FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Trabajo Final de Grado

Soluciones positivas para problemas no lineales que involucran al ϕ-Laplaciano unidimensional

Marzo 2017

Autor: Leandro A. Milne
Director: Uriel Kaufmann

Resumen

Let $\Omega := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $m \in L^1(\Omega)$ and $\lambda > 0$ be a real parameter. Let $\mathcal{L}$ be the differential operator given by $\mathcal{L}u := -\phi(u')' + r(x)\phi(u)$, where $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an odd increasing homeomorphism and $0 \leq r \in L^1(\Omega)$. We study the existence of *positive* solutions for problems of the form

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda m(x) f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ is a continuos function which is, roughly speaking, sublinear with respect to ϕ. In this work, we combine the sub and supersolution method with some estimates on related nonlinear problems.

Sean $\Omega := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $m \in L^1(\Omega)$ y $\lambda > 0$ un parámetro real. Sea $\mathcal{L}$ el operador diferencial dado por $\mathcal{L}u := -\phi(u')' + r(x)\phi(u)$, donde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo creciente e impar y $0 \leq r \in L^1(\Omega)$. Estudiamos la existencia de soluciones positivas a problemas no lineales de la forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda m(x) f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función continua que es sublineal respecto de ϕ. En este trabajo, combinamos el método de sub y supersoluciones con algunas estimaciones en problemas no lineales relacionados.

2000 *Mathematics Subject Clasification.*

34B15, Ordinary differential equations, Nonlinear boundary value problems

34B18, Ordinary differential equations, Positive solutions of nonlinear boundary problems

Key words. Elliptic one-dimensional problems, ϕ-Laplacian, positive solutions.

Palabras claves. Problemas elípticos unidimensionales, ϕ-Laplaciano, soluciones positivas.

Índice

Índice **4**

1. Introducción **6**

2. Preliminares **7**
2.1. Espacios de Sobolev 7
2.2. Autovalores y autofunciones principales 8
2.3. Problema de Dirichlet 10
2.4. Sub y supersoluciones 11

3. Resultados conocidos **15**

4. Resultados principales **23**
4.1. Ejemplos 32

Referencias **35**

1. Introducción

Sean $\Omega := (a,b) \subset \mathbb{R}$, $m \in L^1(\Omega)$ y $\lambda > 0$ un parámetro real. Consideramos problemas de la forma

$$\begin{cases} -\phi(u')' = \lambda m(x) f(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo creciente e impar, y $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función continua. La existencia de soluciones no negativas o positivas a problemas del tipo (1.1), también llamados problemas que involucran al ϕ-Laplaciano, ha sido estudiada durante los últimos 30 años, mediante diferentes métodos, debido a su interés tanto teórico como en aplicaciones (ver por ejemplo [3, 4, 5, 6]).

Cuando $\phi(x) = |x|^{p-2}x$ y $f(x) = x^q$ con $1 < p < \infty$ y $0 < q < p-1$, la existencia de soluciones positivas para (1.1) está desarrollada en el capítulo 3 de este trabajo pidiendo que $0 \leq m \not\equiv 0$, y en [9] está estudiado el mismo problema para pesos m que cambian de signo. Notar que, tanto en el capítulo 3 de este trabajo o en [9], es crucial la homogenidad de ϕ y f, la cual es no necesariamente cierta en los casos que presentaremos en el capítulo 4.

Utilizando Teoremas de punto fijo del tipo Krasnoselskii en conos, algunos autores han logrado ciertos resultados para el problema (1.1), pero con fuertes restricciones tanto para m como para ϕ. Más precisamente, sean:

(M) $m \in C\left(\overline{\Omega}\right), m \geq 0$ y $m \not\equiv 0$ en ningún subintervalo de Ω,

(M') $m \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ con $\min_{\overline{\Omega}} m > 0$,

(Φ) Existen homeomorfismos crecientes $\psi_1, \psi_2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\psi_1(t)\phi(x) \leq \phi(tx) \leq \psi_2(t)\phi(x)$ para todo $t, x > 0$,

(Φ') Existen $p, q \in (0,\infty)$ tal que $t^q\phi(x) \leq \phi(tx) \leq t^p\phi(x)$ para todo $t \in [0,1]$ y todo $x > 0$.

Bajo algunas restricciones sobre el crecimiento de f y suponiendo (M) y (Φ), se ha probado que (1.1) posee una solución positiva para todo $\lambda > 0$ (ver [14, Teorema 1.1]), y recientemente en [18, Teorema 2] los autores extendieron este resultado a ciertas $m \in L^1_{loc}(\Omega)$ y sin requerir que $\psi_2(0) = 0$. También, un resultado similar está enunciado en [5, Corolario 3.4] suponiendo (Φ') y (M').

Con un enfoque diferente, en el Teorema 4.4 de este trabajo nosotros mejoramos sustancialmente los resultados mencionados en el caso sublineal, bajo condiciones más débiles tanto para ϕ como para m. De hecho, respecto a m, solo requeriremos que $0 \leq m \not\equiv 0$ en Ω. Además, veremos que las soluciones $u_\lambda \to 0$ en $C^1(\overline{\Omega})$ cuando $\lambda \to 0^+$. Para probar los resultados principales del trabajo, nosotros combinamos un método de sub y supersoluciones con estimaciones de algunos problemas no lineales relacionados.

También, bajo algunas condiciones adicionales sobre ϕ y m, probamos en el Teorema 4.5 un resultado similar para el operador diferencial

$$\mathcal{L}u := -\phi\left(u'\right)' + r\left(x\right)\phi\left(u\right), \tag{1.2}$$

donde $0 \leq r \in L^1\left(\Omega\right)$. Más aún, como consecuencia de los Teoremas 4.4 y 4.5, podemos deducir la existencia de soluciones (no triviales) no negativas de (1.1) para pesos m que cambien de signo, ver Corolario 4.6.

El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 2 enunciaremos algunas definiciones y resultados sobre los espacios de Sobolev, los autovalores principales tanto del Laplaciano como del p-Laplaciano, el problema de Dirichlet $-\phi(u')' = h(x)$ en Ω y $u = 0$ en $\partial\Omega$ para ciertas funciones h y los resultados del método de sub y supersoluciones. En el capítulo 3 se presentan resultados de existencia y unicidad para los casos particulares de (1.1) con $\phi = x$ y $\phi = |x|^{p-2}x$ con $1 < p < \infty$. Mientras que en el capítulo 4 se encuentran los enunciados y las pruebas de nuestros principales resultados. Aquí también se presentan varios ejemplos que satisfacen nuestras condiciones y se analizan cómo se relacionan con las mencionadas anteriormente (ver, también la Observación 4.3).

2. Preliminares

2.1. Espacios de Sobolev

Definición 2.1. *(Derivadas débiles)* Sean $\Omega := (a, b) \subset \mathbb{R}$ y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ Dado $k \in \mathbb{N}_0$, decimos que la función g es la *k-ésima derivada débil* de u si:

$$\int_\Omega u\varphi^{(k)} = (-1)^k \int_\Omega g\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

donde $\varphi^{(k)}$ es la derivada k-ésima usual de φ, y se denota $g = u^{(k)}$ (para $k = 0$ interpretamos $u^{(0)} = u$).

Definición 2.2. *(Espacios de Sobolev $W^{k,p}$)* Sean $k \in \mathbb{N}_0$ y $1 \leq p < \infty$. *El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$* consiste de todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$ con derivadas débiles en $L^p(\Omega)$ hasta el órden k. Se define en $W^{k,p}(\Omega)$ la norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left[\sum_{j=0}^{k} \left\| u^{(j)} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right]^{1/p}$$

que lo hace un espacio de Banach. En el caso particular $p = 2$ estos espacios son de Hilbert y se denota $W^{k,p}(\Omega) = H^k(\Omega)$

Definición 2.3. *(Espacios $W_0^{k,p}$)* Para $k \geq 1$ y $p \in [1, \infty)$, definimos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como la clausura del espacio $C_c^\infty(\Omega)$ con la norma dada en la definición anterior. Si $p = 2$, escribimos $H_0^k(\Omega)$ en lugar de $W_0^{k,2}(\Omega)$. Además se tiene que $W_0^{k,p}(\Omega)$ y $H_0^k(\Omega)$ son espacios de Banach y de Hilbert, respectivamente, con las normas de la definición anterior.

Lema 2.4. *(Inmersión de Sobolev) Si $\Omega \subset \mathbb{R}$ es acotado, $p > 1$ y $k \geq 1$ entonces $W^{k,p}(\Omega) \subset C^{k-1}(\overline{\Omega})$.*

Para la demostración ver [2] Teorema 6, página 284.

Observación 2.5. Se tiene que dada $u \in W^{k,p}(\Omega)$, entonces $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ si y solo si $u = 0$ en $\partial\Omega$ (Ver [1], Teorema 8.12). Notar que tiene sentido el valor de u en $\partial\Omega$ por el Lema anterior. ■

Lema 2.6. *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $1 \leq p < \infty$ entonces existe una función $\widetilde{u} \in C(\overline{\Omega})$ tal que*

$$u(x) = \widetilde{u}(x) \quad p.p.\ x \in \Omega \quad y$$

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

Para la demostración ver [1] Teorema 8.2.

Observación 2.7. El Lema anterior nos dice que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ entonces u es absolutamente continua en Ω. Se puede ver fácilmente que si u es absolutamente continua en Ω entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$. ■

2.2. Autovalores y autofunciones principales

Autovalor principal del Laplaciano.

Definición 2.8. *(Autovalor principal y autofunción)* Sea $m : \Omega \to \mathbb{R}$ decimos que λ es un *autovalor principal* del Laplaciano con peso m

$$\begin{cases} -u'' = \lambda m(x)u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

si existe $u \not\equiv 0$ que no cambie de signo en Ω y sea solución de (2.1). Tales u se llaman *autofunciones principales*.

Teorema 2.9. *(Autovalor principal positivo del Laplaciano)*
Supongamos que $|\{x \in \Omega : m(x) > 0\}| > 0$, *y sea*

$$\lambda_1(m) := \operatorname*{ínf}_{u\in H_0^1, \int_\Omega m(x)u^2=1} \int_\Omega (u')^2 = \operatorname*{ínf}_{u\in H_0^1, \int_\Omega m(x)u^2>0} \frac{\int_\Omega (u')^2}{\int_\Omega m(x)u^2}. \tag{2.2}$$

Entonces

(i) $\lambda_1(m) > 0$ *y* $\lambda_1(m)$ *es autovalor de (2.1). Además, si* λ *es otro autovalor positivo, entonces* $\lambda \geq \lambda_1(m)$.

(ii) Las autofunciones asociadas $u \in H_0^1(\Omega)$. *Más aún,* $u > 0$ *en* Ω *o* $u < 0$ *en* Ω.

Para la demostración ver [16, Teorema 1.1].

Autovalor principal del p-Laplaciano. Análogamente, definimos para $1 < p < \infty$.

Definición 2.10. *(Autovalor principal y autofunción para el p-Laplaciano)*
Sea $m : \Omega \to \mathbb{R}$ decimos que λ es un *autovalor principal* del p-Laplaciano con peso m

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda m(x)|u|^{p-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

si existe $u \not\equiv 0$ que no cambie de signo en Ω y sea solución de (2.3). Tales u se llaman *autofunciones principales* del p-Laplaciano con peso m.

Teorema 2.11. *(Autovalor principal positivo del p-Laplaciano)*
Supongamos que $|\{x \in \Omega : m(x) > 0\}| > 0$, *y sea*

$$\lambda_1(m,p) := \operatorname*{ínf}_{u\in W_0^{1,p}, \int_\Omega m(x)|u|^p=1} \int_\Omega |u'|^p = \operatorname*{ínf}_{u\in W_0^{1,p}, \int_\Omega m(x)|u|^p>0} \frac{\int_\Omega |u'|^p}{\int_\Omega m(x)|u|^p}. \tag{2.4}$$

Entonces

(i) $\lambda_1(m,p) > 0$ *y* $\lambda_1(m,p)$ *es autovalor de (2.3). Además, si* λ *es otro autovalor positivo, entonces* $\lambda \geq \lambda_1(m,p)$.

(ii) Las autofunciones asociadas $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. *Más aún,* $u > 0$ *en* Ω *o* $u < 0$ *en* Ω.

Para la demostración de (i) ver [12, Proposición 3.1] y para (ii) véase [12, Proposición 3.3].

2.3. Problema de Dirichlet

Sea $\mathcal{L}_\phi$ el operador diferencial dado por

$$\mathcal{L}_\phi u := -\phi(u')'.$$

Consideremos el problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\phi v = h(x) & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

Observación 2.12. Sea $h \in L^1(\Omega)$. Entonces (2.5) admite una única solución $v \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $\phi(v')$ es absolutamente continua en $\overline{\Omega}$ (o equivalentemente, por la Observación 2.7, $\phi(v') \in W^{1,p}(\Omega)$) y tal que la ecuación vale puntualmente *p.p.* $x \in \Omega$. De hecho, se puede ver que

$$v(x) = \int_a^x \phi^{-1}\left(c_h - \int_a^y h(t)dt\right) dy, \tag{2.6}$$

donde c_h es la única constante tal que $v(b) = 0$. Más aún, el operador solución $\mathcal{S}_\phi : L^1(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$ es continuo (ver por ejemplo [7] o [10]) y monótono creciente por el siguiente Lema. ■

Lema 2.13. *Sean $f, g \in L^1(\Omega)$, con $f \leq g$ p.p. $x \in \Omega$. Si $u := \mathcal{S}_\phi(f)$ y $v := \mathcal{S}_\phi(g)$, entonces $u \leq v$ en $\overline{\Omega}$.*

Prueba. Supongamos por el absurdo que $A := \{x \in \Omega : u(x) > v(x)\} \neq \emptyset$. Tomemos $A_c := (x_0, x_1)$ una componente conexa de A. Como u y v son continuas en $\overline{\Omega}$ se tiene que $u(x_0) = v(x_0)$ y $u(x_1) = v(x_1)$. Y entonces, al ser $u = \mathcal{S}_\phi(f)$ y $v = \mathcal{S}_\phi(g)$, integrando por partes, se sigue que

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)(u-v) = -\int_{x_0}^{x_1} \phi(u')'(u-v) = \int_{x_0}^{x_1} \phi(u')(u'-v')$$

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)(u-v) = -\int_{x_0}^{x_1} \phi(v')'(u-v) = \int_{x_0}^{x_1} \phi(v')(u'-v')$$

Restando tenemos que

$$\int_{x_0}^{x_1} (f(x)-g(x))(u-v) = \int_{x_0}^{x_1} (\phi(u')-\phi(v'))(u'-v'). \tag{2.7}$$

Como $f \leq g$ y $u > v$ en (x_0, x_1) se tiene que

$$\int_{x_0}^{x_1} (f(x)-g(x))(u-v) \leq 0. \tag{2.8}$$

Por otro lado, $(\phi(u')-\phi(v'))(u'-v')\geq 0$ pues ϕ es creciente, implicando así que

$$\int_{x_0}^{x_1}(\phi(u')-\phi(v'))(u'-v')\geq 0. \tag{2.9}$$

Luego debe ser, $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}(\phi(u')-\phi(v'))(u'-v')=0$ por (2.7), (2.8) y (2.9). Entonces es $u=v+cte$ en (x_0,x_1) pero como $u(x_0)=v(x_0)$ resulta $cte=0$. Por lo tanto debe ser $A=\emptyset$ y esto concluye la prueba ■

Observación 2.14. Notemos que este Teorema nos dice que si v es solución de (2.5) con $h\geq 0$, entonces $v\geq 0$.

2.4. Sub y supersoluciones

Dado $I\subset\mathbb{R}$, denotaremos $AC_{loc}(I)$ al conjunto de todas las funciones absolutamente continuas en cada intervalo compacto $K\subset I$.

Sea $f:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función Carathéodory (esto es, $f(\cdot,\xi)$ es medible para todo $\xi\in\mathbb{R}$ y $f(x,\cdot)$ es continua *p.p.* $x\in\Omega$). Consideremos ahora problemas de la forma

$$\begin{cases}\mathcal{L}u=f(x,u) & \text{en } \Omega\\ u=0 & \text{en } \partial\Omega,\end{cases} \tag{2.10}$$

donde $\mathcal{L}$ es como en (1.2).

Decimos que $v\in C(\overline{\Omega})$ es una *subsolución* de (2.10) si existe un conjunto finito $\Sigma\subset\Omega$ tal que $\phi(v')\in AC_{loc}(\overline{\Omega}\backslash\Sigma)$, $v'(\tau^+):=lim_{x\to\tau^+}v'(x)\in\mathbb{R}$, $v'(\tau^-):=lim_{x\to\tau^-}v'(x)\in\mathbb{R}$ para cada $\tau\in\Sigma$,

$$\begin{cases}\mathcal{L}v\leq f(x,v(x)) & p.p.\ x\in\Omega\\ v\leq 0 \text{ en } \partial\Omega, & v'(\tau^-)<v'(\tau^+) \text{ para cada } \tau\in\Sigma.\end{cases} \tag{2.11}$$

Si la desigualdades de (2.11) están invertidas, decimos que v es una *supersolución* de (2.10).

Por otro lado, decimos que $v\in C^1(\overline{\Omega})$ es *solución* de (2.10) si $\phi(v')$ es absolutamente continua en $\overline{\Omega}$ y

$$\begin{cases}\mathcal{L}v=f(x,v) & \text{en } \Omega\\ v=0 & \text{en } \partial\Omega.\end{cases}$$

Ahora probaremos un Teorema que nos da un resultado de existencia que nos será útil para probar el Teorema 2.17 (Teorema de sub y supersoluciones). Pero primero enunciamos el Teorema de Punto Fijo de Schauder (para la prueba ver [2] Teorema 3, Página 538)

Teorema 2.15. *(Punto fijo de Schauder) Sea X un espacio de Banach y $\emptyset \neq K \subset X$ un cerrado, acotado y convexo. Si $F : K \to K$ es un operador continuo y compacto, entonces existe un punto fijo de F.*

Teorema 2.16. *Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Carathéodory. Supongamos que existe $h \in L^1(\Omega)$ tal que*

$$|f(x,\xi)| \leq h(x) \quad \text{para p.p. } x \in \Omega \text{ y todo } \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Entonces el problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\phi u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.13}$$

tiene solución.

Prueba. Para cada $g \in C(\overline{\Omega})$ definamos $\psi_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\psi_g(x) = \int_a^b \phi^{-1}(x + g(s))ds.$$

Como ϕ es un homeomorfismo creciente con $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, resulta que la función ψ_g es continua, creciente y $\psi_g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Luego, existe un único $x := \Lambda(g) \in \mathbb{R}$ tal que $\psi_g(\Lambda(g)) = 0$. Esto nos define un funcional $\Lambda : C(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$.

Veamos que $\Lambda(\mathcal{M})$ es acotado para cada $\mathcal{M}$ acotado en $C(\overline{\Omega})$. En efecto, tomemos $\mathcal{M} \subset C(\overline{\Omega})$ acotado, sea $c \in (0,\infty)$ tal que $\|g\|_\infty \leq c$ para cada $g \in \mathcal{M}$. Si existiera una sucesión $\{g_n\} \subset \mathcal{M}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda(g_n) = \infty \text{ o } \lim_{n\to\infty} \Lambda(g_n) = -\infty$$

entonces, si ocurriera lo primero es

$$0 = \lim_{n\to\infty} (\psi_{g_n}(\Lambda(g_n))) \geq \lim_{n\to\infty} (b-a)\phi^{-1}(\Lambda(g_n) - c) = \infty,$$

lo cual es una contradicción. Análogamente, si ocurriera lo segundo llegaríamos a una contradicción similar. Por lo tanto, $\Lambda(\mathcal{M})$ es acotado.

Ahora veamos que Λ es continua. Sea $\{g_n\} \subset C(\overline{\Omega})$ una sucesión y supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g_0 \text{ en } C(\overline{\Omega}).$$

Por lo anterior, resulta que $\{\Lambda(g_n)\} \subset \mathbb{R}$ es acotado, por lo tanto existe una subsucesión tal que $\lim_{k_n\to\infty} \Lambda(g_{k_n}) = x_0 \in \mathbb{R}$. Se tiene entonces que

$$0 = \psi_{g_{k_n}}(\Lambda(g_{k_n})) = \int_a^b \phi^{-1}(\Lambda(g_{k_n}) + g_{k_n}(t))dt,$$

tomando limite cuando $n \to \infty$ en la igualdad anterior resulta que

$$0 = \int_a^b \phi^{-1}(x_0 + g_0(t))dt.$$

Luego, al ser $\Lambda(g_0)$ el único real tal que $\psi_{g_0}(\Lambda(g_0)) = 0$ debe ser $x_0 = \Lambda(g_0)$. Por lo tanto, cualquier subsucesión convergente de $\Lambda(g_n)$ tiene el mismo limite $\Lambda(g_0)$, y al ser $\Lambda(g_n)$ acotado, se sigue que $\Lambda(g_0) = \lim_{n\to\infty} \Lambda(g_n)$.

Definamos ahora dos operadores, $\mathcal{N} : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ y $\mathcal{F} : C^1(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ dados por

$$(\mathcal{N}(u))(x) = -\int_a^x f(t, u(t))dt,$$

$$(\mathcal{F}(u))(x) = \int_a^x \phi^{-1}(\Lambda(\mathcal{N}(u)) + (\mathcal{N}(u))(t))dt.$$

Se deduce de (2.6) que u es solución de (2.13) si y solo si $u \in C^1(\overline{\Omega})$ y satisface que

$$u(x) = \int_a^x \phi^{-1}(\phi(u'(0)) + (\mathcal{N}(u))(t))dt, \quad \phi(u'(0)) = \Lambda(\mathcal{N}(u)).$$

Luego, u es solución de (2.13) si y solo si u es un punto fijo del operador $\mathcal{F}$.

Veamos entonces que $\mathcal{F}$ posee un punto fijo, como Λ y $\mathcal{N}$ son operadores continuos, se tiene que $\mathcal{F}$ también es continuo. Tomemos una sucesión $\{u_n\} \subset C^1(\overline{\Omega})$ y sea $v_n = \mathcal{F}(u_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces es

$$v_n'(x) = \phi^{-1}(\Lambda(\mathcal{N}(u_n)) + (\mathcal{N}(u_n)(x))), \quad x \in \overline{\Omega}, n \in \mathbb{N}.$$

Por la hipótesis (2.12), existe una constante c_1 positiva tal que $\|(\mathcal{N}(u_n))\|_\infty \leq c_1$, en efecto, dado $x \in \overline{\Omega}$ es

$$|(\mathcal{N}(u_n))(x)| = \left| \int_a^x f(t, u(t))dt \right| \leq$$
$$\leq \int_a^x |f(t, u(t))| \leq \int_a^x h(t)dt \leq \|h\|_1 = c_1.$$

Esto implica que las sucesiones $\{v_n\}$ y $\{v_n'\}$ son acotadas. En consecuencia resulta que $\{v_n\}$ es equicontinua en $\overline{\Omega}$. Y más aún, para $x_1, x_2 \in [a, b]$ es

$$|\phi(v_n'(x_1)) - \phi(v_n'(x_2))| = |(\mathcal{N}(u)(x_1)) - (\mathcal{N}(u)(x_2))| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} h(t)dt \right|.$$

Es decir, la sucesión $\{\phi(v_n')\}$ es acotada y equicontinua en $\overline{\Omega}$. Por el Teorema de Arzelà-Ascoli existen subsucesiones $\{v_{k_n}\}$ y $\{\phi(v_{k_n}')\}$ uniformemente convergentes en $\overline{\Omega}$. Entonces $\{v'_{k_n}\}$ es uniformemente convergente en $\overline{\Omega}$ y por eso, $\{v_{k_n}\}$ es convergente en $C^1(\overline{\Omega})$. Hemos probado que el operador $\mathcal{F}$ es compacto, luego por el Teorema de punto fijo de Schauder, $\mathcal{F}$ tiene un punto fijo, el cual es una solución de (2.13). ■

Teorema 2.17. *Sean v y w sub y supersoluciones respectivamente de (2.10) tales que $v(x) \leq w(x)$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Supongamos que existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que*

$$|f(x,\xi)| \leq g(x) \qquad \text{para p.p. } x \in \Omega \text{ y todo } \xi \in [v(x), w(x)].$$

Entonces existe $u \in C^1(\overline{\Omega})$ solución de (2.10) con $v \leq u \leq w$ en $\overline{\Omega}$.

Prueba. Probaremos este Teorema para $\mathcal{L}_\phi$ puesto que u es solución de (2.10) si y solo si es solución de

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\phi u = f(x,u) - r(x)\phi(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.14}$$

Como se tiene que $|\phi(\xi)| \leq \sup_{x\in\Omega}(-\phi(v(x)), \phi(w(x))) =: C < \infty$ junto con la hipótesis resulta $|f(x,\xi) - r(x)\phi(\xi)| \leq g(x) + Cr(x)$, para todo $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}$, con $g + Cr \in L^1(\Omega)$.

Construyamos primero un problema auxiliar. Para *p.p.* $x \in \Omega$ y todo $\xi \in \mathbb{R}$ definimos,

$$\overline{f}(x,\xi) := \begin{cases} f(x,v(x)) + \frac{v(x)-\xi}{v(x)-\xi+1} & \text{si } \xi < v(x) \\ f(x,\xi) & \text{si } v(x) \leq \xi \leq w(x) \\ f(x,w(x)) - \frac{\xi - w(x)}{\xi - w(x)+1} & \text{si } \xi > w(x) \end{cases}$$

tenemos que $\overline{f} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Carathéodory. Además se tiene que $|\overline{f}(x,\xi)| \leq g(x) + 1 =: \overline{g}(x) \in L^1(\Omega)$. Por el Teorema 2.16 existe u solución de (2.10) con $\overline{f}$ en lugar de f.

Si vemos que $v \leq u \leq w$ listo. Sea $\theta(x) = u(x) - w(x)$, $x \in \overline{\Omega}$ y supongamos por el absurdo que $\max\{\theta(x) : x \in \overline{\Omega}\} = \theta(x_0) > 0$. Como $u(a) = u(b) = 0$ y $w(a), w(b) \geq 0$, se tiene que $x_0 \in (a,b)$. Más aún, $x_0 \notin \Sigma$ puesto que w es supersolución se tiene que $\theta'(\tau^-) = u'(\tau) - w'(\tau^-) \leq u'(\tau) - w'(\tau^+) = \theta'(\tau^+)$ para todo $\tau \in \Sigma$. Por lo tanto $x_0 \in (a,b)\backslash\Sigma$ y $\theta'(x_0) = 0$, esto nos garantiza que existe un $x_1 \in (x_0, b)$ tal que

$$\theta(x) > 0, \quad |\theta'(x)| < \frac{\theta(x)}{\theta(x)+1} < 1$$

para $x \in [x_0, x_1]$ y $[x_0, x_1] \cap \Sigma = \emptyset$. Entonces,

$$\phi(u'(x))' - \phi(w'(x))' = -\bar{f}(x, u(x)) - \phi(w'(x))' =$$

$$-f(x, w(x)) + \frac{\theta(x)}{\theta(x)+1} - \phi(w'(x))' \geq$$

$$-f(x, w(x)) + |\theta'(x)| - \phi(w'(x))' \geq 0$$

p.p. $x \in [x_0, x_1]$ pues $-\phi(w'(x))' \geq f(x, w(x))$. Luego,

$$0 < \int_{x_0}^{x} \phi(u'(t))' - \phi(w'(t))' dt = \phi(u'(x)) - \phi(w'(x)), \quad p.p.\ x \in (x_0, x_1].$$

Por lo tanto $\theta'(x) > 0$, *p.p.* $x \in (x_0, x_1]$ contradiciendo nuestra suposición de que x_0 es un máximo de θ. Análogamente se puede probar que $v(x) \leq u(x)$, terminando así la prueba. ■

3. Resultados conocidos

En esta sección consideraremos

$$\begin{array}{lll} \phi(x) = x, & x \in \mathbb{R} & \\ \phi(x) = |x|^{p-2}x, & x \in \mathbb{R}, & 1 < p < \infty. \end{array}$$

Entonces analizaremos problemas de la forma

$$\begin{cases} -u'' = \lambda m(x) f(u) & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

y

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda m(x) f(u) & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $m : \Omega \to \mathbb{R}$ es no negativa. Aunque es claro que el problema (3.1) es un caso particular del problema (3.2), los analizaremos por separado, ya que para (3.1) las pruebas en algunos casos son mucho más sencillas.

Primero notemos que si tomamos $f(u) = u^q$ con $0 < q < 1$ para (3.1) y $0 < q < p - 1$ para (3.2), por la homogeneidad de ϕ (es decir, para $c > 0$ es $\phi(cx) = c^{\alpha}\phi(x)$ para algún α) y de u^q resulta que hay solución de (3.1) y (3.2) para algún $\lambda_0 > 0$ fijo si y solo si hay solución para todo $\lambda > 0$.

Veamos entonces que si $0 \leq m \not\equiv 0$ hay solución para

$$\begin{cases} -u'' = m(x)u^q & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3}$$

Sea $0 < \psi \in H_0^1(\Omega)$ con $\|\psi\|_\infty = 1$ tal que

$$\begin{cases} -\psi'' = \lambda_1(m)m(x)\psi & \text{en } \Omega \\ \psi = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Esta ψ existe por el Teorema 2.9. Para $\varepsilon \in \big(0, \lambda_1(m)^{-1/(1-q)}\big)$ sea $\underline{u} := \varepsilon\psi$. Como $q \in (0,1)$ tenemos que,

$$-\underline{u}'' = \lambda_1(m)m(x)\varepsilon\psi \leq m(x)(\varepsilon\psi)^q = m(x)\underline{u}^q \quad \text{en } \Omega,$$

o sea, $\underline{u}$ es subsolución de (3.3). (Notar que esto *no* es cierto si m cambia de signo).

Por otra lado, tomemos v solución de

$$\begin{cases} -v'' = m(x) & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

la cual existe por (2.6) y por la Observación 2.14 es $v \geq 0$. Y para $k \geq (\|v\|_\infty + 1)^{q/(1-q)}$ definamos $\overline{u} := k(v+1)$. Resulta que

$$-\overline{u}'' = -kv'' = km(x) \geq (k(v+1))^q m(x) = m(x)\overline{u}^q \quad \text{en } \Omega,$$

y por lo tanto $\overline{u}$ es supersolución de (3.3). Como $k > 0$ podemos tomar $\varepsilon < k$, resultando así que $\underline{u} \leq \overline{u}$. Luego, por el Teorema (2.17) existe solución de (3.3).

Teorema 3.1. *Si $\xi \to f(\xi)/\xi$ es decreciente entonces el problema (3.1) tiene a lo sumo una solución.*

Prueba. Supongamos que u, v son soluciones de (3.1) tal que $A := \{u > v\} \neq \emptyset$, como A es abierto tomemos $A_c := (x_0, x_1)$ una componente conexa de A. Como u es solución se tiene que

$$\lambda \int_{x_0}^{x_1} m(x)f(u)v = -\int_{x_0}^{x_1} u''v = u'v\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} u'v'$$

Entonces al ser $u > 0$, resulta que

$$\lambda \int_{x_0}^{x_1} m(x)\frac{f(u)}{u}vu = u'(x_1)v(x_1) - u'(x_0)v(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} u'v'.$$

Por ser v también solución, obtenemos que

$$\lambda \int_{x_0}^{x_1} m(x) \frac{f(v)}{v} uv = v'(x_1)u(x_1) - v'(x_0)u(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} v'u'.$$

Si restamos ambas igualdades resulta que

$$\lambda \int_{x_0}^{x_1} m(x) \left(\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} \right) uv =$$

$$u'(x_1)v(x_1) - u'(x_0)v(x_0) - v'(x_1)u(x_1) + v'(x_0)u(x_0).$$

Como $m \geq 0$, $\xi \to f(\xi)/\xi$ es decreciente y $u, v > 0$ se tiene que el lado izquierdo de la igualdad es menor o igual a cero. Pero por otro lado, como $u > v$ en A_c, el lado derecho de la última igualdad es mayor o igual a cero, resultado así que

$$\lambda \int_{x_0}^{x_1} m(x) \left(\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} \right) uv = 0.$$

Si $m > 0$ en algún subconjunto $Z \subset A_c$ con $|Z| > 0$ sería

$$\lambda \int_{x_0}^{x_1} m(x) \left(\frac{f(u)}{u} - \frac{f(v)}{v} \right) uv < 0$$

lo cual no es cierto. Por lo tanto debe ser, $m = 0$ *p.p.* en A_c, y como A_c es una componente arbitraria de A, resulta que $m = 0$ *p.p.* en A. Análogamente podemos ver que $m = 0$ *p.p.* en $B := \{v > u\}$, obteniendo que $m(x) = 0$ *p.p.* $x \in \{u \neq v\}$. Luego, es $m(x)f(u) = m(x)f(v)$ *p.p.* $x \in \Omega$ y por lo tanto

$$\begin{cases} -(u-v)'' = 0 & \text{en } \Omega \\ u - v = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces, es $u = v$. ■

Observación 3.2. Si tenemos una f para la cual existen $k_1, k_2 > 0$ y $q \in (0,1)$ tales que $k_1 \xi^q \leq f(\xi) \leq k_2 \xi^q$ para todo $\xi > 0$ entonces el problema (3.1) tiene solución para todo $\lambda > 0$ ya que podemos tomar $\underline{u}$ la solución del problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda k_1 m(x) u^q & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

como subsolución (3.1) y $\overline{u}$ la solución de

$$\begin{cases} -u'' = \lambda k_2 m(x) u^q & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

como supersolución de (3.1). Si vemos que $\underline{u} \leq \overline{u}$ entonces por el Teorema (2.17) existe u solución de (3.1).

Veamos que existe $c \geq 1$ tal que $\overline{u} = c\underline{u}$. En efecto,
sean $u_1 := (\lambda k_1)^{1/(q-1)}\underline{u}$ y $u_2 := (\lambda k_2)^{1/(q-1)}\overline{u}$ entonces se tiene que

$$-u_1'' = -(\lambda k_1)^{1/(q-1)}\underline{u}'' = (\lambda k_1)^{1/(q-1)}\lambda k_1 m(x)\underline{u}^q = m(x)u_1^q,$$

y análogamente

$$-u_2'' = -(\lambda k_2)^{1/(q-1)}\overline{u}'' = (\lambda k_2)^{1/(q-1)}\lambda k_2 m(x)\overline{u}^q = m(x)u_2^q,$$

es decir que u_1 y u_2 son soluciones positivas de

$$\begin{cases} -u'' = m(x)u^q & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Luego, por el Teorema 3.1 es $u_1 = u_2$, entonces es $\overline{u} = (k_2/k_1)^{1/(q-1)}\underline{u}$ como $k_1 \leq k_2$ resulta $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Ahora realizaremos algo similar a lo que hicimos para el Laplaciano pero con el p-Laplaciano.

Veamos ahora que si $m \not\equiv 0$ y $m \geq 0$. Entonces

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = m(x)u^q & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

tiene solución. Tomemos $0 < \psi \in W_0^{1,p}$ tal que

$$\begin{cases} -(|\psi'|^{p-2}\psi')' = \lambda_1(m,p)m\psi^{p-1} & \text{en } \Omega \\ \psi = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

esta ψ existe por el Teorema 2.4. Además, podemos pedir que $\|\psi\|_\infty = 1$. Entonces para $\varepsilon \in \big(0, \lambda_1(m,p)^{-1/(p-1-q)}\big)$ definimos $\underline{u} := \varepsilon\psi$. $\underline{u}$ es subsolución de (3.4) ya que como $q \in (0, p-1)$ es

$$-(|\underline{u}'|^{p-2}\underline{u}')' = -\varepsilon^{p-1}(|\psi'|^{p-2}\psi')' = \varepsilon^{p-1}\lambda_1(m,p)m(x)\psi^{p-1} \leq$$

$$m(x)(\varepsilon\psi)^q = m(x)\underline{u}^q.$$

Por otra parte, sea v solución de

$$\begin{cases} -(|v'|^{p-2}v')' = m(x) & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

la cual existe por (2.6) y es no negativa por la Observación 2.14. Entonces si definimos $\overline{u} := k(v+1)$ para $k \geq (\|v\|_\infty + 1)^{q/(p-1-q)}$, tenemos que $\overline{u}$ es una supersolución de (3.4). En efecto,

$$-(|\overline{u}'|^{p-2}\overline{u}')' = -k^{p-1}(|v'|^{p-2}v')' =$$

$$k^{p-1}m(x) \leq (k(v+1))^q\, m(x) = m(x)\overline{u}.$$

Luego, como $k > 0$ podemos achicar ε, si es necesario, de manera que $\varepsilon < k$ resultando así $\underline{u} \leq \overline{u}$ y por lo tanto el Teorema (2.17) nos dice que existe solución de (3.4).

Antes de probar el Teorema de unicidad para el p-Laplaciano enunciaremos unas desigualdades que nos serán útiles en la prueba, para la demostración ver el apéndice de [17].

Lema 3.3. *Si $p \geq 2$, entonces*

$$|x_2|^p \geq |x_1|^p + p|x_1|^{p-2}x_1(x_2 - x_1) + \frac{|x_2 - x_1|}{2^{p-1} - 1} \tag{3.5}$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
Si $1 < p < 2$, entonces

$$|x_2|^p \geq |x_1|^p + p|x_1|^{p-2}x_1(x_2 - x_1) + C(p)\frac{|x_2 - x_1|^2}{(|x_1| + |x_2|)^{2-p}} \tag{3.6}$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, donde $C(p)$ es una constante positiva que solo depende de p.

Teorema 3.4. *Sea $p > 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y la aplicación $\xi \to f(\xi)/\xi^{p-1}$ sea decreciente y acotada en $(0, \infty)$. Entonces (3.2) tiene a lo sumo una solución.*

Prueba. Supongamos que u, v son dos soluciones de (3.1), entonces $u, v \in L^\infty(\Omega)$ y

$$\int_a^b |u'|^{p-2}u'\psi_1' = \int_a^b \lambda m(x) f(u)\psi_1 = \int_a^b \lambda m(x)\frac{f(u)}{u^{p-1}}u^{p-1}\psi_1, \tag{3.7}$$

$$\int_a^b |v'|^{p-2}v'\psi_2' = \int_a^b \lambda m(x) f(v)\psi_2 = \int_a^b \lambda m(x)\frac{f(v)}{v^{p-1}}v^{p-1}\psi_2, \tag{3.8}$$

para toda $\psi_1, \psi_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Para $\varepsilon > 0$ definimos $u_\varepsilon := u + \varepsilon$, $v_\varepsilon := v + \varepsilon$ y

$$\psi_1 := \frac{u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p}{u_\varepsilon^{p-1}}, \quad \psi_2 := \frac{v_\varepsilon^p - u_\varepsilon^p}{v_\varepsilon^{p-1}}.$$

Entonces $u_\varepsilon/v_\varepsilon, v_\varepsilon/u_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ y $\psi_1, \psi_2 \in W_0^{1,p}$. Notemos que

$$\psi_1' = \left[1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right] u' - p\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} v',$$

$$\psi_2' = \left[1 + (p-1)\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^p\right] v' - p\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{p-1} u'.$$

Sumando (3.7) y (3.8) obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda m(x)\left[\frac{f(u)}{u^{p-1}}\left(\frac{u}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} - \frac{f(v)}{v^{p-1}}\left(\frac{v}{v_\varepsilon}\right)^{p-1}\right](u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p) = \\ = \int_a^b |u'|^{p-2}u'\psi_1' + |v'|^{p-2}v'\psi_2' = \qquad (3.9) \\ = \int_a^b \left[1 + (p-1)\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p\right]|u'|^p - p\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1}|u'|^{p-2}u'v' \\ + \left[1 + (p-1)\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^p\right]|v'|^p - p\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1}|v'|^{p-2}v'u'.\end{aligned}$$

Si $p \geq 2$ usando (3.5) con $(u_\varepsilon/v_\varepsilon)v'$ y u', en lugar de x_1 y x_2 respectivamente obtenemos que

$$|u'|^p \geq \left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^p |v'|^p + p\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{p-1}|v'|^{p-2}v'\left(u' - \frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}v'\right) +$$

$$+\frac{1}{2^{p-1}-1}\frac{|v_\varepsilon u' - u_\varepsilon v'|^p}{u_\varepsilon^p}.$$

Análogamente

$$|v'|^p \geq \left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p |u'|^p + p\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} |u'|^{p-2}u'\left(v' - \frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}u'\right) +$$

$$+\frac{1}{2^{p-1}-1}\frac{|u_\varepsilon v' - v_\varepsilon u'|^p}{v_\varepsilon^p}.$$

De las últimas dos desigualdades junto con (3.9) obtenemos que

$$\int_a^b \lambda m(x)\left[\frac{f(u)}{u^{p-1}}\left(\frac{u}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} - \frac{f(v)}{v^{p-1}}\left(\frac{v}{v_\varepsilon}\right)^{p-1}\right](u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p) \geq$$

$$\frac{1}{2^{p-1}-1}\int_a^b \left(\frac{1}{u_\varepsilon^p} + \frac{1}{v_\varepsilon^p}\right)|v_\varepsilon u' - u_\varepsilon v'|^p \geq 0.$$

Y si $1 < p < 2$ usamos (3.6) con $(u_\varepsilon/v_\varepsilon)v'$ y u', en lugar de x_1 y x_2 para obtener que

$$|u'|^p \geq \left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^p |v'|^p + p\left(\frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}\right)^{p-1} |v'|^{p-2}v'\left(u' - \frac{u_\varepsilon}{v_\varepsilon}v'\right) +$$

$$\frac{C(p)}{v_\varepsilon^p}\frac{|v_\varepsilon u' - u_\varepsilon v'|^2}{(v_\varepsilon|u'| + u_\varepsilon|v'|)^{2-p}}.$$

Análogamente

$$|v'|^p \geq \left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^p |u'|^p + p\left(\frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} |u'|^{p-2}u'\left(v' - \frac{v_\varepsilon}{u_\varepsilon}u'\right) +$$

$$\frac{C(p)}{u_\varepsilon^p}\frac{|u_\varepsilon v' - v_\varepsilon u'|^2}{(u_\varepsilon|v'| + v_\varepsilon|u'|)^{2-p}},$$

usando nuevamente (3.9) junto con estas dos desigualdades obtenemos que

$$\int_a^b \lambda m(x)\left[\frac{f(u)}{u^{p-1}}\left(\frac{u}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} - \frac{f(v)}{v^{p-1}}\left(\frac{v}{v_\varepsilon}\right)^{p-1}\right](u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p) \geq$$

$$C(p)\int_a^b \left(\frac{1}{u_\varepsilon^p} + \frac{1}{v_\varepsilon^p}\right)\frac{(v_\varepsilon u' - u_\varepsilon v')^2}{(u_\varepsilon|v'| + v_\varepsilon|u'|)^{2-p}} \geq 0.$$

Cuando $\varepsilon \to 0^+$, tenemos que $u/u_\varepsilon \to 1$,$v/v_\varepsilon \to 1$ puntualmente en Ω y además,

$$\left|\lambda m(x)\left[\frac{f(u)}{u^{p-1}}\left(\frac{u}{u_\varepsilon}\right)^{p-1} - \frac{f(v)}{v^{p-1}}\left(\frac{v}{v_\varepsilon}\right)^{p-1}\right](u_\varepsilon^p - v_\varepsilon^p)\right| \leq cm(x) \in L^1(\Omega).$$

Por otro lado, como $\xi \to f(\xi)/\xi^{p-1}$ es decreciente se tiene que

$$\lambda m(x)\left[\frac{f(u)}{u^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}}\right](u^p - v^p) \leq 0,$$

y por lo tanto en ambos casos tenemos que $|uv' - vu'| = 0$, lo que implica $u = kv$ para alguna constante $k > 0$. Pero entonces de (3.7) y (3.8) se obtiene para toda $\psi \in W_0^{1,p}$ que

$$\int_a^b \lambda m(x)\frac{f(v)}{v^{p-1}}v^{p-1}\psi = \int_a^b |v'|^{p-2}v'\psi =$$

$$\frac{1}{k^{p-1}}\int_a^b |(kv)'|^{p-2}(kv)'\psi = \int_a^b \lambda m(x)\frac{f(kv)}{(kv)^{p-1}}v^{p-1}\psi,$$

resultando así que $k = 1$. ∎

Observación 3.5. Si tenemos una f para la cual existen $k_1, k_2 > 0$ y $q \in (0, p-1)$ tales que $k_1\xi^q \leq f(\xi) \leq k_2\xi^q$ para todo $\xi > 0$ entonces el problema (3.2) tiene solución para todo $\lambda > 0$ ya que podemos tomar $\underline{u}$ la solución del problema

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda k_1 m(x)u^q & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

como subsolución de (3.2) y $\overline{u}$ la solución de

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda k_2 m(x)u^q & \text{en } \Omega \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

como supersolución de (3.2). Si vemos que $\underline{u} \leq \overline{u}$ entonces por el Teorema (2.17) existe u solución de (3.2).

Veamos que existe $c \geq 1$ tal que $\overline{u} = c\underline{u}$. En efecto, sean $u_1 := (\lambda k_1)^{1/(q-p-1)}\underline{u}$ y $u_2 := (\lambda k_2)^{1/(q-p-1)}\overline{u}$ entonces se tiene que

$$-(|u_1'|^{p-2}u_1') = -(\lambda k_1)^{(p-1)/(q-p-1)}\underline{u}'' = (\lambda k_1)^{(p-1)/(q-p-1)}\lambda k_1 m(x)\underline{u}^q = m(x)u_1^q$$

y análogamente

$$-u_2'' = -(\lambda k_2)^{(p-1)/(q-p-1)}\overline{u}'' = (\lambda k_2)^{(p-1)/(q-p-1)}\lambda k_2 m(x)\overline{u}^q = m(x)u_2^q$$

es decir que u_1 y u_2 son soluciones positivas de

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = m(x)u^q & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Luego, por el Teorema 3.4 es $u_1 = u_2$, entonces es $\overline{u} = (k_2/k_1)^{1/(q-p-1)}\underline{u}$ como $k_1 \leq k_2$ resulta $\underline{u} \leq \overline{u}$.

4. Resultados principales

Para $h \in L^1(\Omega)$ con $0 \leq h \not\equiv 0$ definimos

$$\mathcal{A}_h := \{x \in \Omega : h(y) = 0 \ p.p. \ y \in (a, x)\},$$
$$\mathcal{B}_h := \{x \in \Omega : h(y) = 0 \ p.p. \ y \in (x, b)\},$$

y además

$$\alpha_h := \begin{cases} \sup \mathcal{A}_h & \text{si } \mathcal{A}_h \neq \emptyset \\ a & \text{si } \mathcal{A}_h = \emptyset, \end{cases} \qquad \beta_h := \begin{cases} \text{ínf}\, \mathcal{B}_h & \text{si } \mathcal{B}_h \neq \emptyset \\ b & \text{si } \mathcal{B}_h = \emptyset, \end{cases}$$

$$\overline{\theta}_h := \frac{\alpha_h + \beta_h}{2}, \qquad \underline{\theta}_h := \text{mín}\left\{\frac{1}{\beta_h - a}, \frac{1}{b - \alpha_h}\right\}. \tag{4.1}$$

Escribimos también

$$\delta_\Omega(x) := dist(x, \partial\Omega) = min(x - a, b - x).$$

Recordar que $\mathcal{S}_\phi : L^1(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$ es el operador solución de

$$\begin{cases} -\phi(u')' = h(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Lema 4.1. *Sea $0 \leq h \in L^1(\Omega)$ tal que $h \not\equiv 0$. Entonces*
(i) En $\overline{\Omega}$ se tiene que

$$\mathcal{S}_\phi(h) \leq \phi^{-1}(\int_a^b h)\delta_\Omega. \tag{4.2}$$

(ii) En $\overline{\Omega}$ se tiene que

$$\mathcal{S}_\phi(h) \geq \underline{\theta}_h \, \text{mín}\left\{\int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}(\int_y^{\overline{\theta}_h} h)dy, \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}(\int_{\overline{\theta}_h}^y h)dy\right\}\delta_\Omega. \tag{4.3}$$

Prueba. Sea $v := \mathcal{S}_\phi(h)$. Como ϕ^{-1} es creciente y $h \geq 0$ en Ω usando (2.6) vemos que $v'(x) = \phi^{-1}(c_h - \int_a^x h(t)dt)$ es monótona decreciente y por lo tanto v es cóncava en Ω. Luego, al ser $v = 0$ en $\partial\Omega$ y $v \not\equiv 0$, debemos tener que $v'(b) < 0 < v'(a)$ y por lo tanto

$$0 < c_h < \int_a^b h(t)dt. \tag{4.4}$$

Usando nuevamente que ϕ es creciente y (4.4) deducimos que

$$v'(a), |v'(b)| \leq \phi^{-1}\left(\int_a^b h\right)$$

y entonces por la concavidad de v obtenemos (4.2).

Probemos ahora (ii). Afirmamos primero que

$$v \geq \underline{\theta}_h \|v\|_\infty \delta_\Omega \qquad \text{en } \overline{\Omega}. \tag{4.5}$$

En efecto, sea $\xi \in \Omega$ algún punto donde v alcanza su máximo (y por lo tanto $v'(\xi) = 0$). Si fuera $\mathcal{A}_h \neq \emptyset$, entonces por (2.6) tendríamos que $v(x) = \phi^{-1}(c_h)(x-a)$ para todo $x \in (a, \alpha_h)$, con $\phi^{-1}(c_h) > 0$ por (4.4). Luego debe ser, $\xi > \alpha_h$. Recordando ahora la concavidad de v se tiene que para $x \in [\xi, b]$,

$$v(x) \geq \frac{v(\xi)(b-x)}{b-\xi} \geq \frac{\|v\|_\infty}{b-\alpha_h} \delta_\Omega(x).$$

Análogamente, para $x \in [a, \xi]$,

$$v(x) \geq \frac{v(\xi)(x-a)}{\xi - a} \geq \frac{\|v\|_\infty}{\beta_h - a} \delta_\Omega(x)$$

y queda probada la afirmación.

Supongamos ahora que $\xi \geq \overline{\theta}_h$. Como ϕ es un homeomorfismo con $\phi(0) = 0$, y como $v'(x) = \phi^{-1}(c_h - \int_a^x h)$ y $v'(\xi) = 0$, resulta que $c_h = \int_a^\xi h$. Luego, recordando (2.6) y que ϕ es creciente,

$$v(\overline{\theta}_h) = \int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}\left(\int_a^\xi h - \int_a^y h\right) dy =$$
$$\int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}\left(\int_y^\xi h\right) dy \geq \int_a^{\overline{\theta}_h} \phi^{-1}\left(\int_y^{\overline{\theta}_h} h\right) dy. \tag{4.6}$$

Supongamos ahora que $\xi \leq \overline{\theta}_h$. Es fácil comprobar que podemos reescribir v como

$$v(x) = \int_x^b \phi^{-1}\left(\widetilde{c}_h - \int_y^b h(t)dt\right) dy,$$

donde $\widetilde{c}$ es la única constante tal que $v(a) = 0$. Más aún, razonando como en el párrafo anterior vemos que $\widetilde{c}_h = \int_\xi^b h$. Entonces,

$$v(\overline{\theta}_h) = \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}\left(\int_\xi^b h - \int_y^b h\right) dy =$$
$$\int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}\left(\int_\xi^y h\right) dy \geq \int_{\overline{\theta}_h}^b \phi^{-1}\left(\int_{\overline{\theta}_h}^y h\right) dy. \tag{4.7}$$

Teniendo en cuenta (4.5), (4.6) y (4.7) deducimos (4.3) y esto termina la prueba. ■

Observación 4.2. (i) Notar que (por la definición de $\overline{\theta}_h$) la constante que aparece en el miembro derecho de (4.3) es siempre estrictamente positiva.

(ii) Sea $h \in L^1(\Omega)$ con $0 \leq h \not\equiv 0$. Para cualquier $g \in C(\overline{\Omega})$ con $g > 0$ en Ω se tiene que $\alpha_h = \alpha_{hg}$ y $\beta_h = \beta_{hg}$ y por lo tanto la parte (ii) del Lema anterior es válida también para $\mathcal{S}_\phi(hg)$ con $\overline{\theta}_h$ y $\underline{\theta}_h$ dados por (4.1). ■

Sean

H1. Existen $t_1 > 0$ y un homeomorfismo ψ definido en $[0, t_1]$ tal que ψ es creciente, $\psi(0) = 0$ y

$$\phi(tx) \leq \psi(t)\phi(x) \qquad \text{para todo } t \in [0, t_1], x \geq 0. \tag{4.8}$$

H1'. Existe $p > 0$ tal que

$$\overline{\lim}_{t\to 0^+} \frac{\phi(t)}{t^p} < \infty, \qquad \text{y además} \tag{4.9}$$

$$\overline{\lim}_{t\to \infty} \frac{\phi(c_\Omega t)}{\phi(t)} < \infty, \qquad \text{donde } c_\Omega := \frac{b-a}{2}. \tag{4.10}$$

H2. Existen $t_2, M > 0$ tales que

$$\phi(tx) \leq M\phi(t)\phi(x) \qquad \text{para todo } t \in [0, t_2], x \in [0, c_\Omega]. \tag{4.11}$$

F1. Existen $k_1, k_2, q > 0$ tales que

$$k_1 t^q \leq f(t) \leq k_2 t^q \qquad \text{para todo } t \geq 0. \tag{4.12}$$

F1'. Existen $\bar{t}, k_1, k_2, q_1, q_2 > 0$ tales que

$$k_1 t^{q_1} \leq f(t) \text{ para todo } t \in \left[0, \bar{t}\right] \text{ y } f(t) \leq k_2 \phi(t)^{q_2} \text{ para todo } t \geq 0. \tag{4.13}$$

Mencionamos que la desigualdad (4.11) aparece (para valores grandes de t y x) en la llamada condición Δ' referida a funciones de Young (ver por ejemplo el libro [8], capítulo 1, sección 5, o [11]).

Observación 4.3. (i) Notar que si $|\Omega| \leq 2$ la condición (4.10) se cumple automáticamente ya que ϕ es creciente y por lo tanto en tal caso H1' se reduce a (4.9). Por otro lado, si vale H1 con $\psi(t) = ct^p$ para algún $c, p > 0$, eligiendo $x = 1$ en (4.8) vemos que H1 implica (4.9). O sea, en este caso particular, en dominios *pequeños* la hipótesis H1 es más fuerte que H1'. Sin embargo, en general, estás hipótesis son independientes (ver los ejemplos (a2) y (d) al final de este capítulo).

(ii) Supongamos que ϕ cumple H1' o H1 con $\psi(t) = ct^p$. Entonces la condición

$$\underline{\lim}_{x\to 0^+} \frac{\phi(x)}{x^p} > 0, \tag{4.14}$$

es suficiente para que valga H2. En efecto, en ambos casos asumiremos que vale (4.9) (ver (i)). Por lo tanto dado cualquier $t_0 > 0$, existe M_{t_0} tal que $\phi(t) \leq M_{t_0} t^p$ para todo $t \in [0, t_0]$. Además, (4.14) implica que para todo $x_0 > 0$ existe $N_{x_0} > 0$ tal que $x^p \leq N_{x_0}\phi(x)$ para todo $x \in [0, x_0]$. Entonces para todo $t \in [0,1]$ y $x \in [0, c_\Omega]$,

$$\phi(tx) \leq M_{c_\Omega}(tx)^p \leq M_{c_\Omega} N_1 N_{c_\Omega} \phi(t)\phi(x),$$

y así vale (4.11). Observamos sin embargo que (4.14) **no** es necesaria para que se cumpla H2 (ver ejemplo (a4), (b) y (c) más adelante).

(iii) Si ϕ es derivable en $(0, c_\Omega)$ y

$$\sup_{t\in(0,1), x\in(0,c_\Omega)} \frac{t\phi'(tx)}{\phi(t)\phi'(x)} := M < \infty,$$

entonces es fácil verificar que vale H2 con $t_2 = 1$. En particular, si $\phi \in C^2([0, c_\Omega])$, $\phi'(0) = 0$,

$$\overline{\lim}_{t\to 0^+} \frac{t^2}{\phi(t)} < \infty \quad \text{y} \quad \overline{\lim}_{x\to 0^+} \frac{x}{\phi'(x)} < \infty$$

entonces vale H2 ya que por el Teorema del valor medio es

$$\sup_{t\in(0,1), x\in(0,c_\Omega)} \frac{t\phi'(tx)}{\phi(t)\phi'(x)} \leq \|\phi''\|_{L^\infty(0,c_\Omega)} \sup_{t\in(0,1)} \frac{t^2}{\phi(t)} \sup_{x\in(0,c_\Omega)} \frac{x}{\phi'(x)} < \infty.$$

(iv) No es difícil verificar que las hipotesís H1 y H2 son independientes, y que lo mismo es cierto para H1' y H2, ver ejemplos (a), (a2) y (d).

Nuestros resultados proveen soluciones que están en el interior del cono positivo de $C_0^1(\overline{\Omega}) := \{v \in C^1(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ en } \partial\Omega\}$, el cual es denotado por

$$P^\circ := \{v \in C_0^1(\overline{\Omega}) : v > 0 \text{ en } \Omega \text{ y } v'(b) < 0 < v'(a)\}.$$

Teorema 4.4. *Sea $m \in L^1(\Omega)$ con $0 \leq m \not\equiv 0$. Las siguientes afirmaciones son válidas.*
(i) Si ϕ y f cumplen H1 y F1 respectivamente con

$$\underline{\lim}_{t\to 0^+} \frac{t^q}{\psi(t)} = \infty, \tag{4.15}$$

entonces para todo $\lambda > 0$ existe $u = u_\lambda \in P^\circ$ solución de (1.1).

(ii) Si ϕ y f cumplen H1' y F1' respectivamente con

$$q_1 \in (0,p), \qquad q_2 \in (0,1), \tag{4.16}$$

entonces para todo $\lambda > 0$ existe $u = u_\lambda \in P^\circ$ solución de (1.1).

Más aún en (i) y (ii) se tiene que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|u_\lambda\|_{C^1(\overline{\Omega})} = 0. \tag{4.17}$$

Prueba. Comenzamos probando (i). Sea $\lambda > 0$, y sean $\psi, t_1, k_1, k_2, q > 0$ dados por H1 y F1. Sean $\overline{\theta}_m$ y $\underline{\theta}_m$ como en (4.1), y definamos

$$\mathcal{M}_\Omega := \min\left\{ \int_a^{\overline{\theta}_m} \phi^{-1}(\int_y^{\overline{\theta}_m} m\delta_\Omega^q)dy, \int_{\overline{\theta}_m}^b \phi^{-1}(\int_{\overline{\theta}_m}^y m\delta_\Omega^q)dy \right\}$$

(notar que $\mathcal{M}_\Omega > 0$, ver la Observación 4.2 (i)). Escribimos además

$$M := \max\left\{ \frac{1}{\lambda k_1(\underline{\theta}_m \mathcal{M}_\Omega)^q}, \lambda k_2(\phi^{-1}(\int_a^b m\delta_\Omega^q))^q \right\}. \tag{4.18}$$

Observamos ahora que por (4.15) existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $M\psi(\varepsilon) \le \varepsilon^q$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Luego,

$$M\varepsilon \le \psi^{-1}(\varepsilon)^q \tag{4.19}$$

para todo $\varepsilon \in (0, \psi(\varepsilon_0)]$. Elegimos a continuación

$$0 < \varepsilon < \min\{1, \psi(\varepsilon_0), \psi(t_1)\}, \tag{4.20}$$

y para tales ε definimos $v := \mathcal{S}_\phi(\varepsilon m \delta_\Omega^q)$. Notamos que H1 implica que $t\phi^{-1}(x) \le \phi^{-1}(\psi(t)x)$ para todo $t \in [0, t_1]$ y todo $x \ge 0$, y por lo tanto

$$\psi^{-1}(r)\phi^{-1}(x) \le \phi^{-1}(rx)$$

para todo $r \in [0, \psi(t_1)]$ y $x \ge 0$. Teniendo en cuenta esto, además de (4.18), (4.19) y (4.20), usando F1, el Lema 4.1 (ii) y la Observación 4.2 (ii) deducimos que

$$\lambda m(x) f(v) \ge \lambda k_1 m(x) v^q \ge \tag{4.21}$$

$$\lambda m(x) k_1 \left[\overline{\theta}_m \min\left\{ \int_a^{\overline{\theta}_m} \phi^{-1}(\int_y^{\overline{\theta}_m} \varepsilon m\delta_\Omega^q)dy, \int_{\overline{\theta}_m}^b \phi^{-1}(\int_{\overline{\theta}_m}^y \varepsilon m\delta_\Omega^q)dy \right\} \delta_\Omega \right]^q \ge$$

$$\lambda k_1 m(x)(\underline{\theta}_m \mathcal{M}_\Omega \psi^{-1}(\varepsilon)\delta_\Omega)^q \ge \varepsilon m(x)\delta_\Omega^q(x) = \mathcal{L}_\phi v.$$

O sea, v es subsolución de (1.1).

Por otra parte, vemos que H1 implica que $\phi(x)/\psi(t) \leq \phi(x/t)$ para todo $t \in (0, t_1]$ y todo $x \geq 0$ y por lo tanto $\phi^{-1}(x/\psi(t)) \leq \phi^{-1}(x)/t$ para todo $t \in (0, t_1]$ y todo $x \geq 0$. En otras palabras,

$$\phi^{-1}(sx) \leq \frac{\phi^{-1}(x)}{\psi^{-1}(1/s)}$$

para todo $s \geq 1/\psi(t_1)$ y $x \geq 0$. Sea ahora $w := \mathcal{S}_\phi(\varepsilon^{-1} m \delta_\Omega^q)$. Recordando (4.18), (4.19) y (4.20) y utilizando nuevamente F1 y el Lema 4.1 (i), tenemos que

$$\lambda m(x) f(w) \leq \lambda k_2 m(x) w^q \leq \lambda k_2 m(x) \left(\phi^{-1}\Big(\int_a^b \frac{1}{\varepsilon} m \delta_\Omega^q \Big) \delta_\Omega \right)^q \leq$$

$$\lambda k_2 m(x) \left(\frac{1}{\psi^{-1}(\varepsilon)} \phi^{-1}\Big(\int_a^b m \delta_\Omega^q \Big) \delta_\Omega \right)^q \leq \frac{1}{\varepsilon} m(x) \delta_\Omega^q(x) = \mathcal{L}_\phi w$$

y por lo tanto w es supersolución de (1.1). Más aún, como $\varepsilon \leq 1$ y $\mathcal{S}_\phi$ es monótono creciente, el Teorema (2.17) da una solución $u_\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$ de (1.1) con $v \leq u_\lambda \leq w$ en $\overline{\Omega}$, y como $v \in P^\circ$, se tiene además que $u_\lambda \in P^\circ$.

Probemos ahora (ii). Sean $k_1, k_2, \bar{t}, q_1, q_2 > 0$ dados por F1'. Como (4.9) implica que $\phi(t) \leq K t^p$ para todo $t \in [0, 1]$ y cierto $K > 0$, resulta que $t \leq K \phi^{-1}(t)^p$ para $t \in [0, \phi(1)]$, o lo que es lo mismo,

$$\phi^{-1}(t) \geq (t/K)^{1/p} \tag{4.22}$$

para tales t. Escribimos ahora

$$\mathcal{N}_\Omega := \min \left\{ \int_a^{\overline{\theta}_m} \Big(\int_y^{\overline{\theta}_m} m \delta_\Omega^{q_1} \Big)^{1/p} dy, \int_{\overline{\theta}_m}^b \Big(\int_{\overline{\theta}_m}^y m \delta_\Omega^{q_1} \Big)^{1/p} dy \right\} > 0,$$

y como en (i) definimos $v := \mathcal{S}_\phi(\varepsilon m \delta_\Omega^{q_1})$, pero con

$$0 < \varepsilon \leq \min \left\{ \bar{\varepsilon}, \left(\lambda k_1 \left(\frac{\underline{\theta}_m \mathcal{N}_\Omega}{K^{1/p}} \right)^{q_1} \right)^{p/(p-q_1)} \right\} \tag{4.23}$$

donde $0 < \bar{\varepsilon}$ es tal que $\phi^{-1}\left(\bar{\varepsilon} \int_a^b m \delta_\Omega^{q_1} \right) \leq \bar{t}/c_\Omega$. De la elección de $\bar{\varepsilon}$, (4.3) y al ser $\delta_\Omega \leq c_\Omega$, resulta que $||v||_\infty \leq \bar{t}$.

Así, teniendo en cuenta (4.16), (4.22) y (4.23) y razonando como en (4.21) deducimos que

$$\lambda m(x) f(v) \geq \lambda k_1 m(x) v^{q_1} \geq \tag{4.24}$$

$$\lambda k_1 m(x) \left(\left(\frac{\varepsilon}{K} \right)^{1/p} \underline{\theta}_m \mathcal{N}_\Omega \delta_\Omega \right)^{q_1} \geq \varepsilon m(x) \delta_\Omega^{q_1}(x) = \mathcal{L}_\phi v.$$

Por otro lado, sea $N := \sup_{t>1} \phi(c_\Omega t)/\phi(t) < \infty$ (por(4.10)). Para todo $t \geq 1$ es $\phi(c_\Omega t) \leq N\phi(t)$ y por lo tanto

$$\phi(c_\Omega \phi^{-1}(t)) \leq Nt \tag{4.25}$$

para todo $t \geq \phi(1)$. Sea $w := \mathcal{S}_\phi(\gamma m)$ con

$$\gamma \geq \text{máx} \left\{ \frac{\phi(1)}{\int_a^b m}, \left(\lambda k_2 \left(N \int_a^b m \right)^{q_2} \right)^{1/(1-q_2)} \right\} \tag{4.26}$$

Recordando F1', la desigualdad del Lema 4.1 (i), que $q_2 \in (0,1)$ y que $\delta_\Omega \leq c_\Omega$ en Ω, empleando (4.25) y (4.26) deducimos que

$$\lambda m(x) f(w) \leq \lambda k_2 m(x) \phi(w)^{q-2} \leq$$
$$\lambda k_2 m(x) \phi \left(\delta_\Omega \phi^{-1}(\int_a^b \gamma m) \right)^{q_2} \leq \lambda k_2 m(x) \phi \left(c_\Omega \phi^{-1}(\int_a^b \gamma m) \right)^{q_2} \leq$$
$$\lambda k_2 m(x) \left(N \int_a^b \right)^{q_2} \leq \gamma m(x) = \mathcal{L}_\phi w.$$

Además, como podemos agrandar a γ, si es necesario, de manera que $\gamma \geq \varepsilon c_\Omega^{q_1}$ y gracias a que $\mathcal{S}_\phi$ es monótono creciente resulta que $w \geq v$ en Ω y así obtenemos una solución $u_\lambda \in P^\circ$ de (1.1).

Probemos la última afirmación del Teorema. Sea w como en (i) o en (ii) según corresponda. Como $0 \leq u_\lambda \leq w$, de la definición de w se ve que para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$, $\lambda_0 > 0$ fijo, $\|u_\lambda\|_\infty \leq C$ con C independiente de λ. Teniendo en cuenta esto y el párrafo anterior, el Lema 4.1 (i) nos dice que

$$0 \leq u_\lambda(x) = \mathcal{S}_\phi(\lambda m f(u_\lambda))(x) \leq \phi^{-1} \left(\int_a^b \lambda m f(u_\lambda) \right) \delta_\Omega(x) \to 0$$

uniformemente en $\overline{\Omega}$ cuando $\lambda \to 0^+$ y entonces $lim_{\lambda \to 0^+} \|u_\lambda\|_\infty = 0$.

Elijamos a continuación $\xi = \xi_\lambda \in \Omega$ tal que $u'_\lambda(\xi) = 0$. Integrando (1.1) sobre (a, ξ) resulta que $u'_\lambda(a) = \phi^{-1} \left(\lambda \int_a^\xi m f(u_\lambda) \right)$ y por lo tanto del párrafo anterior obtenemos que $u'_\lambda(a) \to 0$ cuando $\lambda \to 0^+$. Ahora, para cualquier $x \in \overline{\Omega}$, integramos (1.1) sobre (a, x) y vemos que

$$u'_\lambda(x) = \phi^{-1} \left(\phi(u'_\lambda(a)) + \lambda \int_a^x m f(u_\lambda) \right) \to 0$$

uniformemente cuando $\lambda \to 0^+$. Así queda probado (4.17). ■

Consideremos ahora el problema

$$\begin{cases} -\phi(u')' + r(x)\phi(u) = \lambda m\,(x)\,f\,(u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.27}$$

con $0 \leq r \in L^1(\Omega)$.

Teorema 4.5. *Sea $m \in L^1(\Omega)$ con $0 \leq m \not\equiv 0$. Supongamos que ϕ y f cumplen las hipótesis (i) o (ii) del Teorema 4.4, con $\psi(t) = ct^p$ para algún $c, p > 0$ en el caso (i); y supongamos además que ϕ satisface H2.*
Si $r \leq m$ en Ω o $r, m \in L^\infty(\Omega)$ y $\inf_\Omega m > 0$, entonces para todo $\lambda > 0$ existe $u = u_\lambda \in P^\circ$ solución de (4.27). Además, las soluciones u_λ satisfacen (4.17).

Prueba. La prueba es una adaptación de la prueba del Teorema anterior y por tanto sólo indicamos los pequeños cambios que hay que hacer. Sea $\lambda > 0$ y supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 4.4 (i). Sean $t_2, M > 0$ dados por H2, y elijamos $\varepsilon > 0$ tal que

$$\phi^{-1}(\varepsilon \int_a^b m\delta_\Omega^q) \leq t_2$$

Para tales ε definimos como en el Teorema 4.4 $v := \mathcal{S}_\phi(\varepsilon m \delta_\Omega^q)$. Tomando $x = 1$ en (4.8) (y recordando que ahora $\psi(t) = ct^p$ para algún $p > 0$) si se cumple H1 tenemos que existe $K > 0$ tal que

$$\phi(t) \leq Kt^p \qquad \text{para todo } t \in [0, c_\Omega] \tag{4.28}$$

(donde c_Ω está dado por (4.10)). Teniendo en cuenta que $\delta_\Omega \leq c_\Omega$ en Ω, utilizando el Lema 4.1 (i) y H2 vemos que

$$\phi(v) \leq \phi\left(\phi^{-1}(\int_a^b \varepsilon m \delta_\Omega^q)\delta_\Omega\right) \leq \varepsilon M \phi(\delta_\Omega) \int_a^b m\delta_\Omega^q \leq \varepsilon KM\delta_\Omega^p \int_a^b m\delta_\Omega^q. \tag{4.29}$$

Ahora supongamos que $r \leq m$ en Ω. En tal caso (4.15) implica que $q < p$. Así, achicando ε si es necesario, como $\psi^{-1} = (t/c)^{1/p}$, de (4.21) y (4.29) tenemos que

$$\lambda m(x) f(v) - r(x)\phi(v) \geq$$

$$m(x)\left(\lambda k_1 \left(\underline{\theta}_m(\frac{\varepsilon}{c})^{1/p}\mathcal{M}_\Omega \delta_\Omega\right)^q - \varepsilon KM\delta_\Omega^q \int_a^b m\delta_\Omega^q\right) \geq \varepsilon m(x)\delta_\Omega^q(x) = \mathcal{L}_\phi v.$$

En el caso en que $r, m \in L^\infty(\Omega)$ y $\inf_\Omega m > 0$, para todo ε suficientemente pequeño también de (4.21) y (4.29) resulta

$$\lambda m(x) f(v) - r(x)\phi(v) \geq$$

$$\lambda m k_1 \left(\underline{\theta}_m (\frac{\varepsilon}{c})^{1/p} \mathcal{M}_\Omega \delta_\Omega\right)^q - \|r\|_\infty \varepsilon K M \delta_\Omega^p \int_a^b m\delta_\Omega^q \geq$$
$$\varepsilon \|m\|_\infty \delta_\Omega^q(x) \geq \mathcal{L}_\phi v.$$

O sea, en cualquier caso obtenemos una subsolución de (4.27) positiva en Ω. Más aún, estas subsoluciones tienden uniformemente a cero (por el Lema 4.1 (i)) cuando $\varepsilon \to 0$. Luego, como las soluciones (que están en P°) del Teorema anterior son supersoluciones cuando $r \not\equiv 0$, el Teorema 2.17 da la solución buscada. Además tambien se deduce que $\lim_{\lambda\to 0^+} \|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$, y con calculos similares a los hechos en la última parde de la prueba del Teorema 4.4 se muestra que u_λ satisface (4.17).

Supongamos ahora que valen las hipótesis del Teorema 4.4 (ii). Entonces tomando $v := \mathcal{S}(\varepsilon m \delta_\Omega^{q_1})$ donde q_1 esta dado por H1'. Como (4.28) vale por (4.9), procediendo como en (4.29) tenemos que

$$\phi(v) \leq \varepsilon M K \delta_\Omega^p \int_a^b m\delta_\Omega^{q_1}.$$

Más aún, empleando (4.24) en lugar de (4.21) y argumentando como en los dos párrafos anteriores podemos construir una subsolución arbitrariamente pequeña y así la prueba puede ser completada como antes. ■

Escribimos $m = m^+ - m^-$ con $m^+ := \text{máx}(m, 0)$ y $m^- := \text{máx}(-m, 0)$.

Corolario 4.6. *Sea $m \in L^1(\Omega)$ tal que existe un abierto $\Omega_0 \subset \Omega$ con $0 \leq m \not\equiv 0$ en Ω_0. Supongamos que se cumplen las hipótesis de alguno de los dos Teoremas anteriores con m^+ en lugar de m. Entonces para todo $\lambda > 0$ existe $u = u_\lambda \in C^1(\overline{\Omega})$ solución de*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda m(x) f(u) & \text{en } \Omega \\ 0 \leq u \not\equiv 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.30}$$

Además, u_λ cumple (4.17).

Prueba. Sea $\lambda > 0$, sea $\overline{u}_\lambda \in P^\circ$ la solución de (4.30) con m^+ en lugar de m provista por alguno de los Teoremas anteriores. Es claro que $\overline{u}_\lambda$ es supersolución de (4.30).

Por otro lado, como $0 \leq m \not\equiv 0$ en Ω_0, de las pruebas de los Teoremas anteriores notamos que podemos encontrar $z = z_\lambda \in C^1(\overline{\Omega}_0)$ con $z_\lambda \leq \overline{u}_\lambda$ en Ω_0 y tal que

$$\begin{cases} \mathcal{L}z \leq \lambda m(x) f(z) & \text{en } \Omega_0 \\ z = 0 & \text{en } \partial\Omega_0 \end{cases}$$

Definimos ahora, como $\underline{u}_\lambda \in C(\overline{\Omega})$ como $\underline{u}_\lambda := z_\lambda$ en Ω_0 y $\underline{u}_\lambda := 0$ en $\overline{\Omega}\backslash\Omega_0$. Entonces $\underline{u}_\lambda$ es subsolución de (4.30) y con esto obtenemos la existencia de una solución para (4.30).

La última afirmación del enunciado es consecuencia directa de (4.17) y del hecho de que para todo $\lambda > 0$ la solución obtenida de (4.30) es menor en todo Ω que la solución de (1.1) con m^+ en lugar de m provista por el Teorema 4.5. ■

4.1. Ejemplos

Supongamos $x \geq 0$ ya que podemos extender ϕ por imparidad.

(a) Sea $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ continua y monótona creciente, con φ estrictamente creciente en $(0, x_0)$ para algún $x_0 > 0$ en el caso que $\varphi(0) = 0$. Definimos

$$\phi(x) := x^p \varphi(x), \qquad p > 0. \tag{4.31}$$

Es fácil ver que ϕ cumple H1 con $t_1 := 1$ y $\psi(t) := t^p$, porque

$$\phi(tx) = (tx)^p \varphi(tx) \leq \psi(t) x^p \varphi(x) = \psi(t)\phi(x)$$

para todo $t \in [0, t_1]$ y $x \geq 0$. Más aún, en este caso la condición (4.15) del Teorema 4.5 se cumple si y sólo si $p > q$ y por lo tanto podemos poner por ejemplo

$$f(\xi) := \xi^q g(\xi), \qquad q < p,$$

con $g : [0, \infty) \to (0, \infty)$ cualquier función continua tal que $c_1 \leq g(t) \leq c_2$ para todo $t \geq 0$ y ciertas constantes $c_1, c_2 \in (0, \infty)$.

Observamos además que ϕ cumple H2 si y sólo si φ cumple H2. Luego, tomando φ que no cumpla H2 obtenemos una ϕ que cumple H1 pero no H2 (tomar por ejemplo $\varphi(x) = e^{-1/x}$ para $x > 0$ y $\varphi(0) = 0$).
Finalmente remarcamos que si $|\Omega| \leq 2$, entonces el párrafo anterior junto con la Observación 4.3 (i) implican que existe ϕ que satisface H1' pero no H2.

Mostramos a continuación algunos casos particulares interesantes:

(a1) Sea

$$\phi(x) := x^{p_1} + x^{p_2}, \qquad p_1 \geq p_2 > 0.$$

Como $\phi(x)/x^{p_2}$ es creciente, del primer párrafo en (a) resulta que ϕ cumple H1, y además es obvio que ϕ cumple H2 con $M = 1$ y cualquier $t_2 > 0$.

(a2) Sea

$$\phi(x) := e^{x^p} - 1, \qquad p > 0.$$

Un pequeño cálculo muestra que $\varphi := \phi(x)/x^p$ es creciente, en efecto, como

$$\varphi'(x) = \frac{px^{p-1}\left(e^{x^p}x^p - e^{x^p} + 1\right))}{x^{2p}}$$

basta ver que $e^{x^p}x^p - e^{x^p} + 1 \geq 0$ lo cual es cierto pues $g(x) := e^{x^p}x^p - e^{x^p} + 1$ es una función creciente para $x \geq 0$ cuyo mínimo se alcanza en $x = 0$, y es $g(0) = 0$. Luego ϕ cumple H1. Más aún, ϕ satisface H2 por la Observación 4.3 (ii). Notar además que si $|\Omega| > 2$ entonces no vale (4.10) y por lo tanto ϕ no cumple H1' (y para cualquier Ω, ϕ *tampoco* satisface la hipótesis (Φ) de la introducción).

(a3) Sea

$$\phi(x) := e^x - x - 1.$$

Veamos que $\varphi(x) := \phi(x)/x^2$ es creciente,

$$\varphi'(x) = \frac{(e^x - 1)x^2 - 2x(e^x - x - 1)}{x^4}.$$

Como para todo $y \leq 0$ es $1 \geq e^y(1 - y)$ resulta que $e^y x \geq e^y - 1$, sumando $e^y - 1$ en la desigualdad anterior obtenemos que $e^y y + e^y - 1 \geq 2e^y - 2$. Entonces integrando entre $[0, x]$ es $(e^x - 1)x \geq 2(e^x - x - 1)$ y finalmente multiplicando a esta última desigualdad por x obtenemos que $\varphi'(x) \geq 0$ y por lo tanto ϕ cumple H1. Además recordando la Observación 4.3 (ii) deducimos que ϕ satisface H2. Observamos que ϕ *no* satisface la condición (Φ) de la introducción.

(a4) Sea

$$\phi(x) := \frac{x^{p_1}}{1 + x^{p_2}}, \qquad p_1 > p_2 > 0.$$

Como $\phi(x)/x^{p_1-p_2}$ es creciente, deducimos que vale H1. Si bien *no* se cumple (4.14), es fácil verificar que ϕ satisface H2 con $t_2 = 1$ y $M := 2(1 + c_\Omega^{p_2})$. En efecto

$$\phi(t)\phi(x) = \frac{t^{p_1}}{1 + t^{p_2}} \cdot \frac{x^{p_1}}{1 + x^{p_2}} = \frac{(tx)^{p_1}}{1 + (tx)^{p_2}} \cdot \frac{1}{t^{p_2} + x^{p_2}} \geq \frac{1}{2(1 + c_\Omega^{p_2})}\phi(tx).$$

(b) Sea

$$\phi(x) := x(|\ln x| + 1).$$

Se puede ver que ϕ *no* puede ser escrita como en (4.31) con $p > 0$ y φ monótona creciente. Veamos sin embargo que ϕ cumple H1 y H2. Sea $p \in$

$(0,1)$. Elegimos $t_1 > 0$ tal que $|\ln x| \leq 1/t^{p-1} - 1$ para todo $t \in [0, t_1]$. Entonces para tales t y todo $x \geq 0$ se tiene que

$$\begin{gathered}\phi(tx) \leq tx(|\ln t| + |\ln x| + 1) \leq \\ tx[(1/t^{1-p} - 1)(|\ln x| + 1) + (|\ln x| + 1)] = t^p \phi(x).\end{gathered} \tag{4.32}$$

y vale H1. Además, usando la primer desigualdad de (4.32) es fácil ver que se cumple H2 con $M = 1$ y cualquier $t_2 > 0$. Notemos también que no vale (4.14) para cualquier $p \in (0,1)$.

(c) Sea

$$\phi(x) := x - \ln(x+1).$$

Es fácil ver que ϕ cumple (4.9) con $p = 1$ y también (4.10). Es decir, satisface H1'. A pesar de eso, también vale H1 con $t_1 = 1$ y $\psi(t) = ct$ para algún $c > 0$ suficientemente grande. En efecto, para $x > 0$ fijo sea

$$H(t) := \frac{xt - \ln(xt+1)}{x - \ln(x+1)}, \quad t \in [0,1]$$

como $H(0) = 0$, si vemos que $H'(t) \leq c$ para alguna $c > 0$ que no dependa de x, obtendríamos que vale H1. Es

$$H'(t) = \frac{1}{x - \ln(x+1)} \left(x - \frac{x}{xt+1} \right) = \frac{x^2 t}{(x - \ln(x+1))(xt+1)}$$

Si $x \geq 1$, al ser $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x - \ln(x+1)} = 1$ y $xt < xt + 1$ resulta que

$$\frac{x^2 t}{(x - \ln(x+1))(xt+1)} \leq \frac{x}{x - \ln(x+1)} \leq c_1$$

donde $c_1 > 0$ es una constante que no depende de x.
Por otro lado, si $0 < x < 1$ la función $g(x) := \frac{x^2}{x - \ln(x+1)}$ está acotada y al ser $t \in [0,1]$ $h(t) := \frac{t}{xt+1}$ también, entonces al ser $H'(t) = g(x)h(t)$ resulta que existe $c_2 > 0$ constante que no depende de x tal que $H'(t) \leq c_2$. Luego, tomando $c \geq \max\{c_1, c_2\}$ listo, pues de lo anterior es $H'(t) \leq c$.

Aunque (4.14) no valga, usando la Observación 4.3 (iii) se deduce que ϕ satisface H2 pues

$$\frac{t\phi'(tx)}{\phi(t)\phi'(x)} = \frac{t^2(x+1)}{(t - \ln(t+1))(tx+1)} \leq \frac{t^2(c_\Omega + 1)}{(t - \ln(t+1))} \leq \frac{1}{1 - \ln 2}(c_\Omega + 1)$$

para todo $t \in (0,1)$ y todo $x \in (0, c_\Omega)$.

(d) Sea
$$\phi(x) := (\ln(x+1))^p, \qquad p > 0.$$
Es obvio que ϕ cumple (4.9) y también (4.10) y por lo tanto ϕ cumple H1'. Además usando nuevamente la Observación 4.3 (ii) se ve que satisface H2. Notamos además que es fácil ver que ϕ *no* cumple H1 (y por lo tanto *tampoco* cumple las hipótesis (Φ) o (Φ') de la introducción) ya que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\phi\,(tx)}{\phi\,(x)} = 1 \quad \text{para todo } t > 0$$

y luego no existe ψ como en (4.8) con $\psi\,(0) = 0$.

Referencias

[1] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011.

[2] L. Evans, *Partial Diferential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[3] K. Bachouche, S. Djebali, T. Moussaoui, *ϕ-Laplacian BVPS with linear bounded operator conditions*, Arch. Math. (Brno) **48** (2012), 121-137.

[4] D. Bai, Y. Chen, *Three positive solutions for a generalized Laplacian boundary value problem with a parameter*, Appl. Math. Comput. **219** (2013), 4782-4788.

[5] A. Benmezaï, S. Djebali, T. Moussaoui, *Positive solutions for ϕ-Laplacian Dirichlet BVPs*, Fixed Point Theory **8** (2007), 167–186.

[6] J. I. Díaz, Nonlinear partial differential equations and free boundaries. Research Notes in Mathematics, **106**. Pitman, Boston, 1985.

[7] H. Dang, S. Oppenheimer, *Existence and uniqueness results for some nonlinear boundary value problems*, J. Math Anal. Appl. **198** (1996), 35–48.

[8] M. Krasnosel'skiĭ, J. Rutickiĭ, *Convex functions and Orlicz spaces.* Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron. P. Noordhoff Ltd., Groningen 1961.

[9] U. Kaufmann, I. Medri, *Strictly positive solutions for one-dimensional non- linear problems involving the p-Laplacian*, Bull. Austral. Math. Soc. 89 (2014), 243–251.

[10] R. Manásevich, J. Mawhin, *Boundary value problems for nonlinear perturbations of vector p-Laplacian-like operators*, J. Korean Math. Society **37** (2000), 665–685.

[11] M. Rao, Z. Ren, *Theory of Orlicz spaces*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 146. Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.

[12] M. Cuesta, *Eigenvalue problems for the p-Laplacian with indefinite weights*. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2001(2001), No. 33, pp. 1–9.

[13] H. Wang, *On the structure of positive radial solutions for quasilinear equations in annular domains*, Adv. Differential Equations **8** (2003), 111–128.

[14] H. Wang, *On the number of positive solutions of nonlinear systems*, J. Math Anal. Appl. **281** (2003), 287–306.

[15] P. Drábek, J. Hernández, *Existence and uniqueness of positive solutions for some quasilinear elliptic problems*, Nonlinear Analysis **44** (2001), 189–204.

[16] J. Fleckinger, J. Hernández, F. de Thélin, *Existence of multiple principal eigenvalues for some indefinite linear eigenvalue problems*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. 8 (2004), 159–188.

[17] P. Lindqvist *On the Equation* $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda|u|^{p-2}u=0$, American Mathematical Society, Vol. 109, No. 1 (May, 1990), pp. 157–164.

[18] X. Xu, Y. Lee, *Some existence results of positive solutions for ϕ-Laplacian systems*, Abstr. Appl. Anal. 2014, Art. ID 814312, 11 pp.

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación de tesis, damos Fe que el presente ejemplar impreso, se corresponde con el aprobado por éste Tribunal.