

Transmisión de estados cuánticos en cadenas de espines con dinámica Liouviliana exacta

Trabajo Especial de Licenciatura en Física

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación,
Universidad Nacional de Córdoba

Santiago Agustín Rodríguez
Director: Omar Osenda

28 de Marzo de 2018



Transmisión de estados cuánticos en cadenas de espines con dinámica Liouviliana exacta, Rodríguez,
Santiago Agustín
se distribuye bajo una

[Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Resumen

En el presente trabajo se estudia la posibilidad de definir un protocolo de transmisión que permita enviar de forma fidedigna estados cuánticos por medio de cadenas de spines “boundary controlled” (BC) o cadenas controladas por los bordes y cadenas de transmisión perfecta o “Perfect state transfer” (PST), bajo el marco de evolución dinámica de la ecuación de Lindblad propuesta en [17]. Se estudiará el comportamiento de la magnetización y las funciones de correlación de spin en el estado estacionario de no-equilibrio de la ecuación de Lindblad, cuando el mismo es único. Se mostrará que el formalismo utilizado puede utilizarse para enviar excitaciones de dos espines, en particular se mostrará que dichas excitaciones pueden producirse aplicando proyectores adecuados al $|N_{ess}\rangle$. La magnetización y las funciones de correlación de spin dependientes del tiempo son obtenidas usando la solución exacta del problema, así como la fidelidad de transmisión.

Abstract

In the present work we study the possibility of defining a transmission protocol that allows us to send in a reliable way quantum states through “boundary controlled” spins (BC) or spin chains controlled by edges and spin chains of perfect transmission or “Perfect state transfer” (PST), using the framework of dynamical evolution of the equation of Lindblad proposed in [17]. We study the behavior of the magnetization and spin correlation functions in the non-equilibrium steady state of the Lindblad equation, when this is unique. Later we will show that the described formalism can be used to send excitations of two spins, in particular it will be shown that these excitations can occur by applying adequate projectors to $|N_{ess}\rangle$. Magnetization and spin correlation functions dependent on time are obtained using the exact solution of the problem, as well as the transmission fidelity.

Palabras clave: Tercera Cuantización, Transmisión de estados Cuánticos, Cadenas de spines, Funciones de correlación de spin, Estado Estacionario de No-Equilibrio.

Clasificación:

03.65-w Quantum Mechanics

03.67.Hk Quantum Communication

75.10.Pq Spin chain models

03.65.Aa Quantum systems with finite Hilbert space

03.65.Yz Decoherence; open systems; quantum statistical methods

Índice

1. Introducción	6
2. Evolución dinámica en sistemas cerrados	10
2.1. Evolución dinámica: Ecuación de Schrödinger	10
2.2. Matriz densidad	10
2.3. Cadenas de Spines	12
2.3.1. Cadenas de spines PST	14
2.3.2. Cadenas De Spines Optimizadas (BC)	16
2.4. Transmisión en Cadenas de spines	16
2.4.1. Definición de Transmisión en General	16
2.4.2. Definición de Fidelidad de transmisión	16
2.4.3. Protocolo I: Transmisión en Sistemas Cerrados	17
2.5. Cálculo de Fidelidad Promedio: Protocolo I	19
2.5.1. 1	19
2.5.2. Cadena BC:	20
3. Evolución Dinámica En Sistemas Abiertos: Tercera Cuantización	24
3.1. Ecuación de Lindblad	24
3.2. Espacio de Fock de operadores	26
3.3. Forma Bilineal del Liouvilleano	27
3.4. Matriz Estructura	29
3.5. Modos maestros normales: NMM	31
3.6. Descomposición Espectral de \hat{L}_{iou}	31
3.7. Valor de Expectación de Operadores	32
3.8. Costo Numérico para implementar cálculos en Tercera Cuantización	33
4. Modelo y Metodología de Trabajo	34
4.1. Modelo	34
4.1.1. Hamiltoniano XX	34
4.1.2. Modelo de Ambiente Externo: Baño Térmico en los Bordes .	35
4.1.3. Tipos de Baños Térmicos en los bordes	36
4.2. Metodología de Trabajo	36
4.3. Espectro de la matriz X	37
4.3.1. Unicidad del Ness	37
4.3.2. Espectro de X en Cadena PST	38
4.3.3. Espectro de X en Cadena BC	42
5. Cálculo de Fidelidad en Tercera Cuantización: Protocolo 1	48
5.1. Expresión de la fidelidad	48
5.2. Cálculo de la Fidelidad	49
6. Funciones de Correlación de spin en el Ness	52
7. Definición del Protocolo II y Magnetización en Función del Tiempo	57
7.1. Protocolo II General y Valor de Expectación General	57
7.2. Magnetización en Función del tiempo	59
7.2.1. Cadena PST	59

7.2.2. Cadena BC	62
7.3. Definición del Protocolo II	66
7.3.1. Protocolo II para el caso 1	66
7.3.2. Protocolo II para el caso 2	68
8. Conclusión y Perspectivas a futuro	71
9. Apéndice A: Coeficientes de los Valores de Expectación	72
9.1. Introducción	72
9.2. Coeficientes C	73
9.2.1. Para los Valores de expectación en el Ness	74
9.2.2. Para la Magnetización en Función del Tiempo	76
9.2.3. Para la Fidelidad del Apéndice B	77
10. Apéndice B	78

Índice de Resultados

1. Hamiltoniano XX cadena cerrada usando Protocolo I: página 19.
2. Fidelidad promedio cadena cerrada Protocolo I: página 18.
3. Hamiltoniano XX en Tercera Cuatificación: página 34.
4. Matriz de baño en Tercera Cuatización: página 36.
5. Expresiones de las matrices \mathbb{X} y \mathbb{P} : página 30.
6. Expresiones de las matrices \mathbb{M}_i y \mathbb{M}_r : página 29.
7. Matriz \mathbb{Z} obtenida por medio de la solución a la ecuación de Lyapunov: página 30.
8. Expresiones de las matrices \mathbb{S} y \mathbb{S}' : página 30.
9. Fidelidad Protocolo I en Tercera Cuantización: página 49.
10. Expresión de los operadores de spin en términos de los operadores Majorana: pagina 73.
11. Expresión de los operadores $\hat{a}_{1,j}$ en términos de los Modos Maestros Normales: página 73.
12. Coeficientes para los valores de expectación en el Estado Estacionario de No-Equilibrio: página 75.
13. Valor de expectación de un observable físico en el Estado Estacionario de No-Equilibrio: pagina 53.
14. Funciones de correlación de spin en el Estado Estacionario de No-Equilibrio: página 53.
15. Valor de expectación de un observable físico general en Tercera Cuantificación: pagina 58.
16. Coeficientes para el cálculo de la magnetización en función del tiempo: página 76.
17. Magnetización en función del tiempo en Tercera Cuatización: página 59.
18. Expresión de la Fidelidad en el Protocolo II para el caso de codificación 1: página 68.
19. Matriz densidad reducida de dos sitios $i, i + 1$ para el caso de codificación 2: página 69.
20. Expresión de la Fidelidad en el Protocolo II para el caso de codificación 2 : página 69.
21. Coeficientes para el cálculo de la fidelidad en el apéndice B: página 77.
22. Expresión de la fidelidad del apéndice B: página 78.

1. Introducción

La transmisión de estados en cadenas de spines es de gran importancia en computación e información cuántica. Son estudiadas y utilizadas en su amplia mayoría como canal de transmisión o "bus"[1], cuya función principal es la de comunicar y conectar diferentes procesadores dentro de un sistema digital. La computadora cuántica típica es descrita por una colección de sistemas cuánticos de dos niveles llamados "Qubits" en el cual se realizan distintas operaciones unitarias como compuertas lógicas.

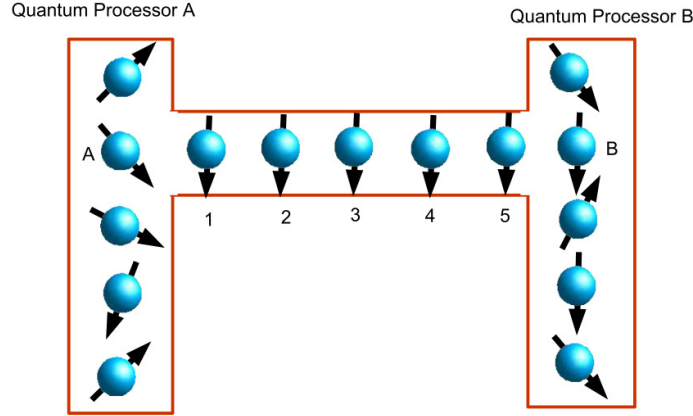


Figura 1: Ilustración de una computadora cuántica de manera general, se detallan los sistemas de dos niveles o qubits descritos por cada una de las esferas con flechas. Los procesadores A y B están conectados mediante una cadena de spines, descrita por las 5 esferas en el centro.

Una diferencia notable de los sistemas cuánticos comparados con sus análogos clásico (bits), esta dada por la posibilidad de preparar estados entrelazados mediante la superposición de uno o mas qubits y poder transmitirlo de manera fidedigna a través de la cadena. Por ejemplo en [2] se estudia la fidelidad de transmisión de estados entrelazados por medio de una cadena de spines XX con una impureza ubicada al comienzo de esta, las fidelidades obtenidas son bastantes altas en tiempos, en el cual bajo ciertos regímenes, es del orden de $N/2$ donde N es el número de spines. La fidelidad de transmisión máxima obtenida es mayor a $2/3$, en el cual el valor $2/3$ sería la fidelidad máxima posible si el sistema fuera clásico. De esta manera si se calculan fidelidades de transmisión bajo el formalismo de mecánica cuántica, para que estas tengan un valor aceptable, es necesario obtener fidelidades máximas mayores a $2/3$. Los Qubits además pueden codificar o almacenar mas información que los bits, debido a que estos pueden construir estados mediante la superposición de sus dos estados, en el cual son denotados por $|1\rangle$ y $|0\rangle$ en analogía con los estados 0 y 1 de los bits.

Otro trabajo a observar es [4], en el cual se estudia la fidelidad promediada de las cadenas PST y BC mediante la evolución dinámica de un estado superpuesto del primer spin de la cadena o Qubit, descrito por

$$|\psi(0)\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (1)$$

el espacio donde se lleva a cabo la evolución temporal es el de excitación 1, en donde se tiene que sólo 1 spin esta en el estado $|1\rangle$ y los restantes en $|0\rangle$. En este trabajo se citarán varias conclusiones de [4] como base para empezar a deducir un protocolo de transmisión que se describirá mas adelante.

Las cadenas de spines fueron usadas como modelos teóricos para estudiar fenómenos propios del magnetismo [5] y [6]. Las cadenas de spines son ejemplos, simples de imaginar, de sistemas interactuantes de muchos cuerpos en Cuántica, aunque su solución no sea trivial. Experimentos realizados utilizando scattering de neutrones en sistemas magnéticos permitieron obtener información sobre el espectro de excitaciones, las cadenas de spines permiten obtener teóricamente una excelente aproximación a dicho espectro, que fueron impulsados desde el descubrimiento de la superconductividad a altas temperaturas [7] en donde se sospechan que es producida por excitaciones magnéticas en cadenas de spines, “escaleras” o planos.

Las cadenas de spines nucleares, fueron utilizadas también en el ámbito de la resonancia magnética nuclear (RMN). Por ejemplo en [8] se estudia la transferencia de polarización entre spines nucleares de una cadena del amino ácido lisina, compuesta por 6 átomos de carbono C^{13} arreglados de forma lineal, de los cuáles sólo cinco de ellos son utilizados para realizar transmisión. Mediante pulsos de radio frecuencias hallan una descripción del sistema por medio de dos posibles hamiltonianos de mezcla llamados “Isotrópicos” y “Planar”. Se observa que el hamiltoniano “Planar”

$$\hat{H}_{planar} = 2\pi \sum_{i < j} J_{i,j} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j, \quad (2)$$

da lugar a la propagación de un paquete de onda de spin, mientras que el hamiltoniano isotrópico

$$\hat{H}_{iso} = 2\pi \sum_{i < j} J_{i,j} (\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y), \quad (3)$$

da lugar a una modulación dependiente del tiempo que decae rápidamente y amortigua la transmisión. Donde los operadores $\sigma_i^{x,y,z}$, son los operadores de spin del sitio i en las componentes $\{x, y, z\}$.

Los autores de [8], compararon los resultados obtenidos de forma experimental con los obtenidos de forma numérica y se le atribuyo a sus discrepancias a defectos experimentales en cuanto a la construcción del hamiltoniano “planar“, como también inhomogeneidades en los campos. Tales mediciones experimentales constan de la transmisión de la polarización del primer átomo al último y del último al primero, es decir se midió el tiempo en que tarda en ir y volver en la cadena, la polarización inicial en el primer átomo.

Un ejemplo de la utilización de cadenas de spines en computación cuántica de estado sólido como cable conector entre distintos qubits, puede encontrarse en [9]. En éste trabajo se tiene como procesador cuántico a los centros de vacancia NV^- , los NV^- serían defectos de la red de carbono del diamante en donde en lugar de haber un átomo de carbono hay un átomo de nitrógeno y le sigue una vacancia de ahí el nombre NV (Nitrogen-Vacancy). 2 centros NV, figura 2, se los conecta por medio de implantación de impurezas de nitrógeno entre ellos, estas impurezas actúan de cadena de spines que los comunica.

Todos estos spines interactúan por medio de la interacción dipolo-dipolo a primeros vecinos. Las constantes κ y g denotan estas interacciones, ésta última puede ser ajustada de forma tal que se tenga mayor transmisión de estado posible para $g \ll \kappa/\sqrt{N}$. En resumen se estudia la practicidad de usar esta cadena de spines de N^{12} (isotopo de N de spin $1/2$). Se obtiene buena transmisión de entrelazamiento (o entrelazamiento de formación E_f) para un número de spines de $N = 3$ y $N = 5$, con la intención de observar la robustez de este esquema bajo la influencia de

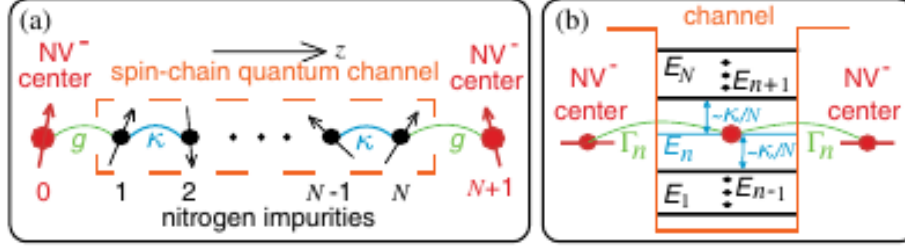


Figura 2: En (a) se muestran dos centros de vacancias NV^- acopladas a una cadena de spin consistiendo en N impurezas de nitrógeno, se observa que las distintas constantes de acoplamiento dipolo-dipolo κ y g . En (b) se ilustran las N energías E_N que posee el canal, cuando g es calibrado para una resonancia con un nivel de canal E_N , una excitación de spin en un NV^- se canaliza y emerge en el otro centro NV^- , luego de un tiempo $t_n = \pi\sqrt{2}\gamma_n$.

perturbaciones dada por el ambiente en forma particular de operaciones de "spin-flip", que actúan como errores de cambio de fase en la base de sitios de spines que da el hamiltoniano efectivo de spin. Se obtiene la evolución del sistema mediante la simulación de la ecuación de Lindblad.

Se tiene entonces que los trabajos de [4],[8],[9], consideran al sistema de cadena de spin como un sistema no aislado, donde se estudian el efecto del ambiente en las cantidades de interés como la fidelidad o la transmisión de entrelazamiento. Al considerar un ambiente o "baño" externo, se generan efectos de decoherencia cuyos efectos afectan a la supervivencia del estado inicial que se desee transmitir. El efecto de un ambiente externo en el sistema esta dado principalmente en el hecho de que la evolución temporal deja de ser unitaria y es regida por la ecuación maestra Markoviana mas general llamada ecuación de Lindblad [20]. En estos trabajos anteriores se tratan de manera distintas los efectos del ambiente sobre el sistema. Se puede ver que [9], simula de manera numérica la ecuación de Lindblad lo cual presenta una desventaja y está es su "costo" de computación, dado que la ecuación de Lindblad tiene como incógnita a la matriz densidad reducida al sistema de interés. Si la dimensión del espacio de Hilbert del sistema reducido es N , la matriz densidad sera de tamaño $N \times N$, su complejidad numérica es del orden de N^2 . Entonces si se tiene una cadena de spines 1/2 de m sitios, se tiene un espacio de Hilbert de 2^m , o una matriz densidad de 4^m entradas, que para 20 spines el número de ecuaciones a resolver en Lindblad será de aproximadamente 1 millón. Motiva entonces a buscar una alternativa a la ecuación de Lindblad, en [4] se utiliza "Monte Carlo Wavefunction Method" (MCWF) o el Método de función de onda de Monte Carlo [10]. En el cual se evoluciona a la función de onda del sistema con un Hamiltoniano no hermitiano, se elige de forma aleatoria "Saltos Cuánticos" y se realiza una re-normalización de la función de onda. Se demuestra que este tratamiento es equivalente a la ecuación de Lindblad y su ventaja es que al calcular funciones de onda, el número de variables de ésta es $\sim N$. Otras formas de tratar la influencia del ambiente en el sistema es mediante la ecuación cinética cuántica para la función de Green [11].

Pero en este trabajo el objetivo principal será aplicar los resultados de Prosen [17] al caso de cadenas de spines PST y BC acoplada a un ambiente externo. Se estudiará la magnetización y correlaciones de spin en el estado estacionario de no equilibrio definido como $|Ness\rangle$. Con esto luego se intentará de argumentar la descripción de un protocolo de transmisión de estados plausible para este tipo de esquema y comparar con resultados obtenidos por [4].

El presente trabajo consta del siguiente ordenamiento: En la sección 2 se de-

tallará la evolución dinámica en sistemas cerrados, se dará la definición de matriz densidad y sus propiedades. Se explicarán que son las cadenas de spines y se darán los dos ejemplos que se trabajarán, cadena PST y BC. A continuación se especificará que significa transmitir en cadenas de spines, se darán a su vez las definiciones de fidelidad para el caso de cadena cerrada y se especificará el llamado Protocolo I. Por último se calculará la fidelidad promediada para las cadenas PST y BC, previamente descriptas.

En la sección 3 se dará el formalismo de Tercera Cuantización, con la cual se obtendrá una solución exacta a la ecuación de Lindblad mediante la descomposición espectral del operador \hat{L}_{iou} . En la sección 4 se detallará la metodología que se desarrollará éste trabajo como así también se darán las condiciones para que el estado $|Ness\rangle$ sea único, para esto último se estudiará el espectro de la matriz \mathbb{X} . En la sección 5 se utilizará el Protocolo I y se intentará determinar, en principio, la fidelidad de transmisión. El Estado $|Ness\rangle$ se llama Estado Estacionario de No-Equilibrio, estos estados representan soluciones estacionarias a la ecuación de Lindblad. Son de No-Equilibrio puesto que si se tiene un sistema acoplado a varios reservorios térmicos cada uno a distintas temperaturas en principio, estos estados pueden dar lugar a corrientes estacionarias de energía dando lugar a la conducción de calor o, corrientes de partículas dando lugar a corrientes eléctricas en el caso de electrones.

En la sección 6 se estudiarán las funciones de correlación de spin en el $|Ness\rangle$. En la sección 7 se estudiará la magnetización en el tiempo y en base a lo que se concluirá aquí se definirá un protocolo de transmisión, llamado Protocolo II, el cual será simple de determinar en Tercera Cuantificación. Por último se darán los apéndices A y B, en el apéndice A se detallarán las expresiones de las contracciones realizadas y en el apéndice B se calculará la fidelidad en función del tiempo de forma distinta a la definida por el Protocolo II.

2. Evolución dinámica en sistemas cerrados

2.1. Evolución dinámica: Ecuación de Schrödinger

En este trabajo se tomará en todo momento $\hbar = 1$. Si se tiene un sistema físico cerrado, la evolución de la función de onda viene dada por la ecuación de Schrödinger [12]

$$i \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle, \quad (4)$$

si el Hamiltoniano del sistema no depende del tiempo su solución es

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}_t |\Psi(0)\rangle, \quad (5)$$

en donde \hat{U}_t es el operador evolución temporal dado por

$$\hat{U}_t = e^{-it\hat{H}}. \quad (6)$$

Dado que \hat{H} es un operador hermitiano se tiene que \hat{U}_t es unitario y por lo tanto si inicialmente se tiene una función de onda normalizada será normalizada para cualquier t . A su vez como \hat{H} es hermitiano este posee descomposición espectral [13], sea $|\phi_n\rangle$ la base ortonormal de autovectores al autovalor E_n que puede ser degenerado

$$\hat{H} = \sum_n E_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|, \quad (7)$$

esto es, en la base $|\phi_n\rangle$, \hat{H} es diagonal. A su vez la base $|\phi_n\rangle$ satisface completitud mediante la ecuación

$$\sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = \mathbb{1}, \quad (8)$$

donde $\mathbb{1}$ es el operador identidad del espacio de Hilbert del sistema total. usando esta completitud se tiene que $|\Psi(t)\rangle$ puede ser escrita como combinación lineal de los autovectores del Hamiltoniano dado por

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n \psi_n(t) |\phi_n\rangle, \quad (9)$$

con $\psi_n(t)$ dado por

$$\psi_n(t) = e^{-itE_n} \langle \Psi(0) | \phi_n \rangle. \quad (10)$$

2.2. Matriz densidad

La Mecánica Cuántica posee otro tipo de representación, la representación por matriz densidad en donde los postulados de la Mecánica Cuántica se enuncian utilizando el operador densidad $\hat{\rho}$, en lugar de funciones de ondas o vectores en el espacio de Hilbert en cuestión [13]. La ventaja de esta representación esta en que los estados iniciales de un sistema pueden ser mixtos, lo que quiere decir que se tiene un ensamble $\{|\psi_i\rangle, P_i\}$ en donde $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$ son estados posibles del sistema donde P_1, P_2, \dots, P_n son sus respectivas probabilidades; estos $|\psi_i\rangle$ no tienen porque ser ortogonales entre sí. La principal deferencia entre estado mixto

y estado puro está en el nivel de conocimiento del mismo, en un estado puro la información que se tiene sobre él es la mayor posible, mientras que en un estado mixto esta información no es completa, el operador densidad es útil a la hora de describir estados mixtos. El operador densidad estará dado en este ensamble por:

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^n P_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (11)$$

Dada una base ortonormal del espacio de Hilbert $\{|\phi_i\rangle\}$

$$|\psi_i\rangle = \sum_l a_{il} |\phi_l\rangle, \quad (12)$$

con a_{il} números complejos que resultan de la descomposición en dicha base, reemplazando $|\psi_i\rangle$ en (11) se obtiene

$$\hat{\rho} = \sum_{ln} \rho_{ln} |\phi_l\rangle\langle\phi_n|, \quad (13)$$

con ρ_{ln} las componentes de $\hat{\rho}$ en la base $|\phi_i\rangle$ dadas por

$$\rho_{ln} = \sum_i P_i a_{il} a_{in}^*. \quad (14)$$

Para el caso de cadenas de spines, el espacio de Hilbert es finito, y el operador densidad puede ser escrito como una matriz.

Algunas propiedades importantes del operador densidad son:

1. $\hat{\rho}$ es hermítica, $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$.
2. La componente ρ_{mm} es la probabilidad de medir el estado $|\phi_m\rangle$

$$\rho_{mm} = \sum_i P_i a_{im} a_{mi}^* = \sum_i P_i |a_{im}|^2. \quad (15)$$

3. $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$; En donde la traza es definida como

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = \sum_m \langle\phi_m|\hat{\rho}|\phi_m\rangle = \sum_m \rho_{mm} = \sum_{m,i} P_i |a_{im}|^2 = 1. \quad (16)$$

4. Dado un observable físico, \hat{O} , se tiene que el valor de expectación de ese observable en el estado $\hat{\rho}$ es

$$\langle\hat{O}\rangle_{\hat{\rho}} = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}). \quad (17)$$

5. $\hat{\rho}$ es un estado puro $\Leftrightarrow \text{Tr}(\hat{\rho}^2) = \text{Tr}(\hat{\rho})^2 = 1$.

La dinámica del sistema está dada por la ecuación

$$i \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (18)$$

si el Hamiltoniano es independiente del tiempo se obtiene como solución a esta ecuación

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{U}_t \hat{\rho}(0) \hat{U}_t^\dagger \quad (19)$$

con el operador de evolución \hat{U}_t definido en la ecuación (6).

Si un sistema con espacio de Hilbert H_T tiene subsistemas A y B, con espacios de Hilbert H_A y H_B respectivamente, entonces

$$H_T = H_A \otimes H_B,$$

entonces dado un ensamble en este sistema compuesto, $\{|A_i\rangle \otimes |B_j\rangle, P_{ij}\}$, se tiene que

$$\hat{\rho} = \sum_{ij} P_{ij} |A_i\rangle \otimes |B_j\rangle \langle A_i| \otimes \langle B_j|, \quad (20)$$

es el operador densidad en H_T .

Definimos a su vez traza parcial sobre el sistema B como

$$(Tr)_B(\hat{\rho}) \equiv \hat{\rho}_A, \quad (21)$$

esta traza da como resultado la matriz densidad reducida en el sistema A $\hat{\rho}_A$, análogamente se puede hacer lo mismo para el sistema B. Para calcular esta traza en particular se necesita dar una base ortonormal $\{|\phi_i^A\rangle, |\phi_j^B\rangle\}$ sobre A y B respectivamente, luego por propiedades del producto Tensorial el conjunto $\{|\phi_i^A\rangle \otimes |\phi_j^B\rangle\}$ es una base ortonormal sobre el espacio de Hilbert total, por lo tanto se puede expandir $|A_i\rangle \otimes |B_j\rangle$ como combinación lineal de esta base producto mencionada, usando completitud. Reemplazando esto en (20) sale

$$\hat{\rho} = \sum_{ijkl} \rho_{ijkl} |\phi_i^A\rangle \otimes |\phi_j^B\rangle \langle \phi_k^A| \otimes \langle \phi_l^B|, \quad (22)$$

esta sería la descripción matricial de $\hat{\rho}$ en la base producto de los sistemas A, B. La traza parcial se puede calcular ahora de la forma:

$$\begin{aligned} (Tr)_B(\hat{\rho}) &= \sum_m (\mathbb{1} \otimes \langle \phi_m^B|) \hat{\rho} (\mathbb{1} \otimes |\phi_m^B\rangle) \\ &= \sum_{ijklm} \rho_{ijkl} |\phi_i^A\rangle \langle \phi_k^A| \langle \phi_m^B| \phi_j^B\rangle \langle \phi_l^B| \phi_m^B\rangle \\ &= \sum_{ijklm} \rho_{ijkl} \delta_{mj} \delta_{ml} |\phi_i^A\rangle \langle \phi_k^A| \\ &= \sum_{ikm} \rho_{imkm} |\phi_i^A\rangle \langle \phi_k^A| \\ &= \sum_{ik} \rho_{ik} |\phi_i^A\rangle \langle \phi_k^A| \\ &= \hat{\rho}_A. \end{aligned} \quad (23)$$

Se puede ver así que utilizando ortonormalización de la base de B, se llega a la matriz densidad en el sistema A. Un cálculo análogo se usa para obtener $\hat{\rho}_B$.

2.3. Cadenas de Spines

Este trabajo se centra en el estudio de cadenas de spines, es decir un arreglo longitudinal de N sitios separados por una cierta distancia entre ellos, asociado a cada sitio hay un sistema cuántico de dos niveles cuyo espacio de Hilbert es expandido por la base

$$|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle,$$

que denotan valor de expectación de spin en la dirección Z, de valor $1/2$ y $-1/2$ respectivamente. El espacio de Hilbert para cada sitio será un espacio de dimensión 2, por lo tanto el espacio de Hilbert total será, de acuerdo al postulado de composición de sistemas cuánticos

$$H_T = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_N,$$

por lo tanto 2^N será la dimensión del espacio total. Los operadores actuando en este espacio serán matrices $2^N \times 2^N$.

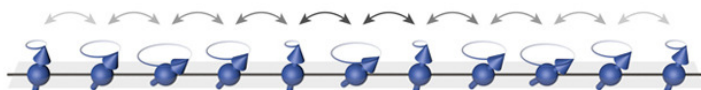


Figura 3: Representación ilustrativa de una cadena de espines con interacción a primeros vecinos, los espines serian las esferas con flechas, estas flechas indican la dirección a la que apunta su vector de spin asociado a ellas. Las líneas con doble flechas por encima de ellas indicarian la interacción que poseen.

El Hamiltoniano mas usado para estudiar problemas de transmisión de estados contiene términos de interacción solo entre primeros vecinos, ademas de la presencia de un campo externo aplicado, el cual puede escribirse como: [3]:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N-1} J_i \{ (1 + \gamma) \hat{S}_i^x \hat{S}_{i+1}^x + (1 - \gamma) \hat{S}_i^y \hat{S}_{i+1}^y + \Delta \hat{S}_i^z \hat{S}_{i+1}^z \} + 2 \sum_{i=1}^N h_i \hat{S}_i^z, \quad (24)$$

en donde $\hat{S}_i^{x,y,z} = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_i^{x,y,z}$ con $\hat{\sigma}_i^{x,y,z}$ matrices de Pauli actuando en el sitio i de la cadena definida por $\hat{\sigma}_i^{x,y,z} = \mathbb{1} \otimes \dots \otimes \sigma^{x,y,z} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}$ donde $\sigma^{x,y,z}$ es la matriz de Pauli 2×2 ubicada en el sitio i del producto tensorial. La constante J_i regula la interacción entre cada sitio, llamada constante de acoplamiento. Aquí se considera a la cadena de spin bajo la influencia de un campo externo dependiente de cada sitio dada por h_i , que interactúa solamente por medio de \hat{S}_i^z . La asimetría entre las componentes spin-spin es controlada por los parámetros γ, Δ .

Tomando distintos valores de (γ, Δ) se obtienen distintos modelos:

1. El modelo de Heisenberg o Hamiltoniano XXX se obtiene tomando $\gamma = 0, \Delta = 1$ en (24) con lo cual

$$\hat{H}_{xxx} = \sum_{i=1}^{N-1} J_i \{ \hat{S}_i^x \hat{S}_{i+1}^x + \hat{S}_i^y \hat{S}_{i+1}^y + \hat{S}_i^z \hat{S}_{i+1}^z \} + 2 \sum_{i=1}^N h_i \hat{S}_i^z, \quad (25)$$

claramente el modelo es isotrópico, Todas las componentes de spin en las direcciones x,y,z del sitio i y $i+1$, experimentan la misma interacción a 1^{eros} vecinos dada por J_i .

2. El modelo XXY se obtiene tomando $\gamma = 0$ en (24) con lo cual

$$\hat{H}_{xxy} = \sum_{i=1}^{N-1} J_i \{ \hat{S}_i^x \hat{S}_{i+1}^x + \hat{S}_i^y \hat{S}_{i+1}^y + \Delta \hat{S}_i^z \hat{S}_{i+1}^z \} + 2 \sum_{i=1}^N h_i \hat{S}_i^z. \quad (26)$$

3. El modelo XY se obtiene tomando $\gamma \neq 0, \Delta = 0$ en (24) con lo cual

$$\hat{H}_{xy} = \sum_{i=1}^{N-1} J_i \{ (1 + \gamma) \hat{S}_i^x \hat{S}_{i+1}^x + (1 - \gamma) \hat{S}_i^y \hat{S}_{i+1}^y \} + 2 \sum_{i=1}^N h_i \hat{S}_i^z. \quad (27)$$

4. El modelo XX se obtiene tomando $\gamma = 0, \Delta = 0$ en (24) con lo cual

$$\hat{H}_{XX} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{J_i}{2} \{ \hat{\sigma}_i^x \hat{\sigma}_{i+1}^x + \hat{\sigma}_i^y \hat{\sigma}_{i+1}^y \} + \sum_{i=1}^N h_i \hat{\sigma}_i^z. \quad (28)$$

Una observación importante es que cuando se tiene que $\gamma = 0$, el Hamiltoniano (24) conmuta con el operador $\hat{M}_z = \sum_{i=1}^N \hat{S}_i^z$ llamado magnetización total en Z, esto quiere decir que existe una base que diagonaliza al operador \hat{M}_z y \hat{H} simultáneamente, luego el valor de expectación de \hat{M}_z es constante en el tiempo, es decir la magnetización total del sistema en la dirección Z es una constante de movimiento.

En todo este trabajo se utilizará el modelo de cadena de spin \hat{H}_{XX} . Se tomarán a su vez $J_i > 0$ y $h_i \geq 0$.

2.3.1. Cadenas de spines PST

Este tipo de cadena corresponde a un caso particular de las cadenas llamadas "Fully Engineered" es decir los coeficientes J_i y h_i son seleccionados de tal forma que para una cadena con simetría de reflexión alrededor de un sitio el estado de la misma se ve "reflejado" (tiene simetría especular) con respecto al "plano de la simetría periódicamente. Esta condición, como veremos mas adelante, es compatible con la transmisión perfecta de estados cuánticos, de ahí el nombre de cadenas PST o del ingles "Perfect State Transfer" o transmisión perfecta de estados. La obtención de la transmisión perfecta se basa en la idea de que sistemas cuánticos que poseen una dinámica periódica poseen un espectro de energías conmensuradas, esto quiere decir que si ordenamos los autovalores del Hamiltoniano XX de menor a mayor $E_1 < E_2 < \dots < E_N$, luego se tiene que sus diferencias satisfacen la relación

$$E_{k+1} - E_k = (2m_k + 1)\pi/t_{pst}, \quad (29)$$

con m_k enteros arbitrarios, entonces el sistema bajo esta condición es PST [14]. El menor tiempo t_{pst} en el cual la ecuación (29) se satisface para todo par de energías, es el primer tiempo en el cual se alcanza PST, todo otro tiempo en el cual se alcance PST será de la forma $t_i = (2i + 1)t_{pst}$, con i entero [15]. El tiempo t_{pst} indica el tiempo en el cual el estado inicial con que se inicia la cadena sufre una inversión especular con respecto al centro de la misma. ¿Existe una manera de saber que una cadena es PST, en base a las constantes J_i y h_i del Hamiltoniano XX?. Estas constantes resultan en un espectro conmensurado, si poseen simetría de espejo con respecto al centro de la cadena, es decir $J_i^2 = J_{N-i}^2$ y $h_i = h_{N+1-i}$ (donde la indexación de los J depende de la paridad en el número de spines de la cadena). A su vez si se conoce un conjunto de enteros m_k que satisface (29) se puede obtener un único conjunto de constantes de acoplamiento J_i . Por lo tanto se tiene que en principio existen infinitas posibilidades de cadenas de spines que permiten PST [14].

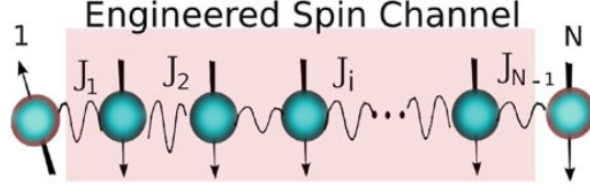


Figura 4: Representación de una cadena "Fully Engineered", en donde las constantes de acoplamientos J_i son determinadas por medio de algoritmos para lograr PST.

Para formalizar lo dicho arriba vamos a seguir la deducción presentada en Stolze [16]. El hamiltoniano XX (28) puede ser escrito, luego de una transformación de Jordan-Wigner como un Hamiltoniano cuadrático en operadores fermiónicos

$$\hat{H} = \sum_{\nu=0}^N \epsilon_{\nu} \hat{c}_{\nu}^{\dagger} \hat{c}_{\nu}, \quad (30)$$

sus autovalores ϵ_{ν} y sus correspondientes autovectores son los obtenidos mediante la diagonalización de la matriz tridiagonal

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 2h_0 & J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ J_1 & 2h_1 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 2h_2 & J_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 2h_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 2h_{N-1} & J_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & J_{N-1} & 2h_N \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Luego si se tiene que estos satisfacen $h_i = h_{N-i}$ y $J_i^2 = J_{N+1-i}^2$ se observa que sus autoestados poseen paridad definida con respecto al centro de la cadena y alternan su paridad según . Se puede observar entonces que se obtiene un espectro de energías conmensuradas si los J_i de acoplamiento y h_i de campo externo satisfacen las propiedades de reflexión especular con respecto al centro y se da a su vez la condición de

$$\epsilon_{\nu} = \frac{\pi}{t_{pst}} (2\eta(\nu) + \nu) + \frac{\psi_0}{t_{pst}}, \quad (32)$$

donde $\eta(\nu)$ función entera arbitraria. Para el modelo de cadena PST de este trabajo se tomará

$$J_i = J_{cte} \sqrt{i(N-i)}, \quad (33)$$

el cual obtenemos energías proporcional a su índice, esto es según [16] tomar $\epsilon_{\nu} = \frac{\pi}{t_{pst}} \nu + \omega_0$ con ω_0 una constante. Luego

$$\epsilon_{\nu+1} - \epsilon_{\nu} = \pi/t_{pst}. \quad (34)$$

Esto nos dice que el valor t_{pst} será $t_{pst} = \frac{\pi}{\Delta E}$ donde ΔE es la diferencia entre energías consecutivas en el espectro, que para este caso ΔE será una constante y $\Delta E = 2$, dando así $t_{pst} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$.

2.3.2. Cadenas De Spines Optimizadas (BC)

Debido a que la cadena PST requiere de un control muy detallado sobre sus constantes de acoplamiento J_i , surge la idea de poseer una cadena XX homogénea ($J_i = J$) con la excepción de sus spines extremos que están acoplados al sistema por medio de $J_1 = J_N = \alpha_{opt}J$, donde J es la constante de acople del resto de la cadena y α_{opt} es determinada algorítmicamente de forma de obtener máxima Transmisión posible al tiempo de transmisión menor posible.

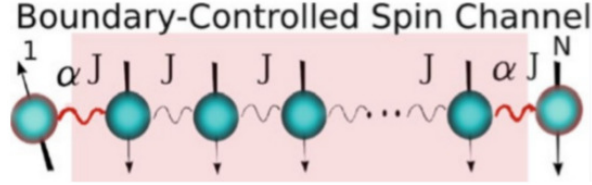


Figura 5: Representación de una cadena controlada por los bordes en donde los constantes de acoplamiento solo se optimizan en los bordes y se deja homogéneas a las demás constantes.

Se tomará para la cadena BC, $\alpha_{opt} = 1,06N^{-\frac{1}{6}}$ [2]. A su vez se tiene que la desviación de la fidelidad del valor 1 en el tiempo de mayor fidelidad, escala como $\alpha_{opt}^2 N$ [3].

2.4. Transmisión en Cadenas de spines

2.4.1. Definición de Transmisión en General

El objetivo principal de este trabajo radica en la posibilidad de transmitir estados en cadenas de spines bajo un ambiente externo. ¿Que significa transmitir? el concepto básico sería codificar un estado superpuesto o un estado entrelazado en algunos sitios de la cadena (por ejemplo los primeros sitios de un extremo de la misma) y dejar que el sistema evolucione de acuerdo a la dinámica que corresponda hasta el tiempo en el cual se reconstruya, de manera mas aproximada posible, el estado inicialmente codificado. Se llama a este tiempo, tiempo de transmisión t_{trans} . Se observa entonces que hay que definir un protocolo de transmisión, que sería una receta para transmitir estados [1]. Un ejemplo de protocolo de transmisión simple para cadenas de spines cerradas, o sin contacto con un ambiente externo, es el de codificar en el primer spine y hacer evolucionar el sistema hasta obtener de forma exacta o aproximada dicho estado en el último spine de la cadena o spine N-ésimo, a este protocolo se lo llamará Protocolo I.

2.4.2. Definición de Fidelidad de transmisión

dada una función de onda inicial del sistema $|\Psi(0)\rangle$ y una función de onda final que se desea obtener $|\Psi_f\rangle$, la fidelidad al tiempo t esta dada por

$$F(t) = |\langle \Psi(t) | \Psi_f \rangle|^2, \quad (35)$$

la fidelidad es entonces la probabilidad de hallar $|\Psi_f\rangle$ al tiempo t , por ende $0 \leq F(t) \leq 1$. En el caso de que $F(t) = 1$ se tiene que la función de onda del sistema es $|\Psi_f\rangle$. La fidelidad se define calculando el producto entre el estado restringido al primer sitio y al ultimo y lo que se quiere es que el estado del ultimo spine sea igual al codificado en el inicial.

Análogamente al caso anterior de funciones de onda se puede definir la Fidelidad en forma general, pero usando matrices densidad [13]: dado $\hat{\rho}(0) = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|$, esto es si se inicia la cadena en un estado puro y se quiere determinar la fidelidad con el estado final dado por $\hat{\rho}_f = |\psi_f\rangle\langle\psi_f|$, se evoluciona el sistema hasta un tiempo t obteniendo mediante (18), $\hat{\rho}(t)$. Luego la fidelidad al tiempo t será

$$F(t) = \sqrt{\text{Tr}(\hat{\rho}(t)\hat{\rho}_f)} = \sqrt{\langle\psi_f|\hat{\rho}(t)|\psi_f\rangle}, \quad (36)$$

con esto se mide que tanto se "parecen" $\hat{\rho}(t)$ y $\hat{\rho}_f$. Esta definición de Fidelidad es en el caso en que se tiene un estado puro inicialmente, mas adelante se usará una definición de fidelidad parecida en concepto a (36).

Alternativamente se puede definir la fidelidad usando la traza parcial, lo cual es útil para el caso de cadenas de spines si se desea estudiar el estado en el último spin. Esto es $\hat{\rho}_N(t) = \text{Tr}_{1,2,3,\dots,N-1}(\hat{\rho}(t))$. Luego la fidelidad será

$$F(t) = \sqrt{\langle\psi_f|\hat{\rho}_N(t)|\psi_f\rangle}. \quad (37)$$

A su vez se puede estudiar la fidelidad para el sistema reducido al spin $N - 1$ y N si así se desea.

2.4.3. Protocolo I: Transmisión en Sistemas Cerrados

Para las cadenas de spines el espacio de Hilbert es de dimensión 2^N , definiendo la base producto a aquella en la cual si $|\psi\rangle_i$ es elemento de esta base, luego $|\psi\rangle_i = |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \dots \otimes |i_N\rangle$ con $i_j = 0, 1$ para todo $j = 1, 2, \dots, N$, en donde se asocia al estado spin-down o $|\downarrow\rangle$ con $|0\rangle$ y el estado spin-up o $|\uparrow\rangle$ con $|1\rangle$. El espacio de 1 excitación es definido por el conjunto de N estados de la forma

$$|i\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |1\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle, i = 1, 2, \dots, N,$$

donde el estado $|1\rangle$ es el estado en el sitio i -ésimo de la cadena. Los estados de la base son los aquellos con solo un spin-up. Se tiene que en principio la fidelidad dependerá del estado inicial elegido, lo cual lleva a la pregunta ¿que estado inicial conviene usar? En nuestro caso es útil el siguiente protocolo [1], el cual lo llamamos como Protocolo I, que es el protocolo mas simple de implementar.

1. Se modifica al Hamiltoniano XX de forma tal que la energía de la cadena sea $E_0 = 0$ para el estado definido por $|0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle$ o el estado de magnetización $-N/2$. Esto es, el estado de todos los spines apuntando en la dirección del campo (Eje Z), en sentido contrario a éste.
2. Una vez inicializada la cadena en $|0\rangle$, un emisor codifica el estado $|\psi\rangle_1 = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ con α, β números complejos, en el primer Qubit. Este estado inicial es de modulo 1 o normalizado, obteniéndose así el estado inicial dado por $|\Psi(0)\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle$.
3. Dado que $|\Psi(0)\rangle$ no es un autoestado del Hamiltoniano XX, a tiempo t el estado esta dado por $\hat{U}_t|\Psi(0)\rangle$, donde \hat{U}_t es el operador evolución unitario correspondiente al Hamiltoniano dado por la ecuación (5).
4. Del otro lado de la cadena un receptor ubicado en el N -ésimo spin espera un tiempo t_{trans} de forma tal de obtener la mayor fidelidad posible, que dependerá de que sistema o cadena se este usando. Mediante la fidelidad se podrá determinar si el estado al extremo de la cadena es el estado inicial en el cual

se codifico el primer Qubit y que tanto de información con respecto a este se recupera o pierde.

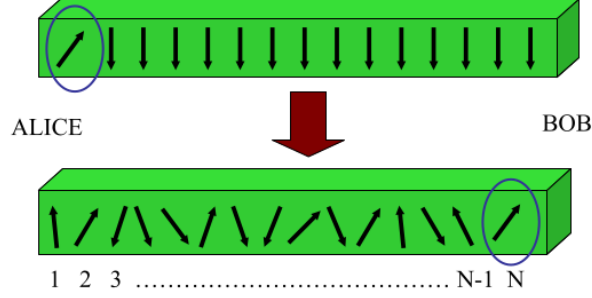


Figura 6: Representación ilustrativa del Protocolo I, aquí el emisor(Alice) codifica el primer spin, la flecha grande indica la evolución temporal en el cual al otro extremo de la cadena un receptor (Bob) toma el N-èsimo Qubit que reconstruye lo mejor posible el estado del primer Qubit en el cual el emisor lo inicializó.

Se puede entonces ahora determinar la fidelidad. Primero se tiene que para el caso de un Hamiltoniano XX, el autovalor de energía 0 es en principio degenerado si no se tiene campos externos. Si se tiene un $|\Psi(0)\rangle$ como la del protocolo I entonces

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \hat{U}_t |\Psi(0)\rangle \\ &= \alpha |0\rangle + \beta \sum_{i=1}^N f_{i,1}(t) |i\rangle \end{aligned} \quad (38)$$

con $f_{j,1}(t) = \langle j | e^{-it\hat{H}_{xx}} | 1 \rangle$. Se define el tiempo t_{trans} como aquel tiempo en el cual el receptor extrae información del spin de la cadena. Se desea calcular la fidelidad al tiempo t_{trans} . Se puede promediar la fidelidad en la ecuación (35) sobre todos los estados iniciales de la forma que indica el protocolo I, como estos tienen norma 1 son estados en la esfera de Bloch, integrando sobre esta esfera obtenemos la fidelidad promediada

$$\begin{aligned} F(t_{trans})_{prod} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{bloch} F(t_{trans}) d\Omega \\ &= \frac{|f_{N,1}(t_{trans})| \cos(\gamma)}{3} + \frac{|f_{N,1}(t_{trans})|^2}{6} + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (39)$$

donde se tiene que $\gamma = \arg(f_{N,1})$. Se puede elegir los campos de forma tal que $\cos(\gamma) = 1$. Se puede escribir mejor a $f_{N,1}(t_{trans})$ mediante la descomposición espectral del Hamiltoniano para sistemas cerrados (7), quedando

$$\begin{aligned} f_{N,1}(t_{trans}) &= \langle N | e^{-it\hat{H}_{xx}} | 1 \rangle \\ &= \langle N | \sum_{j=1}^N e^{-itE_k} \langle k_j | 1 \rangle | k_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^N e^{-itE_k} \langle k_j | 1 \rangle \langle N | k_j \rangle, \end{aligned} \quad (40)$$

Se puede entonces calcular la fidelidad promedio mediante (39) y (40). Usando los autovalores y autovectores del hamiltoniano.

Claramente, la evolución dinámica dada por el Protocolo I, estará restringida al espacio de excitación 1 sí y solo si el Hamiltoniano conmuta con la magnetización total del sistema. Por ende para el estudio de sistemas cerrados con las cadenas PST y BC basta con estudiar el espacio de excitación 1.

2.5. Cálculo de Fidelidad Promedio: Protocolo I

Se considera cadenas de spines con Hamiltoniano XX (28). Se reduce el problema al espacio de magnetización 1 para poder aplicar protocolo I. Debido a que el Hamiltoniano XX conmuta con la magnetización total en Z, el estado a tiempo t será combinación lineal de estados de excitación 1. En la base de una excitación el Hamiltoniano XX puede representarse como una matriz tridiagonal $N \times N$, con diagonal dada por la intensidad del campo externo aplicado al sistema y elementos supra-diagonales dados por las constantes de acoplamiento J_i

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 2h_1 & J_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ J_1 & 2h_2 & J_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 2h_3 & J_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 2h_4 & J_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & J_{N-2} & 2h_{N-1} & J_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & J_{N-1} & 2h_N \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Se observa que es real y simétrica. Existen subrutinas numéricas que diagonalizan este tipo de matrices de forma eficiente, para obtener los resultados mostrados mas abajo se utilizaron las llamadas TRED2 y TQLI provistas por [21]. Se obtiene el espectro del Hamiltoniano y sus autovalores, para luego determinar la fidelidad dada por (39) y (40).

2.5.1. Cadena PST:

Se considera la cadena PST descrita en la sección anterior, esto es se toma $J_i = J_{cte} \sqrt{i(N-i)}$ con $J_{cte} = 1$, $h_i = h$ para todo i .

En la Figura 7 se observa un espectro de energías conmensuradas como se esperaba. La diferencia entre energías sucesivas es $\Delta E = 2$, lo que nos da un $t_{pst} = \frac{\pi}{2} \approx 1,571$. Se muestra también que el ancho de banda es $[-(N-1), N-1]$, para el caso de N impar. La razón de tomar N impar es por un tema de estética del espectro dado que para N impar, 0 es un autovalor, en cambio para N par el 0 no pertenece al espectro. La razón por la cual se toma $h_i = 0$ para todo i , es que esta elección no afecta la fidelidad debido a que el protocolo I redefine al Hamiltoniano XX de forma tal que el autovalor del estado $|0\rangle$ deba ser 0, que no es mas que sumar un término constante al hamiltoniano en ecuación (28). Se puede observar que la constante de acoplamiento del campo externo no hace mas que trasladar el espectro, ver figura 7.

En la figura 9 se muestra la fidelidad promedio calculada mediante las ecuaciones (39) y (40), se observa que el tiempo de transmisión t_{pst} es el esperado, $t_{pst} \approx 1,571$ y en este tiempo la fidelidad vale 1, que es la máxima posible. El siguiente tiempo de transmisión está en $t \approx 4,72$, el cual es lo esperado, donde la fidelidad vuelve a alcanzar el valor máximo de 1. Se observa a su vez que a medida que se aumenta el número de spines, el ancho del pico de la fidelidad promedio se hace cada vez

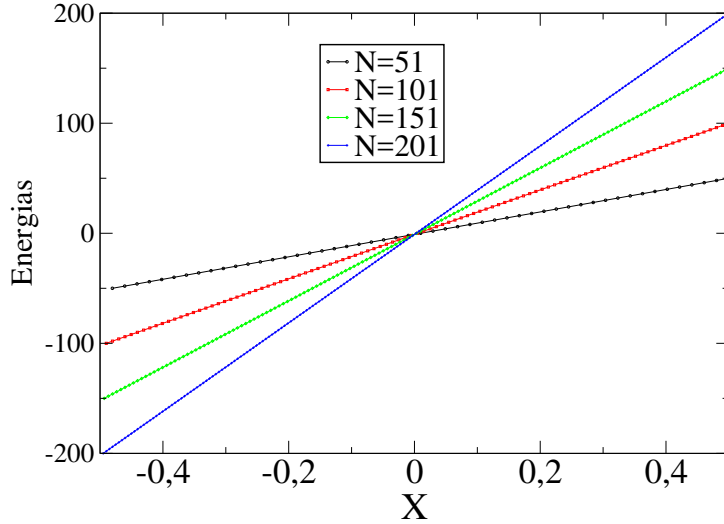


Figura 7: Espectro para la cadena PST elegida. $X = \frac{i}{N} - \frac{1}{2}$ con i el índice correspondiente de la energía. Con campos externos $h_i = 0$ para todo i .

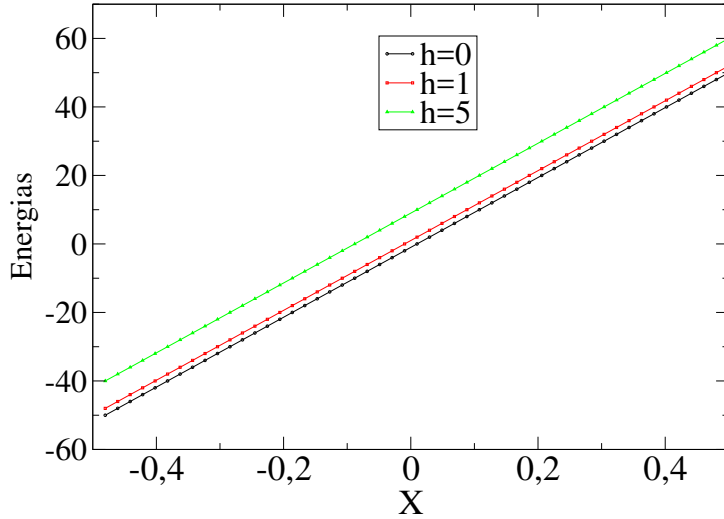


Figura 8: Espectro de la PST usada para $N = 51$ y distintos campos $h_i = h$ para todo i . Se observa que el efecto del campo externo está en trasladar el espectro por $2h$. Se asume que el acoplamiento del campo externo es el mismo para cada sitio.

mas angosto debido a que a mayor número de spines mayor es la deslocalización de los autovectores respecto de la base de 1 excitación, es decir hay más autovalores involucrados en la evolución (40), esto se ve en [14]. El tiempo en el cual perdura la máxima fidelidad promedio, decae conforme N aumenta, pero el t_{pst} no se modifica con N .

2.5.2. Cadena BC:

Como se menciona anteriormente, se toma una cadena BC con $\alpha_{opt} = 1,06N^{-\frac{1}{6}}$ y $J = 1$, de acuerdo a [2], con lo que se espera un tiempo de transmisión $t_{trans} \approx \frac{N}{2}$. Se toma $h_i = h$ para todo i . Se puede calcular el espectro y la fidelidad en forma análoga a como se procedió con el caso PST. Se observa en la figura 10 que el ancho de banda es $[-2J, 2J]$ para $j = 1$. Se puede observar que los cocientes entre las restas de las energías sucesivas no es un número

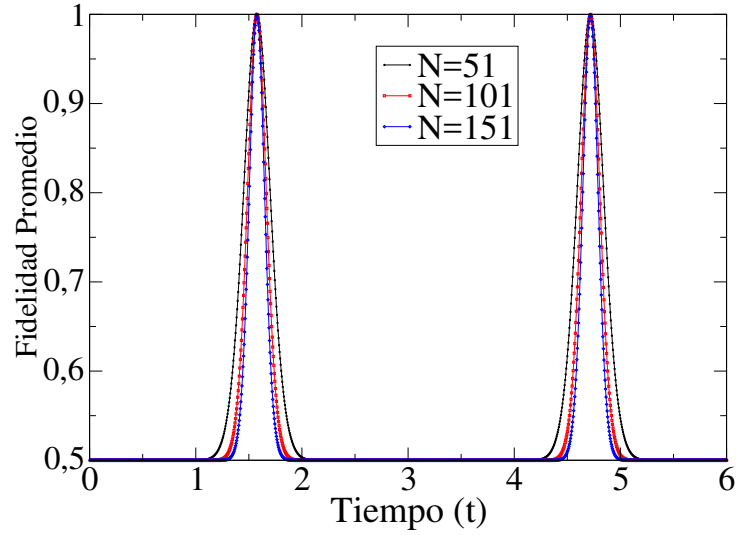


Figura 9: Fidelidad promedio para cadena PST, En función de distintos largos N , para $h = 0$.

racional, por lo tanto la cadena BC no posee un espectro conmensurado. Debido a esto la fidelidad de transmisión en la cadena BC no alcanzara el máximo valor posible como lo hace la cadena PST.

En la figura 11 se muestra la fidelidad promedio en función del tiempo. Las fidelidades máximas son 0,97 y 0,95 para $N = 51$ y $N = 151$ respectivamente, lo cual son muy superiores al valor clásico de transmisión $\frac{2}{3}$ y al valor de fidelidad para el caso homogéneo dado por $J_i = 1$ para todo i , figura 12, de esta forma se justifica el uso del α_{opt} . Se observa a su vez en la figura 11 que los tiempos de transmisión donde se logra la máxima fidelidad son 29,15 y 80,95 para $N = 51$ y $N = 151$ respectivamente, se observa que estos tiempos son del orden de $\frac{N}{2}$.

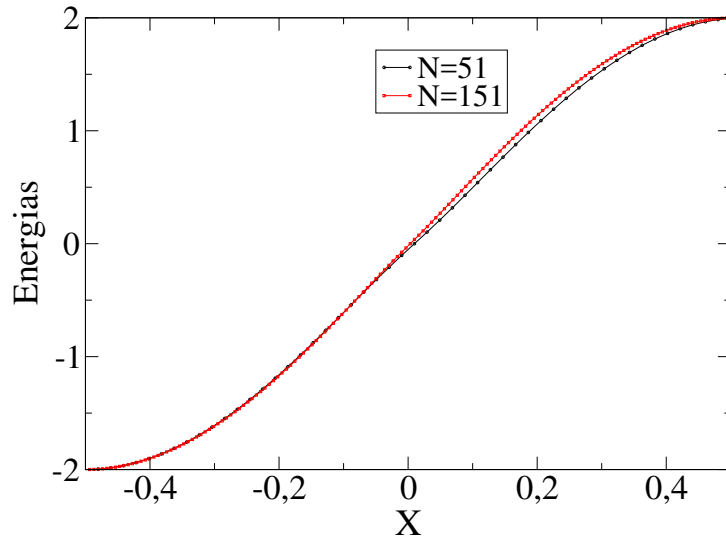


Figura 10: Espectro de la cadena BC. $X = \frac{i}{N} - \frac{1}{2}$ con i el índice correspondiente de la energía. Con campos externos $h_i = 0$ para todo i , en donde se elige convenientemente N impar para que el espectro posea el cero.

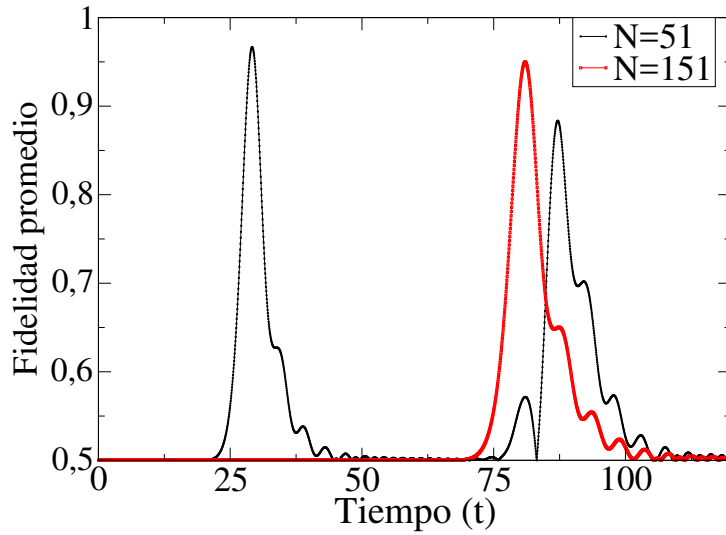


Figura 11: Fidelidad promedio para cadena BC con $\alpha_{opt} = 1,06N^{-\frac{1}{6}}$ para distintos N y $h = 0$.

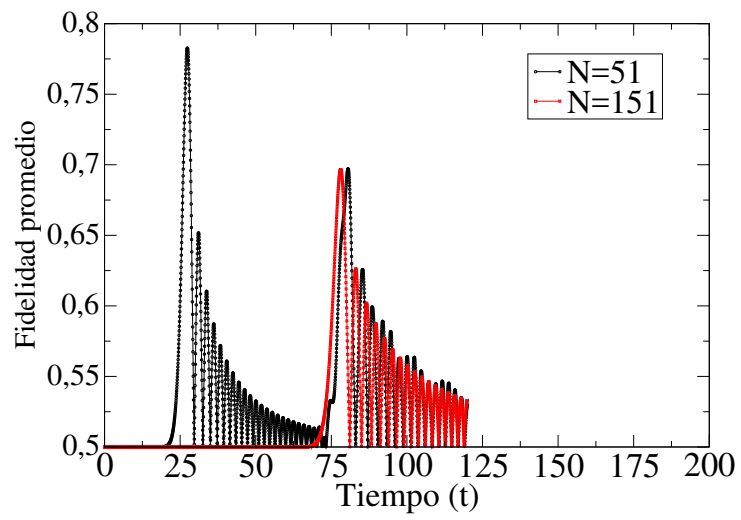


Figura 12: Fidelidad promedio para cadena homogénea con $J_i = 1$ para todo i . Para distintos valores de N y campo $h = 0$.

3. Evolución Dinámica En Sistemas Abiertos: Tercera Cuantización

El objetivo principal de este trabajo, como previamente se ha expresado, es estudiar la evolución del estado de una cadena de spines cuando ella interactúa con un ambiente externo. El efecto del ambiente sobre el sistema es producir decoherencias o pérdida de información, es decir si inicialmente se codificó la cadena con un cierto estado inicial, la información que se tiene del mismo en el tiempo comienza a decaer en t . La ecuación maestra que determina a $\hat{\rho}(t)$ será la ecuación de Lindblad.

En esta sección se presentará la teoría necesaria que ha sido desarrollada en los trabajos de T. Prosen [17], [18], [19]. En principio se deducirá de manera rápida la ecuación de Lindblad, junto con las suposiciones necesarias para su validez. A continuación se dará la teoría necesaria para este trabajo llamada Tercera Cuantización, cuyo objetivo principal es hallar la descomposición espectral del Liouvilleano. Por último se presentará como obtener el valor de expectación de un observable físico arbitrario \hat{O} . El apéndice A tendrá cálculos correspondiente a contracciones básicas, las cuales darán cuenta de los datos necesarios para calcular valores de expectación y fidelidades que se darán mas adelante en las secciones siguientes.

3.1. Ecuación de Lindblad

Consideremos una cadena de N spines 1/2, llamado sistema S, en contacto con otro sistema externo o baño térmico, llamado sistema B. Si $\hat{\rho}$ es la matriz densidad del sistema completo, entonces las matrices densidad reducida $\hat{\rho}_S$ y $\hat{\rho}_B$ de los sistemas S y B respectivamente, están dadas por $\hat{\rho}_S = \text{Tr}_B(\hat{\rho})$ y $\hat{\rho}_B = \text{Tr}_S(\hat{\rho})$. El espacio de Hilbert estará dado por $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_b$ y el Hamiltoniano total será

$$\hat{H}_T = \hat{H}_s \otimes \mathbb{1}_b + \mathbb{1}_s \otimes \hat{H}_b + \lambda \sum_{\mu} X_{\mu} Y_{\mu}, \quad (42)$$

donde $\mathbb{1}_s, \mathbb{1}_b$ son las matrices identidad en S y B respectivamente [18]. X_{μ} son operadores lineales sobre H_s y Y_{μ} son operadores lineales sobre H_b . Estos operadores pueden ser asumidos como Hermíticos. Se deriva a partir de este Hamiltoniano la Ecuación Maestra Markoviana para la evolución temporal de la matriz densidad del sistema S asumiendo 3 importantes condiciones [20] :

1. Acoplamiento débil, λ es pequeño.
2. factorización de la matriz densidad inicial $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_s(0) \otimes \hat{\rho}_b(0)$.
3. aproximación de Born-Markov: las funciones de correlación del baño

$$\Gamma_{\mu,\nu}^{\beta}(t) := \frac{\lambda^2 (\text{Tr})(Y_{\nu}(t) Y_{\mu} e^{-\beta H_b})}{(\text{Tr}) e^{-\beta H_b}}, Y_{\mu}(t) := e^{itH_b} Y_{\mu} e^{-itH_b}, \quad (43)$$

decaen en escalas de tiempos mas cortas que la dinámica del sistema de spines o sistema S, $X_{\mu}(t) := e^{itH_s} X_{\mu} e^{-itH_s}$. Una condición importante de las funciones de correlación es la de Kubo-Martin-Schwinger(KMS)

$$\Gamma_{\mu,\nu}^{\beta}(-t - i\beta) = \Gamma_{\nu,\mu}^{\beta}(t) \quad (44)$$

con $\beta = \frac{1}{k_b T}$.

la ecuación maestra resultante de todo esto es la Ecuación de Redfield

$$\frac{d\hat{\rho}_s}{dt}(t) = -i[\hat{H}_s, \hat{\rho}_s] + \hat{D}\hat{\rho}_s(t), \quad (45)$$

con \hat{D} , el mapa disipador, con forma general

$$\hat{D}\hat{\rho} = \sum_{\mu,\nu} \int_0^\infty d\tau \Gamma_{\mu,\nu}^\beta(\tau) [X_\mu(-\tau)\hat{\rho}_s, X_\nu] + h.c. \quad (46)$$

Debe considerarse que éste operador no preserva la positividad de la matriz densidad. Haciendo la aproximación de onda rotante, se llega al grupo dinámico que preserva la positividad y traza de la matriz densidad a todo tiempo y puede ser descripto por el disipador en la forma de Lindblad

$$\hat{D}\hat{\rho} = \sum_{\mu,\nu} \gamma_{\nu,\mu} [X_\mu\hat{\rho}_s, X_\nu] + h.c., \quad (47)$$

la única condición es que $\gamma_{\mu,\nu}$ sea una matriz hermitiana ($\gamma_{\nu,\mu} = \gamma_{\mu,\nu}^*$) o mejor aún que $\gamma_{\mu,\nu}$ sea definida positiva. A partir de ahora $\hat{\rho}_s = \hat{\rho}$ y $\hat{H}_s = \hat{H}$. Luego como $\gamma_{\mu,\nu}$ es definida positiva, se puede diagonalizar obteniendo la Ecuación de Lindblad en la cual, realizando una transformación extra, se obtienen los operadores de Lindblad usuales, \hat{L}_μ

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{L}_{iou}\hat{\rho} := -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_{\mu} (2\hat{L}_\mu\hat{\rho}\hat{L}_\mu^\dagger - \{\hat{L}_\mu^\dagger\hat{L}_\mu, \hat{\rho}\}), \quad (48)$$

La ecuación (48) es la ecuación de Lindblad que se utilizará en este trabajo. Sus propiedades mas importantes son

1. Es la ecuación Markoviana mas general posible en el sentido de que con ella obtenemos la matriz densidad $\hat{\rho}$ para todo t , el cual será solución única si se da inicialmente $\hat{\rho}(0)$. Esto significa ser Markoviana.
2. Preserva la traza de la matriz densidad en todo tiempo, de esta manera la definición de probabilidad asociada a la matriz densidad tiene sentido.
3. La ecuación de Lindblad es un mapa completamente positivo. Esto significa toma una matriz densidad al tiempo 0 y la hace evolucionar al tiempo t , el resultado será un operador $\hat{\rho}(t)$ completamente positivo.

De esta forma la Ecuación de Lindblad preserva las propiedades del operador densidad.

Si se tiene que el operador Liouvilleano o \hat{L}_{iou} no depende explícitamente del tiempo y dado $\hat{\rho}(0)$, la solución a la ecuación de Lindblad es

$$\hat{\rho}(t) = e^{t\hat{L}_{iou}}\hat{\rho}(0). \quad (49)$$

En general \hat{L}_{iou} no tiene porque ser hermitiano pero será definido positivo por lo tanto posee descomposición espectral. Dada esta descomposición espectral del Liouvilleano se la puede utilizar para escribir en forma mas explicita la ecuación (49).

3.2. Espacio de Fock de operadores

En muchos casos tanto el Hamiltoniano como los operadores \hat{L}_μ pueden ser escritos en términos de $2N$ operadores Hermitianos Majorana ω_j , $\omega_j^2 = \mathbb{1}$, $j = 1, 2, \dots, 2N$, que satisfacen

$$\{\omega_j, \omega_k\} = 2\delta_{j,k} \quad j, k = 1, 2, \dots, 2N, \quad (50)$$

quedando así

$$\hat{H} = \sum_{j,k=1}^{2N} H_{jk} \omega_j \omega_k = \vec{\omega} \cdot \mathbb{H} \cdot \vec{\omega} \quad (51)$$

$$\hat{L}_\mu = \sum_{j=1}^{2N} L_{\mu,j} \omega_j, \quad (52)$$

como \hat{H} es hermitiano, luego la matriz H_{jk} , que es $2N \times 2N$, es antisimétrica e imaginaria pura.

En términos de los operadores de Pauli del sitio m , $\vec{\sigma}_m$, $m = 1, 2, \dots, N$, y usando la transformación de Jordan-Wigner, se tiene

$$\omega_{2m-1} = \sigma_m^x \prod_{m' < m} \sigma_{m'}^z, \quad \omega_{2m} = \sigma_m^y \prod_{m' < m} \sigma_{m'}^z. \quad (53)$$

Usando la inversa de la transformación de Jordan-Wigner, se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_m^X &= (-i)^{m-1} \prod_{j=1}^{2m-1} \omega_j, \\ \hat{\sigma}_m^Y &= (-i)^{m-1} \left(\prod_{j=1}^{2m-2} \omega_j \right) \omega_{2m}, \\ \hat{\sigma}_m^Z &= (-i) \omega_{2m-1} \omega_{2m}. \end{aligned} \quad (54)$$

El operador \hat{H} se vuelve un operador cuadrático de N fermiones, ecuación (51). El operador \hat{L}_ν será lineal, ecuación (52). Estas condiciones en el Hamiltoniano se cumplen para el caso de cadenas de spines (24), en el caso de $\Delta = 0$, debido a que éste término contiene operaciones de dos operadores de spin en la dirección en Z , y por (54), no satisface una descomposición en el Hamiltoniano cuadrática. En el caso estudiado en este trabajo el Hamiltoniano XX cumple la descomposición (51).

Se define el llamado Espacio de Fock de Operadores:

sea κ el espacio de operadores 4^N dimensional, en el cual la matriz densidad $\hat{\rho}(t) \in \kappa$ [17]. Usaremos la notación de Bra-ket para los elementos del espacio de operadores densidad $\hat{\rho}(t) \rightarrow |\rho(t)\rangle$.

Se tiene que 2^{2N} operadores-productos $|P_{\vec{\alpha}}\rangle$, etiquetados por un índice $\vec{\alpha}$

$$|P_{\vec{\alpha}}\rangle := 2^{-\frac{N}{2}} \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\alpha_2} \dots \omega_{2N}^{\alpha_{2N}}, \quad \alpha_j \in \{0, 1\}, \quad (55)$$

constituyen una base ortonormal completa en κ con respecto al producto interno

$$\langle x|y\rangle = \text{Tr}(x^\dagger y) \quad x, y \in \kappa, \quad (56)$$

los operadores $|P_{\vec{\alpha}}\rangle$ constituyen una base de Fock fermiónica, además se define el siguiente conjunto lineal de operadores aniquilación y creación $\hat{c}_j, \hat{c}_j^\dagger$ sobre κ

$$\begin{aligned}\hat{c}_j|P_{\bar{\alpha}}\rangle &= \alpha_j|\omega_j P_{\bar{\alpha}}\rangle, \\ \hat{c}_j^\dagger|P_{\bar{\alpha}}\rangle &= (1 - \alpha_j)|\omega_j P_{\bar{\alpha}}\rangle,\end{aligned}\tag{57}$$

los cuales satisfacen las reglas de anticonmutación canónicas:

$$\{\hat{c}_j, \hat{c}_k\} = 0, \quad \{\hat{c}_j, \hat{c}_k^\dagger\} = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, 2, \dots, 2N.\tag{58}$$

Definiendo la multiplicación a izquierda (L) y derecha (R) de mapas sobre κ como

$$\hat{\omega}_j^L|x\rangle := |\omega_j x\rangle, \quad \hat{\omega}_j^R|x\rangle := |x\omega_j\rangle,\tag{59}$$

y usando la definición de $|P_{\bar{\alpha}}\rangle$ junto con (57) se llega a que

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_j^L &= \hat{c}_j + \hat{c}_j^\dagger, \\ \hat{\omega}_j^R &= \hat{P}(\hat{c}_j - \hat{c}_j^\dagger) = -(\hat{c}_j - \hat{c}_j^\dagger)\hat{P},\end{aligned}\tag{60}$$

donde la primera ecuación sale de aplicar la definición de $\hat{\omega}_j^L$ a $|P_{\bar{\alpha}}\rangle$ y por linealidad se extiende a cualquier elemento de κ . La segunda ecuación se obtiene de usar lo siguiente:

$$\begin{aligned}P_{\bar{\alpha}}\omega_j &= (-1)^{|\bar{\alpha}|+\alpha_j} \omega_j P_{\bar{\alpha}}, \\ (-1)^\alpha|\omega_j P_{\bar{\alpha}}\rangle &= (\hat{c}_j^\dagger - \hat{c}_j)|P_{\bar{\alpha}}\rangle, \\ (-1)^{|\bar{\alpha}|}|P_{\bar{\alpha}}\rangle &= \text{Exp}(i\pi\hat{N})|P_{\bar{\alpha}}\rangle,\end{aligned}\tag{61}$$

con los operadores \hat{P} y \hat{N} definidos por

$$\hat{P} := \exp(i\pi\hat{N}), \quad \hat{N} := \sum_{j=1}^{2N} \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j,\tag{62}$$

y

$$|\bar{\alpha}| := \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k = \text{número de } \omega\text{s en } |P_{\bar{\alpha}}\rangle,\tag{63}$$

donde \hat{P} es el operador paridad y \hat{N} es el operador número. éste operador paridad actuando en algún elemento de κ da 1 si el número de excitaciones fermiónicas auto-adjuntas (cantidad de factores en la definición de $|P_{\bar{\alpha}}\rangle$, denotados por a-fermiones) es par o -1 si es impar. A su vez se puede demostrar usando (60) y (61) que \hat{P} anticonmuta con los operadores a-fermiónicos \hat{c} y \hat{c}^\dagger y que $\hat{P}^2 = \hat{\mathbb{1}}$.

3.3. Forma Bilineal del Liouvilleano

El Liouvilleano es visto en la representación de Tercera Cuantización como un super-operator, \hat{L}_{iou} , que actúa en el espacio de Fock κ , esto es, el Liouvilleano es visto como un mapa lineal completamente positivo de κ en κ , toma una matriz densidad y da como resultado otra matriz densidad. Se define la representación autoadjunta de la derivada de Lie para un elemento $A \in \kappa$ como: $\text{ad } A|B\rangle := |[A, B]\rangle$, tomando el primer término de la ecuación (48), que es la parte unitaria del Liouvilleano, llamándolo \hat{L}_0 , y usando la ecuación (60) se obtiene

$$\hat{L}_0 = -i \text{ad } H = -4i \sum_{j,k=1}^{2N} \hat{c}_j^\dagger H_{j,k} \hat{c}_k, \quad (64)$$

se observa que el operador número, ecuación (62), conmuta con \hat{L}_0 , esto es $[\hat{N}, \hat{L}_0] = 0$, de esta forma \hat{L}_0 conserva el número de a-fermiones. Luego también se tiene que $[\hat{P}, \hat{L}_0] = 0$, lo cual \hat{L}_0 conserva también la paridad.

Tomando ahora el segundo término de (48), se define

$$\hat{L}_{\text{ind}_\mu \rho} := 2\hat{L}_\mu \rho \hat{L}_\mu^\dagger - \{\hat{L}_\mu^\dagger \hat{L}_\mu, \rho\} = \sum_{j,k=1}^{2N} l_{\mu,j} l_{\mu,k}^* \hat{L}_{j,k} \rho, \quad (65)$$

en donde

$$\hat{L}_{j,k} \rho := 2\omega_j \rho \omega_k - \omega_k \omega_j \rho - \rho \omega_k \omega_j, \quad (66)$$

donde estas dos últimas ecuaciones se utiliza (52). Usando ahora la (60) y que el operador paridad anticonmuta con los operadores a-fermiónicos, se llega a la expresión general

$$\begin{aligned} \hat{L}_{j,k} &= (1 + \exp(i\pi \hat{N})) (2\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_k^\dagger - \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_k - \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_j) \\ &+ (1 - \exp(i\pi \hat{N})) (2\hat{c}_j \hat{c}_k - \hat{c}_j \hat{c}_k^\dagger - \hat{c}_k \hat{c}_j^\dagger), \end{aligned} \quad (67)$$

donde observa que los operadores $\hat{P}_\pm := (\hat{1} \pm \hat{P})/2$ son proyectores ortogonales, y el espacio κ puede ser descompuesto de la forma $\kappa = \kappa_+ \oplus \kappa_-$ con κ_+ el espacio de elementos $|P_{\bar{\alpha}}\rangle$ con un número par de operadores a-fermiónicos y κ_- los elementos con un número impar en operadores a-fermiónicos (la paridad de operadores a-fermiónicos resulta lo mismo que pensar en la paridad del número de operadores Majorana ω en el producto que define a la base $|P_{\bar{\alpha}}\rangle$). Otra forma de definir esto es $\hat{\kappa}_\pm = \hat{P}_\pm \kappa$. Reescribiendo (67) de la forma

$$\hat{L}_{j,k} = 2\hat{P}_+ (2\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_k^\dagger - \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_k - \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_j) + 2\hat{P}_- (2\hat{c}_j \hat{c}_k - \hat{c}_j \hat{c}_k^\dagger - \hat{c}_k \hat{c}_j^\dagger), \quad (68)$$

se puede ver que los operadores \hat{N} y $\hat{L}_{j,k}$ no conmutan por lo tanto (49) no conserva el número de operadores a-fermiónicos. Usando que \hat{P} anticonmuta con los operadores a-fermiónicos se puede demostrar que $[\hat{L}_{j,k}, \hat{P}] = 0$, de esta forma también se concluye que $[\hat{L}_{j,k}, \hat{P}_\pm] = 0$, por lo tanto se puede obtener que $[\hat{L}_{i\text{ou}}, \hat{P}_\pm] = 0$. Se tiene entonces que los proyectores \hat{P}_\pm , incluido \hat{P} , son constantes de movimiento, esto es, la evolución dinámica (49) conserva la paridad de a-fermiones pero no conserva el número de a-fermiones.

Con esto último se demuestra que el operador liovilleano se puede escribir como una expresión bilineal en los operadores a-fermionicos y que se puede expresar como una suma de tres términos con propiedades distintas, es decir

$$\hat{L}_{i\text{ou}} = \hat{L}_0 + \hat{L}_+ + \hat{L}_-, \quad (69)$$

donde los operadores \hat{L}_+ y \hat{L}_- , reducidos a los espacios κ_+ y κ_- respectivamente, están dados por

$$\begin{aligned}\hat{L}_+ &= \sum_{j,k=1}^{2N} M_{j,k} 2(2\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_k^\dagger - \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_k - \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_j) \\ \hat{L}_- &= \sum_{j,k=1}^{2N} M_{j,k} 2(2\hat{c}_j \hat{c}_k - \hat{c}_j \hat{c}_k^\dagger - \hat{c}_k \hat{c}_j^\dagger),\end{aligned}\quad (70)$$

en donde se tiene que

$$M_{j,k} := \sum_{\mu=1}^{2N} l_{\mu,j} l_{\mu,k}^*. \quad (71)$$

los coeficientes $M_{j,k}$, que contiene a las cantidades que parametrizan a los operadores de Lindblad, son las entradas de una matriz compleja y hermitiana que denotaremos como \mathbb{M} .

3.4. Matriz Estructura

Definiendo $2N$ mapas hermíticos Majorana $\hat{a}_{i,r} = \hat{a}_{i,r}^\dagger$ con $r = 1, 2, \dots, 2N$ y $i = 1, 2$:

$$\hat{a}_{1,j} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{c}_j + \hat{c}_j^\dagger) \quad \hat{a}_{2,j} := \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{c}_j - \hat{c}_j^\dagger), \quad (72)$$

se tiene que

$$\{\hat{a}_{\nu,j}, \hat{a}_{\mu,i}\} = \delta_{i,j} \delta_{\nu,\mu} \text{ y } \nu, \mu = 1, 2. \quad (73)$$

Usando estos operadores el Liouvilliano, ecuación (69), puede escribirse como [19]

$$\hat{L}_{iou} = \hat{\vec{a}} \cdot \mathbb{A} \cdot \hat{\vec{a}} - A_0 \mathbb{1}, \quad (74)$$

donde \mathbb{A} es una matriz $4N \times 4N$ compleja antisimétrica, llamada Matriz Estructura. La matriz de estructura esta dada por

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2i\mathbb{H} + 2i\mathbb{M}_\text{I} & 2i\mathbb{M} \\ -2i\mathbb{M} & -2i\mathbb{H} - 2i\mathbb{M}_\text{I} \end{pmatrix}, \quad (75)$$

donde A_0 es un escalar

$$A_0 = 2 \sum_{j=1}^{2N} M_{jj} = 2\text{Tr}(\mathbb{M}) = 2\text{Tr}(\mathbb{M}_\text{r}), \quad (76)$$

y las matrices

$$\mathbb{M}_\text{r} := \frac{1}{2}(\mathbb{M} + \mathbb{M}^*), \quad \mathbb{M}_\text{I} := \frac{1}{2i}(\mathbb{M} - \mathbb{M}^*) \quad (77)$$

están definidas como la parte real e imaginaria respectivamente de la matriz de baño \mathbb{M} definida en (71).

Definimos también la matriz

$$\mathbb{J} := \sigma_x \otimes \mathbb{1}_{2N} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2N} \\ \mathbb{1}_{2N} & 0 \end{pmatrix}, \quad (78)$$

del cual se puede ver que la matriz estructura satisface

$$\mathbb{A}^* = \mathbb{J}\mathbb{A}\mathbb{J}. \quad (79)$$

Resumiendo, se define

$$\mathbb{X} := -2i\mathbb{H} + 2\mathbb{M}_r, \quad (80)$$

en donde \mathbb{X} es una matriz real $2N \times 2N$. Su espectro viene dado por el conjunto de números complejos $\{\beta_j\}$ con $j = 1, 2, \dots, 2N$, los cuales suelen ser denominados “Rapidities” en la literatura [19] pero que las llamaremos como las tasas de decaimiento, los cuales satisfacen $\text{Re}(\beta_i) \geq 0$.

Se puede descomponer la matriz \mathbb{X} en la forma

$$\mathbb{X} = \mathbb{P}\mathbb{\Delta}\mathbb{P}^{-1}, \quad (81)$$

donde \mathbb{P} es una matriz no singular $2N \times 2N$ cuyas columnas son los autovectores generalizados de \mathbb{X} . $\mathbb{\Delta}$ es

$$\mathbb{\Delta} = \text{Diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2N}\} \quad (82)$$

si sus autovectores están ortonormalizados. Luego es fácil ver que

$$\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}^\dagger. \quad (83)$$

se usa la descomposición (81) porque es equivalente a la forma canónica de Jordan \mathbb{X} es diagonalizable, el cual es el caso para todos los modelos de cadenas de spin que se usarán en este trabajo.

Otra cantidad importante que se calculará será la matriz \mathbb{Z} la cual es solución de la ecuación de Lyapunov

$$\mathbb{X}^T \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \mathbb{X} = \mathbb{M}_i. \quad (84)$$

\mathbb{Z} es una matriz real $2N \times 2N$ y antisimétrica, $\mathbb{Z}^T = -\mathbb{Z}$. Una conclusión importante en [19] es que si se tiene que al menos una “Rapiditie” β_i , es imaginaria pura o nula, luego la solución de la ecuación (84) no es única, se explicará mas adelante que complicaciones genera esto. Se observa a su vez que para que \mathbb{Z} no sea nula, en principio se debe tener una $\mathbb{M}_i \neq 0$.

Los valores de expectación de los operadores de Pauli en los estados de κ pueden escribirse en términos de los autovalores y autovectores de la matriz \mathbb{X} y en términos de las componentes de la matriz \mathbb{Z} . En el apéndice A se calcularán estos valores de expectación que llamaremos a su vez como contracciones.

Una vez calculadas las matrices \mathbb{X} y \mathbb{Z} , se puede escribir a la Matriz Estructura \mathbb{A} como

$$\mathbb{A} = \mathbb{V}^T \mathbb{\Omega} \mathbb{V}, \quad (85)$$

donde las filas de la matriz \mathbb{V} son los autovectores generalizados de \mathbb{A} , con

$$\mathbb{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{S} & -i\mathbb{S}' \\ \mathbb{P}^{-1} & i\mathbb{P}^{-1} \end{pmatrix} \quad (86)$$

donde

$$\mathbb{S} = \mathbb{P}^T \cdot [\mathbb{1}_{2n} - 4i\mathbb{Z}], \quad (87)$$

$$\mathbb{S}' = \mathbb{P}^T \cdot [\mathbb{1}_{2n} + 4i\mathbb{Z}], \quad (88)$$

y la matriz Ω dada por

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{A} \\ -\mathbb{A}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (89)$$

y

$$\mathbb{V}\mathbb{V}^T = \mathbb{J}. \quad (90)$$

La razón por la cual se enuncian las ecuaciones (85) y (90) es debido a que se usarán para corroborar que las matrices \mathbb{X} y \mathbb{Z} fueron correctamente calculadas de forma numérica. Como se mencionó anteriormente, en este trabajo se estudiarán cadenas de spines con hamiltoniano $\mathbb{X}\mathbb{X}$, con lo cual se estará en el caso de que \mathbb{X} es diagonalizable, esto simplifica la notación de Prosen en [19].

3.5. Modos maestros normales: NMM

Se denotan las $2N$ primeras filas de \mathbb{V} en (86) como los vectores \vec{v}_j , donde la j denota la fila de \mathbb{V} , y las restantes $2N$ filas como los vectores \vec{v}_j^\dagger . Estos vectores son los autovectores de \mathbb{A} con autovalores β_j y $-\beta_j$ respectivamente.

Se definen los llamados mapas NMM o los Mapas de Modos Maestros Normales (del ingles Normal Master Modes, NNM)

$$\hat{b}_j = \vec{v}_j \cdot \hat{\vec{a}}, \quad \hat{b}_j^\dagger = \vec{v}_j^\dagger \cdot \hat{\vec{a}}, \quad (91)$$

que satisfacen las reglas de anticonmutación:

$$\{\hat{b}_j, \hat{b}_k\} = \{\hat{b}_j^\dagger, \hat{b}_k^\dagger\} = 0, \quad \{\hat{b}_j, \hat{b}_k^\dagger\} = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, 2, \dots, 2N. \quad (92)$$

Los mapas \hat{b}_j y \hat{b}_j^\dagger pueden ser interpretados como el mapa aniquilación y el mapa creación del j -ésimo Modo Maestro Normal, respectivamente. Se tiene en general que $\hat{b}_j^\dagger \neq \hat{b}_j^\dagger$.

Utilizando estas reglas de anticonmutación se puede demostrar que el Liouvilleano (74) puede escribirse como

$$\hat{L}_{iou} = -2 \sum_{j=1}^{2N} \beta_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j, \quad (93)$$

esta forma del Liouvilleano se llama Forma Normal.

3.6. Descomposición Espectral de \hat{L}_{iou}

Se definen ahora los Mapas Número de los NMM como

$$\hat{\eta}_j := \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j, \quad (94)$$

el cual satisfacen $\hat{\eta}_j^2 = \hat{\eta}_j$ y por lo tanto son diagonalizables. Los $\hat{\eta}_j$ conmutan entre sí, $[\hat{\eta}_j, \hat{\eta}_k] = 0$, por ende son diagonalizables simultáneamente por la misma base y debe existir un estado “vacío” en donde todos los operadores $\hat{\eta}_j$ dan 0. Veamos como se construye este estado “vacío”, definamos por $\langle 1| := \langle P_{(0,0,\dots,0)}|$ con lo que $\langle 1|\hat{L}_{iou} = 0$, por lo tanto el cero es siempre un autovalor de \hat{L}_{iou} . Al autovector a izquierda $\langle 1|$, le corresponde su autovector a derecha denotado como $|Ness\rangle$ llamado Estado Estacionario de No-Equilibrio, con las siglas Ness del inglés Non-Equilibrium Steady State, normalizado como $\langle 1|Ness\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}_{Ness}) = 1$, el vector $|Ness\rangle$ denota

a un elemento del espacio κ , que es la matriz densidad $\hat{\rho}_{ness}$ y que tiene la propiedad de $\hat{L}_{iou} \hat{\rho}_{ness} = 0$. El $|Ness\rangle$ representa la solución estacionaria de (48)

$$\hat{L}_{iou}|Ness\rangle = 0. \quad (95)$$

Debido a la estabilidad de evoluciones completamente positivas (48), se tiene que todo autovalor, λ , de \hat{L}_{iou} debe obedecer $\text{Re}(\lambda) \leq 0$, luego se tiene que

$$\langle 1|\hat{b}_j = 0, \quad \hat{b}_j|Ness\rangle = 0, \quad (96)$$

por lo tanto el espectro completo de \hat{L}_{iou} es etiquetado por una secuencia de $2N$ números enteros binarios, $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{2N})$, $\nu_j \in \{0, 1\}$

$$\langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \hat{L}_{iou} = \lambda_{\vec{\nu}} \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L |, \quad \hat{L}_{iou} | \Theta_{\vec{\nu}}^R \rangle = \lambda_{\vec{\nu}} | \Theta_{\vec{\nu}}^R \rangle, \quad (97)$$

con

$$\begin{aligned} \lambda_{\vec{\nu}} &= -2 \sum_{j=1}^{2N} \beta_j \nu_j = -2 \vec{\beta} \cdot \vec{\nu} \\ \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | &= \langle 1 | \hat{b}_{2N}^{\nu_{2N}} \dots \hat{b}_2^{\nu_2} \hat{b}_1^{\nu_1} \\ | \Theta_{\vec{\nu}}^R \rangle &= \hat{b}_1^{\nu_1} \hat{b}_2^{\nu_2} \dots \hat{b}_{2N}^{\nu_{2N}} |Ness\rangle, \end{aligned} \quad (98)$$

y por construcción los autovectores satisfacen la relación

$$\langle \Theta_{\vec{\nu}'}^L | \Theta_{\vec{\nu}}^R \rangle = \delta_{\vec{\nu}', \vec{\nu}}. \quad (99)$$

Se tiene entonces que el propagador Liouvilleano $\exp(t\hat{L}_{iou})$ se puede describir de la forma

$$\exp(t\hat{L}_{iou}) = \sum_{\vec{\nu} \in [0,1]^{2N}} \exp(t\lambda_{\vec{\nu}}) | \Theta_{\vec{\nu}}^R \rangle \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L |. \quad (100)$$

Con este propagador se puede determinar la evolución de $\hat{\rho}$ mediante (49), observemos la analogía en cuanto al procedimiento para sistemas cerrados, en el cual se descompone al hamiltoniano espectralmente (7) y luego se evoluciona mediante (5).

3.7. Valor de Expectación de Operadores

Por último queda mostrar como calcular el valor de expectación de un observable físico arbitrario \hat{O} en Tercera Cuantización. El procedimiento es análogo al caso de sistema aislado o cerrado.

Sea $O \in \kappa$ un observable físico, luego su valor de expectación en el estado $\hat{\rho}(t)$ es [17]

$$\langle O(t) \rangle = \text{Tr}(O \rho(t)) = \text{Tr}[O \exp(t\hat{L}_{iou}) \rho(0)], \quad (101)$$

en donde $\rho(0) \in \kappa$. La ecuación de arriba puede desarrollarse más, obteniéndose

$$\langle O(t) \rangle = \sum_{\vec{\nu} \in [0,1]^{2N}} \exp(-2t\vec{\nu} \cdot \vec{\beta}) \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \rho(0) O | \Theta_{\vec{\nu}}^R \rangle, \quad (102)$$

observar la sutileza en el uso del sombrero en \hat{O} y llamarlo simplemente como O en la traza o valor de expectación, lo mismo con la matriz densidad $\hat{\rho}(t)$. Este abandono del uso del sombrero en (101) y (102) se debe a que tanto \hat{O} y $\hat{\rho}(t)$ pertenecen al espacio κ o dicho de forma simple, son productos de operadores Majorana ω y no son Super-Operadores como lo es el Liouvilleano \hat{L}_{iou} , las modificaciones de ésta notación no alteran de manera drástica las definiciones anteriores de valor de expectación en el caso de sistema cerrado, solo hacen notar que se esta trabajando en otro espacio. La ecuación (102) será la base de la determinación de las cantidades que se desarrollarán en las siguientes secciones. La única dependencia temporal está dada por el término $\exp(-2t\vec{v}\cdot\vec{\beta})$ en el cual, como las tasas de decaimiento son complejas, darán términos que decaen en el tiempo junto con términos oscilatorios en el tiempo. Mas adelante se demostrará que estos valores de expectación tienden a un valor estacionario en el tiempo para tiempos suficientemente grandes o infinitos cuando se tiene que el $|N_{ess}\rangle$ es único.

3.8. Costo Numérico para implementar cálculos en Tercera Cuantización

Se tiene, de acuerdo a las matrices dadas anteriormente que, para poder extraer información en cuanto a la dinámica (48), sólo se deben de hacer dos procedimientos importantes:

1. Diagonalizar a la matriz \mathbb{X} que es $2N \times 2N$.
2. Resolver la ecuación (84), para lo cual existen algoritmos que la resuelven en un número de pasos del orden de N^3 y así determinar la matriz \mathbb{Z} .

Por ende, la razón de utilizar este método de Tercera Cuantización para resolver de forma exacta la Ecuación de Lindblad, está principalmente justificado en que el álgebra involucrada en la resolución es mucho mas eficiente que simular completamente la Ecuación de Lindblad (48), es decir se pasa de un sistema dinámico con complejidad numérica exponencial en N a un sistema dinámico con complejidad polinómica en N , que a lo sumo va como N^3 .

4. Modelo y Metodología de Trabajo

El objetivo de esta sección es presentar el modelo, que será el Hamiltoniano XX con ambiente externo definido por baños térmicos en los bordes. A continuación se da la metodología de trabajo, en donde se explica en detalle el algoritmo de cálculo de las cantidades relevantes.

4.1. Modelo

4.1.1. Hamiltoniano XX

El hamiltoniano del sistema, la cadena de spin, será como previamente se mencionó el Hamiltoniano XX (28). Se realiza el proceso llamado Majorización: consiste en expresar el operador en cuestión, en este caso \hat{H}_{XX} , en términos de operadores de Majorana. De esta forma Majorizando a \hat{H}_{XX} se obtiene la matriz \mathbb{H} definida en (51). Se separa antes a la mencionada matriz en las partes correspondientes a las constantes de acoplamiento J_i dada por \mathbb{H}_J y la parte correspondiente a los campos externos dada por \mathbb{H}_h .

$$\begin{aligned}\hat{H}_{XX} &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{J_i}{2} \{\hat{\sigma}_i^x \hat{\sigma}_{i+1}^x + \hat{\sigma}_i^y \hat{\sigma}_{i+1}^y\} + \sum_{i=1}^N h_i \hat{\sigma}_i^z \\ &= \frac{-i}{2} \left[\sum_{m=1}^{N-1} J_m (\omega_{2m} \omega_{2m+1} - \omega_{2m-1} \omega_{2m+1}) + \sum_{m=1}^N 2h_m \omega_{2m-1} \omega_{2m} \right] \quad (103)\end{aligned}$$

usando entonces (51), se puede construir las matrices \mathbb{H}_J y \mathbb{H}_h

$$\mathbb{H}_h = \begin{pmatrix} 0 & 2h_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -2h_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2h_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2h_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2h_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2h_N & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (104)$$

$$\mathbb{H}_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -J_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_1 & -J_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -J_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & J_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_{N-1} & -J_{N-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (105)$$

la matriz \mathbb{H} estará dada luego por

$$\mathbb{H} = \frac{-i}{2}[\mathbb{H}_J + \mathbb{H}_h]. \quad (106)$$

Por lo tanto se tiene que toda la información sobre el Hamiltoniano del sistema estará dada por la matriz \mathbb{H} .

4.1.2. Modelo de Ambiente Externo: Baño Térmico en los Bordes

Claramente es necesario tomar algún modelo de ambiente externo y dar la expresión de los operadores de Lindblad \hat{L}_μ , dados en la ecuación de Lindblad (48). En este trabajo se tomará el ambiente externo denominado por: Baño Térmico en los Bordes, que consta de cuatro operadores de Lindblad de la forma

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma_1^L}\sigma_1^-, & L_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma_2^L}\sigma_1^+ \\ L_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma_1^R}\sigma_N^-, & L_4 &= \frac{1}{2}\sqrt{\Gamma_2^R}\sigma_N^+. \end{aligned} \quad (107)$$

con los operadores $\sigma_i^\pm = \sigma_i^x \pm i\sigma_i^y$ y $\Gamma_{1,2}^{L,R}$ son constantes positivas de acoplamiento medidas por las relaciones Temperatura/Magnetización del baño.

Se puede pensar cual es el rol desempeñado por los operadores de baño pensando en que sucedería si los spines fueran no interactuantes entre sí. En este caso se tiene que $T_{L,R}$ definida como la temperatura del extremo izquierdo y derecho respectivamente de la cadena de spines estará dada por la relación [17]

$$\frac{\Gamma_2^{L,R}}{\Gamma_1^{L,R}} = \exp\left(\frac{-2h_{1,N}}{T_{L,R}}\right) \quad (108)$$

En el caso de campos muy altos comparado con las constantes de acoplamiento J , se podría pensarla como una pseudo-temperatura. Observando los operadores de Lindblad \hat{L}_μ elegidos para éste tipo de baño externo, se puede apreciar que los efectos del ambiente externo es el de realizar operaciones de “Spin-Flip” en los extremos de la cadena, en el sitio 1 y N , esto es modificar con las amplitudes Γ 's correspondientes el estado de spin en los extremos de la cadena. T.Prosen en [17] Majoriza a estos cuatro operadores de Lindblad, obteniendo en resumen

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\sqrt{\Gamma_1^L}}{2}(\omega_1 - i\omega_2), \\ L_2 &= \frac{\sqrt{\Gamma_2^L}}{2}(\omega_1 + i\omega_2), \\ L_3 &= \frac{\sqrt{\Gamma_1^R}}{2}(\omega_{2N-1} - i\omega_{2N}), \\ L_4 &= \frac{\sqrt{\Gamma_2^R}}{2}(\omega_{2N-1} + i\omega_{2N}). \end{aligned} \quad (109)$$

Con esto se puede obtener los coeficientes $L_{\mu,j}$ de la ecuación (52), obteniendo así la matriz de baño \mathbb{M} . En particular se expresan las matrices \mathbb{M}_r y \mathbb{M}_i que son las partes reales e imaginarias respectivamente de la matriz baño

$$\mathbb{M}_r = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \Gamma_+^L & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_+^L & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Gamma_+^R & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Gamma_+^R \end{pmatrix}, \quad (110)$$

$$\mathbb{M}_i = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -\Gamma_-^L & \dots & 0 & 0 \\ \Gamma_-^L & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\Gamma_-^R \\ 0 & 0 & \dots & \Gamma_-^R & 0 \end{pmatrix}, \quad (111)$$

con $\Gamma_{\pm}^{L,R} = \Gamma_2^{L,R} \pm \Gamma_1^{L,R}$. Con estas dos matrices

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}_r + i\mathbb{M}_i. \quad (112)$$

4.1.3. Tipos de Baños Térmicos en los bordes

En este trabajo se implementarán principalmente tres tipos de baños en los bordes

1. Baño Tipo Gamma: $\Gamma_2^L = \Gamma_2^R = 0$ y $\Gamma_1^L = \Gamma_1^R = \textit{gamma}$. Por ende cuando se mencione la constante gamma se estará hablando de este tipo de baño. La constante gamma indica la “intensidad” del baño externo en la cual está acoplado a la cadena. Este tipo particular de baño, al solo tener operadores spin-down, mantiene bajo el número de excitaciones.
2. Baño Mínimo posible: es un caso particular del baño de tipo gamma con $\textit{gamma} = 0,0001$. Se explicará su nombre en la sección de Espectro de \mathbb{X} .
3. Baño de Tipo s: $\Gamma_2^L = \Gamma_2^R$ y $\Gamma_1^L = \Gamma_1^R = 0, 1$. s es una constante definida por $s = \Gamma_1^L - \Gamma_2^L$. Este baño se indicará con la constante s y su valor medirá que tan cercanas están las constantes de acoplamiento del baño Γ_1^L y Γ_2^L . Notar que para el caso de $s = 0$ se tendría una pseudo-temperatura infinita, dada por la relación (108), físicamente esta indicando que el sistema no tiene algún privilegio entre transiciones que “levantan” el spin o “bajan” el spin en los bordes.

Resulta importante remarcar que estos tres tipos de baños son “simétricos”, en el sentido de que los spines de los sitios 1 y N tienen las mismas constantes de acoplamiento Γ o, si se quiere, tienen las mismas pseudo-temperaturas porque también se toma $h_i = h$.

4.2. Metodología de Trabajo

Luego de obtener las matrices \mathbb{H} , \mathbb{M}_r y \mathbb{M}_i se construye a \mathbb{X} en (80). Se les asigna los valores de J_i y $h_i = h$ a estas matrices según que cadena se este usando BC o PST, previamente descriptas, se asigna a su vez los valores de las constantes Γ según que tipo de baño se utiliza. La matriz \mathbb{X} se diagonaliza para obtener a \mathbb{P} y Δ mediante la subrutina de LaPack llamada “DGEEV” [22], la subrutina “DGEEV” es probada antes con el cálculo de la fidelidad para las cadenas PST Y BC en el caso cerrado, obteniéndose así el espectro y fidelidades correspondientes de forma esperada. Se procede a obtener a \mathbb{P}^{-1} mediante las subrutinas “ZGETRF” y “ZGETRI” de

LaPack [22] debido a que “DGEEV” no ortonormaliza de forma correcta a los autovectores de \mathbb{X} . Las subrutinas “ZGETRF” y “ZGETRI” se verifican mediante la ecuación $\mathbb{P}\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{1}$. Una vez obtenido $\mathbb{P}, \mathbb{P}^{-1}, \Delta$ se procede a resolver la ecuación de Lyapunov (84) y obtener \mathbb{Z} , el algoritmo que se utiliza es el descrito por [23], básicamente consta de:

1. Fabricar la matriz $\mathbb{M}_i^i = \mathbb{P}^T \cdot \mathbb{M}_i \cdot \mathbb{P}$.
2. Luego se fabrica la matriz \mathbb{Z}^i cuyas entradas son
$$\mathbb{Z}_{k,j}^i = \frac{1}{\beta_k + \beta_j} \mathbb{M}_{i,k,j}.$$
3. Por último la solución a la ecuación de Lyapunov es
$$\mathbb{Z} = \mathbb{P}^{-1T} \cdot \mathbb{Z}^i \cdot \mathbb{P}^{-1}$$

donde \mathbb{P}^{-1T} denota la transpuesta de la matriz \mathbb{P}^{-1} . Se verifica este algoritmo reemplazando la matriz obtenida \mathbb{Z} en la ecuación de Lyapunov (84). Con lo calculado anteriormente se verifican las ecuaciones (85) y (90) mediante la construcción de \mathbb{V} por medio de (86), también se construyen las matrices \mathbb{S} y \mathbb{S}^i .

Es sumamente importante aclarar que para la obtención de la matriz \mathbb{Z} el algoritmo de resolución usado [23] funciona de forma correcta para los casos de las cadenas PST y BC utilizadas. Pero a medida que el número de spines N es suficientemente largo, la precisión numérica no es suficiente para obtener resultados con un significado claro, es decir, el algoritmo [23] obtiene componentes de \mathbb{Z} de valores muy altos. Es importante aclarar que el lenguaje de programación utilizado es el FORTRAN 90.

Una vez determinadas estas cantidades, se posee toda la información necesaria. En el apéndice A se verá en detalle la utilización de los valores calculados. Pero en principio sólo se necesita determinar la descomposición espectral de \mathbb{X} y obtener la matriz \mathbb{Z} , los demás valores a calcular serán solamente operaciones algebraicas de estos valores principales.

4.3. Espectro de la matriz \mathbb{X}

En esta sección se estudia en detalle el espectro de \mathbb{X} , conocidas como las tasas de decaimiento β_j . En principio el espectro estará conformado por números complejos, se graficarán su parte real vs imaginaria. Se verá su dependencia de acuerdo a los valores de N, h , Tipos de Baños utilizados. Dado que la matriz \mathbb{X} es diagonalizable y real, si un autovalor de \mathbb{X} es complejo luego su complejo conjugado será también autovalor. A su vez se dará a conocer un teorema importante con respecto a la unicidad del Ness.

4.3.1. Unicidad del Ness

En la sección 3, se definió al Ness como el Estado Estacionario de No-Equilibrio. El super-operador \hat{L}_{iou} puede tener el autovalor nulo degenerado, esto significa que el sistema tiene varios estados $\hat{\rho}_{ness}$ que satisfacen $\hat{L}_{iou} \hat{\rho}_{ness}^j = 0$ con $j = 1, \dots, d$, d la degeneración. ¿Cuándo ocurre esta degeneración del autovalor nulo?

Teorema de Unicidad del Ness: El Estado Estacionario de No-Equilibrio será único si y sólo si todos los autovalores de la matriz \mathbb{X} , β_i no están en el eje imaginario, es decir si se cumple que $\text{Re}(\beta_i) > 0$. Existen por lo tanto dos casos en el cual $\text{Re}(\beta_i) = 0$ y el Ness no sea único:

1. si existe alguna tasa de decaimiento nula, $\beta_j = 0$ para algún índice j .

2. si se tiene el caso en el cual una tasa de decaimiento es imaginaria pura distinta de cero. En este caso el Ness es al menos doblemente degenerado, pues si $\beta_j = -ib$ luego tengo $\beta_{j'} = ib$ con b número real no nulo para algún índice j y j' .

Resulta importante observar que si el Ness no es único, la ecuación (84) no posee solución única [19]. Dicho de forma simple, no habrá solución única de (84) si se tiene que $\beta_i + \beta_j = 0$ para algunos índices i, j . Esto último sucede si el Ness no es único. Esto muestra la existencia de la divergencia de algunos de los componentes de \mathbb{Z}' mediante el algoritmo [23], es decir, $\mathbb{Z}'_{i,j}$ con i y j índices en el cual se tiene que $\beta_i + \beta_j = 0$. El análisis del espectro de \mathbb{X} indicará bajo que condiciones se está frente a una degeneración del Ness, lo cual determina para que valores de los parámetros de la cadena es posible realizar los cálculos numéricos debido a que las cantidades a obtener dependen fuertemente de la existencia de un único Ness.

4.3.2. Espectro de X en Cadena PST

Consideremos una cadena PST con un número de sitios N , con interacciones J_i y h_i de la forma ya descrita para éste tipo de cadena de spines. Calculamos mediante diagonalización de la matriz \mathbb{X} el espectro. Comparamos con respecto a los valores de N , h y Tipos de Baños.

A continuación se definirá el criterio numérico para determinar unicidad del Ness: El lenguaje de programación es Fortran 90: la subrutina “DGEEV” calcula el espectro y autovectores de \mathbb{X} con Precisión Doble o denotada por REAL(8). Es decir toda cantidad determinada ahí posee una precisión de “E-16 cifras”. ¿qué quiere decir esto? si tengo por ejemplo una lista de valores o resultados numéricos que va del orden de 1 a E-15 (denotando por E-15 al número descripto por $1 \times E^{-15}$ en notación científica), se puede “distinguir” a los números del orden mas bajo, o E-15, del valor cero. Por el contrario si tengo un conjunto de números de 1 a E- l con $l \geq 16$, no puedo distinguir del valor cero a los números del orden de E-16 y órdenes mas bajos. Se usará el siguiente criterio en este trabajo:

1. Del conjunto de valores de la parte real de las tasas de decaimiento, se toma la menor de ellas y se la compara con la mayor de ellas, denotadas por Min Real y Max Real respectivamente.
2. De la lista de números de la parte imaginaria de las tasas de decaimiento, se toma la mayor de ellas llamada Max Img y se la compara con Min Real. No es necesario comparar a Min Real con el menor número de la parte imaginaria de las tasas de decaimiento debido a que el espectro está ”Reflejado“ sobre el eje real (al menos para N par), por lo tanto la parte menor en el eje imaginario será -Max Img.

Se comparará entonces a Min Real con Max Real y Min Real con Max Img. Si de esta comparación se satisface el criterio numérico descripto arriba de forma simultánea, luego se puede concluir que el Ness es único, caso contrario no se podrá asegurar la unicidad del Ness.

En la Figura 13, se muestra el espectro de \mathbb{X} para el caso de baños nulos, sin campos externos. Se observa que Max Img es del orden de 40, mientras que Min Real del orden de E-26 y Max Real del orden de E-15. Comparando Min Real con Max Img rápidamente se concluye que no se puede afirmar que el Ness sea único. Tomando el caso $h = 50$ se obtiene la Figura 14, aquí se concluye de forma análoga al caso de $h = 0$, no se puede afirmar que el Ness sea único, se obtiene Max Img del orden de 100. Incluso se observa que el programa obtiene, en las Figuras 13 y 14,

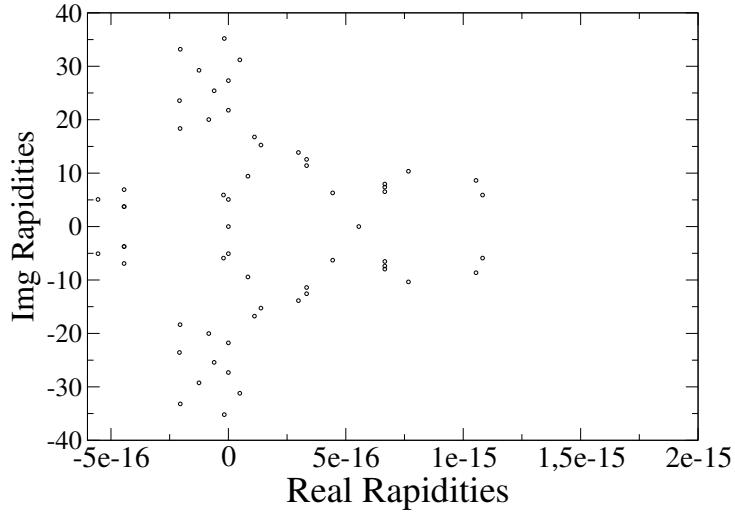


Figura 13: Espectro de \mathbb{X} , parte real *vs* parte imaginaria. $N = 30$, $h = 0$ y caso de baños nulos $\Gamma_{1,2}^{L,R} = 0$. Cadena PST.

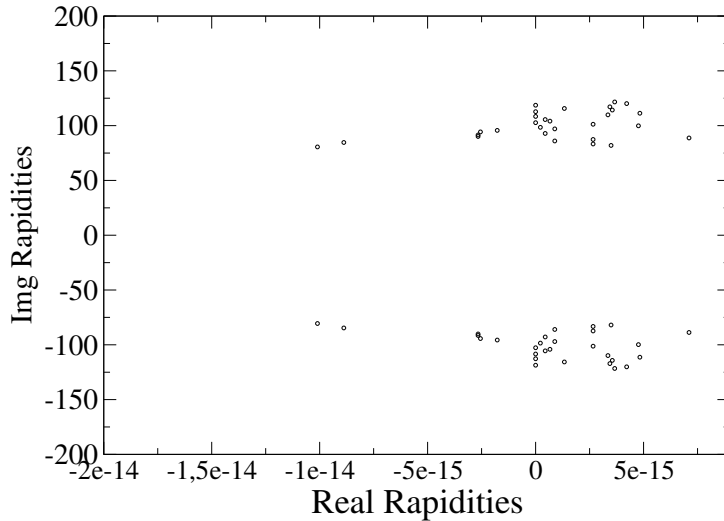


Figura 14: Espectro de \mathbb{X} , parte real *vs* parte imaginaria. $N = 30$, $h = 50$ y caso de baños nulos $\Gamma_{1,2}^{L,R} = 0$. Cadena PST.

tasas de decaimiento que satisfacen $Re(\beta_j) < 0$ que son incorrectas según Tercera Cuantización, se asumirá que tal error en el signo es debido a una limitación en la precisión de cálculo de la subrutina "DGEEV".

Se puede resumir diciendo: Para la cadena PST con baños nulos (Lo mismo se puede concluir de la BC con baños nulos) no existe un único Ness, existen múltiples Ness en el caso de baños nulos o sin ambiente externo. Razón por la cual se define el llamado tipo de baño externo: "Baño Mínimo". éste tipo de baño y su magnitud es tomada de forma de obtener unicidad del Ness para las cadenas PST y BC con $N = 30$. La justificación de la magnitud de este gamma particular esta en englobar ambas cadenas PST y BC dentro de la condición de unicidad del Ness. Es importante aclarar que la cadena BC puede poseer baños de tipo gamma mas pequeños que el baño "mínimo" sin poseer degeneración del Ness.

En la Figura 15 se muestra el espectro de \mathbb{X} en función de N . Para los tamaños de la cadena $N = 6, 12, 30$ se puede asegurar unicidad del Ness en base a los resultados numéricos, mientras que para $N = 50, 100$ se obtiene una parte real negativa, por

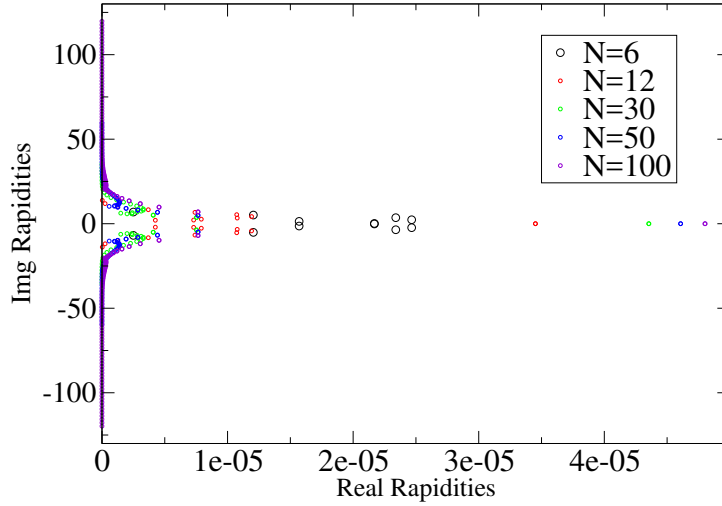


Figura 15: Espectro de \mathbb{X} , parte real *vs* parte imaginaria. $h = 1$ y baño mínimo o de tipo $\gamma = 0,0001$. Para distintos valores de N . Cadena PST.

N	Min Real	Max Real	Max Img
6	2,5E-06	2,46E-05	6,9
12	2,28E-08	3,45E-05	13,81
30	1,6E-14	4,35E-05	35,33
50	Negativo	4,61E-05	59,4
100	Negativo	4,8E-05	119,74

Cuadro 1: Valores de Min Real, Max Real, Max Img, para distintos valores de N correspondientes a la Figura 15.

lo cual no se puede asegurar unicidad del Ness, debido a que "DGEEV" no posee suficiente precisión numérica. A su vez para el caso de $N = 50, 100$, se observa una divergencia numérica en algunas de las componentes de la matriz \mathbb{Z} . En el Cuadro 1 se muestran los valores de la parte real mínima y máxima dadas por Min Real y Max Real respectivamente, se muestran a su vez el máximo de la parte imaginaria dada por Max Img. Se observa que el valor Max Img es aproximadamente proporcional a N , para N menores a 100, esto es, el ancho del eje imaginario de las tasas de decaimiento crece lineal en N de manera aproximada, como era el caso para PST aislada, ver Figura 7, en donde el ancho del espectro crece linealmente en N . Se puede apreciar también que el valor Max Real mantiene el mismo orden a diferencia del valor Min Real para distintos N .

h	Min Real	Max Real	Max Img
1	1,60E-14	4,35E-05	35,33
5	1,82E-14	1,06E-05	38,28
20	5,33E-14	1,42E-05	63,13
40	8,88E-14	1,46E-05	101,85
100	1,39E-13	1,46E-05	221,05

Cuadro 2: Valores de Min Real, Max Real, Max Img, para distintos valores de h correspondientes a la Figura 16. Se agrega $h = 100$.

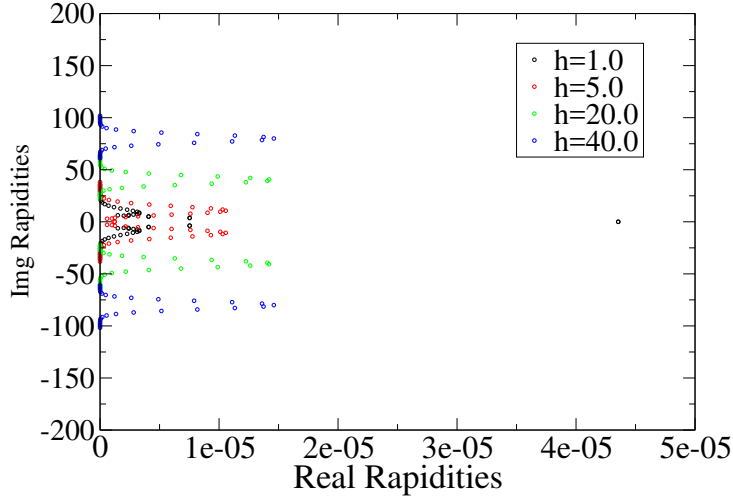


Figura 16: Espectro de \mathbb{X} , parte real *vs* parte imaginaria. $N = 30$ y baño mínimo o de tipo $\gamma = 0,0001$. Para distintos valores de h . Cadena PST.

En la Figura 16 se muestra el espectro de \mathbb{X} para distintos valores de campo externo h , $N = 30$ con Baño Mínimo. Utilizando el Cuadro 2 se puede asegurar unicidad del Ness para campos con $h = 1, 5, 20$, mientras que para $h = 40, 100$ la comparación entre Min Real y Max Img no cumple la condición de "distignibilidad". El orden de Max Real no es modificado para los valores de campos externos tomados. El valor de Max Img varía de forma lineal en h aproximadamente. Se puede apreciar que el efecto principal del campo externo sobre el espectro de \mathbb{X} radica en trasladar los valores de la parte imaginaria de las tasas de decaimiento, separando parte imaginaria positiva de la parte imaginaria negativa. Si se reduce a la curva de la parte imaginaria positiva se observa que para campos suficientemente grandes (a partir de $h = 20$), el ancho de las curvas permanece constante sobre el eje imaginario, quedando claro entonces que el efecto del campo externo es muy similar al caso de cadena PST, que era el de trasladar el espectro.

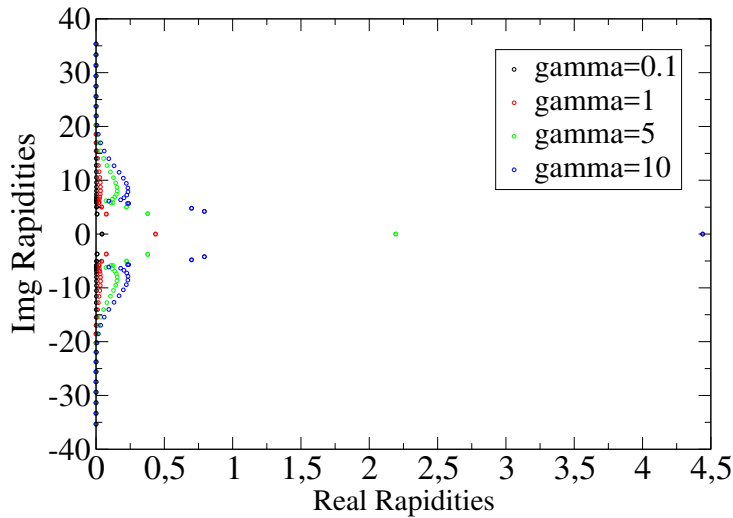


Figura 17: Espectro de \mathbb{X} , parte real *vs* parte imaginaria. $N = 30$ y $h = 1$, para distintos valores de γ . Cadena PST.

En la Figura 17 se muestra el espectro de \mathbb{X} para distintos valores de γ . Se observa en el Cuadro 3 que todos los valores de γ elegidos aseguran unici-

gamma	Min Real	Max Real	Max Img
0,1	1,60E-11	4,35E-02	35,33
1	1,56E-10	0,44	35,33
5	7,90E-10	2,20	35,34
10	1,56E-09	4,44	35,34
1000	7,10E-10	500	35,40

Cuadro 3: Valores de Min Real, Max Real, Max Img, para distintos valores de gamma correspondientes a la Figura 17. Se agrega $gamma = 1000$.

dad del Ness. Cantidades como Max Img y Min Real permanecen casi constantes comparadas con la cantidad Max Real cuyo valor aproximado para gamma suficientemente alto es $Max\ Real = gamma/2$. Se tiene entonces que el efecto principal del baño tipo gamma sobre el espectro de \mathcal{X} es el de hacer "despegar" del eje imaginario a este. Claramente gamma no afecta a la parte real de cada tasa de decaimiento por igual, este efecto de "despegar" es distribuido de forma no uniforme en cada tasa de decaimiento.

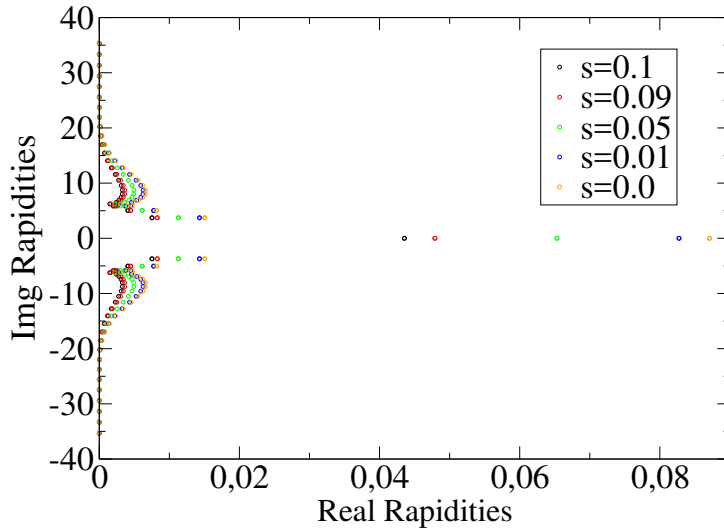


Figura 18: Espectro de \mathcal{X} , parte real *vs* parte imaginaria. $N = 30$ y $h = 1$, distintos baños tipo s . Cadena PST.

En la Figura 18 se muestra el espectro de \mathcal{X} para distintos valores de s . Se observa en el Cuadro 4 que para los valores de s representados allí, $s = 0, 1, 0, 09, 0, 05, 0, 01, 0$, se puede asegurar unicidad del Ness. Análogamente al caso del baño de tipo gamma, este baño s tiene la particularidad de "despegar" del eje imaginario los valores de las tasas de decaimiento a medida que s tiende de $0, 1$ a 0 . Esta intensidad de "despegue" del baño s es mucho menor que la dada por gamma. Es importante destacar que para el caso de $s = 0$ se obtiene $Z = 0$, en este caso para campos suficientemente altos, correspondería a la situación de poseer una pseudo-temperatura infinita, ecuación (108).

4.3.3. Espectro de \mathbf{X} en Cadena BC

Consideraremos una cadena BC con un número de sitios N , interacciones J_i y h_i de la forma ya descritas para éste tipo de cadena de spines. El procedimiento

s	Min Real	Max Real	Max Img
0,1	1,60E-11	4,35E-02	35,33
0,09	1,75E-11	4,79E-02	35,33
0,05	2,39E-11	6,50E-02	35,33
0,01	3,03E-11	8,27E-02	35,33
0	3,19E-11	8,70E-02	35,33

Cuadro 4: Valores de Min Real, Max Real, Max Img, para distintos valores de s correspondientes a la Figura 18.

será de forma análoga al de la cadena PST, solamente se calculará todos los gráficos del caso anterior pero para una cadena BC.

En la Figura 19 se muestra el espectro de \mathcal{X} para distintos valores de N . Se observa en el Cuadro 5 que los valores de $N = 6, 12, 30, 50$ aseguran unicidad del Ness. Se nota en primer lugar que la BC posee Ness único incluso para el caso de $N = 150$ a diferencia de la PST que perdía esa unicidad en $N = 50$, para baño mínimo. En segundo lugar, a pesar de que N varía, el ancho de las curvas permanecen constante a diferencia de la PST, el ancho de la parte imaginaria del espectro. Este valor del ancho es 2,83 y permanece constante en N , de la misma forma que el ancho de la cadena BC, en el caso de cadena cerrada que tenía un valor de 2, ver Figura 10.

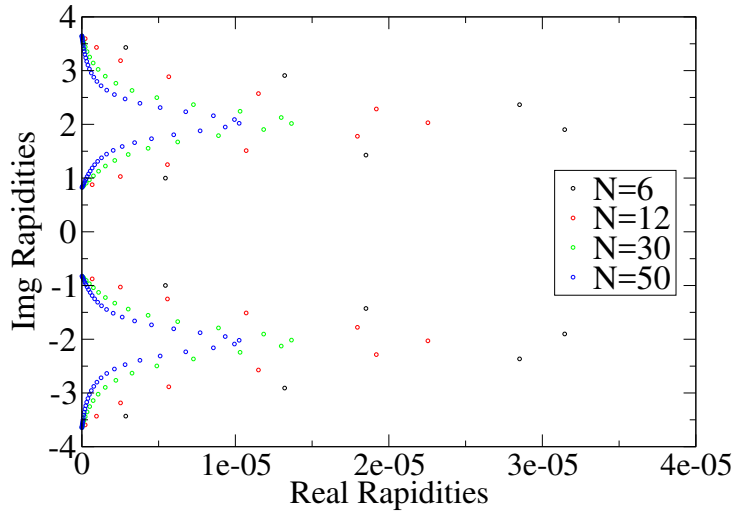


Figura 19: Espectro de \mathcal{X} , parte real vs parte imaginaria. $h = 1$ y baño mínimo $gamma = 0,0001$. Para distintos valores de N . Cadena BC.

En la Figura 20 se muestra el espectro de \mathcal{X} para distintos valores de h . En el Cuadro 6 se puede asegurar unicidad del Ness para los valores de h dados. Los valores de Min Real y Max Real son afectados inicialmente por el campo, en los valores de $h = 1, 5, 20$, luego permanecen constantes para $h = 40, 60$, aún así no son afectados en la misma escala que cuando se aumenta el valor de $gamma$. El efecto principal del campo externo esta en trasladar el espectro, tal como ocurre en PST anteriormente. Debido a que el ancho de la cadena BC permanece constante y de orden menor que el campo externo utilizado, los cambios en el espectro son mas notables en la cadena BC que en la cadena PST. En la cadena BC para campos mayores a 5, se observa una traslación aproximada de $2h$ con respecto al campo

N	Min Real	Max Real	Max Img
6	2,86E-06	3,15E-05	3,43
12	2,16E-07	2,25E-05	3,59
30	7,68E-09	1,37E-05	3,64
50	1,26E-09	1,03E-05	3,65
150	2,75E-11	5,36E-06	3,65

Cuadro 5: Valores de Min Real, Max Real, Max Img, para distintos valores de N correspondientes a la Figura 19. Se agrega $N = 150$.

$h = 1$.

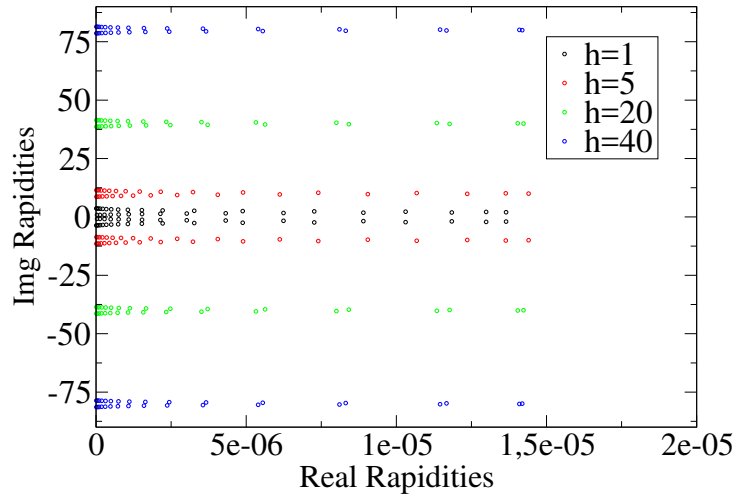


Figura 20: Espectro de \mathcal{X} , parte real *vs* parte imaginaria. $N = 30$ y baño mínimo $gamma = 0,0001$. Para distintos valores de h . Cadena BC.

h	Min Real	Max Real	Max Img
1	7,68E-09	1,36E-05	3,64
5	9,47E-09	1,44E-05	11,46
20	1,02E-08	1,42E-05	41,42
40	1,03E-08	1,42E-05	81,42
60	1,03E-08	1,42E-06	121,4

Cuadro 6: Valores de Min Real, Max Real, Max Img, para distintos valores de h correspondientes a la Figura 20. Se agrega $h = 60$.

En la Figura 21 se muestra el espectro de \mathbb{X} para distintos valores de γ . Dados los valores consignados en el Cuadro 7, se puede asegurar que para los valores de γ y tipo de cadena considerado, el NESS es único. Max Img permanece constante en γ , lo mismo sucedía con la PST. Max Real aumenta con γ a razón aproximada de $\text{Max Real} = \gamma/2$, para γ suficientemente alto, como ocurría con la PST. Se observa una particularidad con respecto al valor de Min Real el cual crece para γ creciente y luego comienza a reducirse para $\gamma = 10, 1000$. A su vez se observa una particularidad para la BC que no sucede para la PST, para γ suficientemente alto, la separación del eje imaginario no ocurre para BC. En la Figura 22 se puede apreciar mejor este efecto, conforme aumenta γ también se suaviza el espectro.

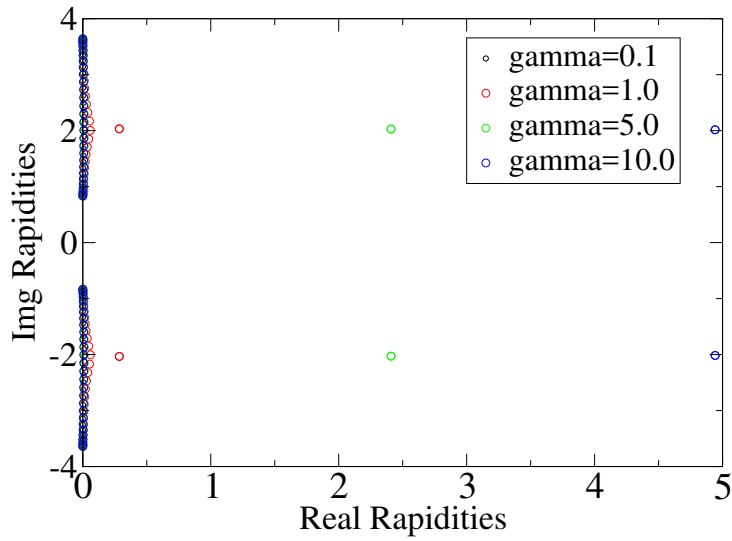


Figura 21: Espectro de \mathbb{X} , parte real *vs* parte imaginaria. $N = 30$ y $h = 1$. Para distintos valores de γ . Cadena BC.

gamma	Min Real	Max Real	Max Img
0,1	7,66E-06	1,39E-02	3,64
1	6,84E-05	0,29	3,64
5	1,02E-04	2,41	3,64
10	7,34E-05	4,94	3,64
1000	1,02E-06	500	3,64

Cuadro 7: Valores de Min Real, Max Real, Max Img, para distintos valores de gamma correspondientes a la Figura 21. Se agrega $gamma = 1000$.

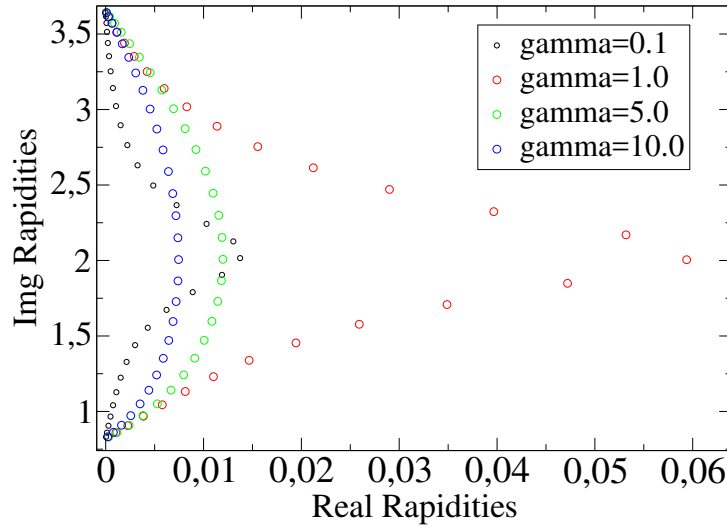


Figura 22: Espectro de \mathcal{X} , parte real *vs* parte imaginaria. $N = 30$ y $h = 1$. Para distintos valores de gamma. Se hace una ampliación sobre el eje imaginario positivo de la Figura 21. Cadena BC.

En la Figura 23 se muestra el espectro de \mathcal{X} para distintos valores de s . En el Cuadro 8 se puede asegurar unicidad del Ness para los valores de s dados. Los efectos del baño de tipo s sobre los valores de Max Real, Max Img y Min Real son idénticos al que se tiene en la cadena PST. Se puede obtener también $Z = 0$ para $s = 0$.

Por último queremos señalar dos rasgos importantes del espectro de ambos tipos de cadenas BC y PST. La parte imaginaria de las tasas de decaimiento tiene una conexión con el espectro de autovalores de las mismas cadenas pero en el caso cerrado dadas en la sección 2, propiedades importantes como la traslación producida por el campo externo son observadas en ambos casos. La parte real del espectro de \mathcal{X} está fuertemente ligada a los baños externos, a mayor intensidad de gamma o menor intensidad de s , mayor es el valor de Max Real para ambas cadenas.

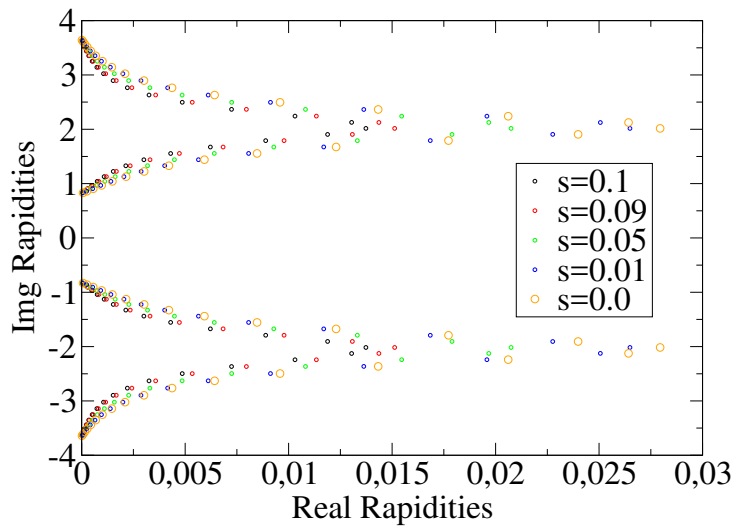


Figura 23: Espectro de \mathcal{X} , parte real *vs* parte imaginaria. $N = 30$ y $h = 1$. Para distintos valores de s . Cadena BC.

s	Min Real	Max Real	Max Img
0,1	7,68E-06	1,37E-02	3,64
0,09	8,43E-06	1,50E-02	3,64
0,05	1,15E-05	2,08E-02	3,64
0,01	1,45E-05	2,65E-02	3,64
0	1,53E-05	2,80E-02	3,64

Cuadro 8: Valores de Min Real, Max Real, Max Img, para distintos valores de s correspondientes a la Figura 23.

5. Cálculo de Fidelidad en Tercera Cuantización: Protocolo 1

5.1. Expresión de la fidelidad

Se determinará una expresión de la Fidelidad para el caso de interés: una cadena de N spines $\frac{1}{2}$ en contacto con un baño o reservorio térmico, en particular se desea estudiar como la cadena transmite estados mediante una adaptación del Protocolo I. Vamos a enunciar el protocolo como una serie de pasos:

1. Se prepara el estado $\hat{\rho}(0) = |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|$, con $|\Psi(0)\rangle$ dado en el Protocolo I, en donde la matriz densidad reducida al primer spin es $\hat{\rho}_1(0) = \text{Tr}_{2,3,\dots,N}\hat{\rho}(0)$.
2. Se obtiene $\hat{\rho}(t)$, y luego se calcula

$$\hat{\rho}_N(t) := \text{Tr}_{1,2,\dots,N-1}(\hat{\rho}(t)),$$

esto es, la matriz densidad reducida del último spin al tiempo t .

3. Se calcula la fidelidad dada por (37)

$$F(t) = \sqrt{\text{Tr}(\hat{\rho}_1(0)\hat{\rho}_N(t))}, \quad (113)$$

obteniéndose así la fidelidad de la cadena al tiempo t , la cual a su vez se la puede promediar sobre los estados iniciales posibles, $|\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|$, obteniéndose la fidelidad promediada. Esta fidelidad compara que tan “parecido” es el estado $\hat{\rho}_1(0)$ del primer spin con el estado $\hat{\rho}_N(t)$ del último spin al tiempo t .

La matriz $\hat{\rho}_1(0)$ se toma como estado inicial al definido por el punto 1) mas una superposición de spin up y down en el sitio 1 de la cadena

$$|\Psi(0)\rangle = \beta|1\rangle + \alpha|0\rangle.$$

usando que $\hat{\rho}_1(0) = |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|$, junto a su vez las propiedades (1) y (3) de la matriz densidad, se obtiene

$$\hat{\rho}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 - |\alpha|^2 & \beta^*\alpha \\ \beta\alpha^* & |\alpha|^2 \end{pmatrix}.$$

Usando que las matrices $\{\hat{\mathbb{1}}_{2\times 2}, \hat{\sigma}^X, \hat{\sigma}^Y, \hat{\sigma}^Z\}$ forman una base para el espacio de matrices 2×2 , donde se tiene que $\hat{\mathbb{1}}_{2\times 2}$ es la identidad 2×2 y las matrices de Pauli están dadas por

$$\hat{\sigma}^Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\sigma}^Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\sigma}^X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se puede escribir a $\hat{\rho}_1(0)$ como

$$\hat{\rho}_1(0) = \frac{1}{2}\hat{\mathbb{1}}_{2 \times 2} + \left(\frac{1}{2} - |\alpha|^2\right) \hat{\sigma}^Z + \alpha \operatorname{Re}(\beta) \hat{\sigma}^X + \alpha \operatorname{Im}(\beta) \hat{\sigma}^Y. \quad (114)$$

Reemplazando en (37) y usando linealidad de la traza, se obtiene

$$\begin{aligned} F(t)^2 &= \operatorname{Tr}(\hat{\rho}_1(0)\hat{\rho}_N(t)) \\ &= \operatorname{Tr}\left[\left(\frac{1}{2}\hat{\mathbb{1}}_{2 \times 2} + \left(\frac{1}{2} - |\alpha|^2\right) \hat{\sigma}^Z + \alpha \operatorname{Re}(\beta) \hat{\sigma}^X + \alpha \operatorname{Im}(\beta) \hat{\sigma}^Y\right)\hat{\rho}_N(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}[\hat{\mathbb{1}}_{2 \times 2}\hat{\rho}_N(t)] + \left(\frac{1}{2} - |\alpha|^2\right) \operatorname{Tr}[\hat{\sigma}^Z\hat{\rho}_N(t)] + \\ &\quad + \alpha \operatorname{Re}(\beta) \operatorname{Tr}[\hat{\sigma}^X\hat{\rho}_N(t)] + \alpha \operatorname{Im}(\beta) \operatorname{Tr}[\hat{\sigma}^Y\hat{\rho}_N(t)]. \end{aligned} \quad (115)$$

Usando que $\operatorname{Tr}[\hat{\sigma}^i\hat{\rho}_N(t)] \rightarrow \operatorname{Tr}[\hat{\sigma}_N^i\hat{\rho}(t)]$, donde

$$\hat{\sigma}_N^i = \bigotimes_{i=1}^{N-1} \hat{\mathbb{1}}_{2 \times 2} \otimes \hat{\sigma}^i, \quad (116)$$

y que $\operatorname{Tr}[\hat{\mathbb{1}}_{2 \times 2}\hat{\rho}_N(t)] = 1$, la ecuación (115) queda como

$$\begin{aligned} F(t)^2 &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - |\alpha|^2\right) \operatorname{Tr}[\hat{\sigma}_N^Z\hat{\rho}(t)] + \\ &\quad + \alpha \operatorname{Re}(\beta) \operatorname{Tr}[\hat{\sigma}_N^X\hat{\rho}(t)] + \alpha \operatorname{Im}(\beta) \operatorname{Tr}[\hat{\sigma}_N^Y\hat{\rho}(t)] \\ &= \frac{1}{2} + (1 - 2|\alpha|^2) \langle \hat{S}_N^Z \rangle_{\hat{\rho}(t)} + 2\alpha \operatorname{Re}(\beta) \langle \hat{S}_N^X \rangle_{\hat{\rho}(t)} + \\ &\quad + 2\alpha \operatorname{Im}(\beta) \langle \hat{S}_N^Y \rangle_{\hat{\rho}(t)}, \end{aligned} \quad (117)$$

donde $\hat{S}_i^{x,y,z} = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_i^{x,y,z}$. Luego, tomando raíz cuadrada a ambos lados en la esta ecuación, se obtiene la fidelidad de transmisión, $F(t)$, para el protocolo definido en esta sección

5.2. Cálculo de la Fidelidad

Se calcula el valor de expectación $\langle \hat{S}_N^i \rangle_{\hat{\rho}(t)}$ dado que es lo necesario para obtener $F(t)$ en (117). Usando la ecuación (49), $\langle \hat{S}_N^i \rangle_{\hat{\rho}(t)}$ se escribe como

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_N^i \rangle &= \operatorname{Tr}(\hat{S}_N^i\hat{\rho}(t)) \\ &= \operatorname{Tr}(\hat{S}_N^i e^{t\hat{L}_{iou}} \hat{\rho}(0)) \\ &= \operatorname{Tr}(e^{t\hat{L}_{iou}} \hat{\rho}(0) \hat{S}_N^i). \end{aligned} \quad (118)$$

Usando las ecuaciones (54) se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_N^X &= (-i)^{N-1} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{2N-1}, \\ \hat{\sigma}_N^Y &= (-i)^{N-1} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{2N-2} \omega_{2N}, \\ \hat{\sigma}_N^Z &= (-i) \omega_{2N-1} \omega_{2N}. \end{aligned} \quad (119)$$

La primera complicación es consecuencia de que los operadores $\hat{\sigma}_N^X$ y $\hat{\sigma}_N^Y$, dependen de un número muy grande de operadores ω^i s u operadores a-fermiónicos (para $N = 30$, por ejemplo, se tendría una productoria de 59 Majoranas). El número de operadores Majorana involucrados es una limitación, debido a que el álgebra involucrada se vuelve muy complicada. Esta complicación se explica mejor en el apéndice A. Se toma entonces como primera restricción el caso de $\alpha = 0$ el cual evita éste problema en el cálculo de la fidelidad (117). En éste caso particular se determina $\langle \hat{S}_N^Z \rangle_{\hat{\rho}(t)}$ cuya expresión es relativamente simple en términos de los operadores Majorana, ver ecuación (119). Para calcular este valor se debe desarrollar $\hat{\rho}(0)$, dado por

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_1(0) \bigotimes_{i=2}^N (|0\rangle\langle 0|). \quad (120)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(0)\hat{S}_N^Z &= \hat{\rho}_1(0) \bigotimes_{i=2}^N (|0\rangle\langle 0|) \cdot \left(\bigotimes_{i=1}^{N-1} \mathbb{1}_{2 \times 2} \otimes S^Z \right) \\ &= \hat{\rho}_1(0) \bigotimes_{i=2}^{N-1} (|0\rangle\langle 0|) \otimes (|0\rangle\langle 0| S^Z), \end{aligned} \quad (121)$$

usando la ecuación (114); y usando $|0\rangle\langle 0| = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{2 \times 2} - S^Z$, luego

$$\begin{aligned} |0\rangle\langle 0| S^Z &= \left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{2 \times 2} - S^Z \right) \cdot S^Z \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{2 \times 2} - S^Z \right) \\ &= -\frac{1}{2} |0\rangle\langle 0|, \end{aligned} \quad (122)$$

con el cual la ecuación (121) puede escribirse como

$$\hat{\rho}(0)\hat{S}_N^Z = -\frac{1}{2} \hat{\rho}(0). \quad (123)$$

Reemplazando la ecuación (123) en ecuación (118) para el caso $i = Z$, y usando las ecuaciones (123) y (102), se obtiene

$$\langle \hat{S}_N^Z \rangle_{\hat{\rho}(t)} = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{\nu} \in [0,1]^{2N}} \exp(-2t\vec{\nu} \cdot \vec{\beta}) \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \hat{\rho}(0) | \Theta_{\vec{\nu}}^R \rangle. \quad (124)$$

A continuación se calcula $\langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \hat{\rho}(0) | \Theta_{\vec{\nu}}^R \rangle$, para ésto se debe “Majorizar” a $\hat{\rho}(0)$, esto es, expresar a $\hat{\rho}(0)$ en términos de operadores Majorana. Se puede desarrollar una descripción mas compacta de $\hat{\rho}(0)$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}(0) &= \hat{\rho}_1(0) \bigotimes_{i=2}^N (|0\rangle\langle 0|) \\
&= \left[\frac{1}{2} \mathbb{1}_{2 \times 2} + S^Z \right] \bigotimes_{i=2}^N \left(\frac{1}{2} \mathbb{1}_{2 \times 2} - S^Z \right) \\
&= \prod_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} - (-1)^{\delta_{i,1}} \hat{S}_i^Z \right) \\
&= \prod_{i=1}^N \frac{1}{2} (\mathbb{1} - (-1)^{\delta_{i,1}} \hat{\sigma}_i^Z) \\
&= \frac{1}{2^N} \prod_{i=1}^N (\mathbb{1} - (-1)^{\delta_{i,1}} \hat{\sigma}_i^Z), \tag{125}
\end{aligned}$$

donde la última expresión de $\hat{\rho}(0)$ puede demostrarse usando inducción en N . Con ésto último concluimos que el Protocolo I es muy complicado algebraicamente de implementar, puesto que debido a la "Majorización" de la matriz densidad inicial dada en (125), es una productoria de términos de la forma $(\mathbb{1} \pm \omega_{2i-1} \omega_{2i})$, con lo cual el factor $\langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \hat{\rho}(0) | \Theta_{\vec{\nu}}^R \rangle$ resulta algebraicamente y combinatoriamente muy complicado de calcular en la ecuación (124).

Se postulará en la siguiente sección una manera de sortear esta complicación, abandonando por completo el protocolo I para Tercera Cuantización.

6. Funciones de Correlación de spin en el Ness

En la sección anterior se concluyó que utilizar el Protocolo I para transmitir estados bajo el formalismo descrito en la sección 3 presenta complicaciones en cuanto al álgebra involucrada, esto es, resulta costoso desde el punto de vista analítico calcular contracciones del tipo $\langle 1|W_{(i,j,\dots,k,m)}|Ness\rangle$ con $W_i = \omega_i\omega_j \dots \omega_k\omega_m$ para i, j, k, m índices de los operadores Majorana involucrados arbitrarios, cuando se tiene mas de 4 operadores Majorana en la contracción. Para calcular estas contracciones se puede utilizar el teorema de Wick y descomponer las contracciones en sumas de términos de contracciones de dos operadores Majorana en el estado $\hat{\rho}_{ness}$ [18]. Se identificaron en el cálculo de la fidelidad (37) dos principales puntos a tener en cuenta:

1. La expresión en operadores Majorana, o Majorización, de los observables σ_N^x y σ_N^y a calcular.
2. La expresión de la matriz densidad en términos de los operadores Majorana (expresión (125)). La causa de esta complicación vino de tomar como estado inicial puro a $\hat{\rho}(0) = |\Psi(0)\rangle \langle \Psi(0)|$ con $|\Psi(0)\rangle$ dado por el Protocolo I.

En particular el ítem 2 será solucionado en esta sección mediante la siguiente observación: Para el caso de cadena cerrada, el autovalor 0 del hamiltoniano XX en (28) tiene autovector dado por $|0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle$. Se observa que el estado $|Ness\rangle$ es similar al estado $|0\rangle$ puesto

$$\text{En el caso de cadena cerrada o aislada } |0\rangle \rightarrow \hat{H}_{xx} |0\rangle = 0,$$

$$\text{En el caso de Tercera Cuantización } |Ness\rangle \rightarrow \hat{L}_{iou} |Ness\rangle = 0.$$

Ahora buscamos caracterizar al $|Ness\rangle$ mediante las funciones de correlaciones de spin de los sitios $i, i+1$. Estas funciones de correlaciones de spin están dadas por

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{1}{2} \langle \hat{\sigma}_i^z \rangle \\ S_{i,i+1}^{z,z} &= \frac{1}{4} \langle \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_{i+1}^z \rangle \\ S_{i,i+1}^{x,x} &= \frac{1}{4} \langle \hat{\sigma}_i^x \hat{\sigma}_{i+1}^x \rangle \\ S_{i,i+1}^{y,y} &= \frac{1}{4} \langle \hat{\sigma}_i^y \hat{\sigma}_{i+1}^y \rangle \\ S_{i,i+1}^{x,y} &= \frac{1}{4} \langle \hat{\sigma}_i^x \hat{\sigma}_{i+1}^y \rangle \\ S_{i,i+1}^{y,x} &= \frac{1}{4} \langle \hat{\sigma}_i^y \hat{\sigma}_{i+1}^x \rangle \\ S_{i,i+1}^{\mathbb{1},\mathbb{1}} &= \frac{1}{4} \langle \hat{\mathbb{1}}_i \hat{\mathbb{1}}_{i+1} \rangle = \frac{1}{4}, \end{aligned} \tag{126}$$

donde la función M_i es la magnetización del sitio i . Las funciones de correlación de spin son calculadas en el estado $|Ness\rangle$. En el apéndice A se detallar el cálculo del valor de expectación en el estado $|Ness\rangle$; donde se obtiene que las funciones de correlación de spin, luego de Majorizar los observables correspondientes, tienen los valores de

$$\begin{aligned}
S_{i_{ness}}^z &= -2\mathbb{Z}_{2i-1,2i} \\
S_{i,i+1_{ness}}^{x,x} &= -\mathbb{Z}_{2i,2i+1} \\
S_{i,i+1_{ness}}^{y,y} &= \mathbb{Z}_{2i-1,2i+2} \\
S_{i,i+1_{ness}}^{x,y} &= -\mathbb{Z}_{2i,2i+2} \\
S_{i,i+1_{ness}}^{y,x} &= \mathbb{Z}_{2i-1,2i+1} \\
S_{i,i+1_{ness}}^{z,z} &= -\frac{1}{4}C_{1,1}^{2i-1,2i,2i+1,2i+1}, \tag{127}
\end{aligned}$$

donde \mathbb{Z} es la matriz real antisimétrica solución de la ecuación de Lyapunov (84) y el coeficiente $C_{1,1}^{2i-1,2i,2i+1,2i+1}$ es definido por

$$\begin{aligned}
C_{1,1}^{i,j,k,h} &= (\delta_{i,h} - 4i\mathbb{Z}_{i,h})(\delta_{j,k} - 4j\mathbb{Z}_{j,k}) + \\
&\quad \sum_{1 \leq \mu < \mu' \leq 2N} (\text{Esp}(\mu, \mu') + \text{Esp}(\mu', \mu)). \tag{128}
\end{aligned}$$

Donde la función $\text{Esp}(\mu, \mu')$ está definida en el apéndice A. El valor de expectación de un observable físico \hat{O} en el formalismo de Tercera Cuantización se denota como

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}_{ness}} \equiv \text{Tr}(\hat{O} \hat{\rho}_{ness}) = \langle 1 | \hat{O} | N_{ess} \rangle. \tag{129}$$

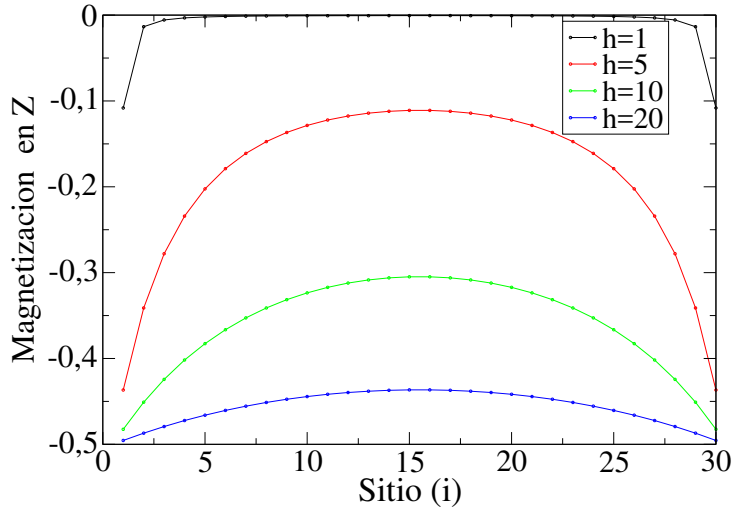


Figura 24: Magnetización en función del sitio i , para una cadena de $N = 30$, PST y baño tipo $gamma = 0, 1$. Se grafican varias curvas en función de la intensidad de campo magnético externo h . Los valores de i es de 1 a 30.

La Figura 24 muestra la magnetización como función de la posición a lo largo de la cadena. Se observa que la magnetización muestra la simetría especular de las constantes de acople de la PST con respecto al centro de la cadena. A mayor campo externo, mayor es el modulo de la magnetización de los primeros dos spines, para campos de $h = 20$ la magnetización del primer spin esta en

$$M_1 = -0,47, \tag{130}$$

y la del segundo

$$M_2 = -0,45. \quad (131)$$

El signo menos es consistente debido a que se trabaja con $J_i > 0$, por lo tanto campos en dirección de Z, “alinean” a la cadena en la dirección contraria. Se puede ver entonces que, a mayor campo mayor, es la similitud de los dos primeros spines con el estado de spin-down. Los demás spines de la cadena, especialmente los del centro, poseen menos magnetización debido a la particularidad de la cadena PST, el spin central posee el mayor acoplamiento J_i posible. Se concluye entonces que a mayor campo externo mas similitud tienen los spines del sitio 1 y 2 con el estado de spin-down, en el estado estacionario $|Ness\rangle$, es decir para campos suficientemente altos, el $|Ness\rangle$ simula estados de spin-down en sus primeros dos spines. Dicho de forma mas simple, para campos suficientemente altos el $|Ness\rangle$ tiende al estado puro dado por $\hat{\rho}(0)$ definido por el Protocolo I, al menos en cuanto al valor de la magnetización de cada sitio en particular.

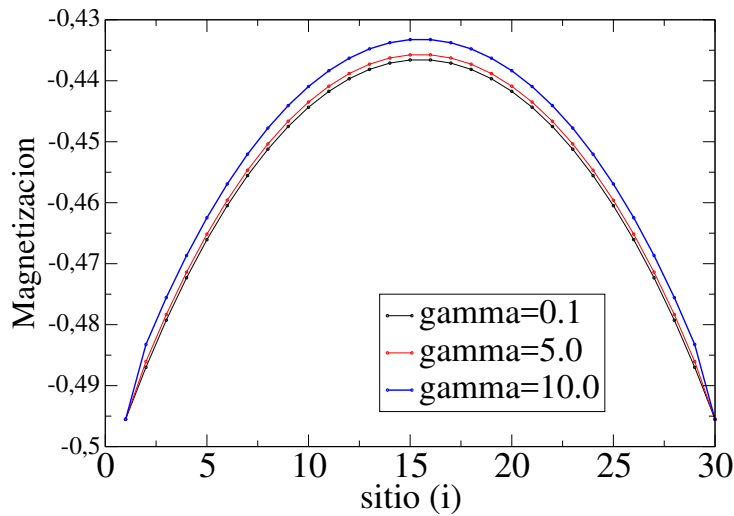


Figura 25: Magnetización en función del sitio i , para cadena de $N = 30$, PST, $h = 20$. Se muestran varias curvas en función del baño de tipo gamma.

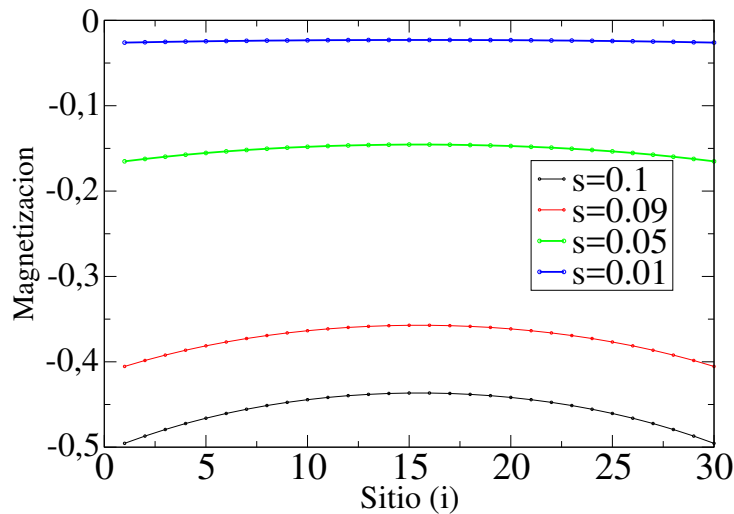


Figura 26: Magnetización en función del sitio i , para cadena de $N = 30$, PST, $h = 20$. Se muestran varias curvas en función del baño de tipo s.

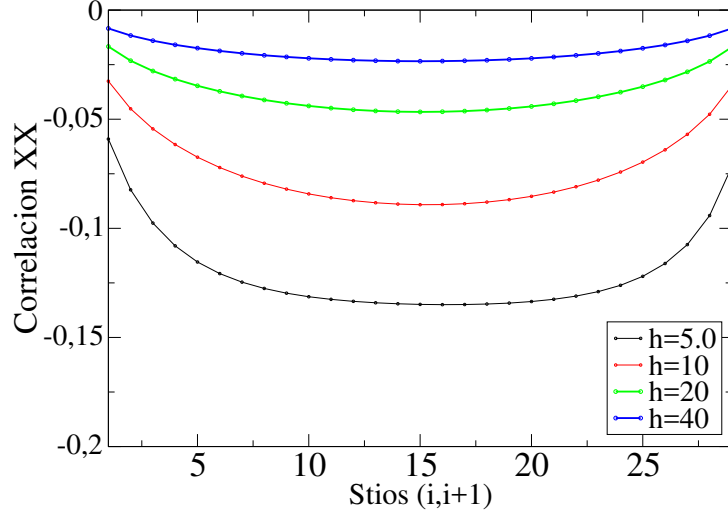


Figura 27: Correlación XX en función del sitio. El número en entero, i , en el eje x denota la correlación $(i, i + 1)$. Cadena de $N = 30$, PST, baños de tipo $\gamma = 0, 1$. Se muestran varias curvas en función de la intensidad de campo magnético externo h . Los valores del eje x van de 1 a 29.

En la Figura 25 se observan las magnetizaciones de cada sitio i para baños de tipo gamma. Se observa que comparada con la Figura 26, en la cual se muestran las magnetizaciones de cada sitio i en función de varios baños de tipo s, el baño de tipo gamma tiene un efecto menor que el baño de tipo s sobre el valor de la magnetización. Concluimos que la magnetización es mas “robusta” frente al baño de tipo gamma y mas sensible al baño de tipo s.

En la Figura 26, se observa que a medida que s tiende a cero también la magnetización tiende a cero. Una explicación posible de esto se debe a la definición de temperatura en los bordes de la cadena, Si h es lo suficientemente grande la definición de pseudo-temperatura dada por (108) es correcta, con lo que a medida que s tiende a cero, la temperatura en los bordes tiende a infinito. A temperatura infinita la magnetización es nula.

En la Figura 27 se muestran las correlaciones XX en función del campo magnético, se puede observar que la correlación tiende a cero para campos crecientes. Es decir, se puede afirmar que para campos altos el estado $|Ness\rangle$ es próximo a $\hat{\rho}(0)$, con $\hat{\rho}(0)$ dada por el Protocolo I. La función correlación de spin YY se calcula de la misma forma que la XX y se obtiene de forma satisfactoria.

En la Figura 28 se muestran las correlaciones ZZ en función del campo magnético, estas tienden al valor de $-\frac{1}{4}$ conforme h aumenta. En campos nulos la correlación de spin ZZ es cero.

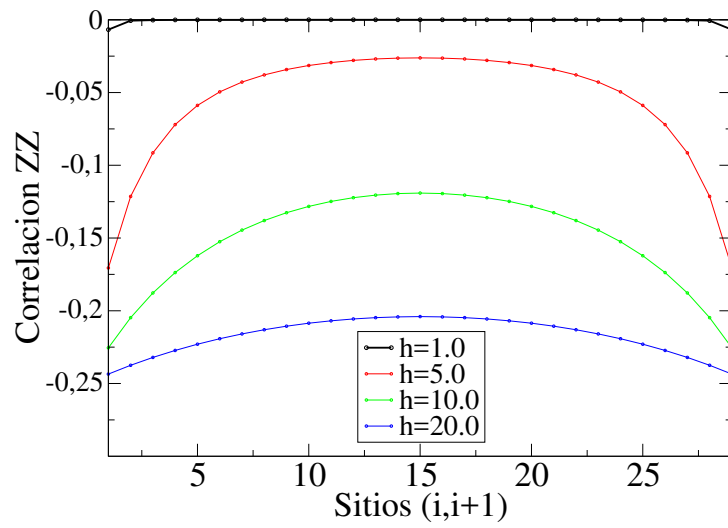


Figura 28: Correlación ZZ en función del sitio. El número en entero, i , en el eje x denota la correlación $(i, i + 1)$. Cadena de $N = 30$, PST, baños de tipo $\gamma = 0, 1$. Se muestran varias curvas en función de la intensidad de campo magnético externo h . Los valores del eje x van de 1 a 29.

7. Definición del Protocolo II y Magnetización en Función del Tiempo

En esta sección se definirá el Protocolo II, el cual permitirá un cálculo mas simple que el involucrado en el Protocolo I, teniendo en cuenta las características del formalismo de Tercera Cuantización. Para esto se estudiara la magnetización en función de t para las cadenas PST y BC. Luego, con los datos obtenidos de esta magnetización se definirá un Protocolo de transmisión plausible en Tercera Cuantización. En el apéndice B se detallarán los resultados obtenidos para el cálculo de la fidelidad que se determinaron con un método distinto de cálculo, que pudo ser implementado pero que da resultados cuantitativamente incorrecto aunque cualitativamente razonables.

7.1. Protocolo II General y Valor de Expectación General

Teniendo en cuenta las conclusiones de la sección anterior respecto a la similitud del estado $|Ness\rangle$ con $\hat{\rho}(0)$ para campos altos, se enuncian los siguientes puntos como forma de sortear el problema algebraico de Majorización del estado inicial $\hat{\rho}(0)$ dado en el Protocolo I. Se define el Protocolo II de manera general, dado por los siguientes pasos:

1. Asumiendo que el estado $|Ness\rangle$ es único, se prepara la cadena de spines en el estado $\hat{\rho}_{ness}$. Con $\hat{\rho}_{ness}$ la matriz densidad en el Estado Estacionario de No-Equilibrio, denotada por $|Ness\rangle$, la cual $\text{Tr}(\hat{\rho}_{ness}) = 1$ y es hermítica.
2. Se codifica en la cadena el estado definido por $\hat{\rho}(0) = \hat{P}\hat{\rho}_{ness}\hat{P}^\dagger$, El operador \hat{P} es un operador que conserva la positividad de $\hat{\rho}(0)$. Se demuestra , en principio, que $\hat{\rho}(0)$ es hermitiana. Si se tiene que \hat{P} es unitario luego la norma de $\hat{\rho}(0)$ es 1, pero en general \hat{P} no tiene porque ser unitario.
3. El sistema evoluciona siguiendo la ecuación (48) obteniendo así a $\hat{\rho}(t)$. Es decir

$$\hat{\rho}(t) = e^{t\hat{L}_{iou}}\hat{\rho}(0).$$

4. El valor de expectación de cualquier observable físico \hat{O} , de manera análoga a (102), es

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} = \text{Tr}(\hat{O}\hat{\rho}(t)). \quad (132)$$

La solución al problema algebraico que tenía el Protocolo I en cuanto a la Majorización de los valores esperados de los operadores $\hat{\sigma}_N^x$ y $\hat{\sigma}_N^y$, depende fuertemente de la elección del operador \hat{P} .

En este trabajo se discutirán dos casos de la \hat{P} :

1. El caso en el cual $\hat{P} = c\sigma_1^+$, llamado caso 1.
2. El caso en el cual $\hat{P} = c'\sigma_1^+\sigma_2^+$, llamado caso 2.

Donde c y c' son números complejos tal que $\text{Tr}(\hat{\rho}(0)) = 1$ y σ_i^+ dado por

$$\sigma_i^+ \equiv \sigma_i^x + i\sigma_i^y, \quad (133)$$

cuyo efecto esta dado por

$$\sigma^+ |0\rangle = |1\rangle, \quad \sigma^+ |1\rangle = 0. \quad (134)$$

La principal diferencia entre los dos casos es el número de spines en los que se codifica el estado a transmitir.

La ecuación (132) se puede desarrollar mas

$$\langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} = \text{Tr}(\hat{O}\hat{\rho}(t)) = \text{Tr}(\hat{O} e^{t\hat{L}_{iou}} \hat{\rho}(0)), \quad (135)$$

en donde se usa (49) para la igualdad final. Usando que $\hat{\rho}(0) = \hat{P}\hat{\rho}_{ness}\hat{P}^\dagger$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} &= \text{Tr}(\hat{O} e^{t\hat{L}_{iou}} \hat{P}\hat{\rho}_{ness}\hat{P}^\dagger) \\ &= \text{Tr}(\hat{P}^\dagger \hat{O} e^{t\hat{L}_{iou}} \hat{P}\hat{\rho}_{ness}), \end{aligned} \quad (136)$$

en donde la última igualdad se usa la propiedad de la traza $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Usando la ecuación (129)

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} &= \langle 1 | \hat{P}^\dagger \hat{O} e^{t\hat{L}_{iou}} \hat{P} | Ness \rangle \\ &= \langle 1 | \hat{P}^\dagger \hat{O} \sum_{\vec{\nu} \in \{0,1\}} \exp(t\lambda_{\vec{\nu}}) |\Theta_{\vec{\nu}}^R\rangle \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \hat{P} | Ness \rangle \\ &= \sum_{\vec{\nu} \in \{0,1\}} \exp(t\lambda_{\vec{\nu}}) \langle 1 | \hat{P}^\dagger \hat{O} | \Theta_{\vec{\nu}}^R \rangle \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \hat{P} | Ness \rangle \\ &= \sum_{\vec{\nu} \in \{0,1\}} \exp(-2t\vec{\beta} \cdot \vec{\nu}) \chi_{1,\vec{\nu}} \chi_{2,\vec{\nu}}. \end{aligned} \quad (137)$$

El valor de Expectación de un observable físico general será

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle_{\hat{\rho}(t)} &= \sum_{\vec{\nu} \in \{0,1\}} \exp(-2t\vec{\beta} \cdot \vec{\nu}) \chi_{1,\vec{\nu}} \chi_{2,\vec{\nu}}, \\ \chi_{1,\vec{\nu}} &= \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \hat{P} | Ness \rangle, \\ \chi_{2,\vec{\nu}} &= \langle 1 | \hat{P}^\dagger \hat{O} | \Theta_{\vec{\nu}}^R \rangle. \end{aligned} \quad (138)$$

con esta expresión del valor de expectación de un observable \hat{O} , se puede extraer información sobre el sistema cadena y ambiente. éste valor de expectación es el que se usará para el cálculo de la magnetización como función del tiempo de esta sección, y para la fidelidad del apéndice B.

En el término exponencial $\exp(-2t\vec{\beta} \cdot \vec{\nu})$ en la ecuación (138), se puede observar que los baños externos (cuyo efecto era el de modificar la parte real de las tasas de decaimiento) producen un decaimiento exponencial. Como se estudia el caso en el cual el estado $|Ness\rangle$ es único, siempre se tiene $Re(\beta_i) > 0$ y, por lo tanto, para tiempos infinitos o suficientemente grandes el valor de expectación de \hat{O} tiende a un valor estacionario en el tiempo, al valor de expectación en el Ness. La parte imaginaria en las tasas de decaimiento da un término oscilatorio en (138), el cual, si se está en el caso de cadena aislada, en Tercera Cuantización todas las tasas de decaimiento son imaginarias puras y el valor de expectación de \hat{O} no tiende a un valor estacionario en el tiempo.

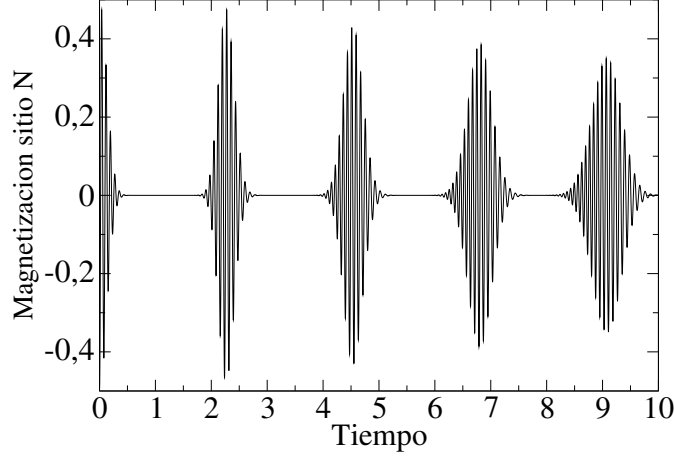


Figura 29: Magnetización del sitio N para una cadena PST en función del tiempo, con $h = 20$, $N = 30$ y baño de tipo $gamma = 0,0001$, baño mínimo.

7.2. Magnetización en Función del tiempo

Considerando estado inicial de la cadena el dado por

$$\hat{\rho}(0) = |c|^2 \hat{\sigma}_1^+ \hat{\rho}_{ness} \hat{\sigma}_1^-, \quad (139)$$

esto es, el caso 1. Se calcula los términos que aparecen en la ecuación (138) para el caso de $\hat{O} = \frac{1}{2}\sigma_i^z$, esto es, el observable \hat{O} es la magnetización del sitio i . Luego (138) es el valor de expectación de la magnetización en función del tiempo. Majorizando los operadores $\hat{\sigma}_1^+ = \omega_1 + i\omega_2$, $\hat{\sigma}_1^- = \omega_1 - i\omega_2$ mediante (54), y usando la expresión en Majoranas de $\hat{\sigma}_i^Z = -i\omega_{2i-1}\omega_{2i}$ y usando la ecuación (138), se obtiene la magnetización en función del tiempo t

$$M_i^Z(t) = \frac{-i}{8} |c|^2 \sum_{1 \leq l \leq 2N} \text{Exp}(-2t\beta_l) \chi(l), \quad (140)$$

donde

$$\chi(l) = [C_{L,1}^1(l) + iC_{L,1}^2(l)][C_{1,R}^{1,2i-1,2i}(l) - iC_{1,R}^{2,2i-1,2i}(l)]. \quad (141)$$

La expresión $\delta_{l,\vec{\nu}}$, ya se tuvo en cuenta en la suma de (140). Los coeficientes $C_{L,1}^i$ y $C_{1,R}^{i,j,k}$ se dan en el apéndice A. La constante c es tal que $\text{Tr}(\hat{\rho}(0)) = 1$, resulta dada por

$$|c|^2 = \frac{1}{\frac{1}{2} - M_{1,ness}^z}. \quad (142)$$

De esta forma para campos suficientemente altos, $|c|^2 \approx 1$, es decir la operación $\hat{\sigma}_1^+$ conserva la norma de $|N_{ess}\rangle$ para campos suficientemente altos.

7.2.1. Cadena PST

Consideramos el caso de cadena PST, en particular se obtiene la magnetización en función del tiempo, ecuación (140).

En la Figura 29 se muestra la magnetización del último spin en función del tiempo. Se observan varias reconstrucciones de la magnetización inicial, dadas por los diversos “ecos” en t . A los fines de discutir el comportamiento en función del tiempo introducimos las regiones dadas por $t \in [0, 1]$, $t \in [1, 3]$, $t \in [3, 5]$, $t \in$

	Mag-maxima	t
mag-1	0,47	0,04
mag-2	0,47	2,29
mag-3	0,43	4,52
mag-4	0,38	6,85
mag-5	0,35	9,09

Cuadro 9: Magnetización Máxima en el sitio N , para la Figura 29.

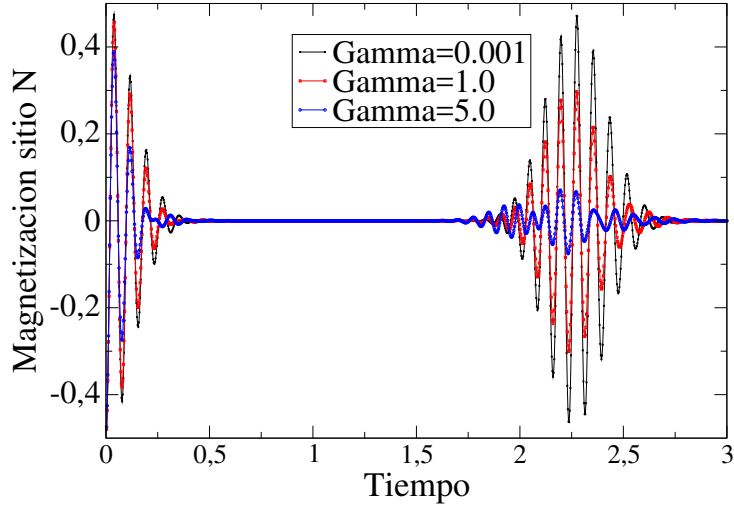


Figura 30: Magnetización en función del tiempo del sitio N , para una cadena PST con $h = 20$, $N = 30$, baño tipo gamma. Se grafican varias curvas para distintos valores de gamma.

$[5, 8]$ y $t \in [8, 10]$, y las llamamos regiones 1, 2, 3, 4, 5 respectivamente. En la región 1 se tiene una desmagnetización del sitio N , esto es, inicialmente el sitio N posee magnetización próxima al valor $-\frac{1}{2}$ pero para tiempos pequeños comienza a oscilar alrededor de cero hasta tomar el valor de cero en $t \approx 0,5$. Luego, en las regiones 2, 3, 4, 5 se observa una reconstrucción de la magnetización, esta reconstrucción se la llamará “eco”. En las regiones en donde se observan los ecos, son las regiones donde es posible transmitir estados, debido a la tendencia de reconstruir la magnetización inicial, es decir, es la región temporal en donde la información codificada inicialmente en el sitio 1 tiene posibilidad de ser reconstruida en el sitio N .

En el Cuadro 9 se dan los valores máximos de la magnetización (denotado por mag- i) en cada región i . Se puede observar el decaimiento del valor mag- i conforme t aumenta, debido a la influencia del baño externo.

El primer eco ocurre en una región alrededor del valor 2,29. Para el caso de la cadena aislada, ver la Figura 9, la reconstrucción del estado inicial en el sitio N o el tiempo de mayor fidelidad, ocurre en $t = 1,57$. La discrepancia de estos dos valores podría deberse a que en la Figura 29 el baño no es cero sino que mínimo. Por último se pueden medir las distancias temporales de los máximos de cada eco y se obtienen aproximadamente las mismas diferencias entre sí, de esta forma la magnetización se comporta como un paquete de onda que viaja por la cadena con velocidad de grupo constante, dicho de otro modo la magnetización es una onda con velocidad de grupo constante que se va amortiguando en t debido al baño térmico.

Se muestra en la Figura 30 la magnetización en función del tiempo para el sitio

	Mag-maxima	t	gamma
mag-1	0,47	0,04	0,0001
mag-2	0,47	2,28	0,0001
mag-1	0,46	0,04	1,0
mag-2	0,29	2,28	1,0
mag-1	0,39	0,04	5,0
mag-2	0,07	2.24	5.0

Cuadro 10: Magnetización Máxima en el sitio N , para la figura 30.

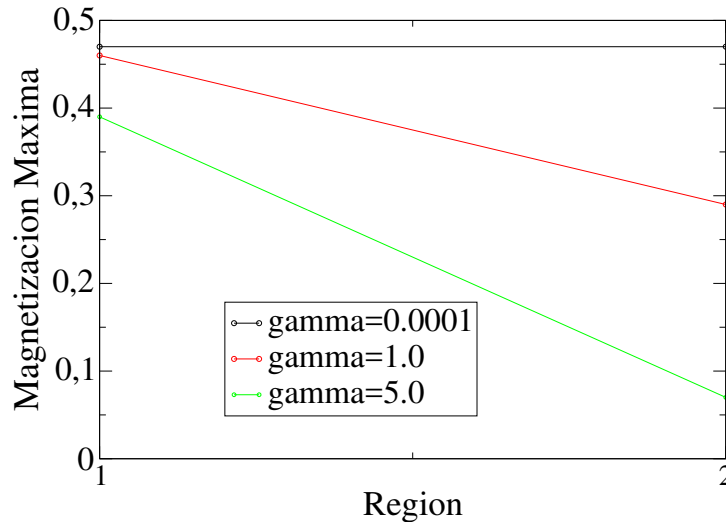


Figura 31: Magnetización máxima en las regiones 1 y 2 para distintos gamma según Figura 30. Se toman los valores de Mag-máxima para mag-1 y mag-2, representados por la Regiones 1,2 en función de varios gamma.

N con $N = 30$, $h = 20$ y baños de tipo gamma. Se muestran distintas curvas para distintos valores de gamma. En esta figura solo se consideran las regiones 1 y 2. En el Cuadro 10 se muestran los valores de las magnetizaciones máximas en las regiones 1 y 2, dadas por mag-1 y mag-2, observando así que existe un mayor decaimiento de la magnetización máxima en N a medida que aumenta gamma, mientras que el tiempo de máxima magnetización permanece constante. La diferencia en los valores de Mag-máxima para mag-1 y mag-2 es mayor a medida que gamma aumenta, es decir un incremento del valor de gamma aumenta el decaimiento de la magnetización en el tiempo. Esto último es resumido en la Figura 31.

Se muestra en la Figura 32 la magnetización en función del tiempo para el sitio N con $N = 30$, $h = 20$ y baños de tipo s. Se muestran distintas curvas para distintos valores de s. En esta Figura solo se consideran las regiones 1 y 2. En el Cuadro 11 se muestran los valores de las magnetizaciones máximas en las regiones 1 y 2, dadas por mag-1 y mag-2, para distintos valores de s. Se observa un decaimiento de la magnetización máxima en la región 1 a medida que s tiende al valor 0, pero no se observa una disminución del valor de la magnetización máxima en la región 2 respecto de la 1. Por lo tanto los efectos del baño de tipo s son “instantáneos” comparados con el de tipo gamma, que producen decaimientos en el tiempo. La Figura 33 resume esto último. Recordemos que a medida que el valor s tiende a cero la pseudo-temperatura definida por (108), tiende a infinito y cuando s vale

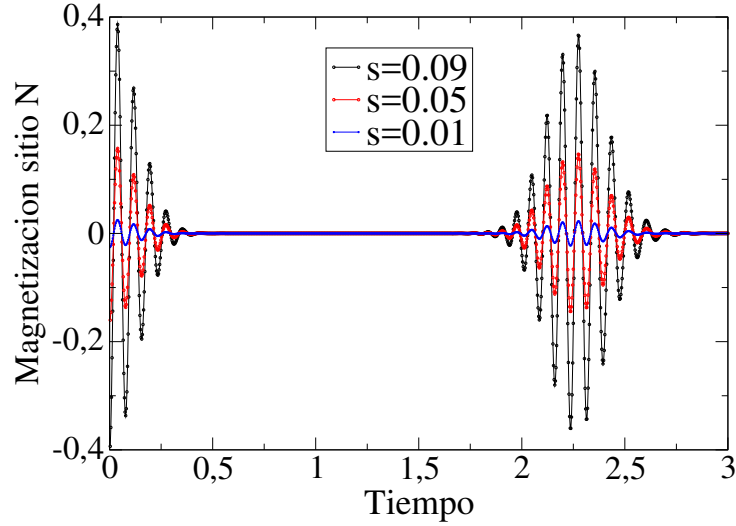


Figura 32: Magnetización en función del tiempo del sitio N , para una cadena PST con $h = 20$, $N = 30$, baño tipo s . Se grafican curvas para distintos s .

	Mag-maxima	t	s
mag-1	0,39	0,04	0,09
mag-2	0,37	2,28	0,09
mag-1	0,15	0,04	0,05
mag-2	0,14	2,28	0,05
mag-1	0,02	0,04	0,01
mag-2	0,02	2,24	0,01

Cuadro 11: Magnetización Máxima en el sitio N , para la Figura 32.

cero la magnetización será cero para todo t .

7.2.2. Cadena BC

Consideremos ahora el caso de cadena BC, y seguimos el mismo procedimiento descrito anteriormente para la cadena PST.

En la Figura 34 se muestra la magnetización del sitio N en función de t . Análogamente al caso de cadena PST se aprecia para cadena BC la misma descripción, esto es, existen regiones en t en el cual la magnetización del sistema en el sitio N se reconstruye. Definiendo estas regiones como los intervalos $t \in [0, 10]$, $t \in [10, 35]$, $t \in [35, 60]$ y $t \in [60, 90]$, llamados regiones 1, 2, 3 y 4, se puede observar que en la región 1 se tiene una desmagnetización del estado inicial en el sitio N , de la

	Mag-máxima	t
mag-1	0,5	0,12
mag-2	0,46	25,37
mag-3	0,38	50,6
mag-4	0,30	78,9

Cuadro 12: Magnetización Máxima en el sitio N , para la Figura 34.

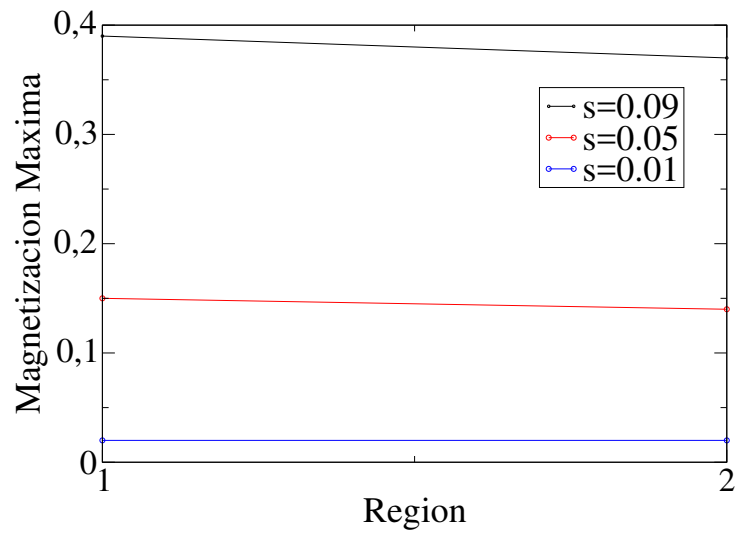


Figura 33: Magnetización máxima en las regiones 1,2 para distintos s , según la Figura 32. Se grafican los valores de Mag-máxima para los mag-1, mag-2 representados por las regiones 1 y 2 en función de varios valores del baño de tipo s .

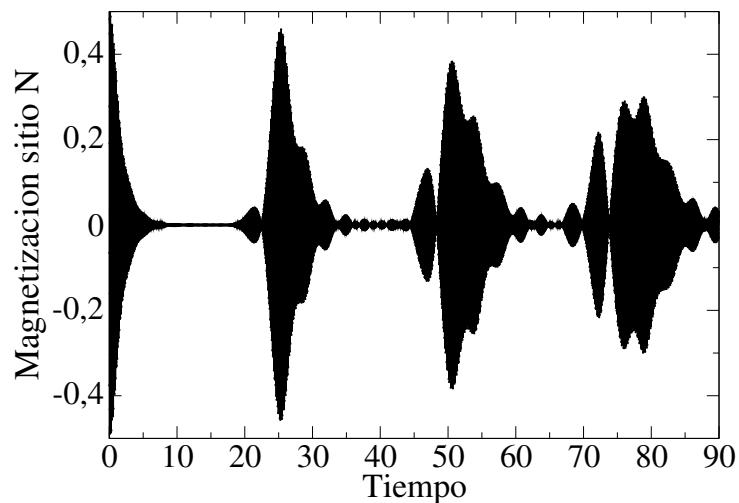


Figura 34: Magnetización del sitio N para una cadena BC en función del tiempo con $h = 20$, $N = 30$ y baño de tipo γ , con $\gamma = 0,0001$ o baño mínimo.

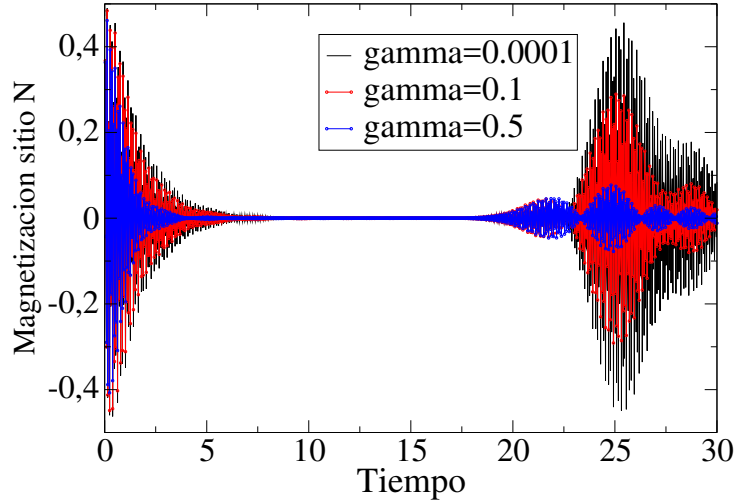


Figura 35: Magnetización del sitio N para una cadena BC en función del tiempo con $h = 20$, $N = 30$ y baño de tipo gamma. Se grafican varias curvas para distintos valores de gamma.

	Mag-maxima	t	gamma
mag-1	0,48	0,12	0,0001
mag-2	0,45	25,5	0,0001
mag-1	0,48	0,12	1,0
mag-2	0,28	25,5	1,0
mag-1	0,46	0,12	5,0
mag-2	0,08	24,8	5,0

Cuadro 13: Magnetización Máxima en el sitio N , para la Figura 35.

misma forma como ocurren en la cadena PST. En las regiones 2, 3 y 4 ocurren los “ecos”, estos son reconstrucciones de la magnetización inicial, dada por oscilaciones del valor de la magnetización. En las regiones donde ocurren los “ecos”, son las regiones en donde se esperaría obtener fidelidades relativamente altas, debido a que son regiones temporales donde la información inicial codificada en la cadena se reconstruye. En el Cuadro 12 se dan los valores de la magnetización máxima (Mag-máxima) y tiempos t con respecto a cada región denotada por mag- i con $i = 1, 2, 3, 4$. Se puede apreciar la diferencia de un orden de magnitud entre los tiempos de máxima magnetización con respecto a la cadena PST, Figura 29. También se aprecia los mismos órdenes de magnitud en el tiempo de los “ecos” de la Figura 34 con respecto a los tiempos que ocurre la fidelidad máxima para la cadena BC aislada, Figura 11.

En la Figura 35 se muestra la magnetización del sitio N en función de t , para distintos valores de gamma. Se estudian de forma análoga al caso de la cadena PST sólo las regiones 1 y 2, esto es tomar como límite de tiempo a $t = 30$. En el Cuadro 13 se detallan los valores de la magnetización máxima (Mag-máxima) y el tiempo t , en función del gamma para las regiones 1 y 2 denotadas por mag-1 y mag-2 respectivamente. Se puede apreciar que a medida que aumenta el valor gamma, la magnetización máxima en la región 2 comienza a decaer mas. Esta magnetización decae de igual forma que en el caso de cadena PST, Figura 30. El tiempo en cual ocurre la máxima magnetización en el Cuadro 13, permanece constante en gamma, exceptuando el último valor, cuando gamma vale 5,0. Esta

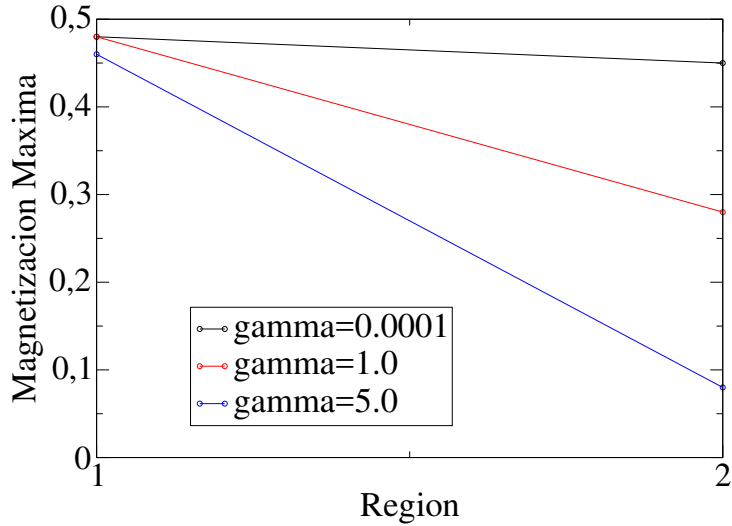


Figura 36: Magnetización máxima en las regiones 1 y 2 para distintos gamma, según Figura 35.

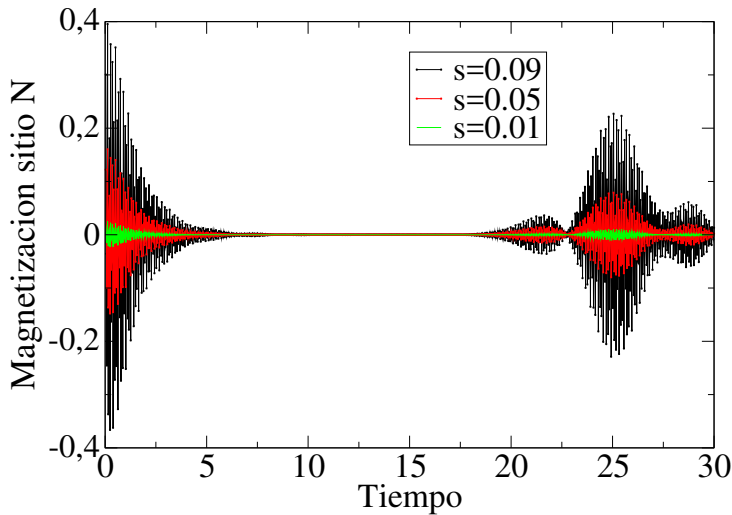


Figura 37: Magnetización del sitio N para una cadena BC en función del tiempo con $h = 20$, $N = 30$ y baño de tipo s . Se grafican varias curvas para distintos valores de s .

última observación puede ser debido a una falta de precisión en la cantidad de puntos que se grafican en la Figura 35, esto es, una mayor partición del intervalo temporal mejoraría la resolución. Por último la Figura 36 detalla en decaimiento en gamma para los valores de Mag-máxima en las regiones 1 y 2 para distintos valores de gamma.

En la Figura 37 se muestra la magnetización del sitio N en función del tiempo en las regiones 1 y 2 para varios valores de s . En el Cuadro 14 se detallan los valores de la magnetización máxima (Mag-máxima) de la Figura 37 y los valores de tiempo en que ocurren, para distintos valores de s en las regiones 1 y 2 denotadas por mag-1 y mag-2 respectivamente. La magnetización máxima decae conforme s tiende a cero, el decaimiento de la magnetización máxima para las regiones 1 y 2 son distintas comparadas con la cadena PST, Figura 32. Es decir la pendiente de decaimiento en la Figura 38 es mayor, esto puede deberse a que el primer “eco” de la magnetización en la cadena BC ocurre para tiempos de 1 orden mayor que en el caso de la cadena PST. Por último se observa que a medida que s tiende a cero, el valor de la magnetización del sitio N en función de t tiende a cero conforme t

	Mag-maxima	t	s
mag-1	0,39	0,12	0,09
mag-2	0,23	25,1	0,09
mag-1	0,16	0,12	0,05
mag-2	0,08	25,1	0,05
mag-1	0,02	0,12	0,01
mag-2	0,01	25,1	0,01

Cuadro 14: Magnetización Máxima en el sitio N , para la Figura 37

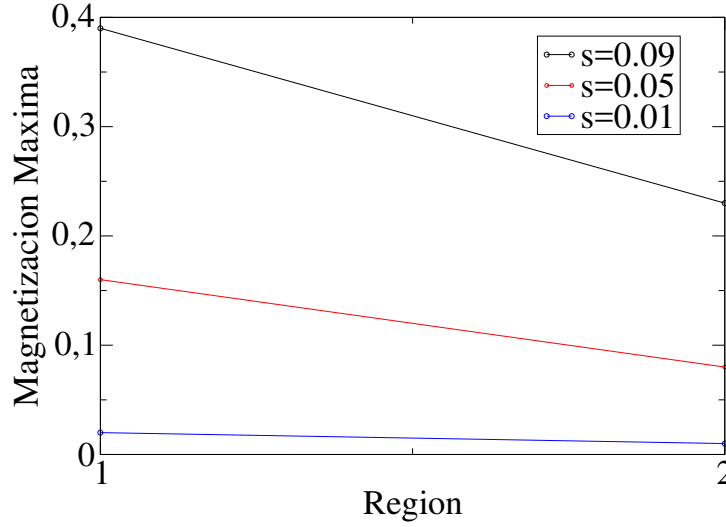


Figura 38: Magnetización máxima en las regiones 1,2 para distintos s , según Figura 37.

tiende a infinito.

En la Figura 39 se muestra la magnetización máxima de los tres primeros “ecos” de las cadenas PST y BC según las Figuras 30 y 34, el cuarto “eco” de la PST no se incluye debido a que no se lo puede comparar con la BC puesto que para los tiempos elegidos el cuarto “eco” de la cadena BC ocurre en tiempos mayores a 90. Se puede apreciar en la Figura 39 que la magnetización máxima en la cadena BC decae mas que para la PST, puede ser debido a que los “ecos” en la BC son para tiempos de un orden mayor que para los tiempos de los “ecos” en la PST.

7.3. Definición del Protocolo II

7.3.1. Protocolo II para el caso 1

Recordemos que llamamos el caso 1 al dado por

$$\hat{\rho}(0) = \hat{P}\hat{\rho}_{ness}\hat{P}^\dagger \quad (143)$$

donde

$$\hat{P} = c\sigma_1^+. \quad (144)$$

Con lo estudiado anteriormente se llega a la conclusión de que existe un tiempo en el cual existe la posibilidad de obtener fidelidades relativamente altas, este tiempo de máxima fidelidad podría ser el tiempo en el cual se obtiene la magnetización

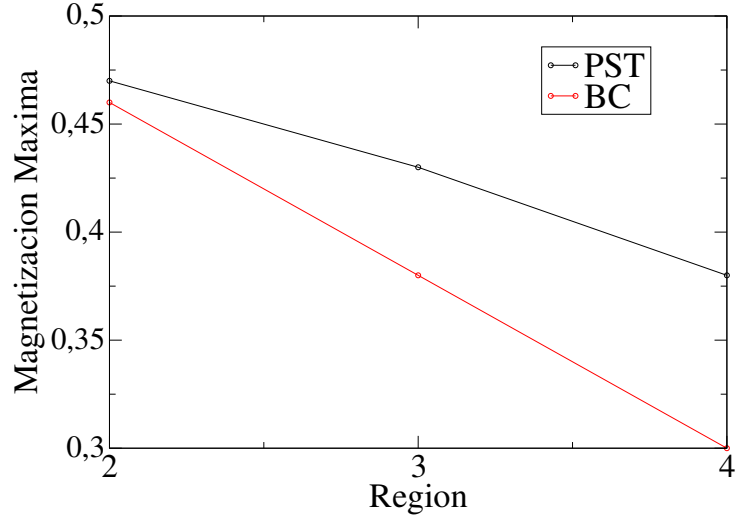


Figura 39: Magnetización máxima en las regiones de los “ecos” para las cadenas PST y BC de las Figuras 30 y 34.

máxima en los “ecos”. Pero, para poder calcular la fidelidad al tiempo t , es necesario poder determinar las matriz densidad reducida del primer spin al tiempo inicial y la matriz densidad del último spin al tiempo t , denotadas por $\hat{\rho}_1(0)$ y $\hat{\rho}_N(t)$ respectivamente. Se enuncia el procedimiento a usar, llamado Protocolo II que será de transmisión y útil en Tercera Cuantización.

1. Asumiendo que el estado $|N_{ess}\rangle$ es único, se prepara la cadena de spines en el estado $\hat{\rho}_{ness}$.
2. Se codifica en la cadena el estado inicial definido por $\hat{\rho}(0) = |c|^2 \sigma_1^+ \hat{\rho}_{ness} \sigma_1^-$. Luego $\hat{\rho}(0)$ será de traza uno si

$$|c|^2 = \frac{1}{\frac{1}{2} - M_{1_{ness}}^z}. \quad (145)$$

3. Se obtiene $\hat{\rho}(t)$ dada por

$$\hat{\rho}(t) = e^{t\hat{L}_{iou}} \hat{\rho}(0).$$

4. La fidelidad al tiempo t viene dada por la ecuación

$$F(t) = \sqrt{\text{Tr}(\hat{\rho}_1(0)\hat{\rho}_N(t))}, \quad (146)$$

donde $\hat{\rho}_1(0)$ es la matriz densidad reducida del primer spin al tiempo inicial y $\hat{\rho}_N(t)$ es la matriz densidad reducida del último spin a tiempo t .

Para poder determinar las matrices $\hat{\rho}_1(0)$ y $\hat{\rho}_N(t)$, se necesita expresarlas en términos de la base de matrices de Pauli cuyas componentes dependen del valor de expectación de cada matriz de Pauli en la matriz densidad de todo el espacio, esto es, [24]

$$\hat{\rho}_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^3 q_\alpha^i \sigma^\alpha, \quad (147)$$

donde σ^α son las matrices de Pauli, con el caso de $\alpha = 0$ dado por la identidad 2×2 . La constante q_α^i es determinada por

$$q_\alpha^i = \text{Tr}(\hat{\sigma}_i^\alpha \hat{\rho}) = \langle \hat{\sigma}_i^\alpha \rangle_{\hat{\rho}}, \quad (148)$$

donde $\hat{\sigma}_i^\alpha$ es la matriz de Pauli α para el sitio i , estas son $\hat{\sigma}_i^x, \hat{\sigma}_i^y, \hat{\sigma}_i^z$. Particularmente como $\hat{\rho}_i$ es la matriz densidad reducida del sitio i , su traza vale uno, luego $q_0^i = 1$. Escribiendo $\hat{\rho}_1(0)$ y $\hat{\rho}_N(t)$ en términos de (147)

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1(0) &= \frac{1}{2}(\mathbb{1}_{2 \times 2} + q_1^1 \sigma^x + q_2^1 \sigma^y + q_3^1 \sigma^z), \\ \hat{\rho}_N(t) &= \frac{1}{2}(\mathbb{1}_{2 \times 2} + q_1^N(t) \sigma^x + q_2^N(t) \sigma^y + q_3^N(t) \sigma^z). \end{aligned} \quad (149)$$

Usando la ecuación (149) y (146), desarrollando a su vez algebraicamente la traza, se obtiene

$$F(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(1 + 4M_1^z(0)M_N^z(t)) + (\langle \sigma_1^x \rangle_{\hat{\rho}(0)} \langle \sigma_N^x \rangle_{\hat{\rho}(t)} + \langle \sigma_1^y \rangle_{\hat{\rho}(0)} \langle \sigma_N^y \rangle_{\hat{\rho}(t)})}, \quad (150)$$

observando así la influencia de la magnetización del sitio N al tiempo t , dada por $M_N^z(t)$, y la magnetización del sitio 1 al tiempo inicial $M_1^z(0)$, en la fidelidad. Esto muestra porque un régimen en el cual la magnetización tiene “ecos” es equivalente a un régimen de transmisión con alta fidelidad. Pero es importante notar que existe una complicación algebraica para el cálculo de las cantidades $\langle \sigma_N^x \rangle_{\hat{\rho}(t)}$ y $\langle \sigma_N^y \rangle_{\hat{\rho}(t)}$, debido a que la Majorización de los operadores σ_N^x y σ_N^y es algebraicamente complicada. Debido a esta complicación no se implementó éste cálculo en el presente trabajo.

7.3.2. Protocolo II para el caso 2

Recordemos que llamamos el caso 2 al dado por

$$\hat{\rho}(0) = \hat{P} \hat{\rho}_{ness} \hat{P}^\dagger \quad (151)$$

donde

$$\hat{P} = c' \sigma_1^+ \sigma_2^+. \quad (152)$$

Análogamente al Protocolo II cuando el estado a transmitir se codifica en un único spin, se puede definir el Protocolo II de tipo 2, dado por:

1. Asumiendo que el estado $|N_{ess}\rangle$ es único, se inicia la cadena de spines en el estado $\hat{\rho}_{ness}$.
2. Se codifica en la cadena el estado inicial definido por $\hat{\rho}(0) = |c'|^2 \sigma_1^+ \sigma_2^+ \hat{\rho}_{ness} \sigma_2^- \sigma_1^-$, codificando así dos spines en lugar de uno. Luego $\hat{\rho}(0)$ será de traza uno si

$$|c'|^2 = \frac{1}{\frac{1}{2} - M_{1_{ness}}^z - M_{2_{ness}}^z + 2S_{1,2_{ness}}^{z,z}}, \quad (153)$$

el cual usando las figuras 24 y 28, $|c'|^2 \approx 1$ para campos suficientemente altos.

3. Se obtiene $\hat{\rho}(t)$ dada por

$$\hat{\rho}(t) = e^{t\hat{L}_{iou}} \hat{\rho}(0).$$

4. La fidelidad al tiempo t viene dada por la ecuación

$$F(t) = \sqrt{\text{Tr}(\hat{\rho}_{1,2}(0)\hat{\rho}_{N-1,N}(t))}, \quad (154)$$

donde $\hat{\rho}_{1,2}(0)$ es la matriz densidad reducida en el primer y segundo spin al tiempo inicial y $\hat{\rho}_{N-1,N}(t)$ es la matriz densidad reducida en el $N-1$ y N spin al tiempo t . Ambas matrices son 4×4 .

Para determinar las matrices densidad reducida de dos sitios $\hat{\rho}_{1,2}(0)$ y $\hat{\rho}_{N-1,N}(t)$, se utilizará lo anteriormente descrito para densidad de matrices reducida de un sitio pero adaptada para el caso de dos sitios, [24]

$$\hat{\rho}_{i,i+1} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta=0}^3 P_{\alpha,\beta} \hat{\sigma}_i^\alpha \otimes \hat{\sigma}_{i+1}^\beta, \quad (155)$$

donde $P_{\alpha,\beta} = \langle \hat{\sigma}_i^\alpha \hat{\sigma}_j^\beta \rangle_{\hat{\rho}}$. Desarrollando la ecuación (155) de forma algebraica, se obtiene

$$\hat{\rho}_{i,i+1} = \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & 0 & \rho_{1,4} \\ 0 & \rho_{2,2} & \rho_{2,3} & 0 \\ 0 & \rho_{3,2} & \rho_{3,3} & 0 \\ \rho_{4,1} & 0 & 0 & \rho_{4,4} \end{pmatrix}. \quad (156)$$

donde las componentes diagonales están dadas por

$$\begin{aligned} \rho_{1,1} &= \frac{1}{2}M_{i+1}^z + \frac{1}{2}M_i^z + S_{i,i+1}^{z,z} + \frac{1}{4} \\ \rho_{2,2} &= -\frac{1}{2}M_{i+1}^z + \frac{1}{2}M_i^z - S_{i,i+1}^{z,z} + \frac{1}{4} \\ \rho_{3,3} &= \frac{1}{2}M_{i+1}^z - \frac{1}{2}M_i^z - S_{i,i+1}^{z,z} + \frac{1}{4} \\ \rho_{4,4} &= -\frac{1}{2}M_{i+1}^z - \frac{1}{2}M_i^z + S_{i,i+1}^{z,z} + \frac{1}{4}, \end{aligned} \quad (157)$$

y las componentes no diagonales por

$$\begin{aligned} \rho_{2,3} &= S_{i,i+1}^{x,x} + S_{i,i+1}^{y,y} + iS_{i,i+1}^{x,y} - iS_{i,i+1}^{y,x} \\ \rho_{1,4} &= S_{i,i+1}^{x,x} - S_{i,i+1}^{y,y} - iS_{i,i+1}^{x,y} - iS_{i,i+1}^{y,x}, \end{aligned} \quad (158)$$

es decir las componentes de $\hat{\rho}_{i,i+1}$ dependen de las funciones de correlación de spin de 2 sitios dadas por (126).

Dado que $\hat{\rho}_{i,i+1}$ es hermítica, luego $\rho_{1,4}^* = \rho_{4,1}$ y $\rho_{2,3}^* = \rho_{3,2}$. Por lo tanto sólo se necesitan determinar 6 componentes para obtener de forma explícita a $\hat{\rho}_{i,i+1}$ dados por (157) y (158). ¿qué sucede con las restantes componentes $\rho_{1,2}$, $\rho_{1,3}$, $\rho_{2,1}$, $\rho_{2,4}$, $\rho_{3,1}$, $\rho_{3,4}$, $\rho_{4,2}$ y $\rho_{4,3}$? primero por hermiticidad de $\hat{\rho}_{i,i+1}$ sólo hay que determinar cuatro componentes $\rho_{1,2}$, $\rho_{1,3}$, $\rho_{2,4}$ y $\rho_{3,4}$, pero en este tipo de codificación dada por $\hat{P} = c' \hat{\sigma}_1^+ \hat{\sigma}_2^+$ éstas cuatro componentes son nulas. El apéndice A puede ayudar a entender esto pero, básicamente, la cuestión está en que éstas componentes nulas dependen de sumas algebraicas de cuatro cantidades dadas por los valores de expectación $\langle \sigma_i^x \rangle_\rho$, $\langle \sigma_i^y \rangle_\rho$, $\langle \sigma_i^x \sigma_{i+1}^z \rangle_\rho$ y $\langle \sigma_i^y \sigma_{i+1}^z \rangle_\rho$, usando la ecuación (138) se determinan sus valores. Pero los observables $\hat{\sigma}_i^x$, $\hat{\sigma}_i^y$, $\hat{\sigma}_i^x \hat{\sigma}_{i+1}^z$ y $\hat{\sigma}_i^y \hat{\sigma}_{i+1}^z$ se Majorizan con un número impar de operadores Majorana, es decir, usando (54) el número

de operadores Majorana que describen a estos cuatro observables es impar. Con lo cual, observando el término $\chi_{2,\vec{\nu}}$ en (138), se obtiene de esa contracción un número impar de excitaciones de tipo $\vec{\nu}$, dado que el operador \hat{P} es par en números de operadores de Majorana, por (167). Pero la cantidad $\chi_{1,\vec{\nu}}$ en (138) da un número par de excitaciones de tipo $\vec{\nu}$, por lo tanto la suma sobre $\vec{\nu}$ en (138) da 0. Luego las componentes $\rho_{1,2}$, $\rho_{1,3}$, $\rho_{2,4}$ y $\rho_{3,4}$ son nulas.

En conclusión, utilizando las ecuaciones (156), (157) y (158) se puede obtener las matrices densidad reducida $\hat{\rho}_{1,2}(0)$ y $\hat{\rho}_{N-1,N}(t)$ requeridas para calcular por medio de la ecuación (154) la fidelidad al tiempo t . En este trabajo no se calculará ésta fidelidad, solamente se dará la expresión general obtenida. Lo importante a destacar es que esta expresión de fidelidad dada por el Protocolo II de tipo 2 o la ecuación (154), es simple de calcular desde el punto de vista algebraico comparada con la expresión de fidelidad obtenida en el Procolo II de tipo I, y también la expresión de la fidelidad obtenida en el Protocolo I.

8. Conclusión y Perspectivas a futuro

El Protocolo I, definido por [1] como el mas simple debido a que sólo codifica un spin y trabaja en el espacio de 1-excitación, es fácil de implementar para cadenas de spines cerradas, en particular para las de tipo PST y BC usadas en este trabajo. En el caso de Tercera Cuantización éste protocolo presenta varias complicaciones algebraicas en cuanto a la Majorización del estado inicial y observables físicos involucrados.

Usando que el estado $|N_{ess}\rangle$ es el estado estacionario de no-equilibrio en Tercera Cuantización y estudiando los valores de las funciones de correlación de spin sobre él, se concluye que el $|N_{ess}\rangle$ adquiere ciertas similitudes, en cuanto a magnetización y funciones de correlación de spin respecta, con el estado inicial (estado de 0-excitación) definido por el Protocolo I. A su vez resulta relativamente simple de calcular observables físicos en el estado $|N_{ess}\rangle$ en Tercera Cuantización, como se muestra en el apéndice A. Por lo tanto en base a éstas últimas conclusiones se define el Protocolo II, que se basa en la codificación de información que se pretenda transmitir a partir del estado $|N_{ess}\rangle$, el cual es importante que sea único.

Los Protocolos II definidos difieren solamente en el tipo de codificación inicial dada por el operador \hat{P} . Para el caso 1 se estudia la magnetización en función del tiempo, del cual se obtienen los llamados “ecos”, concluyéndose así sobre la posibilidad de obtener transmisión de estados bajo éste tipo de Protocolo. Tal conclusión fue respaldada con el desarrollo de una ecuación para la fidelidad dada por (150), en el cual se observo que la magnetización en el tiempo del sitio N está involucrada. Se tiene mas tarde la complicación algebraica de obtener el valor de expectación en el tiempo de los operadores $\hat{\sigma}_N^x$ y $\hat{\sigma}_N^y$, debido al gran número de operadores Majorana involucrados.

La solución a esto último está en la definición de la codificación dada por el caso 2, en el cual codificando dos spines sucesivos, se tiene una Majorización mas simple de los valores de expectación de los observables involucrados. A futuro se pretenden calcular la fidelidad obtenida a partir de este tipo de codificación, dada por (154), calculando todas las funciones de correlación de spin de dos sitios involucradas.

En cuanto a la expresión de la magnetización en el tiempo (140) es posible calcular mas adelante leyes de escaleo en función de las variables de baño γ y s , al número de spines N y en función del tiempo en el cual ocurre la máxima magnetización en los “ecos” definido por t_{eco} .

Resulta interesante poder definir otros tipos de baños aparte de los baños a los bordes, es decir, operadores de Lindblad que involucren a mas de dos spines o a todos los spines de la cadena, siempre cumplan la condición de linealidad en los operadores Majorana (52).

Por último calcular todas las contracciones involucradas en éste trabajo mediante el uso del teorema de Wick. De esta manera observar la posibilidad de simplificar los cálculos y poder, en general, realizar contracciones mas complejas de operadores Majorana.

9. Apéndice A: Coeficientes de los Valores de Expectación

9.1. Introducción

La ecuación (91)

$$\hat{\vec{b}} = \mathbb{V} \cdot \hat{\vec{a}}, \quad (159)$$

donde

$$\hat{\vec{b}} = (\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{2N}, \hat{b}'_1, \dots, \hat{b}'_{2N}).$$

y

$$\hat{\vec{a}} = (\hat{a}_{1,1}, \dots, \hat{a}_{1,2N}, \hat{a}_{2,1}, \dots, \hat{a}_{2,2N}).$$

La inversa de la matriz \mathbb{V} dada por (86), tiene la forma:

$$\mathbb{V}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\mathbb{P}^{-1})^T & \mathbb{S}^T \\ i(\mathbb{P}^{-1})^T & -i\mathbb{S}'^T \end{pmatrix}. \quad (160)$$

Puesto que se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \cdot \mathbb{V}^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{S} & -i\mathbb{S}' \\ \mathbb{P}^{-1} & i\mathbb{P}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (\mathbb{P}^{-1})^T & \mathbb{S}^T \\ i(\mathbb{P}^{-1})^T & -i\mathbb{S}'^T \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [\mathbb{S} + \mathbb{S}'](\mathbb{P}^{-1})^T & \mathbb{S} \cdot \mathbb{S}^T - \mathbb{S}' \cdot (\mathbb{S}')^T \\ \mathbb{P}^{-1} [\mathbb{P}^{-1T} - \mathbb{P}^{-1T}] & \mathbb{P}^{-1} [\mathbb{S}^T + \mathbb{S}'^T] \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} [\mathbb{S} + \mathbb{S}'](\mathbb{P}^{-1})^T & \mathbb{S} \cdot \mathbb{S}^T - \mathbb{S}' \cdot (\mathbb{S}')^T \\ \mathbb{0}_{2N} & \mathbb{P}^{-1} [\mathbb{S}^T + \mathbb{S}'^T] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (161)$$

donde se multiplica por bloques de $2N \times 2N$, y $\mathbb{0}_{2N}$ es la matriz de $2N \times 2N$ cuyas componentes son todas nulas. Se tiene que las componentes diagonales son la transpuesta de la otra, es decir,

$$[\mathbb{S} + \mathbb{S}'](\mathbb{P}^{-1})^T = (\mathbb{P}^{-1} [\mathbb{S}^T + \mathbb{S}'^T])^T, \quad (162)$$

usando que la matriz \mathbb{Z} es antisimétrica, junto con las ecuaciones (87) y (88), se tiene

$$\begin{aligned} [\mathbb{S} + \mathbb{S}'](\mathbb{P}^{-1})^T &= \mathbb{P}^T \cdot [(\mathbb{1}_{2N} - 4i\mathbb{Z}) + (\mathbb{1}_{2N} + 4i\mathbb{Z})] \cdot (\mathbb{P}^{-1})^T \\ &= \mathbb{P}^T (2\mathbb{1}_{2N}) (\mathbb{P}^{-1})^T \\ &= 2\mathbb{1}_{2N}. \end{aligned} \quad (163)$$

Usando la ecuación (162) y como la transpuesta de la identidad es la identidad, se obtiene $\mathbb{P}^{-1} [\mathbb{S}^T + \mathbb{S}'^T] = 2\mathbb{1}_{2N}$. Para determinar el segundo bloque $2N \times 2N$ de la ecuación (161), se usa que a matriz \mathbb{Z} es antisimétrica, junto con las ecuaciones (87) y (88)

$$\begin{aligned} \mathbb{S}.\mathbb{S}^T - \mathbb{S}^{\dagger}.\mathbb{S}^{\dagger T} &= \mathbb{P}^T.(1_{2N} - 4i\mathbb{Z}).(1_{2N} + 4i\mathbb{Z}).\mathbb{P} - \mathbb{P}^T.(1_{2N} + 4i\mathbb{Z}).(1_{2N} - 4i\mathbb{Z}).\mathbb{P} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (164)$$

Usando las ecuaciones (162), (163) y (164), la ecuación (161) queda como

$$\begin{aligned} \mathbb{V}.\mathbb{V}^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\mathbb{1}_{2N} & \mathbb{0}_{2N} \\ \mathbb{0}_{2N} & 2\mathbb{1}_{2N} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2N} & \mathbb{0}_{2N} \\ \mathbb{0}_{2N} & \mathbb{1}_{2N} \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{1}_{4N}. \end{aligned} \quad (165)$$

Demostrando esto último que la matriz dada por la ecuación (160) es la inversa de la matriz \mathbb{V} .

Despejando a \hat{a} en la ecuación (159), se obtiene

$$\hat{a}_{1,j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\mu=1}^{2N} (\mathbb{P}_{j,\mu}^{-1T} \hat{b}_{\mu} + \mathbb{S}_{j,\mu}^T \hat{b}_{\mu}^{\dagger}). \quad (166)$$

Esta ecuación es de suma importancia debido a que por medio de ésta se conectan los operadores de spin del sitio i con los operadores \hat{b}_{μ} , es decir, se pueden escribir a los observables físicos relevantes como una combinación lineal de operadores \hat{b}_{μ} y \hat{b}_{μ}^{\dagger} o Modos Maestros Normales (NMM).

Se observa que los operadores de spin en términos de Majoranas son:

$$\begin{aligned} \sigma_i^z &= -i\omega_{2i-1}\omega_{2i} \\ \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x &= -i\omega_{2i}\omega_{2i+1} \\ \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y &= i\omega_{2i-1}\omega_{2i+2} \\ \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y &= -i\omega_{2i}\omega_{2i+2} \\ \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x &= i\omega_{2i-1}\omega_{2i+1}. \end{aligned} \quad (167)$$

Donde éstas igualdades se obtienen utilizando la ecuación (54), junto con algunas propiedades del producto vectorial y multiplicación de matrices de Pauli 2×2 .

Las cantidades a calcular serán valores de expectación de productos operadores de la forma (167), estos serán valores de expectación de productos de operadores de Majorana en el $|Ness\rangle$ o excitaciones dadas por la ecuación (98), llamaremos a éstas cantidades como contracciones o coeficientes C.

9.2. Coeficientes C

El procedimiento de cálculo para cualquier coeficiente C es el mismo. Por lo tanto se calculan en detalle los coeficientes $C_{1,1}^{i,j}$ y $C_{L,1}^i$ que son los mas simples.

La cuestión principal radica en como expresar los operadores de spin en términos de excitaciones de tipo \hat{b}_{μ} . Para esto se usa la multiplicación por izquierda $\hat{\omega}_j^L$ definida en la ecuación (60) y se la aplica al $|Ness\rangle$

$$\begin{aligned} \omega_j |Ness\rangle &= \hat{\omega}_j^L |Ness\rangle \\ &= (\hat{c}_j + \hat{c}_j^{\dagger}) |Ness\rangle \\ &= \sqrt{2} \hat{a}_{1,j} |Ness\rangle, \end{aligned} \quad (168)$$

donde se utiliza la ecuación (72) para obtener la última igualdad. Escribiendo ahora el operador $\hat{a}_{1,j}$ en términos de los \hat{b}_μ mediante la ecuación (166), se obtiene en (168)

$$\begin{aligned}\omega_j |Ness\rangle &= \sqrt{2} \hat{a}_{1,j} |Ness\rangle \\ &= \sum_{\mu=1}^{2N} (\mathbb{P}_{j,\mu}^{-1T} \hat{b}_\mu + \mathbb{S}_{j,\mu}^T \hat{b}_\mu^i) |Ness\rangle .\end{aligned}\quad (169)$$

Dado que $\hat{b}_\mu |Ness\rangle = 0$, lo anterior se escribe como

$$\omega_j |Ness\rangle = \sum_{\mu=1}^{2N} \mathbb{S}_{j,\mu}^T \hat{b}_\mu^i |Ness\rangle .\quad (170)$$

Si se desea calcular la contracción $\langle 1 | \omega_j |Ness\rangle$, esta será nula. Esto se puede demostrar usando que $\langle 1 | \hat{b}_\mu^i = 0$ junto con la ecuación (170). Por lo tanto una conclusión principal es: para que cualquier contracción no sea nula se debe poseer un número par de operadores \hat{b}_μ involucrados en dicha contracción y a su vez que el número de operadores de tipo \hat{b}_μ sea igual al número de operadores de tipo \hat{b}_μ^i , de lo contrario se estará contrayendo estados de distintas excitaciones NMM y por ecuación (99) ésta será nula.

9.2.1. Para los Valores de expectación en el Ness

En la sección de funciones de correlación en el $|Ness\rangle$ se utilizan dos coeficientes C, estos son

$$C_{1,1}^{i,j} = \langle 1 | \omega_i \omega_j |Ness\rangle ,\quad (171)$$

y

$$C_{1,1}^{i,j,k,h} = \langle 1 | \omega_i \omega_j \omega_k \omega_h |Ness\rangle .\quad (172)$$

Se calcula el coeficiente $C_{1,1}^{i,j}$, para esto se partirá de la ecuación (169) y se le aplicará $\langle 1 | \omega_i$ del lado derecho

$$\begin{aligned}\langle 1 | \omega_i \omega_j |Ness\rangle &= \langle 1 | \hat{\omega}_i^L (\hat{\omega}_j |Ness\rangle) \\ &= \langle 1 | \sqrt{2} \hat{a}_{1,i} (\hat{\omega}_j |Ness\rangle) \\ &= \langle 1 | \sum_{\mu=1}^{2N} (\mathbb{P}_{i,\mu}^{-1T} \hat{b}_\mu + \mathbb{S}_{i,\mu}^T \hat{b}_\mu^i) (\hat{\omega}_j |Ness\rangle) \\ &= \langle 1 | \sum_{\mu=1}^{2N} \mathbb{P}_{i,\mu}^{-1T} \hat{b}_\mu (\hat{\omega}_j |Ness\rangle) \\ &= \sum_{\mu=1}^{2N} \mathbb{P}_{i,\mu}^{-1T} \langle 1 | \hat{b}_\mu \hat{\omega}_j |Ness\rangle \\ &= \sum_{\mu=1}^{2N} \sum_{\mu'=1}^{2N} \mathbb{P}_{i,\mu}^{-1T} \mathbb{S}_{j,\mu'}^T \langle 1 | \hat{b}_\mu \hat{b}_{\mu'}^i |Ness\rangle ,\end{aligned}\quad (173)$$

Donde se utilizan las ecuaciones (166), (169), la definición (60) y que $\langle 1 | \hat{b}_\mu^\dagger = 0$. Para desarrollar mas el valor de $\langle 1 | \hat{b}_\mu \hat{b}_{\mu'}^\dagger | Ness \rangle$, se utiliza la regla de anticonmutación dada por la ecuación (92) junto con $\hat{b}_\mu | Ness \rangle = 0$, esto es

$$\begin{aligned} \langle 1 | \hat{b}_\mu \hat{b}_{\mu'}^\dagger | Ness \rangle &= \langle 1 | (\delta_{\mu, \mu'} - \hat{b}_{\mu'}^\dagger \hat{b}_\mu) | Ness \rangle \\ &= \delta_{\mu, \mu'} \langle 1 | Ness \rangle \\ &= \delta_{\mu, \mu'}. \end{aligned} \quad (174)$$

Con esto último la ecuación (173) se desarrolla más

$$\begin{aligned} \langle 1 | \omega_i \omega_j | Ness \rangle &= \sum_{\mu=1}^{2N} \sum_{\mu'=1}^{2N} \mathbb{P}_{i, \mu}^{-1T} \mathbb{S}_{j, \mu'}^T \delta_{\mu, \mu'} \\ &= \sum_{\mu=1}^{2N} \mathbb{P}_{i, \mu}^{-1T} \mathbb{S}_{j, \mu}^T, \\ &= \sum_{\mu=1}^{2N} \mathbb{P}_{i, \mu}^{-1T} \mathbb{S}_{\mu, j} \\ &= [\mathbb{P}^{-1T} \cdot \mathbb{S}]_{i, j} \\ &= [\mathbb{P}^{-1T} \cdot \mathbb{P}^T (\mathbb{1}_{2N} - 4i\mathbb{Z})]_{i, j} \\ &= [\mathbb{1}_{2N} - 4i\mathbb{Z}]_{i, j}, \end{aligned} \quad (175)$$

donde se usa a su vez la expresión de la matriz \mathbb{S} dada por la ecuación (87). Se obtiene entonces

$$C_{1,1}^{i,j} = \delta_{i,j} - 4i\mathbb{Z}_{i,j}. \quad (176)$$

Damos ahora la expresión del coeficiente $C_{1,1}^{i,j,k,h}$

$$\begin{aligned} C_{1,1}^{i,j,k,h} &= (\delta_{i,h} - 4i\mathbb{Z}_{i,h})(\delta_{j,k} - 4i\mathbb{Z}_{j,k}) + \\ &\quad \sum_{1 \leq \mu < \mu' \leq 2N} (\text{Esp}(\mu, \mu') + \text{Esp}(\mu', \mu)). \end{aligned} \quad (177)$$

Donde la función $\text{Esp}(\mu, \mu')$ viene dada por

$$\begin{aligned} \text{Esp}(\mu, \mu') &= (D^{i,j,k,h}(\mu, \mu') - D^{i,k,j,h}(\mu, \mu')) \\ &\quad + (D^{i,h,j,k}(\mu, \mu') - D^{i,h,k,j}(\mu, \mu')) \end{aligned} \quad (178)$$

y

$$D^{i,j,k,h}(\mu, \mu') = \mathbb{P}_{\mu, i}^{-1} \mathbb{S}_{j, \mu}^T \mathbb{P}_{\mu', k}^{-1} \mathbb{S}_{h, \mu'}^T. \quad (179)$$

Si bien no se dio detalladamente el procedimiento de cálculo para el coeficiente $C_{1,1}^{i,j,k,h}$, su procedimiento es muy idéntico al utilizado para determinar $C_{1,1}^{i,j}$. Observamos también la complicación algebraica de calcular contracciones, el procedimiento se vuelve engorroso a partir de contracciones que contengan 6 operadores de Majorana o mas.

9.2.2. Para la Magnetización en Función del Tiempo

En la sección donde se da la Magnetización en función del tiempo t , se mencionan los coeficientes

$$\begin{aligned} C_{L,1}^i &\equiv \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \omega_i | Ness \rangle \\ C_{1,R}^{i,j,k} &= \langle 1 | \omega_i \omega_j \omega_k | \Theta_{\vec{\nu}}^R \rangle . \end{aligned} \quad (180)$$

Tomemos el coeficiente $C_{L,1}^i$ y usando la ecuación (170), se obtiene

$$\begin{aligned} C_{L,1}^i &= \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \omega_i | Ness \rangle \\ &= \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \sum_{\mu=1}^{2N} \mathbb{S}_{i,\mu}^T \hat{b}_\mu^i | Ness \rangle \\ &= \sum_{\mu=1}^{2N} \mathbb{S}_{i,\mu}^T \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \hat{b}_\mu^i | Ness \rangle . \end{aligned} \quad (181)$$

El coeficiente $\langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \hat{b}_\mu^i | Ness \rangle$ es básicamente la contracción entre el estado de 1-excitación, $\hat{b}_\mu^i | Ness \rangle$ con el estado, $\langle \Theta_{\vec{\nu}}^L |$. El índice $\vec{\nu}$ indica que excitaciones posee, ver ecuación (98). Para que éste coeficiente no sea completamente nulo, sólo debe haber 1-excitación en $\langle \Theta_{\vec{\nu}}^L |$, de lo contrario el número de operadores de tipo \hat{b}_μ sería distinto al del tipo \hat{b}_μ^i en $\langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \hat{b}_\mu^i | Ness \rangle$, Es decir $\langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | = \delta_{l,\vec{\nu}} \langle 1 | \hat{b}_l$. Insertando esto último en (181), se obtiene

$$\begin{aligned} C_{L,1}^i &= \sum_{\mu=1}^{2N} \mathbb{S}_{i,\mu}^T \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \hat{b}_\mu^i | Ness \rangle \\ &= \sum_{\mu=1}^{2N} \mathbb{S}_{i,\mu}^T \delta_{l,\vec{\nu}} \langle 1 | \hat{b}_l \hat{b}_\mu^i | Ness \rangle \\ &= \sum_{\mu=1}^{2N} \mathbb{S}_{i,\mu}^T \delta_{l,\vec{\nu}} \delta_{l,\mu} , \end{aligned} \quad (182)$$

donde se utiliza a su vez la ecuación (174). Se obtiene así

$$C_{L,1}^i(l) = \mathbb{S}_{i,l}^T \delta_{l,\vec{\nu}} . \quad (183)$$

$\delta_{l,\vec{\nu}}$ indica que de todos los índices descriptos por el vector $\vec{\nu}$ sólo sobreviven los de 1-excitación. Es decir el vector $\vec{\nu}$ posee una sola componente no nula, que es la componente l .

Se desarrolla a $C_{1,R}^{i,j,k}$ procediendo de forma análoga al caso del coeficiente $C_{L,1}^i$, se obtiene

$$C_{1,R}^{i,j,k}(l) = \{[\mathbb{P}^{-1T} \cdot \mathbb{S}]_{i,j} \mathbb{P}_{k,l}^{-1T} + \sum_{\mu=1}^{2N} [T^{i,j,k}(l, \mu) - T^{j,i,k}(l, \mu)]\} \delta_{l,\vec{\nu}} , \quad (184)$$

donde

$$T^{i,j,k}(l, \mu) = \mathbb{P}_{i,l}^{-1T} \mathbb{P}_{j,\mu}^{-1T} \mathbb{S}_{k,\mu}^T . \quad (185)$$

9.2.3. Para la Fidelidad del Apéndice B

Los coeficientes que se utilizarán en el apéndice B, serán

$$\begin{aligned}
C_{L,1}^{i,j} &\equiv \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \omega_i \omega_j | Ness \rangle \\
C_{1,R}^{i,j} &\equiv \langle 1 | \omega_i \omega_j | \Theta_{\vec{\nu}}^R \rangle \\
C_{L,1}^{(1)} &\equiv \langle \Theta_{\vec{\nu}}^L | \mathbb{1} | Ness \rangle = \delta_{\vec{0}, \vec{\nu}} \\
C_{1,R}^{(1)} &\equiv \langle 1 | \mathbb{1} | \Theta_{\vec{\nu}}^R \rangle = \delta_{\vec{0}, \vec{\nu}} \\
C_{1,1}^{(1)} &\equiv \langle 1 | \mathbb{1} | Ness \rangle = 1.
\end{aligned} \tag{186}$$

Para la obtención de los últimos tres coeficientes se usa (99). $\delta_{\vec{0}, \vec{\nu}}$ simboliza que el vector $\vec{\nu}$ que da las excitaciones es igual al $\vec{0}$, vector sin excitaciones, de lo contrario la contracción respectiva da nulo.

Para obtener los coeficientes $C_{1,R}^{i,j}$ y $C_{L,1}^{i,j}$, se utiliza todos los procedimientos previamente mencionados, obteniéndose así

$$\begin{aligned}
C_{1,R}^{i,j} &= (\delta_{i,j} - 4i\mathbb{Z}_{i,j})\delta_{\vec{0}, \vec{\nu}} + (\mathbb{P}^{-1}_{h,i}\mathbb{P}^{-1}_{l,j} - \mathbb{P}^{-1}_{l,i}\mathbb{P}^{-1}_{h,j})\delta_{\vec{\nu},(l,h)} \\
C_{L,1}^{i,j} &= (\delta_{i,j} - 4i\mathbb{Z}_{i,j})\delta_{\vec{0}, \vec{\nu}} + (\mathbb{S}_{i,h}^T\mathbb{S}_{j,l}^T - \mathbb{S}_{i,l}^T\mathbb{S}_{j,h}^T)\delta_{\vec{\nu},(l,h)}.
\end{aligned} \tag{187}$$

donde $\delta_{\vec{\nu},(l,h)}$ denota que el vector $\vec{\nu}$ posee 2 componentes no nulas en los índices l y h , las cuales no se repiten simultáneamente. Es decir solo contribuyen términos de 2-excitaciones, de lo contrario el término que contiene a $\delta_{\vec{\nu},(l,h)}$ en las ecuaciones (187) son nulos.

10. Apéndice B

Los distintos métodos para calcular la fidelidad dados anteriormente y en éste apéndice, obedecen a que la matriz $\hat{\rho}(t)$ nunca es obtenida explícitamente. Es decir, que siempre se dependen de valores de expectación. El formalismo de Tercera Cuantificación permite, en principio, otra forma de calcular un valor de expectación dependiente del tiempo.

Se define la matriz densidad final como

$$\hat{\rho}_f = |c'|^2 \hat{P}_{N-1,N} \hat{\rho}_{ness} \hat{P}_{N-1,N}^\dagger, \quad (188)$$

donde

$$\hat{P}_{N-1,N} = \hat{\sigma}_{N-1}^+ \hat{\sigma}_N^+. \quad (189)$$

Se codifica en el sistema la matriz densidad inicial

$$\hat{\rho}(0) = |c_1|^2 \hat{P}_{1,2} \hat{\rho}_{ness} \hat{P}_{1,2}^\dagger, \quad (190)$$

donde

$$\hat{P}_{1,2} = \hat{\sigma}_1^+ \hat{\sigma}_2^+, \quad (191)$$

es decir una codificación para el caso 2, usando (138) y reemplazando \hat{O} por $\hat{\rho}_f$ se obtiene

$$\langle \hat{\rho}_f \rangle_{\hat{\rho}(t)} = |c_1|^2 \sum_{\vec{v} \in \{0,1\}} \exp(-2t\vec{\beta} \cdot \vec{v}) \chi_{1,\vec{v}} \chi_{2,\vec{v}}, \quad (192)$$

donde

$$\begin{aligned} \chi_{1,\vec{v}} &= \langle \Theta_{\vec{v}}^L | \hat{P}_{1,2} | Ness \rangle, \\ \chi_{2,\vec{v}} &= \langle 1 | \hat{P}_{1,2}^\dagger \hat{\rho}_f | \Theta_{\vec{v}}^R \rangle, \end{aligned} \quad (193)$$

desarrollando a $\chi_{2,\vec{v}}$

$$\begin{aligned} \chi_{2,\vec{v}} &= \langle 1 | \hat{P}_{1,2}^\dagger \hat{\rho}_f | \Theta_{\vec{v}}^R \rangle \\ &= \langle 1 | \hat{P}_{1,2}^\dagger |c'|^2 \hat{P}_{N-1,N} \hat{\rho}_{ness} \hat{P}_{N-1,N}^\dagger | \Theta_{\vec{v}}^R \rangle \\ &= |c'|^2 \langle 1 | \hat{P}_{1,2}^\dagger \hat{P}_{N-1,N} \hat{\rho}_{ness} \hat{P}_{N-1,N}^\dagger | \Theta_{\vec{v}}^R \rangle. \end{aligned} \quad (194)$$

El problema en esta expresión de $\chi_{2,\vec{v}}$ esta en Majorizar a ρ_{ness} dentro de una contracción, lo cual no esta claro como hacerlo. Se asume una descomposición para ρ_{ness} de la forma $\rho_{ness} = |Ness\rangle \langle 1|$, dando así

$$\langle \hat{\rho}_f \rangle_{\hat{\rho}(t)} = |c'|^2 |c_1|^2 \left\{ \sum_{\vec{v} \in \{0,1\}} \exp(-2t\vec{\beta} \cdot \vec{v}) \chi'_{1,\vec{v}} \chi'_{2,\vec{v}} \right\} \chi'_3, \quad (195)$$

donde

$$\begin{aligned} \chi'_{1,\vec{v}} &= \langle \Theta_{\vec{v}}^L | \hat{P}_{1,2} | Ness \rangle, \\ \chi'_{2,\vec{v}} &= \langle 1 | \hat{P}_{N-1,N}^\dagger | \Theta_{\vec{v}}^R \rangle, \\ \chi'_3 &= \langle 1 | \hat{P}_{1,2}^\dagger \hat{P}_{N-1,N} | Ness \rangle. \end{aligned} \quad (196)$$

Las expresiones $\chi'_{1,\vec{v}}$ y $\chi'_{2,\vec{v}}$, son combinaciones lineales de coeficientes $C_{L,1}^{i,j}$ y $C_{1,R}^{i,j}$ respectivamente, dados en el apéndice A (186). La expresión χ'_3 es una combinación lineal de coeficientes $C_{1,1}^{i,j,k,h}$. A su vez los coeficientes triviales $C_{L,1}^{(1)}$, $C_{1,R}^{(1)}$ y $C_{1,1}^{(1)}$ aparecen en éstas expresiones.

Las constantes de normalización $|c'|^2$ y $|c_1|^2$ se determinan mediante la condición $\text{Tr}(\hat{\rho}(0)) = \text{Tr}(\hat{\rho}_f) = 1$, con lo cual

$$\begin{aligned} |c'|^2 &= \frac{1}{\frac{1}{2} - M_{1_{ness}}^z - M_{2_{ness}}^z + 2S_{1,2_{ness}}^{z,z}}, \\ |c_1|^2 &= \frac{1}{\frac{1}{2} - M_{N-1_{ness}}^z - M_{N_{ness}}^z + 2S_{N-1,N_{ness}}^{z,z}}. \end{aligned} \quad (197)$$

Con todo lo anterior se determina $\langle \hat{\rho}_f \rangle_{\hat{\rho}(t)}$. Se define la fidelidad en el tiempo t , $F(t)$ como

$$F(t) = \sqrt{\text{Tr}(\hat{\rho}_f \hat{\rho}(t))} = \sqrt{\langle \hat{\rho}_f \rangle_{\hat{\rho}(t)}}. \quad (198)$$

De esta forma se obtiene la fidelidad al tiempo t , $F(t)$.

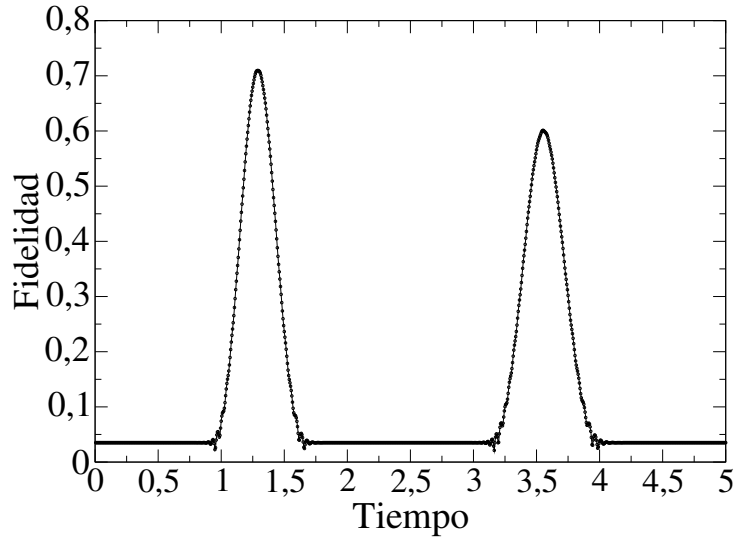


Figura 40: Fidelidad en función del tiempo cadena PST con $h = 20$, $N = 30$ y baños de tipo gamma con $\gamma=0,0001$ o baño mínimo.

Se muestra en la Figura 40 la fidelidad en función del tiempo para la cadena PST para baño mínimo, calculada por medio de (198). Se puede apreciar que ésta figura no posee máxima fidelidad igual a 1, el primer máximo local de la fidelidad en función del tiempo es 0,71 y se da al tiempo $t_{trans} = 1,29$, comparándolo para la PST cerrada de la Figura 9 en el cual se tiene una fidelidad máxima igual a uno y $t_{pst} = \frac{\pi}{2} = 1,57$. En la Figura 40 se observa a su vez, un decaimiento del segundo máximo local de la fidelidad en función del tiempo con respecto al primero.

En la Figura 41 se comparan las fidelidades obtenidas en el caso de cadena cerrada y para el caso de cadena abierta en Tercera Cuantización, determinada por (198).

En la Figura 42 se muestran varias curvas de fidelidad (198) en función del tiempo para varios valores de campo h y para baño mínimo. Se observa que a medida que el campo externo aumenta, menor es la diferencia entre el primer máximo local

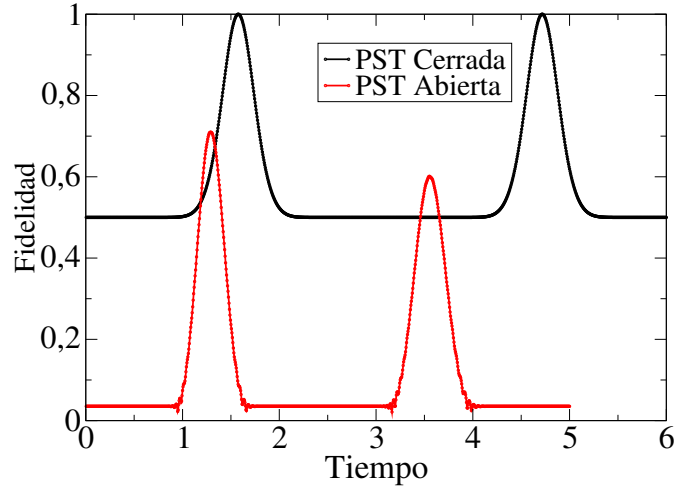


Figura 41: Fidelidad en el tiempo, para cadena PST cerrada en negro, dado por Figura la 9 para $N = 51$. Cadena PST abierta en rojo, dada por la Figura 40.

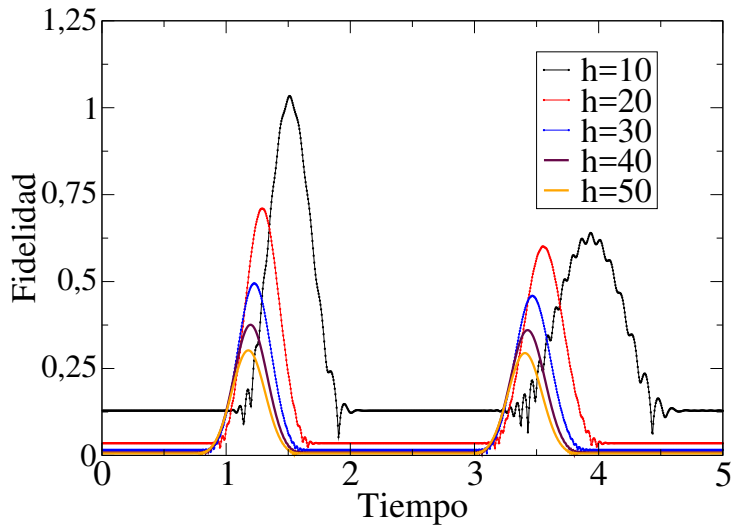


Figura 42: Fidelidad en función del tiempo cadena PST con $N = 30$, baño de tipo gamma, $gamma = 0,0001$ o baño mínimo. Para distintos valores de campos externos h .

de la fidelidad en función del tiempo y entre el segundo máximo local, pero el efecto del campo externo está en reducir el valor de la fidelidad máxima y achicar el valor del tiempo de transmisión t_{trans} . Se muestra particularmente que para el campo $h = 40$ esta diferencia es de 0,1, para $h = 30$ es de 0,4. Se elegirá un campo externo de $h = 40$. Por lo tanto la única discrepancia que se observa en el cálculo de la fidelidad mediante (198) está en un problema de escala y el problema con respecto al tiempo de transmisión ($t_{trans} \neq \frac{\pi}{2}$) de la cadena PST elegida. Para resolver de momento el problema de la escala simplemente se multiplicara a toda la curva de la fidelidad por un factor de escala, definido de tal manera de obtener el primer máximo local de la fidelidad en función del tiempo igual a uno, para el caso de baño mínimo y a campo constante.

Como posible explicación al porque del decaimiento del segundo máximo local de la fidelidad en función del tiempo respecto del primer máximo local en la Figura 40, es debido que, a diferencia de la fidelidad de la Figura 9, en este caso se tiene una cadena inicializada en el estado $\hat{\rho}(0) = |c_1|^2 \hat{P} \hat{\rho}_{ness} \hat{P}^\dagger$ el cual difiere del estado de una

excitación definido por el protocolo I. Pero si el campo externo es lo suficientemente intenso se observa, en la Figura 24 y recordando que $|c_1|^2 \approx 1$ para campos externos suficientemente altos, que la matriz densidad inicial $\hat{\rho}(0)$ tiende al estado puro dado por

$$|110\dots 0\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle, \quad (199)$$

luego en éste límite no se observa el decaimiento en el segundo máximo local de la fidelidad en función del tiempo con respecto al primer máximo local de la Figura 42.

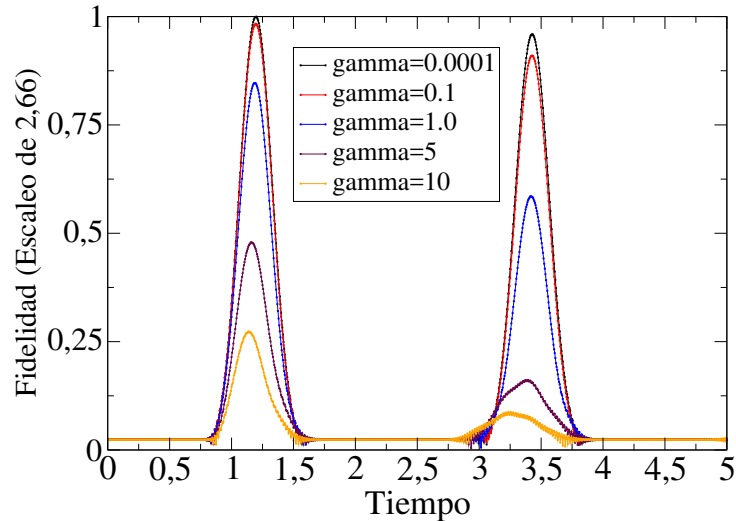


Figura 43: Fidelidad en función del tiempo cadena PST con $N = 30$, $h = 40$. Se grafican distintas curvas en función de gamma.

gamma	fid-1	fid-2	t-1	t-2
0,0001	1	0,96	1,20	3,43
0,1	0,98	0,91	1,20	3,43
1,0	0,85	0,56	1,19	3,42
5,0	0,48	0,16	1,16	3,40
10,0	0,27	0,09	1,14	3,26

Cuadro 15: Valores de la primera y segunda fidelidad máxima denotada por fid-1 y fid-2 respectivamente, para sus respectivos tiempos dados por t-1 y t-2. Valores obtenidos de la Figura 43.

En la Figura 43 se muestra la fidelidad en función del tiempo, las curvas corresponden a distintos valores del baño de tipo gamma. Se observan principalmente dos efectos, el valor del primer y segundo máximo local de la fidelidad en función del tiempo disminuyen conforme el valor gamma aumenta y para valores de gamma suficientemente altos, el tiempo de transmisión disminuye. En el Cuadro 15 se muestran los valores fid-1 y fid-2, estos son el valor del primer y segundo máximo local de la fidelidad en función del tiempo respectivamente. Se observa que estos decaen conforme gamma aumenta, la tendencia de este decaimiento está resumido por la Figura 44. Resulta interesante notar la similitud cualitativa de las Figuras 44 y 31.

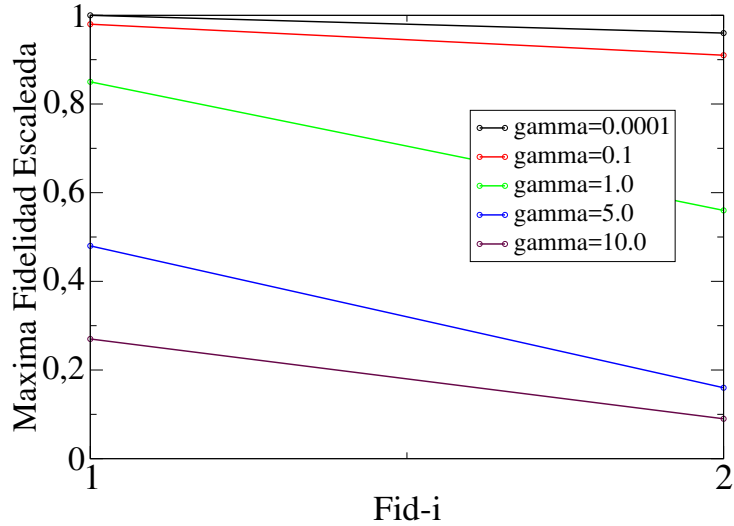


Figura 44: Fidelidad máxima para PST en baño gamma, se grafican fid-1 y fid-2 del Cuadro 15.

En la Figura 45 se muestra la fidelidad en función del tiempo, las curvas corresponden a distintos valores del baño de tipo s . A medida que s disminuye de 0,1 a 0,01, el valor del primer y segundo máximo local de la fidelidad en función del tiempo disminuyen. El tiempo de transmisión se mantiene constante en s a diferencia del caso del baño de tipo gamma, Figura 43. Se expresan los valores de los máximos locales de la fidelidad y sus respectivos tiempos de transmisión en el Cuadro 16. En la Figura 46 se observa la caída relativa entre los dos máximos locales de la fidelidad para distintos valores de s . Una vez mas resulta interesante observar la similitud cualitativa de las Figuras 45 y 33.

Si bien la expresión de la fidelidad dada por (198) creemos que es incorrecta, debido a la incapacidad de poder describir $\hat{\rho}_{ness}$ en términos de operadores Majorana en la contracción dada por (194), se puede estudiar de forma cualitativa su comportamiento frente a los baños de tipo gamma y s , obteniendo comportamientos en cuanto a los valores de sus fidelidades máximas similares a los obtenidos anteriormente para los valores de la magnetización máxima, dados por las Figuras 31 y 33.

s	fid-1	fid-2	t-1	t-2
0,1	0,98	0,91	1,20	3,43
0,09	0,74	0,68	1,20	3,43
0,05	0,28	0,25	1,20	3,43
0,01	0,05	0,04	1,20	3,43

Cuadro 16: Valores de la primera y segunda fidelidad máxima denotada por fid-1 y fid-2 respectivamente, para sus respectivos tiempos dados por t-1 y t-2. Valores obtenidos de la Figura 45.

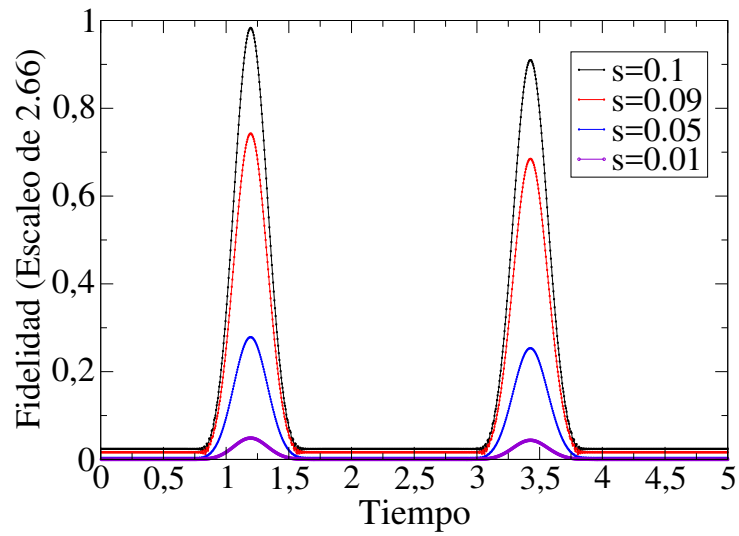


Figura 45: Fidelidad en función del tiempo cadena PST con $N = 30$, $h = 40$, baño de tipo s . Se grafican distintas curvas en función de s .

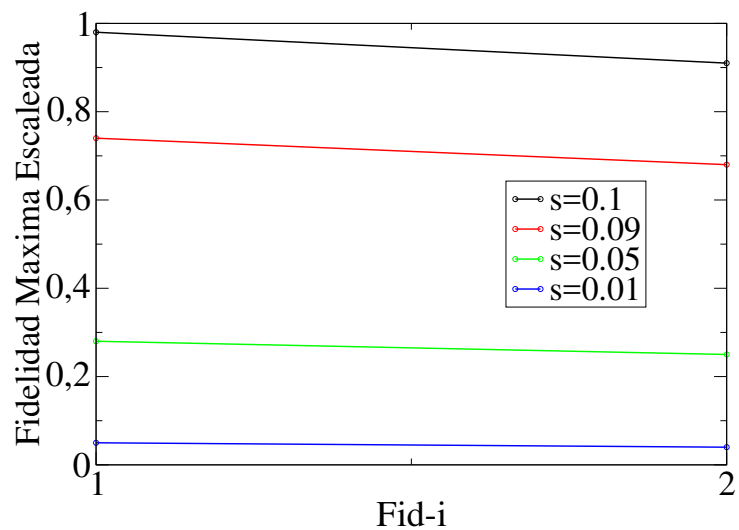


Figura 46: Fidelidad máxima para PST en baño s , se grafican fid-1 y fid-2 del Cuadro 16.

Referencias

- [1] S.Bose. Contemporary Physics, vol 48, issue 1, pp. 13-30 2008.
- [2] A.Zwick, O.Osenda. Quantum state transfer in a XX chain with impurities J. Phys A: Math Theor. 44 (2011) 105302.
- [3] J.Stolze, G.A.Álvarez, O.Osenda, A.Zwick. Robustness of Spin-Chain State-Transfer Schemes (Chapter 5).
- [4] J.Gurgo Transmisión de estados en cadenas de espines con ruido dinámico. Tesis de Licenciatura Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (2016).
- [5] E. Ising, Z. Phys. 31, 253 (1925).
- [6] H.A. Bethe, Z. Phys. 71, 205 (1931).
- [7] J.G. Bednorz, K.A. Müller, Z. Phys. B Condens. Matter 64, 189 (1986).
- [8] Z.L.Mádi, B.Brutscher, T.Schulte-Herbruggen, R.Bruschweiler, R.R.Ernst. Time-resolved observation of spin waves in a linear chain of nuclear spins. Chem.Phys.Letters 268 (1997), 300-305.
- [9] Y.Ping, B.W.Lovett, S.C.Benjamin, E.M.Gauger. Practicality of Spin Chain Wiring in Diamond Quantum Technologies Physical Review Letters, 110,100503. 2013.
- [10] K.Mølmer, Y.Castin, J.Dalibard. Monte Carlo Wave Function Method in Quantum Optics Journal of the Optical Society of America B, Vol. 10, No. 3. Marzo 1993.
- [11] Dario Patanè, Alessandro Silva, Luigi Amico, Rozario Fazio, and Giuseppe E. Santoro, Phys. Rev. Lett. 101, 175701 (2008).
- [12] A.Galindo. P.Pascual. Quantum Mechanics I Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1990).
- [13] M.A.Nielsen, I.L.Chuang. Quantum Computation and Quantum Information Cambridge University Press, UK, 2000.
- [14] A.Zwick, G.Álvarez, J.Stolze, O.Osenda. Robustness of spin-coupling distributions for perfect quantum state transfer Phys. Rev. A 84, 022311. (2011).
- [15] M. Christandl, N.Datta, A.Ekert, A.J.Landahl, T.C.Dorlas, A.Kay Perfect transfer of arbitrary states in quantum spin networks Phys. Rev. A 71, 032312. (2004).
- [16] P.Karbach, J.Stolze. Phys. Rev. A 72 030301. (2005).
- [17] T.Prosen. Third Quantization: a general method to solve master equations for quadratic open fermi systems New j. Phys. 10 043026 (2008).
- [18] T.Prosen. Exact solution of Markovian master equations for quadratic fermi systems: thermal baths, open XY spin chains and non-equilibrium phase transition. New j. Phys. 12 025016 (2010).
- [19] T.Prosen. Spectral theorem for the Lindblad equation for quadratic open fermionic systems J. Stat. Mech. P07020 (2010).
- [20] Breuer H-P and Petruccione F 2002 The Theory of Open Quantum Systems (Oxford: Oxford University Press).
- [21] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery. Numerical Recipes in Fortran 90, second edition. (1996).

- [22] <http://www.netlib.org/lapack/explore-html/index.html>
- [23] A.Jameson. Solution of equation $AX + XB = CBY$ inversion of an $m \times m$ or $n \times n$ matrix SIAM J. Appl. Math. Vol. 16, No. 5. (1968).
- [24] T.J.Osborne, M.A.Nielsen Entanglement in a simple quantum phase transition Physical Review A, 66, 032110 (2002)