

Simetrías ocultas, twistors, y estabilidad de campos lineales en agujeros negros

por

Bernardo G. Araneda

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física
y Computación como parte de los requerimientos para la
obtención del grado de

Doctor en Física

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



Mayo de 2018

©FAMAF – UNC

Director: Dr. Gustavo D. Dotti



Simetrías ocultas, twistors, y estabilidad de campos lineales en agujeros negros por Bernardo G. Araneda se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

Resumen

En el marco del problema de estabilidad de agujeros negros, que es a la fecha uno de los problemas abiertos más importantes de la Relatividad General, en esta tesis estudiamos varios aspectos de las ecuaciones de campos libres sin masa sobre espacio-tiempos curvos, enfocándonos en perturbaciones de espacios Einstein algebraicamente especiales, que contienen como caso particular soluciones de agujeros negros. Analizamos la existencia y origen de estructuras de simetrías subyacentes, aspectos de estabilidad lineal de los campos, y posibles conexiones con teoría de twistors. Nuestra herramienta principal es un uso extensivo de las estructuras geométricas asociadas a teorías de Yang-Mills y conexiones sobre espacios fibrados. Estudiamos espacio-tiempos tanto de 4 como de altas dimensiones.

En 4 dimensiones, nuestros resultados valen para perturbaciones de toda la clase de espacio-tiempos Einstein de tipo Petrov D, que incluye la métrica de Kerr-(A)dS que representa un agujero negro rotante con constante cosmológica. Encontramos una identidad de operadores sobre el espacio de campos espinoriales irreducibles de spin $1/2$, 1 y 2 , que relaciona las ecuaciones de campo con ecuaciones escalares de tipo onda con peso. Esta identidad permite tomar ecuaciones adjuntas y reconstruir los campos de spin superior a partir de campos escalares, lo cual conduce a operadores de simetría para las ecuaciones diferenciales involucradas, y además sugiere conexiones con ciertos mecanismos en teoría de twistors. En este sentido, mostramos también la aparición de simetrías ocultas asociadas a espinores de Killing pesados y tensores conformes de Killing-Yano. Encontramos que toda la estructura de simetrías anterior puede asociarse a la covariancia conforme intrínseca a los campos sin masa, y que además esto guarda una profunda relación con estructuras complejas en el espacio-tiempo. Introducimos la noción de twistor local con peso y su correspondiente conexión en el fibrado de twistors.

Con respecto a aspectos de estabilidad, nos enfocamos en agujeros negros estáticos asintóticamente Anti-de Sitter, donde el espacio-tiempo no es globalmente hiperbólico y por lo tanto el análisis de la dinámica de campos lineales involucra un estudio de las condiciones de borde en el infinito temporal. Mostramos que las condiciones de borde mixtas (de Robin) son naturalmente motivadas, y encontramos que, mientras que los campos de Klein-Gordon sin masa son modalmente estables, tanto los campos de Maxwell como de gravedad linealizada son inestables bajo cierto rango del parámetro de Robin. Analizamos también la ruptura de la supersimetría entre modos gravitacionales y su relación con la estabilidad de los campos. Estos resultados son de relevancia en el contexto de la conjetura AdS/CFT de Maldacena, en la cual los duales gravitacionales son frecuentemente agujeros negros asintóticamente AdS. Nuestro estudio se basa en el análisis de ciertos operadores elípticos (tipo Schrödinger) definidos en una semilínea.

Finalmente, en espacio-tiempos de altas dimensiones, nuestros resultados se aplican a perturbaciones de la clase Kundt y de agujeros negros estáticos. La clase Kundt es relevante porque contiene como caso particular las solucio-

II

nes asociadas a geometrías cerca del horizonte de agujeros negros extremos, que han cobrado mucha importancia en la actualidad por su relación con la correspondencia Kerr/CFT. Siguiendo las ideas del caso 4-dimensional, modificamos las formas de conexión GHP e introducimos operadores de onda generalizados, mostrando que las ecuaciones de Teukolsky (y relacionadas) en dimensiones arbitrarias tienen una estructura tipo onda, y que las mismas se obtienen off shell como proyecciones de un operador de Laplace-de Rham modificado. Por último, mostramos también la relación entre las derivadas modificadas, tensores de tipo Killing con peso, y operadores conformemente covariantes. Los resultados brindan un mayor entendimiento de la estructura geométrica de las ecuaciones asociadas a perturbaciones de espacio-tiempos de altas dimensiones.

Palabras clave: Agujeros negros, Estabilidad, Campos lineales, Simetrías, Twistors, Gravedad en dimensiones arbitrarias.

PACS: 04.70.Bw, 04.20.Dw, 04.20.Gz, 02.40.-k

Abstract

In the context of the black hole stability problem, which is currently one of the major open problems in General Relativity, in this thesis we study several aspects of the massless free field equations on curved spacetimes, with focus on perturbations of algebraically special spacetimes that contain black hole solutions as particular cases. We analyze the existence and origin of underlying symmetry structures, aspects of linear stability of the fields, and possible connections with twistor theory. Our main tool is an extensive use of the geometric structures associated to Yang-Mills theories and connections on fiber bundles. We study spacetimes of both 4 and higher dimensions.

In 4 dimensions, our results hold for perturbations of the whole class of Einstein spacetimes of Petrov type D, which includes the Kerr-(A)dS metric representing a rotating black hole with cosmological constant. We find an operator identity on the space of irreducible spinor fields with spin $1/2$, 1 and 2 , that relates the field equations to weighted wave-like equations. This identity allows to take adjoint equations and reconstruct higher spin fields from scalar fields, which leads to symmetry operators for the differential equations involved, and also suggests connections with certain mechanisms in twistor theory. In this sense, we show the appearance of hidden symmetries associated to weighted Killing spinors and conformal Killing-Yano tensors. We find that the whole symmetry structure above can be associated to the conformal covariance intrinsic to massless fields, and also that this has a profound relation with complex structures on the spacetime. We introduce the notion of weighted local twistors and the corresponding connection on the twistor bundle.

Regarding stability aspects, we focus on asymptotically Anti-de Sitter static black holes, where the spacetime is non-globally hyperbolic and therefore the analysis of the dynamics of linear fields involves the study of boundary conditions at timelike infinity. We show that mixed (Robin) boundary conditions are naturally motivated, and we find that, while massless Klein-Gordon fields are modally stable, both Maxwell and linearized gravitational fields are unstable on certain range of the Robin parameter. We also analyze the breaking of supersymmetry between gravitational modes and its relation with the stability of the fields. These results are relevant in the context of Maldacena's AdS/CFT correspondence, in which the gravitational duals are frequently asymptotically AdS black holes. Our study is based on the analysis of certain elliptic (Schrödinger type) operators defined on a half-line.

Finally, for higher dimensional spacetimes, our results apply to perturbations of the Kundt class and of static black holes. The Kundt class is relevant because it contains as particular case the solutions associated to near horizon geometries of extreme black holes, which have currently attracted much attention because of their relation with the Kerr/CFT correspondence. Following the ideas of the 4-dimensional case, we modify the GHP connection forms and introduce generalized wave operators, and we show that the higher dimensional Teukolsky (and related) equations have a wave-like structure,

IV

and that they are obtained off shell as projections of a modified Laplace-de Rham operator. Lastly, we also show the relation between modified derivatives, weighted Killing-like tensors, and conformally covariant operators. Our results provide a better understanding of the geometric structure of the equations associated to perturbations of higher dimensional spacetimes.

Keywords: Black holes, Stability, Linear fields, Symmetries, Twistors, Gravity in arbitrary dimensions.

PACS: 04.70.Bw, 04.20.Dw, 04.20.Gz, 02.40.-k

A mi familia.
A la memoria de Sergio Dain.

Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a mi director, Gustavo, por guiarme y aconsejarme durante estos años, por la excelente predisposición, por tenerme paciencia, y por estar siempre para conversar sobre cuestiones tanto técnicas y académicas como humanas.

Agradezco enormemente a mi familia, por ser un gran soporte para mí durante tanto tiempo.

A mis amigos y amigas, tanto de la facultad como de otros lados.

A toda la gente del grupo de Relatividad y Gravitación. En particular agradezco a Leco (Oscar Reula) por su gran ayuda con consejos, viajes, cartas de recomendación, etc.; y a Ale Pérez, por la buena predisposición y diversas oportunidades otorgadas.

A Sergio Dain, por su energía, generosidad, compromiso, y entusiasmo; y por ser una gran fuente de inspiración y un eterno ejemplo a seguir.

Al tribunal de tesis, Jorge, Martín y Leco, por tomarse el trabajo de leer y corregir esta tesis. A los miembros de la comisión asesora, Gustavo, Guido y Osvaldo.

A la Universidad pública y gratuita.

A las instituciones que apoyaron económicamente mi doctorado. En particular, un enorme agradecimiento al CONICET por la beca doctoral, que me permitió vivir de lo que me gusta; y a los institutos externos que financiaron parte de mis viajes: al Max Planck Institute for Gravitational Physics (Golm, Alemania), al Erwin Schrödinger Institute for Mathematical Physics (Viena, Austria), y al Instituto Balseiro (Bariloche, Argentina).

Índice general

Introducción	XIII
1. Fundamentos	1
1.1. Agujeros negros y estructura asintótica	1
1.1.1. Agujeros negros estacionarios	7
1.2. El problema de estabilidad	9
1.2.1. Estabilidad no-lineal	9
1.2.2. Estabilidad lineal	12
1.2.3. Ecuaciones de onda	14
1.2.4. Estabilidad lineal modal versus no-modal	15
2. Geometría espinorial en 4 dimensiones	17
2.1. Generalidades	17
2.2. Espinores en Relatividad General	18
2.2.1. Representaciones irreducibles de $SL(2, \mathbb{C})$	20
2.2.2. Campos espinoriales	21
2.2.3. Espinores de curvatura	25
2.2.4. La clasificación de Petrov	27
2.2.5. Espacio-tiempos tipo Petrov D	28
2.3. Simetrías ocultas	28
2.3.1. Espinores de Killing y tensores de Killing-Yano	29
2.4. El formalismo GHP	32
2.4.1. Operadores de onda con peso	35
2.4.2. Operadores adjuntos	37
2.5. Perturbaciones de Minkowski	38
2.5.1. Campos libres sin masa	38
2.5.2. Spin lowering y spin raising	40
2.5.3. Operadores de simetría	43
2.5.4. Perturbaciones gravitacionales	44
3. Perturbaciones de espacio-tiempos tipo Petrov D	47
3.1. Preliminares	47
3.2. Campos de Weyl-Dirac	49
3.2.1. Operadores de simetría	50
3.3. Campos de Maxwell	51
3.3.1. Operadores de simetría	53

3.3.2.	Expresiones tensoriales	54
3.3.3.	Peso de spin cero	55
3.4.	Perturbaciones gravitacionales	56
3.4.1.	Tipo de Petrov del espacio-tiempo perturbado	57
3.4.2.	Perturbaciones del espinor de curvatura	58
3.4.3.	Perturbaciones de las ecuaciones de Einstein	60
3.5.	Espacio-tiempos esféricamente simétricos	67
3.5.1.	Campos de Maxwell	68
3.5.2.	Perturbaciones gravitacionales	69
4.	Estructuras conforme y compleja y conexiones de Teukolsky	73
4.1.	Preliminares	73
4.1.1.	Espinores de Killing modificados	74
4.2.	Covariancia conforme y estructuras complejas	76
4.2.1.	Estructura casi-compleja	78
4.2.2.	Estructura Kähler	80
4.2.3.	Formalismo GHP covariante conforme	81
4.2.4.	Espinores paralelos y de Killing con peso	84
4.3.	Twistors locales con peso	86
4.4.	Campos sin masa	88
4.4.1.	Identidades conformemente covariantes	89
4.4.2.	Relación con operadores de Teukolsky	94
4.4.3.	El operador de Laplace-de Rham	95
4.4.4.	Descripción twistorial	96
5.	Inestabilidades en agujeros negros asintóticamente AdS	99
5.1.	Preliminares	99
5.1.1.	Ecuaciones de onda en 1 + 1 dimensiones	100
5.2.	Evolución en espacio-tiempos que no son globalmente hiperbólicos	103
5.2.1.	Condiciones de borde y extensiones autoadjuntas	104
5.2.2.	Descomposiciones modales	106
5.3.	Operadores de tipo Schrödinger en una semilínea	108
5.3.1.	Potenciales regulares	109
5.3.2.	Potenciales regulares no-negativos	109
5.3.3.	Energía	111
5.3.4.	Un <i>toy model</i>	112
5.4.	Inestabilidad de Schwarzschild-AdS	113
5.4.1.	Campos de Klein-Gordon sin masa	113
5.4.2.	Campos de Maxwell	114
5.4.3.	Perturbaciones gravitacionales	116
5.4.4.	Ruptura de la dualidad supersimétrica	120
6.	Perturbaciones de espacio-tiempos de altas dimensiones	123
6.1.	Preliminares	123
6.2.	El formalismo GHP en dimensiones arbitrarias	126

6.2.1.	Clasificación del tensor de Weyl	129
6.3.	Conexiones modificadas	130
6.3.1.	Operadores de onda con peso	131
6.3.2.	El operador de Laplace-de Rham modificado	132
6.3.3.	Identidades de Bianchi y ecuaciones de Einstein	133
6.4.	La clase Kundt y geometrías cerca del horizonte	134
6.4.1.	Campos conformes de Killing con peso	134
6.4.2.	Campos de Maxwell	135
6.4.3.	Perturbaciones gravitacionales	136
6.5.	Agujeros negros estáticos	138
6.5.1.	Campos conformes de Killing con peso	140
6.5.2.	Campos de Maxwell	141
6.5.3.	Perturbaciones gravitacionales	143
6.6.	Sobre covariancia conforme	146
7.	Conclusiones	149
	Bibliografía	153

Introducción

En cualquier situación física realista, el teorema de incompletitud geodésica de Penrose indica que el colapso gravitacional completo conduce inevitablemente a una singularidad en el espacio-tiempo. Las nociones de causalidad y determinismo, junto con el poder de predictibilidad de la Física, deben ser abandonadas en torno a la singularidad, ya que la propia estructura del espacio-tiempo se rompe. Esto condujo a Penrose a formular la llamada *conjetura de censura cósmica*, la cual afirma (en su versión *débil*) que la formación de una singularidad implica la aparición de un agujero negro, cuyo horizonte de eventos la mantiene causalmente desconectada del resto del universo. Si la conjetura es cierta, luego de que el espacio-tiempo colapsa y alcanza asintóticamente un estado estacionario, los teoremas de unicidad indicarían que debe estar descrito por la métrica de Kerr, y esto debe ocurrir para cualquier estado inicial (físicamente realista) que contenga una singularidad en el futuro. En particular, supongamos que el estado inicial es ‘cercano’ al que origina al espacio-tiempo de Kerr. Por la estabilidad de Cauchy de las ecuaciones de Einstein, dicho estado inicial contendrá una superficie atrapada, luego, el teorema de Penrose indica que desarrollará una singularidad en el futuro. Si la métrica de Kerr es inestable, en la evolución de dicho estado inicial no se formará un horizonte de eventos, con lo cual la singularidad quedaría expuesta al universo, y la conjetura de censura cósmica se violaría. De esta manera, vemos que la estabilidad del espacio-tiempo de Kerr se relaciona directamente con la censura cósmica, y por lo tanto con nuestro entendimiento de la realidad física. La formulación precisa de esta cuestión es lo que se denomina el *problema de estabilidad de agujeros negros*, y es a la fecha uno de los problemas abiertos más importantes de la Relatividad General.

El estudio de estabilidad de soluciones de las ecuaciones de Einstein es extremadamente complejo, debido, en parte, a la no-linealidad de las ecuaciones. Existen en la actualidad muy pocos resultados acerca de estabilidad *no-lineal*; los trabajos históricos más conocidos son la prueba de Friedrich de estabilidad no-lineal del espacio-tiempo de de-Sitter [63], y el trabajo de Christodoulou y Klainerman de estabilidad no-lineal del espacio-tiempo de Minkowski [36] (notemos que ambas soluciones son de las más simples de la Relatividad General). Genéricamente, el primer paso es estudiar la estabilidad *lineal* de un espacio-tiempo, de manera que uno se deshace de las no-linealidades de las ecuaciones de Einstein, pero aún así el problema continúa siendo notablemente difícil. Una simplificación adicional es considerar la estabilidad lineal *modal*; de hecho, la mayoría de los trabajos en la literatura se concentra en

esta noción de estabilidad, que es muy débil en relación al problema original (ver sección 1.2.4). La estabilidad lineal *modal* de la métrica de Schwarzschild fue probada en [118, 141], y la de Kerr en [138, 128]. La estabilidad lineal *no-modal* de Schwarzschild fue probada sólo recientemente en [46, 43]; la de Kerr constituye uno de los grandes problemas abiertos hoy en día (siendo el paso previo al problema no-lineal), y es el contexto en el que se enmarca esta tesis.

Un enfoque muy útil en los estudios de estabilidad lineal de un espacio-tiempo es el análisis del comportamiento de los campos libres sin masa de spin \mathfrak{s} (con \mathfrak{s} un número semi-entero), que pueden representarse convenientemente como espinores totalmente simétricos $\varphi_{A_1 \dots A_{2\mathfrak{s}}}$ que satisfacen

$$\nabla^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_{2\mathfrak{s}}} = 0 \quad \text{si } \mathfrak{s} > 0, \quad (1)$$

$$\square \varphi = 0 \quad \text{si } \mathfrak{s} = 0, \quad (2)$$

donde $\nabla_{AA'}$ es la derivada covariante espinorial del espacio de background (que es una variedad 4-dimensional \mathcal{M} con una métrica semi-Riemanniana g_{ab}), y $\square = g^{ab} \nabla_a \nabla_b$ es el operador de onda. Estas ecuaciones tienen su origen en el estudio de las representaciones irreducibles del grupo de Poincaré en un espacio-tiempo plano de 4 dimensiones, y su extensión a un espacio curvo es válida para los casos de spin 0, 1/2, 1 y 2. Naturalmente, la ecuación más sencilla es la de un campo de spin cero (2), y es en general el primer modelo que se analiza al estudiar la estabilidad de un espacio-tiempo¹. En el espacio de Minkowski \mathbb{M} , Penrose probó en [112] que toda solución de (1) puede obtenerse a partir de una solución compleja de (2), lo que permite estudiar la estabilidad y decaimiento de campos de spin superior a partir del análisis de la ecuación de onda. La prueba de esto utiliza ciertas condiciones de integrabilidad que resultan válidas a causa de la conmutación de las derivadas covariantes en \mathbb{M} y del hecho de que el espacio de Minkowski es topológicamente trivial.

En espacios curvos, uno esperaría que sea también posible codificar la información de campos de spin 1 y 2 en un campo escalar complejo, ya que es sabido que tanto el campo de Maxwell como el gravitacional poseen sólo dos grados de libertad dinámicos. No obstante, las derivadas covariantes no conmutan debido a la presencia de curvatura, y la topología puede ser notablemente complicada, por lo que una posible generalización del resultado en \mathbb{M} no es de ningún modo obvia. Aún así, la reciente prueba de estabilidad lineal del agujero negro de Schwarzschild en [46, 47] muestra que éste es de hecho el caso para campos de spin 2 en esta solución, ya que toda la información de una perturbación gravitacional resulta estar codificada en un campo escalar Φ que satisface

$$(\square + V)\Phi = 0, \quad (3)$$

¹De hecho, es importante notar que, a la fecha, el único resultado de estabilidad lineal completa (no-modal, con resultados de acotación punto a punto y decaimiento) en el espacio-tiempo de Kerr fue obtenido recientemente por Dafermos *et al* y corresponde a un campo escalar [41].

donde V es un cierto potencial, y la métrica puede reconstruirse de manera 4-dimensional covariante como

$$h_{ab} = \frac{r^2}{3M} {}^*C_a{}^{cd} \nabla_c \nabla_d (r^3 \Phi), \quad (4)$$

donde ${}^*C_{abcd}$ es el tensor de Weyl dual².

Ahora, los mecanismos en Minkowski que mapean (1) en (2) y viceversa guardan una estrecha relación con teoría de twistors. Los twistors son objetos matemáticos originalmente desarrollados por Penrose [113] como una posible teoría de gravedad cuántica [114], en la que el espacio-tiempo no es más una entidad fundamental sino más bien secundaria a la estructura de twistors. Estos objetos han encontrado gran cantidad de aplicaciones en diversas áreas de la Física y la Matemática, y resultan especialmente adecuados para resolver las ecuaciones (1)-(2) en M. Hay diversos grados de sofisticación de esta construcción; la formulación más fina es ciertamente la *transformada de Penrose*, según la cual los campos sin masa se obtienen como ciertas integrales de contorno de funciones holomorfas en el espacio de twistors (que se entienden más en profundo como clases de cohomología de haces, ver e.g. [55] y [111, sección 6.10]). Este resultado utiliza el hecho de que ciertas partes de un twistor son *espinores de Killing*, esto es, campos espinoriales totalmente simétricos sujetos a la ecuación

$$\nabla_{(A'} \lambda_{B_1 \dots B_k)}^{(A} = 0. \quad (5)$$

Estos objetos generalizan los conceptos de vectores de Killing, tensores de Killing, y formas de Killing-Yano. Si bien la estructura de twistors en un espacio-tiempo curvo es una cuestión extremadamente sutil, existen ciertos espacios que admiten espinores de Killing, y en este contexto se conocen usualmente en la literatura como *simetrías ocultas*, ya que están asociados a la integrabilidad de geodésicas y a la separabilidad de ecuaciones como las de Klein-Gordon y Dirac en espacio-tiempos que no tienen la cantidad ‘suficiente’ de isometrías. Este enfoque resulta particularmente interesante en su conexión con (3)-(4), ya que es posible probar (aunque no está mencionado en [46, 47]) que el campo Φ tiene la estructura

$$\Phi = {}^*Y^{ab} Y_{cd} \dot{C}_{ab}{}^{cd}, \quad (6)$$

donde Y_{ab} es un tensor de Killing-Yano, ${}^*Y_{ab}$ su dual, y $\dot{C}_{ab}{}^{cd}$ es el tensor de Weyl linealizado, que representa el campo de spin 2 asociado a una perturbación gravitacional.

La posibilidad de generalizar la prueba de [46, 47] a otros espacio-tiempos, en particular a la solución de Kerr, es ciertamente motivante ya que constituiría el primer gran paso en resolver uno de los problemas abiertos más importantes de la Relatividad General, esto es, la estabilidad del espacio-tiempo

²una perturbación gravitacional arbitraria de Schwarzschild se descompone como $h_{ab}^+ + h_{ab}^-$, donde h_{ab}^+ representa el *sector par* y h_{ab}^- el *impar*; los resultados (3)-(4) valen sólo para el sector impar, pero el sector par se trata a través del impar por medio de la dualidad de Chandrasekhar; ver sección 5.4.4.

de Kerr. Asimismo, resultan también muy interesantes las posibles relaciones entre los mecanismos que subyacen (3), (4) y (6), y los objetos asociados a simetrías ocultas y teoría de twistors. El objetivo principal de esta tesis es explorar estas cuestiones.

Los resultados que hemos obtenido a lo largo de este trabajo pueden encontrarse en los artículos [7], [8], [9], [10] y [11].

Organización de la tesis

En el **capítulo 1** damos los fundamentos sobre los que se basa el problema de estudio en esta tesis. Repasamos la definición rigurosa de agujero negro, destacando la importancia de entender el rol que juega la estructura global del espacio-tiempo en este concepto. Luego presentamos la noción de *estabilidad* de un espacio-tiempo en Relatividad General, lo cual incluye el concepto de estabilidad no-lineal como problema de Cauchy, y también la noción de estabilidad lineal y la diferencia entre enfoques modales y no-modales.

El **capítulo 2** reúne una gran cantidad de material necesario para abordar los capítulos siguientes, al hacer un repaso de la geometría espinorial asociada a una variedad Lorentziana 4-dimensional. Repasamos el álgebra básica de espinores asociados al grupo de spin $SL(2, \mathbb{C})$, y varios aspectos importantes del tratamiento de espinores en espacios curvos. Recordamos también la noción de *simetrías ocultas* en Relatividad General y su utilidad en diversos problemas. Finalmente, como preliminares para los capítulos siguientes, estudiamos perturbaciones de Minkowski asociadas a campos libres sin masa.

En el **capítulo 3** generalizamos los resultados de perturbaciones de Minkowski a espacio-tiempos curvos de tipo Petrov D, que son los de interés en el problema de estabilidad de agujeros negros. Estudiamos campos de spin $1/2$, 1 y 2 ; y encontramos ciertas identidades que mapean *off shell* las ecuaciones (1) en ecuaciones de tipo onda, lo cual nos permite tanto reconstruir los campos de spin superior a partir de campos escalares, como generar operadores de simetría para las ecuaciones diferenciales. Notamos también ciertas semejanzas entre estos resultados y los correspondientes al caso de Minkowski.

En el **capítulo 4**, motivados por las identidades halladas en el capítulo 3, exploramos más en profundo el origen e interpretación de ciertos objetos que aparecen en dichos resultados. Mostramos que es posible interpretar los mismos desde el punto de vista de la covariancia conforme asociada a los campos sin masa, y que esto guarda a su vez una profunda relación con estructuras complejas. Nos vemos conducidos a una definición natural de espinores de Killing con peso, y encontramos también que la estructura tensorial de uno de los principales operadores involucrados corresponde a la de un operador de Laplace-de Rham generalizado. La covariancia conforme nos sugiere también explorar ciertas relaciones con teoría de twistors, más precisamente con el concepto de twistors locales en espacios curvos.

El **capítulo 5** trata sobre perturbaciones de agujeros negros estáticos asintóticamente Anti-de Sitter, y los métodos que utilizamos son distintos a los empleados en el resto de los capítulos. El enfoque aquí es el estudio de cómo

la dinámica de los campos, y por lo tanto la respuesta al problema de estabilidad, es influenciada por las condiciones de borde en la frontera temporal, y el problema se reduce a estudiar el espectro de un cierto operador elíptico (de tipo Schrödinger) definido en una semilínea. En particular, encontramos las extensiones autoadjuntas bajo las cuales la solución de Schwarzschild-Anti de Sitter resulta inestable.

En el **capítulo 6** analizamos la generalización de los resultados de los capítulos anteriores al caso de espacio-tiempos de altas dimensiones. Por los motivos explicados allí, nos enfocamos en perturbaciones de espacio-tiempos de la clase Kundt y de agujeros negros estáticos. Introducimos operadores de onda modificados en términos de los cuales las ecuaciones escalares (con índices internos) de tipo Teukolsky en dimensiones arbitrarias adoptan una estructura de tipo onda, y mostramos que las mismas se obtienen *off shell* como proyecciones de un operador de Laplace-de Rham generalizado. Encontramos un patrón de simetrías y de reconstrucción de los campos similar al hallado en el capítulo 3, e interpretamos ciertos operadores en términos de covariancia conforme.

Finalmente, en el **capítulo 7** hacemos un resumen general de nuestros resultados y presentamos las conclusiones de este trabajo.

Convenciones

En los capítulos 1, 2, 3 y 4 la signatura de la métrica será $(+ - - -)$, mientras que en el capítulo 5 la misma será $(- + + +)$, y por último en el capítulo 6 (que corresponde a dimensiones arbitrarias) será $(- + \dots +)$. Siguiendo la terminología en física de altas energías, utilizaremos el término *on shell* para hacer referencia a que estamos asumiendo la validez de las ecuaciones de campo (en el contexto correspondiente), y *off shell* si no hacemos esta suposición. Con excepción de una pequeña discusión heurística al comienzo de la sección 4.4, utilizaremos siempre unidades de Planck, esto es, consideramos que la constante de Planck \hbar , la constante gravitacional G y la velocidad de la luz en el vacío c valen 1, $\hbar = G = c = 1$.

Capítulo 1

Fundamentos

1.1. Agujeros negros y estructura asintótica

La primera idea intuitiva de *agujero negro*, quizás común en la cultura popular, es que el mismo es una región del espacio-tiempo de la cual la luz no puede escapar (y ya que la luz posee la máxima velocidad de propagación posible, nada puede escapar de un agujero negro). Ahora, los rayos de luz en Relatividad se representan por geodésicas nulas: curvas $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ en la variedad cuyo vector tangente tiene norma cero y se propaga paralelamente a sí mismo a lo largo de γ . El hecho de que “la luz no pueda escapar” de una región se traduce en que existen puntos del espacio-tiempo que son inalcanzables para toda geodésica nula en el interior de dicha región. Sin embargo, notemos que esto no es en realidad una situación inusual: si consideramos el cono de luz futuro de un punto cualquiera en el espacio-tiempo, todos los puntos fuera del cono se encuentran separados a una distancia espacial y por lo tanto son inalcanzables para las geodésicas nulas en el cono (simplemente porque habría que viajar más rápido que la velocidad de la luz para alcanzar esos puntos), convirtiendo a dicho cono de luz en un “agujero negro”. Ya que esta definición no es para nada satisfactoria, surge la pregunta: ¿qué parte del espacio-tiempo podemos tomar como “referencia” para decir que, si hay geodésicas nulas que no llegan a la misma, entonces el espacio-tiempo contiene un agujero negro? Siguiendo con la discusión intuitiva, podemos pensar que todas las geodésicas nulas del espacio-tiempo, si no están confinadas a una región, entonces “se extienden hasta el infinito”. Luego, “el infinito” nos sirve como referencia para detectar si hay geodésicas nulas “atrapadas” en alguna región. Inmediatamente advertimos entonces dos cosas: se requiere un conocimiento global del espacio-tiempo para detectar lo que sería una “región de agujero negro”, y necesitamos precisar la idea de infinito.

El estudio de la estructura del infinito en Relatividad General es fundamental en distintos aspectos. En nuestro caso nos interesa porque, como veremos, permite precisar el concepto de agujero negro, pero es también muy útil en otras áreas; por ejemplo, este estudio dio origen a la noción de radiación gravitacional, que condujo finalmente a la reciente detección de ondas gravitacionales; y también ha llevado a esquemas de cuantización de la grave-

dad. El punto de partida usual es la noción de *espacio-tiempo asintóticamente simple*. La siguiente definición es adaptada de [84, 130]:

Definición 1.1.1 (Simplicidad asintótica). *Un espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) orientable temporal y espacialmente se dice asintóticamente simple si existe un espacio-tiempo causal¹ $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ con borde suave $\partial\tilde{\mathcal{M}} =: \mathcal{I}$, junto con un embedding $\theta : \mathcal{M} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ tal que:*

1. *existe una función suave $\Omega : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ (factor conforme) que cumple $\Omega|_{\theta(\mathcal{M})} > 0$ y $\theta_*\tilde{g} = \Omega^2 g$,*
2. *en la frontera, se tiene $\Omega|_{\mathcal{I}} = 0$, $d\Omega|_{\mathcal{I}} \neq 0$,*
3. *toda geodésica nula de \mathcal{M} tiene dos puntos finales en \mathcal{I} .*

Así como (\mathcal{M}, g) representa el espacio-tiempo *físico*, $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$ representa un espacio-tiempo *no-físico*; la construcción es simplemente una herramienta para poder estudiar el infinito de una manera bien definida. El embedding de la variedad \mathcal{M} en $\tilde{\mathcal{M}}$ suele denominarse *compactificación conforme*, y una herramienta muy útil para visualizarla son los llamados *diagramas conformes* o *diagramas de Carter-Penrose* (o simplemente de Penrose); en la figura 1.1 ilustramos un ejemplo. El borde \mathcal{I} se denomina *frontera conforme* o *infinito conforme*. En la práctica, \mathcal{I} también suele llamarse *scri*, un diminutivo de *script I*.

El infinito conforme es una hipersuperficie bien definida en $\tilde{\mathcal{M}}$, con normal $d\Omega$. Aquellos conjuntos en los que $d\Omega = 0$ (tales como los puntos i^0, i^\pm en los diagramas conformes más abajo) no pertenecen a \mathcal{I} y requieren un tratamiento aparte. Asumiendo que valen las ecuaciones de Einstein, e imponiendo condiciones de decaimiento asintótico apropiadas para el tensor de energía momento de los posibles campos en el espacio-tiempo, la naturaleza causal de \mathcal{I} depende de la existencia y signo de una constante cosmológica λ : si $\lambda = 0$, \mathcal{I} es una hipersuperficie nula, si $\lambda > 0$ \mathcal{I} es espacial, y si $\lambda < 0$ \mathcal{I} es temporal. Esto puede demostrarse usando métodos conformes, ver e.g. [130, sección 10.1].

La definición 1.1.1 es bastante general, e incluye, por ejemplo, el espacio-tiempo de Minkowski, estrellas (aisladas) que no han colapsado gravitacionalmente, o inclusive el espacio-tiempo de de-Sitter, que posee una constante cosmológica positiva. No incluye, por otro lado, el espacio-tiempo de Anti-de Sitter, en el que la constante cosmológica es negativa, ni tampoco, como veremos, a los agujeros negros (en ambos casos el ítem 3. no se cumple). Puede también ser el caso que, aún cuando un espacio-tiempo sea totalmente regular (i.e. geodésicamente completo y globalmente hiperbólico –ver def. 1.1.5 más abajo–), no posea esta estructura asintótica, un ejemplo de esto es la denominada *solución de Nariai*.

¹un espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) se dice *causal* si no posee curvas causales (i.e. temporales o nulas) cerradas.

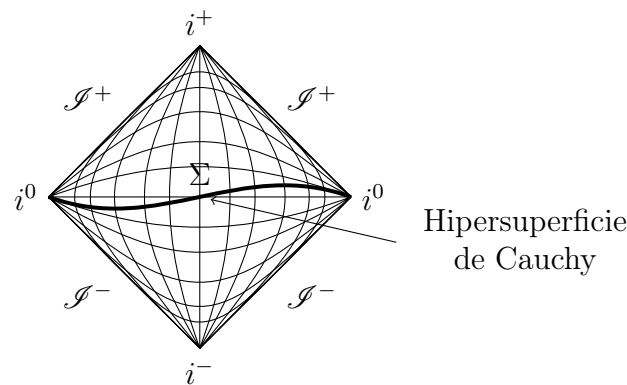


Figura 1.1: Diagrama conforme del espacio-tiempo de Minkowski. Cada punto en el diagrama es en realidad una esfera, el diagrama corresponde a la variedad cociente $\mathcal{M}/SO(3)$. i^+ e i^- son los infinitos temporales futuro y pasado, mientras que i^0 es el infinito espacial. Líneas a 45 grados representan geodésicas nulas; las líneas verticales curvas corresponden a superficies $\{r = \text{cte}\}$, mientras que las horizontales son $\{t = \text{cte}\}$. El dominio de dependencia de la hipersuperficie Σ es todo \mathcal{M} , por lo tanto el espacio-tiempo es globalmente hiperbólico (ver def. 1.1.5).

Es frecuente agregar una condición adicional a la definición 1.1.1, que da origen al concepto de espacio-tiempo *asintóticamente plano*², en el que uno impone, además de las 3 condiciones anteriores, el requerimiento de que el tensor de Ricci de la métrica g sea cero en un entorno de la frontera conforme. Esta clase de espacio-tiempos es importante porque modela el campo gravitacional exterior de cuerpos masivos aislados (en ausencia de una constante cosmológica). Intuitivamente, un espacio-tiempo asintóticamente plano es aquel en el que, suficientemente lejos de posibles concentraciones de masa, la métrica se aproxima a la de Minkowski. La condición de planitud asintótica sólo puede darse para el caso de cero constante cosmológica, $\lambda = 0$. En el caso $\lambda > 0$ el espacio-tiempo se dice *asintóticamente de Sitter* (ver e.g. [12] para propiedades generales de estos espacio-tiempos), mientras que para $\lambda < 0$ se denomina *asintóticamente Anti-de Sitter* (ver, e.g., [13]).

Ahora, como mencionamos, existen espacio-tiempos de gran relevancia en los que el ítem 3. no se cumple. Por esta razón se introduce el concepto de *espacio-tiempo débilmente asintóticamente simple*, como aquel cuya *región asintótica* es difeomorfa a la de un espacio-tiempo asintóticamente simple; más precisamente [84, 130]:

Definición 1.1.2 (Simplicidad asintótica débil). *Un espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) se dice débilmente asintóticamente simple si existe, a su vez, un espacio-tiempo asintóticamente simple (\mathcal{M}', g') y un entorno $U' \subset \mathcal{I}'$ de forma que $\theta^{-1}(U') \cap \mathcal{M}'$ es isométrico a un entorno $U \subset \mathcal{M}$.*

Agregando el requerimiento de que el tensor de Ricci de g sea cero en un entorno del infinito conforme, se obtiene el concepto de espacio-tiempo *débilmente asintóticamente plano*. En la figura 1.2 ilustramos el diagrama conforme de un ejemplo de esta situación, correspondiente a la (extensión maximal de la) solución de Schwarzschild (ver más abajo). La noción débil de simplicidad asintótica en la definición 1.1.2 relaja la condición 3. de la def. 1.1.1, y

²también llamado *asintóticamente vacío y simple*.

permite definir rigurosamente, como veremos enseguida, una región de agujero negro. Dado que este último concepto requerirá de la distinción entre *pasado* y *futuro*, es necesario introducir primero algunos conceptos asociados a la estructura causal del espacio-tiempo.

La definición 1.1.1 asume que el espacio-tiempo es *temporalmente orientable*, que significa que existe un campo vectorial temporal T globalmente definido en todo \mathcal{M} . Un campo vectorial causal v se dice *dirigido hacia el pasado* si $g(T, v) < 0$, y *dirigido hacia el futuro* si $g(T, v) > 0$. Similarmente, una curva en el espacio-tiempo se dice *dirigida hacia el pasado/futuro* si su vector tangente tiene la propiedad correspondiente. El pasado/futuro de un evento arbitrario en \mathcal{M} se define del siguiente modo:

Definición 1.1.3 (Pasado/futuro causal). *El pasado causal de un punto $p \in \mathcal{M}$ se define como el conjunto $J^-(p)$ de puntos $q \in \mathcal{M}$ tales que existe una curva causal $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ dirigida hacia el pasado, con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. El pasado causal de un subconjunto $S \subset \mathcal{M}$ es la unión $J^-(S) = \cup_{p \in S} J^-(p)$. El futuro causal $J^+(p)$ se define de modo análogo cambiando pasado por futuro donde corresponda.*

Consideremos ahora un espacio-tiempo débilmente asintóticamente simple, que admite una orientación temporal global. Asumiremos que el infinito conforme \mathcal{I} es nulo o espacial, lo cual implica que el espacio-tiempo es (débilmente) asintóticamente plano o de Sitter, respectivamente. (El caso Anti-de Sitter es más delicado, ver más abajo.) Podemos pensar entonces que \mathcal{I} consiste de dos partes disjuntas: $\mathcal{I} = \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^-$, donde el *infinito futuro* \mathcal{I}^+ consiste de los puntos finales de las geodésicas nulas futuras, y el *infinito pasado* son los puntos finales de las geodésicas nulas pasadas. Estamos en condiciones ahora de precisar matemáticamente el concepto de agujero negro:

Definición 1.1.4 (Agujero negro). *Sea (\mathcal{M}, g) un espacio-tiempo (débilmente) asintóticamente simple, cuyo infinito conforme es nulo o espacial, $\mathcal{I} = \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^-$. Decimos que (\mathcal{M}, g) contiene un agujero negro si el pasado causal del infinito futuro no es toda la variedad, esto es, si $\mathcal{M} \setminus J^-(\mathcal{I}^+) \neq \emptyset$. El agujero negro es la región \mathcal{B} dada por*

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{M} \setminus \overline{J^-(\mathcal{I}^+)} \quad (1.1)$$

y el horizonte de eventos es la frontera de esta región: $\mathcal{H} \equiv \mathring{\mathcal{B}}^3$.

Similarmente se puede definir una región de *agujero blanco*, como

$$\mathcal{W} \equiv \mathcal{M} \setminus \overline{J^+(\mathcal{I}^-)}, \quad (1.2)$$

siempre que este conjunto sea no-vacío. Resulta muy útil visualizar las regiones (1.1) y (1.2) mediante un diagrama conforme. En la figura 1.2 ilustramos esta situación para el caso particular de la extensión maximal de la solución de Schwarzschild, que repasaremos brevemente en la sección 1.1.1.

³ \overline{U} denota la clausura topológica de U , y $\mathring{U} := \overline{U} \setminus U$ es la frontera de U

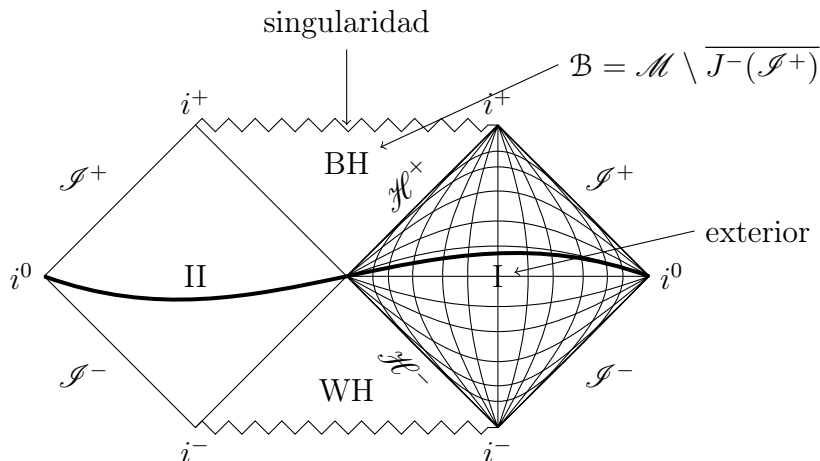


Figura 1.2: Diagrama de Penrose de la extensión maximal del agujero negro de Schwarzschild asintóticamente plano. La región BH es el agujero negro, mientras que WH es el agujero blanco. La singularidad es de carácter espacial y se encuentra en el valor coordenado $r = 0$. El dominio de comunicaciones exteriores (1.3) es $I \cup II$ (la región II está causalmente desconectada de I y se considera no-física; por esta razón nos referimos sólo a la región I como *exterior*). El espacio-tiempo es globalmente hiperbólico: la línea gruesa que va desde i^0 (izquierda) a i^0 (derecha) es una hipersuperficie de Cauchy.

La definición 1.1.4 captura de una manera precisa la noción intuitiva con la que empezamos: un agujero negro es una región del espacio-tiempo de la cual los rayos de luz no pueden escapar *al infinito*. El *exterior* de un agujero negro se denomina formalmente *dominio de comunicaciones exteriores* \mathcal{D} , y se define como la intersección entre el pasado causal del infinito futuro, y el futuro causal del infinito pasado:

$$\mathcal{D} := J^-(\mathcal{I}^+) \cap J^+(\mathcal{I}^-). \quad (1.3)$$

Notemos que la región de agujero negro en un espacio-tiempo no es necesariamente conexa. Este es por ejemplo el caso en la solución (“subextrema”) de Schwarzschild-de Sitter, donde se tiene una “secuencia” infinita de regiones de agujero negro, separadas por horizontes cosmológicos. En la figura 1.3 ilustramos el diagrama de Penrose de este espacio-tiempo.

Por otro lado, en la definición 1.1.4 nos restringimos al caso $\lambda \geq 0$, que implica un infinito conforme nulo o espacial. Esto es así porque esta clase de espacio-tiempos es la que se considera físicamente realista: la evidencia empírica indica que el Universo posee una constante cosmológica extremadamente pequeña y positiva, con lo cual es apropiado modelar los espacio-tiempos que consideramos como asintóticamente planos o de Sitter. Existe también otra razón para el interés físico en estos espacio-tiempos, que se asocia al poder de predictibilidad de la Física: cualquier evento en esta clase está influenciado sólo por condiciones iniciales apropiadas. Más precisamente, definimos el *dominio de dependencia futuro* de una hipersuperficie espacial $\Sigma \subset \mathcal{M}$, denotado $D^+(\Sigma)$, como el conjunto de puntos $p \in \mathcal{M}$ tales que toda curva causal pasada, inextensible, que pasa por p intersecta Σ . El dominio de dependencia *pasado*, $D^-(\Sigma)$, se define de modo análogo intercambiando futuro por pasado; y el dominio de dependencia total es la unión $D(\Sigma) = D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma)$. Intuitivamente, para cualquier punto en $D^+(\Sigma)$, toda señal que lo inflencie

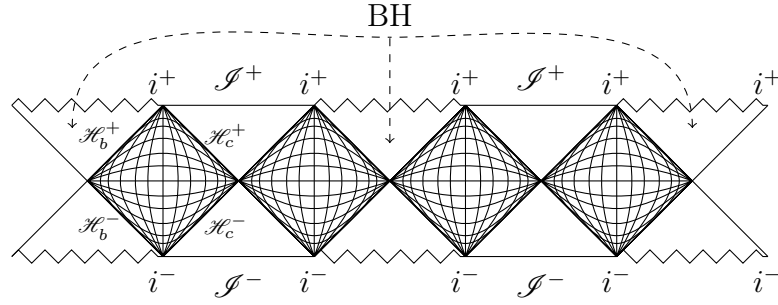


Figura 1.3: Diagrama de Penrose de Schwarzschild-de Sitter *subextremo*, i.e. los parámetros satisfacen la relación $0 < 9\lambda M^2 < 1$ (con $\lambda > 0$). El espacio-tiempo es (débilmente) asintóticamente simple. La secuencia se repite infinitamente en ambas direcciones. La frontera conforme $\mathcal{I} = \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^-$ es espacial. El horizonte de eventos del agujero negro es $\mathcal{H}_b = \mathcal{H}_b^+ \cup \mathcal{H}_b^-$, y el horizonte cosmológico es $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_c^+ \cup \mathcal{H}_c^-$. La región BH de agujero negro consiste de varias (infinitas) componentes disconexas entre sí.

debe haber pasado por Σ ; de modo que mediante un conocimiento de la información apropiada en Σ podemos predecir lo que sucederá en cualquier punto de $D^+(\Sigma)$. El poder de predictibilidad de la Física se basa en que, conociendo condiciones iniciales apropiadas, podamos determinar lo que ocurre en *cualquier* evento futuro (o pasado) en el espacio-tiempo. Este es un requerimiento global y no cualquier espacio-tiempo lo satisface; aquellos que sí lo cumplen reciben un nombre particular:

Definición 1.1.5 (Hiperbolicidad global). *Un espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) se denomina globalmente hiperbólico si existe una hipersuperficie espacial Σ tal que $D(\Sigma) = \mathcal{M}$. En tal caso, Σ se llama hipersuperficie de Cauchy.*

Los espacio-tiempos asintóticamente planos o de Sitter son globalmente hiperbólicos⁴. Por otro lado, en los espacio-tiempos asintóticamente Anti-de Sitter el infinito conforme es de carácter temporal. Esto implica que existen regiones cuyo pasado causal intersecta este borde temporal, y por lo tanto estos espacio-tiempos no son globalmente hiperbólicos. En la figura 1.4 ilustramos un ejemplo con el diagrama de Penrose de Schwarzschild-Anti de Sitter. Aún podríamos definir una región de agujero negro como $\mathcal{M} \setminus \overline{J^-(\mathcal{I})}$, pero cualquier definición de evolución dinámica afronta una seria dificultad respecto del caso $\lambda \geq 0$: ciertos eventos son influenciados no sólo por condiciones iniciales sino también por condiciones de borde en el infinito conforme. Algunos casos particulares de este problema fueron tratados primero por R. Wald en [136] y más tarde por R. Wald y A. Ishibashi en [95, 96], y en esta tesis trataremos esta situación en el capítulo 5. El interés en esta clase de espacio-tiempos se debe principalmente a que son uno de los ingredientes fundamentales en la renombrada *correspondencia AdS/CFT* de Maldacena, que es una de las principales herramientas utilizadas hoy en día en la física teórica de altas energías.

⁴para la prueba de esto en el caso $\lambda = 0$, ver Proposición 6.9.2 en [84].

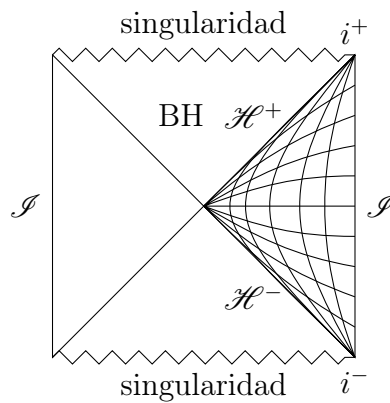


Figura 1.4: Diagrama de Penrose de Schwarzschild Anti-de Sitter. Notemos que la frontera conforme \mathcal{I} es temporal. El espacio-tiempo *no* es globalmente hiperbólico. Aún cuando consideraremos a la región BH como un agujero negro, notar que la definición 1.1.4 no incluye esta situación.

1.1.1. Agujeros negros estacionarios

Como mencionamos en la introducción, la versión débil de la conjetura de censura cósmica establece, en términos intuitivos, que el resultado del colapso gravitacional completo de un cuerpo suficientemente masivo es un agujero negro, no una singularidad desnuda (esto es, una singularidad causalmente conectada con observadores en el infinito, i.e. no existe un horizonte de eventos). Si esta conjetura es cierta, es esperable que un agujero negro formado por colapso gravitacional alcance eventualmente un estado estacionario, luego de que una cantidad finita de energía sea radiada al infinito en forma de ondas gravitacionales. Por lo tanto, las soluciones de agujero negro estacionario son de gran relevancia física, y son aquellas en las que nos concentraremos en esta tesis. Más específicamente, asumiendo un espacio-tiempo (débilmente) asintóticamente simple:

Definición 1.1.6 (Espacio-tiempo estacionario). *Un espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) se dice estacionario si posee un campo vectorial de Killing que es temporal cerca de los infinitos futuro \mathcal{I}^+ y pasado \mathcal{I}^- .*

Recordemos que un vector de Killing es por definición un generador infinitesimal de isometrías. La noción de *agujero negro estacionario* se obtiene entonces combinando las definiciones 1.1.4 y 1.1.6. Este tipo de soluciones, además de la recién mencionada relevancia física, son importantes desde el punto de vista matemático debido a (entre otras cosas) ciertos teoremas de unicidad. Estos teoremas han sido probados primeramente para espacio-tiempos de 4 dimensiones, asintóticamente planos, y vacíos⁵. El teorema final es consecuencia de una serie de resultados debidos a Hawking [82], Israel [98], Carter [25], y Robinson [120]:

⁵en 4 dimensiones se logró también acoplar un campo electromagnético y obtener el correspondiente teorema de unicidad para la *métrica de Kerr-Newman*. Estudios de unicidad en altas dimensiones son un área activa de investigación, aunque es ya claro que la situación es mucho más compleja.

Teorema 1.1.1 (Teorema de unicidad, Carter [25], Robinson [120]). *Sea (\mathcal{M}, g) un espacio-tiempo 4-dimensional estacionario y asintóticamente plano que contiene un agujero negro, donde g es una solución de las ecuaciones de Einstein de vacío. Entonces (\mathcal{M}, g) está descrito por la métrica de Kerr.*

La *métrica de Kerr* es en realidad una familia bi-paramétrica de soluciones de vacío de las ecuaciones de Einstein, considerada una de las más importantes de la Relatividad General. Si bien el teorema de unicidad sólo es válido para el caso vacío y asintóticamente plano, es posible incluir una constante cosmológica λ en las ecuaciones de Einstein y obtener la solución de Kerr-(anti) de Sitter: la forma explícita de la métrica, en las denominadas *coordenadas de Boyer-Lindquist* $\{t, r, \theta, \varphi\}$, es

$$g = \frac{(\Delta_r - a^2 \sin^2 \theta \Delta_\theta)}{I^2 \Sigma} dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta_r} dr^2 - \frac{2a \sin^2 \theta [\Delta_r - (r^2 + a^2) \Delta_\theta]}{I^2 \Sigma} dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta_\theta} d\theta^2 - \frac{\sin^2 \theta [(r^2 + a^2)^2 \Delta_\theta - a^2 \sin^2 \theta \Delta_r]}{I^2 \Sigma} d\varphi^2, \quad (1.4)$$

donde

$$\Delta_r := r^2 - 2Mr + a^2 - \frac{1}{3}\lambda r^2(r^2 + a^2), \quad I := 1 + \frac{1}{3}\lambda a^2, \quad (1.5)$$

$$\Delta_\theta := 1 + \frac{1}{3}\lambda a^2 \cos^2 \theta, \quad \Sigma := r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (1.6)$$

Los parámetros M y a representan, respectivamente, la masa y el momento angular (por unidad de masa) del espacio-tiempo, y son constantes asociadas a las isometrías continuas generadas por los campos de Killing ∂_t y ∂_φ (el espacio-tiempo posee también la isometría discreta $t \rightarrow -t, \varphi \rightarrow -\varphi$). Existe una singularidad de curvatura en forma de anillo en los valores coordenados $\{r = 0, \theta = \pi/2\}$. La geometría (1.4) contendrá un agujero negro sólo si los parámetros M, a y λ guardan cierta relación entre sí, de otro modo puede contener una singularidad desnuda. Esto depende de cuántas raíces reales tiene la ecuación $\Delta_r = 0$. Siendo un polinomio de grado 4 en r , pueden existir hasta 4 raíces reales: $r_{c-} < r_{b-} < r_{b+} < r_{c+}$; en este caso el espacio-tiempo contiene un agujero negro y 4 horizontes distintos: r_{b+} es el horizonte de eventos, r_{b-} un horizonte interior, y r_{c+} y r_{c-} son horizontes cosmológicos exterior e interior respectivamente.

Veamos algunos casos límite de los parámetros. Si $\lambda = 0, M \neq 0, a \neq 0$, el espacio-tiempo se reduce a la solución de Kerr y el teorema de unicidad es válido siempre que exista un agujero negro, que será para el caso en que $0 \leq |a| \leq M$. En esta situación el espacio-tiempo posee dos horizontes dados por los valores coordenados

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (1.7)$$

El horizonte exterior r_+ es un horizonte de eventos, mientras que el horizonte interior r_- es un horizonte de Cauchy. La región $r > r_+$ es el dominio de comunicaciones exteriores (1.3), que tiene la estructura $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times (r_+, \infty) \times S^2$. Si $|a| > M$, los horizontes desaparecen y se tiene una singularidad desnuda.

En el caso $|a| = M$ ambos horizontes se fusionan en uno solo, y el espacio-tiempo representa un agujero negro *extremo*.

Si $\lambda \neq 0$, $M \neq 0$ y $a = 0$, se obtiene la solución de Schwarzschild-(Anti-)de Sitter:

$$g = f(r)dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.8)$$

donde

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2. \quad (1.9)$$

El espacio-tiempo representa ahora un agujero negro no-rotante, esféricamente simétrico. Si $\lambda = 0$, recuperamos la solución de Schwarzschild usual, cuyo diagrama de Penrose ilustramos en la figura 1.2; para $\lambda > 0$ tenemos la solución de Schwarzschild-de Sitter (diagrama de Penrose en fig. 1.3) y para $\lambda < 0$ tenemos Schwarzschild-Anti de Sitter (diagrama de Penrose en fig. 1.4). Si además de $a = 0$ se tiene $M = 0$, pero $\lambda \neq 0$, la métrica se reduce a la de (Anti-)de Sitter. Si $\lambda = a = M = 0$, se obtiene la métrica de Minkowski.

En esta tesis, la principal característica que nos interesa acerca de los agujeros negros estacionarios es su estructura algebraica: la familia de Kerr-(Anti-) de Sitter es *algebraicamente especial, de tipo Petrov D*. La clasificación de Petrov es un esquema que permite distinguir los posibles tipos del tensor de curvatura en base a su estructura algebraica; lo veremos en detalle en la sección 2.2.4. La estructura tipo Petrov D posee propiedades notables en las que estamos particularmente interesados, que veremos en los capítulos siguientes.

1.2. El problema de estabilidad

En la introducción dimos un argumento heurístico que muestra la importancia de la estabilidad de las soluciones de agujeros negros en relación a la conjetura de censura cósmica. Una noción precisa de *estabilidad* en Relatividad General es muy sutil; en esta sección pretendemos dar, en primer lugar, algunos aspectos generales de cuál es el problema último que se quiere resolver (esto es, la estabilidad *no-lineal*), y luego el enfoque que utilizaremos en esta tesis en relación al problema de estabilidad *lineal*.

1.2.1. Estabilidad no-lineal

En términos generales, un marco de trabajo adecuado para estudiar la dinámica de un sistema físico es la formulación de valores iniciales o *problema de Cauchy*: estudiar la evolución del sistema mediante las soluciones de las ecuaciones diferenciales que lo describen, sujetas a condiciones iniciales apropiadas. Esta formulación da también origen al concepto de *estabilidad*, como veremos enseguida. Por simplicidad, en esta subsección nos restringiremos a las ecuaciones de Einstein de vacío. La noción de “condiciones iniciales” en Relatividad General es la siguiente:

Definición 1.2.1 (Dato inicial). *Un dato inicial de vacío para las ecuaciones de Einstein es un triple (Σ, h_{ij}, K_{ij}) , donde Σ es una variedad 3-dimensional con una métrica Riemanniana h_{ij} , y K_{ij} es un tensor simétrico sobre Σ , tal que se satisfacen las ecuaciones de vínculo de Einstein*

$${}^3R - K_{ij}K^{ij} + K^2 = 0, \quad (1.10)$$

$$D_j K^{ij} - h^{ij} D_j K = 0, \quad (1.11)$$

donde 3R y D_i son, respectivamente, el escalar de curvatura y la derivada covariante asociados a la 3-métrica h_{ij} , los índices se suben y bajan con h_{ij} y su inversa h^{ij} , y $K := h^{ij} K_{ij}$.

En esta definición, la 3-variedad Σ hace las veces de “instante de tiempo inicial”, mientras que h_{ij} es el “valor inicial” de la variable dinámica que evoluciona, y K_{ij} su “derivada temporal”⁶.

Dada una solución (de vacío) (\mathcal{M}, g) de las ecuaciones de Einstein, y una hipersuperficie espacial Σ con métrica inducida h_{ij} y curvatura extrínseca K_{ij} , es posible probar que las ecuaciones de vínculo (1.10)-(1.11) se satisfacen idénticamente (en virtud de las identidades de Gauss-Codazzi). La pregunta inversa es si un dato inicial origina siempre un espacio-tiempo; esto es, si dado un dato inicial (Σ, h_{ij}, K_{ij}) , existe un (\mathcal{M}, g) solución de las ecuaciones de Einstein tal que Σ es una hipersuperficie en \mathcal{M} con métrica inducida h_{ij} y segunda forma fundamental K_{ij} . Esta cuestión fue resuelta por Y. Choquet-Bruhat [37], quien demostró un teorema de *existencia y unicidad local*. Más tarde, Y. Choquet-Bruhat y R. Geroch probaron un resultado de *unicidad global*:

Teorema 1.2.1 (Y. Choquet-Bruhat y R. Geroch, [38]). *Sea (Σ, h_{ij}, K_{ij}) un dato inicial de vacío para las ecuaciones de Einstein. Entonces existe un desarrollo maximal, globalmente hiperbólico, que es único salvo isometrías.*

Por otro lado, respecto de la existencia, es importante enfatizar que la solución (\mathcal{M}, g) existe *localmente* en el espacio y el tiempo. Utilizando técnicas de “pegado” (*gluing*), las diferentes soluciones locales pueden combinarse en una solución *global en el espacio* ([65, sección 5.1]). No obstante, en general no es posible obtener una solución *global en el tiempo* ([65, sección 5.2]), ya que la evolución del dato inicial puede desarrollar singularidades; por ejemplo en un proceso de colapso gravitacional en el que, de acuerdo a la conjetura de censura cósmica, se forma un agujero negro. Esta característica, i.e. la ausencia de resultados de existencia global, está estrechamente relacionada al problema de estabilidad de soluciones de las ecuaciones de Einstein.

El primer concepto de estabilidad a destacar es la *estabilidad de Cauchy*, lo cual básicamente significa continuidad de la solución con el dato inicial,

⁶el tensor K_{ij} representa la curvatura extrínseca de Σ (pensada como subvariedad del espacio-tiempo al que el dato inicial da origen), que es equivalente a la derivada de Lie de h_{ij} a lo largo del vector normal (temporal) a Σ .

donde la noción de continuidad es en base a normas de Sobolev⁷. Notemos que, aún cuando un espacio-tiempo cumpla esta propiedad, el resultado de existencia *local* de la solución implica que asintóticamente en el tiempo las soluciones originadas por datos iniciales cercanos pueden apartarse sin límite, i.e., la estabilidad de Cauchy no asegura nada acerca de una noción de *estabilidad global* del espacio-tiempo. Para precisar esta idea, dado un dato inicial $(\Sigma, \mathring{h}_{ij}, \mathring{K}_{ij})$, definimos una ε -*perturbación* como un nuevo dato inicial (Σ, h_{ij}, K_{ij}) tal que $\|h_{ij} - \mathring{h}_{ij}\|_\ell < \varepsilon$ y $\|K_{ij} - \mathring{K}_{ij}\|_{\ell-1} < \varepsilon$ para alguna norma de Sobolev $\|\cdot\|_\ell$ (ver por ejemplo [119, def. 1] y [58, def. 1.19]). Entonces, informalmente hablando, un espacio-tiempo es *no-linealmente estable* si para toda ε -perturbación suficientemente chica, el desarrollo maximal, globalmente hiperbólico es asintóticamente similar al desarrollo del dato original. Una definición más rigurosa en un caso general es también más complicada; ver por ej. [58, def. 1.20].

Para un agujero negro estacionario, hemos visto que el espacio-tiempo es (débilmente) asintóticamente simple (para $\lambda \geq 0$), con lo cual posee un infinito conforme bien definido. Si la solución es no-linealmente estable, la evolución de perturbaciones del dato inicial debe resultar en un espacio-tiempo con una estructura asintótica similar, es decir que debe admitir (en particular) un infinito conforme. La conjetura de *estabilidad no-lineal de agujeros negros* es entonces la siguiente (ver e.g. [42] y [39, sección 5.6]):

Conjetura 1 (Estabilidad no-lineal de la métrica de Kerr). *Sea (Σ, h_{ij}, K_{ij}) un dato inicial de vacío para las ecuaciones de Einstein, suficientemente cercano al dato inicial de un espacio-tiempo de Kerr \mathring{g} con parámetros $\mathring{M}, \mathring{a}$, $0 \leq |\mathring{a}| < \mathring{M}$. Entonces el desarrollo maximal, globalmente hiperbólico de (Σ, h_{ij}, K_{ij}) posee un infinito nulo completo \mathcal{S}^+ , cuyo pasado causal $J^-(\mathcal{S}^+)$ está acotado en el futuro por un horizonte de eventos, y tal que la métrica restringida a $J^-(\mathcal{S}^+)$ permanece globalmente cercana a \mathring{g} y decae asintóticamente a un espacio-tiempo de Kerr con parámetros M, a .*

Notemos que el requerimiento de la existencia de un horizonte de eventos futuro se relaciona directamente a la conjetura de censura cósmica, e implica la relación $0 \leq |a| < M$ para los parámetros del agujero negro de Kerr final.

Existen muy pocos resultados de estabilidad no-lineal de soluciones de las ecuaciones de Einstein. En el caso asintóticamente plano, el trabajo más conocido es el célebre resultado de estabilidad no-lineal del espacio-tiempo de Minkowski, realizado por D. Christodoulou y S. Klainerman en [36]. Para asintóticamente de Sitter, tenemos el trabajo [63] de H. Friedrich de estabilidad no-lineal del espacio-tiempo de de-Sitter. Muy recientemente, ha aparecido el trabajo [85], por P. Hintz y A. Vasy, sobre la estabilidad no-lineal de la solución de Schwarzschild-de Sitter⁸.

⁷Una *norma de Sobolev* $\|\cdot\|_\ell$ de orden $\ell \in \mathbb{N}$ en una variedad Riemanniana (Σ, h) está dada por $\|T\|_\ell^2 := \sum_{k \leq \ell} \int_\Sigma |D^k T|_h^2 \mu_h$, donde D y μ_h son la derivada covariante y forma de volumen asociadas a h , respectivamente.

⁸aunque el título de dicho trabajo es “The global nonlinear stability of the Kerr-de Sitter family of black holes”, la prueba de los autores es de hecho para el caso de pequeño

1.2.2. Estabilidad lineal

En general, uno de los pasos más importantes en el estudio de estabilidad no-lineal de un espacio-tiempo, es estudiar primero su estabilidad *lineal*. En este enfoque no se estudia la evolución de perturbaciones de datos iniciales, sino que el problema consiste en analizar la acotación y el decaimiento de campos lineales en el espacio-tiempo. Por razones que veremos en los capítulos siguientes, las ecuaciones de campos lineales se pueden clasificar de acuerdo a un parámetro denominado *spin* que toma valores semi-enteros, $\mathfrak{s} \in \frac{\mathbb{N}_0}{2}$. En un espacio-tiempo arbitrario, los casos de relevancia física son $\mathfrak{s} = 0, \frac{1}{2}, 1$ y 2 , que corresponden respectivamente a campos escalares, de Dirac, de Maxwell, y perturbaciones gravitacionales. El caso de mayor importancia es el de spin 2 , ya que representa deformaciones (lineales) de la geometría del espacio-tiempo, y es por tanto el paso anterior al problema no-lineal.

En el caso de la estabilidad del espacio-tiempo de Minkowski $\mathbb{M} := (\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$, el análisis de Christodoulou y Klainerman [35] del decaimiento de campos de spin 1 y 2 fue un paso muy importante para su prueba de estabilidad no-lineal en [36]. El trabajo de [35] fue luego generalizado en [122] para campos (sin masa) de spin arbitrario en Minkowski, los cuales son espinores totalmente simétricos $\varphi_{A_1 \dots A_{2\mathfrak{s}}} = \varphi_{(A_1 \dots A_{2\mathfrak{s}})}$ que resuelven las denominadas *ecuaciones de campos libres sin masa de spin \mathfrak{s}* :

$$\partial^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_{2\mathfrak{s}}} = 0 \quad (1.12)$$

(ver capítulo 2 para notación, y sección 2.5.1 para el origen de estas ecuaciones). El caso de spin cero es el más sencillo, y es representado por la ecuación de onda:

$$\square \varphi = 0, \quad (1.13)$$

donde $\square = \eta^{ab} \partial_a \partial_b$ es el operador de onda o D'Alembertiano. En un espacio-tiempo plano, Penrose probó en [112] que las soluciones de (1.12) pueden construirse en la forma $\varphi_{A_1 \dots A_{2\mathfrak{s}}} = \partial_{A_1 A'_1} \dots \partial_{A_{2\mathfrak{s}} A'_{2\mathfrak{s}}} \chi^{A'_1 \dots A'_{2\mathfrak{s}}}$, donde $\chi^{A'_1 \dots A'_{2\mathfrak{s}}} = \chi^{(A'_1 \dots A'_{2\mathfrak{s}})}$ satisface $\square \chi^{A'_1 \dots A'_{2\mathfrak{s}}} = 0$ y se denomina *potencial de Hertz*. (El hecho de que una solución arbitraria de (1.12) pueda representarse mediante un potencial de Hertz se debe a que el espacio-tiempo de Minkowski es topológicamente trivial, ver [112, sección 4].) Más aún, Penrose demuestra que el potencial de Hertz puede elegirse como $\chi^{A'_1 \dots A'_{2\mathfrak{s}}} = \chi P^{A'_1 \dots A'_{2\mathfrak{s}}}$, donde $P^{A'_1 \dots A'_{2\mathfrak{s}}}$ es *constante* en \mathbb{M} y χ satisface $\square \chi = 0$ (y se denomina a veces *potencial de Debye*); de este modo, toda solución de (1.12) puede construirse en base a una solución (compleja) de la ecuación de onda (1.13). Este enfoque aún es de interés actual, ver por ejemplo [6], donde se estudian las propiedades asintóticas de los potenciales de Hertz en Minkowski, para aplicarlas luego al análisis del decaimiento de soluciones de (1.12).

En espacio-tiempos curvos (\mathcal{M}, g) , las ecuaciones (1.12) para spin $\mathfrak{s} > 1$ (reemplazando $\partial^{AA'}$ por la derivada covariante espinorial $\nabla^{AA'}$) poseen en

momento angular, con lo cual las perturbaciones (no lineales) son equivalentes a perturbar la solución de Schwarzschild-de Sitter.

general vínculos algebraicos que restringen fuertemente la existencia de soluciones; ver sección 3.1. El caso de spin $\mathfrak{s} = 0$ aún es representado por la ecuación de onda, reemplazando el D'Alembertiano plano por el correspondiente operador de onda covariante $\square = g^{ab}\nabla_a\nabla_b$. Este caso es el más sencillo de estudiar en un espacio-tiempo curvo, y aún así llevó muchos años demostrar la estabilidad y decaimiento de un campo escalar en el espacio-tiempo de Kerr; luego de muchos resultados parciales se culminó con el trabajo [41] de M. Dafermos *et al.* Como mencionamos en la introducción, es importante notar que, a la fecha, éste es el único resultado de estabilidad lineal completa en Kerr, lo cual muestra la complejidad del problema. Para spins $\mathfrak{s} = 1/2$ y $\mathfrak{s} = 1$ los vínculos algebraicos se satisfacen trivialmente, con lo cual campos de Dirac y Maxwell pueden todavía estudiarse mediante las ecuaciones de campos libres sin masa. Para spin $\mathfrak{s} = 3/2$ no se conocen campos fundamentales en la Naturaleza, y aún en un espacio plano este tipo de campos tiene problemas de causalidad asociados a una propagación más rápida que la velocidad de la luz. Este problema puede eliminarse con el requerimiento de supersimetría, y de hecho los campos con $\mathfrak{s} = 3/2$ son esenciales en teorías de supergravedad, pero las ecuaciones no son de la forma (1.12). Para spin 2, el campo correspondiente es el espinor de curvatura linealizado, y la ecuación que satisface *no es* la de un campo libre sin masa que se propaga en \mathcal{M} ; la variable en este caso es la métrica linealizada h_{ab} , y las ecuaciones de campo son las ecuaciones linealizadas de Einstein, que en el caso vacío con constante cosmológica tienen la forma

$$\dot{G}_{ab}[h] + \lambda h_{ab} = 0, \quad (1.14)$$

donde $\dot{G}_{ab}[h]$ es el tensor de Einstein linealizado,

$$\dot{G}_{ab}[h] = -\frac{1}{2}\square h_{ab} - \frac{1}{2}\nabla_a\nabla_b h + \nabla^c\nabla_{(a}h_{b)c} - \frac{1}{2}g_{ab}(\nabla^c\nabla^d h_{cd} - \square h) \quad (1.15)$$

(con $h = g^{ab}h_{ab}$). Una dificultad adicional en el caso de perturbaciones gravitacionales tiene que ver con la invariancia de gauge, esto es, con el hecho de que una solución h_{ab} de (1.14) es *físicamente equivalente* a $h_{ab} + \mathcal{L}_\xi g_{ab}$, donde ξ es un campo vectorial arbitrario⁹. Por lo tanto, las variables físicamente apropiadas que se utilicen para describir las perturbaciones son aquellas que resultan invariantes frente a tal transformación.

Por otro lado, la representación de campos de spin superior en términos de potenciales de Hertz y de Debye es también una cuestión sutil, debido a que las derivadas covariantes no conmutan, y las condiciones de integrabilidad involucran ahora términos de curvatura. A la fecha no es claro que cualquier solución de las ecuaciones de campo pueda representarse en términos de estos potenciales¹⁰ (ni tampoco cuáles serían fórmulas adecuadas de esta representación), y ahondar en esta cuestión es uno de los principales objetivos de esta

⁹esta es simplemente la versión linealizada de la bien conocida invariancia bajo difeomorfismos de la Relatividad General.

¹⁰algunos resultados históricos importantes en esta línea son, por ejemplo, los trabajos de J. Stewart [124], J. Cohen y L. Kegeles [102], R. Wald [134].

tesis. Cabe esperar también que el potencial de Debye, en caso de existir, no satisfaga la ecuación de onda usual, sino alguna ecuación diferencial “de tipo onda”, esto es, una ecuación de segundo orden donde \square es reemplazado por un operador de onda más general y se deba también agregar un potencial.

1.2.3. Ecuaciones de onda

En la subsección anterior mencionamos que, en el estudio de campos lineales en espacios curvos, es deseable poder representar campos de spin superior en términos de campos escalares (potenciales de Debye) que satisfagan ecuaciones de tipo onda. En esta subsección queremos dar una mínima motivación de porqué nos enfocamos en ecuaciones de “tipo onda”. La insistencia en este tipo de ecuaciones se debe a que las mismas han sido intensamente estudiadas en la literatura, y uno puede entonces aplicar resultados muy poderosos de la teoría de ecuaciones diferenciales. En lo que sigue consideraremos un espacio-tiempo globalmente hiperbólico (\mathcal{M}, g) y un fibrado vectorial \mathbb{E} sobre \mathcal{M} , dado que los resultados estándar valen para esta situación. Seguiremos las referencias [21] y [135, sección 10.1].

Precisemos a qué nos referimos con una ecuación de tipo onda. En primer lugar, un operador diferencial lineal de segundo orden tiene la forma general $A^{ab}\partial_a\partial_b + B^a\partial_a + C$. La estructura “tipo onda” de un operador se formaliza del siguiente modo:

Definición 1.2.2 (Operador normalmente hiperbólico). *Un operador diferencial de segundo orden $P : C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{E}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ se dice normalmente hiperbólico si su símbolo principal está dado por la métrica. En otras palabras, en coordenadas locales $\{x^a\}$ P adopta la forma*

$$P = g^{ab}(x)\partial_a\partial_b + B^a(x)\partial_a + C(x). \quad (1.16)$$

Si P es un operador normalmente hiperbólico, una *ecuación de onda lineal* es una ecuación de la forma $Pu = f$, para una f dada, donde $u \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{E})$ es una sección suave de \mathbb{E} . Sea $\Sigma \subset \mathcal{M}$ una hipersuperficie de Cauchy, con normal unitario futuro n^a . El *problema de Cauchy* para esta ecuación de onda es encontrar u tal que

$$\begin{aligned} Pu &= f, \\ u|_\Sigma &= u_0, \\ (\nabla_n u)|_\Sigma &= u_1, \end{aligned} \quad (1.17)$$

para f, u_0, u_1 dadas. El resultado más relevante al considerar este sistema es el siguiente (ver Teoremas 3.2.11 y 3.2.12 en [21], también Teorema 10.1.2 en [135]):

Teorema 1.2.2. *Sea (\mathcal{M}, g) un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, y sea $\Sigma \subset \mathcal{M}$ una hipersuperficie de Cauchy con normal n^a . Sea \mathbb{E} un fibrado vectorial sobre \mathcal{M} y sea P un operador normalmente hiperbólico actuando en secciones de \mathbb{E} . Entonces:*

- (i) Para cada $u_0, u_1 \in C_0^\infty(\Sigma, \mathbb{E})$ y $f \in C_0^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{E})$, existe una única solución al problema de Cauchy (1.17).
- (ii) La solución depende continuamente de los datos u_0, u_1, f .
- (iii) La solución u satisface $\text{supp}(u) \subset J(K)$, donde $K = \text{supp}(u_0) \cup \text{supp}(u_1) \cup \text{supp}(f)$ y $J(K) = J^+(K) \cup J^-(K)$.

Los items (i) y (ii) significan que el problema de Cauchy está bien definido (es *well-posed*), y el item (iii) implica que existe una velocidad de propagación *finita* para las perturbaciones. El item (ii) implica también la estabilidad de Cauchy del sistema (1.17), pero, como observamos en la subsección 1.2.1, esto no asegura nada acerca de la estabilidad global de la solución u . La demostración del teorema puede encontrarse en [21]. Las condiciones de suavidad de los datos en (i) pueden ser relajadas, i.e. es posible utilizar funciones de menor regularidad en (por ej.) espacios de Sobolev apropiados.

1.2.4. Estabilidad lineal modal versus no-modal

Finalmente, hagamos algunos comentarios importantes con respecto a la diferencia entre estabilidad lineal *modal* y *no-modal*. En el enfoque modal, toda solución se descompone en una suma infinita de *modos*, cada uno de los cuales es una solución separable de la ecuación, y se analiza la evolución de modos aislados. Por ejemplo, en Schwarzschild, la descomposición modal conduce a que las ecuaciones linealizadas de Einstein se reduzcan a ecuaciones escalares para variables de la forma $\Phi_{\ell,m}^{(\omega)}(t, r, \theta, \varphi) = \psi_{\ell,m}^{(\omega)}(r)Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)e^{i\omega t}$, donde $Y_{\ell,m}$ son los armónicos esféricos ordinarios, ω es una constante de separación, y $\psi_{\ell,m}^{(\omega)}$ es una función que satisface cierta ecuación diferencial ordinaria (ver sección 5.2.2). Un término de esta forma, caracterizado por la *frecuencia* ω y los números armónicos (ℓ, m) , se denomina *modo*, y *estabilidad lineal modal* se refiere a probar que no existan modos con $\Im\mathfrak{m}(\omega) < 0$ (esto es simplemente porque, si no existen modos con $\Im\mathfrak{m}(\omega) < 0$, entonces $\Phi_{\ell,m}$ decaerá asintóticamente en el tiempo). Este es ciertamente un primer paso importante; sin embargo, descartar la existencia de este tipo de modos no constituye una prueba de estabilidad lineal (ver por ejemplo [47], también [40]). Esto es porque los campos perturbativos son una suma infinita de modos, y la acotación de modos aislados no implica una acotación del campo completo. Más aún, un sistema puede ser modalmente estable (en el sentido recién mencionado) y sin embargo admitir soluciones que crezcan tanto como se quiera a un tiempo finito (*transient growths*), habiendo ejemplos de esto en mecánica de fluidos (ver por ejemplo [121]). Por último, las variables $\Phi_{(\ell,m)}^{(\omega)}$ carecen de significado geométrico, y su relación con efectos observables de la perturbación sobre la geometría es remota (ver sección 5.4.3 y [47]).

Una gran mayoría de resultados acerca de estabilidad lineal en la literatura se refieren sólo a un análisis modal. La estabilidad lineal *modal* de la solución de Schwarzschild fue demostrada en [118, 141], mientras que para Kerr el resultado análogo fue obtenido por B. Whiting en [138], utilizando

la formulación desarrollada por S. Teukolsky [128]. En cambio, la estabilidad lineal *no-modal* de Schwarzschild fue demostrada sólo recientemente por G. Dotti en [46] (y extendida para el caso con constante cosmológica en [47]), y también independientemente por M. Dafermos, G. Holzegel e I. Rodnianski en el preprint aún más reciente [43]. La estabilidad lineal *no-modal* del agujero negro de Kerr permanece un problema abierto a la fecha, y es un área muy activa de investigación en Física Matemática. Mencionamos, por último, que mientras un análisis modal no alcanza para probar estabilidad lineal, sí es suficiente para encontrar *inestabilidades* lineales (ver por ejemplo [75, 49, 50, 51]), algo que estudiaremos particularmente en el capítulo 5 ¹¹.

¹¹No obstante, es importante aclarar que *inestabilidad lineal no necesariamente implica inestabilidad no-lineal*, debido a que es en principio posible que existan términos que sean relevantes sólo al nivel no-lineal y de alguna manera cancelen la inestabilidad lineal. Agradecemos a Omar Ortiz por esta observación.

Capítulo 2

Geometría espinorial en 4 dimensiones

2.1. Generalidades

La razón de considerar espinores en Física es, en última instancia, cuántica (ver sección 2.5.1). No obstante, estos objetos han encontrado también aplicaciones importantísimas en problemas puramente clásicos; el ejemplo más relevante es ciertamente la prueba de Witten [140] de la positividad de la masa en Relatividad General. En 4 dimensiones, la gran utilidad de los espinores está en parte asociada a la estructura del grupo de spin correspondiente, que conduce a trabajar siempre con objetos totalmente simétricos, lo cual es de gran utilidad para cálculos explícitos. Desde el punto de vista puramente matemático, los espinores aparecen en el estudio de álgebras de Clifford en el área del álgebra geométrica. En cualquier caso, un espinor es siempre, por definición, un objeto que transforma bajo un grupo de spin.

Sea V un espacio vectorial de dimensión d , y sea g una forma bilineal, no degenerada, de signatura (p, q) en V . El grupo de transformaciones que preserva g es el grupo ortogonal $O(p, q)$. Si requerimos además que las transformaciones preserven el elemento de volumen de V , $O(p, q)$ se reduce a $SO(p, q)$. Tenemos entonces:

Definición 2.1.1. *El grupo de spin asociado a (V, g) es el cubrimiento*

$$\text{Spin}(p, q) = \widetilde{\text{SO}}(p, q)^\dagger, \quad (2.1)$$

donde $\text{SO}(p, q)^\dagger$ es la componente de $\text{SO}(p, q)$ conexas con la identidad. Si $\rho : \text{Spin}(p, q) \rightarrow \text{GL}(E)$ es una representación de $\text{Spin}(p, q)$ en el espacio vectorial E , un espinor es un elemento de E .

La naturaleza de los espinores depende entonces de la estructura de los grupos de spin, y los ejemplos en Física en general hacen uso de isomorfismos particulares. En Mecánica Cuántica no-relativista, el espacio es $V = \mathbb{R}^3$ con métrica euclídea, con lo cual el grupo de spin es $\text{Spin}(3) = \widetilde{\text{SO}}(3)$. Además se tiene el isomorfismo $\text{Spin}(3) \cong \text{SU}(2)$, y la representación fundamental de

$SU(2)$ es \mathbb{C}^2 , luego un espinor en este contexto es simplemente un elemento de \mathbb{C}^2 que, bajo rotaciones en el espacio, transforma bajo $SU(2)$. En Teoría Cuántica de Campos, el espacio es $V = \mathbb{R}^4$ con la métrica de Minkowski; el grupo de spin es entonces $\text{Spin}(1, 3) = \widetilde{\text{SO}(1, 3)}^\dagger$, que resulta ser isomorfo a $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Un tercer ejemplo es el grupo de spin $\text{Spin}(2, 4) \cong \text{SU}(2, 2)$, que es un cubrimiento 4 a 1 del grupo conforme en Minkowski, y los espinores de $\text{SU}(2, 2)$ se denominan *twistors*, ver sección 4.3. Por otro lado, en Relatividad General el espacio-tiempo no es un espacio vectorial sino una variedad diferenciable, con lo cual la definición de espinores es una cuestión mucho más sutil. Como repasaremos a continuación, la idea es esencialmente definir espinores en cada espacio tangente, y luego “pegar” todas las construcciones de una manera suave. Existen, no obstante, obstrucciones de origen topológico para esta construcción, con lo cual no todo espacio-tiempo en Relatividad General admite una estructura espinorial.

2.2. Espinores en Relatividad General

Como mencionamos, la idea para construir espinores en un espacio curvo (\mathcal{M}, g) es definirlos localmente, y luego ver si es posible “pegar” esta construcción de manera suave en todo \mathcal{M} . Veamos primero esta construcción local; en la sección 2.2.2 veremos los aspectos globales.

Sea (\mathcal{M}, g) un espacio-tiempo 3 + 1 dimensional, orientable temporal y espacialmente, con signatura métrica $(+ - - -)$. Sea $x \in \mathcal{M}$, y sea $\{e_{\mathbf{a}}\}$, $\mathbf{a} = 0, \dots, 3$, una tetraada ortonormal en $T_x\mathcal{M}$, esto es $g(e_{\mathbf{a}}, e_{\mathbf{b}}) = g_{ab}e_{\mathbf{a}}^a e_{\mathbf{b}}^b = \eta_{\mathbf{ab}}$, donde $\eta_{\mathbf{ab}} = \text{diag}(1, -, 1, -1, -1)$. Cualquier otra tetraada de la forma $\{e'_{\mathbf{a}} = \Lambda_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} e_{\mathbf{b}}\}$, donde Λ es un elemento del grupo ortogonal $O(1, 3)$, es igualmente válida ya que $g(e'_{\mathbf{a}}, e'_{\mathbf{b}}) = \eta_{\mathbf{ab}}$. Si requerimos además tetradas que preserven la orientación temporal y espacial, $O(1, 3)$ es adicionalmente reducido a $\text{SO}(1, 3)^\dagger$. Esto implica que, en x , tenemos el espacio vectorial $T_x\mathcal{M}$ con una forma bilineal invariante bajo $\text{SO}(1, 3)^\dagger$; podemos entonces construir espinores asociados a $T_x\mathcal{M}$ según la definición 2.1.1. El correspondiente grupo de spin es:

$$\widetilde{\text{SO}(1, 3)}^\dagger = \text{Spin}(1, 3) \cong \text{SL}(2, \mathbb{C}). \quad (2.2)$$

El grupo $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ es un doble cubrimiento de $\text{SO}(1, 3)^\dagger$: el mapa cubrimiento $\phi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}(1, 3)^\dagger$ es un homomorfismo 2-1, siendo su kernel $\ker(\phi) = \mathbb{Z}_2$. Veamos un poco más en detalle la acción explícita de este mapa (esto es, la relación entre los elementos de ambos grupos). Consideremos los espacios $T_x\mathcal{M} \cong \mathbb{R}^4 = \text{span}\{e_{\mathbf{a}}\}$ y $H_2 = \text{span}_{\mathbb{R}}\{\sigma_{\mathbf{a}}\}$, donde $\sigma_{\mathbf{a}} = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, con σ_0 la identidad 2×2 (multiplicada por $2^{-1/2}$) y $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ las matrices de Pauli (por $2^{-1/2}$):

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Consideremos también el isomorfismo $\sigma : \mathbb{R}^4 \rightarrow H_2$ (tomamos a H_2 como un espacio *real*) dado por $\sigma(e_{\mathbf{a}}) = \sigma_{\mathbf{a}}$. Entonces la relación entre un elemento

$S \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ y su imagen $\Lambda = \phi(S) \in \text{SO}(1, 3)^\dagger$ está dada por

$$S\sigma(v)S^\dagger = \sigma(\Lambda v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^4, \quad (2.4)$$

donde se sobreentienden las representaciones fundamentales de ambos grupos (i.e. S es una matriz 2×2 y Λ una matrix 4×4). De la relación (2.4) se ve claramente que $\phi(S) = \phi(-S)$, es decir que S y $-S$ representan la misma transformación de Lorentz.

La representación fundamental de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ es \mathbb{C}^2 , y la anti-fundamental es $\bar{\mathbb{C}}^2$. A diferencia de $\text{SU}(2)$, \mathbb{C}^2 y $\bar{\mathbb{C}}^2$ no son representaciones equivalentes de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ ¹, lo cual implica que debemos hacer distinción entre ellas. En notación de índices abstractos, tomamos esto en cuenta como sigue: los índices A, B, C, \dots representan objetos de \mathbb{C}^2 y toman valores en $\{0, 1\}$, mientras que índices primados A', B', C', \dots corresponden a $\bar{\mathbb{C}}^2$, y toman los valores $\{0', 1'\}$. Considerando también las representaciones duales \mathbb{C}^{2*} y $\bar{\mathbb{C}}^{2*}$, tenemos entonces las siguientes clases de objetos:

$$\psi^A \in \mathbb{C}^2, \quad \chi^{A'} \in \bar{\mathbb{C}}^2, \quad \omega_A \in \mathbb{C}^{2*}, \quad \xi_{A'} \in \bar{\mathbb{C}}^{2*}. \quad (2.5)$$

Espinores más generales se definen, naturalmente, tomando productos tensoriales arbitrarios: un espinor de tipo $(k, l; k', l')$ es un elemento

$$\varphi^{A_1 \dots A_k B'_1 \dots B'_{k'} C_1 \dots C_l D'_1 \dots D'_{l'}} \in \otimes^k \mathbb{C}^2 \otimes^{k'} \bar{\mathbb{C}}^2 \otimes^l \mathbb{C}^{2*} \otimes^{l'} \bar{\mathbb{C}}^{2*}. \quad (2.6)$$

De la relación (2.4) deducimos que la estructura de índices del isomorfismo σ es $\sigma_{\mathbf{a}}^{AA'}$, con lo cual dicha relación queda (notando que podemos omitir el vector v)

$$S^A_B \sigma_{\mathbf{a}}^{BB'} \bar{S}_{B'}^{A'} = \sigma_{\mathbf{b}}^{AA'} \Lambda_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}. \quad (2.7)$$

El objeto $\sigma_{\mathbf{a}}^{AA'}$ permite establecer una correspondencia entre vectores y espinores de tipo $(1, 1; 0, 0)$, pues un vector $v = v^{\mathbf{a}} e_{\mathbf{a}}$ es mapeado a

$$v^{\mathbf{a}} \mapsto [\sigma(v)]^{AA'} = v^{\mathbf{a}} \sigma_{\mathbf{a}}^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & v^0 - v^3 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Usando el vierbein dual $e^{\mathbf{a}}$, definimos la *soldering form* como $\sigma_a^{AA'} := e^{\mathbf{a}}_{\mathbf{a}} \sigma_{\mathbf{a}}^{AA'}$, con lo cual podemos escribir $v^{AA'} := v^{\mathbf{a}} \sigma_a^{AA'}$. Más aún:

Observación 2.2.1. *Es tradicional omitir la soldering form en la correspondencia entre espinores y tensores, de manera que se establece la equivalencia de índices*

$$a \equiv AA', \quad b \equiv BB', \quad c \equiv CC', \dots \quad (2.9)$$

Por ejemplo, $v^a \equiv v^{AA'}$, $\omega_a \equiv \omega_{AA'}$, etc. En esta tesis utilizaremos esta notación.

¹Para ver esto, supongamos, por el contrario, que \mathbb{C}^2 y $\bar{\mathbb{C}}^2$ fuesen equivalentes como representaciones de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, entonces por definición existiría un mapa invertible (*intertwiner*) $w : \mathbb{C}^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}^2$ tal que $\bar{S} = wSw^{-1}$ para todo $S \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$; pero si tomamos por ejemplo $S = \text{diag}(7i, -i/7)$, entonces S tiene un autovalor $7i$, mientras que \bar{S} no; luego no existe tal mapa.

Las operaciones de subir y bajar índices en espinores (esto es, un mapa canónico entre un espacio espinorial y su dual) se realizan con el espinor antisimétrico $\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$ (y su inversa ϵ^{AB}), que es un objeto invariante bajo $\text{SL}(2, \mathbb{C})$,

$$S_A{}^C S_B{}^D \epsilon_{CD} = \epsilon_{AB}, \quad \forall S \in \text{SL}(2, \mathbb{C}). \quad (2.10)$$

Una relación idéntica se cumple para el complejo conjugado $\bar{\epsilon}_{A'B'}$. Este objeto es el análogo de la métrica en el espacio de espinores; pero, como es antisimétrico, debe tenerse cuidado en cómo subir y bajar índices; nuestras convenciones son

$$\psi_A := \epsilon_{BA} \psi^B, \quad \omega^A := \epsilon^{AB} \omega_B \quad (2.11)$$

y similarmente para los complejos conjugados. Puede mostrarse que la relación entre ϵ_{AB} y la métrica en $T_x \mathcal{M}$ es

$$g_{ab} \equiv g_{AA'BB'} = \epsilon_{AB} \bar{\epsilon}_{A'B'}. \quad (2.12)$$

Notemos que, en vista de (2.11) y (2.12), el producto tensorial entre dos espinores ψ^A y $\phi^{A'}$ define un vector nulo (complejo) en $T_x \mathcal{M}$: si $\psi^A \phi^{A'} =: v^a$, entonces $g_{ab} v^a v^b = 0$. El vector v^a será real si y sólo si $\phi^{A'} = \bar{\psi}^{A'}$.

Finalmente, el análogo espinorial de una tetrada en $T_x \mathcal{M}$ es una *diada de spin*, esto es, una base $\{\epsilon_{\mathbf{A}}^A\} = \{o^A, \iota^A\}$ de \mathbb{C}^2 tal que $o_A \iota^A \equiv \epsilon_{AB} o^A \iota^B = 1$. Los vectores nulos asociados a una diada y su compleja conjugada definen una *tetrada nula* en $T_x \mathcal{M}$:

$$\ell^a = o^A \bar{o}^{A'}, \quad n^a = \iota^A \bar{\iota}^{A'}, \quad m^a = o^A \bar{\iota}^{A'}, \quad \bar{m}^a = \iota^A \bar{o}^{A'}. \quad (2.13)$$

(Notemos que m^a es un vector complejo.) La relación entre las tetradas nula y ortonormal está dada por

$$\ell^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0^a + e_3^a), \quad n^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_0^a - e_3^a), \quad m^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1^a - ie_2^a). \quad (2.14)$$

2.2.1. Representaciones irreducibles de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$

Una gran ventaja del formalismo de espinores en 4 dimensiones es que uno puede restringirse a trabajar sólo con objetos totalmente simétricos. Podemos anticipar esto si tenemos en cuenta que el espacio de tensores antisimétricos en 2 dimensiones tiene dimensión 1, lo que se traduce en que un espinor arbitrario puede descomponerse en una parte totalmente simétrica más una suma de productos de ϵ 's con espinores totalmente simétricos de menor valencia (ver Proposición (3.3.54) en [110]). Esto se puede describir de manera más formal utilizando la teoría de representaciones de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, de la que hacemos un mini-repaso en lo que sigue.

El grupo de Lie $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ es topológicamente $S^3 \times \mathbb{R}^3$, con lo cual es simplemente conexo y, por lo tanto, sus representaciones están en correspondencia 1-1 con representaciones de su álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Además, no es difícil mostrar que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ es isomorfa a la complexificación del álgebra $\mathfrak{su}(2)$:

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2). \quad (2.15)$$

La teoría de representaciones irreducibles (*irreps*) de $\mathfrak{su}(2)$ es bien conocida (ver e.g. [81, Capítulo 4]): las mismas se clasifican por un número semi-entero $\mathfrak{s} \in \mathbb{N}_0/2$ que se denomina *spin*, y el espacio de representación $S_{(2\mathfrak{s})}$ es isomorfo² al espacio de objetos totalmente simétricos sobre \mathbb{C}^2 , que tiene dimensión $2\mathfrak{s} + 1$. Ahora, dadas dos irreps de $\mathfrak{su}(2)$ caracterizadas por \mathfrak{s} y \mathfrak{s}' , su producto tensorial es una irrep de $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, luego por (2.15) concluimos que las irreps de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, y por lo tanto las de $SL(2, \mathbb{C})$, se caracterizarán por dos números semienteros, y los espacios de representación estarán compuestos de espinores totalmente simétricos en índices primados y no-primados:

$$S_{(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}')} \equiv (\odot^{2\mathfrak{s}} \mathbb{C}^2) \otimes (\odot^{2\mathfrak{s}'} \bar{\mathbb{C}}^2), \quad (\mathfrak{s}, \mathfrak{s}') \in \frac{\mathbb{N}_0}{2} \times \frac{\mathbb{N}_0}{2}, \quad (2.16)$$

donde \odot denota el producto tensorial simétrico. La dimensión de este espacio es $(2\mathfrak{s} + 1)(2\mathfrak{s}' + 1)$. (Ver también Proposición (3.3.62) en [110].) Es posible demostrar que una representación $(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}')$ de $SL(2, \mathbb{C})$ da origen a una representación ordinaria de $SO(1, 3)^\uparrow$ *si y sólo si $\mathfrak{s} + \mathfrak{s}'$ es entero*. Por ejemplo, la representación $S_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$ es la complexificación de la representación fundamental de $SO(1, 3)^\uparrow$, i.e. $\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{C}$. Por otro lado, la representación $S_{(\frac{1}{2}, 0)}$ es simplemente \mathbb{C}^2 , mientras que $S_{(0, \frac{1}{2})}$ es $\bar{\mathbb{C}}^2$; ninguna de ellas es representación de $SO(1, 3)^\uparrow$.

Dado que las representaciones irreducibles de $SL(2, \mathbb{C})$ consisten de espinores totalmente simétricos, en la práctica es muy útil descomponer cualquier expresión tensorial en sus componentes irreducibles. Esto es particularmente cierto al trabajar con productos tensoriales de espinores, para lo cual podemos hacer uso del siguiente resultado:

Proposición 2.2.1 (Descomposición de Clebsh-Gordan). *La descomposición en representaciones irreducibles del producto tensorial entre dos irreps $S_{(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')}$ y $S_{(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}')}$ está dada por*

$$S_{(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}')} \otimes S_{(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}')} \cong \bigoplus_{t=|\mathfrak{r}-\mathfrak{s}|}^{\mathfrak{r}+\mathfrak{s}} \bigoplus_{t'=|\mathfrak{r}'-\mathfrak{s}'|}^{\mathfrak{r}'+\mathfrak{s}'} S_{(t, t')}. \quad (2.17)$$

Enseguida daremos una aplicación muy importante de este resultado, al considerar la derivada covariante de un campo espinorial.

2.2.2. Campos espinoriales

Todas nuestras consideraciones hasta ahora han sido locales. Pasamos ahora a los aspectos globales en la construcción de espinores, que es lo que necesitamos para estudiar campos espinoriales. Hemos encontrado muy útiles las referencias [70, 71], [79, capítulo 12] y [135, capítulo 13].

Sea (\mathcal{M}, g) un espacio-tiempo 4-dimensional orientable temporal y espacialmente, y sea $\pi_{SO} : P_{SO}\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ el fibrado de bases ortonormales de \mathcal{M} . Ya que $P_{SO}\mathcal{M}$ es un fibrado principal, las fibras son isomorfas al grupo de

²la prueba de esta afirmación se hace considerando el espacio de polinomios homogéneos de grado $2\mathfrak{s}$ en 2 variables complejas.

estructura, en este caso $\text{SO}(1, 3)^\dagger$. Así como, para definir espinores en un espacio vectorial, considerábamos el cubrimiento del grupo ortogonal, la idea básica para construir espinores en \mathcal{M} es considerar la variedad cubrimiento de $P_{\text{SO}}\mathcal{M}$. Más precisamente:

Definición 2.2.1 (Estructura espinorial). *Sea (\mathcal{M}, g) un espacio-tiempo 4-dimensional, y sea $\phi : \text{Spin}(1, 3) \rightarrow \text{SO}(1, 3)^\dagger$ el mapa cubrimiento del grupo de Lorentz. Una estructura espinorial sobre \mathcal{M} es un par $(P_{\text{Spin}}\mathcal{M}, \Phi)$, donde $\pi_{\text{Spin}} : P_{\text{Spin}}\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ es un fibrado principal sobre \mathcal{M} con grupo de estructura $\text{Spin}(1, 3) \cong \text{SL}(2, \mathbb{C})$, y $\Phi : P_{\text{Spin}}\mathcal{M} \rightarrow P_{\text{SO}}\mathcal{M}$ es un mapa cubrimiento tal que:*

$$(i) \quad \pi_{\text{SO}} \circ \Phi = \pi_{\text{Spin}},$$

$$(ii) \quad \Phi(p \cdot S) = \Phi(p)\phi(S) \text{ para todos } p \in P_{\text{Spin}}\mathcal{M} \text{ y } S \in \text{SL}(2, \mathbb{C}).$$

La condición (i) implica que $\Phi \circ \pi_{\text{Spin}}^{-1} = \pi_{\text{SO}}^{-1}$, lo cual significa que una diada de spin en $x \in \mathcal{M}$ se mapea via Φ a una tetrada en el mismo punto x . La condición (ii) significa lo siguiente. Sea p una diada en x , y sea $\Phi(p)$ la correspondiente tetrada (que, por (i), es también sobre x). Si transformamos la diada a $p' = p \cdot S$, entonces (ii) implica que la nueva tetrada, $\Phi(p')$, se obtiene de la anterior por medio de la transformación de Lorentz $\phi(S)$ asociada a S . Para un mayor entendimiento intuitivo de estas condiciones, resulta muy útil la discusión alrededor de la página 276 en [79].

El requerimiento de la condición (ii) es no-trivial: existen obstrucciones topológicas para que la misma se satisfaga en todo \mathcal{M} . Es decir, la existencia de una estructura espinorial depende de la topología de \mathcal{M} (y de $P_{\text{SO}}\mathcal{M}$), con lo cual un espacio-tiempo puede no admitir esta estructura o admitir varias no-equivalentes. Aquellas variedades que admiten una estructura espinorial se denominan “variedades spin” (*spin manifolds*). Es posible probar que, si \mathcal{M} es simplemente conexa y $P_{\text{SO}}\mathcal{M}$ no es simplemente conexo, entonces \mathcal{M} admite una única estructura espinorial. Si \mathcal{M} y $P_{\text{SO}}\mathcal{M}$ son ambos simplemente conexos, entonces \mathcal{M} no admite una estructura espinorial. Si \mathcal{M} no es simplemente conexa, entonces puede admitir varias estructuras espinoriales distintas³. En 3 + 1 dimensiones, un criterio muy útil debido a R. Geroch es que \mathcal{M} admite una estructura espinorial si y sólo si es paralelizable:

Teorema 2.2.2 (Geroch, [70]). *Sea (\mathcal{M}, g) un espacio-tiempo 4-dimensional no-compacto⁴. Entonces (\mathcal{M}, g) admite una estructura espinorial si y sólo si existe un sistema global de tetradas ortonormales.*

Es posible demostrar que todo espacio-tiempo 3 + 1 dimensional, orientable y globalmente hiperbólico admite una estructura espinorial. Los espacio-tiempos considerados en esta tesis son Einstein, por lo tanto su estructura

³éste es por ejemplo el caso al considerar espinores sobre la *string world-sheet* en teorías de supercuerdas [79, Capítulo 12].

⁴si el espacio-tiempo es compacto, puede demostrarse que admite curvas cerradas temporales, con lo cual se considera no-físico.

asintótica depende de la constante cosmológica λ ; i.e. que, estrictamente, sólo en el caso $\lambda \geq 0$ tenemos asegurada la existencia de una estructura espinorial. Para $\lambda < 0$, trabajaremos bajo la suposición de que es todavía posible definir espinores⁵.

Asumiendo la existencia de una estructura espinorial, veamos ahora cómo extender la definición de espinor en un punto, a una asignación suave de un espinor en cada punto de \mathcal{M} . Intuitivamente, lo que debe hacerse es “pegar” de manera suave los espacios de representación del grupo de spin en cada punto; más formalmente, la estructura resultante es la siguiente:

Definición 2.2.2 (Fibrado espinorial). *Sea $\rho : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ una representación de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ en V . Un fibrado espinorial sobre \mathcal{M} es el fibrado vectorial asociado*

$$S_\rho \mathcal{M} := P_{\mathrm{Spin}} \mathcal{M} \times V / \sim =: P_{\mathrm{Spin}} \mathcal{M} \times_\rho V, \quad (2.18)$$

donde la relación de equivalencia es $(p, v) \sim (p \cdot S^{-1}, \rho(S)v)$, para todos $p \in P_{\mathrm{Spin}} \mathcal{M}$, $v \in V$ y $S \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Esta definición conduce finalmente a la noción de un *campo espinorial*: el mismo es una función suave de \mathcal{M} en $S_\rho \mathcal{M}$, esto es, una sección de $S_\rho \mathcal{M}$. En nuestro trabajo estaremos siempre interesados en trabajar con campos espinoriales totalmente simétricos, lo cual implica que los espacios V corresponderán a las representaciones irreducibles $S_{(\mathfrak{s}, \mathfrak{s}')}$ de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, dadas en (2.16). El correspondiente fibrado espinorial (2.18) será denotado $S_{\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'} \mathcal{M}$. Para el espacio de secciones suaves de $S_{\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'} \mathcal{M}$, una notación muy útil para recordar los tipos de objetos con los que se trabaja consiste en ‘adjuntar los índices al espacio’, por ejemplo:

$$\mathbb{S}^{A_1 \dots A_{2\mathfrak{s}} A'_1 \dots A'_{2\mathfrak{s}'}} := \Gamma(\mathcal{M}, S_{\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'} \mathcal{M}). \quad (2.19)$$

Un campo espinorial irreducible (i.e. totalmente simétrico) será entonces simplemente un elemento de (2.19). Similarmente se define el dual $\mathbb{S}_{A_1 \dots A_{2\mathfrak{s}} A'_1 \dots A'_{2\mathfrak{s}'}}$, etc.

Habiendo definido el concepto de campo espinorial, podemos ahora introducir la noción de derivada covariante del mismo. La misma se obtiene considerando el *lift* a $P_{\mathrm{Spin}} \mathcal{M}$ de la conexión de spin $\omega_a^{\mathfrak{a} \mathfrak{b}} = e_b^{\mathfrak{a}} \nabla_a e_b^{\mathfrak{b}}$, y la correspondiente derivada covariante inducida en el fibrado espinorial asociado $S_\rho \mathcal{M}$. Esta derivada inducida será denotada $\nabla_{AA'}$. Tenemos:

Proposición 2.2.3. *Sea $\varphi \in \Gamma(\mathcal{M}, S_\rho \mathcal{M})$ un campo espinorial. La derivada covariante de φ está dada por*

$$\nabla_{AA'} \varphi = \partial_{AA'} \varphi + \dot{\rho}(\omega_{AA'}) \varphi, \quad (2.20)$$

donde $\dot{\rho} : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ es la representación del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ asociada a ρ por diferenciación, $\partial_{AA'} = \sigma^a_{AA'} \partial_a$, y $\omega_{AA'} = \sigma^a_{AA'} \omega_a$ es la conexión de spin.

⁵no obstante, nuestros resultados para spin entero son en general independientes de la existencia de una estructura espinorial.

En nuestro trabajo, la descomposición irreducible de la derivada covariante (2.20) es particularmente importante. Para esto utilizamos la descomposición de Clebsh-Gordan (2.17), que para la derivada de un campo $\varphi \in \mathbb{S}^{A_1 \dots A_{2s} A'_1 \dots A'_{2s'}}$ corresponde a

$$S_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \otimes S_{(s, s')} = S_{(s-\frac{1}{2}, s'-\frac{1}{2})} \oplus S_{(s-\frac{1}{2}, s'+\frac{1}{2})} \oplus S_{(s+\frac{1}{2}, s'-\frac{1}{2})} \oplus S_{(s+\frac{1}{2}, s'+\frac{1}{2})}. \quad (2.21)$$

Por ejemplo, para un espinor $\varphi \in \mathbb{S}^{AA'}$, ubicando los índices a conveniencia tenemos

$$\nabla_A^{A'} \varphi_B^{B'} = \nabla_{(A}^{(A'} \varphi_{B)}^{B')} - \frac{1}{2} \nabla^C{}^{(A'} \varphi_C^{B')} \epsilon_{AB} - \frac{1}{2} \nabla_{(A}^{C'} \varphi_{B)C'} \bar{\epsilon}^{A'B'} + \frac{1}{4} \epsilon_{AB} \bar{\epsilon}^{A'B'} \nabla_{CC'} \varphi^{CC'}, \quad (2.22)$$

y más en general, si $\varphi \in \mathbb{S}^{A_1 \dots A_n A'_1 \dots A'_m}$:

$$\begin{aligned} \nabla_{A_1}^{A'_1} \varphi_{A_2 \dots A_{n+1}}^{A'_2 \dots A'_{m+1}} &= [\mathbb{T}_{n,m} \varphi]_{A_1 \dots A_{n+1}}^{A'_1 \dots A'_{m+1}} - \frac{m}{(m+1)} \bar{\epsilon}^{A'_1(A'_2} [\mathbb{C}_{n,m} \varphi]_{A_1 \dots A_{n+1}}^{A'_3 \dots A'_{m+1})} \\ &\quad - \frac{n}{(n+1)} \epsilon_{A_1(A_2} [\mathbb{C}_{n,m}^\dagger \varphi]_{A_3 \dots A_{n+1}}^{A'_1 \dots A'_{m+1}} \\ &\quad + \frac{mn}{(m+1)(n+1)} \epsilon_{A_1(A_2} \bar{\epsilon}^{A'_1(A'_2} [\mathbb{D}_{n,m} \varphi]_{A_3 \dots A_{n+1}}^{A'_3 \dots A'_{m+1})}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde:

Definición 2.2.3 (Andersson *et al*, [5]). *Los operadores $\mathbb{T}_{n,m}$, $\mathbb{C}_{n,m}$, $\mathbb{C}_{n,m}^\dagger$ y $\mathbb{D}_{n,m}$ de la descomposición irreducible (2.23) se denominan respectivamente twistor, curl, curl daga y divergencia, y están definidos por:*

$$[\mathbb{T}_{n,m} \varphi]_{A_1 \dots A_{m+1}}^{A'_1 \dots A'_{n+1}} := \nabla_{(A_1}^{(A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_{n+1})}^{A'_2 \dots A'_{m+1}} \quad (2.24)$$

$$[\mathbb{C}_{n,m} \varphi]_{A_1 \dots A_{m+1}}^{A'_1 \dots A'_{n-1}} := \nabla_{(A_1}^{B'} \varphi_{A_2 \dots A_{n+1)B'}^{A'_1 \dots A'_{m-1}} \quad (2.25)$$

$$[\mathbb{C}_{n,m}^\dagger \varphi]_{A_1 \dots A_{m-1}}^{A'_1 \dots A'_{n+1}} := \nabla^{B(A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_{n-1)B}^{A'_2 \dots A'_{m+1}} \quad (2.26)$$

$$[\mathbb{D}_{n,m} \varphi]_{A_1 \dots A_{m-1}}^{A'_1 \dots A'_{n-1}} := \nabla^{BB'} \varphi_{A_1 \dots A_{n-1)BB'}^{A'_1 \dots A'_{m-1}}. \quad (2.27)$$

La descomposición (2.23) en operadores irreducibles es muy útil a la hora de realizar cálculos explícitos, y también para describir de una manera sistemática y elegante el tipo de campos espinoriales que consideramos. De hecho, los elementos en los distintos kernels de estos operadores reciben nombres particulares; dichos objetos serán centrales en los capítulos siguientes.

Definición 2.2.4 (Espinor de Killing). *Sea $K \in \mathbb{S}^{A_1 \dots A_n A'_1 \dots A'_m}$ un elemento del kernel del operador de twistor:*

$$\mathbb{T}_{n,m} K = 0. \quad (2.28)$$

Entonces K se denomina espinor de Killing de valencia (n, m) .

Los elementos del kernel de los operadores *curl* y *curl daga* son también de gran importancia en nuestro contexto:

Definición 2.2.5 (Potenciales de Hertz). Sean $H^L, H^R \in \mathbb{S}^{A_1 \dots A_n A'_1 \dots A'_m}$. Decimos que H^L y H^R son potenciales de Hertz izquierdo y derecho, respectivamente, si satisfacen las ecuaciones

$$C_{n,m}^\dagger H^L = 0, \quad (2.29)$$

$$C_{n,m} H^R = 0. \quad (2.30)$$

Los casos $m = 0$ y $n = 0$ reciben nombres especiales:

Definición 2.2.6 (Campos libres sin masa). Sean $\varphi \in \mathbb{S}_{A_1 \dots A_n}$ y $\chi \in \mathbb{S}_{A'_1 \dots A'_n}$. Decimos que φ y χ son campos espinoriales libres sin masa, de spin $n/2$, y respectivamente de quiralidad izquierda (o negativa, o left-handed) y derecha (o positiva, o right-handed), si satisfacen las ecuaciones

$$C_{n,0}^\dagger \varphi = 0, \quad (2.31)$$

$$C_{0,n} \chi = 0. \quad (2.32)$$

Para entender el origen de esta terminología, ver sección 2.5.1 más adelante. En esta tesis, estas ecuaciones desempeñan un papel principal en nuestro trabajo de perturbaciones de espacio-tiempos curvos de 4 dimensiones, particularmente la ecuación (2.31).

2.2.3. Espinores de curvatura

Como es usual en geometría, la curvatura de una conexión se define por medio del conmutador de dos derivadas covariantes. Aunque la curvatura espinorial puede definirse enteramente dentro del formalismo de espinores, resulta más sencillo calcular el análogo espinorial del tensor de curvatura, $R_{AA'BB'CC'DD'} = R_{abcd}$, en base a las propiedades algebraicas y diferenciales del mismo. Esto es, es posible demostrar (ver [110, sección 4.6]) que las simetrías del tensor de Riemann

$$R_{abcd} = R_{[ab]cd} = R_{ab[cd]}, \quad R_{[abc]d} = 0, \quad (2.33)$$

dan origen a la descomposición

$$\begin{aligned} R_{abcd} = & X_{ABCD} \bar{\epsilon}_{A'B'} \bar{\epsilon}_{C'D'} + \Phi_{ABC'D'} \bar{\epsilon}_{A'B'} \epsilon_{CD} \\ & + \bar{X}_{A'B'C'D'} \epsilon_{AB} \epsilon_{CD} + \Phi_{A'B'CD} \epsilon_{AB} \bar{\epsilon}_{C'D'}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde los denominados *espinores de curvatura* X_{ABCD} y $\Phi_{A'B'CD}$ tienen las siguientes propiedades:

$$X_{ABCD} = X_{(AB)(CD)}, \quad X_{ABCD} = X_{CDAB}, \quad X_{A(BC)^A} = 0, \quad (2.35)$$

$$\Phi_{A'B'CD} = \Phi_{(A'B')(CD)}, \quad \Phi_{A'B'CD} = \bar{\Phi}_{ABC'D'}, \quad \Phi_{AA'^{AA'}} = 0. \quad (2.36)$$

La segunda condición en (2.36) implica que $\Phi_{A'B'CD}$ es real, mientras que la tercera implica que es libre de traza; de hecho, $\Phi_{A'B'CD}$ se denomina *espinor de Ricci* y es equivalente al tensor de Ricci sin traza:

$$\Phi_{ab} = -\frac{1}{2}(R_{ab} - \frac{1}{4}Rg_{ab}). \quad (2.37)$$

Por su parte, el espinor X_{ABCD} admite una descomposición adicional en componentes irreducibles bajo $\text{SL}(2, \mathbb{C})$:

$$X_{ABCD} = \Psi_{ABCD} + \Lambda(\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}), \quad (2.38)$$

donde la traza $\Lambda = \frac{1}{6}\epsilon^{AC}\epsilon^{BD}X_{ABCD}$ es un múltiplo del escalar de curvatura,

$$\Lambda = \frac{R}{24}, \quad (2.39)$$

y el espinor totalmente simétrico $\Psi_{ABCD} = \Psi_{(ABCD)}$ se denomina *espinor gravitacional* o *espinor conforme de Weyl*, y representa la curvatura del espacio-tiempo debida genuinamente al campo gravitacional (i.e. en ausencia de materia). Notemos que el resultado final de toda esta reducción del tensor de curvatura es simplemente la descomposición del mismo en representaciones irreducibles de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$,

$$R_{abcd} \equiv C_{abcd} + E_{abcd} + 2\Lambda G_{abcd}, \quad (2.40)$$

donde

$$C_{abcd} = \Psi_{ABCD}\bar{\epsilon}_{A'B'}\bar{\epsilon}_{C'D'} + \bar{\Psi}_{A'B'C'D'}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}, \quad (2.41)$$

$$E_{abcd} = \Phi_{ABC'D'}\bar{\epsilon}_{A'B'}\epsilon_{CD} + \Phi_{A'B'CD}\epsilon_{AB}\bar{\epsilon}_{C'D'}, \quad (2.42)$$

$$G_{abcd} = \epsilon_{AC}\epsilon_{BD}\bar{\epsilon}_{A'C'}\bar{\epsilon}_{B'D'} - \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}\bar{\epsilon}_{A'D'}\bar{\epsilon}_{B'C'}. \quad (2.43)$$

Naturalmente, Ψ_{ABCD} se denomina espinor conforme de Weyl debido a que, en vista de (2.41), es el análogo espinorial del tensor de Weyl.

La estructura anterior de la curvatura espinorial nos permite deducir la forma del conmutador

$$[\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}] \equiv \epsilon_{AB}\square_{A'B'} + \bar{\epsilon}_{A'B'}\square_{AB}, \quad (2.44)$$

donde los operadores de curvatura $\square_{A'B'} := \nabla_{X(A'}\nabla_{B')}^X$ y $\square_{AB} := \nabla_{(A|X|}\nabla_{B)}^{X'}$ actúan sobre un espinor $\theta^C_{D E' F'}$ (por ejemplo) como

$$\begin{aligned} \square_{AB}\theta^C_{D E' F'} &= X_{ABQ}{}^C\theta^Q_{D E' F'} - X_{ABD}{}^Q\theta^C_{Q E' F'} \\ &\quad + \Phi_{ABQ'}{}^{E'}\theta^C_{D Q' D'} - \Phi_{ABF'}{}^{Q'}\theta^C_{D E' Q'}; \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \square_{A'B'}\theta^C_{D E' F'} &= \bar{X}_{A'B'Q'}{}^{E'}\theta^C_{D Q' F'} - \bar{X}_{A'B'F'}{}^{Q'}\theta^C_{D E' Q'} \\ &\quad + \Phi_{A'B'Q}{}^C\theta^Q_{D E' F'} - \Phi_{A'B'F}{}^Q\theta^C_{Q E' F'}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Dada una diada de spin $\{o_A, \iota_A\}$, $o_A\iota^A = 1$, la proyección de Ψ_{ABCD} sobre esta base da origen a 5 componentes complejas, denominadas *escalares de Weyl*:

$$\Psi_0 := \Psi_{ABCD}o^A o^B o^C o^D \quad (2.47)$$

$$\Psi_1 := \Psi_{ABCD}o^A o^B o^C \iota^D \quad (2.48)$$

$$\Psi_2 := \Psi_{ABCD}o^A o^B \iota^C \iota^D \quad (2.49)$$

$$\Psi_3 := \Psi_{ABCD}o^A \iota^B \iota^C \iota^D \quad (2.50)$$

$$\Psi_4 := \Psi_{ABCD}\iota^A \iota^B \iota^C \iota^D. \quad (2.51)$$

2.2.4. La clasificación de Petrov

La clasificación de Petrov es un resultado acerca de los posibles distintos tipos algebraicos de la curvatura de una variedad (semi-)Riemanniana. Existen distintas formulaciones equivalentes de la misma. Una de ellas consiste en estudiar el problema de autovalores y *auto-bivectores* del tensor de Weyl, $C_{ab}{}^{cd}X_{cd} = \lambda X_{ab}$. Otra formulación bien conocida se concentra en estudiar, por medio de métodos tensoriales, el número y degeneración de *direcciones principales nulas* de este tensor. No obstante, es indudable que el enfoque más sencillo de esta clasificación se logra por medio del uso de espinores, lo cual constituye un ejemplo importante de la gran potencia y utilidad de los métodos espinoriales. A continuación repasaremos brevemente el enfoque con espinores de la clasificación de Petrov.

Sea $\{o^A, \iota^A\}$ una diada de spin. La transformación $\{o^A, \iota^A\} \rightarrow \{\zeta^A, \iota^A\}$, donde $\zeta^A = o^A + z\iota^A$ (con $z \in \mathbb{C}$), se denomina *rotación nula alrededor de ι^A* (o de n^a). Consideremos el polinomio

$$\begin{aligned} P(z) &:= \Psi_{ABCD}\zeta^A\zeta^B\zeta^C\zeta^D \\ &= \Psi_0 + 4\Psi_1z + 6\Psi_2z^2 + 4\Psi_3z^3 + \Psi_4z^4. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ya que $P(z)$ es un polinomio de grado 4 sobre \mathbb{C} , el teorema fundamental del álgebra implica que posee 4 raíces complejas z^1, \dots, z^4 (no necesariamente distintas): $P(z) = (z - z^1)(z - z^2)(z - z^3)(z - z^4)$. Ahora, definiendo $\alpha_A^i := o_A + z^i\iota_A$, tenemos $z - z^i = \alpha_A^i\zeta^A$, con lo cual

$$\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}^1\alpha_B^2\alpha_C^3\alpha_D^4). \quad (2.53)$$

Los espinores α_A^i se denominan *direcciones principales nulas*. Abreviaremos a veces este nombre como PNDs por sus siglas en inglés (*Principal Null Directions*). Una tetrada nula alineada a las PNDs se denomina *tetrada principal*. Notemos que un espinor μ^A es una dirección principal nula si y sólo si $\Psi_{ABCD}\mu^A\mu^B\mu^C\mu^D = 0$. Si cada dirección nula corresponde a una raíz simple de $P(z)$, el espacio-tiempo se denomina *algebraicamente general*. Por otro lado, una dirección nula será *repetida* si aparece más de una vez en la descomposición (2.53), de manera que en estos casos se cumplirá alguna de las condiciones más fuertes $\Psi_{ABCD}\mu^B\mu^C\mu^D = 0$, $\Psi_{ABCD}\mu^C\mu^D = 0$, ó $\Psi_{ABCD}\mu^D = 0$; y en consecuencia el espacio-tiempo se denomina *algebraicamente especial*. De este modo, los distintos tipos algebraicos de Petrov se clasifican de acuerdo a las particiones del número 4; resumimos el esquema en la tabla 2.1.

Como es sabido, existe una relación interesante entre la propiedad de especialidad algebraica y la existencia de congruencias de geodésicas nulas con ciertas propiedades, esto se conoce como *Teorema de Goldberg-Sachs*:

Teorema 2.2.4 (Goldberg-Sachs [77]). *Una solución de vacío⁶ de las ecuaciones de campo de Einstein es algebraicamente especial si y sólo si existe una congruencia de geodésicas nulas que es shear-free.*

⁶se permite la inclusión de una constante cosmológica.

Tipo de Petrov	PNDs	Espinor de Weyl
I	{1111}	$\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\beta_B\gamma_C\delta_{D)}$
II	{211}	$\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\alpha_B\gamma_C\delta_{D)}$
D	{22}	$\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\alpha_B\gamma_C\gamma_{D)}$
III	{31}	$\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\alpha_B\alpha_C\delta_{D)}$
N	{4}	$\Psi_{ABCD} = \alpha_A\alpha_B\alpha_C\alpha_D$
O	{-}	$\Psi_{ABCD} \equiv 0$

Tabla 2.1: Tipos de Petrov.

2.2.5. Espacio-tiempos tipo Petrov D

Como dijimos, la solución más general de agujero negro estacionario, vacío y asintóticamente plano en 4 dimensiones está dada por la métrica de Kerr. Al considerar la inclusión de un campo electromagnético, la correspondiente solución es la de Kerr-Newman, y al incluir también una constante cosmológica, la solución es la de Kerr-Newman-(A)dS. En todos estos casos, la estructura algebraica del tensor de curvatura corresponde a un espacio tipo Petrov D, por lo tanto es ésta la clase de espacios 4-dimensionales que más nos interesa en esta tesis (para el caso de altas dimensiones ver capítulo 6). De acuerdo a la tabla 2.1, el espacio-tiempo tiene entonces dos direcciones principales nulas repetidas, y en términos de una diada adaptada a estas direcciones, tenemos

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0. \quad (2.54)$$

El espinor de curvatura de Weyl tiene entonces la forma

$$\Psi_{ABCD} = 6\Psi_2 o_{(A} o_B l_C l_{D)}. \quad (2.55)$$

En términos de los *coeficientes de spin* definidos en la sección 2.4, el teorema de Goldberg-Sachs⁷ implica que

$$\kappa = \kappa' = \sigma = \sigma' = 0. \quad (2.56)$$

Estas identidades simplifican muchos cálculos al trabajar sobre espacio-tiempos tipo D.

Una de las características más destacables de los espacios tipo D, es que poseen ‘simetrías ocultas’ más generales que las isometrías del espacio-tiempo. En concreto, esta clase de simetrías se asocian a la existencia de objetos que generalizan la ecuación de Killing, y cuyo origen puede de hecho rastrearse hasta la existencia de un espinor de Killing. En la sección siguiente repasaremos estas cuestiones.

2.3. Simetrías ocultas

La primera idea de simetría en Relatividad General coincide con el concepto de *isometría* de la Geometría Diferencial. Esto es, una *simetría* de

⁷consideramos que el espacio-tiempo es vacío con constante cosmológica.

un espacio-tiempo (\mathcal{M}, g) es un grupo monoparamétrico de difeomorfismos $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ tal que para cada $t \in \mathbb{R}$, ϕ_t es una isometría: $\phi_{t*}g = g$. El generador de este grupo es un campo vectorial ξ que se denomina *vector de Killing*, y satisface la versión infinitesimal de la ecuación $\phi_{t*}g = g$:

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0. \quad (2.57)$$

Esta noción de simetría es intuitivamente clara: la métrica no cambia a lo largo de las órbitas⁸ del vector de Killing ξ . Una ligera generalización de este concepto es la noción de *simetría conforme*, donde el generador de isometrías conformes es, precisamente, un campo vectorial de Killing conforme,

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 2\mu g_{ab}, \quad (2.58)$$

donde (en dimensiones arbitrarias d) $\mu = \frac{1}{d} \nabla_a \xi^a$.

La segunda noción de simetrías que utilizaremos en este trabajo tiene que ver con las posibles generalizaciones de la ecuación de Killing (2.57), que dan lugar al concepto de *simetrías ocultas*. Las mismas no tienen una interpretación geométrica clara como los vectores de Killing; en lugar de eso, en algunos casos esta clase de simetrías encuentran cierta interpretación en el fibrado cotangente a la variedad, que es el espacio de fases del movimiento geodésico. Puede consultarse esta interpretación en las referencias [129, 73]. Por lo pronto, es suficiente una definición bastante vaga del concepto, que precisaremos enseguida: diremos que un espacio-tiempo posee *simetrías ocultas* si admite campos tensoriales/espinores que generalizan ‘apropiadamente’ la ecuación de Killing (2.57).

2.3.1. Espinores de Killing y tensores de Killing-Yano

Según la definición 2.2.4, un espinor de Killing de valencia (n, m) es un $K \in \mathbb{S}^{A_1 \dots A_n A'_1 \dots A'_m}$ solución de⁹

$$\nabla_{(A'} K^{B_1 \dots B_n)} = 0. \quad (2.59)$$

No es difícil chequear que el producto tensorial simétrico $K \odot L$ entre dos espinores de Killing $K \in \mathbb{S}^{A_1 \dots A_n A'_1 \dots A'_m}$ y $L \in \mathbb{S}^{A_1 \dots A_l A'_1 \dots A'_k}$, es un espinor de Killing de valencia $(n+l, m+k)$.

Los espinores de Killing se asocian a distintas clases de simetrías en el espacio-tiempo. Dependiendo de la valencia (n, m) , los análogos tensoriales pueden ser vectores conformes de Killing, tensores conformes de Killing, o tensores conformes de Killing-Yano. Es destacable que la ecuación (2.59) de alguna manera englobe todos estos objetos.

⁸recordemos que una órbita (o curva integral) de un campo vectorial ξ , que pasa por un punto $x \in \mathcal{M}$, es la curva en la variedad dada por el mapa $\phi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$.

⁹Existe en la literatura otro objeto que también se denomina ‘espinor de Killing’, particularmente en las comunidades de Geometría Diferencial y Supergravedad. Este objeto no es exactamente igual al tipo de espinores de Killing (2.59) aquí considerados, aunque es posible demostrar que guardan alguna relación [131].

Por ejemplo, si ξ es un espinor de Killing de valencia $(1, 1)$, $T_{1,1}\xi = 0$, usando la descomposición irreducible (2.22) obtenemos que el vector asociado $\xi^a = \xi^{A'A}$ es un vector de Killing conforme,

$$\nabla_{(A'}^{(A} \xi_{B')}^{B)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_{(a} \xi_{b)} = \mu g_{ab}, \quad (2.60)$$

donde $\mu = \frac{1}{4} \nabla_a \xi^a$. Más en general, para valencia (r, r) , si $T_{r,r}Q = 0$ entonces $Q_{a_1 \dots a_r} = Q_{A_1 A'_1 \dots A_r A'_r}$ es un tensor de Killing conforme:

$$\nabla_{(B'}^{(B} Q_{A'_1 \dots A'_r)}^{A_1 \dots A_r)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_{(b} Q_{a_1 \dots a_r)} = g_{(ba_1} q_{a_2 \dots a_r)}, \quad (2.61)$$

para algún $q_{a_1 \dots a_{r-1}}$. Una de las principales utilidades de estos objetos, que es bien conocida en la literatura, es la siguiente:

Proposición 2.3.1. *Sea $Q_{a_1 \dots a_r}$ un tensor conforme de Killing, y sea $\dot{\gamma}$ el vector tangente a una geodésica nula γ . Entonces $Q_{a_1 \dots a_r} \dot{\gamma}^{a_1} \dots \dot{\gamma}^{a_r}$ se conserva a lo largo de γ :*

$$\nabla_{\dot{\gamma}} (Q_{a_1 \dots a_r} \dot{\gamma}^{a_1} \dots \dot{\gamma}^{a_r}) = 0. \quad (2.62)$$

Este resultado indica que los tensores de Killing proveen cantidades conservadas para el movimiento geodésico, que en general no provienen de las posibles simetrías usuales asociadas a vectores de Killing; es en este sentido que usualmente se los denomina ‘simetrías ocultas’.

En nuestro trabajo estaremos particularmente interesados en espinores de Killing de valencia $(r, 0)$:

$$\nabla_{B'}^{(B} \omega^{A_1 \dots A_r)} = 0. \quad (2.63)$$

Esta ecuación impone serias restricciones sobre la curvatura del espacio-tiempo. Por ejemplo, para valencia $(1, 0)$, las soluciones de $\nabla_{B'}^{(B} \omega^A)} = 0$ deben satisfacer

$$\Psi_{ABCD} \omega^D = 0, \quad (2.64)$$

lo cual limita la curvatura a los tipos de Petrov N u O. De hecho, la ecuación $\nabla_{B'}^{(B} \omega^A)} = 0$ se conoce como *ecuación de twistor* (ver [111, ec. (6.1.1)]), y el mayor interés de la misma reside en un espacio-tiempo (conformemente) plano, ya que da lugar al concepto de twistor (veremos más sobre esto en la sección 4.3). En \mathbb{M} , las soluciones de la ecuación de twistor forman un espacio vectorial complejo de dimensión (compleja) 4. Dadas dos soluciones ω^A y μ^A , el producto $X^{AB} := \omega^A \mu^B$ es un espinor de Killing de valencia $(2, 0)$. Es tedioso pero sencillo demostrar que el análogo tensorial de X_{AB} , i.e. la 2-forma anti-auto-dual $X_{ab} = X_{AB} \bar{\epsilon}_{A'B'}$, satisface la ecuación

$$\nabla_{(a} X_{b)c} = g_{ab} \zeta_c - g_{c(a} \zeta_{b)}, \quad (2.65)$$

donde $\zeta_a = \frac{1}{3} \nabla_{A'}^B X_{AB}$. Esta ecuación se conoce como *ecuación de Killing-Yano conforme*¹⁰, y es la generalización para 2-formas de la ecuación de Killing conforme (2.60).

¹⁰bajo una transformación conforme $g_{ab} \mapsto \Omega^2 g_{ab}$, la ecuación es invariante conforme, siempre que el peso conforme de X_{ab} sea $w = 3$.

Para soluciones de (2.63) de valencia $(2, 0)$, el vínculo algebraico es

$$\Psi_{(ABC}{}^E\omega_{DE)} = 0, \quad (2.66)$$

que implica que el espacio-tiempo debe ser tipo Petrov D, N, u O. En el caso de espacio-tiempos Einstein tipo D, un célebre resultado de Penrose y Walker afirma que los mismos admiten siempre un espinor de Killing de valencia $(2, 0)$:

Lema 2.3.1 (Lema 1 en [132]). *Consideremos un espacio-tiempo tipo D vacío con constante cosmológica¹¹, con PNDs o^A, ι^A y escalar de Weyl asociado Ψ_2 . Entonces el campo espinorial*

$$K_{AB} = k\Psi_2^{-1/3}o_{(A}\iota_{B)} \quad (2.67)$$

es un espinor de Killing, donde $k \in \mathbb{C}$ es una constante arbitraria.

El objeto (2.67) es un espinor de Killing de valencia $(2, 0)$ que no factoriza como producto de espinores de Killing de valencia $(1, 0)$ (no obstante, ver sección 4.1.1). Por otro lado, (2.67) ha resultado de importancia fundamental en diversos problemas en Relatividad General, por ejemplo en estudios relacionados a: simetrías ocultas [132], operadores de simetría para campos espinoriales [5], caracterizaciones del espacio-tiempo de Kerr [27], datos iniciales de Killing [69], etc. Es también destacable que varias otras clases de simetrías se derivan de (2.67), como repasamos a continuación. En primer lugar:

Proposición 2.3.2 (Proposición (6.7.17) en [111]). *En un espacio-tiempo vacío con constante cosmológica que admite un espinor de Killing de valencia $(2, 0)$ K_{AB} , el campo vectorial*

$$\xi^{A'} := \nabla^{A'} K^A{}_{A'} \quad (2.68)$$

es un vector de Killing (complejo).

Una relación adicional importante entre K_{AB} y ξ^a , es que ξ^a “aniquila” al espinor de Killing, en el siguiente sentido:

Proposición 2.3.3. *El espinor de Killing (2.67) es paralelo y Lie-invariante con respecto a ξ :*

$$\xi^c \nabla_c K_{AB} = 0, \quad \mathcal{L}_\xi K_{AB} = 0. \quad (2.69)$$

Recordemos que la derivada de Lie de un espinor a lo largo de isometrías es un concepto bien definido, ver [111, Sección 6.6]. La prueba de la proposición anterior no es difícil, ver por ejemplo [92].

El vector (2.68) es de hecho proporcional a un vector de Killing *real* para todo espacio-tiempo tipo D salvo para la clase Kinnersley IIIB [29]. En el

¹¹si el espacio-tiempo posee además un campo electromagnético alineado con las PNDs gravitacionales, entonces también admite un espinor de Killing (aunque distinto a (2.67)), ver [91].

caso particular de la solución de Kerr, (2.68) es el generador de la isometría temporal, $\xi \propto \partial_t$. La clase de espacio-tiempos en la que ξ es real suele denominarse *clase generalizada de Kerr-NUT* [59]. Para esta clase, si tomamos las partes real e imaginaria del tensor $K_{AB}\bar{\epsilon}_{A'B'}$ en la forma

$${}^*Y_{ab} = K_{AB}\bar{\epsilon}_{A'B'} + \bar{K}_{A'B'}\epsilon_{AB} \quad (2.70)$$

$$Y_{ab} = iK_{AB}\bar{\epsilon}_{A'B'} - i\bar{K}_{A'B'}\epsilon_{AB}, \quad (2.71)$$

entonces puede probarse que Y_{ab} es un *tensor de Killing-Yano*:

$$\nabla_{(a}Y_{b)c} = 0, \quad (2.72)$$

mientras que el dual ${}^*Y_{ab}$ es un tensor de Killing-Yano conforme (2.65). Adicionalmente, el hecho de que Y_{ab} sea un tensor de Killing-Yano, implica que su cuadrado es un tensor de Killing:

$$H_{ab} := Y_{ac}Y_b{}^c, \quad \nabla_{(a}H_{bc)} = 0. \quad (2.73)$$

Como dijimos, los tensores de Killing se asocian a cantidades conservadas para el movimiento geodésico. En particular, la bien conocida *constante de Carter* del espacio-tiempo de Kerr, que permite la integrabilidad completa de la ecuación de geodésicas, tiene su origen en el tensor (2.73), y por lo tanto en la existencia del espinor de Killing (2.67). Ver por ejemplo [100, 132] para la forma explícita de estos tensores en la solución de Kerr.

De la proposición 2.3.3 se deduce que H_{ab} es también paralelo y Lie-invariante con respecto a ξ . Esto implica el siguiente resultado:

Proposición 2.3.4 (Hughston y Sommers [92]). *El vector $\eta^a := H^{ab}\xi_b$ es un segundo vector de Killing,*

$$\nabla_{(a}\eta_{b)} = 0, \quad (2.74)$$

que conmuta con ξ , $\mathcal{L}_\xi\eta = 0$.

En la solución de Kerr, el vector η es linealmente independiente de ξ , de modo que ambos generan el grupo (abeliano) de isometrías de este espacio-tiempo (aunque debe tenerse en cuenta que η *no es* ∂_φ , sino una combinación lineal entre ∂_t y ∂_φ). Por otro lado, en la métrica de Schwarzschild, ξ^a es ortogonal a H_{ab} , de modo que en este caso $\eta \equiv 0$.

2.4. El formalismo GHP

El formalismo de Geroch-Held-Penrose (GHP), desarrollado originalmente para 4 dimensiones en [72], es especialmente adecuado para situaciones en las cuales dos direcciones nulas en el espacio-tiempo, digamos generadas por los vectores nulos ℓ^a y n^a , son de alguna manera privilegiadas. Resulta entonces particularmente útil al considerar los espacios algebraicamente especiales de la clasificación de Petrov vista en la sección 2.2.4. En cada punto del espacio-tiempo, podemos adaptar una tetra nula a estas direcciones, o

equivalentemente una diada de spin $\{\varepsilon_{\mathbf{A}}^A\} = \{o^A, \iota^A\}$, de manera que la libertad $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ para elegir la diada se reduce al subgrupo de transformaciones que preservan las direcciones nulas, esto es, a transformaciones de la forma

$$o^A \rightarrow \lambda o^A, \quad \iota^A \rightarrow \lambda^{-1} \iota^A, \quad (2.75)$$

donde λ es un campo escalar complejo distinto de cero. En términos geométricos, fijar un par de direcciones nulas implica una reducción del $\mathrm{SO}(1, 3)^\uparrow$ -fibrado ortonormal $P_{\mathrm{so}}\mathcal{M}$ de bases orientadas temporal y espacialmente, o equivalentemente una reducción de la estructura espinorial $P_{\mathrm{Spin}}\mathcal{M}$, cuyo grupo de estructura es $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, a otro fibrado principal B con grupo de estructura¹² \mathbb{C}^\times .

Las componentes en una diada $\{\varepsilon_{\mathbf{A}}^A\}$ de un espinor arbitrario transforman de manera bien definida bajo (2.75), esto es, forman una representación $\Pi_{p,q} : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ de \mathbb{C}^\times en \mathbb{C} dada por

$$\eta \mapsto \Pi_{p,q}(\lambda)\eta := \lambda^p \bar{\lambda}^q \eta, \quad (2.76)$$

para algunos números $p, q \in \mathbb{Z}$. Los elementos que transforman bajo esta representación se denominan *cantidades pesadas de tipo* $\{p, q\}$, o, alternatively, cantidades con *peso de spin* $s = (p - q)/2$ y *peso de boost* $b = (p + q)/2$. Las cantidades de tipo bien definido $\{p, q\}$ forman un espacio vectorial complejo (el espacio de la representación (2.76) de \mathbb{C}^\times), las cantidades de todos los tipos juntos forman un álgebra graduada. En la tabla 2.2 resumimos los tipos GHP de los escalares asociados a los espinores de Weyl, Maxwell y Dirac. Las componentes tipo $\{p, q\}$ de un campo espinorial deben pensarse más propiamente como secciones de los fibrados vectoriales asociados definidos por

$$\mathbb{E}_{\{p,q\}} := B \times_{\Pi_{p,q}} \mathbb{C}. \quad (2.77)$$

Las siguientes operaciones son internas al formalismo GHP, esto es, mapean cantidades con peso en cantidades con peso: la operación prima $'$, la operación conjugación compleja $\bar{}$, y la operación estrella * . En nuestro trabajo nos interesan sólo las dos primeras, que están definidas por

$$' : \quad o^A \rightarrow i\iota^A, \quad \iota^A \rightarrow io^A, \quad \bar{o}^{A'} \rightarrow -i\bar{\iota}^{A'}, \quad \bar{\iota}^{A'} \rightarrow -i\bar{o}^{A'} \quad (2.78)$$

$$- : \quad o^A \rightarrow \bar{o}^{A'}, \quad \bar{o}^{A'} \rightarrow o^A, \quad \iota^A \rightarrow \bar{\iota}^{A'}, \quad \bar{\iota}^{A'} \rightarrow \iota^A \quad (2.79)$$

A su vez, estas operaciones cambian los pesos GHP: $' : \{p, q\} \rightarrow \{-p, -q\}$ y $\bar{} : \{p, q\} \rightarrow \{q, p\}$. (2.78) y (2.79) son importantes porque permiten reducir el número de ecuaciones con las que uno trabaja en cálculos explícitos.

Consideremos ahora la forma de conexión en $P_{\mathrm{Spin}}\mathcal{M}$, que es una 1-forma con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ definida por $\omega_a^{\mathbf{B}\mathbf{C}} = \varepsilon_B^{\mathbf{B}} \nabla_a \varepsilon_C^{\mathbf{B}}$. Sus distintas componentes en la diada $\{\varepsilon_{\mathbf{A}}^A\}$ se denominan *coeficientes de spin*, y se denotan $\beta, \epsilon, \rho, \tau, \kappa, \sigma$ junto con sus versiones primadas (ver [110, ec. (4.5.21)] para fórmulas explícitas). Al analizar la descomposición de $\omega_a^{\mathbf{B}\mathbf{C}}$

¹²denotamos por \mathbb{C}^\times al grupo multiplicativo de números complejos.

	Escalar	Tipo $\{p, q\}$	Peso de spin s
Weyl	Ψ_0	$\{4, 0\}$	+2
	Ψ_1	$\{2, 0\}$	+1
	Ψ_2	$\{0, 0\}$	0
	Ψ_3	$\{-2, 0\}$	-1
	Ψ_4	$\{-4, 0\}$	-2
Maxwell	ϕ_0	$\{2, 0\}$	+1
	ϕ_1	$\{0, 0\}$	0
	ϕ_2	$\{-2, 0\}$	-1
Dirac	χ_0	$\{1, 0\}$	+1/2
	χ_1	$\{-1, 0\}$	-1/2

Tabla 2.2: Tipo GHP de los escalares de Weyl, Maxwell y Dirac. Los pesos de spin y boost coinciden en todas estas componentes.

bajo la reducción $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$, las partes que transforman covariantemente bajo \mathbb{C}^\times definen los denominados *coeficientes de spin GHP*, los cuales son $\rho, \tau, \kappa, \sigma, \rho', \tau', \kappa', \sigma'$. Las partes que *no* transforman covariantemente bajo \mathbb{C}^\times definen la 1-forma de conexión inducida en B , la cual es sencillo probar que es

$$\omega_a = -\epsilon n_a + \epsilon' l_a - \beta' m_a + \beta \bar{m}_a, \quad (2.80)$$

y, naturalmente, toma valores en $\text{Lie}(\mathbb{C}^\times)$ y transforma bajo \mathbb{C}^\times como el potencial de gauge de un grupo de Lie abeliano¹³, $\omega_a \rightarrow \omega_a + \lambda \nabla_a \lambda^{-1}$. Esta 1-forma permite definir la derivada covariante sobre los fibrados asociados $\mathbb{E}_{\{p,q\}}$, como

$$\Theta_a = \nabla_a + p\omega_a + q\bar{\omega}_a \quad (2.81)$$

(la inclusión de la derivada de Levi-Civita ∇_a permite aplicar esta fórmula a campos tensoriales y espinoriales pesados, además de escalares con peso), donde hemos usado que la representación del álgebra de Lie $\pi_{p,q} : \text{Lie}(\mathbb{C}^\times) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C})$ asociada a (2.76) es

$$\pi_{p,q}(X)\eta = (pX + q\bar{X})\eta. \quad (2.82)$$

La proyección de Θ_a sobre la tetrad nula define operadores de derivadas direccionales con peso:

$$\mathfrak{p} := \ell^a \Theta_a, \quad \mathfrak{p}' := n^a \Theta_a, \quad \mathfrak{d} := m^a \Theta_a, \quad \mathfrak{d}' := \bar{m}^a \Theta_a. \quad (2.83)$$

(Las letras \mathfrak{p} y \mathfrak{d} son del alfabeto islandés y se pronuncian *thorn* y *eth* respectivamente.) La relación con la derivadas direccionales no-pesadas usuales del formalismo de Newman-Penrose (ver [109] para este formalismo), $D = \ell^a \nabla_a$,

¹³Más en general, si ψ es una sección de un fibrado vectorial asociado $E = P \times_{\Pi} V$ que transforma bajo el grupo de estructura G como $\psi \rightarrow \Pi(g)\psi$ (lo cual implica que una sección σ del fibrado principal P transforma como $\sigma \rightarrow \sigma \cdot g^{-1}$), entonces la 1-forma de conexión ω en P transforma como $\omega \rightarrow g d g^{-1} + g \omega g^{-1}$, ver e.g. [108].

$D' = n^a \nabla_a$, $\delta = m^a \nabla_a$ y $\delta' = \bar{m}^a \nabla_a$, puede inferirse de (2.81) y (2.80): actuando en una cantidad de tipo $\{p, q\}$, tenemos

$$\flat = D - p\epsilon - q\bar{\epsilon}, \quad (2.84)$$

$$\delta = \delta - p\beta + q\bar{\beta}', \quad (2.85)$$

$$\flat' = D' + p\epsilon' + q\bar{\epsilon}', \quad (2.86)$$

$$\delta' = \delta' + p\beta' - q\bar{\beta}. \quad (2.87)$$

Al considerar las ecuaciones de Newman-Penrose en el formalismo GHP, las mismas se dividen en dos clases: las que involucran derivadas de los coeficientes de spin GHP (ver ecuaciones (4.12.32) en [110]), y las que involucran derivadas de los coeficientes sin peso definido (ecuaciones (4.12.32), (4.12.33) y (4.12.34) en [110]). Éstas últimas entran en el formalismo sólo a través de las identidades para los conmutadores de las derivadas direccionales GHP (2.83).

Una de las principales utilidades del formalismo GHP es la traducción de las ecuaciones tensoriales y espinoriales de campos de spin superior, a conjuntos de ecuaciones escalares (con peso GHP), que son de alguna manera más manejables ya que uno se deshace de los índices. Por supuesto, esto ya había sido logrado con el formalismo de Newman-Penrose, pero el cálculo GHP resulta ‘superador’ en el sentido de que, por un lado, las operaciones internas del formalismo permiten reducir el número de ecuaciones a la mitad, y por otro lado, la elegancia de la descripción geométrica conduce a una mayor comprensión de las estructuras abstractas involucradas. Grandes avances en el análisis de diversos problemas en Relatividad General fueron gracias al uso de estos métodos escalares; el más relevante para nuestros propósitos es el que concierne a problemas asociados a perturbaciones de soluciones exactas, como veremos a continuación.

2.4.1. Operadores de onda con peso

La derivada covariante GHP define naturalmente un operador de onda con peso actuando en secciones de $\mathbb{E}_{\{p,q\}}$,

$$\square_{p,q} := g^{ab} \Theta_a \Theta_b. \quad (2.88)$$

En términos de las derivadas direccionales (2.83), es sencillo probar que

$$\square_{p,q} = (\flat - \rho - \bar{\rho})\flat' + (\flat' - \rho' - \bar{\rho}')\flat - (\delta - \tau - \bar{\tau}')\delta' - (\delta' - \tau' - \bar{\tau})\delta. \quad (2.89)$$

La principal utilidad de esta clase de operadores radica en su relación con las ecuaciones de tipo onda que describen perturbaciones de agujeros negros. Para cantidades de tipo $\{0, 0\}$, tenemos $\square_{0,0} = \square$ y podemos entonces utilizar el D'Alembertiano usual. Para cantidades de tipo $\{p, q\}$ no-trivial, es necesario modificar la conexión GHP y por lo tanto el operador $\square_{p,q}$, como veremos a continuación.

En primer lugar, consideremos el caso $\{p, q\} = \{0, 0\}$. Las ecuaciones escalares, 4-dimensionales, desacopladas conocidas en la literatura que describen

el comportamiento de las componentes tipo $\{0,0\}$ de campos perturbativos son: la ecuación de Fackerell-Ipser, y la ecuación de Regge-Wheeler. La *ecuación de Fackerell-Ipser* fue hallada en [57] para el caso de perturbaciones electromagnéticas de la solución de Kerr, pero es de hecho válida para campos de Maxwell en todo espacio-tiempo vacío tipo D:

$$(\square + 2\Psi_2)\Phi = 0. \quad (2.90)$$

La *ecuación de Regge-Wheeler* original, hallada en [118] para perturbaciones gravitacionales de la solución de Schwarzschild, no es 4-dimensional sino de hecho 2-dimensional, pero por una redefinición de las variables puede mostrarse fácilmente que es equivalente a [46]

$$(\square + 8\Psi_2)\Phi = 0. \quad (2.91)$$

Como dijimos, esta ecuación es válida para la solución de Schwarzschild, donde $\Psi_2 = -M/r^3$ (y (2.91) es de hecho la ecuación (3)).

Consideremos ahora el caso de peso de spin extremo, $s = \pm\mathfrak{s}$. Uno de los mayores avances en la descripción de perturbaciones de agujeros negros fue logrado por Teukolsky en [128]. Utilizando las identidades de Bianchi escritas en forma Newman-Penrose, aplicándoles ciertos operadores diferenciales y combinándolas entre sí, y finalmente linealizando alrededor de una solución de tipo Petrov D, Teukolsky fue capaz de probar que, para campos de spin $\mathfrak{s} = 1/2, 1$ y 2 , las componentes con peso de spin extremo $s = \pm\mathfrak{s}$ satisfacen ecuaciones desacopladas como consecuencia de la validez de las ecuaciones de campo. Las *ecuaciones de Teukolsky* (como son llamadas desde entonces) constituyen hoy en día la base de la mayoría de los análisis de estabilidad lineal de agujeros negros, en particular de agujeros negros rotantes. La forma original de estas ecuaciones (ver [128]) es, no obstante, ‘poco ilustrativa’ en cuanto a la naturaleza de las simetrías y los operadores involucrados. En [22], Bini *et al* mostraron que, en el espacio-tiempo de Kerr, modificando la derivada de Levi-Civita por la adición de una cierta 1-forma y construyendo el operador de onda asociado, las ecuaciones de Teukolsky adoptan la forma de una ecuación de tipo onda en términos de dicho operador. Más tarde, Andersson *et al* mostraron en [1] que éste es el caso para perturbaciones de toda la clase tipo Petrov D, y hallaron también ecuaciones para todos los escalares de Weyl perturbados, no sólo para los de peso de spin extremo (no obstante, sólo los de peso extremo satisfacen ecuaciones desacopladas en un background tipo D genérico, ver capítulo 3). Para ver esto, es necesario introducir una 1-forma

$$B_a := -\rho n_a + \tau \bar{m}_a, \quad (2.92)$$

construir la derivada modificada $D_a := \Theta_a + pB_a + q\bar{B}_a$ sobre $\mathbb{E}_{\{p,q\}}$ y el operador de onda asociado

$$\square_{p,q} := g^{ab} D_a D_b, \quad (2.93)$$

y, denotando $\square_p \equiv \square_{p,0}$, las ecuaciones de Teukolsky para un campo (escalar) $\psi^{(s)}$ con peso de spin s sobre un espacio-tiempo vacío tipo Petrov D son

$$(\square_{2s} - 4s^2\Psi_2)\psi^{(s)} = 0. \quad (2.94)$$

En los capítulos siguientes llamaremos frecuentemente a (2.94) ‘ecuaciones de Teukolsky de tipo (\mathfrak{s}, s) ’, donde \mathfrak{s} es el spin del campo (espinorial) estudiado, y s es el peso de spin de la particular componente que se está considerando (se tiene siempre $|s| \leq \mathfrak{s}$).

La forma (2.94) de las ecuaciones tiene varias ventajas, entre las que destacamos: (i) el comportamiento del sistema de Teukolsky bajo la operación de ‘tomar operadores adjuntos’ (ver subsección siguiente) resulta muy transparente en términos de \boxplus_p ; (ii) utilizando que $\boxplus_0 = \square$, todas las ecuaciones tipo onda conocidas quedan parametrizadas por la familia de operadores \boxplus_p ; y (iii) la forma ‘tipo onda’ explícita evidencia que el operador de Teukolsky es normalmente hiperbólico y, por lo tanto, el teorema 1.2.2 aplica y tenemos existencia, unicidad, y estabilidad de Cauchy de las soluciones.

Más allá de la utilidad recién mencionada del operador \boxplus_p , resulta interesante preguntarse acerca del posible origen e interpretación del mismo y de la conexión asociada (por ejemplo, uno se pregunta porqué la 1-forma (2.92) tiene esta forma particular). En el capítulo 4 profundizaremos sobre este punto. Es también válido preguntarse acerca de la posible generalización de esta estructura a espacio-tiempos de más de 4 dimensiones; esto lo trataremos en el capítulo 6.

2.4.2. Operadores adjuntos

Como mencionamos, estamos interesados en mapear las ecuaciones de campos de spin superior en ecuaciones escalares de tipo onda, que involucran operadores de onda pesados como los descritos en la subsección anterior. Pero estamos también interesados en el proceso inverso, esto es, en construir campos de spin superior a partir de soluciones de ecuaciones escalares. Una de las principales herramientas que utilizaremos para lograr esto, es una idea muy ingeniosa debida a Wald [134], que se denomina *método de operadores adjuntos* y que describimos brevemente a continuación. Suponer que uno está interesado en soluciones de una ecuación diferencial $\mathcal{E}(\varphi) = 0$, donde \mathcal{E} es un cierto operador diferencial lineal actuando en un campo tensorial/espinorial φ . Suponer también que existe una nueva variable de la forma $\mathcal{T}(\varphi)$, y operadores diferenciales lineales \mathcal{S} y \mathcal{O} tales que, *para todo* φ (no sólo para soluciones de $\mathcal{E}(\varphi) = 0$), se cumple la identidad de operadores

$$\mathcal{S}\mathcal{E}(\varphi) = \mathcal{O}\mathcal{T}(\varphi) \quad \forall \varphi. \quad (2.95)$$

Entonces si φ es una solución de las ecuaciones de campo $\mathcal{E}(\varphi) = 0$, la nueva variable $\Psi = \mathcal{T}(\varphi)$ satisface la ecuación $\mathcal{O}(\Psi) = 0$. Adicionalmente, dado que (2.95) es válida para todo φ , podemos introducir un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y definir el adjunto¹⁴ de un operador A como $\langle \Psi, A\varphi \rangle = \langle A^\dagger \Psi, \varphi \rangle$, y ya que entonces se cumple $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ para cualesquiera operadores A y B , tenemos la identidad adjunta a (2.95):

$$\mathcal{E}^\dagger \mathcal{S}^\dagger(\Psi) = \mathcal{T}^\dagger \mathcal{O}^\dagger(\Psi) \quad \forall \Psi. \quad (2.96)$$

¹⁴damos una definición ligeramente más precisa en el capítulo 5, ver def. 5.2.1.

Esto implica que una solución de $\mathcal{O}^\dagger(\Phi) = 0$ genera una solución de $\mathcal{E}^\dagger(\chi) = 0$, donde $\chi = \mathcal{S}^\dagger(\Phi)$. Por lo tanto, si los operadores adjuntos tienen una forma particularmente útil, obtenemos de esta manera un método de generar soluciones de ecuaciones diferenciales a partir de soluciones de otras ecuaciones. En la práctica, el producto interno que usaremos es

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int_{\mathcal{M}} \Psi \bar{\Phi}, \quad (2.97)$$

donde se sobreentiende una contracción entre todos los índices de Ψ y Φ , y hemos omitido la forma de volumen de la integral.

En los siguientes capítulos aplicaremos este método al estudio de campos libres sin masa en espacio-tiempos curvos. En particular, es útil notar aquí que el adjunto del operador de Teukolsky \square_p con respecto al producto interno (2.97) está dado por

$$\langle \Psi, \square_p \Phi \rangle = \langle \square_{-p} \Psi, \Phi \rangle. \quad (2.98)$$

2.5. Perturbaciones de Minkowski

Como preliminares para los capítulos siguientes, en esta sección estudiaremos campos libres sin masa en el espacio-tiempo plano de Minkowski \mathbb{M} . (Por *masa* nos referimos aquí a *masa en reposo*.) Veremos primero qué significa un ‘campo libre sin masa’, ya que en \mathbb{M} éste es un concepto bien definido y es la base de su generalización a un espacio-tiempo curvo, donde la noción de ‘masa en reposo’ no tiene una interpretación clara y es de hecho sólo una extrapolación de Minkowski. El capítulo 3 constituye la generalización de los resultados de esta sección a un espacio-tiempo curvo de tipo Petrov D.

2.5.1. Campos libres sin masa

Los tipos de campos físicos fundamentales que pueden existir en un espacio-tiempo pueden obtenerse mediante consideraciones muy generales asociadas a las leyes físicas más básicas. En el caso de un espacio-tiempo plano, estas leyes básicas son la *covariancia especial* proveniente de la Relatividad Especial, y el postulado de la Mecánica Cuántica de que los estados físicos son *clases de equivalencia* de estados cuánticos (i.e., dos estados cuánticos que difieren por una fase son físicamente equivalentes). Ahora, argumentos generales (ver [135, cap. 13]) muestran que el grupo de isometrías de un espacio-tiempo actúa naturalmente sobre el espacio de estados físicos. Por otro lado, en una teoría cuántica, el conjunto de estados cuánticos es un espacio de Hilbert. Luego, el análisis de cuáles son los campos físicos fundamentales en Minkowski se traduce en el estudio de las representaciones proyectivas y unitarias¹⁵ del grupo de Poincaré $\text{ISO}(1, 3) := \text{SO}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$ en un espacio de Hilbert. De

¹⁵*proyectivas* porque son representaciones salvo fase, y *unitarias* porque deben preservar la probabilidad de transición entre estados cuánticos.

acuerdo a los trabajos de Wigner (1939) y Bargmann (1954), las representaciones proyectivas y unitarias del grupo de Poincaré están en correspondencia 1-1 con representaciones *ordinarias* y unitarias de su cubrimiento universal, $ISL(2, \mathbb{C}) := SL(2, \mathbb{C}) \ltimes \mathbb{R}^4$. Más aún, una representación unitaria de dimensión infinita de $ISL(2, \mathbb{C})$ puede descomponerse en una suma directa de representaciones irreducibles (*irreps*), por lo que uno sólo debe concentrarse en estas últimas.

Ya que $ISL(2, \mathbb{C})$ es el producto semi-directo de dos grupos, sus irreps pueden estudiarse de acuerdo a un método general conocido como *the Mackey machine*. Los resultados de este método indican que las irreps están caracterizadas por dos parámetros, que pueden considerarse los autovalores de los operadores de Casimir del álgebra de Poincaré. Muy esquemáticamente, las representaciones irreducibles de $ISL(2, \mathbb{C})$ se construyen del modo siguiente. Ya que $ISL(2, \mathbb{C})$ es simplemente conexo, sus irreps están en correspondencia 1-1 con irreps de su álgebra de Lie, $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{R}^4$. Sea $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ una representación de \mathfrak{g} en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Si P_a son los generadores del subgrupo de traslaciones, el objeto¹⁶ $\mathcal{P}^2 := \eta^{ab} P_a P_b$ es un operador de Casimir: conmuta con todos los generadores, y por lo tanto, aplicando el lema de Schur, en una representación irreducible es proporcional a la identidad. Ya que el subgrupo de traslaciones es abeliano, existe una base de \mathcal{H} que diagonaliza simultáneamente los generadores, luego $\pi(P_a)\varphi = p_a\varphi$, para algún vector $p_a \in \mathbb{R}^4$. Abusando ligeramente de notación, la acción del Casimir \mathcal{P}^2 es entonces $\pi(\mathcal{P}^2)\varphi = m^2\varphi$, donde $m^2 = p^a p_a$ es un número real. Las irreps se clasifican, en principio, como *masivas* y *no-masivas* de acuerdo a $m^2 \neq 0$ y $m^2 = 0$, respectivamente. Dado $p_a \in \mathbb{R}^4$ arbitrario, con $p^a p_a = m^2$, el segundo parámetro que caracteriza una irrep se obtiene estudiando el subgrupo estabilizador (*little group*) de p_a , el cual se puede probar que está determinado por el otro Casimir¹⁷, \mathcal{W}^2 . Ya que el resultado final no depende de la elección de p_a , este vector se puede elegir de manera conveniente para los cálculos.

Para representaciones masivas (i.e. $m^2 \neq 0$), uno puede elegir $p_a = (m, 0, 0, 0)$. Tenemos dos posibilidades: (i) $m^2 > 0$, y (ii) $m^2 < 0$. El caso (ii) (caso (d) en [135, pág. 357]) representa taquiones (partículas con masa imaginaria) y se considera no-físico. Para el caso (i) (caso (a) en [135]), el subgrupo estabilizador es $SU(2)$, cuyas irreps se caracterizan por un número semi-entero positivo denominado *spin*, $\mathfrak{s} \in \frac{\mathbb{N}_0}{2}$. Para representaciones no-masivas ($m^2 = 0$), es conveniente elegir $p_a = (E, 0, 0, E)$, con $E \geq 0$. Tenemos entonces los casos (iii) $E = 0$, y (iv) $E > 0$. Para (iii) (caso (c) en [135]), se tiene $p_a \equiv 0$ y el subgrupo estabilizador es todo $ISL(2, \mathbb{C})$, con lo cual los estados son invariantes bajo todo el grupo de Poincaré; este caso se considera no-físico (salvo por el denominado *estado de vacío*). En el caso (iv) ((b) en [135]), el subgrupo estabilizador es $Spin(2) \ltimes \mathbb{R}^2$, el cual, como consiste nuevamente de un producto semi-directo, tendrá irreps caracterizadas por dos parámetros, uno

¹⁶notemos que, para que este objeto tenga sentido, debe estar definido en el álgebra envolvente universal, ya que de otro modo el producto $P_a P_b$ de elementos de un álgebra de Lie abstracta no está definido.

¹⁷se tiene $\mathcal{W}^2 := \eta^{ab} W_a W_b$, donde W_a es el vector de Pauli-Lubanski.

de los cuales es el autovalor del Casimir de la subálgebra de traslaciones de $\mathfrak{spin}(2) \oplus \mathbb{R}^2$: un número real n^2 . Tenemos nuevamente dos subcasos: *(iva)* $n^2 = 0$, y *(ivb)* $n^2 \neq 0$. Para *(ivb)* ((b2) en [135], representaciones de “spin continuo”), el nuevo subgrupo estabilizador es trivial; este caso se considera entonces físicamente irrelevante. Para el caso *(iva)* ((b1) en [135]), el estabilizador es todo $\text{Spin}(2)$, y las irreps se caracterizan por un número semi-entero $\mathfrak{h} \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$ que se denomina *helicidad* (y el módulo $\mathfrak{s} = |\mathfrak{h}|$ se denomina *spin* nuevamente).

Los casos que representan campos físicos son entonces *(i)* y *(iva)*. Como se menciona en [135], las ecuaciones de campo asociadas a irreps admiten distintas formas equivalentes; una forma conveniente en ambos casos, para spin $\mathfrak{s} = n/2$, es

$$(\square + m^2)\varphi_{A_1 \dots A_n} = 0. \quad (2.99)$$

No obstante, para $m^2 = 0$ y $\mathfrak{s} > 0$, esta representación es reducible, y las ecuaciones de campo asociadas a irreps son en su lugar (ver [112])

$$\partial^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_n} = 0, \quad \mathfrak{h} < 0, \quad (2.100)$$

$$\partial^{A_1 A'_1} \chi_{A'_1 \dots A'_n} = 0, \quad \mathfrak{h} > 0. \quad (2.101)$$

Este es el origen de la terminología que definimos en 2.2.6. Un aspecto muy interesante de estas ecuaciones no-masivas, es que los campos de spin mayor se pueden obtener a partir de campos de spin menor, y en última instancia de un campo de spin cero, que satisficará la ecuación de onda $\square\varphi = 0$. Como mencionamos ya varias veces, este mecanismo es particularmente importante en nuestro trabajo, y su posible generalización a espacios curvos será uno de los principales ejes de los siguientes capítulos. Veamos ahora entonces este mecanismo.

2.5.2. Spin lowering y spin raising

Sea $\psi \in \mathbb{S}_{A_1 \dots A_{n-1}}$ un campo libre sin masa de spin $(n-1)/2$, es decir $\partial^{A_1 A'_1} \psi_{A_1 \dots A_{n-1}} = 0$, y sea $\mu^{A'}$ un espinor *constante* en \mathbb{M} , $\partial_{AA'} \mu^{B'} = 0$. Si $\varphi_{A_1 \dots A_n} := \mu^{A'_1} \partial_{A_1 A'_1} \psi_{A_2 \dots A_n}$, entonces no es difícil ver¹⁸ que $\partial^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_n} = 0$ y que además $\varphi_{A_1 \dots A_n}$ es totalmente simétrico, i.e. a partir de un campo libre de spin $(n-1)/2$, generamos un campo libre de spin $n/2$. Repitiendo este proceso n veces obtenemos que, dada una solución de la ecuación de onda, $\square\Phi = 0$, y n espinores $\mu^{A'}, \dots, \zeta^{A'}$ constantes en \mathbb{M} , el campo espinorial

$$\varphi_{A_1 \dots A_n} = \mu^{A'_1} \dots \zeta^{A'_n} \partial_{A_1 A'_1} \dots \partial_{A_n A'_n} \Phi \quad (2.102)$$

satisface $\partial^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_n} = 0$. Esto es: podemos generar soluciones de las ecuaciones de spin $\mathfrak{s} = n/2$ a partir de soluciones de la ecuación de spin cero. A la inversa, dada una solución de $\partial^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_n} = 0$ y un espinor constante $\mu^{A'}$, entonces es posible probar (ver [112, sección 4]) que existe localmente un $\psi_{A_1 \dots A_{n-1}}$ totalmente simétrico tal que $\varphi_{A_1 \dots A_n} = \mu^{A'_1} \partial_{A_1 A'_1} \psi_{A_2 \dots A_n}$

¹⁸para probar esto debe usarse que si $\partial^{A_1 A'_1} \psi_{A_1 \dots A_{n-1}} = 0$, entonces (en \mathbb{M}) $\square\psi_{A_1 \dots A_{n-1}} = 0$.

y $\partial^{A_1 A'_1} \psi_{A_1 \dots A_{n-1}} = 0$. Repitiendo el proceso arribamos nuevamente a que $\varphi_{A_1 \dots A_n}$ tiene la forma (2.102), donde Φ satisface la ecuación de onda.

Estos mecanismos de *spin lowering* y *spin raising* involucran tres ingredientes principales: la existencia de campos espinoriales constantes en el espacio-tiempo, la conmutación de derivadas covariantes, y el hecho de que \mathbb{M} es topológicamente trivial. Esto nos restringe en general a un espacio-tiempo plano. Mecanismos alternativos de *spin lowering* y *spin raising*, que en principio podrían admitir una generalización a espacio-tiempos curvos, pueden obtenerse utilizando espinores de Killing, como veremos a continuación.

Consideremos un espinor $\omega \in \mathbb{S}^A$ en el kernel del operador de twistor, i.e.

$$\partial_{A'}^{(A} \omega^{B)} = 0. \quad (2.103)$$

Esta ecuación es equivalente¹⁹ a $\partial_{A'}^A \omega^B = -i \epsilon_A^B \pi_{A'}$ para algún espinor $\pi_{A'}$. El par $Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$ se denomina *twistor*. Veremos más sobre estos objetos en la sección 4.3, por ahora sólo nos interesa la generalización de (2.103), esto es

$$\partial_{(B'}^{(B} L_{A'_1 \dots A'_m}^{A_1 \dots A_n)} = 0. \quad (2.104)$$

Como vimos, el objeto L solución de esta ecuación se denomina espinor de Killing de valencia (n, m) . Soluciones de (2.104) pueden construirse simplemente a partir de soluciones de (2.103), en la forma (para valencia $(n, 0)$)

$$L^{A_1 \dots A_n} = \omega^{(A_1} \dots \omega^{A_n)}. \quad (2.105)$$

El interés en este tipo de campos tiene su origen en el siguiente resultado debido a Penrose, cuya demostración es muy sencilla:

Lema 2.5.1 (Reducción de spin, [111, Sección 6.4]). *Sea $\varphi \in \mathbb{S}_{A_1 \dots A_n}$ un campo libre sin masa de spin $n/2$, y sea $L \in \mathbb{S}^{A_1 \dots A_r}$ un espinor de Killing de valencia $(r, 0)$, con $r < n$. Entonces*

$$\partial^{A_1 A'_1} (\varphi_{A_1 \dots A_{n-r} B_1 \dots B_r} L^{B_1 \dots B_r}) = 0. \quad (2.106)$$

Este resultado indica que a partir de un campo libre de spin $n/2$ y un espinor de Killing, podemos generar un campo libre de spin $(n-r)/2$, i.e. tenemos un mecanismo de *spin lowering* que no utiliza espinores constantes como aquel descrito anteriormente. El caso $n = r$ está excluido del lema, pero es sencillo probar que en tal caso la ecuación satisfecha por $\Phi = \varphi_{A_1 \dots A_n} L^{A_1 \dots A_n}$ es la ecuación de onda, $\square \Phi = 0$, i.e. obtenemos un campo de spin 0. Gran parte del trabajo en esta tesis tiene su motivación en este sencillo resultado.

El proceso inverso, esto es, construir campos de spin mayor a partir de un campo de spin dado, no es descrito en los trabajos de Penrose, sólo se menciona que la expresión general es complicada (ver [111, sección 6.4]). En nuestro caso, podemos obtener un mecanismo de este estilo usando el método de operadores adjuntos de la sección 2.4.2:

¹⁹el factor $-i$ es sólo para seguir las convenciones de Penrose.

Teorema 2.5.1. *Consideremos el espacio-tiempo de Minkowski \mathbb{M} . Sea $\varphi \in \mathbb{S}_{A_1 \dots A_n}$ arbitrario, y sea $L \in \mathbb{S}^{A_1 \dots A_n}$ un espinor de Killing de valencia $(n, 0)$. Entonces vale la igualdad*

$$\mathcal{S}\mathcal{E}(\varphi_{A_1 \dots A_n}) = \mathcal{O}\mathcal{T}(\varphi_{A_1 \dots A_n}) \quad (2.107)$$

donde los operadores diferenciales lineales están definidos por

$$\mathcal{S}(J^{B'}_{A_2 \dots A_n}) := (2L^{BA_2 \dots A_n} \partial_{BB'} + \frac{2n}{n+1} (\partial_{BB'} L^{BA_2 \dots A_n})) J^{B'}_{A_2 \dots A_n}, \quad (2.108)$$

$$\mathcal{E}(\varphi_{A_1 \dots A_n}) := \partial^{B'A_1} \varphi_{A_1 \dots A_n}, \quad (2.109)$$

$$\mathcal{O}(\Phi) := \square \Phi, \quad (2.110)$$

$$\mathcal{T}(\varphi_{A_1 \dots A_n}) := L^{A_1 \dots A_n} \varphi_{A_1 \dots A_n}. \quad (2.111)$$

Demostración. La prueba de esta identidad es sencilla; esquemáticamente: expandir $\square(L \cdot \varphi) = (\square L) \cdot \varphi + L \cdot \square \varphi + 2\partial L \cdot \partial \varphi$, la ecuación de Killing implica $\square L = 0$, luego usar la descomposición irreducible (2.23) para ∂L y la identidad $\partial_{A'A} \partial_B^{A'} = \frac{1}{2} \epsilon_{AB} \square$ válida en \mathbb{M} . \square

La ecuación adjunta a (2.107), $\mathcal{E}^\dagger \mathcal{S}^\dagger(\Phi) = \mathcal{T}^\dagger \mathcal{O}^\dagger(\Phi)$, puede calcularse fácilmente como

$$\partial^{A_1(A'_1} [\mathcal{S}^\dagger(\Phi)]_{A_1}{}^{A'_2 \dots A'_n}) = \bar{L}^{A'_1 \dots A'_n} \square \Phi, \quad (2.112)$$

donde \mathcal{S}^\dagger está dado por

$$[\mathcal{S}^\dagger(\Phi)]_{A_1}{}^{A'_1 \dots A'_{n-1}} = 2\bar{L}^{A'_1 \dots A'_{n-1} B'} \partial_{A_1 B'} \Phi + \frac{2}{n+1} (\partial_{A_1 B'} \bar{L}^{A'_1 \dots A'_{n-1} B'}) \Phi. \quad (2.113)$$

Esta ecuación indica que si Φ satisface la ecuación de onda en \mathbb{M} , $\square \Phi = 0$, entonces $[\mathcal{S}^\dagger(\Phi)]_{A_1}{}^{A'_1 \dots A'_{n-1}}$ es un potencial de Hertz izquierdo (ver def. 2.2.5),

$$[\mathcal{C}_{1,n-1}^\dagger \mathcal{S}^\dagger(\Phi)]^{A'_1 \dots A'_n} = \partial^{A_1(A'_1} [\mathcal{S}^\dagger(\Phi)]_{A_1}{}^{A'_2 \dots A'_n}) = 0. \quad (2.114)$$

En \mathbb{M} , es sabido que los potenciales de Hertz dan origen a campos libres sin masa: si $\psi_{A_1}{}^{A'_1 \dots A'_{n-1}}$ es totalmente simétrico y satisface $\partial^{A_1(A'_1} \psi_{A_1}{}^{A'_2 \dots A'_n}) = 0$, entonces $\varphi_{A_1 \dots A_n} := \partial_{(A_1}^{A'_1} \dots \partial_{A_{n-1}}^{A'_{n-1}} \psi_{A_n})_{A'_1 \dots A'_{n-1}}$ satisface $\partial^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_n} = 0$. Más aún, todo campo libre sin masa puede expresarse de esta manera, ver [111, sección 6.4]. (No obstante, el potencial de Hertz no es único, sino que existe la libertad de gauge $\psi_{A_1}{}^{A'_1 \dots A'_{n-1}} \rightarrow \psi_{A_1}{}^{A'_1 \dots A'_{n-1}} + \partial_{A_1} (A'_1 \theta^{A'_2 \dots A'_{n-1}})$, para $\theta^{A'_1 \dots A'_{n-2}}$ arbitrario.)

Utilizando esta propiedad de los potenciales de Hertz junto con la identidad (2.112), podemos ahora construir los campos libres sin masa. Para esto introducimos, por conveniencia notacional, el operador $\mathcal{F}_m : \mathbb{S}_{A_1 A'_1 \dots A'_m} \rightarrow \mathbb{S}_{A_1 \dots A_{m+1}}$ como

$$\mathcal{F}_m := C_{m,1} \circ C_{m-1,2} \circ \dots \circ C_{2,m-1} \circ C_{1,m}. \quad (2.115)$$

Por ejemplo $\mathcal{F}_0 = \text{Id}$, $\mathcal{F}_1 = C_{1,1}$ y $\mathcal{F}_2 = C_{2,1} \circ C_{1,2}$. Tenemos:

Corolario 2.5.2. *Sea $\Phi \in \Gamma(\mathbb{M}, \mathbb{C})$ una solución compleja de la ecuación de onda en \mathbb{M} , $\square\Phi = 0$. Consideremos el campo espinorial*

$$\varphi_{A_1 \dots A_n} := [(\mathcal{F}_{n-1} \circ \mathcal{S}^\dagger)\Phi]_{A_1 \dots A_n} = \partial_{(A_1}^{A'_1} \dots \partial_{A_{n-1}}^{A'_{n-1}} [\mathcal{S}^\dagger(\Phi)]_{A_n)A'_1 \dots A'_{n-1}}. \quad (2.116)$$

Entonces $\varphi_{A_1 \dots A_n}$ satisface la ecuación de campos libres sin masa de spin $\mathfrak{s} = n/2$, $\partial^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_n} = 0$.

Expresiones particulares de (2.116) se obtienen considerando distinto número de espinores de Killing que componen $L^{A_1 \dots A_n}$. Por ejemplo, tomando dos espinores de Killing ω^A y μ^A , definiendo $\mathcal{X} := \bar{\omega}^{A'} \bar{\mu}_{A'}$ y usando $L^{A_1 \dots A_n} = \omega^{(A_1} \dots \mu^{A_n)}$ (con igual número de ω^A 's y μ^A 's), obtenemos $[\mathcal{S}^\dagger(\Phi)]_{A_1 \dots A_n} = \mathcal{X}^n \partial_{A_1 A'_1} (\mathcal{X}^{-n} \bar{L}^{A'_1 \dots A'_n} \Phi)$, y el campo (2.116) queda (omitiendo factores constantes irrelevantes)

$$\varphi_{A_1 \dots A_n} = \partial_{(A_1}^{A'_1} \dots \partial_{A_{n-1}}^{A'_{n-1}} [\mathcal{X}^n \partial_{A_n}^{A'_n} (\mathcal{X}^{-n} \bar{L}_{A'_1 \dots A'_n} \Phi)]. \quad (2.117)$$

La expresión (2.117) es interesante porque volveremos a encontrarla más adelante, con otros métodos, en los casos que estudiaremos en espacio-tiempos curvos. En particular, es útil explicitar aquí los casos de spin $\mathfrak{s} = 1/2, 1$ y 2 , que serán los que trataremos más adelante:

$$\varphi_A = \mathcal{X} \partial_A^{A'} (\mathcal{X}^{-1} \bar{L}_{A'} \Phi), \quad (2.118)$$

$$\varphi_{AB} = \partial_{(A}^{A'} [\mathcal{X}^2 \partial_{B)}^{B'} (\mathcal{X}^{-2} \bar{L}_{A'B'} \Phi)], \quad (2.119)$$

$$\varphi_{ABCD} = \partial_{(A}^{A'} \partial_{B}^{B'} \partial_{C}^{C'} [\mathcal{X}^4 \partial_{D)}^{D'} (\mathcal{X}^{-4} \bar{L}_{A'B'C'D'} \Phi)]. \quad (2.120)$$

2.5.3. Operadores de simetría

Como subproducto del teorema 2.5.1 y su corolario 2.5.2, podemos construir operadores de simetría para las ecuaciones involucradas, algo que explotaremos también en los capítulos siguientes. Definimos los espacios de soluciones

$$\mathbb{F}_{\mathfrak{s}}^L := \ker(\mathcal{E}) = \{\varphi \in \mathbb{S}_{A_1 \dots A_n} \mid \partial^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_n} = 0, \quad n = 2\mathfrak{s}\}, \quad (2.121)$$

$$\mathbb{W} := \ker(\mathcal{O}) = \{\Phi \in \Gamma(\mathbb{M}, \mathbb{C}) \mid \square\Phi = 0\}. \quad (2.122)$$

La estructura de mapas entre estos espacios, que se deduce de 2.5.1 y 2.5.2, puede ilustrarse mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \mathcal{F}_{2\mathfrak{s}-1} \circ \mathcal{S}^\dagger \circ \mathcal{J} & & & \\
 & & \curvearrowright & & \curvearrowleft & & \\
 \dots & \longrightarrow & \mathbb{F}_{\mathfrak{s}}^L & \xrightarrow{\mathcal{J}} & \mathbb{W} & \xrightarrow{\mathcal{F}_{2\mathfrak{s}-1} \circ \mathcal{S}^\dagger} & \mathbb{F}_{\mathfrak{s}}^L & \xrightarrow{\mathcal{J}} & \mathbb{W} & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & \curvearrowright & & & & & \\
 & & & & & \mathcal{J} \circ \mathcal{F}_{2\mathfrak{s}-1} \circ \mathcal{S}^\dagger & & & & &
 \end{array}$$

De esta secuencia deducimos entonces:

Lema 2.5.2. *Consideremos los operadores en \mathbb{M} definidos como*

$$\mathcal{A}_s := \mathcal{F}_{2s-1} \circ \mathcal{S}^\dagger \circ \mathcal{J} : \mathbb{S}_{A_1 \dots A_{2s}} \rightarrow \mathbb{S}_{A_1 \dots A_{2s}}, \quad (2.123)$$

$$\mathcal{B}_s := \mathcal{J} \circ \mathcal{F}_{2s-1} \circ \mathcal{S}^\dagger : \Gamma(\mathbb{M}, \mathbb{C}) \rightarrow \Gamma(\mathbb{M}, \mathbb{C}). \quad (2.124)$$

1. \mathcal{A}_s es un operador de simetría para campos libres sin masa de spin s , i.e. $\mathcal{A}_s : \mathbb{F}_s^L \rightarrow \mathbb{F}_s^L$;

2. \mathcal{B}_s es un operador de simetría para la ecuación de onda, $\mathcal{B}_s : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$.

2.5.4. Perturbaciones gravitacionales

Es interesante considerar el caso de spin $s = 2$ más en detalle. El potencial de Hertz es

$$[\mathcal{S}^\dagger(\Phi)]_{AA'B'C'} = 2\bar{L}_{A'B'C'}{}^{D'} \partial_{AD'} \Phi + \frac{2}{5}(\partial_{AD'} \bar{L}_{A'B'C'}{}^{D'}) \Phi, \quad (2.125)$$

y si Φ satisface $\square \Phi = 0$, entonces

$$\dot{\Psi}_{ABCD} := [(\mathcal{F}_3 \circ \mathcal{S}^\dagger)\Phi]_{ABCD} = \partial_{(A}^{A'} \partial_{B'}^{B'} \partial_{C'}^{C'} [\mathcal{S}^\dagger(\Phi)]_{D)A'B'C'} \quad (2.126)$$

es un campo libre sin masa de spin $s = 2$. Ahora, es posible probar que si $\partial^{AA'} \dot{\Psi}_{ABCD} = 0$ en \mathbb{M} , entonces existe (localmente) un tensor simétrico $h_{ab} = h_{(ab)}$ tal que

$$\dot{\Psi}_{ABCD} = \frac{1}{2}[(C_{3,1} \circ C_{2,2})h]_{ABCD} = \frac{1}{2} \partial_{(A}^{A'} \partial_{B'}^{B'} h_{CD)A'B'}, \quad (2.127)$$

(recordar que todo campo libre sin masa puede derivarse localmente de un potencial de Hertz, ver también [110, sección 5.7]) y la ecuación que satisface h_{ab} es

$$\dot{G}_{ab}[h] = -\frac{1}{2}\square h_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a \partial_b h + \partial^c \partial_{(a} h_{b)c} - \frac{1}{2}\eta_{ab}(\partial^c \partial^d h_{cd} - \square h) = 0, \quad (2.128)$$

es decir que h_{ab} es una solución de las ecuaciones linealizadas de Einstein alrededor de Minkowski. Comparando (2.126) y (2.127), vemos que podemos relacionar la métrica perturbada y el potencial de Hertz como $h_{ABA'B'} \equiv \partial_{(A}^{C'} [\mathcal{S}^\dagger(\Phi)]_{B)A'B'C'}$. Concluimos entonces:

Lema 2.5.3. *Sea $\Phi \in \Gamma(\mathbb{M}, \mathbb{C})$ una solución de la ecuación de onda en \mathbb{M} , $\square \Phi = 0$. Entonces el campo tensorial*

$$h_{ABA'B'} = [(C_{1,3} \circ \mathcal{S}^\dagger)\Phi]_{ABA'B'} \quad (2.129)$$

es una solución (compleja) de las ecuaciones linealizadas de Einstein alrededor de Minkowski, es decir $\dot{G}_{ab}[h] = 0$.

La expresión explícita de la métrica reconstruida puede trabajarse más en detalle utilizando, una vez más, la estructura particular de L^{ABCD} . Similarmente a (2.117), si utilizamos dos espinores de Killing y definimos $\mathcal{X} := \bar{\omega}^{A'} \bar{\mu}_{A'}$, es sencillo probar que

$$h_{ABA'B'} = \partial_{(A}^{C'} [\mathcal{X}^4 \partial_{B)}^{D'} (\mathcal{X}^{-4} \bar{L}_{A'B'C'D'} \Phi)]. \quad (2.130)$$

El tensor asociado a $\bar{L}_{A'B'C'D'}$ es $\bar{P}_{abcd} := \bar{L}_{A'B'C'D'} \epsilon_{AB} \epsilon_{CD}$, y no es difícil ver que la expresión tensorial de $h_{ABA'B'}$ es

$$h_{ab} = \partial^c [\mathcal{X}^4 \partial^d (\mathcal{X}^{-4} \bar{P}_{c(ab)d} \Phi)]. \quad (2.131)$$

Nuevamente, esta expresión es interesante porque volveremos a encontrarla al estudiar perturbaciones de espacio-tiempos curvos, y mientras que aquí depende del uso de espinores de Killing, más adelante la encontraremos utilizando otros métodos (no obstante, estas semejanzas nos motivarán en el capítulo 4 a buscar una interpretación más profunda de los resultados).

Por último, veamos la construcción de operadores de simetría para la ecuación de onda y las ecuaciones de Einstein. Definir el espacio de soluciones de las ecuaciones linealizadas de Einstein como

$$\mathbb{G} := \ker\{\dot{G}_{ab}\} \quad (2.132)$$

donde estamos pensando a \dot{G}_{ab} como un funcional lineal en el espacio de tensores simétricos $h_{ab} = h_{(ab)}$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{C}_{1,3} \circ \mathcal{S}^\dagger \circ \mathcal{T} \circ \text{C}_{3,1} \circ \text{C}_{2,2} & & & & \\
 & & \curvearrowright & & & & \\
 \dots & \longrightarrow & \mathbb{G} & \xrightarrow{\mathcal{T} \circ \text{C}_{3,1} \circ \text{C}_{2,2}} & \mathbb{W} & \xrightarrow{\text{C}_{1,3} \circ \mathcal{S}^\dagger} & \mathbb{G} & \xrightarrow{\mathcal{T} \circ \text{C}_{3,1} \circ \text{C}_{2,2}} & \mathbb{W} & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & & & & & \curvearrowleft & & \\
 & & & & & & & & \text{C}_{1,3} \circ \mathcal{S}^\dagger & &
 \end{array}$$

Lema 2.5.4. *El mapa*

$$\mathcal{H} := \text{C}_{1,3} \circ \mathcal{S}^\dagger \circ \mathcal{T} \circ \text{C}_{3,1} \circ \text{C}_{2,2} : \Gamma(\mathbb{M}, T^*\mathbb{M}^{\odot 2}) \rightarrow \Gamma(\mathbb{M}, T^*\mathbb{M}^{\odot 2}) \quad (2.133)$$

es un operador de simetría para las ecuaciones linealizadas de Einstein en \mathbb{M} , es decir $\mathcal{H} : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$.

En una lectura rápida de este resultado, puede parecer difícil interpretar inmediatamente el mapa \mathcal{H} , dado que el mismo es una composición de 5 operadores. En palabras: dada $h \in \mathbb{G}$, el operador $\text{C}_{3,1} \circ \text{C}_{2,2}$ calcula su espinor de Weyl linealizado, \mathcal{T} lo proyecta sobre el espinor de Killing, y $\text{C}_{1,3} \circ \mathcal{S}^\dagger$ construye una nueva métrica siguiendo el lema 2.5.3.

Capítulo 3

Perturbaciones de espacio-tiempos tipo Petrov D

3.1. Preliminares

En la sección 2.5 vimos que los campos físicos sin masa más generales que pueden existir en un espacio-tiempo plano 4-dimensional \mathbb{M} , de acuerdo a los principios fundamentales de la Relatividad Especial y la Mecánica Cuántica, están representados por espinores totalmente simétricos de helicidad izquierda (negativa) o derecha (positiva), que resuelven las ecuaciones de campo (2.100) y (2.101) respectivamente. La deducción es en base al estudio de las representaciones unitarias y proyectivas del grupo de Poincaré en un espacio de Hilbert. Al estudiar el problema análogo en Relatividad General, uno se encuentra con que un espacio-tiempo curvo arbitrario (\mathcal{M}, g) no poseerá ninguna simetría, por lo que el procedimiento seguido en el caso de Minkowski ya no es válido. Más allá de esta dificultad conceptual (y de las obstrucciones topológicas para la existencia de una estructura espinorial, discutidas en 2.2.2), desde un punto de vista operativo la propuesta natural es hacer una “sustitución mínima” en la que la derivada parcial se reemplaza por la derivada covariante espinorial (2.20) inducida por la conexión de Levi-Civita en \mathcal{M} , y se postulan las ecuaciones de campos libres sin masa

$$\nabla^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_n} = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla^{A_1 A'_1} \chi_{A'_1 \dots A'_n} = 0, \quad (3.2)$$

donde ahora $\varphi_{A_1 \dots A_n}$ y $\chi_{A'_1 \dots A'_n}$ son secciones de los correspondientes fibrados espinoriales asociados a representaciones irreducibles de $SL(2, \mathbb{C})$, i.e. $\varphi \in \mathbb{S}_{A_1 \dots A_n}$ y $\chi \in \mathbb{S}_{A'_1 \dots A'_n}$ (ver (2.19)). Notemos que la noción de *spin* de los campos es distinta del caso en \mathbb{M} : en un espacio-tiempo \mathcal{M} genérico se asocia a irreps de $SL(2, \mathbb{C})$, mientras que en \mathbb{M} se asocia a irreps de $SU(2)$ para campos masivos, y a irreps de $Spin(2)$ para campos no-masivos. Tanto en \mathcal{M} como en \mathbb{M} , el *spin* toma valores semi-enteros. La noción de *masa* de un campo en un espacio-tiempo arbitrario, por otro lado, es en principio una extrapolación de Minkowski, ya que no existe un operador de Casimir que

pueda asociarse a dicha cantidad (ver también la discusión en la sección 4.4 del capítulo siguiente).

El problema con las ecuaciones (3.1) y (3.2) para spin arbitrario es que ahora existen *vínculos algebraicos* que deben satisfacerse en todo \mathcal{M} , lo cual restringe fuertemente la existencia de soluciones no-triviales (ver [110, sección 5.8]). Más precisamente, tomando una derivada adicional en (3.1), se obtiene fácilmente el denominado *vínculo de Buchdahl*

$$(n-2)\varphi_{A_1 A_2 A_3 (A_4 \dots A_n} \Psi^{A_1 A_2 A_3}_{A_{n+1}}) = 0, \quad (3.3)$$

donde Ψ_{ABCD} es el espinor de curvatura conforme. Para $n = 1$ ($\mathfrak{s} = 1/2$) y $n = 2$ ($\mathfrak{s} = 1$), el vínculo se satisface idénticamente, con lo cual campos de Dirac (sin masa) y de Maxwell pueden ser descriptos correctamente por (3.1). Para espacios conformemente planos, se tiene $\Psi_{ABCD} \equiv 0$ y (3.3) se satisface para todo n . Por otro lado, las identidades de Bianchi en un espacio Einstein son equivalentes a $\nabla^{AA'}\Psi_{ABCD} = 0$, y el vínculo (3.3) reemplazando $\varphi_{A_1 \dots A_n}$ por Ψ_{ABCD} se satisface trivialmente. Sin embargo, para un espacio-tiempo arbitrario y $n > 2$, el vínculo es muy restrictivo; por ejemplo para $n = 4$ ($\mathfrak{s} = 2$) puede mostrarse (ver [14]) que las soluciones son en general múltiplos de Ψ_{ABCD} .

Es interesante notar ([110, pág. 368]) que las restricciones impuestas por (3.3) para la existencia de campos de spin superior en un espacio-tiempo curvo genérico, parecen estar relacionadas con la imposibilidad de construir un tensor de energía-momento adecuado (i.e. simétrico y sin divergencia) para los campos correspondientes (el cual, por supuesto, debería ser puesto en el lado derecho de las ecuaciones de Einstein para resolver la dinámica completa –no-lineal, acoplada– de los campos y del espacio-tiempo).

En este capítulo estudiaremos la generalización del mecanismo que utilizamos en las secciones 2.5 y 2.5.4 para Minkowski, a spin $\mathfrak{s} = 1/2, 1$ y 2 en espacio-tiempos Einstein de tipo Petrov D, que son aquellos de interés para el problema de estabilidad de agujeros negros. Ahora, los ingredientes fundamentales en (2.107) son espinores de Killing. No obstante, como vimos en la sección 2.3.1, un espacio-tiempo tipo D posee un solo espinor de Killing de valencia $(2, 0)$, lo cual restringe fuertemente un posible mecanismo de spin lowering-spin raising como en \mathbb{M} . Notablemente, encontraremos una generalización de (2.107) utilizando, en última instancia, sólo las identidades de Bianchi del background. En el capítulo 4 exploraremos más en profundo la relación de nuestros resultados con espinores de Killing.

Observación 3.1.1 (Artículos). *Los resultados de este capítulo se encuentran mayoritariamente en [8], salvo la sección 3.4.1 que está en [7].*

Observación 3.1.2 (Demostraciones). *Las demostraciones de los teoremas en las secciones siguientes son muy largas y tediosas, por lo que, en un intento de facilitar la lectura de los resultados, hemos decidido referir al correspondiente artículo [8] (o a su versión en arXiv, disponible gratuitamente online) para ver las pruebas en detalle.*

3.2. Campos de Weyl-Dirac

La ecuación de Dirac con masa m en un espacio-tiempo curvo es

$$(\not{\nabla} + m)\Psi = 0, \quad (3.4)$$

donde Ψ es un campo espinorial correspondiente a la representación $S_{(\frac{1}{2},0)} \oplus S_{(0,\frac{1}{2})}$ de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, y $\not{\nabla} = \gamma^a \nabla_a$ es el operador de Dirac, con γ_a las matrices gamma que satisfacen el álgebra de Clifford $\gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = -2g_{ab}\mathbb{I}$. Escribiendo $\Psi = (\phi_A, \chi_{A'})^T$, la ecuación de Dirac acopla en general las dos componentes, salvo en el caso de masa $m = 0$, donde (3.4) se descompone en sus partes de helicidad izquierda y derecha, que son simplemente los casos $n = 1$ de (3.1) y (3.2):

$$\nabla^{AA'} \phi_A = 0, \quad \nabla^{AA'} \chi_{A'} = 0. \quad (3.5)$$

Las ecuaciones (3.5) se conocen como *ecuaciones de Weyl-Dirac*, o también a veces *ecuaciones de Weyl-neutrinos*. El nombre se debe a que en un primer momento se pensó que los neutrinos (partículas elementales de spin $1/2$ y carga eléctrica nula) poseían masa en reposo cero, algo que en la actualidad se considera falso debido a la medición de la oscilación de neutrinos reportada en [68] (un fenómeno únicamente posible si al menos dos de los tres tipos de estas partículas tienen masa no-nula). La masa de los neutrinos es, no obstante, extremadamente pequeña¹, siendo al menos 6 órdenes de magnitud más chica que la del electrón [107], por lo que, desde el punto de vista físico, las ecuaciones (3.5) constituyen una buena aproximación a la dinámica de los neutrinos.

Definimos los espinores

$$P_{1/2}^A := o^A, \quad P_{-1/2}^A := \Psi_2^{-1/3} \iota^A. \quad (3.6)$$

Estos objetos, de tipo GHP $\{1, 0\}$ y $\{-1, 0\}$ respectivamente, encontrarán una interpretación en el capítulo 4. La generalización de (2.107) a spin $\mathfrak{s} = 1/2$ en espacios curvos de tipo Petrov D es la siguiente:

Teorema 3.2.1 (spin $\mathfrak{s} = \frac{1}{2}$). *Consideremos un espacio-tiempo Einstein de tipo Petrov D, y sea $s = \pm \frac{1}{2}$. Entonces para todo campo espinorial ϕ_A , vale la siguiente igualdad:*

$$\mathcal{S}_s \mathcal{E}(\phi_A) = \mathcal{O}_s \mathcal{T}_s(\phi_A), \quad (3.7)$$

donde los operadores diferenciales lineales son

$$\mathcal{S}_s(J_{B'}) := \Psi_2^{1/3} P_s^B \nabla_{B'}^{B'} [\Psi_2^{-1/3} J_{B'}], \quad (3.8)$$

$$\mathcal{E}(\phi_A) := \nabla_{B'}^A \phi_A, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{O}_s(\Phi) := (\mathbb{H}_{2s} - \Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\Phi, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{T}_s(\phi_A) := -\frac{1}{2} P_s^A \phi_A. \quad (3.11)$$

Demostración. Ver Teorema 3.1 en [8, sección 3]. \square

¹el valor estimado es $m_\nu \leq 0,120\text{eV}$.

Aplicando ahora el método de operadores adjuntos descrito en la sección 2.4.2, podemos tomar la ecuación adjunta a (3.7) y así obtener el siguiente resultado:

Corolario 3.2.2. *Sea $s = \pm\frac{1}{2}$, y sea $\Phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}})$ una solución de la ecuación de Teukolsky de tipo $(1/2, \pm 1/2)$, $(\square_{2s} - \Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\Phi = 0$, en un espacio-tiempo Einstein tipo D. Entonces el campo espinorial*

$$\phi_A^s(\Phi) = \bar{\Psi}_2^{-1/3} \nabla_{A'}^{A'} [\bar{\Psi}_2^{1/3} \bar{P}_{A'}^{-s} \bar{\Phi}] \quad (3.12)$$

es una solución de la ecuación de Weyl-Dirac, $\nabla^{AA'} \phi_A^s = 0$.

Notemos que, definiendo $\mathcal{X} := \bar{\Psi}_2^{-1/3}$, la expresión (3.12) es formalmente idéntica a la reconstrucción (2.118) en \mathbb{M} , identificando $\bar{L}^{A'}$ con $\bar{P}_{-s}^{A'}$ y $\partial_{AA'}$ con $\nabla_{AA'}$.

3.2.1. Operadores de simetría

La identidad (3.7) y su adjunta permiten construir operadores de simetría tanto para las ecuaciones de Weyl-Dirac, como para las ecuaciones de Teukolsky de spin $\mathfrak{s} = 1/2$. Definimos los espacios de soluciones de estas ecuaciones como

$$\mathbb{F}_{1/2}^L := \{\phi \in \mathbb{S}_A \mid \nabla^{AA'} \phi_A = 0\}, \quad (3.13)$$

$$\mathbb{F}_{1/2}^R := \{\chi \in \mathbb{S}_{A'} \mid \nabla^{AA'} \chi_{A'} = 0\}, \quad (3.14)$$

$$\mathbb{W}_{1/2}^s := \{\Phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}}) \mid (\square_{2s} - \Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\Phi = 0, \quad s = \pm\frac{1}{2}\}. \quad (3.15)$$

En lo que sigue nos concentraremos en campos de Dirac de helicidad izquierda, los de helicidad derecha se tratan análogamente.

De (3.7) vemos que, si ϕ_A satisface la ecuación $\mathcal{E}(\phi_A) = 0$ (i.e. $\phi_A \in \mathbb{F}_{1/2}^L$), entonces $\mathcal{T}_s(\phi_A)$ satisface la ecuación de Teukolsky de tipo $s = \pm 1/2$. A la inversa, de (3.12) vemos que, si Φ satisface la ecuación de Teukolsky de tipo $s = \pm 1/2$, entonces $[\bar{\mathcal{S}}^\dagger(\Phi)]_A$ satisface la ecuación de Dirac. La iteración de este proceso conduce a operadores de simetría para las ecuaciones en cuestión, como mostramos en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & c \circ \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger \circ \mathcal{T}_s & & & \\ & & & \curvearrowright & & & \\ \dots & \longrightarrow & \mathbb{F}_{1/2}^L & \xrightarrow{\mathcal{T}_s} & \mathbb{W}_{1/2}^s & \xrightarrow{c \circ \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger} & \mathbb{F}_{1/2}^L & \xrightarrow{\mathcal{T}} & \mathbb{W}_{1/2}^s & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & \curvearrowleft & & & & & \\ & & & & & \mathcal{T}_s \circ c \circ \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger & & & & & \end{array}$$

El mapa c denota conjugación compleja, $c(\Phi) = \bar{\Phi}$. Notamos que este diagrama no es un complejo diferencial (y por lo tanto tampoco es una secuencia exacta), ya que la composición de dos mapas sucesivos no es cero. Por el contrario, esta composición constituye los operadores de simetría buscados.

Lema 3.2.1. Para $s = \pm\frac{1}{2}$, los mapas $\mathcal{A}_{1/2}^s := c \circ \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger \circ \mathcal{T}_s : \mathbb{S}_A \rightarrow \mathbb{S}_A$ definidos por

$$\phi_A \mapsto [\mathcal{A}_{1/2}^s(\phi)]_A = \bar{\Psi}_2^{-1/3} \nabla_{AA'} [\bar{\Psi}_2^{1/3} \bar{P}_{-s}^{A'} \bar{P}_s^{B'} \bar{\phi}_{B'}] \quad (3.16)$$

son operadores de simetría para la ecuación (izquierda) de Weyl-Dirac, es decir $\mathcal{A}_{1/2}^s : \mathbb{F}_{1/2}^L \rightarrow \mathbb{F}_{1/2}^L$.

Notemos que la composición de estos operadores es de nuevo un operador de simetría, de orden superior. El conjunto de operadores de simetría tiene entonces la estructura de un álgebra graduada

$$\mathbb{A}_{1/2} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{A}_{1/2}^{(n)}, \quad (3.17)$$

donde $\mathbb{A}_{1/2}^{(n)}$ son los operadores de simetría de orden n ,

$$\mathbb{A}_{1/2}^{(n)} = \{(\mathcal{A}_{1/2}^+)^{n_+} \circ (\mathcal{A}_{1/2}^-)^{n_-} \mid n_+ + n_- = n, \ n_\pm \in \mathbb{N}_0\}. \quad (3.18)$$

Lema 3.2.2. Para $s = \pm\frac{1}{2}$, los mapas

$$\mathcal{B}_{1/2}^s := \mathcal{T}_s \circ c \circ \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger : \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}})$$

definidos por

$$\Phi \mapsto \mathcal{B}_{1/2}^s(\Phi) = \bar{\Psi}_2^{-1/3} P_s^A \nabla_{AA'} [\bar{P}_{-s}^{A'} \bar{\Phi}] \quad (3.19)$$

son operadores de simetría para la ecuación de Teukolsky de tipo $(1/2, \pm 1/2)$, es decir $\mathcal{B}_{1/2}^s : \mathbb{W}_{1/2}^s \rightarrow \mathbb{W}_{1/2}^s$.

3.3. Campos de Maxwell

Para una 2-forma en el espacio-tiempo, las ecuaciones de Maxwell en forma tensorial son

$$\nabla^a F_{ab} = 0, \quad \nabla_{[a} F_{bc]} = 0. \quad (3.20)$$

En 4 dimensiones, utilizando la forma de volumen ϵ_{abcd} , la segunda ecuación puede escribirse como $\nabla^{a*} F_{ab} = 0$ (donde $*F_{ab} = \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} F^{cd}$), de manera que ambas ecuaciones se combinan en las partes real e imaginaria de la ecuación compleja $\nabla^a \tilde{F}_{ab} = 0$, donde $\tilde{F}_{ab} := F_{ab} + i*F_{ab}$ es el tensor de Maxwell anti-auto dual. En forma espinorial tenemos entonces que las ecuaciones de Maxwell son equivalentes a la ecuación de un campo de spin $\mathfrak{s} = 1$:

$$\nabla^{AA'} \phi_{AB} = 0, \quad (3.21)$$

donde ϕ_{AB} es el espinor de Maxwell, dado por $\tilde{F}_{ab} = \phi_{AB} \bar{\epsilon}_{A'B'}$.

Definimos los espinores P_s^{AB} , $s = 0, \pm 1$, por

$$P_1^{AB} := o^A o^B, \quad (3.22)$$

$$P_0^{AB} := \Psi_2^{-1/3} o^{(A} \iota^{B)}, \quad (3.23)$$

$$P_{-1}^{AB} := \Psi_2^{-2/3} \iota^A \iota^B. \quad (3.24)$$

Una vez más, daremos una interpretación de estos objetos en el capítulo 4. (Notemos, por lo pronto, que P_0^{AB} coincide con el espinor de Killing (2.67) (para $k = 1$)).

Teorema 3.3.1 (spin $\mathfrak{s} = 1$). *Consideremos un espacio-tiempo Einstein de tipo Petrov D, y sea $s = 0, \pm 1$. Entonces para todo campo espinorial simétrico $\phi_{AB} = \phi_{(AB)}$ vale la siguiente igualdad:*

$$\mathfrak{S}_s \mathcal{E}(\phi_{AB}) = \mathcal{O}_s \mathcal{T}_s(\phi_{AB}), \quad (3.25)$$

donde los operadores diferenciales lineales son

$$\mathfrak{S}_s(J_{B'B}) := \Psi_2^{2/3} P_s^{AB} \nabla_A^{B'} [\Psi_2^{-2/3} J_{B'B}], \quad (3.26)$$

$$\mathcal{E}(\phi_{AB}) := \nabla_{B'}^A \phi_{AB}, \quad (3.27)$$

$$\mathcal{O}_s(\Phi) := (\mathbb{I}_{2s} + V_{1,s}) \Phi, \quad (3.28)$$

$$\mathcal{T}_s(\phi_{AB}) := -\frac{1}{2} P_s^{AB} \phi_{AB}, \quad (3.29)$$

con el potencial $V_{1,s} := 2(1 - 3s^2)\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda$.

Demostración. Ver Teorema 4.1 en [8, sección 4]. \square

Notemos que la ecuación adjunta (y compleja conjugada) a (3.25) es

$$\nabla_{B'}^{(A} [\Psi_2^{-2/3} \nabla_C^{B'} (\Psi_2^{2/3} P_s^{BC} \Phi)] = -\frac{1}{2} P_s^{AB} (\mathbb{I}_{-2s} + V_{1,s}) \Phi, \quad (3.30)$$

donde $\Phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{-2s, 0\}})$. Esto implica que una solución de la ecuación $(\mathbb{I}_{-2s} + V_{1,s})\Phi = 0$ genera un potencial de Hertz derecho (ver def. 2.2.5): $[C_{1,1}\alpha]^{AB} \equiv \nabla^{B'(A} \alpha_{B'}^B) = 0$, donde $\alpha^{AA'}$ es el término entre corchetes en el lado izquierdo de (3.30). En \mathbb{M} vimos que esto permitía generar campos de spin 1 mediante (2.116), pero la prueba de eso utiliza la conmutación de derivadas parciales, cosa que no se cumple en un espacio-tiempo curvo. Afortunadamente, el resultado final es todavía válido en espacios curvos:

Lema 3.3.1. *Sea $\alpha_{AA'}$ una solución de $\nabla^{A'(A} \alpha_{A'}^B) = 0$ en un espacio-tiempo arbitrario. Entonces $\psi_{A'B'} = \nabla_{A(A'} \alpha_{B')}^A$ es una solución de las ecuaciones de Maxwell.*

Demostración. Ver (el complejo conjugado del) Lema 4.1 en [8, sección 4]. \square

Combinando (3.30) y el lema anterior, podemos generar soluciones de las ecuaciones de Maxwell de helicidad derecha a partir de las ecuaciones de onda con peso. Para obtener un campo de Maxwell de helicidad izquierda, simplemente tomamos el complejo conjugado del anterior.

Corolario 3.3.2 (Versión espinorial). *Consideremos un espacio-tiempo Einstein tipo D, y sea $s = 0, \pm 1$. Sea $\Phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s, 0\}})$ una solución de la ecuación desacoplada $(\mathbb{I}_{2s} + V_{1,s})\Phi = 0$, que es la ecuación de Teukolsky de tipo $(1, \pm 1)$ para $s = \pm 1$, y la ecuación de Fackerell-Ipser para $s = 0$. Entonces el campo espinorial*

$$\phi_{AB}^s(\Phi) = \nabla_{(A}^{A'} \left[\bar{\Psi}_2^{-2/3} \nabla_{B)}^{B'} [\bar{\Psi}_2^{2/3} \bar{P}_{A'B'}^{-s} \bar{\Phi}] \right] \quad (3.31)$$

es una solución de las ecuaciones de Maxwell, $\nabla^{AA'} \phi_{AB}^s = 0$.

Notemos que, al igual que en el caso de spin $\mathfrak{s} = 1/2$, definiendo $\mathcal{X} := \bar{\Psi}_2^{-1/3}$ el campo (3.31) es formalmente idéntico a la reconstrucción (2.119) en \mathbb{M} .

3.3.1. Operadores de simetría

Definimos los siguientes espacios de soluciones:

$$\mathbb{F}_1^L := \{\phi \in \mathbb{S}_{AB} \mid \nabla^{AA'} \phi_{AB} = 0\}, \quad (3.32)$$

$$\mathbb{W}_1^s := \{\Phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}}) \mid (\mathbb{E}_{2s} + V_{1,s})\Phi = 0, \quad s = 0, \pm 1\}. \quad (3.33)$$

Esto es, \mathbb{F}_1^L es el espacio de soluciones de las ecuaciones de Maxwell, \mathbb{W}_1^0 es el correspondiente a la ecuación de Fackerell-Ipser, y \mathbb{W}_1^\pm son los de las ecuaciones de Teukolsky de tipo $(1, \pm 1)$. El diagrama de mapas entre estos espacios es el siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{c} \circ \mathcal{F}_1 \circ \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger \circ \mathcal{T}_s & & & \\ & & & \curvearrowright & & & \\ \dots & \longrightarrow & \mathbb{F}_1^L & \xrightarrow{\mathcal{T}_s} & \mathbb{W}_1^s & \xrightarrow{\text{c} \circ \mathcal{F}_1 \circ \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger} & \mathbb{F}_1^L & \xrightarrow{\mathcal{T}_s} & \mathbb{W}_1^s & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & \curvearrowleft & & & & & \\ & & & & & \mathcal{T}_s \circ \text{c} \circ \mathcal{F}_1 \circ \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger & & & & & \end{array}$$

(Recordar que el mapa \mathcal{F}_m fue definido en (2.115).) En este diagrama, el peso de spin s está fijo. Por otro lado, notemos que también podemos obtener mapas entre los espacios de soluciones de las ecuaciones escalares con distinto s , en particular, operadores que transforman una solución de la ecuación de Fackerell-Ipser en soluciones de las ecuaciones de Teukolsky, y viceversa. Ilustramos esto mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{W}_1^0 & \xrightarrow{\text{c} \circ \mathcal{F}_1 \circ \bar{\mathcal{S}}_0^\dagger} & \mathbb{F}_1^L & \xrightarrow{\mathcal{T}_0} & \mathbb{W}_1^0 \\ & & \downarrow \mathcal{T}_s & & \uparrow \mathcal{T}_0 \\ & & \mathbb{W}_1^s & \xrightarrow{\text{c} \circ \mathcal{F}_1 \circ \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger} & \mathbb{F}_1^L \end{array}$$

Los diagramas anteriores nos permiten deducir el siguiente resultado:

Lema 3.3.2. *Sea $s = 0, \pm 1$.*

(i) *Los mapas $\mathcal{A}_1^s := \text{c} \circ \mathcal{F}_1 \circ \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger \circ \mathcal{T}_s : \mathbb{S}_{AB} \rightarrow \mathbb{S}_{AB}$ definidos por*

$$\phi_{AB} \mapsto [\mathcal{A}_1^s(\phi)]_{AB} = \nabla_{A'(A} \left[\bar{\Psi}_2^{-2/3} \nabla_{B)B'} (\bar{\Psi}_2^{2/3} \bar{P}_{-s}^{A'B'} \bar{P}_s^{C'D'} \bar{\phi}_{C'D'}) \right] \quad (3.34)$$

son operadores de simetría para las ecuaciones de Maxwell, esto es $\mathcal{A}_1^s : \mathbb{F}_1^L \rightarrow \mathbb{F}_1^L$.

- (ii) Los mapas $\mathcal{B}_1^s := \mathcal{T}_s \circ c \circ \mathcal{F}_1 \circ \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger : \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}})$ definidos por

$$\Phi \mapsto [\mathcal{B}_1^s(\Phi)] = P_s^{AB} \nabla_{A'A} \left[\bar{\Psi}_2^{-2/3} \nabla_{BB'} (\bar{\Psi}_2^{2/3} \bar{P}_{-s}^{A'B'} \bar{\Phi}] \quad (3.35)$$

son operadores de simetría en \mathbb{W}_1^s , i.e. $\mathcal{B}_1^s : \mathbb{W}_1^s \rightarrow \mathbb{W}_1^s$. Más precisamente, \mathcal{B}_1^0 es operador de simetría para la ecuación de Fackerell-Ipser, y $\mathcal{B}_1^{\pm 1}$ es operador de simetría para la ecuación de Teukolsky de tipo $(1, \pm 1)$.

- (iii) El operador $\mathcal{W}_1^{\pm 1} := \mathcal{T}_{\pm 1} \circ c \circ \mathcal{F}_1 \circ \bar{\mathcal{S}}_0^\dagger : \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{0,0\}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{\pm 2,0\}})$ definido por

$$\Phi_0 \mapsto \mathcal{W}_1^{\pm 1}(\Phi_0) = P_{\pm 1}^{AB} \nabla_{A'A} \left[\bar{\Psi}_2^{-2/3} \nabla_{BB'} (\bar{\Psi}_2^{2/3} \bar{P}_0^{A'B'} \bar{\Phi}_0] \quad (3.36)$$

mapea una solución de Fackerell-Ipser en una solución de Teukolsky con $s = \pm 1$, $\mathcal{W}_1^{\pm 1} : \mathbb{W}_1^0 \rightarrow \mathbb{W}_1^{\pm 1}$.

- (iv) El operador $\mathcal{W}_1^0 := \mathcal{T}_0 \circ c \circ \mathcal{F}_1 \circ \bar{\mathcal{S}}_{\mp 1}^\dagger : \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{\pm 2,0\}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{0,0\}})$ definido por

$$\Phi_{\pm 1} \mapsto \mathcal{W}_1^0(\Phi_{\pm 1}) = P_0^{AB} \nabla_{A'A} \left[\bar{\Psi}_2^{-2/3} \nabla_{BB'} (\bar{\Psi}_2^{2/3} \bar{P}_{\mp 1}^{A'B'} \bar{\Phi}_{\pm 1}] \quad (3.37)$$

mapea una solución de Teukolsky con $s = \pm 1$ en una solución de Fackerell-Ipser, $\mathcal{W}_1^0 : \mathbb{W}_1^{\pm 1} \rightarrow \mathbb{W}_1^0$.

Por supuesto, la combinación de los ítems (iii) y (iv) conduce a nuevos operadores de simetría en \mathbb{W}_1^s , $s = 0, \pm 1$, distintos a los del ítem (ii); esto es, $(\mathcal{W}_1^0 \circ \mathcal{W}_1^{\pm 1}) : \mathbb{W}_1^0 \rightarrow \mathbb{W}_1^0$ y $(\mathcal{W}_1^{\pm 1} \circ \mathcal{W}_1^0) : \mathbb{W}_1^{\pm 1} \rightarrow \mathbb{W}_1^{\pm 1}$.

Al igual que en el caso de Dirac, los operadores de simetría generan un álgebra graduada; por ejemplo

$$\mathbb{A}_1 = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{A}_1^{(n)}, \quad (3.38)$$

donde $\mathbb{A}_1^{(n)}$ son los operadores de simetría de orden n ,

$$\mathbb{A}_1^{(n)} = \{(\mathcal{A}_1^+)^{n_+} \circ (\mathcal{A}_1^0)^{n_0} \circ (\mathcal{A}_1^-)^{n_-} \mid n_+ + n_0 + n_- = n, \ n_{0,\pm} \in \mathbb{N}_0\}. \quad (3.39)$$

3.3.2. Expresiones tensoriales

Resulta útil traducir las expresiones espinoriales anteriores al lenguaje tensorial. Primeramente necesitamos introducir las 2-formas anti-auto-duales $P_{ab}^s := P_{AB}^s \bar{\epsilon}_{A'B'}$, para $s = 0, \pm 1$. Explícitamente:

$$P_{ab}^{+1} := 2\ell_{[a} m_{b]}, \quad (3.40)$$

$$P_{ab}^0 := \Psi_2^{-1/3} (\ell_{[a} n_{b]} + \bar{m}_{[a} m_{b]}), \quad (3.41)$$

$$P_{ab}^{-1} := 2\Psi_2^{-2/3} \bar{m}_{[a} n_{b]}. \quad (3.42)$$

En el capítulo 4 veremos una interpretación de estas 2-formas.

Corolario 3.3.2' (Versión tensorial). *Consideremos un espacio-tiempo Einstein tipo D, y sea $s = 0, \pm 1$. Sea $\Phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}})$ una solución de la ecuación desacoplada $(\square_{2s} + V_{1,s})\Phi = 0$, que es la ecuación de Teukolsky de tipo $(1, \pm 1)$ para $s = \pm 1$, y la ecuación de Fackerell-Ipser para $s = 0$. Entonces el campo tensorial*

$$\tilde{F}_{ab}^s = E_{ab}^s + i^* E_{ab}^s \quad (3.43)$$

es una solución de las ecuaciones de Maxwell, $d\tilde{F}^s = 0 = d^*\tilde{F}^s$, donde el campo complejo E_{ab}^s está definido por

$$E_{ab}^s = \nabla_{[a}[\bar{\Psi}_2^{-2/3}\nabla^c(\bar{\Psi}_2^{2/3}\bar{P}_{b]c}^s\bar{\Phi})]. \quad (3.44)$$

Por otro lado, no es difícil traducir los operadores de simetría espinoriales al lenguaje tensorial. Para evitar una sobrecarga de notación, usaremos los mismos símbolos para los análogos tensoriales de estos operadores, incluso aunque en realidad actúan en espacios distintos. Sea $s = 0, \pm 1$. El operador \mathcal{A}_1^s definido por $[\mathcal{A}_1^s(F)]_{ab} = E_{ab}^s(F) + i^* E_{ab}^s(F)$, donde

$$E_{ab}^s(F) = \nabla_{[a}[\bar{\Psi}_2^{-2/3}\nabla^c(\bar{\Psi}_2^{2/3}\bar{P}_{b]c}^s\bar{P}_{de}^s\bar{F}_{de})] \quad (3.45)$$

mapea campos de Maxwell en campos de Maxwell. Por su parte, el operador en $\Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}})$ definido por

$$[\mathcal{B}_1^s(\Phi)] = P_s^{ab}\nabla_a \left[\bar{\Psi}_2^{-2/3}\nabla^c(\bar{\Psi}_2^{2/3}\bar{P}_{bc}^s\bar{\Phi}) \right] \quad (3.46)$$

mapea \mathbb{W}_1^s (definido en (3.33)) en sí mismo.

3.3.3. Peso de spin cero

Es interesante analizar el caso de peso de spin cero más en detalle; lo necesitaremos en la sección 3.5. Recordar que P_{AB}^0 coincide con el espinor de Killing (2.67), $P_{AB}^0 \equiv K_{AB}$. En esta subsección asumiremos que el vector de Killing $\xi^{AA'} = \nabla^{A'B}K^A_B$ es real, lo cual corresponde a la clase generalizada de Kerr-NUT. El campo (3.31) para $s = 0$ puede reescribirse como

$$\phi_{AB}^0(\Phi) = -i\nabla_{(A}^{B'}[Y_{B)B'CC'}\nabla^{CC'}\bar{\Phi}] - \frac{1}{2}K_{AB}(\square + 2\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\bar{\Phi}, \quad (3.47)$$

donde Y_{ab} es el tensor de Killing-Yano (2.71). La prueba de esto puede verse en [8, Lema 4.2]. Notemos que el caso de interés es cuando Φ es una solución de la ecuación de Fackerell-Ipser, $(\square + 2\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\Phi = 0$, con lo cual el segundo término en (3.47) puede escribirse como $4i\mathfrak{Im}(\Psi_2)\bar{\Phi}$. La versión tensorial de (3.47) es

$$\tilde{F}_{ab}^0(\Phi) = E_{ab}^0(\Phi) + i^* E_{ab}^0(\Phi), \quad (3.48)$$

donde

$$E_{ab}^0(\Phi) = i\nabla_{[a}(Y_{b]}^c\nabla_c\bar{\Phi}) - \mathfrak{Im}(\Psi_2)Y_{ab}\bar{\Phi}. \quad (3.49)$$

Por otro lado, el operador de simetría para la ecuación de Fackerell-Ipser es $\mathcal{B}_1^0(\Phi) := \frac{1}{2}P_0^{ab}\tilde{F}_{ab}^0(\Phi) = P_0^{ab}E_{ab}^0(\Phi)$ (recordar que P_s^{ab} es anti-auto-dual), que puede escribirse como

$$\mathcal{B}_1^0(\Phi) = (Y^{ab} + i^*Y^{ab})\nabla_a(Y_b^c\nabla_c\bar{\Phi}) + 2i\mathfrak{I}m(\Psi_2)\Psi_2^{-2/3}\bar{\Phi}, \quad (3.50)$$

donde usamos la identidad $P_0^{ab}Y_{ab} = -i\Psi_2^{-2/3}$.

Notemos que las expresiones se simplifican en el caso en que Ψ_2 es un campo real (un ejemplo de esto es la solución de Schwarzschild-(A)dS). El tensor (3.49) queda $E_{ab}^0(\Phi) = i\nabla_{[a}(Y_{b]}^c\nabla_c\bar{\Phi})$, con lo cual el campo electromagnético reconstruido es

$$\tilde{F}_{ab}^0(\Phi) = i\nabla_{[a}(Y_{b]}^c\nabla_c\bar{\Phi}) - \frac{1}{2}\epsilon_{ab}{}^{cd}\nabla_c(Y_d^e\nabla_e\bar{\Phi}). \quad (3.51)$$

Por último, utilizando las identidades $*Y^{ab}Y_b^c = -\frac{1}{2}g^{ac}\mathfrak{I}m(\Psi_2^{-2/3})$ y $*Y^{ab}\nabla_a Y_b^c = \nabla^c\mathfrak{I}m(\Psi_2^{-2/3})$, el operador de simetría (3.50) para la ecuación de Fackerell-Ipser se reduce a

$$\mathcal{B}_1^0(\Phi) = Y^{ab}\nabla_a(Y_b^c\nabla_c\bar{\Phi}) \equiv \mathcal{Q}(\bar{\Phi}) \quad (3.52)$$

donde \mathcal{Q} es el denominado *operador de Carter* [26], que conmuta con \square y es bien conocido en la literatura.

3.4. Perturbaciones gravitacionales

Los grados de libertad puros (i.e. no asociados a campos de materia) del campo gravitacional son representados por el tensor de Weyl, cuya versión espinorial es el campo de spin 2 Ψ_{ABCD} . Hemos visto que en un espacio Einstein, la identidad de Bianchi es equivalente a $\nabla^{AA'}\Psi_{ABCD} = 0$. Al considerar perturbaciones del espacio-tiempo e imponer las ecuaciones de Einstein, la linealización de la identidad de Bianchi tendrá tres términos, esquemáticamente: $\nabla\dot{\Psi} + \dot{\Gamma}\Psi - h\nabla\Psi = 0$, donde $\dot{\Psi}$, $\dot{\Gamma}$ y h representan, respectivamente, la linealización del espinor de curvatura, de la conexión y de la métrica² (ver [31] y [110, sección 5.7] para expresiones explícitas). Ahora, la libertad de gauge en gravedad linealizada es $h_{ab} \sim h_{ab} + 2\nabla_{(a}\xi_{b)}$ para un campo covectorial arbitrario ξ_a . Como $\dot{\Psi}$ y $\dot{\Gamma}$ no son invariantes de gauge, uno podría pensar en la posibilidad de hallar un gauge tal que $\dot{\Gamma}\Psi - h\nabla\Psi = 0$, de manera que el espinor de curvatura linealizado satisfaga la ecuación más simple $\nabla^{AA'}\dot{\Psi}_{ABCD} = 0$. Como mencionamos, los resultados de [14] implicarían que $\dot{\Psi}_{ABCD}$ es, en general, algebraicamente especial. A continuación veremos que, desafortunadamente, esto en general no es cierto; y luego mostraremos cómo resolver este problema. Más precisamente:

- (i) en la subsección 3.4.1 probamos que el espacio-tiempo perturbado es algebraicamente general en la clasificación de Petrov, lo cual implica que debemos trabajar con la identidad de Bianchi linealizada completa;

²ver subsección 3.4.2 más abajo para el tratamiento de linealizaciones espinoriales.

- (ii) en la subsección 3.4.2 especificamos a qué nos referimos con el espinor de curvatura perturbado, y hallaremos el análogo de los teoremas 3.2.1 y 3.3.1 para spin 2;
- (iii) en la subsección 3.4.3 mostraremos cómo relacionar las perturbaciones del espinor de curvatura con las ecuaciones de Einstein, lo cual nos conducirá a hallar fórmulas de reconstrucción similares a (3.12), (3.31) para la métrica linealizada.

Con respecto a la definición de un “campo libre sin masa de spin 2” que se propaga en un espacio-tiempo curvo de background, ver la discusión en la sección 4.4.1 más adelante (específicamente la ecuación (4.99)).

Los resultados de esta sección son la generalización a espacio-tiempos curvos tipo D de los correspondientes a Minkowski (vistos en la sección 2.5.4).

3.4.1. Tipo de Petrov del espacio-tiempo perturbado

Consideremos una familia monoparamétrica de espacio-tiempos $(\mathcal{M}, g_{ab}(\varepsilon))$, con la correspondiente familia de tetradas nulas $\{\ell^a(\varepsilon), n^a(\varepsilon), m^a(\varepsilon), \bar{m}^a(\varepsilon)\}$, tal que $(\mathcal{M}, g_{ab}(0))$ es tipo Petrov D y $\{\ell^a(0), n^a(0), m^a(0), \bar{m}^a(0)\}$ es la tetrada principal. Como discutimos en la sección 2.2.4, haciendo una rotación nula alrededor de $n^a(\varepsilon)$ las PNDs se encuentran resolviendo (en z) la ecuación $P(z, \varepsilon) = 0$, donde

$$P(z, \varepsilon) = \Psi_0(\varepsilon) + 4\Psi_1(\varepsilon)z + 6\Psi_2(\varepsilon)z^2 + 4\Psi_3(\varepsilon)z^3 + \Psi_4(\varepsilon)z^4. \quad (3.53)$$

Los escalares de Weyl son funciones analíticas de ε , por lo que su linealización está bien definida. $P(z, \varepsilon)$ es también analítico en ε , con lo cual su expansión a orden lineal es

$$P(z, \varepsilon) = 6\Psi_2 z^2 + \varepsilon\dot{\Psi}_0 + \varepsilon[4\dot{\Psi}_1 z + 6\dot{\Psi}_2 z^2 + 4\dot{\Psi}_3 z^3 + \dot{\Psi}_4 z^4] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.54)$$

donde hemos acomodado los términos de manera conveniente para lo que haremos a continuación. Debemos resolver $P(z, \varepsilon) = 0$ a orden lineal en ε , para lo cual notamos que, si resolvemos primero $6\Psi_2 z^2 + \varepsilon\dot{\Psi}_0 = 0$, cuyas soluciones son

$$z_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{\dot{\Psi}_0}{6\Psi_2}} \varepsilon^{1/2}, \quad (3.55)$$

entonces el término entre corchetes en (3.54) es $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$, con lo cual $P(z_{\pm}, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$. De esta manera obtenemos dos de las nuevas PNDs; a orden dominante en ε , las mismas estarán dadas por $\ell_{\pm}^a = \ell^a + z_{\pm}\bar{m}^a + \bar{z}_{\pm}m^a$. Las otras dos soluciones se obtienen haciendo una rotación nula alrededor de $\ell^a(\varepsilon)$, lo que conduce a las dos raíces restantes

$$w_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{\dot{\Psi}_4}{6\Psi_2}} \varepsilon^{1/2}. \quad (3.56)$$

De esta manera obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.4.1 ([7]). *Consideremos una familia monoparamétrica de espacio-tiempos $(\mathcal{M}, g_{ab}(\varepsilon))$, analítica en $\varepsilon = 0$, tal que $g_{ab}(0)$ es de tipo Petrov D, con direcciones principales nulas (dobles) ℓ^a, n^a . Entonces el espacio-tiempo linealmente perturbado es genéricamente tipo I en la clasificación de Petrov, y sus direcciones principales nulas son*

$$\ell_{\pm}^a(\varepsilon) = \ell^a \pm \varepsilon^{1/2} \left[\sqrt{-\frac{\dot{\Psi}_0}{6\Psi_2}} \bar{m}^a + \left(\sqrt{-\frac{\dot{\Psi}_0}{6\Psi_2}} \right) m^a \right], \quad (3.57)$$

$$n_{\pm}^a(\varepsilon) = n^a \pm \varepsilon^{1/2} \left[\left(\sqrt{-\frac{\dot{\Psi}_4}{6\Psi_2}} \right) \bar{m}^a + \sqrt{-\frac{\dot{\Psi}_4}{6\Psi_2}} m^a \right] \quad (3.58)$$

Si $\dot{\Psi}_0 = 0$ ó $\dot{\Psi}_4 = 0$, el espacio perturbado degenera a tipo Petrov II.

Para perturbaciones no-estacionarias del agujero negro de Kerr que sean bien comportadas (i.e. que satisfagan condiciones de borde apropiadas en el horizonte y en el infinito), Wald probó en [133] que $\dot{\Psi}_0$ y $\dot{\Psi}_4$ se determinan unívocamente el uno al otro; en particular $\dot{\Psi}_0 = 0$ si y sólo si $\dot{\Psi}_4 = 0$, lo cual corresponde a una perturbación trivial. Esto quiere decir que, en los casos de interés para perturbaciones de Kerr, tendremos $\dot{\Psi}_0 \neq 0$ y $\dot{\Psi}_4 \neq 0$, con lo cual ambas direcciones nulas se bifurcarán y el espacio-tiempo será algebraicamente general.

3.4.2. Perturbaciones del espinor de curvatura

El tratamiento de linealizaciones espinoriales es muy sutil. No es en principio claro cómo siquiera definir la perturbación de un espinor, ya que el grupo de difeomorfismos no posee una acción natural en espacios espinoriales³. El enfoque en nuestro trabajo consiste en hacer la descomposición espinorial del tensor de curvatura perturbado, utilizando la estructura espinorial del background. (Este es también el enfoque empleado en [31].) Más precisamente, consideremos una familia monoparamétrica de espacio-tiempos $(\mathcal{M}, g_{ab}(\varepsilon))$, analítica en $\varepsilon = 0$, tal que $(\mathcal{M}, g_{ab}(0))$ es el espacio-tiempo de background, que satisface las ecuaciones de Einstein de vacío con constante cosmológica. El requerimiento de analiticidad implica que podemos hacer la expansión del tensor de curvatura $R_{abcd}(\varepsilon) = R_{abcd} + \varepsilon \dot{R}_{abcd} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Ya que la perturbación $\dot{R}_{abcd} \equiv \dot{R}_{ABCD A' B' C' D'}$ posee las mismas simetrías que el tensor de Riemann, admite una descomposición espinorial análoga a (2.34):

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ABCD A' B' C' D'} \equiv & \dot{X}_{ABCD} \bar{\epsilon}_{A' B'} \bar{\epsilon}_{C' D'} + \dot{\Phi}_{ABC'D'} \bar{\epsilon}_{A' B'} \epsilon_{CD} \\ & + \dot{\tilde{X}}_{A' B' C' D'} \epsilon_{AB} \epsilon_{CD} + \dot{\tilde{\Phi}}_{A' B' C D} \epsilon_{AB} \bar{\epsilon}_{C' D'}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Es importante notar que, ya que más adelante consideraremos perturbaciones métricas *complejas*, hemos hecho la distinción

$$\dot{\tilde{X}}_{A' B' C' D'} \neq \overline{(\dot{X}_{ABCD})}, \quad \dot{\tilde{\Phi}}_{A' B' C D} \neq \overline{(\dot{\Phi}_{ABC'D'})}. \quad (3.60)$$

³Una posible solución a este problema (asumiendo que existe una estructura espinorial para todo ε) es utilizar el formalismo recientemente desarrollado en [15] de cálculo variacional para espinores.

Las partes totalmente simétricas de \dot{X}_{ABCD} y $\tilde{\dot{X}}_{A'B'C'D'}$ representan, respectivamente, los espinores de curvatura conforme de helicidad izquierda (o *anti-auto-dual*) y derecha (o *auto-dual*). Explícitamente:

$$\dot{\Psi}_{ABCD} := \dot{X}_{(ABCD)} = \frac{1}{4}\bar{\epsilon}^{A'B'}\bar{\epsilon}^{C'D'}\dot{R}_{(ABCD)A'B'C'D'}, \quad (3.61)$$

$$\tilde{\dot{\Psi}}_{A'B'C'D'} := \tilde{\dot{X}}_{(A'B'C'D')} = \frac{1}{4}\epsilon^{AB}\epsilon^{CD}\dot{R}_{ABCD(A'B'C'D')}. \quad (3.62)$$

El tensor de curvatura perturbado \dot{R}_{abcd} puede calcularse⁴ en términos de la métrica linealizada $h_{ab} := \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}[g_{ab}(\varepsilon)]$ como:

$$\dot{R}_{abcd} = \nabla_{[a}\nabla_{|c}h_{d|b]} + R_{ab[c}{}^e h_{d]e}. \quad (3.63)$$

De esta fórmula deducimos fácilmente expresiones para $\dot{\Psi}_{ABCD}$ y $\tilde{\dot{\Psi}}_{A'B'C'D'}$:

$$\dot{\Psi}_{ABCD} = \frac{1}{2}\nabla_{(A}^A\nabla_{B}^B h_{CD)A'B'} + \frac{h}{4}\Psi_{ABCD}, \quad (3.64)$$

$$\tilde{\dot{\Psi}}_{A'B'C'D'} = \frac{1}{2}\nabla_{(A'}^A\nabla_{B'}^B h_{C'D')AB} + \frac{h}{4}\bar{\Psi}_{A'B'C'D'}. \quad (3.65)$$

Si h_{ab} es un tensor real, entonces (3.64) y (3.65) se relacionan por conjugación compleja, pero esto ya no es cierto si h_{ab} es un tensor complejo.

Notemos que la descripción actual de los campos perturbativos en términos de espinores, sólo necesita de la estructura espinorial del background; en particular, no nos hizo falta definir la linealización de un espinor. En lo que sigue, por otra parte, es conveniente pensar en una familia monoparamétrica $(\mathcal{M}, g_{ab}(\varepsilon))$ que admite una estructura espinorial para todo ε ; sin embargo, siempre que ocurra una linealización de una expresión espinorial debe entenderse que se tradujo primero a su forma tensorial y luego se linealizó. Este es un proceso bien definido; enseguida veremos un ejemplo.

Consideremos una familia monoparamétrica de espacio-tiempos $(\mathcal{M}, g_{ab}(\varepsilon))$ que admiten una estructura espinorial para todo ε , y sea $\{o^A(\varepsilon), \iota^A(\varepsilon)\}$ una diada de spin y $\Psi_2(\varepsilon)$ el escalar de Weyl de tipo $\{0, 0\}$ asociado. En lo que sigue frecuentemente omitiremos la dependencia en ε . Definimos los espinores

$$P_{+2}^{ABCD} := o^A o^B o^C o^D, \quad (3.66)$$

$$P_0^{ABCD} := 6\Psi_2^{-2/3} o^{(A} o^B \iota^C \iota^{D)}, \quad (3.67)$$

$$P_{-2}^{ABCD} := \Psi_2^{-4/3} \iota^A \iota^B \iota^C \iota^D. \quad (3.68)$$

En el capítulo 4 veremos una interpretación de estos campos. El análogo de los teoremas 3.2.1 y 3.3.1 es el siguiente resultado⁵:

Teorema 3.4.2 (spin $\mathfrak{s} = 2$). *Sea $(\mathcal{M}, g_{ab}(\varepsilon))$ una familia monoparamétrica de espacio-tiempos, analítica en $\varepsilon = 0$, tal que $(\mathcal{M}, g_{ab}(0))$ es Einstein y de*

⁴para probar esto, usar que $\dot{R}_{abcd} = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}(R_{ab[c}{}^e g_{d]e})$ y que $\dot{R}_{abc}{}^e = 2\nabla_{[a}\dot{\Gamma}_{b]}{}^e{}_c$, donde $\dot{\Gamma}_{b}{}^e{}_c = \frac{1}{2}g^{ef}(\nabla_b h_{fc} + \nabla_c h_{fb} - \nabla_f h_{bc})$ es la conexión linealizada.

⁵no consideramos los casos de peso de spin $s = \pm 1$ ya que, como fue probado en [1], las ecuaciones que satisfacen los escalares $\dot{\Psi}_1$ y $\dot{\Psi}_3$ no se desacoplan y resultan poco interesantes.

tipo Petrov D. Sea Ψ_{ABCD} el espinor de curvatura de Weyl de la métrica $g_{ab}(\varepsilon)$, y sea $s = 0, \pm 2$. Entonces vale la siguiente igualdad off shell:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}[\mathcal{S}_s^w \mathcal{E}^w(\Psi_{ABCD})] = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}[\mathcal{O}_s^w \mathcal{T}_s^w(\Psi_{ABCD})], \quad (3.69)$$

donde los operadores diferenciales lineales son

$$\mathcal{S}_s^w(J_{B'BCD}) := \Psi_2^{4/3} P_s^{ABCD} \nabla_A^{B'} [\Psi_2^{-4/3} J_{B'BCD}], \quad (3.70)$$

$$\mathcal{E}^w(\Psi_{ABCD}) := \nabla_{B'}^A \Psi_{ABCD}, \quad (3.71)$$

$$\mathcal{O}_s^w(\Phi) := [\square_{2s} + 2(1 - \frac{9}{4}s^2)\Psi_2 + \frac{R}{6}] \Phi, \quad (3.72)$$

$$\mathcal{T}_s^w(\Psi_{ABCD}) := -\frac{(3-|s|)}{2} P_s^{ABCD} \Psi_{ABCD}. \quad (3.73)$$

Demostración. Ver [8, sección 5.2]. \square

Aquí podemos apreciar un ejemplo de cómo trataremos la linealización de expresiones espinoriales. El lado izquierdo de (3.69) (antes de linealizar) puede expresarse tensorialmente, en términos del tensor $P_s^{abcd} = P_s^{ABCD} \bar{\epsilon}^{A'B'} \bar{\epsilon}^{C'D'}$, como

$$\Psi_2^{4/3} P_s^{ABCD} \nabla_D^{B'} [\Psi_2^{-4/3} \nabla_{B'}^A \Psi_{ABCD}] = -\frac{1}{2} \Psi_2^{4/3} P_s^{abcd} \nabla_d (\Psi_2^{-4/3} \nabla^e C_{abce}), \quad (3.74)$$

y la linealización del lado derecho de esta última ecuación es algo bien definido en el tratamiento perturbativo estándar. Notemos que, ya que asumimos que el espacio de background es Einstein, se tiene $(\nabla^e C_{abce})|_{\varepsilon=0} = 0$, con lo cual el operador $-\frac{1}{2} \Psi_2^{4/3} P_s^{abcd} \nabla_d (\Psi_2^{-4/3} \cdot)$ resulta evaluado en el background en el proceso de linealización de (3.74).

Imponiendo las ecuaciones linealizadas de Einstein, el lado izquierdo de (3.69) es cero, y obtenemos las siguientes ecuaciones escalares:

$$s = +2 : \quad (\square_{+4} - 16\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda) \dot{\Psi}_0 = 0, \quad (3.75)$$

$$s = 0 : \quad (\square + 8\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda) [\Psi_2^{-2/3} \dot{\Psi}_2] + 3(\dot{\square}_h + \frac{R_h}{6}) \Psi_2^{1/3} = 0, \quad (3.76)$$

$$s = -2 : \quad (\square_{-4} - 16\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda) [\Psi_2^{-4/3} \dot{\Psi}_4] = 0. \quad (3.77)$$

Las ecuaciones (3.75) y (3.77) son las ecuaciones de Teukolsky de tipo $(2, \pm 2)$ con constante cosmológica. La ecuación (3.76) es una linealización de la ecuación de Fackerell-Ipser (2.90) con constante cosmológica (aplicada a $\Psi_2^{1/3}$), que fue hallada, para $\lambda = 0$, por Andersson *et al* en [1]. El segundo término en (3.76) es la linealización del operador de onda conforme aplicado al campo de background $\Psi_2^{1/3}$; esto implica que esta ecuación no es realmente “desacoplada” en el sentido de que aparecen otras cantidades perturbativas además de $\dot{\Psi}_2$.

3.4.3. Perturbaciones de las ecuaciones de Einstein

La linealización en (3.69) implica que no podemos tomar la ecuación adjunta como hicimos en los casos de spin 1/2 y 1, e incluso aunque pudiésemos

no sería claro cómo reconstruir una solución de la identidad de Bianchi linealizada. Por otro lado, las ecuaciones de campo que nos interesan no son las identidades de Bianchi sino las ecuaciones linealizadas de Einstein. En lo que sigue mostraremos un modo sencillo de relacionar la identidad (3.69) con el tensor de Einstein linealizado. Haremos esto sin asumir que vale ninguna ecuación de campo (aparte de las ecuaciones de Einstein en el espacio de background), con lo cual obtendremos una identidad de operadores actuando en tensores simétricos de dos índices.

Lema 3.4.1. *Consideremos una familia monoparamétrica de espacio-tiempos $(\mathcal{M}, g_{ab}(\varepsilon))$, analítica en $\varepsilon = 0$, tal que $(\mathcal{M}, g_{ab}(0))$ es Einstein: $(G_{ab} + \lambda g_{ab})|_{\varepsilon=0} = 0$. Sea O^{abc} un operador diferencial lineal, covariante, tal que $O^{abc} = O^{[ab]c}$ y $g_{ac}O^{abc} = 0$. Entonces tenemos la identidad*

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} [O^{abc}\nabla^d C_{abcd}] = -O^{abc}\nabla_a \left[\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} (G_{bc} + \lambda g_{bc})\right]. \quad (3.78)$$

Demostración. Ver [8, sección 5.1]. \square

El resultado de esta proposición es extremadamente útil en nuestro contexto, y veremos también una variación del mismo en el capítulo 6 (ver sección 6.3.3). La demostración se basa simplemente en la identidad de Bianchi genérica $\nabla_{[e}R_{ab]cd} = 0$, que es una identidad geométrica y por lo tanto no depende de ninguna ecuación de campo. El operador O^{abc} actuando en un tensor H_{abc} es en nuestro caso $O^{abc}H_{abc} = \Psi_2^{4/3}P_s^{abcd}\nabla_d(\Psi_2^{-4/3}H_{abc})$.

Recordar que definimos los tensores asociados a (3.66), (3.67) y (3.68) como $P_{abcd}^s := P_{ABCD}^s\bar{\epsilon}_{A'B'}\bar{\epsilon}_{C'D'}$. Explícitamente, tenemos

$$P_{abcd}^{+2} := P_{ab}^{+1}P_{cd}^{+1}, \quad (3.79)$$

$$P_{abcd}^0 := P_{ab}^{+1}P_{cd}^{-1} + P_{ab}^{-1}P_{cd}^{+1} + P_{ab}^0P_{cd}^0, \quad (3.80)$$

$$P_{abcd}^{-2} := P_{ab}^{-1}P_{cd}^{-1}. \quad (3.81)$$

donde las 2-formas P_{ab}^s fueron definidas en (3.40), (3.41) y (3.42). Estos tensores son anti-auto duales y poseen las simetrías del tensor de Weyl. Recordemos también la expresión del tensor de Einstein linealizado en términos de la perturbación métrica,

$$\dot{G}_{ab}[h] = -\frac{1}{2}\square h_{ab} - \frac{1}{2}\nabla_a\nabla_b h + \nabla^c\nabla_{(a}h_{b)c} - \frac{1}{2}g_{ab}(\nabla^c\nabla^d h_{cd} - \square h), \quad (3.82)$$

donde $h = g^{cd}h_{cd}$. La combinación del teorema 3.4.2 con el resultado del lema 3.4.1 conduce entonces al siguiente resultado:

Teorema 3.4.3. *Sea $(\mathcal{M}, g_{ab}(\varepsilon))$ una familia monoparamétrica de espacio-tiempos, analítica en $\varepsilon = 0$, tal que $(\mathcal{M}, g_{ab}(0))$ es Einstein y de tipo Petrov D. Sea $s = 0, \pm 2$. Entonces vale la siguiente igualdad:*

$$\mathcal{S}_s\mathcal{E}(h_{ab}) = \mathcal{O}_s\mathcal{T}_s(h_{ab}) + \mathcal{J}_s, \quad (3.83)$$

donde los operadores diferenciales lineales son

$$\mathcal{S}_s(T_{ab}) := \Psi_2^{4/3} P_s^{abcd} \nabla_d [\Psi_2^{-4/3} \nabla_c T_{ab}], \quad (3.84)$$

$$\mathcal{E}(h_{ab}) := \dot{G}_{ab}[h] + \lambda h_{ab}, \quad (3.85)$$

$$\mathcal{O}_s(\Phi) := (\mathbb{E}_{2s} + V_{2,s})\Phi, \quad (3.86)$$

$$\mathcal{T}_s(h_{ab}) := \Psi_2^{-(2-s)/3} \dot{\Psi}_{2-s}[h], \quad (3.87)$$

con el potencial dado por

$$V_{2,s} := (8 - 6s^2)\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda, \quad (3.88)$$

y el término inhomogéneo es

$$\mathcal{J}_s := 3\delta_{s,0}(\dot{\square}_h + \frac{\dot{R}_h}{6})\Psi_2^{1/3}. \quad (3.89)$$

La igualdad de operadores (3.83) es la identidad que necesitamos para reconstruir perturbaciones métricas, análogamente a como hicimos en los casos de Dirac y Maxwell. Una diferencia importante con respecto a dichos casos, es la aparición del término inhomogéneo en (3.83) para peso de spin cero. Este término arruina de hecho la transposición de operadores para $s = 0$. Veamos entonces por separado los casos de peso de spin cero y extremo.

Peso de spin extremo

Para $s = \pm 2$, el término inhomogéneo (3.89) es cero, con lo cual tenemos la identidad $\mathcal{S}_{\pm 2}\mathcal{E}(h_{ab}) = \mathcal{O}_{\pm 2}\mathcal{T}_{\pm 2}(h_{ab})$. Utilizando que el operador de Einstein es autoadjunto con respecto al producto interno (2.97), deducimos inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 3.4.4. *Consideremos un espacio-tiempo Einstein de tipo Petrov D, y sea $s = \pm 2$. Sea $\Phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}})$ una solución de la ecuación de Teukolsky de tipo $(2, \pm 2)$: $(\mathbb{E}_{2s} + V_{2,s})\Phi = 0$. Entonces el campo tensorial*

$$h_{ab}^s(\Phi) = 2\nabla^c [\Psi_2^{-4/3} \nabla^d (\Psi_2^{4/3} P_{c(ab)d}^{-s} \Phi)] \quad (3.90)$$

es una solución compleja de las ecuaciones linealizadas de Einstein con constante cosmológica,

$$\dot{G}_{ab}[h^s(\Phi)] + \lambda h_{ab}^s(\Phi) = 0. \quad (3.91)$$

Es posible demostrar que (3.90) para $s = -2$ coincide con el Ansatz de Cohen y Kegeles dado en [102, ec. (5.4)] (en ese trabajo h_{ab} es dada en forma espinorial y en términos de un espinor de Hertz y un espinor de gauge). Los cálculos en dicho trabajo son extremadamente laboriosos, mientras que en nuestro trabajo actual el resultado 3.4.4 es una consecuencia inmediata de nuestro formalismo general, y es también un caso particular del patrón general de reconstrucción de los campos que hemos desarrollado. Es importante notar, no obstante, que nuestro formalismo general está fuertemente basado en el

trabajo original de Wald [134], quien fue el primero en advertir esta clase de mecanismos en los resultados de Cohen y Kegeles.

Enfatizamos que (3.90) es una métrica *compleja*, con lo cual los espinores de curvatura de helicidad izquierda y derecha son *independientes*, y no se relacionan por conjugación compleja. Teniendo en cuenta que, en vista de las simetrías de P_{abcd}^s , la métrica (3.90) es libre de traza, utilizando (3.64) y (3.65) tenemos explícitamente:

$$\dot{\Psi}_{ABCD}[h^s] = \nabla_{(A}^{A'} \nabla_{B}^{B'} \nabla_{|C}^E \nabla_{D)}^{F} [\Psi_2^{-4/3} \nabla_{B'}^F (\Psi_2^{4/3} P_{CD)EF}^{-s} \Phi)], \quad (3.92)$$

$$\check{\Psi}_{A'B'C'D'}[h^s] = \nabla_{(A'}^A \nabla_{B'}^B \nabla_{C'}^C \nabla_{D')}^D [\Psi_2^{-4/3} \nabla_{D'}^D (\Psi_2^{4/3} P_{ABCD}^{-s} \Phi)]. \quad (3.93)$$

Es posible probar que $\dot{\Psi}_{ABCD}^s[h]$ resulta ser algebraicamente especial, ya que se cumple

$$\dot{\Psi}_{ABCD}[h^{-2}] o^B o^C o^D = 0, \quad (3.94)$$

$$\dot{\Psi}_{ABCD}[h^{+2}] \iota^B \iota^C \iota^D = 0, \quad (3.95)$$

lo cual implica que $\dot{\Psi}_{ABCD}[h^s]$ es de tipo Petrov II. Por lo tanto, el campo de mayor interés es en realidad el de helicidad derecha $\check{\Psi}_{A'B'C'D'}[h^s]$. Como hemos hecho en los casos de spin 1/2 y 1, para trabajar con un campo de helicidad izquierda simplemente tomamos la métrica compleja conjugada a (3.90):

$$\bar{h}_{ab}^s(\bar{\Phi}) = 2 \nabla^c [\bar{\Psi}_2^{-4/3} \nabla^d (\bar{\Psi}_2^{4/3} \bar{P}_{c(ab)d}^{-s} \bar{\Phi})], \quad (3.96)$$

la cual es solución de las ecuaciones de Einstein siempre que $\bar{\Phi}$ satisfaga ahora la ecuación *conjugada* de Teukolsky, $(\bar{\square}_{2s} + \bar{V}_{2,s})\bar{\Phi} = 0$. Notemos que, definiendo $\mathcal{X} := \bar{\Psi}_2^{-1/3}$, la fórmula (3.96) coincide formalmente con la reconstrucción de la métrica (2.131) en Minkowski. El espinor de curvatura anti-auto-dual de (3.96) es

$$\dot{\Psi}_{ABCD}[\bar{h}^s] = \nabla_{(A}^{A'} \nabla_{B}^{B'} \nabla_{C}^{C'} \nabla_{D)}^{D'} [\mathcal{X}^4 \nabla_{D'}^{D'} (\mathcal{X}^{-4} \bar{P}_{A'B'C'D'}^{-s} \bar{\Phi})]. \quad (3.97)$$

Nuevamente, observemos que esta expresión es formalmente idéntica a la del campo libre sin masa de spin 2 en \mathbb{M} dado por (2.120). El procedimiento para construir ambos campos es, sin embargo, distinto: en \mathbb{M} hallamos directamente una solución de $\partial^{AA'} \varphi_{ABCD} = 0$ partiendo de una solución de la ecuación de onda, mientras que (3.97) proviene de resolver primero las ecuaciones de Einstein (a través de soluciones de la ecuación de Teukolsky).

Veamos ahora la construcción de operadores de simetría para las ecuaciones de Einstein y Teukolsky. Definimos los siguientes espacios de soluciones:

$$\mathbb{G} := \{h \in \Gamma(\mathcal{M}, (T^* \mathcal{M})_{\mathbb{C}}^{\odot 2}) \mid \dot{G}_{ab}[h] + \lambda h_{ab} = 0\}, \quad (3.98)$$

$$\mathbb{W}_2^s := \{\Phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}}) \mid (\square_{2s} + V_{2,s})\Phi = 0, \quad s = \pm 2\}. \quad (3.99)$$

El diagrama de mapas entre estos espacios es el siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger \circ \mathcal{T}_s & & & \\
& & & \curvearrowright & & & \\
\cdots & \longrightarrow & \mathbb{G} & \xrightarrow{\mathcal{T}_s} & \mathbb{W}_2^s & \xrightarrow{\bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger} & \mathbb{G} & \xrightarrow{\mathcal{T}} & \mathbb{W}_2^s & \longrightarrow & \cdots \\
& & & & & & \curvearrowleft & & & & \\
& & & & & & \mathcal{T}_s \circ \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger & & & &
\end{array}$$

Del diagrama deducimos entonces:

Lema 3.4.2. *Sea $s = \pm 2$. Consideremos los mapas*

$$\mathcal{A}_2^s := \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger \circ \mathcal{T}_s : \Gamma(\mathcal{M}, (T^*\mathcal{M})_{\mathbb{C}}^{\odot 2}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, (T^*\mathcal{M})_{\mathbb{C}}^{\odot 2}), \quad (3.100)$$

$$\mathcal{B}_2^s := \mathcal{T}_s \circ \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger : \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}}). \quad (3.101)$$

(i) \mathcal{A}_2^s es operador de simetría para las ecuaciones linealizadas de Einstein:
 $\mathcal{A}_2^s : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$.

(ii) \mathcal{B}_2^s es operador de simetría para las ecuaciones de Teukolsky de tipo
 $(2, \pm 2)$: $\mathcal{B}_2^s : \mathbb{W}_2^s \rightarrow \mathbb{W}_2^s$.

Es importante notar que la composición de los mapas $\bar{\mathcal{S}}_s^\dagger$ y \mathcal{T}_s en los operadores anteriores ocurre para peso de spin *opuesto*. Por un lado, la identidad (3.83) y su adjunta implican que la composición $\bar{\mathcal{S}}_s^\dagger \circ \mathcal{T}_s$ no es solución de las ecuaciones de Einstein. Por el otro lado, la composición inversa $\mathcal{T}_s \circ \bar{\mathcal{S}}_s^\dagger$ resulta ser idénticamente cero, lo cual está relacionado al hecho de que (3.92) es algebraicamente especial. Veamos esto con un ejemplo. Sea Φ una solución de la ecuación de Teukolsky de tipo $(2, 2)$: $(\square_{+4} + V_{2,2})\Phi = 0$. Por el corolario 3.4.4 sabemos que $h_{ab}^{+2}(\Phi) = [\bar{\mathcal{S}}_{-2}^\dagger(\Phi)]_{ab}$ es una solución de las ecuaciones linealizadas de Einstein. El espinor de curvatura anti-auto-dual de esta métrica es (3.92) con $s = 2$, el cual, en vista de (3.95), satisface $\iota^A \iota^B \iota^C \iota^D \Psi_{ABCD}[h^{+2}] = 0$, por lo tanto $\mathcal{T}_{-2}[h^{+2}] \equiv 0$. Más en general, $\mathcal{T}_s \circ \bar{\mathcal{S}}_s^\dagger \equiv 0$; en otras palabras, en lugar del diagrama de mapas anterior, tenemos:

Lema 3.4.3. *Para $s = \pm 2$, la secuencia*

$$0 \longrightarrow \mathbb{W}_2^{-s} \xrightarrow{\bar{\mathcal{S}}_s^\dagger} \mathbb{G} \xrightarrow{\mathcal{T}_s} \mathbb{W}_2^s \longrightarrow 0$$

es un complejo diferencial⁶.

⁶recordar que un *complejo diferencial* es una secuencia de mapas entre espacios vectoriales $\cdots \rightarrow A_1 \xrightarrow{a_1} A_2 \xrightarrow{a_2} A_3 \rightarrow \cdots$ tales que la composición de mapas sucesivos es cero: $a_i \circ a_{i+1} = 0$.

Peso de spin cero

Veamos ahora el caso $s = 0$ de la identidad (3.83), en el cual tenemos, en el lado derecho, el término inhomogéneo (3.89), $3(\dot{\square}_h + \frac{\dot{R}_h}{6})\Psi_2^{1/3}$. Este término estropea la formulación de una igualdad de operadores como en el caso anterior y, por lo tanto, no es posible extraer fórmulas de reconstrucción de la métrica. No hemos encontrado un modo de deshacernos de (3.89) en un espacio-tiempo arbitrario. El modo más sencillo de lograr que este término desaparezca es considerar la subclase de espacio-tiempos tipo D en los que Ψ_2 es un campo real, ya que en tal caso, tomando la parte imaginaria en (3.83) obtenemos la identidad

$$\Psi_2^{4/3}\mathfrak{Im}(P_0^{abcd})\nabla_d[\Psi_2^{-4/3}\nabla_c(\dot{G}_{ab}[h] + \lambda h_{ab})] = (\square + V_{2,0})[\Psi_2^{-2/3}\mathfrak{Im}(\dot{\Psi}_2[h])]. \quad (3.102)$$

Aún así, tomando la parte real en (3.83) tenemos todavía el término problemático (3.89). En nuestro trabajo, el caso más relevante en el que Ψ_2 es real es la solución de Schwarzschild-(A)dS, en la cual $\mathfrak{Im}\dot{\Psi}_2$ representa el sector *impar* de perturbaciones gravitacionales, y $\mathfrak{Re}\dot{\Psi}_2$ representa el sector *par*. En la sección 3.5 trataremos este caso. Por lo pronto, nos limitamos a un análisis de las aplicaciones de la identidad (3.102).

Observación 3.4.1. *Para Ψ_2 real, la ecuación $(\square + V_{2,0})\Phi = 0$ será denominada ecuación de Regge-Wheeler, ya que en el caso particular de la solución de Schwarzschild-(A)dS, $(\square + V_{2,0})\Phi = 0$ es una forma 4-dimensional, con constante cosmológica, de dicha ecuación (dada en (2.91) para el caso de $\lambda = 0$). Notemos, no obstante, que en el caso actual esta ecuación es más general.*

La ecuación adjunta a (3.102) conduce al siguiente resultado:

Corolario 3.4.5. *Consideremos un espacio-tiempo Einstein de tipo Petrov D tal que Ψ_2 es real. Sea $\Phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{0,0\}})$ una solución de la ecuación $(\square + V_{2,0})\Phi = 0$. Entonces el campo tensorial*

$$h_{ab}^0(\Phi) = 2\nabla^c[\Psi_2^{-4/3}\nabla^d(\Psi_2^{4/3}\mathfrak{Im}(P_{c(ab)d}^0)\Phi)] \quad (3.103)$$

es una solución de las ecuaciones linealizadas de Einstein con constante cosmológica,

$$\dot{G}_{ab}[h(\Phi)] + \lambda h_{ab}(\Phi) = 0. \quad (3.104)$$

Definiendo $\mathcal{X} := \Psi_2^{-1/3}$ (que es un campo real), la forma espinorial de (3.103) es

$$\begin{aligned} h_{AA'BB'}^0(\Phi) &= 2i\nabla_{(A'}^C[\mathcal{X}^4\nabla_{B')}^D(\mathcal{X}^{-4}P_{ABCD}^0\Phi)] \\ &\quad - 2i\nabla_{(A}^{C'}[\mathcal{X}^4\nabla_{B)}^{D'}(\mathcal{X}^{-4}\bar{P}_{A'B'C'D'}^0\Phi)], \end{aligned} \quad (3.105)$$

y el espinor de curvatura anti-auto-dual es

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_{ABCD}[h^0] &= i\nabla_{(A}^{A'}\nabla_{B}^{B'}\nabla_{(A'}^E[\mathcal{X}^4\nabla_{B')}^F(\mathcal{X}^{-4}P_{CD)EF}^0\Phi)] \\ &\quad - i\nabla_{(A}^{A'}\nabla_{B}^{B'}\nabla_{C}^{C'}[\mathcal{X}^4\nabla_{D)}^{D'}(\mathcal{X}^{-4}\bar{P}_{A'B'C'D'}^0\Phi)]. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Notemos que podemos tomar la solución Φ como real, con lo cual (3.103) es una métrica real y tenemos $\tilde{\Psi}_{A'B'C'D'}[h^0] = \overline{(\dot{\Psi}_{ABCD}[h^0])}$.

Veamos ahora los operadores de simetría. Los espacios \mathbb{G} y \mathbb{W}_2^s ($s = \pm 2$) de, respectivamente, soluciones de las ecuaciones linealizadas de Einstein y de las ecuaciones de Teukolsky, fueron definidos en (3.98) y (3.99). El otro espacio relevante en el caso actual es

$$\mathbb{W}_2^0 := \{\Phi \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{0,0\}}) \mid (\square + V_{2,0})\Phi = 0\}. \quad (3.107)$$

Tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \mathcal{S}_0^\dagger \circ \mathcal{T}_0 & & & & & \\ & & & \curvearrowright & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & \mathbb{G} & \xrightarrow{\mathcal{T}_0} & \mathbb{W}_2^0 & \xrightarrow{\mathcal{S}_0^\dagger} & \mathbb{G} & \xrightarrow{\mathcal{T}_0} & \mathbb{W}_2^0 & \longrightarrow & \dots \\ & & & & & \curvearrowleft & & & & & \\ & & & & & \mathcal{T}_0 \circ \mathcal{S}_0^\dagger & & & & & \end{array}$$

Como hicimos en el caso de Maxwell, podemos ahora también construir mapas entre \mathbb{W}_2^0 y \mathbb{W}_2^s para $s = \pm 2$. Lo ilustramos con el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{W}_2^0 & \xrightarrow{\mathcal{S}_0^\dagger} & \mathbb{G} & \xrightarrow{\mathcal{T}_0} & \mathbb{W}_2^0 \\ & & \downarrow \mathcal{T}_s & & \uparrow \mathcal{T}_0 \\ & & \mathbb{W}_2^s & \xrightarrow{\bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger} & \mathbb{G} \end{array}$$

Estos diagramas nos conducen al siguiente resultado:

Lema 3.4.4. *Sea $s = \pm 2$, y suponer que Ψ_2 es un campo real. Consideremos los mapas*

$$\mathcal{A}_2^0 := \mathcal{S}_0^\dagger \circ \mathcal{T}_0 : \Gamma(\mathcal{M}, (T^*\mathcal{M})^{\odot 2}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, (T^*\mathcal{M})^{\odot 2}), \quad (3.108)$$

$$\mathcal{B}_2^0 := \mathcal{T}_0 \circ \mathcal{S}_0^\dagger : \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{0,0\}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{0,0\}}), \quad (3.109)$$

$$\mathcal{W}_2^s := \mathcal{T}_s \circ \mathcal{S}_0^\dagger : \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{0,0\}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}}), \quad (3.110)$$

$$\mathcal{W}_2^0 := \mathcal{T}_0 \circ \bar{\mathcal{S}}_{-s}^\dagger : \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{2s,0\}}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \mathbb{E}_{\{0,0\}}). \quad (3.111)$$

- (i) \mathcal{A}_2^0 es operador de simetría para las ecuaciones linealizadas de Einstein: $\mathcal{A}_2^0 : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$.
- (ii) \mathcal{B}_2^0 es operador de simetría para la ecuación de Regge-Wheeler: $\mathcal{B}_2^0 : \mathbb{W}_2^0 \rightarrow \mathbb{W}_2^0$.
- (iii) \mathcal{W}_2^s mapea soluciones de Regge-Wheeler en soluciones de Teukolsky de tipo $(2, \pm 2)$: $\mathcal{W}_2^s : \mathbb{W}_2^0 \rightarrow \mathbb{W}_2^s$.
- (iv) \mathcal{W}_2^0 mapea soluciones de Teukolsky de tipo $(2, \pm 2)$ en soluciones de Regge-Wheeler: $\mathcal{W}_2^0 : \mathbb{W}_2^s \rightarrow \mathbb{W}_2^0$.

3.5. Espacio-tiempos esféricamente simétricos

Como ejemplo de aplicación de los resultados de las secciones anteriores, estudiemos el caso de la solución de Schwarzschild-(A)dS; veremos que los resultados a los que hicimos referencia en la introducción (i.e. las fórmulas (3), (4) y (6)) se deducen como un caso particular de la estructura general que hemos desarrollado en este capítulo.

El tratamiento estándar de perturbaciones de Schwarzschild-(A)dS hace uso de una ‘descomposición 2+2’ asociada a la estructura tipo *warped product* del espacio-tiempo. Un espacio se dice *warped product* si la variedad tiene la estructura local $\tilde{\mathcal{M}} \times_{r,2} \mathcal{K}$, donde $\tilde{\mathcal{M}}$ es una variedad Lorentziana (usualmente denominada *orbit space*) con métrica $\tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{b}}$ y coordenadas $x^{\tilde{a}}$, \mathcal{K} es una variedad Riemanniana completa con métrica $\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}$ y coordenadas $y^{\mathbb{A}}$, y la métrica del espacio-tiempo es de la forma

$$g_{ab}(z)dz^a dz^b = \tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{b}}(x)dx^{\tilde{a}}dx^{\tilde{b}} + r^2(x)\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}(y)dy^{\mathbb{A}}dy^{\mathbb{B}}. \quad (3.112)$$

En el caso de Schwarzschild-(A)dS, se tiene $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}} \times_{r,2} S^2$, donde el espacio orbital es $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\text{SO}(3)$ y la variedad \mathcal{K} es la 2-esfera unitaria, $\mathcal{K} = S^2$. Usaremos índices $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \dots$ para cantidades en $\tilde{\mathcal{M}}$, e índices $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \dots$ para cantidades en S^2 . La métrica, derivada covariante y forma de volumen de $\tilde{\mathcal{M}}$ son respectivamente $\tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{b}}$, $\tilde{\nabla}_{\tilde{a}}$ y $\tilde{\varepsilon}_{\tilde{a}\tilde{b}}$; mientras que las de S^2 son $\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}$, $\bar{\nabla}_{\mathbb{A}}$ y $\bar{\varepsilon}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}$. Los operadores de onda en $\tilde{\mathcal{M}}$ y S^2 son entonces $\tilde{\Delta} := \tilde{g}^{\tilde{a}\tilde{b}}\tilde{\nabla}_{\tilde{a}}\tilde{\nabla}_{\tilde{b}}$ y $\bar{\Delta} := \bar{g}^{\mathbb{A}\mathbb{B}}\bar{\nabla}_{\mathbb{A}}\bar{\nabla}_{\mathbb{B}}$, respectivamente. La relación entre los símbolos de Christoffel de la 4-métrica g_{ab} y los de las 2-métricas $\tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{b}}$ y $\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}$ es

$$\Gamma^{\tilde{d}}_{\tilde{a}\tilde{b}} = \tilde{\Gamma}^{\tilde{d}}_{\tilde{a}\tilde{b}}, \quad \Gamma^{\tilde{d}}_{\tilde{a}\mathbb{B}} = 0, \quad \Gamma^{\tilde{d}}_{\mathbb{A}\mathbb{B}} = -rr^{\tilde{d}}\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}, \quad (3.113)$$

$$\Gamma^{\mathbb{C}}_{\tilde{a}\tilde{b}} = 0, \quad \Gamma^{\mathbb{C}}_{\tilde{a}\mathbb{B}} = \frac{r_{,\tilde{a}}}{r}\delta_{\mathbb{B}}^{\mathbb{C}}, \quad \Gamma^{\mathbb{C}}_{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \bar{\Gamma}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}. \quad (3.114)$$

Con nuestras convenciones de signatura, la métrica de Schwarzschild-(A)dS (3.112) en coordenadas $\{t, r, \theta, \varphi\}$ tiene la forma (1.8), con $f(r)$ dada por (1.9). El tensor de Ricci de (1.8) es solución de las ecuaciones de Einstein de vacío con constante cosmológica,

$$R_{ab} - \lambda g_{ab} = 0. \quad (3.115)$$

En términos de la tetrad nula dada por

$$l^a = \frac{1}{\sqrt{2f}}(\partial_t^a - f\partial_r^a), \quad n^a = \frac{1}{\sqrt{2f}}(\partial_t^a + f\partial_r^a), \quad m^a = \frac{1}{r\sqrt{2}}(\partial_\theta^a - \frac{i}{\sin\theta}\partial_\varphi^a), \quad (3.116)$$

el único escalar de Weyl no-trivial es $\Psi_2 = -M/r^3$, lo cual implica que el espacio-tiempo es tipo Petrov D.

Consideraremos que la constante k en la definición del espinor de Killing (2.67) es real, y por conveniencia definimos $b := -kM^{-1/3}$. El tensor de Killing-Yano y su dual son entonces

$$Y_{ab}dz^a \wedge dz^b \equiv br^3\bar{\varepsilon}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}dy^{\mathbb{A}} \wedge dy^{\mathbb{B}}, \quad (3.117)$$

$$*Y_{ab}dz^a \wedge dz^b \equiv br\tilde{\varepsilon}_{\tilde{a}\tilde{b}}dx^{\tilde{a}} \wedge dx^{\tilde{b}}, \quad (3.118)$$

donde en coordenadas de Schwarzschild, $\bar{\varepsilon} = \sin\theta d\theta \wedge d\varphi$ y $\tilde{\varepsilon} = dt \wedge dr$.

3.5.1. Campos de Maxwell

Repasemos brevemente el tratamiento estándar de perturbaciones electromagnéticas de espacios esféricamente simétricos. De acuerdo a la descomposición $2 + 2$ del campo de Maxwell efectuada en [32], la información del campo está contenida en dos variables escalares maestras ϕ^+ y ϕ^- , que codifican respectivamente los sectores par e impar de la perturbación electromagnética. Es posible mostrar que los campos de Maxwell esféricamente simétricos (i.e. con $\ell = 0$ en una descomposición en armónicos esféricos) son estáticos (ver por ejemplo [116], también [24, apéndice A]), por lo tanto los mismos no interesan para el problema de estabilidad y podemos entonces tomar $\ell \geq 1$, lo que implica que el laplaciano $\bar{\Delta}$ es invertible. Asumiendo que las ecuaciones de Maxwell se satisfacen, la reconstrucción del campo en términos de las variables ϕ^- y ϕ^+ es:

$$F_{\tilde{a}\tilde{b}} = -\frac{1}{r^2}\tilde{\varepsilon}_{\tilde{a}\tilde{b}}\phi^+, \quad F_{\tilde{a}\mathbb{B}} = \bar{\varepsilon}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{C}}\bar{\nabla}_{\mathbb{C}}\tilde{\nabla}_{\tilde{a}}\phi^- + \bar{\nabla}_{\mathbb{B}}\tilde{\varepsilon}_{\tilde{a}}{}^{\tilde{b}}\tilde{\nabla}_{\tilde{b}}\bar{\Delta}^{-1}\phi^+, \quad F_{\mathbb{A}\mathbb{B}} = -\bar{\varepsilon}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}\bar{\Delta}\phi^-. \quad (3.119)$$

Las ecuaciones de onda que satisfacen ϕ^\pm son equivalentes a

$$(\square + 2\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\left[\frac{\phi^+}{r} + i\frac{\phi^-}{r}\right] = 0. \quad (3.120)$$

El campo escalar $\Phi := \frac{\phi^+}{r} + i\frac{\phi^-}{r}$ satisface entonces la ecuación de Fackerell-Ipser, por lo tanto podemos construir un *nuevo* campo electromagnético usando el corolario 3.3.2. Con el fin de ver la relación entre este nuevo campo y el original (3.119), necesitamos calcular las componentes del tensor E_{ab}^0 en la fórmula (3.49) (y su dual) de acuerdo a la descomposición $2 + 2$. Usando la forma explícita del tensor de Killing-Yano, y el hecho de que $\Im\mathfrak{m}(\Psi_2) = 0$, obtenemos

$${}^*E_{\tilde{a}\tilde{b}}(v) = 0, \quad {}^*E_{\tilde{a}\mathbb{B}}(v) = -2b\bar{\varepsilon}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{C}}\bar{\nabla}_{\mathbb{C}}\tilde{\nabla}_{\tilde{a}}(rv), \quad {}^*E_{\mathbb{A}\mathbb{B}}(v) = 2b\bar{\varepsilon}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}\bar{\Delta}(rv), \quad (3.121)$$

$$E_{\tilde{a}\tilde{b}}(u) = -\frac{2b}{r^2}\tilde{\varepsilon}_{\tilde{a}\tilde{b}}\bar{\Delta}(ru), \quad E_{\tilde{a}\mathbb{B}}(u) = 2b\bar{\nabla}_{\mathbb{B}}\tilde{\varepsilon}_{\tilde{a}}{}^{\tilde{b}}\tilde{\nabla}_{\tilde{b}}(ru), \quad E_{\mathbb{A}\mathbb{B}}(u) = 0. \quad (3.122)$$

Adicionalmente, si (3.120) vale, entonces usando que $[\bar{\Delta}^{-1}, \square + 2\Psi_2 + 2\lambda/3] = 0$ sobre campos escalares, también vale

$$(\square + 2\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\left[\bar{\Delta}^{-1}\left(\frac{\phi^+}{2br}\right) - i\frac{\phi^-}{2br}\right] = 0, \quad (3.123)$$

y por lo tanto el campo electromagnético construido de esta solución en la forma (3.121)-(3.122) (i.e. reemplazando $u \equiv \bar{\Delta}^{-1}\left(\frac{\phi^+}{2br}\right)$ y $v \equiv -\frac{\phi^-}{2br}$ en esas expresiones) coincide exactamente con el campo original. De esta manera tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.5.1. *La dinámica del campo de Maxwell sobre el espacio-tiempo de Schwarzschild-dS está gobernada por soluciones $\Phi = u + iv$ de la ecuación de Fackerell-Ipser,*

$$\left(\square - \frac{2M}{r^3} + \frac{2}{3}\lambda\right)\Phi = 0, \quad (3.124)$$

donde la reconstrucción 4-dimensional covariante del campo electromagnético es

$$F_{ab} = -\frac{2}{b}\nabla_{[a}(Y_{b]}^c\nabla_c v_o) + \frac{1}{b}\epsilon_{ab}{}^{cd}\nabla_c(Y_d^e\nabla_e u_o), \quad (3.125)$$

con $v_o := v$ y $u_o := \bar{\Delta}^{-1}u$.

Notemos que el teorema está enunciado para la solución de Schwarzschild-dS, es decir que vale para $\lambda \geq 0$: no estamos incluyendo el caso en el que la constante cosmológica es negativa. Esto es así porque, como vimos en el capítulo 1, para $\lambda < 0$ el espacio-tiempo no es globalmente hiperbólico, lo cual implica que la dinámica no está sólo determinada por condiciones iniciales sino que también deben imponerse condiciones de borde en la frontera temporal. Esta cuestión es sumamente sutil y la trataremos en el capítulo 5.

3.5.2. Perturbaciones gravitacionales

De acuerdo al tratamiento estándar de perturbaciones gravitacionales de espacio-tiempos esféricamente simétricos, las perturbaciones de la métrica se descomponen como

$$h_{ab}dz^a dz^b = h_{\bar{a}\bar{b}}dx^{\bar{a}}dx^{\bar{b}} + 2h_{\bar{a}\mathbb{B}}dx^{\bar{a}}dy^{\mathbb{B}} + h_{\mathbb{A}\mathbb{B}}dy^{\mathbb{A}}dy^{\mathbb{B}}. \quad (3.126)$$

Las diferentes partes de la perturbación son a su vez expandidas en términos de la base de tensores armónicos sobre S^2 , caracterizados por los números armónicos (ℓ, m) :

$$h_{\bar{a}\bar{b}} = H_{\bar{a}\bar{b}}, \quad (3.127)$$

$$h_{\bar{a}\mathbb{B}} = \bar{\nabla}_{\mathbb{B}}q_{\bar{a}} + \bar{\epsilon}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{C}}\bar{\nabla}_{\mathbb{C}}h_{\bar{a}}, \quad (3.128)$$

$$h_{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \frac{1}{2}r^2\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}J + r^2\bar{S}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}G + 2\bar{\epsilon}_{(\mathbb{A}}{}^{\mathbb{C}}\bar{\nabla}_{\mathbb{B}})\bar{\nabla}_{\mathbb{C}}k \quad (3.129)$$

donde $\bar{S}_{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \bar{\nabla}_{\mathbb{A}}\bar{\nabla}_{\mathbb{B}}S_{(\ell,m)} - \frac{\ell(\ell+1)}{2}\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}S_{(\ell,m)}$, con $S_{(\ell,m)}$ los armónicos esféricos sobre S^2 . Combinando $H_{\bar{a}\bar{b}}$, $h_{\bar{a}}$, J , etc. uno puede construir cantidades $H_{\bar{a}\bar{b}}^{(inv)}$, $h_{\bar{a}}^{(inv)}$, $J^{(inv)}$ que sean invariantes de gauge; i.e. invariantes bajo $h_{ab} \rightarrow h_{ab} + 2\nabla_{(a}\xi_{b)}$. Como es bien sabido, existe un gauge, llamado *gauge de Regge-Wheeler* (RW), en el cual $q_{\bar{a}} = G = k = 0$. En este gauge particular se tiene $H_{\bar{a}\bar{b}}^{(inv)} = H_{\bar{a}\bar{b}}$, $J^{(inv)} = J$, $h_{\bar{a}}^{(inv)} = h_{\bar{a}}$. Por lo tanto, aquellas cantidades perturbativas que sean invariantes de gauge pueden calcularse en este gauge de RW; y su expresión en cualquier otro gauge arbitrario se obtiene simplemente reemplazando $H_{\bar{a}\bar{b}} = H_{\bar{a}\bar{b}}^{(inv)}$, etc. En el gauge de RW, las perturbaciones métricas impares son

$$h_{\bar{a}\bar{b}}^- = 0, \quad h_{\bar{a}\mathbb{B}}^- = \bar{\epsilon}_{\mathbb{B}}{}^{\mathbb{C}}\bar{\nabla}_{\mathbb{C}}h_{\bar{a}}, \quad h_{\mathbb{A}\mathbb{B}}^- = 0. \quad (3.130)$$

mientras que el sector par es

$$h_{\bar{a}\bar{b}}^+ = H_{\bar{a}\bar{b}}, \quad h_{\bar{a}\mathbb{B}}^+ = 0, \quad h_{\mathbb{A}\mathbb{B}}^+ = \frac{1}{2}r^2\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}J. \quad (3.131)$$

Es sabido, desde el trabajo de Price [116], que la parte real de $\bar{\Psi}_2$ se asocia a perturbaciones pares, mientras que la parte imaginaria se asocia al

sector impar. Esto puede corroborarse mediante el cálculo explícito de $\dot{\Psi}_2$ en términos de la métrica perturbada $h_{ab} = h_{ab}^+ + h_{ab}^-$:

$$\Re\dot{\Psi}_2[h] = \dot{\Psi}_2[h^+], \quad i\Im\dot{\Psi}_2[h] = \dot{\Psi}_2[h^-], \quad (3.132)$$

donde $\dot{\Psi}_2[h^+]$ corresponde a calcular $\dot{\Psi}_2$ sólo con una perturbación par h_{ab}^+ , y análogamente para $\dot{\Psi}_2[h^-]$. Por otro lado, esto indica que para seleccionar un sector (par/impar) en nuestro formalismo sólo debemos tomar la parte real o imaginaria de la ecuación (3.83) para $s = 0$. El sector impar se puede tratar inmediatamente. El sector par es mucho más complicado de tratar, debido principalmente a dos factores: $\Re\dot{\Psi}_2[h]$ no es invariante de gauge (con lo cual no tiene significado físico), y la ecuación escalar posee el término inhomogéneo $(\dot{\square}_h + \dot{R}_h/6)\Psi_2^{1/3}$. Afortunadamente, en 4 dimensiones existe un mapa entre soluciones de los sectores par e impar que se denomina *dualidad supersimétrica de Chandrasekhar*, y que permite tratar perturbaciones pares enteramente en términos de perturbaciones impares. Estrictamente, el mapa es una biyección sólo para el caso en que el espacio-tiempo es asintóticamente plano o de Sitter (esto fue probado en [47]), el caso Anti-de Sitter es mucho más sutil y lo trataremos en el capítulo 5 (ver sección 5.4.4).

Consideremos entonces el sector impar, dado por (3.130). Ya que estamos interesados en el problema de estabilidad de la métrica, sólo nos preocupa el sector dinámico de las perturbaciones. En una descomposición en armónicos esféricos, esto implica que podemos tomar el número armónico $\ell \geq 2$ (ver discusión en [47]); el operador $\bar{\Delta} - 2$ es entonces invertible, hecho que usaremos de ahora en más. En el tratamiento estándar, las ecuaciones de Einstein de vacío (con constante cosmológica) se obtienen igualando a cero la siguiente expresión:

$$\dot{G}_{\bar{a}\bar{b}}^- + \lambda h_{\bar{a}\bar{b}}^- = +\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_{\bar{b}}{}^{\bar{c}}\bar{\nabla}_{\bar{c}} \left[\frac{1}{r^2}\tilde{\varepsilon}_{\bar{a}}{}^{\bar{b}}\tilde{\nabla}_{\bar{b}}(r^2\mathcal{F}) + \frac{1}{r^2}(\bar{\Delta} - 2)h_{\bar{a}} \right], \quad (3.133)$$

donde

$$\mathcal{F} := r^2\tilde{\varepsilon}^{\bar{a}\bar{b}}\tilde{\nabla}_{\bar{a}}(r^{-2}h_{\bar{b}}). \quad (3.134)$$

La métrica puede entonces reconstruirse como

$$h_{\bar{a}\bar{b}}^- = -\bar{\varepsilon}_{\bar{b}}{}^{\bar{c}}\bar{\nabla}_{\bar{c}}\tilde{\varepsilon}_{\bar{a}}{}^{\bar{b}}\tilde{\nabla}_{\bar{b}}[r^2(\bar{\Delta} - 2)^{-1}\mathcal{F}]. \quad (3.135)$$

Por otro lado, de acuerdo al formalismo desarrollado en las secciones anteriores, podemos construir una solución de las ecuaciones linealizadas de Einstein utilizando el corolario 3.4.5. En el siguiente teorema probaremos un resultado más fuerte, esto es, probaremos que *toda* perturbación métrica *dinámica* se puede construir a partir de una solución de la ecuación $(\square + 8\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\Phi = 0$, de manera que el estudio de las ecuaciones linealizadas de Einstein en el sector impar queda efectivamente mapeado en el estudio de la ecuación escalar mencionada. Este resultado fue primero probado por G. Dotti en [46, 47] (como mencionamos en la introducción); aquí es sólo un caso particular de la estructura general que hemos desarrollado en este capítulo.

Teorema 3.5.2. *La dinámica del sector impar del campo gravitacional linealizado sobre el espacio-tiempo de Schwarzschild-dS está gobernada por soluciones de la ecuación*

$$\left(\square - \frac{8M}{r^3} + \frac{2}{3}\lambda\right)\Phi = 0, \quad (3.136)$$

y la reconstrucción 4-dimensional covariante de la perturbación gravitacional es

$$h_{ab} = \frac{r^2}{3M} {}^*C_a{}^{cd}{}_b \nabla_c \nabla_d (r^3 \Phi_o), \quad (3.137)$$

donde $\Phi_o := (\bar{\Delta} - 2)^{-1}\Phi$.

Notemos que este teorema es el análogo para spin 2 (en el sector impar) del teorema 3.5.1 para spin 1. Nuevamente, no estamos considerando el caso $\lambda < 0$ debido al problema de las condiciones de borde, que trataremos en el capítulo 5.

Demostración. El teorema afirma que el estudio de la dinámica de las perturbaciones gravitacionales es *equivalente* al estudio de la dinámica de soluciones de la ecuación escalar (3.136). Lo que debemos probar, entonces, es que toda la información de una perturbación métrica (dinámica) arbitraria está en un campo escalar que satisface (3.136). Para probar esto, sea h_{ab} una perturbación métrica (impar) arbitraria; entonces la misma se puede escribir en la forma (3.135). Hay que demostrar que esta fórmula coincide con la reconstrucción que obtenemos mediante el corolario 3.4.5, el cual afirma que si Φ es una solución de

$$(\square + 8\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\Phi = 0, \quad (3.138)$$

entonces el campo tensorial

$$h_{ab}(\Phi) = -{}^*C_{(a}{}^{cd}{}_{b)} \nabla_c [\Psi_2^{-4/3} \nabla_d (\Psi_2^{-1/3} \Phi)] \quad (3.139)$$

es una solución de las ecuaciones linealizadas de Einstein. (Hemos hecho el reemplazo $P_{abcd}^0 = \Psi_2^{-5/3} \tilde{C}_{abcd}$, algo que es válido en todo espacio Einstein tipo D.) Es tedioso pero sencillo mostrar que esta expresión puede reescribirse como

$$h_{ab}(\Phi) = \frac{1}{M^{5/3}} r^{2*} C_a{}^{cd}{}_b \nabla_c \nabla_d (r^3 \Phi). \quad (3.140)$$

Ahora, usando que sobre campos escalares tenemos el conmutador

$$[(\bar{\Delta} - 2)^{-1}, \square + 8\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda] = 0, \quad (3.141)$$

resulta que si Φ es una solución de $(\square + 8\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\Phi = 0$, también lo es el campo $\frac{M^{2/3}}{3}(\bar{\Delta} - 2)^{-1}\Phi$. Definiendo $\Phi_o := (\bar{\Delta} - 2)^{-1}\Phi$, la perturbación métrica (3.140) construida a partir de $\frac{M^{2/3}}{3}(\bar{\Delta} - 2)^{-1}\Phi$ es

$$h_{ab} = \frac{r^2}{3M} {}^*C_a{}^{cd}{}_b \nabla_c \nabla_d (r^3 \Phi_o), \quad (3.142)$$

la cual, efectuando su descomposición 2 + 2, puede probarse que coincide con la perturbación original (3.135) (con $\Phi \equiv \mathcal{F}$). \square

Notemos que la reconstrucción (3.142) es idéntica a la fórmula (4) que dimos en la introducción. Además, (3.142) se construye a partir de una solución de la ecuación $(\square + 8\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\Phi = 0$, que es precisamente (3). Por último, hemos visto que una solución de esta ecuación escalar (en el caso Ψ_2 real) es $\Psi_2^{-2/3}\mathfrak{Im}(\dot{\Psi}_2)$, y, utilizando la forma explícita del tensor de Killing-Yano y su dual (dada en (3.117)-(3.118)), es tedioso pero sencillo mostrar que $\Psi_2^{-2/3}\mathfrak{Im}(\dot{\Psi}_2)$ coincide con (6) (para la cuenta explícita ver [8, sección 6.2.2]). De esta manera, encontramos el origen de los mecanismos que producen las fórmulas de la introducción (3), (4) y (6), como un caso particular de los resultados de este capítulo, que son válidos para todo espacio-tiempo (4-dimensional) Einstein de tipo Petrov D.

Capítulo 4

Estructuras conforme y compleja y conexiones de Teukolsky

4.1. Preliminares

Podemos resumir las identidades (3.7), (3.25) y (3.69) halladas en el capítulo anterior para campos de Weyl-Dirac, Maxwell y gravedad respectivamente, por medio de la identidad fundamental

$$P_s^{A_1 \dots A_{2s}} (\nabla_{A'_1 A_1} - 2\mathfrak{s} A_{A'_1 A_1}) \nabla^{A'_1 B} \varphi_{A_2 \dots A_{2s} B} \doteq (\square_{2s} + V_{s,s}) [P_s^{A_1 \dots A_{2s}} \varphi_{A_1 \dots A_{2s}}], \quad (4.1)$$

donde el potencial $V_{s,s}$ puede leerse de las respectivas identidades, y \doteq significa que la ecuación es válida a orden lineal (alternativamente, tomar el operador de linealización $\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$ en ambos lados de la ecuación –notemos que esto sólo se necesita para el caso de spin $\mathfrak{s} = 2$ (3.69)). El espinor “proyector” $P_s^{A_1 \dots A_{2s}}$ representa los campos definidos en (3.6), (3.22), (3.23), (3.24), (3.66), (3.67) y (3.68), y hemos introducido la 1-forma

$$A_a = \Psi_2^{-1/3} \nabla_a \Psi_2^{1/3}. \quad (4.2)$$

Una de las principales utilidades de (4.1) radica en tomar la identidad adjunta y de esta manera (con algunos ingredientes extra como los lemas 3.3.1 y 3.4.1) reconstruir los campos de spin superior a partir de campos escalares, como hicimos en los corolarios 3.2.2, 3.3.2, 3.4.4 y 3.4.5. Además de esta utilidad práctica, la formulación de las identidades (3.7), (3.25) y (3.69) como casos particulares de la identidad ‘universal’ (4.1) muestra un patrón de simetrías para las ecuaciones de campos libres sin masa.

Aún cuando esta identidad es ya satisfactoria por los motivos recién mencionados (y porque, como vimos al final de la sección 3.5, nos permitió explicar el origen de las fórmulas (3), (4) y (6) vistas en la introducción, que motivaron el trabajo en esta tesis), podemos ir más allá y preguntarnos acerca del origen e interpretación de los objetos involucrados, en particular la 1-forma A_a dada en (4.2), la 1-forma B_a que define la derivada modificada D_a y genera a su vez el operador de Teukolsky \square_p , y el espinor $P_s^{A_1 \dots A_{2s}}$ que proyecta a una versión reescalada de las componentes del campo $\varphi_{A_1 \dots A_{2s}}$; y nos preguntamos además si estos objetos tienen alguna relación entre sí.

En este capítulo profundizaremos en estas cuestiones. Veremos que el principio fundamental que relaciona todos los operadores es la *covariancia conforme* (que es un concepto intrínsecamente asociado –en 4 dimensiones– a los campos cuya masa en reposo es cero), y que la misma tiene una conexión profunda con una *estructura casi-compleja* en el espacio-tiempo. Desde el punto de vista matemático, un formalismo adecuado para tratar con geometría conforme es el denominado formalismo de *tractors* [18, 30]. Al combinar este marco de trabajo con la geometría espinorial en 4 dimensiones, los tractors se reducen al formalismo de *twistors locales*, que son una posible generalización a espacios curvos del concepto original de twistors en Minkowski introducido por Penrose [113, 114]. Esta idea, junto con lo que veremos enseguida en la sección 4.1.1, nos sugiere una conexión adicional (además de las mencionadas en la introducción) entre nuestros resultados y teoría de twistors; veremos más sobre esto en la sección 4.3.

Observación 4.1.1 (Artículos). *Los resultados de este capítulo se encuentran en [11].*

4.1.1. Espinores de Killing modificados

La siguiente observación es uno de los resultados que más nos ha motivado a buscar una interpretación más profunda de la identidad (4.1), los objetos que involucra, y las posibles conexiones con teoría de twistors:

Lema 4.1.1. *Consideremos un espacio-tiempo Einstein 4-dimensional de tipo Petrov D. Sean o^A y ι^A campos espinoriales alineados a las direcciones principales nulas. Entonces o^A y $\Psi_2^{-1/3}\iota^A$ son espinores de Killing con respecto a la conexión de Teukolsky D_a :*

$$D_{B'}^{(B} o^{A)} = 0, \quad (4.3)$$

$$D_{B'}^{(B} [\Psi_2^{-1/3} \iota^A]} = 0. \quad (4.4)$$

La demostración de este resultado no es difícil y la omitiremos. Denotando $o^{A_1 \dots A_n} = o^{A_1} \dots o^{A_n}$ y $\iota^{A_1 \dots A_m} = \iota^{A_1} \dots \iota^{A_m}$, es fácil chequear que

$$D_{B'}^{(B} o^{A_1 \dots A_n)} = 0 \quad (4.5)$$

$$D_{B'}^{(B} [\Psi_2^{-m/3} \iota^{A_1 \dots A_m}]} = 0, \quad (4.6)$$

$$D_{B'}^{(B} [\Psi_2^{-m/3} \iota^{A_1 \dots A_m} o^{A_{m+1} \dots A_{m+n}}]} = 0. \quad (4.7)$$

En particular, poniendo $m = 1$, $n = 1$ en (4.7), el espinor $K^{AB} := \Psi_2^{-1/3} o^{(A} \iota^{B)}$ es de tipo $\{0, 0\}$, con lo cual $D_{A'A}$ se reduce a $\nabla_{A'A}$ y tenemos

$$\nabla_{B'}^{(B} K^{AC)} = 0, \quad (4.8)$$

de manera que recuperamos el espinor de Killing ordinario de espacio-tiempos tipo D, dado en (2.67).

Es útil también notar la versión tensorial de estos resultados. En primer lugar:

Lema 4.1.2. Sean ℓ^a y n^a campos vectoriales alineados a las direcciones principales nulas de un espacio-tiempo Einstein 4-dimensional de tipo Petrov D. Entonces $k^{0a} := \ell^a$ y $k^{1a} := |\Psi_2|^{-2/3} n^a$ son vectores conformes de Killing con respecto a D_a :

$$D_{(a} k_{b)}^I = \lambda^I g_{ab}, \quad I = 0, 1, \quad (4.9)$$

donde $\lambda^0 = -\frac{(\rho+\bar{\rho})}{2}$ y $\lambda^1 = -\frac{(\rho+\bar{\rho})}{2} |\Psi_2|^{-2/3}$.

Esto implica que $o^A \bar{o}^{A'}$ y $|\Psi_2|^{-2/3} \iota^A \bar{\iota}^{A'}$ son espinores de Killing de valencia (1, 1) con respecto a D_a . Por otro lado, notemos que $o^A o^B$, $\Psi_2^{-1/3} o^{(A} \iota^{B)}$ y $\Psi_2^{-2/3} \iota^A \iota^B$ son espinores de Killing de valencia (2, 0) con respecto a D_a ; entonces:

Lema 4.1.3. Sea $s = 1, 0, -1$. Las 2-formas complejas P_{ab}^s dadas en (3.40), (3.41) y (3.42) son tensores conformes de Killing-Yano con respecto a la conexión de Teukolsky:

$$D_{(a} P_{b)c}^s = g_{ab} \xi_c^s - g_{c(a} \xi_{b)}^s, \quad (4.10)$$

donde $\xi_a^s = \frac{1}{3} D^b P_{ba}^s$.

Ahora, el resultado del lema 4.1.1 es ciertamente muy interesante, ya que indica que el espinor $P_s^{A_1 \dots A_{2s}}$ en (4.1) es un espinor de Killing con respecto a la conexión de Teukolsky, estableciendo de esta manera una relación no-trivial entre $P_s^{A_1 \dots A_{2s}}$ y D_a . Adicionalmente, nos muestra que la aparición de simetrías ocultas en los casos de peso de spin cero para los sistemas de Maxwell y gravedad parece ser un caso particular de una estructura más general. Esto nos motiva a buscar una interpretación más profunda de la conexión de Teukolsky, como haremos en las secciones siguientes. Notemos también que este resultado explica las semejanzas (observadas repetidamente) entre las identidades que obtuvimos en el capítulo anterior y las correspondientes a Minkowski. Por ejemplo, usando (4.5) no es difícil probar que, en un espacio-tiempo tipo D, tenemos la identidad

$$\mathfrak{S}\mathcal{E}(\varphi_{A_1 \dots A_n}) = \mathcal{O}\mathcal{T}(\varphi_{A_1 \dots A_n}) \quad (4.11)$$

válida para todo campo espinorial simétrico (de tipo $\{0, 0\}$), donde

$$\mathfrak{S}(J^{B'}_{A_2 \dots A_n}) := (2o^{BA_2 \dots A_n} D_{B'B} + \frac{2n}{n+1} (D_{B'B} o^{BA_2 \dots A_n})) J^{B'}_{A_2 \dots A_n}, \quad (4.12)$$

$$\mathcal{E}(\varphi_{A_1 \dots A_n}) := \nabla^{B'A_1} \varphi_{A_1 \dots A_n}, \quad (4.13)$$

$$\mathcal{O}(\Phi) := (\mathbb{E}_n + (-3n + 2)\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\Phi, \quad (4.14)$$

$$\mathcal{T}(\varphi_{A_1 \dots A_n}) := o^{A_1 \dots A_n} \varphi_{A_1 \dots A_n}, \quad (4.15)$$

de manera que generalizamos el resultado (2.107) en \mathbb{M} usando los espinores de Killing modificados. Además, el lema 4.1.1 también explica las semejanzas entre las fórmulas de reconstrucción (3.12), (3.31) y (3.97) y las correspondientes a \mathbb{M} , dadas en (2.118), (2.119) y (2.120). Esto es simplemente porque, en dichas fórmulas en \mathbb{M} , el campo $\mathcal{X} \equiv \bar{\omega}^{A'} \bar{\mu}_{A'}$ es el producto entre dos espinores de Killing (ordinarios), mientras que en las fórmulas para el tipo D tenemos $\mathcal{X} \equiv \bar{\Psi}_2^{-1/3} = (\bar{\Psi}_2^{-1/3} \bar{\iota}^{A'}) (\bar{o}_{A'})$; esto es, \mathcal{X} es nuevamente el producto entre dos espinores de Killing (modificados).

4.2. Covariancia conforme y estructuras complejas

Como mencionamos, la idea general en este capítulo es mostrar que la identidad (4.1) se puede interpretar en base a la covariancia conforme de los campos sin masa. Para esto es necesario repasar algunos conceptos básicos de geometría conforme. Sea (\mathcal{M}, g_{ab}) un espacio-tiempo 4-dimensional con métrica espinorial ϵ_{AB} . La variedad conforme asociada a este espacio-tiempo es $(\mathcal{M}, [g_{ab}])$, donde $[g_{ab}]$ es la clase de equivalencia de métricas conformemente relacionadas a g_{ab} , i.e. $\hat{g}_{ab} \in [g_{ab}]$ si y sólo si existe una función escalar positiva definida Ω tal que $\hat{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$. El mapa $g_{ab} \mapsto \hat{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ se denomina transformación conforme¹. Para la métrica espinorial, esto es equivalente a $\epsilon_{AB} \mapsto \hat{\epsilon}_{AB} = \Omega \epsilon_{AB}$. Las métricas inversas cambian como $\hat{g}^{ab} = \Omega^{-2} g^{ab}$ y $\hat{\epsilon}^{AB} = \Omega^{-1} \epsilon^{AB}$. Si $\{o^A, \iota^A\}$ es una diada de spin (i.e. $\epsilon_{AB} = 2o_{[A}\iota_{B]}$), sus elementos transforman como

$$\hat{o}^A = \Omega^{w_0} o^A, \quad \hat{\iota}^A = \Omega^{w_1} \iota^A, \quad (4.16)$$

para algunos números $w_0, w_1 \in \mathbb{R}$ tales que $w_0 + w_1 + 1 = 0$. Más adelante haremos elecciones particulares de w_0 y w_1 .

Las métricas conformemente relacionadas a g_{ab} pueden ser vistas como un subfibrado $\mathcal{Q} \subset T^*\mathcal{M} \odot T^*\mathcal{M}$ con fibras² \mathbb{R}^+ , el cual puede a su vez ser entendido como un fibrado principal sobre \mathcal{M} con grupo de estructura \mathbb{R}^+ (ver e.g. [30, sección 2.4]). Entonces podemos construir fibrados asociados a \mathcal{Q} conocidos como *fibrados de líneas conformemente pesados*, denotados $\mathcal{E}[w]$, donde $w \in \mathbb{R}$ es llamado *peso conforme*, y cuyos elementos transforman conformemente como $\hat{\phi} = \Omega^w \phi$. Secciones de $\mathcal{E}[w]$ se denominan *densidades conformes de peso w* . Más generalmente, si \mathbb{E} es un fibrado vectorial sobre \mathcal{M} , podemos construir el fibrado pesado $\mathbb{E} \otimes \mathcal{E}[w] =: \mathbb{E}[w]$, cuyas secciones serán campos tensoriales/espinoriales conformemente pesados. En particular, $\mathbb{S}_{A_1 \dots A_n A'_1 \dots A'_m}[w]$ denotará el espacio de campos espinoriales (irreducibles) con peso conforme w .

Si ∇_a es la conexión de Levi-Civita de g_{ab} , entonces bajo una transformación conforme, la derivada de Levi-Civita de la nueva métrica $\hat{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ actuando en un tensor arbitrario $T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k}$ está dada por

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_a T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k} = & \nabla_a T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots b_k} + K_a^{b_1} T_{c_1 \dots c_l}^{d \dots b_k} + \dots + K_a^{b_l} T_{c_1 \dots c_l}^{b_1 \dots d} \\ & - K_a^d T_{d \dots c_l}^{b_1 \dots b_k} - \dots - K_a^d T_{c_1 \dots d}^{b_1 \dots b_k}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

¹es importante destacar aquí que en la literatura hay dos conceptos estrechamente relacionados, que son los de *transformación conforme* y *reescaleo de Weyl*. En física de altas energías, el primero de estos conceptos se define como un difeomorfismo $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ tal que $(\phi_* g)_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$, mientras que un ‘reescaleo de Weyl’ es el mapa $g_{ab} \mapsto \hat{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$. Notemos que el primer caso supone la existencia de una isometría conforme ($\phi_* g = \Omega^2 g$), lo cual es una restricción no-trivial para (\mathcal{M}, g) ; mientras que siempre es posible efectuar un reescaleo de Weyl (que denominaremos ‘transformación conforme’ siguiendo [135]).

²denotamos por \mathbb{R}^+ al grupo multiplicativo de números reales positivos.

donde

$$K_a{}^b{}_c := g^{bd}(\Upsilon_a g_{dc} + \Upsilon_c g_{da} - \Upsilon_d g_{ab}), \quad (4.18)$$

y

$$\Upsilon_a := \Omega^{-1} \nabla_a \Omega. \quad (4.19)$$

Para un espinor $\Psi_{C_1 \dots C_l}^{B_1 \dots B_k}$, la fórmula correspondiente es

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_a \Psi_{C_1 \dots C_l}^{B_1 \dots B_k} &= \nabla_a \Psi_{C_1 \dots C_l}^{B_1 \dots B_k} + \Lambda_{aD}{}^{B_1} \Psi_{C_1 \dots C_l}^{D \dots B_k} + \dots + \Lambda_{aD}{}^{B_k} \Psi_{C_1 \dots C_l}^{B_1 \dots D} \\ &\quad - \Lambda_{aC_1}{}^D \Psi_{D \dots C_l}^{B_1 \dots B_k} - \dots - \Lambda_{aC_l}{}^D \Psi_{C_1 \dots D}^{B_1 \dots B_k}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde

$$\Lambda_{aC}{}^B := \Upsilon_{A'C} \epsilon_A{}^B. \quad (4.21)$$

Para espinores con índices primados, la fórmula se deduce de (4.20) simplemente por conjugación compleja, y teniendo en cuenta que la 1-forma Υ_a es real, $\bar{\Upsilon}_a = \Upsilon_a$. La relación entre $K_a{}^b{}_c$ y $\Lambda_{aC}{}^B$ está dada por

$$K_a{}^b{}_c = \Lambda_{aC}{}^B \bar{\epsilon}_{C'}{}^{B'} + \bar{\Lambda}_{aC'}{}^{B'} \epsilon_C{}^B, \quad (4.22)$$

ver [110, sección 4.4].

Las distintas partes de la curvatura de g_{ab} tienen comportamientos diferentes bajo transformaciones conformes. En particular, puede mostrarse (ver e.g. [111, sección 6.8]) que el espinor de Weyl es conformemente invariante,

$$\widehat{\Psi}_{ABCD} = \Psi_{ABCD}, \quad (4.23)$$

y por lo tanto su estructura algebraica es común a todas las métricas en la clase conforme $[g_{ab}]$. El comportamiento conforme de las otras partes de la curvatura puede ser convenientemente descrito a través del *tensor de Schouten*, que según nuestras convenciones [111] está definido como

$$P_{ab} := -\frac{1}{2}(R_{ab} - \frac{R}{6}g_{ab}), \quad (4.24)$$

y cuya relación con el tensor de Riemann es $R_{ab}{}^{cd} = C_{ab}{}^{cd} + 4P_{[a}{}^{[c}g_{b]}{}^{d]}$. Bajo transformaciones conformes, P_{ab} cambia como

$$\widehat{P}_{AA'BB'} = P_{AA'BB'} - \nabla_{BB'} \Upsilon_{AA'} + \Upsilon_{AB'} \Upsilon_{BA'}. \quad (4.25)$$

Conexiones de Weyl

Un concepto muy útil en geometría conforme es el de conexión de Weyl (ver e.g. [64]). Una *conexión de Weyl* para la estructura conforme asociada a g_{ab} es una conexión $\widehat{\nabla}_a$ libre de torsión tal que

$$\widehat{\nabla}_a g_{bc} = -2f_a g_{bc} \quad (4.26)$$

para alguna 1-forma f_a . Permitiremos que f_a sea compleja. Suponiendo que $\widehat{\nabla}_a$ está fija y calculando $\widehat{\nabla}_a g_{bc}$, deducimos que f_a cambia bajo transformaciones conformes como

$$f_a \mapsto \widehat{f}_a = f_a - \Upsilon_a. \quad (4.27)$$

Al actuar sobre tensores, la relación de ∇_a con la conexión de Levi-Civita está dada por una fórmula idéntica a (4.17), pero reemplazando $K_a^b{}_c$ por el tensor

$$Q_a^b{}_c := g^{bd}(f_a g_{dc} + f_c g_{da} - f_d g_{ab}). \quad (4.28)$$

Similarmente, la acción de ∇_a sobre espinores es análoga a (4.20) y su compleja conjugada, pero reemplazando Λ_{aC}^B y $\bar{\Lambda}_{aC}^B$ respectivamente por

$$W_{aC}^B = f_{A'C} \epsilon_A^B, \quad \widetilde{W}_{aC'}^{B'} = f_{AC'} \bar{\epsilon}_{A'}^{B'}. \quad (4.29)$$

Debemos usar el objeto $\widetilde{W}_{aC'}^{B'}$ en lugar de $\bar{W}_{aC'}^{B'}$ porque la 1-forma \underline{f}_a puede ser compleja (notemos que en el caso en que f_a es real, tenemos $\widetilde{W}_{aC'}^{B'} = \bar{W}_{aC'}^{B'}$).

Ahora, si Ψ es un campo tensorial/espinorial con una estructura de índices arbitraria y peso conforme $w \neq 0$, entonces $\nabla_a \Psi$ no es una densidad conforme. Un operador derivada que mapea densidades conformes con peso w , en densidades conformes (con el mismo peso), puede construirse como

$$\mathcal{C}_a \Psi = \nabla_a \Psi + w f_a \Psi. \quad (4.30)$$

Se sigue entonces que $\widehat{\mathcal{C}}_a \Psi = \Omega^w \mathcal{C}_a \Psi$. Decimos que \mathcal{C}_a es una *derivada conformemente covariante*. Más en general:

Definición 4.2.1 (Operador conformemente covariante). *Sea P un operador diferencial actuando en una densidad conforme tensorial/espinorial Ψ con peso w . Decimos que P es conformemente covariante si, bajo una transformación conforme $g_{ab} \mapsto \widehat{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$, se cumple $\widehat{P}(\Psi) = \Omega^{w'} P(\Psi)$ para algún $w' \in \mathbb{R}$.*

4.2.1. Estructura casi-compleja

Consideremos la variedad conforme $(\mathcal{M}, [g_{ab}])$ asociada a g_{ab} (cuya conexión de Levi-Civita es ∇_a). Supongamos que existe una estructura casi-compleja J , esto es, un endomorfismo $J : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ tal que $J^2 = -\text{Id}$ (el mapa identidad en $T\mathcal{M}$). Asumir también que J es compatible con la métrica, i.e. $g(JX, JY) = g(X, Y)$ para todos $X, Y \in T\mathcal{M}$. En notación de índices, J_a^b es una estructura casi-compleja compatible con la métrica si $J_a^c J_c^b = -\delta_a^b$ y $J_a^c J_b^d g_{cd} = g_{ab}$. (Notemos que estas condiciones implican $J_{(ab)} = 0$.) El triple resultante $(\mathcal{M}, [g_{ab}], J)$ se denomina *variedad conforme casi-Hermítica*. Como se discute en [17] (ver también e.g. [78]), existe una *única* conexión de Weyl ∇_a en $(\mathcal{M}, [g_{ab}], J)$ que es compatible con J , i.e. tal que

$$\nabla_b J_a^b = 0. \quad (4.31)$$

Actuando en un campo tensorial arbitrario, tal conexión está dada por una fórmula análoga a (4.17) pero reemplazando $K_a^b{}_c$ por (4.28), donde la 1-forma f_a tiene la expresión canónica

$$f_a := -\frac{1}{2} J_b^c \nabla_c J_a^b. \quad (4.32)$$

Ahora, para cualquier $g_{ab} \in [g_{ab}]$, una diada de spin $\{\varepsilon_{\mathbf{A}}^A\} = \{o^A, \iota^A\}$, $o_A \iota^A = 1$, o equivalentemente la tetrad nula asociada $\{N_{\mathbf{a}}^a\} = \{\ell^a, n^a, m^a, \bar{m}^a\}$ define siempre una estructura casi-compleja como³

$$J_a{}^b = i(\ell_a n^b - n_a \ell^b + \bar{m}_a m^b - m_a \bar{m}^b). \quad (4.33)$$

Hasta donde sabemos, esta estructura fue primero encontrada en [60]; luego redescubierta en [17] (ver también [61] y [105, II.2.10]). En forma espinorial, (4.33) es $J_a{}^b = i(o_A \iota^B + \iota_A o^B) \bar{\epsilon}_{A'}{}^{B'}$. Esta estructura es particularmente significativa en espacio-tiempos tipo D, ya que en tal caso tenemos un par de direcciones nulas o^A, ι^A determinadas por la geometría y J está naturalmente asociada a esta estructura.

Observación 4.2.1 (Quiralidad). *Notemos que estamos eligiendo los espinores o^A, ι^A en lugar de $\bar{o}^{A'}, \bar{\iota}^{A'}$; esta última elección daría la estructura casi-compleja igualmente válida $\tilde{J}_a{}^b = i(\bar{o}_{A'} \bar{\iota}^{B'} + \bar{\iota}_{A'} \bar{o}^{B'}) \epsilon_A{}^B$, y la correspondiente 1-forma (4.32) sería ahora \bar{f}_a . En este sentido podemos considerar nuestro tratamiento como quiral, ya que espinores de helicidad izquierda y derecha son tratados de manera diferente. Esto es porque queremos estudiar los campos de helicidad izquierda (3.1).*

Notemos que (4.33) no depende de los representantes de las clases conforme y GHP (i.e. es invariante bajo transformaciones conformes y GHP). Notemos también que $J_a{}^b$ es compatible con la estructura conforme: para cualquier $g_{ab} \in [g_{ab}]$, tenemos $J_a{}^c J_b{}^d g_{cd} = g_{ab}$, por lo tanto un espacio-tiempo tipo D es una variedad conforme casi-Hermítica, con estructura casi-compleja (4.33). La (única) conexión de Weyl compatible (4.32) resulta ser

$$f_a = \rho n_a + \rho' \ell_a - \tau \bar{m}_a - \tau' m_a. \quad (4.34)$$

Bajo transformaciones conformes, tenemos por supuesto $f_a \mapsto \hat{f}_a = f_a - \Upsilon_a$.

Observación 4.2.2 (La 1-forma (4.2)). *En un espacio-tiempo Einstein de tipo Petrov D, las identidades de Bianchi en forma GHP son $\mathfrak{b}\Psi_2 = 3\rho\Psi_2$ y $\delta\Psi_2 = 3\tau\Psi_2$ (y sus versiones primadas), e implican que la 1-forma (4.34) coincide exactamente con (4.2), i.e. $A_a \equiv \Psi_2^{-1/3} \nabla_a \Psi_2^{1/3}$. Es necesario tener presente, no obstante, que la identidad de Bianchi $\nabla^{AA'} \Psi_{ABCD} = 0$ no es invariante conforme; por lo tanto escribir (4.34) en la forma (4.2) rompe explícitamente la covariancia conforme. Por este motivo, en lo que sigue preferiremos en general atenernos a la forma (4.34) de A_a , que es además válida para cualquier espacio-tiempo.*

³notemos que (4.33) es un tensor *complejo*. Por esta razón, en [61] se la llama estructura casi-compleja ‘modificada’. Una estructura casi-compleja *real* puede construirse como $J_a{}^b = -\ell_a \ell^b + n_a n^b - i m_a \bar{m}^b + i \bar{m}_a m^b$, pero esta tiene un número de propiedades indeseables para nuestros propósitos, ver [61, Cap. VIII].

4.2.2. Estructura Kähler

Una variedad *casi-compleja* es en realidad una variedad *compleja* si la estructura casi-compleja es integrable. Por el teorema de Newlander-Nirenberg, la estructura casi-compleja es integrable si y sólo si el tensor de Nijenhuis ${}^JN(X, Y)$ asociado se anula para todos $X, Y \in T\mathcal{M}$, donde ${}^JN(X, Y) \equiv [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY]$ y $[\cdot, \cdot]$ es el corchete de Lie de campos vectoriales. En notación de índices, tenemos ${}^JN_{bc}{}^a = -J_b{}^d\partial_d J_c{}^a + J_c{}^d\partial_d J_b{}^a + J_d{}^a(\partial_b J_c{}^d - \partial_c J_b{}^d)$. Notemos que en esta expresión, ∂_a puede reemplazarse por cualquier conexión libre de torsión; en particular, usando la conexión de Weyl ∇_a aplicada a (4.33), encontramos

$$\nabla_a J_b{}^c = 2i\bar{\epsilon}_{B'}{}^{C'} [(-\kappa n_a + \sigma \bar{m}_a)\iota_{B'}{}^{C'} + (-\kappa' \ell_a + \sigma' m_a)o_{B'}{}^{C'}]. \quad (4.35)$$

Vemos entonces que el tensor de Nijenhuis se anula para un espacio-tiempo tipo D (ver (2.56)), por lo tanto la estructura casi-compleja es integrable y *el espacio puede tratarse como una variedad compleja*. Coordenadas complejas se obtienen integrando combinaciones lineales de las 1-formas tipo (1, 0) y (0, 1) con respecto a la descomposición⁴ $(T^*\mathcal{M})^{\mathbb{C}} = T^*\mathcal{M}^+ \oplus T^*\mathcal{M}^-$ inducida por $J: T^*\mathcal{M}^+$ es generado por $\{\ell_a dx^a, m_a dx^a\}$, y $T^*\mathcal{M}^-$ por $\{n_a dx^a, \bar{m}_a dx^a\}$. Ahora, ya que J es compatible con g_{ab} , obtenemos de hecho una variedad Hermítica. La 2-forma definida por $\omega(X, Y) := g(JX, Y)$, esto es $\omega_{ab} = J_{ab}$, es llamada *forma de Kähler*. Una *variedad de Kähler* es una variedad Hermítica (\mathcal{M}, g_{ab}) para la cual la forma de Kähler es cerrada, y puede probarse que ω es cerrada si y sólo si la estructura casi-compleja J es paralela con respecto a la conexión de Levi-Civita de g_{ab} . Puede chequearse que en general J no es paralela con respecto a ∇_a ; pero de (4.35) sabemos que, para espacio-tiempos tipo D, J es paralela con respecto a ∇_a . Ahora, es sabido que una conexión de Weyl es de hecho la conexión de Levi-Civita de alguna métrica en la clase conforme, $\not{g}_{ab} \in [g_{ab}]$, si la 1-forma f_a es cerrada. Para espacios Einstein, por la observación 4.2.2 sabemos que $f_a = \nabla_a \log \Psi_2^{1/3}$ y por lo tanto es cerrada, con lo cual ∇_a es la conexión de Levi-Civita de $\not{g}_{ab} := \Psi_2^{2/3} g_{ab}$. Luego, $(\mathcal{M}, \not{g}_{ab})$ es una variedad de Kähler, i.e. *espacio-tiempos Einstein de tipo Petrov D son conformes (con factor conforme generalmente complejo) a variedades Kähler* (ver también [61]).

Veremos ahora que la existencia de una métrica de Kähler en la estructura conforme está directamente relacionada a las simetrías ocultas asociadas a tensores conformes de Killing-Yano y espinores de Killing. Recordemos que la ecuación de Killing-Yano conforme está definida en (2.65). Tenemos:

Lema 4.2.1. *Sea $(\mathcal{M}, [g_{ab}], J)$ una variedad conforme Hermítica d -dimensional, y supongamos que existe una métrica de Kähler \tilde{g}_{ab} en la clase conforme. Entonces la métrica $g_{ab} = \Omega^{-2}\tilde{g}_{ab}$ admite un tensor de Killing-Yano conforme, dado por $Z_{ab} = \Omega^{-1}J_{ab}$, donde $J_{ab} := g_{bc}J_a{}^c$.*

⁴esta descomposición es válida porque el tensor complejo $J_a{}^b$ tiene autovalores $+i, +i, -i, -i$; por esta razón uno no considera $i\delta_a{}^b$ como una estructura casi-compleja, ya que tiene autovalores $+i, +i, +i, +i$ (y porque $i\delta_a{}^b$ no es compatible con la métrica).

Demostración. Sea $\tilde{\nabla}_a$ la conexión de Levi-Civita de la métrica de Kähler \tilde{g}_{ab} , y sea ∇_a la correspondiente a la métrica conformemente relacionada $g_{ab} = \Omega^{-2}\tilde{g}_{ab}$. En lo que sigue, los índices serán subidos y bajados con g_{ab} y su inversa g^{ab} . Por hipótesis tenemos $\tilde{\nabla}_a J_b^c = 0$; por lo tanto simetrizando y usando la relación (4.17), obtenemos:

$$\tilde{\nabla}_{(a} J_b)^c = 0 = \Omega \nabla_{(a} [\Omega^{-1} J_b)^c] + g_{ab} \Upsilon^d J_d^c + g_{(a}^c J_b)^d \Upsilon_d. \quad (4.36)$$

Usando que $\Omega \nabla_a [\Omega^{-1} J_b^a] = -(d-1) J_b^a \Upsilon_a$ y definiendo $Z_a^b = \Omega^{-1} J_a^b$, es sencillo mostrar que la ecuación anterior es equivalente a

$$\nabla_{(a} Z_b)^c = -\frac{1}{(d-1)} g_{ab} \nabla_d Z^{cd} + \frac{1}{(d-1)} g_{(a}^c \nabla_{|d} Z_b)^d, \quad (4.37)$$

por lo tanto Z_{ab} es un tensor conforme de Killing-Yano. \square

En 4 dimensiones, la 2-forma Z_{ab} en el Lema 4.2.1 puede escribirse en lenguaje espinorial como $Z_{ab} = \psi_{AB} \bar{\epsilon}_{A'B'} + \chi_{A'B'} \epsilon_{AB}$ para algunos espinores simétricos ψ_{AB} y $\chi_{A'B'}$, y la ecuación conforme de Killing-Yano (2.65) implica que ψ_{AB} y $\chi_{A'B'}$ son espinores de Killing. Por lo tanto, la existencia de estos objetos puede pensarse como una consecuencia de la presencia de una métrica Kähler en la clase conforme del espacio-tiempo.

4.2.3. Formalismo GHP covariante conforme

Deseamos ahora utilizar la conexión de Weyl distinguida (4.34) para construir un formalismo GHP covariante conforme. Sea $\pi_P : P \rightarrow \mathcal{M}$ un fibrado principal sobre la variedad conforme, cuya fibra típica sobre $x \in \mathcal{M}$ es el conjunto de bases $\{N_a^a\}$ de $T_x \mathcal{M}$ tales que para cualquier $\hat{g}_{ab} \in [g_{ab}]$, existe $\alpha > 0$ tal que $\hat{g}_{ab} N_a^a N_b^b = \alpha^2 \nu_{ab}$, donde ν_{ab} está definida por $\nu_{01} = 1 = -\nu_{23}$ y el resto cero. El grupo de estructura de P es $G = \text{SO}(1, 3)^\dagger \times \mathbb{R}^+$ (ver e.g. [62]). La conexión de Weyl $\tilde{\nabla}_a$ sobre $(\mathcal{M}, [g_{ab}])$ permite definir una noción de transporte paralelo sobre \mathcal{M} , lo cual induce a su vez una 1-forma de conexión (local) en P dada por $\phi_a^b{}_c = N_b^b \tilde{\nabla}_a N_c^c$ (donde N_a^a es la base dual a N_a^a). Notemos que, ya que (4.34) es generalmente compleja, $\phi_a^b{}_c$ tomará valores en la complexificación del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, es decir $\phi \in T^* \mathcal{M} \otimes \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, con $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. Ahora, en el formalismo GHP uno fija un par de direcciones nulas ℓ^a, n^a . El subgrupo de G que preserva estas direcciones nulas en la estructura conforme es $G_o = \mathbb{R}^\times \times \text{U}(1) \times \mathbb{R}^+$, cuya acción en la base $\{N_a^a\}$ está dada por

$$\ell^a \rightarrow \Omega^{2w_0} a \ell^a, \quad n^a \rightarrow \Omega^{2w_1} a^{-1} n^a, \quad m^a \rightarrow \Omega^{w_0+w_1} z m^a, \quad \bar{m}^a \rightarrow \Omega^{w_0+w_1} \bar{z} \bar{m}^a, \quad (4.38)$$

donde $a \in \mathbb{R}^\times$, $z \in \text{U}(1)$, $\Omega \in \mathbb{R}^+$, y w_0, w_1 son dos números reales que satisfacen $w_0 + w_1 + 1 = 0$ (de acuerdo a (4.16)). La reducción $G \rightarrow G_o$ da a su vez una reducción de P a otro fibrado principal B con grupo de estructura G_o , y la forma de conexión inducida en B se obtiene de las partes de $\phi_a^b{}_c$

que no transforman covariantemente bajo G_o . Es sencillo chequear que estas partes son $\psi_a^0{}_0, \psi_a^1{}_1, \psi_a^2{}_2$ y $\psi_a^3{}_3$, las cuales transforman como

$$\psi_a^0{}_0 \rightarrow \psi_a^0{}_0 + 2w_0\Omega^{-1}\nabla_a\Omega + a^{-1}\nabla_a a, \quad (4.39)$$

$$\psi_a^1{}_1 \rightarrow \psi_a^1{}_1 + 2w_1\Omega^{-1}\nabla_a\Omega + a\nabla_a a^{-1}, \quad (4.40)$$

$$\psi_a^2{}_2 \rightarrow \psi_a^2{}_2 + \Omega^{-1}\nabla_a\Omega + z^{-1}\nabla_a z, \quad (4.41)$$

$$\psi_a^3{}_3 \rightarrow \psi_a^3{}_3 + \Omega^{-1}\nabla_a\Omega + z\nabla_a z^{-1}. \quad (4.42)$$

Por inspección de estos comportamientos, podemos aislar las partes que transforman sólo bajo cada subgrupo separado en el producto $G_o = \mathbb{R}^\times \times \text{U}(1) \times \mathbb{R}^+$; estas son $w_1\psi_a^0{}_0 - w_0\psi_a^1{}_1 =: K_a$ para \mathbb{R}^\times , $\frac{1}{2}(\psi_a^3{}_3 - \psi_a^2{}_2) =: L_a$ para $\text{U}(1)$, y $\frac{1}{2}(\psi_a^2{}_2 + \psi_a^3{}_3) = f_a$ para \mathbb{R}^+ , ya que se tiene

$$K_a \rightarrow K_a + a\nabla_a a^{-1}, \quad L_a \rightarrow L_a + z\nabla_a z^{-1}, \quad f_a \rightarrow f_a + \Omega\nabla_a\Omega^{-1}. \quad (4.43)$$

La forma de conexión en B es entonces $\psi_a = (K_a, L_a, f_a)$, y toma valores en el álgebra de Lie complexificada $\mathfrak{g}_o^{\mathbb{C}} = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Consideremos ahora una densidad tensorial conforme, y su proyección sobre la base $\{N_{\mathbf{a}}^a\}$ y su dual. Estas componentes, denotadas genéricamente como η , serán reescaladas bajo (4.38), esto es, forman representaciones $\Pi_{b,s,w} : G_o \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C})$ de G_o dadas por

$$\Pi_{b,s,w}(a, z, \Omega)\eta := a^b z^s \Omega^w \eta, \quad \eta \in \mathbb{C}, \quad (a, z, \Omega) \in G_o. \quad (4.44)$$

Decimos entonces que η tiene peso de boost b , peso de spin s , y peso conforme w . Como hemos visto, en el enfoque espinorial es más natural utilizar los pesos alternativos $\{p, q\}$ definidos por $b = (p + q)/2$, $s = (p - q)/2$, caso en el cual podemos denotar la representación (4.44) como $\Pi_{p,q,w}$. Diremos que estas cantidades son de tipo $\{w; p, q\}$. La representación asociada del álgebra de Lie es

$$\pi_{p,q,w}(x, y, v)\eta = (p\frac{(x+y)}{2} + q\frac{(x-y)}{2} + wv)\eta. \quad (4.45)$$

Para *campos* tensoriales (conformes), las componentes son secciones de los fibrados asociados

$$\mathbb{E}_{p,q}[w] := B \times_{\Pi_{p,q,w}} \mathbb{C}. \quad (4.46)$$

La derivada covariante en esta estructura es inducida por la forma de conexión ψ_a en B :

Lema 4.2.2. *La derivada covariante en los fibrados vectoriales asociados $\mathbb{E}_{p,q}[w]$ es*

$$\mathcal{D}_a \eta = \partial_a \eta + \pi_{p,q,w}(\psi_a)\eta. \quad (4.47)$$

Explícitamente, esto es

$$\mathcal{D}_a \eta = \partial_a \eta + w f_a \eta + p(\omega_a + B_a)\eta + q(\bar{\omega}_a + C_a)\eta, \quad (4.48)$$

donde ω_a es la forma de conexión GHP, y las 1-formas complejas B_a, C_a están definidas por

$$B_a := \frac{1}{2}(K_a + L_a) = w_1(\rho n_a - \tau \bar{m}_a) - w_0(\rho' \ell_a - \tau' m_a), \quad (4.49)$$

$$C_a := \frac{1}{2}(K_a - L_a) = w_1(\rho n_a - \tau' m_a) - w_0(\rho' \ell_a - \tau \bar{m}_a). \quad (4.50)$$

Demostración. Esto se deduce de nuestra discusión anterior, y de la fórmula general para la derivada covariante inducida sobre fibrados vectoriales asociados. \square

Observación 4.2.3 (La conexión de Teukolsky). *Elegir los pesos conformes $w_0 = 0$ y $w_1 = -1$ en (4.16). Entonces para cantidades con $w = 0$ y $q = 0$, Φ_a coincide exactamente con la derivada de Teukolsky. (Notemos que, ya que los campos en los que estamos interesados –i.e. $\varphi_{A_1\dots A_{2s}}$ – no tienen índices primados, no aparecerán cantidades con peso $q \neq 0$ en nuestras fórmulas.) Para peso conforme $w \neq 0$, escribiendo f_a en la forma (4.2) vemos que la derivada covariante (4.48) describe exactamente la combinación de derivadas de Teukolsky y diferentes potencias de $\Psi_2^{1/3}$ que aparecen en fórmulas que involucran ι^A , ver sección 4.4.2.*

De la discusión anterior deducimos entonces el origen de la derivada de Teukolsky:

Teorema 4.2.1. *La conexión de Teukolsky se origina en la derivada covariante naturalmente inducida sobre los fibrados vectoriales (4.46) asociados a representaciones de la simetría conforme-GHP.*

Una propiedad importante de (4.47) es la siguiente:

Proposición 4.2.2. Φ_a conmuta con la operación prima:

$$(\Phi_a \eta)' = \Phi_a \eta'. \quad (4.51)$$

Demostración. Si η es de tipo $\{w; p, q\}$, entonces η' es de tipo $\{w'; -p, -q\}$, donde w' está dado por $w' = w - (w_0 - w_1)(p + q)$. Usando que

$$B'_a = -(w_0 - w_1)f_a - B_a, \quad (4.52)$$

$$C'_a = -(w_0 - w_1)f_a - C_a, \quad (4.53)$$

el resultado sigue fácilmente calculando ambos lados de (4.51). \square

Como en el formalismo GHP usual, este resultado nos permite reducir a la mitad el número de cálculos. Por otro lado, Φ_a no conmuta con conjugación compleja. Esto está relacionado al hecho de que nuestro tratamiento es *quiral*, ver observación 4.2.1.

Para campos tensoriales/espinoriales con pesos conforme y GHP, debemos complementar Φ_a con los objetos (4.28) y (4.29) para lograr una derivada que sea covariante bajo ambos tipos de transformaciones. Definimos entonces una derivada covariante \mathcal{C}_a que actúa sobre un vector v^b y un espinor κ^B , ambos con peso conforme w y tipo GHP $\{p, q\}$, como

$$\mathcal{C}_a v^b = \nabla_a v^b + [w f_a + p(\omega_a + B_a) + q(\bar{\omega}_a + C_a)]v^b, \quad (4.54)$$

$$\mathcal{C}_a \kappa^B = \nabla_a \kappa^B + [w f_a + p(\omega_a + B_a) + q(\bar{\omega}_a + C_a)]\kappa^B. \quad (4.55)$$

La extensión a otros tipos de campos con una estructura de índices arbitraria se deduce fácilmente, usando por ejemplo (4.17) y (4.20) (donde, naturalmente, debemos hacer los reemplazos $\nabla_a \rightarrow \Phi_a$, $K_a{}^b{}_c \rightarrow Q_a{}^b{}_c$, $\Lambda_{aC}{}^B \rightarrow W_{aC}{}^B$ y $\bar{\Lambda}_{aC}{}^B \rightarrow \bar{W}_{aC}{}^B$). Puede chequearse entonces que bajo transformaciones conformes y GHP, para un campo tensorial/espinorial Ψ arbitrario de tipo $\{w; p, q\}$, tenemos

$$\mathcal{C}_a \Psi \rightarrow \Omega^w \lambda^p \bar{\lambda}^q \mathcal{C}_a \Psi. \quad (4.56)$$

La proyección de \mathcal{C}_a sobre una tetra nula define derivadas direccionales GHP conformemente covariantes:

$$\mathfrak{p}_\mathcal{C} := \ell^a \mathcal{C}_a, \quad \mathfrak{p}'_\mathcal{C} := n^a \mathcal{C}_a, \quad \mathfrak{d}_\mathcal{C} := m^a \mathcal{C}_a, \quad \mathfrak{d}'_\mathcal{C} := \bar{m}^a \mathcal{C}_a. \quad (4.57)$$

Enfatizamos que estos operadores actúan sobre densidades conformes *tensoriales/espinoriales* arbitrarias. Para el caso particular de una densidad conforme *escalar* η de tipo $\{w; p, q\}$, tenemos

$$\mathfrak{p}_\mathcal{C} \eta = [\mathfrak{p} + (w + (p + q)w_1)\rho]\eta, \quad (4.58)$$

$$\mathfrak{p}'_\mathcal{C} \eta = [\mathfrak{p}' + (w - (p + q)w_0)\rho']\eta, \quad (4.59)$$

$$\mathfrak{d}_\mathcal{C} \eta = [\mathfrak{d} + (w + pw_1 - qw_0)\tau]\eta, \quad (4.60)$$

$$\mathfrak{d}'_\mathcal{C} \eta = [\mathfrak{d}' + (w - pw_0 + qw_1)\tau']\eta, \quad (4.61)$$

de este modo recuperamos los objetos definidos por Penrose y Rindler en [110, sección 5.6] (ver ecuaciones (5.6.36) en esta referencia).

4.2.4. Espinores paralelos y de Killing con peso

Como hemos visto, la estructura casi-compleja (4.33) de espacio-tiempos tipo D determina una única conexión de Weyl para la estructura conforme, y por lo tanto tenemos una derivada covariante naturalmente inducida en fibrados tensoriales/espinoriales pesados. Esto nos conduce a una generalización con significado geométrico de algunas ecuaciones diferenciales interesantes; por ejemplo, obtenemos naturalmente la noción de un *espinor de Killing con peso* como un elemento $\omega^{A_1 \dots A_n}$ de $\mathbb{S}_{\{p, q\}}^{A_1 \dots A_n}[w]$ que satisface la ecuación

$$\mathcal{C}_{A'}^{(A} \omega^{B_1 \dots B_n)} = 0. \quad (4.62)$$

Una condición más fuerte es la de *espinor paralelo*, i.e. una solución de

$$\mathcal{C}_a \omega^{B_1 \dots B_n} = 0. \quad (4.63)$$

Tenemos:

Lema 4.2.3. *Sea $(\mathcal{M}, [g_{ab}], J)$ la variedad conforme casi-Hermítica asociada a un espacio-tiempo Einstein (\mathcal{M}, g_{ab}) , donde J está dada por (4.33) para un par de direcciones nulas $\{o^A, \iota^A\}$ arbitrariamente elegidas, con $o^A \in \mathbb{S}_{\{1, 0\}}^A[w_0]$, $\iota^A \in \mathbb{S}_{\{-1, 0\}}^A[w_1]$ y $o_A \iota^A = 1$. Entonces las siguientes dos son equivalentes:*

- (i) El espacio-tiempo es algebraicamente especial, con dirección principal nula o^A .
- (ii) El espinor o^A es paralelo con respecto a la derivada covariante naturalmente inducida, es decir $\mathcal{C}_a o^B = 0$.

En particular, el espacio-tiempo es tipo Petrov D si y sólo si ambos espinores son paralelos, $\mathcal{C}_a o^B = 0 = \mathcal{C}_a \iota^B$.

Demostración. Un cálculo sencillo muestra que (para cualesquiera pesos conformes w_0, w_1 en (4.16))

$$\mathcal{C}_a o^B = (-\kappa n_a + \sigma \bar{m}_a) \iota^B. \quad (4.64)$$

Por el teorema de Goldberg-Sachs, especialidad algebraica es equivalente a $\kappa = \sigma = 0$, por lo tanto obtenemos el resultado (i) \Leftrightarrow (ii). Ya que \mathcal{C}_a conmuta con la operación prima, vemos inmediatamente que también tenemos $\mathcal{C}_a \iota^B = 0$ para un espacio-tiempo tipo D, y que, a la inversa, si $\mathcal{C}_a o^B = 0 = \mathcal{C}_a \iota^B$, entonces el espacio es tipo D. \square

Observación 4.2.4. Es importante notar que, ya que \mathcal{C}_a no conmuta con conjugación compleja, la condición $\mathcal{C}_a o^B = 0$ no implica $\mathcal{C}_a \bar{o}^{B'} = 0$; de hecho en general tenemos $\mathcal{C}_a \bar{o}^{B'} \neq 0$:

$$\mathcal{C}_a \bar{o}^{B'} = [-\bar{\kappa} n_a + \bar{\sigma} m_a + (\tau' - \bar{\tau}) \ell_a + (\bar{\rho} - \rho) \bar{m}_a] \bar{\iota}^{B'}. \quad (4.65)$$

Una vez más, este es un reflejo de la quiralidad de nuestro tratamiento, ver observación 4.2.1.

El resultado del Lema 4.2.3 explica las ecuaciones de espinores de Killing modificados del lema 4.1.1: en un espacio-tiempo tipo D, por la observación 4.2.2 podemos escribir la 1-forma f_a como (4.2), y recordando la definición de la derivada de Teukolsky, una cuenta sencilla muestra que

$$\mathcal{C}_{A'}^{(A} o^{B)} = \Psi_2^{-w_0/3} D_{A'}^{(A} [\Psi_2^{w_0/3} o^{B)}], \quad (4.66)$$

$$\mathcal{C}_{A'}^{(A} \iota^{B)} = \Psi_2^{-w_1/3} D_{A'}^{(A} [\Psi_2^{w_1/3} \iota^{B)}]. \quad (4.67)$$

Eligiendo $w_0 = 0$, $w_1 = -1$, obtenemos inmediatamente el lema 4.1.1 en un espacio-tiempo tipo D. Notemos que, en particular, la ecuación $\mathcal{C}_a[o^B \iota^C] = 0$ da el espinor de Killing ordinario de los espacios tipo D.

Para la versión tensorial de estos resultados, consideremos las 2-formas anti-auto-duales definidas por $X_{ab}^+ := o_A o_B \bar{\epsilon}_{A'B'}$, $X_{ab}^0 := 2o_{(A} \iota_{B)} \bar{\epsilon}_{A'B'}$ y $X_{ab}^- := \iota_A \iota_B \bar{\epsilon}_{A'B'}$. Es sencillo mostrar que

$$\mathcal{C}_a X_{bc}^+ = 3\zeta_a^+ X_{bc}^0, \quad (4.68)$$

$$\mathcal{C}_a X_{bc}^0 = 6(\zeta_a^+ X_{bc}^- + \zeta_a^- X_{bc}^+), \quad (4.69)$$

$$\mathcal{C}_a X_{bc}^- = 3\zeta_a^- X_{bc}^0, \quad (4.70)$$

donde

$$\zeta_a^+ = \frac{1}{3}\mathcal{C}^b X_{ba}^+ = \frac{1}{3}(-\kappa n_a + \sigma \bar{m}_a), \quad \zeta_a^- = \frac{1}{3}\mathcal{C}^b X_{ba}^- = \frac{1}{3}(-\kappa' \ell_a + \sigma' m_a). \quad (4.71)$$

(Se tiene también $\zeta_a^0 = \frac{1}{3}\mathcal{C}^b X_{ba}^0 \equiv 0$.) De estas expresiones vemos que X_{ab}^\pm será paralelo con respecto a \mathcal{C}_a si y sólo si $\zeta_a^\pm = 0$, esto es, si y sólo el espacio-tiempo es algebraicamente especial. Por su parte, X_{ab}^0 será paralelo si y sólo si el espacio-tiempo es tipo Petrov D, caso en el cual X_{ab}^+ y X_{ab}^- son también paralelos. Por supuesto, si los tensores anteriores son paralelos entonces son también tensores de Killing-Yano con respecto a \mathcal{C}_a . (Por otro lado, el resultado del lema 4.1.2 no entra en esta explicación simplemente porque \mathcal{C}_a no conmuta con conjugación compleja; pero esto no es relevante porque los objetos del lema 4.1.2 no aparecen en la identidad (4.1) que nos interesa.)

4.3. Twistors locales con peso

La idea de considerar twistors en esta tesis surgió básicamente de dos observaciones: (i) los mapas entre campos escalares y campos de spin superior, y (ii) las generalizaciones de la ecuación de twistor (2.103) y su relación con espinores de Killing. Los desarrollos que hemos hecho hasta ahora en este capítulo sugieren una razón adicional, que se relaciona al hecho de que los twistors son objetos asociados a la estructura conforme de una variedad.

En general, un marco de trabajo útil para tratar con geometría conforme es el *formalismo de tractors*, ver e.g. [30]. Cuando se especializa a geometría espinorial conforme en 4 dimensiones, los tractors se convierten en el formalismo de *twistors locales*, que es una posible generalización de la teoría original de twistors a espacio-tiempos curvos, ver por ej. [114, 45, 106] y [111, sección 6.9]. En esta sección mostraremos que la conexión de Weyl distinguida de espacios (conformes) tipo D nos permite construir naturalmente un formalismo de *twistors locales con peso*, lo cual nos conduce a su vez a una re-derivación del concepto de espinor de Killing con peso que vimos antes.

Un twistor local puede representarse como un par de espinores $Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$ tal que bajo una transformación conforme, el twistor local es en sí mismo invariante, pero su representación en partes espinoriales cambia de acuerdo a

$$\widehat{\omega}^A = \omega^A, \quad (4.72)$$

$$\widehat{\pi}_{A'} = \pi_{A'} + i\Upsilon_{AA'}\omega^A. \quad (4.73)$$

Esto es usualmente descripto mediante la secuencia exacta⁵

$$0 \rightarrow \mathbb{S}_{A'} \rightarrow \mathbb{T}^\alpha \rightarrow \mathbb{S}^A \rightarrow 0, \quad (4.74)$$

⁵recordamos que una *secuencia exacta* es una secuencia de mapas entre espacios vectoriales $\dots \rightarrow A_1 \xrightarrow{a_1} A_2 \xrightarrow{a_2} A_3 \rightarrow \dots$ tales que $\text{im } a_i = \text{ker } a_{i+1}$.

donde \mathbb{T}^α es el espacio de twistors locales⁶, y los mapas segundo y tercero están dados respectivamente por $\pi_{A'} \mapsto (0, \pi_{A'})$ y $(\omega^A, \pi_{A'}) \mapsto \omega^A$. La secuencia es entonces conformemente invariante. El mapa canónico entre \mathbb{T}^α y su dual \mathbb{T}_α está dado por conjugación compleja, $Z^\alpha \mapsto \bar{Z}_\alpha := H_{\alpha'\alpha} \bar{Z}^{\alpha'} = (\bar{\pi}_A, \bar{\omega}^{A'})$, donde $H_{\alpha'\alpha}$ es una forma hermítica de signatura $(++--)$. (De esta fórmula se deduce también el comportamiento conforme de un twistor local dual $W_\alpha \in \mathbb{T}_\alpha$.) El espacio \mathbb{T}^α es entonces un fibrado vectorial sobre \mathcal{M} con grupo de estructura $SU(2, 2)$, y está equipado con una conexión conformemente invariante llamada ‘transporte de twistors locales’ (*local twistor transport*), dada por

$${}^T\nabla_a Z^\beta := (\nabla_a \omega^B + i\epsilon_A{}^B \pi_{A'}, \nabla_a \pi_{B'} + iP_{AA'CB'} \omega^C), \quad (4.75)$$

donde $P_{AA'BB'}$ es el tensor de Schouten (4.24). Un *twistor global* es uno tal que es paralelo bajo (4.75), y en tal caso coincide con el concepto usual de twistor en un espacio-tiempo (conformemente) plano. La *parte espinorial primaria* (i.e. la parte espinorial con todos los índices en la posición superior) de un twistor global es un espinor de Killing: $\nabla_{A'A} \omega^B = -i\epsilon_A{}^B \pi_{A'}$.

Una secuencia exacta análoga a (4.74) pero con las flechas en la dirección opuesta puede obtenerse por medio de la 1-forma (4.34). Esto es porque (4.34) permite una inyección natural de \mathbb{S}^A en el espacio de twistors locales, por medio del mapeo de un campo espinorial ω^A (con peso conforme cero) a $(\omega^A, \alpha_{A'})$, donde $\alpha_{A'} = -if_{AA'} \omega^A$. En otras palabras:

Lema 4.3.1. *La siguiente es una secuencia exacta:*

$$0 \rightarrow \mathbb{S}^A \rightarrow \mathbb{T}^\alpha \rightarrow \mathbb{S}_{A'} \rightarrow 0, \quad (4.76)$$

donde los mapas segundo y tercero están definidos respectivamente por $\omega^A \mapsto (\omega^A, \alpha_{A'})$ y $(\omega^A, \pi_{A'}) \mapsto \pi_{A'} + if_{AA'} \omega^A$.

La prueba de este lema no es difícil. Su utilidad es que nos conduce naturalmente a introducir el concepto de *twistors locales con peso conforme y GHP*, como vemos a continuación. Consideremos una diada de spin $\{o^A, \iota^A\}$, y elijamos los pesos conformes $w_0 = 0$ y $w_1 = -1$ en (4.16). Via (4.76), tenemos el twistor local $X^\alpha = (o^A, \alpha_{A'})$. Por otro lado, el par $Y^\alpha = (\iota^A, \beta_{A'})$, donde $\beta_{A'} := -if_{AA'} \iota^A$, es un twistor local conformemente pesado, con peso conforme $w = -1$, i.e. una sección de $\mathbb{T}^\alpha \otimes \mathcal{E}[-1]$. Pero notemos que X^α y Y^α tienen también peso GHP: X^α es tipo GHP $\{1, 0\}$ e Y^α es tipo $\{-1, 0\}$.

Diremos que Z^α es un *twistor local con peso* si, bajo transformaciones conformes y GHP, cambia como $Z^\alpha \rightarrow \Omega^w Z^\alpha$ y $Z^\alpha \rightarrow \lambda^p \bar{\lambda}^q Z^\alpha$ respectivamente. En la representación espinorial $Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$, ambas partes espinoriales tienen tipo GHP $\{p, q\}$, y su comportamiento conforme es $\hat{\omega}^A = \Omega^w \omega^A$, $\hat{\pi}_{A'} = \Omega^w (\pi_{A'} + i\Upsilon_{AA'} \omega^A)$. El conjunto de twistors locales con peso puede entonces ser identificado con el fibrado vectorial $\mathbb{T}_{\{p,q\}}^\alpha[w] := \mathbb{T}^\alpha \otimes \mathbb{E}_{\{p,q\}}[w]$. Podemos construir una conexión en esta estructura por medio de la combinación entre el transporte de twistors locales usuales (4.75) y la derivada

⁶Letras griegas $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ denotan índices twistoriales, y toman valores en $\{0, 1, 2, 3\}$.

covariante (4.48), extendida para actuar ‘trivialmente’ en índices espinoriales. Más precisamente, definimos

$${}^{\tau}\mathcal{C}_a Z^\beta := (\phi_a \omega^B + i\epsilon_A{}^B \pi_{A'}, \phi_a \pi_{B'} + iP_{AA'CB'} \omega^C). \quad (4.77)$$

En esta expresión, tenemos⁷ $\phi_a \omega^B = \nabla_a \omega^B + w f_a \omega^B + p(\omega_a + B_a) \omega^B + q(\bar{\omega}_a + C_a) \omega^B$, y análogamente para $\phi_a \pi_{B'}$. Uno puede entonces chequear que ${}^{\tau}\mathcal{C}_a Z^\beta$ es de nuevo un twistor local pesado, con peso conforme w y tipo GHP $\{p, q\}$; por lo tanto (4.77) da una conexión en $\mathbb{T}_{\{p, q\}}^\alpha[w]$. En este contexto, por analogía con el caso plano podemos definir un twistor *global* con peso como uno tal que es paralelo bajo (4.77). Esto conduce a la definición de un espinor de Killing con peso como la parte espinorial primaria de un twistor global con peso:

$$\phi_{A'} \omega^B = -i\epsilon_A{}^B \pi_{A'}. \quad (4.78)$$

La generalización de esta ecuación es

$$\phi_{A'}^{(A} \omega^{B_1 \dots B_n)} = 0. \quad (4.79)$$

Puede chequearse fácilmente que $\phi_{A'}^{(A} \omega^{B_1 \dots B_n)} = \mathcal{C}_{A'}^{(A} \omega^{B_1 \dots B_n)}$, por lo tanto esta definición coincide con la que dimos previamente en (4.62) (para que esto valga, la simetrización es crucial).

4.4. Campos sin masa

El concepto de *masa* en Física es extremadamente sutil (como lo es, de hecho, cualquier concepto fundamental). Es importante aclarar que nos referiremos aquí a la *masa en reposo*, no a la masa-energía asociada a la energía cinética de un sistema físico. En un espacio-tiempo plano, vimos en la sección 2.5.1 que, partiendo de ciertos axiomas fundamentales, un estado físico tiene asociada una noción de ‘masa’ como el autovalor del operador de Casimir \mathcal{P}^2 en una representación irreducible del grupo de Poincaré, lo que físicamente se asocia a la invariancia del espacio-tiempo ante traslaciones. En un espacio-tiempo curvo genérico no existen simetrías, por lo que esta definición no tiene sentido, de modo que la ‘masa en reposo’ de un campo parece ser simplemente una extrapolación formal del parámetro que aparece en el caso plano.

No obstante, es posible hacer algunas observaciones adicionales por medio de ciertos argumentos heurísticos, que utilizan la relación entre masa e invariancia conforme. En primer lugar, relaciones entre masa y escala pueden obtenerse por consideraciones dimensionales, algo que es muy bien sabido en la física de partículas. Las unidades fundamentales para medir cantidades en Física son masa M , tiempo T y longitud L . En Relatividad General, las constantes fundamentales son la velocidad de la luz c , cuyas unidades son L/T , y la constante de la gravitación universal G , que tiene unidades de L^3/MT^2 . El cociente G/c^2 es, obviamente, también constante, y tiene unidades de L/M . Esto implica que masa y longitud están intrínsecamente asociadas, ya que

⁷no confundir el espinor ω^A con la forma de conexión GHP ω_a .

toda masa determina (via dicha constante) una longitud, y viceversa. Considerando una teoría de campos en el marco de la Relatividad General, si las ecuaciones poseen invariancia conforme entonces el sistema no tiene una longitud intrínseca asociada, de manera que tampoco puede haber una masa intrínseca.

En nuestro caso de interés, las ecuaciones de campo (3.1) son, efectivamente, conformemente invariantes, ya que asumiendo que el campo $\varphi_{A_1 \dots A_n}$ tiene peso conforme $w = -1$, es sencillo probar que

$$\widehat{\nabla}^{A_1 A'_1} \widehat{\varphi}_{A_1 \dots A_n} = \Omega^{-3} \nabla^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_n} \quad (4.80)$$

(y lo mismo para las ecuaciones de helicidad derecha (3.2)). Esto implica que cualquier solución de $\nabla^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_n} = 0$ en (\mathcal{M}, g_{ab}) nos da automáticamente una solución en $(\mathcal{M}, \widehat{g}_{ab})$. Desde el punto de vista físico, ejemplos particulares de esta invariancia son los campos de Maxwell y de Weyl-Dirac. Por otro lado, es notable la diferencia con el caso de gravedad, ya que aún cuando la identidad de Bianchi en vacío implica que el espinor de curvatura de Weyl satisface $\nabla^{AA'} \Psi_{ABCD} = 0$, el comportamiento conforme (4.23) de Ψ_{ABCD} implica a su vez que (4.80) *no se cumple* para $\varphi_{ABCD} = \Psi_{ABCD}$. Esto está relacionado al hecho de que las ecuaciones de Einstein no son conformemente invariantes; ver [111, sección 6.8]. En lo que sigue, esta cuestión nos llevará a pensar más en profundo a qué nos referimos por un “campo libre sin masa de spin 2” que se propaga en un espacio-tiempo curvo de background.

4.4.1. Identidades conformemente covariantes

Queremos ahora encontrar identidades conformemente covariantes para campos sin masa que se propagan en un espacio-tiempo curvo de background, y su posible relación con las identidades (4.1).

Sea $\varphi_{A_1 \dots A_n}$ un campo espinorial simétrico arbitrario con peso conforme -1 y tipo GHP $\{0, 0\}$. Recordando la definición de la derivada covariante conforme (4.30), para cualquier 1-forma f_a asociada a una conexión de Weyl tenemos

$$\nabla^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_n} = \mathcal{C}^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_n}. \quad (4.81)$$

De ahora en más usaremos la 1-forma f_a dada por (4.34). La operación más simple que podemos efectuar sobre $\mathcal{C}^{A_1 A'_1} \varphi_{A_1 \dots A_n}$ para lograr un operador diferencial de segundo orden, con n índices no-primados totalmente simétricos, y que mantenga la covariancia conforme, es simplemente tomar una derivada adicional:

$$\mathcal{C}_{A'_1 (A_1} \mathcal{C}^{A'_1 B} \varphi_{A_2 \dots A_n) B}. \quad (4.82)$$

Ya que estamos interesados en ecuaciones de tipo onda para las componentes de $\varphi_{A_1 \dots A_n}$, es útil reescribir esto en términos del operador de onda natural asociado a \mathcal{C}_a (el cual, por supuesto, será covariante bajo transformaciones conformes y GHP), dado por

$$\square_{\{w;p,q\}} := g^{ab} \mathcal{C}_a \mathcal{C}_b. \quad (4.83)$$

Es tedioso pero sencillo probar que, en un espacio-tiempo arbitrario, tenemos

$$2\mathcal{C}_{A'_1(A_1}\mathcal{C}^{A_1B}\varphi_{A_2\dots A_n)B} = (\square_{\{-1;0,0\}} - (n+2)\Psi_2 + n\zeta)\varphi_{A_1\dots A_n} \\ - n\mu_{(A_1}{}^B\varphi_{A_2\dots A_n)B} - 2(n-1)\Psi_{(A_1A_2}{}^{BC}\varphi_{A_3\dots A_n)BC}, \quad (4.84)$$

donde hemos definido

$$\zeta := \sigma\sigma' - \kappa\kappa', \quad (4.85)$$

$$\mu_{AB} := \chi\iota_A\iota_B - \chi'o_Ao_B, \quad (4.86)$$

$$\chi := (\mathfrak{b}' + 2\rho' - \bar{\rho}')\kappa - (\delta' + 2\tau' - \bar{\tau})\sigma + 2\Psi_1. \quad (4.87)$$

Deseamos ahora obtener ecuaciones para las componentes de $\varphi_{A_1\dots A_n}$ en una diada de spin $\{o^A, \iota^A\}$ arbitraria, donde elegimos los pesos conformes $w_0 = 0$ y $w_1 = -1$ (con respecto a (4.16)). Definimos las componentes como

$$\varphi_k := \varphi_{A_1\dots A_k A_{k+1}\dots A_n} \iota^{A_1}\dots\iota^{A_k} o^{A_{k+1}}\dots o^{A_n}. \quad (4.88)$$

El peso conforme de φ_k es $w = -1 - k$, y su tipo GHP es $\{n - 2k, 0\}$. Consideremos el caso de peso extremo; en particular la componente φ_0 . Definiendo $o^{A_1\dots A_n} = o^{A_1}\dots o^{A_n}$, y proyectando sobre $o^{A_1\dots A_n}$, obtenemos

$$2o^{A_1\dots A_n}\mathcal{C}_{A'_1(A_1}\mathcal{C}^{A_1B}\varphi_{A_2\dots A_n)B} = (\square_{\{-1;n,0\}} - 3n\Psi_2)\varphi_0 + F_n[\varphi_1] + G_n[\varphi_2], \quad (4.89)$$

donde

$$F_n[\varphi_1] = -2n(-\kappa\mathfrak{b}'_{\mathcal{C}} + \sigma\delta'_{\mathcal{C}} - \chi - \Psi_1)\varphi_1 - 4\Psi_1\varphi_1, \quad (4.90)$$

$$G_n[\varphi_2] = -2(n-1)\Psi_0\varphi_2. \quad (4.91)$$

Ahora, imponiendo las ecuaciones de campo $\mathcal{C}^{A'_1 A_1}\varphi_{A_1\dots A_n} = 0$, y asumiendo que las componentes φ_1 y φ_2 son arbitrarias, vemos que φ_0 satisface una ecuación desacoplada si y sólo si $\kappa = \sigma = \Psi_0 = \Psi_1 = 0$, esto es, *si y sólo si el espacio-tiempo es algebraicamente especial*, con o^A alineado a la dirección principal nula. La ecuación desacoplada en tal caso es

$$(\square_{\{-1;n,0\}} - 3n\Psi_2)\varphi_0 = 0. \quad (4.92)$$

Observación 4.4.1. *Notemos que la condición $\kappa = \sigma = \Psi_0 = \Psi_1 = 0$ impuesta sobre el espacio-tiempo está bien definida en la clase conforme, ya que tanto los coeficientes de spin κ y σ como los escalares de Weyl son densidades conformes, de modo que dicha condición se extiende a todas las métricas en la clase conforme. Notemos también que este es sólo otro modo de decir que la especialidad algebraica de un espacio-tiempo es común a toda la clase conforme.*

Por otro lado, ya que la derivada covariante generalizada \mathcal{C}_a conmuta con la operación prima, de (4.89) deducimos inmediatamente la identidad para la componente con peso extremo opuesto:

$$2\iota^{A_1\dots A_n}\mathcal{C}_{A'_1(A_1}\mathcal{C}^{A_1B}\varphi_{A_2\dots A_n)B} = (\square_{\{-n-1;-n,0\}} - 3n\Psi_2)\varphi_n + F'_n[\varphi_{n-1}] + G'_n[\varphi_{n-2}]. \quad (4.93)$$

Vemos entonces que ambas componentes extremas, φ_0 y φ_n , satisfacen ecuaciones desacopladas si y sólo si se cumple $\kappa = \sigma = \kappa' = \sigma' = \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$, esto es, *si y sólo si el espacio-tiempo es tipo Petrov D*.

Toda la discusión anterior es para campos de spin arbitrario. Por supuesto, como hemos venido diciendo a lo largo de la tesis, los casos de interés en un espacio-tiempo curvo son spin 1/2, 1 y 2. Veamos ahora un poco más en detalle estos casos.

Spin $\mathfrak{s} = 1/2$

Los resultados recién descriptos aplican directamente. En particular, tenemos las identidades válidas en un espacio-tiempo arbitrario:

$$2 o^A \mathcal{C}_{A'A} \mathcal{C}^{A'B} \varphi_B = (\square_{\{-1;1,0\}} - 3\Psi_2) \varphi_0 + F_1[\varphi_1], \quad (4.94)$$

$$2 \iota^A \mathcal{C}_{A'A} \mathcal{C}^{A'B} \varphi_B = (\square_{\{-2;-1,0\}} - 3\Psi_2) \varphi_1 + F'_1[\varphi_0]. \quad (4.95)$$

La componente extrema $\varphi_0 = o^A \varphi_A$ de un campo de Weyl-Dirac arbitrario satisface una ecuación desacoplada de tipo onda si y sólo si el espacio-tiempo es algebraicamente especial, con PND alineada a o^A . Ambas componentes se desacoplan si y sólo si el espacio-tiempo es tipo Petrov D.

Spin $\mathfrak{s} = 1$

Para $\mathfrak{s} = 1$ los resultados anteriores también aplican de manera directa. Además de los casos de peso extremo, debemos agregar la identidad para peso de spin cero; que se calcula similarmente a (4.89). Para un espacio-tiempo arbitrario, tenemos las identidades siguientes:

$$2 o^{AB} \mathcal{C}_{A'(A} \mathcal{C}^{A'C} \varphi_{B)C} = (\square_{\{-1;2,0\}} - 6\Psi_2) \varphi_0 + F_2[\varphi_1] + G_2[\varphi_2], \quad (4.96)$$

$$2 o^A \iota^B \mathcal{C}_{A'(A} \mathcal{C}^{A'C} \varphi_{B)C} = (\square_{\{-2;0,0\}} - 2\zeta) \varphi_1 + H_2[\varphi_2] + H'_2[\varphi_0], \quad (4.97)$$

$$2 \iota^{AB} \mathcal{C}_{A'(A} \mathcal{C}^{A'C} \varphi_{B)C} = (\square_{\{-3;-2,0\}} - 6\Psi_2) \varphi_2 + F'_2[\varphi_1] + G'_2[\varphi_0], \quad (4.98)$$

donde definimos $H_2[\varphi_2] := 2(\kappa)'\delta'_\ell - \sigma\delta'_\ell + \chi - 2\Psi_1)\varphi_2$. Análogamente al caso de spin $\mathfrak{s} = 1/2$, la componente extrema de un campo de Maxwell genérico se desacopla si y sólo si el espacio-tiempo es algebraicamente especial. La componente con peso de spin cero, por otro lado, se desacopla si y sólo si el espacio-tiempo es tipo Petrov D.

Spin $\mathfrak{s} = 2$

Este caso es mucho más sutil que los anteriores, debido a que si pensamos describir los “campos libres sin masa de spin 2 que se propagan en un espacio-tiempo curvo de background”, como perturbaciones del espinor de curvatura de Weyl, entonces la descripción conformemente covariante que hicimos no aplica, ya que Ψ_{ABCD} tiene peso conforme $w = 0$, y debería tener $w = -1$ para que las fórmulas (4.89), etc. sean válidas. Esto sugiere que describamos los campos deseados a partir de un *espinor de Weyl reescalado*, que definimos

del modo siguiente. Dada la clase conforme $[g_{ab}]$ asociada a g_{ab} , para un representante arbitrario $[g_{ab}] \ni \hat{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ introducimos

$$\varphi_{ABCD} := \Omega^{-1} \Psi_{ABCD}. \quad (4.99)$$

Este objeto tiene peso conforme $w = -1$, y es de hecho muy utilizado en estudios de aspectos conformes de las ecuaciones de Einstein y del análisis del infinito en Relatividad General, ver por ejemplo [64], [111, secciones 9.6 y 9.7] y [130, cap. 8 y 10]. Esto tiene que ver con el hecho de que el tensor de Weyl se anula en la frontera conforme de un espacio-tiempo asintóticamente simple, lo que dio lugar a un concepto extremadamente importante en el análisis de la estructura asintótica del campo gravitacional: la propiedad de *peeling*, que es una descripción precisa del decaimiento asintótico del tensor de Weyl (o más en general de un campo libre sin masa). De hecho, siguiendo de cerca [111], podemos pensar en (4.99) como el “campo de spin 2 gravitacional” (ver discusión en torno a la ec. (9.6.40) y el teorema (9.6.41) en [111]), en el sentido de que la propiedad de *peeling* permite interpretar a las componentes de (4.99) como describiendo el campo de radiación gravitacional cerca del infinito conforme en un espacio-tiempo asintóticamente simple ([111, ec. (9.7.38)]).

Ahora debemos combinar el análisis anterior con las familias monoparamétricas de variedades que uno considera al estudiar perturbaciones gravitacionales. Sea entonces $(\mathcal{M}, g_{ab}(\varepsilon))$ una familia monoparamétrica de espacio-tiempos. Consideremos la clase conforme de $g_{ab}(\varepsilon)$, denotada $[g_{ab}(\varepsilon)]$, donde $\hat{g}_{ab}(\varepsilon) \in [g_{ab}(\varepsilon)]$ si y sólo si existe $\Omega(\varepsilon) > 0$ tal que $\hat{g}_{ab}(\varepsilon) = \Omega^2(\varepsilon)g_{ab}(\varepsilon)$. Notemos que estamos imponiendo que el factor conforme dependa del parámetro ε ; en particular, tomaremos $\Omega(0) \equiv \dot{\Omega} = \text{const.}$ (esta suposición es para poder conectar con las ecuaciones de campo para φ_{ABCD}). Para un representante arbitrario en $[g_{ab}(\varepsilon)]$, tenemos $\varphi_{ABCD}(\varepsilon) = \Omega^{-1}(\varepsilon)\Psi_{ABCD}(\varepsilon)$. En lo que sigue, como hemos hecho hasta ahora, cantidades linealizadas serán denotadas con un punto, y por simplicidad omitiremos la evaluación explícita en cero de cantidades del background (esto es, $\dot{\varphi}_i \equiv \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\varphi_i(\varepsilon)$ y $\varphi_i \equiv \varphi_i(0)$, etc.). Linealizando la ecuación (4.89) para $n = 4$, encontramos

$$\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\{2 \sigma^{ABCD}\mathcal{C}_{A'(A}\mathcal{C}^{A'E}\varphi_{BCD)E}\} = (\square_{\{-1;4,0\}} - 18\Psi_2)\dot{\varphi}_0 + \dot{B}_0, \quad (4.100)$$

donde

$$\dot{B}_0 = (\dot{\square}_{\{-1;4,0\}} - 12\dot{\Psi}_2)\varphi_0 - 6\Psi_0\dot{\varphi}_2 + \dot{F}_4. \quad (4.101)$$

Ahora, como hemos visto, las ecuaciones de campo que describen perturbaciones gravitacionales son las ecuaciones linealizadas de Einstein en vacío con constante cosmológica, que implican las identidades de Bianchi linealizadas $\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}(\nabla^{A'A}\Psi_{ABCD}) = 0$. Reemplazando φ_{ABCD} por $\Omega^{-1}\Psi_{ABCD}$ en el lado izquierdo de (4.100) e imponiendo las ecuaciones de campo recién mencionadas, luego de algunos cálculos tediosos encontramos que $\dot{\varphi}_0$ satisface una ecuación desacoplada si y sólo si $\kappa = \sigma = \Psi_0 = \Psi_1 = 0$, esto es, si y sólo si el espacio-tiempo de background es algebraicamente especial, con PND alineada a σ^A . Notar que en tal caso tenemos $\dot{\varphi}_0 = \dot{\Omega}^{-1}\dot{\Psi}_0$. Similarmente, para la

componente con peso extremo opuesto, $\dot{\varphi}_4$, tenemos

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\{2\iota^{ABCD}\mathcal{C}_{A'(A}\mathcal{C}^{A'E}\varphi_{BCD)E}\}=(\square_{\{-5;-4,0\}}-18\Psi_2)\dot{\varphi}_4+\dot{B}_4, \quad (4.102)$$

donde $\dot{B}_4=(\dot{B}_0)'$. Imponiendo las ecuaciones de campo y utilizando la forma explícita de \dot{B}_4 , vemos entonces que ambas componentes extremas, $\dot{\varphi}_0$ y $\dot{\varphi}_4$, satisfacen simultáneamente ecuaciones desacopladas si y sólo si se cumple $\kappa=\sigma=\kappa'=\sigma'=\Psi_0=\Psi_1=\Psi_3=\Psi_4=0$, i.e. si y sólo el espacio-tiempo de background es tipo Petrov D. En este caso tendremos $\dot{\varphi}_0=\dot{\Omega}^{-1}\dot{\Psi}_0$ y $\dot{\varphi}_4=\dot{\Omega}^{-1}\dot{\Psi}_4$.

Finalmente, veamos la componente con peso de spin cero, φ_2 . Una cuenta similar a (4.89) conduce al siguiente resultado en un espacio-tiempo genérico:

$$2o^{AB}\iota^{CD}\mathcal{C}_{A'(A}\mathcal{C}^{A'E}\varphi_{BCD)E}=\square_{\{-3;0,0\}}\varphi_2+B_2, \quad (4.103)$$

donde

$$\begin{aligned} B_2 = & -(\kappa\mathfrak{p}'_{\mathcal{E}}-\sigma\delta'_{\mathcal{E}}-4\chi+16\Psi_1)\varphi_3-(\kappa'\mathfrak{p}_{\mathcal{E}}-\sigma'\delta_{\mathcal{E}}-4\chi'+16\Psi_3)\varphi_1 \\ & -8\zeta\varphi_2-6(\Psi_0\varphi_4+\Psi_4\varphi_0). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Linealizando la ecuación (4.103), el único caso interesante que encontramos es cuando el espacio-tiempo de background es tipo Petrov D, donde se cumple

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\{2o^{AB}\iota^{CD}\mathcal{C}_{A'(A}\mathcal{C}^{A'E}\varphi_{BCD)E}\}=\square_{\{-3;0,0\}}\dot{\varphi}_2+\dot{\square}_{\{-3;0,0\}}\varphi_2. \quad (4.105)$$

Ahora, es importante notar que, on shell, el lado izquierdo de (4.105) *no es cero*, sino que resulta ser igual a $\square_{\{-3;0,0\}}[\Psi_2\dot{\Omega}^{-1}]$ (para la prueba de esto, ver apéndice A en [11]). Vemos entonces que, on shell, $\dot{\varphi}_2$ no se desacopla, ya que los términos $\square_{\{-3;0,0\}}[\Psi_2\dot{\Omega}^{-1}]$ y $\dot{\square}_{\{-3;0,0\}}\varphi_2$ no se anulan. Por otro lado, $\square_{\{-3;0,0\}}[\Psi_2\dot{\Omega}^{-1}]$ cancela uno de los términos que aparecen en el lado derecho de (4.105) (luego de reemplazar $\dot{\varphi}_2=\Psi_2\dot{\Omega}^{-1}+\dot{\Omega}^{-1}\dot{\Psi}_2$), de modo que, on shell, tenemos la ecuación

$$\square_{\{-3;0,0\}}[\dot{\Omega}^{-1}\dot{\Psi}_2]+\dot{\square}_{\{-3;0,0\}}\varphi_2=0. \quad (4.106)$$

En resumen, las identidades que encontramos para el caso en el que el espacio-tiempo de background es tipo D son:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\{2o^{ABCD}\mathcal{C}_{A'(A}\mathcal{C}^{A'E}\varphi_{BCD)E}\}=(\square_{\{-1;4,0\}}-18\Psi_2)\dot{\varphi}_0, \quad (4.107)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\{2o^{AB}\iota^{CD}\mathcal{C}_{A'(A}\mathcal{C}^{A'E}\varphi_{BCD)E}\}=\square_{\{-3;0,0\}}\dot{\varphi}_2+\dot{\square}_{\{-3;0,0\}}\varphi_2, \quad (4.108)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\{2\iota^{ABCD}\mathcal{C}_{A'(A}\mathcal{C}^{A'E}\varphi_{BCD)E}\}=(\square_{\{-5;-4,0\}}-18\Psi_2)\dot{\varphi}_4. \quad (4.109)$$

Los lados izquierdos de las ecuaciones (4.107) y (4.109) se anulan on shell, dejándonos con ecuaciones desacopladas para $\dot{\varphi}_0$ y $\dot{\varphi}_4$ respectivamente, donde el operador normalmente hiperbólico $\square_{\{w;p,q\}}$ (definido en (4.83)) tiene un significado geométrico bien definido en términos de covariancia conforme y GHP. El lado izquierdo de (4.108) no se anula on shell, y se aplica la discusión entre las ecuaciones (4.105) y (4.106).

4.4.2. Relación con operadores de Teukolsky

En la subsección anterior hallamos identidades conformemente covariantes para campos de spin $1/2$, 1 y 2 , y encontramos también las condiciones que deben satisfacer las métricas de la clase conforme al espacio-tiempo de background para que las componentes de los campos satisfagan ecuaciones de onda desacopladas. Para conectar estos resultados con las identidades halladas en el capítulo 3, necesitamos la relación entre los operadores conformemente covariantes que usamos aquí, y los operadores de Teukolsky utilizados en dicho capítulo. Tenemos:

Lema 4.4.1. *Consideremos un espacio-tiempo Einstein de tipo Petrov D, y sea η una densidad escalar conforme de tipo $\{w;p,0\}$. La relación entre el operador de onda conformemente-GHP covariante $\square_{\{w;p,0\}}$ y el operador de Teukolsky \square_p está dada por:*

$$\square_{\{w;p,0\}}\eta = \Psi_2^{-(w+1)/3}(\square_p + 2\Psi_2 + \frac{R}{6})(\Psi_2^{(w+1)/3}\eta). \quad (4.110)$$

Para probar esto (ver Lema 3.2 en [11]), debe escribirse la 1-forma (4.34) como (4.2), con lo cual debemos recordar que estamos rompiendo explícitamente la covarianza conforme, ver observación 4.2.2.

Usando este resultado, deducimos inmediatamente las siguientes identidades en un espacio-tiempo Einstein tipo Petrov D.

Spin $\mathfrak{s} = 1/2$:

$$2 o^B \mathcal{C}_{A'B} \mathcal{C}^{A'A} \varphi_A = (\square_{+1} - \Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\varphi_0, \quad (4.111)$$

$$2 l^B \mathcal{C}_{A'B} \mathcal{C}^{A'A} \varphi_A = \Psi_2^{1/3}(\square_{-1} - \Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)[\Psi_2^{-1/3}\varphi_1]. \quad (4.112)$$

Spin $\mathfrak{s} = 1$:

$$2 o^{AB} \mathcal{C}_{A'(A} \mathcal{C}^{A'C} \varphi_{B)C} = (\square_{+2} - 4\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\varphi_0, \quad (4.113)$$

$$2 o^A l^B \mathcal{C}_{A'(A} \mathcal{C}^{A'C} \varphi_{B)C} = \Psi_2^{1/3}(\square + 2\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)[\Psi_2^{-1/3}\varphi_1], \quad (4.114)$$

$$2 l^{AB} \mathcal{C}_{A'(A} \mathcal{C}^{A'C} \varphi_{B)C} = \Psi_2^{2/3}(\square_{-2} - 4\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)[\Psi_2^{-2/3}\varphi_2]. \quad (4.115)$$

Spin $\mathfrak{s} = 2$:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\{2 o^{ABCD} \mathcal{C}_{A'(A} \mathcal{C}^{A'E} \varphi_{BCD)E}\} = (\square_{+4} - 16\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)\dot{\varphi}_0, \quad (4.116)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\{2 o^{AB} l^{CD} \mathcal{C}_{A'(A} \mathcal{C}^{A'E} \varphi_{BCD)E}\} &= \Psi_2^{2/3}(\square + 2\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)[\Psi_2^{-2/3}\dot{\varphi}_2] \\ &+ \dot{\square}_{\{-3;0,0\}}\varphi_2, \end{aligned} \quad (4.117)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\{2 l^{ABCD} \mathcal{C}_{A'(A} \mathcal{C}^{A'E} \varphi_{BCD)E}\} = \Psi_2^{4/3}(\square_{+4} - 16\Psi_2 + \frac{2}{3}\lambda)[\Psi_2^{-4/3}\dot{\varphi}_4]. \quad (4.118)$$

Finalmente, es sencillo mostrar que

$$\mathcal{C}_{A'_1(A_1} \mathcal{C}^{A'_1 B} \varphi_{A_2 \dots A_n)B} = (\nabla_{A'_1(A_1} - n A_{A'_1(A_1}) \nabla^{A'_1 B} \varphi_{A_2 \dots A_n)B}, \quad (4.119)$$

de modo que recuperamos efectivamente la identidad principal (4.1) que hallamos en el capítulo 3. En dicho capítulo, las identidades fueron halladas de un modo ciertamente ‘artesanal’, y sólo a posteriori observamos que hay un patrón general de simetrías; a diferencia de esto, en el capítulo actual las identidades son consecuencia de una formulación que contempla todas las simetrías del sistema, esto es, la covariancia conforme y GHP. Más aún, la formulación actual es realmente más general ya que trata todos los espacios algebraicamente especiales, no sólo los de tipo Petrov D, y muestra que la especialidad algebraica es de hecho necesaria y suficiente para obtener ecuaciones desacopladas.

4.4.3. El operador de Laplace-de Rham

Resulta interesante analizar la estructura tensorial del operador (4.82) actuando sobre campos bosónicos. Ya que, para spin entero, estamos interesados en $\mathfrak{s} = 1$ y $\mathfrak{s} = 2$, nos restringiremos a estos casos.

Sea \mathbb{V}_k el fibrado de k -formas sobre el espacio-tiempo. Operaciones naturales sobre k -formas son la derivada exterior $d : \mathbb{V}_k \rightarrow \mathbb{V}_{k+1}$, y su adjunto formal $d^\dagger : \mathbb{V}_k \rightarrow \mathbb{V}_{k-1}$. Ambas operaciones pueden componerse para formar el *operador de Laplace-de Rham*

$$dd^\dagger + d^\dagger d : \mathbb{V}_k \rightarrow \mathbb{V}_k. \quad (4.120)$$

Consideremos ahora el fibrado $\mathbb{V}_{l,k}$ de k -formas valuadas en tensores de valencia l . Un elemento de este espacio es por ejemplo $\omega_{a_1 \dots a_l b_1 \dots b_k} = \omega_{a_1 \dots a_l [b_1 \dots b_k]}$. Generalizaciones naturales de las operaciones recién descritas son la derivada covariante exterior $\mathcal{D} : \mathbb{V}_{l,k} \rightarrow \mathbb{V}_{l,k+1}$, que actúa como la derivada exterior sobre los índices de k -forma y como la derivada covariante sobre el resto de los índices, y su adjunto $\mathcal{D}^\dagger : \mathbb{V}_{l,k} \rightarrow \mathbb{V}_{l,k-1}$. Explícitamente:

$$(\mathcal{D}\omega)_{a_1 \dots a_l b_1 \dots b_{k+1}} := (k+1)\nabla_{[b_1}\omega_{a_1 \dots a_l | b_2 \dots b_{k+1}]}, \quad (4.121)$$

$$(\mathcal{D}^\dagger\omega)_{a_1 \dots a_l b_1 \dots b_{k-1}} := -\nabla^c \omega_{a_1 \dots a_l c b_1 \dots b_{k-1}}. \quad (4.122)$$

Notemos que para $l = 0$, estas operaciones coinciden con las correspondientes a formas ordinarias. Por otro lado, como una generalización natural del operador de Laplace-de Rham ordinario, \mathcal{D} y \mathcal{D}^\dagger pueden componerse para formar el operador de Laplace-de Rham generalizado

$$\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger + \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} : \mathbb{V}_{l,k} \rightarrow \mathbb{V}_{l,k}. \quad (4.123)$$

Ahora, si consideramos formas con valores tensoriales y peso conforme bien definido, esto es, elementos de $\mathbb{V}_{l,k}[w] = \mathbb{V}_{l,k} \otimes \mathcal{E}[w]$, podemos utilizar la derivada covariante conforme \mathcal{C}_a en lugar de la de Levi-Civita ∇_a , de manera que tenemos los operadores

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{C}}\omega)_{a_1 \dots a_l b_1 \dots b_{k+1}} := (k+1)\mathcal{C}_{[b_1}\omega_{a_1 \dots a_l | b_2 \dots b_{k+1}]}, \quad (4.124)$$

$$(\mathcal{D}_{\mathcal{C}}^\dagger\omega)_{a_1 \dots a_l b_1 \dots b_{k-1}} := -\mathcal{C}^c \omega_{a_1 \dots a_l c b_1 \dots b_{k-1}}. \quad (4.125)$$

Nuevamente tenemos entonces un operador de Laplace-de Rham generalizado, en este caso conformemente covariante, dado por

$$\mathcal{D}_{\mathcal{C}}\mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\dagger} + \mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\dagger}\mathcal{D}_{\mathcal{C}}. \quad (4.126)$$

Sean ahora F_{ab} y K_{abcd} los análogos tensoriales de los espinores totalmente simétricos φ_{AB} y φ_{ABCD} :

$$F_{ab} = \varphi_{AB}\bar{\epsilon}_{A'B'} + \bar{\varphi}_{A'B'}\epsilon_{AB}, \quad (4.127)$$

$$K_{abcd} = \varphi_{ABCD}\bar{\epsilon}_{A'B'}\bar{\epsilon}_{C'D'} + \bar{\varphi}_{A'B'C'D'}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}. \quad (4.128)$$

Consideramos a K_{abcd} como una 2-forma valuada en tensores de valencia 2. En vista del comportamiento conforme de φ_{AB} , φ_{ABCD} y ϵ_{AB} , los tensores F_{ab} y K_{abcd} son densidades conformes con peso 0 y 1 respectivamente. Entonces:

Lema 4.4.2. *Con las definiciones (4.124) y (4.125), tenemos las identidades*

$$-\frac{1}{2}[(\mathcal{D}_{\mathcal{C}}\mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\dagger} + \mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\dagger}\mathcal{D}_{\mathcal{C}})F]_{ab} = \mathcal{C}_{E'(A}\mathcal{C}^{E'E}\varphi_{B)E}\bar{\epsilon}_{A'B'} + \mathcal{C}_{E(A'}\mathcal{C}^{EE'}\bar{\varphi}_{B')E'}\epsilon_{AB}, \quad (4.129)$$

$$-\frac{1}{2}[(\mathcal{D}_{\mathcal{C}}\mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\dagger} + \mathcal{D}_{\mathcal{C}}^{\dagger}\mathcal{D}_{\mathcal{C}})K]_{abcd} = \mathcal{C}_{E'(C}\mathcal{C}^{E'E}\varphi_{|ABE|D)}\bar{\epsilon}_{A'B'}\bar{\epsilon}_{C'D'} + \mathcal{C}_{E(C'}\mathcal{C}^{EE'}\bar{\varphi}_{|A'B'E'|D')}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}. \quad (4.130)$$

Por lo tanto, concluimos que la estructura tensorial del operador espinorial (4.82) para los casos de spin 1 y 2 corresponde a un operador de Laplace-de Rham conformemente covariante actuando sobre formas diferenciales con valores tensoriales y peso conforme bien definido.

4.4.4. Descripción twistorial

Por último, veamos que el proceso que conduce a las ecuaciones de tipo onda de la sección 4.4.1 admite una descripción natural en términos de twistors locales. Por ejemplo, para un campo de spin $\mathfrak{s} = 1/2$, las ecuaciones de onda son el resultado de la composición de los mapas en la siguiente secuencia conformemente covariante:

$$\mathbb{S}_A[-1] \longrightarrow \mathbb{S}^{A'}[-3] \longrightarrow \mathbb{T}_{\alpha}[-3] \longrightarrow \mathbb{E}_{\{p,0\}}[w-3] \quad (4.131)$$

(con $\mathbb{T}^{\alpha}[w] \equiv \mathbb{T}_{\{0,0\}}^{\alpha}[w]$), donde los operadores están definidos respectivamente por

$$\varphi_A \mapsto \nabla^{A'B}\varphi_B, \quad (4.132)$$

$$\mu^{A'} \mapsto (\nabla_{AB'}\mu^{B'}, -i\mu^{A'}), \quad (4.133)$$

$$W_{\alpha} \mapsto Z^{\alpha}W_{\alpha}, \quad (4.134)$$

y donde Z^{α} es cualquiera de los twistors X^{α} o Y^{α} , que tienen peso conforme $w = 0$ y $w = -1$ respectivamente. El hecho de que el segundo mapa tiene como imagen el espacio dual de twistors (con peso conforme -3) puede verse

fácilmente chequeando el comportamiento conforme; esto es, chequeando que $\widehat{\nabla}_{AB'}\widehat{\mu}^{B'} = \Omega^{-3}(\nabla_{AB'}\mu^{B'} - i\Upsilon_{AB'}(-i\mu^{B'}))$ y $\widehat{\mu}^{B'} = \Omega^{-3}\mu^{B'}$. Similarmente, para spin $\mathfrak{s} = 1$ tenemos la secuencia conformemente covariante

$$\mathbb{S}_{AB}[-1] \longrightarrow \mathbb{S}^{A'}_B[-3] \longrightarrow \mathbb{T}_{\alpha\beta}[-3] \longrightarrow \mathbb{E}_{\{p,0\}}[w-3] \quad (4.135)$$

donde

$$\varphi_{AB} \mapsto \nabla^{A'C} \varphi_{BC}, \quad (4.136)$$

$$\mu^{A'}_B \mapsto \begin{pmatrix} \nabla_{C'(A}\mu^{C'}_{B)} & -i\mu^{B'}_A \\ -i\mu^{A'}_B & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.137)$$

$$W_{\alpha\beta} \mapsto Z^{\alpha\beta}W_{\alpha\beta}, \quad (4.138)$$

y $Z^{\alpha\beta}$ es $X^\alpha X^\beta$, $X^{(\alpha}Y^{\beta)}$ o $Y^\alpha Y^\beta$. Para spin $\mathfrak{s} = 2$ no es posible expresar el correspondiente twistor en forma matricial, pero la secuencia es análoga a las anteriores. Otros ejemplos de este estilo de secuencias conformemente covariantes de mapas pueden encontrarse en [56] (en particular en la sección 6) y [16, capítulo 9] (por ej. en la página 145 en dicha referencia).

Capítulo 5

Inestabilidades en agujeros negros asintóticamente Anti-de Sitter

5.1. Preliminares

En el capítulo 1 vimos que la presencia de una constante cosmológica λ no trivial modifica la estructura asintótica del espacio-tiempo, tornándola tipo de Sitter (dS) para $\lambda > 0$ o tipo Anti-de Sitter (AdS) para $\lambda < 0$. Mencionamos también que, en el caso AdS, el espacio-tiempo *no* es globalmente hiperbólico (ver definición 1.1.5), y posee una frontera conforme de tipo temporal en el infinito, de modo que el pasado causal de ciertos puntos en \mathcal{M} intersecta el infinito. Ya que, por definición, el espacio-tiempo no admite una hipersuperficie de Cauchy, la dinámica de los campos que se propaguen en tales regiones no estará únicamente determinada por las condiciones iniciales, sino que además, será influenciada por condiciones de borde en la frontera. Las condiciones de borde usualmente consideradas en la literatura son tipo Dirichlet¹, donde los campos se anulan en el infinito. En los capítulos anteriores no especificamos el signo de la constante cosmológica, por lo que tratamos conjuntamente los casos dS y AdS (y, por supuesto, el caso asintóticamente plano también). Hasta ahora hemos implícitamente asumido condiciones de borde tipo Dirichlet (específicamente, al despreocupar los términos de divergencias que aparecen al calcular ecuaciones adjuntas), ya que nuestro interés estaba puesto en el estudio de las simetrías internas a las ecuaciones y no tanto en la dinámica de los campos. En este capítulo nos dedicamos a estudiar el efecto de considerar condiciones de borde más generales para la evolución de campos lineales, en la clase de agujeros negros *estáticos* con asintótica AdS.

Una de las principales motivaciones de este estudio tiene su origen en el objeto central de esta tesis, esto es, en el análisis de los mapas entre ecuaciones escalares tipo onda y ecuaciones de spin superior. En la sección 3.5.2 probamos, como aplicación de nuestros resultados más generales, que la dinámica del sector impar del campo gravitacional linealizado en Schwarzschild-dS se

¹no obstante, en los últimos años se han comenzado a estudiar otro tipo de condiciones, como veremos a lo largo de este capítulo.

traduce en el estudio de una ecuación de onda 4-dimensional con potencial (algo que fue primero probado en [46, 47]); y mencionamos que el sector par puede estudiarse enteramente a través del impar por medio de la dualidad de Chandrasekhar, pero *sólo* en el caso $\lambda \geq 0$. En este capítulo probaremos, entre otras cosas, que la dualidad de Chandrasekhar no es biyectiva en el caso AdS, debido a la existencia de condiciones de borde más generales para los campos. Además, mostraremos que estas condiciones más generales se motivan naturalmente al considerar la descripción en términos de campos con significado geométrico, y también en el contexto de la correspondencia AdS/CFT de Maldacena.

Observación 5.1.1 (Artículos). *Los resultados de este capítulo se encuentran en [9].*

Observación 5.1.2 (Signatura). *Contrariamente a los capítulos anteriores, en este capítulo utilizaremos la singatura métrica $(-+++)$. Esto no entra en conflicto con los resultados de los capítulos previos.*

Observación 5.1.3 (Demostraciones). *Al igual que en capítulos anteriores, en el capítulo presente no daremos aquellas demostraciones de las proposiciones que sean demasiado largas, sino que referiremos al lector a la sección apropiada en el artículo [9] donde hemos publicado los resultados de este capítulo.*

5.1.1. Ecuaciones de onda en 1 + 1 dimensiones

En la clase de agujeros negros que estudiaremos en este capítulo, la variedad tiene la estructura tipo warped-product (3.112). Más específicamente, la métrica es de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}(y)dy^{\mathbb{A}}dy^{\mathbb{B}}, \quad (5.1)$$

para una cierta función $f(r)$, donde $\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}$ es una métrica sobre la variedad Riemanniana \mathcal{K} . Definiendo una nueva coordenada (*tortoise coordinate*) x por

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{f(r)}, \quad (5.2)$$

la métrica toma la forma

$$ds^2 = f(-dt^2 + dx^2) + r^2\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}(y)dy^{\mathbb{A}}dy^{\mathbb{B}}, \quad (5.3)$$

donde $r = r(x)$ es la inversa de (5.2). La estructura causal del espacio-tiempo es entonces la misma que la del producto de la variedad \mathcal{K} por una cierta región de un espacio de Minkowski en 1 + 1 dimensiones. Esta última región será denotada \mathbb{M}_2 . La extensión de \mathbb{M}_2 depende naturalmente del dominio de las coordenadas (t, x) . Más precisamente, tenemos $t \in \mathbb{R}$, mientras que el dominio de x depende de la forma explícita de la función $f(r)$. La forma

más familiar de $f(r)$ corresponde a la solución de Schwarzschild-(A)dS en 4 dimensiones (donde $\mathcal{H} = S^2$)

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2, \quad (5.4)$$

donde M es una constante y λ es la constante cosmológica. Estamos interesados en el caso asintóticamente AdS (en 4 dimensiones), i.e. $\lambda < 0$. La constante de integración en (5.2) puede elegirse de manera que

$$x = - \int_r^\infty \frac{dr'}{f(r')} \simeq \begin{cases} \frac{r_h}{1-\lambda r_h^2} \ln \left(\frac{r}{r_h} - 1 \right) & , r \rightarrow r_h^+ \\ \frac{3}{\lambda r} & , r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (5.5)$$

donde r_h corresponde al horizonte, y hemos dado también el comportamiento asintótico de x , que indica que $x \in (-\infty, 0]$ (con $x \rightarrow -\infty$ para $r \rightarrow r_h^+$, y $x \rightarrow 0^-$ para $r \rightarrow \infty$). El espacio \mathbb{M}_2 es $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_-$, el cual no es globalmente hiperbólico. Como dijimos, esto implica que la dinámica de los campos no está enteramente determinada por condiciones iniciales, ya que las correspondientes ecuaciones diferenciales, siendo de carácter hiperbólico, poseen solución única sólo dentro del dominio de dependencia de la superficie inicial, el cual no es el espacio total. Para tener unicidad en todo el espacio, es necesario imponer condiciones de borde en la frontera conforme $x = 0$; y existen diferentes elecciones de las mismas que son consistentes con las ecuaciones de campo y aún así dan origen a evoluciones distintas del mismo dato inicial.

Situaciones similares ocurren para ciertas soluciones de agujeros negros en Relatividad General en altas dimensiones; más específicamente, para la clase de agujeros negros estáticos asintóticamente AdS en $d = n + 2$ dimensiones cuyo horizonte es una variedad de Einstein con métrica \bar{g}_{AB} y tensor de Ricci $\bar{R}_{\text{AB}} = \kappa(n-1)\bar{g}_{\text{AB}}$, $\kappa = 0, \pm 1$. La métrica de estas soluciones tiene la forma (5.1), con la función f dada ahora por

$$f(r) = \kappa - \frac{2M}{r^{n-1}} - \frac{2\lambda}{n(n+1)}r^2. \quad (5.6)$$

Encontraremos nuevamente estas soluciones en el capítulo 6 (ver sección 6.5). Generalizaciones de la Relatividad General, tales como teorías de Lovelock, también admiten soluciones de agujeros negros con métrica de la forma (5.1). La función f en tales casos no está dada por (5.6), sino que posee una forma más complicada, pero su comportamiento asintótico es similar. En todos estos casos (i.e. en Relatividad General en 4 y más dimensiones y en teorías de Lovelock), la característica principal que nos interesa es que, aún cuando las métricas tienen siempre la forma (5.1) independientemente de la estructura asintótica, sólo en el caso asintóticamente AdS la coordenada x definida por (5.2) está restringida a una semilínea y la región estática no es globalmente hiperbólica.

A diferencia del resto de los capítulos en esta tesis, en este capítulo trabajaremos con descomposiciones modales de los campos, ya que las mismas son

suficientes para demostrar la inestabilidad lineal de una solución. Según el tratamiento estándar de las perturbaciones de espacio-tiempos del tipo (5.1), la estructura warped product de la métrica permite hacer una descomposición $2 + n$ de los campos, donde las componentes son a su vez expandidas en serie de tensores armónicos sobre \mathcal{K} (i.e. autotensores del operador de Laplace-Beltrami asociado a \mathcal{K}), análogamente a (3.127)-(3.129). Cada término en esta expansión se denomina *modo*². Luego de una serie de tratamientos, las ecuaciones para campos lineales (escalares, de Maxwell y de gravedad linealizada) se reducen a un conjunto infinito de ecuaciones $1 + 1$ de tipo onda con potencial en \mathbb{M}_2 , una por cada modo:

$$[-\partial_t^2 + \partial_x^2 - V(x)] \phi = 0, \quad (5.7)$$

para ciertas variables escalares maestras $\phi = \phi(t, x)$ en \mathbb{M}_2 que representan los modos del campo. Para Relatividad General en altas dimensiones, esta reducción fue probada por Kodama e Ishibashi en [104, 97]. En el caso de Teorías de Lovelock de segundo orden (conocidas como gravedad de Einstein-Gauss-Bonnet), la reducción fue hecha por Dotti y Gleiser en [48, 74], mientras que para órdenes superiores resultados similares pueden encontrarse en [125]. Otros ejemplos de reducción modal incluyen agujeros negros “con pelo” (*hairy black holes*), ver [4]. En todos estos casos, la separación de variables se debe a la estructura (5.1) de la métrica, independientemente de la forma particular de f . Las variables asociadas a la variedad del horizonte no aparecen explícitamente en las ecuaciones de campo (5.7), sino que su huella queda sólo en el conteo de modos y en la forma del potencial V . Además, como dijimos, sólo en el caso AdS está x restringido a una semilínea, con lo cual \mathbb{M}_2 no es globalmente hiperbólico y la cuestión de la dinámica depende de las condiciones de borde. De ahora en más nos restringiremos a este caso, ya que es el que nos interesa en este capítulo.

Ya que el potencial en (5.7) es independiente de t , podemos adicionalmente separar variables en t, x , con lo cual el problema se reduce a estudiar el espectro del operador elíptico 1-dimensional

$$H := -\partial_x^2 + V(x), \quad x < 0, \quad (5.8)$$

sujeto a condiciones de borde en $x = 0$. En la literatura sobre el tema se denomina a veces a (5.8) como “operador de Schrödinger”³, por su semejanza formal con el operador correspondiente a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. La ecuación (5.7) adopta la forma

$$-\ddot{\phi} = H\phi, \quad (5.9)$$

²en una expansión en armónicos esféricos, un modo estará caracterizado por los números armónicos (ℓ, m) . En la literatura usual, los *modos* se descomponen además en su componente temporal de Fourier, caracterizada por una frecuencia ω .

³En este trabajo seguiremos esta nomenclatura, pero debe notarse que el operador (5.8) no proviene de una ecuación de Schrödinger propiamente sino de la ecuación hiperbólica (5.7).

donde el punto significa derivada respecto de t . Las condiciones de borde naturales son las que preservan la acción del grupo de isometrías del espacio-tiempo en el espacio de soluciones (ver [95]):

(i) condiciones de Dirichlet: $\phi|_{x=0} = 0$,

(ii) condiciones de Neumann: $\partial_x \phi|_{x=0} = 0$,

(iii) condiciones de Robin: $\partial_x \phi|_{x=0} = \gamma \phi|_{x=0}$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Nuestro mayor interés estará puesto en condiciones de tipo Robin, ya que, como veremos, las mismas conducen a inestabilidades de los campos. Es importante notar que para campos escalares, de Maxwell y de gravedad linealizada, tanto en Relatividad General en 4 y más dimensiones como en Teorías de Lovelock, el potencial en (5.7) es siempre continuo en $(-\infty, 0)$ y satisface $V \rightarrow 0$ para $x \rightarrow -\infty$, mientras que en la frontera conforme se tienen dos tipos de comportamiento: o bien V es finito en $x = 0$, o bien V diverge en $x = 0$ *siempre* como $V \sim c/x^2$, donde c es una constante que depende del tipo de campo y del modo.

5.2. Evolución en espacio-tiempos que no son globalmente hiperbólicos

La cuestión acerca de la dinámica en espacio-tiempos estáticos que no son globalmente hiperbólicos fue originalmente estudiada por Wald en [136], y luego en [95, 96] por Wald e Ishibashi. El resultado es que el estudio de la dinámica de campos lineales se traduce en hallar las posibles extensiones autoadjuntas de un operador espacial, y analizar si son positivas definidas para abordar el problema de estabilidad. Este estudio requiere introducir algunos elementos básicos de Análisis Funcional (seguimos principalmente [127, 117]). Consideremos un espacio vectorial \mathcal{H} con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sea A un operador actuando en \mathcal{H} , cuyo dominio es denotado $\text{Dom}(A)$. Para lo que sigue, es conveniente dar una definición formal de un concepto que hemos venido usando en los capítulos anteriores:

Definición 5.2.1 (Adjunto de un operador). *El adjunto de un operador $A : \text{Dom}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ se define como el operador lineal A^\dagger cuyo dominio es*

$$\text{Dom}(A^\dagger) = \{\Psi \in \mathcal{H} \mid \exists \tilde{\Psi} \in \mathcal{H} : \langle \Psi, A\Phi \rangle = \langle \tilde{\Psi}, \Phi \rangle \quad \forall \Phi \in \text{Dom}(A)\}, \quad (5.10)$$

y cuya acción es $A^\dagger \Psi = \tilde{\Psi}$.

En este capítulo, el operador A será siempre el Hamiltoniano (5.8), y el producto interno será el asociado al espacio $L^2(\mathbb{R}_-, dx)$, i.e.

$$\langle \Phi, \Psi \rangle := \int_{\mathbb{R}_-} \Phi \Psi dx. \quad (5.11)$$

Una de las propiedades más importantes de (5.8) es que es *simétrico*. En Mecánica Cuántica, en lugar de “simétrico” uno acostumbra decir que un Hamiltoniano es autoadjunto, pero existe una ligera distinción entre ambos conceptos que es relevante en nuestro contexto actual; más precisamente⁴:

Definición 5.2.2 (Operador simétrico y autoadjunto). *Decimos que el operador A es simétrico o hermítico si $\langle \Phi, A\Psi \rangle = \langle A\Phi, \Psi \rangle$ para todos $\Phi, \Psi \in \text{Dom}(A)$. Decimos además que A es autoadjunto si A es simétrico y $A = A^\dagger$ (esto es, $\langle \Phi, A\Psi \rangle = \langle A\Phi, \Psi \rangle$ y $\text{Dom}(A) = \text{Dom}(A^\dagger)$).*

5.2.1. Condiciones de borde y extensiones autoadjuntas

Estudiar distintas condiciones de borde significa cambiar el espacio de funciones donde un operador actúa, esto es, cambiar el dominio del mismo o, en términos técnicos, encontrar *extensiones* de este operador. Estamos además interesados en extensiones *autoadjuntas*, ya que esto garantiza que en tal caso el espacio de soluciones admite una base completa de autofunciones. Más precisamente:

Definición 5.2.3 (Extensiones autoadjuntas). *Una extensión de un operador A es un operador lineal \tilde{A} tal que $\text{Dom}(A) \subseteq \text{Dom}(\tilde{A})$ y $\tilde{A}\Phi = A\Phi$ para todo $\Phi \in \text{Dom}(A)$. Una extensión autoadjunta es una extensión tal que \tilde{A} es un operador autoadjunto.*

Es importante notar que una extensión autoadjunta de un operador no es necesariamente única. Esto es algo particularmente relevante en nuestro contexto, ya que implica que la dinámica de los campos y, por lo tanto, la cuestión de estabilidad, depende de la extensión elegida (en caso de haber más de una). Aquellos operadores que admiten una única extensión autoadjunta reciben un nombre particular:

Definición 5.2.4 (Operador esencialmente autoadjunto). *Un operador A se dice esencialmente autoadjunto si admite una única extensión autoadjunta.*

En nuestro contexto, para aquellos casos en los que el Hamiltoniano (5.8) sea esencialmente autoadjunto, los campos tendrán una única dinámica y la respuesta al problema de estabilidad (modal) será única.

Ahora, el problema de interés actual son las ecuaciones de campo (5.9) en el semiespacio Lorentziano \mathbb{M}_2 . La suposición de partida es que el dominio de H es $\text{Dom}(H) = C_0^\infty(\mathbb{R}_-)$. Una extensión autoadjunta \tilde{H} de H tendrá como dominio algún subespacio de $L^2(\mathbb{R}_-, dx)$. La solución general a (5.7), utilizando la extensión \tilde{H} , puede escribirse como

$$\phi(t, x) = \int dE c_E(t) \psi_E(x), \quad \ddot{c}_E + E c_E = 0, \quad (5.12)$$

⁴la distinción entre “simétrico” y “autoadjunto” es particularmente relevante al considerar el teorema espectral, ya que el mismo es válido *sólo* para operadores autoadjuntos.

donde ψ_E son autofunciones de \tilde{H} :

$$\tilde{H}\psi_E = E\psi_E. \quad (5.13)$$

(Recordar que la acción de H y \tilde{H} es la misma, la única diferencia entre ambos operadores son sus dominios de definición.) De (5.12) vemos que una energía negativa $E < 0$ en el espectro de \tilde{H} conduce a términos en ϕ que crecen exponencialmente en el tiempo, lo cual implica una inestabilidad del modo considerado y, por lo tanto, del campo en cuestión. La existencia de una energía negativa en el espectro depende naturalmente de la extensión elegida. A su vez, las posibles extensiones autoadjuntas dependen del comportamiento del potencial V cerca de los bordes, es decir cerca de $x = 0$ y $x = -\infty$. Una caracterización útil de este comportamiento es la siguiente:

Definición 5.2.5 (Casos limit point y limit circle). *El operador H dado en (5.8) se dice limit circle (LC) en $x = 0$ si, para algún E , la solución general del problema $H\psi = E\psi$ es de cuadrado integrable cerca de cero. En caso contrario H se dice limit point (LP) en $x = 0$. La misma definición aplica en $x = -\infty$.*

En lo que sigue, asociaremos la noción de LP/LC alternativamente al Hamiltoniano o al potencial correspondiente. Es importante destacar el hecho no-trivial de que la propiedad de LP/LC no depende del valor de E (siempre que el potencial sea continuo):

Teorema 5.2.1 (Teorema X.6 en [117]). *Supongamos que el potencial V en (5.8) es real y continuo en $(-\infty, 0)$. Si para algún E ambas soluciones de $H\psi = E\psi$ son de cuadrado integrable cerca de $x = 0$, entonces para todo E las soluciones de $H\psi = E\psi$ son de cuadrado integrable cerca de $x = 0$. Lo mismo vale en $x = -\infty$.*

Como veremos, todos los potenciales que aparecen en la descomposición modal de campos escalares, de Maxwell y de gravedad linealizada tienen el siguiente comportamiento cerca del horizonte r_h (i.e. en $x = -\infty$):

$$V(r) = f(r)(U_0 + \mathcal{O}(r - r_h)), \quad U_0 \neq 0, \quad r \simeq r_h. \quad (5.14)$$

Esto implica que $V \rightarrow 0$ para $x \rightarrow -\infty$ y, luego, H es LP en $x = -\infty$. Por otro lado, en la frontera conforme (i.e. en $x = 0$), algunos potenciales son LC y otros LP. Un criterio muy útil para distinguir entre ambos casos está dado por el siguiente teorema:

Teorema 5.2.2 (Teorema X.10 en [117]). *Supongamos que el potencial V en (5.8) es continuo y positivo cerca de $x = 0$.*

- (i) *Si $V(x) \geq \frac{3}{4}x^{-2}$ para $x \simeq 0$, entonces H es LP en $x = 0$.*
- (ii) *Si existe $\epsilon > 0$ tal que $V(x) \leq (\frac{3}{4} - \epsilon)x^{-2}$ para $x \simeq 0$, entonces H es LC en $x = 0$.*

Para el caso LC, cualquier solución de (5.13) será de la forma $\psi_E = A\psi_1 + B\psi_2$, donde ψ_1 y ψ_2 son ambas de cuadrado integrable cerca de $x = 0$. Es conveniente escribir $A = C \cos \alpha$, $B = C \sin \alpha$, donde la constante (irrelevante) C puede ser positiva o negativa y $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$, de manera que las posibles condiciones de borde quedan parametrizadas por α . Si Φ, Ψ están en algún subespacio de $L^2(\mathbb{R}_-, dx)$, una cuenta sencilla muestra que

$$\langle \Phi, H\Psi \rangle = \langle H\Phi, \Psi \rangle + \Phi'(0)\Psi(0) - \Phi(0)\Psi'(0) \quad (5.15)$$

(donde, en este capítulo, la prima ' significa ∂_x), con lo cual vemos que, para condiciones de Dirichlet, Neumann o Robin, cualquier extensión de H es autoadjunta. De esta manera, si V es LC en $x = 0$, hay un conjunto infinito de extensiones autoadjuntas parametrizadas por α , y la dinámica de los campos en todo el espacio-tiempo dependerá de cuál extensión elijamos. Por el contrario, si V es LP en $x = 0$, entonces H es esencialmente autoadjunto, con lo cual la dinámica es no-ambigua a pesar de que el espacio-tiempo no es globalmente hiperbólico.

5.2.2. Descomposiciones modales

Repasaremos ahora brevemente la descomposición modal de campos escalares (o de Klein-Gordon) sin masa, de Maxwell y de gravedad linealizada sobre la solución de Schwarzschild-(A)dS en 4 dimensiones; de manera que las ecuaciones de campo se reduzcan efectivamente a la forma (5.9).

Campos de Klein-Gordon. Utilizando una descomposición $2 + 2$, la ecuación de Klein-Gordon sin masa puede escribirse como

$$0 = \square\Phi = (rf)^{-1}[-\partial_t^2 + \partial_x^2 + f(r^{-2}\Delta - f'/r)](r\Phi), \quad (5.16)$$

donde Δ es el laplaciano en la 2-esfera unitaria,

$$\Delta := \partial_\theta^2 + \cot(\theta)\partial_\theta + \sin(\theta)^{-2}\partial_\varphi^2. \quad (5.17)$$

Introduciendo $\phi := r\Phi$ y expandiendo en una base ortonormal de armónicos esféricos reales $S_{(\ell,m)}$ sobre la esfera,

$$\phi = \sum_{(\ell,m)} \phi_{(\ell,m)}(t, x) S_{(\ell,m)}(\theta, \varphi), \quad (5.18)$$

la ecuación (5.16) es equivalente a un conjunto de ecuaciones de onda $1 + 1$ de la forma (5.9) en \mathbb{M}_2 , parametrizadas por el número armónico ℓ , donde el Hamiltoniano es $H_\ell^{\text{KG}} = -\partial_x^2 + V_\ell^{\text{KG}}$ y el potencial

$$V_\ell^{\text{KG}} = f \left[\frac{2M}{r^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2}{3}\lambda \right]. \quad (5.19)$$

Notemos que este potencial es positivo definido en la región estática $r > r_h$, y posee el comportamiento asintótico

$$V_\ell^{\text{KG}} \sim \begin{cases} \frac{2}{x^2} - \frac{\lambda}{3}(\ell^2 + \ell + 2) + \mathcal{O}(x) & , x \rightarrow 0^- \\ (\ell(\ell + 1) + 1 - \lambda r_h^2)(1 - \lambda r_h^2) r_h^{-2} \exp\left(\left(\frac{1 - \lambda r_h^2}{r_h}\right)x\right) & , x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.20)$$

Campos de Maxwell. Es conveniente escribir un campo de Maxwell en términos de un potencial, i.e. $F = dA$, y separar el potencial en sus partes de paridad par (+) e impar (-): $A = A^{(+)} + A^{(-)}$. Utilizando un gauge apropiado, estas componentes pueden escribirse como

$$A^{(-)} = \sum_{(\ell, m)} \phi^{(-, \ell, m)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi S_{(\ell, m)} d\theta - \sin \theta \partial_\theta S_{(\ell, m)} d\varphi \right], \quad (5.21)$$

$$A^{(+)} = \sum_{(\ell, m)} \left[\partial_x \phi^{(+, \ell, m)} dt + f^{-1} \partial_t \phi^{(+, \ell, m)} dr \right] S_{(\ell, m)}. \quad (5.22)$$

Las ecuaciones de Maxwell se traducen entonces en ecuaciones de la forma (5.9), esto es $-\ddot{\phi}^{(\pm, \ell, m)} = H_\ell^{\text{MAX}} \phi^{(\pm, \ell, m)}$, donde el Hamiltoniano $H_\ell^{\text{MAX}} = -\partial_x^2 + V_\ell^{\text{MAX}}$ es independiente de la paridad y el potencial es

$$V_\ell^{\text{MAX}} = f \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2}. \quad (5.23)$$

Este potencial es positivo definido para $r > r_h$, y su comportamiento asintótico es

$$V_\ell^{\text{MAX}} \sim \begin{cases} -\frac{\lambda}{3} \ell(\ell + 1) + \mathcal{O}(x^2) & , x \rightarrow 0^- \\ \ell(\ell + 1)(1 - \lambda r_h^2) r_h^{-2} \exp\left(\left(\frac{1 - \lambda r_h^2}{r_h}\right)x\right) & , x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.24)$$

Perturbaciones gravitacionales. Al igual que en el caso de Maxwell, las perturbaciones gravitacionales se descomponen en los sectores par (+) e impar (-), y se expanden a su vez en armónicos esféricos, de manera que los modos quedan caracterizados por (\pm, ℓ, m) . El procedimiento para arribar a esta descomposición es bien conocido, para un desarrollo detallado ver por ej. [47]. Componentes con $\ell = 0, 1$ consisten de campos que son puro gauge o que son independientes del tiempo, lo cual corresponde a perturbaciones dentro de la familia de Kerr (esto es, cambios en la masa o adición de momento angular). Ya que estos casos son irrelevantes para el problema de estabilidad, nos concentraremos en modos con $\ell \geq 2$. Las ecuaciones linealizadas de Einstein se reducen en tal caso a las llamadas ecuación de Regge-Wheeler para el sector impar (-), y ecuación de Zerilli para el sector par (+). Ambas ecuaciones son de la forma (5.9), i.e. $-\ddot{\phi}^{(\pm, \ell, m)} = H_\ell^{(\pm)} \phi^{(\pm, \ell, m)}$, con $H_\ell^{(\pm)} = -\partial_x^2 + V_\ell^{(\pm)}$, para ciertos campos invariantes de gauge $\phi^{(\pm, \ell, m)}$. El potencial de Regge-Wheeler para el Hamiltoniano impar $H_\ell^{(-)}$ es

$$V_\ell^{(-)} = f \left(\frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right), \quad (5.25)$$

y es positivo en la región estática $r > r_h$ excepto cuando r_h es pequeño comparado con M , caso en el cual es negativo en el intervalo $r_h < r < 6M/(\ell(\ell+1))$. El comportamiento asintótico de $V_\ell^{(-)}$ es

$$V_\ell^{(-)} \sim \begin{cases} -\lambda\ell(\ell+1)/3 + \mathcal{O}(x) & , x \rightarrow 0^- \\ (\ell(\ell+1)r_h - 6M)(1 - \lambda r_h^2)r_h^{-3} \exp\left(\left(\frac{1-\lambda r_h^2}{r_h}\right)x\right) & , x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.26)$$

Por otra parte, el potencial de Zerilli para el Hamiltoniano par $H_\ell^{(+)}$ es

$$V_\ell^{(+)} = f \frac{[\mu^2\ell(\ell+1) - 24M^2\lambda]r^3 + 6\mu^2Mr^2 + 36\mu M^2r + 72M^3}{r^3(6M + \mu^2r)^2}, \quad (5.27)$$

donde hemos definido $\mu := (\ell-1)(\ell+2)$. Este potencial es siempre positivo para $r > r_h$, y su comportamiento asintótico es

$$V_\ell^{(+)} \sim \begin{cases} (24M^2\lambda^2)\mu^{-2} - \lambda\ell(\ell+1) + \mathcal{O}(x) & , x \rightarrow 0^- \\ \frac{(\lambda^2r_h^4 - 4\lambda r_h^2 + \ell^4 + 2\ell^3 - \ell^2 - 2\ell + 3)(1 - \lambda r_h^2)}{(1 - \lambda r_h^2 + \ell(\ell+1))r_h^2} \exp\left(\left(\frac{1-\lambda r_h^2}{r_h}\right)x\right) & , x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.28)$$

5.3. Operadores de tipo Schrödinger en una semilínea

En esta sección hallaremos resultados generales para el espectro y las autofunciones del operador de Schrödinger (5.8) definido en \mathbb{R}_- . En la sección anterior vimos que las ecuaciones para campos de Klein-Gordon, Maxwell y gravedad linealizada en Schwarzschild-(A)dS en $d = 4$ se reducen a un conjunto infinito de ecuaciones del tipo (5.9) en el semiespacio $\mathbb{M}_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_-$, y que la dinámica de los modos depende de las posibles extensiones autoadjuntas del operador (5.8). Además, vimos que los campos serán inestables siempre que exista una extensión autoadjunta con un autovalor negativo en el espectro. Las posibles extensiones autoadjuntas, a su vez, dependen del comportamiento asintótico del potencial, que hemos dado en las ecuaciones (5.20), (5.24), (5.26), (5.28) para nuestros casos de mayor interés. Todos los potenciales son continuos en $(-\infty, 0)$ y decaen exponencialmente en el horizonte $x \rightarrow -\infty$. Además, los potenciales para Maxwell y gravedad son regulares en la frontera conforme $x = 0$, mientras que el potencial de Klein Gordon diverge como $2/x^2$. En esta sección nos concentraremos en potenciales regulares en $(-\infty, 0]$, mientras que el caso de Klein-Gordon lo veremos en la sección 5.4.1 más abajo. Nuestros resultados valen entonces para cualquier problema de tipo Mecánica Cuántica en una semilínea con un potencial regular en $(-\infty, 0]$, además de para cualquier ecuación de onda en $1+1$ con tal potencial.

Por un potencial regular en $(-\infty, 0]$ entendemos uno que sea continuo en ese intervalo, que tenga el comportamiento (5.14) en el horizonte, y que cerca de la frontera conforme tenga la forma

$$V(x) \simeq v_0 + v_1x + v_2x^2 + \dots, \quad x \simeq 0, \quad (5.29)$$

con $v_0 \neq 0$. Denotaremos una extensión autoadjunta de H como $\tilde{H} \equiv {}^z H$, donde $z = D, N, \gamma$ corresponde a condiciones de Dirichlet (D), Neumann (N) o Robin (γ) respectivamente.

5.3.1. Potenciales regulares

En lo que sigue, usaremos el hecho de que cualquier función en el dominio de un operador autoadjunto tal como ${}^z H$ puede expandirse en una base de autofunciones generalizadas del operador. Por lo tanto, existirá una función $\psi \in \text{Dom}({}^z H)$ tal que $\langle \psi, {}^z H\psi \rangle < 0$ si y sólo si el espectro de ${}^z H$ contiene un autovalor negativo.

Proposición 5.3.1 (Inestabilidades de Robin). *Sea V un potencial regular, entonces para un γ positivo suficientemente grande, el espectro de ${}^\gamma H$ contiene un autovalor negativo.*

Demostración. Ya que un potencial regular es acotado, tenemos $|V(x)| \leq V_0$ para todo $x \in (-\infty, 0]$, con V_0 constante. Consideremos la función de prueba $\psi = e^{\gamma x}$. Si $\gamma > 0$, entonces $\psi \in \text{Dom}({}^\gamma H)$, y

$$\begin{aligned} \langle \psi, {}^\gamma H\psi \rangle &= \int_{-\infty}^0 e^{\gamma x} (-\gamma^2 e^{\gamma x} + V e^{\gamma x}) dx \\ &= -\frac{\gamma}{2} + \int_{-\infty}^0 V e^{2\gamma x} dx \leq -\frac{\gamma}{2} + \frac{V_0}{2\gamma}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

de donde vemos que $\langle \psi, {}^\gamma H\psi \rangle < 0$ si se cumple

$$\gamma > \sqrt{V_0}. \quad (5.31)$$

□

Proposición 5.3.2. *Sea V un potencial regular, y asumir que ${}^{\gamma_0} H$ admite un estado de energía negativa. Entonces también lo hace ${}^\gamma H$ para $\gamma > \gamma_0$.*

Demostración. Ver Proposición 2 en [9]. □

5.3.2. Potenciales regulares no-negativos

En Mecánica Cuántica en \mathbb{R} , estados con energía negativa se denominan *estados ligados*. Una afirmación usual es que, si el potencial es positivo definido, entonces el Hamiltoniano no admite estados ligados. Esta afirmación es falsa si uno se restringe a una semilínea y considera condiciones de borde generales, ya que, utilizando el producto interno (5.11), una cuenta sencilla muestra que

$$\langle \psi, {}^z H\psi \rangle = -\psi\psi'|_{x=0} + \int_{-\infty}^0 [\psi'^2 + V\psi^2] dx. \quad (5.32)$$

Para condiciones de borde de Dirichlet o Neumann, el primer término a la derecha es cero, y en tal caso un potencial positivo definido sí implica $\langle \psi, {}^z H\psi \rangle >$

0. No obstante, para condiciones de Robin, tenemos $\psi'|_{x=0} = \gamma\psi|_{x=0}$, con lo cual $\langle \psi, {}^\gamma H \psi \rangle$ será positivo si $\gamma < 0$, pero puede ser negativo si $\gamma > 0$, aún cuando el potencial V sea siempre positivo. Resumimos este resultado sencillo del modo siguiente:

Proposición 5.3.3. *Sea V regular y positivo en $(-\infty, 0]$. Las extensiones autoadjuntas de (5.8) correspondientes a condiciones de Dirichlet, Neumann, y Robin con $\gamma < 0$ son positivas definidas.*

La siguiente proposición muestra que si V es regular y positivo, y $\gamma > 0$, entonces ${}^\gamma H$ admite a lo sumo un autovalor negativo. Establece también algunas propiedades del correspondiente autoestado.

Proposición 5.3.4. *Sea $V \geq 0$ regular. Suponer que existe un autoestado $\psi_E \in L^2(\mathbb{R}_-, dx)$ de ${}^\gamma H$ con energía $E < 0$. Asumir además $\psi_E(0) = 1$, $\psi'_E(0) = \gamma$ (esto no supone ninguna pérdida de generalidad). Entonces:*

- i) ψ_E no tiene ceros (con lo cual podemos elegirla positiva).*
- ii) ψ_E crece monótonamente de 0 a $1 = \psi_E(0)$, y ψ'_E crece monótonamente de 0 a $\gamma = \psi'_E(0)$, en el intervalo $x \in (-\infty, 0]$.*
- iii) Hay a lo sumo un $E < 0$ y un ψ_E que satisfacen las hipótesis.*

Demostración. Ver Proposición 4 en [9]. □

Proposición 5.3.5. *Sea $V \geq 0$ un potencial regular, y consideremos la extensión autoadjunta ${}^\gamma H$, $\gamma > 0$, de (5.8).*

- i) Si V es no-trivial, para γ suficientemente pequeño el espectro de ${}^\gamma H$ no contiene autovalores negativos.*
- ii) Existe un valor crítico $\gamma_c > 0$ tal que el conjunto $\{\gamma \mid \exists E \in \text{Spec}({}^\gamma H) : E < 0\}$ es de la forma (γ_c, ∞) .*
- iii) Para $\gamma > \gamma_c$, el autovalor de energía negativa E_γ satisface $|E_\gamma| \leq 2\gamma^2$.*
- iv) Si $\int_{-\infty}^0 V dx < \infty$, entonces $\gamma_c \leq 2 \int_{-\infty}^0 V dx$.*

Demostración. Ver Proposición 5 en [9]. □

Para potenciales con integral finita, el ítem *iv)* de la proposición anterior asegura la existencia de autoestados de energía negativa para ${}^\gamma H$: cualquier extensión autoadjunta con $\gamma > 2 \int_{-\infty}^0 V dx$ admitirá un $E < 0$ en el espectro. La cota puede ser mejorada si asumimos que $\text{Spec}({}^\gamma H)$ es continuo en γ :

Proposición 5.3.6. *Sea $V \geq 0$ un potencial regular, y asumir que vale $\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_c^+} E_\gamma = 0$, entonces*

$$\gamma_c \leq \int_{-\infty}^0 V(x) dx. \tag{5.33}$$

Demostración. Ver Proposición 6 en [9]. □

De esta manera, si $\gamma > \int_{-\infty}^0 V dx$ entonces ${}^\gamma H$ posee estados de energía negativa. (Este resultado fue también probado en [4] utilizando otros métodos.)

5.3.3. Energía

Como se observa en [96], independientemente de la extensión autoadjunta zH que elijamos, existe siempre una noción de energía conservada para soluciones de (5.9) en \mathbb{M}_2 , dada por

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\langle \partial_t \phi, \partial_t \phi \rangle + \langle \phi, {}^zH\phi \rangle). \quad (5.34)$$

La conservación de \mathcal{E} (i.e. $\partial_t \mathcal{E} \equiv 0$) se sigue de $[\partial_t, {}^zH] = 0$ y del hecho de que zH es un operador autoadjunto. Para la discusión que sigue es útil integrar por partes en (5.34) para obtener

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (\dot{\phi}^2 + \phi'^2 + V\phi^2) dx - \frac{1}{2} z \phi^2|_{x=0} =: \mathcal{E}_o - \frac{1}{2} z \phi^2|_{x=0} \quad (5.35)$$

donde $z = 0$ para condiciones de Dirichlet o Neumann, y $z = \gamma$ para condiciones de Robin. Ahora, es conveniente pensar en la energía (5.34) desde el punto de vista de la teoría de campos 1 + 1 en \mathbb{M}_2 definida por (5.9), (5.8). El tensor de energía-momento de dicha teoría es $T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{1}{2} \eta_{ab} (\partial_c \phi \partial^c \phi + V\phi^2)$. Aplicando el teorema de Gauss a la corriente conservada $J_a = T_{ab} \xi^b$ (con $\xi^b = (\partial/\partial t)^b$) en una región acotada por dos superficies $t = \text{const.}$, y usando que la integral en el horizonte se anula para campos ϕ que son de cuadrado integrable en dichas superficies, tenemos

$$0 = \int_{-\infty}^0 T_{tt}(t, x) dx - \int_{-\infty}^0 T_{tt}(t_0, x) dx - \int_{t_0}^t T_{tx}(t', 0) dt', \quad (5.36)$$

donde $\{t, x\}$ son coordenadas inerciales. Notemos que

$$T_{tt} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + \phi'^2 + V\phi^2), \quad T_{tx} = \dot{\phi}\phi', \quad (5.37)$$

con lo cual

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} T_{tx} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \dot{\phi}\phi' = \begin{cases} 0 & \text{, condiciones de Dirichlet o Neumann} \\ \frac{1}{2}\gamma \partial_t(\phi^2) & \text{, condiciones de Robin.} \end{cases} \quad (5.38)$$

Por lo tanto, para condiciones de Dirichlet o Neumann, el tercer término en (5.36) se anula, no hay flujo de energía en el infinito, y la energía canónica \mathcal{E}_o en (5.35) se conserva. Por el contrario, para condiciones de Robin, (5.36) adopta la forma

$$\mathcal{E}_o(t) - \mathcal{E}_o(t_0) = \frac{1}{2}\gamma[\phi^2(t, 0) - \phi^2(t_0, 0)], \quad (5.39)$$

de donde se sigue la conservación de (5.35) para $z = \gamma$. Si $\gamma > 0$, de (5.39) vemos que existe la posibilidad de un flujo de energía desde el infinito que ocasiona que la energía canónica \mathcal{E}_o pueda crecer sin límite con t . Sin embargo, el hecho de que el valor crítico γ_c de inestabilidad sea estrictamente positivo (ver Proposición 5.3.5) implica que *el flujo de energía desde el infinito no es una condición suficiente para ocasionar una inestabilidad* en el sistema. Lo

que ocurre para $\gamma > \gamma_c$, es que la ecuación de movimiento admite que la solución $\phi(t, 0)$ crezca sin límite, junto con la energía $\sim \phi^2(t, 0)$ que ingresa al sistema. Este es el mecanismo que produce la inestabilidad de los campos desde el punto de vista energético.

Para ganar mayor intuición física del mecanismo anterior, la siguiente ilustración resulta muy útil. La ecuación (5.7) puede interpretarse como oscilaciones transversas de una cuerda semi-infinita en $x < 0$ [con fuerzas elásticas restauradoras (dependientes de x) cuando $V \geq 0$], y la condición de borde $\phi'|_{x=0} = \gamma\phi|_{x=0}$ es equivalente a una fuerza elástica en $x = 0$ cuya constante elástica es proporcional a $-\gamma$ (ver ecuaciones (85)-(86) en [9]). Si $\gamma > 0$ esta fuerza es repulsiva y proporcional a $\phi(t, 0)$, y si $\gamma > \gamma_c$, existen modos $\phi(t, 0)$ que crecen sin límite, con lo cual las oscilaciones de la cuerda divergen. Estas ideas pueden ilustrarse más aún considerando *toy models* particulares, como hicimos en la sección III.D de [9]; aquí sólo mostraremos el caso de un potencial escalón.

5.3.4. Un *toy model*

El siguiente ejemplo resulta muy útil porque permite deducir cosas sobre el valor crítico de inestabilidad γ_c , que pueden aplicarse en casos más generales. Consideremos un potencial escalón

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ V_o & a < x \leq 0 \end{cases} \quad (5.40)$$

donde V_o y a son positivos. (Una única discontinuidad finita en V no invalida los resultados de la sección previa.) Asumir que γH posee un autoestado de energía negativa $E = -\alpha^2, \alpha > 0$. La función de onda es proporcional a

$$\psi(x) = \begin{cases} \exp(\alpha(x + a)) & , x < -a \\ \cosh(\beta(x + a)) + \frac{\alpha}{\beta} \sinh(\beta(x + a)) & , -a < x \leq 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

donde $\beta = \sqrt{\alpha^2 + V_o}$. Esta función es C^1 y satisface las propiedades en la proposición 5.3.4. Imponiendo condiciones de borde de Robin sobre (5.41), obtenemos la siguiente relación:

$$\gamma = \beta \frac{\beta \tanh(\beta a) + \alpha}{\beta + \alpha \tanh(\beta a)} \quad (5.42)$$

Insertando el valor de β en (5.42), encontramos que $d\gamma/d\alpha > 0$ para $\alpha > 0$. Ya que $\gamma \sim \alpha$ para $\alpha \rightarrow \infty$, concluimos que, conforme α va de cero a infinito, γ va de

$$\gamma_c = \sqrt{V_o} \tanh(\sqrt{V_o} a) \quad (5.43)$$

a infinito. Este ejemplo es útil porque el valor crítico γ_c introducido en la proposición 5.3.5.ii) puede ser calculado explícitamente, ec. (5.43). Si $\gamma > \gamma_c$, (5.42) tiene una única solución α , que da un único estado ligado, con energía

$E = -\alpha^2$. Por otro lado, si $\gamma \leq \gamma_c$, no existen estados ligados. Las cotas (5.31) y (5.33) pueden ser fácilmente chequeadas en este ejemplo; más aún, el ejemplo muestra que la cota (5.33) no puede ser mejorada, ya que para a pequeño (5.43) da

$$\gamma_c = aV_o + \mathcal{O}(a^3) = \int_{-\infty}^0 V dx + \mathcal{O}(a^3). \quad (5.44)$$

5.4. Inestabilidad de Schwarzschild-AdS

5.4.1. Campos de Klein-Gordon sin masa

El potencial de un campo de Klein-Gordon sin masa es (5.19), y su comportamiento asintótico fue dado en (5.20). Cerca de la frontera temporal, el potencial diverge como $2/x^2$. Usando el teorema 5.2.2, el hecho de que, cerca de $x = 0$, el coeficiente de x^{-2} en (5.20) sea mayor que $3/4$ implica que H_ℓ^{KG} es LP en $x = 0$, y por lo tanto (5.13) admite una única solución de cuadrado integrable cerca de $x = 0$. Tenemos:

Proposición 5.4.1. *El operador H_ℓ^{KG} es esencialmente autoadjunto y posee espectro positivo.*

Demostración. Como ya dijimos, el ítem (i) del teorema 5.2.2 implica que H_ℓ^{KG} es LP en $x = 0$, y por lo tanto es esencialmente autoadjunto. Esto puede chequearse notando que un elemento arbitrario del espacio 2-dimensional de soluciones de la ecuación de Schrödinger $H_\ell^{\text{KG}}\psi = E\psi$ en $x = 0$ es

$$\begin{aligned} \psi = & A \left(\frac{1}{r^2} - \frac{3}{10\lambda^2} \frac{(\ell+3)(\ell-2)\lambda + 3E}{r^4} + \mathcal{O}(r^{-5}) \right) \\ & + B \left(r + \frac{3}{2\lambda^2} \frac{\ell(\ell+1)\lambda + 3E}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right), \end{aligned} \quad (5.45)$$

y debemos imponer $B = 0$ para que la integral $\int_{r_o}^{\infty} \psi^2 dr/f$ converja. Esto implica que hay una única condición de borde admisible en $x = 0$, es decir $B = 0$, lo cual es equivalente a condiciones de Dirichlet: $\psi|_{x=0} = 0$.

Para probar que $\text{Spec}(H_\ell^{\text{KG}})$ no contiene autovalores negativos, notemos que cerca del horizonte $x \rightarrow -\infty$ (i.e. $r \rightarrow r_h$), tenemos

$$\psi = C(r - r_h)^\kappa (1 + \mathcal{O}(r - r_h)) + D(r - r_h)^{-\kappa} (1 + \mathcal{O}(r - r_h)), \quad (5.46)$$

donde C y D son constantes, y $\kappa = \frac{\sqrt{-E} r_h^2}{1 - \lambda r_h^2}$. Suponer ahora que existe $E \in \text{Spec}(H_\ell^{\text{KG}})$ tal que $E < 0$ (i.e. κ real y positivo). La correspondiente autofunción debe comportarse como (5.45) con $B = 0$ cerca de $x = 0$, y como (5.46) con $D = 0$ cerca del horizonte. Tenemos entonces que $\int_{-\infty}^0 \psi^2 dx$

converge, y

$$\begin{aligned}
 E \int_{-\infty}^0 \psi^2 dx &= \int_{-\infty}^0 \psi (-\partial_x^2 \psi + V_\ell^s \psi) dx \\
 &= [\psi f \partial_r \psi] \Big|_{r=r_h}^{r=\infty} + \int_{-\infty}^0 ((\partial_x \psi)^2 + V_\ell^s \psi^2) dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 ((\partial_x \psi)^2 + V_\ell^s \psi^2) dx > 0,
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

con lo cual arribamos a una contradicción. \square

Concluimos entonces que: (i) la dinámica de campos de Klein-Gordon sin masa es no-ambigua a pesar de que el espacio-tiempo no es globalmente hiperbólico, pues H_ℓ^{KG} es esencialmente autoadjunto, y (ii) los campos son modalmente estables, pues la única extensión autoadjunta de H_ℓ^{KG} es definida positiva.

Resultados más fuertes acerca de la estabilidad de campos escalares sobre espacio-tiempos asintóticamente AdS pueden encontrarse en [87, 137, 88, 89, 90], donde la acotación y el decaimiento de los campos fueron estudiados utilizando un enfoque no-modal de la ecuación de Klein-Gordon. (En particular, sí existen inestabilidades para campos escalares *masivos*.)

5.4.2. Campos de Maxwell

El potencial para la descomposición modal correspondiente a campos de Maxwell está dado por (5.23), y su comportamiento asintótico por (5.24). Los modos electromagnéticos están caracterizados por la paridad $p = \pm$ y los números armónicos (ℓ, m) . Notemos que V_ℓ^{MAX} es regular y positivo, por lo tanto los resultados de las proposiciones 5.3.1–5.3.6 aplican directamente. En particular, de la proposición 5.3.1 deducimos que existen modos electromagnéticos inestables para condiciones de Robin con $\gamma_{(p,\ell,m)}$ apropiado. Más precisamente, notando que

$$\int_{-\infty}^0 V_\ell^{\text{MAX}} dx = \frac{\ell(\ell + 1)}{r_h}, \tag{5.48}$$

vemos que los campos de Maxwell serán modalmente estables si se imponen condiciones de Dirichlet, Neumann, o Robin con $\gamma_{(p,\ell,m)} < 0$ para cada modo $\phi_{(\ell,m)}^{p=\pm}$ (de acuerdo a la proposición 5.3.3), y serán inestables si existe un modo (p, ℓ, m) tal que $\gamma_{(p,\ell,m)} > \ell(\ell + 1)/r_h$ (por (5.48) y la proposición 5.3.6). Las características de los modos inestables pueden obtenerse del resto de las proposiciones.

Resulta útil comparar la energía conservada (5.35) de los modos con la energía del campo electromagnético. Notemos que (5.35) implica que para

cualquier función $Q = Q(p, \ell, m)$ se cumple

$$\begin{aligned} \sum_{(\ell, m, p=\pm)} Q(p, \ell, m) \int_{-\infty}^0 \left[\dot{\phi}_{(p, \ell, m)}^2 + \phi'_{(p, \ell, m)}{}^2 + V_{\ell}^{\text{MAX}} \phi_{(p, \ell, m)}^2 \right] dx \Big|_{t_0}^t \\ = \sum_{(\ell, m, p=\pm)} Q(p, \ell, m) \gamma_{(p, \ell, m)} (\phi_{(p, \ell, m)}(s, 0))^2 \Big|_{s=t_0}^{s=t}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Mostraremos que la elección $Q(p, \ell, m) \equiv \ell(\ell+1)/2$ en (5.49) da la ecuación de balance para el cambio de energía electromagnética debido al flujo de energía desde el infinito. El tensor de energía-momento del campo de Maxwell es

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} (F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd}). \quad (5.50)$$

La energía electromagnética se mide utilizando la conservación de la corriente $J_a = T_{ab} \xi^b$, donde ξ^a es el campo de Killing temporal. El teorema de Gauss aplicado a una región Ω en el espacio-tiempo (4-dimensional) acotada por dos hipersuperficies $\{t = \text{const.}\}$ da

$$0 = \int_{\Omega} \nabla_a J^a = \oint_{\partial\Omega} J_a n^a = \int_{\Sigma_t} J_a n_{\Sigma_t}^a + \int_{\Sigma_{t_0}} J_a n_{\Sigma_{t_0}}^a + \int_{\mathcal{J}_t} J_a n_{\mathcal{J}_t}^a \quad (5.51)$$

donde \mathcal{J}_t es el límite $R \rightarrow \infty$ de una hipersuperficie temporal $\{r = R\}$ que se extiende desde Σ_{t_0} hasta Σ_t , con $t > t_0$. Los elementos de volumen inducidos sobre las hipersuperficies están sobreentendidos en las integrales, y los vectores normales unitarios (apuntando hacia afuera) son $n_{\Sigma_t}^a \partial_a = f^{-1/2} \partial_t$, $n_{\Sigma_{t_0}}^a \partial_a = -f^{-1/2} \partial_t$ y $n_{\mathcal{J}_t}^a \partial_a = f^{-1/2} \partial_r$. Podemos entonces reescribir (5.51) como

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 dx \int_{S^2} T_{tt}(t, r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \int_{-\infty}^0 dx \int_{S^2} T_{tt}(t_0, r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \\ + \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 f(R) \int_{t_0}^t dt' \int_{S^2} T_{tr}(t', R, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \end{aligned} \quad (5.52)$$

donde el término inferior muestra la falta de conservación de la “energía estándar”. Utilizando $F = dA$ y la descomposición modal (5.21)–(5.22), obtenemos

$$\begin{aligned} T_{tr}^{(\ell, m)} \Big|_{r=R} = \frac{1}{4\pi R^2 f(R)} \left[\dot{\phi}_{(\ell, m)}^+ \phi'_{(\ell, m)}{}^+ + \dot{\phi}_{(\ell, m)}^- \phi'_{(\ell, m)}{}^- \right] \\ \times \left[(\partial_{\theta} S_{(\ell, m)})^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} (\partial_{\phi} S_{(\ell, m)})^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Notemos que en el límite $R \rightarrow \infty$, la condición de borde de Robin implica $\dot{\phi}_{(p, \ell, m)} \phi'_{(p, \ell, m)} = \frac{d}{dt} [\gamma_{(p, \ell, m)} \phi_{(p, \ell, m)}^2 / 2]$, lo cual permite integrar el flujo sobre \mathcal{J}_t . Por último, utilizando la identidad

$$\int_{S^2} \left[(\partial_{\theta} S_{(\ell, m)})^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} (\partial_{\phi} S_{(\ell, m)})^2 \right] \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi \ell(\ell+1), \quad (5.54)$$

luego de un cálculo tedioso encontramos, como habíamos anticipado, que (5.52) se reduce a (5.49) con $Q(p, \ell, m) = \ell(\ell+1)/2$; esto es, si $\mathcal{E}_o^{\text{EM}}(t) :=$

$\int_{\Sigma_t} J_a n_{\Sigma_t}^a$ representa la energía “estándar” total del campo electromagnético sobre Σ_t , tenemos

$$\mathcal{E}_o^{\text{EM}}(t) - \mathcal{E}_o^{\text{EM}}(t_0) = \sum_{(\ell, m, p=\pm)} \frac{\ell(\ell+1)}{2} \gamma_{(p, \ell, m)} [(\phi_{(p, \ell, m)}(t, 0))^2 - (\phi_{(p, \ell, m)}(t_0, 0))^2]. \quad (5.55)$$

5.4.3. Perturbaciones gravitacionales

En lo que sigue mostraremos que las condiciones de borde de Robin son naturalmente motivadas desde distintos puntos de vista, y que las perturbaciones gravitacionales resultan inestables bajo ciertas condiciones.

Condiciones sobre campos físicamente relevantes. Los estudios de estabilidad gravitacional de Schwarzschild anteriores a [46, 47] analizan la acotación y decaimiento de las variables maestras de Regge-Wheeler $\phi_{(\ell, m)}^{(-)}$ y Zerilli $\phi_{(\ell, m)}^{(+)}$. La relación entre estas variables y la perturbación métrica es de la forma

$$h_{ab} = \sum_{(\ell, m, p=\pm)} \mathcal{D}_{ab}^{(\ell, m, p)}[\phi_{(\ell, m)}^{(p)}, S_{(\ell, m)}], \quad (5.56)$$

donde $\mathcal{D}_{ab}^{(\ell, m, p)}$ es un cierto operador diferencial lineal de segundo orden. La separación de variables en (5.56) conduce a que las ecuaciones linealizadas de Einstein sean equivalentes a las ecuaciones de onda 1 + 1 (5.7) para los $\phi_{(\ell, m)}^{(p)}$ junto con la ecuación de armónicos esféricos satisfecha por los $S_{(\ell, m)}$. De (5.56) uno puede ver que la relación entre los $\phi_{(\ell, m)}^{(p)}$ y efectos medibles de la perturbación es remota: cuatro derivadas de $\phi_{(\ell, m)}^{(p)}$ se corresponden con una sola componente armónica de la curvatura. Para hallar cantidades que representen de manera más satisfactoria los efectos de la perturbación en la geometría, el enfoque en [46, 47] es el siguiente. Utilizando el tensor de Weyl y su dual, consideremos los invariantes de curvatura

$$Q_+ := \frac{1}{48} C_{abcd} C^{abcd}, \quad Q_- := \frac{1}{48} {}^* C_{abcd} C^{abcd}, \quad (5.57)$$

junto con el invariante diferencial

$$X := \frac{1}{720} \nabla_e C_{abcd} \nabla^e C^{abcd}. \quad (5.58)$$

En Schwarzschild-(A)dS en 4 dimensiones, estos campos son

$$Q_+^{\text{SAdS}} = \frac{M^2}{r^6}, \quad Q_-^{\text{SAdS}} = 0, \quad X^{\text{SAdS}} = \frac{M^2}{3r^9} (\lambda r^3 - 3r + 6M). \quad (5.59)$$

Consideremos ahora la linealización de estos campos, \dot{Q}_+ , \dot{Q}_- y \dot{X} . Utilizando argumentos de simetría puede mostrarse que para perturbaciones impares tenemos $\{\dot{Q}_- \neq 0, \dot{Q}_+ = 0, \dot{X} = 0\}$, mientras que para perturbaciones pares

$\{\dot{Q}_- = 0, \dot{Q}_+ \neq 0, \dot{X} \neq 0\}$. Como fue probado en [46, 47], los campos escalares definidos por

$$G_- := \dot{Q}_-, \quad (5.60)$$

$$G_+ := (9M - 4r + \lambda r^3)\dot{Q}_+ + 3r^3\dot{X} \quad (5.61)$$

son invariantes de gauge y contienen toda la información de una perturbación métrica; y ya que tienen una interpretación geométrica clara por ser directamente perturbaciones de invariantes de curvatura, estos campos representan adecuadamente los efectos de la perturbación gravitacional sobre la geometría.

Para analizar la relación entre condiciones de borde impuestas sobre los G_{\pm} y los $\phi_{(\ell,m)}^{(\pm)}$, necesitamos expresiones de G_{\pm} en términos de $\phi_{(\ell,m)}^{(\pm)}$. Las mismas se pueden obtener *on shell* utilizando iterativamente las ecuaciones de Einstein. En lo que sigue consideraremos todos los modos $\ell \geq 0$ (recordar que los casos $\ell = 0, 1$ no fueron considerados en la sección 3.5). Para G_- tenemos

$$G_- = -\frac{6M}{r^7} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sum_{m=1}^3 j^{(m)} S_{(\ell=1,m)} - \frac{3M}{r^5} \sum_{\ell>1,m} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \frac{\phi_{(\ell,m)}^{(-)}}{r} S_{(\ell,m)}, \quad (5.62)$$

donde el primer término contiene la contribución estática $\ell = 1$, siendo $j^{(m)}$ (con $m = 1, 2, 3$) las componentes del momento angular del agujero negro perturbado. Notemos que $r^5 G_- \propto \Psi_2^{-2/3} \mathfrak{Jm} \Psi_2$, luego, utilizando (3.102) vemos que $r^5 G_-$ satisface la ecuación de Regge-Wheeler 4-dimensional⁵ (3.136). Para G_+ , la relación *on shell* con $\phi_{(\ell,m)}^{(+)}$ es

$$G_+ = -\frac{2M\dot{M}}{r^5} + \frac{M}{2r^4} \sum_{\ell>1,m} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} [\partial_x + Z_\ell] \phi_{(\ell,m)}^{(+)} S_{(\ell,m)}, \quad (5.63)$$

donde \dot{M} es la variación de la masa que proviene del modo par $\ell = 0$ (el cual es independiente del tiempo), y

$$Z_\ell = \frac{2M\lambda r^3 + \mu r(r - 3M) - 6M^2}{r^2(\mu r + 6M)} \quad (5.64)$$

con $\mu = (\ell - 1)(\ell + 2)$. Con estas expresiones podemos ahora relacionar las condiciones de borde impuestas sobre G_{\pm} y $\phi_{(\ell,m)}^{(\pm)}$. En particular, notemos que imponer condiciones de Dirichlet sobre G_{\pm} es equivalente a imponer una mezcla de condiciones de Dirichlet y Robin sobre los $\phi_{(\ell,m)}^{(\pm)}$:

$$\phi_{(\ell,m)}^{(-)}|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial_x \phi_{(\ell,m)}^{(+)}}{\phi_{(\ell,m)}^{(+)}} \right|_{x=0} = -\frac{2M\lambda}{\mu}. \quad (5.65)$$

⁵tener presente que, de acuerdo a la convención de signatura de este capítulo, el operador \square aquí corresponde a $-\square$ en el capítulo 3.

Por otro lado, imponer condiciones de Neumann o Robin sobre G_{\pm} es equivalente a imponer condiciones de Robin sobre $\phi_{(\ell,m)}^{(\pm)}$. En general, el tipo de condiciones de borde apropiadas depende del problema que se trate, y para el caso de estudios de estabilidad lineal, debe tenerse en cuenta que los campos $\phi_{(\ell,m)}^{(\pm)}$, aunque son convenientes para separar las ecuaciones de Einstein, no son cantidades directamente medibles.

Condiciones de Robin y AdS/CFT. Otro contexto importante donde las condiciones de borde de Robin aparecen naturalmente es en estudios relacionados a la famosa correspondencia AdS/CFT de Maldacena. Como es sabido, esta correspondencia relaciona teorías de gravedad definidas en un espacio-tiempo asintóticamente AdS en $d + 1$ dimensiones (*bulk*), con teorías conformes de campos (CFT) definidas sobre el borde d -dimensional de dicho espacio. Una ramificación reciente de dicha conjetura es la correspondencia entre fluidos conformes y gravedad, que es de hecho independiente de AdS/CFT y puede entenderse como un mapa entre dos sistemas dinámicos clásicos. Existe un método canónico para asociar un tensor de energía momento a la teoría de campos “dual” a la solución de gravedad, dado en [20]. En particular, puede probarse que el tensor de energía momento de la CFT dual a la solución de Schwarzschild-AdS en $d = 4$ corresponde a un fluido perfecto conforme en $2 + 1$ dimensiones. Perturbaciones gravitacionales del bulk se identifican entonces con hidrodinámica linealizada en el borde, y uno está interesado en mantener fija la métrica de la frontera, lo cual se traduce en perturbaciones métricas tales que, en un cierto gauge, se anulan para superficies $\{r = \text{const.}\}$ con $r \rightarrow \infty$ [19, 93].

La métrica ds_{∞}^2 para la CFT se relaciona conformemente a la métrica ds_r^2 inducida sobre hipersuperficies $\{r = \text{const.}\}$ por medio de

$$ds_{\infty}^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{\lambda r^2} ds_r^2 \right). \quad (5.66)$$

Para el espacio-tiempo de background, obtenemos

$$ds_{\infty}^2 = -dt^2 - \frac{3}{\lambda} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.67)$$

Para perturbaciones pares en el gauge de Regge-Wheeler (ver sección 3.5.2), el cálculo de (5.66) da (ver [19, ec. (3.46)] y [47, ec. (129)]), donde se define \mathcal{J}

$$ds_{\infty}^2 = -dt^2 - \frac{3}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{J} \right) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.68)$$

de donde vemos que, para mantener fija la métrica de la CFT, debemos imponer que la componente armónica $\mathcal{J}_{(\ell,m)}$ de \mathcal{J} se anule para $r \rightarrow \infty$. De las ecuaciones (151), (153) y (154) en [47] encontramos

$$\mathcal{J}_{(\ell,m)} \propto 2f(r) \partial_r \zeta_{(\ell,m)}^{(+)} + \frac{\ell(\ell+1)}{r} \zeta_{(\ell,m)}^{(+)}, \quad (5.69)$$

donde $\zeta_{(\ell,m)}^{(+)} = (\mu + \frac{6M}{r}) \phi_{(\ell,m)}^{(+)}$. Por lo tanto, mantener fija la métrica en el borde implica la siguiente condición de Robin para $\phi_{(\ell,m)}^{(+)}$:

$$\left. \frac{\partial_x \phi_{(\ell,m)}^{(+)}}{\phi_{(\ell,m)}^{(+)}} \right|_{x=0} = -\frac{2M\lambda}{\mu}. \quad (5.70)$$

Modos inestables explícitos. En [47] se encontró que el siguiente campo es un modo inestable correspondiente a perturbaciones gravitacionales pares de Schwarzschild-AdS con condiciones de borde de Robin:

$$\phi_{(\ell,m)}^{(+,\text{unst})} := \chi_\ell^+(r) \exp(\omega_\ell t), \quad (5.71)$$

donde

$$\chi_\ell^+(r) := \frac{r \exp(\omega_\ell x(r))}{\mu r + 6M}, \quad (5.72)$$

con $x(r)$ definida en (5.2), y $\omega_\ell := \frac{1}{12M} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}$. El campo χ_ℓ^+ satisface la ecuación de Schrödinger $H_\ell^+ \chi_\ell^+ = -\omega_\ell^2 \chi_\ell^+$ para cualquier valor de los parámetros M y λ . En el caso $\lambda = 0$, esta solución fue encontrada por Chandrasekhar [33] en su estudio de perturbaciones algebraicamente especiales de agujeros negros, pero en este caso sólo tiene interés formal ya que es irrelevante por diverger en el límite $r \rightarrow \infty$. Una solución linealmente independiente de χ_ℓ^+ con la misma energía negativa es

$$\tau_{(\ell;r_o)}^+(r) := \chi_\ell^+(r) \int_{r_o}^r \frac{dr'}{f(r') [\chi_\ell^+(r')]^2}. \quad (5.73)$$

Notemos que al cambiar r_o en esta ecuación se le agrega un término proporcional a χ_ℓ^+ . Para el sector impar, dos soluciones linealmente independientes de $H_\ell^- \psi_\ell^- = -\omega_\ell^2 \psi_\ell^-$ con la misma energía negativa $E = -\omega_\ell^2$ son [33]

$$\chi_\ell^-(r) := \frac{1}{\chi_\ell^+(r)}, \quad \tau_{(\ell;r_o)}^-(r) := \chi_\ell^-(r) \int_{r_o}^r \frac{dr'}{f(r') [\chi_\ell^-(r')]^2}. \quad (5.74)$$

En el caso $\lambda \geq 0$ (y $M > 0$), x va desde $-\infty$ (para $r \rightarrow r_h^+$) hasta $+\infty$ (para $r \rightarrow \infty$ si $\lambda = 0$, o $r \rightarrow r_c^-$ si $\lambda > 0$, con r_c el horizonte cosmológico). Esto hace que las perturbaciones algebraicamente especiales (5.72), (5.73) y (5.74) sean irrelevantes, pues estos modos divergen en al menos uno de los dos límites, y por lo tanto no son autofunciones de H_ℓ^\pm . En cambio, en el caso de interés actual, i.e. $\lambda < 0$, tenemos $x \in (-\infty, 0]$, y uno puede chequear que la solución χ_ℓ^+ para el sector par, y la solución para el sector impar dada por

$$\tau_\ell^- := \tau_{(\ell;r_h)}^-(r) = \chi_\ell^-(r) \int_{r_h}^r \frac{dr'}{f(r') [\chi_\ell^-(r')]^2}, \quad (5.75)$$

están ambas en $L^2(\mathbb{R}_-, dx)$ y poseen energía negativa. (La elección $r_o \equiv r_h$ es crucial para que esto valga.) Por lo tanto, estos campos son genuinamente modos gravitacionales inestables perfectamente admisibles.

El modo inestable par (5.71) satisface una condición de borde de Robin en $x = 0$ con parámetro

$$\gamma_{\text{CH}} := \omega_\ell - \frac{2M\lambda}{\mu} = \frac{\lambda r_h (\lambda r_h^2 - 3)}{3\mu} - \frac{(\ell+2)(\ell+1)\ell(\ell-1)}{2r_h (\lambda r_h^2 - 3)} \quad (5.76)$$

donde la segunda expresión es útil para analizar ciertos límites que veremos más abajo. La métrica perturbada correspondiente a (5.71) es

$$h_{(\ell,m)}^{(+,\text{unst})} = e^{\omega_{\ell}v} S_{(\ell,m)} \left[\frac{\omega_{\ell}}{6M} (r\ell(\ell+1) - 6M) dv^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{6M} r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (5.77)$$

donde hemos definido la coordenada nula $v := t + x$. Esta expresión muestra que la perturbación métrica es bien comportada a través del horizonte de eventos futuro, definido por $r = r_h$, $v \in \mathbb{R}$. La perturbación tiene además la propiedad de desdoblar sólo uno de los pares de direcciones principales nulas dobles del background, con lo cual el espacio-tiempo perturbado es de tipo Petrov II. Para una perturbación genérica, en cambio, ambos pares se bifurcan y la estructura algebraica corresponde a un tipo Petrov I, ver sección 3.4.1.

El potencial de Zerilli $V_{\ell}^{(+)}$ para el sector par fue dado en (5.27), y su comportamiento asintótico en (5.28). Este potencial es definido positivo y regular en $(-\infty, 0]$, con lo cual los resultados de las proposiciones 5.3.1–5.3.6 aplican directamente. Como dijimos, el estado ligado χ_{ℓ}^{+} satisface condiciones de Robin en $x = 0$ con parámetro γ_{CH} (5.76). El valor crítico de inestabilidad debe satisfacer

$$\gamma_c \leq \gamma_{\text{CH}} \simeq \begin{cases} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \frac{1}{6r_h} & , r_h \rightarrow 0 \\ \frac{\lambda^2 r_h^3}{3\mu} & , r_h \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.78)$$

Podemos usar este comportamiento para investigar la cota superior (5.33) en estos límites de r_h . La integral en \mathbb{R}_- de $V_{\ell}^{(+)}$ es

$$\int_{-\infty}^0 V_{\ell}^{(+)} dx = \frac{2\lambda^2 r_h^3}{3\mu} + \frac{\lambda r_h (\ell+3)(\ell-2)}{2\mu} + \frac{2\ell^2 + 2\ell - 3}{2r_h}. \quad (5.79)$$

Analizando los límites de r_h grande y chico, tenemos

$$\gamma_c \leq \int_{-\infty}^0 V_{\ell}^{(+)} dx \simeq \begin{cases} \frac{2\ell^2 + 2\ell - 3}{2r_h} & , r_h \rightarrow 0 \\ \frac{2\lambda^2 r_h^3}{3\mu} & , r_h \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.80)$$

Vemos que para radios del horizonte muy grandes, γ_{CH} es la mitad del valor del potencial integrado, mientras que para r_h chico, γ_{CH} es menor que el potencial integrado sólo para $\ell = 2$ (el mínimo valor de ℓ posible), y crece como ℓ^4 para ℓ grande, mientras que el potencial integrado crece sólo como ℓ^2 . Debe tenerse presente, no obstante, que la cota (5.33) no puede ser mejorada, ya que el límite $a \rightarrow 0$ del toy model con potencial escalón visto en la sección 5.3.4 satura dicha cota.

5.4.4. Ruptura de la dualidad supersimétrica

Analizaremos ahora la relación entre las condiciones de borde impuestas en la frontera temporal $r = \infty$, y la dualidad formal entre modos gravitacionales pares e impares descubierta por Chandrasekhar [34, pág. 160]. Esta dualidad

juega un rol crucial en la prueba de estabilidad no-modal de Schwarzschild y Schwarzschild-de Sitter (i.e. con $\lambda \geq 0$) realizada en [46, 47], ya que en estos casos es una biyección y permite reemplazar todos los campos de Zerilli $\phi_{(\ell,m)}^{(+)}$ con campos de Regge-Wheeler $\phi_{(\ell,m)}^{(-)}$, y utilizar entonces las propiedades de acotación y decaimiento de la ecuación 4-dimensional de Regge-Wheeler (3.136) para λ no-negativo. Como veremos, esta sustitución falla en general en el caso $\lambda < 0$, resultando válida sólo cuando se eligen condiciones de borde relacionadas en los sectores par e impar. En lo que sigue exploraremos estas cuestiones.

Todas las relaciones que necesitamos se siguen de las observaciones hechas en [33, 34] de que los Hamiltonianos par e impar se pueden escribir en la forma

$$H_\ell^\pm = \mathcal{A}_\ell^\pm \mathcal{A}_\ell^\mp - \omega_\ell^2, \quad (5.81)$$

donde

$$\mathcal{A}_\ell^\pm := \pm \partial_x + W_\ell, \quad W_\ell := \omega_\ell + \frac{6Mf}{r(r\mu+6M)}. \quad (5.82)$$

En general, un sistema que admite una descomposición del tipo (5.81) se dice que posee una estructura de *Mecánica Cuántica supersimétrica*. Los Hamiltonianos H_ℓ^+ y H_ℓ^- forman un *par supersimétrico*, y la función W_ℓ se denomina *superpotencial*. En vista de (5.81), al actuar con \mathcal{A}_ℓ^- sobre una solución de la ecuación diferencial $H_\ell^+ \psi^+ = E \psi^+$ obtenemos una solución ψ^- de $H_\ell^- \psi^- = E \psi^-$ y viceversa; esto es:

$$H_\ell^+ \psi^+ = E \psi^+ \quad \Rightarrow \quad H_\ell^- (\mathcal{A}_\ell^- \psi^+) = E (\mathcal{A}_\ell^- \psi^+), \quad (5.83)$$

$$H_\ell^- \psi^- = E \psi^- \quad \Rightarrow \quad H_\ell^+ (\mathcal{A}_\ell^+ \psi^-) = E (\mathcal{A}_\ell^+ \psi^-). \quad (5.84)$$

Notemos que las soluciones obtenidas por la acción de \mathcal{A}_ℓ^\pm pueden ser triviales; por ejemplo, utilizando que, en términos de los estados ligados χ_ℓ^\pm dados en (5.72), (5.74), se tiene $W_\ell = (\partial_x \chi_\ell^+) / \chi_\ell^+ = -(\partial_x \chi_\ell^-) / \chi_\ell^-$, obtenemos

$$\mathcal{A}_\ell^- \chi_\ell^+ = 0, \quad \mathcal{A}_\ell^+ \chi_\ell^- = 0. \quad (5.85)$$

Nos concentraremos ahora en estudiar el intercambio de modos gravitacionales pares e impares utilizando esta dualidad en el caso $\lambda < 0$. Suponer que, para dados números armónicos (ℓ, m) , imponemos las condiciones de borde

$$\psi^{+'}|_{x=0} = \gamma_e \psi^+|_{x=0}, \quad (5.86)$$

donde, en lo que sigue, $\gamma_e \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ para incluir los casos de Neumann ($\gamma_e = 0$) y Dirichlet ($\gamma_e = \infty$), e introducimos similarmente γ_o para los modos impares (por simplicidad no escribiremos los números armónicos (ℓ, m)). A continuación probaremos que, en general, no existe una función $\gamma_o = \gamma_o(\gamma_e)$ tal que $\psi^{+'}/\psi^+ = \gamma_e$ en $x = 0$ implique $(\mathcal{A}_\ell^- \psi^+)'/\mathcal{A}_\ell^- \psi^+ = \gamma_o(\gamma_e)$ en $x = 0$. Para mostrar esto, notemos primero que cualquier función ψ^+ que satisface (5.86) puede expandirse utilizando la base completa de autofunciones generalizadas $\{\psi_{(E,\gamma_e)}^+\}$ de la correspondiente extensión autoadjunta ${}^{\gamma_e}H_\ell^+$:

$$\psi^+ = \int dE c_E \psi_{(E,\gamma_e)}^+. \quad (5.87)$$

Para las autofunciones $\psi_{(E,\gamma_e)}^+$, tenemos

$$[\mathcal{A}_\ell^- \psi_{(E,\gamma_e)}^+] \Big|_{x=0} = (W_\ell - \gamma_e) \psi_{(E,\gamma_e)}^+ \Big|_{x=0}, \quad (5.88)$$

$$[\mathcal{A}_\ell^- \psi_{(E,\gamma_e)}^+]' \Big|_{x=0} = (E - W_\ell^2 + \omega_\ell^2 + \gamma_e W_\ell) \psi_{(E,\gamma_e)}^+ \Big|_{x=0}, \quad (5.89)$$

donde hemos usado que $-\partial_x^2 \psi_{(E,\gamma_e)}^+ + V_\ell^+ \psi_{(E,\gamma_e)}^+ = E \psi_{(E,\gamma_e)}^+$, y que $V_\ell^+ = W_\ell^2 + W_\ell' - \omega_\ell^2$. Luego

$$\frac{(\mathcal{A}_\ell^- \psi_{(E,\gamma_e)}^+)'}{\mathcal{A}_\ell^- \psi_{(E,\gamma_e)}^+} \Big|_{x=0} = \frac{E - W_\ell^2 + \omega_\ell^2 + \gamma_e W_\ell}{W_\ell - \gamma_e} \Big|_{x=0}. \quad (5.90)$$

Ya que, genéricamente, (5.90) depende de E , el cociente $\psi^{+'}/\psi^+$ en (5.87) tomará distintos valores para distintas funciones en el espacio $\mathcal{A}_\ell^-[\text{Dom}({}^{\gamma_e}H_\ell^+)]$, por lo tanto la dinámica no estará bien definida en este espacio ya que el mismo no corresponde al dominio de una extensión autoadjunta de H_ℓ^- . Teniendo en cuenta que $W_\ell|_{x=0} = \gamma_{\text{ch}}$, las únicas excepciones (i.e., los casos en los que el lado derecho de (5.90) no depende de E) son: (i) cuando elegimos condiciones de Dirichlet en el sector par, esto es $\gamma_e \rightarrow \infty$ en (5.90), lo cual da condiciones de Robin en el sector impar con $\gamma_o = -\gamma_{\text{ch}}$, es decir

$$\gamma_o = -\gamma_{\text{ch}}, \quad (\gamma_e = \infty), \quad (5.91)$$

y (ii) cuando elegimos condiciones de Dirichlet en el sector par,

$$\gamma_e = \gamma_{\text{ch}}, \quad (\gamma_o = \infty). \quad (5.92)$$

Por lo tanto, exceptuando estos dos casos, concluimos que los operadores de dualidad \mathcal{A}_ℓ^\pm en general no mapean entre sí los espacios de soluciones pares e impares; en este sentido la dualidad supersimétrica de Chandrasekhar se rompe. La siguiente proposición brinda más detalles acerca de la supersimetría y de los dos casos anteriores (aprovechamos para aclarar que el siguiente enunciado corrige los errores tipográficos de la versión publicada del correspondiente artículo [9]).

Proposición 5.4.2. *Consideremos los mapas \mathcal{A}_ℓ^\pm definidos en (5.82).*

- i) *Los espectros de ${}^D H_\ell^+$ y ${}^{-\gamma_{\text{ch}}} H_\ell^-$ son no-negativos.
El mapa $\mathcal{A}_\ell^- : \text{Dom}({}^D H_\ell^+) \rightarrow \text{Dom}({}^{-\gamma_{\text{ch}}} H_\ell^-)$ es una biyección.*
- ii) *El espectro de ${}^D H_\ell^-$ es no-negativo, y el de ${}^{\gamma_{\text{ch}}} H_\ell^+$ contiene una energía negativa con autofunción χ_ℓ^+ .
El mapa $\mathcal{A}_\ell^- : \text{Dom}({}^{\gamma_{\text{ch}}} H_\ell^+) \rightarrow \text{Dom}({}^D H_\ell^-)$ es suryectivo, y su kernel es el espacio generado por χ_ℓ^+ .
El mapa $\mathcal{A}_\ell^+ : \text{Dom}({}^D H_\ell^-) \rightarrow \text{Dom}({}^{\gamma_{\text{ch}}} H_\ell^+)$ es inyectivo.*
- iii) *No existen otros valores de $\gamma, \gamma' \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tales que $\mathcal{A}_\ell^\mp[\text{Dom}({}^\gamma H_\ell^\pm)] \subset \text{Dom}({}^{\gamma'} H_\ell^\mp)$.*

Demostración. Ver proposición 7 en [9]. □

Capítulo 6

Perturbaciones de espacio-tiempos de altas dimensiones

6.1. Preliminares

El estudio de espacio-tiempos de más de 4 dimensiones es de gran interés en diversas áreas de la Física Teórica moderna, principalmente en física de altas energías en el contexto de teorías de supergravedad y supercuerdas. Es también muy relevante en ciertas áreas de la Relatividad General y la geometría. El objetivo del presente capítulo es estudiar la generalización de los resultados 4-dimensionales de capítulos anteriores al caso de espacio-tiempos de dimensiones arbitrarias.

Si bien en teoría de supercuerdas la existencia de dimensiones adicionales en el espacio-tiempo es un requerimiento ineludible para su consistencia matemática, la propuesta de dimensiones adicionales resulta muy interesante desde la perspectiva de las llamadas Teorías del Campo Unificado, que pretenden describir todas las interacciones fundamentales de la Naturaleza como aspectos distintos de una misma entidad. Esta idea data de hecho a 1921, cuando T. Kaluza estudió una extensión clásica de la Relatividad General a 5 dimensiones, asumiendo una estructura particular de la métrica y mostrando que las ecuaciones de campo 5-dimensionales se reducen, en 4 dimensiones, a las ecuaciones de Einstein junto con las ecuaciones de Maxwell, donde el tensor de energía momento que sirve de fuente para el campo gravitacional corresponde exactamente al del campo electromagnético. Adicionalmente, la ecuación de geodésicas 5-dimensional conduce a la fuerza de Lorentz en 4 dimensiones, lo que permite identificar el movimiento en la quinta dimensión con la carga eléctrica. Más tarde, en 1926, O. Klein desarrolló una interpretación cuántica de la idea de Kaluza, mostrando que, si uno supone que la quinta dimensión es compacta, se obtiene como resultado la cuantización de la carga eléctrica. De esta manera, la propuesta de una dimensión adicional del espacio-tiempo conduce a la unificación de los campos gravitacional y electromagnético, y provee una interpretación geométrica de la carga eléctrica. El espacio-tiempo 5-dimensional tendría la estructura local $\mathcal{M} \times S^1$, con \mathcal{M} el espacio-tiempo de 4 dimensiones que observamos y S^1 la dimensión adicional

compacta, y la simetría $U(1)$ de S^1 sería percibida en 4 dimensiones como una simetría de gauge. Esta idea y sus generalizaciones son hoy en día conocidas como *teorías de Kaluza-Klein*. Una formulación moderna de las mismas que pretenda unificar gravedad y campos de gauge, debe también tener en cuenta los demás campos de Yang-Mills no-abelianos conocidos, es decir los campos asociados a las interacciones nucleares fuerte y débil. El espacio-tiempo debería entonces tener la estructura local $\mathcal{M} \times \mathcal{B}$, donde \mathcal{B} es un espacio interno compacto cuyo grupo de simetrías contiene al grupo del modelo estándar, $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Puede probarse [139] que la dimensión mínima para que una variedad tenga como grupo de simetría $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ es 7, con lo cual necesitaríamos un espacio-tiempo de 11 dimensiones para construir una teoría en la que los campos de gauge del Modelo Estándar sean componentes del campo gravitacional en altas dimensiones. Ahora, cualquier teoría de física fundamental debe tener también incorporados los campos fermiónicos de materia asociados a leptones y quarks. Witten probó en [139] que, desafortunadamente, no es posible obtener fermiones quirales con este tipo de procedimiento, con lo cual el interés en teorías de Kaluza-Klein fue decayendo; no obstante, hoy en día son aún estudiadas, principalmente como ciertos aspectos de teorías de supercuerdas y generalizaciones.

Por otro lado, espacio-tiempos de altas dimensiones son también muy importantes desde el punto de vista de la Relatividad General, ya que permiten estudiar qué aspectos de la teoría son exclusivos a 4 dimensiones. Por ejemplo, un punto interesante son los teoremas de unicidad de agujeros negros 4-dimensionales, que, como vimos en el capítulo 1, muestran que un agujero negro estacionario, de vacío y asintóticamente plano corresponde a la solución de Kerr, y por lo tanto debe estar descrito por sólo dos parámetros (la masa y el momento angular) y la topología del horizonte debe ser esférica. En más de 4 dimensiones la situación es mucho más compleja y los teoremas de unicidad ya no son válidos; en particular, además de agujeros negros esféricos uno puede tener objetos más exóticos como cuerdas negras, anillos negros, “saturnos” negros, etc., que pueden poseer los mismos valores de masa y momento angular y sin embargo distintas topologías del horizonte. (Además, un objeto rotante en altas dimensiones puede tener varios momentos angulares independientes.) De hecho, el estudio de soluciones de agujeros negros en más dimensiones es un área muy activa de investigación, en lo referente, por ejemplo, a perturbaciones y estabilidad, existencia y unicidad, y posibles esquemas de clasificación de las soluciones.

En las secciones siguientes estudiaremos la posible generalización de los resultados de capítulos anteriores al caso de espacio-tiempos con un número de dimensiones d arbitrario. Este estudio presenta varias dificultades adicionales con respecto al caso 4-dimensional, que comentamos a continuación.

1. En primer lugar, hasta ahora hemos usado principalmente métodos espinoriales en 4 dimensiones, y los mismos están especialmente adaptados al isomorfismo particular $\text{Spin}(1, 3) \cong \text{SL}(2, \mathbb{C})$, con lo cual en el capítulo presente no podremos utilizar los mismos métodos. La estructura de los grupos de spin depende del número de dimensiones, por lo tanto,

como trabajaremos en dimensiones arbitrarias, no usaremos métodos espinoriales. En su lugar, haremos uso de la generalización del formalismo GHP a altas dimensiones, que fue desarrollada en [52]. En particular, es importante notar que en $d = 4$ los pesos de boost y spin coinciden en las variables relevantes y por lo tanto es indistinto referirse a uno o el otro, y hasta ahora hemos clasificado las distintas ecuaciones de acuerdo al peso de spin; no obstante, en $d > 4$ es conveniente clasificar las ecuaciones de acuerdo al peso de boost, como haremos a partir de ahora.

2. La segunda dificultad tiene que ver con el hecho de que los resultados de *decoupling* en altas dimensiones son mucho más restrictivos que en el caso $d = 4$. Para perturbaciones electromagnéticas y gravitacionales, Durkee y Reall estudiaron en [53] la posible generalización de las ecuaciones de Teukolsky, y encontraron que las componentes con peso de boost *extremo* satisfacen ecuaciones desacopladas *si y sólo si* el espacio-tiempo pertenece a la clase *Kundt* (ver sección 6.4). Las soluciones conocidas de agujeros negros de altas dimensiones no son Kundt en general; pero el resultado es todavía útil ya que una clase de soluciones conocidas como *geometrías cerca del horizonte* (*Near Horizon Geometries*) de agujeros negros extremos resultan ser Kundt. Por otro lado, para componentes con peso de boost *cero*, los resultados de *decoupling* conocidos corresponden a agujeros negros estáticos, esto es, a las generalizaciones de la solución de Schwarzschild-(A)dS. En las aplicaciones, nos restringiremos entonces al estudio de estos dos casos, es decir a espacio-tiempos tipo Kundt y agujeros negros estáticos.
3. Una tercera dificultad se asocia a la forma explícita de las ecuaciones de Teukolsky d -dimensionales halladas en [53]. En notación GHP (ver sección siguiente), las ecuaciones para campos de spin $\mathfrak{s} = 1$ son¹

$$\begin{aligned} & \left[2\rho'\rho + \delta^k\delta_k + \rho'\rho - 4\tau^k\delta_k + \Phi - \frac{2(2d-3)\lambda}{(d-1)(d-2)} \right] \varphi_i \\ & + [-2\tau_i\delta^k + 2\tau^k\delta_i + 2\Phi_i^{Sk} + 4\Phi_i^{Ak}] \varphi_k = 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde φ_i es la componente con peso de boost $b = 1$ del campo de Maxwell; y para spin $\mathfrak{s} = 2$

$$\begin{aligned} & [2\rho'\rho + \delta^k\delta_k + \rho'\rho - 6\tau^k\delta_k + 4\Phi - \frac{4d\lambda}{(d-1)(d-2)}] \dot{\Omega}_{ij} \\ & + 4[\tau^k\delta_{(i} - \tau_{(i}\delta^k + \Phi_{(i}^{Sk} + 4\Phi_{(i}^{Ak}]\dot{\Omega}_{j)k} + 2\Phi_i^k{}^j{}^l\dot{\Omega}_{kl} = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

con $\dot{\Omega}_{ij}$ la componente con peso de boost $b = 2$ del tensor de Weyl perturbado. Como vemos, las ecuaciones tienen una estructura muy complicada que hace difícil estudiar la existencia de posibles patrones de simetrías como en los capítulos anteriores.

¹Nuestras convenciones para la constante cosmológica λ en este capítulo están fijadas por las ecuaciones de Einstein en d dimensiones: $R_{ab} = \frac{2\lambda}{(d-2)}g_{ab}$.

Uno de los resultados principales de los capítulos previos es la identidad off shell dada en (4.1). Para generalizar esta identidad, debemos hallar lo siguiente: (i) un operador de onda con peso tipo \square_p , en términos del cual las ecuaciones (6.1), (6.2) para peso de boost extremo (y también las ecuaciones conocidas para peso de boost cero) adopten una estructura tipo onda; (ii) un tensor “proyector” que reemplace al espinor $P_s^{A_1 \dots A_{2s}}$; y (iii) la estructura tensorial del operador espinorial en el lado izquierdo de (4.1). Una guía para alcanzar estos objetivos es generalizar las ideas de covariancia conforme que vimos en el capítulo 4, y veremos de hecho que esto nos conduce al objetivo deseado; no obstante, la cuestión de invariancia conforme de ecuaciones de campo en altas dimensiones es más sutil, ver sección 6.6.

Observación 6.1.1 (Artículos). *Los resultados de este capítulo se encuentran en [10] (con excepción de la sección 6.6).*

Observación 6.1.2 (Signatura). *En este capítulo utilizaremos la signatura métrica $(- + + \dots +)$.*

Observación 6.1.3 (Demostraciones). *Al igual que en capítulos anteriores, algunas de las demostraciones en este capítulo son extremadamente largas, por lo que no las daremos explícitamente sino que referiremos al correspondiente artículo [10], que se encuentra disponible gratuitamente online en arXiv.*

6.2. El formalismo GHP en dimensiones arbitrarias

En esta sección repasaremos las bases del formalismo GHP en dimensiones arbitrarias, desarrollado en [52], detallando algunos aspectos de la geometría asociada (que no se encuentran en [52]) desde el punto de vista de la teoría de conexiones sobre espacios fibrados.

Sea (\mathcal{M}, g) un espacio-tiempo d -dimensional, con $d \geq 4$. Al igual que en el formalismo GHP 4-dimensional estándar, queremos adaptar un marco de trabajo a un par de direcciones nulas ℓ^a, n^a . Por lo tanto consideramos en cada espacio tangente un vielbein $\{e_a^a\} = \{e_0^a = \ell^a, e_1^a = n^a, e_i^a = m_i^a\}$, donde $i = 2, \dots, d-1$, los vectores ℓ^a y n^a son nulos, y los vectores m_i^a son espaciales. La base dual es $\{e_a^a\} = \{e_a^0 = n_a, e_a^1 = \ell_a, e_a^i = m_a^i\}$. La métrica en esta base es

$$g_{ab} = 2\ell_{(a}n_{b)} + \delta_{ij}m_a^i m_b^j, \tag{6.3}$$

los únicos productos no-triviales son $\ell^a n_a = 1$ y $m_i^a m_{ja} = \delta_{ij}$. Los índices internos i, j, k, \dots serán subidos y bajados usando δ^{ij} y δ_{ij} .

Bajo una elección de direcciones nulas, el $\text{SO}(d-1, 1)$ -fibrado ortonormal es reducido a un fibrado principal B con grupo de estructura G_o , donde G_o es el subgrupo de $\text{SO}(d-1, 1)$ que preserva las direcciones nulas. Este subgrupo es² $G_o = \mathbb{R}^\times \times \text{SO}(d-2)$, donde su acción en el vielbein $\{e_a^a\}$ está dada por

$$\ell^a \rightarrow \lambda \ell^a, \quad n^a \rightarrow \lambda^{-1} n^a, \quad m_i^a \rightarrow X_i^j m_j^a \tag{6.4}$$

²denotamos \mathbb{R}^\times al grupo multiplicativo de números reales.

con $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ y $X \in \text{SO}(d-2)$ (ambos λ y X dependen del punto del espacio-tiempo). Las componentes de un campo tensorial T obtenidas al proyectarlo sobre el vielbein $\{e_{\mathbf{a}}^a\}$ transforman de cierta manera bajo (6.4); en otras palabras, la acción (6.4) define una representación de G_o dada por

$$T_{i_1 \dots i_s} \mapsto (\Pi_{(b,s)}(\lambda, X)T)_{i_1 \dots i_s} = \lambda^b X_{i_1}^{j_1} \dots X_{i_s}^{j_s} T_{j_1 \dots j_s} \quad (6.5)$$

para algunos números $b \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}_0$. Decimos que los elementos que transforman bajo esta representación son *cantidades de tipo* $\{b, s\}$, o equivalentemente tienen *peso de boost* b y *peso de spin* s^3 . Notemos que

$$\Pi_{(b,s)} \equiv \Pi_b \otimes \Pi_s, \quad (6.6)$$

donde Π_b es la representación de \mathbb{R}^\times dada por $(\Pi_b(\lambda)T)_{i_1 \dots i_s} = \lambda^b T_{i_1 \dots i_s}$, y $\Pi_s = \Pi_1^{\otimes s}$, con Π_1 la representación de spin 1 del grupo de rotaciones $\text{SO}(d-2)$. En cada punto del espacio-tiempo, las cantidades de un tipo bien definido $\{b, s\}$ forman un espacio vectorial V (el espacio de la representación (6.5) de G_o); las cantidades de todos los tipos juntos forman un álgebra graduada (lo cual implica que el producto de una cantidad de tipo $\{b, s\}$ con otra cantidad de tipo $\{b', s'\}$ es de tipo $\{b+b', s+s'\}$). Un *campo escalar GHP* de tipo $\{b, s\}$ es una sección del fibrado vectorial asociado $\mathbb{E}_{(b,s)} := B \times_{\Pi_{(b,s)}} V$.

Sea $\omega_a^{\mathbf{a}\mathbf{b}} = e_{\mathbf{b}}^a \nabla_a e_{\mathbf{b}}^b$ la 1-forma de conexión en el $\text{SO}(d-1, 1)$ -fibrado P . El comportamiento de las distintas componentes de $\omega_a^{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ bajo el subgrupo GHP G_o da origen, por un lado, a los así llamados coeficientes de spin, y por otro lado, a la 1-forma de conexión en el fibrado reducido B , lo cual permite definir una derivada covariante sobre cantidades GHP. Más específicamente, las partes de $\omega_a^{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ que transforman *covariantemente* bajo G_o son $\omega_a^0{}_i = -m_i^b N_{ba}$ y $\omega_a^1{}_i = -m_i^b L_{ba}$, donde hemos adoptado la notación de [52]:

$$L_{ab} := \nabla_b \ell_a, \quad N_{ab} := \nabla_b n_a, \quad M^i{}_{ab} := \nabla_b m_a^i. \quad (6.7)$$

Notemos que, proyectando sobre el vielbein $\{e_{\mathbf{a}}^a\}$, obtenemos las componentes $L_{\mathbf{ab}} = e_{\mathbf{a}}^a e_{\mathbf{b}}^b L_{ab}$, $N_{\mathbf{ab}} = e_{\mathbf{a}}^a e_{\mathbf{b}}^b N_{ab}$ y $M^i{}_{\mathbf{ab}} = e_{\mathbf{a}}^a e_{\mathbf{b}}^b M^i{}_{ab}$. Los coeficientes de spin GHP son entonces definidos como $N_{i\mathbf{a}} := e_{\mathbf{a}}^a m_i^b N_{ba}$ y $L_{i\mathbf{a}} := e_{\mathbf{a}}^a m_i^b L_{ba}$, y la notación específica para cada $\mathbf{a} = 0, 1, i$ está dada en la tabla 6.1 (ver [52] para la interpretación de los coeficientes). Notemos que en el caso en que ℓ^a es geodésico, tenemos $\kappa_i \equiv 0$. Por otro lado, es útil notar también que la cantidad GHP ρ_{ij} puede descomponerse del siguiente modo:

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{\rho}{(d-2)} \delta_{ij} + \rho_{[ij]}, \quad (6.8)$$

donde $\sigma_{ij} = \sigma_{(ij)}$, ρ y $\rho_{[ij]}$ representan el *shear*, la expansión y el *twist* de la congruencia, respectivamente. Relaciones análogas valen para n^a reemplazando las correspondientes cantidades por sus versiones primadas.

Ahora, las partes de $\omega_a^{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ que *no* transforman covariantemente bajo G_o definen la 1-forma de conexión inducida χ en el fibrado reducido B . Como

³no confundir la notación GHP $\{b, s\}$ de este capítulo con la notación GHP $\{p, q\}$ de capítulos previos.

Componente	Notación	boost b	spin s
L_{ij}	ρ_{ij}	1	2
L_{ii}	$\rho = \delta^{ij}\rho_{ij}$	1	0
L_{i0}	κ_i	2	1
L_{i1}	τ_i	0	1
N_{ij}	ρ'_{ij}	-1	2
N_{ii}	$\rho' = \delta^{ij}\rho'_{ij}$	-1	0
N_{i1}	κ'_i	-2	1
N_{i0}	τ'_i	0	1

Tabla 6.1: Notación para los coeficientes de spin GHP [52].

es usual, χ toma valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}_o = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(d-2)$, por lo que podemos descomponerla como $\chi = (\beta, \Sigma)$, donde $\beta \in T^*\mathcal{M} \otimes \mathbb{R}$ y $\Sigma \in T^*\mathcal{M} \otimes \mathfrak{so}(d-2)$. No es difícil mostrar que estas componentes son

$$\beta_a = \omega_a^1{}_1, \quad \Sigma_a^i{}_j = \omega_a^i{}_j \tag{6.9}$$

ya que las mismas transforman bajo G_o como

$$\beta_a \rightarrow \lambda \nabla_a \lambda^{-1} + \beta_a, \tag{6.10}$$

$$\Sigma_a^i{}_j \rightarrow X^i{}_k \nabla_a X_j^k + X^i{}_k \Sigma_a^k{}_l X_j^l, \tag{6.11}$$

lo cual corresponde a la ley de transformación de una 1-forma de conexión. Explícitamente:

$$\beta_a = -L_{1a} e_a^{\mathbf{a}} = -L_{10} n_a - L_{11} \ell_a - L_{1k} m_a^k, \tag{6.12}$$

$$\Sigma_a^i{}_j = -M^i{}_{j\mathbf{a}} e_a^{\mathbf{a}} = -M^i{}_{j0} n_a - M^i{}_{j1} \ell_a - M^i{}_{jk} m_a^k. \tag{6.13}$$

Con estos elementos podemos ahora introducir la derivada covariante sobre los fibrados asociados $\mathbb{E}_{(b,s)}$:

$$\Theta_a T_{i_1 \dots i_s} = \nabla_a T_{i_1 \dots i_s} + (\pi_{(b,s)}(\chi_a) T)_{i_1 \dots i_s}, \tag{6.14}$$

donde $\pi_{(b,s)} : \mathfrak{g}_o \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ es la representación del álgebra de Lie \mathfrak{g}_o inducida por (6.5). En vista de (6.6), la estructura de $\pi_{(b,s)}$ es $\pi_{(b,s)} = \pi_b \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \pi_s$ (con \mathbb{I} el mapa identidad en el espacio correspondiente) y su acción está dada por

$$(\pi_{(b,s)}(a, x) T)_{i_1 \dots i_s} = ba T_{i_1 \dots i_s} + x_{i_1}^k T_{ki_2 \dots i_s} + \dots + x_{i_s}^k T_{i_1 \dots k} \tag{6.15}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathfrak{so}(d-2)$. Por lo tanto, la forma explícita de (6.14) es

$$\Theta_a T_{i_1 \dots i_s} = \nabla_a T_{i_1 \dots i_s} + b\beta_a T_{i_1 \dots i_s} + \Sigma_{ai_1}^k T_{ki_2 \dots i_s} + \dots + \Sigma_{ai_s}^k T_{i_1 \dots k}. \tag{6.16}$$

La generalización de los operadores *thorn* y *eth* 4-dimensionales $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{d}, \mathfrak{d}'$ a altas dimensiones está dada simplemente por las derivadas direccionales a lo largo de los vectores del vielbein $\{e_{\mathbf{a}}^a\}$ usando la conexión GHP:

$$\mathfrak{b} := \ell^a \Theta_a, \quad \mathfrak{b}' := n^a \Theta_a, \quad \mathfrak{d}_j := m_j^a \Theta_a. \tag{6.17}$$

Componente	Notación	Boost	Spin	Identidades
C_{0i0j}	Ω_{ij}	+2	2	$\Omega_{ij} = \Omega_{ji}, \Omega_i^i = 0$
C_{0ijk}	Ψ_{ijk}	+1	3	$\Psi_{ijk} = -\Psi_{ikj}, \Psi_{[ijk]} = 0$
C_{0i0i}	Ψ_i	+1	1	$\Psi_i = \Psi_{ki}{}^k$
C_{ijkl}	Φ_{ijkl}	0	4	$\Phi_{ijkl} = \Phi_{[ij][kl]} = \Phi_{klij}, \Phi_{i[jkl]} = 0$
C_{0i1j}	Φ_{ij}	0	2	$\Phi_{(ij)} \equiv \Phi_{ij}^S = -\frac{1}{2}\Phi_{ikj}{}^k$
C_{01ij}	$2\Phi_{ij}^A$	0	2	$\Phi_{ij}^A \equiv \Phi_{[ij]}$
C_{0101}	Φ	0	0	$\Phi = \Phi_i^i$
C_{1ijk}	Ψ'_{ijk}	-1	3	$\Psi'_{ijk} = -\Psi'_{ikj}, \Psi'_{[ijk]} = 0$
C_{10i1}	Ψ'_i	-1	1	$\Psi'_i = \Psi'_{ki}{}^k$
C_{1i1j}	Ω'_{ij}	-2	2	$\Omega'_{ij} = \Omega'_{ji}, \Omega_i^i = 0$

Tabla 6.2: Componentes del tensor de Weyl en altas dimensiones [53].

Su acción sobre un escalar GHP de tipo $\{b, s\}$ se deduce de (6.16) y (6.12), (6.13):

$$\mathfrak{b}T_{i_1\dots i_s} = DT_{i_1\dots i_s} - bL_{10}T_{i_1\dots i_s} + M^k{}_{i_10}T_{ki_2\dots i_s} + \dots + M^k{}_{i_s0}T_{i_1\dots k} \quad (6.18)$$

$$\mathfrak{b}'T_{i_1\dots i_s} = D'T_{i_1\dots i_s} - bL_{11}T_{i_1\dots i_s} + M^k{}_{i_11}T_{ki_2\dots i_s} + \dots + M^k{}_{i_s1}T_{i_1\dots k} \quad (6.19)$$

$$\mathfrak{d}_jT_{i_1\dots i_s} = \delta_jT_{i_1\dots i_s} - bL_{1j}T_{i_1\dots i_s} + M^k{}_{i_1j}T_{ki_2\dots i_s} + \dots + M^k{}_{i_sj}T_{i_1\dots k}, \quad (6.20)$$

donde $D = \ell^a \nabla_a$, $D' = n^a \nabla_a$ y $\delta_j = m_j^a \nabla_a$ son derivadas de Newman-Penrose tradicionales. Estas fórmulas coinciden por supuesto con las dadas en la literatura, ver e.g. [52]. Para expresiones explícitas de los conmutadores entre derivadas GHP nos referimos al artículo [52].

6.2.1. Clasificación del tensor de Weyl

Repasaremos brevemente lo básico de la clasificación del tensor de Weyl en dimensiones arbitrarias, que es la generalización de la clasificación de Petrov de espacio-tiempos 4-dimensionales dada en 2.2.4, y fue originalmente desarrollada en [28]. Seguiremos, no obstante, las convenciones de [53], donde los espacio-tiempos *algebraicamente especiales* son definidos de manera ligeramente distinta. La notación para las componentes del tensor de Weyl de altas dimensiones está dada en la tabla 6.2. Para las componentes del tensor de Riemann utilizaremos las mismas letras griegas mayúsculas pero con tilde (notemos que las identidades de traza en la tabla 6.2 no valen en general para el tensor de Riemann).

Un campo vectorial nulo ℓ^a se dice *Weyl Aligned Null Direction* (WAND) si todas las componentes con peso de boost $b = +2$ del tensor de Weyl se anulan en todos lados en un vielbein que contenga a ℓ^a , i.e. $\Omega_{ij} \equiv 0$. Esta condición es independiente de la elección del resto de los vectores del vielbein. En $d = 4$, la condición de WAND es equivalente a la condición de PND, pero para $d > 4$ esto ya no es cierto. Una WAND ℓ^a se dice *múltiple* si todas las componentes con peso de boost $b = +1$ del tensor de Weyl también se anulan,

Tipo algebraico	Definición
O	$C_{abcd} \equiv 0$
N	$\Omega_{ij} \equiv \Psi_{ijk} \equiv \Phi_{ijkl} \equiv \Psi'_{ijk} \equiv 0$
III	$\Omega_{ij} \equiv \Psi_{ijk} \equiv \Phi_{ijkl} \equiv 0$
II	$\Omega_{ij} \equiv \Psi_{ijk} \equiv 0$
I	$\Omega_{ij} \equiv 0$
G	No existe una WAND.

Tabla 6.3: Tipos algebraicos del tensor de Weyl en altas dimensiones (clasificación primaria), de acuerdo a [52].

i.e. $\Omega_{ij} = \Psi_{ijk} \equiv 0$. En $d = 4$, esta condición es equivalente a que ℓ^a sea una PND repetida. Decimos entonces que un espacio-tiempo es *algebraicamente especial* si admite una WAND múltiple. En la tabla 6.3 resumimos los distintos tipos algebraicos de acuerdo a la existencia de WANDs múltiples.

Esta clasificación se dice *primaria* porque sólo se enfoca en elegir el vector ℓ^a de manera que se anulen tantas componentes de *mayor* boost como sea posible. Una vez que ℓ^a está fijo, uno puede tratar de elegir el otro vector nulo n^a de modo que se anulen tantas componentes de *menor* boost como sea posible, lo cual define una *clasificación secundaria*. Esto da origen a la definición de un *espacio-tiempo tipo D* en altas dimensiones: un espacio-tiempo se dice tipo D si ambas direcciones nulas ℓ^a y n^a son WANDs múltiples. En un vielbein adaptado, tenemos $\Omega_{ij} = \Psi_{ijk} = \Omega'_{ij} = \Psi'_{ijk} \equiv 0$.

Varias soluciones de agujeros negros en altas dimensiones son de tipo algebraico D. Por ejemplo, agujeros negros de Schwarzschild-Tangherlini, Myers-Perry y Kerr-(A)dS, y también métricas de cuerdas/branas negras, pertenecen todos a este tipo algebraico para toda dimensión d . Existen otros objetos negros, no obstante, que no son tipo D, por ejemplo el anillo negro (ver [115]).

6.3. Conexiones modificadas

Como dijimos hacia el final de la sección 6.1, estamos interesados en modificar la forma de conexión GHP χ por medio de agregarle una 1-forma \mathfrak{g}_o -valuada $\zeta := (B, C) \in T^*\mathcal{M} \otimes \mathfrak{g}_o$, con tal de analizar si las ecuaciones tipo Teukolsky en altas dimensiones admiten una estructura tipo onda. Definimos las 1-formas B_a y C_a con valores en \mathbb{R} y $\mathfrak{so}(d-2)$ respectivamente como

$$B_a := \frac{2\rho}{(d-2)}n_a - \tau_i m_a^i, \quad (6.21)$$

$$C_a{}^j := -\tau_i m_a^j + \tau^j m_{ia}. \quad (6.22)$$

Veremos una interpretación de estas 1-formas en la sección 6.6. Con la 1-forma $\zeta = (B, C)$ introducimos una derivada covariante modificada sobre los fibrados vectoriales $\mathbb{E}_{(b,s)}$,

$$D_a := \Theta_a + \pi_{(b,s)}(\zeta_a) \quad (6.23)$$

donde $\pi_{(b,s)}$ es la representación de $\mathfrak{g}_o = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(d-2)$ dada en (6.15). La acción explícita de esta derivada sobre un campo escalar GHP $\eta_{i_1 \dots i_s}$ de tipo $\{b, s\}$ es

$$D_a \eta_{i_1 \dots i_s} = \Theta_a \eta_{i_1 \dots i_s} + b B_a \eta_{i_1 \dots i_s} + C_{a i_1}{}^k \eta_{k \dots i_s} + \dots + C_{a i_s}{}^k \eta_{i_1 \dots k}. \quad (6.24)$$

Por supuesto, proyectando D_a sobre el vielbein $\{e_a^{\mathbf{a}}\}$ obtenemos las derivadas direccionales modificadas $\tilde{\mathfrak{p}} = \ell^a D_a$, $\tilde{\mathfrak{p}}' = n^a D_a$, y $\tilde{\delta}_i = m_i^a D_a$. Puede chequearse que, sobre una cantidad η_i de tipo $\{b, 1\}$ por ejemplo,

$$\tilde{\mathfrak{p}} \eta_i = \mathfrak{p} \eta_i + \frac{2\rho}{(d-2)} b \eta_i, \quad (6.25)$$

$$\tilde{\mathfrak{p}}' \eta_i = \mathfrak{p}' \eta_i, \quad (6.26)$$

$$\tilde{\delta}_k \eta_i = \delta_k \eta_i - b \tau_k \eta_i - \tau_i \eta_k + \delta_{ik} \tau^j \eta_j \quad (6.27)$$

(el operador $\tilde{\mathfrak{p}}'$ de hecho coincide con el usual para un campo GHP de cualquier tipo $\{b, s\}$, como consecuencia de las definiciones (6.21), (6.22)).

6.3.1. Operadores de onda con peso

Veamos ahora la construcción de operadores de onda con peso, que serán adecuados para el tratamiento de las perturbaciones en las secciones siguientes. En primer lugar, el operador de onda GHP se construye naturalmente como

$$\square_{(b,s)} := g^{ab} \Theta_a \Theta_b, \quad (6.28)$$

y actúa sobre campos tensoriales pesados de tipo $\{b, s\}$. En particular, notemos que $\square_{(0,0)} = \square$. En términos de las derivadas direccionales con peso, puede chequearse que

$$\square_{(b,s)} = (\mathfrak{p} + \rho) \mathfrak{p}' + (\mathfrak{p}' + \rho') \mathfrak{p} + (\delta^k - \tau^k - \tau'^k) \delta_k. \quad (6.29)$$

Por otro lado, naturalmente asociado a la derivada (6.23) tenemos el operador de onda modificado

$$\boxplus_{(b,s)} := g^{ab} D_a D_b. \quad (6.30)$$

Notemos que, nuevamente, $\boxplus_{(0,0)} = \square$. En términos de las derivadas direccionales modificadas, tenemos

$$\boxplus_{(b,s)} = (\tilde{\mathfrak{p}} + \frac{2}{(d-2)} \rho) \mathfrak{p}' + (\mathfrak{p}' + \rho') \tilde{\mathfrak{p}} + (\tilde{\delta}^k - (d-2) \tau^k - \tau'^k) \tilde{\delta}_k. \quad (6.31)$$

Es útil notar aquí que el adjunto del operador $\boxplus_{(b,s)}$ con respecto al producto interno

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_{\mathcal{M}} \Phi \Psi, \quad (6.32)$$

está dado por

$$\langle \Phi, \boxplus_{(b,s)} \Psi \rangle = \langle \boxplus_{(b',s')} \Phi, \Psi \rangle, \quad (6.33)$$

donde Ψ y Φ son campos escalares GHP de tipo $\{b, s\}$ y $\{b', s'\}$ respectivamente, y debemos recordar que, para que el producto interno sea un número real, debe tenerse $b' = -b$ and $s' = s$.

Para la clase Kundt, se tiene $\rho_{ij} \equiv 0$ y las derivadas direccionales modificadas $\tilde{\mathfrak{p}}$ y $\tilde{\mathfrak{p}}'$ coinciden con las usuales. En este caso es útil conmutar las derivadas $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, a fin de (como veremos a continuación) obtener las fórmulas conocidas en la literatura. En particular, el operador de onda modificado (6.31) sobre un espacio-tiempo Einstein-Kundt, actuando en un campo escalar GHP de tipo $\{b, 1\}$, es:

$$\begin{aligned} \square_{(b,1)}\eta_i = & 2\tilde{\mathfrak{p}}'\mathfrak{p}\eta_i + \delta^k\delta_k\eta_i + \rho'\mathfrak{p}\eta_i - 2(b+1)\tau^k\delta_k\eta_i + 2[\tau^k\delta_i - \tau_i\delta^k]\eta_k \\ & + \left[(b^2 - 1)\tau^k\tau_k - \frac{2bd\Lambda}{(d-1)(d-2)} \right] \eta_i - (d-4)\tau_i\tau^k\eta_k, \end{aligned} \quad (6.34)$$

mientras que sobre un escalar GHP de tipo $\{b, 2\}$ simétrico $\eta_{ij} = \eta_{(ij)}$

$$\begin{aligned} \square_{(b,2)}\eta_{ij} = & 2\tilde{\mathfrak{p}}'\mathfrak{p}\eta_{ij} + \delta^k\delta_k\eta_{ij} + \rho'\mathfrak{p}\eta_{ij} - 2(b+1)\tau^k\delta_k\eta_{ij} + 4[\tau^k\delta_{(i} - \tau_{(i}\delta^k)]\eta_{j)k} \\ & + \left[(b^2 - 2)\tau^k\tau_k - \frac{2bd\Lambda}{(d-1)(d-2)} \right] \eta_{ij} - 2(d-2)\tau^k\tau_{(i}\eta_{j)k} \\ & + 2[\tau_i\tau_j\delta^{kl} + \delta_{ij}\tau^k\tau^l]\eta_{kl}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Notemos que, poniendo $b = 1$ en (6.34) y $b = 2$ en (6.35), los términos de derivadas coinciden exactamente con los de las ecuaciones (6.1) y (6.2) respectivamente; la diferencia entre estos operadores y dichas fórmulas constituirá entonces términos de “potencial”, análogamente a las ecuaciones de Teukolsky 4-dimensionales. De esta manera demostramos que las ecuaciones (6.1) y (6.2) tienen en efecto una estructura tipo onda, generalizando los resultados de [22, 1] a dimensiones arbitrarias. En particular, puede entonces aplicarse el Teorema 1.2.2 y obtener existencia, unicidad y estabilidad de Cauchy para el sistema de Teukolsky en altas dimensiones.

6.3.2. El operador de Laplace-de Rham modificado

Recordar la definición de formas diferenciales con valores tensoriales de la sección 4.4.3. Siguiendo la notación de dicha sección, sea $\omega_{a_1\dots a_l b_1\dots b_k} = \omega_{a_1\dots a_l [b_1\dots b_k]} \in \mathbb{V}_{l,k}$ una k -forma con l valores tensoriales. Recordemos también los operadores derivada covariante exterior y su adjunto:

$$(\mathcal{D}\omega)_{a_1\dots a_l b_1\dots b_{k+1}} = (k+1)\nabla_{[b_1}\omega_{|a_1\dots a_l|b_2\dots b_{k+1}]}, \quad (6.36)$$

$$(\mathcal{D}^\dagger\omega)_{a_1\dots a_l b_1\dots b_{k-1}} = -\nabla^c\omega_{a_1\dots a_l c b_1\dots b_{k-1}}. \quad (6.37)$$

La composición de estas derivadas conduce al operador de Laplace-de Rham generalizado $\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger + \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$. Modificamos ahora estos operadores por la adición de una 1-forma A_a (de tipo $\{0, 0\}$), dada por⁴

$$A_a := -\frac{\rho}{(d-2)}n_a - \frac{\rho'}{(d-2)}\ell_a + \tau_i m_a^i. \quad (6.38)$$

En la sección 6.6 daremos una interpretación de esta 1-forma. Consideremos un número entero positivo \mathfrak{s} (que jugará el rol del spin de los campos). Definimos los siguientes operadores:

$$(\mathcal{D}_\mathfrak{s}\omega)_{a_1\dots a_l b_1\dots b_{k+1}} := (k+1)(\nabla_{[b_1} - 2\mathfrak{s}A_{|b_1}]\omega_{|a_1\dots a_l|b_2\dots b_{k+1]}}, \quad (6.39)$$

$$(\mathcal{D}_\mathfrak{s}^*\omega)_{a_1\dots a_l b_1\dots b_{k-1}} := -(\nabla^c - 2\mathfrak{s}A^{b_1})\omega_{a_1\dots a_l c b_1\dots b_{k-1}}. \quad (6.40)$$

⁴en [10] utilizamos la 1-forma $\gamma_a \equiv -A_a$.

Observamos que \mathcal{D}_s^* no es el adjunto de \mathcal{D}_s ; éstos están relacionados por $\mathcal{D}_s^* = \mathcal{D}_{-s}^\dagger$. Por otro lado, notemos que $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$, con lo cual tenemos $\mathcal{D}^\dagger = \mathcal{D}^*$. Introducimos entonces un operador $\mathbb{V}_{l,k} \rightarrow \mathbb{V}_{l,k}$ dado por

$$\mathcal{D}_s \mathcal{D}^* + \mathcal{D}_s^* \mathcal{D}. \quad (6.41)$$

En vista de su apariencia similar al operador de Laplace-de Rham $\mathcal{D}\mathcal{D}^\dagger + \mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$, en lo que sigue llamaremos a (6.41) como “operador de Laplace-de Rham modificado de spin s ”. En notación de formas diferenciales, el mismo puede escribirse como

$$(\mathcal{D} - 2sA\wedge)\mathcal{D}^\dagger + (\mathcal{D}^\dagger - 2sA^\# \lrcorner)\mathcal{D}, \quad (6.42)$$

donde $A^\#$ es el campo vectorial *sharp* obtenido de la 1-forma A , y los productos exterior \wedge e interior \lrcorner actúan sobre los índices de formas diferenciales.

Resulta instructivo ver algunos ejemplos. En las secciones siguientes estudiaremos campos electromagnéticos y gravitacionales. Los campos de Maxwell tienen spin $s = 1$, y su curvatura es representada por una 2-forma ordinaria, por lo tanto tenemos $s = 1$, $l = 0$ y $k = 2$. Entonces

$$-[(\mathcal{D}_1\mathcal{D}^* + \mathcal{D}_1^*\mathcal{D})F]_{ab} = 2(\nabla_{[a} - 2A_{[a})\nabla^c F_{|cb]} + 3(\nabla^c - 2A^c)\nabla_{[a}F_{bc]}. \quad (6.43)$$

Por otro lado, el campo gravitacional tiene spin $s = 2$, y su curvatura es representada por una 2-forma con 2 índices tensoriales extra; entonces $s = 2$, $l = 2$, y $k = 2$. Luego

$$-[(\mathcal{D}_2\mathcal{D}^* + \mathcal{D}_2^*\mathcal{D})C]_{abcd} = 2(\nabla_{[c} - 4A_{[c})\nabla^e C_{|abe|d]} + 3(\nabla^e - 4A^e)\nabla_{[e}C_{|ab|cd]}. \quad (6.44)$$

6.3.3. Identidades de Bianchi y ecuaciones de Einstein

Veamos ahora cómo conectar *off shell* las identidades de Bianchi con las ecuaciones de Einstein en altas dimensiones. Necesitaremos esto para poder tomar ecuaciones adjuntas al tratar perturbaciones gravitacionales y de este modo reconstruir la métrica, al estilo de como hicimos en el capítulo 3, ver sección 3.4.3. A continuación damos la generalización a dimensiones arbitrarias del resultado del lema 3.4.1.

Recordar que la identidad de Bianchi para el tensor de Riemann, dada por $\nabla_{[e}R_{ab]cd} = 0$, es una identidad geométrica *independiente* de las ecuaciones de campo, por lo tanto nos permite relacionar *off shell* derivadas de los tensores de Riemann, Weyl y Ricci. Consideremos ahora el operador de Laplace-de Rham modificado de spin 2, (6.44), aplicado al tensor de Weyl. La identidad de Bianchi implica que

$$3\nabla_{[e}C_{ab]cd} = -\frac{2}{(d-2)} \left[2g_{[c|[a}\nabla_e R_{b]|d]} - \frac{1}{(d-1)}g_{c[a}\nabla_e R g_{b]d} \right], \quad (6.45)$$

y contrayendo con g^{de} ,

$$\nabla^d C_{abcd} = \frac{-2}{(d-2)} \left[-(d-3)\nabla_{[a}R_{b]c} - g_{c[a}\nabla^d R_{b]d} + \frac{1}{(d-1)}g_{c[a}\nabla_{b]}R \right]. \quad (6.46)$$

Ahora aplicamos el operador $P_{i_1\dots i_s}^{abcd} \mathcal{D}_2^*$ a (6.45), y $P_{i_1\dots i_s}^{abcd} \mathcal{D}_2$ a (6.46), donde $P_{i_1\dots i_s}^{abcd}$ es un tensor de tipo $\{b, s\}$ que tiene las simetrías $P_{i_1\dots i_s}^{abcd} = P_{i_1\dots i_s}^{[ab]cd} = P_{i_1\dots i_s}^{ab[cd]} = P_{i_1\dots i_s}^{cdab}$. Consideremos primero el caso en el cual $P_{i_1\dots i_s}^{abcd}$ es libre de traza, $P_{i_1\dots i_s}^{abcd} g_{bc} = 0$. Entonces es sencillo mostrar que, off shell,

$$P_{i_1\dots i_s}^{abcd} [(\mathcal{D}_2^* \mathcal{D} + \mathcal{D}_2 \mathcal{D}^*) C]_{abcd} = 4P_{i_1\dots i_s}^{abcd} (\nabla_d - 4A_d) \nabla_a (G_{bc} + \lambda g_{bc}) \quad (6.47)$$

donde hemos usado el hecho de que $P_{i_1\dots i_s}^{abcd}$ es libre de traza para reemplazar el tensor de Ricci por el tensor de Einstein, y el término de la constante cosmológica puede agregarse libremente ya que $\nabla_a (\lambda g_{bc}) = 0$. Considerando (6.47) para una familia monoparamétrica de espacio-tiempos $g_{ab}(\varepsilon)$, y linealizando esta ecuación alrededor de un espacio Einstein, i.e. tal que $(G_{bc} + \lambda g_{bc})|_{\varepsilon=0} = 0$, obtenemos el operador $\dot{G}_{bc}[h] + \lambda h_{bc}$, el cual es autoadjunto como funcional lineal sobre $h_{ab} = \dot{g}_{ab}$. Para el caso en que $P_{i_1\dots i_s}^{abcd}$ no es libre de traza, digamos $P_{i_1\dots i_s}^{ad} := P_{i_1\dots i_s}^{abcd} g_{bc} \neq 0$, podemos descomponerlo en su parte sin traza y $P_{i_1\dots i_s}^{ad} g^{bc}$. Usando el hecho de que $P_{i_1\dots i_s}^{ad} = P_{i_1\dots i_s}^{(ad)}$, puede mostrarse que $P_{i_1\dots i_s}^{ad} g^{bc} [(\mathcal{D}_2^* \mathcal{D} + \mathcal{D}_2 \mathcal{D}^*) C]_{abcd} \equiv 0$; entonces podemos usar el mismo argumento que antes.

6.4. La clase Kundt y geometrías cerca del horizonte

Un espacio-tiempo d -dimensional se dice *Kundt* si admite una congruencia de geodésicas nulas que es *shear-free*, *expansion-free*, y *twist-free*. Usando (6.8), esto implica que, si ℓ^a es el tangente a esta congruencia, tenemos

$$\rho_{ij} \equiv 0, \quad \kappa_i \equiv 0. \quad (6.48)$$

La clase Kundt ha atraído atención en años recientes ya que las *geometrías cerca del horizonte* (NHGs por sus siglas en inglés) de todas las soluciones conocidas de agujeros negros *extremos* pertenecen a la misma; ver e.g. [54, 86, 44, 126]. De hecho estos espacio-tiempos extremos son más especiales ya que son *doble-Kundt*: ambas direcciones nulas, ℓ^a y n^a , son *shear-free*, *expansion-free*, y *twist-free*, $\rho_{ij} = \kappa_i = \rho'_{ij} = \kappa'_i = 0$. Espacio-tiempos doble-Kundt son algebraicamente especiales de tipo D u O. Las NHGs resultan ser importantes desde distintos puntos de vista; por ejemplo en el contexto de la correspondencia Kerr/CFT [80, 44] (que es una versión de AdS/CFT para la geometría cerca del horizonte de un agujero negro de Kerr extremo), y también son interesantes en el sentido de que una inestabilidad de la NHG puede implicar inestabilidades del agujero negro extremo *completo* [54, 86].

6.4.1. Campos conformes de Killing con peso

En esta sección daremos algunas relaciones interesantes entre la derivada covariante modificada (6.23) que produce el operador de onda generalizado

$\square_{(b,s)} = D^a D_a$, y tensores asociados a distinto tipo de simetrías de Killing con respecto a D_a .

Lo primero a notar es que la WAND de un espacio-tiempo Kundt es un vector de Killing con respecto a D_a :

Lema 6.4.1. *Sea ℓ^a un campo vectorial alineado a la WAND de un espacio-tiempo Kundt, y consideremos la derivada covariante modificada (6.23). Entonces ℓ^a es un vector de Killing con respecto a D_a :*

$$D_{(a}\ell_{b)} = 0. \quad (6.49)$$

Si el espacio-tiempo no es Kundt, puede mostrarse fácilmente que ℓ^a será un vector conforme de Killing con respecto a D_a siempre que ℓ^a sea geodésico y la congruencia asociada sea *shear-free* (i.e. $\sigma_{ij} = 0$ en (6.8)).

Consideremos ahora la 2-forma de tipo $\{1, 1\}$

$$U_{ab}^i := 2\ell_{[a}m_{b]}^i, \quad (6.50)$$

donde ℓ^a está alineado a la WAND del espacio-tiempo. Entonces tenemos:

Lema 6.4.2. *En un espacio-tiempo Kundt, la 2-forma U_{ab}^i es un tensor conforme de Killing-Yano con respecto a D_a :*

$$D_{(a}U_{b)c}^i = g_{ab}\xi_c^i - g_{c(a}\xi_{b)}^i, \quad (6.51)$$

donde $\xi_a^i = \frac{1}{(d-1)}D^b U_{ba}^i$.

En la sección 6.6 veremos una interpretación de los resultados 6.4.1 y 6.4.2.

6.4.2. Campos de Maxwell

Recordar la definición de la 2-forma U_{ab}^i dada en (6.50). Tenemos:

Teorema 6.4.1. *Sea F_{ab} una 2-forma arbitraria (de tipo $\{0, 0\}$) en un espacio-tiempo Einstein-Kundt d -dimensional, y consideremos el operador de Laplace-de Rham modificado de spin 1 (6.43). Entonces tenemos la identidad*

$$-U_i^{ab}[(\mathcal{D}_1\mathcal{D}^* + \mathcal{D}_1^*\mathcal{D})F]_{ab} = [\square_{(1,1)} + V]_{i^j}[U_j^{ab}F_{ab}], \quad (6.52)$$

donde el operador de onda generalizado $\square_{(1,1)}$ está definido en (6.30), y el potencial en el lado derecho está dado por

$$V_i^j = 2\Phi_i^{Sj} + 4\Phi_i^{Aj} + (d-4)\tau_i\tau^j + \left(\Phi - \frac{2\lambda}{(d-2)}\right)\delta_i^j, \quad (6.53)$$

Demostración. Ver Teorema 3.1 en [10]. □

Corolario 6.4.2. *Sea \mathcal{A}_a una 1-forma arbitraria, de tipo $\{0, 0\}$, sobre un espacio-tiempo Einstein-Kundt d -dimensional. Entonces tenemos la siguiente igualdad:*

$$\mathfrak{SE}[\mathcal{A}_a] = \mathcal{OT}[\mathcal{A}_a], \quad (6.54)$$

donde los operadores diferenciales lineales están definidos por

$$\mathcal{S}(J_b) := -U_i^{bc}(\nabla_c - 2A_c)J_b, \quad (6.55)$$

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}_a) := \square \mathcal{A}_b - \nabla^a \nabla_b \mathcal{A}_a, \quad (6.56)$$

$$\mathcal{O}(\phi_i) := [\square_{(1,1)} + V]_i^j \phi_j, \quad (6.57)$$

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}_a) := 2U_i^{ab} \nabla_a \mathcal{A}_b. \quad (6.58)$$

Demostración. Definir la 2-forma $F_{ab} = 2\nabla_{[a}\mathcal{A}_{b]}$. Entonces $\mathcal{D}_1^* \mathcal{D}F = 0$, y la identidad (6.54) se sigue de (6.52). \square

Corolario 6.4.3. *Sea ψ_i un campo escalar GHP de tipo $\{-1, 1\}$ tal que es solución de la ecuación adjunta de Teukolsky d -dimensional para spin $\mathfrak{s} = 1$*

$$\square_{(-1,1)}\psi_i + \psi_j V^j_i = 0, \quad (6.59)$$

sobre un espacio-tiempo Einstein-Kundt. Entonces $F_{ab}(\psi) = 2\nabla_{[a}[\mathcal{A}(\psi)]_{b]}$ es una solución de las ecuaciones de Maxwell, donde

$$\mathcal{A}_a(\psi) := (\nabla^b + 2A^b)(U_{ab}^i \psi_i). \quad (6.60)$$

Demostración. Tomando la ecuación adjunta a (6.54), $\mathcal{E}^\dagger \mathcal{S}^\dagger(\psi) = \mathcal{T}^\dagger \mathcal{O}^\dagger(\psi)$, usando el hecho de que $\mathcal{E} = \mathcal{E}^\dagger$, y la identidad para el adjunto de $\square_{(b,s)}$, el resultado sigue luego de definir $[\mathcal{A}(\psi)]_a := [\mathcal{S}^\dagger(\psi)]_a$. \square

6.4.3. Perturbaciones gravitacionales

Usando la 2-forma U_{ab}^i introducida en (6.50), definimos el tensor de tipo $\{2, 2\}$

$$U^{abcd}_{ij} := U_i^{ab} U_j^{cd} + U_j^{ab} U_i^{cd}. \quad (6.61)$$

Para el caso actual, encontramos que off shell es más conveniente trabajar con el tensor de Riemann en lugar de con el tensor de Weyl para describir las perturbaciones. Notemos que la componente con peso de boost $b = +2$ del tensor de Riemann es

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \frac{1}{8} U^{abcd}_{ij} R_{abcd}. \quad (6.62)$$

La relación con la correspondiente componente del Weyl es

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} + \frac{1}{(d-2)} \omega \delta_{ij}, \quad (6.63)$$

donde $\omega = R_{ab} \ell^a \ell^b$ (adoptamos la notación en [52] para las componentes del tensor de Ricci en el vielbein GHP). Tenemos:

Teorema 6.4.4. *Consideremos perturbaciones gravitacionales de un espacio-tiempo Einstein-Kundt d -dimensional, y recordemos el operador de Laplace-de Rham modificado de spin 2 (6.44), actuando sobre el tensor de Riemann. Entonces tenemos la siguiente igualdad off shell:*

$$-\frac{1}{8} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} [U^{abcd}_{ij} [(\mathcal{D}_2 \mathcal{D}^* + \mathcal{D}_2^* \mathcal{D}) R]_{abcd}] = \square_{(2,2)} \tilde{\Omega}_{ij} + V_{ij}{}^{kl} \dot{\tilde{\Omega}}_{kl} \quad (6.64)$$

donde el operador de onda generalizado $\square_{(2,2)}$ está definido en (6.30), y el potencial $V_{ij}{}^{kl}$ en el lado derecho es

$$V_{ij}{}^{kl} := 2[2\Phi - \tau^m \tau_m - \frac{4\lambda}{(d-1)(d-2)}] \delta_i^{(k} \delta_j^{l)} + 4[\Phi_{(i}^S{}^{(k} + 4\Phi_{(i}^A{}^{(k} + \frac{(d-2)}{2} \tau_{(i} \tau^{(k)}] \delta_j^{l)} \\ + \left[-2\Phi^{(k}{}_{ij}{}^{l)} - 2\delta_{ij} \tau^k \tau^l + (-\Phi_{ij}^S + \frac{2\lambda}{(d-1)(d-2)} \delta_{ij} - 2\tau_i \tau_j) \delta^{kl} \right]. \quad (6.65)$$

Demostración. Ver apéndice B.1 en [10]. \square

Si las ecuaciones linealizadas de Einstein se satisfacen, $\dot{G}_{ab} + \lambda h_{ab} = 0$, entonces el lado izquierdo de (6.64) es cero, y las componentes linealizadas $\dot{\tilde{\Omega}}_{ij}$ y $\dot{\Omega}_{ij}$ coinciden. Usando las expresiones para el operador de onda generalizado $\square_{(2,2)}$ y el potencial $V_{ij}{}^{kl}$ dado antes, la ecuación

$$\square_{(2,2)} \dot{\Omega}_{ij} + V_{ij}{}^{kl} \dot{\Omega}_{kl} = 0 \quad (6.66)$$

en términos de derivadas GHP es explícitamente

$$[2\mathfrak{p}'\mathfrak{p} + \delta^k \delta_k + \rho'\mathfrak{p} - 6\tau^k \delta_k + 4\Phi - \frac{4(d+2)}{(d-1)(d-2)} \lambda] \dot{\Omega}_{ij} \\ + 4[\tau^k \delta_{(i} - \tau_{(i} \delta^k + \Phi_{(i}^S{}^k + 4\Phi_{(i}^A{}^k] \dot{\Omega}_{j)k} + 2\Phi_i{}^k{}_{j}{}^l \dot{\Omega}_{kl} = 0. \quad (6.67)$$

La ecuación desacoplada que el teorema (6.4.4) da on shell es entonces equivalente a la ecuación encontrada en [53].

Corolario 6.4.5. *Consideremos perturbaciones gravitacionales de un espacio-tiempo Einstein-Kundt d -dimensional, y sea $h_{ab} = \dot{g}_{ab}$. Definimos la siguiente variante del tensor (6.61):*

$$\check{U}{}^{abcd}{}_{ij} = U{}^{abcd}{}_{ij} - \frac{2}{(d-2)} \delta_{ij} \ell^a g^{bc} \ell^d. \quad (6.68)$$

Entonces tenemos la identidad off shell

$$\mathfrak{SE}[h_{ab}] = \mathcal{O}\mathfrak{T}[h_{ab}], \quad (6.69)$$

donde los operadores diferenciales lineales están definidos por

$$\mathfrak{S}[T_{ab}] := -\frac{1}{2} \check{U}{}^{abce}{}_{ij} (\nabla_e - 4A_e) \nabla_a T_{bc}, \quad (6.70)$$

$$\mathfrak{E}[h_{ab}] := \dot{G}_{ab}[h] + \lambda h_{ab}, \quad (6.71)$$

$$\mathcal{O}[\phi_{ij}] := \square_{(2,2)} \phi_{ij} + V_{ij}{}^{kl} \phi_{kl}, \quad (6.72)$$

$$\mathfrak{T}[h_{ab}] := \frac{1}{8} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} (U{}^{abcd}{}_{ij} R_{abcd}). \quad (6.73)$$

Demostración. La prueba de este resultado es similar a la prueba de (6.47), pero reemplazando el tensor de Weyl por el tensor de Riemann. Recordando la forma contraída de la identidad de Bianchi, tenemos $\nabla^d R_{abcd} = -2\nabla_{[a} R_{b]c}$. Podemos escribir el tensor de Ricci en términos del tensor de Einstein en la

forma $R_{ab} = G_{ab} + \frac{1}{(2-d)}g_{ab}G$ (con $G = g^{ab}G_{ab}$), con lo cual el lado izquierdo de la identidad (6.64) toma la forma

$$\begin{aligned} U^{abce}{}_{ij}(\nabla_e - 4A_e)\nabla^d R_{abcd} &= -2U^{abce}{}_{ij}(\nabla_e - 4A_e)\nabla_a[G_{bc} + \frac{1}{(2-d)}g_{bc}G] \\ &= -2\left[U^{abce}{}_{ij} - \frac{2}{(2-d)}\delta_{ij}\ell^a\ell^e g^{bc}\right](\nabla_e - 4A_e)\nabla_a G_{bc} \\ &= -2\check{U}^{abce}{}_{ij}(\nabla_e - 4A_e)\nabla_a(G_{bc} + \lambda g_{bc}), \end{aligned}$$

donde en la segunda línea hemos usado la identidad $U^{abce}{}_{ij}g_{bc} = -2\delta_{ij}\ell^a\ell^e$, y en la tercera usamos la definición del tensor $\check{U}^{abcd}{}_{ij}$, y el hecho de que $\nabla_a(\lambda g_{bc}) = 0$ para agregar el término con la constante cosmológica. Finalmente, linealizando, usando (6.64) y las ecuaciones de Einstein del background $(G_{bc} + \lambda g_{bc})|_{\varepsilon=0} = 0$, obtenemos el resultado (6.69). \square

Notemos que, de la prueba anterior, vemos que el segundo término en la definición (6.68) de $\check{U}^{abcd}{}_{ij}$ se necesita para obtener el tensor de Einstein a partir de la identidad (6.64).

Como corolario de los resultados previos, podemos ahora construir, de una forma muy compacta, soluciones de las ecuaciones linealizadas de Einstein a partir de soluciones de la ecuación d -dimensional de Teukolsky:

Corolario 6.4.6. *Sea ψ_{ij} un campo escalar GHP de tipo $\{-2, 2\}$ tal que satisface la ecuación adjunta de Teukolsky d -dimensional para spin $\mathfrak{s} = 2$,*

$$\square_{(-2,2)}\psi_{ij} + \psi_{kl}V^{kl}{}_{ij} = 0, \tag{6.74}$$

sobre un espacio-tiempo Einstein-Kundt. Entonces el campo tensorial

$$h_{ab}[\psi] = \nabla^c[(\nabla^d + 4A^d)\check{U}_{c(ab)d}{}^{ij}\psi_{ij}] \tag{6.75}$$

es una solución de las ecuaciones linealizadas de Einstein, $\dot{G}_{ab}[h] + \lambda h_{ab} = 0$.

Demostración. Tomar la identidad adjunta a (6.69), usar el hecho de que el operador de Einstein linealizado es autoadjunto $\mathcal{E}^\dagger = \mathcal{E}$, y recordar el adjunto del operador $\square_{(b,s)}$; el resultado se sigue luego de definir $h_{ab}[\psi] = [\mathcal{S}^\dagger(\psi)]_{ab}$. \square

Notamos que existen otras fórmulas de reconstrucción conocidas en la literatura, ver [76, 86], no obstante dichas fórmulas son notablemente más complejas que (6.75).

6.5. Agujeros negros estáticos

Consideramos ahora un espacio-tiempo de dimensión $d = 2 + n$ con la estructura local tipo warped-product de la sección 3.5, i.e. que la métrica tiene la forma

$$g_{ab}(z)dz^a dz^b = \tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{b}}(x)dx^{\tilde{a}}dx^{\tilde{b}} + r^2\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}(y)dy^{\mathbb{A}}dy^{\mathbb{B}}. \tag{6.76}$$

Usaremos la misma notación de dicha sección; sólo que ahora la variedad \mathcal{H} del horizonte es n -dimensional y su topología no es necesariamente esférica. Los símbolos de Christoffel están dados por (3.113), (3.114). La métrica del *orbit space* $\tilde{\mathcal{M}}$ tiene la forma $\tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{b}}(x)dx^{\tilde{a}}dx^{\tilde{b}} = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2$, donde la función f está dada por

$$f(r) = \kappa - \frac{2M}{r^{n-1}} - \tilde{\lambda}r^2 \quad (6.77)$$

para algunas constantes κ , M y $\tilde{\lambda}$. El espacio-tiempo completo es entonces Einstein

$$R_{ab} = \frac{2\lambda}{n}g_{ab}, \quad \lambda = \frac{n(n+1)}{2}\tilde{\lambda}, \quad (6.78)$$

siempre que la variedad n -dimensional \mathcal{H} sea en sí misma un espacio Einstein, $\bar{R}_{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \kappa(n-1)\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}$. Además, de acuerdo a [23], para que el espacio-tiempo sea (localmente) asintóticamente (Anti-) de Sitter, el horizonte debe ser un espacio de curvatura constante (no sólo un espacio Einstein). La topología del horizonte está determinada por el signo de κ ; podemos tener horizontes elípticos ($\kappa = +1$), planos ($\kappa = 0$) o hiperbólicos ($\kappa = -1$). Las componentes no triviales del tensor de Riemann son

$$R_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}} = \tilde{k}(\tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{c}}\tilde{g}_{\tilde{b}\tilde{d}} - \tilde{g}_{\tilde{a}\tilde{d}}\tilde{g}_{\tilde{b}\tilde{c}}) \quad (6.79)$$

$$R_{\tilde{a}\mathbb{A}\tilde{c}\mathbb{D}} = -rr_{\tilde{a}\tilde{c}}\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{D}}, \quad (6.80)$$

$$R_{\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{D}} = r^2(\kappa - r^{\tilde{a}}r_{\tilde{a}})(\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{C}}\bar{g}_{\mathbb{B}\mathbb{D}} - \bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{D}}\bar{g}_{\mathbb{B}\mathbb{C}}), \quad (6.81)$$

donde $\tilde{k} = -\frac{1}{2}\partial_r^2 f$, $r_{\tilde{a}} = \tilde{\nabla}_{\tilde{a}}r$, y $r_{\tilde{a}\tilde{b}} = \nabla_{\tilde{a}}r_{\tilde{b}}$. El tensor de Weyl puede obtenerse de las expresiones anteriores teniendo en cuenta que el espacio-tiempo completo es Einstein. Perturbaciones de la variedad $(2+n)$ -dimensional (6.76) son usualmente estudiadas en la literatura utilizando una descomposición $2+n$ de las perturbaciones, ver e.g. [103, 94, 97].

Definamos ahora el vielbein $\{\ell^a, n^a, m_i^a\}$ para implementar el formalismo GHP. Elegimos los vectores nulos ℓ^a y n^a como

$$\ell^a \partial_a = \frac{1}{\sqrt{2f}}(\partial_t + f\partial_r), \quad n^a \partial_a = \frac{1}{\sqrt{2f}}(-\partial_t + f\partial_r), \quad (6.82)$$

Los vectores espaciales m_i^a están definidos tal que

$$\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \frac{1}{r^2}\delta_{ij}m_{\mathbb{A}}^i m_{\mathbb{B}}^j. \quad (6.83)$$

Los coeficientes de spin GHP asociados a este vielbein son

$$\rho_{ij} = \frac{\rho}{n}\delta_{ij}, \quad \rho'_{ij} = \frac{\rho'}{n}\delta_{ij}, \quad \tau_i = \tau'_i = \kappa_i = \kappa'_i = 0, \quad (6.84)$$

donde $\rho = n\ell^{\tilde{a}}r_{\tilde{a}}/r = \frac{n}{r}(\frac{f}{2})^{1/2}$ y $\rho' = nn^{\tilde{a}}r_{\tilde{a}}/r = \frac{n}{r}(\frac{f}{2})^{1/2}$. La 1-forma (6.38) se reduce entonces a

$$A_a = -\frac{\rho'}{n}\ell_a - \frac{\rho}{n}n_a. \quad (6.85)$$

Para las componentes del tensor de Weyl, encontramos

$$\Omega_{ij} = \Omega'_{ij} = \Psi_{ijk} = \Psi'_{ijk} = 0, \quad (6.86)$$

por lo tanto el espacio-tiempo es de tipo algebraico D; las únicas componentes no-triviales son

$$\Phi = -\frac{n(n-1)M}{r^{n+1}}, \quad (6.87)$$

$$\Phi_{ij} = \frac{\Phi}{n}\delta_{ij}, \quad (6.88)$$

$$\Phi_{ijkl} = -\frac{2\Phi}{n(n-1)}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (6.89)$$

(Notemos que para $n = 2$, i.e. en 4 dimensiones, tenemos $\Phi = 2\Psi_2$.) Las identidades de Bianchi se reducen a

$$\mathfrak{p}\Phi = -\frac{(n+1)}{n}\Phi\rho, \quad \mathfrak{d}_k\Phi = 0. \quad (6.90)$$

Esto implica que la 1-forma (6.85) puede reescribirse como $A_a = \Phi^q\nabla_a\Phi^{-q}$, donde $q = -1/(n+1)$.

En las secciones siguientes estudiaremos ecuaciones para cantidades con peso de boost cero. Notemos que en este caso, en vista de (6.84), el operador de onda modificado (6.30) se reduce a

$$\mathfrak{D}_{(0,s)} = \square_{(0,s)}. \quad (6.91)$$

6.5.1. Campos conformes de Killing con peso

Similarmente a como hicimos en la sección 6.4.1 para espacio-tiempos tipo Kundt, en esta sección mostraremos la relación, para el caso del espacio-tiempo (6.76), entre la derivada covariante modificada D_a que produce el operador de onda generalizado $\mathfrak{D}_{(b,s)} = D^a D_a$, y campos tensoriales que satisfacen una ecuación conforme de Killing con respecto a D_a . Veremos una interpretación de estos hechos en la sección 6.6.

El primer resultado es que las WANDs del espacio-tiempo (6.76) resultan ser vectores conformes de Killing con respecto a D_a , análogamente al caso Kundt:

Lema 6.5.1. *Sean ℓ^a y n^a campos vectoriales alineados a las WANDs del espacio-tiempo (6.76), y consideremos la derivada covariante modificada (6.23). Entonces $k^{0a} := \ell^a$ y $k^{1a} := \Phi^{2q}n^a$, con $q = -1/(n+1)$, son vectores conformes de Killing con respecto a D_a ,*

$$D_{(a}k_{b)}^I = \lambda^I g_{ab}, \quad I = 0, 1 \quad (6.92)$$

donde $\lambda^0 = \frac{\rho}{n}$ y $\lambda^1 = \frac{\rho'}{n}\Phi^{2q}$.

Veamos ahora los tensores conformes de Killing-Yano pesados:

Lema 6.5.2. *Consideremos las siguientes 2-formas, de tipo $\{0,0\}$ y $\{0,2\}$ respectivamente, sobre el espacio-tiempo (6.76):*

$$Z_{ab} := 2\Phi^q \ell_{[a}n_{b]}, \quad (6.93)$$

$$Y_{ab}{}^{ij} := 2\Phi^q m_{[a}^i m_{b]}^j, \quad (6.94)$$

donde $q = -1/(n+1)$. Entonces:

1. Z_{ab} es un tensor conforme de Killing-Yano ordinario,

$$\nabla_{(a}Z_{b)c} = g_{ab}\xi_c - g_{c(a}\xi_{b)} \quad (6.95)$$

donde la divergencia $\xi_a := \frac{1}{n+1}\nabla^b Z_{ba}$ es un vector de Killing. (Por supuesto, ∇_a puede ser reemplazada por D_a en (6.95), ya que Z_{ab} es tipo $\{0, 0\}$.)

2. $Y_{ab}{}^{ij}$ es un tensor de Killing-Yano con respecto a D_a :

$$D_{(a}Y_{b)c}{}^{ij} = 0. \quad (6.96)$$

6.5.2. Campos de Maxwell

Consideremos los tensores conformes de Killing-Yano con peso (6.93) y (6.94). Las posibles contracciones no-triviales con una 2-forma F_{ab} son

$$Z^{ab}F_{ab} = 2\Phi^q F, \quad (6.97)$$

$$Y^{ab}{}_{ij}F_{ab} = 2\Phi^q F_{ij}. \quad (6.98)$$

(6.97) y (6.98) son las dos componentes (reescaleadas) con peso de boost cero del campo de Maxwell⁵. Veamos ambos casos por separado.

Peso de spin cero. La componente de tipo $\{0, 0\}$ de una 2-forma F_{ab} es F . Tenemos:

Teorema 6.5.1. *Sea F_{ab} una 2-forma arbitraria (de tipo $\{0, 0\}$) en el espacio-tiempo $(n+2)$ -dimensional (6.76), y consideremos el operador de Laplace-de Rham modificado de spin 1 (6.43) y el tensor conforme de Killing-Yano (6.93). Entonces tenemos la igualdad*

$$-Z^{ab}[(\mathcal{D}_1\mathcal{D}^* + \mathcal{D}_1^*\mathcal{D})F]_{ab} = (\square_{(0,0)} + V^+)[Z^{ab}F_{ab}] \quad (6.99)$$

donde $\square_{(0,0)} = \square$ y el potencial en el lado derecho es

$$V^+ = -\frac{2(n-1)}{n} \left[\Phi + \frac{2\lambda}{n+1} \right]. \quad (6.100)$$

Demostración. Ver Teorema 4.1 en [10]. □

Notemos que para $n = 2$ (i.e. $d = 4$), el potencial (6.100) se reduce a

$$V^+ = -2\Psi_2 - \frac{2}{3}\lambda, \quad \text{para } d = 4 \quad (6.101)$$

lo cual concuerda con el resultado 4-dimensional.

⁵ver e.g. [10, apéndice A.2] para las componentes de una 2-forma en el vielbein GHP.

Corolario 6.5.2. *Sea \mathcal{A}_a una 1-forma arbitraria en el espacio-tiempo $(n+2)$ -dimensional (6.76). Tenemos la igualdad de operadores*

$$\mathfrak{S}\mathcal{E}[\mathcal{A}_a] = \mathcal{O}\mathcal{T}[\mathcal{A}_a], \quad (6.102)$$

donde los operadores diferenciales lineales están definidos por

$$\mathfrak{S}(J_b) := Z^{bc}(\nabla_c - 2A_c)J_b, \quad (6.103)$$

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}_a) := \square\mathcal{A}_b - \nabla^a\nabla_b\mathcal{A}_a, \quad (6.104)$$

$$\mathcal{O}(\phi) := (\square_{(0,0)} + V^+)\phi, \quad (6.105)$$

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}_a) := 2Z^{ab}\nabla_a\mathcal{A}_b. \quad (6.106)$$

Demostración. Definir la 2-forma $F_{ab} = 2\nabla_{[a}\mathcal{A}_{b]}$. Entonces $\mathcal{D}_1^*\mathcal{D}F = 0$, y la identidad (6.102) se sigue de (6.99). \square

Corolario 6.5.3. *Sea ψ un campo escalar GHP de tipo $\{0, 0\}$ tal que satisface la ecuación tipo-onda*

$$(\square_{(0,0)} + V^+)\psi = 0 \quad (6.107)$$

en el espacio-tiempo (6.76). Entonces $F_{ab}(\psi) = 2\nabla_{[a}[\mathcal{A}(\psi)]_{b]}$ es una solución de las ecuaciones de Maxwell, donde

$$[\mathcal{A}(\psi)]_a = (\nabla^b + 2A^b)(Z_{ab}\psi). \quad (6.108)$$

Peso de spin 2. La componente de tipo $\{0, 2\}$ del campo de Maxwell es F_{ij} . El resultado principal es:

Teorema 6.5.4. *Sea F_{ab} una 2-forma arbitraria (de tipo $\{0, 0\}$) en el espacio-tiempo $(n+2)$ -dimensional (6.76), y consideremos el operador de Laplace-de Rham modificado de spin 1 (6.43) y el tensor de Killing-Yano pesado (6.94). Entonces tenemos la igualdad*

$$-Y^{ab}{}_{ij}[(\mathcal{D}_1\mathcal{D}^* + \mathcal{D}_1^*\mathcal{D})F]_{ab} = (\square_{(0,2)} + V^-)[Y^{ab}{}_{ij}F_{ab}] \quad (6.109)$$

donde $\square_{(0,2)}$ está definido en (6.28), y el potencial en el lado derecho es

$$V^- = \frac{2(n-3)}{n(n-1)}\Phi - \frac{4(n-1)}{n(n+1)}\lambda - \frac{6(n-2)}{n^2}\rho\rho'. \quad (6.110)$$

Demostración. Ver Teorema 4.4 en [10]. \square

Similarmente al caso previo, notemos que para $n = 2$ ($d = 4$), $\square_{(0,2)}$ se reduce a \square y el potencial (6.110) queda

$$V^- = -2\Psi_2 - \frac{2}{3}\lambda, \quad \text{para } d = 4 \quad (6.111)$$

lo cual reproduce el resultado 4-dimensional.

Corolario 6.5.5. *Sea \mathcal{A}_a una 1-forma arbitraria en el espacio-tiempo $(n+2)$ -dimensional (6.76). Tenemos la igualdad de operadores*

$$\mathfrak{S}\mathcal{E}[\mathcal{A}_a] = \mathcal{O}\mathcal{T}[\mathcal{A}_a], \quad (6.112)$$

donde los operadores diferenciales lineales son

$$\mathfrak{S}(J_b) := Y^{bc}{}_{ij}(\nabla_c - 2A_c)J_b, \quad (6.113)$$

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}_a) := \square\mathcal{A}_b - \nabla^a\nabla_b\mathcal{A}_a, \quad (6.114)$$

$$\mathcal{O}(\phi) := (\square_{(0,2)} + V^-)\phi_{ij}, \quad (6.115)$$

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}_a) := 2Y^{ab}{}_{ij}\nabla_a\mathcal{A}_b. \quad (6.116)$$

Corolario 6.5.6. *Sea ψ_{ij} un campo escalar GHP de tipo $\{0,2\}$ tal que es solución de la ecuación de tipo onda*

$$(\square_{(0,2)} + V^-)\psi_{ij} = 0 \quad (6.117)$$

en el espacio-tiempo (6.76). Entonces $F_{ab}(\psi) = 2\nabla_{[a}[\mathcal{A}(\psi)]_{b]}$ es una solución de las ecuaciones de Maxwell, donde

$$[\mathcal{A}(\psi)]_a = (\nabla^b + 2A^b)(Y_{ab}{}^{ij}\psi_{ij}). \quad (6.118)$$

6.5.3. Perturbaciones gravitacionales

Un campo tensorial simétrico arbitrario $h_{ab} = h_{(ab)}$ sobre el espacio-tiempo (6.76) puede descomponerse como

$$h_{ab}dz^a dz^b = h_{\bar{a}\bar{b}}dx^{\bar{a}}dx^{\bar{b}} + 2h_{\bar{a}\mathbb{B}}dx^{\bar{a}}dy^{\mathbb{B}} + h_{\mathbb{A}\mathbb{B}}dy^{\mathbb{A}}dy^{\mathbb{B}}. \quad (6.119)$$

En la descomposición $n+2$, cada pieza en el lado derecho es adicionalmente descompuesta en sus partes escalar, vectorial y tensorial con respecto a \mathcal{K} (ver [97]):

$$h_{\bar{a}\bar{b}} = h_{\bar{a}\bar{b}}^{\text{S}}, \quad (6.120)$$

$$h_{\bar{a}\mathbb{B}} = \bar{\nabla}_{\mathbb{B}}h_{\bar{a}}^{\text{S}} + h_{\bar{a}\mathbb{B}}^{\text{V}}, \quad (6.121)$$

$$h_{\mathbb{A}\mathbb{B}} = h_{\mathbb{A}\mathbb{B}}^{\text{T}} + 2\bar{\nabla}_{(\mathbb{A}}h_{\mathbb{B})}^{\text{V}} + \bar{L}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}(h_{\perp}^{\text{S}}) + \bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}h_{\parallel}^{\text{S}}, \quad (6.122)$$

donde $\bar{L}_{\mathbb{A}\mathbb{B}} = \bar{\nabla}_{\mathbb{A}}\bar{\nabla}_{\mathbb{B}} - \frac{1}{n}\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}\bar{\Delta}$. La parte tensorial de h_{ab} es $h_{\mathbb{A}\mathbb{B}}^{\text{T}}$, su parte vectorial es $\{h_{\bar{a}\mathbb{B}}^{\text{V}}, h_{\mathbb{B}}^{\text{V}}\}$, y su parte escalar es $\{h_{\bar{a}\bar{b}}^{\text{S}}, h_{\bar{a}}^{\text{S}}, h_{\perp}^{\text{S}}, h_{\parallel}^{\text{S}}\}$.

Consideremos los tensores conformes de Killing-Yano pesados (6.94) y (6.93). Las posibles contracciones con el tensor de curvatura son

$$Z^{ab}Z^{cd}C_{abcd} = 4\Phi^{2q+1}, \quad (6.123)$$

$$Z^{ab}Y^{cd}{}_{ij}C_{abcd} = 8\Phi^{2q}\Phi_{ij}^{\text{A}}, \quad (6.124)$$

$$Y^{ab}{}_{ij}Y^{cd}{}_{kl}C_{abcd} = 4\Phi^{2q}\Phi_{ijkl}. \quad (6.125)$$

La única cantidad invariante de gauge es (6.124), ya que en el espacio-tiempo de background tenemos $\Phi_{ij}^{\text{A}} = 0$, por lo tanto nos enfocaremos en esta variable.

Usando el vielbein $\{\ell^a, n^a, m_i^a\}$ definido anteriormente, no es difícil mostrar que una expresión off shell para $\dot{\Phi}_{ij}^A$ es

$$\dot{\Phi}_{ij}^A = \frac{1}{2} \dot{R}_{\bar{a}\bar{b}\mathbb{A}\mathbb{B}} \ell^{\bar{a}} n^{\bar{b}} m_i^{\mathbb{A}} m_j^{\mathbb{B}}. \quad (6.126)$$

(Para derivar esta ecuación, hay que usar las identidades del background para ver que es posible reemplazar el tensor de Weyl por el tensor de Riemann, y que todos los términos que contienen perturbaciones de los vectores del vielbein se anulan.) En términos de una perturbación métrica arbitraria, es tedioso pero sencillo mostrar que

$$\dot{R}_{\bar{a}\bar{b}\mathbb{A}\mathbb{B}} = -2r^2 \partial_{[\mathbb{A}] \partial_{[\bar{a}} \left[\frac{1}{r^2} h_{\bar{b}]\mathbb{B}} \right]}. \quad (6.127)$$

De esta estructura vemos fácilmente que $\dot{\Phi}_{ij}^A$ es no-trivial *sólo* para perturbaciones vectoriales (ver también [76]). Esto es análogo al caso 4-dimensional, ya que Φ_{ij}^A es la generalización a dimensiones arbitrarias de $\mathfrak{Im}\Psi_2$ y las perturbaciones vectoriales corresponden al sector impar en $d = 4$.

Definimos el tensor de tipo $\{0, 2\}$

$$W^{abcd}{}_{ij} := Y^{ab}{}_{ij} Z^{cd} + Z^{ab} Y^{cd}{}_{ij}. \quad (6.128)$$

Este tensor tiene las simetrías $W^{abcd}{}_{ij} = W^{[ab]cd}{}_{ij} = W^{ab[cd]}{}_{ij} = W^{cdab}{}_{ij}$, y además tiene traza nula. Tenemos:

Teorema 6.5.7. *Consideremos perturbaciones gravitacionales del espacio-tiempo $(n + 2)$ -dimensional (6.76), y recordemos el operador de Laplace-de Rham modificado de spin 2 (6.44). Entonces tenemos la siguiente igualdad off shell:*

$$-\frac{1}{16} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \{W^{abcd}{}_{ij} [(\mathcal{D}_2 \mathcal{D}^* + \mathcal{D}_2^* \mathcal{D}) C]_{abcd}\} = (\square_{(0,2)} + V) [\Phi^{2q} \dot{\Phi}_{ij}^A] \quad (6.129)$$

donde el potencial en el lado derecho es

$$V = -\frac{2(n+2)}{n} \Phi - \frac{4}{n(n+1)} \lambda + \frac{2(n-2)}{n^2} \rho \rho'. \quad (6.130)$$

y el operador de onda generalizado $\square_{(0,2)}$ (o equivalentemente $\boxminus_{(0,2)}$, en vista de (6.91)) fue definido en (6.28).

Demostración. Ver apéndice B.2 en [10]. □

Notemos que en el caso 4-dimensional ($n = 2$), el operador de onda generalizado $\square_{(0,2)}$ se reduce al D'Alembertiano estándar \square , y $\Phi = 2\Psi_2$, por lo que el potencial es

$$V = -8\Psi_2 - \frac{2}{3} \lambda \quad \text{para } d = 4 \quad (6.131)$$

lo cual da el límite 4-dimensional correcto. Notamos también que, asumiendo que las ecuaciones linealizadas de Einstein se satisfacen (lo que implica que el lado izquierdo de (6.129) es cero), una ecuación similar para $\dot{\Phi}_{ij}^A$ fue encontrada en [76].

Corolario 6.5.8. *Consideremos perturbaciones gravitacionales del espacio-tiempo $(n + 2)$ -dimensional (6.76), y sea $h_{ab} = \dot{g}_{ab}$. Entonces tenemos la siguiente igualdad off shell:*

$$\mathcal{SE}[h_{ab}] = \mathcal{OT}[h_{ab}], \quad (6.132)$$

donde los operadores diferenciales lineales están definidos por

$$\mathcal{S}[T_{ab}] := W^{abcd}{}_{ij}(\nabla_d - 4A_d)\nabla_a T_{bc}, \quad (6.133)$$

$$\mathcal{E}[h_{ab}] := \dot{G}_{ab}[h] + \lambda h_{ab}, \quad (6.134)$$

$$\mathcal{O}[\phi_{ij}] := -4(\square_{(0,2)} + V)\phi_{ij}, \quad (6.135)$$

$$\mathcal{T}[h_{ab}] := \frac{1}{8} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} (W^{abcd}{}_{ij} C_{abcd}). \quad (6.136)$$

Demostración. Ya que el tensor $W^{abcd}{}_{ij}$ es libre de traza, el resultado se sigue de la ecuación (6.129) y de la identidad general (6.47). \square

Corolario 6.5.9. *Sea ψ_{ij} un campo escalar GHP de tipo $\{0, 2\}$ tal que es solución de la ecuación tipo onda*

$$(\square_{(0,2)} + V)\psi_{ij} = 0 \quad (6.137)$$

sobre el espacio-tiempo (6.76). Entonces el campo tensorial

$$h_{ab}[\psi] = \nabla^c [(\nabla^d + 4A^d)W_{c(ab)d}{}^{ij}\psi_{ij}] \quad (6.138)$$

es una solución de las ecuaciones linealizadas de Einstein, $\dot{G}_{ab}[h] + \lambda h_{ab} = 0$.

Es instructivo estudiar la descomposición $n + 2$ de (6.138). Una cuenta larga y tediosa usando la forma explícita de $W_{abcd}{}^{ij}$, y los símbolos de Christoffel (3.113), (3.114) del background, conduce a

$$h_{\bar{a}\bar{b}}[\psi] = 0, \quad (6.139)$$

$$h_{\bar{a}\mathbb{B}}[\psi] = 2\tilde{\varepsilon}_{\bar{a}}{}^{\bar{b}}\tilde{\nabla}_{\bar{b}}\bar{\nabla}_{\mathbb{C}}[\Phi^{2q}m_{\mathbb{B}}^i m^{j\mathbb{C}}\psi_{ij}], \quad (6.140)$$

$$h_{\mathbb{A}\mathbb{B}}[\psi] = 0. \quad (6.141)$$

Consideremos por ejemplo el caso en que ψ_{ij} proviene de una perturbación métrica \mathring{h}_{ab} , $\mathring{\psi}_{ij} := \Phi^{2q}\mathring{\Phi}_{ij}^A[h]$. Como hemos visto, $\mathring{\Phi}_{ij}^A$ es no-trivial sólo si \mathring{h}_{ab} es una perturbación de tipo vectorial. En el enfoque de Ishibashi y Kodama [94, 97, 103], una perturbación métrica de tipo vectorial es escrita como $\mathring{h}_{\bar{a}\mathbb{B}}^{\vee} = h_{\bar{a}}(x)\bar{V}_{\mathbb{B}}(y)$, donde $\bar{V}_{\mathbb{A}}$ son armónicos vectoriales sin divergencia sobre el espacio Einstein \mathcal{H} :

$$(\bar{\Delta} + k_v^2)\bar{V}_{\mathbb{A}} = 0, \quad \bar{\nabla}^{\mathbb{A}}\bar{V}_{\mathbb{A}} = 0, \quad (6.142)$$

con los autovalores k_v^2 siendo no-negativos. Usando (6.126) y (6.127), no es difícil mostrar entonces que

$$\mathring{\Phi}_{ij}^A[h] = -\frac{1}{2}\mathcal{F}m_i^{\mathbb{A}}m_j^{\mathbb{B}}\bar{\nabla}_{[\mathbb{A}}\bar{V}_{\mathbb{B}]}, \quad (6.143)$$

donde

$$\mathcal{F} := r^2 \tilde{\epsilon}^{\tilde{a}\tilde{b}} \tilde{\nabla}_{\tilde{a}}(r^{-2} h_{\tilde{b}}). \quad (6.144)$$

Definiendo $\overset{\circ}{\psi} := -\frac{1}{2}c\Phi^{2q}\mathcal{F} = -\frac{1}{2}c^2r^2\mathcal{F}$, con $c = [-Mn(n-1)]^{-2/(n+1)}$, y usando (6.143) y $\bar{R}_{\mathbb{A}\mathbb{B}} = (n-1)\kappa\bar{g}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}$, arribamos a

$$h_{\tilde{a}\mathbb{B}}[\overset{\circ}{\psi}] = m_{\nu}\tilde{\epsilon}_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\tilde{\nabla}_{\tilde{b}}\overset{\circ}{\psi}\bar{V}_{\mathbb{B}}, \quad (6.145)$$

donde $m_{\nu} := k_{\nu}^2 - (n-1)\kappa$. Por lo tanto concluimos que, siempre que $m_{\nu} \neq 0$, perturbaciones métricas generadas en la forma (6.138) por $\dot{\Phi}_{ij}^A$ son de tipo vectorial.

6.6. Sobre covariancia conforme

Finalmente, en esta sección veremos una interpretación de la derivada modificada D_a definida en (6.23) y las 1-formas A_a , B_a y $C_{ai}{}^j$ dadas en (6.38), (6.21) y (6.22), desde el punto de vista de operadores conformemente covariantes. La discusión es similar a lo que vimos en el capítulo 4, pero la cuestión de la invariancia conforme de las ecuaciones de campo es más sutil que el caso 4-dimensional.

Recordamos que una transformación conforme (o reescaleo de Weyl) es el mapa $g_{ab} \mapsto \hat{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$, donde Ω es un campo escalar suave positivo definido. El comportamiento conforme de los vectores de la base $\{e_a^a\}$ puede elegirse como

$$\hat{\ell}^a = \Omega^{2w_0} \ell^a, \quad \hat{n}^a = \Omega^{2w_1} n^a, \quad \hat{m}_i^a = \Omega^{w_0+w_1} m_i^a, \quad (6.146)$$

donde los pesos conformes w_0, w_1 deben satisfacer $w_0 + w_1 + 1 = 0$. De ahora en más elegiremos $w_0 = 0, w_1 = -1$. Utilizando la definición de los coeficientes de spin GHP dada en la tabla 6.1, uno puede derivar fórmulas para su comportamiento conforme, y de este modo es sencillo probar que la 1-forma A_a dada por (6.38) cambia bajo transformaciones conformes como

$$A_a \mapsto \hat{A}_a = A_a - \Upsilon_a \quad (6.147)$$

donde, como siempre, $\Upsilon_a = \Omega^{-1}\nabla_a\Omega$. Vemos entonces que (6.38) es la generalización de (4.34) a dimensiones arbitrarias.

Por otro lado, veamos el comportamiento conforme de la derivada GHP (6.14), esto es, de las 1-formas de conexión β_a y $\Sigma_{ai}{}^j$. Con la elección $w_0 = 0, w_1 = -1$, tenemos:

$$\hat{\beta}_a = \beta_a - 2\ell^b\Upsilon_b n_a - m_i^b\Upsilon_b m_a^i, \quad (6.148)$$

$$\hat{\Sigma}_{ai}{}^j = \Sigma_{ai}{}^j - m_i^b\Upsilon_b m_a^j + m^{jb}\Upsilon_b m_{ia}. \quad (6.149)$$

Ahora, las 1-formas B_a y $C_{ai}{}^j$ dadas en (6.21) y (6.22) tienen el siguiente comportamiento conforme:

$$\hat{B}_a = B_a + 2\ell^b\Upsilon_b n_a + m_i^b\Upsilon_b m_a^i, \quad (6.150)$$

$$\hat{C}_{ai}{}^j = C_{ai}{}^j + m_i^b\Upsilon_b m_a^j - m^{jb}\Upsilon_b m_{ia}. \quad (6.151)$$

Luego:

Lema 6.6.1. *Sea $\eta_{i_1\dots i_s}$ un campo escalar GHP de tipo $\{b, s\}$ con peso conforme w . El operador derivada dado por*

$$\Phi_a \eta_{i_1\dots i_s} := \Theta_a \eta_{i_1\dots i_s} + w A_a \eta_{i_1\dots i_s} + b B_a \eta_{i_1\dots i_s} + C_{ai_1}{}^j \eta_{ji_2\dots i_s} + \dots + C_{ai_s}{}^j \eta_{i_1\dots j} \quad (6.152)$$

es covariante bajo transformaciones conformes y GHP (y preserva ambos pesos).

Notemos que la única diferencia entre (6.152) y la derivada D_a definida en (6.23) es que Φ_a tiene también en cuenta el peso conforme, es decir que

$$\Phi_a \eta_{i_1\dots i_s} = D_a \eta_{i_1\dots i_s} + w A_a \eta_{i_1\dots i_s}. \quad (6.153)$$

La derivada (6.152) actúa sobre densidades *escalares*, pero al igual que en el capítulo 4, usando (6.152) y (6.147) podemos también construir una derivada generalizada que sea covariante bajo transformaciones conformes y GHP al actuar sobre densidades *tensoriales*:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_a T_{i_1\dots i_s c_1\dots c_m}^{b_1\dots b_n} := & \Phi_a T_{i_1\dots i_s c_1\dots c_m}^{b_1\dots b_n} + Q_a{}^{b_1}{}_d T_{i_1\dots i_s c_1\dots c_m}^{d\dots b_n} + \dots + Q_a{}^{b_n}{}_d T_{i_1\dots i_s c_1\dots c_m}^{b_1\dots d} \\ & - Q_a{}^d{}_{c_1} T_{i_1\dots i_s d\dots c_m}^{b_1\dots b_n} - \dots - Q_a{}^d{}_{c_m} T_{i_1\dots i_s c_1\dots d}^{b_1\dots b_n} \end{aligned} \quad (6.154)$$

donde

$$Q_a{}^b{}_c = A_a g^b{}_c + A_c g^b{}_a - A^b g_{ac}. \quad (6.155)$$

Notemos que, a diferencia del caso 4-dimensional, \mathcal{C}_a no conmuta con la operación prima, en vista de la definición de las 1-formas A_a , B_a y $C_{ai}{}^j$.

Esta derivada generalizada nos permite darle una base más sólida a los campos de Killing con peso de las secciones 6.4.1 y 6.5.1. Por ejemplo, similarmente a como hicimos en la sección 4.2.4, definimos un campo vectorial de Killing con pesos conforme w y GHP $\{b, s\}$, en d dimensiones, como una solución de

$$\mathcal{C}_{(a} k_{b)} = 0, \quad (6.156)$$

donde obviamos los índices internos de spin. Esta ecuación es covariante bajo transformaciones conformes y GHP, por lo tanto es una generalización apropiada de la ecuación de Killing conforme para incluir objetos con peso interno. En particular, para el vector ℓ^a del vielbein $\{e_a^i\}$, en un espacio-tiempo arbitrario encontramos

$$\mathcal{C}_a \ell_b = \check{\rho}_{ji} m_a^i m_b^j + \kappa_i n_a m_b^i, \quad (6.157)$$

donde $\check{\rho}_{ij} = \rho_{ij} - \frac{\rho}{(d-2)} \delta_{ij}$. De aquí vemos que ℓ^a será un vector de Killing con peso si y sólo si $\kappa_i \equiv 0$ y $\check{\rho}_{ij} \equiv 0$; esto es, si y sólo si ℓ^a es geodésico y ρ_{ij} es pura traza o idénticamente cero (de hecho se cumplirá la condición más fuerte $\mathcal{C}_a \ell_b = 0$). Estas condiciones se cumplen precisamente para los espacio-tiempos que consideramos en este capítulo, i.e para la clase Kundt y para agujeros negros estáticos.

De modo similar, definimos un *tensor de Killing-Yano con peso*, en d dimensiones, como una 2-forma X_{ab} con pesos conforme w y GHP $\{b, s\}$ que satisface la ecuación

$$\mathcal{C}_{(a} X_{b)c} = 0 \quad (6.158)$$

(nuevamente obviamos los índices internos). Para la 2-forma U_{ab}^i definida en (6.50), encontramos

$$\mathcal{L}_a U_{bc}^i = 2(\check{\rho}_{jk} m_a^j + \kappa_k n_a) m_{[b}^k m_{c]}^i + 2(\kappa^i n_a + \check{\rho}^i_j m_a^j) n_{[b} \ell_{c]}. \quad (6.159)$$

Vemos entonces que U_{ab}^i será un tensor de Killing-Yano con peso si y sólo si $\kappa_i \equiv 0$ y $\check{\rho}_{ij} \equiv 0$, que son las mismas condiciones obtenidas en la discusión para (6.157). El análisis de los tensores (6.93) y (6.94) es análogo.

Finalmente, si bien de lo anterior deducimos que tanto las conexiones modificadas que introdujimos en la sección 6.3, como los campos conformes de Killing con peso hallados en las secciones 6.4.1 y 6.5.1, tienen una interpretación en términos de derivadas que son covariantes simultáneamente bajo transformaciones conformes y GHP (y en este sentido los resultados son análogos a lo que vimos en el capítulo 4), existe una diferencial crucial con el caso 4-dimensional, y es la cuestión acerca de la invariancia conforme de las ecuaciones de campo. Para spin $\mathfrak{s} = 2$, el tensor de Weyl es una densidad (tensorial) conforme en cualquier dimensión, $\widehat{C}_{abcd} = \Omega^2 C_{abcd}$, por lo tanto aún podemos definir un “campo de spin 2 gravitacional” como un tensor de Weyl reescalado $W_{abcd} := \Omega C_{abcd}$, análogo al de la sección 4.4.1 (ver ec. (4.99)), y así dar una interpretación de la aparición de los operadores conformemente covariantes anteriores. Sin embargo, para spin $\mathfrak{s} = 1$, asumiendo que el campo de Maxwell F_{ab} tiene peso conforme w , i.e. $\widehat{F}_{ab} = \Omega^w F_{ab}$, el comportamiento conforme de las ecuaciones de Maxwell $\nabla^a F_{ab} = 0$ y $\nabla_{[a} F_{bc]} = 0$ en d dimensiones es

$$\widehat{\nabla}^a \widehat{F}_{ab} = \Omega^{w-2} [\nabla^a F_{ab} + (w + d - 4) \Upsilon^a F_{ab}], \quad (6.160)$$

$$\widehat{\nabla}_{[a} \widehat{F}_{bc]} = \Omega^w [\nabla_{[a} F_{bc]} + w \Upsilon_{[a} F_{bc]}]. \quad (6.161)$$

De estas ecuaciones se deduce que, si $d \neq 4$, entonces no hay modo de elegir el peso conforme w de manera tal que *ambas* ecuaciones de Maxwell sean invariantes conformes. Esto implica que el operador de Laplace-de Rham modificado (6.43) no puede ponerse en la forma (4.126) de un operador conformemente covariante como en el caso 4-dimensional. Por lo tanto, para $d > 4$ la interrelación entre covariancia conforme y GHP, conexiones modificadas, y ecuaciones de campo, no es tan clara como en el caso $d = 4$ que vimos en el capítulo 4.

Capítulo 7

Conclusiones

Motivados por la conjetura de censura cósmica y su estrecha relación con la estabilidad del espacio-tiempo de Kerr, en esta tesis hemos estudiado los mecanismos que subyacen los recientes resultados de estabilidad lineal del agujero negro de Schwarzschild dados en [46, 47], analizando las posibilidades de su generalización y, en particular, el rol de las *simetrías ocultas* y su relación con teoría de twistors. Nuestros métodos son muy generales ya que no asumen formas particulares de la métrica, sino que sólo hacen uso de la estructura algebraica del espacio-tiempo de background. De este modo, hemos tratado las perturbaciones de toda la clase de espacio-tiempos Einstein de tipo Petrov D en 4 dimensiones, que incluye las soluciones de agujeros negros estacionarios en vacío con constante cosmológica. También estudiamos los casos de ciertos espacio-tiempos algebraicamente especiales en dimensiones arbitrarias, más específicamente la clase Kundt y agujeros negros estáticos. Nuestros resultados principales, además de explicar los mecanismos subyacentes en [46, 47] como parte de una estructura general (de la que todos los resultados conocidos en la literatura forman parte), permiten un entendimiento profundo de la estructura y las simetrías de las ecuaciones que gobiernan las perturbaciones de espacio-tiempos algebraicamente especiales en dimensiones arbitrarias, y en particular de las soluciones de agujeros negros. Esta conclusión se deduce del resumen que damos en el resto de este capítulo.

El espíritu genérico en este trabajo ha sido tratar de generalizar a un espacio-tiempo curvo los resultados de *spin lowering-spin raising* desarrollados por Penrose que valen en el espacio-tiempo (4-dimensional) de Minkowski \mathbb{M} , y que permiten una correspondencia uno-a-uno entre campos sin masa de spin arbitrario y campos escalares que resuelven la ecuación de onda en \mathbb{M} . Nos concentramos en estos mecanismos porque los mismos son reminiscentes de lo que ocurre en el caso de Schwarzschild en [46, 47], especialmente en vista de las fórmulas (3) y (4) dadas en la introducción. Además, en Minkowski, los mapas entre campos escalares y campos de spin superior involucran fuertemente el uso de twistors y espinores de Killing. En este sentido, las ideas de spin lowering-spin raising resultan aún más atractivas al tener en cuenta la expresión (6), que muestra explícitamente la aparición de tensores de Killing-Yano (análogos tensoriales de espinores de Killing).

En espacio-tiempos Einstein de 4 dimensiones pertenecientes al tipo Petrov D, obtuvimos los mapas que transforman *off shell* las ecuaciones de campo en ecuaciones escalares, mostrando que forman parte de un mismo patrón general de simetrías parametrizado por el spin \mathfrak{s} de los campos y el peso de spin s de sus componentes; y vimos que las ecuaciones de Teukolsky, Fackerell-Ipser, Regge-Wheeler, etc. son casos particulares de esta estructura general. Las identidades correspondientes, resumidas en la identidad ‘maestra’ (4.1), nos permiten tomar ecuaciones adjuntas y, con la ayuda de los lemas 3.3.1 y 3.4.1, construir campos de spin superior a partir de campos escalares pesados, que resuelven ecuaciones de tipo onda en términos del operador $\square_p = D^a D_a$ hallado en [22, 1], donde D_a es una derivada covariante GHP modificada. Como subproducto, generamos también operadores de simetría para las ecuaciones diferenciales involucradas, tanto para las ecuaciones escalares (Teukolsky, Fackerell-Ipser, Regge-Wheeler) como para las ecuaciones de campos de spin superior (Weyl-Dirac, Maxwell y gravedad). En particular, hemos mostrado los mecanismos que subyacen la validez de las fórmulas (3), (4) y (6) en Schwarzschild, como casos particulares de nuestras identidades generales válidas para todo espacio Einstein tipo D.

También mostramos que, en la identidad principal (4.1), uno de los principales objetos involucrados, esto es $P_s^{A_1 \dots A_{2s}}$, resulta ser un espinor de Killing con respecto a la conexión GHP modificada, lo cual resulta muy interesante desde el punto de vista de las simetrías ocultas, y nos sugirió explorar más en profundo la estructura geométrica de los resultados. En este contexto, hemos encontrado que el principio que rige la construcción de los operadores anteriores es la covariancia conforme, y que la misma guarda una relación profunda con estructuras complejas en el espacio-tiempo. La 1-forma A_a que aparece en el lado izquierdo de la identidad fundamental (4.1) (interpretada correctamente, i.e. en la forma (4.34)) proviene de la *única conexión de Weyl* compatible con la estructura casi-compleja J del espacio-tiempo, dada en (4.33). A su vez, fijando un par de direcciones nulas en la estructura conforme, esta conexión de Weyl induce una derivada covariante natural sobre los fibrados asociados a representaciones de la simetría conforme-GHP, que resulta ser *el origen de la conexión de Teukolsky*. Este resultado nos permitió dar una definición adecuada de objetos de tipo Killing con peso, y así encontrar una interpretación de los espinores de Killing modificados. Adicionalmente, adoptando el punto de vista de que los objetos más primitivos son las estructuras conforme y compleja, mostramos que la existencia de un tensor conforme de Killing-Yano puede entenderse como una consecuencia de la presencia de una métrica de Kähler en la clase conforme del espacio-tiempo (Lema 4.2.1). También mostramos que, en el caso bosónico, la estructura tensorial del operador espinorial en el lado izquierdo de (4.1) es la de un operador de Laplace-de Rham conformemente covariante actuando sobre formas diferenciales con valores tensoriales (y con peso conforme bien definido). La idea de implementar un formalismo conformemente covariante nos sugirió también una relación adicional con el concepto de twistor, ya que el mismo está intrínsecamente asociado a la estructura conforme de un espacio-tiempo. Hemos

entonces introducido la noción de *twistor local con peso* y su correspondiente conexión en el fibrado de twistors, lo cual refuerza la definición anterior de espinor de Killing pesado.

Por otro lado, como todos nuestros resultados incluyen la presencia de una constante cosmológica, al enfocarnos en la dinámica de los campos es necesario considerar el caso en el que las condiciones de borde en el infinito no sean las usuales. Esta situación ocurre para una constante cosmológica negativa, donde el espacio-tiempo es asintóticamente Anti-de Sitter. Hemos estudiado este problema en el caso de agujeros negros estáticos, analizando las posibles extensiones autoadjuntas de los operadores de Schrödinger que aparecen en ecuaciones de onda 1+1 definidas en una semilínea, y estudiando en qué casos las mismas son o no positivas definidas. Como aplicación, encontramos las condiciones bajo las cuales el agujero negro de Schwarzschild-AdS es inestable, mostrando que, mientras que los campos de Klein-Gordon sin masa son modalmente estables, los campos electromagnéticos y gravitacionales son inestables bajo un conjunto de condiciones de Robin bien caracterizadas. Mostramos también el origen de las inestabilidades desde el punto de vista de consideraciones energéticas. Además, motivamos las condiciones de Robin desde distintos puntos de vista (explicando qué variables son físicamente significativas, y mostrando también la relación con el contexto de la conjetura AdS/CFT), y estudiamos cómo es afectada la dualidad supersimétrica de Chandrasekhar bajo estas condiciones de borde.

Finalmente, estudiamos la generalización de los resultados en 4 dimensiones a espacio-tiempos de dimensiones arbitrarias, que son principalmente motivados en teorías de Kaluza-Klein y supercuerdas, pero que también son de sumo interés para entender mejor la estructura de la Relatividad General y sus soluciones. Mostramos que las ecuaciones escalares (con índices internos) conocidas en la literatura, i.e. las ecuaciones de Teukolsky d -dimensionales y las correspondientes a agujeros negros estáticos, tienen una estructura de tipo onda en términos de una familia de operadores de onda generalizados $\square_{(b,s)}$ que se construyen con conexiones GHP modificadas, extendiendo así los resultados de [22, 1] a espacios algebraicamente especiales en dimensiones arbitrarias. Encontramos además relaciones interesantes entre las conexiones modificadas y tensores que satisfacen ecuaciones de tipo Killing con respecto a las derivadas correspondientes. También encontramos que las ecuaciones escalares se obtienen como proyecciones *off shell* de un operador de Laplace-de Rham modificado, lo cual guarda cierta relación con los resultados del capítulo 4. Similarmente al caso 4-dimensional, tomando ecuaciones adjuntas pudimos construir soluciones de las ecuaciones de campo originales en una forma muy compacta a partir de soluciones de las ecuaciones escalares, mostrando de nuevo un patrón de simetrías en dicha reconstrucción. Por último, interpretamos las conexiones modificadas y los tensores de tipo Killing en términos de operadores conformemente covariantes, y asimismo observamos que la relación entre covariancia conforme y ecuaciones de campo es más sutil que en el caso 4-dimensional.

Bibliografía

- [1] S. Aksteiner and L. Andersson, *Linearized gravity and gauge conditions*, Class. Quant. Grav. **28**, 065001 (2011) [arXiv:1009.5647 [gr-qc]].
- [2] S. Aksteiner and T. Bäckdahl, *Symmetries of linearized gravity from adjoint operators*, [arXiv:1609.04584 [gr-qc]].
- [3] S. Aksteiner, L. Andersson and T. Bäckdahl, *New identities for linearized gravity on the Kerr spacetime*, [arXiv:1601.06084 [gr-qc]].
- [4] A. Anabalon, D. Astefanesei and J. Oliva, *Hairy Black Hole Stability in AdS, Quantum Mechanics on the Half-Line and Holography*, JHEP **1510**, 068 (2015) [arXiv:1507.05520 [hep-th]].
- [5] L. Andersson, T. Bäckdahl and P. Blue, *Second order symmetry operators*, Class. Quant. Grav. **31**, 135015 (2014) [arXiv:1402.6252 [gr-qc]].
- [6] L. Andersson, T. Bäckdahl and J. Joudioux, *Hertz potentials and asymptotic properties of massless fields*, Commun. Math. Phys. **331**, 755 (2014) [arXiv:1303.4377 [math.AP]].
- [7] B. Araneda and G. Dotti, *Petrov type of linearly perturbed type D spacetimes*, Class. Quant. Grav. **32**, no. 19, 195013 (2015) [arXiv:1502.07153 [gr-qc]].
- [8] B. Araneda, *Symmetry operators and decoupled equations for linear fields on black hole spacetimes*, Class. Quant. Grav. **34**, no. 3, 035002 (2017) [arXiv:1610.00736 [gr-qc]].
- [9] B. Araneda and G. Dotti, *Instability of asymptotically anti-de Sitter black holes under Robin conditions at the timelike boundary*, Phys. Rev. D **96**, no. 10, 104020 (2017) [arXiv:1611.03534 [hep-th]].
- [10] B. Araneda, *Generalized wave operators, weighted Killing fields, and perturbations of higher dimensional spacetimes*, Class. Quant. Grav. **35**, no. 7, 075015 (2018) [arXiv:1711.09872 [gr-qc]].
- [11] B. Araneda, *Conformal invariance, complex structures, and the Teukolsky connection*, arXiv:1805.11600 [gr-qc].

- [12] A. Ashtekar, B. Bonga and A. Kesavan, *Asymptotics with a positive cosmological constant: I. Basic framework*, Class. Quant. Grav. **32**, no. 2, 025004 (2015) [arXiv:1409.3816 [gr-qc]].
- [13] A. Ashtekar and S. Das, *Asymptotically Anti-de Sitter space-times: Conserved quantities*, Class. Quant. Grav. **17**, L17 (2000) [hep-th/9911230].
- [14] P. Bell and P. Szekeres, *Some properties of higher spin rest-mass zero fields in general relativity*, Int. J. Theor. Phys. **6**, 111 (1972).
- [15] T. Bäckdahl and J. A. V. Kroon, *A formalism for the calculus of variations with spinors*, J. Math. Phys. **57**, no. 2, 022502 (2016) [arXiv:1505.03770 [gr-qc]].
- [16] T. N. Bailey and R. J. Baston, *Twistors in mathematics and physics*, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **156**, 1 (1990).
- [17] T. N. Bailey, *Complexified conformal almost-Hermitian structures and the conformally invariant eth and thorn operators*, Class. Quant. Grav. **8**, no. 1, (1991)
- [18] T.N. Bailey, M.G. Eastwood and A.R. Gover, *Thomas's Structure Bundle for Conformal, Projective and Related Structures*, Rocky Mountain J. Math. **24** (1994), no. 4, 1191–1217.
- [19] I. Bakas, *Energy-momentum/Cotton tensor duality for AdS(4) black holes*, JHEP **0901**, 003 (2009) [arXiv:0809.4852 [hep-th]].
- [20] V. Balasubramanian and P. Kraus, *A Stress tensor for Anti-de Sitter gravity*, Commun. Math. Phys. **208**, 413 (1999) [hep-th/9902121].
- [21] C. Bär, N. Ginoux, and F. Pfäffle. *Wave equations on Lorentzian manifolds and quantization*. ESI Lectures in Mathematics and Physics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2007.
- [22] D. Bini, C. Cherubini, R. T. Jantzen and R. J. Ruffini, *Teukolsky master equation: De Rham wave equation for the gravitational and electromagnetic fields in vacuum*, Prog. Theor. Phys. **107**, 967 (2002) [gr-qc/0203069].
- [23] D. Birmingham, *Topological black holes in Anti-de Sitter space*, Class. Quant. Grav. **16**, 1197 (1999) [hep-th/9808032].
- [24] P. Blue, *Decay of the Maxwell field on the Schwarzschild manifold*, Journal of Hyperbolic Differential Equations, **5**(04), 807-856 (2008)
- [25] B. Carter, *Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom*, Phys. Rev. Lett. **26**, 331 (1971).
- [26] B. Carter, *Killing Tensor Quantum Numbers and Conserved Currents in Curved Space*, Phys. Rev. D **16**, 3395 (1977).

- [27] M. J. Cole and J. A. V. Kroon, *Killing spinors as a characterisation of rotating black hole spacetimes*, *Class. Quant. Grav.* **33**, no. 12, 125019 (2016) [arXiv:1601.04666 [gr-qc]].
- [28] A. Coley, R. Milson, V. Pravda and A. Pravdova, *Classification of the Weyl tensor in higher dimensions*, *Class. Quant. Grav.* **21**, L35 (2004) [gr-qc/0401008].
- [29] C.D. Collinson, *On the relationship between Killing tensors and Killing-Yano tensors* *Int. J. Theor. Phys.* (1976) 15: 311.
- [30] S. Curry and A. R. Gover, *An introduction to conformal geometry and tractor calculus, with a view to applications in general relativity*, [arXiv:1412.7559 [math.DG]].
- [31] G. E. Curtis, *Twistors and linearized Einstein theory on plane-fronted impulsive wave backgrounds*, *Gen. Rel. Grav.* **9**, (1987) 987
- [32] E. Chaverra, N. Ortiz and O. Sarbach, *Linear perturbations of self-gravitating spherically symmetric configurations*, *Phys. Rev. D* **87**, no. 4, 044015 (2013) [arXiv:1209.3731 [gr-qc]].
- [33] S. Chandrasekhar, *On algebraically special perturbations of black holes*, *Proc. R. Soc. Lond. A* **392** (1984) 1.
- [34] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*, 2nd edn (1992) Oxford University Press.
- [35] D. Christodoulou and S. Klainerman, *Asymptotic properties of linear field equations in Minkowski space*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 43(2):137–199, Mar. 1990.
- [36] D. Christodoulou and S. Klainerman, *The global nonlinear stability of the Minkowski space*, Princeton Math. Ser. 41, Princeton University, 1993
- [37] Y. Choquet-Bruhat, *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles nonlinéaires*, *Acta Math.*, 88:141–225, 1952.
- [38] Y. Choquet-Bruhat and R. P. Geroch, *Global aspects of the Cauchy problem in general relativity*, *Commun. Math. Phys.* **14**, 329 (1969).
- [39] M. Dafermos and I. Rodnianski, *Lectures on black holes and linear waves*, *Clay Math. Proc.* **17**, 97 (2013) [arXiv:0811.0354 [gr-qc]].
- [40] M. Dafermos and I. Rodnianski, *The black hole stability problem for linear scalar perturbations*, *XVth International Congress on Mathematical Physics*, P. Exner (ed.), World Scientific, London, 2009, pp. 421-433 [arXiv:1010.5137 [gr-qc]].

- [41] M. Dafermos, I. Rodnianski and Y. Shlapentokh-Rothman, *Decay for solutions of the wave equation on Kerr exterior spacetimes III: The full subextremal case $|a| < M$* , Ann. of Math., 183 (2016), [arXiv:1402.7034 [gr-qc]].
- [42] M. Dafermos, G. Holzegel and I. Rodnianski, *A scattering theory construction of dynamical vacuum black holes*, [arXiv:1306.5364 [gr-qc]].
- [43] M. Dafermos, G. Holzegel and I. Rodnianski, *The linear stability of the Schwarzschild solution to gravitational perturbations*, arXiv:1601.06467 [gr-qc].
- [44] O. J. C. Dias, H. S. Reall and J. E. Santos, *Kerr-CFT and gravitational perturbations*, JHEP **0908**, 101 (2009) [arXiv:0906.2380 [hep-th]].
- [45] K. Dighton, *An introduction to the theory of local twistors*, Int. J. Theor. Phys., vol. 11, no 1, p. 31-43 (1974)
- [46] G. Dotti, *Nonmodal linear stability of the Schwarzschild black hole*, Phys. Rev. Lett. **112** (2014) 191101 [arXiv:1307.3340 [gr-qc]].
- [47] G. Dotti, *Black hole nonmodal linear stability: the Schwarzschild (A)dS cases*, Class. Quant. Grav. **33**, no. 20, 205005 (2016) [arXiv:1603.03749 [gr-qc]].
- [48] G. Dotti and R. J. Gleiser, *Linear stability of Einstein-Gauss-Bonnet static spacetimes. Part I. Tensor perturbations*, Phys. Rev. D **72**, 044018 (2005) [gr-qc/0503117].
- [49] G. Dotti, R. Gleiser and J. Pullin, *Instability of charged and rotating naked singularities*, Phys. Lett. B **644**, 289 (2007) [gr-qc/0607052].
- [50] G. Dotti and R. J. Gleiser, *Gravitational instability of the inner static region of a Reissner-Nordstrom black hole*, Class. Quant. Grav. **27**, 185007 (2010) [arXiv:1001.0152 [gr-qc]].
- [51] G. Dotti, R. J. Gleiser and I. F. Ranea-Sandoval, *Instabilities in Kerr Spacetimes*, Class. Quant. Grav. **29**, 095017 (2012) [arXiv:1111.6854 [gr-qc]].
- [52] M. Durkee, V. Pravda, A. Pravdova and H. S. Reall, *Generalization of the Geroch-Held-Penrose formalism to higher dimensions*, Class. Quant. Grav. **27**, 215010 (2010) [arXiv:1002.4826 [gr-qc]].
- [53] M. Durkee and H. S. Reall, *Perturbations of higher-dimensional spacetimes*, Class. Quant. Grav. **28**, 035011 (2011) [arXiv:1009.0015 [gr-qc]].
- [54] M. Durkee and H. S. Reall, *Perturbations of near-horizon geometries and instabilities of Myers-Perry black holes*, Phys. Rev. D **83**, 104044 (2011) [arXiv:1012.4805 [hep-th]].

- [55] M. G. Eastwood, R. Penrose and R. O. Wells, *Cohomology and Massless Fields*, Commun. Math. Phys. **78**, 305 (1981).
- [56] M. G. Eastwood and J. W. Rice, *Conformally invariant differential operators on Minkowski space and their curved analogues*, Commun. Math. Phys. **109**, 207 (1987).
- [57] E. D. Fackerell and J. R. Ipser, *Weak electromagnetic fields around a rotating black hole*, Phys. Rev. D **5**, 2455 (1972).
- [58] D. Fajman, *Dynamics of General Relativity*, lectures notes for Summer School “Between Geometry and Relativity” 2017, <http://homepage.univie.ac.at/david.fajman/material/notes.pdf>
- [59] J. J. Ferrando and J. A. Saez, *On the invariant symmetries of the D-metrics*, J. Math. Phys. **48**, 102504 (2007) [arXiv:0706.3301 [gr-qc]].
- [60] E. J. Flaherty Jr., *An integrable structure for type D spacetimes*, Phys. Lett. A **46**, 391–392 (1974)
- [61] E. J. Flaherty Jr., *Hermitian and Kählerian Geometry in Relativity*, Springer Lecture Notes in Physics, Vol. 46 (Springer-Verlag, New York, 1976)
- [62] H. Friedrich, *Twistor connection and normal conformal Cartan connection*, Gen. Relat. Gravit. (1977) 8: 303
- [63] H. Friedrich, *Existence and structure of past asymptotically simple solutions of Einstein’s field equations with positive cosmological constant*, Journal of Geometry and Physics, 3(1):101–117, 1986.
- [64] H. Friedrich, *Smoothness at null infinity and the structure of initial data*. In: Chruściel, P. T., and Friedrich, H. (eds), *The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields. 50 years of the Cauchy problem in general relativity*, Birkhauser, 2004
- [65] H. Friedrich and A. D. Rendall, *The Cauchy problem for the Einstein equations*, Lect. Notes Phys. **540**, 127 (2000) [gr-qc/0002074].
- [66] V. P. Frolov and D. Kubiznak, *Hidden Symmetries of Higher Dimensional Rotating Black Holes*, Phys. Rev. Lett. **98**, 011101 (2007) [gr-qc/0605058].
- [67] V. Frolov, P. Krtous and D. Kubiznak, *Black holes, hidden symmetries, and complete integrability*, Living Rev. Rel. **20**, no. 1, 6 (2017) [arXiv:1705.05482 [gr-qc]].
- [68] Y. Fukuda *et al.* [Super-Kamiokande Collaboration], *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998) [hep-ex/9807003].

- [69] A. Garcia-Parrado Gomez-Lobo and J. A. Valiente Kroon, *Killing spinor initial data sets*, J. Geom. Phys. **58**, 1186 (2008) [arXiv:0712.3373 [gr-qc]].
- [70] R. P. Geroch, *Spinor structure of space-times in general relativity. I*, J. Math. Phys. **9**, 1739 (1968).
- [71] R. P. Geroch, *Spinor structure of space-times in general relativity. II*, J. Math. Phys. **11**, 343 (1970).
- [72] R. P. Geroch, A. Held and R. Penrose, *A space-time calculus based on pairs of null directions*, J. Math. Phys. **14**, 874 (1973).
- [73] R. Geroch, *Geometrical Quantum Mechanics: 1974 Lecture Notes* (Lecture Notes Series) (Volume 3). Minkowski Institute Press; 1 edition. ISBN 978-1927763049.
- [74] R. J. Gleiser and G. Dotti, *Linear stability of Einstein-Gauss-Bonnet static spacetimes. Part II: Vector and scalar perturbations*, Phys. Rev. D **72**, 124002 (2005) [gr-qc/0510069].
- [75] R. J. Gleiser and G. Dotti, *Instability of the negative mass Schwarzschild naked singularity*, Class. Quant. Grav. **23**, 5063 (2006) [gr-qc/0604021].
- [76] M. Godazgar, *The perturbation theory of higher dimensional spacetimes a la Teukolsky*, Class. Quant. Grav. **29**, 055008 (2012) [arXiv:1110.5779 [gr-qc]].
- [77] J. N. Goldberg and R. K. Sachs, *A theorem on Petrov types*, Acta Phys. Polon., 22:13–23, (1962) Suppl.
- [78] A. R. Gover and P. Nurowski, *Calculus and invariants on almost complex manifolds, including projective and conformal geometry*, Illinois J. Math. **57** (2013), no. 2, 383–427.
- [79] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory. Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies And Phenomenology*, Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 596 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)
- [80] M. Guica, T. Hartman, W. Song and A. Strominger, *The Kerr/CFT Correspondence*, Phys. Rev. D **80**, 124008 (2009) [arXiv:0809.4266 [hep-th]].
- [81] B. C. Hall, *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*, (Vol. 222). Springer (2015)
- [82] S. W. Hawking, *Gravitational radiation from colliding black holes*, Phys. Rev. Lett. **26**, 1344 (1971).
- [83] S. W. Hawking, *Black holes in general relativity*, Commun. Math. Phys. **25** (1972) 152.

- [84] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1. Cambridge University Press, London-New York, 1973
- [85] P. Hintz and A. Vasy, *The global non-linear stability of the Kerr-de Sitter family of black holes*, Acta Mathematica 220, no. 1 (2018), arXiv:1606.04014 [math.DG].
- [86] S. Hollands and A. Ishibashi, *Instabilities of extremal rotating black holes in higher dimensions*, Commun. Math. Phys. **339**, no. 3, 949 (2015) [arXiv:1408.0801 [hep-th]].
- [87] G. H. Holzegel and C. M. Warnick, *Boundedness and growth for the massive wave equation on asymptotically anti-de Sitter black holes*, J. Funct. Anal. **266**, no. 4, 2436 (2014) [arXiv:1209.3308 [gr-qc]].
- [88] G. Holzegel and J. Smulevici, *Decay properties of Klein-Gordon fields on Kerr-AdS spacetimes*, Commun. Pure Appl. Math. **66**, 1751 (2013) [arXiv:1110.6794 [gr-qc]].
- [89] G. Holzegel, *On the massive wave equation on slowly rotating Kerr-AdS spacetimes*, Commun. Math. Phys. **294**, 169 (2010) [arXiv:0902.0973 [gr-qc]].
- [90] G. Holzegel and J. Smulevici, *Quasimodes and a Lower Bound on the Uniform Energy Decay Rate for Kerr-AdS Spacetimes*, Anal. PDE 7 (2014) 1057-1090 [arXiv:1303.5944 [gr-qc]].
- [91] L. P. Hughston, R. Penrose, P. Sommers and M. Walker, *On a quadratic first integral for the charged particle orbits in the charged kerr solution*, Commun. Math. Phys. **27**, 303 (1972).
- [92] L. Hughston and P. Sommers, *The symmetries of Kerr black holes*, Comm. Math. Phys. **33** (1973), no. 2, 129–134.
- [93] U. Hussain, I. Booth and H. K. Kunduri, *Master equation as a radial constraint*, Phys. Rev. D **93**, no. 12, 123001 (2016) [arXiv:1512.00723 [gr-qc]].
- [94] A. Ishibashi and H. Kodama, *Stability of higher dimensional Schwarzschild black holes*, Prog. Theor. Phys. **110**, 901 (2003) [hep-th/0305185].
- [95] A. Ishibashi and R. M. Wald, *Dynamics in nonglobally hyperbolic static space-times. 2. General analysis of prescriptions for dynamics*, Class. Quant. Grav. **20**, 3815 (2003) [gr-qc/0305012].
- [96] A. Ishibashi and R. M. Wald, *Dynamics in nonglobally hyperbolic static space-times. 3. Anti-de Sitter space-time*, Class. Quant. Grav. **21**, 2981 (2004) [hep-th/0402184].

- [97] A. Ishibashi and H. Kodama, *Perturbations and Stability of Static Black Holes in Higher Dimensions*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **189**, 165 (2011) [arXiv:1103.6148 [hep-th]].
- [98] W. Israel, *Event horizons in static vacuum space-times*, Phys. Rev. **164**, 1776 (1967).
- [99] J. Jezierski, *Energy and angular momentum of the weak gravitational waves on the Schwarzschild background: Quasilocal gauge invariant formulation*, Gen. Rel. Grav. **31**, 1855 (1999) [gr-qc/9801068].
- [100] J. Jezierski and M. Lukasik, *Conformal Yano-Killing tensor for the Kerr metric and conserved quantities*, Class. Quant. Grav. **23**, 2895 (2006) [gr-qc/0510058].
- [101] B. S. Kay, R. M. Wald, *Linear stability of Schwarzschild under perturbations which are non-vanishing on the bifurcation 2-sphere*, Class. Quantum Grav. **4**, 893 (1987)
- [102] L. S. Kegeles and J. M. Cohen, *Constructive Procedure For Perturbations Of Space-times*, Phys. Rev. D **19**, 1641 (1979).
- [103] H. Kodama and A. Ishibashi, *A Master equation for gravitational perturbations of maximally symmetric black holes in higher dimensions*, Prog. Theor. Phys. **110**, 701 (2003) [hep-th/0305147].
- [104] H. Kodama and A. Ishibashi, *Stability of generalized static black holes in higher dimensions*, gr-qc/0312012.
- [105] L. J. Mason, L. P. Hughston and P. Z. Kobak, *Further advances in twistor theory. Vol. 2: Integrable systems, conformal geometry and gravitation*, Harlow, UK: Longman (1995) 274 p. (Pitman research notes in mathematics series: 232)
- [106] S. A. Merkulov, *The Twistor Connection And Gauge Invariance Principle*, Commun. Math. Phys. **93**, 325 (1984)
- [107] S. Mertens, *Direct Neutrino Mass Experiments*, J. Phys. Conf. Ser. **718**, no. 2, 022013 (2016) [arXiv:1605.01579 [nucl-ex]].
- [108] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Boca Raton, USA: Taylor & Francis (2003) 573 p
- [109] E. Newman and R. Penrose, *An Approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients*, J. Math. Phys. **3**, 566 (1962).
- [110] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors And Space-time. 1. Two Spinor Calculus And Relativistic Fields*, Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1984) 458 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)

- [111] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors And Space-time. Vol. 2: Spinor And Twistor Methods In Space-time Geometry*, Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1986) 501p
- [112] R. Penrose, *Zero rest mass fields including gravitation: Asymptotic behavior*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **284** (1965) 159.
- [113] R. Penrose, *Twistor algebra*, J. Math. Phys. **8**, 345 (1967).
- [114] R. Penrose and M. MacCallum, *Twistor theory: an approach to the quantisation of fields and space-time*, Physics Reports 6.4 (1973): 241-315.
- [115] V. Pravda and A. Pravdova, *WANDs of the black ring*, Gen. Rel. Grav. **37**, 1277 (2005) [gr-qc/0501003].
- [116] R. H. Price, *Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse. II. Integer-Spin, Zero-Rest-Mass Fields*, Phys. Rev. D **5**, 2439 (1972).
- [117] M. Reed and B. Simon, *Fourier Analysis, Self-Adjointness (Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 2)*, Academic Press (1975).
- [118] T. Regge, J. A. Wheeler, *Stability of a Schwarzschild Singularity*, Phys. Rev. **108**, 1063 (1957)
- [119] M. Reiris, *On Perturbations of Extreme Kerr-Newman Black Holes and their Evolution*, Annales Henri Poincare **16**, no. 7, 1551 (2015).
- [120] D. C. Robinson, *Uniqueness of the Kerr black hole*, Phys. Rev. Lett. **34**, 905 (1975).
- [121] P. J. Schmid, *Nonmodal stability theory*, Annu. Rev. Fluid Mech. **39** 129 (2007).
- [122] W. T. Shu, *Asymptotic properties of the solutions of linear and non-linear spin field equations in Minkowski space*, Commun. Math. Phys. **140**, 449 (1991).
- [123] J. M. Stewart and M. Walker, *Perturbations of spacetimes in general relativity*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **341**, 49 (1974).
- [124] J. M. Stewart, *Hertz-Bromwich-Debye-Whittaker-Penrose potentials in general relativity*, Royal Society of London Proceedings Series A, 367:527-538, Sept. 1979.
- [125] T. Takahashi and J. Soda, *Master Equations for Gravitational Perturbations of Static Lovelock Black Holes in Higher Dimensions*, Prog. Theor. Phys. **124**, 911 (2010) [arXiv:1008.1385 [gr-qc]].

- [126] N. Tanahashi and K. Murata, *Instability in near-horizon geometries of even-dimensional Myers-Perry black holes*, *Class. Quant. Grav.* **29**, 235002 (2012) [arXiv:1208.0981 [hep-th]].
- [127] G. Teschl, *Mathematical methods in quantum mechanics* (Vol. 157), American Mathematical Soc. (2014)
- [128] S. A. Teukolsky, *Rotating black holes - separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations*, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1114 (1972).
- [129] G. Thompson, *Killing tensors in spaces of constant curvature*. *Journal of mathematical physics*, 27(11), 2693-2699, (1986).
- [130] J. A. Valiente Kroon, *Conformal Methods in General Relativity*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (2016).
- [131] P. van Nieuwenhuizen and N. P. Warner, *Integrability conditions for Killing spinors*, *Commun. Math. Phys.* **93**, 277 (1984).
- [132] M. Walker and R. Penrose, *On quadratic first integrals of the geodesic equations for type [22] spacetimes*, *Commun. Math. Phys.* **18**, 265 (1970).
- [133] R. M. Wald, *On perturbations of a Kerr black hole*, *J. Math. Phys.* **14**, 1453 (1973).
- [134] R. M. Wald, *Construction of Solutions of Gravitational, Electromagnetic, Or Other Perturbation Equations from Solutions of Decoupled Equations*, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 203 (1978).
- [135] R. M. Wald, *General Relativity*, Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491p
- [136] R. M. Wald, *Dynamics in nonglobally hyperbolic, static space-times*, *Jour. Math. Phys.* **21**, 2802 (1980).
- [137] C. M. Warnick, *The Massive wave equation in asymptotically AdS spacetimes*, *Commun. Math. Phys.* **321**, 85 (2013) [arXiv:1202.3445 [gr-qc]].
- [138] B. F. Whiting, *Mode Stability of the Kerr Black Hole*, *J. Math. Phys.* **30**, 1301 (1989).
- [139] E. Witten, *Search for a Realistic Kaluza-Klein Theory*, *Nucl. Phys. B* **186**, 412 (1981).
- [140] E. Witten, *A Simple Proof of the Positive Energy Theorem*, *Commun. Math. Phys.* **80**, 381 (1981).
- [141] F. J. Zerilli, *Effective Potential for Even-Parity Regge-Wheeler Gravitational Perturbation Equations*, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 737 (1970)