Estructuras localmente conformes Kähler y localmente conformes simplécticas en solvariedades compactas

por Lic. Marcos Origlia

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física, y Computacón como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Marzo, 2017

Director: Dr. Adrián Andrada

A mi abuelo Chacho

Resumen

En esta tesis estudiamos las estructuras localmente conformes Kähler (LCK) y localmente conformes simplécticas (LCS) invariantes a izquierda en grupos de Lie, o equivalentemente tales estructuras en álgebras de Lie. Luego se buscan retículos (subgrupos discretos co-compactos) en dichos grupos. De esta manera obtenemos estructuras LCK o LCS en las solvariedades $\Gamma\backslash G$.

Específicamente estudiamos las estructuras LCK en solvariedades con estructuras complejas abelianas. Luego describimos explícitamente la estructura de las álgebras de Lie que admiten estructuras de Vaisman. También determinamos los grupos de Lie casi abelianos que admiten estructuras LCK o LCS y además analizamos la existencia de retículos en ellos. Finalmente desarrollamos un método para construir de manera sistemática ejemplos de álgebras de Lie equipadas con estructuras LCK o LCS a partir de un álgebra de Lie que ya admite tales estructuras y una representación compatible.

Palabras claves: métricas localmente conforme Kähler, estructuras localmente conforme simpléctico, grupos de Lie, solvariedades, retículos.

2010 Mathematics subject Classification: 53C15, 53C55, 53D05, 22E25, 22E40.

Abstract

In this thesis we study left invariant locally conformal Kähler (LCK) structures and locally conformal symplectic structures (LCS) on Lie groups, or equivalently such structures on Lie algebras. Then we analize the existence of lattices (co-compact discrete subgroups) on these Lie groups. Therefore, we obtain LCK or LCS structures on solvmanifolds $\Gamma\backslash G$.

Specifically we study LCK structures on solvmanifold where the complex structure is abelian. Then we describe the structure of a Lie algebra admitting a Vaisman structure. On the other hand we determine the almost abelian Lie groups equipped with a LCK or LCS structures, and we also analize the existence of lattices on these groups. Finally we construct a method to produce examples of Lie algebras admitting LCK or LCS structures beginning with a Lie algebra with these structures and a compatible representation.

Key words: Locally conformal Kähler metrics, locally conformal symplectic structures, Lie group, solvmanifold, lattices.

2010 Mathematics subject Classification: 53C15, 53C55, 53D05, 22E25, 22E40.

Agradecimientos

En primer lugar quiero a grader a mi director Adrián Andrada por su gran predisposición, por todo el tiempo que me dedicó y por haber sido sido un excelente director, no solo a la hora de trasmitir conocimientos, sino también por el apoyo incondicional en cada paso de la carrera.

Tambieén quiero agradecer a FaMAF y al CIEM por haberme brindado el lugar de trabajo. En particular quiero agradecerle a Nancy Moyano por toda su ayuda y muy buena predisposición siempre. Al CONICET, SeCyT y FONCyT por el apoyo econmico.

A los miembros del tribunal por haber aceptado ser parte del jurado y por sus comentarios.

A Isabel Dotti por sus consejos respecto a varios trabajos y su apoyo en diferentes actividades. A Roberto Miatello y a Jorge Lauret por sus charlas, consejos y predisposición cada vez que necesité una referencia o recomendación.

A Leandro Cagliero, Adrei Moroianu, Emilio Lauret e Ivan Angiono por sus charlas y aportes en diferentes partes de esta tesis. Y en general a todos los profesores de esta facultad que tuve el gusto de cruzarme en estos años y de los cuales he aprendido mucho.

A mis compañeros de oficina Euge, Meli, Andru, Denis y Gabi.

Al resto de mis compaeros de esta facultad que hicieron que estos años de doctorado hayan sido muy buenos, Angel, Oscar, Guille, Kari, Gabi, Gagi D., Vane, Lichi, Diego, Gonza, Sonia, Romi, Edwin, Mauro, Ramiro, Ivn G., Javier, Augusto, Ceci,... Y al resto de mis compaẽros y amigos de siempre, en particular a Bocha, Ema, Lucas.

Al equipo de fútbol de los Borbotones por todos los momentos compartidos. Gracias a los colombianos por haberme incluido, Edwin, Rich, Oscar, Diegol, Marlon, Pacho.

A mi novia Noe por acompaãrme y apoyarme en este último tiempo.

Y en especial a mi familia, mis padres Patricia y Hugo, mi hermano Matías, mis abuelos y mi tío Jorge por su apoyo incondicional siempre.

Contenidos

Introducción

Este trabajo se centra en el estudio de ciertas variedades diferenciables, específicamente aquellas que admiten una estructura *localmente conforme Kähler* (LCK). Por una estructura LCK en una variedad diferenciable M, se entiende un par (J, g) tal que (M, J, g) es una variedad hermitiana y existe un cubrimiento $\{U_i\}$ por abiertos de M y una familia $\{f_i\}$ de funciones diferenciables $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ tales que las métricas locales $g_i = \exp(-f_i)g|_{U_i}$ son de Kähler, o equivalentemente, existe una 1-forma cerrada θ tal que $d\omega = \theta \wedge \omega$, donde ω es la forma fundamental; en tal caso θ se llama la forma de Lee. Una *variedad de Kähler* (M, J, g) es una variedad hermitiana tal que su 2-forma fundamental ω es cerrada, o equivalentemente, $\nabla J = 0$ donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de M. Dentro de las variedades LCK son muy importantes las llamadas variedades Vaisman, éstas son variedades diferenciables con una estructura LCK donde la forma de Lee es paralela respecto de la conexión de Levi-Civita. También estudiamos una clase más general que son las variedades con una estructura localmente conforme simpléctica (LCS), es decir, una 2-forma no degenerada ω tal que $d\omega = \theta \wedge \omega$ para alguna 1-forma cerrada θ.

Tanto las variedades localmente conformes Kähler como las variedades con estructuras localmente conformes simplécticas son objetos de intenso estudio en la actualidad. Hay numerosos trabajos de diferentes autores en esta área de la geometría, ver por ejemplo [31, 34, 66, 74, 82, 22, 21]. El objetivo de esta tesis es estudiar las estructuras localmente conformes Kähler y simplécticas invariantes a izquierda en grupos de Lie. Específicamente buscamos nuevos ejemplos de grupos de Lie con dichas estructuras invariantes a izquierda, ya que en la literatura se encuentran muy pocos ejemplos. Luego determinamos si dichos grupos admiten retículos, para obtener así nuevos ejemplos de solvariedades compactas con estructuras LCK y LCS.

Para llevar a cabo este objetivo, el trabajo se organizó de la siguiente manera: En un principio nos concentramos en grupos de Lie que admiten *estructuras LCK invariantes a izquierda*, es decir un par (J, g) tal que J conmuta con las traslaciones a izquierda, $J \circ dL_a = dL_a \circ J$, y g satisface $g(dL_a X, dL_a Y) = g(X, Y)$ para todo a en el grupo y X, Y campos diferenciables. Como la estructura LCK es invariante a izquierda en G, podemos analizarla a nivel del álgebra de Lie. Una *estructura locamente conforme Kähler* en $\mathfrak{g}$ es un par $(J, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ hermitiano tal que $d\omega = \theta \wedge \omega$ para alguna $\theta \in \mathfrak{g}^*$ con $d\theta = 0$.

Concretamente nos interesan grupos de Lie *unimodulares*, es decir, grupos de Lie en los que la medida de Haar es invariante a izquierda y a derecha, o equivalentemente si G es conexo, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Este interés está fundamentado en un resultado de Milnor que afirma que si un grupo de Lie G admite *lattices* o (*retículos*) entonces G es unimodular. Un retículo es un subgrupo $\Gamma \subset G$ discreto tal que $\Gamma\backslash G$ es compacto. El motivo de buscar grupos de Lie que admitan retículos es porque si consideramos un grupo de Lie simplemente conexo con una estructura LCK invariante a izquierda, entonces esta va a resultar "esencialmente" de Kähler, en el sentido de que va a resultar globalmente conforme Kähler. En cambio $\Gamma\backslash G$ ya no es simplemente conexo pues el primer grupo de homotopía está dado por $\pi_1(\Gamma\backslash G) = \Gamma$, y admite una estructura hermitiana inducida por (J, g) que resulta LCK y globalmente conforme Kähler.

En el Capítulo 2 estudiamos las estructuras LCK donde las estructuras complejas son especiales. En primer lugar consideramos aquellas álgebras de Lie con estructuras LCK donde la estructura compleja J es *bi-invariante*, es decir $J[X, Y] = [JX, Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Su importancia radica en que en este caso G admite una estructura de grupo de Lie complejo, o sea, las operaciones de grupo (multiplicar e invertir) son holomorfas.

En segundo lugar consideramos el caso en que J es es una estructura compleja *abeliana*, i.e. $[JX, JY] = [X, Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. En este caso, probamos que si el álgebra de Lie es unimodular entonces es isomorfa al producto de $\mathbb{R}$ y un álgebra de Lie de Heisenberg. Este y otros resultados aparecen en el trabajo publicado [7].

Locally conformally Kähler structures on unimodular Lie groups, Geom. Dedicata (2015) 179: 197–216.

En el Capítulo 3 se estudian las estructuras Vaisman en cocientes compactos $\Gamma\backslash G$ de un grupo de Lie simplemente conexo soluble G por un retículo Γ, donde estas estructuras provienen de estructuras invariantes a izquierda en G, o equivalentemente de estructuras Vaisman en el álgebra de Lie. Caracterizamos las álgebras de Lie unimodulares con estructuras Vaisman en términos de álgebras de Lie Kähler planas. Usando esta caracterización exhibimos una familia de grupos de Lie equipados con estructuras Vaisman invariantes a izquierda y demostramos la existencia de retículos en algunas de estas familias. Estos resultados aparecen en el siguiente trabajo en preparación

Vaisman structures on compact quotients of Lie groups.

En el Capítulo 4 analizamos las estructuras LCK y LCS para grupos de Lie casi abelianos, es decir, en grupos de Lie cuya álgebra admite un ideal abeliano de codimensión 1. Obtenemos una caracterización de los grupos de Lie casi abelianos que admiten dichas estructuras. En el caso LCK determinamos cuáles de estos grupos admiten retículos. Finalmente construimos una familia de ejemplos de solvariedades en todas las dimensiones con estructuras LCS las cuales no admiten estructuras LCK invariantes (este es un problema planteado por varios autores). Estos resultados aparecen en el siguiente trabajo, el cual fue aceptado para su publicación (Ver [8]).

Lattices on almost abelian Lie groups with locally conformal Kähler or symplectic structures, Manuscripta Mathematica (2017) doi:10.1007/s00229-017- 0938-3

En el Capítulo 5 describimos un método de construcción de nuevos ejemplos de álgebras de Lie con estructuras LCK y LCS; este método permite construir álgebras de Lie con dichas estructuras en cualquier dimensión, partiendo de un álgebra de Lie que ya admite tal estructura y una representación adecuada.

Resultados originales obtenidos en esta tesis

- Caracterización de todas las solvariedades que admiten estructuras LCK invariantes con estructuras complejas abelianas, publicado en [7].

- Caracterización de las álgebras de Lie equipadas con estructuras LCK donde la estructura compleja es bi-invariante, de donde se deduce que no existen variedades complejas compactas con métricas LCK invariantes por la acción transitiva de un grupo de Lie complejo.

- Descripción explícita de la estructura de las álgebras de Lie unimodulares que admiten estructuras de Vaisman en términos de álgebras de Lie Kähler planas. Estudio de la existencia de retículos en algunos grupos de Lie asociados.
- Clasificación de solvariedades casi abelianas con estructuras LCK invariantes en dimensión 4. No existencia de tales solvariedades para dimensión mayor o igual a 6.
- Caracterización de grupos de Lie casi abelianos con estructuras LCS invariantes a izquierda.
- Nuevos ejemplos de solvariedades con estructuras LCS invariantes en toda dimensión par y cálculo de sus números de Betti para la cohomología de de Rham y para la cohomología de Lichnerowicz.
- Determinación de una familia de álgebras de Lie (las de tipo I o "imaginarias puras") con la propiedad de que toda estructura LCS en ellas es de primer tipo.
- Nuevos métodos de construcción de estructuras LCK y LCS a partir de un álgebra que ya admite tales estructuras y una representación compatible.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 Preliminares algebraicos

En esta sección daremos algunos resultados de álgebra lineal que usaremos en las secciones siguientes, estudiando en particular algunas estructuras adicionales sobre espacios vectoriales reales, como productos escalares y estructuras complejas.

Definición 1.1.1. Sea V un espacio vectorial real. Una *estructura compleja* J sobre V es un endomorfismo $J : V \to V$ tal que $J^2 = -\operatorname{Id}$.

Observación 1.1.2. Si J es una estructura compleja, entonces $J \in GL(V)$.

Ejemplo 1.1.3. Si V es un espacio vectorial complejo y lo consideramos como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ entonces la aplicación $v \to iv$ define una estructura compleja. Recíprocamente tenemos el siguiente resultado:

Lema 1.1.4. *Si V es un espacio vectorial real con una estructura compleja J, entonces V admite una estructura de espacio vectorial complejo.*

Demostración. Definimos sobre V la siguiente operación: $(a + ib)v = av + bJv,\ a, b \in \mathbb{R}$. Luego la $\mathbb{R}$-linealidad de J y el hecho que $J^2 = -\operatorname{Id}$, muestran que esta operación define una estructura de $\mathbb{C}$-módulo sobre V. □

Lema 1.1.5. *Si J es una estructura compleja sobre un espacio vectorial real V, entonces* $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$ *y existen $x_1, \ldots, x_n \in V$ tales que $\{x_1, \ldots, x_n, Jx_1, \ldots, Jx_n\}$ es una base de V.*

Demostración. Como $J^2 = -\operatorname{Id}$, entonces

$$0 \leq \det(J^2) = (-1)^{\dim_{\mathbb{R}} V}, \tag{1.1}$$

y por lo tanto $\dim_{\mathbb{R}} V$ es par. Para la segunda parte, consideramos a V como espacio vectorial complejo de dimensión n. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de V como espacio vectorial complejo. Luego $\{x_1, \ldots, x_n, Jx_1, \ldots, Jx_n\}$ es una base real de V. En efecto si

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \sum_{k=1}^{n} b_k J x_k = 0,$$

con $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, por la demostración del Lema 1.1.4, $b_k J x_k = i b_k x_k$. Luego queda

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \sum_{k=1}^{n} i b_k x_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + i b_k) x_k = 0.$$

Como $x_1, \ldots, x_n$ es base de V como espacio vectorial complejo, tenemos que $a_k + i b_k = 0$ para $k = 1, \ldots, n$. Por lo tanto $a_k = b_k = 0$ para $k = 1, \ldots, n$. □

Definición 1.1.6. Si V es un espacio vectorial real, la *complexificación* de V es el espacio vectorial complejo $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, que será denotado por $V^{\mathbb{C}}$.

Los siguientes resultadsos son conocidos y su demostración es sencilla (ver por ejemplo [50]).

Lema 1.1.7. *Si V es un espacio vectorial real, entonces V está naturalmente incluido en $V^{\mathbb{C}}$. Además todo elemento v de $V^{\mathbb{C}}$ se puede escribir de la forma $v = x + iy$ para ciertos $x, y \in V$.*

La *conjugación compleja* en $V^{\mathbb{C}}$ es el endomorfismo real definido por

$$z = x + iy \to \overline{z} = x - iy, \qquad x, y \in V.$$

Si J es una estructura compleja en V, podemos extenderla $\mathbb{C}$-linealmente a $V^{\mathbb{C}}$, mediante

$$J(v + iw) = Jv + iJw.$$

La seguiremos denotando por J y así sigue valiendo $J^2 = -\operatorname{Id}$. Claramente los autovalores de J en $V^{\mathbb{C}}$ son i y $-i$, y denotaremos los autoespacios asociados por $V^{1,0}$ y $V^{0,1}$, es decir,

$$V^{1,0} = \{v \in V^{\mathbb{C}} : Jv = iv\} \quad y \quad V^{0,1} = \{v \in V^{\mathbb{C}} : Jv = -iv\}.$$

Lema 1.1.8. *Sea V un espacio vectorial real dotado con una estructura compleja J. Entonces $V^{1,0} = \{v - iJv : v \in V\}$, $\quad V^{0,1} = \{v + iJv : v \in V\}$ y tenemos la siguiente descomposición*

$$V^{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}. \tag{1.2}$$

Además la conjugación compleja en $V^{\mathbb{C}}$ induce un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal entre $V^{1,0}$ y $V^{0,1}$.

Ahora veremos cómo aplicar lo anterior a V^*, el espacio dual de V. Para ello tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.1.9. *Sea V un espacio vectorial real, dotado con una estructura compleja J. Entonces V^* admite de manera natural una estructura compleja J^* dada por*

$$(J^*\lambda)v = \lambda(Jv),$$

para todo $v \in V$. Además J^* induce la descomposición

$$V^{*\mathbb{C}} = V^{*1,0} \oplus V^{*0,1}, \tag{1.3}$$

donde $V^{*1,0}$ $\big($respectivamente $\big(V^{*0,1}\big)\big)$ es el anulador de $V^{0,1}$ $\big($respectivamente $\big(V^{1,0}\big)\big)$.

Demostración. Claramente J^* es un endomorfismo de V^* tal que $J^{*2} = -\operatorname{Id}$. Consideramos la complexificación de V^*, luego por el Lema 1.1.8 tenemos

$$V^{*\mathbb{C}} = V^{*1,0} \oplus V^{*0,1},$$

con $V^{*1,0} = \{\lambda - iJ^*\lambda : \lambda \in V^*\}$ y $V^{*0,1} = \{\lambda + iJ^*\lambda : \lambda \in V^*\}$. Para la última parte, sea $\lambda \in V^{*1,0}$ y $v \in V^{0,1}$, entonces

$$\lambda(v) = (\lambda_1 - iJ^*\lambda_1)(v_1 + iJv_1) = \lambda_1(v_1) + i\lambda_1(Jv_1) - i(J^*\lambda_1)v_1 + (J^*\lambda_1)(Jv_1) = 0.$$

Así $V^{*1,0}$ es el anulador de $V^{0,1}$. Análogamente $V^{*0,1}$ es el anulador de $V^{1,0}$. □

Denotaremos $V_{1,0} = V^{*1,0}$ y $V_{0,1} = V^{*0,1}$.

Si V es un espacio vectorial real de dimensión n su álgebra exterior está dada por:

$$\bigwedge V = \bigoplus_{r=0}^{n} \bigwedge^r V.$$

Análogamente, $\bigwedge V^{\mathbb{C}}$ denota el álgebra exterior del espacio vectorial complejo $V^{\mathbb{C}}$, la cual está dada por:

$$\bigwedge V^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{r=0}^{n} \bigwedge^r V^{\mathbb{C}} \tag{1.4}$$

Si V está dotado con una estructura compleja J, entonces su dimensión real es $2n$, y $V^{\mathbb{C}}$ se descompone en $V^{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$, con $V^{1,0}$ y $V^{0,1}$ subespacios vectoriales complejos de dimensión n. Luego definimos

$$\bigwedge^{p,q} V = \bigwedge^p V^{1,0} \otimes \bigwedge^q V^{0,1}.$$

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de $V^{1,0}$, entonces por el Lema 1.1.8 $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ es una base de $V^{0,1}$. El conjunto de elementos

$$e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p} \wedge \bar{e}_{k_1} \wedge \cdots \wedge \bar{e}_{k_q}, \quad 1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n, \quad 1 \le k_1 < \cdots < k_q \le n,$$

forma una base de $\bigwedge^{p,q} V$ sobre $\mathbb{C}$. Decimos que un elemento de $\bigwedge^{p,q} V$ es de grado (p,q). Luego tenemos los siguientes hechos:

Proposición 1.1.10 ([46]). *Para un espacio vectorial real V dotado con una estructura compleja J tenemos:*

(i) $\bigwedge^{p,q} V$ *es un subespacio de* $\bigwedge^{p+q} V^{\mathbb{C}}$

(ii) $\bigwedge^k V^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q} V$

(iii) *La conjugación compleja induce un isomorfismo entre* $\bigwedge^{p,q} V$ *y* $\bigwedge^{q,p} V$*, es decir,* $\overline{\bigwedge^{p,q} V} = \bigwedge^{q,p} V$*.*

Consideraremos ahora productos internos compatibles con una estructura compleja J.

Definición 1.1.11. Un *producto interno hermitiano* sobre un espacio vectorial real V con una estructura compleja J es un producto interno $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ que satisface

$$\langle Jv, Jw \rangle = \langle v, w \rangle,$$

para todo $v, w \in V$.

Notar que dado un espacio producto interno $(V, \langle \cdot\, , \cdot \rangle)$ con una estructura compleja J, entonces $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ es hermitiano si y sólo si J es antisimétrica.

Ejemplo 1.1.12. Sea V un espacio vectorial real de dimensión dos con una orientación fija. Si $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ es un producto interno en V, entonces existe una estructura compleja natural en V compatible con el producto interno, definida como sigue: para cada $0 \neq v \in V$, sea $Jv \in V$ el único vector tal que $\langle v, Jv \rangle = 0$, $||Jv|| = ||v||$, y $\{v, Jv\}$ está positivamente orientada. Es decir, J es una rotación en sentido antihorario en $\frac{\pi}{2}$, por lo que $J^2 = -\operatorname{Id}$. Luego, J es una estructura compleja en V, y $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ resulta un producto interno hermitiano.

La siguiente proposición es fácil de demostrar:

Proposición 1.1.13 ([46]). *Sea $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ un producto interno hermitiano en un espacio vectorial real V con una estructura compleja J. Entonces podemos extender $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ a una forma bilineal compleja simétrica en $V^{\mathbb{C}}$, que satisface:*

(i) $\langle \overline{Z}, \overline{W} \rangle = \overline{\langle Z, W \rangle}$, *para* $Z, W \in V^{\mathbb{C}}$,

(ii) $\langle Z, \overline{Z} \rangle > 0$, *para todo* $Z \in V^{\mathbb{C}}$ *no nulo,*

(iii) $\langle Z, \overline{W} \rangle = 0$, *para* $Z \in V^{1,0}$ *y* $W \in V^{0,1}$.

Recíprocamente, toda forma bilineal, compleja y simétrica que satisface (i), (ii) *y* (iii) *es la extensión de un producto interno hermitiano en* V.

1.2 Estructuras casi complejas en variedades

En esta sección aplicaremos los resultados de la Sección 1.1 al espacio tangente de una variedad diferenciable.

Sea M una variedad diferenciable real. Una *estructura casi compleja* J en M es un tensor diferenciable $J : TM \to TM$ tal que en cada punto $p \in M$, $J_p : T_pM \to T_pM$ es una estructura compleja en T_pM. Si M es una variedad diferenciable equipada con una estructura casi compleja J, entonces decimos que (M, J) es una *variedad casi compleja.*

En el próximo resultado se establece una restricción para la existencia de estructuras casi complejas.

Proposición 1.2.1. *Si M admite una estructura casi compleja, entonces* $\dim M$ *es par y M es orientable.*

Demostración. Como consecuencia del Lema 1.1.5 tenemos que $\dim M$ es par. Para la segunda parte, si J es una estructura casi compleja en M, entonces para cada $p \in M$ podemos elegir una base de T_pM de la forma $\{v_1, \ldots, v_n, Jv_1, \ldots, Jv_n\}$ (ver Lema 1.1.5), y cualquier otra base de T_pM de esta forma difiere de la anterior en una matriz de determinante positivo. En efecto, sea $\{w_1, \ldots, w_n, Jw_1, \ldots, Jw_n\}$ otra base de T_pM, entonces existen $a_k^j, b_k^j \in \mathbb{R}$ tales que

$$w_j = \sum a_k^j v_k + \sum b_k^j J v_k,$$

y así la matriz de cambio de base es

$$P = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Se prueba que $\det P = |\det(A+iB)|^2$ y como P es inversible tenemos que $\det P > 0$. Luego para dar una orientación a M consideramos la familia de todos los sistemas coordenados (U, ϕ) tales que para todo $p \in U$ la base $\{\partial/\partial x_i\}_{i=1}^{2n}$ de T_pM tiene la misma orientación que $\{v_1, \ldots, v_n, Jv_1, \ldots, Jv_n\}$. Esto determina una orientación en M. $\square$

Ejemplo 1.2.2. Las esferas S^2 y S^6 admiten una estructura casi compleja. En efecto, sean $p \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno canónico de $\mathbb{R}^3$. Identificamos el espacio tangente $T_p(S^2)$ con el subespacio $\{v \in \mathbb{R}^3 : \langle p, v \rangle = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$. Luego definimos J por $J(v) = p \times v$, donde $\times$ es el producto cruz de $\mathbb{R}^3$. Por cálculo directo tenemos que $J^2(v) = p \times (p \times v) = -v$. Por lo tanto J es una estructura casi compleja en S^2.

Ahora construiremos una estructura casi compleja en S^6 usando los octoniones. Un octonión es un par ordenado de cuaterniones $x = (q_1, q_2)$. El conjunto de todos los octoniones forma un álgebra no asociativa con la suma y la multiplicación dadas por:

$$\begin{aligned} (q_1, q_2) + (q_1', q_2') &= (q_1 + q_1', q_2 + q_2') \\ (q_1, q_2)(q_1', q_2') &= (q_1 q_1' - \overline{q}_2' q_2, q_2' q_1 + q_2 \overline{q}_1'), \end{aligned}$$

donde el conjugado de un octonión se define por $\overline{x} = (\overline{q}_1, -q_2)$. Así $x\overline{x} = (q_1\overline{q}_1 + \overline{q}_2 q_2, 0)$ y $|x|^2 = q_1\overline{q}_1 + \overline{q}_2 q_2$. Un octonión $x = (q_1, q_2)$ es *real* si q_1 es real y $q_2 = 0$, y es *puramente imaginario* si q_1 es un cuaternion imaginario puro. Sea U el espacio vectorial real de dimensión 7 formado por los octoniones puramente imaginarios. Se define un producto interno $(\ ,\ )$ y un producto cruz $\times$ en U que generalizan el producto interno y el producto cruz de $\mathbb{R}^3$ (considerando a $\mathbb{R}^3$ como el espacio de cuaterniones imaginarios puros), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -(x, x') &= \text{la parte real de } xx', \quad x, x' \in U, \\ x \times x' &= \text{la parte puramente imaginaria de } xx', \quad x, x' \in U. \end{aligned}$$

Se puede ver que si $x, x', x'' \in U$, entonces

$$xx = -(x, x) = -|x|^2, \quad x \times x' = -x' \times x, \quad (x \times x', x'') = (x, x' \times x''). \tag{1.5}$$

Sea $S^6 = \{x \in U : |x| = 1\}$. Identificamos el espacio tangente $T_x(S^6)$ con el subespacio $\{y \in U : (x, y) = 0\}$ de U. Definimos J en $T_x(S^6)$ por

$$J(y) = x \times y, \quad y \in T_x(S^6).$$

Por (1.5) se ve que $x \times y \in T_x(S^6)$. Además

$$\begin{aligned} J^2(y) &= x \times (x \times y) = x(x \times y) + (x, x \times y) = x(x \times y) = \\ &= x(xy) + x(x, y) = x(xy) = (xx)y = -|x|^2 y = -y, \end{aligned}$$

entonces $J^2 = -\operatorname{Id}$. Así J define una estructura casi compleja en S^6.

Observación 1.2.3. S^2 y S^6 son las únicas esferas que admiten una estructura casi compleja. En efecto, la no existencia de una estructura casi compleja en S^{4k} para $k \geq 1$ y S^{2n} para $n \geq 4$ fue probado por Wen [83] y conjuntamente por Borel y Serre [27] respectivamente. Por otro lado, Kirchhoff [49] demostró que si S^n admite una estructura casi compleja, entonces S^{n+1} es paralelizable, y Adams [1] demostró que S^{n+1} es paralelizable sólo para $n+1 = 1$, 3 y 7. El resultado de Adams combinado con el de Kirchhoff implican el resultado de Wen, Borel y Serre.

Ejemplo 1.2.4. Toda superficie orientable M en $\mathbb{R}^3$ admite una estructura casi compleja. En efecto, para $p \in M$ y $v \in T_p(M)$, definimos $J(v)$ como el único vector tal que $\langle v, Jv \rangle = 0$, $|Jv| = |v|$, y $\{v, Jv\}$ está positivamente orientada, donde $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es el producto interno canónico de $\mathbb{R}^3$. Esta J define una estructura casi compleja en M. Observemos que este hecho puede ser generalizado a toda variedad riemanniana, orientable, de dimensión dos. Notar que la construcción de la estructura casi compleja en S^2 del Ejemplo 1.2.2 es un caso particular de éste.

Sea (M, J) una variedad casi compleja. Denotaremos a T_pM por T_p, por simplicidad. Para cada $p \in M$, sea $(T_p)^{\mathbb{C}}$ la complexificación del espacio tangente en p, y a sus elementos los llamamos *vectores tangentes complejos.* Por el Lema 1.1.8 tenemos que:

$$(T_p)^{\mathbb{C}} = (T_p)^{1,0} \oplus (T_p)^{0,1}$$

donde $(T_p)^{1,0}$ y $(T_p)^{0,1}$ son los autoespacios de J correspondientes a los autovalores i y $-i$ respectivamente.

Un *campo vectorial complejo* es una asignación C^∞, $Z : M \to (TM)^{\mathbb{C}}$, tal que $Z_p \in (T_p)^{\mathbb{C}}$. El campo complejo Z se dice de tipo $(1,0)$ si $Z_p \in (T_p)^{1,0}$ y de tipo $(0,1)$ si $Z_p \in (T_p)^{0,1}$, para todo $p \in M$. Observemos que si Z es un campo vectorial complejo de tipo $(1,0)$ entonces, por el Lema 1.1.8, su conjugado $\overline{Z}$ es un campo vectorial complejo de tipo $(0,1)$, y por el mismo lema, es inmediato que:

Proposición 1.2.5. *Un campo vectorial complejo Z en una variedad casi compleja (M, J) es de tipo $(1,0)$ ó $(0,1)$ si y sólo si Z es de la forma $Z = X - iJX$ ó $Z = X + iJX$ respectivamente, para algún $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Por la Proposición 1.1.9 tenemos que:

$$(T_p^*)^{\mathbb{C}} = (T_p^*)^{1,0} \oplus (T_p^*)^{0,1} = (T_p)_{1,0} \oplus (T_p)_{0,1}$$

donde $(T_p)_{1,0}$ y $(T_p)_{0,1}$ son los anuladores de $(T_p)^{0,1}$ y $(T_p)^{1,0}$, respectivamente.

Dada una variedad diferenciable M consideramos su k-fibrado exterior, dado por

$$\bigwedge^k M = \bigcup_{p \in M} \bigwedge^k T_p^*.$$

A sus secciones las denotaremos por $E^k(M)$, que es el espacio de k-formas diferenciables (reales) en M, y $E(M)$ representará el espacio de todas las formas diferenciables en M, es decir,

$$E(M) = \bigoplus_{k=1}^{n} E^k(M).$$

Si ahora (M, J) es una variedad casi compleja, podemos hacer lo mismo para $(T_p^*)^{\mathbb{C}}$, y tenemos:

$$\bigwedge\nolimits_{\mathbb{C}}^k M = \bigcup_{p \in M} \bigwedge\nolimits^k (T_p^*)^{\mathbb{C}}.$$

A sus secciones las denotaremos por $A^k(M)$ y llamaremos $A(M)$ al espacio de todas las formas complejas en M. Definimos $\bigwedge^{r,s} T_p^* = \bigwedge^r (T_p^*)^{1,0} \otimes \bigwedge^s (T_p^*)^{0,1}$, con $p \in M$, y consideramos el fibrado bigraduado

$$\bigwedge\nolimits^{r,s} M = \bigcup_{p \in M} \bigwedge\nolimits^{r,s} T_p^*.$$

Denotaremos por $A^{r,s}(M)$ a sus secciones, a las que llamaremos *formas complejas de tipo* (r, s). Por la Proposición 1.1.9, una 1-forma compleja w es de tipo $(1, 0)$ (respectivamente $(0, 1)$) si y sólo si $w(Z) = 0$ para todo vector complejo Z de tipo $(0, 1)$ (respectivamente $(1, 0)$).

Observación 1.2.6. Si $w \in A^{r,s}(M)$, entonces $w(Z_1, \ldots, Z_{r+s}) = 0$, si $Z_1, \ldots, Z_{r+s}$ son vectores complejos de los cuales más de r son de tipo $(1, 0)$, o más de s son de tipo $(0, 1)$.

El siguiente resultado se demuestra fácilmente utilizando la Proposición 1.1.10.

Proposición 1.2.7. *Si* (M, J) *es una variedad casi compleja, entonces*

$$\bigwedge\nolimits^k (T_p^*)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{r+s=k} \bigwedge\nolimits^{r,s} T_p^* \quad y \quad A^k(M) = \bigoplus_{r+s=k} A^{r,s}(M)$$

Más aún, $\overline{\bigwedge^{r,s} T_p^*} = \bigwedge^{s,r} T_p^*$ *y* $\overline{A^{r,s}(M)} = A^{s,r}(M)$.

Si $d : E^k(M) \to E^{k+1}(M)$ representa la derivada exterior de formas diferenciales, entonces consideraremos su extensión $\mathbb{C}$-lineal a las formas complejas, $d : A^k(M) \to A^{k+1}(M)$, a la cual seguiremos denotando por d. Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.2.8. *Si* $A^{p,q}(M)$ *es el espacio de formas complejas de grado* (p, q) *sobre una variedad casi compleja* M*, entonces*

$$d(A^{p,q}(M)) \subset A^{p+2,q-1}(M) \oplus A^{p+1,q}(M) \oplus A^{p,q+1}(M) \oplus A^{p-1,q+2}(M).$$

Demostración. Es consecuencia de que $A(M)$ está localmente generado por $A^{0,0}(M)$, $A^{1,0}(M)$ y $A^{0,1}(M)$, y de que

$$\begin{aligned} d(A^{0,0}(M)) &\subset A^{1,0}(M) \oplus A^{0,1}(M), \\ d(A^{1,0}(M)) &\subset A^{2,0}(M) \oplus A^{1,1}(M) \oplus A^{0,2}(M), \\ d(A^{0,1}(M)) &\subset A^{2,0}(M) \oplus A^{1,1}(M) \oplus A^{0,2}(M). \end{aligned}$$

□

1.3 Variedades complejas

Las variedades complejas son espacios topológicos que son localmente como $\mathbb{C}^n$. En algún sentido las variedades complejas son más rígidas que las variedades diferenciables, de una manera similar a la relación que hay entre funciones holomorfas y funciones diferenciables.

Repasamos algunas nociones del análisis complejo de varias variables.

Definición 1.3.1. Una función $f = u + iv$ de un abierto U de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}$ se dice *holomorfa* si la ecuación de Cauchy-Riemann se cumple para todas las coordenadas $z_k = x_k + iy_k$, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Equivalentemente, una función f es holomorfa si las funciones inducidas

$$U \cap \{(z_1, \dots, z_{i-1}, z, z_{i+i}, \dots, z_n) : z \in \mathbb{C}\} \to \mathbb{C}$$

son holomorfas para todo $i = 1, \dots, n$, y $z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+i}, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ fijos.

Observemos que si definimos

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),$$

entonces f es holomorfa si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = 0$ para $k = 1, \dots, n$.

Una función $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, se dice *holomorfa* si todas sus funciones coordenadas $f_1, \dots, f_m$ son holomorfas.

Definición 1.3.2. Un *atlas holomorfo* en una variedad diferenciable es un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ de la forma $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i) \subset \mathbb{C}^n$, tal que las funciones de transición $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$ son holomorfas. El par (U_i, ϕ_i) se llama una carta holomorfa.

Definición 1.3.3. Una variedad compleja M de dimensión n es una variedad real de dimensión $2n$ junto con un atlas holomorfo.

Definición 1.3.4. Una función $f : M \to \mathbb{C}$ en una variedad compleja M, se dice *holomorfa* si $f \circ \phi^{-1} : \phi_i(U_i) \to \mathbb{C}$ es holomorfa para toda carta holomorfa (U_i, ϕ_i).

Definición 1.3.5. Sean M y N dos variedades complejas. Una función $f : M \to N$ es *holomorfa* si para todo par de cartas holomorfas (U, ϕ) y (U', ϕ') de M y N, respectivamente, la función $\phi' \circ f \circ \phi^{-1}$ es holomorfa.

Ejemplo 1.3.6. $\mathbb{C}^n$ es el ejemplo básico de una variedad compleja.

Ejemplo 1.3.7. El espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$. Es una de las variedades complejas compactas más importantes. $\mathbb{C}P^n$ es el conjunto de rectas por el origen en $\mathbb{C}^{n+1}$, o equivalentemente, $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$, donde $\mathbb{C}^*$ actúa por multiplicación en $\mathbb{C}^{n+1}$. Denotaremos la clase de $(z_0, z_1, \dots, z_n)$ por $[z_0, z_1, \dots, z_n]$. Dotamos a $\mathbb{C}P^n$ con la topología cociente. Consideramos los abiertos $U_i = \{[z_0, z_1, \dots, z_n] : z_i \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^n$ y las funciones

$$\phi_i : U_i \to \mathbb{C}P^n,\ [z_0, z_1, \dots, z_n] \longmapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

Luego las funciones de transición $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_i(U_i \cap U_j)$ están dadas por

$$\phi_{ij}(w_1, \dots, w_n) = \left(\frac{w_1}{w_i}, \dots, \frac{w_{i-1}}{w_i}, \frac{w_{i+1}}{w_i}, \dots, \frac{w_{j-1}}{w_i}, \frac{1}{w_i}, \frac{w_j}{w_i}, \dots, \frac{w_n}{w_i} \right),$$

las cuales son biyectivas y holomorfas sobre su dominio de definición y entonces (U_i, ϕ_i) son cartas complejas.

A continuación veremos la relación que hay entre variedades complejas y estructuras casi complejas. Comenzamos notando que $\mathbb{C}^n$ admite de manera natural una estructura casi compleja, en efecto, sea $(z_1, \dots, z_n)$ un sistema coordenado en $\mathbb{C}^n$, sea $z_k = x_k + iy_k$, definimos j_n por

$$j_n(\partial/\partial x_k) = \partial/\partial y_k, \qquad j_n(\partial/\partial y_k) = -\partial/\partial x_k.$$

Esto define una estructura casi compleja en $\mathbb{C}^n$.

Ahora veremos un resultado que nos dice cómo se comporta esta estructura compleja canónica de $\mathbb{C}^n$ con las funciones holomorfas.

Proposición 1.3.8. *Una función f de un abierto de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^m$ preserva la estructura compleja, es decir, $df \circ j_n = j_m \circ df$, si y sólo si f es holomorfa.*

Demostración. Sea $f = (f_1, \dots, f_m)$ con $f_k = u^k + iv^k$, $k = 1, \dots, m$. Luego f es holomorfa si y sólo si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u^k}{\partial x_j} = \frac{\partial v^k}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial u^k}{\partial y_j} = -\frac{\partial v^k}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m.$$

Por otro lado tenemos que df satisface:

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial v^k}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial y_k},$$

$$df\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u^k}{\partial y_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial v^k}{\partial y_j}\right) \frac{\partial}{\partial y_k},$$

para $j = 1, \dots, n$. Luego de la definición de j_n y j_m, resulta que $df \circ j_n = j_m \circ df$ si y sólo si f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann. $\square$

En particular las funciones de transición preservan la estructura casi compleja de $\mathbb{C}^n$. Además la manera natural de darle una estructura casi compleja a $\mathbb{C}^n$ induce el siguiente resultado.

Proposición 1.3.9. *Toda variedad compleja M admite de manera natural una estructura casi compleja J.*

Demostración. Si $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, la idea es tranferir la estructura casi compleja de $\mathbb{C}^n$ a través de los sistemas coordenados. Sea (U, ϕ_U) un sistema coordenado de M, definimos

$$J_U = d\phi_U^{-1} \circ j_n \circ d\phi_U. \tag{1.6}$$

Basta ver que esta estructura no depende de los sistemas coordenados. Sea (V, ϕ_V) otro sistema coordenado tal que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $\phi_V \circ \phi_U^{-1}$ es holomorfa, así:

$$\begin{aligned} J_V &= d\phi_V^{-1} \circ j_n \circ d\phi_V \\ &= d\phi_V^{-1} \circ j_n \circ d(\phi_V \circ \phi_U^{-1}) \circ d\phi_U \\ &= d\phi_V^{-1} \circ d(\phi_V \circ \phi_U^{-1}) \circ j_n \circ \phi_U \\ &= d\phi_U^{-1} \circ j_n \circ \phi_U \\ &= J_U \end{aligned}$$

□

Definición 1.3.10. Sean (M, J) y (M', J') dos variedades casi complejas. Una función $f : M \to M'$ se dice *casi compleja* si $J' \circ df = df \circ J$.

Luego de la Proposición 1.3.8 obtenemos:

Proposición 1.3.11. *Dadas M y M' dos variedades complejas con estructuras casi complejas J y J' respectivamente. Una función $f : M \to M'$ es holomorfa si y sólo si f es casi compleja.*

Como vimos en la Proposición 1.3.9 toda variedad compleja admite de manera natural una estructura casi compleja. En general la recíproca es falsa. A continuación veremos bajo qué condiciones son equivalentes.

Definición 1.3.12. Una estructura casi compleja J en M se dice *integrable* si M es la variedad diferenciable subyacente a una variedad compleja que induce a J como en la Proposición 1.3.9. En este caso J también se dice una *estructura compleja*.

Nota. Por definición toda variedad compleja admite una estructura compleja.

Dado una estructura casi compleja J, se define el tensor de *Nijenhuis* N_J asociado por:

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J([JX, Y] + [X, JY]), \tag{1.7}$$

para todo par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Es fácil ver que N_J es un tensor de tipo $(1, 2)$. El siguiente importante teorema provee una caracterización de la integrabilidad en términos de N_J.

Teorema 1.3.13 ([63])**.** *Una estructura casi compleja J es integrable si y sólo si $N_J \equiv 0$.*

Demostración. Sólo probaremos que para una estructura casi compleja e integrable J, vale que $N_J \equiv 0$. Sea $(z_1, \ldots, z_n)$ con $z_j = x_j + iy_j$ un sistema de coordenadas en una variedad compleja M. Como J es integrable sabemos que $J(\partial/\partial x_k) = \partial/\partial y_k$ y $J(\partial/\partial y_k) = -\partial/\partial x_k$. Como el corchete de campos coordenados es cero tenemos que, $N_J(X, Y) = 0$, para todo $X, Y \in \{\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n, \partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_n\}$. Como N_J es tensor, resulta $N_J \equiv 0$. □

A continuación daremos un ejemplo de una estructura casi compleja no integrable.

Ejemplo 1.3.14. Como vimos en el Ejemplo 1.2.2, (S^6, J) resulta una variedad casi compleja, y se puede ver que J no es integrable (A. Frölicher [33]). La posible existencia de una estructura compleja en S^6 ha sido un problema abierto por más de 60 años. Recientemente Michael Atiyah en [11] anunció la no existencia de estructuras complejas en S^6.

Ahora veremos un resultado de fácil demostración, el cual da algunas equivalencias para que una estructura casi compleja resulte compleja.

Proposición 1.3.15 ([50]). *Sea (M, J) una variedad casi compleja; las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *J es integrable.*

(ii) *si Z, W son campos vectoriales complejos de tipo $(1, 0)$, entonces $[Z, W]$ también.*

(iii) *si Z, W son campos vectoriales complejos de tipo $(0, 1)$, entonces $[Z, W]$ también.*

A continuación tenemos otro resultado que nos permite identificar cuándo una estructura casi compleja es integrable. Para ello necesitamos definir la *conjugada de una 1-forma compleja w* por $\overline{w}(Z) = w(\overline{Z})$, para todo Z campo vectorial complejo. Notemos que si w es una 1-forma compleja de tipo $(1, 0)$ entonces $\overline{w}$ es una 1-forma compleja de tipo $(0, 1)$.

Proposición 1.3.16. *Sea (M, J) una variedad casi compleja; las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *J es integrable.*

(ii) *$d(A^{1,0}(M)) \subset A^{2,0}(M) \oplus A^{1,1}(M)$.*

(iii) *$d(A^{0,1}(M)) \subset A^{1,1}(M) \oplus A^{0,2}(M)$.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sean w una 1-forma compleja de tipo $(1, 0)$ y Z, W campos vectoriales complejos de tipo $(0, 1)$. Por un lado tenemos que dw es una 2-forma compleja, y por la Proposición 1.2.7 resulta

$$dw = w^{2,0} + w^{1,1} + w^{0,2},$$

donde $w^{i,j} \in A^{i,j}(M)$. Como $w^{2,0}(Z, W) = w^{1,1}(Z, W) = 0$, resulta que $dw(Z, W) = w^{0,2}(Z, W)$. Por otro lado

$$dw(Z, W) = Zw(W) - Ww(Z) - w([Z, W]),$$

Como J es integrable, tenemos que $[Z, W]$ es de tipo $(0, 1)$, por la Proposición 1.3.15. Así $dw(Z, W) = 0$. Combinando ambos resultados tenemos que $w^{0,2}(Z, W) = 0$. Además $w^{0,2}$ se anula si alguno de los argumentos es de tipo $(1, 0)$, por lo que $w^{0,2} \equiv 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sean Z, W de tipo $(0, 1)$, queremos ver que $[Z, W]$ también lo es. Si w es de tipo $(1, 0)$, entonces $w([Z, W]) = -dw(Z, W)$. Por (ii) $dw(Z, W) = 0$, luego $w([Z, W]) = 0$ con w de tipo $(1, 0)$ arbitraria, entonces $[Z, W]$ es de tipo $(0, 1)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Si w es de tipo $(1, 0)$ entonces $\overline{w}$ es de tipo $(0, 1)$. Si $dw = w^{2,0} + w^{1,1} + w^{0,2}$, entonces $d\overline{w} = \overline{w^{2,0}} + \overline{w^{1,1}} + \overline{w^{0,2}}$. Como $\overline{w^{0,2}} \in A^{2,0}(M)$ entonces por (iii) $\overline{w^{0,2}} = 0$ y por lo tanto $w^{0,2} = 0$. De manera similar se demuestra (ii) $\Rightarrow$ (iii). $\square$

El siguiente resultado se sigue directamente de las Proposiciones 1.3.16 y 1.2.8.

Proposición 1.3.17. *J es integrable si y sólo si $d(A^{p,q}(M)) \subset A^{p+1,q}(M) \oplus A^{p,q+1}(M)$, para todo p y $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Sean $\pi^k : A(M) \to A^k(M)$ y $\pi^{r,s} : A(M) \to A^{r,s}(M)$ las proyecciones canónicas. Si $d : A^k(M) \to A^{k+1}(M)$ representa la extensión $\mathbb{C}$-lineal de la derivada exterior, se definen los siguientes operadores:

$$\partial = \pi^{p+1,q} \circ d : A^{p,q}(M) \to A^{p+1,q}(M), \quad \overline{\partial} = \pi^{p,q+1} \circ d : A^{p,q}(M) \to A^{p,q+1}(M).$$

Corolario 1.3.18. *Sea (M, J) una variedad casi compleja. Entonces J es integrable si y sólo si $d\alpha = \partial(\alpha) + \overline{\partial}(\alpha)$, para toda $\alpha \in A(M)$.*

Demostración. Si J es integrable, por la Proposición 1.3.17 tenemos que $d(A^{p,q}(M)) \subset A^{p+1,q}(M) \oplus A^{p,q+1}(M)$, luego $d = \partial + \overline{\partial}$. Recíprocamente si $d = \partial + \overline{\partial}$, entonces $\pi^{0,2} \circ d = 0$ en $A^{1,0}(M)$. Es decir, $d(A^{1,0}(M)) \subset A^{2,0}(M) \oplus A^{1,1}(M)$, entonces por la Proposición 1.3.16, J resulta integrable. □

Corolario 1.3.19. *Si J es una estructura casi compleja integrable, entonces $\partial^2 = \overline{\partial}^2 = 0$ y $\partial\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial$. Recíprocamente, si $\overline{\partial}^2 = 0$, J es integrable.*

Demostración. Para la primera parte, si J es integrable tenemos que $d = \partial + \overline{\partial}$, y como $d^2 = 0$, por cálculo directo se obtiene $\partial^2 = \overline{\partial}^2 = 0$ y $\partial\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial$.

Recíprocamente, si $\overline{\partial}^2 = 0$ veremos que el corchete de Lie de dos campos vectoriales complejos de tipo $(0, 1)$, es de tipo $(0, 1)$. Luego por la Proposición 1.3.15 J resultará integrable. Sean Z, W de tipo $(0, 1)$, usamos la fórmula

$$d\alpha(Z, W) = Z\alpha(W) - W\alpha(Z) - \alpha([Z, W]).$$

Si α es una forma de tipo $(0, 1)$, la ecuación anterior se reduce a: $(d\alpha)(Z, W) = (\overline{\partial}\alpha)(Z, W)$. Combinando estas dos cosas y tomando $\alpha = \overline{\partial} f$ tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= (\overline{\partial}^2 f)(Z, W) \\ &= d(\overline{\partial} f)(Z, W) \\ &= Z(\overline{\partial} f)(W) - W(\overline{\partial} f)(Z) - (\overline{\partial} f)([Z, W]) \\ &= Z(df)(W) - W(df)(Z) - (\overline{\partial} f)([Z, W]), \quad \text{pues} \quad Z, W \in T^{0,1}, \\ &= (d^2 f)(Z, W) + (df)([Z, W]) - (\overline{\partial} f)([Z, W]) \\ &= 0 + (\partial f)([Z, W]), \quad \text{pues } d = \partial + \overline{\partial} \text{ en } A^0(M). \end{aligned}$$

Como las $(1, 0)$-formas de tipo ∂f generan $A^{1,0}(M)$, esto implica que $[Z, W]$ es de tipo $(0, 1)$. □

1.4 Métricas hermitianas y de Kähler

Las variedades Kähler forman la clase más importante variedades complejas. Muchas de las variedades conocidas y de interés, como por ejemplo el espacio proyectivo complejo, son Kähler. Las variedades Kähler se consideran como un caso especial de variedades riemannianas, las cuales, adeḿas de la estructura riemanniana, poseen una estructura compleja que satisface ciertas condiciones de compatibilidad. Las estructuras Kähler fueron introducidas por Erich Kähler en 1933 y tienen importantes aplicaciones en varias áreas, como geometría diferencial, análisis complejo, geometría algebraica, geometría simpléctica y física teórica.

Definición 1.4.1. Una *métrica hermitiana* en una variedad casi compleja (M, J) es una métrica riemanniana g tal que $g(X, Y) = g(JX, JY)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. En este caso diremos que (M, J, g) es una *variedad casi hermitiana.* Una variedad compleja (M, J) con una métrica hermitiana g se dice *variedad hermitiana.*

Observación 1.4.2. Toda variedad casi compleja admite una métrica hermitiana. Simplemente elegimos una métrica riemanniana h arbitraria y definimos $g(X, Y) = h(X, Y) + h(JX, JY)$.

Por la Proposición 1.1.13, toda métrica hermitiana g puede ser extendida $\mathbb{C}$-linealmente a $TM^{\mathbb{C}}$. Denotaremos por h a esta extensión, que satisface:

(i) $h(\overline{Z}, \overline{W}) = \overline{h(Z, W)}$, para todo vector complejo Z y W,

(ii) $h(Z, \overline{Z}) > 0$, para todo Z vector complejo no nulo,

(iii) $h(Z, W) = 0$, para todo par de vector Z, W ambos de tipo $(1, 0)$ o ambos de tipo $(0, 1)$.

Recíprocamente, todo tensor simétrico en $TM^{\mathbb{C}}$ con estas propiedades define una métrica hermitiana en TM.

Definición 1.4.3. Dada una variedad casi hermitiana (M, J, g) se define la *2-forma fundamental o forma de Kähler* por $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Si consideramos la extensión de ω a una forma bilineal antisimétrica de $TM^{\mathbb{C}}$, entonces ω es un elemento de $A^2(M) \cap A^{1,1}(M)$, y la métrica hermitiana g está unívocamente determinada por la estructura casi compleja J y por la forma fundamental ω, mediante $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$.

Observación 1.4.4. Sea (M, J, g) una variedad casi hermitiana, y sea h la extensión $\mathbb{C}$-lineal de g, entonces podemos recuperar la métrica g y la forma fundamental ω a partir de h:

$$h(X - iJX, Y + iJY) = g(X, Y) + g(JX, JY) - i(g(JX, Y) - g(X, JY)) = 2(g - i\omega)(X, Y),$$

es decir, $g = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(h)$ y $\omega = \frac{i}{2}\operatorname{Im}(h)$.

A continuación veremos una expresión de la forma fundamental en coordenadas. Sea $\{z_1, \ldots, z_n\}$ un sistema de coordenadas complejas en una variedad hermitiana (M^{2n}, J, g). Si denotamos por g_{rs} los coeficientes de la métrica g en este sistema de coordenadas, entonces:

$$g_{r\overline{s}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_s}\right),$$

y $g_{rs} = g_{\overline{rs}} = 0$ por el item (iii) más arriba. Así obtenemos el siguiente resultado:

Lema 1.4.5. *Si (M^{2n}, g, J) es una variedad hermitiana, entonces la forma fundamental está dada por:*

$$\omega = i\sum_{r,s=1}^{n} g_{r\overline{s}}\, dz_r \wedge d\overline{z}_s.$$

Demostración. Dados Z, W campos complejos, podemos escribir

$$Z = \sum_{r=1}^{n} dz_r(Z)\frac{\partial}{\partial z_r} + d\overline{z}_r(Z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_r}, \quad W = \sum_{r=1}^{n} dz_r(W)\frac{\partial}{\partial z_r} + d\overline{z}_r(W)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_r}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\omega(Z,W) &= g(JZ,W)\\
&= g\left(\sum_{r=1}^{n} dz_r(Z) i\frac{\partial}{\partial z_r} - d\overline{z}_r(Z) i\frac{\partial}{\partial \overline{z}_r}, \sum_{s=1}^{n} dz_s(W)\frac{\partial}{\partial z_s} + d\overline{z}_s(W)\frac{\partial}{\partial \overline{z}_s}\right)\\
&= i\sum_{r=1}^{n} g_{r\overline{s}}\; dz_r(Z) d\overline{z}_s(W) - i\sum_{r=1}^{n} g_{s\overline{r}}\; dz_s(W) d\overline{z}_r(Z),
\end{aligned}$$

e intercambiando r por s en la segunda suma obtenemos:

$$\omega(Z,W) = i\sum_{r=1}^{n} g_{r\overline{s}}\; (dz_r(Z)d\overline{z}_s(W) - dz_r(W)d\overline{z}_s(Z)) = i\sum_{r=1}^{n} g_{r\overline{s}}\; dz_r \wedge d\overline{z}_s(Z,W).$$

□

Definición 1.4.6. Una *métrica de Kähler* sobre una variedad compleja (M, J) es una métrica hermitiana g con la 2-forma fundamental ω cerrada, es decir, $d\omega = 0$. En este caso diremos que M es una *variedad Kähler.*

A continuación probaremos algunos resultados que nos servirán para dar una definición equivalente a la de una variedad Kähler. Dada una estructura casi compleja J en una variedad diferenciable M equipada con una conexión afín ∇ se define la derivada covariante del tensor J por:

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J\nabla_X Y$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Lema 1.4.7. *Sea M una variedad con una estructura casi compleja J, y sea ∇ una conexión sin torsión tal que J es paralela, es decir $\nabla J = 0$. Entonces J es integrable.*

Demostración. Como ∇ es sin torsión y J es paralela, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos:

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \tag{1.8}$$

$$\nabla_X(JY) = J(\nabla_X Y). \tag{1.9}$$

Luego

$$\begin{aligned}
N_J(X,Y) &= [JX,JY] - [X,Y] - J([JX,Y] + [X,JY])\\
&= \nabla_{JX}JY - \nabla_{JY}JX - \nabla_X Y + \nabla_Y X\\
&\qquad - J(\nabla_{JX}Y - \nabla_Y JX) - J(\nabla_X JY - \nabla_{JY}X) \quad \text{por (1.8)}\\
&= -\nabla_X Y + \nabla_Y X + J^2(\nabla_Y X) - J^2(\nabla_X Y) \quad \text{por (1.9)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Lema 1.4.8. *Sea M una variedad con una estructura casi compleja J, y sea ∇ una conexión en M. Entonces*

$$(\nabla_X J)JY = -J(\nabla_X J)Y,$$

para todo X, Y campos en M.

Demostración. Para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos:

$$\begin{aligned}(\nabla_X J)JY &= -\nabla_X Y - J(\nabla_X JY) \\ &= J(J(\nabla_X Y - \nabla_X JY)) \\ &= -J(\nabla_X J)Y.\end{aligned}$$

□

Lema 1.4.9. *Sea (M, J, g) una variedad casi hermitiana y sea ∇ una conexión en M compatible con la métrica, es decir, $\nabla g = 0$. Entonces $\nabla_X J$ es antisimétrica para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demostración. Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ calculamos:

$$\begin{aligned}g((\nabla_X J)Y, Z) &= g(\nabla_X JY - J(\nabla_X Y), Z) \\ &= g(\nabla_X JY, Z) + g(\nabla_X Y, JZ) \\ &= Xg(JY, Z) - g(JY, \nabla_X Z) + Xg(Y, JZ) - g(Y, \nabla_X JZ) \\ &= g(Y, J(\nabla_X Z)) - g(Y, \nabla_X JZ) \\ &= -g(Y, (\nabla_X J)Z).\end{aligned}$$

□

El siguiente resultado nos da una definión equivalente para una variedad Kähler. Denotaremos por ∇ la conexión de Levi-Civita.

Teorema 1.4.10. *Sea (M, J, g) una variedad casi hermitiana. Entonces $\nabla J = 0$ si y sólo si $N_J = 0$ y $d\omega = 0$.*

Demostración. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Luego

$$\begin{aligned}d\omega(X, Y, Z) =& X\omega(Y, Z) + Y\omega(Z, X) + Z\omega(X, Y) \\ & - \omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y).\end{aligned} \tag{1.10}$$

Como ∇ es la conexión de Levi-Civita tenemos:

$$X\omega(Y, Z) = Xg(JY, Z) = g(\nabla_X JY, Z) + g(JY, \nabla_X Z),$$

$$\omega([X, Y], Z) = \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(\nabla_Y X, Z) = g(J\nabla_X Y, Z) - g(J\nabla_Y X, Z).$$

Luego (1.10) queda:

$$d\omega(X, Y, Z) = g((\nabla_X J)Y, Z) + g((\nabla_Y J)Z, X) + g((\nabla_Z J)X, Y). \tag{1.11}$$

Reemplazando X por JX y luego Y por JY resulta:

$$d\omega(JX, Y, Z) = g((\nabla_{JX} J)Y, Z) + g((\nabla_Y J)Z, JX) + g((\nabla_Z J)JX, Y)$$

$$d\omega(X, JY, Z) = g((\nabla_X J)JY, Z) + g((\nabla_{JY} J)Z, X) + g((\nabla_Z J)X, JY)$$

Como $J^2 = -\operatorname{Id}$ y $g(JX, Y) + g(X, JY) = 0$, sumando las dos ecuaciones anteriores y usando los Lemas 1.4.8 y 1.4.9, resulta:

$$\begin{aligned}d\omega(JX, Y, Z) + d\omega(X, JY, Z) = & 2g((\nabla_Z J)X, JY) + g((\nabla_X J)JY, Z) \\ & - g((\nabla_Y J)JX, Z) + g((\nabla_{JX} J)Y, Z) - g((\nabla_{JY} J)X, Z)\end{aligned}$$

Usando que la conexión es sin torsión resulta:

$$d\omega(JX, Y, Z) + d\omega(X, JY, Z) = 2g((\nabla_Z J)X, JY) + g(N_J(X, Y), Z). \tag{1.12}$$

Por lo tanto si $N_J = 0$ y $d\omega = 0$, entonces $g((\nabla_Z J)X, JY) = 0$ para todo X, Y, Z. Como J es biyectiva y g es no degenerada, entonces $\nabla J = 0$. Recíprocamente si $\nabla J = 0$ por el Lema 1.4.7 sabemos que J es integrable. Además de (1.11) se sigue que $d\omega = 0$. $\square$

Corolario 1.4.11. *Sea (M, J, g) una variedad hermitiana, entonces M es Kähler si y sólo si J es paralela con respecto a la conexión de Levi-Civita.*

Ejemplo 1.4.12. $(\mathbb{C}^n, j_n)$ con la métrica canónica es una variedad Kähler, pues,

$$g_{r\overline{s}} = g\left(\frac{\partial}{\partial z_r}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_s}\right) = \frac{1}{4} g\left(\frac{\partial}{\partial x_r} - i\frac{\partial}{\partial y_r}, \quad \frac{\partial}{\partial x_s} + i\frac{\partial}{\partial y_s}\right) = \frac{1}{2}\delta_{rs}.$$

Luego por el Lema 1.4.5, la forma de Kähler resulta:

$$\omega = i\frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} \delta_{rs}\, dz_r \wedge d\overline{z}_s,$$

y entonces $d\omega = 0$. Por lo tanto $(\mathbb{C}^n, j_n, g)$ es Kähler.

Ejemplo 1.4.13. El espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$ con la métrica de Fubini-Study, es una variedad Kähler. Como vimos en el Ejemplo 1.3.7, y siguiendo su notación tenemos que $\mathbb{C}P^n$ es una variedad compleja. Sea (U_j, ϕ_j) un sistema coordenado complejo en $\mathbb{C}P^n$, luego definimos en U_j una 2-forma compleja de tipo $(1,1)$ por

$$\omega_j = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log\left(\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{z_l}{z_j}\right|^2\right).$$

Si $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, veremos que $\omega_j = \omega_k$ en $U_j \cap U_k$. Para ello notemos que

$$\log\left(\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{z_l}{z_j}\right|^2\right) = \log\left(\left|\frac{z_k}{z_j}\right|^2\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{z_l}{z_j}\right|^2\right) = \log\left(\left|\frac{z_k}{z_j}\right|^2\right) + \log\left(\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{z_l}{z_j}\right|^2\right).$$

Es suficiente ver que $\partial\overline{\partial}\log\left(\left|\frac{z_k}{z_j}\right|^2\right) = 0$ en $U_j \cap U_k$, lo cual se sigue del siguiente resultado:

$$\partial\overline{\partial}\log|z|^2 = \partial\overline{\partial}\log z\overline{z} = \partial\left(\frac{1}{z\overline{z}}\overline{\partial}z\overline{z}\right) = \partial\left(\frac{d\overline{z}}{\overline{z}}\right) = 0.$$

Por lo tanto tenemos definida, globalmente, una forma ω_{FS} de tipo $(1,1)$, tal que $\omega_{FS}|_{U_i} = \omega_i$. Además ω_{FS} es cerrada, pues $d\omega_j = (\partial + \overline{\partial})\partial\overline{\partial}\log\left(\sum_{l=1}^{n}\left|\frac{z_l}{z_j}\right|^2\right) = 0$. Luego definimos una métrica g_{FS} en $\mathbb{C}P^n$ por,

$$g_{FS}(X, Y) = \omega_{FS}(X, JY),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}P^n)$, donde J es la estructura compleja canónica de $\mathbb{C}P^n$. Se puede probar que g_{FS} es definida positiva. Así $(\mathbb{C}P^n, J, g)$ resulta Kähler y g_{FS} se llama la métrica de Fubini-Study.

Repasamos algunos hechos bien conocidos sobre la topología de una variedad Kähler compacta. Recordemos que la cohomología de de Rham de una variedad diferenciable M se define como

$$H^k_{dR}(M,\mathbb{R}) = \frac{\ker(d : E^k(M) \to E^{k+1}(M))}{\operatorname{Im}(d : E^{k-1}(M) \to E^k(M))},$$

y el k-ésimo número de Betti de M se define por $\beta_k(M) = \dim_{\mathbb{R}}(H^k_{dR}(M,\mathbb{R}))$.

Además recordemos los siguientes operadores definidos sobre una variedad hermitiana M de dimensión real $2n$:

(i) El operador *estrella de Hodge*

$$* : E^k(M) \to E^{2n-k}(M)$$

inducido por la métrica g y una orientación natural de la variedad M.

(ii) El operador adjunto de la derivada exterior d, también llamado *codiferencial.*

$$\delta : E^{k+1}(M) \to E^k(M), \quad \delta = - * d * .$$

(iii) El operador de *Lefschetz*

$$L : E^k(M) \to E^{k+2}(M), \quad \alpha \longmapsto \alpha \wedge \omega. \tag{1.13}$$

(iv) El operador *adjunto de Lefschetz*

$$\Lambda = *^{-1} \circ L \circ * : E^k(M) \to E^{k-2}(M).$$

Algunas de las propiedades importantes que satisfacen las variedades Kähler compactas son las siguientes (ver [46] y [35]):

- Los números de Betti pares de toda variedad Kähler compacta son no nulos.
- Los números de Betti impares de toda variedad Kähler compacta son pares.
- (Hard Lefschetz theorem) Sea (M,g) una variedad Kähler compacta de dimensión real $2n$, entonces para $k \leq n$
$$L^{n-k} : H^k(M,\mathbb{R}) \to H^{2n-k}(M,\mathbb{R}),$$
es un isomorfismo.

Además para una variedad hermitiana cualquiera los operadores definidos antes satisfacen los siguientes resultados los cuales serán usados más adelante:

Proposición 1.4.14 ([35]). *Sea (M^{2n},J,g) una variedad hermitiana, ω su 2-forma fundamental y α una p-forma, entonces*

$$[\Lambda, L]\alpha = (n-p)\alpha.$$

El siguiente resultado es conocido, aunque no hemos encontrado su demostración, por lo que la incluimos en los apéndices por completitud (Ver Proposición 5.3.5).

Proposición 1.4.15. *Sea (M^{2n}, J, g) una variedad hermitiana y ω su 2-forma fundamental, entonces*

$$\Lambda\, d\omega = -\delta\omega \circ J.$$

Nota. Algunos autores definen la forma fundamental por $\omega(X, Y) = g(X, JY)$. En este caso la Proposición 1.4.15 queda:

$$\Lambda\, d\omega = \delta\omega \circ J.$$

1.5 Variedades localmente conformes Kähler

Existen varias maneras de debilitar la condición de Kähler y así obtener una clase más grande de variedades hermitianas con propiedades interesantes. En este trabajo estudiaremos las variedades localmente conformes Kähler (LCK).

Las variedades LCK fueron introducidas originalmente por P. Libermann en 1954 [57, 58], pero la geometría de estas variedades fue desarrollada principalmente a partir de los años 70, con el trabajo de I. Vaisman (ver por ejemplo los artículos [80, 81, 79], entre muchos otros) y estudiada luego por muchos autores (ver por ejemplo [65, 68]).

Sea (M^{2n}, J, g) una variedad hermitiana, se dice que g es una *métrica localmente conforme Kähler* si g es conforme a una métrica Kähleriana, localmente. En esta sección veremos algunos ejemplos de variedades LCK, la noción de globalmente conforme Kähler, y principalmente el Teorema 1.5.3 que caracteriza las variedades LCK en términos de la forma fundamental. Formalmente tenemos:

Definición 1.5.1. Sea (M^{2n}, J, g) una variedad hermitiana, donde J denota su estructura compleja y g su métrica hermitiana. Se dice que (M^{2n}, J, g) es una variedad *localmente conforme Kähler* (LCK) si existe un cubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ de M y una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ de funciones C^∞, $f_i : U_i \to \mathbb{R}$, tal que cada métrica local

$$g_i = \exp(-f_i)\, g|_{U_i} \tag{1.14}$$

es Kähler. También (M^{2n}, J, g) es *globalmente conforme Kähler* (GCK) si existe una función C^∞, $f : M^{2n} \to \mathbb{R}$, tal que la métrica $\exp(-f)g$ es Kähleriana.

Sean ω_i las formas fundamentales asociadas a cada (J, g_i), es decir $\omega_i(X, Y) = g_i(JX, Y)$ para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(U_i)$. Luego de (1.14) resulta

$$\omega_i = \exp(-f_i)\, \omega|_{U_i}. \tag{1.15}$$

Enunciamos a continuación un lema que será usado más tarde.

Lema 1.5.2. *Sea ω una 2-forma no degenerada en un espacio vectorial V de dimensión $2n$. Entonces*

(i) *Si α es una 1-forma en V con $\alpha \wedge \omega = 0$, entonces $\alpha = 0$.*

(ii) *Si $n \geq 3$ y β es una 2-forma en V con $\beta \wedge \omega = 0$, entonces $\beta = 0$.*

Demostración. Como ω es no degenerada, existe una base $\{e^1, \ldots, e^{2n}\}$ de V^*, tal que $\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 + \cdots + e^{2n-1} \wedge e^{2n}$. Denotaremos por $e^{i,j,k} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$.

(i) Sea $\alpha = c_1 e^1 + c_2 e^2 + \cdots + c_{2n} e^{2n}$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \alpha \wedge \omega = & c_1(e^{1,3,4} + e^{1,5,6} + \cdots + e^{1,2n-1,2n}) \\ & + c_2(e^{2,3,4} + e^{2,5,6} + \cdots + e^{2,2n-1,2n}) \\ & + c_3(e^{1,2,3} + e^{3,5,6} + \cdots + e^{3,2n-1,2n}) \\ & \vdots \\ & + c_n(e^{1,2,2n} + e^{3,4,2n} + \cdots + e^{2n-3,2n-2,2n}) \end{aligned}$$

Se sigue que $c_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, 2n$, y por lo tanto $\alpha = 0$.

(ii) Sea

$$\beta = \sum_{i<j} a_{ij} e^{i,j}$$

Entonces

$$0 = \beta \wedge \omega = e^{1,2} \wedge \sum_{i<j} a_{ij} e^{i,j} + \cdots + e^{2n-1,2n} \wedge \sum_{i<j} a_{ij} e^{i,j},$$

y se sigue que $a_{ij} = 0$ salvo cuando $(i, j) = (2r-1, 2r)$ para $r = 1, \ldots, n$. Reemplazando resulta $\beta = \sum_{r=1}^n a_{2r-1,2r} e^{2r-1,2r}$, y por lo tanto:

$$0 = \beta \wedge \omega = \sum_{r,k=1}^{n} a_{2r-1,2r} e^{2r-1,2r} \wedge e^{2k-1,2k} = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=r+1}^{n} (a_{2r-1,2r} + a_{2k-1,2k}) e^{2r-1,2r} \wedge e^{2k-1,2k}.$$

Se sigue que

$$a_{2r-1,2r} + a_{2k-1,2k} = 0,$$

para $k > r$, $r = 1, \ldots, n-1$. Así tenemos el siguiente sistema de $\binom{n}{2}$ ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{1,2} + a_{3,4} = 0 \\ a_{1,2} + a_{5,6} = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{1,2} + a_{2n-1,2n} = 0 \\ a_{3,4} + a_{5,6} = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{2n-3,2n-2} + a_{2n-1,2n} = 0. \end{cases}$$

Como $n \geq 3$, el sistema tiene rango n, y por lo tanto solución única. Así $a_{2r-1,2r} = 0$ para todo $r = 1, \ldots, n$ y entonces $\beta = 0$. $\square$

Veremos a continuación un resultado importante que nos permitirá caracterizar las variedades LCK en términos de su forma fundamental.

Teorema 1.5.3 ([55]). *La variedad hermitiana (M^{2n}, J, g) es LCK si y sólo si existe una 1-forma cerrada θ definida globalmente en M tal que*

$$d\omega = \theta \wedge \omega. \tag{1.16}$$

Demostración. Sea (M, J, g) LCK, entonces existen $\{U_i\}_{i\in I}$ y $\{f_i\}_{i\in I}$ tales que

$$g_i = \exp(-f_i)g|_{U_i}$$

es Kähler. Calculando la derivada exterior tenemos:

$$\begin{aligned} d\omega_i &= d(\exp(-f_i)) \wedge \omega + \exp(-f_i)d\omega \\ &= -\exp(-f_i)df_i \wedge \omega + \exp(-f_i)d\omega \end{aligned}$$

Como cada g_i es Kähler en U_i por hipótesis, entonces $d\omega_i = 0$, por lo tanto tenemos

$$d\omega = df_i \wedge \omega$$

en U_i. Sea $i \neq j$ tal que $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces

$$(df_i - df_j) \wedge \omega = 0$$

en U_{ij}, y como ω es no degenerada por el Lema 1.5.2 tenemos, $df_i = df_j$ en U_{ij}, luego df_i tiene una extensión global a una 1-forma cerrada θ, tal que $\theta|_{U_i} = df_i$, y que satisface $d\omega = \theta \wedge \omega$.

Recíprocamente, sea θ una 1-forma cerrada θ que satisface (1.16). Por el Lema de Poincaré existe $\{U_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de M y una familia $\{f_i\}_{i\in I}$ de funciones suaves $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ tal que $\theta = df_i$ en U_i. Por (1.16) tenemos $d\omega = df_i \wedge \omega$ en U_i, multiplicando ambos miembros por $\exp(-f_i)$ queda

$$\begin{aligned} d(\exp(-f_i)\omega) &= d(\exp(-f_i)) \wedge \omega + \exp(-f_i) \wedge d\omega \\ &= -\exp(-f_i)df_i \wedge \omega + \exp(-f_i)df_i \wedge \omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego $\exp(-f_i)\omega|_{U_i}$ es cerrada y por lo tanto $\exp(-f_i)g|_{U_i}$ es Kähler. □

Observación 1.5.4. Si (M, J, g) es una variedad hermitiana con $\dim M \geq 6$ que satisface (1.16) para alguna 1-forma θ, entonces θ es automáticamente cerrada.

En efecto, calculando la derivada exterior en (1.16) resulta $0 = d\theta \wedge \omega$. Luego como ω es no degenerada por el item (ii) del Lema 1.5.2 tenemos que $d\theta = 0$.

La 1-forma θ del teorema anterior se llama *forma de Lee* y fue introducida por H.C. Lee en [55].

Nota. Una variedad hermitiana (M, J, g) es globalmente conforme Kähler si y sólo si la forma de Lee es exacta; la demostración es igual a la del Teorema 1.5.3, pero para una función f definida globalmente, en lugar de las funciones f_i definidas localmente. Entonces toda variedad LCK y simplemente conexa es GCK, en particular el cubrimiento universal de una variedad LCK es GCK

Sea (M^{2n}, J, g) una variedad hermitiana con $n > 1$. Veremos que en una variedad LCK la forma de Lee está unívocamente determinada en función de la estructura compleja y el operador codiferencial como muestra el siguiente teorema.

Teorema 1.5.5. *Sea θ una 1-forma definida globalmente que satisface (1.16), entonces θ está unívocamente determinada por la fórmula*

$$\theta = \frac{-1}{n-1}(\delta\omega) \circ J. \tag{1.17}$$

Demostración. Sea θ tal que $d\omega = \theta \wedge \omega$. Recordemos los operadores de Lefschetz y su adjunto definidos en (1.13). Tenemos que $L(\theta) = \theta \wedge \omega = d\omega$, aplicando Λ a ambos miembros y usando las Proposiciones 1.4.14 y 1.4.15 resulta (1.17). □

En general se usa esta fórmula para definir la forma de Lee de una variedad casi hermitiana.

Como ya vimos en el Corolario 1.4.11 una variedad (M^{2n}, J, g) es Kähler si y sólo si J es paralela con respecto a la conexión de Levi-Civita. A continuación veremos un resultado análogo para variedades LCK, donde (M^{2n}, J, g) es LCK si y sólo si J es paralela con respecto a la conexión de Weyl. Para ello comenzaremos probando un resultado previo. Sea (M^{2n}, J, g) una variedad LCK, denotaremos por V al campo dual de la forma de Lee, esto es, $g(X, V) = \theta(X)$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Sea ∇ la conexión de Levi-Civita, entonces tenemos:

Proposición 1.5.6. *Sea (M^{2n}, J, g) una variedad LCK, entonces existe una conexión D sin torsión y definida globalmente en M^{2n} dada por:*

$$D_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}(\theta(X)Y + \theta(Y)X - g(X,Y)V), \tag{1.18}$$

para todo $X, Y \in TM$. Además D satisface

$$Dg = \theta \otimes g.$$

Demostración. Dada una variedad diferenciable arbitraria N, sean g y $\overline{g} = \mu g$ dos métricas riemannianas conformes. Entonces sus conexiones de Levi-Civita ∇ y $\overline{\nabla}$ están relacionadas por:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2\mu}(X(\mu)Y + Y(\mu)X - g(X,Y)\operatorname{grad}\mu)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$.

Sean (M^{2n}, J, g) una variedad LCK y ∇^i las conexiones de Levi-Civita de las métricas de Kähler locales $\{g_i\}$. Aplicamos el razonamiento anterior a $N = U_i$ y $\mu = \exp(-f_i)$, así resulta:

$$\nabla^i_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}(\theta(X)Y + \theta(Y)X - g(X,Y)V)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(U_i)$. Entonces las conexiones locales ∇^i definen una conexión global D dada por (1.18).

Para la última parte, usando que $\nabla g = 0$ y la fórmula de Koszul, calculamos

$$\begin{aligned}
Dg(X,Y,Z) &= Xg(Y,Z) - g(D_X Y, Z) - g(Y, D_X Z) \\
&= \frac{1}{2}\{g(\theta(X)Y + \theta(Y)X - g(X,Y)V, Z) + g(Y, \theta(X)Z + \theta(Z)X - g(X,Z)V)\} \\
&= \theta(X)g(Y,Z) \\
&= (\theta \otimes g)(X,Y,Z).
\end{aligned}$$

□

La conexión D definida en (1.18) es la *conexión de Weyl* de la variedad LCK (M^{2n}, J, g).

Teorema 1.5.7. *La variedad hermitiana (M^{2n}, J, g) es LCK si y sólo si existe una 1-forma cerrada θ en M^{2n} tal que J es paralela con respecto a la conexión de Weyl D dada por* (1.18).

Demostración. Sea ∇ la conexión de Levi-Civita de (M^{2n}, J, g) y ω la forma fundamental, se sigue de (1.12) que:

$$g((\nabla_X J)Y, Z) = \frac{1}{2}\{d\omega(X, Y, Z) - d\omega(X, JY, JZ)\}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Luego D satisface:

$$\begin{aligned} g((D_X J)Y, Z) =& \frac{1}{2}\{d\omega(X, Y, Z) - d\omega(X, JY, JZ) \\ & - g(X, Z)\theta(JY) - g(X, JZ)\theta(Y) + g(X, JY)\theta(Z) + g(X, Y)\theta(JZ)\}. \end{aligned}$$

Si (M^{2n}, J, g) es LCK de (1.16) se sigue que, $g((D_X J)Y, Z) = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Por lo tanto $DJ \equiv 0$.

Recíprocamente, $DJ = 0$ y $Dg = \theta \otimes g$ determinan que $D\omega = \theta \otimes \omega$. Además para una conexión sin torsión es sabido la siguiente identidad:

$$d\omega(X, Y, Z) = \sum_{XYZ} (D_X\omega)(Y, Z),$$

donde $\sum_{XYZ}$ representa la suma cíclica (ver [50]). Calculamos

$$d\omega(X, Y, Z) = \sum_{XYZ} (D_X\omega)(Y, Z) = \sum_{XYZ} (\theta \otimes \omega)(X, Y, Z) = \theta \wedge \omega(X, Y, Z),$$

así resulta $d\omega = \theta \wedge \omega$. □

Corolario 1.5.8. *La variedad hermitiana (M^{2n}, J, g) es LCK si y sólo si existe una 1-forma cerrada θ tal que*

$$(\nabla_X J)Y = \frac{1}{2}(\theta(JY)X - \theta(Y)JX + g(X, Y)JV + \omega(X, Y)V),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Observación 1.5.9. En particular, el Corolario 1.5.8 muestra que las variedades LCK pertenecen a la clase W_4 en la clasificación de Gray-Hervella de variedades casi hermitianas [38].

Ejemplo 1.5.10. Las *variedades de Hopf* son un ejemplo de variedades localmente conformes Kähler que no son GCK. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \neq 1$, y sea $\triangle_\lambda$ el grupo cíclico generado por las transformaciones $z \mapsto \lambda z$ de $\mathbb{C}^n - \{0\}$. El espacio cociente $CH^n_\lambda = (\mathbb{C}^n - \{0\})/\triangle_\lambda$ tiene estructura de variedad compleja y se llama *variedad compleja de Hopf*. Se puede ver que CH^n_λ es difeomorfa a $S^1 \times S^{2n-1}$. En particular CH^n_λ es compacta y su primer número de Betti es $\beta_1(CH^n_\lambda) = 1$. Se sabe que todos los números de Betti impares de una variedad compacta que admite una métrica Kähler son pares, por lo tanto CH^n_λ no admite una métrica globalmente Kähler. Consideramos la métrica hermitiana en $\mathbb{C}^n - \{0\}$

$$h = \sum \frac{dz_j \otimes d\bar{z}_j}{|z|^2},$$

y J canónica. Esta métrica es invariante por $\triangle_\lambda$, entonces induce una métrica hermitiana en CH^n_λ que se llama la *métrica de Boothby* (fue descubierta por Boothby para $n = 2$ en [26]). De acuerdo a la Observación 1.4.4, esta métrica h induce una métrica hermitiana g en $\mathbb{C}^n - \{0\}$ determinada por (salvo una constante):

$$g = Re(h) = \sum \frac{dx_j^2 + dy_j^2}{x_j^2 + y_j^2}.$$

Así

$$\omega_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = g_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{\sum_j (x_j^2 + y_j^2)}.$$

Luego ω queda determinada por

$$\omega = \frac{\sum_j dx_j \wedge dy_j}{\sum_j (x_j^2 + y_j^2)}.$$

Si llamamos $f = \frac{1}{\sum_j (x_j^2+y_j^2)}$, entonces

$$\begin{aligned} df =& \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j + \sum_j \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j \\ =& \sum_j \left(\frac{-2x_j}{\left(\sum_j (x_j^2 + y_j^2)\right)^2} dx_j \right) + \sum_j \left(\frac{-2y_j}{\left(\sum_j (x_j^2 + y_j^2)\right)^2} dy_j \right) \\ =& -2f^2 \sum_j (x_j dx_j + y_j dy_j). \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} d\omega =& d(f \sum_j dx_j \wedge dy_j) \\ =& df \wedge \sum_j dx_j \wedge dy_j \\ =& -2f^2 \sum_j (x_j dx_j + y_j dy_j) \wedge \sum_j dx_j \wedge dy_j \\ =& (-2f \sum_j (x_j dx_j + y_j dy_j)) \wedge \omega. \end{aligned}$$

Luego

$$\theta = -2f \sum_j (x_j dx_j + y_j dy_j)$$

es la forma de Lee de $\mathbb{C}^n - \{0\}$. En efecto, veamos que θ es cerrada. Como $2(x_j dx_j + y_j dy_j) = z_j d\overline{z}_j + \overline{z}_j dz_j$ entonces θ resulta

$$\theta = -f \sum_j (z_j d\overline{z}_j + \overline{z}_j dz_j) = -d \log(|z|^2),$$

que claramente es cerrada y por lo tanto la forma de Lee de $\mathbb{C}^n - \{0\}$. La métrica hermitiana en la variedad de Hopf CH^n_λ resulta LCK. Se puede ver que la forma de Lee inducida en CH^n_λ es paralela respecto a la conexión de Levi-Civita. Esta propiedad dio lugar a una subclase de variedades LCK definidas por I. Vaisman en [81], quien las llamó originalmente “generalized Hopf manifolds”, posteriormente se les dió el nombre de variedades de Vaisman.

Definición 1.5.11. Sea (M, J, g) una variedad LCK, se dice que g es una *métrica de Vaisman* si la forma de Lee θ es paralela con respecto a la conexión de Levi-Civita de (M, g). Una variedad de Vaisman es una variedad LCK que admite una métrica de Vaisman.

Se sabe que las variedades de Vaisman satisfacen ciertas condiciones que en general una variedad LCK no, por ejemplo, el primer número de Betti de una variedad de Vaisman es impar (ver [81]). Además las variedades de Vaisman están fuertemente relacionadas con las variedades sasakianas, en [67] se prueba que toda variedad Vaisman compacta es un "mapping torus" sobre S^1 con fibra sasakiana.

1.6 Grupos de Lie con estructuras LCK invariante a izquierda

Ahora aplicaremos todo lo estudiado para el caso en el que la variedad diferenciable M tiene una estructura de grupo de Lie.

Como ya sabemos, un *grupo de Lie* G es una variedad diferenciable junto con una estructura de grupo tal que la multiplicación y la inversión son diferenciables. Consideramos métricas riemannianas que relacionen la geometría de G con su estructura de grupo. Estas métricas tienen la propiedad de que las traslaciones a izquierda $L_a : G \to G$ son isometrías, para todo $a \in G$, y son llamadas *métricas invariantes a izquierda.*

Definición 1.6.1. Una métrica riemanniana sobre un grupo de Lie G se dice *invariante a izquierda* si $\langle u, v\rangle_x = \langle (dL_a)_x u, (dL_a)_x v\rangle_{L_a(x)}$ para todo $a, x \in G$ y $u, v \in T_x G$. Similarmente, una métrica riemanniana es *invariante a derecha* si cada traslación a derecha $R_a : G \to G$ es isometría. Una métrica que es invariante a izquierda y a derecha se dice *bi-invariante.*

Como las traslaciones a izquierda son isometrías, una métrica invariante a izquierda sobre G queda determinada por su valor en la identidad del grupo, y por lo tanto podemos identificarla con un producto interno sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Una *estructura J (casi) compleja invariante a izquierda* sobre un grupo de Lie G, es una estructura (casi) compleja sobre la variedad subyacente que satisface $J \circ dL_a = dL_a \circ J$, para todo $a \in G$. Es decir, las traslaciones a izquierda son casi complejas u holomorfas.

Si J es una estructura (casi) compleja invariante a izquierda y g es una métrica hermitiana invariante a izquierda sobre un grupo de Lie G, entonces decimos que (J, g) es una *estructura (casi) hermitiana invariante a izquierda* sobre el grupo de Lie G.

Definición 1.6.2. Una *estructura casi compleja* J sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un endomorfismo $J : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tal que $J^2 = -\operatorname{Id}$.

Asociado a J definimos su "tensor" de Nijenhuis por:

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J([JX, Y] + [X, JY]), \quad X, Y \in \mathfrak{g},$$

y decimos que J es *integrable* o *una estructura compleja* sobre $\mathfrak{g}$ si $N_J \equiv 0$.

Sea J una estructura compleja sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Un producto interno $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ sobre $\mathfrak{g}$ tal que $\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ será llamado un *producto interno hermitiano* sobre $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 1.6.3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\mathfrak{g}$ admite una estructura J integrable. En efecto, consideramos a $\mathfrak{g}$ como un espacio vectorial real y definimos una estructura casi compleja J por $JX = iX$. Claramente J es integrable y satisface $[JX, Y] = J[X, Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, es decir, $J \circ \mathrm{ad}_X = \mathrm{ad}_X \circ J$.

Recíprocamente si $\mathfrak{g}$ es álgebra de Lie real con una estructura casi compleja J que satisface $J \circ \mathrm{ad}_X = \mathrm{ad}_X \circ J$, entonces J es integrable y podemos definir $(a + ib)X = aX + bJX$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Luego tenemos que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie compleja, pues

$$\begin{aligned}
[(a + ib)X, Y] &= [aX, Y] + [bJX, Y] \\
&= a[X, Y] + bJ[X, Y] \\
&= (a + ib)[X, Y].
\end{aligned}$$

Sea G un grupo de Lie con una estructura (casi) compleja J invariante a izquierda. Entonces J induce una estructura (casi) compleja $J|_{\mathfrak{g}}$ en $\mathfrak{g}$. Recíprocamente veremos cómo una estructura (casi) compleja en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ induce una estructura (casi) compleja en el grupo de Lie G. Considerando a los elementos de $\mathfrak{g}$ como campos invariantes a izquierda, si J es una estructura casi compleja en $\mathfrak{g}$ podemos definir una estructura casi compleja J^G en G como sigue: para $g \in G$, sea L_g la correspondiente multiplicación a izquierda en G, entonces definimos

$$J^G_g = (dL_g)_e J (dL_g)_e^{-1}, \tag{1.19}$$

$J^G_g : T_gG \to T_gG$ es un endomorfismo y cumple $J^G_g \circ J^G_g = -\mathrm{Id}$, luego J^G define una estructura casi compleja en G.

Proposición 1.6.4. *Si J en $\mathfrak{g}$ es integrable, entonces J^G en G es integrable.*

Demostración. Como N_{J^G} es un tensor y los campos invariantes a izquierda son base de $\mathfrak{X}(G)$ como $C^\infty(G)$-módulo, basta demostrar la integrabilidad de J^G para X, Y campos invariantes a izquierda. Notemos primero que si X es invariante a izquierda entonces $J^G X$ es invariante a izquierda, pues:

$$\begin{aligned}
(dL_h)_g (J^G X)_g &= (dL_h)_g (dL_g)_e J (dL_g)_e^{-1} X_g \\
&= (dL_{hg})_e J (dL_g)_e^{-1} (dL_h)_g^{-1} (dL_h)_g X_g \\
&= (dL_{hg})_e J (dL_{hg})_e^{-1} X_{hg} \\
&= (J^G X)_{hg}
\end{aligned}$$

Ahora vemos que $N_{J^G} = 0$:

$$\begin{aligned}
(J^G[X, Y])_g &= J^G_g [X, Y]_g \\
&= (dL_g)_e J (dL_g)_e^{-1} [X, Y]_g \\
&= (dL_g)_e J (dL_{g^{-1}})_g [X, Y]_g \\
&= (dL_g)_e J [X_e, Y_e] \\
&= (dL_g)_e (J[JX_e, JY_e] + [JX_e, Y_e] + [X_e, JY_e]) \\
&= (dL_g)_e (J[J^G X, J^G Y]_e + [J^G X, Y]_e + [X, J^G Y]_e) \\
&= J^G [J^G X, J^G Y]_g + [J^G X, Y]_g + [X, J^G Y]_g.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $N_{J^G} = 0$. $\square$

Nota. Las traslaciones a derecha por lo general no son holomorfas. Esto sólo pasa cuando el grupo de Lie G con esta estructura de variedad compleja es un grupo de Lie complejo. Esto es, un grupo que también admite una estructura de variedad compleja tal que la función $G \times G \to G$, $(a, b) \to ab^{-1}$, es holomorfa.

Más aún, si G es un grupo de Lie conexo y J una estructura invariante a izquierda, entonces (G, J) es un grupo de Lie complejo si y sólo si $J \circ \mathrm{ad}_X = \mathrm{ad}_X \circ J$, para todo $X \in \mathfrak{g}$.

En efecto, supongamos que G es un grupo de Lie complejo. Como $I(a) : x \to axa^{-1}$ es holomorfa para todo $a \in G$ entonces $Ad(a) = d(I(a))_e$ conmuta con J, es decir, $Ad(a) \circ J = J \circ Ad(a)$ para todo $a \in G$. En particular, dado $X \in \mathfrak{g}$ tenemos $Ad(\exp(tX)) \circ J = J \circ Ad(\exp(tX))$. Derivando respecto de t en $t = 0$ obtenemos $\mathrm{ad}_X \circ J = J \circ \mathrm{ad}_X$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Recíprocamente sea G un grupo de Lie real con $\mathrm{ad}_X \circ J = J \circ \mathrm{ad}_X$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, es decir, $[JX, Y] = J[X, Y]$. Entonces $N_J = 0$, por lo tanto (G, J) es una variedad compleja. De $\mathrm{ad}_X \circ J = J \circ \mathrm{ad}_X$ se sigue que $Ad(a) \circ J = J \circ Ad(a)$, entonces J conmuta con $Ad(a)$ y además conmuta con dL_a por ser invariante a izquierda. Por composición de $I(a^{-1})$ y L_a resulta que J conmuta con dR_a para todo $a \in G$. Luego de la fórmula de Leibniz[1] se sigue que $(x, y) \to xy$ es holomorfa. La función $\phi : x \to x^{-1}$ es holomorfa en $e \in G$, pues su diferencial es $-\mathrm{Id}$ que conmuta con J, y luego en todo $a \in G$ pues $\phi \circ L_a = R_{a^{-1}} \circ \phi$ entonces $(d\phi)_a = (dR_{a^{-1}})_e \circ (d\phi)_e \circ (dL_{a^{-1}})_a$ que conmuta con J. Así G es un grupo de Lie complejo.

Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie con estructura casi compleja J, consideramos su complexificación

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g},$$

luego por (1.2) tenemos

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1},$$

y de la Proposición 1.3.15 se obtiene:

Proposición 1.6.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *J es integrable.*

(ii) *$\mathfrak{g}^{1,0}$ es subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.*

(iii) *$\mathfrak{g}^{0,1}$ es subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.*

De la descomposición (1.3) se sigue que

$$(\mathfrak{g}^*)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{1,0} \oplus \mathfrak{g}_{0,1},$$

Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Si consideramos a $\mathfrak{g}^*$ como el espacio de las 1-formas invariantes a izquierda, entonces podemos definir el siguiente operador, $d : \mathfrak{g}^* \to \bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$, como la restricción de la derivada exterior de G. Por lo tanto queda:

$$(d\eta)(X, Y) = -\eta([X, Y]) \quad \text{para toda} \quad \eta \in \mathfrak{g}^*, \quad X, Y \in \mathfrak{g},$$

y luego se extiende $d : \bigwedge^k \mathfrak{g}^* \to \bigwedge^{k+1} \mathfrak{g}^*$ mediante: $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$, donde α es una k-forma y β es una 1-forma. Notar que la identidad de Jacobi es iquivalente a a que $d^2 = 0$. Por último consideramos la extensión $\mathbb{C}$-lineal del operador d a $(\mathfrak{g}^*)^{\mathbb{C}}$, y denotaremos $\mathfrak{g}_{i,j} = \{\eta \in A^{i,j}(G) : \eta \quad \text{es invariante a izquierda}\}$. El siguiente resultado es inmediato a partir de la Proposición 1.3.16:

[1] Si $\phi : M \times N \to L$ es una función diferenciable, entonces la diferencial $d\phi = d\phi_1 + d\phi_2$ donde $\phi_1(p) = \phi(p, q)$ para todo $p \in M$ y $\phi_2(q) = \phi(p, q)$ para todo $q \in N$.

Proposición 1.6.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *J es integrable.*

(ii) $d(\mathfrak{g}_{1,0}) \subset \mathfrak{g}_{2,0} \oplus \mathfrak{g}_{1,1}$.

(iii) $d(\mathfrak{g}_{0,1}) \subset \mathfrak{g}_{1,1} \oplus \mathfrak{g}_{0,2}$.

Definición 1.6.7. Sea G un grupo de Lie con una estructura compleja J invariante a izquierda y una métrica g invariante a izquierda compatible con J, en este caso decimos que (J, g) es una *estructura LCK invariante a izquierda* sobre el grupo de Lie G si se satisface la condición de LCK, es decir, existe una 1-forma cerrada θ en G tal que $d\omega = \theta \wedge \omega$.

Veamos a continuación que θ también es invariante a izquierda.

Proposición 1.6.8. *Sea G un grupo de Lie con una estructura LCK (J, g) invariante a izquierda, donde θ es su forma de Lee. Entonces θ resulta invariante a izquierda.*

Demostración. Recordemos de 1.17 la siguiente fórmula para la forma de Lee

$$\theta = \frac{-1}{n-1}(\delta\omega) \circ J,$$

donde δ es la codiferencial. Como ω es invariante a izquierda, se puede verificar que $*(\omega)$ resulta invariante a izquierda también. Además la derivada de una forma invariante a izquierda es invariante a izquierda, entonces $\delta\omega = - * \circ d \circ *\omega$ resulta invariante a izquierda. Finalmente como J es invariante a izquierda la fórmula anterior implica que θ es invariante a izquierda. $\square$

1.7 Cocientes por subgrupos discretos

Si consideramos grupos de Lie simplemente conexos equipados con una estructura LCK invariante a izquierda, estos grupos van a resultar globalmente conformes Kähler, que esencialmente es una estructura Kähler en el grupo. Como queremos estudiar estructuras LCK que no sean Kähler tomamos cocientes por subgrupos discretos. En esta sección explicamos como una estructura LCK invariante a izquierda en un grupo de Lie induce una estructura LCK en el cociente.

Definición 1.7.1. Dado un grupo de Lie G, $\Gamma \subset G$ se dice *lattice o retículo* si Γ es un subgrupo discreto co-compacto, es decir, $\Gamma\backslash G$ es una variedad compacta.

Una *solvariedad* $M = \Gamma\backslash G$ es un cociente compacto de un grupo de Lie soluble por un retículo Γ. En el caso en que G sea nilpotente tenemos una *nilvariedad*.

Es bien conocido el resultado de Milnor [62] que dice: si un grupo de Lie G admite retículos entonces G es unimodular. Esto significa:

Definición 1.7.2. Un grupo de Lie G se dice *unimodular* si la medida de Haar es invariante a izquierda y a derecha, equivalentemente se sabe que un grupo de Lie G conexo es unimodular si y sólo si $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$

Es conocido que esta condición no es suficiente para garantizar la existencia de retículos en un grupo de Lie arbitrario. Sin embargo, para grupos de Lie nilpotentes se tiene el criterio de Malcev [59], según el cual un grupo de Lie nilpotente admite retículos si y sólo si su álgebra de Lie admite una base cuyas constantes de estructuras asociadas son racionales. También se conoce que sólo una cantidad numerable de grupos de Lie simplemente conexos no isomorfos admiten retículos (ver [85, Proposition 8.7]).

Sea $\Gamma \subset G$ un retículo en G y sea $X \in \mathfrak{g}$, entonces existe un único $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\Gamma\backslash G)$ tal que X y $\overline{X}$ están π-relacionados, donde $\pi : G \to \Gamma\backslash G$ es la proyección canónica, es decir, existe una inyección de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{X}(\Gamma\backslash G)$. Más aún, $\mathfrak{X}(\Gamma\backslash G)$ está en biyección con $C^\infty(\Gamma\backslash G) \otimes \mathfrak{g}$, y la biyección está dada por $f \otimes X \to f\overline{X}$, donde $f \in C^\infty(\Gamma\backslash G)$ y $X \in \mathfrak{g}$ (ver [44]). Como G es paralelizable y π es un difeomorfismo local, entonces $\Gamma\backslash G$ resulta paralelizable.

Una métrica riemanniana g invariante a izquierda en G induce una métrica g' en $\Gamma\backslash G$ de modo que la proyección canónica $\pi : G \to \Gamma\backslash G$ es una submersión riemanniana, es decir,

$$g'_{\pi(x)}((d\pi)_x v, (d\pi)_x w) = g_x(v, w) \tag{1.20}$$

para todo $x \in G$ y $v, w \in T_xG$. La buena definición de g' sigue del hecho que g es invariante a izquierda y que $d\pi$ es un isomorfismo (π es un difeomorfismo local).

Una estructura casi compleja J invariante a izquierda en G induce una estructura casi compleja J' en $\Gamma\backslash G$ definida por:

$$J'_{\pi(x)}((d\pi)_x v) = (d\pi)_x(J_x v), \tag{1.21}$$

para todo $x \in G$ y $v \in T_xG$. Veamos la buena definición de J': sean $x, y \in G$ tales que $\pi(x) = \pi(y)$, entonces existe $\gamma \in \Gamma$ con $y = \gamma x$, por lo tanto

$$\pi \circ L_\gamma = \pi.$$

Sean $v \in T_xG$, $w \in T_yG$ tales que $(d\pi)_x v = (d\pi)_y w$. Como J es invariante a izquierda tenemos que

$$(dL_y)_x Jv = J \circ (dL_y)_x v,$$

para todo $y \in G$. Luego

$$\begin{aligned}
J'_{\pi(y)}((d\pi)_y w) &= (d\pi)_y(J_y w) \\
&= (d\pi)_y (dL_{xy^{-1}})_y^{-1} J_x (dL_{xy^{-1}})_y w \\
&= (d\pi)_y (dL_{yx^{-1}})_x J_x (dL_{xy^{-1}})_y w \\
&= (d\pi)_y (dL_\gamma)_x J_x (dL_{\gamma^{-1}})_y w \\
&= d(\pi \circ L_\gamma)_x J_x v, \\
&= d(\pi)_x (J_x v) \\
&= J'_{\pi(x)}((d\pi)_x v).
\end{aligned}$$

Por lo tanto J' esta bien definida y claramente es una estructura casi compleja.

Observación 1.7.3. Si J es una estructura compleja en G, entonces J' es una estructura compleja en $\Gamma\backslash G$. En efecto, basta verificar que $N_{J'}(\overline{X}, \overline{Y}) = 0$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$ pues $N_{J'}$ es un tensor. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ entonces

$$J'[\overline{X}, \overline{Y}] = J' \circ d\pi([X, Y]) = d\pi(J[X, Y]) = \overline{J[X, Y]},$$

y se sigue que $N_{J'}(\overline{X}, \overline{Y}) = \overline{N_J(X, Y)} = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Vimos que (J,g) en G induce (J',g') en $\Gamma\backslash G$, donde g' es la métrica definida por (1.20) y J' es la estructura compleja definida por (1.21). Notemos a continuación que si (J,g) es una estructura hermitiana en G entonces (J',g') es una estructura hermitiana en $\Gamma\backslash G$; dados $x\in G$ y $v,w\in T_xG$, calculamos:

$$\begin{aligned}
g'_{\pi(x)}(J'_{\pi(x)}(d\pi)_x v, J'_{\pi(x)}(d\pi)_x w) = {} & g'_{\pi(x)}((d\pi)_x J_x v, (d\pi)_x J_x w)\\
={} & g_x(J_x v, J_x w)\\
={} & g_x(v,w)\\
={} & g'_{\pi(x)}((d\pi)_x v, (d\pi)_x w).
\end{aligned}$$

Más aún, si (J,g) es una estructura LCK invariante a izquierda en G con forma de Lee θ entonces (J',g') es una estructura LCK en $\Gamma\backslash G$. Sea $\theta'\in E^1(\Gamma\backslash G)$ definida por

$$\theta'_{\pi(x)}((d\pi)_x v) = \theta_x(v) \tag{1.22}$$

para todo $x\in G$ y $v\in T_xG$.

Afirmamos que θ' está bien definida, pues: sean $x,y\in G$ tales que $\pi(x)=\pi(y)$, decir, existe $\gamma\in\Gamma$ tal que $y=\gamma x$; y sean $v\in T_xG$ y $w\in T_yG$ tales que $(d\pi)_x v = (d\pi)_y w$. Entonces

$$\begin{aligned}
\theta_y(w) &= \theta_y\left((d\pi)_y^{-1}(d\pi)_x v\right)\\
&= \theta_{\gamma x}\left((dL_\gamma)_x v\right)\\
&= (L_\gamma^*\theta)_x(v)\\
&= \theta_x(v).
\end{aligned}$$

Similarmente definimos ω' por

$$\omega'_{\pi(x)}((d\pi)_x v, (d\pi)_x w) = \omega_x(v,w). \tag{1.23}$$

La buena definición de ω' es análoga a la de θ'.

Afirmación: ω' es la forma fundamental de $(\Gamma\backslash G, J', g')$. En efecto: sean $x\in G$ y $v,w\in T_x(G)$, entonces

$$\begin{aligned}
g'_{\pi(x)}\left(J'_{\pi(x)}((d\pi)_x v), (d\pi)_x w\right) &= g'_{\pi(x)}\left((d\pi)_x(J_x v), (d\pi)_x w\right)\\
&= g_x(J_x v, w)\\
&= \omega_x(v,w)\\
&= \omega'_x((d\pi)_x v, (d\pi)_x w).
\end{aligned}$$

Proposición 1.7.4. *Si (G,J,g) es una estructura LCK invariante a izquierda donde θ es su forma de Lee, entonces $(\Gamma\backslash G, J', g')$ también es LCK con su forma de Lee θ' dada por* (1.22).

Demostración. Basta verificar que $d\omega'(\overline{U},\overline{V},\overline{W}) = \theta'\wedge\omega'(\overline{U},\overline{V},\overline{W})$ para $U,V,W\in\mathfrak{g}$, donde ω' está definida por (1.23).

Como $\omega(U,V)$ es una función constante tenemos que:

$$\begin{aligned}
d\omega'(\overline{U},\overline{V},\overline{W})) &= -\omega'([\overline{U},\overline{V}],\overline{W}) - \omega'([\overline{V},\overline{W}],\overline{U}) - \omega'([\overline{W},\overline{U}],\overline{V})\\
&= -\omega([U,V],W) - \omega([V,W],U) - \omega([W,U],V)\\
&= d\omega(U,V,W)\\
&= (\theta\wedge\omega)(U,V,W)\\
&= (\theta'\wedge\omega')(\overline{U},\overline{V},\overline{W}).
\end{aligned}$$

□

1.8 Álgebras de Lie con estructuras LCK

Hasta ahora hemos estudiado grupos de Lie con estructuras LCK invariantes a izquierda. Como estas estructuras quedan determinadas por su valor en la identidad, podemos trabajar simplemente a nivel del álgebra de Lie, y así tenemos la siguiente definición:

Definición 1.8.1. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, J una estructura compleja y $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ un producto interno hermitiano en $\mathfrak{g}$, con ω su forma fundamental. Decimos que $(\mathfrak{g}, J, g)$ es *localmente conforme Kähler* (LCK) si existe $\theta \in \mathfrak{g}^*$, con $d\theta = 0$, tal que

$$d\omega = \theta \wedge \omega. \tag{1.24}$$

Sea $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ LCK, y supongamos que $\mathfrak{g}$ no es Kähler, es decir, $d\omega = \theta \wedge \omega$ con θ cerrada y no nula. La codimensión de $\ker\theta$ es 1 y podemos elegir $A \in (\ker\theta)^\perp$ tal que $\theta(A) = 1$. Como θ es cerrada tenemos,

$$\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{A\} \ltimes \ker\theta, \quad \text{con} \quad \mathfrak{g}' \subset \ker\theta. \tag{1.25}$$

Por lo tanto

$$d\omega(A, X, Y) = (\theta \wedge \omega)(A, X, Y) = \omega(X, Y), \quad \text{para todo} \quad X, Y \in \ker\theta.$$

Afirmamos que $JA \in \ker\theta$. En efecto, como (J, g) es hermitiana entonces $\langle JA, A\rangle = -\langle A, JA\rangle$, luego $\langle JA, A\rangle = 0$.

Si W es el complemento ortogonal de $\mathrm{span}\{JA\}$ en $\ker\theta$, entonces tenemos

$$\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{A, JA\} \oplus^\perp W. \tag{1.26}$$

Notar que W es invariante por J.

Corolario 1.8.2. *Sea $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ LCK con $\theta \neq 0$, entonces $\mathfrak{g}$ no puede ser semisimple.*

Demostración. Si $\mathfrak{g}$ es semisimple, entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Por otro lado si $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ es LCK, de (1.25) se sigue que $\mathfrak{g}' \subsetneq \mathfrak{g}$, por lo tanto $\mathfrak{g}$ no puede ser LCK y semisimple. □

Sin embargo, existen álgebras de Lie reductivas con estructuras LCK, como es el caso de $\mathfrak{u}(2)$ y $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. En particular, los grupos de Lie reductivos $U(2)$ y $GL(2, \mathbb{R})$ admiten tal estructura invariantes. Recientemente, en [2] fue probado que si un grupo de Lie reductivo admite una estructura LCK invariante a izquierda, entonces tal grupo es localmente isomorfo a uno de estos dos grupos de dimensión 4. Más aún, si un grupo de Lie compacto admite una estructura LCK invariante a izquierda, entonces es localmente isomorfo a $U(2)$ y la estructura LCK es en realidad Vaisman ([2, Theorems 4.6 and 4.15]).

Notar que la forma de Lee se expresa en términos del producto interno como

$$\theta(X) = \frac{\langle X, A\rangle}{|A|^2}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. Probaremos a continuación un lema que usaremos más adelante.

Lema 1.8.3. *Si* $(\mathfrak{g}, J, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$ *es LCK entonces* $J \circ \mathrm{ad}_{JA}$ *es simétrico.*

Demostración. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ calculemos $d\omega(JA, X, Y)$. Por un lado, de (1.24) obtenemos:

$$\begin{aligned} d\omega(JA, X, Y) &= \theta \wedge \omega(JA, X, Y) \\ &= \theta(X)\omega(Y, JA) + \theta(Y)\omega(JA, Y) \\ &= \frac{\langle A, X\rangle}{|A|^2}\langle Y, A\rangle - \frac{\langle A, Y\rangle}{|A|^2}\langle A, X\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos,

$$\begin{aligned} d\omega(JA, X, Y) &= -\omega([JA, X], Y) + \omega([JA, Y], X) - \omega([X, Y], JA) \\ &= -\langle J[JA, X], Y\rangle + \langle J[JA, Y], X\rangle - \langle J[X, Y], JA\rangle \\ &= -\langle J[JA, X], Y\rangle + \langle J[JA, Y], X\rangle. \end{aligned}$$

Luego $\langle J[JA, X], Y\rangle = \langle J[JA, Y], X\rangle$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Entonces $J \circ \mathrm{ad}_{JA}$ es simétrico. □

El próximo resultado será muy útil en las secciones siguientes.

Proposición 1.8.4. *Sea* $(J, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$ *una estructura LCK en el álgebra de Lie unimodular* $\mathfrak{g}$*. Con la notación de antes se tiene que* $JA \in \mathfrak{g}'$.

Demostración. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{g}$. Recordemos la siguiente fórmula [24]

$$\delta\eta = -\sum_{j=1}^{n} i_{e_j}(\nabla_{e_j}\eta),$$

donde η es una r-forma arbitraria y δ es la codiferencial. Dado $x \in \mathfrak{g}$ y ω la 2-forma fundamental, calculamos

$$\begin{aligned} \delta\omega(x) &= -\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}\omega)(e_i, x) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\omega(\nabla_{e_i}e_i, x) + \omega(e_i, \nabla_{e_i}x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} -\langle\nabla_{e_i}e_i, Jx\rangle + \langle Je_i, \nabla_{e_i}x\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\langle[e_i, Jx], e_i\rangle - \langle[Jx, e_i], e_i\rangle + \langle[e_i, x], Je_i\rangle - \langle[x, Je_i], e_i\rangle + \langle[Je_i, e_i], x\rangle\right\} \\ &= \frac{1}{2}\{-2\,\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{Jx}) + \mathrm{tr}(J \circ \mathrm{ad}_x) - \mathrm{tr}(ad_x \circ J) + \sum\langle[Je_i, e_i], x\rangle\} \\ &= \frac{1}{2}\sum\langle[Je_i, e_i], x\rangle \end{aligned}$$

Se sigue de (1.17) que $\theta(x) = \frac{1}{2(n-1)}\sum\langle J[Je_i, e_i], x\rangle$. Por otro lado, la forma de Lee se expresa en términos del producto interno como $\theta(X) = \frac{\langle X, A\rangle}{|A|^2}$. Comparando ambas expresiones tenemos que

$$A = \frac{|A|^2}{2(n-1)}\sum J[Je_i, e_i].$$

Por lo tanto $JA \in \mathfrak{g}'$. □

Ahora desarrollaremos dos ejemplos de álgebras de Lie con estructuras LCK:

Ejemplo 1.8.5. Este ejemplo apareció en [30]. Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \times \mathfrak{h}_{2n+1}$, donde $\mathfrak{h}_{2n+1}$ es el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2n+1$. Hay una base $\{A, Z, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n\}$ de $\mathfrak{g}$ con corchetes de Lie dados por $[X_i, Y_i] = Z$ para $i = 1, \ldots, n$ y A, Z en el centro de $\mathfrak{g}$. Definimos el producto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ en $\mathfrak{g}$ de modo que la base anterior sea ortonormal. Sea J_0 una estructura casi compleja dada por

$$J_0 X_i = Y_i, \quad J_0 A = Z \quad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

Se puede ver fácilmente que J_0 es una estructura compleja en $\mathfrak{g}$. Sean $\{\theta, z, x^i, y^i\}$ las 1-formas duales a $\{A, Z, X_i, Y_i\}$ respectivamente. Entonces la forma fundamental es:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (x^i \wedge y^i) + \theta \wedge z.$$

Luego,

$$d\omega = \theta \wedge \omega,$$

y por lo tanto $(\mathfrak{g}, J_0, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ es LCK. Se prueba que la forma de Lee θ resulta paralela.

Se sabe que $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie del grupo de Lie $\mathbb{R} \times H_{2n+1}$, donde H_{2n+1}, conocido como el grupo de Heisenberg, es el grupo de las matrices con coeficientes reales que tienen la siguiente forma:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & A & c \\ 0 & I_n & B^t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}, \ I_n = \mathrm{Id}_{n \times n}\,.$$

donde $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Sea $\Gamma \subset H_{2n+1}$ el subgrupo de todas las matrices con coeficientes enteros. Luego $\Gamma \backslash H_{2n+1}$ es compacto y la nilvariedad $N = S^1 \times \Gamma \backslash H_{2n+1}$ admite una estructura LCK la cual es Vaisman, pues la forma de Lee inducida en el cociente es paralela. La nilvariedad N es conocida como la variedad de Kodaira-Thurston, y fue el primer ejemplo de una variedad simpléctica compacta que no admite estructuras Kähler ([76]), pues su primer número de Betti es $\beta_1 = 3$.

Ejemplo 1.8.6. En [9] se mostró el siguiente ejemplo de una solvariedad LCK. Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie soluble de dimensión 4 dada por

$$\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{A, X, Y, Z\}$$

$$[A, X] = X, \quad [A, Y] = -Y, \quad [X, Y] = Z.$$

Sea $\{\alpha, x, y, z\}$ la base dual de $\{A, X, Y, Z\}$. Se puede chequear por cálculo directo que

$$d\alpha = 0, \quad dx = -\alpha \wedge x, \quad dy = \alpha \wedge y, \quad dz = -x \wedge y.$$

Sea $\langle \cdot , \cdot \rangle$ un producto interno en $\mathfrak{g}$ tal que $\{A, X, Y, Z\}$ es una base ortonormal. Si definimos J por

$$JA = Y, \quad JZ = X,$$

entonces $(\mathfrak{g}, J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ es hermitiana y la 2-forma fundamental ω está dada por

$$\omega = \alpha \wedge y + z \wedge x.$$

Luego obtenemos

$$d\omega = -\alpha \wedge \omega.$$

Por lo tanto, tenemos una estructura LCK con forma de Lee $\theta = -\alpha$. Se probó en [9] que el grupo de Lie simplemente conexo asociado G admite un retículo Γ y por lo tanto la solvariedad $\Gamma\backslash G$ admite una estructura LCK, la cual no es Vaisman pues la forma de Lee inducida en el cociente no es paralela. Fue probado en [47] que esta solvariedad LCK es holomórficamente homotética a la superficie de Inoue $\Gamma\backslash Sol_1^4$ equipada con la estructura LCK construida por Tricerri en [77].

Del mismo modo que se tienen estructuras Vaisman en variedades tenemos la noción de Vaisman en álgebras de Lie.

Definición 1.8.7. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, J una estructura compleja y g una métrica hermitiana en $\mathfrak{g}$, sea ω su forma fundamental. Decimos que $(\mathfrak{g}, J, g)$ es de Vaisman si es LCK y además θ es paralela con respecto a ∇.

Equivalentemente tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.8.8. *Si $(\mathfrak{g}, J, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ es LCK entonces $(J, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ es Vaisman si y sólo si ad_A es antisimétrica.*

Demostración. Recordemos que $\theta(X) = \frac{\langle A,X\rangle}{|A|^2}$. Por otro lado, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ tenemos que

$$\langle \nabla_X Y, A\rangle = \frac{1}{2}\{\langle [X,Y], A\rangle - \langle [Y,A], X\rangle + \langle [A,X], Y\rangle\}$$

Como $\mathfrak{g}'$ está en el complemento ortogonal de A entonces resulta:

$$\langle \nabla_X Y, A\rangle = \frac{1}{2}\{\langle [A,Y], X\rangle + \langle [A,X], Y\rangle\}$$

Por lo tanto $\langle \nabla_X Y, A\rangle = 0$ si y sólo si $\langle [A,Y], X\rangle = -\langle [A,X], Y\rangle$. □

Con esta proposición se ve fácilmente que en el ejemplo 1.8.5 la estructura LCK resulta Vaisman mientras que el Ejemplo 1.8.6 no.

Recordar que un campo invariante a izquierda X en un grupo de Lie es de Killing con respecto a una métrica invariante a izquierda si y sólo si el endomorfismo ad_X es antisimétrico. La Proposición 1.8.8 dice que basta verificar que A es Killing para ver que es paralelo.

1.9 Estructuras localmente conformes simplécticas

En esta sección consideraremos una generalización de las estructuras LCK, de la misma manera que las estructuras simplécticas una generalización de las variedades Kähler. Comenzamos con un repaso de espacios vectoriales simplécticos.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, y sea $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ una función bilineal. Entonces, la función $\omega^\flat b : V \to V^*$ definida por $\omega^\flat(v)(u) = \omega(v,u)$ es una función lineal.

Definición 1.9.1. La función bilineal ω de dice *simpléctica* si es antisimétrica y no degenerada, es decir, $\omega^\flat$ es una función biyectiva. En este caso se dice que (V, ω) es un espacio vectorial simpléctico.

Si (V, ω) es un espacio vectorial simpléctico es bien sabido que valen las siguientes propiedades:

- La dimensión de V es par, i.e., $\dim V = 2n$.
- Existe una base $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ de V tal que $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ y $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$. Esta base será llamada simpléctica (no es única).

El ejemplo básico de un espacio vectorial simpléctico es $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, donde ω_0 es la forma simpléctica standard

$$\omega_0(z, z') = \sum_{i=1}^{n} x'_i y_i - x_i y'_i,$$

donde $z = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, $z' = (x'_1, \ldots, x'_n, y'_1, \ldots, y'_n)$. El grupo de todos los automorfismos ϕ de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ tales que $\omega_0(\phi z, \phi z') = \omega_0(z, z')$, para todo $z, z' \in \mathbb{R}^{2n}$ recibe el nombre de *grupo simpléctico*, y se denota por $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$. Se ve fácilmente que $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$, y se puede ver que es un grupo de Lie de dimensión $2n^2 + n$. Tomando una base simpléctica, ω_0 se puede escribir como

$$\omega_0(z, z') = \langle Jz, z' \rangle,$$

donde J es estructura compleja estandard

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno canónico de $\mathbb{R}^{2n}$. Luego $\phi \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ si y solamente si, $\phi^t J \phi = J$. Matricialmente se describe como

$$\phi = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

donde A, B, C, D son matrices reales $n \times n$ tales que, $AD^t - BC^t = I$ y AB^t, CD^t son simétricas.

El álgebra de Lie del grupo de Lie $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ se denota por $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, y está dada por el conjunto de matrices reales M de dimensión $2n \times 2n$ tales que

$$JM + M^t J = 0,$$

o equivalentemente,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix},$$

donde A, B, C son matrices reales $n \times n$ y B, C son simétricas.

Recordemos ahora la definición de una variedad simpléctica.

Definición 1.9.2. Sea M una variedad diferenciable, una 2-forma ω en M se dice simpléctica si es cerrada ($d\omega = 0$), y si $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ es simpléctica para todo $p \in M$. El par (M, ω) se dice una variedad simpléctica.

Como consecuencia directa tenemos que una variedad simpléctica tiene dimensión $2n$ y es orientable pues ω^n es una forma de volumen. Además tenemos el siguiente resultado

Teorema 1.9.3 (Darboux)**.** *Sea (M,ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$, y sea $p \in M$. Entonces existe un sistema de coordenadas $(U, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ centrado en p tal que en U*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Este teorema muestra que todas las variedades simplécticas de la misma dimensión son localmente equivalentes, por lo que se requieren invariantes topológicos globales para poder distinguirlas. También se tiene, usando el Teorema de Stokes, que los números de Betti pares de una variedad simpléctica compacta son todos distintos de cero.

Un ejemplo típico de variedad simpléctica es el fibrado cotangente de cualquier variedad diferenciable, la forma simpléctica está dada por $\omega = -d\alpha$, donde α es la 1-forma de Liouville. Otros ejemplos de variedades simplécticas son las variedades Kähler. Sin embargo, hay ejemplos de variedades simplécticas que no admiten ninguna métrica de Kähler, el primer ejemplo exhibido es la conocida variedad de Kodaira-Thuston la cual explicamos en detalle en el Ejemplo 1.8.5.

Como generalización de las variedades simplécticas tenemos las variedades *localmente conformes simplécticas* (LCS), esto es, una variedad diferenciable M equipada con una 2-forma no degenerada ω tal que existe un cubrimiento de M por abiertos $\{U_i\}$ y una familia de funciones diferenciables locales $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ tal que

$$\omega_i = \exp(-f_i)\omega$$

es una forma simpléctica en U_i. Esta condición es equivalente a que

$$d\omega = \theta \wedge \omega$$

para alguna 1-forma cerrada θ, llamada la forma de Lee. Además, M es llamada globalmente conforme simpléctica (GCS) si existe una función C^∞, $f : M \to \mathbb{R}$, tal que $\exp(-f)g$ sea una forma simpléctica. Equivalentemente, M es una variedad GCS si existe una 1-forma exacta θ definida globalmente en M tal que $d\omega = \theta \wedge \omega$. Notar que podemos ver a las estructuras LCS es como una generalización de las estructuras LCK, considerando sólo la condición (1.16) sin tener en cuenta la estructura hermitiana.

Del Lema 1.5.2 obtenemos los siguientes resultados que ya sabíamos para el caso LCK:

- Si (ω, θ) es una estructura LCS en M, entonces ω es simpléctica si y sólo si $\theta = 0$. En efecto, $\theta \wedge \omega = 0$ y ω no degenerada implican $\theta = 0$.
- Si ω es una 2-forma no degenerada en M, con $\dim M \geq 6$, tal que vale (1.16) para una 1-forma θ entonces θ es automáticamente cerrada y por lo tanto M es LCS.

Como consecuencia de estas observaciones resulta que para una estructura LCS la forma de Lee está univocamente determinada por la 2-forma no degenerada ω, pero no hay una fórmula explícita para θ como (1.17) para el caso LCK. El par (ω, θ) se llama una estructura LCS en M.

Las estructuras LCS fueron introducidas por Lee en [55] y luego muy estudiadas por Vaisman y Banyaga entre otros (ver por ejemplo [82, 13, 14, 15, 12, 39, 40, 54]).

Un problema análogo al de encontrar variedades simplécticas no-Kähler es el de encontrar ejemplos de variedades compactas con estructuras LCS que no admitan estructuras LCK. Esta pregunta fue planteada en [69], y el primer contraejemplo fue dado en [12], donde los autores exhiben una estructura LCS en una variedad compacta de dimensión 4 de la forma $M \times S^1$, la cual no admite ninguna estructura compleja, y por lo tanto ninguna métrica LCK.

Otro ejemplo más reciente fue dado por [22], donde se exhibe una nilvariedad con estructura LCS no LCK y que no es el producto de una variedad compacta por un círculo.

Estos ejemplos dependen fuertemente de la clasificación de variedades complejas compactas de dimensión 4. No sabemos si se conocen ejemplos en dimensiones mayores.

Recordemos ahora una definición de Vaisman ([82]). Si (ω, θ) es una estructura LCS en M, un campo vectorial X es llamado un automorfismo infinitesimal de (ω, θ) si $\mathrm{L}_X\omega = 0$, donde L denota la derivada de Lie. Esto implica que $\mathrm{L}_X\theta = 0$ y como consecuencia $\theta(X)$ es una función constante en M. Si existe un automorfismo infinitesimal X tal que $\theta(X) \neq 0$, se dice que la estructura LCS (ω, θ) es de *primer tipo*, y se dice que es de *segundo tipo* en caso contrario. Según Vaisman se puede obtener mucha más información sobre las estructuras de primer tipo, por ejemplo, en [82] se presentan relaciones de una estructura LCS de primer tipo con la geometría de contacto y también se prueba que las variedades LCS del primer tipo admiten importantes foliaciones.

Como θ es cerrada, podemos deformar la diferencial de de Rham d para obtener el operador diferencial adaptado

$$d_\theta\alpha = d\alpha - \theta \wedge \alpha,$$

en $E(M)$. Este operador satisface $d_\theta^2 = 0$, luego permite definir la *cohomología adaptada* $H_\theta^*(M)$ de M relativa a la 1-forma cerrada θ, también llamada cohomología de Lichnerowicz. Se sabe que si M es una variedad compacta y orientada de dimensión n, entonces $H_\theta^0(M) = H_\theta^n(M) = 0$ para cualquier 1-forma derrada, no exacta θ (ver por ejemplo [39, 42]). Para cualquier estructura LCS (ω, θ) en M, la 2-forma ω define una clase de cohomología $[\omega]_\theta \in H_\theta^2(M)$, pues $d_\theta\omega = d\omega - \theta \wedge \omega = 0$. Se probó en [82] que si una estructura LCS es del primer tipo entonces ω es d_θ-exacta, i.e. $[\omega]_\theta = 0$.

Veamos dos ejemplos de variedades con estructuras LCS.

Ejemplo 1.9.4. Si η es una 1-forma cerrada en una variedad M, entonces $(T^*M, d_{\pi^*\eta}\alpha, \pi^*\eta)$ es una variedad LCS, donde α es la 1-forma de Liouville de T^*M y $\pi : T^*M \to M$ la proyección canónica. Además, ya sabemos que T^*M siempre admite una forma simpléctica.

También se conocen ejemplos de variedades LCS las cuales no admiten ninguna estructura simpléctica:

Ejemplo 1.9.5. Si (M, α) es una variedad de contacto, entonces se puede ver que $(M \times S^1, d_\nu\alpha, \nu)$ es una variedad LSC, donde ν es la forma estandard de volumen en S^1. Por ejemplo, $S^3 \times S^1$ es una variedad LCS, la cual no admite ninguna estructura simpléctica pues se puede ver que $\beta_2(S^3 \times S^1) = 0$.

Estudiaremos ahora estructuras LCS invariantes a izquierda en grupos de Lie, es decir, un grupo de Lie G con una estructura LCS donde la 2-forma no degenerada ω es invariante a izquierda. Probaremos a continuación que en este caso la forma de Lee θ asociada también es invariante a izquierda, generalizando de esta manera la Proposición 1.6.8 para el caso LCK.

Proposición 1.9.6. *Sea G un grupo de Lie con una estructura LCS dada por ω invariante a izquierda, entonces la forma de Lee θ es invariante a izquierda.*

Demostración. Ya sabemos que la forma de Lee está unívocamente determinada por la ecuación $d\omega = \theta \wedge \omega$. Sea $L_g : G \to G$ la traslación a izquierda por $g \in G$, entonces $L_g^*(d\omega) = d(L_g^*\omega) = d\omega$. Por otro lado

$$L_g^*(\theta \wedge \omega) = L_g^*\theta \wedge L_g^*\omega = L_g^*\theta \wedge \omega.$$

Entonces $d\omega = L_g^*\theta \wedge \omega$, y luego por unicidad tenemos que $L_g^*\theta = \theta$ para todo $g \in G$. $\square$

Considerar estructuras LCS invariantes a izquierda en grupos de Lie es equivalente a estudiar estructuras LCS en el álgebra de Lie asociada $\mathfrak{g}$, esto es, un par (ω, θ) donde $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$ es no degenerada y $\theta \in \mathfrak{g}^*$, $d\theta = 0$, satisfacen

$$d\omega = \theta \wedge \omega.$$

También consideraremos la noción de estructura LCS de primer o de segundo tipo en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. En efecto, denotemos por $\mathfrak{g}_\omega$ al conjunto de automorfismos infinitesimales de la estructura LCS (ω, θ), es decir,

$$\mathfrak{g}_\omega = \{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{L}_x\omega = 0\} = \{x \in \mathfrak{g} : \omega([x, y], z) + \omega(y, [x, z]) = 0 \text{ para todo } y, z \in \mathfrak{g}\}. \tag{1.27}$$

Notemos que $\mathfrak{g}_\omega \subset \mathfrak{g}$ es una subálgebra de Lie, por lo que la restricción de θ a $\mathfrak{g}_\omega$ es un morfismo de álgebras de Lie llamado *morfismo de Lee.* Se dice que la estructura LCS (ω, θ) es del *primer tipo* si el morfismo de Lee es suryectivo, y que es del *segundo tipo* si es idénticamente cero (ver [22]).

Para un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y una 1-forma cerrada $\theta \in \mathfrak{g}^*$ tenemos la cohomología adaptada $H_\theta^*(\mathfrak{g})$ definida por el operador diferencial

$$d_\theta\alpha = d\alpha - \theta \wedge \alpha,$$

en $\bigwedge^* \mathfrak{g}^*$. De acuerdo con [61], esta cohomología adaptada coincide con la cohomología del álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ con coeficientes en el $\mathfrak{g}$-módulo V_θ de dimensión 1, donde la acción de $\mathfrak{g}$ en V_θ está dada por

$$Xv = -\theta(X)v, \quad X \in \mathfrak{g},\ v \in V_\theta. \tag{1.28}$$

El hecho de que θ sea cerrada garantiza que esta acción sea una representación de álgebras de Lie.

Si el grupo de Lie es simplemente conexo, entonces toda estructura LCS invariante a izquierda es en realidad globalmente conforme a una estructura simpléctica. Por lo tanto estudiaremos cocientes compactos de estos grupos de Lie por subgrupos discretos, los cuales serán no simplemente conexos, pues $\pi_1(\Gamma\backslash G) \cong \Gamma$, y tendrán una estructura LCS inducida.

Observación 1.9.7. Notemos que una estructura LCS del primer tipo en el álgebra de Lie induce una estructura LCS del primer tipo en cualquier cociente compacto del grupo de Lie simplemente conexo correspondiente por un subgrupo discreto.

Supongamos ahora que G es completamente soluble, es decir un grupo de Lie soluble tal que los endomorfismos ad_X del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tienen sólo autovalores reales para todo $X \in \mathfrak{g}$. En este caso la cohomología de $\Gamma\backslash G$ se puede calcular en términos de la cohomología de $\mathfrak{g}$. En efecto, Hattori probó en [44] que si V es un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita triangular [2], entonces $\overline{V} := C^\infty(\Gamma\backslash G) \otimes V$ es un $\mathfrak{X}(\Gamma\backslash G)$-módulo y hay un isomorfismo

$$H^*(\mathfrak{g}, V) \cong H^*(\mathfrak{X}(\Gamma\backslash G), \overline{V}). \tag{1.29}$$

Por lo tanto:

[2] Un $\mathfrak{g}$-módulo V se dice triangular si los endomorfismos de V definidos por $v \mapsto Xv$ tienen sólo autovalores reales para todo $X \in \mathfrak{g}$.

- Si $V=\mathbb{R}$ es el $\mathfrak{g}$-módulo trivial, entonces el lado derecho de (1.29) da la cohomología de de Rham usual de $\Gamma\backslash G$, por lo tanto
$$H^*(\mathfrak{g}) \cong H^*_{dR}(\Gamma\backslash G). \tag{1.30}$$

- Si $V=V_\theta$ con la acción dada por (1.28), entonces podemos identificar $\overline{V}$ con $C^\infty(\Gamma\backslash G)$ y la acción de $\mathfrak{X}(\Gamma\backslash G)$ en $C^\infty(\Gamma\backslash G)$ está dada por
$$X\cdot f = Xf-\theta(X)f, \qquad X\in\mathfrak{g},\ f\in C^\infty(\Gamma\backslash G).$$
Aquí estamos usando que existe una inclusión natural $\mathfrak{g}\hookrightarrow\mathfrak{X}(\Gamma\backslash G)$, más aún existe una biyección $C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(\Gamma\backslash G)$ dada por $f\otimes X\mapsto fX$. Como consecuencia, en este caso (1.29) se convierte en (cf. [61, Corolario 4.1])
$$H^*_\theta(\mathfrak{g}) \cong H^*_\theta(\Gamma\backslash G). \tag{1.31}$$

En particular, $H^*_{dR}(\Gamma\backslash G)$ y $H^*_\theta(\Gamma\backslash G)$ no dependen del retículo Γ.

1.10 Resultados conocidos y problemas abiertos

A continuación veremos algunos resultados conocidos para nilvariedades y solvariedades.

- Ugarte en [78] demostró que una nilvariedad $\Gamma\backslash G$ de dimensión 6 con una estructura compleja invariante admite una métrica LCK si y sólo si el álgebra de Lie de G es isomorfa a $\mathfrak{h}_5\times\mathbb{R}$, donde $\mathfrak{h}_5$ es el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 5. En este trabajo además se conjetura que toda nilvariedad de dimensión $2n$ que admite una estructura LCK es de la forma $\Gamma\backslash(H_{2n-1}\times\mathbb{R})$, donde Γ es un subgrupo discreto y H_{2n-1} es el grupo de Lie de Heisenberg de dimensión $2n-1$.

- Sawai en [74] demostró esta conjetura de Ugarte para el caso en que la estructura compleja es invariante. En ese trabajo se ve que si G es un grupo de Lie simplemente conexo nilpotente con una estructura LCK invariante a izquierda entonces G es isomorfo a $H_{2n-1}\times\mathbb{R}$, donde H_{2n-1} es el grupo de Lie de Heisenberg de dimensión $2n-1$.

- Bazzoni en [21] da una respuesta positiva a la conjetura de Ugarte para el caso en que la estructura LCK es en realidad Vaisman.

- En [23] Belgun estudió las métricas LCK en superficies complejas compactas y clasificó las que admiten métricas de Vaisman.

- Hasegawa y Kamishima en [43] dieron una clasificación de todas las álgebras de Lie de dimensión real 4, unimodulares y solubles que admiten LCK.

- Kasuya en [48] prueba, usando ciertas restricciones cohomológicas, que no existen métricas Vaisman en algunas solvariedades con estructura compleja invariante a izquierda.

- Se sabe que las variedades LCK homogéneas son Vaisman en los siguientes casos:
  - cuando la variedad es compacta (ver [34]),

  - cuando la variedad es un cociente de un grupo reductivo tal que el normalizador de la isotropía es compacto (ver [2]).

- En [22] se prueba que toda estructura LCS en un álgebra de Lie nilpotente es del primer tipo. Además se demuestra que cierta clase de álgebras de Lie del primer tipo son una extensión doble de un álgebra de Lie simpléctica. Sin embargo, se sabe muy poco sobre estructuras LCS del segundo tipo en álgebras de Lie, por lo que sería muy interesante encontrar de manera sistemática muchos ejemplos de álgebras de Lie del segundo tipo.

CAPÍTULO 2

Grupos de Lie LCK con estructuras complejas especiales

En este capítulo estudiaremos estructuras LCK invariantes a izquierda en grupos de Lie. En primer lugar consideraremos el caso especiale en donde la estructura compleja es bi-invariante, y luego el caso en donde la estructura compleja es abeliana. En el primer caso probaremos daremos una caracterización de las álgebras LCK con dicha estructura compleja, mientras que en el segundo caso probaremos que el álgebra de Lie es isomorfa al producto de $\mathbb{R}$ y el álgebra de Lie de Heisenberg.

2.1 Estructuras complejas en álgebras de Lie

En esta sección estudiaremos dos tipos especiales de estructuras casi complejas en álgebras de Lie, llamadas bi-invariantes y abelianas. Una estructura casi compleja J en $\mathfrak{g}$ se dice *bi-invariante* si

$$J[X, Y] = [X, JY], \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{g},$$

y se dice *abeliana* si

$$[JX, JY] = [X, Y], \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Notar que en ambos casos la estructura casi compleja J resulta integrable. En general dada una estructura compleja J, la Proposición 1.6.6 nos dice que $d(\mathfrak{g}_{1,0}) \subset \mathfrak{g}_{2,0} \oplus \mathfrak{g}_{1,1}$. Dos casos interesantes se dan cuando $d(\mathfrak{g}_{1,0}) \subset \mathfrak{g}_{2,0}$, o bien cuando $d(\mathfrak{g}_{1,0}) \subset \mathfrak{g}_{1,1}$. A continuación veremos que el primer caso ocurre si y sólo si el grupo de Lie asociado a $\mathfrak{g}$ tiene estructura de grupo de Lie complejo, o equivalentemente, la estructura compleja es bi-invariante. Luego veremos que el segundo caso ocurre si y sólo la estructura compleja es abeliana.

Las siguientes dos proposiciones son resultados ya conocidos, pero agregamos sus demostraciones por completitud.

Proposición 2.1.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *J satisface $J \circ \mathrm{ad}_X = \mathrm{ad}_X \circ J$, es decir, J es bi-invariante.*

(ii) *$\mathfrak{g}^{1,0}$ y $\mathfrak{g}^{0,1}$ son ideales de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.*

(iii) *$d(\mathfrak{g}_{1,0}) \subset \mathfrak{g}_{2,0}$.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Como J es integrable, por la Proposición 1.6.5 tenemos que $\mathfrak{g}^{1,0}$ y $\mathfrak{g}^{0,1}$ son subálgebras. Sean $X - iJX \in \mathfrak{g}^{1,0}$ y $A + iB \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, entonces

$$\begin{aligned}[X - iJX, A + iB] &= [X, A] + [JX, B] + i([X, B] - [JX, A]) \\ &= [X, A] + J[X, B] - i(-[X, B] + J[X, A]) \in \mathfrak{g}^{1,0}.\end{aligned}$$

Luego $\mathfrak{g}^{1,0}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. Análogamente con $\mathfrak{g}^{0,1}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$$[X - iJX, Y] = [X, Y] - i[JX, Y] \in \mathfrak{g}^{1,0},$$

entonces $J[X, Y] = [JX, Y]$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea $\alpha \in \mathfrak{g}_{1,0}$ entonces $d\alpha \in \mathfrak{g}_{1,1} \oplus \mathfrak{g}_{0,2}$ pues por (ii) tenemos que J es integrable (ver Proposición 1.6.5). Luego

$$d\alpha(X - iJX, Y + iJY) = -\alpha([X - iJX, Y + iJY]) = 0$$

pues por (ii) se tiene que $[X - iJX, Y + iJY] \in \mathfrak{g}^{1,0} \cap \mathfrak{g}^{0,1} = \{0\}$. Luego $d\alpha$ no tiene componente en $\mathfrak{g}_{1,1}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sea $X, Y \in \mathfrak{g}$, y $\alpha \in \mathfrak{g}_{1,0}$ entonces, $d\alpha \in \mathfrak{g}_{2,0}$ y luego

$$0 = d\alpha(X - iJX, Y + iJY) = -\alpha([X - iJX, Y + iJY]),$$

para toda $\alpha \in \mathfrak{g}_{1,0}$. Sea $Z = [X - iJX, Y + iJY] = [X, Y] + [JX, JY] + i([X, JY] - [JX, Y]) = Z^{1,0} + Z^{0,1}$ con $Z^{1,0} = \frac{1}{2}(Z - iJZ)$, notemos que $JZ^{1,0} = iZ^{1,0}$. Sea $\alpha = \alpha_1 - iJ\alpha_1$, con $\alpha_1 \in \mathfrak{g}^*$ entonces

$$0 = \alpha(Z) = \alpha(Z^{1,0}) = \alpha_1(Z^{1,0}) - iJ\alpha_1(Z^{1,0}) = \alpha_1(Z^{1,0}) - i\alpha_1(JZ^{1,0}) = 2\alpha_1(Z^{1,0}).$$

Sea $Z^{1,0} = A - iJA$ para algún $A \in \mathfrak{g}$, entonces $0 = \alpha_1(Z^{1,0}) = \alpha_1(A) - i\alpha_1(JA)$, y así $\alpha_1(A) = 0$ para toda $\alpha_1 \in \mathfrak{g}^*$. Luego $A = 0$, entonces $Z^{1,0} = 0$ y por lo tanto $Z - iJZ = 0$. Luego $-[JX, Y] = J[JX, JY]$, como X, Y son arbitrarios tenemos que $[U, JV] = J[U, V]$, para todo $U, V \in \mathfrak{g}$. □

Observación 2.1.2. En general, las traslaciones a derecha no son holomorfas en un grupo de Lie G con una estructura compleja invariante a izquierda J. Esto pasa sólo cuando G es un grupo de Lie complejo con la estructura holomorfa dada por J, o equivalentemente, J es bi-invariante.

A continuación veremos el segundo caso interesante, que corresponde a las estructuras complejas abelianas, las cuales fueron introducidas en [17].

Proposición 2.1.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *J satisface $[JX, JY] = [X, Y]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, es decir, J es abeliana.*

(ii) *$\mathfrak{g}^{1,0}$ y $\mathfrak{g}^{0,1}$ son subálgebras abelianas de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.*

(iii) *$d(\mathfrak{g}_{1,0}) \subset \mathfrak{g}_{1,1}$.*

Demostración. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$:

$$[X - iJX, Y - iJY] = [X, Y] - [JX, JY] - i([JX, Y] + [X, JY])$$

entonces $[X - iJX, Y - iJY] = 0$ si y sólo si $[X, Y] - [JX, JY] = 0$. La demostración es similar para $\mathfrak{g}^{0,1}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Si $\alpha \in \mathfrak{g}^{1,0}$ entonces $d\alpha \in \mathfrak{g}_{1,1} \oplus \mathfrak{g}_{2,0}$ pues J es integrable por (ii). Además $d\alpha(X - iJX, Y - iJY) = -\alpha([X - iJX, Y - iJY]) = 0$, entonces $d\alpha$ no tiene componente en $\mathfrak{g}_{2,0}$.

(iii) $\Leftrightarrow$ (i) Notemos que (iii) implica que J es integrable. Sea $X, Y \in \mathfrak{g}$ y $\alpha \in \mathfrak{g}_{1,0}$ entonces $d\alpha \in \mathfrak{g}_{1,1}$, luego

$$0 = d\alpha(X - iJX, Y - iJY) = -\alpha([X - iJX, Y - iJY]),$$

para toda $\alpha \in \mathfrak{g}_{1,0}$.

Sea $Z = [X - iJX, Y - iJY] = Z^{1,0} + Z^{0,1}$, con $Z^{1,0} = A - iJA$ y sea $\alpha = \alpha_1 - iJ\alpha_1$, con $\alpha_1 \in \mathfrak{g}^*$, entonces

$$\alpha(Z) = \alpha_1(A) - i\alpha_1(JA) - iJ\alpha_1(A) + iJ\alpha_1(iJA) = 2(\alpha_1(A) - i\alpha_1(JA)) = 0.$$

Así $\alpha_1(A) = 0$ para toda $\alpha_1 \in \mathfrak{g}^*$, entonces $A = 0$ y luego $Z^{1,0} = 0$. Por lo tanto $Z - iJZ = 0$, lo que implica $[X, Y] = [JX, JY]$. $\square$

Nota. Una estructura compleja J sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no puede ser bi-invariante y abeliana al mismo tiempo a menos que $\mathfrak{g}$ sea abeliana.

Observación 2.1.4. La estructura compleja J_0 definida en el Ejemplo 1.8.5 es abeliana. Más aún, se probó en [18] que si J es una estructura compleja en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con $\dim \mathfrak{g}' = 1$, entonces J es abeliana.

Ahora recordaremos algunas propiedades sobre estructuras complejas abelianas en el siguiente lema (ver [3, 18, 71] para sus demostraciones).

Lema 2.1.5. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ su centro y $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ su conmutador. Si J es una estructura compleja abeliana en $\mathfrak{g}$, entonces*

1. $J\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.
2. $\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}' + J\mathfrak{g}')$.
3. *La codimensión de $\mathfrak{g}'$ es al menos 2, a menos que $\mathfrak{g}$ sea isomorfa a $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ (la única álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2.)*
4. *$\mathfrak{g}'$ es abeliano, por lo tanto $\mathfrak{g}$ es 2-pasos soluble.*

De acuerdo con [18] se puede obtener una gran familia de álgebras de Lie con estructuras complejas (abelianas) empezando con un álgebra real asociativa de dimensión finita $\mathcal{A}$ y considerando $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$, es decir, el espacio vectorial $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$ equipado con el corchet de Lie dado por

$$[(a, b), (a', b')] = (aa' - a'a, ab' - a'b), \quad a, b, a', b' \in \mathcal{A}.$$

Si J es el endomorfismo de $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$ definido por

$$J(a, b) = (b, -a),$$

es fácil ver que J es una estructura compleja en $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$. Esta estructura compleja se llama *estandard.* Además cuando $\mathcal{A}$ es conmutativa, J resulta abeliana. Probaremos ahora un resultado sobre $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$ que será útil más adelante. Recordemos que un álgebra de Lie se dice *unimodular* si la representación adjunta tiene traza cero, i.e., $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x) = 0$ para todo x en el álgebra de Lie.

Lema 2.1.6. *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa y conmutativa y $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$ es unimodular, entonces $\mathcal{A}$ es nilpotente y por lo tanto $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$ es un álgebra de Lie nilpotente.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}$ no es nilpotente, entonces existe $0 \neq e \in \mathcal{A}$ tal que e es un elemento idempotente, i.e., $e^2 = e$. Consideramos $(e, 0) \in \mathfrak{aff}(\mathcal{A})$ y calculamos $\operatorname{ad}_{(e,0)}(x, y) = (0, ey) = (0, l_e(y))$ donde l_e es la multiplicación a izquierda por e. De esta manera la matriz de $\operatorname{ad}_{(e,0)}$ es de la forma

$$\operatorname{ad}_{(e,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l_e \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Como $l_e^2 = l_e$ y $l_e \neq 0$, existe una base de $\mathcal{A}$ tal que

$$l_e = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

y por lo tanto $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{(e,0)}) \neq 0$. □

Observación 2.1.7. Con una demostración similar se puede probar que si $\mathcal{A}$ es un álgebra asociativa con identidad, entonces $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$ no es unimodular.

2.2 Estructuras LCK con estructuras complejas bi-invariantes

En esta sección consideraremos un álgebra de Lie con una estructura LCK tal que su estructura compleja es bi-invariante, lo cual es equivalente a considerar métricas LCK invariantes a izquierda en grupos de Lie complejos. El objetivo de esta sección es probar que en cada dimensión real par hay sólo un álgebra de Lie que admite tales métricas.

Primero mostraremos algunos ejemplos. Comenzando con $\mathbb{R}^{2n}$ equipado con una estructura compleja J_0 y un producto interno hermitiano $\langle \cdot , \cdot \rangle$, consideramos el álgebra de Lie $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^{2n}$ (con $\mathbb{R}^2 = \operatorname{span}\{u, v\}$), donde los corchetes de Lie están dados por $[u, v] = 0$, $[u, X] = X$ y $[v, X] = J_0 X$ para todo $X \in \mathbb{R}^{2n}$. Extendiendo J_0 por $J_0 u = v$, es fácil ver que J_0 es una estructura compleja bi-invariante en $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^{2n}$. Extendemos también $\langle \cdot , \cdot \rangle$ a un producto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle_\lambda$ en $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^{2n}$ por $\langle \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{2n} \rangle = 0$, $\langle u, v \rangle = 0$ y $|u| = |v| = \lambda$ para algún $\lambda > 0$. Es fácil ver que $(J_0, \langle \cdot , \cdot \rangle_\lambda)$ es una estructura LCK, pero no es Vaisman (ver Proposición 1.8.8). Además, las métricas $\langle \cdot , \cdot \rangle_\lambda$ son no isométricas dos a dos, pues la curvatura escalar de $\langle \cdot , \cdot \rangle_\lambda$ es $-\frac{2n(n+1)}{\lambda^2}$. Pero las métricas $\langle \cdot , \cdot \rangle_\lambda$ si son homotéticas a la métrica $\langle \cdot , \cdot \rangle_1$.

Teorema 2.2.1. *Sea $(J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ una estructura LCK en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ donde la estructura compleja J es bi-invariante. Entonces $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^{2n}$ con los corchetes de Lie como arriba y $(J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ es equivalente a una estructura hermitiana $(J_0, \langle \cdot , \cdot \rangle_\lambda)$ como arriba para algún $\lambda > 0$.*

Donde equivalente significa que existe una isometría holomorfa de $(\mathfrak{g}, J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ a $(\mathfrak{g}, J_0, \langle \cdot , \cdot \rangle_\lambda)$. Con el obetivo de probar este teorema, recordemos el siguiente resultado, muy conocido, sobre la existencia de métricas de Kähler en grupos de Lie complejos (ver [37]).

Lema 2.2.2. *Si* $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ *es Kähler con* J *bi-invariante, entonces* $\mathfrak{g}$ *es abeliana.*

Demostración del Teorema 2.2.1. Recordemos de (1.25) la descomposición ortogonal de $\mathfrak{g}$ dada por $\mathfrak{g} = \operatorname{span}\{A\} \oplus \ker\theta$.

Lema 2.2.3. *El endomorfismo* $\operatorname{ad}_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *es simétrico.*

Demostración. Como J es bi-invariante, tenemos que $J \circ \operatorname{ad}_{JA} = -\operatorname{ad}_A$, y se sigue del Lema 1.8.3 que ad_A es simétrico. □

Ahora, de (1.26) tenemos que

$$\mathfrak{g} = \operatorname{span}\{A, JA\} \oplus^{\perp} W,$$

donde $\mathfrak{g}' \subset \ker\theta = \operatorname{span}\{JA\} \oplus W$ y W es J-invariante. El hecho de que J sea bi-invariante implica que $\mathfrak{g}'$ es también J-invariante, y por lo tanto $\mathfrak{g}' \subset W$. Más aún, $\mathfrak{g}' = W$, pues para $X \in W$ tenemos que $d\omega(A, X, JX) = -2\langle [A, X], X\rangle$ y $\theta \wedge \omega(A, X, JX) = |X|^2$, por lo tanto

$$-2\langle [A, X], X\rangle = |X|^2,$$

esto implica que $\mathfrak{g}' = W$. Luego obtenemos

$$\mathfrak{g} = \operatorname{span}\{A, JA\} \oplus^{\perp} \mathfrak{g}',$$

con $J\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'$.

Por otro lado $(\mathfrak{g}', J|_{\mathfrak{g}'}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ es Kähler, pues la forma fundamental de $\mathfrak{g}'$ es la restricción de ω a $\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'$, y $d\omega = 0$ en $\mathfrak{g}'$. Del Lema 2.2.2 obtenemos que $\mathfrak{g}'$ es abeliana, es decir, $\mathfrak{g}' \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

Como ad_A es simétrico y $d\omega(A, X, JY) = \theta \wedge \omega(A, X, JY)$, tenemos que

$$2\langle [A, X], Y\rangle = -\langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{g}'.$$

Por lo tanto, $[A, X] = -\frac{1}{2}X$ para todo $X \in \mathfrak{g}'$. Tomando $B = JA$, obtenemos $[A, B] = 0$, $\operatorname{ad}_A|_{\mathbb{R}^{2n}} = -\frac{1}{2}\operatorname{Id}$ y $\operatorname{ad}_B|_{\mathbb{R}^{2n}} = J\operatorname{ad}_A = -\frac{1}{2}J$. Tomando $u = -2A$ y $v = -2B$, obtenemos $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^{2n}$ con $(J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ equivalente a $(J_0, \langle\cdot\,,\cdot\rangle_\lambda)$ para $\lambda = |2A|$. □

Corolario 2.2.4. *No existe ningún álgebra de Lie unimodular* $\mathfrak{g}$ *con una estructura LCK* $(J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ *tal que* J *sea una estructura compleja bi-invariante.*

Demostración. Con la notación de la demostración del teorema 2.2.1, se sigue que $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_A) = -\frac{1}{n} \neq 0$, y por lo tanto $\mathfrak{g}$ no es unimodular. □

Observaciones. (i) Se sigue del Teorema 2.2.1 y de la Proposición 1.8.8 que una estructura LCK con estructura compleja bi-invariante nunca es Vaisman.

(ii) El álgebra de Lie $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^{2n}$ con los corchetes de Lie como arriba es, de hecho, un álgebra de Lie casi abeliana compleja $\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}^n$ tal que $[Z, U] = U$ para todo $U \in \mathbb{C}^n$, donde $\mathbb{C}$ está generado por Z.

Sea M una variedad compacta, compleja y paralelizable. De acuerdo a [84], M puede ser escrita como un cociente $\Gamma\backslash G$, donde G es un grupo de Lie simplemente conexo complejo y Γ es un subgrupo discreto. Notar que de acuerdo a [62], G debe ser unimodular. Denotamos por $\pi : G \to M$ a la proyección holomorfa.

Corolario 2.2.5. *Con la notación de arriba, M no admite ninguna métrica LCK g compatible con su estructura holomorfa tal que $\pi^* g$ sea una métrica invariante a izquierda en G.*

Demostración. Asumamos que una tal métrica existe. Como $\pi^* g$ es invariante a izquierda, entonces G admite una métrica LCK invariante a izquierda con una estructura compleja bi-invariante, y esto determina una estructura LCK en $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie de G. Pero $\mathfrak{g}$ es unimodular (porque G es unimodular), y esto contradice el Corolario 2.2.4. □

Observación 2.2.6. En [43] se probó, más generalmente, que una variedad compleja compacta y paralelizable no admite ninguna métrica LCK compatible con su estructura holomorfa.

La estructura LCK $(J_0, \langle\cdot\,,\cdot\rangle_\lambda)$ en el álgebra de Lie $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^{2n}$ induce una estructura LCK invariante a izquierda en el correspondiente grupo de Lie simplemente conexo, el cual es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n+2}$. Sean $(x_1, x_2, u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ las coordenadas globales canónicas, luego la métrica invariante a izquierda g_λ asociada a $\langle\cdot\,,\cdot\rangle_\lambda$ está dada por

$$g_\lambda = \lambda^2(dx_1^2 + dx_2^2) + e^{-2x_1}\sum_k (du_k^2 + dv_k^2),$$

donde $\lambda = |2A|$. La forma fundamental es

$$\omega_\lambda = \lambda^2(dx_1 \wedge dx_2) + e^{-2x_1}\sum_k (du_k \wedge dv_k),$$

y la métrica conforme $h_\lambda = e^{2x_1} g_\lambda$ es Kähler.

Observación 2.2.7. Notar que en el caso de dimensión 4 la métrica g_λ para $\lambda = 1$ es localmente conforme hiper-Kähler. En efecto, de acuerdo con [16], la métrica h_1 es hiper-Kähler con respecto a cierta estructura hipercompleja $\{I_1, I_2, I_3\}$. Más aún, la estructura compleja bi-invariante J_0 no está en la 2-esfera de estructuras complejas generada por I_j, $j = 1, 2, 3$.

2.3 Estructuras LCK con estructura compleja abeliana

En esta sección consideraremos un álgebra de Lie unimodular equipada con una estructura LCK tal que su estructura compleja es abeliana. El objetivo es probar que las únicas álgebras de Lie que admiten tales métricas son el producto del álgebra de Lie de Heisenberg por $\mathbb{R}$, y la estructura LCK es en realidad Vaisman. De ahora en adelante asumimos que el álgebra de Lie con la que trabajaremos tiene dimensión al menos 4.

Antes de enunciar el resultado principal, consideraremos la siguiente variación del Ejemplo 1.8.5. Sea $\{A, Z, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n\}$ base de $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_{2n+1}$ tal que $[X_i, Y_i] = Z$ para $i = 1, \ldots, n$. Esta álgebra de Lie admite una estructura compleja abeliana J_0 dada por $J_0 X_i = Y_i$, $J_0 A = Z$. Para cualquier $\lambda > 0$, consideramos el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ tal que la base de arriba sea ortogonal, con $|X_i| = |Y_i| = 1$ pero $|A| = |Z| = \frac{1}{\lambda}$. Es fácil ver (como en el Ejemplo 1.8.5) que $(J_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda)$ es una estructura LCK, de hecho, es Vaisman, pues $\mathrm{ad}_A = 0$. Además, las métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ son no isométricas dos a dos, pues la curvatura escalar de $\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$ es $-\frac{n\lambda^2}{2}$.

Teorema 2.3.1. *Sea $(J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una estructura LCK en $\mathfrak{g}$ con estructura compleja abeliana J. Si $\dim \mathfrak{g} \geq 4$ y $\mathfrak{g}$ es unimodular entonces $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R} \times \mathfrak{h}_{2n+1}$, donde $\mathfrak{h}_{2n+1}$ es el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2n+1$, y $(J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es equivalente a $(J_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda)$ para algún $\lambda > 0$.*

Daremos la demostración de este teorema en una serie de resultados. Recordemos de (1.25) que

$$\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{A\} \oplus \ker \theta,$$

donde $A \in (\ker \theta)^\perp$ tal que $\theta(A) = 1$. Esta serie de resultados será dividida en dos partes. La primera parte culminará con la Proposición 2.3.10, donde probaremos que A y JA están en el centro de $\mathfrak{g}$. En la segunda parte, determinaremos todos los corchetes de Lie en $\mathfrak{g}$, lo que nos permitirá establecer un isomorfismo $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R} \times \mathfrak{h}_{2n+1}$.

Como consecuencia inmediata del Lema 1.8.3 tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.3.2. *El morfismo $\mathrm{ad}_A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es simétrico.*

En particular $\mathrm{ad}_A |_{\ker \theta} : \ker \theta \to \ker \theta$ es simétrico, por lo tanto es diagonalizable y existe una descomposición ortogonal

$$\ker \theta = \sum_{\lambda \in S} \mathfrak{g}_\lambda,$$

donde $S \subset \mathbb{R}$ es el espectro de $\mathrm{ad}_A |_{\ker \theta}$ y $\mathfrak{g}_\lambda$ es el autoespacio asociado al autovalor λ.

De acuerdo al Lema 2.1.5 (3), la codimensión de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ es al menos 2. Por lo tanto $\mathfrak{g}_0 \neq \{0\}$, es decir $0 \in S$. Luego obtenemos la descomposición ortogonal

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\lambda \in S^*} \mathfrak{g}_\lambda, \tag{2.3}$$

donde $S^* := S - \{0\}$. Notar que la identidad de Jacobi y el hecho que $\mathfrak{g}'$ es abeliana implican que:

- $\mathfrak{g}_\lambda$ es un ideal para $\lambda \in S^*$,
- $\mathfrak{g}_0$ es una subálgebra.

Ahora consideramos $\mathfrak{g}_0' = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ y $(\mathfrak{g}_0')^\perp$, su complemento ortogonal en $\mathfrak{g}_0$, es decir,

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0' \oplus (\mathfrak{g}_0')^\perp.$$

Notar también que $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_0' \oplus \sum_{\lambda \in S^*} \mathfrak{g}_\lambda$.

Para $X, Y \in \ker\theta$, calculamos

$$\begin{aligned} d\omega(A,X,Y) &= -\omega([A,X],Y) - \omega([X,Y],A) - \omega([Y,A],X) \\ &= -\langle J[A,X],Y\rangle - \langle J[X,Y],A\rangle - \langle J[Y,A],X\rangle \\ &= \langle [A,X],JY\rangle + \langle [X,Y],JA\rangle + \langle [Y,A],JX\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta\wedge\omega(A,X,Y) &= \theta(A)\omega(X,Y) + \theta(X)\omega(Y,A) + \theta(Y)\omega(A,X) \\ &= \langle JX,Y\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\langle [A,X],JY\rangle + \langle [X,Y],JA\rangle + \langle [Y,A],JX\rangle = \langle JX,Y\rangle,$$

para todo $X, Y \in \ker\theta$. De esto obtenemos las siguientes ecuaciones que serán importantes después:

$$(\lambda+\mu+1)\langle JX,Y\rangle = 0, \text{ for } X\in\mathfrak{g}_\lambda, Y\in\mathfrak{g}_\mu \text{ and } \lambda,\mu\in S^*. \tag{2.4}$$

$$\langle [X,Y],JA\rangle = (\mu+1)\langle JX,Y\rangle, \text{ for } X\in\mathfrak{g}_0, Y\in\mathfrak{g}_\mu,\ \mu\in S. \tag{2.5}$$

Lema 2.3.3. $J(\mathfrak{g}_0') \subset \mathbb{R}A \oplus (\mathfrak{g}_0')^\perp$.

Demostración. Si $X, Y \in \mathfrak{g}_0$ podemos escribir $J[X,Y] = aA + Z_0 + \sum_{\lambda\in S^*} Z_\lambda$ con $a\in\mathbb{R}$, $Z_0\in\mathfrak{g}_0$ y $Z_\lambda\in\mathfrak{g}_\lambda$. Luego $[A, J[X,Y]] = [A, \sum_{\lambda\in S^*} Z_\lambda] = \sum_{\lambda\in S^*}\lambda Z_\lambda$.

Por otro lado, de (2.3), $JA = X_0 + \sum_{\lambda\in S^*} X_\lambda$, con $X_0\in\mathfrak{g}_0$ y $X_\lambda\in\mathfrak{g}_\lambda$ para $\lambda\in S^*$. Entonces

$$[A, J[X,Y]] = -[JA,[X,Y]] = -[X_0 + \sum_{\lambda\in S^*} X_\lambda, [X,Y]] = -[X_0,[X,Y]] \in \mathfrak{g}_0$$

pues $\mathfrak{g}_0$ es subálgebra y $\mathfrak{g}'$ es abeliana. Por lo tanto $Z_\lambda = 0$ para todo $\lambda\in S^*$.

Además, se sigue de (2.5) y del hecho que $\mathfrak{g}'$ es abeliana que $J(\mathfrak{g}_0')$ y $\mathfrak{g}_0'$ son ortogonales. Luego tenemos que $Z_0\in(\mathfrak{g}_0')^\perp$, y esto implica el resultado. $\square$

Ahora, definimos $\Lambda\subset S^*$ de la siguiente manera: $\lambda\in\Lambda$ si y sólo si no existe ningún $\lambda'\in S^*$ tal que $\lambda+\lambda'+1=0$, o equivalentemente, $\Lambda = \{\lambda\in S^* : -(\lambda+1)\notin S^*\}$. Notar que $\lambda\notin\Lambda$ si y sólo si $-(\lambda+1)\notin\Lambda$.

Lema 2.3.4. *Sea $\lambda\in S^*$. Luego,*

(i) *si $\lambda\in\Lambda$ entonces $J(\mathfrak{g}_\lambda)\subset\mathbb{R}A\oplus(\mathfrak{g}_0')^\perp$.*

(ii) *si $\lambda\in\Lambda^c$ entonces $J(\mathfrak{g}_\lambda)\subset\mathbb{R}A\oplus(\mathfrak{g}_0')^\perp\oplus\mathfrak{g}_{\lambda'}$, donde $\lambda+\lambda'+1=0$.*

Demostración. (i) Si $\lambda\in\Lambda$, de (2.4) tenemos que $J(\mathfrak{g}_\lambda)$ es ortogonal a $\mathfrak{g}_\mu$ para todo $\mu\in S^*$, y por lo tanto $J(\mathfrak{g}_\lambda)\subset\mathbb{R}A\oplus\mathfrak{g}_0$. Además, para $X_\lambda\in\mathfrak{g}_\lambda, Y\in\mathfrak{g}_0'$, se sigue del Lema 2.3.3 que $\langle JX_\lambda, Y\rangle = -\langle X_\lambda, JY\rangle = 0$. Esto prueba (i), y de una manera similar se prueba (ii). $\square$

Sea $\mathfrak{h}$ el complemento ortogonal de $\mathfrak{g}' + J\mathfrak{g}'$ en $\mathfrak{g}$. Notar que $\mathfrak{h}$ es J-invariante. Luego, podemos escribir

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}' + J\mathfrak{g}') \oplus \mathfrak{h}. \tag{2.6}$$

Mostraremos que este complemento ortogonal $\mathfrak{h}$ es un subespacio no nulo. Comenzamos con un resultado auxiliar.

Lema 2.3.5. $\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}' = \sum_{\Lambda^c} \mathfrak{g}_\lambda \cap J\left(\sum_{\Lambda^c} \mathfrak{g}_\lambda\right)$.

Demostración. Dado $\in \mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}'$ entonces $Y = JZ$ para algún $Z \in \mathfrak{g}'$. Como $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_0' \oplus \sum_{\lambda \in S^*} \mathfrak{g}_\lambda$, podemos escribir

$$Y = Y_0 + \sum_{\lambda \in S^*} Y_\lambda, \;\; Z = Z_0 + \sum_{\lambda \in S^*} Z_\lambda$$

con $Y_0, Z_0 \in \mathfrak{g}_0'$ y $Y_\lambda, Z_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$. Luego $JZ = JZ_0 + \sum_{\lambda \in S^*} JZ_\lambda$. Del Lema 2.3.3 y del Lema 2.3.4 obtenemos que $JZ \in \mathbb{R}A \oplus (\mathfrak{g}_0')^\perp \oplus \sum_{\lambda \in \Lambda^c} \mathfrak{g}_\lambda$. Como $JZ = Y \in \mathfrak{g}_0' \oplus \sum_{\lambda \in S^*} \mathfrak{g}_\lambda$, tenemos que $Y_0 = 0$ y $Y_\lambda = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$, por lo tanto $Y \in \sum_{\lambda \in \Lambda^c} \mathfrak{g}_\lambda$. De la misma manera, $Z \in \sum_{\lambda \in \Lambda^c} \mathfrak{g}_\lambda$, y entonces $\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}' \subset \sum_{\Lambda^c} \mathfrak{g}_\lambda \cap J\left(\sum_{\Lambda^c} \mathfrak{g}_\lambda\right)$. La otra inclusión es clara. □

Lema 2.3.6. *Con la notación de arriba,* $\mathfrak{h} \neq 0$.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{h} = \{0\}$, de (2.6) obtenemos que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + J\mathfrak{g}'$.
Afirmación. $\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}' = \{0\}$.

En efecto, de acuerdo y al Lema 2.1.5 (2) tenemos que

$$\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

Dado $Y \in \mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}'$, se sigue del Lema 2.3.5 que Y se puede escribir como $Y = \sum_{\lambda \in \Lambda^c} Y_\lambda$. Entonces $0 = [A, Y] = \sum_{\lambda \in \Lambda^c} \lambda Y_\lambda$, y por lo tanto $Y = 0$. Esto prueba la afirmación.

Como consecuencia, tenemos la descomposición en suma directa

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus J\mathfrak{g}'.$$

De acuerdo a [4, Corollary 3.3], el corchete de Lie en $\mathfrak{g}$ induce una estructura de álgebra asociativa y conmutativa en $\mathfrak{g}'$ dada por $X * Y = [JX, Y]$. Además si $\mathcal{A}$ denota el álgebra asociativa y conmutativa $(\mathfrak{g}', *)$, entonces $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ y $\mathfrak{g}$ es holomórficamente isomorfa a $\mathfrak{aff}(\mathcal{A})$ con su estructura compleja estandard (ver Sección 2.1). Como $\mathfrak{g}$ es unimodular, sigue del Lema 2.1.6 que $\mathcal{A}$ es nilpotente. Esto es una contradicción con el hecho que $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, por lo tanto $\mathfrak{h} \neq \{0\}$. □

Observación 2.3.7. Se sigue de (2.6) que si $H \in \mathfrak{h}$, entonces H es ortogonal a A y JA, pues $JA \in \mathfrak{g}'$ por la Proposición 1.8.4 y entonces $A \in J\mathfrak{g}'$.

Lema 2.3.8. *Si $H \in \mathfrak{h}$, entonces*

(i) $\langle [H, JH], JA\rangle = |H|^2$,

(ii) $|[H, JH]|^2 = \frac{|H|^4}{|A|^2}$.

Demostración. Para $H \in \mathfrak{h}$, calculamos primero

$$\begin{aligned} d\omega(A, H, JH) &= \theta \wedge \omega(A, H, JH) \\ \langle [A, H], J^2H\rangle + \langle [H, JH], JA\rangle + \langle [JH, A], JH\rangle &= |H|^2 - \frac{\langle A, H\rangle^2}{|A|^2} - \frac{\langle JA, H\rangle^2}{|A|^2} \\ \langle [H, JH], JA\rangle &= |H|^2, \end{aligned}$$

pues $\mathfrak{h}$ es J-invariante y ortogonal a $\mathfrak{g}'$. Esto prueba (i).

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} d\omega(J[H, JH], H, JH) &= \theta \wedge \omega(J[H, JH], H, JH) \\ -|[H, JH]|^2 &= \frac{\langle A, J[H, JH]\rangle}{|A|^2}|H|^2 \\ |[H, JH]|^2 &= \frac{|H|^4}{|A|^2}, \end{aligned}$$

donde usamos (i) para la última igualdad. Esto prueba (ii). □

Lema 2.3.9. *Si $H \in \mathfrak{h}$, entonces*

(i) $[H, JH] = \frac{|H|^2}{|A|^2} JA$,

(ii) $[H, Y] = 0$ *para todo* $Y \in \mathfrak{h}$ *tal que* $\langle Y, JH\rangle = 0$,

(iii) $[H, \mathfrak{g}'_0] = 0$,

(iv) $[H, \mathfrak{g}_\lambda] = 0$ *para todo* $\lambda \in S^* - \{-\frac{1}{2}\}$.

Demostración. (i) Usando el Lema 2.3.8 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos

$$|H|^4 = \langle [H, JH], JA\rangle^2 \leq |[H, JH]|^2|A|^2 = \frac{|H|^4}{|A|^2}|A|^2 = |H|^4,$$

entonces tenemos que vale la igualdad en todos lados, y por lo tanto para todo $H \in \mathfrak{h}$ existe $c(H) \neq 0$ tal que

$$[H, JH] = c(H)JA.$$

Usando de nuevo el Lema 2.3.8 (ii) tenemos que $|H|^2 = c(H)|A|^2$, y por lo tanto $[H, JH] = \frac{|H|^2}{|A|^2} JA$ para todo $H \in \mathfrak{h}$.

(ii) Calculamos $[H,Y]$ para $Y \in \mathfrak{h}$ tal que $\langle Y, JH\rangle = 0$.

$$\begin{aligned} d\omega(J[H,Y],H,Y) &= \langle [J[H,Y],H], JY\rangle - |[H,Y]|^2 + \langle [Y, J[H,Y]], JH\rangle \\ &= -|[H,Y]|^2, \end{aligned}$$

pues $\mathfrak{h}$ es J-invariante y ortogonal a $\mathfrak{g}'$. Por otro lado

$$\theta\wedge\omega(J[H,Y],H,Y) = \frac{\langle A, J[H,Y]\rangle}{|A|^2}\langle JH, Y\rangle + \frac{\langle A,H\rangle}{|A|^2}\langle JY, J[H,Y]\rangle - \frac{\langle A,Y\rangle}{|A|^2}\langle [H,Y],H\rangle = 0,$$

pues A es ortogonal a $\mathfrak{h}$ y $\langle JH, Y\rangle = 0$. Por lo tanto, comparando $d\omega$ con $\theta\wedge\omega$ obtenemos que $[H,Y] = 0$.

Finalmente, tanto (iii) como (iv) se deducirán del siguiente cálculo. Dados $H \in \mathfrak{h}$, $X, Y \in \mathfrak{g}'$ calculamos

$$\begin{aligned} d\omega(H,X,JY) &= -\omega([H,X],JY) - \omega([X,JY],H) - \omega([JY,H],X) \\ &= -\langle J[H,X],JY\rangle - \langle J[X,JY],H\rangle - \langle J[JY,H],X\rangle \\ &= -\langle [H,X],Y\rangle + \langle [X,JY],JH\rangle + \langle [JY,H],JX\rangle \\ &= -\langle [H,X],Y\rangle + \langle [JY,H],JX\rangle, \end{aligned}$$

pues $\mathfrak{h}$ es J-invariante y ortogonal a $\mathfrak{g}'$. Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \theta\wedge\omega(H,X,JY) &= \theta(H)\omega(X,JY) + \theta(X)\omega(JY,H) + \theta(JY)\omega(H,X) \\ &= \frac{\langle A,H\rangle}{|A|^2}\langle X,Y\rangle - \frac{\langle A,X\rangle}{|A|^2}\langle Y,H\rangle + \frac{\langle A,JY\rangle}{|A|^2}\langle JH,X\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

pues $\langle H,A\rangle = 0$ y $\langle \mathfrak{h},\mathfrak{g}'\rangle = 0$. Por lo tanto se tiene que $\langle [H,X],Y\rangle = \langle [JY,H],JX\rangle$. En particular, si tomamos $Y = [H,X]$ obtenemos

$$|[H,X]|^2 = \langle [J[H,X],H],JX\rangle. \tag{2.7}$$

(iii) Si $X \in \mathfrak{g}'_0$ se sigue del Lema 2.3.3 que $JX \in \mathbb{R}A \oplus (\mathfrak{g}'_0)^\perp$. Como $[J[H,X],H] \in \mathfrak{g}'$, se obtiene de (2.7) que $|[H,X]|^2 = 0$.

(iv) Si $X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda, \lambda \in \Lambda$, se sigue del Lema 2.3.4 (i) que $JX \in \mathbb{R}A \oplus (\mathfrak{g}'_0)^\perp$. De la misma manera que arriba obtenemos que $|[H,X]|^2 = 0$.

Sin embargo, si $X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda, \lambda \in \Lambda^c$ y $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ del Lema 2.3.4 (ii) obtenemos $JX \in \mathbb{R}A \oplus (\mathfrak{g}'_0)^\perp \oplus \mathfrak{g}_{\lambda'}$, donde $\lambda' = -\lambda - 1$ y $\lambda' \neq \lambda$ pues $\lambda \neq -\frac{1}{2}$. Por otro lado $[J[H,X],H] = -[[H,X],JH] \in \mathfrak{g}_\lambda$ pues $\mathfrak{g}_\lambda$ es un ideal. Por lo tanto de (2.4) y de (2.7) tenemos que $|[H,X]|^2 = 0$.

$\square$

Proposición 2.3.10. *Siguiendo la notación de arriba, tenemos:*

(i) $S = \{0\}$, *es decir,* A, $JA \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$,

(ii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus J\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{h}$, *suma ortogonal.*

Demostración. (i) Sea $\lambda \in S^* - \{-\frac{1}{2}\}$ y tomamos $H \in \mathfrak{h}, H \neq 0$ y $X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$. El Lema 2.3.9 (i) implica que

$$[[H, JH], JX_\lambda] = \frac{|H|^2}{|A|^2}[JA, JX_\lambda] = \frac{|H|^2}{|A|^2}\lambda X_\lambda,$$

mientras que el Lema 2.3.9 (iv) y el hecho de que $\mathfrak{h}$ es J-invariante implican que

$$[[H, JH], JX_\lambda] = -[[JH, JX_\lambda], H] - [[JX_\lambda, H], JH] = 0.$$

Entonces $X_\lambda = 0$ y por lo tanto $S^* - \{-\frac{1}{2}\} = \emptyset$. Si $-\frac{1}{2} \in S^*$ luego ese es el único autovalor en S^*, por lo tanto $\mathfrak{g}$ no es unimodular, y esto es una contradicción. Como consecuencia, $S^* = \emptyset$, es decir, $S = \{0\}$, o equivalentemente, $A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Se sigue del Lema 2.1.5 que $JA \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ también.

(ii) Se deduce del Lema 2.3.5 que $\mathfrak{g}' \cap J\mathfrak{g}' = \{0\}$. Por lo tanto

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus J\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{h}$$

donde $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'_0$. Más aún, esta descomposición es ortogonal, por el Lema 2.3.3. □

Observación 2.3.11. Si $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ es Vaisman con J abeliana, es más fácil demostrar que $A, JA \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. En efecto, del Lema 2.3.2 y de la Proposición 1.8.8 tenemos que ad_A es simétrico y antisimétrico, entonces $A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Luego J abeliana implica que $JA \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ también.

Proposición 2.3.12. *El conmutador $\mathfrak{g}'$ tiene dimensión 1 y está generado por JA.*

Demostración. Supongamos que $\dim \mathfrak{g}' \geq 2$, y sea $X \in \mathfrak{g}'$, $|X| \neq 0$, tal que $\langle X, JA\rangle = 0$.

Afirmación. $[X, JY] = \frac{\langle X,Y\rangle}{|A|^2}JA$ para todo $Y \in \mathfrak{g}'$ tal que $\langle Y, JA\rangle = 0$.

En efecto, calculemos

$$d\omega(J[X, JY], X, JY) = -\langle[J[X, JY], X], Y\rangle - \langle[X, JY], [X, JY]\rangle + \langle[JY, J[X, JY]], JX\rangle.$$

Como $\mathfrak{g}'$ y $J\mathfrak{g}'$ son ortogonales, tenemos que $\langle[JY, J[X, JY]], JX\rangle = 0$. De la identidad de Jacobi y del hecho de que $\mathfrak{g}'$ es abeliana tenemos que

$$[J[X, JY], X] = -[[X, JY], JX] = [[JY, JX], X] + [[JX, X], JY] = [[JX, X], JY].$$

por lo tanto $d\omega(J[X, JY], X, JY) = -|[X, JY]|^2 + \langle \mathrm{ad}_{J[JX,X]} Y, Y\rangle$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\theta \wedge \omega(J[X, JY], X, JY) &= \frac{\langle A, J[X, JY]\rangle}{|A|^2}\langle X, Y\rangle - \frac{\langle A, X\rangle}{|A|^2}\langle Y, J[X, JY]\rangle \\ &\quad - \frac{\langle A, JY\rangle}{|A|^2}\langle[X, JY], X\rangle \\ &= \frac{\langle A, J[X, JY]\rangle}{|A|^2}\langle X, Y\rangle \\ &= -\frac{\langle X, Y\rangle^2}{|A|^2},\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\langle A, X\rangle = \langle Y, JA\rangle = 0$ en la segunda igualdad y (2.5) en la última igualdad. Por lo tanto

$$\langle \mathrm{ad}_{J[JX,X]} Y, Y\rangle = |[X, JY]|^2 - \frac{\langle X, Y\rangle^2}{|A|^2}. \tag{2.8}$$

Usando (2.5), la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (2.8) obtenemos

$$\langle X, Y\rangle^2 = \langle [X, JY], JA\rangle^2 \leq |[X, JY]|^2 |A|^2 = \langle \mathrm{ad}_{J[JX,X]} Y, Y\rangle |A|^2 + \langle X, Y\rangle^2, \tag{2.9}$$

y esto implica

$$\langle \mathrm{ad}_{J[JX,X]} Y, Y\rangle \geq 0.$$

Recordemos que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{J[JX,X]}) = 0$, pues $\mathfrak{g}$ es unimodular. Mostraremos ahora que la desigualdad de arriba es de hecho una igualdad. Se sabe que $\mathrm{ad}_{J[JX,X]} A = \mathrm{ad}_{J[JX,X]} JA = 0$ (pues $A, JA \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$), $\mathrm{ad}_{J[JX,X]} JZ = 0$ para todo $Z \in \mathfrak{g}'$ (pues $\mathfrak{g}'$ is abeliana) y $\mathrm{ad}_{J[JX,X]} H = 0$ para todo $H \in \mathfrak{h}$ (debido al Lema 2.3.9). por lo tanto, $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{J[JX,X]}) = \sum_j \langle \mathrm{ad}_{J[JX,X]} e_j, e_j\rangle$ para cualquier base ortonormal $\{e_j\}$ de $\mathfrak{g}'$. Eligiendo $e_1 = \frac{JA}{|A|}$ y $e_2 = \frac{X}{|X|}$, tenemos

$$0 = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{J[JX,X]}) = \frac{1}{|X|^2} \langle \mathrm{ad}_{J[JX,X]} X, X\rangle + \sum_{j\geq 3} \langle \mathrm{ad}_{J[JX,X]} e_j, e_j\rangle. \tag{2.10}$$

Entonces $\langle \mathrm{ad}_{J[JX,X]} Y, Y\rangle = 0$ para cualquier $Y \in \mathfrak{g}'$ con $\langle Y, JA\rangle = 0$, pues tal Y es una combinación lineal de $\{e_j \mid j \geq 2\}$.

Como consecuencia, obtenemos de (2.9) que $[X, JY] = c(X, Y)JA$ para algún $c(X, Y) \in \mathbb{R}$. Se sigue de (2.8) que $c(X, Y) = \frac{\langle X,Y\rangle}{|A|^2}$. Por lo tanto $[X, JY] = \frac{\langle X,Y\rangle}{|A|^2} JA$ para todo $Y \in \mathfrak{g}'$ con $\langle Y, JA\rangle = 0$.

Esto prueba la afirmación.

Para finalizar la demostración de la Proposición 2.3.12, recordemos la siguiente descomposición ortogonal de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{A\} \oplus \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}' \oplus J\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{h},$$

con $A \in J\mathfrak{g}'$, $JA \in \mathfrak{g}'$, donde $\mathfrak{g}'$ y $J\mathfrak{g}'$ subálgebras abelianas. Como $\mathfrak{g}_0' = \mathfrak{g}'$, sigue del Lema 2.3.9 (iii) que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}'] = [\mathfrak{h}, J\mathfrak{g}'] = 0$ y, además, los únicos corchetes no nulos en $\mathfrak{h}$ son $[H, JH] = \frac{|H|^2}{|A|^2} JA$. De esto y de la afirmación recién probada, es claro que los único corchete no nulos en $\mathfrak{g}$ ahora, son múltiplos de JA, por lo tanto llegamos a una contradicción con la suposición que $\dim \mathfrak{g}' \geq 2$.

Por lo tanto, $\dim \mathfrak{g}' = 1$, y $\mathfrak{g}'$ es generado por JA.

□

Demostración del Teorema 2.3.1. Como consecuencia del Lema 2.3.9, de la Proposición 2.3.10 y de la Proposición 2.3.12, los únicos corchetes no nulos en $\mathfrak{g}$ son $[X, JX] = \frac{|X|^2}{|A|^2} JA$ para $X \in \mathfrak{g}$ con $\langle X, A\rangle = 0$ y $\langle X, JA\rangle = 0$. Considerando $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{h}$, con $JX_i = Y_i$, tenemos que los únicos corchetes no nulos de $\mathfrak{g}$ son $[X_i, Y_i] = \frac{JA}{|A|^2}$. Tomando $Z_1 = \frac{JA}{|A|^2}$, $Z_2 = \frac{A}{|A|^2}$, es claro que $\mathfrak{g}$ es isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_{2n+1}$ y $(J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es equivalente a $(J_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda)$ para $\lambda = |A|$. □

Observación 2.3.13. Daremos la idea de una demostración alternativa del Teorema 2.3.1. De la Proposición 2.3.10 tenemos que A, $JA \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ luego $\mathfrak{g} = \operatorname{span}\{A, JA\} \oplus W$ y $\mathfrak{g}' \subset \operatorname{span}\{JA\} \oplus W$. Si h es la proyección del corchete de Lie de $\mathfrak{g}$ a W W, entonces se puede ver que $(W, h, \langle \cdot , \cdot \rangle|_{W\times W}, J|_W)$ es un álgebra de Lie unimodular Kähler con una estructura compleja abeliana. De acuerdo a [3, Theorem 4.1], se sigue que (W, h) es abeliana. Luego $\mathfrak{g}' = \operatorname{span}\{JA\}$, y además, los únicos corchetes de Lie no nulos son $[X, JX] = \frac{|X|^2}{|A|^2} JA$ para $X \in W$, obteniendo de esta manera el mismo resultado que arriba.

Observación 2.3.14. En $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_{2n+1}$ hay $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ clases de equivalencia de estructuras complejas, todas ellas abelianas (ver [4, Proposition 2.2]). Sigue de la demostración del Teorema 2.3.1 que si $(J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ es una estructura LCK en esta álgebra de Lie, entonces J es equivalente a la estructura compleja J_0 del Teorema 2.3.1, por lo tanto J_0 es representante de la única clase de equivalencia de estructuras complejas que admiten métricas LCK (comparar con [78]).

En términos de solvariedades, podemos reescribir el Teorema 2.3.1 como sigue.

Corolario 2.3.15. *Sea $\Gamma\backslash G$ una solvariedad compacta con una estructura LCK inducida por una estructura LCK invariante a izquierda en G donde la estructura compleja es abeliana, y G es simplemente conexo. Entonces G es isomorfo a $\mathbb{R} \times H_{2n+1}$, y $\mathbb{R} \times H_{2n+1}$ tiene una estructura LCK invariante a izquierda inducida por $(J_0, \langle \cdot , \cdot \rangle_\lambda)$ para $\lambda > 0$. En particular, $\Gamma\backslash G$ es una nilvariedad y la estructura LCK es Vaisman.*

Notemos que el grupo fundamental de la solvariedad $\Gamma\backslash G$ es $\pi_1(\Gamma\backslash G) = \Gamma$.

La estructura LCK en el álgebra de Lie $\mathbb{R} \times \mathfrak{h}_{2n+1}$ induce una estructura LCK invariante a izquierda en $\mathbb{R} \times H_{2n+1}$. Sea $(t, x_1, \dots , x_n, y_1, \dots , y_n, z)$ un sistema de coordenadas globales en $\mathbb{R} \times H_{2n+1}$, el cual es difeomorfo a $\mathbb{R}^{2n+2}$. La métrica invariante a izquierda g_λ asociada a $\langle \cdot , \cdot \rangle_\lambda$ está dada por

$$g_\lambda = \sum_i \left(dx_i^2 + dy_i^2\right) + \lambda^{-2}(dt^2 + (dz - \sum_i x_i dy_i)^2),$$

donde $\lambda = |A|$, mientras que la forma fundamental ω_λ está dada por

$$\omega_\lambda = \sum_i dx_i \wedge dy_i + \lambda^{-2} dt \wedge (dz - \sum_i x_i dy_i).$$

Esta estructura LCK invariante a izquierda en $\mathbb{R} \times H_{2n+1}$ desciende a una estructura LCK en la nilvariedad $\Gamma\backslash(\mathbb{R} \times H_{2n+1}) \cong S^1 \times (\tilde{\Gamma}\backslash H_{2n+1})$, donde $\Gamma = \mathbb{Z} \times \tilde{\Gamma}$ es un retículo en $\mathbb{R} \times H_{2n+1}$, con $\tilde{\Gamma}$ un retículo en H_{2n+1}.

Observación 2.3.16. Los retículos en H_{2n+1} han sido clasificados en [36]. Fijamos para cada $k \in \mathbb{N}$ el retículo Γ_k en H_{2n+1} dado por

$$\Gamma_k = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_n & c/k \\ & 1 & & & b_1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & b_n \\ & & & & 1 \end{pmatrix} : a_j, b_j, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Claramente, $\Gamma_r \subset \Gamma_s$ si y sólo si r divide a s. Luego, $\Gamma_1\backslash H_{2n+1}$ cubre a $\Gamma_k\backslash H_{2n+1}$ para todo k. Además, se puede demostrar que $\Gamma_k/[\Gamma_k, \Gamma_k]$ es isomorfo a $\mathbb{Z}^{2n} \oplus \mathbb{Z}_k$. Por lo tanto, las nilvariedades

$$M_k = (\mathbb{Z} \times \Gamma_k) \backslash (\mathbb{R} \times H_{2n+1}) = S^1 \times (\Gamma_k\backslash H_{2n+1})$$

son no homeomorfas para diferentes valores de k.

CAPÍTULO 3

Estructuras Vaisman en cocientes compactos de grupos de Lie

En este capítulo estudiaremos las estructuras Vaisman en solvariedades $\Gamma\backslash G$, donde estas estructuras provienen de estructuras invariantes a izquierda en G, o equivalentemente de estructuras Vaisman en el álgebra de Lie de G. Caracterizaremos las álgebras de Lie unimodulares con estructuras Vaisman en términos de álgebras de Lie Kähler planas, y usando esta caracterización mostraremos una familia de álgebras de Lie y grupos de Lie con dicha estructura y demostraremos la existencia de retículos en algunas de estas familias.

Dentro de la clase de variedades LCK, la subclase de las variedades Vaisman es muy importante por sus propiedades topológicas y su relación con la geometría sasakiana.

Recordemos que (M, J, g) es una variedad Vaisman si es LCK y la correspondiente forma de Lee θ es paralela con respecto a la conexión de Levi-Civita. Como vimos en el Ejemplo 1.5.10 las variedades de Hopf son ejemplos de variedades de Vaisman.

Belgun, en [23], dio una lista completa de las superficies complejas compactas que admiten una métrica de Vaisman.

Una variedad de Vaisman satisface propiedades que un variedad LCK en general no cumple. Por ejemplo una variedad compacta (M, J, g) con una métrica de Vaisman que no sea Kähler tiene el primer número de Betti $\beta_1(M)$ impar.

También se sabe que toda subvariedad compleja compacta de una variedad Vaisman compacta es de nuevo Vaisman ([69]).

Vaisman probó en [80] que si $M = N \times \mathbb{R}$ es un producto riemanniano, toda estructura sasakiana en N da origen a una estructura Vaisman en M, donde el campo de Lee (dual de la forma de Lee) está dado por el campo $\frac{d}{dt}$. Recíprocamente toda estructura Vaisman en M con esta propiedad da origen a una estructura sasakiana en N.

3.1 Caracterización de las álgebras de Lie con métricas de Vaisman

Sea G un grupo de Lie equipado con una estructura hermitiana invariante a izquierda (J, g). Esta estructura se dice Vaisman si la 2-forma fundamental ω satisface $d\omega = \theta \wedge \omega$ para alguna 1-forma cerrada θ, que es además paralela con respecto a la conexión de Levi-Civita. Como ya vimos ω

y θ resultan invariantes a izquierda, por lo que se tiene que $\omega \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$ y $\theta \in \mathfrak{g}^*$; de esta manera obtenemos una estructura Vaisman en $\mathfrak{g} = Lie(G)$. Según la Proposición 1.8.8 esto es equivalente a que ad_A sea un operador antisimétrico de $\mathfrak{g}$ donde $A \in (\ker\theta)^\perp$ es tal que $\theta(A) = 1$. Veremos algunas propiedades que cumplen dichas álgebras.

Proposición 3.1.1. *Si* $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ *es Vaisman entonces* $[A, JA] = 0$.

Demostración. De los Lemas 1.8.8 y 1.8.3 resulta:

$$\begin{aligned}\langle [A, JA], JY\rangle &= \langle J[JA, A], Y\rangle \\ &= \langle A, J[JA, Y]\rangle \\ &= \langle A, -[A, Y] + [JA, JY] - J[A, JY]\rangle \\ &= \langle A, -J[A, JY]\rangle \\ &= \langle JA, [A, JY]\rangle \\ &= -\langle [A, JA], JY\rangle,\end{aligned}$$

para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Como $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ es no degenerada tenemos que $[A, JA] = 0$, como queríamos ver. □

Proposición 3.1.2. *Si* $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ *es Vaisman entonces:*

(i) $J \circ \mathrm{ad}_A = \mathrm{ad}_A \circ J$,

(ii) ad_{JA} *es antisimétrico, por lo que también* JA *es de Killing.*

Demostración. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, se sigue del Lema 1.8.3:

$$\langle J[JA, X], JY\rangle = \langle J[JA, Y], JX\rangle,$$

usando la integrabilidad de J en ambos miembros resulta

$$\langle [A, X] - [JA, JX] + J[A, JX], Y\rangle = \langle [A, Y] - [JA, JY] + J[A, JY], X\rangle. \tag{3.1}$$

Por otro lado $\langle [JA, JX], Y\rangle = \langle [JA, JY], X\rangle$ por Lema 1.8.3 de nuevo. Luego aplicando esta igualdad y el Lema 1.8.8, la ecuación (3.1) se reduce a:

$$\langle J[A, X] - [A, JX], JY\rangle = 0$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto

$$J[A, X] = [A, JX].$$

Así $J \circ \mathrm{ad}_A = \mathrm{ad}_A \circ J$ y esto prueba (i). Ahora calculamos para $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}\langle [JA, X], Y\rangle &= \langle J[JA, X], JY\rangle \\ &= \langle X, J[JA, JY]\rangle \\ &= \langle X, -[A, JY] - [JA, Y] + J[A, Y]\rangle, \quad \text{por integrabilidad de } J \\ &= -\langle X, [JA, Y]\rangle, \quad \text{por (i)}.\end{aligned}$$

Por lo que ad_{JA} resulta antisimétrico como queríamos ver. □

Sin pérdida de generalidad, reescalando la métrica, podemos asumir que $|A| = 1$. Recordemos que si $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es LCK, de (1.25) y de (1.26) tenemos la siguiente descomposición de $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \operatorname{span}\{A, JA\} \oplus^{\perp} W,$$

donde $\ker\theta = \operatorname{span}\{JA\} \oplus^{\perp} W$. Sean $\eta = -J\theta|_{\ker\theta} : \ker\theta \to \mathbb{R}$, donde $J\theta(X) = \theta(JX)$, y $\xi = JA$; notar que $W = \ker\eta$ y $\eta(\xi) = 1$. Definimos $\phi : \ker\theta \to \ker\theta$ por $\phi|_W = J|_W$ y $\phi(\xi) = 0$. El siguiente resultado muestra la relación entre las estructuras Vaisman y las estructuras sasakianas en un álgebra de Lie.

Proposición 3.1.3. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con una estructura Vaisman $(J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, entonces $(\ker\theta, \phi, \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\ker\theta}, \eta, \xi)$ satisface las siguientes ecuaciones:*

- $\phi^2 = -\operatorname{Id} + \eta \otimes \xi$,
- $\langle\phi X, \phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y)$, *para todo* $X, Y \in \ker\theta$,
- $N_\phi = -d\eta \otimes \xi$,
- $d\eta(X, Y) = -\langle\phi X, Y\rangle$, *para todo* $X, Y \in \ker\theta$,

donde N_ϕ es el tensor de Nijenhuis asociado a ϕ definido por

$$N_\phi(X, Y) = [\phi X, \phi Y] + \phi^2[X, Y] - \phi([\phi X, Y] + [X, \phi Y]).$$

Demostración. Este resultado fue probado por Vaisman en [80] para variedades, pero por completitud incluimos una demostración a nivel de álgebras de Lie en el Apéndice, ver la Proposición 5.3.6. □

Nota. Sea $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie, se dice que $(\langle\cdot,\cdot\rangle, \phi, \eta, \xi)$ es una estructura sasakiana en $\mathfrak{h}$, si $\phi \in \operatorname{End}(\mathfrak{h})$, $\eta \in \mathfrak{h}^*$ y $\xi \in \mathfrak{h}$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

- $\eta(\xi) = 1$,
- $\phi^2 = -\operatorname{Id} + \eta \otimes \xi$,
- $\langle\phi X, \phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$,
- $N_\phi = -d\eta \otimes \xi$,
- $d\eta(X, Y) = 2\langle X, \phi Y\rangle$, para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$.

De estas condiciones se puede deducir que $|\xi| = 1$, $\phi(\xi) = 0$, $\eta \circ \phi = 0$, y ϕ es antisimétrico.

Observación 3.1.4. Sea $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie con una estructura sasakiana $(\langle\cdot,\cdot\rangle, \phi, \eta, \xi)$, en este caso ξ se llama el vector de *Reeb*, y además, es fácil verificar que el centro de $\mathfrak{h}$ tiene dimensión a lo sumo 1. Más aún, si $\dim\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = 1$ entonces el centro está generado por el vector de Reeb (ver [5]).

La estructura $(\phi, \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\ker\theta}, \eta, \xi)$ en $\ker\theta$ con las ecuaciones de la Proposición 3.1.3 no satisface exactamente la definición de una estructura sasakiana, sin embargo, es fácil verificar que la siguiente modificación

$$\langle\cdot,\cdot\rangle' = \frac{1}{4}\langle\cdot,\cdot\rangle, \quad \eta' = \frac{1}{2}\eta, \quad \xi' = 2\xi,$$

da una estructura $(\phi, \eta', \xi', \langle\cdot,\cdot\rangle')$, que sí es sasakiana. En este trabajo, por simplicidad, seguiremos llamando a $(\phi, \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\ker\theta}, \eta, \xi)$ una estructura sasakiana en $\ker\theta$. Más generalmente, cuando nos refiramos a una estructura sasakiana en un álgebra de Lie estaremos asumiendo que se satisfacen las ecuaciones de la Proposición 3.1.3.

Comenzamos ahora con un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ con una estructura sasakiana $(\langle \cdot , \cdot \rangle, \phi, \eta, \xi)$. Basados en las Proposiciones 1.8.8, 3.1.1 y 3.1.2 definimos el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes_E \mathfrak{h}$ donde E es una derivación antisimétrica de $\mathfrak{h}$ tal que $E(\xi) = 0$ y $D := E|_{\ker \eta}$ satisface $D\phi = \phi D$. Consideramos en $\mathfrak{g}$ la estructura casi compleja J dada por $J|_{\ker \eta} := \phi|_{\ker \eta}$ y $JA = \xi$, y el producto interno en $\mathfrak{g}$ dado por la extensión de $\langle \cdot , \cdot \rangle$ tal que A es ortogonal a $\mathfrak{h}$ y $|A| = 1$. Notar que de las ecuaciones 3.1.3 se sigue que $(J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ es una estructura casi hermitiana en $\mathfrak{g}$.

Observación 3.1.5. Se puede ver que si $\mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie con una estructura sasakiana $(\langle \cdot , \cdot \rangle, \phi, \eta, \xi)$, y si definimos $\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes_E \mathfrak{h}$, el álgebra de Lie de arriba con la estructura casi hermitiana $(J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ extendida como antes, entonces $(J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ es Vaisman.

De ahora en más vamos a asumir que $\mathfrak{g}$ es unimodular. Debido a la Proposición 1.8.4 se tiene que $JA \in \mathfrak{g}'$. A continuación probaremos que la condición de Vaisman implica que JA es un elemento central $\mathfrak{g}$, en particular obtenemos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. Primero veamos el siguiente resultado general.

Proposición 3.1.6. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ un producto interno en $\mathfrak{g}$ y X un campo de Killing. Si $X \in \mathfrak{g}'$ entonces $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.*

Demostración. Como $X \in \mathfrak{g}'$ y $\mathfrak{g}'$ es nilpotente, se tiene que el endomorfismo

$$\mathrm{ad}_X |_{\mathfrak{g}'} : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}'$$

es nilpotente. Más aún, ad_X es nilpotente en $\mathfrak{g}$. Por otro lado $\mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es antisimétrico, pues X es un campo de Killing. Por lo tanto, $\mathrm{ad}_X = 0$, es decir, $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. □

Corolario 3.1.7. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie soluble unimodular con una estructura Vaisman $(J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$. Entonces $JA \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Más aún $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset span\{A, JA\}$.*

Demostración. Como $\mathfrak{g}$ es unimodular, por la Proposición 1.8.4, sabemos que $JA \in \mathfrak{g}'$. Además, como $(J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ es Vaisman, por la Proposición 3.1.2, tenemos que $\mathrm{ad}_J A$ es antisimétrico, o equivalentemente, JA es un campo de Killing. Luego por la Proposición 3.1.6 obtenemos que $JA \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Ahora veamos que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \{A, JA\}$. Sea $Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, como $JA \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, basta suponer que $Z = aA + Z'$ con $a \in \mathbb{R}$ y $Z' \in W$. Calculamos $0 = \mathrm{ad}_Z = a\,\mathrm{ad}_A + \mathrm{ad}_{Z'}$, y obtenemos que $\mathrm{ad}_{Z'}$ es antisimétrico por la Proposición 1.8.8. Luego, si $[Z', JZ'] = cJA + U$ para algún $c \in \mathbb{R}, U \in W$, entonces $c = \langle [Z', JZ'], JA\rangle = \langle JZ', [Z', JA]\rangle = 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} c &= \langle [Z', JZ'], JA\rangle = -\langle A, J[Z', JZ']\rangle = -\theta(J[Z', JZ']) \\ &= \eta([Z', JZ']) = -d\eta(Z', JZ') = \langle JZ', JZ'\rangle \\ &= |Z'|^2, \end{aligned}$$

usando la Proposición 3.1.3. Por lo tanto $Z' = 0$, y así $Z = aA$. □

En resumen si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie soluble unimodular con una estructura Vaisman $(J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$, entonces el ideal $\ker\theta$ tiene una estructura sasakiana con centro no trivial generado por JA y se puede escribir como

$$\ker\theta = \mathbb{R}JA \oplus \ker\eta,$$

donde la suma es ortogonal respecto de $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$.

Recordemos el siguiente resultado que muestra la relación entre estructuras sasakianas y estructuras Kähler en álgebras de Lie. Sea $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie con una estructura sasakiana $(\phi, \eta, \xi, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$, y con centro no trivial generado por ξ. Si escribimos

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}\xi \oplus \mathfrak{k},$$

donde $\mathfrak{k} = \ker \eta$, entonces el corchete de Lie de $\mathfrak{h}$ se puede descomponer como

$$[X, Y] = \alpha(X, Y)\xi + [X, Y]_{\mathfrak{k}}, \tag{3.2}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{k}$, donde $[X, Y]_{\mathfrak{k}} \in \mathfrak{k}$, y para alguna $\alpha \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$. Es fácil verificar que $\alpha(X, Y) = -d\eta(X, Y) = \langle \phi X, Y \rangle$, y con la notación anterior se tiene que:

Proposición 3.1.8 ([5])**.** *Sea $(\phi, \eta, \xi, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$ una estructura Sasakiana en un álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ con $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ no trivial generado por ξ. Entonces $(\mathfrak{k}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{k}}, \phi|_{\mathfrak{k}}, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$ es Kähler, donde $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{k}}$ es la componente del corchete de Lie de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{k}$.*

Volviendo a un álgebra de Lie soluble unimodular $\mathfrak{g}$ con estructura Vaisman $(J, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$, y usando la Proposición 3.1.8 $\mathfrak{g}$ se descompone ortogonalmente como

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \oplus \mathbb{R}JA \oplus \mathfrak{k},$$

donde $(\mathfrak{k}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{k}}, J|_{\mathfrak{k}}, \langle \cdot\,,\cdot \rangle|_{\mathfrak{k}})$ es Kähler (notar el cambio de notación $\mathfrak{k} := W$), es decir, si ω es la forma fundamental de $(J, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$ entonces $d^{\mathfrak{k}}\omega|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}} = 0$, donde $d^{\mathfrak{k}}$ es la diferencial asociada al corchete de Lie $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{k}}$ en $\mathfrak{k}$. Además, dados $X, Y \in \mathfrak{k}$ podemos descomponer:

$$[X, Y] = \omega(X, Y)JA + [X, Y]_{\mathfrak{k}}, \tag{3.3}$$

pues $\langle \phi X, Y \rangle = \langle JX, Y \rangle = \omega(X, Y)$.

Observación 3.1.9. De acuerdo a (3.3) tenemos que $\ker \theta$ es la extensión central de $\mathfrak{k}$ por la 2-forma $\mathfrak{k}$-cerrada $\omega|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}}$ (un “cociclo” de $\mathfrak{k}$). A una tal extensión central la denotaremos por $\mathbb{R} \oplus_\omega \mathfrak{k}$.

El siguiente resultado muestra que la unimodularidad de $\mathfrak{g}$ determina la unimodularidad de $\mathfrak{k}$.

Lema 3.1.10. *Con la notación anterior $(\mathfrak{k}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{k}})$ es unimodular.*

Demostración. Sea $\dim \mathfrak{k} = 2n$, como el producto interno de $\mathfrak{k}$ es la restricción del producto interno de $\mathfrak{g}$, entonces dada una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ de $\mathfrak{k}$, tenemos que $\{e_1, \cdots, e_n\} \cup \{A, JA\}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{g}$. Sea $X \in \mathfrak{k}$, calculamos

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\operatorname{ad}^{\mathfrak{g}}_X) &= \sum_{i=1}^{n} \langle [X, e_i], e_i \rangle + \langle [X, A], A \rangle + \langle [X, JA], JA \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle [X, e_i]_{\mathfrak{k}}, e_i \rangle + \langle \omega(X, e_i)JA, e_i \rangle \\
&= \operatorname{tr}(\operatorname{ad}^{\mathfrak{k}}_X).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\mathfrak{k}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{k}})$ es unimodular. ☐

En consecuencia $(\mathfrak{k}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{k}})$ es un álgebra de Lie que admite una estructura Kähler y además es unimodular. Un resultado de Hano [41] establece que si un álgebra de Lie unimodular admite una métrica Kähler, entonces dicha métrica debe ser plana.

Usando este resultado $\mathfrak{g}$ se descompone ortogonalmente como

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \oplus \mathbb{R}JA \oplus \mathfrak{k},$$

donde $(\mathfrak{k}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{k}}, J|_{\mathfrak{k}}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ es un álgebra de Lie Kähler plana, y $JA \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Teniendo en cuenta la estructura algebraica podemos escribir a $\mathfrak{g}$ como

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes_E (\mathbb{R}\xi \oplus_\omega \mathfrak{k}), \tag{3.4}$$

donde $\xi = JA$, ω es la forma fundamental restringida a $\mathfrak{k}$, el corchete para dos elementos de $\mathfrak{k}$ está dado por (3.3), $E = \mathrm{ad}_A$ es una derivación antisimétrica de $\mathbb{R}\xi \oplus_\omega \mathfrak{k}$ con $E(\xi) = 0$. Además $D = E|_{\mathfrak{k}}$ conmuta con $J|_{\mathfrak{k}}$ y por lo tanto $D \in \mathfrak{u}(\mathfrak{k}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$. Más aún, D es una derivación antisimétrica de $(\mathfrak{k}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{k}})$. En efecto, dados $X, Y \in \mathfrak{k}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
D[X,Y]_{\mathfrak{k}} &= E([X,Y] - \omega(X,Y)\xi) \\
&= E[X,Y] \\
&= [EX,Y] + [X,EY] \\
&= [DX,Y] + [X,DY] \\
&= [DX,Y]_{\mathfrak{k}} + \omega(DX,Y)\xi + [X,DY]_{\mathfrak{k}} + \omega(X,DY)\xi \\
&= [DX,Y]_{\mathfrak{k}} + [X,DY]_{\mathfrak{k}},
\end{aligned}$$

pues $\omega(DX,Y) = -\omega(X,DY)$.

De esta manera hemos asociado a un álgebra de Lie Vaisman un álgebra de Lie Kähler plana junto con una derivación antisimétrica que conmuta con su estructura compleja. Esto demuestra una parte del siguiente teorema, que es el resultado principal de este capítulo.

Teorema 3.1.11. *Hay una correspondencia uno a uno entre álgebras de Lie soluble unimodulares con estructuras Vaisman y pares $(\mathfrak{k}, D)$ donde $\mathfrak{k}$ es un álgebra de Lie Kähler plana y D es una derivación antisimétrica de $\mathfrak{k}$ que conmuta con su estructura compleja.*

Demostración. Sólo tenemos que probar que dado un par $(\mathfrak{k}, D)$ podemos asociarle un álgebra de Lie Vaisman como en el enunciado.

Sea $(\mathfrak{k}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{k}}, J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un álgebra de Lie Kähler plana con ω su forma fundamental y D una derivación de $\mathfrak{k}$ que conmuta con J. Sea

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes (\mathbb{R}\xi \oplus_\omega \mathfrak{k}),$$

donde el corchete de Lie de $\mathfrak{g}$ está dado por $\mathrm{ad}_A|_{\mathfrak{k}} = D$, $\xi \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ y para $X, Y \in \mathfrak{k}$,

$$[X,Y] = \omega(X,Y)\xi + [X,Y]_{\mathfrak{k}},$$

donde $\omega(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$. La estructura hermitiana en $\mathfrak{g}$ es la extensión natural de la estructura hermitiana de $\mathfrak{k}$, es decir, J se extiende a $\mathfrak{g}$ mediante $JA = \xi$ y $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ se extiende a $\mathfrak{g}$ de modo que A, ξ son ortogonales a $\mathfrak{k}$, $\langle A, \xi\rangle = 0$ y $|A| = |\xi| = 1$. A dicha extensión la seguiremos llamando $(J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$, y también denotaremos por ω a su forma fundamental. Como $(\mathfrak{k}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ es plana resulta unimodular (ver Proposición 3.1.13 más abajo). Luego se deduce fácilmente de la demostración del Lema 3.1.10 que $\mathfrak{g}$ también es unimodular.

Ahora demostraremos que J resulta integrable en $\mathfrak{g}$. Basta verificar que $N_J(X,Y) = 0$ y $N_J(A,Y) = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{k}$.

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= [JX,JY] - [X,Y] - J([JX,Y] + [X,JY]) \\ &= N_J^{\mathfrak{k}}(X,Y) - \omega(X,Y)\xi + \omega(JX,JY)\xi - J(\omega(X,JY)\xi) + \omega(JX,Y)\xi) \\ &= N_J^{\mathfrak{k}}(X,Y) + (\langle X,JY\rangle - \langle X,JY\rangle)\xi + (\langle JX,JY\rangle - \langle X,Y\rangle)A \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{k}$ pues J es integrable en $(\mathfrak{k}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{k}})$ y $N_J^{\mathfrak{k}}$ representa el tensor de Nijenhuis de $(\mathfrak{k}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{k}})$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} N_J(A,Y) &= [JA,JY] - [A,Y] - J([JA,Y] + [A,JY]) \quad = [JA,JY] - EY - J([JA,Y] + EJY) \\ &= -DY - JDJY \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $Y \in \mathfrak{k}$ pues D conmuta con J. Así J resulta integrable en $\mathfrak{g}$.

Veamos ahora que $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es Vaisman, para ello verifiquemos que $d\omega = \theta \wedge \omega$ donde ω es la forma fundamental en $\mathfrak{g}$ y θ es la 1-forma dual del vector A.

Si $X, Y, Z \in \mathfrak{k}$, entonces

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y,Z) &= -\omega([X,Y],Z) - \omega([Y,Z],X) - \omega([Z,X],Y) \\ &= \langle [X,Y]_{\mathfrak{k}} + \omega(X,Y)\xi, JZ\rangle + \langle [Y,Z]_{\mathfrak{k}} + \omega(Y,Z)\xi, JX\rangle + \langle [Z,X]_{\mathfrak{k}} + \omega(Z,X)\xi, JY\rangle \\ &= \langle [X,Y]_{\mathfrak{k}}, JZ\rangle + \langle [Y,Z]_{\mathfrak{k}}, JX\rangle + \langle [Z,X]_{\mathfrak{k}}+, JY\rangle \\ &= d^{\mathfrak{k}}\omega(X,Y,Z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, $\theta \wedge \omega(X,Y,Z) = 0$ pues $\mathfrak{k} \subset \ker\theta$.

Si $Y, Z \in \mathfrak{k}$, entonces

$$\begin{aligned} d\omega(\xi,Y,Z) &= -\omega([\xi,Y],Z) - \omega([Y,Z],\xi) - \omega([Z,\xi],Y) \\ &= \langle [Y,Z]_{\mathfrak{k}} + \omega(Y,Z)\xi, J\xi\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, $\theta \wedge \omega(\xi,Y,Z) = 0$ pues $\mathbb{R}\xi \oplus \mathfrak{k} = \ker\theta$.

Si $Y, Z \in \mathfrak{k}$, entonces

$$\begin{aligned} d\omega(A,Y,Z) &= -\omega([A,Y],Z) - \omega([Y,Z],A) - \omega([Z,A],Y) \\ &= \langle DY, JZ\rangle + \langle \omega(Y,Z)\xi + [Y,Z]_{\mathfrak{k}}, JA\rangle + \langle -DZ, JY\rangle \\ &= \langle DY, JZ\rangle + \omega(Y,Z) - \langle DZ, JY\rangle \\ &= \langle -JDY, Z\rangle + \omega(Y,Z) + \langle Z, DJY\rangle \\ &= \omega(Y,Z), \end{aligned}$$

pues D es antisimétrico y conmuta con J. Por otro lado, $\theta \wedge \omega(A,Y,Z) = \omega(Y,Z)$.

Si $Z \in \mathfrak{k}$, entonces

$$\begin{aligned} d\omega(A,\xi,Z) &= -\omega([A,\xi],Z) - \omega([\xi,Z],A) - \omega([Z,A],\xi) \\ &= -\omega([Z,A],\xi) \\ &= -\langle DZ, A\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

pues $DZ \in \mathfrak{k}$. Por otro lado, $\theta \wedge \omega(A,\xi,Z) = \omega(\xi,Z) = 0$.

Luego tenemos que $(\mathfrak{g}, J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ es LCK, y como ad_A es antisimétrico, entonces $(J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ resulta una estructura Vaisman en $\mathfrak{g}$.

□

Observación 3.1.12. Es fácil verificar que la extensión central $\mathbb{R}\xi \oplus_\omega \mathfrak{k}$ del Teorema 3.1.11 admite una estructura sasakiana.

Por lo tanto, para caracterizar las álgebras de Lie Vaisman unimodulares debemos estudiar las álgebras de Lie Kähler planas. El siguiente resultado clásico de Milnor (extendido luego en [20]) nos proporciona una descomposición detallada de las álgebras de Lie que admiten una métrica plana.

Proposición 3.1.13 ([62], [20])**.** *Sea $(\mathfrak{u}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un álgebra de Lie plana. Entonces $\mathfrak{u}$ se descompone ortogonalmente como $\mathfrak{u} = \mathfrak{z}\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{u}'$ donde $\mathfrak{z}$ es el centro de $\mathfrak{u}$ y se satisfacen las siguientes propiedades*

(*a*) $\mathfrak{u}' = [\mathfrak{u},\mathfrak{u}]$ *y* $\mathfrak{h}$ *son subálgebras abelianas.*

(*b*) $\mathrm{ad} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{u}')$ *es inyectiva y* $\mathfrak{u}'$ *tiene dimensión par.*

(*c*) $\mathrm{ad}_X = \nabla_X$ *para todo* $X \in \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h}$.

De la Proposición 3.1.13 se sigueque $\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{k}'$ es el nilradical de $(\mathfrak{k}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{k}})$.

Aplicaremos este resultado al álgebra de Lie Kähler plana del Teorema 3.1.11. Primero probaremos el siguiente resultado.

Proposición 3.1.14. *Sea $(\mathfrak{k}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un álgebra de Lie plana y J una estructura casi compleja en $\mathfrak{k}$. Entonces J es Kähler si y solamente si se cumplen las siguientes dos propiedades:*

(i) $\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h}$ *y* $\mathfrak{k}'$ *son J-invariantes.*

(ii) $\mathrm{ad}_H \circ J = J \circ \mathrm{ad}_H$, *para todo* $H \in \mathfrak{h}$.

Demostración. Supongamos primero que J es Kähler, esto es, $\nabla J = 0$, o equivalentemente, $\nabla_X J = J\nabla_X$ para todo $X \in \mathfrak{k}$.

Sea $X \in \mathfrak{k}'$, por la Proposición 3.1.13 sabemos que $X = \sum_i [H_i, Y_i]$ para ciertos $H_i \in \mathfrak{h}$ y $Y_i \in \mathfrak{k}'$. Entonces

$$JX = \sum_i J[H_i, Y_i] = \sum_i J\nabla_{H_i} Y_i = \sum_i \nabla_{H_i} JY_i = \sum_i [H_i, JY_i] \in \mathfrak{k}',$$

donde se usó la Proposición 3.1.13 (c). Por lo tanto $\mathfrak{k}'$ es J-invariante. Luego J preserva el complemento ortogonal de $\mathfrak{k}'$, es decir, $\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h}$ es J-invariante. De esta manera tenemos demostrado (i). Por último (ii) es inmediato del hecho de que $\nabla_H J = J\nabla_H$ y $\nabla_H = \mathrm{ad}_H$ para todo $H \in \mathfrak{h}$.

Ahora supongamos que se cumplen las condiciones (i) y (ii), y veamos que $\nabla_X J = J\nabla_X$ para todo $X \in \mathfrak{k}$. Si $X \in \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h}$ tenemos que $\nabla_X = \mathrm{ad}_X$ por la Proposición 3.1.13, entonces de (ii) se sigue que $\nabla_X J = J\nabla_X$. Finalmente si $X \in \mathfrak{k}'$ se tiene que $\nabla_X = 0$, pues $\nabla : \mathfrak{k} \to \mathfrak{so}(\mathfrak{k})$, con $\nabla(\mathfrak{k})$ soluble y $\mathfrak{so}(\mathfrak{k})$ compacta, entonces $\nabla(\mathfrak{k})$ resulta abeliana, y por lo tanto $\nabla_{[Y,Z]} = [\nabla_Y, \nabla_Z] = 0$. Por lo tanto J es Kähler. $\square$

Proposición 3.1.15. *Sea $(\mathfrak{k}, J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un álgebra de Lie Kähler plana y sea D una derivación antisimétrica de $\mathfrak{k}$, entonces $D(\mathfrak{h}) = 0$.*

Demostración. Como D es una derivación, entonces $D(\mathfrak{k}') \subset \mathfrak{k}'$ y $D(\mathfrak{z}) \subset \mathfrak{z}$. Luego, como D es antisimétrica vale que $D(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$.

Por la Proposición 3.1.13 tenemos que $\mathrm{ad}_H \in \mathfrak{so}(\mathfrak{k}')$ para todo $H \in \mathfrak{h}$. Por otro lado, $\mathrm{ad}_H \circ J = J \circ \mathrm{ad}_H$ por la Proposición 3.1.14. Luego como $\mathfrak{h}$ es una subálgebra abeliana, se tiene que $\mathfrak{F} = \{\mathrm{ad}_H : \mathfrak{k}' \to \mathfrak{k}' : H \in \mathfrak{h}\} \cup \{J\}$ es una familia conmutativa de endomorfismos antisimétricos de $\mathfrak{k}'$. Por lo tanto, $\mathfrak{F}$ está contenida en una subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{so}(\mathfrak{k}')$. La subálgebra $\mathfrak{a}$ está conjugada por un elemento de $SO(\mathfrak{k}')$ a la siguiente subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{so}(\mathfrak{k}')$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & \\ a_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -a_n \\ & & & a_n & 0 \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \right\},$$

para cierta base $\{e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n\}$ de $\mathfrak{k}'$. En esta base la familia $\mathfrak{F}$ puede ser representada por las siguientes matrices

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}_H = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1(H) & & & \\ \lambda_1(H) & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -\lambda_m(H) \\ & & & \lambda_m(H) & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Calculamos

$$D[H, e_i] = [DH, e_i] + [H, De_i] = \lambda_i(DH) f_i + [H, De_i],$$

por otro lado,

$$D[H, e_i] = D(\lambda_i(H) f_i) = \lambda_i(H) D f_i.$$

Mirando la componente en f_i de ambas expresiones y usando que D y ad_H son antisimétricas tenemos que:

$$0 = \langle \lambda_i(H) D f_i, f_i \rangle = \langle \lambda_i(DH) f_i + [H, De_i], f_i \rangle = \lambda_i(DH).$$

Entonces, $\lambda_i(DH) = 0$ para todo i, es decir, $\mathrm{ad}_{DH} \equiv 0$. Se sigue de la Proposición 3.1.13 (b) que $DH = 0$. $\square$

Observación 3.1.16. Si $DJ = JD$ como en el Teorema 3.1.11, vale que $D(\mathfrak{h} + J\mathfrak{h}) = 0$.

En la Corolario 3.1.7 se determinó cuál es el centro de un álgebra de Lie soluble unimodular que admite una estructura Vaisman. Ahora estudiaremos algunas otras propiedades algebraicas, en particular determinaremos su conmutador $\mathfrak{g}'$ y su nilradical $\mathfrak{n}$.

Sea ahora $\mathfrak{u}$ la parte J-invariante del centro de $\mathfrak{k}$, es decir, $\mathfrak{u} = \mathfrak{z} \cap J\mathfrak{z}$, definimos $2r = \dim \mathfrak{u} + \dim \mathfrak{k}'$ y $s = \dim \mathfrak{z} - \dim \mathfrak{u}$. Notemos que $\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h}$ se descompone ortogonalmente como $\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{u} \oplus (\mathfrak{h} + J\mathfrak{h})$.

Proposición 3.1.17. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie unimodular, soluble y con estructura Vaisman. Si $\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes (\mathbb{R}\xi \oplus_\omega \mathfrak{k})$ con $\mathfrak{k} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}'$ como antes, entonces*

(i) $\mathfrak{g}' = \mathbb{R}\xi \oplus \mathrm{Im}(D|_\mathfrak{u}) \oplus \mathfrak{k}'$.

(ii) *Si $A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, entonces $\mathfrak{n} = \mathbb{R}A \oplus \mathbb{R}\xi \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{k}' \simeq \mathbb{R}^{s+1} \times \mathfrak{h}_{2r+1}$, y $\mathfrak{n}^\perp = \mathfrak{h}$.*

(iii) *Si $A \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ y $D|_\mathfrak{u} \neq 0$, entonces $\mathfrak{n} = \mathbb{R}\xi \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{k}' \simeq \mathbb{R}^s \times \mathfrak{h}_{2r+1}$, y $\mathfrak{n}^\perp = \mathbb{R}A \oplus \mathfrak{h}$.*

(iv) *Si $A \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ y $D|_\mathfrak{u} = 0$ tenemos dos casos:*

(a) si no existe ningún $H \in \mathfrak{h}$ tal que $D|_{\mathfrak{k}'} + \mathrm{ad}_H|_{\mathfrak{k}'} = 0$, entonces $\mathfrak{n} = \mathbb{R}\xi \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{k}' \simeq \mathbb{R}^s \times \mathfrak{h}_{2r+1}$, y $\mathfrak{n}^\perp = \mathbb{R}A \oplus \mathfrak{h}$.

(b) si existe $H \in \mathfrak{h}$ tal que $D|_{\mathfrak{k}'} + \mathrm{ad}_H|_{\mathfrak{k}'} = 0$, entonces $\mathfrak{n} = \mathbb{R}(A + H) \oplus \mathbb{R}\xi \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{k}'$. Más aún, si $JH \in \mathfrak{h}$, luego $\mathfrak{n} \simeq \mathbb{R}^{s+1} \times \mathfrak{h}_{2r+1}$; y si $JH \notin \mathfrak{h}$ luego $\mathfrak{n} \simeq \mathbb{R}^{s-1} \times \mathfrak{h}_{2(r+1)+1}$.

Demostración. La parte (i) se sigue analizando (3.4). Para la parte (ii), (iii) y (iv) notar que $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}_Z) \subset \mathbb{R}\xi$ y $\xi \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, por lo tanto ad_Z es un operador nilpotente para todo $Z \in \mathfrak{z}$, lo cual implica que $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{n}$. Además de la Proposición 3.1.13 se sigue que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} = \{0\}$, entonces $\mathbb{R}\xi \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{k}' \subset \mathfrak{n}$. Sea $Z = aA + b\xi + Y + H + W \in \mathfrak{n}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathfrak{z}, H \in \mathfrak{h}, W \in \mathfrak{k}'$.

Supongamos que $A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$, luego $H \in \mathfrak{n}$, lo cual implica que $H = 0$. Esto demuestra (ii).

Supongamos ahora que $A \notin \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, sea $Z = aA + b\xi + Y + H + W \in \mathfrak{n}$ como antes, entonces $aA + H \in \mathfrak{n}$. Por lo tanto el operador ad_{aA+H} debe ser nilpotente. Este operador se puede escribir, para alguna base de $\mathbb{R}\xi \oplus \mathfrak{u} \oplus (\mathfrak{h} + J\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{k}'$ como

$$\mathrm{ad}_{aA+H} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} & & v^t & \\ \hline & aD|_\mathfrak{u} & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & aD|_{\mathfrak{k}'} + \mathrm{ad}_H|_{\mathfrak{k}'} \end{array}\right),$$

con $D|_\mathfrak{u}$ y $aD|_{\mathfrak{k}'} + \mathrm{ad}_H|_{\mathfrak{k}'}$ antisimétricas. Por lo tanto ambos operadores deben ser cero, es decir, $aD|_\mathfrak{u} = 0$ y $aD|_{\mathfrak{k}'} + \mathrm{ad}_H|_{\mathfrak{k}'} = 0$

Si $D|_\mathfrak{u} \neq 0$ entonces $a = 0$, y luego $\mathrm{ad}_H|_{\mathfrak{k}'} = 0$. Por la Proposición 3.1.13 se sigue que $H = 0$, y así obtenemos (iii).

Por último si $D|_\mathfrak{u} = 0$ entonces sólo se debe cumplir $aD|_{\mathfrak{k}'} + \mathrm{ad}_H|_{\mathfrak{k}'} = 0$. Si si no existe ningún $H \in \mathfrak{h}$ tal que $D|_{\mathfrak{k}'} + \mathrm{ad}_H|_{\mathfrak{k}'} = 0$, entonces $\mathfrak{n} = \mathbb{R}\xi \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{k}' \simeq \mathbb{R}^s \times \mathfrak{h}_{2r+1}$, y $\mathfrak{n}^\perp = \mathbb{R}A \oplus \mathfrak{h}$.

Mientras que si existe $H \in \mathfrak{h}$ tal que $D|_{\mathfrak{k}'} + \mathrm{ad}_H|_{\mathfrak{k}'} = 0$, entonces $\mathfrak{n} = \mathbb{R}(A + H) \oplus \mathbb{R}\xi \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{k}'$. Ahora si $JH \in \mathfrak{h}$ entonces $\mathfrak{n} \simeq \mathbb{R}^{s+1} \times \mathfrak{h}_{2r+1}$, mientras que si $JH \notin \mathfrak{h}$ entonces $\mathfrak{n} \simeq \mathbb{R}^{s-1} \times \mathfrak{h}_{2(r+1)+1}$, y así obtenemos (iv). □

Observación 3.1.18. Se sigue de las Proposiciones 3.1.17 y 3.1.15 que $\mathfrak{n}^\perp$ es una subálgebra abeliana si y solamente si $\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h} = \{0\}$.

Con todos estos resultados podemos dar una obstrucción algebraica para la existencia de estructuras Vaisman en un álgebra de Lie soluble unimodular.

Teorema 3.1.19. *Si el álgebra de Lie soluble unimodular $\mathfrak{g}$ admite una estructura Vaisman, entonces los autovalores de los operadores ad_X con $X \in \mathfrak{g}$ son todos imaginarios puros.*

Demostración. Sabemos que $\mathfrak{g}$ se puede escribir como $\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes (\mathbb{R}\xi \oplus_\omega \mathfrak{k})$ con $\mathfrak{k} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}'$ y $\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h} = \mathfrak{z} \cap J\mathfrak{z} \oplus (\mathfrak{h} + J\mathfrak{h})$. Sea $\{A, \xi, u_1, v_1, \ldots, u_q, v_q, x_1, y_1, \ldots, x_s, y_s, e_1, f_1, \ldots, e_t, f_t, \}$ base de $\mathfrak{g}$ que respeta tal descomposición. Más aún $Ju_i = v_i$, $Jx_i = y_i$ y $Je_i = f_i$. Calculamos los operadores ad_X con $X \in \mathfrak{g}$ en dicha base.

Para $Z \in \mathfrak{z} \cap J\mathfrak{z}$,

$$\mathrm{ad}_Z = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ \hline & & \alpha & & \\ \hline & & & & \\ \hline \gamma^t & & & & \\ \hline & & & & \end{array}\right), \text{ para algún } \gamma \in \mathbb{R}^s \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}^q.$$

Para $H \in \mathfrak{h} + J\mathfrak{h}$,

$$\mathrm{ad}_H = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ \hline & & & \beta & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & B \end{array}\right), \text{ para algún } \beta \in \mathbb{R}^s \text{ y } B \in \mathfrak{u}(t) \subset \mathfrak{gl}(t, \mathbb{R}).$$

Para $X \in \mathfrak{k}'$,

$$\mathrm{ad}_X = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \delta^t & & & C & \end{array}\right), \text{ para algún } \delta \in \mathbb{R}^t \text{ y } C \in \mathfrak{gl}(t, \mathbb{R}).$$

Sea $X = aA + b\xi + Z + H + Y \in \mathfrak{g}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $Z \in \mathfrak{z} \cap J\mathfrak{z}$, $H \in \mathfrak{h} + J\mathfrak{h}$, $Y \in \mathfrak{k}'$, calculamos

$$\mathrm{ad}_X = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ \hline & & \alpha & \beta & \\ \hline & & aD|_{\mathfrak{u}} & & \\ \hline \gamma^t & & & & \\ \hline \delta^t & & & C & aD|_{\mathfrak{k}'} + B \end{array}\right),$$

para ciertos $\alpha \in \mathbb{R}^q$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^s$, $\delta \in \mathbb{R}^t$, $C \in \mathfrak{gl}(t, \mathbb{R})$ y $B \in \mathfrak{u}(t)$. Desarrollando el determinante de $\lambda \operatorname{Id} - \mathrm{ad}_X$ se puede ver que los autovalores de ad_X para $X \in \mathfrak{g}$ son todos imaginarios puros. $\square$

3.2 Ejemplos

3.2.1 Ejemplo 1

Comenzamos con el álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{k} = \mathbb{R}^{2n}$ con la estructura Kähler canónica $(J, \langle \cdot , \cdot \rangle, \omega)$. Sea $\{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$ una base ortonormal de $\mathfrak{k}$ donde $Je_i = f_i$ y sea $\omega = \sum_{i=1}^n e^i \wedge f^i$. Consideramos la extensión central

$$\mathfrak{s} = \mathbb{R}\xi \oplus_\omega \mathfrak{k} \cong \mathfrak{h}_{2n+1}$$

donde $\mathfrak{h}_{2n+1}$ es el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión $2n+1$.

Definimos $\mathfrak{g}$ mediante el producto semidirecto

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes_E \mathfrak{h}_{2n+1}$$

donde la acción de A sobre $\mathfrak{h}_{2n+1}$ está dada por la matriz

$$E = \mathrm{ad}_A = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & -a_1 & & & \\ & a_1 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & -a_n \\ & & & & a_n & 0 \end{pmatrix},$$

en la base ortonormal $\{\xi, e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$ donde $[e_j, f_j] = \xi$, para ciertos $a_j \in \mathbb{R}$. Como $D = E|_{\mathfrak{k}}$ satisface las condiciones del Teorema 3.1.11, entonces $\mathfrak{g}$ admite una estructura Vaisman. Notar que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie casi nilpotente. Denotemos por $\mathfrak{g}_{(a_1,\dots,a_n)}$ al álgebra de Lie de arriba. Podemos asumir que los números reales $a_i's$ satisfacen $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, en caso contrario reordenamos.

Proposición 3.2.1. *Sean $\mathfrak{g}_{(a_1,\dots,a_n)}$ y $\mathfrak{g}_{(b_1,\dots,b_n)}$ dos álgebras de Lie como las de arriba. Entonces $\mathfrak{g}_{(a_1,\dots,a_n)} \cong \mathfrak{g}_{(b_1,\dots,b_n)}$ si y sólo si $a_j = cb_j$ para todo $j = 1, \dots, n$ y para algún $c \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sean $\mathfrak{g}_{(a_1,\dots,a_n)} = \mathbb{R}A \ltimes_E \mathfrak{h}_{2n+1}$ y $\mathfrak{g}_{(b_1,\dots,b_n)} = \mathbb{R}B \ltimes_E \mathfrak{h}_{2n+1}$ como antes y sea $\phi : \mathfrak{g}_{(a_1,\dots,a_n)} \to \mathfrak{g}_{(b_1,\dots,b_n)}$ un isomorfismo.

Primero supongamos que $a_1 \neq 0$, i.e. $a_1 > 0$. Entonces el conmutador de ambas álgebras de Lie es $\mathfrak{h}_{2n+1}$. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(A) = cB + H$ para algún $H \in \mathfrak{h}_{2n+1}$, entonces $c \neq 0$ pues ϕ es biyectiva. Además, los autovalores de $\mathrm{ad}_{\phi(A)}$ y de ad_{cB} son iguales, pues $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}_H) \subset \mathbb{R}\xi$. Como ϕ es un isomorfismo se sigue que ad_A y $\mathrm{ad}_{\phi(A)}$ tienen los mismos autovalores. Por lo tanto $a_j = cb_j$ para todo j.

Ahora supongamos que $a_1 = \cdots = a_r = 0$ y $a_{r+1} \neq 0$. Como ϕ preserva el conmutador, entonces tenemos lo mismo para $\mathfrak{g}_{(b_1,\dots,b_n)}$, es decir, $b_1 = \cdots = b_r = 0$ y $b_{r+1} \neq 0$. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(A) = cB + H$ para algún $H \in \mathfrak{h}_{2n+1}$. Si $c \neq 0$, el mismo razonamiento que en el otro caso determina que $a_j = cb_j$ para todo j.

Si $c = 0$, entonces existe $U \in \mathfrak{g}_{(a_1,\dots,a_n)} - [\mathfrak{g}_{(a_1,\dots,a_n)}, \mathfrak{g}_{(a_1,\dots,a_n)}]$ tal que $\phi(U) = dB + H$ con $d \neq 0$. Ahora consideramos $A + U$ y comparamos los autovalores de ad_{A+U} con los autovalores de ad_B, y resulta que $a_j = cb_j$ para todo j.

□

Ahora determinaremos cuándo los grupos de Lie asociados admiten retículos, para obtener de esta manera solvariedades Vaisman. Consideramos el homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow Aut(H_{2n+1})$ dado por

$$\varphi(t) = e^{tE} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \cos(a_1 t) & -\sin(a_1 t) & & & \\ & \sin(a_1 t) & \cos(a_1 t) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \cos(a_n t) & -\sin(a_n t) \\ & & & & \sin(a_n t) & \cos(a_n t) \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

donde H_{2n+1} es $\mathbb{R}^{2n+1}$ junto con el producto dado por

$$(z, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \cdot (z', x'_1, y'_1, \dots, x'_n, y'_n) = (z + z' + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j y'_j - x'_j y_j), x_1 + x'_1, \dots, y_n + y'_n).$$

Luego G es el producto semidirecto entre $\mathbb{R}$ y H_{2n+1} dado por φ, de esta manera obtenemos el grupo de Lie simplemente conexo

$$G = G_{(a_1,\dots,a_n)} = \mathbb{R} \ltimes_\varphi H_{2n+1},$$

con álgebra de Lie $Lie(G) = \mathfrak{g}_{(a_1,\dots,a_n)}$.

El siguiente resultado nos muestra que para algunos de los parámetros a_j podemos asegurar existencia de retículos.

Proposición 3.2.2. *Si $a_i \in \mathbb{Q}$, entonces $G_{(a_1,\dots,a_n)}$ admite retículos.*

Demostración. Debido a un resultado de Bock [25] (ver [32] para una descripción más explícita), un grupo de Lie casi nilpotente admite retículos si existe una base de su álgebra de Lie donde las constantes de estructura son racionales y existe un $t_0 \in \mathbb{R}, t_0 \neq 0$, tal que en dicha base $\varphi(t_0)$ es una matriz con coeficientes enteros.

Si $a_i \in \mathbb{Q}$, digamos $a_i = \frac{p_i}{q_i}$ con p_i y q_i coprimos podemos elegir $t_0 = 2\pi \prod q_i$, entonces de (3.5) se sigue que $\varphi(t_0)$ es una matriz entera. Por lo tanto G admite retículos. □

Ahora construiremos explícitamente familias de retículos en $G_{(a_1,\dots,a_n)}$, para hacer esto comenzamos con retículos en H_{2n+1} y los extendemos a retículos en G. Usaremos el siguiente resultado general para hacer esta construcción:

Lema 3.2.3. *Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(H)$ un homomorfismo de grupos de Lie y sea $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi H$ el correspondiente producto semidirecto. Sea Γ un retículo de H. Supongamos que existe $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tal que $\phi(a)(\Gamma) = \Gamma$, entonces $a\mathbb{Z} \ltimes_\phi \Gamma$ es un retículo en G.*

Demostración. Ver Apéndice, Lema 5.3.8 □

Vamos a considerar los siguientes retículos para esta estructura de grupo en H_{2n+1}: para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un retículo Γ_k en H_{2n+1} dado por $\Gamma_k = \frac{1}{2k}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$.

Si $E = 0$, es decir, $\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \times \mathfrak{h}_{2n+1}$ ($a_j = 0$ para todo j), entonces $\mathbb{Z} \times \Gamma_k$ es un retículo en G. Si $E \neq 0$ podemos suponer que el primer a_i no nulo es 1. Luego todo retículo Γ_k en H_{2n+1} es invariante por los subgrupos generados por $\varphi(t_0)$, $\varphi(2t_0)$ y $\varphi(4t_0)$, donde $t_0 = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{mcm}(q_1,\dots,q_n)$, $a_i = \frac{p_i}{q_i}$ y mcm representa el mínimo común múltiplo. De acuerdo al Lema 3.2.3 tenemos tres familias de retículos en $G_{(a_1,\dots,a_n)}$:

$$\Lambda_{k,1} = t_0\mathbb{Z} \ltimes \Gamma_k,$$

$$\Lambda_{k,2} = 2t_0\mathbb{Z} \ltimes \Gamma_k,$$

$$\Lambda_{k,4} = 4t_0\mathbb{Z} \ltimes \Gamma_k.$$

A continuación determinaremos una subfamilia de estos retículos que son no isomorfos dos a dos. Supondremos a continuación que $a_j \in \mathbb{Z}$, más aún a_j es *impar* para $j = 2,\dots,n$ y $a_1 = 1$.

Proposición 3.2.4. *Con la notación anterior tenemos que los subgrupos $\Lambda_{k,i}, k \in \mathbb{N}, i = 1,2,4,$ son todos no isomorfos entre sí.*

Demostración. Se pueden probar los siguientes dos hechos:

- $\mathfrak{z}(\Lambda_{k,i}) = 2\pi\mathbb{Z} \times \frac{1}{2k}\mathbb{Z} \times 0 \times \cdots \times 0$ para $k \in \mathbb{N}, i = 1,2,4$, donde $\mathfrak{z}(\Lambda_{k,i})$ es el centro de $\Lambda_{k,i}$.
- $[\Lambda_{k,0}, \Lambda_{k,0}] = 0 \times \mathbb{Z} \times 0 \times \cdots \times 0$ para $k \in \mathbb{N}$, donde $[\Lambda_{k,0}, \Lambda_{k,0}]$ es el conmutador de $\Lambda_{k,0}$.

Supongamos que $\psi : \Lambda_{p,j} \to \Lambda_{k,i}$ es un isomorfismo. Utilizando la caracterización del centro se puede ver que $\psi((2l)\pi, z, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \neq ((2l'+1)\pi, z', x_1', y_1', \dots, x_n', y_n')$. Este hecho nos permite probar que $\Lambda_{p,j}$ no puede ser isomorfo a $\Lambda_{k,i}$ si $i \neq j$.

Ahora utilizando la caracterización del conmutador se puede demostrar que $\Lambda_{p,4}$ no puede puede ser isomorfo a $\Lambda_{k,4}$ si $p \neq k$. Como consecuencia de esto y de que $\Lambda_{k,4} \subset \Lambda_{k,2} \subset \Lambda_{k,1}$, dentro de cada una de las otras dos familias $\Lambda_{k,2}$ y $\Lambda_{k,1}$ tampoco puede haber retículos isomorfos. □

Observación 3.2.5. En [29] se da una demostración de la Proposición 3.2.4 para dimensión 4, es decir, $n = 1$.

Para cada $\mathfrak{g}_{(a_1,\dots,a_n)}$ y $\Lambda_{k,i}$ como arriba tenemos que

$$M_{k,i} = \Lambda_{k,i} \backslash G_{(a_1,\dots,a_n)}$$

representan tres familias de solvariedades con estructuras Vaisman y con grupo fundamental dado por $\pi_1(M_{k,i}) = \Lambda_{k,i}$. Por lo tanto, como consecuencia de la Proposición anterior se tiene que las solvariedades $M_{k,i}$ son no homeomorfas de a pares.

3.2.2 Ejemplo 2

En este caso comenzamos con un álgebra de Lie Kähler plana $(\mathfrak{k}, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$ donde al descomponerla como $\mathfrak{k} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}'$ según la Proposición 3.1.13, se tiene que $\dim \mathfrak{h} = 1$. Sea $\mathfrak{h} = \mathbb{R}H$, $\mathfrak{k}' \simeq \mathbb{R}^{2m}$ y $\mathfrak{z} \simeq \mathbb{R}^{2l+1}$. Elegimos una estructura compleja J de modo que se satisfaga la Proposición 3.1.14, luego existe $Z \in \mathfrak{z}$ tal que $JZ = H$ y $\mathfrak{z} = \mathbb{R}Z \oplus^{\perp} \mathfrak{u}$ con $\mathfrak{u}$ J-invariante. Entonces la extensión central de $\mathfrak{k}$ se puede descomponer como:

$$\mathbb{R}\xi \oplus_{\omega} \mathfrak{k} = \mathbb{R}H \ltimes_M (\mathbb{R}Z \times \mathfrak{h}_{2(m+l)+1}),$$

donde M es el operador dado por la siguiente matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & 0_{l\times l} & & & & & \\ & & & 0 & -a_1 & & & \\ & & & a_1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & -a_m \\ & & & & & & a_m & 0 \end{pmatrix},$$

en una base $\{Z, \xi, e_1, f_1, \ldots, e_l, f_l, u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m\}$ ortonormal que satisface las siguientes condiciones: $\{e_1, f_1, \cdots, e_l, f_l\}$ es base de $\mathfrak{u}$, $\{u_1, v_1, \cdots, u_m, v_m\}$ es base de $\mathfrak{k}'$ y $Je_i = f_i$, $Ju_i = v_i$. Más aún, $[e_j, f_j] = \xi$ y $[u_j, v_j]\xi$.

Definimos $\mathfrak{g}$ mediante

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes_E (\mathbb{R}H \ltimes_M (\mathbb{R}Z \times \mathfrak{h}_{2(m+l)+1}))$$

donde E es la derivación de la extensión central dada por

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & -\alpha_1 & & & \\ & & & \alpha_1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & -\alpha_{m+l} \\ & & & & & & \alpha_{m+l} & 0 \end{pmatrix}$$

en la base $\{H, Z, \xi, e_1, f_1, \ldots, e_l, f_l, u_1, v_1, \cdots, u_m, v_m\}$. Como $D = E|_{\mathfrak{k}}$ satisface las condiciones del Teorema 3.1.11 sabemos que $\mathfrak{g}$ admite una estructura Vaisman.

Ahora construiremos retículos en el grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{g}$. Llamemos $r = m + l$ y analizaremos el caso en que $a_i, \alpha_i \in \mathbb{Z}$ para todo i. Consideremos el homomorfismo de grupos de Lie $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow Aut(\mathbb{R} \times H_{2r+1})$ dado por

$$\psi(t) = e^{tM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & \\ -t & 1 & & & & & & \\ & & \mathrm{Id}_{l\times l} & & & & & \\ & & & \cos(a_1 t) & -\sin(a_1 t) & & & \\ & & & \sin(a_1 t) & \cos(a_1 t) & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \cos(a_m t) & -\sin(a_m t) \\ & & & & & & \sin(a_m t) & \cos(a_m t) \end{pmatrix}$$

En $\mathbb{R}^{2r+3}$ consideramos la estructura algebraica dada por el producto semidirecto de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times H_{2r+1}$ vía ψ como lo hicimos en el ejemplo anterior, y obtenemos el grupo de Lie simplemente conexo

$$S = \mathbb{R} \ltimes_{\psi} (\mathbb{R} \times H_{2r+1}).$$

Si Γ_k es un retículo en H_{2r+1} como en el ejemplo anterior, entonces el subgrupo $L_k = a\mathbb{Z} \times \Gamma_k$ para todo $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ es un retículo en $\mathbb{R} \times H_{2r+1}$. Como L_k es invariante por los subgrupos generados por $\psi(2\pi), \psi(\pi), \psi(\frac{\pi}{2})$, entonces tenemos tres familias de retículos en $S = \mathbb{R} \ltimes_{\psi} (\mathbb{R} \times H_{2r+1})$.

$$\Gamma_{k,j} = j\mathbb{Z} \ltimes (j^{-1}\mathbb{Z} \times \Gamma_k),$$

para $j = 2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}$.

Ahora consideramos el homomorfismo de grupos de Lie $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow Aut(S)$ dado por

$$\varphi(t) = e^{tE} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos(\alpha_1 t) & -\sin(\alpha_1 t) & & & \\ & & & \sin(\alpha_1 t) & \cos(\alpha_1 t) & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \cos(\alpha_r t) & -\sin(\alpha_r t) \\ & & & & & & \sin(\alpha_r t) & \cos(\alpha_r t) \end{pmatrix}$$

En $\mathbb{R}^{2r+4}$ consideramos la estructura algebraica dada por el producto semidirecto de $\mathbb{R}$ y S vía φ y obtenemos el grupo de Lie simplemente conexo

$$G = \mathbb{R} \ltimes_{\varphi} S.$$

Como $\Gamma_{k,j}$ es invariante bajo los subgrupos generados por $\varphi(2\pi), \varphi(\pi), \varphi(\frac{\pi}{2})$, entonces para cada $\Gamma_{k,j}$ tenemos tres nuevas familias de retículos en G, dadas por

$$\Lambda_{k,j,i} = i\mathbb{Z} \ltimes \Gamma_{k,j},$$

para $i = 2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto obtenemos nuevos ejemplos de solvariedades

$$M_{k,j,i} = \Lambda_{k,j,i} \backslash (\mathbb{R} \ltimes_{\varphi} (\mathbb{R} \ltimes_{\psi} (\mathbb{R} \times H_{2n+1})))$$

con estructuras Vaisman, las cuales vienen de estructuras Vaisman en el álgebra de Lie.

CAPÍTULO 4

Retículos en grupos de Lie casi abelianos con estructuras LCK y LCS

En este capítulo caracterizamos los grupos de Lie casi abelianos que admiten estructuras LCK y LCS. En el caso LCK determinamos cuáles de estos grupos admiten retículos, para obtener así solvariedades compactas con estos tipos de estructuras. Finalmente construimos una familia de ejemplos de solvariedades con estructuras LCS las cuales no admiten estructuras LCK. Para esta familia de solvariedades estudiamos también la cohomología de de Rham y la cohomología adaptada.

4.1 Grupos de Lie casi abelianos

Un grupo de Lie se dice *casi abeliano* si su álgebra de Lie tiene un ideal abeliano de codimensión 1. Una tal álgebra de Lie se dice *casi abeliana*, y se puede escribir como $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_{\mathrm{ad}_{f_1}} \mathfrak{u}$, donde $\mathfrak{u}$ es un ideal abeliano de $\mathfrak{g}$, y $\mathbb{R}$ está generado por f_1. Similarmente, el grupo de Lie G es el producto semidirecto $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi \mathbb{R}^d$ para algún $d \in \mathbb{N}$, donde la acción está dada por $\phi(t) = e^{t\,\mathrm{ad}_{f_1}}$. Notemos que un álgebra de Lie casi abeliana es nilpotente si y sólo si el operador $\mathrm{ad}_{f_1}|_{\mathfrak{u}}$ es nilpotente.

Con respecto a las clases de isomorfismo de álgebras de Lie casi abelianas, se puede probar que

Lema 4.1.1. *Dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R} \ltimes_{\mathrm{ad}_{f_1}} \mathbb{R}^n$ y $\mathfrak{g}_2 = \mathbb{R} \ltimes_{\mathrm{ad}_{f_2}} \mathbb{R}^n$ son isomorfas si y sólo si existe $c \neq 0$ tal que ad_{f_1} y $c\,\mathrm{ad}_{f_2}$ son conjugados.*

Ver [6] para una demostración en el caso $\dim \mathfrak{g} = 4$.

Observación 4.1.2. Notemos que un ideal abeliano de codimensión 1 de un álgebra de Lie casi abeliana es "casi" siempre único. En efecto, si $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{v}$ son dos ideales abelianos de codimensión 1 de $\mathfrak{g}$, con $\mathfrak{u} \neq \mathfrak{v}$, entonces $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{v}$ es un ideal abeliano de codimensión dos, y podemos descomponer $\mathfrak{g} = \mathbb{R}u_0 \oplus \mathbb{R}v_0 \oplus \mathfrak{u} \cap \mathfrak{v}$ para algún $u_0 \in \mathfrak{u} - \mathfrak{v}$, $v_0 \in \mathfrak{v} - \mathfrak{u}$. Si $[u_0, v_0] = 0$, entonces $\mathfrak{g}$ es abeliana, y si $[u_0, v_0] \neq 0$, entonces $[u_0, v_0]$ genera el conmutador de $\mathfrak{g}$, y por lo tanto $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}^s$ para algún $s \geq 0$, donde $\mathfrak{h}_3$ denota el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 3. Como consecuencia, en cualquier otro caso, el ideal abeliano de codimensión uno es único.

Un hecho importante sobre grupos de Lie casi abelianos es que existe un criterio para determinar cuándo un grupo de Lie casi abeliano admite retículos. Este hecho es muy importante, ya que en general no es fácil decidir dado un grupo de Lie G si admite retículos o no. En este caso tenemos el siguiente resultado, el cual será muy útil en las secciones seguientes.

Proposición 4.1.3 ([25])**.** *Sea $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi \mathbb{R}^{2n+1}$ un grupo de Lie casi abeliano. Entonces G admite un retículo si y sólo si existe un $t_0 \neq 0$ tal que $\phi(t_0)$ se puede conjugar a una matriz entera.*

En este caso, el retículo está dado por $\Gamma = t_0\mathbb{Z} \ltimes P^{-1}\mathbb{Z}^{2n+1}$, donde $P\phi(t_0)P^{-1}$ es una matriz entera.

4.2 Retículos en grupos de Lie casi abelianos con estructuras LCK

En esta sección determinaremos primero todas las álgebras de Lie casi abelianas que admiten una estructura LCK. Luego determinaremos cuáles de los grupos de Lie casi abelianos, simplemente conexo, asociados a estas álgebras de Lie admiten retículos, probando que esto ocurre sólo en dimensión 4.

4.2.1 Álgebras de Lie casi abelianas con estructuras LCK

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casi abeliana de dimensión $2n+2$, entonces existe un ideal abeliano $\mathfrak{u}$ de dimensión $2n+1$. Asumamos que $\mathfrak{g}$ está equipada con una estructura hermitiana $(J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ donde J es una estructura compleja. Consideremos $\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$, el máximo subespacio de $\mathfrak{u}$ que es J-invariante. Claramente, $\dim(\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}) = 2n$, y existe $f_2 \in \mathfrak{u}$, $f_2 \in (\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u})^\perp$, y $|f_2| = 1$. Definimos $f_1 = -Jf_2 \in \mathfrak{u}^\perp$. Luego tenemos la descomposición ortogonal $\mathfrak{g} = \operatorname{span}\{f_1, f_2\} \oplus (\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u})$, donde $\mathfrak{u} = \mathbb{R}f_2 \oplus (\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u})$.

También podemos escribir $\mathfrak{g} = \mathbb{R}f_1 \ltimes \mathfrak{u}$, donde la acción adjunta de f_1 en $\mathfrak{u}$ está dada por

$$[f_1, f_2] = \mu f_2 + v_0, \tag{4.1}$$

para algún $v_0 \in \mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$ y $\mu \in \mathbb{R}$, mientras que para $x \in \mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$ tenemos

$$[f_1, x] = \eta(x)f_2 + Ax, \quad \eta \in (\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u})^*,\ A \in \operatorname{End}(\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}).$$

Como J es integrable, tenemos que $N_J(f_1, x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$, es decir,

$$J[f_1, x] = [Jf_1, x] + [f_1, Jx] + J[Jf_1, Jx],$$

lo cual implica

$$-\eta(x)f_1 + JAx = \eta(Jx)f_2 + AJx,$$

por lo tanto $\eta = 0$ y $JA = AJ$. Entonces, $\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$ es un ideal abeliano J-invariante de dimensión 2 en $\mathfrak{g}$. Denotando $\mathfrak{a} := \mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$, obtenemos el siguiente resultado (comparar con [52]):

Lema 4.2.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casi abeliana y $(J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ una estructura hermitiana en $\mathfrak{g}$. Entonces existe un ideal abeliano J-invariante $\mathfrak{a}$ de codimensión 2, una base ortonormal $\{f_1, f_2\}$ de $\mathfrak{a}^\perp$, $v_0 \in \mathfrak{a}$ y $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $[f_1, f_2] = \mu f_2 + v_0$, $\operatorname{ad}_{f_1}|_{\mathfrak{a}}$ conmuta con $J|_{\mathfrak{a}}$ y $\operatorname{ad}_{f_2}|_{\mathfrak{a}} = 0$.*

Asumiremos de ahora en adelante que $(J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ es LCK. Por lo tanto existe una 1-forma cerrada $\theta \neq 0$ tal que $d\omega = \theta \wedge \omega$. Consideraremos dos casos de acuerdo a la dimensión de $\mathfrak{g}$.

Dimensión de $\mathfrak{g} \geq 6$

En este caso, es decir, $n \geq 2$, tenemos que $\dim(\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}) \geq 4$.

Veamos que θ es un multiplo de la 1-forma f^1, donde f^1 es el dual de f_1 con respecto a la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En efecto, para cada $x \in \mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$ podemos encontrar un $0 \neq y \in \mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$ tal que $\langle x, y \rangle = 0 = \langle x, Jy \rangle$. Como $\mathfrak{u}$ es abeliano, tenemos que $d\omega(x, y, Jy) = 0$, mientras que por otro lado calculamos $\theta \wedge \omega(x, y, Jy) = \theta(x)\omega(y, Jy) = \theta(x)|y|^2$, y como consecuencia obtenemos $\theta(x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$.

Ahora, de $d\omega(f_2, x, Jx) = \theta \wedge \omega(f_2, x, Jx)$ para $x \in \mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}, x \neq 0$, tenemos que $\theta(f_2) = 0$. Por lo tanto, $\theta = af^1$ para algún $a \neq 0$.

De $d\omega(f_1, f_2, x) = \theta \wedge \omega(f_1, f_2, x)$ y de (4.1) se tiene que $\theta(x) = -\langle Jv_0, x \rangle$ para cualquier $x \in \mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$. Esto implica que $Jv_0 = 0$ y por lo tanto

$$v_0 = 0, \quad \text{entonces} \quad [f_1, f_2] = \mu f_2.$$

Entonces, usando la notación del Lema 4.2.1, tenemos $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}^{\perp} \ltimes \mathfrak{a}$.

Calculando $d\omega(f_1, x, Jy) = \theta \wedge \omega(f_1, x, Jy)$ para $x, y \in \mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$ obtenemos que

$$\langle Ax, y \rangle + \langle x, Ay \rangle = -a\langle x, y \rangle.$$

Si descomponemos A como $A = U + B$, donde U es autoadjunto y B es anti-autoadjunto, sigue de la ecuación de arriba que $U = -\frac{a}{2}\,\mathrm{Id}$, y por lo tanto, tomando $\lambda = -\frac{a}{2}$,

$$A = \lambda \,\mathrm{Id} + B, \quad B^* = -B, \quad BJ = JB.$$

Eligiendo una base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$ tal que $Ju_i = v_i$, $i = 1, \ldots, n$, podemos identificar $\mathfrak{u} \cap J\mathfrak{u}$ con $\mathbb{R}^{2n}$, $\mathfrak{u}$ con $\mathbb{R}^{2n+1}$, $\mathfrak{g}$ con $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{2n+1}$, y tenemos la siguiente representación matricial.

$$J|_{\mathbb{R}^{2n}} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}_{f_1}|_{\mathbb{R}^{2n+1}} = \left(\begin{array}{c|c} \mu & \\ \hline & \\ & \lambda I + B \\ & \end{array}\right), \qquad B \in \mathfrak{u}(n). \tag{4.2}$$

Además, la 2-forma fundamental ω y la forma de Lee θ están dadas por:

$$\omega = f^1 \wedge f^2 + \sum_{i=1}^{n} u^i \wedge v^i, \qquad \theta = -2\lambda f^1.$$

Notar que si $\mathfrak{g}$ es unimodular entonces $\lambda = -\frac{1}{2n}\mu$.

Observación 4.2.2. Cuando $\lambda = 0$, se sigue que $\theta = 0$ y por lo tanto la estructura hermitiana $(J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es Kähler. Más generalmente, las estructuras casi-Kähler en álgebras de Lie casi abelianas fueron estudiadas en [53].

Dimensión de $\mathfrak{g} = 4$.

En este caso tenemos que $\mathfrak{g} = \text{span}\{f_1, f_2\} \oplus \text{span}\{u, v\}$, donde $Jf_1 = f_2$, $Ju = v$ and $\{f_1, f_2, u, v\}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{g}$. Los corchetes de Lie en $\mathfrak{g}$ están dados por

$$[f_1, f_2] = \mu f_2 + mu + nv, \text{ para algunos } m, n \in \mathbb{R},$$

$$[f_1, z] = Az, \text{ donde } z \in \text{span}\{u, v\} \text{ y } A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \text{ con } x, y \in \mathbb{R}.$$

Luego tenemos que

$$\text{ad}_{f_1}|_{\mathbb{R}^3} = \left(\begin{array}{c|cc} \mu & & \\ \hline m & x & -y \\ n & y & x \end{array}\right).$$

De $d\omega(f_1, f_2, u) = \theta \wedge \omega(f_1, f_2, u)$, obtenemos que $\theta(u) = n$; de la misma manera, $\theta(v) = -m$. Por otro lado, de $d\omega(f_2, z, Jz) = \theta \wedge \omega(f_2, z, Jz)$ con $z \in \text{span}\{u, v\}$, se ve que $\theta(f_2) = 0$. Por lo tanto podemos escribir θ como

$$\theta = af^1 + nu^* - mv^*, \tag{4.3}$$

para algún $a \in \mathbb{R}$, donde $\{f^1, f^2, u^*, v^*\}$ es la base dual de $\{f_1, f_2, u, v\}$. Recordemos que $\omega = f^1 \wedge f^2 + u^* \wedge v^*$, se sigue de $d\omega = \theta \wedge \omega$ que $a = -2x$.

Ahora, como $d\theta = 0$, tenemos que

$$0 = d\theta = -2x\, df^1 + n\, du^* - m\, dv^* = (-nx + my)f^1 \wedge u^* + (ny + mx)f^1 \wedge v^*,$$

y consideraremos dos casos de acuerdo a si $m^2 + n^2 \neq 0$ o $m^2 + n^2 = 0$.

En el primer caso tenemos $x = y = 0$, luego el único corchete no nulo es $[f_1, f_2] = \mu_2 + mu + nv$. Si $\mu = 0$, esta álgebra de Lie es isomorfa a $\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$, donde $\mathfrak{h}_3$ es el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 3. Es bien conocido que esta álgebra de Lie admite estructuras LCK (ver [30]). Si $\mu \neq 0$, esta álgebra de Lie es isomorfa a $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$, donde $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ el algebra de Lie de dimensión 2 no abeliana. Notar que estas álgebras tienen el conmutador de dimensión 1, $\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$ es nilpotente y $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ no es unimodular.

El otro caso es $m = n = 0$, entonces

$$\text{ad}_{f_1}|_{\mathbb{R}^3} = \left(\begin{array}{c|cc} \mu & & \\ \hline & x & -y \\ & y & x \end{array}\right), \tag{4.4}$$

y obtenemos de (4.3) que $\theta = -2xf^1$. Notar que $\text{ad}_{f_1}|_{\mathbb{R}^2} = xI + B$, para algunos $x \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathfrak{u}(1)$.

Es fácil verificar que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie casi abeliana donde la representación adjunta de $\mathbb{R}$ está dada por (4.2) o (4.4), entonces $\mathfrak{g}$ admite una estructura LCK.

Para cerrar esta sección, enunciamos el siguiente teorema que resume los resultados obtenidos hasta acá:

Teorema 4.2.3. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casi abeliana de dimensión $(2n+2)$ y sea $(J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ una estructura hermitiana en $\mathfrak{g}$ y denotemos por $\mathfrak{g}'$ al conmutador de $\mathfrak{g}$.*

(i) *Si $\dim \mathfrak{g}' = 1$, luego $(J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es LCK si y sólo si $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$ o $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ como arriba.*

(ii) *Si* $\dim \mathfrak{g}' \geq 2$, *luego* $(J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *es LCK si y sólo si* $\mathfrak{g}$ *se puede descomponer como* $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}^\perp \ltimes \mathfrak{a}$, *donde* $\mathfrak{a}$ *es un ideal abeliano de codimensión* 2*, la suma es* J*-invariante, y existe una base ortonormal* $\{f_1, f_2\}$ *of* $\mathfrak{a}^\perp$ *tales que*

$$[f_1, f_2] = \mu f_2, \quad f_2 = Jf_1, \quad \mathrm{ad}_{f_2}|_{\mathfrak{a}} = 0 \ y \ \mathrm{ad}_{f_1}|_{\mathfrak{a}} = \lambda I + B,$$

para algunos $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ *y* $B \in \mathfrak{u}(n)$*. La forma de Lee correspondiente está dada por* $\theta = -2\lambda f^1$*. Además, el álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *es unimodular si y sólo si* $\lambda = -\frac{\mu}{2n}$*.*

Observaciones. (i) Las estructuras LCK del Teorema 4.2.3(ii) son Kähler si permitimos $\lambda = 0$.

(ii) Las estructuras LCK invariantes a izquierda obtenidas en los grupos de Lie correspondiente a las álgebras de Lie en el Teorema 4.2.3(ii) o $\mathfrak{aff}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ en el Teorema 4.2.3(i) nunca son Vaisman. Esto se puede ver por cálculo directo o por el hecho de que los endomorfismos ad_{f_1} no son antisimétricos (ver Proposición 1.8.8). Por otro lado cualquier estrctura LCK en $\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$ del Teorema 4.2.3(i) es Vaisman.

(iii) Con la notación usada en [6], las álgebras de Lie que admiten estructuras LCK en el Teorema 4.2.3(i) corresponden a $r_{3,1} \times \mathbb{R}$, $r'_{3,\lambda} \times \mathbb{R}$, $r_{4,\mu,\mu}$ y $r'_{4,\mu,\lambda}$ para algunos $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$. El álgebra de Lie del Teorema 4.2.3(ii) está denotada por $r_{3,0} \times \mathbb{R}$ en [6].

4.2.2 Retículos en los grupos de Lie LCK asociados

En esta sección consideraremos solvariedades asociadas a las álgebras de Lie solubles obtenidas en la sección anterior. Por lo tanto, estudiaremos la existencias de retículos en los grupos de Lie simplemente conexos asociados a estas álgebras de Lie.

Recordemos que para un grupo de Lie casi abeliano $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi \mathbb{R}^{2n+1}$ $(n \geq 1)$, su álgebra de Lie es $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_{\mathrm{ad}_{f_1}} \mathbb{R}^{2n+1}$ donde $\mathbb{R}$ está generado por f_1, y la acción está dada por $\phi(t) = e^{t\,\mathrm{ad}_{f_1}}$.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie unimodular casi abeliana equipada con una estructura LCK. Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente, entonces se sigue del Teorema 4.2.3 que $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$. Los retículos en el grupo de Lie simplemente conexo nilpotente asociado $H_3 \times \mathbb{R}$ fueron descriptos en la Observación 2.3.16.

De ahora en adelante, consideraremos álgebras de Lie casi abelianas unimodulares no nilpotentes con una estructura LCK. De acuerdo al Teorema 4.2.3, $\mathfrak{g}$ puede descomponerse como $\mathfrak{g} = \mathbb{R}f_1 \ltimes \mathbb{R}^{2n+1}$, en una suma ortogonal, donde $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}f_2 \oplus \mathbb{R}^{2n}$ y

$$\mathrm{ad}_{f_1}|_{\mathbb{R}^{2n+1}} = \left(\begin{array}{c|c} \mu & \\ \hline & -\frac{\mu}{2n} I + B \end{array}\right),$$

para algunos $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$ y $B \in \mathfrak{u}(n)$. Notemos que, como B es antisimétrica, si $c \in \mathbb{C}$ es un autovalor de $A = -\frac{\mu}{2n} I + B$, entonces $c = -\frac{\mu}{2n} \pm i\eta$ para algún $\eta \in \mathbb{R}$.

Si G denota el grupo de Lie simplemente conexo casi abeliano con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, entonces $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi \mathbb{R}^{2n+1}$ con

$$\phi(t) = e^{t\,\mathrm{ad}_{f_1}|_{\mathbb{R}^{2n+1}}} = \left(\begin{array}{c|c} e^{t\mu} & \\ \hline & e^{-\frac{t\mu}{2n}} e^{tB} \end{array}\right). \tag{4.5}$$

Esta matriz tiene un autovalor real $e^{t\mu}$ y los otros son $e^{-\frac{t\mu}{2n}\pm i\eta}$ para algunos $\eta \in \mathbb{R}$.

La existencia de retículos en G dependerá de la dimensión de G, demostraremos que sólo existen retículos si $\dim G = 4$.

Dimensión de $G \geq 6$

Veremos que estos grupos no pueden admitir retículos cuando $\dim G \geq 6$, es decir, $n \geq 2$. Probaremos primero un resultado sobre raíces de una cierta clase de polinomios con coeficientes enteros.

Lema 4.2.4. *Sea p un polinomio de la forma*

$$p(x) = x^{2n+1} - m_{2n}x^{2n} + m_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + m_1 x - 1$$

con $m_j \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 2$, y sean $x_0, \ldots, x_{2n} \in \mathbb{C}$ las raíces de p. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ es una raíz simple y $|x_1| = \cdots = |x_{2n}|$, entonces $x_0 = 1$ y $|x_j| = 1$, $j = 1, \ldots, 2n$.

Demostración. Sea $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$, tal que $|x_j| = \rho^{-1}$ para $j = 1, \ldots, 2n$. Sigue de $\prod_{j=0}^{2n} x_j = 1$ que $|x_0| = \rho^{2n}$.

Notar que podemos asumir que $\rho \geq 1$, pues sino, en el caso contrario, consideramos el polinomio recíproco $p^*(x) := -x^{2n+1}p(x^{-1})$.

Supongamos que $\rho > 1$.

Probaremos primero que p es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$. En efecto, si $p = qr$ con $q, r \in \mathbb{Z}[x]$, entonces x_0 es una raíz real (simple) de uno de estos polinomios, digamos que de q, y por lo tanto todas las raíces de r tienen módulo $\rho^{-1} < 1$. El coeficiente $r(0)$ es el producto de estas raíces, entones $|r(0)| < 1$, y esto es una contradicción pues $r(0) \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Ahora, escribimos a p como $p(x) = \prod_{j=0}^{2n}(x - x_j)$. Expandiendo este producto obtenemos:

$$m_{2n} = x_0 + \sum_{j=1}^{2n} x_j, \quad m_1 = \frac{1}{x_0} + \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{x_j}.$$

Pero $\sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{x_j} = \rho^2 \sum_{j=1}^{2n} x_j$, por lo tanto tenemos

$$m_{2n} - x_0 = \frac{1}{\rho^2}\left(m_1 - \frac{1}{x_0}\right),$$

lo cual implica, recordando que $|x_0| = \rho^{2n}$, la siguiente ecuación

$$\rho^{4n+2} - m_{2n}x_0\rho^2 + m_1 x_0 - 1 = 0. \tag{4.6}$$

Consideramos dos casos diferentes, de acuerdo a: (i) $x_0 = \rho^{2n}$, o (ii) $x_0 = -\rho^{2n}$.

(i) Si $x_0 = \rho^{2n}$ entonces (4.6) se convierte en

$$\rho^{4n+2} - m_{2n}\rho^{2n+2} + m_1\rho^{2n} - 1 = 0.$$

Entonces, $y_0 := \rho^2$ es una raíz de $q(x) = x^{2n+1} - m_{2n}x^{n+1} + m_1 x^n - 1$. Sean $y_1, \ldots, y_{2n}$ las otras raíces de q, y consideremos el polinomio $\tilde{q}(x) = \prod_{j=0}^{2n}(x - y_j^n)$. Como $q(x) = \prod_{j=0}^{2n}(x - y_j) \in \mathbb{Z}[x]$, entonces $\tilde{q} \in \mathbb{Z}[x]$ también (Ver Apéndice, Proposición 5.3.7).

Pero $\tilde{q}(\rho^{2n}) = 0$. Como $p, \tilde{q} \in \mathbb{Z}[x]$ son polinomios mónicos del mismo grado, ambos de anulan en $x_0 = \rho^{2n}$ y p es irreducible, entonces $p = \tilde{q}$.

Por lo tanto el conjunto $\{y_1^n, \dots, y_{2n}^n\}$ es una permutación del conjunto $\{x_1, \dots, x_{2n}\}$, entonces el polinomio q tiene una raíz real simple $y_0 = \rho^2 > 0$ y las otras raíces satisfacen $|y_1| = \cdots = |y_{2n}| = \rho^{-\frac{1}{n}}$. Por lo tanto podemos realizar los mismos cálculos que arriba con el polinomio q, teniendo en cuenta que en este caso $\sum_{j=0}^{2n} y_j = 0$ y $\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{y_j} = 0$, pues los coeficientes de x^{2n} y de x^1 en q son 0 (acá estamos usando que $n \geq 2$).

Se sigue que ρ satisface la ecuación

$$(\rho^{\frac{1}{n}})^{4n+2} - 1 = 0,$$

entonces $\rho = 1$, lo cual contradice la suposición de que $\rho > 1$.

(ii) Si $x_0 = -\rho^{2n}$, entonces (4.6) se convierte

$$\rho^{4n+2} + m_{2n}\rho^{2n+2} - m_1\rho^{2n} - 1 = 0.$$

Entonces, $y_0 := \rho^2$ es una raíz de $q(x) = x^{2n+1} + m_{2n}x^{n+1} - m_1x^n - 1$. Sean $y_1, \dots, y_{2n}$ las otras raíces de q, ahora consideremos el polinomio $\tilde{q}(x) = \prod_{j=0}^{2n}(x - y_j^n)$. Como $q(x) = \prod_{j=0}^{2n}(x - y_j) \in \mathbb{Z}[x]$, entonces $\tilde{q} \in \mathbb{Z}[x]$ también. Consideremos ahora el polinomio $q_1 \in \mathbb{Z}[x]$ definido por $q_1(x) = -\tilde{q}(-x)$. Notemos que q_1 es un polinomio mónico que se anula en $x_0 = -\rho^{2n}$. Se sigue de la irreducibilidad de p que $p = q_1$, pero $p(0) = -1$ y $q_1(0) = 1$, por lo tanto tenemos una contradicción.

Concluimos que la suposición $\rho > 1$ nos conduce a un absurdo, y entonces, tenemos que $\rho = 1$. Luego, $|x_j| = 1$ para todo $j = 0, \dots, 2n$ y $x_0 = 1$ o $x_0 = -1$.

Si $x_0 = -1$, entonces existe $l \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ tales que $x_1 = \cdots = x_{2l} = 1$ y el resto de las raíces son números complejos no reales $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-l}$ junto con sus complejos conjugados, con $|\alpha_j| = 1$ para todo j. Sin embargo,

$$1 = \prod_{j=0}^{2n} x_j = (-1)\left(\prod_{j=1}^{2l} x_j\right)\left(\prod_{j=1}^{n-l} |\alpha_j|^2\right) = -1,$$

es una contradicción.

Por lo tanto, $x_0 = 1$ y $|x_j| = 1$ para todo j, y así el teorema queda demostrado. □

Observación 4.2.5. Sigue del teorema de Kronecker [51] que todas las raíces del polinomio p en el Lema 4.2.4 son raíces de la unidad.

Teorema 4.2.6. *Si G es como arriba con $\mu \neq 0$ y $\dim G \geq 6$, i.e. $n > 1$, entonces G no admite retículos.*

Demostración. Supongamos que G admite retículos, entonces de la Proposición 4.1.3 se sigue que existe $t \neq 0$ tal que $e^{t \operatorname{ad}_{f_1}}$ es conjugada a una matriz entera. Entonces su polinomio característico p tiene coeficientes enteros y puede ser escrito como

$$p(x) = x^{2n+1} - m_{2n}x^{2n} + m_{2n-1}x^{2n-1} + \cdots + m_1x - 1$$

con $m_j \in \mathbb{Z}$. Se sigue de (4.5) que p tiene una raíz real simple $x_0 = e^{t\mu}$, y las otras raíces son complejas de módulo $e^{-\frac{t\mu}{2n}}$. Del Lema 4.2.4 obtenemos que $e^{t\mu} = 1$. Como $\mu \neq 0$, entonces $t = 0$, lo cual es una contradicción. □

Dimensión 4

Del Teorema 4.2.3 tenemos que $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ y

$$\operatorname{ad}_{f_1}|_{\mathbb{R}^3} = \left(\begin{array}{c|cc} \mu & & \\ \hline & -\frac{\mu}{2} & -y \\ & y & -\frac{\mu}{2} \end{array}\right). \tag{4.7}$$

Denotamos $\mathfrak{g}_{(\mu,y)} = (\mathfrak{g}, J, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ donde ad_{f_1} está dado por (4.7). En el caso no-Kähler, i.e. $\mu \neq 0$, tenemos que $\mathfrak{g}_{(\mu,y)}$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_{(1,\frac{y}{\mu})}$, y denotamos esta álgebra de Lie por $\mathfrak{g}_b$, donde $b = \frac{y}{\mu}$.

Observación 4.2.7. Notemos que $\mathfrak{g}_b$ y $\mathfrak{g}_{-b}$ son isomorfas. Más aún, para $b \neq 0$, $\mathfrak{g}_b$ es isomorfa a $\mathfrak{r}'_{4,1/b,-1/2b}$ y $\mathfrak{g}_0$ es isomorfa a $\mathfrak{r}_{4,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$ de [6] y por lo tanto, no son isomorfas dos a dos para $b > 0$.

Asumamos que el grupo de Lie simplemente conexo G_b asociado a $\mathfrak{g}_b$ admite retículos. Entonces, se sigue de la Proposición 4.1.3 que existe $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \neq 0$, tal que $e^{t_0 \operatorname{ad}_{f_1}}$ es conjugada a una matriz con coeficientes enteros. Por lo tanto el polinomio característico de $e^{t_0 \operatorname{ad}_{f_1}}$ es

$$f(x) = x^3 - mx^2 + nx - 1,$$

con $m, n \in \mathbb{Z}$. Notemos que f tiene una raíz real simple $e^{t_0} \neq 1$ y dos raíces complejas $e^{t_0(-\frac{1}{2} \pm ib)} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. En efecto, si $e^{t_0(-\frac{1}{2} \pm ib)} \in \mathbb{R}$, entonces $e^{-\frac{t_0}{2}}$ (o su opuesto) es una raíz real doble, y es fácil ver que esto implica que $e^{-\frac{t_0}{2}} = 1$ y por lo tanto $t_0 = 0$, lo cual es una contradicción. En particular G_0 no admite retículos.

Recíprocamente, consideramos $f(x) = x^3 - mx^2 + nx - 1$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que f tiene una raíz simple real $c \neq 1$ y dos raíces complejas conjugadas $\alpha, \overline{\alpha} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Luego $|\alpha|^2 c = 1$, y entonces $c > 0$. Si $\alpha = |\alpha| e^{i\phi}$ con $\phi \in (0, \pi)$ consideramos el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ donde la acción está dada por

$$\operatorname{ad}_{f_1}|_{\mathbb{R}^3} = \left(\begin{array}{c|cc} -2\log|\alpha| & & \\ \hline & \log|\alpha| & -\phi \\ & \phi & \log|\alpha| \end{array}\right).$$

Entonces

$$e^{\operatorname{ad}_{f_1}|_{\mathbb{R}^3}} = \left(\begin{array}{c|cc} |\alpha|^{-2} & & \\ \hline & |\alpha|\cos\phi & -|\alpha|\sin\phi \\ & |\alpha|\sin\phi & |\alpha|\cos\phi \end{array}\right).$$

Como esta matriz tiene autovalores c, α y $\overline{\alpha}$ y todos ellos son diferentes, tenemos que la matriz es conjugada a la matriz compañera del polinomio f, es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -n \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} \in SL(3, \mathbb{Z}).$$

De acuerdo a la Proposición 4.1.3 el grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{g}$ admite retículos.

Notar que como $c \neq 1$, esta álgebra de Lie coincide con el álgebra de Lie de arriba $\mathfrak{g}_{(-2\log|\alpha|, \phi)}$ y por lo tanto es isomorfa a $\mathfrak{g}_b$ con $b = \frac{\phi}{\log c}$.

Sea $\Sigma = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : f_{m,n}(x) = x^3 - mx^2 + nx - 1,\ \text{tiene raíces } c \in \mathbb{R}, \alpha, \overline{\alpha} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}\}$. Esta región Σ es el conjunto de los pares $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que el discriminante $\Delta_{m,n}$ de $f_{m,n}$, es negativo, esto es, $\Delta_{m,n} = -27 - 4m^3 + 18mn + m^2n^2 - 4n^3 < 0$ (Ver Figura 4.1).

Figure 4.1: Discriminante de $f_{m,n} < 0$

Notar que $c = 1$ si y sólo si $m = n$, y en este caso las otras raíces son complejas conjugadas si y sólo si $m = 0, 1, 2$.

Sea $\Sigma' = \Sigma - \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$ y para cada $k \in \mathbb{Z}$ consideramos la función $h_k : \Sigma' \to \mathbb{R}$ que asigna a (m, n) el número real $\frac{\phi_k}{\log c}$ donde $\phi_k = \phi + 2k\pi$, $\phi \in (0, \pi)$. Con esta notación, enunciamos el siguiente resultado.

Teorema 4.2.8. *El grupo de Lie simplemente conexo casi abeliano G_b con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_b$ admite retículos si y sólo si $b \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Im}(h_k)$, subconjunto numerable de $\mathbb{R}$.*

Observaciones. (i) Las solvariedades asociadas a $\mathfrak{g}_b$ son superficies de Inoue de tipo S^0 [47, 77] (ver [75] para una construcción explícita de un retículo en algunos de los grupos de Lie G_b).

(ii) Notar que si $(m, n) \in \Sigma$ entonces $(n, m) \in \Sigma$ también, dado que $f_{n,m}(x) = -x^3 f_{m,n}(\frac{1}{x})$. Entonces Σ es simétrico con respecto a la diagonal $y = x$.

(iii) La región Σ contiene todos los pares m, n tal que $m^2 < 3n$ o $n^2 < 3m$. Estas regiones están graficadas en la Figure 4.1.

(iv) Es fácil ver que para $(m, n) \in \Sigma$, la raíz real c de $f_{m,n}$ satisface $c > 1$ cuando $n < m$, por lo tanto c es un número de Pisot. Recordemos que un número de Pisot es un número algebraico real, mayor que 1 tal que todas las otras raíces de su polinomio minimal tienen valor absoluto menor que 1. Similarmente, si $n > m$, entonces c^{-1} es un número de Pisot. Más precisamente, estos números de Pisot pertenecen a la clase $\mathcal{P}$ considerada en [28].

Ejemplo 4.2.9. Para $m = 0$, $n = 3$, se puede ver que los posibles valores de b son

$$b = \left| \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(r^2+1)}{r^2-1}\right) + 2k\pi}{\log(r - r^{-1})} \right|, \quad r = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4.3 Retículos en grupos de Lie casi abelianos con estructuras LCS

En esta sección estudiaremos estructuras localmente conformes simplécticas en álgebras de Lie casi abelianas. Luego analizamos la existencia de retículos en los grupos de Lie casi abelianos asociados: en dimensión 4 determinamos todos estos grupos de Lie, y en cada dimensión mayor exhibimos un grupo de Lie casi abeliano con una familia numerable de retículos no isomorfos.

4.3.1 Álgebras de Lie casi abelianas LCS

Supongamos que existe una forma LCS ω en un álgebra de Lie casi abeliana $\mathfrak{g}$ de dimensión $2n+2$. Si $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$ es un ideal abeliano de $\mathfrak{g}$ de codimensión 1, entonces $\omega|_{\mathfrak{u}\times\mathfrak{u}}$ tiene rango $2n$. Por lo tanto existe $f_2 \in \mathfrak{u}$ y un subespacio vectorial $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{u}$ tal que $\mathfrak{u} = \mathbb{R}f_2 \oplus \mathfrak{v}$, $\omega(f_2, \mathfrak{v}) = 0$ y $\omega|_{\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}}$ es no degenerada. Como ω es no degenerada en $\mathfrak{g}$, existe $f_1 \in \mathfrak{g}$ tal que $\omega(f_1, f_2) = 1$ y

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}f_1 \oplus \mathfrak{u}. \tag{4.8}$$

La acción adjunta de f_1 en $\mathfrak{u}$ está dada por

$$[f_1, f_2] = \mu f_2 + v_0, \tag{4.9}$$

para algunos $v_0 \in \mathfrak{v}$ y $\mu \in \mathbb{R}$, mientras que para $x \in \mathfrak{v}$ tenemos

$$[f_1, x] = \eta(x) f_2 + Ax, \quad \text{con } \eta \in \mathfrak{v}^*,\ A \in \mathrm{End}(\mathfrak{v}).$$

Como ω es no degenerada en $\mathfrak{v}$, existe una base $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathfrak{v}$ tal que

$$\omega = f^1 \wedge f^2 + \sum_{i=1}^{n} u^i \wedge v^i,$$

donde $\{f^1, f^2, u^1, \dots, u^n, v^1, \dots, v^n\}$ es la base dual de $\mathfrak{g}^*$. Podemos identificar $\mathfrak{v}$ con $\mathbb{R}^{2n}$, $\mathfrak{u}$ con $\mathbb{R}^{2n+1}$, $\mathfrak{g}$ con $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{2n+1}$, y si denotamos $M = \mathrm{ad}_{f_1}|_{\mathbb{R}^{2n+1}}$, entonces podemos expresar a M como

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \mu & w \\ \hline & \\ v_0^t & A \\ & \end{array}\right), \tag{4.10}$$

donde $w = (\eta(u_1), \dots, \eta(u_n), \eta(v_1), \dots, \eta(v_n))$.

Consideraremos dos casos diferentes, dependiendo si la dimensión de $\mathfrak{g}$ es 4 o mayor que 4. A diferencia del caso localmente conforme Kähler, la descripción de las álgebras de Lie que admiten formas LCS en dimensión 4 será diferente de las álgebras de Lie en dimensiones mayores.

Dimensión de $\mathfrak{g} \geq 6$

En este caso, tenemos que $\dim \mathfrak{v} \geq 4$. Veremos a continuación que $\theta = af^1$ y $v_0 = 0$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

Fijamos $x \in \mathfrak{v}$, $x \neq 0$, como ω es no degenerada en $\mathfrak{v}$, existe $x', y, y' \in \mathfrak{v}$ tal que $\omega(x, y) = \omega(x, y') = 0$ y $\omega(x, x') = \omega(y, y') = 1$. Entonces:

- ⋄ $d\omega(x, y, y') = \theta \wedge \omega(x, y, y')$ implica que $\theta(x) = 0$, y por lo tanto $\theta|_{\mathfrak{v}} = 0$;
- ⋄ $d\omega(f_2, x, x') = \theta \wedge \omega(f_2, x, x')$ y el hecho de que $\theta|_{\mathfrak{v}} = 0$ implican que $\theta(f_2) = 0$.

Luego $\theta = af^1$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

Calculamos ahora $d\omega(f_1, f_2, x) = \theta \wedge \omega(f_1, f_2, x)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} d\omega(f_2, x, x') &= -\omega([f_1, f_2], x) - \omega([x, f_1], f_2) \\ &= -\omega(\mu f_2 + v_0, x) + \omega(\eta(x) f_2 + Ax, f_2) \\ &= -\omega(v_0, x) \end{aligned}$$

pues $\omega(f_2, \mathfrak{v}) = 0$ y $\mathfrak{u}$ es abeliano. Por otro lado, $\theta \wedge \omega(f_1, f_2, x) = \theta(f_1)\omega(f_2, x) = 0$ pues $\theta = af^1$. Como consecuencia, $\omega(v_0, x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{v}$. Del hecho que ω es no degenerada en $\mathfrak{v}$, se sigue que $v_0 = 0$.

Ahora calculamos $d\omega(f_1,x,y)=\theta\wedge\omega(f_1,x,y)$ para $x,y\in\mathfrak{v}$. Como $\theta=af^1$, el lado derecho es $\omega(f_1,x,y)=a\omega(x,y)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
d\omega(f_1,x,y)&=-\omega([f_1,x],y)-\omega([y,f_1],x)\\
&=-\omega(\eta(x)f_2+Ax,y)-\omega(x,\eta(y)f_2+Ay)\\
&=-\omega(Ax,y)-\omega(x,Ay),
\end{aligned}$$

pues f_2 es ω-ortogonal a $\mathfrak{v}$. Descomponemos $A=U+B$, con $U^{*_\omega}=U$ y $B^{*_\omega}=-B$. Recordemos que dada una transformación lineal T en un espacio vectorial simpléctico $(\mathfrak{v},\omega|_{\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}})$, su ω-adjunta T^{*_ω} está definida por $\omega(Tu,v)=\omega(u,T^{*_\omega}v)$ para cualquier $u,v\in\mathfrak{v}$. Notar que $B^{*_\omega}=-B$ significa que $B\in\mathfrak{sp}(\mathfrak{v},\omega|_{\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}})\simeq\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$.

Con esta descomposición la ecuación de arriba resulta $d\omega(f_1,x,y)=-2\omega(Ux,y)$, entonces

$$-2\omega(Ux,y)=a\omega(x,y)\quad\text{para todo } x,y\in\mathfrak{v}.$$

Se sigue que $U=-\frac{a}{2}\operatorname{Id}$ y

$$A=-\frac{a}{2}\operatorname{Id}+B,\quad\text{with } B\in\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}).$$

Por lo tanto M tiene la siguiente representación matricial con respecto a la base de arriba:

$$M=\left(\begin{array}{c|c}\mu & w\\\hline 0 & -\frac{a}{2}I+B\end{array}\right),$$

con $B\in\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$. Resumiendo, tenemos el siguiente resultado (comparar con [53]):

Teorema 4.3.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casi abeliana de dimensión $2n+2$ con $\dim\mathfrak{g}\geq 6$. Entonces $\mathfrak{g}$ admite una forma LCS si y sólo si $\mathfrak{g}$ es isomorfa a $\mathbb{R}\ltimes_M\mathbb{R}^{2n+1}$, donde la acción adjunta de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^{2n+1}$ está dada por*

$$M=\left(\begin{array}{c|c}\mu & w\\\hline 0 & \lambda I+B\end{array}\right),\tag{4.11}$$

para algún $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$, $w\in\mathbb{R}^{2n}$, $B\in\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$. La forma LCS ω es $\omega=f^1\wedge f^2+\sum_{i=1}^n u^i\wedge v^i$, y la forma de Lee es $\theta=-2\lambda f^1$. Además, $\mathfrak{g}$ es unimodular si y sólo si $\lambda=-\frac{\mu}{2n}$.

Observaciones. (i) De la misma manera se puede probar que si un álgebra de Lie casi abeliana admite una estructura simpléctica entonces es isomorfa a $\mathbb{R}\ltimes_M\mathbb{R}^{2n+1}$ con M como en (4.11) con $\lambda=0$.

(ii) Cuando $w=0$ y $B\in\mathfrak{u}(n)\subset\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$, la forma LCS es de hecho LCK. En efecto, en la notación del teorema, la estructura casi compleja J definida por $Jf_1=f_2$, $Ju_i=v_i$, $i=1,\dots,n$, es integrable y la métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle=\omega(\cdot,J\cdot)$ es compatible con J.

Corolario 4.3.2. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casi abeliana con* $\dim \mathfrak{g} \geq 6$. *Si $\mathfrak{g}$ admite una forma LCS, entonces es del segundo tipo.*

Demostración. Sea (ω, θ) una forma LCS en $\mathfrak{g}$. Del Teorema 4.3.1 tenemos que $\theta = -2\lambda f^1$. Recordemos que $\mathfrak{g}_\omega = \{x \in \mathfrak{g} : \mathrm{L}_x\omega = 0\}$, donde $\mathrm{L}_x\omega$ es la derivada de Lie de ω, o equivalentemente,

$$\mathfrak{g}_\omega = \{x \in \mathfrak{g} : \omega([x, y], z) + \omega(y, [x, z]) = 0 \text{ para todo } y, z \in \mathfrak{g}\},$$

y una estructura LCS es de segundo tipo si $\theta|_{\mathfrak{g}_\omega} \equiv 0$.

Sea $x \in \mathfrak{g}_\omega$, $x = cf_1 + v$ con $c \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Calculamos $d\omega(x, y, z) = \theta \wedge \omega(x, y, z)$ para $y, z \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Como $x \in \mathfrak{g}_\omega$ tenemos $c\lambda\omega(y, z) = 0$ para todo $y, z \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Como ω es no degenerada y $\lambda \neq 0$ obtenemos $c = 0$. Por lo tanto, $\theta|_{\mathfrak{g}_\omega}$ es idénticamente cero, entonces la estructura LCS es del segundo tipo. □

Dimensión de $\mathfrak{g} = 4$.

En esta sección procederemos de una manera diferente para determinar las álgebras de Lie casi abelianas de dimensión 4 que admiten una estructura LCS.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casi abeliana de dimensión 4 y sea μ un autovalor real de la acción adjunta sobre el ideal abeliano $\mathfrak{u}$, entonces $\mathfrak{g}$ se puede escribir como $\mathbb{R} \ltimes_M \mathbb{R}^3$ con

$$M = \left(\begin{array}{c|c} \mu & w \\ \hline 0 & A \end{array}\right),$$

con $A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, para alguna base $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Lema 4.3.3. *Con la notación de arriba, si* $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ *entonces $\mathfrak{g}$ admite una estructura LCS.*

Demostración. Es fácil ver que $\omega = f^1 \wedge f^2 + f^3 \wedge f^4$ y $\theta = -\operatorname{tr}(A)f^1$ satisfacen $d\omega = \theta \wedge \omega$ y $d\theta = 0$, donde $\{f^1, f^2, f^3, f^4\}$ es la base dual de $\mathfrak{g}^*$. □

Dada $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_M \mathbb{R}^3$, de acuerdo al Lema 4.1.1, podemos asumir que M está en su forma canónica de Jordan. En este caso hay cuatro posibilidades diferentes para M:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}, \; M_2^{\mu,\lambda} = \begin{pmatrix} \mu & & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \; M_3^{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & 1 & \\ & \mu & 1 \\ & & \mu \end{pmatrix}, \; M_4^{\mu,\lambda} = \begin{pmatrix} \mu & & \\ & \lambda & -1 \\ & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

para $\lambda, \mu, \lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \neq 0$. Los únicos casos que no son cubiertos por el Lema 4.3.3 son los siguientes:

$$M_2^{0,0} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3^{0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4^{\mu,0} = \begin{pmatrix} \mu & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por cálculo directo se puede ver que $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_M \mathbb{R}^3$ admite una estructura LCS para $M = M_2^{0,0}$, M_3^0, $M_4^{0,0}$, mientras que para $M = M_4^{\mu,0}$ con $\mu \neq 0$ el álgebra de Lie correspondiente no admite ninguna estructura LCS. Podemos resumir estos resultados en el siguiente teorema donde usamos la notación de [6].

Teorema 4.3.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casi abeliana de dimensión 4 con una estructura LCS. Entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de las siguientes álgebras de Lie:*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R} &: [e_1, e_2] = e_3 \\
\mathfrak{n}_4 &: [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4 \\
\mathfrak{r}_{3,\lambda} \times \mathbb{R} &: [e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = \lambda e_3 \\
\mathfrak{r}_{4,\mu,\lambda} &: [e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = \mu e_3, [e_1, e_4] = \lambda e_4, \ \mu\lambda \neq 0 \\
\mathfrak{r}_3 \times \mathbb{R} &: [e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = e_2 + e_3 \\
\mathfrak{r}_{4,\lambda} &: [e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = \lambda e_3, [e_1, e_4] = e_3 + \lambda e_4 \\
\mathfrak{r}_4 &: [e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = e_2 + e_3, [e_1, e_4] = e_3 + e_4 \\
\mathfrak{r}'_{3,\lambda} \times \mathbb{R} &: [e_1, e_2] = \lambda e_2 - e_3, [e_1, e_3] = e_2 + \lambda e_3 \\
\mathfrak{r}'_{4,\mu,\lambda} &: [e_1, e_2] = \mu e_2, [e_1, e_3] = \lambda e_3 - e_4, [e_1, e_4] = e_3 + \lambda e_4, \ \mu \neq 0, \ \lambda \neq 0
\end{aligned}$$

Demostración. Probaremos primero que, como mencionamos arriba, $\mathfrak{g} = \mathbb{R}f_1 \ltimes_M \mathbb{R}^3$ no admite estructuras LCS para $M = M_4^{\mu,0}$ con $\mu \neq 0$. Sea $\{f^1, f^2, f^3, f^4\}$ la base dual de $\mathfrak{g}^*$, y asumamos que (ω, θ) es una estructura LCS en $\mathfrak{g}$, donde

$$\begin{aligned}
\omega &= a_1 f^1 \wedge f^2 + a_2 f^1 \wedge f^3 + a_3 f^1 \wedge f^4 + a_4 f^2 \wedge f^3 + a_5 f^2 \wedge f^4 + a_6 f^3 \wedge f^4, \\
\theta &= b_1 f^1 + b_2 f^2 + b_3 f^3 + b_4 f^4,
\end{aligned}$$

para algunos $a_i, b_j \in \mathbb{R}$. Como θ es cerrada, tenemos que $b_2 = b_3 = b_4 = 0$. Calculando $d\omega = \theta \wedge \omega$ y usando que $\theta \neq 0$ obtenemos $a_6 = 0$, $b_1 a_4 = -\mu a_4 + a_5$ y $b_1 a_5 = -a_4 - \mu a_5$. Por lo tanto $a_4 = a_5 = 0$, lo cual es una contradicción con el hecho de que ω es no degenerada.

Para finalizar la demostración referimos a la Tabla 4.1, donde se exhiben estructuras LCS para todas las álgebras de Lie del enunciado. □

Observaciones. (i) El álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_{M_4^{0,0}} \mathbb{R}^3$ corresponde al álgebra de Lie $\mathfrak{r}'_{3,0} \times \mathbb{R}$, mientras que $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_{M_4^{\mu,0}} \mathbb{R}^3$, $\mu \neq 0$, corresponde a $\mathfrak{r}'_{4,\mu,0}$.

(ii) Entre las álgebras de Lie del Teorema 4.3.4, las unimodulares son: $\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{n}_4$, $\mathfrak{r}_{3,-1} \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{r}_{4,\lambda,-(1+\lambda)}$, $\mathfrak{r}_{4,-\frac{1}{2}}$, $\mathfrak{r}'_{3,0} \times \mathbb{R}$ and $\mathfrak{r}'_{4,\lambda,-\lambda/2}$

(iii) De acuerdo a [70], las álgebras de Lie $\mathfrak{r}_{3,\lambda} \times \mathbb{R}$ ($\lambda \neq 0, -1$), $\mathfrak{r}_{4,\mu,\lambda}$ ($\mu \neq -\lambda$ or $\mu \neq -1$), $\mathfrak{r}_3 \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{r}_{4,\lambda}$ ($\lambda \neq 0, -1$), $\mathfrak{r}_4$, $\mathfrak{r}'_{3,\lambda} \times \mathbb{R}$ ($\lambda \neq 0$) y $\mathfrak{r}'_{4,\mu,\lambda}$ ($\mu \neq 0$) no admiten ninguna forma simpléctica.

(iv) Notar que $\mathfrak{r}_{3,-1}$ es el álgebra de Lie $\mathfrak{e}(1,1)$ (también se denota por $\mathfrak{sol}^3$) del grupo de movimientos rígidos del 2-espacio de Minkowski, y $\mathfrak{r}'_{3,0}$ es el álgebra de Lie $\mathfrak{e}(2)$ del grupo de movimientos rgídos del espacio euclideo de dimensión 2.

Ahora, estudiaremos si las estructuras LCS en estas álgebras de Lie casi abelianas de dimensión 4 son de primer o segundo tipo. Probaremos primero un resultado que vale en todas las dimensiones.

Lema 4.3.5. *Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R}f_1 \ltimes_M \mathfrak{u}$ un álgebra de Lie casi abeliana como en* (4.8) *equipada con una estructura LCS (ω, θ). Si M es inversible entonces tal estructura LCS es de segundo tipo.*

Demostración. En efecto, si M es invertible entonces $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{u}$. Como $\theta([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$, se sigue que $\theta = cf^1$ para algún $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Sea $z = af_1 + v \in \mathfrak{g}_\omega$ con $a \in \mathbb{R}, v \in \mathfrak{u}$. Calculando $d\omega(z, x, y) = \theta \wedge \omega(z, x, y)$ para todo $x, y \in \mathfrak{u}$, obtenemos que $a = 0$ y por lo tanto $\mathfrak{g}_\omega \subset \mathfrak{u}$. □

Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes_M \mathbb{R}^3$ un álgebra de Lie casi abeliana de dimensión 4 con una estructura LCS. Los casos incluidos en el lema anterior son: $\mathfrak{r}_{4,\mu,\lambda}$, $\mathfrak{r}_{4,\lambda}$ ($\lambda \neq 0$), $\mathfrak{r}_4$ y $\mathfrak{r}'_{4,\mu,\lambda}$, $\lambda \neq 0$. Por lo tanto cualquier estructura LCS en estas álgebras de Lie es de segundo tipo.

Supongamos ahora que M es singular. Se probó en [22] que toda estructura LCS en un álgebra de Lie nilpotente es de primer tipo, entonces asumiremos que M no es nilpotente. Las posibles formas de Jordan de una tal matriz son las siguientes:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0, \qquad M_2^{0,\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \text{ con } \lambda \neq 0,$$

$$M_2^{\mu,0} = \begin{pmatrix} \mu & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{ con } \mu \neq 0, \qquad M_4^{0,\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \lambda & -1 \\ & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Por cálculo directo podemos verificar que todas estas álgebras de Lie admiten una estructura LCS de primer tipo y una estructura LCS de segundo tipo, excepto el caso $M_4^{0,0}$, el cual admite sólo estructuras LCS de primer tipo. Esta álgebra de Lie corresponde a $\mathfrak{r}'_{3,0} \times \mathbb{R}$ en el Teorema 4.3.4.

Demostremos que el álgebra de Lie $\mathfrak{r}'_{3,0} \times \mathbb{R}$ admite estructuras LCS sólo del primer tipo. En efecto, supongamos que $\omega = a_1 f^{12} + a_2 f^{13} + a_3 f^{14} + a_4 f^{23} + a_5 f^{24} + a_6 f^{34}$, $\theta = b_1 f^1 + b_2 f^2 + b_3 f^3 + b_4 f^4$ es una estructura LCS en $\mathbb{R}'_{3,0} \times \mathbb{R}$ con $a_i, b_j \in \mathbb{R}$. De $d\omega = \theta \wedge \omega$ obtenemos que $b_2 \neq 0$. Por otro lado, $f_2 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, entonces $\mathrm{L}_{f_2}\omega = 0$. Luego $f_2 \in \mathfrak{g}_\omega$ y $\theta(f_2) = b_2 \neq 0$. Por lo tanto (θ, ω) es de primer tipo.

Podemos resumir estos resultados en la siguiente Tabla 4.1, donde exhibimos estructuras LCS de primer y segundo tipo para cada álgebra de Lie. Los espacios vacíos significan que la correspondiente álgebra de Lie no admite ninguna estructura LCS de ese tipo específicamente.

Álgebra de Lie	LCS del primer tipo	LCS del segundo tipo
$\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$	$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ $\theta = -e^4$	
$\mathfrak{n}_4$	$\omega = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4$ $\theta = e^2$	
$\mathfrak{r}_{3,\lambda} \times \mathbb{R}$ $(\lambda \neq -1)$	$\omega = 2e^1 \wedge e^2 + (1+\lambda)e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4 - e^3 \wedge e^4$ $\theta = e^1 + e^4$	$\omega = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3$ $\theta = -(1+\lambda)e^1$
$\mathfrak{r}_{3,-1} \times \mathbb{R}$	$\omega = 2e^1 \wedge e^2 - e^2 \wedge e^4 - e^3 \wedge e^4$ $\theta = e^1 + e^4$	$\omega = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4$ $\theta = e^1$
$\mathfrak{r}_{4,\mu,\lambda}$ $(\lambda \neq -1)$		$\omega = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4$ $\theta = -(\lambda+1)e^1$
$\mathfrak{r}_{4,\mu,-1}$ $(\mu \neq 1)$		$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ $\theta = (1-\mu)e^1,$
$\mathfrak{r}_{4,1,-1}$		$\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$ $\theta = -2e^1$
$\mathfrak{r}_3 \times \mathbb{R}$	$\omega = e^1 \wedge e^2 + 2e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4 - e^3 \wedge e^4$ $\theta = e^4$	$\omega = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3$ $\theta = -2e^1$
$\mathfrak{r}_{4,\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$		$\omega = e^1 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^4$ $\theta = -2\lambda e^1$
$\mathfrak{r}_{4,0}$	$\omega = -e^1 \wedge e^2 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^4$ $\theta = e^4$	$e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4$ $\theta = -e^1$
$\mathfrak{r}_4$		$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ $\theta = -2e^1$
$\mathfrak{r}'_{3,\lambda} \times \mathbb{R}$ $(\lambda \neq 0)$	$\omega = -e^1 \wedge e^2 + 2\lambda e^1 \wedge e^3 - e^3 \wedge e^4$ $\theta = \lambda e^1 + e^4$	$\omega = e^1 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^3$ $\theta = -2\lambda e^1$
$\mathfrak{r}'_{3,0} \times \mathbb{R}$	$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ $\theta = e^4$	
$\mathfrak{r}'_{4,\mu,\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$		$\omega = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4$ $\theta = -2\lambda e^1$

Table 4.1: Estructuras LCS de primer y segundo tipo

4.3.2 Retículos en los grupos de Lie LCS asociados

Retículos en dimensión 4.

En esta sección determinaremos, salvo isomorfismo, las álgebras de Lie casi abelianas del Teorema 4.3.4 cuyos grupos de Lie simplemente conexos asociados admiten retículos. De acuerdo al Teorema 4.3.4 tenemos 8 clases, dos de ellas dependen de un parámetro. Para hacer esto usamos la clasificación de los grupos de Lie completamente solubles unimodulares de tipo $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$ en [56] y la Proposición 4.1.3.

Teorema 4.3.6. *Sea G un grupo de Lie casi abeliano, simplemente conexo, unimodular de dimensión 4 con una estructura LCS invariante a izquierda, y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Si G admite retículos entonces $\mathfrak{g}$ es isomorfa a una de las siguientes álgebras de Lie: $\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{n}_4$, $\mathfrak{r}_{3,-1} \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{r}'_{3,0} \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{r}_{4,\lambda,-(1+\lambda)}$ para una cantidad numerable de $\lambda > 1$, $\mathfrak{r}'_{4,\lambda,-\lambda/2}$ para una cantidad numerable de $\lambda > 0$.*

Demostración. Consideremos las álgebras de Lie unimodulares del Teorema 4.3.4.

Primero consideramos el caso nilpotente. Los grupos de Lie simplemente conexo asociados a las álgebras de Lie $\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$ y $\mathfrak{n}_4$ admiten retículos, debido al criterio de Malcev [59], pues estas álgebras de Lie tienen una forma racional.

Ahora, consideramos el caso de las álgebras de Lie completamente solubles, no nilpotentes: $\mathfrak{r}_{3,-1} \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{r}_{4,\lambda,-(1+\lambda)}$, $\lambda \geq 1$ y $\mathfrak{r}_{4,-1/2}$. Es bien conocido que el grupo de Lie simplemente conexo Sol^3 correspondiente a $\mathfrak{r}_{3,-1} \simeq \mathfrak{sol}^3$ admite retículos (ver por ejemplo [60]), y por lo tanto $Sol^3 \times \mathbb{R}$ también admite retículos. Ahora usamos la clasificación dada en [56], notando que $\mathfrak{r}_{4,\lambda,-(1+\lambda)} \simeq \mathfrak{sol}^4_\lambda$ para $\lambda > 1$, $\mathfrak{r}_{4,1,-2} \simeq \mathfrak{sol}^4_0$ y $\mathfrak{r}_{4,-1/2} \simeq \mathfrak{sol}'^4_0$. El grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{sol}^4_\lambda$ admite retículos para una cantidad numerable de $\lambda's$ (ver [56, Proposition 2.1]), mientras que para $\mathfrak{sol}^4_0$ y $\mathfrak{sol}'^4_0$ los grupos de Lie $\mathfrak{Sol}^4_0$ y $\mathfrak{Sol}'^4_0$ no admiten ningún retículo [56, Proposición 2.2]. Notar que $\mathfrak{Sol}^4_0 = G_0$ de la Sección §4.2 de este capítupo.

Finalmente, consideramos las álgebras de Lie no completamente solubles $\mathfrak{r}'_{3,0} \times \mathbb{R}$ y $\mathfrak{r}'_{4,\lambda,-\lambda/2}$ con $\lambda > 0$. Es bien conocido que el grupo de Lie simplemente conexo $E(2)$ correspondiente a $\mathfrak{r}'_{3,0} \simeq \mathfrak{e}(2)$ admite retículos (este hecho es también una aplicación fácil de la Proposición 4.1.3), y por lo tanto $E(2) \times \mathbb{R}$ también admite retículos. El álgebra de Lie $\mathfrak{r}'_{4,\lambda,-\lambda/2}$ con $\lambda > 0$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_b$ de la Sección §4.2, para $b = \frac{1}{\lambda}$, y hemos probado en el Teorema 4.2.8 que los correspondientes grupos de Lie simplemente conexo G_b admiten retículos para una cantidad numerable de valores del parámetro $b > 0$. $\square$

Observación 4.3.7. Se sigue de la Sección §4.2 que los únicos grupos de Lie casi abelianos de dimensión 4 con una estructura LCS invariante a izquierda y retículos que admiten una estructura LCK invariante a izquierda son $H_3 \times \mathbb{R}$ y G_b para $b \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Im}(h_k)$, un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$.

Observación 4.3.8. Las álgebras de Lie $\mathfrak{n}_4$, $\mathfrak{r}_{3,-1} \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{r}_{4,\lambda,-(1+\lambda)}$ para una cantidad numerable de $\lambda > 1$ y $\mathfrak{r}'_{3,0} \times \mathbb{R}$ proveen ejemplos de solvariedades con estructuras LCS las cuales no tienen una estructura LCK (que proviene de una estructura LCK invariante a izquierda en el grupo de Lie). En [22] se probó que una nilvariedad asociada a $\mathfrak{n}_4$ admite LCS del primer tipo pero ninguna métrica LCK. Además esta nilvariedad no es el producto de una variedad compacta de dimensión 3 y un círculo.

Retículos en dimensión ≥ 6

En esta sección construiremos ejemplos de solvariedades casi abelianas con una estructura LCS. Para $n \geq 2$, sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie casi abeliana de dimensión $2n+2$ dada por $\mathfrak{g} = \mathbb{R}f_1 \ltimes_M \mathbb{R}^{2n+1}$

con

$$M = \left(\begin{array}{c|ccccccccc} 1 & & & & & & & & & \\ \hline & 0 & & & & & & & & \\ & & \frac{1}{n} & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & \frac{n-1}{n} & & & & & \\ & & & & & -\frac{1}{n} & & & & \\ & & & & & & -\frac{2}{n} & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & -1 \end{array}\right), \tag{4.12}$$

en la base $\{f_2, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Notar que M está dada por (4.11) con

$$\mu = 1, \quad \lambda = -\frac{1}{2n}, \quad w = 0,$$
$$B = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \ldots, \frac{2n-1}{2n}, -\frac{1}{2n}, -\frac{3}{2n}, \ldots, -\frac{2n-1}{2n}\right) \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}).$$

De acuerdo al Teorema 4.3.1 $\mathfrak{g}$ admite una forma LCS $\omega = f^1 \wedge f^2 + \sum_{i=1}^n u^i \wedge v^i$ con forma de Lee $\theta = \frac{1}{n} f^1$. Del Corolario 4.3.2 obtenemos que esta estructura LCS es del segundo tipo.

El grupo de Lie simplemente conexo asociado a $\mathfrak{g}$ es $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi \mathbb{R}^{2n+1}$ donde ϕ está dada por

$$\phi(t) = e^{tM} = \left(\begin{array}{c|ccccccccc} e^t & & & & & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & & & & \\ & & e^{\frac{t}{n}} & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & e^{\frac{(n-1)t}{n}} & & & & & \\ & & & & & e^{-\frac{t}{n}} & & & & \\ & & & & & & e^{-\frac{2t}{n}} & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & e^{-t} \end{array}\right).$$

El polinomio característico de $\phi(t)$ es

$$p(x) = (x-1)(x-\rho^2)(x-\rho^{-2})(x-\rho^4)(x-\rho^{-4})\ldots(x-\rho^{2n})(x-\rho^{-2n}),$$

donde $e^t = \rho^{2n}$. Fijado $m \in \mathbb{N}, m > 2$, definimos

$$t_m = n \operatorname{arccosh}\left(\frac{m}{2}\right), \quad t_m > 0.$$

Luego $\rho_m = e^{\frac{t_m}{2n}}$ satisface $\rho_m^2 + \rho_m^{-2} = m$.

Definimos la sucesión real $a_0 = 2$, $a_1 = m$, $a_k = \rho_m^{2k} + \rho_m^{-2k}$ para $k = 3, \ldots, n$. Se ve fácilmente que a_k satisface $a_{k+1} = m a_k - a_{k-1}$ y por lo tanto $a_k \in \mathbb{Z}$ para todo k. Por lo tanto cada polinomio $(x - \rho_m^{2k})(x - \rho_m^{-2k}) = x^2 - a_k x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$, entonces podemos escribir

$$p(x) = x^{2n+1} - m_{2n} x^{2n} + m_{2n-1} x^{2n-1} + \cdots + m_1 x - 1$$

para algunos $m_1, m_2, \dots, m_{2n} \in \mathbb{Z}$. Como p tiene todas sus raíces diferentes, entonces tenemos que $\phi(t_m)$ es conjugada a la matriz compañera del polinomio p,

$$B_m = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & -m_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & -m_{2n-1} \\ & & & 1 & m_{2n} \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

De acuerdo a la Proposición 4.1.3 tenemos que G admite retículos. Más aún, el retículo es

$$\Gamma_m =: t_m\mathbb{Z} \ltimes_\phi P_m^{-1}\mathbb{Z}^{2n+1},$$

para $m > 2$, donde P_m satisface $P_m\phi(t_m)P_m^{-1} = B$. Por lo tanto para todo $m > 2$, $\Gamma_m\backslash G$ es una solvariedad con una estructura LCS.

Proposición 4.3.9. *Con la notación de arriba, las solvariedades $\Gamma_m\backslash G$ son todas no homeomorfas para diferentes valores de $m > 2$.*

Demostración. Supongamos que M_r y M_s, con $r, s > 2$ son homeomorfas. Entonces el $\pi_1(M_r)$ es isomorfo al $\pi_1(M_s)$. Como G es simplemente conexo, tenemos que los grupos fundamentales de estas solvariedades son isomorfos a los retículos Γ_r y Γ_s, por lo tanto estos retículos son isomorfos entre sí. Además como G es completamente soluble, el teorema de rigidez de Saito [72] dice que este isomorfismo se extiende a un automorfismo del grupo de Lie G. Ahora, como los retículos difieren entre sí por un automorfismo de G, se sigue de [45, Theorem 2.5] que la matriz entera B_r (como en (4.13)) es conjugada a B_s o a su inversa en $GL(n, \mathbb{Z})$. Finalmente, se puede ver que esto ocurre si y solamente si $r = s$. □

Observación 4.3.10. Se puede ver fácilmente que las solvariedades con estructuras LCS $M_m = \Gamma_m\backslash G$ no admiten estructuras complejas invariantes, por lo tanto no admiten ninguna estructura LCK invariante. Sin embargo, estas solvariedades admiten formas simplécticas, por ejemplo, $\eta = f^1 \wedge u^1 + f^2 \wedge v^n + \sum_{i=1}^{n-1} u^{i+1} \wedge v^i$.

Cohomología de de Rham y adaptada de las solvariedades $M_m = \Gamma_m\backslash G$

Comenzaremos estudiando la cohomología de de Rham de la solvariedad $M_m = \Gamma_m\backslash G$. Como G es completamente soluble, sigue de (1.30) que $H^k_{dR}(M_m)$ es isomorfo al grupo de cohomología del álgebra de Lie $H^k(\mathfrak{g})$, por lo tanto, tenemos que estudiar el complejo de Chevalley-Eilenberg del álgebra de Lie casi abeliana $\mathfrak{g} = \mathbb{R}f_1 \ltimes_M \mathbb{R}^{2n+1}$ con M como en (4.12). Después de un cambio de base en el ideal $\mathfrak{u} = \mathbb{R}^{2n+1}$, podemos asumir que M está dada por

$$M = \operatorname{diag}\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1, -\frac{1}{n}, -\frac{2}{n}, \dots, -1\right).$$

De acuerdo a [73], el k-ésimo número de Betti de $\mathfrak{g}$, $\beta^n_k = \dim H^k(\mathfrak{g})$, se puede calcular como sigue, donde $Z^j(\mathfrak{g}) = \{\alpha \in \bigwedge^j \mathfrak{g}^* : d\alpha = 0\}$:

$$\beta^n_k = \dim H^k(\mathfrak{g}) = \dim Z^k(\mathfrak{g}) + \dim Z^{k-1}(\mathfrak{g}) - \binom{2n+2}{k-1}. \tag{4.14}$$

Para calcular $\dim Z^k(\mathfrak{g})$, notemos que podemos descomponer el ideal $\mathfrak{u}$ como $\mathfrak{u} = \mathbb{R}f_2 \oplus \mathfrak{g}'$, donde f_2 es un generador del centro de $\mathfrak{g}$. Denotemos por simplicidad $\mathfrak{v} := \mathfrak{g}'$.

Recordando que $\beta_1^n = \dim(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}])$, se sigue que $\beta_1^n = 2$. En efecto, una base de $Z^1(\mathfrak{g})$ está dada por $\{f^1, f^2\}$. Debido a la dualidad de Poincaré, tenemos que $\beta_{2n+1}^n = \beta_1^n = 2$. Claramente, $\beta_0^n = \beta_{2n+2}^n = 1$.

Consideremos ahora $2 \leq k \leq 2n$. Dada una k-forma cerrada $\alpha \in Z^k(\mathfrak{g})$, se puede descomponer de manera única como $\alpha = f^1 \wedge \beta + f^2 \wedge \gamma + \delta$, con $\beta \in \bigwedge^{k-1}\mathfrak{u}^*$, $\gamma \in \bigwedge^{k-1}\mathfrak{v}^*$, $\delta \in \bigwedge^{k}\mathfrak{v}^*$, con $d\gamma = 0$ y $d\delta = 0$. Por lo tanto, tenemos una correspondencia uno a uno

$$Z^k(\mathfrak{g}) \longleftrightarrow (\textstyle\bigwedge^{k-1}\mathfrak{u}^*) \times (\bigwedge^{k-1}\mathfrak{v}^* \cap Z^{k-1}(\mathfrak{g})) \times (\bigwedge^{k}\mathfrak{v}^* \cap Z^{k}(\mathfrak{g})).$$

Ahora, para calcular $\dim(\bigwedge^k\mathfrak{v}^* \cap Z^k(\mathfrak{g}))$ consideramos, para $1 \leq p, q \leq n$, el conjunto

$$\left\{(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q) : 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n,\, 1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n,\, \sum_{r=1}^{p} i_r = \sum_{s=1}^{q} j_s\right\},$$

y denotemos por $d_{p,q}^n$ su cardinal. Tomando $D_k^n := \sum_{p+q=k} d_{p,q}^n$ para $k \geq 2$, se puede demostrar que $\dim(\bigwedge^k\mathfrak{v}^* \cap Z^k(\mathfrak{g})) = D_k^n$. Definamos también $d_{0,0}^n = 1$, $d_{1,0}^n = d_{0,1}^n = 0$, entonces $D_0^n = 1$, $D_1^n = 0$. Usando esto junto con (4.14), obtenemos fácilmente que

$$\beta_k^n = D_{k-2}^n + 2D_{k-1}^n + D_k^n, \qquad k \geq 2. \tag{4.15}$$

Aunque no obtenemos una fórmula explícita para los números de Betti de M_m, usando (4.15) podemos obtener algunas propiedades sobre la paridad de estos números.

Es fácil ver que $d_{p,q}^n = d_{q,p}^n$ y $d_{p,q}^n = d_{n-p,n-q}^n$, y además tenemos el siguiente lema:

Lema 4.3.11.

(i) $d_{1,1}^n = d_{n-1,n-1}^n = n$ *y* $d_{k,k}^n \equiv \binom{n}{k} \pmod 2$.

(ii) *Si n es par entonces* $d_{1,2}^n = \frac{n(n-2)}{4}$ *y si n es impar entonces* $d_{1,2}^n = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$.

(iii) $D_k^n = D_{2n-k}^n$ *para todo* $k = 0, \ldots, n$, *además* $D_0^n = 1$, $D_1^n = 0$, $D_2^n = n$.

(iv) *Si k es impar, entonces D_k^n es par.*

(v) $D_{2k}^n \equiv \binom{n}{k} \pmod 2$.

Teniendo en cuenta este lema, la demostración del siguiente resultado es directa.

Proposición 4.3.12.

(i) $\beta_0^n = 1$, $\beta_1^n = 2$ *and* $\beta_2^n = n + 1$.

(ii) *Si n es par, entonces* $\beta_3^n = \frac{n(n+1)}{2}$ *y si n es impar entonces* $\beta_3^n = \frac{(n+1)^2}{2}$.

(iii) *Si k es impar, entonces β_k^n es par.*

(iv) $\beta_{2k}^n \equiv \binom{n+1}{k} \pmod 2$.

Observación 4.3.13. De acuerdo al teorema de Lucas, la paridad del coeficiente binomial $\binom{r}{s}$ se puede determinar a través de la representación binaria de r y s. En efecto, si $r = \sum_{i=1}^{m} a_i 2^i$ y $s = \sum_{i=1}^{m} b_i 2^i$ con $a_i, b_i \in \{0, 1\}$, $a_m \neq 0$, entonces

$$\binom{r}{s} \equiv \prod_{i=1}^{m} \binom{a_i}{b_i} \pmod 2,$$

donde $\binom{a_i}{b_i} = 0$ si $a_i < b_i$. En particular, $\binom{r}{s}$ es par si y sólo si existe i tal que $a_i = 0$ y $b_i = 1$. Por ejemplo, si $r = 2^l - 1$ entonces $\binom{r}{s}$ es impar para cualquier $0 \leq s \leq r$, y si $r = 2^l$ entonces $\binom{r}{s}$ es par para cualquier $1 \leq s \leq r - 1$.

Calculamos los números de Betti en algunos casos de dimensiones bajas. Por ejemplo, en el caso de dimensión 6 obtenemos $\beta_1 = \beta_5 = 2$, $\beta_2 = \beta_4 = 3$, $\beta_3 = 4$.

n	$\dim \mathfrak{g}$	números de Betti
2	6	(1,2,3,4,3,2,1)
3	8	(1,2,4,8,10,8,4,2,1)
4	10	(1,2,5,12,20,24,20,12,5,2,1)
5	12	(1,2,6,18,37,56,64,56,37,18,6,2,1)
6	14	(1,2,7,24,61,116,167,188,167,116,61,24,7,2,1)

Table 4.2: Números de Betti

Ahora, estudiamos la cohomología adaptada de las solvariedades $M_m = \Gamma_m \backslash G$. Como G es completamente soluble, se sigue de (1.31) que $H_\theta^k(M_m)$ es isomorfo al grupo de cohomología adaptada de álgebra de Lie $H_\theta^k(\mathfrak{g})$. Para esto, trabajamos de la misma manera que para el caso de la cohomología de de Rham.

Sea $\tilde{\beta}_k^n = \dim H_\theta^k(\mathfrak{g})$ el k-esimo número de betti adaptado de $\mathfrak{g}$. Estos números satisfacen una ecuación como en (4.14). En efecto, tomando $Z_\theta^j(\mathfrak{g}) = \{\alpha \in \bigwedge^j \mathfrak{g}^* : d_\theta \alpha = 0\}$ tenemos

$$\tilde{\beta}_k^n = \dim H_\theta^k(\mathfrak{g}) = \dim Z_\theta^k(\mathfrak{g}) + \dim Z_\theta^{k-1}(\mathfrak{g}) - \binom{2n+2}{k-1}. \tag{4.16}$$

Notar que $\dim Z_\theta^1(\mathfrak{g}) = 2$. Denotamos por $\tilde{f}^1$ y $\tilde{f}^2$ los generadores de $Z_\theta^1(\mathfrak{g})$, donde $\tilde{f}^1$ coincide con f^1 de arriba. Luego podemos descomponer el ideal $\mathfrak{u}$ como $\mathfrak{u} = \mathbb{R}\tilde{f}_2 \oplus \mathfrak{v}$ para alguna subálgebra abeliana $\mathfrak{v}$ de dimensión $2n$. Es fácil ver que

$$\tilde{\beta}_1^n = 1, \qquad \tilde{\beta}_2^n = n + 1.$$

Consideremos $2 \leq k \leq 2n$. Dada una k-forma d_θ-cerrada $\alpha \in Z_\theta^k(\mathfrak{g})$, se puede descomponer de manera única como $\alpha = \tilde{f}^1 \wedge \beta + \tilde{f}^2 \wedge \gamma + \delta$, con $\beta \in \bigwedge^{k-1} \mathfrak{u}^*$, $\gamma \in \bigwedge^{k-1} \mathfrak{v}^*$, $\delta \in \bigwedge^k \mathfrak{v}^*$, donde $d_\theta \gamma = 0$ y $d_\theta \delta = 0$. Por lo tanto, tenemos una correspondencia uno a uno

$$Z_\theta^k(\mathfrak{g}) \longleftrightarrow (\textstyle\bigwedge^{k-1} \mathfrak{u}^*) \times (\bigwedge^{k-1} \mathfrak{v}^* \cap Z_\theta^{k-1}(\mathfrak{g})) \times (\bigwedge^k \mathfrak{v}^* \cap Z_\theta^k(\mathfrak{g})).$$

Para calcular $\dim(\bigwedge^k \mathfrak{v}^* \cap Z^k_\theta(\mathfrak{g}))$, consideramos para $1 \leq p, q \leq n$, el conjunto

$$\left\{(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q) : 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n,\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n,\ \sum_{r=1}^{p} i_r + 1 = \sum_{s=1}^{q} j_s\right\},$$

y denotamos por $\tilde{d}^n_{p,q}$ su cardinal. Tomando $\tilde{D}^n_k := \sum_{p+q=k} \tilde{d}^n_{p,q}$ para $k \geq 2$, se puede demostrar que $\dim\left(\bigwedge^k \mathfrak{v}^* \cap Z^k_\theta(\mathfrak{g})\right) = \tilde{D}^n_k$. Definimos también $\tilde{d}^n_{0,0} = \tilde{d}^n_{1,0} = 0$, $\tilde{d}^n_{0,1} = 1$, entonces $\tilde{D}^n_0 = 0$, $\tilde{D}^n_1 = 1$.

Se sigue fácilmente de (4.16) que

$$\tilde{\beta}^n_k = \tilde{D}^n_{k-2} + 2\tilde{D}^n_{k-1} + \tilde{D}^n_k, \qquad k \geq 2. \tag{4.17}$$

Se puede ver que $\tilde{d}^n_{p,q} = \tilde{d}^n_{n-q,n-p}$, entonces tenemos que $\tilde{D}^n_k = \tilde{D}^n_{2n-k}$, y por lo tanto

$$\tilde{\beta}^n_k = \tilde{\beta}^n_{2n-k}, \qquad \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k \tilde{\beta}^n_k = 0.$$

Usando (4.17) y este hecho podemos calcular los números de Betti adaptados para dimensiones bajas. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

n	$\dim \mathfrak{g}$	números de Betti adaptados
2	6	$(0, 1, 3, 4, 3, 1, 0)$
3	8	$(0, 1, 4, 7, 8, 7, 4, 1, 0)$
4	10	$(0, 1, 5, 12, 19, 22, 19, 12, 5, 1, 0)$
5	12	$(0, 1, 6, 17, 35, 55, 63, 55, 35, 17, 6, 1, 0)$
6	14	$(0, 1, 7, 24, 59, 112, 165, 188, 165, 112, 59, 24, 7, 1, 0)$

Table 4.3: Números de Betti adaptados

CAPÍTULO 5

Otros resultados sobre estructuras LCS y LCK

5.1 Álgebras de Lie con estructuras LCS de primer tipo

En esta sección daremos condiciones para que ciertas estructuras LCS en álgebras de Lie unimodulares sean de primer tipo. Específicamente probaremos el siguiente resultado.

Teorema 5.1.1. *Sea (ω, θ) una estructura LCS en un álgebra de Lie unimodular $\mathfrak{g}$. Si existe $A \in \mathfrak{g}$ tal que $\theta(A) = 1$ y ad_A tiene autovalores imaginarios puros, es decir, en $i\mathbb{R}$, entonces (ω, θ) es de primer tipo.*

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{g}$ admite una estructura LCS (ω, θ). Para probar que esta estructura LCS es de primer tipo utilizaremos el siguiente resultado que apareció en [22]: una estructura LCS (ω, θ) en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ unimodular es de primer tipo si y solamente si ω es d_θ-exacta. Específicamente probaremos que $H^2_\theta(\mathfrak{g}) = 0$.

Sea $A \in \mathfrak{g}$ tal que $\theta(A) = 1$ y ad_A tiene autovalores imaginarios puros y sea

$$\operatorname{ad}^*_A : (\ker\theta)^* \to (\ker\theta)^*,$$

el operador adjunto de $\operatorname{ad}_A : \ker\theta \to \ker\theta$. Este operador se puede extender a $\bigwedge^*(\ker\theta)^*$ por

$$\operatorname{ad}^*_A(\alpha \wedge \beta) = \operatorname{ad}^*_A \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \operatorname{ad}^*_A \beta,$$

para $\alpha, \beta \in (\ker\theta)^*$. Como ad^*_A conmuta con la derivada exterior d, define un mapa en cohomología

$$\operatorname{ad}^*_A : H^k(\ker\theta) \to H^k(\ker\theta).$$

Sea $\operatorname{Spec}^k(\theta)$ el conjunto de los autovalores del aperador $\operatorname{ad}^*_A : H^k(\ker\theta) \to H^k(\ker\theta)$. Se sigue de [61] que la cohomología adaptada $H^*_\theta(\mathfrak{g})$ es no trivial si y solamente si

$$1 \in \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{Spec}^k(\theta).$$

Los autovalores de ad^*_A en $\bigwedge^k(\ker\theta^*)$ son sumas de k autovalores de ad^*_A en $\ker\theta^*$ (ver [10]). Se puede ver que los autovalores de ad^*_A en $H^k(\ker\theta)$ forman un subconjunto de los anteriores, es decir, son también sumas de k autovalores de ad_A^*, o equivalentemente, de ad_A. Luego como ad_A tiene autovalores imaginarios puros entonces $1 \notin \mathrm{Spec}^k(\theta)$ para ningún k, y por lo tanto $H_\theta^*(\mathfrak{g})$ es trivial. En particular, $H_\theta^2(\mathfrak{g}) = \{0\}$, entonces ω es d_θ-exacta y así obtenemos que la estructura LCS (ω, θ) es de primer tipo. □

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real, diremos que $\mathfrak{g}$ es *imaginaria pura* si los autovalores de los operadores ad_X son imaginarios puros para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Corolario 5.1.2. *Si es $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie unimodular imaginaria pura entonces todo estructura LCS en $\mathfrak{g}$ (si admite) es de primer tipo.*

Observación 5.1.3. El Corolario 5.1.2 generaliza el resultado de [22] que dice que toda estructura LCS en un álgebra de Lie nilpotente es de primer tipo, pues toda álgebra de Lie nilpotente es obviamente imaginaria pura.

Observación 5.1.4. De acuerdo al Teorema 3.1.19, la estructura LCS subyacente a una estructura Vaisman en un álgebra de Lie soluble unimodular es de primer tipo.

Observación 5.1.5. Como demostramos al final de la Sección 4.3.1 el álgebra de Lie $\mathfrak{r}'_{3,0} \times \mathbb{R}$ admite estructuras LCS sólo del primer tipo. Este hecho se puede ver ahora como consecuencia del Corolario 5.1.2.

Veremos a continuación otro ejemplo de un álgebra de Lie que satisface las condiciones del Corolario 5.1.2. Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R}A \ltimes \mathfrak{h}_3$ el álgebra de Lie dada por $[A, e_1] = ae_1 + be_2 + xe_3$, $[A, e_2] = ce_1 - ae_2 + ye_3$, $[e_1, e_2] = e_3$ y $e_3 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, en una base $\{A, e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathfrak{g}$, con $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$. Es fácil ver que $\mathfrak{g}$ es imaginaria pura si y sólo si $a^2 + bc < 0$, y en este caso se ve que cualquiera de estas álgebras es isomorfa a la que tiene los siguientes corchetes:

$$[A, e_1] = -e_2, \quad [A, e_2] = e_1, \quad [e_1, e_2] = e_3, \quad e_3 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}).$$

Esta álgebra se corresponde con $\mathfrak{d}'_{4,0}$ de [6].

Determinaremos ahora las formas LCS en $\mathfrak{d}'_{4,0}$. Se ve fácilmente que si (ω, θ) es una estructura LCS en $\delta'_{4,0}$, entonces (ω, θ) está dada por

$$\omega = a_1\alpha \wedge e^1 + a_2\alpha \wedge e^2 + a_3\alpha \wedge e^3 + a_3 e^1 \wedge e^2, \quad \theta = \alpha,$$

donde $\{\alpha, e^1, e^2, e^3\}$ es la base dual, para ciertos $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ y $a_3 \neq 0$. Se sigue del Corolario 5.1.2 que todas estas estructuras LCS son de primer tipo. Es sencillo verificar este hecho también a partir de la definición.

5.2 Construcción de álgebras de Lie con estructuras LCS de segundo tipo

En esta sección daremos un método de construcción de nuevos ejemplos de álgebras de Lie con estructuras LCS a partir de un álgebra de Lie que ya admite tal estructura y una representación compatible.

Sea $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie, (ω_1, θ_1) una estructura LCS en $\mathfrak{h}$, y sea (V, ω_0) un espacio vectorial simpléctico de dimensión finita $2n$. Consideremos una representación

$$\pi : \mathfrak{h} \to \mathrm{End}(V).$$

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie dada por $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes_\pi V$, equipada con la 2-forma no degenerada ω dada por $\omega|_\mathfrak{h} = \omega_1$ y $\omega|_V = \omega_0$. Definimos la 1-forma $\theta \in \mathfrak{g}^*$ mediante $\theta|_\mathfrak{h} = \theta_1$ y $\theta|_V = 0$.

Veremos a continuación cuándo el par (ω, θ) es una estructura LCS en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Calculando $d\omega = \theta \wedge \omega$ se puede ver fácilmente que (ω, θ) es una estructura LCS si y solamente si se satisface la siguiente condición:

$$-\omega(\pi(X)Y, Z) + \omega(\pi(X)Z, Y) = \theta(X)\omega(Y, Z), \tag{5.1}$$

para $X \in \mathfrak{h}$ y $Y, Z \in V$.

Denotamos por S y ρ las partes ω-simétrica y ω-antisimétrica de π. Es decir, para cada $X \in \mathfrak{h}$,

$$\pi(X) = S(X) + \rho(X),$$

con $S(X)$ ω-simétrica y $\rho(X)$ ω-antisimétrica respecto de la 2-forma no degenerada ω.

Es fácil verificar que (5.1) se satisface si y sólo si $-2S(X) = \theta(X)\,\mathrm{Id}$ para todo $X \in \mathfrak{h}$. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.2.1. *Con la notación de arriba, (ω, θ) es una estructura LCS en $\mathfrak{g}$ si y sólo si para todo $X \in \mathfrak{h}$ vale que $\pi(X) = -\frac{1}{2}\theta(X)\,\mathrm{Id} + \rho(X)$ con $\rho(X) \in \mathfrak{sp}(V, \omega_0)$. Más aún, $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{sp}(V, \omega_0)$ es una representación.*

Proof. Como ya dijimos, (ω, θ) es una estructura LCS en $\mathfrak{g}$ si y sólo si para todo $X \in \mathfrak{h}$ vale que $\pi(X) = -\frac{1}{2}\theta(X)\,\mathrm{Id} + \rho(X)$ con $\rho(X) \in \mathfrak{sp}(V, \omega_0)$. Falta ver que $\rho(X) : \mathfrak{h} \to \mathfrak{sp}(V, \omega_0)$ es una representación. Calculamos

$$\begin{aligned}
\pi([X, Y]) &= [\pi(X), \pi(Y)] \\
&= [S(X) + \rho(X), S(Y) + \rho(Y)] \\
&= [\rho(X), \rho(Y)],
\end{aligned}$$

pues $S(X) = -\frac{1}{2}\theta(X)$. Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
\pi([X, Y]) &= S([X, Y]) + \rho([X, Y]) \\
&= -\frac{1}{2}\theta([X, Y]) + \rho([X, Y]) \\
&= \rho([X, Y]),
\end{aligned}$$

pues θ es cerrada. $\square$

Dado $X \in \mathfrak{h}$ el operador ad_X se puede escribir como

$$\mathrm{ad}_X^\mathfrak{g} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{ad}_X^\mathfrak{h} & \\ \hline & \pi(X) \end{array}\right),$$

para algunas bases de $\mathfrak{h}$ y de V. Luego tenemos que $\mathfrak{g}$ es unimodular si y solamente si $\mathrm{tr}(\pi(X)) = -\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X^\mathfrak{h})$, utilizando la caracterización del Teorema 5.2.1 se sigue que

$$\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X^\mathfrak{h}) = -\mathrm{tr}\left(-\frac{1}{2}\theta(X)\,\mathrm{Id} + \rho(X)\right) = n\theta(X).$$

Por lo tanto $\mathfrak{g}$ es unimodular si y sólo si $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_X^{\mathfrak{h}}) = n\theta(X)$ para todo $X \in \mathfrak{h}$.

En el siguiente resultado probaremos que todas estas estructuras LCS construidas a partir del Teorema 5.2.1 son del segundo tipo.

Proposición 5.2.2. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes_\pi V$ el álgebra de Lie con una estructura LCS (ω, θ) construida como arriba, entonces (ω, θ) es de segundo tipo.*

Demostración. Recordemos de (1.27) que $\mathfrak{g}_\omega = \{X \in \mathfrak{g} : \mathrm{L}_X\omega = 0\}$ y que la estructura LCS (ω, θ) se dice de segundo tipo si $\theta|_{\mathfrak{g}_\omega} \equiv 0$.

Sea $X \in \mathfrak{g}_\omega$, $X = cA + H + Y$ con $A \in \mathfrak{h}$ tal que $\theta(A) = 1$, $c \in \mathbb{R}$, $H \in \ker\theta \cap \mathfrak{h}$ y $X \in V$. Entonces $\omega([X, Z], W) + \omega(Z, [X, W]) = 0$ para todo $Z, W \in \mathfrak{g}$. En particular, si tomamos $Z, W \in V$ tenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \omega([X, Z], W) + \omega(Z, [X, W]) \\
&= \omega([cA + H + Y, Z], W) + \omega(Z, [cA + H + Y, W]) \\
&= \omega(c\pi(A)Z + \pi(H)Z, W) + \omega(Z, c\pi(A)W + \pi(H)W) \\
&= \omega(-\frac{c}{2}Z + c\rho(A)Z + \rho(H)Z, W) + \omega(Z, -\frac{c}{2}W + c\rho(A)W + \rho(H)W) \\
&= -\frac{c}{2}\omega(Z, W) + c\omega(\rho(A)Z, W) + \omega(\rho(H)Z, W) \\
&\quad - \frac{c}{2}\omega(Z, W) + c\omega(Z, \rho(A)W) + \omega(Z, \rho(H)W) \\
&= -c\omega(Z, W),
\end{aligned}$$

para todo $Z, W \in V$, donde hemos usado que ρ es antisimétrica para la última igualdad. Como ω es no degenerada en V podemos elegir $Z, W \in V$ tales que $\omega(Z, W) \neq 0$, y por lo tanto obtenemos que $c = 0$. Luego $\mathfrak{g}_\omega \subset \ker\theta$, entonces $\theta|_{\mathfrak{g}_\omega} \equiv 0$ y así tenemos que la estructura LCS (ω, θ) es de segundo tipo. $\square$

Nota. De acuerdo al Teorema 5.2.1 tenemos un método de construcción de nuevos ejemplos de álgebras de Lie (unimodulares) con estructuras LCS, de segundo tipo, a partir de álgebras que ya admiten estructuras LCS. Este método resulta interesante ya que se sabe muy poco de las estructuras LCS de segundo tipo, por el contrario las de primer tipo son más fáciles de tratar (ver [22]).

5.3 Construcción de álgebras de Lie con estructuras LCK

En esta sección aplicaremos el método de construcción de álgebras de Lie con estructuras LCS de la sección anterior aplicado al caso de un álgebra de Lie que ya admite una estructura LCK y una representación compatible.

Sea $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie con una estructura LCK $(J_1, \langle\cdot\,,\cdot\rangle_1)$, y sea V un espacio vectorial de dimensión finita $2n$ con una estructura hermitiana $(J_0, \langle\cdot\,,\cdot\rangle_0)$. Consideremos además una representación

$$\pi : \mathfrak{h} \to \operatorname{End}(V).$$

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie dada por $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes_\pi V$, equipada con la estructura hermitiana $(J, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ dada por $\langle\cdot\,,\cdot\rangle|_{\mathfrak{h}} = \langle\cdot\,,\cdot\rangle_1$, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle|_V = \langle\cdot\,,\cdot\rangle_0$ y $J|_{\mathfrak{h}} = J_1$, $J|_V = J_0$.

Se probó en [19] que si $\pi(X) \circ J_0 = J_0 \circ \pi(X)$ para todo $X \in \mathfrak{h}$, es decir $\pi(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{n}, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$, entonces la estructura casi compleja J en $\mathfrak{g}$ resulta integrable.

Sea θ_1 la forma de Lee en $\mathfrak{h}$. Definimos en $\mathfrak{g}$ la 1-forma θ dada por, $\theta(\mathfrak{h}) = \theta_1(\mathfrak{h})$ y $\theta|_V = 0$. Calculando $d\omega = \theta \wedge \omega$ se puede ver que ω es una forma LCK en $\mathfrak{g}$ con forma de Lee θ si y solamente si se satisface la siguiente condición:

$$-\omega(\pi(X)Y, Z) + \omega(\pi(X)Z, Y) = \theta(X)\omega(Y, Z), \tag{5.2}$$

para $X \in \mathfrak{h}$ y $Y, Z \in V$, al igual que en el caso LCS.

Si denotamos por S y ρ las partes simétrica y antisimétrica de π respecto del producto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, se puede verificar que (5.2) se satisface si y sólo si $-2S(X) = \theta(X)\,\mathrm{Id}$ para todo $X \in \mathfrak{h}$. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.3.1. *Con la notación de arriba $(J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ es una estructura LCK en $\mathfrak{g}$ si y sólo si $\pi(X) = -\frac{1}{2}\theta(X)\,\mathrm{Id} + \rho(X)$ con $\rho(X) \in \mathfrak{u}(n)$ para $X \in \mathfrak{h}$. Más aún $\rho : \mathfrak{h} \to \mathfrak{u}(n)$ es una representación.*

Demostración. Como ya dijimos $(J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ es una estructura LCK en $\mathfrak{g}$ si y sólo si para todo $X \in \mathfrak{h}$ se tiene que $\pi(X) = -\frac{1}{2}\theta(X)\,\mathrm{Id} + \rho(X)$. Además, de la misma manera que en el caso LCS, ρ resulta una representación de $\mathfrak{h}$. Luego sólo falta ver que $\rho(X) \in \mathfrak{u}(n)$, pero este hecho se sigue de que si $\pi(X)$ conmuta con J, entonces su parte simétrica $S(X)$ y su parte antisimétrica $\rho(X)$ conmutan con J también. Por lo tanto $\rho(X) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{so}(n) = \mathfrak{u}(n)$ para todo $X \in \mathfrak{h}$. $\square$

Al igual que en el caso LCS tenemos que $\mathfrak{g}$ es unimodular si y sólo si $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_X^{\mathfrak{h}}) = n\theta(X)$ para todo $X \in \mathfrak{h}$. En particular se debe cumplir que $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_A^{\mathfrak{h}}) = n = \frac{\dim V}{2} \in \mathbb{N}$. Esta condición es suficiente para el caso en que el conmutador $\mathfrak{g}' = \ker\theta$. Observamos entonces que para obtener ejemplos unimodulares debemos comenzar con un álgebra $\mathfrak{h}$ no unimodular.

Observación 5.3.2. Si el álgebra de Lie inicial $\mathfrak{h}$ es soluble no nilpotente, luego $\rho(\mathfrak{h})$ es soluble y como $\rho(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{u}(n)$ y $\mathfrak{u}(n)$ es compacta, entonces obtenemos que $\rho(\mathfrak{h})$ está contenida en una subálgebra abeliana maximal de $\mathfrak{u}(n)$. En particular $\rho(\mathfrak{h}') = 0$. Más aún $J \in \mathfrak{u}(n)$ está en la misma subálgebra abeliana maximal que contiene a $\rho(\mathfrak{h})$.

Observación 5.3.3. Según [48], las variedades de Oeljeklaus-Toma son solvariedades equipadas con una estructura LCK invariante. Estas variedades fueron utilizadas como contraejemplo para una conjetura de Vaisman sobre los números de Betti de variedades LCK ([64]). Pudimos probar que las álgebras de Lie asociadas a estas variedades se pueden obtener mediante la construcción dada en el Teorema 5.3.1.

La siguiente proposición da ciertas propiedades que posee un álgebra de Lie con una estructura LCK construida como en el Teorema 5.3.1.

Proposición 5.3.4. *Sea $\mathfrak{h}$ un álgebra de Lie soluble y sean $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes_\pi V$ y $(J, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ una estructura LCK en $\mathfrak{g}$ definidas como arriba, entonces*

(a) $\pi(A)$ es un isomorfismo.

(b) El centro de $\mathfrak{g}$ es $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \cap \ker\theta \cap \ker\rho \subset \mathfrak{h}$.

(c) El conmutador de $\mathfrak{g}$ es $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}' \oplus V$.

(d) El nilradical de $\mathfrak{g}$ es $\mathrm{nilrad}(\mathfrak{g}) = (\mathrm{nilrad}(\mathfrak{h}) \cap \ker\theta \cap \ker\rho) \oplus V$.

Demostración. Para la parte (a) notemos que $\pi(A) = -\frac{1}{2}\operatorname{Id} + \rho(A)$. Si $\pi(A)v = 0$, entonces $\rho(A)v = \frac{1}{2}v$, y como $\rho(A)$ es antisimétrica entonces $v = 0$.

Supongamos que $Y = X + v \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ con $X \in \mathfrak{h}$ y $v \in V$, entonces $[A, Y] = 0$, lo cual implica que $[A, X] = \frac{1}{2}v - \rho(A)v$. Como $[A, X] \in \mathfrak{h}$ y $\frac{1}{2}v - \rho(A)v \in V$ tenemos que $\rho(A)v = \frac{1}{2}v$, y por lo tanto $v = 0$. Además $Y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ implica que $[H, Y] = 0$ para todo $H \in \mathfrak{h}$, luego $Y \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Finalmente, de $0 = [Y, w] = [X, w]$ para todo $w \in V$ obtenemos que $\rho(X)w = \frac{1}{2}\theta(X)w$, de nuevo la antisimetría de $\rho(X)$ implica que $\rho(X) = \theta(X) = 0$. Por lo tanto $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \cap \ker\theta \cap \ker\rho$, la otra contención es obvia, de esta manera obtenemos (b).

Por (a) sabemos que $V \subset \mathfrak{g}'$, además claramente $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$. Luego de la definición de $\mathfrak{g}$ sabemos que no hay más corchetes posibles, por lo tanto $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}' \oplus V$.

Para el nilradical de $\mathfrak{g}$ notemos que la contención $(\operatorname{nilrad}(\mathfrak{h}) \cap \ker\theta \cap \ker\rho) \oplus V \subset \operatorname{nilrad}(\mathfrak{g})$ es directa. Para la otra contención basta verificar que $\operatorname{nilrad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{h} \subset \operatorname{nilrad}(\mathfrak{h}) \cap \ker\theta \cap \ker\rho$. Sea $X = aA + Y \in \operatorname{nilrad}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{h}$ con $a \in \mathbb{R}$, $Y \in \ker\theta \cap \mathfrak{h}$.

$$\operatorname{ad}_X^{\mathfrak{g}} = \left(\begin{array}{c|c} \operatorname{ad}_X^{\mathfrak{h}} & \\ \hline & \pi(X) \end{array}\right),$$

donde $\pi(X) = a(-\frac{1}{2}\operatorname{Id} + \rho(A)) + \rho(Y)$. Como ad_X debe ser nilpotente en V y la representación ρ es antisimétrica entonces $a = 0$ y por lo tanto $X \in \ker\theta$. Más aún $\rho(X) = 0$, entonces $X \in \ker\rho$. De esta manera

$$\operatorname{ad}_X^{\mathfrak{g}} = \left(\begin{array}{c|c} \operatorname{ad}_X^{\mathfrak{h}} & \\ \hline & 0 \end{array}\right),$$

entonces $X \in \operatorname{nilrad}(\mathfrak{h})$. □

5.3.1 Ejemplo

Sea $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{a,b}$ el álgebra de Lie dada por:

$$[e_1, e_2] = ae_2 - be_3, \quad [e_1, e_3] = be_2 + ae_3, \quad [e_1, e_4] = 2ae_4, \quad [e_2, e_3] = -e_4,$$

con $ab \neq 0$ en una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Sea J la estructura casi compleja definida por $Je_1 = e_4$ y $Je_2 = e_3$, se verifica fácilmente que es J es integrable. La 2-forma fundamental está dada por $\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$, donde $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ es la base dual. Se puede ver que ω es una forma LCK con forma de Lee $\theta = -(1 + 2a)e^1$ con $a \neq -\frac{1}{2}$. Notar que $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{e_1}) = 4a$.

Ahora vamos a aplicar el método del Teorema 5.3.1 para construir un álgebra de Lie unimodular $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \ltimes_\pi \mathbb{R}^2$ de dimensión 6 que admita una estructura LCK.

Sea $A \in \mathfrak{h}$ dado por $A = -\frac{1}{1+2a}e_1$, de modo que $\theta(A) = 1$. Como ya vimos $\mathfrak{g}$ es unimodular si y sólo si $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_A^{\mathfrak{h}_{a,b}}) = \frac{\dim \mathbb{R}^2}{2} = 1$, lo cual implica que $a = -\frac{1}{6}$.

Ahora debemos elegir una representación $\pi = S + \rho$ de $\mathfrak{h}_{a,b}$ en $\mathbb{R}^2$ de acuerdo al Teorema 5.3.1. Como el conmutador de $\mathfrak{h}$ coincide con $\ker\theta$, entonces ρ se anula en $\ker\theta$. Luego π queda totalmente definida por $\pi(A) = -\frac{1}{2}\operatorname{Id} + \rho(A)$ con $\rho(A) \in \mathfrak{u}(1)$. Luego

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces podemos describir a $\mathfrak{g}$ en la base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ como

$$[e_1, e_2] = -\frac{1}{6}e_2 - be_3, \; [e_1, e_3] = be_2 - \frac{1}{6}e_3, \; [e_1, e_4] = -\frac{1}{3}e_4, \; [e_2, e_3] = -e_4,$$

$$[e_1, e_5] = \frac{1}{3}e_5 - \alpha e_6, \; [e_1, e_6] = \alpha e_5 + \frac{1}{3}e_6,$$

para $b, \alpha \in \mathbb{R}$. La forma LCK en $\mathfrak{g}$ es

$$\omega = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3 + e^5 \wedge e^6.$$

Otra manera de ver a $\mathfrak{g}$ es $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_1 \ltimes_M (\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}^2)$, donde la acción esta dada por

$$M = \left(\begin{array}{cc|c|cc} -\frac{1}{6} & b & & & \\ -b & -\frac{1}{6} & & & \\ \hline & & -\frac{1}{3} & & \\ \hline & & & \frac{1}{3} & \alpha \\ & & & -\alpha & \frac{1}{3} \end{array}\right),$$

en la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Por lo tanto $\mathfrak{g}$ es un ejemplo de un álgebra de Lie casi nilpotente con estructura LCK. La existencia de retículos en el grupo de Lie asociado se puede estudiar en consecuencia utilizando el criterio dado en [25]; esto será realizado en otra ocasión.

Apéndice

En este capítulo expondremos con mayor detalle algunos resultados mencionados en los capítulos anteriores.

En primer lugar probamos la Proposición 1.4.15:

Proposición 5.3.5. *Sea (M^{2n}, J, g) una variedad hermitiana y ω su 2-forma fundamental, entonces*

$$\Lambda\, d\omega = -\delta\omega \circ J.$$

Demostración. Sea $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ una base ortonormal local de TM con $Je_{2i-1} = e_{2i}$, y sea $\{e^1, \ldots, e^{2n}\}$ su base dual. Entonces ω resulta $\omega = \sum_{j=1}^{n} e^{2j-1} \wedge e^{2j}$. Consideremos una orientación dada por $\{e^1, \ldots, e^{2n}\}$, y usando las propiedades de d tenemos:

$$\begin{aligned} d\omega &= de^1 \wedge e^2 - e^1 \wedge de^2 + de^3 \wedge e^4 - e^3 \wedge de^4 + \cdots + de^{2n-1} \wedge e^{2n} - e^{2n-1} \wedge de^{2n} \\ &= \sum_{i<j<k} g_{i,j,k}\, e^i \wedge e^j \wedge e^k. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Sean $f^i_{j,k}$ tales que,

$$de^i = \sum_{j<k} f^i_{j,k}\, e^j \wedge e^k.$$

Calculamos $\Lambda d\omega = - * L * d\omega$. En primer lugar,

$$L * d\omega = \sum g_{i,j,k} \omega \wedge *(e^i \wedge e^j \wedge e^k).$$

Notemos que $\omega \wedge *(e^i \wedge e^j \wedge e^k) = 0$, salvo cuando $e^i \wedge e^j \wedge e^k = e^{2l-1} \wedge e^{2l} \wedge e^k$ o $e^k \wedge e^{2l-1} \wedge e^{2l}$. Entonces

$$\omega \wedge *(e^{2l-1} \wedge e^{2l} \wedge e^k) = \omega \wedge (-1)^{k+1} \frac{e^1 \wedge \cdots \wedge e^{2n}}{e^{2l-1} \wedge e^{2l} \wedge e^k} = (-1)^{k+1} \frac{e^1 \wedge \cdots \wedge e^{2n}}{e^k} = *(e^k),$$

y análogamente $\omega \wedge *(e^k \wedge e^{2l-1} \wedge e^{2l}) = *(e^k)$. Luego

$$L * d\omega = \sum_{2l<k} g_{2l-1,2l,k} * (e^k) + \sum_{k<2l-1} g_{k,2l-1,2l} * (e^k).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\Lambda d\omega &= \sum_{2l<k} g_{2l-1,2l,k}\, e^k + \sum_{k<2l-1} g_{k,2l-1,2l}\, e^k \\
&= \sum_{2l<2t} g_{2l-1,2l,2t}\, e^{2t} + \sum_{2l<2t-1} g_{2l-1,2l,2t-1}\, e^{2t-1} \\
&\qquad + \sum_{2t<2l-1} g_{2t,2l-1,2l}\, e^{2t} + \sum_{2t-1<2l-1} g_{,2t-1,2l-1,2l}\, e^{2t-1} \\
&= \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{2l<2t} g_{2l-1,2l,2t}\, e^{2t} + \sum_{2t<2l-1} g_{2t,2l-1,2l}\, e^{2t} \right) e^{2t} \\
&\qquad + \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{2l<2t-1} g_{2l-1,2l,2t-1}\, e^{2t-1} + \sum_{2t-1<2l-1} g_{,2t-1,2l-1,2l}\, e^{2t-1} \right) e^{2t-1}.
\end{aligned}$$

Ahora nos interesa escribir $g_{2l-1,2l,2t}$ en función de los $f^i_{j,k}$. Analizando los términos en (5.3), obtenemos:

$$\begin{aligned}
g_{2l-1,2l,2t} &= -f^{2l-1}_{2l-1,2t} - f^{2l}_{2l,2t} + f^{2t-1}_{2l-1,2l} \\
g_{2t,2l-1,2l} &= f^{2t-1}_{2l-1,2l} + f^{2l-1}_{2t,2l-1} + f^{2l}_{2t,2l} \\
g_{2l-1,2l,2t-1} &= -f^{2l-1}_{2l-1,2t-1} - f^{2l}_{2l,2t-1} - f^{2t}_{2l-1,2l} \\
g_{2t-1,2l-1,2l} &= -f^{2t}_{2l-1,2l} + f^{2l-1}_{2t-1,2l-1} + f^{2l}_{2t-1,2l}
\end{aligned}$$

Definimos $f^i_{j,k} = -f^i_{k,j}$, para $j < k$. Luego resulta,

$$\Lambda d\omega = \sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq t}}^{n} (-f^{2l-1}_{2l-1,2t} - f^{2l}_{2l,2t} + f^{2t-1}_{2l-1,2l}) e^{2t} + \sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq t}}^{n} (-f^{2l-1}_{2l-1,2t-1} - f^{2l}_{2l,2t-1} - f^{2t}_{2l-1,2l}) e^{2t-1}. \quad (5.4)$$

Por otro lado calculamos $\delta\omega \circ J$. Sea

$$\beta_k = \frac{e^1 \wedge \cdots \wedge e^{2n}}{e^{2k-1} \wedge e^{2k}}$$

de modo que $*\omega = \sum_{k=1}^{n} \beta_k$. Se ve que

$$d\beta_k = \sum_{\substack{j\neq 2k-1 \\ j\neq 2k}} f^j_{2k-1,2k} * (e^j) - \sum_{\substack{j\neq 2k-1 \\ j\neq 2k}} f^j_{2k-1,j} * (e^{2k}) + \sum_{\substack{j\neq 2k-1 \\ j\neq 2k}} f^j_{2k,j} * (e^{2k-1}).$$

Luego calculamos:

$$\begin{aligned}
\delta\omega &= - * d * \omega = -\sum_k *(d\beta_k) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j\neq l} f^{2l}_{2j-1,2j} - f^j_{2l-1,j} \right) e^{2l} + \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j\neq l} f^{2l-1}_{2j-1,2j} + f^j_{2l,j} \right) e^{2l-1}. \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

Como $e^{2i-1} \circ J = -e^{2i}$ y $e^{2i} \circ J = e^{2i-1}$, entonces de (5.4) y (5.5) tenemos que $\Lambda d\omega = -\delta\omega \circ J$ como queríamos. □

Ahora probamos la Proposición 3.1.3:

Proposición 5.3.6. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con una estructura Vaisman $(J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, entonces $(\ker\theta, \phi, \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\ker\theta}, \eta, \xi)$ satisface las siguientes ecuaciones:*

(i) $\phi^2 = -\operatorname{Id} + \eta\otimes\xi$,

(ii) $\langle\phi X, \phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y)$, *para todo* $X, Y \in \ker\theta$,

(iii) $N_\phi = -d\eta\otimes\xi$,

(iv) $d\eta(X,Y) = -\langle\phi X, Y\rangle$, *para todo* $X, Y \in \ker\theta$,

donde N_ϕ es el tensor de Nijenhuis asociado a ϕ definido por

$$N_\phi(X,Y) = [\phi X, \phi Y] + \phi^2[X,Y] - \phi([\phi X, Y] + [X, \phi Y]).$$

Demostración. Las partes (i) y (ii) siguen del hecho de que $(J, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es una estructura hermitiana en $\mathfrak{g}$.

Como $\mathfrak{g}$ es Vaisman, usando la Proposición 1.8.8 y Proposición 3.1.2, se puede ver que

$$N_\phi(X,Y) = N_J(X,Y) - d\eta(X,Y)\xi,$$

para todo $X \in \ker\theta$. De la integrabilidad de J resulta (iii).

Calculamos ahora para todo $X, Y \in \ker\theta$

$$d\eta(X,Y) = \theta(J[X,Y]) = \langle A, J[X,Y]\rangle = \omega([X,Y], A).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\langle X, JY\rangle &= -\omega(X,Y)\\ &= -\theta\wedge\omega(X,Y,A)\\ &= -d\omega(X,Y,A)\\ &= \omega([X,Y],A) + \omega([Y,A],X) + \omega([A,X],Y)\\ &= \omega([X,Y],A),\end{aligned}$$

donde para la última igualdad hemos usada la Proposición 3.1.2. □

A continuación probamos un resultado que fue utilizado en la demostración del Lema 4.2.4.

Proposición 5.3.7. *Si $q(x) = \prod_{j=0}^{2n}(x - y_j) \in \mathbb{Z}[x]$, entonces $\tilde{q}(x) = \prod_{j=0}^{2n}(x - y_j^k) \in \mathbb{Z}[x]$ también, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Los coeficientes del polinomio q son, salvo signo, los polinomios simétricos elementales $E_i = E_i(y_1, \ldots, y_n)$ en las n variables $y_1, \ldots, y_n$. De la misma manera se tiene que los coeficientes del polinomio $\tilde{q}$ son $E_j(y_1^k, \ldots, y_n^k)$.

Se sabe que $\mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_n]^{S_n} = \mathbb{Z}[E_1, \ldots, E_n]$, donde $E_i = E_i(y_1, \ldots, y_n)$. Como $E_j(y_1^k, \ldots, y_n^k) \in \mathbb{Z}[y_1, \ldots, y_n]^{S_n}$, entonces $E_j(y_1^k, \ldots, y_n^k) = f(E_1, \ldots, E_n) \in \mathbb{Z}[E_1, \ldots, E_n]$, y como cada $E_i \in \mathbb{Z}$ por hipótesis, entonces $\tilde{q} \in \mathbb{Z}[x]$ también. □

Daremos ahora la demostración del Lema 3.2.3.

Lema 5.3.8. *Sea* $\phi : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(H)$ *un homomorfismo de grupos de Lie y sea* $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi H$ *el correspondiente producto semidirecto. Sea* Γ *un retículo de* H*. Supongamos que existe* $a \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$*, tal que* $\phi(a)(\Gamma) = \Gamma$*, entonces* $a\mathbb{Z} \ltimes_\phi \Gamma$ *es un retículo en* G*.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tal que $\phi(a)(\Gamma) \subset \Gamma$. Entonces $\phi(ak)$ preserva Γ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y entonces podemos formar el producto semidirecto $a\mathbb{Z} \ltimes_\phi \Gamma$. Luego $a\mathbb{Z} \ltimes_\phi \Gamma$ es un subgrupo discreto de G. Falta demostrar que es co-compacto.

Recordemos que dos elementos (t_1, g_1) y (t_2, g_2) de G están en la misma clase módulo $a\mathbb{Z} \ltimes_\phi \Gamma$ si y sólo si existe $k \in \mathbb{Z}$ y $\gamma \in \Gamma$ tales que

$$\begin{aligned}(t_2, g_2) =&(ak, \gamma)(t_1, g_1)\\ =&(ak + t_1, \gamma\phi(a)^k g_1).\end{aligned} \tag{5.6}$$

Sea $\{a_n\}$ una sucesión en $(a\mathbb{Z} \ltimes_\phi \Gamma)\backslash(\mathbb{R} \ltimes_\phi H)$, con $a_n = [(t_n, g_n)]$. De (5.6) se deduce que podemos elegir $t_n \in [0, a]$ para todo n; y como $\Gamma\backslash H$ es compacto, entonces podemos asumir que $[g_n]$ converge a $[g]$ en $\Gamma\backslash H$, para algún $g \in H$.

Como $\pi : H \to \Gamma\backslash H$ es un difeomorfismo local podemos tomar g'_n representante de $[g_n]$ tal que g'_n converge a g en H. Por último como $[0, a]$ es compacto podemos asumir que $a_n = [(t_n, g'_n)]$ tal que $t_n \to t$ en $[0, a]$ y $g'_n \to g$ en H. Es fácil ver que $[(t_n, g'_n)]$ converge a $[(t, g)]$ en el cociente. Como la sucesión original $\{a_n\}$ es arbitraria, se tiene que $(a\mathbb{Z} \ltimes_\phi \Gamma)\backslash(\mathbb{R} \ltimes_\phi H)$ es compacto. $\square$

Referencias

[1] J. F. Adams, Vector fields on spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.* **68** (1962), 39–41. pages 6

[2] D. Alekseevsky , V. Cortes, K. Hasegawa, Y. Kamishima, Homogeneous locally conformally Kähler and Sasaki manifolds. *Int. J. Math.* **6** (2015), 1541001 (29 pp). pages 30, 39

[3] A. Andrada, M. Barberis, I. G. Dotti, Abelian Hermitian geometry. *Differ. Geom. Appl.* **30** (2012), 509–519. pages 43, 54

[4] A. Andrada, M. L. Barberis, I. G. Dotti, Classification of abelian complex structures on 6-dimensional Lie algebras, *J. London Math. Soc.* **83** (2011), 232–255. pages 49, 54

[5] A. Andrada, A. Fino, L. Vezzoni, A class of Sasakian 5-manifolds. *Transform. Groups* **14** (2009), 493–512. pages 57, 59

[6] A. Andrada, M. Barberis, I. Dotti, G. Ovando, Product structures on four dimensional solvable Lie algebras, *Homology Homotopy Appl.* **7** (2005), 9–37. pages 71, 75, 78, 82, 94

[7] A. Andrada, M. Origlia, Locally conformally Kähler structures on unimodular Lie groups, *Geom. Dedicata* **179** (2015), 197–216. pages xii

[8] A. Andrada, M. Origlia, Lattices in almost abelian Lie groups with locally conformal Kähler or symplectic structures, *Manuscripta math* DOI 10.1007/s00229-017-0938-3. pages xii

[9] L. de Andrés, L. Cordero, M. Fernández, J. Mencía, Examples of four dimensional locally conformal Kähler solvmanifolds, *Geom. Dedicata* **29** (1989), 227–232. pages 32, 33

[10] L. Arnold, *Random dynamical systems.* Springer Monographs in Mathematics. Berlin, (1998). pages 93

[11] M. Atiyah, The Non-Existent Complex 6-Sphere, arXiv:1610.09366. pages 10

[12] G. Bande, D. Kotschick, Moser stability for locally conformally symplectic structures, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), 2419–2424. pages 35

[13] A. Banyaga, On the geometry of locally conformal symplectic manifolds, *Infinite dimensional Lie groups in geometry and representation theory*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ. (2000), 79–91. pages 35

[14] A. Banyaga, Some properties of locally conformal symplectic structures, *Comment. Math. Helv.* **77** (2002), 383–398. pages 35

[15] A. Banyaga, Examples of non d_θ-exact locally conformal symplectic forms, *J. Geom.* **87** (2007), 1–13. pages 35

[16] M. Barberis, Hyper-Kähler metrics conformal to left-invariant metrics on four-dimensional Lie group. *Math. Phys. Anal. Geom.* **6** (2003), 1–8. pages 46

[17] M. Barberis, I. Dotti, R. Miatello, On certain locally homogeneous Clifford manifolds, *Ann. Global Anal. Geom.* **13** (1995), 289–301. pages 42

[18] M. Barberis, I. Dotti, Abelian complex structures on solvable Lie algebras. *J. Lie Theory* **14** (2004), 25–34. pages 43

[19] M. Barberis, I. Dotti, Complex structures on affine motion groups. *Q. J. Math.* **55** (2004), 375–389. pages 97

[20] M. Barberis, I. Dotti, A. Fino, Hyper-Kähler quotients of solvable Lie groups. *J. Geom. Phys.* **56** (2006), 691–711. pages 62

[21] G. Bazzoni, Vaisman nilmanifolds, preprint 2016, arXiv:1605.02792v1. pages xi, 38

[22] G. Bazzoni, J. Marrero, On locally conformal symplectic manifolds of the first kind, preprint 2014, arXiv:1510.04947v2 . pages xi, 36, 37, 39, 84, 86, 93, 94, 96

[23] A. Belgun, On the metric structure of non-Khler complex surfaces, *Math. Ann.* **317** (2000), 1–40. pages 38, 55

[24] A. Besse, *Einstein Manifolds.* Classics in Mathematics. Berlin, Springer, (1987). pages 31

[25] C. Bock, On low-dimensional solvmanifolds. *Asian J. Math.* **20** (2016), 199–262. pages 67, 72, 99

[26] W. Boothby, Some fundamental formulas for Hermitian manifolds with non-vanishing torsion. *Amer. J. Math.* **76** (1954), 509–534. pages 22

[27] A. Borel, J. Serre, Détermination des p-puissances réduites de Steenrod dans la cohomologie des groupes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **233** (1951), 680–682. pages 6

[28] P. Borwein, K.Hare, Non-trivial quadratic applications to zero of a family of cubic Pisot numbers, *Amer. Math. Soc.* **355** (2003), 4767–4779 pages 79

[29] S. Console, G. Ovando, M. Subils, Solvable models for Kodaira surfaces. *Mediterr. J. Math.* **12** (2015), 187–204. pages 68

[30] L. Cordero, M. Fernández, M. de Léon, Compact locally conformal Kähler nilmanifolds, *Geom. Dedicata* **21** (1986), 187–192. pages 32, 74

[31] S. Dragomir, L. Ornea, *Locally Conformal Kähler Geometry*, Progress in Mathematics v. 155, Birkhäuser, 1998. pages xi

[32] A. Fino, A. Otal, L. Ugarte, Six-dimensional solvmanifolds with holomorphically trivial canonical bundle. *Int. Math. Res. Not.* **24** (2015), 13757–13799. pages 67

[33] A. Frölicher, Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen, *Math. Ann.* **129** (1955), 50–95. pages 10

[34] P. Gauduchon, A. Moroianu, L. Ornea, Compact homogeneous lcK manifolds are Vaisman, *Math. Ann.* **361** (2015), 1043–1048. pages xi, 38

[35] S. Goldberg, *Curvature and homology*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XI Academic Press, New York-London 1962. pages 17

[36] C. Gordon, E. Wilson, The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds, *Michigan Math. J.* **33** (1986), 253–271. pages 54

[37] M. Goto, K. Uesu, Left invariant Riemannian metrics on complex Lie groups. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A* **35** (1981), 65–70. pages 44

[38] A. Gray, L. Hervella, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, *Ann. Mat. Pura Appl.* **123** (1980), 35–58. pages 22

[39] F. Guedira, A. Lichnerowicz, Géométrie des algébres de Lie locales de Kirillov, *J. Math. Pures Appl.* **63** (1984), 407–484. pages 35, 36

[40] S. Haller , Some properties of locally conformal symplectic manifolds, *Infinite dimensional Lie groups in geometry and representation theory*, World Scientific Publishing Company, River Edge, NJ, (2002), 92–104. pages 35

[41] J. Hano, On Kaehlerian homogeneous spaces of unimodular Lie groups. *Amer. J. Math.* **79** (1957), 885–900. pages 60

[42] K. Hasegawa, Complex and Kähler structures on compact solvmanifolds, *J. Symplectic Geom.* **3**, (2005), 749–767. pages 36

[43] K. Hasegawa, Y. Kamishima, Locally conformally Kähler structures on homogeneous spaces, *Progress in Mathematics* **308** (2015), 353–372. pages 38, 46

[44] A. Hattori, Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* **8** (1960), 289–331. pages 28, 37

[45] H. Huang, Lattices and harmonic analysis on some 2-step solvable Lie groups, *J. Lie Theory* **13** (2003), 77–89. pages 88

[46] D. Huybrechts, *Complex Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2005. pages 3, 4, 17

[47] Y. Kamishima, Note on locally conformal Kähler surfaces, *Geom. Dedicata* **84** (2001), 115–124. pages 33, 79

[48] H. Kasuya, Vaisman metrics on solvmanifolds and Oeljeklaus-Toma manifolds, *Bull. London Math. Soc.* **45** (2013), 15–26. pages 38, 97

[49] A. Kirchhoff, Beiträge zur topologischen linearen Algebra. *Compositio Math.* **11** (1953), 1–36. pages 6

[50] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol. II, Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London 1963. pages 2, 11, 22

[51] L. Kronecker, Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten, *J. Reine Angew. Math.* **53** (1857), 173–175. pages 77

[52] J. Lauret, E. Rodríguez Valencia, On the Chern-Ricci flow and its solitons for Lie groups, *Math. Nachr.* **288** (2015), 1512–1526. pages 72

[53] J. Lauret, C. Will, On the symplectic curvature flow for locally homogeneous manifolds, aparecerá en *J. Symp. Geom.*, preprint 2014, arXiv:1405.6065. pages 73, 81

[54] H. Lê, J. Vanžura, Cohomology theories on locally conformal symplectic manifolds, *Asian J. Math.* **19**, (2015), 45–82. pages 35

[55] H. C. Lee, A kind of even dimensional differential geometry and its application to exterior calculus, *Amer. J. Math.* **65** (1943), 433–438. pages 20, 35

[56] J. Lee, K. Lee, J. Shin, S. Yi, Unimodular groups of type $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$, *J. Korean Math. Soc.* **44** (2007), 1121–1137. pages 86

[57] P. Libermann, Sur le problème d'equivalence de certaines structures infinitesimales régulières, *Annali Mat. Pura Appl.* **36** (1954), 27–120. pages 18

[58] P. Libermann, Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières, *Bull. Soc. Math. France*, **83** (1955), 195–224. pages 18

[59] A. Malcev, On solvable Lie algebras, *Bull. Acad. Sci. URSS. Sr. Math. [Izvestia Akad. Nauk SSSR]* **9** (1945), 329–356. pages 28, 86

[60] A. Medina, P. Revoy, Lattices in symplectic Lie groups, *J. Lie Theory* **17** (2007), 27–39. pages 86

[61] D. Millionschikov, Cohomology of solvable Lie algebras and solvmanifolds, *Math. Notes* **77** (2005), 61–71. pages 37, 38, 93

[62] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. *Adv. Math.* **21** (1976), 293–329. pages 27, 46, 62

[63] A. Newlander, L. Nirenberg, Complex coordinates in almost complex manifolds, *Ann. Math.* **65** (1957), 391–404. pages 10

[64] K. Oeljeklaus, M. Toma, Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields. *Ann. Inst. Fourier* **55** (2005), 161–171. pages 97

[65] L. Ornea, Locally conformal Kähler manifolds. A selection of results. *Lect. Notes Semin. Interdiscip. Mat.* **4** (2005), 121–152. pages 18

[66] L. Ornea, M. Verbitsky, Locally conformal Kähler manifolds with potential, *Math. Ann.* **348** (2010), 25–33. pages xi

[67] L. Ornea, M. Verbitsky, Structure theorem for compact Vaisman manifolds, *Math. Res. Lett.* **10** (2003), 799–805. pages 24

[68] L. Ornea, M. Verbitsky, Topology of locally conformally Kähler manifolds with potential. *Int. Math. Res. Not.* **4** (2010), 717–726. pages 18

[69] L. Ornea, M. Verbitsky, A report on locally conformally Kähler manifolds, Harmonic maps and differential geometry, *Contemp. Math.* **542** (2011), 135–149. pages 35, 55

[70] G. Ovando, Complex, symplectic and Kähler structures on four dimensional Lie groups, *Rev. U. M. A.*, **45** (2004), 55–68. pages 83

[71] A. Petravchuk, Lie algebras decomposable into a sum of an abelian and a nilpotent subalgebra. *Ukr. Math. J.* **40** (1988), 331–334. pages 43

[72] M. Saito, Sur certains groupes de Lie résolubles II, *Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo* **7** (1957), 157–168. pages 88

[73] L. Santharoubane, Cohomology of Heisenberg Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983), 23–28. pages 88

[74] H. Sawai, Locally conformal Kähler structures on compact nilmanifold with left-invariant complex structures, *Geom. Dedicata* **125** (2007), 93–101. pages xi, 38

[75] H. Sawai, Locally conformal Kähler structures on compact solvmanifolds. *Osaka J. Math.* **49** (2012), 1087–1102. pages 79

[76] W. Thurston, Some simple examples of symplectic manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.* **55** (1976), 467–468. pages 32

[77] F. Tricerri, Some examples of locally conformal Kähler manifolds. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **40** (1982), 81–92. pages 33, 79

[78] L. Ugarte, Hermitian structures on six-dimensional nilmanifolds, *Transform. Groups* **12** (2007), 175–202. pages 38, 54

[79] I. Vaisman, On locally conformal almost Kähler manifolds, *Israel J. Math.* **24** (1976), 338–351. pages 18

[80] I. Vaisman, Locally conformal Kähler manifolds with parallel Lee form, *Rend. Mat., VI Ser.* **12** (1979), 263–284. pages 18, 55, 57

[81] I. Vaisman, Generalized Hopf manifolds, *Geom. Dedicata* **13** (1982), 231–255. pages 18, 23, 24

[82] I. Vaisman, Locally conformal symplectic manifolds, *Internat. J. Math. Sci.* **12** (1985), 521–536. pages xi, 35, 36

[83] T. Wen, Sur l'existence d'un champ d'éléments de contact ou d'une structure complexe sur une sphère. *C. R. Acad. Sci. Paris* **226** (1948), 2117–2119. pages 6

[84] H. Wang, Complex parallisable manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.* **5** (1954), 771–776. pages 46

[85] D. Witte, Superrigidity of lattices in solvable Lie groups, *Invent. Math.* **122** (1995), 147–193. pages 28