

# Transiciones abruptas en un modelo de opinión de agentes autopropulsados

Trabajo especial de la Licenciatura en Física

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación,  
Universidad Nacional de Córdoba

Autor: Pedro J. Neme  
Director: Gustavo J. Sibona

Julio, 2017



Transiciones abruptas en un modelo de opinión de agentes autopropulsados de, Pedro J. Neme  
se distribuye bajo una

[Licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial-SinDerivar 2.5 Argentina.](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/arg/)



## **Resumen**

¿Que es lo que lleva a una sociedad a pasar de una situación social estable a un estado convulsionado o caótico? Los mejores ejemplos de esto son los procesos revolucionarios o las crisis económicas argentinas. En este trabajo presentamos un modelo simple en el que se observan transiciones abruptas en la opinión media del sistema dinámico. Consideramos una sociedad formada por agentes con distintos estados de opinión sobre una determinada cuestión. Dichos estados pueden ser modificados debido a dos procesos; una influencia externa (reflexión/propaganda) o por la interacción entre agentes (persuasión). Encontramos que si la dinámica de interacción no es homogénea en los estados de opinión, un pequeño cambio de alguno de los parámetros del modelo lleva a cambios drásticos en es el estado medio de opinión de la sociedad.

## **Abstract**

What leads a society to move from a stable social state to a troubled or chaotic one? Examples of this are the bank runs, Argentinian economical crisis, Political Crisis, Abrupts changes in the approval of a politician or distrust in the political sectors. To analyze this problem we considered an agent based society with different state of opinion that can change their opinion due to two processes; an external influence (propaganda), and by the interaction between agents (persuasion), generated by the dynamical properties of the model.

Palabras clave: Modelado Matemático, Formación de opinión, Mecánica estadística, simulación.

**Clasificación:**

**02.50.Ey** Stochastic processes **05.10.-a** Computational methods in statistical physics and nonlinear dynamics **87.10.Mn** Stochastic modeling **89.65.-s** Social and economic systems

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
1.1. Modelos en dinámica de opinión . . . . .	6
1.1.1. Modelo del votante . . . . .	7
1.1.2. Modelo de regla de la mayoría . . . . .	7
1.1.3. Modelo de Sznajd . . . . .	8
1.1.4. Modelos de confianza limitada . . . . .	9
<b>2. Modelo de Opinión en sistemas de agentes móviles</b>	<b>11</b>
2.1. Estados de opinión . . . . .	11
2.2. Modelo analítico . . . . .	12
2.2.1. Persuasión . . . . .	12
2.2.2. Reflexión . . . . .	14
2.3. Soluciones analíticas . . . . .	16
<b>3. Modelo Computacional</b>	<b>18</b>
3.1. Implementación del modelo computacional . . . . .	18
3.2. Distribuciones de velocidad . . . . .	19
3.2.1. Velocidad dependiente de la opinión del agente . . . . .	20
3.3. Corrección al modelo analítico por la dinámica de los agentes auto-propulsados . . . . .	21
3.3.1. Tiempo Medio de Colisión y tiempo libre medio . . . . .	22
<b>4. Condición inicial y evolución temporal del sistema</b>	<b>27</b>
4.1. Estado inicial . . . . .	27
<b>5. Modelo analítico vs Simulaciones</b>	<b>30</b>
5.1. Parámetros de las simulaciones y condición inicial. . . . .	30
5.2. Distribución constante de velocidades . . . . .	30
<b>6. Velocidad dependiente de la opinión del agente</b>	<b>37</b>
6.1. Sistemas de propaganda totalitaria . . . . .	42
<b>7. Conclusiones y Perspectivas futuras</b>	<b>51</b>

# 1. Introducción

La física estadística además de ser uno de los pilares de la física moderna, es quizás la teoría de mayor aplicación en áreas de estudio interdisciplinario. El razonamiento de pensar que muchos de los fenómenos macroscópicos que se pueden observar en la naturaleza son el resultado estadístico de fenómenos microscópicos está arraigado en el marco de herramientas de cualquier físico, y no hay dudas hoy en día cual es la influencia de esta teoría sobre ámbitos como el de la biología molecular, la neurociencia, la epidemiología, medicina, etc. Esta característica le dio a la física estadística la cualidad de ser una herramienta útil para describir fenómenos naturales fuera del marco puro de la física, y en particular esto llevó a la física estadística a ser pensada como un medio para describir acontecimientos sociales colectivos que por supuesto surgen del resultado de las interacciones sociales y la naturaleza humana.

El área de la física que busca describir este tipo de fenómenos sociales de gran escala se denominó recientemente como Sociofísica, y tiene como objetivo ser un puente entre dos áreas de estudio siempre separadas como son el de la física y las ciencias sociales [14]. Por supuesto la sociofísica no busca describir al individuo en sí, ni su comportamiento social, al contrario busca analizar si fenómenos sociales colectivos, de gran escala, se pueden observar como el resultado estadístico de interacciones "simples" de los individuos en una sociedad [1]. En sociofísica las partículas a las que estamos acostumbrados pasan a ser individuos, los seres humanos.

En el área de la sociofísica convergen diversos estudios; como por ejemplo, analizar las dinámicas culturales, la formación de jerarquías, el crecimiento demográfico, indicadores sociales y económicos, modelos de segregación social, modelos de movilidad humana y por supuesto los modelos de opinión, etc.

A diferencia de las áreas clásicas de la física, la sociofísica, más allá del conjunto de herramientas que le brinda la física estadística, no posee un marco teórico como podría ser el caso de las leyes de la termodinámica en la física estadística. Por lo cual, para cualquiera de los ejemplos mencionados previamente, uno puede encontrar diversos métodos y enfoques. Este trabajo en particular busca continuar lo iniciado por N. C. Clementi et al en [2] en el marco de un modelo de opinión de agentes móviles interactuantes y para eso debemos entender primero qué es la dinámica de opinión.

## 1.1. Modelos en dinámica de opinión

La opinión de un individuo respecto a cualquier tópico dentro de una sociedad moderna, es una formación compleja y personal que se encuentra influenciada por diversos factores sociales como pueden ser la interacción con otros, la influencia del estado, de los medios, de las redes sociales, etc. Cada situación que afecta a un individuo puede influir en la construcción de su opinión lo cual posee una complejidad más allá de cualquier intento que busque describir este fenómeno; Pero sin embargo, más allá de esta complejidad en la formación de la opinión de cada individuo, en las sociedades se forman consensos; los cuales pueden ser totales o parciales, generando grupos sociales que están de acuerdo en su opinión respecto a algún tema en particular. La dinámica de opiniones desde el punto de vista de la sociofísica busca describir cómo surgen y evolucionan los consensos o los desacuerdos, dentro de una sociedad, como resultado de procesos simplificados en la formación de la opinión de un individuo.

En general los modelos de opinión asumen que la formación de opinión de un

individuo puede estar dado por dos procesos en particular; la interacción con otros individuos, o por la propia decisión (reflexión). Dentro del primero podríamos agrupar todo lo que tiene que ver con la interacción humana como puede ser interacciones físicas entre los individuos donde se produzcan discusiones sobre el tema en particular, interacciones a través de redes sociales etc; mientras que el proceso de reflexión hace referencia a los cambios de opinión que puede tener un individuo debido a información que no surge de la interacción con otros como puede ser por ejemplo los medios de comunicación, publicidad o el propio análisis de una situación.

Con el tiempo el número de modelos de opinión a crecido significativamente y en general toman como estructura de la sociedad el de las redes complejas:

### 1.1.1. Modelo del votante

El modelo del votante propuesto por Holley and Liggett (1975) [11] propone una definición bastante simple, suponiendo una estructura de red regular: Tenemos un número de agentes  $N$ , y a cada uno le corresponde una variable binaria  $s = \pm 1$ . En cada paso temporal, un agente  $i$  es seleccionado y se toma de manera aleatoria uno de sus vecinos  $j$ . Una vez seleccionado  $j$ ,  $i$  toma su estado  $s_j$ , es decir  $s_i = s_j$ . Este proceso se realiza sucesivamente actualizando el estado de los agentes, llevando a los individuos a imitar a sus vecinos.

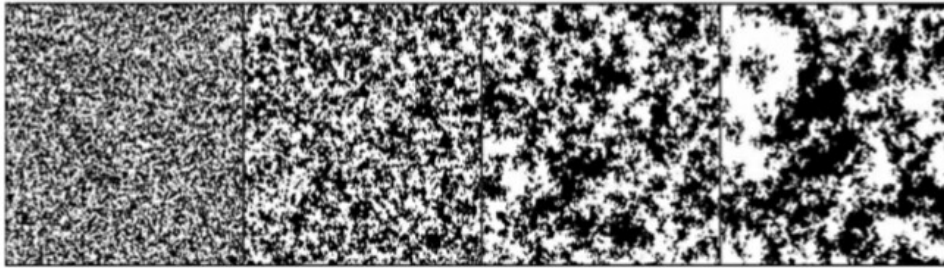


Figura 1: Evolución modelo del votante Dornic et al [7]

En el modelo del votante no siempre se llega a un estado ordenado y de consenso donde todos tengan el mismo estado  $s$ , pero si tiende a aumentar el orden del sistema. En redes complejas, es decir aquellas que no tienen topología regular, se puede definir de diferentes formas el modelo del votante. Por ejemplo dándole diferente probabilidad de elección a los nodos de diferente grado (número de vecinos) etc, pero de igual manera que antes al elegir un nodo se le impone el estado del vecino. El modelo del votante tiene una semejanza particular, por ejemplo, con la dinámica de Glauber y otros modelos termodinámicos que siguen una estructura de Ising. Pero se diferencia en que no sigue un proceso de minimización de energía cuando se cambia el estado de los agentes, ni tampoco se pide que su magnetización sea constante.

### 1.1.2. Modelo de regla de la mayoría

Este modelo parte de suponer una red completa como modelo de la sociedad, es decir cada nodo es un individuo que está conectado con todos los otros, cada individuo puede tener dos valores de opinion posibles de igual forma que el modelo del votante  $s = \pm 1$  y tendremos una población de agentes  $P_+$  con estado  $s = 1$  y una población  $P_- = 1 - P_+$  con opinión  $s = -1$ . En cada iteración un grupo  $r$  de agentes se selecciona al azar (grupo de discusión), y de acuerdo a cuál es la

población dominante en ese grupo, todos los individuos toman la opinión de la población dominante. Es decir, toman la opinión de la mayoría. A esto se lo conoce como regla de la mayoría y es utilizado por S. Galam en [13]

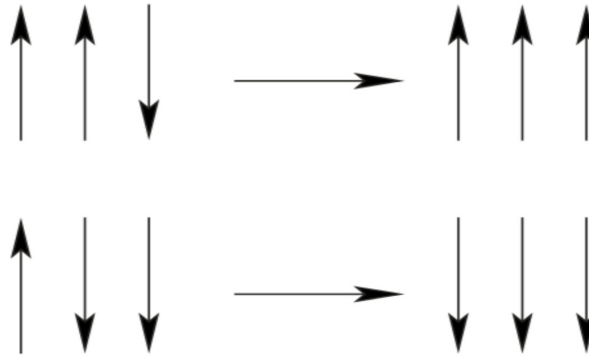


Figura 2: Evolución del modelo de regla de la mayoría para un grupo  $r=3$

En la fig.2 se puede observar un ejemplo del principio básico de regla de la mayoría, propuesto para describir los debates públicos.

El tamaño del grupo que se elige no es fijo, se lo selecciona en cada paso temporal por una distribución predeterminada. Si  $r$  es impar, siempre va a existir una mayoría, por lo que el grupo toma la opinión de esa mayoría. Y de igual manera para el caso de  $r$  par donde exista mayoría. Si el grupo tiene opinión equilibrada se elige aleatoriamente una de las dos para el resto de los individuos. Este hecho está inspirado en el principio de la inercia social, el cual establece que las personas se muestran reticentes a aceptar una reforma si no hay mayoría clara en su favor.

### 1.1.3. Modelo de Sznajd

El convencer a una persona resulta más fácil para dos o más personas que para una sola. Este principio subyace al modelo de Sznajd. En la versión original de este trabajo K. Sznajd-Weron y J. Sznajd [?], llamado comúnmente Sznajd B, los agentes ocupan sitios en una cadena lineal, y poseen opciones binarias, denotadas por variables de Ising. Un par de agentes vecinos  $i$  e  $i + 1$  determinan las opiniones de sus dos vecinos más cercanos  $i - 1$  e  $i + 2$ , de acuerdo con las siguientes reglas:

- si  $s_i = s_{i+1}$ , se tiene  $s_{i-1} = s_i = s_{i+1} = s_{i+2}$
- si  $s_i \neq s_{i+1}$ , se tiene  $s_{i-1} = s_{i+1}$  y  $s_{i+2} = s_i$

Por lo tanto, si el par de agentes comparte la opinión, logran imponer su opinión sobre la de sus vecinos. Si, en cambio, los dos agentes no están de acuerdo, cada agente impone su opinión sobre el vecino del otro agente.

Comenzando con una configuración inicial completamente aleatoria, donde ambas opiniones se distribuyen por igual, se pueden encontrar dos estados estacionarios como resultado: Uno donde existe el consenso y todos los agentes poseen la misma opinión. Y otro correspondiente a un empate, para el cual se tiene igual número de espines hacia arriba que hacia abajo, con magnetización total  $m=0$ . Este último estado es consecuencia de la regla 2, que favorece las configuraciones antiferromagnéticas, las cuales poseen  $1/2$  de probabilidad de ser alcanzadas. Cada uno de los dos estados de consenso (ferromagnético) ocurre con una probabilidad de  $1/4$ .

Desde la introducción de este modelo, se han argumentado que una característica distintiva de su dinámica es el hecho que la información fluye desde el primer par



de agentes a sus vecinos, a diferencia de la dinámica de otros modelos de opinión, en donde los agentes son influenciados por sus vecinos. Debido a esto se supone que este modelo describe cómo las opiniones se extienden en una sociedad. Behera and Schweitzer(2003) [8] mostraron que este modelo es equivalente al modelo del votante en una cadena lineal. La dirección del flujo de información es realmente irrelevante. La única diferencia con el modelo del votante clásico es que un agente no está influenciado por sus vecinos más cercanos, sino por los próximos de los vecinos más cercanos. El hecho de que en el modelo de Sznajd un par de agentes se actualiza a un dado tiempo, mientras que en la dinámica del votante afecta a un solo espin, introduce un factor 2 en el tiempo de relajación promedio de las dinámicas electorales equivalentes. El resto de las características resultan iguales.

La regla 2 de este modelo no resulta realista y fue sustituida rápidamente por mejores alternativas. En el modelo más popular, denominado Sznajd A, solo el estado ferromagnético  $m=1$  se preserva, y los vecinos de un par de agentes en desacuerdo mantienen sus opiniones.

En una red cuadrada, por ejemplo, un par de agentes vecinos afecta las opiniones de sus seis vecinos si y sólo si están de acuerdo entre ellos, como muestra la figura 3.

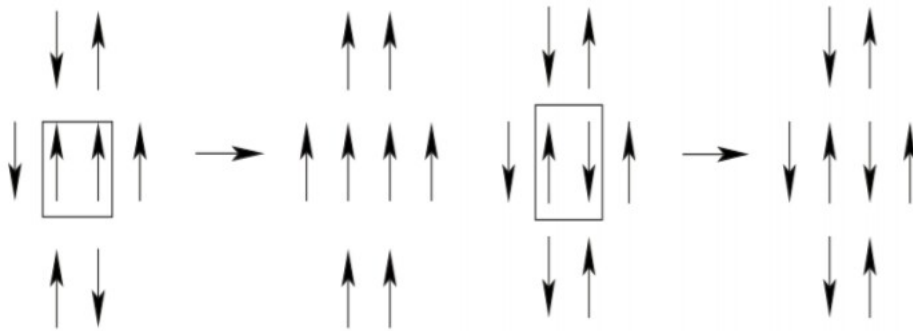


Figura 3: En la version mas comun del modelo (Sznajd A), un par de agentes de vecinos con la misma opinión convencerá a todos sus vecinos (izquierda), mientras que no tienen ninguna influencia si no están de acuerdo (derecha).

En este caso se obtiene que la probabilidad de salida es una función escalón con un umbral en  $m = 0$  : si la magnetización inicial es  $m < 0$ , el sistema siempre alcanza el consenso con  $m = -1$ , y si inicialmente  $m > 0$ , el estado estacionario de consenso es con  $m = 1$ .

#### 1.1.4. Modelos de confianza limitada

Los modelos presentados hasta el momento introducen la opinión como una variable discreta, la cual representa una descripción razonable en varios casos. Hay situaciones en que la posición de un individuo puede variar de un extremo de la gama de opciones posibles hasta el otro.

El hecho de tomar las opiniones como variables continuas lleva a invalidar algunos de los conceptos adoptados en los modelos con opciones discretas, tales como los conceptos de mayoría de opinión y de igualdad de opinión, por lo que requieren de un marco diferente.

Generalmente el estado inicial consta de una población de  $N$  agentes con opiniones asignadas al azar, representadas por número reales contenidos dentro de un cierto intervalo, en contraste con la dinámica de opinión discreta. Esto genera que

los posibles escenarios sean más complejos, con grupos de opinión que surgen en el estado estacionario final. Se pueden obtener grupos de opinión con consenso, polarizados, e inclusive grupos fragmentados. En principio, cada agente puede interactuar con cualquier otro agente, sin importar cuales son sus opiniones. En la práctica, hay una discusión real solo si las opiniones de las personas involucradas están suficientemente cerca una de la otra.

Este aspecto realista de las comunicaciones humanas es lo que se denomina confianza limitada; en la literatura se expresa mediante la introducción de un intervalo de interacción, donde un individuo con opinión  $x$  solo interactúa con individuos cuya opinión se encuentra en el intervalo  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ . Los modelos de confianza limitada más populares son el modelo de Deffuant [5] y el modelo de Hegselmann y Krause [12].

Más allá de estos ejemplos mencionados existen gran variedad de modelos de dinámica de opinión, Muchos de estos descritos en Castellano et al [1]. Y se puede ver que en todos se tiene un patrón general, la estructura social elegida se concentra básicamente en teoría de redes complejas, como se puede ver en Albert, R. and A. Barabasi [10]. Este trabajo, a diferencia de los previamente mencionados, estará basado en un modelo de opinión de agentes móviles, donde la estructura social será el espacio 2 dimensional donde habitan los individuos.

De esta forma, podremos pensar en las interacciones entre individuos, no como el resultado de las conexiones en un grafo, sino como una interacción física real entre estos, gobernada por la dinámica que rige a los agentes. Además, nos permitira, en la ausencia de interacciones, introducir otro fenómeno de cambio de opinión: la *reflexión*. Con el cual el agente podrá modificar su opinión sin la necesidad de que este cambio sea el resultado de la interacción con otros individuos.

Para este trabajo seguiremos los resultados previos de N. C. Clementi et al [2]. Comenzaremos entonces describiendo el marco en el cual [2] esta desarrollado, introduciendo el modelo de opinión y la dinámica de los agentes.

## 2. Modelo de Opinión en sistemas de agentes móviles

Como se mencionó durante la introducción, el modelo de opinión que utilizaremos, sigue el trabajo previo de N. C. Clementi, J. A. Revelli, y G. J. Sibona [2]. Por esto primero se describira exhaustivamente el Modelo de Opinión utilizado en [2], comenzando por definir los estados de opinión posibles para los individuos y los diferentes procesos existentes.

### 2.1. Estados de opinión

La mayoría de los temas de interés social cuentan con posturas diversas dentro de la complejidad que implica una sociedad moderna, pero en muchos casos estas posturas se pueden dividir en dos grupos: Por ejemplo, a favor en contra de un determinado tópico social, de izquierda o derecha en posicionamiento político, etc. Basta con analizar cualquier conflicto social para ver que esto es una realidad, desde la opinión acerca de un político, hasta sí una película es buena o mala; todos los temas controversiales presentan esta división. En este trabajo siguiendo el marco presentado en [2], se utilizara que los estados<sup>1</sup> de opinión posibles para los agentes estarán divididos en dos grupos: A y B.

Es importante notar que sí bien las opiniones suelen dividirse en estos grupos durante un conflicto, se tiene un rango de aceptación o convencimiento dentro de cada postura A y B. Desde posiciones radicales que adhieren a una postura totalmente, a otras más moderadas que aceptan que dicha postura tiene falencias o la cuestionan. Estas diferentes posiciones, podrían verse reflejadas en una discretización en  $n$  estados posibles dentro de cada postura general de un agente. Para los intereses de este trabajo basta con presuponer que se tienen posiciones extremas que denominaremos  $A^+$  y  $B^+$  y posiciones moderadas  $A^-$  y  $B^-$ , esta división implica tener agentes fanáticos o moderados dentro de cada postura. Podemos visualizar los posibles estados de opinión en el es esquema de la fig.4.

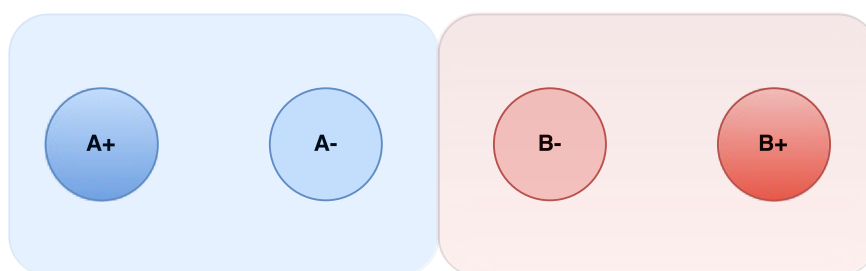


Figura 4: Discretización de los estados de opinión.

Es importante mencionar que los procesos reales por los cual se forman las opiniones en una sociedad va más allá del objetivo de este trabajo o de la descripción que este modelo pueda presentar, pero sí analizar sí bajo las simplificaciones impuestas se pueden obtener resultados macroscópicos interesantes.

En este modelo la evolución del estado de los agentes, va a estar dada por dos procesos separados, uno dado por la interacción entre agentes: La *persuasión*. Y, otro proceso externo dado cuando los agentes no interactúan al que llamaremos

---

<sup>1</sup>De ahora en más cuando se mencione el estado del agente se hará referencia a la opinión de este.

*reflexión*. Tanto la *persuasión* como la *reflexión* juegan un papel fundamental en este modelo. A cada uno se los describira primero por separado, buscando establecer los resultados analíticos que describen la evolución del sistema dada por cada uno de los procesos. Después sí, se planteara el modelo analítico que describe la presencia de ambos procesos en la formación de la opinión; En particular el modelo que describe la evolución de las poblaciones de agentes con una dada opinión. Para esto, se definen las poblaciones  $P_{A^+}$ ,  $P_{A^-}$ ,  $P_{B^-}$  y  $P_{B^+}$  como la cantidad de agentes sobre el total con opinión  $A^+$ ,  $A^-$ ,  $B^-$  y  $B^+$  respectivamente. Supondremos además, que los tiempos de formación de opinión son considerablemente más rápidos que la variación en la población total, debido a procesos de nacimiento, muerte o migraciones. Lo cual reflejaremos al tomar la población total constante.

## 2.2. Modelo analítico

Para poder llegar a una descripción analítica de la evolución del sistema y sus poblaciones  $[P_{A^+}, P_{A^-}, P_{B^-}, P_{B^+}]$  primero debemos entender los procesos que generan la evolución de las opiniones en un nuestro modelo:

### 2.2.1. Persuasión

Este proceso busca representar los posibles cambios en la opinión de un agente dado por la interacción entre estos. Para describir el resultado de una interacción definamos dos matrices  $4 \times 4$ ,  $\Phi(\Omega)$  cuyos coeficientes  $\phi_{ij}(\omega_{ij})^2$  representan la frecuencia en la que cambia la opinión de un agente de opinión  $j$  a la derecha(izquierda) al interactuar con otro de estado  $i$ , es decir la probabilidad por unidad de tiempo que un agente tiene de pasar de un estado  $j$  a un estado  $j+1(j-1)$  cuando interactúa con otro de estado  $i$ . Dado que  $A^+$  y  $B^+$  son las opiniones extremas del sistema, se debe tener que:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & 0 \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & 0 \\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{14} \\ 0 & \omega_{22} & \omega_{23} & \omega_{24} \\ 0 & \omega_{32} & \omega_{33} & \omega_{34} \\ 0 & \omega_{42} & \omega_{43} & \omega_{44} \end{pmatrix}$$

Es también importante mencionar que solo consideraremos interacciones binarias (entre dos agentes). Y que sí tomamos un intervalo de tiempo  $\Delta t$  pequeño, los agentes solo deberían realizar cambios suaves en su estado de opinión. Es decir, el estado de un agente en un intervalo  $\Delta t$  suficientemente chico, solo puede cambiar su estado  $j$  a  $j+1$  o  $j-1$ . Escribamos entonces las variaciones de las poblaciones

---

<sup>2</sup>Donde  $i, j = 1..4$  representan al estado  $P_{A^+}, P_{A^-}, P_{B^-}, P_{B^+}$  respectivamente

luego de un tiempo  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned}
P_{A^+}(t + \Delta t) &= P_{A^+}(t) + P_{A^-}(t)\Delta t \sum_i \omega_{i2}P_i \\
&\quad - P_{A^+}(t)\Delta t \sum_i \phi_{i1}P_i \\
P_{A^-}(t + \Delta t) &= P_{A^-}(t) + \Delta t [P_{B^-}(t) \sum_i \omega_{i3}P_i \\
&\quad + P_{A^+}(t) \sum_i \phi_{i1}P_i - P_{A^-}(t) \sum_i (\omega_{i2} + \phi_{i2})P_i] \\
P_{B^-}(t + \Delta t) &= P_{B^-}(t) + \Delta t [P_{B^+}(t) \sum_i \omega_{i4}P_i \\
&\quad + P_{A^-}(t) \sum_i \phi_{i2}P_i - P_{B^-}(t) \sum_i (\omega_{i3} + \phi_{i3})P_i] \\
P_{B^+}(t + \Delta t) &= P_{B^+}(t) + P_{B^-}(t)\Delta t \sum_i \phi_{i3}P_i \\
&\quad - P_{B^+}(t)\Delta t \sum_i \omega_{i4}P_i
\end{aligned} \tag{1}$$

Definamos los siguientes vectores, L y R. Para los cuales sus componentes j-esimas, representan el flujo de agentes que salen de un estado de opinión j, y pasan a tener un estado  $j - 1$  o  $j + 1$  respectivamente, por unidad de tiempo. Vamos a tener:

$$R_j = \sum_i \phi_{ij}P_i \tag{2}$$

y

$$L_j = \sum_i \omega_{ij}P_i \tag{3}$$

Los cuales pueden ser visualizados en la fig.5:

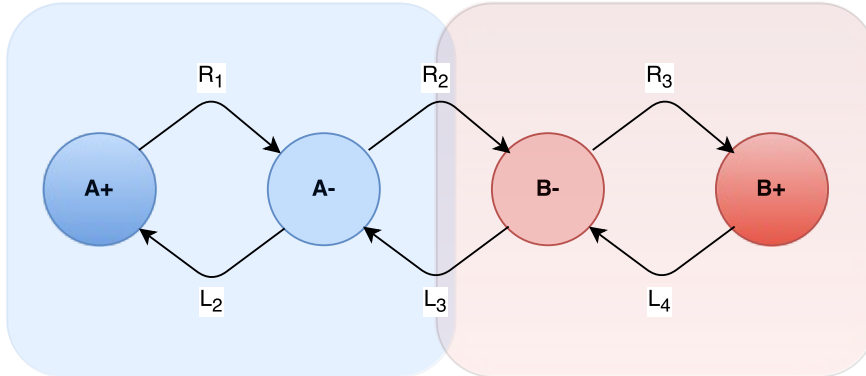


Figura 5: Flechas a izquierda (derecha), representan el flujo de agentes que pasan del estado i al i-1(i+1), por unidad de tiempo.

Podemos utilizar 2 y 3 para escribir de una manera más compacta el sistema de ecuaciones 1. Remplazando se obtiene:

$$\begin{aligned}
P_{A^+}(t + \Delta t) &= P_{A^+}(t) + \Delta t [P_{A^-}(t)L_2 - P_{A^+}(t)R_1] \\
P_{A^-}(t + \Delta t) &= P_{A^-}(t) + \Delta t [P_{B^-}(t)L_3 + P_{A^+}(t)R_1 - P_{A^-}(t)(L_2 + R_2)] \\
P_{B^-}(t + \Delta t) &= P_{B^-}(t) + \Delta t [P_{B^+}(t)L_4 + P_{A^-}(t)R_2 - P_{B^-}(t)(L_3 + R_3)] \\
P_{B^+}(t + \Delta t) &= P_{B^+}(t) + \Delta t [P_{B^-}(t)R_3 - P_{B^+}(t)L_4]
\end{aligned} \tag{4}$$

De aquí se sigue directamente si tomamos  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$  que:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{A^+}(t)}{dt} &= P_{A^-}(t)L_2 - P_{A^+}(t)R_1 \\
\frac{dP_{A^-}(t)}{dt} &= P_{B^-}(t)L_3 + P_{A^+}(t)R_1 - P_{A^-}(t)(L_2 + R_2) \\
\frac{dP_{B^-}(t)}{dt} &= P_{B^+}(t)L_4 + P_{A^-}(t)R_2 - P_{B^-}(t)(L_3 + R_3) \\
\frac{dP_{B^+}(t)}{dt} &= P_{B^-}(t)R_3 - P_{B^+}(t)L_4
\end{aligned} \tag{5}$$

Obtuvimos una ecuación para describir la evolución de las poblaciones debido al proceso de persuasión. Para poder representar de manera más clara este conjunto de ecuaciones, conviene llevarlas a una ecuación matricial, tomando  $\mathbf{P} = (P_{A^+}, P_{A^-}, P_{B^-}, P_{B^+})$  obtenemos:

$$\dot{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} -R_1 & L_2 & 0 & 0 \\ R_1 & -(L_2 + R_2) & L_3 & 0 \\ 0 & R_2 & -(L_3 + R_3) & L_4 \\ 0 & 0 & R_3 & -L_4 \end{pmatrix} \mathbf{P}$$

El hecho de que la matriz sea tridiagonal se debe básicamente a la restricción de tener únicamente saltos a primer vecino, si se permitiera saltos a vecinos más lejanos, tendríamos mas diagonales distintas de cero. El orden de la matriz, refleja que se tienen 4 estados de opinión posibles, si se aumentara el número de estados también lo haría el rango de la matriz y por tanto, la dificultad de resolver el sistema. Esta ecuación describe la evolución del sistema debido únicamente a la presencia de *persuasión*. Para completar la descripción, nos falta describir el fenómeno de reflexión.

### 2.2.2. Reflexión

Como se mencionó anteriormente la reflexión es un proceso externo que permite a los agentes cambiar su opinión en la ausencia de interacción. es decir, cuando el agente no se encuentra interactuando con otro aún puede cambiar su opinión. Este proceso busca describir la influencia de las redes, propagandas, editoriales periodísticas, etc, que influyen en los individuos para la formación de la opinión de este. Como también el propio análisis y reflexión sobre lo que escuchamos o leemos. La idea es que el individuo puede "darse cuenta" de sí algo es correcto o no.

Para describir este fenómeno, pensaremos que la reflexión es un proceso que ocurre únicamente en la ausencia de interacción. Durante el tiempo que el agente se encuentra libre, este tiene una determinada probabilidad de cambiar su opinión por propia reflexión. El cambio de opinión debido a la persuasión, de igual manera que para la reflexión, debe ser suave en un intervalo de tiempo  $\Delta t$  suficientemente chico. La reflexión, al depender únicamente del estado de opinión del agente y no de los otros, es un proceso lineal. Podemos definir los coeficientes  $r_i$  y  $l_i$ , donde  $i = 1 \dots 4$ , los cuales representan la tasa de cambio de opinión a derecha e izquierda respectivamente para un agente con estado  $i$ . Como  $A^+$  y  $B^+$  son las opiniones extremas del sistema, se debe tener que  $r_4 = l_1 = 0$ .

Podemos ahora escribir la evolución temporal del sistema de acuerdo a este

fenómeno. El cambio en las poblaciones en un intervalo  $\Delta t$  va a estar dada por:

$$\begin{aligned}
P_{A^+}(t + \Delta t) &= P_{A^+}(t) + \Delta t [P_{A^-}(t)l_2 - P_{A^+}(t)r_1] \\
P_{A^-}(t + \Delta t) &= P_{A^-}(t) + \Delta t [P_{B^-}(t)l_3 + P_{A^+}(t)r_1 - P_{A^-}(t)(l_2 + r_2)] \\
P_{B^-}(t + \Delta t) &= P_{B^-}(t) + \Delta t [P_{B^+}(t)l_4 + P_{A^-}(t)r_2 - P_{B^-}(t)(l_3 + r_3)] \\
P_{B^+}(t + \Delta t) &= P_{B^+}(t) + \Delta t [P_{B^-}(t)r_3 - P_{B^+}(t)l_4]
\end{aligned} \tag{6}$$

De aquí rápidamente obtenemos, tomando  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ , que las ecuaciones de evolución temporal para las poblaciones son:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{A^+}(t)}{dt} &= P_{A^-}(t)l_2 - P_{A^+}(t)r_1 \\
\frac{dP_{A^-}(t)}{dt} &= P_{B^-}(t)l_3 + P_{A^+}(t)r_1 - P_{A^-}(t)(l_2 + r_2) \\
\frac{dP_{B^-}(t)}{dt} &= P_{B^+}(t)l_4 + P_{A^-}(t)r_2 - P_{B^-}(t)(l_3 + r_3) \\
\frac{dP_{B^+}(t)}{dt} &= P_{B^-}(t)r_3 - P_{B^+}(t)l_4
\end{aligned} \tag{7}$$

sí bien es clara la similitud entre las ecuaciones en el caso del proceso de persuasión (5) y en el caso de reflexión (7), se debe notar que los coeficientes  $l$ ,  $r$  tienen naturaleza diferente que los coeficientes  $L$  y  $R$ , dado que estos dependen de la interacción con los vecinos. Por lo cual a diferencia del proceso de reflexión, la persuasión no es un proceso lineal.

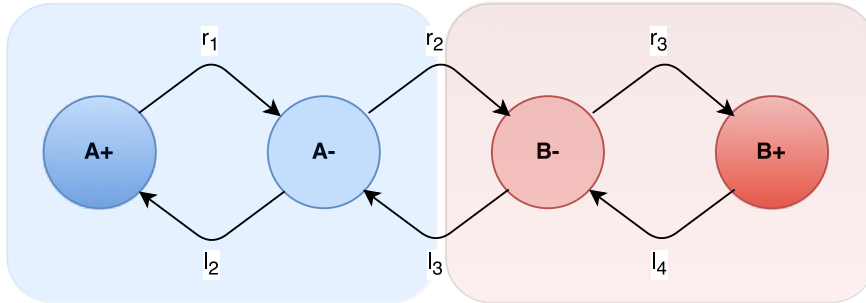


Figura 6: Flechas salientes(entrantes) representan el flujo de agentes que pierde(gana) el estado  $j$  por unidad de tiempo por el proceso de reflexión.

Podemos nuevamente escribir matricialmente el sistema de ecuaciones utilizando el vector  $\mathbf{P}$ , definido previamente :

$$\dot{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} -r_1 & l_2 & 0 & 0 \\ r_1 & -(l_2 + r_2) & l_3 & 0 \\ 0 & r_2 & -(l_3 + r_3) & l_4 \\ 0 & 0 & r_3 & -l_4 \end{pmatrix} \mathbf{P}$$

Nuevamente obtenemos una matriz tridiagonal, la cual al igual que para el caso del proceso de *persuasión*, se debe a que solo permitimos saltos suaves entre los estados de opinión de un agente. Por otro lado el orden de la matriz refleja el número de estados de opinión que utilizamos. Aumentar el número de estados posibles, implica un mayor dificultad tanto para resolver el modelo analítico como para las simulaciones numéricas.

### 2.3. Soluciones analíticas

Ahora sí, luego de obtener las ecuaciones que representan la evolución del sistema en términos de la persuasión y la reflexión, estamos en condiciones de encontrar la ecuación de evolución del sistema. Para esto definamos las siguientes matrices:

$$\mathbf{T}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} -R_1 & L_2 & 0 & 0 \\ R_1 & -(L_2 + R_2) & L_3 & 0 \\ 0 & R_2 & -(L_3 + R_3) & L_4 \\ 0 & 0 & R_3 & -L_4 \end{pmatrix},$$

la cual representa el aporte de la *persuasión* a la evolución del sistema, y por otro lado:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -r_1 & l_2 & 0 & 0 \\ r_1 & -(l_2 + r_2) & l_3 & 0 \\ 0 & r_2 & -(l_3 + r_3) & l_4 \\ 0 & 0 & r_3 & -l_4 \end{pmatrix},$$

que representa la contribución de la *reflexión* a la evolución. La solución se puede escribir entonces de manera simple como:

$$\dot{\mathbf{P}} = [\mathbf{T}(\mathbf{P}) + \mathbf{S}] \times \mathbf{P} \quad (8)$$

Notemos que esta ecuación es cuadrática en  $\mathbf{P}$ , dado que  $\mathbf{T}(\mathbf{P})$  es lineal en  $\mathbf{P}$ . Lo cual se debe a que las interacciones consideradas en el proceso de *persuasión* son interacciones *binarias*, es decir entre pares de agentes. sí bien es posible extender las interacciones a más agentes, esto complicaría la expresión para  $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ . La ecuación (8) describe completamente la evolución del sistema, pero es una ecuación no lineal en  $\mathbf{P}$ . Lo cual implica dificultades al intentar encontrar soluciones. Clementi et al. [2], usando la consideración de permitir solo interacciones binarias, resuelven para casos simples esta ecuación.

Siguiendo lo realizado en [2], resolvamos (8) en el régimen estacionario ( $\dot{\mathbf{P}} = 0$ ), se tiene:

$$0 = [\mathbf{T}(\mathbf{P}) + \mathbf{S}] \times \mathbf{P} \quad (9)$$

podemos escribir esta ecuación de manera matricial:

$$\begin{pmatrix} -(r_1 + R_1) & (l_2 + L_2) & 0 & 0 \\ (r_1 + R_1) & -(l_2 + L_2 + r_2 + R_2) & (l_3 + L_3) & 0 \\ 0 & (r_2 + R_2) & -(l_3 + L_3 + r_3 + R_3) & (l_4 + L_4) \\ 0 & 0 & (r_3 + R_3) & -(l_4 + L_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{A+} \\ P_{A-} \\ P_{B-} \\ P_{B+} \end{pmatrix} = 0$$

de donde surge el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= P_{A-}(l_2 + L_2) - P_{A+}(r_1 + R_1) \\ 0 &= P_{B-}(l_3 + L_3) + P_{A+}(r_1 + R_1) - P_{A-}(l_2 + L_2 + r_2 + R_2) \\ 0 &= P_{B+}(l_4 + L_4) + P_{A-}(r_2 + R_2) - P_{B-}(l_3 + L_3 + r_3 + R_3) \\ 0 &= P_{B-}(r_3 + R_3) - P_{B+}(l_4 + L_4) \end{aligned} \quad (10)$$

Para encontrar las soluciones del sistema debemos además utilizar que la suma de las poblaciones debe cumplir  $\sum_{i=1..4} P_i = 1$ , con estas 5 ecuaciones ahora sí, se puede resolver el sistema, obteniendo:



$$\begin{aligned}
P_{A+} &= \frac{1}{\epsilon}(l_2 + L_2)(l_3 + L_3)(l_4 + L_4) \\
P_{A-} &= \frac{1}{\epsilon}(r_1 + R_1)(l_3 + L_3)(l_4 + L_4) \\
P_{B-} &= \frac{1}{\epsilon}(r_1 + R_1)(r_2 + R_2)(l_4 + L_4) \\
P_{B+} &= \frac{1}{\epsilon}(r_1 + R_1)(r_2 + R_2)(r_3 + R_3)
\end{aligned} \tag{11}$$

en donde definimos,

$$\begin{aligned}
\epsilon &= (l_2 + L_2)(l_3 + L_3)(l_4 + L_4) + (r_1 + R_1)(l_3 + L_3)(l_4 + L_4) \\
&+ (r_1 + R_1)(r_2 + R_2)(l_4 + L_4) + (r_1 + R_1)(r_2 + R_2)(r_3 + R_3)
\end{aligned} \tag{12}$$

sí bien hemos despejado las poblaciones en términos de los vectores  $R$ ,  $L$ ,  $r$  y  $l$ , podemos ver que estas no son soluciones independientes. Dado que  $R_j = \sum_i \phi_{ij} P_i$  y  $L_j = \sum_i \omega_{ij} P_i$ , los vectores  $R$  y  $L$  dependen de las poblaciones.

Para lidiar con esto, durante el resto del trabajo utilizaremos por simplicidad que  $\phi_{ij} = \phi$ ,  $\omega_{ij} = \omega$  y también que  $r_i = r$ ,  $l_i = l$ . Exceptuando claro  $r_4$ ,  $l_1$ ,  $\phi_{i4}$  y  $\omega_{i1}$  los cuales deben ser cero. Esta elección no se debe a que sea la forma correcta de describir la interacción entre individuos. Como mencionamos previamente estos análisis van mucho más allá de lo que busca este trabajo. Lo que permite esta elección es poder resolver el modelo analítico de una manera directa, y con las soluciones, analizar luego la correlación con el modelo computacional que utilizaremos.

Analicemos entonces los resultados al imponer estas condiciones sobre  $L$ ,  $R$ ,  $l$  y  $r$ .

Utilizando que  $R_j = \sum_i \phi_{ij} P_i$  y  $L_j = \sum_i \omega_{ij} P_i$  e imponiendo  $\phi_{ij} = \phi$ ,  $\omega_{ij} = \omega$ , nos queda  $R = (\phi, \phi, \phi, 0)$  y  $L = (0, \omega, \omega, \omega)$ . Y tomando además  $r_i = r$  y  $l_i = l$ , los vectores de reflexión toman la forma  $r = (r, r, r, 0)$  y  $l = (0, l, l, l)$ . Con estos cambios obtenemos ahora sí las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned}
P_{A+} &= \frac{1}{\epsilon}(l + \omega)^3 \\
P_{A-} &= \frac{1}{\epsilon}(l + \omega)^2(r + \phi) \\
P_{B-} &= \frac{1}{\epsilon}(l + \omega)(r + \phi)^2 \\
P_{B+} &= \frac{1}{\epsilon}(r + \phi)^3
\end{aligned} \tag{13}$$

donde  $\epsilon$  ahora toma la forma,

$$\epsilon = (l + \omega)^3 + (l + \omega)^2(r + \phi) + (l + \omega)(r + \phi)^2 + (r + \phi)^3 \tag{14}$$

De aquí se pueden obtener algunos resultados rápidos, por ejemplo, tomando  $l = r$  y  $\phi = \omega$  tenemos que  $P_{A+} = P_{A-} = P_{B-} = P_{B+} = \frac{1}{4}$ .

### 3. Modelo Computacional

Durante la descripción del Modelo analítico que representa la evolución del sistema, se asume que este es acorde a suponer una aproximación de campo medio, donde la probabilidad de encuentro entre dos partículas con estados  $i, j$ , es proporcional a las poblaciones  $P_i$  y  $P_j$ . Por lo cual habíamos definido los coeficientes  $R, L$  de forma que representen el flujo de agentes por unidad de tiempo que cambian su opinión a izquierda o derecha, por causa del proceso de persuasión. Esto nos permitió encontrar soluciones al problema estacionario, pero no permite definir la movilidad de los agentes como un papel fundamental en el modelo. Para poder solucionar esto, primero debemos introducir como se mueven nuestros individuos.

Generalmente los modelos de opinión son introducidos en el ámbito de las redes complejas, las cuales dan un marco que permite describir las estructuras de distintos tipos de entramados sociales, como también por ejemplo el internet, la World wide web, las conexiones entre usuarios en redes sociales etc. Pero donde la dinámica del sistema, está ligada a la evolución de las redes. Es decir, la dinámica está en la formación y destrucción de conexiones entre los nodos(individuos). Por lo cual la dinámica se refleja en la evolución de la topología de la red, y no permite describir a los individuos como agentes que pueden moverse en el espacio. A diferencia de las redes, un sistema de agentes móviles permite que las conexiones entre agentes están dadas por el movimiento (dinámica) de los agentes, pero no como un parámetro que se pueda controlar de manera externa, como es en el caso de las redes. Además Gonzalez et al. mostraron en [9] que sistemas de agentes móviles pueden describir la formación de clusters y redes, cuando se tiene en cuenta la densidad del sistema de agentes. De esta forma buscaremos que sea la dinámica de los agentes la que lleve a estos a interactuar.

Para describir la interacción entre individuos como resultado de la movilidad humana, Peruani and Sibona (2008) [4], propusieron un modelo de agentes móviles para la transmisión de enfermedades. El cual fue la base para el modelo de agentes autopropulsados utilizado por N. C. Clementi, J. A. Revelli y G. J. Sibona (2015) [2]. Como se mencionó previamente dicha publicación [2] es la base sobre la cual este trabajo está realizado. En [2] N. C. Clementi et al. toman que la velocidad de los agentes es la misma para todos, en este caso no impondremos esta condición, al contrario tomaremos distintas distribuciones de velocidad para los agentes.

#### 3.1. Implementación del modelo computacional

La descripción utilizada para nuestros individuos será la de agentes autopropulsados, discos de radio  $\rho$  que se mueven en un espacio 2D de tamaño  $L \times L$  con condiciones periódicas de contorno. Donde autopropulsados viene del hecho que supondremos agentes cuyo movimiento no está gobernado por fuerzas externas, buscando reflejar el movimiento propio de los seres humanos. Sí supondremos que la velocidad está acotada. Y que en la ausencia de interacción la velocidad de los agentes  $v_i$  puede depender de dos variables; el tiempo ( $t$ ) y el estado del agente (opinión). Es decir se tiene  $v_i = v_i(t, j)$  donde  $i$  hace referencia al número del agente  $i = 1, \dots, N$  y  $j = 1 \dots 4$  representa el estado  $A^+, A^-, B^-$  y  $B^+$  respectivamente. Por otro lado la dirección de la partícula puede cambiar siguiendo una distribución temporal de Poisson, es decir los agentes cambian de dirección aleatoriamente dentro del plano cada un tiempo medio  $\alpha_{rot}$ . El módulo de la velocidad es independiente de estos cambios de dirección.

Para modelar la interacción entre los agentes se utiliza un potencial de esferas

blandas siguiendo [4], el siguiente diagrama (fig.7) muestra esquemáticamente la interacción entre dos discos autopropulsados.

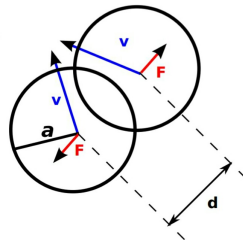


Figura 7: Diagrama de potencial de esferas blandas.

De forma analítica el movimiento de un agente se puede expresar como:

$$\dot{x}_i(t) = v_i(t, j) + \sum_{j \neq i} \nabla U(|x_i(t) - x_j(t)|) \quad (15)$$

donde  $U$  es el potencial de interacción:

$$U(|x_i(t) - x_j(t)|) = \begin{cases} 0 & \text{sí } |x_i(t) - x_j(t)| \geq 2\rho \\ \theta(v, \rho) (|x_i(t) - x_j(t)|^{-\eta} - (2\rho)^{-\eta}) & \text{sí } |x_i(t) - x_j(t)| < 2\rho \end{cases} \quad (16)$$

donde  $\theta$  es una función de corte para la fuerza que limita el solapamiento entre los agentes.

Sí bien el sistema permite que se formen grupos de partículas que interactúan simultáneamente, el proceso de *persuasión* es binario. Es decir, el cambio de opinión será gobernado por la interacción entre dos agentes como se describió en el modelo analítico, limitando el cambio de estado a uno solo por interacción. Durante el tiempo que un agente  $i$  está libre, se ve afectado por el proceso de *reflexión*. De igual manera que se describió previamente tomaremos generalmente que  $R = (\phi, \phi, \phi, 0)$ ,  $L = (0, \omega, \omega, \omega)$ ,  $l = (0, l, l, l)$  y  $r = (r, r, r, 0)$ . Lo cual como habíamos mencionado en la descripción del modelo analítico, se debe a la necesidad de simplificar las ecuaciones para poder encontrar una solución que nos permita comparar los resultados de las simulaciones.

Otro punto importante en la descripción del modelo computacional, es definir el número de agentes y el tamaño del sistema. Utilizaremos para poder comparar con resultados previos la misma elección de  $N$  y  $L$  tomada en [2], donde  $N=1024$  y  $L=250$ . Estos valores permiten que el sistema tenga densidad baja, con lo cual la aproximación de considerar solo interacciones binarias es acorde para esta configuración.

### 3.2. Distribuciones de velocidad

Para describir el movimiento de los individuos en nuestra simulación, es fundamental el rol que juega la velocidad de los agentes. La solución más simple que se puede tomar es considerar que todos poseen la misma velocidad  $v$ , la cual puede ser modificada como un parámetro de la simulación. El comportamiento del sistema bajo esta distribución fue estudiado previamente en [2], pero aun así se utilizara esta distribución en algunos casos. En particular analizaremos los resultados obtenidos previamente y a partir de una corrección obtendremos una mejor aproximación del modelo a los resultados numéricos

De mayor importancia en este trabajo será analizar el comportamiento del sistema para otra distribución de velocidades, una que dependa de la opinión del agente.

### 3.2.1. Velocidad dependiente de la opinión del agente

Durante algunos episodios sociales de mayor volatilidad, como por ejemplo las crisis económicas y sociales, los fenómenos revolucionarios, corridas bancarias etc. Los individuos con opiniones contrarias a lo impuesto por el sistema, buscan difundir con mayor intensidad su opinión. Podemos pensar en esto en el marco de una crisis gubernamental, donde el gobierno busca mantener la sociedad en un estado calmo manteniendo su imagen alta, pero los agentes de opinión contraria al sistema buscan difundir el mensaje opuesto. Este tipo de fenómenos, es el que queremos reflejar a través de la distribución de velocidad que vamos a definir a continuación:

Vamos a tomar que la velocidad de un agente con opinión  $j$  va a ser de la forma

$$v_i(t, j) = \tilde{v} \cdot K^{(j-1)} \quad (17)$$

la cual es una forma genérica de representar distribución de velocidades crecientes o decrecientes con la opinión (ver fig.8)

Donde  $\tilde{v}$  representa la velocidad para la población  $A^+$  y  $j$  representa el estado de la partícula, es decir  $j=1,2,3,4$  Si la partícula tiene opinión  $A^+$ ,  $A^-$ ,  $B^-$  y  $B^+$ , y  $K$  es un parámetro a elección. Podemos ver que tomando  $K = 1$  se obtiene una velocidad uniforme  $\tilde{v}$  para todos los agentes. Pero al aumentar  $K$ , tendremos que los agentes de opinión opuesta al estado  $A^+$  tendrán mayor velocidad que las partículas en ese estado, y de esa forma podremos reflejar lo que mencionamos arriba.

La dependencia temporal de la velocidad está en la dependencia de  $j(t)$ , dado que durante la simulación la opinión del agente puede cambiar varias veces, y por lo tanto la velocidad del agente también cambiará varias veces durante la simulación.

Este modelo para la velocidad nos permite generar situaciones como las que mencionamos al introducir esta velocidad. Cambiando  $K$  y  $\tilde{v}$  el conjunto de diversas distribuciones que se pueden obtener es ilimitada y en particular las que nos interesará será como las siguientes:

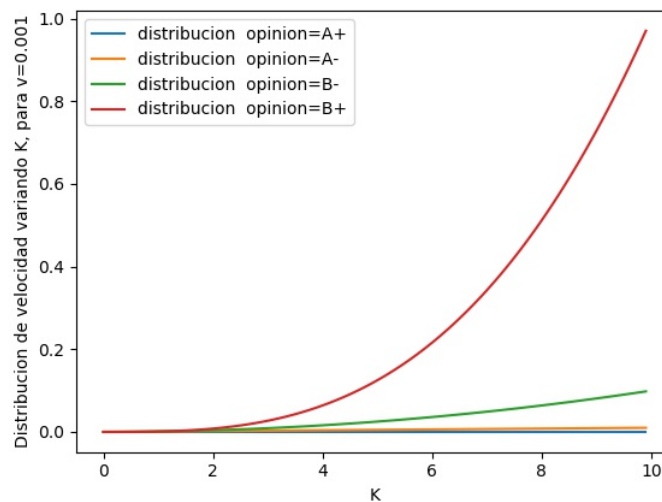


Figura 8: Distribución de velocidad de los agentes al cambiar  $K$ , en unidades de  $\tilde{v}$ .

En particular, trabajaremos con valores de  $K \geq 1$ , lo cual para esta distribución implica que las velocidades cumplan  $v(A^+) < v(A^-) < v(B^-) < v(B^+)$ .

Como podemos ver para  $K \geq 1$  esta distribución genera que los agentes con opinión  $A^+$  tengan velocidad menor que los que tengan opinión  $B^+$  y que una descripción del fenómeno inverso es totalmente simétrica a esta.

### 3.3. Corrección al modelo analítico por la dinámica de los agentes autopropulsados

Como se mencionó durante la introducción a este capítulo, el modelo analítico no tiene incorporada la dinámica de los agentes autopropulsados. Al contrario, supone que la probabilidad de encuentro entre dos partículas con estados  $i, j$ , es proporcional a las poblaciones  $P_i$  y  $P_j$ . Ahora que hemos incorporado la dinámica de los agentes, podemos encontrar las correcciones al modelo analítico. Lo primero que debemos notar, es cual es la influencia de la dinámica a la probabilidad de que dos agentes de estados  $i, j$ , se encuentren. Para esto debemos analizar cuál es la probabilidad de que dos agentes interactúen o no, con la dinámica que hemos establecido.

Podemos definir dos tiempos del sistema;  $\lambda$  que jugará el papel del tiempo medio de interacción de los agentes y  $\tau$  el tiempo libre medio, es decir, el tiempo medio en el que un agente no está en contacto con otro agente. Utilizando estos tiempos es fácil encontrar la probabilidad de interactuar y la de no interactuar:

- La probabilidad de interactuar estará dada por la relación entre el tiempo medio que un agente interactúa y el tiempo total, es decir,  $(\frac{\lambda}{\lambda+\tau})$ .
- La probabilidad de no interactuar va a estar dada en cambio por la relación entre el tiempo libre medio y el tiempo total, es decir,  $(\frac{\tau}{\lambda+\tau})$ .

Por otro lado, debemos añadir correcciones a las probabilidades de cambiar de opinión para el proceso de *persuasión* y *reflexión*. Durante la interacción debemos considerar la probabilidad de realizar una transición específica entre todas las posibles. Es decir, al interactuar un agente de estado  $i$  con otro de estado  $j$ , pueden ocurrir las siguientes transiciones;  $(i, j) \rightarrow (i \pm 1, j)$  o  $(i, j) \rightarrow (i, j \pm 1)$ . Sin embargo la probabilidad de realizar un único cambio implica que no pueden haber ocurrido cambios de estado previamente durante la interacción, por lo cual debemos tener en cuenta la probabilidad de que esto no suceda, N. Clementi et al mostraron en [2] que esta corrección esta dada por  $(1 - e^{-\sum_{ij} \lambda})$  donde  $\sum_{ij} = \phi_{ij} + \omega_{ij} + \phi_{ji} + \omega_{ji}$ .

Utilizando esto podemos reescribir los coeficientes re-escalados para tener en cuenta estas correcciones. Para los coeficientes de *persuasión* vamos a tener:

$$\begin{aligned}\omega'_{ij} &= \frac{1}{\tau + \lambda} \left[ \frac{\omega_{ij}}{\sum_{ij}} (1 - e^{-\sum_{ij} \lambda}) \right] \\ \phi'_{ij} &= \frac{1}{\tau + \lambda} \left[ \frac{\phi_{ij}}{\sum_{ij}} (1 - e^{-\sum_{ij} \lambda}) \right]\end{aligned}\tag{18}$$

para los coeficientes de *reflexión* tenemos que incluir la probabilidad de que el agente no esté interactuando, que como se mencionó está dada por  $(\frac{\tau}{\lambda+\tau})$  obteniendo entonces para  $r'$  y  $l'$ :

$$\begin{aligned}r' &= \left( \frac{\tau}{\lambda + \tau} \right) r \\ l' &= \left( \frac{\tau}{\lambda + \tau} \right) l\end{aligned}\tag{19}$$

Es importante notar que la dependencia de estas correcciones con la velocidad está dentro de los tiempos  $\lambda$  y  $\tau$ , los cuales por supuesto van a depender de la distribución de velocidad de los agentes. Es decir, cuando la velocidad de los agentes depende de su estado de opinión  $j$ , voy a tener que su velocidad  $v = v(t, j)$ . Y siguiendo por tanto que los tiempos  $\lambda$  y  $\tau$  van a ser en realidad de la forma;  $\lambda = \lambda(t)$  y  $\tau = \tau(t)$ .

Esta dependencia de  $\lambda(t)$  y  $\tau(t)$  con el tiempo, para el caso en que los agentes no poseen velocidad constante, nos impide encontrar las soluciones estacionarias. Por tanto nos veremos limitados al caso de velocidades constantes cuando se desee analizar la correlación entre las simulaciones y el modelo analítico.

### 3.3.1. Tiempo Medio de Colisión y tiempo libre medio

Tanto  $\lambda$  como  $\tau$  son dependientes de la distribución de velocidad de los agentes, y como se mencionó, vamos a definirlos únicamente para el caso en que la distribución de velocidades del sistema no depende del tiempo y donde los agentes tienen como velocidad media  $v$ .

En particular vamos a pedir que el tiempo de colisión medio cumpla  $\lambda(v) \rightarrow 0$  sí  $v \rightarrow \infty$  y  $\lambda(v) \rightarrow \infty$  sí  $v \rightarrow 0$ . Y considerando el teorema  $\pi$  de Buckingham [3] podemos concluir que  $\lambda(v)$  debe tomar la forma  $\lambda(v) = \gamma(\frac{\rho}{v})^{-\xi}$  donde  $\rho$  es el radio de los discos,  $\gamma$  una constante de dimensionalidad y  $\xi$  una constante positiva.

Peruani and Sibona (2008) [4] mostraron que se podía ajustar  $\lambda(v)$  mediante simulaciones, en [2] por otro lado se usó que  $\lambda(v)$  tomaba la forma:

$$\lambda(v) = 1,18 \left(\frac{1}{v}\right)^{0,967} \quad (20)$$

donde se tomó  $\rho = 1$ .

Por otro lado el valor del tiempo libre medio  $\tau(v)$  está dado por  $\frac{1}{C}$  donde  $C$  es la probabilidad de choque, la cual se puede expresar como:

$$C = 4\rho \frac{N}{A} v \quad (21)$$

con  $\rho$  el radio de los agentes,  $N$  el número de agentes y  $A$  expresa el área total del sistema (LxL). De aquí simplemente se expresa  $\tau(v) = \frac{1}{C}$  es decir:

$$\tau(v) = \frac{A}{4\rho N v} \quad (22)$$

En ambos casos, otra suposición no mencionada, es que el sistema está en el régimen balístico. Es decir, en el caso donde las velocidades de los agentes son mayores que  $v > \frac{1}{\alpha_{rot}}$  ( $\alpha_{rot}$  tiempo de cambio de dirección medio.). Sí no estamos en esta región de velocidades, los agentes cambian de dirección de manera aleatoria antes de poder escapar de la región del espacio donde se encuentran, lo cual genera un comportamiento difusivo. En este trabajo buscaremos incorporar en las soluciones analíticas, el comportamiento para  $v < \frac{1}{\alpha_{rot}}$ , ampliando el análisis que hicieron Sibona et al. [2].

Dado que  $\lambda$  y  $\tau$  son claves para poder obtener las soluciones analíticas, es conveniente analizar cual es el comportamiento que poseen cuando fijamos los parámetros de la simulación como serán utilizados durante el resto del trabajo, y además nos permitirá comparar con los resultados previos que se acaban de mencionar. Los parámetros que se van a utilizar son:

- $N=1024$

- $\alpha_{rot} = 10$
- $\rho = 1$

Fijando estos parámetros, podemos ver los resultados que se obtienen en la dependencia de  $\lambda$  y  $\tau$  con la velocidad de las partículas, la cual se elige la misma para todos los agentes.

Para el tiempo libre medio  $\tau$ , se midieron los tiempos libres de cada partícula para tiempos largos de simulación (de modo que el número de interacciones sea elevado) y se realizó estadística sobre estos obteniendo el valor medio. Para cada valor de velocidad se realizaron dos simulaciones donde se vio que no había discrepancia entre los resultados obtenidos. De esta forma se obtuvo:

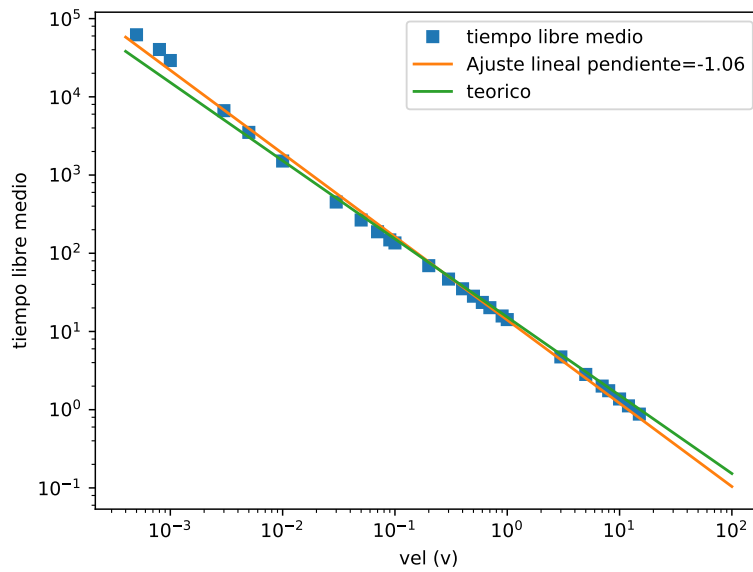


Figura 9: Dependencia de  $\tau$  con la velocidad para  $\alpha_{rot} = 10$

Se puede ver que los resultados son consistentes con los esperados a velocidades altas,  $v > \frac{1}{\alpha_{rot}}$ , (comportamiento balístico), pero para velocidades bajas,  $v < \frac{1}{\alpha_{rot}}$ , (comportamiento difusivo) podemos ver que la pendiente de la recta cambia.

De la misma manera que para el tiempo libre medio se llevó a cabo las simulaciones para obtener el tiempo medio de colisión,  $\lambda(v)$ .

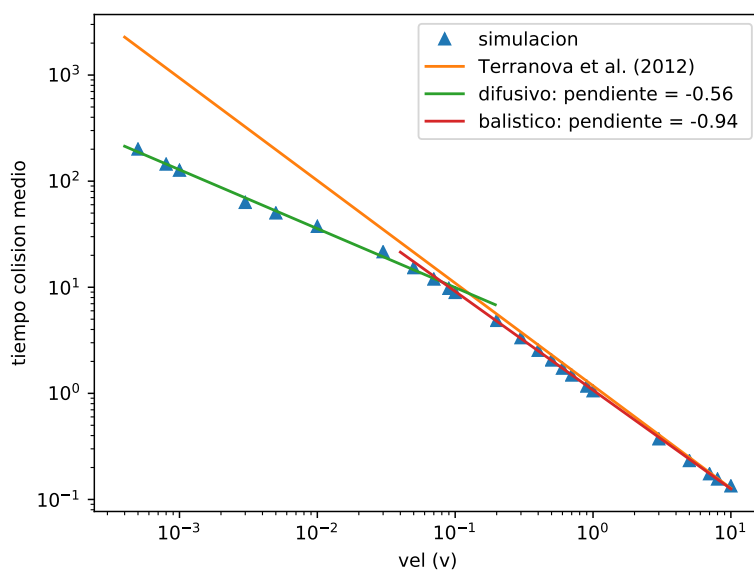


Figura 10: Dependencia de  $\lambda$  con la velocidad para  $\alpha_{rot} = 10$

Es notable ver que el comportamiento de  $\lambda$  se puede dividir en dos regiones, la primera para  $v < 0,1$  (velocidad que satisface  $v = \frac{1}{\alpha_{rot}}$ ) y la otra región para  $v > 0,1$ .

En el primer caso, podemos notar que el resultado de las simulaciones difiere de lo predicho por Terranova et al. [6], en este caso se obtiene que la pendiente toma el valor  $-0.56$  lo cual se corresponde con un comportamiento difusivo, para el cual las partículas se mueven en una determinada región e interactúan solamente con sus vecinos. Para velocidades mayores a  $v > 0,1$  el comportamiento es balístico como esperábamos y la pendiente obtenida es similar a la propuesta en [6].

El valor de  $\alpha_{rot}$  que vamos a utilizar durante las simulaciones es el de  $\alpha_{rot} = 10$ . De igual manera analicemos que sucede con  $\tau$  y  $\lambda(v)$  para  $\alpha_{rot} = 100$  y  $\alpha_{rot} = 1$ , para corroborar que la transición encontrada en  $v = \frac{1}{\alpha_{rot}}$  también se cumple en estos casos:

- $\alpha_{rot} = 1$ :

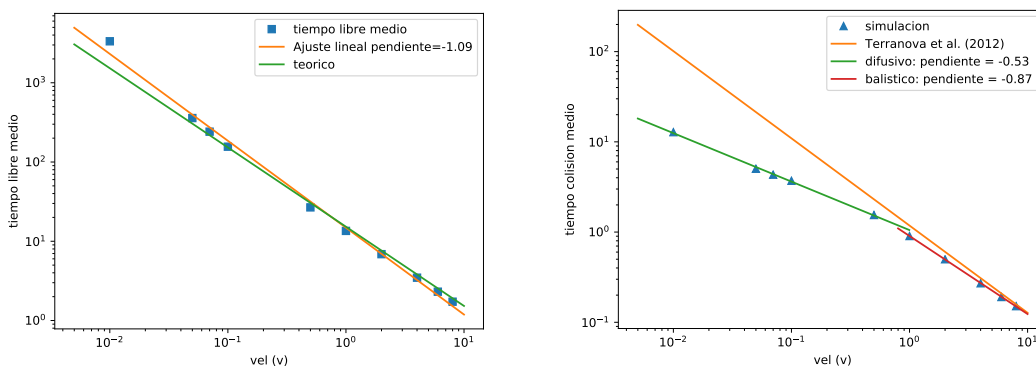


Figura 11: Dependencia de  $\lambda$  con la velocidad para  $\alpha_{rot} = 1$

- $\alpha_{rot} = 100$ :



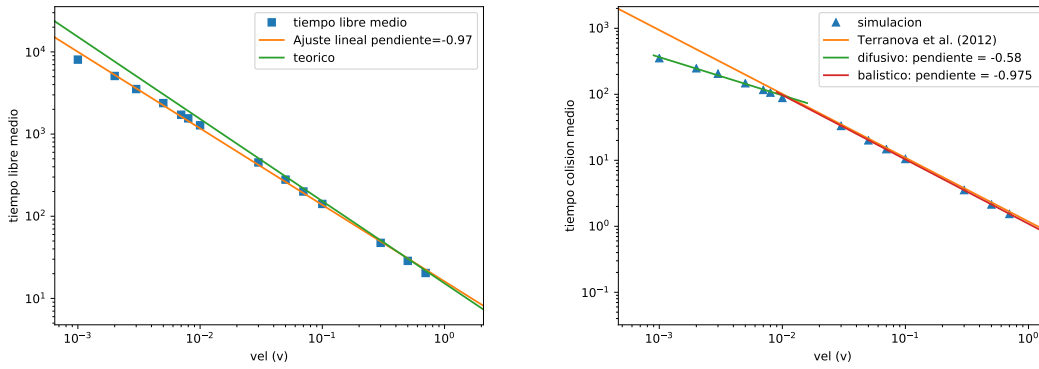


Figura 12: Dependencia de  $\lambda$  con la velocidad para  $\alpha_{rot} = 100$

Los resultados son acordes a lo que habíamos mostrado para  $\alpha_{rot} = 10$ . El cambio de comportamiento en los tiempos característicos ocurre en  $v = \frac{1}{\alpha_{rot}}$  es decir en  $v = 1$  para  $\alpha_{rot} = 1$  y en  $v = 0,01$  para  $\alpha_{rot} = 100$ . Los valores de la pendiente para el tiempo medio libre no divergen demasiado del resultado teórico esperado. Pero esto no sucede con el tiempo de colisión medio. Dada la dependencia de las soluciones analíticas con  $\tau(v)$  y  $\lambda(v)$  estos nuevos resultados nos permiten mejorar la correlación entre las soluciones analíticas y las simulaciones que encontraron N. Clementi et al. [2].

Otro análisis importante previo a obtener las soluciones es entender cuál es la dependencia de la cantidad de interacciones con la velocidad media del sistema. Para analizar esto, se obtuvo de las simulaciones el número total de interacciones entre las partículas, en un intervalo de tiempo  $\Delta t = 10000$ , y en particular para el caso  $\alpha_{rot} = 10$ .

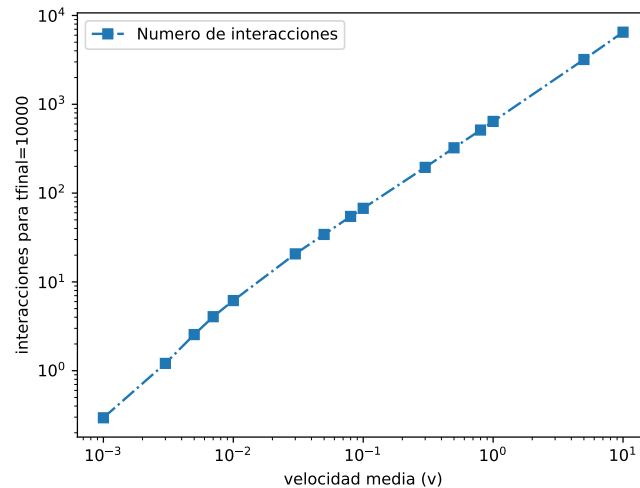


Figura 13: Número de interacciones vs velocidad media con  $\alpha_{rot} = 10$  en un intervalo  $\Delta t = 10000$ .

Podemos concluir que sí bien el aumentar la velocidad del agente implica una disminución en el tiempo de colisión media, es decir en el tiempo de interacción del individuo. La cantidad de interacciones del agente aumentará, esto nos lleva a la pregunta clave para entender cual va a ser el estado estacionario de un agente: ¿como es la dependencia con la velocidad del tiempo que pasa una partícula interactuando o libre?, es decir, sí tomamos un segmento de tiempo cuál es el porcentaje de este que la partícula pasa interactuando y cuanto tiempo pasa libre en dependencia con

la velocidad de los agentes. De igual manera que medimos los tiempos característicos podemos encontrar esta relación en nuestras simulaciones:

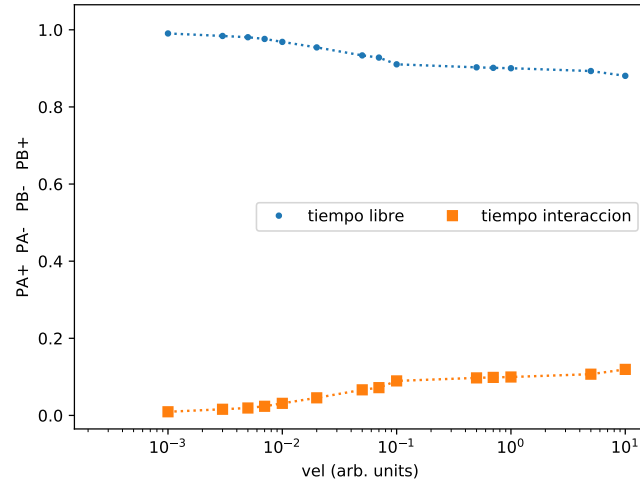


Figura 14: tiempo de interacción y tiempo libre vs velocidad con  $\alpha_{rot} = 10$ .

Podemos ver que al aumentar la velocidad el tiempo de interacción aumenta en proporción con el tiempo libre, lo cual implica que a velocidades altas tendremos mayor influencia de el proceso de *reflexión* que para velocidades bajas, y para el caso de el proceso de *persuasión* tendremos la situación opuesta. Podemos ver en la fig.14 que para  $v > \frac{1}{\alpha_{rot}}$  el comportamiento de las curvas cambia como uno esperaría debido al cambio en el comportamiento del tiempo de colisión medio  $\lambda(v)$  que encontramos en la fig.??.

## 4. Condición inicial y evolución temporal del sistema

Durante el capítulo anterior, describimos el modelo computacional y encontramos los tiempos característicos que describen el sistema  $\tau(v)$  y  $\lambda(v)$ . Lo cual nos deja en condiciones de poder encontrar las soluciones analíticas para los estados estacionarios, y de esa forma comparar con los resultados de las simulaciones. Pero antes de eso es importante analizar cómo es la evolución temporal de las simulaciones hacia el estado estacionario. Esto nos permitirá analizar cómo se comporta la evolución temporal dependiendo de los valores de los parámetros que se elijan. Como depende por ejemplo para distintos valores de  $l$ ,  $r$ ,  $\phi$ ,  $\omega$  y por supuesto al cambiar la dinámica de los agentes, tomando por ejemplo la distribución de velocidades definida en 23 y dada por<sup>3</sup>  $v_i(t, j) = \tilde{v} \cdot K^{(j-1)}$  y utilizar diferentes valores de  $K$ .

### 4.1. Estado inicial

Las soluciones analíticas para el estado estacionario del sistema no dependen de la condición inicial (estado en la opinión de los agentes) del sistema, y es importante corroborar en las simulaciones que esto es así. Para esto tomemos algunos casos en particular. Como es de especial interés de este trabajo el caso para el cual todos los agentes poseen el mismo estado inicial, debido al interés de representar poblaciones que en principio se encuentran en concenso, podemos tomar por ej;  $PA^+ = 1$  y para el resto de las poblaciones el valor 0, comparemos este caso con el de tomar todas las poblaciones con el mismo valor inicial 0.25. Se utilizó velocidad constante  $v$  para todos los agentes. :

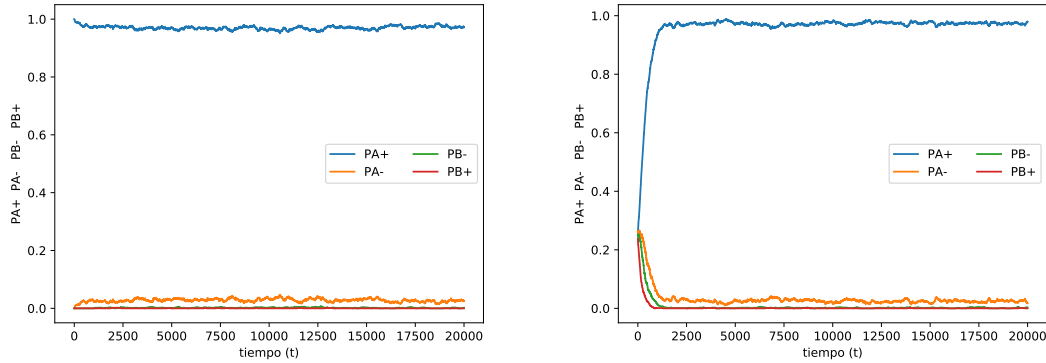


Figura 15: evolución temporal para la condición  $[1,0,0,0]$  vs  $[0.25,0.25,0.25,0.25]$  con  $\frac{l}{r} = 2$  y  $\frac{\phi}{\omega} = 2$  con  $v$  uniforme para todas las opiniones.

<sup>3</sup>Donde  $j = 1 \dots 4$  representa al estado  $A^+$ ,  $A^-$ ,  $B^-$  y  $B^+$  respectivamente

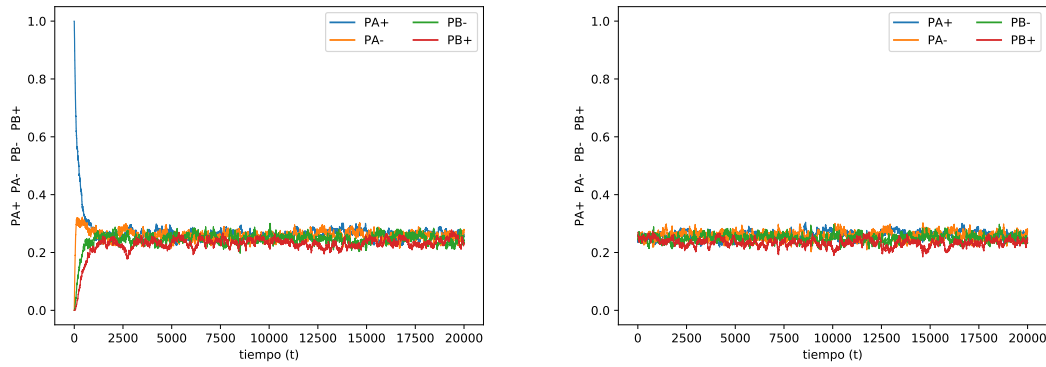


Figura 16: evolución temporal para la condición  $[1,0,0,0]$  vs  $[0.25,0.25,0.25,0.25]$  con  $\frac{l}{r} = 2$  y  $\frac{\phi}{\omega} = 2$  con  $v$  uniforme para todas las opiniones.

Podemos ver en fig.14 y fig.15 que el comportamiento es el esperado. Sin depender de la condición inicial en el estado de los agentes, el sistema llega al mismo estado estacionario (por supuesto el estado transitorio sí cambia entre ambos casos). Esto nos permite elegir cualquier condición inicial cuando analicemos los estados estacionarios; en particular tomaremos de ahora en mas como estado inicial las poblaciones  $P = [1, 0, 0, 0]$ , es decir todos los agentes con opinion  $A^+$ , la cual simula una sociedad que inicialmente se encuentra en consenso.

Sí bien estudiar el estado transitorio de las poblaciones no será central en este trabajo y más que nada analizaremos los estados estacionarios, es importante mostrar como se llega a este estado. El análisis de posibles transiciones de fase, y la posible existencia de estados pseudo estacionarios, son algunos de los casos para los cuales es de suma importancia la dinámica temporal del sistema. Podemos a modo de ejemplo ver cómo cambia la evolución para distintos  $K$  y por simplicidad comparemos únicamente la población  $PA^+$ :

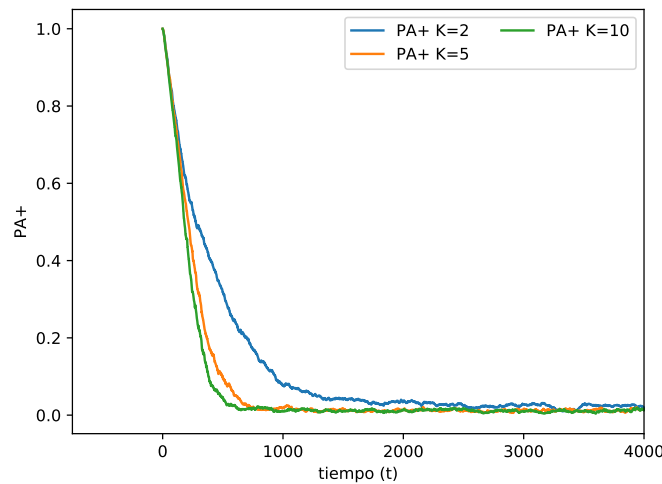


Figura 17: evolucion temporal con  $\frac{l}{r} = 5$  y  $\frac{\phi}{\omega} = 5$  para  $K = 2, 5, 10$ .

Podemos ver fig.??fig:evol5 que para  $K$  grande el sistema llega más rapido al estado estacionario, lo cual es esperado debido a que aumenta la movilidad del sistema, y por lo tanto el número de interacciones.

Veamos ahora para  $\frac{l}{r} = 2$  y  $\frac{\phi}{\omega} = 2$  y  $v=0.01$  con  $K=10$  para distintos valores de  $l$  manteniendo las relaciones fijas.

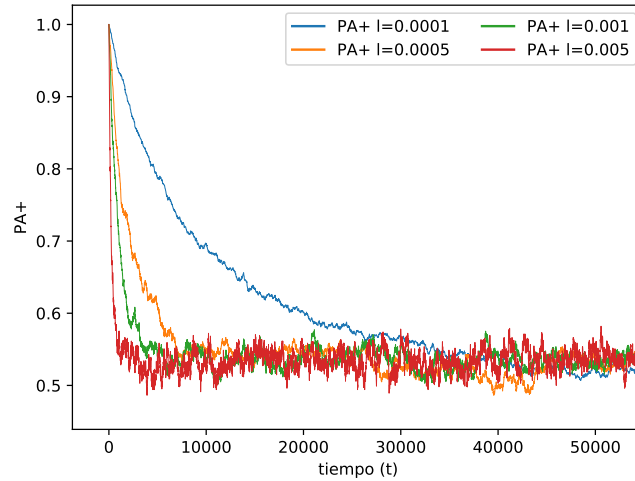


Figura 18: evolución temporal con  $\frac{l}{r} = 5$  y  $\frac{\phi}{\omega} = 5$  para diferentes valores  $l$ .

Podemos observar en la fig.18 que en este caso aumentar  $l$  reduce el tiempo para llegar al estacionario, esto se debe a que aumentar  $l$  implica aumentar  $r$ , generando para tiempos iniciales un salto de agentes a estados de opinión con mayor movilidad. Esto genera que el proceso de persuasión actúa al tener mayor cantidad de interacciones, llevando al sistema al estado estacionario rápidamente. Es interesante ver que para el caso  $l=0.005$  el sistema presenta más ruido que por ejemplo para  $l=0.0001$ . El significado de estas oscilaciones podrían deberse a posibles regiones de transición de fase, donde el estado estacionario pierde estabilidad y pasa a ser un estado pseudo estacionario, más adelante veremos estas transiciones en los estados estacionarios.

Hemos visto entonces que, por supuesto, la evolución temporal del sistema cambia de acuerdo los parámetros de la simulación. Vimos que a mayor movilidad de los agentes el sistema llega más rápido al estado estacionario, y que la condición inicial en el estado de los agentes no influye en el estado estacionario. Con lo cual, estamos en condiciones de pasar a analizar las soluciones analíticas y compararlas con los resultados de las simulaciones.

## 5. Modelo analítico vs Simulaciones

Ahora sí, luego de haber presentado tanto el modelo analítico y su corrección debido a los agentes autopropulsados, de haber obtenido las curvas de ajuste para  $\lambda(v)$  y  $\tau(v)$  y haber presentado el modelo computacional, podemos pasar a analizar que sucede al encontrar las soluciones analíticas y compararlas con las simulaciones. Al tener únicamente soluciones en la condición de estado estacionario, la comparación va a estar limitada a este caso. La evolución temporal del sistema sólo se va a poder presentar como el resultado de las simulaciones, y no de manera analítica. También estaremos limitados a que  $\lambda(v)$  y  $\tau(v)$  sólo son correctos para la distribución de velocidad en que todas las partículas tienen velocidad  $v$  y esta no cambia con el tiempo. Por ejemplo en el caso de la distribución de velocidad constante que definimos en el capítulo anterior. De igual manera los resultados nos permitirán corroborar si el modelo analítico representa el sistema correctamente.

Es importante mencionar que Clementi et al. [2] ya presentaron soluciones para la distribución constante de velocidades mostrando una importante correlación entre las soluciones analíticas y las simulaciones, pero en este trabajo se hará especial énfasis en analizar la competencia entre los procesos de reflexión y persuasión, además de incorporar las correcciones a los tiempos medios del sistema la cual no estaba presente en ese trabajo.

### 5.1. Parámetros de las simulaciones y condición inicial.

De ahora en mas mantendremos fijos algunos parámetros durante las simulaciones,

- $N=1024$
- $\alpha_{rot} = 10$
- $\rho = 1$
- $L = 250$

Se debe notar que estos mismos fueron los utilizados para encontrar las curvas  $\lambda(v)$  y  $\tau(v)$ .

Por otro lado como se mencionó durante el desarrollo del modelo analítico, los procesos de *persuasión* y *reflexión* están gobernados por las matrices  $\Phi$ ,  $\Omega$  y los vectores  $r$  y  $l$  respectivamente, los cuales durante el desarrollo se van a tomar de la forma  $\phi_{ij} = \phi$ ,  $\omega_{ij} = \omega$  y también que  $l_i = l$ ,  $r_i = r$ , exceptuando los que deben valer cero dado que  $A^+$  y  $B^+$  son estados extremos.

La condición inicial del sistema se elige de modo que todos los agentes tengan opinión  $A^+$ .

### 5.2. Distribución constante de velocidades

Al realizar las simulaciones tenemos varios parámetros libres para elegir,  $\phi$ ,  $\omega$ ,  $r$  y  $l$  y la velocidad de los agentes  $v$ . Esto nos permite representar una competencia entre *reflexión* y *persuasión*. Para esto se fija  $l > r$  y  $\phi > \omega$ , esta elección genera que la *reflexión* tenga mayor probabilidad de generar cambios de opinión a estados en la dirección de  $A^+$ , y que la *persuasión* sea más efectiva en la dirección de  $B^+$ .

En particular nos centraremos en ver cómo se comportan las soluciones al cambiar los valores de  $\frac{\phi}{\omega}$  y  $\frac{l}{r}$ . Tomemos primero,

- $\frac{\phi}{\omega} = 2$  y  $\frac{l}{r} = 2$

podemos observar los resultados de las simulaciones en la fig.19.

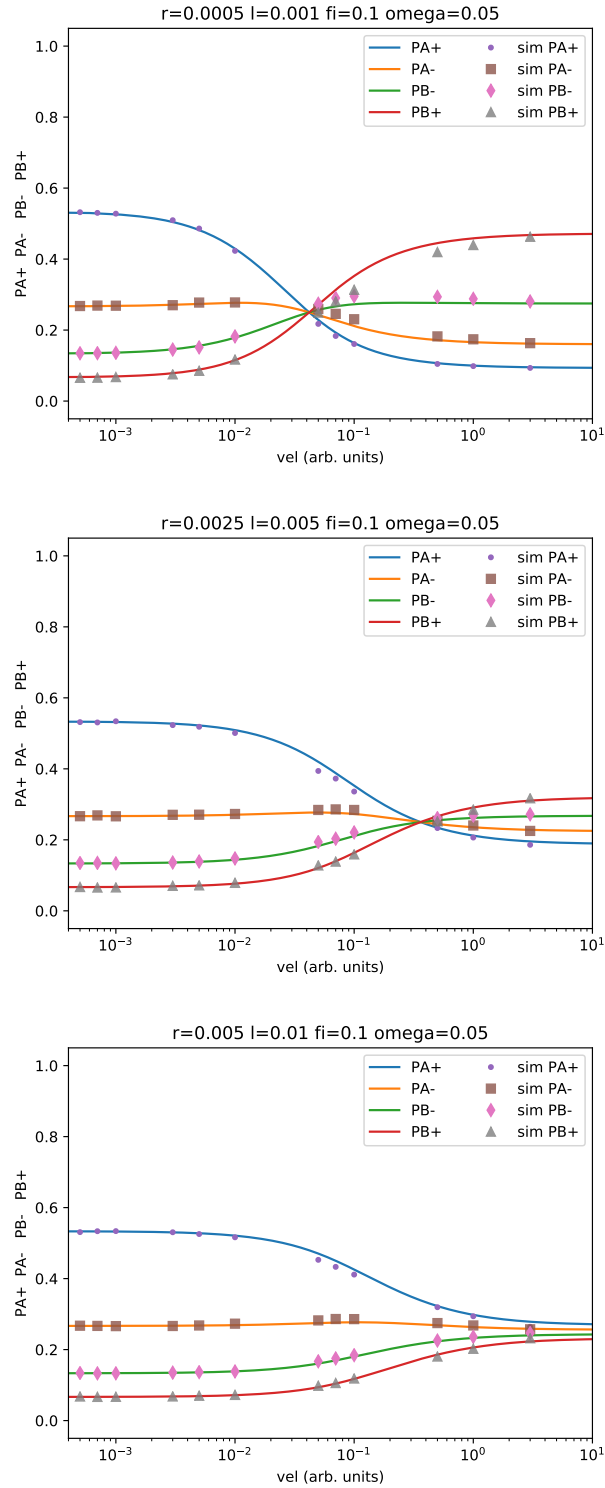


Figura 19: Soluciones estacionarias  $\frac{\dot{\phi}}{\omega} = 2$  y  $\frac{l}{r} = 2$

En la fig.19, se puede observar que la correlación entre los resultados analíticos y las simulaciones es notable. Tanto a bajas velocidades como a altas las simulaciones muestran los mismos estados límites que las soluciones. Se puede notar rápidamente algunos comportamientos interesantes; para velocidades bajas el sistema está go-

bernado por el proceso de *reflexión*, puesto que  $A^+$  es la población dominante, pero aun así podemos ver que los límites para  $v$  bajo no dependen del valor que se tome de  $l$  y  $r$ , sino que se encuentra gobernado por el cociente  $\frac{l}{r}$ .

Para velocidades altas, el proceso de *persuasión* juega el papel principal en el estado estacionario, debido a la existencia de un número alto de interacciones para  $v$  grande. Pero aun así al aumentar los valores de  $l$  y  $r$  manteniendo el cociente  $\frac{l}{r} = 2$ , la *reflexión* influye de manera apreciable sobre los estados de  $v$  grande, en particular esto es notorio para  $l = 0,01$  y  $r = 0,005$ , donde el estado dominante es  $A^+$  en todo el espectro de velocidades. Recordemos que la *reflexión* en este caso favorece a los estados  $A$ . Esta diferencia entre *persuasión* y *reflexión*, es decir, la capacidad de la *reflexión* de influir en todo el espectro de velocidades mientras que la *persuasión* no, se debe básicamente a la diferencia en la forma en que actúan los procesos. La *persuasión* depende de la existencia de un número alto de interacciones para ser efectiva, mientras que la *reflexión* no. Comparemos las poblaciones extremas:

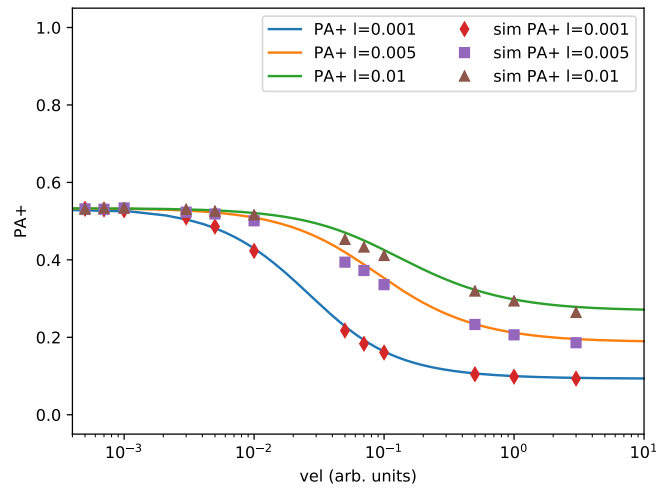


Figura 20: Población  $A^+$  para varios  $l$  con  $\frac{\phi}{\omega} = 2$  y  $\frac{l}{r} = 2$

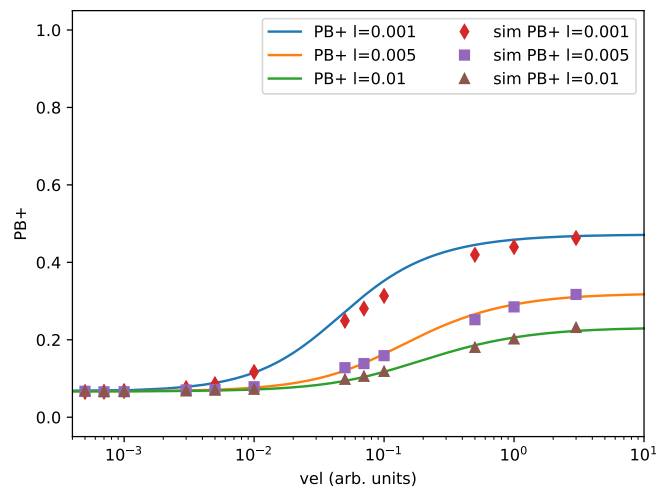


Figura 21: Población  $B^+$  para varios  $l$  con  $\frac{\phi}{\omega} = 2$  y  $\frac{l}{r} = 2$



En las fig.20 y fig.21, se puede ver claramente cómo al aumentar  $l$  la población de agentes con estado  $A^+$  crece para velocidades altas, pero se mantiene constante a velocidades bajas. Lo cual remarca que a velocidades bajas lo que domina el estado estacionario es el cociente  $\frac{l}{r}$ . Veamos que sucede al aumentar el valor de esta relación:

- $\frac{\phi}{\omega} = 10$  y  $\frac{l}{r} = 10$  :

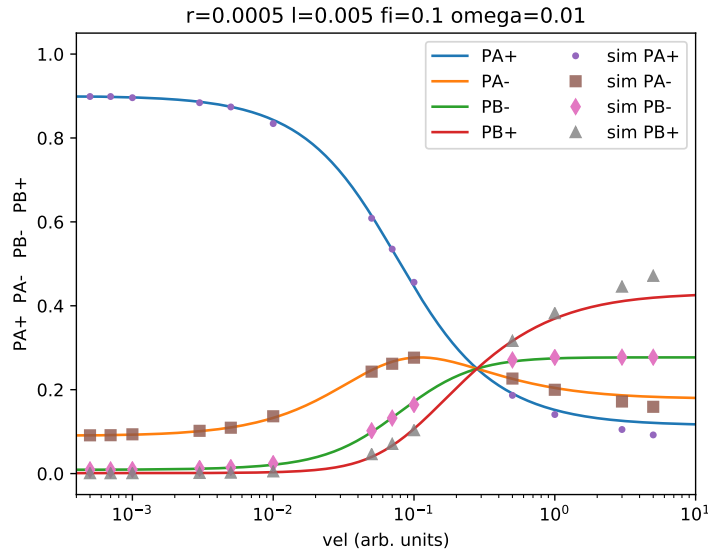


Figura 22: Soluciones estacionarias  $\frac{\phi}{\omega} = 10$  y  $\frac{l}{r} = 10$

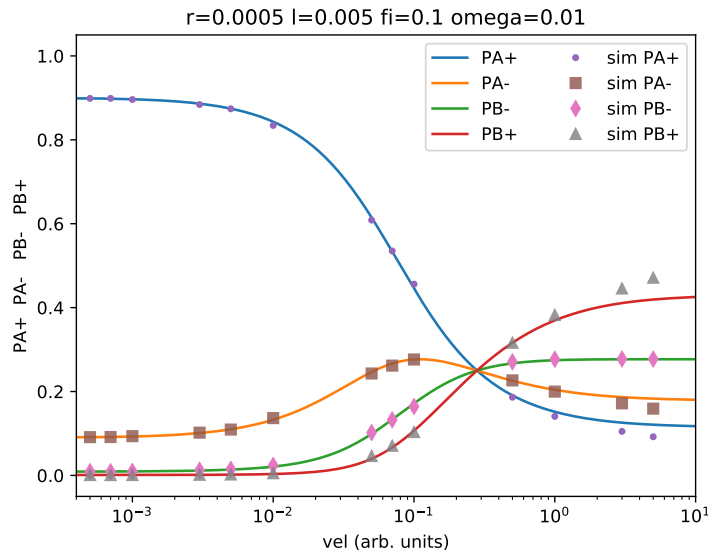


Figura 23: Soluciones estacionarias  $\frac{\phi}{\omega} = 10$  y  $\frac{l}{r} = 10$

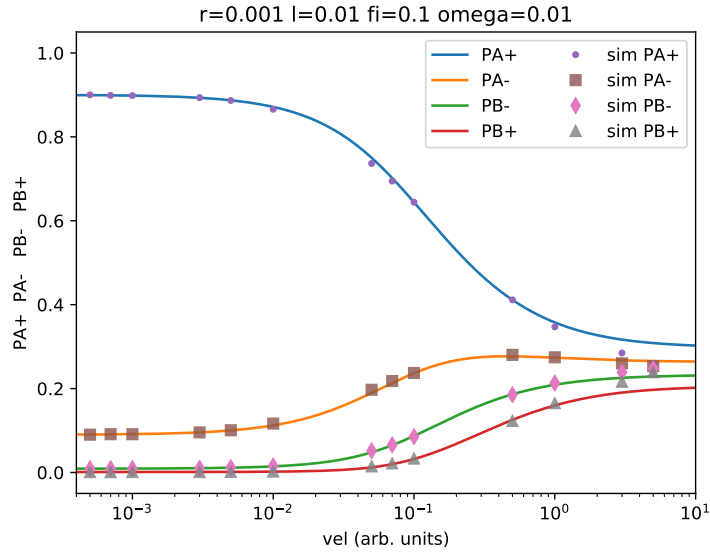


Figura 24: Soluciones estacionarias  $\frac{\phi}{\omega} = 10$  y  $\frac{l}{r} = 10$

En este caso donde hemos tomado  $\frac{\phi}{\omega} = 10$  y  $\frac{l}{r} = 10$  podemos ver en las figuras 22, 23 y 24 que podemos realizar los mismos comentarios que en el caso anterior. A velocidades bajas el estado es gobernado por la relación  $\frac{l}{r}$ , mientras que para  $v$  grande, existe competencia entre los procesos. En este caso para valores de  $l$  chico vemos que es la *persuasión* quien gana (el estado  $B^+$  es el favorecido), mientras que para  $l$  grande la reflexión mantiene a  $A^+$  como población dominante.

Miremos de vuelta el comportamiento de las poblaciones extremas:

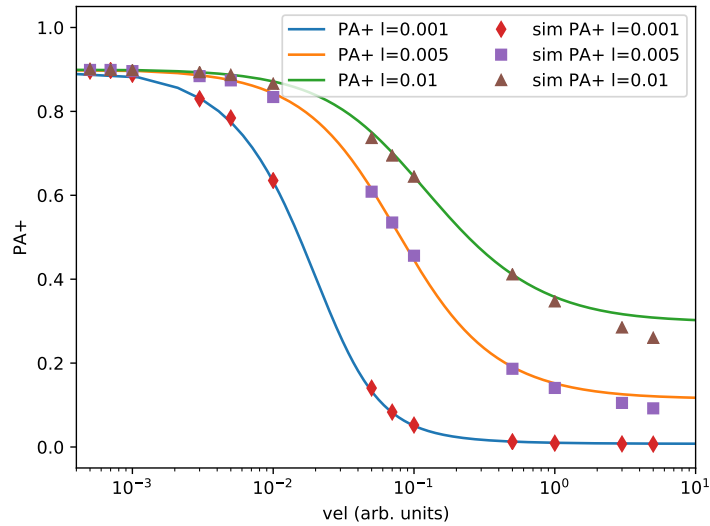


Figura 25: Población  $A^+$  para varios  $l$  con  $\frac{\epsilon}{\phi} = 10$  y  $\frac{l}{r} = 10$

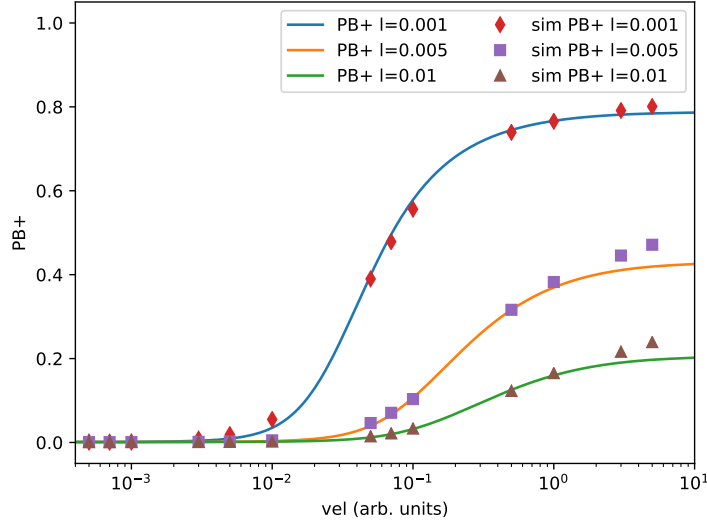


Figura 26: Población  $B^+$  para varios  $l$  con  $\frac{\phi}{\omega} = 10$  y  $\frac{l}{r} = 10$

Para los valores  $l = 0,005$  y  $l = 0,01$ , podemos notar en las fig.25 y fig.26, una desviación del comportamiento analítico con las soluciones numéricas. Pero solamente a velocidades altas. Hemos encontrado entonces que nuestro modelo analítico consigue representar correctamente al sistema, sobre todo para velocidades menores a  $v = 1$ . Es válido preguntar entonces qué sucede para  $v > 1$ . Posibles explicaciones de esto son:

- Las simulaciones podrían tener errores numéricos a velocidades altas, necesitando tomar un paso temporal más pequeño.
- Las funciones propuestas para  $\lambda(v)$  y  $\tau(v)$  no son correctos a altas velocidades debido posiblemente también a errores numéricos.
- O por otro lado el modelo analítico no representa bien la presencia de muchas interacciones. ¿Podría haber muchas interacciones múltiples para velocidades altas?

Los primeros dos casos pueden descartarse rápidamente dado que el paso temporal utilizado  $\delta t = 0,01$ , la importancia de usar un paso temporal suficientemente chico, es que el tiempo de duración de las interacciones no se vea afectado por suponer pasos temporales grandes. Para elegir este paso temporal se utilizó que  $v\delta t \ll r$  donde  $r$  es el radio de los discos autopropulsados. Elegir  $\delta t = 0,01$  nos asegura que esto se cumpla y por lo tanto el error numérico no sea apreciable.

Lo más probable entonces, es que la solución analítica no represente correctamente el sistema a velocidades altas. Recordemos que el modelo analítico presupone que solamente puede haber interacciones binarias entre partículas, y sí bien las simulaciones permiten un único cambio de opinión durante la interacción, al interactuar con varias partículas la probabilidad de que este cambio se dé es más grande y además un primer cambio impide que otras interacciones generen un cambio de opinión. Produciendo una especie de apantallamiento que favorece a la opinión mayoritaria. Para poder ver si esto es lo que sucede analicemos entonces si existen interacciones múltiples y como depende de la velocidad. Para esto contamos las interacciones de dos formas durante un intervalo de tiempo  $\Delta t = 10000$ . La primera contando las interacciones múltiples, y el otro contando el numero total de

interacciones durante la misma simulacion, haciendo esto obtenemos la siguiente dependencia con  $v$ .

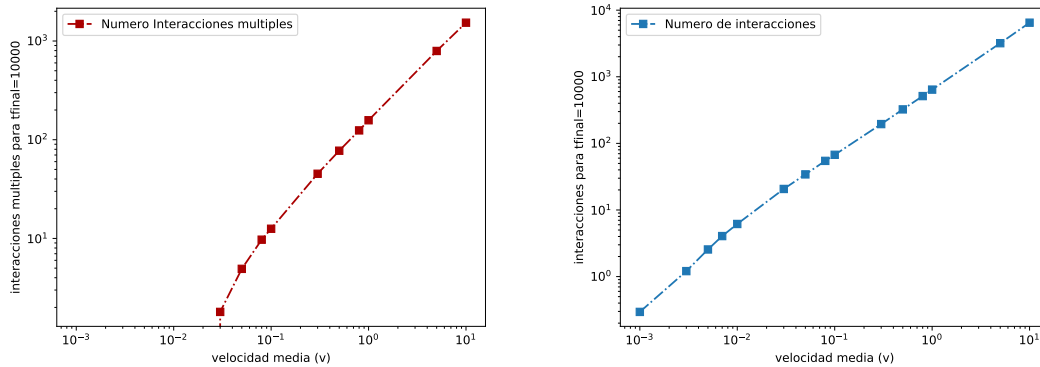


Figura 27: Izquierda (derecha) Número de interacciones múltiples (totales) en un intervalo  $\Delta t = 10000$  vs velocidad media

En la fig.27 podemos ver claramente como el número de interacciones múltiples aumenta en un intervalo  $\Delta t = 10000$  al aumentar la velocidad. En la región  $v > 1$  la cantidad de interacciones múltiples entre agentes se vuelve sustancial, y por lo tanto, no podemos pensar que un modelo analítico que sólo presupone interacciones binarias pueda reproducir el comportamiento del sistema. Es este fenómeno es el que genera en los gráficos 25 y 26 discrepancia entre los estados estacionarios de la simulación y el valor predicho por el modelo analítico.

## 6. Velocidad dependiente de la opinión del agente

Después de haber obtenido los resultados para el caso en que todos los agentes tienen la misma velocidad pasamos al caso más importante que es el de utilizar una distribución de velocidades que dependen de la opinión del agente. habíamos definido previamente que las velocidades de los agentes seria de la forma:

$$v_i(t, j) = \tilde{v}.K^{(j-1)} \quad (23)$$

donde  $j$  define el posible estado de opinión del agente. Como vemos esta distribución nos permite obtener para diferentes valores de  $K$  diferentes escalas de velocidades entre las poblaciones (ver capitulo 3.2.1), Y como vimos en la sección 3.2.1, nos permite, representar situaciones como; fenómenos revolucionarios, corridas bancarias etc; donde Los individuos con opiniones contrarias a lo impuesto por el sistema buscan difundir con mayor intensidad su opinión.

Utilizando esta distribución y además tomando diferentes valores de  $\frac{\phi}{\omega}$  y  $\frac{l}{r}$ , podemos hacer competir los fenómenos de *persuasión* y *reflexión* como hicimos para el caso de velocidades constantes. Consideraremos que el fenómeno de *persuasión* es favorable a los estados de velocidades altas, que por la distribución de velocidades serán  $B^-$  y  $B^+$ . Y la reflexión favorable a los estados de bajas velocidades,  $A^-$  y  $A^+$ . Podremos analizar cómo afecta a la reflexión tomada como una propaganda el competir con la persuasión de agentes altamente interactuantes.

Tomemos algunos casos particulares de  $\frac{\phi}{\omega}$  y  $\frac{l}{r}$ , 2, 5 y 10. Y veamos que sucede al tomar distintos  $K$  para distintas combinaciones de los coeficientes de persuasión y reflexión.

- $\frac{\phi}{\omega} = 5$  y  $\frac{l}{r} = 5$  para  $K = 2, 5, 10$ .

Vamos a tomar para este caso los valores  $\phi = 0,1$   $\omega = 0,02$   $l = 0,001$  y  $r = 0,0002$  los resultados obtenidos se grafican para distintos valores de  $\tilde{v}$  en las figuras 28, 29 y 30.

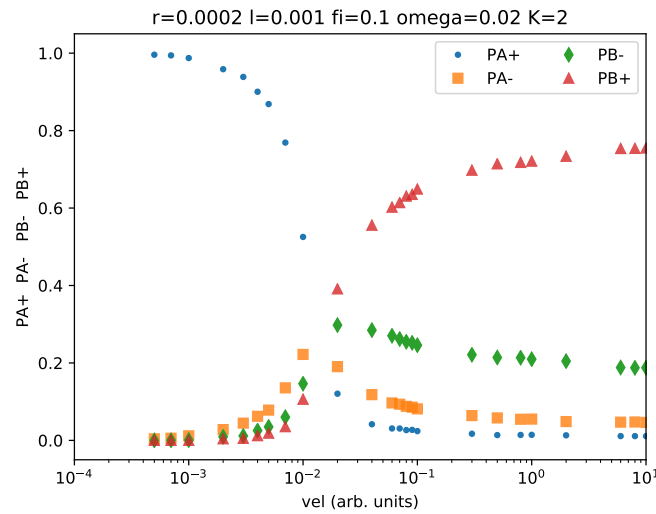


Figura 28: Soluciones estacionarias vs  $\tilde{v}$  para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0,02$   $l = 0,001$  y  $r = 0,0002$   $K = 2$ .

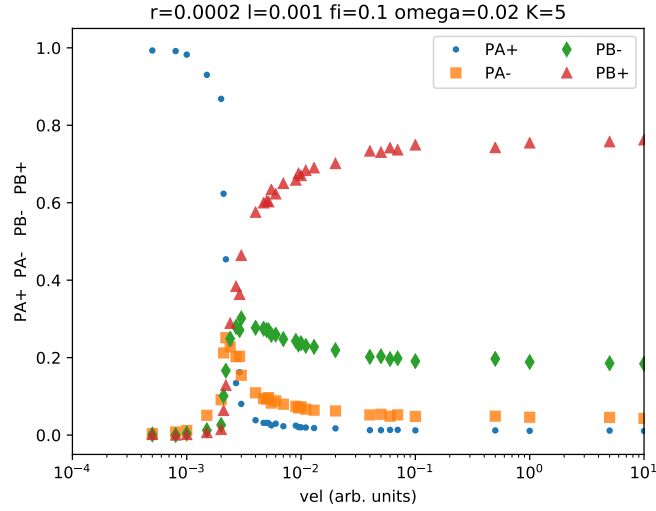


Figura 29: Soluciones estacionarias vs  $\tilde{v}$  para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0,02$   $l = 0,001$  y  $r = 0,0002$   $K = 5$ .

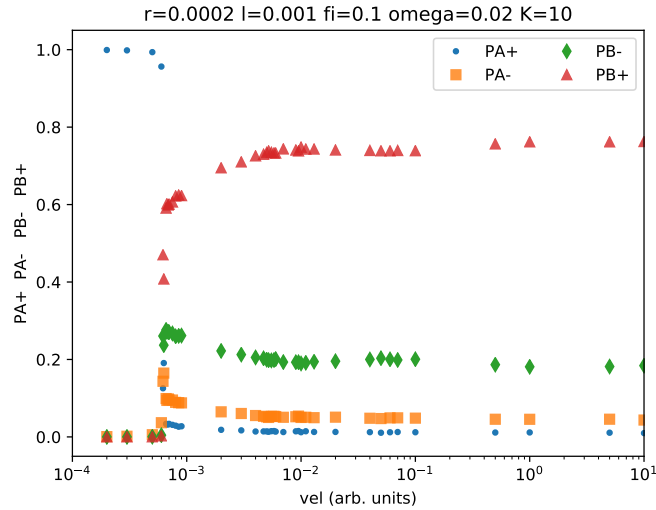


Figura 30: Soluciones estacionarias vs  $\tilde{v}$  para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0,02$   $l = 0,001$  y  $r = 0,0002$   $K = 10$ .

Rápidamente comparando estos resultados para distintos valores de  $K$  podemos ver que para  $\tilde{v} \rightarrow 0$  y  $\tilde{v} \rightarrow \infty$  en todos los casos se tienen los mismos valores límites para los estados estacionarios, lo cual era esperado dado que vimos que los valores de  $\phi$  y  $\omega$  dominan el comportamiento para velocidades altas y  $l$ ,  $r$  en el caso de velocidades bajas. Lo que sí es interesante analizar es el comportamiento al pasar del estado de *reflexión dominante* al de *persuasión dominante* cuando aumenta  $\tilde{v}$ . Podemos ver que al aumentar  $K$  disminuye el valor de  $\tilde{v}$  necesario para pasar de un estado al otro. También se puede ver que al aumentar  $K$  la transición ocurre en un rango de valores de  $v$  mas pequeño, teniendo para  $K=10$  una transición abrupta entre el estado de *reflexión dominante* al de *persuasión dominante*.

De esta manera podemos analizar otros casos cambiando los valores de los coeficientes para ver que sucede al aumentar  $l$  pero manteniendo la relación  $\frac{l}{r} = 5$ . Veamos ahora los resultados que se obtuvieron para  $\phi = 0,1$ ,  $\omega = 0,02$ ,  $l = 0,005$  y  $r = 0,001$  en las figuras 31, 32 y 33

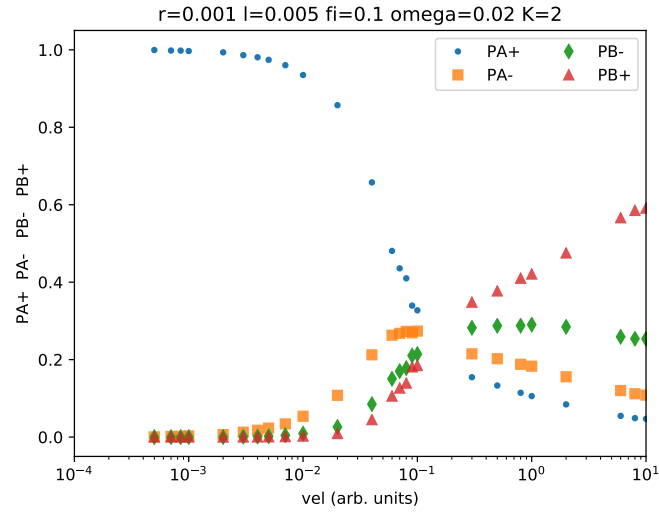


Figura 31: Soluciones estacionarias para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0,02$   $l = 0,005$  y  $r = 0,001$   $K = 2$  vs  $\tilde{v}$ .

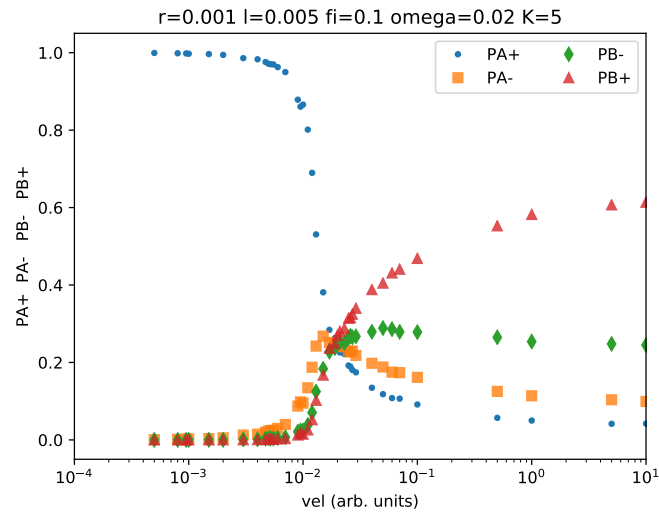


Figura 32: Soluciones estacionarias para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0,02$   $l = 0,005$  y  $r = 0,001$   $K = 5$  vs  $\tilde{v}$ .

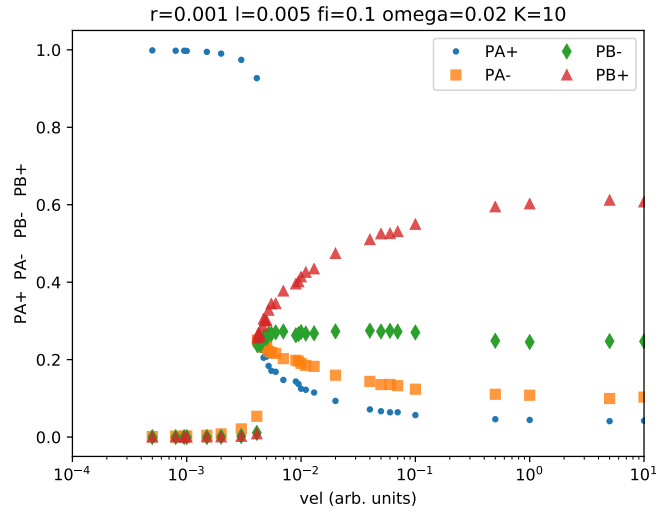


Figura 33: Soluciones estacionarias para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0,02$   $l = 0,005$  y  $r = 0,001$   $K = 10$  vs  $\tilde{v}$ .

Con estos tres nuevos gráficos re-obtenemos algunos comportamientos, vemos nuevamente que al aumentar  $K$ , las transiciones entre estados dominados por *reflexión* a estados dominados por *persuasión* se comportan como transiciones de discontinuas entre un estado y otro. También vemos que para valores de  $K$  grandes el valor de  $\tilde{v}$  necesarios para pasar de un estado límite al otro disminuye.

Para poder apreciar mas claramente estos comportamientos que se mencionaron, veamos los siguientes gráficos donde se agrupan las curvas de  $A^+$  o  $B^+$  para distintos  $K$ , para los casos de  $l$ ,  $r$ ,  $\phi$  y  $\omega$  que presentamos previamente.

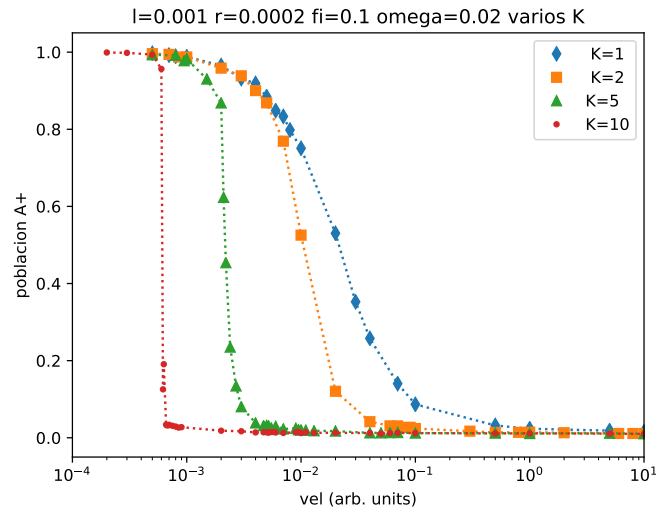


Figura 34: Curvas de  $A^+$  para distintos  $K$  para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0,02$   $l = 0,001$  y  $r = 0,0002$ .



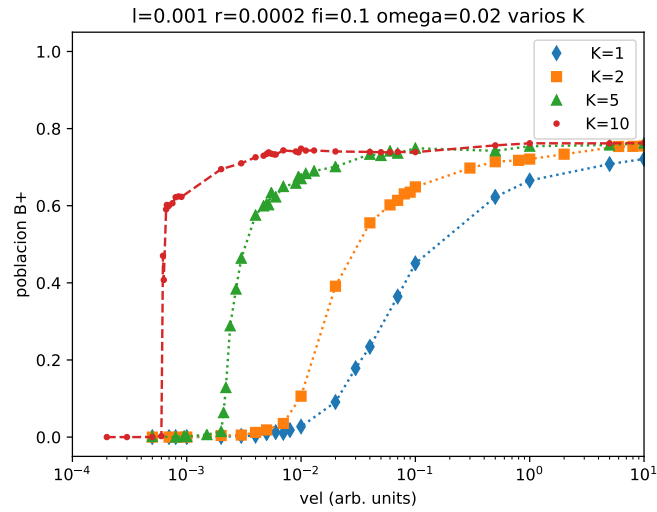


Figura 35: Curvas de  $B^+$  para distintos K para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0,02$   $l = 0,001$  y  $r = 0,0002$ .

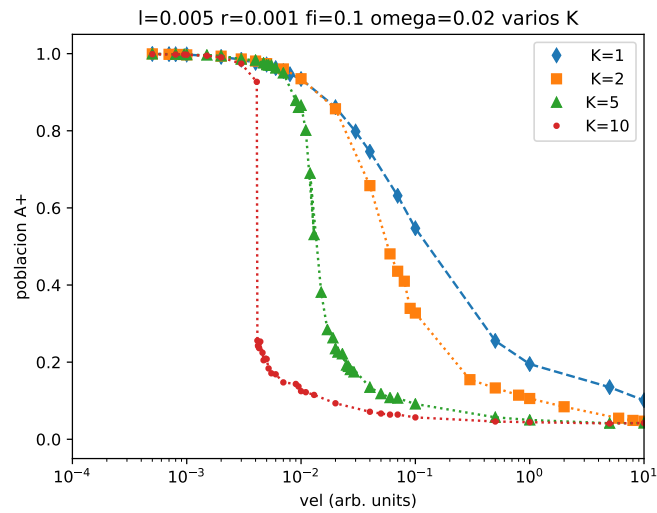


Figura 36: Curvas de  $A^+$  para distintos K para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0,02$   $l = 0,005$  y  $r = 0,001$ .

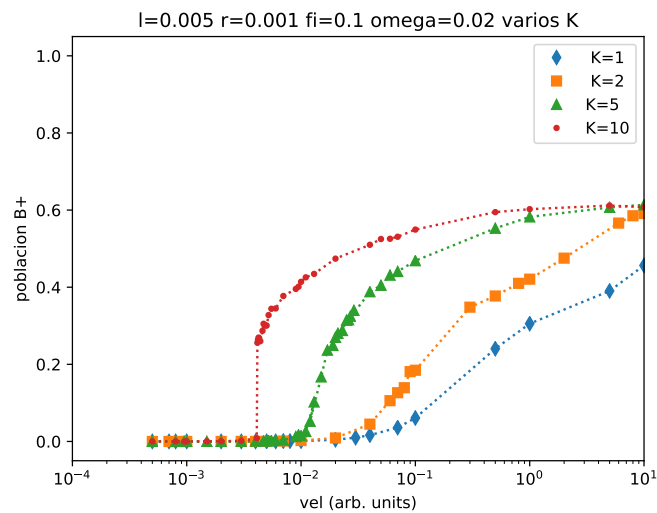


Figura 37: Curvas de  $B^+$  para distintos K para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0,02$   $l = 0,005$  y  $r = 0,001$ .

Al comparar de esta forma las distintas curvas al cambiar  $K$ , es fácil ver como los estados límites para  $\tilde{v} \rightarrow 0$  y  $\tilde{v} \rightarrow \infty$  no dependen de  $K$ . También podemos ver cómo al aumentar  $K$ , cambia drásticamente el comportamiento de las transiciones, obteniendo *transiciones abruptas* para  $K$  grande.

Pensando, como se mencionó en la introducción de este trabajo, que el proceso de *reflexión* puede tomarse como un proceso de cambio de opinión por *propaganda*, vemos que un cambio en la velocidad, implica un cambio en la cantidad de interacciones, y por ende de la influencia sobre el sistema del proceso de *persuasión*. Podemos ver que al aumentar  $K$ , que implica generar una mayor diferencia entre las velocidades para estados opuestos de opinión, obtenemos una inestabilidad en el estado dominado por la *propaganda*. Un pequeño aumento en la influencia de la persuasión sobre el sistema, genera un cambio abrupto en el estado estacionario. Podemos analizar esto pensando que sucede si tenemos  $K=1$ . En ese caso, todas las poblaciones tendrían igual velocidad, y para una velocidad dada obtendremos una determinada distribución de opiniones entre los agentes. Al aumentar  $K$ , los agentes con opinión  $B^-$  y  $B^+$  pasan a tener velocidades mayores que los estados  $A$ , generando un aumento en el número de interacciones y dado que la persuasión favorece a los estados  $B$  genera que los agentes cambien su opinion en la direccion de  $B^+$ . Al tener valores de  $K$  grandes, este proceso es todavía más notorio, y un pequeño cambio en la capacidad de convencimiento de la propaganda puede permitir que los agentes se escapen de las opiniones  $A$  hacia las  $B$ . Esto claramente se puede ver tambien en las fig.34 y fig.35.

## 6.1. Sistemas de propaganda totalitaria

Un caso interesante de analizar en este marco es el de sociedades con propaganda totalitaria, es decir, la propaganda solo influye en una dirección de la opinión de los individuos y estos solo pueden escapar de la influencia de la propaganda debido a las interacciones con otros. De esta forma es interesante analizar para esta distribución de velocidad, para varios  $K$ , qué sucede cuando tenemos solamente propaganda en una dirección, es decir cuando el valor de  $r$  es nulo. De igual manera tomamos la *persuasión* como un fenómeno solo en la dirección opuesta a la propaganda, fijando  $\omega = 0$ . Tomemos como acabamos de mencionar  $r = 0$  y para distintos valores de  $l$  realicemos lo mismo que en los casos anteriores, es decir grafiquemos los estados estacionarios para distintos valores de  $K$ , variando  $\tilde{v}$ .

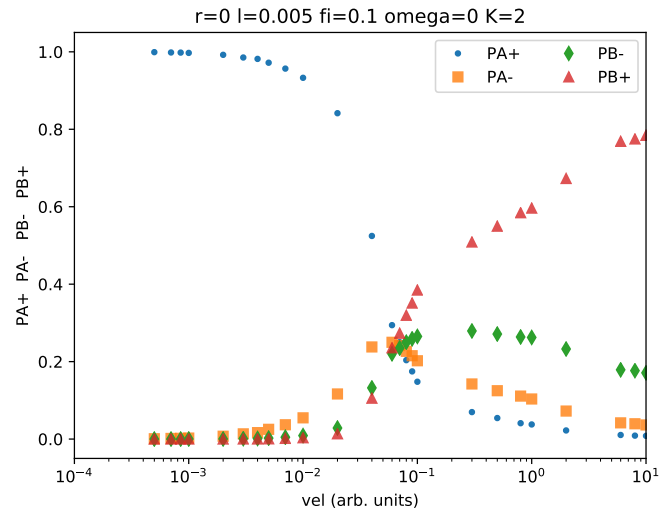


Figura 38: Soluciones estacionarias vs  $\tilde{v}$  para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0$   $l = 0,005$  y  $r = 0$   $K = 2$ .

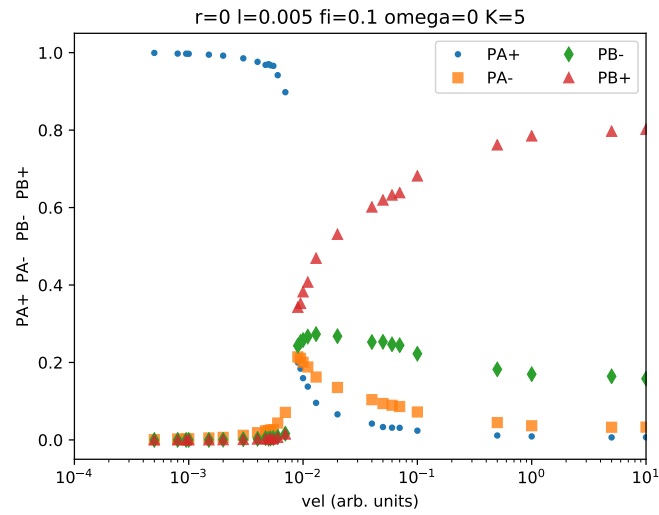


Figura 39: Soluciones estacionarias vs  $\tilde{v}$  para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0$   $l = 0,005$  y  $r = 0$   $K = 5$ .

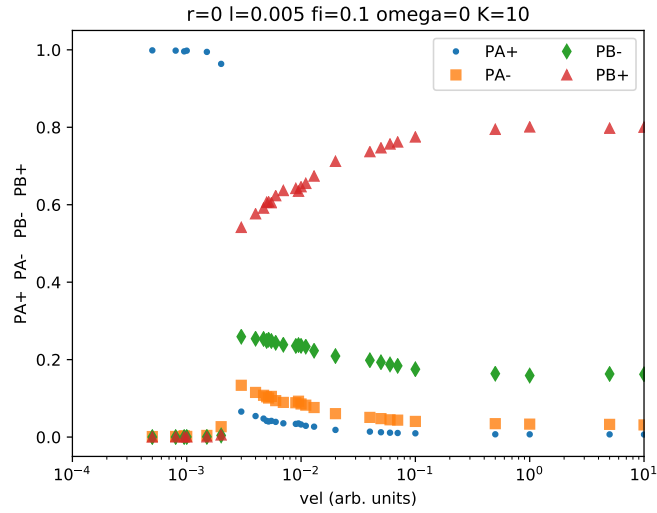


Figura 40: Soluciones estacionarias vs  $\tilde{v}$  para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0$   $l = 0,005$  y  $r = 0$   $K = 10$ .

Podemos ver que el comportamiento encontrado es similar al que se obtuvo para los casos no totalitarios, nuevamente al aumentar  $K$  obtenemos transiciones abruptas entre los estados. En las figuras 41 y 42 podemos observar el comportamiento de las poblaciones extremas para los distintos valores de  $K$ :

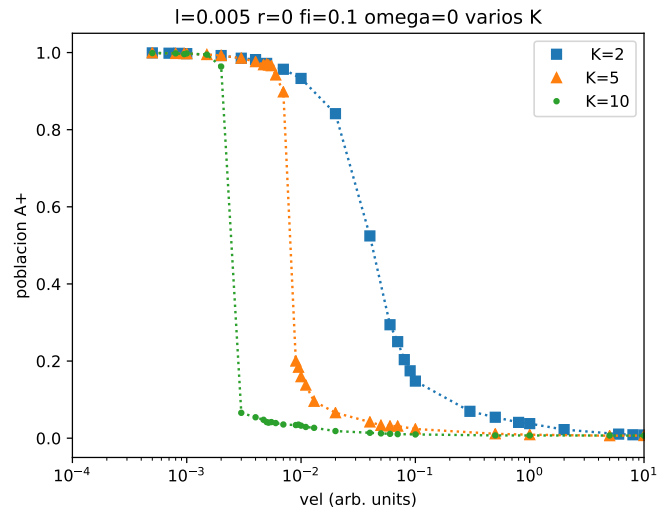


Figura 41: Curvas de  $A^+$  para varios  $K$  con la propaganda totalitaria,  $\phi = 0,1$   $\omega = 0$   $l = 0,005$  y  $r = 0$

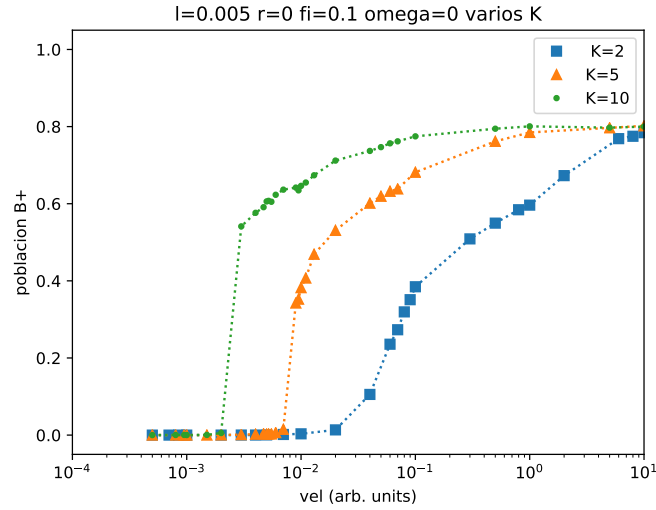


Figura 42: Curvas de  $B^+$  para varios  $K$  con propaganda totalitaria,  $\phi = 0,1$   $\omega = 0$   $l = 0,005$  y  $r = 0$

Es importante notar que, si bien para  $\tilde{v} \rightarrow 0$  es claro que el sistema se encuentra puramente dominado por la *propaganda* y por tal motivo la única población existente para velocidades muy bajas es  $P_{A+}$ , esto no sucede para velocidades altas con el proceso de *persuasión*, dado que esto no implica que las partículas interactúan constantemente y el proceso de *reflexión* si tiene influencia sobre los agentes. Veamos qué sucede si tomamos el coeficiente de *reflexión* alto, por ejemplo tomemos  $l = 0,05$  y  $r = 0$ :

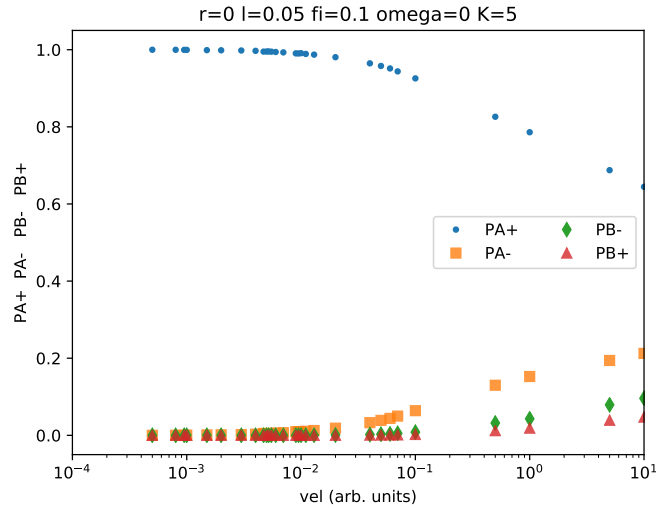


Figura 43: Soluciones estacionarias vs  $\tilde{v}$  para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0$   $l = 0,05$  y  $r = 0$   $K = 5$ .

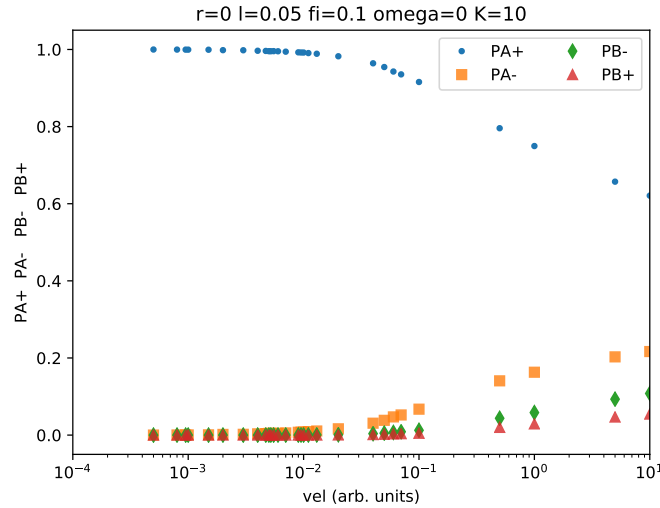


Figura 44: soluciones estacionarias vs  $\tilde{v}$  para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0$   $l = 0,05$  y  $r = 0$   $K = 10$ .

Podemos ver que para  $\tilde{v}$  donde antes teníamos que el sistema era dominado por el proceso de *persuasión*, no sucede en este caso, Lo cual se debe a que el valor de *propaganda* es demasiado grande y no permite a la *persuasion* generar que los agentes pasen a las opiniones  $B$ . Es importante notar que como  $B^+$  es el estado de menor población, la velocidad media del sistema es más baja, comparada con los casos previos para valores de *propaganda* chicos. Es decir, la *propaganda* también cambia las propiedades dinámicas del estado estacionario. Si el coeficiente de *propaganda*  $l$  aumenta la velocidad media del sistema disminuye, moderando el número de interacciones entre los agentes.

Veamos como es el cambio de la velocidad media del sistema para distintos valores de  $l$  tomando en particular  $K = 10$  y graficando en dependencia de  $\tilde{v}$ :

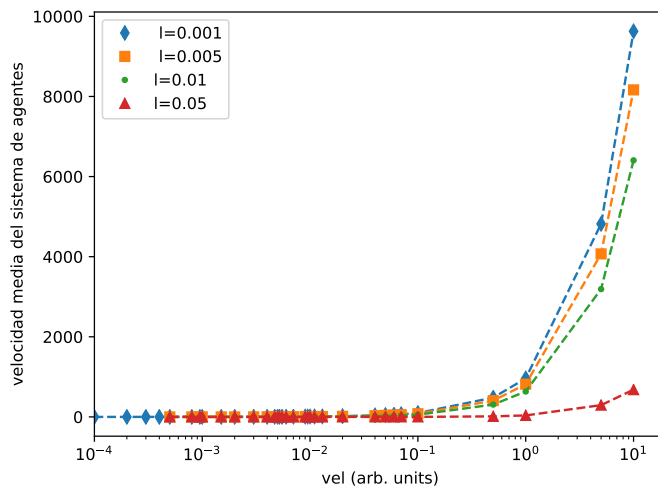


Figura 45: Velocidad media del sistema para  $K = 10$  y vs  $\tilde{v}$  para varios valores de  $l$ .

Aquí se ve claramente lo que se mencionó. Al aumentar  $l$ , los agentes tienen mayor probabilidad de mantenerse con opiniones de velocidad baja y esto genera que el proceso de *persuasión* tenga menor influencia debido a la disminución en las interacciones.

Otra forma de analizar el efecto de la *propaganda* sobre los agentes al aumentar o disminuir  $l$ , es pensar que el valor de propaganda  $l$  representa la credibilidad de esta y por ende su capacidad de influir sobre la opinión del agente. En este modelo cuando la propaganda tiene credibilidad alta se mantiene el orden del sistema y la velocidad de los individuos es baja. Luego, al disminuir la credibilidad de la *propaganda*, los agentes pasan a estados de agitación aumentando drásticamente la velocidad media del sistema y por ende el número de interacciones. La credibilidad de la propaganda en este sistema totalitario juega el papel fundamental de mantener el orden de los agentes.

Podemos analizar ahora qué sucede cuando manteniendo los mismos valores de  $\phi$ ,  $\omega$ ,  $K$  y  $\tilde{v}$  cambiamos el valor de  $l$  en este marco de un sistema totalitario:

- $K=2$

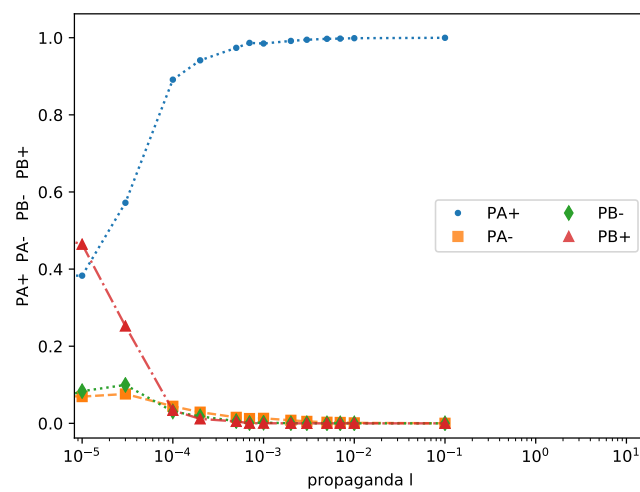


Figura 46: soluciones estacionarias para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0$   $r = 0$   $K = 2$   $\tilde{v} = 0,001$  vs  $l$

■ K=5

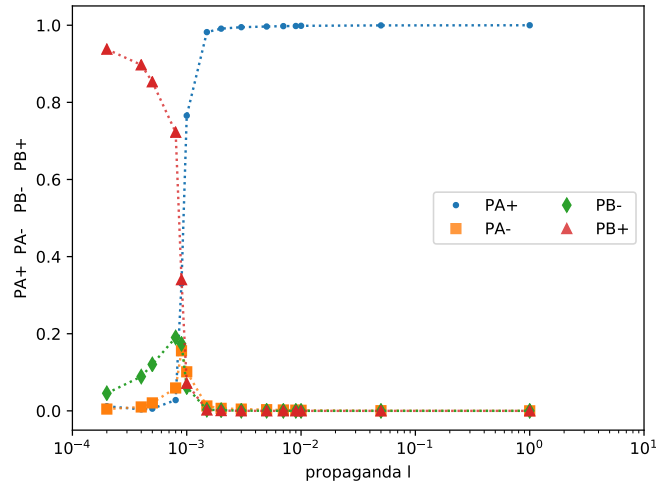


Figura 47: soluciones estacionarias para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0$   $r = 0$   $K = 5$   $\tilde{v} = 0,001$  vs  $l$

■ K=10

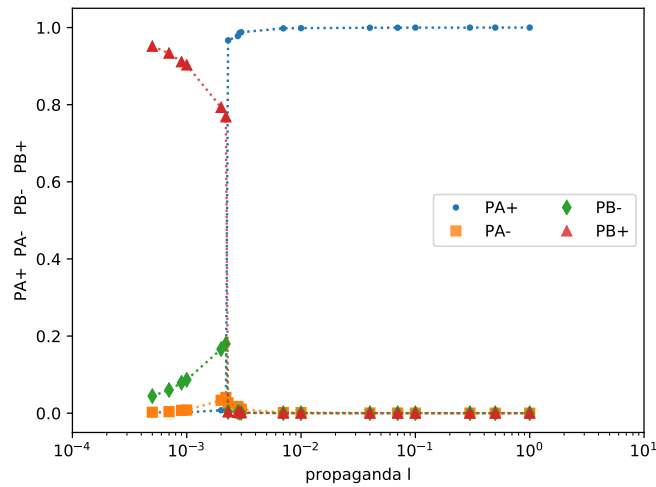


Figura 48: soluciones estacionarias para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0$   $r = 0$   $K = 10$   $\tilde{v} = 0,001$  vs  $l$

Los resultados nuevamente son muy interesantes. Vemos que al aumentar  $K$ , el valor de propaganda necesario para mantener el sistema en el estado  $A^+$ , que es el favorecido por el proceso de *reflexión*, debe ser mayor. Esto se debe a que aumentar  $K$  implica generar mayor movilidad de los agentes y por lo tanto el aumento de las interacciones entre individuos. Esto favorece al estado  $B^+$  que es el fomentado por el proceso de *persuasión*. Cuando disminuye el valor de  $l$ , el proceso de *reflexión* entendido como *propaganda*, disminuye su credibilidad y por tanto su capacidad de cambiar la opinión del individuo.

Es interesante en este modelo, que además de disminuir la capacidad de generar el cambio de opinión, también genera un incremento en la movilidad media del sistema. Analicemos para las simulaciones anteriores, como cambia la velocidad media del sistema en el estado estacionario:



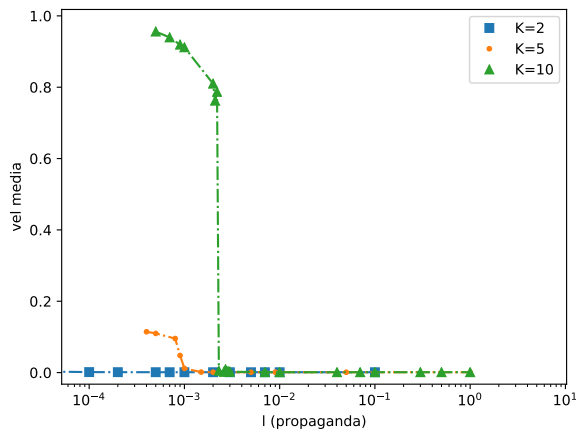


Figura 49: velocidad media del sistema para diferentes K vs  $l$  para  $\tilde{v} = 0,001$

El resultado es esperado, pero no por eso deja de ser interesante, por supuesto cuando tenemos que la población dominante es  $A^+$  la velocidad media cumple  $v_{media} = \tilde{v}$  y el valor de la velocidad no depende de K. pero al disminuir  $l$  el valor de K comienza a ser importante, podemos ver que para  $K=2$ , no pasa mucho, dado que se debe tomar propaganda muy baja,  $l < 0,0001$ , para que la *persuasión* comience a ganar la partida. Para  $K=5$  tenemos un cambio apreciable en la velocidad media pero es suave. Para  $K=10$  en cambio la transición es abrupta, lo que va de la mano con un cambio abrupto en la velocidad del sistema.

Para  $K=10$  analicemos cómo es la evolución temporal de dos valores de  $l$  para  $l = 0,0021$  y  $l = 0,0022$ :

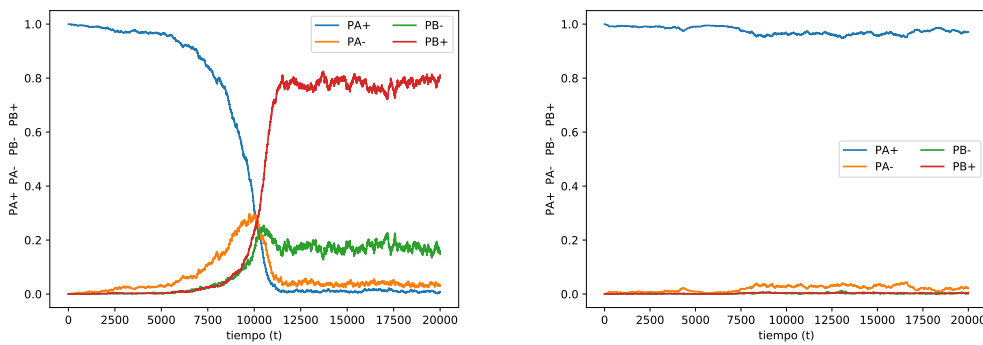


Figura 50: (izquierda)derecha: evolución temporal para ( $l = 0,0021$   $K=10$   $\tilde{v} = 0,001$ ) ( $l = 0,0022$   $K=10$   $\tilde{v} = 0,001$ )

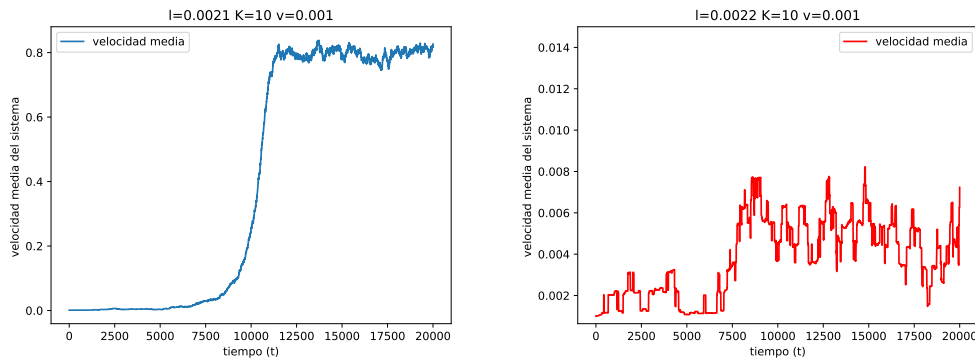


Figura 51: (izquierda)derecha: evolución temporal de las poblaciones para la velocidad media ( $l = 0,0021$   $K=10$   $\tilde{v} = 0,001$ ) ( $l = 0,0022$   $K=10$   $\tilde{v} = 0,001$ )

Si bien la diferencia entre los valores de  $l$  es  $\Delta l = 0,0001$ , la diferencia entre los estados estacionarios y entre las velocidades medias del sistema es notable. Nuevamente los resultados muestran, para este modelo, que el estado dominante es inestable para un pequeño cambio en la credibilidad, o en la capacidad de la *propaganda* de influir un cambio de opinión.

## 7. Conclusiones y Perspectivas futuras

Durante el desarrollo de este trabajo, los objetivos principales fueron dos; el primero, mejorar los resultados encontrados por N. Clementi et al. en [2]. Y el segundo, ampliar los resultados para una nueva distribución de velocidades,  $v = \tilde{v}K^{(j-1)}$ , donde  $j$  refería el estado de opinión de los agentes.

- En el primer caso, se consiguió mejorar sustancialmente los resultados debido a las correcciones encontradas para los tiempos característicos del sistema. Tanto para el tiempo de colisión medio, como para el tiempo libre medio. Se encontró que para velocidades medias que cumplen  $v < \alpha_{rot}$ , el comportamiento del sistema era diferente al propuesto por Terranova et al. [6]. En este caso, para  $v < \alpha_{rot}$ , se obtuvo un comportamiento difusivo para la dinámica de los agentes fig.52.

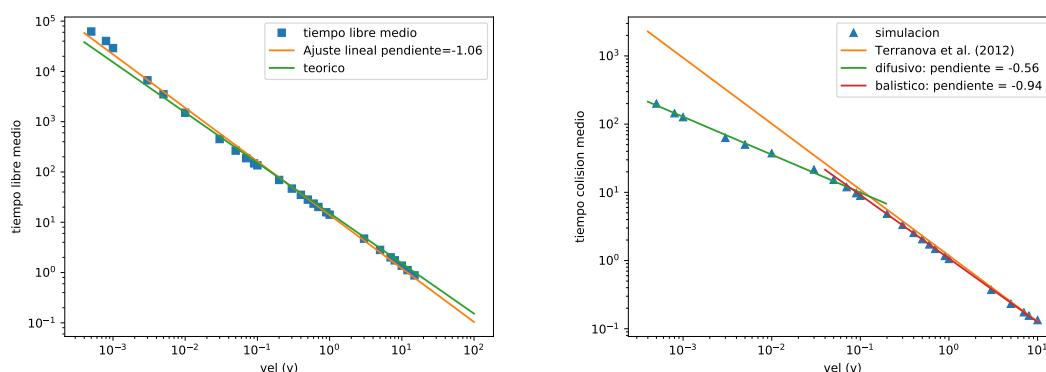


Figura 52: tiempo libre medio y tiempo de colision medio Vs velocidad, para  $\alpha_{rot} = 10$

Este resultado, además de mejorar la correlación entre el modelo analítico y los valores obtenidos de simulaciones, abre una pregunta importante de analizar a futuro; ¿Cuál de las dos regiones se corresponde de una manera más aproximada a una situación real?. Una forma de responder esto, sería analizar cómo son los grupos de interacción en cada uno de los casos. González et al. mostraron en [9] que se puede representar modelos dinámicos de agentes mediante redes complejas, y de esta forma, sería interesante a través de un análisis de las interacciones ver cual es la diferencia entre las redes que se forman en ambos casos, y comparar los resultados con trabajos previos realizados en el marco de las redes complejas.

- En el segundo caso, se consiguió ampliar los resultados para la distribución de velocidades  $v = \tilde{v}K^{(j-1)}$ . Esto nos permitió analizar diversos fenómenos:
- Vimos que el aumentar la movilidad de los agentes, es decir aumentar  $K$ , en el marco de sistemas donde compiten la *persuasión* con la *reflexión*, implica generar que las transiciones entre estados dominados por *propaganda* a estados dominados por la *persuasión* pasen de ser suaves a ser transiciones abruptas. Encontramos que este fenómeno sucede tanto para sistemas totalitarios fig.53, donde la propaganda influye a la opinión de los agentes en una única dirección, como para sistemas no totalitarios fig.54, siempre que el valor del coeficiente de *propaganda* no sea demasiado grande.

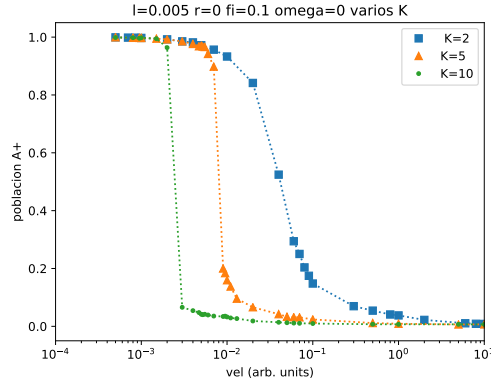


Figura 53: Curvas de  $A^+$  para varios  $K$  con la propaganda totalitaria,  $\phi = 0,1$   $\omega = 0$   $l = 0,005$  y  $r = 0$

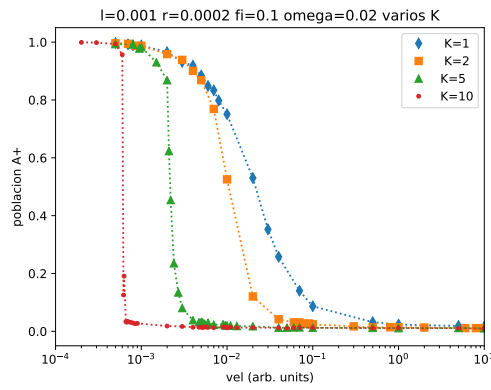


Figura 54: Curvas de  $A^+$  para distintos  $K$  para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0,02$   $l = 0,001$  y  $r = 0,0002$ .

El estudio de la naturaleza de estas transiciones, es otro eje para el futuro de este trabajo. Analizando las evoluciones temporales de los estados estacionarios, es posible determinar si estas transiciones corresponden a transiciones de fase, entre estados propagandísticos y estados persuasivos.

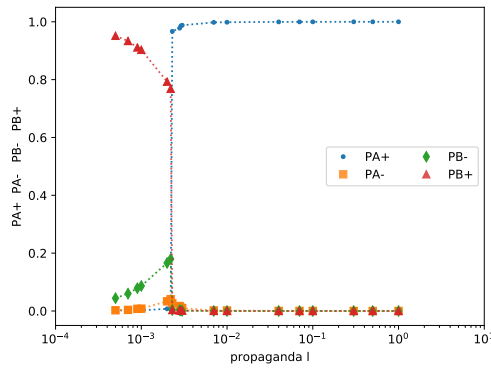


Figura 55: soluciones estacionarias para  $\phi = 0,1$   $\omega = 0$   $r = 0$   $K = 10$   $\tilde{v} = 0,001$  vs  $l$

Vimos también, en resultados como los de la fig.55, que un cambio en el valor del coeficiente de *propaganda*, podía pensarse como un cambio en la credibilidad o capacidad de convencimiento de esta. Lo cual, si estamos en presencia de una distribución de velocidades donde  $K$  es lo suficientemente grande, y donde existe competencia entre *propaganda* y *persuasión*. Genera que un pequeño

cambio en la credibilidad del coeficiente de propaganda, implique un salto a un estado dominado por la *persuasión*.

Este fenómeno se asemeja con casos reales, como pueden ser por ejemplo corridas bancarias o crisis de representatividad política, donde un cambio en la confianza de los individuos, genera que estos pasen a un estado de opinión contrario al que busca imponer el sistema.

Además de lo mencionado hasta aquí, las posibilidades futuras en el marco de este modelo, son diversas. Sin lugar a dudas, buscar una mejor descripción de las interacciones humanas mediante correcciones del potencial de interacción entre agentes. Otra mejoras será utilizar distribuciones de velocidad o matrices de transiciones entre estados más realistas. Estas son algunas de las diversas formas de mejorar la representatividad del modelo aquí desarrollado.

## Referencias

- [1] C., C., S., F., AND V., L. Statistical physics of social dynamics. Reviews of Modern Physics 81, 591 (2009).
- [2] CLEMENTI, N. C., REVELLI, J. A., AND SIBONA, G. J. Internal-external stimulus competition in a system of interacting moving particles: Persuasion versus propaganda. Physical Review E 00, 002800 (2015).
- [3] E., B. On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. Physical Review 4, 345–376 (1914).
- [4] F., P., AND SIBONA, G. Dynamics and steady states in excitable mobile agent systems. Physical Review Letters 100 (2008).
- [5] G., D., D., N., F., A., AND G., W. Mixing beliefs among interacting agents. Advances in Complex Systems 03. (2000).
- [6] G., T., J., R., AND G., S. Opinion formation model for interacting self-propelled agents.
- [7] I., D., CHATE, H., CHAVE, J., AND HINRICHSEN, H. Critical coarsening without surface tension: The universality class of the voter model. Physical Review Letters 87 (2001).
- [8] L., B., AND SCHWEITZER, F. On spatial consensus formation: is the sznajd model different from the voter model. International Journal of Modern Physics C 14 (2003).
- [9] M., G., P., L., AND H., H. System of mobile agents to model social networks. Physical Review Letters 96. (2006).
- [10] R., A., AND BARABASI, A. Statistical mechanics of complex networks. Rev. Mod. Phys. 74, 47-97. (2002).
- [11] R., H., AND T., L. Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model. The Annals of Probability 3. (1975).
- [12] R., H., AND U., K. Opinion dynamics and bounded consensus models, analysis, and simulation. Journal of Artificial Societies and Social Simulation (2002).
- [13] S, G. Minority opinion spreading in random geometry. Eur. Phys. J. B 25, 403-406. (2002).
- [14] S, G. Sociophysics: A physicist's modeling of psycho-political phenomena, understanding complex systems. Springer (2012).