Acción de un grupo sobre una 2-categoría

por María Eugenia Bernaschini

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctora en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Julio de 2018

Director: Dr. Juan Martín Mombelli

*"Pensar es olvidar diferencias,
es generalizar, abstraer."*

JORGE LUIS BORGES
Funes el memorioso

Resumen

En este trabajo se estudian acciones de grupos finitos sobre 2-categorías. Los ejemplos motivadores son las acciones sobre la 2-categoría de representaciones de categorías tensoriales finitas y su relación con las extensiones de grupos de categorías tensoriales. Asociada a una acción de un grupo G sobre una 2-categoría, se construye la 2-categoría de objetos equivariantes. Además, se introducen las nociones de G-pseudofuntor, transformación G-pseudonatural y G-modificación. El primer resultado del trabajo es el teorema de coherencia para la acción de un grupo sobre una 2-categoría, el cual reduce el tratamiento de acciones generales a acciones estrictas. Se prueba que, en el caso de G-acciones sobre la 2-categoría de representaciones de una categoría tensorial $\mathcal{C}$, la 2-categoría de objetos equivariantes es biequivalente a la categoría de módulos sobre una G-extensión de $\mathcal{C}$. Finalmente, se prueba que el centro de la 2-categoría equivariante es monoidalmente equivalente a la equivariantización de un centro relativo, generalizando el resultado de [15].

Palabras claves. categoría tensorial; categoría módulo; bicategoría; 2-categoría; equivariantización.

2010 Mathematics Subject Classification. 18D05, 18D10.

Abstract

We study actions of finite groups on 2-categories. The motivating examples are actions on the 2-category of representations of finite tensor categories and their relation with the extension theory of tensor categories by groups. Associated to a group action on a 2-category, we construct the 2-category of equivariant objects. We also introduce the G-equivariant notions of pseudofunctor, pseudonatural transformation and modification. Our first main result is a coherence theorem for 2-categories with an action of a group, which allows us to work with strict actions. We prove that, in the case of a G-action on the 2-category of representation of a tensor category $\mathcal{C}$, the 2-category of equivariant objects is biequivalent to the module category over an associated G-extension of $\mathcal{C}$. Finally, we prove that the center of the equivariant 2-category is monoidally equivalent to the equivariantization of a relative center, generalizing results obtained in [15].

Key words and phrases. tensor category; module category; bicategory; 2-category, equivariantization.

2010 Mathematics Subject Classification. 18D05, 18D10.

Agradecimientos

- Agradezco a mi director Juan Martín Mombelli.
- Agradezco a César Galindo.
- Agradezco a FaMAF y a CONICET.
- Agradezco a Gastón García, Agustín García Iglesias y a Cynthia Will, el tribunal de esta tesis.
- Agradezco a mis profesores, a mis compañeros y a mis alumnos de FaMAF.
- Agradezco a mi familia.

Índice general

Introducción

El objeto principal de estudio de esta Tesis son las categorías tensoriales finitas sobre un cuerpo $\Bbbk$ algebraicamente cerrado y de característica cero.

Una *categoría monoidal* es una categoría munida de un producto tensorial y de un objeto unidad sujetos a ciertos axiomas de asociatividad y unidad. Este concepto engloba a la teoría de representaciones de grupos, de álgebras de Lie y, más generalmente, de álgebras de Hopf.

Una *categoría tensorial finita* sobre un cuerpo $\Bbbk$ es una categoría monoidal Abeliana $\Bbbk$-lineal tal que la categoría Abeliana subyacente es equivalente a la categoría de representaciones de dimensión finita de una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita. Estas categorías codifican simetrías de diversas estructuras. Sus aplicaciones llegan a muchas áreas de la matemática y de la física, tales como, variedades topológicas de dimensión baja, teoría de álgebras de Hopf, teoría racional de campos, mecánica estadística y computación cuántica, entre otras.

En el estudio de las categorías tensoriales, así como en el de cualquier estructura algebraica, las representaciones tienen un rol fundamental. La definición de *módulo o representación* de una categoría tensorial es muy natural. En términos amplios, la noción de categoría módulo es una categorificación de la noción de módulo sobre un álgebra. Si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial, un $\mathcal{C}$-módulo es una categoría $\mathcal{M}$ munida de un funtor biexacto $\mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, asociativo y unitario salvo ciertos isomorfismos naturales que verifican axiomas.

Recientemente ha resurgido el interés en este tema en una serie de publicaciones debidas a Etingof y Ostrik [33], [34], [11]. La noción de categoría módulo ha probado ser una de las herramientas fundamentales para avanzar en la clasificación y descripción de las categorías tensoriales. En [8] ha permitido obtener ciertos resultados de clasificación de categorías de fusión de una cierta dimensión fija. También, usando este lenguaje, en [30] se han descripto nuevas características de ciertas álgebras de Hopf semisimples. La noción de representación de una categoría tensorial es bastante general, y está implícitamente presente en diversas áreas de la matemática y de la física matemática, tales como, teoría de álgebras de Hopf débiles, teoría de subfactores, extensiones de álgebras de vértices, álgebras de Hecke afines y teoría conforme de campos.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial y $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ son representaciones de $\mathcal{C}$, se puede construir la categoría $\operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ de funtores y transformaciones naturales que entrelazan la acción de $\mathcal{C}$. Además, si $\mathcal{M}_3$ es otra representación, la composición de funtores

$$\operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3) \times \operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \to \operatorname{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3),$$

es asociativa y unitaria. Los $\mathcal{C}$-módulos, las categorías de funtores de $\mathcal{C}$-módulos y las transformaciones naturales, equipados con dicha composición, forman una nueva estructura que se conoce como *2-categoría*. La 2-categoría de $\mathcal{C}$-módulos se denota por ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$. Se sabe que la estructura de 2-categoría de ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$ no determina la clase de equivalencia de $\mathcal{C}$, pero sí su clase Morita.

El presente trabajo es un comienzo en el estudio de propiedades abstractas de la estructura de las 2-categorías y cómo pueden aplicarse los resultados a la teoría de categorías tensoriales.

Hay dos construcciones de categorías tensoriales que nos interesan. Si G es un grupo finito, una categoría tensorial $\mathcal{D}$ se dice una *G-extensión de $\mathcal{C}$* si está munida de una G-graduación $\mathcal{D} = \oplus_{g\in G}\mathcal{D}_g$, donde $\mathcal{D}_1 = \mathcal{C}$, $\mathcal{D}_g$ son subcategorías Abelianas plenas de $\mathcal{D}$ y el producto tensorial satisface que $\otimes : \mathcal{D}_g \times \mathcal{D}_h \to \mathcal{D}_{gh}$. Otra construcción es la *equivariantización*. Si G actúa por autoequivalencias tensoriales en $\mathcal{C}$, es decir, existen equivalencias monoidales $F_g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ equipadas de isomorfismos naturales monoidales $F_g \circ F_h \xrightarrow{\simeq} F_{gh}$ que satisfacen ciertos axiomas, entonces se puede construir una nueva categoría tensorial $\mathcal{C}^G$ de *objetos equivariantes*. Una pregunta a formular es si se pueden determinar las representaciones de $\oplus_{g\in G}\mathcal{D}_g$ y $\mathcal{C}^G$ en términos de las representaciones de $\mathcal{C}$ y de algunos otros datos. Los resultados conocidos al respecto (ver [9] y [26]) son los siguientes:

Teorema 0.0.1. Asumamos que un grupo finito G actúa sobre una categoría tensorial $\mathcal{C}$. Existe una correspondencia biyectiva entre:

- ciertas representaciones de $\mathcal{C}^G$;
- ternas $(F, \mathcal{M}, \{U_f\}_{f\in F})$, donde $F \subseteq G$ es un subgrupo, $\mathcal{M}$ es una representación de $\mathcal{C}$ y $U_f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ son equivalencias que satisfacen ciertos axiomas.

❀

Teorema 0.0.2. Asumamos que G es un grupo finito y $\mathcal{D} = \oplus_{g\in G}\mathcal{D}_g$ es una G-extensión de $\mathcal{C}$. Existe una correspondencia biyectiva entre:

- ciertas representaciones de $\mathcal{D}$;
- ternas $(F, \mathcal{M}, \{U_f\}_{f\in F})$, donde $F \subseteq G$ es un subgrupo, $\mathcal{M}$ es una representación de $\mathcal{C}$ y $U_f : \mathcal{D}_f \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ son equivalencias que satisfacen ciertos axiomas.

❀

Ambos resultados de clasificación inducen a pensar que existe una relación entre las 2-categorías ${}_{\mathcal{C}^G}\mathrm{Mod}$ y ${}_{\oplus_{g\in G}\mathcal{D}_g}\mathrm{Mod}$. El objetivo del presente trabajo es encontrar una construcción en el mundo de las 2-categorías que le dé un marco a esta relación. Así, se define la noción de acción de un grupo G sobre una 2-categoría $\mathcal{B}$ arbitraria y la 2-categoría *equivariante* asociada $\mathcal{B}^G$.

Una acción de un grupo G sobre una 2-categoría $\mathcal{B}$ consiste en:

- una familia de pseudofuntores $F_g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, $g \in G$,
- equivalencia pseudonaturales $\chi_{g,h} : F_g \circ F_h \to F_{gh}$,
- modificaciones invertibles

$$\omega_{g,h,f} : \chi_{gh,f} \circ (\chi_{g,h} \otimes \mathrm{id}_{F_f}) \Rightarrow \chi_{g,hf} \circ (\mathrm{id}_{F_g} \otimes \chi_{h,f}),$$

para cada $g, h, f \in G$, tales que satisfacen ciertos axiomas.

Dadas las 2-categorías $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ equipadas con acciones de un grupo G, se tiene la noción de G-pseudofuntor entre ellas. Esto es, un pseudofuntor que entrelaza la acción del grupo. Cuando dicho funtor es una biequivalencia decimos que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son G-biequivalentes. Además, se tiene la noción de transformación G-pseudonatural y la noción de G-modificación. Esta colección de datos forman una nueva 2-categoría, que se denota por $\mathbf{2Cat}^G(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Dada una acción sobre una 2-categoría $\mathcal{B}$, se define la *2-categoría equivariante* como

$$\mathcal{B}^G = \mathbf{2Cat}^G(\mathcal{I}, \mathcal{B}),$$

donde $\mathcal{I}$ es la 2-categoría unidad (la 2-categoría que posee un único objeto y su hom-categoría es la categoría unidad) con acción trivial de G.

Uno de los resultados principales de esta Tesis es el teorema de coherencia, el cual establece que toda 2-categoría con una acción de un grupo G es G-biequivalente a otra 2-categoría donde la acción de G es *estricta*. Esto es, todo pseudofuntor F_g involucrado en la acción es un 2-funtor, $F_g \circ F_h = F_{gh}$, y $\chi_{g,h}$, $\omega_{g,h,f}$ son las identidades.

Un importante ejemplo de acción de un grupo sobre una 2-categoría, y motivador de este trabajo, proviene de las categorías tensoriales G-graduadas. Se prueba que, si $\mathcal{D} = \oplus_{g\in G}\mathcal{D}_g$ es una categoría tensorial G-graduada, con $\mathcal{D}_1 = \mathcal{C}$, entonces existe una acción del grupo G sobre ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$, la 2-categoría de representaciones de $\mathcal{C}$. Más aún, se tiene la biequivalencia

$$({}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}})^G \simeq {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}\,.$$

Para cada pseudofuntor $\mathcal{H} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ se define la categoría monoidal $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$ de transformaciones pseudonaturales $\eta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. El centro de la 2-categoría $\mathcal{B}$ se define como $\mathcal{Z}(\mathcal{B}) := \mathcal{Z}(\mathrm{Id}\,)$, donde $\mathrm{Id}\, : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ es el pseudofuntor identidad, el cual generaliza el centro de categorías monoidales. Se demuestra que si $\mathcal{H} : {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod} \to {}_{\mathcal{C}_e}\mathrm{Mod}$ es el pseudofuntor de olvido, donde $\mathcal{D} = \oplus_{g\in G}\mathcal{C}_g$ es una categoría tensorial G-graduada, entonces $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$ es monoidalmente equivalente al centro relativo de $\mathcal{D}$.

Finalmente, el teorema de coherencia permite probar que existe una equivalencia monoidal

$$\mathcal{Z}(\mathcal{B}^G) \simeq \mathcal{Z}(\Phi)^G,$$

donde $\Phi : \mathcal{B}^G \to \mathcal{B}$ es el pseudofuntor de olvido. Cuando se aplica esta equivalencia a ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$, se recupera el siguiente resultado de [15]:

Teorema 0.0.3. [15, Thm. 3.5] Si $\mathcal{D} = \oplus_{g\in G}\mathcal{C}_g$ es una categoría tensorial fielmente graduada, con $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$. Existe una acción del grupo G sobre el centro relativo $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$ y una equivalencia monoidal

$$\mathcal{Z}(\mathcal{D}) \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})^G.$$

❀

El contenido de esta Tesis está organizado de la siguiente manera:

- En el Capítulo 1 se introducen las nociones básicas de la Teoría de categorías tensoriales finitas. Se definen categoría, categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal, categoría monoidal y categoría tensorial finita. Se presentan también las representaciones de categorías tensoriales y las categorías tensoriales graduadas.

  Todos los resultados expuestos en este capítulo son necesarios para el desarrollo de los resultados de la Tesis y se pueden encontrar en [7] y [28].

- En el Capítulo 2 se define la acción de un grupo G sobre una categoría monoidal $\mathcal{C}$ y se describe la correspondiente categoría equivariante. A la categoría $\mathcal{C}$ se la llama G-categoría. Además, se presentan ejemplos de acción y se prueba un teorema de coherencia, el cual reduce el tratamiento de acciones generales a acciones estrictas.

  Los resultados de este capítulo se encuentran en el trabajo [14].

- En el Capítulo 3 se desarrollan los conceptos básicos de la Teoría de 2-categoría. Se define la noción de centro de una 2-categoría como una generalización del centro de categorías monoidales, y se establece una relación entre dicho centro y el centro relativo de categorías G-graduadas.

  Sobre la Teoría de 2-categorías ver [21], [22], [2] y [17].

- En el Capítulo 4 se define la acción de un grupo sobre una 2-categoría y se prueba el teorema de coherencia para dicha acción. Se construye la correspondiente equivariantización, y se desarrolla un ejemplo proveniente de las categorías tensoriales graduadas. Finalmente, se prueba que el centro de la 2-categoría equivariante es monoidalmente equivalente a la equivariantización de un centro relativo.

  Este capítulo contiene los resultados originales de esta Tesis, los cuales se pueden encontrar en [3]. El trabajo fue publicado en la revista Manuscripta Mathematica.

Capítulo 1

Categorías tensoriales finitas

En el presente capítulo se recopilan las definiciones y los teoremas principales sobre la Teoría de categorías tensoriales finitas necesarios para el desarrollo posterior de los resultados de esta Tesis. Para profundizar más sobre el tema ver [7] y [28].

1.1. Nociones básicas de categorías

La Teoría de categorías es un área de la matemática que trata de abstraer, unificar y formalizar diversas estructuras matemáticas en una sola mediante el uso de diagramas de flechas. Fue introducida en el año 1945 por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en un trabajo [12] sobre topología algebraica.

A continuación se presenta la definición, se listan algunas propiedades y se exhiben numerosos ejemplos.

Definición 1.1.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste en:

- una clase de objetos $\mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$;
- para cada par de objetos $X, Y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, una clase de *flechas* o *morfismos* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, un morfismo en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ se denota por $f : X \to Y$ o por $X \xrightarrow{f} Y$;
- para cada objeto $X \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, un morfismo distinguido en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ denotado por id_X y llamado la *identidad* de X;
- para todo $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, una aplicación

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

$$(f, g) \mapsto f \circ g = fg,$$

llamada la *composición*, tal que:

Unitariedad: para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$,

$$\mathrm{id}_Y \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_X;$$

Asociatividad: para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$,

$$h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Figura 1.1: Diagrama en una categoría: X, Y, Z representan objetos de la categoría y f, g representan morfismos de la categoría.

Definición 1.1.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$. Se dice que f es un *isomorfismo* si existe un morfismo en $\mathcal{C}$, $g : Y \to X$, tal que $f \circ g = \operatorname{id}_Y$ y $g \circ f = \operatorname{id}_X$.

Toda estructura matemática se relaciona con su misma especie vía morfismos. Los morfismos que relacionan categorías se llaman *funtores*.

Definición 1.1.3. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías, un *funtor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de:

- una aplicación $F : \operatorname{Obj}(\mathcal{C}) \to \operatorname{Obj}(\mathcal{D})$, que asigna a cada objeto X de $\mathcal{C}$ un objeto $F(X)$ de $\mathcal{D}$;
- para cada par de objetos $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, una función $F : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, que asigna a cada morfismo $f : X \to Y$ un morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$,

  tal que:
  $$F(\operatorname{id}_X) = \operatorname{id}_{F(X)}, \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g),$$
  para todo objeto $X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y todo par de morfismos f, g de $\mathcal{C}$ que se puedan componer.

El estudio de las categorías, al igual que de cualquier estructura matemática, requiere de un profundo análisis de sus morfismos. Para entender a los funtores hace falta introducir a los morfismos de funtores, las *transformaciones naturales*.

Definición 1.1.4. Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores, una *transformación natural* $\mu : F \to G$ es una colección de morfismos $\{\mu_X : F(X) \to G(X) : X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})\}$ tal que para todo $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y todo morfismo $f : X \to Y$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"'] \\ F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"] & G(Y). \end{tikzcd}$$

Se dice que una transformación natural $\mu : F \to G$ es un *isomorfismo natural* si para todo $X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ los morfismos $\mu_X : F(X) \to G(X)$ son isomorfismos. En este caso se dice que F es *equivalente* a G y se denota por $F \sim G$.

Definición 1.1.5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Una *subcategoría* $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ consiste en una subclase $\operatorname{Obj}(\mathcal{D})$ de $\operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, y para cada $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathcal{D})$ una subclase $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tal que:

- si $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, Y)$ y $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Z)$, entonces $f \circ g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y)$;
- $\operatorname{id}_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(X, X)$, para todo $X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{D})$.

La subcategoría $\mathcal{D}$ se dice *plena* si para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{D})$ se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Definición 1.1.6. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ categorías y $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores. Se define el funtor $F \circ H : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ de la siguiente manera: $F \circ H(X) = F(H(X))$, para todo $X \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. Si $X, Y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $f : X \to Y$ es una flecha en $\mathcal{C}$, entonces $(F \circ H)(f) = F(H(f))$.

Definición 1.1.7. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías, $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tres funtores y $\mu : F \to G, \nu : G \to H$ dos transformaciones naturales. Se define la *composición vertical* de las transformaciones naturales μ, ν como:

$$\nu \circ \mu : F \to H$$

$$(\nu \circ \mu)_X = \nu_X \circ \mu_X, \qquad \text{para todo } X \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C}).$$

Definición 1.1.8. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ categorías, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $J, H : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores y $\eta : F \to G, \nu : J \to H$ transformaciones naturales. Se define la *composición horizontal* de las transformaciones naturales η, ν como:

$$\nu \circ \eta : J \circ F \to H \circ G$$

$$(\nu \circ \eta)_X = \nu_{G(X)} \circ J(\eta_X),$$

para todo $X \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$.

Observación 1.1.9. La composición vertical y la horizontal de transformaciones naturales es una transformación natural.

Definición 1.1.10. Se dice que dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *equivalentes*, y se denota $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$, si existen funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tales que $F \circ G \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, $G \circ F \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de categorías y funtores.

Ejemplos de categorías

- La categoría *unidad* es la categoría que posee un único objeto y una única flecha.
- La categoría Set es la categoría cuyos objetos son los conjuntos y los morfismos las funciones de conjuntos. Para cada conjunto X el morfismo id_X es la identidad de X. La composición de morfismos es la composición de funciones.
- La categoría Grp es aquella categoría cuyos objetos son los grupos y las flechas los morfismos de grupos.
- La categoría Ab es la subcategoría plena de Grp que consiste en grupos Abelianos.
- La categoría Top es aquella cuyos objetos son los espacios topológicos y los morfismos las funciones continuas.
- Si $\Bbbk$ es un cuerpo, denotaremos por $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ a la categoría cuyos objetos son los espacios vectoriales y los morfismos las transformaciones lineales. Se denota por $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ a la subcategoría plena de $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ cuyos objetos son los espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\Bbbk$.
- Si R es un anillo, se denota por ${}_R\mathrm{Mod}$ (respectivamente Mod_R) a la categoría cuyos objetos son los R-módulos a izquierda (respectivamente a derecha). Los morfismos son los morfismos de R-módulos.

- Si R es un anillo, se denota por ${}_R\mathrm{Mod}_R$ a la categoría cuyos objetos son los R-bimódulos.
- Si A es una $\Bbbk$-álgebra, se denota por ${}_A\mathrm{Mod}$, respectivamente Mod_A, a la categoría cuyos objetos son los espacios vectoriales munidos de una acción lineal que los hace A-módulos a izquierda, respectivamente a derecha. Las categorías ${}_A\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_A$ son las subcategorías plenas de ${}_A\mathrm{Mod}$, respectivamente Mod_A, que consisten en aquellos módulos de dimensión finita sobre $\Bbbk$. Análogamente se definen las categorías ${}_A\mathrm{Mod}_A$ y ${}_A\mathfrak{m}_A$.
- Sea A un álgebra asociativa con unidad. La categoría $\underline{A}$ es aquella categoría con un único objeto. Los morfismos son los elementos de A. La composición es el producto de A.
- Si $\mathcal{C}$ es una categoría, vamos a denotar por $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ a la categoría cuyos objetos son los mismos que los objetos de $\mathcal{C}$ y tal que para cada $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, el espacio de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$. Si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y,Z)$, es decir $f : Y \to X$ y $g : Z \to Y$, entonces la composición en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ está dada por
$$g \circ^{\mathrm{op}} f = f \circ g.$$
La categoría $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ se llama la *categoría opuesta* de $\mathcal{C}$.
- Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son dos categorías, vamos a denotar por $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ a la categoría cuyos objetos son pares (X,Y) donde $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}), Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$. Si $(X,Y), (X',Y')$ son dos objetos entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X,Y),(X',Y')) = (\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X'), \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,Y'))$.
- Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías, se define la categoría $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ cuyos objetos son los funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$, las flechas las transformaciones naturales y la composición la composición vertical de transformaciones naturales. Se denota $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{C}) = \mathrm{End}(\mathcal{C})$.
- Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *pequeña* si $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ es un conjunto, y para todo $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ también es un conjunto.
- La categoría cat es la categoría cuyos objetos son las categorías pequeñas y los morfismos los funtores.

Ejemplos de funtores

- Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{D}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$, se tiene el funtor *inclusión* $i : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.
- Sea $F : Grp \to Set$ el funtor dado por $F(G) = G$ y $F(f) = f$ para todo grupo G y todo morfismo f. Al funtor F se lo llama el *funtor de olvido*, porque se está "olvidando" de la estructura de grupo.
- Sea $\Bbbk$ un cuerpo y A una $\Bbbk$-álgebra. Otro funtor de olvido es el funtor $F : {}_A\mathrm{Mod} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$, que se olvida de la estructura de A-módulo.
- Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña y $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$. Existen funtores
$$L_X, : \mathcal{C} \to Set,\ G_X : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to Set$$
definidos como sigue. Si $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ entonces
$$L_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y),\ G_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X).$$
Además si $f : Y \to Z$ es una función, entonces
$$L_X(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$$

$$L_X(f)(\alpha) = f \circ \alpha,$$

para todo $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y

$$G_X(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

$$G_X(f)(\beta) = \beta \circ f$$

para todo $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$. Se dice que el funtor L_X está *representado* por X. También se puede considerar el funtor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to Set.$$

Otra característica importante de la teoría de categorías es la posibilidad de trabajar sin las nociones de elementos y pertenencia:

Definición 1.1.11. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $X, Y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ y $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$.

- El objeto X se dice *isomorfo* a Y si existe un isomorfismo $f : X \to Y$, en tal caso se denota $X \simeq Y$.
- Se dice que f es un *monomorfismo* si para todo par de morfismos $g, h : Z \to X$ tales que $f \circ g = f \circ h$, se tiene que $g = h$.
- Se dice que f es un *epimorfismo* si para todo par de morfismos $g, h : Z \to X$ tales que $g \circ f = h \circ f$, se tiene que $g = h$.

Definición 1.1.12. Sea $\mathcal{C}$ una categoría e Y un objeto de $\mathcal{C}$.

- Un *subobjeto* de Y es un objeto X junto con un monomorfismo $\iota : X \to Y$. Se denota $X \subseteq Y$.
- Un *cociente* de Y es un objeto Z junto con un epimorfismo $p : Y \to Z$.
- Un *subcociente* de Y es un cociente de un subobjeto de Y.

Definición 1.1.13. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice *fiel*, respectivamente *pleno*, si para todo par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$ la aplicación

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)),$$

es inyectiva, respectivamente suryectiva. El funtor F se dice *denso* o *esencialmente suryectivo* si para todo objeto $Z \in \mathcal{D}$ existe un objeto X de $\mathcal{C}$ tal que $F(X) \simeq Z$.

Teorema 1.1.14. [1, Theorem 1.4] Dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son equivalentes si y sólo si existe un funtor pleno, fiel y denso $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. ❀

Definición 1.1.15. Una categorías $\mathcal{C}$ se dice *esquelética* si cada vez que $X, Y \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ son tales que $X \simeq Y$, entonces $X = Y$.

Observación 1.1.16. Toda categoría es equivalente a una categoría esquelética.

A continuación se enuncia y demuestra uno de los lemas más importantes y útiles de la Teoría de categorías, el *Lema de Yoneda*.

Lema 1.1.17 (Yoneda)**.** Sea $F : \mathcal{C} \to Set$ un funtor, $X \in \mathcal{C}$ y L_X el funtor del ejemplo 1.1. El conjunto de transformaciones naturales de L_X a F (denotado por $Nat(L_X, F)$) está en biyección con el conjunto $F(X)$ vía la función

$$\phi : Nat(L_X, F) \to F(X), \quad \phi(\nu) = \nu_X(\mathrm{id}_X).$$

Demostración. Una transformación natural $\nu \in Nat(L_X, F)$ es una colección de morfismos $\{\nu_Y : \mathrm{Hom}(X, Y) \to F(Y) : Y \in \mathcal{C}\}$ tal que para todo $Z, Y \in \mathcal{C}$ y para todo morfismo $f : Z \to Y$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \arrow[r, "\nu_Z"] \arrow[d, "L_X(f)"] & F(Z) \arrow[d, "F(f)"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \arrow[r, "\nu_Y"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

En particular, si se toman $Z = X$ y $f : X \to Y$ cualquier función, se tiene que

$$\nu_Y \circ L_X(f) = F(f) \circ \nu_X,$$

y aplicando esta identidad a id_X y usando que $L_X(f)(\mathrm{id}_X) = f$, se obtiene que

$$\nu_Y(f) = F(f) \circ \nu_X(\mathrm{id}_X).$$

Luego, se define $\psi : F(X) \to Nat(L_X, F)$ la función dada por

$$\psi(x) : L_X \to F, \quad \psi(x)_Y(f) = F(f)(x),$$

para todo $x \in F(X)$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $Y \in \mathcal{C}$. Claramente la función ψ es inversa de ϕ, lo que prueba el lema. ❀

1.2. Categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales

En esta sección se introducen las categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales y se listan algunos ejemplos. Se enuncia el Teorema de Jordan-Hölder, para luego definir categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales finitas.

De ahora en adelante $\Bbbk$ denota un cuerpo algebraicamente cerrado.

Definición 1.2.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un objeto $Z \in \mathcal{C}$ se dice *objeto cero* u *objeto nulo* si para todo $X \in \mathcal{C}$ existen únicos morfismos $\phi_X : X \to Z$, $\psi_X : Z \to X$. Es decir, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) = \{\phi_X\}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) = \{\psi_X\}$, para todo $X \in \mathcal{C}$.

Definición 1.2.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero. Para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ se define el morfismo *nulo* como $0_Y^X : X \to Y$, $0_Y^X = \psi_Y \circ \phi_X$. A los fines de simplificar la notación escribimos $0_Y^X = 0$.

Definición 1.2.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero, $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

- Un *núcleo* de f es un objeto $\mathrm{Ker}\, f \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y un morfismo $k : \mathrm{Ker}\, f \to X$ tal que $f \circ k = 0_Y^{\mathrm{Ker}\, f}$. Además es universal con respecto a esta propiedad; es decir si $k' : K' \to X$ es otro morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k' = 0_Y^{K'}$, entonces existe un único morfismo $u : K' \to \mathrm{Ker}\, f$ tal que $k \circ u = k'$.

- Un *conúcleo* de f es un objeto $\operatorname{Coker} f$ y un morfismo $q : Y \to \operatorname{Coker} f$ tal que $q \circ f = 0^X_{\operatorname{Coker} f}$ y es universal con respecto a esta propiedad. Es decir, si $q' : Y \to Q$ es otro morfismo tal que $q' \circ f = 0^X_Q$ entonces existe un único morfismo $u : \operatorname{Coker} f \to Q$ tal que $q' = u \circ q$.
- Sea $f : X \to Y$ un monomorfismo ($X \subseteq Y$), se define el objeto *cociente* Y/X como el conúcleo de f, es decir $Y/X = \operatorname{Coker} f$.

Definición 1.2.4. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *preaditiva* si satisface las siguientes condiciones:

- $\mathcal{C}$ posee objeto cero;
- para cada par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$ el conjunto $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un grupo Abeliano;
- la composición de morfismos es bilineal, es decir, para todo $f, f' : X \to Y$, $g, g' : Y \to Z$ se tiene que

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f', \quad (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f.$$

Definición 1.2.5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y X_1, X_2 dos objetos de $\mathcal{C}$. Una *suma directa* de X_1, X_2 es una colección (Z, p_1, p_2, i_1, i_2) tal que

- Z es un objeto de $\mathcal{C}$;
- $p_j : Z \to X_i$, $i_j : X_j \to Z$, $j = 1, 2$ son morfismos;
- se satisface que

$$p_1 \circ i_1 = \operatorname{id}_{X_1}, \quad p_2 \circ i_2 = \operatorname{id}_{X_2}, \quad i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = \operatorname{id}_Z.$$

Se denota $Z = X_1 \oplus X_2$.

Definición 1.2.6. Una categoría preaditiva se dice *aditiva* si todo par de objetos posee una suma directa.

Lema 1.2.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y X_1, X_2, Y objetos de $\mathcal{C}$. Existen isomorfismos naturales de grupos Abelianos

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \oplus X_2, Y) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, Y) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, Y),$$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1 \oplus X_2) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2).$$

Demostración. Definimos los morfismos

$$\phi : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \oplus X_2, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, Y) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, Y),$$

$$\phi(\alpha) = (\alpha \circ i_1, \alpha \circ i_2).$$

$$\psi : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, Y) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \oplus X_2, Y),$$

$$\psi(f_1, f_2) = f_1 \circ p_1 + f_2 \circ p_2.$$

Es inmediato demostrar que ambas funciones son morfismos de grupos, uno el inverso del otro y que además son morfismos naturales. ❀

Observación 1.2.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y X_1, X_2, Y_1, Y_2 objetos de $\mathcal{C}$. Existe un isomorfismo natural de grupos Abelianos

$$\eta : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, Y_1) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, Y_2) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \oplus X_2, Y_1 \oplus Y_2). \tag{1.2.9}$$

Se denota $\eta(f, g) = f \oplus g$.

Ejemplos de categorías aditivas

- Dado un anillo R, las categorías ${}_R\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_R$ y ${}_R\mathcal{M}_R$ son aditivas.
- Si A es un álgebra entonces la suma de A induce una estructura aditiva en la categoría $\underline{A}$.
- La categoría Ab es aditiva.
- Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías, donde $\mathcal{D}$ es aditiva, entonces la categoría $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es una categoría aditiva.
- Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías aditivas entonces $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es aditiva.

Definición 1.2.10. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías aditivas. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice *aditivo* si para todo par de morfismos $f, g : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ se tiene que

$$F(f+g) = F(f) + F(g).$$

Observación 1.2.11. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor aditivo entonces para todo par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$ se tiene que $F(X \oplus Y) \simeq F(X) \oplus F(Y)$.

Definición 1.2.12. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías aditivas. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ aditivo se dice *exacto a izquierda* si para todo morfismo $f : X \to Y$, $\mathrm{Ker}\,(F(f)) = F(\mathrm{Ker}\, f)$. Se dice que F es *exacto a derecha* si para todo morfismo $f : X \to Y$, $\mathrm{Coker}\,(F(f)) = F(\mathrm{Coker}\, f)$. El funtor F se dice *exacto* si es exacto a izquierda y a derecha.

Definición 1.2.13. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías aditivas y $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores aditivos. Una transformación natural $\mu : F \to G$ se dice *aditiva* si $\mu_X \oplus \mu_Y = \mu_{X \oplus Y}$, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.

Definición 1.2.14. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva.

- Un objeto $S \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ distinto de cero se dice *simple* si todos sus subobjetos son isomorfos a 0 o a S.
- Un objeto se dice *semisimple* si es suma directa de objetos simples.
- La categoría $\mathcal{C}$ se dice *semisimple* si todo objeto de $\mathcal{C}$ es semisimple.

Definición 1.2.15. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *Abeliana* si satisface las siguientes condiciones:

- $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva;
- todo morfismo en $\mathcal{C}$ posee núcleos y conúcleos;
- todo monomorfismo es un núcleo y todo epimorfismo es un conúcleo.

Las categorías Abelianas surgieron en la década de 1950 de la mano de Alexander Grothendieck como medio para unificar varias teorías de la cohomología. Un par de años antes habían sido definidas independientemente por David Buchsbaum bajo el nombre de *categorías exactas*.

Ejemplos de categorías Abelianas

- La categoría Ab de grupos Abelianos es una categoría Abeliana.
- Si R es un anillo, entonces las categorías ${}_R\mathcal{M}, \mathcal{M}_R, {}_R\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_R$ son Abelianas.
- Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{D}$ son categorías Abelianas, entonces la categoría de funtores aditivos de $\mathcal{D}$ a $\mathcal{A}$ (denotada por $\mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$) es Abeliana.
- Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías Abelianas entonces $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ y $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ son Abelianas.
- Toda categoría semisimple es Abeliana.

Notación 1.2.16. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías Abelianas, se denota a $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ como $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$.

Definición 1.2.17. Sea $\mathcal{A}$ una categoría Abeliana. Una *subcategoría Abeliana* $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}$ es una subcategoría de $\mathcal{A}$ que es en sí misma una categoría Abeliana y el funtor inclusión $i : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ es exacto.

Definición 1.2.18. Una categoría aditiva $\mathcal{C}$ se dice $\Bbbk$-lineal si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial para todo par de objetos X, Y y la composición es $\Bbbk$-bilineal.

Definición 1.2.19. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías aditiva $\Bbbk$-lineales. Un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ se dice $\Bbbk$-*lineal* si es aditivo y para todo morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ y $k \in \Bbbk$ se tiene que

$$F(kf) = kF(f).$$

Definición 1.2.20. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías aditivas $\Bbbk$-lineales y $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores $\Bbbk$-lineales. Una transformación natural $\mu : F \to G$ se dice $\Bbbk$-*lineal* si es aditiva.

Definición 1.2.21. Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

- Un objeto $P \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ se dice *proyectivo* si para todo epimorfismo $\pi : M \to N$ de $\mathcal{C}$ y para todo $f : P \to N$ existe un morfismo $g : P \to M$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M \arrow[rr, "\pi"] & & N \end{tikzcd}$$

  sea conmutativo.

- Un objeto $Q \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ se dice *inyectivo* si para todo monomorfismo $\iota : M \to N$ de $\mathcal{C}$ y para todo $f : M \to Q$ existe un morfismo $g : N \to Q$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & & N \arrow[dl, "g"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

  sea conmutativo.

Definición 1.2.22. Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

- Un morfismo $f : M \to N$ en $\mathcal{C}$ se dice *esencial* si es un epimorfismo y para todo morfismo $g : L \to M$ tal que $f \circ g$ es epimorfismo entonces g es epimorfismo.

- Un *cubrimiento proyectivo* de un objeto M de $\mathcal{C}$ es un par (P, f) donde $f : P \to M$ es esencial y P es un objeto proyectivo.

Definición 1.2.23. Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana y X un objeto de $\mathcal{C}$. Una *serie de composición* o *serie de Jordan-Hölder* de X es una serie de subobjetos

$$0 = X_n \subseteq X_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq X_1 \subseteq X_0 = X$$

tal que los objetos X_i/X_{i-1} son simples para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Los objetos simples X_i/X_{i-1} se llaman los *factores de composición* de X y n se dice que es la *longitud* de la serie.

Teorema 1.2.24 (Jordan-Hölder)**.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana y X un objeto de $\mathcal{C}$. Toda serie de Jordan-Hölder de X tiene la misma longitud. ❀

Definición 1.2.25. Sea $\mathcal{C}$ una categoría Abeliana y X un objeto de $\mathcal{C}$. Si X posee una serie de Jordan-Hölder de longitud n se dice entonces que X es de *longitud finita* y n es su *longitud.*

Definición 1.2.26. Una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{C}$ se dice *finita* si satisface las siguientes condiciones:

- todo objeto de $\mathcal{C}$ posee longitud finita;
- $\dim_{\Bbbk}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) < \infty$, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$;
- todo objeto simple de $\mathcal{C}$ posee cubrimiento proyectivo;
- la cantidad de clases de isomorfismos de objetos simples es finita.

1.3. Categorías monoidales

La teoría de categorías se puede pensar como una “categorificación” del álgebra ordinaria. En este sentido, la categoría es una categorificación de la noción de conjunto, la categoría Abeliana es una categorificación de la noción de grupo Abeliano, y la *categoría monoidal* es una categorificación de la noción de monoide.

A continuación se presenta la definición de categoría monoidal, la cual fue introducida en la década de 1960 en trabajos de Mac Lane y Benabou. Además, se define categoría monoidal rígida, y por último, se introduce la noción de centro de una categoría monoidal.

Definición 1.3.1. Una *categoría monoidal* es una colección $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$, donde

- $\mathcal{C}$ es una categoría, $\mathbf{1} \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$;
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un bifuntor, llamado el *producto tensorial o monoidal*;
- $\{a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)\}$, $\{r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X : X \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})\}$, y $\{l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X : X \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})\}$ son isomorfismos naturales, llamados isomorfismos de *asociatividad* y *unidad*, respectivamente;

tales que para todo $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$, los siguientes diagramas conmutan:

Axioma del pentágono:

$$\begin{tikzcd}
 & ((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\otimes id"'] \arrow[dr, "a_{X\otimes Y,Z,W}"] & \\
(X\otimes(Y\otimes Z))\otimes W \arrow[d, "a_{X,Y\otimes Z,W}"] & & (X\otimes Y)\otimes(Z\otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z\otimes W}"'] \\
X\otimes((Y\otimes Z)\otimes W) \arrow[rr, "id\otimes a_{Y,Z,W}"] & & X\otimes(Y\otimes(Z\otimes W))
\end{tikzcd}$$

Axioma del triángulo:

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes \mathbf{1})\otimes W \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},W}"] \arrow[dr, "r_X\otimes id"'] & & X\otimes(\mathbf{1}\otimes W) \arrow[dl, "id\otimes l_W"] \\
 & X\otimes W. &
\end{tikzcd}$$

Definición 1.3.2. Una categoría monoidal $\mathcal{C}$ se dice *estricta* si para todo $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$,

$$(X\otimes Y)\otimes Z = X\otimes(Y\otimes Z), \quad \mathbf{1}\otimes X = X = X\otimes\mathbf{1},$$

y los isomorfismos de asociatividad y unidad son las identidades.

Ejemplos de categorías monoidales

- La categoría de conjuntos Set es monoidal. El producto tensorial $\times : Set\times Set \to Set$ es el producto cartesiano. El objeto unidad $\mathbf{1} = \{*\}$ es el conjunto con un único elemento. Los morfismos de asociatividad son los canónicos. Para cualquier conjunto X los isomorfismos $l_X : \mathbf{1}\times X \to X$, $r_X : X\times\mathbf{1} \to X$ están dados por

  $$l_X(*, x) = x, \qquad r_X(x, *) = x,$$

  para todo $x \in X$.

- Toda categoría aditiva es monoidal considerando el producto tensorial dado por la suma directa y el objeto unidad el objeto cero de la categoría.

- Sea $\Bbbk$ un cuerpo, la categoría $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ es monoidal con producto tensorial $\otimes : \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \times \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \to \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ dado por el producto tensorial sobre el cuerpo de base $\otimes_{\Bbbk}$. El morfismo de asociatividad es el canónico, es decir: si X, Y, Z son $\Bbbk$-espacios vectoriales, $x \in X, y \in Y, z \in Z$ entonces

  $$a_{X,Y,Z} : (X\otimes_{\Bbbk}Y)\otimes_{\Bbbk}Z \to X\otimes_{\Bbbk}(Y\otimes_{\Bbbk}Z), \quad a_{X,Y,Z}((x\otimes y)\otimes z) = x\otimes(y\otimes z).$$

  El objeto unidad es el cuerpo $\Bbbk$, y los isomorfismos $V\otimes\Bbbk \simeq V \simeq \Bbbk\otimes V$ son los canónicos. La categoría $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ es monoidal con la misma estructura de $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$.

- Sea R un anillo. La categoría de R-bimódulos ${}_R\mathrm{Mod}_R$ es monoidal. El producto tensorial es $\otimes_R$, el objeto unidad es R con las acciones regulares a derecha e izquierda.

- Si $\mathcal{C}$ es una categoría, la categoría de endofuntores $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ es monoidal estricta con producto tensorial dado por la composición de funtores. El objeto unidad es el funtor identidad, los morfismos de asociatividad son las igualdades. La composición de transformaciones naturales es la composición vertical y el producto tensorial de transformaciones naturales es la composición horizontal. Es decir, si $F, F', G, G' \in \mathrm{End}(\mathcal{C})$ y $\eta : F \to G, \mu : F' \to G'$ son trasformaciones naturales, entonces $\eta \otimes \mu : F \circ F' \to G \circ G'$ es la transformación natural dada por

$$(\eta \otimes \mu)_X : F(F'(X)) \to G(G'(X)), \quad (\eta \otimes \mu)_X = G(\mu_X) \circ \eta_{F'(X)},$$

para todo $X \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$. La subcategoría plena de funtores exactos $\mathrm{End}_e(\mathcal{C})$ hereda una estructura monoidal.

- Sea $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$ una categoría monoidal. Se denota por

$$\mathcal{C}^{\mathrm{rev}} = (\mathcal{C}^{\mathrm{rev}}, \otimes^{\mathrm{rev}}, a^{\mathrm{rev}}, r^{\mathrm{rev}}, l^{\mathrm{rev}}, \mathbf{1}^{\mathrm{rev}})$$

a la siguiente categoría monoidal. Como categoría $\mathcal{C}^{\mathrm{rev}} = \mathcal{C}$. El producto tensorial $\otimes^{\mathrm{rev}} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $X \otimes^{\mathrm{rev}} Y = Y \otimes X$, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$. Si $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ entonces

$$a^{\mathrm{rev}}_{X,Y,Z} : Z \otimes (Y \otimes X) \to (Z \otimes Y) \otimes X, \quad a^{\mathrm{rev}}_{X,Y,Z} = a^{-1}_{Z,Y,X};$$

$$r^{\mathrm{rev}}_X = l_X, \quad l^{\mathrm{rev}}_X = r_X, \quad \mathbf{1}^{\mathrm{rev}} = \mathbf{1}.$$

- Sea $\Bbbk$ un cuerpo, A un grupo Abeliano finito, $\chi : A \times A \to \Bbbk$ un bicaracter simétrico no degenerado y τ una raíz cuadrada de $\frac{1}{|A|}$. La categoría $\mathcal{TY}(A, \chi, \tau)$ es por definición la categoría semisimple esquelética cuyos objetos son sumas directas finitas de elementos de $S := A \sqcup \{m\}$. Los morfismos entre elementos de S están dados por

$$\mathrm{Hom}(s,t) = \begin{cases} \Bbbk\,\mathrm{id}_s & \text{si } s = t, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El producto tensorial de dos elementos de S está dado por:

$$a \otimes b = ab, \quad a \otimes m = m = m \otimes a, \quad m \otimes m = \bigoplus_{x \in A} x \quad (a, b \in A).$$

El objeto unidad es $1 \in A$. Los isomorfismos de unidad a derecha e izquierda son las identidades. El isomorfismo de asociatividad α está determinado por:

$$\alpha_{a,m,b} = \chi(a,b)\,\mathrm{id}_m : m \to m;$$
$$\alpha_{m,a,m} : \bigoplus_{x \in A} x \to \bigoplus_{y \in A} y, \quad (\alpha_{m,a,m})_{x,y} = \chi(a,x)\delta_{x,y}\mathrm{id}_x;$$
$$\alpha_{m,m,m} : \bigoplus_{x \in A} m \to \bigoplus_{y \in A} m, \quad (\alpha_{m,m,m})_{x,y} = \tau\,\chi(x,y)^{-1}\,\mathrm{id}_m;$$

para todo $a, b \in A$. El resto de las asociatividades son las identidades. Notar que aquí se denota por $(\alpha_{m,a,m})_{x,y}$ a la componente homogénea que sale de x y llega a y. A la categoría $\mathcal{TY}(A, \chi, \tau)$ se la conoce como la *categoría de Tambara-Yamagami*. Ver [39].

- Sea G un grupo, se denota por $\underline{G}$ a la categoría monoidal cuyos objetos son los elementos de G, las flechas las identidades y el producto tensorial es el producto de G.

- Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías monoidales, entonces $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es una categoría monoidal.

- Sea G un grupo finito y sea $\omega \in Z^3(G, \Bbbk^\times)$ un 3-cociclo normalizado, esto es, para todo $a, b, c, d \in G$, $\omega(a, 1, b) = 1$ y
$$\omega(a, b, c)\omega(a, bc, d)\omega(b, c, d) = \omega(ab, c, d)\omega(a, b, cd).$$
Se denota por $\mathcal{C}(G, \omega)$ a la categoría monoidal de espacios vectoriales de dimensión finita G-graduados. Es decir, los objetos de $\mathcal{C}(G, \omega)$ son los $\Bbbk$-espacios vectoriales V de dimensión finita equipados de una G-graduación $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$. Los morfismos son las transformaciones lineales que preservan la graduación. El producto monoidal está dado por: si $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$, y $W = \bigoplus_{g\in G} W_g$ son objetos en $\mathcal{C}(G, \omega)$, entonces
$$V\otimes W := \bigoplus_{g\in G}(V\otimes W)_g,$$
donde $(V\otimes W)_g = \bigoplus_{xy=g} V_x \otimes_\Bbbk W_y$. El objeto unidad es $\Bbbk$ concentrado en grado 1, la identidad del grupo. El morfismo de asociatividad está dado por el 3-cociclo ω, es decir, $a_{UVW} : (U\otimes V)\otimes W \to U\otimes(V\otimes W)$ es
$$a_{UVW}((u\otimes v)\otimes w) = \omega(g, h, f)\ u\otimes(v\otimes w),$$
donde $u \in U_g, v \in V_h, w \in W_f,\ g, h, f \in G$. Los isomorfismos de unidad a derecha e izquierda $l_X : \Bbbk\otimes X \to X, r_X : X\otimes\Bbbk \to X$ son
$$l_X(1\otimes x) = \omega(1, h, h^{-1})\ x, \quad r_X(x\otimes 1) = \omega(h, 1, 1)\ x,$$
para todo $x \in X_h$.

- Sean $\Bbbk$ un cuerpo y G un grupo. Se denota por $\mathrm{Rep}_\Bbbk(G)$, o simplemente por $\mathrm{Rep}(G)$, a la categoría monoidal de representaciones de G sobre $\Bbbk$. El producto monoidal está dada de la siguiente manera: si $\rho_V : G \to GL(V)$ denota el mapa de la representación V, entonces
$$\rho_{V\otimes W}(g) = \rho_V(g) \otimes \rho_W(g).$$
El objeto unidad de la categoría es la representación trivial $\mathbf{1} = \Bbbk$.

  Se denota por $\mathrm{rep}(G)$ a la categoría de representaciones de dimensión finita de G.

- Más en general, si H es un álgebra de Hopf (ver Apéndice 5.1), entonces la categoría de H-módulos o representaciones de H, $\mathrm{Rep}(H)$, y la categoría de representaciones de dimensión finita, $\mathrm{rep}(H)$, son categorías monoidales.

  El producto tensorial $\otimes : \mathrm{Rep}(H) \times \mathrm{Rep}(H) \to \mathrm{Rep}(H)$ es el producto tensorial sobre el cuerpo de base $\otimes_\Bbbk$. Si $V, W \in \mathrm{Rep}(H)$, la estructura de H-módulo sobre $V\otimes_\Bbbk W$ es la siguiente. Si $v \in V, w \in W,\ h \in H$, entonces
$$h \cdot (v\otimes w) = h_{(1)} \cdot v\otimes h_{(2)} \cdot w.$$
Los morfismos de asociatividad son los mismos que en la categoría $\mathrm{Vect}_\Bbbk$, y son de H-módulos pues: si X, Y, Z son H-módulos, $x \in X, y \in Y, z \in Z$ entonces
$$\begin{aligned} a_{X,Y,Z}(h \cdot ((x\otimes y)\otimes z)) &= a_{X,Y,Z}(h_{(1)} \cdot (x\otimes y)\otimes h_{(2)} \cdot z)) \\ &= a_{X,Y,Z}((h_{(1)(1)} \cdot x\otimes h_{(1)(2)} \cdot y)\otimes h_{(2)} \cdot z)) \\ &= h_{(1)(1)} \cdot x\otimes(h_{(1)(2)} \cdot y\otimes h_{(2)} \cdot z) \\ &= h_{(1)} \cdot x\otimes(h_{(2)(1)} \cdot y\otimes h_{(2)(2)} \cdot z) \\ &= h \cdot a_{X,Y,Z}((x\otimes y)\otimes z). \end{aligned}$$

La cuarta igualdad sigue de la coasociatividad del coproducto de H. El objeto unidad es el cuerpo de base $\Bbbk$ con acción de H dada por la counidad, es decir, si $\epsilon : H \to \Bbbk$ es la counidad, $h \in H, \lambda \in \Bbbk$, entonces $h \cdot \lambda = \epsilon(h)\lambda$. Los isomorfismos l y r son los mismos que en la categoría $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$.

Definición 1.3.3. Dadas dos categorías monoidales $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, un *funtor monoidal* entre ellas es una terna $F = (F, \zeta, \phi)$, donde:

- $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ es un funtor;
- $\zeta_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$, es una familia de isomorfismos naturales para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_1)$;
- $\phi : \mathbf{1} \to F(\mathbf{1})$ es un isomorfismo;

tales que valen las siguientes igualdades:

$$\zeta_{X,Y\otimes Z}(\mathrm{id}_{F(X)} \otimes \zeta_{Y,Z}) a_{F(X),F(Y),F(Z)} = F(a_{X,Y,Z}) \zeta_{X\otimes Y,Z}(\zeta_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_{F(Z)}),$$
$$l_{F(X)} = F(l_X)\zeta_{\mathbf{1},X}(\phi \otimes \mathrm{id}_{F(X)}),$$
$$r_{F(X)} = F(r_X)\zeta_{X,\mathbf{1}}(\mathrm{id}_{F(X)} \otimes \phi),$$

para todo objeto $X, Y, Z \in \mathcal{C}_1$.

Un funtor monoidal (F, ζ, ϕ) se dice *estricto* si:

(I). $F(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;

(II). $F(X) \otimes F(Y) = F(X \otimes Y)$, para todo X, Y;

(III). los isomorfismos ζ, ϕ son las identidades.

Un funtor monoidal (F, ζ, ϕ) se dice *unitario* si:

(I). $F(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;

(II). el isomorfismo ϕ es la identidad.

Definición 1.3.4. Si $(F, \zeta, \phi), (F', \zeta', \phi')$ son funtores monoidales entre las categorías monoidales $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, una *transformación natural monoidal* $\theta : (F, \zeta, \phi) \to (F', \zeta', \phi')$ es una transformación natural $\theta : F \to F'$ tal que para cualquier $X, Y \in \mathcal{C}_1$ se satisface

$$\theta_{\mathbf{1}}\phi = \phi', \quad \theta_{X\otimes Y}\zeta_{X,Y} = \zeta'_{X,Y}(\theta_X \otimes \theta_Y).$$

Un *isomorfismo monoidal natural* es una transformación monoidal natural que es un isomorfismo natural.

Los funtores monoidales (F, ζ, ϕ) y (F', ζ', ϕ') se dicen *monoidalmente equivalentes* si existe $\theta : (F, \zeta, \phi) \to (F', \zeta', \phi')$ isomorfismo monoidal natural.

Definición 1.3.5. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ categorías monoidales y $(F, \zeta, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, (F', \zeta', \phi') : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores monoidales, entonces la composición de ellos es un funtor monoidal $(F' \circ F, \xi, \psi) : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ definido por:

$$\xi_{X,Y} : (F' \circ F)(X) \otimes (F' \circ F)(Y) \to (F' \circ F)(X \otimes Y),$$
$$\xi_{X,Y} = F'(\zeta_{X,Y})\zeta'_{F(X),F(Y)},$$

para todo $X, Y \in \mathcal{D}$. Y $\psi : \mathbf{1} \to F' \circ F(\mathbf{1})$ dado por $\psi = F'(\phi) \circ \phi'$.

Lema 1.3.6. La composición horizontal y vertical de transformaciones naturales monoidales es nuevamente una transformación natural monoidal.

Demostración. Cálculo inmediato. ❀

Definición 1.3.7. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ categorías monoidales. Se define la categoría monoidal estricta $\mathrm{Fun}_{\otimes}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ donde:

- los objetos son funtores monoidales de $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$,
- los morfismos son transformaciones naturales monoidales y
- el producto monoidal es la composición.

Se denota $\mathrm{End}_{\otimes}(\mathcal{C}_1) = \mathrm{Fun}_{\otimes}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_1)$. Análogamente, se denotan $\mathrm{Fun}^u_{\otimes}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ y $\mathrm{End}^u_{\otimes}(\mathcal{C}_1)$ las categorías de funtores monoidales unitarios.

Definición 1.3.8. Una *equivalencia monoidal* entre dos categorías monoidales $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ es un funtor monoidal $(F, \zeta, \phi) : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ tal que existe otro funtor monoidal $(F', \zeta', \phi') : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ e isomorfismos naturales monoidales $\theta_1 : F \circ F' \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_2}$, $\theta_2 : F' \circ F \to \mathrm{Id}_{\mathcal{C}_1}$. Si existe tal funtor se dice que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son *monoidalmente equivalentes.*

Proposición 1.3.9. [28] Toda categoría monoidal es monoidalmente equivalente a una categoría monoidal esquelética. ❀

1.3.1. Categorías monoidales rígidas

Definición 1.3.10. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$ una categoría monoidal y X un objeto de $\mathcal{C}$. Un *dual a derecha* de X es un objeto X^* munido de morfismos

$$ev_X : X^* \otimes X \to \mathbf{1}, \quad coev_X : \mathbf{1} \to X \otimes X^*,$$

llamados *evaluación* y *coevaluación*, respectivamente, tales que las composiciones

$$X \xrightarrow{l_X^{-1}} \mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{coev_X \otimes \mathrm{id}} (X \otimes X^*) \otimes X \xrightarrow{a} X \otimes (X^* \otimes X) \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes ev_X} X \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{r_X} X,$$

$$X^* \xrightarrow{r_{X^*}^{-1}} X^* \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes coev_X} X^* \otimes (X \otimes X^*) \xrightarrow{a^{-1}} (X^* \otimes X) \otimes X^* \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{ev_X \otimes \mathrm{id}} \mathbf{1} \otimes X^* \xrightarrow{l_{X^*}} X^*$$

son las identidades. Análogamente, un *dual a izquierda* de X es un objeto ${}^*X$ munido de morfismos

$$ev_X : X \otimes {}^*X \to \mathbf{1}, \quad coev_X : \mathbf{1} \to {}^*X \otimes X,$$

tal que las composiciones

$$X \xrightarrow{r_X^{-1}} X \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes coev_X} X \otimes ({}^*X \otimes X) \xrightarrow{a^{-1}} (X \otimes {}^*X) \otimes X \longrightarrow$$
$$\xrightarrow{ev_X \otimes \mathrm{id}} \mathbf{1} \otimes X \xrightarrow{l_X} X,$$

$${}^*X \xrightarrow{l_{{}^*X}^{-1}} \mathbf{1} \otimes {}^*X \xrightarrow{coev_X \otimes \mathrm{id}} ({}^*X \otimes X) \otimes {}^*X \xrightarrow{a} {}^*X \otimes (X \otimes {}^*X) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes ev_X} {}^*X \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{r_{{}^*X}} {}^*X$$

son las identidades.

Definición 1.3.11. Una categoría monoidal se dice *rígida* si todo objeto posee duales a derecha y a izquierda.

Ejemplos de categorías monoidales rígidas

- La categoría $\text{vect}_{\Bbbk}$ de espacios vectoriales de dimensión finita es rígida.

  Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces ${}^*V = V^* = \text{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$ y los morfismos de evaluación y coevaluación son:

  $$ev(f \otimes v) = f(v), \quad coev(1) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v^i,$$

  para todo $f \in V^*, v \in V$. Aquí $(v_i)_{i=1}^n$ es base de V y $(v^i)_{i=1}^n$ es su base dual en V^*.

  Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita y $f : V \to W$ es una transformación lineas, se define $f^* : W^* \to V^*$ como $f^*(p)(v) = p(f(v))$, para $p \in W^*, v \in V$.

  La categoría $\text{Vect}_{\Bbbk}$ no es rígida.

- Si A es una $\Bbbk$-álgebra semisimple, la categoría ${}_A\mathfrak{m}_A$ de A-bimódulos de dimensión finita es rígida.

- Si $\mathcal{C}$ es una categoría Abeliana ($\Bbbk$-lineal), la categoría de endofuntores exactos ($\Bbbk$-lineales) es rígida. Los funtores adjuntos son los duales.

- La categoría $\mathcal{T}Y(A, \chi, \tau)$ es rígida. El dual a derecha de un objeto $a \in A$ es $a^* = a^{-1}$. Los morfismos de evaluación y coevaluación son las identidades

  $$\text{id}_1 : 1 \to a \otimes a^*, \quad \text{id}_1 : a^* \otimes a \to 1.$$

  El dual a derecha de m es $m^* = m$. Los morfismos de evaluación y coevaluación son

  $$\iota : 1 \to m \otimes m^*, \quad ev_m : m^* \otimes m \to 1,$$

  donde ι es la inclusión canónica y $ev_m = \tau^{-1} p$, donde $p : m^* \otimes m \to 1$ es la proyección canónica.

- La categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ es una categoría monoidal rígida: si $V \in \mathcal{C}(G, \omega)$, entonces $V^* = \text{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$ es el espacio vectorial dual con G-graduación $(V^*)_g = (V_{g^{-1}})^*$. La evaluación y coevaluación están determinadas de la siguiente manera: si $h, g \in G$, $f \in (V_h)^*, v \in V_g$ entonces

  $$ev_V(f \otimes v) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq g^{-1} \\ \omega(g, g^{-1}, g)^{-1} & \text{si } h = g^{-1} \end{cases}$$

  $$coev_V(1) = \sum_{g \in G} \sum_i v_i^g \otimes f_i^g,$$

  donde $(f_i^g), (v_i^g)$ son bases duales de V_g.

- Sean $\Bbbk$ un cuerpo y G un grupo. La categoría $\text{rep}(G)$ de representaciones de dimensión finita de G es rígida: sea V una representación de dimensión finita de G, la representación dual V^* es el espacio vectorial dual con G-acción dada por

  $$\rho_{V^*}(g) = \rho_V(g^{-1})^*, g \in G.$$

- Si H es un álgebra de Hopf con antípoda invertible (ver 5.1), entonces la categoría $\text{rep}(H)$ de H-módulos a izquierda de dimensión finita es rígida. Para cada objeto $X \in \text{rep}(H)$, el dual a derecha X^* es el espacio dual usual de X, con la acción de H dada por:

$$\rho_{X^*}(a) = \rho_X(S(a))^*, a \in H,$$

y los morfismos de evaluación y coevaluación usuales de la categoría $\text{vect}_{\Bbbk}$. El dual a izquierda ${}^*X$ es el espacio dual usual de X, con la acción de H dada por:

$$\rho_{{}^*X}(a) = \rho_X(S^{-1}(a))^*, a \in H,$$

y los morfismos de evaluación y coevaluación usuales de la categoría $\text{vect}_{\Bbbk}$.

1.3.2. El centro de categorías monoidales

Definición 1.3.12. Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal estricta. El *centro* de $\mathcal{C}$ es la categoría $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ que consiste de objetos $(V, c_{-,V})$ donde V es un objeto de $\mathcal{C}$ y $c_{X,V} : X \otimes V \to V \otimes X$ es una familia de isomorfismos naturales tales que para todo $X, Y \in \mathcal{C}$

$$c_{X\otimes Y,V} = (c_{X,V} \otimes \text{id}_Y)(\text{id}_X \otimes c_{Y,V}). \tag{1.3.13}$$

Si $(V, c_{-,V})$, $(W, c_{-,W})$ son objetos de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ un morfismo $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ es un morfismo $f : V \to W$ en $\mathcal{C}$ tal que para todo $X \in \mathcal{C}$

$$(f \otimes \text{id}_X)c_{X,V} = c_{X,W}(\text{id}_X \otimes f).$$

Teorema 1.3.14. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$ una categoría monoidal estricta.

(I). Si $\mathcal{C}$ es Abeliana ($\Bbbk$-lineal) entonces $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es Abeliana ($\Bbbk$-lineal).

(II). El $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es una categoría monoidal con unidad $(\mathbf{1}, l_- \circ r_-)$, y si $(V, c_{-,V})$, $(W, c_{-,W})$ son objetos de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ el producto tensorial es

$$(V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) = (V \otimes W, c_{-,V\otimes W}), \tag{1.3.15}$$

donde $c_{X,V\otimes W} = (\text{id}_V \otimes c_{X,W})(c_{X,V} \otimes \text{id}_W)$, para todo $X \in \mathcal{C}$.

Demostración. Se dará sólo la demostración de la segunda parte.

Veamos que el funtor dado por (1.3.15) está bien definido. Debemos demostrar que se satisface (1.3.13), es decir, que se verifica

$$c_{X\otimes Y,V\otimes W} = (c_{X,V\otimes W} \otimes \text{id}_Y)(\text{id}_X \otimes c_{Y,V\otimes W}),$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.

Se tiene que $c_{X\otimes Y,V\otimes W}$ es igual a

$$\begin{aligned}
&= (\text{id}_V \otimes c_{X\otimes Y,W})(c_{X\otimes Y,V} \otimes \text{id}_W) \\
&= (\text{id}_V \otimes c_{X,W} \otimes \text{id}_Y)(\text{id}_V \otimes \text{id}_X \otimes c_{Y,W})(c_{X,V} \otimes \text{id}_Y \otimes \text{id}_W)(\text{id}_X \otimes c_{Y,V} \otimes \text{id}_W) \\
&= (\text{id}_V \otimes c_{X,W} \otimes \text{id}_Y)(c_{X,V} \otimes \text{id}_W \otimes \text{id}_Y)(\text{id}_X \otimes \text{id}_V \otimes c_{Y,W})(\text{id}_X \otimes c_{Y,V} \otimes \text{id}_W) \\
&= (c_{X,V\otimes W} \otimes \text{id}_Y)(\text{id}_X \otimes c_{Y,V\otimes W}).
\end{aligned}$$

La primera y la cuarta igualdad se deben a la definición de $c_{-,V\otimes W}$, la segunda igualdad se debe a (1.3.13), y la tercera se debe a la naturalidad de $\otimes$. ❀

1.4. Categorías tensoriales finitas

En la presente sección se define categoría tensorial finita y se dan algunos ejemplos.

Definición 1.4.1.
- Una *categoría multitensorial finita sobre* $\Bbbk$ es una categoría Abeliana, $\Bbbk$-lineal finita, monoidal rígida tal que todos los funtores y transformaciones naturales involucrados son $\Bbbk$-lineales.

- Una *categoría tensorial finita sobre* $\Bbbk$ es una categoría multitensorial finita sobre $\Bbbk$ tal que el objeto unidad es simple.

- Una *categoría multifusión* es una categoría multitensorial finita semisimple. Cuando el objeto unidad es simple se dice que es una *categoría de fusión*.

Definición 1.4.2. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías (multi)tensoriales finitas, un *funtor tensorial* es un funtor monoidal $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ $\Bbbk$-lineal.

Definición 1.4.3. Una *subcategoría tensorial finita* de una categoría tensorial finita $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$ es una subcategoría Abeliana, cerrada por el producto monoidal y que contiene al $\mathbf{1}$.

Ejemplos de categorías tensoriales finitas

- Sean $\Bbbk$ un cuerpo y G un grupo, entonces $\mathrm{rep}(G)$ es una categoría tensorial finita. Más en general, la categoría de representaciones de dimensión finita de un álgebra de Hopf de dimensión finita (ver 5.1) es una categoría tensorial finita. Ver [7].

- Si G un grupo finito y $\omega \in Z^3(G, \Bbbk^\times)$ un 3-cociclo normalizado, entonces la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ es una categoría tensorial finita.

1.5. Representaciones de categorías tensoriales finitas

Siguiendo con la idea de un diccionario entre la Teoría de categorías y el álgebra ordinaria, la noción de categoría tensorial categorifica la noción de anillo. De la misma manera, la noción de *representación* o *categoría módulo* categorifica la noción de módulo sobre un anillo.

En esta sección se define categoría módulo y categoría bimódulo. Además, se introduce la noción de centro relativo de categorías bimódulo y la noción de producto tensorial balanceado de categorías módulo.

1.5.1. Categorías módulo y categorías bimódulo

Sea $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$ una categoría tensorial finita sobre $\Bbbk$. A partir de ahora todos los funtores serán $\Bbbk$-lineales.

Definición 1.5.1. Un *$\mathcal{C}$-módulo a izquierda*, una *representación a izquierda de $\mathcal{C}$* o una *categoría módulo a izquierda sobre $\mathcal{C}$*, es una colección $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m, l)$ donde

- $\mathcal{M}$ es una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal;

- $\overline{\otimes}$ es un funtor exacto y $\Bbbk$-lineal en cada variable $\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$;

- $\{m_{X,Y,M} : (X \otimes Y)\overline{\otimes} M \to X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}M) : X, Y \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}\}$, y $\{l_M : \mathbf{1}\overline{\otimes}M \to M : M \in \mathcal{M}\}$ son isomorfismos naturales tales que para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{M}$

$$m_{X,Y,Z\overline{\otimes}M}\ m_{X\otimes Y,Z,M} = (\mathrm{id}_X\overline{\otimes}m_{Y,Z,M})\ m_{X,Y\otimes Z,M}\ (a_{X,Y,Z}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M), \tag{1.5.2}$$

$$(\mathrm{id}_X\overline{\otimes}l_M)m_{X,\mathbf{1},M} = r_X\overline{\otimes}\mathrm{id}_M.$$

Es decir que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
& ((X\otimes Y)\otimes Z)\overline{\otimes}M \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\overline{\otimes}id"'] \arrow[dr, "m_{X\otimes Y,Z,M}"] & \\
(X\otimes(Y\otimes Z))\overline{\otimes}M \arrow[d, "m_{X,Y\otimes Z,M}"] & & (X\otimes Y)\overline{\otimes}(Z\overline{\otimes}M) \arrow[d, "m_{X,Y,Z\overline{\otimes}M}"'] \\
X\overline{\otimes}((Y\otimes Z)\overline{\otimes}M) \arrow[rr, "id\overline{\otimes}m_{Y,Z,M}"] & & X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}(Z\overline{\otimes}M))
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes\mathbf{1})\overline{\otimes}M \arrow[rr, "m_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X\overline{\otimes}id"'] & & X\overline{\otimes}(\mathbf{1}\overline{\otimes}M) \arrow[dl, "id\overline{\otimes}l_M"] \\
& X\overline{\otimes}M, &
\end{tikzcd}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{M}$.

El funtor $\overline{\otimes} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ se llama la *acción* de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{M}$.
Análogamente se define $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m, r)$ *$\mathcal{C}$-módulo a derecha.*

Definición 1.5.3. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos $\mathcal{C}$-módulos a izquierda. Un *funtor de $\mathcal{C}$-módulos* entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es un par $F = (F, c)$, donde $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es un funtor y $c_{X,M} : F(X\overline{\otimes}M) \to X\overline{\otimes}F(M)$ es una familia de isomorfismos naturales tales que

$$m_{X,Y,F(M)}c_{X\otimes Y,M} = (\mathrm{id}_X\overline{\otimes}c_{Y,M})c_{X,Y\overline{\otimes}M}F(m_{X,Y,M}), \tag{1.5.4}$$

$$l_{F(M)}c_{\mathbf{1},M} = F(l_M),$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ y para todo $M \in \mathcal{M}$.

Definición 1.5.5. Sean $(F, c), (G, d) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ dos funtores de $\mathcal{C}$-módulos. Una *transformación natural de $\mathcal{C}$-módulos* es una transformación natural $\theta : F \to G$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$,

$$\begin{tikzcd}
F(X\overline{\otimes}M) \arrow[r, "\theta_{X\overline{\otimes}M}"] \arrow[d, "c_{X,M}"'] & G(X\overline{\otimes}M) \arrow[d, "d_{X,M}"] \\
X\overline{\otimes}F(M) \arrow[r, "\mathrm{id}_X\overline{\otimes}\theta_M"'] & X\overline{\otimes}G(M).
\end{tikzcd}$$

Decimos que los funtores (F, c) y (G, d) son *equivalentes como funtores de $\mathcal{C}$-módulos*, y se denota $(F, c) \simeq (G, d)$, si existe un isomorfismo natural $\theta : F \to G$ que es de $\mathcal{C}$-módulos.

Proposición 1.5.6. Sean $(F, c) : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ y $(G, d) : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3$ funtores de $\mathcal{C}$-módulos. La composición de ellos es un funtor de $\mathcal{C}$-módulos dado por: $(G \circ F, b) : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_3$, donde $b_{X,M} := d_{X,F(M)}G(c_{X,M})$, para todo $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}_1$.

Demostración. Hay que probar las siguientes igualdades:

$$m_{X,Y,G\circ F(M)} \circ d_{X\otimes Y,F(M)} \circ G(c_{X\otimes Y,M}) = \tag{1.5.7}$$
$$(\mathrm{id}_X \overline{\otimes} d_{Y,F(M)}) \circ (\mathrm{id}_X \overline{\otimes} G(c_{Y,M})) \circ d_{X,F(Y\overline{\otimes} M)} \circ G(c_{X,Y\overline{\otimes} M}) \circ (G\circ F(m_{X,Y,M})),$$

$$l_{G\circ F(M)} \circ d_{\mathbf{1},F(M)} \circ G(c_{\mathbf{1},M}) = G\circ F(l_M). \tag{1.5.8}$$

Por ser d isomorfismo natural se tiene que

$$(\mathrm{id}_X \overline{\otimes} G(c_{Y,M})) \circ d_{X,F(Y\overline{\otimes} M)} = d_{X,Y\overline{\otimes} F(M)} \circ G(\mathrm{id}_X \overline{\otimes} c_{Y,M}).$$

Luego, el lado derecho de 1.5.7 es igual a:

$$(\mathrm{id}_X \overline{\otimes} d_{Y,F(M)}) \circ d_{X,Y\overline{\otimes} F(M)} \circ G(\mathrm{id}_X \overline{\otimes} c_{Y,M}) \circ G(c_{X,Y\overline{\otimes} M}) \circ (G\circ F(m_{X,Y,M})).$$

Ahora,

$$(\mathrm{id}_X \overline{\otimes} d_{Y,F(M)}) \circ d_{X,Y\overline{\otimes} F(M)} \circ G(\mathrm{id}_X \overline{\otimes} c_{Y,M}) \circ G(c_{X,Y\overline{\otimes} M}) \circ (G\circ F(m_{X,Y,M})) =$$
$$(\mathrm{id}_X \overline{\otimes} d_{Y,F(M)}) \circ d_{X,Y\overline{\otimes} F(M)} \circ G((\mathrm{id}_X \overline{\otimes} c_{Y,M}) \circ c_{X,Y\overline{\otimes} M} \circ F(m_{X,Y,M})).$$

Por ser F funtor de módulos se tiene que

$$(\mathrm{id}_X \overline{\otimes} d_{Y,F(M)}) \circ d_{X,Y\overline{\otimes} F(M)} \circ G((\mathrm{id}_X \overline{\otimes} c_{Y,M}) \circ c_{X,Y\overline{\otimes} M} \circ F(m_{X,Y,M})) =$$
$$(\mathrm{id}_X \overline{\otimes} d_{Y,F(M)}) \circ d_{X,Y\overline{\otimes} F(M)} \circ G(m_{X,Y,F(M)} \circ c_{X\otimes Y,M}) =$$
$$(\mathrm{id}_X \overline{\otimes} d_{Y,F(M)}) \circ d_{X,Y\overline{\otimes} F(M)} \circ G(m_{X,Y,F(M)}) \circ G(c_{X\otimes Y,M}).$$

Se usa a continuación el hecho de que G es funtor de módulos, y se obtiene:

$$(\mathrm{id}_X \overline{\otimes} d_{Y,F(M)}) \circ d_{X,Y\overline{\otimes} F(M)} \circ G(m_{X,Y,F(M)}) \circ G(c_{X\otimes Y,M}) =$$
$$m_{X,Y,G\circ F(M)} \circ d_{X,Y,F(M)} \circ G(c_{X\otimes Y,M}).$$

Lo que concluye la prueba de la ecuación 1.5.7.

Notar que, por ser F funtor de módulos se tiene que

$$G(l_{F(M)}) \circ G(c_{\mathbf{1},M}) = G\circ F(l_M).$$

Pero G también es funtor de módulos, entonces

$$G(l_{F(M)}) \circ G(c_{\mathbf{1},M}) = l_{G\circ F(M)} \circ d_{\mathbf{1},F(M)} \circ G(c_{\mathbf{1},M}).$$

Luego

$$l_{G\circ F(M)} \circ d_{\mathbf{1},F(M)} \circ G(c_{\mathbf{1},M}) = G\circ F(l_M),$$

que es la ecuación 1.5.8. ❀

Lema 1.5.9. La composición horizontal y vertical de transformaciones naturales de $\mathcal{C}$-módulos es nuevamente una transformación natural de $\mathcal{C}$-módulos.

Demostración. Cálculo inmediato. ❀

Definición 1.5.10. Los $\mathcal{C}$-módulos $\mathcal{M},\mathcal{N}$ se dicen *equivalentes* si existen funtores $(F,c):\mathcal{M}\to\mathcal{N}$, $(G,d):\mathcal{N}\to\mathcal{M}$ de $\mathcal{C}$-módulos tales que $(F,c)\circ(G,d)\simeq \mathrm{Id}$, $(G,d)\circ(F,c)\simeq \mathrm{Id}$.

Definición 1.5.11. Una categoría módulo a izquierda $\mathcal{M}$ sobre $\mathcal{C}$ se dice *exacta* si para todo objeto proyectivo $P \in \mathcal{C}$ y para todo $M \in \mathcal{M}$, el objeto $P \overline{\otimes} M \in \mathcal{M}$ es proyectivo.

Notación 1.5.12. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos $\mathcal{C}$-módulos, se denota por $\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ a la categoría cuyos objetos son los funtores de $\mathcal{C}$-módulos de $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ y las flechas son las transformaciones naturales de $\mathcal{C}$-módulos. La composición de la categoría es la dada en la Proposición 1.5.6.

Definición 1.5.13. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías tensoriales finitas. Un $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-*bimódulo*, o una *categoría bimódulo sobre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$* es una categoría $\mathcal{M}$ tal que :

- $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m, l)$ es un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda;
- $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \overline{\otimes}, n, r)$ es un $\mathcal{D}$-módulo a derecha;
- existe una familia de isomorfismos naturales $b_{X,M,Z} : (X \overline{\otimes} M) \overline{\otimes} Z \to X \overline{\otimes} (M \overline{\otimes} Z)$ (*relación de asociatividad media*), tal que los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y)\overline{\otimes} M)\overline{\otimes} Z \arrow[dl, "m_{X,Y,M}\overline{\otimes} id_Z"'] \arrow[dr, "b_{X\otimes Y,M,Z}"] & \\
(X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes} M))\overline{\otimes} Z \arrow[d, "b_{X,Y\overline{\otimes} M,Z}"] & & (X\otimes Y)\overline{\otimes}(M\overline{\otimes} Z) \arrow[d, "m_{X,Y,M\overline{\otimes} Z}"'] \\
X\overline{\otimes}((Y\overline{\otimes} M)\overline{\otimes} Z) \arrow[rr, "id_X\overline{\otimes} b_{Y,M,Z}"] & & X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}(M\overline{\otimes} Z))
\end{tikzcd}$$

  y

$$\begin{tikzcd}
 & X\overline{\otimes}(M\overline{\otimes}(W\overline{\otimes} Z)) \arrow[dl, "id_X\overline{\otimes} n_{M,W,Z}"'] & \\
X\overline{\otimes}((M\overline{\otimes} W)\overline{\otimes} Z) & & (X\overline{\otimes} M)\overline{\otimes}(W\otimes Z) \arrow[ul, "b_{X,M,W\otimes Z}"'] \arrow[d, "n_{X\overline{\otimes} M,W,Z}"'] \\
(X\overline{\otimes}(M\overline{\otimes} W))\overline{\otimes} Z \arrow[u, "b_{X,M\overline{\otimes} W,Z}"] & & ((X\overline{\otimes} M)\overline{\otimes} W)\overline{\otimes} Z \arrow[ll, "b_{X,M,W}\overline{\otimes} id_Z"']
\end{tikzcd}$$

  conmutan para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $Z, W \in \mathcal{D}$ y $M \in \mathcal{M}$.

Un $(\mathcal{C}, \mathcal{C})$-bimódulo se dice $\mathcal{C}$-bimódulo.

Definición 1.5.14. Un bimódulo se dice *exacto* si es exacto como módulo a derecha y como módulo a izquierda.

Definición 1.5.15. Sean $(\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m, l, b)$ y $(\mathcal{N}, \overline{\otimes}, n, r, b')$ dos $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$-bimódulos. Un funtor de bimódulos $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es un funtor de $\mathcal{C}$-módulos a izquierda (F, s) y de $\mathcal{D}$-módulos a derecha (F, t) tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
F((X\overline{\otimes} M)\overline{\otimes} Y) \arrow[r, "t_{X\overline{\otimes} M,Y}"] \arrow[d, "F(b_{X,M,Y})"'] & F(X\overline{\otimes} M)\overline{\otimes} Y \arrow[d, "s_{X,M}\overline{\otimes}\mathrm{id}_Y"] \\
F(X\overline{\otimes}(M\overline{\otimes} Y)) \arrow[d, "s_{X,M\overline{\otimes} Y}"'] & (X\overline{\otimes} F(M))\overline{\otimes} Y \arrow[d, "b_{X,F(M),Y}"] \\
X\overline{\otimes} F(M\overline{\otimes} Y) \arrow[r, "\mathrm{id}_X\overline{\otimes} t_{M,Y}"] & X\overline{\otimes}(F(M)\overline{\otimes} Y)
\end{tikzcd}$$

Definición 1.5.16. Sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda, entonces $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ denota al $\mathcal{C}$-módulo a derecha sobre la categoría Abeliana opuesta con acción

$$\mathcal{M}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathcal{M}^{\mathrm{op}}, (M, X) \mapsto X^* \overline{\otimes} M,$$

y asociatividad

$$m^{\mathrm{op}}_{M,X,Y} = m_{Y^*,X^*,M},$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$. Análogamente para módulos a derecha (usando los duales a izquierda).

Notación 1.5.17. Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}$-bimódulo, se denota por $\overline{\mathcal{M}}$ a la categoría Abeliana opuesta con las estructuras de $\mathcal{C}$-módulo a izquierda y derecha dadas anteriormente.

1.5.2. El centro relativo de categorías bimódulo

Definición 1.5.18. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita y $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}$-bimódulo. El *centro relativo* de $\mathcal{M}$ es la categoría $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ de funtores de $\mathcal{C}$-bimódulos de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{M}$.

Explícitamente, un objeto de $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ es un par (M, γ), donde M es un objeto de $\mathcal{M}$ y

$$\gamma = \{\gamma_X : X \overline{\otimes} M \xrightarrow{\sim} M \overline{\otimes} X\}_{X \in \mathcal{C}}$$

es una familia de isomorfismos naturales tal que

$$\gamma_X \circ b^{-1}_{X,M,Y} \circ \gamma_Y = b^{-1}_{M,X,Y} \circ \gamma_{X \otimes Y} \circ b^{-1}_{X,Y,M}, \tag{1.5.19}$$

donde $b_{X,M,Y} : (X \overline{\otimes} M) \overline{\otimes} Y \xrightarrow{\sim} X \overline{\otimes} (M \overline{\otimes} Y)$ es la asociatividad media de $\mathcal{M}$.

Notar que si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ es un funtor de $\mathcal{C}$-bimódulos, entonces se identifica a F con el objeto de $\mathcal{M}$ dado por $F(\mathbf{1}) = M$. El isomorfismo γ_X proviene de

$$X \overline{\otimes} M \cong X \overline{\otimes} F(\mathbf{1}) \cong F(X \otimes \mathbf{1}) \cong F(\mathbf{1} \otimes X) \cong F(\mathbf{1}) \overline{\otimes} X \cong M \overline{\otimes} X.$$

Observación 1.5.20. La categoría $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$ es una categoría Abeliana y posee una estructura natural de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$-módulo. Notar además que $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = \mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

Sea $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$ una categoría tensorial finita y $\mathcal{C}$ una subcategoría tensorial finita de $\mathcal{D}$. Luego, $\mathcal{D}$ es un $\mathcal{C}$-bimódulo y $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$ es una categoría monoidal con producto dado por: si (V, γ) y (V', γ') son objetos de $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$, entonces

$$(V, \gamma) \otimes (V', \gamma') = (V \otimes V', \tilde{\gamma}),$$

donde $\tilde{\gamma}_X : X \otimes (V \otimes V') \to (V \otimes V') \otimes X$, $X \in \mathcal{C}$, es la siguiente composición:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (V \otimes V') \arrow[r, "a^{-1}_{X,V,V'}"] \arrow[d, "\tilde{\gamma}_X"'] & (X \otimes V) \otimes V' \arrow[r, "\gamma_X \otimes \mathrm{id}_{V'}"] & (V \otimes X) \otimes V' \arrow[d, "a_{V,X,V'}"] \\
(V \otimes V') \otimes X & V \otimes (V' \otimes X) \arrow[l, "a^{-1}_{V,V',X}"'] & V \otimes (X \otimes V'). \arrow[l, "\mathrm{id}_V \otimes \gamma'_X"']
\end{tikzcd}$$

El objeto unidad de $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$ es $(\mathbf{1}, \mathrm{id})$.

1.5.3. Producto tensorial balanceado de categorías módulo

Sean $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita, $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \overline{\otimes}, m, r)$ un $\mathcal{C}$-módulo a derecha y $\mathcal{N} = (\mathcal{N}, \overline{\otimes}, n, l)$ un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda.

Definición 1.5.21. Sean $\mathcal{A}$ una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal y $F : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ un bifuntor $\Bbbk$-lineal en cada variable y exacto a derecha en cada variable. Decimos que F es un *funtor $\mathcal{C}$-balanceado* si existe una familia de isomorfismos naturales

$$b_{M,X,N} : F(M \overline{\otimes} X, N) \cong F(M, X \overline{\otimes} N),$$

tales que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
 & F(M\overline{\otimes}(X\otimes Y), N) \arrow[dl, "b_{M,X\otimes Y,N}"'] \arrow[dr, "F(m_{M,X,Y}, \mathrm{id}_N)"] & \\
F(M, (X\otimes Y)\overline{\otimes}N) & & F((M\overline{\otimes}X)\overline{\otimes}Y, N) \arrow[d, "b_{M\overline{\otimes}X,Y,N}"] \\
F(M, X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes}N)) \arrow[u, "F(\mathrm{id}_M, n^{-1}_{X,Y,N})"'] & & F(M\overline{\otimes}X, Y\overline{\otimes}N) \arrow[ll, "b_{M,X,Y\overline{\otimes}N}"']
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
F(M\overline{\otimes}\mathbf{1}, N) \arrow[rr, "b_{M,\mathbf{1},N}"] \arrow[dr, "F(r_M, \mathrm{id}_N)"'] & & F(M, \mathbf{1}\overline{\otimes}N) \arrow[dl, "F(\mathrm{id}_M, l_n)"] \\
 & F(M,N) &
\end{tikzcd}$$

para todo $M \in \mathcal{M}$, $N \in \mathcal{N}$, $X, Y \in \mathcal{C}$. Se denota al funtor $\mathcal{C}$-balanceado por (F, b).

Definición 1.5.22. Sean $(F, b), (G, p) : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ funtores $\mathcal{C}$-balanceados, una *transformación natural $\mathcal{C}$-balanceada* es una transformación natural $\nu : F \to G$ tal que

$$\nu_{M, X\overline{\otimes}N} \circ b_{M,X,N} = p_{M,X,N} \circ \nu_{M\overline{\otimes}X,N},$$

para $M \in \mathcal{M}, N \in \mathcal{N}, X \in \mathcal{C}$.

Definición 1.5.23. El *producto tensorial* de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ junto con un funtor $\mathcal{C}$-balanceado

$$\boxtimes_{\mathcal{C}} : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to \mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$$

tal que para toda categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal $\mathcal{A}$ el funtor $\boxtimes_{\mathcal{C}}$ induce una equivalencia entre la categoría de funtores $\mathcal{C}$-balanceados de $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ a $\mathcal{A}$ y la categoría de funtores $\Bbbk$-lineales exactos a derecha de $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ a $\mathcal{A}$.

Teorema 1.5.24. [17, Theorem 3.20] Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son categorías finitas, entonces el producto tensorial $\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N}$ existe y es una categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal finita. Más aún, existe una equivalencia de categorías Abelianas

$$\mathcal{M} \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{N} \simeq \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{M}}, \mathcal{N});$$

con $\overline{\mathcal{M}}$ el $\mathcal{C}$-módulo dado en 1.5.17. ❀

Sea $(F,\xi):\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ una autoequivalencia tensorial. Denotamos por $\mathcal{M}^F$ al $\mathcal{C}$-módulo a derecha cuya categoría Abeliana $\Bbbk$-lineal subyacente es $\mathcal{M}$ y la acción a derecha dada por:

$$X\overline{\otimes}M=F(X)\overline{\otimes}M, \tag{1.5.25}$$

con asociatividad

$$m^l_{X,Y,M}(\xi_{X,Y}\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{M}}),$$

para $X,Y\in\mathcal{C}$, $M\in\mathcal{M}$. Análogamente se define ${}^F\mathcal{N}$.

Lema 1.5.26. Sean $(F,\xi):\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ una autoequivalencia tensorial, A un álgebra en $\mathcal{C}$ (ver [7, Definition 7.8.1]) y $\mathcal{N}$ un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda. Sean $(G,\rho):\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ un funtor y $\mu:G\circ F\to\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, $\alpha:\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to F\circ G$ isomorfismos naturales.

(I). Existe una equivalencia de $\mathcal{C}$-módulos a izquierda $\mathcal{C}^F\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}\cong{}^G\mathcal{N}$.

(II). Existe una equivalencia de $\mathcal{C}$-módulos a izquierda ${}^F\mathcal{C}_A\cong\mathcal{C}_{G(A)}$.

Demostración. (I). Sea $H:\mathcal{C}^F\times\mathcal{N}\to{}^G\mathcal{N}$ el funtor $\mathcal{C}$-balanceado dado por

$$H(X,N)=G(X)\overline{\otimes}N$$

con

$$b_{X,Y,N}:H(X\otimes F(Y),N)\cong H(X,Y\overline{\otimes}N)$$

definido de la siguiente manera

$$b_{X,Y,N}=n_{G(X),Y,N}\circ[(\mathrm{id}_{G(X)}\otimes\mu_Y)\overline{\otimes}\mathrm{id}_N]\circ(\rho_{X,Y})^{-1},$$

para $X,Y\in\mathcal{C},N\in\mathcal{N}$. Luego existe un funtor aditivo $\Bbbk$-lineal exacto a derecha $\tilde{H}:\mathcal{C}^F\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{N}\to{}^G\mathcal{N}$ tal que $\tilde{H}(X\boxtimes N)=G(X)\overline{\otimes}N$, para $X\in\mathcal{C},N\in N$. La estructura de funtor de $\mathcal{C}$-módulos a izquierda de $\tilde{H}$ está dada de la siguiente manera: fijamos $Y\in\mathcal{C}$, tomamos los funtores $\mathcal{C}$-balanceados

$$L:\mathcal{C}^F\times\mathcal{N}\to{}^G\mathcal{N},$$

$$L(X,N)=G(Y\otimes X)\overline{\otimes}N.$$

$$T:\mathcal{C}^F\times\mathcal{N}\to{}^G\mathcal{N},$$

$$T(X,N)=G(Y)\overline{\otimes}(G(X)\overline{\otimes}N).$$

Tenemos el isomorfismo natural $\mathcal{C}$-balanceado $\mu_Y:L\to T$, $\mu_Y=n(\rho^{-1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_{\mathcal{N}})$. Este isomorfismo natural induce un isomorfismo natural entre los funtores $\boxtimes_{\mathcal{C}}(L)\cong^{\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mu_Y)}\boxtimes_{\mathcal{C}}(T)$. Los isomorfismos naturales $\boxtimes_{\mathcal{C}}(\mu_Y)$ nos dan la estructura de $\mathcal{C}$-módulos a izquierda de $\tilde{H}$.

(II). Sea $X\in\mathcal{C}_{G(A)}$, con acción $\lambda:X\otimes G(A)\to X$. Luego $F(X)\in\mathcal{C}_A$ con acción $F(\lambda)\circ\xi_{X,G(A)}\circ(\mathrm{id}_{F(X)}\otimes\alpha_A)$. Entonces el funtor $F|_{\mathcal{C}_{G(A)}}:\mathcal{C}_{G(A)}\to{}^F(\mathcal{C}_A)$ está bien definido y es de $\mathcal{C}$-módulos a izquierda con ξ. Análogamente el funtor $G|_{{}^F(\mathcal{C}_A)}:{}^F(\mathcal{C}_A)\to\mathcal{C}_{G(A)}$ también está bien definido y es de $\mathcal{C}$-módulos a izquierda.

❀

1.6. Categorías tensoriales finitas G-graduadas

Finalmente, se introducen las categorías tensoriales finitas G-graduadas.

Definición 1.6.1. Sea G un grupo finito y $\mathcal{D}$ una categoría tensorial finita. Una G-*graduación (fiel)* en $\mathcal{D}$ es una descomposición $\mathcal{D} = \oplus_{g\in G}\mathcal{C}_g$, donde $\mathcal{C}_g$ son subcategorías Abelianas plenas de $\mathcal{D}$ tales que

- $\mathcal{C}_g \neq 0$ para todo $g \in G$;
- $\otimes : \mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h \to \mathcal{C}_{gh}$ para todo $g, h \in G$.

La categoría $\mathcal{D}$ se dice que es una G-*extensión graduada* de $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$.

Observación 1.6.2. En las condiciones de la definición anterior:

- $\mathcal{C}$ es una subcategoría tensorial finita de $\mathcal{D}$ y cada $\mathcal{C}_g$ es un $\mathcal{C}$-bimódulo exacto.
- Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda, $X \in \mathcal{C}_g$, $M \in \mathcal{M}$. El funtor $E_{X,M} : \overline{\mathcal{C}_g} \to \mathcal{M}$ dado por

  $$E_{X,M}(Y) = ({}^*Y \otimes X)\overline{\otimes} M,$$

  para cada $Y \in \mathcal{C}_g$, es un funtor de $\mathcal{C}$-módulos.

  Y el funtor

  $$\Phi : \mathcal{C}_g \boxtimes_{\mathcal{C}} \mathcal{M} \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{C}_g}, \mathcal{M}), \quad \Phi(X \boxtimes M) = E_{X,M},$$

  es una equivalencia de $\mathcal{C}$-módulos.

Ejemplos de categorías tensoriales finitas G-graduadas

- Si G es un grupo finito y $\omega \in Z^3(G, \Bbbk^\times)$ un 3-cociclo normalizado, la categoría $\mathcal{C}(G,\omega)$ es una categoría tensorial finita G-graduada con graduación dada por:

  $$\mathcal{C}(G,\omega) = \oplus_{g\in G}\mathcal{C}(G,\omega)_g,$$

  donde $\mathcal{C}(G,\omega)_g = \mathrm{vect}_{\Bbbk}$, para todo $g \in G$.

- La categoría de Tambara-Yamagami $\mathcal{TY}(A,\chi,\tau)$ es una categoría $\mathbb{Z}_2$-graduada con graduación dada por:

  $$\mathcal{TY}(A,\chi,\tau) = \mathcal{TY}(A,\chi,\tau)_{\overline{0}} \oplus \mathcal{TY}(A,\chi,\tau)_{\overline{1}},$$

  donde $\mathcal{TY}(A,\chi,\tau)_{\overline{0}}$ es la subcategoría de fusión plena generada por los elementos invertibles $a \in A$, y $\mathcal{TY}(A,\chi,\tau)_{\overline{1}}$ es la subcategoría Abeliana plena generada por m.

Capítulo 2

G-Categorías

En este capítulo se presenta la noción de acción de un grupo sobre una categoría monoidal, se define la correspondiente categoría equivariante y se prueba un teorema de coherencia para dicha acción. Los resultados de este capítulo corresponden al trabajo [14] de César Galindo.

A lo largo de este capítulo se usará la siguiente definición de funtor monoidal equivalente a la dada en el Capítulo 1:

Definición 2.0.1. Dadas dos categorías monoidales $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, un *funtor monoidal* entre ellas es una terna $F = (F, F_2, F_0)$, donde:

- $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ es un funtor;
- $F_2(X, Y) : F(X \otimes Y) \to F(X) \otimes F(Y)$, es una familia de isomorfismos naturales para todo $X, Y \in \mathcal{C}_1$;
- $F_0 : F(\mathbf{1}) \to \mathbf{1}$ es un isomorfismo;

tales que se satisfacen los correspondientes axiomas.

2.1. Acción de un grupo sobre una categoría monoidal

En esta sección se define G-categoría monoidal y G-categoría monoidal unitaria. Se prueba que toda G-categoría monoidal es equivalente a una G-categoría monoidal unitaria.

Recordemos la siguiente categoría monoidal.

Definición 2.1.1. Sea G un grupo finito. Se denota por $\underline{G}$ a la categoría monoidal cuyos objetos son los elementos del grupo G, las flechas son las identidades y el producto monoidal es el producto del grupo G.

Definición 2.1.2. Sea G un grupo finito. Una *G-categoría monoidal* es un par $(\psi, \mathcal{C})$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal y $\psi : \underline{G} \to \mathrm{End}_{\otimes}(\mathcal{C})$ es un funtor monoidal.

Si $(\psi, \mathcal{C})$ es una G-categoría monoidal, se dice que *G actúa sobre $\mathcal{C}$*.

Observación 2.1.3. Con la definición de funtor monoidal dada en el Capítulo 1, una acción de G sobre $\mathcal{C}$ consiste en:

- autoequivalencias tensoriales $(g_*, \xi^g) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, para cada $g \in G$;

- un isomorfismo natural monoidal $\zeta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to (1)_*$;
- isomorfismos naturales monoidales $\nu_{g,h} : g_* \circ h_* \to (gh)_*$;

tales que para todo $X \in \mathcal{C}$, $g, h, f \in G$

$$(\nu_{gh,f})_X (\nu_{g,h})_{f_*(X)} = (\nu_{g,hf})_X g_*((\nu_{h,f})_X), \tag{2.1.4}$$

$$(\nu_{g,1})_X g_*(\zeta_X) = \mathrm{id}_{g_*(X)} = (\nu_{1,g})_X \zeta_{g_*(X)}. \tag{2.1.5}$$

Notar que $\psi(g) = g_*$.

Definición 2.1.6. Las G-categorías monoidales $(\psi, \mathcal{C})$ y $(\psi', \mathcal{C})$ se dicen *fuertemente G-equivalentes* si ψ y ψ' son funtores monoidalmente equivalentes.

Definición 2.1.7. Una G-categoría monoidal $(\psi, \mathcal{C})$ se dice *unitaria* si $\psi : \underline{G} \to \mathrm{End}^u_{\otimes}(\mathcal{C})$ y ψ es un funtor unitario.

Proposición 2.1.8. Toda G-categoría monoidal $(\psi, \mathcal{C})$ es fuertemente G-equivalente a una G-categoría monoidal unitaria $(\psi'', \mathcal{C})$.

Demostración. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías monoidales.

Afirmación 1: sea $F \in \mathrm{Fun}_{\otimes}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, existe $F' \in \mathrm{Fun}^u_{\otimes}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ tal que F y F' son monoidalmente equivalentes.

Afirmación 2: sea $(\rho, \rho_2, \rho_0) : \underline{G} \to \mathrm{End}_{\otimes}(\mathcal{C})$ funtor monoidal, existe $(\rho', \rho_2', \rho_0') : \underline{G} \to \mathrm{End}^u_{\otimes}(\mathcal{C})$ funtor monoidal tal que ρ y ρ' son monoidalmente equivalentes.

Para probar la proposición basta probar las afirmaciones pues, tenemos $\psi : \underline{G} \to \mathrm{End}_{\otimes}(\mathcal{C})$ funtor monoidal. Por Afirmación 2 existe $\psi' : \underline{G} \to \mathrm{End}^u_{\otimes}(\mathcal{C})$ funtor monoidal tal que ψ y ψ' son monoidalmente equivalentes. Por Afirmación 1 (para $\mathcal{C} = \underline{G}$ y $\mathcal{D} = \mathrm{End}^u_{\otimes}(\mathcal{C})$) existe $\psi'' : \underline{G} \to \mathrm{End}^u_{\otimes}(\mathcal{C})$ funtor monoidal unitario tal que ψ' y ψ'' son monoidalmente equivalentes. Luego ψ y ψ'' son monoidalmente equivalentes.

Sea $(F, F_2, F_0) \in \mathrm{Fun}_{\otimes}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, se define el funtor monoidal unitario $(F', F_2') \in \mathrm{Fun}^u_{\otimes}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ de la siguiente manera:

$$F'(X) = \begin{cases} F(X) & si \quad X \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \\ \mathbf{1}_{\mathcal{D}} & si \quad X = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}. \end{cases}$$

Sea $f : X \to Y$ una flecha en $\mathcal{C}$

$$F'(f) = \begin{cases} F(f) & si \quad X \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, Y \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \\ F(f) \circ F_0^{-1} & si \quad X = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, Y \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \\ F_0 \circ F(f) & si \quad X \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, Y = \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \\ F_0 \circ F(f) \circ F_0^{-1} & si \quad X = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, Y = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}. \end{cases}$$

$$F_2'(X,Y) = \begin{cases} F_2(X,Y) & si \quad X \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, Y \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, X \otimes Y \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \\ F_2(X,Y) \circ F_0^{-1} & si \quad X \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, Y \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, X \otimes Y = \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \\ \mathrm{id}_{F(X)} & si \quad X \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, Y = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}. \\ \mathrm{id}_{F(Y)} & si \quad X = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, Y \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}. \\ \mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\mathcal{D}}} & si \quad X = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, Y = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}. \end{cases}$$

Y el isomorfismo natural monoidal $\sigma : F \to F'$:

$$\sigma(X) = \begin{cases} \mathrm{id}_{F(X)} & si \quad X \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \\ F_0 & si \quad X = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}. \end{cases}$$

Veamos que σ es transformación natural, es decir si $f : X \to Y$ una flecha en $\mathcal{C}$, entonces

$$F'(f) \circ \sigma(X) = \sigma(Y) \circ F(f). \tag{2.1.9}$$

Si $X \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, Y \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$, la ecuación 2.1.9 queda

$$F(f) \circ \mathrm{id}_{F(X)} = \mathrm{id}_{F(Y)} \circ F(f),$$

que claramente se satisface. Si $f : \mathbf{1} \to Y$, con $Y \neq \mathbf{1}$, la ecuación 2.1.9 queda

$$F(f) \circ F_0^{-1} \circ F_0 = \mathrm{id}_{F(Y)} \circ F(f),$$

que es cierta. Si $f : X \to \mathbf{1}$, con $X \neq \mathbf{1}$, la ecuación 2.1.9 es

$$F_0 \circ F(f) \circ \mathrm{id}_{F(X)} = F_0 \circ F(f),$$

la cual vale. Por último, si $f : \mathbf{1} \to \mathbf{1}$, la ecuación 2.1.9 queda

$$F_0 \circ F(f) \circ F_0^{-1} \circ F_0 = F_0 \circ F(f),$$

que sí se satisface.

Sea $(\rho, \rho_2, \rho_0) : \underline{G} \to \mathrm{End}_{\otimes}(\mathcal{C})$ funtor monoidal. Se define $(\rho', \rho_2', \rho_0') : \underline{G} \to \mathrm{End}_{\otimes}^{u}(\mathcal{C})$ de la siguiente manera: si $g \in G$ y $\rho_g \in \mathrm{End}_{\otimes}(\mathcal{C})$, por Afirmación 1 existe $(\rho_g)' \in \mathrm{End}_{\otimes}^{u}(\mathcal{C})$ tal que ρ_g y $(\rho_g)'$ son monoidalmente equivalentes vía el isomorfismo monoidal σ_g. Se define

$$\rho_g' = (\rho_g)'.$$

$$\rho_0'(X) = \begin{cases} \rho_0(X) & si \quad X \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \\ \mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\mathcal{C}}} & si \quad X = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}. \end{cases}$$

$$\rho_2'(g,h)(X) = \begin{cases} \rho_2(g,h)(X) & si \quad X \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, \rho_h(X) \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \\ (\rho_g)_0 \circ \rho_2(g,h)(X) & si \quad X \neq \mathbf{1}_{\mathcal{C}}, \rho_h(X) = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}. \\ \mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\mathcal{C}}} & si \quad X = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}. \end{cases}$$

Los funtores ρ y ρ' son monoidalmente equivalentes vía el isomorfismo natural $\sigma : \rho \to \rho'$, $\sigma(g) = \sigma_g$, para $g \in G$. ❀

2.2. La categoría equivariante

A continuación se introduce la categoría equivariante. Luego, se prueba que dos acciones equivalentes sobre una misma categoría inducen equivariantizaciones equivalentes.

Definición 2.2.1. Sea $(\psi, \mathcal{C})$ una G-categoría. Se define la *categoría equivariante* o la *equivariantización* de $\mathcal{C}$ como la categoría $\mathcal{C}^G$ donde:

- un objeto en $\mathcal{C}^G$ es un par (X, u), con $X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y $u = \{u_g : \psi(g)(X) \xrightarrow{\sim} X\}_{g \in G}$ una familia de isomorfismos en $\mathcal{C}$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $g, h \in G$

$$\begin{tikzcd} \psi(g)(\psi(h)(X)) \arrow[r, "\psi(g)(u_h)"] \arrow[d, "\phi(g,h)(X)^{-1}"] & \psi(g)(X) \arrow[d, "u_g"'] \\ \psi(gh)(X) \arrow[r, "u_{gh}"] & X, \end{tikzcd}$$

  donde $\phi(g,h) : \psi(gh) \to \psi(g) \circ \psi(h)$ es el isomorfismo que define la estructura monoidal de ψ;

- un morfismo $f : (X, u) \to (X', u')$ en $\mathcal{C}^G$ es un morfismo $f : X \to X'$ en $\mathcal{C}$ tal que

$$u'_g \circ f = \psi(g)(f) \circ u_g,$$

  para todo $g \in G$.

En términos de la Observación 2.1.3, un objeto en $\mathcal{C}^G$ es un par (X, s), donde $X \in \mathcal{C}$ es un objeto de $\mathcal{C}$ y los $s_g : g_*(X) \to X$ son isomorfismos en $\mathcal{C}$ tales que

$$s_1 = \operatorname{id}_X, \quad s_{gh} \circ (\nu_{g,h})_X = s_g \circ g_*(s_h), \tag{2.2.2}$$

para todo $g, h \in G$. Un morfismo $f : (V, s) \to (W, t)$ entre objetos de $\mathcal{C}^G$, (V, s) y (W, t), es un morfismo $f : V \to W$ en $\mathcal{C}$ tal que $f \circ s_g = t_g \circ g_*(f)$, para todo $g \in G$.

Proposición 2.2.3. Sean $(\psi, \mathcal{C})$ y $(\phi, \mathcal{C})$ G-categorías monoidales fuertemente G-equivalentes, entonces las correspondientes categorías equivariantes son monoidalmente equivalentes.

Demostración. Sea $\sigma : \psi \to \phi$ un isomorfismo natural monoidal.

Llamamos $\mathcal{D}$ a la equivariantización de $(\psi, \mathcal{C})$ y $\mathcal{E}$ a la equivariantización de $(\phi, \mathcal{C})$. Se define $(F, F_2, F_0) : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ de la siguiente manera: un objeto de $\mathcal{E}$ es un par (X, L_g), con $L_g : \phi_g(X) \to X$ isomorfismo tal que

$$L_g \circ \phi_g(L_h) = L_{gh} \circ \phi_2^{-1}. \tag{2.2.4}$$

Tomamos $F((X, L_g)) = (X, L_g \circ \sigma_g(X))$, para ver que está bien definido hay que probar:

$$L_g \circ \sigma_g(X) \circ \psi_g(L_h \circ \sigma_h(X)) = L_{gh} \circ \sigma_{gh}(X) \circ \psi_2^{-1}.$$

Ahora, como σ es monoidal se tiene que

$$\sigma_g(\phi_h(X)) \circ \psi(\sigma_h(X)) \circ \psi_2 = \phi_2 \circ \sigma_{gh}(X).$$

Luego

$$L_{gh} \circ \sigma_{gh}(X) \circ \psi_2^{-1} = L_{gh} \circ (\phi_2)^{-1} \circ \sigma_g(\phi_h(X)) \circ \psi(\sigma_h(X)).$$

Por (2.2.4) se sigue que

$$L_{gh} \circ (\phi_2)^{-1} \circ \sigma_g(\phi_h(X)) \circ \psi(\sigma_h(X)) = L_g \circ \phi_g(L_h) \circ \sigma_g(\phi_h(X)) \circ \psi(\sigma_h(X)).$$

Por otro lado, como σ_g es natural se tiene que

$$\phi_g(L_h) \circ \sigma_g(\phi_h(X)) = \sigma_g(X) \circ \psi_g(L_h).$$

Luego

$$L_g \circ \phi_g(L_h) \circ \sigma_g(\phi_h(X)) \circ \psi(\sigma_h(X)) = L_g \circ \sigma_g(X) \circ \psi_g(L_h) \circ \psi(\sigma_h(X)) =$$
$$L_g \circ \sigma_g(X) \circ \psi_g(L_h \circ \sigma_h(X)).$$

Sea $f : (X, L_g) \to (Y, L'_g)$ una flecha en $\mathcal{E}$, entonces se cumple que

$$f \circ L_g = L'_g \circ \phi_g(f).$$

Tomamos $F(f) = f$, para ver que está bien definida hay que probar la siguiente igualdad

$$f \circ L_g \circ \sigma_g(X) = L'_g \circ \sigma_g(y) \circ \psi_g(f),$$

la cual es cierta por ser σ_g natural.

Notar que el objeto unidad en $\mathcal{E}$ es $(\mathbf{1}, (\phi_g)_0)$. Se define

$$F_0 : (\mathbf{1}, (\phi_g)_0 \circ \sigma_g(\mathbf{1})) \to (\mathbf{1}, (\psi_g)_0) = \mathrm{id}_{\mathbf{1}}.$$

La flecha F_0 es un morfismo en $\mathcal{D}$ pues σ_g es monoidal, es decir

$$(\phi_g)_0 \circ \sigma_g(\mathbf{1}) = (\psi_g)_0.$$

Por último se define

$$F_2((X, L_g), (Y, L'_g)) = \mathrm{id}_{X\otimes Y},$$

que está bien definido por ser σ_g monoidal, es decir

$$[\sigma_g(X) \otimes \sigma_g(Y)] \circ (\psi_g)_2 = (\phi_g)_2 \circ \sigma_g(X \otimes Y).$$

Notar que F es fiel, pleno y denso, luego es una equivalencia de categorías monoidales. ❀

2.3. Ejemplos de acción y equivariantización

Acción sobre $\mathcal{C}(G, \omega)$

El siguiente ejemplo de acción y equivariantización se puede ver en [31].

Sean G un grupo finito y $\omega \in Z^3(G, \Bbbk^\times)$ un 3-cociclo. Recordar del capítulo anterior la categoría monoidal $\mathcal{C}(G, \omega)$ (ver 1.3).

Para $g_1, g_2, g \in G$, se definen:

- El 2-cociclo $\Omega_g : G \times G \to \Bbbk^\times$ dado por

$$\Omega(g_1, g_2) = \frac{\omega(gg_1g^{-1}, gg_2g^{-1}, g)\omega(g, g_1, g_2)}{\omega(gg_1g^{-1}, g, g_2)}.$$

- El mapa $\gamma(g_1, g_2) : G \to \Bbbk^\times$ dado por

$$\gamma(g_1, g_2)(g) = \frac{\omega(g_1, g_2, g)\omega(g_1g_2gg_2^{-1}g_1^{-1}, g_1, g_2)}{\omega(g_1, g_2gg_2^{-1}, g_2)}.$$

Si $g \in G$ y $V = \bigoplus_{h\in G} V_h \in \mathcal{C}(G,\omega)$, sea el objeto ${}^gV \in \mathcal{C}(G,\omega)$ tal que ${}^gV = V$ como espacio vectorial y con G-graduación dada por $({}^gV)_h = V_{gh}$, para cada $h \in G$.

Se definen las autoequivalencias monoidales $(g_*, \xi^g) : \mathcal{C}(G,\omega) \to \mathcal{C}(G,\omega)$ donde:

- $g_* : \mathcal{C}(G,\omega) \to \mathcal{C}(G,\omega)$ y $g_*(V) = {}^gV$, $g_*(f) = f$, para V objeto de $\mathcal{C}(G,\omega)$ y f morfismo en $\mathcal{C}(G,\omega)$;
- $\xi^g_{U,V} : {}^gU \otimes {}^gV \to {}^g(U \otimes V)$, $\xi^g_{U,V}(u \otimes v) = \Omega_g(h,h')^{-1} u \otimes v$,

para todo $h, h' \in G$, y para todos los vectores homogéneos $u \in U_h$, $v \in V_{h'}$.

Se definen también los isomorfismos naturales monoidales $\nu_{g,h} : g_* \circ h_* \to (gh)_*$ como:

$$(\nu_{g,h})_V : {}^g({}^hV) \to {}^{gh}V,\ (\nu_{g,h})_V(v) = \gamma(g,h)(x)v,$$

para todo vector homogéneo $v \in V_x, x \in G$.

Las autoequivalencias monoidales y los isomorfismos naturales monoidales arriba presentados definen una acción de G sobre $\mathcal{C}(G,\omega)$. Y la categoría equivariante $\mathcal{C}(G,\omega)^G$ es equivalente a la categoría de representaciones de dimensión finita del doble de Drinfeld torcido $D^\omega G$ (definido en el Apéndice 5.2). Ver [30, Lemma 6.3].

Acción sobre un álgebra de Hopf

Sean G un grupo finito y H un álgebra de Hopf de dimensión finita (ver 5.1). Para cada $g, h \in G$ sean

- $g_* : H \to H$ isomorfismos de álgebras de Hopf,
- $\theta_{g,h}$ elemento tipo grupo de H,

tales que para todo $a \in H$ y para todo $g, h, f \in G$

$$\theta_{g,h} h_*(g_*(a)) = (gh)_*(a)\theta_{g,h}, \tag{2.3.1}$$

$$1_* = \mathrm{id}_H, \quad \theta_{gh,f} f_*(\theta_{g,h}) = \theta_{g,hf}\theta_{h,f},$$
$$\theta_{g,1} = 1 = \theta_{1,g}. \tag{2.3.2}$$

Para cada $g \in G$ se define

$$F_g : \mathrm{rep}(H) \to \mathrm{rep}(H), \quad F_g(M) = M.$$

La acción de H en $F_g(M)$ está dada por $a \triangleright m = g_*(a) \cdot m$, para todo $a \in H, m \in M$. Notar que F_g es monoidal por ser g_* morfismo de álgebras de Hopf. Además, se define para todo $g, h \in G$, $M \in \mathrm{rep}(H)$, $m \in M$

$$\gamma_{g,h} : F_g \circ F_h \to F_{gh}, \quad (\gamma_{g,h})_M(m) = \theta_{g,h} \cdot m.$$

Los morfismos $(\gamma_{g,h})_M$, para $M \in \mathrm{rep}(H)$, son de H-módulos por la ecuación 2.3.1. Las transformaciones naturales $\gamma_{g,h}$ son monoidales pues los $\theta_{g,h}$ son elementos tipo grupo de H. Y debido a que se cumplen las ecuaciones 2.3, se tiene una acción del grupo G sobre la categoría $\mathrm{rep}(H)$.

Observación 2.3.3. El espacio vectorial $H \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G$ es un álgebra de Hopf con:

- Producto:
$$(a \otimes g)(b \otimes h) = \theta_{g,h} h_*(a) b \otimes gh,$$
para todo $a, b \in H, g, h \in G$.

- Coproducto:
$$\Delta(a \otimes g) = (a_{(1)} \otimes g) \otimes (a_{(2)} \otimes g),$$
para todo $a \in H, g \in G$.

- Antípoda:
$$S(a \otimes g) = S(a) \otimes g^{-1},$$
para todo $a \in H, g \in G$.

Proposición 2.3.4. Vale la siguiente equivalencia de categorías monoidales
$$(\mathrm{rep}(H))^G \simeq \mathrm{rep}(H \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G).$$

Demostración. Sean $\Phi : (\mathrm{rep}(H))^G \to \mathrm{rep}(H \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G)$, $\Psi : \mathrm{rep}(H \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G) \to (\mathrm{rep}(H))^G$ los funtores monoidales definidos de la siguiente manera. Para cada $(X, s) \in (\mathrm{rep}(H))^G$, $M \in \mathrm{rep}(H \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G)$ se define
$$\Phi(X, s) = X, \quad \Psi(M) = (M, r).$$
Donde la acción de $H \otimes_{\Bbbk} \Bbbk G$ en X está dada por $(a \otimes g) \cdot x = s_g(a \cdot x)$. Para todo $g \in G$, los morfismos $r_g : M \to M$ se definen como $r_g(m) = (1 \otimes g) \cdot m$. ❀

En particular, si se considera la acción trivial de un grupo finito G sobre la categoría $\mathrm{vect}_{\Bbbk}$ (esto es $F_g = \mathrm{Id}$ y $\gamma_{g,h} = \mathrm{id}$ para todo $g, h \in G$), entonces $(\mathrm{vect}_{\Bbbk})^G \simeq \mathrm{rep}(G)$.

2.4. Coherencia para la acción de un grupo sobre una categoría

En esta sección se define la noción de G-categoría estricta y se presenta un resultado de [14], el cual establece que toda G-categoría es equivalente a una G-categoría estricta.

Como consecuencia de la Proposición 2.1.8, a partir de ahora se supone que todas las G-categorías monoidales son G-categorías monoidales unitarias.

Explícitamente, una G-categoría monoidal consiste en:

- funtores $g_* : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, para cada $g \in G$;
- isomorfismos naturales $\phi(g, h) : (gh)_* \to g_* \circ h_*$, para cada par $g, h \in G$;
- isomorfismos naturales $\psi^g(X, Y) : g_*(X \otimes Y) \to g_*(X) \otimes g_*(Y)$, para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$;

tales que:

(I). $g_*(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$,

(II). $\psi^g(X, \mathbf{1}) = \psi^g(\mathbf{1}, X) = \mathrm{id}_X$,

(III). $e_* = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$,

(IV). $\phi(e, g) = \phi(g, e) = \mathrm{Id}_{g_*}$, para todo $g \in G$ y $X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$. Y para todo $g, h, k \in G$ y $X, Y, Z \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
(ghk)_*(X) \arrow[r, "\phi(gh,k)(X)"] \arrow[d, "\phi(g,hk)(X)"] & (gh)_*k_*(X) \arrow[d, "\phi(g,h)(k_*(X))"] \\
g_*(hk)_*(X) \arrow[r, "g_*(\phi(h,k)(X))"] & g_*h_*k_*(X)
\end{tikzcd} \tag{2.4.1}$$

$$\begin{tikzcd}
g_*(X \otimes Y \otimes Z) \arrow[r, "\psi^g(X \otimes Y, Z)"] \arrow[d, "\psi^g(X, Y \otimes Z)"] & g_*(X \otimes Y) \otimes g_*(Z) \arrow[d, "\psi^g(X,Y) \otimes \mathrm{id}_{g_*(Z)}"] \\
g_*(X) \otimes g_*(Y \otimes Z) \arrow[r, "\mathrm{id}_{g_*(X)} \otimes \psi^g(Y,Z)"] & g_*(X) \otimes g_*(Y) \otimes g_*(Z)
\end{tikzcd} \tag{2.4.2}$$

$$\begin{tikzcd}
& g_*(h_*(X) \otimes h_*(Y)) \arrow[dr, "\psi^g(h_*(X), h_*(Y))"] & \\
g_*h_*(X \otimes Y) \arrow[ur, "g_*(\psi^h(X,Y))"] & & g_*h_*(X) \otimes g_*h_*(Y) \\
(gh)_*(X \otimes Y) \arrow[u, "\phi(g,h)_{X \otimes Y}"] \arrow[rr, "\psi^{gh}(X,Y)"] & & (gh)_*(X) \otimes (gh)_*(Y). \arrow[u, "\phi(g,h)_X \otimes \phi(g,h)_Y"']
\end{tikzcd} \tag{2.4.3}$$

Definición 2.4.4. Una G-categoría se dice *estricta* si ψ^g y $\phi(g,h)$ son las identidades para todo $g, h \in G$.

Definición 2.4.5. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ G-categorías monoidales, un *G-funtor monoidal* de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es un par $F = (F, \gamma)$ donde:

- $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor monoidal,
- $\gamma(g) : g_* \circ F \to F \circ g_*$, $g \in G$ es una familia de isomorfismos naturales monoidales tal que $\gamma(e) = \mathrm{Id}_F$, y para todo $X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$, $g, h \in G$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& g_*(F(h_*(X))) \arrow[dr, "\gamma(g)_{h_*(X)}"] & \\
g_*h_*(F(X)) \arrow[ur, "g_*(\gamma(h)_{F(X)})"] & & F(g_*h_*(X)) \\
(gh)_*(F(X)) \arrow[u, "\phi(g,h)_{F(X)}"] \arrow[rr, "\gamma(gh)_X"] & & F((gh)_*(X)). \arrow[u, "F(\phi(g,h)_X)"']
\end{tikzcd} \tag{2.4.6}$$

Se dice que (F, γ) es una *equivalencia* de G-categorías monoidales si el funtor F es una equivalencia de categorías. En tal caso se dice que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son G-categorías monoidales *G-equivalentes.*

Observación 2.4.7. Dos G-categorías monoidales son fuertemente G-equivalentes si y sólo si son G-equivalentes.

Definición 2.4.8. Sean $(F, \nu), (L, \gamma) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos G-funtores monoidales, una transformación natural monoidal $\varphi : F \to L$ se dice *transformación natural monoidal de G-categorías* si para todo $X \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ y $g \in G$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
F(g_*(X)) \arrow[r, "\varphi_{g_*(X)}"] & L(g_*(X)) \\
g_*(F(X)) \arrow[u, "\nu(g)_X"] \arrow[r, "g_*(\varphi_X)"] & g_*(L(X)). \arrow[u, "\gamma(g)_X"']
\end{tikzcd} \tag{2.4.9}$$

Sea G un grupo y $\mathcal{C}$ una G-categoría monoidal. Se define la categoría $\mathcal{C}(G)$ de la siguiente manera:

- Un objeto es un par (L, η), con $\{L_g\}_{g\in G}$ una familia de objetos de $\mathcal{C}$, y

  $$\eta = \{\eta_{g,h} : g_*(L_h) \to L_{gh}\}_{g,h\in G}$$

  es una familia de isomorfismos tal que para todo $g \in G$, $\eta_{e,g} = \mathrm{Id}_{L_g}$ y para todo $g, h, k \in G$ el siguiente diagrama conmuta

  $$\begin{tikzcd} (gh)_*(L_k) \arrow[r, "\eta_{gh,k}"] \arrow[d, "\phi(g,h)_{L_k}"'] & L_{ghk} \\ g_*h_*(L_k) \arrow[r, "g_*(\eta_{h,k})"] & g_*(L_{hk}). \arrow[u, "\eta_{g,hk}"'] \end{tikzcd} \tag{2.4.10}$$

- Un morfismo de (L, η) a (T, χ) es una familia de morfismos

  $$f = \{f_g : L_g \to T_g\}_{g\in G},$$

  tal que para todo $g, h \in G$ el siguiente diagrama conmuta

  $$\begin{tikzcd} g_*(L_h) \arrow[r, "\eta_{g,h}"] \arrow[d, "g_*(f_h)"'] & L_{gh} \arrow[d, "f_{gh}"] \\ g_*(T_h) \arrow[r, "\chi_{g,h}"'] & T_{gh}. \end{tikzcd} \tag{2.4.11}$$

- La composición de $f : (L, \eta) \to (L', \eta')$ con $l : (L', \eta') \to (L'', \eta'')$ esta dada por

  $$lf = \{l_g f_g\}_{g\in G}.$$

Proposición 2.4.12. [14, Proposition 4.2] La categoría $\mathcal{C}(G)$ es una categoría monoidal estricta con producto tensorial dado por:

- Producto tensorial de objetos: $(L, \eta)\otimes(L', \eta') = (LL', \eta\eta')$, donde $(LL') = L_g\otimes L'_g$, y $(\eta\eta')_{g,h}$ es la siguiente composición

  $$\begin{tikzcd} g_*(L_h\otimes L'_h) \arrow[rr, "(\eta\eta')_{g,h}"] \arrow[dr, "\psi^g(L_h,L'_h)"'] & & L_{gh}\otimes L'_{gh} \\ & g_*(L_h)\otimes g_*(L'_h). \arrow[ur, "\eta_{g,h}\otimes\eta'_{g,h}"'] & \end{tikzcd} \tag{2.4.13}$$

- Producto tensorial de morfismos: $f\otimes l = \{f_g\otimes l_g\}_{g\in G}$.
- Objeto unidad: $(\overline{\mathbf{1}}, \mathrm{id}_{\mathbf{1}})$, donde $\overline{\mathbf{1}}_g = \mathbf{1}$, para todo $g \in G$. ❀

Demostración. La buena definición del producto tensorial sobre objetos se debe a que el diagrama 2.4.10 conmuta para $\eta\eta'$, esto es:

$$(\eta\eta')_{gh,k} = \eta_{g,hk} \circ g_*((\eta\eta')_{h,k})\phi(g, h)_{L_k\otimes L'_k},$$

para todo $g, h, k \in G$. Lo cual es consecuencia del diagrama 2.4.3 y de que ψ^g es un isomorfismo natural monoidal.

Veamos ahora la buena definición del producto tensorial sobre morfismos. Sean $f : (L, \eta) \to (T, \chi)$ y $l : (L', \eta') \to (T', \chi')$ morfismos en $C(G)$. Debemos ver que se satisface lo siguiente

$$(f_{gh} \otimes l_{gh} \circ (\eta\eta')_{g,h}) = (\chi\chi')_{g,h} \circ g_*(f_h \otimes l_h). \tag{2.4.14}$$

Pero la ecuación 2.4.14 es consecuencia de la igualdad

$$(g_*(f_h) \otimes g_*(l_h)) \circ \psi^g(L_h, L'_h) = \psi^g(T_h, T'_h) \circ g_*(f_h \otimes l_h),$$

que se satisface por ser ψ^g transformación natural monoidal.

Finalmente, es inmediato de la definición que $(\overline{\mathbf{1}}, \mathrm{id}_{\mathbf{1}})$ es objeto unidad. Y es cálculo directo probar que el producto tensorial es estrictamente asociativo. ❀

Teorema 2.4.15. [14, Theorem 4.3] Sea $\mathcal{C}$ una G-categoría monoidal.

(I). La categoría monoidal $\mathcal{C}(G)$ es una G-categoría monoidal estricta.

(II). Las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}(G)$ son G-equivalentes.

Demostración. (I). Se define la acción sobre objetos: $g_*(L, \eta) = (gL, g\eta)$, donde

$$(gL)_h = L_{hg}, \ (g\eta)_{x,y} = \eta_{x,yg},$$

para todo $g, h, x, y \in G$.

Se define la acción sobre morfismos: $g_*(f)_h = f_{hg}$, para todo $g, h \in G$.

(II). El funtor

$$U_e : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}$$
$$(L, \eta) \mapsto L_e$$
$$f \mapsto f_e,$$

con isomorfismos naturales

$$\gamma(g)_{(L,\eta)} = \eta_{g,e} : g_*(U_e(L, \eta)) \to U_e(g_*(L, \eta)),$$

es una equivalencia de G-categorías.

❀

Observación 2.4.16. Si $(F, \gamma) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un G-funtor monoidal, se define el G-funtor $(F, \gamma)(G) : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{D}(G)$ de la siguiente manera: si $(L, \eta) \in \mathcal{C}(G)$, entonces $F(L) = \{F(L_g)\}_{g\in G}$ y $F(\eta_{g,h}) \circ \gamma_{L_h} : g_*(F(L_h)) \to g_*(F(L_h))$, para todo $g, h \in G$.

Capítulo 3

2-Categorías

En el presente capítulo se desarrollan los conceptos básicos de la Teoría de 2-categorías (ver [21] y [22]). Dadas las 2-categorías $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, para cada pseudofuntor $\mathcal{H}:\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ se define la categoría monoidal $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$ de transformaciones pseudonaturales $\eta:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$. Cuando $\mathcal{H}$ es el pseudofuntor identidad, $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$ se denomina el *centro* de la 2-categoría $\mathcal{B}$, el cual generaliza el centro de categorías monoidales. Finalmente, se prueba que si $\mathcal{H}:{}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}\to{}_{\mathcal{C}_e}\mathrm{Mod}$ es el pseudofuntor de olvido, donde $\mathcal{D}=\oplus_{g\in G}\mathcal{C}_g$ es una categoría tensorial G-graduada, entonces $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$ es monoidalmente equivalente al centro relativo de $\mathcal{D}$.

3.1. Nociones básicas de 2-categorías

Una categoría consiste en objetos conectados por morfismos. Sucede que en algunos casos los morfismos también pueden ser conectados de alguna forma. Por ejemplo, en la categoría cuyos objetos son las categorías pequeñas y los morfismos los funtores, estos últimos pueden ser conectados por transformaciones naturales. Asimismo, en la categoría de espacios topológicos las funciones continuas pueden ser conectadas por homotopías. Esta observación motiva la definición de *2-categoría*, donde además de objetos y morfismos se tienen "morfismos entre morfismos".

Las 2-categorías fueron introducidas en el año 1965 en un trabajo sobre categorías enriquecidas de Charles Ehresmann [6].

A continuación se da la definición de 2-categoría, se exponen algunas propiedades que satisfacen y se listan ejemplos.

Definición 3.1.1. Una *2-categoría* $\mathcal{B}$ consiste en:

- una clase de objetos o *0-celdas* $\mathrm{Obj}\,(\mathcal{B})$;
- para cada par de 0-celdas A, B, una categoría $\mathcal{B}(A,B)$ (llamada *hom-categoría*), los objetos de $\mathcal{B}(A,B)$ se llaman *1-celdas* y los morfismos *2-celdas*;
- para cada 0-celda A, una 1-celda $I_A\in\mathcal{B}(A,A)$;
- para A,B,C 0-celdas, un funtor

  $$\circ^{A,B,C}:\mathcal{B}(B,C)\times\mathcal{B}(A,B)\to\mathcal{B}(A,C),$$

  estrictamente asociativo y unitario.

  La composición de las categorías $\mathcal{B}(A,B)$ se denota como la yuxtaposición, y se llama la composición *vertical* de la 2-categoría.

Para simplificar notación, en algunos momentos se denota al funtor $\circ^{A,B,C}$ sólo por $\circ$, y se lo llama la composición *horizontal* de la 2-categoría.

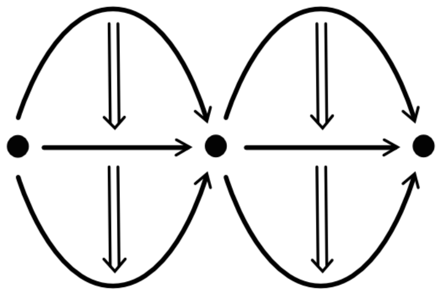

Figura 3.1: Diagrama en una 2-categoría: los puntos representan las 0-celdas, las flechas simples las 1-celdas y las flechas dobles las 2-celdas.

Si se quitan las condiciones de que la asociatividad y unitariedad de la composición horizontal sean estrictas, lo que se obtiene es una *bicategoría*. Este concepto más general que el de 2-categoría fue presentado en un trabajo de Jean Bénabou en el año 1967 [2].

Notación 3.1.2. La 2-categoría $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ denota la 2-categoría que se obtiene de la 2-categoría $\mathcal{B}$ invirtiendo las 1-celdas.

Notación 3.1.3. Si A, B son 0-celdas y $X, Y \in \mathcal{B}(A, B)$ son 1-celdas, una 2-celda α de X a Y se denota como $\alpha : X \Rightarrow Y$.

Definición 3.1.4. Sean $\mathcal{B}$ una 2-categoría, A, B 0-celdas en $\mathcal{B}$ y $X, Y \in \mathcal{B}(A, B)$.

- Se dice que X es *equivalente* a Y, y se denota $X \sim Y$, si existen 2-celdas $\alpha : X \Rightarrow Y, \beta : Y \Rightarrow X$, tales que
$$\alpha\beta = \mathrm{id}_Y, \quad \beta\alpha = \mathrm{id}_X.$$
- Las 0-celdas A, B se dicen *equivalentes*, y se denota $A \sim B$, si existen 1-celdas $X \in \mathcal{B}(A, B)$, $Y \in \mathcal{B}(B, A)$ tales que
$$X \circ Y \sim I_B, \quad Y \circ X \sim I_A.$$
En tal caso, se dice que las 1-celdas X e Y son *equivalencias* o *1-equivalencias*. Si además vale que
$$X \circ Y = I_B, \quad Y \circ X = I_A,$$
se dice que X e Y son *isomorfismos*.

Definición 3.1.5. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 2-categorías, un *pseudofuntor* $(F, \alpha, \phi) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ consiste en:

- una asignación $F : \mathrm{Obj}\,(\mathcal{B}) \to \mathrm{Obj}\,(\mathcal{B}')$;
- para cada par de 0-celdas A, B un funtor $F_{A,B} : \mathcal{B}(A, B) \to \mathcal{B}'(F(A), F(B))$;
- para cada terna de 0-celdas A, B, C isomorfismos naturales

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(B,C) \times \mathcal{B}(A,B) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "F\times F"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha"] & \mathcal{B}(A,C) \arrow[d, "F"] \\
\mathcal{B}'(F(B),F(C)) \times \mathcal{B}'(F(A),F(B)) \arrow[r, "\circ"] & \mathcal{B}'(F(A),F(C)),
\end{tikzcd}$$

$$\alpha_{A,B,C} : \circ^{F(A),F(B),F(C)}(F_{B,C} \times F_{A,B}) \to F_{A,C}\circ^{A,B,C},$$
$$\phi_A : I_{F(A)} \to F_{A,A}(I_A),$$

tales que

$$\alpha_{X\circ Y,Z}(\alpha_{X,Y} \circ \mathrm{id}_{F(Z)}) = \alpha_{X,Y\circ Z}(\mathrm{id}_{F(X)} \circ \alpha_{Y,Z}),$$
$$\phi_B \circ \mathrm{id}_{F(X)} = \alpha_{I_B,X}, \quad \mathrm{id}_{F(X)} \circ \phi_A = \alpha_{X,I_A},$$

para toda terna de 1-celdas X, Y, Z.

Notar que se suprimieron los subíndices de las transformaciones α, ϕ. Si $X \in \mathcal{B}(B, C)$, $Y \in \mathcal{B}(A, B)$ se denota $(\alpha_{A,B,C})_{X,Y}$ simplemente por $\alpha_{X,Y}$, lo mismo para ϕ. Si $X \in \mathcal{B}(A, B)$ es una 1-celda o una 2-celda, se denota $F_{A,B}(X)$ sólo por $F(X)$, para simplificar notación.

Un pseudofuntor se dice *unitario* si $F(I_A) = I_{F(A)}$ para toda 0-celda A y los isomorfismos ϕ_A son las identidades.

Un pseudofuntor se dice *2-funtor* si los isomorfismos α son las identidades.

Definición 3.1.6. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 2-categorías.

- Un pseudofuntor $(F, \alpha, \phi) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ se dice *biesencialmente suryectivo* si para toda 0-celda B en $\mathcal{B}'$, existe una 0-celda A en $\mathcal{B}$ tal que $F(A) \sim B$.
- Un pseudofuntor $(F, \alpha, \phi) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ se dice *localmente esencialmente suryectivo* si para todo par de 0-celdas A, B en $\mathcal{B}$, el funtor $F_{A,B} : \mathcal{B}(A, B) \to \mathcal{B}'(F(A), F(B))$ es esencialmente suryectivo.
- Un pseudofuntor $(F, \alpha, \phi) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ se dice *localmente fiel* si para todo par de 0-celdas A, B en $\mathcal{B}$, el funtor $F_{A,B} : \mathcal{B}(A, B) \to \mathcal{B}'(F(A), F(B))$ es fiel.
- Un pseudofuntor $(F, \alpha, \phi) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ se dice *localmente pleno* si para todo par de 0-celdas A, B en $\mathcal{B}$, el funtor $F_{A,B} : \mathcal{B}(A, B) \to \mathcal{B}'(F(A), F(B))$ es pleno.
- Un pseudofuntor $(F, \alpha, \phi) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ se dice *localmente fielmente pleno* si para todo par de 0-celdas A, B en $\mathcal{B}$, el funtor $F_{A,B} : \mathcal{B}(A, B) \to \mathcal{B}'(F(A), F(B))$ es fiel y pleno.

Definición 3.1.7. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 2-categorías y $(F, \alpha, \phi), (G, \alpha', \phi') : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ pseudofuntores, una *transformación pseudonatural* $(\chi, \chi^0) : (F, \alpha, \phi) \to (G, \alpha', \phi')$ consiste en:

- para cada $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{B})$ una 1-celda $\chi^0_A \in \mathcal{B}'(F(A), G(A))$;
- para cada $A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{B})$ y cada 1-celda $X \in \mathcal{B}(A, B)$ un isomorfismo natural

$$\chi_X : \chi^0_B \circ F_{A,B}(X) \to G_{A,B}(X) \circ \chi^0_A,$$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(X)"] \arrow[d, "\chi^0_A"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\chi_X"] & F(B) \arrow[d, "\chi^0_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(X)"'] & G(B), \end{tikzcd}$$

tal que para toda 0-celda A y toda 1-celda $X \in \mathcal{B}(B, C), Y \in \mathcal{B}(A, B)$

$$(\alpha'_{X,Y} \circ \mathrm{id}_{\chi^0_A})(\mathrm{id}_{G(X)} \circ \chi_Y)(\chi_X \circ \mathrm{id}_{F(X)}) = \chi_{X\circ Y}(\mathrm{id}_{\chi^0_C} \circ \alpha_{X,Y}),$$
$$\chi_{I_A}(\mathrm{id}_{\chi^0_A} \circ \phi_A) = \phi'_A \circ \mathrm{id}_{\chi^0_A}.$$

Observación 3.1.8. Sea $(\chi, \chi^0) : F \to G$ una transformación pseudonatural. Como el morfismo χ_X es natural, se tiene que, para cada par de 1-celdas $X, Y \in \mathcal{B}(A, B)$ y cualquier 2-celda $\nu : X \Rightarrow Y$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \chi^0_B \circ F_{A,B}(X) \arrow[r, "\chi_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\chi^0_B} \circ F(\nu)"'] & G_{A,B}(X) \circ \chi^0_A \arrow[d, "G(\nu) \circ \mathrm{id}_{\chi^0_A}"] \\ \chi^0_B \circ F_{A,B}(Y) \arrow[r, "\chi_Y"'] & G_{A,B}(Y) \circ \chi^0_A. \end{tikzcd} \tag{3.1.9}$$

Definición 3.1.10. Sean $(\chi, \chi^0), (\theta, \theta^0) : F \to G$ transformaciones pseudonaturales, una *modificación* $\omega : (\chi, \chi^0) \to (\theta, \theta^0)$ es una colección de 2-celdas $\omega_A : \chi^0_A \Rightarrow \theta^0_A$ tal que

$$(\mathrm{id}_{G(X)} \circ \omega_A)\chi_X = \theta_X(\omega_B \circ \mathrm{id}_{F(X)}), \tag{3.1.11}$$

para cada par de 0-celdas A, B y cada 1-celda $X \in \mathcal{B}(A, B)$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \chi^0_B \circ F(X) \arrow[r, "\chi_X"] \arrow[d, "\omega_B \circ \mathrm{id}_{F(X)}"'] & G(X) \circ \chi^0_A \arrow[d, "\mathrm{id}_{G(X)} \circ \omega_A"] \\ \theta^0_B \circ F(X) \arrow[r, "\theta_X"] & G(X) \circ \theta^0_A. \end{tikzcd}$$

Se denota a la modificación por $\omega : \chi \Rightarrow \theta$.

- Una modificación ω se dice *invertible* si existe otra modificación $\overline{\omega}$ tal que $\omega_A \overline{\omega}_A = \mathrm{id}$ y $\overline{\omega}_A \omega_A = \mathrm{id}$, para todo $A \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{B})$.
- Dados los pseudofuntores $F, G : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, se denota por Pseu-Nat$(F, G)$ a la categoría cuyos objetos son las transformaciones pseudonaturales de F a G y los morfismos son las modificaciones.

Definición 3.1.12. Se dice que dos transformaciones pseudonaturales $(\eta, \eta^0), (\sigma, \sigma^0)$ son *equivalentes*, y se denota $(\eta, \eta^0) \sim (\sigma, \sigma^0)$, si existe una modificación invertible $\gamma : (\eta, \eta^0) \to (\sigma, \sigma^0)$.

Composición de pseudofuntores

Sean $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2, 3$ tres 2-categorías, $(F, \alpha, \phi) : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$, $(F', \alpha', \phi') : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_3$ pseudofuntores. La *composición* de los pseudofuntores se denota por $F' \circ F$ y se define como el pseudofuntor $(F' \circ F, \beta, \psi) : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_3$, donde para cada par de 0-celdas A, B

$$(F' \circ F)(A) = F'(F(A)),$$

$$(F' \circ F)_{A,B} : \mathcal{B}_1(A, B) \to \mathcal{B}_3(F'(F(A)), F'(F(B)))$$
$$(F' \circ F)_{A,B} = F'_{F(A),F(B)} \circ F_{A,B}.$$

Para cada $X \in \mathcal{B}_1(B, C), Y \in \mathcal{B}_1(A, B)$

$$\psi_A : I_{F'(F(A))} \to F'_{F(A),F(A)}(F_{A,A}(I_A)), \quad \psi_A = F'_{F(A),F(A)}(\phi_A)\phi'_{F(A)}.$$

$$(\beta_{A,B,C})_{X,Y} : (F' \circ F)_{B,C}(X) \circ (F' \circ F)_{A,B}(Y) \to (F' \circ F)_{A,C}(X \circ Y),$$

$$(\beta_{A,B,C})_{X,Y} = F'_{F(A),F(C)}((\alpha_{A,B,C})_{X,Y})(\alpha'_{F(A),F(B),F(C)})_{F(X),F(Y)}.$$

Composición horizontal de transformaciones pseudonaturales

Sean $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$ dos 2-categorías, $F_i : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$, $i = 1, 2, 3$ pseudofuntores y $(\sigma, \sigma^0) : F_1 \to F_2$, $(\theta, \theta^0) : F_2 \to F_3$ transformaciones pseudonaturales. La *composición horizontal* $(\tau, \tau^0) = (\theta, \theta^0) \circ (\sigma, \sigma^0) : F_1 \to F_3$ es la transformación pseudonatural definida por

$$\tau_A^0 = \theta_A^0 \circ \sigma_A^0, \quad \tau_X = (\theta_X \circ \mathrm{id}_{\sigma_A^0})(\mathrm{id}_{\theta_B^0} \circ \sigma_X),$$

para cada 0-celdas A, B y cada 1-celda $X \in \mathcal{B}_1(A, B)$.

Definición 3.1.13. Sean $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ pseudofuntores. Se dice que una transformación pseudonatural $(\theta, \theta^0) : F \to G$ es una *equivalencia* si existe una transformación pseudonatural $(\theta', \theta'^0) : G \to F$ tal que $(\theta, \theta^0) \circ (\theta', \theta'^0) \sim \mathrm{id}_G$ y $(\theta', \theta'^0) \circ (\theta, \theta^0) \sim \mathrm{id}_F$. En tal caso, se dice que F y G son *pseudofuntores equivalentes* y se denota $F \sim G$.

Composición horizontal de modificaciones

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ 2-categorías, $F_1, F_2, F_3 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ pseudofuntores, y $(\sigma, \sigma^0), (\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}^0) : F_1 \to F_2$, $(\theta, \theta^0), (\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta}^0) : F_2 \to F_3$ transformaciones pseudonaturales. Sean también $\gamma : (\sigma, \sigma^0) \to (\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}^0)$ y $\gamma' : (\theta, \theta^0) \to (\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta}^0)$ modificaciones. La *composición horizontal* de las modificaciones se define como $\gamma' \circ \gamma : (\theta, \theta^0) \circ (\sigma, \sigma^0) \to (\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta}^0) \circ (\widetilde{\sigma}, \widetilde{\sigma}^0)$, donde

$$(\gamma' \circ \gamma)_A = \gamma'_A \circ \gamma_A,$$

para toda 0-celda A en $\mathcal{B}$.

Composición vertical de modificaciones

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ 2-categorías, $F_1, F_2 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ pseudofuntores y $(\sigma, \sigma^0), (\tau, \tau^0), (\theta, \theta^0) : F_1 \to F_2$ transformaciones pseudonaturales. Sean también $\gamma : (\sigma, \sigma^0) \to (\tau, \tau^0)$ y $\gamma' : (\tau, \tau^0) \to (\theta, \theta^0)$ modificaciones. La *composición vertical* de las modificaciones se define como $\gamma'\gamma : (\sigma, \sigma^0) \to (\theta, \theta^0)$,

$$(\gamma'\gamma)_A = \gamma'_A \gamma_A,$$

para toda 0-celda A en $\mathcal{B}$.

Definición 3.1.14. Se dice que las 2-categorías $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son *biequivalentes* (respectivamente *2-equivalentes*) si existen pseudofuntores (respectivamente 2-funtores) $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ y $G : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ tales que $G \circ F \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$, $G \circ F \sim \mathrm{Id}_{\mathcal{B}'}$. En tal caso, se dice que F y G son *biequivalencias* (respectivamente *2-equivalencias*).

Proposición 3.1.15. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ 2-categorías y $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ un pseudofuntor. Si F es biesencialmente suryectivo, localmente esencialmente suryectivo y localmente fielmente pleno, entonces F es una biequivalencia.

Demostración. Sigue de 1.1.14. ❀

Composición de transformaciones pseudonaturales y 2-funtores

Sean $\mathcal{B}$ una 2-categoría y $F, G, H : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ 2-funtores. Si $\theta = (\theta, \theta^0) : H \to G$ es una transformación pseudonatural, se denotan $F\theta : F \circ H \to F \circ G$ y $\theta F : H \circ F \to G \circ F$ a las siguientes transformaciones pseudonaturales. Si A, B son 0-celdas y $X \in \mathcal{B}(A, B)$ es una 1-celda, entonces

$$(F\theta)_A^0 = F_{H(A),G(A)}(\theta_A^0), \quad (\theta F)_A^0 = \theta_{F(A)}^0,$$

$$(F\theta)_X = F_{H(A),G(B)}(\theta_X), \quad (\theta \circ F)_X = \theta_{F_{A,B}(X)}.$$

Si $\gamma : \sigma \Rightarrow \theta$ es una modificación, las nuevas modificaciones $F\gamma, \gamma F$ se definen de forma análoga.

Definición 3.1.16. Sea $\mathcal{B}$ una 2-categoría. Una *sub-2-categoría plena* de $\mathcal{B}$ es una 2-categoría $\mathcal{B}'$ tal que $\mathrm{Obj}\,(\mathcal{B}') \subseteq \mathrm{Obj}\,(\mathcal{B})$ y para cada par de 0-celdas $A, B \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{B}')$, $\mathcal{B}'(A,B) = \mathcal{B}(A,B)$.

Proposición 3.1.17. Toda 2-categoría (o bicategoría) es biequivalente a una 2-categoría donde toda 1-celda que es una equivalencia es también un isomorfismo.

Demostración. Como toda categoría es equivalente a una categoría esquelética, toda bicategoría $\mathcal{B}$ es biequivalente a una bicategoría localmente esquelética $\mathcal{B}'$, esto es, cada hom-categoría es esquelética. Entonces, en $\mathcal{B}'$ toda 1-celda que es una equivalencia es también un isomorfismo. Por el Lema de Yoneda para bicategorías [36, p.117], la incrustación de Yoneda

$$\mathcal{B}' \to \mathbf{Bicat}(\mathcal{B}', \mathbf{Cat}) : A \mapsto \mathcal{B}'^{\mathrm{op}}(A, -),$$

es localmente una equivalencia. Luego, $\mathcal{B}'$ es biequivalente a $\mathcal{B}''$, la sub-2-categoría plena de $\mathbf{Bicat}(\mathcal{B}'^{\mathrm{op}}, \mathbf{Cat})$ determina por el incrustamiento de Yoneda. Como toda equivalencia en $\mathcal{B}'$ es un isomorfismo, toda equivalencia en $\mathcal{B}''$ es un isomorfismo, y $\mathcal{B}$ es biequivalente a $\mathcal{B}''$. ❀

Ejemplos de 2-categorías

- La 2-categoría de categorías Cat : las 0-celdas son las categorías, las 1-celdas los funtores y las 2-celdas las transformaciones naturales.
- La 2-categoría *unidad* $\mathcal{I}$ es la 2-categoría con un único objeto $\star$, e $\mathcal{I}(\star, \star)$ es la categoría unidad.
- $\mathrm{Add}_{\Bbbk}$ es la 2-categoría cuyas 0-celdas son categorías aditivas $\Bbbk$-lineales finitas, las 1-celdas son funtores $\Bbbk$-lineales y las 2-celdas son transformaciones naturales $\Bbbk$-lineales.
- $\mathrm{Ab}_{\Bbbk}$ es la 2-categoría cuyas 0-celdas son las categorías Abelianas $\Bbbk$-lineales finitas, las 1-celdas los funtores $\Bbbk$-lineales y las 2-celdas las transformaciones naturales $\Bbbk$-lineales.
- Si $\mathcal{C}$ es una categoría monoidal estricta, se denota por $\underline{\mathcal{C}}$ a la 2-categoría con un única 0-celda $\star$ y $\underline{\mathcal{C}}(\star, \star) = \mathcal{C}$. La composición está dada por el producto tensorial de $\mathcal{C}$.
- Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita, se denota por ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$ a la 2-categoría cuyas 0-celdas son las categorías $\mathcal{C}$-módulo a izquierda, y si $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ son categorías $\mathcal{C}$-módulo, ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}\,(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. De forma análoga se define la 2-categoría $\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}$ de categorías $\mathcal{C}$-módulo a derecha y ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}_{\,e}$ la 2-categoría de categorías $\mathcal{C}$-módulo a izquierda exactas.

3.2. 2-Categorías monoidales

En esta sección se define 2-categoría monoidal y homomorfismo monoidal débil. Además, se introduce la modificación de comparación, la cual será de gran utilidad en las secciones siguientes.

Sean las 2-categorías $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$. Se define la 2-categoría $\mathbf{2Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ donde:

- 0-celdas: pseudofuntores de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$;
- 1-celdas: transformaciones pseudonaturales;
- 2-celdas: modificaciones.

Notación 3.2.1. A la 2-categoría $\mathbf{2Cat}(\mathcal{B}, \mathrm{Add}_{\Bbbk})$ se la denota $\mathrm{Rep}(\mathcal{B})$ y se la llama la 2-categoría de *representaciones* de $\mathcal{B}$.

Para las 2-categorías $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ se define el pseudofuntor *producto tensorial*

$$\otimes : \mathbf{2Cat}(\mathcal{B}', \mathcal{B}'') \times \mathbf{2Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \to \mathbf{2Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{B}'')$$

de la siguiente manera:

- El producto tensorial de pseudofuntores se define como la composición de pseudofuntores.
- El producto tensorial de transformaciones pseudonaturales se define como

$$\Big(\begin{tikzcd} \mathcal{B}' \arrow[r, bend left, "{(G,\lambda,\phi)}"] \arrow[r, bend right, "{(G',\lambda',\phi')}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{B}'' \end{tikzcd} \Big) \otimes \Big(\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "{(F,\mu,\psi)}"] \arrow[r, bend right, "{(F',\mu',\psi')}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{B}' \end{tikzcd} \Big) = \Big(\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "GF"] \arrow[r, bend right, "G'F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\otimes\alpha"] & \mathcal{B}'' \end{tikzcd} \Big),$$

donde

$$(\beta \otimes \alpha)_A = \beta_{F'(A)} \circ G(\alpha_A)$$
$$(\beta \otimes \alpha)_X = (\beta_{F'(X)} \circ \mathrm{id}_{G(\alpha^0_A)})(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(B)}} \circ \lambda^{-1}_{F'(X),\alpha^0_A})(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(B)}} \circ G(\alpha_X))(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(B)}} \circ \lambda_{\alpha^0_B,F(X)})$$

Proposición 3.2.2. El producto tensorial de transformaciones pseudonaturales es una transformación pseudonatural.

Demostración. Hay que probar las siguientes igualdades:

$$(\lambda')^{-1}_{F'(X),F'(Y)} \circ \mathrm{id}_{\beta^0_{F'(A)}} \circ \mathrm{id}_{G(\alpha^0_A)})(G'((\mu')^{-1}_{X,Y}) \circ \mathrm{id}_{\beta^0_{F'(A)}} \circ \mathrm{id}_{G(\alpha^0_A)})(\beta_{F'(X\circ Y)} \circ \mathrm{id}_{G(\alpha^0_A)})\circ$$
$$(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(C)}} \circ \lambda^{-1}_{F'(X\circ Y),\alpha^0_A})(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(C)}} \circ G(\alpha_{X\circ Y}))(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(C)}} \circ \lambda_{\alpha^0_C,F(X\circ Y)}) =^{\bigstar}$$
$$(\mathrm{id}_{G'F'(X)} \circ \beta_{F'(Y)} \circ \mathrm{id}_{G(\alpha^0_A)})(\mathrm{id}_{G'F'(X)} \circ \mathrm{id}_{\beta^0_{F'(B)}} \circ \lambda^{-1}_{F'(Y),\alpha^0_A})(\mathrm{id}_{G'F'(X)} \circ \mathrm{id}_{\beta^0_{F'(B)}} \circ G(\alpha_Y))\circ$$
$$(\mathrm{id}_{G'F'(X)} \circ \mathrm{id}_{\beta^0_{F'(B)}} \circ \lambda_{\alpha^0_B,F(Y)})(\beta_{F'(X)} \circ \mathrm{id}_{G(\alpha^0_B)} \circ \mathrm{id}_{GF(Y)})(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(C)}} \circ \lambda^{-1}_{F'(X),\alpha^0_B} \circ \mathrm{id}_{GF(Y)})\circ$$
$$(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(C)}} \circ G(\alpha_X) \circ \mathrm{id}_{GF(Y)})(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(C)}} \circ \lambda_{\alpha^0_C,F(X)} \circ \mathrm{id}_{GF(Y)})(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(C)}} \circ \mathrm{id}_{G(\alpha^0_C)} \circ \lambda^{-1}_{F(X),F(Y)})\circ$$
$$(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(C)}} \circ \mathrm{id}_{G(\alpha^0_C)} \circ G(\mu^{-1}_{X,Y})).$$

$$(G'(\psi'_A) \circ \mathrm{id}_{\beta^0_{F'(A)}} \circ \mathrm{id}_{G(\alpha^0_A)})(\phi'_{F(A)} \circ \mathrm{id}_{\beta^0_{F'(A)}} \circ \mathrm{id}_{G(\alpha^0_A)}) =^{\maltese}$$
$$(\beta_{F'(I_A)} \circ \mathrm{id}_{G(\alpha^0_A)})(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(A)}} \circ \lambda^{-1}_{F'(I_A),\alpha^0_A})(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(A)}} \circ G(\alpha_{I_A}))\circ$$
$$(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(A)}} \circ \lambda_{\alpha^0_A,F(I_A)})(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(A)}} \circ \mathrm{id}_{G(\alpha^0_A)} \circ G(\psi_A))(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(A)}} \circ id_{G(\alpha^0_A)} \circ \phi_{F(A)}).$$

La igualdad $\bigstar$es consecuencia de:
Relación 1: α es transformación pseudonatural

$$(\lambda_{F'(X)\circ F'(Y),\alpha^0_A})(G((\mu')^{-1}_{X,Y}) \circ \mathrm{id}_{G(\alpha^0_A)})(\lambda^{-1}_{F'(X\circ Y),\alpha^0_A})(G(\alpha_{X\circ Y})) =$$
$$(\lambda_{F'(X),F(Y)\circ\alpha^0_A})(\mathrm{id}_{GF'(X)} \circ G(\alpha_Y))(\lambda^{-1}_{F'(X),\alpha^0_B\circ F(Y)})\circ$$
$$(\lambda_{F'(X)\circ\alpha^0_B,F(Y)})(G(\alpha_X) \circ \mathrm{id}_{GF(Y)})(\lambda^{-1}_{\alpha^0_C\circ F(X),F(Y)})\circ$$

$$(\lambda_{\alpha^0_C, F(X)\circ F(Y)})(\mathrm{id}_{G(\alpha^0_C)\circ G(\mu^{-1}_{X,Y})})(\lambda^{-1}_{\alpha^0_C, F(X\circ Y)}).$$

Relación 2: β_Z es transformación natural en Z

$$\beta_{F'(X\otimes Y)} = (G'((\mu')^{-1}_{X,Y}) \circ \mathrm{id}_{\beta^0_{F'(A)}})(\beta_{F'(X)\circ F'(Y)})(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(C)}} \circ G((\mu')^{-1}_{X,Y})).$$

Relación 3: β es transformación pseudonatural

$$(G'((\mu')^{-1}_{X,Y}) \circ \mathrm{id}_{\beta^0_{F'(A)}})(\beta_{F'(X)\circ F'(Y)})(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(C)}} \circ G((\mu')^{-1}_{X,Y})) =$$

$$(G'(\mu'_{X,Y}) \circ \mathrm{id}_{\beta^0_{F'(A)}})(\lambda_{F'(X),F'(Y)} \circ \mathrm{id}_{\beta^0_{F'(A)}})(\mathrm{id}_{G'F'(X)} \circ \beta_{F'(Y)})\circ$$

$$(\beta_{F'(X)} \circ \mathrm{id}_{GF'(Y)})(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(C)}} \circ \lambda_{F'(X),F'(Y)})(\mathrm{id}_{\beta^0_{F'(C)}} \circ G((\mu')^{-1}_{X,Y})).$$

Relación 4: los axiomas que satisface λ

Usando las relaciones correspondientes se prueba la igualdad ✢. ❀

- El producto tensorial de modificaciones $\omega_A : \beta_A \to \beta'_A$ y $\omega'_A : \alpha_A \to \alpha'_A$ se define como $(\omega \otimes \omega')_A := \omega_{F'(A)} \circ G(\omega'_A)$.

Si $\alpha : F \to F'$ y $\beta : H \to H'$ son transformaciones pseudonaturales entre los pseudofuntores $F, F' \in \mathbf{2Cat}(\mathcal{B}', \mathcal{B}''), H, H' \in \mathbf{2Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, entonces existe una modificación

$$\begin{tikzcd}
 & F'H \arrow[dr, "\mathrm{id}_{F'}\otimes\beta"] & \\
FH \arrow[ur, "\alpha\otimes\mathrm{id}_H"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_H\otimes\beta"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow c_{\alpha,\beta}"] & & F'H' \\
 & FH' \arrow[ur, "\alpha\otimes\mathrm{id}_{H'}"'] &
\end{tikzcd}$$

dada por

$$(c_{\alpha,\beta})_A := \alpha^{-1}_{\beta_A} : F'(\beta_A) \circ \alpha_{H(A)} \to \alpha_{H'(A)} \circ F(\beta_A). \tag{3.2.3}$$

Esta modificación se llama *modificación de comparación.*

Observación 3.2.4. El producto tensorial es estrictamente asociativo para pseudofuntores, pero no para transformaciones pseudonaturales. Sin embargo, existe una asociatividad a

$$\begin{tikzcd}
GFH \arrow[r, bend left, "(\alpha\otimes\beta)\otimes\gamma"] \arrow[r, bend right, "\alpha\otimes(\beta\otimes\gamma)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow a_{\alpha,\beta,\gamma}"] & G'F'H'
\end{tikzcd}$$

para transformaciones pseudonaturales $\alpha : G \to G'$, $\beta : F \to F'$ y $\gamma : H \to H'$, dada por la siguiente modificación

$$(a_{\alpha,\beta,\gamma})_A : \alpha_{F'H'(A)} \circ G(\beta_{H'(A)}) \circ GF(\gamma_A) \to \alpha_{F'H'(A)} \circ G(\beta_{H'(A)} \circ F(\gamma_A))$$

donde $(a_{\alpha,\beta,\gamma})_A = \mathrm{id}_{\alpha_{F'H'(A)}} \circ G_2(\beta_{H'(A)}, F(\gamma_A))$. Es fácil ver que a satisface el Axioma del pentágono.

Definición 3.2.5. Una *2-categoría monoidal* es una 2-categoría $\mathcal{B}$ equipada de:

- una 0-celda distinguida $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$;
- para cada 0-celda $A \in \mathcal{B}$, 2-funtores $L_A, R_A : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, tales que $L_A(B) = R_B(A)$ para cada par de 0-celdas A, B; y
- para las 0-celdas $A, A', B, B' \in \mathcal{B}$ y las 1-celdas $X \in \mathcal{B}(A, A'), Y \in \mathcal{B}(B, B')$, 2-celdas invertibles

$$\xi_{X,Y} : (L_{A'})_{BB'}(Y) \circ (R_B)_{AA'}(X) \Rightarrow (R_{B'})_{AA'}(X) \circ (L_A)_{BB'}(Y),$$

tales que:

(I). $L_{\mathbf{1}} = R_{\mathbf{1}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$,

(II). para cada par de 0-celdas A, B,

$$L_A \circ L_B = L_{L_A(B)}, \quad L_A \circ R_B = R_B \circ L_A, \quad R_{R_B(A)} = R_B \circ R_A,$$

(III). para las 0-celdas A, A', B, B', C, C', y las 1-celdas $X \in \mathcal{B}(A, A'), Y \in \mathcal{B}(B, B'), Z \in \mathcal{B}(C, C')$

$$\xi_{L_A(Y),Z} = L_A(\xi_{Y,Z}), \quad \xi_{R_B(X),Z} = \xi_{X,L_B(Z)}, \quad \xi_{X,R_C(Y)} = R_C(\xi_{X,Y}),$$

(IV). para las 0-celdas $A, A', B, B' \in \mathcal{B}$ y las 1-celdas $X \in \mathcal{B}(A, A'), Y \in \mathcal{B}(B, B')$,

$$(\xi^{-1}_{X,-}, R_-(X)) : L_A \to L_{A'}, \quad (\xi_{-,Y}, L_-(Y)) : R_B \to R_{B'},$$

son transformaciones pseudonaturales.

Lema 3.2.6. Sea $\mathcal{B}$ una 2-categoría monoidal. Para cada 0-celda A y cada 1-celda $X \in \mathcal{B}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ se tiene que $\xi_{I_A,Y} = id_{I_A} = \xi_{Y,I_A}$.

Demostración. Inmediata. ❀

De ahora en adelante se denota $L_A(B) = A \otimes B = R_B(A)$, para cada par de 0-celdas A, B. Si A, B, C, D son 0-celdas y $X, X' \in \mathcal{B}(A, B), Y, Y' \in \mathcal{B}(C, D)$ son 1-celdas, y $\alpha : X \Rightarrow X'$, $\beta : Y \Rightarrow Y'$ son 2-celdas, entonces

$$X \otimes Y \in \mathcal{B}(A \otimes C, B \otimes D), \quad X \otimes Y = R_D(X) \circ L_A(Y),$$

$$\alpha \otimes \beta : X \otimes Y \to X' \otimes Y', \quad \alpha \otimes \beta = R_D(\alpha) \circ L_A(\beta).$$

Observación 3.2.7. La 2-categoría $\mathbf{2Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ es una 2-categoría monoidal.

Definición 3.2.8. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 2-categorías monoidales. Un *homomorfismo monoidal débil* es una colección

$$(\mathcal{F}, \chi, \omega, \iota, \kappa, \zeta) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}',$$

donde $\mathcal{F} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ es un pseudofuntor equipado con 1-celdas

$$\chi^0_{A,B} \in \mathcal{B}'(\mathcal{F}(A) \otimes \mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A \otimes B)), \iota \in \mathcal{B}'(\mathbf{1}, \mathcal{F}(\mathbf{1})),$$

para cada par de 0-celdas A, B de $\mathcal{B}$, y 2-celdas invertibles

$$\chi_{X,Y} : \chi^0_{A',B'} \circ (\mathcal{F}(X) \otimes \mathcal{F}(Y)) \Rightarrow \mathcal{F}(X \otimes Y) \circ \chi^0_{A,B},$$

para cada par de 1-celdas $X \in \mathcal{B}(A, A'), Y \in \mathcal{B}(B, B')$, tal que (χ, χ^0) es una transformación pseudonatural. Para todas las 0-celdas A, B, C, D, existen modificaciones invertibles

$$\omega_{A,B,C} : \chi_{A\otimes B,C} \circ (\chi_{A,B} \otimes I_{\mathcal{F}(C)}) \Rightarrow \chi_{A,B\otimes C} \circ (I_{\mathcal{F}(A)} \otimes \chi_{B,C}),$$

$$\kappa_A : \chi_{\mathbf{1},A} \circ (\iota \otimes I_{\mathcal{F}(A)}) \Rightarrow I_{\mathcal{F}(A)},$$

$$\zeta_A : \chi_{A,\mathbf{1}} \circ (I_{\mathcal{F}(A)} \otimes \iota) \Rightarrow I_{\mathcal{F}(A)},$$

tales que

$$\big(\mathrm{id}_{\chi^0_{A,C}} \circ (\mathrm{id}_A \otimes \kappa_C)\big)\omega_{A,\mathbf{1},C} = \mathrm{id}_{\chi^0_{A,C}} \circ (\zeta_A \otimes \mathrm{id}_C), \tag{3.2.9}$$

$$\begin{aligned} &\big(\mathrm{id}_1 \circ (\mathrm{id}_A \otimes \omega_{B,C,D})\big)\big(\omega_{A,B\otimes C,D} \circ \mathrm{id}_2\big)\big(\mathrm{id}_3 \circ (\omega_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_D)\big) = \\ &= \big(\omega_{A,B,C\otimes D} \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_B \otimes \mathrm{id}_{\chi^0_{C,D}})\big)\big(\mathrm{id}_4 \circ \xi^{-1}_{\chi^0_{A,B},\chi^0_{C,D}}\big)\big(\omega_{A\otimes B,C,D} \circ \mathrm{id}_5\big) \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Aquí $\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{I_{\mathcal{F}(A)}}$, para cada 0-celda A y

$$\mathrm{id}_1 = \mathrm{id}_{\chi^0_{A,B\otimes C\otimes D}}, \quad \mathrm{id}_2 = \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_{\chi^0_{B,C}} \otimes \mathrm{id}_D, \quad \mathrm{id}_3 = \mathrm{id}_{\chi^0_{A\otimes B\otimes C,D}},$$

$$\mathrm{id}_4 = \mathrm{id}_{\chi^0_{A\otimes B,C\otimes D}}, \quad \mathrm{id}_5 = \mathrm{id}_{\chi^0_{A,B}} \otimes \mathrm{id}_C \otimes \mathrm{id}_D.$$

Observación 3.2.11. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 2-categorías monoidales. Existe un homomorfismo monoidal débil *trivial* $\Upsilon : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$. Para cada par de 0-celdas A, B, $\Upsilon(A) = \mathbf{1}$, y $\Upsilon_{A,B} : \mathcal{B}(A, B) \to \mathcal{B}'(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ es el funtor que manda cada 1-celda $X \in \mathcal{B}(A, B)$ a $I_{\mathbf{1}}$, y para cada 2-celda $\alpha : X \Rightarrow Y$, $\Upsilon(\alpha) = \mathrm{id}_{I_{\mathbf{1}}}$. En este caso, ω, κ y ζ son las identidades.

3.3. El centro de una 2-categoría

A continuación se define el centro de pseudofuntores y el centro de 2-categorías. Se prueba que si $\mathcal{H} : {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod} \to {}_{\mathcal{C}_1}\mathrm{Mod}$ es el pseudofuntor de olvido, donde $\mathcal{D} = \oplus_{g\in G}\mathcal{C}_g$ es una categoría tensorial G-graduada, entonces el centro de $\mathcal{H}$ es monoidalmente equivalente al centro relativo de $\mathcal{D}$.

Definición 3.3.1. Sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 2-categorías y $(\mathcal{H}, \alpha) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ un pseudofuntor unitario. Se denota por $\mathcal{Z}(\mathcal{H}) = \mathbf{2Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ a la categoría de transformaciones pseudonaturales del pseudofuntor $\mathcal{H}$. Se define el *centro* de la 2-categoría $\mathcal{B}$, y se denota $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$, como

$$\mathcal{Z}(\mathcal{B}) = \mathcal{Z}(\mathrm{Id}_{\mathcal{B}}).$$

Observación 3.3.2. La categoría $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$ es una categoría monoidal con el producto tensorial descripto en la sección anterior.

Explícitamente, los objetos en $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$ son pares (V, σ), donde

$$V = \{V_A \in \mathcal{B}'(\mathcal{H}(A), \mathcal{H}(A)) \text{ 1-celdas, para todo } A \in \mathcal{B}\},$$

$$\sigma = \{\sigma_X : V_B \circ \mathcal{H}_{A,B}(X) \to \mathcal{H}_{A,B}(X) \circ V_A\},$$

donde, para todo $X \in \mathcal{B}(A, B)$, σ_X es un isomorfismo natural tal que

$$\sigma_{I_A} = \mathrm{id}_{V_A}, (\alpha_{X,Y} \circ \mathrm{id}_{V_A})\sigma_{X\circ Y} = (\mathrm{id}_{\mathcal{H}(X)} \circ \sigma_Y)(\sigma_X \circ \mathrm{id}_{\mathcal{H}(Y)})(\mathrm{id}_{V_B} \circ \alpha_{X,Y}),$$

para toda terna de 0-celdas $A, B, C \in \mathcal{B}$, y todo par de 1-celdas $X \in \mathcal{B}(C, B)$, $Y \in \mathcal{B}(A, C)$.

Si (V,σ), (W,τ) son dos objetos en $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$, un morfismo $f : (V,\sigma) \to (W,\tau)$ en $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$ es una colección de 2-celdas $f_A : V_A \Rightarrow W_A$, $A \in \mathcal{B}$ tal que

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{H}(X)} \circ f_A)\sigma_X = \tau_X(f_B \circ \mathrm{id}_{\mathcal{H}(X)}),$$

para toda 1-celda $X \in \mathcal{B}(A,B)$.

El producto monoidal de $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$ está dado de la siguiente manera:

Sean $(V,\sigma), (W,\tau)$ dos objetos en $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$. Entonces $(V,\sigma)\otimes(W,\tau) = (V\otimes W, \sigma\otimes\tau)$, donde para cada par de 0-celdas $A, B \in \mathcal{B}$, y $X \in \mathcal{B}(A,B)$

$$(V\otimes W)_A = V_A \circ W_A, \quad (\sigma\otimes\tau)_X = (\sigma_X \circ \mathrm{id}_{W_A})(\mathrm{id}_{V_B} \circ \tau_X).$$

Si $(V,\sigma), (V',\sigma'), (W,\tau), (W',\tau') \in \mathcal{Z}(\mathcal{H})$ son objetos, y $f : (V,\sigma) \to (V',\sigma')$, $f' : (W,\tau), (W',\tau')$ son morfismos en $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$, entonces $f\otimes f' : (V,\sigma)\otimes(V',\sigma') \to (W,\tau)\otimes(W',\tau')$ se define como

$$(f\otimes f')_A = f_A \circ f'_A,$$

para toda 0-celda A. La unidad $(\mathbf{1},\iota) \in \mathcal{Z}(\mathcal{H})$ es

$$\mathbf{1}_A = I_A, \quad \iota_X = \mathrm{id}_X,$$

para todo par de 0-celdas A, B y toda 1-celda $X \in \mathcal{B}(A,B)$.

Observación 3.3.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal estricta, entonces $\mathcal{Z}(\underline{\mathcal{C}}) = \mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Luego, el centro de 2-categorías generaliza el centro de categorías monoidales.

El centro relativo de categorías G-graduadas

Sea $\mathcal{D} = \oplus_{g\in G}\mathcal{C}_g$ una categoría tensorial G-graduada, donde $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$. El funtor inclusión $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ induce el pseudofuntor de olvido $\mathcal{H} : {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod} \to {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$.

Proposición 3.3.4. Existe una equivalencia monoidal $\mathcal{Z}(\mathcal{H}) \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$.

Demostración. Se define el funtor $\mathcal{F} : \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}) \to \mathcal{Z}(\mathcal{H})$ de la siguiente manera. Para cada $(V,\gamma) \in \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$, sea $\mathcal{F}(V,\gamma) = (W^V,\tau)$. Donde, para cada $\mathcal{M} \in {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}$, $W^V_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ es el funtor de $\mathcal{C}$-módulos dado por

$$W^V_{\mathcal{M}}(M) = V\overline{\otimes}M.$$

La estructura de funtor de $\mathcal{C}$-módulos de $W^V_{\mathcal{M}}$ está dada por

$$c_{X,M} : W^V_{\mathcal{M}}(X\overline{\otimes}M) \to X\overline{\otimes}W^V_{\mathcal{M}}(M),$$

donde $c_{X,M}$ es la siguiente composición:

$$W^V_{\mathcal{M}}(X\overline{\otimes}M) = V\overline{\otimes}(X\overline{\otimes}M) \xrightarrow{m^{-1}_{V,X,M}} (V\otimes X)\overline{\otimes}M \xrightarrow{\gamma_X^{-1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M} (X\otimes V)\overline{\otimes}M$$

$$\xrightarrow{m_{X,V,M}} X\overline{\otimes}(V\overline{\otimes}M) = X\overline{\otimes}W^V_{\mathcal{M}}(M),$$

para cada $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$. Luego $(W^V_{\mathcal{M}}, c)$ es un funtor de $\mathcal{C}$-módulos.

Ahora se define τ: sean $\mathcal{M},\mathcal{N} \in {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}$, y $(G,d): \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un funtor de $\mathcal{D}$-módulos, entonces

$$\tau_{(G,d)} : W^V_{\mathcal{N}} \circ G \to G \circ W^V_{\mathcal{M}},$$

$$(\tau_{(G,d)})_M : V\overline{\otimes}G(M) \to G(V\overline{\otimes}M), (\tau_{(G,d)})_M = d^{-1}_{V,M},$$

para cada $M \in \mathcal{M}$. Así, $\tau_{(G,d)}$ es un isomorfismo natural de $\mathcal{C}$-módulos.

Ahora, se define el funtor $\mathcal{F}$ en morfismos. Sean (V,γ), (V',γ') objetos en $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$ y $f : (V,\gamma) \to (V',\gamma')$ una flecha en $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$. Se define $\mathcal{F}(f) : (W^V,\tau) \to (W^{V'},\tau')$, de la siguiente manera. Para cada $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{F}(f)_{\mathcal{M}} : W^V_{\mathcal{M}} \to W^{V'}_{\mathcal{M}}, \quad (\mathcal{F}(f)_{\mathcal{M}})_M = f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M,$$

para todo $M \in \mathcal{M}$.

A continuación, se define el funtor $\mathcal{G} : \mathcal{Z}(\mathcal{H}) \to \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$, que será el inverso de $\mathcal{F}$. Cada objeto $X \in \mathcal{C}$ induce un funtor de $\mathcal{D}$-módulos $J_X : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, $J_X(V) = V \otimes X$.

Sea (W,τ) un objeto en $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$. Para cada $\mathcal{D}$-módulo $\mathcal{M}$, $W_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ es un funtor de $\mathcal{C}$-módulos. Lo denotaremos por $W_{\mathcal{M}} = (W_{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}})$. En particular, $W_{\mathcal{D}}(\mathbf{1}) \in \mathcal{D}$. Se tiene un isomorfismo natural de $\mathcal{C}$-módulos $(\tau_{\mathcal{D},\mathcal{D}})_{J_X} : W_{\mathcal{D}} \circ J_X \xrightarrow{\backsimeq} J_X \circ W_{\mathcal{D}}$. Luego, se tienen isomorfismos

$$((\tau_{\mathcal{D},\mathcal{D}})_{J_X})_{\mathbf{1}} : W_{\mathcal{D}}(X) \xrightarrow{\backsimeq} W_{\mathcal{D}}(\mathbf{1}) \otimes X.$$

Usando que $W_{\mathcal{D}}$ tiene una estructura de $\mathcal{C}$-módulo, existe un isomorfismo natural

$$c^{\mathcal{D}}_{X,\mathbf{1}} : X \otimes W_{\mathcal{D}}(\mathbf{1}) \to W_{\mathcal{D}}(X).$$

Sea γ el isomorfismo natural definido por

$$\gamma_X : X\otimes W_{\mathcal{D}}(\mathbf{1}) \to W_{\mathcal{D}}(\mathbf{1})\otimes X, \quad \gamma_X = ((\tau_{\mathcal{D},\mathcal{D}})_{J_X})_{\mathbf{1}} \circ c_{X,\mathbf{1}}.$$

La transformación natural γ satisface 1.5.19, ya que $(\tau_{\mathcal{D},\mathcal{D}})_{J_X}$ es una transformación natural de $\mathcal{C}$-módulos. Luego $(W_{\mathcal{D}}(\mathbf{1}),\gamma) \in \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$. Entonces, se define $\mathcal{G}(W,\tau) = (W_{\mathcal{D}}(\mathbf{1}),\gamma)$.

Sea $f : (W,\tau) \to (W',\tau')$ un morfismo en $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$, entonces $(f_{\mathcal{D}})_{\mathbf{1}}$ es un morfismo en $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$, ya que $f_{\mathcal{D}}$ es una transformación natural de $\mathcal{C}$-módulos. Sea $\mathcal{G}(f) = (f_{\mathcal{D}})_{\mathbf{1}}$. Se sigue que $\mathcal{G}$ está bien definida y que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son inversos. ❀

Corolario 3.3.5. $\mathcal{Z}({}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}) \backsimeq \mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

Demostración. Se sigue de la proposición anterior tomando $\mathcal{D} = \mathcal{C}$ y $\mathcal{H} : {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod} \to {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$ el pseudofuntor identidad. ❀

Capítulo 4

Acción de un grupo sobre una 2-categoría

A lo largo de este capítulo se presentan los resultados principales de la Tesis, los cuales corresponden al trabajo [3].

Se describe explícitamente la definición de acción de un grupo sobre una 2-categoría. Dadas las 2-categorías $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ equipadas con acciones de un grupo G, se define la noción de *G-pseudofuntor* entre ellas. Cuando un G-pseudofuntor es una biequivalencia se dice que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son *G-biequivalentes*. Además, se define la noción de *transformación G-pseudonatural* y la noción de *G-modificación*. Todo ello forma una 2-categoría denotada por $\mathbf{2Cat}^G(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

La *2-categoría equivariante* se define como $\mathcal{B}^G = \mathbf{2Cat}^G(\mathcal{I}, \mathcal{B})$, donde $\mathcal{I}$ es la 2-categoría unidad con acción trivial de G.

Se prueba un teorema de coherencia, el cual establece que toda 2-categoría con una acción de un grupo G es G-biequivalente a otra 2-categoría donde la acción de G es *estricta*.

Se desarrolla un ejemplo proveniente de las categorías tensoriales graduadas. Si $\mathcal{D} = \oplus_{g \in G} \mathcal{D}_g$ es una categoría tensorial G-graduada, entonces el grupo G actúa sobre la 2-categoría ${}_{\mathcal{D}_1}\mathrm{Mod}$ de $\mathcal{D}_1$-módulos a izquierda. La correspondiente 2-categoría equivariante $({}_{\mathcal{D}_1}\mathrm{Mod}^{\,\mathrm{op}})^G$ es biequivalente a ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}$.

Finalmente, se prueba que existe una equivalencia monoidal $\mathcal{Z}(\mathcal{B}^G) \simeq \mathcal{Z}(\Phi)^G$, donde $\Phi : \mathcal{B}^G \to \mathcal{B}$ es el pseudofuntor de olvido. Cuando se aplica esta equivalencia a ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$, se recupera el resultado de [15].

4.1. Acción de un grupo sobre una 2-categoría

En la presente sección se definen: acción de un grupo G sobre una 2-categoría, acción estricta, G-pseudofuntor, transformación G-pseudonatural y G-modificación. Al final de la sección se listan los ejemplos.

Definición 4.1.1. Sea G un grupo. Se denota por $\underline{\underline{G}}$ a la 2-categoría que tiene como 0-celdas a los elementos del grupo G. Y para cada par $g, h \in G$

$$\underline{\underline{G}}(g,h) = \begin{cases} \text{la categoría unidad si} \quad g = h \\ \emptyset \ \text{ si} \quad\ \ g \neq h. \end{cases}$$

La 2-categoría $\underline{\underline{G}}$ es monoidal.

Definición 4.1.2. Sean G un grupo y $\mathcal{B}$ una 2-categoría. Se define una *acción* de G sobre $\mathcal{B}$ como un homomorfismo monoidal débil $(\mathcal{F}, \chi, \omega, \iota, \kappa, \zeta) : \underline{\underline{G}} \to \mathbf{2Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Explícitamente, una acción de G sobre la 2-categoría $\mathcal{B}$ consiste en:

- una familia de pseudofuntores $F_g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, $g \in G$;
- equivalencias pseudonaturales $(\chi_{g,h}, \chi^0_{g,h}) : F_g \circ F_h \to F_{gh}$, $g, h \in G$;
- una equivalencia pseudonatural $\iota : \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} \to F_1$;
- para cada $g, h, f \in G$ modificaciones invertibles

$$\omega_{g,h,f} : \chi_{gh,f} \circ (\chi_{g,h} \otimes \mathrm{id}_{F_f}) \Rightarrow \chi_{g,hf} \circ (\mathrm{id}_{F_g} \otimes \chi_{h,f}),$$

$$\kappa_g : \chi_{1,g} \circ (\iota \otimes \mathrm{id}_{F_g}) \Rightarrow \mathrm{id}_{F_g}, \quad \zeta_g : \chi_{g,1} \circ (\mathrm{id}_{F_g} \otimes \iota) \Rightarrow \mathrm{id}_{F_g};$$

tal que para toda 0-celda A

$$1_{(\chi^0_{g,f})_A} \circ F_g(\kappa_f)_A (\omega_{g,1,f})_A = 1_{(\chi^0_{g,f})_A} \circ (\zeta_g)_{F_f(A)}, \tag{4.1.3}$$

$$\begin{aligned} &\big(\mathrm{id}_3 \circ (F_g(\omega_{h,f,k})_A)\big)\big(\omega_{g,hf,k} \circ \mathrm{id}_2\big)\big(\mathrm{id}_{(\chi^0_{ghf,k})_A} \circ (\omega_{g,h,f})_{F_k(A)}\big) = \\ &= \big((\omega_{g,h,fk})_A \circ \mathrm{id}_4)\big)\big(\mathrm{id}_5 \circ (\chi_{g,h})_{\chi^0_{f,k}}\big)\big((\omega_{gh,f,k})_A \circ \mathrm{id}_6\big), \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

para todo $g, h, f, k \in G$. Donde,

$$\mathrm{id}_2 = 1_{F_g(\chi^0_{h,f})_{F_k(A)}}, \quad \mathrm{id}_3 = 1_{(\chi^0_{g,hfk})_A}, \quad \mathrm{id}_4 = 1_{F_g F_h (\chi^0_{f,k})_A},$$

$$\mathrm{id}_5 = 1_{(\chi^0_{gh,fk})_A}, \quad \mathrm{id}_6 = 1_{(\chi^0_{g,h})_{F_f F_k(A)}}.$$

En la ecuación (4.1.4) se han omitido los isomorfismos de asociatividad de los pseudofuntores F_g.

En los siguientes diagramas se denota por $\overline{g}$ al pseudofuntor F_g, la composición de funtores como la yuxtaposición y al producto tensorial de transformaciones pseudonaturales también como la yuxtaposición. Diagramáticamente, tenemos modificaciones

$$\begin{tikzcd}
\overline{g}\,\overline{h}\,\overline{f} \arrow[r, "\chi_{g,h}\otimes 1_{\overline{f}}"] \arrow[d, "1_{\overline{g}}\otimes\chi_{h,f}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\omega_{g,h,f}"] & \overline{gh}\,\overline{f} \arrow[d, "\chi_{gh,f}"] \\
\overline{g}\,\overline{hf} \arrow[r, "\chi_{g,hf}"'] & \overline{ghf},
\end{tikzcd}$$

tales que los siguientes diagramas son iguales para todo $g, h, f, k \in G$,

$$\begin{tikzcd}
& \overline{gh}\,\overline{f}\,\overline{k} \arrow[rr, "\chi_{gh,f}\otimes 1_{\overline{k}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\omega_{g,h,f}\otimes 1_{\overline{k}}"] & & \overline{ghf}\,\overline{k} \arrow[dr, "\chi_{ghf,k}"] & \\
\overline{g}\,\overline{h}\,\overline{f}\,\overline{k} \arrow[ur, "\chi_{g,h}\otimes 1_{\overline{f}}\otimes 1_{\overline{k}}"] \arrow[rr, "1_{\overline{g}}\otimes\chi_{h,f}\otimes 1_{\overline{k}}"] \arrow[dr, "1_{\overline{g}}\otimes 1_{\overline{h}}\otimes\chi_{f,k}"'] & & \overline{g}\,\overline{hf}\,\overline{k} \arrow[ur, "\chi_{g,hf}\otimes 1_{\overline{k}}"] \arrow[dr, "1_{\overline{g}}\otimes\chi_{hf,k}"] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\omega_{g,hf,k}"] & & \overline{ghfk} \\
& \overline{g}\,\overline{h}\,\overline{fk} \arrow[rr, "1_{\overline{g}}\otimes\chi_{h,fk}"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow 1_{\overline{g}}\otimes\omega_{h,f,k}"] & & \overline{g}\,\overline{hfk} \arrow[ur, "\chi_{g,hfk}"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.1.5}$$

$$\Vert$$

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{gh}\;\overline{f}\;\overline{k} \arrow[rr, "\chi_{gh,f}\otimes 1_{\overline{k}}"] \arrow[dr, "1_{\overline{gh}}\otimes\chi_{f,k}"] & & \overline{ghf}\;\overline{k} \arrow[dr, "\chi_{ghf,k}"] & \\
\overline{g}\;\overline{h}\;\overline{f}\;\overline{k} \arrow[ur, "\chi_{g,h}\otimes 1_{\overline{f}}\otimes 1_{\overline{k}}"] \arrow[dr, "1_{\overline{g}}\otimes 1_{\overline{h}}\otimes\chi_{f,k}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow c_{\chi_{g,h},\chi_{f,k}}"] & & \overline{gh}\;\overline{fk} \arrow[rr, "\chi_{gh,fk}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\omega_{gh,f,k}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\omega_{g,h,fk}"] & & \overline{ghfk} \\
 & \overline{g}\;\overline{h}\;\overline{fk} \arrow[ur, "\chi_{g,h}\otimes 1_{\overline{fk}}"'] \arrow[rr, "1_{\overline{g}}\otimes\chi_{h,fk}"'] & & \overline{g}\;\overline{hfk} \arrow[ur, "\chi_{g,hfk}"'] &
\end{tikzcd}$$

En el diagrama anterior se hace uso de la modificación de comparación c definida en (3.2.3).

Notación 4.1.6. Si un grupo G actúa sobre una 2-categoría $\mathcal{B}$, se dice que $\mathcal{B}$ es una *G-2-categoría*, o que existe en $\mathcal{B}$ una *G-acción.*

Definición 4.1.7. Se dice que el grupo G actúa *trivialmente* sobre $\mathcal{B}$ si el homomorfismo monoidal débil $(\mathcal{F},\chi,\omega,\iota,\kappa,\zeta):\underline{\underline{G}}\to\mathbf{2Cat}(\mathcal{B},\mathcal{B})$ es el trivial. Es decir, para todo $g,h\in G$, los pseudofuntores F_g son las identidades, $\chi_{g,h}$ es la transformación pseudonatural identidad y todas las modificaciones son las identidades.

Definición 4.1.8. Una acción $(\mathcal{F},\chi,\omega,\iota,\kappa,\zeta):\underline{\underline{G}}\to\mathbf{2Cat}(\mathcal{B},\mathcal{B})$ se dice *unitaria* si F_g es un pseudofuntor unitario, $F_1=\mathrm{Id}_{\mathcal{B}}$, $\iota=\mathrm{id}$ y $\chi_{g,1}=\mathrm{id}_{F_g}=\chi_{1,g}$, $\kappa_g=\mathrm{id}=\zeta_g$ para todo $g\in G$. Una G-acción unitaria se denota simplemente como $(\mathcal{F},\chi,\omega)$.

Definición 4.1.9. Una acción $(\mathcal{F},\chi,\omega,\iota,\kappa,\zeta):\underline{\underline{G}}\to\mathbf{2Cat}(\mathcal{B},\mathcal{B})$ se dice *estricta* si cada pseudofuntor F_g es un 2-funtor, $F_g\circ F_h=F_{gh}$, y las transformaciones pseudonaturales $\chi_{g,h}$ y las modificaciones $\omega_{g,h,f}$ son las identidades para todo $g,h,f\in G$.

Como en la Proposición 2.1.8, se puede suponer que todas las acciones son unitarias. Sean $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ 2-categorías con acciones unitarias del grupo G:

$$(\mathcal{F},\chi,\omega):\underline{\underline{G}}\to\mathbf{2Cat}(\mathcal{B},\mathcal{B}),\;\;(\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{\chi},\widetilde{\omega}):\underline{\underline{G}}\to\mathbf{2Cat}(\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{B}}).$$

Definición 4.1.10. Un *G-pseudofuntor* entre $\mathcal{B}$ y $\widetilde{\mathcal{B}}$ es una terna $(\mathcal{H},\gamma,\Pi)$, donde

- $\mathcal{H}:\mathcal{B}\to\widetilde{\mathcal{B}}$ es un pseudofuntor unitario,
- para cada $g\in G$, equivalencias pseudonaturales $\gamma_g:\mathcal{H}\circ F_g\to\widetilde{F}_g\circ\mathcal{H}$,
- modificaciones invertibles $\Pi_{f,g}$, $\forall f,g\in G$

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{f}\mathcal{H}\overline{g} \arrow[rr, "1_{\widetilde{f}}\otimes\gamma_g"] & & \widetilde{f}\widetilde{g}\mathcal{H} \arrow[dr, "\widetilde{\chi_{f,g}}\otimes 1_{\mathcal{H}}"] & \\
\mathcal{H}\overline{f}\;\overline{g} \arrow[ur, "\gamma_f\otimes 1_{\overline{g}}"] \arrow[drr, "1_{\mathcal{H}}\otimes\chi_{f,g}"'] \arrow[rrrr, phantom, "\Downarrow\Pi_{f,g}"] & & & & \widetilde{fg}\mathcal{H} \\
 & & \mathcal{H}\overline{fg} \arrow[urr, "\gamma_{fg}"'] & &
\end{tikzcd}$$

tales que para todo $f, g, h \in G$

$$\gamma_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}, \quad \Pi_{g,1} = \mathrm{id}_{\gamma_g} = \Pi_{1,g}, \tag{4.1.11}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \widetilde{f}\widetilde{g}\mathcal{H}\overline{h} \arrow[drr, "1_{\widetilde{f}}1_{\widetilde{g}}\gamma_h"] & & & \\
 & \widetilde{f}\mathcal{H}\overline{g}\overline{h} \arrow[urr, "1_{\widetilde{f}}\gamma_g 1_{\overline{h}}"] \arrow[dr, "1_{\widetilde{f}\mathcal{H}}\chi_{g,h}"] \arrow[rrrr, phantom, "\Downarrow 1_{\widetilde{f}}\otimes\Pi_{g,h}"] & & & & \widetilde{f}\widetilde{g}\widetilde{h}\mathcal{H} \arrow[dl, "1_{\widetilde{f}}\widetilde{\chi_{g,h}}1_{\mathcal{H}}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\chi_{f,g}}1_{\widetilde{h}\mathcal{H}}"] & \\
\mathcal{H}\overline{f}\overline{g}\overline{h} \arrow[ur, "\gamma_f 1_{\overline{g}\,\overline{h}}"] \arrow[dr, "1_{\mathcal{H}\overline{f}}\chi_{g,h}"'] \arrow[rr, phantom, "c_{\gamma_f,\chi_{g,h}}"] & & \widetilde{f}\mathcal{H}\overline{gh} \arrow[rr, "1_{\widetilde{f}}\gamma_{gh}"] & & \widetilde{f}\widetilde{gh}\mathcal{H} \arrow[dr, "\widetilde{\chi_{f,gh}}1_{\mathcal{H}}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\widetilde{\omega}_{f,g,h}}{\Leftarrow}"] & & \widetilde{fg}\widetilde{h}\mathcal{H} \arrow[dl, "\widetilde{\chi_{fg,h}}1_{\mathcal{H}}"] \\
 & \mathcal{H}\overline{f}\;\overline{gh} \arrow[ur, "\gamma_f 1_{\overline{gh}}"'] \arrow[drr, "\chi_{f,gh}"'] \arrow[rrrr, phantom, "\Downarrow\Pi_{f,gh}"] & & & & \widetilde{fgh}\mathcal{H} & \\
 & & & \mathcal{H}\overline{fgh} \arrow[urr, "\gamma_{fgh}"'] & & &
\end{tikzcd} \tag{4.1.12}$$

$$||$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \widetilde{f}\widetilde{g}\mathcal{H}\overline{h} \arrow[drr, "1_{\widetilde{f}}1_{\widetilde{g}}\gamma_h"] \arrow[ddr, "\widetilde{\chi_{f,g}}1_{\mathcal{H}\overline{h}}"] & & & \\
 & \widetilde{f}\mathcal{H}\overline{g}\overline{h} \arrow[urr, "1_{\widetilde{f}}\gamma_g 1_{\overline{h}}"] \arrow[rrrr, phantom, "\Downarrow\Pi_{f,g}\otimes 1_{\overline{h}}"] & & & & \widetilde{f}\widetilde{g}\widetilde{h}\mathcal{H} \arrow[dr, "\widetilde{\chi_{f,g}}1_{\widetilde{h}\mathcal{H}}"] & \\
\mathcal{H}\overline{f}\overline{g}\overline{h} \arrow[ur, "\gamma_f 1_{\overline{g}\overline{h}}"] \arrow[rr, "1_{\mathcal{H}}\chi_{f,g}1_{\overline{h}}"] \arrow[dr, "1_{\mathcal{H}\overline{f}}\chi_{g,h}"'] & & \mathcal{H}\overline{fg}\;\overline{h} \arrow[rr, "\gamma_{fg}1_{\overline{h}}"] \arrow[ddr, "1_{\mathcal{H}}\chi_{fg,h}"] & & \widetilde{fg}\mathcal{H}\overline{h} \arrow[rr, "1_{\widetilde{fg}}\gamma_h"] \arrow[ur, phantom, "c_{\widetilde{\chi_{f,g}},\gamma_h}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\Pi_{fg,h}"] & & \widetilde{fg}\widetilde{h}\mathcal{H} \arrow[dl, "\widetilde{\chi_{fg,h}}1_{\mathcal{H}}"] \\
 & \mathcal{H}\overline{f}\;\overline{gh} \arrow[drr, "1_{\mathcal{H}}\chi_{f,gh}"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{1_{\mathcal{H}}\otimes\omega_{f,g,h}}{\Leftarrow}"] & & & & \widetilde{fgh}\mathcal{H} & \\
 & & & \mathcal{H}\overline{fgh} \arrow[urr, "\gamma_{fgh}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

en $\mathbf{2Cat}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$. En el diagrama anterior se hace uso de la modificación de comparación c definida en (3.2.3).

Definición 4.1.13. Sean $(\mathcal{H}, \gamma, \Pi), (\mathcal{H}', \gamma', \Pi')$ dos G-pseudofuntores. Una transformación G-*pseudonatural* es un par $(\theta, \{\theta_g\}_{g\in G})$, donde $\theta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ es una transformación pseudonatural, y θ_g son modificaciones invertibles

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}\overline{g} \arrow[r, "\gamma_g"] \arrow[d, "\theta\otimes 1_{\overline{g}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\theta_g"] & \widetilde{g}\mathcal{H} \arrow[d, "1_{\widetilde{g}}\otimes\theta"] \\
\mathcal{H}'\overline{g} \arrow[r, "\gamma'_g"] & \widetilde{g}\mathcal{H}'
\end{tikzcd}$$

tal que para todo $g, f \in G$, la ecuación

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}\overline{g}\;\overline{f} \arrow[rr, "\gamma_g 1_{\overline{f}}"] \arrow[d, "\theta 1_{\overline{g}}1_{\overline{f}}"'] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow\theta_g 1_{\overline{f}}"] & & \widetilde{g}\mathcal{H}\overline{f} \arrow[rr, "1_{\widetilde{g}}\gamma_f"] \arrow[d, "1_{\widetilde{g}}\theta 1_{\overline{f}}"] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow 1_{\widetilde{g}}\theta_f"] & & \widetilde{g}\widetilde{f}\mathcal{H} \arrow[rr, "\widetilde{\chi}_{g,f}1_{\mathcal{H}}"] \arrow[d, "1_{\widetilde{g}}1_{\widetilde{f}}\theta"'] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow c_{\theta,\widetilde{\chi_{g,f}}}"] & & \widetilde{gf}\mathcal{H} \arrow[d, "1_{\widetilde{gf}}\theta"] \\
\mathcal{H}'\overline{g}\;\overline{f} \arrow[rr, "\gamma'_g 1_{\overline{f}}"'] \arrow[drrr, "1_{\mathcal{H}'}\chi_{g,f}"'] & & \widetilde{g}\mathcal{H}'\overline{f} \arrow[rr, "1_{\widetilde{g}}\gamma'_f"] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\Downarrow\Pi'_{g,f}"] & & \widetilde{g}\widetilde{f}\mathcal{H}' \arrow[rr, "\widetilde{\chi_{g,f}}1_{\mathcal{H}'}"'] & & \widetilde{gf}\mathcal{H}' \\
 & & & \mathcal{H}'\overline{gf} \arrow[urrr, "\gamma'_{gf}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

$$||$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}\overline{g}\,\overline{f} \arrow[r, "\gamma_g 1_{\overline{f}}"'] \arrow[d, "\theta 1_{\overline{g}} 1_{\overline{f}}"'] \arrow[drr, "1_{\mathcal{H}}\chi_{g,f}"'] & \widetilde{g}\mathcal{H}\overline{f} \arrow[rr, "1_{\widetilde{g}}\gamma_f"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\Pi_{g,f}"] & \widetilde{g}\widetilde{f}\mathcal{H}' \arrow[r, "\widetilde{\chi_{g,f}}1_{\mathcal{H}}"'] & \widetilde{gf}\mathcal{H} \arrow[d, "1_{\widetilde{gf}}\theta"] \\
\mathcal{H}'\overline{g}\,\overline{f} \arrow[drr, "1_{\mathcal{H}'}\chi_{g,f}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow c^{-1}_{\theta,\chi_{g,f}}"] & & \mathcal{H}\overline{gf} \arrow[urr, "\gamma_{gf}"'] \arrow[d, "\theta 1_{\overline{gf}}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_{gf}"] & & \widetilde{gf}\mathcal{H}' \\
& & \mathcal{H}'\overline{gf} \arrow[urr, "\gamma'_{gf}"'] & &
\end{tikzcd}$$

se cumple en $\mathbf{2Cat}(\mathcal{B},\mathcal{B})$.

Definición 4.1.14. Sean $(\theta,\{\theta_g\}_{g\in G}),(\sigma,\{\sigma_g\}_{g\in G}) : (\mathcal{H},\gamma,\Pi) \to (\widetilde{\mathcal{H}},\widetilde{\gamma},\widetilde{\Pi})$ transformaciones G-pseudonaturales. Una *G-modificación* $\alpha : (\theta,\{\theta_g\}_{g\in G}) \Rightarrow (\sigma,\{\sigma_g\}_{g\in G})$ es una modificación $\alpha : \theta \Rightarrow \sigma$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}\overline{g} \arrow[r, "\gamma_g"] \arrow[d, bend right=60, "\sigma\otimes 1_{\overline{g}}"'] \arrow[d, bend left=60, "\theta\otimes 1_{\overline{g}}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha\otimes 1_{\overline{g}}}{\Leftarrow}"] & \widetilde{g}\mathcal{H} \arrow[d, "1_{\widetilde{g}}\theta_g"] \arrow[dl, phantom, "\Downarrow\theta_g"] \\
\mathcal{H}'\overline{g} \arrow[r, "\gamma'_g"'] & \widetilde{g}\mathcal{H}'
\end{tikzcd}$$

$$||$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}\overline{g} \arrow[r, "\gamma_g"] \arrow[d, "\sigma_g\otimes 1_{\overline{g}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\sigma_g"] & \widetilde{g}\mathcal{H} \arrow[d, bend right=60, "1_{\widetilde{g}}\otimes\sigma"'] \arrow[d, bend left=60, "1_{\widetilde{g}}\otimes\theta"] \arrow[d, phantom, "\overset{1_{\widetilde{g}}\otimes\alpha}{\Leftarrow}"] \\
\mathcal{H}'\overline{g} \arrow[r, "\gamma'_g"'] & \widetilde{g}\mathcal{H}'
\end{tikzcd}$$

Definición 4.1.15. Sean $(\mathcal{H}^1,\gamma^1,\Pi^1),(\mathcal{H}^2,\gamma^2,\Pi^2),(\mathcal{H}^3,\gamma^3,\Pi^3)$ G-pseudofuntores, y $(\theta,\{\theta_g\}_{g\in G}) : (\mathcal{H}^1,\gamma^1,\Pi^1) \to (\mathcal{H}^2,\gamma^2,\Pi^2)$, $(\sigma,\{\sigma_g\}_{g\in G}) : (\mathcal{H}^2,\gamma^2,\Pi^2) \to (\mathcal{H}^3,\gamma^3,\Pi^3)$ transformaciones G-pseudonaturales. La composición

$$(\sigma,\{\sigma_g\}_{g\in G}) \circ (\theta,\{\theta_g\}_{g\in G}) = (\rho,\{\rho_g\}_{g\in G})$$

se define de la siguiente manera. La transformación pseudonatural $\rho = \sigma\circ\theta$. Para cada 0-celda $A\in\mathcal{B}$ y cada $g\in G$

$$(\rho_g)_A = \big((\sigma_g)_A \circ \mathrm{id}_{\theta^0_{F_g(A)}}\big)\big(\mathrm{id}_{\widetilde{F}_g(\sigma^0_A)} \circ (\theta_g)_A)\big).$$

Aquí se está omitiendo la condición de asociatividad del pseudofuntor F_g. La composición de G-modificaciones es la composición usual de modificaciones.

Definición 4.1.16. $\mathbf{2Cat}^G(\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}})$ es la 2-categoría cuyas 0-celdas son los G-pseudofuntores, las 1-celdas son las transformaciones G-pseudonaturales y las 2-celdas son las G-modificaciones.

El siguiente resultado es consecuencia de [16, Corollary 8.3].

Proposición 4.1.17. $\mathbf{2Cat}^G(\mathcal{B},\widetilde{\mathcal{B}})$ es una 2-categoría. ❀

Definición 4.1.18. Se dice que las 2-categorías $\mathcal{B}$ y $\widetilde{\mathcal{B}}$ son *G-biequivalentes* si existe un G-pseudofuntor $\mathcal{H} : \mathcal{B} \to \widetilde{\mathcal{B}}$ que es una biequivalencia.

Lema 4.1.19 (Transporte de estructura)**.** Sea $\mathcal{B}$ una 2-categoría con acción de G dada por $(\mathcal{F}, \chi, \omega)$. Sean $\mathcal{H} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ una biequivalencia y

$$L_g : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}', \quad \gamma_g : \mathcal{H} \circ F_g \to L_g \circ \mathcal{H}$$

una familia G-indexada de pseudofuntores y equivalencias pseudonaturales, respectivamente. Entonces, existe en $\mathcal{B}'$ una G-acción (L, χ', ω') tal que $(\mathcal{H}, \gamma, \Pi) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ es una G-biequivalencia.

Demostración. Como γ_g y $\chi_{f,g}$ son equivalencias pseudonaturales, se pueden definir $\Pi_{f,g}$ y las equivalencias pseudonaturales $\chi'_{f,g} : L_f \circ L_g \to L_{fg}$, $f, g \in G$. El Axioma 4.1.12 determina unívocamente las modificaciones $\omega'_{f,g,h}$. El Axioma 4.1.5 sigue de los correspondientes axiomas de la G-acción dada por $(\mathcal{F}, \chi, \omega)$. El pseudofuntor $(\mathcal{H}, \gamma, \Pi) : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ es una G-biequivalencia por construcción. ❀

Corolario 4.1.20. Toda 2-categoría con una G-acción es G-biequivalente a una 2-categoría donde G actúa por 2-funtores, esto es, todos los F_g son 2-funtores.

Demostración. Por el Teorema de coherencia para pseudofuntores, ver [18, Section 2.3], toda bicategoría $\mathcal{B}$ es biequivalente a una 2-categoría $\mathrm{st}(\mathcal{B})$ tal que todo pseudofuntor $F : \mathrm{st}(\mathcal{B}) \to \mathrm{st}(\mathcal{B})$ es pseudonaturalmente equivalente a un 2-funtor. Entonces, por el Lema 4.1.19 se puede transportar la acción de $\mathcal{B}$ a una acción G-biequivalente en $\mathrm{st}(\mathcal{B})$ donde G actúa por 2-funtores. ❀

Ejemplos de acciones de grupos sobre 2-categorías

- Sean G un grupo y $\mathcal{B}$ una 2-categoría. Existe una *acción trivial* de G sobre $\mathcal{B}$ dada por las identidades.

- Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita estricta y G un grupo que actúa sobre $\mathcal{C}$ (ver 2.1.3), entonces G actúa sobre la 2-categoría $\underline{\mathcal{C}}$:

  Se define $F_g : \underline{\mathcal{C}} \to \underline{\mathcal{C}}$ el pseudofuntor

  $$F_g(\star) = \star, \quad (F_g)_{\star,\star} = g_*,$$

  para todo $g \in G$. Para cada $g, h \in G$, $X \in \mathcal{C}$

  $$(\chi^0_{g,h})_\star = \mathbf{1}, \quad \chi_{g,h} = \nu_{g,h}.$$

  Como $\chi_{gh,f} \circ (\chi_{g,h} \otimes \mathrm{id}_{F_f}) = \chi_{g,hf} \circ (\mathrm{id}_{F_g} \otimes \chi_{h,f})$ y $(\chi_{g,1})_X F_g(\zeta_X) = \mathrm{id}_{F_g(X)} = (\chi_{1,g})_X \zeta_{F_g(X)}$, podemos elegir $\omega_{g,h,f}$, κ_g y ζ_g como las identidades.

- Sea G un grupo finito que actúa sobre una 2-categoría $\mathcal{B}$, entonces G^{op} actúa sobre la 2-categoría $\mathrm{Rep}(\mathcal{B})$ (ver 3.2.1) de la siguiente manera:

  $$\mathcal{F}_g : \mathrm{Rep}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Rep}(\mathcal{B}), \ \omega \mapsto \omega \circ F_g, \ g \in G;$$

  $$\mathcal{F}_g((\sigma, \sigma^0)) = (\sigma, \sigma^0) \otimes \mathrm{id}_{F_g}.$$

  Sea $\omega \in \mathrm{Rep}(\mathcal{B})$, se define $((X^0_{g,h})_\omega, ((X^0_{g,h})_\omega)^0) : \omega \circ F_h \circ F_g \to \omega \circ F_{hg}$ como

  $$((X^0_{g,h})_\omega, ((X^0_{g,h})_\omega)^0) = \mathrm{id}_\omega \otimes (\chi_{g,h}, \chi^0_{g,h}).$$

  Sean $\omega, \omega' \in \mathrm{Rep}(\mathcal{B})$, $(\sigma, \sigma^0) : \omega \to \omega'$ una transformación pseudonatural y A objeto de $\mathcal{B}$, se define

  $$((X_{g,h})_{(\sigma,\sigma^0)})_A = (\sigma_{(\chi^0_{h,g})_A})^{-1}.$$

  Luego $(X_{g,h}, X^0_{g,h}) : \mathcal{F}_g \circ \mathcal{F}_h \to \mathcal{F}_{hg}$ son equivalencias pseudonaturales. Las modificaciones invertibles se definen a partir de las modificaciones invertibles de la acción de G sobre $\mathcal{B}$.

- Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita y G un grupo que actúa sobre $\mathcal{C}$ (ver 2.1.3), con g_* estricto para todo $g \in G$, entonces G actúa sobre la 2-categoría ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$:

  Se definen los pseudofuntores $F_g : {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod} \to {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$ tales que, para cada $\mathcal{C}$-módulo $\mathcal{M}$, $F_g(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{(g^{-1})_*}$. Recordar de 1.5.25 la estructura de $\mathcal{C}$-módulo de $F_g(\mathcal{M})$:

  $$X\overline{\otimes}M = (g^{-1})_*(X)\overline{\otimes}M,$$

  para cada $X \in \mathcal{C}, M \in \mathcal{M}$. Si $\mathcal{M},\mathcal{N}$ son $\mathcal{C}$-módulos y $(G,c) \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$, entonces $(F_g)_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(G,c) = (G, c_{(g^{-1})_*(-),-})$. Sean $(\chi_{g,h}, \chi^0_{g,h}) : F_g \circ F_h \to F_{gh}$ las equivalencias pseudonaturales dadas por

  $$(\chi^0_{g,h})_{\mathcal{M}} : F_g(F_h(\mathcal{M})) \to F_{gh}(\mathcal{M}), (\chi^0_{g,h})_{\mathcal{M}} = (\mathrm{Id}_{\mathcal{M}}, c^{g,h}),$$

  donde

  $$c^{g,h}_{X,M} = (\nu_{h^{-1},g^{-1}})_X\overline{\otimes}\mathrm{id}_M,$$

  para cada $X \in \mathcal{C}$, $M \in \mathcal{M}$. Notar que los $c^{g,h}$ satisfacen 1.5.4 pues los $\nu_{g,h}$ son transformaciones naturales monoidales. Sea $(G,c) \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$, como c es isomorfismo natural se tiene que, para $g,h \in G$, $X \in \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{M}$,

  $$((\nu_{h^{-1},g^{-1}})_X\overline{\otimes}\mathrm{id}_{G(M)}) \circ (c_{(h^{-1})_*\circ(g^{-1})_*(X),M}) = (c_{((gh)^{-1})_*(X),M}) \circ (G((\nu_{h^{-1},g^{-1}})_X\overline{\otimes}\mathrm{id}_M));$$

  luego los isomorfismos naturales $\chi_{g,h}$ pueden ser las identidades. Como vale 2.1.4, se tiene que $\chi_{gh,f}\circ(\chi_{g,h}\otimes\mathrm{id}_{F_f}) = \chi_{g,hf}\circ(\mathrm{id}_{F_g}\otimes\chi_{h,f})$, entonces elegimos $\omega_{g,h,f}$ como las identidades. Se define $\iota : \mathrm{Id}_{{}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}} \to F_1$ de la siguiente manera, para $\mathcal{M} \in {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$,

  $$\iota^0_{\mathcal{M}} = (\mathrm{id}_{\mathcal{M}}, \zeta\overline{\otimes}\mathrm{id}_{\mathcal{M}});$$

  vale 1.5.4 para $\zeta\overline{\otimes}\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ por ser ζ monoidal. Sea $(G,c) \in \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$, como c es isomorfismo natural se tiene que, para $X \in \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{M}$,

  $$(\zeta_X\overline{\otimes}\mathrm{id}_{G(M)}) \circ c_{X,M} = c_{1_*(X),M} \circ G(\zeta_X\overline{\otimes}\mathrm{id}_M);$$

  luego ι puede tomarse como la identidad. Como para cada $g \in G$ se cumple que

  $$\chi_{1,g} \circ (\iota\otimes\mathrm{id}_{F_g}) = \mathrm{id}_{F_g}, \quad \chi_{g,1} \circ (\mathrm{id}_{F_g}\otimes\iota) = \mathrm{id}_{F_g};$$

  se toman κ_g y ζ'_g también como las identidades.

4.2. Coherencia para la acción de un grupo sobre una 2-categoría

El objetivo de esta sección es probar el siguiente teorema:

Teorema 4.2.1 (Coherencia para la acción de un grupo sobre una 2-categoría)**.** Sea G un grupo. Toda 2-categoría con acción de G es G-biequivalente a una 2-categoría con acción estricta de G.

Sea $\mathcal{B}$ una 2-categoría equipada con una acción unitaria de G, $(\mathcal{F},\chi,\omega) : \underline{\underline{G}} \to \mathbf{2Cat}(\mathcal{B},\mathcal{B})$. Por Corolario 4.1.20 podemos suponer que F_g es un 2-funtor, para todo $g \in G$. Primero, se construirá una 2-categoría $\mathcal{B}[G]$ con acción estricta de G.

Los objetos de $\mathcal{B}[G]$ son ternas (A, θ, α), donde $A = \{A_g\}_g$ es una familia de objetos G-indexados, $\theta = \{\theta_{g,h} : F_g(A_h) \to A_{gh}\}_{g,h \in G}$ es una familia $G \times G$-indexada de 1-celdas que son equivalencias y

$$\begin{tikzcd}
F_gF_h(A_f) \arrow[r, "(\chi^0_{g,h})_{A_f}"] \arrow[d, "F_g(\theta_{h,f})"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha_{g,h,f}"] & F_{gh}(A_f) \arrow[d, "\theta_{gh,f}"] \\
F_g(A_{hf}) \arrow[r, "\theta_{g,hf}"'] & A_{ghf},
\end{tikzcd}$$

es una familia $G \times G \times G$-indexada de 2-celdas que son isomorfismos, tales que

$$\theta_{1,g} = I_{A_g}, \quad \alpha_{1,h,f} = \mathrm{id}, \quad \alpha_{g,1,f} = \mathrm{id}$$

para todo g, h, f, k, y la ecuación

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{gh}\ \overline{f}\ A_k \arrow[rr, "\chi^0_{gh,f}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\omega_{g,h,f}"] & & \overline{ghf}\ A_k \arrow[dr, "\theta_{ghf,k}"] & \\
\overline{g}\ \overline{h}\ \overline{f}\ A_k \arrow[ur, "\chi^0_{g,h}\otimes 1_{\overline{f}}"] \arrow[rr, "1_{\overline{g}}\otimes\chi^0_{h,f}"] \arrow[dr, "1_{\overline{g}}\otimes 1_{\overline{h}}\otimes\theta_{f,k}"'] & & \overline{g}\ \overline{hf}\ A_k \arrow[ur, "\chi^0_{g,hf}"] \arrow[dr, "1_{\overline{g}}\otimes\theta_{hf,k}"] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha_{g,hf,k}"] & & A_{ghfk} \\
 & \overline{g}\ \overline{h}\ A_{fk} \arrow[rr, "1_{\overline{g}}\otimes\theta_{h,fk}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow 1_{\overline{g}}\otimes\alpha_{h,f,k}"] & & \overline{g}\ A_{hfk} \arrow[ur, "\theta_{g,hfk}"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.2.2}$$

$$\|$$

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{gh}\ \overline{f}\ A_k \arrow[rr, "\chi^0_{gh,f}"] \arrow[dr, "1_{\overline{gh}}\otimes\theta_{f,k}"] & & \overline{ghf}\ A_k \arrow[dr, "\theta_{ghf,k}"] & \\
\overline{g}\ \overline{h}\ \overline{f}\ A_k \arrow[ur, "\chi^0_{g,h}\otimes 1_{\overline{f}}"] \arrow[dr, "1_{\overline{g}}\otimes 1_{\overline{h}}\otimes\theta_{f,k}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow(\chi_{g,h})_{\theta_{f,k}}"] & & \overline{gh}\ A_{fk} \arrow[rr, "\theta_{gh,fk}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\alpha_{gh,f,k}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha_{g,h,fk}"] & & A_{ghfk} \\
 & \overline{g}\ \overline{h}\ A_{fk} \arrow[ur, "\chi^0_{g,h}"'] \arrow[rr, "1_{\overline{g}}\otimes\theta_{h,fk}"'] & & \overline{g}\ A_{hfk} \arrow[ur, "\theta_{g,hfk}"'] &
\end{tikzcd}$$

se cumple en $\mathcal{B}(F_g(F_h(F_f(A_k))), A_{ghfk})$. Si (A, θ, α) es una 0-celda, la 1-celda identidad $I_{(A,\theta,\alpha)}$ se define de la siguiente manera: $I_{(A,\theta,\alpha)} = (I_{A_g}, l)$, donde $l_{g,h} = \mathrm{id}_{\,\theta_{g,h}}$, para cada $g, h \in G$.

Si (A, θ, α) y (B, ρ, β) son objetos en $\mathcal{B}[G]$, una 1-celda es un par (X, l), donde $X = \{X_g : A_g \to B_g\}$ es una familia G-indexada de 1-celdas y

$$\begin{tikzcd}
F_g(A_h) \arrow[r, "F_g(X_h)"] \arrow[d, "\theta_{g,h}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow l_{g,h}"] & F_g(B_h) \arrow[d, "\rho_{g,h}"] \\
A_{gh} \arrow[r, "X_{gh}"'] & B_{gh},
\end{tikzcd}$$

es una familia $G\times G$-indexada de 2-celdas que son isomorfismos, tales que para todo $f,g,h\in G$, $l_{1,g}=\mathrm{id}_{X_g}$ y la ecuación

$$
\begin{tikzcd}
\overline{f}\;\overline{g}(A_h) \arrow[rr, "\overline{f}\;\overline{g}(X_h)"] \arrow[d, "\overline{f}(\theta_{g,h})"'] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow\overline{f}(l_{g,h})"] & & \overline{f}\;\overline{g}(B_h) \arrow[rr, "\chi^0_{f,g}"] \arrow[d, "\overline{f}\rho_{g,h}"] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow\beta_{f,g,h}"] & & \overline{fg}(B_h) \arrow[d, "\rho_{fg,h}"] \\
\overline{f}(A_{gh}) \arrow[rr, "\overline{f}(X_{gh})"'] \arrow[drr, "\theta_{f,gh}"'] & & \overline{f}(B_{gh}) \arrow[rr, "\rho_{f,gh}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow l_{f,gh}"] & & B_{fgh} \\
& & A_{fgh} \arrow[urr, "X_{fgh}"'] & &
\end{tikzcd}
\tag{4.2.3}
$$

$$||$$

$$
\begin{tikzcd}
\overline{f}\;\overline{g}(A_h) \arrow[rr, "\overline{f}\;\overline{g}(X_h)"] \arrow[d, "\overline{f}(\theta_{g,h})"'] \arrow[drr, "\chi^0_{f,g}"'] & & \overline{f}\;\overline{g}(B_h) \arrow[rr, "\chi^0_{f,g}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow(\chi_{f,g})_{X_h}"] & & \overline{fg}(B_h) \arrow[d, "\rho_{fg,h}"] \\
\overline{f}(A_{gh}) \arrow[drr, "\theta_{f,gh}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha_{f,g,h}"] & & \overline{fg}(A_h) \arrow[urr, "\overline{fg}(X_h)"'] \arrow[d, "\theta_{fg,h}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow l_{fg,h}"] & & {} \\
& & A_{fgh} \arrow[urr, "X_{fgh}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

se cumple en $\mathcal{B}(F_f(F_g(A_h)),B_{fgh})$. Si (X,l), (Y,s) son 1-celdas, una 2-celda $m:(X,l)\Rightarrow(Y,s)$ es una familia G-indexada de 2-celdas $m=\{m_g : X_g\Rightarrow Y_g\}$ tal que para todo $g,f\in G$, la ecuación

$$
\begin{tikzcd}
F_g(A_h) \arrow[rr, bend left, "F_g(X_h)"] \arrow[d, "\theta_{g,h}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow l_{g,h}"] & & F_g(B_h) \arrow[d, "\rho_{g,h}"] \\
A_{gh} \arrow[rr, bend left, "X_{gh}"'] \arrow[rr, bend right, "Y_{gh}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow m_{gh}"] & & B_{gh}
\end{tikzcd}
\tag{4.2.4}
$$

$$||$$

$$
\begin{tikzcd}
F_g(A_h) \arrow[rr, bend left, "F_g(X_h)"] \arrow[rr, bend right, "F_g(Y_h)"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow F_g(m_h)"] \arrow[d, "\theta_{g,h}"'] & & F_g(B_h) \arrow[d, "\rho_{g,h}"] \\
A_{gh} \arrow[rr, bend right, "Y_{gh}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow s_{g,h}"] & & B_{gh}
\end{tikzcd}
$$

se cumple en $\mathcal{B}(F_g(A_h), B_{gh})$.

La composición vertical en cada categoría $\mathcal{B}[G]((A,\theta,\alpha),(B,\rho,\beta))$ se define de la siguiente manera: sean (X,l), (Y,s),$(Z,t) : (A,\theta,\alpha) \to (B,\rho,\beta)$ 1-celdas en $\mathcal{B}[G]$, y $m : (X,l) \Rightarrow (Y,s)$ y $n : (Y,s) \Rightarrow (Z,t)$ 2-celdas en $\mathcal{B}[G]$, entonces

$$nm : (X,l) \Rightarrow (Z,t),$$

$$nm_g = n_g m_g, \ g \in G.$$

Definamos ahora la composición horizontal

$$\circ : \mathcal{B}[G]((A,\theta,\alpha),(B,\rho,\beta)) \times \mathcal{B}[G]((C,\kappa,\gamma),(A,\theta,\alpha)) \to \mathcal{B}[G]((C,\kappa,\gamma),(B,\rho,\beta)).$$

Si (A,θ,α) y (B,ρ,β) son 0-celdas, y

$$(X,l) \in \mathcal{B}[G]((A,\theta,\alpha),(B,\rho,\beta)), \ (Y,s) \in \mathcal{B}[G]((C,\kappa,\gamma),(A,\theta,\alpha))$$

son 1-celdas, se define

$$(X,l) \circ (Y,s) = (Z,t),$$

donde $Z_g = X_g \circ Y_g$, y $t_{g,h} = \big(1_{X_{gh}} \circ s_{g,h}\big)\big(l_{g,h} \circ 1_{F_g(Y_h)}\big)$, para cada $g,h \in G$. La composición horizontal de 2-celdas en $\mathcal{B}[G]$ es la composición horizontal de 2-celdas en $\mathcal{B}$.

Lema 4.2.5. $\mathcal{B}[G]$ es una 2-categoría con una acción estricta de G.

Demostración. La prueba de que $\mathcal{B}[G]$ es una 2-categoría sigue por cálculos directos. Definamos la acción estricta de G en la 2-categoría $\mathcal{B}[G]$. Para cada $g \in G$ se definen los 2-funtores $L_g : \mathcal{B}[G] \to \mathcal{B}[G]$ como sigue. Si (A,θ,α) es una 0-celda, $g,x \in G$, entonces

$$L_g(A)_x = A_{xg}, \quad Lg(\theta)_{x,y} = \theta_{x,yg}, \quad L_g(\alpha)_{x,y,z} = \alpha_{x,y,zg}.$$

Si $(X,l) : (A,\theta,\alpha) \to (B,\rho,\beta)$ es una 1-celda,

$$L_g(X)_x = X_{xg}, \quad L_g(l)_{x,y} = l_{xyg}.$$

Si $m : (X,l) \Rightarrow (Y,s)$ es una 2-celda, entonces $L_g(m)_x = m_{xg}$, para cada $x \in G$. Como los L_g son 2-funtores tales que $L_g \circ L_h = L_{gh}$ para todo $g,h \in G$ y $L_e = \mathrm{Id}_{\mathcal{B}[G]}$, L definen una acción estricta de G sobre $\mathcal{B}[G]$. ❀

Existe un pseudofuntor $\mathcal{H} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}[G]$ dado por: si A es una 0-celda en $\mathcal{B}$, entonces

$$\mathcal{H}(A) = (\{F_g(A)\}, (\chi^0_{g,h})_A, \omega_{g,h,f})_{f,g,h \in G},$$

si $X : A \to B$ es una 1-celda, entonces $\mathcal{H}(X) = (F_g(X), (\chi_{g,h})_X)$; y para cada 2-celda $m : X \Rightarrow Y$, $\mathcal{H}(m)_g = F_g(m)$, donde $f,g,h \in G$. El hecho de que los ω sean modificaciones implica que $\mathcal{H}(X)$ es una 1-celda en $\mathcal{B}[G]$.

La siguiente proposición implica inmediatamente el Teorema 4.2.1.

Proposición 4.2.6. $\mathcal{H} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}[G]$ es una G-biequivalencia.

Demostración. Si (A,θ,α) es un objeto en $\mathcal{B}[G]$, entonces la 1-equivalencia $\theta_{g,e} : \mathcal{H}(A_e)_g \to A_g$ y las 2-celdas

$$\begin{tikzcd} F_g\mathcal{H}(A_e)_h \arrow[r, "\chi^0_{g,h}"] \arrow[d, "F_g(\theta_{h,e})"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha_{g,h,e}"] & \mathcal{H}(A_e)_{gh} \arrow[d, "\theta_{gh,e}"] \\ F_g(A_h) \arrow[r, "\theta^0_{g,h}"'] & A_{ghf}, \end{tikzcd}$$

definen una 1-equivalencia de $\mathcal{H}(A_1)$ a A, esto es, $\mathcal{H}$ es biesencialmente suryectivo.

Sean A y B objetos en $\mathcal{B}$, y $(X,l):\mathcal{H}(A)\to\mathcal{H}(B)$ una 1-celda en $\mathcal{B}[G]$. La 2-celda invertible $l_{g,1}:\mathcal{H}(X_1)_g\Rightarrow X_g$ define una 2-celda invertible de $\mathcal{H}(X_1)$ a X. Entonces $\mathcal{H}$ es localmente esencialmente suryectivo.

Si $X,Y,\in\mathcal{B}(A,B)$ y $f,f':X\to Y$ tales que $\mathcal{H}(f)=\mathcal{H}(f')$. Entonces, $\mathcal{H}(f)_1=\mathcal{H}(f')_1$, pero como se está considerando una acción unitaria, $f=\mathcal{H}(f)_1=\mathcal{H}(f')_1=f'$, esto es, $\mathcal{H}$ es localmente fiel. Supongamos que $w:\mathcal{H}(X)\Rightarrow\mathcal{H}(Y)$ es una 2-celda en $\mathcal{B}[G]$, la condición (4.2.4) implica que $w_g=F_g(m_1)$, entonces $w=\mathcal{H}(w_1)$. Como $\mathcal{H}$ es biesencialmente suryectivo, localmente esencialmente suryectivo y localmente fielmente pleno, entonces por 3.1.15 $\mathcal{H}$ es una biequivalencia.

Para ver que $\mathcal{H}$ tiene una estructura de G-pseudofuntor notar que

$$(\mathcal{H}\circ F_g)_x=F_x\circ F_g,\qquad (L_g\circ\mathcal{H})_x=F_{xg},$$

para cada $x,g\in G$. Entonces, usando la transformación pseudonatural $\chi_{x,g}:F_x\circ F_g\to F_{xg}$, se define la transformación pseudonatural

$$\gamma_g:\mathcal{H}\circ F_g\to L_g\circ\mathcal{H},$$

como sigue. Para cada 0-celda $A\in\mathrm{Obj}\,(\mathcal{B})$ se debe definir una 1-equivalencia $\gamma^0_A:\mathcal{H}\circ F_g(A)\to L_g\circ\mathcal{H}(A)$ en $\mathcal{B}[G]$. Sea $\gamma^0_A=(X,l)$, donde, para cada $x,f,h\in G$

$$X_x=(\chi^0_{x,g})_A,\quad l_{f,h}=(\omega^{-1}_{f,h,g})_A.$$

El Axioma (4.1.5) implica que los $l_{f,h}$ satisfacen la condición (4.2.3). Luego, γ^0_A es una 1-celda en $\mathcal{B}[G]$. Para completar la definición de la equivalencia pseudonatural γ_g, se deben definir 2-celdas en $\mathcal{B}[G]$

$$(\gamma_g)_X:\gamma^0_B\circ\mathcal{H}F_g(X)\Rightarrow L_g\mathcal{H}(X)\circ\gamma^0_A,$$

para cada 1-celda $X\in\mathcal{B}(A,B)$. Sea $\big((\gamma_g)_X\big)_x=(\chi_{x,g})_X$, para cada $x\in G$. El hecho de que los ω sean modificaciones, implica que las 2-celdas $\big((\gamma_g)_X\big)_x$ satisfacen (4.2.4). Para definir las modificaciones

$$\begin{tikzcd}
& L_f\mathcal{H}F_g \arrow[rr, "1_{L_f}\otimes\gamma_g"] & & L_fL_g\mathcal{H} \arrow[dr, "id"] & \\
\mathcal{H}F_f\,F_g \arrow[ur, "\gamma_f\otimes 1_{F_g}"] \arrow[drr, "1_{\mathcal{H}}\otimes\chi_{f,g}"'] & & \Downarrow\Pi_{f,g} & & L_{fg}\mathcal{H} \\
& & \mathcal{H}F_{fg} \arrow[urr, "\gamma_{fg}"'] & &
\end{tikzcd}$$

se observa que

$$[(1_{L_f\otimes\gamma_g})\circ(\gamma_f\otimes 1_{F_g})]_x=\chi_{xf,g}\circ(\chi_{x,f}\otimes 1_{F_g}),\quad x,f,g\in G,$$

y

$$[(1_{\mathcal{H}}\otimes\chi_{f,g})\circ(\gamma_{fg})]_x=\chi_{x,fg}\circ(1_{F_x}\otimes\chi_{f,g}),\quad x,f,g\in G.$$

Luego, se define $(\Pi_{f,g})_x=\omega_{x,f,g}$ para todo $x,g,f\in G$.

Como los $\omega_{x,f,g}$ son modificaciones, los $\Pi_{g,h}$ son modificaciones para cada $g,h\in G$. La condición del diagrama (4.1.12) es exactamente el diagrama (4.1.5). ❀

4.3. La 2-categoría equivariante

A continuación se define la 2-categoría equivariante.

Sea G un grupo e $\mathcal{I}$ la 2-categoría unidad con acción trivial de G, y sea $\mathcal{B}$ una 2-categoría con acción de G.

Definición 4.3.1. La *2-categoría equivariante* es $\mathcal{B}^G = \mathbf{2Cat}^G(\mathcal{I}, \mathcal{B})$. A las 0-celdas, 1-celdas y 2-celdas en $\mathcal{B}^G$ se las llama 0-celdas, 1-celdas y 2-celdas *equivariantes*, respectivamente.

Proposición 4.3.2. Si $\mathcal{B}$ y $\widetilde{\mathcal{B}}$ son G-biequivalentes, entonces las 2-categorías $\mathcal{B}^G$, $\widetilde{\mathcal{B}}^G$ son biequivalentes.

Demostración. Inmediato. ❀

Lema 4.3.3. Existe un 2-funtor de olvido $\Phi : \mathcal{B}^G \to \mathcal{B}$.

Demostración. Si $(\mathcal{H}, \Pi, \gamma)$ es una 0-celda equivariante en $\mathcal{B}^G$, entonces $\Phi(\mathcal{H}, \Pi, \gamma) = \mathcal{H}(\star)$. Si $(\theta, \{\theta_g\}_{g\in G})$ es una 1-celda equivariante, entonces $\Phi(\theta, \{\theta_g\}_{g\in G}) = \theta$. En 2-celdas el funtor Φ es la identidad. ❀

Desempaquetando la definición de equivariantización

Supongamos que existe una acción unitaria de G sobre la 2-categoría $\mathcal{B}$ tal que todos los pseudofuntores F_g son 2-funtores. Esto es posible por el Corolario 4.1.20. La 2-categoría $\mathcal{B}^G$ tiene como 0-celdas ternas $(A, \{U_g\}_{g\in G}, \{\Pi_{g,h}\}_{g,h\in G})$, donde:

- A es una 0-celda en $\mathcal{B}$;
- U_g son 1-celdas invertibles en $\mathcal{B}(A, F_g(A))$;
- $\Pi_{g,h} : (\chi^0_{g,h})_A \circ F_g(U_h) \circ U_g \Rightarrow U_{gh}$ son 2-celdas e isomorfismos en la categoría $\mathcal{B}(A, F_{gh}(A))$ tales que

$$U_1 = I_A,\ \Pi_{g,1} = \mathrm{id}_{U_g} = \Pi_{1,g},$$

$$\begin{aligned}&\Pi_{f,gh}\big(\mathrm{id}_{(\chi^0_{f,gh})_A} \circ F_f(\Pi_{g,h}) \circ \mathrm{id}_{U_f}\big)\big((\omega_{f,g,h})_A \circ \mathrm{id}_{F_fF_g(U_h)F_f(U_g)U_f}\big) = \\ &= \Pi_{fg,h}\big(\mathrm{id}_{(\chi^0_{fg,h})_A F_{fg}(U_h)} \circ \Pi_{f,g}\big)\big(\mathrm{id}_{(\chi^0_{fg,h})_A} \circ (\chi_{f,g})_{U_h} \circ \mathrm{id}_{F_f(U_g)U_f}\big)\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

para todo $g, h, f \in G$. Para recortar notación, la colección $(A, \{U_g\}_{g\in G}, \{\Pi_{g,h}\}_{g,h\in G})$ se denota simplemente por (A, U, Π).

Dadas las 0-celdas equivariantes (A, U, Π), $(\widetilde{A}, \widetilde{U}, \widetilde{\Pi})$, una *1-celda equivariante* es un par $(\theta, \{\theta_g\}_{g\in G}) \in \mathcal{B}^G((A, U, \Pi), (\widetilde{A}, \widetilde{U}, \widetilde{\Pi}))$ donde

- $\theta \in \mathcal{B}(A, \widetilde{A})$ es una 1-celda,
- y para cada $g \in G$, $\theta_g : F_g(\theta) \circ U_g \Rightarrow \widetilde{U}_g \circ \theta$, son 2-celdas invertibles tales que $\theta_1 = \mathrm{id}_\theta$, y tal que para cada $g, f \in G$

$$\begin{aligned}\big(\widetilde{\Pi}_{g,f}\circ \mathrm{id}_{\theta}\big)\big(\mathrm{id}_{(\chi^0_{g,f})_A F_g(\widetilde{U}_f)}\circ \theta_g\big)\big(\mathrm{id}_{(\chi^0_{g,f})_A}\circ F_g(\theta_f)\circ \mathrm{id}_{U_g}\big) =\\ = \theta_{gf}\big(\mathrm{id}_{F_{gf}(\theta)}\circ \Pi_{g,f}\big)\big((\chi_{g,f})_\theta \circ \mathrm{id}_{F_g(U_f)U_g}\big).\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Si $(\theta,\{\theta_g\}_{g\in G}),(\sigma,\{\sigma_g\}_{g\in G}):(A,U,\mu)\to(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\mu})$ son 1-celdas equivariantes, una *2-celda equivariante* $\alpha:(\theta,\{\theta_g\}_{g\in G})\Rightarrow(\sigma,\{\sigma_g\}_{g\in G})$ es una 2-celda $\alpha:\theta\Rightarrow\sigma$ tal que para todo $g\in G$

$$(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_g}\circ\alpha)\theta_g=\sigma_g(F_g(\alpha)\circ \mathrm{id}_{U_g}). \tag{4.3.6}$$

Sean (A,U,μ), $(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\mu})$, (A',U',μ') 0-celdas equivariantes, y

$$(\theta,\theta_g):(A',U',\mu')\to(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\mu}),(\sigma,\sigma_g):(A,U,\mu)\to(A',U',\mu')$$

1-celdas equivariantes, entonces la composición $(\theta,\theta_g)\circ(\sigma,\sigma_g):(A,U,\mu)\to(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\mu})$ se define como $(\theta,\theta_g)\circ(\sigma,\sigma_g)=(\theta\circ\sigma,(\theta\circ\sigma)_g)$, donde para cada $g\in G$

$$(\theta\circ\sigma)_g=(\theta_g\circ \mathrm{id}_\sigma)(\mathrm{id}_{F_g(\theta)}\circ\sigma_g). \tag{4.3.7}$$

4.4. Acciones provenientes de categorías tensoriales graduadas

El objetivo de la presente sección es desarrollar un ejemplo proveniente de las categorías tensoriales graduadas.

Supongamos que G es un grupo finito, $\mathcal{C}$ una categoría tensorial finita y $\mathcal{D}=\oplus_{g\in G}\mathcal{D}_g$ una extensión G-graduada de $\mathcal{C}$ $(\mathcal{D}_1=\mathcal{C})$. Supongamos además que $\mathcal{D}$ es una categoría monoidal estricta.

Teorema 4.4.1. Existe una acción de G sobre la 2-categoría ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}}$. Más aún, se tienen las 2-equivalencias

$$({}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}})^G\simeq {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}\,,\quad ({}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}}_e)^G\simeq {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}_e.$$

Demostración. Primero definamos la acción de G sobre 2-categoría $\mathcal{B}={}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}}$. Para cada $g\in G$ se define el 2-funtor $F_g:\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ como sigue. Para cada $\mathcal{C}$-módulo a izquierda $\mathcal{M}$, sea $F_g(\mathcal{M})=\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{D}}_g,\mathcal{M})$. Notar que, por el Teorema 1.5.24, $F_g(\mathcal{M})=\mathcal{D}_g\boxtimes_{\mathcal{C}}\mathcal{M}$. Si $\mathcal{M},\mathcal{N}$ son $\mathcal{C}$-módulos a izquierda, y $R:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ es un funtor de $\mathcal{C}$-módulos, entonces

$$F_g(R):\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{D}}_g,\mathcal{M})\to\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{D}}_g,\mathcal{N}),\quad F_g(R)(H)=R\circ H.$$

Ahora, se define la equivalencia pseudonatural $\chi_{g,h}:F_g\circ F_h\to F_{gh}$, para cada $g,h\in G$. Para un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda $\mathcal{M}$

$$(\chi^0_{g,h})_{\mathcal{M}}:\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{D}}_{gh},\mathcal{M})\to\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{D}}_g,\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{D}}_h,\mathcal{M})),$$

$$(\chi^0_{g,h})_{\mathcal{M}}(H)(X)(Y)=H(X\otimes Y),$$

para cada $H\in\mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{D}}_{gh},\mathcal{M})$, $X\in\mathcal{C}_g, Y\in\mathcal{C}_h$. Se sigue que $(\chi^0_{g,h})_{\mathcal{M}}$ es un funtor de $\mathcal{C}$-módulos bien definido. Para cada funtor de $\mathcal{C}$-módulos $R:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ se tiene que $F_g(F_h(R))\circ(\chi^0_{g,h})_{\mathcal{M}}=(\chi^0_{g,h})_{\mathcal{N}}\circ F_{gh}(R)$, por lo tanto, podemos definir

$$(\chi_{g,h})_R:F_g(F_h(R))\circ(\chi^0_{g,h})_{\mathcal{M}}\to(\chi^0_{g,h})_{\mathcal{N}}\circ F_{gh}(R)$$

como las identidades. Como $\chi_{gh,f}\circ(\chi_{g,h}\otimes\mathrm{id}_{F_f})=\chi_{g,hf}\circ(\mathrm{id}_{F_g}\otimes\chi_{h,f})$, para cada $f,g,h\in G$, entonces podemos elegir $\omega_{g,h,f}$ como las identidades.

Se define ahora la biequivalencia $\Phi : \mathcal{B}^G \to {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}$. Supongamos que $(\mathcal{M}, U, \Pi)$ es una 0-celda equivariante. Esto quiere decir que se tienen funtores de $\mathcal{C}$-módulos

$$U_g : \mathrm{Fun}_{\mathcal{C}}(\overline{\mathcal{D}}_g, \mathcal{M}) \to \mathcal{M},$$

junto con isomorfismos naturales de $\mathcal{C}$-módulos

$$\Pi_{g,h} : U_g \circ F_g(U_h) \circ (\chi^0_{g,h})_{\mathcal{M}} \to U_{gh},$$

que satisfacen los axiomas requeridos.

Afirmación 4.4.2. Sean $g, h \in G$. Si $X \in \mathcal{C}_g, Y \in \mathcal{C}_h$, entonces, existe una familia de isomorfismos naturales de $\mathcal{C}$-módulos

$$\beta_{X,Y,M} : F_g(U_h)\big((\chi^0_{g,h})_{\mathcal{M}}(E_{X\otimes Y,M})\big) \to E_{X,U_h(G_{Y,M})},$$

donde $E_{X,M} : \overline{\mathcal{C}_g} \to \mathcal{M}$ está dado por

$$E_{X,M}(Y) = ({}^*Y \otimes X)\overline{\otimes} M$$

(ver 1.6.2).

Prueba de la afirmación. Si $Z \in \mathcal{C}_g$, entonces

$$E_{X,U_h(E_{Y,M})}(Z) = ({}^*Z \otimes X)\overline{\otimes} U_h(E_{Y,M}),$$

$$F_g(U_h)\big((\chi^0_{g,h})_{\mathcal{M}}(E_{X\otimes Y,M})\big)(Z) = U_h(E_{X\otimes Y,M}(Z\otimes -)).$$

Notar que existen isomorfismos naturales de módulos

$$E_{X,M}(Z\otimes -) \simeq {}^*Z \overline{\otimes} E_{X,M}, \quad X\overline{\otimes} E_{Y,M} \simeq E_{X\otimes Y,M}.$$

Juntando estos dos isomorfismos obtenemos que

$$E_{X\otimes Y,M}(Z\otimes -) \simeq ({}^*Z\otimes X)\overline{\otimes} E_{Y,M}.$$

Usando estos isomorfismos y que U_h es un funtor de $\mathcal{C}$-módulos, se tiene que

$$U_h(E_{X\otimes Y,M}(Z\otimes -)) \simeq ({}^*Z\otimes X)\overline{\otimes} U_h(E_{Y,M}),$$

que es el isomorfismo deseado. ❀

Se define $\Phi(\mathcal{M}, U, \Pi) = \mathcal{M}$ como categoría Abeliana. Debemos darle a la categoría $\mathcal{M}$ una estructura de $\mathcal{D}$-módulo. Si $X \in \mathcal{C}_g$, $M \in \mathcal{M}$ sea

$$X\overline{\otimes} M = U_g(E_{X,M}).$$

Hay que definir los isomorfismos de asociatividad

$$m_{X,Y,M} : (X\otimes Y)\overline{\otimes} M \to X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes} M).$$

Supongamos que $X \in \mathcal{C}_g, Y \in \mathcal{C}_h$, $M \in \mathcal{M}$. Entonces

$$(X\otimes Y)\overline{\otimes} M = U_{gh}(E_{X\otimes Y,M}), \quad X\overline{\otimes}(Y\overline{\otimes} M) = U_g(E_{X,U_h(E_{Y,M})}).$$

Así, se define

$$m_{X,Y,M} = U_g(\beta_{X,Y,M})(\Pi_{g,h})^{-1}_{E_{X\otimes Y,M}}.$$

El Axioma (1.5.2) es equivalente, en este caso, al Axioma (4.3.4). Es claro que Φ es una biequivalencia, y restringido a la categoría de módulos exactos (${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}_e^{\mathrm{op}}$) nos da la segunda biequivalencia. ❀

Sea G un grupo finito que actúa sobre una categoría tensorial finita $\mathcal{C}$ (ver 2.1.3). Podemos construir la siguiente categoría G-graduada:

$$\mathcal{C}[G] = \oplus_{g\in G}\mathcal{C}_g,$$

donde $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}$, para todo $g \in G$. Si $X \in \mathcal{C}$ es un objeto, el objeto en $\mathcal{C}_g$ se denota $[X, g]$. El producto tensorial está dado por:

$$[X, g] \otimes [Y, h] = [X \otimes g_*(Y), gh],\ X, Y \in \mathcal{C}, g, h \in G.$$

Para una descripción detallada de $\mathcal{C}[G]$ ver [38].

Corolario 4.4.3. Existen las 2-equivalencias

$$({}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}})^G \simeq {}_{\mathcal{C}^G}\mathrm{Mod}\,, \quad ({}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}}_e)^G \simeq {}_{\mathcal{C}^G}\mathrm{Mod}_e.$$

Demostración. Por [38, Thm. 4.1], existen las 2-equivalencias

$${}_{\mathcal{C}[G]}\mathrm{Mod} \simeq {}_{\mathcal{C}^G}\mathrm{Mod}\,, \quad {}_{\mathcal{C}[G]}\mathrm{Mod}_e \simeq {}_{\mathcal{C}^G}\mathrm{Mod}_e.$$

Ahora, aplicando el teorema 4.4.1 se obtiene que

$$({}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}})^G \simeq {}_{\mathcal{C}[G]}\mathrm{Mod}\,, \quad ({}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}}_e)^G \simeq {}_{\mathcal{C}[G]}\mathrm{Mod}_e.$$

Luego, el resultado es inmediato. ❀

4.5. El centro de la 2-categoría equivariante

En esta sección se probará el siguiente resultado. Sea G un grupo finito que actúa sobre una 2-categoría $\mathcal{B}$. Recordar el 2-funtor de olvido $\Phi : \mathcal{B}^G \to \mathcal{B}$ descripto en el Lema 4.3.3.

Teorema 4.5.1. El grupo G actúa sobre $\mathcal{Z}(\Phi)$ por autoequivalencias monoidales, y existe una equivalencia monoidal

$$\mathcal{Z}(\mathcal{B}^G) \simeq \mathcal{Z}(\Phi)^G.$$

Como consecuencia, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.5.2. [15, Thm. 3.5] Sea $\mathcal{D} = \oplus_{g\in G}\mathcal{C}_g$ una categoría tensorial fielmente graduada, con $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$. Existe una acción del grupo G sobre el centro relativo $\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$ y una equivalencia monoidal

$$\mathcal{Z}(\mathcal{D}) \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})^G.$$

Demostración. Sea $\mathcal{H} : {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod} \to {}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$ el pseudofuntor de olvido. Entonces

$$\mathcal{Z}(\mathcal{D}) \simeq \mathcal{Z}({}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}\,) \simeq \mathcal{Z}\big(({}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}})^G\big) \simeq \mathcal{Z}(\mathcal{H})^G \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})^G$$

La primera equivalencia sigue del Corolario 3.3.5, la segunda del Teorema 4.4.1, y la última de la Proposición 3.3.4. ❀

Para el resto de la sección usaremos la notación introducida en la Sección 4.3. Se asumirá que la acción es *unitaria* y *estricta*, ver Definiciones 4.1.8, 4.1.9. Por Proposición 3.1.17, se puede asumir que toda 1-celda invertible es un isomorfismo. En particular, si (A, U, Π) es una 0-celda equivariante, para cada $g \in G$, la 1-celda U_g es invertible. Luego, se puede elegir una 1-celda U^*_g tal que

$$U_g \circ U^*_g = I_{F_g(A)}, \quad U^*_g \circ U_g = I_A.$$

Si X, Y son 1-celdas, se denota a veces $X \circ Y = XY$, para simplificar notación.

La acción de un grupo sobre $\mathcal{Z}(\Phi)$

Para cada $g \in G$, se definen las autoequivalencias tensoriales $L_g : \mathcal{Z}(\Phi) \to \mathcal{Z}(\Phi)$ tales que éstas definen una acción de G sobre $\mathcal{Z}(\Phi)$. Primero, describamos explícitamente los objetos de $\mathcal{Z}(\Phi)$. Un objeto $(X, \sigma) \in \mathcal{Z}(\Phi)$ consiste en

$$X = \{X_{(A,U,\Pi)} \in \mathcal{B}(A, A) \text{ una 1-celda}, (A, U, \Pi) \in \operatorname{Obj}(\mathcal{B}^G)\},$$

$$\sigma = \{\sigma_{(\theta,\theta_g)} : X_{(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\Pi})} \circ \theta \Rightarrow \theta \circ X_{(A,U,\Pi)} \text{ 2-celdas que son isomorfismos en } \mathcal{B}^G\},$$

donde $(\theta, \theta_g) \in \mathcal{B}^G((A, U, \Pi), (\widetilde{A}, \widetilde{U}, \widetilde{\Pi}))$ es una 1-celda equivariante. Los isomorfismos $\sigma_{(\theta,\theta_g)}$ satisfacen (3.3). Si $(X, \sigma), (Y, \tau) \in \mathcal{Z}(\Phi)$, un morfismo $f : (X, \sigma) \to (Y, \tau)$ es una colección de 2-celdas en $\mathcal{B}(A, A)$

$$f_{(A,U,\Pi)} : X_{(A,U,\Pi)} \Rightarrow Y_{(A,U,\Pi)},$$

tal que para toda 1-celda equivariante $(\theta, \theta_g) \in \mathcal{B}^G((A, U, \Pi), (\widetilde{A}, \widetilde{U}, \widetilde{\Pi}))$

$$\big(\operatorname{id}_\theta \circ f_{(A,U,\Pi)}\big)\sigma_{(\theta,\theta_g)} = \tau_{(\theta,\theta_g)}\big(f_{(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\Pi})} \circ \operatorname{id}_\theta\big).$$

Lema 4.5.3. Sean $g, h \in G$ y (A, U, Π) una 0-celda equivariante. Existen 2-celdas que son isomorfismos

$$\epsilon_{g,h,(A,U,\Pi)} : U_g^* \circ F_g(U_h^*) \Rightarrow U_{gh}^*$$

tales que

$$\epsilon_{g,h,(A,U,\Pi)} \circ \Pi_{g,h} = \operatorname{id}_{I_A}, \quad \Pi_{g,h} \circ \epsilon_{g,h,(A,U,\Pi)} = \operatorname{id}_{I_{F_{gh}(A)}}, \tag{4.5.4}$$

$$\epsilon_{gh,f,(A,U,\Pi)}\big(\epsilon_{g,h,(A,U,\Pi)} \circ \operatorname{id}_{F_{gh}(U_f^*)}\big) = \epsilon_{g,hf,(A,U,\Pi)}\big(\operatorname{id}_{U_g^*} \circ F_g(\epsilon_{h,f,(A,U,\Pi)})\big), \tag{4.5.5}$$

para cada $g, h, f \in G$.

Demostración. Sea $\epsilon_{g,h,(A,U,\Pi)} = \operatorname{id}_{U_g^* \circ F_g(U_h^*)} \circ \Pi_{g,h}^{-1} \circ \operatorname{id}_{U_{gh}^*}$. La ecuación (4.5.5) sigue de (4.3.4). ❀

Para cada $g \in G$, se definen los funtores $L_g : \mathcal{Z}(\Phi) \to \mathcal{Z}(\Phi)$, $L_g(X, \sigma) = (X^g, \sigma^g)$. Donde, para toda 0-celda equivariante (A, U, Π)

$$X^g_{(A,U,\Pi)} = U_g^* \circ F_g(X_{(A,U,\Pi)}) \circ U_g.$$

Observación 4.5.6. Si $(A, U, \Pi), (\widetilde{A}, \widetilde{U}, \widetilde{\Pi})$ son 0-celdas equivariantes, se denota $X = X_{(A,U,\Pi)}$, $\widetilde{X} = X_{(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\Pi})}$. También, se usará la notación $\epsilon_{g,h} = \epsilon_{g,h,(A,U,\Pi)}$ y $\widetilde{\epsilon}_{g,h} = \epsilon_{g,h,(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\Pi})}$ cuando no genere confusión.

Si $(\theta, \theta_g) \in \mathcal{B}^G((A, U, \Pi), (\widetilde{A}, \widetilde{U}, \widetilde{\Pi}))$ es una 1-celda equivariante, entonces

$$\sigma^g_{(\theta,\theta_g)} = \big(1_{\widetilde{U}_g^*} \circ \theta_g \circ 1_{U_g^* F_g(X) U_g}\big)\big(1_{\widetilde{U}_g^*} \circ F_g(\sigma_{(\theta,\theta_g)}) \circ 1_{U_g}\big)\big(1_{\widetilde{U}_g F_g(\widetilde{X})} \circ \theta_g^{-1}\big).$$

Si $f : (X, \sigma) \to (Y, \tau)$ es un morfismo en $\mathcal{Z}(\Phi)$, entonces

$$L_g(f)_{(A,U,\Pi)} = \operatorname{id}_{U_g^*} \circ F_g(f_{(A,U,\Pi)}) \circ \operatorname{id}_{U_g}.$$

La prueba del siguiente resultado sigue inmediatamente.

Proposición 4.5.7. Los funtores $L_g : \mathcal{Z}(\Phi) \to \mathcal{Z}(\Phi)$ son funtores monoidales bien definidos. ❀

Ahora, para cada $g, h \in G$, se definen los isomorfismos naturales monoidales $\nu_{g,h} : L_g \circ L_h \to L_{gh}$ de la siguiente manera. Sea $(X, \sigma) \in \mathcal{Z}(\mathcal{H})$, debemos definir una flecha

$$(\nu_{g,h})_{(X,\sigma)} : L_g \circ L_h(X, \sigma) \to L_{gh}(X, \sigma).$$

Para cada 0-celda equivariante (A, U, Π) se define el mapa

$$\big((\nu_{g,h})_{(X,\sigma)}\big)_{(A,U,\Pi)} : U_g^* F_g(U_h^*) F_{gh}(X_{(A,U,\mu)}) F_g(U_h) U_g \to U_{gh} F_{gh}(X_{(A,U,\mu)}) U_{gh}^*,$$

$$\big((\nu_{g,h})_{(X,\sigma)}\big)_{(A,U,\mu)} = \epsilon_{g,h} \circ \mathrm{id}_{F_{gh}(X_{(A,U,\mu)})} \circ \Pi_{g,h}.$$

Proposición 4.5.8. Para cada $g, h, f \in G$, se cumplen las siguientes afirmaciones.

(i) $\nu_{g,h} : L_g \circ L_h \to L_{gh}$ son isomorfismos naturales bien definidos en $\mathcal{Z}(\Phi)$.

(ii) $\nu_{g,h} : L_g \circ L_h \to L_{gh}$ son transformaciones naturales monoidales.

(iii) Para cada $g, h, f \in G$ y cada $(X, \sigma) \in \mathcal{Z}(\Phi)$, se satisface la siguiente ecuación

$$(\nu_{gh,f})_{(X,\sigma)} (\nu_{g,h})_{L_f(X,\sigma)} = (\nu_{g,hf})_{(X,\sigma)} L_g((\nu_{h,f})_{(X,\sigma)}). \tag{4.5.9}$$

Demostración. (i). Se debe verificar que $(\nu_{g,h})_{(X,\sigma)}$ son morfismos en la categoría $\mathcal{Z}(\Phi)$, esto es, la ecuación

$$\big(\mathrm{id}_\theta \circ \big((\nu_{g,h})_{(X,\sigma)}\big)_{(A,U,\mu)}\big)((\sigma^h)^g)_{(\theta,\theta_g)} = \sigma^{gh}_{(\theta,\theta_g)}\big(\big((\nu_{g,h})_{(X,\sigma)}\big)_{(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\Pi})} \circ \mathrm{id}_\theta\big) \tag{4.5.10}$$

se satisface para toda 1-celda equivariante $(\theta, \theta_g) \in \mathcal{B}^G((A, U, \Pi), (\widetilde{A}, \widetilde{U}, \widetilde{\Pi}))$. El lado izquierdo de (4.5.10) es igual a

$$= \big(\mathrm{id}_\theta \circ \epsilon_{g,h} \circ \mathrm{id}_{F_{gh}(X)} \circ \Pi_{g,h}\big)\big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_g^*} \circ \theta_g \circ \mathrm{id}_{U_g^* F_g(U_h^*) F_{gh}(X) F_g(U_h) U_g}\big)$$
$$\big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_g^*} \circ F_g(\sigma^h_{(\theta,\theta_g)}) \circ \mathrm{id}_{U_g}\big)\big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_g^*} \circ \theta_g \circ \mathrm{id}_{U_g^* F_g(U_h^*) F_{gh}(X) F_g(U_h) U_g}\big)$$
$$= \big(\mathrm{id}_\theta \circ \epsilon_{g,h} \circ \mathrm{id}_{F_{gh}(X)} \circ \Pi_{g,h}\big)\big(\mathrm{id} \circ \theta_g \circ \mathrm{id}\big)\big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_g^* F_g(\widetilde{U}_h^*)} \circ F_g(\theta_h) \circ \mathrm{id}\big)$$
$$\big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_g^* F_g(\widetilde{U}_h^*)} \circ F_{gh}(\sigma_{(\theta,\theta_g)}) \circ \mathrm{id}_{F_g(U_h) U_g}\big)\big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_g^* F_g(\widetilde{U}_h^*)} \circ F_g(\theta_h^{-1}) \circ \mathrm{id}_{U_g}\big)$$
$$\big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_g^*} \circ \theta_g \circ \mathrm{id}_{U_g^* F_g(U_h^*) F_{gh}(X) F_g(U_h) U_g}\big)$$
$$= \big(\mathrm{id} \circ \epsilon_{g,h} \circ \mathrm{id}\big)\big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_g^* F_g(\widetilde{U}_h^*)} \circ (\mathrm{id}_{F_g(\widetilde{U}_h)} \circ \theta_g)(F_g(\theta_h) \circ \mathrm{id}_{U_g}) \circ \mathrm{id}_{U_g^* F_g(U_h^*) F_{gh}(X) U_{gh}}\big)$$
$$\big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_g^* F_g(\widetilde{U}_h^*)} \circ F_{gh}(\sigma_{(\theta,\theta_g)}) \circ \mathrm{id}_{U_{gh}}\big)$$
$$\big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_g^* F_g(\widetilde{U}_h^*) F_{gh}(\widetilde{X})} \circ (\mathrm{id}_{F_{gh}(\theta)} \circ \Pi_{g,h})(F_g(\theta_h^{-1}) \circ \mathrm{id}_{U_g})(\mathrm{id}_{F_{gh}(\widetilde{U}_h)} \circ \theta_g^{-1})\big)$$
$$= \big(\mathrm{id} \circ \epsilon_{g,h} \circ \mathrm{id}\big)\big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_g^* F_g(\widetilde{U}_h^*)} \circ (\mathrm{id}_{F_g(\widetilde{U}_h)} \circ \theta_g)(F_g(\theta_h) \circ \mathrm{id}_{U_g}) \circ \mathrm{id}\big)$$
$$\big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_g^* F_g(\widetilde{U}_h^*)} \circ F_{gh}(\sigma_{(\theta,\theta_g)}) \circ \mathrm{id}_{U_{gh}}\big)\big(\mathrm{id} \circ \theta_{gh}^{-1}(\widetilde{\Pi}_{g,h} \circ \mathrm{id}_\theta)\big)$$

La segunda ecuación sigue de la definición de $\sigma^h_{(\theta,\theta_g)}$, la cuarta igualdad sigue de (4.3.5). El lado derecho de (4.5.10) es igual a

$$= \big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_{gh}^*} \circ \theta_{gh} \circ \mathrm{id}_{U_{gh}^* F_{gh}(X) U_{gh}}\big)\big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_{gh}^*} \circ F_{gh}(\sigma_{(\theta,\theta_g)}) \circ \mathrm{id}_{U_{gh}}\big)$$
$$\big(\mathrm{id}_{\widetilde{U}_{gh}^* F_{gh}(\widetilde{X})} \circ \theta_{gh}^{-1}\big)\big(\widetilde{\epsilon}_{g,h} \circ \mathrm{id}_{F_{gh}(\widetilde{X})} \circ \widetilde{\Pi}_{g,h} \circ \mathrm{id}_\theta\big)$$
$$= \big(\widetilde{\epsilon}_{g,h} \circ \theta_{gh} \circ \mathrm{id}_{U_{gh}^* F_{gh}(X) U_{gh}}\big)\big(\mathrm{id}_{U_g^* F_g(U_h^*)} \circ F_{gh}(\sigma_{(\theta,\theta_g)}) \circ \mathrm{id}_{U_{gh}}\big)$$
$$\big(\mathrm{id}_{U_g^* F_g(U_h^*) F_{gh}(\widetilde{X})} \circ \theta_{gh}^{-1}(\widetilde{\Pi}_{g,h} \circ \mathrm{id}_\theta)\big).$$

Se sigue de la Ecuación (4.5.4) que ambos lados son iguales.

(ii). Sean $(X,\sigma),(Y,\tau)$ objetos en $\mathcal{Z}(\Phi)$. Como los funtores L_g son estrictos, quiere decir que $L_g((X,\sigma)\otimes(Y,\tau)) = L_g(X,\sigma)\otimes L_g(Y,\tau)$, se debe probar que

$$(\nu_{g,h})_{(X,\sigma)\otimes(Y,\tau)} = (\nu_{g,h})_{(X,\sigma)}\otimes(\nu_{g,h})_{(X,\sigma)}. \tag{4.5.11}$$

Sea (A,U,Π) una 0-celda equivariante. El lado izquierdo de (4.5.11) evaluado en (A,U,Π) es igual a

$$\epsilon_{g,h}\circ \mathrm{id}_{F_{gh}(X_{(A,U,\Pi)})}\circ \Pi_{g,h}\circ \epsilon_{g,h}\circ \mathrm{id}_{F_{gh}(Y_{(A,U,\Pi)})}\circ \Pi_{g,h}.$$

El lado derecho de (4.5.11) evaluado en (A,U,Π) es igual a

$$\epsilon_{g,h}\circ \mathrm{id}_{F_{gh}(X_{(A,U,\Pi)}\circ Y_{(A,U,\Pi)})}\circ \Pi_{g,h}.$$

Se sigue de (4.5.4) que ambos lados son iguales.

(iii). Sea (A,U,Π) una 0-celda equivariante. Los lados izquierdo y derecho de (4.5.9) evaluados en (A,U,Π) son iguales a

$$\begin{aligned}
&= \big(\epsilon_{gh,f}\circ \mathrm{id}_{F_{ghf}(X)}\circ \Pi_{gh,f}\big)\big(\epsilon_{g,h}\circ \mathrm{id}_{F_{gh}(U_f^* X U_f)}\circ \Pi_{g,h}\big)\\
&= \epsilon_{gh,f}(\epsilon_{g,h}\circ \mathrm{id}_{F_{gh}(U_f^*)})\circ \mathrm{id}_{F_{ghf}(X)}\circ \Pi_{gh,f}(\mathrm{id}_{F_{gh}(U_f)}\circ \Pi_{g,h}).
\end{aligned}$$

El lado derecho de (4.5.9) evaluado en (A,U,Π) es igual a

$$\begin{aligned}
&= \big(\epsilon_{g,hf}\circ \mathrm{id}_{F_{gh}(X)}\circ \Pi_{g,hf}\big)\big(\mathrm{id}_{U_g^*}\circ F_g(\epsilon_{h,f})\circ \mathrm{id}_{F_{ghf}(X)}\circ F_g(\Pi_{h,f})\circ \mathrm{id}_{U_g}\big)\\
&= \epsilon_{g,hf}(\mathrm{id}_{U_g^*}\circ F_g(\epsilon_{h,f}))\circ \mathrm{id}_{F_{ghf}(X)}\circ \Pi_{g,hf}(F_g(\Pi_{h,f})\circ \mathrm{id}_{U_g}).
\end{aligned}$$

Ahora, que las dos expresiones son iguales sigue de (4.5.5) y (4.3.4). ❀

Prueba del Teorema 4.5.1

Primero describamos un objeto en la equivariantización de la categoría $\mathcal{Z}(\Phi)$. Un objeto en $\mathcal{Z}(\Phi)^G$ es una colección $((X,\sigma),s)$ donde $(X,\sigma)\in\mathcal{Z}(\Phi)$, y $s_g : L_g(X,\sigma)\to(X,\sigma)$ es un morfismo en la categoría, para cada $g\in G$. Esto quiere decir que $X_{(A,U,\Pi)}\in\mathcal{B}(A,A)$ es una 1-celda, para toda 0-celda equivariante (A,U,Π); y para toda 1-celda equivariante $(\tau,\tau_g)\in\mathcal{B}^G((A,U,\Pi),(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\Pi}))$ existe un isomorfismo $\sigma_{(\tau,\tau_g)} : X_{(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\Pi})}\circ\tau\to\tau\circ X_{(A,U,\Pi)}$ tal que la ecuación (3.3) se satisface. También, para cada $g\in G$ y toda 0-celda equivariante (A,U,Π) existen morfismos

$$(s_g)_{(A,U,\Pi)} : U_g^* F_g(X_{(A,U,\Pi)})U_g\to X_{(A,U,\Pi)},$$

tales que

$$\big(\mathrm{id}_\tau\circ(s_g)_{(A,U,\Pi)}\big)\sigma^g_{(\tau,\tau^1)} = \sigma_{(\tau,\tau^1)}\big((s_g)_{(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\Pi})}\circ \mathrm{id}_\tau\big), \tag{4.5.12}$$

$$(s_{gh})_{(A,U,\Pi)}(\nu_{g,h})_{(A,U,\Pi)} = (s_g)_{(A,U,\Pi)}L_g((s_h)_{(A,U,\Pi)}), \tag{4.5.13}$$

para toda 0-celda equivariante $(A,U,\Pi),(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\Pi})$, toda 1-celda equivariante

$$(\tau,\tau_g)\in\mathcal{B}^G((A,U,\Pi),(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\Pi})),$$

y todo $g,h\in G$. La ecuación (4.5.12) sigue de que $s_g : L_g(V,\sigma)\to(V,\sigma)$ es un morfismo en la categoría $\mathcal{Z}(\Phi)$, y la ecuación (4.5.13) sigue de (2.2.2).

Se define el funtor $\Psi : \mathcal{Z}(\Phi)^G \to \mathcal{Z}(\mathcal{B}^G)$ como sigue. Sea $((X,\sigma),s) \in \mathcal{Z}(\Phi)^G$, entonces $\Psi((X,\sigma),s) = (V,\widetilde{\sigma})$. Para cada 0-celda equivariante (A,U,Π), $V_{(A,U,\Pi)}$ debe ser una 1-celda equivariante en la categoría $\mathcal{B}^G((A,U,\Pi),(A,U,\Pi))$. Se define $V_{(A,U,\Pi)} = (X_{(A,U,\Pi)}, \theta_g^{(A,U,\Pi)})$, donde

$$\begin{aligned} \theta_g^{(A,U,\Pi)} &: F_g(X_{(A,U,\Pi)}) \circ U_g \Rightarrow U_g \circ X_{(A,U,\Pi)}, \\ \theta_g^{(A,U,\Pi)} &= \mathrm{id}\,_{U_g} \circ (s_g)_{(A,U,\Pi)}. \end{aligned} \tag{4.5.14}$$

Si $(\tau,\tau_g) \in \mathcal{B}^G((A,U,\Pi),(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\Pi}))$ es una 1-celda equivariante, entonces

$$\widetilde{\sigma}_{(\tau,\tau_g)} : (X_{(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\Pi})}, \theta_g^{(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\Pi})}) \circ (\tau,\tau_g) \Rightarrow (\tau,\tau_g) \circ (X_{(A,U,\Pi)}, \theta_g^{(A,U,\Pi)}),$$
$$\widetilde{\sigma}_{(\tau,\tau_g)} = \sigma_{(\tau,\tau_g)}.$$

Afirmación 4.5.15. Las siguientes afirmaciones se cumplen.

(i) $V_{(A,U,\Pi)} = (X_{(A,U,\Pi)}, \theta_g^{(A,U,\Pi)}) \in \mathcal{B}^G$, para cada 0-celda equivariante (A,U,Π).

(ii) El objeto $(V,\widetilde{\sigma})$ pertenece a la categoría $\mathcal{Z}(\mathcal{B}^G)$. En particular, el funtor Ψ está bien definido.

(iii) El funtor $\Psi : \mathcal{Z}(\Phi)^G \to \mathcal{Z}(\mathcal{B}^G)$ es una equivalencia de categorías, y tiene una estructura monoidal.

Prueba de la Afirmación. (i). Se debe verificar que el mapa $\theta_g^{(A,U,\Pi)}$ satisface (4.3.5). En este caso, se tiene que probar que para todo $g,h \in G$

$$\big(\Pi_{g,h} \circ \mathrm{id}\,_{X_{(A,U,\Pi)}}\big)\big(\mathrm{id}\,_{F_g(U_h)} \circ \theta_g^{(A,U,\Pi)}\big)\big(F_g(\theta_h^{(A,U,\Pi)}) \circ \mathrm{id}\,_{U_g}\big)$$

es igual a

$$\theta_{gh}^{(A,U,\Pi)}\big(\mathrm{id}\,_{F_{gh}(X_{(A,U,\Pi)})} \circ \Pi_{g,h}\big).$$

Usando la definición de $\theta_g^{(A,U,\Pi)}$, se obtiene que la primer expresión es igual a

$$\begin{aligned} &\big(\Pi_{g,h} \circ \mathrm{id}\,_{X_{(A,U,\Pi)}}\big)\big(\mathrm{id}\,_{F_g(U_h)U_g} \circ (s_g)_{(A,U,\Pi)}\big)\big(\mathrm{id}\,_{F_g(U_h)} \circ F_g((s_h)_{(A,U,\Pi)}) \circ \mathrm{id}\,_{U_g}\big) \\ &= \big(\Pi_{g,h} \circ \mathrm{id}\,_{X_{(A,U,\Pi)}}\big)\big(\mathrm{id}\,_{F_g(U_h)U_g} \circ (s_g)_{(A,U,\Pi)}(\mathrm{id}\,_{U_g^* \circ F_g((s_h)_{(A,U,\Pi)})}) \circ \mathrm{id}\,_{U_g}\big) \\ &= \big(\Pi_{g,h} \circ \mathrm{id}\,_{X_{(A,U,\Pi)}}\big)\big(\mathrm{id}\,_{F_g(U_h)U_g} \circ (s_{gh})_{(A,U,\Pi)}(\nu_{g,h})_{(A,U,\Pi)}\big) \\ &= \big(\mathrm{id}\,_{U_{gh}} \circ (s_{gh})_{(A,U,\Pi)}\big)\big(\Pi_{g,h} \circ (\nu_{g,h})_{(A,U,\Pi)}\big) = \theta_{gh}^{(A,U,\Pi)}\big(\mathrm{id}\,_{F_{gh}(X_{(A,U,\Pi)})} \circ \Pi_{g,h}\big). \end{aligned}$$

La segunda igualdad sigue de (4.5.13), y la última de (4.5.4).

(ii). Como $\widetilde{\sigma}_{(\tau,\tau_g)} = \sigma_{(\tau,\tau_g)}$ para toda 1-celda equivariante (τ,τ_g), entonces $\widetilde{\sigma}$ satisface (3.3). Se debe verificar sólo que $\widetilde{\sigma}_{(\tau,\tau_g)}$ es una 2-celda equivariante, esto es, se satisface (4.3.6). Para simplificar la notación, escribimos $\theta_g^{(A,U,\Pi)} = \theta_g, \theta^{(\widetilde{A},\widetilde{U},\widetilde{\Pi})} = \widetilde{\theta}_g$. En este caso particular, usando la composición de 1-celdas equivariantes dada en (4.3.7), tenemos que probar que

$$\big(1_{\widetilde{U}_g} \circ \sigma_{(\tau,\tau_g)}\big)\big(\widetilde{\theta}_g \circ 1_\tau\big)\big(1_{F_g(\widetilde{X})} \circ \tau_g\big) = \big(\tau_g \circ 1_X\big)\big(1_{F_g(\tau)} \circ \theta_g\big)\big(F_g(\sigma_{(\tau,\tau_g)}) \circ 1_{U_g}\big). \tag{4.5.16}$$

El lado izquierdo de la ecuación (4.5.16) es igual a

$$\begin{aligned} &= \big(1_{\widetilde{U}_g} \circ \sigma_{(\tau,\tau_g)}\big)\big(1_{\widetilde{U}_g} \circ (s_g)_{(A,U,\Pi)}\big)\big(1_{F_g(\widetilde{X})} \circ \tau_g\big) \\ &= \big(1_{\widetilde{U}_g} \circ (1_\tau \circ (s_g)_{(A,U,\Pi)})\sigma^g_{(\tau,\tau_g)}\big)\big(1_{F_g(\widetilde{X})} \circ \tau_g\big) \\ &= \big(1_{\widetilde{U}_g} \circ (s_g)_{(A,U,\Pi)}\big)\big(\tau_g \circ 1_{U_g^* F_g(X) U_g}\big)\big(F_g(\sigma_{(\tau,\tau_g)}) \circ 1_{U_g}\big) \\ &= \big(\tau_g \circ 1_X\big)\big(1_{F_g(\tau)} \circ \theta_g\big)\big(F_g(\sigma_{(\tau,\tau_g)}) \circ 1_{U_g}\big). \end{aligned}$$

La primera igualdad sigue de la definición de $\theta_g^{(A,U,\Pi)}$ dada en (4.5.14), la segunda igualdad sigue de (4.5.12), y la tercera de la definición de $\sigma^g_{(\tau,\tau_g)}$.

(iii). El hecho de que Ψ es una equivalencia sigue fácil. Un cálculo directo muestra que

$$\Psi\big(((X,\sigma),s)\otimes((Y,\tau),t)\big) = \Psi((X,\sigma),s)\otimes\Psi((Y,\tau),t),$$

para todo par de objetos $((X,\sigma),s),((Y,\tau),t) \in \mathcal{Z}(\Phi)^G$. ❀

Capítulo 5

Apéndice

El objetivo de este apéndice es hacer a la Tesis lo más autocontenida posible. Se dan definiciones de algunas estructuras matemáticas que se mencionan en los diferentes capítulos y que se consideran importantes.

5.1. Álgebras de Hopf

A continuación se introducen las álgebras de Hopf.

Sea $\Bbbk$ un cuerpo.

Definición 5.1.1. Una $\Bbbk$-*álgebra* (con unidad) es un $\Bbbk$-espacio vectorial A junto con un par de funciones $\Bbbk$-lineales, la *multiplicación* $m : A \otimes A \to A$ y la *unidad* $u : \Bbbk \to A$, tales que los siguientes diagramas conmutan:

Asociatividad:

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "m\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m"'] & A\otimes A \arrow[d, "m"] \\
A\otimes A \arrow[r, "m"'] & A,
\end{tikzcd}$$

Unidad:

$$\begin{tikzcd}
 & A\otimes A \arrow[dd, "m"'] & \\
\Bbbk\otimes A \arrow[ur, "u\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & A\otimes\Bbbk \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
 & A. &
\end{tikzcd}$$

Definición 5.1.2. Una $\Bbbk$-*coálgebra* (con counidad) es un $\Bbbk$-espacio vectorial C junto con un par de funciones $\Bbbk$-lineales, la *comultiplicación* $\Delta : C \to C \otimes C$ y la *counidad* $\epsilon : C \to \Bbbk$, tales que los siguientes diagramas conmutan:

Coasociatividad:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C\otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes \mathrm{id}"] \\
C\otimes C \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"'] & C\otimes C\otimes C,
\end{tikzcd}$$

Counidad:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\Delta"] & \\ \Bbbk\otimes C & & C\otimes\Bbbk \\ & C\otimes C. \arrow[ul, "\epsilon\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\epsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Notación 5.1.3 (Notación sigma de Sweedler)**.** Si c es un elemento de una coálgebra (C, Δ, ϵ), se denota a $\Delta(c) = \sum_i a_i \otimes b_i \in C\otimes C$ por

$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

Definición 5.1.4. Sean $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ dos coálgebras. Una función lineal $f : C \to D$ es un *morfismo de coálgebras* si $\Delta_D \circ f = (f\otimes f)\Delta_C$ y $\epsilon_C = \epsilon_D \circ f$.

Definición 5.1.5. Una *biálgebra* es un $\Bbbk$-espacio vectorial B tal que (B, m, u) es un álgebra, (B, Δ, ϵ) es una coálgebra y se satisfacen las siguientes condiciones:

- Δ y ϵ son morfismos de álgebras.
- m y u son morfismos de coálgebras.

Definición 5.1.6. Sean A y B biálgebras. Un *morfismo de biálgebras* $f : A \to B$ es una función lineal tal que f es morfismo de álgebras y de coálgebras.

Definición 5.1.7. Un *álgebra de Hopf* sobre $\Bbbk$ es una biálgebra H junto con una función lineal, la *antípoda* $S : H \to H$, tal que

$$m(S\otimes \mathrm{id})\Delta = u\epsilon = m(\mathrm{id}\otimes S)\Delta.$$

Definición 5.1.8. Sean H y K álgebras de Hopf. Un *morfismo de álgebras de Hopf* $f : H \to K$ es un morfismo de biálgebras.

Definición 5.1.9. Sean H un álgebra de Hopf y $x \in H$ distinto de cero. Se dice que x es un elemento *tipo grupo* de H si

$$\Delta(x) = x \otimes x.$$

Observación 5.1.10. Si H es un álgebra de Hopf de dimensión finita, entonces la antípoda es biyectiva.

Ejemplos de álgebras de Hopf

- Sea G un grupo, el álgebra de grupo $\Bbbk G$ es un álgebra de Hopf con:

$$\Delta(g) = g\otimes g,$$
$$\epsilon(g) = 1,$$
$$S(g) = g^{-1},$$

  para $g \in G$.

- Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, el álgebra envolvente universal $H = U(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf con:

$$\epsilon(x) = 0,$$
$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1,$$
$$S(x) = -x,$$

  para $x \in \mathfrak{g}$.

5.2. Doble de Drinfeld torcido $D^{\omega}G$

En este sección del apéndice se define el doble de Drinfeld torcido de un grupo.

Sea G un grupo finito y sea $\omega \in Z^3(G, \mathbb{C}^{\times})$ un 3-cociclo normalizado, esto es, para todo $a, b, c, d \in G$, $\omega(a, 1, b) = 1$ y

$$\omega(a, b, c)\omega(a, bc, d)\omega(b, c, d) = \omega(ab, c, d)\omega(a, b, cd),$$

donde 1 es la identidad del grupo G.

Definición 5.2.1. El *doble de Drinfeld torcido* $D^{\omega}G$ se define como el álgebra sobre $\mathbb{C}$ con base

$$\{<\overset{g}{\leftarrow} x>: g, x \in G\},$$

y con producto dado por

$$<\overset{h}{\leftarrow} y> \cdot <\overset{g}{\leftarrow} x> := \delta_{y, gxg^{-1}} \frac{\omega(h, g, x)\omega(hgx(hg)^{-1}, h, g)}{\omega(h, gxg^{-1}, g)} <\overset{hg}{\longleftarrow} x> .$$

$D^{\omega}G$ es un álgebra asociativa con elemento unidad:

$$1_{D^{\omega}G} = \sum_{x \in G} <\overset{e}{\leftarrow} x> .$$

Bibliografía

[1] M. Auslander, I. Reiten , S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics No. 36, (1995).

[2] J. Bénabou, *Introduction to bicategories*, Reports of the Midwest Category Seminar, Springer, Berlin, 1967, pp. 1–77.

[3] E. Bernaschini, C. Galindo y M. Mombelli, *Group actions on 2-categories*, Manuscripta Mathematica (ISSN 0025-2611) - (-), pp. —.

[4] A. Bruguières y S. Natale, *Exact sequences of tensor categories*, Int. Math. Res. Not. **2011** (24) (2011) 5644–5705.

[5] S. Burciu y S. Natale, *Fusion rules of equivariantizations of fusion categories*, J. Math. Phys. 54, 013511 (2013), http://dx.doi.org/10.1063/1.4774293.

[6] C. Ehresmann, *Catégories et structures*, Dunod, Paris 1965.

[7] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych y V. Ostrik, *Tensor Categories*, volume 205. American Mathematical Soc., 2015.

[8] P. Etingof, D. Nikshych y V. Ostrik, *On fusion categories*, Annals of Math. **162**, 581–642 (2005).

[9] P. Etingof, D. Nikshych y V. Ostrik, *Weakly group-theoretical and solvable fusion categories*, Adv. Math **226**, 15 (2011), 176–205.

[10] P. Etingof, D. Nikshych y V. Ostrik, *Fusion categories and homotopy theory*, Quantum Topol. **1**, No. 3, (2010) 209–273.

[11] P. Etingof y V. Ostrik, *Finite tensor categories*, Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 3, 627–654.

[12] S. Eilenberg y S. Mac Lane, *General Theory of Natural Equivalences*, Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1945), 231-294.

[13] J. Fuchs, C. Schweigert y A. Valentino, *Bicategories for boundary conditions and for surface defects in 3-d TFT*, Commun. Math. Phys. 321, No. 2, (2013) 543–575.

[14] C. Galindo, *Coherence for monoidal G-categories and braided G-crossed categories*, Journal of Algebra (ISSN 0021-8693) (2017) 487 (1), pp. 118-137.

[15] S. Gelaki, D. Naidu y D. Nikshych, *Centers of graded fusion categories*, Algebra Number Theory 3, No. 8 (2009), 959–990 .

[16] R. Gordon, A. Power, y R. Street, *Coherence for tricategories*, Mem. Am. Math. Soc. 117 (1995).

[17] J. Greenough, *Monoidal 2-structure of Bimodule Categories.* J. Algebra **324** (2010) 1818–1859.

[18] N. Gurski, *Coherence in three-dimensional category theory*, volume 201 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[19] J. Hesse, C. Schweigert y A. Valentino, *Frobenius algebras and homotopy fixed points of group actions on bicategories*, preprint arXiv:1607.05148.

[20] G. Kelly y R. Street, *Review of the elements of 2-categories*, in: Category Seminar (Proc. Sem.), Sydney, 1972/1973, in: Lecture Notes in Math., vol. 420, Springer (1974) 75–103

[21] Lack S, *A 2-Categories Companion*, In: Baez J., May J. (eds) Towards Higher Categories. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, vol 152. Springer, New York, NY (2010)

[22] T. Leinster, *Basic Bicategories*, preprin arxiv: 9810.017.

[23] V. Mazorchuk y V. Miemietz, *Cell 2-representations of finitary 2-categories*, Compos. Math. **147**, No. 5, (2011) 1519–1545.

[24] V. Mazorchuk y V. Miemietz, *Transitive 2-representations of finitary 2-categories*, Trans. Am. Math. Soc. 368 (2016), no. 11, 7623–7644.

[25] V. Mazorchuk y V. Miemietz, *Isotypic faithful 2-representations of J-simple fiat 2-categories,* Math. Z. 282 (2016), no.1-2, 411–434.

[26] E. Meir y E. Musicantov, *Module categories over graded fusion categories*, Journal of Pure and Applied Algebra 216 (2012) 2449–2466.

[27] E. Meir y M. Szymik, *Drinfeld centers for bicategories*, Doc. Math., J. DMV 20, (2015) 707–735 .

[28] M. Mombelli *Una introducción a las categorías tensoriales y sus representaciones.* Nota de curso. http://www.famaf.unc.edu.ar/ mombelli/categorias-tensoriales3.pdf

[29] M. Mombelli y S. Natale, Module categories over equivariantized tensor categories, accepted in Moscow Math. J., preprint arxiv: 1405.7896.

[30] D. Naidu, *Crossed pointed categories and their equivariantizations*, Pacic J. Math. 247 (2010), 477-496.

[31] S. Natale, *On the Equivalence of Module Categories over a Group-Theoretical Fusion Category*, SIGMA 13 (2017), 042.

[32] T. Nikolaus y C. Schweigert, *Bicategories in field theories - an invitation* preprint Hamburger Beiträge zur Mathematik Nr. 425, (2001).

[33] V. Ostrik. *Module categories over the Drinfeld double of a Finite Group.* Int. Math. Res. Not. 27, (2003) 1507–1520 .

[34] V. Ostrik. *Module categories, Weak Hopf Algebras and Modular invariants.* Transform. Groups, 2 **8**, (2003) 177–206.

[35] R. Street, *Fibrations and Yoneda's Lemma in a 2-category*, in: Category Seminar (Proc. Sem.), Sydney, 1972/1973, in: Lecture Notes in Math., vol. 420, Springer (1974) 104–133.

[36] R. Street, *Fibrations in bicategories.* Cahiers Topologie Geom. Differentielle, 21 (2) (1980) 111–160.

[37] R. Rouquier, *2-Kac-Moody algebras*, Preprint arXiv:0812.5023.

[38] D. Tambara, *Invariants and semi-direct products for finite group actions on tensor categories*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), 429–456.

[39] D. Tambara y S. Yamagami, *Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups*, J. Algebra, 209(2) (1998) pp 692–707.