}} + \frac{Q^2}{r_{RN}^2} \right)^{1/2} - 1 \right) + \Theta(l - \mathcal{R}) \left(\frac{M}{r_{RN}^2} - \frac{Q^2}{r_{RN}^3} \right), \quad (1.44)$$

donde δ es la función delta de Dirac.

Usando (1.43), (1.44) y la expresión (B13) para el escalar de curvatura R de la métrica (1.40) obtenemos

$$R = 16\pi\sigma\delta(l - \mathcal{R}) + \Theta(l - \mathcal{R}) \frac{2Q^2}{r_{RN}^4}, \quad (1.45)$$

donde hemos definido

$$\sigma = \frac{1}{4\pi l_0} \left(1 - \left(1 - \frac{2M}{\mathcal{R}} + \frac{Q^2}{\mathcal{R}^2} \right)^{1/2} \right). \quad (1.46)$$

La condición de energía dominante $R \geq 0$ implica $\sigma \geq 0$, y esto impone restricciones en el valor que pueden tomar los parámetros que definen el dato inicial.

Una forma muy conveniente de expresar esta relación es la siguiente. Definimos la masa propia de la cáscara como:

$$m_p = 4\pi\mathcal{R}^2\sigma, \quad (1.47)$$

Notemos que entonces la DEC es equivalente a $m_p \geq 0$. Luego de (1.46) tenemos que

$$M = m_p + \frac{Q^2 - m_p^2}{2\mathcal{R}}. \quad (1.48)$$

Para hacer contacto con [12] notemos que, dado que el dato es time-symmetric, la derivada del radio de la cáscara respecto del tiempo propio es cero en el dato inicial, y por lo tanto la 4-velocidad de la cáscara (u^μ en la notación de [12]) es ortogonal a una hipersuperficie espacial que define el dato inicial. Luego, usando las ecuaciones (A6) con $t^\mu = u^\mu$ concluimos que σ , definida por (1.46) es idéntica a σ definida por la ecuación (10) en [12]. Por lo tanto la masa propia m_p definida por (1.47) es idéntica a la definida en [12]. Notemos además que la masa m_p se conserva a lo largo de la evolución (ver [12]). La relación (1.48) es un caso especial de la ecuación (16) en [12], donde la derivada temporal del radio es cero. Es importante resaltar que solo hemos utilizado las ecuaciones de vínculo y la DEC para deducir la relación (1.48).

Para construir el ejemplo (a) imponemos además la condición $M < |Q|$. El espacio tiempo correspondiente a este dato inicial está dado por una cáscara que se contrae hasta un radio mínimo y luego se vuelve a expandir hasta infinito, ver figura 1.1. La región exterior corresponde a un espacio-tiempo de Reissner-Nordström súper-extremo. La secuencia de datos iniciales que usaremos para saturar la desigualdad (1.7) se construye tomando la siguiente secuencia de parámetros, donde $n \geq 1$ es un número natural

$$\mathcal{R}_A^n = \frac{1}{n}, \quad Q^n = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}, \quad m_p^n = \frac{1}{2n^3}. \quad (1.49)$$

Notemos que con estos parámetros la secuencia de datos iniciales satisface la DEC, dado que $m_p^n > 0$. La masa total se calcula usando la fórmula (1.48), obtenemos

$$M^n = \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{8n^5}. \quad (1.50)$$

y por lo tanto tenemos:

$$M^n - Q^n = \frac{8n^2 - 8n^3 - 1}{8n^5} < 0. \quad (1.51)$$

Luego, no hay ninguna superficie atrapada en la región exterior y nos encontramos entonces en el caso (I) del teorema 1.1. Finalmente también tenemos que

$$\frac{Q^n}{2\mathcal{R}_A^n} = 1 - \frac{1}{2n}. \quad (1.52)$$

con lo cual vemos que cada elemento de la secuencia satisface la desigualdad (1.7), lo cual es necesario siendo que cada dato inicial de la secuencia satisface

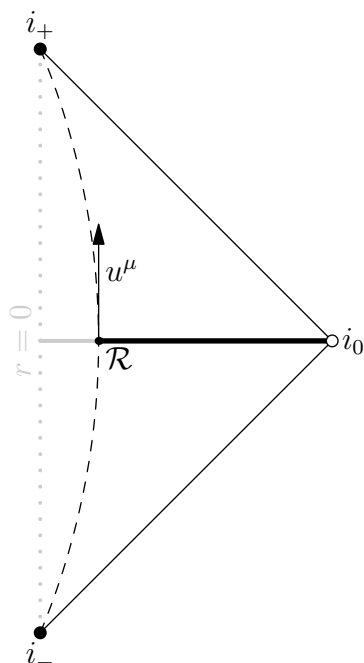


Figura 1.1: La línea discontinua corresponde a la trayectoria de la cáscara. La cáscara tiene un radio infinito en el pasado i_- , se contrae hasta un radio mínimo \mathcal{R}_A y luego se vuelve a expandir hasta alcanzar un radio infinito en i_+ . La región exterior a la cáscara corresponde a un espacio-tiempo de Reissner-Nordström súper-extremo y la región interior a la cáscara, dibujada en gris, es plana. La superficie espacial del dato inicial que tomamos para el Ejemplo (a) está representada por la línea gruesa horizontal y la velocidad de la cáscara es ortogonal al dato inicial.

las hipótesis del caso (1). La ecuación (1.52) implica que la igualdad en (1.7) es alcanzada en el límite $n \rightarrow \infty$, y por lo tanto con esto hemos probado que la desigualdad (1.7) es ajustada. Más aún, en el límite $n \rightarrow \infty$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_A^n = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \lim_{n \rightarrow \infty} m_p^n = 0. \quad (1.53)$$

- (b) El segundo ejemplo se construye usando la misma métrica (1.40), pero con una elección de parámetros diferente. Tomamos $m_p > 0$ y

$$|Q| > 2\mathcal{R}. \quad (1.54)$$

Usando (1.48) y la suposición (1.54) deducimos que

$$M > |Q|. \quad (1.55)$$

Sumado a esto tomamos \mathcal{R}_A tal que

$$\mathcal{R} < r_-, \quad (1.56)$$

donde r_- está dado por (1.27). Tomamos r_1 tal que $\mathcal{R} < r_1 < r_-$ y consideramos la métrica (1.40) definida hasta r_1 . Este dato inicial, por construcción, no es asintóticamente plano dado que tiene un borde en r_1 . Notemos que en este caso la constante M no es la masa ADM del dato.

La desigualdad (1.7) no se cumple, dado que hemos impuesto (1.54), aún siendo que no hay superficies atrapadas en la región exterior a U , desde ∂U hasta r_1 . Este dato inicial se encuentra dentro de la región III del espacio-tiempo de Reissner-Nordström, ver figura 1.2.

- (c) Finalmente el ejemplo correspondiente a (c) se construye en base al ejemplo previo (b), pero para este caso extendemos el dato inicial hasta alcanzar el infinito espacial. El dato inicial se muestra en la figura 1.3. Notemos que este dato inicial no es time-symmetric. Para construir el dato inicial tomamos dos constantes r_1 y r_2 tal que satisfagan $\mathcal{R} < r_1 < r_- < r_+ < r_2$. La métrica del dato estará dada por (1.40) pero ahora la función $r(l)$ se define según:

$$r(l) = \begin{cases} l & \text{para } l \leq \mathcal{R}, \\ r_{RN}(l) & \text{para } l \geq \mathcal{R}, \end{cases} \quad (1.57)$$

pero ahora $r_{RN}(l)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$r'_{RN}(l) = \sqrt{f + (K_r r)^2}, \quad (1.58)$$

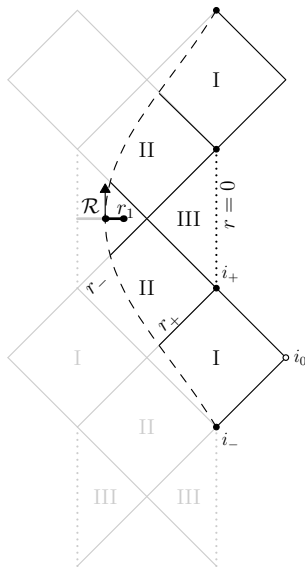


Figura 1.2: El dato inicial del ejemplo (b) está dado por una hipersuperficie time-symmetric y con borde, localizada en la región III del espacio-tiempo de Reissner-Nordström.

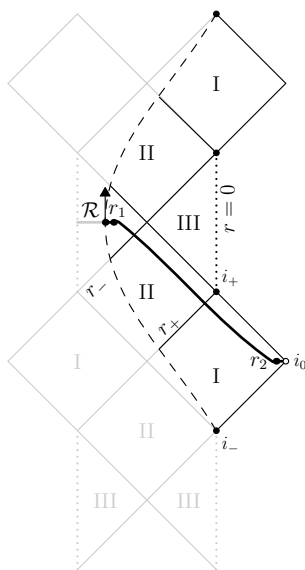


Figura 1.3: El ejemplo (c) se construye extendiendo la hipersuperficie del ejemplo (b) hasta que la misma alcance el infinito espacial i_0 en la región I . El dato inicial solo es time-symmetric en las regiones $r < r_1$ y $r_2 < r$.

donde f está dada por (1.22) y la función K_r se elige teniendo en cuenta lo siguiente. La función f es negativa en la región $r_- < r < r_+$ y su valor mínimo

$$f_{min} = 1 - \frac{M^2}{Q^2}, \quad (1.59)$$

se alcanza para el radio $r_{min} = Q^2/M$. Elegimos entonces la función $K_r(r)$ como una función suave, de soporte compacto en $[r_1, r_2]$, y tal que en el intervalo $[r_-, r_+]$ cumpla

$$(K_r r)^2 > \frac{M^2}{Q^2} - 1. \quad (1.60)$$

La condición (B12) nos asegura que el radicando en el lado derecho de (1.58) es siempre positivo, por lo tanto

$$r'_{RN} > 0, \quad (1.61)$$

y entonces podemos integrar la ecuación (1.58) y obtener la función $r_{RN}(l)$, la cual será monótonamente creciente con l . Para terminar de completar la elección del dato calculamos la otra componente de la curvatura extrínseca K_l mediante la ecuación de vínculo de momento (1.13), esto es

$$K_l = \frac{r_{RN}}{r'_{RN}} K'_r + K_r. \quad (1.62)$$

Notemos que la ecuación (1.62) solo tiene sentido si $r'_{RN} > 0$. En resumen hemos construido un dato inicial asintóticamente plano que contiene una bola U , la cual está dentro del horizonte aparente (ubicado en r_+) y tal que la desigualdad (1.7) no se cumple para la bola.

1.4. Resultados numéricos

En la sección 1.3.3 presentamos ejemplos de datos iniciales que exhiben propiedades cruciales de la desigualdad (1.7). Estos ejemplos se construyen en términos de cáscaras delgadas cargadas, por lo tanto tienen una curvatura distribucional. En esta sección presentamos ejemplos de datos iniciales calculados numéricamente, los cuales tendrán propiedades similares a los anteriores pero generados utilizando distribuciones de materia suaves y compactas.

Estos ejemplos son relevantes por al menos dos razones. En primer lugar, cambiando ligeramente los parámetros, obtenemos familias enteras de datos iniciales suaves que comparten las mismas características que los ejemplos a, b y c. Es decir, los ejemplos numéricos que obtenemos son genéricos y no dependen de un ajuste fino de los parámetros. En segundo lugar, el método y los cálculos que presentamos aquí pueden utilizarse para testar desigualdades geométricas similares con definiciones de radio diferentes, como la que se presenta en [54].

Para resolver las ecuaciones de vínculo (B16)–(B17) procedemos de la siguiente forma. Primero utilizamos el vínculo de momento (B17) para calcular K_l como una función de K_r y j :

$$K_l = \frac{r}{r'} K'_r + K_r - 4\pi \frac{r}{r'} j. \quad (1.63)$$

Notemos que esta ecuación solo tiene sentido si $r' > 0$, esta condición se satisface en todos nuestros ejemplos. Reemplazando la expresión anterior en el vínculo Hamiltoniano (B16) tenemos:

$$3K_r^2 + 2\frac{r}{r'}K_r'K_r - 8\pi\frac{r}{r'}K_rj + \frac{1}{r^2}(r'^2 + 2rr'' - 1) = 8\pi\mu. \quad (1.64)$$

Luego, tomando las funciones $K_r(l)$, $j(l)$ y $\mu(l)$ como datos libres, resolvemos la ecuación (1.64) para $r(l)$ imponiendo las condiciones de regularidad de la métrica como condiciones iniciales.

$$r(0), \quad r'(0) = 1. \quad (1.65)$$

Para los test que presentamos es útil tener una expresión integral para la energía \mathcal{E}_{MS} , esta fórmula ha sido obtenida en [34],

$$\mathcal{E}_{MS} = 4\pi \int_0^l dl r^2 (\mu r' + jrK_r). \quad (1.66)$$

Imponemos

$$j = 0, \quad (1.67)$$

y que la contribución no-electromagnética a la densidad de energía es nula

$$\mu_M = 0. \quad (1.68)$$

Luego tenemos

$$\mu = \frac{1}{8\pi}E^2. \quad (1.69)$$

El campo eléctrico debe satisfacer las ecuaciones de vínculo de Maxwell (B19). Para resolver esta ecuación tomamos una función suave $Q(l)$ tal que $Q(l) = O(l^3)$ en el origen y sea constante en $l \geq l_0$, donde l_0 representa el radio geodésico del objeto.

Finalmente la ecuación que debemos resolver es la siguiente:

$$\begin{aligned} r'' + \frac{1}{2r} \left((r')^2 - 1 \right) &= -\frac{Q^2}{2r^3} + \frac{3}{2}r(K_r)^2 + \frac{r^2}{r'}K_rK_r', \\ r(0) = 0, \quad r'(0) &= 1, \end{aligned} \quad (1.70)$$

donde Q y K_r son funciones de l dadas. En [35] se hace la observación que este problema de valores iniciales no solo captura soluciones que representan datos asintóticamente planos, sino que, por ejemplo, si la carga está suficientemente concentrada cerca del origen la solución $r(l)$ alcanza un máximo y luego regresa a cero en una distancia geodésica finita. Si por el contrario r crece mucho lejos de la región que contiene al soporte de K_r y de la densidad de carga, el lado derecho de la ecuación se anula asintóticamente y la solución va como $r' \simeq 1$ y $r'' \simeq 0$, es decir que tenemos un dato asintóticamente plano. Ambos comportamientos podrán verse en los ejemplos numéricos.

1.4.1. Implementación

La ecuación (1.70) es una ecuación diferencial ordinaria (ODE) cuasi-lineal simple y puede ser escrita como un sistema de primer orden definiendo $u = r$ y $v = r'$,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1-v^2}{2u} - \frac{1}{2u^3}Q^2(l) + \frac{3}{2}uK_r^2(l) + \frac{v}{v}K_r(l)K_r'(l) \\ \end{pmatrix}, \quad (1.71)$$

con la condición inicial

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.72)$$

La distancia geodésica, l , puede ser discretizada con un paso pequeño δl y el problema puede ser resuelto con un método estándar para resolver ODE. Calculamos las soluciones numéricas (1.71)-(1.72) usando un método de Runge-Kutta estándar, de 4 orden de precisión. Chequeamos la convergencia punto a punto de nuestro código calculando un cociente de precisión que depende en tres soluciones numéricas del mismo problema calculadas usando tres pasos diferentes, δl , $2\delta l$ y $4\delta l$ (ver [57]). Este cociente, como función de l , salvo por picos aislados, debe mantenerse cercano al valor 2^4 si el código es correcto y el paso es suficientemente chico tal que el error de truncado es $\mathcal{O}(\delta l^4)$ para las tres soluciones. Una solución calculada numéricamente será una aproximación de una solución exacta de 4 orden de precisión si esta última es una función de l suave, al menos C^6 . Esto se debe a que el coeficiente en el término principal en el error de truncamiento es proporcional a la sexta derivada de la solución exacta. Para obtener una solución con esta suavidad es necesario prescribir un “forcing” que sea al menos C^4 . Para lograr esto introducimos un polinomio monótono obtenido mediante interpolación de Hermite,

$$\begin{aligned} p(a, b, x) &= (1+w)^5(1-5w+15w^2-35w^3+70w^4), & w &= \frac{x-b}{b-a}, \\ q(c, d, x) &= 1-p(c, d, x). \end{aligned} \quad (1.73)$$

Para $a \leq x \leq b$, $p(a, b, x)$ es un polinomio monótonamente creciente que une 0 con 1 de una forma suave C^4 . Para $c \leq x \leq d$, $q(c, d, x)$ es un polinomio monótonamente decreciente que une 1 con 0 de una forma suave C^4 .

La integral con la que calculamos la energía (1.66) es aproximada usando la regla de Simpson compuesta de orden 4 de precisión. Además, en la región exterior la energía de Misner-Sharp y la constante M satisfacen (1.24), esto nos permite calcular M para cualquier solución que alcance al menos una porción de la región exterior.

1.4.2. Ejemplo (a)

Calculamos algunos de los primeros miembros de una sucesión de soluciones regulares del problema (1.70), $\{r_n(l)\}$, $n = 2, 3, \dots$, la cual satura la desigualdad (1.7) en el límite $n \rightarrow \infty$. La sucesión de datos iniciales que obtenemos debe satisfacer que la carga total Q_n se anule en el límite $n \rightarrow \infty$, de forma tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} 2\mathcal{R}_n/Q_n = 1$, por lo tanto también el radio de área del objeto debe anularse en ese límite.

Todas las soluciones de esta sucesión corresponden a datos iniciales time-symmetric, esto se obtiene imponiendo la condición $K_r = 0$ en (1.70) para cada miembro de la sucesión.

Elegimos una sucesión que satisface:

$$Q_n = \frac{2}{n}, \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln(n)}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (1.74)$$

Por lo tanto en el límite $n \rightarrow \infty$ la misma va como:

$$\frac{2\mathcal{R}_n}{Q_n} = 1 + \frac{1}{\ln(n)}, \quad (1.75)$$

notemos entonces que esta sucesión de soluciones satura la desigualdad (1.7) en dicho límite, pero con una convergencia más lenta que la presentada en el ejemplo a de la sección anterior. Esta elección obedece a la necesidad de trabajar con datos para los cuales el método utilizado tienen mayor precisión.

Usando el polinomio $p(a, b, x)$, definido en (1.73), definimos la función $Q(l)$ como

$$Q(l) = \begin{cases} Q_n p(a, l_0, l), & \text{si } l < l_0, \\ Q_n, & \text{si } l \geq l_0, \end{cases} \quad a = 0, \quad l_0 > 0, \quad Q_n = \frac{2}{n}, \quad (1.76)$$

donde l_0 es el radio geodésico de la distribución de carga. En el origen la función $Q(l)$ se anula como $\mathcal{O}(l^5)$.

Para calcular cada solución de la sucesión, con índice n , el valor de la carga total Q_n y el radio geodésico l_0 son parámetros de entrada del programa. El radio de área del objeto cargado $\mathcal{R}(l_0)$ solo se obtiene después de calcular la solución, por lo tanto los parámetros de entrada se deben ajustar para obtener el valor deseado $\mathcal{R}(l_0) = \mathcal{R}_n$. Para ajustar el valor l_0 empezamos con dos soluciones que tengan la misma carga $Q(l)$, definida en (1.76), una con un valor menor de \mathcal{R} y la otra con un valor mayor de \mathcal{R} . Luego utilizamos el método de bisección en l_0 para obtener la raíz de la función

$$g(l_0) = \mathcal{R}(l_0) - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln(n)}. \quad (1.77)$$

Detenemos las iteraciones cuando el valor de $\mathcal{R}(l_0)$ alcanza el valor \mathcal{R}_n con diez dígitos correctos. La Tabla 1.1 muestra la masa y los parámetros de entrada relevantes que obtenemos para los primeros miembros de la sucesión de soluciones.

Para ilustrar el comportamiento de las soluciones de esta sucesión mostramos dos gráficos. La Figura 1.4 muestra los gráficos de $2r(l)$ y $Q(l)$ de la primera ($n = 2$) y última ($n = 8$) de las soluciones (ver Tabla 1.1) en una región pequeña alrededor del dominio en el que está definida la carga. La Figura 1.5 muestra los gráficos de $r'(l)$ para todas las soluciones de la Tabla 1.1 en una región más extensa. Estos últimos gráficos muestran que las soluciones satisfacen la condición de borde. Notemos que $|r'| \leq 1$, lo cual vale siempre para datos iniciales time-symmetric, ver [35].

n	Q_n	δl	l_0	masa
2	1	1×10^{-3}	1.346158647537232	0.680983
3	2/3	1×10^{-3}	$7.422593683004379 \times 10^{-1}$	0.554538
4	1/2	5×10^{-4}	$5.176483931019902 \times 10^{-1}$	0.449646
5	2/5	5×10^{-4}	$3.981155012268573 \times 10^{-1}$	0.375407
6	1/3	5×10^{-4}	$3.235192440450192 \times 10^{-1}$	0.321540
7	2/7	2×10^{-4}	$2.724420906044543 \times 10^{-1}$	0.280995
8	1/4	1×10^{-4}	$2.352533040568233 \times 10^{-1}$	0.249473

Cuadro 1.1: Parámetros y masa para los primeros miembros de la sucesión definida por (1.74).

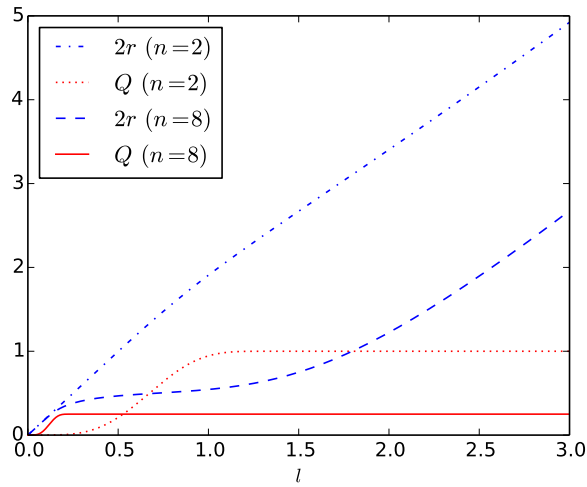


Figura 1.4: $2r(l)$ y $Q(l)$ para las soluciones con $n = 2$ y $n = 8$. El borde de los objetos está ubicado en correspondencia con los valores de l_0 dados en la Tabla 1.1.

1.4.3. Ejemplo (b)

En esta sección presentamos una solución numérica representando un dato inicial time-symmetric. La distribución de carga está dada por una cascara esférica con soporte en un intervalo finito $0 < a \leq l \leq l_0$. La carga $Q(l)$ está dada por

$$Q(l) = \begin{cases} 0, & \text{si } l \leq a, \\ Qp(a, b, l), & \text{si } a < l < l_0, \\ Q, & \text{si } l_0 \leq l, \end{cases} \quad a = 0.8, \quad l_0 = 1.0, \quad Q = 2.1. \quad (1.78)$$

La solución obtenida con estos parámetros viola la desigualdad (1.7); la carga Q excede el valor $2\mathcal{R}$ por más del 6%. La Figura 1.6 muestra el gráfico de esta solución. Cerca del valor $l = 2.85200$, el radio de área $r(l)$ vuelve a alcanzar el valor cero, en este punto la ecuación se vuelve singular y la solución diverge. Como se espera, la función $r'(l)$ se anula fuera del objeto (el máximo de $r(l)$) cerca del valor $l_1 = 1.72169$, con

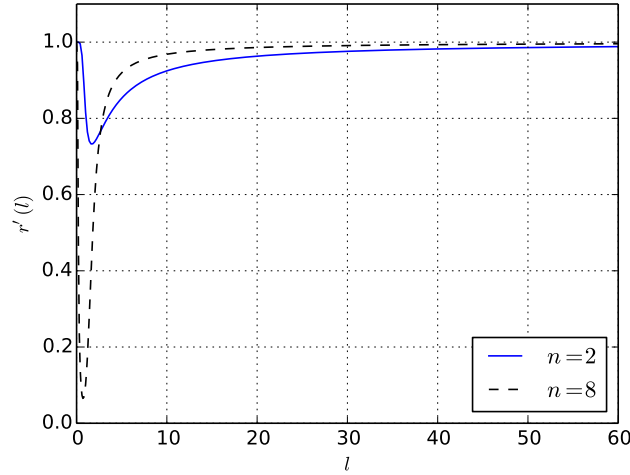


Figura 1.5: Gráficos de $r'(l)$ para las soluciones con $n = 2$ y $n = 8$ de la Tabla 1.1, los cuales muestran que el dato es asintóticamente plano.

$r(l_1) = 1.229588$, mostrando que existe una superficie atrapada encerrando el objeto. Sin embargo, cerca del borde del objeto (i.e. en la región $l_0 \leq l < l_1$) no hay superficies atrapadas.

Para testar la solución calculamos además la masa M , utilizando la fórmula (1.24), y el radio r_- , usando (1.27). Notemos que en este ejemplo, M no es la masa ADM del dato inicial, dado que el mismo no es asintóticamente plano. Obtenemos $M = 2.408077371$ y vemos que el valor de r_- coincide con $r(l_1) = 1.229588$ en siete dígitos.

1.4.4. Ejemplo (c)

En esta sección modificamos el dato usado para obtener la solución del ejemplo b, esto se realiza en base a los ejemplos analíticos de la sección 1.3.3. La distribución de carga es la misma que en el ejemplo 1.4.3, y está dada por (1.78), pero ahora tomamos una curvatura extrínseca no-nula, $K_r(l)$, de soporte compacto; esta solución ya no representa un dato inicial time-symmetric. Tomamos $K'_r(l)$ como una función suave C^4 :

$$K'_r(l) = (-2.0) \times \begin{cases} 0, & \text{si } 1.2 \leq l, \\ p(1.2, 1.75, l), & \text{si } 1.2 < l \leq 1.75, \\ q(1.75, 2.3, l), & \text{si } 1.75 < l \leq 2.3, \\ -p(2.3, 2.85, l), & \text{si } 2.3 < l \leq 2.85, \\ -q(2.85, 3.4, l), & \text{si } 2.85 < l < 3.4, \\ 0, & \text{si } 3.4 \leq l, \end{cases} \quad (1.79)$$

donde p y q son los polinomios definidos en (1.73). $K_r(l)$ se define como la integral exacta de $K'_r(l)$, en la Figura 1.7 mostramos el gráfico de la función $K_r(l)$ obtenida.

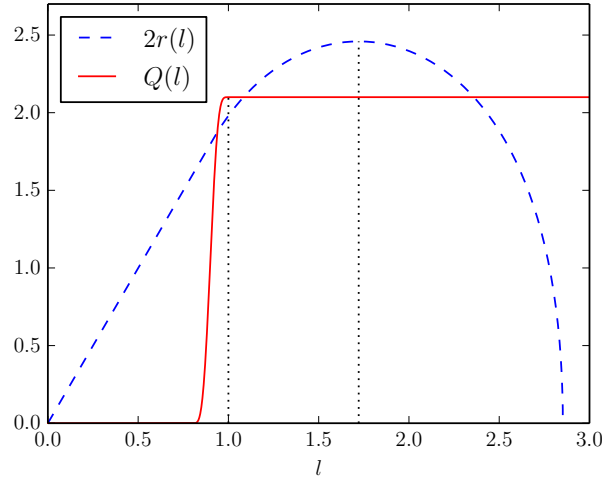


Figura 1.6: $2r(l)$ y $Q(l)$ para la solución del ejemplo b, la cual no es asintóticamente plana. Las líneas punteadas verticales indican el valor de $l_0 = 1.0$ (el borde del objeto) y $l_1 = 1.22959$ donde se anula r' . La desigualdad (1.7) se viola en un 6%.

La solución obtenida, $r(l)$, es monótonamente creciente y coincide con la solución del ejemplo 1.4.3 en $l \leq 1.2$ (el problema de valores iniciales es exactamente el mismo en esta región). Para valores grandes de l la curvatura extrínseca tiende cero, obteniendo así un dato asintóticamente plano. La Figura 1.8 muestra el comportamiento de esta solución.

El dato inicial que obtenemos contiene un horizonte que encierra al objeto. La Figura 1.9 muestra el gráfico de $\vartheta^+(l)$. Esta función tiene dos raíces localizadas en $l^- = 1.58085$ y $l^+ = 2.85231$, estos valores corresponden a los radios $r(l^-) = 1.22959$ y $r(l^+) = 3.58657$. La masa calculada para esta solución es $M = 2.408077371$ y la carga total es $Q = 2.1$, recordemos que esta última es un parámetro de entrada del programa. Con estos datos, utilizando la ecuación (1.27), podemos calcular los valores r_- y r_+ , y vemos que los mismos coinciden con los valores $r(l^-)$ y $r(l^+)$, en siete y seis dígitos respectivamente. El radio del objeto, al igual que en el ejemplo anterior, viola la desigualdad (1.7), y el radio del horizonte, $\mathcal{R}_A^H = r_+$ claramente satisface la desigualdad (1.8).

Finalmente, usando la fórmula (1.63) calculamos K_l numéricamente y con esto calculamos el valor de la traza de la curvatura extrínseca, dada por $K = K_l + 2K_r$. Esta función es distinta de cero, y por lo tanto el dato inicial no es maximal.

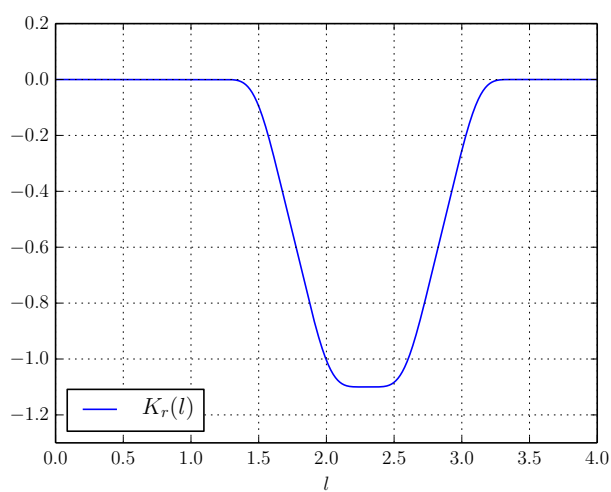


Figura 1.7: Gráfico de la función $K_r(l)$, la cual es C^5 y tiene soporte compacto en $[1.2, 3.4]$.

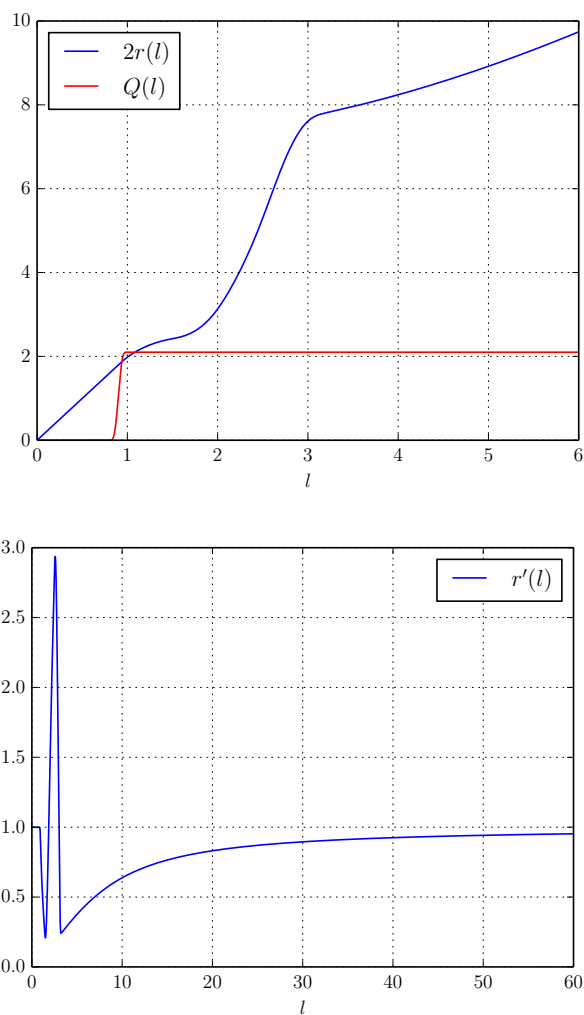


Figura 1.8: $2r(l)$ y $Q(l)$ (arriba), $r'(l)$ en un dominio grande (abajo), para la solución obtenida con (1.78) y (1.79).

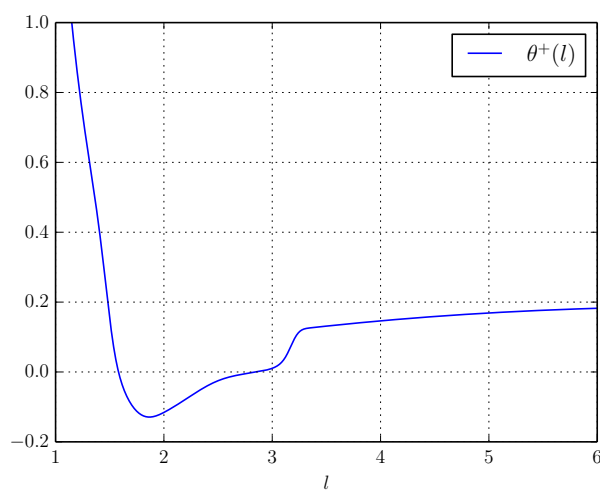


Figura 1.9: Gráfico de $\vartheta^+(l)$ para la solución del ejemplo 1.4.4.

Capítulo 2

Masa, Momento Angular y Tamaño para Objetos Ordinarios

Obtenemos una desigualdad geométrica que relaciona la masa ADM, el momento angular y el tamaño para un objeto ordinario aislado y axialmente simétrico. Usamos la monotonía de la energía cuasi-local de Geroch, definida sobre 2-superficies, a lo largo de un flujo de curvatura media inversa. Además presentamos ejemplos numéricos que nos permiten evaluar cuán robustas son las hipótesis que utilizamos, y testar cuán lejos de ser ajustada está la desigualdad que demostramos. Este problema fue abordado en colaboración con María E. Gabach-Clement y Omar E. Ortiz, y fue publicado en la revista *Classical and Quantum Gravity* en el año 2017 [4].

2.1. Motivación y conjetura

Nuestro interés es relacionar la rotación de un objeto ordinario (es decir su momento angular) con la energía total o masa total (la masa ADM, ver apéndice A9) para sistemas con simetría axial. La relación que probaremos está inspirada en el tratamiento de estrellas de neutrones para el límite en el que su rotación es lenta. Como se discute en [37], las estrellas de neutrones en rotación son axialmente simétricas, y si rotan lentamente las perturbaciones que genera la rotación en la estructura estelar son cuadráticas en la velocidad angular, y por lo tanto cuadráticas en el momento angular. En límite en el que vale la teoría de Newton uno puede escribir la energía total de una estrella como la suma de dos términos, el primero incluye la energía gravitatoria e interna de la estrella, denotada con E_0 , y el segundo es la energía rotacional

$$E \approx E_0 + \frac{J^2}{2I} \quad (2.1)$$

donde J e I son el momento angular y el momento de inercia. En 1967 Hartle [38] utilizó un método perturbativo para calcular la corrección a primer orden para la energía de una estrella de neutrones en el contexto de relatividad general y encontró una expresión similar a (2.1). En dicho trabajo E_0 representa la energía total de una estrella de neutrones que no está en estado de rotación, y el término cuadrático en el momento angular es la contribución de la energía rotacional a primer orden.

Desde 1960's (ver [73] para más detalles y referencias) esta ecuación se ha estudiado extensamente, y se han encontrado diferentes relaciones entre la energía cinética y la energía interna y total. No es nuestra intención abordar este problema, sino buscar relaciones geométricas entre parámetros físicos bien definidos para un objeto ordinario que rota, como por ejemplo la ya mencionada estrella de neutrones.

En la teoría Newtoniana no tenemos ninguna restricción para los valores que pueden tomar las cantidades que aparecen en la ecuación (2.1), dado que no estamos considerando ninguna ecuación de estado particular para la materia, ni ningún proceso mecánico relacionado con estas. Sin embargo en Relatividad General la *Conjetura de Hoop* impone cotas a la cantidad de masa cuasi-local que puede tener un objeto.

Para incorporar esta restricción en (2.1), empezamos usando la definición de Momento de Inercia de U , respecto al eje axial, proveniente de la teoría de Newton.

$$I := \int_U \mu \rho^2 dV \quad (2.2)$$

donde μ es la densidad de materia y ρ es la distancia (euclidiana) al eje de rotación. Luego podemos aproximar la expresión anterior como

$$I \approx m_U \mathcal{R}_C^2 \quad (2.3)$$

donde m_U es la masa (cuasi-local) Newtoniana estándar contenida en el objeto y $\mathcal{R}_C = \text{máx } \rho$ es el radio de circunferencia o radio axial. Por ejemplo si pensamos en un esferoide en rotación el momento de inercia es $2/5 m_U \mathcal{R}_C^2$. Luego juntando (0.10) y (2.3) podemos estimar la siguiente cota para la energía total de un *objeto que no colapsa*

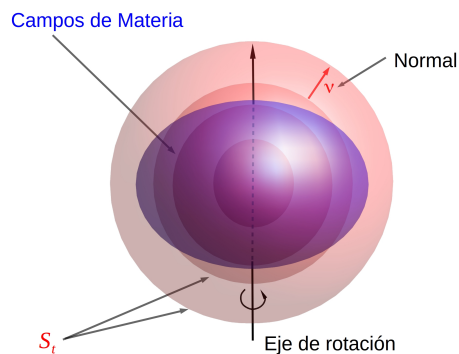
$$E \gtrsim E_0 + \frac{G}{c^2} \frac{J^2}{\mathcal{R} \mathcal{R}_C^2}. \quad (2.4)$$

A pesar de ser un argumento informal, esta expresión nos da una cota inferior para la cantidad de energía total que tendrá un sistema en rotación en términos del momento angular y dos medidas de tamaño \mathcal{R}_{hoop} y \mathcal{R}_C . Es interesante notar que estas dos cantidades vienen de contextos diferentes. La *distancia* a la que está localizada la materia respecto al eje de rotación, representada por el radio axial \mathcal{R}_C en este argumento, pareciera ser la medida de tamaño relevante a la hora de describir la energía rotacional (al menos desde la experiencia que proviene de la mecánica Newtoniana). En otras palabras, si queremos considerar el efecto de la rotación la medida de tamaño relevante será aquella que evalúe cuán dispersa o localizada está la materia respecto al eje de rotación/simetría. Por otro lado, la medida de tamaño proveniente de la Conjetura de Hoop, \mathcal{R} , evalúa cuán dispersa o localizada en toda dirección está la materia.

En este capítulo presentaremos una relación similar a (2.4) para un objeto ordinario, aislado, que rota y tiene simetría axial, dentro del contexto de Relatividad General.

Más relacionado con nuestro problema, Dain usó el IMCF y la energía de Hawking para obtener una desigualdad entre masa ADM y carga eléctrica para objetos ordinarios [25]. Nuestro objetivo en este capítulo es analizar qué puede decirnos el IMCF acerca de objetos ordinarios que rotan, siendo la principal dificultad la inclusión explícita del momento angular en las relaciones geométricas que nos provee el flujo.

Las principales herramientas que usaremos para abordar el problema son el flujo de curvatura media inversa (de ahora en más IMCF por sus siglas en inglés, ver apéndice E1) y la energía de Geroch, las cuales han probado ser muy útiles para obtener desigualdades en Relatividad General, como la desigualdad de Penrose Riemanniana [47].



Este capítulo está organizado de la siguiente forma: En la sección 2.2 presentamos nuestras hipótesis y el teorema principal, junto con comentarios y observaciones sobre las implicaciones físicas del resultado obtenido. En la sección 2.4 repasamos el IMCF y las propiedades del mismo que serán importantes para nuestro trabajo, y presentamos la demostración de nuestro resultado principal. Finalmente en la sección 2.5 mostramos soluciones numéricas de la ecuación del flujo que nos permiten evaluar cuán robustas son las hipótesis que utilizamos, y testar cuán lejos de ser ajustada esta la desigualdad que demostramos.

2.2. Resultados

Siguiendo [59], consideramos un dato inicial completo $(\Sigma, \bar{g}, K; \mu, j)$, que sea maximal, asintóticamente plano y axialmente simétrico, y que satisfaga las ecuaciones de vínculo de Einstein (A4), (A5); asumimos además que los campos satisfacen la DEC, $\mu \geq |j|$ (ver apéndice A).

Dado que estamos interesados en objetos ordinarios, en oposición a agujeros negros, supondremos además que el dato inicial no tiene superficies atrapadas (ver ecuación (A10)). Notar que en particular esto implica que no habrá superficies minimales en el dato, lo cual es una condición necesaria para que la ecuación de IMCF sea suave. La definición de objeto en rotación que usaremos es la siguiente.

Definición 2.1. *Objeto Ordinario: Conjunto abierto U en Σ , que es axialmente simétrico, compacto, conexo, tal que la densidad de corriente j tiene soporte compacto dentro de U , y tal que U no tiene superficies atrapadas.*

Supongamos que existe un flujo de curvatura media inversa (IMCF) suave en (Σ, \bar{g}) , esto es, una familia de superficies S_t que genera una foliación suave de Σ ; que tiene topología esférica y tiende a esferas en infinito. Nuestra intención es relacionar la región U con las superficies S_t dadas por el IMCF y obtener así una desigualdad que involucre cantidades físicas de la región U . Para ello usaremos que el IMCF se mantiene axialmente simétrico para un dato con simetría axial, siempre y cuando la superficie inicial del flujo S_0 tenga simetría axial. Además de las ecuaciones de vínculo se puede ver que para un dato maximal (o cuya curvatura cumpla ciertas propiedades

similares) y que cumpla la DEC, el escalar de curvatura es positivo $\bar{R} \geq 0$, y por lo tanto la energía de Geroch es no-decreciente. Es importante notar también que si bien la condición de que exista un IMCF suave es bastante fuerte es posible que dicha condición pueda ser relajada. Algunas partes del método que usamos no necesitan suavidad y pueden repetirse usando la formulación débil del flujo definida por Huisken e Ilmanen [47]. Dado que estamos más interesados en obtener un resultado con una interpretación física bien clara, por simplicidad consideraremos solo el caso suave en este trabajo.

Además de la masa ADM m , las cantidades físicas y geométricas en las que estamos interesados son el momento angular de Komar $J(S)$, el radio de área, y el radio axial de las superficies S_t :

$$J(S_t) = \frac{1}{8\pi} \int_{S_t} K_{ij} \eta^i \nu^j dS, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{R}_A(S_t) := \sqrt{\frac{A_t}{4\pi}}, \quad \mathcal{R}_C(S_t) := \frac{\mathcal{C}(S_t)}{2\pi} \quad (2.6)$$

donde η^i es el vector de Killing asociado a la simetría axial, A_t es el área de S_t y $\mathcal{C}(S_t)$ la longitud del círculo axialmente simétrico más grande que podemos tomar en S_t .

Demostramos el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Sea $(\Sigma, \bar{g}, K; \mu, j^i)$ un dato inicial maximal, asintóticamente plano, con simetría axial, y que contiene un objeto en rotación U ; satisface la condición de energía dominante y no tiene superficies atrapadas. Supongamos que existe un IMCF de superficies S_t que parte de un punto sobre el eje de simetría dentro del objeto y que es suave, y sea T tal que para todo $t \geq T$ las superficies S_t son convexas y S_T encierra al objeto. Entonces*

$$m \geq m_T + \frac{1}{5} \frac{J^2}{\mathcal{R}_A \mathcal{R}_C^2} \quad (2.7)$$

donde J , \mathcal{R}_A y \mathcal{R}_C son el momento angular, el radio de área y el radio axial de S_T respectivamente y

$$m_T := \frac{1}{16\pi} \int_0^{\mathcal{R}_A} d\xi \int_{S_\xi} \bar{R} dS \quad (2.8)$$

donde ξ representa la coordenada radio de área.

Observaciones y Comentarios

$$m \geq m_T + \frac{G}{c^4} \frac{1}{5} \frac{J^2}{\mathcal{R}_A \mathcal{R}_C^2}$$

A diferencia de la desigualdad entre carga y tamaño, la desigualdad (2.2) es global dado que involucra a la masa ADM. Vimos que la energía de Geroch parece ser una medida de masa cuasi-local muy apropiada para estudiar esta desigualdad ya que converge a la masa ADM en los datos iniciales que estamos considerando. Además

está directamente relacionada con la curvatura media de la superficie y por lo tanto su derivada a lo largo del flujo se relaciona con el escalar de curvatura, al cual pudimos relacionar con el momento angular. Una pregunta natural sería entonces si es posible definir otra cantidad cuasi-local \mathcal{E} , que cumpla ambas propiedades, es decir $\mathcal{E} \rightarrow m$ y $\mathcal{E} \sim H^2$ tal que produzca una desigualdad mejor o más ajustada.

La desigualdad es lineal en la masa ADM y cuadrática en el momento angular como resultado de la dependencia lineal de $d\mathcal{E}_G/dt$ con el escalar de curvatura \bar{R} y la dependencia cuadrática de la integral de \bar{R} sobre S_t con el momento angular. Esto debe ser comparado con la dependencia lineal sugerida por la conjetura de Bekenstein para la entropía de objetos macroscópicos [8] [44]; ver la ecuaciones 1.2 y (1.3) del capítulo anterior). La positividad de la entropía implica que la energía total m debería cumplir $m \geq |J|/\mathcal{R}_A$ donde \mathcal{R}_A es el radio de la esfera más chica que encierra al objeto (Notar que tenemos una dependencia similar para agujeros negros [30]). A pesar de esto la relación cuadrática en (2.2) es acorde al límite Newtoniano (2.4). Esto es aún más claro cuando tomamos el radio de la Hoop Conjeture como el radio de área \mathcal{R}_A . Una pregunta importante es si esta diferencia entre la conjetura de Bekenstein y nuestro resultado para la relación entre masa y momento angular se debe a las hipótesis particulares que tomamos para formular nuestro teorema. No tenemos una respuesta clara para esto, pero notemos que como indicaron Unruh y Wald en su trabajo [75], la conjetura de Bekenstein no es esencial para la validez de las leyes termodinámicas generalizadas (termodinámica para de objetos macroscópicos en RG).

Es habitual encontrarnos con la condición maximal, $tr(K) = 0$, en muchos de los trabajos relacionados con desigualdades geométricas (ver por ejemplo [26, 24, 23, 66]). Esta condición junto con la condición de energía dominante nos dan un dato inicial con curvatura escalar positiva $\bar{R} \geq 0$, esto se ve fácilmente de la ecuación de vínculo escalar (A4). La positividad del escalar de curvatura en este caso se obtiene de descomponer el tensor de curvatura extrínseca en términos de la foliación del dato inicial que obtenemos al asumir la existencia de un IMCF suave.

No se asume ninguna ecuación de estado para los campos de materia μ, j^i . La desigualdad (2.2) es consecuencia de las ecuaciones de vínculo de Einstein y no ocurren en una teoría puramente Newtoniana (recordemos que en la introducción de este capítulo obtuvimos una desigualdad similar (2.4) pero asumiendo la condición que nos da la Conjetura de Hoop (0.10)). La materia solo entra en la desigualdad a través del término m_T y la condición de energía dominante necesaria para asegurar la monotonía de la energía de Geroch.

La suposición de que no haya superficies atrapadas en Σ no es esencial para la demostración de la desigualdad (2.2), en verdad solo necesitamos asumir que no haya ninguna superficie minimal y el teorema sigue siendo válido. Si asumimos que no hay superficies minimales el dato inicial podría tener superficies atrapadas y, si ése es el caso, el objeto que estaremos considerando podría estar dentro de un horizonte aparente (ver Capítulo 3) o tener un horizonte en su interior, y ya no podemos considerarlo un objeto ordinario.

Si consideramos un dato inicial con campos electro-magnéticos, la desigualdad se puede extender usando técnicas similares asumiendo que el campo no genera ninguna contribución al momento angular fuera del objeto. Para tratar la contribución de los campos electro-magnéticos a este problema, seguimos el trabajo de Dain [25], en el cual el autor estudia el problema con carga para un dato sin curvatura extrínseca $K_{ij} = 0$ (time-symmetric) en el cual $J = 0$. Obtenemos:

$$m \geq m_T + \frac{1}{c^2} \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\mathcal{R}_A} + \frac{G}{c^4} \frac{1}{5} \frac{J^2}{\mathcal{R}_A \mathcal{R}_C^2}. \quad (2.9)$$

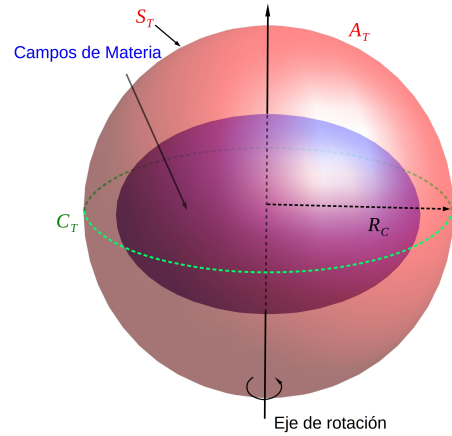
donde de nuevo m_T , está dada por (2.8), y viene de integrar (2.21) en el intervalo $t \in (0, T)$. Notemos que la contribución de la carga a la masa total no depende del radio axial, solo del radio área de la primer superficie S_T que encierra al objeto.

Si tiramos el término no-negativo m_T y reescribimos la desigualdad (2.7) en la forma

$$\mathcal{R}_C^2 \geq \frac{G}{c^4} \frac{2}{5} \frac{J^2}{m \mathcal{R}_A} \quad (2.10)$$

vemos que si fijamos la masa total y el área, entonces cuanto más grande sea el momento angular, más grande debe ser el radio axial. Este resultado concuerda con nuestra expectativa y experiencia de que la rotación produce un achatamiento. Vemos que la rotación impone restricciones en cuán prolato puede ser un objeto ordinario. Además, esta desigualdad nos da información sobre la localización de la energía en el espacio. Implica que si tenemos un objeto con una dada energía total m y un momento angular $J \neq 0$, el objeto no puede ser muy pequeño. Notemos que hay una gran diferencia entre este argumento y los argumentos usados en los criterios de formación de agujeros negros, donde solo se tienen en cuenta cantidades cuasi-locales.

En el método que utilizamos para probar el teorema tomamos un punto sobre el eje de simetría y dentro del objeto como superficie inicial del IMCF y foliamos todo Σ con las superficies S_t . En particular nos centramos en una superficie S_T de la cual obtenemos información de las propiedades físicas y geométricas del objeto.



El IMCF nos permite relacionar masa total con medida de energía cuasi-local que es monótona, algo que no tenemos en general si tomamos otra foliación de Σ . La elección de la superficie S_T responde a la necesidad de tener una región, la región encerrada por S_T , que represente lo mejor posible al objeto, pero que a la vez nos permita

calcular cantidades físicas y poder relacionarlas. Esto nos permite por ejemplo tener una medida de masa cuasi-local m_T que podemos relacionar con la masa ADM y el momento angular y que a la vez es similar a las medidas de masa que usamos en el límite Newtoniano, pero que es una medida de la energía contenida en S_T y no solo del objeto U . Esta elección no es la única que podemos hacer al utilizar el IMCF, y puede que no sea la más conveniente para estudiar un objeto. En lugar de iniciar el flujo en un punto podríamos iniciarlo con una superficie axialmente simétrica en el exterior del objeto. Elegida de manera que exista un IMCF suave y sea lo más cercana que podamos a la superficie del objeto, esta superficie nos puede dar más información de la forma del objeto y de sus propiedades. Notemos que en particular podemos buscar la superficie más cercana al objeto que cumpla las propiedades que pedimos para S_T en el teorema 2.2, es decir la superficie más cercana al objeto tal que si iniciamos el flujo en S_T tenemos un flujo suave y convexo. Siguiendo este procedimiento llegamos a la siguiente desigualdad. Para S_T siendo la superficie más cercana a la superficie del objeto, y que la encierre, tal que exista un IMCF suave y convexo tenemos:

$$m \geq \mathcal{E}_G(S_T) + \frac{1}{5} \frac{J^2}{\mathcal{R}_A \mathcal{R}_C^2} \quad (2.11)$$

donde ahora $\mathcal{E}_G(S_T)$ es la energía de Geroch de la primer superficie convexa que encierre al objeto, al igual que las cantidades \mathcal{R}_A y \mathcal{R}_C . Esta forma de elegir la superficie inicial del flujo es particularmente útil para usarse en cálculos numéricos, y es la que utilizamos en la sección 2.5.

2.3. Preliminares

Siguiendo [59], consideramos un dato inicial completo $(\Sigma, \bar{g}, K; \mu, j)$, que sea maximal, asintóticamente plano y axialmente simétrico, y que satisface las ecuaciones de vínculo de Einstein (A4), (A5); asumimos además que los campos satisfacen la DEC, $\mu \geq |j|$ (ver apéndice A). En este dato inicial consideramos un flujo de curvatura media (IMCF) de superficies S_t , ver apéndice E, que parte desde un punto en el eje de simetría, y dentro del objeto que estamos considerando, y llega a infinito. Asumiendo que el IMCF es suave y tiene topología esférica, el flujo nos da una foliación suave de Σ y la métrica del dato, \bar{g} , se puede escribir como:

$$ds_{\bar{g}}^2 = \frac{dt^2}{H^2} + g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.12)$$

donde g_{ij} y (x^1, x^2) son la métrica inducida y las coordenadas en S_t respectivamente, y H la curvatura media de S_t .

Es importante notar que cuando consideramos un IMCF en datos iniciales axialmente simétricos, la ecuación del IMCF (E1) preserva la simetría axial. Esto es, si uno comienza el flujo en un punto sobre el eje de simetría (o desde una superficie con simetría axial) no existe ningún mecanismo, ningún término de la ecuación diferencial, que pueda hacer que la normal de las sucesivas superficies que genera el flujo tenga alguna componente en la dirección del vector de Killing axial. Como consecuencia de esta observación, de ahora más, cuando discutamos el IMCF consideraremos que las superficies S_t generadas son siempre axialmente simétricas.

2.3.1. IMCF y energía de Geroch

En esta sección repasaremos las propiedades básicas de la evolución de la energía cuasi-local de Geroch a lo largo del IMCF (ver [46], [74] y referencias allí citadas).

En cada superficie S_t del IMCF introducimos la energía cuasi-local de Geroch

$$\mathcal{E}_G(S_t) := \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(16\pi - \int_{S_t} H^2 dS \right) \quad (2.13)$$

donde A_t es el área de S_t . Este funcional tiene varias propiedades interesantes que usaremos más adelante en la demostración de nuestro resultado. Para un dato inicial completo, maximal, asintóticamente plano, con escalar de curvatura no-negativo, y superficies S_t con topología esférica que convergen a esferas en infinito, \mathcal{E}_G satisface

$$\mathcal{E}_G(S_t) \geq 0, \quad \frac{d\mathcal{E}_G}{dt}(S_t) \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_G(S_t) = m. \quad (2.14)$$

Recomendamos dirigirse a [47] para más detalles, demostraciones y más referencias al respecto. Sin embargo, dado que la monotonía de la energía será relevante para la prueba del teorema, en lo que sigue repasaremos brevemente la demostración de esta propiedad.

Empezamos con la derivada de $\mathcal{E}_G(S_t)$ a lo largo del flujo

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_G = \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left[8\pi - \frac{1}{2} \int_{S_t} H^2 ds + \int_{S_t} (-H^2 + 2H\Delta(H^{-1}) + 2|h|^2 + 2\bar{R}_{ij}\nu^i\nu^j) ds \right] \quad (2.15)$$

donde hemos usado (E3) y (E4). Luego usamos la ecuación de Gauss

$$2\bar{R}_{ij}\nu^i\nu^j = \bar{R} + H^2 - |h|^2 - 2\kappa \quad (2.16)$$

donde κ es la curvatura de Gauss, y obtenemos

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_G = \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left[8\pi + \int_{S_t} \left(2H\Delta(H^{-1}) + |h|^2 + \bar{R} - 2\kappa - \frac{H^2}{2} \right) ds \right]. \quad (2.17)$$

Reescribiendo $|h|^2$ en términos de las curvaturas principales λ_1 y λ_2 (los autovalores de h_{ij}), y la curvatura media tenemos que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_G = \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left[8\pi + \int_{S_t} \left(2H\Delta(H^{-1}) + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \bar{R} - 2\kappa \right) ds \right]. \quad (2.18)$$

Luego, usamos el teorema de Gauss-Bonnet e integramos por partes el operador de Laplace

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_G = \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left[8\pi - 4\pi\chi(S_t) + \int_{S_t} \left(2\frac{|\nabla H|^2}{H^2} + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \bar{R} \right) ds \right] \quad (2.19)$$

donde $\chi(S_t)$ es la característica de Euler de la superficie. Si las superficies S_t tienen topología esférica tenemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_G = \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{S_t} \left(2 \frac{|\nabla H|^2}{H^2} + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \bar{R} \right) ds \quad (2.20)$$

de aquí vemos entonces que si la 3-variedad tiene escalar de curvatura R no-negativo, la energía de Geroch es no-decreciente, es decir $d\mathcal{E}_G/dt \geq 0$.

2.4. Demostraciones

El esquema de la demostración de la desigualdad (2.7) es el siguiente. Comenzamos con la derivada a lo largo del flujo de la energía de Geroch (2.20) y despreciamos los términos positivos $|\nabla H|^2$ y $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$. Luego usamos la ecuación de vínculo (A5) para escribir \bar{R} en términos del momento angular. Finalmente integramos a lo largo del parámetro t que define las superficies del flujo desde un punto, sobre el eje de simetría y dentro del objeto, hasta infinito.

Demostración de la desigualdad 2.7. De la expresión (2.20) tenemos la siguiente cota.

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_G \geq \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{S_t} [16\pi\mu + K_{ij}K^{ij}] dS \quad (2.21)$$

donde hemos usado el vínculo $\bar{R} = 16\pi\mu + K_{ij}K^{ij} - (\text{tr}K)^2$ y la condición maximal (i.e. $\text{tr}(K) = 0$). Para incluir explícitamente el momento angular en esta desigualdad usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la definición de $J_t := J(S_t)$

$$\begin{aligned} J_t^2 &= \left(\frac{1}{8\pi} \left| \int_{S_t} K_{ij}\eta^i\nu^j dS \right| \right)^2 \leq \frac{1}{(8\pi)^2} \left(\int_{S_t} |K_{ij}\eta^i\nu^j| dS \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{(8\pi)^2} \left(\int_{S_t} |K_{ij}| \sqrt{\eta} dS \right)^2 \leq \frac{1}{(8\pi)^2} \int_{S_t} |K_{ij}|^2 dS \int_{S_t} \eta dS \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde $\eta := \eta_i\eta^i$ es la norma al cuadrado del vector de Killing η^i y en el cuarto paso hemos usado la desigualdad de Hölder con $p_1 = p_2 = 2$. Por lo tanto hemos obtenido una cota para el momento angular de S_t en términos de la norma de la curvatura extrínseca del dato inicial (y por lo tanto de la curvatura escalar):

$$\int_{S_t} K_{ij}K^{ij} dS \geq (8\pi)^2 \frac{J_t^2}{\int_{S_t} \eta dS}. \quad (2.23)$$

Usando esta relación en (2.21) tenemos que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_G \geq \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left[\int_{S_t} 16\pi\mu dS + (8\pi)^2 \frac{J_t^2}{\int_{S_t} \eta dS} \right]. \quad (2.24)$$

Ahora, sea T el valor más chico de t para el cual se cumple que para todo $t \geq T$ las superficies del flujo son convexas y tal que S_T encierra el objeto en el que estamos interesados.

Asumiendo que no hay superficies atrapadas, ver ecuación (A10), tenemos que $\vartheta^+\vartheta^-|_{S_t} = H^2 - g_{ij}K^{ij} > 0$, y por lo tanto no hay superficies minimales en Σ , lo cual es una condición necesaria para que la ecuación del IMCF (E1) sea suave. Si tenemos una solución suave del IMCF, el flujo partirá del punto elegido $t = 0$ y llegará a infinito, dándonos una foliación de todo Σ dada por las 2-superficies del flujo. Integramos la ecuación (2.21) desde $t = 0$ hasta $t = T$ y luego hasta infinito. Primero mostramos que la integral de (2.21) en $[0, T]$ es justamente la masa cuasi-local m_T . Para ello recordamos que $\bar{R} = 16\pi\mu + K_{ij}K^{ij}$ y hacemos el cambio de coordenadas $t \rightarrow \xi(t) = \sqrt{\frac{A_t}{4\pi}}$, donde $\xi(t)$ es la coordenada radio de área. Tenemos entonces que $T \rightarrow \xi(T) = \sqrt{\frac{A_T}{4\pi}} = \mathcal{R}_A$ y $dt \rightarrow d\xi = \sqrt{\frac{A_t}{16\pi}} dt$, y por lo tanto:

$$\int_0^T \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{S_t} \bar{R} dS dt = \frac{1}{16\pi} \int_0^{\mathcal{R}_A} d\xi \int_{S_\xi} \bar{R} ds = m_T \quad (2.25)$$

Para el rango $[T, \infty)$ usamos la ecuación (2.24), en lugar de (2.21), para incluir de forma explícita el momento angular. Notemos que del teorema de Gauss, utilizando la ecuación de vínculo de momento (A4), el momento angular de la superficie S_t se puede escribir en términos de la densidad de corriente del objeto j ,

$$J(S_t) = \frac{1}{8\pi} \int_{S_t} K_{ij} \eta^i \nu^j dS = - \int_{V_t} j_i \eta^i dv =: J(V_t), \quad (2.26)$$

donde V_t es el volumen encerrado por S_t y hemos usado que el dato es regular. Dado que j tiene soporte compacto, el momento angular $J(V_T) = J(U) =: J$, por lo tanto (2.26) implica que para todo $t \geq T$, J_t se conserva, $J_t = J_T = J$. Si descartamos el término que involucra μ en (2.24), el cual es positivo, para $t \in [T, \infty)$ obtenemos una cota para $\frac{d}{dt} \mathcal{E}_G$ en términos de J .

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_G \geq \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} (8\pi)^2 \frac{J^2}{\int_{S_t} \eta dS}, \quad t \in [T, \infty). \quad (2.27)$$

Luego, integrando esta expresión en $[T, \infty)$, usando la relación entre la energía de Geroch y la masa ADM m en infinito, y la expresión (2.25), obtenemos

$$m \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_G(S_t) \geq m_T + \sqrt{\pi} J^2 \int_T^\infty \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} dt. \quad (2.28)$$

Ahora necesitamos acotar la integral de superficie de η . Aquí es justamente donde necesitaremos la condición de que las superficies S_t $t \in [T, \infty)$ sean convexas. Introducimos coordenadas ortogonales θ, φ para las superficies S_t de forma tal que $\eta^i = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^i$. Esta elección particular de coordenadas es posible hacerla siempre y cuando las 2-superficies sean axialmente simétricas y difeomorfas a S^2 (ver por ejemplo [20]), justamente el caso en el que nos encontramos. Luego escribimos la ecuación de evolución (E2) en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta = \frac{\partial}{\partial t} g_{\varphi\varphi} = \frac{2}{H} h_{\varphi\varphi}. \quad (2.29)$$

Recordemos que en simetría axial las curvaturas principales están dadas por

$$\lambda_1 = g^{\theta\theta} h_{\theta\theta}, \quad \lambda_2 = g^{\varphi\varphi} h_{\varphi\varphi} \quad (2.30)$$

$$H = g^{ij} h_{ij} = g^{\theta\theta} h_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi} h_{\varphi\varphi} = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (2.31)$$

Entonces tenemos

$$h_{\varphi\varphi} = \frac{\lambda_2}{g^{\varphi\varphi}} = g_{\varphi\varphi} \lambda_2 = \eta \lambda_2. \quad (2.32)$$

y usando esta ecuación en (2.29) tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta = 2\eta \frac{\lambda_2}{H}. \quad (2.33)$$

Ahora, usamos esta ecuación para $t \geq T$, donde las superficies son estrictamente convexas, y por lo tanto $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y $\lambda_2 \leq H$, y con esto tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta \leq 2\eta \quad (2.34)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} (\eta dS) = \frac{\partial \eta}{\partial t} dS + \eta dS \leq 2\eta dS + \eta dS = 3\eta dS. \quad (2.35)$$

Podemos escribir entonces $\eta dS \leq \eta_T e^{3(t-T)} dS_T$, obtenemos

$$\int_{S_t} \eta dS \leq e^{3(t-T)} \int_{S_T} \eta_T dS_T \leq e^{3(t-T)} A_T \max_{S_T} \eta, \quad t \geq T. \quad (2.36)$$

y usando que $A_t = e^{(t-T)} A_T$ obtenemos una cota para el término que involucra el momento angular. Utilizando esto para acotar el término que involucra el momento angular en (2.28), integrado entre $[T, \infty)$, obtenemos la cota

$$\begin{aligned} m &\geq m_T + \sqrt{\pi} J^2 \int_T^\infty \frac{A_T^{1/2} e^{(t-T)/2}}{e^{3(t-T)} A_T \max_{S_T} \eta} dt \\ &\geq m_T + \frac{2\sqrt{\pi}}{5} \frac{J^2}{A_T^{1/2} \max_{S_T} \eta} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Finalmente escribimos esta expresión en términos del radio de área y del radio axial (2.6), y obtenemos (2.7):

$$m \geq m_T + \frac{1}{5} \frac{J^2}{\mathcal{R}_A \mathcal{R}_C^2}. \quad (2.38)$$

□

Para probar la extensión de la desigualdad para un dato inicial con campos electromagnéticos seguimos el trabajo de Dain [25]; para ello asumiremos que no existe ninguna contribución electromagnética al momento angular y que la densidad de carga tiene soporte compacto dentro del objeto que estamos considerando.

Demostración de la desigualdad (2.9). En primer lugar descomponemos la densidad de energía de la siguiente forma

$$\mu = \mu_{(noEM)} + \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \quad (2.39)$$

donde E^i , B^i son los campos electromagnéticos y $\mu_{(noEM)}$ representa la densidad de energía no-electromagnética, la cual satisface la DEC $\mu_{(noEM)} \geq |j|$. Luego en este caso la integral en (2.21) tiene tres términos, los términos que involucran $\mu_{(noEM)}$ y $K_{ij}K^{ij}$ se tratan de la misma forma que el caso anterior. El término que involucra la contribución electromagnética a la densidad de energía puede ser acotado en términos de la carga eléctrica siguiendo [48].

A continuación presentamos los pasos necesarios para obtener dicha cota.

$$\begin{aligned} \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{1/2}} \int_{S_t} \mu dS &\geq \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{S_t} 2(E^2 + B^2) dS \geq \frac{2A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{S_t} (E^j \nu_j)^2 dS \\ &\geq \frac{2A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \frac{\left(\int_{S_t} E^j \nu_j dS \right)^2}{A_t} \geq \frac{2 \left(\int_{S_t} E^j \nu_j dS \right)^2}{(16\pi)^{3/2} A_t^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi} Q_t^2}{2A_t^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

En el primer paso usamos la DEC, en el tercer paso usamos la desigualdad de Hölder, y en el quinto usamos el teorema de Gauss y la definición de carga eléctrica:

$$Q_t = \frac{1}{8\pi} \int_{S_t} E^j \nu_j dS \quad (2.41)$$

donde Q_t es la carga contenida en S_t .

Sea T el valor más chico de parámetro del flujo tal que para todo $t \geq T$ las superficies S_t son convexas y encierran el objeto (continuamos necesitando la condición de convexidad para controlar la contribución del momento angular). Luego, como S_t está fuera del objeto, la carga eléctrica de S_t es $Q_t = Q_T := Q$, y por lo tanto $\forall t \geq T$ obtenemos una cota para derivada de la energía de Geroch (derivada a lo largo del IMCF) en términos de la carga y el momento angular

$$\frac{d}{dt} E_G \geq \frac{\sqrt{\pi} A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} J^2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2A_t^{1/2}} Q^2. \quad (2.42)$$

Integrando (2.21) entre cero e infinito, usando la expresión anterior y la propiedad (2.14), obtenemos (2.9):

$$m \geq m_T + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\mathcal{R}_A} + \frac{1}{5} \frac{J^2}{\mathcal{R}_A \mathcal{R}_C^2} \quad (2.43)$$

donde m_T , dada por (2.8), viene de integrar (2.21) en el intervalo $t \in (0, T)$. \square

2.5. Resultados numéricos

Además de la prueba formal del teorema obtuvimos resultados numéricos que apoyan las elecciones de hipótesis que hicimos. En particular, además de testar el teorema, pudimos comprobar que al menos en ciertos casos el IMCF se mantiene convexo si tomamos una superficie convexa como superficie inicial. Para el problema numérico utilizamos el método conforme (ver apéndice C), y el particular tomamos un dato conformemente plano. Primero resolvemos las ecuaciones de vínculo y obtenemos la métrica, luego resolvemos la ecuación del IMCF en el dato que obtenemos, y finalmente analizamos las curvaturas principales de S_t (ver ecuaciones (E13) y (E14)) para determinar si es o no convexa.

Uno de los ingredientes importantes en nuestro resultado es la conservación de la convexidad de las superficies S_t a lo largo del IMCF. En esta sección mostraremos que, al menos para ciertos ejemplos particulares, esta propiedad del flujo no solo se cumple en la región asintótica del dato inicial, sino que también se satisface cuando las superficies S_t están cerca del objeto. Estamos también interesados en evaluar cuánta importancia tiene el término que involucra el momento angular, es decir cuánto contribuye la energía rotacional a la energía total del sistema. Para ello calculamos el IMCF con una superficie inicial S_0 que represente lo mejor posible las propiedades físicas y geométricas del objeto, y estudiamos la desigualdad en la forma (2.11), tomando la superficie S_0 *lo más cerca posible* del objeto U .

Tenemos la expectativa de que, en el método que utilizamos para probar nuestro resultado, la convexidad del flujo pueda ser relajada, como lo sugieren las propiedades de convergencia de la última integral en (2.28). En el próximo capítulo presentaremos una respuesta parcial a este problema (ver la definición de tamaño (3.12)).

Cada ejemplo numérico presentado en esta sección se calcula en dos pasos. En primer lugar resolvemos el problema elíptico para el factor conforme Ψ , con lo cual obtenemos un ejemplo de dato inicial. Este dato inicial está completamente generado y determinado por la presencia de un objeto compacto con momento angular J compatible con la DEC (ver apéndice C). El segundo paso es tomar un IMCF que sea convexo en el dato inicial que obtenemos, para ello calculamos la solución de la ecuación del flujo tomando como superficie inicial una superficie convexa S_0 que encierre al objeto y esté lo más cerca posible de la superficie del mismo ∂U , tomando $S_0 = \partial U$ cuando sea posible.

En todos los ejemplos generados se evalúa la preservación de la convexidad de las superficies del flujo y el peso del término de energía rotacional en la desigualdad.

2.5.1. Cálculo de factor conforme Ψ

En los ejemplos numéricos que presentamos nos restringimos a datos iniciales axialmente simétricos, maximales, asintóticamente planos, conformemente planos. El conjunto de suposiciones y la derivación de las ecuaciones involucradas se describen en el apéndice C.

Tomamos coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) para la geometría plana conforme, adaptadas a la simetría axial del problema, con lo cual ninguna función dependerá de la coordenada φ , en particular tampoco lo hará el factor conforme, el cual será la so-

lución del problema elíptico no-lineal (D13), (D17), en la 3-superficie $\Sigma = \mathbb{R}^3$, estas ecuaciones se deducen en el apéndice C.

En coordenadas cilíndricas el problema que resolvemos es:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= -\frac{2\pi a \rho}{\Psi^3} - \frac{|\partial f|^2 \rho^2}{4\Psi^7}, \\ \partial_\rho \Psi(\rho=0) &= 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Psi(\rho, z) = 1, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde Δ es el operador de Laplace plano y la función $f(\rho, z)$ es la solución del problema elíptico lineal

$$\begin{aligned} \partial_\rho^2 f + \partial_z^2 f + \frac{3\partial_\rho f}{\rho} &= -8\pi a, \\ \partial_\rho f(\rho=0) &= 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} f(\rho, z) = 0, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

La función positiva $a(\rho, z)$, presente en ambas ecuaciones, es una función libre que determina el contenido de materia y de momento angular que tiene el dato inicial. En nuestros ejemplos dicha función tendrá soporte compacto, y la región donde tiene soporte, U , será el objeto en el que estamos interesados.

El momento angular que tendrá una región U arbitraria del dato inicial, (D19), se calcula como

$$J = - \int_U a \rho^2 dv_0. \quad (2.46)$$

donde de ahora en adelante, dv_0 denotará el elemento de volumen plano.

El resto de los parámetros físicos relevantes (ver apéndice D) solo pueden ser calculados una vez obtenido el factor conforme, es decir una vez resuelto el problema (2.44),(2.45). El área de una superficie axialmente simétrica ∂U está dada por la ecuación (D21), de la cual obtenemos el radio de área \mathcal{R}_A , y el radio axial $\mathcal{R}_C = \mathcal{C}/2\pi$, se obtiene calculando el largo del círculo axialmente simétrico más grande que tengamos en ∂U , \mathcal{C} . La densidad de masa bariónica promedio del objeto se define como $\rho_b = M_b/V$, donde M_b , V , son la masa bariónica y el volumen del objeto, respectivamente,

$$M_b = \int_U \frac{\rho a}{\Psi^2} dv_0, \quad y \quad V = \int_U \Psi^6 dv_0. \quad (2.47)$$

Finalmente, la masa ADM del dato inicial se calcula mediante una integral de volumen en todo el dato inicial mediante la ecuación (D18).

Para resolver el problema, (2.44),(2.45), procedemos de la siguiente forma. En primer lugar, por simplicidad, en todos nuestros ejemplos tomamos a de forma tal que satisfaga una simetría de reflexión en el plano $z = 0$, i.e., $a(\rho, -z) = a(\rho, z)$. Esta propiedad reduce el problema a la mitad, desde el punto de vista del cálculo numérico, solo se necesita resolver para $z \geq 0$ y la condición de regularidad de la solución en $z = 0$ se reemplaza por una condición de Neuman homogénea en $z = 0$. En segundo lugar, compactificamos el problema introduciendo nuevas coordenadas de forma tal que todo el cuarto del plano ρ - z se mapea en un cuadrado unidad. Las coordenadas que utilizamos son

$$x = \frac{\rho}{\rho + \rho_H}, \quad y = \frac{z}{z + z_H}, \quad (2.48)$$

donde los parámetros $\rho_H > 0$ y $z_H > 0$ pueden ser elegidos libremente. El eje de simetría, $\rho = 0$ se mapea a $x = 0$, $\rho = \infty$ se mapea a $x = 1$ y $\rho = \rho_H$ se mapea a $x = 1/2$. De forma análoga, el plano $z = 0$ se mapea a $y = 0$, $z = \infty$ se mapea a $y = 1$, y $z = z_H$ se mapea a $y = 1/2$. Resumiendo, el problema elíptico compacto que debemos resolver, en el cuarto de plano $0 \leq x, y \leq 1$, está dado por la ecuación

$$\frac{(1-x)^4}{\rho_H^2} f_{xx} + \frac{(1-x)^3(3-2x)}{x\rho_H^2} f_x + \frac{(1-y)^4}{z_H^2} f_{yy} - 2\frac{(1-y)^3}{z_H^2} f_y = -8\pi a, \quad (2.49)$$

con la condición de borde

$$f_x(0, y) = f_y(x, 0) = 0, \quad f(1, y) = f(x, 1) = 0, \quad (2.50)$$

y la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{(1-x)^4}{\rho_H^2} \Psi_{xx} + \frac{(1-x)^3(1-2x)}{x\rho_H^2} \Psi_x + \frac{(1-y)^4}{z_H^2} \Psi_{yy} - 2\frac{(1-y)^3}{z_H^2} \Psi_y \\ = -2\pi\rho_H \frac{xa}{(1-x)\Psi^3} - \frac{\rho_H^2}{4} \frac{x^2|\partial f|}{(1-x)^2\Psi^7}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

con la condición de borde

$$\Psi_x(0, y) = \Psi_y(x, 0) = 0, \quad \Psi(1, y) = \Psi(x, 1) = 1. \quad (2.52)$$

Para calcular la solución de estas ecuaciones usamos diferencias finitas, discretizando x e y con grillas uniformes

$$x_i = hi, \quad y_j = hj, \quad i, j = -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N-1, N, \quad (2.53)$$

donde la medida de la grilla es $h = 1/N$, y elegimos $N = 2^k$, donde k es un entero no negativo. Los valores de índices entre 0 to N cubren el cuadrado unidad, incluyendo los bordes, mientras que los valores fantasmas $-2, -1$ son usados para imponer las condiciones de borde de Neuman homogéneas.

Todas las funciones del problema son ahora funciones de grilla y para discretizar las ecuaciones usamos operadores de diferencias finitas estándar de cuarto orden de precisión en todo el dominio. Utilizamos operadores centrados en el interior del dominio, y simi-laterales y laterales cerca y sobre el borde exterior del dominio.

Denotamos $v_{i,j} = v(x_i, y_j)$ la solución de cualquiera de las ecuaciones, (2.49) o (2.51). Los valores $v_{N,j}$, $j = 0, 1, \dots, N$ y $v_{i,N}$, $i = 0, 1, \dots, N$ se fijan imponiendo la condición de borde de Dirichlet en infinito. Las condiciones de borde de Neuman homogéneas en $x = 0$ y $y = 0$ se imponen tomando puntos fantasma, en $i = -2, -1$ y $j = -2, -1$, de la forma:

$$\begin{aligned} v_{-2,j} = v_{2,j}, \quad v_{-1,j} = v_{1,j}, \quad j = 0, 1, \dots, N, \\ v_{i,-2} = v_{i,2}, \quad v_{i,-1} = v_{i,1}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.54)$$

El sistema algebraico lineal de ecuaciones que obtenemos para $f_{i,j}$ puede ser resuelto con un método directo (por ejemplo usando la descomposición LU junto con el método

de eliminación Gaussiano). Sin embargo, el sistema algebraico no-lineal de ecuaciones que obtenemos para $\Psi_{i,j}$, tiene que ser resuelto mediante un método iterativo, por simplicidad decidimos utilizar un método iterativo para ambos sistemas.

Para acelerar la convergencia utilizamos un algoritmo de multi-grilla, [17]. En todos los casos utilizamos suavizadores de Jacobi sub-relajados en las grillas finas e intermedias, y suavizadores de Jacobi sobre-relajados en la grilla más gruesa. El número de niveles de grilla que pueden usarse para este problema, teniendo en cuenta el espacio generado por el span los operadores diferenciales, está acotado por arriba por $k-3$. Las funciones de grilla se pasan de una grilla fina a una más gruesa simplemente mediante restricción. La prolongación de las funciones de grilla de una grilla más gruesa a una grilla más fina se realiza mediante interpolación cúbica de Hermite.

En estos esquemas iterativos la iteración inicial debe ser elegida cuidadosamente, de forma tal que podamos asegurarnos de que todo el método en conjunto converge. En algunos casos es suficiente con elegir $f_{i,j} = 0$ y $\Psi_{i,j} = 1$, pero en ciertos casos, en grillas finas, es necesario empezar la iteración utilizando la solución de una grilla más gruesa (la cual interpolamos para usar en la grilla más fina).

En nuestro código el algoritmo de multi-grilla es aplicado como una secuencia de V -ciclos (ver [17]). Luego de un número de V -ciclos, se chequea la norma máxima del residuo y el incremento de la solución $\delta v_{i,j}$ en la grilla más fina. Las iteraciones se detienen cuando el valor relativo de estas dos normas, con respecto a la norma de la solución en si misma, son más chicos que $\epsilon = 10^{-10}$. En la ecuación para $\Psi_{i,j}$, la no-linealidad es tratada con el algoritmo “full approximation storage”, (FAS), [17]. Para todos los ejemplos presentados calculamos el factor conforme en tres grillas con $N = 128$, $N = 256$ y $N = 512$, y usamos las tres soluciones para chequear la convergencia.

Todas las integrales con las que calculamos los parámetros físicos relevantes son aproximadas con la regla de Simpson.

2.5.2. Tratamiento numérico del IMCF

Queremos resolver, de forma numérica, el problema ordinario dado por (E11)-(E12), iniciando el flujo con una superficie inicial en $t = 0$ que sea convexa y encierre lo más justo posible el objeto, U , que estamos estudiando. Este problema, a pesar de ser un problema diferencial ordinario, se torna engañoso cuando queremos tratarlo de forma numérica; esto se debe a que la solución exacta diverge exponencialmente con el parámetro t . El problema es por lo tanto inestable; se debe ser muy cuidadoso a la hora de elegir el esquema numérico con el cual se aproximará la solución, dado que cualquier perturbación (desviación de la solución exacta) también crecerá exponencialmente con t . Lo que se necesita es un esquema condicionalmente estable, lo cual básicamente implica pedir que la aproximación calculada numéricamente no diverja más rápido que la solución exacta [57].

Discretizamos la variable θ con una grilla uniforme y aproximamos las derivadas con respecto a esta variable usando operadores de diferencias finitas estándar centrados, de cuarto orden de precisión. La regularidad de la función $v(\theta, t)$ en $\theta = 0$ y la regularidad junto con la simetría de reflexión en el plano $z = 0$ se traducen en condiciones de borde de Neuman en $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. Estas condiciones de borde se pueden imponer sin mayor problema usando puntos fantasma en cada lado del intervalo $[0, \pi/2]$.

Para integrar en el parámetro t , uno puede elegir un método de cuarto orden de precisión, sin embargo, el costo numérico que esto implica no lo vale. El motivo es que los autovalores de la ecuación linealizada son positivos y grandes, con lo cual para tener un esquema condicionalmente estable el paso en la variable t debe ser muy chico comparado con el tamaño de la malla; con un método de menor orden podemos obtener los mismos resultados. El método de Euler explícito resulta ser muy apropiado para tratar el problema, utilizando dicho método todo el esquema en su conjunto (cuarto orden en el espacio y primer orden en t) se vuelve condicionalmente estable para las discretizaciones que usamos cuando el paso en t es comparable con la cuarta potencia del tamaño de la malla. Si el paso en t no es suficientemente chico, independientemente del método de integración en t que usemos, el método se vuelve inestable y la solución se rompe, desarrollando picos que divergen rápidamente con unos pocos pasos de t . En nuestros cálculos usamos un tamaño de malla $\delta_\theta = \pi/200$ y un paso de t tan chico como 2×10^{-6} .

2.5.3. Modelos de objeto y resultados

En nuestro esquema el dato inicial queda completamente determinado por la función $a(\rho, z)$. Las aproximaciones mediante diferencias finitas que usamos, descritas en la sección anterior, tienen errores de truncamiento que involucran, en los términos predominantes, derivadas de quinto y sexto orden de la solución. Para no arruinar la precisión de la aproximación calculada, ni la tasa de convergencia de los métodos iterativos, la función a que define al objeto debe ser suave, al menos C^4 , en todo el dominio en el que realizamos los cálculos numéricos. Por lo tanto, estudiamos objetos definidos por una función suave y de soporte compacto, $a(\rho, z)$, definida en términos de los polinomios de corte $q(s)$ definidos a continuación.

$$q(s) = 1 - s^4 \left(1 - 5(s-1) + 15(s-1)^2 - 35(s-1)^3 + 70(s-1)^4 \right). \quad (2.55)$$

Todas las magnitudes en esta sección están dadas en unidades geométricas asociadas al sistema de unidades cgs.

Objetos esferoidales

Para estos ejemplos elegimos la función a tal que tenga soporte en un elipsoide simétrico, adaptado a la simetría axial, el cual puede ser tanto prolato como oblato (siendo la esfera un caso particular de estos),

$$a(\rho, z) = \begin{cases} a_0 q(s), & 0 \leq s < 1, \\ 0, & 1 \leq s, \end{cases} \quad (2.56)$$

donde

$$s = \sqrt{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{z}{Z}\right)^2}$$

y ρ_0, Z son constantes positivas. Definida de esta forma, la función $a(\rho, z)$ es C^4 en todo el dominio, y la región U en la cual tiene soporte está dada por $s < 1$, mientras que la superficie del objeto, ∂U , está dada por $s = 1$.

Obj.	a_0	ρ_0	Z	J
NS	6.00×10^{-18}	7.50×10^5	7.30×10^5	1.4614×10^{11}
P	6.00×10^{-18}	0.80×10^6	1.00×10^6	2.5916×10^{11}
O	6.00×10^{-18}	1.00×10^6	0.80×10^6	5.0617×10^{11}
VO	6.00×10^{-18}	1.00×10^6	0.30×10^6	1.8981×10^{11}
S	2.90×10^{-38}	6.70×10^{10}	6.5×10^{10}	4.0056×10^{15}

Cuadro 2.1: Objetos esferoidales y los parámetros que los definen.

Obj.	ρ_b	\mathcal{R}_C	\mathcal{R}_A	M	convexo?
NS	4.3247×10^{-14}	1.0461×10^6	1.0227×10^6	2.7103×10^5	yes
P	3.1137×10^{-14}	1.2309×10^6	1.2859×10^6	3.9647×10^5	yes
O	2.3503×10^{-14}	1.6462×10^6	1.5379×10^6	5.6641×10^5	yes
VO	5.7604×10^{-14}	1.3199×10^6	1.0826×10^6	2.8427×10^5	no
S	1.1212×10^{-28}	6.7000×10^{10}	6.5796×10^{10}	1.3695×10^5	yes

Cuadro 2.2: Cantidades físicas de los objetos (y del dato inicial que estos generan) presentados en el Cuadro 2.1.

En el Cuadro 2.1 presentamos varios objetos esferoidales de diferentes densidades y tamaños; se muestran los parámetros a_0 , ρ_0 y Z junto con el momento angular resultante J . El objeto llamado *NS* es elegido de forma tal que sea ligeramente oblato, y los parámetros que lo definen son tal que la densidad de masa bariónica promedio sea comparable con la densidad de masa de una estrella de neutrones (ver el Cuadro 2.2 y, por ejemplo, [63]). Los siguientes tres modelos de objeto, *P*, *O* y *VO*, tiene el mismo valor de a_0 y parámetros similares de tamaño, lo cual resulta en masas bariónicas comparables a la del primer objeto; *P* es un esferoide prolato, *O* un esferoide oblato y *VO* es un esferoide muy oblato. El objeto llamado *S* es un esferoide es más grande y con una menor densidad de masa que los anteriores, ligeramente prolato y con parámetros elegidos de forma tal que el tamaño y la masa bariónica resultante sean comparables con la masa y el tamaño del sol.

En el Cuadro 2.2 mostramos, para cada objeto del Cuadro 2.1, la densidad de masa bariónica promedio del objeto, el tamaño físico de su superficie, representado por los radios \mathcal{R}_A y \mathcal{R}_C , y la masa ADM m del dato inicial que generan. La última columna en la tabla indica si la superficie del objeto resulta ser convexa o no.

En el Cuadro 2.3 presentamos, para cada objeto del Cuadro 2.1, los parámetros para la superficie esferoidal convexa que encierra al objeto de la forma más justa posible. En los casos en los que la superficie del objeto ∂U es convexa, tomamos S_0 como dicha superficie. En los casos en los que la superficie del objeto no es convexa, tomamos la superficie S_0 , también definida como un esferoide, con valores de ρ_0 o Z más grandes que los del objeto, de forma tal que S_0 se convexe. Calculamos la evolución de estas

superficies a lo largo del IMCF y encontramos que en todos los casos se preserva la convexidad a lo largo de la evolución. Como ejemplo de la evolución del flujo, en la Figura 2.1 presentamos los gráficos de las superficies del flujo, para varios valores del parámetro t , para los objetos NS y VO.

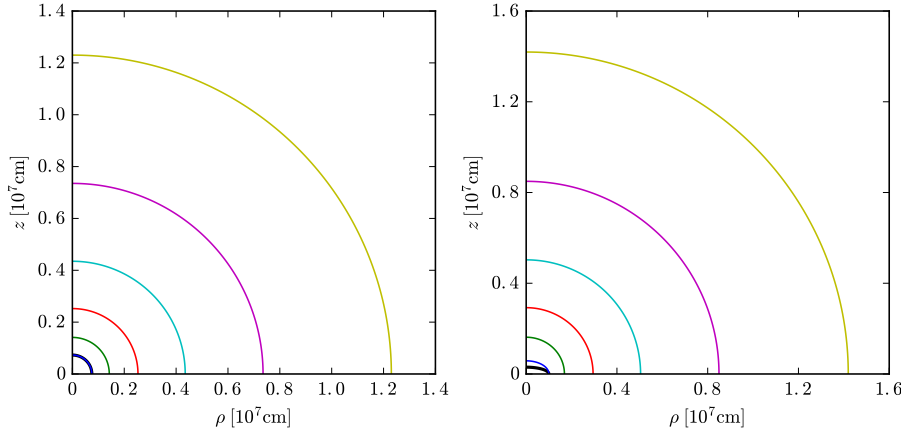


Figura 2.1: Evolución del IMCF, superficies S_t , correspondientes a los objetos NS (gráfico izquierdo) y VO (gráfico derecho) del Cuadro 2.3. Los gráficos muestran, desde el origen hacia afuera, la superficie del objeto (línea gruesa) y las superficies S_t para $t = 0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0$ en una parte de la región del plano ρ - z en la geometría plana. Para el objeto NS la superficie S_0 coincide con la superficie del objeto; para el objeto VO la superficie S_0 es más grande que la superficie del objeto y fue elegida de forma tal que sea convexa.

La Figura 2.2 muestra el gráfico de las curvaturas principales (ver ecuaciones (E13) y (E14) en el apéndice E1) de la superficie del objeto NS y del objeto VO. Para el primer objeto, NS, la positividad de ambas curvaturas muestra que la superficie del mismo es convexa; para el segundo, VO, ambas curvaturas principales son negativas, mostrando que la superficie del objeto VO no es convexa.

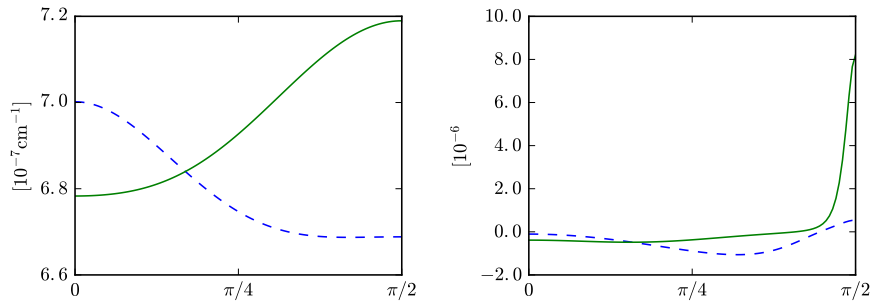


Figura 2.2: Curvaturas principales de las superficies de los objetos NS (gráfico izquierdo) y VO (gráfico derecho) del Cuadro 2.1. λ_ϕ es representado en líneas discontinuas y λ_θ con líneas continuas.

Es importante también chequear que en todos los ejemplos las superficies S_t , no solo se mantengan convexas a lo largo de la evolución del flujo, sino que también se aproximen a esferas a medida que aumenta el parámetro t ; esto se puede ver claramente en los gráficos de las curvaturas principales $\lambda_\theta, \lambda_\varphi$. En las figuras 2.3 y 2.4 se muestran los gráficos de los cocientes $\lambda_\theta(\theta)/(1/r(\theta))$ y $\lambda_\varphi(\theta)/(1/r(\theta))$, como funciones de θ , para varios valores de t , para los dos casos más extremos del Cuadro 2.2: los objetos P y VO. En ambas figuras se puede ver que, a medida que t crece, las curvaturas principales de S_t se aproximan a las curvaturas principales de la esfera.

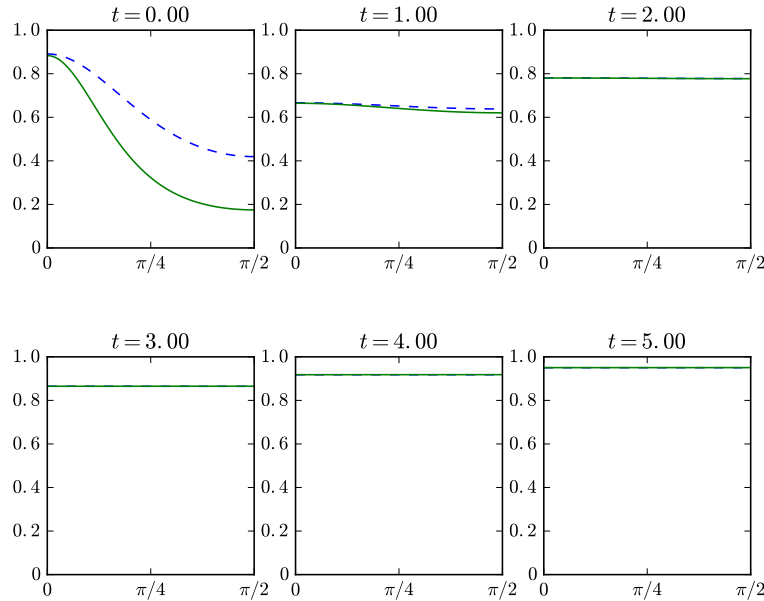


Figura 2.3: Gráficos de $r\lambda_\varphi$ (líneas discontinuas) y $r\lambda_\theta$ (líneas continuas) como funciones de θ , a lo largo de la evolución del IMCF, de las superficies del Cuadro 2.3 para el objeto P.

Objeto cóncavo

Como ejemplo final calculamos el dato inicial generado por un objeto que, visto desde la geometría conforme plana, es cóncavo. Estudiamos un objeto cuya función $a(\rho, z)$ está dada por la ecuación (2.56) pero con el parámetro s definido como

$$s = \frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}}{B\left(D + \frac{\rho^2}{\rho^2 + z^2}\right)}. \quad (2.57)$$

Como superficie inicial, S_0 , para evolucionar el flujo, al igual que en el caso VO, usamos una superficie esferoidal más grande que la del objeto. Los parámetros para el objeto que usamos son: $B = 5.0 \times 10^5$, $D = 0.3$, $a_0 = 6.0 \times 10^{-18}$. Con estos parámetros tenemos $J = 4.1743 \times 10^{10}$, y $m = 1.0982 \times 10^5$. Los parámetros que usamos para

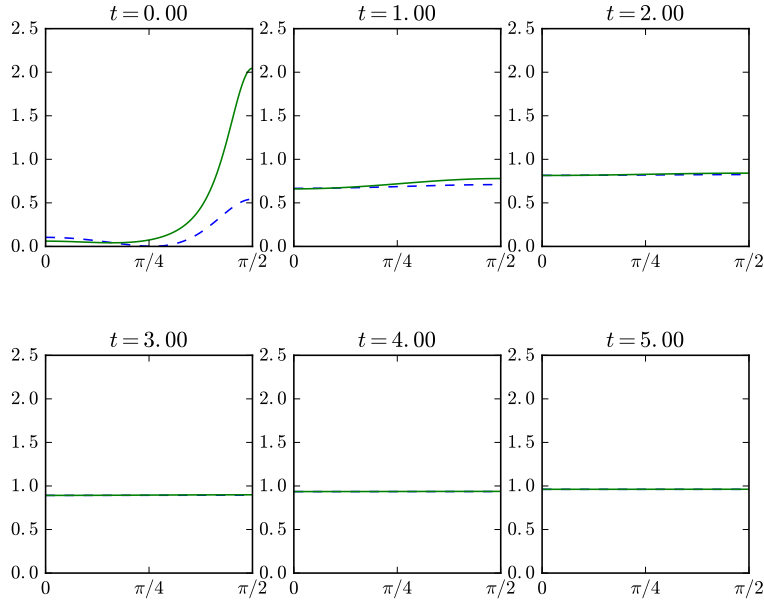


Figura 2.4: Gráficos de $r\lambda_\varphi$ (líneas discontinuas) y $r\lambda_\theta$ (líneas continuas) como funciones de θ , a lo largo de la evolución del IMCF, de las superficies del Cuadro 2.3 para el objeto VO.

definir la superficie esferoidal convexa, S_0 , que encierra al objeto son: $\rho_0 = 6.60 \times 10^5$ y $Z = 3.8 \times 10^5$; y para estos valores obtenemos $\mathcal{R}_A = 6.7350 \times 10^5$ y $\mathcal{R}_C = 7.7969 \times 10^5$. Verificamos que la evolución del IMCF partiendo de esta superficie S_0 que elegimos preservan la convexidad y tienen a esferas a medida que aumenta el valor de t , al igual que en los casos anteriores. En la Figura 2.5 se muestra un gráfico de la superficie del objeto, la superficie inicial, y las superficies del flujo, S_t , para unos pocos valores de t .

2.5.4. Discusión de los resultados numéricos

El objetivo que perseguimos al calcular los ejemplos numéricos es doble: primero chequear la condición de convexidad de las superficies S_t generadas por el IMCF, y segundo estudiar, en varios casos distintos, cuán relevante es el término $J^2/(5\mathcal{R}_A\mathcal{R}_C^2)$ en el lado derecho de la desigualdad (2.11). Nuestro interés es ganar intuición sobre en qué situaciones físicas el término de energía rotacional, el cociente entre momento angular y tamaño, genera una contribución importante a la energía total del sistema, la masa ADM.

La condición de preservación de la convexidad de las superficies generadas por el IMCF se verifica claramente en todos los ejemplos que calculamos. Cuando la superficie del objeto es convexa es posible evolucionar el flujo a partir de esta $S_0 = \partial U$ (la superficie del objeto) y la convexidad se preserva a lo largo de la evolución del flujo. Cuando la superficie del objeto no es convexa, al parecer, tomar S_0 como la primer su-

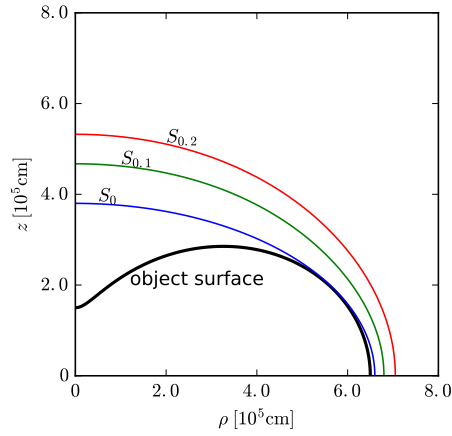


Figura 2.5: La superficie cóncava del objeto, vista desde la geometría conforme plana, junto con algunas de las superficies S_t convexas generadas por el IMCF a partir de la superficie esferoidal, S_0 , convexa, que encierra al objeto.

perficie esferoidal convexa (y axialmente simétrica) que encierre al objeto es suficiente para preservar la convexidad.

La formas de los objetos que consideramos son simples y los ejemplos numéricos que presentamos están lejos de ser exhaustivos, sin embargo no encontramos ningún signo que nos indique que la evolución del IMCF viole la condición de convexidad, al menos para datos iniciales conformemente planos y bajo las hipótesis de suavidad que imponemos en nuestros ejemplos. Este punto ciertamente merece ser estudiado en mayor profundidad, lo cual esperamos hacer en futuros trabajos.

Para ganar intuición en la importancia relativa del término de energía rotacional, proporcional a J , en el lado derecho de (2.11), definimos el cociente

$$\Gamma := \frac{\left(\frac{J^2}{5\mathcal{R}_A\mathcal{R}_C^2} \right)}{m}. \quad (2.58)$$

Los valores de Γ para los objetos con valores de densidad de masa altos en el Cuadro 2.1 son

$$\Gamma_{NS} \simeq 1.4 \times 10^{-2}, \quad \Gamma_P \simeq 1.7 \times 10^{-2}, \quad \Gamma_O \simeq 2.2 \times 10^{-2}, \quad \Gamma_{VO} \simeq 1.3 \times 10^{-2},$$

mientras que para el objeto con valor de densidad de masas más bajo, O, tenemos

$$\Gamma_S \simeq 7.9 \times 10^{-8}.$$

Para el objeto cóncavo y con valor de densidad de masa alto, sub-sección 2.5.3 tenemos $\Gamma \simeq 7.6 \times 10^{-3}$.

A pesar de que no hemos calculado muchos ejemplos, nuestros resultados sugieren que la contribución del término que involucra J^2 es más grande para objetos con valores de densidad de materias más grandes. Comparando los valores de Γ para los objetos P y O , los cuales tiene intercambiados los valores de los parámetros ρ_0 y Z , vemos que, como esperábamos, el valor de Γ es más grande para el esferoide oblato que para el esferoide prolato.

Obj.	ρ_0	Z	\mathcal{R}_C	\mathcal{R}_A	$J^2/(5\mathcal{R}_A\mathcal{R}_C^2)$
NS	7.50×10^5	7.30×10^5	1.0461×10^6	1.0227×10^6	3.8168×10^3
P	0.80×10^6	1.00×10^6	1.2309×10^6	1.2859×10^6	6.8942×10^3
O	1.00×10^6	0.80×10^6	1.6462×10^6	1.5379×10^6	1.2295×10^4
VO	1.00×10^6	0.30×10^6	1.3199×10^6	1.1497×10^6	3.5984×10^3
S	6.70×10^{10}	6.50×10^{10}	6.7000×10^{10}	6.5796×10^{10}	1.0865×10^{-2}

Cuadro 2.3: Parámetros de superficies iniciales para el IMCF, S_0 , para las cuales el IMCF desarrolla superficies convexas. Parámetros geométricos de tamaño del objeto, \mathcal{R}_C y \mathcal{R}_A , junto con el cociente entre momento angular y tamaño que aparece en el lado derecho de la desigualdad (2.7). Esta última cantidad debe ser comparada con el valor de m , dada en el Cuadro 2.2.

Capítulo 3

Masa, Momento Angular y Tamaño para Agujeros Negros

En espaciotiempos axialmente simétricos la desigualdad de Penrose puede ser extendida de forma tal que incluya la contribución a la energía total generada por el momento angular. Probamos una versión de esta desigualdad para horizontes aparentes, más precisamente obtenemos una cota inferior para la masa ADM en términos del área del horizonte, el momento angular, y una medida particular del tamaño de la superficie. Consideramos un dato inicial asintóticamente plano y axialmente simétrico, y usamos la monotonía de las energías de Geroch y de Hawking, definidas sobre 2-superficies, a lo largo de un flujo de curvatura media inversa. Estos resultados fueron publicados parcialmente en [5], donde se trata el caso en el cual el horizonte aparente es una superficie minimal.

3.1. La desigualdad de Penrose con momento angular

En 1973 Penrose propone, [64], usando un argumento heurístico, que la masa, m de un agujero negro debe satisfacer la relación

$$m \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}} \quad (3.1)$$

donde A es el área del horizonte del agujero negro. Desde la propuesta original de Penrose el estudio de esta desigualdad se ha convertido en un área de investigación activa, y se han estudiado varias versiones de este problema (ver los artículos de revisión [60, 14]) así como también enfoques más generales de la misma [28, 16, 15]. Más aún, bajo ciertas condiciones, es posible reforzar el argumento heurístico de Penrose de forma tal de incluir las contribuciones de la carga y el momento angular del agujero negro (ver [22]).

El argumento de Penrose es el siguiente: supongamos que tenemos materia que se encuentra colapsando, si se asume la validez de la *conjetura del censor cósmico* (ver por ejemplo [76]), el estado final de dicho colapso debe ser un agujero negro en equilibrio. En esta situación se espera que toda la materia presente en el espacio tiempo caiga

dentro del horizonte de eventos, y por lo tanto del Teorema de Unicidad de agujeros negros [43], el estado final debe ser un agujero negro de Kerr-Newman. Luego, el área A_f del agujero negro final está dada en términos de la masa total, el momento angular, y la carga eléctrica de dicho agujero negro final

$$A_f = 4\pi \left(2m_f^2 - Q_f^2 + 2m_f \sqrt{m_f^2 - \frac{J_f^2}{m_f^2} - Q_f^2} \right). \quad (3.2)$$

Ahora tomamos una superficie de Cauchy Σ que conecte al agujero negro con infinito espacial, y tal que el colapso ya haya ocurrido, denotamos con Σ_H a la intersección del horizonte con la superficie de Cauchy, y sea A_{Σ_H} el área de Σ_H . Luego calculamos la masa total m , la carga eléctrica Q , y el momento angular J de Σ en infinito espacial (estamos suponiendo que dichas cantidades están bien definidas). Del Teorema del área del agujero negro, [40], sabemos que el área crece con el tiempo, $A_f \geq A_{\Sigma_H}$, y dado que las ondas gravitatorias se llevan energía, positiva, fuera del sistema, la masa total medida en Σ debe ser mayor o igual que la masa del agujero negro final, $m \geq m_f$. Luego, usando que el área del agujero negro final (3.2) es una función monótonamente creciente de m_f tenemos que:

$$A_{\Sigma} \leq A_f \leq 4\pi \left(2m^2 - Q_f^2 + 2m \sqrt{m^2 - \frac{J_f^2}{m^2} - Q_f^2} \right). \quad (3.3)$$

Se han logrado bastantes progresos en cuanto a considerar las implicaciones de (3.3) en el caso en que tengamos un agujero negro cargado con momento angular. Para dicho caso se han estudiado y probado diferentes versiones de una desigualdad que relacionan la masa ADM, el área del horizonte y la carga eléctrica [77, 27, 50, 51, 52, 55]. Estos resultados son un importante test en favor de la validez de la conjetura del censor cósmico en el caso en que tengamos materia cargada colapsando. En este capítulo estudiaremos el caso en el que $J \neq 0$, y por simplicidad no consideraremos espaciotiempos con carga. Este caso representa un escenario físico muy importante ya que en general se espera que todo estado de colapso gravitatorio tenga momento angular. La validez de una extensión de la desigualdad de Penrose con momento angular es entonces otro muy importante test en apoyo a la conjetura del censor cósmico. A pesar de que se han logrado grandes avances en relación al estudio y demostración de desigualdades con momento angular (ver por ejemplo el artículo de revisión [26]) aún no se ha obtenido ninguna prueba formal de la desigualdad de Penrose con momento angular o de alguna versión de esta.

Cuando consideramos materia en rotación colapsando, el valor del momento angular final no necesariamente coincidirá con el valor que calculemos en Σ , ya que las ondas gravitatorias, además de energía, pueden llevar momento angular fuera del sistema. Por lo tanto no tenemos una manera simple de relacionar el valor de J en Σ con el valor de J_f . Para evitar este problema debemos considerar situaciones en las cuales el momento angular se conserve a lo largo de la evolución temporal, y este es justamente el caso que tenemos si asumimos que el espacio-tiempo es *axialmente simétrico* (ver apéndice A). Es importante notar que, en el contexto de relatividad general, la condición de que el espacio-tiempo sea axialmente simétrico es necesaria para poder tener

una buena definición de momento angular (ver por ejemplo [65]); sin esta condición no sabemos como definir el momento angular, o su definición no será única. Por lo tanto esta condición no solo es necesaria para que se conserve el momento angular, sino que es imprescindible para definir el momento angular en sí mismo.

Si consideramos entonces agujeros negros axialmente simétricos, generados por un colapso gravitatorio axialmente simétrico, del argumento de Penrose tenemos que

$$A_{\Sigma} \leq 8\pi \left(m^2 + m \sqrt{m^2 - \frac{J^2}{m^2}} \right) \quad (3.4)$$

Luego, nos gustaría poder calcular o acotar el área A_{Σ} en términos de cantidades geométricas que puedan ser calculadas en base a las condiciones iniciales en Σ ; el problema es que la definición matemática estándar de agujero negro no permite hacer esto. La existencia de un horizonte de evento es una propiedad global de la estructura causal del espacio-tiempo en todo su conjunto, y no podemos identificar una región de agujero negro sin esta información global. Por el contrario, el concepto de superficie atrapada nos provee de una caracterización local del agujero negro, y la existencia de superficies atrapadas implica la existencia de singularidades en el espacio-tiempo y (con la estructura causal adecuada) la existencia de un horizonte de eventos (ver [11] para una discusión completa de este punto). El borde de una región atrapada es un horizonte, en particular consideraremos horizontes aparentes futuros. Un horizonte aparente futuro \mathcal{H} es una 2-superficie definida con la propiedad que todas geodésicas nulas futuras salientes (ver por ejemplo [65]), ortogonales a \mathcal{H} tienen expansión $\vartheta^+ = 0$, y la expansión de las geodésicas nulas pasadas salientes es no-negativa $\vartheta^- \geq 0$.

Consideramos entonces un horizonte aparente futuro \mathcal{H} , en una 3-superficie de Cauchy Σ , en un espacio-tiempo axialmente simétrico, luego el argumento heurístico de Penrose implica:

$$A \leq 8\pi m \left(m + \sqrt{m^2 - \frac{J^2}{m^2}} \right) \quad (3.5)$$

donde A es el área de \mathcal{H} (este argumento fue presentado por primera vez en [18] y [39]). Esta desigualdad solo tiene sentido si se cumple que $m \geq \sqrt{|J|}$, condición que fue probada para superficies atrapadas externas conexas en [19]. Más aún, en 2011 Dain y Reiris [20] probaron que, bajo ciertas condiciones, el área y el momento angular de un horizonte aparente cerrado y axialmente simétrico satisface la desigualdad cuasi-local $A \geq 8\pi|J|$; este resultado ha sido extendido a otros casos en [1, 29, 31]. Luego de las desigualdades $m \geq \sqrt{|J|}$ y $A \geq 8\pi|J|$ tenemos que (3.5) es equivalente a (ver apéndice F):

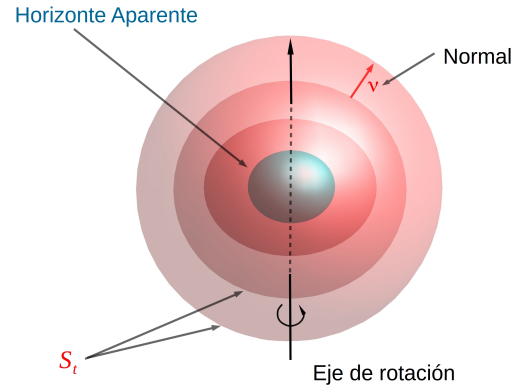
$$m^2 \geq \frac{A}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{A}, \quad (3.6)$$

Esta versión de la desigualdad de Penrose admite un caso de rigidez, el cual establece que la igualdad solo se alcanza en un agujero negro de Kerr.

En este capítulo estudiaremos la validez de la desigualdad (3.6) y la posibilidad de probar alguna versión de ella. Este es uno de los problemas abiertos en el área de desigualdades geométricas (ver [24, 60]), y a pesar de que se han hecho varios esfuerzos aún no se ha logrado obtener ninguna prueba formal de (3.6).

La desigualdad (3.6) establece una relación entre la masa total medida en infinito espacial y cantidades cuasi-locales del horizonte aparente, su área y momento angular. Luego, para abordar el problema se debe seleccionar una hipersuperficie Σ del espacio-tiempo que conecte el horizonte con infinito. Siguiendo el trabajo de Malec, Mars, y Simon, [59], consideraremos un dato inicial asintóticamente plano y axialmente simétrico con borde $(\Sigma, \partial\Sigma, \bar{g}, K; \mu, j^i)$, tal que el borde $\partial\Sigma$ es una 2-superficie conexa y compacta, y tal que $\partial\Sigma$ es un horizonte aparente y Σ no tiene ninguna otra superficie atrapada. Además asumiremos que los campos de materia satisfacen la condición de energía dominante (DEC) (A7). Bajo ciertas hipótesis la energía de Geroch

Como vimos en el capítulo anterior, el flujo de curvatura media inversa, $\{S_t\}$ (ver ecuación E1), y la energía de Geroch 2.13 resultan ser herramientas muy útiles a la hora de relacionar la masa ADM con medidas de energía locales, y en particular con la contribución que proviene del momento angular.



es monótona a lo largo del IMCF y tiende a la masa ADM en infinito. Además de estas dos propiedades, la energía de Geroch satisface otra propiedad importante, la misma es igual a $\sqrt{\frac{A}{16\pi}}$ para una superficie minimal. Por lo tanto si tomamos un IMCF empezando desde una superficie minimal, que es un caso particular de horizonte aparente, podemos relacionar la masa ADM con el área de la superficie minimal, y si a lo largo de dicho flujo la energía es monótona entonces tenemos una prueba de la desigualdad (3.1) para superficies minimales. Este argumento fue usado por Huisken e Ilmanen en su muy importante trabajo [47], donde remueven la hipótesis de suavidad del IMCF usando una formulación débil del flujo.

En el caso en que tengamos un horizonte general la energía de Geroch pierde utilidad, ya que la curvatura media en este caso es $H \neq 0$ y por lo tanto no podemos relacionar de forma simple la energía con el área del horizonte, como en el caso en que tenemos una superficie minimal. Existe otro funcional que resulta muy útil para evitar este problema, la energía de Hawking

$$E_H(S) := \frac{A^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(16\pi - \int_S \vartheta^+ \vartheta^- dS \right) \quad (3.7)$$

donde A es el área de una 2-superficie S y ϑ^+, ϑ^- , son las expansiones nulas, salientes, ortogonales a S , futura y pasada respectivamente. Este funcional cumple propiedades similares al anterior, tiende a la masa ADM en infinito y es igual $\sqrt{\frac{A}{16\pi}}$ para un horizonte aparente, y más aún bajo ciertas hipótesis es monótono a lo largo del IMCF.

Esta es justamente la herramienta usada en [59] para demostrar la desigualdad (3.1) para horizontes generales, para datos iniciales que admitan un IMCF suave y cumplan ciertas hipótesis que veremos posteriormente.

Usando estas herramientas nuestra intención es lograr probar una desigualdad similar a (3.6), es decir una cota inferior para la masa ADM de un dato inicial en términos del área de horizonte aparente y un cociente entre el momento angular y una cierta medida de tamaño. Si bien en el argumento heurístico la única medida de tamaño involucrada es el área, o el radio de área, del horizonte, en el capítulo anterior vimos que el radio axial parece ser una medida de tamaño muy útil a la hora de incluir el momento angular. Esto nos lleva a pensar que quizás no podamos utilizar una única medida de tamaño y debemos formular la desigualdad (3.6) utilizando otra medida además del área, al menos en el término que involucra J .

Teniendo en cuenta estos argumentos, las ideas de Penrose, los trabajos previos [59], [47], y el método desarrollado en el capítulo anterior para relacionar J con la energía de Geroch, inferimos lo siguiente. Esperamos que exista una energía cuasi-local \mathcal{E} , tal que si tomamos un IMCF de superficies S_t que empieza en $\partial\Sigma$ y va a infinito, dicha energía cumple las siguientes condiciones:

1. es monótona a lo largo de IMCF
2. tiende a la masa ADM en infinito
3. $\mathcal{E}(\partial\Sigma)$ se puede relacionar con A
4. $\mathcal{E}(S_t)$ se puede relacionar con $J(S_t)$.

Luego, si podemos encontrar una energía con estas propiedades, debería ser posible probar la siguiente conjetura.

Conjetura 3.1. *Sea $(\Sigma, \partial\Sigma, \bar{g}, K)$ un dato inicial vacío, axialmente simétrico y asintóticamente plano, tal que $\partial\Sigma$ es un horizonte aparente compacto y conexo, y no existe ninguna otra superficie atrapada en Σ . Sea $\{S_t\}$ un IMCF de superficies que empieza en $\partial\Sigma$ y va a infinito, y \mathcal{E} que cumple las condiciones 1,2,3 y 4. Luego existe una medida de tamaño $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\partial\Sigma)$ tal que*

$$m^2 \geq \frac{A}{16\pi} + \frac{J^2}{\mathcal{R}^2} \quad (3.8)$$

donde J y A son el momento angular y el área de $\partial\Sigma$, respectivamente.

Claramente la energía de Geroch y la energía de Hawking son los principales candidatos para \mathcal{E} , ya que ambas satisfacen las condiciones 1, 2 y 3. Además en el capítulo anterior presentamos un argumento mediante el cual es posible relacionar la energía de Geroch con el momento angular, dicho argumento, aunque con algunas modificaciones, será utilizado nuevamente en este capítulo para probar que ambas energías satisfacen 4. Aún así no tenemos certeza de que dichas energías sean las más adecuadas, y puede que exista otra definición de energía que nos dé resultados más ajustados.

El argumento heurístico de Penrose sugiere que \mathcal{R} debería ser el radio de área del horizonte, pero en principio no sabemos cuál será la medida de tamaño más conveniente, es decir la que nos de la desigualdad más ajustada, pero esperamos que la misma

dependa de la norma del vector de Killing axial η . Sobre este punto también se debe tener en cuenta que la desigualdad (3.6) tiene un caso de rigidez en el cual el radio de área (o el área) es la medida de tamaño con la que se satura la desigualdad, la igualdad en (3.6) solo se cumple para un espacio-tiempo de Kerr donde A es el área del horizonte de eventos.

El plan de este capítulo es el siguiente. En la sección 3.2 presentamos los resultados obtenidos, dados por los Teoremas 3.3 y 3.4 para el caso en que tenemos un dato inicial vacío, y por los Teoremas 3.5 y 3.6 para datos iniciales en los los campos de materia generan una contribución no nula al momento angular total. Además en dicha sección presentamos una serie de comentarios respecto al método que utilizamos para abordar el problema y discutimos en detalle las implicaciones físicas de los resultados. En la sección 3.3 presentamos el contexto, los antecedentes y las herramientas que utilizaremos para las demostraciones, así como también un repaso de las propiedades básicas de la evolución, a lo largo del IMCF, de la energía de Hawking. Finalmente en la sección 3.4 presentamos la demostración de las propiedades particulares de la medida de tamaño que definimos para abordar el problema, y las demostraciones de los Teoremas 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6, las cuales estarán divididas naturalmente en dos, el caso en el cual el horizonte aparente es una superficie minimal, 3.3 y 3.5, y el caso el en cual es un horizonte general, 3.4 y 3.6.

3.2. Resultados

Consideramos un dato inicial asintóticamente plano y axialmente simétrico con borde $(\Sigma, \partial\Sigma, \bar{g}, K; \mu, j^i)$, tal que el borde $\partial\Sigma$ es una 2-superficie conexa y compacta, y tal que $\partial\Sigma$ es un horizonte aparente y Σ no tiene ninguna otra superficie atrapada. Además, asumimos que los campos de materia, μ, j^i , satisfacen la condición de energía dominante (DEC) (A7), y suponemos que existe un IMCF suave de superficies S_t , con topología esférica, que parte de $\partial\Sigma$ y tiende a infinito. Bajo estas condiciones es posible descomponer la métrica \bar{g} de la forma (ver [59]):

$$ds_{\bar{g}}^2 = \frac{dt^2}{H^2} + g_{ij} dx^i dx^j \quad (3.9)$$

donde g_{ij} y (x^1, x^2) son la métrica inducida y las coordenadas en S_t , respectivamente. De aquí en adelante llamaremos q a la traza de K respecto a la métrica g_{ij} , $q = K_{ij} g^{ij}$. Al igual que el capítulo anterior el IMCF será axialmente simétrico para los datos que estamos considerando, ya que $\partial\Sigma$ tiene simetría axial y no existe ningún mecanismo que pueda hacer que la normal del IMCF tenga alguna componente a lo largo de η^i .

Las cantidades físicas y geométricas en las que estamos interesados son la masa ADM (ecuación (A9)), m , y el momento angular $J(S_t)$ de cada superficie S_t del IMCF

$$J(S_t) = \frac{1}{8\pi} \int_{S_t} K_{ij} \eta^i \nu^j dS, \quad (3.10)$$

donde usamos que $\bar{g}_{ij} \nu^i \eta^j = 0$. Al igual que antes tomaremos el radio de área y el

radio axial como medidas de tamaño de S_t

$$\mathcal{R}_A(S_t) := \sqrt{\frac{A_t}{4\pi}}, \quad \mathcal{R}_C(S_t) := \frac{\mathcal{C}(S_t)}{2\pi} \quad (3.11)$$

A_t es el área de S_t y $\mathcal{C}(S_t)$ es el largo del círculo axialmente simétrico más grande de S_t .

Además de las definiciones usuales de tamaño, (3.11), definimos una nueva medida de tamaño de las superficies S_t basada en el comportamiento de la norma del vector de Killing axial, η , a lo largo del IMCF desde S_t a infinito:

Definición 3.2. $\mathcal{R}(S_t)$

$$\frac{1}{\mathcal{R}(S_t)^2} := A_t^{1/2} \int_t^\infty \frac{A_{t'}^{1/2}}{\int_{S_{t'}} \eta dS} dt' \quad (3.12)$$

Del comportamiento asintótico del flujo (recordemos que, para datos asintóticamente planos, el IMCF va a esferas en infinito) tenemos que la integral en (3.12) es convergente, siempre y cuando el IMCF se mantenga suave, por lo tanto \mathcal{R} es positiva y bien definida.

Más aún, dependiendo de las propiedades del flujo esta medida puede, en algunos casos, ser relacionada con las medidas usuales de tamaño (ver sección 3.4.1). El caso más favorable, pero el menos frecuente, es tener un IMCF esférico, para este caso

$$\mathcal{R}^2(S_t) = \mathcal{R}_A^2(S_t). \quad (3.13)$$

Si asumimos condiciones más débiles para el comportamiento del flujo no podemos obtener una expresión exacta para \mathcal{R} en términos de las medidas usuales de tamaño, pero sí podemos obtener una cota. Si, como en el capítulo anterior, consideramos IMCF convexos obtenemos la siguiente cota para \mathcal{R} :

$$\mathcal{R}^2(S_t) \leq \frac{5}{2} \frac{\int_{S_t} \eta dS}{A_t} \leq \frac{5}{2} \mathcal{R}_C^2(S_t). \quad (3.14)$$

Podemos obtener una relación similar entre \mathcal{R} y \mathcal{R}_C asumiendo una condición aún más débil: que las superficies del flujo no están muy lejos de ser convexas. En particular, si asumimos que $h_{ij} \geq -\frac{H}{2}g_{ij}$, donde h_{ij} es la curvatura extrínseca de S_t , obtenemos:

$$\mathcal{R}^2(S_t) \leq \frac{7}{2} \frac{\int_{S_t} \eta dS}{A_t} \leq \frac{7}{2} \mathcal{R}_C^2(S_t). \quad (3.15)$$

Es importante notar que del comportamiento asintótico del flujo sabemos que, para datos asintóticamente planos, aún sin asumir ninguna propiedad especial para el flujo, siempre existirá una primera superficie S_p tal que a partir de ella el IMCF satisface alguna de las condiciones anteriores, que sea esférico, convexo o casi convexo. El inconveniente que tiene este enfoque es que no tenemos forma de determinar cuán lejos de $\partial\Sigma$ estará esta primera superficie, y por lo tanto puede que la misma no represente las propiedades del horizonte; cabe destacar que cuanto más débil sea la condición que usemos, más cerca del horizonte estará la superficie S_p .

Horizonte aparente en un dato inicial vacío

En primer lugar nos enfocamos en el caso en el cual el dato inicial es vacío y el horizonte aparente es una superficie minimal, $\vartheta^+ = \vartheta^- = 0$. De esta suposición tenemos que Σ es una *región exterior*, tiene topología \mathbb{R}^3 menos una bola, y su borde $\partial\Sigma$ es una 2-superficie de área mínima [47]. Como dijimos anteriormente este tipo de horizonte aparente está usualmente asociado con el caso especial en el que el dato inicial es temporalmente simétrico $K = 0$, usualmente conocido como el caso Riemanniano de la desigualdad de Penrose (3.1). Esta terminología, [45] [47], no es suficientemente precisa: para el caso en el que el horizonte es una superficie minimal, la condición temporalmente simétrico no es esencial para la prueba de la desigualdad (3.1). La demostración de la desigualdad (3.1), es válida siempre y cuando el escalar de curvatura sea no-negativo, y esta condición se puede cumplir asumiendo condiciones más débiles, como por ejemplo considerando datos iniciales maximales ([60] [14]). Notemos además que para datos temporalmente simétrico el momento angular es nulo (ver ecuación (A15)), por lo tanto si queremos incluir los efectos de la rotación en la desigualdad de Penrose necesitamos asumir condiciones más débiles para K . Utilizando la energía de Geroch, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_H$, probamos el siguiente teorema para superficies minimales.

Teorema 3.3. *Superficies Minimales*

Sea $(\Sigma, \partial\Sigma, \bar{g}, K)$ un dato inicial de vacío, asintóticamente plano y axialmente simétrico, tal que $\partial\Sigma$ es una superficie minimal compacta y conexa, y no existe ninguna otra superficie atrapada en Σ . Supongamos que existe un IMCF suave de superficies S_t , que empieza en $\partial\Sigma$ y tiene topología esférica. Luego, si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

a) el dato inicial es maximal: $Tr(K) = 0$, o

b) para cada superficie S_t la traza de K respecto de g_{ij} satisface: $q = 0$,

entonces:

$$m^2 \geq \frac{A}{16\pi} + \frac{J^2}{\mathcal{R}^2} \quad (3.16)$$

donde J y A son el momento angular y el área de $\partial\Sigma$ respectivamente, y $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\partial\Sigma)$ se define con (3.12).

En cuanto al caso en que $\partial\Sigma$ es un horizonte aparente general, es decir $\vartheta^+|_{\partial\Sigma} = 0$, $\vartheta^-|_{\partial\Sigma} \geq 0$, obtenemos un resultado similar, aunque asumiendo condiciones más restrictivas para el dato inicial. Estas condiciones, a diferencia de la condición maximal a), y al igual que la condición b), dependen fuertemente del IMCF. Las mismas fueron propuestas por primera vez, para el estudio de la desigualdad de Penrose para horizontes generales, en el mencionado trabajo de Malec, Mars y Simon, [59], y son necesarias para asegurar la monotonía de la energía de Hawking a lo largo de IMCF. Al igual que antes, tenemos que Σ es una *región exterior* y tiene topología \mathbb{R}^3 menos una bola, pero en este caso $\partial\Sigma$ no será una 2-superficie de área mínima. De aquí en adelante llamaremos s_i a la contracción de K con ν^j , $s_i = K_{ij}\nu^j$, donde, recordemos, ν^j es la normal de S_t ; al igual que en el capítulo anterior $\bar{\nabla}_i$ es la derivada covariante

asociada a \bar{g}_{ij} . Para este caso, utilizando la energía de Hawking, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_H$, probamos el siguiente resultado.

Teorema 3.4. Horizontes Generales

Sea $(\Sigma, \partial\Sigma, \bar{g}, K)$ un dato inicial vacío, asintóticamente plano y axialmente simétrico, tal que $\partial\Sigma$ es un horizonte aparente compacto y conexo, y no existe ninguna otra superficie atrapada en Σ . Supongamos que existe un IMCF suave de superficies S_t , que empieza en $\partial\Sigma$ y tiene topología esférica. Luego, si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

- I) $\frac{q}{H}$ es constante en cada superficie S_t , o
- II) $g^{ij}\bar{\nabla}_i s_j = 0$,

entonces:

$$m^2 \geq \frac{A}{16\pi} + \frac{J^2}{\mathcal{R}^2} \quad (3.17)$$

donde J y A son el momento angular y el área de $\partial\Sigma$ respectivamente, y $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\partial\Sigma)$ se define con (3.12).

Observaciones y Comentarios

Las desigualdades (3.16) y (3.17) son globales, dado que involucran a la masa ADM. Tanto (3.16) como (3.17) dependen cuadráticamente de la masa ADM, y del cuadrado del cociente entre momento angular y tamaño, como resultado de la dependencia lineal de $d\mathcal{E}/dt$ con el escalar de curvatura, y de que podemos acotar $d\mathcal{E}^2/dt$ en términos de $Ad\mathcal{E}/dt$, tanto para $\mathcal{E} = \mathcal{E}_G$ como para $\mathcal{E} = \mathcal{E}_H$ (ver ecuaciones (3.69) y (3.82)). Ambas desigualdades, a pesar de que requieren diferentes hipótesis, involucran la misma medida de tamaño \mathcal{R} , y aunque no podemos obtener la desigualdad esperada en términos de J^2/A , nos dan una cota inferior para la masa total del dato en el espíritu de la desigualdad de Penrose con momento angular, (3.6).

Si consideramos un dato inicial no-vacío en el cual los campos de materia no contribuyen al momento angular, esto es $j_i\eta^i = 0$ en todo Σ (donde j_i es la densidad de corriente y η^i el vector de Killing axial, ver ecuación (3.22)) los Teoremas 3.3 y 3.4 pueden ser extendidos para este tipo de datos no-vacíos. Para ello debemos asumir que vale la condición de energía dominante, con lo cual tanto la energía de Geroch como la energía de Hawking, bajo las condiciones de los Teoremas 3.3 y 3.4, continúan siendo monótonas a lo largo de IMCF. La condición $j_i\eta^i = 0$ es necesaria para asegurar que el momento angular de las superficies S_t se conserva a lo largo del IMCF, $J(S_t) = J(\partial\Sigma) = J$ (ver ecuación 3.21).

Si para las desigualdades obtenidas existe un caso de rigidez, se espera que la igualdad en (3.8) se debe alcanzar solo para en el caso en que el dato inicial sea la hipersuperficie $t = 0$ del espacio tiempo de Kerr (donde t aquí es la coordenada temporal

usual del espacio-tiempo de Kerr). Desafortunadamente no es fácil testar el resultado allí, para hacerlo necesitamos calcular una solución suave del IMCF en la hipersuperficie $t = 0$, y no tenemos una expresión analítica para dicha solución, al menos no por el momento. Una posibilidad es continuar buscando dicha solución analítica, pero la complejidad de la ecuación del IMCF en la hipersuperficie mencionada no nos da mucha esperanza. Por el contrario un enfoque numérico tiene grandes posibilidades de éxito en este punto. Una posibilidad sería resolver la ecuación del IMCF sobre un dato inicial conformemente plano como se hizo en el capítulo anterior. El estudio del caso de rigidez del teorema de forma numérica es uno de los siguientes puntos que queremos estudiar.

La noción de tamaño que usamos, \mathcal{R} , aunque aparentemente artificial a primera vista, proviene del método particular que usamos para relacionar el momento angular con las energías \mathcal{E}_G y \mathcal{E}_H , y da una buena medida de cuanto difiere el IMCF que obtengamos para el dato inicial de un IMCF esférico. El comportamiento de la norma del vector de Killing a lo largo del IMCF parece ser un ingrediente necesario a la hora de considerar la contribución de energía rotacional en función del tamaño del objeto que estemos considerando (al igual que en el capítulo anterior). Más aún, en los últimos años se ha encontrado que las medidas de tamaño basadas en la norma del vector de Killing resultan ser muy apropiadas para describir el tamaño de una región con momento angular, tanto para objetos ordinarios (como vimos en el capítulo anterior) como para agujeros negros, [66], [30], [23].

No sabemos si es posible encontrar una relación entre \mathcal{R} y las medidas usuales de tamaño, al menos sin asumir alguna condición sobre el IMCF, la medida depende fuertemente del flujo. Esta es claramente una de las principales preguntas abiertas que queremos responder en futuros trabajos. Asumiendo propiedades particulares para el IMCF, podemos escribir (3.16) y 3.17 en términos de las medidas usuales \mathcal{R}_A y \mathcal{R}_C . Recordemos que, al menos para objetos ordinarios, tenemos evidencia numérica de que en algunos casos existe un IMCF convexo, aún partiendo de la superficie del objeto; dado que la condición $h_{ij} \geq -\frac{H}{2}g_{ij}$ es más débil que la condición de convexidad esperamos que la misma amplíe el rango de casos en el cual podemos usar \mathcal{R}_C .

En el caso en que tengamos un IMCF esférico, el cual es muy poco probable, los Teoremas 3.3 y 3.4 implican la validez de la desigualdad de Penrose con momento angular:

$$m^2 \geq \frac{A}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{A} \quad (3.18)$$

(aunque no esperamos obtener un IMCF esférico salvo en casos muy particulares). Cabe destacar que para datos iniciales esféricamente simétricos el IMCF es esférico, siempre y cuando partamos de una de las superficies esféricas del dato, pero los datos esféricamente simétricos no tienen momento angular, por lo que no esperamos que esta relación sea útil para el problema que estudiamos. Si suponemos que existe un IMCF convexo, lo cual esperamos que valga para una mayor cantidad de datos iniciales,

obtenemos:

$$m^2 \geq \frac{A}{16\pi} + \frac{2}{5} \frac{J^2}{\mathcal{R}_C^2}. \quad (3.19)$$

Para un IMCF que satisface $h_{ij} \geq -\frac{H}{2}g_{ij}$ (i.e., casi convexo):

$$m^2 \geq \frac{A}{16\pi} + \frac{2}{7} \frac{J^2}{\mathcal{R}_C^2}. \quad (3.20)$$

En la desigualdad (3.16), la condición de que Σ sea una región exterior, es decir que no existe ninguna superficie atrapada en Σ salvo por la superficie minimal $\partial\Sigma$, no es esencial para la prueba. Podemos asumir la condición más débil de que Σ no tenga ninguna otra superficie minimal y el Teorema 3.3 sigue siendo válido. Si este es el caso el dato inicial puede tener superficies atrapadas y la superficie minimal $\partial\Sigma$ ya no será un horizonte aparente.

Las condiciones I) y II) en el Teorema 3.4 son necesarias para asegurar que la energía de Hawking sea monótona a lo largo del IMCF. La condición II) se puede imponer eligiendo una forma particular para s_i ($s_i = K_{ij}\nu^j$, donde ν^i es la normal de S_i): asumir que $s^i = s\eta^i$ y que la función s no depende del ángulo axial φ ; esto es muy útil si queremos evitar imponer la condición I), la cual es sumamente restrictiva.

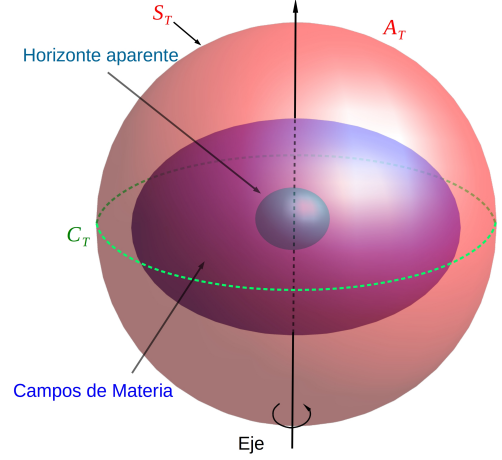
Es importante notar que si asumimos que $s_i = 0$, tanto I) como II) dejan de ser condiciones necesarias para asegurar la monotonía de la energía de Hawking (ver ecuación (3.78)), pero en este caso el dato inicial no tiene momento angular (ver ecuación (3.62)). Supongamos que tenemos un dato inicial asintóticamente plano, axialmente simétrico, que no tiene ninguna otra superficie atrapada más que el horizonte aparente futuro $\partial\Sigma$, satisface la DEC y tiene $s_i = 0$ en todo Σ , es decir un dato inicial dado por una región exterior sin momento angular. Luego, para este dato inicial, la única condición necesaria para que la derivada de la energía de Hawking a lo largo del flujo sea positiva es que exista un IMCF suave. Recordemos que en [59] los autores utilizan las condiciones de 3.4 para probar la desigualdad de Penrose (3.1) para horizontes generales, por lo tanto si asumimos que $s_i = 0$ en todo el dato la existencia de un IMCF suave es la única condición necesaria para que valga (3.1). Esto nos lleva a inferir que el momento angular genera dificultades a la hora de obtener una foliación de Σ para la cual podamos asegurar que la energía de Hawking sea monótona.

Horizonte aparente rodeado por un objeto ordinario en rotación

En el caso en que tenemos un dato inicial no-vacío, y una contribución no-nula de los campos de materia al momento angular, los resultados anteriores se pueden extender para incluir la contribución de la materia al momento angular. Para ello

asumiremos que los campos de materia satisfacen la DEC y que tanto la densidad de materia como la densidad de corriente tienen soporte compacto, llamamos U a dicha región.

Consideraremos entonces un objeto que en conjunto es compacto, es decir un agujero negro rodeado por un objeto ordinario compacto. Notemos que en este caso las medidas de tamaño que estarán involucradas en la contribución rotacional a la energía total no serán medidas de tamaño del horizonte aparente, sino de la primera superficie S_t del IMCF que encierre al objeto en su totalidad, llamaremos S_T a dicha superficie.



En este caso no obtenemos una desigualdad similar a (3.8), sino la extensión del Teorema 2.2 del capítulo anterior para el caso en el cual, en lugar de un objeto ordinario, tenemos un objeto que tiene un horizonte en su interior. Notemos que el momento angular de una superficie S_t estará dado por la suma del momento angular del horizonte y el momento angular generado por los campos de materia presentes en la región encerrada entre la S_t y el horizonte, llamamos $V(S_t)$ a dicha región,

$$J(S_t) = \frac{1}{8\pi} \int_{S_t} K_{ij} \eta^i \nu^j dS = J(\partial M) - \int_{V(S_t)} j_i \eta^i dv. \quad (3.21)$$

Es importante notar que en este caso $J(S_t)$ será el momento angular total del sistema solo si la superficie S_t encierra al objeto, es decir $J(S_t) = J(S_T) = J$ para todo $t \geq T$, con J dado por

$$J := J(\partial M) - \int_U j_i \eta^i dv. \quad (3.22)$$

Luego, en el caso en que el horizonte es una superficie minimal, bajo las mismas condiciones de los Teoremas 3.3, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.5. Objeto que contiene una Superficie Minimal

Sea $(\Sigma, \partial\Sigma, \bar{g}, K; \mu, j^i)$ un dato inicial que satisface las mismas condiciones del Teorema 3.3. Asumimos que los campos de materia satisfacen la condición de energía dominante y tiene soporte compacto en una región U al rededor de la superficie minimal $\partial\Sigma$, sea T tal que para todo $t \geq T$, las superficies S_t encierran U , luego

$$m \geq m_T + \frac{\mathcal{R}_A}{2} + \frac{J^2}{\mathcal{R}_A(T)\mathcal{R}^2(T)} \quad (3.23)$$

donde J es el momento angular total del dato, \mathcal{R}_A y $\mathcal{R}_A(T)$ son el radio de área de $\partial\Sigma$ y S_T respectivamente, $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(S_T)$ se define según (3.12), y

$$m_T := \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{R}_A}^{\mathcal{R}_A(T)} d\xi \int_{S_\xi} \bar{R} dS \quad (3.24)$$

donde ξ es la coordenada radio de área.

En el caso en que tengamos un horizonte general dentro del objeto, bajo las condiciones del Teorema 3.4, obtenemos:

Teorema 3.6. Objeto que contiene un Horizonte General

Sea $(\Sigma, \partial\Sigma, \bar{g}, K; \mu, j^i)$ un dato inicial que satisface las mismas condiciones del Teorema 3.4. Asumimos que los campos de materia satisfacen la condición de energía dominante y tienen soporte compacto en una región U al rededor del horizonte aparente futuro $\partial\Sigma$, sea T tal que para todo $t \geq T$, las superficies S_t encierran U , luego

$$m \geq \tilde{m}_T + \frac{\mathcal{R}_A}{2} + \frac{J^2}{\mathcal{R}_A(T)\mathcal{R}^2(T)} \quad (3.25)$$

donde J es el momento angular total del dato, \mathcal{R}_A y $\mathcal{R}_A(T)$ son el radio de área de $\partial\Sigma$ y S_T respectivamente, $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(S_T)$ se define según (3.12), y

$$\tilde{m}_T := \int_{\mathcal{R}_A}^{\mathcal{R}_A(T)} \int_{S_\xi} \left(\mu + \frac{q}{H} \nu^i j_i \right) dS d\xi \quad (3.26)$$

donde ξ es la coordenada radio de área.

Observaciones y Comentarios

Las desigualdades (3.23) y (3.25) dependen linealmente de la masa ADM debido a que, a diferencia que en las demostraciones de (3.16) y (3.17), tanto para la energía de Geroch como para la de Hawking, la contribución a la energía $\mathcal{E}(S_t)$ proveniente de los campos de materia m_T (o \tilde{m}_T) impide factorizar $d\mathcal{E}^2/dt$ en términos A , con lo cual no podemos utilizar la cota $d\mathcal{E}^2/dt \geq Ad\mathcal{E}/dt$ (ver ecuaciones (3.82) y (3.69)). Depende del cociente entre el cuadrado del momento angular y del tamaño al cubo como resultado de la dependencia lineal de $d\mathcal{E}/dt$ con el escalar de curvatura.

Al igual que en los resultados anteriores para datos iniciales vacíos, asumiendo propiedades particulares para el IMCF, podemos escribir \mathcal{R} en términos de $\mathcal{R}_C(S_T)$ y $\mathcal{R}_A(S_T)$, ver ecuaciones (3.13), (3.14) y (3.15), con lo cual las desigualdades (3.23) y (3.25) quedan expresadas en términos de las medidas de tamaño usuales. Más aún, al igual que en el capítulo anterior, podemos buscar la primer superficie del flujo, S_p , tal que la misma sea “casi convexa”, $h_{ij} \geq -\frac{H}{2}g_{ij}$, y utilizar dicha superficie en la cual podemos acotar $\mathcal{R}(S_p)$ en términos de $\mathcal{R}_C(S_p)$. Esto evita que tengamos que asumir propiedades particulares para el flujo, y además, dado que esta condición es más débil que pedir convexidad, la superficie S_p será un mejor representante de las propiedades físicas del objeto que la que tomamos en el capítulo anterior.

Las desigualdades (3.23) y (3.25) también son válidas en el caso en que no tengamos agujero negro rodeado por campos de materia, sino solo un objeto ordinario como una estrella de neutrones, es decir el caso en que consideramos un dato inicial regular y sin borde. Dicho caso fue estudiado en el capítulo anterior, pero con los argumentos presentados en este capítulo podemos mejorar la desigualdad obtenida y relajar la

condición de convexidad mediante el uso de la medida de tamaño \mathcal{R} en lugar de \mathcal{R}_C . Si el dato inicial no tiene superficies atrapadas y cumple alguna de las condiciones a) o b) para el Teorema 3.5, o I) o II) para el Teorema 3.6, obtenemos

$$m \geq m_T + \frac{J^2}{\mathcal{R}_A(T)\mathcal{R}^2(T)} \quad (3.27)$$

donde recordemos que para este caso empezamos el IMCF en un punto dentro del objeto y sobre el eje de simetría. La masa cuasi-local en este caso m_T estará dada por

$$m_T := \frac{1}{16\pi} \int_0^{\mathcal{R}_A(T)} d\xi \int_{S_\xi} \bar{R} dS. \quad (3.28)$$

si se cumple a) o b), y será \tilde{m}_T en lugar de m_T si se cumple I) o II), donde

$$\tilde{m}_T := \int_0^{\mathcal{R}_A(T)} \int_{S_\xi} \left(\mu + \frac{q}{H} \nu^i j_i \right) dS d\xi. \quad (3.29)$$

En ambos casos ξ es la coordenada radio de área.

En el Teorema 3.5 asumimos que los campos de materia satisfacen la condición de energía dominante, DEC, en verdad solo necesitamos que los campos de materia satisfagan la condición de energía débil (WEC), $\mu \geq 0$, donde μ es la densidad de materia-energía; la WEC es una condición necesaria para la demostración. Aún así consideramos que la DEC es la condición más adecuada para el estudio de este tipo de desigualdades, lo cual se vuelve evidente en la demostración del Teorema 3.6, para el cual la WEC no es suficiente y necesitamos asumir la DEC para que valga el resultado.

En los Teoremas 3.5 y 3.6 estamos interesados en un objeto compacto que contiene un horizonte aparente, la suposición de que μ tiene soporte compacto solo es necesaria para tener una buena definición del objeto que estamos considerando y de la masa cuasi-local m_T que tendrá asociada. Podemos obtener la misma relación entre la masa total y el momento angular sin utilizar dicha condición.

La condición de que la densidad de corriente, j^i , tenga soporte compacto también puede ser relajada, podemos asumir la condición más débil de que j^i en la dirección del vector de Killing, es decir $j_i \eta^i$, tenga soporte compacto y el resultado sigue siendo válido. Esta última condición resulta ser una condición necesaria para las demostraciones de 3.5 y 3.6, dado que la conservación del momento angular a los largo del IMCF solo se obtiene cuando las superficies S_t se encuentran fuera del soporte de $j_i \eta^i$.

3.3. Preliminares

Como dijimos antes seguiremos las ideas presentadas en [59]. Consideramos un dato inicial asintóticamente plano y axialmente simétrico con borde $(\Sigma, \partial\Sigma, \bar{g}, K; \mu, j^i)$, tal que el borde $\partial\Sigma$ es un horizonte aparente futuro, conexo y compacto, y tal que los

campos de materia satisfacen la DEC. Además asumimos que no existe ninguna otra superficie atrapada en el dato inicial, aparte de $\partial\Sigma$, con lo cual Σ es una *región exterior* y tiene la topología de \mathbb{R}^3 menos una bola.

Asumimos que existe un IMCF, ver apéndice E, suave de superficies S_t , que empieza en $S_{t_0} = \partial\Sigma$ y tiene topología esférica. Al igual que en el capítulo anterior, dado que el dato es asintóticamente plano el flujo irá a infinito como esferas. Con estas suposiciones tenemos que la métrica del dato, \bar{g} , se puede escribir como (3.9):

$$ds_{\bar{g}}^2 = \frac{dt^2}{H^2} + g_{ij}dx^i dx^j \quad (3.30)$$

donde g_{ij} y (x^1, x^2) son la métrica inducida y las coordenadas en S_t , respectivamente. Dado que la superficie inicial $\partial\Sigma$ es axialmente simétrica, y que, como dijimos en el capítulo anterior, no existe ningún mecanismo por el cual la normal del IMCF pueda tener alguna componente en la dirección axial, al menos no si empezamos en una superficie con simetría axial, tenemos que todas las superficies del flujo S_t serán axialmente simétricas. Luego sobre cada superficie del flujo definimos coordenadas ortogonales θ, φ tal que $\eta^i = \frac{\partial}{\partial \varphi}{}^i$. Esto siempre es posible para 2-superficies con simetría axial que sean difeomorfas a S^2 , ver por ejemplo [20]. Por lo tanto la métrica inducida sobre S_t se puede escribir de la forma

$$ds_g^2 = \Psi^4 d\theta^2 + \eta d\varphi^2 \quad (3.31)$$

donde $\eta = g_{ij}\eta^i\eta^j$ es la norma del vector de Killing axial. Más aún, de [59] sabemos que en esta situación el tensor de curvatura extrínseca se puede descomponer de la forma:

$$K_{ij} = z\nu_i\nu_j + \nu_i s_j + s_i \nu_j + g_i^k g_j^l \chi_{lk} + \frac{q}{2}g_{ij} \quad (3.32)$$

donde q es la traza de K respecto de g_{ij} , $q = K_{ij}g^{ij}$ y

$$z = K_{ij}\nu^i\nu^j \quad s_i = g_i^j K_{jl}\nu^l \quad \chi_{ij} = g_i^l g_j^n K_{ln} - \frac{q}{2}g_{ij} \quad (3.33)$$

con lo cual la traza de la curvatura extrínseca en Σ se escribe de la forma $Tr(K) = z+q$, y la su norma como:

$$K_{ij}K^{ij} = z^2 + 2s_i s^i + \chi_{ij}\chi^{ij} + \frac{q^2}{2}. \quad (3.34)$$

En este contexto las expansiones nulas ϑ^+, ϑ^- ortogonales a S_t están dadas por $\vartheta^+|_{S_t} = H + q$ y $\vartheta^-|_{S_t} = H - q$. Luego, si Σ no tiene ninguna otra superficie atrapada además de $\partial\Sigma$, entonces se cumple

$$(\vartheta^+ \vartheta^-)|_{S_t} = H^2 - q^2 > 0 \quad \forall t \neq t_0, \quad (3.35)$$

notemos que en particular esto implica que no hay superficies minimales en Σ .

Además, usando la descomposición de anterior, de la ecuación de vínculo escalar (A5) tenemos que el escalar de curvatura del dato, \bar{R} , se escribe como:

$$\bar{R} = 16\pi\mu + 2s_i s^i + \chi_{ij}\chi^{ij} - \frac{q}{2}(q + 4z). \quad (3.36)$$

Al igual que en el capítulo anterior introducimos la energía de Geroch sobre cada superficie del IMCF

$$\mathcal{E}_G(S_t) := \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(16\pi - \int_{S_t} H^2 dS \right) \quad (3.37)$$

esta energía, para el dato inicial y el IMCF que estamos considerando, satisface $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_G(S_t) = m$ y además si $\partial\Sigma$ es una superficie minimal tenemos $\mathcal{E}_G(\partial\Sigma) = \sqrt{\frac{A}{16\pi}}$, donde A es el área de la superficie minimal.

Además de la energía de Geroch sobre cada superficie del flujo introduciremos otro funcional definido por Hawking, la energía de Hawking $\mathcal{E}_H(S_t)$:

$$\mathcal{E}_H(S_t) := \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(16\pi - \int_{S_t} (H^2 - q^2) dS \right) \quad (3.38)$$

Esta energía también cumple que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_G(S_t) = m$ para el dato inicial y el IMCF que que estamos considerando, y que si $\partial\Sigma$ es un horizonte general, $H^2 = q^2$ sobre el horizonte, tenemos $\mathcal{E}_G(\partial\Sigma) = \sqrt{\frac{A}{16\pi}}$, donde A es el área del horizonte. Notemos que este funcional y energía de Geroch coinciden en el caso en que $q|_{S_t} = 0$. Cabe destacar que en general las energías de Geroch y Hawking no tienden de la misma forma en infinito, en general tenemos que la energía de Hawking tiende a la energía ADM, \mathcal{E}_{ADM} , $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_H = \mathcal{E}_{ADM}$, ver por ejemplo [74], [59], mientras que la energía de Geroch tiende a la masa ADM, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_G = m$. La relación entre masa y energía ADM es, ver [6], $m = \sqrt{\mathcal{E}_{ADM}^2 - \mathcal{P}_{ADM}^2}$, donde \mathcal{P}_{ADM}^i es el vector momento lineal ADM del dato inicial, pero dado que asumimos que el comportamiento asintótico de K_{ij} es $K_{ij} = O(r^{-3})$ en los datos iniciales que consideramos \mathcal{P}_{ADM}^i es nulo y $m = \mathcal{E}_{ADM}$ definida en (A9) .

3.3.1. IMCF y energía de Hawking

En esta sub-sección repasaremos las propiedades de la evolución de la energía de Hawking a lo largo el IMCF. En lo que sigue esencialmente reproducimos el trabajo de Malec, Mars y Simon [59] para obtener la forma explicita de la derivada a lo largo del IMCF de la energía de Hawking:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_H &= \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left[8\pi - \frac{1}{2} \int_{S_t} (H^2 - q^2) dS \right] \\ &\quad - \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{S_t} \left(2H \frac{dH}{dt} - 2q \frac{dq}{dt} + (H^2 - q^2) \right) dS \end{aligned} \quad (3.39)$$

Primero calculamos la derivada a lo largo del flujo de H , recomendamos al lector los trabajos [45] y [59] para más detalles, pruebas y referencias. De la ecuación (E4) tenemos:

$$2H \frac{dH}{dt} = -2H \Delta(H^{-1}) - 2h_{ij} h^{ij} + 2\bar{R}_{ij} \nu^i \nu^j. \quad (3.40)$$

luego, usamos la ecuación de Gauss

$$2\bar{R}_{ij}\nu^i\nu^j = \bar{R} + H^2 - h_{ij}h^{ij} - 2\kappa \quad (3.41)$$

donde κ es la curvatura de Gauss, y obtenemos:

$$2H\frac{dH}{dt} = -2H\Delta(H^{-1}) - h_{ij}h^{ij} - \bar{R} - H^2 + 2\kappa. \quad (3.42)$$

Ahora sea t_{ij} la parte sin traza de h_{ij} :

$$t_{ij} = h_{ij} - \frac{H}{2}g_{ij} \quad (3.43)$$

luego

$$h_{ij}h^{ij} = t_{ij}t^{ij} + \frac{H^2}{2} \quad (3.44)$$

y utilizando esto y la ecuación (3.36) obtenemos:

$$\begin{aligned} 2H\frac{dH}{dt} = & + 2\kappa + 2zq + \frac{q^2}{2} - 2H\Delta(H^{-1}) - \frac{3}{2}H^2 \\ & - 16\pi\mu - 2s_i s^i - \chi_{ij}\chi^{ij} - t_{ij}t^{ij} \end{aligned} \quad (3.45)$$

En segundo lugar calculamos la derivada a lo largo del flujo de q , para esto calculamos la derivada covariante de q en la dirección ν^i y usamos la ecuación de vínculo vectorial (A5), obtenemos:

$$\begin{aligned} H\frac{dq}{dt} &= \nu^i\bar{\nabla}_i(\text{tr}K - z) = \nu^i\bar{\nabla}_i K_j^i + 8\pi\nu^i j_i - \nu^i\bar{\nabla}_i z \\ &= \bar{\nabla}_i(\nu^i K_j^i) - K_j^i\bar{\nabla}_i\nu^i + 8\pi\nu^i j_i - \nu^i\bar{\nabla}_i z \\ &= \bar{\nabla}_i(z\nu^i + s^i) - K_j^i\bar{\nabla}_i\nu^i + 8\pi\nu^i j_i - \nu^i\bar{\nabla}_i z \\ &= z\bar{\nabla}_i\nu^i + \bar{\nabla}_i s^i - K_j^i\bar{\nabla}_i\nu^i + 8\pi\nu^i j_i \\ &= zH + \bar{\nabla}_i s^i - K_j^i\bar{\nabla}_i\nu^i + 8\pi\nu^i j_i \end{aligned} \quad (3.46)$$

Luego, notemos que es posible escribir el término $\bar{\nabla}_i s^i$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_i s^i &= \bar{g}^{ij}\bar{\nabla}_i s_j = g^{ij}\bar{\nabla}_i s_j + \nu^i\nu^j\nabla_i s_j \\ &= g^{ij}\bar{\nabla}_i s_j - s_j\nu^i\bar{\nabla}_i\nu^j \\ &= g^{ij}\bar{\nabla}_i s_j + Hs^j\bar{\nabla}_j\frac{1}{H} \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde en el último paso usamos la ecuación (E1). Además, el término $K_j^i\bar{\nabla}_i\nu^i$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} K^{ij}\bar{\nabla}_i\nu_j &= z\nu^i\nu^j\bar{\nabla}_i\nu_j + (s^i\nu^j + \nu^i s^j)\bar{\nabla}_i\nu_j + K^{ij}h_{ij} \\ &= z\nu^i\nu^j\bar{\nabla}_i\nu_j + (s^i\nu^j + \nu^i s^j)\bar{\nabla}_i\nu_j + \chi^{ij}t_{ij} + \frac{Hq}{2} \\ &= -Hs^j\bar{\nabla}_j\frac{1}{H} + \chi^{ij}t_{ij} + \frac{Hq}{2}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde en el último paso usamos $s^i \nu^j \bar{\nabla}_i \nu_j = \frac{1}{2} s^i \bar{\nabla}_i (\nu^j \nu_j) = 0$ y la ecuación (E1).

Luego, usando (3.47) y (3.48) en la expresión (3.46) obtenemos

$$H \frac{dq}{dt} = 8\pi \nu^i j_i + zH - \frac{Hq}{2} + g^{ij} \bar{\nabla}_i s_j + 2H s^j \bar{\nabla}_j \frac{1}{H} - \chi^{ij} t_{ij}, \quad (3.49)$$

Combinando (3.49) y (3.45) el integrando en el segundo término de la ecuación (3.39) queda de la forma

$$\begin{aligned} 2H \frac{dH}{dt} - 2q \frac{dq}{dt} + (H^2 - q^2) &= \\ &= 2\kappa + 2zq - \frac{q^2}{2} - 2H\Delta(H^{-1}) - \frac{3}{2}H^2 - 16\pi\mu - 2s_i s^i - \chi_{ij} \chi^{ij} - t_{ij} t^{ij} \\ &\quad - \frac{q}{H} 16\pi \nu^i j_i - 2zq + q^2 - 2\frac{q}{H} g^{ij} \bar{\nabla}_i s_j - 4q s^j \bar{\nabla}_j \frac{1}{H} + 2\frac{q}{H} \chi^{ij} t_{ij} + (H^2 - q^2) \\ &= 2\kappa - \frac{1}{2}(H^2 - q^2) - 2H\Delta(H^{-1}) - 16\pi\mu - 2s_i s^i - \chi_{ij} \chi^{ij} - t_{ij} t^{ij} \\ &\quad - \frac{q}{H} 16\pi \nu^i j_i - 2\frac{q}{H} g^{ij} \bar{\nabla}_i s_j - 4q s^j \bar{\nabla}_j \frac{1}{H} + 2\frac{q}{H} \chi^{ij} t_{ij} \\ &= 2\kappa - \frac{1}{2}(H^2 - q^2) - 16\pi(\mu + \frac{q}{H} \nu^i j_i) \\ &\quad - \left(\chi_{ij} \chi^{ij} - 2\frac{q}{H} \chi^{ij} t_{ij} + t_{ij} t^{ij} \right) \\ &\quad - 2s_i s^i - 4q s^j \bar{\nabla}_j \frac{1}{H} - 2H\Delta(H^{-1}) - 2\frac{q}{H} g^{ij} \bar{\nabla}_i s_j. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Ahora, incorporando las expresiones previas en la derivada de la energía, (3.39), usando el teorema de Gauss-Bonnet e integrando por partes el operador de Laplace, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_H &= \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left[8\pi - 4\pi\chi(S_t) + \int_{S_t} \left(16\pi(\mu + \frac{q}{H} \nu^i j_i) \right) dS \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_t} 2\frac{q}{H} g^{ij} \bar{\nabla}_i s_j dS + \int_{S_t} \left(\chi_{ij} \chi^{ij} - 2\frac{q}{H} \chi^{ij} t_{ij} + t_{ij} t^{ij} \right) dS \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_t} 2 \left(s_i s^i - 2\frac{q}{H} s^j \frac{\bar{\nabla}_j H}{H} + \frac{g^{ij} \bar{\nabla}_i H \bar{\nabla}_j H}{H^2} \right) dS + \int_{S_t} 2\frac{q}{H} g^{ij} \bar{\nabla}_i s_j dS \right], \end{aligned} \quad (3.51)$$

finalmente asumiendo que S_t tiene topología esférica tenemos que $\chi(S_t) = 2$, y la derivada de la energía de Hawking queda:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_H &= \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left[\int_{S_t} \left(16\pi(\mu + \frac{q}{H} \nu^i j_i) \right) + \int_{S_t} 2\frac{q}{H} g^{ij} \bar{\nabla}_i s_j dS \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_t} \left(\chi_{ij} \chi^{ij} - 2\frac{q}{H} \chi^{ij} t_{ij} + t_{ij} t^{ij} \right) dS \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_t} 2 \left(s_i s^i - 2\frac{q}{H} s^j \frac{\bar{\nabla}_j H}{H} + \frac{g^{ij} \bar{\nabla}_i H \bar{\nabla}_j H}{H^2} \right) dS \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

3.4. Demostraciones

3.4.1. Propiedades de \mathcal{R}

Para estudiar las propiedades de \mathcal{R} consideramos en primer lugar la ecuación de evolución a lo largo de IMCF de la norma del vector de Killing η :

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta = \frac{2\eta\lambda_\varphi}{H} \quad (3.53)$$

donde definimos $\lambda_\theta, \lambda_\varphi$ como las curvaturas principales de S_t , es decir los autovalores de h_{ij} , donde h_{ij} es la curvatura extrínseca de S_t ; en particular λ_φ es la curvatura principal en la dirección del vector de Killing. Esta ecuación proviene de la ecuación de evolución para la métrica g (ver ecuación (E2)) y solo es válida para un IMCF axialmente simétrico. Luego el comportamiento del integrando en (3.12) a lo largo del flujo está determinado por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} \right) = -\frac{5}{2} \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} + \frac{A_t^{1/2}}{\left(\int_{S_t} \eta dS \right)^2} \int_{S_t} \frac{2\eta\lambda_\theta}{H} dS \quad (3.54)$$

donde usamos que el elemento de área dS de S_t satisface $\frac{\partial}{\partial t}(dS) = dS$ y que la curvatura media se escribe como $H = \lambda_\theta + \lambda_\varphi$.

Ahora, dependiendo del comportamiento del IMCF, en particular si asumimos ciertas propiedades, es posible estimar el valor de \mathcal{R} . La situación más favorable es tener un IMCF con simetría esférica, esto es que las curvaturas principales satisfagan $\lambda_\theta = \lambda_\varphi = \frac{H}{2}$. Luego tenemos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} \right) = -\frac{3}{2} \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} \quad (3.55)$$

y por lo tanto obtenemos una expresión exacta para \mathcal{R} :

$$\mathcal{R}^2(S_t) = \frac{3}{2} \frac{\int_{S_t} \eta dS}{A_t} = \mathcal{R}_A^2(S_t) \quad (3.56)$$

donde la igualdad viene del hecho que para superficies con simetría esférica uno puede escribir $\eta = \mathcal{R}_A^2 \sin^2(\theta)$, y luego $\int_{S_t} \eta dS = \frac{2}{3} 4\pi \mathcal{R}_A^4(S_t)$. Para condiciones más débiles en el comportamiento del IMCF no podemos obtener una expresión exacta para \mathcal{R} en términos de las medidas usuales, pero podemos obtener una cota. Asumamos primero que el IMCF es convexo, es decir $\lambda_\theta, \lambda_\varphi > 0$, luego tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} \right) \geq -\frac{5}{2} \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} \quad (3.57)$$

y por lo tanto para este caso:

$$\mathcal{R}^2(S_t) \leq \frac{5}{2} \frac{\int_{S_t} \eta dS}{A_t} \leq \frac{5}{2} \mathcal{R}_C^2(S_t). \quad (3.58)$$

Podemos obtener una relación similar entre \mathcal{R} y \mathcal{R}_C asumiendo una condición aún más débil: que las superficies del IMCF no están lejos de ser convexas; recordemos que para los datos que analizamos tenemos $H = \lambda_\theta + \lambda_\varphi > 0$. En particular si asumimos que $h_{ij} \geq -\frac{H}{2}g_{ij}$ obtenemos:

$$\mathcal{R}^2(S_t) \leq \frac{7}{2} \frac{\int_{S_t} \eta dS}{A_t} \leq \frac{7}{2} \mathcal{R}_C^2(S_t). \quad (3.59)$$

3.4.2. Demostraciones para superficies minimales

En esta sub-sección consideramos el caso en que el horizonte aparente $\partial\Sigma$ es una superficie minimal. En primer lugar en cada superficie S_t introduciremos la energía cuasi-local de Geroch

$$\mathcal{E}_G(S_t) := \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(16\pi - \int_{S_t} H^2 dS \right) \quad (3.60)$$

Del capítulo anterior sabemos que podemos incluir explícitamente la contribución del momento angular a la energía en la derivada de la energía de Geroch. Para ello primero se relaciona el momento angular de cada superficie del IMCF con la integral de la norma de la curvatura extrínseca, y luego utilizamos esto para obtener una cota inferior a la integral sobre S_t del escalar de curvatura \bar{R} . Recordemos que uno de los puntos importantes que debe cumplir la energía es que sea monótona a lo largo del flujo, y sabemos que la energía de Geroch satisface:

$$\frac{d}{dt} E_G \geq \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{S_t} \bar{R} dS. \quad (3.61)$$

con lo cual la misma será monótona para datos iniciales con $\bar{R} \geq 0$. Ahora bien para que el dato tenga un escalar de curvatura no-negativo necesitamos imponer ciertas condiciones especiales para la curvatura extrínseca. La primer posibilidad, y la más usual, es considerar un dato inicial maximal, $Tr(K) = 0$, en este caso la no-negatividad de \bar{R} se puede ver fácilmente de la ecuación de vínculo (A4). Notemos que en este caso, la superficie minimal $\partial\Sigma$ es un horizonte aparente solo si la curvatura extrínseca satisface $q|_{\partial\Sigma} = z|_{\partial\Sigma} = 0$. Otra posible opción para obtener un escalar de curvatura no-negativo es tomar K de forma tal que sobre cada superficie del flujo la traza de K respecto de dichas superficies sea cero, $q = 0$, y con esto nos aseguramos de que $\partial\Sigma$ sea un horizonte aparente, esta condición se conoce con el nombre de *polar hypersurface condition*. La no-negatividad del escalar de curvatura se puede ver de utilizando la descomposición de \bar{R} , ver ecuación (3.36).

Demostración desigualdad 3.16. De la expresión (3.32) tenemos que $K_{ij}\eta^i\nu^j = s_i\eta^i$, por lo tanto

$$J(S_t) = \frac{1}{8\pi} \int_{S_t} s_i \eta^i dS, \quad (3.62)$$

y con esto en mente, podemos mejorar la cota para J obtenida en el capítulo anterior de la siguiente forma

$$\begin{aligned} J_t^2 &= \frac{1}{(8\pi)^2} \left(\int_{S_t} s_i \eta^i dS \right)^2 \leq \frac{1}{(8\pi)^2} \left(\int_{S_t} |s_i \eta^i| dS \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{(8\pi)^2} \left(\int_{S_t} |s_i| |\eta^i| dS \right)^2 \leq \frac{1}{(8\pi)^2} \int_{S_t} |s_i|^2 dS \int_{S_t} |\eta^i|^2 dS \\ &= \frac{1}{(8\pi)^2} \int_{S_t} s_i s^i dS \int_{S_t} \eta dS \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde en el cuarto paso usamos la desigualdades de Hölder. Luego, tenemos

$$\int_{S_t} s_i s^i dS \geq \frac{(8\pi)^2 J_t^2}{\int_{S_t} \eta dS} \quad (3.64)$$

y por lo tanto usando alguna de las condiciones a) o b) obtenemos la cota deseada:

$$\int_{S_t} \bar{R} dS \geq 2 \int_{S_t} s_i s^i dS \geq 2 \frac{(8\pi)^2 J_t^2}{\int_{S_t} \eta dS} \quad (3.65)$$

Entonces de las ecuaciones (3.61) y (3.65), y usando que el momento angular se conserva a lo largo del flujo $J(S_t) = J(\partial M) = J$ tenemos:

$$\frac{d}{dt} E_G \geq \sqrt{4\pi} J^2 \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} \quad (3.66)$$

De estos argumentos tenemos que \mathcal{E}_G es monótonamente creciente a lo largo del flujo, y por lo tanto $\mathcal{E}_G(S_t) \geq \mathcal{E}_G(\partial M) \quad \forall t \geq 0$, luego, dado que $\partial\Sigma$ es un horizonte aparente el cual está dado por una superficie minimal $H^2 = q^2 = 0$, tenemos que $E_H(\partial M) = \sqrt{\frac{A}{16\pi}}$, con lo cual obtenemos:

$$E_G(S_t) \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.67)$$

Ahora calculamos la derivada de \mathcal{E}_G^2 y usamos la ecuación (3.66) para obtener una cota en términos de J :

$$\frac{d}{dt} E_G^2 = 2E_G(S_t) \frac{d}{dt} E_G \geq 2E_G(S_t) \sqrt{4\pi} J^2 \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS}, \quad (3.68)$$

y luego usando (3.67) tenemos:

$$\frac{d}{dt} E_G^2 \geq 2 \sqrt{\frac{A}{16\pi}} \sqrt{4\pi} J^2 \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} \quad (3.69)$$

Luego integramos la expresión (3.66) desde ∂M a infinito, y usando la relación entre la masa de Geroch y la masa ADM obtenemos

$$m^2 \geq \lim_{t \rightarrow \infty} E_G^2(S_t) \geq E_G^2(S_0) + J^2 \sqrt{A} \int_0^\infty \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} dt. \quad (3.70)$$

Finalmente escribimos esta expresión en términos de \mathcal{R} y el radio de área de $\partial\Sigma$, y obtenemos (3.16). \square

Demostración desigualdad 3.23. A continuación presentamos la demostración del resultado que obtenemos en el caso en que tenemos una superficie minimal rodeada por un objeto ordinario compacto que rota. La prueba consiste en identificar la medida de masa local m_T en los distintos pasos de la demostración anterior. Sabemos que la energía de Geroch satisface Comenzamos por integrar la expresión (3.61) a lo largo del flujo entre $\partial\Sigma$ e infinito, luego separamos dicha en dos partes la integral entre $\partial\Sigma$ y T , y la integral entre T e infinito, y remplazamos esta última por la cota para la energía en términos del momento angular, ecuación (3.69); recordemos que S_T es la primer superficie del IMCF tal que los campos de materia tienen soporte dentro de S_T y por lo tanto $J_t = J$ para todo $t \geq T$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_G(S_t) \geq \int_0^T \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{S_t} \bar{R} dS dt + \sqrt{4\pi} J^2 \int_T^\infty \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} dt \quad (3.71)$$

Luego, en la integral entre $\partial\Sigma$ y T , hacemos un cambio de coordenadas t a la coordenada radio de área $\xi(t) = \sqrt{\frac{A_t}{4\pi}}$, con lo cual $T \rightarrow \xi(T) = \sqrt{\frac{A_T}{4\pi}} = \mathcal{R}_A$ y $dt \rightarrow d\xi = \sqrt{\frac{A_t}{16\pi}} dt$, y por lo tanto:

$$\int_0^T \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{S_t} \bar{R} ds dt = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{R}_A}^{\mathcal{R}_A(S_T)} d\xi \int_{S_\xi} \bar{R} ds = m_T \quad (3.72)$$

donde \mathcal{R}_A y $\mathcal{R}_A(S_T)$ son el radio de área de $\partial\Sigma$ y S_T , respectivamente; notemos que en este caso, a diferencia de en la expresión (2.8) del capítulo anterior, el valor $t = 0$ en la integral corresponde a la superficie $\partial\Sigma$. Usando la expresión anterior y la relación entre la energía de Geroch y la masa ADM en infinito obtenemos

$$m \geq \lim_{t \rightarrow \infty} E_G(S_t) \geq m_T + \sqrt{4\pi} J^2 \int_T^\infty \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta} dt, \quad (3.73)$$

y finalmente escribiendo esta expresión en términos de $\mathcal{R}_A(S_T)$ y $\mathcal{R}(S_T)$ obtenemos (3.23). □

3.4.3. Demostraciones para horizontes generales

Demostración desigualdad 3.17. Consideremos ahora el caso en el $\partial\Sigma$ es un horizonte aparente futuro general y tomamos un dato inicial vacío. Lo primero que debemos notar es que, como las superficies de IMCF son axialmente simétricas la curvatura media de S_t , H , no depende de la coordenada φ , y por lo tanto tenemos:

$$s^j \bar{\nabla}_j H = s^\theta \bar{\nabla}_\theta H \quad g^{ij} \bar{\nabla}_i H \bar{\nabla}_j H = g^{\theta\theta} \bar{\nabla}_\theta H \bar{\nabla}_\theta H \quad (3.74)$$

con lo cual la ecuación (3.52) se escribe

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_H &= \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left[\int_{S_t} 2 \frac{q}{H} g^{ij} \bar{\nabla}_i s_j dS + \int_{S_t} \left(\chi_{ij} \chi^{ij} - 2 \frac{q}{H} \chi^{ij} t_{ij} + t_{ij} t^{ij} \right) dS \right. \\ &\left. + \int_{S_t} 2 \left(s_\theta s^\theta - 2 \frac{q}{H^2} s^\theta \bar{\nabla}_\theta H + \frac{1}{H^2} g^{\theta\theta} \bar{\nabla}_\theta H \bar{\nabla}_\theta H \right) dS \right] + 2 \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{S_t} s_\varphi s^\varphi dS \quad (3.75) \end{aligned}$$

donde hemos usado que el dato inicial es vacío.

En la demostración anterior incluimos el momento angular en la derivada de la energía de Geroch de una superficie S_t relacionando el momento angular de S_t con la integrales de superficie de la norma de s_i y de η^i . Para este caso, en el cual utilizamos la energía de Hawking, necesitamos mejorar la cota obtenida y relacionar el momento angular con la componente de s_i a lo largo del vector de Killing η^i . Esto se debe a que si utilizamos la cota anterior no podemos asegurar que la energía de Hawking sea monótona. Para hacer esto repetiremos el argumento anterior pero notando que $K_{ij}\eta^i\nu^j = s_i\eta^i = s_\varphi$, con lo cual utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la definición de $J_t := J(S_t)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} J_t^2 &= \frac{1}{(8\pi)^2} \left(\int_{S_t} s_i \eta^i dS \right) = \frac{1}{(8\pi)^2} \left(\int_{S_t} s_\varphi dS \right) \\ &\leq \frac{1}{(8\pi)^2} \leq \left(\int_{S_t} |s_\varphi| \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta}} dS \right) \leq \frac{1}{(8\pi)^2} \int_{S_t} \frac{s_\varphi^2}{\eta} dS \int_{S_t} \eta dS \\ &= \frac{1}{(8\pi)^2} \int_{S_t} s_\varphi s^\varphi dS \int_{S_t} \eta dS \end{aligned} \quad (3.76)$$

donde en el cuarto paso utilizamos la desigualdad de Hölder con $p_1 = p_2 = 2$. Luego, obtenemos:

$$\int_{S_t} s_\varphi s^\varphi dS \geq \frac{(8\pi)^2 J_t^2}{\int_{S_t} \eta dS} \quad (3.77)$$

y con esto podemos incluir explícitamente el momento angular en la derivada de la energía de Hawking

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_H &\geq \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left[\int_{S_t} 2 \frac{q}{H} g^{ij} \bar{\nabla}_i s_j dS + \int_{S_t} \left(\chi_{ij} \chi^{ij} - 2 \frac{q}{H} \chi^{ij} t_{ij} + t_{ij} t^{ij} \right) dS \right. \\ &\quad \left. + \int_{S_t} 2 \left(s_\theta s^\theta - 2 \frac{q}{H^2} s^\theta \bar{\nabla}_\theta H + \frac{1}{H^2} g^{\theta\theta} \bar{\nabla}_\theta H \bar{\nabla}_\theta H \right) dS \right] + 2\sqrt{\pi} J_t^2 \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Luego, asumiendo que tenemos un dato inicial como el del Teorema 3.4 y alguna de las condiciones I),II), los tres primeros términos en (3.78) son positivos, y por lo tanto:

$$\frac{d}{dt} E_H \geq \sqrt{4\pi} J^2 \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} \quad (3.79)$$

donde hemos usado que Σ es un región exterior vacía, con lo cual $J_t = J$. Para ver esto primero notemos que de la hipótesis de que no hay superficies atrapadas en Σ , además de $\partial\Sigma$, tenemos que $H^2 > q^2$ para toda superficie S_t , por lo tanto $|\frac{H}{q}| \leq 1$, y con esto el segundo y el tercer término (en paréntesis) son formas cuadráticas positivas. Luego, el primer término se anula directamente si asumimos la condición II), y mediante integración parcial vemos que se anula si asumimos I).

De estos argumentos sabemos que E_H es monótonamente creciente a lo largo del IMCF, y por lo tanto $E_H(S_t) \geq E_H(\partial\Sigma) \quad \forall t \geq 0$, luego dado que ∂M es un horizonte

aparente futuro $H^2 = q^2$ y tenemos $E_H(\partial\Sigma) = \sqrt{\frac{A}{16\pi}}$, con lo cual:

$$E_H(S_t) \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi}} \quad \forall t \geq 0 \quad (3.80)$$

Ahora calculamos la derivada a lo largo del flujo del funcional E_H^2 y usamos la ecuación (3.79) para obtener una cota inferior para esta en términos de J :

$$\frac{d}{dt}E_H^2 = 2E_H(S_t)\frac{d}{dt}E_H \geq 2E_H(S_t)\sqrt{4\pi}J^2\frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t}\eta dS} \quad (3.81)$$

y luego usando la ecuación (3.80) tenemos:

$$\frac{d}{dt}E_H^2 \geq 2\sqrt{\frac{A}{16\pi}}\sqrt{4\pi}J^2\frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t}\eta dS} \quad (3.82)$$

Integrando esta expresión a lo largo del flujo, desde $\partial\Sigma$ a infinito, y usando la relación entre la energía de Hawking y la masa ADM, obtenemos:

$$m^2 \geq \lim_{t \rightarrow \infty} E_H^2(S_t) \geq E_H^2(S_0) + J^2\sqrt{A} \int_0^\infty \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t}\eta dS} dt. \quad (3.83)$$

Finalmente usamos que $E_H^2(S_0) = \frac{A}{16\pi}$, escribimos la expresión esta expresión en términos de \mathcal{R} y obtenemos (3.17). □

En el caso en que tenemos un objeto compacto ordinario rodeando al horizonte aparente futuro, y dicho horizonte aparente no es una superficie minimal sino un horizonte general, presentamos la siguiente demostración

Demostración de la desigualdad 3.25. A continuación presentamos la demostración del resultado que obtenemos en el caso en que tenemos un horizonte aparente futuro rodeado por un objeto ordinario compacto que rota. Esta prueba consiste en utilizar los argumentos anteriores y e identificar, en los pasos de la demostración anterior, la medida de masa local \tilde{m}_T . Primero incluimos explícitamente el momento angular de S_t en la derivada de la energía de Hawking

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_H \geq & \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left[\int_{S_t} 2\frac{q}{H}g^{ij}\bar{\nabla}_i s_j dS + \int_{S_t} \left(\chi_{ij}\chi^{ij} - 2\frac{q}{H}\chi^{ij}t_{ij} + t_{ij}t^{ij} \right) dS \right. \\ & \left. + \int_{S_t} 2 \left(s_\theta s^\theta - 2\frac{q}{H^2}s^\theta\bar{\nabla}_\theta H + \frac{1}{H^2}g^{\theta\theta}\bar{\nabla}_\theta H\bar{\nabla}_\theta H \right) dS \right] \\ & + \frac{A_t^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \int_{S_t} 16\pi \left(\mu + \frac{q}{H}\nu^i j_i \right) dS + 2\sqrt{\pi}J_t^2 \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t}\eta dS} \end{aligned} \quad (3.84)$$

luego de los cálculos realizados en la demostración anterior tenemos

$$\frac{d}{dt}E_H \geq \sqrt{\frac{A_t}{16\pi}} \int_{S_t} \left(\mu + \frac{q}{H}\nu^i j_i \right) dS + \sqrt{4\pi}J_t^2 \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t}\eta dS}. \quad (3.85)$$

Notemos que como los campos de materia satisfacen la DEC, y asumimos que no hay superficies atrapadas en Σ , además de $\partial\Sigma$, tenemos $|\frac{H}{q}| \leq 1$, y por lo tanto el primer término en (3.85) es positivo. Integrando esta expresión a lo largo del flujo desde $\partial\Sigma$ a infinito y usando la relación entre la energía de Hawking y la masa ADM obtenemos

$$m \geq E_H(S_0) + \int_0^\infty \sqrt{\frac{A_t}{16\pi}} \int_{S_t} \left(\mu + \frac{q}{H} \nu^i j_i \right) dS + \int_0^\infty \sqrt{4\pi} J_t^2 \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} dt. \quad (3.86)$$

Ahora, dado que elegimos la superficie S_T del flujo tal que los campos de materia tienen soporte compacto dentro de ella, en el primer término la integral corre solo de 0 a T . Luego separando la integral que involucra al momento angular en dos integrales, una de 0 a T y otra entre T e infinito, y usando que $J_t = J \quad \forall t \geq T$ tenemos que

$$m \geq E_H(S_0) + \int_0^T \sqrt{\frac{A_t}{16\pi}} \int_{S_t} \left(\mu + \frac{q}{H} \nu^i j_i \right) dS dt + \sqrt{4\pi} J^2 \int_T^\infty \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} dt + \sqrt{4\pi} \int_0^T J_t^2 \frac{A_t^{1/2}}{\int_{S_t} \eta dS} dt. \quad (3.87)$$

Finalmente descartando el último término, el cual es positivo, usando que $E_H(S_0) = \frac{\mathcal{R}_A}{2}$, y escribiendo esta expresión en términos de $\mathcal{R}_A(S_T)$, $\mathcal{R}(S_T)$ y \tilde{m}_T obtenemos (3.25). □

Por último para ver que: si $s^i = s\eta^i$ y la función s no depende de φ entonces se cumple II), notar que si elegimos $s^i = s\eta^i$ la condición II) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} g^{ij} \bar{\nabla}_i s_j &= g^{ij} \eta_j \bar{\nabla}_i s + s g^{ij} \bar{\nabla}_i \eta_j \\ &= \eta^i \bar{\nabla}_i s + \frac{s}{2} g^{ij} (\bar{\nabla}_i \eta_j - \bar{\nabla}_j \eta_i) \\ &= \partial_\varphi s \end{aligned} \quad (3.88)$$

donde en el segundo paso usamos la ecuación de Killing para η^i .

Conclusiones y perspectivas futuras

En este trabajo hemos presentado demostraciones formales de desigualdades geométricas para objetos compactos, tanto para objetos ordinarios como para agujeros negros, relacionando la carga, la masa, el momento angular y la forma del objeto.

Comenzamos estudiando la relación entre carga y tamaño en simetría esférica. Asumir simetría esférica permite simplificar las ecuaciones y trabajar con expresiones fáciles de interpretar. Probamos que si tenemos un objeto ordinario cargado en simetría esférica, dos veces el radio de área \mathcal{R}_A del objeto es siempre mayor estricto que la carga Q del mismo:

$$2\mathcal{R}_A > |Q|, \quad (\text{I})$$

y que esta desigualdad es ajustada. Este resultado para objetos ordinarios complementa a la ya conocida relación entre carga y tamaño para agujeros negros: si tenemos un agujero negro cargado en simetría esférica, entonces el radio de área del horizonte, \mathcal{R}_A^H , satisface $\mathcal{R}_A^H \geq |Q|$. Cabe destacar que si bien nuestro resultado solo vale en simetría esférica, esta relación entre carga y tamaño para agujeros negros ha sido probada para datos iniciales generales sin simetría. Una posible continuación a este trabajo es entonces el estudio de esta relación para objetos ordinarios sin asumir ninguna simetría; este problema ha sido estudiado en [54] pero la desigualdad obtenida en este trabajo no es ajustada. La desigualdad (I) está además motivada en la cota de Bekenstein para la entropía de un objeto, a partir de la cual se conjetura que si tenemos un objeto compacto entonces debe existir una medida de tamaño \mathcal{R} y una constante a-dimensional k tal que

$$\frac{Q^4}{4} + J^2 \leq k^2 \mathcal{R}^4. \quad (\text{II})$$

Dado que probamos que (I) es ajustada tenemos que en simetría esférica, y usando el radio de área, la constante k más ajustada para esta desigualdad es $k = 2$. Además en este trabajo probamos que ningún objeto no trivial puede alcanzar la igualdad en (I) y que la misma se satura para una secuencia de datos iniciales en el límite en el que la masa, la carga y el tamaño del objeto tienden a cero, es decir cuando el dato inicial es plano y vacío. Esto coincide con la conjetura de rigidez planteada en [25]: la igualdad en (II) se alcanza si y solo si la entropía del objeto es cero.

Para la demostración de este resultado tomamos un dato inicial regular, esféricamente simétrico y asintóticamente plano, y tal que la región exterior al objeto sea de electro-vacío; resolvemos de forma parcial las ecuaciones de vínculo, analizamos los casos con y sin superficies atrapadas, y utilizamos un resultado previo obtenido por

Reiris [66]. Es importante señalar que las hipótesis que asumimos para estudiar el problema son necesarias para la validez de (I), esto se evidencia en los ejemplos analíticos y numéricos que presentamos en esta primera parte del trabajo.

El estudio de desigualdades geométricas en simetría esférica nos ofrece un problema relativamente simple que permite ganar experiencia respecto al contexto y los métodos que se utilizan para esta clase de problemas. El siguiente nivel de complejidad al que pasamos es estudiar este tipo de desigualdades en simetría axial, en particular estudiamos la relación entre masa, momento angular y tamaño para objetos compactos y aislados, tanto para objetos ordinarios como para agujeros negros. Consideramos datos iniciales asintóticamente planos y axialmente simétricos, y asumimos que los campos de materia satisfacen la condición de energía dominante.

Para objetos ordinarios obtenemos una cota inferior para la masa total m en términos del momento angular y la masa cuasi-local del objeto:

$$m \geq m_T + \frac{J^2}{\mathcal{R}_A(T)\mathcal{R}(T)^2}. \quad (\text{III})$$

Donde $\mathcal{R}_A(T)$ y m_T , son el radio de área y una medida de masa cuasi-local, respectivamente, y $\mathcal{R}(T)$ es una medida de tamaño definida en términos de la norma del vector de Killing axial; estas cantidades se calculan en términos a una 2-superficie particular, S_T , que encierra al objeto. Dicha superficie se define en base a un IMCF suave y axialmente simétrico, mediante el cual obtenemos una foliación suave del dato inicial que nos permite relacionar la evolución de la energía de Geroch, \mathcal{E}_G , a lo largo del IMCF con el momento angular de cada superficie del flujo. Para la demostración de este resultado debemos asumir ciertas hipótesis respecto a la curvatura extrínseca del dato inicial, en particular que el dato sea maximal, ya que necesitamos que el mismo tenga curvatura escalar positiva para asegurar la monotonía de \mathcal{E}_G a lo largo del flujo. De la teoría Newtoniana sabemos que la energía de un objeto compacto puede escribirse como $E \approx E_0 + \frac{J^2}{2I}$, con lo cual la relación (III) nos da una versión de la relación entre energía total y energía rotacional en el contexto de relatividad general, y podemos interpretar el producto $\mathcal{R}_A(S_T)\mathcal{R}^2(S_T)$ como una cota superior al momento de inercia Newtoniano asociado a la región encerrada por S_T . A pesar de esta similitud, la desigualdad (III) no ocurre en una teoría puramente Newtoniana; la misma es consecuencia de las ecuaciones de vínculo de Einstein.

En cuanto al caso en que tenemos un agujero negro, obtenemos una versión de la desigualdad de Penrose con momento angular. Probamos que para un dato inicial vacío que contiene un horizonte aparente futuro compacto y conexo, $\partial\Sigma$, vale la siguiente desigualdad

$$m \geq \sqrt{\frac{A}{16\pi} + \frac{J^2}{\mathcal{R}^2}}, \quad (\text{IV})$$

donde A es el área del horizonte y \mathcal{R} es la medida de tamaño que mencionamos anteriormente pero calcula sobre $\partial\Sigma$. Para esto tomamos un IMCF que comienza en el horizonte aparente, y asumimos propiedades particulares para la curvatura extrínseca del dato inicial. En el caso en que el horizonte es una superficie minimal utilizamos la energía de Geroch para abordar el problema, y como en el caso anterior nos alcanza con

asumir que el dato es maximal para asegurar que la energía sea monótona a lo largo del flujo. En el caso en que el horizonte es general la energía de Geroch deja de ser útil, y debemos utilizar la energía de Hawking \mathcal{E}_H . Las condiciones que debemos asumir sobre la curvatura extrínseca son más complejas en este caso, y dependen mucho más del IMCF y de que tengamos una foliación suave del dato inicial. Si bien una de las suposiciones utilizadas en el argumento heurístico de Penrose es que el dato inicial sea de vacío, esta condición no es necesaria para la demostración de (IV). La desigualdad sigue siendo válida para datos con campos de materia no-nulos, con la condición de que los mismos satisfagan la DEC y no generen ninguna contribución al momento angular; esta última es una condición necesaria. Hasta el momento no se ha obtenido ninguna prueba formal de la desigualdad de Penrose con momento angular, siendo un problema que ha recibido atención en las últimas décadas. El procedimiento que utilizamos para abordarlo puede no ser la mejor forma de probar dicha desigualdad, pero nos permite demostrar una relación entre la masa, el momento angular y el tamaño muy similar a esta, con lo cual ofrece algún progreso en esta dirección.

Uno de los puntos importantes del método con el que demostramos (III) y (IV), es que la relación entre el momento angular y la evolución a lo largo del flujo de las energías \mathcal{E}_G y \mathcal{E}_H depende de la evolución de la norma del vector de Killing axial, η , a lo largo del IMCF. La medida de tamaño que definimos, $\mathcal{R}(T)$, involucra justamente la parte del comportamiento de η a lo largo del flujo que necesitamos controlar para incluir explícitamente la contribución de J a la masa total, y por lo tanto nos permite abordar este punto a través del análisis de una sola cantidad. Esta medida depende fuertemente del IMCF y de la “forma” que tengan las superficies S_t , más precisamente de la evolución de curvatura extrínseca de S_t a lo largo del flujo. Debido a esto, no es posible relacionar $\mathcal{R}(T)$ con las medidas de tamaño usuales, como el radio axial \mathcal{R}_C , sin tener un mayor control sobre la evolución de η . Vimos que una forma de lograr esto último es tomar un IMCF convexo, y que bajo esta condición tenemos $\mathcal{R}^2(S_T) \leq \frac{5}{2}\mathcal{R}_C^2(S_T)$; además, del comportamiento asintótico del IMCF sabemos que siempre es posible elegir S_T como primera superficie a partir de la cual todas las superficies S_t con $t \geq T$ son convexas. Cabe destacar que para el caso en que tenemos un objeto ordinario, los resultados numéricos que presentamos nos muestran que, al menos en ciertos casos, el IMCF se mantiene convexo si tomamos una superficie convexa como superficie inicial. La validez de esta propiedad, es decir la conservación de la convexidad del IMCF, es uno de los interrogantes que debemos resolver si queremos escribir la desigualdad en términos de las medidas usuales. Dado que tenemos evidencias numéricas que apoyan su validez, obtener una demostración formal de la misma es uno de los problemas que queremos abordar en futuros trabajos.

El otro punto importante del método que utilizamos es la suposición de que existe una solución suave del IMCF. Esta condición es un tanto restrictiva, pero en este trabajo estamos interesados en presentar una relación clara entre los parámetros físicos y no en discutir las sutilezas del IMCF. Del trabajo de Huisken e Ilmanen [47] sabemos que existe una solución débil del flujo para los datos que estamos considerando. Algunas partes del método que utilizamos no requieren suavidad, y pueden ser repetidas usando la versión débil del flujo definida por los mencionados autores. Otras partes de nuestra prueba dependen fuertemente de tener una foliación suave del dato inicial, generada por el IMCF. Uno de los trabajos futuros en el que estamos muy

interesados es adaptar el método que presentamos a soluciones débiles del IMCF. El principal obstáculo recae en la medida particular de tamaño que definimos. Además en nuestra demostración usamos una forma particular para la métrica del dato inicial, la cual proviene justamente de la foliación mencionada, por lo tanto todos los pasos de la demostración que utilizan dicha forma para la métrica deben ser revisados.

Apéndice

Apéndice

A. Datos iniciales para las ecuaciones de Einstein

Sea M^4 una variedad 4-dimensional con métrica $g_{\mu\nu}^4$ (con signatura $(-+++)$) y conexión de Levi-Civita ∇_μ^4 . En lo que sigue los índices Griegos $\mu, \nu \dots$ son 4-dimensionales, e índices Latinos son 3-dimensionales.

Consideremos las ecuaciones de Einstein con tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (\text{A1})$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein de la métrica $g_{\mu\nu}$. La *condición de energía dominante* para $T_{\mu\nu}$ está dada por

$$T_{\mu\nu}v^\mu w^\nu \geq 0, \quad (\text{A2})$$

para todo par de vectores causales (temporales o nulos) con dirección futura, v^μ y w^ν .

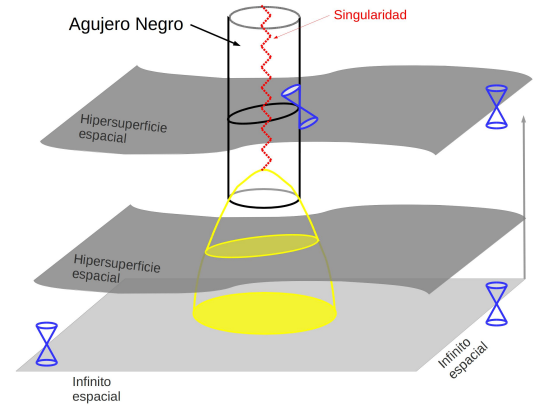
Un punto importante en nuestro trabajo es el análisis de las propiedades físicas de un Agujero Negro. Un Agujero Negro es una región que no está conectada causalmente (atrapada) con el resto del espacio-tiempo y está delimitada por un horizonte de eventos (ver por ejemplo [76]). La definición matemática de horizonte de eventos depende de la estructura causal de todo el espacio-tiempo, en este trabajo necesitamos tener una noción local de horizonte y de Agujero Negro, para ello utilizaremos el concepto de superficie atrapada. Una 2-superficie S espacial y compacta será atrapada si las expansiones nulas salientes y ortogonales a S , pasada y futuras, son negativas, $\vartheta^+ < 0$ $\vartheta^- < 0$ donde

$$\vartheta^\pm = \nabla_\alpha^4 v^{\pm\alpha} \quad (\text{A3})$$

donde v^\pm son los vectores nulos, pasado $-$ y futuro $+$, salientes y ortogonales a S .

Dato inicial

En general dado que queremos calcular cantidades físicas y medidas de tamaño consideraremos 3-superficies espaciales que conecten al objeto que queremos estudiar con infinito, dicha hipersuperficie debe ser parte del espacio-tiempo y por lo tanto ser compatible con las ecuaciones de Einstein, es decir estudiaremos datos iniciales para las ecuaciones de Einstein.



Un dato inicial es un conjunto $(\Sigma, \bar{g}, K; \mu, j^i)$ dado por una 3-variedad Σ con métrica \bar{g} definida positiva y curvatura extrínseca K , junto con una densidad de energía μ

y una corriente de energía-materia j^i . Este conjunto debe satisfacer las ecuaciones de vínculo de Einstein

$$\bar{\nabla}_j K^{ij} - \bar{\nabla}^i Tr(K) = -8\pi j^i, \quad (\text{A4})$$

$$\bar{R} - K_{ij}K^{ij} + Tr(K)^2 = 16\pi\mu, \quad (\text{A5})$$

donde $\bar{\nabla}$ y \bar{R} son la conexión de Levi-Civita y el escalar de curvatura asociados a la métrica \bar{g} . Los índices Latinos se suben y bajan con la métrica \bar{g}_{ij} y su inversa \bar{g}^{ij} . Para una introducción general en este tema ver por ejemplo el artículo de revisión [7] y referencias allí.

Si pensamos en el dato inicial como una hipersuperficie espacial en el espacio-tiempo, con normal unitaria temporal t^μ , luego los campos de materia μ y j^i se escriben en términos de el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$.

$$\mu = T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu, \quad j_\nu = T_{\mu\nu}t^\mu. \quad (\text{A6})$$

Por lo tanto la condición de energía dominante (A2) implica

$$\mu^2 \geq j_i j^i. \quad (\text{A7})$$

El dato inicial modelará un sistema aislado si los campos son débiles lejos de las fuentes. Esta idea física se captura en el concepto de dato inicial *asintóticamente plano*. En este trabajo asumiremos que la variedad Σ es, o bien \mathbb{R}^3 , o bien \mathbb{R}^3 menos una bola, y por lo tanto la definición se simplifica. Consideremos coordenadas Cartecianas x^i con su radio euclidiano asociado $r = (\sum_{i=1}^3 (x^i)^2)^{1/2}$ y sea δ_{ij} la métrica euclidiana con respecto a x^i . El dato inicial $(\Sigma, \bar{g}, K; \mu, j^i)$ se llama *asintóticamente plano* si la métrica \bar{g}_{ij} y el tensor K_{ij} satisfacen las siguientes condiciones de decaimiento

$$\bar{g}_{ij} = \delta_{ij} + \gamma_{ij}, \quad K_{ij} = O(r^{-3}), \quad (\text{A8})$$

donde $\gamma_{ij} = O(r^{-1})$, $\partial_k \gamma_{ij} = O(r^{-2})$, $\partial_i \partial_k \gamma_{ij} = O(r^{-3})$ y $\partial_k K_{ij} = O(r^{-4})$. Estas condiciones se escriben en términos de las coordenadas Cartecianas x^i , donde ∂_i denota la derivada parcial respecto de estas coordenadas. En sistema aislado una de las cantidades físicas importantes será la energía o masa total del sistema. En Relatividad General la energía o masa total de una dato inicial asintóticamente plano se conoce como masa ADM, m_{ADM} (por las personas que la propusieron, Arnowit, Deser y Misner, [6]), y es una cantidad geométrica que se define en base a como decae la métrica cuando nos acercamos a infinito.

$$m_{ADM} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} (\partial_j \bar{g}_i^j - \partial_i \bar{g}_j^j) \nu^i dS \quad (\text{A9})$$

donde S_r es la superficie de una esfera de radio euclidiano r y ∂_i denota la derivada parcial respecto de estas coordenadas.

El concepto de superficie atrapada continúa siendo útil en este contexto, si tomamos una 2-superficie S en Σ , con normal unitaria ν^i podemos escribir las expansiones nulas de la misma en términos del dato inicial

$$\vartheta^\pm = H \pm g^{ij} K_{ij} \quad (\text{A10})$$

donde $H = \bar{\nabla}_i \nu^i$ y g_{ij} son la curvatura media y la métrica inducida de S .

Simetría esférica

Sea ξ^i uno de los vectores de Killing que genera el grupo $SO(3)$, luego diremos que el dato inicial es *esféricamente simétrico* si

$$\mathcal{L}_\xi \bar{g}_{ij} = \mathcal{L}_\xi K_{ij} = \mathcal{L}_\xi \mu = \mathcal{L}_\xi j^i = 0, \quad (\text{A11})$$

para todos los generadores ξ de $SO(3)$, donde \mathcal{L} denota la derivada de Lie. Notemos que también estamos imponiendo simetría esférica en las fuentes. Además, también imponemos esta condición al campo electromagnético

$$\mathcal{L}_\xi E^i = \mathcal{L}_\xi B^i = \mathcal{L}_\xi \rho = \mathcal{L}_\xi j_{EM}^i = 0. \quad (\text{A12})$$

Simetría axial

Un dato inicial será *axialmente simétrico* si existe un vector de Killing axial η^i , tal que que

$$\mathcal{L}_\eta g_{ij} = 0, \quad (\text{A13})$$

donde \mathcal{L} denota la derivada de Lie, que tiene órbitas completas periódicas y que cumple

$$\mathcal{L}_\eta \mu = \mathcal{L}_\eta j^i = \mathcal{L}_\eta K_{ij} = 0. \quad (\text{A14})$$

donde $\eta = \eta^i \eta_i$.

Para datos iniciales axialmente simétricos podemos definir el momento angular de una 2-superficie S de la forma

$$J(S) = \frac{1}{8\pi} \int_S K_{ij} \eta^i \nu^j - \text{Tr}(K) \bar{g}_{ij} \eta^i \nu^j dS, \quad (\text{A15})$$

donde ν es la normal unitaria de S (ver por ejemplo [65]). Además si j^i tiene soporte compacto en una región Ω y $\partial\Omega$ es suave, de la ecuación (A4) tenemos

$$J(\partial\Omega) = - \int_\Omega j_i \eta^i dv =: J(\Omega). \quad (\text{A16})$$

B. Datos iniciales esféricamente simétricos para las ecuaciones de Einstein-Maxwell

En primer lugar será útil descomponer los campos de materia $T_{\mu\nu}$ en sus partes electromagnética y no-electromagnética

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{EM} + T_{\mu\nu}^M, \quad (\text{B1})$$

donde $T_{\mu\nu}^{EM}$ es el tensor de energía momento electromagnético dado por

$$T_{\mu\nu}^{EM} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\lambda} F_{\nu}{}^\lambda - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\gamma} F^{\lambda\gamma} \right), \quad (\text{B2})$$

y $F_{\mu\nu}$ es el campo tensorial (anti-simétrico) que satisface las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = -4\pi \mathcal{J}_\nu, \quad (\text{B3})$$

$$\nabla_{[\mu} F_{\nu\alpha]} = 0, \quad (\text{B4})$$

donde \mathcal{J}_ν es la corriente electromagnética. La descomposición (B1) de los campos de materia se traslada al dato inicial

$$\mu = \mu_{EM} + \mu_M, \quad j^i = j_{EM}^i + j_M^i. \quad (\text{B5})$$

Hemos definimos μ_{EM} y j_{EM}^i como

$$\mu_{EM} = \frac{1}{4\pi} (E^i E_i + B^i B_i), \quad j_{EM}^i = \epsilon^i{}_{jk} E^j B^k, \quad (\text{B6})$$

donde ϵ_{ilm} es el elemento de volumen de \bar{g}_{ij} , y los campos eléctrico y magnético, E y B , están dados por

$$E_\mu = F_{\mu\nu} t^\nu, \quad B_\mu = -{}^*F_{\mu\nu} t^\nu, \quad (\text{B7})$$

${}^*F_{\mu\nu}$ denota el dual de $F_{\mu\nu}$ definido respecto al elemento de volumen $\epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma}$ de la métrica $g_{\mu\nu}$ usando la fórmula estándar

$${}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (\text{B8})$$

Los campos eléctrico y magnético satisfacen las ecuaciones de vínculo de Maxwell

$$D^i E_i = 4\pi\rho, \quad D^i B_i = 0, \quad (\text{B9})$$

donde ρ es la densidad de carga eléctrica. La relación entre ρ y la corriente electromagnética del espacio-tiempo \mathcal{J}^μ está dada por $\rho = \mathcal{J}^\mu t_\mu$.

Consideraremos un dato inicial regular y esféricamente simétrico que contiene una bola \mathcal{B} cargada. Existen varias coordenadas útiles para describir una métrica con simetría esférica. En este trabajo utilizaremos coordenadas geodésicas dada por

$$\bar{g} = dl^2 + r^2(l)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (\text{B10})$$

donde l es la distancia propia al centro de simetría y $r(l)$ es el radio de área. Se asume que la función $r(l)$ es suave en $0 \leq l < \infty$. La regularidad del dato inicial en el centro implica las siguientes condiciones para $r(l)$

$$r(0) = 0, \quad r'(0) = 1, \quad (\text{B11})$$

donde prima denota la derivada respecto de l . La condición asintóticamente plano (A8) implica

$$\lim_{l \rightarrow \infty} r' = 1. \quad (\text{B12})$$

El escalar de curvatura de la métrica (B10) está dado por

$$R = -\frac{2}{r^2} (r'^2 + 2rr'' - 1). \quad (\text{B13})$$

Sea n^i la normal unitaria a esferas centradas en el origen, esto es $n = \partial/\partial l$. Luego la forma general del tensor de curvatura extrínseca en simetría esférica está dada por

$$K_{ij} = n_j n_i K_l + (g_{ij} - n_i n_j) K_r, \quad (\text{B14})$$

donde K_l y K_r son funciones de l . La condición asintóticamente plano (A8) implica

$$\lim_{l \rightarrow \infty} r K_r = 0. \quad (\text{B15})$$

Usando (B13) y (B14) podemos escribir las ecuaciones de vínculo (A4)–(A5) en simetría esférica de la siguiente forma

$$K_r (K_r + 2K_l) - \frac{1}{r^2} (r'^2 + 2rr'' - 1) = 8\pi\mu, \quad (\text{B16})$$

$$K_r' + \frac{r'}{r} (K_r - K_l) = 4\pi j, \quad (\text{B17})$$

donde j es la componente radial de la densidad de corriente $j = j^i n_i$, la cual es la única componente no-trivial para estos datos. La condición de energía dominante está dada por

$$\mu \geq |j|. \quad (\text{B18})$$

Sean $E = E^i n_i$ y $B = B^i n_i$, luego las ecuaciones (B9) se escriben como

$$\frac{1}{r^2} (Er^2)' = 4\pi\rho, \quad \frac{1}{r^2} (Br^2)' = 0, \quad (\text{B19})$$

donde ρ es la densidad de carga eléctrica. La densidad de energía μ está dada por

$$\mu = \mu_M + \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2). \quad (\text{B20})$$

Notemos que dado que B^i y E^i son radiales luego $j_{EM}^i = 0$, y por lo tanto en simetría esférica la densidad de corriente j^i no tiene ninguna contribución electromagnética. Diremos que una región del dato inicial es de *electro-vacío* si $\mu_M = 0$ y $j = 0$ en esa región.

La carga eléctrica contenida en \mathcal{B} está dada por

$$Q = 4\pi \int_0^{l_0} \rho r^2 dl. \quad (\text{B21})$$

Usando el teorema de Gauss y la ecuación (B19) vemos que la carga también puede ser escrita como

$$Q = Er^2. \quad (\text{B22})$$

Finalmente, las expansiones nulas, futuras y pasadas, de una esfera centrada en el origen están dadas por

$$\theta^+ = \frac{2}{r} (r' + K_r r), \quad \theta^- = \frac{2}{r} (r' - K_r r). \quad (\text{B23})$$

C. Método Conforme

El método conforme es una técnica bien conocida que permite simplificar las ecuaciones de vínculo (A4) y (A5) (ver por ejemplo [7] y referencias allí). Dado un dato inicial $(\Sigma, \bar{g}, K; \mu, j^i)$

Nos restringimos a un dato inicial Maximal ($tr(K) = 0$) y tomamos dos tensores simétricos \tilde{g}_{ij} , y \tilde{K}_{ij} tal que

$$\bar{g}_{ij} = \Psi^4 \tilde{g}_{ij} \quad K_{ij} = \Psi^{-2} \tilde{K}_{ij} \quad (C1)$$

donde Ψ , una función positiva, es el factor conforme.

En términos de estos nuevos campos las ecuaciones se escribe:

$$\tilde{D}_j \tilde{K}^{ij} = -8\pi \tilde{j}^i, \quad (C2)$$

$$L_{\tilde{g}} \Psi = -\frac{2\pi \tilde{\mu}}{\Psi^3} - \frac{\tilde{K}_{ij} \tilde{K}^{ij}}{8\Psi^7}, \quad (C3)$$

donde \tilde{D} es la derivada covariante con respecto a \tilde{g} , y hemos definido

$$L_{\tilde{g}} \Psi = \Delta_{\tilde{g}} \Psi - \frac{1}{8} \Psi \tilde{R}, \quad (C4)$$

$$\tilde{\mu} = \Psi^8 \mu, \quad \tilde{j}^i = \Psi^{10} j^i \quad (C5)$$

donde \tilde{R} es el escalar de curvatura asociado a \tilde{g} .

El vínculo de momento (C2) se puede resolver de la siguiente forma. Sea A_i una 1-forma a especificar, tomamos

$$\tilde{K}_{ij} = (\mathcal{L}A)_{ij} + \sigma_{ij}, \quad (C6)$$

donde

$$(\mathcal{L}A)_{ij} = \tilde{D}_i A_j + \tilde{D}_j A_i - \tilde{g}_{ij} \frac{2}{3} \tilde{D}_\gamma A^\gamma, \quad (C7)$$

y σ_{ij} es un tensor arbitrario son traza. El vínculo de momento tiene la siguiente forma

$$\mathbf{L}_{\tilde{g}} A_i = -8\pi \tilde{j}_i - \tilde{D}^j \sigma_{ij}, \quad (C8)$$

donde $\mathbf{L}_{\tilde{g}}$ es un operador elíptico

$$\mathbf{L}_{\tilde{g}} A_i = \tilde{D}^j (\mathcal{L}A)_{ij}. \quad (C9)$$

Es importante notar que este sistema de ecuaciones elípticas (C9) y (C3) puede ser resuelto en un dominio acotado imponiendo condiciones de Dirichlet para Ψ , y condiciones de Neumann análogas para A_i .

$$\nu^i (\mathcal{L}A)_{ij} = \phi_j \quad (C10)$$

donde ν^i es la normal unitaria saliente del borde del dominio y ϕ_j es una función definida en dicho borde.

D. Datos iniciales conformemente planos y axialmente simétricos

En esta sección presentamos las ecuaciones de vínculo de Einstein para el caso conformemente plano, éste es uno de los sistemas de ecuaciones que resolvemos mediante cálculos numéricos en la sección 2.5 (además de este sistema resolvemos las ecuaciones del IMCF, dadas en el Apéndice E1). Asumimos que el dato inicial, además de asintóticamente plano, ver Apéndice A, es axialmente simétrico

Consideramos un dato conformemente plano

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{D1})$$

donde δ_{ij} es la 3-métrica plana. En este caso las ecuaciones de vínculo se simplifican:

$$\partial_j \tilde{K}^{ij} = -8\pi \tilde{j}^i, \quad (\text{D2})$$

$$\Delta \Psi = -\frac{2\pi \tilde{\mu}}{\Psi^3} - \frac{\tilde{K}_{ij} \tilde{K}^{ij}}{8\Psi^7}. \quad (\text{D3})$$

donde ∂_i son derivadas parciales, Δ es el operador de Laplace plano en 3 dimensiones, y los índices se suben y bajan con δ .

La soluciones de la ecuación (D2) se construye como en la sección anterior. Tomamos $\sigma_{ij} = 0$, por lo tanto

$$\tilde{K}_{ij} = \partial_i A_j + \partial_j A_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \partial_\gamma A^\gamma, \quad (\text{D4})$$

y la ecuación (D2) queda de la forma

$$\Delta A^i + \frac{1}{3} \partial^i \partial_j A^j = -8\pi \tilde{j}^i. \quad (\text{D5})$$

Imponiendo las siguientes condiciones para las fuentes

$$\partial_i \tilde{j}^i = 0. \quad (\text{D6})$$

obtenemos

$$\partial_i A^i = 0, \quad (\text{D7})$$

y por lo tanto el conjunto final de ecuaciones equivalentes a (D2) es

$$\Delta A^i = -8\pi \tilde{j}^i. \quad (\text{D8})$$

La solución a este sistema está dado por la función de Green

$$A^i(x) = 2 \int \frac{\tilde{j}^i(x')}{|x - x'|} d^3 x'. \quad (\text{D9})$$

donde $|\cdot|$ es la norma plana.

Además, tomamos la función $\tilde{\mu}$ de forma tal que sea exactamente el caso límite de la condición de energía dominante

$$\tilde{\mu} = \sqrt{\tilde{j}^i \tilde{j}_i}, \quad (\text{D10})$$

de ésta forma el único dato libre es \tilde{j}_i . Este vector, \tilde{j}_i , lo elegimos de la forma

$$\tilde{j}^i = a\tilde{\eta}^i, \quad (\text{D11})$$

donde a es una función suave de las coordenadas y $\tilde{\eta}_i$ es el vector de Killing axial plano.

En coordenadas esféricas (r, θ, φ) , el vector de Killing se escribe $\tilde{\eta}^i = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ y la función libre del dato $a = a(r, \theta)$. Usando (D11) tenemos que la solución de (D8) está dada por

$$A^i = f(r, \theta)\tilde{\eta}^i, \quad (\text{D12})$$

donde f satisface

$$\partial_r^2 f + 4\frac{\partial_r f}{r} + \frac{\partial_\theta^2 f}{r^2} + \frac{3 \cos \theta \partial_\theta f}{r^2 \sin \theta} = -8\pi a. \quad (\text{D13})$$

con la condición de borde

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f = 0. \quad (\text{D14})$$

Luego, de la expresión (D12), se puede calcular \tilde{K}_{ij} de forma directa, usando la ecuación de Killing y la siguiente propiedad de f

$$\tilde{\eta}^i \partial_i f = 0, \quad (\text{D15})$$

obtenemos una expresión simple para \tilde{K}_{ij}

$$\tilde{K}_{ij} = 2\tilde{\eta}_{(i}\partial_{j)}f \quad \tilde{K}_{ij}\tilde{K}^{ij} = 2|\partial f|^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{D16})$$

En resumen, los sistemas que consideramos para los cálculos numéricos quedan determinados dando una función arbitraria, axialmente simétrica y de soporte compacto, a . Esta función describe la distribución y localización de los campos de materia. Dada a , resolvemos las ecuaciones (D13), con la condición de borde (D14), y la ecuación

$$\Delta \Psi = -\frac{2\pi a r \sin \theta}{\Psi^3} - \frac{|\partial f|^2 r^2 \sin^2 \theta}{4\Psi^7}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Psi = 1. \quad (\text{D17})$$

Cabe destacar que usando el método de la sub y súper soluciones, es posible probar que dada a suave, existe una única solución de la ecuación elíptica no-lineal (D17).

D1. Cantidades físicas

Todos los parámetros físicos relevantes del dato inicial, y de 2-superficies en Σ , puede ser calculados en términos de a y Ψ . Sea Ω un dominio cualquiera que contenga a los campos de materia, y sea dv_0 , ds_0 el elemento de volumen plano y el elemento de área plano, respectivamente.

La masa ADM del dato inicial está dada por

$$m_{ADM} = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|\partial \Psi|^2}{2\pi \Psi^2} + \frac{ar \sin \theta}{\Psi^4} + \frac{2|\partial f|^2 r^2 \sin^2 \theta}{16\pi \Psi^8} \right) dv_0 \quad (\text{D18})$$

El momento angular del dominio Ω se define como

$$J = - \int_{\Omega} ar^2 \sin^2 \theta dv_0. \quad (\text{D19})$$

Como medida cuasi-local de masa, calculamos la masa bariónica dada por

$$M_b = \int_{\Omega} \mu dv = \int_{\Omega} \frac{ar \sin \theta}{\Psi^2} dv_0. \quad (\text{D20})$$

En cuanto a las medidas de tamaño de Ω calculamos el área de la superficie del dominio $A(\partial\Omega)$

$$A(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} \Psi^4 ds_0 \quad (\text{D21})$$

y la longitud de la curva axial más grande que tengamos en $\partial\Omega$, $\mathcal{C}(\partial\Omega)$,

$$\mathcal{C} = 2\pi \max_{\partial\Omega} (\sqrt{\eta}) = 2\pi \max_{\partial\Omega} (r \sin \theta \Psi^2). \quad (\text{D22})$$

E. El Flujo de Curvatura Media Inversa (IMCF)

Consideramos una 3-variedad suave Σ , con métrica \bar{g}_{ij} definida positiva, conexión $\bar{\nabla}_i$ y con \bar{R}_{ij} siendo el tensor de curvatura de Ricci. Una solución suave del IMCF es una familia de 2-superficies $S_t := x(S, t)$ con $x : S \times [0, \tau] \rightarrow \Sigma$ que satisfacen la ecuación de evolución del flujo:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\nu}{H} \quad (\text{E1})$$

donde $t \in [0, \tau]$, $H > 0$ es la curvatura media de la 2-superficie S_t en x , y ν es la normal unitaria saliente de S_t .

Sea g_{ij} la métrica inducida en S_t , ∇_i la derivada covariante, h_{ij} la segunda forma fundamental y dS el elemento de área de S_t . Luego, se puede derivar las siguientes ecuaciones de evolución a lo largo del flujo (ver [46] para más detalles):

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = \frac{2}{H} h_{ij} \quad (\text{E2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (dS) = dS \quad (\text{E3})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H = -\Delta(H^{-1}) - H^{-1}(|h|^2 + \bar{R}_{ij} \nu^i \nu^j). \quad (\text{E4})$$

E1. El IMCF en datos conformemente planos

En esta sección derivamos la ecuación de flujo de curvatura media inversa (IMCF) para datos conformemente planos, usada en la sección 2.5.

Estudiamos el IMCF en $\Sigma = \mathbb{R}^3$ con la métrica $\bar{g}_{ij} = \psi^4 \delta_{ij}$. Es conveniente introducir una formulación de conjuntos de nivel de (E1), donde las superficies del flujo S_t están dadas por los conjuntos de nivel de una función escalar u ,

$$S_t = \{x^i : u(x^i, t) = 0\}$$

y (E1) es remplazada por la siguiente ecuación elíptica degenerada

$$\bar{D}_i \left(\frac{\bar{g}^{ij} \partial_j u}{|\partial u|_{\bar{g}}} \right) = |\partial u|_{\bar{g}} \quad (\text{E5})$$

Notemos que, para el modelo que usamos, podemos escribir la curvatura media H de S_t en términos de Ψ :

$$H = \bar{D}_i \left(\frac{\bar{g}^{ij} \partial_j u}{|\partial u|_{\bar{g}}} \right) = \frac{1}{\Psi^2 |\partial u|} \left(\Delta u + 4 \frac{\partial \Psi \cdot \partial u}{\Psi} - \frac{\partial |\partial u| \cdot \partial u}{|\partial u|} \right) \quad (\text{E6})$$

donde todas las derivadas y los productos punto se calculan respecto a la métrica plana.

Llegado a este punto es conveniente definir un operador \mathcal{P} actuando en u :

$$\mathcal{P}u = \Delta u + 4 \frac{\partial \Psi \cdot \partial u}{\Psi} - \frac{\partial |\partial u| \cdot \partial u}{|\partial u|} \quad (\text{E7})$$

con lo cual la ecuación(E5) se puede escribir como

$$|\partial u| = \frac{\mathcal{P}u}{\Psi^2 H}. \quad (\text{E8})$$

En lugar de resolver esta ecuación elíptica, resolvemos una ecuación de evolución para u , la cual se obtiene tomando la derivada total de u respecto de t sobre la superficie S_t :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \partial_i u \frac{\nu^i}{H} + \frac{\partial u}{\partial t} = \partial_i u \frac{\partial^i u}{\Psi^2 |\partial u|} \frac{1}{H} + \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{|\partial u|}{\Psi^2 H} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{|\partial u|^2}{\mathcal{P}u} + \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

donde en el segundo paso usamos la ecuación de IMCF, y en el último usamos que H viene dado por (E8), por lo tanto obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{|\partial u|^2}{\mathcal{P}u}. \quad (\text{E9})$$

Elegimos S_t de forma tal que

$$u = u(r, \theta, t) = r - v(\theta, t) = 0 \quad (\text{E10})$$

donde v es una función suave, con lo cual simplificamos el problema y hacemos explícito el hecho de que el flujo preserva la simetría axial. Luego, introduciendo esto en la ecuación (E9), obtenemos la siguiente ecuación de evolución para la función v

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1 + \left(\frac{\partial_\theta v}{v} \right)^2}{\tilde{\mathcal{P}}v} \quad (\text{E11})$$

donde hemos definido el operador $\tilde{\mathcal{P}}$ actuando en v como

$$\tilde{\mathcal{P}}v = \left(\frac{2}{v} - \frac{\partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta v)}{v^2 \sin \theta} + \frac{4}{\Psi} \left(\partial_r \Psi|_{r=v} - \frac{\partial_\theta v \partial_\theta \Psi}{v^2} \right) + \frac{\left(\frac{\partial_\theta v}{v^2} \right)^2 (v + \partial_\theta^2 v)}{1 + \left(\frac{\partial_\theta v}{v} \right)^2} \right). \quad (\text{E12})$$

Finalmente, las curvaturas principales de S_t son

$$\lambda_\varphi = \frac{2r^2 \partial_r \Psi \sin \theta + \Psi r \sin \theta - 2 \partial_\theta \Psi \sin \theta u' - \Psi \cos \theta u'}{\Psi^3 r \sin \theta \sqrt{r^2 + u'^2}} \quad (\text{E13})$$

$$\lambda_\theta = \frac{r [(r^2 + u'^2)(r^2 \partial_r \Psi + r - u'' \Psi) + u'' u'^2 \Psi]}{\Psi^3 (r^2 + u'^2)^{5/2}} \quad (\text{E14})$$

y S_t será convexa si $\lambda_\varphi, \lambda_\theta \geq 0$. Notemos que en el límite $\Psi \rightarrow 1$ y $u = \text{const.}$ obtenemos las curvaturas principales de una esfera en una región plana

$$\lambda_\theta^{\text{esfera}} = \lambda_\varphi^{\text{esfera}} = \frac{1}{r}. \quad (\text{E15})$$

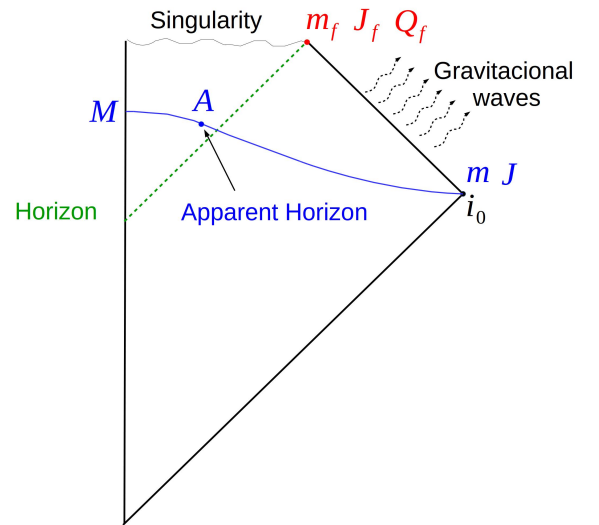
F. Argumento heurístico de Penrose con momento angular

En lo que sigue esencialmente reproduciremos las ideas presentadas en [24] y [60] para ver incluir el momento angular en el argumento heurístico de Penrose y la equivalencia entre (3.5) y (3.6). Asumimos que tenemos materia en estado de colapso gravitatorio, de la conjetura del sensor cósmico sabemos que el estado final de dicho colapso debe ser un Agujero Negro en equilibrio. En esta situación se espera que los campos de materia caigan dentro del horizonte de eventos del Agujero Negro, y por lo tanto, del teorema de unicidad de Agujeros Negros [43], el Agujero Negro final debe ser un Agujero Negro de Kerr. Como dijimos en 3.1 debemos considerar espaciotiempos axialmente simétricos para poder tener una buena definición de momento angular y para que el mismo se conserve. Como asumimos simetría axial tenemos que $J = J_f$,

Luego la masa de dicho Agujero Negro final, m_f , está dada en términos del área del horizonte y del momento angular J_f del Agujero Negro final

$$m_f^2 = \frac{A_f}{16\pi} + \frac{4\pi J_f^2}{A_f} \quad (\text{F1})$$

Tomamos una superficie de Cauchy, Σ , la cual será axialmente simétrica, que conecte la región de Agujero Negro con infinito espacial i_0 , y tal que el colapso ya haya ocurrido, y en esta hipersuperficie calculamos la masa total m , el momento angular J y buscamos un horizonte aparente y le calculamos el área.



y dado que las ondas gravitatorias transportan energía (positiva) fuera del sistema la

masa medida en Σ debe ser más grande que la masa del Agujero Negro final, $m \geq m_f$, y tenemos

$$m^2 \geq \frac{A_f}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{A_f}. \quad (\text{F2})$$

Luego del teorema del área del Agujero Negro [40] sabemos que el área del Agujero Negro crece con el tiempo y por lo tanto $A_f \geq A$. Mas aún en 2011 Dain y Reiris [20] probaron que el área y el momento angular de un horizonte aparente cerrado y con simetría axial satisface la desigualdad local $A \geq 8\pi|J|$. De estos resultados tenemos que la función en el lado derecho de (F2) es una función creciente de A_f , y por lo tanto podemos relacionar la masa medida en \mathcal{M} con el momento angular y el área del horizonte aparente A

$$m^2 \geq \frac{A}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{A} \quad (\text{F3})$$

Bibliografía

- [1] Andres Acena, Sergio Dain, and Maria E. Gabach Clement. Horizon area–angular momentum inequality for a class of axially symmetric black holes. *Class.Quant.Grav.*, 28:105014, 2011.
- [2] Pablo Anglada. Desigualdad entre área y momento angular en Relatividad General. Master’s thesis, FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba, 2013.
- [3] Pablo Anglada, Sergio Dain, and Omar E. Ortiz. Inequality between size and charge in spherical symmetry. *Phys. Rev.*, D93(4):044055, 2016.
- [4] Pablo Anglada, Maria E. Gabach-Clement and Omar E. Ortiz. Size, angular momentum and mass for objects. *Class. Quant. Grav.*, 34(12):125011, 2017
- [5] Pablo Anglada. Penrose-like inequality with angular momentum for minimal surfaces *Class. Quant. Grav*, 35(4):045018, 2018
- [6] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. The dynamics of general relativity. In L. Witten, editor, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, pages 227–265. Wiley, New York, 1962.
- [7] R. Bartnik and J. Isenberg. The constraint equations. In P. T. Chruściel and H. Friedrich, editors, *The Einstein equations and large scale behavior of gravitational fields*, pages 1–38. Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 2004, gr-qc/0405092.
- [8] Jacob D. Bekenstein. Universal upper bound on the entropy-to-energy ratio for bounded systems. *Phys. Rev. D*, 23:287–298, Jan 1981.
- [9] Jacob D. Bekenstein. How does the entropy / information bound work? *Found.Phys.*, 35:1805–1823, 2005, quant-ph/0404042.
- [10] P. Bizon, E. Malec, and N. O’Murchadha. Trapped surfaces due to concentration of matter in spherically symmetric geometries. *Class.Quant.Grav.*, 6:961–976, 1989.
- [11] I. Booth. Black-hole boundaries. *Canadian journal of physics*, 83(11):1073-1099, 2005.
- [12] D. G. Boulware. Naked singularities, thin shells, and the Reissner-Nordström metric. *Phys. Rev. D*, 8:2363–2368, Oct 1973.

- [13] R. Bousso. The Holographic principle. *Rev.Mod.Phys.*, 74:825–874, 2002, hep-th/0203101.
- [14] Hubert L. Bray and and Piotr T. Chrusciel. The Penrose inequality. *arXiv.*, gr-qc/0312047, 2003.
- [15] H. L. Bray and M. A. Khuri A Jang Equation Approach to the Penrose Inequality. *arXiv*, 0910.4785, 2009.
- [16] H. L. Bray and M. A. Khuri Pde's which imply the Penrose conjecture. *Asian Journal of Mathematics*, 15(4), 557-610, 2011.
- [17] W. L. Briggs, V. E. Henson, and S. F. McCormick. *A Multigrid Tutorial*. SIAM, Philadelphia, PA, 2nd edition, 2000.
- [18] Sergio Dain, C. O Lousto and R. Takahashi. New conformally flat initial data for spinning black holes.. *Physical Review D.*, 65(10), 104038, 2002.
- [19] Sergio Dain. Proof of the angular momentum-mass inequality for axisymmetric black holes.. *J. Differential Geometry*, 79(1), 33-67, 2008.
- [20] Sergio Dain and Martin Reiris. Area - Angular momentum inequality for axisymmetric black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 107:051101, 2011.
- [21] S. Dain, J. L. Jaramillo, and M. Reiris. Area-charge inequality for black holes. *Class. Quantum Grav.*, 29(3):035013, 2012, 1109.5602.
- [22] Sergio Dain. Geometric inequalities for axially symmetric black holes.. *Class. Quant. Grav.*,29(7), 073001, 2012.
- [23] Sergio Dain. Inequality between size and angular momentum for bodies. *Phys. Rev. Lett.*, 112(4), 041101, 2014.
- [24] Sergio Dain. Geometric inequalities for black holes. *General Relativity and Gravitation*, 46(5), 1715, 2014.
- [25] Sergio Dain. Bekenstein bounds and inequalities between size, charge, angular momentum and energy for bodies. *Phys. Rev.*, D92(4):044033, 2015.
- [26] Sergio Dain and M. E. Gabach-Clement, Geometrical inequalities bounding angular momentum and charges in General Relativity. arXiv:1710.04457 [gr-qc].
- [27] M. M. Disconzi and M. A. Khuri On the Penrose inequality for charged black holes. *Class. Quant. Grav.*, 29(24), 245019, 2012.
- [28] J. Frauendiener. On the Penrose inequality. *Physical review letters*, 87(10), 101101, 2001.
- [29] Maria E. Gabach Clement, Jose Luis Jaramillo, and Martin Reiris. Proof of the area-angular momentum-charge inequality for axisymmetric black holes. *Class. Quant. Grav.*, 30:065017, 2013.

- [30] Maria Eugenia Gabach-Clement and Martin Reiris. Shape of rotating black holes. *Phys. Rev. D.*, D88(4):044031, 2013.
- [31] Maria Eugenia Gabach Clement, Martin Reiris, and Walter Simon. The area-angular momentum inequality for black holes in cosmological spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 32(14):145006, 2015.
- [32] Gregory J. Galloway and Niall O’Murchadha. Some remarks on the size of bodies and black holes. *Class. Quant. Grav.*, 25:105009, 2008.
- [33] R. Geroch. Energy extraction. *Ann. New York Acad. Sci.*, 224, 108-17, 1973.
- [34] J. Guven and N. O’Murchadha. The Constraints in spherically symmetric classical general relativity. I. Optical scalars, foliations, bounds on the configuration space variables and the positivity of the quasilocal mass. *Phys.Rev.*, D52:758–775, 1995, gr-qc/9411009.
- [35] J. Guven and N. O’Murchadha. The Constraints in spherically symmetric classical general relativity. II. Identifying the configuration space: A Moment of time symmetry. *Phys.Rev.*, D52:776–795, 1995, gr-qc/9411010.
- [36] J. Guven and N. O. Murchadha. Geometric bounds in spherically symmetric general relativity. *Phys.Rev.*, D56:7650–7657, 1997, gr-qc/9709064.
- [37] P. Haensel, A.Y. Potekhin, and D.G. Yakovlev. *Neutron Stars 1: Equation of State and Structure*. Astrophysics and Space Science Library. Springer New York, 2007.
- [38] James B. Hartle. Slowly rotating relativistic stars. 1. Equations of structure. *Astrophys. J.*, 150:1005–1029, 1967.
- [39] S. W. Hawking. Black holes in general relativity. *Commun. Math. Phys.*, 25(2), 152-166, 1972.
- [40] S. A. Hayward General laws of black-hole dynamics. *Phys. Rev. D.*, 49(12), 6467, 1994.
- [41] S. A. Hayward. Gravitational energy in spherical symmetry. *Phys. Rev.*, D53:1938–1949, 1996, gr-qc/9408002.
- [42] Jörg Hennig, Carla Cederbaum, and Marcus Ansorg. A universal inequality for axisymmetric and stationary black holes with surrounding matter in the Einstein-Maxwell theory. *Commun. Math. Phys.*, 293:449–467, 2010.
- [43] M. Heusler. Black hole uniqueness theorems. *Cambridge University Press.*, Vol. 6, 1996.
- [44] Shahar Hod. Universal entropy bound for rotating systems. *Phys. Rev. D*, 61:024018, Dec 1999.

- [45] G. Huisken and T. Ilmanen. The riemannian penrose inequality. *International Mathematics Research Notices*, 20,1045-1058, 1997.
- [46] Gerhard Huisken. Evolution of hypersurfaces by their curvature in riemannian manifolds. *Documenta Mathematica*, pages 349–360, 1998.
- [47] G. Huisken and T. Ilmanen. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. *J. Differential Geometry*, 59:352–437, 2001.
- [48] Pong Soo Jang. Note on cosmic censorship. *Phys. Rev.*, D20:834–838, 1979.
- [49] M. A. Khuri. The Hoop Conjecture in Spherically Symmetric Spacetimes. *Phys.Rev.*, D80:124025, 2009, 0912.3533.
- [50] M. A. Khuri, S. Yamada and G. Weinstein. On the Riemannian Penrose inequality with charge and the cosmic censorship conjecture. *arXiv.*, arXiv:1306.0206, 2013.
- [51] M. A. Khuri. A Penrose-like inequality with charge.. *General Relativity and Gravitation.*, 45(11), 2341-2361, 2013.
- [52] M. A. Khuri, G. Weinstein and S. Yamada. Proof of the Riemannian Penrose inequality with charge for multiple black holes. *arXiv.*, arXiv:1409.3271, 2014.
- [53] Marcus A. Khuri. Existence of Black Holes Due to Concentration of Angular Momentum. *JHEP*, 06:188, 2015.
- [54] Marcus A. Khuri. Inequalities Between Size and Charge for Bodies and the Existence of Black Holes Due to Concentration of Charge. *J. Math. Phys.*, 56(11):112503, 2015.
- [55] M. A. Khuri, G. Weinstein and S. Yamada. Extensions of the charged Riemannian Penrose inequality. *Class. Quant. Grav.*, 32(3), 035019, 2015.
- [56] Marcus Khuri and Naqing Xie. Inequalities Between Size, Mass, Angular Momentum, and Charge for Axisymmetric Bodies and the Formation of Trapped Surfaces. *arXiv*, gr-qc: 1610.04892, 2016.
- [57] Heinz-Otto Kreiss and Omar Eduardo Ortiz. *Introduction to Numerical Methods for Time Dependent Differential Equations*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, first edition, 2014.
- [58] Edward Malec, Marc Mars, and Walter Simon. On the Penrose inequality. *arXiv.*, gr-qc/0212040, 2002.
- [59] Edward Malec, Marc Mars, and Walter Simon. On the Penrose inequality for general horizons. *Phys. Rev. Lett.*, 88:121102, 2002.
- [60] Marc Mars. Present status of the Penrose inequality. *Class. Quant. Grav.*, 26(19):193001, 2009.

- [61] , Misner, C.W. and Thorne, K.S. and Wheeler, J.A. Gravitation W. H. Freeman, 1973
- [62] Niall Ó Murchadha. How large can a star be? *Phys. Rev. Lett.*, 57(19):2466–2469, 1986.
- [63] Feryal Özel, Dimitrios Psaltis, Ramesh Narayan, and Antonio Santos Villarreal. On the mass distribution and birth masses of neutron stars. *The Astrophysical Journal*, 757(1):55, 2012.
- [64] Roger Penrose. Naked singularities. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 224,125, 1973
- [65] E. Poisson *A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [66] Martin Reiris On the shape of bodies in General Relativistic regimes. *Gen. Rel. Grav.*, 46:1777, 2014.
- [67] Marcelo E. Rubio Charge-size inequality in General Relativity Proceedings, 2nd Argentinian-Brazilian Meeting on Gravitation, Relativistic Astrophysics and Cosmology, Buenos Aires, Argentina, April 22-25, 2015.
- [68] Schoen, Richard and Yau, Shing-Tung The Existence of a Black Hole Due to Condensation of Matter. *Commun. Math. Phys.*, 90:575–579, 1983.
- [69] Richard Schoen and Shing-Tung Yau Proof of the Total Mass of a General Space-Time. *Phys. Rev. Lett* 43, 1457-1459, 1979.
- [70] Richard Schoen and Shing-Tung Yau Proof of the positive mass theorem. 2.. *Commun. Math. Phys.* 79, 231-260, 1981.
- [71] Richard Schoen and Xin Zhou. Convexity of reduced energy and mass angular momentum inequalities. *Annales Henri Poincare*, 14:1747–1773, 2013.
- [72] Jose M. M. Senovilla. A Reformulation of the Hoop Conjecture. *Europhys. Lett.*, 81:20004, 2008.
- [73] Nikolaos Stergioulas. Rotating Stars in Relativity. *Living Rev. Rel.*, 6:3, 2003.
- [74] László B. Szabados. Quasi-local energy-momentum and angular momentum in GR: A review article. *Living Rev. Relativity*, 7(4), 2004.
- [75] W. G. Unruh and Robert M. Wald. Acceleration Radiation and Generalized Second Law of Thermodynamics. *Phys. Rev.*, D25:942–958, 1982.
- [76] R.M. Wald, General Relativity, University of Chicago Press, 1984.
- [77] G. Weinstein and S. Yamada. On a Penrose inequality with charge. *Commun. Math. Phys.*, 257(3), 703-723, 2005.
- [78] Edward Witten. A new proof of the positive energy theorem. *Commun. Math. Phys.*, 80(3), 381-402, 1981.