Subálgebras del álgebra de Lie de operadores pseudo-diferenciales matriciales cuánticos y representaciones de módulos de peso máximo cuasifinitos de subálgebras de tipo “ortogonal” y “simpléctico”

por Karina Haydeé Batistelli

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Marzo de 2017

Directora: Dra. Carina Boyallian

A mis padres

Resumen

En esta tesis caracterizamos los módulos irreducibles de peso máximo cuasifinitos de las subálgebras del álgebra de Lie de operadores pseudo-diferenciales matriciales cuánticos $N \times N$.

En la primer parte, se presentan los resultados que hemos obtenido, donde se da una descripción completa de las anti-involuciones que preservan la graduación principal. Obtenemos, salvo conjugación, dos familias de anti-involuciones para un cierto parámetro n con resultados diferentes cuando $n = N$ y $n < N$. Con el objetivo de exponer sus diferencias en detalle, estos casos son estudiados de forma separada. Cuando $n = N$ se obtienen dos familias de subálgebras de Lie fijas por menos la anti-involución. Damos además una realización geométrica de ellas, concluyendo que una de las familias es una subálgebra de Lie de tipo "ortogonal" y la otra es una subálgebra de Lie de tipo "simpléctico". Por otro lado, cuando $n < N$, se hallan dos familias de subálgebras fijas por menos la anti-involución. Por medio de una realización geométrica concluimos que una de las familias obtenidas es una subálgebra de Lie de tipo "ortogonal" y la otra es una subálgebra de Lie de tipo "ortosimpléctico".

En la segunda parte, nos focalizamos en el estudio de las subálgebras de tipo "ortogonal" y "simpléctico" halladas para el caso $n = N$, puntualmente la clasificación y realización de los módulos irreducibles de peso máximo cuasifinitos.

Palabras claves: Teoría de representación, álgebras de Lie, módulos cuasifinitos.

2010 Mathematics subject Classification: 06B15, 17B10, 17B70.

Abstract

In this thesis we characterize the irreducible quasifinite highest weight modules of some subalgebras of the Lie algebra of matrix quantum pseudodifferential operators $N \times N$.

First, we present obtained results, giving a complete description of the anti-involutions preserving the principal gradation. We obtain, up to conjugation, two families of anti-involutions for some parameter n with different results when $n = N$ and $n < N$. With the intention of describing their differences in detail, these cases are studied separately. When $n = N$ we obtain two families of Lie subalgebras fixed by minus the anti-involution. We also give a geometric realization of them, arriving at the conclusion that one of the families is a Lie subalgebra of "orthogonal" type and the other is a Lie subalgebra of "symplectic" type. On the other hand, when $n < N$, we find two subalgebras fixed by minus the anti-involution. By means of a geometric realization we conclude that one of the families is a Lie subalgebra of "orthogonal" type and the other a Lie subalgebra of "orthosymplectic" type.

In the second part of this thesis, we focus on the study of the "orthogonal" and "symplectic" type subalgebras found for the case $n = N$, specifically the classification and realization of the irreducible quasifinite highest weight modules.

Key words: Representation theory, Lie algebras, quasifinite modules.

2010 Mathematics subject Classification: 06B15, 17B10, 17B70.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi directora, Carina Boyallian, que desde el primer momento me recibió con los brazos abiertos, por enseñarme tanto, pero por sobre todo por la calidez, la paciencia y la confianza que me ha demostrado todos estos años.

A mis familia por apoyarme en cada decisión a lo largo de mi vida. A mis padres por el sacrificio diario, el amor y la fuerza que me han brindado en el día a día. A mis hermanos por estar presentes a la distancia, por ser pilares, por estar en todo.

A mis amigos de siempre, que me demuestran constantemente que la distancia no los detiene. En especial a Paula Kraser, que desde el momento cero me acompaña literal y metafóricamente en lo que emprenda. A la familia Kraser por considerarme parte de la familia. A los nuevos amigos que encontré en Córdoba y en la facultad, que me dieron fuerza en los momentos que necesitaba. A mis amigas escaladoras, a quienes no esperaba encontrar, porque valen mucho más que oro. A Ivana Guaitani, por las tantas charlas que nos ayudan a crecer mutuamente.

A Romina Arroyo, con quien comparto tantas cosas, por las infinitas charlas y consejos, por el apoyo incondicional, por la paciencia, por las risas, por alegrarse conmigo en los buenos momentos y por escucharme y acompañarme en los malos. Por todo lo compartido y lo que queda por compartir. Porque todo lo que he aprendido de y con ella, porque su motivación y sus ganas de mejorar son contagiosas.

A todos mis compañeros de oficina, por hacer valer las tantas horas compartidas. A Vanesa Meinardi, por estar cerca incluso estando lejos, por estar siempre dispuesta a ayudar en lo que necesite. A Julia Plavnik, por ser la persona más cálida que conocí.

Al CIEM por el apoyo económico que hizo posible que realizara el doctorado. A la FaMAF por brindarme un lugar de trabajo, a los docentes y compañeros que me he cruzado en el camino, por la buena predisposición y la generosidad que siempre han demostrado tener conmigo. En particular a mi comisión asesora y a mis jurados de tesis. A los docentes de la UNS por la formación previa y por el impacto que tuvieron en mi camino.

A todos aquellos que conocí en el camino y que me dieron aliento y fuerzas para seguir, incluso sin saberlo. A los que me hicieron saber a diario que creían en mí. A todos los que me apoyaron a lo largo del camino y desde siempre. ¡¡Gracias!!

Índice general

Introducción

Las álgebras W-infinito surgen naturalmente en varias teorías físicas, como en la teoría de campos conformes, la teoría del efecto de Hall cuántico, etc. El álgebra $W_{1+\infty}$, que es la extensión central del álgebra de Lie D de operadores diferenciales en el círculo, es la fundamental entre éstas álgebras. Las representaciones del álgebra de Lie $W_{1+\infty}$ fueron estudiadas por primera vez en [KR1], donde se caracterizaron sus representaciones cuasifinitas irreducibles de peso máximo. Al final del artículo, resultados similares fueron encontrados para la extensión central del álgebra de Lie de pseudo-operadores diferenciales cuánticos $\hat{\mathcal{S}}_q$, que es el análogo cuántico del álgebra $W_{1+\infty}$.

En [KWY], fue probado que hay esencialmente, salvo conjugación, dos anti-involuciones $\sigma_{\pm}$ en D, que preservan la graduación principal. Estos resultados fueron extendidos al caso matricial en [BL01], donde se dio una descripción completa de las anti-involuciones del álgebra D^N de operadores diferenciales matriciales $N \times N$ en el círculo, que preservan la $\mathbb{Z}$-graduación principal.

Análogamente, en [BL05] se probó la existencia de una familia de anti-involuciones $\sigma_{\epsilon,k}$ en $\mathcal{S}_q$ ($\epsilon = \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$), salvo conjugación, que preservan la graduación principal. En parte, el objetivo de esta tesis es extender estos resultados al caso matricial, donde el panorama global parece ser más rico y complejo.

Este trabajo está organizado en tres capítulos. En el primero de ellos se introducen los conceptos a utilizar a lo largo de esta tesis. En la primer Sección se dan una serie de definiciones y construcciones básicas sobre teoría general de representaciones cuasifinitas de álgebras de Lie. En la segunda, se puede encontrar una descripción de las representaciones de peso máximo cuasifinitas irreducibles del álgebra de Lie $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$ y sus subálgebras clásicas. Las dos Secciones siguientes se basan en los trabajos [BL02] y [BL05]. En él se definen los conceptos de álgebra de Lie de operadores pseudo diferenciales cuánticos y su versión matricial. Se exponen los principales resultados conocidos y las caracterizaciones de módulos irreducibles de peso máximo de cada una de estas álgebras, para continuar con un análisis más profundo del caso matricial en capítulos posteriores.

En el Capítulo 2, basado en [BB], damos una descripción completa de las anti-involuciones del álgebra $\mathcal{S}_{q,N}$ de $N \times N$ operadores pseudodiferenciales cuánticos que preservan la $\mathbb{Z}$-graduación principal. Obtenemos, salvo conjugación, dos familias de anti-involuciones que dependen de varios parÃ¡metros, uno de los cuales es un natural $n \leq N$. Los resultados son notablemente diferentes cuando $n = N$ y $n < N$. Con el objetivo de exponer sus diferencias en detalle, son estudiados de forma separada en las Secc. 2.2 y 2.3 respectivamente. En la Secc. 2.2, las anti-involuciones generan dos familias $\mathcal{S}_{q,N}^{\epsilon,r,N}$ de subálgebras de Lie ($\epsilon = \pm 1$, r, $k \in \mathbb{Z}$) fijas por $-\sigma_{\epsilon,r,N}$. Luego damos una realización geométrica de $\sigma_{\epsilon,r,N}$, concluyendo que $\mathcal{S}_{q,N}^{+,r,N}$ es una subálgebra de $\mathcal{S}_{q,N}$ de tipo ortogonal y $\mathcal{S}_{q,N}^{-,r,N}$ es una subálgebra de $\mathcal{S}_{q,N}$ de tipo simpléctico. En la Secc. 2.3, las familias $\sigma_{\epsilon,n}$, con $1 \leq n < N$ generan dos familias de subálgebras $\mathcal{S}_{q,N}^{\epsilon,n}$ ($\epsilon = \pm 1$) fijas por $-\sigma_{\epsilon,n}$. Damos también la realización geométrica de $\sigma_{\epsilon,n}$, concluyendo que $\mathcal{S}_{q,N}^{+,n}$ es una subálgebra de $\mathcal{S}_{q,N}$ de tipo $o(n, N-n)$ y $\mathcal{S}_{q,N}^{-,n}$ es una subálgebra de $\mathcal{S}_{q,N}$ de tipo $osp(n, N-n)$.

Por último el Capítulo 3, basado en un artículo en preparación [BB2], se centra en la continuación del estudio de las subálgebras halladas en el Capítulo 2, puntualmente la clasificación y realización de los módulos irreducibles de peso máximo cuasifinitos. Nos centraremos en las subálgebras fijas por anti-involuciones obtenidas para el caso $n = N$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se exponen las definiciones y resultados básicos de la teoría de representaciones de álgebras de Lie que se utilizarán en los capítulos subsiguientes. En la primera Sección se desarrollará un enfoque general sobre la teoría de representaciones de peso máximo cuasifinitas sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ compleja $\mathbb{Z}$-graduada. Más adelante se describirán las representaciones de peso máximo cuasifinitas irreducibles del álgebra de Lie $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$ y sus subálgebras de Lie clásicas.

1.1. Representaciones cuasifinitas de álgebras de lie $\mathbb{Z}$-graduadas

La teoría general expuesta a continuación sobre representaciones de peso máximo cuasifinitas sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ compleja $\mathbb{Z}$-graduada fue desarrollada por J. Liberati y V. Kac. Todos los resultados de esta Sección pueden ser hallados en [KL].

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja $\mathbb{Z}$-graduada:

$$\mathfrak{g} = \oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_j, \qquad [\mathfrak{g}_i,\, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j};$$

donde $\mathfrak{g}_i$ no necesariamente posee dimensión finita y sea $\mathfrak{g}_\pm = \oplus_{j>0}\mathfrak{g}_{\pm j}$. Una subálgebra $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ es llamada *parabólica* si contiene a $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ como una subálgebra propia, esto es

$$\mathfrak{p} = \oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{p}_j, \quad \text{donde } \mathfrak{p}_j = \mathfrak{g}_j \text{ para } j \geq 0 \quad \text{y} \quad \mathfrak{p}_j \neq 0 \text{ para algún } j < 0.$$

Se asumen las siguientes propiedades para $\mathfrak{g}$:

(P1) $\mathfrak{g}_0$ es conmutativa,

(P2) si $a \in \mathfrak{g}_{-k}$ para $k > 0$ y $[a,\, \mathfrak{g}_1] = 0$, entonces $a = 0$.

Lema 1.1.1. *Sea $\mathfrak{p}$ una subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{p}_{-k} \neq 0$ con $k > 0$, entonces $\mathfrak{p}_{-k+1} \neq 0$.*

Demostración. Si $\mathfrak{p}_{-k+1} = 0$, entonces $[\mathfrak{p}_{-k},\, \mathfrak{g}_1] = 0$, esto es, para todo $a \in \mathfrak{p}_{-k}$ es $[a, \mathfrak{g}_1] = 0$ y usando (P2), resulta que $a = 0$. $\square$

Dado $a \in \mathfrak{g}_{-1}$, $a \neq 0$, se define $\mathfrak{p}^a = \oplus_{j\in\mathbb{Z}}\mathfrak{p}^a_j$, donde $\mathfrak{p}^a_j = \mathfrak{g}_j$ para todo $j \geq 0$ y

$$\mathfrak{p}^a_{-1} = \sum [\cdots [[a,\, \mathfrak{g}_0], \mathfrak{g}_0], \cdots], \qquad \mathfrak{p}^a_{-k-1} = [\mathfrak{p}^a_{-1},\, \mathfrak{p}^a_{-k}]. \tag{1.1}$$

Lema 1.1.2. *a) $\mathfrak{p}^a$ es la subálgebra parabólica minimal que contiene a a.*

b) $\mathfrak{g}_0^a := [\mathfrak{p}^a, \mathfrak{p}^a] \cap \mathfrak{g}_0 = [a, \mathfrak{g}_1]$.

Demostración. Se probará primero que $\mathfrak{p}^a$ es una subálgebra. Por inducción en k veamos que $[\mathfrak{p}^a_{-k}, \mathfrak{p}^a_{-l}] \subseteq \mathfrak{p}^a_{-l-k}$ $(k, l > 0)$:

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{p}^a_{-k}, \mathfrak{p}^a_{-l}] &= [[(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1}, \mathfrak{p}^a_{-1}], (\mathfrak{p}^a_{-1})^l] \\
&= [[(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1}, (\mathfrak{p}^a_{-1})^l], \mathfrak{p}^a_{-1}] + [(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1}[\mathfrak{p}^a_{-1}, (\mathfrak{p}^a_{-1})^l]] \\
&\subseteq [(\mathfrak{p}^a_{-1})^{l+k-1}, \mathfrak{p}^a_{-1}] + [(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1}, (\mathfrak{p}^a_{-1})^{l+1}] \\
&\subseteq (\mathfrak{p}^a_{-1})^{k+l}.
\end{aligned}$$

Además $[\mathfrak{p}^a_{-k}, \mathfrak{g}_m] \subseteq \mathfrak{p}^a_{m-k}$ $(m > k)$ ya que por inducción en k tenemos

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{p}^a_{-k}, \mathfrak{g}_m] &= [[(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1}, \mathfrak{p}^a_{-1}], \mathfrak{g}_m] \\
&= [[(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1}, \mathfrak{g}_m], \mathfrak{p}^a_{-1}] + [(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1}, [\mathfrak{p}^a_{-1}, \mathfrak{g}_m]] \\
&\subseteq [\mathfrak{p}^a_{m-k+1}, \mathfrak{p}^a_{-1}] + [(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1}, \mathfrak{g}_{m-1}]. \\
&\subseteq \mathfrak{p}^a_{m-k}.
\end{aligned}$$

Finalmente es obvia la minimalidad, con lo que hemos probado a).

b) Para todo $k > 1$:

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{p}^a_{-k}, \mathfrak{g}_k] &= [[(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1}, \mathfrak{g}_k], \mathfrak{p}^a_{-1}] + [(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1}, [\mathfrak{p}^a_{-1}, \mathfrak{g}_k]] \\
&\subseteq [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{p}^a_{-1}] + [(\mathfrak{p}^a_{-1})^{k-1}, \mathfrak{g}_{k-1}].
\end{aligned}$$

Luego, por inducción, $\mathfrak{g}_0^a = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{p}^a_{-1}]$. Sin embargo,

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{p}^a_{-1}] &= \mathit{linearspan}\{[\cdots[[a, c_1], c_2], \cdots], x] \,:\, c_i \in \mathfrak{g}_0, x \in \mathfrak{g}_1\} \quad (\text{por (P1)}) \\
&= \mathit{linearspan}\{[a[c_1, \cdots [c_{k-1}, [c_k, x] \cdots]]] \,:\, c_i \in \mathfrak{g}_0, x \in \mathfrak{g}_1\} \\
&= [a, \mathfrak{g}_1].
\end{aligned}$$

con lo que el lema queda probado. □

Definición 1.1.3. a) Una subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ es llamada *no-degenerada* si $\mathfrak{p}_{-j}$ tiene codimensión finita en $\mathfrak{g}_{-j}$, para todo $j > 0$.

b) Un elemento $a \in \mathfrak{g}_{-1}$ es llamado *no-degenerado* si $\mathfrak{p}^a$ es no degenerada.

Para comenzar con el estudio de la representaciones cuasifinitas sobre $\mathfrak{g}$, son necesarias las siguientes definiciones.

Un $\mathfrak{g}$-módulo V es llamado $\mathbb{Z}$*-graduado* si $V = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ y $\mathfrak{g}_i V_j \subset V_{i+j}$. Un $\mathfrak{g}$-módulo V, $\mathbb{Z}$-graduado es llamado *cuasifinito* si $\dim V_j < \infty$ para todo j.

Dado $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$, un *módulo de peso máximo* con peso λ es un $\mathfrak{g}$-módulo $V(\mathfrak{g}, \lambda)$, $\mathbb{Z}$-graduado generado por un vector de peso máximo $v_\lambda \in V(\mathfrak{g}, \lambda)_0$ que satisface

$$hv_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \quad (h \in \mathfrak{g}_0), \qquad \mathfrak{g}_+ v_\lambda = 0. \tag{1.2}$$

Un vector no nulo $v \in V(\mathfrak{g},\lambda)$ es llamado *singular* si $\mathfrak{g}_+ v = 0$.

El *módulo de Verma* sobre $\mathfrak{g}$ es definido de la manera usual:

$$M(\mathfrak{g},\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+)} \mathbb{C}_\lambda \tag{1.3}$$

donde $\mathbb{C}_\lambda$ es el $(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+)$-módulo de dimensión 1 dado por $h \mapsto \lambda(h)$ si $h \in \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_+ \mapsto 0$, y la acción de $\mathfrak{g}$ es inducida por la multiplicación a izquierda en $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. De aquí en adelante $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ denotará el álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g}$.

En este contexto, todo módulo de peso máximo $V(\mathfrak{g},\lambda)$ es un módulo cociente de $M(\mathfrak{g},\lambda)$ y el módulo irreducible $L(\mathfrak{g},\lambda)$ es el cociente de $M(\mathfrak{g},\lambda)$ por el submódulo graduado propio maximal.

Sea $\mathfrak{p} = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_j$ una subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$ y sea $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ tal que $\lambda|_{\mathfrak{g}_0 \cap [\mathfrak{p},\mathfrak{p}]} = 0$. Entones el $(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+)$-módulo $\mathbb{C}_\lambda$ se extiende a un $\mathfrak{p}$-módulo permitiendo que $\mathfrak{p}_j$ actúe por 0 para $j < 0$, y puede construirse un módulo de peso máximo

$$M(\mathfrak{g},\mathfrak{p},\lambda) = \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda$$

llamado el *módulo de Verma generalizado*. Es claro que todos estos módulos de peso máximo son graduados.

También se requiere la siguiente condición para $\mathfrak{g}$:

(P3) Si $\mathfrak{p}$ es una subálgebra parabólica no-degenerada de $\mathfrak{g}$, entonces existe un elemento no degenerado a tal que $\mathfrak{p}^a \subseteq \mathfrak{p}$.

Teorema 1.1.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie $\mathbb{Z}$-graduada que cumple $(P1), (P2)$ y $(P3)$. Las siguientes condiciones en $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$ son equivalentes:*

(1) $M(\mathfrak{g};\lambda)$ contiene un vector singular $av_\lambda \in M(\mathfrak{g};\lambda)_{-1}$,donde $a \in \mathfrak{g}_{-1}$ es no degenerado;

(2) Existe un elemento no degenerado $a \in \mathfrak{g}_{-1}$, tal que $\lambda([\mathfrak{g}_1,a]) = 0$;

(3) $L(\mathfrak{g};\lambda)$ es cuasifinito;

(4) Existe un elemento no degenerado $a \in \mathfrak{g}_{-1}$, tal que $L(\mathfrak{g};\lambda)$ es el cociente irreducible del módulo de Verma generalizado $M(\mathfrak{g},\mathfrak{p}^a,\lambda)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (4) Denotamos por av_λ el vector singular, donde $a \in \mathfrak{g}_{-1}$, entonces (4) vale para este a particular. La prueba de (4) $\Rightarrow$ (3) es inmediata. Finalmente, $L(\mathfrak{g};\lambda)$ cuasifinito implica $\dim(\mathfrak{g}_{-1} \cdot \mathrm{v}_\lambda) < \infty$ entonces existe $a \in \mathfrak{g}_{-1}$ tal que $av_\lambda = 0$ en $L(\mathfrak{g};\lambda)$, entonces $0 = \mathfrak{g}_1.(av_\lambda) = a(\mathfrak{g}_1.v_\lambda) + [\mathfrak{g}_1,a]v_\lambda = \lambda([\mathfrak{g}_1,a])v_\lambda$, resultando (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). □

1.2. El álgebra de Lie $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$ y sus subálgebras clásicas

A continuación se dará una descripción de las representaciones de peso máximo cuasifinitas irreducibles del álgebra de Lie $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$ y sus subálgebras de Lie clásicas de tipo B, C y D. Los contenidos de esta sección pueden ser encontrados por ejemplo en [KR2], [FKRW] y [KWY].

1.2.1. El álgebra de Lie $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$

Dada el álgebra polinomial $\mathbb{C}[u]$, denotemos $R_m = \mathbb{C}[u]/(u^{m+1})$ al álgebra cocientada por el ideal generado por u^{m+1} ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). Sea $\mathbf{1}$ el elemento identidad en R_m. Denotamos $g\ell_\infty^{[m]}$ al álgebra de Lie compleja de todas las matrices infinitas $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ con entradas en R_m con sólo una cantidad finita de diagonales no nulas. $E_{i,j}$ denotará la matriz infinita con 1 en la entrada (i,j) y 0 en el resto. Existe un automorfismo natural ν de $g\ell_\infty^{[m]}$ dado por

$$\nu(E_{i,j}) = E_{i+1,j+1}. \tag{1.1}$$

Dado $E_{i,j}$, sea $j-i$ su *peso*. Esto define la $\mathbb{Z}$-graduación *principal* $g\ell_\infty^{[m]} = \oplus_{j\in\mathbb{Z}}(g\ell_\infty^{[m]})_j$. La extensión central $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]} = g\ell_\infty^{[m]} \oplus R_m$ de $g\ell_\infty^{[m]}$ está dada por el siguiente 2-cociclo con valores en R_m:

$$C(A,B) = Tr([J,A]B), \tag{1.2}$$

donde $J = \sum_{i\leq 0} E_{i,i}$. La $\mathbb{Z}$-graduación del álgebra de Lie $g\ell_\infty^{[m]}$ se extiende a $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ tomando el peso de R_m como 0. En particular, posee una *descomposición triangular*,

$$\widehat{g\ell}_\infty^{[m]} = (\widehat{g\ell}_\infty^{[m]})_- \oplus (\widehat{g\ell}_\infty^{[m]})_0 \oplus (\widehat{g\ell}_\infty^{[m]})_+, \tag{1.3}$$

donde

$$(\widehat{g\ell}_\infty^{[m]})_\pm = \oplus_{j\in\mathbb{N}}(\widehat{g\ell}_\infty^{[m]})_{\pm j} \quad \text{y} \quad (\widehat{g\ell}_\infty^{[m]})_0 = (g\ell_\infty^{[m]})_0 \oplus R_m. \tag{1.4}$$

Dada $\lambda \in (\widehat{g\ell}_\infty^{[m]})_0^*$, denotamos

$$\begin{aligned} c_i &= \lambda(u^i), \\ {}^a\lambda_j^{(i)} &= \lambda(u^i E_{j,j}), \\ {}^aH_j^{(i)} &= u^i E_{j,j} - u^i E_{j+1,j+1} + \delta_{j,0}c_i, \\ {}^ah_j^{(i)} &= {}^a\lambda_j^{(i)} - {}^a\lambda_{j+1}^{(i)} + \delta_{j,0}c_i, \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde $j \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq i \leq m$. Sea $L(\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}, \lambda)$ el $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$-módulo de peso máximo irreducible con peso máximo λ. Los ${}^a\lambda_j^{(i)}$ son llamados *etiquetas* y c_i son las *cargas centrales* de $L(\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}, \lambda)$.

1.2.2. El álgebra de Lie $b_\infty^{[m]}$

Consideremos el espacio vectorial $R_m[t,t^{-1}]$ y tomemos la base sobre R_m dada por $v_i = t^{-i}$, $i \in \mathbb{Z}$ y la siguiente forma $\mathbb{C}$-bilineal en $R_m[t,t^{-1}]$:

$$B^\pm(u^m v_i, u^n v_j) = u^m(-u)^{-n}(\pm 1)^i \delta_{i,-j}. \tag{1.6}$$

Denotemos $\bar{b}_\infty^{-[m]}$ (resp. $\bar{b}_\infty^{+[m]}$) a la subálgebra de Lie que preserva la forma bilineal $B^-(\cdot,\cdot)$ (resp. $B^+(\cdot,\cdot)$). Entonces

$$\begin{aligned} \bar{b}_\infty^{+[m]} &= \{(a_{i,j}(u))_{i,j\in\mathbb{Z}} \in g\ell_\infty^{[m]} : a_{i,j}(u) = -a_{-j,-i}(-u)\}, \\ \bar{b}_\infty^{-[m]} &= \{(a_{i,j}(u))_{i,j\in\mathbb{Z}} \in g\ell_\infty^{[m]} : a_{i,j}(u) = (-1)^{1+i+j}a_{-j,-i}(-u)\}. \end{aligned}$$

Denotemos $b_\infty^{[m]} = \bar{b}_\infty^{-[m]} \oplus R_m$ (resp. $\tilde{b}_\infty^{[m]} = \bar{b}_\infty^{+[m]} \oplus R_m$) a la extensión central de $\bar{b}_\infty^{-[m]}$ (resp. $\bar{b}_\infty^{+[m]}$) dada por la restricción del 2-cociclo (1.2) definido en $g\ell_\infty^{[m]}$, restringido a $\bar{b}_\infty^{-[m]}$ (resp. $\bar{b}_\infty^{+[m]}$). Luego las subálgebras $b_\infty^{[m]}$ y $\tilde{b}_\infty^{[m]}$ heredan de $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ la $\mathbb{Z}$-graduación principal y la descomposición triangular (ver [KR2] y [FKRW] para notación),

$$\begin{aligned} b_\infty^{[m]} &= \oplus_{j\in\mathbb{Z}}(b_\infty^{[m]})_j, \quad b_\infty^{[m]} = (b_\infty^{[m]})_+ \oplus (b_\infty^{[m]})_0 \oplus (b_\infty^{[m]})_-, \\ \tilde{b}_\infty^{[m]} &= \oplus_{j\in\mathbb{Z}}(\tilde{b}_\infty^{[m]})_j, \quad \tilde{b}_\infty^{[m]} = (\tilde{b}_\infty^{[m]})_+ \oplus (\tilde{b}_\infty^{[m]})_0 \oplus (\tilde{b}_\infty^{[m]})_- \end{aligned}$$

Notemos que el álgebra de Lie $\tilde{b}_\infty^{[m]}$ es isomorfa a $b_\infty^{[m]}$. En particular, cuando $m = 0$, tenemos la subálgebra de Lie usual $g\ell_\infty$ denotada por b_∞ (ver [K]) (resp. $\tilde{b}_\infty$, ver [W]). Dada $\lambda \in (b_\infty^{[m]})_0^*$, denotamos $L(b_\infty^{[m]}, \lambda)$ al módulo de peso máximo irreducible sobre $b_\infty^{[m]}$ con peso máximo λ.

Para cada $\lambda \in (b_\infty^{[m]})_0^*$, tenemos

$$\begin{aligned} c_i &= \lambda(u^i), \\ {}^b\lambda_0^{(j)} &= \lambda(2u^j E_{0,0}) \quad (j \text{ impar}), \\ {}^b\lambda_i^{(j)} &= \lambda(u^j E_{i,i} - (-u)^j E_{-i,-i}), \\ {}^bH_i^{(j)} &= u^j E_{i,i} - u^j E_{i+1,i+1} + (-u)^j E_{-i-1,-i-1} - (-u)^j E_{-i,-i}, \\ {}^bH_0^{(j)} &= 2(u^j E_{0,0} - u^j E_{-1,-1} - u^j E_{1,1}) + u^j, \quad (j \text{ par}), \\ {}^bH_0^{(j)} &= (2u^j E_{0,0} - u^j E_{-1,-1} - u^j E_{1,1}) + u^j, \quad (j \text{ impar}), \\ {}^bh_i^{(j)} &= \lambda({}^bH_i^{(j)}) = {}^b\lambda_i^{(j)} - {}^b\lambda_{i+1}^{(j)}, \\ {}^bh_0^{(j)} &= \lambda({}^bH_0^{(j)}) = -2\,{}^b\lambda_1^{(j)} + 2c_j \quad (j \text{ par}), \\ {}^bh_0^{(j)} &= \lambda({}^bH_0^{(j)}) = {}^b\lambda_0^{(j)} - {}^b\lambda_1^{(j)} + c_j \quad (j \text{ impar}), \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde $i \in \mathbb{N}$ y $0 \leq j \leq m$. Los ${}^b\lambda_j^{(i)}$ son llamados *etiquetas* y los c_i son las *cargas centrales* de $L(b_\infty^{[m]}, \lambda)$ ó $L(\tilde{b}_\infty^{[m]}, \lambda)$.

1.2.3. El álgebra de Lie $c_\infty^{[m]}$

Sea ahora la $\mathbb{C}$-forma bilineal en $R_m[t, t^{-1}]$ dada por

$$C(u^m v_i, u^n v_j) = u^m(-u^n)(-1)^i \delta_{i,1-j}\,. \tag{1.8}$$

$\bar{c}_\infty^{[m]}$ denotará la subálgebra de Lie de $g\ell_\infty^{[m]}$ que preserva la forma bilineal $C(\ ,\ )$. Luego

$$\bar{c}_\infty^{[m]} = \{(a_{ij}(u))_{i,j\in\mathbb{Z}} \in g\ell_\infty^{[m]} \mid a_{ij}(u) = (-1)^{i+j+1} a_{1-j,1-i}(-u)\}\,.$$

Se denotará por $c_\infty^{[m]} = \bar{c}_\infty^{[m]} \oplus R_m$ a la extensión central de $\bar{c}_\infty^{[m]}$ dada por la restricción del 2-cociclo (1.2), definido en $g\ell_\infty^{[m]}$. Esta subálgebra hereda de $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ la $\mathbb{Z}$-graduación principal y la descomposición triangular,

$$c_\infty^{[m]} = \oplus_{j\in\mathbb{Z}}(c_\infty^{[m]})_j \qquad c_\infty^{[m]} = (c_\infty^{[m]})_+ \oplus (c_\infty^{[m]})_0 \oplus (c_\infty^{[m]})_-\,.$$

En particular cuando $m=0$, tenemos la subálgebra de Lie usual de $\widehat{g\ell}_\infty$, denotada por c_∞.

Dado $\lambda \in (c_\infty^{[m]})_0^*$, denotamos por $L(c_\infty^{[m]};\lambda)$ al $c_\infty^{[m]}$-módulo irreducible de peso máximo λ. Para cada $\lambda \in (c_\infty^{[m]})_0^*$, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} c_i & = & \lambda(u^i), \\ {}^c\lambda_j^{(i)} & = & \lambda(u^i\,E_{j,j} - (-u)^i\,E_{1-j,1-j}), \\ {}^cH_j^{(i)} & = & u^iE_{j,j} - u^jE_{j+1,j+1} + (-u)^iE_{-j,-j} - (-u)^iE_{1-j,1-j}, \\ {}^cH_0^{(i)} & = & (u^iE_{0,0} - u^iE_{1,1}) + u^i, \quad (i \text{ par}) \\ {}^ch_j^{(i)} & = & {}^c\lambda_j^{(i)} - {}^c\lambda_{1+j}^{(i)}, \\ {}^ch_0^{(i)} & = & -{}^c\lambda_1^{(i)} + c_i \qquad (i \text{ par}) \end{array} \tag{1.9}$$

donde $j \in \mathbb{N}$ e $i = 0, \cdots, m$.

Se llamará a los ${}^c\lambda_j^{(i)}$ las *etiquetas* y a las c_i las *cargas centrales* de $L(c_\infty^{[m]},\lambda)$.

1.2.4. El álgebra de Lie $d_\infty^{[m]}$

Por último, sea la siguiente forma $\mathbb{C}$-bilineal en $R_m[t,t^{-1}]$:

$$D(u^m v_i, u^n v_j) = u^m(-u)^n\delta_{i,1-j}. \tag{1.10}$$

Denotaremos $d_\infty^{[m]}$ a la subálgebra de Lie de $g\ell_\infty^{[m]}$ que preserva la forma bilineal $D(\cdot,\cdot)$. Tenemos

$$\bar{d}_\infty^{[m]} = \{(a_{i,j}(u))_{i,j\in\mathbb{Z}} \in g\ell_\infty^{[m]} : a_{i,j}(u) = -a_{1-j,1-i}(-u)\}.$$

Denotemos $d_\infty^{[m]} = \bar{d}_\infty^{[m]} \oplus R_m$ a la extensión central de $\bar{d}_\infty^{[m]}$ dada por la restricción del 2-cociclo (1.2), definido en $g\ell_\infty^{[m]}$. Esta subálgebra hereda de $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ la $\mathbb{Z}$-graduación principal y la descomposición triangular

$$d_\infty^{[m]} = \oplus_{j\in\mathbb{Z}}(d_\infty^{[m]})_j, \quad d_\infty^{[m]} = (d_\infty^{[m]})_+ \oplus (d_\infty^{[m]})_0 \oplus (d_\infty^{[m]})_-.$$

En particular cuando $m=0$, tenemos la subálgebra de Lie usual $g\ell_\infty$ denotada d_∞. Dado $\lambda \in (d_\infty^{[m]})_0^*$, denotamos $L(d_\infty^{[m]},\lambda)$ al $d_\infty^{[m]}$-módulo irreducible de peso máximo λ.

Para cada $\lambda \in (d_\infty^{[m]})_0^*$, tenemos

$$\begin{array}{rcl} c_i & = & \lambda(u^i), \\ {}^d\lambda_i^{(j)} & = & \lambda(u^jE_{i,i} - (-u)^jE_{1-i,1-i}), \\ {}^dH_i^{(j)} & = & u^jE_{i,i} - u^jE_{i+1,i+1} + (-u)^jE_{-i,-i} - (-u)^jE_{1-i,1-i}, \\ {}^dH_0^{(j)} & = & ((-u)^jE_{0,0} + (-u)^jE_{-1,-1} - u^jE_{2,2} - u^jE_{1,1}) + 2u^j, \\ {}^dh_i^{(j)} & = & \lambda({}^dH_i^{(j)}) = {}^d\lambda_i^{(j)} - {}^d\lambda_{i+1}^{(j)}, \\ {}^dh_0^{(j)} & = & \lambda({}^dH_0^{(j)}) = -{}^d\lambda_1^{(j)} - {}^d\lambda_2^{(j)} + 2c_j, \end{array} \tag{1.11}$$

donde $i \in \mathbb{N}$ y $0 \le j \le m$. Los ${}^d\lambda_j^{(i)}$ son llamados *etiquetas* y los c_i son las *cargas centrales* de $L(d_\infty^{[m]},\lambda)$.

1.3. Álgebra de Lie de operadores pseudo diferenciales cuánticos

En esta Sección se expondrán definiciones y nociones básicas sobre álgebras de Lie de operadores pseudo diferenciales cuánticos, que serán utilizados a lo largo de esta Tesis. Los resultados expuestos, hallados por C. Boyallian y J. Liberati, pueden ser encontrados junto con un estudio en mayor profundidad de las caracterizaciones de estas álgebras en [BL05].

1.3.1. Anti-involuciones del álgebra de Lie $\mathcal{S}_q$

Consideremos $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ el álgebra de polinomios de Laurent en una variable y $q \in \mathbb{C}^{\times}$. Denotamos $\mathcal{S}_q^a$ al álgebra asociativa de operadores cuánticos pseudo-diferenciales. Explícitamente, sea T_q el operador en $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ dado por

$$T_q f(z) = f(qz),$$

donde $q \in \mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Podemos escribir a un elemento de $\mathcal{S}_q^a$ como combinación lineal de operadores de la forma $z^k f(T_q)$, donde f es un polinomio de Laurent en T_q. El producto en $\mathcal{S}_q^a$ está dado por

$$(z^m f(T_q))(z^k g(T_q)) = z^{m+k} f(q^k T_q) g(T_q). \tag{1.1}$$

Ahora sea $\mathcal{S}_q$ el álgebra de Lie obtenida de $\mathcal{S}_q^a$ tomando el conmutador usual. Sea $\mathcal{S}'_q = [\mathcal{S}_q, \mathcal{S}_q]$. Sea:

$$\mathcal{S}_q = \mathcal{S}'_q \bigoplus \mathbb{C}T_q^0 \qquad \text{(suma directa de ideales)}.$$

La teoría de representaciones de $\mathcal{S}_q$ se reduce entonces a la de $\mathcal{S}'_q$. Tomando la forma traza $tr_0(\sum_j c_j w^j) = c_0$, obtenemos el siguiente 2-cociclo en $\mathcal{S}_{q,N}$

$$\psi(z^m f(T_q), z^n g(T_q)) = \delta_{m,-n} m\, tr_0(f(q^{-m} T_q) g(T_q)), \tag{1.2}$$

donde $m,\, n \in \mathbb{Z}$, $f,\, g \in \mathbb{C}[w, w^{-1}]$. Sea

$$\widehat{\mathcal{S}_q} = \mathcal{S}'_q + \mathbb{C}C \tag{1.3}$$

la extensión central de $\mathcal{S}'_q$ correspondiente al cociclo (1.2).

Los elementos $z^k T_q^m$ $(k,\, m \in \mathbb{Z})$ forman una base de $\mathcal{S}_q$. Definimos el *peso* en $\mathcal{S}_{q,N}$ por

$$wt\, z^k f(T_q) = k, \quad wt\, C = 0. \tag{1.4}$$

Esto da la $\mathbb{Z}$-graduación *principal* de $\mathcal{S}_q^a$, $\mathcal{S}_q$ y $\widehat{\mathcal{S}_q}$,

$$\widehat{\mathcal{S}_q} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (\widehat{\mathcal{S}_q})_j, \quad \mathcal{S}_q^a = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (\mathcal{S}_q^a)_j.$$

Una *anti-involución* σ de $\mathcal{S}_q^a$ es un automorfirsmo anti-involutivo de $\mathcal{S}_q^a$, i.e., $\sigma^2 = Id$, $\sigma(ax + by) = a\sigma(x) + b\sigma(y)$ y $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$, para todo $a,\, b \in \mathbb{C}$ y $x,\, y \in \mathcal{S}_q^a$. De ahora en adelante asumiremos $|q| \neq 1$.

Proposición 1.3.1. *Cualquier anti-involución $\dot{\sigma}$ de $\mathcal{S}_q^a$ que preserva la $\mathbb{Z}$-graduación principal es de la siguiente forma*

$$\dot{\sigma}_{A,B,r}(z) = AzT_q^r \quad y \quad \dot{\sigma}_{A,B,r}(T_q) = BT_q^{-1},$$

con $r \in \mathbb{Z}$ y $A,\ B \in \mathbb{C}^\times$ tales que $A^2B^r = q^r$.

Demostración. Dado que $\dot{\sigma}$ preserva la $\mathbb{Z}$-graduación principal podemos asumir que $\dot{\sigma}(z) = zf(T_q)$ y $\dot{\sigma}(T_q) = g(T_q)$, donde $f,\ g \in \mathbb{C}[w, w^{-1}]$. Ahora, dado que T_q es un elemento inversible del álgebra, también lo es $g(T_q)$, y por lo tanto es de la forma $g(T_q) = BT_q^l$ para algún $B \in \mathbb{C} - 0$ y $l \in \mathbb{Z}$. De manera similar, $f(T_q) = AT_q^r$ con $A \in \mathbb{C} - 0$ y $r \in \mathbb{Z}$. Haciendo uso de que $\dot{\sigma}^2 = Id$ tenemos que

$$1 = f(g(T_q))f(T_q) \quad \text{y} \quad T_q = g(g(T_q)).$$

Combinando la segunda ecuación y la expresión de $g(T_q)$ obtenemos que $T_q = B^{l+1}T_q^{l^2}$. Podemos entonces deducir que: $l = 1$, $B = \pm 1$ ó $l = -1$ y $B \in \mathbb{C}$. Utilizando ahora la primer ecuación y la expresión de $f(T_q)$ tenemos que $1 = A^2B^rq^{lr}T_q^{(l+1)r}$, y por lo tanto $(l+1)r = 0$. Si $l = 1$, entonces $A = \pm 1$. Dado que q no es una raíz de unidad, es fácil verificar que éstos no son anti-automorfismos. Por lo tanto, $l = -1$ y hemos finalizado la prueba. □

Se puede ver fácilmente que, para $h \in \mathbb{C}[w, w^{-1}]$,

$$\dot{\sigma}_{A,B,r}(z^nh(T_q)) = A^nq^{(n(n-1)r)/2}z^nh(Bq^{-n}T_q^{-1})T_q^{nr}. \tag{1.5}$$

Dado $s \in \mathbb{C}$, denotemos θ_s el automorfismo de $\mathcal{S}_q$ dado por $\theta_s(a) = z^{-s}az^s$, con $a \in \mathcal{S}_q$. Utilizando (1.5), obtenemos

$$\theta_s\dot{\sigma}_{A,B,r}\theta_{-s} = \dot{\sigma}_{q^{-sr}A,q^{2s}B,r}. \tag{1.6}$$

Denotemos $\mathcal{S}_q^{A,B,r}$ a la subálgebra de Lie de $\mathcal{S}_q$ fija por $-\sigma_{A,B,r}$, explícitamente

$$\mathcal{S}_q^{A,B,r} = \{a \in \mathcal{S}_q | \dot{\sigma}_{A,B,r}(a) = -a\}.$$

Dado que $\sigma_{A,B,r}$ preserva la $\mathbb{Z}$-graduación principal de $\mathcal{S}_q^a$, la subálgebra $\mathcal{S}_q^{A,B,r}$ hereda la $\mathbb{Z}$-graduación principal de $\mathcal{S}_q$: $\mathcal{S}_q^{A,B,r} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}(\mathcal{S}_q^{A,B,r})_j$, donde $(\mathcal{S}_q^{A,B,r})_j = \{z^jf(T_q) | f(w) \in \mathbb{C}[w, w^{-1}]$ y $\dot{\sigma}_{A,B,r}(z^jf(T_q)) = -z^jf(T_q)\}$.

Se sigue de esto el siguiente lema.

Lema 1.3.2. *El álgebra de Lie $\mathcal{S}_q^{A,B,r}$ para valores arbitrarios de A y B es isomorfa a $\mathcal{S}_q^{\epsilon,q,r}$, donde ϵ es 1 ó -1.*

Notaremos a partir de ahora $\dot{\sigma}_{\epsilon,r}$ y $\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}$ en lugar de $\dot{\sigma}_{\epsilon,q,r}$ y $\mathcal{S}_q^{\epsilon,q,r}$. De ahora en adelante r será par.

Denotemos $\mathbb{C}[w, w^{-1}]^{\epsilon,j}$ (donde $\epsilon = 1$ ó $\epsilon = -1$) al conjunto de polinomios de Laurent tales que $f(w^{-1}) = -(\epsilon)^jf(w)$. Se procederá ahora a dar una descripción completa de $(\mathcal{S}_q^{\epsilon,r})_j$.

Lema 1.3.3. *Tenemos que*

$$(\mathcal{S}_q^{\epsilon,r})_j = \{z^j(q^{(j-1)/2}T_q)^{rj/2}f(q^{(j-1)/2}T_q) | f(w) \in \mathbb{C}[w, w^{-1}]^{\epsilon,j}\}. \tag{1.7}$$

Demostración. Por (1.5), un elemento de $(\mathcal{S}_q^{\epsilon,r})_j$ es de la forma $z^j h(T_q) \in \mathcal{S}_q$,

$$\begin{aligned} z^j h(T_q) - \dot{\sigma}_{\epsilon,r}(z^j h(T_q)) &= z^j (h(T_q) - (\epsilon)^j (q^{(j-1)/2}T_q)^{rj} h(q^{-j+1}T_q^{-1})) \\ &= z^j (q^{(j-1)/2}T_q)^{rj/2} f(q^{(j-1)/2}T_q) \end{aligned}$$

con $f(w) = h(q^{(-j+1)/2}w)w^{-jr/2} - (\epsilon)^j h(q^{(-j+1)/2}w^{-1})w^{jr/2}$. Se puede probar fácilmente que $f(w^{-1}) = -(\epsilon)^j f(w)$, completando la prueba. □

Como consecuencia de este lema tenemos que

$$\mathcal{B} = \{z^j (q^{(j-1)/2}T_q)^{rj/2}((q^{(j-1)/2}T_q)^m - (\epsilon)^j (q^{(j-1)/2}T_q)^{-m}) | j \in \mathbb{Z},\, m \in \mathbb{N}\}$$

forma una $\mathbb{C}$-base de $(\mathcal{S}_q^{\epsilon,r})$ si $\epsilon = 1$ y $\mathcal{B} \cup \{z^j (q^{(j-1)/2}T_q)^{rj/2}\}$ es una base si $\epsilon = -1$.

Denotamos nuevamente Ψ a la restricción del 2-cociclo en (1.2) a $\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}$, explícitamente

$$\begin{aligned} \Psi(z^m (q^{(m-1)/2}T_q)^{rm/2} f(q^{(m-1)/2}T_q), z^n (q^{(n-1)/2}T_q)^{rn/2} g(q^{(n-1)/2}T_q)) = \\ \delta_{m,-n} m tr_0(f(q^{(m-1)/2}w) g(q^{(-m-1)/2}w)), \end{aligned}$$

donde $z^m (q^{(m-1)/2}T_q)^{rm/2} f(q^{(m-1)/2}T_q)$ y $z^n (q^{(n-1)/2}T_q)^{rn/2} g(q^{(n-1)/2}T_q)$ están en $\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}$. Denotemos $\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}}$ la extensión central de $\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}$ por $\mathbb{C}C$ que corresponde al 2 cociclo Ψ. $\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}}$ es una subálgebra de Lie de $\widehat{\mathcal{S}_q}$ por definición.

1.3.2. Caracterización de cuasifinitud de HWMs de $\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}}$

Tomemos una subálgebra parabólica de $\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}}$, explícitamente, una subálgebra de la siguiente forma

$$\mathfrak{p} = \oplus_{j\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}_j, \quad \text{where } \mathfrak{p}_j = (\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}})_j \text{ and } \mathfrak{p}_j \neq 0 \text{ for some } j > 0.$$

Para cada $j \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$\mathfrak{p}_{-j} = \{z^{-j} (q^{(-j-1)/2}T_q)^{-jr/2} f(q^{(-j-1)/2}T_q) : f \in I_{-j}\},$$

donde I_{-j} es un subespacio de $\mathbb{C}[w,w^{-1}]^{\epsilon,j}$. Dado $f(w) \in \mathbb{C}[w,w^{-1}]^{\epsilon,0}$ y $p(w) \in \mathbb{C}[w,w^{-1}]^{\epsilon,j}$ tenemos que $[f(q^{-1/2}T_q), z^{-n}(q^{(-n-1)/2}T_q)^{-nr/2} p(q^{(-n-1)/2}T_q)] \in \widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}}$, calculando

$$[f(q^{-1/2}T_q), z^{-n}(q^{(-n-1)/2}T_q)^{-nr/2} p(q^{(-n-1)/2}T_q)] \tag{1.8}$$

donde $g(w) = f(q^{-n/2}T_q) - f(q^{n/2}T_q)$. Luego, tenemos que si $p(w) \in I_{-n}$, entonces $p(w)$ multiplicado por cualquier polinomio de Laurent en $\mathbb{C}[w,w^{-1}]^0$ pertenece a I_{-n}. Esto implica que I_{-n} es un $\mathbb{C}[w,w^{-1}]^0$-submódulo de $\mathbb{C}[w,w^{-1}]^{\epsilon,n}$, donde $\mathbb{C}[w,w^{-1}]^{\epsilon,n}$ es considerado como un módulo multiplicativo sobre $\mathbb{C}[w,w^{-1}]^0$.

Utilizaremos ahora el siguiente hecho: todo $\mathbb{C}[w, w^{-1}]^{\epsilon,0}$-submódulo no nulo de $\mathbb{C}[w, w^{-1}]^{\epsilon,j}$ es un submódulo libre de rango 1 generado por un polinomio de Laurent mónico (es decir que el coeficiente del monomio de mayor grado es 1). Denotemos por b_n^ϵ a dicho generador de I_{-n} si $I_{-n} \neq 0$ y $b_n^\epsilon(w) = 0$ si $I_{-n} = 0$. Llamamos a b_n^ϵ al *polinomio característico* de $\mathfrak{p}$.

Procederemos ahora a chequear las condiciones (P1), (P2) y (P3) enunciadas en la Sección 1.1 para $\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}}$. La condición (P1) se satisface trivialmente ya que

$$(\mathcal{S}_q^{\epsilon,r})_0 = \{h(q^{-1/2}T_q) : h(w^{-1}) = h(w)\}$$

es abeliano. Probaremos ahora (P2).

Lema 1.3.4. *Si $a \in (\mathcal{S}_q^{\epsilon,r})_{-j}$, $(j > 0)$ es tal que $[a, (\mathcal{S}_q^{\epsilon,r})_1] = 0$, entonces $a = 0$.*

Demostración. Sea $a \in (\mathcal{S}_q^{\epsilon,r})_{-j}$, $(j > 0)$, entonces $a = z^{-j}(q^{(-j-1)/2}T_q)^{-jr/2}h(q^{(-j-1)/2}T_q)$ con $h(w^{-1}) = -\epsilon^j h(w)$. Tomemos un elemento arbitrario de $(\mathcal{S}_q^{\epsilon,r})_1$, explícitamente, $z(T_q)^{r/2}g(T_q)$ con $g(w^{-1}) = -\epsilon g(w)$. Luego,

$$\begin{aligned}
0 &= [z^{-j}(q^{(-j-1)/2}T_q)^{-jr/2}h(q^{(-j-1)/2}T_q), z(T_q)^{r/2}g(T_q)] \\
&= z^{-j+1}(q^{-j/2}T_q)^{(-j+1)r/2)}(h(q^{-j+1}T_q)g(T_q) - h(q^{(-j-1)/2})g(q^{-j}T_q)) \\
&= z^{-j+1}(q^{-j/2}T_q)^{(-j+1)r/2}f(q^{-j/2}T_q)
\end{aligned}$$

con $f(T_q) = h(q^{1/2}T_q)g(q^{j/2}T_q) - h(q^{-1/2}T_q)g(q^{-j/2}T_q)$. Supongamos que $h(w) = a_n w^n +$*términos de grado menor*, con $a_n \neq 0$ y tomemos $g(w) = w^m - \epsilon w^{-m}$ con $n \neq -mj$, entonces

$$0 = f(w) = a_n(q^{(n+mj)/2} - q^{(-n-mj)/2})w^{m+n} + \textit{términos de grado menor}$$

lo cual es una contradicción, por lo cual $a = 0$. $\square$

El siguiente Lema será de utilidad para probar la propiedad (P3).

Lema 1.3.5. *Sea $\{b_n^\epsilon : n \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de polinomios característicos de una subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ del álgebra de Lie $\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}}$. Entonces*

(1) $b_n^\epsilon(w) \in \mathbb{C}[w, w^{-1}]^{\epsilon,n}$*;*

(2) $b_n^\epsilon(w)$ *divide a*

$$(q^{(-n-1)/2}w - \epsilon q^{(n+1)/2}w^{-1})((q^{-1} - 1)q^{1/2}w - \epsilon^{-n-1}(q-1)q^{-1/2}w^{-1})b_{n+1}^\epsilon(q^{-1/2}w);$$

(3) $b_{n+m}^\epsilon(w)$ *divide a* $(q^{m/2} - q^{-m/2})(w + \epsilon^{-n}w^{-1})b_m^\epsilon(q^{n/2}w)$*;*

(4) $\mathfrak{p}_{-n} \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
En particular, todos los $b_n^\epsilon(w)$ *son no nulos.*

Demostración. La parte (1) es consecuencia de la definición de polinomio característico. Calculando

$$\begin{aligned}
&[z(T_q)^{r/2}(T_q - \epsilon T_q^{-1}), z^{-n-1}(q^{-n/2-1}T_q)^{(-n-1)r/2}b_{n+1}^\epsilon(q^{-n/2-1}T_q)] \\
&= z^{-n}(q^{(-n-1)/2}T_q)^{-nr/2}((q^{-n-1}T_q - \epsilon q^{n+1}T_q^{-1})b_{n+1}^\epsilon(q^{-n/2-1}T_q) - (T_q - \epsilon T_q^{-1})b_{n+1}^\epsilon(q^{-n/2}T_q))
\end{aligned}$$

podemos ver que $b_n^\epsilon(q^{(-n-1)/2}w)$ divide a

$$(q^{-n-1}w - \epsilon q^{n+1}w^{-1})b_{n+1}^\epsilon(q^{-n/2-1}w) - (w - \epsilon w^{-1})b_{n+1}^\epsilon(q^{-n/2}w)). \tag{1.9}$$

De la misma manera, del siguiente conmutador

$$\begin{aligned}&[z(T_q)^{k/2}(T_q - \epsilon T_q^{-1}), z^{-n-1}(q^{-n/2-1}T_q)^{(-n-1)k/2}(q^{-n/2-1}T_q - \epsilon^{-n-1}q^{n/2+1}T_q^{-1})b_{n+1}^\epsilon(q^{-n/2-1}T_q)]\\ &= z^{-n}(q^{(-n-1)/2}T_q)^{-nk/2}((q^{-n-1}T_q - \epsilon q^{n+1}T_q^{-1})(q^{-n/2-1}T_q - \epsilon^{-n-1}q^{n/2+1}T_q^{-1})b_{n+1}^\epsilon(q^{-n/2-1}T_q)\\ &- (T_q - \epsilon T_q^{-1})(q^{-n/2}T_q - \epsilon^{-n-1}q^{n/2}T_q^{-1})b_{n+1}^\epsilon(q^{-n/2}T_q))\end{aligned}$$

se sigue que $b_n^\epsilon(q^{(-n-1)/2}w)$ divide a

$$\begin{aligned}&(q^{-n-1}w - \epsilon q^{n+1}w^{-1})(q^{-n/2-1}w - \epsilon^{-n-1}q^{n/2+1}w^{-1})b_{n+1}^\epsilon(q^{-n/2-1}w)\\ &- (w - \epsilon w^{-1})(q^{-n/2}w - \epsilon^{-n-1}q^{n/2}w^{-1})b_{n+1}^\epsilon(q^{-n/2}w).\end{aligned} \tag{1.10}$$

Ahora, de 1.9 y 1.10 podemos ver que $b_n^\epsilon(q^{(-n-1)/2}w)$ divide a

$$(q^{-n-1}w - \epsilon q^{n+1}w^{-1})((q^{-1} - 1)q^{-n/2}w - \epsilon^{-n-1}(q - 1)q^{n/2}w^{-1})b_{n+1}^\epsilon(q^{-n/2-1}w).$$

La parte (3) se demuestra de manera similar a partir de los siguientes conmutadores

$$[z^{-n}(q^{(-n-1)/2}T_q)^{-nr/2}b_n^\epsilon(q^{(-n-1)/2}T_q), z^{-m}(q^{(-m-1)/2}T_q)^{-mr/2}b_m^\epsilon(q^{(-m-1)/2}T_q)]$$

y

$$\begin{aligned}&[z^{-n}(q^{(-n-1)/2}T_q)^{-nr/2}(q^{(-n-1)/2}T_q - \epsilon^n q^{(n+1)/2}T_q^{-1})b_n^\epsilon(q^{(-n-1)/2}T_q),\\ &z^{-m}(q^{(-m-1)/2}T_q)^{-mr/2}b_m^\epsilon(q^{(-m-1)/2}T_q)].\end{aligned}$$

En particular, si $b_{n+1}^\epsilon(w) \neq 0$ entonces $b_n^\epsilon(w) \neq 0$. La parte (4) es consecuencia inmediata de (2) y (3). □

Por el Lema anterior tenemos que una subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ de $\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}}$ es no degenerada. Tomemos

$$a = z^{-1}(q^{-1}T_q)^{-r/2}b_1^\epsilon(q^{-1}T_q) \in \mathfrak{p}_{-1}, \tag{1.11}$$

donde b_1^ϵ es el primer polinomio característico de $\mathfrak{p}$. Entonces $\mathfrak{p}^a$ es, por Lema 1.1.2, la menor subálgebra parabólica que contiene a a. Utilizando nuevamente el Lema anterior, sabemos que es no degenerada, y como consecuencia a es no degenerada, y por construcción $\mathfrak{p}^a \subseteq \mathfrak{p}$, probando (P3).

Ahora consideremos $\lambda \in (\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}})_0^*$. Sea $L(\lambda) = L(\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}}, \lambda)$ el único cociente irreducible de $M(\lambda) = M(\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}}, \lambda)$. Una funcional $\lambda \in (\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}})_0^*$ queda descrita por sus *etiquetas* $\triangle_n = q(n)\lambda((q^{-1/2}T_q)^n - q^{-1/2}T_q)^{-n})$, con $n \in \mathbb{Z}$, $q(n) = q^{n/2} - q^{-n/2}$, y la carga central $\lambda(C) = c$. Consideremos la siguiente serie generatriz

$$\triangle(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \triangle_n(x).$$

Recordemos que un *cuasipolinomio* es una combinación lineal de funciones de la forma $p(x)e^{\alpha x}$, donde $p(x)$ es un polinomio y $\alpha \in \mathbb{C}$. Si el polinomio B es par llamamos a P *cuasipolinomio par*. Tenemos además la siguiente proposición conocida:

Proposición 1.3.6. *Dado un cuasipolinomio P, y un polinomio $B(x) = \prod_i(x - A_i)$, tomemos $b(x) = \prod_i(x-a_i)$ donde $a_i = e^{A_i}$, entonces $b(x)(\sum_{n\in\mathbb{Z}} P(n)x^{-n}) = 0$ si y sólo si $B(d/dx)P(x) = 0$.*

Tenemos ahora el siguiente teorema importante sobre los módulos de peso máximo irreducibles cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}}$.

Teorema 1.3.7. *Un módulo $L(\lambda)$ de peso máximo irreducible de $\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}}$ es cuasifinito si y sólo si una de las siguientes condiciones equivalentes se verifica.*

(a) Existe un polinomio de Laurent mónico $b_1^\epsilon(w) \in \mathbb{C}^{\epsilon,1}[w, w^{-1}]$ tal que

$$b_1^\epsilon(x)(\triangle(x) - 2c) = 0 \tag{1.12}$$

(b) Existe un cuasipolinomio par $P_\epsilon(x)$ tal que

$$P_\epsilon(n) = \triangle_n, \quad \textit{para } n \neq 0 \textit{ y } P(0) = 2c. \tag{1.13}$$

Demostración. Podemos aplicar el Teorema 1.1.4. Luego, la cuasifinitud de $L(\lambda)$ es equivalente a mostrar que existe un elemento no degenerado $a \in (\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}})_{-1}$, tal que $\lambda([(\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}})_{-1}, a]) = 0$. Tomemos a como en (1.11). Dado que $b_1^\epsilon(w) \in \mathbb{C}^{\epsilon,1}[w, w^{-1}]$, entonces tenemos que $b_1^\epsilon(w) = a_m(w^m - \epsilon w^{-m} + a_{m-1}(w^{m-1} - \epsilon w^{-m+1}) + \cdots + a_1(w - \epsilon w^{-1}) + a_0(1-\epsilon))$ con $a_m \neq 0$. Recordemos que una base de $(\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}})_1$ es

$$\mathcal{B} = \{z(T_q)^{r/2}(T_q^n - \epsilon T_q^{-n}) | n \in \mathbb{N}\}$$

si $\epsilon = 1$ y $\mathcal{B} \cup \{z(T_q)^{r/2}\}$ si $\epsilon = -1$. Luego (para todo n),

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda([z(T_q)^{r/2}(T_q^n - \epsilon T_q^{-n}), a]) \qquad (1.14)\\
&= \lambda(b_1^\epsilon(T_q)(T_q^n - \epsilon T_q^{-n}) - (q^{-n}T_q^n - \epsilon q^n T_q^{-n})b_1^\epsilon(q^{-1}T_q) - tr_0(b_1^\epsilon(w)(w^n - \epsilon w^{-n}))C)\\
&= \lambda\Bigg(\sum_{j=0}^m a_j((T_q^j - \epsilon T_q^{-j})(T_q^n - \epsilon T_q^{-n}) - (q^{-n}T_q^n - \epsilon q^n T_q^{-n})(q^{-j}T_q^j - \epsilon q^j T_q^{-j})\\
&\quad + tr_0(b_1^\epsilon(w)(w^n - \epsilon w^{-n}))C\Bigg)\\
&= \sum_{j=0}^m a_j\Bigg(q(n+j)\lambda((q^{-1/2}T_q)^{n+j} - (q^{-1/2}T_q)^{-n-j}) - \epsilon q(n-j)\lambda((q^{-1/2}T_q)^{n-j} - (q^{-1/2}T_q)^{-n+j})\Bigg)\\
&\quad - \lambda(tr_0(b_1^\epsilon(w)(w^n - \epsilon w^{-n}))C)\\
&= \sum_{j=0}^m a_j(\triangle_{n+j} - \epsilon\triangle_{n-j}) + 2\epsilon a_n c.
\end{aligned}$$

También tenemos para el caso $\epsilon = -1$,

$$\begin{aligned}
&0 = \lambda([z(T_q)^{r/2}, a]) = \lambda(b_1^\epsilon(T_q) - b_1^\epsilon(q^{-1}T_q)) = \qquad (1.15)\\
&\sum_{j=0}^m a_j\lambda(q(j)((q^{-1/2}T_q)^j) - (q^{-1/2}T_q)^{-j})) = \sum_{j=0}^m a_j \triangle_j \, .
\end{aligned}$$

Multiplicando la última ecuación de (1.14) por $x^n - \epsilon x^{-n}$, sumando sobre $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, y utilizando el hecho de que $\triangle_n = \triangle_{-n}$ y (1.15) cuando $\epsilon = -1$, tenemos que

$$0 = \sum_{j=0}^{m} a_j(x^j - \epsilon x^{-j}) \triangle (x) + 2\epsilon b_1^\epsilon(x)c = -\epsilon b_1^\epsilon(x)(\triangle(x) - 2c). \quad (1.16)$$

La equivalencia entre (a) y (b) sigue del hecho de que la Ec. (1.12) vale, si y sólo si multiplicando ambos lados de esta fórmula por x^m esta ecuación también vale, y ahora definimos $\tilde{b^\epsilon}(x) = x^m b_1^\epsilon(x) \in \mathbb{C}[x]$. Observemos que $\tilde{b^\epsilon}(x)(0) = a_m \neq 0$, y como $b_1^\epsilon(x^{-1}) = -\epsilon b_1^\epsilon(x)$ es fácil ver que si α es una raíz de $\tilde{b^\epsilon}(x)$, entonces $1/\alpha$ también es raíz de $\tilde{b^\epsilon}(x)$. Ahora podemos aplicar la Proposición 1.3.6 y como consecuencia de la relación entre las raíces de B y b en esta proposición se sigue que el $B(x)$ correspondiente a $\tilde{b^\epsilon}(x)$ es un polinomio par, finalizando nuestra demostración. □

Dado un módulo V cuasifinito irreducible de peso máximo de $\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}}$ por Teorema 1.3.7, tenemos que existe un cuasipolinomio par $P(x)$ que satisface 1.13. Escribiremos

$$P(x) = \sum_i p_i(x) cosh_q(e_i^+ x) + \sum_j q_j(x) senh_q(e_j^- x), \quad (1.17)$$

con $p_i(x)$ (respectivamente $q_j(x)$) polinomios no nulos pares (respectivamente, impares), e_i^+ y e_j^- números complejos distintos, $cosh_q(x) = (q^x + q^{-x})/2$ y $senh_q(x) = (q^x - q^{-x})/2$. La expresión en (1.17) es única salvo signo de e_i^+ o un cambio simultáneo de signos de e_j^- y $q_j(x)$. Llamamos a e_i^+ (respectivamente a e_j^-), *exponentes de V de tipo par (respectivamente, impar) con multiplicidades* $p_i(x)$(respectivamente, $q_j(x)$). Siguiendo [KWY], denotamos e^+ al conjunto de exponentes de tipo par con multiplicidad $p_i(x)$ y e^- al conjunto de exponentes de tipo impar con multiplicidad $q_i(x)$. Luego, el par $(e^+; e^-)$ determina unívocamente a V. Denotaremos a este módulo como $L(\widehat{\mathcal{S}_q^{\epsilon,r}}; e^+; e^-)$.

1.4. Álgebra de Lie de operadores pseudo diferenciales matriciales cuánticos

En esta Sección se expondrán definiciones y nociones básicas sobre la versión matricial de las álgebras de Lie de operadores pseudo diferenciales cuánticos. En esta sección se estudiará la versión matricial de las álgebras de Lie de operadores pseudo diferenciales cuánticos. Un estudio más exhaustivo sobre sus representaciones puede hallarse en [BL02].

1.4.1. Álgebra de Lie $\mathcal{S}_{q,N}$

Sea N un entero positivo. De ahora en adelante, notaremos $Mat_N A$ el álgebra asociativa de todas las matrices $N \times N$ sobre el álgebra A y E_{ij} la base estándar de $Mat_N\mathbb{C}$.

Sea $\mathcal{S}_{q,N}^a = \mathcal{S}_q^a \otimes Mat_N\mathbb{C}$ el álgebra asociativa de todos los operadores matriciales cuánticos pseudo-diferenciales, explícitamente los operadores en $\mathbb{C}^N[z, z^{-1}]$ de la forma

$$E = e_k(z)T_q^k + e_{k-1}(z)T_q^{k-1} + \cdots + e_0(z), \text{ donde } e_k(z) \in Mat_N\mathbb{C}[z, z^{-1}]. \tag{1.1}$$

Con el objetivo de simplificar la notación, escribimos los operadores pseudo-diferenciales como combinación lineal de elementos de la forma $z^k f(T_q)A$, donde f es un polinomio de Laurent, $k \in \mathbb{Z}$ y $A \in Mat_N\mathbb{C}$. El producto en $\mathcal{S}_{q,N}^a$ está dado por

$$(z^m f(T_q)E_{i,j})(z^k g(T_q)E_{r,s}) = z^{m+k} f(q^k T_q) g(T_q)\delta_{j,r}E_{i,s}. \tag{1.2}$$

Sea $\mathcal{S}_{q,N}$ el álgebra de Lie obtenida de $\mathcal{S}_{q,N}^a$ con el corchete usual dado por el conmutador, explícitamente:

$$[z^m f(T_q)A, z^k g(T_q)B] = z^{m+k}(f(q^k T_q)g(T_q)AB - f(T_q)g(q^m T_q)BA). \tag{1.3}$$

Los elementos $z^k T_q^m E_{ij}$ $(k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_+, i, j \in \{1, \cdots, N\})$ forman una base de $\mathcal{S}_{q,N}$.

Tomando la forma traza $tr_0(\sum_j c_j w^j) = c_0$, y denotando tr a la traza usual en $Mat_M\mathbb{C}$, definimos el siguiente 2-cociclo en $\mathcal{S}_{q,N}$

$$\psi(z^m f(T_q)A, z^k g(T_q)B) = \delta_{m,-k}\, m\, tr_0(f(q^{-m}T_q)g(T_q))\, tr(AB), \tag{1.4}$$

donde r, $s \in \mathbb{Z}$, f, $g \in \mathbb{C}[w, w^{-1}]$, A, $B \in Mat_N\mathbb{Z}$. Sea

$$\widehat{\mathcal{S}_{q,N}} = \mathcal{S}_{q,N} \oplus \mathbb{C}C \tag{1.5}$$

la extensión central de $\mathcal{S}_{q,N}$ por un centro uni-dimensional $\mathbb{C}C$ correspondiente al 2-cociclo ψ. El corchete en $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$ está dado por

$$\begin{aligned}[z^m f(T_q)A, z^k g(T_q)B] = z^{m+k}&(f(q^k T_q)g(T_q)AB - f(T_q)g(q^m T_q)BA) \\ &+ \psi(z^m f(T_q)A, z^k g(T_q)B)C.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Los elementos $z^k T_q^m E_{ij}$ $(k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, i, j \in \{1, \cdots, N\})$ forman una base en $\mathcal{S}_{q,N}$. Definimos el *peso* en $\mathcal{S}_{q,N}$ como

$$wt z^k f(T_q)E_{ij} = kN + i - j. \tag{1.7}$$

Esto da la $\mathbb{Z}$-graduación *principal* de $\mathcal{S}_{q,N}^a$, $\mathcal{S}_{q,N}$ y $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$,

$$\mathcal{S}_{q,N}^a = \oplus_{j \in \mathbb{Z}}(\mathcal{S}_{q,N})_j, \quad \widehat{\mathcal{S}_{q,N}} = \oplus_{j \in \mathbb{Z}}(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}})_j.$$

1.4.2. Módulos del álgebra de Lie $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$

Tomemos una subálgebra parabólica de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$, explícitamente, una subálgebra de la siguiente forma

$$\mathfrak{p} = \oplus_{j \in \mathbb{Z}}\mathfrak{p}_j, \quad \text{donde } \mathfrak{p}_j = (\widehat{\mathcal{S}_{q,N}})_j \text{ y } \mathfrak{p}_j \neq 0 \text{ para algún } j > 0.$$

Dado
$$(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}})_j = \bigoplus_{k,l,m:kN+l-m=-j} z^k\mathbb{C}[T_q, T_q^{-1}]E_{l,m},$$

tenemos, para cada $j \in \mathbb{Z}$, que
$$\mathfrak{p}_{-j} = \bigoplus_{k,l,m:kN+l-m=-j} z^k I^l_{-j} E_{l,m},$$

donde I^l_{-j} es un subespacio de $\mathbb{C}[w, w^{-1}]$. Además, como consecuencia de
$$[f(T_q)E_{l,l}, p(T_q)E_{l,m}] = f(T_q)p(T_q)E_{l,m} \quad l \neq m$$

y
$$[f(T_q)I_N, z^k p(T_q)E_{l,m}] = z^k(f(q^kT_q) - f(T_q))p(T_q)E_{l,m}$$

donde I_N es la matriz identidad, tenemos que I^l_{-j} es un ideal de $\mathbb{C}[w, w^{-1}]$.

Observación 1.4.1. Existen subálgebras parabólicas $\mathfrak{p}$ de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$ $(N > 1)$ tales que $\mathfrak{p}_j = 0$ para $j << 0$ Por ejemplo:
$$\mathfrak{p} = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} (\widehat{\mathcal{S}_{q,N}})_j \bigoplus (\widehat{\mathcal{S}_{q,N}})_0 \bigoplus \mathbb{C}[T_q, T_q^{-1}]E_{1,2}.$$

Remitimos al lector a [KR1] Secc. 2.4 para más detalles.

Dada una subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$, sea $b^l_j(w)$ el polinomio mónico con $b^l_j(0) \neq 0$, que es generador del ideal $I^l_{-j} \subset \mathbb{C}[w, w^{-1}]$. Asumiremos que $b^l_j(w)$ es un polinomio mónico tal si $I^l_{-j} \neq 0$ y 0 en otro caso. Luego, hemos asociado a $\mathfrak{p}$ una colección $\{b^l_j(w)\}_{j\in\mathbb{N},1\leq l\leq N}$ como antes, llamados los polinomios *característicos* de $\mathfrak{p}$.

Lema 1.4.2. *Sea $\{b^l_j\}$ el conjunto de los polinomios característicos de una subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ del álgebra de Lie $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$. Entonces*

(a) $b^{i+1}_j(w)$ divide a $b^i_j(w)$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $1 \leq i \leq N$.

(b) $b^i_j(w)$ divide a $b^i_{j+1}(w)$ excepto en el caso especial: $-j = kN+i$, donde $b^i_j(w)$ divide a $b^i_{j+1}(qw)$.

(c) $b^i_{(k+l)N+n-i}(w)$ divide a $b^i_{kN+p-i}(q^{-l}w)b^p_{lN+n-p}(w)$ para todo $k, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, p \leq N$, (donde $b^{i+N}_j = b^i_j$).

Demostración. Omitiremos los detalles de esta prueba por ser completamente similar a la demostración del Lema 1.3.5 de la Sección 1.3.2, teniendo en cuenta la fórmula (1.5). □

Del Lema anterior se desprende con facilidad el siguiente corolario.

Corolario 1.4.3. *Sea $\mathfrak{p}$ una subálgebra parabólica de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $\mathfrak{p}_{-j} \neq 0$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$.
- $I^l_{-j} \neq 0$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq N$.

- $I_{-1}^{l} \neq 0$ *para todo* $1 \leq l \leq N$.

Dada una subálgebra parabólica, si satisface cualquier condición del Corolario 1.4.3 será llamada *no degenerada.*

Dados N polinomios mónicos $b = (b_1(w), \cdots, b_N(w))$ con $b_i(0) \neq 0$, definimos (cf. Lema 1.4.2)

$$\begin{aligned}(b^{\min})^i_{kN+m-i}(w) = b_i(q^{-k}w)b_{i+1}(q^{-k}w)\cdots b_{N-1}(q^{-k}w)b_N(q^{-k+1}w)\\ b_1(q^{-k+1}w)\cdots b_{N-1}(q^{-k+1}w)b_N(q^{-k+2}w)b_1(q^{-k+2}w)\cdots\\ b_N(q^{-1}w)b_1(q^{-1}w)\cdots b_{N-1}(q^{-1}w)b_N(w)b_1(w)\cdots b_{N-1}(w).\end{aligned}$$

Como consecuencia existe una subálgebra parabólica (única no degenerada), que denotamos $\mathfrak{p}_{\min}(b)$, para la cual los polinomios característicos son $\{(b^{\min})^i_j\}$. Además tenemos

$$\dim\left((\widehat{\mathcal{S}_{q,N}})_{-k}/\mathfrak{p}_{\min}(b)_{-k}\right) < \infty, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

Observación 1.4.4. Como consecuencia del Lema 1.4.2, cualquier subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ tal que $b_1^i = b^i$, satisface que $\mathfrak{p}_{\min}(b) \subseteq \mathfrak{p}$.

Necesitaremos la siguiente proposición para estudiar los módulos sobre $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$ inducidos por sus subálgebras parabólicas.

Proposición 1.4.5. *Sea* $\mathfrak{p}$ *una subálgebra parabólica de* $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$ *y sean* $b = (b_1(w), \cdots, b_N(w))$ *sus primeros polinomios característicos. Entonces*

$$[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] = \left(\bigoplus_{k\neq 0}\mathfrak{p}_k\right)\bigoplus(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}})_0^b,$$

donde

$$\begin{aligned}(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}})_0^b = \{b_i(T_q)g(T_q)E_{i+1,i+1} - b_i(T_q)g(T_q)E_{i,i} | 1 \leq i \leq N-1, g(w) \in \mathbb{C}[w,w^{-1}]\}\\ \oplus\{b_N(T_q)g(T_q)E_{1,1} - b_N(qT_q)g(qT_q)E_{N,N} + tr_0(b_N(w)g(w))C | g(w) \in \mathbb{C}[w,w^{-1}]\}.\end{aligned}$$

Demostración. Por un lado es claro que $[\mathfrak{p}_0,\mathfrak{p}_k] = \mathfrak{p}_k$ para $k \neq 0$. Luego, como consecuencia de que $[\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_k] = \mathfrak{p}_{k+1}$ para $k \geq 1$, tenemos

$$\begin{aligned}[\mathfrak{p}_{1+k},\mathfrak{p}_{-(1+k)}] &\subseteq [[\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_k],\mathfrak{p}_{-(1+k)}]\\ &\subseteq [[\mathfrak{p}_k,\mathfrak{p}_{-(1+k)}],\mathfrak{p}_1] + [[\mathfrak{p}_{-(1+k)},\mathfrak{p}_1],\mathfrak{p}_k]\\ &\subseteq [\mathfrak{p}_{-1},\mathfrak{p}_1] + [\mathfrak{p}_{-k},\mathfrak{p}_k].\end{aligned}$$

Luego, por inducción $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]_0 = [\mathfrak{p}_{-1},\mathfrak{p}_1]$. Ahora, utilizando que

$$[g(T_q)E_{i+1,i}, b_i(T_q)E_{i,i+1}] = b_i(T_q)g(T_q)E_{i+1,i+1} - b_i(T_q)g(T_q)E_{i,i}$$

y

$$[zg(qT_q)E_{1,N}, z^{-1}b_N(T_q)E_{N,1}] = b_N(T_q)g(T_q)E_{1,1} - b_N(qT_q)g(qT_q)E_{N,N} + tr_0(b_N(T_q)g(T_q))C$$

podemos ver que $[\mathfrak{p}_{-1},\mathfrak{p}_1] = (\widehat{\mathcal{S}_{q,N}})_0^b$; luego la proposición se sigue. □

Estudiaremos ahora los módulos de peso máximo cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$. Recordemos que un vector no nulo v en un módulo de peso máximo sobre $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$ se dice *singular* si $(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}})_j v = 0$, para todo $j > 0$.

Sea $L(\lambda)$ un módulo de peso máximo cuasifinito de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$. Por el Teorema 1.1.4 existen polinomios mónicos $b_1(w), \cdots, b_N(w)$ tales que

$$(b_i(T_q)E_{i,i+1})v_\lambda = 0, \quad (1 \leq i \leq N-1) \quad \text{y } (z^{-1}b_N(T_q)E_{N,1})v_\lambda = 0.$$

Llamaremos a dichos polinomios mónicos de grado minimal los polinomios *característicos* de $L(\lambda)$. Notemos que $L(\lambda)$ es el cociente irreducible de $M(\lambda; \mathbf{b})$, donde $\mathbf{b} = (b_1(w), \cdots, b_N(w))$ son los polinomios característicos de $L(\lambda)$.

Dado que una funcional $\lambda \in (\widehat{\mathcal{S}_{q,N}})_0^*$ queda descrita por sus *etiquetas* $\triangle_{i,m} = -\lambda(T_q^m E_{i,i})$ y la carga central $c = \lambda(C)$, consideramos la siguiente serie generatriz

$$\triangle_i(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x^{-m} \triangle_{i,m}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Podemos ahora enunciar el siguiente teorema importante sobre los módulos de peso máximo cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$.

Teorema 1.4.6. *(a) Un módulo de peso máximo irreducible $L(\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si una de las siguientes condiciones equivalentes se verifica:*

(1) Existen polinomios mónicos $b_1(w), \cdots, b_N(w)$ tales que

$$\begin{aligned} &b_i(x)(\triangle_i(x) - \triangle_{i+1}(x)) = 0, \quad \text{para } 1 \leq i \leq N, \text{ y} \\ &b_N(w)(\triangle_1(x) - \triangle_N(q^{-1}x) + c) = 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

(2) Existen cuasipolinomios P_i, $1 \leq i \leq N$, tales que ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} \triangle_{i,n} - \triangle_{i+1,n} &= P_i(n), \quad \text{para } 1 \leq i \leq N-1, \\ \triangle_{1,n} - q^n \triangle_{N,n} &= P_N(n). \end{aligned}$$

(b) Los polinomios mónicos $b_1(w), \cdots, b_N(w)$ de grado minimal que satisfacen las ecuaciones 1.9, son los polinomios característicos de un módulo cuasifinito $L(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}, \lambda)$.

Demostración. Como consecuencia del Teorema 1.1.4 y la Proposición 1.4.5, tenemos que $L(\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si existen polinomios

$$b_i(w) = w^{m_i} + f_{i,m_i-1}w^{m_i-1} + \cdots + f_{i,0} \quad \text{para } 1 \leq i \leq N,$$

tales que para todo $s = 0, 1, \cdots$, tenemos

$$\lambda(b_i(T_q)T_q^sE_{i+1,i+1} - b_i(T_q)T_q^sE_{i,i}) = 0 \quad 1 \leq i \leq N-1$$
$$\lambda(b_N(T_q)T_q^sE_{1,1} - b_N(qT_q)(qT_q)^sE_{N,N} + tr_0(w^sb_N(w)))C = 0.$$

Estas condiciones pueden reescribirse como

$$\sum_{n=0}^{m_i} f_{i,n}F_{i,n+s} = 0 \quad \text{para todo } s = 0, 1, \cdots \tag{1.10}$$

donde

$$F_{i,n} = \triangle_{i,n} - \triangle_{i+1,n} \quad \text{para } 1 \leq i \leq N-1$$
$$F_{M,n} = \triangle_{1,n}c - q^n \triangle_{N,n} + f_{N,-s}c.$$

Multiplicando ambos lados de estas igualdades por x^{-s} y sumando sobre $s \in \mathbb{Z}$, obtenemos 1.9 . La equivalencia de (1) y (2) sigue de la Proposición 1.3.6. La parte (b) también es clara. □

1.4.3. Relación entre $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$ y $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$

En esta sección exhibiremos la construcción de una inmersión de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$ en el álgebra de Lie de matrices infinitas con una cantidad finita de diagonales no nulas, sobre el álgebra de polinomios truncados.

Sea $\mathcal{O}$ el álgebra de todas las funciones holomorfas en $\mathbb{C}^\times$ con la topología de convergencia uniforme en cojuntos compactos, y denotamos

$$\mathcal{O}^{\epsilon,j} = \{f \in \mathcal{O} | f(w) = -\epsilon^j f(w^{-1})\}.$$

Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{S}_{q,N}^{\mathcal{O}^a}$ generado por los operadores cuánticos pseudo diferenciales (de orden infinito) de la forma $z^k f(T_q)E_{i,j}$, donde $f \in \mathcal{O}$. El corchete en $\mathcal{S}_{q,N}$ se extiende a $(\mathcal{S}_{q,N})^{\mathcal{O}}$.

Sea R un álgebra asociativa sobre $\mathbb{C}$ y denotemos R^∞ a un R-módulo libre con una base fija $\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ y definamos los operadores $E_{i,j}$ por $E_{i,j}v_k = \delta_{j,k}v_i$.

Sea $\widetilde{M}(\infty, R)$ la subálgebra asociativa de End R^∞ que consiste de todos los operadores $\sum_{i,j} a_{i,j}E_{i,j}$ donde $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ tienen un número finito de diagonales no nulas. El álgebra $\widetilde{M}(\infty, R)$ es $\mathbb{Z}$-graduada y su graduación principal está definida por deg$E_{i,j} = j - i$.

Sea $\varphi : R^N[z, z^{-1}] \longrightarrow R[z, z^{-1}]$ el isomorfismo definido por

$$e_iz^j \longrightarrow z^{jN+i-1}.$$

Dado un $s \in \mathbb{C}^\times$ fijo y un elemento nilpotente $t \in R$, se puede considerar a $R[z, z^{-1}]z^s$ como un R-módulo libre con base $v_j = z^{-j+s}$, $j \in \mathbb{Z}$. Es posible construir, a partir del isomorfismo φ una inmersión $\varphi_{s,t} : \mathcal{S}_{q,N}^a \longrightarrow \widetilde{M}(\infty, R)$ de álgebras asociativas sobre $\mathbb{C}$, que es compatible con la graduación principal (para un estudio más riguroso, ver [KR1] Sec. 6 y [BKLY] Sec. 3). Explícitamente,

$$\varphi_{s,t}(z^k f(T_q)E_{i,j}) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(sq^{-l+t})E_{(l-k)N-i+1,lN-j+1} \tag{1.11}$$

y $\varphi_{s,t}$ se extiende a un homomorfismo $\varphi_{s,t} : \mathcal{S}_{q,N}^{\mathcal{O}^a} \longrightarrow \widetilde{M}(\infty, R)$.

Denotemos $R_m = \mathbb{C}[t]/(t^{m+1})$ donde $m \in \mathbb{Z}_+$ y sea $\widetilde{M}(\infty)[m] = \widetilde{M}(\infty, R_m)$. Denotaremos $\varphi_s^{[m]}$ al homomorfismo $\varphi_{s,t} : \mathcal{S}_{q,N}^{\mathcal{O}^a} \longrightarrow \widetilde{M}(\infty)[m]$ definido por (1.11). Sea

$$I_s^{[m]} = \{f \in \mathcal{O}|f^{(i)}(sq^j) = 0 \text{ for all } j \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq m\}$$

y

$$J_s^{[m]} = \bigoplus_{i,j=1}^{N} \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} I_s^{[m]}E_{i,j} \in \mathcal{S}_{q,N}^{\mathcal{O}^a}.$$

Utilizando la fórmula de Taylor para $\varphi_s^{[m]}$, podemos ver que

$$\ker \varphi_s^{[m]} = J_s^{[m]}.$$

Para lo siguiente elegiremos ahora una rama del $\log q$. Sea $\tau = \frac{\log q}{2\pi i}$. Entonces cualquier $s \in \mathbb{Z}$ se escribe de manera única como $s = q^a$, $a \in \mathbb{C}/\tau^{-1}\mathbb{Z}$. Fijemos ahora $\mathbf{s} = (s_1, \cdots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ tal que si escribimos cada $s_i = q^{a_i}$, tenemos

$$a_i - a_j \notin \mathbb{Z} + \tau^{-1}\mathbb{Z} \quad \text{ for } i \neq j, \tag{1.12}$$

y $\mathbf{m} = (m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

Sea $\widetilde{M}(\infty)[\mathbf{m}] = \oplus_{i=1}^n \widetilde{M}(\infty)[m_i]$. Consideremos el homomorfismo

$$\varphi_s^{[\mathbf{m}]} = \oplus_{i=1}^n \varphi_{s_i}^{[m_i]} : \mathcal{S}_{q,N}^{\mathcal{O}^a} \longrightarrow \widetilde{M}(\infty)[\mathbf{m}].$$

Proposición 1.4.7. *Dado* $\mathbf{s}$ *y* $\mathbf{m}$ *como arriba, tenemos la sucesión exacta de álgebras de Lie* $\mathbb{Z}-$*graduadas, siempre que* $|q| \neq 1$:

$$0 \to J_{\mathbf{s}}^{[\mathbf{m}]} \to \mathcal{S}_{q,N}^{\mathcal{O}^a} \to \widetilde{M}(\infty)[\mathbf{m}] \to 0, \tag{1.13}$$

donde $J_{\mathbf{s}}^{[\mathbf{m}]} = \cap_{i=1}^n J_{s_i}^{[m_i]}$.

Demostración. La inyectividad es clara gracias a (1.4.3). La suryectividad de $\varphi_{[\mathbf{s}]}^{[\mathbf{m}]}$ se sigue como consecuencia del siguiente conocido resultado: para toda sucesión discreta de puntos de $\mathbb{C}$ y un entero no negativo m existe $f(w) \in \mathcal{O}$ con valores prescritos en sus primeras m derivadas en esos puntos. Las condiciones (1.12) y $|q| \neq 1$ son importantes para obtener una sucesión de puntos discreta en $\mathbb{C}$. $\square$

Denotemos ahora $\widetilde{g\ell}(\infty)[m]$ al álgebra de Lie correspondiente a $\widetilde{M}(\infty)[m]$. Sea $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]} = \widetilde{g\ell}(\infty)[m] + R_m$ la extensión central con respecto al 2-cociclo

$$\Phi(A, B) = tr([J, A]B),$$

donde $J = \sum_{i\leq 0} E_{i,i}$. La $\mathbb{Z}$-graduación principal de esta álgebra de Lie se extiende de $\widetilde{g\ell}(\infty)[m]$ tomando $wtR_m = 0$.

El homomorfismo de álgebras asociativas $\varphi_s^{[m]}$ define un homomorfismo de álgebras de Lie, que denotaremos con la misma letra.

La restricción del cociclo Φ a $\varphi_s^{[m]}(\mathcal{S}_{q,N}^{\mathcal{O}})$ da un 2-cociclo R_m-valuado en $\mathcal{S}_{q,N}^{\mathcal{O}}$ denotado $\Psi_s^{[m]}$. Luego, tenemos

Proposición 1.4.8. *La aplicación $\mathbb{C}$-lineal $\widehat{\varphi}_s^{[m]} : \widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}} \longrightarrow \widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ definida por ($s = q^a$),*

$$\widehat{\varphi}_s^{[m]}|_{(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}})_j} = \varphi_s^{[m]}|_{(\mathcal{S}_{q,N})_j} \quad j \neq 0, \tag{1.14}$$

$$\widehat{\varphi}_s^{[m]}(T_q^n E_{i,i}) = \varphi_s^{[m]}(T_q^n E_{i,i}) + \frac{q^{an}}{1-q^n}\sum_{j=1}^{m}(n\log q)^j \frac{t^j}{j!} \quad (n \neq 0)$$

$$\widehat{\varphi}_s^{[m]}(C) = 1 \in R_m$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Capítulo 2

Subálgebras del álgebra de Lie $\mathcal{S}_{q,N}$

Se estudiarán en este capítulo las anti-involuciones que preservan la graduación principal del álgebra de Lie de operadores pseudo diferenciales matriciales cuánticos. A partir de ellas analizaremos y daremos una descripción completa de las subálgebras de Lie fijas por menos dichas anti-involuciones. Las definiciones y resultados expuestos a lo largo de este capítulo han sido incluidos en el artículo [BB].

2.1. Anti-involuciones del álgebra de Lie $\mathcal{S}_{q,N}$

Sea $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$ la extensión central del álgebra de Lie de operadores pseudodiferenciales cuánticos introducidos en 1.3.1. El corchete en $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$ está dado por

$$\begin{aligned}[z^m f(T_q)A, z^k g(T_q)B] = & z^{m+k}(f(q^k T_q)g(T_q)AB - f(T_q)g(q^m T_q)BA) \\ & + \psi(z^m f(T_q)A, z^k g(T_q)B)C,\end{aligned} \tag{2.1}$$

donde ψ es el cociclo (1.4).

Recordemos que los elementos $z^k T_q^m E_{ij}$ ($k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_+, i, j \in \{1, \cdots, N\}$) forman una base de $\mathcal{S}_{q,N}$ y que definimos el *peso* en $\mathcal{S}_{q,N}$ por

$$wt z^k f(T_q)E_{ij} = kN + i - j. \tag{2.2}$$

Esto da la $\mathbb{Z}$-graduación *principal* de $\mathcal{S}^a_{q,N}$ y $\mathcal{S}_{q,N}$, la última de las cuales está dada por $\mathcal{S}_{q,N} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{S}_{q,N,j}$. Esto permite la siguiente descomposición triangular

$$\mathcal{S}_{q,N} = \mathcal{S}_{q,N,+} \bigoplus \mathcal{S}_{q,N,0} \bigoplus \mathcal{S}_{q,N,-},$$

donde $\mathcal{S}_{q,N,+} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{>0}} \mathcal{S}_{q,N,j}$ y $\mathcal{S}_{q,N,-} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_{<0}} \mathcal{S}_{q,N,j}$.

Una *anti-involución* σ de $\mathcal{S}^a_{q,N}$ es un anti-automorfismo involutivo de $\mathcal{S}^a_{q,N}$, ie, $\sigma^2 = Id$, $\sigma(ax + by) = (a)\sigma(x) + (b)\sigma(y)$ y $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$, para todo $a, b \in \mathbb{C}$ y $x, y \in \mathcal{S}^a_{q,N}$. De ahora en adelante asumiremos que $|q| \neq 1$.

Dado que intentaremos clasificar las anti-involuciones de $\mathcal{S}^a_{q,N}$ que preservan su graduación principal, introduciremos cierta notación. Para cada n, $1 \leq n \leq N$, definimos la permutación π_n en S_N por

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n & n+1 & \cdots & N-1 & N \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 & N & \cdots & n+2 & n+1 \end{array} \tag{2.3}$$

Fijaremos n, $1 \leq n < N$, B y $c = \{c_{i,j}\}$, $c_{i,j} \in \mathbb{C}$, $i > j$, $1 \leq i, j \leq N$, y escribiremos

$$\delta_{i\leq n} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n. \end{cases}$$

Definimos $\sigma = \sigma_{\pm,B,c,n}$ en $\mathcal{S}^a_{q,N}$ por las siguientes fórmulas:

$$\sigma(E_{ii}) = E_{\pi_n(i),\pi_n(i)}, \tag{2.4}$$

$$\sigma(zE_{ii}) = \pm zE_{\pi_n(i),\pi_n(i)}$$

$$\sigma(T_qE_{ii}) = Bq^{-1+\delta_{i\leq n}}T_q^{-1}E_{\pi_n(i),\pi_n(i)}$$

$$(i > j) \quad \sigma(E_{i,j}) = \begin{cases} c_{i,j}E_{\pi_n(j),\pi_n(i)} & \text{si} \quad i \leq n \quad ó \quad j > n \\ zc_{i,j}E_{\pi_n(j),\pi_n(i)} & \text{si} \quad i > n \quad y \quad j \leq n \end{cases},$$

$$(i < j) \quad \sigma(E_{i,j}) = \begin{cases} c^{-1}_{j,i}E_{\pi_n(j),\pi_n(i)} & \text{si} \quad i > n \quad ó \quad j \leq n \\ z^{-1}c^{-1}_{j,i}E_{\pi_n(j),\pi_n(i)} & \text{si} \quad i \leq n \quad y \quad j > n \end{cases},$$

Teorema 2.1.1. *Sea $1 \leq n < N$. $\sigma = \sigma_{\pm,B,c,n}$ definida en los generadores por (2.4) se extiende a una anti-involución en $\mathcal{S}^a_{q,N}$ que preserva la $\mathbb{Z}$-graduación principal si y sólo si*

$$c_{ij} = c_{i,i-1}c_{i-1,i-2}\cdots c_{j+1,j} \tag{2.5a}$$

$$\begin{cases} c_{i,j}c_{\pi_n(j),\pi_n(i)} = 1 & \textit{if} \quad i \leq n \quad \textit{or} \quad j > n \\ c_{i,j}c^{-1}_{\pi_n(i),\pi_n(j)} = \pm 1 & \textit{if} \quad i > n \quad \textit{and} \quad j \leq n \end{cases} \tag{2.5b}$$

Más aun, cualquier anti-involución σ de $\mathcal{S}^a_{q,N}$ que preserve la $\mathbb{Z}$-graduación es una de ellas.

La demostración consistirá principalmente en varios pasos que hacen uso de la propiedad involutiva de σ.

Demostración. Fijemos $i \in \{1, \cdots, N\}$.

Paso 1.

Dado que σ debería preservar la $\mathbb{Z}$-graduación principal, tenemos que $\sigma(E_{i,i}) = \sum_{j=1}^{N} U_{i,j}(T_q)E_{j,j}$. Dada la propiedad involutiva de σ, obtenemos $\sigma(E_{i,i}) = \sigma(E_{i,i}E_{i,i}) = \sigma(E_{i,i})\sigma(E_{i,i}) = \sum_{j=1}^{N}(U_{i,j}(T_q))^2 E_{j,j}$, por lo cual $U_{i,j}(T_q) = U_{i,j}^2(T_q)$. Tomando en consideración los grados positivos y negativos de estos polinomios de Laurent, llegamos a que $U_{i,j}(T_q) = a_{i,j}$, donde $a_{i,j}$ son elementos constantes tales que $a_{i,j}^2 = a_{i,j}$. Esto nos da $a_{i,j} = 0$ ó $a_{i,j} = 1$ para todo $i, j \in \{1, ..., N\}$. También sabemos que $E_{i,i} = \sigma^2(E_{i,i}) = \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} \sum_{k=1}^{N} a_{j,k}E_{k,k}$. Entonces, $1 = \sum_{j=1}^{N} a_{i,j}a_{j,i}$ y $0 = \sum_{j=1}^{N} a_{i,j}a_{j,k}$ para $k \neq i$. Entonces, para cada i existe un único j_i tal que $a_{i,j_i} = a_{j_i,i} = 1$ y $a_{i,j}a_{j,i} = 0$ para cualquier $j \neq j_i$. Y $a_{i,j}a_{j,k} = 0$ para todo j, i y $k \neq i$. En particular, $a_{i,j_i}a_{j_i,k} = 0$ para $k \neq i$, luego $a_{j_i,k} = 0$ para cualquier $k \neq i$, obteniendo que $\sigma(E_{i,i}) = E_{j_i,j_i}$. Como consecuencia de la inyectividad de σ, $\pi(i) := j_i$ es una permutación en S_N, y como σ es una involución, tenemos $\pi^2 = id$.

Paso 2.

Nuevamente, dado que σ debería preservar la $\mathbb{Z}$-graduación principal, podemos asumir que $\sigma(T_qE_{i,i}) = \sum_{j=1}^{N} P_{i,j}(T_q)E_{j,j}$ y $\sigma(T_q^{-1}E_{i,i}) = \sum_{j=1}^{N} H_{i,j}(T_q)E_{j,j}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sigma(T_qE_{i,i}) &= \sigma(T_qE_{i,i}E_{i,i}) = \sigma(E_{i,i})\sigma(T_qE_{i,i}) \\
&= E_{\pi(i),\pi(i)} \left(\sum_{j=1}^{N} P_{i,j}(T_q)E_{j,j} \right) \\
&= P_{i,\pi(i)}(T_q)E_{\pi(i),\pi(i)}.
\end{aligned}$$

Procediendo de manera similiar con $\sigma(T_q^{-1}E_{i,i})$, tenemos que

$$\sigma(T_q^{-1}E_{i,i}) = H_{i,\pi(i)}(T_q)E_{\pi(i),\pi(i)}.$$

Combinando estas dos ecuaciones, tenemos

$$\begin{aligned}
E_{\pi(i),\pi(i)} &= \sigma(E_{i,i}) = \sigma(T_q^{-1}E_{i,i}T_qE_{i,i}) \\
&= \sigma(T_qE_{i,i})\sigma(T_q^{-1}E_{i,i}) \\
&= P_{i,\pi(i)}(T_q)H_{i,\pi(i)}(T_q)E_{\pi(i),\pi(i)}
\end{aligned}$$

Entonces, $1 = P_{i,\pi(i)}(T_q)H_{i,\pi(i)}(T_q)$ y, como consecuencia, deben ser unidades del anillo de polinomios de Laurent. En consecuencia, podemos asumir $P_i(T_q) := P_{i,\pi(i)}(T_q) = B_iT_q^{k_i}$ y $H_{i,\pi(i)}(T_q) = B_i^{-1}T_q^{-k_i}$, con $B_i \in \mathbb{C}^\times$ y $k_i \in \mathbb{Z}$. Entonces, $\sigma(T_q^{-1}E_{i,i})$ está determinado por $\sigma(T_qE_{i,i})$.

Ahora, notemos que podemos escribir $T_q^k E_{i,i} = T_q^{k-1} E_{i,i} T_q E_{i,i} = \cdots = (T_q E_{i,i})^k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$\begin{aligned} T_q E_{i,i} &= \sigma^2(T_q E_{i,i}) = \sigma(B_i T_q^{k_i} E_{\pi(i),\pi(i)}) \\ &= B_i(\sigma(T_q E_{\pi(i),\pi(i)}))^{k_i} = B_i B_{\pi(i)}^{k_i} T_q^{k_i k_{\pi(i)}} E_{i,i} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Entonces,$B_i B_{\pi(i)}^{k_i} = 1$ y $k_i k_{\pi(i)} = 1$. Esto nos da las siguientes posibilidades: $k_i = k_{\pi(i)} = 1$ ó $k_i = k_{\pi(i)} = -1$.

Paso 3.

Dado que $wt(z^{\pm 1} E_{i,i}) = \pm N$ y σ debería preservar la $\mathbb{Z}$-graduación principal, podemos asumir que $\sigma(zE_{i,i}) = z \sum_{j=1}^{N} T_{i,j}(T_q) E_{j,j}$ y $\sigma(z^{-1} E_{i,i}) = z^{-1} \sum_{j=1}^{N} \hat{T}_{i,j}(T_q) E_{j,j}$. Utilizando un argumento similar al usado en el Paso 2 y denotando $T_{i,\pi(i)}(T_q) := T_i(T_q)$ y $\hat{T}_{i,\pi(i)}(T_q) := \hat{T}_i(T_q)$, podemos deducir que $\hat{T}_j$ y T_j son cero para $j \neq \pi(i)$, y además $T_i(T_q) = A_i T_q^{r_i}$ y $\hat{T}_i(T_q) = C_i T_q^{-r_i}$, con $C_i = A_i^{-1} q^{r_i}$, $A_i \in \mathbb{C}^\times$ y $r_i \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\begin{aligned} zE_{i,i} &= \sigma^2(zE_{i,i}) = \sigma(zA_i T_q^{r_i} E_{\pi(i),\pi(i)}) \\ &= A_i \sigma(T_q E_{\pi(i),\pi(i)})^{r_i} \sigma(zE_{\pi(i),\pi(i)}) \\ &= A_i A_{\pi(i)} B_{\pi(i)}^{r_i} q^{k_{\pi(i)} r_i} z T_q^{r_i k_{\pi(i)} + r_{\pi(i)}} E_{i,i} \end{aligned}$$

Luego, tenemos $r_i k_{\pi(i)} + r_{\pi(i)} = 0$ y $A_i A_{\pi(i)} B_{\pi(i)}^{r_i} q^{k_{\pi(i)} r_i} = 1$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} zT_q E_{i,i} &= \sigma^2(zT_q E_{i,i}) = \sigma(zA_i B_i T_q^{r_i + k_i} q^{k_i} E_{\pi(i),\pi(i)}) \\ &= A_i B_i q_{k_i} \sigma(T_q E_{\pi(i),\pi(i)})^{k_i + r_i} \sigma(zE_{\pi(i),\pi(i)}) \\ &= A_i A_{\pi(i)} B_i B_{\pi(i)}^{r_i + k_i} q^{k_i + k_{\pi(i)}(r_i + k_i)} z T_q^{k_{\pi(i)}(k_i + r_i) + r_{\pi(i)}} E_{i,i} \end{aligned}$$

Podemos concluir entonces que $k_{\pi(i)}(k_i + r_i) + r_{\pi(i)} = 1$ y $A_i A_{\pi(i)} B_i B_{\pi(i)}^{r_i + k_i} q^{k_i + k_{\pi(i)}(r_i + k_i)} = 1$. De esta última ecuación y el paso previo, obtenemos $1 = q^{k_i + 1}$.

Si $k_i = 1$, entonces $q^2 = 1$. Como consecuencia de la hipótesis de que q no es una raíz de la unidad, se puede chequear fácilmente que éstos no son anti automorfismos. Por lo tanto, $k_i = -1$, $B_i = B_{\pi(i)}$ y $r_{\pi(i)} = r_i$.

Hasta ahora, tenemos

$$\sigma(E_{ii}) = E_{\pi(i),\pi(i)},$$

$$\sigma(zE_{ii}) = A_i z T_q^{r_i} E_{\pi(i),\pi(i)},$$

$$\sigma(z^{-1}E_{ii}) = A_i^{-1}q^{r_i}z^{-1}T_q^{r_i}E_{\pi(i),\pi(i)},$$

$$\sigma(T_qE_{ii}) = B_iT_q^{-1}E_{\pi(i),\pi(i)}$$

donde

$$A_iA_{\pi_n(i)}B_j^{r_i}q^{-r_i} = 1, \tag{2.7}$$

y además $B_i = B_{\pi(i)}$ y $r_{\pi(i)} = r_i$, para $A_i, A_{\pi_n(i)}, B_i \in \mathbb{C}^\times$ y $r_i \in \mathbb{Z}$.

Paso4.

Supongamos $i > j$. Como resultado de la propiedad de preservación de la $\mathbb{Z}$-graduación principal de σ, tenemos que

$$\sigma(E_{i,j}) = \sum_{l=1}^{N-i+j} C_l^{i,j}(T_q)E_{l+i-j,l} + \sum_{l=N-i+j+1}^{N} z\hat{C}_l^{i,j}(T_q)E_{l+i-j-N,l}.$$

Dado que

$$\sigma(E_{i,i}E_{i,j}) = \sigma(E_{i,j})\sigma(E_{i,i}) = \sigma(E_{i,j})E_{\pi(i),\pi(i)},$$

podemos deducir

$$\sigma(E_{i,j}) = \begin{cases} C^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)} & \text{if} \quad \pi(i) \leq N-i+j \\ zC^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j-N,\pi(i)} & \text{if} \quad \pi(i) \geq N-i+j+1 \end{cases} \tag{2.8}$$

donde $C^{i,j}(T_q) = C^{i,j}_{\pi(i)}(T_q)$, y $\hat{C}^{i,j}(T_q) = \hat{C}^{i,j}_{\pi(i)}(T_q)$.

Similarmente, si $i < j$ y $\sigma(E_{i,j}) = \sum_{l=1}^{j-i} z^{-1}\hat{S}_l^{i,j}(T_q)E_{N+l+i-j,l} + \sum_{l=j-i+1}^{N} S_l^{i,j}(T_q)E_{l+i-j,l}$, deducimos que

$$\sigma(E_{i,j}) = \begin{cases} S^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)} & \text{si} \quad \pi(i) \geq j-i+1 \\ z^{-1}S^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j+N,\pi(i)} & \text{si} \quad \pi(i) \leq j-i \end{cases} \tag{2.9}$$

donde $S^{i,j}(T_q) = S^{i,j}_{\pi(i)}(T_q)$.

Caso a. Sea $i > j$, con $\pi(i) \leq N-i+j$, como

$$E_{i,j} = \sigma^2(E_{i,j}) = \sigma(C^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)}) = \sigma(C^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)+i-j}E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)}),$$

utilizando (2.8), debemos tener que $\pi(\pi(i)+i-j) \leq N-i+j$ ya que de otra forma tendríamos z en el lado derecho de la ecuación de arriba, por lo cual

$$\begin{aligned}
E_{i,j} &= \sigma(E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)})\sigma(C^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)+i-j}) \\
&= (C^{\pi(i)+i-j,\pi(i)}(T_q)E_{\pi(\pi(i)+i-j)+i-j,\pi(\pi(i)+i-j)})(C^{i,j}(B_{\pi(i)+i-j}T_q^{-1})E_{\pi(\pi(i)+i-j),\pi(\pi(i)+i-j)}) \\
&= C^{\pi(i)+i-j,\pi(i)}(T_q)C^{i,j}(B_{\pi(i)+i-j}T_q^{-1})E_{\pi(\pi(i)+i-j)+i-j,\pi(\pi(i)+i-j)}.
\end{aligned}$$

Entonces, $C^{i,j}(B_{\pi(i)+i-j}T_q^{-1})$ y $C^{\pi(i)+i-j,\pi(i)}(T_q)$ son unidades del anillo de polinomios de Laurent y $\pi(j) = \pi(i) + i - j$. Por ello, y dado que $B_i = B_{\pi(i)}$, podemos escribir $C^{\pi(j),\pi(i)}(T_q) = c_{\pi(j),\pi(i)}T_q^{s_{\pi(j),\pi(i)}}$ y $C^{i,j}(B_jT_q^{-1}) = c_{i,j}T_q^{s_{i,j}}$ con

$$c_{i,j}.c_{\pi(j),\pi(i)} = 1 \quad \text{y} \; -s_{\pi(j),\pi(i)} = s_{i,j}, \quad \text{luego} \quad C^{i,j}(T_q) = c_{i,j}B_j^{s_{i,j}}T_q^{-s_{i,j}}. \tag{2.10}$$

Caso b. Sea $i > j$ y si $\pi(i) \geq N - i + j + 1$, de la misma forma, usando simultáneamente (2.8) y (2.9) para lidiar con el z que aparece en $\sigma(E_{i,j})$, tenemos que
$\pi(\pi(i) + i - j - N) \leq N + j - i$, por lo cual:

$$\begin{aligned}
E_{i,j} &= \sigma^2(E_{i,j}) = \sigma(zC^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j-N,\pi(i)}) \\
&= \sigma(E_{\pi(i)+i-j-N,\pi(i)})\sigma(C^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j-N,\pi(i)+i-j-N})\sigma(zE_{\pi(i)+i-j-N,\pi(i)+i-j-N}) \\
&= \left(z^{-1}S^{\pi(i)+i-j-N,\pi(i)}(T_q)\right)\left(C^{i,j}(B_{\pi(i)+i-j-N}T_q^{-1})\right) \times \\
&\qquad \left(A_{\pi(i)+i-j-N}zT_q^{r_{\pi(i)+i-j-N}}\right)E_{\pi(\pi(i)+i-j-N)+i-j,\pi(\pi(i)+i-j-N)} \\
&= A_{\pi(i)+i-j-N}S^{\pi(i)+i-j-N,\pi(i)}(qT_q)C^{i,j}(q^{-1}B_{\pi(i)+i-j-N}T_q^{-1})\times \\
&\qquad \left(T_q^{r_i}E_{\pi(\pi(i)+i-j-N)+i-j,\pi(\pi(i)+i-j-N)}\right).
\end{aligned}$$

Consecuentemente, $j = \pi(\pi(i) + i - j - N)$ y podemos asumir que $A_{\pi(j)}S^{\pi(j),\pi(i)}(qT_q)T_q^{r_i} = d_{\pi(j),\pi(i)}T_q^{p_{\pi(j),\pi(i)}}$ y $C^{i,j}(q^{-1}B_jT_q^{-1}) = c_{i,j}T_q^{m_{i,j}}$ con

$$d_{\pi(j),\pi(i)}.c_{i,j} = 1 \quad \text{y} \quad p_{\pi(j),\pi(i)} = -m_{i,j}, \quad \text{luego} \quad C^{i,j}(T_q) = c_{i,j}q^{-m_{i,j}}B_j^{m_{i,j}}T_q^{-m_{i,j}}. \tag{2.11}$$

Caso c. Sea $i < j$ y $\pi(i) \geq j - i + 1$, como

$$E_{i,j} = \sigma^2(E_{i,j}) = \sigma(S^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)}) = \sigma(S^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)+i-j}E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)}),$$

usando (2.9), debemos tener que $\pi(\pi(i)+i-j) \geq j-i+1$ para evitar tener z^{-1} en el lado derecho de la ecuación de arriba. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
E_{i,j} &= \sigma(E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)})\sigma(S^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)+i-j}) \\
&= \left(S^{\pi(i)+i-j,\pi(i)}(T_q)E_{\pi(\pi(i)+i-j)+i-j,\pi(\pi(i)+i-j)}\right)\left(S^{i,j}(B_{\pi(i)+i-j}T_q^{-1})E_{\pi(\pi(i)+i-j),\pi(\pi(i)+i-j)}\right) \\
&= S^{\pi(i)+i-j,\pi(i)}(T_q)S^{i,j}(B_{\pi(i)+i-j}T_q^{-1})E_{\pi(\pi(i)+i-j)+i-j,\pi(\pi(i)+i-j)}.
\end{aligned}$$

Entonces, $j=\pi(\pi(i)+i-j)$ y $S^{i,j}(B_jT_q^{-1})$ y $S^{\pi(i)+i-j,\pi(i)}(T_q)$ son unidades del anillo de polinomios de Laurent, por lo que podemos asumir que $S^{\pi(j),\pi(i)}(T_q)=d_{\pi(j),\pi(i)}T_q^{u_{\pi(j),\pi(i)}}$ y $S^{i,j}(B_jT_q^{-1})=d_{i,j}T_q^{u_{i,j}}$ con

$$d_{i,j}.d_{\pi(j),\pi(i)}=1 \quad \text{y} \quad u_{\pi(j),\pi(i)}=-u_{i,j}, \quad \text{luego} \quad S^{i,j}(T_q)=d_{i,j}B_j^{u_{i,j}}T_q^{-u_{i,j}}.$$

Caso d. Sea $i<j$ y si $\pi(i)\leq j-i$, dado que σ es una involucón, utilizando (2.8) y (2.9) simultáneamente para lidiar con el z^{-1} que aparece en $\sigma(E_{i,j})$. Para poder hacer esto, requerimos $\pi(N+\pi(i)+i-j)\geq -i+j+1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
E_{i,j} &= \sigma^2(E_{i,j})=\sigma(z^{-1}S^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j+N,\pi(i)})\\
&= \sigma(E_{\pi(i)+i-j+N,\pi(i)})\sigma(S^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j+N,\pi(i)+i-j+N})\sigma(z^{-1}E_{\pi(i)+i-j+N,\pi(i)+i-j+N})\\
&= \left(zC^{\pi(i)+i-j+N,\pi(i)}(T_q)\right)\left(S^{i,j}(B_{\pi(i)+i-j+N}T_q^{-1})\right)\times\\
&\qquad\qquad \left(A^{-1}_{\pi(i)+i-j+N}q^{r_{\pi(i)+i-j+N}}z^{-1}T_q^{-r_{\pi(i)+i-j+N}}\right)E_{\pi(\pi(i)+i-j+N)+i-j,\pi(\pi(i)+i-j+N)}\\
&= A^{-1}_{\pi(i)+i-j+N}q^{r_{\pi(i)+i-j+N}}C^{\pi(i)+i-j+N,\pi(i)}(q^{-1}T_q)S^{i,j}(qB_{\pi(i)+i-j+N}T_q^{-1})\times\\
&\qquad\qquad T_q^{-r_{\pi(i)+i-j+N}}E_{\pi(\pi(i)+i-j+N)+i-j,\pi(\pi(i)+i-j+N)}.
\end{aligned}$$

Entonces, $j=\pi(\pi(i)+i-j+N)$. Una vez más, siendo $S^{i,j}(qB_jT_q^{-1})$ y

$A_{\pi(j)}q^{r_{\pi(j)}}C^{\pi(j),\pi(i)}(q^{-1}T_q)T_q^{-r_{\pi(j)}}$ unidades del anillo de polinomios de Laurent, podemos escribir

$$S^{i,j}(qB_jT_q^{-1})=d_{i,j}T_q^{b_{i,j}} \quad \text{y} \quad A_{\pi(j)}q^{r_{\pi(j)}}C^{\pi(j),\pi(i)}(q^{-1}T_q)T_q^{-r_{\pi(j)}}=c_{\pi(j),\pi(i)}T_q^{\epsilon_{\pi(j),\pi(i)}},$$

con

$$1=d_{i,j}c_{\pi(j),\pi(i)} \quad \text{y} \quad -\epsilon_{\pi(j),\pi(i)}=b_{i,j}, \quad \text{luego} \quad S^{i,j}(T_q)=d_{i,j}q^{b_{i,j}}B_j^{b_{i,j}}T_q^{-b_{i,j}}. \tag{2.12}$$

Esto combinado con (2.11) da

$$c_{i,j}c^{-1}_{\pi(i),\pi(j)}=1. \tag{2.13}$$

Paso 5.

Sea $i>j$, entonces por el Paso 1, $E_{\pi(i),\pi(i)}=\sigma(E_{i,i})=\sigma(E_{i,j}E_{j,i})=\sigma(E_{j,i})\sigma(E_{i,j})$. Usando (2.8) con la condición $\pi(i)\leq N-i+j$, tenemos que $\pi(j)=\pi(i)+i-j$, por lo cual $\pi(j)\geq i-j+1$ trivialmente. Entonces,

$$\begin{aligned} E_{\pi(i),\pi(i)} &= S^{j,i}(T_q)E_{\pi(j)+j-i,\pi(j)}C^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)} \\ &= d_{j,i}c_{i,j}B_i^{u_{j,i}}B_j^{s_{i,j}}T_q^{-u_{j,i}-s_{i,j}}E_{\pi(i),\pi(i)} \end{aligned}$$

con

$$-s_{i,j} = u_{j,i} \quad \text{y} \quad 1 = d_{j,i}c_{i,j}B_i^{-s_{i,j}}B_j^{s_{i,j}}.$$

Podemos finalmente escribir $S^{i,j}(T_q) = c_{j,i}^{-1}B_i^{-s_{j,i}}T_q^{s_{j,i}}$ si $i < j$ y $\pi(j) \geq i - j + 1$.

Ahora, en el caso $i > j$ y $\pi(i) \geq N - i + j + 1$ en (2.8), tenemos $\pi(j) = \pi(i) + i - j - N$ y es inmediato que $\pi(j) \leq i - j$, luego:

$$\begin{aligned} E_{\pi(i),\pi(i)} &= \sigma(E_{i,i}) = \sigma(E_{j,i})\sigma(E_{i,j}) \\ &= \left(z^{-1}S^{j,i}(T_q)E_{N+\pi(j)+j-i,\pi(j)}\right)\left(zC^{i,j}(T_q)E_{\pi(i)+i-j-N,\pi(i)}\right) \\ &= \left(z^{-1}d_{j,i}q^{b_{j,i}}B_i^{b_{j,i}}T_q^{-b_{j,i}}E_{\pi(i),\pi(j)}\right)\left(zc_{i,j}q^{-m_{i,j}}B_j^{m_{i,j}}T_q^{-m_{i,j}}E_{\pi(j),\pi(i)}\right) \\ &= c_{j,i}c_{i,j}q^{-m_{i,j}}B_i^{b_{j,i}}B_j^{m_{i,j}}T_q^{-b_{j,i}-m_{i,j}}E_{\pi(i),\pi(i)} \end{aligned}$$

Entonces,

$$m_{i,j} = -b_{j,i} \quad \text{y} \quad d_{i,j} = c_{j,i}^{-1}q^{m_{j,i}}B_i^{-m_{j,i}}B_j^{m_{j,i}} \tag{2.14}$$

Como consecuencia de esto, tenemos $S^{i,j}(T_q) = c_{j,i}^{-1}B_i^{-m_{j,i}}T_q^{m_{j,i}}$ si $i < j$ y $\pi(j) \leq j - i$. Luego, podemos reescribir (2.8) y (2.9) de la siguiente forma, para $i > j$

$$\sigma(E_{i,j}) = \begin{cases} c_{i,j}B_j^{s_{i,j}}T_q^{-s_{i,j}}E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)} & \text{si} \quad \pi(i) \leq N - i + j \\ zc_{i,j}q^{-m_{i,j}}B_j^{m_{i,j}}T_q^{-m_{i,j}}E_{\pi(i)+i-j-N,\pi(i)} & \text{si} \quad \pi(i) \geq N - i + j + 1 \end{cases} \tag{2.15}$$

y $i < j$

$$\sigma(E_{i,j}) = \begin{cases} c_{j,i}^{-1}B_i^{-s_{j,i}}T_q^{s_{j,i}}E_{\pi(i)+i-j,\pi(i)} & \text{si} \quad \pi(i) \geq j - i + 1 \\ z^{-1}c_{j,i}^{-1}B_i^{-m_{j,i}}T_q^{m_{j,i}}E_{\pi(i)+i-j+N,\pi(i)} & \text{si} \quad \pi(i) \leq j - i \end{cases} \tag{2.16}$$

Ahora nos proponemos determinar la permutación π. Entonces, sea i_0 tal que $\pi(i_0) = N$. En el caso a y el caso c, $\pi(j) = \pi(i) + i - j$ y es fácil ver que

$$\pi(i-1) = \pi(i) + 1 \quad \text{para cualquier} \quad i \neq i_0. \tag{2.17}$$

Más aún, dado que en el caso b es $\pi(j) = \pi(i) + i - j - N$, tenemos $\pi(i_0 - 1) = 1$. Ya que π es una aplicación biyectiva, concluímos que π debe ser la aplicación π_n dado en (2.3) donde $n = i_0 - 1$.

Notemos ahora que si $i \leq n$, $\pi(i) = n-i+1$, y si $i > n$, $\pi(i) = N+n+1-i$. Como consecuencia, podemos ver con facilidad que, si $i > j$, $\pi(i) \leq N - i + j$ (caso a) se corresponde con la elección $i \leq n$ ó $j > n$, y el caso en que $j < n$ y $i > n$ se corresponde con $\pi(i) > N - i + j$ (caso b). De forma similar, para $i < j$, cuando $i > n$ ó $j \leq n$, tenemos que $\pi(i) > j - i$ (caso c) y el caso $i \leq n$ y $j > n$ se corresponde con $\pi(i) \leq j - i$ (caso d).

Calculando $z^k T_q^l E_{i,j} = \sigma^2(z^k T_q^l E_{i,j})$ en los cuatro casos para $k \geq 0$ y $l \geq 0$, con sus restricciones correspondientes, tenemos:

En el caso (a), donde $i > j$ y $i < n$ ó $j > n$, obtenemos:

$$c_{i,j} c_{\pi(j),\pi(i)} B_i^l B_j^{-l+kr_i} A_i^k A_{\pi(j)}^k q^{-kr_i} = 1 \tag{2.18}$$

y

$$-s_{\pi(i),\pi(j)} + s_{i,j} - kr_i + kr_{\pi(j)} = 0 \tag{2.19}$$

Analizando (2.19) cuando $k = 0$ deducimos, combinando (2.19) con (2.10), que $s_{i,j} = 0$.

Por otro lado, combinando $k = 1$ en (2.19) con el hecho que $r_{\pi(j)} = r_j$, obtenemos $r_i = r_j$. Entonces, $r_i = \begin{cases} r & i \leq n \\ \tilde{r} & i > n \end{cases}$.

Ahora, utilizando (2.10) y (2.18) con $k = 0$ y $l = 1$, tenemos que $B_i = B_j$. Entonces,

$$B_i = \begin{cases} B & i \leq n \\ \tilde{B} & i > n \end{cases}.$$

Si consideramos $k = 1$, $l = 0$ en (2.18) y (2.10), tenemos $B_i^{r_j} q^{-r_i} A_i A_{\pi(j)} = 1$. Usando (2.7) y el hecho que $A_{\pi(j)} = A_j$, obtenemos $A_i = A_j$. Entonces, $A_i = \begin{cases} A & i \leq n \\ \tilde{A} & i > n \end{cases}$. Por lo tanto,

$$A^2 (Bq^{-1})^r = 1 \tag{2.20}$$

lo cual se asemeja a la Proposición 1.3.1, y

$$\tilde{A}^2 (\tilde{B} q^{-1})^{\tilde{r}} = 1. \tag{2.21}$$

En el caso (b), donde $i > j$ y $i > n > j$, tenemos:

$$c_{i,j} c_{\pi(i),\pi(j)}^{-1} B^{-l+k\tilde{r}-m_{\pi(i),\pi(j)}} \tilde{B}^l \tilde{A}^k A^{k+1} q^{l-2\tilde{r}k+rk(k-1)/2+(k+1)m_{\pi(i),\pi(j)}} = 1 \tag{2.22}$$

y

$$m_{\pi(i),\pi(j)} + m_{i,j} - k\tilde{r} + (k+1)r = 0. \tag{2.23}$$

Analizando (2.23) cuando $k = 0$, deducimos que

$$m_{\pi(i),\pi(j)} + m_{i,j} + r = 0. \tag{2.24}$$

Por otro lado, cuando $k = 1$ en (2.23): $m_{\pi(i),\pi(j)} + m_{i,j} - \tilde{r} + 2r = 0$. Combinando estas últimas dos condiciones tenemos $\tilde{r} = r$.

Ahora, utilizando (2.13) y (2.22) con $k = 0$, $l = 0$, $c_{i,j}c^{-1}_{\pi(i),\pi(j)}B^{-m_{\pi(i),\pi(j)}}Aq^{m_{\pi(i),\pi(j)}} = 1$. Combiando esto con (2.22), obtenemos que para valores arbitrarios de k y l,

$$B^{-l+k\tilde{r}}\tilde{B}^l\tilde{A}^kA^kq^{l-2\tilde{r}k+rk(k-1)/2+km_{\pi(i),\pi(j)}} = 1 \tag{2.25}$$

Si consideramos $k = 0$, $l = 1$ en la última ecuación, obtenemos $B^{-1}\tilde{B}q = 1$. Entonces, $\tilde{B} = q^{-1}B$ y como consecuencia de (2.20) y (2.21), $\tilde{A}^2 = A^2q^r$.

Finalmente, cuando $k = 1$, $l = 0$ en (2.25): $q^{m_{\pi(i),\pi(j)}}$ es constante para todo $i > n > j$. Luego, $m_{r,s} = m$ para todo $r > n > s$. Ahora, debido a (2.24),

$$2m + r = 0. \tag{2.26}$$

Tomando $k = 2$, $l = 0$ en (2.25), tenemos $B^{2r}\tilde{A}^2A^2q^{-3r+2m} = 1$. Dado que $\tilde{A}^2 = A^2q^r$, $B^{2r}A^4q^{-2r+2m} = 1$, obtenemos que $q^{2m} = 1$ por (2.20). Entonces, $m = 0$ y por (2.26), $r = 0$ y en (2.20) y (2.21), esto implica que $\tilde{A}^2 = A^2 = 1$.

Nuevamente, tomando $k = 1$ y $l = 0$ en (2.25), $\tilde{A}A = 1$ y combinando esto con la ecuación previa, obtenemos $A = \tilde{A} = \pm 1$.

Los casos (c) y (d) arrojan los mismos resultados.

Luego, hemos llegado a las relaciones de (2.4).

Ahora, recordemos que tenemos para $1 \le i \le N$, $E_{\pi(i),\pi(i)} = \sigma(E_{i,i}) = \sigma(E_{i,i-1}E_{i-1,i}) = \sigma(E_{i-1,i})\sigma(E_{i,i-1})$. Luego, reescribiendo (2.15) y (2.16) para estos casos, tenemos:

$$\sigma(E_{i,i-1}) = \begin{cases} c_{i,i-1}E_{\pi(i)+1,\pi(i)} & \text{if} \quad \pi(i) < N \\ zc_{i,i-1}E_{1,N} & \text{if} \quad \pi(i) = N \end{cases} \tag{2.27}$$

y

$$\sigma(E_{i-1,i}) = \begin{cases} c^{-1}_{i,i-1}E_{\pi(i-1)-1,\pi(i-1)} & \text{if} \quad \pi(i-1) > 1 \\ z^{-1}c^{-1}_{i,i-1}E_{N,1} & \text{if} \quad \pi(i-1) = 1 \end{cases} \tag{2.28}$$

Si $i > j$, dado que $\sigma(E_{i,j}) = \sigma(E_{i,i-1}E_{i-1,i-2}\cdots E_{j+1,j})$, obtenemos (2.5a). Finalmente, (2.5b) son consecuencia de (2.10), (2.12) y (2.14) junto con el hecho que $m = 0$.

Por otro lado, es sencillo ver que σ definido por (2.4) es en efecto una anti-involución de $\mathcal{S}_q^a$, finalizando la prueba.

□

Corolario 2.1.2. *Si $N = n$, la anti-involución $\sigma = \sigma_{A,B,c,r,N}$ está dada por*

$$\sigma(E_{ii}) = E_{\pi_n(i),\pi_n(i)}$$

$$\sigma(T_q E_{ii}) = BT_q^{-1}E_{\pi_n(i),\pi_n(i)}$$

$$\sigma(zE_{ii}) = zAT_q^r E_{\pi_n(i),\pi_n(i)} \tag{2.29}$$

$$\sigma(z^{-1}E_{ii}) = A^{-1}q^r z^{-1}T_q^{-r}E_{\pi_n(i),\pi_n(i)}$$

$$\sigma(E_{ij}) = \begin{cases} c_{i,j}E_{\pi_n(j),\pi_n(i)} & \text{if} \quad i > j \\ c_{j,i}^{-1}E_{\pi_n(j),\pi_n(i)} & \text{if} \quad i < j \end{cases}$$

donde A, B, $c_{i,j}$, $r \in \mathbb{C}$, $A^2(Bq^{-1})^r = 1$ y $c_{i,j}$ verifican las relaciones (2.5a) *y* (2.5b).

Demostración. Si $n = N$ no existe el caso (b) en la demostración del Teorema 2.1.1, por lo tanto este corolario es simplemente restringir dicha prueba al caso a. □

Observación 2.1.3. El caso $N = 1$ coincide con la Proposición 1.3.1.

Nos concentraremos ahora en las implicaciones de las condiciones (2.5a) y(2.5b). Notemos primero que como consecuencia de (2.5a), todos los coeficientes $c_{i,j}$ quedan completamente determinados por

$$c_i := c_{i+1,i}, \quad i = 1, \cdots, N-1 \tag{2.30}$$

y la condición superior de (2.5b) puede escribirse como $c_i.c_{\pi_n(i+1)} = 1\,(i \neq n-1)$ por (2.17). Combinando la ecuación inferior de (2.5b) con (2.5a) obtenemos $1 = c_n.(c_{N,1})^{-1} = c_n.\prod_i(c_i)^{-1} = \prod_{i\neq n}(c_i)^{-1}$. Más aún, notemos que la permutación π_n está dada por dos permutaciones simples de los conjuntos $\{1, \cdots, n\}$ and $\{n+1, \cdots, N\}$. Luego, la Eq. (2.5b) se reduce a

$$c_i c_{n-i} = 1\,(1 \leq i \leq n), \quad c_{n+i}c_{N-i} = 1\,(1 \leq i < N-n) \tag{2.31}$$

y

$$1 = \prod_{i\neq n} c_i. \tag{2.32}$$

Sea $N = t + n$ y analicemos las fórmulas previas. Si n (respectivamente, t) es par, por(2.31) tenemos $\prod_{i<n} c_i = c_{n/2}$ y $(c_{n/2})^2 = 1$ (respectivamente, $\prod_{i>n} c_i = c_{n+(t/2)}$ y $(c_{n+(t/2)})^2 = 1$). El coeficientes $c_{n/2}$ (respectivamente, $c_{n+(t/2)}$) será llamado punto fijo. Si N es par, la condición en (2.32) se satisface sólo si los (posibles) puntos fijos son ambos iguales a 1 ó a -1. Si N es impar, los (posibles) puntos fijos deben ser todos iguales a 1.

De aquí en adelante consideraremos de manera separada los casos $n = N$ y $n < N$ con la intención de exhibir con mayor claridad sus resultados particulares.

2.2. Caso $n = N$

En esta sección se dará una descripción de las subálgebras de Lie del álgebra de operadores pseudo diferenciales cuánticos fijas por menos las anti-involuciones correspondientes al caso $n = N$.

2.2.1. Subálgebras de Lie de $\mathcal{S}_{q,N}$

Sea $\mathcal{S}_{q,N}^{A,B,c,r,N}$ la subálgebra de Lie de $\mathcal{S}_{q,N}$ fija por menos $\sigma_{A,B,c,r,N}$, explícitamente

$$\mathcal{S}_{q,N}^{A,B,c,r,N} = \{a \in \mathcal{S}_{q,N} | \sigma_{A,B,c,r,N}(a) = -a\}, \tag{2.1}$$

donde $\sigma_{A,B,c,r,N}$, for $h \in \mathbb{C}[w, w^{-1}]$, está dado por

$$\sigma_{A,B,c,r,N}(z^k h(T_q) E_{i,j}) = A^k q^{k(k-1)r/2} z^k h(Bq^{-k} T_q^{-1}) T_q^{kr} E_{N+1-j,N+1-i}. \tag{2.2}$$

Analizaremos las relaciones entre los $\mathcal{S}_{q,N}^{A,B,c,r,N}$ para distintos valores de A, B, c, r y N. Con ese fin, sea $s \in \mathbb{C}$, y denotemos θ_s el automorfismo de $\mathcal{S}_{q,N}^a$ dado por $\theta_s(M) = M$, $\theta_s(zI) = zI$ y $\theta_s(T_q I) = q^s T_q I$, donde $M \in Mat_N\mathbb{C}$ y I representa la matriz identidad. Es fácil chequear que θ_s preserva la $\mathbb{Z}$-graduación principal de $\mathcal{S}_{q,N}^a$. Utilizando la ecuación para $\sigma_{A,B,c,r,1}$ indicada en (2.2), tenemos

$$\theta_s \sigma_{A,B,c,r,N} \theta_{-s} = \sigma_{q^{sr}A,q^{-2s}B,c,r,N}. \tag{2.3}$$

Similarmente, sea $\alpha = \{\alpha_{i,j}\}$ $(i > j)$ tal que satisface (2.5a) y (2.5b). Denotemos Γ_α el automorfismo de $\mathcal{S}_{q,N}^a$ definido por $\Gamma_\alpha(zI) = zI$, $\Gamma_\alpha(T_q I) = T_q I$,

$$\Gamma_\alpha(E_{i,j}) = \begin{cases} \alpha_{i,j} E_{i,j} & \text{if} \quad i > j \\ \alpha_{j,i}^{-1} E_{i,j} & \text{if} \quad i < j \end{cases} \tag{2.4}$$

Sea $\sigma_c := \sigma_{A,B,c,r,N}$, entonces tenemos

$$\sigma_c.\Gamma_\alpha = \sigma_{c.\alpha} = \Gamma_{\alpha^{-1}}.\sigma_c, \tag{2.5}$$

donde $(c.\alpha)_{i,j} := c_{i,j}\alpha_{i,j}$ y $(\alpha^{-1})_{i,j} = \alpha_{i,j}^{-1}$. Observemos que $c.\alpha$ y α^{-1} también satisfacen (2.5a) y (2.5b). Utilizando (2.3) y (2.5), tenemos:

Lema 2.2.1. *Las álgebras de Lie $\mathcal{S}_{q,N}^{A,B,c,r,N}$ para valores arbitrarios de A, B and c son isomorfas a $\mathcal{S}_{q,N}^{\epsilon,q,\mathbf{1},r,N}$, donde ϵ es 1 ó -1, y $\mathbf{1}$ es la matriz c con $c_i = 1$ excepto por los puntos fijos que son 1 ó -1, que conservan su signo.*

Introduciremos ahora un poco de notación con el objetivo de dar una descripción explícita de esta familia de subálgebras.

Primero, escribiremos $\sigma_{\epsilon,r,N}$ y $\mathcal{S}_{q,N}^{\epsilon,r,N}$ en lugar de $\sigma_{\epsilon,q,\mathbf{1},r,N}$ y $\mathcal{S}_{q,N}^{A,B,c,r,N}$. Además, para cualquier matriz $M \in Mat_{m\times n}(\mathbb{C})$, definimos

$$(M)_{i,j}^{\dagger} = M_{m+1-j,n+1-i}, \tag{2.6}$$

i.e., la transpuesta con respecto a la otra diagonal. Recordemos las anti-involuciones en $\mathcal{S}_q := \mathcal{S}_{q,1}$ dadas en Proposición 1.3.1:

$$\dot{\sigma}_{\pm,B,r}(z^k f(T_q)) = (\pm z)^k q^{k(k-1)r/2} f(Bq^{-k}T_q^{-1})T_q^{kr}. \tag{2.7}$$

Podemos extender $\dot{\sigma}_{\pm,B,r}$ a una aplicación en $Mat_{n\times t}(\mathcal{S}_q) = \mathcal{S}_q \otimes Mat_{n\times t}(\mathbb{C})$ tomando $[\dot{\sigma}_{\pm,B,r}(M)]_{i,j} = \dot{\sigma}_{\pm,B,r}(M_{i,j})$.

Caso $+$: Definimos la siguiente aplicación en $Mat_{n\times t}(\mathcal{S}_q)$:

$$M^{\dagger_1} = \dot{\sigma}_{+,q,r}(M^{\dagger}). \tag{2.8}$$

Explícitamente, la anti-involución $\sigma_{+,r,N}$ en $\mathcal{S}_{q,N} = \mathcal{S}_q \otimes Mat_N(\mathbb{C})$ está dada por

$$\sigma_{+,r,N}(M) = \left(M^{\dagger_1}\right), \tag{2.9}$$

donde $M \in Mat_{n\times n}(\mathcal{S}_q)$, y

$$\mathcal{S}_{q,N}^{+,r,N} = \{M : M + M^{\dagger_1} = 0\}. \tag{2.10}$$

Caso $-$: Consideremos ahora la siguiente apliación en $Mat_{n\times t}(\mathcal{S}_q)$:

$$M^{*_1} := \dot{\sigma}_{-,q,r}(M^{\dagger}). \tag{2.11}$$

Entonces $\sigma_{-,r,N}$ en $\mathcal{S}_{q,N}$ está dado explícitamente por

$$\sigma_{-,r,N}(M) = (M^{*_1}), \tag{2.12}$$

donde $M \in Mat_{n\times n}(\mathcal{S}_q)$, y

$$\mathcal{S}_{q,N}^{-,r,N} = \{M : M + M^{*_1} = 0\}. \tag{2.13}$$

Notemos que $\mathcal{S}_{q,N}^{\pm,r,N}$ son subálgebras de Lie de $\mathcal{S}_{q,N}$ y que $\dagger_1$ y $*_1$ son anti-automorfismos.

Observación 2.2.2. Reemplazando † por T (transpuesta usual) en (2.8) y (2.11) da como resultado otra familia de involuciones que notaremos $\sigma^T_{\pm,r,N}$, que no preservan la $\mathbb{Z}$-graduación principal. Más aún, las subálgebras correspondientes no son subálgebras $\mathbb{Z}$-graduadas de $\mathcal{S}_{q,N}$, a pesar de que son isomorfas a las otras usando que $M^\dagger = JM^TJ^{-1}$, donde J es la siguiente matriz $N \times N$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

De esta forma, obtenemos $Ad_J \circ \sigma^T_{\pm,r,N} = \sigma_{\pm,r,N}$.

2.2.2. Generadores de $\mathcal{S}^{\epsilon,r,N}_{q,N}$

Podemos dar una descripción detallada de los generadores de $\mathcal{S}^{\epsilon,r,N}_{q,N}$.

Denotemos $\mathbb{C}[w,w^{-1}]^{(\epsilon),j}$ (donde $\epsilon = 1$ ó $\epsilon = -1$) al conjunto de los polinomios de Laurent tales que $f(w^{-1}) = -(\epsilon)^j f(w)$, y sea $\bar{l} = 0$ si l es impar y $\bar{l} = 1$ si l es par.

Notemos que $\mathcal{S}^{\epsilon,r,N}_{q,N} = \{x - \sigma_{\epsilon,r,N}(x) : x \in \mathcal{S}_{q,N}\}$ y observemos que por (2.7)

$$\dot{\sigma}_{\pm,q,r}(z^k(q^{(k-1)/2}T_q)^{kr/2} f(q^{(k-1)/2}T_q)) = (\pm z)^k (q^{(k-1)/2}T_q)^{kr/2} f((q^{(k-1)/2}T_q)^{-1}).$$

Aquí y en lo siguiente utilizaremos la descripción de los elementos en las subálgebras usada en (2.10) y (2.13). Por simplicidad, denotaremos $\mathcal{S}^{\sigma,N}_{q,N}$ a la subálgebra fija por menos $\sigma_{\pm,r,N}$. El siguiente es un conjunto de generadores de $\mathcal{S}^{\sigma,N}_{q,N}$.

$$\begin{aligned}\{z^k(q^{(k-1)/2}T_q)^{kr/2}(f(q^{(k-1)/2}T_q)E_{i,n+1-j} - (\epsilon)^k f((q^{(k-1)/2}T_q)^{-1})E_{j,n+1-i}) : k \in \mathbb{Z}, \\ f \,\epsilon \mathbb{C}[w,w^{-1}],\ 1 \le i < j \le n\},\end{aligned}$$

y los generadores de la diagonal opuesta son

$$\{z^k(q^{(k-1)/2}T_q)^{kr/2} f(q^{(k-1)/2}T_q)E_{i,n+1-i} : k \in \mathbb{Z},\ f \,\epsilon \mathbb{C}[w,w^{-1}]^{(\epsilon),k},\ 1 \le i \le n\}.$$

2.2.3. Realización geométrica de $\sigma_{\pm,r,N}$

En esta sección daremos una realización geométrica de $\sigma_{\pm,r,N}$. El álgebra $\mathcal{S}_{q,N}$ actúa en el espacio $V = \mathbb{C}^N[z,z^{-1}]$ y definimos dos formas bilineales en V:

$$B_\pm(h,g) = Res_z(\Phi_\pm(h^T)Jg), \tag{2.15}$$

donde $J = z^{-2}J_N$, J_N como en (2.14) and $\Phi_\pm : V \to V$ dado por $\Phi_\pm(h(z)) = h(\pm z)$, $h(z) \in V$.

Proposición 2.2.3. *(a) Las formas bilineales $B_\pm$ son no degeneradas. Más aún, B_+ es simétrica y B_- es antisimétrica.*

(b) *Para cualquier $L \in \mathcal{S}_{q,N}$ y $h, g \in V$ tenemos*

$$B_{\pm}(Lh, g) = B_{\pm}(h, (T_q^{-kr/2}\sigma_{\pm,r,N}(L)T_q^{kr/2})(g)), \tag{2.16}$$

donde $L = z^k T_q^{kr/2} p(T_q)(A)$. En otras palabras, L y $T_q^{-kr/2}\sigma_{\pm,r,N}(L)T_q^{kr/2}$ son operadores adjuntos con respecto a $B_{\pm}$.

Demostración. (a) Las afirmaciones son directas.

(b) Sea $L = z^k T_q^{kr/2} p(T_q)(A)$, $h = z^u e_p$ y $g = z^s e_q$. Recordemos que

$$L(h) = z^{k+u} q^{rku/2} p(q^u)(Ae_p)$$

y

$$\sigma_{\pm,r,N}(L)(g) = (\pm 1)^k z^{s+k} q^{skr/2} p(q^{-k-s+1}) A^{\dagger} e_q.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} B_{\pm}(L(z^u e_p), z^s e_q) &= Res_z (\pm z)^{k+u} q^{rku/2} p(q^u) e_p^T A^T z^{-2} J_N z^s e_q \\ &= (\pm 1)^{k+u} q^{rku/2} p(q^u) \delta_{k+u+s,1} (A^T J_N)_{(p,q)}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} B_{\pm}(h, \sigma_{\pm,r,N}(L)g) &= Res_z (\pm 1)^{k+u} z^{u+k+s-2} q^{skr/2} p(q^{-k-s+1}) e_p^T J_N A^{\dagger} e_q \\ &= ((\pm 1)^{k+u} q^{skr/2} \delta_{k+u+s,1} p(q^{-k-s+1}) J_N A^{\dagger})_{(p,q)} \\ &= ((\pm 1)^{k+u} q^{skr/2} p(q^{-k-s+1}) \delta_{k+u+s,1} J_N A^{\dagger})_{(p,q)} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Notemos que si multiplicamos (2.17) por $q^{skr/2}$ y (2.18) por $q^{sku/2}$, obtenemos

$$B_{\pm}(L(z^u e_p), T_q^{kr/2} I z^s e_q) = B_{\pm}(T_q^{kr/2} I z^u e_p, \sigma_{\pm,r,N}(L) z^s e_q). \tag{2.19}$$

Puede probarse fácilmente que, para $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$B_{\pm}(T_q^{\alpha} I z^u e_p, z^s e_q) = B_{\pm}(z^u e_p, \sigma_{\pm,r,N}(T_q^{\alpha} I) z^s e_q).$$

Utilizando este resultado en (2.19), podemos ver que

$$B_{\pm}(\sigma_{\pm,r,N}(T_q^{kr/2} I) L(z^u e_p), z^s e_q) = B_{\pm}(z^u e_p, \sigma_{\pm,r,N}(T_q^{kr/2} I) \sigma_{\pm,r,N}(L) z^s e_q).$$

Luego, tal como se esperaba, obtenemos

$$B_{\pm}(L(z^u e_p), z^s e_q) = B_{\pm}(z^u e_p, (T_q^{-kr/2} I) \sigma_{\pm,r,N}(L)(T_q^{kr/2} I) z^s e_q).$$

□

Observación 2.2.4. De manera similar, podemos definir la siguiente forma bilineal no degenerada en V:

$$B^T_{\pm}(h,g) = Res_z(\Phi_{\pm}(h^T)J_T g),$$

donde

$$J_T = z^{-2}I_n,$$

con I_n la matriz identidad $n \times n$, y se sigue que satisfacen

$$B_{\pm}(Lh,g) = B_{\pm}(h, T_q^{-kr/2}\sigma^T_{\pm,r,N}(L)T_q^{kr/2}g),$$

donde $\sigma^T_{\pm,n}$ son los definidos en la Observación 2.2.2.

Luego, podemos afirmar que $\mathcal{S}^{+,r,N}_{q,N}$ es una subálgebra de $\mathcal{S}_{q,N}$ de tipo "ortogonal", y $\mathcal{S}^{-,r,N}_{q,N}$ es una subálgebra de $\mathcal{S}_{q,N}$ de tipo "simpléctico".

2.3. Caso $n < N$

Estudiaremos en esta sección las subálgebras de Lie de operadores pseudo diferenciales matriciales cuánticos fijas por (menos) las anti-involuciones halladas para el caso $n < N$.

2.3.1. Subálgebras de Lie de $\mathcal{S}_{q,N}$

Sea $\mathcal{S}^{\pm,B,c,n}_{q,N}$ la subálgebra de Lie de $\mathcal{S}_{q,N}$ fija por menos $\sigma_{\pm,B,c,n}$:

$$\mathcal{S}^{\pm,B,c,n}_{q,N} = \{a \in \mathcal{S}_{q,N} | \sigma_{\pm,B,c,n}(a) = -a\}. \tag{2.1}$$

De forma similar al caso $n = N$, analizaremos las relaciones entre $\mathcal{S}^{\pm,B,c,n}_{q,N}$ para diferentes valores de B, c y n. Sea $s \in \mathbb{C}$, y denotemos θ_s el automorfismo de $\mathcal{S}^a_{q,N}$ dado por $\theta_s(M) = M$, $\theta_s(zI) = zI$ y $\theta_s(T_qI) = q^sT_qI$, donde I representa la matriz identidad y $M \in Mat_N\mathbb{C}$. Claramente θ_s preserva la $\mathbb{Z}$-graduación principal de $\mathcal{S}^a_{q,N}$. De la misma forma que para $n = N$, tenemos que para este caso vale lo siguiente

$$\theta_s\sigma_{\pm,B,c,n}\theta_{-s} = \sigma_{\pm,q^{-2s}B,c,n}. \tag{2.2}$$

Sea $\alpha = \{\alpha_{i,j}\}$ $(i > j)$ tal que satisface (2.5a) y (2.5b) y denotemos Γ_α al automorfismo de $\mathcal{S}^a_{q,N}$ definido por $\Gamma_\alpha(zI) = zI$, $\Gamma_\alpha(T_qI) = T_qI$,

$$\Gamma_\alpha(E_{i,j}) = \begin{cases} \alpha_{i,j}E_{i,j} & \text{if} \quad i > j \\ \alpha^{-1}_{j,i}E_{i,j} & \text{if} \quad i < j \end{cases} \tag{2.3}$$

Tomando $\sigma_c := \sigma_{\pm,B,c,n}$, tenemos

$$\sigma_c.\Gamma_\alpha = \sigma_{c.\alpha} = \Gamma_{\alpha^{-1}}.\sigma_c, \tag{2.4}$$

donde $(c.\alpha)_{i,j} := c_{i,j}\alpha_{i,j}$ y $(\alpha^{-1})_{i,j} = \alpha_{i,j}^{-1}$. Notemos que $c.\alpha$ y α^{-1} también satisfacen (2.5a) y (2.5b). Utilizando (2.2) y (2.4), tenemos:

Lema 2.3.1. *Las álgebras de Lie $\mathcal{S}_{q,N}^{\pm,B,c,n}$ para valores arbitrarios de B y c son isomorfas a $\mathcal{S}_{q,N}^{\epsilon,q,\mathbf{1},n}$, donde ϵ es 1 ó -1, y $\mathbf{1}$ es la matriz c con $c_i = 1$ excepto para los puntos fijos que son 1 ó -1, que conservan su signo.*

Observación 2.3.2. Gracias a este lema, podemos encontrar un número complejo s tal que $B = q$. Más aún, recordemos que en el caso $n = N$, es posible encontrar un número complejo tal que $A = \pm 1$ (lo cual tiene como consecuencia que $B = q$). Entonces, la subálgebra $\mathcal{S}_{q,N}^{A,B,c,r,n}$ es isomorfa a $\mathcal{S}_{q,N}^{\pm 1,q,\mathbf{1},n}$ y $\mathcal{S}_{q,N}^{A,B,c,r,N}$ es isomorfa a $\mathcal{S}_{q,N}^{\pm 1,q,\mathbf{1},r,n}$. La única diferencia entre ambos casos es con respecto a r: mientras que r toma un valor arbitrario en el caso $n = N$, si $n < N$ r debe ser 0.

Escribiremos $\sigma_{\pm,n}$ y $\mathcal{S}_{q,N}^{\pm,n}$ en lugar de $\sigma_{\pm,B,c,n}$ y $\mathcal{S}_{q,N}^{\pm,B,c,n}$, con $B = q$ y $c = \mathbf{1}$. De la misma forma que en la sección anterior, para cualquier matriz $M \in Mat_{m\times n}(\mathbb{C})$, definimos

$$(M)_{i,j}^\dagger = M_{m+1-j,n+1-i}, \tag{2.5}$$

i.e., la transpuesta con respecto a la otra diagonal. Recordemos una vez más las anti-involuciones en $\mathcal{S}_q := \mathcal{S}_{q,1}$ dadas en Proposición 1.3.1:

$$\dot{\sigma}_{\pm,B,r}(z^k f(T_q)) = (\pm z)^k q^{k(k-1)r/2} f(Bq^{-k}T_q^{-1})T_q^{kr}. \tag{2.6}$$

Extendemos $\dot{\sigma}_{A,B,r}$ a una aplicación en $Mat_{a\times b}(\mathcal{S}_q) = \mathcal{S}_q \otimes Mat_{a\times b}(\mathbb{C})$ tomando $[\dot{\sigma}_{\pm,B,r}(M)]_{i,j} = \dot{\sigma}_{\pm,B,r}(M_{i,j})$. Sea ahora $t = N - n$.

Caso $+$: Definimos las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned} M^{\dagger_1} &= \dot{\sigma}_{+,q,0}(M^\dagger), \quad B^{\dagger_2} = z^{-1}\dot{\sigma}_{+,q,0}(B^\dagger) \\ C^{\dagger_3} &= z\dot{\sigma}_{+,1,0}(C^\dagger), \quad D^{\dagger_4} = \dot{\sigma}_{+,1,0}(D^\dagger), \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde $M \in Mat_{n\times n}(\mathcal{S}_q)$, $B \in Mat_{n\times t}(\mathcal{S}_q)$, $C \in Mat_{t\times n}(\mathcal{S}_q)$, y $D \in Mat_{t\times t}(\mathcal{S}_q)$. Podemos escribir la anti-involución $\sigma_{+,n}$ en $\mathcal{S}_{q,N} = \mathcal{S}_q \otimes Mat_N(\mathbb{C})$ explícitamente como

$$\sigma_{+,n}\begin{pmatrix} M & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{\dagger_1} & C^{\dagger_3} \\ B^{\dagger_2} & D^{\dagger_4} \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

y

$$\mathcal{S}_{q,N}^{+,n} = \left\{ \begin{pmatrix} M & B \\ -B^{\dagger_2} & D \end{pmatrix} : M + M^{\dagger_1} = 0 \text{ y } D + D^{\dagger_4} = 0 \right\}. \tag{2.9}$$

El hecho que $\sigma_{+,n}(a) = -a$ implica $C^{\dagger_3} = -B$ y $B^{\dagger_2} = -C$, y estas dos condiciones son equivalentes ya que $(B^{\dagger_2})^{\dagger_3} = B$. Más aún, para probar que $\mathcal{S}_{q,N}^{+,n}$ es una subálgebra de Lie de $\mathcal{S}_{q,N}$ por cálculos directos es necesario utilizar que ^{†_1} y ^{†_4} son anti-automorfismos, y las identidades $B^{\dagger_2} = z^{-1}B^{\dagger_1}$, $C^{\dagger_4} = zC^{\dagger_3}$, $(B^{\dagger_2})^{\dagger_1} = Bz^{-1}$, $B^{\dagger_4}z^{-1} = B^{\dagger_2}$, etc. Observemos, sin embargo, que ^{†_2} y ^{†_3} no son anti-automorfismos. Las siguientes identidades también son útiles:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{+,q,0}(z^{-1}\dot{\sigma}_{+,q,0}(z^k f(T_q))) &= (z^k f(T_q))z^{-1}, \\ \dot{\sigma}_{+,1,0}(z^{-1}\dot{\sigma}_{+,q,0}(z^k f(T_q))) &= z^{-1}(z^k f(T_q)). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Caso −: Como hemos visto en el análisis subsiguiente a la ecuación (2.32), el caso N par y n (también t) impar es imposible. Luego podemos suponer, por simetría, que t es par. Consideremos ahora las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned} M^{*1} &:= \dot{\sigma}_{-,q,0}(M^{\dagger}), \\ B^{*2} &:= z^{-1}\dot{\sigma}_{-,q,0}(B^{\dagger}), \\ C^{*3} &:= z\dot{\sigma}_{-,1,0}(C^{\dagger}), \\ D^{*4} &:= \dot{\sigma}_{-,1,0}(D^{\dagger}), \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde $M \in Mat_{n\times n}(\mathcal{S}_q)$, $B \in Mat_{n\times t}(\mathcal{S}_q)$, $C \in Mat_{t\times n}(\mathcal{S}_q)$, y $D \in Mat_{t\times t}(\mathcal{S}_q)$. Entonces las anti-involuciones $\sigma_{-,n}$ en $\mathcal{S}_{q,N}$ están dadas explícitamente por

$$\sigma_{-,n}\begin{pmatrix} M & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{*1} & C^{*3} \\ B^{*2} & D^{*4} \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

y

$$\mathcal{S}_{q,N}^{-,n} = \left\{ \begin{pmatrix} M & B \\ -B^{*2} & D \end{pmatrix} : M + M^{*1} = 0 \text{ and } D + D^{*4} = 0 \right\}. \tag{2.13}$$

De la misma forma que antes, la condición $\sigma_{-,n}(a) = -a$ implica $C^{*3} = -B$ y $B^{*2} = -C$, y estas dos son equivalentes porque $(B^{*2})^{*3} = B$. Más aún, para probar que $\mathcal{S}_{q,N}^{-,n}$ es una subálgebra de Lie de $\mathcal{S}_{q,N}$ por medio de cálculos directos, debemos utilizar que ^{*1} y ^{*4} son anti-automorfismos, y las identidades $B^{*2} = z^{-1}B^{*1}$, $D^{*4} = zD^{*3}$, $(B^{*2})^{*1} = Bz^{-1}$, $B^{*4}z^{-1} = B^{*2}$, etc. Nuevamente, ^{*2} y ^{*3} no son anti-automorfismos. Necesitamos además utilizar:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{-,q,0}(z^{-1}\dot{\sigma}_{-,q,0}(z^k f(T_q))) &= -(z^k f(T_q))z^{-1}, \\ \dot{\sigma}_{-,1,0}(z^{-1}\dot{\sigma}_{-,q,0}(z^k f(T_q))) &= -z^{-1}(z^k f(T_q)). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Observación 2.3.3. Reemplazando † por T (transpuesta usual) en (2.7) y(2.11) da como resultado otra familia de involuciones que denotaremos $\sigma_{\pm,n}^{T}$. Estas involuciones no preservan la $\mathbb{Z}$-graduación principal, y las subálgebras correspondientes no son subálgebras $\mathbb{Z}$ graduadas de $\mathcal{S}_{q,N}$, pero son isomorfas a las otras usanto el mismo argumento que en la Observación 2.2.2.

2.3.2. Generadores de $\mathcal{S}_{q,N}^{\pm,n}$

En esta sección daremos una descripción detallada de los generadores de $\mathcal{S}_{q,N}^{\pm,n}$.

Denotemos $\mathbb{C}[w,w^{-1}]^{(\epsilon),j}$ (donde $\epsilon = 1$ ó $\epsilon = -1$) al conjunto de polinomios de Laurent tales que $f(w^{-1}) = -(\epsilon)^j f(w)$ y denotemos $\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,n}$ a la subálgebra $\mathcal{S}_{q,N}^{\pm,n}$. Sea $\bar{l} = 0$ si l es impar y $\bar{l} = 1$ si l es par.

Recordemos que

$$\dot{\sigma}_{\pm,q,0}(z^k f(q^{(k-1)/2}T_q)) = (\pm z)^k f((q^{(k-1)/2}T_q)^{-1})$$

y también,

$$\dot{\sigma}_{\pm,1,0}(z^k f(q^{k/2}T_q)) = (\pm z)^k f(q^{-k/2}T_q^{-1}).$$

Entonces, el siguiente es un conjunto de generadores de $\mathcal{S}_{q,N}^{\pm,n}$, utilizando la descripción de los elementos en las subálgebras dada en (2.9) y(2.13).

- Para el bloque M, donde $1 \leq i,\ j \leq n$:

  $$\{z^k(f(q^{(k-1)/2}T_q)E_{i,n+1-j} - (\epsilon)^k f((q^{(k-1)/2}T_q)^{-1})E_{j,n+1-i}) : k \in \mathbb{Z},\ f \,\epsilon \mathbb{C}[w,w^{-1}],\ 1 \leq i < j \leq n\}.$$

  y los generadores en la diagonal opuesta son

  $$\{z^k f(q^{(k-1)/2}T_q)E_{i,n+1-i} : k \in \mathbb{Z},\ f \,\epsilon \mathbb{C}[w,w^{-1}]^{(\epsilon),k},\ 1 \leq i \leq n\}.$$

- Para los bloques B (y C), donde $i \leq n$ y $j > n$ (ó $j \leq n$ y $i > n$):

  $$\{z^k(f(q^{(k-1)/2}T_q)E_{i,n+j} - (\epsilon)^k z^{-1} f((q^{(k-1)/2}T_q)^{-1})E_{N+1-j,n+1-i}) : k \in \mathbb{Z},\ f \,\epsilon \mathbb{C}[w,w^{-1}],$$
  $$1 \leq i \leq n \text{ and } 1 \leq j \leq N-n\}.$$

- Para el bloque D, donde $i, j > n$:

  $$\{z^k(f(q^{k/2}T_q)E_{n+i,N+1-j} - f(q^{-k/2}T_q^{-1})E_{n+j,N+1-i}) : k \in \mathbb{Z},\ f \,\epsilon \mathbb{C}[w,w^{-1}],\ 1 \leq i < j \leq N-n\},$$

  y los generadores en la diagonal opuesta son

  $$\{z^k f(q^{k/2}T_q)E_{n+i,N+1-i} : k \in \mathbb{Z},\ f \,\epsilon \mathbb{C}[w,w^{-1}]^{(\epsilon),k},\ 1 \leq i \leq N-n\}.$$

2.3.3. Realización geométrica de $\sigma_{\pm,n}$

En esta sección daremos una realización geométrica de $\sigma_{\pm,n}$.

El álgebra $\mathcal{S}_{q,N}$ actúa en el espacio $V = \mathbb{C}^N[z,z^{-1}]$ y definimos dos formas bilineales en V:

$$B_{\pm}(h,g) = Res_z(\Phi_{\pm}(h^T)Jg), \tag{2.15}$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} z^{-2}J_n & 0 \\ 0 & z^{-1}J_t \end{pmatrix},$$

con $\Phi : V \to V$ dada por $\Phi_\pm(h(z)) = h(\pm z)$, $h(z) \in V$, y J_n como en (2.14). Observemos que $V = \mathbb{C}^n[z, z^{-1}] \times \mathbb{C}^t[z, z^{-1}]$ es una descomposición ortogonal de V. Ahora, consideremos la siguiente proposición.

Proposición 2.3.4. *(a) Las formas bilineales $B_\pm$ son no degeneradas. Más aún, B_+ es simétrica y B_- es simétrica en el subespacio $\mathbb{C}^n[z, z^{-1}]$ y antisimétrica en $\mathbb{C}^t[z, z^{-1}]$.*

(b) Para cualquier $L \in \mathcal{S}_{q,N}$ y $h, g \in V$ tenemos

$$B_\pm(Lh, g) = B_\pm(h, \sigma_{\pm,n}(L)g), \tag{2.16}$$

esto es, L y $\sigma_{\pm,n}(L)$ son operadores adjuntos con respecto a $B_\pm$.

Demostración. (a) Las demostraciones de las afirmaciones son directas.

(b) Sean $L = z^k p(T_q)\left(\begin{smallmatrix} M B \\ C D \end{smallmatrix}\right)$, $h = z^u e_p$, y $g = z^s e_q$ como mostrado anteriormente. Recordemos que

$$L(h) = z^{k+u} p(q^u)\left(\begin{smallmatrix} M B \\ C D \end{smallmatrix}\right) e_p$$

y

$$\sigma_{\pm,n}(L)(g) = (\pm 1)^k z^{s+k} \begin{pmatrix} p(q^{-k-s+1})M^\dagger & zp(q^{-k-s})C^\dagger \\ z^{-1}p(q^{-k-s+1})B^\dagger & p(q^{-k-s})D^\dagger \end{pmatrix} e_q.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} B_\pm(L(z^u e_p), z^s e_q) &= Res_z (\pm 1)^{z+u} z^{k+u} p(q^u) e_p^T \begin{pmatrix} M & B \\ C & D \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} z^{-2}J_n & 0 \\ 0 & z^{-1}J_t \end{pmatrix} z^s e_q \\ &= (\pm 1)^{z+u} p(q^u) \begin{pmatrix} \delta_{k+u+s,1} M^T J_n & \delta_{k+u+s,0} C^T J_t \\ \delta_{k+u+s,1} B^T J_n & \delta_{k+u+s,0} D^T J_t \end{pmatrix}_{(p,q)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} B_\pm(h, \sigma_{\pm,n}(L)g) &= Res_z (\pm 1)^{z+u} z^{k+u+s} e_p^T \begin{pmatrix} z^{-2}J_n & 0 \\ 0 & z^{-1}J_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(q^{-k-s+1})M^\dagger & zp(q^{-k-s})C^\dagger \\ z^{-1}p(q^{-k-s+1})B^\dagger & p(q^{-k-s})D^\dagger \end{pmatrix} e_q \\ &= (\pm 1)^{z+u} \begin{pmatrix} \delta_{k+u+s,1} p(q^{-k-s+1}) J_n M^\dagger & \delta_{k+u+s,0} p(q^{-k-s}) J_n C^\dagger \\ \delta_{k+u+s,1} p(q^{-k-s+1}) J_t B^\dagger & \delta_{k+u+s,0} p(q^{-k-s}) J_t D^\dagger \end{pmatrix}_{(p,q)} \\ &= (\pm 1)^{z+u} p(q^u) \begin{pmatrix} \delta_{k+u+s,1} J_n M^\dagger & \delta_{k+u+s,0} J_n C^\dagger \\ \delta_{k+u+s,1} J_t B^\dagger & \delta_{k+u+s,0} J_t D^\dagger \end{pmatrix}_{(p,q)} \end{aligned}$$

Los últimos resultados son iguales, finalizando la prueba. □

Observación 2.3.5. De manera similar, podemos definir las siguientes formas bilineales no degeneradas en V:

$$B_{\pm}^{T}(h,g) = Res_z(\Phi_{\pm}(h^T)J_T g),$$

donde

$$J_T = \begin{pmatrix} z^{-2}I_n & 0 \\ 0 & z^{-1}I_t \end{pmatrix},$$

con I_n la matriz identidad $n \times n$, y se puede probar fácilmente que satisfacen

$$B_{\pm}(Lh,g) = B_{\pm}(h, \sigma_{\pm,n}^{T}(L)g),$$

donde $\sigma_{\pm,n}^{T}$ fueron definidos en (2.14).

Luego, podemos afirmar que $\mathcal{S}_{q,N}^{+,n}$ es una subálgebra de $\mathcal{S}_{q,N}$ de tipo “ortogonal” $o(n, N-n)$ y $\mathcal{S}_{q,N}^{-,n}$ es una subálgebra de $\mathcal{S}_{q,N}$ de tipo “ortosimpléctico” $osp(n, N-n)$.

Capítulo 3

Representaciones irreducibles cuasifinitas de peso máximo de $\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}$

En este capítulo caracterizaremos las representaciones cuasifinitas irreducibles de peso máximo de las subálgebras de Lie de tipo ortogonal y simpléctico obtenidas para el caso $n = N$.

3.1. Subálgebras parabólicas de $\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}$

Recordemos que para este caso, las anti-involuciones que preservan la $\mathbb{Z}$-graduación principal son de la siguiente forma

$$\sigma_{\epsilon,r,N}(z^k h(T_q)E_{i,j}) = (\epsilon)^k q^{k(k-1)r/2} z^k h(q^{1-k}T_q^{-1})T_q^{kr} E_{N+1-j,N+1-i}. \tag{3.1}$$

donde $\epsilon = \pm 1$, $r \in \mathbb{C}^\times$. Denotaremos

$$\delta_{m,\text{par}} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es par} \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}$ hereda una $\mathbb{Z}$-graduación de $\mathcal{S}_{q,N}$ dado que σ preserva la $\mathbb{Z}$-graduacíon principal de $\mathcal{S}_{q,N}^{a}$. Luego, $\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N} = \oplus_{j\in\mathbb{Z}}(\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N})_j$.

Podemos ahora dar una descripción de $(\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N})_j$. Sea, por el algoritmo de la división, $j = kN + p$

con $0 \leq p \leq N-1$. Entonces: si $p \neq 0$

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N})_j =&\{z^k(q^{(k-1)/2}T_q)^{rk/2}(f(q^{(k-1)/2}T_q)E_{i,i-p}\\ &-(\epsilon)^k f((q^{(k-1)/2}T_q)^{-1})E_{N+1-i+p,N+1-i})|f(w)\in\mathbb{C}[w,w^{-1}],\ 1+p\leq i\leq N,\\ &i\neq(N+1+p)/2\}\\ &\bigcup\delta_{N+p,\text{impar}}\{z^k(q^{(k-1)/2}T_q)^{rk/2}g(q^{(k-1)/2}T_q)E_{(N+1+p)/2,(N+1-p)/2}|g(w)\in\mathbb{C}[w,w^{-1}]^{\epsilon,k}\}\\ &\bigcup\{z^{k+1}(q^{k/2}T_q)^{r(k+1)/2}(h(q^{k/2}T_q)E_{i,N-p+i}\\ &-(\epsilon)^{k+1}h(q^{-k/2}T_q^{-1})E_{p+1-i,N+1-i}|h(w)\in\mathbb{C}[w,w^{-1}],\ 1\leq i\leq p,\ i\neq(1+p)/2\}\\ &\bigcup\delta_{p,\text{impar}}\{z^{k+1}(q^{k/2}T_q)^{r(k+1)/2}\tilde{g}(q^{k/2}T_q)E_{(p+1)/2,(2N+1-p)/2}|\tilde{g}(w)\in\mathbb{C}[w,w^{-1}]^{\epsilon,k+1}\},\end{aligned}$$

y para $p=0$

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N})_j =&\{z^k(q^{(k-1)/2}T_q)^{rk/2}(f(q^{(k-1)/2}T_q)E_{i,i}\\ &-(\epsilon)^k f((q^{(k-1)/2}T_q)^{-1})E_{N+1-i,N+1-i})|f(w)\in\mathbb{C}[w,w^{-1}],\ 1\leq i\leq[N/2]\}\\ &\bigcup\delta_{N,\text{impar}}\{z^{-k}(q^{(-k-1)/2}T_q)^{-rk/2}g(q^{(-k-1)/2}T_q)E_{(N+1)/2,(N+1)/2}|g(w)\in\mathbb{C}[w,w^{-1}]^{\epsilon,k}\},\end{aligned}$$

donde $\mathbb{C}[w,w^{-1}]^{\epsilon,k}$ denota el conjunto de todos los polinomios de Laurent tales que $f(w^{-1}) = -(\epsilon)^k f(w)$.

Denotemos nuevamente ψ a la restricción del 2-cociclo en (1.4) a $\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}$. Llamaremos $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$ a la extensión central de $\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}$ por $\mathbb{C}C$ que corresponde al 2-cociclo ψ. $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$ es una subálgebra de Lie de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}}$.

Tomemos ahora una subálgebra parabólica $\mathfrak{p}$ de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$ y observemos que para cada $j\in\mathbb{N}$, $j=kN+p$ con $0\leq p\leq N-1$ tenemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_{-j} =&\{z^{-k}(q^{(-k-1)/2}T_q)^{-rk/2}(f(q^{(-k-1)/2}T_q)E_{i,i+p}\\ &-(\epsilon)^k f(q^{(k+1)/2}T_q^{-1})E_{N+1-i-p,N+1-i})|f(w)\in I_{-j}^i,\ 1\leq i\leq N-p,\ i\neq(N+1-p)/2\}\\ &\bigcup\delta_{N-p,\text{impar}}\{z^{-k}(q^{(-k-1)/2}T_q)^{-rk/2}g(q^{(-k-1)/2}T_q)E_{(N+1-p)/2,(N+1+p)/2}|g(w)\in I_{-j}^{(N+1-p)/2}\}\\ &\bigcup\{z^{-k-1}(q^{-1-k/2}T_q)^{-r(k+1)/2}(h(q^{-1-k/2}T_q)E_{i,i-N+p}\\ &-(\epsilon)^{(k+1)}h((q^{-1-k/2}T_q)^{-1})E_{2N+1-i-p,N+1-i})|h(w)\in I_{-j}^i,\ N+1-p\leq i\leq N,\ i\neq(2N+1-p)/2\}\\ &\bigcup\delta_{p,\text{impar}}\{z^{-k-1}(q^{-1-k/2}T_q)^{-r(k+1)/2}\tilde{g}(q^{-1-k/2}T_q)E_{(2N+1-p)/2,(1+p)/2}|\tilde{g}(w)\in I_{-j}^{(2N+1-p)/2}\},\end{aligned} \tag{3.2}$$

donde I_{-j}^i es un subespacio de $\mathbb{C}[w,w^{-1}]$, $I_{-j}^{(N+1-p)/2}$ es un subespacio de $\mathbb{C}[w,w^{-1}]^{\epsilon,k}$ y $I_{-j}^{(2N+1-p)/2}$ es un subespacio de $\mathbb{C}[w,w^{-1}]^{\epsilon,k+1}$.

Procederemos a chequear las condiciones (P1),(P2) y (P3) enunciados en la Sección 1.1 para $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$.

Observemos que (P1) es inmediato por la definición de $(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_0$. (P2) resulta de calcular los siguientes corchetes

$$[z^l(q^{(l-1)/2}T_q)^{lr/2}(f(T_q)E_{i,j}-(\epsilon)^l f(T_q^{-1})E_{N+1-j,N+1-i}),E_{j,j-1}-E_{N+2-j,N+1-j}],$$

y el caso particular

$$[z^l(q^{(l-1)/2}T_q)^{lr/2}(f(T_q)E_{N/2,N/2}-(\epsilon)^l f(T_q^{-1})E_{N/2+1,N/2+1}), E_{N/2,N/2-1}-E_{N/2+2,N/2+1}].$$

Para probar (P3), sean $f(w)$, $g(w)$ polinomios de Laurent en la variable w con $f\,\epsilon I^i_{-j}$, y sea $\mathfrak{p}_{-j}$ con $j = kN + p$ como en (3.2). Consideremos primero $1 \leq i \leq N - p$. Si $p = 0$, supongamos $i \neq (N + 1)/2$. Calculamos el siguiente corchete

$$[z^{-k}(q^{(-k-1)/2}T_q)^{-rk/2}(f(q^{(-k-1)/2}T_q)E_{i,i}-(\epsilon)^k f(q^{(k+1)/2}T_q^{-1})E_{N+1-i,N+1-i}),$$
$$g(q^{-1/2}T_q)E_{i,i}-g(q^{1/2}T_q^{-1})E_{N+1-i,N+1-i}]$$

Luego, I^i_{-j} satisface

$$A_j I^i_{-j} \subseteq I^i_{-j}, \tag{3.3}$$

donde $A_j = \{g(q^{k/2}w) - g(q^{-k/2}w) : g(w) \in \mathbb{C}[w, w^{-1}]\}$.

Si $p \neq 0$, supongamos que $i \neq N + 1 - i$. Calculando el siguiente corchete

$$[z^{-k}(q^{(-k-1)/2}T_q)^{-rk/2}(f(q^{(-k-1)/2}T_q)E_{i,i+p}-(\epsilon)^k f(q^{(k+1)/2}T_q^{-1})E_{N+1-i-p,N+1-i}),$$
$$g(q^{-1/2}T_q)E_{i,i}-g(q^{1/2}T_q^{-1})E_{N+1-i,N+1-i}],$$

se puede ver que I^i_{-j} satisface (3.3) para $A_j = \{g(q^{k/2}w) : g(w) \in \mathbb{C}[w, w^{-1}]\}$.

Por último, si $N + 1 - p \leq i \leq N$, se puede observar calculando

$$[z^{-k-1}(q^{-1-k/2}T_q)^{-r(k+1)/2}(f(q^{-1-k/2}T_q)E_{i,i-N+p}-(\epsilon)^{k+1}f(q^{1+k/2}T_q^{-1})E_{2N+1-i-p,N+1-i}),$$
$$g(q^{-1/2}T_q)E_{i,i}-g(q^{1/2}T_q^{-1})E_{N+1-i,N+1-i}]$$

que I^i_{-j} satisface también (3.3), esta vez para $A_j = \{g(q^{(-1-k)/2}w) : g(w) \in \mathbb{C}[w, w^{-1}]\}$.

Resultados análogos valen para $I^{(N+1-p)/2}_{-j}$, si $N - p$ es impar, calculando

$$[z^{-k}(q^{(-k-1)/2}T_q)^{-kr/2}(f(q^{(-k-1)/2}T_q)E_{(N+1-p)/2,(N+1+p)/2},$$
$$g(q^{-1/2}T_q)E_{i,i}-g(q^{1/2}T_q^{-1})E_{N+1-i,N+1-i}],$$

y si p es impar para $I^{(2N+1-p)/2}_{-j}$, calculando

$$[z^{-k-1}(q^{-1-k/2}T_q)^{-r(k+1)/2}(f(q^{-1-k/2}T_q)E_{(2N+1-p)/2,(1+p)/2},$$
$$g(q^{-1/2}T_q)E_{i,i}-g(q^{1/2}T_q^{-1})E_{N+1-i,N+1-i}]$$

Luego, dado que $\mathbb{C}[w, w^{-1}]$ es un dominio de ideales principales, hemos probado lo siguiente

Lema 3.1.1. *Para $j > 0$,*

(a) I^i_{-j}, $I^{(N+1-p)/2}_{-j}$ e $I^{(2N+1-p)/2}_{-j}$ son ideales;

(b) si $I^i_{-j} \neq 0$, $I^{(N+1-p)/2}_{-j} \neq 0$ y $I^{(2N+1-p)/2}_{-j} \neq 0$, entonces tienen codimensión finita en $\mathbb{C}[w, w^{-1}]$.

En adelante denotaremos $[k]$ a la parte entera de un número k. Ahora tenemos la siguiente proposición importante.

Proposición 3.1.2. *(a) Cualquier elemento no nulo $d \in (\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_{-1}$ es no degenerado.*

(b) Cualquier subálgebra parabólica de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$ es no degenerada.

(c) Sea $d \in (\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_{-1}$,

$$\begin{aligned} d = &\sum_{i=1}^{[N/2]-\delta_{N,par}} f_i(q^{-1/2}T_q)E_{i,i+1} - f_i(q^{1/2}T_q^{-1})E_{N-i,N+1-i} \\ &+ \delta_{N,par} g(q^{-1/2}T_q)E_{N/2,N/2+1} + z^{-1}(q^{-1}T_q)^{-r/2}h(q^{-1}T_q)E_{N,1}, \end{aligned}$$

donde $f_i(w)$, $g(w)$ y $h(w)$ son polinomios de Laurent tales que $g(w^{-1}) = -g(w)$ y $h(w^{-1}) = -\epsilon h(w)$. Entonces

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_0^d := &[(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_1, d] \\ &= span\{f_{k-1}(q^{-1/2}T_q)(q^{-1/2}T_q)^l(E_{k-1,k-1} - E_{k,k}) \\ &+ f_{k-1}(q^{1/2}T_q^{-1})(q^{-1/2}T_q)^{-l}(E_{N-k+1,N-k+1} - E_{N+2-k,N+2-k}) : \\ &2 \le k \le [N/2] + \delta_{N,impar}, l \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\} \\ &\cup \delta_{N,par}\{g(q^{-1/2}T_q)((q^{-1/2}T_q)^n - (q^{-1/2}T_q)^{-n})(E_{N/2,N/2} - E_{N/2+1,N/2+1}) : \\ &n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, g \in \mathbb{C}[w,w^{-1}]^{\epsilon,0}\} \\ &\cup \{h(T_q)(T_q^m - \epsilon T_q^{-m})E_{N,N} - h(q^{-1}T_q)((q^{-1}T_q)^m - \epsilon(q^{-1}T_q)^{-m})E_{1,1} \\ &+ tr_0(\epsilon h(q^{1/2}w^{-1})(w^m - \epsilon w^{-m}))C : m \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{C}[w,w^{-1}]^{\epsilon,1}\}. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $0 \ne d \in (\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_{-1}$, por Lema (1.1.1), parte (a), $\mathfrak{p}_{-j}^d \ne 0$ para todo $j \ge 1$. Luego, por Lema (3.1.1) parte (b), se sigue la parte (a). Sea $\mathfrak{p}$ una subálgebra parabólica de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$, utilizando Lemas 1.2.1 y 1.2.2 en Sección 1.1, obtenemos que $\mathfrak{p}_{-1} \ne 0$. Luego, haciendo uso de (a) y $\mathfrak{p}^d \subseteq \mathfrak{p}$ (para cualquier $d \in \mathfrak{p}_{-1}$ no nulo) obtenemos (b). Finalmente, la parte (c) sigue de calcular los conmutadores $[d, a]$ con
$a = (q^{-1/2}T_q)^l E_{k,k-1} - (q^{-1/2}T_q)^{-l}E_{N+2-k,N+2-k}$ con $2 \le k \le [N/2] + \delta_{N,impar}$;
$a = \delta_{N,par}((q^{-1/2}T_q)^n - (q^{-1/2}T_q)^{-n})E_{N/2+1,N/2}$ y $a = zT_q^{r/2}(T_q^m - T_q^{-m})E_{1,N}$, con l, n, $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$. □

Resumiendo, hemos probado que las siguientes propiedades se satisfacen para $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$:

(P1) $(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_0$ es conmutativo;

(P2) si $a \in (\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_{-j}$ $(j > 0)$ y $[a, (\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_1] = 0$, entonces $a = 0$;

(P3) si $\mathfrak{p}$ es una subálgebra parabólica no degenerada de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$, entonces existe un elemento no degenerado a, tal que $\mathfrak{p}^a \subseteq \mathfrak{p}$.

Observemos que (P3) se sigue de la Proposición 3.1.2, partes (a) y (b).

3.2. Caracterización de módulos de peso máximo cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$

Comenzaremos ahora con el estudio de las representaciones cuasifintas sobre $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$.

Consideraremos en adelante $\lambda \in (\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_0^*$. Una funcional λ es descripta por sus *etiquetas*,

$$\triangle_{i,l} = \lambda((q^{-1/2}T_q)^l E_{i,i} - (q^{-1/2}T_q)^{-l} E_{N+1-i,N+1-i}),$$
$$\triangle_{N,l} = \lambda((T_q^l + T_q^{-l})E_{N,N} - ((q^{-1}T_q)^l + (q^{-1}T_q)^{-l})E_{1,1})$$

con $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$ y la *carga central* $c = \lambda(C)$. Consideremos las series generatrices

$$\triangle_i(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} -x^{-l} \triangle_{i,l} \quad 1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par} \quad \text{y} \quad \triangle_N(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} -x^{-l} \triangle_{N,l}\,. \tag{3.1}$$

Recordemos que un *cuasipolinomio* es una combinación lineal de funciones de la forma $p(x)q^{\alpha x}$, donde $p(x)$ es un polinomio y $\alpha \in \mathbb{C}$. Esto es, satisface una ecuación diferencial lineal no trivial con coeficientes constantes. Recordemos también la siguiente proposicíon bien conocida.

Proposición 3.2.1. *Dado un cuasipolinomio P, y un polinomio $B(x) = \prod_i (x - A_i)$, tomemos $b(x) = \prod_i (x-a_i)$ donde $a_i = e^{A_i}$, entonces $b(x)(\sum_{n \in \mathbb{Z}} P(n)x^{-n}) = 0$ si y sólo si $B(d/dx)P(x) = 0$.*

Si el polinomio B es par decimos que P es un *cuasipolinomio par*. Como consecuencia, tenemos la siguiente caracterización de módulos de peso máximo cuasifinito sobre $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$.

Teorema 3.2.2. *Un $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulo $L(\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. *Existen polinomios mónicos $b_1(w), \cdots, b_{[N/2]-\delta_{N,par}}(w), b_N^\epsilon(w)$ tales que*

$$b_i(x)(\triangle_{i+1}(x) - \triangle_i(x)) = 0 \quad \textit{para} \quad 1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par} \quad \textit{y} \tag{3.2}$$
$$b_N^\epsilon(x)(\triangle_N(x) + 2c) = 0 \tag{3.3}$$

Más aún, si N es par existe un polinomio mónico $b_{N/2}(x)$ tal que

$$b_{N/2}(x)(\triangle_{1+N/2}(x) - \triangle_{N/2}(x)) = 0 \tag{3.4}$$

2. Existen cuasipolinomios P_i y cuasipolinomios pares P_N^{ϵ} tales que $(n \in \mathbb{N})$

$$P_i(n) = \triangle_{i,n} - \triangle_{i+1,n} \quad \textit{para} \quad 1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par} \quad \textit{y} \tag{3.5}$$

$$P_N^{\epsilon}(n) = \triangle_{N,n} \quad \textit{para} \quad n \neq 0 \quad \textit{y} \quad P_N^{\epsilon}(0) = -2c. \tag{3.6}$$

Más aún, si N es par existe un cuasipolinomio par $P_{N/2}$ tal que

$$P_{N/2}(n) = \triangle_{N/2,n} - \triangle_{N/2+1,n}. \tag{3.7}$$

Demostración. Como consecuencia de la Proposición 3.1.2 parte (c) y el Teorema 1.1.4 parte (b), tenemos que $L(\lambda)$ es cuasifinito si y sólo si existen polinomios de Laurent (mónicos)

$$h^{\epsilon}(w) = \sum_{t=0}^{p} c_t(w^t - \epsilon w^{-t}), \quad g(w) = \sum_{s=0}^{u} d_s(w^s - w^{-s}), \quad f_i(w) = \sum_{v=-m_i}^{m_i} a_{i,v} w^v$$

para $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$, tales que para cada l, n, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, tenemos

$$\begin{aligned} &\lambda(f_{k-1}(q^{-1/2}T_q)(q^{-1/2}T_q)^l(E_{k-1,k-1} - E_{k,k}) \\ &\quad + f_{k-1}(q^{1/2}T_q^{-1})(q^{-1/2}T_q)^{-l}(E_{N-k+1,N-k+1} - E_{N+2-k,N+2-k})) = 0 \end{aligned}$$

con $1 < k \leq [N/2] - \delta_{N,par}$,

$$\begin{aligned} &\lambda(h^{\epsilon}(T_q)(T_q^m - \epsilon T_q^{-m})E_{N,N} - h^{\epsilon}(q^{-1}T_q)((q^{-1}T_q)^m - \epsilon(q^{-1}T_q)^{-m})E_{1,1} \\ &\quad + tr_0(\epsilon h^{\epsilon}(q^{1/2}w^{-1})(w^m - \epsilon w^{-m}))C) = 0, \end{aligned}$$

y

$$\delta_{N,par}\lambda(g(q^{-1/2}T_q)((q^{-1/2}T_q)^n - (q^{-1/2}T_q)^{-n})(E_{N/2,N/2} - E_{N/2+1,N/2+1})) = 0.$$

Estas condiciones pueden reescribirse como:

$$0 = \sum_{v=-m_i}^{m_i} a_{i,v}(\triangle_{i,v+l} - \triangle_{i+1,v+l}) \tag{3.8}$$

para todo $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,even}$ y $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, y

$$0 = \sum_{t=0}^{p} c_t(\triangle_{N,t+m} - \epsilon\triangle_{N,t-m}) + tr_0(\epsilon h^\epsilon(q^{1/2}w^{-1})(w^m - \epsilon w^{-m}))C) = 0 \tag{3.9}$$

con $m \in \mathbb{N}$. Finalmente, si N es par,

$$0 = \sum_{s=0}^{u} d_s(\triangle_{N/2,s+n} - \triangle_{N/2,-s+n} + \triangle_{1+N/2,-s+n} - \triangle_{1+N/2,s+n}) \tag{3.10}$$

con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sea

$$F_k(x) = \triangle_k(x) - \triangle_{k+1}(x)$$

para $1 < k \leq [N/2] - \delta_{N,even}$.

Analicemos primero (3.8). Multiplicando ambos lados por x^{-l} y sumando sobre $l \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$0 = \sum_{v=-m_i}^{m_i} a_{i,v}x^v F_i(x) = f_i(x)F_i(x). \tag{3.11}$$

Definimos $\tilde{b}_i(x) = x^{m_i} f_i(x) \in \mathbb{C}[x]$. La equivalencia entre (1) y(2) para este caso es consecuencia del hecho que (3.2) vale si y sólo si, multiplicando a ambos lados de esta fórmula por x^{m_i} con $m_i \geq 0$, también vale. Gracias a la Proposición 3.2.1, la existencia de los cuasipolinomios $P_i(x)$ para $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$ es clara.

Estudiemos ahora (3.9). Haciendo uso de la definición de tr_0 dada en la Sección 1.3.1 y el hecho que $\triangle_{N,l} = \triangle_{N,-l}$, tenemos

$$0 = \sum_{t=0}^{p} c_t(\triangle_{N,t+m} - \epsilon\triangle_{N,t-m}) - 2\epsilon c_m c.$$

Multiplicando a ambos lados por $x^m - \epsilon x^{-m}$ y sumando sobre $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, obtenemos

$$0 = \sum_{t=0}^{p} c_t(x^{-t} - \epsilon x^t) \triangle_N (x) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} (x^m - \epsilon x^{-m})(2\epsilon c_m c) = -\epsilon h^\epsilon(x)(\triangle_N(x) + 2c).$$

Una vez más, (3.3) vale si y sólo si, multiplicando ambos lados de esta fórmula por x^p con $p \geq 0$, también vale. Ahora, $b^\epsilon(x) = x^p h^\epsilon(x) \in \mathbb{C}[x]$. Dado que $h^\epsilon(x^{-1}) = -\epsilon h^\epsilon(x)$ se puede ver fácilmente que si $\alpha \neq 0$ es raíz de $b^\epsilon(x)$, entonces $1/\alpha$ también lo es. Ahora podemos aplicar la Proposición 3.2.1 y como consecuencia de la relación entre las raíces de B y b en esta proposición, se sigue que el $B^\epsilon(x)$ que corresponde a nuestro $b^\epsilon(x)$ es un polinomio par. Esto implica que el cuasipolinomio $P_N^\epsilon(x)$ tal que $P_N^\epsilon(n) = \triangle_{N,n}$ para $n \neq 0$ y $P(0) = 2c$ es par, completando la prueba para este caso.

Por último, analicemos (3.10) para el caso N par. Procediendo de manera similar a la ecuación anterior, multiplicamos por $(x^n - x^{-n})$ y sumamos sobre $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Haciendo uso del hecho que $\triangle_{1+N/2,l} = -\triangle_{N/2,-l}$ obtenemos

$$0 = \sum_{s=0}^{u} d_s(x^s - x^{-s})(\triangle_{N/2}(x) - \triangle_{N/2+1}(x)) = g(x)F_{N/2}(x).$$

Ahora $\hat{b}_{N/2}(x) = x^u g(x) \in \mathbb{C}[x]$. Utilizando nuevamente la Proposición 3.2.1 probamos que $P_{N/2}(x)$ tal que $P_{N/2}(n) = \triangle_{N/2,n} - \triangle_{N/2+1,n}$ para $n \in \mathbb{Z}$ es un cuasipolinomio par. □

Dado un $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulo irreducible de peso máximo cuasifinito V por Teorema 3.2.2, sabemos de la existencia de un cuasipolinomio $P_i(x)$ (para $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$) que satisface (3.5) y de un cuasipolinomio par $P_N^{\epsilon}(x)$ que verifica (3.6) (y si N es par, $P_{N/2}(x)$ que satisface (3.7)). Escribiremos

$$\begin{aligned} P_i(x) &= \sum_{s\in\mathbb{C}} p_{s,i}(x) q^{s_i x}, \\ P_N^{\epsilon}(x) &= \sum_{j\in\mathbb{C}} p_{j,N}^{\epsilon}(x)\cosh_q(e_j^+ x) + \sum_{j\in\mathbb{C}} q_{j,N}^{\epsilon}(x)\sinh_q(e_j^- x) \qquad \text{y} \\ P_{N/2}(x) &= \sum_{j\in\mathbb{C}} p_{j,N/2}(x)\cosh_q(e_j^+ x) + \sum_{j\in\mathbb{C}} q_{j,N/2}(x)\sinh_q(e_j^- x), \end{aligned} \tag{3.12}$$

con $p_{j,N}(x)$ y $p_{j,N/2}(x)$ (respectivamente, $q_{j,N}(x)$ y $q_{j,N/2}(x)$) polinomios pares (respectivamente, impares), $p_{s,i}(x)$ un polinomio, s_i, e_i^+ y e_j^- números complejos distintos, $\cosh_q(x) = \frac{q^x+q^{-x}}{2}$ y $\sinh_q = \frac{q^x-q^{-x}}{2}$. Las últimas dos expresiones en (3.12) son únicas salvo un signo de e_i^+ o un cambio de signos simultáneo de e_j^- y el respectivo $q_j(x)$. Llamamos e_i^+ (respectivamente, e_j^-) *exponentes de* V de *tipo par* (respectivamente, *tipo impar*) con *multiplicidades* $p_j(x)$ (respectivamente, $q_j(x)$). Como en [KWY], denotamos e^+ al conjunto de exponentes de tipo par con multiplicidad $p_j(x)$ y por e^- al conjunto de exponentes de tipo impar con multiplicidad $q_j(x)$. Análogamente para la primera fórmula, llamamos s_i a los *exponentes de* V con *multiplicidades* $p_{s,i}(x)$, y denotamos e al conjunto de los exponentes con multiplicidades $p_{s,i}(x)$. Denotaremos a este módulo $L(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}; e; e^+; e^-)$.

3.3. Relación entre $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$ y las álgebras de Lie clásicas A, B, C y D

Recordemos las siguientes definiciones de Sección 1.4.3: $\mathcal{O}$ el álgebra de todas las funciones holomorfas en $\mathbb{C}^{\times}$ con la topología de convergencia uniforme en conjuntos compactos, y

$$\mathcal{O}^{\epsilon,j} = \{f \in \mathcal{O} | f(w) = -\epsilon^j f(w^{-1})\}.$$

Recordemos también que el corchete en $\mathcal{S}_{q,N}$ se extiende a $(\mathcal{S}_{q,N})^{\mathcal{O}}$. De manera similar, definimos una completación $(\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N})^{O}$ de $\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}$ que consiste de todos los operadores pseudo diferenciales de la forma

$$\{z^k(q^{(k-1)/2}T_q)^{rk/2}(f(q^{(k-1)/2}T_q)E_{i,j} - (\epsilon)^k f((q^{(k-1)/2}T_q)^{-1})E_{N+1-j,N+1-i}) : \\ k \in \mathbb{Z},\, 1 \le i < j \le N,\, f \in \mathcal{O}\},$$

y la diagonal opuesta

$$\{z^k(q^{(k-1)/2}T_q)^{rk/2}(f(q^{(k-1)/2}T_q)E_{i,N+1-i} : k \in \mathbb{Z},\, 1 \le i \le N,\, f \in \mathcal{O}^{\epsilon,k}\}.$$

Entonces el 2-cociclo ψ en $\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}$ se extiende a un 2-cociclo ψ en $(\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N})^{\mathcal{O}}$. Recordemos que $\mathcal{S}'_{q,N}$ denota el álgebra derivada de $\mathcal{S}_{q,N}$. Sea $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\mathcal{O}}} = \mathcal{S}_{q,N}^{\mathcal{O}\prime} + \mathbb{C}C$ la correspondiente extensión central.

Dados $s \in \mathbb{C}$ y $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, tenemos por (1.4.8), que las inmersiones $\varphi_s^{[m]} : \mathcal{S}_{q,N} \longrightarrow g\ell_\infty^{[m]}$ ($\varphi_s^{[m]} : (\mathcal{S}_{q,N})^{\mathcal{O}} \longrightarrow g\ell_\infty^{[m]}$) dados por

$$\varphi_s^{[m]}(z^k f(T_q)E_{i,j}) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} f(sq^{-l+t})E_{(l-k)N-i+1,lN-j+1}$$

son homomorfismos de álgebras de Lie. Una restricción de estos homomorfismos a $\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}$ da una familia de homomorfismos de álgebras de Lie $\varphi_s^{[m]} : \mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N} \longrightarrow g\ell_\infty^{[m]}$ ($\varphi_s^{[m]} : (\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N})^{\mathcal{O}} \longrightarrow g\ell_\infty^{[m]}$).

$$\begin{aligned}
&\varphi_s^{[m]}(z^k(q^{(k-1)/2}T_q)^{rk/2}(f(q^{(k-1)/2}T_q)E_{i,j} - (\epsilon)^k f((q^{(k-1)/2}T_q)^{-1})E_{N+1-j,N+1-i}))\\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \Big((sq^{-l+t+(k-1)/2})^{kr/2}(f(sq^{-l+t+(k-1)/2})E_{(l-k)N-i+1,lN-j+1}\\
&\qquad\qquad - \epsilon^k f(s^{-1}q^{l-t-(k-1)/2})E_{(l-k-1)N+j,(l-1)N+i}\Big).
\end{aligned}$$

Para cada $s \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$, sea

$$I_{s,k}^{[m]} = \{f \in \mathcal{O} : f^{(i)}(sq^{(k-1)/2+n}) = 0 \text{ y } f^{(i)}(s^{-1}q^{-(k-1)/2-n}) = 0,\, \forall\, n \in \mathbb{Z}, 0 \le i \le m\}$$

y

$$\tilde{I}_{s,k,\epsilon}^{[m]} = \{f \in \mathcal{O}^{\epsilon,j} : f^{(i)}(sq^{(k-1)/2+n}) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}, 0 \le i \le m\}.$$

Sea

$$\begin{aligned}
J_s^{[m],r,\epsilon} &= \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\{z^k(q^{(k-1)/2}T_q)^{rk/2}(f(q^{(k-1)/2}T_q)E_{i,j} - (\epsilon)^k f((q^{(k-1)/2}T_q)^{-1})E_{N+1-j,N+1-i}) :\\
&\qquad 1 \le i < j \le N,\, f \in I_{s,k}^{[m]}\}\\
&\oplus\ \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\, \{z^k(q^{(k-1)/2}T_q)^{rk/2}(f(q^{(k-1)/2}T_q)E_{i,N+1-i} : 1 \le i \le N,\, f \in \tilde{I}_{s,k,\epsilon}^{[m]}\}.
\end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de Taylor en $\varphi_s^{[m]} : \mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N} \longrightarrow g\ell_\infty^{[m]}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\varphi_s^{[m]}(z^k(q^{(k-1)/2}T_q)^{rk/2}(f(q^{(k-1)/2}T_q)E_{i,j} - (\epsilon)^k f((q^{(k-1)/2}T_q)^{-1})E_{N+1-j,N+1-i}))\\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{r=0}^{m} \big((q^{\frac{k-1}{2}-l+t}s)^{\frac{kr}{2}} f(q^{\frac{k-1}{2}-l+t}s)\big)^{(r)} \big|_{t=0} \frac{t^r}{r!} E_{(l-k)N+1-i,lN+1-j}\\
&- \epsilon^k \big((q^{\frac{k-1}{2}-l+t}s^{-1})^{\frac{kr}{2}} f(q^{\frac{1-k}{2}+l-t}s^{-1})\big)^{(r)} \big|_{t=0} \frac{(-t)^r}{r!} E_{(l-k-1)N+j,(l-1)N+i}.
\end{aligned}$$

De la misma manera, para los elementos de la diagonal opuesta, tenemos

$$\varphi_s^{[m]}(z^k(q^{(k-1)/2}T_q)^{rk/2}f(q^{(k-1)/2}T_q)E_{i,N+1-i}) =$$
$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{r=0}^{m}\left((q^{\frac{k-1}{2}-l+t}s)^{\frac{kr}{2}}f(q^{\frac{k-1}{2}-l+t}s)\right)^{(r)}\Big|_{t=0}\frac{t^r}{r!}E_{(l-k)N+1-i,(l-1)N+i}.$$

Luego, se sigue que

$$\text{Nu }\varphi_s^{[m]} = J_s^{[m],r,\epsilon}. \tag{3.1}$$

Para lo que sigue elegiremos una rama del $\log q$. Sea $\tau = \log q/2\pi i$. Entonces un elemento $s \in \mathbb{C}^\times$ se escribe de manera única como $s = q^a$, con $a \in \mathbb{C}/\tau^{-1}\mathbb{Z}$. Fijemos $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_M) \in \mathbb{C}^M$ de forma tal que si cada $s_i = q^{a_i}$, tenemos

$$a_i - a_j \notin \mathbb{Z} + \tau^{-1}\mathbb{Z} \quad \text{ para } i \neq j, \tag{3.2}$$

y $\vec{m} = (m_1, \cdots, m_M) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^M$. Sea $g\ell_\infty^{[\vec{m}]} = \oplus_{i=1}^M g\ell_\infty^{[m_i]}$. Consideremos el homomorfismo

$$\varphi_s^{[\vec{m}]} = \oplus_{i=1}^M \varphi_{s_i}^{[m_i]} : (\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N})^{\mathcal{O}} \longrightarrow g\ell_\infty^{[\vec{m}]}.$$

Proposición 3.3.1. *Dado $\vec{s}$ y $\vec{m}$ como arriba, tenemos la sucesión exacta de álgebras de Lie $\mathbb{Z}$-graduadas, siempre que $|q| \neq 1$:*

$$0 \to J_{\vec{s}}^{[\vec{m}],r,\epsilon} \to (\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N})^{\mathcal{O}} \to g\ell_\infty^{[\vec{m}]} \to 0, \tag{3.3}$$

donde $J_{\vec{s}}^{[\vec{m}],r,\epsilon} = \cap_{i=1}^M J_{s_i}^{[m_i],r,\epsilon}$.

Demostración. La inyectividad es clara gracias a (3.1). Por simplicidad, probaremos la suryectividad de $\varphi_s^{[\vec{m}]}$ para el caso $M = 1$, $\vec{m} = m$ y $\vec{s} = s = q^a$. Haremos uso del conocido resultado que para toda sucesión discreta de puntos de $\mathbb{C}$ y un entero no negativo m existe $f(w) \in \mathcal{O}$ con valores prescritos en sus primeras m derivadas en esos puntos. Por las condiciones (3.2) y $|q| \neq 1$ y dado que $a \notin \mathbb{Z}/2$ tenemos que $\{q^{(n-1)/2+j+a}\}$ y $\{q^{-(n-1)/2-j-a}\}$ son sucesiones de puntos discretas y disjuntas en $\mathbb{C}$. Luego, podemos encontrar un $f \in \mathcal{O}$ tal que cada elemento $t^j E_{a,b}$ está en la imagen, completando la prueba. □

Procuraremos ahora extender el homomorfismo $\varphi_s^{[m]}$ a un homomorfismo entre las extensiones centrales de las correspondientes álgebras de Lie.

Proposición 3.3.2. *La aplicación $\mathbb{C}-$lineal $\widehat{\varphi}_s^{[m]} : \widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}} \to \widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ definida por ($s = q^a$),*

$$\widehat{\varphi}_s^{[m]}|_{(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_j} = \varphi_s^{[m]}|_{(\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N})_j} \qquad si\ j \neq 0, \tag{3.4}$$

$$\widehat{\varphi}_s^{[m]}(q^{-n/2}T_q^n E_{i,i} - q^{n/2}T_q^{-n}E_{N+1-i,N+1-i}) = \varphi_s^{[m]}(q^{-n/2}T_q^n E_{i,i} - q^{n/2}T_q^{-n}E_{N+1-i,N+1-i})$$
$$-\sum_{j=1}^{m}\frac{q^{(a-1)n} + (-1)^j q^{(-a+1)n}}{q^{n/2} - q^{-n/2}}(n\log q)^j\frac{t^j}{j!} \quad (n \neq 0),$$

$$\widehat{\varphi}_s^{[m]}(C) = 1 \in R_m,$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie sobre $\mathbb{C}$.

Demostración. La demostración resulta de la restricción de la fórmula $\widehat{\varphi}_s^{[m]}$ en (1.14), a $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$. □

El homomorfismo $\varphi_s^{[m]}$ está definido para cualquier $s \in \mathbb{C}$. Sin embargo, para $a \in \mathbb{Z}/2$, pierde la suryectividad. Estos casos son descritos por las siguientes proposiciones.

Proposición 3.3.3. *Para* $a = 1$, *tenemos la siguiente sucesión exacta de álgebras de Lie:*

$$0 \to J_s^{[m],k,\epsilon} \to (\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N})^{\mathcal{O}} \to \mathfrak{g} \to 0$$

donde $\mathfrak{g} \simeq \bar{d}_\infty^{[m]}$ *si* $\epsilon = 1$ *y* $\mathfrak{g} \simeq \bar{c}_\infty^{[m]}$ *si* $\epsilon = -1$.

Demostración. Probaremos primero el caso $\epsilon = 1$. Por la Proposición 1.4.8, el homomorfismo $\varphi_s^{[m]} : \mathcal{S}_{q,N} \to g\ell_\infty^{[m]}$ es suryectivo. La anti-involución de $\mathcal{S}_{q,N}$ definida en (3.1) se transfiere, via $\varphi_s^{[m]}$, a una anti-involución $\omega : g\ell_\infty^{[m]} \to g\ell_\infty^{[m]}$ como sigue

$$\omega(u^k E_{i,j}) = (-u)^k E_{1-j,1-i}. \tag{3.5}$$

Luego, el álgebra de Lie de $-\sigma$ puntos fijos en $\mathcal{S}_{q,N}$, explícitamente, $\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}$, se mapea de forma suryectiva al álgebra de Lie de $-\omega$ puntos fijos en $g\ell_\infty^{[m]}$, explícitamente, $\bar{d}_\infty^{[m]}$. Si $\epsilon = -1$, la anti-involución ω es como sigue

$$\omega(u^k E_{i,j}) = (-1)^{q_j - q_i}(-u)^k E_{1-j,1-i},$$

donde $i = q_i N + r_i$ y $j = q_j N + r_j$, con $1 \leq r_i \leq N$ y $1 \leq r_j \leq N$. Como consecuencia de la suryectividad descrita anteriormente, basta con mostrar que ω es conjugado por un automorfismo T' de $g\ell_\infty^{[m]}$ a la anti-involución que define $\bar{c}_\infty^{[m]}$. Con ese fin, definimos

$$T'(u^m E_{a,b} - \epsilon^{q_b - q_a}(-u)^m E_{1-b,1-a}) = u^m E_{a,b} - \epsilon^{a+b}(-u)^m E_{1-b,1-a}, \tag{3.6}$$

donde $a = q_a N + r_a$ y $b = q_b N + r_b$, con $0 \leq r_a \leq N-1$ y $0 \leq r_b \leq N-1$. Es fácil ver que ω es conjugado por T' a la anti-involución que define $\bar{c}_\infty^{[m]}$. □

Proposición 3.3.4. *Si* $a = 1/2$ *y* N *es impar, tenemos la siguiente sucesión exacta de álgebras de Lie:*

$$0 \to J_s^{[m],k,\epsilon} \to (\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N})^{\mathcal{O}} \to \mathfrak{g} \to 0,$$

donde $\mathfrak{g} \simeq \bar{b}_\infty^{+[m]}$ *si* $\epsilon = 1$ *y* $\mathfrak{g} \simeq \bar{b}_\infty^{-[m]}$ *si* $\epsilon = -1$.

Demostración. Si $\epsilon = 1$, reemplazamos en la prueba de la última proposición a ω por

$$\omega(u^k E_{i,j}) = (-u)^k E_{-N+1-j,-N+1-i}. \tag{3.7}$$

Luego, el álgebra de Lie de $-\sigma$ puntos fijos en $\mathcal{S}_{q,N}$, explícitamente, $\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}$, se mapea suryectivamente al álgebra de Lie de $-\omega$ puntos fijos en $g\ell_\infty^{[m]}$. Como consecuencia, basta con ver que ω es conjugado por un automorfismo T de $g\ell_\infty^{[m]}$ a la anti-involución que define $\bar{b}_\infty^{+[m]}$. Entonces, definimos

$$T(u^r E_{i,j}) = u^r E_{(-N+1)/2+i,(-N+1)/2+j}. \tag{3.8}$$

Se puede chequear con facilidad que esto se extiende a un automorfismo del álgebra $g\ell_\infty^{[m]}$ que conjuga a ω a la anti-involución que define $\bar{b}_\infty^{+[m]}$. Si $\epsilon = -1$, ω es el siguiente

$$\omega(u^k E_{i,j}) = (-1)^{q_i-q_j}(-u)^k E_{-N+1-j,-N+1-i}, \tag{3.9}$$

donde $i = q_iN + r_i$ y $j = q_jN + r_j$, con $1 \le r_i \le N$ y $1 \le r_j \le N$. El automorfismo de $g\ell_\infty^{[m]}$ para este caso es $D = T \circ T'$, donde T es la misma que para el caso anterior y es

$$T'(u^m E_{a,b} - \epsilon^{q_b-q_a}(-u)^m E_{-b,-a}) = u^m E_{a,b} - \epsilon^{a+b}(-u)^m E_{-b,-a}, \tag{3.10}$$

con $a = q_aN + r_a$ y $b = q_bN + r_b$, para $0 \le r_a \le N-1$ y $0 \le r_b \le N-1$. Es fácil ver que ω es conjugado por D a la anti-involución que define a $\bar{b}_\infty^{-[m]}$. □

Proposición 3.3.5. *Si $a = 1/2$ y N es par, tenemos la siguiente sucesión exacta de álgebras de Lie:*

$$0 \to J_s^{[m],k,\epsilon} \to (\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N})^{\mathcal{O}} \to \bar{d}_\infty^{[m]} \to 0.$$

Demostración. Esta demostración sigue los mismos pasos de la proposición anterior. Si $\epsilon = 1$, como ω es la misma que en dicha proposición, basta con reemplazar a T por

$$T(u^r E_{i,j}) = u^r E_{-N/2+i,-N/2+j}. \tag{3.11}$$

El resto de la prueba es la misma para este caso. Si $\epsilon = -1$, ω tiene la misma fórmula que en el mismo caso de la proposición anterior, por lo cual basta con reemplazar a T' por

$$T'(u^m E_{a,b} - \epsilon^{q_b-q_a}(-u)^m E_{1-b,1-a}) = u^m E_{a,b} - (-u)^m E_{1-b,1-a},, \tag{3.12}$$

donde $a = q_aN + r_a$ y $b = q_bN + r_b$, con $0 \le r_a \le N-1$ y $0 \le r_b \le N-1$. □

Observación 3.3.6. (a) Por abuso de notación, para $a = 1$ y $a = 1/2$, en vista de las Proposiciones 3.3.3 a 3.3.5, denotaremos nuevamente $\varphi_s^{[m]}$ al homomorfismo suryectivo de $\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}$ en $\bar{b}_\infty^{[m]}$ y $\bar{d}_\infty^{[m]}$, respectivamente, dado por el viejo $\varphi_s^{[m]}$ compuesto con el correspondiente isomorfismo introducido en la prueba de las proposiciones mencionadas.

(b) Recordemos que ν fue definida en (1.1). Consideremos el caso $\epsilon = 1$. Para $a \in \mathbb{Z}$ arbitrario, la imagen de $\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}$ bajo el homomorfismo $\varphi_{q^a}^{[m]}$ es $\nu^a(d_\infty^{[m]})$. De manera similar, si $a \in \mathbb{Z} + 1/2$, la imagen de $\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}$ bajo el homomorfismo $\varphi_{q^a}^{[m]}$ es $\nu^a(d_\infty^{[m]})$ si N es par y $\nu^a(b_\infty^{[m]})$ si N es impar. Como consecuencia, basta con estudiar los casos $a = 1$ y $a = 1/2$. Las mismas conclusiones pueden ser obtenidas para $\epsilon = -1$. Luego, sólo consideraremos $a = 1$ y $a = 1/2$ a lo largo de esta tesis.

Dados los vectores $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_M) = (q^{a_1}, \cdots, q^{a_M}) \in \mathbb{C}^M$ y $\vec{m} = (m_1, \cdots, m_M) \in \mathbb{Z}^M$ tales que si $a_i \in \mathbb{Z}$, entonces $a_i = 1$; si $a_i \in \mathbb{Z} + 1/2$ entonces $a_i = 1/2$; y $a_i - a_j \notin \mathbb{Z} + \tau^{-1}\mathbb{Z}$ para $i \neq j$. Combinando esto con las Proposiciones 3.3.1 a 3.3.5, obtenemos los homomorfismos suryectivos de álgebras de Lie

$$\varphi_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} = \oplus_{i=1}^{M} \varphi_{s_i}^{[m_i]} : (\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})^{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathfrak{g}^{[\vec{m}]} := \sum_{i=1}^{M} \mathfrak{g}^{[m_i]}, \tag{3.13}$$

donde si $\epsilon = 1$

$$\mathfrak{g}^{[m_i]} = \begin{cases} \widehat{g\ell}_{\infty}^{[m_i]} & \text{si } a_i \notin \mathbb{Z}/2, \\ \tilde{b}_{\infty}^{[m_i]} & \text{si } a_i = 1/2 \text{ y N es impar,} \\ d_{\infty}^{[m_i]} & \text{si } a_i = 1/2 \text{ y N es par ó } a_i = 1. \end{cases}$$

y si $\epsilon = -1$

$$\mathfrak{g}^{[m_i]} = \begin{cases} \widehat{g\ell}_{\infty}^{[m_i]} & \text{si } a_i \notin \mathbb{Z}/2, \\ b_{\infty}^{[m_i]} & \text{si } a_i = 1/2 \text{ y N es impar,} \\ d_{\infty}^{[m_i]} & \text{si } a_i = 1/2 \text{ y N es par,} \\ c_{\infty}^{[m]} & \text{si } a_i = 1. \end{cases}$$

3.4. Realización de los módulos de peso máximo cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$

En esta sección $\mathfrak{g}^{[m]}$ será $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$ o alguna de sus subálgebras de Lie clásicas. La prueba de esta proposición es estándar

Proposición 3.4.1. *El $\mathfrak{g}^{[m]}$-módulo $L(\mathfrak{g}^{[m]}, \lambda)$ es cuasifinito si y sólo si, salvo una cantidad finita, todos los ${}^{\dagger}h_j^{(i)}$ son cero, donde $\dagger$ representa a, b, c ó d dependiendo de si $\mathfrak{g}^{[m]}$ es $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$, $b_{\infty}^{[m]}$, $c_{\infty}^{[m]}$ ó $d_{\infty}^{[m]}$.*

Dada $\vec{m} = (m_1, \cdots, m_M) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^M$, tomemos un $\lambda_i \in (\mathfrak{g}^{[m_i]})_0^*$ cuasifinito para cada $1 \leq i \leq M$, y sea $L(\mathfrak{g}^{[m_i]}, \lambda_i)$ el correspondiente $\mathfrak{g}^{[m_i]}$-módulo. Sea $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_M)$. Entonces el producto tensorial

$$L(\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}, \vec{\lambda}) = \otimes_{i=1}^{M} L(\mathfrak{g}^{[m_i]}, \lambda_i) \tag{3.1}$$

es un $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}$-módulo irreducible, con $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]} = \oplus_{i=1}^{M} \mathfrak{g}^{[m_i]}$. El módulo $L(\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}, \vec{\lambda})$ puede ser considerado un $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulo via el homomorfismo $\varphi_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$ y será denotado $L_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}(\vec{\lambda})$. Necesitaremos los siguientes resultados.

Proposición 3.4.2. *Sea V un $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulo cuasifinito. Entonces la acción de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$ en V se extiende naturalmente a la acción de $(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_u^{\mathcal{O}}$ en V, para cualquier $u \neq 0$.*

Demostración. Sea $V = \oplus_p V_p$ la $\mathbb{Z}$-graduación de V, $dim V_p < \infty$ para todo p. Consideremos el espacio

$$\mathrm{Hom}(V, V) = \oplus_{p,q} \mathrm{Hom}(V_p, V_q)$$

con la topología de la suma directa de los espacios de dimensión finita $\mathrm{Hom}(V_p, V_q)$. Podemos asumir que los V_p son espacios normados, y los espacios $\mathrm{Hom}(V_p, V_q)$ tienen normas inducidas $||,||_{p,q}$. Mostraremos que la función $(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_u \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,V)$ para $u \neq 0$ es continua. Para hacer esto necesitaremos estimar la norma de los operadores

$$z^k T_q^n E_{i,j} - \epsilon^k z^k q^{k(k-1)r/2+(-k+1)n} T_q^{kr-n} E_{N+1-j,N+1-i}$$

y

$$z^k (T_q^n - \epsilon^k q^{k(k-1)r/2+(-k+1)n} T_q^{kr-n}) E_{i,N+1-i}$$

en el espacio $\mathrm{Hom}(V_p, V_{p+kN+i-j})$ para p, k, i y j fijos y para n arbitrario. Tenemos

$$\begin{aligned} z^k\big(T_q^n E_{i,j} - \epsilon^k q^{k(k-1)r/2+(-k+1)n} T_q^{kr-n} E_{N+1-j,N+1-i}\big) = \\ B^n\big(z^k(E_{i,j} - \epsilon^k q^{k(k-1)r/2} T_q^{kr} E_{N+1-j,N+1-i})\big), \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde

(a) Si $i \neq j$, $i \neq N+1-j$, $i \neq N+1-i$ y $j \neq N+1-j$, B es

$$\begin{aligned} B = &\frac{1}{2q^k}(\mathrm{ad}(T_q)E_{i,i} - \mathrm{ad}(q^k T_q)E_{j,j}) \\ &+ \frac{1}{2}(\mathrm{ad}(qT_q^{-1})E_{N+1-j,N+1-j} - \mathrm{ad}(q^{-k+1}T_q)E_{N+1-i,N+1-i}). \end{aligned}$$

(b) Si $i = j$, B es

$$B = \frac{1}{q^k - 1}\mathrm{ad}T_q E_{i,i} + \frac{q^{-k+1}}{q^{-k}-1}\mathrm{ad}T_q^{-1} E_{N+1-i,N+1-i}.$$

(c) Si $i = N+1-j$, B es

$$B = \frac{1}{q^k}\mathrm{ad}T_q E_{i,i} - q^{-k+1}\mathrm{ad}T_q^{-1} E_{N+1-i,N+1-i}.$$

Los operadores $B : \mathrm{Hom}(V_p, V_{p+kN+i-j}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V_p, V_{p+kN+i-j})$ actúan entre espacios normados de dimensión finita, luego obtenemos por (3.2):

$$||z^k T_q^n E_{i,j} - \epsilon^k z^k q^{k(k-1)r/2+(-k+1)n} T_q^{kr-n} E_{N+1-j,N+1-i}||_{p,p+kN+i-j} \leq A.\alpha^n, \tag{3.3}$$

donde

$$A = ||z^k E_{i,j} - \epsilon^k z^k q^{k(k-1)r/2} T_q^{kr} E_{N+1-j,N+1-i}||, \quad \text{y} \quad \alpha = ||B||.$$

Luego, se sigue que

$$\begin{aligned} &||z^k f(T_q) E_{i,j} - \epsilon^k z^k q^{k(k-1)r/2} f(q^{(-k+1)} T_q^{-1}) T_q^{kr} E_{N+1-j,N+1-i}||_{p,p+kN+i-j} \\ &= ||\sum_{n\geq 0} f_n\big(z^k T_q^n E_{i,j} - \epsilon^k z^k q^{k(k-1)r/2} q^{n(-k+1)} T_q^{-n} T_q^{kr} E_{N+1-j,N+1-i}\big)||_{p,p+kN+i-j} \\ &\leq \sum_{n\geq 0} |f_n|\, ||z^k T_q^n E_{i,j} - \epsilon^k z^k q^{k(k-1)r/2+(-k+1)n} T_q^{kr-n} E_{N+1-j,N+1-i}||_{p,p+kN+i-j} \\ &\leq A.\sum_{n\geq 0} |f_n|\alpha^n = A\phi(f)(\alpha), \end{aligned}$$

donde $\phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ es la función dada por

$$\phi(f)(z) = \phi(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| z^n,$$

que es continua (ver Lema 4.3 de [KR1]). Resultados similares se obtienen para el operador

$$z^k(T_q^n - \epsilon^k q^{k(k-1)r/2+(-k+1)n} T_q^{kr-n}) E_{i,N+1-i}.$$

Luego, la función $(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_u \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,V)$ es continua para $u \neq 0$. En consecuencia, esta función se puede extender a la completación $(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_u^{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathrm{Hom}(V,V)$ (la completación de $\mathbb{C}[w]$ en la topología de convergencia uniforme de conjuntos compactos es $\mathcal{O}$).

□

Teorema 3.4.3. *Sea V un $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}$-módulo cuasifinito, que es considerado como un $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulo via el homomorfismo $\varphi_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}$. Entonces cualquier $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-submódulo de V es también un $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}$-submódulo. En particular, el $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulo $L_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}(\vec{\lambda})$ es irreducible si $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_M)$, para $s_i = q^{a_i}$, es tal que $a_i \in \mathbb{Z}$ implica $a_i = 1$; $a_i \in \mathbb{Z} + 1/2$ implica $a_i = 1/2$ y $a_i - a_j \notin \mathbb{Z} + \tau^{-1}\mathbb{Z}$ para $i \neq j$.*

Demostración. Sea W un $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-submódulo de V. Dado que W es también un $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulo cuasfinito, por Proposición 3.4.2 puede ser extendido a $(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_u^{\mathcal{O}}$ para $u \neq 0$. Como consecuencia de (3.13), la aplicación $\varphi_{\vec{s}}^{[\vec{m}]} : (\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}})_u^{\mathcal{O}} \longrightarrow (\mathfrak{g}^{[\vec{m}]})_u$ es suryectivo para cualquier $u \neq 0$. Luego, W es invariante con respecto a todos los miembros de la graduación principal de $(\mathfrak{g}^{[\vec{m}]})_u$ con $u \neq 0$. Dado que $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}$ coincide con su álgebra derivada, esto prueba el teorema. □

Procederemos ahora a mostrar que todos los $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulos cuasifinitos pueden ser realizados como un $L_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}(\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}, \vec{\lambda})$, para algún $\vec{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^M$ y $\vec{s} \in \mathbb{C}^M$ con $s = q^{a_i}$ y a_i tales que $a_i - a_j \notin \mathbb{Z} + \tau^{-1}\mathbb{Z}$ para $i \neq j$. Por simplicidad, consideraremos el caso $M = 1$ para calcular las series generatrices $\triangle_{m,a,\lambda,i}^{\epsilon}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -(\triangle_{m,a,\lambda,i}^{\epsilon})_n \, x^{-n}$ de peso máximo y carga central c del $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulo $L_s^{[m]}(\lambda)$.

3.4.1. Módulos de peso máximo cuasifinitos de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$

Realizaremos los $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulos irreducibles de peso máximo cuasifinitos para el caso "ortogonal" ($\epsilon = 1$) y "simpléctico" ($\epsilon = -1$). Introduciremos para ello la siguiente notación

$$\eta_i(\alpha, \beta) = \frac{q^{\alpha\beta} + (-1)^i q^{-\alpha\beta}}{q^{\beta/2} - q^{-\beta/2}} \frac{(\beta \log q)^i}{i!}. \qquad (3.4)$$

Haciendo uso del Teorema 3.2.2 y la notación introducida allí, tomemos un $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulo irreducible de peso máximo cuasifinito V con carga central c y series generatrices $\triangle_i(x)$, tal que $P_N^{\epsilon}(x)$ con

$$P_N^{\epsilon}(n) = \triangle_{N,n} \quad \text{para} \quad n \neq 0 \quad \text{y} \quad P_N^{\epsilon}(0) = -2c \qquad (3.5)$$

es un cuasipolinomio par, $P_i(x)$ con

$$P_i(n) = \triangle_{i,n} - \triangle_{i+1,n} \tag{3.6}$$

para $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$ son cuasipolinomios, y cuando N es par también tenemos un cuasipolinomio par $P_{N/2}(x)$ tal que

$$P_{N/2}(n) = \triangle_{N/2,n} - \triangle_{N/2+1,n}. \tag{3.7}$$

Así, podemos escribir

$$P_i(x) = \sum_{s\in\mathbb{C}} p_{s,i}(x) q^{s_i x}, \quad \text{para} \quad 1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par} \tag{3.8}$$

$$P_N^{\epsilon}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p_{j,N}^{\epsilon}(x) \cosh_q(e_j^+ x) + \sum_{j\in\mathbb{Z}} q_{j,N}^{\epsilon}(x) \sinh_q(e_j^- x) \quad \text{y}$$

$$P_{N/2}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p_{j,N/2}(x) \cosh_q(e_j^+ x) + \sum_{j\in\mathbb{Z}} q_{j,N/2}(x) \sinh_q(e_j^- x),$$

donde $p_{j,N}(x)$ y $p_{j,N/2}(x)$ (respectivamente, $q_{j,N}(x)$ y $q_{j,N/2}(x)$) son polinomios pares (respectivamente, impares) y $p_{s,i}(x)$ son polinomios. Sea $L_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}(\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}, \vec{\lambda})$ una representación de $\mathfrak{g}^{[\vec{m}]}$ vista como representación de $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$ via $\hat{\varphi}_s^{[\vec{m}]}$, donde $\mathfrak{g}^{[m]}$ es $g\ell_{\infty}^{[m]}$ o alguna de sus subálgebras clásicas. Luego,

$$(\triangle_{m,a,\lambda,i}^{\epsilon})_n = -\lambda(\hat{\varphi}_s^{[m]}((q^{-1/2}T_q)^n E_{i,i} - (q^{1/2}T_q)^{-n} E_{N+1-i,N+1-i})), \tag{3.9}$$

con $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$, y

$$(\triangle_{m,a,\lambda,N}^{\epsilon})_n = -\lambda(\hat{\varphi}_s^{[m]}((T_q^n + T_q^{-n})E_{N,N} - ((q^{-1}T_q)^n + (q^{-1}T_q)^{-n})E_{1,1}), \tag{3.10}$$

donde $\hat{\varphi}_s^{[m]}$ denota la inmersión dada por (3.4) compuesto según corresponda con los isomorfismos definidos en las Proposiciones 3.3.3 a 3.3.5.

Proposición 3.4.4. *Tomemos la inmersión* $\hat{\varphi}_s^{[m]} : \widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}} \longrightarrow \widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$ *con* $s = q^a$ *y* $a \notin \mathbb{Z}/2$. *El* $\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}$*-módulo* $L(\widehat{g\ell}_{\infty}^{[m]}, \lambda)$ *considerado como* $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$*-módulo es isomorfo a* $L(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}; e; e^+; e^-)$, *donde*

(a) Los exponentes e *son* $-1/2 + a - l$ *y* $1/2 - a + l$ *con* $l \in \mathbb{Z}$ *y sus respectivas multiplicidades son*

$$p_{1/2-a+l,i}(x) = \sum_{u=0}^{m} \frac{(x\log q)^u}{u!} {}^a h_{(l-1)N+i}^{(u)} \quad y \tag{3.11}$$

$$p_{-1/2+a-l,i}(x) = \sum_{u=0}^{m} \frac{(-x\log q)^u}{u!} {}^a h_{lN-i}^{(u)},$$

para $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$.

(b) Los exponentes son $e^+ = e^- = a - l$ *con* $l \in \mathbb{Z}$ *con multiplicidades*

$$p_{a-l,N}^{\epsilon}(x) = \sum_{u=0, u\, par}^{m} {}^a\widehat{h}_{(l-1)N}^{(u)} \frac{x^u}{u!} \quad y \quad q_{a-l,N}^{\epsilon}(x) = \sum_{u=0, u\, impar}^{m} {}^a\widetilde{h}_{(l-1)N}^{(u)} \frac{x^u}{u!}, \tag{3.12}$$

donde

$$
\begin{aligned}
{}^a\widehat{h}^{(u)}_{(l-1)N} &= 2(\log q)^u({}^ah^{(u)}_{(l-1)N} + \delta_{l,1}(c_u - \delta_{u,0}c_0)) \quad y \\
{}^a\widetilde{h}^{(u)}_{(l-1)N} &= 2(\log q)^u({}^ah^{(u)}_{(l-1)N} + \delta_{l,1}c_u),
\end{aligned}
$$

y $P^{\epsilon}_{l,N}(0) = -2c_0$ *para* $i = N$.

(c) Además, si N *es par, tenemos los exponentes* $e^+ = e^- = 1/2-a+l$ *con* $l \in \mathbb{Z}$ *y sus multiplicidades son*

$$
\begin{aligned}
p_{1/2-a+l,N/2}(x) &= \sum_{u=0,u\ par}^{m} \frac{(x\log q)^u}{u!}\,{}^ah^{(u)}_{(l-1/2)N} \quad y \\
q_{1/2-a+l,N/2}(x) &= \sum_{u=0,u\ impar}^{m} \frac{-(x\log q)^u}{u!}\,{}^ah^{(u)}_{(l-1/2)N},
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

para $i = N/2$.

Demostración. Si $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$, combinando las fórmulas de la Proposición 3.3.2 con (1.5) y (3.9), tenemos que

$$
\begin{aligned}
(\triangle^{\epsilon}_{m,a,\lambda,i})_n = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m}\Bigg(&\frac{-(n\log q)^u}{u!}q^{n(-1/2+a-l)}\ {}^a\lambda^{(u)}_{lN+1-i} \\
&+ \frac{(-n\log q)^u}{u!}q^{-n(-1/2+a-l)}\ {}^a\lambda^{(u)}_{(l-1)N+i}\Bigg) + \sum_{u=1}^{m}\eta_u(a-1,n)c_u.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
(\triangle^{\epsilon}_{m,a,\lambda,i})_n - (\triangle^{\epsilon}_{m,a,\lambda,i+1})_n = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m}&\frac{(-n\log q)^u}{u!}{}^ah^{(u)}_{(l-1)N+i}q^{-n(-1/2+a-l)} \\
&+ \frac{(n\log q)^u}{u!}{}^ah^{(u)}_{lN-i}q^{n(-1/2+a-l)}.
\end{aligned}
$$

Utilizando las definiciones de multiplicidades y exponentes para el cuasipolinomio $P_i(x)$ en (3.8), completamos nuestra prueba para (a).

Si $i = N$, de la misma manera que en el caso anterior, considerando (3.10) y (1.5), obtenemos

$$
\begin{aligned}
(\triangle^{\epsilon}_{m,a,\lambda,N})_n = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m}\Bigg(&\eta_u(-1+a-l,n)2\sinh_q(n/2)\ {}^a\lambda^{(u)}_{lN} \\
&- \eta_u(a-l,n)2\sinh_q(n/2)\ {}^a\lambda^{(u)}_{(l-1)N+1}\Bigg) + \sum_{u=1}^{m}2\sinh_q(n/2)\eta_u(a-1,n)c_u.
\end{aligned}
$$

Cambiando el índice l a $l-1$ en la primer suma, obtenemos

$$
(\triangle^{\epsilon}_{m,a,\lambda,N})_n = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m}2\sinh_q(n/2)\eta_u(a-l,n)({}^ah^{(u)}_{(l-1)N} + \delta_{l,1}c_r - c_0).
$$

Dado que

$$2\sinh_q(n/2)\eta_u(a-l,n) = \frac{(n\log q)^u}{u!}(q^{n(a-l)} + (-1)^u q^{-n(a-l)})$$

y utilizando las definiciones de multiplicidades y exponentes para los cuasipolinomios $P_N^\epsilon(x)$ en (3.8), completamos la prueba para (b).

Para el caso N par, siguiendo los mismos pasos que para la prueba de (a), tenemos

$$(\triangle^\epsilon_{m,a,\lambda,N/2})_n - (\triangle^\epsilon_{m,a,\lambda,N/2+1})_n = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m}\frac{(n\log q)^u}{u!}{}^a h^{(u)}_{(l-1/2)N}(q^{-n(1/2-a+l)} + (-1)^u q^{n(1/2-a+l)}).$$

Luego, separando las sumas en función de la paridad de u, obtenemos las multiplicidades y los exponentes esperados.

□

Proposición 3.4.5. *Sea $s = q^a$ con $a = 1/2$ y N par. Tomemos la inmersión $\hat{\varphi}_s^{[m]} : \widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}} \longrightarrow d_\infty^{[m]}$. El $d_\infty^{[m]}$-módulo $L(d_\infty^{[m]},\lambda)$ considerado como $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulo es isomorfo a $L(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}; e; e^+; e^-)$, donde*

(a) Si $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$, los exponentes son $e = l$ con $l \in \mathbb{Z}$ y sus multiplicidades son

$$p_{l,i}(x) = \sum_{u=0}^{m}\frac{(-x\log q)^u}{u!}{}^d h^{(u)}_{(l-1/2)N+i} \quad si \quad l>0 \quad y \tag{3.14}$$

$$p_{l,i}(x) = \sum_{u=0}^{m}\frac{(x\log q)^u}{u!}{}^d h^{(u)}_{(l-1/2)N-i} \quad si \quad l\leq 0$$

(b) Si $i = N$, los exponentes e^+ y e^- son $1/2 - l$ con $l \geq 1$ y sus multiplicidades son

$$p^\epsilon_{1/2-l,N}(x) = \sum_{u=0,u\,par}^{m}{}^d\widehat{h}^{(u)}_{(l-1/2)N}\frac{x^u}{u!} \quad y \quad q^\epsilon_{1/2-l,N}(x) = \sum_{u=0,u\,impar}^{m}{}^d\widetilde{h}^{(u)}_{(l-1/2)N}\frac{x^u}{u!}, \tag{3.15}$$

donde

$${}^d\widehat{h}^{(u)}_{(l-1/2)N} = 2(\log q)^u({}^d h^{(u)}_{(l-1/2)N} + \delta_{l,1}(c_u - \delta_{u,0}c_0)) \quad y$$

$${}^d\widetilde{h}^{(u)}_{(l-1/2)N} = 2(\log q)^u({}^d h^{(u)}_{(l-1/2)N} + \delta_{l,1}c_u)$$

y $P^\epsilon_{l,N}(0) = -2c_0$.

(c) Además, para $i = N/2$, los exponentes e^+ y e^- son $l \geq 0$ y sus multiplicidades son, si $l \geq 1$,

$$p_{l,N/2}(x) = \sum_{u=0,u\ par}^{m} 2\frac{(x\log q)^u}{u!}{}^d h^{(u)}_{lN} \quad y \tag{3.16}$$

$$q_{l,N/2}(x) = \sum_{u=0,u\ impar}^{m} -2\frac{(x\log q)^u}{u!}{}^d h^{(u)}_{lN}$$

y si $l = 0$

$$p_{0,N/2}(x) = \sum_{u=0,u\ par}^{m} 2\frac{(x\log q)^u}{u!}{}^d\lambda^{(u)}_1 \quad y \quad q_{0,N/2}(x) = 0. \tag{3.17}$$

Demostración. Consideremos primero el caso $\epsilon = 1$. Por la Observación 3.3.6, parte (a), tenemos que la inmersión $\hat{\varphi}_s^{[m]} : \widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}} \longrightarrow d_\infty^{[m]}$ es en realidad la inmersión dada por la Proposición 3.3.2 compuesta por T^{-1}, donde T es el automorfismo de $g\ell_\infty^{[m]}$ definido en (3.11).

Si $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$, aplicando (3.9) para la inmersión en este caso, obtenemos

$$(\triangle^\epsilon_{m,1/2,\lambda,i})_n = \lambda\Bigg(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m} -\frac{(n\log q)^u}{u!}q^{-nl}t^r E_{(l+1/2)N+1-i,(l+1/2)N+1-i} \tag{3.18}$$
$$+\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m}\frac{(-n\log q)^u}{u!}q^{nl}t^r E_{(l-1/2)N+i,(l-1/2)N+i}\Bigg) + \sum_{u=1}^{m}\eta_u(-1/2,n)c_u.$$

Haciendo un cambio de variable adecuado en l y utilizando (1.11), obtenemos

$$(\triangle^\epsilon_{m,1/2,\lambda,i})_n - (\triangle^\epsilon_{m,1/2,\lambda,i+1})_n = \sum_{l\geq 1}\sum_{u=0}^{m}\frac{(n\log q)^u}{u!}\big((-1)^u q^{nl}\,{}^d h_{(l-1/2)N+i} + q^{n(-l+1)}\,{}^d h_{(l-1/2)N-i}\big).$$

Utilizando las definiciones de multiplicidades y exponentes para el cuasipolinomio $P_i(x)$ en (3.8), finalizamos la prueba de (a).

Aplicando (3.10) para la inmersión en este caso, obtenemos

$$\begin{aligned}
&(\triangle^\epsilon_{m,1/2,\lambda,N})_n = \\
&\lambda\Bigg(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m}\frac{(n\log q)^u}{u!}t^u\big((-q^{n(1/2-l)} - (-1)^u q^{-n(1/2-l)})E_{(l-1/2)N+1,(l-1/2)N+1} \\
&+\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m}\frac{(n\log q)^u}{u!}t^u(q^{-n(1/2+l)} + (-1)^u q^{n(1/2+l)})E_{(l+1/2)N,(l+1/2)N}\big)\Bigg) \\
&+\sum_{u=1}^{m}2\sinh_q(n/2)\eta_u(-1/2,n)c_u.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Nuevamente, haciendo un cambio de variable adecuado en l, utilizando (1.11), y teniendo en cuenta que

$$2\eta_u(-1/2,n)\sinh_q(n/2) = \frac{(q^{n/2} + (-1)^u q^{-n/2})(n\log q)^u}{u!},$$

tenemos

$$\begin{aligned}
(\triangle^\epsilon_{m,1/2,\lambda,N})_n = &\sum_{l\geq 1}{}^d h^{(u)}_{(l-1/2)N}(n)(q^{n(1/2-l)} + (-1)^u q^{-n(1/2-l)}) \\
&+\sum_{u=0}^{m}\frac{(n\log q)^u}{u!}(q^{n/2} + (-1)^u q^{-n/2})(c_u - \delta_{u,0}c_0).
\end{aligned}$$

Para completar la prueba, estudiamos la paridad de u y separamos las sumas de manera acorde. Como resultado de las definiciones de multiplicidades y exponentes para los cuasipolinomios $P_N^\epsilon(x)$ en (3.8), encontramos los exponentes y multiplicidades esperados para el caso (b).

Para $i = N/2$, seguimos los mismos pasos que para la prueba de (a) pero con un cambio de variables adecuado en l. Así,

$$(\triangle^{\epsilon}_{m,1/2,\lambda,N/2})_n - (\triangle^{\epsilon}_{m,1/2,\lambda,N/2+1})_n = \sum_{l\geq 1}\sum_{u=0}^{m}\frac{(n\log q)^u}{u!}(q^{-n(l-1)} + (-1)^u q^{n(l-1)})^d h^{(u)}_{(l-1)N} + \sum_{u=0}^{m}\frac{(n\log q)^u}{u!}(1+(-1)^u)\,{}^d\lambda^{(u)}_1.$$

Por último, separando estas sumas de acuerdo a la paridad de u, encontramos los exponentes y multiplicidades esperados, finalizando la prueba para este caso.

Consideremos ahora el caso $\epsilon = -1$. La inmersión $\hat{\varphi}^{[m]}_s : \widehat{\mathcal{S}^{\sigma,N}_{q,N}} \longrightarrow d^{[m]}_\infty$ es en este caso la inmersión dado por la Proposición 3.3.2 compuesta por $D = T \circ T'$, donde T' es el automorfismo de $g\ell^{[m]}_\infty$ definido en (3.12). Luego, los resultados son los mismos que para el caso $\epsilon = 1$. $\square$

Proposición 3.4.6. *Sea $s = q^a$ con $a = 1/2$ y N impar y tomemos la inmersión $\hat{\varphi}^{[m]}_s : \widehat{\mathcal{S}^{\sigma,N}_{q,N}} \longrightarrow \mathfrak{g}^{[m]}$, donde $\mathfrak{g}^{[m]} = \tilde{b}^{[m]}_\infty$ si $\epsilon = 1$ y $\mathfrak{g}^{[m]} = b^{[m]}_\infty$ si $\epsilon = -1$. El $\mathfrak{g}^{[m]}$-módulo $L(\mathfrak{g}^{[m]}, \lambda)$ considerado como $\widehat{\mathcal{S}^{\sigma,N}_{q,N}}$-módulo es isomorfo a $L(\widehat{\mathcal{S}^{\sigma,N}_{q,N}}; e; e^+; e^-)$, donde*

(a) Los exponentes e con $l \in \mathbb{Z}$ y sus multiplicidades son

$$p_{l,i}(x) = \sum_{u=0}^{m}\frac{(-x\log q)^u}{u!}\,{}^b h^{(u)}_{(l-1/2)N+i-1/2} \quad si \quad l>0 \quad y \tag{3.20}$$
$$p_{l,i}(x) = \sum_{u=0}^{m}\frac{(x\log q)^u}{u!}\,{}^b h^{(u)}_{(l-1/2)N-i-1/2} \quad si \quad l\leq 0,$$

para $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$.

(b) Los exponentes son $e^+ = e^- = 1/2 - l$ con $l \geq 0$ y sus respectivas multiplicidades son, para $l \leq 1$,

$$p^{\epsilon}_{1/2-l,N}(x) = \sum_{u=0,u\,par}^{m} 2(\log q)^u\,{}^b h^{(u)}_{(l-1/2)N-1/2}\frac{x^u}{u!} \quad y \tag{3.21}$$
$$q^{\epsilon}_{1/2-l,N}(x) = \sum_{u=0,u\,impar}^{m} 2(\log q)^u\,{}^b h^{(u)}_{(l-1/2)N-1/2}\frac{x^u}{u!},$$

y para $l = 0$,

$$p^{\epsilon}_{1/2,N}(x) = \sum_{u=0,u\,par}^{m} 2(\log q)^u\frac{x^u}{u!}(c_u - \delta_{u,0}c_0) \quad y \quad q^{\epsilon}_{1/2,N}(x) = \sum_{u=0,u\,impar}^{m} 2(\log q)^u\frac{x^u}{u!}c_u,$$

y $P^{\epsilon}_{l,N}(0) = -2c_0$ para $i = N$.

Demostración. Consideremos primero el caso $\epsilon = 1$. Por la Observación 3.3.6, parte (a), tenemos que la inmersión $\hat{\varphi}^{[m]}_s : \widehat{\mathcal{S}^{\sigma,N}_{q,N}} \longrightarrow b^{[m]}_\infty$ es en realidad la inmersión dada por la Proposición 3.3.2

compuesto por T^{-1}, donde T es el automorfismo de $g\ell_\infty^{[m]}$ definido en (3.8). Aplicando (3.9) para la inmersión en este caso, tenemos

$$(\triangle_{m,1/2,\lambda,i})_n = \lambda\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m} -\frac{(n\log q)^u}{u!}q^{-nl}t^r E_{(l-1/2)N-i+1/2,(l-1/2)N-i+1/2} \tag{3.22}$$
$$+\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m}\frac{(-n\log q)^u}{u!}q^{nl}t^r E_{((l-1/2)N+i-1/2,(l-1/2)N+i-1/2}\Big) + \sum_{u=1}^{m}\eta_u(-1/2,n)c_u.$$

Haciendo un cambio de variable adecuado en l y utilizando (1.7), tenemos

$$(\triangle_{m,1/2,\lambda,i})_n = \sum_{l\geq 1}\sum_{u=0}^{m}\frac{(n\log q)^u}{u!}({}^d\lambda^{(u)}_{(l-1/2)N+i-1/2}(-1)^u q^{nl} - {}^d\lambda^{(u)}_{(l-1/2)N-i+1/2}q^{-n(l-1)})$$
$$+\sum_{u=1}^{m}\eta_u(-1/2,n)c_u.$$

Luego,

$$(\triangle_{m,1/2,\lambda,i})_n - (\triangle_{m,1/2,\lambda,i+1})_n =$$
$$\sum_{l\geq 1}\sum_{u=0}^{m}\frac{(n\log q)^u}{u!}((-1)^u q^{nl}\,{}^b h^{(u)}_{(l-1/2)N+i-1/2} + q^{-n(l-1)}\,{}^b h^{(u)}_{(l-1/2)N-i-1/2}).$$

Utilizando las definiciones de multiplicidades y exponentes para el cuasipolinomio $P_i(x)$ en (3.8), finalizamos la prueba de (a).

Utilizando (3.10) para la inmersión en este caso, tenemos

$$(\triangle_{m,1/2,\lambda,N})_n = \tag{3.23}$$
$$\lambda\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m}\frac{(n\log q)^u}{u!}t^u\big((-q^{n(1/2-l)} - (-1)^u q^{-n(1/2-l)})E_{(l-1/2)N+1/2,(l-1/2)N+1/2}$$
$$+\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m}\frac{(n\log q)^u}{u!}t^u(q^{-n(1/2+l)} + (-1)^u q^{n(1/2+l)})E_{(l+1/2)N-1/2,(l+1/2)N-1/2)}\Big)\Big)$$
$$+\sum_{u=1}^{m}2\sinh_q(n/2)\eta_u(-1/2,n)c_u.$$

Nuevamente, haciendo un cambio de variable adecuado en l y utilizando (1.7) y teniendo en cuenta que

$$2\eta_u(-1/2,n)\sinh_q(n/2) = \frac{(q^{n/2}+(-1)^u q^{-n/2})(n\log q)^u}{u!},$$

obtenemos

$$(\triangle_{m,1/2,\lambda,N})_n = \sum_{l\geq 1}\sum_{u=0}^{m}\frac{(n\log q)^u}{u!}{}^d h^{(u)}_{(l-1/2)N-1/2}(q^{n(1/2-l)} + (-1)^u q^{-n(1/2-l)})$$
$$+\sum_{u=0}^{m}\frac{(n\log q)^u}{u!}(q^{n/2}+(-1)^u q^{-n/2})(c_u - \delta_{u,0}c_0).$$

Para completar la prueba, estudiamos la paridad de u y separamos las sumas de manera acorde. Como resultado de las definiciones de multiplicidades y exponentes para los cuasipolinomios $P_N^{\epsilon}(x)$ en (3.8), encontramos los exponentes y multiplicidades esperados.

Consideremos ahora el caso $\epsilon = -1$. La inmersión $\hat{\varphi}_s^{[m]} : \widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}} \longrightarrow d_\infty^{[m]}$ es en este caso la inmersión dada por la Proposición 3.3.2 compuesta por $D = T \circ T'$, donde T' es el automorfismo de $g\ell_\infty^{[m]}$ definido en (3.10). Procediendo de manera análoga al caso $\epsilon = 1$, se obtienen los resultados esperados.

□

Proposición 3.4.7. *Sea $s = q^a$ y $a = 1$ y tomemos la inmersión $\hat{\varphi}_s^{[m]} : \widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}} \longrightarrow \mathfrak{g}^{[m]}$, donde $\mathfrak{g}^{[m]} = d_\infty^{[m]}$ si $\epsilon = 1$ y $\mathfrak{g}^{[m]} = c_\infty^{[m]}$ si $\epsilon = -1$. El $\mathfrak{g}^{[m]}$-módulo $L(\mathfrak{g}^{[m]}, \lambda)$ considerado como un $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulo es isomorfo a $L(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}; e; e^+; e^-)$, donde*

(a) Si $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$, los exponentes e son $1/2 - l$ con $l \in \mathbb{Z}$ y sus multiplicidades son

$$p_{1/2-l,i}(x) = \sum_{u=0}^{m} \frac{(x \log q)^u}{u!} {}^{\dagger}h_{lN-i}^{(u)} \quad \text{con } l > 0 \quad \text{y} \tag{3.24}$$
$$p_{1/2-l,i}(x) = \sum_{u=0}^{m} \frac{(-x \log q)^u}{u!} {}^{\dagger}h_{(l-1)N+i}^{(u)}, \quad \text{con } l \leq 0$$

donde † representa c ó d dependiendo de si $\mathfrak{g}^{[m]}$ es $c_\infty^{[m]}$ ó $d_\infty^{[m]}$.

(b) Si $i = N$, los exponentes e^+ y e^- son $l - 1$ con $l \leq 1$ y sus multiplicidades son

$$p_{l-1,N}^{\epsilon}(x) = \sum_{u=0, u\, par}^{m} {}^{\dagger}\widehat{h}_{(l-1)N}^{(u)} \frac{x^u}{u!} \quad \text{y} \quad q_{l-1,N}^{\epsilon}(x) = \sum_{u=0, u\, impar}^{m} {}^{\dagger}\widetilde{h}_{(l-1)N}^{(u)} \frac{x^u}{u!}, \tag{3.25}$$

donde † representa c ó d dependiendo de si $\mathfrak{g}^{[m]}$ es $c_\infty^{[m]}$ ó $d_\infty^{[m]}$ y

$$\begin{aligned} {}^{\dagger}\widehat{h}_{(l-1)N}^{(u)} &= 2(\log q)^u ({}^{\dagger}h_{(l-1)N}^{(u)} + \delta_{l,1}(c_u + {}^{\dagger}\lambda_1^{(u)} - \delta_{u,0} c_0)) \quad \text{y} \\ {}^{\dagger}\widetilde{h}_{(l-1)N}^{(u)} &= -2(\log q)^u \, {}^{\dagger}h_{(l-1)N}^{(u)} \end{aligned}$$

y $P_{i,N}^{\epsilon}(0) = -2c_0$.

(c) Si además $i = N/2$, los exponentes e^+ y e^- son $l - 1/2$ con $l \geq 1$ y sus multiplicidades son

$$p_{l-1/2,N/2}(x) = \sum_{u=0, u\ par}^{m} 2\frac{(x \log q)^u}{u!} {}^{\dagger}h_{(l-1/2)N}^{(u)} \quad \text{y} \tag{3.26}$$
$$q_{l-1/2,N/2}(x) = \sum_{u=0, u\ impar}^{m} -2\frac{(x \log q)^u}{u!} {}^{\dagger}h_{(l-1/2)N}^{(u)},$$

donde † representa c ó d dependiendo de si $\mathfrak{g}^{[m]}$ es $c_\infty^{[m]}$ ó $d_\infty^{[m]}$.

Demostración. Por Observación 3.3.6, parte (a), tenemos que la inmersión $\hat{\varphi}_s^{[m]} : \widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}} \longrightarrow d_\infty^{[m]}$ es en realidad la inmersión dada en la Proposición 3.3.2 comuesto por T^{-1}, donde T es el automorfismo de $g\ell_\infty^{[m]}$ definido en (3.11).

Si $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$, aplicando (3.9) para la inmersión en este caso, tenemos

$$
\begin{aligned}
(\triangle_{m,1,\lambda,i})_n =&\lambda\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m} -\frac{(n\log q)^u}{u!} q^{n(1/2-l)} t^r E_{lN+1-i,lN+1-i} \\
&+ \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m} \frac{(-n\log q)^u}{u!} q^{n(-1/2+l)} t^r E_{(l-1)N+i,(l-1)N+i}\Big) + \sum_{u=1}^{m} \eta_u(0,n) c_u.
\end{aligned}
$$

Realizando un cambio de variable adecuado en l y usando (1.11), tenemos

$$
\begin{aligned}
(\triangle_{m,1,\lambda,i})_n =& \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m} \frac{(n\log q)^u}{u!}\big(- {}^d\lambda_{lN+1-i}^{(u)} q^{n(1/2-l)} \\
&+ (-1)^r\, {}^d\lambda_{(l-1)N+i}^{(u)} q^{n(-1/2+l)}\big) + \sum_{u=1}^{m} \eta_u(0,n) c_u.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
&(\triangle_{m,1,\lambda,i})_n - (\triangle_{m,1,\lambda,i+1})_n = \\
&\sum_{l\geq 1}\sum_{u=0}^{m} \frac{(n\log q)^u}{u!}\big({}^d h_{lN-i}^{(u)}\, q^{n(1/2-l)} + (-1)^u\, q^{n(l-1/2)}\, {}^d h_{(l-1)N+i}^{(u)}\big).
\end{aligned}
$$

Utilizando las definiciones de multiplicidades y exponentes para el cuasipolinomio $P_i(x)$ en (3.8), finalizamos la prueba de (a).

Aplicando ahora (3.10) para la inmersión en este caso, obtenemos

$$
\begin{aligned}
(\triangle_{m,1,\lambda,N})_n =&\lambda\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m} \frac{(n\log q)^u}{u!} t^u \big((-q^{n(1-l)} - (-1)^u q^{-n(1-l)}\big) E_{(l-1)N+1,(l-1)N+1} \\
&+ \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{u=0}^{m} \frac{(n\log q)^u}{u!} t^u (q^{-nl} + (-1)^u q^{nl}) E_{lN,lN}\Big) \\
&+ \sum_{u=1}^{m} 2\sinh_q(n/2)\eta_u(0,n) c_u.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

Realizamos un cambio de variables en l. Aplicando (1.11) y teniendo en cuenta que

$$
\begin{aligned}
2\eta_u(0,n)\sinh_q(n/2) &= \frac{(1+(-1)^u)(n\log q)^u}{u!} \qquad \text{y} \\
2\eta_0(0,n)\sinh_q(n/2) &= \frac{2(n\log q)^u}{u!},
\end{aligned}
$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
(\triangle_{m,1,\lambda,N})_n = & \sum_{l\geq 1}\sum_{u=0}^{m} \frac{(n\log q)^u}{u!}\big((q^{-n(l-1)}+(-1)^u q^{n(l-1)})\,{}^d h_{(l-1)N} + (1+(-1)^u)\,{}^d\lambda_1^{(u)}\big)\\
& + \sum_{u=0}^{m} \frac{(1+(-1)^u)(n\log q)^u}{u!} c_u - 2c_0.
\end{aligned}
$$

Para completar la prueba, estudiamos la paridad de u y separamos las sumas de manera acorde. Como resultado de las definiciones de multiplicidades y exponentes para los cuasipolinomios $P_N^{\epsilon}(x)$ en (3.8), encontramos los exponentes y multiplicidades esperados para el caso (b).

Para $i = N/2$, siguiendo los mismos pasos que para la prueba de (a), obtenemos

$$
\begin{aligned}
&(\triangle_{m,1/2,\lambda,N/2})_n - (\triangle_{m,1/2,\lambda,N/2+1})_n = \\
&\sum_{l\geq 1}\sum_{u=0}^{m} \lambda\Big(-\frac{(n\log q)^u}{u!} t^u (q^{n(1/2-l)} + (-1)^u q^{n(-1/2+l)}) E_{(l-1/2)N+1,(l-1/2)N+1}\\
&+\frac{(n\log q)^u}{u!} t^u (q^{n(1/2-l)} + (-1)^u q^{n(-1/2+l)}) E_{(l-1/2)N,(l-1/2)N}\Big).
\end{aligned}
$$

Realizando un cambio de variable en l y aplicando (1.11), tenemos

$$
\begin{aligned}
&(\triangle_{m,1/2,\lambda,N/2})_n - (\triangle_{m,1/2,\lambda,N/2+1})_n = \\
&\sum_{l\geq 1}\sum_{u=0}^{m} \frac{(n\log q)^u}{u!}(q^{n(1/2-l)} + (-1)^u q^{n(-1/2+l)})^d h^{(u)}_{(l-1/2)N}.
\end{aligned}
$$

Estudiando la paridad de u y separando las sumas de manera acorde, encontramos los exponentes y multiplicidades esperados para este caso, finalizando la prueba.

Consideremos ahora el caso $\epsilon = -1$. La inmersión $\hat{\varphi}_s^{[m]} : \widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}} \longrightarrow c_{\infty}^{[m]}$ es en este caso la inmersión dada por la Proposición 3.3.2 compuesta por $D = T \circ T'$, donde T' es el automorfismo de $g\ell_{\infty}^{[m]}$ definido en (3.6). Procediendo de manera análoga al caso $\epsilon = 1$, se obtienen los resultados esperados. $\square$

Consideremos un $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulo V irreducible cuasifinito de peso máximo con carga central c y series generatrices $\triangle_i(x)$ tales que

$$
\begin{aligned}
P_i(n) = \triangle_{i,n} - \triangle_{i+1,n} \quad &\text{para} \quad 1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par} \quad \text{y}\\
P_N^{\epsilon}(n) = \triangle_{N,n} \quad &\text{para} \quad n \neq 0 \quad \text{y} \quad P_N^{\epsilon}(0) = -2c,
\end{aligned}
$$

donde $P_i(x)$ son cuasipolinomios y $P_N^{\epsilon}(x)$ son cuasipolinomios pares. Además, si N es par, existe un cuasipolinomio par $P_{N/2}(x)$ tal que

$$
P_{N/2}(n) = \triangle_{N/2,n} - \triangle_{N/2+1,n}.
$$

Escribiremos

$$P_i(x) = \sum_{s\in\mathbb{C}} p_{s,i}(x) q^{s_i x}, \tag{3.28}$$

$$P^{\epsilon}_N(x) = \sum_{j\in\mathbb{C}} p^{\epsilon}_{j,N}(x)\cosh_q(e^+_j x) + \sum_{j\in\mathbb{C}} q^{\epsilon}_{j,N}(x)\sinh_q(e^-_j x) \quad \text{y}$$

$$P_{N/2}(x) = \sum_{j\in\mathbb{C}} p_{j,N/2}(x)\cosh_q(e^+_j x) + \sum_{j\in\mathbb{C}} q_{j,N/2}(x)\sinh_q(e^-_j x),$$

donde $p_{s,i}$, $p^{\epsilon}_{j,N}$, $p_{j,N/2}$, $q^{\epsilon}_{j,N}$ y $q_{j,N/2}$ son polinomios pares o impares según corresponda o simplemente polinomios, para una cantidad finita de s y $j \in \mathbb{C}$. Descomponemos el conjunto $A = \{s \in \mathbb{C} | p_{s,i} \neq 0 \text{ para algún } i\} \cup \{s \in \mathbb{C} | p^{\epsilon}_{s,N} \neq 0\} \cup \{s \in \mathbb{C} | p_{s,N/2} \neq 0\} \cup \{s \in \mathbb{C} | q^{\epsilon}_{s,N} \neq 0\} \cup \{s \in \mathbb{C} | q_{s,N/2} \neq 0\}$ en una unión disjunta de clases de equivalencia bajo la condición

$$s = q^a \sim q^{a'} = s' \Leftrightarrow a - a' \in \mathbb{Z} + \tau^{-1}\mathbb{Z}.$$

Elegimos un representante s en una clase de equivalencia S tal que $s = q$ si la clase de equivalencia cae en $\mathbb{Z}$ y $s = q^{1/2}$ si la clase de equivalencia cae en $\mathbb{Z} + 1/2$. Sea $S = \{q^a, q^{a+t_1}, q^{a+t_2}, \dots\}$ una clase de congruencia tal. Tomemos $t_0 = 0$ y sea
$m = \max_{s\in S}\{\deg\, p_{s,i}, \deg\, p^{\epsilon}_{s,N}, \deg\, q^{\epsilon}_{s,N}, \deg\, p_{s,N/2}, \deg\, q_{s,N/2}\}$. Se puede ver con facilidad que si $a = 1$ ó $a = 1/2$, entonces $t_i \in \mathbb{Z}$. Ahora, asociaremos S a un $\mathfrak{g}^{[m]}$-módulo $L^{[m]}_s(\lambda_S)$ de una de las siguientes maneras.

- Si $a \notin \mathbb{Z}/2$, para $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$ sean

$$^a h^{(u)}_{(t_j-1)N+i} = \frac{1}{(\log q)^u}\left(\frac{d}{dx}\right)^u p_{1/2-a+t_j,i}(0) \quad \text{y} \tag{3.29}$$

$$^a h^{(u)}_{t_jN-i} = \left(\frac{-1}{\log q}\right)^u \left(\frac{d}{dx}\right)^u p_{-1/2+a-t_j,i}(0), \tag{3.30}$$

  y sean

$$^a h^{(u)}_{(t_j-1)N} + \delta_{t_j,1}(c_u - \delta_{u,0}c_0) = \frac{1}{2(\log q)^u}\left(\frac{d}{dx}\right)^u p^{\epsilon}_{t_j,N}(0) \quad \text{si } u \text{ par y} \tag{3.31}$$

$$^a h^{(u)}_{(t_j-1)N} + \delta_{t_j,1}c_u = \frac{1}{2(\log q)^u}\left(\frac{d}{dx}\right)^u q^{\epsilon}_{t_j,N}(0) \quad \text{si } u \text{ impar}, \tag{3.32}$$

  y si N es par

$$^a h^{(u)}_{(t_j-1/2)N} = \frac{1}{(\log q)^u}\left(\frac{d}{dx}\right)^u p_{t_j,N/2}(0) \quad \text{si } u \text{ par y} \tag{3.33}$$

$$^a h^{(u)}_{(t_j-1/2)N} = -\frac{1}{(\log q)^u}\left(\frac{d}{dx}\right)^u q_{t_j,N/2}(0) \quad \text{si } u \text{ impar}, \tag{3.34}$$

  para $u = 0, \dots, m$. Asociamos S al $\widehat{g\ell}^{[m]}_{\infty}$-módulo $L^{[m]}_s(\lambda_S)$ con cargas centrales

$$c_u = \sum_i \sum_{t_j} ({}^a h^{(u)}_{(t_j-1)N+i} + {}^a h^{(u)}_{t_jN-i}) + \sum_{t_j} ({}^a h^{(u)}_{(t_j-1)N} + \delta_{N,par}\, {}^a h^{(u)}_{(t_j-1/2)N})$$

y etiquetas

$$
\begin{aligned}
{}^a\lambda_l^{(u)} = & \sum_{(t_j-1)N+i\geq l} {}^a\dot{h}^{(u)}_{(t_j-1)N+i} + \sum_{t_jN-i\geq l} {}^a\dot{h}^{(u)}_{t_jN-i} \\
& + \sum_{(t_j-1)N\geq l} {}^a\dot{h}^{(u)}_{(t_j-1)N} + \delta_{N,par} \sum_{(t_j-1/2)N\geq l} {}^a\dot{h}^{(u)}_{(t_j-1/2)N},
\end{aligned}
$$

con ${}^a\dot{h}^{(u)}_t = {}^a h^{(u)}_t - \delta_{t,0}c_u$.

- Si $a = 1/2$ y N es par, para $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$ sean

$$
{}^d h^{(u)}_{(t_j-1/2)N+i} = \left(\frac{-1}{\log q}\right)^u \left(\frac{d}{dx}\right)^u p_{t_j,i}(0) \quad \text{si} \quad t_j > 0 \tag{3.35}
$$

$$
{}^d h^{(u)}_{(t_j-1/2)N-i} = \frac{1}{(\log q)^u} \left(\frac{d}{dx}\right)^u p_{t_j,i}(0) \quad \text{si} \quad t_j \leq 0, \tag{3.36}
$$

y sean

$$
{}^d h^{(u)}_{(t_j-1/2)N} + \delta_{t_j,1}(c_u - \delta_{u,0}c_0) = \frac{1}{2(\log q)^u} \left(\frac{d}{dx}\right)^u p^{\epsilon}_{1/2-t_j,N}(0) \quad \text{si } u \text{ par y} \tag{3.37}
$$

$$
{}^d h^{(u)}_{(t_j-1/2)N} + \delta_{t_j,1}c_u = \frac{1}{2(\log q)^u} \left(\frac{d}{dx}\right)^u q^{\epsilon}_{1/2-t_j,N}(0) \quad \text{si } u \text{ impar,} \tag{3.38}
$$

y si N es par

$$
{}^d h^{(u)}_{t_jN} = \frac{1}{2(\log q)^u} \left(\frac{d}{dx}\right)^u p_{t_j,N/2}(0) \quad \text{si } u \text{ par y} \tag{3.39}
$$

$$
{}^d h^{(u)}_{t_jN} = -\frac{1}{2(\log q)^u} \left(\frac{d}{dx}\right)^u q_{t_j,N/2}(0) \quad \text{si } u \text{ impar,} \tag{3.40}
$$

para $u = 0, \ldots, m$. Asociamos S al $d_\infty^{[m]}$-módulo $L_s^{[m]}(\lambda_S)$ con cargas centrales

$$
c_u = \sum_i \sum_{t_j} ({}^d h^{(u)}_{(t_j-1/2)N+i} + {}^d h^{(u)}_{(t_j-1/2)N-i}) + \sum_{t_j} ({}^d h^{(u)}_{(t_j-1/2)N} + \delta_{N,par}\, {}^d h^{(u)}_{t_jN})
$$

y etiquetas

$$
\begin{aligned}
{}^d\lambda_l^{(u)} = & \sum_{(t_j-1/2)N+i\geq l} {}^d h^{(u)}_{(t_j-1/2)N+i} + \sum_{(t_j-1/2)N-i\geq l} {}^d h^{(u)}_{(t_j-1/2)N-i} \\
& + \sum_{(t_j-1/2)N\geq l} {}^d h^{(u)}_{(t_j-1/2)N} + \delta_{N,par} \sum_{t_jN\geq l} {}^d h^{(u)}_{t_jN}.
\end{aligned}
$$

- Si $a = 1/2$, N es impar para $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$ sean

$$
{}^b h^{(u)}_{(t_j-1/2)N+i-1/2} = \left(\frac{-1}{\log q}\right)^u \left(\frac{d}{dx}\right)^u p_{t_j,i}(0) \quad \text{si} \quad t_j > 0 \tag{3.41}
$$

$$
{}^b h^{(u)}_{(t_j-1/2)N-i-1/2} = \frac{1}{(\log q)^u} \left(\frac{d}{dx}\right)^u p_{t_j,i}(0) \quad \text{si} \quad t_j \leq 0, \tag{3.42}
$$

y sean

$$ {}^b h^{(u)}_{(t_j-1/2)N-1/2} + \delta_{t_j,1}(c_u - \delta_{u,0}c_0) = \frac{1}{2(\log q)^u}\left(\frac{d}{dx}\right)^u p^{\epsilon}_{1/2-t_j,N}(0) \quad \text{si } u \text{ par y} \tag{3.43} $$

$$ {}^b h^{(u)}_{(t_j-1/2)N-1/2} + \delta_{t_j,1}c_u = \frac{1}{2(\log q)^u}\left(\frac{d}{dx}\right)^u q^{\epsilon}_{1/2-t_j,N}(0) \quad \text{si } u \text{ impar,} \tag{3.44} $$

para $u = 0, \ldots, m$. Asociamos S al $\mathfrak{g}^{[m]}$-módulo $L_s^{[m]}(\lambda_S)$ con cargas centrales

$$ c_u = \sum_i \sum_{t_j} ({}^b h^{(u)}_{(t_j-1/2)N+i-1/2} + {}^b h^{(u)}_{(t_j-1/2)N-i-1/2}) + \sum_{t_j} {}^b h^{(u)}_{(t_j-1/2)N-1/2} $$

y etiquetas

$$ \begin{aligned} {}^b\lambda_l^{(u)} = & \sum_{(t_j-1/2)N+i-1/2 \geq l} {}^b h^{(u)}_{(t_j-1/2)N+i-1/2} + \sum_{(t_j-1/2)N-i-1/2 \geq l} {}^b h^{(u)}_{(t_j-1/2)N-i-1/2} \\ & + \sum_{(t_j-1/2)N-1/2 \geq l} {}^b h^{(u)}_{(t_j-1/2)N-1/2}, \end{aligned} $$

con $\mathfrak{g}^{[m]} = \tilde{b}_\infty^{[m]}$ si $\epsilon = 1$ y $\mathfrak{g}^{[m]} = b_\infty^{[m]}$ si $\epsilon = -1$.

- Si $a = 1$, para $1 < i \leq [N/2] - \delta_{N,par}$, sean

$$ {}^\dagger h^{(u)}_{t_jN-i} = \frac{1}{(\log q)^u}\left(\frac{d}{dx}\right)^u p_{1/2-t_j,i}(0) \quad \text{si} \quad t_j > 0 \tag{3.45} $$

$$ {}^\dagger h^{(u)}_{(t_j-1)N+i} = \left(\frac{-1}{\log q}\right)^u \left(\frac{d}{dx}\right)^u p_{1/2-t_j,i}(0) \quad \text{si} \quad t_j \leq 0, \tag{3.46} $$

y sean

$$ {}^\dagger h^{(u)}_{(t_j-1)N} + \delta_{t_j,1}(c_u + {}^\dagger\lambda_1^{(u)} - \delta_{u,0}c_0) = \frac{1}{2(\log q)^u}\left(\frac{d}{dx}\right)^u p^{\epsilon}_{t_j,N}(0) \quad \text{si } u \text{ par y} \tag{3.47} $$

$$ {}^\dagger h^{(u)}_{(t_j-1)N} = -\frac{1}{2(\log q)^u}\left(\frac{d}{dx}\right)^u q^{\epsilon}_{t_j,N}(0) \quad \text{si } u \text{ impar,} \tag{3.48} $$

y si N es par

$$ {}^\dagger h^{(u)}_{(t_j-1/2)N} = \frac{1}{2(\log q)^u}\left(\frac{d}{dx}\right)^u p_{t_j-1/2,N/2}(0) \quad \text{si } u \text{ par y} \tag{3.49} $$

$$ {}^\dagger h^{(u)}_{(t_j-1/2)N} = -\frac{1}{2(\log q)^u}\left(\frac{d}{dx}\right)^u q_{t_j-1/2,N/2}(0) \quad \text{si } u \text{ impar,} \tag{3.50} $$

para $u = 0, \ldots, m$ y donde $\dagger$ representa d si $\epsilon = 1$ y c si $\epsilon = -1$. Asociamos S al $\mathfrak{g}^{[m]}$-módulo $L_s^{[m]}(\lambda_S)$ con cargas centrales

$$ c_u = \sum_i \sum_{t_j} ({}^\dagger h^{(u)}_{t_jN+i} + {}^\dagger h^{(u)}_{t_jN-i}) + \sum_{t_j} ({}^\dagger h^{(u)}_{(t_j-1)N} + \delta_{N,par}{}^\dagger h^{(u)}_{(t_j-1/2)N}) $$

y etiquetas

$$\begin{aligned}{}^{\dagger}\lambda_l^{(u)} &= \sum_{t_jN+i\geq l} {}^{\dagger}h_{t_jN+i}^{(u)} + \sum_{t_jN-i\geq l} {}^{\dagger}h_{t_jN-i}^{(u)} \\ &+ \sum_{(t_j-1)N\geq l} {}^{\dagger}h_{(t_j-1)N}^{(u)} + \delta_{N,\,par} \sum_{(t_j-1/2)N\geq l} {}^{\dagger}h_{(t_j-1/2)N}^{(u)},\end{aligned}$$

donde $\mathfrak{g}^{[m]} = d_\infty^{[m]}$ y $\dagger = d$ si $\epsilon = 1$ y $\mathfrak{g}^{[m]} = c_\infty^{[m]}$ con $\dagger = c$ si $\epsilon = -1$.

Denotemos $\{s_1, s_2, \dots\}$ con $s_i = q^{a_i}$ a un conjunto de representantes de las clases de equivalencia del conjunto A. Por el Teorema 3.4.3, el $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulo $L_{\vec{s}}^{[\vec{m}]}(\lambda)$ es irreducible para $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots)$ tales que $a_i \in \mathbb{Z}$ implica que $a_i = 1$ y $a_i \in \mathbb{Z}/2$ implica que $a_i = 1/2$. Luego, como consecuencia de la discusión de arriba, el Teorema 3.4.3 y las Proposiciones 3.4.4-3.4.7, hemos probado lo siguiente.

Teorema 3.4.8. *Sea V un $\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}$-módulo irreducible cuasifinito de peso máximo con carga central c y sean $P_i(x)$, $P_N^{\epsilon}(x)$ y, si N es par, $P_{N/2}(x)$ los cuasipolinomios dados por el Teorema 3.2.2 escritos de la forma* (3.28)*. Luego, V es isomorfo al producto tensorial de los módulos $L_s^{[m]}(\lambda_S)$ con distintas clases de equivalencia S.*

Observación 3.4.9. Una elección distinta de los representantes $s = q^a$ con $a \notin \mathbb{Z}/2$ en la clase de equivalencia S tiene el efecto de correr a $\widehat{g\ell}_\infty^{[m]}$ via el automorfismo ν^i para algún i. Se puede ver con facilidad que cualquier módulo irreducible cuasifinito de peso máximo $L(\widehat{\mathcal{S}_{q,N}^{\sigma,N}}, \xi)$ puede ser obtenido como arriba de forma única, salvo por este corrimiento.

Bibliografía

[BB] *K. Batistelli y C. Boyallian,* Subalgebras of the Lie algebra of matrix quantum pseudo differential operators*, Advances in Mathematical Physics (2016), doi:10.1155/2016/9218693.*

[BB2] *K. Batistelli y C. Boyallian,* QHWM of the orthogonal and symplectic type Lie subalgebras of the Lie algebra of matrix quantum pseudo differential operators*, Enviado a publicar, disponible en arXiv:1703.06175 (2017).*

[BM] *C. Boyallian, V. Meinardi,* Quasifinite highest weight modules over W_∞^N*, Journal of Math. Phys.* **52** *(2011), 2910–2928.*

[BKLY] *C. Boyallian, V. Kac, J. Liberati y C. Yan,* Quasifinite highest weight modules over the Lie algebra of matrix differential operators on the circle*, Journal of Math. Phys.* **39** *(1998), 2910–2928.*

[BL01] *C. Boyallian y J. Liberati,* Classical Lie subalgebras of the Lie algebra of matrix differential operators on the circle*, Journal of Math. Phys.* **42** *(2001), 3735-3753.*

[BL02] *C. Boyallian y J. Liberati,* On modules over matrix quantum pseudo-differential operators*, Letters in Math. Phys.* **60** *(2002), 73-85.*

[BL05] *C. Boyallian y J. Liberati,* Representations of classical Lie subalgebras of quantum pseudo-differential operators*, Journal of Math. Phys.* **46** *(2005), 033516-1–033516-17.*

[FKRW] *E. Frenkel, V. Kac y W. Wang,* $W_{1+\infty}$ and $W(gl_N)$ with central charge N*, Comm. Math. Phys.* **170** *(1995), 337-357.*

[KR1] *V. G. Kac y A. Radul,* Quasifinite highest weight modules over the Lie algebra of differential operators on the circle*, Comm. Math. Phys.* **157** *(1993), 429–457.*

[KR2] *V. G. Kac y A. Radul,* Representation theory of the vertex algebra W_∞*, Transf. Groups* **1** *(1996), 41-70.*

[KWY] *V. G. Kac, W. Wang y C. Yan,* Quasifinite representations of classical Lie subalgebras of $W_{1+\infty}$*, Adv. Math.* **139** *(1998), 56–140.*

[KL] *V. Kac y J. Liberati,* Unitary Quasi-finite representations of W_∞*, Letters in Math. Phys.* **53** *(2000), 11–27.*

[K] *V. Kac,* Infinite-dimensional Lie algebras*, 3rd ed. Cambridge University Press, Cambridge (1990).*

[W] *W. Wang,* Duality in infinite dimensional Fock representations*, Commun. Contemp. Math., Vol.* **1** *(1999) 155–199.*