Cálculo estocástico aplicado a opciones exóticas

Elisa Ravasi

Directora: Noemí Patricia Kisbye

30 de marzo de 2007

Resumen

Las *opciones exóticas* son contratos financieros cuyo valor depende del camino seguido por el precio del activo subyacente. En este trabajo estudiaremos la valuación de las *opciones exóticas*, en particular las opciones barrera, lookback y asiáticas. Asumiremos un comportamiento de los precios de las acciones acorde a un movimiento geométrico browniano. Además, supondremos ciertas hipótesis de mercado tales como la ausencia de arbitrage y una tasa libre de riesgo constante.

En los capítulos 1 y 2 presentamos algunos conceptos matemáticos y financieros básicos necesarios para la comprensión del problema. En el capítulo 3 introducimos nociones de cálculo estocástico dentro de la teoría de Itô y su aplicación a la formulación y obtención de la fórmula de Black-Scholes-Merton. En el capítulo 4, desarrollamos la teoría de valuación de opciones exóticas, obteniendo las ecuaciones diferenciales correspondientes y sus soluciones.

Palabras clave: Opciones exóticas, movimiento geométrico browniano, principio de no arbitrage, teoría de Itô, fórmula de Black-Scholes-Merton.

Código: 60-02

Índice general

Introducción

En los últimos años, se ha incrementado en los mercados financieros la comercialización de una clase de contratos llamados *derivados financieros*. Los derivados son contratos cuyo valor al momento del vencimiento depende del valor del activo subyacente, básicamente, del precio de las acciones. Entre los más importantes se encuentran los futuros, los forward y las opciones.

Es así que en los últimos 50 años ha emergido una nueva disciplina científica: La teoría de las finanzas. Sin perder de vista sus aplicaciones a aspectos prácticos de comercio y regulación, la teoría de finanzas se ha convertido en una nueva línea de investigación dentro de la matemática. De hecho, muchos de los desarrollos teóricos en finanzas han encontrado inmediata aplicación en mercados financieros.

Una de las investigaciones científicas más importantes y sobre la cual se basa este trabajo, es la desarrollada por Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton. En su artículo publicado en el año 1973, *The pricing of options and corporate liabilities*, Black y Scholes exponen una fórmula para valuación de opciones financieras, conocida actualmente como la fórmula de Black-Scholes-Merton.

En 1969, al tiempo que F. Black y M. Scholes comenzaban a trabajar en la obtención de la fórmula, Robert Merton introducía el cálculo estocástico en el estudio de las finanzas. Su aporte permitió entonces perfeccionar la investigación de Black y Scholes. En particular, asumiendo ciertas hipótesis en el modelo de mercado, establecieron que es posible mantener un *hedge* en la posición sobre la opción, invirtiendo simultáneamente en acciones y en dinero. Así, la fórmula de valuación de opciones Black-Scholes-Merton permite valuar las opciones y además resolver un problema de hedging. Cabe destacar que por estos avances en la teoría de las finanzas, Scholes y Merton merecieron el Premio Nobel de Economía en 1997. Fisher Black había fallecido en 1995.

El objetivo final de nuestro trabajo es aplicar las herramientas del cálculo estocástico para la valuación de las opciones *exóticas*, en particular de las llamadas opciones *barrera, lookback y asiáticas*. Simultáneamente mostraremos cómo es posible obtener un hedge para cada una de ellas.

En los capítulos 1 y 2 presentamos algunos conceptos matemáticos y financieros básicos necesarios para la comprensión del problema. En el capítulo 3 introducimos nociones de cálculo estocástico y la aplicación de esta teoría matemática a la formulación y obtención de la fórmula de Black-Scholes-Merton. Finalmente, en el capítulo 4, desarrollamos la teoría de valuación de opciones exóticas.

Se anexa a este trabajo un apéndice y una sección de ejercicios. En esta última se verifica en forma directa que las soluciones obtenidas en el capítulo 4 para el caso de las opciones barrera y lookback, satisfacen la correspondiente ecuación de Black-Scholes-Merton. Para el caso de las opciones asiáticas sólo es posible obtener una ecuación diferencial, la cual puede ser resuelta de forma explícita en el caso particular de un precio strike igual a cero.

Capítulo 1

Conceptos generales de la Teoría de Probabilidad

En este capítulo daremos conceptos generales de probabilidad que nos serán indispensables para desarrollar el cálculo estocástico.

Es necesario primero exponer algunos ingredientes básicos de la teoría de probabilidad, para luego poder abordar los conceptos más importantes en los que se basa la matemática financiera. Entre ellos se encuentran: *Esperanza condicional*, *martingala* y *proceso de Markov.*

Por último analizaremos la noción de *stopping times* en forma discreta y daremos una breve descripción de su forma continua.

1.1. Nociones básicas

Definición 1.1.1. Sea Ω un conjunto no vacío. Sea T un número fijo positivo, y supongamos que para cada $t \in [0,T]$ hay un σ- álgebra $\mathcal{F}(t)$ de Ω. Supongamos además que si $s \leq t$, entonces cada conjunto en $\mathcal{F}(s)$ está también en $\mathcal{F}(t)$. Entonces decimos que la colección $\mathcal{F}(t)$ de σ-álgebras con 0$\leq t \leq T$ es una *filtración*.

Ejemplo 1.1.2 (discreto). Pensemos en el experimento de tirar la moneda 3 veces y consideremos $\Omega = \{ccc, ccx, cxc, ...\}$ donde denotamos por $c \doteq$ cara y $x \doteq$ cruz. Sea t = 0, 1, 2, 3. Entonces,

$\mathcal{F}(0) = \{\emptyset, \Omega\}$;

$\mathcal{F}(1) = \{\emptyset,\ \Omega, \{ccc, ccx, cxc, cxx\},\ \{xcc, xcx, xxc, xxx\}\}$;

$\mathcal{F}(2) = \{\emptyset, \Omega,\ \{ccc, ccx\}, \{cxc, cxx\}, \{xcc, xcx\}, \{xxc, xxx\},$ uniones de estos $\}$;

$\mathcal{F}(3) = P(\Omega)$

son σ- álgebras para cada $t = 0$, 1, 2, 3, y satisfacen que $\mathcal{F}(0) \subseteq \mathcal{F}(1) \subseteq \mathcal{F}(2) \subseteq \mathcal{F}(3)$.

Definición 1.1.3. Sea X una variable aleatoria definida en un espacio muestral no vacío Ω. La σ- álgebra generada por X, y que denotamos por $\sigma(X)$, está dada por todas las preimágenes de X. (ie: $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ v. a. con $\sigma(X) = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}_1(\mathbb{R})\}$).

Definición 1.1.4. Sea X una variable aleatoria definida en un espacio muestral no vacío Ω. Sea $\mathcal{G}$ una σ- álgebra de Ω. Decimos que X es $\mathcal{G}$-medible si $\sigma(X) \subseteq \mathcal{G}$.

Una variable aleatoria X es $\mathcal{G}$-medible si y sólo si la información disponible en $\mathcal{G}$ es suficiente para valuar X.

Ejemplo 1.1.5 (Modelo binomial de 3-períodos). Sea Ω como en el Ejemplo 1.1.2 y consideremos S_0, S_1, S_2, S_3 las variables aleatorias definidas sobre Ω dadas por:

S_0 = 4

$S_1(c, \omega_2, \omega_3) = 2 \cdot S(0)$

$S_1(x, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{2} \cdot S(0)$

$S_2(\omega_1, c, \omega_3) = 2 \cdot S_1(\omega_1, c, \omega_3)$

$S_2(\omega_1, x, \omega_3) = \frac{1}{2} \cdot S_1(\omega_1, x, \omega_3)$

$S_3(\omega_1, \omega_2, c) = 2 \cdot S_2(\omega_1, \omega_2, c)$

$S_3(\omega_1, \omega_2, x) = \frac{1}{2} \cdot S_2(\omega_1, \omega_2, x)$.

El valor de estas variables se describe en el árbol 1.1

Observemos que $S_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = S_1(\omega_1)$ y $S_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = S_2(\omega_1, \omega_2)$, con lo cual obtenemos

$S_1(c) = 2 \cdot S(0)$

$S_1(x) = \frac{1}{2} \cdot S(0)$

$S_2(\omega_1, c) = 2 \cdot S_1(\omega_1)$

$S_2(\omega_1, x) = \frac{1}{2} \cdot S_1(\omega_1)$

$S_3(\omega_1, \omega_2, c) = 2 \cdot S_2(\omega_1, \omega_2)$

$S_3(\omega_1, \omega_2, x) = \frac{1}{2} \cdot S_2(\omega_1, \omega_2)$.

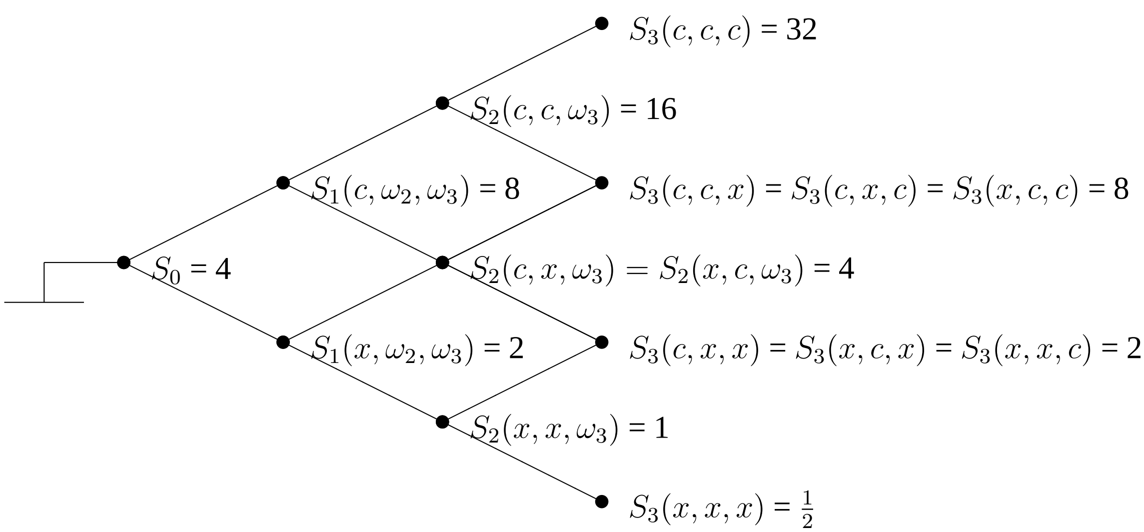

Figura 1.1: Modelo binomial de tres períodos

En general, a esto lo denotaremos de la siguiente manera:

$S(0) = 4$

$S_{i+1}(c) = 2 \cdot S_i$

$S_{i+1}(x) = \frac{1}{2} \cdot S_i$ con $i = 0, 1, 2.$

A los factores 2 y $\frac{1}{2}$ que hacen que la variable S_i aumente o disminuya en cada tirada, los llamaremos ***factores up y down*** respectivamente.

Antes de calcular $\sigma(S_2)$, consideremos la siguiente notaciones:

$A_c \doteq \{ccc, ccx, cxc, cxx\}$;

$A_x \doteq \{xcc, xcx, xxc, xxx\}$;

$A_{cc} \doteq \{ccc, ccx\}$;

$A_{xc} \doteq \{xcc, xcx\}$;

$\vdots$

Calculemos $\sigma(S_2)$:

$$S_2^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A \cap \{1, 4, 16\} = \emptyset \\ \Omega & \text{si } \{1, 4, 16\} \subseteq A \\ A_{xx} & \text{si } \{1, 4, 16\} \cap A = \{1\} \\ A_{xc} \cup A_{cx} & \text{si } \{1, 4, 16\} \cap A = \{4\} \\ A_{cc} & \text{si } \{1, 4, 16\} \cap A = \{16\} \\ \text{Uniones de estos} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces $\sigma(S_2) = \mathcal{F}(2) \setminus (\{A_x\} \bigcup \{A_c\})$. Por lo tanto, $\sigma(S_2) \subseteq \mathcal{F}(2)$. De esta manera, se cumple la Definición 1.1.4 y S_2 es $\mathcal{F}(2)$- medible.

Definición 1.1.6. Un *proceso estocástico* se define como una colección de variables aleatorias $X(t)$, con $t \in \mathcal{T}$, todas definidas sobre un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, P, \mathcal{F})$, donde $\mathcal{T}$

es un subconjunto de $(-\infty, +\infty)$ y puede ser pensado como el conjunto sobre el cual varía el parámetro del tiempo.

Cuando $\mathcal{T}$ es un intervalo, decimos que $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ es un proceso estocástico a *parámetro continuo*; y si $\mathcal{T}$ es un subconjunto de números enteros decimos que tenemos un proceso estocástico a *parámetro discreto*.

Dada una filtración y un proceso estocástico podemos relacionarlos de la siguiente manera:

Definición 1.1.7. Sea Ω un espacio muestral no vacío con una filtración $\mathcal{F}(t)$, $0 \leq t \leq T$, donde T es un número fijo positivo. Sea $\{X(t)\}_{0\leq t\leq T}$ un proceso estocástico. Decimos que dicho proceso está *adaptado* a la filtración $\mathcal{F}(t)$ si, para cada t, la variable $X(t)$ es $\mathcal{F}(t)$- medible.

Este es el tipo de proceso con el que trabajaremos, debido a que necesitaremos en cada tiempo t utilizar sólo la información obtenida hasta ese momento. En general, $X(t)$ será el precio de algún producto financiero y $\mathcal{F}(t)$ la información disponible en tiempo t relacionada al comportamiento de ese precio hasta el momento t, inclusive, y del cual no conocemos su comportamiento a futuro.

1.2. Esperanza condicional

Definición 1.2.1. Sea $(\Omega, P, \mathcal{F})$ un espacio de probabilidad. Sea X una variable aleatoria $\mathcal{F}$-medible y $\mathcal{F}_0$ un σ- álgebra tal que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$. La *esperanza condicional* $E(X|\mathcal{F}_0)$ de X a $\mathcal{F}_0$ es una variable aleatoria que cumple:

a) $\mathcal{F}_0$- medible,

b) $\forall A \in \mathcal{F}_0$, $\quad \int_A E(X|\mathcal{F}_0)(\omega)dP(\omega) = \int_A X(\omega)dP(\omega)$.

Esta nueva variable nos proporciona un **estimador** para la variable X en la nueva σ- álgebra $\mathcal{F}_0$. La propiedad a) asegura que este estimador es en sí mismo una variable aleatoria basada en la información de $\mathcal{F}_0$.

La segunda propiedad asegura que esta variable es efectivamente un estimador de X. Cuanto más grande sea $\mathcal{F}_0$, es decir, cuanto más conjuntos posea, mejor será el estimador. Esto se debe a que ambas variables tienen el mismo promedio sobre todos los conjuntos de $\mathcal{F}_0$. Como veremos en los próximos dos ejemplos, si $\mathcal{F}_0$ es el σ-álgebra trivial, este estimador es escasamente el valor esperado de X. En cambio, si consideramos a $\mathcal{F}_0$ como todo $\mathcal{F}$, obviamente, el estimador es exactamente X.

Nota 1.2.2. Consideremos los tiempos discretos t = 0, 1, 2, ..., N y la filtración $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq ... \subseteq \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ de σ- álgebras definidas análogamente al ejemplo 1.1.2. Se observa que la variable $E(X|\mathcal{F}_i)$ es el valor esperado de X calculado desde el tiempo $t = i$. Es decir, es el valor que se esperaría de la variable X en tiempo $t = N$, utilizando la información disponible en $t = i$.

Ejemplo 1.2.3. Sea $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Sea X una variable aleatoria $\mathcal{F}$- medible. $E(X|\mathcal{F}_0) = Y$ debe ser $\mathcal{F}_0$- medible. O sea,

$$Y^{-1}(\{a\}) = \emptyset \qquad \text{o} \qquad Y^{-1}(\{a\}) = \Omega \qquad \forall a \in \mathbb{R},$$

entonces existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $Y(\Omega) = b$ y por lo tanto Y es constante. Luego $E(X|\mathcal{F}_0) = E(X)$, pues por b):

$$\int_\Omega X(\omega)dP(\omega) = \int_\Omega E(X|\mathcal{F}_0)(\omega)dP(\omega) = \int_\Omega Y dP(\omega) = b\int_\Omega dP(\omega) = b \cdot 1 = b,$$

pero $E(X) \doteq \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$, y por lo tanto $b = E(X)$. Luego $Y = E(X)$.

Ejemplo 1.2.4. Consideremos ahora $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ y X una variable aleatoria $\mathcal{F}_0$ - medible. Entonces,

$$E(X|\mathcal{F}_0)(\omega) = X(\omega) \qquad a.e. \tag{1.1}$$

Como X es $\mathcal{F}_0$ - medible, tenemos que se cumple la propiedad a) de la Definición 1.2.1.

Además, al ser X una variable aleatoria $\mathcal{F}_0$- medible, nos basta la información en $\mathcal{F}_0$ para valuarla. De esta manera, los promedios sobre todos los conjuntos de $\mathcal{F}_0$ son todos los promedios posibles de calcular para X, así fácilmente obtenemos la segunda propiedad en la definición de esperanza condicional y queda demostrado (1.1).

En contraste con variables $\mathcal{F}$- medibles, tenemos la idea de independencia. Es decir, si la información en $\mathcal{F}$ es suficiente para valuar una variable X por ser esta $\mathcal{F}$- medible, un σ- álgebra $\mathcal{G}$ es independiente de X cuando la información en él no sirve para valuarla.

Definición 1.2.5 (Independencia). Sea $(\Omega, P, \mathcal{F})$ un espacio de probabilidad, y sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ sub-σ- álgebras de $\mathcal{F}$ (ie: los conjuntos en $\mathcal{G}$ y los conjuntos en $\mathcal{H}$ están también en $\mathcal{F}$). Decimos que esas dos σ- álgebras son *independientes* si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \forall A \in \mathcal{G}, \forall B \in \mathcal{H}.$$

Sean X e Y dos variables en $(\Omega, P, \mathcal{F})$. Decimos que esas dos variables aleatorias son *independientes* si las σ- álgebras que generan, $\sigma(X)$ y $\sigma(Y)$, son independientes. Decimos que la variable aleatoria X es independiente del σ- álgebra $\mathcal{G}$ si $\sigma(X)$ y $\mathcal{G}$ son independientes.

Teorema 1.2.6 (Propiedades de la esperanza condicional). *Sea $(\Omega, P, \mathcal{F})$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{G}$ una σ- álgebra tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.*

I) ***(Linealidad de la esperanza condicional)*** *Sean X e Y variables aleatorias $\mathcal{F}$ - medibles e integrables y c_1 y c_2 constantes, entonces*

$$E(c_1X + c_2Y|\mathcal{G}) = c_1E(X|\mathcal{G}) + c_2E(Y|\mathcal{G}).$$

II) ***(Tomando sobre lo que es conocido)*** *Si X e Y son variables aleatorias $\mathcal{F}$ - medibles e integrables, y X es $\mathcal{G}$ - medible, entonces*

$$E(XY|\mathcal{G}) = XE(Y|\mathcal{G}).$$

III) ***(Condicionamiento iterado)*** *Si $\mathcal{H}$ es una σ- álgebra tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ y X es una variable aleatoria $\mathcal{F}$ - medible e integrable, entonces*

$$E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H}).$$

IV) ***(Independencia)*** *Si X es $\mathcal{F}$ - medible, integrable e independiente de $\mathcal{G}$, entonces*

$$E(X|\mathcal{G}) = E(X).$$

V) ***(Desigualdad condicional de Jensen)*** *Si φ es una función convexa de la variable x y X es $\mathcal{F}$ - medible e integrable, entonces*

$$E(\varphi(X)|\mathcal{G}) \geq \varphi(E(X|\mathcal{G})).$$

Lema 1.2.7 (Independencia). *Sea $(\Omega, P, \mathcal{F})$ un espacio de probabilidad, y sea $\mathcal{G}$ una σ-álgebra tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Supongamos que las variables $X_1, ..., X_K$ son $\mathcal{G}$ - medibles y que las variables $Y_1, ..., Y_L$ son independientes de $\mathcal{G}$. Sea $f(x_1, ..., x_K, y_1, ..., y_L)$ una función de las variables $x_1, ..., x_K$ y $y_1, ..., y_L$, y definamos*

$$g(x_1, ..., x_K) = E(f(x_1, ..., x_K, Y_1, ..., Y_L)).$$

Entonces

$$E(f(X_1, ..., X_K, Y_1, ..., Y_L)|\mathcal{G}) = g(X_1, ..., X_K).$$

1.3. Martingalas

Definición 1.3.1. Sea $(\Omega, P, \mathcal{F})$ un espacio de probabilidad, sea T un número fijo positivo, y sea $\mathcal{F}(t)$, $0 \leq t \leq T$, una filtración de sub- σ- álgebras de $\mathcal{F}$ (ie: $\mathcal{F}(s) \subseteq \mathcal{F}(t) \subseteq \mathcal{F}$, $\forall\ s \leq t$). Consideremos un proceso estocástico adaptado $M(t)$, $0 \leq t \leq T$.

I) Si

$$E(M(t)|\mathcal{F}(s)) = M(s) \qquad \forall\ s, t \text{ tal que } 0 \leq s \leq t \leq T,$$

decimos que este proceso es una *MARTINGALA*. No tiene tendencia a aumentar o disminuir.

II) Si

$$E(M(t)|\mathcal{F}(s)) \geq M(s) \qquad \forall\ s, t \text{ tal que } 0 \leq s \leq t \leq T,$$

decimos que este proceso es una *SUBMARTINGALA*. No tiene tendencia a disminuir; puede tener una tendencia a aumentar.

III) Si

$$E(M(t)|\mathcal{F}(s)) \leq M(s) \qquad \forall\ s, t \text{ tal que } 0 \leq s \leq t \leq T,$$

decimos que este proceso es una *SUPERMARTINGALA*. No tiene tendencia a aumentar; puede tener una tendencia a disminuir.

Ejemplo 1.3.2. Consideremos $\{S_K\}_{K\geq 0}$ como en el Ejemplo 1.1.5 con $S_{i+1}(c) = S_i \cdot u$ y $S_{i+1}(x) = S_i \cdot d$, $(0 < d < u)$. Sea p la probabilidad de que en una tirada de la moneda, el resultado sea cara. Calculemos $E(S_{K+1} \mid \mathcal{F}(K))$.

Para $K = 0$:

$$E(S_1|\mathcal{F}(0)) = E(S_1) = pS_1(c) + qS_1(x) = puS_0 + qdS_0 = (pu + qd)S_0,$$

con $q \doteq 1 - p$.

En la primera igualdad usamos el Ejemplo 1.2.3, donde calculamos el valor esperado condicional al $\underline{\sigma \text{ - álgebra trivial}}$ $\mathcal{F}(0)$.

Para $K = 1$:

Sabemos que $\mathcal{F}(1) = \{\emptyset, \Omega, A_c, A_x\}$ y recordemos que $E(S_2|\mathcal{F}(1))$ debe satisfacer las siguientes igualdades:

$$\int_{A_c} E(S_2|\mathcal{F}(1))(\omega)dP(\omega) = \int_{A_c} S_2(\omega)dP(\omega);$$

$$\int_{A_x} E(S_2|\mathcal{F}(1))(\omega)dP(\omega) = \int_{A_x} S_2(\omega)dP(\omega).$$

Pero $E(S_2|\mathcal{F}(1))$ debe ser constante en A_c y A_x, por lo tanto

$$\int_{A_c} E(S_2|\mathcal{F}(1))(\omega)dP(\omega) = E(S_2|\mathcal{F}(1))(\omega)\boldsymbol{P}(A_c) = pE(S_2|\mathcal{F}(1))(\omega), \qquad \forall \omega \in A_c.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_{A_c} S_2(\omega)dP(\omega) &= S_2(cc)\boldsymbol{P}(A_{cc}) + S_2(cx)\boldsymbol{P}(A_{cx}) = uS_1(c)p^2 + dS_1(c)pq \\ &= pS_1(c)(up + dq).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_{A_c} S_2(\omega)dP(\omega) = pS_1(\omega)(up + dq) \qquad \forall \omega \in A_c.$$

En conclusión,

$$E(S_2|\mathcal{F}(1))(\omega) = (pu + qd)S_1(\omega) \qquad \forall \omega \in A_c.$$

De manera similar, podemos probar que

$$E(S_2|\mathcal{F}(1))(\omega) = (pu + qd)S_2(\omega) \qquad \forall \omega \in A_x.$$

Y en ambos casos tenemos

$$E(S_2|\mathcal{F}(1))(\omega) = (pu + qd)S_1(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

De manera análoga podemos ver que

$$E(S_{K+1}|\mathcal{F}(K)) = (pu + qd)S_K, \quad \forall K \geq 0$$

Por lo tanto:

- Si $pu + qd$ = 1 entonces $\{S_K, \mathcal{F}(K)\}_{K\geq 0}$ es una martingala
- Si $pu + qd \geq 1$ entonces $\{S_K, \mathcal{F}(K)\}_{K\geq 0}$ es una submartingala
- Si $pu + qd \leq 1$ entonces $\{S_K, \mathcal{F}(K)\}_{K\geq 0}$ es una supermartingala

Por ejemplo, tomando $\tilde{p} = \dfrac{(1+r)-d}{u-d}$ con $r > 0$ (y $0 < d < 1 + r < u$) resulta:

$$\tilde{p}u + \tilde{q}d = \tilde{p}u + (1-\tilde{p})d = \tilde{p}(u-d) + d = (1+r) - d + d = (1+r) > 1.$$

Esta $\tilde{p}$ es siempre positiva debido a la hipótesis de no arbitrage, concepto que desarrollaremos en el próximo capítulo.

Entonces, $\{S_K, \mathcal{F}(K)\}_{K\geq 0}$ es una submartingala *bajo* $\tilde{p}$, donde $\tilde{p}$ se denomina ***Probabilidad de riesgo neutral***.

1.4. Proceso de Markov

Definición 1.4.1. Sea $(\Omega, P, \mathcal{F})$ un espacio de probabilidad, sea T un número positivo fijo, y sea $\mathcal{F}(t)$ con $0 \leq t \leq T$ una filtración de sub-σ- álgebras de $\mathcal{F}$ (ie.: $\mathcal{F}(s) \subseteq \mathcal{F}(t) \subseteq \mathcal{F}\ \forall\ s, t$ tal que $0 \leq s \leq t$). Consideremos un proceso estocástico adaptado $\{X(t)\}_{0\leq t\leq T}$. Supongamos que para todo s, t tal que $0 \leq s \leq t \leq T$ y para cada función f no negativa medible-Borel, hay otra función medible-Borel g tal que

$$E(f(X(t))|\mathcal{F}(s)) = g(X(s)). \tag{1.2}$$

Entonces decimos que $\{X(t)\}_{0\leq t\leq T}$ es un *proceso de Markov*.

En la definición de arriba, la función f puede depender del tiempo y por lo tanto g también lo hará. Esto no se indicó en (1.2) porque se desea enfatizar cómo funciona la dependencia en cada punto $\omega \in \Omega$.

Si indicamos la dependencia en el tiempo escribiendo $f(t, x)$ en lugar de $f(x)$, obtendríamos

$$E(f(t, X(t))|\mathcal{F}(s)) = g(s, X(s)).$$

Ejemplo 1.4.2. En el marco del Ejemplo 1.3.2, consideremos un modelo binomial de N-períodos ($\mathcal{F} = \mathcal{F}(N) = P(\Omega)$).

Fijemos un tiempo K y definamos $X \doteq \frac{S_{K+1}}{S_K}$ y $\mathcal{G} \doteq \mathcal{F}(K)$. Entonces $X = u$ si $\omega_{K+1} = c$ y $X = d$ si $\omega_{K+1} = x$.

Dado que X depende sólo de la tirada $(K+1)$, X es independiente de $\mathcal{G}$. Definamos $Y = S_K$, entonces Y es $\mathcal{G}$- medible.

Sea f una funcion no negativa medible-Borel y sea $h(x, y) \doteq f(xy)$. Entonces,

$$g(y) \doteq E(h(X, y)) = E(f(Xy)) = p \cdot f(uy) + q \cdot f(dy).$$

El lema de independencia asegura que:

$$E(f(S_{K+1})|\mathcal{F}(K)) = E(f\left(\frac{S_{K+1}}{S_K} \cdot S_K\right)|\mathcal{F}(K)) = E(h(X, Y)|\mathcal{G}) = g(Y) = p \cdot f(uS_K) + q \cdot f(dS_K).$$

Esto muestra que $\{S_0, ..., S_N\}$ es un proceso de Markov, con $g(y) = p \cdot f(uy) + q \cdot f(dy)$.

1.5. Stopping times

Definición 1.5.1. En un modelo binomial de N-períodos, un *stopping time* es una variable aleatoria τ que toma valores 0, 1,..., N ó ∞ y satisface la siguiente condición:

Si $\tau(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, \omega_{n+1}, ..., \omega_N) = n$, entonces

$$\tau(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, \omega'_{n+1}, ..., \omega'_N) = n \qquad \forall \omega'_{n+1}, ..., \omega'_N. \tag{1.3}$$

La condición (1.3) en la definición de stopping times establece que si τ toma el valor n, entonces se detiene en el tiempo n. Es decir, τ se basa en la información disponible hasta el tiempo n.

Podemos pensar al stopping time como una regla de ejercicio; por ejemplo: cuándo decidimos ejercer un contrato financiero y cuándo no, o también, cuándo decidimos parar una estrategia financiera y cuándo no. De esta manera, nosotros basamos nuestra decisión de ejercer en un tiempo n, en la información que tenemos hasta el tiempo n y no en el resultado de futuras tiradas de la moneda.

Ejemplo 1.5.2. Consideremos la regla de ejercicio dada por la siguiente variable aleatoria τ:

$$\tau(cc) = \infty, \quad \tau(cx) = 2, \quad \tau(xc) = 1, \quad \tau(xx) = 1.$$

Esta variable se describe en la figura 1.2.

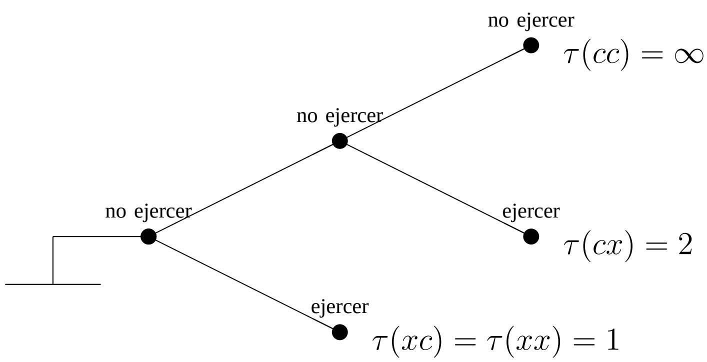

Figura 1.2: regla de ejercicio τ

La variable τ definida en $\Omega = \{cc, cx, xc, xx\}$ toma valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \infty\}$ y satisface que $\tau(x, \omega_2) = 1$, $\forall \omega_2$. Por lo tanto, τ es un stopping time según la Definición 1.5.1.

Cada vez que tenemos un proceso estocástico y un stopping time, podemos definir un proceso detenido o *stopped process*:

Definición 1.5.3. Sea τ un stopping time como en 1.5.1 y sea $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ un proceso estocástico. El *proceso detenido* (o stopped process) definido por τ es el proceso estocástico $\{Y_{n\wedge\tau}\}$, donde $n \wedge \tau = \min\{\tau, n\}$ y $Y_{n\wedge\tau}(\omega) = Y_{n\wedge\tau(\omega)}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$.

Ejemplo 1.5.4. Volvamos al Ejemplo 1.1.5 y consideremos el proceso $\{S_0, S_1, S_2\}$ descontado, con $r = \frac{1}{4}$; ie: $M_n = (\frac{4}{5})^n S_n$, el cual es una martingala sobre la probabilidad de riesgo neutral

$\tilde{p} = \tilde{q} = \frac{1}{2}$. En cada nodo, el valor es el promedio de los valores en los dos nodos posteriores. Esto se describe en la figura 1.3.

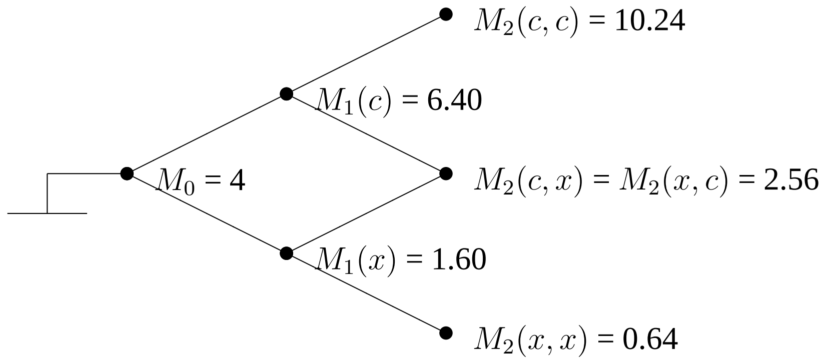

Figura 1.3: Proceso $\{S_n\}_{n=0,1,2}$ descontado

En la figura 1.4, mostramos el proceso detenido $\{M_{n\wedge\tau}\}$ dado por el stopping time del Ejemplo 1.5.2.

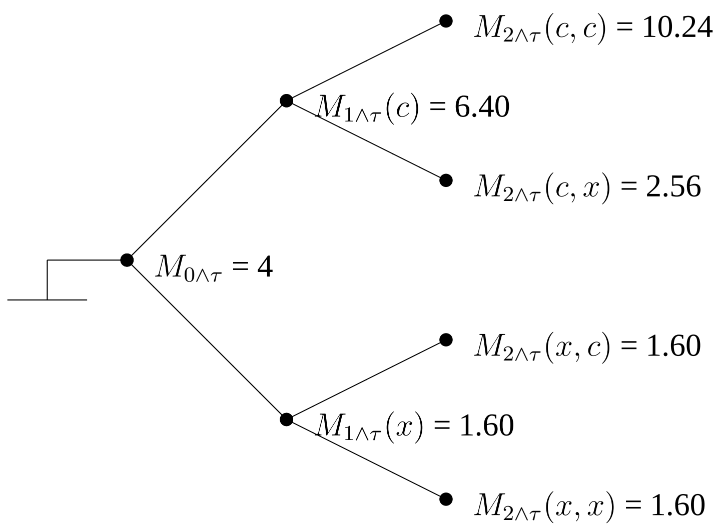

Figura 1.4: Proceso $\{M_n\}_{n=0,1,2}$ detenido en el stopping time τ

Observemos en la figura 1.4 que al igual que en la figura 1.3, el valor en cada nodo es el promedio de los valores en los dos nodos siguientes. Es decir que se mantiene la propiedad de martingala. Esto nos lleva al siguiente teorema:

Teorema 1.5.5 (Optional Sampling I). *Una martingala detenida (martingale stopped) en un stopping time es una martingala. Una supermartingala detenida (ó submartingala) en un stopping time es una supermartingala (ó submartingala, respectivamente).*

Demostración. Consideremos $Y_n, n \geq 0$ una martingala. Veamos primero que $E(Y_{\tau\wedge(m+1)} \mid F(m)) = Y_{\tau\wedge m}$.

Para esto, consideramos

$$A_k = \{\omega \mid \tau(\omega) = k\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Y_{\tau\wedge(m+1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{I}_{A_k} Y_{\tau\wedge(m+1)} = \sum_{k=0}^{m} \mathbb{I}_{A_k} Y_{\tau\wedge k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_k} Y_{\tau\wedge(m+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{I}_{A_k} Y_{\tau\wedge k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \mathbb{I}_{A_k} Y_{m+1} = \sum_{k=0}^{m} \mathbb{I}_{A_k} Y_k + \mathbb{I}_{\tau\geq(m+1)} Y_{m+1} \end{aligned}$$

Con esta expresión para $Y_{\tau\wedge m}$, calculamos ahora la esperanza condicional $E(Y_{\tau\wedge(m+1)} \mid$

$F(m))$.

$$
\begin{aligned}
E(Y_{\tau\wedge(m+1)} \mid F(m)) &= \sum_{k=0}^{m} E(\mathbb{I}_{A_k} Y_k \mid F(m)) + E(\mathbb{I}_{\tau\geq(m+1)} Y_{m+1} \mid F(m)) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{I}_{A_k} E(Y_k \mid F(m)) + \mathbb{I}_{\tau\geq(m+1)} E(Y_{m+1} \mid F(m)) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathbb{I}_{A_k} Y_k + \mathbb{I}_{\tau\geq(m+1)} Y_m \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{I}_{A_k} Y_k + \mathbb{I}_{A_m} Y_m + \mathbb{I}_{\tau\geq(m+1)} Y_m \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{I}_{A_k} Y_k + \mathbb{I}_{\tau\geq m} Y_m \\
&= Y_{\tau\wedge m}.
\end{aligned}
$$

Donde en la segunda igualdad usamos el hecho que $\{\omega : \mathbb{I}_{\tau\geq m}(\omega) = 1\}^c = \{\omega : \mathbb{I}_{\tau<m}(\omega) = 1\} \in \mathcal{F}(m)$. Entonces $\{\omega : \mathbb{I}_{\tau\geq m}(\omega) = 1\} \in \mathcal{F}(m)$. De la misma manera, $\{\omega : \mathbb{I}_{\tau\geq m}(\omega) = 0\} = \{\omega : \mathbb{I}_{\tau<m}(\omega) = 1\}^c \in \mathcal{F}(m)$. Luego la indicadora $\mathbb{I}_{\tau\geq m}$ es $\mathcal{F}(m)$ medible, y por lo tanto lo es $\mathbb{I}_{\tau\geq(m+1)}$. Por lo tanto, sale afuera del valor esperado.

Supongamos cierto ahora que, para cierto $n \geq 2$, se cumple que

$$
E(Y_{\tau\wedge k} \mid F(m)) = Y_{\tau\wedge m}, \qquad \text{para } m+1 \leq k \leq n-1.
$$

Usamos que $Y_{\tau\wedge n}$ se puede escribir como

$$
\begin{aligned}
Y_{\tau\wedge n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{I}_{A_k} Y_{\tau\wedge n} + \sum_{k\geq n} \mathbb{I}_{A_k} Y_{\tau\wedge n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{I}_{A_k} Y_k + \sum_{k\geq n} \mathbb{I}_{A_k} Y_n
\end{aligned}
$$

Ahora, usamos la propiedad de condicionamiento iterado, y procedemos inductivamente:

$$
\begin{aligned}
E(Y_{\tau\wedge n)} \mid F(m)) &= E(E(Y_{\tau\wedge n} \mid F(n-1)) \mid F(m)) \\
&= E(Y_{\tau\wedge(n-1)} \mid F(m) \\
&= Y_{\tau\wedge m},
\end{aligned}
$$

Para una submartingala o supermartingala, la prueba es análoga.

□

Nota 1.5.6. Sabemos que una submartingala tiene una tendencia a subir. En particular, si X_n es una submartingala, entonces $E(X_m) \leq E(X_n)$ cuando $m \leq n$.

Demostración. : Sea $1 \leq m \leq n$, entonces

$$E(X_n|\mathcal{F}(n-1)) \geq X_{n-1}.$$

Luego

$$E(E(X_n|\mathcal{F}(n-1))|\mathcal{F}(0)) \geq E(X_{n-1}|\mathcal{F}(0)),$$

Además, por la propiedad III) del Teorema 1.2.6 (Condicionamiento iterado):

$$E(X_n|\mathcal{F}(0)) = E(E(X_n|\mathcal{F}(n-1))|\mathcal{F}(0)).$$

Entonces,

$$E(X_n|\mathcal{F}(0)) \geq E(X_{n-1}|\mathcal{F}(0)) \geq ... \geq E(X_{m+1}|\mathcal{F}(0)) \geq E(X_m|\mathcal{F}(0)).$$

□

Esta desigualdad sigue ocurriendo si reemplazamos m por $\tau \wedge n$, donde τ es un stopping time.

Teorema 1.5.7 (Optional Sampling II). *Sea $\{X_n\}_{0\leq n\leq N}$ una submartingala y sea τ un stopping time. Entonces*

$$E(X_{n\wedge\tau}) \leq E(X_n)$$

. Si $\{X_n\}_{0\leq n\leq N}$ es una supermartingala, entonces

$$E(X_{n\wedge\tau}) \geq E(X_n).$$

Si $\{X_n\}_{0\leq n\leq N}$ *es una martingala, entonces*

$$E(X_{n\wedge\tau}) = E(X_n).$$

Demostración. Ver [2] □

Una forma de intentar capturar la misma idea de stopping time en tiempo continuo es pedir que para cada $t \geq 0$ (no aleatorio), el conjunto

$$\{\tau = t\} = \{\omega \in \Omega,\ \tau(\omega) = t\}$$

esté en $\mathcal{F}(t)$. Sin embargo, nosotros estaremos interesados en conjuntos de ω's de la forma $\{\omega \in \Omega;\ T_1 \leq \tau(\omega) \leq T_2\}$, y eso no se puede obtener tomando uniones numerables de conjuntos de la forma $\{\omega \in \Omega,\ \tau(\omega) = t\}$. Por lo tanto, damos la Definición 1.5.8 imponiendo una condición un poco fuerte:

Definición 1.5.8. Un stopping time τ es una variable aleatoria que toma valores en [0, ∞] y satisface

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}(t)\ \ \forall t \geq 0.$$

En la Definición 1.5.8 de arriba, un stopping time τ tiene la propiedad que la decisión de parar (pensado como regla de ejercicio) en el tiempo t, debe estar basada en la información disponible en tiempo t.

Finalizando, todo lo desarrollado previamente para el caso discreto puede ser formalizado para el caso continuo (ver [1]).

Capítulo 2

Forward, futuros y opciones

En los mercados financieros de la actualidad, se comercializa una gran variedad de productos. Entre ellos podemos mencionar: acciones, bonos, indices, derivados, etc. En este capítulo comenzaremos desarrollando las ideas principales en las que se basan las finanzas, para luego poder describir los tres tipos de derivados más importantes: forward, futuros y opciones. Estas últimas son las que más nos interesan, pues el objetivo de nuestro trabajo se centra en las opciones exóticas. Ellas serán descriptas al finalizar este capítulo.

2.1. Productos Financieros

Un individuo ó una institución (empresa, compañía, etc.) puede invertir:

- Sin riesgo: Depositar en un banco a tasa de interés r. Por ejemplo: tasa de interés compuesta en forma continua.

- Con riesgo: Invertir en mercados financieros como por ejemplo: Mercado de acciones, monedas, bonos, derivados, etc.

Describamos lo referido a una inversión **sin riesgo**:

En una operación financiera simple, un individuo llamado *prestamista* entrega a otro llamado *prestatario* una cierta cantidad de dinero, denominada *capital*, a cambio de que éste último lo devuelva al cabo de un cierto *tiempo* con un recargo ó *interés*.

Esta operación es libre de riesgo debido a que ese recargo es acordado de antemano por ambas partes.

Ejemplo 2.1.1. Supongamos que un banco ofrece una tasa de interés del 5 % anual.

Si un individuo desea depositar un capital de \$1000 en dicho banco, él podrá retirar la suma de \$1050 al finalizar el período de un año. Éste último valor se denomina ***monto***, y de esta manera, el interés producido por la operación es de \$50.

Esta operación significó un préstamo para el banco. Del mismo modo, es posible que un individuo pida prestado al banco una determinada suma de dinero que deberá ser devuelta con un interés (no necesariamente del 5 % anual).

Tipos de interés: Sea C el capital disponible en el tiempo $t = 0$. Denominamos $C(t)$ al monto producido por C en el tiempo t y $(C(t) - C)$ al interés producido por C en el mismo tiempo.

- *Interés compuesto discreto*: Se recibe interés sobre el interés, ie:

  $$C(t) = C(1 + r)^t.$$

  siendo r = tasa de interés. Esta se define como el interés producido por la unidad de capital en la unidad de tiempo.

  Se denomina discreto pues los períodos sobre los que se aplica están medidos en años, meses, días, etc. (ver nota abajo)

  Retomando el ejemplo (1.1.2), el monto obtenido por el individuo al finalizar un año es

  $$1050 = 1000\left(1 + \frac{5}{100}\right).$$

Si en cambio, él quisiera retirar ese dinero al cabo de seis meses, obtendría

$$1024{,}7 = 1000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$$

- *Interés compuesto continuo*: A diferencia del discreto, el continuo se aplica en cada instante de tiempo. Este se obtiene como límite del discreto.

  Sea r una tasa nominal correspondiente a una unidad de tiempo determinada, m un entero positivo y $\frac{r}{m}$ una tasa proporcional a r, es decir, m veces su unidad de tiempo es la unidad de tiempo de r.

  El interés producido por $\frac{r}{m}$ en la unidad de tiempo de r por un capital C es

$$C(1 + \frac{r}{m})^m$$

  Tomando límite cuando $m \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{m\to\infty} C(1 + \frac{r}{m})^m = Ce^r,$$

  y en general tenemos

$$C(t) = Ce^{r\cdot t}, \qquad t \geq 0.$$

  r se dice "tasa nominal" por que no es la tasa que se aplica en la práctica.

Existen otras formas de calcular intereses, pero en este trabajo sólo nos concentraremos en esas dos.

Nota 2.1.2. La tasa de interés está relacionada con la unidad de tiempo y la unidad de capital. Por lo tanto, al calcular intereses es importante expresar los capitales financieros en la unidad de capital y de tiempo correspondiente a la tasa.

Valor Presente Si en tiempo t un capital C es disponible y la tasa de interés es r, el valor presente de C se define por:

$$VP(t,C) = \frac{C}{(1+r)^t} \qquad Descuento\, Compuesto$$

$$VP(t,C) = C \cdot e^{-rt} \qquad Descuento\, Compuesto\, Continuo.$$

Consideremos ahora los productos financieros **con riesgo**:

Se dice que estos productos tienen riesgo porque el valor a futuro de ellos no puede predecirse. Es decir, en su valor intervienen muchos factores de los que desconocemos cual será su comportamiento.

1. ***Acciones***: Títulos que emite una empresa, compañía, etc. y cuyos poseedores, llamados accionistas pasan a ser propietarios de una parte de la empresa.

   Las ganancias se pueden obtener :

   - Debido a que el valor de las acciones aumenta.
   - Por los dividendos(dividends)

2. ***Commodities***: Materias primas o productos materiales: oro, plata, cobre, aluminio, petróleo, maderas, granos, ganado, etc.

3. ***Monedas***: Un inversionista decidirá sobre la moneda de un país motivado por la estabilidad en él.

4. ***Bonos***: Son instrumentos financieros en los que se estipula que el emisor adeuda al tenedor una determinada cantidad por la que le pagará ciertos intereses, además del principal, en determinadas fechas preacordadas. Esta clase de bonos suelen ser emitidos por grandes empresas y por los gobiernos, como medio de emitir deuda pública que les permita financiarse a corto y largo plazo. El término bonos se suele utilizar para reflejar una emisión de deuda a corto plazo y a largo plazo el de obligación.

5. ***Indices***: "Portfolio " hipotético de acciones. Un portfolio es un conjunto de activos financieros que tiene un inversionista ó institución. Los índices miden el comportamiento de un conjunto de acciones como una suma ponderada. Se comercializan con contratos. Dicho portfolio está diseñado para representar todo el mercado, por ejemplo:

   - Standard and Poor 500 (S&P500) - USA (400 industriales, 20 de transporte, 40 de servicios públicos y 40 financieras)
   - Dow Jones and Company Inc (DJCI) - USA

   ó parte del mercado, por ejemplo:

   - JP Morgan's Emergin Market Bond Index (EMBI)

Nota 2.1.3. A menudo diremos " long en el activo ", que significa poseerlo y "short en el activo " o " selling short" que quiere decir vender algo que no se posee, es decir vender algo que se pidió prestado. Este préstamo debe ser devuelto en activo y no en dinero.

Los instrumentos financieros recién nombrados se denominan: *activos básicos*. Existen productos con riesgo que se basan o dependen de estos activos y se llaman *derivados*.

Derivados: Son instrumentos financieros cuyo valor depende o deriva del valor de uno o más subyacentes. Los subyacentes son alguno de los activos básicos.
Entre los más importantes se encuentran los futuros, los forward y las opciones.

Existen dos tipos de mercados en los que se pueden comercializar dichos derivados:

Mercado Formal: Un "mercado formal" es un mercado regulado por el estado donde los individuos comercializan contratos estandarizados. Estos mercados han existido desde un largo tiempo. El Chicago Board of Trade (CBOT) se estableció en 1848 y el Chicago Mercantile Exchange (CME), en 1919.

Tradicionalmente los comerciantes de derivados se conocian en el piso del mercado, usaban gritos y un conjunto complicado de señas de manos para indicar el comercio que ellos querian llevar a cabo. Hace unos años decreció este sistema por el *mercado electrónico*. Este involucra negociantes que ingresan las transacciones deseadas a un teclado y una computadora se usa para concretar la transacción.

Over the Counter market: No todo el comercio se realiza en mercados formales. El *over the counter market* es una importante alternativa a ellos. Las transacciones aquí son hechas telefónicamente o vía internet, y usualmente, son entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y uno de sus clientes. Las instituciones financieras a menudo actúan como haciendo de mercado. Esto significa que ellas siempre disponen un bid price (un precio al cual están dispuestas a comprar) y un offer price (un precio al que están dispuestas a vender).

El comercio en el over the counter market es generalmente mucho mayor que el comercio en el mercado formal.

Una ventaja del over the counter market es que los términos del contrato no deben ser especificados por el mercado formal. Una desventaja es que hay un pequeño riesgo de que el contrato no sea respetado.

2.2. Forward

Un ***contrato forward*** es un derivado particularmente simple. Es un contrato para vender o comprar un activo en un cierto tiempo futuro denominado *tiempo de madurez*, por un cierto precio denominado *delivery price* (precio delivery).

Ejemplo 2.2.1. Una corporación se compromete a comprar $\pounds 1$ millón a \$1.44 $/\ \pounds$, dos meses después de la firma del contrato.

Un contrato forward es comercializado en el over-the-counter market, usualmente entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y uno de sus clientes.

Posición *Long*: Es la posición que asume la parte que va a *comprar* el activo subyacente.
Posición *Short*: Es la posición que asume la parte que va a *vender* el activo subyacente.

Utilizaremos las siguientes notaciones:

. K = Precio delivery

. T = Tiempo de maduréz

. r = Tasa de interés libre de riesgo

. $S(t)$ = Precio del activo subyacente en el tiempo t.

Precio forward y precio delivery:

Es importante distinguir entre el precio forward y el precio delivery. El *precio forward* es el precio del mercado que debería ser convenido hoy para entregar el activo en un tiempo de maduréz especificado.

Consideremos $f(t)$ = precio forward, entonces $f(0) = K$.

Valores del forward:

Un contrato forward no tiene valor inicial, ie: Si $F(t)$ = valor del forward en t, entonces $F(0) = 0$.

Se denomina ***payoff*** al valor del forward en $t = T$.

También se puede considerar el payoff según la posición. El payoff de una posición long en un contrato forward en una unidad de un activo es

$$F(T) = S(T) - K.$$

Esto se debe a que el poseedor del contrato está obligado a comprar un activo que vale $S(T)$ por K.

Similarmente, el payoff de una posición short en un contrato forward en una unidad de un activo es

$$F(T) = K - S(T).$$

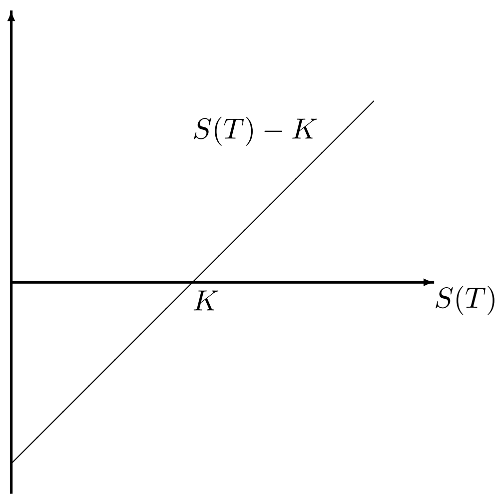

Figura 2.1: payoff de una posición long

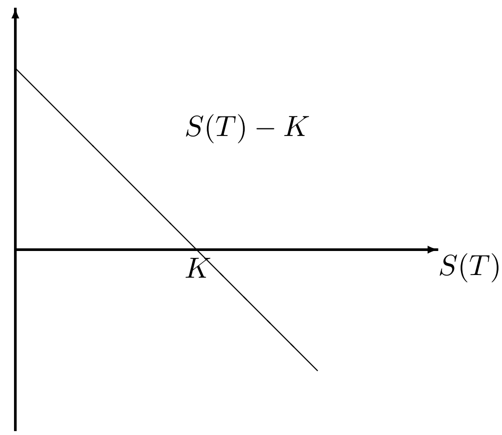

Figura 2.2: payoff de una posición short

Estos payoff pueden ser positivos o negativos. Debido a que un forward tiene costo cero al entrar al contrato, el payoff es también la ganancia ó perdida total del negocio.

2.3. Futuros

Como un contrato forward, un ***contrato futuro*** es un acuerdo entre dos partes para comprar o vender un activo en un cierto tiempo en el futuro por un cierto precio. A diferencia del contrato forward, los contratos futuros son normalmente comercializados en un mercado formal. Como las dos partes del contrato no necesariamente se conocen, también se provee un mecanismo que da a las partes una garantía de que el contrato será respetado.

La especificación del contrato futuro:

- ***Activo***: Se debe especificar la calidad del activo. Cuando este es un commodity, puede haber bastante variación en la calidad de lo que está disponible en el mercado. Por lo tanto, cuando el activo es especificado, es importante que se estipule la clase o clases del commodity que son aceptables.

- ***Tamaño del contrato***: El tamaño del contrato especifica en el mismo la cantidad del activo que tiene que entregarse .

- ***Lugar de entrega***: El lugar donde será hecha la entrega es especificado. Esto es particularmente importante para commodities que involucran significantes costos de transportación.

- ***Mes de entrega***: Un contrato futuro está relacionado con su mes de entrega. Se especifica el período preciso durante el mes en que puede ser hecha la entrega. Para muchos contratos futuros, el período de entrega es el mes entero. El mes de entrega varía de contrato en contrato y es elegido por el mercado conociendo las necesidades de los participantes.

- ***Limites en el Movimiento diario del precio***: Para muchos contratos, el límite de movimientos en el precio diario está especificado. Si el precio se mueve por debajo de una cantidad igual al límite del precio diario, el contrato se dice que está *limit down*. Si este se mueve sobre el límite se dice que está *limit up*. Un *limit move* es un movimiento en cada dirección igual al límite del precio diario. El propósito del límite del precio diario es prevenir movimientos de precios grandes ocurridos debido a la especulación excesiva. Sin embargo, los límites pueden resultar una barrera artificial al comercio cuando el precio del commodity subyacente crece o decrece rápidamente.

- ***Limites de Posiciones*** : El límite de posición es el número máximo de contratos que un negociante puede poseer. El propósito del límite es prevenir especuladores que ejerzan excesiva influencia en el mercado.

Cotización: Los precios de los contratos futuros se dan por unidades del subyacente.

Ejemplo 2.3.1. cvos / bushel = granos; $ / barril = petróleo; $ / onza = oro.

El Clearinghouse (Caja compensadora): Es la institución que garantiza la integridad del mercado de futuros. El clearinghouse es un adjunto del mercado de futuros y actúa como un intermediario en las transacciones de futuros.

La mayoría de los contratos futuros no llegan a la entrega. Esto se debe a que muchos comerciantes o inversionistas eligen cerrar sus posiciones antes del período de entrega especificado en el contrato. Esto se realiza a traves del ***Closing out***. Closing out significa entrar en un contrato futuro de iguales características en una posición contraria a la original.

Marking to market:

Si dos inversores toman contacto entre sí directamente y acuerdan comercializar un activo en el futuro por un cierto precio, hay obviamente riesgo. Uno de los inversores puede lamentar el pacto e intentar volverse atrás. Otra posibilidad que puede ocurrir es que el inversor simplemente no tenga los recursos financieros para enfrentar el acuerdo.

Se debe organizar el comercio de manera tal que se eviten dichos inconvenientes. Aqui es donde entran los márgenes:

- ***Cuenta margen***: Para poder entrar en un contrato futuro, se requiere que el inversor deposite fondos en una *cuenta margen*.

- ***Margen inicial***: Es la cantidad que se debe depositar en el momento de entrar en el contrato. Generalmente es el 10 % ó el 5 % del valor que figura en el contrato. Lo depositan ambas partes.

- ***Marking to Market***: Al final de cada día, la cuenta margen es ajustada para reflejar las ganancias o pérdidas del inversor. Esta práctica se refiere al *marking to market* de la cuenta.

- ***Margen de mantenimiento***: Es lo mínimo que puede haber en la cuenta margen. (Alrededor del 75 % del margen inicial)

- ***Margin call***: Si el balance de la cuenta margen cae bajo el margen de mantenimiento, el inversor recibe *un margin call* y se espera que la cuenta margen alcance el nivel del margen inicial el próximo día.

- ***Margen de variación*** : Los fondos extras depositados en el margin call se denominan *margen de variación*. Si el inversor no provee el margen de variación, el broker cierra la posición vendiendo el contrato.

Ejemplo 2.3.2. Consideremos la operación de márgenes para una posición long en dos contratos futuros por oro. Supongamos que el inversor entra en dichos contratos el 5 de junio para comprar en diciembre 200 oz. Cada contrato es por 100 oz y se cotizan a $400/oz.

El margen inicial es $2000 por contrato (tomando el 5 %) ó $4000 en total, y el margen de mantenimiento es $1500 por contrato ó $3000 en total.

Día	**Precio futuro** ($)	**Ganancia diaria (pérdida)** ($)	**Ganancia acumulada** ($)	**Balance cuenta margen** ($)	**margin call** ($)
	400.00				
5 junio	397.00	(600)	(600)	3400	
6 junio	396.10	(180)	(780)	3220	
9 junio	398.20	420	(360)	3640	
10 junio	397.10	(220)	(580)	3420	
11 junio	396.70	(80)	(660)	3340	
12 junio	395.40	(260)	(920)	3080	
13 junio	393.30	(420)	(1340)	2660	1340
16 junio	393.60	60	(1280)	4060	
17 junio	391.80	(360)	(1640)	3700	

2.4. Actores del mercado y Principio de No Arbitrage

Existen tres tipos de actores del mercado: Hedgers, Especuladores y Arbitragers.

Hedgers : Actúan protegiendose del riesgo. Ellos usan forwards, futuros y opciones para reducir el riesgo que enfrentan debido al movimiento futuro en un mercado variable.

Ejemplo 2.4.1. Consideremos una compañia US que está exportando bienes a UK (United Kingdom) y el 16 de Agosto sabe que recibirá £30 millones tres meses después. La compañia se puede proteger del riesgo de la tasa de cambio entrando en un contrato forward para vender £30 el 16 de Noviembre , a U$D1.44 / £. De esta manera, la compañia se asegura recibir el 16 de noviembre, U$D43,200,000.

Especuladores: Apuestan al comportamiento de una variable. Mientras que los Hedgers buscan evitar una exposición a movimientos adversos en el precio de un activo, los especuladores desean tomar una posición en el mercado. Ellos apuestan a que el precio vá a subir o bajar.

Arbitrageurs: Tratan de obtener “ ganancia libre de riesgo ” entrando en 2 ó más mercados.

Ejemplo 2.4.2. Consideremos una acción que se comercializa tanto en el mercado de NY como en el mercado de Londres. Supongamos que el precio de la acción es U$D152 en NY y £100 en Londres a la vez que la tasa de cambio es $1.55/£. Un arbitrageur puede simultaneamente comprar 100 acciones en NY y venderlas en Londres obteniendo una ganancia libre de riesgo de 100 x [(U$D1.55 x 100) - U$D152] = U$D300.

Principio de No Arbitrage:

Sabemos que un *portfolio* es un conjunto de activos financieros que tiene un inversionista o institución.

Decimos que un portfolio (cartera) *replica* a otro si ambos tienen el mismo valor en un tiempo futuro T.

El principio de No Arbitrage establece que si un portfolio replica a otro, entonces tienen el mismo valor $\forall\, t < T$. De lo contrario:

Portf A $>$ Portf B en $t = t_0$; y

Portf A = Portf B en $t = T$.

En $t = t_0$, quien posee A lo vende y compra B, entonces obtiene ganancia.

Por lo tanto,

PRINCIPIO DE NO ARBITRAGE: EN EL MERCADO NO DEBE HABER OPORTUNIDADES DE ARBITRAGE.

2.5. Precios forward y Precios futuros

En esta sección calcularemos el precio forward para un subyacente sin ingresos. Para ello, necesitamos conciderar las siguentes *Hipótesis del Mercado*:

- No hay costos de transacción.
- Las tasas de interés libres de riesgo para prestar y recibir préstamos son las mismas.
- No hay oportunidad de arbitrage

Llamemos:

$S(t)$ = Precio del subyacente en tiempo t

$F(t)$ = valor del forward(long)

r = tasa libre de riesgo

T = tiempo de madurez

$f(t)$ = precio forward; ie: precio delivery establecido en t para maduréz T

$K = f(0)$ = precio delivery del contrato en t = 0.

Consideremos dos portfolios en t:

Portfolio A = Un contrato forward long con madurez $T + f(t)e^{-r(T-t)}$ en el banco.

Portfolio B = Un subyacente

En T :

Recibo el subyacente , retiro $f(t)e^{-r(T-t)}e^{r(T-t)} = f(t)$ y luego pago $f(t)$, entonces

Portfolio A = Un subyacente.

Portfolio B = Un subyacente.

Luego Valor(Portf A) = Valor(Portf B) para todo $t < T$. Pero el valor del portfolio A en $t = F(t) + f(t)e^{-r(T-t)}$ y el valor del portfolio B en $t = S(t)$.

Entonces,

$\boxed{F(t) = S(t) - f(t)e^{-r(T-t)}}$ **Valor del forward long**.

Para cualquier t, $f(t)$ es el precio delivery que hace que $F(t)$ = 0. Entonces $f(t)$ debe ser tal que $0 = S(t) - f(t)e^{-r(T-t)}$. Por lo tanto,

$\boxed{f(t) = S(t)e^{r(T-t)}}$ **Precio del forward**.

De manera similar, se puede obtener el precio forward para :

- Subyacente con ingreso conocido
- Subyacente con rendimiento conocido
- Subyacente con costo de almacenamiento (Commodities)

Se puede probar que el precio forward y el precio futuro coinciden[ver apendice 3A, [3]]. Por lo tanto, lo hecho anteriormente es válido también para futuros.

2.6. Opciones

Una ***opción*** es un contrato que da derecho a comprar o vender algo a un cierto precio en un tiempo futuro.

El precio establecido en el contrato se denomina *precio de ejercicio o precio strike* (ó strike); y el tiempo establecido se dice *tiempo de ejercicio* y lo denotaremos por T.

Las opciones se comercializan tanto en un mercado formal como en el over the counter market. Actualmente, se da activamente el comercio de opciones en acciones, indices, monedas extranjeras y contratos futuros.

Opción Call: Es aquella que da derecho al tenedor a comprar el subyacente al precio strike en el tiempo T.

Opción Put: Es aquella que da derecho al tenedor a vender el subyacente al precio strike en el tiempo T.

Existe otro tipo de clasificación de dichas opciones:

- **Opciones Americanas** : Son aquellas que pueden ser ejercidas en el tiempo T y en cualquier tiempo anterior a T.

- **Opciones Europeas**: Son aquellas que pueden ser ejercidas sólo en el tiempo T.

De acuerdo con el tipo de opción (call o put) y con la posición en la misma hay cuatro posibilidades:

1 *Posición long en una opción call*: Es la posición del poseedor de una call.

2 *Posición short en una opción call*: Es la posición del vendedor de una call.

3 *Posición long en una opción put*: Es la posición del poseedor de una put.

4 *Posición short en una opción put*: Es la posición del vendedor de una put.

No sólo existen opciones sobre activos básicos sino también sobre futuros.

Como en los contratos futuros, en las opciones se especifican los detalles del contrato. Entre ellos se encuentran:

- ***Fecha de expiración***: Uno de los items usados para describir una opción es el mes en el cual ocurre la fecha de expiración.

  Ejemplo 2.6.1. Una January Call comercializada sobre IBM es una opción call sobre IBM con una fecha de expiración en enero.

- ***Precio strike*** : Para cada tipo de opción, es decir, para cada opción en un mismo subyacente se ofrecen varios strikes y ese precio es del orden del precio del activo.

  Ejemplo 2.6.2. Cuando el precio de la acción es $12 podemos ver opciones comercializadas con precios strikes de $10, $12.50 y $15.

- ***Tamaño*** : Se debe especificar el tamaño del contrato dependiendo del activo subyacente. En el caso de las acciones, un contrato es por 100 acciones. Para los índices, un contrato es para comprar o vender 100 veces el índice al precio strike especificado.

- ***Límites de posición y límites de ejercicio*** : Algunos mercados especifican un *límite de posición*. Éste define el número máximo de opciones que un inversor puede tener en un lado del mercado (long call y short put son consideradas que están del mismo lado del mercado, de la misma manera short call y long put). El *límite de ejercicio* es igual a la posición límite. Éste define el número máximo de contratos que un individuo puede ejercer (o grupo de individuos actuando juntos) en cualquier período de 5 dias de negocio consecutivos.

Cotización: El precio cotizado es el precio de una opción para comprar o vender una acción. Un contrato, por lo tanto cuesta 100 veces el precio mostrado. En una call, a mayor K menor prima. En una put, a mayor K mayor prima.

La corporación Option Clearing : La corporación Option Clearing (OCC) realiza muchas de las mismas funciones para el mercado de opciones como el clearinghouse realiza para el mercado de futuros. Esta corporación garantiza que los que venden opciones cumplan con sus obligaciones sobre los términos de los contratos y guarden un registro de todas las posiciones long y short.

El mercado de opciones está regulado de diferentes maneras. Él y su OCC tienen reglas que gobiernan el comportamiento del comercio. Además, están las autoridades regulatorias estatales.

Notar que mientras no existe costo para entrar en un forward o un futuro, hay un costo para adquirir una opción. Dicho monto se denomina ***prima***.

Quien vende una opción se llama ***writer***. El tenedor de la opción es quien ejerce o nó dicha opción. Si la ejerce, el writer tendrá la obligación.

Para comprar una opción hay que pagarla en efectivo. Para “ write ” una opción se requiere mantener fondos en una cuenta margen. El tamaño del margen requerido depende de las circunstancias.

Vendiendo opciones Naked: Una *opción naked* es una opción que no está combinada con una posición de cobertura en el subyacente, por ejemplo: vender una opción call y no estar long en el subyacente. En este caso, los márgenes son bastante altos. El margen inicial para vender una opción naked se obtiene de ciertos porcentajes del valor de la venta y de las acciones.

Vendiendo Covered Calls : Vender opciones *Covered call* involucra vender opciones call cuando se posee ya las acciones, osea estando long en las acciones. Las opciones covered call están más lejos del riesgo que las opciones naked, debido a que lo peor que puede ocurrir es que el inversor necesite vender acciones que ya posee a menos de su valor en el mercado.

Consideremos las siguientes definiciones:

- *Payoff*: Valor de la opción al momento de expiración.
- *Beneficio* : Payoff - Costo inicial. Observar que este costo puede ser negativo o positivo dependiendo si la posición es short o long en la opción, respectivamente.
- *Valor intrínseco* : Payoff que se recibiría si el subyacente tuviera el valor actual en el momento de ejercicio. Es una función de t, $0 \leq t \leq T$.

  En $t = 0$, el contrato tiene un valor que es la prima.

  En $t > 0$, el valor de la opción es igual al valor intrínseco más el valor temporal (time value).

  Ejemplo 2.6.3. Tomemos una opción call con strike = \$28; $S(0)$ = \$30 y prima = \$3. Entonces,

  En t = 0: Valor intrínseco = máx(30 - 28, 0) = 2 y Prima = 3 = 2 + 1. Por lo tanto, time value = 1.

  En $t = T$: Valor intrínseco = Valor de la opción. Por lo tanto, time value = 0.

  Dependiendo de su valor intrínseco, la opción se dice que está:

  - <u>in the money</u> : Opción con valor intrínseco $>$ 0.
  - <u>at the money</u> : El precio de la acción es próximo al srike K
  - <u>out of the money</u> : Para una call, si el precio de la acción es menor que el precio strike. Para una put, si el precio de la acción es mayor que el precio strike.

OPCIONES VANILLA : Las opciones vanillas son aquellas en las que el payoff depende del valor del subyacente *sólo* en el tiempo T.

Para dichas opciones podemos describir sus respectivas funciones de payoff según la posición.

Posición	Payoff
1	$\max\{S(T)-K,0\}$
2	$-\max\{S(T)-K,0\} = \min\{K-S(T),0\}$
3	$\max\{K-S(T),0\}$
4	$-\max\{K-S(T),0\} = \min\{S(T)-K,0\}$

Diagramas de payoff y beneficio:

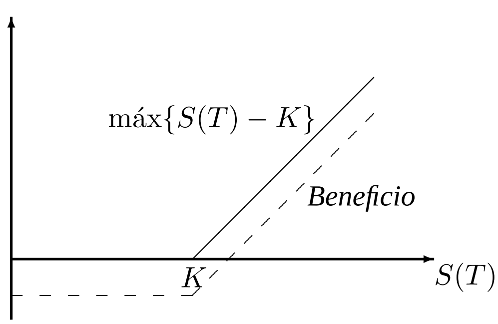

Figura 2.3: payoff de una posición long en una opción call

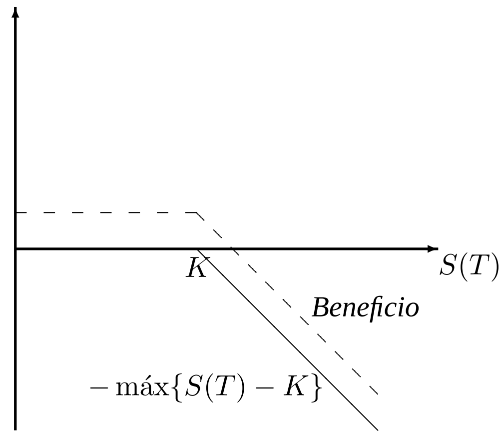

Figura 2.4: payoff de una posición short en una opción call

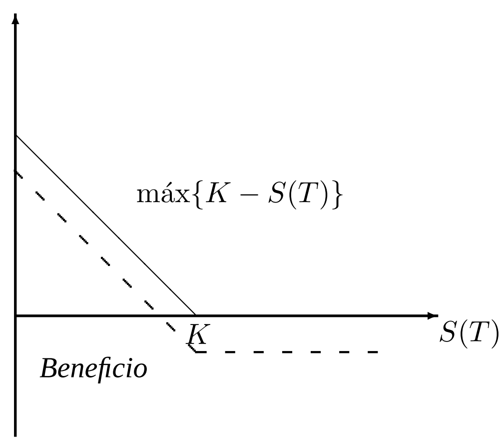

Figura 2.5: payoff de una posición long en una opción put

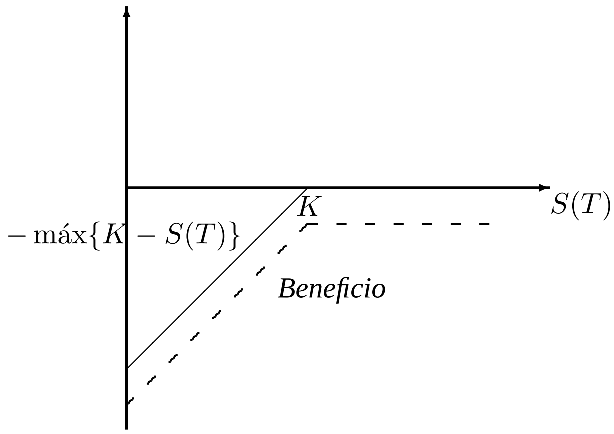

Figura 2.6: payoff de una posición short en una opción put

OPCIONES EXÓTICAS: Hasta aquí nos hemos explayado básicamente en las opciones vanilla, las cuales tienen propiedades estándar bien definidas y se comercializan activamente. Uno de los aspectos notables del Over-the-counter market es el número de productos no estándar (o exóticos) que en él se comercializan.

Definición 2.6.4. Las opciones exóticas son aquellas cuyo payoff depende del camino del activo subyacente; no sólo de su valor final.

El objetivo de este trabajo es calcular el valor de opciones exóticas en un modelo de tiempo continuo. Pero antes, damos un pequeño ejemplo de cómo hacer esto para opciones vanillas en t = 0 y tiempo discreto.

Ejemplo 2.6.5. Consideremos el siguiente árbol binomial que modela el precio del activo en un paso:

$$S_0 = 10, \qquad S_1(c) = 2 \cdot S_0 = 20, \qquad S_1(x) = \frac{1}{2} \cdot S_0 = 5$$

Sea $r = \frac{1}{4}$ la tasa libre de riesgo y asumamos la hipótesis de no arbitrage.

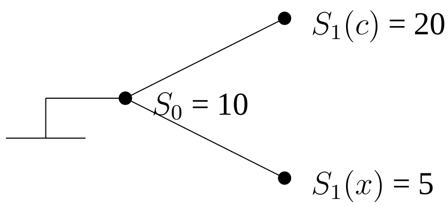

Figura 2.7: Árbol binomial para el precio del activo

Tomemos una opción call con strike K = 17 y con fecha de ejercicio en t = 1.

Calculemos cuál debería ser el valor de la opción en t = 0, es decir el valor de la prima c.
En t = 1 el valor de la opción es

$$\text{máx}(20 - 17, 0) = 3 \qquad \text{o} \qquad \text{máx}(5 - 17, 0) = 0.$$

Armamos el siguiente portfolio:

$$\Delta\text{acciones} + 1 \text{ posición short en una opción call Europea.}$$

En t = 1, el valor de nuestro portfolio es

$$20 \cdot \Delta - 3 \qquad \text{o} \qquad 5 \cdot \Delta.$$

Como deseamos que nuestro portfolio sea libre de riesgo, entonces

$$20 \cdot \Delta - 3 = 5 \cdot \Delta.$$

De esta manera obtenemos

$$\Delta = \frac{1}{5}.$$

O sea que nuestro portfolio libre de riesgo debe estar formado por 5 opciones (short) por cada acción.

En t = 1, el valor de nuestro portfolio es \$1.

La tasa de retorno del portfolio debe ser la misma que la tasa libre de riesgo. De esta manera, el portfolio en t = 0 debe valer

$$\frac{1}{1+r} \cdot 1 = \frac{4}{5} \cdot 1 = \frac{4}{5}.$$

Pero nuestro portfolio en t = 0 vale

$$\Delta \cdot 10 - c = 2 - c.$$

Por lo tanto,

$$5 - c = \frac{1}{1+r} \cdot 1 = \frac{4}{5}.$$

De esta forma concluimos que

$$c = 5 - \frac{1}{1+r} \cdot 1 = 5 - \frac{4}{5} = \frac{21}{5}.$$

<u>Observación</u>: Llamemos u y d a los factores "up" y "down" que modelan el precio del activo (ie: $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$ en el ejemplo) tal que $0 < d < 1 + r < u$ con r la tasa libre de riesgo y procedamos como en el ejemplo:

Si denominamos

$$f_u = \text{máx}(S_0 \cdot u - K, 0)$$

$$f_d = \text{máx}(S_0 \cdot d - K, 0),$$

entonces ahora nuestro portfolio en $t = 1$ queda

$$\Delta S_0 u - f_u \qquad \text{o} \qquad \Delta S_0 d - f_d.$$

De esta manera, si igualamos ambos valores para eliminar el riesgo en nuestro portfolio, obtenemos

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}.$$

En $t = 0$ el valor de nuestro portfolio debe ser

$$\frac{1}{1+r}(\Delta S_0 u - f_u) = \frac{1}{1+r}(\Delta S_0 d - f_d),$$

por ser libre de riesgo.

Pero en $t = 0$ nuestro portfolio vale

$$\Delta S_0 - c.$$

Entonces

$$c = \Delta S_0 - \frac{1}{1+r}(\Delta S_0 u - f_u),$$

por la hipótesis del no arbitrage.

Reescribiendo esto, obtenemos

$$c = \frac{1}{1+r}\left(f_u \frac{(1+r)-d}{u-d} + f_d\left(1 - \frac{(1+r)-d}{u-d}\right)\right)$$

Pero observemos que $\tilde{p} = \dfrac{(1+r)-d}{u-d}$ es la " probabilidad de riesgo-neutral " mencionada en el capítulo 1, ejemplo1.3.2.

De esta manera,

$$c = \frac{1}{1+r}(f_u \tilde{p} + f_d(1-\tilde{p})).$$

Si asignamos la probabilidad $\tilde{p}$ al evento que el precio de la acción aumente, entonces

$$c = \frac{1}{1+r}\tilde{E}(\text{payoff de la opción}) \tag{2.1}$$

Además, se puede ver a traves de una sencilla generalización, que (2.1) sigue ocurriendo si tomamos N pasos hasta llegar a la expiración en lugar de uno solo. A esto último lo exponemos a través de la fórmula de valuación de riesgo neutral que se presenta en el próximo teorema:

Teorema 2.6.6. *Consideremos un modelo binomial de valuación de activos de N-períodos con $0 < d < 1 + r < u$ y con medida de probabilidad de riesgo neutral $\tilde{P}$. Sea V_N una variable* *aleatoria $\mathcal{F}(N)$- medible. Si V_N es el payoff de un derivado en tiempo N, entonces el valor del mismo en $t = 0$ está dado por*

$$V_0 = \frac{1}{(1+r)^N}\tilde{E}(V_N); \tag{2.2}$$

y en general, para cada tiempo n, $0 \leq n \leq N$, el precio del derivado en tiempo n está dado por la ***fórmula de valuación de riesgo neutral***

$$V_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}}\tilde{E}(V_N|\mathcal{F}(n)). \tag{2.3}$$

Observemos que esta fórmula abarca no solo a las opciones vanilla sino también a las opciones exóticas.

Cuando retomemos este problema en tiempo continuo, veremos que (2.2) se sigue cumpliendo.

En el próximo capítulo se desarrollará la ecuación diferencial estocástica Black-Scholes-Merton, de la cual se desprende la valuación de opciones vanilla y exóticas en un modelo de tiempo continuo. El punto a trabajar y que de hecho es el objetivo de nuestro trabajo, es la descripción y valuación de las opciones exóticas *barrera, lookback y asiáticas*.

Capítulo 3

Cálculo estocástico y la ecuación de Black-Scholes -Merton

En esta parte del trabajo definiremos movimiento browniano e integral de Itô, desarrollando sus propiedades. Del movimiento browniano se desprende el movimiento Geométrico browniano que es utilizado para modelar el precio del activo en tiempo continuo. Por otra parte, las integrales de Itô son usadas para modelar el valor de un portfolio que resulta de negociar activos en el tiempo continuo.

Un concepto importante que también desarrollaremos es la variación cuadrática. Veremos que tanto el movimiento browniano como las integrales de Itô tienen variación cuadrática distinta de cero. Esto hace al cálculo estocástico diferente del cálculo ordinario y es la fuente del término volatilidad en la ecuación de Black-Scholes-Merton que también será presentada a continuación.

La ecuación de Black-Scholes-Merton es desarrollada para poder valuar todo tipo de derivados en tiempo continuo. En particular, es la ecuación que utilizaremos para valuar las *opciones barrera, lookback y asiáticas* que forman el objetivo de nuestro trabajo.

Concluimos con la fórmula de valuación de riesgo neutral para el modelo de tiempo continuo.

3.1. Movimiento browniano

Para crear un movimiento browniano, comenzaremos con una caminata aleatoria simétrica. Para construirla, tiraremos repetidamente una moneda (con p la probabilidad de cara (c) y con $q = 1 - p$ la probabilidad de cruz (x), ambas igual a $\frac{1}{2}$) y denotaremos los resultados sucesivos por $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3$... Es decir, ω es la sucesión infinita de tiradas y ω_n es el resultado de la n-ésima tirada.

Sea

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_j = \text{c}; \\ -1, & \text{si } \omega_j = \text{x}. \end{cases}$$

y definamos

$$M_0 = 0; \qquad M_k = \sum_{j=1}^{k} X_j, \quad k = 1, 2, ...$$

El proceso M_k, k = 0,1,2,... es una ***caminata aleatoria simétrica***. Con cada tirada, esta sube o baja una unidad y cada una de las 2 posibilidades es igualmente probable.

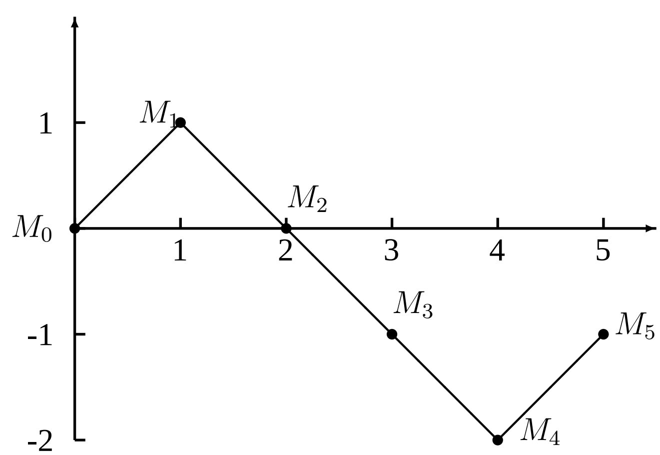

Figura 3.1: 5 pasos de una caminata aleatoria

Para aproximar un movimiento browniano, aceleraremos el tiempo y reduciremos el tamaño del paso escalando una caminata aleatoria simétrica. Más precisamente, fijamos un entero positivo n y definimos la ***caminata aleatoria simétrica escalada***

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt}$$

a condición de que nt también sea un entero. Si nt no es entero, definimos $W^{(n)}(t)$ por la interpolación lineal entre los valores en los puntos más cercanos s y u a la izquierda y derecha de t para los cuales ns y nu son enteros.

Un camino de $W^{(100)}$ es trazado en la siguiente figura

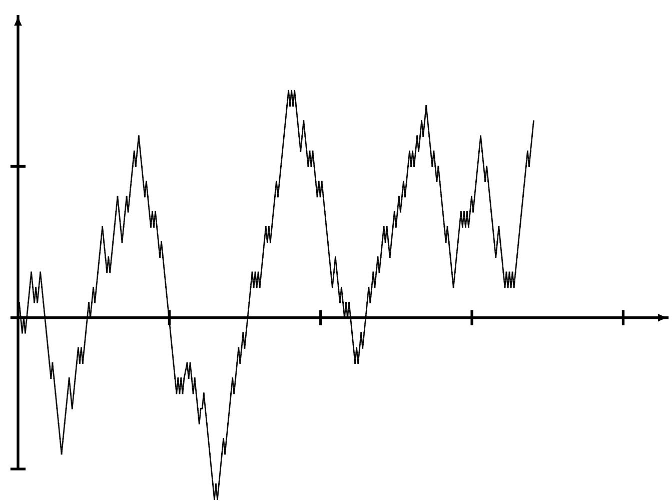

Figura 3.2: Un camino de $W^{(100)}$

Obtendremos un movimiento browniano en el límite cuando $n \to \infty$. Para eso consideremos el siguiente teorema:

Teorema 3.1.1. *(Límite central) : Fijemos $t \geq 0$. Cuando $n \to \infty$, la distribución de la caminata aleatoria escalada $W^{(n)}(t)$ evaluada en tiempo t, converge a la distribución normal con media cero y varianza t.*

Demostración. Uno puede identificar distribuciones identificando sus funciones generatriz de momento. Para la densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\dfrac{-x^2}{2t}}$$

con media 0 y varianza t, la función generatriz de momento es

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux} f(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ux - \dfrac{x^2}{2t}} dx \\
&= e^{\dfrac{1}{2}u^2 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\dfrac{(x-ut)^2}{2t}} dx \\
&= e^{\dfrac{1}{2}u^2 t}
\end{aligned}$$

porque $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\dfrac{(x-ut)^2}{2t}}$ es una densidad normal con media ut y varianza t, por lo tanto la integral es 1.

Si t es tal que nt es un entero, entonces la función generatriz de momento para $W^{(n)}(t)$ es

$$\begin{aligned}
\phi_n(u) &= E\left(e^{uW^{(n)}(t)}\right) \\
&= E\left(e^{\dfrac{u}{\sqrt{n}} M_{nt}}\right) \\
&= E\left(exp\left\{\frac{u}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{nt} X_j\right\}\right) \\
&= E\left(\prod_{j=1}^{nt} e^{\dfrac{u}{\sqrt{n}} X_j}\right)
\end{aligned}$$

Como las dos variables aleatorias son independientes, la última igualdad puede ser escrita como

$$\prod_{j=1}^{nt} E\left(e^{\frac{u}{\sqrt{n}}X_j}\right) = \prod_{j=1}^{nt}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-u}{\sqrt{n}}}\right) = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-u}{\sqrt{n}}}\right)^{nt}$$

Necesitamos mostrar que cuando $n \to \infty$,

$$\phi_n(u) = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-u}{\sqrt{n}}}\right)^{nt}$$

converge a la función generatriz de momento $\phi(u) = e^{\frac{1}{2}u^2 t}$. Para hacer esto, es suficiente considerar el logaritmo de $\phi_n(u)$ y mostrar que

$$\ln \phi_n(u) = nt \ln\left(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{\frac{-u}{\sqrt{n}}}\right)$$

converge a $\ln \phi(u) = \frac{1}{2}u^2 t$.

Para este cálculo final hacemos el cambio de variable $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \ln \phi_n(u) = t \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}\right)}{x^2}$$

Para poder utilizar la regla de L'Hôspital necesitamos calcular:

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}\right) = \frac{\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}}{\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}} \qquad y \qquad \frac{\partial}{\partial x}x^2 = 2x$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \ln \phi_n(u) = t \lim_{x\to 0} \frac{\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}}{2x\left(\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}\right)} = \frac{t}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}}{x},$$

donde hemos usado el hecho que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}e^{ux}+\frac{1}{2}e^{-ux}\right)=1$.

Se ve fácilmente que podemos aplicar la regla de L'Hôspital al

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{u}{2}e^{ux}-\frac{u}{2}e^{-ux}}{x}.$$

Entonces, como la derivada del numerador es

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{2}e^{ux}-\frac{u}{2}e^{-ux}\right)=\frac{u^2}{2}e^{ux}+\frac{u^2}{2}e^{-ux}$$

y la del denominador es $\frac{\partial}{\partial x}(x)=1$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\ln\phi_n(u)=\frac{t}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{u^2}{2}e^{ux}+\frac{u^2}{2}e^{-ux}\right)=\frac{1}{2}u^2t$$

como deseamos. $\square$

Este resultado nos sirve para demostrar que el modelo binomial de valuación de activos es una versión en tiempo discreto del modelo movimiento geométrico browniano, el cual es la base para la fómula de Black-Scholes-Merton.

Construimos un modelo para el precio del activo (como hicimos en el ejemplo 1.1.5) en el intervalo de tiempo de 0 a t eligiendo un entero n y construyendo un modelo binomial para el precio del activo que toma n pasos por unidad de tiempo.

Elegimos n y t tal que nt sea entero, luego escogemos el factor up $u_n = 1+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y el factor down $u_n = 1-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ donde σ es una constante positiva.

Denotemos por H_{nt} al número de caras y T_{nt} al número de cruces en las primeras nt tiradas de la moneda. Entonces,

$H_{nt}+T_{nt}=nt$;

$H_{nt}-T_{nt}=M_{nt}$ (Caminata aleatoria simétrica) y el precio del activo en el tiempo t es:

$$S_n(t) = S(0)u_n^{H_{nt}}d_n^{T_{nt}} = S(0)(1+\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}})^{\frac{1}{2}(nt+M_{nt})}(1-\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}})^{\frac{1}{2}(nt-M_{nt})}$$

Teorema 3.1.2. *Cuando $n \to \infty$, la distribución de $S_n(t)$ converge a la distribución de*

$$S(t) = S(0)exp\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\},$$

donde $W(t)$ es una variable aleatoria normal con esperanza 0 y varianza t.

La distribución de $S(t)$ es llamada **log-normal** y $S(t)$ es un caso particular de un movimiento geométrico browniano, concepto que daremos luego de definir movimiento browniano:

Definición 3.1.3. Sea $(\Omega, P, \mathcal{F})$ un espacio de probabilidad. Supongamos que existe un proceso estocástico $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ que satisface $W(0) = 0$ y que para cada $\omega \in \Omega$, $W(t)$ es una función continua. Entonces $\{W(t)\}_{t\geq 0}$, es un *movimiento browniano* si para todo $0 = t_0 < t_1 < t_2 ... < t_m$ los incrementos

$$W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), ..., W(t_m) - W(t_{m-1})$$

son independientes y cada uno de esos incrementos están normalmente distribuidos con

$$E(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = 0,$$

$$Var(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = t_{i+1} - t_i.$$

Además del movimiento browniano en si mismo, necesitaremos alguna notación para la cantidad de información disponible en cada tiempo.

Definición 3.1.4. Sea $(\Omega, P, \mathcal{F})$ un espacio de probabilidad en el cual está definido un movimiento browniano $W(t)$, $t \geq 0$. Una *filtración* para el movimiento browniano es una colección de σ- álgebras $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$ que satisfacen:

i)Información acumulada: Para $0 \leq s < t$, todo conjunto en $\mathcal{F}(s)$ está también en $\mathcal{F}(t)$. En otras palabras, existe al menos tanta información disponible en el tiempo posterior $\mathcal{F}(t)$ como existe en el tiempo anterior $\mathcal{F}(s)$.

ii)Adaptabilidad: Para cada $t \geq 0$, el movimiento browniano $W(t)$ en tiempo t es $\mathcal{F}(t)$-medible. En otras palabras,la información disponible en el tiempo t es suficiente para evaluar el movimiento browniano $W(t)$ en ese tiempo.

iii)Independencia de incrementos futuros: Para $0 \leq t < u$, el incremento $W(u) - W(t)$ es independiente de $\mathcal{F}(t)$. En otras palabras, cualquier incremento del movimiento browniano después del tiempo t es independiente de la información disponible en el tiempo t.

Teorema 3.1.5. *El movimiento browniano es una martingala.*

Demostración. Sean $0 \leq s \leq t$ dados. Entonces

$$\begin{aligned} E(W(t)|\mathcal{F}(s)) &= E((W(t) - W(s)) + W(s)|\mathcal{F}(s)) \\ &= E((W(t) - W(s))|\mathcal{F}(s)) + E(W(s)|\mathcal{F}(s)) \\ &= E((W(t) - W(s))|\mathcal{F}(s)) + W(s) = W(s). \end{aligned}$$

La segunda igualdad está dada por la linealidad de la esperanza condicional. La última igualdad sale porque el movimiento browniano es $\mathcal{F}(t)$- medible. $\square$

Definición 3.1.6. Sea $f(t)$ una función definida para $0 \leq t \leq T$. La variación cuadrática de f sobre el tiempo T es

$$[f, f](T) = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)]^2,$$

donde $\pi = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$; 0= $t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ y $\parallel \pi \parallel = \max_{j=0,..,n-1}(t_{j+1} - t_j)$.

El movimiento browniano tiene la característica que su variación cuadrática es distinta de cero. Esto hace al cálculo estocástico diferente del cálculo ordinario, como veremos más adelante.

Teorema 3.1.7. *Sea $W(t)$ un movimiento browniano. Entonces $[W,W](T) = T$, $\forall T \geq 0$ a.e. (ie: esta afirmación se cumple para todos los caminos salvo un conjunto de medida nula.)*

Demostración. Sea $\pi = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición de $[0,T]$. Definimos la *variación cuadrática muestral* correspondiente a esta partición por:

$$\mathcal{Q}_\pi = \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2.$$

La variación cuadrática muestral, $\mathcal{Q}_\pi$, es una variable aleatoria (ie: depende del camino del movimiento browniano a lo largo del cual es calculada.) Debemos mostrar que $\mathcal{Q}_\pi$ converge a T cuando $\parallel \pi \parallel \to 0$. Mostraremos que tiene valor esperado T y su varianza converge a cero. Entonces, converge a su valor esperado T, cualquiera sea el camino a lo largo del cual estamos haciendo el cálculo[1].

La variación cuadrática muestral es una suma de variables aleatorias independientes. Por lo tanto su media y varianza son la suma de las medias y varianzas de esas variables aleatorias.

$$E((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2) = Var((W(t_{j+1}) - W(t_j))) = t_{j+1} - t_j,$$

lo cual implica

$$E(\mathcal{Q}_\pi) = \sum_{j=0}^{n-1} E((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2) = \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = T,$$

como deseamos. Por otra parte,

$$\begin{aligned} Var((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2) &= E(((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 - (t_{j+1} - t_j))^2) \\ &= E((W(t_{j+1}) - W(t_j))^4) - 2(t_{j+1} - t_j)E((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2) \\ &\quad + (t_{j+1} - t_j)^2. \end{aligned}$$

[1] La convergencia que vamos a probar es en realidad convergencia en media cuadrática, también llamada convergencia L^2. Cuando esta convergencia tiene lugar, existe una subsucesión a lo largo de la cual la convergencia es a.e. (i.e., la convergencia tiene lugar para todos los caminos excepto para un conjunto de caminos que tiene probabilidad cero).

El momento de orden 4 de una variable aleatoria normal con media cero es tres veces su varianza al cuadrado. Por lo tanto,

$$E((W(t_{j+1}) - W(t_j))^4) = 3(t_{j+1} - t_j)^2,$$

$$\begin{aligned} Var((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2) &= 3(t_{j+1} - t_j^2) - 2(t_{j+1} - t_j)^2 + (t_{j+1} - t_j)^2 \\ &= 2(t_{j+1} - t_j)^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Var(\mathcal{Q}_\pi) &= \sum_{j=0}^{n-1} Var((W(t_{j+1}) - W(t_j))^2) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} 2(t_{j+1} - t_j)^2 \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} 2 \parallel \pi \parallel (t_{j+1} - t_j) \\ &= 2 \parallel \pi \parallel T. \end{aligned}$$

En particular, $\lim_{\|\pi\| \to 0} Var(\mathcal{Q}_\pi) = 0$, y concluimos que $\lim_{\|\pi\| \to 0} \mathcal{Q}_\pi = E(\mathcal{Q}_\pi) = T$. $\square$

Si tomamos un intervalo $[T_1, T_2]$, se ve fácilmente que el movimiento browniano acumula $T_2 - T_1$ unidades de variación cuadrática sobre dicho intervalo.

Como esto se cumple para todo intervalo de tiempo, concluimos que:

El movimiento browniano acumula variación cuadratica a razón de 1 por unidad de tiempo

A este hecho lo denotamos de la siguiente manera:

$$dW(t)dW(t) = dt \tag{3.1}$$

Notar que dt está multiplicado por un 1 sobreentendido. Esto no debe interpretarse como se haría en el cálculo ordinario. Para entender mejor la idea, hagamos el siguiente análisis:

Por la " Ley de los Grandes Números ",

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(W(t_{j+1})-W(t_j))^2}{t_{j+1}-t_j}=E(\frac{(W(t_{j+1})-W(t_j))^2}{t_{j+1}-t_j})=1 \qquad \text{con} \qquad t_j=\frac{jT}{n}$$

debido a que las variables aleatorias $Y_{j+1}=\frac{(W(t_{j+1})-W(t_j))}{\sqrt{t_{j+1}-t_j}}$ son independientes e idénticamente distribuidas.

La última igualdad sale de que $E((W(t_{j+1})-W(t_j))^2)=t_{j+1}-t_j$, como vimos en el Teorema 3.1.7. Entonces $\sum_{j=0}^{n-1}(W(t_{j+1})-W(t_j))^2$ converge a T. Nuevamente, lo que queremos significar con (3.1), es que en un intervalo $[0,T]$ el movimiento browniano acumula T unidades de variación cuadrática.

De la misma forma, denotamos por

$$dW(t)dt=0 \tag{3.2}$$

al hecho que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}(W(t_{j+1})-W(t_j))(t_{j+1}-t_j)=0;$$

y por

$$dtdt=0 \tag{3.3}$$

al hecho que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}(t_{j+1}-t_j)^2=0,$$

con $\pi=\{t_0,t_1,...,t_n\}$ una partición de $[0,T]$.

Vimos que un movimiento browniano $W(t)$ es una martingala con caminos continuos cuya variación cuadrática es $[W,W](t)=t$. Resulta que esas condiciones caracterizan al movimiento browniano en el sentido del siguiente teorema:

Teorema 3.1.8. *(Lévy, una dimensión) Sea $M(t)$, $t \geq 0$ una martingala adaptada a una filtración $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$. Supongamos que $M(0) = 0$, $M(t)$ tiene caminos continuos y $[M, M](t) = t$, $\forall t \geq 0$. Entonces $M(t)$ es un movimiento browniano.*

Para modelar el precio de las acciones en nuestro trabajo no nos basta el movimiento browniano en sí mismo, es necesario introducir otro modelo más preciso pero que lo involucra:

Definición 3.1.9. Sean α y σ constantes positivas. Sea $W(t)$, $t \geq 0$ un movimiento browniano. Un *movimiento geométrico browniano* es un proceso estocástico de la forma

$$S(t) = S(0)\text{exp}\{\sigma W(t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t\}.$$

Este es el modelo de precios del activo usado en la fórmula de valuación de opciones Black-Scholes-Merton.

Para finalizar esta sección, desarrollaremos una igualdad que se desprende de reflejar los caminos del movimiento browniano y se denomina *igualdad de reflexión*. Ésta servirá para obtener una densidad conjunta que nos será de gran utilidad al calcular valores esperados involucrados en la valuación de opciones exóticas.

Sea n un número real y $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ un movimiento browniano. Definimos el *first passage time* a nivel n por:

$$\tau_n = \text{mín}\{s \geq 0 : W(s) = n\}$$

Fijamos ahora un nivel positivo m y un tiempo positivo t. Deseamos “ contar ” los caminos del movimiento browniano que alcanzan el nivel m en o antes del tiempo t (ie: aquellos caminos para los cuales τ_m al nivel m es menor o igual a t). Hay dos tipos de tales caminos: aquellos que alcanzan el nivel m antes que t pero en tiempo t están al mismo nivel w bajo m, y aquellos que exceden el nivel m en t. Hay también caminos del movimiento browniano que están exactamente al nivel m en t, pero la probabilidad de estos es 0. Por eso ignoraremos esa posibilidad.

Como muestra la figura 3.3, para cada camino que alcanza el nivel m antes del tiempo t pero está en un nivel w bajo m en t, hay un " camino reflejado " que está al nivel $2m - w$ al tiempo t. Este camino reflejado está constituido intercambiando los movimientos hacia arriba y hacia abajo del movimiento browniano desde el tiempo τ_m en adelante. Por supuesto, la probabilidad que un camino del movimiento browniano finalice exactamente en w o exactamente en $2m - w$ es cero. Para tener probabilidad distinta de cero, consideramos los caminos que alcanzan el nivel m antes que el tiempo t y están al nivel de w o debajo de él en t, y consideramos sus reflexiones, las cuales están al nivel $2m - w$ o sobre él en tiempo t. Esto nos lleva a la *igualdad de reflexión*

$$P\{\tau_m \leq t, W(t) \leq w\} = P\{W^{m,R}(t) \geq 2m - w\}, \qquad w \leq m, m > 0,$$

donde

$$W^{m,R}(t) = \begin{cases} 2m - W(t) & \text{si } t \geq \tau_m \quad \text{a.e;} \\ W(t), & \text{si } t < \tau_m \quad \text{a.e.} \end{cases}$$

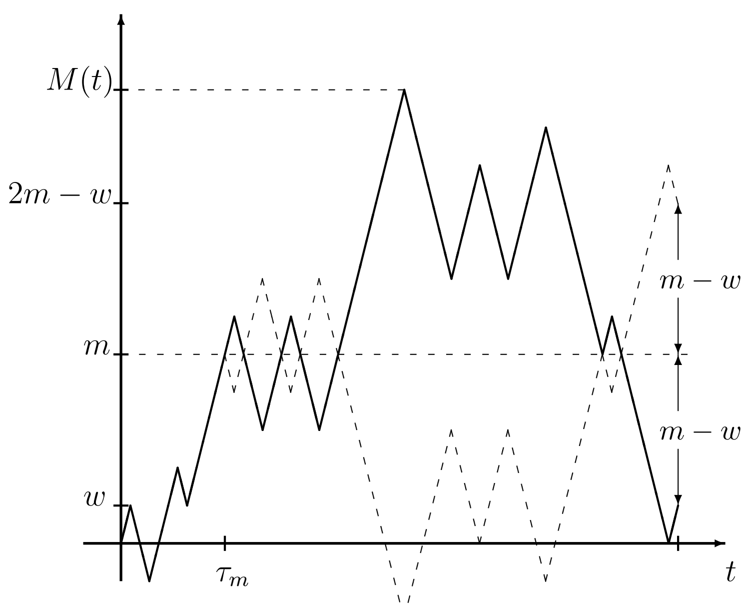

Figura 3.3: Un camino del movimiento browniano y su reflexión

Definimos el *máximo al día* para un movimiento browniano como

$$M(t) = \max_{0 \le s \le t} W(s) \tag{3.4}$$

Para un número positivo m, tenemos $M(t) \geq m$ si y sólo si $\tau_m \leq t$. Esto nos permite reescribir la igualdad de reflexión como

$$P\{M(t) \geq m, W(t) \leq w\} = P\{W^{m,R}(t) \geq 2m - w\}, \qquad w \leq m, m > 0.$$

Teorema 3.1.10. *Para $t > 0$, la densidad conjunta de $(M(t), W(t))$ es*

$$f_{M(t),W(t)}(m, w) = \frac{2(2m - w)}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(2m-w)^2}{2t}}; \qquad w \leq m, m > 0.$$

Demostración. Ver [1] □

3.2. Integral de Itô

Fijamos T un número positivo. El primer objetivo de esta sección es encontrarle sentido a

$$\int_0^T \Delta(t) dW(t), \tag{3.5}$$

donde $W(t)$, $t \geq 0$, es un movimiento browniano, $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$ una filtración para este movimiento browniano y $\Delta(t)$ es un proceso estocástico adaptado a $\mathcal{F}(t)$. La razón para hacer esto es que $\Delta(t)$ será la posición que tomaremos en un activo en el tiempo t, y esto generalmente depende del camino del precio del activo hasta el tiempo t.

Primero definiremos la integral de Itô para integrandos simples $\Delta(t)$ y luego extenderemos esto a integrandos no simples como un límite de la integral de integrandos simples.

Describimos este procedimiento:

Sea $\pi = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición de $[0, T]$, ie: $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$.

Asumimos que $\Delta(t)$ es constante en t en cada subintervalo $[t_j, t_{j+1})$. Tal proceso $\Delta(t)$ es un proceso simple.

Debido a que no existe información en $t = 0$, el valor de $\Delta(0)$ debe ser el mismo para todos los caminos, y por lo tanto el primer tramo de $\Delta(t)$, para $0 \leq t < t_1$, no depende realmente de ω.

Construyamos la integral:

- Consideremos $W(t)$ como el precio por acción de un activo en tiempo t.
- Pensemos a $t_0, t_1, ..., t_{n-1}$ como los trading dates en el activo.
- Tomemos a $\Delta(t_0), \Delta(t_1), ..., \Delta(t_{n-1})$ como la posición (número de acciones) tomada en el activo en cada trading date y que mantendremos hasta el próximo trading date.

La ganancia del negocio en cada tiempo t está dada por:

$I(t) = \Delta(t_0)[W(t) - W(t_0)] = \Delta(0)W(t), \qquad 0 \leq t \leq t_1,$

$I(t) = \Delta(0)W(t_1) + \Delta(t_1)[W(t) - W(t_1)], \qquad t_1 \leq t \leq t_2,$

$I(t) = \Delta(0)W(t_1) + \Delta(t_1)[W(t_2) - W(t_1)] + \Delta(t_2)[W(t) - W(t_2)], \qquad t_2 \leq t \leq t_3,$

y así siguiendo. En general, si $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, entonces

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \Delta(t_k)[W(t) - W(t_k)] \tag{3.6}$$

El proceso $I(t)$ en (3.6) es la ***integral de Itô del proceso simple*** $\Delta(t)$, un hecho que escribimos como

$$I(t) = \int_0^t \Delta(u)dW(u).$$

En particular, podemos tomar $t = t_n = T$, y (3.6) provee una definición para la integral de Itô (3.5).

Teorema 3.2.1. *: La integral de Itô definida por (3.6) es una martingala.*

Demostración. Sean $0 \leq s \leq t \leq T$ dados. Asumiremos que s y t están en diferentes subintervalos de la partición π (ie: existen puntos de la partición t_l y t_k tal que $t_l < t_k$, $s \in [t_l, t_{l+1})$ y $t \in [t_k, t_{k+1})$). Si s y t están en el mismo subintervalo, la siguiente prueba se simplifica.

La ecuación (3.6) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} I(t) = &\sum_{j=0}^{l-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \Delta(t_l)[W(t_{l+1}) - W(t_l)] \\ &+ \sum_{j=l+1}^{k-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \Delta(t_k)[W(t) - W(t_k)] \end{aligned} \tag{3.7}$$

Debemos mostrar que $E[I(t)|\mathcal{F}(s)] = I(s)$.

Tomamos la esperanza condicional de cada uno de los cuatro términos en el lado derecho de (3.7). Cada variable aleatoria en la primer suma $\sum_{j=0}^{l-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]$ es $\mathcal{F}(s)$-medible debido a que el último tiempo que aparece en esta suma es t_l y $t_l \leq s$. Por lo tanto,

$$E[\sum_{j=0}^{l-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]|\mathcal{F}(s)] = \sum_{j=0}^{l-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] \tag{3.8}$$

Para el segundo término en el lado derecho de (3.7), "sacamos fuera lo que es conocido" (Teorema 1.2.6ii)) y usamos la propiedad de martingala de $W(t)$ para escribir

$$\begin{aligned} E[\Delta(t_l)[W(t_{l+1}) - W(t_l)]|\mathcal{F}(s)] &= \Delta(t_l)(E[W(t_{l+1})|\mathcal{F}(s)] - W(t_l)) \\ &= \Delta(t_l)[W(s) - W(t_l)] \end{aligned} \tag{3.9}$$

Sumando (3.8) y (3.9) obtenemos $I(s)$.

Resta mostrar que la esperanza condicional del tercer y cuarto término en el lado derecho de (3.7) son cero. Entonces tendremos $E[I(t)|\mathcal{F}(s)] = I(s)$.

Los sumandos en el tercer término son de la forma $\Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]$, donde $t_j \geq t_{l+1} > s$.

Esto nos permite usar el siguiente truco de condicionalidad iterada, el cual está basado en las propiedades iii) (condicionalidad iterada) y ii) (sacar afuera lo que es conocido) del Teorema

1.2.6:

$$
\begin{aligned}
E[\Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]|\mathcal{F}(s)] &= E[E[\Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]|\mathcal{F}(t_j)]|\mathcal{F}(s)] \\
&= E[\Delta(t_j)[E[W(t_{j+1})|\mathcal{F}(t_j)] - W(t_j)]|\mathcal{F}(s)] \\
&= E[\Delta(t_j)[W(t_j) - W(t_j)]|\mathcal{F}(s)] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

En el final hemos usado el hecho que $W(t)$ es una martingala. Debido a que la esperanza condicional de cada uno de los sumandos en el tercer término del lado derecho de (3.7) es cero, la esperanza condicional de todo el término es cero

$$E[\sum_{j=l+1}^{k-1} \Delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]|\mathcal{F}(s)] = 0.$$

El cuarto término en el lado derecho de (3.7) es tratado igual que los sumandos del tercer término, con lo que resulta

$$
\begin{aligned}
E[\Delta(t_k)[W(t) - W(t_k)]|\mathcal{F}(s)] &= E[E[\Delta(t_k)[W(t) - W(t_k)]|\mathcal{F}(t_k)]|\mathcal{F}(s)] \\
&= E[\Delta(t_k)[E[W(t)|\mathcal{F}(t_k)] - W(t_k)]|\mathcal{F}(s)] \\
&= E[\Delta(t_k)[W(t_k) - W(t_k)]|\mathcal{F}(s)] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Esto concluye la prueba. □

Debido a que $I(t)$ es una martingala e $I(0) = 0$, tenemos $E(I(t)) = 0\ \forall t \geq 0$. De esto sale que $Var(I(t)) = E(I^2(t))$, una cantidad que podemos evaluar por la fórmula dada en el próximo teorema.

Teorema 3.2.2. *(Isometría de Itô): La integral de Itô definida por (3.6) satisface*

$$E(I^2(t)) = E(\int_0^t \Delta^2(u)du) \tag{3.10}$$

Otra consecuencia importante es la siguiente:

Teorema 3.2.3. *La variación cuadrática acumulada hasta el tiempo t por la integral de Itô (3.6) es*

$$[I, I](t) = \int_0^t \Delta^2(u)du \tag{3.11}$$

Observemos que la variación cuadrática está calculada camino a camino, y el resultado puede depender de éste. En cambio, la varianza de $I(t)$ es un promedio sobre todos los posibles caminos. A lo largo de cada camino podemos elegir diferentes tamaños de posiciones $\Delta(t)$, por lo tanto la variación cuadrática puede ser considerada como una medida de riesgo (si $\Delta(t)$ es grande, $I(t)$ es grande y así).

Ahora definiremos la integral de Itô para integrandos $\Delta(t)$ que se les permite variar continuamente con el tiempo y también tener saltos.

Asumimos que $\Delta(t)$, $t \geq 0$ está adaptado a la filtración $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$. También asumimos la condición de cuadrado integrabilidad

$$E(\int_0^T \Delta^2(t)dt) < \infty \tag{3.12}$$

Como mencionamos anteriormente, definiremos $\int_0^T \Delta(t)dW(t)$ aproximando $\Delta(t)$ por procesos simples. Esto se consigue de la siguiente manera:

Elegimos una partición 0 = $t_0 < t_1 < ... < t_m = t$, ponemos el proceso simple aproximante igual a $\Delta(t_j)$ en cada t_j, y luego manteniendo al proceso simple constante sobre el subintervalo $[t_j, t_{j+1})$. Entonces, es posible elegir una sucesión $\Delta_n(t)$ de un proceso simple tal que cuando $n \to \infty$ este proceso converja al continuamente variable $\Delta(t)$. Por converger queremos significar

$$\lim_{n\to\infty} E(\int_0^T |\Delta_n(t) - \Delta(t)|^2 dt) = 0 \tag{3.13}$$

Para cada $\Delta_n(t)$, la integral de Itô $\int_0^t \Delta_n(u)dW(u)$ ha sido ya definida para $0 \leq t \leq T$. Nosotros definimos la integral de Itô para el integrando continuamente variable $\Delta(t)$ por la fórmula [2]

$$\int_0^t \Delta(u)dW(u) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \Delta_n(u)dW(u), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{3.14}$$

Esta integral hereda las propiedades de la integral de Itô para procesos simples. Resumimos esto en el siguiente teorema:

Teorema 3.2.4. *Sea T una constante positiva y sea $\Delta(t)$, 0 $\leq t \leq T$ un proceso estocástico adaptado que satisface (3.12). Entonces $I(t) = \int_0^t \Delta(u)dW(u)$ definida por (3.14) tiene las siguientes propiedades:*

***i) (Continuidad)**: Los caminos de $I(t)$ son continuos como una función del límite superior de integración t, .*

***ii) (Adaptabilidad)**: Para cada t, $I(t)$ es $\mathcal{F}(t)$- medible.*

***iii) (Linealidad)**: Si $I(t) = \int_0^t \Delta(u)dW(u)$ y $J(t) = \int_0^t \Gamma(u)dW(u)$, entonces $I(t) \pm J(t) = \int_0^t (\Delta(u) \pm \Gamma(u))dW(u)$. Además, para cada constante c, $cI(t) = \int_0^t c\Delta(u)dW(u)$.*

***iv) (Martingala)**: $I(t)$ es una martingala.*

***v) (Isometría de Itô)**: $E(I^2(t)) = E(\int_0^t \Delta^2(u)du)$.*

***vi) (Variación cuadrática)**: $[I, I](t) = \int_0^t \Delta^2(u)du$.*

Ejemplo 3.2.5. Calculemos $\int_0^T W(t)dW(t)$.

Para hacer esto, elegimos un entero grande n y aproximamos el integrando $\Delta(t) = W(t)$ por el proceso simple

---

[2] Para cada t, el límite en (3.14) existe porque $I_n(t) = \int_0^t \Delta_n(u)dW(u)$ es una sucesión de Cauchy en $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Esto se debe a la isometría de Itô (Teorema 3.2.2) el cual produce $E((I_n(t) - I_m(t))^2) = E(\int_0^t |\Delta_n(u) - \Delta_m(u)|^2 du)$.

Como una consecuencia de (3.13), el lado derecho tiene límite cero cuando m y n se acercan a ∞

$$\Delta_n(t) = \begin{cases} W(0) = 0, & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{n} \\ W(\frac{T}{n}), & \text{si } \frac{T}{n} \leq t < \frac{2T}{n} \\ \vdots & \\ W(\frac{(n-1)T}{n}), & \text{si } \frac{(n-1)T}{n} \leq t < T, \end{cases}$$

entonces $\lim_{n\to\infty} E(\int_0^T |\Delta_n(t) - W(t)|^2 dt)$ = 0. Por definición,

$$\begin{aligned} \int_0^T W(t)dW(t) &= \lim_{n\to\infty} \int_0^T \Delta_n(t)dW(t) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} W\left(\frac{jT}{n}\right)\left[W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right) - W\left(\frac{jT}{n}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.15}$$

Para simplificar notación, denotemos W_j = $W(\frac{jT}{n})$.

Como una forma de adelantarse a la evaluación del último límite nosotros trabajamos sobre la ecuación (3.15) abajo. La segunda igualdad en (3.15) es obtenida haciendo el cambio de índice $k = j + 1$ en la primer suma. La tercera igualdad usa el hecho que $W_0 = W(0) = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(W_{j+1} - W_j)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} W_{j+1}^2 - \sum_{j=0}^{n-1} W_j W_{j+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} W_j^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} W_k^2 - \sum_{j=0}^{n-1} W_j W_{j+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} W_j^2 \\ &= \frac{1}{2}W_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} W_k^2 - \sum_{j=0}^{n-1} W_j W_{j+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} W_j^2 \\ &= \frac{1}{2}W_n^2 + \sum_{j=0}^{n-1} W_j^2 - \sum_{j=0}^{n-1} W_j W_{j+1} \\ &= \frac{1}{2}W_n^2 + \sum_{j=0}^{n-1} W_j(W_j - W_{j+1}). \end{aligned} \tag{3.16}$$

De (3.16), concluimos que

$$\sum_{j=0}^{n-1} W_j(W_{j+1} - W_j) = \frac{1}{2}W_n^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(W_{j+1} - W_j)^2.$$

En la notación original, esto es

$$\sum_{j=0}^{n-1} W\left(\frac{jT}{n}\right)\left[W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right)-W\left(\frac{jT}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}W^2(T)-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left[W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right)-W\left(\frac{jT}{n}\right)\right]^2. \tag{3.17}$$

Haciendo tender $n \to \infty$ en (3.15) y usando esta ecuación, obtenemos

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W^2(T) - \frac{1}{2}[W,W](T) = \frac{1}{2}W^2(T) - \frac{1}{2}T \tag{3.18}$$

El límite superior de integración en (3.18) es arbitrario y puede ser reemplazado por cualquier $t \geq 0$. Es decir,

$$\int_0^t W(u)dW(u) = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{1}{2}t \qquad t \geq 0. \tag{3.19}$$

Ahora constrastamos (3.18) con el cálculo ordinario. Si g es una función diferenciable con $g(0) = 0$, entonces

$$\int_0^T g(t)dg(t) = \int_0^T g(t)g'(t)dt = \frac{1}{2}g^2(t)\mid_0^T = \frac{1}{2}g^2(T).$$

Si el término extra $-\frac{1}{2}T$ no se presentara en (3.18) no tendríamos una martingala, hecho que afirma el Teorema 3.2.4.

Finalmente, decimos que

$$dI(t) = \Delta(t)dW(t) \tag{3.20}$$

es la *forma diferencial* de

$$I(t) = I(0) + \int_0^t \Delta(u)dW(u) \tag{3.21}$$

y que esta última es la *forma integral* de (3.20).

Recordemos la ecuación (3.1) $dW(t)dW(t) = dt$. Interpretamos esto como la afirmación de que el movimiento browniano acumula variación cuadrática a razón de uno por unidad de tiempo. Usando la forma diferencial de la integral de Itô y (3.1) podemos escribir

$$dI(t)dI(t) = \Delta^2(t)dW(t)dW(t) = \Delta^2(t)dt. \tag{3.22}$$

Esta ecuación dice que la integral de Itô I(t) acumula variación cuadrática a razón de $\Delta^2(t)$ por unidad de tiempo.

Teorema 3.2.6. *(Fórmula de Itô-Doeblin para movimiento browniano): Sea $f(t,x)$ una función para la cual las derivadas parciales $f_t(t,x)$, $f_x(t,x)$ y $f_{xx}(t,x)$ están definidas y son continuas, y sea $W(t)$ un movimiento browniano. Entonces para cada $T \geq 0$,*

$$f(T,W(T)) = f(0,W(0)) + \int_0^T f_t(t,W(t))dt + \int_0^T f_x(t,W(t))dW(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,W(t))dt \tag{3.23}$$

Demostración. Ver [1] □

Podemos escribir la fórmula Itô-Doeblin en forma diferencial

$$df(t,W(t)) = f_t(t,W(t))dt + f_x(t,W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t,W(t))dt \tag{3.24}$$

La fórmula Itô-Doeblin a menudo simplifica el cálculo de integrales de Itô.

Ejemplo 3.2.7. Tomemos $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Esta fórmula dice que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}W^2(T) &= f(W(T)) - f(W(0)) \\ &= \int_0^T f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f''(W(t))dt \\ &= \int_0^T W(t)dW(t) + \frac{1}{2}T\end{aligned}$$

Ordenando los términos obtenemos la fórmula (3.18) sin pasar a través de la aproximación del integrando por procesos simples.

Extenderemos la fórmula de Itô-Doeblin a ciertos procesos estocásticos más generales que el movimiento browniano, llamados procesos de Itô

Definición 3.2.8. : Sea $W(t)$, $t \geq 0$ un movimiento browniano y sea $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$ una filtración asociada. Un *proceso de Itô* es un proceso estocástico de la forma

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(u)dW(u) + \int_0^t \Theta(u)du, \tag{3.25}$$

donde $X(0)$ no es aleatoria y $\Delta(u)$ y $\Theta(u)$ son procesos estocásticos adaptados[3]

Lema 3.2.9. *La variación cuadrática del proceso de Itô (3.25) es*

$$[X,X](t) = \int_0^t \Delta^2(u)du \tag{3.26}$$

Demostración. Introducimos la notación $I(t) = \int_0^t \Delta(u)dW(u)$, $R(t) = \int_0^t \Theta(u)du$. Ambos procesos son continuos en su límite superior de integración t.

Para determinar la variación cuadrática de X en $[0,t]$, elegimos una partición $\pi = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ de $[0,t]$ (ie; 0 = $t_0 < t_1 < ... < t_n = t$) y escribimos la variación cuadrática muestral

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}[X(t_{j+1}) - X(t_j)]^2 = \sum_{j=0}^{n-1}[I(t_{j+1}) - I(t_j)]^2 + \sum_{j=0}^{n-1}[R(t_{j+1}) - R(t_j)]^2 \\ + 2\sum_{j=0}^{n-1}[I(t_{j+1}) - I(t_j)][R(t_{j+1}) - R(t_j)].\end{aligned}$$

Cuando $\| \pi \| \to 0$, el primer término en el lado derecho, $\sum_{j=0}^{n-1}[I(t_{j+1}) - I(t_j)]^2$, converge a la variación cuadrática de I en $[0,t]$, la cual según el Teorema 3.2.4 es $[I,I](t) = \int_0^t \Delta^2(u)du$. El valor absoluto del segundo término está acotado superiormente por:

$$\begin{aligned}\max_{0\le k\le n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \sum_{j=0}^{n-1} |R(t_{j+1}) - R(t_j)| &= \max_{0\le k\le n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \sum_{j=0}^{n-1} |\int_{t_j}^{t_{j+1}} \Theta(u)du| \\ &\le \max_{0\le k\le n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\Theta(u)|du \\ &= \max_{0\le k\le n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \int_0^t |\Theta(u)|du,\end{aligned}$$

y cuando $\| \pi \| \to 0$, esto tiene límite 0 $\cdot \int_0^t |\Theta(u)|du$ = 0 debido a que $R(t)$ es continua. El valor

[3]Asumimos que $E(\int_0^t \Delta^2(u)du)$ y $\int_0^t |\Theta(u)|du$ son finitos para cada $t > 0$ de modo que las integrales en el lado derecho de estén definidas y la integral de Itô sea una martingala.

absoluto del tercer término es acotado superiormente por

$$2 \max_{0 \leq k \leq n-1} |I(t_{k+1}) - I(t_k)| \sum_{j=0}^{n-1} |R(t_{j+1}) - R(t_j)| \leq 2 \max_{0 \leq k \leq n-1} |I(t_{k+1}) - I(t_k)| \int_0^t |\Theta(u)| du,$$

y esto último tiene límite 0 · $\int_0^t |\Theta(u)| du$ = 0 cuando $\| \pi \| \to 0$ debido a que $I(t)$ es continua. Concluimos que $[X, X](t) = [I, I](t) = \int_0^t \Delta^2(u) du$. □

Para recordar más fácilmente este resultado, escribimos el proceso de Itô $X(t)$ en forma diferencial

$$dX(t) = \Delta(t) dW(t) + \Theta(t) dt.$$

Entonces

$$dX(t)dX(t) = \Delta^2(t) dW(t)dW(t) + 2\Delta(t)\Theta(t)dW(t)dt + \Theta^2(t)dtdt,$$

y de las ecuaciones (3.1)-(3.3) obtenemos

$$dX(t)dX(t) = \Delta^2(t)dt.$$

Esto dice que en cada tiempo t, el proceso X acumula variación cuadrática a razón de $\Delta^2(t)$ por unidad de tiempo, y entonces la variación cuadrática total acumulada en el intervalo de tiempo $[0, t]$ es $[X, X](t) = \int_0^t \Delta^2(u) du$. Esta variación cuadrática es sólo debido a la variación cuadrática de la integral de Itô $I(t) = \int_0^t \Delta(u) dW(u)$, pero aunque la integral ordinaria $R(t) = \int_0^t \Theta(u) du$ no aporte a esta variación cuadrática no significa necesariamente que $R(t)$ no sea aleatoria.

Además de la integral de Itô ya definida, necesitaremos integrales con respecto a procesos de Itô.

Definición 3.2.10. : Sea $X(t)$, $t \geq 0$ un proceso de Itô como describimos en la definición (3.2.8), y sea $\Gamma(t)$, $t \geq 0$ un proceso adaptado .

Definimos la integral con respecto al proceso de Itô[4]

$$\int_0^t \Gamma(u)dX(u) = \int_0^t \Gamma(u)\Delta(u)dW(u) + \int_0^t \Gamma(u)\Theta(u)du \tag{3.27}$$

Podemos generalizar la fórmula de Ito-Doeblin a procesos de Itô:

Teorema 3.2.11. *(Fórmula de Itô-Doeblin para un proceso de Itô) : Sea $X(t)$, $t \geq 0$ un proceso de Itô como describimos en la definición (3.2.8), y sea $f(t,x)$ una función para la cual las derivadas parciales $f_t(t,x)$, $f_x(t,x)$ y $f_{xx}(t,x)$ están definidas y son continuas. Entonces, para cada $T \geq 0$*

$$\begin{aligned} f(T,X(T)) &= f(0,X(0)) + \int_0^T f_t(t,X(t))dt + \int_0^T f_x(t,X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,X(t))\Delta^2(t)dt \\ &= f(0,X(0)) + \int_0^T f_t(t,X(t))dt + \int_0^T f_x(t,X(t))\Delta(t)dW(t) \\ &\qquad + \int_0^T f_x(t,X(t))\Theta(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,X(t))\Delta^2(t)dt. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Demostración. Ver [1] □

Esta fórmula en forma diferencial queda

$$df(t,X(t)) = f_t(t,X(t))dt + f_x(t,X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t,X(t))\Delta^2(t)dt, \tag{3.29}$$

y en términos de dt y $dW(t)$

$$df(t,X(t)) = f_t(t,X(t))dt + f_x(t,X(t))\Delta(t)dW(t) + f_x(t,X(t))\Theta(t)dt + \frac{1}{2}f_{xx}(t,X(t))\Delta^2(t)dt. \tag{3.30}$$

También podemos obtener una fórmula para el caso de dos procesos de Itô como vemos en el siguiente teorema:

[4] Asumimos que $E(\int_0^t \Gamma^2(u)\Delta^2(u)du)$ y $\int_0^t |\Gamma(u)\Theta(u)|du$ son finitos para cada $t > 0$ de modo que las integrales en el lado derecho de (3.27) estén definidas

Teorema 3.2.12. *(Fórmula de Itô-Doeblin 2-dimensional)): Sea $f(t,x,y)$ una función cuyas derivadas parciales $f_t, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}$ y f_{yy} están definidas y son continuas. Sean $X(t)$ e $Y(t)$ procesos de Itô. La fórmula Itô-Doeblin 2-dimensional en forma diferencial es*

$$\begin{aligned} df(t,X(t),Y(t)) = f_t(t,X(t),Y(t))dt + f_x(t,X(t),Y(t))dX(t) + f_y(t,X(t),Y(t))dY(t)+ \\ + \frac{1}{2}f_{xx}(t,X(t),Y(t))dX(t)dX(t) + f_{xy}(t,X(t),Y(t))dX(t)dY(t) \\ + \frac{1}{2}f_{yy}(t,X(t),Y(t))dY(t)dY(t) \end{aligned} \tag{3.31}$$

Un caso muy útil que se desprende de la fórmula Itô-Doeblin 2-dimensional es la regla de Itô, que se refiere al producto de dos procesos y la cual exponemos a continuación:

Corolario 3.2.13. *(Regla producto de Itô): Sean $X(t)$ e $Y(t)$ dos procesos de Itô. Entonces*

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + dX(t)dY(t).$$

Demostración. Tomamos $f(t,x,y) = xy$, entonces $f_t = 0$, $f_x = y$, $f_y = x$, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 1$, y $f_{yy} = 0$. Poniendo esto en (3.31), queda demostrado. □

Para completar esta sección del cálculo estocástico daremos la siguiente definición:

Definición 3.2.14. Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación de la forma

$$dX(u) = \beta(u,X(u))du + \gamma(u,X(u))dW(u). \tag{3.32}$$

Aquí $\beta(u,x)$ y $\gamma(u,x)$ son funciones dadas, llamadas el drift y diffusion, respectivamente.

En adición a esta ecuación, una condición inicial de la forma $X(t) = x$, donde $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$, es especificada. El problema es entonces encontrar un proceso estocástico $X(T)$, definido para $T \geq t$, tal que,

$$\begin{aligned} X(t) &= x, \\ X(T) &= X(t) + \int_t^T \beta(u,X(u))du + \int_t^T \gamma(u,X(u))dW(u). \end{aligned}$$

Una consecuencia importante de dicha definición y que nos será de gran utilidad se refiere a los procesos de Markov y se presenta en el siguiente teorema:

Teorema 3.2.15. *Soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas son procesos de Markov.*

3.3. Ecuación de Black-Scholes-Merton y la fórmula de valuación de riesgo neutral

Como mencionamos anteriormente, en esta sección derivaremos la ecuación diferencial estocástica Black-Scholes-Merton y desarrollaremos la fórmula de valuación de riesgo neutral en tiempo continuo.

De la ecuación Black-Scholes-Merton(B-S-M) y determinadas condiciones de contorno se puede obtener el valor de todo tipo de derivados en un activo modelado por un movimiento geométrico browniano, por ejemplo: valuación de una opción call Europea.

La manera de alcanzar dicha ecuación es estableciendo un portfolio libre de riesgo que consista en una posición en el derivado y una en el activo. La razón por la cual esto puede hacerse es que el precio del derivado y el precio del activo están afectados ambos por la misma fuente de incertidumbre: el movimiento del precio del activo.

Todo esto se encuadra en el marco de la ausencia de arbitrage y se considera como tasa libre de riesgo la tasa que brindan los bonos del tesoro de EE.UU.

En general, para derivar la ecuación de B-S-M debemos considerar las siguientes hipótesis del mercado:

- El precio $S(t)$ del subyacente tiene una distribución lognormal siguiendo la caminata aleatoria continua

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

  donde μ y σ son constantes conocidas.

- La tasa libre de riesgo r es constante
- El subyacente no paga dividendos
- No hay costos de transacción
- No hay oportunidades de arbitrage
- La opción es Europea
- Se admite la posición short en el subyacente

Sea $V(t, S)$ una función de las variables t y S tal que $V(t, S(t))$ es el valor del derivado en tiempo t y $S(t)$ es el valor del subyacente en t. Utilizando la fórmula de Itô-Doeblin para procesos de Itô en forma diferencial (3.30) obtenemos

$$dV(t,S(t)) = \left(\frac{\partial V}{\partial t}(t,S(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t,S(t))\sigma^2 S^2(t) + \frac{\partial V}{\partial S}(t,S(t))\mu S(t)\right)dt + \frac{\partial V}{\partial S}(t,S(t))\sigma S(t)dW(t)$$

Buscamos construir un portfolio usando el subyacente y el derivado, tal que el riesgo (parte incierta $dW(t)$) pueda ser eliminado.

Consideramos el portfolio formado por:

- Δ acciones (long)
- 1 posición short en el derivado,

y la función $\pi(t, S)$ dada por

$$\pi(t, S) = \Delta S - V(t, S).$$

Entonces $\pi(t, S(t))$ es el valor de dicho portfolio en t, ie:

$$\pi(t, S(t)) = \Delta(t, S(t))S(t) - V(t, S(t)).$$

Pero $d\pi = \Delta dS - dV$, por lo tanto

$$\begin{aligned} d\pi(t,S(t)) &= \Delta(t,S(t))\mu S(t)dt + \Delta(t,S(t))\sigma S(t)dW(t) - dV(t,S(t)) \\ &= \left(\Delta(t,S(t))\mu S(t) - \frac{\partial V}{\partial t}(t,S(t)) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t,S(t))\sigma^2 S^2(t) - \frac{\partial V}{\partial S}(t,S(t))\mu S(t)\right)dt \\ &\qquad + \left(\Delta(t,S(t))\sigma S(t) - \frac{\partial V}{\partial S}(t,S(t))\sigma S(t)\right)dW(t). \end{aligned}$$

La componente aleatoria en esta ecuación diferencial estocástica es

$$\sigma S(t)\left(\Delta(t,S(t)) - \frac{\partial V}{\partial S}(t,S(t))\right)dW(t).$$

Para eliminarla debemos poner $\Delta(t,S(t)) = \frac{\partial V}{\partial S}(t,S(t))$. De esta manera resulta

$$\begin{aligned} d\pi(t,S(t)) &= \left(\frac{\partial V}{\partial S}(t,S(t))\mu S(t) - \frac{\partial V}{\partial t}(t,S(t)) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t,S(t))\sigma^2 S^2(t) - \frac{\partial V}{\partial S}(t,S(t))\mu S(t)\right)dt \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial t}(t,S(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t,S(t))\sigma^2 S^2(t)\right)dt \end{aligned} \tag{3.33}$$

Al construir nuestro portfolio con $\frac{\partial V}{\partial S}$ acciones, eliminamos el riesgo en él. Por lo tanto, la tasa de retorno del portfolio debe ser r (ie: π se debe comportar como dinero en el banco). Así,

$$d\pi(t,S(t)) = r\pi(t,S(t))dt = r\left(\frac{\partial V}{\partial S}(t,S(t))S(t) - V(t,S(t))\right)dt. \tag{3.34}$$

Comparando (3.33) con (3.34) nos da

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial t}(t,S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t,S(t))\right)dt = r\left(\frac{\partial V}{\partial S}(t,S(t))S(t) - V(t,S(t))\right)dt,$$

entonces

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}(t,S(t)) + r\frac{\partial V}{\partial S}(t,S(t))S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t,S(t))\right)dt = rV(t,S(t))dt. \tag{3.35}$$

Ó, expresado de otra manera:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,S(t)) + r\frac{\partial V}{\partial S}(t,S(t))S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t,S(t)) - rV(t,S(t)) = 0. \tag{3.36}$$

Esta es la ***ecuación en derivadas parciales Black-Scholes-Merton***.

La ecuación de arriba tiene muchas soluciones correspondientes a las diferentes condiciones de contorno que se especifiquen. De esta manera, si consideramos como condición de contorno el payoff de un derivado, obtendremos el valor del mismo en cada tiempo $t \geq 0$.

Ejemplo 3.3.1. Si resolvemos

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t}(t, S(t)) + r\frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t))S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S(t)) - rV(t, S(t)) = 0, \\ V(T, S(T)) = \text{máx}\{S(T) - K, 0\} \qquad K \geq 0, \end{cases}$$

obtendremos el valor de una opción call Europea con strike K que expira en tiempo T.

Ejemplo 3.3.2. Ahora tomemos como condición de contorno el payoff de un contrato forward short, ie: $K - S(T)$.

La ecuación que debemos resolver en este caso es

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t}(t, S(t)) + r\frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t))S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S(t)) - rV(t, S(t)) = 0, \\ V(T, S(T)) = K - S(T), \qquad K \geq 0. \end{cases} \tag{3.37}$$

Del capítulo 2 sabemos que $V(t, S(t)) = Ke^{-r(T-t)} - S(t)$ es el valor de un forward short. Veamos que esta función satisface (3.37)

$$\frac{\partial V}{\partial t} = rKe^{-r(T-t)}, \quad \frac{\partial V}{\partial S} = -1, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0.$$

Luego

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial t}(t, S(t)) + r\frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t))S(t) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S(t)) - rV(t, S(t)) = rKe^{-r(T-t)} - rS(t) - rV(t, S(t)) \\ &\qquad = r(Ke^{-r(T-t)} - S(t)) - rV(t, S(t)) \\ &\qquad = rV(t, S(t)) - rV(t, S(t)) \\ &\qquad = 0, \end{aligned}$$

con $V(T, S(T)) = Ke^{-r(T-T)} - S(T) = K - S(T)$.

En general, dadas las condiciones de contorno, uno siempre puede encontrar una solución debido a que la ecuación de B-S-M es un caso particular de la ecuación del calor. Es más, sabemos que esta solución no sólo existe sino que es única.

Se puede ver que podemos valuar un derivado en un mundo ficticio riesgo neutral, en el cual los retornos de todos los derivados son tasas libres de riesgo.

Consideremos P como la medida de probabilidad real. Entonces,

Definición 3.3.3. Una medida de probabilidad $\tilde{P}$ se dice ser de *riesgo neutral* si

i) $\tilde{P}$ y P son equivalentes (ver Apéndice), y

ii) sobre $\tilde{P}$, el precio descontado del activo $e^{-rt}S(t)$ es una martingala.

Como el precio del activo está dado por el movimiento geométrico browniano

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \tag{3.38}$$

por la regla producto de Itô obtenemos

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}S(t)) &= (\mu - r)e^{-rt}S(t)dt + \sigma e^{-rt}S(t)dW(t) \\ &= \sigma e^{-rt}S(t)[\theta dt + dW(t)], \end{aligned} \tag{3.39}$$

con $\theta = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$.

Si usamos $\theta(t) = \theta$ en el Teorema de Girsanov's, Teorema A.0.12 (ver Apéndice), obtenemos que $\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \theta du$ es un movimiento browniano sobre la medida de probabilidad $\tilde{P}$ definida en dicho teorema. De esta manera podemos escribir (3.39) como

$$d(e^{-rt}S(t)) = \sigma e^{-rt}S(t)d\tilde{W}(t).$$

Luego

$$e^{-rt}S(t) = S(0) + \int_0^t \sigma e^{-ru}S(u)d\tilde{W}(u).$$

Esto nos dice que el proceso $e^{-rt}S(t)$ es una integral de Itô, y por Teorema 3.2.4 iv), $e^{-rt}S(t)$ es una martingala.

Entonces debido a que $\tilde{P}$ es equivalente a P (Ver Apéndice), por Definición 3.3.3, $\tilde{P}$ es una "medida de probabilidad de riesgo neutral".

Sea $V(T)$ una variable aleatoria $\mathcal{F}(T)$- medible. Ésta representa el payoff al tiempo T de un derivado en el subyacente cuyo precio en cada t, $t \geq 0$, está dado por $S(t)$. Permitimos a este payoff ser camino-dependiente (ie: que dependa de cualquier evento que ocurra entre los tiempos 0 y T), lo que significa que sea $\mathcal{F}(T)$- medible.

Definimos

$$e^{-rt}V(t) \doteq \tilde{E}(e^{-rT}V(T)|\mathcal{F}(t).$$

Por la propiedad de condicionamiento iterado (Teorema 1.2.6 iii)), vemos que este proceso es una martingala.

Ahora consideremos el siguiente teorema:

Teorema 3.3.4. *(Representación de una martingala) Sea $W(t)$, $0 \leq t \leq T$, un movimiento browniano en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y sea $\mathcal{F}(t)$, $0 \leq t \leq T$, una filtración para este movimiento browniano. Sea $M(t)$, $0 \leq t \leq T$, una martingala con respecto a esta filtración (i.e., para cada t, $M(t)$ es $\mathcal{F}(t)$- medible y para $0 \leq s \leq t \leq T$, $E(M(t)|\mathcal{F}(s)) = M(s)$). Entonces hay un proceso adaptado $\Gamma(u)$, $0 \leq u \leq T$, tal que*

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \Gamma(u)dW(u) \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Se puede ver ([1], Corolario 5.3.2) que si $\tilde{M}(t)$, $0 \leq t \leq T$, es una martingala sobre $\tilde{P}$, entonces existe un proceso $\tilde{\Gamma}(u)$, $0 \leq u \leq T$, adaptado a $\mathcal{F}(t)$, $0 \leq t \leq T$ tal que

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \tilde{\Gamma}(u)d\tilde{W}(u) \qquad 0 \leq t \leq T.$$

De esta manera, existe un proceso $\tilde{\Gamma}(u)$, $0 \leq u \leq T$ tal que

$$e^{-rt}V(t) = V(0) + \int_0^t \tilde{\Gamma}(u)d\tilde{W}(u) \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{3.40}$$

Definición 3.3.5. Un modelo de mercado es *completo* si todo derivado puede ser hedgeado; es decir, si existe un portfolio con valor $X(t)$ en cada tiempo $t \geq 0$ formado por una cantidad determinada de acciones y dinero de modo que

$$X(T) = V(T) \qquad a.e.,$$

donde $V(T)$ es el payoff del derivado que expira en T.

Veamos que nuestro derivado con payoff $V(T)$ puede ser hedgeado.

Consideremos un agente con una posición short en el derivado que comienza con un capital inicial $X(0)$ y que en cada tiempo $t \geq 0$ tiene $\Delta(t)$ acciones e invierte o pide prestado dinero a tasa r para financiarlo.

Por lo tanto, en cada instante de tiempo, la parte de acciones del portfolio del agente está dado por

$$\Delta(t)S(t) = \int_0^t \Delta(u)\mu S(u)du + \int_0^t \Delta(u)\sigma S(u)dW(u)$$

Y así,

$$d(\Delta(t)S(t)) = \Delta(t)\mu S(t)dt + \Delta(t)\sigma S(t)dW(t) = \Delta(t)dS(t).$$

Por otro lado, si $\Pi(t)$ es el proceso que describe el valor de un portfolio formado por dinero a tasa de interés r, entonces

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} dX(t) &= \Delta(t)dS(t) + r(X(t) - \Delta(t)S(t))dt \\ &= rX(t)dt + \Delta(t)\sigma S(t)[\theta dt + dW(t)]. \end{aligned}$$

La regla producto de Itô y (3.39) implican

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}X(t)) &= e^{-rt}\Delta(t)\sigma S(t)[\theta dt + dW(t)] \\ &= \Delta(t) d(e^{-rt}S(t)) \\ &= \Delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)d\tilde{W}(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $e^{-rt}X(t)$ es una martingala sobre $\tilde{P}$ con

$$e^{-rt}X(t) = X(0) + \int_0^t \sigma\Delta(u)e^{-ru}S(u)d\tilde{W}(u) \qquad 0 \leq t \leq T,$$

y

$$e^{-rt}V(t) = V(0) + \int_0^t \tilde{\Gamma}(u)d\tilde{W}(u) \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Si elegimos

$$V(0) = X(0)$$

y $\Delta(t)$ tal que

$$\sigma\Delta(t)e^{-rt}S(t) = \tilde{\Gamma}(t), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{3.41}$$

obtenemos $X(t) = V(t)\ \forall t$ y en consecuencia $X(T) = V(T)$.

Observemos que (3.41) es quivalente a

$$\Delta(t) = \frac{\tilde{\Gamma}(t)}{\sigma e^{-rt}S(t)}, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{3.42}$$

Con esta elección, tenemos un hedge para una posición short en el derivado con payoff $V(T)$ en tiempo T. Es decir, si comenzamos con un capital $X(0)$ e invertimos en cada tiempo t en una cantidad $\Delta(t)$ de acciones dada por (3.42), entonces

$$X(T) = V(T) \qquad a.e., \tag{3.43}$$

El hecho que $e^{-rt}X(t)$ es una martingala sobre $\tilde{P}$ implica

$$e^{-rt}X(t) = \tilde{E}(e^{-rT}X(T)|\mathcal{F}(t)) = \tilde{E}(e^{-rT}V(T)|\mathcal{F}(t)). \tag{3.44}$$

Además, debido a la hipótesis de no arbitrage, por (3.43), el valor del derivado en cada $0 \leq t \leq T$ debe ser igual al valor $X(t)$ del portfolio y entonces podemos llamar a este el ***precio*** $V(t)$ del derivado en tiempo t, y (3.44) resulta

$$e^{-rt}V(t) = \tilde{E}(e^{-rT}V(T)|\mathcal{F}(t)), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{3.45}$$

O, escrito de otra manera

$$V(t) = \tilde{E}(e^{-r(T-t)}V(T)|\mathcal{F}(t)), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{3.46}$$

Nos referiremos a ambas (3.45) y (3.46) como ***Fórmula de valuación de riesgo neutral*** para el modelo de tiempo continuo.

Hemos probado que en este modelo todo derivado puede ser hedgeado; es decir, que este modelo es completo. En el siguiente teorema exponemos que esto es equivalente a que la medida de probabilidad de riesgo neutral sea única.

Teorema 3.3.6. *Consideremos un modelo de mercado que tiene una medida de probabilidad de riesgo neutral. El modelo es completo si y sólo sí la medida de probabilidad de riesgo neutral es única.*

Demostración. Ver [1] □

Capítulo 4

Opciones exóticas: barrera, lookback y asiáticas

Hemos llegado al objetivo final de nuestro trabajo que consiste en analizar tres tipos de opciones exóticas: barrera, lookback y asiáticas.

Las opciones exóticas, a diferencia de las *vanilla* o *plain vanilla,* poseen sus payoff dependientes del camino del activo subyacente.

En el siguiente capítulo desarrollaremos la ecuación diferencial parcial estándar que gobierna el precio de cada una de las tres opciones exóticas mencionadas. Las opciones barrera y lookback tienen fórmulas de valuación explícitas, las cuales están basadas en el principio de reflexión para el movimiento browniano. Una fórmula tal para opciones asiáticas es desconocida. Sin embargo, para dicha opción hay un argumento " Change-of-numéraire" que reduce la ecuación diferencial de valuación a una manera simple que puede fácilmente ser resuelta numéricamente.

4.1. Opciones barrera

Hay varios tipos de opciones Barrera. Las "knock out" son aquellas en las que el precio del activo subyacente debe cruzar una barrera para que pierdan su valor; ie: la opción está activa a menos que el precio del activo cruce una barrera. Si el precio del activo subyacente comienza debajo de la barrera y debe cruzar sobre esta para causar el Knock out, la opción se dice ***up-and-out***. Una opción ***down-and-out*** tiene la barrera debajo del precio inicial del activo y " knock out " si el precio del del activo cae debajo de la barrera. Otras opciones son las " knock in "; ie: ellas pagan cero a menos que el precio del activo subyacente cruce una barrera. Las opciones knock in también también caen en dos clases: ***up-and-in*** y ***down-and-in***.

Opciones barrera más complejas requieren que el precio del activo no sólo cruce una barrera sino que transcurra una cierta cantidad de tiempo en ella para el knock in o knock out.

Ejemplo 4.1.1. Consideremos una call Europea en el modelo binomial con $T = 3$, strike $K = 105$ y barrera $B = 95$. Sea $S_0 = 100$, $r = \frac{1}{20} = 0{,}05$ y factores up y down $u = 1{,}1$ y $d = 0{,}9$. De esta manera, la probabilidad (riesgo neutral) de que el precio aumente en un paso es $\tilde{p} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Lo que vamos a calcular es el cuadro de precios de una opción barrera down-and-out, ya que no es posible trazar un árbol para ello. Esto se debe a que la opcion barrera actúa así: Si el precio de la acción cae debajo de la barrera, la opción carece de valor no importa cuál sea el precio de la acción en $t = 3$.

En la figura 4.1 presentamos el árbol de precios de la acción con barrera $B = 95$.

Calculamos el valor de la opción mediante la fórmula de valuación (2.3). No obstante, asignamos el valor cero a cualquier nodo que esté debajo de la barrera B.

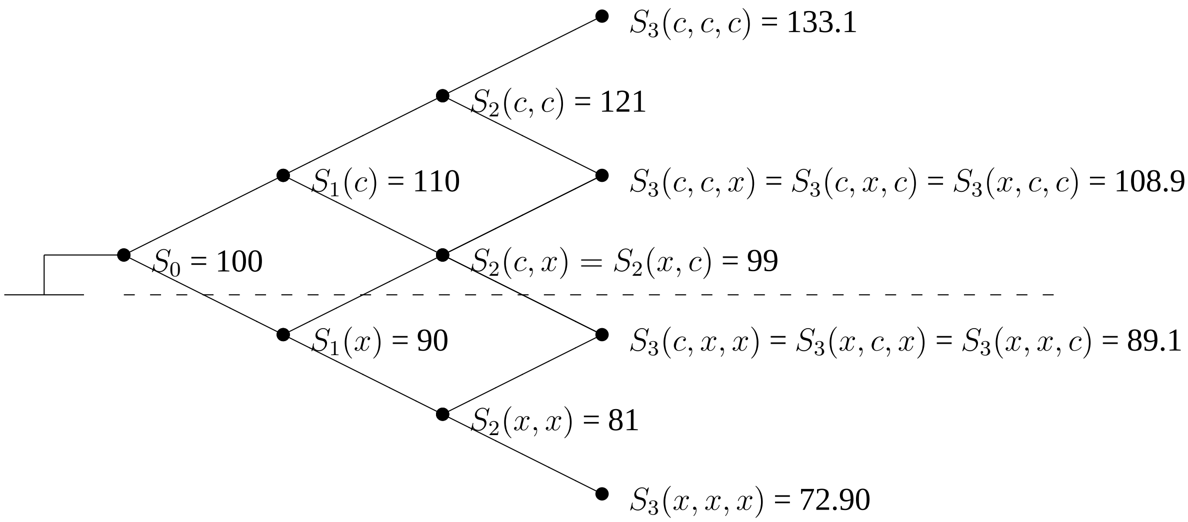

Figura 4.1: Árbol binomial para el precio del activo con barrera $B = 95$

Los valores la opción call con barrera $B = 95$ se muestran en la siguiente tabla:

Camino	**Valor de la call en $t = 3$**	**Camino**	**Valor de la call en $t = 2$**	**Camino**	**Valor de la call en $t = 1$**
ccc	28.1	cc	11.76	c	8.52
ccx	3.9	cx	0.52	x	0
cxc	3.9	xc	0		
cxx	0	xx	0		
xcc	0				
xcx	0				
xxc	0				
xxx	0				

Llegamos a un precio inicial de $V_0 = 6{,}08$ dolares para la opción barrera down-and-out.

Si calculamos los precios de la misma call Europea sin considerar la barrera, obtenemos el árbol de precios dado por la figura 4.2.

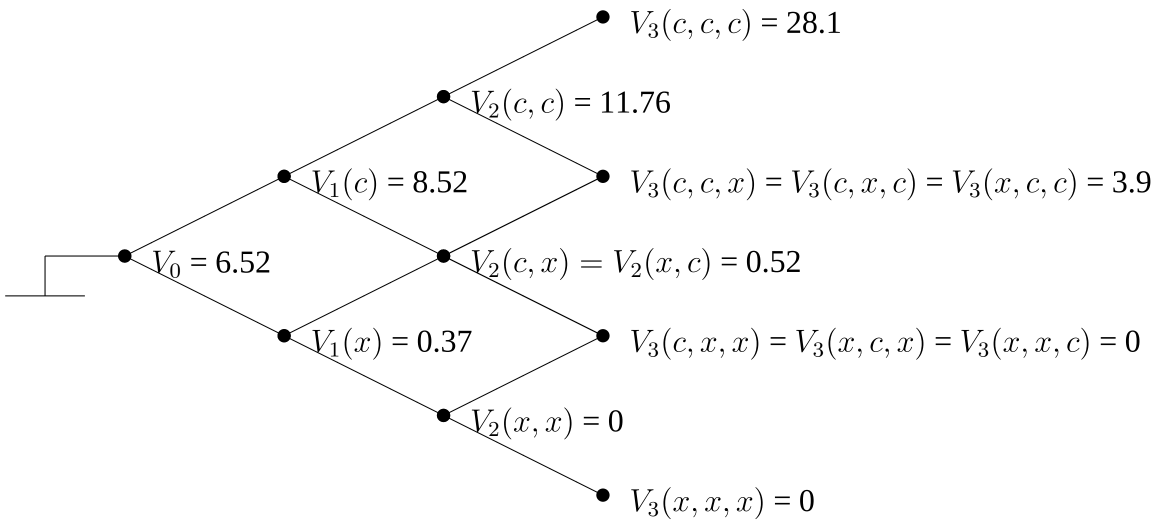

Figura 4.2: Árbol binomial para precio de la opción call

Observamos, como era de esperarse, que si el precio del activo no cae bajo la barrera, los precios de la call con barrera B coinciden con los precios de call sin tener en cuenta la barrera.

Notemos que la opción barrera es mas barata que la opción vanilla simple, lo cual tiene sentido puesto que la opción vanilla recompensará en casos donde la opción barrera no lo hace.

A continuación trataremos una up-and-out call en un activo subyacente cuyo precio sigue el movimiento geométrico browniano

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)d\tilde{W}(t),$$

donde $\tilde{W}(t)$, $0 \leq t \leq T$, es un movimiento browniano sobre la medida de probabilidad de riesgo neutral $\tilde{P}$.

Consideremos una call Europea que expira en tiempo T con precio strike K y barrera up-and-out B. Suponemos $K < B$, de otro modo, la opción debería cruzar la barrera para estar in the money y por lo tanto sólo podría pagar cero. La solución de la ecuación diferencial estocástica para el precio del activo es

$$S(t) = S(0)e^{\sigma\tilde{W}(t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2 t)} = S(0)e^{\sigma\hat{W}(t)}, \tag{4.1}$$

donde

$$\hat{W}(t) = \alpha t + \tilde{W}(t)$$

y

$$\alpha = \frac{1}{\sigma}(r - \frac{1}{2}\sigma^2).$$

Consideremos el máximo al día para $\hat{W}(T)$ (ver (3.4), capítulo 3), $\hat{M}(T) = \max_{0\leq t\leq T} \hat{W}(t)$, entonces

$$\max_{0\leq t\leq T} S(t) = S(0)e^{\sigma \hat{M}(T)}.$$

La opción alcanza el knock out si y sólo sí $S(0)e^{\sigma \hat{M}(T)} > B$; si $S(0)e^{\sigma \hat{M}(T)} \leq B$, la opción paga

$$(S(T) - K)^+ = (S(0)e^{\sigma \hat{W}(T)} - K)^+.$$

En otras palabras, el payoff de la opción es

$$\begin{aligned} V(T) &= (S(0)e^{\sigma \hat{W}(T)} - K)^+ \mathbb{I}_{\{S(0)e^{\sigma \hat{M}(T)} \leq B\}} \\ &= (S(0)e^{\sigma \hat{W}(T)} - K) \mathbb{I}_{\{S(0)e^{\sigma \hat{W}(T)} \geq K, S(0)e^{\sigma \hat{M}(T)} \leq B\}} \\ &= (S(0)e^{\sigma \hat{W}(T)} - K) \mathbb{I}_{\{\hat{W}(T) \geq k, \hat{M}(T) \leq b\}}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde

$$k = \frac{1}{\sigma}\ln(\frac{K}{S(0)}), \;\; b = \frac{1}{\sigma}\ln(\frac{B}{S(0)})$$

El precio de una call up-and-out satisface una ecuación B-S-M que ha sido modificada para responder a la barrera. Esta ecuación puede usarse para encontrar una fórmula para el precio. En este caso particular no necesitamos encontrar el precio de esta forma. Utilizaremos la fórmula de valuación de riesgo neutral. Sin embargo, proveeremos la ecuación y su derivación porque esta metodología funciona en situaciones donde no pueden obtenerse soluciones analíticas.

Teorema 4.1.2. *Denotemos con $v(t,x)$ al precio en tiempo t de la up-and-out call sobre la suposición que la call no cruzó la barrera antes del tiempo t y $S(t) = x$.*

Entonces $v(t,x)$ satisface la ecuación diferencial parcial B-S-M

$$v_t(t,x) + rxv_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) = rv(t,x) \tag{4.3}$$

en el rectángulo $\{(t,x); 0 \leq t < T, 0 \leq x \leq B\}$ y satisface las condiciones de contorno

$$v(t,0) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{4.4}$$

$$v(t,B) = 0, \qquad 0 \leq t < T, \tag{4.5}$$

$$v(T,x) = (x-K)^+, \qquad 0 \leq x \leq B. \tag{4.6}$$

La condición de frontera inferior (4.4) se obtiene de que si el precio del activo comienza en cero, éste queda allí y la opción expira out of the money. La condición de frontera superior (4.5) sigue del hecho que cuando el movimiento geométrico browniano $S(t)$ alcanza el nivel B, éste inmediatamente pasa por encima de B. De hecho, debido a que éste tiene variación cuadrática distinta de cero, el precio del activo $S(t)$ oscila, creciendo y cayendo cruzando el nivel B infinitas veces inmediatamente después de alcanzar éste. El precio de la opción es cero cuando el precio alcanza B debido a que la opción está en el borde del knock out. La única excepción a esto es si el nivel B se alcanza por primera vez en el tiempo de expiración T, en tal caso no hay tiempo a izquierda para el knock out. En este caso, el precio de la opción es dado por la condición terminal (4.6). En particular, la función $v(t,x)$ no es continua en el vértice de su dominio donde $t = T$ y $x = B$. Esta es continua en todas las partes del rectángulo $\{(t,x); 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq B\}$ menos en $t = T$ y $x = B$.

Los ejercicios 1 y 2 dan a grandes rasgos los pasos para verificar la ecuación B-S-M por cálculo directo, comenzando con la fórmula analítica (4.18) obtenida más adelante. Aquí nosotros derivamos esta ecuación diferencial parcial (4.3) por los siguientes argumentos generalmente aplicados:

1 Encontrar la martingala,

2 tomar la diferencial, y

3 tomar el término dt igual a cero.

Comenzamos con un precio del activo inicial $S(0) \in (0, B)$. Luego definimos el payoff de la opción $V(T)$ por (4.2). El precio de la opción en el tiempo t entre la iniciación y la expiración está dado por la fórmula de valuación de riesgo neutral

$$V(t) = \tilde{E}(e^{-r(T-t)}V(T)|\mathcal{F}(t)), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

El argumento usual de condicionamiento iterado muestra que

$$e^{-rt}V(t) = \tilde{E}(e^{-rT}V(T)|\mathcal{F}(t)), \qquad 0 \leq t \leq T,$$

es una martingala. Querríamos ver que $V(t) = v(t, S(t))$, donde $v(t, x)$ es la función en el Teorema 4.1.2. Sin embargo, la ecuación (4.3) no ocurre para todos los valores de t a lo largo de todos los caminos. Recordemos que $v(t, S(t))$ es el valor de la opción sobre la suposición que ésta no ha cruzado la barrera antes que t, mientras que $V(t)$ es el valor de la opción sin ninguna suposición. En particular, si el precio del activo subyacente supera la barrera B y luego retorna bajo la barrera al tiempo t, entonces $V(t)$ será cero porque la opción tuvo el knock out, pero $v(t, S(t))$ será estrictamente positiva porque $v(t, x)$ dada por (4.18) lo es para todos los valores de $0 \leq t < T$ y $0 < x < B$. El proceso $V(t)$ es camino dependiente y recuerda que la opción tiene knock out. El proceso $v(t, S(t))$ no es camino dependiente, y cuando $S(t) < B$, da el precio de la opción sobre la suposición que no tuvo knock out, *incluso si esta suposición es incorrecta*.

Resolvemos esta complicación definiendo ρ como el primer tiempo t en el cual el precio del activo alcanza la barrera B. En otras palabras, ρ es elegido de una manera camino-dependiente tal que $S(t) < B$ para $0 \leq t \leq \rho$ y $S(\rho) = B$. Debido a que el precio del activo "casi siempre" excede la barrera inmediatamente después que la alcanzó, podemos considerar a ρ como el tiempo del knock out. Si el precio del activo no alcanza la barrera antes de la expiración, ponemos $\rho = \infty$. Si el precio del activo alcanza la barrera por primera vez en T, entonces $\rho = T$ pero el knock out no ocurre porque no hay tiempo a izquierda para que el precio del activo exceda la barrera. Sin embargo, la probabilidad que el precio del activo alcance por primera vez la barrera en tiempo T es cero, por eso esta anomalía no nos interesa.

La variable aleatoria ρ es un *stopping time* porque elige su valor basándose en el camino del precio del activo hasta el tiempo ρ. La definición de stopping times en el modelo binomial fué dada en la Definición 1.5.1 del capítulo I. El Teorema Optional Sampling I, Teorema 1.5.5 del capítulo I, asegura que una martingala detenida en un stopping time es aún una martingala. Lo mismo se cumple en tiempo continuo. En particular, el proceso

$$e^{-r(t\wedge\rho)}V(t\wedge\rho) = \begin{cases} e^{-rt}V(t), & \text{si } 0 \leq t \leq \rho; \\ e^{-r\rho}V(\rho), & \text{si } \rho < t \leq T, \end{cases} \tag{4.7}$$

es una martingala sobre $\tilde{P}$. Antes que t llegue a ρ, este proceso es la martingala $e^{-rt}V(t)$. Una vez que t llegó a ρ, aunque el parámetro del tiempo t pueda avanzar, el valor del proceso está congelado en $e^{-r\rho}V(\rho)$. Un proceso que no se mueve es trivialmente una martingala. La única manera en que la propiedad de martingala podría perderse sería si ρ " mirara adelante" cuando decidiera parar el proceso. Si ρ se detiene en un tiempo debido a que el proceso iba a subir y permite al proceso continuar si este iba a bajar, el proceso detenido tendría una tendencia a bajar. En tanto que ρ tome la decisión de parar en el tiempo actual basándose solo en el camino hasta aquí y tal vez incluyendo el tiempo actual, el acto de parar una martingala en tiempo ρ preserva la propiedad de martingala.

Lema 4.1.3. *Se cumple que*

$$V(t) = v(t, S(t)), \qquad 0 \leq t \leq \rho. \tag{4.8}$$

En particular, $e^{-rt}v(t,S(t))$ *es una* $\tilde{P}$*-martingala hasta el tiempo* ρ*, o, dicho de otro modo, el proceso detenido*

$$e^{-r(t\wedge\rho)}v(t\wedge\rho, S(t\wedge\rho)), \;\; 0 \leq t \leq T, \tag{4.9}$$

es una martingala sobre $\tilde{P}$.

Demostración. (idea): Debido a que $v(t, S(t))$ es el valor de la up-and-out call sobre la suposición que esta no ha tenido el knock out antes del tiempo t, y para $t \leq \rho$ esta suposición es correcta, tenemos (4.8) para $t \leq \rho$. De (4.8), concluimos que el proceso en (4.9) es la $\tilde{P}$-martingala (4.7). □

Demostración. (del Teorema 4.1.2): Calculamos el diferencial $d(e^{-rt}v(t, S(t)))$:

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}v(t,S(t))) &= e^{-rt}[-rv(t,S(t))dt + v_t(t,S(t))dt + v_x(t,S(t))dS(t) \\ &\qquad + \frac{1}{2}v_{xx}(t,S(t))dS(t)dS(t)] \\ &= e^{-rt}[-rv(t,S(t)) + v_t(t,S(t)) + rS(t)v_x(t,S(t)) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)v_{xx}(t,S(t))]dt + e^{-rt}\sigma S(t)v_x(t,S(t))d\tilde{W}(t). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Del Teorema de representación de una martingala, Teorema 3.3.4, sabemos que $e^{-rt}v(t, S(t))$ debe ser de la forma

$$e^{-rt}v(t,S(t)) = v(0,S(0)) + \int_0^t \Gamma(u)dW(u) \qquad 0 \leq t \leq T,$$

para un cierto proceso $\Gamma(u)$. Además tenemos que

$$e^{-rt}v(t,S(t)) = v(0,S(0)) + \int_0^t \tilde{\Gamma}(u)dW(u) + \int_0^t \tilde{\Theta}(u)du,$$

con

$$\tilde{\Gamma}(u) = e^{-rt}\sigma S(u)v_x(u,S(u))$$

y $\tilde{\Theta}(u) = e^{-rt}[-rv(u,S(u)) + v_t(u,S(u)) + rS(u)v_x(u,S(u)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(u)v_{xx}(u,S(u))$.

Entonces,

$$\int_0^t [\Gamma(u) - \tilde{\Gamma}(u)]dW(u) = \int_0^t \tilde{\Theta}(u)du.$$

Pero el lado derecho en la igualdad de arriba tiene variación cuadrática igual a cero, y el lado izquierdo tiene variación cuadrática distinto de cero. Entonces $\tilde{\Gamma}(u) = \Gamma(u)$ y $\tilde{\Theta}(u) = 0$ a.e.

De esta manera, el término dt debe ser cero para $0 \leq t \leq \rho$ (ie: antes de que la opción esté knock out). Pero debido a que $(t, S(t))$ puede alcanzar cualquier punto en $\{(t,x); 0 \leq t < T, 0 \leq t \leq B\}$ antes de que la opción esté knock out, la ecuación B-S-M (4.3) debe ocurrir para todo $t \in [0,T)$ y $x \in [0,B]$. $\square$

Nota 4.1.4. Del Teorema 4.1.2 y su prueba, vemos como construir un hedge, al menos teóricamente. Tomando el término dt en (4.10) igual a cero, obtenemos

$$d(e^{-rt}v(t,S(t))) = e^{-rt}\sigma S(t) v_x(t,S(t)) d\tilde{W}(t), \qquad 0 \leq t \leq \rho.$$

El valor descontado de un portfolio que en cada tiempo t tiene $\Delta(t)$ acciones del activo subyacente está dado por

$$d(e^{-rt}X(t)) = e^{-rt}\sigma S(t)\Delta(t) d\tilde{W}(t).$$

De esta manera, si un agente comienza con una posición short up-and-out call y con capital inicial $X(0) = v(0, S(0)$, entonces, tomando una cantidad de acciones $\Delta(t)$ dado por

$$\Delta(t) = v_x(t, S(t)), \tag{4.11}$$

causaría que el valor del portfolio $X(t)$ sea $v(t, S(t))$ hasta el knock out o la expiración. Notar que este $\Delta(t)$ es el obtenido en la ecuación de B-S-M en el capítulo 3.

En la práctica, este delta es imposible de implementar si la opción no tuvo el knock out y el precio del activo subyacente se acerca a la barrera cerca de la expiración de la opción. La función $v(T,x)$ es discontinua en $x = B$, saltando desde $B - K$ a 0 en ese punto. Para t cerca de T y x exactamente debajo de B, la función $v(t,x)$ se está aproximando a una discontinuidad y los valores delta ($v_x(t,x)$) se hacen negativos y grandes. Además, los valores de $v_{xx}(t,x)$ que denominamos gamma también se vuelven negativos y grandes. Esto significa que cerca de la expiración y la barrera, el delta le requiere al agente tomar una posición short grande en el activo subyacente y hacer ajustes grandes en la posición (debido a que el gamma es grande negativo) cuando el precio del activo se mueve. El modelo B-S-M supone que el bid-ask spread (brecha entre el precio de compra y venta) es cero, y aquí esa suposición es un modelo pobre de la realidad.

Para obtener la fórmula explícita de valuación para la call up-and-out, debemos derivar la densidad conjunta para un movimiento browniano con drift y su máximo al día.

Comenzamos con un movimiento browniano $\tilde{W}(t)$, $0 \leq t \leq T$, definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \tilde{P}, \mathcal{F})$. Sobre $\tilde{P}$, el movimiento browniano $\tilde{W}(t)$ tiene drift cero (ie: este es una martingala).

Sea α un número dado, y definamos como antes

$$\hat{W}(t) = \alpha t + \tilde{W}(t), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Este movimiento browniano $\hat{W}(t)$ tiene drift α sobre $\tilde{P}$. Además, recordemos que

$$\hat{M}(T) = \max_{0 \leq t \leq T} \hat{W}(t).$$

Debido a que $\hat{W}(0) = 0$, tenemos $\hat{M}(T) \geq 0$. También tenemos $\hat{W}(t) \leq \hat{M}(T)$. Por lo tanto, el par de variables aleatorias $(\hat{M}(T), \hat{W}(T))$ toma valores en el conjunto

$$\{(m, w); w \leq m, m \geq 0\}$$

Teorema 4.1.5. *La densidad conjunta sobre $\tilde{P}$ del par $(\hat{M}(T), \hat{W}(T))$ es*

$$\tilde{f}_{\hat{M}(T),\hat{W}(T)}(m, w) = \frac{2(2m - w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-w)^2}, \qquad w \leq m, m \geq 0, \tag{4.12}$$

y es cero para otros valores de m y w.

Demostración. Definimos la martingala exponencial

$$\hat{Z}(t) = e^{-\alpha \tilde{W}(t) - \frac{1}{2}\alpha^2 t} = e^{-\alpha \hat{W}(t) + \frac{1}{2}\alpha^2 t}, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

y usamos $\hat{Z}(T)$ para definir una nueva medida de probabilidad $\hat{P}$ por

$$\hat{P}(A) = \int_A Z(T) d\tilde{P} \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

De acuerdo al Teorema de Girsanov's, Teorema A.0.12 (ver Apéndice), $\hat{W}(t)$ es un movimiento browniano (con drift cero) sobre $\hat{P}$. El Teorema 3.1.10 da la densidad conjunta de $(\hat{M}(T), \hat{W}(T))$ sobre $\hat{P}$, la cual es

$$\hat{f}_{\hat{M}(T),\hat{W}(T)}(m,w) = \frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2T}(2m-w)^2}, \qquad w \leq m, m \geq 0.$$

y es cero para otros valores de m y w. Para trabajar sobre la densidad de $(\hat{M}(T), \hat{W}(t))$ sobre $\tilde{P}$, usamos el Lema A.0.10 (ver Apéndice), lo cual implica

$$\begin{aligned}
\tilde{P}\{\hat{M}(T) \leq m, \hat{W}(T) \leq w\} &= \tilde{E}(\mathbb{I}_{\{\hat{M}(T)\leq m, \hat{W}(T)\leq w\}}) \\
&= \hat{E}(\frac{1}{\hat{Z}(T)} \mathbb{I}_{\{\hat{M}(T)\leq m, \hat{W}(T)\leq w\}}) \\
&= \hat{E}(e^{\alpha \hat{W}(T) - \frac{1}{2}\alpha^2 T} \mathbb{I}_{\{\hat{M}(T)\leq m, \hat{W}(T)\leq w\}}) \\
&= \int_{-\infty}^{w} \int_{-\infty}^{m} e^{\alpha y - \frac{1}{2}\alpha^2 T} \hat{f}_{\hat{M}(T),\hat{W}(T)}(x,y) dx dy.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la densidad de $(\hat{M}(T), \hat{W}(T))$ sobre $\tilde{P}$ es

$$\frac{\partial^2}{\partial m \partial w} \tilde{P}\{\hat{M}(T) \leq m, \hat{W}(T) \leq w\} = e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T} \hat{f}_{\hat{M}(T),\hat{W}(T)}(m,w).$$

Cuando $w \leq m$ y $m \geq 0$, esta es la fórmula (4.12). Para otros valores de m y w, obtenemos cero debido a que $\hat{f}_{\hat{M}(T),\hat{W}(T)}(m,w)$ es cero. □

Corolario 4.1.6. *Tenemos*

$$\tilde{P}\{\hat{M}(T) \leq m\} = N(\frac{m - \alpha T}{\sqrt{T}}) - e^{2\alpha m} N(\frac{-m - \alpha T}{\sqrt{T}}), \qquad m \geq 0, \tag{4.13}$$

y la densidad sobre $\tilde{P}$ de la variable aleatoria $\hat{M}(T)$ es

$$\tilde{f}_{\hat{M}(T)}(m) = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2T}(m-\alpha T)^2} - 2\alpha e^{2\alpha m} N(\frac{-m - \alpha T}{\sqrt{T}}), \qquad m \geq 0, \tag{4.14}$$

y es cero para $m < 0$.

Demostración. Integramos la densidad (4.12) sobre la región $\{(m,w); w \le m, m \ge 0\}$ para calcular

$$\begin{aligned}
\tilde{P}\{\hat{M}(T) \le m\} &= \int_0^m \int_w^m \frac{2(2\mu-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2\mu-w)^2} d\mu dw \\
&\quad + \int_{-\infty}^0 \int_0^m \frac{2(2\mu-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2\mu-w)^2} d\mu dw \\
&= -\int_0^m \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2\mu-w)^2} \Big|_{\mu=m}^{\mu=w} dw \\
&\quad - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2\mu-w)^2} \Big|_{\mu=0}^{\mu=m} dw \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_0^m e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-w)^2} dw + \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_0^m e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}w^2} dw \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^0 e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-w)^2} dw + \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^0 e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}w^2} dw \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^m e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-w)^2} dw + \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^m e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}w^2} dw.
\end{aligned}$$

Ahora completamos cuadrados. Observemos que

$$-\frac{1}{2T}(w-2m-\alpha T)^2 = -\frac{(2m-w)^2}{2T} + \alpha w - 2\alpha m - \frac{1}{2}\alpha^2 T,$$

$$-\frac{1}{2T}(w-\alpha T)^2 = -\frac{w^2}{2T} + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T.$$

Por lo tanto,

$$\tilde{P}\{\hat{M}(T) \le m\} = -\frac{e^{2\alpha m}}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^m e^{-\frac{1}{2T}(w-2m-\alpha T)^2} dw + \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^m e^{-\frac{1}{2T}(w-\alpha T)^2} dw.$$

Hacemos el cambio de variable $y = \frac{w-2m-\alpha T}{\sqrt{T}}$ en la primer integral e $y = \frac{w-\alpha T}{\sqrt{T}}$ en la segunda, de ese modo obtenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{P}\{\hat{M}(T) \le m\} &= -\frac{e^{2\alpha m}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-m-\alpha T}{\sqrt{T}}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{m-\alpha T}{\sqrt{T}}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\
&= -e^{2\alpha m} N\left(\frac{-m-\alpha T}{\sqrt{T}}\right) + N\left(\frac{m-\alpha T}{\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}$$

Para establecer (4.13).

Para obtener la densidad (4.14), diferenciamos (4.13) con respecto a m:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dm}\tilde{P}\{\hat{M}(T)\le m\} &= N'(\frac{m-\alpha T}{\sqrt{T}})(\frac{1}{\sqrt{T}}) - 2\alpha e^{2\alpha m}N(\frac{-m-\alpha T}{\sqrt{T}}) - e^{2\alpha m}N'(\frac{-m-\alpha T}{\sqrt{T}})(-\frac{1}{\sqrt{T}})\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{1}{2T}(m-\alpha T)^2} - 2\alpha e^{2\alpha m}N(\frac{-m-\alpha T}{\sqrt{T}}) + \frac{e^{2\alpha m}}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{1}{2T}(-m-\alpha T)^2}.\end{aligned}$$

El exponente en el tercer término es

$$\begin{aligned}2\alpha m - \frac{(-m-\alpha T)^2}{2T} &= \frac{4\alpha mT}{2T} - \frac{m^2+2\alpha mT+\alpha^2T^2}{2T}\\ &= -\frac{m^2-2\alpha mT+\alpha^2T^2}{2T}\\ &= -\frac{(m-\alpha T)^2}{2T},\end{aligned}$$

lo cual es el exponente en el primer término. Combinando el primer y el tercer término, obtenemos (4.14). □

Hemos reunido todas las herramientas necesarias para poder calcular el precio de la up-and-out call explícitamente.

El precio riesgo-neutral en tiempo cero de la call up-and-out call con payoff $V(T)$ dado por (4.2) es $V(0) = \tilde{E}(e^{-rT}V(T))$. Usaremos la fórmula de densidad (4.12) para calcularlo explícitamente. Si $k\ge 0$, debemos integrar sobre la región $\{(m,w); k\le w\le m\le b\}$. Por otro lado, si $k<0$, integramos sobre la región $\{(m,w); k\le w\le m, 0\le m\le b\}$. En ambos casos, la región puede ser descripta como $\{(m,w); k\le w\le b, w^+\le m\le b\}$. Suponemos aquí que $S(0)\le B$, entonces $b>0$. De otro modo, la región sobre la cual estamos integrando tiene área cero, y el valor en tiempo cero de la call es cero. También suponemos $S(0)>0$ entonces b y k son finitos.

Cuando $0 < S(0) \le B$, el valor en tiempo cero de la up-and-out call es

$$\begin{aligned}
V(0) &= \int_k^b \int_{w^+}^b e^{-rT}(S(0)e^{\sigma w} - K)\frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-w)^2} dm dw \\
&= -\int_k^b e^{-rT}(S(0)e^{\sigma w} - K)\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-w)^2} \Big|_{m=w^+}^{m=b} dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b (S(0)e^{\sigma w} - K) e^{-rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}w^2} dw \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b (S(0)e^{\sigma w} - K) e^{-rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2b-w)^2} dw \\
&= S(0)I_1 - KI_2 - S(0)I_3 + KI_4,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{\sigma w - rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}w^2} dw, \\
I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{-rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}w^2} dw, \\
I_3 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{\sigma w - rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2b-w)^2} dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{\sigma w - rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{2}{T}b^2 + \frac{2}{T}bw - \frac{1}{2T}w^2} dw, \\
I_4 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{-rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2b-w)^2} dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{-rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{2}{T}b^2 + \frac{2}{T}bw - \frac{1}{2T}w^2} dw.
\end{aligned}$$

Cada una de esas integrales es de la forma

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{\beta + \gamma w - \frac{1}{2T}w^2} dw &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{-\frac{1}{2T}(w - \gamma T)^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta} dw \\
&= e^{\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}(k - \gamma T)}^{\frac{1}{\sqrt{T}}(b - \gamma T)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy,
\end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio de variable $y = \frac{w - \gamma T}{\sqrt{T}}$. Usando la propiedad de la distribución normal estándar acumulada $N(z) = 1 - N(-z)$ y las definiciones de k y b, escribimos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_k^b e^{\beta+\gamma w-\frac{w^2}{2T}}dw &= e^{\frac{1}{2}\gamma^2T+\beta}[N(\frac{b-\gamma T}{\sqrt{T}}) - N(\frac{k-\gamma T}{\sqrt{T}})] \\
&= e^{\frac{1}{2}\gamma^2T+\beta}[N(\frac{-k+\gamma T}{\sqrt{T}}) - N(\frac{-b+\gamma T}{\sqrt{T}})] \\
&= e^{\frac{1}{2}\gamma^2T+\beta}[N(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}[\ln(\frac{S(0)}{K}) + \gamma\sigma T]) - N(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}[\ln(\frac{S(0)}{B}) + \gamma\sigma T])].
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Tomemos

$$
\delta_{\pm}(\tau, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}[\ln(s) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)\tau]. \tag{4.16}
$$

La integral I_1 es de la forma (4.15) con $\beta = -rT - \frac{1}{2}\alpha^2 T$ y $\gamma = \alpha + \sigma$, entonces $\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta =$ 0 y $\gamma\sigma = r + \frac{1}{2}\sigma^2$. Por lo tanto,

$$
I_1 = N(\delta_+(T, \frac{S(0)}{K})) - N(\delta_+(T, \frac{S(0)}{B})).
$$

La integral I_2 es de la forma (4.15) con $\beta = -rT - \frac{1}{2}\alpha^2 T$ y $\gamma = \alpha$, entonces $\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta = -rT$ y $\gamma\sigma = r - \frac{1}{2}\sigma^2$. Por lo tanto,

$$
I_2 = e^{-rT}[N(\delta_-(T, \frac{S(0)}{K})) - N(\delta_-(T, \frac{S(0)}{B}))].
$$

Para I_3, tenemos $\beta = -rT - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{2b^2}{T}$ y $\gamma = \alpha + \sigma + \frac{2b}{T}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta &= \ln(\frac{S(0)}{B})^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1}, \\
\gamma\sigma T &= (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T + \ln(\frac{B}{S(0)})^2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
I_3 = (\frac{S(0)}{B})^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1}[N(\delta_+(T, \frac{B^2}{KS(0)})) - N(\delta_+(T, \frac{B}{S(0)}))].
$$

Finalmente, para I_4, tenemos $\beta = -rT - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{2b^2}{T}$ y $\gamma = \alpha + \frac{2b}{T}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta &= -rT + \ln(\frac{S(0)}{B})^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1}, \\
\gamma\sigma T &= (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \ln(\frac{B}{S(0)})^2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$I_4 = e^{-rT}(\frac{S(0)}{B})^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}[N(\delta_-(T, \frac{B^2}{KS(0)})) - N(\delta_-(T, \frac{B}{S(0)}))].$$

Reuniendo todos estos resultados, sobre la suposición $0 < S(0) \leq B$, tenemos la fórmula del precio de la call up-and-out

$$\begin{aligned} V(0) = S(0)[N(\delta_+(T, \frac{S(0)}{K})) - N(\delta_+(T, \frac{S(0)}{B}))] - e^{-rT}K[N(\delta_-(T, \frac{S(0)}{K})) - N(\delta_-(T, \frac{S(0)}{B}))] \\ - B(\frac{S(0)}{B})^{-\frac{2r}{\sigma^2}}[N(\delta_+(T, \frac{B^2}{KS(0)})) - N(\delta_+(T, \frac{B}{S(0)}))] \\ + e^{-rT}K(\frac{S(0)}{B})^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}[N(\delta_-(T, \frac{B^2}{KS(0)})) - N(\delta_-(T, \frac{B}{S(0)}))]. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ahora, sea $t \in [0, T)$ y asumamos que el precio del activo subyacente en tiempo t es $S(t) = x$. Como arriba, suponemos $0 < x \leq B$. Si la call no tuvo el knock out antes del tiempo t, su precio en el tiempo t se obtiene reemplazando T por el tiempo hasta la expiración $\tau = T - t$ y reemplazando $S(0)$ por x en (4.17). Esto nos da el precio de la call como una función $v(t, x)$ de las dos variables t y x:

$$\begin{aligned} v(t, x) = x[N(\delta_+(\tau, \frac{x}{K})) - N(\delta_+(\tau, \frac{x}{B}))] - e^{-r\tau}K[N(\delta_-(\tau, \frac{x}{K})) - N(\delta_-(\tau, \frac{x}{B}))] \\ - B(\frac{x}{B})^{-\frac{2r}{\sigma^2}}[N(\delta_+(\tau, \frac{B^2}{Kx})) - N(\delta_+(\tau, \frac{B}{x}))] \\ + e^{-r\tau}K(\frac{x}{B})^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}[N(\delta_-(\tau, \frac{B^2}{Kx})) - N(\delta_-(\tau, \frac{B}{x}))]. \qquad 0 \leq t < T, 0 < x \leq B. \end{aligned} \tag{4.18}$$

La fórmula (4.18) fué derivada sobre la suposición que $\tau > 0$ (ie: $t < T$) y $0 < x \leq B$. Para $0 \leq t \leq T$ y $x > B$, tenemos $v(t, x) = 0$ debido a que la opción tiene el knock out cuando el precio del activo excede la barrera B. En efecto, si el precio del activo alcanza la barrera antes de la expiración, entonces inmediatamente excederá la barrera (a. e.), y entonces $v(t, B) = 0$ para $0 \leq t < T$. Sin embargo, $v(T, B) = B - K$. También tenemos $v(t, 0) = 0$ debido a que el movimiento geométrico browniano que comienza en cero permanece en cero, y por lo tanto la call expira out of the money. Finalmente, si la opción no tiene knock out antes de la expiración, entonces su payoff es igual al de la call Europea (ie: $v(T,x) = (x-K)^+$). En resumen, $v(t,x)$ satisface las condiciones de contorno (4.4)-(4.6). La fórmula (4.5) puede obtenerse sustituyendo $x = B$ en (4.18), pero para $x > B$, el lado derecho de (4.18) no es 0. La fórmula (4.18) fué derivada sobre la suposición $0 < x \leq B$, y es incorrecta si $x > B$. Las fórmulas (4.4) y (4.6) no pueden obtenerse sustituyendo $x = 0$ y $t = T$ (τ = 0) en (4.18) debido a que los denominadores se anulan, pero se puede mostrar que (4.18) da esas fórmulas como límite cuando $x \downarrow 0$ y $\tau \downarrow 0$; ver ejercicio 2.

4.2. Opciones lookback

Una opción cuyo payoff está basado en el máximo que el precio del activo subyacente alcanza sobre algún intervalo de tiempo anterior al de expiración se llama una *Lookback option*. La discusión de esta opción introduce un nuevo tipo de diferencial, una diferencial que no es ni dt ni $d\tilde{W}(t)$.

Ejemplo 4.2.1. Consideremos una opción lookback que expira en $T = 3$ y el modelo binomial para el precio del activo con $S_0 = 100$, $r = \frac{1}{20} = 0{,}05$ y factores up y down $u = 1{,}1$ y $d = 0{,}9$, igual que en el ejemplo 4.1.1. De esta manera, la probabilidad (riesgo neutral) de que el precio aumente en un paso es $\tilde{p} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. El árbol de precios está descripto en la figura 4.1 del ejemplo 4.1.1.

Lo que vamos a calcular es el valor en $t = 0$ de la opción lookback con payoff

$$V(3) = Y(3) - S(3),$$

donde $Y(3) = \max_{0\leq i\leq 3} S_i$.

Notemos que para encontrar el valor final de nuestra opción, se precisa conocer más que el valor final de la acción, se necesita saber donde ha estado en cada punto durante el tiempo.

Entonces, para obtener $V(0)$ debemos primero considerar la siguiente tabla con los valores de $Y(3)$ para todos los posibles caminos:

Camino hasta $t = 3$	**Y(3)**
ccc	133.1
ccx	121
cxc	110
cxx	110
xcc	108.9
xcx	100
xxc	100
xxx	100

De esta manera, por la fórmula de valuación de riesgo neutral en $t = 0$ (2.2), obtenemos

$$V(0) = \frac{1}{(1+r)^3}\tilde{E}(V(3)) = \frac{20}{21}\tilde{E}(Y(3) - S(3)) = 4{,}08$$

Comenzamos con un movimiento geométrico browniano como modelo del precio del activo, el cual puede ser escrito igual que en la sección anterior como

$$S(t) = S(0)e^{\sigma \hat{W}(t)},$$

donde $\hat{W}(t) = \alpha t + \tilde{W}(t)$ y

$$\alpha = \frac{1}{\sigma}(r - \frac{1}{2}\sigma^2).$$

Con

$$\hat{M}(t) = \max_{0 \leq u \leq t} \hat{W}(u),$$

podemos escribir el máximo del precio del activo hasta el tiempo t como

$$Y(t) = \max_{0 \leq u \leq t} S(u) = S(0)e^{\sigma \hat{M}(t)}.$$

La opción lookback considerada en esta sección tiene el payoff

$$V(T) = Y(T) - S(T).$$

Este payoff es no negativo debido a que $Y(T) \geq S(T)$.

Sea $t \in [0,T]$ dado. En el tiempo t, el precio riesgo-neutral de la opción lookback es

$$V(t) = \tilde{E}[e^{-r(T-t)}(Y(T) - S(T))|\mathcal{F}(t)] \tag{4.19}$$

Debido a que el par de procesos $(S(t), Y(t))$ tienen la propiedad de Markov (ver ejercicio 3), para toda función f no negativa medible Borel y todo t, $0 \leq t \leq T$ debe existir una función $v(t,x,y)$ medible Borel tal que

$$\tilde{E}(f(T, S(T), Y(T))|\mathcal{F}(t)) = v(t, S(t), Y(t)).$$

Consideremos f tal que $f(T, S(T), Y(T)) = e^{-r(T-t)}(Y(T) - S(T))$. Pero, $V(t) = \tilde{E}[e^{-r(T-t)}(Y(T) - S(T))|\mathcal{F}(t)]$. Por lo tanto,

$$V(t) = v(t, S(t), Y(t)).$$

A continuación caracterizaremos esta función por la ecuación B-S-M. Luego, la calcularemos explícitamente.

Teorema 4.2.2. *Denotemos por $v(t,x,y)$ al precio en tiempo t de la opción lookback sobre la suposición que $S(t) = x$ e $Y(t) = y$. Entonces $v(t,x,y)$ satisface la ecuación B-S-M*

$$v_t(t,x,y) + rxv_x(t,x,y) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x,y) = rv(t,x,y) \tag{4.20}$$

en la región $\{(t,x,y); 0 \leq t < T, 0 \leq x \leq y\}$ y satisface las condiciones de contorno

$$v(t,0,y) = e^{-r(T-t)}y, \qquad 0 \leq t \leq T, y \geq 0; \tag{4.21}$$

$$v_y(t,y,y) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T, y > 0; \tag{4.22}$$

$$v(T,x,y) = y - x, \qquad 0 \leq x \leq y. \tag{4.23}$$

La propiedad de condicionamiento iterado implica que $e^{-rt}V(t) = e^{-rt}v(t, S(t), Y(t))$, donde $V(t)$ dado por (4.19) es una martingala sobre $\tilde{P}$. Calculamos su diferencial y tomamos el término dt igual a cero para obtener (4.20). Sin embargo, cuando hacemos esto, aparece el término $dY(t)$. Este es diferente del término $dS(t)$, porque $S(t)$ tiene variación cuadrática distinta de cero, mientras que $Y(t)$ tiene variación cuadrática cero. Esto se debe a que $Y(t)$ es continua y no decreciente en t. Sea $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = T$ una partición de $[0, T]$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}(Y(t_j) - Y(t_{j-1}))^2 &\leq \max_{j=1,\dots,m}(Y(t_j) - Y(t_{j-1}))\sum_{j=1}^{m}(Y(t_j) - Y(t_{j-1})) \\ &= \max_{j=1,\dots,m}(Y(t_j) - Y(t_{j-1})) \cdot (Y(T) - Y(0)), \end{aligned} \tag{4.24}$$

y $\max_{j=1,\dots,m}(Y(t_j) - Y(t_{j-1})$ tiene límite cero cuando $\max_{j=1,\dots,m}(t_j - t_{j-1})$ tiende a cero debido a que $Y(t)$ es continua. Concluimos que $Y(t)$ acumula variación cuadrática cero en $[0, T]$, hecho que denotamos por

$$dY(t)dY(t) = 0. \tag{4.25}$$

Este argumento funciona porque $Y(t_j) - Y(t_{j-1})$ es no negativa, y por lo tanto no necesitamos tomar el valor absoluto de esos términos en (4.24). Este argumento muestra que en cualquier intervalo en el cual una función es continua y no decreciente, ésta acumulará variación cuadrática cero.

Por otro lado, $dY(t)$ no es un término dt: no hay un proceso $\Theta(t)$ tal que $dY(t) = \Theta(t)dt$. En otras palabras, no podemos escribir $Y(t)$ como

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \Theta(u)du. \tag{4.26}$$

Si pudiéramos, entonces $\Theta(u)$ sería cero cada vez que u está en un " flat spot" de $Y(t)$, es decir, cada vez que u se encuentra en un intervalo donde $Y(t)$ es constante. Esto ocurre cada vez que $S(t)$ se encuentra bajo su máximo al día (ver figura 4.3). La figura 4.3 sugiere que hay intervalos de tiempo en los cuales $Y(t)$ es estrictamente creciente, pero de hecho tal intervalo no existe. Tal intervalo puede ocurrir sólo si $S(t)$ es estrictamente creciente en él, y si hubiera tal intervalo, entonces $S(t)$ acumularía variación cuadrática cero en el mismo (ver el argumento en el párrafo previo). Este no es el caso debido a que $dS(t)dS(t) = \sigma S^2(t)dt$ es positivo para todo t. Entonces, a pesar de la sugerencia de la figura 4.3, las longitudes de los "flat spots" de $Y(t)$ en cualquier intervalo de tiempo $[0, T]$ suma T. Por lo tanto, si la igualdad (4.26) ocurriera, necesitaríamos tener tener $\Theta(u)$ = 0 por Lebesgue para "casi todo punto" (a.e.) u en $[0, T]$. Esto resultaría en $Y(t) = Y(0)$ para $0 \leq t \leq T$. Pero de hecho $Y(t) > Y(0)$ para todo $t > 0$. Concluimos que $Y(t)$ no puede ser representado en la forma (4.26); $dY(t)$ no es un término dt.

Los caminos de $Y(t)$ son creciente en el tiempo, pero crecen en un conjunto de tiempos que tiene medida de Lebesgue cero. Cada intervalo de tiempo $[0, T]$ contiene una sucesión de subintervalos cuyas longitudes suman T, y en cada uno de esos subintervalos, $Y(t)$ es constante. Los subintervalos particulares dependen del camino, pero a pesar del camino , las longitudes de esos subintervalos suman T.

Afortunadamente, podemos trabajar con el diferencial de $Y(t)$. Ya hemos argumentado que $dY(t)dY(t) = 0$. Similarmente, tenemos

$$dY(t)dS(t) = 0 \tag{4.27}$$

(ver ejercicio 4). Ahora proveeremos la prueba del Teorema 4.2.2.

Demostración. del Teorema 4.2.2 Usaremos la fórmula de Itô-Doeblin, (4.25) y (4.27) para diferenciar la martingala $e^{-rt}v(t, S(t), Y(t))$ y obtener

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}v(t, S(t), Y(t))) &= e^{-rt}[-rv(t, S(t), Y(t))dt + v_t(t, S(t), Y(t))dt + v_x(t, S(t), Y(t))dS(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}v_{xx}(t, S(t), Y(t))dS(t)dS(t) + v_y(t, S(t), Y(t))dY(t)] \\ &= e^{-rt}[-rv(t, S(t), Y(t)) + v_t(t, S(t), Y(t)) + rS(t)v_x(t, S(t), Y(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)v_{xx}(t, S(t), Y(t))]dt + e^{-rt}\sigma S(t)v_x(t, S(t), Y(t))d\tilde{W}(t) \\ &\quad + e^{-rt}v_y(t, S(t), Y(t))dY(t). \end{aligned}$$

Para tener una martingala, el término dt debe ser cero, y esto nos da la ecuación B-S-M (4.20). La nueva característica es que el término $e^{-rt}v_y(t, S(t), Y(t))dY(t)$ también debe ser cero. Éste

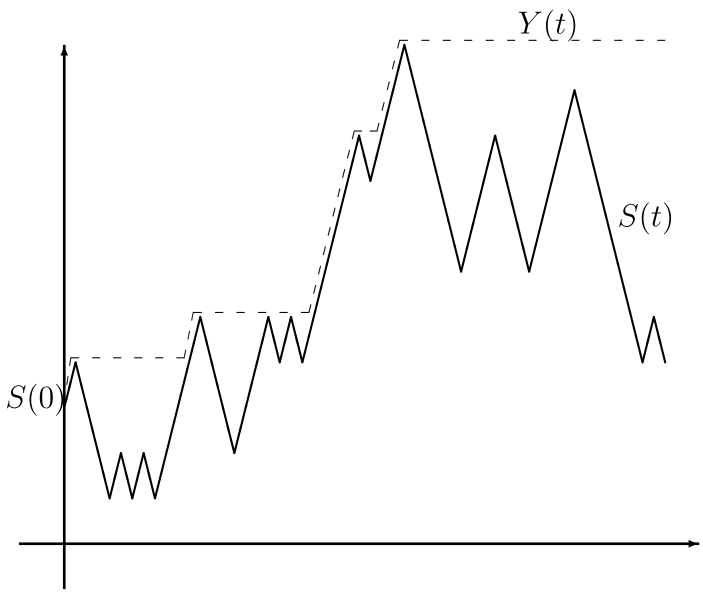

Figura 4.3: Movimiento geométrico browniano y su máximo al día

no puede ser cancelado por el término dt o por el término $d\tilde{W}(t)$ porque es fundamentalmente diferente de esos dos términos. El término $dY(t)$ es naturalmente cero en los “ flat spots ” de $Y(t)$ (ie: cuando $S(t) < Y(t)$). Sin embargo, en los tiempos cuando $Y(t)$ crece, los cuales son los tiempos en que $S(t) = Y(t)$, el término $e^{-rt}v_y(t, S(t), Y(t))$ debe ser cero debido a que $dY(t)$ es “ positivo ”. Esto nos da la condición de contorno (4.22).

La condición de contorno (4.23) es el payoff de la opción. Si en cualquier tiempo t tenemos $S(t) = 0$, entonces tendremos $S(T) = 0$. Además, Y será constante en $[t, T]$; si $Y(t) = y$, entonces $Y(T) = y$ y el precio de la opción en tiempo t es este valor descontado desde T hacia t. Esto nos da la condición de contorno (4.21). □

Nota 4.2.3. La prueba del Teorema 4.2.2 muestra que

$$d(e^{-rt}v(t, S(t), Y(t))) = e^{-rt}\sigma S(t)v_x(t, S(t), Y(t))d\tilde{W}(t).$$

Exactamente como en la Nota 4.1.4, esta ecuación implica que la fórmula (4.11) funciona. En contraste a la situación en la Nota 4.1.4, aquí la función $v(t,x,y)$ es continua y no tenemos problemas con valores delta y gamma grandes.

Para poder obtener una fórmula explícita para el precio de la opción lookback, es necesario primero transformar a $v(t,x,y)$ en una función de dos variables.

El precio de la opción lookback tiene una propiedad de escalado lineal:

$$v(t,\lambda x,\lambda y)=\lambda v(t,x,y) \qquad \forall\lambda>0.$$

Esto es debido a que escalando tanto $S(t)$ como $Y(t)$ por la misma constante positiva en el tiempo t antes de la expiración resulta el payoff $Y(T)-S(T)$ escalado por la misma constante. En particular, si conocemos la función de dos variables

$$u(t,z)=v(t,z,1), \qquad 0\le t\le T, 0\le z\le 1,$$

entonces podemos fácilmente determinar la función de tres variables $v(t,x,y)$ por la fórmula

$$v(t,x,y)=yv(t,\frac{x}{y},1)=yu(t,\frac{x}{y}), \quad 0\le t\le T, 0\le x\le y, y>0. \tag{4.28}$$

De (4.28), podemos calcular las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
v_t(t,x,y)&=yu_t(t,\frac{x}{y}),\\
v_x(t,x,y)&=yu_z(t,\frac{x}{y})\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{y})=u_z(t,\frac{x}{y}),\\
v_{xx}(t,x,y)&=u_{zz}(t,\frac{x}{y})\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{y})=\frac{1}{y}u_{zz}(t,\frac{x}{y}),\\
v_y(t,x,y)&=u(t,\frac{x}{y})+yu_z(t,\frac{x}{y})\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{y})\\
&=u(t,\frac{x}{y})-\frac{x}{y}u_z(t,\frac{x}{y}).
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación B-S-M (4.20) produce

$$
\begin{aligned}
0 &= -rv(t,x,y) + v_t(t,x,y) + rxv_x(t,x,y) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x,y) \\
&= y[-ru(t,\frac{x}{y}) + u_t(t,\frac{x}{y}) + r(\frac{x}{y})u_z(t,\frac{x}{y}) + \frac{1}{2}\sigma^2(\frac{x}{y})^2 u_{zz}(t,\frac{x}{y})].
\end{aligned}
$$

Cancelando y y haciendo el cambio de variable $z = \frac{x}{y}$, vemos que $u(t,z)$ satisface la ecuación de B-S-M

$$u_t(t,z) + rzv_z(t,z) + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 u_{zz}(t,z) = ru(t,z) \qquad 0 \le t < T, 0 < z < 1. \tag{4.29}$$

Las condiciones de contorno para $u(t,z)$ pueden ser obtenidas de las condiciones de contorno (4.21)-(4.23) para $v(t,x,y)$. En particular,

$$e^{-r(T-t)}y = v(t,0,y) = yu(t,0)$$

implica

$$u(t,0) = e^{-r(T-t)}, \qquad 0 \le t \le T. \tag{4.30}$$

Además,

$$0 = v_y(t,y,y) = u(t,1) - u_z(t,1)$$

implica

$$u(t,1) = u_z(t,1), \qquad 0 \le t < T. \tag{4.31}$$

Finalmente,

$$y - x = v(T,x,y) = yu(T,\frac{x}{y})$$

implica

$$u(T,z) = 1 - z, \qquad 0 \le z \le 1. \tag{4.32}$$

La ecuación (4.29) y las condiciones de contorno (4.30)-(4.32) determinan unívocamente la función $u(t,z)$. Como una consecuencia, vemos que la ecuación de B-S-M y las condiciones de contornos en el Teorema 4.2.2 determinan unívocamente la función $v(t,x,y)$.

Ahora calcularemos la función $v(t,x,y)$ del Teorema 4.2.2 explícitamente. Haremos esto para los valores $0 \leq t < T$ y $0 < x \leq y$. Debido a que $Y(t) \geq S(t)$ para todo t, no necesitamos calcular valores de $v(t,x,y)$ para $x > y$. En el ejercicio 5 se calculan las derivadas parciales de $v(t,x,y)$ y se verifica que la ecuación de B-S-M y las condiciones de contorno en el Teorema 4.2.2 se satisfacen (Ver ejercicio 6).

Para $0 \leq t < T$ y $\tau = T - t$, observamos que

$$Y(T) = S(0)e^{\sigma \hat{M}(t)} e^{\sigma(\hat{M}(T) - \hat{M}(t))} = Y(t)e^{\sigma(\hat{M}(T) - \hat{M}(t))}.$$

Si el $\max_{t \leq u \leq T} \hat{W}(u) > \hat{M}(t)$ (ie: si $\hat{W}$ alcanza un nuevo máximo en $[t,T]$), entonces

$$\hat{M}(T) - \hat{M}(t) = \max_{t \leq u \leq T} \hat{W}(u) - \hat{M}(t).$$

Por otro lado, si $\max_{t \leq u \leq T} \hat{W}(u) \leq \hat{M}(t)$, entonces $\hat{M}(T) = \hat{M}(t)$ y

$$\hat{M}(T) - \hat{M}(t) = 0.$$

En ambos casos, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{M}(T) - \hat{M}(t) &= [\max_{t \leq u \leq T} \hat{W}(u) - \hat{M}(t)]^{+} \\ &= [\max_{t \leq u \leq T} (\hat{W}(u) - \hat{W}(t)) - (\hat{M}(t) - \hat{W}(t))]^{+}. \end{aligned}$$

Multiplicando esta ecuación por σ y usando las definiciones de $S(t)$ e $Y(t)$, obtenemos

$$\sigma(\hat{M}(T) - \hat{M}(t)) = [\max_{t \leq u \leq T} \sigma(\hat{W}(u) - \hat{W}(t)) - \ln \frac{Y(t)}{S(t)}]^{+}. \tag{4.33}$$

Por lo tanto, $V(t)$ en (4.19) es

$$V(t) = e^{-r\tau} \tilde{E}[Y(t) \exp\{[\max_{t \leq u \leq T} \sigma(\hat{W}(u) - \hat{W}(t)) - \ln \frac{Y(t)}{S(t)}]^{+}\} | \mathcal{F}(t)] - e^{rt} \tilde{E}[e^{-rT} S(T) | \mathcal{F}(t)]. \tag{4.34}$$

Debido a que el precio descontado del activo es una martingala sobre $\tilde{P}$, el segundo término en (4.34) es $e^{rt}e^{-rt}S(t) = S(t)$. Para el primer término, podemos "sacar fuera lo que es conocido" (ver Teorema 1.2.6 ii)) para obtener

$$e^{-r\tau} Y(t) \tilde{E}[\exp\{[\max_{t \leq u \leq T} \sigma(\hat{W}(u) - \hat{W}(t)) - \ln \frac{Y(t)}{S(t)}]^{+}\} | \mathcal{F}(t)]. \tag{4.35}$$

Debido a que $Y(t)$ y $S(t)$ son $\mathcal{F}(t)$-medibles y $\max_{t\leq u\leq T}\sigma(\hat{W}(u)-\hat{W}(t))$ es independiente de $\mathcal{F}(t)$, podemos usar el Lema de Independencia, Lema 1.2.7, para escribir la esperanza condicional en (4.35) como $g(S(t),Y(t))$, donde

$$g(x,y)=\tilde{E}(\exp\{[\max_{t\leq u\leq T}\sigma(\hat{W}(u)-\hat{W}(t))-\ln\frac{y}{x}]^{+}\}). \tag{4.36}$$

Notar que la esperanza en (4.36) ya no está condicionada a $\mathcal{F}(t)$. Reuniendo estos resultados, tenemos que

$$V(t)=e^{-r\tau}Y(t)g(S(t),Y(t))-S(t)$$

ó, equivalentemente,

$$v(t,x,y)=e^{-r\tau}yg(x,y)-x. \tag{4.37}$$

Queda por calcular la función $g(x,y)$. Debido a que

$$\max_{t\leq u\leq T}\sigma(\hat{W}(u)-\hat{W}(t))=\sigma\max_{t\leq u\leq T}(\hat{W}(u)-\hat{W}(t)),$$

y $\max_{t\leq u\leq T}(\hat{W}(u)-\hat{W}(t))$ tiene la misma distribución sobre $\tilde{P}$ que $\max_{0\leq u\leq \tau}(\hat{W}(u)-\hat{W}(0))=\hat{M}(\tau)$, la función $g(x,y)$ de (4.36) puede también ser escrita como

$$\begin{aligned}g(x,y)&=\tilde{E}(\exp\{[\sigma\hat{M}(\tau)-\ln\frac{y}{x}]^{+}\})\\&=\tilde{P}\{\hat{M}(\tau)\leq\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}\}+\frac{x}{y}\tilde{E}(e^{\sigma\hat{M}(\tau)}\mathbb{I}_{\{\hat{M}(\tau)\geq\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}\}})\end{aligned} \tag{4.38}$$

Calculamos ambos términos en el lado derecho de (4.38).

Para calcular el primer término en el lado derecho de (4.38), usamos (4.13) con T en lugar de τ y m en lugar de $\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}$. Con esos reemplazos, los argumentos de N que aparecen en el lado derecho de (4.13) son

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\tau}}[\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}-\alpha\tau] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}[\ln\frac{y}{x}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau] \\
&= -\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}[\ln\frac{x}{y}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau] \\
&= -\delta_-(\tau,\frac{x}{y}), \\
\frac{1}{\sqrt{\tau}}[-\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}-\alpha\tau] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}[-\ln\frac{y}{x}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau] \\
&= -\delta_-(\tau,\frac{y}{x}),
\end{aligned}$$

donde $\delta_\pm(\tau, s)$ está definida por (4.16). El término $e^{2\alpha m}$ que aparece en el lado derecho de (4.13) resulta

$$\exp\{\frac{2\alpha}{\sigma}\ln\frac{y}{x}\} = \exp\{(\frac{2r}{\sigma^2}-1)\ln\frac{y}{x}\} = (\frac{y}{x})^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}.$$

Se sigue de (4.13) que

$$\tilde{P}\{\hat{M}(\tau)\leq\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}\} = N(-\delta_-(\tau,\frac{x}{y})) - (\frac{y}{x})^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}N(-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})). \tag{4.39}$$

El segundo término en el lado derecho de (4.38) es calculado usando la densidad de $\hat{M}(\tau)$ sobre $\tilde{P}$ dada por (4.14) con τ en lugar de T. Efectivamente,

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y}\tilde{E}(e^{\sigma\hat{M}(\tau)}\mathbb{I}_{\{\hat{M}(\tau)\geq\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}\}}) &= \frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}}^{\infty} e^{\sigma m}\tilde{f}_{\hat{M}(\tau)}(m)dm \\
&= \frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{\sigma m-\frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau)^2}dm \\
&\quad -\frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}}^{\infty}2\alpha e^{(\sigma+2\alpha)m}N(\frac{-m-\alpha\tau}{\sqrt{\tau}})dm
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Calculamos la primer integral en el lado derecho de (4.40). Debido a que

$$\begin{aligned}
r\tau-\frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau-\sigma\tau)^2 &= r\tau-\frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau)^2+\sigma(m-\alpha\tau)-\frac{1}{2}\sigma^2\tau \\
&= r\tau-\frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau)^2+\sigma m-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau-\frac{1}{2}\sigma^2\tau \\
&= \sigma m-\frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau)^2,
\end{aligned}$$

podemos escribir el primer término en el lado derecho de (4.40) como

$$\frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{\sigma m-\frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau)^2}dm=\frac{2xe^{r\tau}}{y\sqrt{2\pi\tau}}\int_{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau-\sigma\tau)^2}dm. \qquad (4.41)$$

Hacemos el cambio de variable $\xi=\frac{\alpha\tau+\sigma\tau-m}{\sqrt{\tau}}$, entonces el límite inferior de integración $\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}$ resulta

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}}(\alpha\tau+\sigma\tau-\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x})=\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}(\ln\frac{y}{x}+r\tau+\frac{1}{2}\sigma^2\tau)=\delta_+(\tau,\frac{x}{y}).$$

Con este cambio de variable en la integral en el lado derecho de (4.41), obtenenemos la siguiente fórmula para el primer término en el lado derecho de (4.40):

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{\sigma m-\frac{1}{2\tau}(m-\alpha\tau)^2}dm&=\frac{2xe^{r\tau}}{y\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\delta_+(\tau,\frac{x}{y})}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}d\xi\\&=\frac{2xe^{r\tau}}{y}N(\delta_+(\tau,\frac{x}{y})).\end{aligned} \qquad (4.42)$$

El segundo término en el lado derecho de (4.40) requiere invertir el orden de integración. Debido a que $\sigma+2\alpha=\frac{2r}{\sigma}$, este término es

$$\begin{aligned}-\frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}}^{\infty}2\alpha e^{(\sigma+2\alpha)m}N(\frac{-m-\alpha\tau}{\sqrt{\tau}})dm&=-\frac{2\alpha x}{y\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}}^{\infty}\int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{\tau}}(-m-\alpha\tau)}e^{\frac{2}{\sigma}rm-\frac{1}{2}\xi^2}d\xi dm\\&=-\frac{2\alpha x}{y\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})}\int_{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}}^{-\xi\sqrt{\tau}-\alpha\tau}e^{\frac{2}{\sigma}rm-\frac{1}{2}\xi^2}dmd\xi.\end{aligned} \qquad (4.43)$$

La integral interna en (4.43) puede ser evaluada. Efectivamente,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}}^{-\xi\sqrt{\tau}-\alpha\tau}e^{\frac{2rm}{\sigma}-\frac{\xi^2}{2}}dm&=\frac{\sigma}{2r}e^{\frac{2rm}{\sigma}-\frac{\xi^2}{2}}\Big|_{m=\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}}^{m=-\xi\sqrt{\tau}-\alpha\tau}\\&=\frac{\sigma}{2r}e^{\frac{2r}{\sigma}(-\xi\sqrt{\tau}-\alpha\tau)-\frac{1}{2}\xi^2}-\frac{\sigma}{2r}e^{\frac{2r}{\sigma^2}\ln\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\xi^2}.\end{aligned}$$

Pero

$$
\begin{aligned}
\frac{2r}{\sigma}(-\xi\sqrt{\tau}-\alpha\tau)-\frac{\xi^2}{2} &= -\frac{\xi^2}{2}-\frac{2r\xi\sqrt{\tau}}{\sigma}-\frac{2r\alpha\tau}{\sigma}\\
&= -\frac{1}{2}(\xi+\frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma})^2+\frac{2r\tau}{\sigma^2}-\frac{2r\alpha\tau}{\sigma}\\
&= -\frac{1}{2}(\xi+\frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma})^2+\frac{2r\tau}{\sigma^2}(r-\sigma\alpha)\\
&= -\frac{1}{2}(\xi+\frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma})^2+r\tau
\end{aligned}
$$

y

$$
e^{\frac{2r}{\sigma^2}\ln\frac{y}{x}-\frac{\xi^2}{2}} = (\frac{y}{x})^{\frac{2r}{\sigma^2}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}.
$$

Por lo tanto, la integral interna en (4.43) es

$$
\int_{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}}^{-\xi\sqrt{\tau}-\alpha\tau} e^{\frac{2rm}{\sigma}-\frac{\xi^2}{2}}dm = \frac{\sigma}{2r}e^{r\tau-\frac{1}{2}}(\xi+\frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma})^2-\frac{\sigma}{2r}(\frac{y}{x})^{\frac{2r}{\sigma^2}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}.
$$

Continuamos con (4.43) haciendo esta sustitución para la integral interna:

$$
\begin{aligned}
-\frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}}^{\infty}2\alpha e^{(\sigma+2\alpha)m}N(\frac{-m-\alpha\tau}{\sqrt{\tau}})dm &= -\frac{\alpha\sigma x}{ry\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})}e^{r\tau-\frac{1}{2}}(\xi+\frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma})^2d\xi\\
&\quad+\frac{\alpha\sigma}{r\sqrt{2\pi}}(\frac{y}{x})^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\int_{-\infty}^{-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi\\
&= -\frac{\alpha\sigma x e^{r\tau}}{ry\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})}e^{-\frac{1}{2}}(\xi+\frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma})^2d\xi\\
&\quad+\frac{\alpha\sigma}{r}(\frac{y}{x})^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}N(-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})). \qquad (4.44)
\end{aligned}
$$

En la primer integral en el lado derecho de (4.44), hacemos el cambio de variable $\eta=\xi+\frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}$, y el límite superior de integración resulta

$$
\begin{aligned}
-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})+\frac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}[-\ln\frac{y}{x}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau+2r\tau]\\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}[\ln\frac{x}{y}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau]\\
&= \delta_+(\tau,\frac{x}{y}).
\end{aligned}
$$

Concluimos que

$$-\frac{x}{y}\int_{\frac{1}{\sigma}\ln\frac{y}{x}}^{\infty} 2\alpha e^{(\sigma+2\alpha)m}N(\frac{-m-\alpha\tau}{\sqrt{\tau}})dm = -\frac{\alpha\sigma x}{ry}e^{r\tau}N(\delta_+(\tau,\frac{x}{y}))+\frac{\alpha\sigma}{r}(\frac{x}{y})^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}N(-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})). \tag{4.45}$$

Ahora ponemos todo lo obtenido junto. La función $v(t,x,y)$ para $0 \le t < T$ y $0 < x \le y$ está dada por (4.37), donde $g(x,y)$ está dada por (4.38). Hemos calculado ambos términos en el lado derecho de (4.38). El primer término está dado por (4.39), y el segundo término es en sí mismo la suma de los dos términos en (4.40). Esos dos términos están dados por (4.42) y (4.45). Además, el término $\frac{\alpha\sigma}{r}$ que aparece en esas fórmulas es igual a $1-\frac{\sigma^2}{2r}$. Concluimos que

$$\begin{aligned}v(t,x,y) = e^{-r\tau}y[N(-\delta_-(\tau,\frac{x}{y})) - (\frac{y}{x})^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}N(-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})) + 2(\frac{x}{y})e^{r\tau}N(\delta_+(\tau,\frac{x}{y}))\\ - (1-\frac{\sigma^2}{2r})(\frac{x}{y})e^{r\tau}N(\delta_+(\tau,\frac{x}{y})) + (1-\frac{\sigma^2}{2r})(\frac{x}{y})^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}N(-\delta_-(\tau,\frac{y}{x}))] - x.\end{aligned}$$

Simplificando resulta en la fórmula

$$\begin{aligned}v(t,x,y) = (1+\frac{\sigma^2}{2r})xN(\delta_+(\tau,\frac{x}{y})) + e^{-r\tau}yN(-\delta_-(\tau,\frac{x}{y}))\\ - \frac{\sigma^2}{2r}e^{-r\tau}(\frac{x}{y})^{\frac{2r}{\sigma^2}}N(-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})) - x, \qquad 0 \le t < T, 0 < x \le y.\end{aligned} \tag{4.46}$$

La función u relacionada a v por $u(t,z) = v(t,z,1)$, satisface

$$\begin{aligned}u(t,\frac{x}{y}) = (1+\frac{\sigma^2}{2r})(\frac{x}{y})N(\delta_+(\tau,\frac{x}{y})) + e^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,\frac{x}{y}))\\ - \frac{\sigma^2}{2r}e^{-r\tau}(\frac{x}{y})^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}N(-\delta_-(\tau,\frac{y}{x})) - \frac{x}{y}.\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = \frac{x}{y}$, obtenemos

$$\begin{aligned}u(t,z) = (1+\frac{\sigma^2}{2r})zN(\delta_+(\tau,z) + e^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,z)\\ - \frac{\sigma^2}{2r}e^{-r\tau}z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) - z, \qquad 0 \le t < T, 0 < z \le 1.\end{aligned} \tag{4.47}$$

4.3. Opciones asiáticas

Una *opción asiática* es una opción cuyo payoff incluye un promedio del precio del activo subyacente a lo largo del tiempo. El promedio puede ser sobre el período de tiempo entero entre la iniciación y la expiración o puede ser sobre algún período de tiempo que comience después que la iniciación de la opción y finalice con la expiración de la opción. El promedio puede ser continuo

$$\frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt,$$

o puede ser discreto,

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} S(t_j),$$

donde $0 < t_1 < t_2 ... < t_m = T$. La principal razón para basar un payoff de una opción en un promedio del precio del activo es hacer más dificultoso a alguien afectar significativamente el payoff por manipulación del precio del activo subyacente.

El precio de las opciones asiáticas no se conoce en forma cerrada. Por lo tanto, en esta sección discutiremos dos maneras para derivar ecuaciones diferenciales parciales para precios de opciones asiáticas.

Ejemplo 4.3.1. Ahora consideremos una opción asiática que expira en $T = 3$ con promedio discreto y strike $K = 100$. Tomemos el modelo binomial para el precio del activo tal que $S_0 = 100$, $r = \frac{1}{20} = 0{,}05$ y factores up y down $u = 1{,}1$ y $d = 0{,}9$, como hicimos en los dos ejemplos anteriores. La probabilidad (riesgo neutral) de que el precio aumente en un paso es $\tilde{p} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. El árbol de precios está descripto en la figura 4.1 del ejemplo 4.1.1.

Lo que vamos a calcular es el valor en $t = 0$ de la opción asiática con payoff

$$V(3) = \text{máx}\{\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} S_j - K, 0\} = (\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} S_j - K)^+$$

Una vez más, para encontrar el valor final de nuestra opción, se precisa conocer no sólo el valor final de la acción, sino donde ha estado en cada punto durante el tiempo.

De esta manera, para obtener $V(0)$ debemos primero calcular el promedio de los valores $\{S_i\}_{i=0,1,2,3}$ para todos los caminos. Esto se describe en la siguiente tabla

Camino hasta $t = 3$	$\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} S_j$
ccc	121.37
ccx	113.3
cxc	105.97
cxx	99.37
xcc	99.3
xcx	92.7
xxc	86.7
xxx	81.3

De esta manera, por la fórmula de valuación de riesgo neutral en $t = 0$ (2.2), obtenemos

$$V(0) = \frac{1}{(1+r)^3}\tilde{E}(V(3)) = \frac{20}{21}\tilde{E}\left((\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} S_j - 100)^+\right) = 11{,}17$$

Observemos que esta opción es mucho mas cara que la opción barrera y la opción lookback, debido a que ésta considera un promedio del precio del activo y así disminuye el riesgo.

Una vez más, comenzamos con un movimiento geométrico browniano $S(t)$ dado por

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)d\tilde{W}(t), \tag{4.48}$$

donde $\tilde{W}(t)$, $0 \leq t \leq T$, es un movimiento browniano sobre la medida de riesgo-neutral $\tilde{P}$. Consideremos una call asiática con strike fijo cuyo payoff en tiempo T es

$$V(T) = (\frac{1}{T}\int_0^T S(t)dt - K)^+, \tag{4.49}$$

donde el precio strike K es una constante no negativa. El precio en los tiempos t antes del tiempo de expiración T de esta call está dado por la fórmula de valuación de riesgo-neutral

$$V(t) = \tilde{E}(e^{-r(T-t)}V(T)|\mathcal{F}(t)), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{4.50}$$

El argumento usual de condicionamiento iterado muestra que

$$e^{-rt}V(t) = \tilde{E}(e^{-rT}V(T)|\mathcal{F}(t)), \qquad 0 \leq t \leq T,$$

es una martingala sobre $\tilde{P}$. Esta es la cantidad que deseamos calcular. A continuación, describiremos dos diferentes maneras de calcular esto.

El payoff de la opción asiática $V(T)$ en (4.49) es *camino-dependiente*. El precio de la opción en tiempo t depende no sólo de t y $S(t)$, sino también del camino que el precio del activo ha seguido hasta el tiempo t. En particular, no podemos invocar la propiedad de Markov para decir que $V(t)$ es una función de t y $S(t)$ debido a que $V(T)$ no es una función de T y $S(T)$; $V(T)$ depende del camino total de S.

Para superar esta dificultad definimos un segundo proceso

$$Y(t) = \int_0^t S(u)du \tag{4.51}$$

La ecuación diferencial estocástica para $Y(t)$ es entonces

$$dY(t) = S(t)dt. \tag{4.52}$$

Debido a que el par de procesos $(S(t), Y(t))$ está gobernado por el par de ecuaciones diferenciales estocásticas (4.48) y (4.52), ellos constituyen un proceso de Markov bidimensional (Teorema 3.2.15). Además, el payoff de la call $V(T)$ es una función de T y del valor final $(S(T), Y(T))$ de este proceso. De hecho, $V(T)$ depende sólo de T y de $Y(T)$, por la fórmula

$$V(T) = (\frac{1}{T}Y(T) - K)^+. \tag{4.53}$$

Esto implica que debe existir alguna función $v(t,x,y)$ tal que el precio de la call asiática (4.50) esté dado por

$$\begin{aligned} v(t,S(t),Y(t)) &= E(e^{-r(T-t)}(\frac{1}{T}Y(T)-K)^{+}|\mathcal{F}(t)) \\ &= E(e^{-r(T-t)}V(T)|\mathcal{F}(t)) \end{aligned} \tag{4.54}$$

La función $v(t,x,y)$ satisface una ecuación diferencial parcial. En el próximo teorema proveeremos esta ecuación y tres condiciones de contorno. Sin embargo, para resolver numéricamente esta ecuación, normalmente sería necesario también especificar el comportamiento de $v(t,x,y)$ cuando x se acerca a ∞ e y se acerca a ∞ o $-\infty$.

Teorema 4.3.2. *La función del precio de la call asiática $v(t,x,y)$ de (4.54) satisface la ecuación diferencial parcial*

$$v_t(t,x,y)+rxv_x(t,x,y)+xv_y(t,x,y)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2v_{xx}(t,x,y)=rv(t,x,y) \qquad 0\leq t<T, x\geq 0, y\in\mathbb{R}, \tag{4.55}$$

y las condiciones de contorno

$$v(t,0,y)=e^{-r(T-t)}(\frac{y}{T}-K)^{+}, \qquad 0\leq t<T, y\in\mathbb{R}, \tag{4.56}$$

$$\lim_{y\downarrow-\infty} v(t,x,y)=0, \qquad 0\leq t<T, x\geq 0, \tag{4.57}$$

$$v(T,x,y)=(\frac{y}{T}-K)^{+}, \qquad x\geq 0, y\in\mathbb{R}. \tag{4.58}$$

Demostración. Usando las ecuaciones diferenciales estocásticas (4.48) y (4.52) y notando que $dS(t)dY(t) = dY(t)dY(t) = 0$, tomamos el diferencial de la $\tilde{P}$- martingala $e^{-rt}V(t) = e^{-rt}V(t,S(t),Y(t))$. Este diferencial es

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}v(t,S(t),Y(t))) &= e^{-rt}[-rvdt+v_tdt+v_xdS+v_ydY+\frac{1}{2}v_{xx}dSdS] \\ &= e^{-rt}[-rv+v_t+rSv_x+Sv_y+\frac{1}{2}\sigma^2S^2v_{xx}]dt+e^{-rt}\sigma Sv_xd\tilde{W}(t). \end{aligned} \tag{4.59}$$

Para que esto sea una martingala, el término dt debe ser cero, lo cual implica

$$\begin{aligned} rv(t,S(t),Y(t)) = v_t(t,S(t),Y(t)) + rS(t)v_x(t,S(t),Y(t)) + S(t)v_y(t,S(t),Y(t)) \\ + \frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 v_{xx}(t,S(t),Y(t)). \end{aligned}$$

Reemplazando $S(t)$ por la variable x e $Y(t)$ por la variable y, obtenemos (4.55).

Notemos que $S(t)$ debe ser siempre no negativa, y entonces (4.54) ocurre para $x \geq 0$. Si $S(t) = 0$ e $Y(t) = y$ para algún valor de t, entonces $S(u) = 0$ para todo $u \in [t,T]$, y entonces $Y(u)$ es constante en $[t,T]$. Por lo tanto, $Y(T) = y$, y el valor de la call asiática en tiempo t es $(\frac{y}{T} - K)^+$, descontado desde T hacia t. Esto nos da la condición de contorno (4.56).

En contraste, este no es el caso que si $Y(t) = 0$ para algún tiempo t, entonces $Y(u) = 0$ para todo $u \geq 0$. Por lo tanto, no podemos fácilmente determinar el valor de $v(t,x,0)$, y no proveemos una condición en el contorno $y = 0$. En efecto, al menos matemáticamente no hay problema en permitir a y ser negativa. Si en tiempo t tomamos $Y(t) = y$, entonces $Y(T)$ está definida por (4.52). En forma integral, esta fórmula es

$$Y(T) = y + \int_t^T S(u)du. \tag{4.60}$$

Aún si y es negativo, esto tiene sentido, y en este caso podríamos tener $Y(T) > 0$ o aún $\frac{1}{T}Y(T) - K > 0$, tal que la call expira in the money. Cuando usamos las ecuaciones diferenciales (4.48) y (4.52) para describir el “ estado ” de los procesos $S(t)$ e $Y(t)$, no hay razón para requerir que $Y(t)$ sea no negativa (todavía pedimos que $S(t)$ sea no negativo debido a que $x = 0$ es un contorno natural para $S(t)$). Por esta razón, no restringimos los valores de y en la ecuación diferencial parcial (4.55). El contorno natural para y es $y = -\infty$. Si $Y(t) = y$, $S(t) = x$, y teniendo x fijo hacemos tender $y \to -\infty$, entonces $Y(T)$ se acerca a $-\infty$ (ver (4.60)), la probabilidad que la call expire in the money se acerca a cero, y el precio de la opción se acerca a cero. El contorno natural para y es $y = -\infty$, y la condición de contorno allí es (4.57).

La condición de contorno (4.58) es exactamente el payoff de la call. $\square$

Nota 4.3.3. Después de tomar el término dt en (4.59) igual a cero, vemos que

$$d(e^{-rt}v(t,S(t),Y(t))) = e^{-rt}\sigma S(t)v_x(t,S(t),Y(t))d\tilde{W}(t). \tag{4.61}$$

El valor descontado de un portfolio que en cada tiempo t toma $\Delta(t)$ acciones del activo subyacente está dado por

$$d(e^{-rt}X(t)) = e^{-rt}\sigma S(t)\Delta(t)d\tilde{W}(t). \tag{4.62}$$

Para hedgear una posición short en la call asiática, un agente debe igualar esas dos diferenciales, lo cual conduce a la fórmula

$$\Delta(t) = v_x(t,S(t),Y(t)).$$

Ahora presentamos una ecuación diferencial parcial cuya solución conduce al precio de la opción asiática. Trabajamos esto sobre ambos promedios: continuo y discreto. La derivación de esta ecuación involucra un *cambio de numeración*(ver [1], Cap. 9). Derivamos fórmulas sobre la suposición que la tasa de interés r no es cero.

Primero consideremos el caso de una call asiática con payoff

$$V(T) = (\frac{1}{c}\int_{T-c}^{T} S(t)dt - K)^+, \tag{4.63}$$

donde c es una constante que satisface $0 < c \leq T$ y K es una constante no negativa. Si $c = T$, ésta es la call asiática (4.49). Aquí también admitimos la posibilidad de que el promedio sea sobre un intervalo de tiempo menor que el intervalo de tiempo total entre la iniciación y la expiración de la call.

Para valuar esta call, creamos un proceso de portfolio cuyo valor en tiempo T es

$$X(T) = \frac{1}{c}\int_{T-c}^{T} S(u)du - K.$$

Comenzamos con una función del tiempo no aleatoria $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq T$, la cual será el número de acciones del activo tomadas por nuestro portfolio. No habrá términos de movimiento browniano en $\gamma(t)$, y debido a esto se cumplirá $d\gamma(t)d\gamma(t)$ = $d\gamma(t)dS(t)$ = 0. Esto implica que

$$d(\gamma(t)S(t)) = \gamma(t)dS(t) + S(t)d\gamma(t), \tag{4.64}$$

lo cual además implica

$$\begin{aligned} d(e^{r(T-t)}\gamma(t)S(t)) &= e^{r(T-t)}d(\gamma(t)S(t)) - re^{r(T-t)}\gamma(t)S(t)dt \\ &= e^{r(T-t)}\gamma(t)dS(t) + e^{r(T-t)}S(t)d\gamma(t) - re^{r(T-t)}\gamma(t)S(t)dt. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Reordenando los términos en (4.65), obtenemos

$$e^{r(T-t)}\gamma(t)(dS(t) - rS(t)dt) = d(e^{r(T-t)}\gamma(t)S(t)) - e^{r(T-t)}S(t)d\gamma(t). \tag{4.66}$$

Un agente que toma $\gamma(t)$ acciones del activo en cada tiempo t y financia esto invirtiendo o pidiendo prestado a la tasa de interés r tendrá un portfolio cuyo valor evoluciona de acuerdo a la ecuación

$$\begin{aligned} dX(t) &= \gamma(t)dS(t) + r(X(t) - \gamma(t)S(t))dt \\ &= rX(t)dt + \gamma(t)(dS(t) - rS(t)dt). \end{aligned} \tag{4.67}$$

Usando esta ecuación y (4.66), obtenemos

$$\begin{aligned} d(e^{r(T-t)}X(t)) &= -re^{r(T-t)}X(t)dt + e^{r(T-t)}dX(t) \\ &= e^{r(T-t)}\gamma(t)(S(t) - rS(t)dt) \\ &= d(e^{r(T-t)}\gamma(t)S(t)) - e^{r(T-t)}S(t)d\gamma(t). \end{aligned} \tag{4.68}$$

Para estudiar la call asiática con payoff (4.63), tomamos $\gamma(t)$ de la siguiente manera

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{1}{rc}(1 - e^{-rc}), & 0 \leq t \leq T - c; \\ \frac{1}{rc}(1 - e^{-r(T-t)}), & T - c \leq t \leq T\ , \end{cases} \tag{4.69}$$

y tomamos el capital inicial como

$$X(0) = \frac{1}{rc}(1 - e^{-rc})S(0) - e^{-rT}K. \tag{4.70}$$

En el intervalo de tiempo $[0, T-c]$, el proceso $\gamma(t)$ gobierna la siguiente estrategia: en tiempo cero, compramos $\frac{1}{rc}(1 - e^{-rc})$ acciones del activo, cuyo valor es $\frac{1}{rc}(1 - e^{-rc})S(0)$. Nuestro capital inicial es insuficiente para hacer esto, y debemos pedir prestado una cantidad $e^{-rT}K$ de dinero. Para $0 \leq t \leq T - c$, el valor de nuestra posición en el activo es $\frac{1}{rc}(1 - e^{-rc})S(t)$ y debemos la cantidad de dinero $e^{-r(T-t)}K$. Por lo tanto,

$$X(t) = \frac{1}{rc}(1 - e^{-rc})S(t) - e^{-r(T-t)}K, \qquad 0 \leq t \leq T - c. \tag{4.71}$$

En particular,

$$X(T-c) = \frac{1}{rc}(1 - e^{-rc})S(T-c) - e^{-rc}K. \tag{4.72}$$

Para $T - c \leq t \leq T$, tenemos $d\gamma(t) = -\frac{1}{c}e^{-r(T-t)}dt$ y calculamos $X(t)$ primero integrando en (4.68) desde $T - c$ a t y usando (4.72) y (4.69) para obtener

$$\begin{aligned}
e^{r(T-t)}X(t) &= e^{rc}X(T-c) + \int_{T-c}^{t} d(e^{r(T-u)}\gamma(u)S(u)) - \int_{T-c}^{t} e^{r(T-u)}S(u)d\gamma(u) \\
&= \frac{1}{rc}e^{rc}(1 - e^{-rc})S(T-c) - K + e^{r(T-t)}\gamma(t)S(t) \\
&\quad - \frac{1}{rc}e^{rc}(1 - e^{-rc})S(T-c) + \frac{1}{c}\int_{T-c}^{t} S(u)d(u) \\
&= -K + e^{r(T-t)}\gamma(t)S(t) + \frac{1}{c}\int_{T-c}^{t} S(u)d(u).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X(t) = \frac{1}{rc}(1 - e^{-r(T-t)})S(t) + e^{-r(T-t)}\frac{1}{c}\int_{T-c}^{t} S(u)d(u) - e^{-r(T-t)}K, \qquad T - c \leq t \leq T. \tag{4.73}$$

En particular,

$$X(T) = \frac{1}{c}\int_{T-c}^{T} S(u)d(u) - K, \tag{4.74}$$

como deseábamos, y

$$V(T) = X^{+}(T) = \max\{X(T), 0\}. \tag{4.75}$$

El precio de la call asiática en tiempo t antes del tiempo de expiración es

$$V(t) = \tilde{E}(e^{-r(T-t)}V(T)|\mathcal{F}(t)) = \tilde{E}(e^{-r(T-t)}X^{+}(T)|\mathcal{F}(t)). \tag{4.76}$$

El cálculo del lado derecho de (4.76) usa un argumento de cambio-de-numeración, el cual ahora explicamos. Definamos

$$Y(t) = \frac{X(t)}{S(t)} = \frac{e^{-rt}X(t)}{e^{-rt}S(t)}.$$

Este es el valor del portfolio valuado en unidades del activo en lugar de unidades monetarias. Hemos cambiado la numeración, la unidad monetaria al activo.

Trabajemos sobre la diferencial de $Y(t)$. Notemos primero que

$$d(e^{-rt}S(t)) = -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}dS(t) = \sigma e^{-rt}S(t)d\tilde{W}(t). \tag{4.77}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d[(e^{-rt}S(t))^{-1}] &= -(e^{-rt}S(t))^{-2}d(e^{-rt}S(t)) + (e^{-rt}S(t))^{-3}d(e^{-rt}S(t))d(e^{-rt}S(t)) \\ &= -(e^{-rt}S(t))^{-2}\sigma(e^{-rt}S(t))d\tilde{W}(t) + (e^{-rt}S(t))^{-3}(e^{-rt}S(t))^2\sigma^2 dt \\ &= -\sigma(e^{-rt}S(t))^{-1}d\tilde{W}(t) + \sigma^2(e^{-rt}S(t))^{-1}dt. \end{aligned}$$

Por otro lado, (4.67) y (4.77) implican

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}X(t)) &= -re^{-rt}X(t)dt + e^{-rt}dX(t) \\ &= \gamma(t)e^{-rt}(dS(t) - rS(t))dt \\ &= \gamma(t)\sigma e^{-rt}S(t)d\tilde{W}(t). \end{aligned}$$

La regla producto de Itô implica

$$\begin{aligned} dY(t) &= d[(e^{-rt}X(t))(e^{-rt}S(t))^{-1}] \\ &= e^{-rt}X(t)d[(e^{-rt}S(t))^{-1}] + (e^{-rt}S(t))^{-1}d(e^{-rt}X(t)) + d(e^{-rt}X(t))d[(e^{-rt}S(t))^{-1}] \\ &= -\sigma Y(t)d\tilde{W}(t) + \sigma^2 Y(t)dt + \sigma\gamma(t)d\tilde{W}(t) - \sigma^2\gamma(t)dt \\ &= \sigma[\gamma(t) - Y(t)][d\tilde{W}(t) - \sigma dt]. \end{aligned} \tag{4.78}$$

El proceso $Y(t)$ no es una martingala sobre $\tilde{P}$ debido a que su diferencial (4.78) tiene un término dt. Sin embargo, podemos hacer un cambio de medida de modo que $Y(t)$ sea una martingala, y así se simplifique (4.78). Tomemos

$$\tilde{W}^S(t) = \tilde{W}(t) - \sigma t \tag{4.79}$$

de esta forma obtenemos

$$dY(t) = \sigma[\gamma(t) - Y(t)]d\tilde{W}^S(t). \tag{4.80}$$

Según el Teorema de Girsanov's, Teorema A.0.12(ver Apéndice) podemos hacer un cambio de medida tal que $\tilde{W}^S(t)$, $0 \leq t \leq T$, sea un movimiento browniano. En esta situación, $-\sigma$ juega el rol de Θ en el Teorema A.0.12, y $\tilde{W}$ y $\tilde{P}$ juegan los roles de W y P. El proceso derivado Radon-Nikodým de A.1 en el Teorema A.0.12 es

$$Z(t) = \exp\{\sigma\tilde{W}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}.$$

En otras palabras,

$$Z(t) = \frac{e^{-rt}S(t)}{S(0)}. \tag{4.81}$$

Sobre la medida de probabilidad $\tilde{P}^S$ definida por

$$\tilde{P}^S(A) = \int_A Z(T)d\tilde{P} \qquad \forall A \in \mathcal{F},$$

$\tilde{W}^S(t)$ es un movimiento browniano e $Y(t)$ es una martingala.

Sobre la medida de probabilidad $\tilde{P}^S$, el proceso $Y(t)$ es de Markov. Esto se da por la ecuación diferencial estocástica (4.80) y, debido a que $\gamma(t)$ es no aleatoria, el término que multiplica a $d\tilde{W}^S(t)$ en (4.80) es una función de t e $Y(t)$ y no tiene otra fuente de aleatoriedad más que $Y(t)$. La ecuación (4.80) es una ecuación diferencial estocástica del tipo (4.31) del capítulo 3, y soluciones de tales ecuaciones son de Markov (ver Teorema 3.2.15).

Ahora volvemos al precio de la opción $V(t)$ de (4.76) y usamos el Lema A.0.11 (ver Apéndice) para escribir (4.76) como

$$\begin{aligned} V(t) &= e^{rt}\tilde{E}(e^{-rT}X^+(T)|\mathcal{F}(t)) \\ &= \frac{S(t)}{e^{-rt}S(t)}\tilde{E}(e^{-rT}S(T)(\frac{e^{-rT}X(T)}{e^{-rT}S(T)})^+(T)|\mathcal{F}(t)) \\ &= \frac{S(t)}{Z(t)}\tilde{E}(Z(T)Y^+(T)|\mathcal{F}(t)) \\ &= S(t)\tilde{E}^S(Y^+(T)|\mathcal{F}(t)), \end{aligned} \tag{4.82}$$

donde $\tilde{E}^S(...|\mathcal{F}(t))$ denota esperanza condicional sobre la medida de probabilidad $\tilde{P}^S$. Debido a que Y es de Markov sobre $\tilde{P}^S$, debe existir alguna función $g(t,y)$ tal que

$$g(t,Y(t)) = \tilde{E}^S(Y^+(T)|\mathcal{F}(t)). \tag{4.83}$$

De (4.83), vemos que

$$g(T,Y(T)) = \tilde{E}^S(Y^+(T)|\mathcal{F}(T)) = Y^+(T). \tag{4.84}$$

Notemos que $Y(T) = \frac{X(T)}{S(T)}$ puede tomar cualquier valor debido a que el numerador $X(T)$, dado por (4.74), puede ser negativo o positivo, y el denominador $S(T)$ puede ser cualquier número positivo. Por lo tanto, (4.84) conduce a la condición de contorno

$$g(T,y) = y^+, \qquad y \in \mathbb{R}. \tag{4.85}$$

El argumento usual de condicionamiento iterado muestra que el lado derecho de (4.83) es una martingala sobre $\tilde{P}^S$, y entonces el diferencial de $g(t,Y(t))$ debe tener sólo un término $d\tilde{W}^S(t)$. Este diferencial es

$$\begin{aligned} dg(t,Y(t)) &= g_t(t,Y(t))dt + g_y(t,Y(t))dY(t) + \frac{1}{2}g_{yy}(t,Y(t))dY(t)dY(t) \\ &= [g_t(t,Y(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(\gamma(t) - Y(t))^2 g_{yy}(t,Y(t))]dt + \sigma(\gamma(t) - Y(t))g_y(t,Y(t))d\tilde{W}^S(t). \end{aligned}$$

Concluimos que $g(t,y)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$g_t(t,y) + \frac{1}{2}\sigma^2(\gamma(t) - y)^2 g_{yy}(t,y) = 0, \qquad 0 \le t < T, y \in \mathbb{R}. \tag{4.86}$$

Resumimos este análisis con el siguiente teorema:

Teorema 4.3.4. *(Večeř) Para $0 \le t \le T$, el precio $V(t)$ en tiempo t de la call asiática con promedio continuo con payoff (4.63) en tiempo T es*

$$V(t) = S(t)g(t, \frac{X(t)}{S(t)}), \tag{4.87}$$

donde $g(t, y)$ satisface (4.86) y $X(t)$ está dado por (4.71) y (4.73). Las condiciones de contorno para $g(t, y)$ son (4.85) y

$$\lim_{y \to -\infty} g(t, y) = 0, \qquad \lim_{y \to \infty} [g(t, y) - y] = 0, \qquad 0 \le t \le T. \tag{4.88}$$

Nota 4.3.5. *(Condiciones de Contorno)*: Sea $0 \le t \le T$ dado. La primera condición de contorno en (4.88) se puede derivar del hecho que cuando $Y(t)$ es muy negativo, la probabilidad que $Y(T)$ también sea negativo está cerca de uno y por lo tanto la probabilidad que $Y^+(T) = 0$ se acerca a uno. Esto hace que $g(t, Y(t))$ dada por (4.83) se acerque a cero. La segunda condición de contorno en (4.88) es una consecuencia del hecho que cuando $Y(t)$ es grande, la probabilidad que $Y(T)$ mayor que cero se acerca a uno. Por lo tanto, $g(t, Y(t))$ dado por (4.83) es aproximadamente igual a $\tilde{E}^S(Y(T)|\mathcal{F}(t))$, y debido a que $Y(T)$ es una martingala sobre $\tilde{P}^S$, esta esperanza condicional es $Y(t)$.

Es más fácil derivar esas condiciones de contorno en $y = \pm\infty$ para $g(t, y)$ que derivar las condiciones de contorno para $v(t, x, y)$ en el Teorema 4.3.2 debido a que $v(t, x, y)$ tiene dos variables, x e y, que pueden resultar grandes. Por ejemplo, no es del todo claro como se comporta $v(t, x, y)$ cuando $x \to \infty$ e $y \to -\infty$. La reducción del problema de valuar una opción asiática proporcionada por el Teorema 4.3.44.3.4 reduce la dimensionalidad del problema y simplifica las condiciones de contorno. También remueve una degeneración en la ecuación (4.54) creada por la ausencia del término $v_{yy}(t, x, y)$. Esta degeneración complica la solución numérica de (4.54).

En el resto de esta sección, adaptaremos los argumentos dados hasta aquí para tratar una *call asiática con promedio discreto*. Supongamos que damos los tiempos $0 = t_0 < t_1 < t_2 ... < t_m = T$ y el payoff de la call asiática es

$$V(T) = (\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} S(t_j) - K)^+. \tag{4.89}$$

Lo que nosotros deseamos es crear un proceso de portfolio tal que

$$X(T) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} S(t_j) - K.$$

En lugar de (4.69), definimos

$$\gamma(t_j) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} e^{-r(T-t_j)}, \qquad j = 0, 1, ..., m. \tag{4.90}$$

Entonces

$$\gamma(t_j) = \gamma(t_{j-1}) - \frac{1}{m} e^{-r(T-t_j)}, \qquad j = 0, 1, ..., m, \tag{4.91}$$

y $\gamma(T) = \gamma(t_m) = \frac{1}{m}$. Completamos la definición de $\gamma(t)$ poniendo

$$\gamma(t) = \gamma(t_j), \qquad t_{j-1} < t \leq t_j. \tag{4.92}$$

Esto define a $\gamma(t)$ para todo $t \in [0, T]$. En esta situación, (4.68) sigue ocurriendo, pero ahora $d\gamma(t) = 0$ en cada subintervalo (t_{j-1}, t_j). Integrando (4.68) desde t_{j-1} hasta t_j, usando (4.91) y el hecho que $\gamma(t) = \gamma(t_j)$ para $t \in (t_{j-1}, t_j]$, obtenemos

$$\begin{aligned} e^{r(T-t_j)} X(t_j) - e^{r(T-t_{j-1})} X(t_{j-1}) &= \gamma(t_j)[e^{r(T-t_j)} S(t_j) - e^{r(T-t_{j-1})} S(t_{j-1})] \\ &= \gamma(t_j) e^{r(T-t_j)} S(t_j) - (\gamma(t_{j-1}) - \frac{1}{m} e^{r(T-t_{j-1})}) e^{r(T-t_{j-1})} S(t_{j-1}) \\ &= \gamma(t_j) e^{r(T-t_j)} S(t_j) - \gamma(t_{j-1}) e^{r(T-t_{j-1})} S(t_{j-1}) + \frac{1}{m} S(t_{j-1}). \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones desde $j = 1$ hasta $j = k$, vemos que

$$\begin{aligned} e^{r(T-t_k)} X(t_k) - e^{rT} X(0) &= \gamma(t_k) e^{r(T-t_k)} S(t_k) - \gamma(0) e^{rT} S(0) + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{k} S(t_{j-1}) \\ &= \gamma(t_k) e^{r(T-t_k)} S(t_k) + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k-1} S(t_i) + (-\gamma(0) e^{rT} + \frac{1}{m}) S(0). \end{aligned}$$

Ahora tomamos

$$X(0) = e^{-rT}[\gamma(0) e^{rT} - \frac{1}{m}] S(0) - e^{rT} K,$$

entonces esta ecuación resulta

$$e^{r(T-t_k)}X(t_k) = \gamma(t_k)e^{r(T-t_k)}S(t_k) + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k-1} S(t_i) - K$$

ó, equivalentemente,

$$X(t_k) = \gamma(t_k)S(t_k) + e^{-r(T-t_k)}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k-1} S(t_i) - e^{-r(T-t_k)}K. \tag{4.93}$$

En particular,

$$X(T) = X(t_m) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k-1} S(t_i) - K \tag{4.94}$$

como deseábamos.

Para determinar $X(t)$ para $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, integramos (4.68) desde t_k hasta t y obtenemos

$$\begin{aligned}
e^{r(T-t)}X(t) &= e^{r(T-t_k)}X(t_k) + \gamma(t_{k+1})[e^{r(T-t)}S(t) - e^{r(T-t_k)}S(t_k)] \\
&= \gamma(t_k)e^{r(T-t_k)}S(t_k) + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k-1} S(t_i) - K + \gamma(t_{k+1})e^{r(T-t)}S(t) \\
&\quad - (\gamma(t_k) - \frac{1}{m}e^{-r(T-t_k)})e^{r(T-t_k)}S(t_k) \\
&= \gamma(t_{k+1})e^{r(T-t)}S(t) + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} S(t_i) - K.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X(t) = \gamma(t_{k+1})S(t) + e^{-r(T-t)}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k} S(t_i) - e^{-r(T-t)}K, \qquad t_k \leq t \leq t_{k+1}. \tag{4.95}$$

Ahora procederemos con el cambio de numeración como antes. Esto nos conduce otra vez al Teorema 4.3.4 para la call asiática con promedio discreto con payoff (4.89).

El precio en tiempo t está dado por (4.87), donde $g(t,x)$ satisface (4.86) con condiciones de contorno (4.85) y (4.88). La única diferencia es que ahora la función no aleatoria $\gamma(t)$ que aparece en (4.86) está dada por (4.90) y (4.92) y el proceso $X(t)$ en (4.87) está dado por (4.95).

Capítulo 5

Ejercicios

Los ejercicios que desarrollaremos en este apartado muestran que las fórmulas de valuación obtenidas para las opciones exóticas del tipo barrera y lookback, son soluciones de la ecuación diferencial obtenida en el capítulo 4. También, en el último ejercicio, calculamos explícitamente el valor de una call asiática con strike cero.

Comenzamos con el caso de una opción call barrera de tipo up and out.

Ejercicio 1 Este ejercicio muestra por cálculo directo que la función $v(t, x)$ de (4.18) satisface la ecuación B-S-M (4.3). Desarrollamos la prueba a través de los siguientes pasos:

i) Recordemos que $\tau = T - t$, entonces $\dfrac{d\tau}{dt}$ = -1. Mostremos que $\delta_\pm(\tau, s)$ usado en el cálculo de $v(t, x)$ satisface

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta_\pm(\tau, s) = -\frac{1}{2\tau}\delta_\pm\left(\tau, \frac{1}{s}\right) \tag{5.1}$$

De (4.16) sabemos que $\delta_{\pm}(\tau,s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln(s) + \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\delta_{\pm}(\tau,s) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}}(-1)\frac{1}{\sigma}\ln(s) + \frac{1}{2}\frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}}}(-1)\frac{1}{\sigma}\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\\ &= \left(-\frac{1}{2\tau}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{1}{\sigma}\ln(s^{-1}) + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\tau}\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right]\\ &= -\frac{1}{2\tau}\delta_{\pm}\left(\tau,\frac{1}{s}\right)\end{aligned}$$

ii) Sea c una constante positiva, entonces se cumple que,

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta_{\pm}\left(\tau,\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\delta_{\pm}\left(\tau,\frac{c}{x}\right) = -\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} \tag{5.2}$$

En efecto, sabemos que $\delta_{\pm}\left(\tau,\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\ln(\frac{x}{c}) + \tau\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right]$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta_{\pm}(\tau,\frac{x}{c}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{c}{x}\frac{1}{c} = \frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Además, $\delta_{\pm}\left(\tau,\frac{c}{x}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\ln\left(\frac{c}{x}\right) + \tau\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right]$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta_{\pm}\left(\tau,\frac{c}{x}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{x}{c}c\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}.$$

***iii*)** Probemos ahora que $\dfrac{N'(\delta_+(\tau,s))}{N'(\delta_-(\tau,s))} = \dfrac{e^{-r\tau}}{s}$ y entonces

$$e^{-r\tau}N'(\delta_-(\tau,s)) = sN'(\delta_+(\tau,s)) \tag{5.3}$$

Tenemos que $N(\delta_{\pm}(\tau,s)) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\delta_{\pm}(\tau,s)} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$, por lo tanto

$$N'(\delta_{\pm}(\tau,s)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\delta_{\pm}(\tau,s))^2}$$

Primero calculemos:

$$\begin{aligned}
\delta_-(\tau,s)^2-\delta_+(\tau,s)^2 &= \frac{1}{\sigma^2\tau}[\left(\ln(s)^2+2\ln(s)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2\tau^2\right)\\
&\qquad -\left(\ln(s)^2+2\ln(s)\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2\tau^2\right)]\\
&= \frac{1}{\sigma^2\tau}(2\ln(s)r\tau-\ln(s)\sigma^2\tau+\sigma^2\tau^2-r\sigma^2\tau^2+\frac{1}{4}\sigma^4\tau^2\\
&\qquad -2\ln(s)r\tau-\ln(s)\sigma^2\tau-r^2\tau^2-r\sigma^2\tau^2-\frac{1}{4}\sigma^2\tau^2)\\
&= \frac{1}{\sigma^2\tau}\left(-2\ln(s)\sigma^2\tau-2r\sigma^2\tau^2\right)\\
&= -2\ln(s)-2r\tau.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{N'(\delta_+(\tau,s))}{N'(\delta_-(\tau,s))} &= e^{-\frac{1}{2}(\delta_+(\tau,s))^2}e^{\frac{1}{2}(\delta_-(\tau,s))^2}\\
&= e^{\frac{1}{2}(\delta_-(\tau,s)^2-\delta_+(\tau,s)^2)}\\
&= e^{\frac{1}{2}(-2\ln(s)-2r\tau)}\\
&= \frac{e^{-r\tau}}{s}
\end{aligned}$$

iv) Mostremos que $\dfrac{N'(\delta_\pm(\tau,s))}{N'(\delta_\pm(\tau,s^{-1}))}=s^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}\pm1\right)}$ y entonces,

$$N'(\delta_\pm\left(\tau,s^{-1}\right))=s^{\left(\frac{2r}{\sigma^2}\pm1\right)}N'(\delta_\pm(\tau,s)) \tag{5.4}$$

Primero calculemos:

$$
\begin{aligned}
\delta_{\pm}(\tau, s^{-1})^2 - \delta_{\pm}(\tau, s)^2 = \frac{1}{\sigma^2\tau}\big(&\ln(s^{-1})^2 + 2\ln s^{-1}\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2\tau^2 \\
&- \ln s^2 - 2\ln(s)\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau - \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2\tau^2\big) \\
= \frac{1}{\sigma^2\tau}&\left((-\ln(s))^2 - 2\ln(s)\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau - \ln s^2 - 2\ln(s)\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right) \\
= -\frac{4}{\sigma^2}&\ln(s)\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right).
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\frac{N'(\delta_{\pm}(\tau, s))}{N'(\delta_{-}(\tau, s^{-1}))} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\delta_{\pm}(\tau, s))^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\delta_{\pm}(\tau, s^{-1}))^2}} \\
&= e^{\frac{1}{2}(\delta_{\pm}(\tau, s^{-1})^2 - \delta_{\pm}(\tau, s)^2)} \\
&= e^{\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\sigma^2}\ln(s)\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right)} \\
&= s^{-\frac{2}{\sigma^2}\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)} \\
&= s^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2} \pm 1\right)}
\end{aligned}
$$

v) Vemos ahora que

$$
\delta_{+}(\tau, s) - \delta_{-}(\tau, s) = \sigma\sqrt{\tau} \tag{5.5}
$$

$$\begin{aligned}
\delta_+(\tau,s)-\delta_-(\tau,s) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\left(\ln(s)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right)-\left(\ln s+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right)\right]\\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]\\
&= \sigma\sqrt{\tau}.
\end{aligned}$$

vi) Ahora mostramos que

$$\delta_\pm(\tau,s)-\delta_\pm(\tau,s^{-1}) = \frac{2}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln(s) \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
\delta_\pm(\tau,s)-\delta_\pm(\tau,s^{-1}) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\left(\ln(s)+\left(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right)-\left(\ln s^{-1}+\left(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right)\right]\\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}(\ln(s)+\ln(s))\\
&= \frac{2\ln(s)}{\sigma\sqrt{\tau}}
\end{aligned}$$

vii) Vemos ahora que $N(y)$ satisface la ecuación

$$N''(y) = -yN'(y) \tag{5.7}$$

Sabemos que $N'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
N''(y) &= -\frac{1}{2}2y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}\\
&= -N'(y)
\end{aligned}$$

viii) Usamos ***i)*** para calcular $v_t(t,x)$ y (5.3)-(5.5) para simplificarlo.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
v(t,x) = x &\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&- e^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&- B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&+ e^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 0\le t<T, \qquad 0<x\le B,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = x &\left[N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_+\left(\tau,\frac{K}{x}\right) - N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right]\\
&- re^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&- e^{-r\tau}K\left[N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_-\left(\tau,\frac{K}{x}\right) - N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right]\\
&- B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_+\left(\tau,\frac{Kx}{B^2}\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left. - N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right]\\
&+ re^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&+ e^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_-\left(\tau,\frac{Kx}{B^2}\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left. - N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x\left[N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_+\left(\tau,\frac{K}{x}\right)-N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right]\\
&\quad - re^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)-N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&\quad - e^{-r\tau}K\big[\frac{x}{K}e^{r\tau}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_-\left(\tau,\frac{K}{x}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{x}{B}e^{r\tau}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\big]\\
&\quad - B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\big[N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_+\left(\tau,\frac{Kx}{B^2}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\big]\\
&\quad + re^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&\quad + e^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\big[\frac{B^2}{Kx}e^{r\tau}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_-\left(\tau,\frac{Kx}{B^2}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{B}{x}e^{r\tau}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\big]\\
&= N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)x\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\sigma\sqrt{\tau}-N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\big[x\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{x}{B}K\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\big]\\
&\quad - re^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)-N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&\quad + re^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&\quad + N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\left(-\sigma\sqrt{\tau}\right)\\
&\quad + \left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\big[B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{x\sigma}{2\sqrt{\tau}} N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - re^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
&\quad + re^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&\quad + N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right)\frac{B\sigma}{2\sqrt{\tau}}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \\
&\quad - N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)\left[x\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B}{x}\right) - \delta_+\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right) + \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left. K\left(\frac{x}{B}\right)\left(-\frac{1}{2\tau}\right)\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{B}\right) - \delta_-\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&= -\frac{x\sigma}{2\sqrt{\tau}} N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - re^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
&\quad + re^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&\quad + N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right)\frac{B\sigma}{2\sqrt{\tau}}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} - N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)\ln\left(\frac{x}{B}\right)\frac{(B-K)x}{B\sigma\tau\sqrt{\tau}}.
\end{aligned}
$$

Donde en la primer igualdad usamos ***i)***, en la segunda igualdad usamos (5.3), en la tercera igualdad usamos (5.4) y (5.5), y en la cuarta usamos (5.6). Además, en la última igualdad usamos la definición de $\delta_\pm(\tau, s)$.

ix) Ahora usamos ***ii)***, (5.3) y (5.4) y así obtenemos una expresión para $v_x(t, x)$.

$$
\begin{aligned}
v_x(t,x) &= \left[N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
&\quad + x\left[N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right)\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} - N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\right] \\
&\quad - e^{-r\tau}K\left[N'\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right)\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} - N'\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&-B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\left(-\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\right)-N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right]\\
&+e^{-r\tau}\frac{K}{B}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&+e^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\left(-\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\right)-N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right]\\
=&\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)-N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&+\frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&+e^{-r\tau}\frac{K}{B}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&+\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)-\frac{e^{-r\tau}K}{x\sigma\sqrt{\tau}}N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)\right]\\
&+\left[\frac{e^{-r\tau}K}{x\sigma\sqrt{\tau}}N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)-\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&+\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\frac{B}{x}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-\frac{K}{B}e^{-r\tau}N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\right]\\
&+\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\frac{K}{B}e^{-r\tau}N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)-\frac{B}{x}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
=&\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)-N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&+\frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&+e^{-r\tau}\frac{K}{B}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&+\left[\frac{K}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{e^{-r\tau}}{x}N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)-\frac{e^{-r\tau}K}{x\sigma\sqrt{\tau}}N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[\frac{K}{B\sigma\sqrt{\tau}}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)-\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&+\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\frac{e^{-r\tau}K}{B}N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-\frac{Ke^{-r\tau}}{B}N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\right]\\
&+\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\frac{K}{x}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)-\frac{B}{x}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
=&\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)-N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&+\frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&+e^{-r\tau}\frac{K}{B}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&+\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\frac{K}{B}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)-N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&+\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}x}\left[K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)-B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
=&\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)-N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&+\frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&+e^{-r\tau}\frac{K}{B}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&-N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\frac{2(B-K)}{B\sigma\sqrt{\tau}}.
\end{aligned}
$$

En la primera igualdad usamos ***i)***, en la tercera igualdad usamos (5.3) y en la cuarta usamos (5.4) con $s^{-1}=\frac{B}{x}$.

x) Ahora calculamos $v_{xx}(t,x)$ usando ***ix)*** y (5.2). Además, usamos (5.3) y (5.4) para simplificarlo.

Sabemos por ejercicio anterior que

$$
\begin{aligned}
v_x(t,x) = &\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
&+ \frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&+ e^{-r\tau}\frac{K}{B}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&- N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\frac{2(B-K)}{B\sigma\sqrt{\tau}}.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
v_{xx}(t,x) = &\left[N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} - N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\right] \\
&+ \frac{2(B-K)}{B\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right) \\
&- \frac{2r}{B\sigma^2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+2\right)}\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&+ \frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\left[N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\left(-\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right. \\
&\left.- N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right] \\
&- \frac{e^{-r\tau}K}{B^2}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&+ \frac{e^{-r\tau}K}{B}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\left(-\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right. \\
&\left.- N'\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\left(-\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right] \\
= &N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} - N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} \\
&+ \frac{2(B-K)}{B\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\ln\left(\frac{x}{B}\right) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right) \\
&- \frac{2r}{B\sigma^2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+2\right)}\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - [\frac{2r}{x\sigma^3\sqrt{\tau}}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)} N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{e^{-r\tau}K}{Bx\sigma\sqrt{\tau}}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N'\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right)] \\
&\quad - \frac{e^{-r\tau}K}{B^2}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&\quad + [\frac{2r}{x\sigma^3\sqrt{\tau}}\left(\frac{x}{B}\right)^{\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)} N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{e^{-r\tau}K}{Bx\sigma\sqrt{\tau}}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N'\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)] \\
&= N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right)\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} \\
&\quad - \frac{2r}{B\sigma^2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+2\right)}\left[N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&\quad - \frac{e^{-r\tau}K}{B^2}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&\quad - \left[\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{2(B-K)}{B\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\ln\left(\frac{x}{B}\right) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]\right] N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right) \\
&\quad - \left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[\frac{2r}{x\sigma^3\sqrt{\tau}}\frac{B}{x}N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) + \left(\frac{K}{Bx\sigma\sqrt{\tau}}\right)\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\frac{B^2}{Kx}N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right)\right] \\
&\quad + \left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[\frac{2r}{x\sigma^3\sqrt{\tau}}\frac{B}{x}N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right) + \frac{K}{Bx\sigma\sqrt{\tau}}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\frac{B}{x}N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&= N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right)\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} \\
&\quad - \frac{2r}{B\sigma^2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+2\right)}\left[N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&\quad - \frac{e^{-r\tau}K}{B^2}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&\quad - \left[\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{2(B-K)}{Bx\sigma\sqrt{\tau}}\left[\frac{1}{\sigma^2\tau}\ln\left(\frac{x}{B}\right) + \frac{1}{\sigma^2}\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\right]\right] N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right) \\
&\quad - \left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\frac{B}{x^2\sigma\sqrt{\tau}}N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) + \left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[\frac{2r(B-K)}{x^2\sigma^3\sqrt{\tau}} + \frac{K}{x^2\sigma\sqrt{\tau}}\right] N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right)\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} \\
&\quad - \frac{2r}{B\sigma^2}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+2\right)}\left[N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&\quad - \frac{e^{-r\tau}K}{B^2}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
&\quad - \left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-2}\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}B}N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) \\
&\quad + \Big\{\frac{2r(B-K)}{x\sigma^3\sqrt{\tau}B} + \frac{K}{Bx\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{2(B-K)}{Bx\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{\sigma^2\tau}\ln\left(\frac{x}{B}\right) \\
&\quad + \frac{2(B-K)}{Bx\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{\sigma^2}\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Big\}N'\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Donde en la primer igualdad usamos (5.7), en la tercera usamos (5.3) y en la quinta (5.4) con $s = \frac{x}{B}$.

Resta ver que

$$
\frac{2r(B-K)}{x\sigma^3\sqrt{\tau}B} + \frac{K}{Bx\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{2(B-K)r}{Bx\sigma^3\sqrt{\tau}} + \frac{(B-K)}{Bx\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{2(B-K)}{Bx\sigma\sqrt{\tau}}\frac{2r}{\sigma^2}.
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
\frac{2r(B-K)}{x\sigma^3\sqrt{\tau}B} + \frac{K}{Bx\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{2(B-K)r}{Bx\sigma^3\sqrt{\tau}} + \frac{(B-K)}{Bx\sigma\sqrt{\tau}} &= \frac{4r(B-K)}{x\sigma^3\sqrt{\tau}B} + \frac{(K-B)}{Bx\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{(B-K)}{Bx\sigma\sqrt{\tau}} \\
&= \frac{4r(B-K)}{x\sigma^3\sqrt{\tau}B} \\
&= \frac{2(B-K)}{x\sigma\sqrt{\tau}B}\frac{2r}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

xi) Por último, verifiquemos que $v(t,x)$ satisface la ecuación de B-S-M (4.3)

La ecuación de B-S-M (4.3) es la siguiente:

$$
v_t(t,x) + rxv_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) = rv(t,x)
$$

Entonces, utilizando lo calculado en los ejercicios anteriores tenemos que

$$
\begin{aligned}
v_t(t,x)+rxv_x(t,x) &= -\frac{x\sigma}{2\sqrt{\tau}}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)\\
&\quad-\left[\ln\left(\frac{x}{B}\right)\frac{(B-K)\,x}{B\sigma\tau\sqrt{\tau}}+\frac{2rx(B-K)}{B\sigma\sqrt{\tau}}\right]N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\\
&\quad+\frac{B\sigma}{2\sqrt{\tau}}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\\
&\quad-re^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)-N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&\quad+rx\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)-N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&\quad+\frac{2r^2x}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&\quad+\left[re^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}+\frac{xre^{-r\tau}K}{B}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\right]\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\right.\\
&\quad\left.-N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&= -\frac{x\sigma}{2\sqrt{\tau}}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)+rx\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)-N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&\quad-\frac{(B-K)\,x}{B\sigma\tau\sqrt{\tau}}\left(\ln\left(\frac{x}{B}\right)+2r\tau\right)N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\\
&\quad+\frac{B\sigma}{2\sqrt{\tau}}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\\
&\quad-re^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)-N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right]\\
&\quad+\frac{2r^2x}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\
&\quad+re^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left(2-\frac{2r}{\sigma^2}\right)\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)-N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
rv(t,x) - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) = {} & rx\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
& - re^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
& - \left[rB\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} - \frac{rx^2}{B}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+2\right)}\right]\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\right. \\
& \left. - N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right] + \left[re^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\right. \\
& \left. + \frac{e^{-r\tau}K\sigma^2x^2}{2B^2}\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{x}{B}\right)^{-\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)}\right]\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\right. \\
& \left. - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right] - \frac{x^2\sigma^2}{2x\sigma\sqrt{\tau}}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right) \\
& + \left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-2}\frac{\sigma^2x^2}{2B\sigma\sqrt{\tau}}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) \\
& - \frac{(B-K)\sigma^2x^2}{x\sigma\sqrt{\tau}B}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma^2\tau}\ln\left(\frac{x}{B}\right)\right)N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right) \\
= {} & rx\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
& - re^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
& + \left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1}\left[\frac{B}{x}\frac{rx^2}{B}\left(\frac{2r}{\sigma^2}+1\right) - \left(\frac{x}{B}\right)rB\right]\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\right. \\
& \qquad \left. - N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
& + re^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[1+\left(-\frac{2r}{\sigma^2}+1\right)\right]\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right)\right. \\
& \qquad \left. - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
& - \frac{x\sigma}{2\sqrt{\tau}}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right) + \left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\frac{\sigma B}{2\sqrt{\tau}}N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) \\
& - \frac{(B-K)x}{\sigma\sqrt{\tau}B\tau}\left(2r\tau+\ln\left(\frac{x}{B}\right)\right)N'\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right) \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

Como se puede observar, los términos del lado derecho de (5.8) y (5.9) coinciden. Por lo tanto, (5.8) - (5.9)$=0$ y queda demostrado el ejercicio.

Ejercicio 2 En este ejercicio verificamos que el precio de la call up-and-out $v(t,x)$ dado por (4.18) satisface la condición de contorno (4.5). Además, el límite cuando $x \downarrow 0$ satisface (4.4) y el límite cuando $t \uparrow T$ satisface (4.6).

i) Primero verificamos por sustitución directa en (4.18) que (4.5) se satisface

Sabemos que

$$\begin{aligned} v(t,x) = x &\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right] - e^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right] \\ &- B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right] \\ &\quad + e^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right] \\ &\qquad\qquad 0 \le t < T, \quad 0 < x \le B, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} v(t,B) = B &\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau,1\right)\right)\right] - e^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-(\tau,1)\right)\right] \\ &- B\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+(\tau,1)\right)\right] \\ &+ e^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right] \\ = 0 &\qquad\qquad 0 \le t < T. \end{aligned}$$

ii) Ahora mostramos que para cualquier constante positiva c,

$$\lim_{x\to 0^+} \delta_\pm\left(\tau,\frac{x}{c}\right) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \delta_\pm\left(\tau,\frac{c}{x}\right) = \infty \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \delta_\pm\left(\tau, \frac{x}{c}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right)\\
&= \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{x}{c}\right)\\
&= -\infty,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \delta_\pm\left(\tau, \frac{c}{x}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln\left(\frac{c}{x}\right) + \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right)\\
&= \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{c}{x}\right)\\
&= \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\lim_{x\to 0^+}\left[\ln(c) - \ln(x)\right]\\
&= \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{\ln(c)}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\lim_{x\to 0^+}\ln(x)\\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Usamos esto para mostrar que para cualquier $p \in \mathbb{R}$ y constantes positivas c_1 y c_2, tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} x^p\left[N\left(\delta_\pm\left(\tau, \frac{x}{c_1}\right)\right) - N\left(\delta_\pm\left(\tau, \frac{x}{c_2}\right)\right)\right] = 0, \tag{5.11}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^p\left[N\left(\delta_\pm\left(\tau, \frac{c_1}{x}\right)\right) - N\left(\delta_\pm\left(\tau, \frac{c_2}{x}\right)\right)\right] = 0. \tag{5.12}$$

Si $p \geq 0$, (5.11) y (5.12) son consecuencias inmediatas de (5.10). Sin embargo, si $p < 0$, uno debe primero usar la regla de L'Hôspital y luego mostrar que

$$\lim_{x\to 0^+} x^p \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta_\pm^2\left(\tau, \frac{x}{c_i}\right)\right\} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^p \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta_\pm^2\left(\tau, \frac{c_i}{x}\right)\right\} = 0. \tag{5.13}$$

Para establecer (5.13) vamos probar y usar la desigualdad

$$\frac{1}{2}a^2 - b^2 \leq (a+b)^2 \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{5.14}$$

Concluimos que $\lim_{x\to 0^+} v(t,x)$ = 0 para $0 \leq t < T$.

Si $p \geq 0$ entonces $\lim_{x\to 0^+} x^p$ = 0. Además por (5.10),

$$\lim_{x\to 0^+}\left[N\left(\delta_\pm\left(\tau,\frac{x}{c_1}\right)\right)-N\left(\delta_\pm\left(\tau,\frac{x}{c_2}\right)\right)\right]=0-0=0.$$

Por lo tanto (5.11) se cumple.

De la misma manera, por (5.10) tenemos

$$\lim_{x\to 0^+}\left[N\left(\delta_\pm\left(\tau,\frac{c_1}{x}\right)\right)-N\left(\delta_\pm\left(\tau,\frac{c_2}{x}\right)\right)\right]=1-1=0.$$

Entonces (5.12) se cumple.

Para ver el caso $p < 0$, probemos primero que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{2}a^2-b^2\leq(a+b)^2 \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}.$$

Pero

$$\begin{aligned}0&\leq(a+2b)^2\\&=a^2+4ab+4b^2 \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Luego, restando $2b^2$ a ambos lados obtenemos

$$-2b^2\leq a^2+4ab+2b^2 \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}.$$

Y multiplicando por $\frac{1}{2}$ y sumando $\frac{1}{2}a^2$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a^2-b^2&\leq a^2+2ab+b^2\\&=(a+b)^2 \qquad \forall a,b\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

y queda demostrado.

Ahora vemos (5.13):

$$\lim_{x\to 0^+} x^p \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta_\pm^2\left(\tau,\frac{x}{c_i}\right)\right\} = \lim_{x\to 0^+} x^p \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln(\frac{x}{c_i}) + \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2)\right)^2\right\}$$
$$\leq \lim_{x\to 0^+} x^p \exp\left\{-\frac{1}{4}\frac{1}{\sigma^2\tau}\ln^2(\frac{x}{c_i}) + \frac{\tau}{2\sigma^2}(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2)^2\right\},$$

donde en la desigualdad usamos 5.14. Llamamos $k_1 = \frac{1}{4}\frac{1}{\sigma^2\tau}$ y $k_2 = \frac{\tau}{2\sigma^2}(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2)^2$. Entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^p \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta_\pm^2\left(\tau,\frac{x}{c_i}\right)\right\} &= \lim_{x\to 0^+} \exp\left\{-k_1\left[\ln^2(x) - 2\ln(c_i)\ln(x) - \frac{p}{k_1}\ln(x) + \ln^2(c_i)\right] + k_2\right\}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \exp\left\{-k_1\left[\ln(x) - \frac{\tilde{k_1}}{2}\right]^2 + \frac{k_1\tilde{k_1}^2}{4} - k_1\ln^2(c_i) + k_2\right\}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donde $\tilde{k_1} = 2\ln(c_i) + \frac{p}{k_1}$.

La segunda parte de (5.13) se vé de manera análoga.

Ahora demostramos (5.11) para $p<0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^p\left[N\left(\delta_\pm\left(\tau,\frac{x}{c_1}\right)\right) - N\left(\delta_\pm\left(\tau,\frac{x}{c_2}\right)\right)\right] &=\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\left[N'\left(\delta_\pm\left(\tau,\frac{x}{c_1}\right)\right)\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}} - N'\left(\delta_\pm\left(\tau,\frac{x}{c_2}\right)\right)\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}\right]}{(-p)x^{-(p+1)}}\\ &= -\frac{1}{p\sigma\sqrt{\tau}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left[N'\left(\delta_\pm\left(\tau,\frac{x}{c_1}\right)\right) - N'\left(\delta_\pm\left(\tau,\frac{x}{c_2}\right)\right)\right]}{x^{-p}}\\ &= -\frac{1}{p\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\lim_{x\to 0^+} x^p\Big[\exp\left\{-\frac{1}{2}\delta_\pm^2\left(\tau,\frac{x}{c_1}\right)\right\}\\ &\qquad - \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta_\pm^2\left(\tau,\frac{x}{c_2}\right)\right\}\Big]\\ &= 0.\end{aligned}$$

En la primer igualdad usamos la regla de L'Hospital y (5.2). En la última igualdad usamos (5.13).

De manera análoga se prueba (5.12).

Resta concluir que $\lim_{x\to 0^+} v(t,x)$ = 0 para $0 \leq t < T$. Pero

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} v(t,x) = \lim_{x\to 0^+} x & \left[N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
& - e^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
& - B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
& + e^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
= {} & 0 + 0 + 0 + 0 \\
= {} & 0.
\end{aligned}$$

El límite del primer término es cero por (5.11) con $p = 1$, $c_1 = K$, $c_2 = B$. El límite del segundo término es cero por (5.11) con $p = 0$, $c_1 = K$, $c_2 = B$. El límite del tercer término es cero por (5.12) con $p = -\dfrac{2r}{\sigma^2}$, $c_1 = \dfrac{B^2}{K}$, $c_2 = B$. El límite del cuarto término es cero por (5.12) con $p = -\dfrac{2r}{\sigma^2} + 1$, $c_1 = \dfrac{B^2}{K}$, $c_2 = B$.

iii) Por último mostramos que para cualquier número positivo c,

$$\lim_{\tau\to 0^+} \delta_\pm(\tau, c) = \begin{cases} -\infty & \text{si } 0 < c < 1; \\ 0 & \text{si c = 1;} \\ +\infty & \text{si c} > 1. \end{cases} \tag{5.15}$$

Y usamos esto para mostrar que $\lim_{\tau\to 0^+} v(t,x)$ = $(x-K)^+$ para 0 $< x < B$

Si *c* = 1,

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to 0^+} \delta_\pm(\tau, c) &= \lim_{\tau\to 0^+} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln(c) + \tau\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right) \\
&= \lim_{\tau\to 0^+} \frac{\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}\sqrt{\tau} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Si $c > 1$ entonces $\ln(c) > 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to 0^+} \delta_\pm(\tau, c) &= \lim_{\tau\to 0^+} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln(c) + \tau\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right) \\
&= \lim_{\tau\to 0^+} \frac{\ln(c)}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}\sqrt{\tau} \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Si $0 < c < 1$ entonces $\ln(c) < 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to 0^+} \delta_\pm(\tau, c) &= \lim_{\tau\to 0^+} \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\ln(c) + \tau\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right) \\
&= \lim_{\tau\to 0^+} \frac{\ln(c)}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}\sqrt{\tau} \\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $\lim_{\tau\to 0^+} v(t,x) = (x-K)^+$ para $0 < x < B$:

Sabemos que $K < B$. Si $0 < x < K$, entonces $\dfrac{x}{K} < 1$, $\dfrac{x}{B} < 1$, $\dfrac{B}{x} > 1$ y $\dfrac{B^2}{Kx} > 1$. Por lo tanto, usando lo demostrado anteriormente, obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to 0^+} v(t,x) = \lim_{\tau\to 0^+} & x\left[N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
& - e^{-r\tau}K\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right)\right] \\
& - B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
& + e^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right)\right] \\
= {} & x[0-0] - K[0-0] - B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}[1-1] + K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}[1-1] \\
= {} & 0.
\end{aligned}$$

Si $K < x < B$, entonces $\dfrac{x}{K} > 1$, $\dfrac{x}{B} < 1$, $\dfrac{B}{x} > 1$ y $\dfrac{B^2}{Kx} > 1$. Por lo tanto, usando lo demostrado anteriormente, obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to 0^+} v(t,x) = \lim_{\tau\to 0^+} x\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\right] - e^{-r\tau}K\big[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{K}\right)\right)\\ - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{x}{B}\right)\right)\big]\\ - B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\left[N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\ + e^{-r\tau}K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}\left[N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau,\frac{B}{x}\right)\right)\right]\\ = x[1-0] - K[1-0] - B\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}[1-1] + K\left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}[1-1]\\ = x - K.\end{aligned}$$

Concluimos que $\forall x$ tal que $0 < x < B$, $\lim_{\tau\to 0^+} v(t,x) = \max(x-K,0) = (x-K)^+$.

Ejercicio 3 Consideramos el movimiento geométrico browniano $S(t)$ dado por 4.1 y su proceso máximo al día $Y(t)$ dado por $Y(t) = \max_{0\le u\le t} S(u)$. Usamos el Lema de Independencia, Lema 1.2.7 para mostrar que $(S(t), Y(t))$ es un proceso de Markov (Ver Definición 1.4.1, capítulo 1).

Fijemos s y t tal que $0 \le s \le t \le T$ y tomemos f una función medible-Borel.

Consideramos las variables aleatorias $X_1 = S(s)$, $X_2 = Y(s)$, $Y_1 = S(t) - S(s)$ e $Y_2 = \max_{s\le u\le t} S(u)$ y definimos

$$\tilde{f}(X_1, X_2, Y_1, Y_2) \doteq f(X_1 + Y_1, \max\{X_2, Y_2\}).$$

Observamos que

$$Y(t) = \max\{Y(s), \max_{s\le u\le t} S(u)\},$$

y de esta manera,

$$\tilde{f}(X_1, X_2, Y_1, Y_2) = f(S(t), Y(t)).$$

Tomemos ahora

$$g(x_1, x_2) = \tilde{E}(\tilde{f}(x_1, x_2, Y_1, Y_2)).$$

Pero X_1 y X_2 son $\mathcal{F}(s)$-medibles, e Y_1 e Y_2 son independientes de $\mathcal{F}(s)$. De esta manera, el Lema de Independencia nos asegura que

$$\tilde{E}(\tilde{f}(X_1, X_2, Y_1, Y_2))|\mathcal{F}(s)) = g(X_1, X_2) = g(S(s), Y(s)).$$

Entonces,

$$\tilde{E}(f(S(t), Y(t))|\mathcal{F}(s)) = g(S(s), Y(s))$$

y por lo tanto $(S(t), Y(t))$ es un proceso de Markov.

Ejercico 4 Sean $S(t)$ e $Y(t)$ los procesos mencionados en el ejercicio anterior. Sea T fijo y sea 0 = $t_0 < t_1 < ... < t_m = T$ una partición de $[0, T]$. Mostramos que cuando el número m de puntos de la partición se acerca a infinito y el largo de los subintervalos más largos $\max_{j=1,...,m}(t_j - t_{j-1})$ se acerca a cero, la suma

$$\sum_{j=1}^{m}(Y(t_j) - Y(t_{j-1}))(S(t_j) - S(t_{j-1}))$$

tiene límite cero.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}(Y(t_j) - Y(t_{j-1}))(S(t_j) - S(t_{j-1})) &\leq \max_{j=1,...,m}(Y(t_j) - Y(t_{j-1}))\sum_{j=1}^{m}(S(t_j) - S(t_{j-1}))\\ &= \max_{j=1,...,m}(Y(t_j) - Y(t_{j-1}))(S(T) - S(0)).\end{aligned}$$

Pero $\max_{j=1,...,m}(Y(t_j) - Y(t_{j-1}))$ tiene límite cero cuando $\max_{j=1,...,m}(t_j - t_{j-1})$ tiende a cero, pues $Y(t)$ es continua. Entonces $\sum_{j=1}^{m}(Y(t_j) - Y(t_{j-1}))(S(t_j) - S(t_{j-1}))$ tiende a cero cuando $\max_{j=1,...,m}(t_j - t_{j-1})$ tiende a cero.

Ejercicio 5 En este ejercicio verificamos por cálculo directo que la función $v(t, x, y)$ de (4.46) satisface la ecuación Black-Scholes-Merton (4.20). Como sabemos, esto es equivalente a mostrar que la función u definida por (4.47) satisface la ecuación de Black-Scholes-Merton (4.29). Verificamos que $u(t,z)$ satisface (4.29) en los siguientes pasos. Sea $0 \le t < T$ dado y definimos $\tau = T - t$.

i) Usamos (5.1) para calcular $u_t(t,z)$, y (5.3) y (5.4) para simplificar el resultado.

Tenemos que

$$u(t,z) = \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) zN(\delta_+(\tau,z)) + e^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,z)) - \frac{\sigma^2}{2r}e^{-r\tau}z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) - z$$
$$0 \le t < T, \qquad 0 < z \le 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
u_t(t,z) = &- \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) zN'(\delta_+(\tau,z))\frac{1}{2\tau}\delta_+\left(\tau,\frac{1}{z}\right) + re^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,z)) \\
&+ e^{-r\tau}N'(-\delta_-(\tau,z))\frac{1}{2\tau}\delta_-\left(\tau,\frac{1}{z}\right) - \frac{\sigma^2}{2}e^{-r\tau}z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) \\
&- \frac{\sigma^2}{2r}e^{-r\tau}z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}N'(-\delta_-(\tau,z^{-1}))\frac{1}{2\tau}\delta_-(\tau,z)) \\
= &- \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) zN'(\delta_+(\tau,z))\frac{1}{2\tau}\delta_+\left(\tau,\frac{1}{z}\right) + re^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,z)) \\
&+ e^{-r\tau}N'(\delta_-(\tau,z))\frac{1}{2\tau}\delta_-\left(\tau,\frac{1}{z}\right) - \frac{\sigma^2}{2}e^{-r\tau}z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) \\
&- \frac{\sigma^2}{2r}e^{-r\tau}z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}N'(\delta_-(\tau,z^{-1}))\frac{1}{2\tau}\delta_-(\tau,z)) \\
= &- \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) zN'(\delta_+(\tau,z))\frac{1}{2\tau}\delta_+\left(\tau,\frac{1}{z}\right) + re^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,z)) \\
&+ e^{-r\tau}N'(\delta_-(\tau,z))\frac{1}{2\tau}\delta_-\left(\tau,\frac{1}{z}\right) - \frac{\sigma^2}{2}e^{-r\tau}z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) \\
&- \frac{\sigma^2}{2r}e^{-r\tau}N'(\delta_-(\tau,z))\frac{1}{2\tau}\delta_-(\tau,z))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\sigma^2}{4r\tau}\left[e^{-r\tau}N'(\delta_-(\tau,z))\left(\delta_+\left(\tau,\frac{1}{z}\right)+\delta_-(\tau,z)\right)\right] - \frac{z}{2\tau}N'(\delta_+(\tau,z))\delta_+\left(\tau,\frac{1}{z}\right)\\
&\quad + re^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,z)) - \frac{\sigma^2}{2}e^{-r\tau}z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}N(-\delta_-(\tau,z^{-1}))\\
&\quad + \frac{e^{-r\tau}}{2\tau}N'(\delta_-(\tau,z))\delta_-\left(\tau,\frac{1}{z}\right)\\
&= -\frac{\sigma^2}{4r\tau}zN'(\delta_+(\tau,z))\left[\delta_+\left(\tau,\frac{1}{z}\right)+\delta_-(\tau,z)-\frac{2r}{\sigma^2}\delta_-\left(\tau,\frac{1}{z}\right)+\frac{2r}{\sigma^2}\delta_+\left(\tau,\frac{1}{z}\right)\right]\\
&\quad + re^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,z)) - \frac{\sigma^2}{2}e^{-r\tau}z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}N(-\delta_-(\tau,z^{-1}))\\
&= -\frac{\sigma^2}{4r\tau}zN'(\delta_+(\tau,z))\left[\delta_+\left(\tau,\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)+\delta_-(\tau,z)-\frac{2r}{\sigma^2}\delta_-\left(\tau,\frac{1}{z}\right)\right]\\
&\quad + re^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,z)) - \frac{\sigma^2}{2}e^{-r\tau}z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}N(-\delta_-(\tau,z^{-1}))
\end{aligned}
$$

En la segunda igualdad usamos el hecho que $N'(-x) = N'(x)$. En la tercera igualdad usamos (5.4). Por último, en la cuarta y sexta igualdad usamos (5.3).

Basta probar que

$$
\frac{\sigma^2}{4r\tau}\left[\delta_+\left(\tau,\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)+\delta_-(\tau,z)-\frac{2r}{\sigma^2}\delta_-\left(\tau,\frac{1}{z}\right)\right] = \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}.
$$

Esto es equivalente a ver que

$$
\delta_+\left(\tau,\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)+\delta_-(\tau,z))-\frac{2r}{\sigma^2}\delta_-\left(\tau,\frac{1}{z}\right) = \frac{4r\sqrt{\tau}}{\sigma}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_+\left(\tau,\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)+\delta_-(\tau,z))-\frac{2r}{\sigma^2}\delta_-\left(\tau,\frac{1}{z}\right) &=\\
&= \delta_+\left(\tau,\frac{1}{z}\right)+\frac{2r}{\sigma^2}\left[\delta_+\left(\tau,\frac{1}{z}\right)-\delta_-\left(\tau,\frac{1}{z}\right)\right]+\delta_-(\tau,z)\\
&= \delta_+\left(\tau,\frac{1}{z}\right)+\frac{2r}{\sigma^2}\sigma\sqrt{\tau}+\delta_-\left(\tau,\frac{1}{z}\right)-\frac{2}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln\left(\frac{1}{z}\right)\\
&= \frac{\ln\left(\frac{1}{z}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}}+\frac{\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}+\frac{2r}{\sigma^2}\sigma\sqrt{\tau}+\frac{\ln\left(\frac{1}{z}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}}\\
&\quad + \frac{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}-\frac{2}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln\left(\frac{1}{z}\right)\\
&= \frac{4r\sqrt{\tau}}{\sigma}.
\end{aligned}
$$

En la segunda igualdad usamos (5.5) y (5.6); y en la tercera igualdad usamos la definición de $\delta_{\pm}\left(\tau, \frac{1}{z}\right)$.

ii) Ahora usamos (5.2) para calcular $u_z(t,z)$, y usamos (5.3) y (5.4) para simplificarlo.

$$
\begin{aligned}
u_z(t,z) &= \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) N(\delta_+(\tau,z)) + \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) z\frac{1}{z\sigma\sqrt{\tau}} N'(\delta_+(\tau,z)) - e^{-r\tau}\frac{1}{z\sigma\sqrt{\tau}} N'(-\delta_-(\tau,z)) \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{2r}e^{-r\tau}\left(1-\frac{2r}{\sigma^2}\right) z^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) - \frac{\sigma}{2rz\sqrt{\tau}}e^{-r\tau}z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} N'(-\delta_-(\tau,z^{-1})) - 1 \\
&= \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) N(\delta_+(\tau,z)) + e^{-r\tau}\left(1-\frac{\sigma^2}{2r}\right) z^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) - 1 \\
&\quad + \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} N'(\delta_+(\tau,z)) \\
&\quad - e^{-r\tau}\frac{1}{z\sigma\sqrt{\tau}} N'(\delta_-(\tau,z)) - \frac{\sigma}{2rz\sqrt{\tau}}e^{-r\tau}z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} N'(\delta_-(\tau,z^{-1})) \\
&= \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) N(\delta_+(\tau,z)) + e^{-r\tau}\left(1-\frac{\sigma^2}{2r}\right) z^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) - 1 + \\
&\quad \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}z} e^{-r\tau} N'(\delta_-(\tau,z)) - e^{-r\tau}\frac{1}{z\sigma\sqrt{\tau}} N'(\delta_-(\tau,z)) - e^{-r\tau}\frac{\sigma}{2rz\sqrt{\tau}} N'(\delta_-(\tau,z)) \\
&= \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) N(\delta_+(\tau,z)) + e^{-r\tau}\left(1-\frac{\sigma^2}{2r}\right) z^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) - 1 + \\
&\quad + e^{-r\tau} N'(\delta_-(\tau,z)) \left[\left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}z} - \frac{1}{z\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\sigma}{2rz\sqrt{\tau}}\right] \\
&= \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) N(\delta_+(\tau,z)) + e^{-r\tau}\left(1-\frac{\sigma^2}{2r}\right) z^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) - 1 \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

En la primer igualdad usamos (5.2), en la segunda igualdad usamos el hecho que $N'(x) = N'(-x)$ y en la tercer igualdad usamos (5.3) para el cuarto término y (5.4) para el último término.

iii) Usamos (5.16) y (5.2) para calcular $u_{zz}(t,z)$, y (5.3) y (5.4) para simplificar el resultado.

Por ejercicio anterior,

$$u_z(t,z) = \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) N(\delta_+(\tau,z)) + \left(1-\frac{\sigma^2}{2r}\right) e^{-r\tau} z^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) - 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
u_{zz}(t,z) &= \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) \frac{1}{z\sigma\sqrt{\tau}} N'(\delta_+(\tau,z)) + \left(1-\frac{2r}{\sigma^2}\right) e^{-r\tau} z^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) \\
&\quad + \left(1-\frac{\sigma^2}{2r}\right) e^{-r\tau} z^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N'(\delta_-(\tau,z^{-1})) \frac{1}{z\sigma\sqrt{\tau}} \\
&= \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) \frac{1}{z\sigma\sqrt{\tau}} N'(\delta_+(\tau,z)) + \left(1-\frac{2r}{\sigma^2}\right) e^{-r\tau} z^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) \\
&\quad + \left(1-\frac{\sigma^2}{2r}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau} z} N'(\delta_+(\tau,z)) \\
&= \left(1-\frac{2r}{\sigma^2}\right) e^{-r\tau} z^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) + \qquad (5.17) \\
&N'(\delta_+(\tau,z)) \left[\left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) \frac{1}{z\sigma\sqrt{\tau}} + \left(1-\frac{\sigma^2}{2r}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau} z}\right] \\
&= \left(1-\frac{2r}{\sigma^2}\right) e^{-r\tau} z^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) + N'(\delta_+(\tau,z)) \frac{2}{z\sigma\sqrt{\tau}}. \qquad (5.18)
\end{aligned}$$

En la primer igualdad usamos el hecho que $N'(x) = N'(-x)$. En la segunda igualdad usamos (5.4) y en la tercera igualdad usamos (5.3).

iv) Ahora verificamos que $u(t,z)$ satisface la ecuación B-S-M (4.29).

Debemos ver que

$$u_t(t,z) + rzv_z(t,z) + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 u_{zz}(t,z) = ru(t,z) \qquad 0 \le t < T, \quad 0 < z < 1.$$

$$
\begin{aligned}
u_t(t,z) + rzv_z(t,z) + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 u_{zz}(t,z) = {} & re^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,z)) - \frac{1}{2}\sigma^2 e^{-r\tau} z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) \\
& - \frac{\sigma z}{\sqrt{\tau}} N'(\delta_+(\tau,z)) + rz\left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) N(\delta_+(\tau,z)) \\
& + rz\left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) e^{-r\tau} z^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) - rz \\
& \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2}\right) e^{-r\tau} z^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) \\
& + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 \frac{2}{z\sigma\sqrt{\tau}} N'(\delta_+(\tau,z))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= re^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,z)) \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}\sigma^2 e^{-r\tau}\left(1 - \frac{2r}{\sigma^2}\right) z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} - \frac{1}{2}\sigma^2 e^{-r\tau} z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} + rze^{-r\tau}\left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) z^{-\frac{2r}{\sigma^2}}\right] N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) \\
&\quad \left[\frac{\sigma z}{\sqrt{\tau}} - \frac{\sigma z}{\sqrt{\tau}}\right] N(\delta_+(\tau,z)) + rz\left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) N(\delta_+(\tau,z)) - rz \\
&= re^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,z)) + rz\left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) N(\delta_+(\tau,z)) - rz \\
&\quad + re^{-r\tau} z^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \left[z\left(1 - \frac{\sigma^2}{2r}\right) - z\right] N\left(-\delta_-\left(\tau,z^{-1}\right)\right) \\
&= re^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,z)) + z\left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) N(\delta_+(\tau,z)) - z \\
&\quad - e^{-r\tau} z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} \frac{\sigma^2}{2r} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) \\
&= ru(t,z).
\end{aligned}
$$

v) Por último, verificamos que $u(t,z)$ satisface la condición de contorno (4.31).

La condición de contorno (4.31) establece que

$$
u(t,1) = u_z(t,1) \qquad 0 \le t < T.
$$

Calculemos $u(t,1)$ y $u_z(t,1)$ y veamos que coinciden:

$$
\begin{aligned}
u(t,1) &= \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right)N(\delta_+(\tau,1)) + e^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,1)) - \frac{\sigma^2}{2r}e^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,1)) - 1\\
&= \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right)N(\delta_+(\tau,1)) + \left(1-\frac{\sigma^2}{2r}\right)e^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,1)) - 1. \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

y

$$
u_z(t,z) = \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right)N(\delta_+(\tau,z)) + \left(1-\frac{\sigma^2}{2r}\right)e^{-r\tau}z^{-\frac{2r}{\sigma^2}}N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) - 1.
$$

Por lo tanto,

$$
u_z(t,1) = \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right)N(\delta_+(\tau,1)) + \left(1-\frac{\sigma^2}{2r}\right)e^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,1)) - 1. \qquad (5.20)
$$

Vemos que los términos en (5.19) y (5.20) coinciden. Así queda demostrado el ejercicio.

Ejercicio 6 El precio de la opción Lookback $v(t,x,y)$ de (4.46) debe satisfacer las condiciones de contorno (4.21)-(4.23). Como sabemos, ésta es equivalente a la función $u(t,z)$ dada por (4.47) satisfaciendo las condiciones de contorno (4.30)-(4.32).

En el ejercicio 5 ***v)***, se mostró que esta función satisface la condición de contorno (4.31).

Aquí verificamos por cálculo directo que el límite de $u(t,z)$ cuando $z \downarrow 0$ satisface (4.30) y el límite de $u(t,z)$ cuando $t \uparrow T$ $(\tau \downarrow 0)$ satisface (4.32).

i) Usamos (5.10) y la segunda parte de (5.13) para mostrar que $\lim_{z\to 0^+} u(t,z) = e^{-r\tau}$ para $0 \leq t < T$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to 0^+} u(t,z) = \lim_{z\to 0^+}\Big[&\left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right)zN(\delta_+(\tau,z)) + e^{-r\tau}N(-\delta_-(\tau,z))\\
&-\frac{\sigma^2}{2r}e^{-r\tau}z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) - z\Big] \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

Por (5.10),

$$\lim_{z\to 0^+} \delta_+(\tau,z) = -\infty.$$

Entonces,

$$\lim_{z\to 0^+} N(\delta_+(\tau,z)) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{z\to 0^+} \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) zN(\delta_+(\tau,z)) = 0.$$

Además, por (5.10),

$$\lim_{z\to 0^+} -\delta_-(\tau,z) = \infty.$$

Entonces,

$$\lim_{z\to 0^+} N(-\delta_-(\tau,z)) = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{z\to 0^+} e^{-r\tau} N(-\delta_-(\tau,z)) = e^{-r\tau}.$$

Ahora calculemos

$$\lim_{z\to 0^+} z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) : \tag{5.22}$$

Si $1-\dfrac{2r}{\sigma^2} \geq 0$, por (5.10),

$$\lim_{z\to 0^+} -\delta_-(\tau,z^{-1}) = -\infty.$$

Entonces,

$$\lim_{z\to 0^+} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{z\to 0^+} z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) = 0.$$

Si $1-\dfrac{2r}{\sigma^2}<0$, entonces podemos aplicar L'Hóspital a (5.22). De esta forma,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0^+} z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) &= \lim_{z\to 0^+} \frac{N'(-\delta_-(\tau,z^{-1}))}{\left(\dfrac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}-\sigma\sqrt{\tau}\right) z^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}} \\
&= \lim_{z\to 0^+} \frac{2\pi}{\left(\dfrac{2r\sqrt{\tau}}{\sigma}-\sigma\sqrt{\tau}\right)} z^{\left(1-\frac{2r}{\sigma^2}\right)} e^{-\frac{1}{2}\delta_-^2(\tau,z^{-1})} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por (5.13) con $p=1-\dfrac{2r}{\sigma^2}<0$.

Por último, el cuarto témino en (5.21) es cero.

Concluimos que

$$\lim_{z\to 0^+} u(t,z)=e^{-r\tau}$$

ii) En este ejercicio usamos (5.15) para mostrar que $\lim_{\tau\to 0^+} u(t,z)=1-z$ para $0<z\leq 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to 0^+} u(t,z) = \lim_{\tau\to 0^+} \Big[&\left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) zN(\delta_+(\tau,z)) + e^{-r\tau} N(-\delta_-(\tau,z)) \\
&- \frac{\sigma^2}{2r} e^{-r\tau} z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) - z\Big].
\end{aligned}$$

<u>Si $0<z<1$</u>:

Por (5.15),

$$\lim_{\tau\to 0^+} N(\delta_+(\tau,z))=0,$$

entonces

$$\lim_{\tau\to 0^+} \left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right) zN(\delta_+(\tau,z))=0.$$

Además,

$$\lim_{\tau\to 0^+} N(-\delta_-(\tau,z)) = 1$$

por (5.15). Por lo tanto,

$$\lim_{\tau\to 0^+} e^{-r\tau} N(-\delta_-(\tau,z)) = 1.$$

Por otro lado, si $0 < z < 1$, entonces $z^{-1} > 1$. De esta manera, por (5.15),

$$\lim_{\tau\to 0^+} -\delta_-(\tau,z^{-1}) = -\infty.$$

Entonces,

$$\lim_{\tau\to 0^+} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\tau\to 0^+} \frac{\sigma^2}{2r} e^{-r\tau} z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) = 0.$$

Concluimos que

$$\lim_{\tau\to 0^+} u(t,z) = 1 - z \quad \text{para} \quad 0 < z < 1.$$

<u>Si $z = 1$:</u>

Por (5.15) ,

$$\lim_{\tau\to 0^+} \delta_\pm(\tau,z) = \lim_{\tau\to 0^+} \delta_\pm(\tau,z^{-1}) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\tau\to 0^+} \left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right) zN(\delta_+(\tau,z)) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sigma^2}{2r}\right),$$

$$\lim_{\tau\to 0^+} e^{-r\tau} N(-\delta_-(\tau,z)) = \frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{\tau\to 0^+} e^{-r\tau} \frac{\sigma^2}{2r} z^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} N(-\delta_-(\tau,z^{-1})) = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{2r}.$$

De esta manera, concluimos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\tau\to 0^+} u(t,z) &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{2r}-z\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{2r}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{2r}-z\\
&= 1-z \quad \text{para} \quad z=1.
\end{aligned}
$$

Así tenemos

$$
\lim_{\tau\to 0^+} u(t,z) = 1-z \quad \text{para} \quad 0<z\leq 1
$$

y queda demostrado el ejercicio.

Ejercicio 7 Consideremos una call asiática con strike cero cuyo payoff en tiempo T es

$$
V(T)=\frac{1}{T}\int_0^T S(u)du.
$$

i) Supongamos que en tiempo t tenemos $S(t)=x\geq 0$ y $\int_0^t S(u)du = y\geq 0$. Aquí usamos el hecho que $e^{-ru}S(u)$ es una martingala sobre $\tilde{P}$ para calcular

$$
e^{-r(T-t)}\tilde{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(u)du|F(t)\right).
$$

Llamamos a nuestra respuesta $v(t,x,y)$.

Sea $f(t,\tilde{x}) = S(0)e^{\sigma\tilde{x}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}$, entonces $S(t) = f(t,\tilde{W}(t))$. Por la fórmula de Itô-Doeblin para movimiento Browniano tenemos que

$$
f(T,\tilde{W}(T)) = f(0,\tilde{W}(0))+\int_0^T f_t(t,\tilde{W}(t))dt+\int_0^T f_x(t,\tilde{W}(t))d\tilde{W}(t)+\frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,\tilde{W}(t))dt.
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
S(T) &= S(0)+\int_0^T\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)S(t)dt+\int_0^T\sigma S(t)d\tilde{W}(t)+\frac{1}{2}\int_0^T\sigma^2 S(t)dt\\
&= S(0)+\int_0^T rS(t)dt+\int_0^T \sigma S(t)d\tilde{W}(t)
\end{aligned}
$$

Con lo cual obtenemos

$$\int_0^T S(t)dt = \frac{1}{r}\left(S(T) - S(0) - \int_0^T \sigma S(t)d\tilde{W}(t)\right).$$

Sea $I(T) = \int_0^T S(t)d\tilde{W}(t)$, entonces $I(T)$ es martingala por Teorema 3.2.4 *iv)*. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\tilde{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(u)du|\mathcal{F}(t)\right) &= \frac{1}{Tr}e^{r(T-t)}S(t) - \frac{1}{Tr}S(0) - \frac{\sigma}{Tr}\tilde{E}\left(\int_0^T S(u)d\tilde{W}(u)|\mathcal{F}(t)\right)\\ &= \frac{1}{Tr}e^{r(T-t)}S(t) - \frac{1}{Tr}S(0) - \frac{\sigma}{Tr}\int_0^t S(u)d\tilde{W}(u).\end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho que $e^{-rt}S(t)$ es una martingala.

Ahora calculemos $\int_0^t S(u)d\tilde{W}(u)$:

De nuevo, aplicando la fórmula de Itô-Doeblin para movimiento Browniano a $f(t,\tilde{x}) = S(0)e^{\sigma\tilde{x} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$, obtenemos

$$S(t) = S(0) + \int_0^t rS(u)du + \int_0^t \sigma S(t)d\tilde{W}(t).$$

Entonces

$$\int_0^t S(u)d\tilde{W}(u) = \frac{S(t) - S(0)}{\sigma} - \frac{r}{\sigma}\int_0^t S(u)du.$$

Concluimos entonces que

$$\begin{aligned}\tilde{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(u)du|\mathcal{F}(t)\right) &= \frac{e^{r(T-t)}}{Tr}S(t) - \frac{S(0)}{Tr} - \frac{\sigma}{Tr}\left[\frac{S(t)-S(0)}{\sigma} - \frac{r}{\sigma}\int_0^t S(u)du\right]\\ &= \frac{e^{r(T-t)}}{Tr}S(t) - \frac{S(t)}{Tr} + \frac{1}{T}\int_0^t S(u)du.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}v(t,x,y) &= e^{-r(T-t)}\tilde{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(u)du|\mathcal{F}(t)\right)\\ &= \frac{x}{rT} - \frac{e^{-r(T-t)}x}{Tr} + \frac{e^{-r(T-t)}}{T}y.\end{aligned}$$

ii) Verificamos que la función $v(t,x,y)$ que obtuvimos en ***i)*** satisface la ecuación B-S-M (4.55) y las condiciones de contorno (4.56) y (4.58) del Teorema 4.3.2 (No trataremos de verificar (4.57) porque al cálculo de $v(t,x,y)$ lo hicimos tomando $y \geq 0$.)

Debemos verififcar que $v(t,x,y)$ satisface la ecuación B-S-M (4.55)

$$v_t(t,x,y)+rxv_x(t,x,y)+xv_y(t,x,y)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2v_{xx}(t,x,y) = rv(t,x,y) \qquad 0 \leq x, \quad 0 \leq t < T$$

y las siguientes condiciones de contorno:

$$v(t,0,y) = e^{-r(T-t)}\frac{y}{T}, \qquad 0 \leq t < T, \quad y \in \mathbb{R}$$
$$v(T,x,y) = \frac{y}{T}, \qquad x \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Calculemos las derivadas parciales de $v(t,x,y)$ que involucra la ecuación (4.55):

$v_t(t,x,y) = re^{-r(T-t)}\left[\frac{y}{T} - \frac{x}{rT}\right]$;

$v_x(t,x,y) = \frac{1}{rT}\left[1 - e^{-r(T-t)}\right]$;

$v_y(t,x,y) = \frac{e^{-r(T-t)}}{T}$;

$v_{xx}(t,x,y) = 0$;

entonces

$$\begin{aligned} v_t(t,x,y) + rxv_x(t,x,y) + xv_y(t,x,y) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2v_{xx}(t,x,y) &= \\ &= \frac{r}{T}e^{-r(T-t)}\left[y - \frac{x}{r}\right] + rx\left[\frac{1}{rT} - \frac{e^{-r(T-t)}}{rT}\right] \\ &\quad + x\frac{e^{-r(T-t)}}{T} \\ &= \frac{r}{T}e^{-r(T-t)}\left[y - \frac{x}{r}\right] + \frac{x}{T} \\ &= rv(t,x,y). \end{aligned}$$

Además, reemplazando en $v(t,x,y)$ obtenemos

$$v(t,0,y) = e^{-r(T-t)}\frac{y}{T}$$

$$v(T,x,y) = \frac{x}{rT} + \frac{y}{T} - \frac{x}{rT} = \frac{y}{T},$$

como deseamos.

iii) Finalizando, determinamos explícitamente el proceso $\Delta(t) = v_x(t, S(t), Y(t))$, y observamos que no es aleatorio.

Sabemos del ejercicio anterior que

$$v_x(t,x,y) = \frac{1}{rT}\left[1 - e^{-r(T-t)}\right].$$

Entonces

$$v_x(t,S(t),Y(t)) = \frac{1}{rT}\left[1 - e^{-r(T-t)}\right],$$

y claramente esto no es aleatorio.

APÉNDICE A

Cambio de medida

En este apéndice mostraremos cómo es posible establecer en un espacio de probabilidad $(\Omega, P, \mathcal{F})$, una medida de probabilidad $\tilde{P}$ equivalente a P. En particular, esto puede aplicarse en la teoría de finanzas para fundamentar la existencia de medidas de probabilidad de *riesgo neutral*.

Teorema A.0.6. *Sea $(\Omega, P, \mathcal{F})$ un espacio de probabilidad y sea Z una variable aleatoria no negativa a.e. con $E(Z)$ = 1. Para $A \in \mathcal{F}$, definamos*

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega).$$

Entonces $\tilde{P}$ es una medida de probabilidad. Además, si X es una variable aleatoria no negativa, entonces

I) $\tilde{E}(X) = E(XZ)$.

Si Z es estrictamente positiva a.e., también tenemos

II) $E(Y) = \tilde{E}(\frac{Y}{Z})$ *para toda variable aleatoria no negativa Y.*

El valor esperado $\tilde{E}$ en $I)$ y $II)$ es con respecto a la medida de probabilidad $\tilde{P}$. (i.e., $\tilde{E}(X) = \int_\Omega X(\omega) d\tilde{P}(\omega)$).

Nota A.0.7. Sean $X^+ = \max\{X, 0\}$ y $X^- = \max\{-X, 0\}$ sus componentes positiva y negativa, respectivamente. Entonces $X = X^+ - X^-$. Aplicando $I)$ y $II)$ a X^+ y X^-, y en caso de obtener valores finitos, podemos probar que el teorema se cumple para la variable aleatoria X.

Demostración. *(Teorema A.0.6)* Para ver que $\tilde{P}$ es una medida de probabilidad, debemos verificar que $\tilde{P}(\Omega)$ = 1 y que $\tilde{P}$ es aditiva numerable. Tenemos por hipótesis que

$$\tilde{P}(\Omega) = \int_\Omega Z(\omega)dP(\omega) = E(Z) = 1.$$

Para la aditividad numerable, sea A_1, A_2,... una sucesión de conjuntos disjuntos en $\mathcal{F}$, y definimos $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$, $B_\infty = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Denotamos $\mathbb{I}_B$ a la función indicadora en B. Debido a que

$$\mathbb{I}_{B_1} \leq \mathbb{I}_{B_2} \leq \mathbb{I}_{B_3} \leq ...$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{I}_{B_n} = \mathbb{I}_{B_\infty},$$

podemos usar el Teorema de Convergencia Monótona para escribir

$$\tilde{P}(B_\infty) = \int_\Omega \mathbb{I}_{B_\infty}(\omega)Z(\omega)dP(\omega) = lim_{n\to\infty} \int_\Omega \mathbb{I}_{B_n}(\omega)Z(\omega)dP(\omega).$$

Pero $\mathbb{I}_{B_n}(\omega)$ = $\sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{A_k}(\omega)$, y asi

$$\int_\Omega \mathbb{I}_{B_n}(\omega)Z(\omega)dP(\omega) = \sum_{k=1}^n \int_\Omega \mathbb{I}_{A_k}(\omega)Z(\omega)dP(\omega) = \sum_{k=1}^n \tilde{P}(A_k).$$

Reuniendo esas dos ecuaciones, obtenemos la propiedad de aditividad numerable

$$\tilde{P}(\bigcup_{k=1}^\infty A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \tilde{P}(A_k) = \sum_{k=1}^\infty \tilde{P}(A_k).$$

Ahora supongamos que X es una variable aleatoria no negativa. Si X es una función indicadora $X = \mathbb{I}_A$, entonces

$$\tilde{E}(X) = \tilde{P}(A) = \int_\Omega \mathbb{I}_A(\omega)Z(\omega)dP(\omega) = E(\mathbb{I}_A Z) = E(XZ),$$

lo cual es I).

Análogamente, esto puede probarse para una suma finita de funciones indicadoras. Por último, y dado que toda variable aleatoria se puede expresar como límite de sumas de este tipo, podemos probar I) para cualquier X no negativa.

Cuando $Z > 0$ a.e., $\frac{Y}{Z}$ está definida y podemos reemplazar X en I) por $\frac{Y}{Z}$ para obtener II). $\square$

Definición A.0.8. Sea Ω conjunto no vacío y $\mathcal{F}$ una σ- álgebra de subconjuntos de Ω. Dos medidas de probabilidad P y $\tilde{P}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ se dicen *equivalentes* si

$$P(A) = 0 \Leftrightarrow \tilde{P}(A) = 0, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

Se puede ver fácilmente que P y $\tilde{P}$ del Teorema A.0.6 son equivalentes (ver [1], pág. 34).

Teorema A.0.9. *(Radon-Nikodým) : Sean P y $\tilde{P}$ medidas de probabilidad equivalentes definidas en $(\Omega, \mathcal{F})$. Entonces existe una variable aleatoria Z positiva a.e. tal que $E(Z) = 1$ y*

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega) \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Demostración. Ver $\square$

También podemos usar este cambio de medida para cambiar la media de una variable aleatoria o las medias en cada tiempo t de un proceso estocástico en general.

Supongamos que tenemos un espacio de probabilidad $(\Omega, P, \mathcal{F})$ y una filtración $\mathcal{F}(t)$, definida para $0 \leq t \leq T$, donde T es un tiempo final fijo. Supongamos además que Z es una variable aleatoria positiva a.e. que satisface $E(Z) = 1$, y definimos $\tilde{P}$ como en el Teorema A.0.6. Podemos entonces definir el *proceso derivado Radón-Nikodým*

$$Z(t) = E(Z|\mathcal{F}(t)), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

Este proceso es una martingala debido a la propiedad de condicionamiento iterado (Teorema 1.2.6, *III*)): para $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$E(Z(t)|\mathcal{F}(s)) = E(E(Z|\mathcal{F}(t))|\mathcal{F}(s)) = E(Z|\mathcal{F}(s)) = Z(s).$$

Además, este proceso tiene las propiedades presentadas en los siguientes dos lemas.

Lema A.0.10. *Sea t que satisface $0 \leq t \leq T$ y sea Y una variable aleatoria $\mathcal{F}(t)$- medible. Entonces*

$$\tilde{E}(Y) = E(YZ(t)).$$

Demostración. Usamos $I)$ del Teorema A.0.6, la segunda condición en la definición de esperanza condicional, la propiedad $II)$ del Teorema 1.2.6 ("tomando sobre lo que es conocido"), y la definición de $Z(t)$ para escribir

$$\tilde{E}(Y) = E(YZ) = E(E(YZ|\mathcal{F}(t))) = E(YE(Z|\mathcal{F}(t))) = E(YZ(t)).$$

□

Lema A.0.11. *Sean s y t que satisfacen $0 \leq s \leq t \leq T$ y sea Y una variable aleatoria $\mathcal{F}(t)$-medible. Entonces*

$$\tilde{E}(Y|\mathcal{F}(s)) = \frac{1}{Z(s)}E(YZ(t)|\mathcal{F}(s)).$$

Demostración. Ver [1] □

Teorema A.0.12. *(Girsanov's, una dimensión) Sea $W(t)$, $0 \leq t \leq T$, un movimiento Browniano en un espacio de probabilidad $(\Omega, P, \mathcal{F})$, y sea $\mathcal{F}(t)$, $0 \leq t \leq T$, una filtración para este movimiento Browniano. Sea $\Theta(t)$, $0 \leq t \leq T$, un proceso adaptado. Definimos*

$$Z(t) = exp\{-\int_0^t \Theta(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta^2(u)du\}, \tag{A.1}$$

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \theta(u)du, \tag{A.2}$$

y supongamos que

$$E(\int_0^T \Theta^2(u)Z^2(u)du) < \infty. \tag{A.3}$$

Tomemos $Z = Z(T)$. *Entonces* $E(Z) = 1$ *y sobre la medida de probabilidad* $\tilde{P}$ *del Teorema A.0.6 , el proceso* $W(t)$, *0*$\leq t \leq T$, *es un movimiento Browniano.*

Demostración. Ver [1] □

En modelos financieros, primero estableceremos un espacio muestral Ω, el cual uno puede considerar como el conjunto de posibles escenarios para el futuro. Imaginamos estos conjuntos de posibles escenarios teniendo una medida de probabilidad real P. Sin embargo, para propósitos de valuación de derivados, usaremos una medida de riesgo neutral $\tilde{P}$. Insistiremos que esas dos medidas son equivalentes. Deben coincidir en lo que es posible y lo que es imposible; pueden diferir en cuan probable las posibilidades son.

Bibliografía

[1] Steven E. Shreve *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer. (2003).

[2] Steven E. Shreve *Stochastic Calculus for Finance I*. Springer. (2003).

[3] John C. Hull *Options, Futures, and other derivatives*. Fifth edition. Prentice Hall Finance Series. (2003).

[4] Joseph Stampfli y Victor Goodman, *Matemáticas para las finanzas. Modelo y Cobertura* Thomson. (2003)

[5] Paul Wilmott. *The theory and practice of financial engineering*. Wiley, Chichester, (1998)

[6] Jin E. Zhang *Mathematical Techiques of Finance I* MFIN 7003

Agradecimientos

A mi familia por brindarme todo su amor y apoyarme incondicionalmente en cada momento.

A Patricia por su incansable dedicación, su afecto, su enorme paciencia y entusiasmo hasta el final. Y a todos los profes que siempre me ayudaron y aguantaron en el transcurso de mi carrera.

A todos mis amigos de la vida, de la facultad, de voley y a mi amor, por acompañarme siempre y brindarme todo su cariño.

Muchas gracias!!!