Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación Universidad Nacional de Córdoba



Grupos de Coxeter y Bimódulos de Soergel

TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

Luis Ferroni Rivetti
Dirigido por:
Dr. Iván E. Angiono



Grupos de Coxeter y Bimódulos de Soergel por Luis Ferroni Rivetti se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución No Comercial Sin Obra Derivada 4.0 Internacional.

RESUMEN

En este trabajo se introducen los grupos de Coxeter para un estudio combinatorio de los mismos a través del Orden de Bruhat. A continuación se establecen definiciones y resultados básicos de la Teoría de Kazhdan-Lusztig en el álgebra de Hecke de un grupo de Coxeter, todos basados en el desarrollo del capítulo previo, también desde un punto de vista combinatorio. Posteriormente se desarrolla un estudio de los Bimódulos de Soergel y el Teorema de Categorificación de Soergel, el resultado más importante del trabajo, que establece las bases del estudio de las álgebras de Hecke a través de la Categoría de Bimódulos de Soergel y que, según se menciona en el Capítulo 4, constituye una herramienta de gran importancia para dar una demostración algebraica de la Conjetura de Kazhdan-Lusztig.

Abstract

In this article we introduce Coxeter groups for a combinatorial studying of them through Bruhat Order. After that, we establish some basic definitions and results about Kazhdan-Lusztig's theory in the Hecke algebra of a Coxeter group, all of them based in the development of the preliminaries of the previous chapter, also from a combinatorial point of view. Finally, we conclude with the analysis of Soergel Bimodules and Soergel's Categorification Theorem, the most important result in this article, which establishes the fundamentals of the study of the Hecke Algebra via Soergel's Category that in Chapter 4 is mentioned to be a tool of great importance for giving an algebraic proof of the Kazhdan-Lusztig Conjecture.

Palabras Clave: Bimódulos de Soergel - Grupos de Coxeter - Álgebras de Hecke - Categorificación - Teoría de Kazhdan-Lusztig.

Keywords: Soergel Bimodules - Coxeter Groups - Hecke Algebras - Categorification - Kazhdan-Lusztig theory.

Clasificación/Clasification: 2010 Mathematics Subject Clasification: 06F15 - 13C60.

Agradecimientos

El camino fue largo. Tanto que me abruma la certeza de que haya concluido. Un camino largo, casi irremediablemente, está repleto de personas que durante tramos fueron parte de cosas que constituyen este momento. A ellas va mi agradecimiento.

A mi mamá, a mi papá y a mi hermana, por confiar en mí cuando les dije que la matemática era aquello en lo que más cómodo y feliz me sentía.

A mi director, Iván Angiono, por ser, entre todos los docentes y matemáticos de la facultad mi mayor referente y un amigo. Por guiarme, enseñarme, y por haber confiado siempre en que las cosas iban a salir bien.

Al tribunal del trabajo, Agustín García Iglesias y Juan Pablo Rossetti, por la lectura y evaluación del trabajo, por los comentarios y correcciones que hicieron.

A la Olimpíada Matemática Argentina, por haberme introducido en este camino tan precioso de aprendizaje.

A Diego Sulca, Alejandro Naser, Emiliano Campagnolo y Rosa Vitriú, por haberme convencido de venir a FaMAF.

A mis amigos de toda la vida, Alvaro y Leandro, por haberme acompañado desde antes y hasta ahora.

A los pibes del Doggen: Alejandro, Cinthya, Mariano y Pablo, por haber sido importantes desde aquel 2013 en que empezó todo.

A Matías, Martín y Ezekiel, por los viajes, los entrenamientos y los mates.

A Ailén, por el cariño, las sonrisas, las juntadas, las meriendas, la incondicionalidad y la amistad.

A Gisel, por cada té cada noche, por una carcajada cuando el único ruido es el silencio, por la compañía, y por las lágrimas de emoción a flor de piel.

A Mariana, por volver, por confiar, por ser parte de una etapa de crecimiento para mí, por ser tan increíble y un ejemplo de perseverancia para mí.

Y, para terminar, quiero agradecer especialmente a cuatro personas más, que fueron, sin dudas, las más importantes en este camino.

A Azul, por haber soñado conmigo en Octubre de 2010 con venir a aprender matemática a Córdoba. Por haberme dicho que sí cuando le propuse «¿nos vamos?». Por haber sido mi compañera en la vida durante más de 6 años, y por haber sido mi compañera en clases durante más de 4. Por haber compartido conmigo mucho más que la alegría cuando las cosas salían bien, y mucho más que la tristeza cuando salían mal. Por haber sido mi sangre y mi corazón tantos años (más de un cuarto de mi vida). Por haberme hecho el regalo más hermoso que me tocó en la vida que fue tanto amor incondicional. Por haber sido valiente y generosa para regalarnos el final de una etapa preciosa, y abrir otra que promete ser igual de buena.

A Dahyana, porque si ella no estuviera mis almuerzos hubiesen sido solitarios. Por tener esa manera única de estar en cada momento, a cambio de tan poco. Por ser la dueña de todos mis secretos. Por confiar en mí. Por retarme, por abrazarme, por las lágrimas. Por las sonrisas, las charlas interminables, por nuestro grupo de a dos. Por haberme acompañado en los momentos más grises, y por poner tanto empeño y tanto corazón para que yo no me sienta tan solo.

A Mauricio, por haber sido el primero y el mejor de mis amigos en Córdoba. Por haberme ayudado durante los días más tristes de mi vida. Por la mano que me dio con tantas cosas: por darme consejos, escucharme sin juzgarme, por entender mi humor y mi forma de ser, por haberme confiado tanto, y haber estado desde el génesis. Por quedarse siempre a pesar de todo, y por ser un ejemplo para mí.

A Oriana, porque sin ella no sé qué habría sido de mí, y porque sin ella posiblemente esta tesis todavía no estaría terminada. Por ser motivación y la palabra justa. Por animarme, por escucharme. Por haberme dejado escucharla y haberme enseñado a enseñar y a estar orgulloso por alguien más. Por las promesas, los regalos, los abrazos y ella sabe bien. Porque cuando no tenía luz (en sentido literal y literario) me abrió sus puertas. Por esta huella imborrable. Por tanto y por todo.

A ustedes va dedicada esta tesis, la segunda (pero no la última) obra que escribo en mi vida.



Índice general

1.	Pre	liminares	11
	1.1.	Grupos de Coxeter	
		1.1.1. Una representación de permutaciones	
	1.2.	Orden de Bruhat	
		1.2.1. El caso finito	19
2.	Álge	ebras de Hecke	23
	_	Álgebras genéricas	23
	2.2.	Álgebras de Hecke e Inversos	26
		2.2.1. El caso finito	
	2.3.	Una involución del Álgebra de Hecke	29
	2.4.	Polinomios de Kazhdan-Lusztig	31
3.	La (Categoría de Bimódulos de Soergel	39
		Preliminares	39
		3.1.1. Categorías	
		3.1.2. Graduación	
		3.1.3. Funtores derivados	40
	3.2.	Funciones regulares	41
	3.3.	El Teorema de Categorificación de Soergel	43
		3.3.1. El caso diedral	45
		3.3.2. Un inverso del morfismo \mathcal{E}	49
	3.4.	Clasificación de los Bimódulos de Soergel Indescomponibles	
	3.5.	El caso de \mathbb{S}_3	57
		3.5.1. La Base de Kazhdan-Lusztig en \mathbb{S}_3	
		3.5.2. La categoría $\mathcal{B}(\mathbb{S}_3)$	58
4.		Conjetura de Kazhdan-Lusztig	65
	4.1.	Kazhdan-Lusztig y Soergel	65
Вi	hlion	rafia	67

Introducción

Este trabajo presenta una introducción a los bimódulos de Soergel. Estos objetos fueron presentados en los '90 con el objetivo de resolver diferentes problemas abiertos desde comienzos de los '80 sobre la teoría de representaciones de grupos algebraicos semisimples, y que involucran a los polinomios de Kazhdan-Lusztig; ver el capítulo 4, donde discutiremos cómo impactan los bimódulos de Soergel en la resolución de estas conjeturas. En esta dirección primero estudiaremos resultados preliminares sobre grupos de Coxeter y álgebras de Hecke.

El trabajo está estructurado en cuatro capítulos que son dependientes entre sí.

El primer capítulo introduce a los Grupos de Coxeter y al Orden de Bruhat, siguiendo la exposición de los Capítulos 1-4 de [2]. En el mismo se desarrollan resultados básicos del estudio de los mismos, siendo los más destacables la Propiedad de la Subpalabra y la Propiedad de la Eliminación. Además se establece el ejemplo de los grupos diedrales que son útiles en el desarrollo posterior del trabajo.

En el segundo capítulo, basado en los Capítulos 7-9 de [8], se establece la definición, en un contexto general, de álgebra de Hecke de un grupo de Coxeter, y se procura obtener una descripción simple de la misma, a través del Teorema de Kazhdan-Lusztig, que establece la existencia de una base, denominada Base de Kazhdan-Lusztig, que satisface ciertas condiciones deseables en términos del orden de Bruhat del grupo de Coxeter subyacente y de la propiedad de invertibilidad de los elementos de la base de la definición del álgebra. Se utiliza este desarrollo para ejemplificar en el caso de los grupos diedrales que la descripción de la Base de Kazhdan-Lusztig es sencilla, formulando un resultado que es importante en el trabajo.

En el tercer capítulo se estudian los Bimódulos de Soergel. Se establecen al comienzo algunas definiciones preliminares sobre Categorías, Graduaciones y Funtores Derivados. La mayor parte del desarrollo está basado en [12] y [15]. Se definen los bimódulos de Bott-Samelson, y se demuestra el Teorema de Categorificación de Soergel, con una prueba basada en el caso diedral, desarrollado en los capítulos previos. Este Teorema afirma que hay un morfismo $\mathcal E$ del álgebra de Hecke de un grupo de Coxeter en el grupo de Grothendieck split de una categoría cuyos objetos se denominan Bimódulos de Soergel. Se continúa con la construcción de un morfismo inverso para $\mathcal E$, y se enuncian teoremas que describen a los objetos indescomponibles de

esta categoría. Finalmente, se ejemplifica todo lo desarrollado, para el caso en que $W = \mathbb{S}_3$, obteniendo una descripción completa de la Base de Kazhdan-Lusztig y de los objetos de la categoría de Soergel.

Para concluir, el cuarto capítulo expone algunas motivaciones para el estudio de la teoría desarrollada en el trabajo, siendo los principales focos la Conjetura de Kazhdan-Lusztig y la Conjetura de Soergel, que según trabajos recientes han sido vinculadas entre sí y demostradas usando herramientas que están basadas en el desarrollo del Capítulo 3 de este trabajo.

A lo largo del trabajo usamos la simbología \mathbb{N} para denotar el conjunto de enteros positivos $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Además, denotamos con un símbolo $\hat{}$ a la remoción de un término en un producto, por ejemplo $s_1\hat{s_2}s_3=s_1s_3$.

La igualdad por definición se denota con el símbolo \doteq , y la composición de funciones a menudo se denota con la yuxtaposición de las mismas.

Usamos la simbología \mathbb{S}_n para denotar al grupo de permutaciones de n elementos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Grupos de Coxeter

A lo largo de este capítulo vamos a establecer definiciones básicas y derivar los resultados elementales más importantes de la teoría de los Grupos de Coxeter.

Definición 1.1.1 Sea S un conjunto. Consideremos una matriz $m: S \times S \rightarrow \{1, 2, ..., \infty\}$ que satisface para todo par de elementos $t, s \in S$ que:

$$m(s,t) = m(t,s);$$

 $m(s,t) = 1 \iff s = t.$

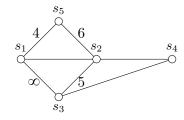
El grupo W presentado por un conjunto de generadores $s \in S$ y relaciones $(st)^{m(s,t)}$ (siempre que $m(s,t) < \infty$), se dice un grupo de Coxeter, y el par (W,S) se dice un sistema de Coxeter.

Una manera habitual de representar los grupos de Coxeter es mediante los diagramas o grafos de Coxeter que se construyen de la siguiente manera: el conjunto de nodos del grafo está dado por S, sus aristas son no dirigidas, y están dadas por los pares $\{s,t\}$ tales que $m(s,t) \ge 3$. A las aristas con $m(s,t) \ge 4$ se las etiqueta con el valor m(s,t).

Ejemplo 1.1.2: Consideramos la matriz m dada por:

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \infty & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 6 \\ \infty & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Su diagrama de Coxeter asociado está dado por:



Definición 1.1.3 Sea (W, S) un sistema de Coxeter. Cada elemento $w \in W$ se puede escribir como un producto de generadores: $w = s_1 s_2 \dots s_k$, $s_i \in S$. Si k es minimal entre todas estas posibles expresiones, se dice que k es la longitud de w y escribimos $\ell(w) = k$, además decimos que $w = s_1 s_2 \dots s_k$ es una expresión reducida para w.

Si consideramos la aplicación $\varepsilon: S \to \{\pm 1\}$ dada por $s \mapsto -1$ para todo $s \in S$, la misma se extiende de manera única a un homomorfismo $\varepsilon: W \to \{\pm 1\}$ tal que $\varepsilon(s) = -1$ para todo $s \in S$.

A continuación damos algunas observaciones elementales de las dos definiciones recién presentadas.

Proposición 1.1.4 Para todos los $u, w \in W$ se tiene que:

- (a) $\varepsilon(w) = (-1)^{\ell(w)}$.
- (b) $\ell(uw) \equiv \ell(u) + \ell(w) \pmod{2}$.
- (c) $\ell(sw) = \ell(w) \pm 1$ para todo $s \in S$.
- (d) $\ell(w^{-1}) = \ell(w)$.
- (e) La aplicación $W \times W \to \mathbb{N}_0$ dada por $(u, w) \mapsto \ell(uw^{-1})$ es una métrica en W.

Definición 1.1.5 Si (W, S) es un sistema de Coxeter, se define como su *conjunto* de reflexiones al conjunto $T \subseteq W$ dado por:

$$T = \{wsw^{-1} : w \in W, s \in S\}$$
 (1.1)

A los elementos $u \in T$ se los llama reflexiones y a los elementos $s \in S \subseteq T$ se los llama reflexiones simples.

1.1.1. Una representación de permutaciones

A continuación vamos a establecer una propiedad combinatoria fundamental de los grupos de Coxeter, conocida como la Propiedad del Intercambio. Para esto, vamos a comenzar con algunas definiciones y resultados sencillos.

En lo posterior, escribiremos $s_1 \dots \hat{s_i} \dots s_k$ para denotar que el elemento s_i fue removido de la expresión $s_1 \dots s_k$. Por ejemplo $s_1 \hat{s_2} s_3 = s_1 s_3$.

Dada una palabra $s_1 \dots s_k$ (es decir, consideramos a este objeto como una kupla de elementos de S, y no precisamente como un elemento de W), definimos para $1 \le i \le k$:

$$t_i \doteq s_1 s_2 \dots s_{i-1} s_i s_{i-1} \dots s_2 s_1.$$

Y también definimos:

$$\hat{T}(s_1 \dots s_k) \doteq (t_1, \dots, t_k).$$

Luego, en W se tiene la identidad:

$$t_i s_1 s_2 \dots s_k = (s_1 \dots s_{i-1}) s_i (s_1 \dots s_{i-1})^{-1} (s_1 s_2 \dots s_k)$$

$$= s_1 \dots \hat{s_i} \dots s_k.$$

Esto es, el efecto de multiplicar a izquierda por $t_i \in T$ elimina la ocurrencia de s_i en $s_1 \dots s_k$. Y, por otro lado, un sencillo argumento inductivo prueba que:

$$s_1 s_2 \dots s_i = t_i t_{i-1} \dots t_1$$

Lema 1.1.6 Si $w = s_1 s_2 \dots s_k$ es una expresión reducida, entonces $t_i \neq t_j$ para todo $i \neq j$.

Demostración. Si $t_i = t_j$ para algún i < j, entonces $t_i t_j = e$ y en particular $w = t_i t_j s_1 \dots s_k$. Si razonamos como antes, al multiplicar $s_1 \dots s_k$ a izquierda por t_i y t_j , se obtiene la expresión $s_1 \dots \hat{s_i} \dots \hat{s_j} \dots s_k$ que resulta ser una expresión para w que contradice que $s_1 \dots s_k$ sea reducida.

Sea $s_1
ldots s_k$ una palabra en S y sea $t \in T$. Se definen $n(s_1 s_2
ldots s_k; t)$ como la cantidad de veces que t aparece en la k-upla $\hat{T}(s_1
ldots s_k)$.

Además, para $s \in S$ y $t \in T$ se define:

$$\eta(s;t) \doteq \begin{cases} -1, & s=t\\ 1, & s\neq t \end{cases}$$

Observar que, de las definiciones, es inmediato que:

$$(-1)^{n(s_1...s_k;t)} = \prod_{i=1}^k \eta(s_i; s_{i-1}...s_1 t s_1...s_{i-1}).$$
 (1.2)

Sea S(R) el grupo de todas las permutaciones del conjunto $R = T \times \{1, -1\}$. Podemos definir para cada $s \in S$ una aplicación $\pi_s : R \to R$ como sigue:

$$\pi_s(t,\varepsilon) \doteq (sts,\varepsilon\eta(s;t))$$

Notar que efectivamente π_s es una permutación (es biyectiva), pues:

$$\pi_s^2(t,\varepsilon) = \pi_s(sts,\varepsilon\eta(s;t)) = (sstss,\varepsilon\eta(s;t)\eta(s;sts)) = (t,\varepsilon).$$

Teorema 1.1.7 La aplicación $S \to S(R)$ dada por $s \mapsto \pi_s$ se extiende de manera única a un monomorfismo $\pi : W \to S(R)$. Denotaremos $\pi_w \doteq \pi(w)$. Además, se verifica que $\pi_t(t, \varepsilon) = (t, -\varepsilon)$ para todo $t \in T$.

Demostración. Vamos a proceder en varios pasos. En primer lugar, por la observación anterior tenemos que $\pi_s^2 = \mathrm{id}_R$. Tomemos ahora $s, s' \in S$ tales que $m(s, s') = p < \infty$. Afirmamos que

$$(\pi_s \pi_{s'})^p = \mathrm{id}_R.$$

Para probar esto, definamos para cada i = 1, ..., 2p:

$$s_i \doteq \begin{cases} s', & i \text{ impar,} \\ s, & i \text{ par.} \end{cases}$$

Sea $\mathbf{s} \doteq s_1 s_2 \dots s_{2p}$. Consideramos $\hat{T}(\mathbf{s}) = (t_1, t_2, \dots, t_{2p})$, donde para cada i es

$$t_i = s_1 s_2 \dots s_i \dots s_2 s_1 = (s's)^{i-1} s'.$$

Como $(ss')^p = e$, resulta que $t_{p+i} = t_i$ para cada $1 \le i \le p$. Esto implica que $n(\mathbf{s};t)$ es un número par para cada $t \in T$. Llamemos $(t', \varepsilon') \doteq (\pi_s \pi_{s'})^p (t, \varepsilon)$. Tenemos que:

$$(t',\varepsilon')=\pi_{s_{2p}}\pi_{s_{2p-1}}\dots\pi_{s_1}(t,\varepsilon).$$

Luego, $t' = s_{2p} \dots s_1 t s_1 \dots s_{2p} = t$, pues $s_1 s_2 \dots s_p = (s's)^p = e$. Y, por otro lado, como observamos en 1.2:

$$\varepsilon' = \varepsilon \prod_{i=1}^{2p} \eta(s_i; s_{i-1} \dots s_1 t s_1 \dots s_{i-1}) = \varepsilon (-1)^{n(\mathbf{s};t)} = \varepsilon,$$

pues $n(\mathbf{s};t)$ es un número par. Esto prueba nuestra afirmación.

Esto demuestra que la aplicación $s \mapsto \pi_s$ se extiende a un homomorfismo $w \mapsto \pi_w$ para todo $w \in W$. Ahora, si $w = s_k s_{k-1} \dots s_1$, tenemos:

$$\pi_w(t,\varepsilon) = \pi_{s_k} \dots \pi_{s_1}(t,\varepsilon)$$

$$= \left(s_k \dots s_1 t s_1 \dots s_k, \varepsilon \prod_{i=1}^k \eta(s_i; s_{i-1} \dots s_1 t s_1 \dots s_{i-1}) \right)$$

$$= (wtw^{-1}, \varepsilon(-1)^{n(s_1 s_2 \dots s_k; t)}). \tag{1.3}$$

En particular, esto dice que la paridad de $n(s_1s_2...s_k;t)$ depende sólo de w y t, y no de la expresión elegida para w.

Para ver la inyectividad de este homomorfismo, sea $w \neq e$. Elegimos una expresión reducida $w = s_k \dots s_1$, y tomamos $\hat{T}(s_1 s_2 \dots s_k) = (t_1, t_2, \dots, t_k)$. Por el Lema 1.1.6, los t_i son todos distintos, y por lo tanto $n(s_1 s_2 \dots s_k; t_i) = 1$. Por lo tanto $\pi_w(t_i, \varepsilon) = (wt_i w^{-1}, -\varepsilon)$ de donde, en particular, $\pi_w \neq id_R$ y el homomorfismo efectivamente es inyectivo.

Ahora, para concluir con la demostración, procedemos por inducción en el largo de una expresión simétrica para los $t \in T$. Sea:

$$t = s_1 s_2 \dots s_p \dots s_2 s_1.$$

El caso p = 1 está claro por definición. Luego, por inducción:

$$\pi_{s_1...s_p...s_1}(s_1...s_p...s_1,\varepsilon) = \pi_{s_1}\pi_{s_2...s_p...s_2}(s_2...s_p...s_2,\varepsilon\eta(s_1;s_1...s_p...s_1))$$

$$= \pi_{s_1}(s_2...s_p...s_2, -\varepsilon\eta(s_1;s_2...s_p...s_2))$$

$$= (s_1...s_p...s_1, -\varepsilon\eta^2(s_1;s_2...s_p...s_2))$$

$$= (t_1.-\varepsilon).$$

que es lo que queríamos.

Como se observó en el transcurso de la demostración, si tomamos $w \in W$ y una expresión $w = s_k \dots s_1$, la paridad de $n(s_1 s_2 \dots s_k; t)$ depende solamente de w y t. Luego, para cada $w \in W$ y $t \in T$ podemos definir sin ambigüedad:

$$\eta(w;t) \doteq (-1)^{n(s_1 s_2 \dots s_k;t)}.$$

En particular, utilizando esta notación, la ecuación (1.3) se puede escribir como:

$$\pi_w(t,\varepsilon) = (wtw^{-1}, \varepsilon\eta(w^{-1};t)).$$

Teorema 1.1.8 (Propiedad del Intercambio) Supongamos que $w = s_1 s_2 \dots s_k$, y sea $t \in T$. Si $\ell(tw) < \ell(w)$, entonces $tw = s_1 \dots \hat{s_i} \dots s_k$ para algún $1 \le i \le k$.

Demostración. Vamos a probar la equivalencia entre estas dos condiciones:

- (a) $\ell(tw) < \ell(w)$.
- (b) $\eta(w;t) = -1$.

Primero asumimos que $\eta(w;t)=-1$, y elegimos una expresión reducida $w=s'_1\ldots s'_d$. Como $n(s'_1\ldots s'_d;t)$ es impar, deducimos que $t=s'_1\ldots s'_i\ldots s'_1$ para algún $1\leqslant i\leqslant d$. Entonces:

$$\ell(tw) = \ell(s'_1 \dots \hat{s'}_i \dots s'_d) < d = \ell(w).$$

Ahora, si asumimos que $\ell(tw) < \ell(w)$, resulta que:

$$\begin{split} ((tw)^{-1}t(tw),\varepsilon\eta(tw;t)) &= \pi_{(tw)^{-1}}(t,\varepsilon) \\ &= \pi_{w^{-1}}\pi_t(t,\varepsilon) \\ &= \pi_{w^{-1}}(t,-\varepsilon) \\ &= (w^{-1}tw,-\varepsilon\eta(w;t)) \\ &= (w^{-1}tw,-\varepsilon). \end{split}$$

En particular, esto dice que $\eta(tw;t) = -1$, de donde resulta, por la implicación (b) \Rightarrow (a) probada anteriormente, que $\ell(ttw) < \ell(tw)$.

Ahora bien para concluir con la demostración del Teorema, notemos que si $\ell(tw) < \ell(w)$, entonces como $\eta(w;t) = (-1)^{n(s_1...s_k;t)}$, deducimos que $n(s_1...s_k;t)$ es impar y en particular $t = s_1...s_i...s_1$ para algún i. Esto es: $tw = s_1...\hat{s}_i...s_1$, como queríamos.

Corolario 1.1.9 Si $w = s_1 s_2 \dots s_k$ es una expresión reducida $y \ t \in T$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) $\ell(tw) < \ell(w)$.
- (b) $tw = s_1 \dots \hat{s_i} \dots s_k$ para algún $1 \leq i \leq k$.
- (c) $t = s_1 s_2 \dots s_i \dots s_2 s_1$ para algún $1 \le i \le k$.

Demostración. La equivalencia (b) \iff (c) es inmediata. Además la Propiedad del Intercambio prueba que (a) \Rightarrow (b) y la recíproca es trivial.

Otra consecuencia importante de la Propiedad del Intercambio es la siguiente.

Corolario 1.1.10 (Propiedad de la Eliminación) $Si \ w = s_1 s_2 \dots s_k \ y \ \ell(w) < k$, entonces $w = s_1 \dots \hat{s_i} \dots \hat{s_j} \dots s_k \ para \ ciertos \ 1 \leq i < j \leq k$.

Demostración. Si elegimos i maximal de manera que $s_i s_{i+1} \dots s_k$ no es reducida, entonces $\ell(s_i s_{i+1} \dots s_k) < \ell(s_{i+1} \dots s_k)$, y por la Propiedad del Intercambio, resulta que:

$$s_i s_{i+1} \dots s_k = s_{i+1} \dots \hat{s_i} \dots s_k$$

para algún $i < j \leq k$. Multiplicando a ambos lados por $s_1 s_2 \dots s_{i-1}$ se tiene el resultado deseado.

A continuación un lema elemental que será usado más adelante.

Lema 1.1.11 Sea $w \in W$ y $s,t \in S$. Si $\ell(swt) = \ell(w)$ y $\ell(sw) = \ell(wt)$ entonces w = swt.

Demostración. Consideramos una expresión reducida $w=s_1\dots s_r$. Tenemos dos casos:

- (a) $\ell(sw) > \ell(w)$. En este caso por la condición $\ell(swt) = \ell(w) < \ell(sw)$, podemos aplicar la Propiedad del Intercambio, de donde se ve que sw = w't donde $w' = ss_1 \dots \hat{s_i} \dots s_r$ o bien w' = w. La primera posibilidad conduce a un absurdo, pues sería $w = ssw = sw't = s_1 \dots \hat{s_i} \dots s_r t$ de donde $\ell(wt) < \ell(w)$, pero era $\ell(wt) = \ell(sw) > \ell(w)$. En particular, resulta que w' = w, y por lo tanto sw = wt, que dice que swt = w.
- (b) $\ell(sw) < \ell(w) = \ell(ssw)$. Notar que las hipótesis del Lema se pueden aplicar con sw en lugar de w, de donde usamos el inciso (a) para sw y obtenemos sw = s(sw)t = wt y por tanto swt = w.

1.2. Orden de Bruhat

Una propiedad crucial de los grupos de Coxeter, desde un punto de vista combinatorio, es que existe en ellos una estructura de orden parcial que es especialmente útil para describir la teoría de los mismos.

Entre los posibles órdenes parciales en un grupo de Coxeter W, el orden de Bruhat, que definiremos a continuación, extiende al orden dado por las longitudes de los elementos.

A lo largo de este capítulo se establecerán resultados importantes que luego permitirán describir de manera precisa numerosas propiedades del *álgebra de Hecke* de un grupo de Coxeter y, en particular, dar una base de la misma, la llamada *base de Kazhdan-Lusztiq*.

Definición 1.2.1 Sea (W, S) un sistema de Coxeter. Para $u, w \in W$ escribimos:

- (a) $u \xrightarrow{t} w \text{ si } u^{-1}w = t \in T \text{ y } \ell(u) < \ell(w).$
- (b) $u \to w$ si se cumple $u \stackrel{t}{\to} w$ para algún $t \in T$.
- (c) $u \leq w$ si existen $u_i \in W$ tales que:

$$u = u_0 \to u_1 \to \cdots \to u_{k-1} \to u_k = w.$$

Es inmediato comprobar que la relación \leq en W es un orden parcial. Este orden parcial en W se denomina el $orden\ de\ Bruhat$.

Lema 1.2.2 Sean $u, w \in W$ distintos, y sea $w = s_1 s_2 \dots s_q$ una expresión reducida. Supongamos que alguna expresión reducida de u es una subpalabra de $s_1 s_2 \dots s_q$. Entonces existe $v \in W$ tal que:

- I. u < v.
- II. $\ell(v) = \ell(u) + 1$.
- III. Alguna expresión reducida de v es una subpalabra de $s_1 \dots s_q$.

Demostración. Entre todas las subpalabras de $s_1s_2...s_q$ que son expresiones reducidas para u, digamos:

$$u = s_1 \dots \widehat{s_{i_1}} \dots \widehat{s_{i_k}} \dots s_q,$$

elegimos una con i_k mínimo. Consideramos:

$$t \doteq s_q s_{q-1} \dots s_{i_k} \dots s_{q-1} s_q.$$

Se tiene que $ut = s_1 \dots \hat{s}_{i_1} \dots \hat{s}_{i_{k-1}} \dots s_{i_k} \dots s_q$, de modo que $\ell(ut) \leq \ell(u) + 1$. Veamos que, de hecho, ut > u, por lo que bastará tomar v = ut para completar la prueba.

Supongamos que ut < u. Entonces, por la Propiedad del Intercambio, es o bien:

$$t = s_q s_{q-1} \dots s_p \dots s_{q-1} s_q$$
, para algún $p > i_k$,

o bien

$$t = s_q \dots \hat{s}_{i_k} \dots \hat{s}_{i_d} \dots s_r \dots \hat{s}_{i_d} \dots \hat{s}_{i_k} \dots s_q$$
, para cierto $r < i_k, r \neq i_j$.

En el primer caso, observar que:

$$w = wt^{2}$$

$$= (s_{1}s_{2} \dots s_{q})(s_{q} \dots s_{i_{k}} \dots s_{q})(s_{q} \dots s_{p} \dots s_{q})$$

$$= s_{1} \dots \hat{s}_{i_{k}} \dots \hat{s}_{p} \dots s_{q},$$

y esto contradice que $\ell(w) = q$. De manera análoga, en el segundo caso resulta que:

$$u = ut^{2}$$

$$= (s_{1} \dots \hat{s}_{i_{1}} \dots \hat{s}_{i_{k}} \dots s_{q})(s_{q} \dots \hat{s}_{i_{k}} \dots s_{r} \dots \hat{s}_{i_{k}} \dots s_{q})(s_{q} \dots s_{i_{k}} \dots s_{q})$$

$$= s_{1} \dots \hat{s}_{i_{1}} \dots \hat{s}_{r} \dots s_{i_{k}} \dots s_{q},$$

lo cual, a su vez, contradice la minimalidad de i_k .

Podemos caracterizar el Orden de Bruhat en términos de expresiones reducidas como sigue:

Teorema 1.2.3 (Propiedad de la Subpalabra) Sea $w = s_1 s_2 \dots s_q$ una expresión reducida. Entonces $u \leq w$ si y sólo si existe una expresión reducida $u = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq q$.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que $u = x_0 \xrightarrow{t_1} x_1 \xrightarrow{t_2} \dots \xrightarrow{t_m} x_m = w$. Entonces $x_{m-1} = wt_m = s_1 \dots \hat{s_i} \dots s_q$ para cierto i, por la Propiedad del Intercambio. De manera similar, $x_{m-2} = x_{m-1}t_{m-1} = s_1 \dots \hat{s_i} \dots \hat{s_j} \dots s_q$ y así siguiendo para x_{m-3}, x_{m-4}, \dots Finalmente, se obtiene una expresión para u que es una subpalabra de $s_1s_2 \dots s_q$. Por la Propiedad de la Eliminación, esta contiene una subpalabra reducida que es la expresión deseada para u.

(⇐) Supongamos que u admite una expresión reducida que es subexpresión de $s_1 \dots s_q$. Procedemos por inducción en $\ell(w) - \ell(u)$. Si $\ell(w) = \ell(u)$, debe ser w = u y por tanto $u \leqslant w$ trivialmente. Para el paso inductivo, notemos que por el Lema 1.2.2 existe $v \in W$ tal que u < v y tal que una expresión reducida de v es subexpresión de $s_1 \dots s_q$, y además $\ell(v) = \ell(u) + 1$. Por inducción es $v \leqslant w$ y por transitivad $u \leqslant v$, como queríamos.

Corolario 1.2.4 $u \leqslant w$ si y sólo si $u^{-1} \leqslant w^{-1}$.

Corolario 1.2.5 Para $u, v \in w$ son equivalentes:

- (a) $u \leq w$.
- (b) Toda expresión reducida para w tiene una subpalabra que es una expresión reducida para u.
- (c) Existe una expresión reducida para w que tiene una subpalabra que es una expresión reducida para u.

Demostración. Es consecuencia del Teorema que (a) \Rightarrow (b) y además (c) \Rightarrow (a). \square

El siguiente Lema será de utilidad en reiteradas aplicaciones en las secciones de los capítulos posteriores.

Lema 1.2.6 Sean $s \in S$ y $w \in W$ tales que sw < w. Si $x \in W$ cumple x < w entonces:

- (a) $Si \ sx < x$, entonces sx < sw.
- (b) $Si \ sx > x$, entonces $sx \leq w \ y \ x \leq sw$.

En cualquier caso, $sx \leq w$.

Demostración. Veamos que la condición de que sw < w implica que existe una expresión reducida para $w = s_1 \dots s_r$ tal que $s_1 = s$. Por la Propiedad del Intercambio, hay una expresión reducida $w = s'_1 \dots s'_r$ tal que $sw = s'_1 \dots \hat{s}'_i \dots s'_r$ para cierto i, y resulta $w = ss'_1 \dots \hat{s}'_i \dots s'_r$ que es una expresión reducida de w que empieza con s.

Ahora bien, la condición de que x < w implica, por la Propiedad de la Subpalabra, que x es una subexpresión de $w = s_1 \dots s_r$. En particular, resulta que o bien x es una subexpresión de sw, o bien sx es una subexpresión de sw. Es decir $x \le sw$ o sx < sw. Si suponemos el inciso (a), tenemos de cualquier manera que sx < sw. Si suponemos (b), tenemos de cualquier manera que $x \le sw$; en particular x es una subexpresión de sw y por tanto $x = s_2 \dots \hat{s_j} \dots s_r$ para algún j, y entonces $sx = s_1 s_2 \hat{s_j} \dots s_r$ es una subexpresión de w, y por tanto $sx \le w$.

Definición 1.2.7 Un conjunto parcialmente ordenado (A, \leq) se dice *dirigido* si para todo par de elementos $a, b \in A$ existe un elemento $c \in A$ tal que $a, b \leq c$.

Proposición 1.2.8 El sistema de Coxeter (W, S) con el orden de Bruhat es dirigido.

Demostración. Tomamos $u, w \in W$ y vamos a hallar $v \in W$ tal que $u, w \leq v$. Procedemos por inducción en $\ell(u) + \ell(w)$. El caso en que $\ell(u) + \ell(w) = 0$ es trivialmente cierto. Elegimos $s \in S$ tal que su < u. Para el paso inductivo podemos asumir que $\ell(u) > 0$, sin pérdida de generalidad. Por inducción, como $\ell(su) + \ell(w) < \ell(u) + \ell(w)$, existe $x \in W$ tal que $su \leq x$ y $w \leq x$.

Notar que los elementos sx y x se pueden comparar con el orden de Bruhat, y son distintos. Hay dos casos:

- Si sx < x, usando el Lema 1.2.6 (en este caso, haciendo w = x, x = su), resulta que $u \le x$, se concluye.
- Si sx > x, usando el Lema 1.2.6 (b) (en este caso con w = sx y x = su), resulta que $u \le sx$, y como también es $w \le x \le sx$, se concluye.

1.2.1. El caso finito

Si W es finito, la Proposición 1.2.8 se resume simplemente en que W tiene un elemento máximo. Este elemento, que podemos denotar w_0 , es el único que tiene la longitud máxima entre los elementos de W. En efecto, si $\ell(w_0) = \ell(w'_0) = k$, donde k es la mayor longitud posible para un elemento de W, como w_0 es máximo en W, resulta $w'_0 \leq w_0$, y por la Propiedad de la Subpalabra es $w'_0 = w_0$.

Proposición 1.2.9 Sea w_0 el elemento máximo de un grupo de Coxeter finito W. Entonces:

- (a) $w_0^2 = e$.
- (b) $\ell(ww_0) = \ell(w_0) \ell(w)$ para todo $w \in W$.
- (c) $\ell(w_0) = |T|$.

Demostración.

(a) Dado que $\ell(w_0) = \ell(w_0^{-1})$ y hay un único elemento de longitud máxima, resulta que $w_0 = w_0^{-1}$ y por tanto $w_0^2 = e$.

(b) Notar que $\ell(ww_0) \ge \ell(w_0) - \ell(w)$, pues por la desigualdad triangular $\ell(w^{-1}) + \ell(ww_0) \ge \ell(w_0)$. Para la desigualdad contraria, hacemos inducción en $\ell(w_0) - \ell(w)$. Si $\ell(w_0) - \ell(w) = 0$ entonces $w = w_0$. Ahora, para el paso inductivo, si tomamos $w < w_0$ y elegimos $s \in S$ tal que w < sw, entonces

$$\ell(ww_0) \le \ell(sww_0) + 1 \le \ell(w_0) - \ell(sw) + 1 = \ell(w_0) - \ell(w),$$

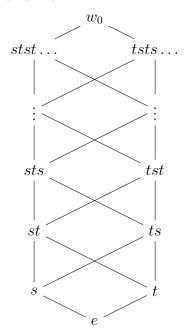
donde la segunda desigualdad resulta de la hipótesis inductiva.

(c) Consideramos una expresión reducida $w_0 = s_1 \dots s_k$. Si tomamos $t \in T$, resulta que $\ell(tw_0) < \ell(w_0)$. Luego, por el Corolario 1.1.9, $t = s_1 \dots s_i \dots s_1$ para algún $1 \le i \le k$. Se concluye fácilmente que |T| = k.

Establecemos para concluir un resultado sobre los grupos diedrales que será de utilidad posteriormente. Si tenemos un subconjunto $A \subseteq W$ y un elemento $w \in W$, escribiremos wA para denotar el conjunto $\{wa : a \in A\} \subseteq W$.

Proposición 1.2.10 Sea W un grupo diedral con generadores s,t tales que $(st)^m = e$. Si $x \neq e$, $y \in A = \{y \in W : y \leq x\}$, se cumple que A = sA o bien que $A - sA = \{x, rx\}$ donde $r \in T$ $y r \neq s$.

Demostración. Comencemos notando que el diagrama de Hasse de un grupo de Coxeter diedral finito es de la forma



En particular, como $x \neq e$, analizamos dos casos según una expresión reducida para x comience con s o con t. Si llamamos $k = \ell(x)$ tenemos que $A = \{x\} \cup \{w \in W : \ell(w) \leq k-1\}$.

■ Si x comienza con s veamos que sA = A, pues si $w \in A$ y $w \neq x$, entonces $\ell(sw) \leq \ell(w) + 1 \leq k$. Si fuera $\ell(sw) = k$, sólo podría ser sw = x o equivalentemente w = sx de donde resulta que $w \in sA$. Si fuera $\ell(sw) \leq k - 1$, entonces $sw \in A$ y por lo tanto $w \in sA$. Se sigue que $A \subseteq sA$.

Recíprocamente, si $w \in sA$, entonces w = sv para $v \in A$. Si v = x, es evidente que $\ell(w) = \ell(sv) < k$ y entonces $w \in A$. Si fuera $v \neq x$, entonces $\ell(w) = \ell(sv) \leq \ell(v) + 1 \leq k$, de donde como w comienza con s y tiene longitud menor o igual a k se sigue que $w \in A$ y por tanto $sA \subseteq A$.

■ Si x comienza con t, podemos asumir que $x \neq w_0$ (de otro modo podemos pensar en el caso anterior). Notemos que sA está formado por todos los elementos de longitud menor o igual a k+1 que comienzan con s y por todos los elementos de longitud menor o igual a k-2 que comienzan con t. En particular, tenemos que en sA están todos los elementos de longitud menor o igual a k-2, de donde A-sA sólo contiene elementos de longitudes k y k-1 que comienzan con t. Esto es:

$$A - sA = \{x, \underbrace{tst...}_{k-1}\}$$

donde $\underbrace{tst...}_{k-1} = rx$ para

$$r = (\underbrace{tst...}_{k-1})(\underbrace{tst...}_{k})^{-1} \in T.$$

y es evidente, además, que $r \neq s$.

Capítulo 2

Álgebras de Hecke

2.1. Álgebras genéricas

Sea (W, S) un sistema de Coxeter. Consideramos un anillo conmutativo con identidad A. Vamos a introducir una manera general de construir álgebras asociativas sobre A que tengan una A-base libre parametrizada por los elementos de W, y una multiplicación que refleje de algún modo la multiplicación en W.

Teorema 2.1.1 Sea A un anillo conmutativo con identidad y(W, S) un sistema de Coxeter. Consideramos dos familias de parámetros $\{a_s\}_{s\in S}$ y $\{b_s\}_{s\in S}$ en A, de modo que $a_s = a_t$ y $b_s = b_t$ siempre que t y s sean conjugados en W. Sea \mathcal{E} un A-módulo libre sobre el conjunto W, con base $\{T_w\}_{w\in W}$. Entonces existe una única estructura de A-álgebra asociativa en \mathcal{E} tal que T_1 actúa como la identidad, y tal que para cada $s \in S$ y $w \in W$ se cumple:

$$T_s T_w = T_{sw} si \, \ell(sw) > \ell(w), (2.1)$$

$$T_s T_w = a_s T_w + b_s T_{sw} \qquad \qquad si \ \ell(sw) < \ell(w). \tag{2.2}$$

El álgebra descripta por el teorema se denota $\mathcal{E}_A(a_s,b_s)$ y se denomina un álgebra genérica. Antes de proceder con la prueba señalamos dos ejemplos importantes de álgebras genéricas:

EJEMPLO 2.1.2: El álgebra de grupo A[W] es un ejemplo inmediato de un álgebra genérica. Para cada $s \in S$ tomamos $a_s = 0$ y $b_s = 1$. En efecto, por la condición del teorema, tenemos que vale $T_sT_w = T_{sw}$ para todo $s \in S$ y todo $w \in W$.

EJEMPLO 2.1.3: El álgebra \mathcal{N} que se obtiene para $a_s = b_s = 0$ se denomina el álgebra de nil Hecke del sistema de Coxeter (W, S).

Un hecho importante es que las segunda de las dos condiciones sobre el producto en $\mathcal{E}_A(a_s,b_s)$ se puede cambiar por otra equivalente:

$$T_s^2 = a_s T_s + b_s T_1 (2.3)$$

En efecto, es inmediato que esta condición se deduce trivialmente de 2.2, dado que $s^2=1,\ s\in S.$

Recíprocamente, si $\mathcal{E} \doteq \mathcal{E}_A(a_s, b_s)$ admite una estructura de A-álgebra con T_1 actuando como la identidad y cumple (2.1), entonces para cada $s \in S$ y $w \in W$ tales que $\ell(sw) < \ell(w)$, resulta que $\ell(s(sw)) > \ell(sw)$, y por lo tanto por (2.1) tenemos que $T_sT_{sw} = T_w$. Ahora, usando la nueva condición, resulta que:

$$T_s T_w = T_s^2 T_{sw}$$

$$= (a_s T_s + b_s T_1) T_{sw}$$

$$= a_s T_s T_{sw} + b_s T_{sw}$$

$$= a_s T_w + b_s T_{sw},$$

que es justamente la condición (2.2).

Observemos también que la unicidad de una estructura como la del Teorema es sencilla de verificar. En efecto, iterando la condición (2.1), tenemos que $T_w = T_{s_1} \cdot \ldots \cdot T_{s_r}$, siempre que $w = s_1 \cdot \cdots s_r$ sea una expresión reducida para w. De hecho \mathcal{E} es un álgebra generada por $\{T_s\}_{s\in S} \cup \{T_1\}$. Más aún, se puede determinar iterando las condiciones (2.1) y (2.2) del Teorema una tabla de multiplicación completa para los elementos de la base $\{T_w\}_{w\in W}$.

Para probar la existencia procedemos como sigue: consideramos $\operatorname{End} \mathcal{E}$, el álgebra de endomorfismos de A-módulos de \mathcal{E} . Si \mathcal{E} tiene una estructura de álgebra, los operadores de multiplicación a izquierda correspondientes a elementos de \mathcal{E} conformarán una copia del álgebra \mathcal{E} dentro de $\operatorname{End} \mathcal{E}$. El objetivo será ubicar esta álgebra dentro de $\operatorname{End} \mathcal{E}$, y para satisfacer las condiciones (2.1) y (2.2) los operadores de multiplicación a izquierda λ_s , correspondientes a cada T_s ($s \in S$) tendrán que satisfacer:

$$\lambda_s(T_w) = T_{sw} \qquad \text{si } \ell(sw) > \ell(w), \qquad (2.4)$$

$$\lambda_s(T_w) = a_s T_w + b_s T_{sw} \qquad \text{si } \ell(sw) < \ell(w). \tag{2.5}$$

De manera similar, deberá haber operadores de multiplicación a derecha, ρ_t $(t \in S)$ que se comporten de manera que:

$$\rho_t(T_w) = T_{wt} \qquad \qquad \text{si } \ell(wt) > \ell(w), \tag{2.6}$$

$$\rho_t(T_w) = a_t T_w + b_t T_{wt} \qquad \text{si } \ell(wt) < \ell(w). \tag{2.7}$$

Ahora se procede como sigue: definimos los endomorfismos λ_s y ρ_t para los $t, s \in S$, extendiendo por linealidad según su acción en la base de \mathcal{E} .

A continuación vamos a probar que los operadores λ_s y ρ_t conmutan para todo $s, t \in S$. En particular si miramos la aplicación que envía la subálgebra de End \mathcal{E} generada por todos los λ_s , a través de la aplicación $\lambda \mapsto \lambda(T_1)$, el hecho de que λ_s y ρ_t conmuten garantiza que esta transformación es biyectiva, lo cual permite que se pueda mirar a \mathcal{E} con la estructura de álgebra deseada.

Proposición 2.1.4 Si $s, t \in S$, entonces λ_s y ρ_t conmutan.

Demostración. Fijemos un $w \in W$ y comparemos los efectos de los operadores $\lambda_s \rho_t$ y $\rho_t \lambda_s$ sobre T_w . Observemos que multiplicar por s o t cambia las longitudes de los elementos en 1. En particular tenemos seis casos para analizar:

- (a) $\ell(w) < \ell(wt) = \ell(sw) < \ell(swt)$. En este caso, la descripción de los operadores λ_s y ρ_t dada anteriormente prueba que $\lambda_s \rho_t(T_w) = T_{swt} = \rho_t \lambda_s(T_w)$.
- (b) $\ell(swt) < \ell(wt) = \ell(sw) < \ell(w)$. Por cálculo directo:

$$\lambda_s \rho_t(T_w) = \lambda_s (a_t T_w + b_t T_{wt})$$

$$= a_t \lambda_s(T_w) + b_t \lambda_s(T_{wt})$$

$$= a_t (a_s T_w + b_s T_{sw}) + b_t (a_s T_{wt} + b_s T_{wst})$$

$$= a_t a_s T_w + a_t b_s T_{sw} + b_t a_s T_{wt} + b_t b_s T_{swt}.$$

Un cálculo completamente análogo revela que $\rho_t \lambda_s(T_w)$ da el mismo resultado.

(c) $\ell(wt) = \ell(sw) < \ell(swt) = \ell(w)$. Usamos el Lema 1.1.11 para obtener que sw = wt, de donde s y t son conjugados en W, de donde $a_s = a_t$ y $b_s = b_t$. Para concluir sólo es necesario hacer el cálculo:

$$\lambda_s \rho_t(T_w) = a_t a_s T_w + a_t b_s T_{sw} + b_t T_{swt},$$

$$\rho_t \lambda_s(T_w) = a_s a_t T_w + a_s b_t T_{sw} + b_s T_{swt},$$

y se concluye la igualdad.

(d) $\ell(wt) < \ell(w) = \ell(swt) < \ell(sw)$. En este caso se obtiene directamente:

$$\lambda_s \rho_t(T_w) = a_s T_{wt} + b_s T_{swt} = \rho_t \lambda_s(T_w).$$

(e) $\ell(w) = \ell(swt) < \ell(wt) = \ell(sw)$. Otra vez usamos el Lema 1.1.11 para obtener sw = wt y por tanto también $a_s = a_t$ y $b_s = b_t$. Como $\lambda_s \rho_t(T_w) = a_s T_{wt} + b_s T_{swt}$ y $\rho_t \lambda_s(T_w) = a_t T_{sw} + b_t T_{swt}$, se concluye.

Ahora vamos a concluir con la prueba de la existencia de la estructura de álgebra deseada. Sea \mathcal{L} la subálgebra de End \mathcal{E} (con 1) generada por los endomorfismos λ_s , $s \in S$. Ahora consideramos una aplicación $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{E}$ dada por $\varphi(\lambda) \doteq \lambda(T_1)$, esto es, φ aplica $1 \mapsto T_1$ y $\lambda_s \mapsto T_s$ para todo $s \in S$. Es evidente que φ es un morfismo de A-módulos y, más aún, es sobreyectivo, pues todos los elementos T_w de la base de \mathcal{E} están en la imagen: en efecto, si $w = s_1 \dots s_r$ es una expresión reducida, entonces $T_w = \varphi(\lambda_{s_1} \dots \lambda_{s_r})$.

Para ver que φ es inyectiva, supongamos que $\varphi(\lambda) = 0$, o sea, $\lambda(T_1) = 0$. Vamos a probar por inducción en $\ell(w)$ que $\lambda(T_w) = 0$ para todo $w \in W$, y por tanto $\lambda = 0$. Si $\ell(w) > 0$, hallamos un $t \in S$ tal que $\ell(wt) < \ell(w)$. Usando la Proposición 2.1.4, el endomorfismo ρ_t conmuta con \mathcal{L} y, en particular, con λ . Por tanto,

$$\lambda(T_w) = \lambda(T_{(wt)t}) = \lambda(\rho_t(T_w)) = \rho_t(\lambda(T_{wt})) = 0,$$

lo cual completa el paso inductivo.

Ahora que sabemos que φ es un isomorfismo de A-módulos, se sigue que \mathcal{L} admite una A-base libre consistiendo de todos los $\lambda_w \doteq \lambda_{s_1} \dots \lambda_{s_r}, w \in W$, donde

 $w = s_1 \dots s_r$ es reducida y el endomorfismo λ_w es independiente de tal elección. Más aún, la estructura de álgebra en \mathcal{L} se puede transferir a \mathcal{E} . Sólo resta verificar que esta estructura satisface las condiciones (2.1) y (2.2) o, equivalentemente, las condiciones (2.1) y (2.3).

- Si $\ell(sw) > \ell(w)$. Debemos comprobar que $\lambda_s \lambda_w = \lambda_{sw}$. Si tomamos una expresión reducida $w = s_1 \dots s_r$, es evidente que $ss_1 \dots s_r$ es una expresión reducida para sw. Ahora bien, se concluye: $\lambda_s \lambda_w = \lambda_s \lambda_{s_1} \dots \lambda_{s_r} = \lambda_{sw}$.
- Ahora debemos verificar que $\lambda_s^2 = a_s \lambda_s + b_s \lambda_1$. Verificamos que el resultado de evaluar cada lado en un elemento T_w coincide en ambos casos. Para esto tenemos a su vez dos casos.
 - Si $\ell(sw) > \ell(w)$, tenemos:

$$\lambda_s^2(T_w) = \lambda_s(T_{sw}) = a_s T_{sw} + b_s T_w = (a_s \lambda_s + b_s \lambda_1)(T_w).$$

• Si $\ell(sw) < \ell(w)$, tenemos:

$$\lambda_s^2(T_w) = \lambda_s(a_s T_w + b_s T_{sw}) = a_s \lambda_s(T_w) + b_s T_s T_{sw} = (a_s \lambda_s + b_s \lambda_1)(T_w).$$

2.2. Álgebras de Hecke e Inversos

Definición 2.2.1 Sea $A = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ el anillo de polinomios de Laurent sobre \mathbb{Z} con variable q. Para el sistema de Coxeter (W, S) consideramos la asignación de parámetros $a_s = q - 1$ y $b_s = q$. El álgebra genérica que se obtiene del Teorema de la sección anterior, se denomina álgebra de Hecke de W y la denotaremos \mathcal{H} .

Es claro que las condiciones (2.1) y (2.3) de la sección anterior quieren decir que:

$$T_s T_w = T_{sw}$$
 si $\ell(sw) > \ell(w)$,
 $T_s^2 = (q-1)T_s + qT_1$.

Un hecho importante del álgebra \mathcal{H} es la existencia de inversos para los elementos T_w . En efecto, las relaciones dadas implican que para todo $s \in S$ es:

$$T_s^{-1} = q^{-1}T_s - (1 - q^{-1})T_1. (2.8)$$

Además, como $T_w = T_{s_1} \cdot \ldots \cdot T_{s_r}$ siempre que $w = s_1 \cdots s_r$ sea una expresión reducida, todos los elementos T_w son invertibles en \mathcal{H} . Sin embargo, a medida que $\ell(w)$ crece, es cada vez más difícil computar T_w^{-1} como una combinación lineal de los elementos de la base $\{T_w\}_{w\in W}$ del álgebra \mathcal{H} . Con el objetivo de simplificar este trabajo es que se va a introducir la familia de los R-polinomios.

La idea será mostrar que el inverso de un elemento $T_{w^{-1}}$ se puede escribir como combinación lineal de aquellos x tales que $x \leq w$ en el orden de Bruhat en W.

Para evitar un uso excesivo de paréntesis, vamos a escribir

$$\varepsilon_w \doteq (-1)^{\ell(w)},\tag{2.9}$$

$$q_w \doteq q^{\ell(w)}.\tag{2.10}$$

Cuando tratemos con un polinomio únicamente en la variable q omitiremos escribir F(q) y escribiremos simplemente F.

Teorema 2.2.2 Para todo $w \in W$ se tiene que:

$$(T_{w^{-1}})^{-1} = \varepsilon_w q_w^{-1} \sum_{x \le w} \varepsilon_x R_{x,w}(q) T_x,$$

donde cada $R_{x,w} \in \mathbb{Z}[q]$ es un polinomio de grado $\ell(w) - \ell(x)$ y donde $R_{w,w}(q) = 1$.

Demostración. Si w=1, el enunciado es trivial. Gracias a la fórmula para T_s^{-1} , tenemos para $w=s \in S$, que $R_{1,s} \doteq q-1$ y $R_{s,s}=1$, de modo que se verifica que el enunciado se cumple por inducción en $\ell(w)$.

En el transcurso de la prueba obtendremos un algoritmo para calcular los Rpolinomios. Por simplicidad, definiremos $R_{x,w} = 0$ para $x \leq w$.

Asumimos $\ell(w) > 0$, y escribimos w = sv para $s \in S$ y $v \in W$ tales que $\ell(v) < \ell(w)$. En particular $\varepsilon_w = -\varepsilon_v$ y $q_w = q_v q$. Usando la hipótesis inductiva, tenemos:

$$\begin{split} (T_{w^{-1}})^{-1} &= (T_{v^{-1}}T_s)^{-1} \\ &= T_s^{-1} (T_{v^{-1}})^{-1} \\ &= q^{-1} (T_s - (q-1)T_1) \left(\varepsilon_v q_v^{-1} \sum_{y \leqslant v} \varepsilon_y R_{y,v} T_y \right) \\ &= \varepsilon_w q_w^{-1} \left[(q-1) \sum_{y \leqslant v} \varepsilon_y R_{y,v} T_y - \sum_{y \leqslant v} \varepsilon_y R_{y,v} T_s T_y \right]. \end{split}$$

La segunda suma involucra dos tipos de términos. Si sy > y tenemos que $T_sT_y = T_{sy}$. Pero si sy < y, tenemos $T_sT_y = (q-1)T_y + qT_{sy}$, donde el primero de estos términos se cancela con la primera suma. Esto permite reescribir todo como una suma de tres tipos de términos:

si
$$y \leq v, y < sv$$
, $(q-1)\varepsilon_y R_{y,v} T_y$,
si $y \leq v, y < sv$, $-\varepsilon_y R_{y,v} T_{sy}$,
si $y \leq v, y > sv$, $-q\varepsilon_y R_{y,v} T_{sy}$.

En cada caso, tenemos que y < w y por el Lema 1.2.6, $sy \le w$. Notar también que cada $x \le w$ ocurre como $y \le v$ o como sy con $y \le v$. Luego, resta verificar que el coeficiente de T_x satisface las condiciones del enunciado.

Consideramos $x \leq w$ con x > sx. Entonces T_x ocurre en el segundo de nuestros casos, con x = sy para $y \leq v$, y obtenemos como coeficiente $-\varepsilon_y R_{y,v} = \varepsilon_x R_{sx,sw}$, de grado $\ell(sw) - \ell(sx) = \ell(w) - \ell(x)$. En el caso extremo en que x = w, notar que y = v y $R_{v,v} = 1$ por inducción. Luego, el polinomio $R_{x,w} \doteq R_{sx,sw}$ tiene las propiedades deseadas.

Ahora consideramos el caso en que x < w con x < sx. Hay dos posibilidades:

(a) En el caso en que sx < v, T_x ocurre en los términos del primer y tercer tipo, con $x = y \le v$ en el primero, y x = sy, $y = sx \le v$ en el otro. El coeficiente en definitiva es:

$$(q-1)\varepsilon_x R_{x,v} - q\varepsilon_{sx} R_{sx,v}.$$

Notar que

$$\deg qR_{sx,v} = \ell(v) - \ell(sx) + 1 = \ell(w) - \ell(x) - 1,$$

mientras que

$$\deg(q-1)R_{x,v} = \ell(v) - \ell(x) + 1 = \ell(w) - \ell(x).$$

En definitiva, el coeficiente de T_x tiene grado $\ell(w) - \ell(x)$, y podemos definir:

$$R_{x,w} \doteq (q-1)R_{x,sw} + qR_{sx,sw}.$$

(b) En el caso en que $sx \leq v$, T_x ocurre solamente en un término del segundo tipo, con coeficiente igual a $\varepsilon_x(q-1)R_{x,v}$. Usando la convención $R_{sx,v}=0$, $R_{x,w}$ se puede definir precisamente como en el caso (a), lo cual completa el paso inductivo.

Vamos a explicitar el algoritmo para computar los polinomios $R_{x,w}$, según la demostración del Teorema de la sección anterior. La idea es proceder por inducción en $\ell(w)$, empezando por el hecho de que $R_{w,w}=1$ para todo $w\in W$, mientras que $R_{x,w}=0$ a menos que $x\leqslant w$. Para el paso inductivo, necesitamos computar $R_{x,w}$, asumiendo que los polinomios $R_{y,z}$ son conocidos para $\ell(z)<\ell(w)$.

Fijemos $s \in S$ tal que sw < w. Las dos configuraciones con las que debemos tratar, de acuerdo con el Lema 1.2.6 son:

- x < w y sx < x, lo cual fuerza que sx < sw. Aquí se tiene que $R_{x,w} = R_{sx,sw}$, que ya se conoce, dado que sw < w.
- x < w y x < sx, lo cual fuerza que $sx \le w$ y $x \le sw$. Aquí se tiene que $R_{x,w} = (q-1)R_{x,sw} + qR_{sx,sw}$, y ambos polinomios del lado derecho son conocidos (observar que el primer producto tiene grado $\ell(w) \ell(x)$ y el segundo es de grado menor).

También existe la versión simétrica a derecha de la primera de estas dos configuraciones.

Lema 2.2.3 Si
$$x < w$$
, $xs < x$ y $ws < w$ entonces $R_{x,w} = R_{xs,ws}$.

2.2.1. El caso finito

Si W es un grupo finito, entonces los R-polinomios exhiben una propiedad de simetría adicional que aprovecharemos en el futuro. Consideramos el elemento w_0 más largo en W. Sabemos que el mismo satisface que $\ell(w_0w) = \ell(w_0) - \ell(w)$ para todos los $w \in W$.

Proposición 2.2.4 Si W es finito, entonces $R_{x,w} = R_{w_0w,w_0x}$ para todo $x \leq w$.

Demostración. Procedemos por inducción en $\ell(w)$, a partir del hecho de que $R_{1,1} = R_{w_0,w_0} = 1$. Si $\ell(w) > 0$, existe $s \in S$ tal que ws < w. Como antes, hay dos casos que considerar:

• Si xs < x, entonces $w_0x < w_0xs$. Por el Lema 2.2.3 y la hipótesis inductiva:

$$R_{x,w} = R_{xs,ws} = R_{w_0ws,w_0xs} = R_{w_0w,w_0x}.$$

• Si x < xs, por el Lema 1.2.6 tenemos que:

$$R_{x,w} = (q-1)R_{x,ws} + qR_{xs,ws}.$$

Por inducción, esto es lo mismo que

$$(q-1)R_{w_0ws,w_0x} + qR_{w_0ws,w_0xs}$$

y usando otra vez el Lema 1.2.6 podemos reemplazar el primer término por $(q-1)R_{w_0w,w_0xs}$ y, por tanto, aplicando una última vez el Lema 1.2.6, se obtiene finalmente R_{w_0w,w_0x} , como queríamos.

2.3. Una involución del Álgebra de Hecke

Ya hemos visto cómo invertir los elementos T_w de la base de \mathcal{H} . Ahora vamos a introducir una involución $\iota : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, esto es, un automorfismo que cumple $\iota \circ \iota = \mathrm{id}$.

Para definir esta involución, consideramos primero la involución ι de $A = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ dada por $q \mapsto q^{-1}$, y definimos ahora $\iota(T_w) \doteq (T_{w^{-1}})^{-1}$. Combinando estas dos asignaciones y extendiendo aditivamente, se obtiene una aplicación $\iota : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Usando el hecho de que $T_s^{-1} = q^{-1}T_s - (1-q^{-1})T_1$, es sencillo verificar que $\iota^2(T_s) = T_s$. En particular, para probar que $\iota^2 = \mathrm{id}$, bastará probar que ι es efectivamente un automorfismo de anillos de \mathcal{H} (pues los T_s generan a \mathcal{H} como A-álgebra).

Lema 2.3.1 Si $s \in S$ y $w \in W$, entonces $\iota(T_sT_w) = \iota(T_s)\iota(T_w)$.

Demostración. Hay dos casos para verificar.

• Si $\ell(sw) > \ell(w)$, computamos directamente:

$$\iota(T_s T_w) = \iota(T_{sw}) = (T_{w^{-1}s})^{-1} = (T_{w^{-1}} T_s)^{-1} = T_s^{-1} (T_{w^{-1}})^{-1} = \iota(T_s) \iota(T_w).$$

■ Si $\ell(sw) < \ell(w)$, consideramos $v \doteq (sw)^{-1}$, de modo que $w^{-1} = vs$. Ahora:

$$\iota(T_s T_w) = \iota(q T_{sw} + (q-1)T_w) = q^{-1} T_v^{-1} + (q^{-1} - 1)(T_{w^{-1}})^{-1}.$$

Como $T_{w^{-1}} = T_{vs} = T_v T_s$, tenemos que $(T_{w^{-1}})^{-1} = T_s^{-1} T_v^{-1}$. Más aún, usando que $T_s^{-1} = q^{-1}(T_s - (q-1)T_1)$, obtenemos:

$$\iota(T_s T_w) = q^{-1} T_v^{-1} - q^{-1} (q-1) q^{-1} (T_s - (q-1)T_1) T_v^{-1}$$

$$= q^{-1} T_v^{-1} - q^{-2} (q-1) T_s T_v^{-1} + q^{-2} (q-1)^2 T_v^{-1}$$

$$= q^{-2} (q^2 - q + 1) T_v^{-1} - (q-1) q^{-2} T_s T_v^{-1}.$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\iota(T_s)\iota(T_w) = T_s^{-1}(T_{w^{-1}})^{-1} = T_s^{-2}T_v^{-1}.$$

Pero nuevamente, usando que $T_s^{-1} = q^{-1}(T_s - (q-1)T_1)$, resulta que

$$T_s^{-2} = q^{-2}((q-1)T_s + qT_1) - 2q^{-2}(q-1)T_s + q^{-2}(q^2 - 2q + 1)T_1.$$

Multiplicando por T_v^{-1} a ambos lados, del lado derecho se obtiene el mismo resultado de antes, de modo que $\iota(T_sT_w) = \iota(T_s)\iota(T_w)$.

Corolario 2.3.2 ι es un automorfismo de \mathcal{H} .

Demostración. Consideramos w' y w. Procedemos por inducción en $\ell(w')$ para probar que $\iota(T_{w'}T_w) = \iota(T_{w'})\iota(T_w)$. Notar que si $\ell(w') = 1$, entonces $w' \in S$, y por tanto la conclusión es válida por el Lema 2.3.1.

Para el paso inductivo, asumimos $\ell(w') > 1$, y hallamos $s \in S$ tal que $\ell(w's) < \ell(w')$. Entonces $\iota(T_{w'}T_w) = \iota(T_{w's}T_sT_w) = \iota(T_{w's})\iota(T_sT_w)$ por inducción, y por el Lema anterior, esto es $\iota(T_{w's})\iota(T_s)\iota(T_w)$ lo cual, nuevamente por la hipótesis inductiva, a su vez es $\iota(T_{w's}T_s)\iota(T_w) = \iota(T_{w'})\iota(T_w)$.

A continuación vamos a enumerar algunas propiedades útiles de los R-polinomios. Para evitar el abuso de paréntesis, escribiremos $\overline{R}_{x,w}(q) \doteq R_{x,w}(q^{-1})$.

Proposición 2.3.3 Para todos los $x, w \in W$ se cumplen:

- (a) $\overline{R}_{x,w} = \varepsilon_x \varepsilon_w q_x q_w^{-1} R_{x,w}$.
- (b) $(T_{w^{-1}})^{-1} = \sum_{x \leq w} q_x^{-1} \overline{R}_{x,w} T_x$.
- (c) $\sum_{x \leq y \leq w} \varepsilon_x \varepsilon_y R_{x,y} R_{y,w} = \delta_{x,w}$ (la delta de Kronecker).

Demostración.

- (a) Vamos a proceder por inducción una vez más. Elegimos $s \in S$ tal que sw < w. Nuevamente, hay dos casos:
 - Supongamos que x < w y sx < x, de modo que $R_{x,w} = R_{sx,sw}$. Por inducción,

$$\overline{R}_{sx,sw} = \varepsilon_{sx}\varepsilon_{sw}q_{sx}q_{sw}^{-1}R_{sx,sw} = (-\varepsilon_x)(-\varepsilon_w)q_xq^{-1}q_w^{-1}qR_{x,w} = \varepsilon_x\varepsilon_wq_xq_w^{-1}R_{x,w}.$$

■ Supongamos que x < w y x < sx. Tenemos que $R_{x,w} = (q-1)R_{x,sw} + qR_{sx,sw}$. Aplicando ι resulta:

$$\overline{R}_{x,w} = -q^{-1}(q-1)\overline{R}_{x,sw} + q^{-1}\overline{R}_{sx,sw}.$$

Por hipótesis inductiva, $\overline{R}_{x,sw} = \varepsilon_x \varepsilon_{sw} q_x q_{sw}^{-1} R_{x,sw}$, mientras que $\overline{R}_{sx,sw} = \varepsilon_{sx} \varepsilon_{sw} q_{sx} q_{sw}^{-1} R_{sx,sw}$. Usando que $q_{sx} = q_x q$ y $q_{sw} = q_w q^{-1}$ y reemplazando en la fórmula anterior, se obtiene la conclusión deseada.

- (b) Se deduce del Teorema 2.2.2 y de (a).
- (c) Por la fórmula obtenida en (b) tenemos que $(T_{w^{-1}})^{-1} = \sum_{y \leq w} q_y^{-1} \overline{R}_{y,w} T_y$. Aplicando ι a ambos lados, resulta:

$$T_w = \sum_{y \leqslant w} q_y R_{y,w} (T_{y^{-1}})^{-1}.$$

Ahora, usando la fórmula para $T_{y^{-1}}^{-1}$ del Teorema 2.2.2 se obtiene que:

$$T_w = \sum_{y \le w} q_y R_{y,w} \varepsilon_y q_y^{-1} \sum_{x \le y} \varepsilon_x R_{x,y} T_x.$$

El coeficiente de T_x del lado izquierdo es 1 si w=x y de otro modo es 0. Del lado derecho este coeficiente es precisamente $\sum_{x \leq y \leq w} \varepsilon_x \varepsilon_y R_{x,y} R_{y,w}$.

2.4. Polinomios de Kazhdan-Lusztig

Nuestro objetivo ahora será hallar una nueva base $\{C_w\}_{w\in W}$ del A-módulo \mathcal{H} , pero que consista de elementos que quedan fijos por la involución ι . Observar que:

$$T_s^{-1} = q^{-1}T_s - (1 - q^{-1})T_1 = q^{-1}(T_s - (q - 1)T_1),$$

con lo cual:

$$\iota(T_s - qT_1) = \iota(T_s) - q^{-1}\iota(T_1)$$

$$= T_s^{-1} - q^{-1}T_1$$

$$= q^{-1}(T_s - (q-1)T_1) - q^{-1}T_1$$

$$= q^{-1}(T_s - qT_1).$$

Si introducimos el símbolo $q^{\frac{1}{2}}$, tenemos para cada $s \in S$ que los elementos de la forma $C_s \doteq q^{-\frac{1}{2}}(T_s - qT_1)$ quedan fijos por la acción de ι .

Formalmente, vamos a reemplazar nuestro anillo $A = \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ por el anillo extendido $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}},q^{-\frac{1}{2}}]$ de polinomios de Laurent en la indeterminada $q^{\frac{1}{2}}$. De este modo, nuestro anillo A es un subanillo del anillo extendido. Esto no tiene ningún efecto en nuestros cálculos formales previos en \mathcal{H} . Por el resto de este capítulo A va a denotar al anillo extendido.

La idea ahora es buscar, para cada $w \in W$, un elemento $C_w \in \mathcal{H}$ que sea combinación lineal de los T_x para los $x \leq w$, y cuyos coeficientes sean polinomios tan sencillos como sea posible. El siguiente resultado nos provee estos elementos.

Teorema 2.4.1 (Kazhdan-Lusztig) Para cada $w \in W$ existe un único elemento $C_w \in \mathcal{H}$ que tiene las propiedades siguientes:

- (a) $\iota(C_w) = C_w$.
- (b) $C_w = \varepsilon_w q_w^{\frac{1}{2}} \sum_{x \leq w} \varepsilon_x q_x^{-1} \overline{P}_{x,w} T_x$, donde $P_{w,w} = 1$ y $P_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ es un polinomio de grado menor o igual a $\frac{1}{2}(\ell(w) \ell(x) 1)$ si x < w.

Demostración. Vamos a comenzar probando, para cada $w \in W,$ la unicidad del elemento:

$$C_w = \sum_{x \le w} a(x, w) \overline{P}_{x, w} T_x,$$

donde $a(x,w) \doteq \varepsilon_w \varepsilon_x q_w^{\frac{1}{2}} q_x^{-1}$, asumiendo que C_w tiene las propiedades (a) y (b). Esto equivale a probar que los polinomios $P_{x,w}$ se pueden elegir a lo sumo de una única manera. Para un w fijo, procedemos por inducción en $\ell(w) - \ell(x)$, empezando con $P_{w,w} = 1$, de donde se puede asumir que todos los $P_{y,w}$ están unívocamente determinados para $x < y \le w$. Veremos que esto determina al polinomio $P_{x,w}$. Partimos de la hipótesis:

$$C_w = \sum_{y \le w} a(y, w) \overline{P}_{y, w} T_x$$

Aplicamos ι a ambos lados para obtener, usando el Teorema 2.2.2:

$$\begin{split} \sum_{x \leqslant w} \varepsilon_w \varepsilon_x q_w^{\frac{1}{2}} q_x^{-1} \overline{P}_{x,w} T_x &= C_w = \iota(C_w) \\ &= \sum_{y \leqslant w} \varepsilon_w \varepsilon_y q_w^{-\frac{1}{2}} q_y P_{y,w} (T_{y^{-1}})^{-1} \\ &= \sum_{y \leqslant w} \varepsilon_w \varepsilon_y q_w^{-\frac{1}{2}} q_y P_{y,w} \varepsilon_y q_y^{-1} \sum_{x \leqslant y} \varepsilon_x R_{x,y} T_x \\ &= \varepsilon_w q_w^{-\frac{1}{2}} \sum_{y \leqslant w} \sum_{x \leqslant y} \varepsilon_x P_{y,w} R_{x,y} T_x. \end{split}$$

Ahora fijando $x \leq w$, igualando el coeficiente de T_x a ambos lados, resulta que

$$\varepsilon_w \varepsilon_x q_w^{\frac{1}{2}} q_x^{-1} \overline{P}_{x,w} = \varepsilon_w q_w^{-\frac{1}{2}} \sum_{x \le y \le w} \varepsilon_x R_{x,y} P_{y,w}.$$

Cancelando ε_w y ε_x a ambos lados, y multiplicando por $q_x^{\frac{1}{2}}$ nos dice que:

$$q_w^{\frac{1}{2}} q_x^{-\frac{1}{2}} \overline{P}_{x,w} = q_w^{-\frac{1}{2}} q_x^{\frac{1}{2}} \sum_{x \leqslant y \leqslant w} R_{x,y} P_{y,w}.$$

Finalmente restando el término con y=x de la suma de la derecha, y usando que $R_{x,x}=1$, resulta:

$$q_w^{\frac{1}{2}} q_x^{-\frac{1}{2}} \overline{P}_{x,w} - q_w^{-\frac{1}{2}} q_x^{\frac{1}{2}} P_{x,w} = q_w^{-\frac{1}{2}} q_x^{\frac{1}{2}} \sum_{x < y \le w} R_{x,y} P_{y,w}.$$

Asumiendo que todos los $P_{y,w}$ con $x < y \le w$ son ya conocidos, dado que x < w, el inciso (b) implica que del lado izquierdo el primer término es un polinomio en $q^{\frac{1}{2}}$ sin término constante, mientras que el segundo es un polinomio en $q^{-\frac{1}{2}}$ sin término constante. Esto produce que la elección para $P_{x,w}$ sea única, como afirmábamos.

Ahora vamos a probar la existencia de los elementos C_w , lo cual es más complicado. Vamos a proceder por inducción en $\ell(w)$. Para el paso inductivo, tomamos $s \in S$ tal que $\ell(sw) < \ell(w)$, y llamamos $v \doteq sw$. De este modo, el elemento C_v ya es conocido. Notar que:

 $a(x,w) = -q^{\frac{1}{2}}a(x,v).$

Ahora definimos:

$$C_w \doteq C_s C_v - \sum_{\substack{z < v \\ sz < z}} \mu(z, v) C_z$$

donde $\mu(z, v)$ denota al coeficiente principal del polinomio $P_{z,v}$, y escribimos z < v cuando el elemento $P_{z,v}$ tiene grado $\frac{1}{2}(\ell(v) - \ell(z) - 1)$ (obviamente z < v y $\varepsilon_v = -\varepsilon_z$).

Es claro que el elemento C_w es ι -invariante, pues es suma y producto de elementos ι -invariantes. Esto exhibe que C_w es una A-combinación lineal de elementos T_x con $x \leq w$. Ahora miramos los coeficientes de los T_x para cada $x \leq w$, empezando por x = w. Notar que:

$$C_w = C_s C_v - \sum_{\substack{z < v \\ sz < z}} \mu(z, v) C_z$$

$$= (q^{-\frac{1}{2}} T_s - q^{\frac{1}{2}} T_1) \sum_{z \leqslant v} a(z, v) \overline{P}_{z, v} T_z - \sum_{\substack{z < v \\ sz < z}} \mu(z, v) C_z.$$

El coeficiente de $T_w = T_s T_v$ en el primer producto es $q^{-\frac{1}{2}}a(v,v)\overline{P}_{v,v} = q^{-\frac{1}{2}}q_v^{\frac{1}{2}}q_v^{-1} = q_w^{-\frac{1}{2}}$. Esto coincide en la fórmula del enunciado para C_w , tomando el término de la suma con x = w (donde $P_{w,w} = 1$).

A continuación fijamos x < w. Analizamos dos casos:

■ Si x < sx, por el Lema 1.2.6 tenemos que $x \le v$ y $sx \le w$. Por un lado, resulta que $T_sT_{sx} = qT_x + (q-1)T_{sx}$. Además, si suponemos que $sx \le v$, entonces $q^{-\frac{1}{2}}T_sC_v$ involucra al término T_x con coeficiente:

$$\begin{split} q^{-\frac{1}{2}}qa(sx,v)\overline{P}_{sx,v} &= q^{\frac{1}{2}}\varepsilon_v(-\varepsilon_x)q_v^{\frac{1}{2}}q_{sx}^{-1}\overline{P}_{sx,v} \\ &= q^{\frac{1}{2}}\varepsilon_w\varepsilon_xq_w^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}q_x^{-1}q^{-1}\overline{P}_{sx,v} \\ &= q^{-1}a(x,w)\overline{P}_{sx,v}. \end{split}$$

Por otro lado, $-q^{\frac{1}{2}}T_1C_v$ involucra a T_x con el coeficiente:

$$-q^{\frac{1}{2}}a(x,v)\overline{P}_{x,v} = a(x,w)\overline{P}_{x,v}.$$

Combinando estos dos cálculos, resulta que el coeficiente de T_x en C_sC_v es:

$$q^{-1}a(x,w)\overline{P}_{sx,v} + a(x,w)\overline{P}_{x,v}.$$

■ Si sx < x, entonces tenemos que $sx \le v$, y obviamente $sx \le w$. Además se tiene $T_sT_{sx} = T_x$. Para el término $q^{-\frac{1}{2}}T_sC_v$, el coeficiente de T_x es:

$$q^{-\frac{1}{2}}a(sx,v)\overline{P}_{sx,v} = a(x,w)\overline{P}_{sx,v}$$

donde en el último paso hicimos simplificaciones directas de la definición de a(sx, v).

Como también se tiene que $T_sT_x = qT_{sx} + (q-1)T_x$, si suponemos que $x \le v$, entonces T_x aparece en T_sC_v también con coeficiente:

$$(q-1)q^{-\frac{1}{2}}a(x,v)\overline{P}_{x,v} = (q^{-1}-1)a(x,w)\overline{P}_{x,v}.$$

Además, $-q^{\frac{1}{2}}T_1C_v$ involucra a T_x con coeficiente:

$$-q^{\frac{1}{2}}a(x,v)\overline{P}_{x,v} = a(x,w)\overline{P}_{x,v}.$$

Juntando todo esto, resulta que el coeficiente de T_x en C_sC_v es:

$$a(x,w)\overline{P}_{sx,v} + q^{-1}a(x,w)\overline{P}_{x,v}.$$

Por otro lado, el coeficiente de T_x en $-\sum_{\substack{z < v \\ sz < z}} \mu(z,v)C_z$, usando la hipótesis inductiva sobre los C_z , es siempre de la forma:

$$-\sum \mu(z,v)a(x,z)\overline{P}_{x,z} = \sum \mu(z,v)q_z^{\frac{1}{2}}q_w^{-\frac{1}{2}}a(x,w)\overline{P}_{x,z},$$

donde se usó que para z < v = sw es $\varepsilon_w \varepsilon_z = 1$.

En definitiva, tomando c = 0 cuando x < sx y c = 1 cuando sx < x, podemos combinar todos los cálculos para expresar C_w como en el enunciado, donde

$$P_{x,w} \doteq q^{1-c} P_{sx,v} + q^c P_{x,v} - \sum_{\substack{z < v \\ sz < z}} \mu(z,v) q_z^{-\frac{1}{2}} q_w^{\frac{1}{2}} P_{x,z}, \tag{2.11}$$

y $P_{x,z} \doteq 0$ cuando $x \leqslant z$.

Ahora, basta verificar que el grado del polinomio $P_{x,w}$ definido como antes está acotado por $\frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(x)-1)$. Esto es inmediato, salvo para el caso en que sx < x, de donde c=1, y el término del medio, $qP_{x,v}$, puede tener grado $1+\frac{1}{2}(\ell(v)-\ell(x)-1)=\frac{1}{2}(\ell(w)-\ell(x))$. Sin embargo, en este caso tenemos que x < v, y como sx < x, hay un término para z=x en la sumatoria, que es precisamente igual al coeficiente principal de $qP_{x,v}$ (pues $P_{x,x}=1$). Esto produce que se cancelen justamente estos términos cuyos grados se exceden, de modo que efectivamente el grado de $P_{x,w}$ está acotado como en el enunciado.

Un corolario sencillo del Teorema, que permite hallar una formulación equivalente pero más simple es la siguiente:

Corolario 2.4.2 Para cada $w \in W$ existe un único elemento $C'_w \in \mathcal{H}$ que tiene las propiedades siguientes:

- (a) $\iota(C'_w) = C'_w$
- (b) $C_w' = q_w^{-\frac{1}{2}} \sum_{x \leq w} P_{x,w} T_x$, donde $P_{w,w} = 1$ y $P_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ es un polinomio de grado menor o igual a $\frac{1}{2}(\ell(w) \ell(x) 1)$ si x < w.

Demostración. Consideramos otra involución $\sigma: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como sigue. En A hacemos $\sigma = \iota$, mientras que $\sigma(T_w) \doteq \varepsilon_w q_w^{-1} T_w$. Es trivial ver que $\sigma^2 = \mathrm{id}$, y para ver que σ es un homomorfismo de anillos se puede hacer una prueba completamente análoga a la vista para ι .

Observar ahora que $\iota \sigma = \sigma \iota$. Este hecho permite probar que $C'_w = \varepsilon_w \sigma(C_w)$ de donde es inmediato concluir el corolario.

Ahora que poseemos una nueva base $\{C_w\}_{w\in W}$ de \mathcal{H} , vamos a estudiar cómo actúa un elemento T_s en esta base.

Proposición 2.4.3 $Sea\ s \in S\ y\ w \in W$.

(a) $Si \ sw < w$, entonces:

$$T_s C_w = -C_w$$
.

(b) $Si \ w < sw$, entonces:

$$T_s C_w = q C_w + q^{\frac{1}{2}} C_{sw} + q^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{z < v \ sz < z}} \mu(z, w) C_z.$$

Demostración. La prueba de (b) es una consecuencia inmediata de la definición de C_w como en la demostración del Teorema. Para probar (a), como sw < w, es $\ell(w) \ge 1$. Si $\ell(w) = 1$, tenemos w = s, y por lo tanto podemos verificar que:

$$T_s C_s = T_s q^{-\frac{1}{2}} (T_s - qT_1)$$

$$= q^{-\frac{1}{2}} T_s^2 - q^{\frac{1}{2}} T_s$$

$$= q^{-\frac{1}{2}} ((q-1)T_s + qT_1) - q^{\frac{1}{2}} T_s$$

$$= q^{\frac{1}{2}} T_s - q^{\frac{1}{2}} T_s + q^{\frac{1}{2}} T_1 - q^{\frac{1}{2}} T_s$$

$$= -q^{\frac{1}{2}} T_s + q^{\frac{1}{2}} T_1$$

$$= -C_s.$$

Ahora, procediendo por inducción en $\ell(w)$, llamando v = sw, y notando que sv > v, de (b) se tiene que:

$$T_s C_v = q C_v + q^{\frac{1}{2}} C_w + q^{\frac{1}{2}} \sum_{i} \mu(z, v) C_z,$$

de donde, despejando C_w , resulta:

$$C_w = q^{-\frac{1}{2}} T_s C_v - q^{\frac{1}{2}} C_v - \sum \mu(z, v) C_z.$$

Pero para los z involucrados en la suma se satisface que sz < z < w, la hipótesis inductiva dice que $T_sC_z = -C_z$. Por ello:

$$\begin{split} T_s C_w &= q^{-\frac{1}{2}} T_s^2 C_v - q^{\frac{1}{2}} T_s C_v - \sum \mu(z,v) T_s C_z \\ &= q^{-\frac{1}{2}} ((q-1) T_s + q T_1) C_v - q^{\frac{1}{2}} T_s C_v + \sum \mu(z,v) C_z \\ &= q^{\frac{1}{2}} T_s C_v - q^{-\frac{1}{2}} T_s C_v + q^{\frac{1}{2}} C_v - q^{\frac{1}{2}} T_s C_v + \sum \mu(z,v) C_z \\ &= q^{\frac{1}{2}} C_v - q^{-\frac{1}{2}} T_s C_v + \sum \mu(z,v) C_z \\ &= -C_w, \end{split}$$

donde la última igualdad se desprende de la identidad anterior.

Corolario 2.4.4 Sea x < w. Si $s \in S$ es tal que sw < w y sx > x, entonces $P_{x,w} = P_{sx,w}$.

Demostración. Por el Lema 1.2.6, resulta $sx \leqslant w.$ Usando el Teorema de Kazhdan-Lusztig,

$$C_w = \varepsilon_w q_w^{\frac{1}{2}} \sum_{y \le w} \varepsilon_y q_y^{-1} \overline{P}_{y,w} T_y.$$

Por un lado tenemos del lado derecho de la fórmula que aparece T_{sx} , con coeficiente $\varepsilon_w q_w^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{sx} q_{sx}^{-1} \overline{P}_{sx,w}$. Por otro lado, como el inciso (a) de la Proposición afirma que:

$$C_w = -T_s C_w = -\varepsilon_w q_w^{\frac{1}{2}} \sum_{y \leqslant w} \varepsilon_y q_y^{-1} \overline{P}_{y,w} T_s T_y,$$

y $T_sT_x=T_{sx}$ por ser sx>x, y el coeficiente de T_{sx} para y=x del lado derecho es $-\varepsilon_wq_w^{\frac{1}{2}}\varepsilon_xq_x^{-1}\overline{P}_{x,w}$. Para y=sx, como $T_sT_y=T_sT_{sx}=((q-1)T_{sx}+qT_x)$ el coeficiente para T_{sx} que aporta es $-\varepsilon_wq_w^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{sx}q_{sx}^{-1}\overline{P}_{sx,w}(q-1)$. Igualando todo, resulta:

$$\varepsilon_w q_w^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{sx} q_{sx}^{-1} \overline{P}_{sx,w} = -\varepsilon_w q_w^{\frac{1}{2}} \varepsilon_x q_x^{-1} \overline{P}_{x,w} - \varepsilon_w q_w^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{sx} q_{sx}^{-1} \overline{P}_{sx,w} (q-1).$$

Simplificando $\varepsilon_w q_w^{\frac{1}{2}}$ y usando que $\varepsilon_{sx} = -\varepsilon_x$, esto dice:

$$q_{sx}^{-1}\overline{P}_{sx,w} = q_x^{-1}\overline{P}_{x,w} - q_{sx}^{-1}\overline{P}_{sx,w}(q-1),$$

y esto a su vez, cancelando el lado izquierdo,

$$0 = q_r^{-1} \overline{P}_{x,w} - q_{sr}^{-1} q \overline{P}_{sx,w},$$

que, como sabemos que $q_x^{-1} = q_{sx}^{-1}q$ por ser sx > x, dice finalmente que $\overline{P}_{x,w} = \overline{P}_{sx,w}$, y se sigue que $P_{x,w} = P_{sx,w}$, como queríamos ver.

Concluimos este capítulo con un resultado que será relevante en secciones posteriores.

Proposición 2.4.5 Supongamos que W es un grupo diedral (finito o infinito), con $S = \{s, t\}$. Se cumple que $P_{x,w} = 1$ para todo $x \leq w$. En particular, se tiene que

$$C_w' = q_w^{-\frac{1}{2}} \sum_{x \leqslant w} T_x.$$

Demostración. Procedemos por inducción en $\ell(w)$ y usamos la ecuación (2.11). En el caso diedral el orden de Bruhat como en la página 20 es muy sencillo: u < v si y sólo si $\ell(u) < \ell(v)$. En particular, si $w \in W$ es distinto de 1, s, t, hay precisamente dos elementos de longitud $\ell(w) - 1$ en W, dados por expresiones de esa longitud empezando en s o t, respectivamente. En la última suma de la ecuación (2.11), tenemos que a lo sumo ocurre una de estas expresiones. Por inducción, ningún otro término ocurre, pues z < v sólo si $\ell(v) - \ell(z) = 1$. En particular, la fórmula se resume a $P_{x,w} = 1 + q - q$. La conclusión final es consecuencia de la fórmula del Corolario 2.4.2.

Capítulo 3

La Categoría de Bimódulos de Soergel

3.1. Preliminares

3.1.1. Categorías

Definición 3.1.1 Una categoría C se dice pequeña si se cumple que ob(C) y Hom(C) son conjuntos.

EJEMPLO 3.1.2: La categoría *Set* no es una categoría pequeña, pues la colección de todos los conjuntos no es un conjunto.

Definición 3.1.3 Una Ab-categoría o una categoría preaditiva es una categoría C en la que todos los conjuntos Hom(A, B) son grupos abelianos aditivos, y la composición de flechas es bilineal con respecto a esta adición.

EJEMPLO 3.1.4: La categoría de espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathbb{F} fijo es una categoría preaditiva, pues si consideramos dos espacios V, W, se tiene que $\operatorname{Hom}(V, W)$ es un espacio vectorial, y por tanto un grupo abeliano y, por otra parte, para todas las transformaciones lineales $T_1, T_2, T_3 \in \operatorname{Hom}(V, W)$ se cumplen

$$(T_1 + T_2) \circ T_3 = T_1 \circ T_3 + T_2 \circ T_3$$

$$T_1 \circ (T_2 + T_3) = T_1 \circ T_2 + T_1 \circ T_3.$$

Análogamente, si R es un anillo dado, la categoría R-mód también es preaditiva.

Definición 3.1.5 Decimos que en una categoría C hay un *biproducto* si para cada colección finita de objetos A_1, \ldots, A_n existe un objeto P y una colección de morfismos $\pi_1, \ldots, \pi_n, \iota_1, \ldots, \iota_n$ tal que P es un producto de los A_i con proyecciones π_i y simultáneamente es un coproducto de los A_i con inclusiones ι_i .

EJEMPLO 3.1.6: En la categoría de grupos abelianos hay biproductos y están dados precisamente por la suma directa de grupos abelianos.

Definición 3.1.7 Una categoría aditiva es una categoría preaditiva en la que existe un objeto 0 y para cada par de objetos existe un biproducto.

Definición 3.1.8 Sea \mathcal{A} una categoría aditiva pequeña con biproducto \oplus . Se define el grupo de Grothendieck split de \mathcal{A} , y se lo denota $\langle \mathcal{A} \rangle$, como el grupo abeliano libre sobre los objetos de \mathcal{A} módulo la relación M = M' + M'' siempre que $M \cong M' \oplus M''$. Cada objeto $A \in \mathcal{A}$ define un elemento $\langle A \rangle \in \langle \mathcal{A} \rangle$.

EJEMPLO 3.1.9: Si \mathcal{A} es la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo \mathbb{F} , se tiene que $\langle \mathcal{A} \rangle \cong \mathbb{Z}$.

3.1.2. Graduación

Definición 3.1.10 En un anillo R una graduación es una familia $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de subgrupos del grupo aditivo de R tal que $R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ y $R_n R_m \subseteq R_{n+m}$ para cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}$. En tal caso decimos que R es un $anillo \mathbb{Z}$ -graduado o simplemente graduado.

Definición 3.1.11 Sea R un anillo graduado. Con la notación de la definición anterior, un R-módulo graduado M es un R-módulo junto con una familia $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de subgrupos de M tal que $M=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}M_n$ y $R_nM_m\subseteq M_{n+m}$ para cualesquiera $m,n\in\mathbb{Z}$. Un elemento $x\in M$ se dice homogéneo si $x\in M_n$ para algún $n\in\mathbb{Z}$ y, en tal caso, decimos que x tiene grado n.

Si Q es un objeto graduado nos referiremos simplemente como Q_n a la n-ésima componente homogénea, es decir al conjunto de elementos de grado n en Q.

Proposición 3.1.12 Sea R un anillo conmutativo graduado y sean $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ $y \ N = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} N_n$ dos R-módulos graduados. Consideramos para cada $n \in \mathbb{Z}$:

$$(M \otimes_{\mathbb{Z}} N)_n \doteq \bigoplus_{i+j=n} M_i \otimes_{\mathbb{Z}} N_j.$$

Esta familia induce una graduación en $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$, la cual a su vez se hereda al cociente $M \otimes_R N$.

Definición 3.1.13 Sea Q un objeto graduado. Para un entero n, el desplazamiento de grado n de Q es el objeto graduado

$$Q(n) \doteq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} Q(n)_i$$

de modo que $Q(n)_i \doteq Q_{n+i}$.

3.1.3. Funtores derivados

Definición 3.1.14 Un funtor $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ covariante aditivo se dice *exacto a izquier-da* si transforma una sucesión exacta $0 \to M' \to M \to M''$ en una sucesión exacta $0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'')$.

Recordemos que dado un objeto M en una categoría, una resolución inyectiva es una sucesión exacta de la forma:

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots$$

donde, en este caso, cada objeto I^n es inyectivo. Por simplicidad abreviamos esta sucesión exacta como $0 \to M \to I_M$.

Si llamamos I al complejo:

$$0 \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow \dots$$

y si consideramos un funtor covariante aditivo exacto a izquierda F, se define el funtor derivado R^nF por:

$$R^n F(M) = H^n(F(I)),$$

o, dicho en otras palabras, la homología n-ésima del complejo

$$0 \to F(I^0) \to F(I^1) \to F(I^2) \to \dots$$

Se puede demostrar que la definición es buena: no depende de la resolución inyectiva de M elegida al comienzo.

Definición 3.1.15 Sea R un anillo y sea \mathcal{A} la categoría de R-módulos. Si $A \in \mathcal{A}$ es un R-módulo fijo, el funtor $M \mapsto \operatorname{Hom}(A, M)$ es exacto a izquierda. Esto permite considerar sus funtores derivados. Los mismos se denotan $\operatorname{Ext}^n(A, M)$ para M variable.

OBSERVACIÓN: Se puede comprobar que $\operatorname{Ext}^1(A, M)$ está en biyección con las clases de isomorfismo de las sucesiones exactas

$$0 \to A \to E \to M \to 0$$
.

3.2. Funciones regulares

En esta sección consideraremos sistemas de Coxeter (W, S) para los cuales S sea un conjunto de generadores finito. Recordar que $\rho: G \to \operatorname{GL}(V)$ es una representación de G fiel si ρ es inyectiva. Además, para un elemento $g \in G$, denotaremos:

$$V^g \doteq \{v \in V : \rho(q)(v) = v\},\$$

que resulta ser un subespacio vectorial de V.

Definición 3.2.1 Una representación de reflexiones fiel de un sistema de Coxeter (W, S) es una representación $W \hookrightarrow GL(V)$, donde V es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita, que tiene las siguientes propiedades:

(a) La representación es fiel.

(b) Para cada $x \in W$ se tiene que $\dim(V/V^x) = 1$ si y sólo si $x \in T$. Es decir, exactamente las reflexiones de W tienen un punto fijo de codimensión 1 en V.

OBSERVACIÓN: Dada una representación de reflexiones fiel de un sistema de Coxeter, los elementos de T son precisamente los elementos de W que actúan como reflexiones en V. Es decir, aquellos que descomponen a V en un autoespacio de dimensión 1 con autovalor -1 y un hiperplano de vectores invariantes. Más aún, las reflexiones de W se pueden identificar por su autoespacio de autovalor -1 y sus hiperplanos de reflexión. Es decir, para $t, r \in T$ se tiene que:

$$V^t = V^r \iff t = r.$$

Teorema 3.2.2 Sea (S, W) un sistema de Coxeter. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $\{e_s\}_{s\in S}\subseteq V$ vectores linealmente independientes y $\{e_s^{\vee}\}_{s\in S}$ elementos linealmente independientes en V^* tales que:

$$\langle e_t, e_s^{\vee} \rangle = -2 \cos \left(\frac{\pi}{m(s, t)} \right).$$

Si V es tal que su dimensión es mínima, entonces la fórmula $\rho(s)(v) \doteq v - \langle v, e_s^{\vee} \rangle e_s$ define una representación de reflexiones fiel $\rho: W \to \operatorname{GL}(V)$ del grupo de Coxeter W.

Demostración. [15, Proposition 2.1]

Definición 3.2.3 Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión n. Una función $f: V \to \mathbb{R}$ se dice regular si f está dada por un polinomio $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ con respecto a una (y por tanto cualquier) base de V. Esto es, para una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V:

$$f(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = p(a_1, \ldots, a_n),$$

para todos $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. El álgebra de las funciones regulares de V se denotará R(V).

Sea V el espacio subyacente en una representación fiel de reflexiones de vectores de un grupo de Coxeter W. Consideramos R = R(V) el álgebra de funciones regulares. Equipamos a R con una \mathbb{Z} -graduación $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ tal que $R_2 = V^*$ y $R_n = 0$ para todo n impar. La razón de esta elección quedará más clara posteriormente.

Consideramos la categoría de todos los R-bimódulos \mathbb{Z} -graduados que son finitamente generados a izquierda y derecha. Podemos definir para cada $s \in S$ un elemento B_s de esta categoría, como sigue:

$$B_s \doteq R \otimes_{R^s} R(1),$$

donde R^s denota al subanillo de R fijado por la acción de s. Esto es:

$$R^s \doteq \{f \in R : f(s \cdot v) = f(v) \text{ para todo } v \in V\}.$$

Además, para cada par de elementos M, N de nuestra categoría, denotamos su producto tensorial sobre R mediante yuxtaposición, esto es: $MN \doteq M \otimes_R N$.

Consideramos una expresión $\underline{s} = s_1 s_2 \dots s_n$. Vamos a usar la notación $b_{\underline{s}}$ para denotar al elemento en el álgebra de Hecke dado por:

$$b_s \doteq (T_{s_1} + 1) \cdot \ldots \cdot (T_{s_n} + 1).$$

Por otro lado, definimos el R-bimódulo \mathbb{Z} -graduado B_s como sigue:

$$B_{\underline{s}} \doteq B_{s_1} B_{s_2} \dots B_{s_n} \simeq R \otimes_{R^{s_1}} R \otimes_{R^{s_2}} R \otimes \dots \otimes_{R^{s_n}} R.$$

A estos R-bimódulos $B_{\underline{s}}$ los llamamos bimódulos de Bott-Samelson.

3.3. El Teorema de Categorificación de Soergel

En lo que resta del trabajo, al escribir nuestros polinomios en la indeterminada q, usaremos la convención $q = v^{-2}$.

Si V es una representación de reflexiones de vectores fiel de un sistema de Coxeter (W, S), podemos considerar la categoría $\mathcal{R} = \mathcal{R}_V$ de R-bimódulos \mathbb{Z} -graduados que son finitamente generados a izquierda y derecha. Si dotamos a su grupo de Grothendieck split $\langle \mathcal{R} \rangle$ del producto dado por

$$(\langle A \rangle, \langle B \rangle) \mapsto \langle A \otimes_R B \rangle$$

es inmediato notar que $\langle \mathcal{R} \rangle$ es un anillo.

OBSERVACIÓN: Si k es un cuerpo y A es una k-álgebra conmutativa, graduada y finitamente generada A, con $A_0 = k$, el Teorema de Krull-Schmidt es válido en la categoría de A-módulos graduados finitamente generados. Una prueba de esto se puede hallar en [14, Sección 5.4]. Esto en particular dice que las clases de isomorfismo de objetos indescomponibles forman una base del anillo de Grothendieck. En particular $\langle M \rangle = \langle N \rangle$ si y sólo si $M \cong N$.

Lema 3.3.1 El álgebra de Hecke \mathcal{H} está generada por v y los elementos $T_s + 1$, $s \in S \cup \{1\}$.

Demostración. Es suficiente verificar que cada elemento T_w está en el álgebra generada por los elementos del enunciado. A su vez, como cada elemento T_w se puede escribir como producto de elementos de la forma T_t para $t \in S$, bastará verificar que para cada $t \in S$ se puede escribir a T_t de la forma deseada. En efecto, usando la relación cuadrática del álgebra de Hecke se verifica:

$$T_t = (T_t + 1)(T_t + 1) - v^{-2}(T_t + 1) - (T_1 + 1) + v^{-2}.$$

Nuestro objetivo será estudiar el siguiente resultado, conocido como el Teorema de Categorificación de Soergel.

Teorema 3.3.2 Sea V una representación fiel de reflexiones de vectores de un sistema de Coxeter (W, S). Sea \mathcal{H} el álgebra de Hecke y sea R el álgebra de funciones regulares en V. Entonces existe un único homomorfismo $\mathcal{E}: \mathcal{H} \to \langle \mathcal{R} \rangle$ que satisface que $\mathcal{E}(v) = \langle R(1) \rangle$ y $\mathcal{E}(T_s + 1) = \langle R \otimes_{R^s} R \rangle$ para todo $s \in S$.

Demostración. La unicidad es inmediata, como consecuencia del Lema 3.3.1, pues v y los $T_s + 1$ generan el álgebra \mathcal{H} .

La existencia del homomorfismo es consecuencia del caso de los grupos diedrales que se analizará posteriormente, pues \mathcal{H} se puede describir por relaciones que involucran cada vez a lo sumo dos generadores.

Definición 3.3.3 La categoría \mathcal{B} de bimódulos de Soergel es la subcategoría de \mathcal{R} que consta de los objetos $B \in \mathcal{R}$ tales que $\langle B \rangle$ está en la imagen del morfismo \mathcal{E} .

Teorema 3.3.4 Un bimódulo $B \in \mathcal{R}$ pertenece a la categoría de bimódulos de Soergel \mathcal{B} si y sólo si existen dos objetos $C, D \in \mathcal{R}$, tales que cada uno de ellos es una suma directa finita de objetos de la forma $B_s(n)$, que cumplen que:

$$B \oplus C \cong D$$
.

Demostración. Como $\langle B_{\underline{s}}(n) \rangle = \mathcal{E}(v^n T_{\underline{s}})$, los $B_{\underline{s}}(n)$ pertenecen a la categoría de bimódulos de Soergel \mathcal{B} . Esto muestra la suficiencia de la condición.

Recíprocamente, usamos el Lema 3.3.1. Tenemos que los $\mathcal{E}(v^n b_{\underline{s}}) = \langle B_{\underline{s}} \rangle$ generan a la imagen de \mathcal{E} . Luego, $B \in \mathcal{B}$ implica que $\langle B \rangle$ se puede escribir como suma de elementos de la forma $\langle B_{\underline{s}} \rangle$ y opuestos. Es decir $\langle B \rangle = \langle D \rangle - \langle C \rangle$ donde $\langle C \rangle$ y $\langle D \rangle$ son sumas de objetos de la forma $\langle B_{\underline{s}} \rangle$. En particular, usando la observación previa al Teorema 3.3.2, resulta que $\langle B \oplus C \rangle = \langle D \rangle$, de donde se obtiene $B \oplus C \cong D$, con C y D sumas directas finitas de objetos de la forma $B_{\underline{s}}(n)$.

Consideramos una representación V de dimensión finita de un grupo W, y para cada $x \in W$ consideramos el gráfico (reverso):

$$Gr(x) \doteq \{(x\lambda, \lambda) : \lambda \in V\} \subseteq V \times V.$$

Ahora, para cada subconjunto finito $A \subseteq W$, consideramos el conjunto:

$$Gr(A) \doteq \bigcup_{x \in A} Gr(x).$$

Escribiremos R para denotar al álgebra de funciones regulares en V, y abreviaremos $\otimes = \otimes_{\mathbb{R}}$. Si identificamos $R \times R$ con el álgebra de funciones regulares en $V \times V$ con la regla $(f \otimes g)(\lambda, \mu) \doteq f(\lambda)g(\mu)$, el álgebra de funciones regulares en Gr(A) como cociente de $R \otimes R$ tiene una estructura canónica de R-bimódulo graduado. A este bimódulo lo denotaremos R(A) o R(Gr(A)).

Para simplificar la notación, denotaremos

$$R_x \doteq R(\{x\}),\tag{3.1}$$

y si $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ escribiremos $R(x_1, \ldots, x_n) \doteq R(A)$, y si $A = \{y \in W : y \leqslant x\}$ entonces $R(\leqslant x) \doteq R(A)$. También, para cada elemento $w \in W$ denotaremos $wA \doteq \{wa : a \in A\}$.

3.3.1. El caso diedral

Lema 3.3.5 Sea V una representación de dimensión finita de W. Sea $A \subseteq W$ un subconjunto finito y sea $s \in W$ tal que sA = A. Entonces:

(a) Existe un isomorfismo de bimódulos graduados:

$$R \otimes_{R^s} R(A) \cong R(A) \oplus R(A)(-2).$$

(b) Si $R(A)^+ \subseteq R(A)$ denota a los invariantes bajo la acción de $s \times id$, se induce un isomorfismo:

$$R \otimes_{R^s} R(A)^+ \cong R(A).$$

Demostración. Supongamos que U es una representación de dimensión finita de W. Cada reflexión $t:U\to U$ define una involución $t:R(U)\to R(U)$, pues $t^2=e$, de modo que si elegimos un funcional $\beta\in U^*$ como ecuación de la reflexión por el hiperplano U^t , podemos considerar el operador $\partial_t^\beta:R(U)\to R(U)$ dado por:

$$f \mapsto \frac{f - tf}{2\beta}.$$

En efecto, este operador está bien definido, pues $\frac{f-tf}{2\beta} \in R(U)$, ya que si elegimos una base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de U de modo que $t(u_i) = u_i$ para $i = 1, \ldots, n-1$ y $t(u_n) = -u_n$, para $f \in R(U)$ existe un polinomio p tal que $f(a_1u_1 + \ldots + a_nu_n) = p(a_1, \ldots, a_n)$ para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Luego, como $tf \in R(U)$ está dada por $(tf)(a_1u_1 + \ldots, a_nu_n) = p(a_1, \ldots, a_{n-1}, -a_n)$. Si elegimos el funcional β de modo que $\beta(u_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$ y $\beta(u_n) = 1$, resulta que $\beta \in R(U)$ está dada por $\beta(a_1u_1 + \ldots + a_nu_n) = a_n$, y en particular, basta verificar que para cualesquiera números reales se tiene que:

$$\left(\frac{f-tf}{2\beta}\right)(a_1u_1+\ldots+a_nu_n) = \frac{p(a_1,\ldots,a_n)-p(a_1,\ldots,a_{n-1},-a_n)}{2a_n}$$

es un polinomio en a_1, \ldots, a_n , pues notar que en general para un polinomio p se tiene que $a - b \mid p(a) - p(b)$.

Esto prueba que existe un isomorfismo de R^s -bimódulos $R(U) = R(U)^t \oplus \beta R(U)^t$. En efecto, podemos escribir

$$f = \frac{f + tf}{2} + \beta \cdot \frac{f - tf}{2\beta}.$$

Ahora bien, si $X \subseteq U$ es el conjunto de ceros de una función regular que es estable por la acción de t, entonces t induce una involución en R(X) y podemos descomponer $R(X) = R(X)^+ \oplus R(X)^-$ donde $R(X)^+$ y $R(X)^-$ son las componentes de la descomposición en suma directa en las cuales la involución actúa como la identidad y como su opuesta respectivamente. Si ninguna componente irreducible de X está contenida en U^t , el operador ∂_t^β se anula en el núcleo de la suryección

 $R(U) \to R(X)$, y por tanto induce una aplicación $\partial_t^{\beta}: R(X) \to R(X)$. Notar que ∂_t^{β} y la multiplicación por β son morfismos inversos, pues para $f \in R(X)$ es:

$$\beta \cdot \frac{f - tf}{2\beta} = \frac{f - tf}{2} = \frac{f + f}{2} = f.$$

Esto prueba que $R(X)^+ \cong R(X)^-(2)$ como R^t -bimódulos graduados.

Ahora bien, si elegimos $U = V \times V$, y $t = s \times$ id para nuestra reflexión $s \in W$, podemos aplicar lo anterior con X = Gr(A) y obtener una descomposición $R(A) = R(A)^+ \oplus R(A)^-$ y un isomorfismo $R(A)^+ \simeq R(A)^-(2)$ dado por la multiplicación con $\alpha \otimes 1 = \beta$, para $\alpha \in V^*$ una ecuación del hiperplano de reflexión de s. Razonando como antes, y usando que $R = R^s \oplus \alpha R^s$, estos dos isomorfismos juntos prueban la parte (b) del Lema, y usando a su vez esto y la descomposición $R(A) = R(A)^+ \oplus R(A)^-$ se sigue la parte (a).

OBSERVACIÓN: Si $y, z \in W$ son arbitrarios, y $(u, v) \in Gr(y) \cap Gr(z)$, resulta que u = yv = zv, y en particular $v = y^{-1}zv \in V^{y^{-1}z}$. Esto es, hay un isomorfismo:

$$Gr(y) \cap Gr(z) \cong V^{y^{-1}z}$$
.

Además, se tiene que:

$$(\operatorname{Gr}(y) + \operatorname{Gr}(z)) \cap (V \times \{0\}) \cong \operatorname{im}(yz^{-1} - \operatorname{id}) \times \{0\},\$$

pues si (u, v) es un elemento del conjunto del lado izquierdo, debe ser $(u, v) = (y\lambda_1, \lambda_1) + (z\lambda_2, \lambda_2)$ y al mismo tiempo debe ser $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (pues v = 0), de donde en definitiva $u = y\lambda_1 - z\lambda_1$. Pero notar que:

$$(yz^{-1} - id)(z\lambda_1) = y\lambda_1 - z\lambda_1.$$

Proposición 3.3.6 Sea (W, S) un sistema de Coxeter con |S| = 2 y sea V una representación de reflexiones fiel de W. Sean $s \in S$ y $x \in W$ y sea $A = \{y \in W : y \leq x\}$. Entonces se tiene un isomorfismo de R-bimódulos graduados:

$$R \otimes_{R^s} R(A) \cong R(A \cup sA) \oplus R(A \cap sA)(-2).$$

Demostración (esbozo): El caso en que A = sA se analizó en el Lema anterior. En el caso en que $A = \{e\}$, el enunciado simplemente afirma que hay un isomorfismo $R(\leq s) \cong R \otimes_{R^s} R$, lo cual es consecuencia de considerar la proyección al cociente $R \otimes R \to R(\leq s)$.

Vamos a analizar el caso en que $A \neq \{e\}$ y $A \neq sA$. Se tiene que $A = \{y \in W : y \leq x\}$, donde $x \neq e$ y sx > x. Como W es un grupo diedral, la Proposición 1.2.10 dice que $A - sA = \{x, rx\}$ para alguna reflexión $r \in T$ distinta de s.

Por hipótesis, los (-1)-autoespacios de reflexiones de W son distintos dos a dos, y cada par de ellos genera un subespacio 2-dimensional $U \subseteq V$.

Se puede ver que existe una forma $\beta \in V^* \times V^*$ que se anula en Gr(x) + Gr(rx) pero no en $U \times \{0\}$.

Vamos a considerar los submódulos generados por las coclases $\overline{\beta}$ y $\overline{1}$ de β y 1 en R(A) sobre $R^s \otimes R$, y los vamos a llamar M y N respectivamente.

Afirmación 1: $M \cong R(A \cap sA)^+(-2)$ como R^s -mod-R graduados.

Para demostrar esto, notemos que para cualesquiera tres elementos distintos $x, y, z \in W$ cuyas longitudes no tengan todas la misma paridad, se tiene siempre que:

$$Gr(x) + Gr(y) + Gr(z) \supseteq U \times \{0\}.$$

En efecto, podemos asumir sin pérdida de generalidad que z=e y $x,y\in T.$ Por la observación anterior se tiene que

$$(Gr(x) + Gr(e)) \cap (U \times \{0\}) = V^{-x} \times \{0\},\$$

$$(Gr(y) + Gr(e)) \cap (U \times \{0\}) = V^{-y} \times \{0\}.$$

Como asumimos que V era una representación de reflexiones de vectores fiel, tenemos que $V^{-x} \neq V^{-y}$ y por lo tanto se sigue la inclusión.

Para $y \notin \{x, rx\}$ se tiene entonces que

$$Gr(y) + Gr(x) + Gr(rx) \supseteq U \times \{0\}.$$

En particular, nuestra función β no se anula en Gr(y) para $y \in A \cap sA$. Por tanto, un elemento de R(A) anula a $\overline{\beta}$ si y sólo si se anula en $Gr(A \cap sA)$. Se sigue que la multiplicación por $\overline{\beta}$ induce un isomorfismo $R(A \cap sA)(-2) \cong R(A)\overline{\beta}$.

Sin embargo, la imagen de $R^s \otimes R$ en $R(A \cap sA)$ está compuesta precisamente de los elementos $s \times$ id invariantes, y por lo tanto nuestro isomorfismo se restringe a un isomorfismo $R(A \cap sA)^+(-2) \cong M$, como queríamos.

Afirmación 2: $N \cong R(A \cup sA)^+$ como R^s -mod-R graduados.

El $R^s \times R$ -submódulo generado por $\overline{1}$ en $R(A \cup sA)$ es precisamente $R(A \cup sA)^+$, y por tanto la restricción sobre Gr(A) nos da un monomorfismo

$$R(A \cup sA)^+ \hookrightarrow R(A)$$
,

lo cual prueba nuestra afirmación.

Afirmación 3:
$$R(A) = M \oplus N$$
.

Veamos primero que R(A)=M+N. Para esto, si $\alpha\in V^*$ denota una ecuación del plano de reflexión V^s , tenemos que $R=R^s\oplus \alpha R^s$, y por tanto $R\otimes R$ está generado como $R^s\otimes R$ -módulo por los elementos $1\otimes 1$ y $\alpha\otimes 1$. Se sigue entonces que también está generado por 1×1 y un elemento $\beta\in V^*\times V^*$ que no es un $s\times i$ d-invariante. En efecto, β no puede ser un $s\times i$ d-invariante, pues de otro modo se anularía en $\mathrm{Gr}(sx)$ y por lo tanto, por la inclusión de la demostración de la Afirmación 1, se anularía también en todo $U\times\{0\}$. Esto prueba que R(A)=M+N.

Veamos ahora que $M \cap N = \{0\}$. Para $y \in A \cap sA$, la restricción en $Gr(y, sy) = Gr(y) \cup Gr(sy)$ de cualquier elemento de N es invariante bajo $s \times$ id. En particular, es suficiente probar que la restricción de un elemento de M en Gr(y, sy) sólo puede ser invariante por la acción de $s \times$ id si se anula en Gr(y, sy). Para esto, a su vez, es suficiente ver que la restricción de β a Gr(y, sy) no es invariante por $s \times$ id, o que la restricción de β a Gr(y) + Gr(sy) no es invariante bajo $s \times$ id. Sin embargo, notar que los elementos $s \times$ id invariantes en Gr(y) + Gr(sy) deben anularse en el subespacio $V^{-x} \times \{0\}$ y Gr(x) + Gr(rx) intersecta a $U \times \{0\}$ sólo en el subespacio $V^{-r} \times \{0\}$ y $r \neq s$.

Para concluir con esta prueba usamos estas tres afirmaciones:

$$R \otimes_{R^s} R(A) \cong R \otimes_{R^s} (M \oplus N)$$

$$\cong R \otimes_{R^s} (R(A \cap sA)^+(-2) \oplus R(A \cup sA))$$

$$\cong R \otimes_{R^s} R(A \cap sA)^+(-2) \oplus R \otimes_{R^s} R(A \cup sA)^+$$

$$\cong R(A \cap sA)(-2) \oplus R(A \cup sA),$$

donde el primer isomorfismo es consecuencia de la tercera afirmación, el segundo isomorfismo es consecuencia de la primera y la segunda, y el último es consecuencia del Lema anterior, ya que $A \cap sA$ y $A \cup sA$ satisfacen las hipótesis.

Recordemos de la Proposición 2.4.5 que para un grupo diedral tenemos la igualdad $C_x' = v^{\ell(x)} \sum_{y \leqslant x} T_y$.

Teorema 3.3.7 Sea (W, S) un sistema de Coxeter con |S| = 2, y sea V una representación de reflexiones de vectores fiel. Entonces el homomorfismo de grupos $\mathcal{E}: \mathcal{H} \to \langle \mathcal{R} \rangle$ dado por $v^n C'_x \mapsto \langle R(\leqslant x) \rangle$ $(n + \ell(x))$ es un homomorfismo de anillos.

Demostración. Por el Lema 3.3.1 basta demostrar que para todas las reflexiones simples s y todos los $x \in W$ se cumple que:

$$\mathcal{E}\left((T_s+1)\sum_{y\leqslant x}T_y\right)=\mathcal{E}(T_s+1)\mathcal{E}\left(\sum_{y\leqslant x}T_y\right).$$

En efecto, los términos de la forma $\sum_{y \leq x} T_y$ forman una base del álgebra \mathcal{H} y los elementos $T_s + 1$ (junto con v) generan a \mathcal{H} como álgebra.

Si llamamos $A = \{y \in W : y \leq x\}$, entonces en virtud del Lema 1.2.10, se tiene que $A \cup sA$ y $A \cap sA$ son ambos conjuntos de la forma $\{y \in W : y \leq z\}$ para cierto elemento $z \in W$. Ahora bien, usando las identidades de multiplicación de la definición del álgebra de Hecke, tenemos:

$$(T_s + 1) \sum_{y \in A} T_y = \sum_{y \in A \cup sA} T_y + v^{-2} \sum_{y \in A \cap sA} T_y.$$

Si reemplazamos esto en la identidad a probar, todo se resume a demostrar el isomorfismo de bimódulos graduados:

$$R \otimes_{R^s} R \otimes_R R(A) \cong (R(A \cup sA) \oplus R(A \cap sA)) (-2),$$

que es precisamente una consecuencia inmediata de la Proposición anterior. \Box

3.3.2. Un inverso del morfismo \mathcal{E}

A partir de ahora vamos a trabajar siempre con una representación de reflexiones de vectores fiel fija. Vamos a dar explícitamente un inverso a izquierda para el morfismo $\mathcal{E}: \mathcal{H} \to \langle \mathcal{R} \rangle$.

Comenzamos con algo de notación. Para $B, B' \in \mathcal{R}$ escribiremos:

$$\operatorname{Hom}(B, B') \doteq \operatorname{Hom}_{R \otimes R}(B, B') \in \mathcal{R}.$$

Se entiende que la acción a izquierda (respectivamente a derecha) en R de nuestro espacio Hom viene dada por la acción a izquierda (respectivamente a derecha) en B o, equivalentemente, en B'. En fórmulas:

$$(rf)(b) = f(rb) = r(f(b)),$$

$$(fr)(b) = f(br) = (f(b))r,$$

para todos $r \in R$, $b \in B$ y $f \in \text{Hom}(B, B')$.

Definición 3.3.8 Sea V un espacio vectorial de dimensión finita que es \mathbb{Z} -graduado, con $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$. Llamaremos dimensión graduada de V al polinomio de Laurent:

$$\underline{\dim} V \doteq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\dim V_n) v^{-n} \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}].$$

Definición 3.3.9 Sea M un R-módulo \mathbb{Z} -graduado. Llamaremos rango graduado de M al polinomio de Laurent:

$$\underline{\operatorname{rk}}M \doteq \underline{\dim}(M/MR_+) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}],$$

donde R_{+} denota a los elementos de R de grado positivo.

Observemos que $\underline{\dim}(V(1)) = v(\dim V)$ y que $\underline{\mathrm{rk}}(M(1)) = v(\underline{\mathrm{rk}}(M))$. Notar que nuestro concepto de rango graduado sólo está bien definido para módulos libres, por lo que sólo será utilizado en tales casos.

Vamos a denotar por $\overline{\text{rk}}M$ a la imagen de rkM bajo la sustitución $v \mapsto v^{-1}$.

OBSERVACIÓN: Sea X es una variedad afín sobre \mathbb{R} y sea A un álgebra de funciones regulares sobre \mathbb{R} . Utilizaremos la equivalencia entre A-módulos y haces cuasi coherentes, según [6, Corollary 2.2.5]. Si M es un A-módulo y \mathcal{M} es el haz cuasi coherente sobre X correspondiente, entonces el soporte de \mathcal{M} , que denotaremos sop M es el conjunto de puntos $x \in X$ para los cuales $\mathcal{M}_x \neq 0$.

Definición 3.3.10 Para un R-bimódulo B y cualquier subconjunto $A \subseteq W$ se define el subbimódulo:

$$\Gamma_A B \doteq \{b \in B : \text{sop } b \subseteq \text{Gr}(A)\}$$

formado por todos los elementos con soporte en Gr(A). Además denotaremos:

$$\Gamma_{\geqslant i}B \doteq \Gamma_{\{x \in W: \ell(x) \geqslant i\}}B,$$

y definiremos la categoría $\mathcal{F}_{\Delta} \subseteq \mathcal{R}$ como la subcategoría plena de todos los bimódulos graduados $B \in \mathcal{R}$ tales que B tiene soporte en un conjunto de la forma Gr(A) para algún conjunto finito $A \subseteq W$, y para cada i el cociente $\Gamma_{\geqslant i}B/\Gamma_{\geqslant i+1}B$ es isomorfo a una suma directa de bimódulos graduados de la forma $R_x(\nu)$ con $\ell(x) = i$ y $\nu \in \mathbb{Z}$.

Enunciamos a continuación un lema, cuya prueba omitiremos. El mismo es consecuencia de una aplicación del Teorema de Krull-Schmidt en la categoría \mathcal{R} .

Lema 3.3.11 El funtor $\Gamma_i^{\geqslant} \doteq (B \mapsto \Gamma_i B/\Gamma_{\geqslant i+1} B)$ es aditivo. Además los sumandos directos de objetos de \mathcal{F}_{Δ} son objetos de \mathcal{F}_{Δ} , y las sumas directas de objetos de \mathcal{F}_{Δ} también son objetos de \mathcal{F}_{Δ} .

Para simplificar la notación, introducimos los bimódulos graduados:

$$\Delta_x \doteq R_x(-\ell(x)).$$

Para trabajar en el álgebra de Hecke usaremos la notación $\widetilde{T}_x \doteq v^{\ell(x)} T_x$. Además, si $B \in \mathcal{F}_{\Delta}$, denotaremos $(B : \Delta_x(\nu))$ a la multiplicidad de un sumando directo $\Delta_x(\nu)$ en una (y por tanto cualquiera) descomposición de $\Gamma_{\geqslant i} B/\Gamma_{\geqslant i+1} B$ para $i = \ell(x)$.

Finalmente, introducimos la abreviación $\theta_s M \doteq R(1) \otimes_{R^s} M$.

A continuación, daremos un resultado técnico que nos será útil más adelante.

Lema 3.3.12 Sea W un espacio vectorial de dimensión finita y sean $U, V \subseteq W$ subespacios. Entonces $\operatorname{Ext}^1_{R(W)}(R(U), R(V))$ es no nulo sólo si $V \cap U = V$ o bien $V \cap U$ tiene codimensión 1 en V. En caso de suceder esto último $\operatorname{Ext}^1_{R(W)}(R(U), R(V))$ es un $R(U \cap V)$ -módulo libre de rango 1, generado por la clase de una sucesión exacta arbitraria de la forma:

$$0 \longrightarrow R(V)(-2) \xrightarrow{\alpha} R(U \cup V) \longrightarrow R(U) \longrightarrow 0$$

donde $\alpha \in W^*$ cumple que $\alpha|_U = 0$ y $\alpha|_V \neq 0$.

Demostración. Si F y G son módulos libres de rango finito sobre las álgebras A y B y si M y N son módulos arbitrarios sobre A y B respectivamente, se tiene que:

$$\operatorname{Hom}_A(F, M) \otimes \operatorname{Hom}_B(G, N) \cong \operatorname{Hom}_{A \otimes B}(F \otimes G, M \otimes N).$$

Si A y B son noetherianas y M' (respectivamente N') es finitamente generado sobre A (respectivamente B), podemos hallar resoluciones $F^{\bullet} \to M' \to 0$ (respectivamente $G^{\bullet} \to N' \to 0$) donde los F^{i} (respectivamente G^{j}) son módulos libres finitamente generados sobre A (respectivamente B). Entonces $F^{\bullet} \otimes G^{\bullet}$ es una resolución libre de rango finito de $M' \otimes N'$, y por tanto:

$$\operatorname{Ext}_{A\otimes B}^{n}(M'\otimes N', M\otimes N) \cong H^{n}\left(\operatorname{Hom}_{A\otimes B}(F^{\bullet}\otimes G^{\bullet}, M\otimes N)\right)$$
$$\cong H^{n}(\operatorname{Hom}_{A}(F^{\bullet}, M)\otimes \operatorname{Hom}_{B}(G^{\bullet}, N))$$
$$\cong \bigoplus_{i+j=n} \operatorname{Ext}_{A}^{i}(M, M')\otimes \operatorname{Ext}_{B}^{j}(N', N).$$

De allí resulta entonces:

$$\operatorname{Ext}_{A\otimes B}^{\bullet}(M'\otimes N', M\otimes N) \cong \operatorname{Ext}_{A}^{\bullet}(M', M)\otimes \operatorname{Ext}_{B}^{\bullet}(N', N). \tag{3.2}$$

Volviendo a la situación del enunciado a probar, fijemos $S = U \cap V$, U' un compenento lineal de S en U y V' un complemento lineal de S en V. Tenemos $W = S \oplus U' \oplus V' \oplus W'$ para cierto W'. También tenemos las siguientes identificaciones:

- $R(W) \cong R(S) \otimes R(U') \otimes R(V') \otimes R(W').$
- $R(U) \cong R(S) \otimes R(U') \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$.
- $R(V) \cong R(S) \otimes \mathbb{R} \otimes R(V') \otimes \mathbb{R}$.

Juntándolas todas obtenemos:

$$\operatorname{Ext}_{R(W)}^{\bullet}(R(U), R(V)) \cong \operatorname{Ext}_{R(S)}^{\bullet}(R(S), R(S)) \otimes \operatorname{Ext}_{R(U')}^{\bullet}(R(U'), \mathbb{R}) \otimes \\ \otimes \operatorname{Ext}_{R(V')}^{\bullet}(\mathbb{R}, R(V')) \otimes \operatorname{Ext}_{R(W')}^{\bullet}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Luego, si denotamos a la dimensión de W como dimW = s + u + v + w (de manera obvia según la descomposición que teníamos en suma directa), y usamos la ecuación (3.2), obtenemos que:

$$\operatorname{Ext}_{R(W)}^{\bullet}(R(U), R(V)) \cong \operatorname{Ext}_{\mathbb{R}[x]}^{\bullet}(\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x])^{\otimes s} \otimes \operatorname{Ext}_{\mathbb{R}[x]}^{\bullet}(\mathbb{R}[x], \mathbb{R})^{\otimes u} \otimes \operatorname{Ext}_{\mathbb{R}[x]}^{\bullet}(\mathbb{R}, \mathbb{R}[x])^{\otimes v} \otimes \operatorname{Ext}_{\mathbb{R}[x]}^{\bullet}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^{\otimes w},$$

donde denotamos $M^{\otimes i} \doteq M \otimes_{\mathbb{R}} M \otimes_{\mathbb{R}} \ldots \otimes_{\mathbb{R}} M$ donde hay i ocurrencias de M. Ahora, si denotamos Ext^1 al grupo $\operatorname{Ext}^1_{R(W)}(R(U),R(V))$, como tenemos que

$$\operatorname{Ext}_{\mathbb{R}[x]}^{0}(\mathbb{R}, \mathbb{R}[x]) \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}[x]) \cong \{0\},$$
$$\operatorname{Ext}_{\mathbb{R}[x]}^{1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}[x]) \cong \mathbb{R},$$

para que Ext^1 sea no nulo es necesario que $v\leqslant 1.$ Es fácil ver que:

$$\operatorname{Ext}^0_{\mathbb{R}[x]}(\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x]) \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{R}[x], \mathbb{R}[x]) \cong \mathbb{R}[x],$$
$$\operatorname{Ext}^0_{\mathbb{R}[x]}(\mathbb{R}[x], \mathbb{R}) \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{R}[x], \mathbb{R}) \cong \mathbb{R},$$
$$\operatorname{Ext}^0_{\mathbb{R}[x]}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \operatorname{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}.$$

Finalmente, concluimos que si v = 0, entonces es $V \cap U = V$ y si v = 1, entonces $\operatorname{Ext}^1(R(U), R(V)) = \mathbb{R}[x]^{\otimes s} = R(S)$.

Proposición 3.3.13 Sea $s \in S$ una reflexión simple.

- (a) Si B está en \mathcal{F}_{Δ} , entonces $R \otimes_{R^s} B$ también pertenece a \mathcal{F}_{Δ} .
- (b) Si definimos las aplicaciones $h_{\Delta}: \mathcal{F}_{\Delta} \to \mathcal{H}$ por la fórmula

$$B \mapsto \sum_{x,\nu} (B : \Delta_x(\nu)) v^{\nu} \widetilde{T}_x,$$

entonces para todo $s \in S$ se obtienen los diagramas conmutativos:

(c) La aplicación h_{Δ} es una inversa a izquierda de $\mathcal{E}: \mathcal{H} \to \langle \mathcal{F}_{\Delta} \rangle$.

Demostración. Comenzamos fijando $s \in S$. Podemos refinar nuestra filtración $\Gamma_{\geqslant i}$ de B por cierto $\Gamma_{\geqslant j}B$ donde $j \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ es tal que para todo $i \in \mathbb{Z}$ los cocientes $\Gamma_i B/\Gamma_{i+\frac{1}{2}}B$ (respectivamente $\Gamma_{\geqslant i-\frac{1}{2}}B/\Gamma_{\geqslant i}B$) son sumas directas de $R(x)(\nu)$ con x > sx (respectivamente x < sx).

Con estas elecciones, los parámetros x e y de dos cocientes de $\Gamma_{\geqslant i-\frac{1}{2}}B/\Gamma_{\geqslant i+\frac{1}{2}}B$ sólo difieren en una reflexión en el caso en que y=sx. De hecho, para una reflexión arbitraria t, siempre tenemos tx>x o tx< x y la condición sy>y< x>sx implica que $y\leqslant sx$ (en la notación del Lema 1.2.6 (b), w=x, x=y). Sin embargo, se puede comprobar que las extensiones en $\operatorname{Ext}^1_{R\otimes R}(R_x,R_{sx})$ son cero tras restringir a $R^s\otimes R$. Más aún, si $R_{x,sx}$ es el álgebra de funciones regulares sobre $\operatorname{Gr}(x)\cup\operatorname{Gr}(sx)$, la restricción $R_{x,sx}\to R_x$ se parte sobre $R^s\otimes R$, y nos da un isomorfismo $R^{(s,1)}_{x,sx}\cong R_x$, donde el exponente (s,1) denota al subanillo de elementos estables por la acción de $s\times i$ d.

Por el Lema 3.3.12, la restricción a $R^s \otimes R$ de $\Gamma_{\geqslant i-\frac{1}{2}}B/\Gamma_{\geqslant i+\frac{1}{2}}B$ es isomorfa a una suma directa de copias de ciertos $R_x(\nu)$ con x>sx y $\ell(x)=i$, y los mismos ocurren con multiplicidad $(B:R_x(\nu))+(B:R_{sx}(\nu))$. Si ahora consideramos el producto tensorial $R\otimes_{R^s}$, y observamos las sucesiones exactas cortas:

$$0 \to R_x(-2) \to R \otimes_{R^s} R_x \to R_{sx} \to 0,$$

obtenemos la parte (a) de la proposición (asumiendo siempre que x > sx) y, nuevamente por 3.3.12, también las fórmulas:

$$(R \otimes_{R^s} B : R_x(\nu)) = (B : R_x(\nu + 2)) + (B : R_{sx}(\nu + 2)),$$

$$(R \otimes_{R^s} B : R_{sx}(\nu)) = (B : R_x(\nu)) + (B : R_{sx}(\nu)).$$

Usando la notación que introducimos anteriormente, podemos reescribir esto como sigue:

$$(\theta_s B : \Delta_x(\nu)) = (B : \Delta_x(\nu+1)) + (B : \Delta_{sx}(\nu)), (R(1) \otimes_{R^s} B : \Delta_{sx}(\nu)) = (B : \Delta_x(\nu)) + (B : \Delta_{sx}(\nu-1)).$$

Si ahora para un elemento $H \in \mathcal{H}$ consideramos la descomposición

$$H = \sum_{x,\nu} (H : v^{\nu} \widetilde{T}_x) v^{\nu} \widetilde{T}_x,$$

entonces obtenemos de manera similar en el álgebra de Hecke, comparando coeficientes, las igualdades:

$$((\widetilde{T}_s + v)H : v^{\nu}\widetilde{T}_x) = (H : v^{\nu+1}\widetilde{T}_x) + (H : v^{\nu}\widetilde{T}_{sx}),$$

$$((\widetilde{T}_s + v)H : v^{\nu}\widetilde{T}_{sx}) = (H : v^{\nu}\widetilde{T}_x) + (H : v^{\nu-1}\widetilde{T}_{sx}).$$

Esto comprueba la afirmación (b). Para comprobar (c), observemos primero que podemos considerar a $\langle \mathcal{R} \rangle$ como un \mathcal{H} -módulo vía el homomorfismo de anillos del

Teorema 3.3.2. En particular, la parte (a) dice que $\langle \mathcal{F}_{\Delta} \rangle \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle$ es un \mathcal{H} -submódulo y la parte (b) dice que la aplicación $h_{\Delta} : \langle \mathcal{F}_{\Delta} \rangle \to \mathcal{H}$ es un homomorfismo de \mathcal{H} -módulos. Como $\mathcal{E}(1) = \langle R_e \rangle$ está en \mathcal{F}_{Δ} , la aplicación \mathcal{E} se factoriza sobre $\langle \mathcal{F}_{\Delta} \rangle$, y como $h_{\Delta} \circ \mathcal{E} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un homomorfismo de \mathcal{H} -módulos biyectivo, la composición tiene que ser la identidad.

Consideramos ahora las filtraciones:

$$\Gamma_{\leq i} B \doteq \Gamma_{\{x \in W : \ell(x) \leq i\}} B,$$

y definimos la categoría $\mathcal{F}_{\nabla} \subseteq \mathcal{R}$ como la subcategoría plena de todos los bimódulos graduados $B \in \mathcal{R}$ tales que el soporte está en Gr(A) para algún subconjunto $A \subseteq W$ finito y los cocientes para todo i son isomorfos a sumas directas de bimódulos graduados de la forma $R_x(\nu)$ con $\ell(x) = i$ y $\nu \in \mathbb{Z}$.

Introducimos la notación $\nabla_x \doteq R_x(\ell(x))$. Para la multiplicidad de $\nabla_x(\nu)$ en una descomposición en suma directa de $\Gamma_{\ell(x)}B/\Gamma_{\leq \ell(x)-1}B$ usamos la notación $(B:\nabla_x(\nu))$.

OBSERVACIÓN: Las multiplicidades $(B : \nabla_x(\nu))$ y $(B : \Delta_x(\nu))$ provienen de cocientes de filtraciones distintas. Incluso para $B \in \mathcal{F}_{\Delta} \cap \mathcal{F}_{\nabla}$ puede suceder que estos valores no coincidan.

Tenemos un resultado análogo a la Proposición 3.3.13, pero para la categoría \mathcal{F}_{∇} . En este caso, una prueba se puede hallar en [15, Proposition 5.9] y en [12, Proposition 1.26].

Proposición 3.3.14 Sea $s \in S$ una reflexión simple.

- (a) Si B está en \mathcal{F}_{∇} , entonces $R \otimes_{R^s} B$ también pertenece a \mathcal{F}_{∇} .
- (b) Si definimos las aplicaciones $h_{\nabla}: \mathcal{F}_{\nabla} \to \mathcal{H}$ por la fórmula

$$B \mapsto \sum_{x,\mu} (B : \nabla_x(\nu)) v^{-\mu} \widetilde{T}_x,$$

entonces para todo $s \in S$ se obtienen los diagramas conmutativos:

(c) La composición $d \circ h_{\nabla}$ es una inversa a izquierda de $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle \mathcal{F}_{\nabla} \rangle$.

OBSERVACIÓN: Las Proposiciones 3.3.13 y 3.3.14, junto con el Teorema 3.3.4 implican que como $\mathcal{E}: \mathcal{H} \to \langle \mathcal{R} \rangle$ se factoriza sobre el grupo de Grothendieck split $\langle \mathcal{B} \rangle$ de la categoría aditiva \mathcal{B} , debe ser $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}_{\Delta} \cap \mathcal{F}_{\nabla}$.

Para obtener el morfismo inverso de \mathcal{E} , también necesitamos el siguiente resultado. Una prueba del mismo se puede encontrar en [15, Proposition 5.10] y en [12, Proposition 1.27].

Teorema 3.3.15 Supongamos que M y N satisfacen cualquiera de las condiciones siguientes:

- $M \in \mathcal{F}_{\Delta} \ y \ N \in \mathcal{B}$.
- $M \in \mathcal{B} \ y \ N \in \mathcal{F}_{\nabla}$.

Entonces el espacio Hom(M, N) es libre y graduado como un R-módulo a derecha, y además:

$$\underline{\operatorname{rk}}\operatorname{Hom}(M,N) = \sum_{x,\nu,\mu} (M : \Delta_x(\nu))(N : \nabla_x(\mu))v^{\mu-\nu}.$$

Corolario 3.3.16 Sea $B \in \mathcal{B}$ un bimódulo de Soergel. Entonces se tiene que:

$$h_{\Delta}(B) = \sum_{x \in W} \overline{\underline{\mathrm{rk}}} \operatorname{Hom}(B, R_x) T_x,$$

$$h_{\nabla}(B) = \sum_{x \in W} \overline{\underline{\mathrm{rk}}} \operatorname{Hom}(R_x, B) T_x.$$

Demostración. Por el Teorema anterior, tenemos que:

$$\underline{\operatorname{rk}}\operatorname{Hom}(B, R_x) = \underline{\operatorname{rk}}\operatorname{Hom}(B, \nabla_x(-\ell(x)))$$
$$= \sum_{\nu} (B : \Delta_x(\nu)) v^{-\ell(x)-\nu}.$$

Pues notar que, de la definición, es claro que $(\nabla_x(\mu), \nabla_y(\mu')) = 1$ si $\mu = \mu'$ y x = y y es cero en otro caso. Análogamente, tenemos que:

$$\underline{\operatorname{rk}}\operatorname{Hom}(R_x, B) = \underline{\operatorname{rk}}\operatorname{Hom}(\Delta_x(\ell(x)), B)$$
$$= \sum_{\mu} (B : \nabla_x(\mu))v^{-\ell(x)+\mu}.$$

Recordando las definiciones de h_{Δ} y h_{∇} vistas en las Proposiciones 3.3.13 y 3.3.14, el resultado se concluye.

Resumiendo el contenido de la Proposición 3.3.13 (d) y del Corolario anterior, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3.17 La aplicación $\mathcal{E}:\mathcal{H}\to\langle\mathcal{R}\rangle$ tiene una inversa a izquierda dada por:

$$\langle B \rangle \mapsto \sum_{x \in W} \overline{\underline{\mathrm{rk}}} \operatorname{Hom}(B, R_x) T_x.$$

3.4. Clasificación de los Bimódulos de Soergel Indescomponibles

Para simplificar la notación en esta sección, para un bimódulo $B \in \mathcal{B}$ y $y \in W$, usaremos las abreviaciones:

$$\Gamma_y^{\leqslant} B \doteq \Gamma_{\leqslant y} B / \Gamma_{< y} B,$$

$$\Gamma_y^{\geqslant} B \doteq \Gamma_{\geqslant y} B / \Gamma_{> y} B,$$

$$\Gamma^y B \doteq B / \Gamma_{\neq y} B.$$

Definición 3.4.1 Sea W un grupo de Coxeter numerable. Una aplicación inyectiva $f: W \to \mathbb{N}$ se dice una *enumeración* admisible, si para todo par $w_1, w_2 \in W$ tal que $w_1 < w_2$, se cumple que $f(w_1) < f(w_2)$.

En términos más simples, una enumeración admisible es simplemente una manera de ver a los elementos de W ordenados en una sucesión de modo que respeten el orden de Bruhat.

Lema 3.4.2 Sea $B \in \mathcal{F}_{\nabla}$ un bimódulo fijo, y sea y_0, y_1, y_2, \ldots una enumeración admisible de los elementos de W. Denotemos, para cada $k \ge 0$, $C(k) \doteq \{y_0, \ldots, y_k\}$, y llamemos $y = y_k$. Entonces se tiene un isomorfismo:

$$\Gamma_y^{\leqslant} B \cong \Gamma_{C(k)} B / \Gamma_{C(k-1)} B.$$

Además, ambos lados son sumas directas de objetos de la forma $\nabla_y(\nu)$ y cada $\nabla_y(\nu)$ aparece como sumando directo con multiplicidad $(B:\nabla_y(\nu))$. Un resultado análogo vale para \mathcal{F}_{Δ} .

Demostración. Si z_0, z_1, z_2, \ldots es una enumeración de los elementos de W tal que $\ell(z_j) \leq \ell(z_{j+1})$ para cada $j \geq 0$, y si llamamos $A(j) \doteq \{z_0, \ldots, z_j\}$, entonces las $\Gamma_{A(j)}B$ son un refinamiento de nuestras filtraciones $\Gamma_{\leq i}B$. Además, $\Gamma_{A(j)}B/\Gamma_{A(j-1)}B$ es una suma directa de $(B: \nabla_{z_j}(\nu))$ copias de ciertos $\nabla_{z_j}(\nu)$.

Por otro lado, entre dos enumeraciones admisibles de W, podemos realizar una cantidad finita de transposiciones entre términos consecutivos que no sean comparables en el orden de Bruhat. Como dos elementos que no son comparables no pueden diferir en una reflexión, en cada uno de estos pasos no puede haber un Ext^1 entre los correspondientes cocientes. Esto es, la filtración antes y después de cada uno de estos pasos conduce al mismo cociente.

El cociente $\Gamma_{C(k)}B/\Gamma_{C(k-1)}B$ con $y_k=z_j$ es entonces isomorfo a $\Gamma_{A(j)}B/\Gamma_{A(j-1)}B$, y por lo tanto $\Gamma_y^{\leqslant}=\Gamma_{\leqslant y}B/\Gamma_{\leqslant y}B$ es una suma directa de desplazamientos de ∇_y , y $\nabla_y(\nu)$ aparece $(B:\nabla_y(\nu))$ veces.

Proposición 3.4.3 Sea B un bimódulo de Soergel y sea $y \in W$. Entonces $\Gamma_y^{\leq} B$, $\Gamma_y^{\geq} B$, $\Gamma_y^{y} B$ y $\Gamma_y B$ son R-módulos a derecha libres y graduados.

Demostración. En el caso de $\Gamma_y B$ y $\Gamma_y B$, el resultado es una consecuencia directa del Lema anterior. El caso de $\Gamma_y B$ se analiza en [15, Lemma 6.3].

Para cada reflexión $t \in T \subseteq W$ vamos a elegir $\alpha_t \in V^*$ una ecuación del plano de reflexión $\ker \alpha_t = V^t$ (observar que esta elección es única salvo por un escalar), y vamos a dejarla fija por el resto de esta sección.

Para los $y \in W$ ahora consideramos el elemento $p_y \in R$ dado por:

$$p_y \doteq \prod_{\substack{t \in T \\ yt < y}} \alpha_t.$$

Además, para cada $t \in T$, vamos a denotar $R_{(t)}$ a la localización de R en todas las funciones regulares de V que no se anulan en el hiperplano de reflexión V^t .

Lema 3.4.4 Si B es un bimódulo de Soergel, su localización $B \otimes_R R_{(t)}$ en R-mód- $R_{(t)}$ graduada es isomorfa a un sumando directo en una suma directa finita de copias de $R_{y,yt} \otimes_R R_{(t)}$ y $R_y \otimes_R R_{(t)}$ para $y \in W$ que cumplen y < yt.

Teorema 3.4.5 Sea $y \in W$ y B un bimódulo de Soergel. Entonces los morfismos $\Gamma_y B \to \Gamma_y^{\leq} B$ y $\Gamma_y^{\geq} B \to \Gamma^y B$ inducen isomorfismos

$$\Gamma_y B \cong \Gamma_y^{\leqslant} B p_y,$$

$$\Gamma_y^{\geqslant} B \cong \Gamma^y B p_y.$$

Un resultado posterior va a establecer que la categoría \mathcal{B} es estable bajo sumas directas. Sin embargo, por ahora llamaremos add \mathcal{B} a la categoría formada por todos los R-bimódulos graduados que ocurran como sumandos directos de bimódulos de Soergel.

Enunciamos una generalización del Teorema 3.3.15 para la categoría add \mathcal{B} :

Lema 3.4.6 Supongamos que M y N satisfacen cualquiera de las condiciones siquientes:

- $M \in \mathcal{F}_{\Delta} \ y \ N \in \operatorname{add} \mathcal{B}$.
- $M \in \operatorname{add} \mathcal{B} \ y \ N \in \mathcal{F}_{\nabla}$.

Entonces el espacio Hom(M, N) es libre y graduado como un R-módulo a derecha y además:

$$\underline{\operatorname{rk}}\operatorname{Hom}(M,N) = \sum_{x,\nu,\mu} (M:\Delta_x(\nu))(N:\nabla_x(\mu))v^{\mu-\nu}.$$

Finalmente, llegamos al resultado central de esta sección. Una prueba puede encontrarse en [15, Satz 6.16].

Teorema 3.4.7

- (a) Para todo $x \in W$ hay, salvo isomorfismo, un único bimódulo de Soergel B_x indescomponible con soporte en $Gr(\leqslant x)$ y tal que $(B_x : \Delta_x(\nu)) = 1$ para $\nu = 0$ y 0 para $\nu \neq 0$.
- (b) La aplicación $(x, \nu) \mapsto B_x(\nu)$ define una biyección:

$$W \times \mathbb{Z} \cong \left\{ \begin{array}{c} objetos \ indescomponibles \ de \ \mathcal{B}, \\ salvo \ isomorfismo \end{array} \right\}$$

(c) La categoría \mathcal{B} de bimódulos de Soergel es estable bajo sumas directas, esto es, $\mathcal{B} = \operatorname{add} \mathcal{B}$.

3.5. El caso de \mathbb{S}_3

Pensamos a S_3 como el grupo de Coxeter presentado por generadores $\{s, r\}$ y relaciones $s^2 = r^2 = e$ y $(rs)^3 = e$ (que equivale a rsr = srs).

3.5.1. La Base de Kazhdan-Lusztig en S_3

Vamos a computar explícitamente la base y los polinomios de Kazhdan-Lusztig para el caso en que $W = \mathbb{S}_3$. Para esto, usaremos el Teorema 2.4.1 en reiteradas oportunidades. En concreto, vamos a encontrar elementos que queden fijos por la involución ι , y que sean de la forma que establece (b) en 2.4.1.

Notar que S_3 consiste de 6 elementos, esto es, $S_3 = \{1, s, r, sr, rs, srs\}$. Vamos a hallar expresiones para $C_1, C_s, C_r, C_{sr}, C_{rs}$ y C_{srs} . Es evidente que debe ser $C_1 = T_1$.

Lema 3.5.1
$$C_s = q^{\frac{1}{2}}(q^{-1}T_s - T_1)$$
 y análogamente $C_r = q^{\frac{1}{2}}(q^{-1}T_r - T_1)$.

Demostración. Por la definición de la involución ι y la ecuación (2.8) se tiene

$$\begin{split} \iota(q^{\frac{1}{2}}(q^{-1}T_s-T_1)) &= q^{-\frac{1}{2}}(qT_s^{-1}-T_1) \\ &= q^{-\frac{1}{2}}(q(q^{-1}T_s-(1-q^{-1})T_1)-T_1) \\ &= q^{-\frac{1}{2}}(T_s-qT_1) \\ &= q^{\frac{1}{2}}(q^{-1}T_s-T_1). \end{split}$$

Es decir, $q^{\frac{1}{2}}(q^{-1}T_s - T_1)$ queda fijo por la involución ι . Notemos que además se tienen las igualdades $\varepsilon_1 = 1$, $q_1 = 1$, $\varepsilon_s = -1$ y $q_s = q$. Por otro lado, en el orden de Bruhat, el único elemento menor a s en \mathbb{S}_3 es el 1. En particular, vale la igualdad:

$$q^{\frac{1}{2}}(q^{-1}T_s - T_1) = \varepsilon_s q_s^{\frac{1}{2}} \left[\varepsilon_1 q_1^{-1} T_1 + \varepsilon_s q_s^{-1} T_s \right]$$

Como la expresión del lado derecho es de la forma del Teorema 2.4.1 (b), para $P_{s,s}=1$ y $P_{1,s}=1$, por la unicidad del mismo Teorema, resulta que $C_s=q^{\frac{1}{2}}(q^{-1}T_s-T_1)$, como queríamos.

Lema 3.5.2 $C_{sr} = C_s C_r$ y análogamente $C_{rs} = C_r C_s$.

Demostración. Notar que el elemento C_sC_r queda fijo por la involución ι , pues ι es un homomorfismo y C_s y C_r quedan fijos. Por otro lado, se tiene que:

$$C_s C_r = q^{\frac{1}{2}} (q^{-1} T_s - T_1) q^{\frac{1}{2}} (q^{-1} T_r - T_1)$$

= $q(q^{-2} T_{sr} - q^{-1} T_r - q^{-1} T_s + T_1).$

Notemos que en el orden de Bruhat en \mathbb{S}_3 los elementos menores que sr son 1, s, r. Es inmediato verificar que la última expresión obtenida para C_sC_r es de la forma del Teorema 2.4.1 (b), donde además $P_{r,sr}=1$, $P_{s,sr}=1$ y $P_{1,sr}=1$.

Lema 3.5.3
$$C_{srs} = C_s C_r C_s - C_s = C_r C_s C_r - C_r$$
.

Demostración. Nuevamente, el elemento $C_sC_rC_s-C_s$ queda fijo por la involución ι , pues ι es un homomorfismo y C_s y C_r quedan fijos. Ahora bien, utilizando la cuenta de la demostración anterior, se tiene que:

$$\begin{split} C_s C_r C_s &= q(q^{-2}T_{sr} - q^{-1}T_r - q^{-1}T_s + T_1)q^{\frac{1}{2}}(q^{-1}T_s - T_1) \\ &= q^{\frac{3}{2}}(q^{-3}T_{srs} - q^{-2}T_{rs} - q^{-2}T_s^2 + q^{-1}T_s - q^{-2}T_{sr} + q^{-1}T_r + q^{-1}T_s - T_1) \\ &= q^{\frac{3}{2}}(q^{-3}T_{srs} - q^{-2}T_{rs} - q^{-2}(q - 1)T_s - q^{-1}T_1 + q^{-1}T_s - q^{-2}T_{sr} + q^{-1}T_r + q^{-1}T_s - T_1) \\ &= q^{\frac{3}{2}}(q^{-3}T_{srs} - q^{-2}T_{rs} - q^{-1}T_s + q^{-2}T_s - q^{-1}T_1 + q^{-1}T_s - q^{-2}T_{sr} + q^{-1}T_r + q^{-1}T_s - T_1) \\ &= q^{\frac{3}{2}}(q^{-3}T_{srs} - q^{-2}T_{rs} - q^{-2}T_{sr} + q^{-1}T_r + (q^{-1} + q^{-2})T_s - (1 + q^{-1})T_1) \end{split}$$

En particular, sustrayendo $C_s=q^{\frac{1}{2}}(q^{-1}T_s-T_1)=q^{\frac{3}{2}}(q^{-2}T_s-q^{-1}T_1)$ a ambos lados, resulta:

$$C_s C_r C_s - C_s = q^{\frac{3}{2}} (q^{-3} T_{srs} - q^{-2} T_{rs} - q^{-2} T_{sr} + q^{-1} T_r + q^{-1} T_s - T_1)$$

Es inmediato comprobar que la expresión del lado derecho es del tipo del Teorema 2.4.1 (b), y por lo tanto se concluye el Lema.

OBSERVACIÓN: Todos los polinomios de Kazhdan-Lusztig en este caso satisfacen $P_{x,w}=1$. Esto sucede en virtud de que el grupo \mathbb{S}_3 es un grupo diedral, y ya establecimos la validez de la Proposición 2.4.5.

Como consecuencia de los cálculos que hicimos, o bien como corolario inmediato de la Proposición 2.4.5, resulta que:

- $C_1' = T_1.$
- $C_s' = q^{-\frac{1}{2}}(T_s + T_1).$
- $C_r' = q^{-\frac{1}{2}}(T_r + T_1).$
- $C'_{sr} = q^{-1}(T_{sr} + T_s + T_r + T_1).$
- $C'_{rs} = q^{-1}(T_{rs} + T_s + T_r + T_1).$
- $C'_{srs} = q^{-\frac{3}{2}} (T_{srs} + T_{rs} + T_{sr} + T_s + T_r + 1).$

3.5.2. La categoría $\mathcal{B}(\mathbb{S}_3)$

Consideremos el anillo $R = \mathbb{R}[x, y, z]$. Existe una acción natural de \mathbb{S}_3 en R. La reflexión simple s intercambia x e y. Esto es:

$$s \cdot f(x, y, z) = f(y, x, z).$$

Análogamente, la reflexión simple r intercambia y y z. Luego, si llamamos R^s al subconjunto de R invariante por la acción de s, resulta que $R^s = \mathbb{R}[x+y,xy,z]$. Del mismo modo, $R^r = \mathbb{R}[x,y+z,yz]$. Por otro lado, se tiene que el subanillo $R^{s,r}$ invariante por la acción de s y r resulta ser:

$$R^{s,r} = \mathbb{R}[x+y+z, xy+yz+zx, xyz].$$

Como antes, consideramos la graduación en R tal que a las indeterminadas x, y, z asigna grado 2. Consideramos ahora $B_s \doteq R \otimes_{R^s} R(1)$ y análogamente, $B_r \doteq R \otimes_{R^r} R(1)$.

Ahora definimos $B_{sr} \doteq B_s \otimes_R B_r$ (la razón de la elección de esta notación quedará clara en un momento). Del mismo modo $B_{rs} \doteq B_r \otimes_R B_s$.

Finalmente, llamemos $B_{srs} \doteq R \otimes_{R^{s,r}} R(3)$.

Introducimos la categoría $\mathcal{B}(\mathbb{S}_3)$ como la categoría de R-bimódulos \mathbb{Z} -graduados que son isomorfos a sumas directas y desplazamientos de objetos del conjunto:

$$\mathbb{I} = \{R, B_s, B_r, B_{sr}, B_{rs}, B_{srs}\}.$$

Teorema 3.5.4 Si $M, N \in \mathbb{I}$, entonces MN es isomorfo a una suma directa de desplazamientos de objetos de \mathbb{I} .

Demostración. Vamos a ir demostrando caso por caso, a continuación.

Comencemos notando, como en la demostración del Lema 3.3.5, que si $p \in R$, entonces p - sp es un polinomio múltiplo de y - x. Del mismo modo, p - rp es múltiplo de z - y.

Llamamos $\alpha_s \doteq y - x$ y $\alpha_r \doteq z - y$. Si definimos $P_s : R \to R^s$ y $\partial_s : R \to R^s$ por:

$$P_s(p) \doteq \frac{p+sp}{2},$$

$$\partial_s(p) \doteq \frac{p - sp}{2\alpha_s},$$

tenemos una descomposición:

$$p = P_s(p) + \alpha_s \partial_s(p)$$
,

la cual, a su vez, induce, como antes, un isomorfismo de R^s -bimódulos graduados:

$$R \cong R^s \oplus R^s(-2)$$
.

Lema 3.5.5 Se tiene el isomorfismo $B_sB_s \cong B_s(1) \oplus B_s(-1)$.

Demostración. Procedemos usando el isomorfismo anterior.

$$B_{s}B_{s} \cong (R \otimes_{R^{s}} R(1)) \otimes_{R} (R \otimes_{R^{s}} R(1))$$

$$\cong R \otimes_{R^{s}} R \otimes_{R^{s}} R(2)$$

$$\cong R \otimes_{R^{s}} (R^{s} \oplus R^{s}(-2)) \otimes_{R^{s}} R(2)$$

$$\cong R \otimes_{R^{s}} R^{s} \otimes_{R^{s}} R(2) \oplus R \otimes_{R^{s}} R^{s}(-2) \otimes_{R^{s}} R(2)$$

$$\cong R \otimes_{R^{s}} R(2) \oplus R \otimes_{R^{s}} R$$

$$\cong B_{s}(1) \oplus B_{s}(-1).$$

Observación: Este isomorfismo se puede interpretar en el álgebra de Hecke con la identidad:

$$C'_{s}C'_{s} = q^{-\frac{1}{2}}(T_{s} + T_{1})q^{-\frac{1}{2}}(T_{s} + T_{1})$$

$$= q^{-1}(T_{s}^{2} + 2T_{s} + T_{1})$$

$$= q^{-1}((q - 1)T_{s} + qT_{1} + 2T_{s} + T_{1})$$

$$= q^{-1}(q + 1)(T_{s} + T_{1})$$

$$= q^{-1}(T_{s} + T_{1}) + (T_{s} + T_{1})$$

$$= q^{-\frac{1}{2}}C'_{s} + q^{\frac{1}{2}}C'_{s}$$

$$= vC'_{s} + v^{-1}C'_{s}$$

Lema 3.5.6 Existe un isomorfismo $B_sB_{sr} \cong B_{sr}(1) \oplus B_{sr}(-1)$.

Demostración. Usamos el Lema anterior:

$$B_s B_{sr} \cong B_s B_s B_r$$

$$\cong (B_s(1) \oplus B_s(-1)) \otimes_R B_r$$

$$\cong B_s \otimes_R B_r(1) \oplus B_s \otimes B_r(-1)$$

$$\cong B_{sr}(1) \oplus B_{sr}(-1).$$

Observación: En el álgebra de Hecke tenemos, usando la Proposición 2.4.3, la igualdad:

$$\begin{split} C_s'C_{sr}' &= q^{-\frac{1}{2}}(T_s + T_1)q^{-1}(T_{sr} + T_s + T_r + T_1) \\ &= q^{-\frac{3}{2}}(T_sT_{sr} + T_s^2 + T_{sr} + T_s + T_{sr} + T_s + T_r + T_1) \\ &= q^{-\frac{3}{2}}((q-1)T_{sr} + qT_r + (q-1)T_s + qT_1 + 2T_{sr} + 2T_s + T_r + T_1) \\ &= q^{-\frac{3}{2}}(q+1)(T_{sr} + T_s + T_r + T_1) \\ &= q^{-\frac{3}{2}}(q+1)qC_{sr}' \\ &= q^{-\frac{1}{2}}C_{sr}' + q^{\frac{1}{2}}C_{sr}' \\ &= vC_{sr}' + v^{-1}C_{sr}'. \end{split}$$

Lema 3.5.7 Existe un isomorfismo $B_s B_{srs} \cong B_{srs}(1) \oplus B_{srs}(-1)$.

Demostración. De nuevo, utilizamos el isomorfismo $R \cong R^s \oplus R^s(-2)$.

$$B_{s}B_{srs} \cong (R \otimes_{R^{s}} R(1)) \otimes_{R} (R \otimes_{R^{s,r}} R(3))$$

$$\cong R \otimes_{R^{s}} R \otimes_{R^{s,r}} R(4)$$

$$\cong R \otimes_{R^{s}} (R^{s} \oplus R^{s}(-2)) \otimes_{R^{s,r}} R(4)$$

$$\cong R \otimes_{R^{s}} R^{s} \otimes_{R^{s,r}} R(4) \oplus R \otimes_{R^{s}} R^{s} \otimes_{R^{s,r}} R(2)$$

$$\cong R \otimes_{R^{s,r}} R(4) \oplus R \otimes_{R^{s,r}} R(2)$$

$$\cong B_{srs}(1) \oplus B_{srs}(-1).$$

Observación: En el álgebra de Hecke tenemos, por otra parte:

$$\begin{split} C_s'C_{srs}' &= q^{-\frac{1}{2}}(T_s + T_1) + q^{-\frac{3}{2}}(T_{srs} + T_{sr} + T_r + T_r + T_1) \\ &= q^{-2}(T_sT_{srs} + T_{srs} + T_sT_{sr} + T_s^2 + T_{sr} + T_s + T_{rs} + T_{rs} + T_s + T_r + T_1) \\ &= q^{-2}((q-1)T_{srs} + qT_{rs} + T_{srs} + (q-1)T_{sr} + qT_r + \\ &\quad + (q-1)T_s + qT_1 + T_{sr} + T_s + T_{rs} + T_{rs} + T_s + T_r + T_1) \\ &= q^{-2}(q+1)(T_{srs} + T_{rs} + T_{rr} + T_r + T_s + T_1) \\ &= q^{-2}(q+1)q^{\frac{3}{2}}C_{srs}' \\ &= q^{-\frac{1}{2}}C_{srs}' + q^{\frac{1}{2}}C_{srs}' \\ &= vC_{srs}' + v^{-1}C_{srs}'. \end{split}$$

Un resultado clásico de la teoría de invariantes establece que hay un isomorfismo de $\mathbb{R}^{s,r}$ -bimódulos dado por:

$$R \cong \bigoplus_{w \in \mathbb{S}_3} R^{s,r}(-2\ell(w)). \tag{3.3}$$

(se puede hallar una prueba en [7, Corollary 4.1.11 (a)]). Este isomorfismo implica el siguiente hecho.

Lema 3.5.8
$$B_{srs}B_{srs} \cong B_{srs}(-3) \oplus B_{srs}(-1)^{\oplus 2} \oplus B_{srs}(1)^{\oplus 2} \oplus B_{srs}(3)$$
.

OBSERVACIÓN: En el álgebra de Hecke, según se puede verificar realizando las multiplicaciones cuidadosamente (quizás sea conveniente armar una tabla de multiplicación de T_aT_b para $a,b \in \mathbb{S}_3$):

$$C'_{srs}C'_{srs} = q^{-3}(T_{srs} + T_{sr} + T_{rs} + T_{s} + T_{r} + T_{1})^{2}$$
$$= v^{-3}C'_{srs} + 2v^{-1}C'_{srs} + 2vC'_{srs} + v^{3}C'_{srs}.$$

Lema 3.5.9 $B_s B_{rs} \cong B_{srs} \oplus B_s$.

Demostración. Vamos a definir cuatro morfismos de R-bimódulos. El primero es el morfismo $m_s: B_s \to R$ dado por:

$$m_s: R \otimes_{R^s} R(1) \to R$$

 $p \otimes q \mapsto pq.$

El segundo es el morfismo $m_s^a:R\to B_s$ dado por:

$$m_s^a: R \to R \otimes_{R^s} R(1)$$

 $1 \mapsto \alpha_s \otimes 1 + 1 \otimes \alpha_s.$

donde, recordemos, $\alpha_s = y - x$. Observemos que esta aplicación es realmente un morfismo de R-bimódulos, ya que para cada $p \in R$ se cumple que $m_s^a(1)p = pm_s^a(1)$. En efecto:

$$m_s^a(1)p = (\alpha_s \otimes 1 + 1 \otimes \alpha_s)p$$

$$= \alpha_s \otimes p + 1 \otimes \alpha_s p$$

$$= \alpha_s \otimes (P_s(p) + \alpha_s \partial_s(p)) + 1 \otimes \alpha_s (P_s(p) + \alpha_s \partial_s(p))$$

$$= \alpha_s P_s(p) \otimes 1 + \alpha_s \partial_s(p) \otimes \alpha_s + P_s(p) \otimes \alpha_s + \partial_s(p) \alpha_s^2 \otimes 1$$

$$= p\alpha_s \otimes 1 + p\alpha_s$$

$$= pm_s^a(1),$$

donde en el tercer paso usamos que $\alpha_s^2 = (y - x)^2 \in \mathbb{R}^s$.

El tercer morfismo que necesitaremos es $j_s: B_sB_s \to B_s$, dado por:

$$j_s: R \otimes_{R^s} R \otimes_{R^s} R(2) \to R \otimes_{R^s} R(1)$$

 $p \otimes q \otimes h \mapsto p \partial_s(q) \otimes h.$

Si comprobamos que esta aplicación está bien definida, entonces es obvio que es un morfismo de R-bimódulos. Para esto, basta notar que para cada elemento $r^s \in R^s$ se cumplen:

$$j_s(pr^s \otimes q \otimes h) = j_s(p \otimes r^s q \otimes h),$$

$$j_s(p \otimes qr^s \otimes h) = j_s(p \otimes q \otimes r^s h).$$

Esto surge de observar que ∂_s es un morfismo de R^s -módulos (a izquierda o derecha).

Finalmente, nuestro último morfismo es $j_s^a: B_s \to B_s B_s$, dado por:

$$j_s^a: R \otimes_{R^s} R(1) \to R \otimes_{R^s} R \otimes_{R^s} R(2)$$

 $p \otimes q \mapsto p \otimes 1 \otimes q.$

De manera análoga, podemos definir los morfismos m_r , m_r^a , j_r y j_r^a .

Para no sobrecargar la notación, evitaremos escribir los morfismos identidad. Por ejemplo, si nos referimos al morfismo $m_r: B_sB_rB_s \to B_sB_s$, estaremos hablando del morfismo id $\otimes m_r \otimes$ id.

Afirmación 1: Si llamamos $e \doteq -m_r^a \circ j_s^a \circ j_s \circ m_r : B_s B_r B_s \to B_s B_r B_s$, entonces e resulta ser idempotente.

Para ello, basta notar que la composición $j_s \circ m_r \circ m_r^a \circ j_s^a : B_s \to B_s$ es $-\operatorname{id}$. Una consecuencia de la Afirmación 1 es que:

$$B_s B_r B_s = \operatorname{Im}(1 - e) \oplus \operatorname{Im}(e),$$

pues si e es idempotente, se verifica que 1 - e es un idempotente ortogonal a e. De las definiciones de los morfismos, es evidente que m_r y j_s son sobreyectivas y m_r^a y j_s^a son inyectivas. En particular, esto implica que:

$$\operatorname{Im}(e) \cong \operatorname{Im}(m_r^a \circ j_s^a) \cong B_s.$$

Para concluir con la demostración del Lema, demostraremos el siguiente hecho:

Afirmación 2: $Im(1-e) \cong B_{srs}$.

Llamemos $1^{\otimes} \doteq 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \in R \otimes_{R^s} R \otimes_{R^r} R \otimes_{R^s} R$, y llamemos $\langle 1^{\otimes} \rangle$ al R-bimódulo generado por 1^{\otimes} .

Vamos a comprobar primero que $\operatorname{Im}(1-e) = \langle 1^{\otimes} \rangle$. Para esto, notemos que $(1-e)(1^{\otimes}) = 1^{\otimes}$, de modo que $\langle 1^{\otimes} \rangle \subseteq \operatorname{Im}(1-e)$. Recíprocamente, notemos que ya sabemos que $(1-e)(1^{\otimes}) \in \langle 1^{\otimes} \rangle$ y veamos ahora que $(1-e)(1 \otimes x \otimes 1 \otimes 1) \in \langle 1^{\otimes} \rangle$.

En efecto, por un lado, en $B_sB_rB_s$ se tiene:

$$1 \otimes y \otimes 1 \otimes 1 = (x+y) \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes x \otimes 1 \otimes 1. \tag{3.4}$$

Pero, por otro, por definición es:

$$(1-e)(1\otimes x\otimes 1\otimes 1)=1\otimes x\otimes 1\otimes 1-\frac{1}{2}\otimes (z-y)\otimes 1\otimes 1-\frac{1}{2}\otimes 1\otimes (z-y)\otimes 1.$$

Y aplicando la ecuación (3.4) en el segundo y en el tercer término del lado derecho resulta que:

$$(1-e)(1 \otimes x \otimes 1 \otimes 1) = \frac{1}{2}(x+y-z) \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \frac{1}{2}(x+y-z).$$

Esto prueba que $(1-e)(1 \otimes x \otimes 1 \otimes 1) \in \langle 1^{\otimes} \rangle$. Ahora bien, como $B_sB_rB_s$ está generado por 1^{\otimes} y $1 \otimes x \otimes 1 \otimes 1$, resulta que la imagen de 1-e está generada por las imágenes bajo 1-e de dichos elementos y como ambas están en $\langle 1^{\otimes} \rangle$ resulta que $\operatorname{Im}(1-e) \subseteq \langle 1^{\otimes} \rangle$, como queríamos.

Finalmente, veamos que $\langle 1^{\otimes} \rangle \cong B_{srs}$. Para esto, si consideramos:

$$R \otimes_{R^{s,r}} R(3) \to B_s B_r B_s$$

$$p \otimes q \mapsto p \otimes 1 \otimes 1 \otimes q$$
,

este resulta ser un morfismo de R-bimódulos graduados. Además, está claro que su imagen es $\langle 1^{\otimes} \rangle$. Por otro lado, por el isomorfismo (3.3) resulta que también se tiene el isomorfismo de R-bimódulos graduados:

$$B_{srs} \cong R(-3) \oplus R(-1)^{\oplus 2} \oplus R(1)^{\oplus 2} \oplus R(3).$$

Además, recordemos que teníamos el isomorfismo $B_s \cong R(-1) \oplus R(1)$. En particular, resulta que:

$$B_s B_r B_s \cong (R(-1) \oplus R(1)) \otimes_R (R(-1) \oplus R(1)) \otimes_R (R(-1) \oplus R(1))$$

$$\cong R(-3) \oplus R(-1)^{\oplus 3} \oplus R(1)^{\oplus 3} \oplus R(3)$$

Para concluir, notemos que de la descomposición $B_sB_rB_s \cong \text{Im}(1-e) \oplus \text{Im}(e)$ y del isomorfismo anterior se observa que, en cada componente homogénea, B_{srs} e Im(1-e) tienen la misma dimensión como \mathbb{R} -espacios vectoriales de dimensión finita. Como una aplicación lineal sobreyectiva entre espacios isomorfos es un isomorfismo, se concluye la demostración.

Capítulo 4

La Conjetura de Kazhdan-Lusztig

4.1. Kazhdan-Lusztig y Soergel

El objetivo de este capítulo final es discutir informalmente algunas motivaciones para el estudio de los Bimódulos de Soergel, como una herramienta para probar una importante conjetura formulada por David Kazhdan y George Lusztig en 1979 en su artículo [5].

Una formulación precisa de dicha conjetura es la siguiente:

Conjetura 4.1.1 Los polinomios $P_{x,w}$ definidos en el Teorema 2.4.1 tienen coeficientes no negativos.

La conjetura originalmente estaba formulada para un grupo de Coxeter arbitrario, sin embargo el primer acercamiento a una prueba fue dada precisamente por Kazhdan y Lusztig en 1980 al probar la veracidad de esta afirmación para el caso en que W es un grupo cristalográfico, i.e. $m_{st} \in \{2, 3, 4, 6, \infty\}$.

En 1981 Beilinson-Berstein en [1] y Bryliski-Kashiwara [3] dieron una prueba completa de la conjetura usando herramientas de ecuaciones diferenciales algebraicas, teoría de haces perversos y la teoría de pesos de Deligne, con ideas geométricas bastante sofisticadas que, según establece Bernstein, comienzan traduciendo el enunciado de la conjetura a problemas equivalentes en otras áreas de la matemática, cada vez más lejos del problema original.

La motivación en poder demostrar la conjetura residía en que los polinomios de Kazhdan-Lusztig, según se sabía, jugaban un rol clave en, por citar algunos ejemplos:

- La descripción de Lusztig de los caracteres de un grupo de Lie finito.
- Las representaciones racionales de grupos algebraicos reductivos en característica positiva.
- Fórmulas para los caracteres de módulos simples para álgebras de Lie afines y grupos cuánticos en las raíces de la unidad.

- La correspondencia geométrica de Langlands.
- Polinomios simétricos, polinomios de Macdonald, coeficientes de Littlewood-Richardson.
- Combinatoria algebraica.

En otra dirección, en 1999, Patrick Polo publicó el artículo [13] en el cual estableció que *esencialmente* todos los polinomios con coeficientes positivos son polinomios de Kazhdan-Lusztig en algún grupo simétrico. Más precisamente.

Teorema 4.1.2 (Polo) Si p es un polinomio con término independiente 1 y coeficientes no negativos, entonces existen elementos x, w en un grupo simétrico, tales que $P_{x,w} = p$.

En 2014, en tanto, Ben Elias y Geordie Williamson dieron otra demostración de 4.1.1, en este caso completamente algebraica, elaborando y empleando técnicas novedosas de Teoría de Hodge, y probando otra conjetura sobre la que hablaremos a continuación, en este caso de Wolfgang Soergel.

Siguiendo la terminología del Capítulo 3, Soergel formuló la siguiente afirmación en [15], que él mismo no pudo demostrar.

Conjetura 4.1.3 (Soergel) Para todo $x \in W$ existe un \mathbb{Z} -módulo graduado indescomponible B_x tal que $\mathcal{E}(C'_x) = \langle B_x \rangle$.

En el mismo artículo [15], Soergel demostró que esta conjetura implicaba la veracidad de 4.1.1.

Como se mencionó anteriormente, Elias-Williamson dieron en [4] una novedosa prueba de este resultado, que sentó una base para el estudio de una nueva área de la matemática, bautizada como "*Teoría algebraica de Hodge*".

Bibliografía

- [1] A. Beilinson J. Bernstein, *Localisation de* g-modules, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math 292, 1981.
- [2] A. Björner F. Brenti, Combinatorics of Coxeter Groups, Springer-Verlag, 2005.
- [3] J.-L. Brylinski M. Kashiwara, *Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems*, Inventiones Mathematicae, 1981.
- [4] B. Elias G. Williamson, *The Hodge Theory of Soergel Bimodules*, Annals of Mathematics, 2014.
- [5] D. Kazhdan G. Lusztig, Representations of Coxeter Groups and Hecke Algebras, Inventiones Mathematicae, 1979.
- [6] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 1977.
- [7] H. Hiller, Geometry of Coxeter Groups, Research Notes in Mathematics 54, Pitman, Boston, 1982.
- [8] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge studies in advanced mathematics 29, 1990.
- [9] T. W. Hungerford, Algebra, Springer-Verlag, 1990.
- [10] S. Lang, Algebra Revised Third Edition, Springer-Verlag, 2002.
- [11] N. Libedinsky, A Gentle Introduction to Soergel Bimodules, 2017.
- [12] N. Libedinsky, Autour de la Catégorie des Bimodules de Soergel, PhD These, 2008.
- [13] P. Polo, Construction of arbitrary Kazhdan-Lusztig polynomials in symmetric groups, Journal of the American Mathematical Society, Vol 3, 1999.
- [14] R. Pierce, Associative algebras, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1982.
- [15] W. Soergel, Kazhdan-Lusztig polynomials and indecomposable bimodules over polynomial rings, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 6(3) 2007.