Universidad Nacional
de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

TRABAJO ESPECIAL DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

Cálculo de Wirtinger y estadística de vectores aleatorios complejos

Autor:

María Julieta Diaz

Director:

Dr. Oscar H. Bustos

Marzo de 2017

A mis abuelos, Lito y Chichí,
a quienes siempre llevaré en mi corazón.

Agradecimientos

A Oscar Bustos, mi director, por la paciencia brindada en todo momento, por sus valiosos conocimientos, comentarios y sugerencias.

A mis papás, Griselda y Alejandro, y a mis hermanas, Victoria y Paulina, por acompañarme y alentarme a lo largo de toda la carrera. Sin ellos nada de esto hubiese sido posible.

A mi novio, Bruno, por confiar en mi y ser mi apoyo incondicional.

A mis amigos Vale, Orne, Lu, Agus, Lau, Belu, Sofi, Mile, Giuli, Maca, Flor y Lucy, por todos los momentos compartidos.

Abstract

In many practical applications we are dealing with functions f that are not differentiable in the complex sense. In these cases, our only option is to work with the real derivatives of u and v (where u and v are the real and imaginary parts of f). However, this might make the computations of the gradients cumbersome and tedious. To cope with this problem, we will develop an alternative formulation which, although it is based on the real derivatives, it strongly resembles the notion of the complex derivative. In fact, if f is differentiable in the complex sense, the developed derivatives will coincide with the complex ones. In this paper we study this idea in detail. In chapter 1 we consider the preliminaries of the complex field and we deal with the $Wirtinger's$ *Calculus* for functions of one complex variable. In chapter 2 we introduce the concept of *complex random variable* and show how the results from the previous chapter lead to derivation and characterization of complex random variable quantities such as *moments*, *cumulants* and *circularity*. Finally, in chapter 3 we study the *complex random vectors* and characterize their second-order statistical properties. In addition, we present two important distributions: *the multivariate complex Gaussian distribution* and its generalization, *the complex multivariate elliptic distribution*.

Keywords: $\mathbb{R}-$differentiability, Wirtinger's Calculus, complex random vector, complex Gaussian distribution.

Classification:

- 30E99
- 60E10
- 94A12

Resumen

En muchas aplicaciones prácticas trabajamos con funciones f que no son diferenciables en el sentido complejo. En estos casos, nuestra única opción es trabajar con las derivadas reales de u y v (donde u y v son las partes real e imaginaria de f). Sin embargo, esto podría hacer que los cálculos de los gradientes sean engorrosos y tedioso. Para hacer frente a este problema, desarrollamos una formulación alternativa que, a pesar de que se basa en las derivadas reales, se asemeja mucho a la noción de la derivada compleja. De hecho, si f es diferenciable en el sentido complejo, las derivadas desarrolladas van a coincidir con las complejas. En el presente trabajo estudiamos con detalle esta idea. En el capítulo 1 consideramos los preliminares del campo complejo y nos ocupamos del *Cálculo de Wirtinger* para funciones de una variable compleja. En el capítulo 2 introducimos el concepto de *variable aleatoria compleja* y mostramos cómo los resultados del capítulo anterior conducen a la derivación y caracterización de las cantidades de una variable aleatoria compleja tales como *momentos*, *cumulantes* y *circularidad*. Finalmente en el capítulo 3 estudiamos los *vectores aleatorios complejos* y caracterizamos sus propiedades estadísticas de segundo orden. Además presentamos dos distribuciones importantes: *la distribución Gaussiana compleja multivariada* y su generalización, *la distribución elíptica compleja multivariada*.

Palabras clave: $\mathbb{R}-$diferenciabilidad, Cálculo de Wirtinger, vector aleatorio complejo, distribución Gaussiana compleja.

Clasificación:

- 30E99
- 60E10
- 94A12

Tabla de contenidos

Notación

$\delta_{i,\,j}$	delta de Kronecker
$\circ$	composición de funciones
M^{-1}	inversa de una matriz no singular M
$M^{\top}$	transpuesta de la matriz M
M^{*}	conjugada de la matriz M
M^{H}	transpuesta conjugada de la matriz M
O_n	matriz nula $n \times n$
$O_{n\times m}$	matriz nula $n \times m$
I_n	matriz identidad $n \times n$
$\det(M)$	determinante de la matriz M
$tr(M)$	traza de la matriz M
$rg(M)$	rango de la matriz M
$0_{\mathbb{V}}$	cero del espacio vectorial $\mathbb{V}$
$\dim(\mathbb{V})$	dimensión del espacio vectorial $\mathbb{V}$
$Nu\,(T)$	núcleo de la transformación T
$\sup(A)$	supremo del conjunto A
$\mathcal{P}\,(A)$	partes del conjunto A
A^c	complemento del conjunto A
$\#A$	cardinalidad del conjunto A
$\mathbb{N}_0$	conjunto de los números naturales unión el 0
$\mathcal{X}_A$	función indicadora del conjunto A
S^n	permutaciones de $\{1, ..., n\}$ en $\{1, ..., n\}$
$\binom{n}{k}$	coeficiente binomial
$n!$	factorial
$\mathcal{U}(a,b)$	distribución uniforme en el intervalo (a,b)
F_X	función de distribución acumulativa de la variable aleatoria X
$E(X)$	esperanza de la variable aleatoria X
$O(n)$	matrices ortogonales $n \times n$
$e.p.$	espacio de probabilidad
$v.a.$	variable aleatoria
$v.a.i.i.d.$	variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas
$\doteq$	igualdad en distribución
$[x]$	parte entera de x
$X \sim$	distribución de X

$\doteq$	igualdad por definición

Introducción

Las señales a valores complejos surgen frecuentemente en aplicaciones tan diversas como las comunicaciones, el radar y la biomedicina, ya que la mayoría de los formatos de modulación práctica son de tipo complejo y las aplicaciones como el radar y la imagen por resonancia magnética conducen a datos que son inherentemente a valores complejos. El dominio complejo no sólo proporciona una representación conveniente para estas señales, sino también una forma natural de preservar las características físicas de las señales y las transformaciones que atraviesan, tales como la distorsión de fase y magnitud que experimenta una señal de comunicaciones. En todos estos casos, el procesamiento también debe llevarse a cabo en el dominio complejo de tal manera que la información completa (representada por la interrelación de las partes real e imaginaria o la magnitud y la fase de la señal) pueda ser totalmente explotada.

El cálculo de Wirtinger se ha hecho muy popular en la comunidad de procesamiento de señales principalmente en el contexto de filtrado adaptativo complejo, como un medio para calcular, de manera elegante, gradientes de funciones de pérdida a valores reales definidas en dominios complejos ($\mathbb{C}^n$). Tales funciones, obviamente, no son holomorfas y por lo tanto la derivada compleja no puede ser utilizada. Tradicionalmente se considera que la función de pérdida está definida en un dominio euclidiano con una doble dimensionalidad ($\mathbb{R}^{2n}$), entonces las derivadas reales pueden ser empleadas. Debido a que este enfoque divisorio de las partes real e imaginaria conduce a expresiones largas y complicadas, especialmente cuando se trabaja con funciones no lineales y / o derivadas de segundo orden, a menudo obliga a hacer ciertas suposiciones para hacer los cálculos más manejables. Una de esas suposiciones que se hace comúnmente es la circularidad de las señales, lo que limita la utilidad de las soluciones desarrolladas ya que muchas señales prácticas tienen distribuciones no circulares. El cálculo de Wirtinger proporciona una formulación equivalente alternativa, que se basa en reglas y principios sencillos y que tiene una gran semejanza con las reglas de la derivada compleja usual. Aunque esta metodología es relativamente conocida en los países de habla alemana, después del trabajo pionero del matemático Wilhelm Wirtinger en el año 1926, y se ha implementado en aplicaciones prácticas, sólo recientemente se ha popularizado en la comunidad de investigación de procesamiento de señales.

Cabe destacar que el fundamento teórico del cálculo de Wirtinger es la definición común de la derivada real. Sin embargo, cuando la estructura compleja es tenida en cuenta resulta que, las derivadas reales se pueden describir usando una formulación equivalente y más elegante que tiene una sorprendente semejanza con la derivada compleja. Por lo tanto, se pueden derivar reglas simples y los cálculos de los gradientes, que pueden volverse tediosos si se considera el espacio de doble dimensión $\mathbb{R}^{2n}$, se simplifican.

El objetivo del presente trabajo consiste en establecer un conocimiento detallado acerca del cálculo de Wirtinger así como proporcionar un tratamiento riguroso de las propiedades de los vectores aleatorios complejos. Está dividido en tres partes principales. En el Capítulo 1 introducimos el concepto de $\mathbb{R}-$diferenciabilidad de una función y desarrollamos un marco útil en torno a dicha diferenciación. Además deducimos una extensión novedosa de la serie de Taylor compleja usual, junto con importantes casos específicos. A continuación, en el Capítulo 2 definimos las variables aleatorias complejas y establecemos relaciones entre los momentos, funciones características, cumulantes y circularidad de dichas variables. Finalmente, en el Capítulo 3 presentamos los vectores aleatorios complejos y proporcionamos una descripción detallada de sus propiedades estadísticas. Además en este informe incluimos un anexo, el cual tiene la intención de facilitar la comprensión de la Sección 4 del Capítulo 1.

1 Cálculo de Wirtinger sobre $\mathbb{C}$

1.1 Campo complejo y funciones $\mathbb{R}-$lineales

En esta sección consideramos los preliminares del campo complejo y, puesto que $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}-$ espacio vectorial así como un $\mathbb{C}-$ espacio vectorial, definimos dos tipos de funciones lineales: la función $\mathbb{R}-lineal$ y la función $\mathbb{C}-lineal$.

Notación 1.1.1
El "*campo complejo*" es el conjunto de los números complejos, denotado por $\mathbb{C}$, junto con la adición y la multiplicación compleja. El "*complejo conjugado*" de $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ está definido como $z^* \doteq (x, -y) = x - iy$. Con esta notación podemos escribir la "*parte real*" y la "*parte imaginaria*" de un número complejo z como $\mathrm{Re}(z) \doteq x = \frac{1}{2}(z + z^*)$ y $\mathrm{Im}(z) \doteq y = \frac{1}{2}(z^* - z)$, respectivamente. El "*módulo*" de $z = x + iy$ está definido como el número real no negativo $|z| \doteq \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*}$. La "*exponencial compleja*", denotada por $\exp(z)$, está definida como el número complejo $\exp(z) \doteq \exp(x)\left[\cos(y) + i\sin(y)\right]$, donde $\exp(x)$ para valores reales x denota la función exponencial usual. Cualquier número complejo no nulo tiene una representación polar, $z = |z|\exp(i\theta)$, donde $\theta = \arg(z)$ se llama el "*argumento*" de z. El argumento único $\theta = Arg(z)$ en el intervalo $-\pi \leq \theta < \pi$ se llama "*argumento principal*". El "*logaritmo complejo*" de $z \neq 0$, denotado por $\log(z)$, se define como el número complejo $\log(z) \doteq \log(|z|) + iArg(z) + i2\pi n$ donde n es un entero arbitrario. El valor particular del logaritmo dado por $\log(|z|) + iArg(z)$ es llamado el "*logaritmo principal*" y será denotado por $Log(z)$.
El disco abierto con centro $c = a + ib \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$ está definido como $B(c, r) \doteq \{z \in \mathbb{C} : |z - c| < r\}$. Durante el presente trabajo U representará un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, es decir, para cada $c \in U$ existe $r > 0$ tal que $B(c, r) \subset U$.

Definición 1.1.2
Sea $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Decimos que "*$L$ es $\mathbb{R}-lineal$*" si $L(az + bw) = aL(z) + bL(w)$, $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$ y $\forall\ z,\ w \in \mathbb{C}$.

Definición 1.1.3
Sea $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Decimos que "*$L$ es $\mathbb{C}-lineal$*" si $L(\alpha z + \beta w) = \alpha L(a) + \beta L(w)$, $\forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ y $\forall\ z,\ w \in \mathbb{C}$.

Observación 1.1.4
Si $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}-$lineal o $\mathbb{R}-$lineal entonces $L(0) = 0$.

Demostración:
$$L(0) = L(0 - 0) = L\left(1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0\right) = 1L(0) + (-1)L(0) = 0. \blacksquare$$

Observación 1.1.5
Sean $L_1, L_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}-$lineales y $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $L(z) \doteq L_1(z) + L_2(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Entonces $L_1 \circ L_2$ y L son $\mathbb{R}-$lineales.

Demostración:
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned} L_1 \circ L_2(az + bw) &= L_1\left(aL_2(z) + bL_2(w)\right) \\ &= a(L_1(L_2(z)) + b(L_1(L_2(w) \\ &= a(L_1 \circ L_2)(z) + b(L_1 \circ L_2)(w) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L(az + bw) &= L_1(az + bw) + L_2(az + bw) \\ &= aL_1(z) + bL_1(w) + aL_2(z) + bL_2(w) \\ &= a(L_1(z) + L_2(z)) + b(L_1(w) + L_2(w)) \\ &= aL(z) + bL(w). \end{aligned}$$

Por lo tanto L es $\mathbb{R}-$lineal. $\blacksquare$

Proposición 1.1.6
$L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{R}-$lineal $\Longleftrightarrow \exists!\ \alpha \in \mathbb{C},\ \beta \in \mathbb{C}$ tales que $L(z) = \alpha z + \beta z^*$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$.

Demostración:
($\Longrightarrow$) *Existencia:*
Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ y consideramos $\alpha = \frac{L(1)-iL(i)}{2}$ y $\beta = \frac{L(1)+iL(i)}{2}$. Luego

$$\begin{aligned}
\alpha z + \beta z^* &= \left(\frac{L(1)}{2} - i\frac{L(i)}{2}\right)(x+iy) + \left(\frac{L(1)}{2} + i\frac{L(i)}{2}\right)(x-iy) \\
&= \frac{L(1)}{2}x + i\frac{L(1)}{2}y - i\frac{L(i)}{2}x + \frac{L(i)}{2}y + \frac{L(1)}{2}x - i\frac{L(1)}{2}y + i\frac{L(i)}{2}x + \frac{L(i)}{2}y \\
&= L(1)x + L(i)y \\
&= L(1x + yi) \\
&= L(z).
\end{aligned}$$

Unicidad:
Supongamos que existen $\alpha,\ \hat{\alpha},\ \beta$ y $\hat{\beta} \in \mathbb{C}$ tales que $L(z) = \alpha z + \beta z^*$ y $L(z) = \hat{\alpha} z + \hat{\beta} z^*$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$. Luego $\alpha z + \beta z^* = \hat{\alpha} z + \hat{\beta} z^*$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$. En particular $\begin{cases} \alpha + \beta = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \\ (\alpha - \beta)i = (\hat{\alpha} - \hat{\beta})i \end{cases}$, es decir $\begin{cases} \alpha + \beta = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \\ \alpha - \beta = \hat{\alpha} - \hat{\beta} \end{cases}$.

Sumando miembro a miembro las igualdades anteriores obtenemos que $\alpha = \hat{\alpha}$ y $\beta = \hat{\beta}$.
($\Longleftarrow$) Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$ y $z,\ w \in \mathbb{C}$. Por hipótesis

$$\begin{aligned}
L(az + bw) &= \alpha(az + bw) + \beta(az + bw)^* \\
&= \alpha az + \alpha bw + \beta(a^* z^* + b^* w^*) \\
&= a\alpha z + b\alpha w + \beta a z^* + \beta b w^* \\
&= a(\alpha z + \beta z^*) + b(\alpha w + \beta w^*) \\
&= aL(z) + bL(w),
\end{aligned}$$

entonces L es $\mathbb{R}-$lineal. $\blacksquare$

Proposición 1.1.7
$L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}-$lineal $\Longleftrightarrow$ $\exists!\ \alpha \in \mathbb{C}$ tal que $L(z) = \alpha z$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$.

Demostración:
($\Longrightarrow$) Sea $z \in \mathbb{C}$ arbitrario y consideremos $\alpha \doteq L(1)$, entonces $L(z) = L(1 \cdot z + 0 \cdot z) = zL(1) + 0L(z) = zL(1) = z\alpha$.
($\Longleftarrow$) Sean $a,\ b,\ z$ y $w \in \mathbb{C}$ arbitrarios, luego $L(az + bw) = \alpha(az + bw) = a\alpha z + b\alpha w = aL(z) + bL(w)$. Por lo tanto L es $\mathbb{C}-$lineal. $\blacksquare$

Definición 1.1.8
Sean n y $p \in \mathbb{N}$. Decimos que:
"$L : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ *es* $\mathbb{R} -$ *lineal*" si $L(a\mathbf{z} + b\mathbf{w}) = aL(\mathbf{z}) + bL(\mathbf{w})$, $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$ y $\forall\ \mathbf{z},\ \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$.
"$L : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ *es* $\mathbb{C} -$ *lineal*" si $L(\alpha\mathbf{z} + \beta\mathbf{w}) = \alpha L(\mathbf{z}) + \beta L(\mathbf{w})$, $\forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ y $\forall\ \mathbf{z},\ \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$.

Proposición 1.1.9
$L : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ es $\mathbb{C}-$lineal $\Longleftrightarrow$ $\exists\ M \in \mathbb{C}^{p \times n}$ tal que $L(\mathbf{z}) = M\mathbf{z}$, $\forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$.

Demostración:

$(\Longrightarrow)$ Para cada $j \in \{1, ..., n\}$ sea $\mathbf{e}_j \doteq \begin{bmatrix} e_{1j} \\ \vdots \\ e_{nj} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$, donde $e_{ij} = \delta_{ij}$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Es decir $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Por tanto,

$$\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \iff \exists!\ z_1, ..., z_n \in \mathbb{C} \text{ tales que } \mathbf{z} = \sum_{j=1}^{n} z_j \mathbf{e}_j.$$

Ahora, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, sea $L(\mathbf{e}_j) \doteq \begin{bmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{pj} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^p$ y $M \doteq \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & ... & m_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{p1} & m_{p2} & ... & m_{pn} \end{bmatrix}$.

Por hipótesis

$$L(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{n} z_j L(\mathbf{e}_j) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & ... & m_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{p1} & m_{p2} & ... & m_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = M\mathbf{z},$$

de donde se sigue el resultado.

$(\Longleftarrow)$ Sean α, $\beta \in \mathbb{C}$ y $\mathbf{z}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ arbitrarios, entonces

$$L(\alpha\mathbf{z} + \beta\mathbf{w}) = M(\alpha\mathbf{z} + \beta\mathbf{w}) = \alpha M\mathbf{z} + \beta M\mathbf{w} = \alpha L(\mathbf{z}) + \beta L(\mathbf{w}).$$

Por lo tanto L es $\mathbb{C}-$lineal. ■

Proposición 1.1.10
$L : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ es $\mathbb{R}-$lineal $\iff \exists\ L_1, L_2 : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$ $\mathbb{C}-$lineales tales que $L(\mathbf{z}) = L_1(\mathbf{z}) + L_2(\mathbf{z}^*)$, $\forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$.

Demostración:
$(\Longrightarrow)$ Por la Proposición 1.1.9 es suficiente ver que $\exists\ M$ y $N \in \mathbb{C}^{p\times n}$ tales que $L(\mathbf{z}) = M\mathbf{z} + N\mathbf{z}^*$, $\forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$.
Sean

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} M_{\cdot 1} & M_{\cdot 2} & ... & M_{\cdot n} \end{bmatrix} \text{ con } M_{\cdot j} = \frac{L(\mathbf{e}_j) - iL(i\mathbf{e}_j)}{2}, \forall\ j \in \{1, ..., n\ \} \text{ y} \\ N &= \begin{bmatrix} N_{\cdot 1} & N_{\cdot 2} & ... & N_{\cdot n} \end{bmatrix} \text{ con } N_{\cdot j} = \frac{L(\mathbf{e}_j) + iL(i\mathbf{e}_j)}{2}, \forall\ j \in \{1, ..., n\}. \end{aligned}$$

Además, supongamos que $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$. La $\mathbb{R}-$linealidad de L implica que

$$L(\mathbf{z}) = L(z_1\mathbf{e}_1 + ... + z_n\mathbf{e}_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j L(\mathbf{e}_j) + y_j L(i\mathbf{e}_j)\right).$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} M\mathbf{z} &= (M_{\cdot 1})z_1 + (M_{\cdot 2})z_2 + ... + (M_{\cdot n})z_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} [(M_{\cdot j})x_j + i(M_{\cdot j})y_j] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} [(L(\mathbf{e}_j) - iL(i\mathbf{e}_j))\, x_j + i(L(\mathbf{e}_j) - iL(i\mathbf{e}_j))y_j] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (L(\mathbf{e}_j)x_j - iL(i\mathbf{e}_j)x_j + iL(\mathbf{e}_j)\, y_j + L(i\mathbf{e}_j)y_j). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$N\mathbf{z}^* = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(L(\mathbf{e}_j)x_j + iL(i\mathbf{e}_j)x_j - iL(\mathbf{e}_j)y_j + L(i\mathbf{e}_j)y_j).$$

De ello y de lo anterior se sigue que

$$M\mathbf{z} + \ N\mathbf{z}^* = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(2L(\mathbf{e}_j)x_j + 2L(i\mathbf{e}_j)y_j) = \ \sum_{j=1}^{n}(L(\mathbf{e}_j)x_j + L(i\mathbf{e}_j)y_j).$$

Finalmente obtenemos que $L(\mathbf{z}) = M\mathbf{z}+ \ N\mathbf{z}^*$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $L(\mathbf{z}) = L_1(\mathbf{z}) + L_2(\mathbf{z}^*)$, $\forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Sean a, $b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{z}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ arbitrarios. Puesto que L_1 y L_2 son $\mathbb{C}-$lineales

$$\begin{aligned} L(a\mathbf{z} + b\mathbf{w}) &= L_1(a\mathbf{z} + b\mathbf{w}) + L_2(a\mathbf{z}^* + b\mathbf{w}^*) \\ &= aL_1(\mathbf{z}) + bL_1(\mathbf{w}) + aL_2(\mathbf{z}^*) + bL_2(\mathbf{w}^*) \\ &= a(\ L_1(\mathbf{z}) + \ L_2(\mathbf{z}^*)) + b(L_1(\mathbf{w}) + \ L_2(\mathbf{w}^*)) \\ &= aL(\mathbf{z}) + bL(\mathbf{w}), \end{aligned}$$

con lo cual L es $\mathbb{R}-$lineal. ■

1.2 Cálculo $\mathbb{C} - \mathbb{R}$

La idea esencial de la diferenciación es la linealización de una función alrededor de un punto. Como hay dos tipos de funciones lineales en el dominio complejo, entonces tenemos dos tipos de diferenciación: la $\mathbb{R}-$ *diferenciabilidad* y la $\mathbb{C}-$ *diferenciabilidad*. En esta sección trabajamos con estos conceptos. Además, dada una función $\mathbb{R}-$diferenciable f, definimos los operadores $\mathbb{R}-$ *derivada de* f y $\mathbb{R}-$ *derivada conjugada de* f. Por último, derivamos una versión de la regla de la cadena para funciones $\mathbb{R}-$diferenciables.

Definición 1.2.1
Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Decimos que:
"$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *es* $\mathbb{R}-$ *diferenciable en* $z \in U$" si $\exists\ L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}-$lineal tal que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - L(h)}{|h|} = 0.$$

"$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *es* $\mathbb{C}-$ *diferenciable en* $z \in U$" si $\exists\ L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}-$lineal tal que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Además decimos que:
"$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *es* $\mathbb{R}-$ *diferenciable en* U" si f es $\mathbb{R}-$diferenciable en z, $\forall\, z \in U$.
"$f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *es* $\mathbb{C}-$ *diferenciable en* U" si f es $\mathbb{C}-$diferenciable en z, $\forall\, z \in U$.

Las funciones que son $\mathbb{C}-$diferenciables en un dominio se llaman "*holomorfas*" y son el objeto de estudio del Análisis Funcional. Sin embargo nosotros estaremos interesados principalmente en aquellas funciones que son $\mathbb{R}-$diferenciables.

Observación 1.2.2
Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{R}-$diferenciable en $z \in U$ entonces f es continua en z.

Demostración:
Por hipótesis $\exists\ L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\ \ \mathbb{R}-$lineal tal que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Entonces $f(z+h) - f(z) = L(h) + |h|\,\varepsilon(h)$ con $\lim_{|h|\to 0} \varepsilon(h) = 0$ y, por consecuencia

$$\lim_{|h|\to 0}(f(z+h) - f(z)) = \lim_{|h|\to 0}(L(h) + |h|\,\varepsilon(h)) = \lim_{|h|\to 0} L(h) + \lim_{|h|\to 0} |h|\,\varepsilon(h) = 0.$$

Por ende, f es continua en z. ■

Proposición 1.2.3
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}-$diferenciable ($\mathbb{C}-$diferenciable) en $z \in U$, $L_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $L_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}-$lineales ($\mathbb{C}-$lineales) tales que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - L_j(h)}{|h|} = 0 \ \text{ para } j \in \{1, 2\}\,.$$

Entonces $L_1 = L_2$.

Demostración:
Notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{|h|\to 0} \frac{L_1(h) - L_2(h)}{|h|} &= \lim_{|h|\to 0} \frac{L_1(h) + f(z) - f(z) + f(z+h) - f(z+h) - L_2(h)}{|h|} \\
&= \lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - L_2(h)}{|h|} - \lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - L_1(h)}{|h|} \\
&= 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

Queremos probar que $L_1(u) = L_2(u)$, $\forall\ u \in \mathbb{C}$. Si $u = 0$ entonces $L_1(u) = 0 = L_2(u)$ por la Observación 1.1.4. Supongamos ahora que $u \neq 0$. Como

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{L_1(h) - L_2(h)}{|h|} = 0$$

dado $\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que si $h \in B(0, \delta)$ entonces $\frac{|L_1(h) - L_2(h)|}{|h|} < \frac{\varepsilon}{|u|}$. Consideremos $h \doteq \frac{u\delta}{2|u|}$ y, puesto que $|h| = \frac{\delta}{2} < \delta$, resulta que

$$|L_1(h) - L_2(h)| < |h|\,\frac{\varepsilon}{|u|}. \qquad \textbf{(1.2.3.1)}$$

La $\mathbb{R}-$linealidad de L_j junto con **(1.2.3.1)** implican que

$$\begin{aligned}
|L_1(h) - L_2(h)| &= \left| L_1\left(\frac{2\,|u|}{\delta}\,\frac{u}{\frac{2|u|}{\delta}}\right) - L_2\left(\frac{2\,|u|}{\delta}\,\frac{u}{\frac{2|u|}{\delta}}\right)\right| \\
&= \left| L_1\left(\frac{2\,|u|}{\delta} h\right) - L_2\left(\frac{2\,|u|}{\delta} h\right)\right| \\
&= \frac{2\,|u|}{\delta}\,|L_1(h) - L_2(h)| \\
&< \frac{2\,|u|}{\delta}\,|h|\,\frac{\varepsilon}{|u|} = \frac{2\,|u|}{\delta}\,\frac{\delta}{2}\,\frac{\varepsilon}{|u|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ obtenemos que $L_1(u) = L_2(u)$. ■

Definición 1.2.4
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}-$diferenciable ($\mathbb{C}-$diferenciable) en $z \in U$. Llamamos "$\mathbb{R}-$*derivada de* f *en* z" ("$\mathbb{C}-$*derivada de* f *en* z") a la única función $\mathbb{R}-$lineal ($\mathbb{C}-$lineal), denotada por $D_r(f)(z) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{|f(z+h) - f(z) - D_r(f)(z)(h)|}{|h|} = 0.$$

Notación 1.2.5
Sean $A \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $(x, y) \in A$.
Si la función $t \mapsto g(t, y)$ es diferenciable en x, escribimos $D_1(g)(x, y)$ para denotar la derivada de tal función en x y la llamamos "*derivada parcial con respecto a la primer variable de* g *en* (x, y)".
Análogamente si la función $t \mapsto g(x, t)$ es diferenciable en y, escribimos $D_2(g)(x, y)$ para denotar la derivada de tal función en y y la llamamos "*derivada parcial con respecto a la segunda variable de* g *en* (x, y)".

Definición 1.2.6
Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Llamamos "*parte real de* f " a la función $u_f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u_f(x, y) \doteq \mathrm{Re}(f(x + iy)), \; (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Análogamente llamamos "*parte imaginaria de* f " a la función $v_f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$v_f(x, y) \doteq \mathrm{Im}(f(x + iy)), \; (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Proposición 1.2.7
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}-$diferenciable en $z = x + iy \in U$. Entonces
1. Existen $D_1(u_f)(x, y)$, $D_1(v_f)(x, y)$, $D_2(u_f)(x, y)$ y $D_2(v_f)(x, y)$.
2. Se cumple que

$$D_r(f)(z)(h) = D_1(f)(z) \cdot \mathrm{Re}(h) + \; D_2(f)(z) \cdot \mathrm{Im}(h), \; \forall \; h \in \mathbb{C}$$

donde

$$\begin{aligned} D_1(f)(z) &\doteq D_1(u_f)(x, y) + iD_1(v_f)(x, y) \text{ y} \\ D_2(f)(z) &\doteq D_2(u_f)(x, y) + iD_2(v_f)(x, y). \end{aligned}$$

Demostración:
1. Para abreviar notación sea $L \doteq D_r(f)(z)$.
<u>Afirmación 1:</u>
$t \mapsto u_f(t, y)$ es diferenciable en x y su derivada es $\mathrm{Re}(L(1))$. Es decir $D_1(u_f)(x, y) = \mathrm{Re}(L(1))$.
<u>Demostración Afirmación 1:</u>

$$\begin{aligned} u_f(x + t, y) - u_f(x, y) &= \mathrm{Re}(f(z + t) - f(z)) \\ &= \mathrm{Re}(f(z + t) - f(z) \pm L(t)) \\ &= \mathrm{Re}(f(z + t) - f(z) - L(t)) + \mathrm{Re}(L(t)), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{u_f(x + t, y) - u_f(x, y)}{t} &= \mathrm{Re}\left(\frac{f(z + t) - f(z) - L(t)}{t}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{L(t)}{t}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{f(z + t) - f(z) - L(t)}{t}\right) + \mathrm{Re}(L(1)), \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$D_1(u_f)(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{Re} f(x+t,y) - \operatorname{Re} f(x,y)}{t} = \operatorname{Re}(L(1)).$$

<u>Afirmación 2:</u>
$t \mapsto v_f(t,y)$ es diferenciable en x y su derivada es $\operatorname{Im}(L(1))$. Es decir $D_1(v_f)(x,y) = \operatorname{Im}(L(1))$.
<u>Demostración Afirmación 2:</u>

$$\begin{aligned} v_f(x+t,y) - v_f(x,y) &= \operatorname{Im}(f(z+t) - f(z)) \\ &= \operatorname{Im}(f(z+t) - f(z) \pm L(t)) \\ &= \operatorname{Im}(f(z+t) - f(z) - L(t)) + \operatorname{Im}(L(t)), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{v_f(x+t,y) - v_f(x,y)}{t} &= \operatorname{Im}\left(\frac{f(z+t) - f(z) - L(t)}{t}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{L(t)}{t}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{f(z+t) - f(z) - L(t)}{t}\right) + \operatorname{Im}(L(1)), \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$D_1(v_f)(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{v_f(x+t,y) - v_f(x,y)}{t} = \operatorname{Im}(L(1)).$$

<u>Afirmación 3:</u>
$t \mapsto u_f(x,t)$ es diferenciable en y y su derivada es $\operatorname{Re}(L(i))$. Es decir $D_2(u_f)(x,y) = \operatorname{Re}(L(i))$.
<u>Demostración Afirmación 3:</u>

$$\begin{aligned} u_f(x,y+t) - u_f(x,y) &= \operatorname{Re}(f(z+it) - f(z)) \\ &= \operatorname{Re}(f(z+it) - f(z) \pm L(it)) \\ &= \operatorname{Re}(f(z+it) - f(z) - L(it)) + \operatorname{Re}(L(it)), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{u_f(x,y+t) - u_f(x,y)}{t} &= \operatorname{Re}\left(\frac{f(z+it) - f(z) - L(it)}{t}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{L(it)}{t}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{f(z+it) - f(z) - L(it)}{t}\right) + \operatorname{Re}(L(i)), \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$D_2(u_f)(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{u_f(x,y+t) - u_f(x,y)}{t} = \operatorname{Re}(L(i)).$$

<u>Afirmación 4:</u>
$t \mapsto v_f(x,t)$ es diferenciable en y y su derivada es $\operatorname{Im}(L(i))$. Es decir $D_2(v_f)(x,y) = \operatorname{Im}(L(i))$.
<u>Demostración Afirmación 4:</u>

$$\begin{aligned} v_f(x,y+t) - v_f(x,y) &= \operatorname{Im}(f(z+it) - f(z)) \\ &= \operatorname{Im}(f(z+it) - f(z) \pm L(it)) \\ &= \operatorname{Im}(f(z+it) - f(z) - L(it)) + \operatorname{Im}(L(it)), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{v_f(x,y+t) - v_f(x,y)}{t} &= \operatorname{Im}\left(\frac{f(z+it) - f(z) - L(it)}{t}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{L(it)}{t}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{f(z+it) - f(z) - L(it)}{t}\right) + \operatorname{Im}(L(i)), \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$D_2(v_f)(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{v_f(x,y+t) - v_f(x,y)}{t} = \mathrm{Im}(L(i)).$$

2. Sea $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$ arbitrario. Por la $\mathbb{R}-$linealidad de L y las afirmaciones anteriores tenemos que

$$\begin{aligned}
D_r(f)(z)(h) &= L(h) \\
&= \mathrm{Re}(L(h)) + i\,\mathrm{Im}(L(h) \\
&= \mathrm{Re}(h_1L(1) + h_2L(i)) + i\,\mathrm{Im}(h_1L(1) + h_2L(i)) \\
&= h_1\,\mathrm{Re}(L(1)) + h_2\,\mathrm{Re}(L(i)) + ih_1\,\mathrm{Im}(L(1)) + ih_2\,\mathrm{Im}(L(i)) \\
&= h_1\,[\mathrm{Re}(L(1)) + i\,\mathrm{Im}(L(1))] + h_2\,[\mathrm{Re}(L(i)) + i\,\mathrm{Im}(L(i))] \\
&= h_1\,[D_1(u_f)(x,y) + iD_1(v_f)(x,y)] + h_2\,[D_2(u_f)(x,y) + iD_2(v_f)(x,y)] \\
&= \mathrm{Re}(h)D_1(f)(z) + \mathrm{Im}(h)D_2(f)(z),
\end{aligned}$$

lo cual prueba 2. ■

Corolario 1.2.8
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}-$diferenciable en $z = x + iy \in U$. Entonces

$$D_r(f)(z)(h) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(z) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z) \cdot h^*, \ \forall\ h \in \mathbb{C}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \xi}(z) &\doteq \frac{D_1(u_f)(x,y) + D_2(v_f)(x,y)}{2} + i\frac{D_1(v_f)(x,y) - D_2(u_f)(x,y)}{2} \text{ y} \\
\frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z) &\doteq \frac{D_1(u_f)(x,y) - D_2(v_f)(x,y)}{2} + i\frac{D_1(v_f)(x,y) + D_2(u_f)(x,y)}{2}.
\end{aligned}$$

Decimos que $\frac{\partial f}{\partial \xi}(z)$ es la "$\mathbb{R}-$ *derivada de f en z*" y que $\frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z)$ es la "$\mathbb{R}-$ *derivada conjugada de f en z*". El cálculo diferencial basado en estos operadores es conocido como "*Cálculo de Wirtinger*" o "*Cálculo* $\mathbb{C}-\mathbb{R}$".

Demostración:
Sea $h \in \mathbb{C}$ arbitrario. Como $D_r(f)(z)$ es $\mathbb{R}-$lineal, la Proposición 1.1.6 nos asegura que

$$D_r(f)(z)(h) = \alpha h + \beta h^*$$

donde

$$\alpha = \frac{D_r(f)(z)(1) - iD_r(f)(z)(i)}{2} \text{ y } \beta = \frac{D_r(f)(z)(1) + iD_r(f)(z)(i)}{2}.$$

Pero, por la parte 2 de la Proposición anterior sabemos que $D_r(f)(z)(1) = D_1(f)(z)$ y $D_r(f)(z)(i) = D_2(f)(z)$. Reemplazando resulta que $\alpha = \frac{\partial f}{\partial \xi}(z)$ y $\beta = \frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z)$, con lo cual queda culminada la prueba. ■

Proposición 1.2.9
Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) \doteq z^*$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$. Entonces
1. f no es $\mathbb{C}-$diferenciable.
2. f es $\mathbb{R}-$diferenciable en $\mathbb{C}$, $\frac{\partial f}{\partial \xi}(z) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z) = 1$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$.

Demostración:
1. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ cualquiera y supongamos por el absurdo que f es $\mathbb{C}-$diferenciable en z. Por definición $\exists$ $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}-$lineal tal que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - L(h)}{|h|} = 0,$$

luego

$$0=\lim_{|h|\to 0}\frac{(z+h)^*-z^*-L(h)}{|h|}=\lim_{|h|\to 0}\frac{h^*-L(h)}{|h|}=\lim_{|h|\to 0}\frac{h^*-hL(1)}{|h|}.$$

Pero si este límite existe entonces debe existir independientemente de la dirección en la cual $|h|$ se aproxima a 0. Sea $h\to 0$ a lo largo del eje real por derecha entonces

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{h^*-hL(1)}{|h|}=1-L(1).$$

Ahora sea $h\to 0$ a lo largo del eje imaginario por arriba entonces

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{h^*-hL(1)}{|h|}=-i(1+L(1)).$$

Por último, si me aproximo al origen a lo largo del eje imaginario por abajo, resulta que

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{h^*-hL(1)}{|h|}=i(1+L(1)).$$

Por lo tanto no puede existir tal límite.
2. Sean a, $b\in\mathbb{R}$ y z, $w\in\mathbb{C}$ arbitrarios, entonces

$$f(az+bw)=(az+bw)^*=az^*+bw^*=af(z)+bf(w),$$

así f es $\mathbb{R}-$lineal. Además

$$\lim_{|h|\longrightarrow 0}\frac{|f(z+h)-f(z)-f(h)|}{|h|}=\lim_{|h|\longrightarrow 0}\frac{|(z+h)^*-z^*-h^*|}{|h|}=0,\ \forall\ z\in\mathbb{C}.$$

Por lo tanto f es $\mathbb{R}-$diferenciable. Ahora sea $z=x+iy\in\mathbb{C}$ arbitrario, como $u_f(x,y)=x$ y $v_f(x,y)=-y$, entonces

$$D_1(u_f)(x,y)=1,\ D_2(v_f)(x,y)=-1 \text{ y } D_1(v_f)(x,y)=0=\ D_2(u_f)(x,y).$$

Se sigue por la Proposición 1.2.8 que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\xi}(z) &= \frac{D_1(u_f)(x,y)+D_2(v_f)(x,y)}{2}+i\frac{D_1(v_f)(x,y)-D_2(u_f)(x,y)}{2}=0 \text{ y}\\ \frac{\partial f}{\partial\xi^*}(z) &= \frac{D_1(u_f)(x,y)-D_2(v_f)(x,y)}{2}+i\frac{D_1(v_f)(x,y)+D_2(u_f)(x,y)}{2}=1.\ \blacksquare\end{aligned}$$

Proposición 1.2.10
Sea $L:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ $\mathbb{R}-$lineal y sea $L^*:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ dada por $L^*(z)\doteq(L(z))^*$, $\forall\ z\in\mathbb{C}$. Entonces L^* es $\mathbb{R}-$lineal.

Demostración:
Sean a, $b\in\mathbb{R}$ y z, $w\in\mathbb{C}$ arbitrarios. Entonces

$$L^*(az+bw)=(L(az+bw))^*=(aL(z)+bL(w))^*=a(L(z))^*+b(L(w))^*=aL^*(z)+bL^*(w),$$

lo que implica la $\mathbb{R}-$linealidad. $\blacksquare$

Proposición 1.2.11
Sean $U\subset\mathbb{C}$ un abierto, $f:U\longrightarrow\mathbb{C}$ y $f^*:U\longrightarrow\mathbb{C}$ dada por $f^*(u)\doteq f(u)^*$, $\forall\ u\in U$. Si f es $\mathbb{R}-$diferenciable en $z\in U$ entonces f^* también y se cumplen

$$\frac{\partial f^*}{\partial\xi}(z)=\left(\frac{\partial f}{\partial\xi^*}(z)\right)^* \text{ y } \frac{\partial f^*}{\partial\xi^*}(z)=\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}(z)\right)^*.$$

Demostración:
Sea L^* como en la Proposición anterior. Por la Proposición 1.2.9 la función $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) \doteq z^*$, $\forall$ $z \in \mathbb{C}$ es $\mathbb{R}-$diferenciable. Luego, por la Observación 1.2.2, g resulta continua. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{|h|\to 0} \frac{f^*(z+h) - f^*(z) - L^*(h)}{|h|} &= \lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h)^* - f(z)^* - L(h)^*}{|h|} \\
&= \lim_{|h|\to 0} \frac{[f(z+h) - f(z) - L(h)]^*}{|h|} \\
&= \lim_{|h|\to 0} \left[\frac{f(z+h) - f(z) - L(h)}{|h|}\right]^* \\
&= \left[\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - L(h)}{|h|}\right]^* \\
&= 0^* \\
&= 0
\end{aligned}$$

y por lo tanto f^* es $\mathbb{R}-$diferenciable en z. Ahora, dado que

$$\begin{aligned}
u_{f^*}(x,y) &= \operatorname{Re}(f^*(x+iy)) = \operatorname{Re}(f(x+iy)^*) = \operatorname{Re}(f(x+iy)) = u_f(x,y) \text{ y} \\
v_{f^*}(x,y) &= \operatorname{Im}(f^*(x+iy)) = \operatorname{Im}(f(x+iy)^*) = -\operatorname{Im}(f(x+iy)) = -v_f(x,y)
\end{aligned}$$

resultan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^*}{\partial \xi}(z) &= \frac{D_1(u_{f^*})(x,y) + D_2(v_{f^*})(x,y)}{2} + i\frac{D_1(v_{f^*})(x,y) - D_2(u_{f^*})(x,y)}{2} \\
&= \frac{D_1(u_f)(x,y) - D_2(v_f)(x,y)}{2} - i\frac{D_1(v_f)(x,y) + D_2(u_f)(x,y)}{2} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z)\right)^* \text{ y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^*}{\partial \xi^*}(z) &= \frac{D_1(u_{f^*})(x,y) - D_2(v_{f^*})(x,y)}{2} + i\frac{D_1(v_{f^*})(x,y) + D_2(u_{f^*})(x,y)}{2} \\
&= \frac{D_1(u_f)(x,y) + D_2(v_f)(x,y)}{2} - i\frac{D_1(v_f)(x,y) - D_2(u_f)(x,y)}{2} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}(z)^*\right). \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 1.2.12 (Regla de la cadena)
Sean U y V abiertos en $\mathbb{C}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ y $z \in U$ tal que $f(z) \in V$. Si f es $\mathbb{R}-$diferenciable en z y g es $\mathbb{R}-$diferenciable en $f(z)$ entonces:
1. $g \circ f$ es $\mathbb{R}-$diferenciable en z.
2. Se cumple que

$$D_r(g \circ f)(z)(h) = D_r(g)(f(z)) \circ D_r(f)(z)(h),\ \forall\ h \in \mathbb{C}.$$

3. Se cumple que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \xi}(z) &= \frac{\partial g}{\partial \xi}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \xi}(z) + \frac{\partial g}{\partial \xi^*}(f(z))\frac{\partial f^*}{\partial \xi}(z) \text{ y} \\
\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \xi^*}(z) &= \frac{\partial g}{\partial \xi}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z) + \frac{\partial g}{\partial \xi^*}(f(z))\frac{\partial f^*}{\partial \xi^*}(z).
\end{aligned}$$

Demostración:

1. Por ser f $\mathbb{R}-$diferenciable en z tenemos que $\lim_{|h|\to 0}\frac{|f(z+h)-f(z)-L_1(h)|}{|h|}=0$, donde $L_1 \doteq D_r(f)(z)$; o sea

$$f(z+h)-f(z)=L_1(h)+|h|\,\varepsilon_1(h)$$

con $\lim_{|h|\to 0}\varepsilon_1(h)=0$. Notemos que

$$(g\circ f)(z+h)-g(f(z))=g(f(z)+k(h))-g(f(z))$$

donde $k(h)\doteq f(z+h)-f(z)$. Como g es $\mathbb{R}-$diferenciable en $f(z)$ entonces $\lim_{|h|\to 0}\frac{|g(f(z)+h)-g(f(z))-L_2(h)|}{|h|}=0$, donde $L_2\doteq D_r(g)(f(z))$; o sea

$$(g\circ f)(z+h)-g(f(z))=L_2(k(h))+|k(h)|\,\varepsilon_2(k(h))$$

con $\lim_{|k(h)|\to 0}\varepsilon_2(k(h))=0$. Luego

$$\begin{aligned}(g\circ f)(z+h)-g(f(z)) &= L_2(L_1(h)+|h|\,\varepsilon_1(h))+|k(h)|\,\varepsilon_2(k(h))\\ &= L_2(L_1(h))+L_2(|h|\,\varepsilon_1(h))+|k(h)|\,\varepsilon_2(k(h))\\ &= (L_1\circ L_2)(h)+|h|\,L_2(\varepsilon_1(h))+|k(h)|\,\varepsilon_2(k(h))\\ &= (L_1\circ L_2)(h)+|h|\left(L_2(\varepsilon_1(h))+\frac{|k(h)|}{|h|}\varepsilon_2(k(h))\right).\end{aligned}$$

Por la Definición 1.2.4 faltaría ver que

$$\lim_{|h|\to 0}\left(L_2(\varepsilon_1(h))+\frac{|k(h)|}{|h|}\varepsilon_2(k(h))\right)=0. \quad \textbf{(1.2.12.1)}$$

Pero como L_2 es $\mathbb{R}-$lineal entonces es continua, por lo cual

$$\lim_{|h|\to 0}L_2(\varepsilon_1(h))=L_2\left(\lim_{|h|\to 0}\varepsilon_1(h)\right)=L_2(0)=0.$$

Además, por ser f $\mathbb{R}-$diferenciable en z, f resulta continua en z. Entonces

$$0=\lim_{|h|\to 0}f(z+h)-f(z)=\lim_{|h|\to 0}k(h)\implies \lim_{|h|\to 0}\varepsilon_2(k(h))=0.$$

Ahora, por la $\mathbb{R}-$linealidad de L_1 sabemos que $\exists\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}$ tales que $L_1(z)=\alpha z+\beta z^*$, $\forall\ z\in\mathbb{C}$. Luego

$$\begin{aligned}\frac{|k(h)|}{|h|} &= \frac{|f(z+h)-f(z)|}{|h|}=\frac{|L_1(h)+|h|\,\varepsilon_1(h)|}{|h|}\\ &\leq \frac{|L_1(h)|}{|h|}+\frac{|h\varepsilon_1(h)|}{|h|}=\frac{|\alpha h+\beta h^*|}{|h|}+|\varepsilon_1(h)|\\ &\leq |\alpha|+|\beta|+|\varepsilon_1(h)|\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{|k(h)|}{|h|}\leq |\alpha|+|\beta|+\lim_{|h|\to 0}|\varepsilon_1(h)|=|\alpha|+|\beta|\,.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\lim_{|h|\to 0}\left(L_2(\varepsilon_1(h))+\frac{|k(h)|}{|h|}\varepsilon_2(k(h))\right) &= \lim_{|h|\to 0}L_2(\varepsilon_1(h))+\left(\lim_{|h|\to 0}\frac{|k(h)|}{|h|}\right)\left(\lim_{|h|\to 0}\varepsilon_2(k(h))\right)\\ &\leq \lim_{|h|\to 0}L_2(\varepsilon_1(h))+(|\alpha|+|\beta|)\left(\lim_{|h|\to 0}\varepsilon_2(k(h))\right)=0,\end{aligned}$$

es decir se cumple **(1.2.12.1)**.
2. Se deduce directamente por la Proposición 1.2.3.

3. Por el Corolario 1.2.8 se siguen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
L_1(h) &= D_r(f)(z)(h) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(z)h + \frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z)h^*, \\
L_2(h) &= D_r(g)(f(z))(h) = \frac{\partial g}{\partial \xi}(f(z))h + \frac{\partial g}{\partial \xi^*}(f(z))h^* \text{ y} \\
D_r(g\circ f)(z)(h) &= \frac{\partial (g\circ f)}{\partial \xi}(z)h + \frac{\partial (g\circ f)}{\partial \xi^*}(z)h^*, \; \forall\, h \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Utilizando el inciso 2 y la Proposición 1.2.11 tenemos que

$$\begin{aligned}
D_r(g\circ f)(z)(h) &= D_r(g)(f(z)) \circ D_r(f)(z)(h) \\
&= L_2\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}(z)h + \frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z)h^*\right) = L_2\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}(z)h\right) + L_2\left(\frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z)h^*\right) \\
&= \frac{\partial g}{\partial \xi}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \xi}(z)h + \frac{\partial g}{\partial \xi^*}(f(z))\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}(z)h\right)^* + \frac{\partial g}{\partial \xi}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z)h^* + \frac{\partial g}{\partial \xi^*}(f(z))\left(\frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z)h^*\right)^* \\
&= \frac{\partial g}{\partial \xi}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \xi}(z)h + \frac{\partial g}{\partial \xi^*}(f(z))\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}(z)\right)^* h^* + \frac{\partial g}{\partial \xi}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z)h^* + \frac{\partial g}{\partial \xi^*}(f(z))\left(\frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z)\right)^* h \\
&= \frac{\partial g}{\partial \xi}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \xi}(z)h + \frac{\partial g}{\partial \xi^*}(f(z))\frac{\partial f^*}{\partial \xi^*}(z)h^* + \frac{\partial g}{\partial \xi}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z)h^* + \frac{\partial g}{\partial \xi^*}(f(z))\frac{\partial f^*}{\partial \xi^*}(z)h \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \xi}(z) + \frac{\partial g}{\partial \xi^*}(f(z))\frac{\partial f^*}{\partial \xi^*}(z)\right)h + \left(\frac{\partial g}{\partial \xi^*}(f(z))\frac{\partial f^*}{\partial \xi^*}(z) + \frac{\partial g}{\partial \xi}(f(z))\frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z)\right)h^*.
\end{aligned}$$

Luego por la unicidad de la Proposición 1.1.5 y el Corolario 1.2.8 resulta 3. ■

Nota 1.2.13
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}-$diferenciable en $z = x + iy \in U$. Usando la definición de $D_1(f)(z)$, $D_2(f)(z)$, $\frac{\partial f}{\partial \xi}(z)$ y de $\frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z)$ deducimos que

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(z) = \frac{D_1(f)(z) - iD_2(f)(z)}{2} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z) = \frac{D_1(f)(z) + iD_2(f)(z)}{2}.$$

1.3 El gradiente y la matriz Hessiana complejas

En esta sección proponemos una definición para el *gradiente complejo* y la *matriz Hessiana compleja* de una función real de variables complejas. Mostramos que, tanto el gradiente como la Hessiana compleja, están relacionados con sus contrapartes reales mediante simples transformaciones lineales. Además, obtenemos algunas propiedades de la Hessiana compleja, en particular sus autovalores. Un buen tratamiento de estos temas se pueden encontrar en el trabajo de Van den Bros [7].

Notación 1.3.1
Sean $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^{2n}$ un abierto y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos veces continuamente diferenciable en A. El gradiente de F en $\mathbf{w} \doteq (w_1, ..., w_{2n})^\top \in A$ será

$$\nabla F(\mathbf{w}) \doteq (D_1(F)(\mathbf{w}), ..., D_{2n}(F)(\mathbf{w}))^\top,$$

donde $D_j(F)(\mathbf{w})$ es la derivada en w_j de la función

$$t \mapsto F((w_1, ..., w_{j-1}, t, w_{j+1}, ..., w_{2n})^\top),$$

para cada $j \in \{1, ..., 2n\}$. La matriz Hessiana de F en $\mathbf{w} \in A$ será

$$D^2(F)(\mathbf{w}) \doteq \begin{bmatrix} D_1^2(F)(\mathbf{w}) & D_1D_2(F)(\mathbf{w}) & ... & D_1D_{2n}(F)(\mathbf{w}) \\ D_2D_1(F)(\mathbf{w}) & D_2^2(F)(\mathbf{w}) & ... & D_2D_{2n}(F)(\mathbf{w}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{2n}D_1(F)(\mathbf{w}) & D_{2n}D_2(F)(\mathbf{w}) & ... & D_{2n}^2(F)(\mathbf{w}) \end{bmatrix},$$

donde $D_j^2(F)(\mathbf{w})$ es la derivada segunda en w_j de la función

$$t \mapsto F((w_1, ..., w_{j-1}, t, w_{j+1}, ..., w_{2n})^\top),$$

para cada $j \in \{1, ..., 2n\}$ y $D_jD_k(F)(\mathbf{w})$ es la derivada en w_j de la función

$$t \mapsto D_k(F)((w_1, ..., w_{j-1}, t, w_{j+1}, ..., w_{2n})^\top),$$

para cada $j, k \in \{1, ..., 2n\}$ con $j \neq k$.

Definición 1.3.2
Sea $\mathbf{w}_0 = (w_0^1, ..., w_0^{2n})^\top \in A$. Llamamos "*polinomio de Taylor de orden* 2 *de* F *en* $\mathbf{w}_0$" a

$$\mathbf{w} \mapsto F(\mathbf{w}_0) + \nabla F(\mathbf{w}_0)^\top(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0)^\top D^2(F)(\mathbf{w}_0)(\mathbf{w} - \mathbf{w}_0), \forall\ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Nota 1.3.3
Sea $J \doteq \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Es sencillo ver que $J^{-1} = \frac{1}{2}J^H$. Para cada $j \in \{1, ..., n\}$ sea $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$ donde x_j e y_j están en $\mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{bmatrix} z_j \\ z_j^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{2n}$ dada por

$$\mathbf{v} \doteq \begin{bmatrix} z_1 & z_1^* & \cdots & z_n & z_n^* \end{bmatrix}^\top = M \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & x_n & y_n \end{bmatrix}^\top \text{ donde } M \doteq \begin{bmatrix} J & O_2 & ... & O_2 \\ O_2 & J & ... & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & ... & J \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}.$$

No es difícil ver que M es invertible y que $M^{-1} = \frac{1}{2}M^H$. Luego $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & x_n & y_n \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{2}M^H\mathbf{v}$.
Pero, como x_1, y_1,..., x_n, $y_n \in \mathbb{R}$, resulta que $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & x_n & y_n \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & x_n & y_n \end{bmatrix}^H$ y así

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & x_n & y_n \end{bmatrix}^\top = \frac{1}{2}M^\top\mathbf{v}^*.$$

Veamos ahora las fórmulas de la Notación 1.3.1 y de la Definición 1.3.2, en la notación de arriba. Para cada $j \in \{1, ..., n\}$ sea

$$z_0^j = x_0^j + iy_0^j$$

donde x_0^j e y_0^j están en $\mathbb{R}$. Definimos para cada $j \in \{1, ..., n\}$ $w_{2j-1} \doteq x_j$, $w_{2j} \doteq y_j$, $w_0^{2j-1} \doteq x_0^j$ y $w_0^{2j} \doteq y_0^j$. Además sean

$$\mathbf{v}_0 \doteq \begin{bmatrix} z_0^1 & (z_0^1)^* & \cdots & z_0^n & (z_0^n)^* \end{bmatrix}^\top, \mathbf{w}_0 \doteq \begin{bmatrix} w_0^1 & w_0^2 & \cdots & w_0^{2n} \end{bmatrix}^\top \text{ y } \mathbf{w} \doteq \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_{2n} \end{bmatrix}^\top.$$

Luego, como más arriba, tenemos que

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}M^H\mathbf{v} = \frac{1}{2}M^\top\mathbf{v}^* \text{ y } \mathbf{w}_0 = \frac{1}{2}M^H\mathbf{v}_0 = \frac{1}{2}M^\top\mathbf{v}_0^*.$$

Por lo tanto $\mathbf{v} = M\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}_0 = M\mathbf{w}_0$.
Sea $U \doteq \{M\mathbf{w} : \mathbf{w} \in A\}$. Como A es abierto en $\mathbb{R}^{2n}$ y la función $g : \mathbb{C}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dada por $g(\mathbf{v}) \doteq M^{-1}\mathbf{v}$ es continua, entonces U es un abierto en $\mathbb{C}^{2n}$. Definimos $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$f(\mathbf{v}) \doteq F(\mathbf{w}) \text{ si } \mathbf{v} = M\mathbf{w}.$$

Definición 1.3.4 (Continuación de la Nota 1.3.3)
Llamamos "*gradiente complejo de f en $\mathbf{v}_0$*" a $\nabla f(\mathbf{v}_0) \doteq \frac{1}{2}M^*\nabla F(\mathbf{w}_0)$.

Nota 1.3.5
Como $\frac{1}{2}M^\top M^* = I_{2n}$ entonces $\nabla F(\mathbf{w}_0) = M^\top \nabla f(\mathbf{v}_0)$. Por otra parte, como f es en realidad a valores en $\mathbb{R}$, tenemos que $u_f = F$ y $v_f = 0$.

Nota 1.3.6
Notemos que

$$\nabla f(\mathbf{v}_0) = \frac{1}{2}M^*\nabla F(\mathbf{w}_0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} J^* & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & J^* & \dots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \dots & J^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1F(\mathbf{w}_0) \\ D_2F(\mathbf{w}_0) \\ \vdots \\ D_{2n}F(\mathbf{w}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D_1(F)(\mathbf{w}_0) - iD_2(F)(\mathbf{w}_0)}{2} \\ \frac{D_1(F)(\mathbf{w}_0) + iD_2(F)(\mathbf{w}_0)}{2} \\ \vdots \\ \frac{D_{2n-1}(F)(\mathbf{w}_0) - iD_{2n}(F)(\mathbf{w}_0)}{2} \\ \frac{D_{2n-1}(F)(\mathbf{w}_0) + iD_{2n}(F)(\mathbf{w}_0)}{2} \end{bmatrix}.$$

Teniento en cuenta las definiciones dadas en el Corolario 1.2.8, definimos

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(\mathbf{v}_0) \doteq \frac{D_{2j-1}(F)(\mathbf{w}_0) - iD_{2j}(F)(\mathbf{w}_0)}{2} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial \xi_j^*}(\mathbf{v}_0) \doteq \frac{D_{2j-1}(F)(\mathbf{w}_0) + iD_{2j}(F)(\mathbf{w}_0)}{2},$$

para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Luego

$$\nabla f(\mathbf{v}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(\mathbf{v}_0) & \frac{\partial f}{\partial \xi_1^*}(\mathbf{v}_0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial \xi_n}(\mathbf{v}_0) & \frac{\partial f}{\partial \xi_n^*}(\mathbf{v}_0) \end{bmatrix}^\top. \qquad \textbf{(1.3.6.1)}$$

Como $\mathbf{v}_0 \doteq \begin{bmatrix} z_0^1 & (z_0^1)^* & \cdots & z_0^n & (z_0^n)^* \end{bmatrix}^\top$ y $\mathbf{w}_0 \doteq \begin{bmatrix} w_0^1 & w_0^2 & \cdots & w_0^{2n} \end{bmatrix}^\top$ entonces

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi_1}\left(\left(z_0^1, (z_0^1)^*, ..., z_0^n, (z_0^n)^*\right)^\top\right) \\ \frac{\partial f}{\partial \xi_1^*}\left(\left(z_0^1, (z_0^1)^*, ..., z_0^n, (z_0^n)^*\right)^\top\right) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \xi_n}\left(\left(z_0^1, (z_0^1)^*, ..., z_0^n, (z_0^n)^*\right)^\top\right) \\ \frac{\partial f}{\partial \xi_n^*}\left(\left(z_0^1, (z_0^1)^*, ..., z_0^n, (z_0^n)^*\right)^\top\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D_1(F)\left((x_0^1,y_0^1,...,x_0^n,y_0^n)^\top\right) - iD_2(F)\left((x_0^1,y_0^1,...,x_0^n,y_0^n)^\top\right)}{2} \\ \frac{D_1(F)\left((x_0^1,y_0^1,...,x_0^n,y_0^n)^\top\right) + iD_2(F)\left((x_0^1,y_0^1,...,x_0^n,y_0^n)^\top\right)}{2} \\ \vdots \\ \frac{D_{2n-1}(F)\left((x_0^1,y_0^1,...,x_0^n,y_0^n)^\top\right) - iD_{2n}(F)\left((x_0^1,y_0^1,...,x_0^n,y_0^n)^\top\right)}{2} \\ \frac{D_{2n-1}(F)\left((x_0^1,y_0^1,...,x_0^n,y_0^n)^\top\right) - iD_{2n}(F)\left((x_0^1,y_0^1,...,x_0^n,y_0^n)^\top\right)}{2} \end{bmatrix}.$$

Una cuenta directa prueba que

$$(\nabla f(\mathbf{v}_0))^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi_1^*}(\mathbf{v}_0) & \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(\mathbf{v}_0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial \xi_n^*}(\mathbf{v}_0) & \frac{\partial f}{\partial \xi_n}(\mathbf{v}_0) \end{bmatrix}^\top. \qquad \textbf{(1.3.6.2)}$$

Finalmente, teniendo en cuenta la Definición 1.3.4, **(1.3.6.1)** y **(1.3.6.2)**, se verifica que si

$$A)\ \nabla F(\mathbf{w}_0) = 0,\ B)\ \nabla f(\mathbf{v}_0) = 0 \text{ y } C)\ (\nabla f(\mathbf{v}_0))^* = 0$$

entonces

$$\begin{aligned} A) &\implies B) \wedge C) \\ B) &\implies A) \wedge C) \\ C) &\implies A) \wedge B). \end{aligned}$$

Definición 1.3.7
Lamamos "*Hessiana compleja de f en $\mathbf{v}_0$*" a $D^2(f)(\mathbf{v}_0) \doteq \frac{1}{4} \cdot M \cdot D^2(F)(\mathbf{w}_0) \cdot M^H$.

Nota 1.3.8
Puesto que $M^{-1} = \frac{1}{2}M^H$, se vé fácilmente que $D^2(F)(\mathbf{w}_0) = M^H \cdot D^2(f)(\mathbf{v}_0) \cdot M$.

Nota 1.3.9
Recordemos que una matriz cuadrada M sobre $\mathbb{C}$ se dice "*hermitiana*" si $M = M^H$.

Proposición 1.3.10
$D^2(f)(\mathbf{v}_0)$ es hermitiana.

Demostración:
Dado que

$$(D^2(f)(\mathbf{v}_0))^H = \left(\frac{1}{4}MD^2(F)(\mathbf{w}_0)M^H\right)^H = \frac{1}{4}(M^H)^H(D^2(F)(\mathbf{w}_0))^H M^H = \frac{1}{4}M(D^2(F)(\mathbf{w}_0))^H M^H$$

basta probar que $D^2(F)(\mathbf{w}_0)$ es hermitiana. Como

$$D^2(F)(\mathbf{w}_0) = \begin{bmatrix} D_1^2(F)(\mathbf{w}_0) & D_1D_2(F)(\mathbf{w}_0) & ... & D_1D_{2n}(F)(\mathbf{w}_0) \\ D_2D_1(F)(\mathbf{w}_0) & D_2^2(F)(\mathbf{w}_0) & ... & D_2D_{2n}(F)(\mathbf{w}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{2n}D_1(F)(\mathbf{w}_0) & D_{2n}D_2(F)(\mathbf{w}_0) & ... & D_{2n}^2(F)(\mathbf{w}_0) \end{bmatrix}$$

es claro que $D^2(F)(\mathbf{w}_0)$ es simétrica. Además F toma valores reales, lo cual implica que $D^2(F)(\mathbf{w}_0) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$. Por lo tanto $D^2(F)(\mathbf{w}_0)$ es hermitiana. ■

Proposición 1.3.11
λ es un autovalor de $D^2(f)(\mathbf{v}_0) \iff 2\lambda$ es un autovalor de $D^2(F)(\mathbf{w}_0)$.

Demostración:
Notemos que

$$D^2(f)(\mathbf{v}_0) - \lambda I_{2n} = \frac{1}{4}MD^2(F)(\mathbf{w}_0)M^H - \lambda I_{2n} = \frac{1}{4}MD^2(F)(\mathbf{w}_0)M^H - \lambda\frac{1}{2}MM^H = \frac{1}{4}M(D^2(F)(\mathbf{w}_0) - 2\lambda I_{2n})M^H,$$

luego

$$\begin{aligned} \det\left(D^2(f)(\mathbf{v}_0) - \lambda I_{2n}\right) &= \det\left(\frac{1}{4}M(D^2(F)(\mathbf{w}_0) - 2\lambda I_{2n})M^H\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \det(M)\det(D^2(F)(\mathbf{w}_0) - 2\lambda I_{2n})\det(M^H) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \det(MM^H)\det(D^2(F)(\mathbf{w}_0) - 2\lambda I_{2n}) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \det\begin{bmatrix} 2 & & \\ & \ddots & \\ & & 2 \end{bmatrix}\det(D^2(F)(\mathbf{w}_0) - 2\lambda I_{2n}) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} 2^{2n}\det(D^2(F)(\mathbf{w}_0) - 2\lambda I_{2n}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \det(D^2(F)(\mathbf{w}_0) - 2\lambda I_{2n}). \end{aligned}$$

Con lo cual, $\det(D^2(f)(\mathbf{v}_0) - \lambda I_{2n}) = 0 \iff \det(D^2(F)(\mathbf{w}_0) - 2\lambda I_{2n}) = 0$. ■

1.4 Funciones $\mathbb{R}-$diferenciables de orden superior

En esta sección primero estudiamos algunos conceptos y resultados del Álgebra lineal, los cuales son necesarios para definir las *funciones* $\mathbb{R}-$ *diferenciables de orden superior*. Además obtenemos algunas propiedades importantes de la $\mathbb{R}-$ *derivada de orden superior*, como por ejemplo la simetría.

Definición 1.4.1
Sean $p \geq 2$ entero y $f : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que "L *es* $\mathbb{R} - p -$ *lineal*" si

$$L\left((z_1, ..., z_{j-1}, au + bv, z_{j+1}, ..., z_p)^\top\right) = aL\left((z_1, ..., z_{j-1}, u, z_{j+1}, ..., z_p)^\top\right) + bL\left((z_1, ..., z_{j-1}, v, z_{j+1}, ..., z_p)^\top\right)$$

para cada a, $b \in \mathbb{R}$; z_1,..., z_{j-1}, z_{j+1},..., z_p, u, $v \in \mathbb{C}$ y $j \in \{1, ..., p\}$ entero.

Notación 1.4.2
Denotamos $\mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \{L : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C} \ : \ L \text{ es } \mathbb{R} - p - \text{lineal}\}$.

Definición 1.4.3
Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{C}-$espacio vectorial. Decimos que "$L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{V}$ *es* $\mathbb{R} -$ *lineal*" si

$$L(az + bw) = aL(z) + bL(w), \forall\ a,\ b \in \mathbb{R} \quad \text{y } \forall\ z,\ w \in \mathbb{C}.$$

Notación 1.4.4
Denotamos $\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V}) = \{L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{V} \ : \ L \text{ es } \mathbb{R} - \text{lineal}\}$.

Observación 1.4.5
Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$; L , L_1 y $L_2 \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V})$ definimos

$$\begin{aligned} (\alpha \odot L)(z) &\doteq \alpha L(z), \forall\ z \in \mathbb{C} \\ (L_1 \oplus L_2)(z) &\doteq L_1(z) + L_2(z), \forall\ z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$; f, f_1 y $f_2 \in \mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ definimos

$$\begin{aligned} (\alpha \boxdot f)(\mathbf{z}) &\doteq \alpha f(\mathbf{z}), \forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^p \\ (f_1 \boxplus f_2)(\mathbf{z}) &\doteq f_1(\mathbf{z}) + f_2(\mathbf{z}), \forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^p. \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $(\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V}), \odot, \oplus)$ y $(\mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C}, \mathbb{C}), \boxdot, \boxplus)$ son ambos $\mathbb{C}-$espacios vectoriales.

Proposición 1.4.6
Sea $p \geq 2$ entero y para cada $L \in \mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ y cada $z_1 \in \mathbb{C}$ definimos $\Im(L)(z_1) : \mathbb{C}^{p-1} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\Im(L)(z_1)((z_2, ..., z_p)^\top) \doteq L((z_1, z_2, ..., z_p)^\top), \forall (z_2, ..., z_p)^\top \in \mathbb{C}^{p-1}.$$

Entonces
1. $\Im(L)(z_1) \in \mathcal{L}\mathbb{R}_{p-1}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.
2. $S : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{L}\mathbb{R}_{p-1}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ definida por $S(z_1) \doteq \Im(L)(z_1)$, pertenece a $\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathcal{L}\mathbb{R}_{p-1}(\mathbb{C}, \mathbb{C}))$.
3. $\Im$ es un isomorfismo entre $\mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ y $\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathcal{L}\mathbb{R}_{p-1}(\mathbb{C}, \mathbb{C}))$.

Demostración:
1. Veamos que $\Im(L)(z_1)$ es $\mathbb{R} - (p-1)-$lineal. Para ello sean a, $b \in \mathbb{R}$; z_2, ..., z_{j-1}, z_{j+1}, ..., z_p, u, $v \in \mathbb{C}$ y $j \in \{2, ..., p\}$ entero. Entonces

$\Im(L)(z_1)\left(z_2, ..., z_{j-1}, au + bv, z_{j+1}, ..., z_p)^\top\right) = L\left((z_1, z_2, ..., z_{j-1}, au + bv, z_{j+1}, ..., z_p)^\top\right)$

$= aL\left((z_2, ..., z_{j-1}, u, z_{j+1}, ..., z_p)^\top\right) + bL\left((z_2, ..., z_{j-1}, au + bv, z_{j+1}, ..., z_p)^\top\right)$

$= a\Im(L)(z_1)\left((z_2, ..., z_{j-1}, u, z_{j+1}, ..., z_p)^\top\right) + b\Im(L)(z_1)\left((z_2, ..., z_{j-1}, v, z_{j+1}, ..., z_p)^\top\right)$

2. Por el inciso 1 es suficiente probar que S es $\mathbb{R}-$lineal. Tomemos entonces a, $b \in \mathbb{R}$; z, $w \in \mathbb{C}$ y $(z_2, ..., z_p)^\top \in \mathbb{C}^{p-1}$ arbitrarios. Luego

$$\begin{array}{rcl} S(az+bw)((z_2,...,z_p)^\top) & = & \Im(L)(az+bw)((z_2,...,z_p)^\top) \\ & = & L((az+bw, z_2,...,z_p)^\top) \\ & = & aL((z,z_2,...,z_p)^\top) + bL((w,z_2,...,z_p)^\top) \\ & = & aS(z)((z_2,...,z_p)^\top) + bS(w)((z_2,...,z_p)^\top) \\ & = & (aS(z)+bS(w))((z_2,...,z_p)^\top). \end{array}$$

3. En primer lugar veamos que $\Im : \mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathcal{L}\mathbb{R}_{p-1}(\mathbb{C},\mathbb{C}))$ es lineal. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$ y L_1, $L_2 \in \mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Para cualquier $z_1 \in \mathbb{C}$ y para cualquier $(z_2, ..., z_p)^\top \in \mathbb{C}^{p-1}$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \Im(\alpha L_1 + L_2)(z_1)((z_2,...,z_p)^\top) & = & (\alpha L_1 + L_2)((z_1,z_2,...,z_p)^\top) \\ & = & \alpha L_1((z_1,z_2,...,z_p)^\top) + L_2((z_1,z_2,...,z_p)^\top) \\ & = & \alpha\Im(L_1)(z_1)((z_2,...,z_p)^\top) + \Im(L_2)(z_1)((z_2,...,z_p)^\top) \\ & = & (\alpha\Im(L_1)(z_1) + \Im(L_2)(z_1))((z_2,...,z_p)^\top) \\ & = & (\alpha\Im(L_1) + \Im(L_2))(z_1)((z_2,...,z_p)^\top), \end{array}$$

lo que significa que $\Im(\alpha L_1 + L_2) = \alpha\Im(L_1) + \Im(L_2)$.
Ahora veamos que $\Im$ es inyectiva, para ello basta ver que $Nu(\Im) = 0_{\mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C})}$. Pero si $L \in Nu(\Im)$ entonces $\Im(L) = 0_{\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathcal{L}\mathbb{R}_{p-1}(\mathbb{C},\mathbb{C}))}$, es decir $\Im(L)(z_1)((z_2,...,z_p)^\top) = L((z_1,z_2,...,z_p)^\top) = 0_\mathbb{C}$, $\forall\ (z_1,...,z_p)^\top \in \mathbb{C}^p$. Lo cual implica que $L = 0_{\mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C})}$.
Por último veamos la sobreyectividad. Tomemos $T \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathcal{L}\mathbb{R}_{p-1}(\mathbb{C},\mathbb{C}))$ y definamos $L : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$L((z_1,z_2,...,z_p)^\top) \doteq T(z_1)((z_2,...,z_p)^\top),\ (z_1,...,z_p)^\top \in \mathbb{C}^p.$$

Claramente $L \in \mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C})$ y además

$$\Im(L)(z_1)((z_2,...,z_p)^\top) = L((z_1,z_2,...,z_p)^\top) = T(z_1)((z_2,...,z_p)^\top),$$

para cada $z_1 \in \mathbb{C}$ para cada $(z_2,...,z_p)^\top \in \mathbb{C}^{p-1}$. Por lo tanto $\Im(L) = T$.
Queda entonces demostrada la Proposición. ■

Nota 1.4.7
Recordemos los siguientes conceptos y resultados de espacios normados.
Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{C}-$espacio vectorial (o $\mathbb{R}-$espacio vectorial) y sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre $\mathbb{V}$. Decimos que "*$\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes*" si las topologías inducidas por ellas son equivalentes.

$$\|\cdot\|_1 \text{ y } \|\cdot\|_2 \text{ son equivalentes} \iff \exists\ a > 0 \text{ y } b > 0 \text{ tales que } a\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq b\|v\|_2,\ \forall\ v \in \mathbb{V}.$$

Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{C}-$espacio vectorial (o $\mathbb{R}-$espacio vectorial) de dimensión finita $p \in \mathbb{N}$, $B \doteq \{v_1, ..., v_p\}$ una base de $\mathbb{V}$ y para cada $v \in \mathbb{V}$ sea

$$\|v\|_B \doteq \left|(v_1,...,v_p)^\top\right|_p \text{ si } v = z_1v_1 + ... + z_pv_p$$

con $(z_1,...,z_p)^\top \in \mathbb{C}^p$ y $|\cdot|_p$ la norma euclídea de $\mathbb{C}^p$. Entonces $\|\cdot\|_B$ es una norma sobre $\mathbb{V}$.
Sea $I_B : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{V}$ definida por $I_B((z_1,...,z_p)^\top) = z_1v_1 + ... + z_pv_p$. Entonces I_B es un isomorfismo topológico entre $(\mathbb{C}^p, |\cdot|_p)$ y $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_B)$. Sea $\|\cdot\|$ otra norma sobre $\mathbb{V}$. Entonces $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_B$ son equivalentes.

Proposición 1.4.8
Sea $p \in \mathbb{N}$ entonces $\dim(\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C}^p)) = 2p$.

Demostración:
Sea $T : \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^p)$ dada por $T(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(z) \doteq z\boldsymbol{\alpha} + z^*\boldsymbol{\beta}$, $\forall\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^p$ y $z \in \mathbb{C}$.
Veamos primero que $T\,(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ está en efecto en $\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^p)$. Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$ y $z,\ w \in \mathbb{C}$ arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(az+bw) &= (az+bw)\boldsymbol{\alpha} + (az+bw)^*\boldsymbol{\beta} \\ &= az\boldsymbol{\alpha} + bw\boldsymbol{\alpha} + az^*\boldsymbol{\beta} + bw^*\boldsymbol{\beta} \\ &= a(z\boldsymbol{\alpha} + z^*\boldsymbol{\beta}) + b(w\boldsymbol{\alpha} + w^*\boldsymbol{\beta}) \\ &= aT(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(z) + bT(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(w). \end{aligned}$$

y por lo tanto $T(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^p)$. Ahora veamos que T es un isomorfismo. Sean $\gamma \in \mathbb{C}$ y $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbb{C}^p$; entonces

$$\begin{aligned} T(\gamma(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1) + (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2))(z) &= T(\gamma\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \gamma\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2)(z) \\ &= z(\gamma\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + z^*(\gamma\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2) \\ &= z\gamma\boldsymbol{\alpha}_1 + z\boldsymbol{\alpha}_2 + z^*\gamma\boldsymbol{\beta}_1 + z^*\boldsymbol{\beta}_2 \\ &= \gamma(z\boldsymbol{\alpha}_1 + z^*\boldsymbol{\beta}_1) + (z\boldsymbol{\alpha}_2 + z^*\boldsymbol{\beta}_2) \\ &= \gamma T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1)(z) + T(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2)(z),\ \forall\ z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Luego T es lineal. Notemos que si $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in Nu(T)$ entonces $T(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0_{\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^p)}$, es decir $T(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(z) = 0_{\mathbb{C}}$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Por definición esto nos dice que

$$z\boldsymbol{\alpha} + z^*\boldsymbol{\beta} = 0_{\mathbb{C}},\ \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

Tomando en particular $z = 1$ y $z = i$ resulta que $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = 0_{\mathbb{C}}$ y $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = 0_{\mathbb{C}}$. Sumando las igualdades anteriores obtenemos que $\boldsymbol{\alpha} = 0_{\mathbb{C}} = \boldsymbol{\beta}$ y, por lo tanto, la inyectividad de T. Finalmente probemos que T es sobreyectiva. Sea $L \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^p)$ arbitrario, por la demostración de la Proposición 1.1.10 sabemos que $\exists\ M,\ N \in \mathbb{C}^p$ tales que $L(z) = zM + z^*N$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$. Esto es $L = T(M, N)$. Por ende, T es un isomorfismo, lo cual implica que

$$\dim(\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^p)) = \dim(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p) = 2p. \blacksquare$$

Proposición 1.4.9
Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{C}-$espacio vectorial tal que $\dim(\mathbb{V}) = p$ entonces $\dim(\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V})) = 2p$.

Demostración:
Sean $B = \{v_1, ..., v_p\}$ una base de $\mathbb{V}$, $I_B : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{V}$ la función definida por

$$I_B((z_1, ..., z_p)^\top) \doteq z_1v_1 + ... + z_pv_p,\ \forall\ (z_1, ..., z_p)^\top \in \mathbb{C}^p$$

y $T_B : \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^p) \longrightarrow \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V})$ dada por

$$T_B(L)(z) \doteq I_B(L(z)),\ \forall\ L \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^p) \text{ y } \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

En primer lugar probemos que T_B es un isomorfismo. Sean $L_1,\ L_2 \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^p)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ arbitrarios. Para cada $z \in \mathbb{C}$ sea $L_1(z) = (z_1, ..., z_p)^\top$ y $L_2(z) = (w_1, ..., w_p)^\top$, luego

$$\begin{aligned} T_B(\alpha L_1 + L_2)(z) &= I_B((\alpha L_1 + L_2)(z)) \\ &= I_B(\alpha L_1(z) + L_2(z)) \\ &= I_B((\alpha z_1 + w_1, ..., \alpha z_p + w_p)^\top) \\ &= (\alpha z_1 + w_1)v_1 + ... + (\alpha z_p + w_p)v_p \\ &= \alpha(z_1v_1 + ... + z_pv_p) + (w_1v_1 + ... + w_pv_p) \\ &= \alpha I_B((z_1, ..., z_p)^\top) + I_B((w_1, ..., w_p)^\top) \\ &= \alpha I_B(L_1(z)) + I_B(L_2(z)) \\ &= \alpha T_B(L_1)(z) + T_B(L_2)(z) \\ &= \left(\alpha T_B(L_1) + T_B(L_2)\right)(z), \end{aligned}$$

con lo cual $T_B(\alpha L_1 + L_2) = \alpha T_B(L_1) + T_B(L_2)$; o sea T_B es lineal.

Ahora si $L \in Nu(T_B)$ entonces $T_B(L) = 0_{\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{V})}$, es decir $T_B(L)(z) = 0_{\mathbb{V}}$ para todo $z \in \mathbb{C}$, o sea $I_B(L(z)) = 0_{\mathbb{V}}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Lo que equivale a decir que

$$L(z) \in Nu(I_B), \forall\, z \in \mathbb{C}$$

Pero como I_B es un isomorfismo $L(z) = 0_{\mathbb{C}^p}\ \forall\ z \in \mathbb{C}$, lo que significa que $L = 0_{\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C}^p)}$. Por lo tanto T_B es inyectiva.

Por último tomemos $L \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{V})$ arbitrario. Como I_B es sobreyectiva, para cada $z \in \mathbb{C}$ existe un vector $(z_1, ..., z_p)^\top$ en $\mathbb{C}^p$ tal que

$$I_B((z_1, ..., z_p)^\top) = L(z).$$

Así defino $\widehat{L} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^p$ dada por

$$\widehat{L}(z) \doteq (z_1, ..., z_p)^\top, \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Luego $\widehat{L} \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C}^p)$ y $T_B(\widehat{L})(z) = I_B\left(\widehat{L}(z)\right) = L(z), \forall\, z \in \mathbb{C}$. Lo que prueba la sobreyectividad.

Se sigue por lo recién demostrado y por la Proposición anterior que

$$\dim \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, V) = \dim \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C}^p) = 2\dim(\mathbb{C}^p) = 2p. \ \blacksquare$$

Definición 1.4.10
Sean $p \in \mathbb{N}$ y $T : \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C}^p)$ el isomorfismo dado en la demostración de la Proposición 1.4.8, esto es

$$T(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})(z) = z\boldsymbol{\alpha} + z^*\boldsymbol{\beta}, \forall\ \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^p \text{ y } z \in \mathbb{C}.$$

Llamamos "*base canónica de* $\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C}^p)$" a

$$\left\{T(\mathbf{e}_1^p, \mathbf{0}_p), ..., T(\mathbf{e}_p^p, \mathbf{0}_p), T(\mathbf{0}_p, \mathbf{e}_1^p), ..., T(\mathbf{0}_p, \mathbf{e}_p^p)\right\},$$

donde $\mathbf{0}_p$ es el "cero" de $\mathbb{C}^p$ y $\left\{\mathbf{e}_1^p, ..., \mathbf{e}_p^p\right\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^p$.

Nota 1.4.11 (Continuación de la Definición anterior)
Para cada $j \in \{1, ..., p\}$ definimos $L_{p,j} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^p$ y $L_{p,p+j} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^p$ por

$$\begin{aligned} L_{p,j}(z) &\doteq T(\mathbf{e}_j^p, \mathbf{0}_p)(z) = z\mathbf{e}_j^p \text{ y} \\ L_{p,p+j}(z) &\doteq T(\mathbf{0}_p, \mathbf{e}_j^p)(z) = z^*\mathbf{e}_j^p, \forall\ z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Además sean $\mathbb{V}_1 \doteq \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ y $\mathbb{V}_{2^p} \doteq \mathcal{L}\mathbb{R}\left(\mathbb{C}, \mathbb{V}_{2^{p-1}}\right)$ con $p \in \mathbb{N}$.
Afirmación: $\dim(\mathbb{V}_{2^p}) = 2^{p+1}\ \forall\ p \in \mathbb{N}$.
Demostración Afirmación:
Procedemos por inducción en p. Si $p = 1$ se sigue por la Proposición 1.4.8 y la Proposición 1.4.9 que

$$\dim(\mathbb{V}_2) = \dim(\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{V}_1)) = 2\dim(\mathbb{V}_1) = 2\dim(\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C})) = 2 \cdot 2 = 2^{1+1}.$$

Supongamos por hipótesis inductiva que vale la afirmación para k y probemos que $\dim(\mathbb{V}_{2^k}) = 2^{k+1}$. Nuevamente por Proposición 1.4.8 resulta que

$$\dim(\mathbb{V}_{2^{k+1}}) = \dim(\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{V}_{2^k})) = 2\dim(\mathbb{V}_{2^k}) = 2 \cdot 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1}.$$

Queda entonces demostrada la afirmación. $\blacksquare$

Ahora sea $B_1 \doteq \{L_{1,1}, L_{1,2}\}$, que llamamos "*base canónica de* $\mathbb{V}_1$" y sean $I_{B_1} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{V}_1$ dada por

$$I_{B_1}(z_1, z_2) \doteq z_1 L_{1,1} + z_2 L_{1,2},\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

y $T_{B_1} : \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^2) \longrightarrow \mathbb{V}_2$ el isomorfismo de la Proposición 1.4.9; esto es

$$T_{B_1}(L)(z) = I_{B_1}(L(z)),\ L \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^2) \text{ y } z \in \mathbb{C}.$$

Sea

$$B_2 \doteq \{T_{B_1}(L_{2,1}), T_{B_1}(L_{2,2}), T_{B_1}(L_{2,3}), T_{B_1}(L_{2,4})\}$$

que llamamos "*base canónica de* $\mathbb{V}_2$".
Sea ahora $p \geq 2$ entero. Por inducción definimos $I_{B_{2^{p-1}}}, T_{B_{2^{p-1}}}$ y B_{2^p} por:
$I_{B_{2^{p-1}}} : \mathbb{C}^{2^p} \longrightarrow \mathbb{V}_{2^{p-1}}$ dada por

$$I_{B_{2^{p-1}}}(z_1, ..., z_{2^p}) \doteq z_1 T_{B_{2^{p-2}}}\left(L_{2^{p-1},1}\right) + \cdots + z_{2^p} T_{B_{2^{p-2}}}\left(L_{2^{p-1},2^p}\right),\ (z_1, ..., z_{2^p}) \in \mathbb{C}^{2^p}$$

$T_{B_{2^{p-1}}} : \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{2^p}) \longrightarrow \mathbb{V}_{2^p}$ dada por

$$T_{B_{2^{p-1}}}(L)(z) \doteq I_{B_{2^{p-1}}}(L(z)),\ L \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^{2^p}) \text{ y } z \in \mathbb{C}$$

$$B_{2^p} \doteq \left\{T_{B_{2^{p-1}}}\left(L_{2^p,1}\right), ..., T_{B_{2^{p-1}}}\left(L_{2^p,2^{p+1}}\right)\right\}$$

base de $\mathbb{V}_{2^p}$ que llamamos "*base canónica de* $\mathbb{V}_{2^p}$".
Finalmente, para cada $p \in \mathbb{N}$ sea $\Im_p : \mathbb{V}_{2^{p-1}} \longrightarrow \mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ dada por

$$\Im_p(L)(z_1, ..., z_{2^p}) \doteq (...((L(z_1))(z_2))...)(z_p).$$

Por la Proposición 1.4.6 resulta que $\Im_p$ es un isomorfismo. Luego llamamos "*base canónica de* $\mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C}, \mathbb{C})$" a

$$\left\{\Im_p\left(T_{B_{2^{p-2}}}\left(L_{2^{p-1},1}\right)\right), \Im_p\left(T_{B_{2^{p-2}}}\left(L_{2^{p-1},2}\right)\right), ..., \Im_p\left(T_{B_{2^{p-2}}}\left(L_{2^{p-1},2^p}\right)\right)\right\}.$$

Para abreviar, denotamos

$$b_{2^{p-1},j} \doteq \Im_p\left(T_{B_{2^{p-2}}}\left(L_{2^{p-1},j}\right)\right)$$

para cada $j \in \{1, 2, ..., 2^p\}$. Una cuenta directa prueba que

$$\begin{aligned}
b_{2^{p-1},1}(z_1, ..., z_p) &= z_1 z_2 ... z_{p-1} z_p \\
b_{2^{p-1},2}(z_1, ..., z_p) &= z_1 z_2 ... z_{p-1} z_p^* \\
b_{2^{p-1},3}(z_1, ..., z_p) &= z_1 z_2 ... z_{p-1}^* z_p \\
b_{2^{p-1},4}(z_1, ..., z_p) &= z_1 z_2 ... z_{p-1}^* z_p^* \\
&\ \vdots \\
b_{2^{p-1},2^p}(z_1, ..., z_p) &= z_1^* z_2^* ... z_{p-1}^* z_p^*.
\end{aligned}$$

Nota 1.4.12
Recordemos que si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}-$espacio vectorial ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) decimos que "$\phi : \mathbb{V} \longrightarrow [0, \infty)$ *es una norma sobre* $\mathbb{V}$" (y que "$(\mathbb{V}, \phi)$ *es un espacio normado*") si se cumplen:
1. $\phi(v) = 0 \iff v = 0_{\mathbb{V}}$
2. $\phi(kv) = |k|\, \phi(v)$, $\forall\ k \in \mathbb{K}$ y $\forall\ v \in \mathbb{V}$
3. $\phi(v_1 + v_2) \leq \phi(v_1) + \phi(v_2)$, $\forall\ v_1,\ v_2 \in \mathbb{V}$.

<u>Afirmación 1:</u>
Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}-$espacio vectorial y ϕ es una norma sobre $\mathbb{V}$ entonces $\widehat{\phi} : \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V}) \longrightarrow [0, \infty)$ dada por $\widehat{\phi}(L) \doteq \sup\{\phi(L(z)) : |z| \leq 1\}$, $L \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V})$ es una norma sobre $\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V})$, a la cual llamamos "*norma inducida por* ϕ".

<u>Demostración Afirmación 1:</u>
Veamos que se satisfacen 1, 2 y 3 de la definición anterior.

1. ($\Longrightarrow$) Si $\widehat{\phi}(L) = 0$ entonces $0 = \sup\{\phi(L(z)) : |z| \leq 1\}$, lo cual implica que $\phi(L(z)) = 0$, $\forall\ |z| \leq 1$. Como ϕ es una norma sobre $\mathbb{V}$ resulta que $L(z) = 0$, $\forall\ |z| \leq 1$. Faltaría ver que $L(z) = 0$, $\forall\ |z| > 1$. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$ cualquiera, luego

$$\left|\frac{1}{z^*}\right| = \frac{1}{|z^*|} = \frac{1}{|z|} < 1$$

y, por lo recién probado, tenemos que $L\left(\frac{1}{z^*}\right) = 0$. Teniendo en cuenta la $\mathbb{R}-$linealidad de L resulta que

$$L(z) = L\left(\frac{zz^*}{z^*}\right) = L\left(\frac{|z|^2}{z^*}\right) = |z|^2 L\left(\frac{1}{z^*}\right) = |z|^2 0 = 0.$$

Finalmente obtenemos que $L(z) = 0$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$.

($\Longleftarrow$) Si $L = 0_{\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{V})}$ entonces $L(z) = 0_{\mathbb{V}}$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$. Luego, por ser ϕ una norma, tenemos que $\phi(L(z)) = 0$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$. Por lo tanto $\widehat{\phi}(L) = 0$.

2. Sean $L \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{V})$ y $k \in \mathbb{K}$ arbitrarios, luego

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(kL) &= \sup\{\phi((kL)(z)) : |z| \leq 1\} \\
&= \sup\{\phi(kL(z)) : |z| \leq 1\} \\
&= \sup\{|k|\,\phi(L(z)) : |z| \leq 1\} \\
&= |k| \sup\{\phi(L(z)) : |z| \leq 1\} \\
&= |k|\,\widehat{\phi}(L).
\end{aligned}$$

3. Dados $L_1, L_2 \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{V})$, se cumple

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(L_1 + L_2) &= \sup\{\phi((L_1 + L_2)(z)) : |z| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\phi(L_1(z) + L_2(z)) : |z| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\phi(L_1(z)) : |z| \leq 1\} + \sup\{\phi(L_2(z)) : |z| \leq 1\} \\
&= \widehat{\phi}(L_1) + \widehat{\phi}(L_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto queda probada la Afirmación. ■

Como un caso particular tenemos que $\phi_1 : \mathbb{V}_1 \longrightarrow [0,\infty)$ definida por

$$\phi_1(L) \doteq \sup\{|L(z)| : |z| \leq 1\},\ L \in \mathbb{V}_1$$

es una norma sobre $\mathbb{V}_1$ y, para $p \geq 2$, la función $\phi_p : \mathbb{V}_{2^{p-1}} \longrightarrow \mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C})$ definida por

$$\phi_p(L) \doteq \sup\left\{\phi_{p-1}(L(z)) : |z| \leq 1\right\},\ L \in \mathbb{V}_{2^{p-1}}$$

es una norma sobre $\mathbb{V}_{2^{p-1}}$.

<u>Afirmación 2:</u>

$\|\cdot\|_p : \mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C}) \longrightarrow [0,\infty)$ definida por

$$\|T\|_p \doteq \sup\{|T(z_1,...,z_p)| : |z_1| \leq 1, ..., |z_p| \leq 1\},$$

para toda $T \in \mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C})$ es una norma sobre $\mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

<u>Demostración Afirmación 2:</u>

1. Claramente si $T = 0_{\mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C})}$ se sigue que $\|T\|_p = 0$. Supongamos ahora que $\|T\|_p = 0$ y veamos que $T(z_1,...,z_p) = 0$, $\forall\ (z_1,...,z_p) \in \mathbb{C}^p$.

Sea $(z_1,...,z_p) \in \mathbb{C}^p$ arbitrario. Si $|z_j| \leq 1\ \forall\ j \in \{1,...,p\}$ por la definición de supremo tenemos que lo cual implica que $T(z_1,...,z_p) = 0$. Supongamos, de lo contrario, que existe al menos un $j \in \{1,...,p\}$ tal que $|z_j| > 1$ y sean i_1,..., $i_k \in \{1,...,p\}$ tales que $\begin{cases} |z_l| > 1 \text{ si } l \in \{i_1,...,i_k\} \\ |z_l| \leq 1 \text{ si } l \notin \{i_1,...,i_k\} \end{cases}$. Consideremos $w = (w_1,...,w_p) \in \mathbb{C}^p$, donde

$$w_l \doteq \begin{cases} z_l \text{ si } l \notin \{i_1,...,i_k\} \\ \frac{1}{z_l^*} \text{ si } l \in \{i_1,...,i_k\} \end{cases}.$$

Luego $|w_l| \leq 1$, $\forall\ l \in \{1,...,p\}$ y, por el caso anterior, resulta que $T(w) = 0$. Por otro lado, utilizando que T es $\mathbb{R} - p-$lineal, tenemos que

$$\begin{aligned} T(w) &= T(w_1,...,w_p) \\ &= T\left(..., \frac{1}{z_{i_1^*}}, ..., \frac{1}{z_{i_k^*}}, ...\right) \\ &= T\left(..., \frac{z_{i_1}}{|z_{i_1}|^2}, ..., \frac{z_{i_k}}{|z_{i_k}|^2}, ...\right) \\ &= \frac{1}{|z_{i_1}|^2 |z_{i_2}|^2 ... |z_{i_k}|^2} T(z_1,...,z_p) \end{aligned}$$

y por ende $T(z_1,...,z_p) = 0$.
2. Sean $T \in \mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned} \|\alpha T\|_p &= \sup\{|(\alpha T)(z_1,...,z_p)| : |z_1| \leq 1,...,|z_p| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\alpha T(z_1,...,z_p)| : |z_1| \leq 1,...,|z_p| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\alpha|\,|T(z_1,...,z_p)| : |z_1| \leq 1,...,|z_p| \leq 1\} \\ &= |\alpha| \sup\{T(z_1,...,z_p) : |z_1| \leq 1,...,|z_p| \leq 1\} \\ &= |\alpha|\,\|T\|_p\,. \end{aligned}$$

3. Sean T, $S \in \mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C})$ arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned} \|T+S\|_p &= \sup\{|(T+S)(z_1,...,z_p)| : |z_1| \leq 1,...,|z_p| \leq 1\} \\ &= \sup\{|T(z_1,...,z_p) + S(z_1,...,z_p)| : |z_1| \leq 1,...,|z_p| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|T(z_1,...,z_p)| + |S(z_1,...,z_p)| : |z_1| \leq 1,...,|z_p| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|T(z_1,...,z_p)| : |z_1| \leq 1,...,|z_p| \leq 1\} + \sup\{|S(z_1,...,z_p)| : |z_1| \leq 1,...,|z_p| \leq 1\} \\ &= \|T\|_p + \|S\|_p\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto es válida la Afirmación. ■

Además $\Im_p : \left(\mathbb{V}_{2^{p-1}}, \phi_p\right) \longrightarrow (\mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$ definida en la Nota 1.4.11, es una isometría. Es decir

$$\|\Im_p(L)\|_p = \phi_p(L),\ L \in \mathbb{V}_{2^{p-1}}.$$

Definición 1.4.13
Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $(\mathbb{V}, \phi)$ un $\mathbb{K}-$espacio normado (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Decimos que "$f : U \longrightarrow V$ *es* $\mathbb{R} - diferenciable$ *en* $z \in U$" si $\exists\ L_z \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{V})$ tal que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\phi(f(z+h) - f(z) - L_z(h))}{|h|} = 0.$$

Nota 1.4.14

Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $(\mathbb{V}, \phi)$ un $\mathbb{K}-$espacio normado (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) y $f : U \longrightarrow \mathbb{V}$ una función $\mathbb{R}-$diferenciable en $z \in U$. Si L_z y $L_z^{'}$ son dos elementos de $\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V})$ tales que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\phi(f(z+h) - f(z) - L_z(h))}{|h|} = 0 = \lim_{|h|\to 0} \frac{\phi(f(z+h) - f(z) - L_z^{'}(h))}{|h|}$$

entonces $L_z = L_z^{'}$.
Por esto, a la única $L_z \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V})$ tal que $\lim_{|h|\to 0} \frac{\phi(f(z+h)-f(z)-L_z(h))}{|h|} = 0$ la llamamos "$\mathbb{R}-$*derivada de* f *en* z" y la denotamos por $D_r(f)(z)$.

Definición 1.4.15
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ y $p \geq 2$ entero. Decimos que "f *es* $p-$*veces* $\mathbb{R}-$*diferenciable en* $z \in U$" si existe un $V \subset U$ entorno abierto de z tal que existe:
1.1. $L_1 : V \longrightarrow \mathbb{V}_1$ que está dada por $L_1(v) \doteq D_r(f)(v)$, $v \in V$.
1.2. $L_j(v) \in \mathbb{V}_{2^{j-1}}$ y

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\phi_{j-1}(L_{j-1}(v+h) - L_{j-1}(v) - L_j(v)(h))}{|h|} = 0$$

para todo $v \in V$ y para $j \in \{2, ..., p-1\}$.
1.3. $L_p(z) \in \mathbb{V}_{2^{p-1}}$ y

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\phi_{p-1}(L_{p-1}(z+h) - L_{p-1}(z) - L_p(z)(h))}{|h|} = 0.$$

Nota 1.4.16 (Continuación de la Definición 1.4.15)
Por la Nota 1.4.14 tenemos que $L_1(v)$ es el único elemento de $\mathbb{V}_1$ tal que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\phi(f(v+h) - f(v) - L_1(v)(h))}{|h|} = 0.$$

Del mismo modo se puede ver la unicidad de $L_j(v)$ para $v \in V$, $j \in \{2, ..., p-1\}$ y la de $L_p(z)$. Por ello, escribimos

$$\begin{aligned} D_r^j(f)(v) &\doteq L_j(v)\,,\ \text{para } v \in V \text{ y } j \in \{2, ..., p-1\} \\ D_r^p(f)(z) &\doteq L_p(z). \end{aligned}$$

También decimos que "$D_r^j(f)(v)$ *es la* $\mathbb{R}-$*derivada de orden* j *de* f *en* v" para $v \in V$ y $j \in \{2, ..., p-1\}$.

Definición 1.4.17
Sean $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Decimos que "$f$ *es* $p-$*veces continuamente* $\mathbb{R}-$*diferenciable en* U " y denotamos $f \in C_r^p(U, \mathbb{C})$ si f es $p-$veces $\mathbb{R}-$diferenciable en $z \in U$, $\forall\ z \in U$ y la función $U \longrightarrow \mathbb{V}_{2^{p-1}}$ dada por $z \mapsto D_r^p(f)(z)$ es continua, $\forall\ z \in U$.

Proposición 1.4.18
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ y $p \geq 2$ entero. Son equivalentes:
1. f es $p-$veces $\mathbb{R}-$diferenciable en $z \in U$.
2. $\exists\ V \subset U$ entorno abierto de z tal que
   2.1. f es $\mathbb{R}-$diferenciable en V. Escribimos $M_1(v) \doteq D_r(f)(v)$, $\forall\ v \in V$.
   2.2. Para cada $j \in \{2, ..., p-1\}$ existe $M_j : V \longrightarrow \mathcal{L}\mathbb{R}_j(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ satisfaciendo para cada $v \in V$ lo siguiente: dado $\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que $B(w, \delta) \subset V$ y si $u \in B(0, \delta)$ entonces

$$\sup_{|h_1|\leq 1, ..., |h_{j-1}|\leq 1} \{|M_{j-1}(v+u)(h_1, ..., h_{j-1}) - M_{j-1}(v)(h_1, ..., h_{j-1}) - M_j(v)(h_1, ..., h_{j-1}, u)|\} \leq |u|\,\varepsilon.$$

   2.3. Existe $M_p(z) \in \mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ satisfaciendo lo siguiente:

dado $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ tal que $B(z,\delta) \subset V$ y si $u \in B(0,\delta)$ entonces

$$\sup_{|h_1|\leq 1,...,|h_{p-1}|\leq 1} \{|M_{p-1}(z+u)(h_1,...,h_{p-1}) - M_{p-1}(z)(h_1,...,h_{p-1}) - M_p(z)(h_1,...,h_{p-1},u)|\} \leq |u|\,\varepsilon.$$

Demostración:
($1 \implies 2$) Por el inciso 1.1 de la Definición 1.4.15 resulta que f es $\mathbb{R}-$diferenciable en V, es decir vale 2.1. Ahora definimos para cada $j \in \{2,...,p-1\}$ la función $M_j : V \longrightarrow \mathcal{L}\mathbb{R}_j(\mathbb{C},\mathbb{C})$ por

$$M_j(v)(h_1,...,h_j) \doteq (...(((L_j(v))\,(h_j))\,(h_{j-1}))\,...)\,(h_1)\,,\ \forall\ v \in V \text{ y } (h_1,...,h_j) \in \mathbb{C}^j.$$

Sea $\varepsilon > 0$, $j \in \{2,...,p-1\}$ y $v \in V$ fijos. Por un lado sabemos que $\exists$ $\delta_1 > 0$ tal que si $u \in B(0,\delta_1)$ entonces

$$\phi_{j-1}(L_{j-1}(v+u) - L_{j-1}(v) - L_j(v)(u)) \leq |u|\,\varepsilon.$$

Utilizando las definiciones de las normas ϕ_k para $k \in \{1,...,j-1\}$ y de la funciones M_{j-1} y M_j obtenemos que

$$\begin{aligned} & \phi_{j-1}(L_{j-1}(v+u) - L_{j-1}(v) - L_j(v)(u)) \\ = & \sup_{|h_1|\leq 1,...,|h_{j-1}|\leq 1} \{|M_{j-1}(v+u)(h_1,...,h_{j-1}) - M_{j-1}(v)(h_1,...,h_{j-1}) - M_j(v)(h_1,...,h_{j-1},u)|\}\,. \end{aligned}$$

Por otro lado, como V es un entorno de v, $\exists$ $\delta_2 > 0$ tal que $B(v,\delta_2) \subset V$. Luego, considerando $\delta \doteq \min\{\delta_1,\delta_2\}$, se satisface 2.2. Por último definimos $M_p(z) \in \mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C})$ por

$$M_p(z)\,(h_1,...,h_p) \doteq (...(((L_p(z))\,(h_p))\,(h_{p-1}))\,...)\,(h_1)\,,\ \forall\ (h_1,...,h_p) \in \mathbb{C}^p.$$

Por 1.3 de la Definición 1.4.15 tenemos que $\exists$ $\delta_1 > 0$ tal que si $u \in B(0,\delta_1)$ entonces

$$\phi_{p-1}(L_{p-1}(z+u) - L_{p-1}(z) - L_p(z)(u)) \leq |u|\,\varepsilon.$$

Utilizando las definiciones de las normas ϕ_k para $k \in \{1,...,p-1\}$ y de la función M_{p-1} y M_p resulta que

$$\begin{aligned} & \phi_{p-1}(L_{p-1}(z+u) - L_{p-1}(z) - L_p(z)(u)) \\ = & \sup_{|h_1|\leq 1,...,|h_{p-1}|\leq 1} \{|M_{p-1}(z+u)(h_1,...,h_{p-1}) - M_{p-1}(z)(h_1,...,h_{p-1}) - M_p(z)(h_1,...,h_{p-1},u)|\}\,. \end{aligned}$$

Además, como V es un entorno de z, $\exists$ $\delta_2 > 0$ tal que $B(z,\delta_2) \subset V$. Por lo tanto, considerando $\delta \doteq \min\{\delta_1,\delta_2\}$, obtenemos 2.3.

($2 \implies 1$) Similar a lo hecho recién, por ello omitimos la prueba. ■

Proposición 1.4.19
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $p \geq 2$ entero, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $p-$veces $\mathbb{R}-$diferenciable en $z \in U$ y $\pi : \{1,...,p\} \longrightarrow \{1,...,p\}$ una biyección. Entonces

$$D_r^p(f)(z)(z_1,...,z_p) = D_r^p(f)(z)(z_{\pi(1)},...,z_{\pi(p)}),$$

$\forall$ $(z_1,...,z_p) \in \mathbb{C}^p$.

Demostración:
La demostración de este resultado se puede encontrar en las págs. 181 y 182 de [2]. ■

Proposición 1.4.20
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $p \geq 2$ entero, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $p-$veces $\mathbb{R}-$diferenciable en $z \in U$, $z_1,...,z_p \in \mathbb{C}$ y $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(u) \doteq D_r^{p-1}(f)(u)(z_1,...,z_{p-1}),\ \forall\ u \in U.$$

Entonces g es $\mathbb{R}-$diferenciable en z y para cada $h \in \mathbb{C}$

$$D_r(g)(z)(h) = D_r^p(f)(z)(z_1,...,z_{p-1},h).$$

Demostración:
Probemos que
$$\lim_{|h|\to 0}\frac{|g(z+h)-g(z)-D_r^p(f)(z)(z_1,...,z_{p-1},h)|}{|h|}=0. \quad \textbf{(1.4.20.1)}$$
Utilizando la definición de g, la Definición 1.4.15 y la Proposición anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
& |g(z+h)-g(z)-D_r^p(f)(z)(z_1,...,z_{p-1},h)| \\
= & \left|D_r^{p-1}(f)(z+h)(z_1,...,z_{p-1})-D_r^{p-1}(f)(z)(z_1,...,z_{p-1})-D_r^p(f)(z)(z_1,...,z_{p-1},h)\right| \\
= & |z_1|...|z_{p-1}|\times \\
& \times\left|D_r^{p-1}(f)(z+h)\left(\frac{z_1}{|z_1|},...,\frac{z_{p-1}}{|z_{p-1}|}\right)-D_r^{p-1}(f)(z)\left(\frac{z_1}{|z_1|},...,\frac{z_{p-1}}{|z_{p-1}|}\right)-D_r^p(f)(z)\left(\frac{z_1}{|z_1|},...,\frac{z_{p-1}}{|z_{p-1}|},h\right)\right| \\
\leq & |z_1|...|z_{p-1}|\times \\
& \times\sup_{|u_1|\leq 1,...,|u_{p-1}|\leq 1}\left\{\left|D_r^{p-1}(f)(z+h)(u_1,...,u_{p-1})-D_r^{p-1}(f)(z)(u_1,...,u_{p-1})-D_r^p(f)(z)(u_1,...,u_{p-1},h)\right|\right\} \\
= & |z_1|...|z_{p-1}|\sup_{|u_1|\leq 1,...,|u_{p-1}|\leq 1}\left\{\left|D_r^{p-1}f(z+h)(u_1,...,u_{p-1})-D_r^{p-1}f(z)(u_1,...,u_{p-1})-D_r^pf(z)(h,u_1,...,u_{p-1})\right|\right\} \\
= & |z_1|...|z_{p-1}|\,\phi_{p-1}\left(D_r^{p-1}f(z+h)-D_r^{p-1}f(z)-D_r^pf(z)(h)\right).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
& \lim_{|h|\to 0}\frac{|g(z+h)-g(z)-D_r^p(f)(z)(z_1,...,z_{p-1},h)|}{|h|} \\
\leq & |z_1|\,|z_2|...|z_{p-1}|\lim_{|h|\to 0}\frac{\phi_{p-1}\left(D_r^{p-1}(f)(z+h)-D_r^{p-1}(f)(z)-D_r^p(f)(z)(h)\right)}{|h|} \\
= & 0,
\end{aligned}$$

es decir vale **(1.4.20.1).** Además $h\mapsto D_r^p(f)(z)(z_1,...,z_{p-1},h)$ es $\mathbb{R}-$lineal. Por lo tanto g es $\mathbb{R}-$diferenciable en z y $D_r(g)(z)(h)=D_r^p(f)(z)(z_1,...,z_{p-1},h)$, $\forall\ h\in\mathbb{C}$. ■

Notación 1.4.21
Sean $A\subset\mathbb{R}^2$ un abierto, $g:A\longrightarrow\mathbb{R}$, $(x,y)\in A$ y $p\geq 2$ entero. Si $t\mapsto g(t,y)$ es $p-$veces diferenciable en x, escribimos $D_1^p(g)(x,y)$ para denotar la derivada de orden p de $t\mapsto g(t,y)$ en x.
Si $t\mapsto g(x,t)$ es $p-$veces diferenciable en y, escribimos $D_2^p(g)(x,y)$ para denotar la derivada de orden p de $t\mapsto g(x,t)$ en y.

Proposición 1.4.22
Sean $U\subset\mathbb{C}$ un abierto; $p\in\mathbb{N}$; $f:U\longrightarrow\mathbb{C}$ $p-$veces $\mathbb{R}-$diferenciable en $z_0=x_0+iy_0\in U$; $A\doteq\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x+iy\in U\right\}$; u_f, $v_f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ dadas por $u_f(x,y)\doteq\mathrm{Re}(f(x+iy))$ y $v_f(x,y)\doteq\mathrm{Im}(f(x+iy))$, $(x,y)\in A$.
Entonces $u_f(\cdot,y_0)$, $v_f(\cdot,y_0)$, $u_f(x_0,\cdot)$ y $v_f(x_0,\cdot)$ son $p-$veces diferenciables y

$$\begin{aligned}
D_1^p(u_f)(x_0,y_0) &= \mathrm{Re}(D_r^p(f)(z_0)(\overbrace{1,...,1}^{p})), \\
D_1^p(v_f)(x_0,y_0) &= \mathrm{Im}(D_r^p(f)(z_0)(1,...,1)), \\
D_2^p(u_f)(x_0,y_0) &= \mathrm{Re}(D_r^p(f)(z_0)(i,...,i)) \text{ y} \\
D_2^p(v_f)(x_0,y_0) &= \mathrm{Im}(D_r^p(f)(z_0)(i,...,i)).
\end{aligned}$$

Además, para $p\geq 2$, se cumplen

$$\begin{aligned}
D_1^kD_2^{p-k}(u_f)(x_0,y_0) &= \mathrm{Re}(D_r^p(f)(z_0)(\overbrace{1,...,1}^{k},\overbrace{i,...,i}^{p-k})) \text{ con } k\in\{1,...,p-1\} \text{ y} \\
D_1^kD_2^{p-k}(v_f)(x_0,y_0) &= \mathrm{Im}(D_r^p(f)(z_0)(\overbrace{1,...,1}^{k},\overbrace{i,...,i}^{p-k})) \text{ con } k\in\{1,...,p-1\}.
\end{aligned}$$

Demostración:
Procedemos por inducción sobre p. Para $p=1$ el resultado se sigue por la demostración de la Proposición 1.2.7. Veamos que $u_f(\cdot,y_0)$ es $p-$veces diferenciable y que

$$D_1^p(u_f)(x_0,y_0)=\mathrm{Re}(D_r^p(f)(z_0)(1,...,1)).$$

Supongamos que es cierto para p y probemos para $p+1$. Puesto que f es $(p+1)-$veces $\mathbb{R}-$diferenciable en z_0 sabemos, por la Proposición 1.4.20, que $g:U\longrightarrow\mathbb{C}$ definida por

$$g(u)\doteq D_r^p(f)(u)(\overbrace{1,...,1}^{p}),\ u\in U$$

es $\mathbb{R}-$diferenciable en z_0 y $D_r^{p+1}(f)(z_0)(\overbrace{1,...,1,1}^{p+1})=D_r^1(g)(z_0)(1)$. Luego

$$\mathrm{Re}(D_r^{p+1}(f)(z_0)(1,...,1,1))=\mathrm{Re}(D_r^1(g)(z_0)(1)).\quad \textbf{(1.4.22.1)}$$

Como la Proposición vale para $p=1$ en particular tenemos que

$$\mathrm{Re}(D_r^1(g)(z_0)(1))=D_1^1(u_g)(x_0,y_0).\qquad \textbf{(1.4.22.2)}$$

Además, por hipótesis inductiva

$$D_1^p(u_f)(x_0,y_0)=\mathrm{Re}(g(z_0)).\quad \textbf{(I.4.22.3)}$$

Según **(1.4.22.1)**, **(1.4.22.2)** y **(1.4.22.3)** resulta que

$$\mathrm{Re}(D_r^{p+1}(f)(z_0)(1,...,1,1))=D_1^1D_1^p(u_f)(x_0,y_0)=D_1^{p+1}(u_f)(x_0,y_0).$$

Por un razonamiento análogo al desarrollado recién, obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} D_1^p(v_f)(x_0,y_0) & = & \mathrm{Im}(D_r^p(f)(z_0)(1,...,1)),\\ D_2^p(u_f)(x_0,y_0) & = & \mathrm{Re}(D_r^p(f)(z_0)(i,...,i))\text{ y}\\ D_2^p(v_f)(x_0,y_0) & = & \mathrm{Im}(D_r^p(f)(z_0)(i,...,i)).\end{array}$$

Ahora veamos que, para $p\geq 2$,

$$D_1^kD_2^{p-k}(u_f)(x_0,y_0)=\mathrm{Re}(D_r^p(f)(z_0)(\overbrace{1,...,1}^{k},\overbrace{i,...,i}^{p-k}))$$

con $k\in\{1,...,p-1\}$.
Nuevamente hacemos inducción en p. Si $p=2$ entonces basta ver que

$$D_1D_2(u_f)(x_0,y_0)=\mathrm{Re}(D_r^2(f)(z_0)(1,i)).$$

Aplicando lo ya probado tenemos, para $t\in\mathbb{R}-\{0\}$, que

$$\begin{array}{rcl} D_2(u_f)(x_0+t,y_0)-D_2(u_f)(x_0,y_0) & = & \mathrm{Re}\left(D_r(f)(z_0+t)(i)\right)-\mathrm{Re}\left(D_r(f)(z_0)(i)\right)\\ & = & \mathrm{Re}\left(D_r(f)(z_0+t)(i)-D_r(f)(z_0)(i)\right)\\ & = & \mathrm{Re}\big(D_r(f)(z_0+t)(i)-D_r(f)(z_0)(i)-D_r^2(f)(z_0)(i,t)\big)\\ & & +\,\mathrm{Re}\big(D_r^2(f)(z_0)(i,t)\big)\,.\end{array}$$

Luego, por las Proposiciones 1.4.20 y 1.4.19, resulta que

$$\begin{array}{rcl} D_1D_2(u_f)(x_0,y_0) & = & \lim\limits_{t\to o}\dfrac{D_2(u_f)(x_0+t,y_0)-D_2(u_f)(x_0,y_0)}{t}\\ & = & \lim\limits_{t\to o}\dfrac{\mathrm{Re}\big(D_r(f)(z_0+t)(i)-D_r(f)(z_0)(i)-D_r^2(f)(z_0)(i,t)\big)}{t}+\lim\limits_{t\to o}\dfrac{\mathrm{Re}\big(D_r^2(f)(z_0)(i,t)\big)}{t}\\ & = & \lim\limits_{t\to o}\dfrac{t\,\mathrm{Re}\big(D_r^2(f)(z_0)(i,1)\big)}{t}\\ & = & \mathrm{Re}\big(D_r^2(f)(z_0)(i,1)\big)\\ & = & \mathrm{Re}\big(D_r^2(f)(z_0)(1,i)\big)\,.\end{array}$$

Ahora verifiquemos que $D_1^k D_2^{(p+1)-k}(u_f)(x_0,y_0) = \mathrm{Re}(D_r^{p+1}(f)(z_0)(\overbrace{1,...,1}^{k}, \overbrace{i,...,i}^{(p+1)-k}))$. Por la Proposición 1.4.20 tenemos que

$$D_r^{p+1}(f)(z_0)(\overbrace{1,...,1}^{k}, \overbrace{i,...,i}^{(p+1)-k}) = D_r(g)(z_0)(i),$$

donde $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por $g(u) \doteq D_r^p(f)(u)(\overbrace{1,...,1}^{k}, \overbrace{i,...,i}^{p-k})$, $u \in U$ es $\mathbb{R}-$diferenciable en z_0. Luego

$$\mathrm{Re}(D_r^{p+1}(f)(z_0)(\overbrace{1,...,1}^{k}, \overbrace{i,...,i}^{(p+1)-k})) = \mathrm{Re}\left(D_r(g)(z_0)(i)\right). \quad \mathbf{(1.4.22.4)}$$

Por otra parte, como la Proposición vale para el caso $p = 1$, entonces

$$\mathrm{Re}\left(D_r(g)(z_0)(i)\right) = D_2\left(\mathrm{Re}\left(g\left(z_0\right)\right)\right). \quad \mathbf{(1.4.22.5)}$$

Además, teniendo en cuenta la hipotesis inductiva, tenemos que

$$\begin{aligned} D_2\left(\mathrm{Re}\left(g\left(z_0\right)\right)\right) &= D_2(\mathrm{Re}(D_r^p(f)(z_0)(\overbrace{1,...,1}^{k}, \overbrace{i,...,i}^{p-k}))) \\ &= D_2 D_1^k D_2^{p-k}(u_f)(x_0,y_0) \\ &= D_1^k D_2^{(p+1)-k}(u_f)(x_0,y_0). \quad \mathbf{(1.4.22.6)} \end{aligned}$$

Finalmente, por **(1.4.22.4)**, **(1.4.22.5)** y **(1.4.22.6)**, resulta lo que queríamos probar. De manera análoga se demuestra que $D_1^k D_2^{p-k}(v_f)(x_0,y_0) = \mathrm{Im}(D_r^p(f)(z_0)(\overbrace{1,...,1}^{k}, \overbrace{i,...,i}^{p-k}))$. ■

Proposición 1.4.23
Sean $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f \in C_r^p(U,\mathbb{C})$. Entonces u_f, $v_f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas en la Proposición 1.4.22 están en $C_r^p(A,\mathbb{R})$.

Demostración:
Por lo Proposición anterior se sigue que, para $p \geq 1$, $D_1^p(u_f)$, $D_1^p(v_f)$, $D_2^p(u_f)$ y $D_2^p(v_f)$ son continuas en A. También $D_1^k D_2^{p-k}(u_f)$ y $D_1^k D_2^{p-k}(v_f)$ son continuas sobre A para $p \geq 2$ y $k \in \{1, ..., p-1\}$. Luego, por resultados ya conocidos del Análisis (ver (8.12.8), pág. 183 de [2]), tenemos que u_f y v_f están en $C_r^p(A,\mathbb{R})$. ■

Proposición 1.4.24
Sean $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f \in C_r^p(U,\mathbb{C})$ y u_f, $v_f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ como en la Proposición 1.4.22 . Entonces para cada $(x,y) \in A$ y para cada $\mathbf{t}_j \doteq (t_{j,1}, t_{j,2})^\top \in \mathbb{R}^2$ con $j \in \{1,...,p\}$ se cumplen

$$\begin{aligned} D^p(u_f)(x,y)(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_p) &= \sum_{(j_1,...,j_p)\in\{1,2\}^p} D_{j_1}...D_{j_p}(u_f)(x,y)t_{1,j_1}...t_{p,j_p} \text{ y} \\ D^p(v_f)(x,y)(\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_p) &= \sum_{(j_1,...,j_p)\in\{1,2\}^p} D_{j_1}...D_{j_p}(v_f)(x,y)t_{1,j_1}...t_{p,j_p}. \end{aligned}$$

Demostración:
Esta prueba se puede encontrar en la pág. 182 de [2].

1.5 $D_r^p(f)(z_0)(z_1, ..., z_p)$ en función de z_1, z_1^*, ..., z_p, z_p^*

En esta sección obtenemos una caracterización de las funciones $\mathbb{R}-p-lineales$, lo cual nos va a permitir escribir a la $\mathbb{R}-$derivada de orden p, digamos $D_r^p(f)(z_0)(z_1, ..., z_p)$, en términos de los números complejos $z_1, z_1^*, ..., z_p, z_p^*$. Además demostramos que la suma y la multiplicación por un escalar complejo de funciones $\mathbb{R}-$diferenciables sigue siendo $\mathbb{R}-$diferenciable.

Notación 1.5.1
Sea $T_2 \doteq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$ y para $p \geq 2$ entero definimos por recurrencia $T_{2^p} \doteq \begin{bmatrix} T_{2^{p-1}} & T_{2^{p-1}} \\ iT_{2^{p-1}} & -iT_{2^{p-1}} \end{bmatrix}$.

Lema 1.5.2
Se cumple que $T_{2^p}^{-1} = \frac{1}{2^p} T_{2^p}^H$, $\forall\ p \in \mathbb{N}$.

Demostración:
Procedemos por inducción sobre p. Si $p = 1$ entonces

$$T_2^H T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

lo cual implica que $\left(\frac{1}{2} T_2^H\right) T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, es decir $T_2^{-1} = \frac{1}{2} T_2^H$. Sea $p \geq 2$. Por hipótesis inductiva, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^p} T_{2^p}^H T_{2^p} &= \frac{1}{2^p} \begin{bmatrix} T_{2^{p-1}} & T_{2^{p-1}} \\ iT_{2^{p-1}} & -iT_{2^{p-1}} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} T_{2^{p-1}} & T_{2^{p-1}} \\ iT_{2^{p-1}} & -iT_{2^{p-1}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2^p} \begin{bmatrix} (T_{2^{p-1}})^H & (iT_{2^{p-1}})^H \\ (T_{2^{p-1}})^H & (-iT_{2^{p-1}})^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{2^{p-1}} & T_{2^{p-1}} \\ iT_{2^{p-1}} & -iT_{2^{p-1}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2^p} \begin{bmatrix} (T_{2^{p-1}})^H & -i(T_{2^{p-1}})^H \\ (T_{2^{p-1}})^H & i(T_{2^{p-1}})^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{2^{p-1}} & T_{2^{p-1}} \\ iT_{2^{p-1}} & -iT_{2^{p-1}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{p-1}}(T_{2^{p-1}})^H & -i\frac{1}{2^{p-1}}(T_{2^{p-1}})^H \\ \frac{1}{2^{p-1}}(T_{2^{p-1}})^H & i\frac{1}{2^{p-1}}(T_{2^{p-1}})^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{2^{p-1}} & T_{2^{p-1}} \\ iT_{2^{p-1}} & -iT_{2^{p-1}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{p-1}}(T_{2^{p-1}})^H T_{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}}(T_{2^{p-1}})^H T_{2^{p-1}} & \frac{1}{2^{p-1}}(T_{2^{p-1}})^H T_{2^{p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}}(T_{2^{p-1}})^H T_{2^{p-1}} \\ \frac{1}{2^{p-1}}(T_{2^{p-1}})^H T_{2^{p-1}} - \frac{1}{2^{p-1}}(T_{2^{p-1}})^H T_{2^{p-1}} & \frac{1}{2^{p-1}}(T_{2^{p-1}})^H T_{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}}(T_{2^{p-1}})^H T_{2^{p-1}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_{2^{p-1}} + I_{2^{p-1}} & I_{2^{p-1}} - I_{2^{p-1}} \\ I_{2^{p-1}} - I_{2^{p-1}} & I_{2^{p-1}} + I_{2^{p-1}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2I_{2^{p-1}} & O_{2^{p-1}} \\ O_{2^{p-1}} & 2I_{2^{p-1}} \end{bmatrix} \\
&= I_{2^p}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 1.5.3
Sea $p \in \mathbb{N}$.
1. Sean α_1, α_2, ..., α_{2^p} en $\mathbb{C}$ y $L : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$L(z_1, ..., z_p) \doteq \begin{bmatrix} z_1 ... z_{p-1} z_p & z_1 ... z_{p-1} z_p^* & z_1 ... z_{p-1}^* z_p & \cdots & z_1^* ... z_{p-1}^* z_p^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{2^p} \end{bmatrix}, \ \forall\ (z_1, ..., z_p) \in \mathbb{C}^p.$$

Entonces L es $\mathbb{R} - p-$lineal.

2. Si $L : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{R}-p-$lineal y $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{2^p} \end{bmatrix} \doteq T_{2^p}^{-1} \begin{bmatrix} L(1,...,1,1) \\ L(1,...,1,i) \\ \vdots \\ L(1,i,...,i,i) \end{bmatrix}$ entonces

$$L(z_1,...,z_p) = \begin{bmatrix} z_1...z_{p-1}z_p & z_1...z_{p-1}z_p^* & z_1...z_{p-1}^*z_p & \cdots & z_1^*...z_{p-1}^*z_p^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{2^p} \end{bmatrix}, \forall \ (z_1,...,z_p) \in \mathbb{C}^p.$$

Demostración:
1. Es inmediato.
2. Procedemos haciendo inducción sobre p. Si $p = 1$, por el Lema anterior tenemos que

$$T_2^{-1} \begin{bmatrix} L(1) \\ L(i) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L(1) \\ L(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L(1)-iL(i)}{2} \\ \frac{L(1)+iL(i)}{2} \end{bmatrix},$$

luego 2 es cierta en este caso por la demostración de la Proposición 1.1.6. Sea $p \geq 2$ y supongamos que 2 es válida para $p-1$. Sea $(z_1,...,z_p) \in \mathbb{C}^p$ arbitrario y definamos $\widetilde{L} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$\widetilde{L}(u) \doteq L(u, z_2, ..., z_p), \ u \in \mathbb{C}.$$

Puesto que $\widetilde{L}$ es $\mathbb{R}-$lineal sabemos, por la Proposición 1.1.6, que $\widetilde{L}(u) = \beta_1 u + \beta_2 u^*$, $u \in \mathbb{C}$ donde $\beta_1 = \frac{\widetilde{L}(1)-i\widetilde{L}(i)}{2}$ y $\beta_2 = \frac{\widetilde{L}(1)+i\widetilde{L}(i)}{2}$. Ahora consideremos $M_1 : \mathbb{C}^{p-1} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $M_2 : \mathbb{C}^{p-1} \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$\begin{aligned} M_1(u_2,...,u_p) &\doteq L(1,u_2,...,u_p), \ (u_2,...,u_p) \in \mathbb{C}^{p-1} \\ M_2(u_2,...,u_p) &\doteq L(i,u_2,...,u_p), \ (u_2,...,u_p) \in \mathbb{C}^{p-1}. \end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva existen $\gamma_1,...,\gamma_{2^{p-1}}, \delta_1,...,\delta_{2^{p-1}}$ en $\mathbb{C}$ tales que, para cada $(u_2,...,u_p) \in \mathbb{C}^{p-1}$, se cumplen

$$\begin{aligned} M_1(u_2,...,u_p) &= \begin{bmatrix} u_2...u_{p-1}u_p & u_2...u_{p-1}u_p^* & u_2...u_{p-1}^*u_p & \cdots & u_2^*...u_{p-1}^*u_p^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{2^{p-1}} \end{bmatrix} \text{ y} \\ M_2(u_2,...,u_p) &= \begin{bmatrix} u_2...u_{p-1}u_p & u_2...u_{p-1}u_p^* & u_2...u_{p-1}^*u_p & \cdots & u_2^*...u_{p-1}^*u_p^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{2^{p-1}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{2^{p-1}} \end{bmatrix} &= T_{2^{p-1}}^{-1} \begin{bmatrix} M_1(1,...,1,1) \\ M_1(1,...,1,i) \\ \vdots \\ M_1(i,...,i,i) \end{bmatrix} = T_{2^{p-1}}^{-1} \begin{bmatrix} L(1,...,1,1) \\ L(1,...,1,i) \\ \vdots \\ L(1,i,...,i,i) \end{bmatrix} \text{ y} \\ \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{2^{p-1}} \end{bmatrix} &= T_{2^{p-1}}^{-1} \begin{bmatrix} M_2(1,...,1,1) \\ M_2(1,...,1,i) \\ \vdots \\ M_2(i,...,i,i) \end{bmatrix} = T_{2^{p-1}}^{-1} \begin{bmatrix} L(i,...,1,1) \\ L(i,...,1,i) \\ \vdots \\ L(i,i,...,i,i) \end{bmatrix}. \quad \textbf{(1.5.3.1)} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\widetilde{L}(1) &= L(1,z_2,...,z_p) = M_1(z_2,...,z_p) = \gamma_1(z_2...z_{p-1}z_p) + \gamma_2(z_2...z_{p-1}z_p^*) + ... + \gamma_{_{2^{p-1}}}(z_2^*...z_{p-1}^*z_p^*) \text{ y}\\ \widetilde{L}(i) &= L(i,z_2,...,z_p) = M_2(z_2,...,z_p) = \delta_1(z_2...z_{p-1}z_p) + \delta_2(z_2...z_{p-1}z_p^*) + ... + \delta_{_{2^{p-1}}}(z_2^*...z_{p-1}^*z_p^*),\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\gamma_1 - i\delta_1}{2}(z_2...z_{p-1}z_p) + \frac{\gamma_2 - i\delta_2}{2}(z_2...z_{p-1}z_p^*) + ... + \frac{\gamma_{2^{p-1}} - i\delta_{2^{p-1}}}{2}(z_2^*...z_{p-1}^*z_p^*) \text{ y}\\ \beta_2 &= \frac{\gamma_1 + i\delta_1}{2}(z_2...z_{p-1}z_p) + \frac{\gamma_2 + i\delta_2}{2}(z_2...z_{p-1}z_p^*) + ... + \frac{\gamma_{2^{p-1}} + i\delta_{2^{p-1}}}{2}(z_2^*...z_{p-1}^*z_p^*).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}L(z_1,z_2,...,z_p) &= \widetilde{L}(z_1) = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_1^*\\ &= \frac{\gamma_1 - i\delta_1}{2}(z_1...z_{p-1}z_p) + \frac{\gamma_2 - i\delta_2}{2}(z_1...z_{p-1}z_p^*) + ... + \frac{\gamma_{2^{p-1}} - i\delta_{2^{p-1}}}{2}(z_1z_2^*...z_{p-1}^*z_p^*)\\ &\quad + \frac{\gamma_1 + i\delta_1}{2}(z_1^*z_2...z_{p-1}z_p) + \frac{\gamma_2 + i\delta_2}{2}(z_1^*z_2...z_{p-1}z_p^*) + ... + \frac{\gamma_{2^{p-1}} + i\delta_{2^{p-1}}}{2}(z_1^*z_2^*...z_{p-1}^*z_p^*).\end{aligned}$$

Por lo tanto, si definimos

$$\alpha_1 \doteq \frac{\gamma_1 - i\delta_1}{2}, ..., \alpha_{2^{p-1}} \doteq \frac{\gamma_{2^{p-1}} - i\delta_{2^{p-1}}}{2}, \alpha_{2^{p-1}+1} \doteq \frac{\gamma_1 + i\delta_1}{2}, ..., \alpha_{2^{p-1}+2^{p-1}} \doteq \frac{\gamma_{2^{p-1}} + i\delta_{2^{p-1}}}{2}$$

resulta, según **(1.5.3.1)**, que

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{2^{p-1}}\\ \alpha_{2^{p-1}+1}\\ \vdots\\ \alpha_{2^p}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_{2^{p-1}}\end{bmatrix} - i\begin{bmatrix}\delta_1\\ \vdots\\ \delta_{2^{p-1}}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_{2^{p-1}}\end{bmatrix} + i\begin{bmatrix}\delta_1\\ \vdots\\ \delta_{2^{p-1}}\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}T_{2^{p-1}}^{-1} & -iT_{2^{p-1}}^{-1}\\ T_{2^{p-1}}^{-1} & iT_{2^{p-1}}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L(1,...,1,1)\\ \vdots\\ L(1,i,...,i,i)\\ L(i,...,1,1)\\ \vdots\\ L(i,i,...,i,i)\end{bmatrix} = T_{2^p}^{-1}\begin{bmatrix}L(1,...,1,1)\\ \vdots\\ L(1,i,...,i,i)\\ L(i,...,1,1)\\ \vdots\\ L(i,i,...,i,i)\end{bmatrix}.$$

Finalmente obtenemos que $L(z_1,z_2,...,z_p) = \alpha_1(z_1...z_{p-1}z_p) + \alpha_2(z_1...z_{p-1}z_p^*) + ... + \alpha_{2^p}(z_1^*z_2^*...z_{p-1}^*z_p^*)$ y el Lema queda probado. ■

Corolario 1.5.4
Sean $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $p-$veces $\mathbb{R}-$diferenciable en $z_0 \in U$. Entonces, para cada $(z_1,z_2,...,z_p) \in \mathbb{C}^p$ se cumple que

$$D_r^p(f)(z_0)(z_1,z_2,...,z_p) = \begin{bmatrix}z_1...z_{p-1}z_p & z_1...z_{p-1}z_p^* & \cdots & z_1^*z_2^*...z_{p-1}^*z_p^*\end{bmatrix} T_{2^p}^{-1}\begin{bmatrix}D_r^p(f)(z_0)(1,...,1)\\ D_r^p(f)(z_0)(1,...,1,i)\\ D_r^p(f)(z_0)(1,...,i,1)\\ \vdots\\ D_r^p(f)(z_0)(i,...,i)\end{bmatrix}.$$

Demostración:
Es una aplicación directa del Lema anterior. ■

Nota 1.5.5
Sea $p \geq 2$ entero y sea $\leq_p$ la relación en $\{0,1\}^p$ dada por $(\varepsilon_p,...,\varepsilon_1) \leq_p (\delta_p,...,\delta_1)$ si $\sum_{k=1}^p \varepsilon_k 2^k \leq \sum_{k=1}^p \delta_k 2^k$. Veamos que $\leq_p$ define un orden total en $\{0,1\}^p$. Es decir para cada $(\varepsilon_p,...,\varepsilon_1)$, $(\delta_p,...,\delta_1)$ y $(\beta_p,...,\beta_1)$ en $\{0,1\}^p$se cumplen:

1) Reflexividad: $(\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1) \leq_p (\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1)$.

2) Completitud: $(\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1) \leq_p (\delta_p, ..., \delta_1)$ ó $(\delta_p, ..., \delta_1) \leq_p (\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1)$.

3) Transitividad: $(\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1) \leq_p (\delta_p, ..., \delta_1)$ y $(\delta_p, ..., \delta_1) \leq_p (\beta_p, ..., \beta_1) \implies (\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1) \leq_p (\beta_p, ..., \beta_1)$.

4) Antisimetría: $(\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1) \leq_p (\delta_p, ..., \delta_1)$ y $(\delta_p, ..., \delta_1) \leq_p (\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1) \implies (\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1) = (\delta_p, ..., \delta_1)$.

1, 2 y 3 se verifican inmediatamente, por lo tanto veamos 4. Si $(\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1) \leq_p (\delta_p, ..., \delta_1)$ y $(\delta_p, ..., \delta_1) \leq_p (\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1)$ entonces

$$\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k 2^k \leq \sum_{k=1}^{p} \delta_k 2^k \leq \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k 2^k$$

lo cual implica que

$$\sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k 2^k = \sum_{k=1}^{p} \delta_k 2^k$$

es decir

$$\sum_{k=1}^{p} (\varepsilon_k - \delta_k) 2^k = 0$$

Notemos que, como $\varepsilon_k,\ \delta_k \in \{0,1\}\ \forall\ k \in \{1, ..., p\}$ entonces $\varepsilon_k - \delta_k \in \{-1, 0, 1\},\ \forall\ k \in \{1, ..., p\}$.

Afirmación:
Si $p \in \mathbb{N}$; $a_k \in \{-1, 0, 1\},\ \forall\ k \in \{1, ..., p\}$ y $\sum_{k=1}^{p} a_k 2^k = 0$ entonces $a_k = 0,\ \forall\ k \in \{1, ..., p\}$.

Demostración Afirmación:
Si $p = 1$ entonces $0 = a_1 2$, con lo cual $a_1 = 0$. Supongamos que la afirmación es válida para $2 \leq q \leq p$ y probemos que también es cierta para $p + 1$. Sabemos que

$$0 = a_1 2 + a_2 2^2 + \cdots + a_p 2^p + a_{p+1} 2^{p+1} = 2(a_1 + a_2 2 + ... + a_p 2^{p-1} + a_{p+1} 2^p),$$

con lo cual $0 = a_1 + a_2 2 + \cdots + a_p 2^{p-1} + a_{p+1} 2^p$. Ahora si consideramos el caso en que $a_1 = 0$ entonces

$$0 = a_2 2 + \cdots + a_p 2^{p-1} + a_{p+1} 2^p$$

y, por hipótesis inductiva, resulta que $a_2 = \cdots = a_p = 0$. Por lo tanto $a_k = 0,\ \forall\ k \in \{1, ..., p\}$ y listo. Si de lo contrario tenemos que $a_1 = 1$ o $a_1 = -1$ entonces

$$0 = a_1 + a_2 2 + \cdots + a_p 2^{p-1} + a_{p+1} 2^p,$$

es decir

$$-a_1 = a_2 2 + \cdots + a_p 2^{p-1} + a_{p+1} 2^p = 2(a_2 + a_3 2 + \cdots + a_p 2^{p-2} + a_{p+1} 2^{p-1}),$$

lo cual resulta un absurdo pues $-a_1$ no es par. Queda entonces demostrada la Afirmación y, con ello, la Nota.

Notación 1.5.6 (Continuación de la Nota 1.5.5)
Sea $I_0^p : \{1, 2, 3, ..., 2^p\} \longrightarrow \{0, 1\}^p$ biyectiva tal que $i \leq j \iff I_0^p(i) \leq_p I_0^p(j),\ \forall\ i,\ j \in \{1, 2, 3, ..., 2^p\}$.

Sea $I_1 : \{0, 1\} \longrightarrow \{1, i\}$ dada por $I_1(0) \doteq 1$ y $I_1(1) \doteq i$.

Sea $I_1^p : \{0, 1\}^p \longrightarrow \{1, i\}^p$ dada por $I_1^p(\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1) \doteq (I_1(\varepsilon_p), ..., I_1(\varepsilon_1))$, $(\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1) \in \{0, 1\}^p$.

Sea $I_i^p : \{1, 2, ..., 2^p\} \longrightarrow \{1, i\}^p$ dada por $I_i^p \doteq I_1^p \circ I_0^p$. Así, por ejemplo

$$\begin{aligned}
I_i^p(1) &= I_1^p(I_0^p(1)) = I_1^p(0, ..., 0) = (I_1(0), ..., I_1(0)) = (1, ..., 1) \\
I_i^p(2) &= I_1^p(I_0^p(2)) = I_1^p(0, ..., 0, 1) = (I_1(0), ..., I_1(0), I_1(1)) = (1, ..., 1, i) \\
I_i^p(3) &= I_1^p(I_0^p(3)) = I_1^p(0, ..., 1, 0) = (I_1(0), ..., I_1(1), I_1(0)) = (1, ..., 1, i, 1) \\
&\ \ \vdots \\
I_i^p(2^p) &= I_1^p(I_0^p(2^p)) = I_1^p(1, ..., 1) = (I_1(1), ..., I_1(1)) = (i, ..., i)
\end{aligned}$$

Con esta notación tenemos que en la parte 2 del Lema 1.5.3 $\begin{bmatrix} L(1,...,1,1) \\ L(1,...,1,i) \\ \vdots \\ L(i,...,i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(I_i^p(1)) \\ L(I_i^p(2)) \\ \vdots \\ L(I_i^p(2^p)) \end{bmatrix}$.

Definición 1.5.7
Sean $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $p-$veces $\mathbb{R}-$diferenciable en $z_0 \in U$. Para cada $k \in \{1, 2, ..., 2^p\}$ definimos

$$\partial^p_{I_0^p(k)} f(z_0) \doteq T_{2^p}^{-1}(k, \cdot) \begin{bmatrix} D_r^p(f)(z_0)(I_i^p(1)) \\ D_r^p(f)(z_0)(I_i^p(2)) \\ \vdots \\ D_r^p(f)(z_0)(I_i^p(2^p)) \end{bmatrix}$$

donde $T_{2^p}^{-1}(k, \cdot)$ es la $k-$ésima fila de la matriz $T_{2^p}^{-1}$. Así, en el Corolario 1.5.4, tenemos que $\partial^p_{I_0^p(k)} f(z_0)$ es el número complejo que multiplica al $k-$ésimo elemento del vector $\left(z_1...z_{p-1}z_p, z_1...z_{p-1}z_p^*, ..., z_1^* z_2^* ... z_{p-1}^* z_p^*\right)$.

Corolario 1.5.8
Sean $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $p-$veces $\mathbb{R}-$diferenciable en $z_0 \in U$. Entonces

$$\begin{aligned} D_r^p(f)(z_0)(z_1, ..., z_p) \quad &= \quad \partial^p_{I_0^p(1)} f(z_0) z_1 z_2 ... z_p + \partial^p_{I_0^p(2)} f(z_0) z_1 ... z_{p-1} z_p^* \\ &\quad + \partial^p_{I_0^p(3)} f(z_0) z_1 ... z_{p-1}^* z_p + \cdots + \partial^p_{I_0^p(2^p)} f(z_0) z_1^* z_2^* ... z_p^*, \end{aligned}$$

para cada $(z_1, ..., z_p) \in \mathbb{C}^p$.

Demostración:
Se sigue inmediatamente por la Definición anterior y el Lema 1.5.3. ■

Notación 1.5.9 (Continuación de la Notación 1.5.6)
Sea $I_2 : \{0, 1\} \longrightarrow \{1, *\}$ dada por $I_2(0) \doteq 1$ y $I_2(1) \doteq *$.

Sea $I_2^p : \{0, 1\}^p \longrightarrow \{1, *\}^p$ dada por $I_2^p(\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1) \doteq (I_2(\varepsilon_p), ..., I_2(\varepsilon_1))$, $(\varepsilon_p, ..., \varepsilon_1) \in \{0, 1\}^p$.

Sea $I_*^p : \{1, 2, ..., 2^p\} \longrightarrow \{1, *\}^p$ dada por $I_*^p \doteq I_2^p \circ I_0^p$. Así por ejemplo

$$\begin{aligned} I_*^p(1) \quad &= \quad I_2^p(I_0^p(1)) = I_2^p(0, ..., 0) = (I_2(0), ..., I_2(0)) = (1, ..., 1) \\ I_*^p(2) \quad &= \quad I_2^p(I_0^p(2)) = I_2^p(0, ..., 0, 1) = (I_2(0), ..., I_2(0), I_2(1)) = (1, ..., 1, *) \\ &\quad \vdots \\ I_*^p(2^p) \quad &= \quad I_2^p(I_0^p(2^p)) = I_2^p(1, ..., 1) = (I_2(1), ..., I_2(1)) = (*, ..., *). \end{aligned}$$

Ahora para cada $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_p) \in \mathbb{C}^p$ y para cada $k \in \{1, 2, ..., 2^p\}$ sea

$$\mathbf{z}^{I_*^p(k)} \doteq z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} ... z_p^{\varepsilon_p},$$

si $I_*^p(k) = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p) \in \{1, *\}^p$. Usando esta notación el Lema 1.5.3 es equivalente al siguiente:

Lema 1.5.10
Sea $p \in \mathbb{N}$. Entonces $L \in \mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \iff \exists! \ (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2^p}) \in \mathbb{C}^{2^p}$ tal que $L(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{2^p} \alpha_k \mathbf{z}^{I_*^p(k)}$, $\forall \ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^p$.

Demostración:
Faltaría probar la unicidad. Supongamos que existen $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2^p})$ y $(\beta_1, ..., \beta_{2^p})$ en $\mathbb{C}^{2^p}$ tales que

$$\sum_{k=1}^{2^p} \alpha_k \mathbf{z}^{I_*^p(k)} = \sum_{k=1}^{2^p} \beta_k \mathbf{z}^{I_*^p(k)}, \ \forall \ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^p.$$

Luego

$$0=\sum_{k=1}^{2^p}(\alpha_k-\beta_k)\,\mathbf{z}^{I_*^p(k)}=\sum_{k=1}^{2^p}(\alpha_k-\beta_k)\,b_{2^p,k},\ \forall\ \mathbf{z}\in\mathbb{C}^p.$$

Pero, por la Nota 1.4.11, sabemos que $\{b_{2^p,k}:k=1,...,2^p\}$ es una base de $\mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C})$, con lo cual $\alpha_k=\beta_k$, $\forall$ $k=1,...,2^p$.

Observación 1.5.11 (Continuación de la Definición 1.5.7)
Como $D_r^p(f)(z_0)\in\mathcal{L}\mathbb{R}_p(\mathbb{C},\mathbb{C})$, por el Lema anterior sabemos que $\exists!\ (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{2^p})\in\mathbb{C}^{2^p}$ tal que

$$D_r^p(f)(z_0)(\mathbf{z})=\sum_{k=1}^{2^p}\alpha_k\mathbf{z}^{I_*^p(k)},\ \forall\ \mathbf{z}\in\mathbb{C}^p.$$

Por otro lado tenemos que

$$D_r^p(f)(z_0)(z_1,...,z_p)=\begin{bmatrix}z_1...z_{p-1}z_p & z_1...z_{p-1}z_p^* & \cdots & z_1^*z_2^*...z_{p-1}^*z_p^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\partial^p_{I_0^p(1)}f(z_0)\\ \partial^p_{I_0^p(2)}f(z_0)\\ \vdots\\ \partial^p_{I_0^p(2^p)}f(z_0)\end{bmatrix},\ \forall\ (z_1,...,z_p)\in\mathbb{C}^p.$$

Luego, por unicidad resulta que $\alpha_k=\partial^p_{I_0^p(k)}f(z_0)$, $\forall\ k\in\{1,...,2^p\}$. ■

Lema 1.5.12
Sean $U\subset\mathbb{C}$ un abierto, $f_1:U\longrightarrow\mathbb{C}$ y $f_2:U\longrightarrow\mathbb{C}$ funciones $\mathbb{R}-$diferenciables en U, $\alpha\in\mathbb{C}$ y $g:U\longrightarrow\mathbb{C}$ dada por $g(z)\doteq\alpha f_1(z)+f_2(z)$, $z\in U$. Entonces g es $\mathbb{R}-$diferenciables en U y $D_r(g)(z)=\alpha D_r(f_1)(z)+D_r(f_2)(z)$, $z\in U$.

Demostración:
Sea $z\in U$ arbitrario. Por hipótesis sabemos que

$$\lim_{|h|\to 0}\frac{f_1(z+h)-f_1(z)-D_r(f_1)(z)(h)}{|h|}=0=\lim_{|h|\to 0}\frac{f_2(z+h)-f_2(z)-D_r(f_2)(z)(h)}{|h|},$$

por consiguiente

$$\begin{aligned}
&\lim_{|h|\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)-\alpha D_r(f_1)(z)(h)-D_r(f_2)(z)(h)}{|h|}\\
=&\lim_{|h|\to 0}\frac{\alpha f_1(z+h)+f_2(z+h)-\alpha f_1(z)-f_2(z)-\alpha D_r(f_1)(z)(h)-D_r(f_2)(z)(h)}{|h|}\\
=&\lim_{|h|\to 0}\frac{\alpha\left(f_1(z+h)-f_1(z)-D_r(f_1)(z)(h)\right)+\left(f_2(z+h)-f_2(z)-D_r(f_2)(z)(h)\right)}{|h|}\\
=&\ \alpha\lim_{|h|\to 0}\frac{f_1(z+h)-f_1(z)-D_r(f_1)(z)(h)}{|h|}+\lim_{|h|\to 0}\frac{f_2(z+h)-f_2(z)-D_r(f_2)(z)(h)}{|h|}\\
=&\ \alpha\cdot 0+0=0.
\end{aligned}$$

Además, como $D_r(f_1)(z)$ y $D_r(f_2)(z)$ son $\mathbb{R}-$lineales entonces $\alpha D_r(f_1)(z)+D_r(f_2)(z)$ también. Por lo tanto, según la Definición 1.2.1, g es $\mathbb{R}-$diferenciables en U y $D_r(g)(z)=\alpha D_r(f_1)(z)+D_r(f_2)(z)$, $z\in U$. ■

Proposición 1.5.13
Sea $p\in\mathbb{N}$, $k\in\{1,2,...,2^p\}$, $U\subset\mathbb{C}$ un abierto, $f\in C_r^{p+1}(U)$ y $g:U\longrightarrow\mathbb{C}$ dada por

$$g(z)\doteq\partial^p_{I_0^p(k)}f(z),\ \forall\ z\in U.$$

Entonces
1. g es continuamente $\mathbb{R}-$diferenciable en U.
2. Para cada $z \in U$ se cumplen: $\partial^{p+1}_{I_0^{p+1}(k)} f(z) = \partial^1_0 g(z)$ y $\partial^{p+1}_{I_0^{p+1}(2^p+k)} f(z) = \partial^1_1 g(z)$.

Demostración:
1. Por la Definición 1.5.7 tenemos que

$$g(z) = T_{2^p}^{-1}(k,\cdot)\begin{bmatrix} D_r^p(f)(z)(I_i^p(1)) \\ D_r^p(f)(z)(I_i^p(2)) \\ \vdots \\ D_r^p(f)(z)(I_i^p(2^p)) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{2^p} T_{2^p}^{-1}(k,j) D_r^p(f)(z)(I_i^p(j)),\ \forall\ z \in U. \quad \textbf{(1.5.13.1)}$$

Además, la Proposición 1.4.20 nos asegura que si $z_1, ..., z_p \in \mathbb{C}$ entonces la función $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h(z) = D_r^p(f)(z)(z_1, ..., z_p),\ z \in U$$

es $\mathbb{R}-$diferenciable en U. Luego el resultado se obtiene aplicando el Lema anterior.
2. Sea $z \in U$ arbitrario. Por la Definición 1.5.7 aplicada a g con $p = 1$ tenemos que

$$\begin{bmatrix} \partial^1_{I_0^1(1)} g(z) \\ \partial^1_{I_0^1(2)} g(z) \end{bmatrix} = T_2^{-1}\begin{bmatrix} D_r^1(g)(z)(I_i^1(1)) \\ D_r^1(g)(z)(I_i^1(2)) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_r^1(g)(z)(I_i^1(1)) \\ D_r^1(g)(z)(I_i^1(2)) \end{bmatrix},$$

es decir

$$\partial^1_0 g(z) = \frac{D_r^1(g)(z)(1) - iD_r^1(g)(z)(i)}{2} \text{ y } \partial^1_1 g(z) = \frac{D_r^1(g)(z)(1) + iD_r^1(g)(z)(i)}{2}.$$

Luego por **(1.5.13.1)**, el Lema anterior y las Proposiciones 1.4.20 y 1.4.19, resulta que

$$\begin{aligned}
\partial^1_0 g(z) &= \frac{D_r^1(g)(z)(1) - iD_r^1(g)(z)(i)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{2^p} T_{2^p}^{-1}(k,j) D_r^{p+1}(f)(z)\,(I_i^p(j),1) - i\sum_{j=1}^{2^p} T_{2^p}^{-1}(k,j) D_r^{p+1}(f)(z)(I_i^p(j),i)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{2^p} T_{2^p}^{-1}(k,j) D_r^{p+1}(f)(z)(1,I_i^p(j)) + \sum_{j=1}^{2^p} (-i) T_{2^p}^{-1}(k,j) D_r^{p+1}(f)(z)(i,I_i^p(j))\right) \\
&= \sum_{j=1}^{2^{p+1}} T_{2^p+1}^{-1}(k,j) D_r^{p+1}(f)(z)(I_i^{p+1}(j)) = \partial^{p+1}_{I_0^{p+1}(k)} f(z).
\end{aligned}$$

Análogamente probamos

$$\begin{aligned}
\partial^1_1 g(z) &= \frac{D_r^1(g)(z)(1) + iD_r^1(g)(z)(i)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{2^p} T_{2^p}^{-1}(k,j) D_r^{p+1}(f)(z)(I_i^p(j),1) + i\sum_{j=1}^{2^p} T_{2^p}^{-1}(k,j) D_r^{p+1}(f)(z)(I_i^p(j),i)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{2^p} T_{2^p}^{-1}(k,j) D_r^{p+1}(f)(z)(1,I_i^p(j)) + \sum_{j=1}^{2^p} iT_{2^p}^{-1}(k,j) D_r^{p+1}(f)(z)(i,I_i^p(j))\right) \\
&= \sum_{j=1}^{2^{p+1}} T_{2^p+1}^{-1}(2^p+k,j) D_r^{p+1}(f)(z)(I_i^{p+1}(j)) = \partial^{p+1}_{I_0^{p+1}(2^p+k)} f(z),
\end{aligned}$$

quedando así finalizada la prueba. ■

Nota I.5.14
Sea $p \geq 2$ entero y $n_{p,0} : \{0,1\}^p \longrightarrow \{0,1,2,...,p\}$ la función definida por

$$n_{p,0}(\sigma_1,...,\sigma_p) \doteq \#\left\{1 \leq j \leq p : \sigma_j = 0\right\}, \, (\sigma_1,...,\sigma_p) \in \{0,1\}^p \, .$$

Notemos que si $(\sigma_1,...,\sigma_p)$ y $(\delta_1,...,\delta_p)$ están en $\{0,1\}^p$, entonces

$$n_{p,0}(\sigma_1,...,\sigma_p) = n_{p,0}(\delta_1,...,\delta_p) \iff \exists\, \pi \in S^p \text{ tal que } (\sigma_1,...,\sigma_p) = \left(\delta_{\pi(1)},...,\delta_{\pi(p)}\right).$$

Proposición 1.5.15
Sean $p \geq 2$ entero, $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ $p-$veces $\mathbb{R}-$ diferenciable en U y j, $k \in \{1,...,2^p-1\}$ con $j \neq k$. Si

$$n_{p,0}(I_0^p(j)) = n_{p,0}(I_0^p(k))$$

entonces

$$\partial^p_{I_0^p(j)} f(z) = \partial^p_{I_0^p(k)} f(z), \, \forall\, z \in U.$$

Demostración:
Procedemos por inducción sobre p. Sea $z \in U$ arbitrario. Sea $p = 2$ y denotemos

$$\alpha_1 \doteq D_r^2(f)(z)(1,1),\ \alpha_2 \doteq D_r^2(f)(z)(1,i),\ \ \alpha_3 \doteq D_r^2(f)(z)(i,1),\ \alpha_4 \doteq D_r^2(f)(z)(i,i),$$

$$\beta_1 \doteq \partial^2_{(0,0)} f(z),\ \beta_2 \doteq \partial^2_{(0,1)} f(z),\ \beta_3 \doteq \partial^2_{(1,0)} f(z),\ \beta_4 \doteq \partial^2_{(1,1)} f(z),$$

$$\boldsymbol{\alpha} \doteq (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)^\top \text{ y } \boldsymbol{\beta} \doteq (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)^\top.$$

Queremos probar que $\beta_2 = \beta_3$. Por la Proposición 1.4.19 y por la Definición 1.5.7 tenemos que $\alpha_2 = \alpha_3$ y $\boldsymbol{\beta} = T_{2^2}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. Luego

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2^2}\begin{bmatrix} T_2^H & -iT_2^H \\ T_2^H & iT_2^H \end{bmatrix}\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -i & -i & -1 \\ 1 & i & -i & 1 \\ 1 & -i & i & 1 \\ 1 & i & i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_4 \end{bmatrix},$$

lo cual implica que

$$\beta_2 = \frac{1}{4}(\alpha_1 + i\alpha_2 - i\alpha_2 + \alpha_4) = \frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_4) \text{ y } \beta_3 = \frac{1}{4}(\alpha_1 - i\alpha_2 + i\alpha_2 + \alpha_4) = \frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_4).$$

Por lo tanto $\beta_2 = \beta_3$. Ahora sea $p \geq 2$ y supongamos que la Proposición es cierta para $2 \leq q \leq p$. Sean $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{p+1},\sigma_p,...,\sigma_1)^\top$ y $\boldsymbol{\delta} = (\delta_{p+1},\delta_p,...,\delta_1)^\top$ en $\{0,1\}^{p+1}$ tales que $n_{p+1,0}(\boldsymbol{\sigma}) = n_{p+1,0}(\boldsymbol{\delta})$ y veamos que

$$\partial^{p+1}_{\boldsymbol{\sigma}} f(z) = \partial^{p+1}_{\boldsymbol{\delta}} f(z).$$

No es difícil verificar que se dá una (y sólo una) de las siguientes situaciones:

$$\begin{aligned}
1)\ \boldsymbol{\sigma} &= (0,\sigma_p,...,\sigma_1)^\top \text{ y } \boldsymbol{\delta} = (0,\delta_p,...,\delta_1)^\top \\
2)\ \boldsymbol{\sigma} &= (1,\sigma_p,...,\sigma_1)^\top \text{ y } \boldsymbol{\delta} = (1,\delta_p,...,\delta_1)^\top \\
3)\ \boldsymbol{\sigma} &= (0,1,\sigma_{p-1},...,\sigma_1)^\top \text{ y } \boldsymbol{\delta} = (1,0,\delta_{p-1},...,\delta_1)^\top \\
4)\ \boldsymbol{\sigma} &= (0,1,\sigma_{p-1},...,\sigma_1)^\top \text{ y } \boldsymbol{\delta} = (1,1,\delta_{p-1},...,\delta_1)^\top \\
5)\ \boldsymbol{\sigma} &= (0,0,\sigma_{p-1},...,\sigma_1)^\top \text{ y } \boldsymbol{\delta} = (1,0,\delta_{p-1},...,\delta_1)^\top \\
6)\ \boldsymbol{\sigma} &= (0,0,\sigma_{p-1},...,\sigma_1)^\top \text{ y } \boldsymbol{\delta} = (1,1,\delta_{p-1},...,\delta_1)^\top
\end{aligned}$$

y las situaciones 3, 4, 5 y 6 cambiando $\boldsymbol{\sigma}$ con $\boldsymbol{\delta}$ y viceversa.

Consideremos en primer lugar la situación 1. Como $n_{p+1,0}(\boldsymbol{\sigma}) = n_{p+1,0}(\boldsymbol{\delta})$ y $\sigma_{p+1} = 0 = \delta_{p+1}$ entonces

$$n_{p,0}(\sigma_p,...,\sigma_1) = n_{p,0}(\delta_p,...,\delta_1),$$

con lo cual, por hipótesis inductiva, resulta que

$$\partial^p_{(\sigma_p,...,\sigma_1)} f(z) = \partial^p_{(\delta_p,...,\delta_1)} f(z).$$

Por otro lado, la Proposición 1.5.13 nos dice que

$$\partial^{p+1}_{\boldsymbol{\sigma}} f(z) = \partial^1_0 \partial^p_{(\sigma_p,...,\sigma_1)} f(z) \text{ y } \partial^{p+1}_{\boldsymbol{\delta}} f(z) = \partial^1_0 \partial^p_{(\delta_p,...,\delta_1)} f(z).$$

Por lo tanto

$$\partial^{p+1}_{\boldsymbol{\sigma}} f(z) = \partial^{p+1}_{\boldsymbol{\delta}} f(z).$$

La situación 2 se resuelve en forma análoga a la situación 1 cambiando ∂^1_0 por ∂^1_1. Veamos la situación 3. Como $n_{p+1,0}(\boldsymbol{\sigma}) = n_{p+1,0}(\boldsymbol{\delta})$, $\sigma_p = 1 = \delta_{p+1}$ y $\sigma_{p+1} = 0 = \delta_p$ entonces

$$n_{p-1,0}(\sigma_{p-1}, ..., \sigma_1) = n_{p-1,0}(\delta_{p-1}, ..., \delta_1),$$

luego, por hipótesis inductiva tenemos que

$$g(z) \doteq \partial^{p-1}_{(\sigma_{p-1},...,\sigma_1)} f(z) = \partial^{p-1}_{(\delta_{p-1},...,\delta_1)} f(z).$$

Ahora, por la Proposición 1.5.13 (aplicada dos veces) obtenemos que

$$\begin{aligned} \partial^{p+1}_{\boldsymbol{\sigma}} f(z) &= \partial^1_0 \partial^1_1 \partial^{p-1}_{(\sigma_{p-1},...,\sigma_1)} f(z) = \partial^2_{(0,1)} \partial^{p-1}_{(\sigma_{p-1},...,\sigma_1)} f(z) \text{ y} \\ \partial^{p+1}_{\boldsymbol{\delta}} f(z) &= \partial^1_1 \partial^1_0 \partial^{p-1}_{(\delta_{p-1},...,\delta_1)} f(z) = \partial^2_{(1,0)} \partial^{p-1}_{(\delta_{p-1},...,\delta_1)} f(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\partial^{p+1}_{\boldsymbol{\sigma}} f(z)) = \partial^2_{(0,1)} g(z) \text{ y } \partial^{p+1}_{\boldsymbol{\delta}} f(z) = \partial^2_{(1,0)} g(z).$$

Luego, por lo ya probado para $p = 2$, resulta que

$$\partial^{p+1}_{\boldsymbol{\sigma}} f(z)) = \partial^2_{(0,1)} g(z) = \partial^2_{(1,0)} g(z) = \partial^{p+1}_{\boldsymbol{\delta}} f(z).$$

Consideremos ahora la situación 4. Dado que $n_{p+1,0}(\boldsymbol{\sigma}) = n_{p+1,0}(\boldsymbol{\delta})$, $\boldsymbol{\sigma} = (0, 1, \sigma_{p-1}, ..., \sigma_1)^\top$ y $\boldsymbol{\delta} = (1, 1, \delta_{p-1}, ..., \delta_1)^\top$ entonces $\exists\ j \in \{1, ..., p-1\}$ tal que $\delta_j = 0$. Luego, existe $\pi \in S^p$ tal que

$$\left(\delta_{\pi(p)}, \delta_{\pi(p-1)}, ..., \delta_{\pi(1)}\right) = \left(0, \delta_{\pi(p-1)}, ..., \delta_{\pi(1)}\right).$$

Definimos $\boldsymbol{\gamma} \doteq \left(\delta_{\pi(p-1)}, ..., \delta_{\pi(1)}\right)^\top$. Por la Nota anterior tenemos que

$$n_{p,0}(1, \delta_{p-1}, ..., \delta_1) = n_{p,0}(\delta_p, \delta_{p-1}, ..., \delta_1) = n_{p,0}\left(\delta_{\pi(p)}, \delta_{\pi(p-1)}, ..., \delta_{\pi(1)}\right) = n_{p,0}(0, \boldsymbol{\gamma})$$

Luego, por hipótesis inductiva

$$\partial^p_{(1,\delta_{p-1},...,\delta_1)} f(z) = \partial^p_{(0,\boldsymbol{\gamma})} f(z).$$

Además, por la Proposición 1.5.13 tenemos que

$$\partial^{p+1}_{\boldsymbol{\delta}} f(z) = \partial^1_1 \partial^p_{(1,\delta_{p-1},...,\delta_1)} f(z).$$

Por lo tanto

$$\partial^{p+1}_{\boldsymbol{\delta}} f(z) = \partial^1_1 \partial^p_{(0,\boldsymbol{\gamma})} f(z) = \partial^{p+1}_{(1,0,\boldsymbol{\gamma})} f(z).$$

Ahora, por lo ya probado en la situación 3 y debido a que $n_{p-1,0}(\boldsymbol{\gamma}) = n_{p-1,0}(\sigma_{p-1}, ..., \sigma_1)$, resulta que

$$\partial^{p+1}_{(1,0,\boldsymbol{\gamma})} f(z) = \partial^{p+1}_{(0,1,\sigma_{p-1},...,\sigma_1)} f(z) = \partial^{p+1}_{\boldsymbol{\sigma}} f(z).$$

Finalmente obtenemos que $\partial^{p+1}_{\boldsymbol{\delta}} f(z) = \partial^{p+1}_{\boldsymbol{\sigma}} f(z)$.

Veamos la situación 5. Como $n_{p+1,0}(\boldsymbol{\sigma}) = n_{p+1,0}(\boldsymbol{\delta})$, $\boldsymbol{\sigma} = (0,0,\sigma_{p-1},...,\sigma_1)^\top$ y $\boldsymbol{\delta} = (1,0,\delta_{p-1},...,\delta_1)^\top$ entonces $\exists$ $j \in \{1,...,p-1\}$ tal que $\sigma_j = 1$. Luego $\exists\ \pi \in S^p$ tal que

$$\left(\sigma_{\pi(p)},\sigma_{\pi(p-1)},...,\sigma_{\pi(1)}\right) = \left(1,\sigma_{\pi(p-1)},...,\sigma_{\pi(1)}\right).$$

Definimos $\boldsymbol{\gamma} \doteq (\sigma_{\pi(p-1)},...,\sigma_{\pi(1)})^\top$. Por la Nota anterior tenemos que

$$n_{p,0}(1,\boldsymbol{\gamma}) = n_{p,0}\left(\sigma_{\pi(p)},...,\sigma_{\pi(1)}\right) = n_{p,0}\left(\sigma_p,...,\sigma_1\right) = n_{p,0}\left(0,\sigma_{p-1},...,\sigma_1\right).$$

Luego, por hipótesis inductiva

$$\partial^p_{(1,\boldsymbol{\gamma})}f(z) = \partial^p_{(0,\sigma_{p-1},...,\sigma_1)}f(z).$$

Además por la Proposición 1.5.13 tenemos que

$$\partial^{p+1}_{\boldsymbol{\sigma}}f(z) = \partial^1_0\partial^p_{(0,\sigma_{p-1},...,\sigma_1)}f(z),$$

por tanto,

$$\partial^{p+1}_{\boldsymbol{\sigma}}f(z) = \partial^1_0\partial^p_{(1,\boldsymbol{\gamma})}f(z) = \partial^{p+1}_{(0,1,\boldsymbol{\gamma})}f(z).$$

Ahora, como

$$n_{p-1,0}\left(\delta_{p-1},...,\delta_1\right) = n_{p,0}\left(\sigma_p,...,\sigma_1\right) = n_{p,0}\left(0,\sigma_{p-1},...,\sigma_1\right) = n_{p,0}\left(1,\boldsymbol{\gamma}\right) = n_{p-1,0}(\boldsymbol{\gamma}),$$

y por lo ya probado en la situación 3, tenemos que

$$\partial^{p+1}_{(1,0,\delta_{p-1},...,\delta_1)}f(z) = \partial^{p+1}_{(0,1,\boldsymbol{\gamma})}f(z).$$

Finalmente obtenemos que

$$\partial^{p+1}_{\boldsymbol{\sigma}}f(z) = \partial^{p+1}_{(1,0,\delta_{p-1},...,\delta_1)}f(z) = \partial^{p+1}_{\boldsymbol{\delta}}f(z).$$

Por último probemos el caso en el que se dé la situación 6. Puesto que $\boldsymbol{\sigma} = (0,0,\sigma_{p-1},...,\sigma_1)^\top$, $\boldsymbol{\delta} = (1{,}1{,}\delta_{p-1},...,\delta_1)^\top$ y $n_{p+1,0}(\boldsymbol{\sigma}) = n_{p+1,0}(\boldsymbol{\delta})$ entonces existen $j,k \in \{1,...,p-1\}$ con $j \neq k$ tales que $\delta_j = 0 = \delta_k$. Luego $\exists\ \pi \in S^p$ tal que

$$\left(\delta_{\pi(p)},\delta_{\pi(p-1)},...,\delta_{\pi(1)}\right) = (0,0,\delta_{\pi(p-2)},...,\delta_{\pi(1)}).$$

Definimos $\boldsymbol{\gamma} \doteq (\delta_{\pi(p-2)},...,\delta_{\pi(1)})^\top$. Por la Nota anterior tenemos que

$$n_{p,0}\left(1{,}\delta_{p-1},...,\delta_1\right) = n_{p,0}\left(\delta_p,...,\delta_1\right) = n_{p,0}\left(\delta_{\pi(p)},...,\delta_{\pi(1)}\right) = n_{p,0}\left(0,0,\delta_{\pi(p-2)},...,\delta_{\pi(1)}\right) = n_{p,0}\left(0,0,\boldsymbol{\gamma}\right),$$

con lo cual la hipótesis inductiva implica que

$$\partial^p_{(1,\delta_{p-1},...,\delta_1)}f(z) = \partial^p_{(0,0,\boldsymbol{\gamma})}f(z).$$

Aplicando la Proposición 1.5.13 resulta que

$$\partial^{p+1}_{\boldsymbol{\delta}}f(z) = \partial^1_1\partial^p_{(1,\delta_{p-1},...,\delta_1)}f(z) = \partial^1_1\partial^p_{(0,0,\boldsymbol{\gamma})}f(z) = \partial^{p+1}_{(1,0,0,\boldsymbol{\gamma})}f(z).$$

Ahora, dado que

$$n_{p+1,0}\left(0,0,\sigma_{p-1},...,\sigma_1\right) = n_{p+1,0}\left(\boldsymbol{\sigma}\right) = n_{p+1,0}\left(\boldsymbol{\delta}\right) = n_{p,0}\left(1,\delta_{p-1},...,\delta_1\right) = n_{p,0}\left(0,0,\boldsymbol{\gamma}\right) = n_{p+1,0}\left(1,0,0,\boldsymbol{\gamma}\right),$$

tenemos entonces por la situación anterior que

$$\partial^{p+1}_{(1,0,0,\boldsymbol{\gamma})}f(z) = \partial^{p+1}_{(0,0,\sigma_{p-1},...,\sigma_1)}f(z).$$

Por lo tanto obtenemos que

$$\partial^{p+1}_{\boldsymbol{\delta}}f(z) = \partial^{p+1}_{(1,0,0,\boldsymbol{\gamma})}f(z) = \partial^{p+1}_{(0,0,\sigma_{p-1},...,\sigma_1)}f(z) = \partial^{p+1}_{\boldsymbol{\sigma}}f(z).$$

Queda entonces culminada la demostración. ■

Nota 1.5.16 (Continuación de la Proposición anterior)
Denotamos entonces
$$\frac{\partial^p}{(\partial\xi)^{p-1}\partial\xi^*}f(z_0) \doteq \partial^p_{(0,\ldots,0,1)}f(z_0) = \cdots = \partial^p_{(1,0,\ldots,0)}f(z_0).$$
En general, para $k \in \{1, ..., p-1\}$
$$\frac{\partial^p}{(\partial\xi)^{p-k}(\partial\xi^*)^k}f(z_0) \doteq \partial^p_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p)}f(z_0)$$
si $k = \sum_{j=1}^p \chi_{\{1\}}(\varepsilon_j)$, $\forall$ $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p) \in \{0,1\}^p$ tal que $0 < \sum_{j=1}^p \chi_{\{1\}}(\varepsilon_j) < p$. Finalmente
$$\frac{\partial^p}{(\partial\xi)^p}f(z_0) \doteq \partial^p_{(0,\ldots,0)}f(z_0) \text{ y } \frac{\partial^p}{(\partial\xi^*)^p}f(z_0) \doteq \partial^p_{(1,\ldots,1)}f(z_0).$$
Luego, por el Corolario 1.5.8, tenemos que
$$\begin{aligned} D^p_r(f)(z_0)(z_1,...,z_p) \;&=\; \frac{\partial^p}{(\partial\xi)^p}f(z_0)z_1z_2...z_p + \frac{\partial^p}{(\partial\xi)^{p-1}\partial\xi^*}f(z_0)(z_1...z_{p-1}z_p^* + ... + z_1^*z_2...z_p) + \\ &+\sum_{k=2}^{p-1}\frac{\partial^p}{(\partial\xi)^{p-k}(\partial\xi^*)^k}f(z_0)(z_1...z_{p-k}z^*_{p-k+1}...z^*_p + ... + z_1^*...z^*_{p-k}z_{p-k+1}...z_p) + \\ &+\frac{\partial^p}{(\partial\xi^*)^p}f(z_0)z_1^*z_2^*...z_p^*. \end{aligned}$$

1.6 Operadores $\mathbb{R}-$derivadas parciales y fórmula de Taylor para funciones $\mathbb{R}-$diferenciables

Finalmente hemos llegado a la última sección de este capítulo, donde definimos los *operadores* $\mathbb{R}-$ *derivadas parciales* y derivamos una generalización de la serie de Taylor compleja usual, junto con algunos casos particulares. Por último, probamos que toda función holomorfa es $\mathbb{R}-$diferenciable y que su derivada coincide con la $\mathbb{R}-$derivada definida en la sección 2.

Definición 1.6.1
Sean $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $C(U,\mathbb{C}) \doteq \{f : U \longrightarrow \mathbb{C} : \; f \text{ es continua en } U\}$. Para cada p y cada $k \in \{0, ..., p\}$ sea
$$\frac{\partial^p}{(\partial\xi)^{p-k}(\partial\xi^*)^k} : C^p_r(U,\mathbb{C}) \longrightarrow C(U,\mathbb{C})$$
el operador que a cada $f \in C^p_r(U,\mathbb{C})$ le hace corresponder la función definida en U por $z \mapsto \frac{\partial^p}{(\partial\xi)^{p-k}(\partial\xi^*)^k}f(z)$. A este operador lo llamamos "*operador* $\mathbb{R}-$ *derivada parcial con respecto a* ξ $(p-k)-$ *veces y con respecto a* ξ^* $k-$ *veces*".

Nota 1.6.2
Por la Definición anterior y la Proposición 1.5.13 tenemos que
$$\begin{aligned} \frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi)^{p+1}} \;&=\; \frac{\partial}{\partial\xi}\circ\frac{\partial^p}{(\partial\xi)^p}, \\ \frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi^*)^{p+1}} \;&=\; \frac{\partial}{\partial\xi^*}\circ\frac{\partial^p}{(\partial\xi^*)^p} \text{ y} \\ \frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi)^{p+1-k}(\partial\xi^*)^k} \;&=\; \frac{\partial}{\partial\xi}\circ\frac{\partial^p}{(\partial\xi)^{p-k}(\partial\xi^*)^k} = \frac{\partial}{\partial\xi^*}\circ\frac{\partial^p}{(\partial\xi)^{p+1-k}(\partial\xi^*)^{k-1}} \text{ para } k \in \{1,...,p\}. \end{aligned}$$

Proposición 1.6.3
Sean $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $A \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in U\}$, $f \in C_r^p(U,\mathbb{C})$ y $u_f, v_f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ dadas como en la Proposición 1.4.22. Si $h \in \mathbb{C}$ y $h_x, h_y \in \mathbb{R}$ dadas por $h = h_x + ih_y$ entonces

$$\left(h\frac{\partial^1}{\partial\xi} + h^*\frac{\partial^1}{\partial\xi^*}\right)^p (f)(x+iy) = ((h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^p(u_f) + i(h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^p(v_f))(x,y),\ \forall\ (x,y) \in A.$$

Demostración:
Sea $(x,y) \in A$ arbitrario y defino $z \doteq x + iy \in \mathbb{C}$. Hacemos inducción sobre p. Sea $p = 1$. Por el Corolario 1.2.8 y la Proposición 1.2.7 tenemos que

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial\xi} + h^*\frac{\partial}{\partial\xi^*}\right)(f)(z) &= h\frac{\partial f}{\partial\xi}(z) + h^*\frac{\partial f}{\partial\xi^*}(z)\\ &= D_r(f)(z)(h)\\ &= D_r(f)(z)(h_x + ih_y)\\ &= D_1(f)(z)h_x + D_2(f)(z)h_y\end{aligned}$$

donde $D_1(f)(z) \doteq D_1(u_f)(x,y) + iD_1(v_f)(x,y)$ y $D_2(f)(z) \doteq D_2(u_f)(x,y) + iD_2(v_f)(x,y)$. Esto es

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial\xi} + h^*\frac{\partial}{\partial\xi^*}\right)(f)(z) &= \left[D_1(u_f)(x,y) + iD_1(v_f)(x,y)\right]h_x + \left[D_2(u_f)(x,y) + iD_2(v_f)(x,y)\right]h_y\\ &= ((h_x D_1 + h_y D_2)(u_f) + i(h_x D_1 + h_y D_2)(v_f))(x,y).\end{aligned}$$

Sea $p \geq 2$ y supongamos cierta la Proposición para $p-1$. Sea $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(u) \doteq D_r^{p-1}(f)(u)(h,...,h),\ u \in U.$$

Definimos $g_1, g_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g_1(x,y) \doteq \operatorname{Re}(g(x+iy))$ y $g_2(x,y) \doteq \operatorname{Im}(g(x+iy))$ para cada $(x,y) \in A$. Por el Corolario 1.2.8 y por la hipótesis inductiva tenemos que

$$\begin{aligned}g(z) &= D_r^{p-1}f(z)(h,...,h)\\ &= \left(h\frac{\partial^1}{\partial\xi} + h^*\frac{\partial^1}{\partial\xi^*}\right)^{p-1}(f)(z)\\ &= ((h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^{p-1}(u_f) + i(h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^{p-1}(v_f))(x,y),\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}g_1(x,y) &= \operatorname{Re}(D_r^{p-1}(f)(z)(h,...,h)) = (h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^{p-1}(u_f)(x,y) \text{ y}\\ g_2(x,y) &= \operatorname{Im}(D_r^{p-1}(f)(z)(h,...,h)) = (h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^{p-1}(v_f)(x,y).\end{aligned}$$

Además por la Nota 1.6.2 y por lo ya probado para $p = 1$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial^1}{\partial\xi} + h^*\frac{\partial^1}{\partial\xi^*}\right)^p(f)(z) &= \left(\left(h\frac{\partial^1}{\partial\xi} + h^*\frac{\partial^1}{\partial\xi^*}\right) \circ \left(h\frac{\partial^1}{\partial\xi} + h^*\frac{\partial^1}{\partial\xi^*}\right)^{p-1}\right)(f)(z)\\ &= \left(h\frac{\partial^1}{\partial\xi} + h^*\frac{\partial^1}{\partial\xi^*}\right)(g)(z)\\ &= ((h_x D_1^1 + h_y D_2^1)(g_1) + i(h_x D_1^1 + h_y D_2^1)(g_2))(x,y).\end{aligned}$$

Reemplazando concluimos que

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial^1}{\partial\xi} + h^*\frac{\partial^1}{\partial\xi^*}\right)^p(f)(z) &= (h_x D_1^1 + h_y D_2^1)(h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^{p-1}(u_f)(x,y) + i\left[(h_x D_1^1 + h_y D_2^1)(h_x D_1^1 + h_y D_2^1)(v_f)(x,y)\right]\\ &= (h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^p(u_f)(x,y) + i(h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^p(v_f)(x,y). \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 1.6.4 (Fórmula de Taylor para funciones $\mathbb{R}-$diferenciables)
Sean $p \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f \in C_r^p(U, \mathbb{C})$ y $z = x + iy \in U$. Entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $B(z, \delta) \subset U$ y

$$f(z+h) - f(z) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{k} \frac{(h^*)^j h^{k-j}}{j!(k-j)!} \frac{\partial^k}{(\partial\xi)^{k-j} (\partial\xi^*)^j} (f)(z) + |h|^p \varepsilon(h)$$

con $h \in B(0, \delta)$ y $\varepsilon(h) \in [0, \varepsilon]$.

Demostración:
Sean A, u_f y v_f como en la Proposición 1.4.22. Entonces $f(x+iy) = u_f(x,y) + iv_f(x,y)$, $(x,y) \in A$. Por la Proposición 1.4.24 sabemos que u_f y v_f están en $C_r^p(A, \mathbb{R})$. Luego, por la Fórmula de Taylor para funciones diferenciables (consultar, por ejemplo, (8.14.3) pág. 190 de [2]), tenemos que dado $\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que $B((x,y), \delta) \subset A$, $\mathbf{h} \doteq (h_x, h_y) \in B((0,0), \delta)$ y

$$\begin{aligned} u_f(x+h_x, y+h_y) - u_f(x,y) &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} D^k(u_f)(x,y)(\overbrace{\mathbf{h}, ..., \mathbf{h}}^{p}) + \|\mathbf{h}\|^p \varepsilon_1(\mathbf{h}) \text{ con } \varepsilon_1(\mathbf{h}) \in \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ v_f(x+h_x, y+h_y) - v_f\,(x,y) &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} D^k(v_f)(x,y)(\overbrace{\mathbf{h}, ..., \mathbf{h}}^{p}) + \|\mathbf{h}\|^p \varepsilon_2(\mathbf{h}) \text{ con } \varepsilon_2(\mathbf{h}) \in \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right] \end{aligned}$$

Pero la Proposición 1.4.23 implica que

$$\begin{aligned} D^k(u_f)(x,y)(\mathbf{h}, ..., \mathbf{h}) &= (h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^k (u_f)(x,y) \\ D^k(v_f)(x,y)(\mathbf{h}, ..., \mathbf{h}) &= (h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^k (v_f)(x,y) \end{aligned}$$

para cada $k \in \{1, ..., p\}$. Luego

$$\begin{aligned} u_f(x+h_x, y+h_y) - u_f(x,y) &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \left(h_x D_1^1 + h_y D_2^1\right)^k (u_f)(x,y) + \|\mathbf{h}\|^p \varepsilon_1(\mathbf{h}) \\ v_f(x+h_x, y+h_y) - v_f(x,y) &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} (h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^k (v_f)(x,y) + \|\mathbf{h}\|^p \varepsilon_2(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Aplicando la Proposicón anterior con $h = h_x + ih_y$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= f((x+iy) + (h_x + ih_y)) - f(x+iy) \\ &= [u_f(x+h_x, y+h_y) - u_f(x,y)] + i\,[v_f(x+h_x, y+h_y) - v_f\,(x,y)] \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{1}{k!} \left((h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^k (u_f) + i(h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^k (v_f)\right)(x,y)\right] + \|\mathbf{h}\|^p (\varepsilon_1(\mathbf{h}) + \varepsilon_2(\mathbf{h})) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \left(h \frac{\partial^1}{\partial\xi} + h^* \frac{\partial^1}{\partial\xi^*}\right)^k (f)(x+iy) + \|\mathbf{h}\|^p (\varepsilon_1(\mathbf{h}) + \varepsilon_2(\mathbf{h})). \end{aligned}$$

Además $\left(h \frac{\partial^1}{\partial\xi} + h^* \frac{\partial^1}{\partial\xi^*}\right)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (h^*)^j h^{k-j} \frac{\partial^k}{(\partial\xi)^{k-j} (\partial\xi^*)^j}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (h^*)^j h^{k-j} \frac{\partial^k}{(\partial\xi)^{k-j} (\partial\xi^*)^j} (f)\,(z) + \|\mathbf{h}\|^p (\varepsilon_1(\mathbf{h}) + \varepsilon_2(\mathbf{h})) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} (h^*)^j h^{k-j} \frac{\partial^k}{(\partial\xi)^{k-j} (\partial\xi^*)^j} (f)\,(z) + \|\mathbf{h}\|^p (\varepsilon_1(\mathbf{h}) + \varepsilon_2(\mathbf{h})) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{k} \frac{(h^*)^j h^{k-j}}{j!(k-j)!} \frac{\partial^k}{(\partial\xi)^{k-j} (\partial\xi^*)^j} (f)(z) + |h|^p \varepsilon(h) \end{aligned}$$

con $\varepsilon(h) \in [0, \varepsilon]$. ■

Definición 1.6.5
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Decimos que "$f$ *es infinitamente* $\mathbb{R}-$*diferenciable en* U" si $f \in C_r^p(U, \mathbb{C})$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Si además, para cada $z \in U$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $B(z, \delta) \subset U$ y

$$f(z+h) - f(z) = \lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{k} \frac{(h^*)^j h^{k-j}}{j!(k-j)!} \frac{\partial^k}{(\partial \xi)^{k-j} (\partial \xi^*)^j} (f)(z)$$

con $h \in B(0, \delta)$, decimos que "f *es real analítica en* U".

Proposición 1.6.6
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $h_1 : U \longrightarrow \mathbb{C}$ y $h_2 : U \longrightarrow \mathbb{C}$ funciones $\mathbb{R}-$diferenciables en $z \in U$. Entonces $h_0 \doteq h_1 \cdot h_2$ es $\mathbb{R}-$diferenciable en z y se cumplen:

1. $D_r(h_0)(z) = h_1(z) D_r(h_2)(z) + h_2(z) D_r(h_1)(z)$
2. $\frac{\partial h_0}{\partial \xi}(z) = h_1(z) \frac{\partial h_2}{\partial \xi}(z) + h_2(z) \frac{\partial h_1}{\partial \xi}(z)$ y $\frac{\partial h_0}{\partial \xi^*}(z) = h_1(z) \frac{\partial h_2}{\partial \xi^*}(z) + h_2(z) \frac{\partial h_1}{\partial \xi^*}(z)$.

Demostración:
1. Queremos ver que $\exists\ L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}-$lineal tal que

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|h_0(z+h) - h_0(z) - L(h)|}{|h|} = 0.$$

Por hipótesis $\exists\ L_1, L_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{R}-$lineales tales que

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|h_1(z+h) - h_1(z) - L_1(h)|}{|h|} = 0 = \lim_{|h| \to 0} \frac{|h_2(z+h) - h_2(z) - L_2(h)|}{|h|}. \quad \textbf{(1.6.6.1)}$$

Consideramos $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$L(u) \doteq h_1(z) L_2(u) + h_2(z) L_1(u),\ u \in \mathbb{C}.$$

Notemos que, por ser h_2 continua, tenemos que

$$\lim_{|h| \to 0} |h_2(z+h)| = |h_2(z)|. \quad \textbf{(1.6.6.2)}$$

También, la $\mathbb{R}-$linealidad de L_1 implica que

$$\lim_{|h| \to 0} |L_1(h)| = 0. \quad \textbf{(1.6.6.3)}$$

Por ser h_2 $\mathbb{R}-$diferenciables en z resulta que

$$h_2(z+h) - h_2(z) = L_2(h) - \varepsilon(h)\,|h| \ \text{ con } \lim_{|h| \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Además, por Proposición 1.1.5 $\exists!\ \alpha$ y β en $\mathbb{C}$ tales que $L_2(u) = \alpha u + \beta u^*$, $\forall\ u \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\frac{|h_2(z+h) - h_2(z)|}{|h|} = \frac{|L_2(h) - \varepsilon(h)\,|h||}{|h|} = \frac{|\alpha h + \beta h^* - \varepsilon(h)\,|h||}{|h|} \leq |\alpha| + |\beta| + |\varepsilon(h)|,$$

con lo cual

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|h_2(z+h) - h_2(z)|}{|h|} \leq |\alpha| + |\beta|. \quad \textbf{(1.6.6.4)}$$

Teniendo en cuenta **(1.6.6.1)**, **(1.6.6.2)**, **(1.6.6.3)** y **(1.6.6.4)** resulta que

$$\begin{aligned}
& \lim_{|h|\to 0} \frac{|h_0(z+h)-h_0(z)-L(h)|}{|h|} \\
= & \lim_{|h|\to 0} \frac{|h_1(z+h)h_2(z+h)-h_1(z)h_2(z)-h_1(z)L_2(h)-h_2(z)L_1(h)|}{|h|} \\
= & \lim_{|h|\to 0} \frac{|h_1(z+h)h_2(z+h)-h_1(z)h_2(z)-h_1(z)L_2(h)-h_2(z)L_1(h)+h_1(z)h_2(z+h)-h_1(z)h_2(z+h)|}{|h|} \\
\leq & \lim_{|h|\to 0} \frac{|h_1(z)\left[h_2(z+h)-h_2(z)-L_2(h)\right]|}{|h|} + \lim_{|h|\to 0} \frac{|h_1(z+h)h_2(z+h)-h_2(z)L_1(h)-h_1(z)h_2(z+h)|}{|h|} \\
= & h_1(z)\cdot \lim_{|h|\to 0} \frac{|h_2(z+h)-h_2(z)-L_2(h)|}{|h|} + \lim_{|h|\to 0} \frac{|h_1(z+h)h_2(z+h)-h_2(z)L_1(h)-h_1(z)h_2(z+h)|}{|h|} \\
= & \lim_{|h|\to 0} \frac{|h_1(z+h)h_2(z+h)-h_2(z)L_1(h)-h_1(z)h_2(z+h)+L_1(h)h_2(z+h)-L_1(h)h_2(z+h)|}{|h|} \\
= & \lim_{|h|\to 0} \frac{|h_2(z+h)\left[h_1(z+h)-h_1(z)-L_1(h)\right]-h_2(z)L_1(h)+L_1(h)h_2(z+h)|}{|h|} \\
\leq & \lim_{|h|\to 0}|h_2(z+h)|\cdot \lim_{|h|\to 0} \frac{|h_1(z+h)-h_1(z)-L_1(h)|}{|h|} + \lim_{|h|\to 0}|L_1(h)|\cdot \lim_{|h|\to 0} \frac{|h_2(z+h)-h_2(z)|}{|h|} \\
= & 0.
\end{aligned}$$

2. Sea $h \in \mathbb{C}$ arbitrario. Por el Corolario 1.2.8 sabemos que

$$\begin{aligned}
D_r(h_0)(z)(h) &= \frac{\partial h_0}{\partial \xi}(z)h + \frac{\partial h_0}{\partial \xi^*}(z)h^*, \\
D_r(h_1)(z)(h) &= \frac{\partial h_1}{\partial \xi}(z)h + \frac{\partial h_1}{\partial \xi^*}(z)h^* \text{ y} \\
D_r(h_2)(z)(h) &= \frac{\partial h_2}{\partial \xi}(z)h + \frac{\partial h_2}{\partial \xi^*}(z)h^*.
\end{aligned}$$

Por esto y por la parte 1 tenemos que

$$\begin{aligned}
D_r(h_0)(z)(h) &= h_1(z)D_r(h_2)(z)(h) + h_2(z)D_r(h_1)(z)(h) \\
&= h_1(z)\left(\frac{\partial h_2}{\partial \xi}(z)h + \frac{\partial h_2}{\partial \xi^*}(z)h^*\right) + h_2(z)\left(\frac{\partial h_1}{\partial \xi}(z)h + \frac{\partial h_1}{\partial \xi^*}(z)h^*\right) \\
&= \left(h_1(z)\frac{\partial h_2}{\partial \xi}(z) + h_2(z)\frac{\partial h_1}{\partial \xi}(z)\right)h + \left(h_1(z)\frac{\partial h_2}{\partial \xi^*}(z) + h_2(z)\frac{\partial h_1}{\partial \xi^*}(z)\right)h^*.
\end{aligned}$$

La prueba se sigue entonces por la unicidad de la Proposición 1.1.5. ■

Corolario 1.6.7
Sean $h_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $h_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas por $h_1(z) \doteq z$ y $h_2(z) \doteq z^*$, $z \in \mathbb{C}$. Entonces $h_0 \doteq h_1 \cdot h_2$ es $\mathbb{R}-$diferenciable en $\mathbb{C}$ y además se cumplen

1. $D_r(h_1)(z)(h) = h$, $\forall\, z,\, h \in \mathbb{C}$
2. $D_r(h_2)(z)(h) = h^*$, $\forall\, z,\, h \in \mathbb{C}$
3. $D_r(h_0)(z)(h) = zh^* + z^*h$, $\forall\, z,\, h \in \mathbb{C}$
4. $\frac{\partial h_1}{\partial \xi}(z) = 1$ y $\frac{\partial h_1}{\partial \xi^*}(z) = 0$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$
5. $\frac{\partial h_2}{\partial \xi}(z) = 0$ y $\frac{\partial h_2}{\partial \xi^*}(z) = 1$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$
6. $\frac{\partial h_0}{\partial \xi}(z) = z^*$ y $\frac{\partial h_0}{\partial \xi^*}(z) = z$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$

Demostración:
Sean $z = x + iy$ y $h \in \mathbb{C}$ arbitrarios.
1. Como h_1 es $\mathbb{R}-$lineal y

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{h_1(z+h) - h_1(z) - h_1(h)}{|h|} = \lim_{|h|\to 0} \frac{z+h-z-h}{|h|} = 0$$

resulta, por la unicidad de la Proposición 1.2.3, que $D_r(h_1)(z) = h_1$. Lo cual implica que $D_r(h_1)(z)(h) = h$.
2. Como h_2 es $\mathbb{R}-$lineal y

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{h_2(z+h) - h_2(z) - h_2(h)}{|h|} = \lim_{|h|\to 0} \frac{(z+h)^* - z^* - h^*}{|h|} = 0$$

por unicidad tenemos que $D_r(h_2)(z) = h_2$, entonces $D_r(h_2)(z)(h) = h^*$.
3. Aplicando la parte 1 de la Proposición anterior y los dos incisos recién probados resulta que

$$D_r(h_0)(z)(h) = h_1(z)D_r(h_2)(z)(h) + h_2(z)D_r(h_1)(z)(h) = zh^* + z^*h.$$

4. Por ser h_1 $\mathbb{R}-$diferenciable en z tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial \xi}(z) &= \frac{D_1(u_{h_1})(x,y) + D_2(v_{h_1})(x,y)}{2} + i\frac{D_1(v_{h_1})(x,y) - D_2(u_{h_1})(x,y)}{2} \\ &= \frac{D_1(x) + D_2(y)}{2} + i\frac{D_1(y) - D_2(x)}{2} = 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^*}(z) &= \frac{D_1(u_{h_1})(x,y) - D_2(v_{h_1})(x,y)}{2} + i\frac{D_1(v_{h_1})(x,y) + D_2(u_{h_1})(x,y)}{2} \\ &= \frac{D_1(x) - D_2(y)}{2} + i\frac{D_1(y) + D_2(x)}{2} = 0. \end{aligned}$$

5. Lo probamos en la Proposición 1.2.9.
6. Por el inciso 2 del resultado anterior y por 4 y 5 de esta Proposición tenemos que

$$\frac{\partial h_0}{\partial \xi}(z) = h_1(z)\frac{\partial h_2}{\partial \xi}(z) + h_2(z)\frac{\partial h_1}{\partial \xi}(z) = z^* \text{ y } \frac{\partial h_0}{\partial \xi^*}(z) = h_1(z)\frac{\partial h_2}{\partial \xi^*}(z) + h_2(z)\frac{\partial h_1}{\partial \xi^*}(z) = z. \blacksquare$$

Notación 1.6.8
Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $M \doteq \left\{|z|^2 : z \in U\right\}$ y $p \in \mathbb{N}$. Denotamos

$$\begin{aligned} C_r^\infty(U,\mathbb{C}) &\doteq \cap_{p\in\mathbb{N}} C_r^p(U,\mathbb{C}), \\ C_{r,|.|}^\infty(U,\mathbb{C}) &\doteq \left\{f \in C_r^\infty(U,\mathbb{C}) : \exists\, g : M \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } g(|z|^2) = f(z),\ z \in U\right\} \text{ y} \\ C_{r,|.|}^p(U,\mathbb{C}) &\doteq \left\{f \in C_r^p(U,\mathbb{C}) : \exists\, g : M \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } g(|z|^2) = f(z),\ z \in U\right\}. \end{aligned}$$

Lema 1.6.9
Sea $f \in C_{r,|.|}^\infty(U,\mathbb{C})$. Entonces
1. Existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_{r,|.|}^\infty(U,\mathbb{C})$ tal que $\frac{\partial^p}{(\partial\xi)^p}(f)(z) = f_p(z)\cdot(z^*)^p$, $\forall\, z \in U$ y $\forall\, p \in \mathbb{N}$.

2. Existe una sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_{r,|.|}^\infty(U,\mathbb{C})$ tal que $\frac{\partial^p}{(\partial\xi^*)^p}(f)(z) = g_p(z)\cdot z^p$, $\forall\, z \in U$ y $\forall\, p \in \mathbb{N}$.

3. Existe una sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C_{r,|.|}^\infty(U,\mathbb{C})$ tal que $\frac{\partial^2}{(\partial\xi)(\partial\xi^*)}(F_n) = F_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ con $F_0 \doteq f$.

Demostración:

Como $f \in C^{\infty}_{r,|.|}(U,\mathbb{C})$ entonces $\exists\ g : M \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $g \circ h_0 = f$; donde $h_0 = h_1 \cdot h_2$, con h_0, h_1 y h_2 definidas en el Corolario anterior. También

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi}(f) &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi}(g \circ h_0)\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(h_0) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}(g \circ h_0)\right) \cdot h_2 \\
\frac{\partial}{\partial \xi^*}(f) &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi^*}(g \circ h_0)\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^*}(h_0) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^*}(g \circ h_0)\right) \cdot h_1,
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(f)(z) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}(g \circ h_0)\right)(z) \cdot z^* \text{ y } \frac{\partial}{\partial \xi^*}(f)(z) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^*}(g \circ h_0)\right)(z) \cdot z, \forall\ z \in U\ .$$

Luego, tomando $f_1 \doteq \frac{\partial}{\partial \xi}(g \circ h_0)$ y $g_1 \doteq \frac{\partial}{\partial \xi^*}(g \circ h_0)$ resulta que f_1 y g_1 están en $C^{\infty}_{r,|.|}(U,\mathbb{C})$ y

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(f)(z) = f_1(z) \cdot z^* \text{ y } \frac{\partial}{\partial \xi^*}(f)(z) = g_1(z) \cdot z, \forall\ z \in U.$$

Aplicando lo probado hasta ahora y el Corolario anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(f) &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial}{\partial \xi^*}(f)\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}(g_1 \cdot h_1) = \frac{\partial}{\partial \xi}(g_1) \cdot h_1 + g_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(h_1) \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial}{\partial \xi^*}(g \circ h_0)\right) \cdot h_1 + g_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(h_1) \\
&= \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(g \circ h_0)\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi}(h_0)\right)\right] \cdot h_1 + g_1 \\
&= \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(g \circ h_0)\right) \cdot \left(h_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(h_2) + h_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(h_1)\right)\right] \cdot h_1 + g_1 \\
&= \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(g \circ h_0)\right) \cdot (h_1 \cdot 0 + h_2 \cdot 1)\right] \cdot h_1 + g_1 \\
&= \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(g \circ h_0)\right) \cdot h_2\right] \cdot h_1 + g_1 = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(g \circ h_0)\right) \cdot h_0 + g_1.
\end{aligned}$$

Luego si definimos $F_1 \doteq \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(g \circ h_0)\right) \cdot h_0 + g_1$ entonces

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(F_0) = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(f) = F_1$$

y $F_1 \in C^{\infty}_{r,|.|}(U,\mathbb{C})$. Así queda probado 1, 2 y 3 para el caso $p = 1$. De lo hecho, sigue fácilmente el proceso iterativo para 1, 2 y 3. ■

Corolario 1.6.10
Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto tal que $0 \in U$ y sea $f \in C^{\infty}_{r,|.|}(U,\mathbb{C})$. Entonces para cada $p \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\frac{\partial^p}{(\partial \xi^*)^k (\partial \xi)^{p-k}}(f)(0) = 0$$

si $k \neq p - k$ y $k \in \{0, ..., p\}$.

Demostración:
Procedemos haciendo inducción sobre p. Si $p = 1$ queremos ver que

$$\frac{\partial}{(\partial \xi^*)^k (\partial \xi)^{1-k}}(f)(0) = 0 \text{ para } k = 0, 1.$$

Por el Lema anterior existen f_1 y g_1 en $C^{\infty}_{r,|.|}(U,\mathbb{C})$ tales que $\frac{\partial}{\partial\xi}(f)(z) = f_1(z)\cdot z^*$ y $\frac{\partial}{\partial\xi^*}(f)(z) = g_1(z)\cdot z$, $\forall\ z \in U$. En particular

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(f)(0) = 0 = \frac{\partial}{\partial\xi^*}(f)(0).$$

Supongamos por hipótesis inductiva que el Corolario vale para p y probemos que es cierto para $p+1$. Esto es

$$\frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi^*)^m(\partial\xi)^{p+1-m}}(f)(0) = 0 \text{ si } m \neq (p+1)-m \text{ y } m \in \{0,...,p+1\}\,. \quad \textbf{(1.6.10.1)}$$

Caso $m=0$:
Por la parte 1 del Lema anterior sabemos que $\exists\ f_{p+1} \in C^{\infty}_{r,|.|}(U,\mathbb{C})$ tal que

$$\frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi)^{p+1}}(f)(z) = f_{p+1}(z)\cdot(z^*)^{p+1},\ \forall\ z \in U.$$

En particular $\frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi)^{p+1}}(f)(0) = 0$, luego

$$\frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi^*)^m(\partial\xi)^{p+1-m}}(f)(0) = \frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi)^{p+1}}(f)(0) = 0.$$

Caso $m = p+1$:
Por la parte 2 del Lema anterior $\exists\ g_{p+1} \in C^{\infty}_{r,|.|}(U,\mathbb{C})$ tal que

$$\frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi^*)^{p+1}}(f)(z) = g_{p+1}(z)\cdot(z)^{p+1},\ \forall\ z \in U.$$

En particular $\frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi^*)^{p+1}}(f)(0) = 0$, luego

$$\frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi^*)^m(\partial\xi)^{p+1-m}}(f)(0) = \frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi^*)^{p+1}}(f)(0) = 0.$$

Caso $m \in \{1,...,p\}$:
Si $m \neq p-m$, por la Nota 1.6.2 y por la hipótesis inductiva tenemos que

$$\frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi^*)^m(\partial\xi)^{p+1-m}}(f)(0) = \frac{\partial}{\partial\xi}\circ\frac{\partial^{p}}{(\partial\xi^*)^m(\partial\xi)^{p-m}}(f)(0) = \frac{\partial}{\partial\xi}(0) = 0.$$

Si $m = p-m$ entonces $p = 2m$. Luego

$$\frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi^*)^m(\partial\xi)^{p+1-m}}(f)(0) = \frac{\partial^{2m+1}}{(\partial\xi^*)^m(\partial\xi)^{m+1}}(f)(0) = \frac{\partial}{\partial\xi}\circ\frac{\partial^{2m}}{(\partial\xi^*)^m(\partial\xi)^{m}}(f)(0).$$

Por el inciso 1 del Lema sabemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^*\partial\xi}(f) \in C^{\infty}_{r,|.|}(U,\mathbb{C}),$$

con lo cual

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^*\partial\xi}\right)^m(f) = \frac{\partial^{2m}}{(\partial\xi^*)^m(\partial\xi)^m}(f) \in C^{\infty}_{r,|.|}(U,\mathbb{C}).$$

Aplicando nuevamente la parte 2 del Lema, con $F \doteq \frac{\partial^{2m}}{(\partial\xi^*)^m(\partial\xi)^m}(f)$, resulta que $\exists\ f_1 \in C^{\infty}_{r,|.|}(U,\mathbb{C})$ tal que $\frac{\partial}{\partial\xi}(F)(z) = f_1(z)\cdot z^*$, $\forall\ z \in U$. Por lo tanto $\frac{\partial}{\partial\xi}(F)(0) = 0$, obteniendo así que

$$\frac{\partial^{p+1}}{(\partial\xi^*)^m(\partial\xi)^{p+1-m}}(f)(0) = 0.$$

Finalmente queda probado **(1.6.10.1)**, y con ello el Corolario. ■

Corolario 1.6.11
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto tal que $0 \in U$, $p \in \mathbb{N}$ y $f \in C^{2p}_{r,|.|}(U,\mathbb{C})$. Entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $B(0,\delta) \subset U$ y

$$f(h) - f(0) = \sum_{k=1}^{p} \frac{|h|^{2k}}{4^k (k!)^2} \Delta^k(f)(0) + |h|^{2p} \varepsilon(h),$$

con $h \in B(0,\delta)$, $\varepsilon(h) \in [0,\varepsilon]$ y

$$\Delta(f)(z) \doteq 4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\xi^*}(f)(z) = 4\frac{\partial^2}{\partial\xi^*\partial\xi}(f)(z),\ z \in U.$$

El polinomio diferencial Δ es conocido como el "*operador de Laplace*" y juega un rol crucial en el análisis de funciones armónicas.

Demostración:
Por el Teorema 1.6.4, dado $\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que $B(0,\delta) \subset U$ y

$$f(h) - f(0) = \sum_{k=1}^{2p} \sum_{j=0}^{k} \frac{(h^*)^j h^{k-j}}{j!(k-j)!} \frac{\partial^k}{(\partial\xi)^{k-j} (\partial\xi^*)^j}(f)(0) + |h|^{2p} \varepsilon(h)$$

con $h \in B(0,\delta)$ y $\varepsilon(h) \in [0,\varepsilon]$. También sabemos, por el Corolario anterior, que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^k}{(\partial\xi^*)^j (\partial\xi)^{k-j}}(f)(0) = 0 \text{ si } j \neq k-j \text{ y } j \in \{0,...,k\}.$$

Notemos que si $j = k - j$ entonces $k = 2j$. Luego dado $\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que $B(0,\delta) \subset U$ y

$$f(h) - f(0) = \sum_{j=1}^{p} \frac{(h^*)^j h^j}{(j!)^2} \frac{\partial^{2j}}{(\partial\xi)^j (\partial\xi^*)^j}(f)(0) + |h|^{2p} \varepsilon(h)$$

con $h \in B(0,\delta)$ y $\varepsilon(h) \in [0,\varepsilon]$. Además $\Delta(f)(0) = 4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\xi^*}(f)(0)$, lo cual implica que $\Delta^j(f)(0) = 4^j \frac{\partial^{2j}}{(\partial\xi)^j (\partial\xi^*)^j}(f)(0)$, es decir $\frac{\partial^{2j}}{(\partial\xi)^j (\partial\xi^*)^j}(f)(0) = \frac{\Delta^j(f)(0)}{4^j}$. Reemplazando resulta que dado $\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que $B(0,\delta) \subset U$ y

$$f(h) - f(0) = \sum_{j=1}^{p} \frac{|h|^{2j}}{(j!)^2} \frac{\Delta^j(f)(0)}{4^j} + |h|^{2p} \varepsilon(h)$$

con $h \in B(0,\delta)$ y $\varepsilon(h) \in [0,\varepsilon]$. ■

Proposición 1.6.12
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto; $f \in C^2_r(U,\mathbb{C})$ y A, u_f , v_f definidos como en la Proposición 1.4.22. Entonces

$$\Delta(f)(x+iy) = (D_1^2 + D_2^2)(u_f)(x,y) + i(D_1^2 + D_2^2)(v_f)(x,y),\ \forall\ (x+iy) \in U.$$

Demostración:
Dado $h = h_x + ih_y$ con h_x y h_y reales, se sigue por la Proposición 1.6.3 con $p = 2$, que

$$\left(h\frac{\partial^1}{\partial\xi} + h^* \frac{\partial^1}{\partial\xi^*} \right)^2 (f) = (h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^2(u_f) + i(h_x D_1^1 + h_y D_2^1)^2(v_f).$$

Luego

$$\begin{aligned} & h^2 \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(f) + (h^*)^2 \frac{\partial^2}{(\partial\xi^*)^2}(f) + 2hh^* \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\xi^*}(f) \\ = \quad & h_x^2 D_1^2(u_f) + h_y^2 D_2^2(u_f) + 2h_x h_y D_1 D_2(u_f) + i\left[h_x^2 D_1^2(v_f) + h_y^2 D_2^2(v_f) + 2h_x h_y D_1 D_2(v_f)\right]. \end{aligned}$$

Si $h_x \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $h_y = 0$ entonces $h = h_x = h^*$, con lo cual

$$h_x^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(f) + \frac{\partial^2}{(\partial \xi^*)^2}(f) + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(f) \right) = h_x^2 (D_1^2(u_f) + iD_1^2(v_f)),$$

es decir

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(f) + \frac{\partial^2}{(\partial \xi^*)^2}(f) + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(f) = D_1^2(u_f) + iD_1^2(v_f). \quad \textbf{(1.6.12.1)}$$

Si ahora $h_x = 0$ y $h_y \in \mathbb{R} - \{0\}$ entonces $h = ih_y$, $h^* = -ih_y$, $h^2 = -h_y^2$, $(h^*)^2 = -{h_y}^2$ y $hh^* = h_y^2$. Por lo que

$$h_y^2 \left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(f) - \frac{\partial^2}{(\partial \xi^*)^2}(f) + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(f) \right) = h_y^2 (D_2^2(u_f) + iD_2^2(v_f)),$$

es decir

$$-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(f) - \frac{\partial^2}{(\partial \xi^*)^2}(f) + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(f) = D_2^2(u_f) + iD_2^2(v_f). \quad \textbf{(1.6.12.2)}$$

Efectuando la operación suma entre **(1.6.12.1)** y **(1.6.12.2)** obtenemos que

$$4\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(f) = D_1^2(u_f) + D_2^2(u_f) + i(D_1^2(v_f) + D_2^2(v_f)) = (D_1^2 + D_2^2)(u_f) + i(D_1^2 + D_2^2)(v_f).$$

Se sigue por la definición de $\Delta(f)$ que

$$\Delta(f)(x+iy) = 4\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(f)(x+iy) = (D_1^2 + D_2^2)(u_f)(x,y) + i(D_1^2 + D_2^2)(v_f)(x,y), \; \forall \; (x+iy) \in U. \; \blacksquare$$

Nota 1.6.13 (Operadores $\mathbb{R}-$derivadas parciales.)
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $A \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+iy \in U\right\}$, $\mathcal{F}(U,\mathbb{C}) \doteq \{f : U \longrightarrow \mathbb{C}\}$ y $\mathcal{F}(A,\mathbb{R}) \doteq \{f : A \longrightarrow \mathbb{R}\}$. Para cada $f \in \mathcal{F}(U,\mathbb{C})$ sean $u_f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $v_f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$u_f(x,y) \doteq \mathrm{Re}(f(x+iy)), \; v_f(x,y) \doteq \mathrm{Im}(f(x+iy))$$

para todo $x+iy \in U$. También sean:

1. $I_2 : \{0,1\} \longrightarrow \{1,*\}$ la función definida por $I_2(0) = 1$ y $I_2(1) = *$
2. $p \in \mathbb{N}$
3. $I_*^p : \{1,2,...,2^p\} \longrightarrow \{1,*\}^p$ dada por $I_*^p(j) = (I_2(\varepsilon_p),...,I_2(\varepsilon_1))$ si $(\varepsilon_p,...,\varepsilon_1) = I_0^p(j)$, $j \in \{1,2,...,2^p\}$
4. $DP^1(A,\mathbb{R}) \doteq \{f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) : \exists \; D_1(f)(x,y)$ y $D_2(f)(x,y), \; \forall \; (x,y) \in A\}$
5. $DP^1(U,\mathbb{C}) \doteq \left\{f \in \mathcal{F}(U,\mathbb{C}) : u_f \text{ y } v_f \text{ están en } DP^1(A,\mathbb{R}) \right\}$
6. $\partial_1 : DP^1(U,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{F}(U,\mathbb{C})$ definida por

$$\partial_1(f) \doteq \frac{D_1(u_f) + D_2(v_f)}{2} + i\frac{D_1(v_f) - D_2(u_f)}{2}$$

(se llama "*operador* $\mathbb{R} -$ *derivada parcial de primer orden*").

7. $\partial_* : DP^1(U,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{F}(U,\mathbb{C})$ dada por

$$\partial_*(f) \doteq \frac{D_1(u_f) - D_2(v_f)}{2} + i\frac{D_1(v_f) + D_2(u_f)}{2}$$

(se llama "*operador* $\mathbb{R}-$ *derivada parcial conjugada de primer orden*")

8. $DP^2(A,\mathbb{R}) \doteq \{f \in DP^1(A,\mathbb{R}) : \exists\ D_1(D_1(f))(x,y),\ D_2(D_1(f))(x,y),\ D_1(D_2(f))(x,y) \text{ y } D_2(D_2(f))(x,y),\ \forall\ (x,y) \in A\}$

9. $DP^2(U,\mathbb{C}) \doteq \{f \in DP^1(U,\mathbb{C}) : \partial_1(f) \text{ y } \partial_*(f) \text{ están en } DP^1(U,\mathbb{C})\}$.

Notemos que

$$u_{\partial_1(f)} = \frac{D_1(u_f)+D_2(v_f)}{2},\ u_{\partial_*(f)} = \frac{D_1(u_f)-D_2(v_f)}{2},\ v_{\partial_1(f)} = \frac{D_1(v_f)-D_2(u_f)}{2} \text{ y } v_{\partial_*(f)} = \frac{D_1(v_f)+D_2(u_f)}{2}.$$

Luego, si $\partial_1(f)$ y $\partial_*(f)$ están en $DP^1(U,\mathbb{C})$, entonces u_f y v_f están en $DP^2(A,\mathbb{R})$. Sean:

$\partial_{(1,1)} : DP^2(U,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{F}(U,\mathbb{C})$ dada por $\partial_{(1,1)}(f) \doteq \partial_1(\partial_1(f))$, $f \in DP^2(U,\mathbb{C})$.

$\partial_{(1,*)} : DP^2(U,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{F}(U,\mathbb{C})$ dada por $\partial_{(1,*)}(f) \doteq \partial_1(\partial_*(f))$, $f \in DP^2(U,\mathbb{C})$.

$\partial_{(*,1)} : DP^2(U,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{F}(U,\mathbb{C})$ dada por $\partial_{(*,1)}(f) \doteq \partial_*(\partial_1(f))$, $f \in DP^2(U,\mathbb{C})$.

$\partial_{(*,*)} : DP^2(U,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{F}(U,\mathbb{C})$ dada por $\partial_{(*,*)}(f) \doteq \partial_*(\partial_*(f))$, $f \in DP^2(U,\mathbb{C})$.

Al conjunto $\{\partial_{(1,1)}, \partial_{(1,*)}, \partial_{(*,1)}, \partial_{(*,*)}\}$ lo llamamos "*operadores* $\mathbb{R}-$ *derivadas parciales de orden* 2".

Definimos ahora $DP^p(U,\mathbb{C})$ y los operadores $\mathbb{R}-$derivadas parciales de orden p, para $p \geq 3$, por inducción.

$$DP^p(U,\mathbb{C}) \doteq \left\{f \in DP^{p-1}(U,\mathbb{C}) : \partial_{I_*^{p-1}(j)}(f) \in DP^1(U,\mathbb{C}),\ \forall\ j \in \{1,...,2^{p-1}\}\right\}.$$

Denotamos $I_*^p(j) = \left(1, I_*^{p-1}(j)\right)$ y $I_*^p\left(2^{p-1}+j\right) = \left(*, I_*^{p-1}(j)\right)$ para $j \in \{1,...,2^{p-1}\}$. Definimos entonces

$$\partial_{I_*^p(j)}(f) \doteq \partial_1\left(\partial_{I_*^{p-1}(j)}(f)\right) \text{ y } \partial_{I_*^p(2^{p-1}+j)}(f) \doteq \partial_*\left(\partial_{I_*^{p-1}(j)}(f)\right),$$

para $f \in DP^p(U,\mathbb{C})$ y $j \in \{1,...,2^{p-1}\}$. Al conjunto

$$\left\{\partial_{I_*^p(j)} : j \in \{1,2,...,2^{p-1}\}\right\}$$

lo llamamos "*operadores* $\mathbb{R}-$ *derivadas parciales de orden* j".
No es es difícil ver que si $f \in C_r^p(U,\mathbb{C})$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial^p}{(\partial\xi)^p}(f) &= \partial_{(1,...,1)}(f),\\ \frac{\partial^p}{(\partial\xi^*)^p}(f) &= \partial_{(*,...,*)}(f)\end{aligned}$$

y para $k \in \{1,...,p-1\}$

$$\frac{\partial^p}{(\partial\xi)^{p-k}(\partial\xi^*)^k}(f) = \partial_{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_p)}(f)$$

si $k = \sum_{i=1}^p \chi_{\{*\}}(\varepsilon_i)\ \forall\ (\varepsilon_1,...,\varepsilon_p) \in \{1,*\}^p$ tal que $0 < \sum_{i=1}^p \chi_{\{*\}}(\varepsilon_i) < p$.

Notemos que $DP^p(U,\mathbb{C}) \subset DP^{p-1}(U,\mathbb{C})$ para todo $p \geq 2$ entero.

Nota 1.6.14
Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Entonces f es derivable en z_0, es decir $\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ y escribimos

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}.$$

Luego

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f^{'}(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - f^{'}(z_0)h}{h},$$

lo cual implica que

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - f^{'}(z_0)h}{|h|} = 0.$$

Por lo tanto f es $\mathbb{R}-$diferenciable en z_0 y $D_r(f)(z_0) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ está dada por $D_r(f)(z_0)(h) = f^{'}(z_0)h$, $\forall\ h \in \mathbb{C}$. Como f es holomorfa en z_0 entonces se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, esto es

$$\begin{array}{rcl} D_1(u_f)(x_0, y_0) & = & D_2(v_f)(x_0, y_0) \\ D_2(u_f)(x_0, y_0) & = & -D_1(v_f)(x_0, y_0) \end{array}$$

donde $u_f \doteq \mathrm{Re}(f)$ y $v_f \doteq \mathrm{Im}(f)$. Luego

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z_0) = \frac{D_1(u_f)(x_0, y_0) - D_2(v_f)(x_0, y_0)}{2} + i \frac{D_1(v_f)(x_0, y_0) + D_2(u_f)(x_0, y_0)}{2} = 0$$

y, por el Corolario 1.2.8, resulta que

$$f^{'}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(z_0).$$

Por la Proposición 1.1.7 sabemos que existe una correspondencia uno a uno entre funciones $\mathbb{C}-$ lineales y el cuerpo de los complejos, por lo que la derivada en un punto se define como un número en vez de como una función $\mathbb{C}-$lineal. Por lo tanto tenemos que

$$D_r(f)(z_0) = f^{'}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(z_0).$$

2 Variables aleatorias con valores en $\mathbb{C}$

En esta sección introducimos el concepto de *variable aleatoria compleja*. Explicamos que la distribución de probabilidad y la densidad de dicha variable deben ser interpretadas como la distribución y la densidad conjunta de sus partes real e imaginaria. Además, definimos la *esperanza* de una variable aleatoria compleja y su *función característica*.

2.1 Elementos básicos

Sea $I_c : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $I_c(x,y) \doteq x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Claramente I_c es biyectiva. Sea $\mathcal{B}_2$ la $\sigma-$álgebra de Borel de $\mathbb{R}^2$ y definimos

$$\sigma(\mathbb{C}) \doteq \{I_c(B) : B \in \mathcal{B}_2\}.$$

Observación 2.1.1
Sean X e Y dos conjuntos, $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una $\sigma-$álgebra sobre X. Entonces $f(\mathcal{F}) \doteq \{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$ es una $\sigma-$álgebra sobre Y.

Demostración:
Puesto que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ entonces $f(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{F}$ arbitrario, luego $A^c \in \mathcal{F}$ y, por biyectividad, $f(A^c) = f(A)^c$. Esto implica que $f(A)^c \in f(\mathcal{F})$. Por último sea $\{f(A_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en $f(\mathcal{F})$. Como $\mathcal{F}$ es $\sigma-$álgebra y $A_i \in \mathcal{F}\ \forall\ i \in \mathbb{N}$ entonces $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$. Además, por ser f biyectiva, $f(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \cup_{i\in\mathbb{N}} f(A_i)$. Por lo tanto $\cup_{i\in\mathbb{N}} f(A_i) \in f(\mathcal{F})$. $\blacksquare$

Proposición 2.1.2
Se cumplen:
1. $\sigma(\mathbb{C})$ es una $\sigma-$álgebra de $\mathbb{C}$, que llamamos "*$\sigma-$ álgebra de Borel de* $\mathbb{C}$".
2. I_c es $(\mathcal{B}_2, \sigma(\mathbb{C}))-$biyectiva y bimedible.

Demostración:
1. Se obtiene inmediatamente por la Observación anterior.
2. Sea $A \in \sigma(\mathbb{C})$ arbitrario. Por definición $\exists\ B \in \mathcal{B}_2$ tal que $A = I_c(B)$, luego $I_c^{-1}(A) = I_c^{-1}(I_c(B)) = B \in \mathcal{B}_2$. Además, si $B \in \mathcal{B}_2$ entonces $I_c(B) \in \sigma(\mathbb{C})$. Por lo tanto I_c es $(\mathcal{B}_2, \sigma(\mathbb{C}))-$bimedible.$\blacksquare$

Notación 2.1.3
Sean $(\Omega_1, \sigma(\Omega_1))$ y $(\Omega_2, \sigma(\Omega_2))$ dos espacios medibles y sea $T : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una función biyectiva y bimedible. Luego $\sigma(\Omega_1) = \left\{T^{-1}(A) : A \in \sigma(\Omega_2)\right\}$ y $\sigma(\Omega_2) = \{T(B) : B \in \sigma(\Omega_1)\}$. Sea μ una medida sobre $(\Omega_1, \sigma(\Omega_1))$ y sea $\mu(T) : \sigma(\Omega_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(T)(A) \doteq \mu(T^{-1}(A)),\ A \in \sigma(\Omega_2).$$

<u>Afirmación:</u> $\mu(T)$ es una medida sobre $(\Omega_2, \sigma(\Omega_2))$.

<u>Demostración:</u>

a. Como μ es una medida sobre $(\Omega_1, \sigma(\Omega_1))$ entonces $\mu(B) \geq 0\ \forall\ B \in \sigma(\Omega_1)$, esto es $\mu(T)(A) = \mu(T^{-1}(A)) \geq 0$, $\forall\ A \in \sigma(\Omega_2)$.

b. $\mu(T)(\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$.

c. Sea $\{T(B_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \sigma(\Omega_2)$ tal que $T(B_i) \cap T(B_j) = \emptyset$, $\forall\ i \neq j$ y $\cup_{i\in\mathbb{N}} T(B_i) \in \sigma(\Omega_2)$. Por ser T biyectiva tenemos que $T(B_i \cap B_j) = T(B_i) \cap T(B_j) = \emptyset\ \forall\ i \neq j$, con lo cual $B_i \cap B_j = \emptyset\ \forall\ i \neq j$. Además, puesto que $B_i \in \sigma(\Omega_1)$ para cada i y $\sigma(\Omega_1)$ es $\sigma-$álgebra, $\cup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \sigma(\Omega_1)$. Luego $\mu(\cup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i)$, pues μ es una medida. Finalmente

$$\mu(T)(\cup_{i\in\mathbb{N}} T(B_i)) = \mu(T^{-1}(\cup_{i\in\mathbb{N}} T(B_i))) = \mu(\cup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(T^{-1}(T(B_i))) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(T)(T(B_i)). \blacksquare$$

Más aún, si μ es una probabilidad, entonces $\mu(T)$ también pues $\mu(T)(\Omega_2) = \mu(T^{-1}(\Omega_2)) = \mu(\Omega_1) = 1$.

Definición 2.1.4
Sea $(\Omega, \sigma(\Omega))$ un espacio medible. Decimos que "$Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *es una variable aleatoria con valores en* $\mathbb{C}$", y denotamos Z es $\mathbb{C} - v.a.$, si Z es $(\sigma(\Omega), \sigma(\mathbb{C}))-$medible.

Proposición 2.1.5
Sean $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una $\mathbb{C} - v.a.$, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $X(\omega) \doteq \mathrm{Re}(Z(\omega))$ e $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $Y(\omega) \doteq \mathrm{Im}(Z(\omega))$ para cada $\omega \in \Omega$. Entonces (X, Y) es un vector aleatorio.

Demostración:
Queremos ver que X e Y son variables aleatorias, es decir,

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \sigma(\Omega),\ \forall\ x \in \mathbb{R} \text{ y } \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\} \in \sigma(\Omega),\ \forall\ y \in \mathbb{R}.$$

Sean x, $y \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Como Z es $(\sigma(\Omega), \sigma(\mathbb{C}))-$medible entonces $Z^{-1}(I_c(B)) \in \sigma(\Omega)$, $\forall\ B \in \mathcal{B}_2$. En particular $Z^{-1}(I_c((-\infty, x] \times \mathbb{R}))$ y $Z^{-1}(I_c(\mathbb{R} \times (-\infty, y]))$ están en $\sigma(\Omega)$. Pero

$$\begin{aligned} Z^{-1}(I_c((-\infty, x] \times \mathbb{R})) &= \{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in I_c((-\infty, x] \times \mathbb{R})\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \mathrm{Re}(Z(\omega)) \in (-\infty, x] \wedge \mathrm{Im}(Z(\omega)) \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}. \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos que $Z^{-1}(I_c(\mathbb{R} \times (-\infty, y])) = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\}$. Queda probada la Proposición. ■

Notación 2.1.6
Sean $P \in Prob(\Omega, \sigma(\Omega))$, $P_Z \in Prob(\mathbb{C}, \sigma(\mathbb{C}))$ y $P_{(X,Y)} \in Prob(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2)$ las distribuciones de Z y (X, Y) respectivamente.

Nota 2.1.7
Es sencillo ver que $P_Z = P_{(X,Y)} \circ I_c^{-1}$ y $P_{(X,Y)} = P_Z \circ I_c$.

Notación 2.1.8
Denotamos:

$$R_{\leq}(x, y) \doteq \left\{(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2 : \overline{x} \leq x \wedge \overline{y} \leq y\right\} \text{ para cada } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ y } R(z) \doteq I_c(R_{\leq}(x, y) \text{ para cada } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Sean $\mu \in Prob(\mathbb{C}, \sigma(\mathbb{C}))$ y $\nu \in Prob(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2)$. Definimos $F_\mu : \mathbb{C} \longrightarrow [0, 1]$ y $F_\nu : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1]$ por

$$\begin{aligned} F_\mu(z) &\doteq \mu(R(z)),\ z \in \mathbb{C} \\ F_\nu(x, y) &\doteq \nu(R_{\leq}(x, y)),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Proposición 2.1.9
Sea λ_2 la medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2)$. Se cumplen:
1. $F_{P_Z}(z) = F_{P_{(X,Y)}}(x, y)$, $\forall\ z = x + iy \in \mathbb{C}$.
2. Si $P_{(X,Y)}$ tiene una λ_2-densidad, $f_{(X,Y)}$, entonces P_Z admite una $\lambda_2(I_c)-$densidad dada por

$$f_Z(z) \doteq f_{(X,Y)}(x, y),\ \forall\ z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Demostración:
1. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ arbitrario. Por definición y por la Nota 2.1.7 tenemos que

$$F_{P_Z}(z) \doteq P_Z(R(z)) = P_Z(I_c(R_{\leq}(x, y))) = P_{(X,Y)}(R_{\leq}(x, y)) = F_{P_{(X,Y)}}(x, y).$$

2. Notemos que para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$ vale que

$$f_Z(z) = f_{(X,Y)}(x, y) = f_{(X,Y)}(I_c^{-1}(z)) = \left(f_{(X,Y)} \circ I_c^{-1}\right)(z),$$

con lo cual $f_Z = f_{(X,Y)} \circ I_c^{-1}$, es decir $f_{(X,Y)} = f_Z \circ I_c$. Luego para cada $B \in \mathcal{B}_2$ tenemos que

$$P_Z(Z \in I_c(B)) = P_{(X,Y)}((X,Y) \in B) = \int_B f_{(X,Y)} d\lambda_2 = \int_B (f_Z \circ I_c) d\lambda_2 = \int_{I_c(B)} f_Z d\lambda_2(I_c).$$

Queda entonces culminada la prueba. ■

Proposición 2.1.10
Supongamos que existen $D_1^2\left(F_{P_{(X,Y)}}\right)$, $D_1D_2\left(F_{P_{(X,Y)}}\right)$ y $D_2^2\left(F_{P_{(X,Y)}}\right)$ y que $D_1D_2\left(F_{P_{(X,Y)}}\right) = D_2D_1\left(F_{P_{(X,Y)}}\right)$. Entonces

1. $f_{(X,Y)} = D_1D_2\left(F_{P_{(X,Y)}}\right)$ es una λ_2-densidad de $P_{(X,Y)}$.
2. Existen $\partial_1^2\left(F_{P_Z}\right)(z)$ y $\partial_*^2(F_{P_Z})(z)$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$.
3. $i\left[\partial_1^2(F_{P_Z})(z) - \partial_*^2(F_{P_Z})(z)\right] = D_1D_2\left(F_{P_{(X,Y)}}\right)(x,y) = f_Z(z)$, para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Demostración:
1. Como

$$F_{P_{(X,Y)}}(x,y) = P_{(X,Y)}(R_{\leq}(x,y)) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(\overline{x},\overline{y})\, d\overline{x}d\overline{y},$$

entonces

$$D_1D_2\left(F_{P_{(X,Y)}}(x,y)\right) = f_{(X,Y)}(x,y).$$

Para demostrar 2 y 3 vamos a introducir cierta notación. Denotamos $F \doteq F_{P_Z}$ y $u \doteq F_{P_{(X,Y)}}$. Por la Nota 1.6.13 sabemos que

$$\partial_1(F) = \frac{D_1(u_F) + D_2(v_F)}{2} + i\frac{D_1(v_F) - D_2(u_F)}{2} \text{ y } \partial_*(F) = \frac{D_1(u_F) - D_2(v_F)}{2} + i\frac{D_1(v_F) + D_2(u_F)}{2}.$$

Pero como F toma valores en $[0,1]$, $u_F = u$ y $v_F = 0$. Lo cual implica que

$$\partial_1(F) = \frac{D_1(u)}{2} - i\frac{D_2(u)}{2} \text{ y } \partial_*(F) = \frac{D_1(u)}{2} + i\frac{D_2(u)}{2}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
u_{\partial_1(F)} &= \mathrm{Re}(\partial_1(F)) = \frac{D_1(u)}{2},\ v_{\partial_1(F)} = \mathrm{Im}(\partial_1(F)) = -\frac{D_2(u)}{2},\\
u_{\partial_*(F)} &= \mathrm{Re}(\partial_*(F)) = \frac{D_1(u)}{2} \text{ y } v_{\partial_*(F)} = \mathrm{Im}(\partial_*(F)) = \frac{D_2(u)}{2}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\partial_1^2(F) &= \frac{D_1\left(u_{\partial_1(F)}\right) + D_2\left(v_{\partial_1(F)}\right)}{2} + i\frac{D_1\left(v_{\partial_1(F)}\right) - D_2\left(u_{\partial_1(F)}\right)}{2}\\
&= \frac{D_1^2(u) - D_2^2(u)}{4} - i\frac{D_1D_2(u) + D_2D_1(u)}{4}\\
&= \frac{D_1^2(u) - D_2^2(u)}{4} - i\frac{D_1D_2(u)}{2}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\partial_*^2(F) &= \frac{D_1\left(u_{\partial_*(F)}\right) - D_2\left(v_{\partial_*(F)}\right)}{2} + i\frac{D_1(v_{\partial_*(F)}) + D_2(u_{\partial_*(F)})}{2}\\
&= \frac{D_1^2(u) - D_2^2(u)}{4} + i\frac{D_1D_2(u) + D_2D_1(u)}{4}\\
&= \frac{D_1^2(u) - D_2^2(u)}{4} + i\frac{D_1D_2(u)}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, restando miembro a miembro las expresiones anteriores, obtenemos que $\partial_1^2(F) - \partial_*^2(F) = -iD_1D_2(u)$, lo cual implica que $i\left[\partial_1^2(F_{P_Z})(z) - \partial_*^2(F_{P_Z})(z)\right] = D_1D_2(F_{P_{(X,Y)}})(x,y)$, $\forall\ z = x+iy \in \mathbb{C}$. ■

Ejemplo 2.1.11
Sea $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $Z = X + iY$; con $X \sim \mathcal{U}(0,1)$, $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$ y X e Y independientes.
Como $X \sim \mathcal{U}(0,1)$ entonces $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Análogamente, como $Y \sim \mathcal{U}(0,1)$, tenemos que $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } y \in [0,1] \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$. Luego, como X e Y son independientes, se sigue que

$$F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x,y) \in A \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \notin [1,\infty) \times [1,\infty)\right\} \\ x & \text{si } (x,y) \in B \doteq [0,1] \times [1,\infty) \\ 1 & \text{si } (x,y) \in C \doteq [1,\infty) \times [1,\infty) \\ y & \text{si } (x,y) \in D \doteq [1,\infty) \times [0,1] \\ xy & \text{si } (x,y) \in E \doteq [0,1] \times [0,1] \end{cases}$$

Entonces $D_2D_1(F_{(X,Y)})(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \in E \\ 0 \text{ si } (x,y) \notin E \end{cases}$.

Por otra parte, si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ entonces $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in A \\ \frac{z+z^*}{2} & \text{si } (x,y) \in B \\ 1 & \text{si } (x,y) \in C \\ -i\frac{z-z^*}{2} & \text{si } (x,y) \in D \\ -i\frac{z^2-(z^*)^2}{4} & \text{si } (x,y) \in E \end{cases}$.

Una cuenta directa prueba que

$$\partial_1^2(F_Z)(z) - \partial_*^2(F_Z)(z) = \partial_1(\partial_1(F_Z))(z) - \partial_*(\partial_*(F_Z))(z) = \begin{cases} -i \text{ si } z \in E \\ 0 \text{ si } z \notin E \end{cases},$$

es decir,

$$i(\partial_1^2(F_Z)(z) - \partial_*^2(F_Z)(z)) = \begin{cases} 1 \text{ si } z \in E \\ 0 \text{ si } z \notin E \end{cases}.$$

Por lo tanto

$$D_2D_1(F_{(X,Y)})(x,y) = i\left[\partial_1^2(F_Z)(z) - \partial_*^2(F_Z)(z)\right],$$

para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Definición 2.1.12
Sea $(\Omega, \sigma(\Omega), P)$ un espacio de probabilidad. Si X e Y están en $\mathcal{L}^1(\Omega, \sigma(\Omega), P; \mathbb{R})$, entonces decimos que "$Z \in \mathcal{L}^1(\Omega, \sigma(\Omega), P; \mathbb{C})$" y denotamos $E_P(Z) \doteq E_P(X) + iE_P(Y)$.

Definición 2.1.13
Sea $(\Omega, \sigma(\Omega), P)$ un espacio de probabilidad y $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una $\mathbb{C} - v.a.$ Llamamos "*función característica de Z*" a la función $c_Z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$c_Z(z) \doteq c_{(X,Y)}(x,y) = E_P(\exp(i(xX + yY))),$$

para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Proposición 2.1.14
Sea $(\Omega, \sigma(\Omega), P)$ un espacio de probabilidad y $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una $\mathbb{C} - v.a.$. Entonces

$$c_Z(z) = E_P(\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z))) = E_P\left(\exp\left(\frac{i}{2}(z^*Z + zZ^*)\right)\right),\ z \in \mathbb{C}.$$

Demostración:
Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ arbitrario. Dado que $z^*Z = (x - iy)(X + iY) = xX + yY + i(xY - yX)$, entonces

$$\mathrm{Re}(z^*Z) = xX + yY.$$

Por lo tanto es válida la primera igualdad. Ahora

$$z^*Z + zZ^* = [xX + yY + i(xY - yX)] + [xX + yY + i(yX - xY)] = 2(xX + yY),$$

lo cual implica que $\frac{z^*Z+zZ^*}{2} = xX + yY$. Reemplazando obtenemos la segunda igualdad. ■

2.2 Momentos, cumulantes y circularidad de variables aleatorias con valores en $\mathbb{C}$

En esta sección definimos los *momentos* de una variable aleatoria compleja y mostramos como los resultados del capítulo anterior conducen a la derivación de una importante relación entre los momentos y las funciones características. Más adelante estudiamos las variables aleatorias complejas *circulares*, para ello introducimos las *distribuciones esféricamente simétricas* y damos algunos resultados en torno a dicha distribución. Para este estudio, nos basamos principalmente en [3] aunque también añadimos información complementaria de [4].

Sean $(\Omega, \sigma(\Omega), P)$ un espacio de probabilidad, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ variables aleatorias y $Z \doteq X + iY$.

Definición 2.2.1
Sea $p \in \mathbb{N}$ y supongamos que X e Y tienen momento finito de orden p. Sea $\mathbb{N}_p^* \doteq \{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : n + m = p\}$ y para cada $(n,m) \in \mathbb{N}_p^*$ sea

$$E_P(Z^n(Z^*)^m) \doteq \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{j} i^{n-j}(-i)^{n-k} E_P(X^{j+k}Y^{m+n-j-k}).$$

Llamamos "*momento de orden p de Z*" al conjunto $M_{P,p}(Z) \doteq \left\{E_P(Z^n(Z^*)^m) : (n,m) \in \mathbb{N}_p^*\right\}$.

Observación 2.2.3
$\#(M_{P,p}(Z)) = p + 1$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$.

Demostración:
Puesto que $M_{P,p}(Z) \doteq \left\{E_P(Z^n(Z^*)^m) : (n,m) \in \mathbb{N}_p^*\right\}$, es suficiente probar que $\#\, \mathbb{N}_p^* = p+1$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$. Procedemos haciendo inducción sobre p. Si $p = 1$ entonces $\mathbb{N}_p^* \doteq \{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : n + m = 1\} = \{(0,1), (1,0)\}$, con lo cual $\#\, \mathbb{N}_p^* = 2 = 1+1$. Supongamos por hipótesis inductiva que $\#\, \mathbb{N}_p^* = p+1$ y probemos que $\#\, \mathbb{N}_{p+1}^* = p+2$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_{p+1}^* &= \{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : n + m = p + 1\} \\
&= \{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : n + (m - 1) = p\} \\
&= \{(n,l) \in \mathbb{N}_0 \times \{-1, 0, 1, 2, ...\} : n + l = p\} \\
&= \{(n,l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : n + l = p\} \cup \{(n,-1) \in \mathbb{N}_0 : n - 1 = p\} \\
&= \mathbb{N}_p^* \cup \{(p+1, -1)\}.
\end{aligned}$$

Luego, como la unión es disjunta, resulta que $\#\mathbb{N}_{p+1}^* = \#(\mathbb{N}_p^*) + 1 = (p+1) + 1 = p + 2$. ■

Nota 2.2.2
Denotamos $\alpha_{P,n,m}(Z) \doteq E_P(Z^n(Z^*)^m)$, $\forall\ (n,m) \in \mathbb{N}_p^*$. Además, para cada $q \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ sea $\beta_{P,q}(Z) \doteq E_P(|Z|^q)$. Notemos que puede suceder que $\beta_{P,q}(Z) = \infty$. También $\beta_{P,2n}(Z) = \alpha_{P,n,n}(Z)$.

Definición 2.2.3
Sea $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ y supongamos que $M_{P,p}(Z)$ está definido. Llamamos "*momentos centrales de orden* p" a

$$\underline{\alpha}_{P,n,m}(Z) \doteq E_P((Z - E_P(Z))^n (Z^* - E_P(Z^*))^m), \ \forall \ (n,m) \in \mathbb{N}^*_p.$$

Definición 2.2.4
Supongamos que $M_{P,2}(Z)$ está definido. Llamamos "*varianza de* Z", y denotamos $var(Z)$, a

$$\underline{\beta}_{P,2}(Z) \doteq E_P(|Z - E_P(Z)|^2)$$

mientras que la "*pseudovarianza de* Z", denotada por $pvar(Z)$, es

$$\underline{\alpha}_{P,2,0}(Z) \doteq E_P((Z - E_P(Z))^2).$$

Supongamos que $M_{P,p}(Z)$, con $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ está definido y sea $q \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ tal que $q \leq p$. Llamamos "*momento central absoluto de orden* q" a

$$\underline{\beta}_{P,q}(Z) \doteq E_P(|Z - E(Z)|^q).$$

Observación 2.2.5
Sean p, $q \in \mathbb{N}$ tales que $q \leq p$. Si $M_{P,p}(Z)$ está definido entonces $M_{P,q}(Z)$ también.

Demostración:
En primer lugar, veamos la siguiente
Afirmación:
Si $E_P\left(|Z|^p\right) < \infty$ entonces $E_P\left(|Z|^q\right) \leq P\left(\{\omega \in \Omega : |Z\left(\omega\right)| \leq 1\}\right) + E_P\left(|Z|^p\right)$.

Demostración Afirmación:
Sean $A \doteq \{\omega \in \Omega : |Z\left(\omega\right)| \leq 1\}$ y $B \doteq \{\omega \in \Omega : |Z\left(\omega\right)| > 1\}$. Notemos que $|Z|^q \mathcal{X}_A \leq \mathcal{X}_A$ y $|Z|^q \mathcal{X}_B \leq |Z|^p \mathcal{X}_B \leq |Z|^p$, con lo cual

$$|Z|^q = |Z|^q \mathcal{X}_A + \ |Z|^q \mathcal{X}_B \leq \mathcal{X}_A + |Z|^p \, ,$$

entonces $E_P\left(|Z|^q\right) \leq E_P\left(\mathcal{X}_A + |Z|^p\right) = E_P\left(\mathcal{X}_A\right) + E_P\left(|Z|^p\right) = P(A) + E_P\left(|Z|^p\right)$.

Ahora probemos que $E_P\left(Z^r\left(Z^*\right)^s\right) < \infty$, $\forall \ (r,s) \in \mathbb{N}^*_q$. Por la afirmación tenemos que

$$E_P\left(|Z^r\left(Z^*\right)^s|\right) = E_P\left(|Z|^{r+s}\right) = E_P\left(|Z|^q\right) \leq P(\{\omega \in \Omega : |Z\left(\omega\right)| \leq 1\}) + E_P\left(|Z|^p\right) < \infty,$$

lo cual implica que $E_P\left(Z^r\left(Z^*\right)^s\right) < \infty$. ■

Proposición 2.2.6
Si $M_{P,p}(Z)$ está definido entonces $|\alpha_{P,n,m}(Z)| \leq \beta_{P,p}(Z)$, $\forall \ (n,m) \in \mathbb{N}^*_p$.

Demostración:
Sea $(n,m) \in \mathbb{N}^*_p$ arbitrario. Por Cauchy-Schwarz sabemos que $|Z^n(Z^*)^m| \leq |Z^n| \, |(Z^*)^m|$, entonces

$$\begin{aligned} |\alpha_{P,n,m}(Z)| &= |E_P(Z^n(Z^*)^m)| \leq E_P(|Z^n(Z^*)^m|) \leq E_P(|Z^n| \, |(Z^*)^m|) = E_P(|Z|^n \, |Z^*|^m) \\ &= E_P(|Z|^n \, |Z|^m) = E_P(|Z|^{n+m}) = \beta_{P,n+m}(Z) = \beta_{P,p}(Z). \ ■ \end{aligned}$$

Lema 2.2.7 (Recíproca de la Proposición 1.2.7)
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $z = x + iy \in U$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Supongamos que $D_1(u_f)$, $D_1(v_f)$, $D_2(u_f)$ y $D_2(v_f)$ existen y son continuas sobre $A \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in U\right\}$. Además, sean

$$\alpha \doteq D_1(u_f)(x,y) + iD_1(v_f)(x,y), \ \beta \doteq D_2(u_f)(x,y) + iD_2(v_f)(x,y)$$

y $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $L(h_x + ih_y) \doteq \alpha h_x + \beta h_y$, $\forall\ h_x + ih_y \in \mathbb{C}$. Entonces

1. $L(h) = \partial_1(f)(z) \cdot h + \partial_*(f) \cdot h^*$, $\forall\ h \in \mathbb{C}$.
2. L es $\mathbb{R}-$lineal.
3. $\lim_{|h|\to 0} \frac{|f(z+h)-f(z)-L(h)|}{|h|} = 0$, luego f es $\mathbb{R}-$diferenciable en z y $D_r(f)(z) = L$.
4. $D_r(f)$ es continua en U.

Demostración:
1. Sea $h = h_x + ih_y \in \mathbb{C}$, luego

$$
\begin{aligned}
\partial_1(f)(z) \cdot h &= \left(\frac{D_1(u_f)(x,y) + D_2(v_f)(x,y)}{2} + i\frac{D_1(v_f)(x,y) - D_2(u_f)(x,y)}{2}\right)(h_x + ih_y) \\
&= \frac{1}{2}\left[D_1(u_f)(x,y) + D_2(v_f)(x,y) + i(D_1(v_f)(x,y) - D_2(u_f)(x,y))\right](h_x + ih_y) \\
&= \frac{1}{2}\left[(D_1(u_f)(x,y) + D_2(v_f)(x,y))h_x - (D_1(v_f)(x,y) - D_2(u_f)(x,y))h_y\right] + \\
&\quad \frac{i}{2}\left[\ (D_1(u_f)(x,y) + D_2(v_f)(x,y))h_y + (D_1(v_f)(x,y) - D_2(u_f)(x,y))h_x\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_*(f)(z) \cdot h^* &= \left(\frac{D_1(u_f)(x,y) - D_2(v_f)(x,y)}{2} + i\frac{D_1(v_f)(x,y) + D_2(u_f)(x,y)}{2}\right)(h_x - ih_y) \\
&= \frac{1}{2}\left[(D_1(u_f)(x,y) - D_2(v_f)(x,y)) + i(D_1(v_f)(x,y) + D_2(u_f)(x,y))\right](h_x - ih_y) \\
&= \frac{1}{2}\left[(D_1(u_f)(x,y) - D_2(v_f)(x,y))h_x + (D_1(v_f)(x,y) + D_2(u_f)(x,y))h_y\right] \\
&\quad + \frac{i}{2}\left[-(D_1(u_f)(x,y) - D_2(v_f)(x,y))h_y + (D_1(v_f)(x,y) + D_2(u_f)(x,y))h_x\right].
\end{aligned}
$$

Sumando las expresiones anteriores obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\partial_1(f)(z) \cdot h + \partial_*(f) \cdot h^* &= (D_1(u_f)(x,y) + iD_1(v_f)(x,y))h_x + (D_2(u_f)(x,y) + iD_2(v_f)(x,y))h_y \\
&= \alpha \cdot h_x + \beta \cdot h_y \\
&= L(h).
\end{aligned}
$$

2. Sean a, $b \in \mathbb{R}$ y sean h, $k \in \mathbb{C}$ arbitrarios. Por el inciso 1 tenemos que

$$
\begin{aligned}
L(ah + bk) &= \partial_1(f)(z)(ah + bk) + \partial_*(f)(ah + bk)^* \\
&= \partial_1(f)(z)(ah + bk) + \partial_*(f)(ah^* + bk^*) \\
&= a\partial_1(f)(z)h + b\partial_1(f)(z)k + a\partial_*(f)h^* + b\partial_*(f)k^* \\
&= a(\partial_1(f)(z)h + \partial_*(f)h^*) + b(\partial_1(f)(z)k + \partial_*(f)k^*) \\
&= aL(h) + bL(k)
\end{aligned}
$$

3. Por lo supuesto en el enunciado y por el Teorema (8.9.1), pág. 173 de [2] tenemos que u_f y v_f son diferenciables y además

$$
\begin{aligned}
D(u_f)(x,y)(h_x, h_y) &= D_1(u_f)(x,y)h_x + D_2(u_f)(x,y)h_y, \\
D(v_f)(x,y)(h_x, h_y) &= D_1(v_f)x,y)h_x + D_2(v_f)(x,y)h_y.
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
f(z+h) - f(z) - L(h) &= \left[u_f(x+h_x, y+h_y) - u_f(x,y) - D_1(u_f)(x,y)h_x - D_2(u_f)(x,y)h_y\right] + \\
&\quad +i\left[v_f(x+h_x, y+h_y) - v_f(x,y) - D_1(v_f)(x,y)h_x - D_2(v_f)(x,y)h_y\right] \\
&= \left[u_f(x+h_x, y+h_y) - u_f(x,y) - D(u_f)(x,y)(h_x, h_y)\right] + \\
&\quad i\left[v_f(x+h_x, y+h_y) - v_f(x,y) - D(v_f)(x,y)(h_x, h_y)\right],
\end{aligned}
$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
\lim_{|h|\to 0}\frac{|f(z+h)-f(z)-L(h)|}{|h|} &= \lim_{|h|\to 0}\frac{|\mathrm{Re}(f(z+h)-f(z)-L(h))+i\,\mathrm{Im}(f(z+h)-f(z)-L(h))|}{|h|}\\
&= \lim_{|h|\to 0}\frac{\sqrt{\mathrm{Re}(f(z+h)-f(z)-L(h))^2+\mathrm{Im}(f(z+h)-f(z)-L(h))^2}}{|h|}\\
&= \lim_{|h|\to 0}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{Re}(f(z+h)-f(z)-L(h))}{|h|}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{Im}(f(z+h)-f(z)-L(h))}{|h|}\right)^2}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto f es $\mathbb{R}-$diferenciable en z y $D_r(f)(z)=L$.
4. Sigue por lo supuesto sobre $D_1(u_f)$, $D_1(v_f)$, $D_2(u_f)$ y $D_2(v_f)$. ■

Lema 2.2.8
Sean $p\in\mathbb{N}$, $U\subset\mathbb{C}$ un abierto, $A\doteq\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+iy\in U\big\}$ y $f:U\longrightarrow\mathbb{C}$. Son equivalentes:
1. $f\in C_r^{p+1}(U,\mathbb{C})$.
2.
 2.1. f es $p-$veces $\mathbb{R}-$diferenciable en U (luego

$$D_r^p(f)(z)(\mathbf{h})=\sum_{k=1}^{2^p}\partial^p_{I_0^p(k)}(f)(z)\mathbf{h}^{I_*^p(k)},\ \forall\ \mathbf{h}\in\mathbb{C}^p).$$

 2.2. Para cada $k\in\{1,2,...,2^p\}$, existen y son continuas en A:

 $D_1(u_{g_{k,\ p}})$, $D_1(v_{g_{k,\ p}})$, $D_2(u_{g_{k,\ p}})$ y $D_2(v_{g_{k,\ p}})$ con $g_{k,\ p}:U\longrightarrow\mathbb{C}$ dada por $g_{k,\ p}(z)\doteq\partial^p_{I_0^p(k)}(f)(z)$, $z\in U$.

 2.3. Para cada $z\in U$ existe un entorno abierto $V\subset U$ de z tal que se satisface:

 dado $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta>0$ tal que $B(z,\delta)\subset V$ y si $u\in B(0,\delta)$ entonces

$$\sup_{|h_1|\le 1,...,|h_p|\le 1}\{|D_r^p(f)(z+u)(h_1,...,h_p)-D_r^p(f)(z)(h_1,...,h_p)-M_{p+1}(z)(h_1,...,h_p,u)|\}\le |u|\,\varepsilon,$$

 donde $M_{p+1}:U\longrightarrow\mathcal{L}\mathbb{R}_{p+1}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ esta dada por

$$M_{p+1}(z)(h_1,...,h_{p+1})\doteq\sum_{k=1}^{2^{p+1}}M_{p+1,k}(z)(h_1,...,h_{p+1})^{I_*^{p+1}(k)},$$

 con $M_{p+1,k}(z)\doteq\partial_0^1(g_{k,\ p})(z)$ y $M_{p+1,2^p+k}(z)\doteq\partial_1^1(g_{k,\ p})(z)$ $\forall$ $k\in\{1,2,...,2^p\}$, $z\in U$ y $(h_1,...,h_{p+1})\in\mathbb{C}^{p+1}$.

Demostración:
(1 $\Longrightarrow$ 2) Que se cumple 2.1 es inmediato. Probemos entonces los incisos 2.2 y 2.3. Por la Proposición 1.5.12 tenemos que $g_{k,\ p}\in C_r^1(U,\mathbb{C})$ y se cumplen:

$$\partial_0^1(g_{k,\ p})(z)=\partial^{p+1}_{I_0^{p+1}(k)}(f)(z)\ \text{y}\ \partial_1^1(g_{k,\ p})(z)=\partial^{p+1}_{I_0^{p+1}(2^p+k)}(f)(z)$$

para cada $z\in U$ y $k\in\{1,2,...,2^p\}$. Luego, según la Proposición 1.4.23, las funciones $D_1(u_{g_{k,\ p}})$, $D_1(v_{g_{k,\ p}})$, $D_2(u_{g_{k,\ p}})$ y $D_2(v_{g_{k,\ p}})$ están en $C_r^1(A,\mathbb{R})$, lo cual demuestra 2.2. Además, por la Proposición 1.4.18, dado $z\in U$ $\exists$ $V\subset U$ entorno de z y $M_{p+1}(z)\in\mathcal{L}\mathbb{R}_{p+1}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ satisfaciendo que: dado $\varepsilon>0$ $\exists$ $\delta>0$ tal que $B(z,\delta)\subset V$ y si $u\in B(0,\delta)$ entonces

$$\sup_{|h_1|\le 1,...,|h_p|\le 1}\{|D_r^p(f)(z+u)(h_1,...,h_p)-D_r^p(f)(z)(h_1,...,h_p)-M_{p+1}(z)(h_1,...,h_p,u)|\}\le |u|\,\varepsilon.$$

Teniendo en cuenta la Proposición 1.4.19 y el Corolario 1.5.7 tenemos que

$$\begin{aligned}
M_{p+1}(z)(h_1,...,h_{p+1}) &= D_r^{p+1}(f)(z)(h_{p+1},...,h_1) \\
&= D_r^{p+1}(f)(z)(h_1,...,h_{p+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{2^{p+1}} \partial^{p+1}_{I_0^{p+1}(k)}(f)(z)(h_1,...,h_{p+1})^{I_*^{p+1}(k)} \\
&= \sum_{k=1}^{2^{p+1}} M_{p+1,k}(z)(h_1,...,h_{p+1})^{I_*^{p+1}(k)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple 2.3 de la Proposición.

(2 $\Longrightarrow$ 1) Gracias a la Proposición 1.4.18 sabemos que f es $(p+1)-$veces $\mathbb{R}-$diferenciable en U, entonces basta ver que

$$\underset{z \longmapsto D_r^{p+1}(f)(z)}{U \longrightarrow V_{2^p}}$$

es continua en U. Denotemos $g = D_r^p(f)$. Puesto que

$$\begin{aligned}
g(z)(h_1,...,h_p) &= D_r^p(f)(z)(h_1,...,h_p) \\
&= \sum_{k=1}^{2^p} \partial^p_{I_0^p(k)}(f)(z)(h_1,...,h_p)^{I_*^p(k)} \\
&= \sum_{k=1}^{2^p} g_{k,\ p}(z)(h_1,...,h_p)^{I_*^p(k)}
\end{aligned}$$

y, por hipótesis, $D_1(u_{g_{k,\ p}})$, $D_1(v_{g_{k,\ p}})$, $D_2(u_{g_{k,\ p}})$ y $D_2(v_{g_{k,\ p}})$, existen y son continuas en A para cada $k \in \{1,2,...,2^p\}$ entonces $D_1(u_g)$, $D_1(v_g)$, $D_2(u_g)$ y $D_2(v_g)$ existen y son continuas en A. Luego, por el Lema anterior, resulta que $D_r(g) = D_r^{p+1}(f)$ es continua. Queda así culminada la prueba. ■

Lema 2.2.9
Sean $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $u_g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y $v_g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que:

a) $g(\omega) = u_g(\omega) + iv_g(\omega)$, $\forall\ \omega \in \Omega$.

b) u_gX, u_gY, v_gX y v_gY pertenecen a $\mathcal{L}^1(\Omega, \sigma(\Omega), P; \mathbb{R})$.

Además, sea $G : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$G(z) \doteq E_P(g \exp(i \operatorname{Re}(z^* Z))),\ z \in \mathbb{C}$$

y denotemos $u_G \doteq \operatorname{Re}(G)$ y $v_G \doteq \operatorname{Im}(G)$. Entonces

1. $D_1(u_G)$, $D_1(v_G)$, $D_2(u_G)$ y $D_2(v_G)$ existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$.

2. $G \in C_r^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ y se cumplen:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(G)(z) = \frac{i}{2} E_P(gZ^* \exp(i \operatorname{Re}(z^* Z))) \text{ y } \frac{\partial}{\partial \xi^*}(G)(z) = \frac{i}{2} E_P(gZ \exp(i \operatorname{Re}(z^* Z))),\ \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

Demostración:
1. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ y denotemos $c(x,y) \doteq \cos(xX + yY)$ y $s(x,y) \doteq \sin(xX + yY)$.

<u>Afirmación:</u> $\exp(i \operatorname{Re}(z^* Z)) = c(x,y) + is(x,y)$.

<u>Demostración Afirmación:</u>
Como $z^* Z = (x - iy)(X + iY) = xX + yY + i(xY - yX)$ entonces $\operatorname{Re}(z^* Z) = xX + yY$ y, por tanto,

$$\exp(i \operatorname{Re}(z^* Z)) = \exp(i(xX + yY)) = \cos(xX + yY) + i \sin(xX + yY) = c(x,y) + is(x,y).$$

Luego vale la Afirmación. Ahora

$$\begin{aligned} g\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z)) &= (u_g+iv_g)(c(x,y)+is(x,y)) \\ &= u_gc(x,y)-v_gs(x,y)+i(u_gs(x,y)+v_gc(x,y)), \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} G(z) &= E_P(u_gc(x,y)-v_gs(x,y)+i(u_gs(x,y)+v_gc(x,y))) \\ &= E_P(u_gc(x,y)-v_gs(x,y))+iE_P(u_gs(x,y)+v_gc(x,y)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u_G(x,y) &= E_P(u_gc(x,y)-v_gs(x,y)) \\ v_G(x,y) &= E_P(u_gs(x,y)+v_gc(x,y)) \end{aligned}$$

Por el Teorema de Lebesgue y las hipótesis sobre u_g, v_g, X e Y tenemos que

$$\begin{aligned} D_1(u_G)(x,y) &= E_P(-u_gs(x,y)X-v_gc(x,y)X)=-E_P(u_gs(x,y)X)-E_P(v_gc(x,y)X), \\ D_2(u_G)(x,y) &= E_P(-u_gs(x,y)Y-v_gc(x,y)Y)=-E_P(u_gs(x,y)Y)-E_P(v_gc(x,y)Y), \\ D_1(v_G)(x,y) &= E_P(-v_gs(x,y)X+u_gc(x,y)X)=-E_P(v_gs(x,y)X)+E_P(u_gc(x,y)X) \text{ y} \\ D_2(v_G)(x,y) &= E_P(-v_gs(x,y)Y+u_gc(x,y)Y)=-E_P(v_gs(x,y)Y)+E_P(u_gc(x,y)Y). \end{aligned}$$

Por lo tanto vale 1.

2. Por el inciso 1 y por el Lema 2.2.7 tenemos que G es $\mathbb{R}-$diferenciable en $\mathbb{C}$ y $D_r(G)$ es continua en $\mathbb{C}$, con lo cual $G\in C^1_r(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Ahora, por definición y por lo ya probado tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi}(G)(z) &= \partial_1(G)(z) \\ &= \frac{D_1(u_G)(x,y)+D_2(v_G)(x,y)}{2}+i\frac{D_1(v_G)(x,y)-D_2(u_G)(x,y)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[-E_P(u_gs(x,y)X)-E_P(v_gc(x,y)X)-E_P(v_gs(x,y)Y)+E_P(u_gc(x,y)Y)\right] \\ &\quad+\frac{i}{2}\left[-E_P(v_gs(x,y)X)+E_P(u_gc(x,y)X)+E_P(u_gs(x,y)Y)+E_P(v_gc(x,y)Y)\right]. \qquad \textbf{(2.2.9.1)} \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la Afirmación obtenemos que

$$\begin{aligned} gZ^*\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z)) &= (u_g+iv_g)(X-iY)(c(x,y)+is(x,y)) \\ &= \left[(u_gX+v_gY)+i(v_gX-u_gY)\right](c(x,y)+is(x,y)) \\ &= \left[(u_gX+v_gY)c(x,y)-(v_gX-u_gY)s(x,y)\right] \\ &\quad+i\left[(u_gX+v_gY)s(x,y)+(v_gX-u_gY)c(x,y)\right] \\ &= u_gXc(x,y)+v_gYc(x,y)-v_gXs(x,y)-u_gYs(x,y) \\ &\quad+i(u_gXs(x,y)+v_gYs(x,y)+v_gXc(x,y)-u_gYc(x,y)), \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} E_P(gZ^*\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z))) &= E_P(u_gXc(x,y))+E_P(v_gYc(x,y))-E_P(v_gXs(x,y))-E_P(u_gYs(x,y)) \\ &\quad+iE_P(u_gXs(x,y))+iE_P(v_gYs(x,y))+E_P(v_gXc(x,y))-E_P(u_gYc(x,y)). \end{aligned}$$

Por **(2.2.9.1)** y por la fórmula de arriba resulta que

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(G)(z)=\frac{i}{2}E_P(gZ^*\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z))).$$

Finalmente comprobemos la última igualdad. Como $G(z) = E_P(g\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z)))$ entonces

$$\begin{aligned} G^*(z) &= (G(z))^* \\ &= (E_P(g\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z))))^* \\ &= E_P(g^*\exp(-i\,\mathrm{Re}(z^*Z))) \\ &= E_P(g^*\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*(-Z)))). \end{aligned}$$

Luego, por lo anterior, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(G^*)(z) = \frac{i}{2}E_P(g^*(-Z)^*\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*(-Z)))),$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi^*}(G)(z) &= \left(\frac{\partial}{\partial\xi}(G^*)(z)\right)^* \\ &= -\frac{i}{2}E_P(g(-Z)\exp(-i\,\mathrm{Re}(z^*(-Z)))) \\ &= \frac{i}{2}E_P(gZ\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z))). \end{aligned}$$

Queda entonces finalizada la prueba. ■

Teorema 2.2.10
Sea $p \in \mathbb{N}$. Si $M_{P,p}(Z)$ está definido entonces $c_Z \in C_r^p(\mathbb{C},\mathbb{C})$ y

$$\frac{\partial^{m+n}}{(\partial\xi)^m(\partial\xi^*)^n}(c_Z)(z) = \left(\frac{i}{2}\right)^{m+n} E_P\left(Z^n(Z^*)^m\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z))\right),$$

para todo $(m,n) \in \{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : 1 \leq m+n \leq p\}$ y $z \in \mathbb{C}$.

Demostración:
Procedemos por inducción en p. Sea $p=1$ y tomemos $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ tal que $m+n=1$. En este caso sólo puede ser $m=0$, $n=1$ y $m=1$, $n=0$. Sean $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(\omega) \doteq 1$ y $G : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$G(z) \doteq E_P\left(g\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z))\right),\ z \in \mathbb{C}.$$

Por la Proposición 2.1.14 tenemos que $G(z) = c_Z(z)$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$. Luego, por el Lema anterior, concluimos que $c_Z \in C_r^1(\mathbb{C},\mathbb{C})$ y se cumplen

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(c_Z)(z) = \frac{i}{2}E_P\left(Z^*\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z))\right) \text{ y } \frac{\partial}{\partial\xi^*}(c_Z)(z) = \frac{i}{2}E_P\left(Z\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z))\right)$$

para cada $z \in \mathbb{C}$. Ahora sea $p > 1$, supongamos que la fórmula del teorema está probada para p y veamos que también es cierta para $p+1$. Sea $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ tal que $m+n = p+1$, entonces $m \geq 2$ o bien $n \geq 2$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $m \geq 2$. Luego $1 \leq m-1 \leq p$ y, por hipótesis inductiva, resulta que

$$\frac{\partial^{(m-1)+n}}{(\partial\xi)^{(m-1)}(\partial\xi^*)^n}(c_Z)(z) = \left(\frac{i}{2}\right)^{(m-1)+n} E_P\left(Z^n(Z^*)^{(m-1)}\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z))\right). \quad \mathbf{(2.2.10.1)}$$

Aplicando el Lema anterior con $g(\omega) \doteq Z(\omega)^n(Z^*(\omega))^{m-1}$, $\omega \in \Omega$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(E_P\left(Z^n(Z^*)^{m-1}\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z))\right)\right) &= \frac{i}{2}E_P\left(Z^n(Z^*)^{m-1}Z^*\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z))\right) \\ &= \frac{i}{2}E_P\left(Z^n(Z^*)^m\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z))\right). \end{aligned}$$

Luego, por **(2.2.10.1)** se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+n}}{(\partial\xi)^m(\partial\xi^*)^n}(c_Z)(z) &= \frac{\partial}{\partial\xi}\circ\frac{\partial^{(m-1)+n}}{(\partial\xi)^{(m-1)}(\partial\xi^*)^n}(c_Z)(z)\\ &= \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left(\frac{i}{2}\right)^{(m-1)+n}E_P(Z^n(Z^*)^{(m-1)}\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z)))\right)\\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^{(m-1)+n}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(E_P(Z^n(Z^*)^{m-1}\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z)))\right)\\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^{(m-1)+n}\frac{i}{2}E_P(Z^n(Z^*)^m\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z)))\\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^{m+n}E_P(Z^n(Z^*)^m\exp(i\,\mathrm{Re}(z^*Z))).\end{aligned}$$

Que $c_Z\in C_r^{p+1}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ sigue de la fórmula recién probada y el Lema 2.2.8. ■

Corolario 2.2.11
Sea $p\in\mathbb{N}$. Si $M_{P,p}(Z)$ está definido entonces existe $\partial_{I_*^p(k)}(c_Z)(z)$ para cada $z\in\mathbb{C}$ y $k\in\{1,2,...,2^p\}$, y

$$\alpha_{P,n,m}(Z)=\left(\frac{2}{i}\right)^{m+n}\partial_{I_*^p(k)}(c_Z)(0)$$

para todo $(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ tal que $1\le n+m\le p$ y para todo $k\in\{1,2,...,2^p\}$ tal que $n=\sum_{i=1}^p\chi_{\{*\}}(\varepsilon_i)$ donde $I_*^p(k)=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_p)$. Más brevemente

$$\alpha_{P,n,m}(Z)=\left(\frac{2}{i}\right)^{m+n}\frac{\partial^{m+n}}{(\partial\xi)^m(\partial\xi^*)^n}(c_Z)(0).$$

Demostración:
Sea $(m,n)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ tal que $1\le n+m\le p$. Por el Teorema anterior sabemos que $c_Z\in C_r^p(\mathbb{C},\mathbb{C})$ y

$$\frac{\partial^{m+n}}{(\partial\xi)^m(\partial\xi^*)^n}(c_Z)(0)=\left(\frac{i}{2}\right)^{m+n}E_P(Z^n(Z^*)^m).$$

Además, por definición

$$\alpha_{P,n,m}(Z)=E_P(Z^n(Z^*)^m).$$

Resulta entonces que

$$\alpha_{P,n,m}(Z)=\left(\frac{2}{i}\right)^{m+n}\frac{\partial^{m+n}}{(\partial\xi)^m(\partial\xi^*)^n}(c_Z)(0).\ ■$$

Proposición 2.2.12
Sea $k\in\mathbb{N}$ y sea U un entorno abierto del $0\in\mathbb{C}$ tal que $c_Z\in DP^{2k-1}(U,\mathbb{C})$ y tal que existen $\partial_{I_*^{2k}(j)}(c_Z)(0)$, $\forall$ $j\in\left\{1,2,...,2^{2k}\right\}$. Entonces $M_{P,2k}(Z)$ está definido.

Demostración:
Sean $u\doteq\mathrm{Re}(c_Z)$ y $v\doteq\mathrm{Im}(c_Z)$. Teniendo en cuenta la Definición 2.1.13 resulta que

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \mathrm{Re}\,(c_Z(z))=\mathrm{Re}\,[E_P(\exp(i(xX_Z+yY_Z)))]=E_P\left(\cos\left(xX+yY\right)\right)\ \text{y}\\ v(x,y) &= \mathrm{Im}\,(c_Z(z))=\mathrm{Im}\,[E_P(\exp(i(xX_Z+yY_Z)))]=E_P\left(\sin\left(xX+yY\right)\right),\end{aligned}$$

para cada $z=x+iy\in\mathbb{C}$. En particular

$$u(x,0)=E_P\left(\cos(xX)\right),\ \forall\ x\in\mathbb{R}\ \text{y}\ v(0,y)=E_P\left(\sin(yY)\right),\ \forall\ y\in\mathbb{R}.$$

Pero

$$\begin{aligned} c_X(x) &\doteq E_P(\exp(ixX)) = E_P(\cos(xX) + i\sin(xX)) = E_P(\cos(xX)) + iE_P(\sin(xX)) \\ c_Y(y) &\doteq E_P(\exp(iyY)) = E_P(\cos(yY) + i\sin(yY)) = E_P(\cos(yY)) + iE_P(\sin(yY)), \end{aligned}$$

con lo cual

$$u(x,0) = \operatorname{Re}(c_X(x)) \text{ y } v(x,0) = \operatorname{Im}(c_Y(y)).$$

Así, por las hipótesis y las definiciones dadas en la Nota 1.6.13 tenemos que existen

$$D_1^{2k}(u)(0,0) = D^{2k}(c_X)(0) \text{ y } D_2^{2k}(v)(0,0) = D^{2k}(c_Y)(0).$$

Luego, por el Teorema 6.4.1, pág. 175 de [1], tenemos que $X,\ Y \in \mathcal{L}^{2k}(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$. De aquí es directo ver que $M_{P,2k}(Z)$ está definido. ■

Corolario 2.2.13
Sea $p \in \mathbb{N}$. Si $M_{P,p}(Z)$ está definido entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$c_Z(z) = 1 + \sum_{m=1}^{p} \left(\frac{i}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{m} \frac{(z^*)^n z^{m-n}}{n!(m-n)!} \alpha_{P,n,m-n}(Z) + o(|z|^p),$$

Demostración:
Por el Teorema 2.2.10 sabemos que $c_Z \in C_r^p(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Luego, por el Teorema 1.6.4, tenemos que dado $\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que

$$c_Z(z) - c_Z(0) = \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=0}^{m} \frac{(z^*)^n z^{m-n}}{n!(m-n)!} \frac{\partial^m}{(\partial\xi)^{m-n}(\partial\xi^*)^n}(c_Z)(0) + |z|^p \varepsilon(z) \text{ con } z \in B(0,\delta) \text{ y } 0 \le \varepsilon(z) \le \varepsilon.$$

Aplicando el Corolario 2.2.11 resulta que, dado $\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que

$$c_Z(z) - 1 = \sum_{m=1}^{p} \left(\frac{i}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{m} \frac{(z^*)^n z^{m-n}}{n!(m-n)!} \alpha_{P,n,m-n}(Z) + |z|^p \varepsilon(z)$$

con $z \in B(0,\delta)$ y $0 \le \varepsilon(z) \le \varepsilon$. De aquí sigue fácilmente la prueba del Corolario. ■

Definición 2.2.14
Sea $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una $\mathbb{C} - v.a.$. Llamamos "*segunda función característica de Z*" a $scf_Z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$scf_Z(z) \doteq Log(c_Z(z)),\ z \in \mathbb{C}.$$

Definición 2.2.15
Sean $p \in \mathbb{N}$, $(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ tal que $1 \le n+m \le p$ y Z una $\mathbb{C} - v.a.$. Si $scf_Z \in C_r^p(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ entonces llamamos "*cumulante de orden (n,m) de Z*" a

$$K_{P,n,m}(Z) \doteq \left(\frac{2}{i}\right)^{n+m} \frac{\partial^{n+m}}{(\partial\xi)^m(\partial\xi^*)^n}(scf_Z)(0).$$

Definición 2.2.16
Sea $(X,Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un vector aleatorio. Decimos que "*(X,Y) es $P -$ esféricamente simétrico*" si

$$P_{(X,Y)}(H) = P_{(X,Y)},\ \forall\ H \in O(2).$$

Definición 2.2.17
Sea $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una $\mathbb{C} - v.a.$. Decimos que "*Z es $P -$ circular*" si (X,Y) es $P-$esféricamente simétrico, donde

$$X(\omega) \doteq \operatorname{Re}(Z(\omega)) \text{ y } Y(\omega) \doteq \operatorname{Im}(Z(\omega)),\ \omega \in \Omega.$$

Proposición 2.2.18
Sea $Z:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ una $\mathbb{C}-v.a.$. Entonces Z es $P-$circular $\iff$ $Z\overset{\circ}{=}Z^*$ y $Z\overset{\circ}{=}e^{i\theta}Z$, $\forall\ \theta\in\mathbb{R}$.

Demostración:
($\Longrightarrow$) Sea $\theta\in\mathbb{R}$ arbitrario. Por hipótesis $P_{(X,Y)}(H)=P_{(X,Y)}$, $\forall\ H\in O(2)$. Es decir

$$H\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}\overset{\circ}{=}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix},\ \forall\ H\in O(2).$$

En particular vale para $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ y para $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, pues son claramente matrices ortogonales. Luego

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}\overset{\circ}{=}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}\ \text{y}\ \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}\overset{\circ}{=}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix},$$

por tanto, $\begin{bmatrix}X\cos\theta-Y\sin\theta\\ X\sin\theta+Y\cos\theta\end{bmatrix}\overset{\circ}{=}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}X\\-Y\end{bmatrix}\overset{\circ}{=}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}$, lo cual concluye que $Z\overset{\circ}{=}e^{i\theta}Z$ y $Z\overset{\circ}{=}Z^*$.

($\Longleftarrow$) Sea $H\in O(2)$ arbitraria, luego $H=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ o $H=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$ para algún $\theta\in\mathbb{R}$. Supongamos en primer lugar que $H=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$. Como $Z\overset{\circ}{=}e^{i\theta}Z$, tenemos que

$$X+iY\overset{\circ}{=}X(\cos\theta+i\sin\theta)+iY(\cos\theta+i\sin\theta)=(X\cos\theta-Y\sin\theta)+i(X\sin\theta+Y\cos\theta),$$

con lo cual $\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}\overset{\circ}{=}\begin{bmatrix}X\cos\theta-Y\sin\theta\\ X\sin\theta+Y\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=H\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}$. Ahora consideremos el caso en que $H=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$. Dado que $Z\overset{\circ}{=}e^{i\theta}Z^*$, entonces

$$X+iY\overset{\circ}{=}X(\cos\theta+i\sin\theta)-iY(\cos\theta+i\sin\theta)=(X\cos\theta+Y\sin\theta)+i(X\sin\theta-Y\cos\theta).$$

Esto implica que $\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}\overset{\circ}{=}\begin{bmatrix}X\cos\theta+Y\sin\theta\\ X\sin\theta-Y\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=H\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}$. Queda entonces demostrada la Proposición. ■

Nota 2.2.19
Breve estudio de vectores aleatorios $n-$dimensionales ($n\geq 2$) con distribución esféricamente simétrica. La definición 2.2.17 explica, de alguna forma, nuestro interés por esta breve reseña sobre distribuciones esféricamente simétricas. Dicha reseña esta basada en el libro [4].

Definición 2.2.19.1
Sean $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espacio de probabilidad, $n\geq 2$ entero, $\mathbf{X}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$ una variable aleatoria $n-$dimensional y $V:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ una variable aleatoria. Decimos que "$P_{\mathbf{X}}$ *es una versión* $n-$*dimensional de* V" si $\exists\ c:\mathbb{R}^n\longrightarrow[0,\infty)$ tal que:
1. $c(\mathbf{x})>0$, $\forall\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}$.
2. $\mathbf{a}^\top\mathbf{X}\overset{\circ}{=}c(\mathbf{a})V$, $\forall\ \mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$.

Definición 2.2.19.2
Sea $\mathbb{G}\subset\{g:\Omega\longrightarrow\Omega : g \text{ es biyectiva}\}$. Decimos que "$\mathbb{G}$ *es un grupo de transformaciones sobre* Ω" si se cumplen:
1. $g_1\in\mathbb{G}$, $g_2\in\mathbb{G}\implies g_1\circ g_2\in\mathbb{G}$.
2. $e:\Omega\longrightarrow\Omega$ dada por $e(\omega)\doteq\omega$, $\forall\ \omega\in\Omega$, está en $\mathbb{G}$.
3. $g\in\mathbb{G}\implies\exists\ \widetilde{g}\in\mathbb{G}$ tal que $g\circ\widetilde{g}=\widetilde{g}\circ g=e$.

Notemos que $\widetilde{g}$ es único, pues si existiese un $g^* \in \mathbb{G}$ con la propiedad $g \circ g^* = g^* \circ g = e$ entonces $\widetilde{g} = \widetilde{g} \circ e = \widetilde{g} \circ (g \circ g^*) = (\widetilde{g} \circ g) \circ g^* = e \circ g^* = g^*$. Por ello denotamos $g^{-1} \doteq \widetilde{g}$.

Definición 2.2.19.3
Sea $\mathbb{G}$ un grupo de transformaciones sobre Ω. Decimos que "*ω_1 y ω_2 en Ω son $\mathbb{G}-$equivalentes*" si $\exists\ g \in \mathbb{G}$ tal que $\omega_1 = g(\omega_2)$.

Notación 2.2.19.4
Sea $\mathbb{G}$ un grupo de transformaciones sobre Ω. Si ω_1 y ω_2 en Ω son $\mathbb{G}-$equivalentes entonces denotamos $\omega_1 \sim \omega_2 \operatorname{mod}(\mathbb{G})$.

Proposición 2.2.19.5
Sea $\mathbb{G}$ un grupo de transformaciones sobre Ω. La relación ω_1 está relacionado con ω_2 si $\omega_1 \sim \omega_2 \operatorname{mod}(\mathbb{G})$, es una relación de equivalencia entre elementos de Ω.

Demostración:
Debemos probar que para cualesquiera ω, ω_1, ω_2 y $\omega_3 \in \Omega$ se cumplen:
1. $\omega \sim \omega \operatorname{mod}(\mathbb{G})$.
2. $\omega_1 \sim \omega_2 \operatorname{mod}(\mathbb{G}) \implies \omega_2 \sim \omega_1 \operatorname{mod}(\mathbb{G})$.
3. $\omega_1 \sim \omega_2 \operatorname{mod}(\mathbb{G})$ y $\omega_2 \sim \omega_3 \operatorname{mod}(\mathbb{G}) \implies \omega_1 \sim \omega_3 \operatorname{mod}(\mathbb{G})$.

Sea $e : \Omega \longrightarrow \Omega$ dada por $e(\omega) \doteq \omega$ para cada $\omega \in \Omega$. Por definición $e \in \mathbb{G}$ y por lo tanto vale 1. Si $\omega_1 \sim \omega_2 \operatorname{mod}(\mathbb{G})$ entonces $\exists\ g \in \mathbb{G}$ tal que $\omega_1 = g(\omega_2)$. Luego $\omega_2 = e(\omega_2) = (g^{-1} \circ g)(\omega_2) = g^{-1}(g(\omega_2)) = g^{-1}(\omega_1)$, con lo cual $\omega_2 \sim \omega_1 \operatorname{mod}(\mathbb{G})$ y por lo tanto vale 2. Si $\omega_1 \sim \omega_2 \operatorname{mod}(\mathbb{G})$ y $\omega_2 \sim \omega_3 \operatorname{mod}(\mathbb{G})$ entonces existen g y $\widetilde{g} \in \mathbb{G}$ tales que $\omega_1 = g(\omega_2)$ y $\omega_2 = \widetilde{g}(\omega_3)$, luego $\omega_1 = g(\omega_2) = g(\widetilde{g}(\omega_3)) = (g \circ \widetilde{g})(\omega_3)$, lo cual implica 3. $\blacksquare$

Definición 2.2.19.6
Sean X un conjunto, $\mathbb{G}$ un grupo de transformaciones sobre Ω y $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Decimos que:

1) "*f es $\mathbb{G}-$invariante*", si $f(g(\omega)) = f(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$ y $g \in \mathbb{G}$.

2) "*f es maximal $\mathbb{G}-$invariante*", si f es $\mathbb{G}-$invariante y

$$f(\omega_1) = f(\omega_2), \text{ con } \omega_1 \text{ y } \omega_2 \text{ en } \Omega \implies \omega_1 \sim \omega_2 \operatorname{mod}(\mathbb{G}).$$

Teorema 2.2.19.7
Sean X un conjunto, $\mathbb{G}$ un grupo de transformaciones sobre Ω, $f : \Omega \longrightarrow X$ maximal $\mathbb{G}-$invariante y $h : \Omega \longrightarrow X$. Entonces h es $\mathbb{G}-$invariante $\iff \exists\ c : X \longrightarrow X$ tal que $h = c \circ f$.

Demostración:
($\implies$) Sea $Y \doteq f(\Omega)$. Supongamos primero que $X - Y \neq \emptyset$ y consideremos $x_0 \in X - Y$. Definimos entonces $c : X \longrightarrow X$ por

$$c(x) \doteq \begin{cases} x_0 \text{ si } x \notin Y; \\ h(\omega) \text{ con } f(\omega) = x, \text{ si } x \in Y \end{cases}$$

y resulta $h = c \circ f$. Ahora supongamos que $X = Y$ y consideremos $c : X \longrightarrow X$ dada por $c(x) \doteq h(\omega)$ con $f(\omega) = x$.

Afirmación:
Si $f(\omega_1) = f(\omega_2)$ con ω_1 y ω_2 en Ω entonces $h(\omega_1) = h(\omega_2)$.

Demostración Afirmación:
Como f es maximal $\mathbb{G}-$invariante se sigue que $\omega_1 \sim \omega_2 \operatorname{mod}(\mathbb{G})$, o sea $\exists\ g \in \mathbb{G}$ tal que $\omega_1 = g(\omega_2)$. Luego, por ser h $\mathbb{G}-$invariante, tenemos que $h(\omega_1) = h(g(\omega_2)) = h(\omega_2)$.

Dicha Afirmación nos asegura la buena definición de c, ahora comprobemos que $h = c \circ f$. Sea $\omega \in \Omega$ y $x \doteq f(\omega) \in Y$, luego $(c \circ f)(\omega) = c(f(\omega)) = c(x) = h(\omega)$.

($\Longleftarrow$) Sean $\omega \in \Omega$ y $g \in \mathbb{G}$ arbitrarios. Como f es $\mathbb{G}-$invariante entonces $f(g(\omega)) = f(\omega)$. También sabemos, por hipótesis, que $h(g(\omega)) = c(f(g(\omega)))$. Luego $h(g(\omega)) = c(f(\omega)) = (c \circ f)(\omega) = h(\omega)$ y resulta h $\mathbb{G}-$invariante. ■

Nota 2.2.19.8
Sean $n \geq 2$ entero, $S^n \doteq \{\pi : \{1, ..., n\} \longrightarrow \{1, ..., n\} : \pi \text{ es biyectiva}\}$, $M(n, \mathbb{R}) \doteq \{M : M \text{ es una matriz real } n \times n\}$ y $Gl(n) \doteq \{M \in M(n, \mathbb{R}) : M \text{ es invertible}\}$. Para cada $M \in M(n, \mathbb{R})$ definimos $T_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $T_M(\mathbf{x}) \doteq M\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Afirmación 1:
Si $M \in Gl(n)$ entonces T_M es lineal, biyectiva y su inversa está dada por $T_{M^{-1}}$.

Demostración Afirmación 1:
Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Luego $T_M(a\mathbf{x} + \mathbf{y}) = M(a\mathbf{x} + \mathbf{y}) = aM\mathbf{x} + M\mathbf{y} = aT_M(\mathbf{x}) + T_M(\mathbf{y})$, lo cual implica la linealidad de T_M. Ahora si $T_M(\mathbf{x}) = T_M(\mathbf{y})$ entonces $M\mathbf{x} = M\mathbf{y}$. Aplicando la inversa de M miembro a miembro obtenemos que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, por lo tanto T_M es inyectiva. Sea $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario entonces $\mathbf{y} = (MM^{-1})\mathbf{y} = M(M^{-1}\mathbf{y}) = T_M(M^{-1}\mathbf{y})$, es decir T_M es sobreyectiva. Finalmente, como $(T_M \circ T_{M^{-1}})(\mathbf{x}) = T_M(M^{-1}\mathbf{x}) = M(M^{-1}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ y $(T_{M^{-1}} \circ T_M)(\mathbf{x}) = T_{M^{-1}}(M\mathbf{x}) = M^{-1}(M\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ resulta que $T_M^{-1} = T_{M^{-1}}$. ■

Para cada $\pi \in S^n$ denotamos $M_\pi \in Gl(n)$ dada por $M_\pi \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\pi(1)} \\ \vdots \\ x_{\pi(n)} \end{bmatrix}$. Sean

$$
\begin{aligned}
P(n) &\doteq \{M_\pi \in Gl(n) : \pi \in S^n\}, \\
\mathbb{P}(n) &\doteq \{T_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : M \in P(n)\}, \\
O(n) &\doteq \left\{M \in M(n, \mathbb{R}) : MM^\top = M^\top M = I_n\right\} \text{ y} \\
\mathbb{O}(n) &\doteq \{T_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : M \in O(n)\}.
\end{aligned}
$$

A $\mathbb{P}(n)$ lo llamamos "*grupo de permutaciones sobre* $\mathbb{R}^n$" y a $\mathbb{O}(n)$ lo llamamos "*grupo de transformaciones ortogonales sobre* $\mathbb{R}^n$".

Afirmación 2: $\mathbb{P}(n) \subset \mathbb{O}(n)$.

Demostración Afirmación 2:

Sea $T_{M_\pi} \in \mathbb{P}(n)$ y probemos que $M_\pi M_\pi^\top = M_\pi^\top M_\pi = I_n$. Como $M_\pi \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\pi(1)} \\ \vdots \\ x_{\pi(n)} \end{bmatrix}$ entonces $M_\pi = \begin{bmatrix} e_{\pi_{(1)}} \\ \vdots \\ e_{\pi_{(n)}} \end{bmatrix}$, donde e_j es un vector fila de longitud n tal que tiene un 1 en la $j-$ésima posición y ceros en todas las otras entradas. Luego

$$
\left(M_\pi M_\pi^\top\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (M_\pi)_{i,k} (M_\pi^\top)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (M_\pi)_{i,k} (M_\pi)_{j,k} = \delta_{i,j},
$$

para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$. ■

Definición 2.2.19.9
Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $n \geq 2$ entero y $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio. Decimos que "$\mathbf{X}$ *tiene distribución esféricamente simétrica*" (o simplemente *distribución esférica*), y denotamos $\mathbf{X} \in S_P(n)$, si

$$
\Gamma\mathbf{X} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{X},\ \forall\ \Gamma \in O(n).
$$

Esto es $P_{\mathbf{X}}(T_\Gamma) = P_{\mathbf{X}}$, $\forall\ T_\Gamma \in \mathbb{O}(n)$.

Notación 2.2.19.10
Denotamos por $S_P^+(n)$ al conjunto $\{\mathbf{X} \in S_P(n) : P(\mathbf{X} = \mathbf{0}) = 0\}$.

Lema 2.2.19.11
Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{t}) \doteq \mathbf{t}^\top \mathbf{t}$, $\forall\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. Entonces f es $\mathbb{O}(n)-$invariante maximal.

Demostración:
Sea $T_\Gamma \in \mathbb{O}(n)$ y $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. Luego

$$f(T_\Gamma(\mathbf{t})) = f(\Gamma\mathbf{t}) = (\Gamma\mathbf{t})^\top(\Gamma\mathbf{t}) = \mathbf{t}^\top\Gamma^\top\Gamma\mathbf{t} = \mathbf{t}^\top\mathbf{t} = f(\mathbf{t}),$$

o sea, f es $\mathbb{O}(n)-$invariante. Ahora sean $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ tales que $f(\mathbf{t}) = f(\mathbf{s})$. Entonces $\|\mathbf{t}\|^2 = \mathbf{t}^\top\mathbf{t} = \mathbf{s}^\top\mathbf{s} = \|\mathbf{s}\|^2$ y, como $\|\mathbf{t}\| \geq 0\ \forall\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, resulta que $\|\mathbf{t}\| = \|\mathbf{s}\|$. Luego, por lo que sabemos de Álgebra lineal, $\exists\ \Gamma \in O(n)$ tal que $\mathbf{s} = \Gamma\mathbf{t}$, es decir $\mathbf{s} \sim \mathbf{t} \bmod(\mathbb{O}(\mathbf{n}))$. Por lo tanto f es $\mathbb{O}(n)-$invariante maximal. ■

Definición 2.2.19.12
Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $n \geq 2$ y $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio. Llamamos "*función característica de* $\mathbf{X}$ *con respecto a* P" a la función $c_\mathbf{X} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$c_\mathbf{X}(\mathbf{t}) \doteq E_P(\exp(i(\mathbf{t}^\top\mathbf{X})), \forall\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 2.2.19.13
Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $n \geq 2$ y $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio. Entonces $\mathbf{X} \in S_P(n) \iff \exists\ \phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $c_\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^\top\mathbf{t})$, $\forall\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.

Demostración:
($\Longrightarrow$) Sean $\Gamma \in O(n)$ y $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. Por hipótesis $\Gamma\mathbf{X} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{X}$, entonces

$$c_\mathbf{X}(\Gamma^\top\mathbf{t}) = E_P(\exp(i(\mathbf{t}^\top\Gamma\mathbf{X})) = c_{\Gamma\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = c_\mathbf{X}(\mathbf{t})$$

es decir $c_\mathbf{X}$ es $\mathbb{O}(n)-$invariante. Además el Lema anterior nos asegura que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{t}) \doteq \mathbf{t}^\top\mathbf{t}$, $\forall\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ es $\mathbb{O}(n)-$invariante maximal. Luego, por el Teorema 2.2.19.7, tenemos que $\exists\ c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $c_\mathbf{X} = c \circ f$.
($\Longleftarrow$) Queremos probar que $\Gamma\mathbf{X} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{X}$, $\forall\ \Gamma \in O(n)$. Es decir que $c_{\Gamma\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = c_\mathbf{X}(\mathbf{t})$, $\forall\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. Por definición tenemos que

$$c_{\Gamma\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E_P(\exp(i(\mathbf{t}^\top\Gamma\mathbf{X})) = E_P(\exp(i(\Gamma^\top\mathbf{t})^\top\mathbf{X})) = c_\mathbf{X}(\Gamma^\top\mathbf{t}).$$

Además, por hipótesis

$$c_\mathbf{X}(\Gamma^\top\mathbf{t}) = \phi((\Gamma^\top\mathbf{t})^\top\Gamma^\top\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^\top\Gamma\Gamma^\top\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^\top\mathbf{t}) = c_\mathbf{X}(\mathbf{t}).$$

Queda así culminada la prueba. ■

Nota 2.2.19.14
Sean $\mathbf{X} \in S_P(n)$, $\psi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $\psi(\mathbf{t}^\top\mathbf{t}) = c_\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^\top\mathbf{t})$, $\forall\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\psi(t) = \phi(t)$, $\forall\ t \in [0, \infty)$.

Demostración:
Sea $t \in [0, \infty)$ arbitrario y consideremos $\mathbf{t} \doteq\in \mathbb{R}^n$. Por hipótesis $\psi(\mathbf{t}^\top\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^\top\mathbf{t})$, pero

$$\mathbf{t}^\top\mathbf{t} = \left(\sqrt{t}, 0, ..., 0\right)\left(\sqrt{t}, 0, ..., 0\right)^\top = \left(\sqrt{t}\right)^2 = t,$$

con lo cual obtenemos que $\psi(t) = \phi(t)$. ■

Definición 2.2.19.15
Sea $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria. Decimos que "*X es $P-$ simétrica en torno a* 0" o simplemente que "*X es simétrica*", y denotamos $X \in S_P(1)$, si $X \stackrel{\circ}{=} -X$.

Proposición 2.2.19.16

$X \in S_P(1) \iff \exists\ \phi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $c_X(t) = \phi(t^2)$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$.

Demostración:
$(\implies)$ Como $X \overset{\circ}{=} -X$ entonces

$$c_X(t) = c_{-X}(t) = E_P(\exp(it(-X))) = E_P(\exp(i(-t)X)) = c_X(-t).$$

Luego considero $\phi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $\phi(u) \doteq c_X(t)$ si $u = t^2$.
$(\impliedby)$ Para cada $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$c_X(t) = \phi(t^2) = \phi((-t)^2) = c_X(-t) = E_P(\exp(i(-t)X)) = E_P(\exp(it(-X))) = c_{-X}(t)$$

Por lo tanto $X \overset{\circ}{=} -X$. ■

Notación 2.2.19.17
Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por Φ_n al conjunto

$$\left\{\phi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C} : \exists\ (\Omega,\mathcal{F},P)\ e.p. \text{ y } \mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ v.a. tal que } c_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^\top \mathbf{t}),\ \forall\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n\right\}$$

y sea $\mathbf{\Phi}_\infty \doteq \cap_{n\in\mathbb{N}}\Phi_n$.

Proposición 2.2.19.18
La sucesión $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

Demostración:
Sea $n \in \mathbb{N}$ y probemos que $\Phi_{n+1} \subset \Phi_n$. Sea $\phi \in \Phi_{n+1}$ entonces $\exists\ (\Omega,\mathcal{F},P)$ *e.p.* y $\mathbf{X} = (X_1,...,X_{n+1}) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *v.a.* tal que

$$c_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^\top \mathbf{t}),\ \forall\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Sea $\mathbf{Y} \doteq (X_1,...,X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *v.a.*. Queremos ver que

$$c_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}) = \phi(\mathbf{u}^\top \mathbf{u}),\ \forall\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $\mathbf{u} = (u_1,...,u_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ arbitrario y sea $\mathbf{t} \doteq (u_1,...,u_n,0)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$. Puesto que

$$\mathbf{t}^\top \mathbf{t} = \sum_{i=1}^n u_i^2 = \mathbf{u}^\top \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{t}^\top \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n u_i X_i = \mathbf{u}^\top \mathbf{Y},$$

tenemos que

$$c_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^\top \mathbf{t}) = \phi(\mathbf{u}^\top \mathbf{u}) \text{ y } c_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E_P(\exp(i(\mathbf{t}^\top \mathbf{X}))) = E_P(\exp(i(\mathbf{u}^\top \mathbf{Y})) = c_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}).$$

Igualando las dos expresiones anteriores obtenemos que $c_{\mathbf{Y}}(\mathbf{u}) = \phi(\mathbf{u}^\top \mathbf{u})$. ■

Definición 2.2.19.19
Para cada $n \in \mathbb{N}$ a Φ_n la llamamos "*familia de funciones generatrices de funciones características de variables aleatorias $n-$dimensionales con distribución esférica*".

Nota 2.2.19.20
Sea $n \geq 2$ entero y sea $U^{(n)} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio con distribución uniforme sobre

$$\mathbb{S}^n \doteq \left\{\mathbf{x} = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\right\}.$$

Esto es, para cada $B \in \sigma(\mathbb{S}^n)$ ($\sigma-$álgebra de Borel de $\mathbb{S}^n$) tenemos que

$$P(U^{(n)} \in B) = v_{\mathbb{S}^n} \int_{\mathbb{S}^n} \chi_B d\mu_{\mathbb{S}^n} = v_{\mathbb{S}^n} \mu_{\mathbb{S}^n}(B)$$

donde $\mu_{\mathbb{S}^n}$ es la medida sobre $(\mathbb{S}^n, \sigma(\mathbb{S}^n))$ tal que $v_{\mathbb{S}^n}\mu_{\mathbb{S}^n}(\mathbb{S}^n) = 1$, y $v_{\mathbb{S}^n} \doteq \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$. En símbolos $U^{(n)} \sim \mathcal{U}(\mathbb{S}^n)$. Suponemos también que

$$\mu_{\mathbb{S}^n}(T_M) = \mu_{\mathbb{S}^n}, \ \forall \ M \in O(n),$$

con $T_M : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ dada por $T_M(\mathbf{x}) \doteq M\mathbf{x}$, $\forall \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

<u>Afirmación:</u> $U^{(n)} \in S_P(n)$.
<u>Demostración Afirmación:</u>
Sean $M \in O(n)$ y $B \in \sigma(\mathbb{S}^n)$ arbitrarios. Luego

$$\begin{aligned} P\left(MU^{(n)} \in B\right) &= P\left(U^{(n)} \in M^{-1}B\right) = v_{\mathbb{S}^n}\mu_{\mathbb{S}^n}\left(M^{-1}B\right) = v_{\mathbb{S}^n}\mu_{\mathbb{S}^n}\left(T_{M^{-1}}(B)\right) = v_{\mathbb{S}^n}\mu_{\mathbb{S}^n}\left((T_M)^{-1}(B)\right) \\ &= v_{\mathbb{S}^n}\mu_{\mathbb{S}^n}(T_M)(B) = v_{\mathbb{S}^n}\mu_{\mathbb{S}^n}(B) = P\left(U^{(n)} \in B\right), \end{aligned}$$

por lo tanto $MU^{(n)} \triangleq U^{(n)}$. Ahora, por el Teorema 2.2.19.13 y la Nota 2.2.19.14, sabemos que $\exists! \ \psi_n : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$c_{U^{(n)}}(\mathbf{t}) = v_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} \exp(i(\mathbf{t}^\top\mathbf{x}))\mu_{\mathbb{S}^n}(d\mathbf{x}) = \psi_n(\mathbf{t}^\top\mathbf{t}), \ \forall \ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 2.2.19.21
Decimos que "$G : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función de distribución acumulada sobre* $[0,\infty)$" (y escribimos G es $f.d.a.$ sobre $[0,\infty)$) si:
1. $0 \leq t < s \implies G(t) \leq G(s)$.
2. G es continua a derecha en todo punto.
3. $G(0) \geq 0$.
4. $G(\infty) = 1$.

Teorema 2.2.19.22 (Continuación de la Nota 2.2.19.20)
Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\phi \in \Phi_n \iff \exists \ G : [0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ $f.d.a.$ sobre $[0,\infty)$ tal que

$$\phi(t) = \int_0^\infty \psi_n(tr^2)G(dr), \ \forall \ t \in [0,\infty).$$

Demostración:
($\implies$) Supongamos que $\phi \in \Phi_n$ entonces existen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad y $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vector aleatorio tales que

$$c_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \phi\left(\mathbf{t}^\top\mathbf{t}\right), \ \forall \ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de distribución acumulada de $\mathbf{X}$. Notemos que, para cada $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{S}^n$ tenemos que

$$(\|\mathbf{t}\|\,\mathbf{y})^\top(\|\mathbf{t}\|\,\mathbf{y}) = \|\mathbf{t}\|^2\,\mathbf{y}^\top\mathbf{y} = \|\mathbf{t}\|^2\,\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{t}\|^2 = \mathbf{t}^\top\mathbf{t},$$

entonces

$$\begin{aligned} \phi\left(\mathbf{t}^\top\mathbf{t}\right) &= \phi\left((\|\mathbf{t}\|\,\mathbf{y})^\top(\|\mathbf{t}\|\,\mathbf{y})\right) = c_{\mathbf{X}}(\|\mathbf{t}\|\,\mathbf{y}) = v_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} c_{\mathbf{X}}(\|\mathbf{t}\|\,\mathbf{y})\mu_{S^n}(d\mathbf{y}) \\ &= v_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} E_P\left[\exp\left(i\,(\|\mathbf{t}\|\,\mathbf{y})^\top\mathbf{X}\right)\right]\mu_{\mathbb{S}^n}(d\mathbf{y}) = v_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} E_P\left[\exp\left(i\,\|\mathbf{t}\|\,\mathbf{y}^\top\mathbf{X}\right)\right]\mu_{\mathbb{S}^n}(d\mathbf{y}) \\ &= v_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n} E_P\left[\exp\left(i\,\|\mathbf{t}\|\,\mathbf{X}^\top\mathbf{y}\right)\right]\mu_{\mathbb{S}^n}(d\mathbf{y}) = v_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(i\,\|\mathbf{t}\|\,\mathbf{x}^\top\mathbf{y}\right)F(d\mathbf{x})\right]\mu_{\mathbb{S}^n}(d\mathbf{y}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[v_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n}\exp\left(i\,\|\mathbf{t}\|\,\mathbf{x}^\top\mathbf{y}\right)\mu_{\mathbb{S}^n}(d\mathbf{y})\right]F(d\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n}\left[v_{\mathbb{S}^n}\int_{\mathbb{S}^n}\exp\left(i\,(\|\mathbf{t}\|\,\mathbf{x})^\top\mathbf{y}\right)\mu_{\mathbb{S}^n}(d\mathbf{y})\right]F(d\mathbf{x}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\psi_n\left((\|\mathbf{t}\|\,\mathbf{x})^\top(\|\mathbf{t}\|\,\mathbf{x})\right)F(d\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n}\psi_n\left(\|\mathbf{t}\|^2\,\|\mathbf{x}\|^2\right)F(d\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Si definimos $G : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(u) \doteq \int_{\|\mathbf{x}\|\leq u} F(d\mathbf{x})$, $u \in [0,\infty)$ se puede ver fácilmente que G es *f.d.a.* sobre $[0,\infty)$. Además, como

$$\phi\left(\mathbf{t}^{\top}\mathbf{t}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_n\left(\|\mathbf{t}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2\right) F(d\mathbf{x}) \ \ \forall\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n,$$

en particular vale para $\mathbf{t} \doteq \left(\sqrt{t}, 0, ..., 0\right)^{\top}$, donde $t \in [0,\infty)$. Por lo tanto

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_n\left(t\|\mathbf{x}\|^2\right) F(d\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} \psi_n\left(tr^2\right) G(dr).$$

$(\Longleftarrow)$ Supongamos que existe $G : [0,\infty) \longrightarrow [0,1]$ *f.d.a.* sobre $[0,\infty)$ tal que

$$\phi(t) = \int_0^{\infty} \psi_n\left(tr^2\right) G(dr), \ \forall\ t \in [0,\infty).$$

Tomemos $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e.p.* y $R : \Omega \longrightarrow [0,\infty)$ variable aleatoria tal que sea independiente de $U^{(n)}$ y tal que G sea *f.d.a* de R. Luego

$$\begin{aligned}
c_{RU^{(n)}}(\mathbf{t}) &= E_P\left[\exp\left(i\mathbf{t}^{\top}RU^{(n)}\right)\right] = \int_0^{\infty} E_P\left[\exp\left(i\mathbf{t}^{\top}rU^{(n)}\right)\right] G(dr) = \int_0^{\infty} E_P\left[\exp\left(i\left(r\mathbf{t}\right)^{\top}U^{(n)}\right)\right] G(dr) \\
&= \int_0^{\infty} c_{U^{(n)}}(r\mathbf{t})\, G(dr) = \int_0^{\infty} \psi_n((r\mathbf{t})^{\top}r\mathbf{t})G(dr) = \int_0^{\infty} \psi_n\left(\|\mathbf{t}\|^2 r^2\right) G(dr) = \phi(\|\mathbf{t}\|^2) \\
&= \phi\left(\mathbf{t}^{\top}\mathbf{t}\right), \ \forall\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi \in \Phi_n$. ■

Corolario 2.2.19.23
Sean $n \in \mathbb{N}$, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de prababilidad y $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio. Son equivalentes:

1. $\mathbf{X} \in S_P(n)$ o, lo que es lo mismo, existe $\phi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$c_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \phi\left(\mathbf{t}^{\top}\mathbf{t}\right), \ \forall\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

2. $\mathbf{X} \overset{\circ}{=} RU^{(n)}$ donde:
    - 2.1. $R : \Omega \longrightarrow [0,\infty)$ es una variable aleatoria.
    - 2.2. R y $U^{(n)}$ son independientes.
    - 2.3. Para cada $t \in [0,\infty)$ se cumple que

    $$\phi(t) = \int_0^{\infty} \psi_n(tr^2)G(dr)$$

    donde $G(u) = F_R(u)$, $\forall\ u \geq 0$ y F_R es la *f.d.a.* de R.

Demostración:
Es una consecuencia directa del Teorema anterior. ■

Notación 2.2.19.24
Sean $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio y $R : \Omega \longrightarrow [0,\infty)$ una variable aleatoria. Denotamos $\mathbf{X} \in S_P(n,R)$ para indicar que $\mathbf{X} \overset{\circ}{=} RU^{(n)}$ con R y $U^{(n)}$ $P-$independientes.

Teorema 2.2.19.25
Sean $n \geq 2$ entero y $\mathbf{X} \in S_P(n,R) \cap S_P^{+}(n)$. Entonces

1. $\|\mathbf{X}\| \overset{\circ}{=} R$
2. $\frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \overset{\circ}{=} U^{(n)}$
3. $\|\mathbf{X}\|$ y $\frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|}$ son $P-$independientes.

Demostración:
Como $\mathbf{X} \in S_P^+(n)$ entonces $P(\mathbf{X} = \mathbf{0}) = 0$. Definimos $f_1 : \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\} \longrightarrow [0, \infty)$ y $f_2 : \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &\doteq \|\mathbf{x}\|, \, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ f_2(\mathbf{x}) &\doteq \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{X} \overset{\circ}{=} RU^{(n)}$ tenemos que

$$\begin{bmatrix} \|\mathbf{X}\| \\ \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{X}) \\ f_2(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \overset{\circ}{=} \begin{bmatrix} f_1(RU^{(n)}) \\ f_2(RU^{(n)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\|RU^{(n)}\right\| \\ \frac{RU^{(n)}}{\left\|RU^{(n)}\right\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ \frac{RU^{(n)}}{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ U^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Además R y $U^{(n)}$ son $P-$independientes, con lo cual el Teorema queda probado. ■

Teorema 2.2.19.26
Sean $n \geq 2$ entero y $\mathbf{X} \doteq (X_1, ..., X_n)^\top : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio $n-$dimensional. Entonces

$$\mathbf{X} \in S_P(n) \iff \mathbf{a}^\top \mathbf{X} \overset{\circ}{=} \|\mathbf{a}\| \, X_1, \, \forall \, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración:
($\Longrightarrow$) Por el Teorema 2.2.19.13. existe $\phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $c_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^\top \mathbf{t})$, $\forall \, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. Luego para todo $t \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\begin{aligned} c_{X_1}(t) &= E_P(\exp(itX_1)) = E_P(\exp(i(tX_1 + 0X_2 + \cdots + 0X_n))) = E_P(\exp(i\,(t, 0, ..., 0)\,(X_1, ..., X_n)^\top)) \\ &= E_P(\exp(i\,(t, 0, ..., 0)\,\mathbf{X}) = c_{\mathbf{X}}((t, 0, ..., 0)^\top) = \phi(t^2). \end{aligned}$$

Sean $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Entonces

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{a}^\top \mathbf{X}}(u) &= E_P(\exp(i(u\mathbf{a}^\top \mathbf{X}) = E_P(\exp(i(u\mathbf{a})^\top \mathbf{X}) = c_{\mathbf{X}}(u\mathbf{a}) \\ &= \phi((u\mathbf{a})^\top u\mathbf{a}) = \phi(u^2 \|\mathbf{a}\|^2) = c_{X_1}(u \, \|\mathbf{a}\|) = c_{\|\mathbf{a}\| X_1}(u), \end{aligned}$$

por tanto $\mathbf{a}^\top \mathbf{X} \overset{\circ}{=} \|\mathbf{a}\| \, X_1$.
($\Longleftarrow$) Sea $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Luego

$$c_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E_P(\exp(i\mathbf{t}^\top \mathbf{X})) = c_{\mathbf{t}^\top \mathbf{X}}(1) = c_{\|\mathbf{t}\| X_1}(1) = c_{X_1}(\|\mathbf{t}\|) = c_{X_1}\left(\sqrt{\mathbf{t}^\top \mathbf{t}}\right).$$

Consideremos $\phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\phi(u) \doteq c_{X_1}(\sqrt{u}), \, \forall \, u \in [0, \infty).$$

Entonces tenemos que $c_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^\top \mathbf{t})$ y, por el Teorema 2.2.19.13, resulta que $\mathbf{X} \in S_P(n)$. ■

Continuación del tema central de la Sección 2.2.

Proposición 2.2.20
Sea $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una $\mathbb{C} - v.a.$ y sean $X \doteq \mathrm{Re}\,(Z)$ e $Y \doteq \mathrm{Im}\,(Z)$. Entonces

$$Z \text{ es } P-\text{circular} \iff \exists \, \phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } c_Z(z) = \phi(|z|^2), \, z \in \mathbb{C}.$$

Demostración:
Por las definiciones 2.2.17, 2.1.13 y el Teorema 2.2.19.13 tenemos que

$$\begin{aligned} Z \text{ es } P-\text{circular} &\iff (X,Y) \text{ es } P-\text{esféricamente simétrico} \\ &\iff (X,Y) \in S_P(2) \\ &\iff \exists\ \phi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } c_{(X,Y)}(x,y) = \phi(x^2+y^2),\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ &\iff \exists\ \phi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } c_Z(z) = \phi(|z|^2),\ \forall\ z \in \mathbb{C}.\ \blacksquare \end{aligned}$$

Corolario 2.2.21
Sea $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una $\mathbb{C}-v.a.$ y $q \in \mathbb{N}$. Si $M_{P,q}(Z)$ está definido y Z es $P-$circular entonces

$$c_Z(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{|z|^{2k}}{(n!)^2} \beta_{P,2k}(Z) + o(|z|^q),\ \forall\ z \in \mathbb{C} \text{ y } p \doteq \left[\frac{q}{2}\right].$$

Demostración:
Por el Corolario 2.2.13 sabemos que

$$c_Z(z) = 1 + \sum_{m=1}^{q} \left(\frac{i}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{m} \frac{(z^*)^n z^{m-n}}{n!(m-n)!} \alpha_{P,n,m-n}(Z) + o(|z|^q),\ \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

Además, el Corolario 2.2.11 nos dice que

$$\left(\frac{i}{2}\right)^m \alpha_{P,n,m-n}(Z) = \frac{\partial^m}{(\partial\xi)^{m-n}(\partial\xi^*)^n}(c_Z)(0).$$

Luego

$$c_Z(z) = 1 + \sum_{m=1}^{q} \sum_{n=0}^{m} \frac{(z^*)^n z^{m-n}}{n!(m-n)!} \frac{\partial^m}{(\partial\xi)^{m-n}(\partial\xi^*)^n}(c_Z)(0) + o(|z|^q),\ \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

Por otra parte, como Z es $P-$circular, por la Proposición anterior, c_Z es función de $z \mapsto |z|^2$, con lo cual $c_Z \in C^{\infty}_{r,|.|}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Luego, por el Corolario 1.6.10, tenemos que

$$\frac{\partial^m}{(\partial\xi)^{m-n}(\partial\xi^*)^n}(c_Z)(0) = 0$$

si $n \neq m-n$, $n \in \{0,...,m\}$; $\forall\ m \in \mathbb{N}$. Así, para todo $z \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$\begin{aligned} c_Z(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{(z^*)^k z^k}{(k!)^2} \frac{\partial^{2k}}{(\partial\xi)^k(\partial\xi^*)^k}(c_Z)(0) + o(|z|^q) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{(z^*)^k z^k}{(k!)^2} \left(\frac{i}{2}\right)^{2k} \alpha_{P,k,k}(Z) + o(|z|^q) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{|z|^{2k}}{(k!)^2} \left(\frac{-1}{4}\right)^k \beta_{P,2k}(Z) + o(|z|^q).\ \blacksquare \end{aligned}$$

3 Introducción a los $\mathbb{C}-$vectores

3.1 Conexiones entre $\mathbb{R}-$ y $\mathbb{C}-$vectores

En esta sección establecemos relaciones entre las descripciones de un vector complejo con su correspondiente descripción en términos de sus partes real e imaginaria. Introducimos el conjunto $\mathcal{W}^{n\times n}$ de todas las *matrices aumentadas* y obtenemos una definición diferente de la factorización de Cholesky para una matriz definida positiva perteneciente a $\mathcal{W}^{n\times n}$. Por último relacionamos los productos internos y las formas cuadráticas definidos sobre los espacios $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ y $\mathbb{C}^{2n}_*$. Esta sección, como la mayoría de las secciones de este capítulo, esta basada en el libro [6].

Notación 3.1.1
Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{C}^n \doteq \left\{\mathbf{z} \doteq (z_1, ..., z_n)^\top : z_j \in \mathbb{C}\ \forall\ j = 1, ..., n\right\}$. Para cada $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ llamamos "*conjugada de* $\mathbf{z}$" a $\mathbf{z}^* \doteq (z_1^*, ..., z_n^*)^\top$ y "*vector aumentado de* $\mathbf{z}$" a

$$\underline{\mathbf{z}} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* \end{bmatrix}.$$

Sea $\mathbb{C}^{2n}_* \doteq \{\underline{\mathbf{z}} : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n\}$. Sea $T_n \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ dada por $T_n \doteq \begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ I_n & -iI_n \end{bmatrix}$. La "*adjunta conjugada*" de T_n es

$$T_n^H \doteq \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ -iI_n & iI_n \end{bmatrix}.$$

Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$, llamamos "*vector complejo conjugado asociado a* $\mathbf{x}$" a $T_n\mathbf{x}$.

Nota 3.1.2
Sea $\mathbf{x} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ con $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$. Se ve fácilmente que $T_n\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_1 - i\mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$.

Proposición 3.1.3
Se cumple que $T_nT_n^H = T_n^HT_n = 2I_{2n}$.

Demostración:

$$T_nT_n^H = \begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ I_n & -iI_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ -iI_n & iI_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n + I_n & I_n - I_n \\ I_n - I_n & I_n + I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2I_n & O_n \\ O_n & 2I_n \end{bmatrix} = 2I_{2n}$$

y

$$T_n^HT_n = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ -iI_n & iI_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ I_n & -iI_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n + I_n & iI_n - iI_n \\ -iI_n + iI_n & I_n + I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2I_n & O_n \\ O_n & 2I_n \end{bmatrix} = 2I_{2n}. \blacksquare$$

Corolario 3.1.4
Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ y $\underline{\mathbf{z}} \in \mathbb{C}^{2n}_*$. Entonces $\underline{\mathbf{z}} = T_n\mathbf{x} \iff \mathbf{x} = \frac{1}{2}T_n^H\underline{\mathbf{z}}$.

Demostración:
Se sigue fácilmente teniendo en cuenta la Proposición anterior. $\blacksquare$

Definición 3.1.5
Sean H_1 y H_2 en $\mathbb{C}^{m\times n}$. Llamamos "*matriz aumentada de* (H_1, H_2)" a la matriz

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m\times 2n}.$$

Proposición 3.1.6
Sea $M \doteq \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m\times 2n}$, con $M_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ para cada $i,\, j \in \{1,2\}$ y sea $\underline{H} \doteq \frac{1}{2} T_m M T_n^H$. Entonces

1. $T_m M\mathbf{x} = \underline{H}\,(T_n\mathbf{x})$, $\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$. Es decir, el vector complejo conjugado asociado a $M\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2m}$ es el vector complejo conjugado asociado a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ pre multiplicado por la matriz compleja $\underline{H}$.

2. $\underline{H}$ es la matriz aumentada de (H_1, H_2), donde

$$H_1 \doteq \frac{1}{2}\left[M_{11} + M_{22} + i\,(M_{21} - M_{12})\right] \text{ y } H_2 \doteq \frac{1}{2}\left[M_{11} - M_{22} + i\,(M_{21} + M_{12})\right].$$

Demostración:
1. Por la Proposición 3.1.3 sabemos que $\frac{1}{2} T_n^H T_n = I_{2n}$, con lo cual

$$\underline{H}\,(T_n\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2} T_m M T_n^H\right)(T_n\mathbf{x}) = T_m M \frac{1}{2} T_n^H T_n\mathbf{x} = T_m M\mathbf{x}.$$

2. Notemos que

$$\begin{aligned} \underline{H} &\doteq \frac{1}{2} T_m M T_n^H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_m & iI_m \\ I_m & -iI_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ -iI_n & iI_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} M_{11} + iM_{21} & M_{12} + iM_{22} \\ M_{11} - iM_{21} & M_{12} - iM_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ -iI_n & iI_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} M_{11} + M_{22} + i\,(M_{21} - M_{12}) & M_{11} - M_{22} + i\,(M_{12} - M_{21}) \\ M_{11} - M_{22} - i\,(M_{12} + M_{21}) & M_{11} + M_{22} - i\,(M_{21} - M_{12}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto queda demostrada la Proposición. ■

Nota 3.1.7 (Continuación de la Proposición 3.1.6)
1. Definimos $L : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ por

$$L(\mathbf{z}) \doteq H_1\mathbf{z} + H_2\mathbf{z}^*,\ \forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n.$$

Por las Proposiciones 1.1.9 y 1.1.10 tenemos que L es una transformación $\mathbb{R}-$lineal. Como

$$\begin{bmatrix} L(\mathbf{z}) \\ L(\mathbf{z})^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1\mathbf{z} + H_2\mathbf{z}^* \\ H_1^*\mathbf{z}^* + H_2^*\mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1\mathbf{z} + H_2\mathbf{z}^* \\ H_2^*\mathbf{z} + H_1^*\mathbf{z}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* \end{bmatrix} = \underline{H} \cdot \underline{\mathbf{z}}$$

entonces el vector aumentado de $L(\mathbf{z})$ es $\underline{H} \cdot \underline{\mathbf{z}}$, $\forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$.

2. Si $M_{21} = -M_{12}$ y $M_{11} = M_{22}$ entonces $H_2 = 0$. Luego $L(\mathbf{z}) \doteq H_1\mathbf{z}$, $\forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ y, por la Proposición 1.1.9, L resulta $\mathbb{C}-$lineal.

Notación 3.1.8
Sean $m,\, n \in \mathbb{N}$. Denotamos $\mathcal{W}^{m\times n} = \left\{ \underline{H} \in \mathbb{C}^{2m\times 2n} : \exists\ H_1 \text{ y } H_2 \text{ en } \mathbb{C}^{m\times n} \text{ tales que } \underline{H} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix} \right\}$.

Proposición 3.1.9
Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{W}^{n\times n}$ es una $\mathbb{R} -$ *álgebra de matrices*. Esto es:

1. $\underline{H} \in \mathcal{W}^{n\times n}$ y $\underline{L} \in \mathcal{W}^{n\times n} \implies \underline{H} + \underline{L} \in \mathcal{W}^{n\times n}$ y $\underline{H} \cdot \underline{L} \in \mathcal{W}^{n\times n}$.

2. $\underline{H} \in \mathcal{W}^{n\times n}$ y $a \in \mathbb{R} \implies a \cdot \underline{H} \in \mathcal{W}^{n\times n}$.

3. Si $\underline{H} \in \mathcal{W}^{n\times n}$ y es invertible entonces $\underline{H}^{-1} \in \mathcal{W}^{n\times n}$.

Demostración:

1. $\underline{H}+\underline{L}=\begin{bmatrix} H_1 & H_2\\ H_2^* & H_1^*\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} L_1 & L_2\\ L_2^* & L_1^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H_1+L_1 & H_2+L_2\\ H_2^*+L_2^* & H_1^*+L_1^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H_1+L_1 & H_2+L_2\\ (H_2+L_2)^* & (H_1+L_1)^*\end{bmatrix}\in\mathcal{W}^{n\times n}$ y

$\underline{H}\cdot\underline{L}=\begin{bmatrix} H_1L_1+H_2L_2^* & H_1L_2+H_2L_1^*\\ H_2^*L_1+H_1^*L_2^* & H_2^*L_2+H_1^*L_1^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H_1L_1+H_2L_2^* & H_1L_2+H_2L_1^*\\ (H_1L_2+H_2L_1^*)^* & (H_1L_1+H_2L_2^*)^*\end{bmatrix}\in\mathcal{W}^{n\times n}.$

2. $a\cdot\underline{H}=a\begin{bmatrix} H_1 & H_2\\ H_2^* & H_1^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aH_1 & aH_2\\ aH_2^* & aH_1^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aH_1 & aH_2\\ (aH_2)^* & (aH_1)^*\end{bmatrix}\in\mathcal{W}^{n\times n}$

3. Como $\underline{H}\in\mathcal{W}^{n\times n}$entonces $\underline{H}=\begin{bmatrix} H_1 & H_2\\ H_2^* & H_1^*\end{bmatrix}$. La inversa de la matriz $\underline{H}$ puede ser calculada como

$$\underline{H}^{-1}=\begin{bmatrix} \left[H_1-H_2(H_1^*)^{-1}H_2^*\right]^{-1} & -\left[H_1-H_2(H_1^*)^{-1}H_2^*\right]^{-1}H_2(H_1^*)^{-1}\\ -\left(H_1^*-H_2^*H_1^{-1}H_2\right)^{-1}H_2^*H_1^{-1} & \left(H_1^*-H_2^*H_1^{-1}H_2\right)^{-1}\end{bmatrix}.$$

Pero $\left\{\left[H_1-H_2(H_1^*)^{-1}H_2^*\right]^{-1}\right\}^*=\left\{\left[H_1-H_2(H_1^*)^{-1}H_2^*\right]^*\right\}^{-1}=\left(H_1^*-H_2^*H_1^{-1}H_2\right)^{-1}$ y

$$\begin{aligned}\left\{\left[H_1-H_2(H_1^*)^{-1}H_2^*\right]^{-1}H_2(H_1^*)^{-1}\right\}^* &= \left\{\left[H_1-H_2(H_1^*)^{-1}H_2^*\right]^{-1}\right\}^*H_2^*\left[(H_1^*)^{-1}\right]^*\\ &= \left\{\left[H_1-H_2(H_1^*)^{-1}H_2^*\right]^*\right\}^{-1}H_2^*H_1^{-1}\\ &= (H_1^*-H_2^*H_2^{-1}H_2)^{-1}H_2^*H_1^{-1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\underline{H}^{-1}\in\mathcal{W}^{n\times n}$. ■

Definición 3.1.10
Sea $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ hermitiana. Decimos que "*A es definida positiva*" si $\mathbf{z}^HA\mathbf{z}>0,\ \forall\ \mathbf{z}\in\mathbb{C}^n-\{\mathbf{0}\}$.

También decimos que "*A es semidefinida positiva*" si $\mathbf{z}^HA\mathbf{z}\geq 0,\ \forall\ \mathbf{z}\in\mathbb{C}^n$.

Proposición 3.1.11
Sea $H\in\mathbb{C}^{n\times n}$ y escribamos $H=A+iB$ con A y B en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces
1. H es hermitiana $\iff$ $A=A^\top$ y $B=-B^\top$.
2. H es definida positiva $\iff$ se cumplen:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}+\mathbf{y}^\top B\mathbf{x}-\mathbf{x}^\top B\mathbf{y}+\mathbf{y}^\top A\mathbf{y} &> 0,\ \forall\ (\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^{2n}-\{\mathbf{0}\}\ \text{ y}\\ \mathbf{x}^\top B\mathbf{x}-\mathbf{y}^\top A\mathbf{x}+\mathbf{x}^\top A\mathbf{y}+\mathbf{y}^\top B\mathbf{y} &= 0,\ \forall\ (\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^{2n}.\end{aligned}$$

Demostración:
1. Como
$$H^H=(H^*)^\top=\left[(A+iB)^*\right]^\top=(A-iB)^\top=A^\top-iB^\top=A^\top+i(-B^\top),$$
resulta que
$$H^H=H\iff A^\top+i(-B^\top)=A+iB\iff\begin{cases} A=A^\top\\ B=-B^\top\end{cases}.$$

2. Sea $\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n-\{\mathbf{0}\}$. Escribamos $\mathbf{z}=\mathbf{x}+i\mathbf{y}$ con $\mathbf{x},\ \mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ tales que $(\mathbf{x},\mathbf{y})\neq\mathbf{0}$. Notemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^HH\mathbf{z} &= (\mathbf{x}^\top-i\mathbf{y}^\top)(A+iB)(\mathbf{x}+i\mathbf{y})\\ &= \left[\mathbf{x}^\top(A+iB)-i\mathbf{y}^\top(A+iB)\right](\mathbf{x}+i\mathbf{y})\\ &= \left(\mathbf{x}^\top A+i\mathbf{x}^\top B-i\mathbf{y}^\top A+\mathbf{y}^\top B\right)(\mathbf{x}+i\mathbf{y})\\ &= \mathbf{x}^\top A\mathbf{x}+i\mathbf{x}^\top B\mathbf{x}-i\mathbf{y}^\top A\mathbf{x}+\mathbf{y}^\top B\mathbf{x}+i\mathbf{x}^\top A\mathbf{y}-\mathbf{x}^\top B\mathbf{y}+\mathbf{y}^\top A\mathbf{y}+i\mathbf{y}^\top B\mathbf{y}\\ &= \left(\mathbf{x}^\top A\mathbf{x}+\mathbf{y}^\top B\mathbf{x}-\mathbf{x}^\top B\mathbf{y}+\mathbf{y}^\top A\mathbf{y}\right)+i(\mathbf{x}^\top B\mathbf{x}-\mathbf{y}^\top A\mathbf{x}+\mathbf{x}^\top A\mathbf{y}+\mathbf{y}^\top B\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Luego H es definida positiva $\iff \mathbf{z}^H H\mathbf{z} > 0,\ \forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n - \{\mathbf{0}\}$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} + \mathbf{y}^\top B\mathbf{x} - \mathbf{x}^\top B\mathbf{y} + \mathbf{y}^\top A\mathbf{y} > 0,\ \forall\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n} - \{\mathbf{0}\} \text{ y} \\ \mathbf{x}^\top B\mathbf{x} - \mathbf{y}^\top A\mathbf{x} + \mathbf{x}^\top A\mathbf{y} + \mathbf{y}^\top B\mathbf{y} = 0,\ \forall\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n} \end{array} \right. . \blacksquare$$

Nota 3.1.12
Por lo que sabemos de Álgebra lineal si $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es hermitiana, entonces
1. H es definida positiva $\iff \lambda > 0,\ \forall\ \lambda$ autovalor de H.
2. H es semidefinida positiva $\iff \lambda \geq 0,\ \forall\ \lambda$ autovalor de H.
3. H es definida positiva $\iff \exists\ L_H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ triangular inferior tal que $H = L_H L_H^H$. En este caso decimos que "*L_H es una descomposición de Cholesky de H*" y denotamos

$$H^{1/2} \doteq L_H$$

de la que diremos que "*es una raíz cuadrada de H*".
Es claro que, en general si $\underline{H} \in \mathcal{W}^{n\times n}$ con $n \geq 2$ y es definida positiva, entonces L_H no necesariamente está en $\mathcal{W}^{n\times n}$. Por esto, adoptaremos una definición diferente de descomposición de Cholesky para $\underline{H} \in \mathcal{W}^{n\times n}$. Antes de hacerlo, veamos un resultado de interés en si mismo.

Proposición 3.1.13
Sea $\underline{H} \in \mathcal{W}^{n\times n}$ y sean H_1 y H_2 en $\mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $\underline{H} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix}$. Si $\underline{H}$ es definida positiva y existen M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22} en $\mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $M \doteq \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} T_n^H \underline{H} T_n$ entonces

1. $M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$
2. M es definida positiva.
3. $H_1 = \frac{1}{2}\left[M_{11} + M_{22} + i\left(M_{21} - M_{12}\right)\right]$ y $H_2 = \frac{1}{2}\left[M_{11} - M_{22} + i\left(M_{21} + M_{12}\right)\right]$.

Demostración:
1. Supongamos que $H_1 = A_1 + iB_1$ y $H_2 = A_2 + iB_2$ con A_1, B_1, A_2 y B_2 en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Luego

$$M = \frac{1}{2} T_n^H \underline{H} T_n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ -iI_n & iI_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ I_n & -iI_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_2 - B_1 \\ B_1 + B_2 & A_1 - A_2 \end{bmatrix},$$

con lo cual $M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$.

2. Como $\underline{H}$ es hermitiana entonces $M = \frac{1}{2} T_n^H \underline{H} T_n = \frac{1}{2} T_n^H \underline{H}^H T_n = M^H$, lo que implica que M es hermitiana. Ahora sea $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2n} - \{\mathbf{0}\}$ arbitrario, entonces

$$\mathbf{z}^H M\mathbf{z} = \mathbf{z}^H \left(\frac{1}{2} T_n^H \underline{H} T_n\right)\mathbf{z} = \frac{1}{2}\left(T_n\mathbf{z}\right)^H \underline{H}\left(T_n\mathbf{z}\right).$$

Sea $\mathbf{x} \doteq T_n\mathbf{z}$, como $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\underline{H}$ es definida positiva, resulta que $\frac{1}{2}\mathbf{x}^H \underline{H}\mathbf{x} > 0$. Por lo tanto M es definida positiva.

3. Por la Proposición 3.1.3 tenemos que $\underline{H} = \frac{1}{2} T_n M T_n^H$ y por la Proposición 3.1.6 resultan

$$H_1 = \frac{1}{2}\left[M_{11} + M_{22} + i\left(M_{21} - M_{12}\right)\right] \text{ y } H_2 = \frac{1}{2}\left[M_{11} - M_{22} + i\left(M_{21} + M_{12}\right)\right].$$

Queda entonces finalizada la prueba. $\blacksquare$

Definición 3.1.14 (Continuación de le Proposición 3.1.13)
Sea L_M una descomposición de Cholesky de M y sea

$$\underline{N} \doteq \frac{1}{2} T_n L_M T_n^H.$$

Decimos que "$\underline{N}$ *es una descomposición de Cholesky de* $\underline{H}$".

Observación 3.1.15 (Continuación de la Definición 3.1.14)

$$\underline{H} = \underline{N} \cdot \underline{N}^H$$

Demostración:
Por ser $M = L_M L_M^\top = L_M L_M^H$ y, por la Proposición 3.1.3, tenemos que

$$\underline{N} \cdot \underline{N}^H = \left(\frac{1}{2} T_n L_M T_n^H\right) \left(\frac{1}{2} T_n L_M T_n^H\right)^H = \frac{1}{2} T_n L_M \left(T_n^H \frac{1}{2} T_n\right) L_M^H T_n^H = \frac{1}{2} T_n L_M L_M^H T_n^H = \frac{1}{2} T_n M T_n^H = \underline{H}. \ \blacksquare$$

Proposición 3.1.16 (Continuación de la Definición 3.1.14)
Se cumple que $\underline{N} \in \mathcal{W}^{n\times n}$.

Demostración:
Escribimos $L_M \doteq \begin{bmatrix} L_1 & O_n \\ L_n & L_2 \end{bmatrix}$ con L_1 y L_2 en $\mathbb{R}^{n\times n}$ triangulares inferiores y $L_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, luego

$$\underline{N} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ I_n & -iI_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & O_n \\ L_n & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ -iI_n & iI_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} L_1 + L_2 + iL_n & L_1 - L_2 + iL_n \\ L_1 - L_2 - iL_n & L_1 + L_2 - iL_n \end{bmatrix},$$

es decir $\underline{N} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2^* & N_1^* \end{bmatrix}$ donde $N_1 \doteq L_1 + L_2 + iL_n$ y $N_2 \doteq L_1 - L_2 + iL_n$. Finalmente, utilizando la Proposición 3.1.9 concluimos que $\underline{N} \in \mathcal{W}^{n\times n}$. $\blacksquare$

Proposición 3.1.17
Sean $n \in \mathbb{N}$; $\mathbf{x} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}$ con $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$ en $\mathbb{R}^n$; $\mathbf{z}_1 \doteq \mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2$; $\mathbf{z}_2 \doteq \mathbf{y}_1 + i\mathbf{y}_2$; $\underline{\mathbf{z}_1} \doteq T_n\mathbf{x}$ y $\underline{\mathbf{z}_2} \doteq T_n\mathbf{y}$.
Entonces

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \frac{1}{2} \cdot \underline{\mathbf{z}_1}^H \cdot \underline{\mathbf{z}_2} = \mathrm{Re}\left(\mathbf{z}_1^H \mathbf{z}_2\right).$$

Demostración:
Por el Corolario 3.1.4 sabemos que $\mathbf{y} = \frac{1}{2} T_n^H \underline{\mathbf{z}_2}$ y $\mathbf{x} = \frac{1}{2} T_n^H \underline{\mathbf{z}_1}$. Luego, por la Proposición 3.1.3, se sigue que

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}^H \mathbf{y} = \left(\frac{1}{2} T_n^H \underline{\mathbf{z}_1}\right)^H \left(\frac{1}{2} T_n^H \underline{\mathbf{z}_2}\right) = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{z}_1}^H T_n \frac{1}{2} T_n^H \underline{\mathbf{z}_2} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{z}_1}^H \underline{\mathbf{z}_2}.$$

Ahora

$$\mathbf{z}_1^H \mathbf{z}_2 = (\mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2)^H (\mathbf{y}_1 + i\mathbf{y}_2) = \left(\mathbf{x}_1^\top - i\mathbf{x}_2^\top\right)(\mathbf{y}_1 + i\mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1^\top \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2^\top \mathbf{y}_2 + i\left(\mathbf{x}_1^\top \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2^\top \mathbf{y}_1\right),$$

con lo cual

$$\mathrm{Re}\left(\mathbf{z}_1^H \mathbf{z}_2\right) = \mathbf{x}_1^\top \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2^\top \mathbf{y}_2.$$

Por otro lado

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^\top & \mathbf{x}_2^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_1^\top \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2^\top \mathbf{y}_2.$$

Por lo tanto la Proposición es cierta. $\blacksquare$

Proposición 3.1.18
Sean $M \doteq \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$, donde $M_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ para cada i, $j \in \{1,2\}$; $\mathbf{x} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ con $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$; $\underline{\mathbf{z}} \doteq T_n\mathbf{x}$; $\mathbf{z} = \mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2$ y $\underline{H} \doteq \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix}$ con $H_1 \doteq \frac{1}{2}\left[M_{11} + M_{22} + i\left(M_{21} - M_{12}\right)\right]$ y $H_2 \doteq \frac{1}{2}\left[M_{11} - M_{22} + i\left(M_{21} + M_{12}\right)\right]$.
Supongamos además que H_1 es hermitiana. Entonces

1. $\mathbf{x}^\top M\mathbf{x} = \frac{1}{2}\cdot \underline{\mathbf{z}}^H \cdot \underline{H} \cdot \underline{\mathbf{z}}$

2. $\mathbf{x}^\top M\mathbf{x} = \mathbf{z}^H H_1\mathbf{z} + \mathrm{Re}(\mathbf{z}^H H_2\mathbf{z}^*)$.

Demostración:
1. Por el Corolario 3.1.4 tenemos que $\mathbf{x} = \frac{1}{2}T_n^H\underline{\mathbf{z}}$. También

$$\underline{H} = \frac{1}{2}T_nMT_n^H \implies T_n^H\underline{H} = \frac{1}{2}T_n^HT_nMT_n^H = MT_n^H \implies T_n^H\underline{H}T_n = 2M \implies M = \frac{1}{2}T_n^H\underline{H}T_n.$$

Luego

$$\mathbf{x}^\top M\mathbf{x} = \left(\frac{1}{2}T_n^H\underline{\mathbf{z}}\right)^\top \left(\frac{1}{2}T_n^H\underline{H}T_n\right)\left(\frac{1}{2}T_n^H\underline{\mathbf{z}}\right) = \frac{1}{4}\underline{\mathbf{z}}^\top T_n^*T_n^H\underline{H}\left(\frac{1}{2}T_nT_n^H\right)\underline{\mathbf{z}} = \frac{1}{4}\cdot\underline{\mathbf{z}}^\top\cdot T_n^*\cdot T_n^H\cdot\underline{H}\cdot\underline{\mathbf{z}}. \quad \mathbf{(3.1.18.1)}$$

Pero

$$T_n^*T_n^H = \begin{bmatrix} I_n & -iI_n \\ I_n & iI_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ -iI_n & iI_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_n & 2I_n \\ 2I_n & O_n \end{bmatrix},$$

entonces

$$\underline{\mathbf{z}}^\top T_n^*T_n^H = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} O_n & 2I_n \\ 2I_n & O_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^\top & \mathbf{z}^H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O_n & 2I_n \\ 2I_n & O_n \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \mathbf{z}^H & \mathbf{z}^\top \end{bmatrix},$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2}\underline{\mathbf{z}}^\top T_n^*T_n^H = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^H & \mathbf{z}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* \end{bmatrix}^H = \underline{\mathbf{z}}^H.$$

Finalmente, por **(3.1.18.1),** tenemos que $\mathbf{x}^\top M\mathbf{x} = \frac{1}{2}\cdot\underline{\mathbf{z}}^H\cdot\underline{H}\cdot\underline{\mathbf{z}}$.

2. Usando la parte 1 obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^\top M\mathbf{x} &= \frac{1}{2}\cdot\underline{\mathbf{z}}^H\cdot\underline{H}\cdot\underline{\mathbf{z}} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{z}^H & \mathbf{z}^\top \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbf{z}^H & \mathbf{z}^\top \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1\mathbf{z} + H_2\mathbf{z}^* \\ H_2^*\mathbf{z} + H_1^*\mathbf{z}^* \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z} + \mathbf{z}^H H_2\mathbf{z}^* + \mathbf{z}^\top H_2^*\mathbf{z} + \mathbf{z}^\top H_1^*\mathbf{z}^*\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{z}^H H_2\mathbf{z}^* + \mathbf{z}^\top H_2^*\mathbf{z}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z} + \mathbf{z}^\top H_1^*\mathbf{z}^*\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathbf{z}^H H_2\mathbf{z}^* + \left(\mathbf{z}^H H_2\mathbf{z}^*\right)^*\right] + \frac{1}{2}\left[\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z} + \left(\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z}\right)^*\right] \\
&= \mathrm{Re}(\mathbf{z}^H H_2\mathbf{z}^*) + \mathrm{Re}(\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto basta ver que $\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z} \in \mathbb{R}$. Escribamos $H_1 = A_1 + iB_1$ con A_1 y B_1 en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Como H_1 es hermitiana se sigue por la Proposición 3.1.11 que $A_1 = A_1^\top$ y $B_1 = -B_1^\top$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z} &= \left(\mathbf{x}_1^\top - i\mathbf{x}_2^\top\right)(A_1 + iB_1)(\mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2) \\
&= \left(\mathbf{x}_1^\top - i\mathbf{x}_2^\top\right)(A_1\mathbf{x}_1 - B_1\mathbf{x}_2 + iA_1\mathbf{x}_2 + iB_1\mathbf{x}_1) \\
&= \mathbf{x}_1^\top A_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^\top B_{1\mathbf{x}_2} + \mathbf{x}_2^\top A_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2^\top B_1\mathbf{x}_1 + i\left(\mathbf{x}_1^\top A_1\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1^\top B_1\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2^\top A_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2^\top B_1\mathbf{x}_2\right).
\end{aligned}$$

Ahora, como $\mathbf{x}_1^\top A_1 \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}$ tenemos que $\mathbf{x}_1^\top A_1 \mathbf{x}_2 = \left(\mathbf{x}_1^\top A_1 \mathbf{x}_2\right)^\top = \mathbf{x}_2^\top A_1^\top \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2^\top A_1 \mathbf{x}_1$, con lo cual

$$\mathbf{x}_1^\top A_1 \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2^\top A_1 \mathbf{x}_1 = 0.$$

También, como $\mathbf{x}_2^\top B_1 \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1^\top B_1 \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}$ resulta que

$$\mathbf{x}_2^\top B_1 \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1^\top B_1 \mathbf{x}_1 = \left(\mathbf{x}_2^\top B_1 \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1^\top B_1 \mathbf{x}_1\right)^\top = \mathbf{x}_2^\top B_1^\top \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1^\top B_1^\top \mathbf{x}_1 = -\left(\mathbf{x}_2^\top B_1 \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1^\top B_1 \mathbf{x}_1\right),$$

es decir $\mathbf{x}_2^\top B_1 \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1^\top B_1 \mathbf{x}_1 = 0$. Por lo tanto $\mathrm{Im}\left(z^H H_1 z\right) = 0$ y queda entonces culminada la demostración. ■

3.2 Distribuciones acumuladas y densidades de $\mathbb{C}-$vectores aleatorios

En esta sección extendemos a $\mathbb{C}^n$ (con $n \geq 2$ entero) lo que vimos en la sección 2.1. Sea $I_{c,n} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definida por

$$I_{c,n}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}\right) \doteq \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{bmatrix}, \text{ donde } \mathbf{x} \doteq \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \mathbf{y} \doteq \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Es sencillo ver que $I_{c,n}$ es biyectiva. Sean $\mathcal{B}_{2n}$ la $\sigma-$álgebra de Borel de $\mathbb{R}^{2n}$ y $\sigma(\mathbb{C}^n) \doteq \{I_{c,n}(B) : B \in \mathcal{B}_{2n}\}$.

Proposición 3.2.1
Se cumplen:
1. $\sigma(\mathbb{C}^n)$ es una $\sigma-$álgebra de $\mathbb{C}^n$, que llamamos "$\sigma-$ *álgebra de Borel de* $\mathbb{C}^n$".
2. $I_{c,n}$ es $(\mathcal{B}_{2n}, \sigma(\mathbb{C}^n))-$bimedible.

Demostración:
1. Como $I_{c,n}$ es biyectiva y $\mathcal{B}_{2n}$ es $\sigma-$álgebra de $\mathbb{R}^{2n}$ entonces $I_{c,n}\left(\mathcal{B}_{2n}\right) = \{I_{c,n}(B) : B \in \mathcal{B}_{2n}\} = \sigma(\mathbb{C}^n)$ es $\sigma-$álgebra de $\mathbb{C}^n$.

2. Si $A \in \sigma(\mathbb{C}^n)$ entonces $\exists\ B \in \mathcal{B}_{2n}$ tal que $A = I_{c,n}(B)$, lo cual implica que $I_{c,n}^{-1}(A) = B \in \mathcal{B}_{2n}$. Además si $B \in \mathcal{B}_{2n}$ entonces $I_{c,n}(B) \in \sigma(\mathbb{C}^n)$, por definición. Por lo tanto se cumple 2. ■

Definición 3.2.2
Sea $(\Omega, \sigma(\Omega))$ un espacio medible y $\mathbf{Z} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Decimos que "$\mathbf{Z}$ *es un* $\mathbb{C}-$ *vector aleatorio*" o que "$\mathbf{Z}$ *es un vector aleatorio complejo*" si $\mathbf{Z}$ es $(\sigma(\Omega), \sigma(\mathbb{C}^n))-$medible.

Notación 3.2.3
Sea $\mathbf{Z} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ un $\mathbb{C}-$vector aleatorio. Para cada $j \in \{1, ..., n\}$, sea Z_j la $j-$ésima componente de $\mathbf{Z}$. Luego $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 + iY_1 \\ \vdots \\ X_n + iY_n \end{bmatrix}$, donde $\left\{ \begin{array}{l} X_j(\omega) = \mathrm{Re}(Z_j(\omega)) \\ Y_j(\omega) = \mathrm{Im}(Z_j(\omega)) \end{array} \right.$ $\forall\ j \in \{1, ..., n\}$ y $\forall\ \omega \in \Omega$. Además, sean $\mathbf{X} \doteq \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ e $\mathbf{Y} \doteq \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$. Entonces $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$.

Proposición 3.2.4 (Continuación de la Notación 3.2.3)
$\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{Y} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son vectores aleatorios reales.

Demostración:

Probemos que $\mathbf{X}^{-1}(B)$ e $\mathbf{Y}^{-1}(B)$ están en $\sigma(\Omega)$, $\forall\ B \in \mathcal{B}_n$. Sea $B \in \mathcal{B}_n$ arbitrario. Como $\mathbf{Z}$ es un $\mathbb{C}-$vector aleatorio entonces $\mathbf{Z}^{-1}(A) \in \sigma(\Omega)$, $\forall\ A \in \sigma(\mathbb{C}^n)$. En particular $\mathbf{Z}^{-1}(I_{c,n}(B \times \mathbb{R}^n)) \in \sigma(\Omega)$. Pero, dado que

$$I_{c,n}(B \times \mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in B \text{ y } \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \right\},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^{-1}(I_{c,n}(B \times \mathbb{R}^n)) &= \{\omega \in \Omega : \mathbf{Z}(\omega) \in I_{c,n}(B \times \mathbb{R}^n)\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) + i\mathbf{Y}(\omega) \in I_{c,n}(B \times \mathbb{R}^n)\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) \in B\} \\ &= \mathbf{X}^{-1}(B). \end{aligned}$$

Análogamente, tomando $I_{c,n}(\mathbb{R}^n \times B)$ en lugar de $I_{c,n}(B \times \mathbb{R}^n)$ resulta que $\mathbf{Y}^{-1}(B) \in \sigma(\Omega)$. ■

Notación 3.2.5
Sea ahora $P \in Prob(\Omega, \sigma(\Omega))$. Sean $P_{\mathbf{Z}}$ y $P_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})}$ las probabilidades sobre $(\mathbb{C}^n, \sigma(\mathbb{C}^n))$ y $(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{B}_{2n})$ respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{Z}}(C) &\doteq P(\mathbf{Z}^{-1}(C))),\ C \in \sigma(\mathbb{C}^n) \\ P_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})}(B) &\doteq P(\{\omega \in \Omega : (\mathbf{X}(\omega), \mathbf{Y}(\omega)) \in B\}),\ B \in \mathcal{B}_{2n}. \end{aligned}$$

Nota 3.2.6
No es difícil probar que $P_{\mathbf{Z}} = P_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} \circ I_{c,n}^{-1}$ y $P_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} = P_{\mathbf{Z}} \circ I_{c,n}$.

Notación 3.2.7
Para cada $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)^\top \in \mathbb{R}^{2n}$ y $\mathbf{z} = I_{c,n}((\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top) \in \mathbb{C}^n$ denotamos

$$\begin{aligned} R^{2n}_{\leq}((\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top) &\doteq \left\{ (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})^\top = (\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}, \overline{y_1}, ..., \overline{y_n})^\top \in \mathbb{R}^{2n} : \overline{x_j} \leq x_j \wedge \overline{y_j} \leq y_j,\ \forall\ j = 1, ..., n \right\} \\ \text{y } \mathbb{C}^n_{\leq}(\mathbf{z}) &\doteq I_{c,n}(R^{2n}_{\leq}((\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top)). \end{aligned}$$

Sean $\mu \in Prob(\mathbb{C}^n, \sigma(\mathbb{C}^n))$ y $\nu \in Prob(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{B}_{2n})$. Definimos $F_\mu : \mathbb{C}^n \longrightarrow [0, 1]$ y $F_\upsilon : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow [0, 1]$ por

$$\begin{aligned} F_\mu(\mathbf{z}) &\doteq \mu\left(\mathbb{C}^n_{\leq}(\mathbf{z})\right),\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \text{ y} \\ F_\upsilon((\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top) &\doteq \upsilon(R^{2n}_{\leq}((\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top)),\ (\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \in \mathbb{R}^{2n}. \end{aligned}$$

Proposición 3.2.8 (Continuación de la Notación 3.2.7)
Sea λ_{2n} la medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{B}_{2n})$. Se cumplen:
1. $F_{P_{\mathbf{Z}}}(\mathbf{z}) = F_{P_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})}}(I_{c,n}^{-1}(\mathbf{z}))$, $\forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$.
2. Si $P_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})}$ admite una $\lambda_{2n}-$densidad, digamos $f_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow [0, \infty)$, entonces $P_{\mathbf{Z}}$ admite una $\lambda_{2n}(I_{c,n})-$densidad dada por

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \doteq f_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})}((\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top),\ \mathbf{z} = I_{c,n}((\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top) \text{ y } (\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Demostración:
1. Sea $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ arbitrario. Por la Notación anterior y por la Nota 3.2.6 tenemos que

$$\begin{aligned} F_{P_{\mathbf{Z}}}(\mathbf{z}) &\doteq P_{\mathbf{Z}}\left(\mathbb{C}^n_{\leq}(\mathbf{z})\right) \\ &= \left(P_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} \circ I_{c,n}^{-1}\right)\left(\mathbb{C}^n_{\leq}(\mathbf{z})\right) \\ &= P_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})}\left(R^{2n}_{\leq}((\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top)\right) \\ &= F_{P_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})}}((\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top) \\ &= F_{P_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})}}(I_{c,n}^{-1}(\mathbf{z})). \end{aligned}$$

2. Sea $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ tal que $\mathbf{z} = I_{c,n}((\mathbf{x},\mathbf{y})^\top)$. Como $f_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})}((\mathbf{x},\mathbf{y})^\top) = f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = (f_{\mathbf{Z}} \circ I_{c,n})((\mathbf{x},\mathbf{y})^\top)$ entonces

$$f_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} = f_{\mathbf{Z}} \circ I_{c,n}.$$

Luego, para todo $B \in \mathcal{B}_{2n}$, vale que

$$P_{\mathbf{Z}}\left(\mathbf{Z} \in I_{c,n}(B)\right) = P_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})}\left((\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in B\right) = \int_B f_{(\mathbf{X},\mathbf{Y})} d\lambda_{2n} = \int_B \left(f_{\mathbf{Z}} \circ I_{c,n}\right) d\lambda_{2n} = \int_{I_{c,n}(B)} f_{\mathbf{Z}} d\lambda_{2n}(I_{c,n}). \ \blacksquare$$

3.3 Propiedades estadísticas de segundo orden

Dado un vector aleatorio complejo $\mathbf{Z}$, definimos su *matriz de covarianza* y *matriz de pseudocovarianza*. Estudiamos el caso especial en que la matriz de pseudocovarianza se anula y adoptamos una nueva definición para la *no−correlación* de dos vectores aleatorios complejos. Además, introducimos el concepto de *matriz de covarianza aumentada* y obtenemos una importante caracterización. Concluimos la sección analizando la *potencia* de $\mathbf{Z}$ y su relación con la matriz de covarianza aumentada.

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e.p.*, $\mathbf{X}_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{X}_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vectores aleatorios, $\mathbf{X} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$ un vector aleatorio real $2n-$dimensional, $\mathbf{Z} \doteq \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2$ y $\underline{\mathbf{Z}} \doteq T_n\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_1 - i\mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$. Supongamos que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ están en $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^n)$. Luego $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Z}^*$ están en $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^n)$. Notemos que $E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} E(\mathbf{X}_1) \\ E(\mathbf{X}_2) \end{bmatrix}$ y

$$\Sigma(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{X}_1) & \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \\ \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^\top & \Sigma(\mathbf{X}_2) \end{bmatrix},$$

donde $\Sigma(\mathbf{X}_1) \doteq E\left[(\mathbf{X}_1 - E(\mathbf{X}_1))(\mathbf{X}_1 - E(\mathbf{X}_1))^\top\right]$, $\Sigma(\mathbf{X}_2) \doteq E\left[(\mathbf{X}_2 - E(\mathbf{X}_2))(\mathbf{X}_2 - E(\mathbf{X}_2))^\top\right]$ y $\Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \doteq E\left[(\mathbf{X}_1 - E(\mathbf{X}_1))(\mathbf{X}_2 - E(\mathbf{X}_2))^\top\right]$.

Definición 3.3.1
Llamamos "*vector media aumentado de* $\mathbf{Z}$" al elemento de $\mathbb{C}^{2n}$ dado por

$$E(\underline{\mathbf{Z}}) \doteq T_n E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} E(\mathbf{Z}) \\ E(\mathbf{Z}^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\mathbf{X}_1) + iE(\mathbf{X}_2) \\ E(\mathbf{X}_1) - iE(\mathbf{X}_2) \end{bmatrix}.$$

Definición 3.3.2
Llamamos "*matriz de covarianza aumentada de* $\mathbf{Z}$" a la matriz compleja $2n \times 2n$ dada por

$$\Sigma(\underline{\mathbf{Z}}) \doteq E\left[(\underline{\mathbf{Z}} - E(\underline{\mathbf{Z}}))(\underline{\mathbf{Z}} - E(\underline{\mathbf{Z}}))^H\right].$$

Proposición 3.3.3
Se cumple que

$$\begin{aligned} \Sigma(\underline{\mathbf{Z}}) &= T_n \Sigma(\mathbf{X}) T_n^H \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{X}_1) + \Sigma(\mathbf{X}_2) + i\left(\Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^\top - \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)\right) & \Sigma(\mathbf{X}_1) - \Sigma(\mathbf{X}_2) + i\left(\Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) + \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^\top\right) \\ \Sigma(\mathbf{X}_1) - \Sigma(\mathbf{X}_2) - i\left(\left(\Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) + \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^\top\right)\right) & \Sigma(\mathbf{X}_1) + \Sigma(\mathbf{X}_2) - i\left(\Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^\top - \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}) \\ \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})^* & \Sigma(\mathbf{Z})^* \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\Sigma(\mathbf{Z}) \doteq E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^H\right]$ y $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}) \doteq E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^\top\right]$. Luego $\Sigma(\underline{\mathbf{Z}}) \in \mathcal{W}^{n\times n}$.

Demostración:
Por definición tenemos que

$$\begin{aligned}
\Sigma(\underline{\mathbf{Z}}) &\doteq E\left[(\underline{\mathbf{Z}}-E(\underline{\mathbf{Z}}))(\underline{\mathbf{Z}}-E(\underline{\mathbf{Z}}))^H\right] \\
&= E\left[(T_n\mathbf{X}-T_nE(\mathbf{X}))(T_n\mathbf{X}-T_nE(\mathbf{X}))^H\right] \\
&= E\left[(T_n\mathbf{X}-T_nE(\mathbf{X}))\left(\mathbf{X}^HT_n^H-E(\mathbf{X})^HT_n^H\right)\right] \\
&= E\left[T_n(\mathbf{X}-E(\mathbf{X}))(\mathbf{X}-E(\mathbf{X}))^H T_n^H\right] \\
&= T_nE\left[(\mathbf{X}-E(\mathbf{X}))(\mathbf{X}-E(\mathbf{X}))^H\right]T_n^H \\
&= T_n\Sigma(\mathbf{X})T_n^H,
\end{aligned}$$

con lo cual vale la primera igualdad. Ahora

$$\begin{aligned}
T_n\Sigma(\mathbf{X})T_n^H &= \begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ I_n & -iI_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{X}_1) & \Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2) \\ \Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)^\top & \Sigma(\mathbf{X}_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ -iI_n & iI_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{X}_1)+\Sigma(\mathbf{X}_2)+i\left(\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)^\top-\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)\right) & \Sigma(\mathbf{X}_1)-\Sigma(\mathbf{X}_2)+i\left(\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)+\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)^\top\right) \\ \Sigma(\mathbf{X}_1)-\Sigma(\mathbf{X}_2)-i\left(\left(\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)+\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)^\top\right)\right) & \Sigma(\mathbf{X}_1)+\Sigma(\mathbf{X}_2)-i\left(\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)^\top-\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)\right) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

por lo tanto es cierta la segunda igualdad. Finalmente

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^H &= (\mathbf{X}_1+i\mathbf{X}_2-E(\mathbf{X}_1+i\mathbf{X}_2))(\mathbf{X}_1+i\mathbf{X}_2-E(\mathbf{X}_1+i\mathbf{X}_2))^H \\
&= [\mathbf{X}_1-E(\mathbf{X}_1)+i(\mathbf{X}_2-E(\mathbf{X}_2))][\mathbf{X}_1-E(\mathbf{X}_1)+i(\mathbf{X}_2-E(\mathbf{X}_2))]^H \\
&= [\mathbf{X}_1-E(\mathbf{X}_1)+i(\mathbf{X}_2-E(\mathbf{X}_2))]\left[(\mathbf{X}_1-E(\mathbf{X}_1))^\top-i(\mathbf{X}_2-E(\mathbf{X}_2))^\top\right] \\
&= (\mathbf{X}_1-E(\mathbf{X}_1))(\mathbf{X}_1-E(\mathbf{X}_1))^\top+(\mathbf{X}_2-E(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_2-E(\mathbf{X}_2))^\top+ \\
&\quad i\left[(\mathbf{X}_2-E(\mathbf{X}_2))(\mathbf{X}_1-E(\mathbf{X}_1))^\top-(\mathbf{X}_1-E(\mathbf{X}_1))(\mathbf{X}_2-E(\mathbf{X}_2))^\top\right],
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^H\right] &= E\left[(\mathbf{X}_1-E(\mathbf{X}_1))(\mathbf{X}_1-E(\mathbf{X}_1))^\top\right]+E\left[(\mathbf{X}_2-E(\mathbf{X}_2)(\mathbf{X}_2-E(\mathbf{X}_2))^\top\right] \\
&\quad +i\left\{E\left[(\mathbf{X}_2-E(\mathbf{X}_2))(\mathbf{X}_1-E(\mathbf{X}_1))^\top\right]-E\left[(\mathbf{X}_1-E(\mathbf{X}_1))(\mathbf{X}_2-E(\mathbf{X}_2))^\top\right]\right\} \\
&= \Sigma(\mathbf{X}_1)+\Sigma(\mathbf{X}_2)+i\left[\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)^\top-\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)\right].
\end{aligned}$$

Análogamente se verifica que $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}) = \Sigma(\mathbf{X}_1)-\Sigma(\mathbf{X}_2)+i\left[\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)+\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)^\top\right]$. Queda entonces culminada la prueba. ■

Definición 3.3.4
A $\Sigma(\mathbf{Z})$ la llamamos "*matriz de covarianza de* $\mathbf{Z}$" y a $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})$ la llamamos "*matriz de pseudocovarianza de* $\mathbf{Z}$" o "*matriz de covarianza complementaria*".

Observación 3.3.5
La matriz de covarianza de $\mathbf{Z}$ es hermitiana y la matriz de pseudocovarianza de $\mathbf{Z}$ es simétrica.

Demostración:

$$\begin{aligned}
\Sigma(\mathbf{Z})^H &= \left\{E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^H\right]\right\}^H = E\left\{\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^H\right]^H\right\} \\
&= E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^H\right] = \Sigma(\mathbf{Z})
\end{aligned}$$

y, similarmente, tenemos que

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})^\top &= \left\{E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))\,(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^\top\right]\right\}^\top = E\left\{\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))\,(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^\top\right]^\top\right\}\\ &= E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))\,(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^\top\right] = \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}).\ \blacksquare\end{aligned}$$

Definición 3.3.6
Sea $\mathbf{Z} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^n)$. Decimos que "$\mathbf{Z}$ *es propio*" si $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}) = 0$. De lo contrario decimos que "$\mathbf{Z}$ *es impropio*".

Corolario 3.3.7
Sea $\mathbf{Z} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^n)$ y sean $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ en $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^n)$ tales que $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2$. Entonces $\mathbf{Z}$ es propio $\iff \Sigma(\mathbf{X}_1) = \Sigma(\mathbf{X}_2)$ y $\Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = -\Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^\top$.

Demostración:
Sigue directamente de la Proposición anterior. $\blacksquare$

Nota 3.3.8 (Continuación del Corolario 3.3.7)
La segunda condición del Corolario 3.3.7 implica que todos los elementos de la diagonal de $\Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ son cero, pero el resto de los valores de $\Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ podría no ser cero.

Proposición 3.3.9
Sean $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $X_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y $X_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $Z = X_1 + iX_2$. Si Z es propio entonces $\Sigma(X_1, X_2) = 0$.

Demostración:
Por el Corolario 3.3.7 sabemos que $\Sigma(X_1, X_2) = -\Sigma(X_1, X_2)^\top$, pero como $n = 1$ esto implica que $\Sigma(X_1, X_2)^\top = \Sigma(X_1, X_2)$. Luego $\Sigma(X_1, X_2) = -\Sigma(X_1, X_2)$ y, por lo tanto, $\Sigma(X_1, X_2) = 0$. $\blacksquare$

Proposición 3.3.10
Sea $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ propio y sean $X_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y $X_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $Z = X_1 + iX_2$. Entonces

1. $\Sigma(Z) = 2\Sigma(X_1)$
2. $\Sigma(\underline{Z}) = \begin{bmatrix}\Sigma(Z) & O\\ O & \Sigma(Z)^*\end{bmatrix}$
3. $\Sigma(Z) = \Sigma(Z)^H$.

Demostración:
1. Por la Proposición 3.3.3 sabemos que $\Sigma(Z) = \Sigma(X_1) + \Sigma(X_2) + i\left[\Sigma(X_1, X_2)^\top - \Sigma(X_1, X_2)\right]$. Además según la Proposición 3.3.9 y el Corolario 3.3.7 tenemos que $\Sigma(X_1, X_2) = 0$ y $\Sigma(X_1) = \Sigma(X_2)$. Por lo tanto $\Sigma(Z) = 2\Sigma(X_1)$.
2. Es consecuencia directa de la Proposición 3.3.9 y la Definición 3.3.6.
3. Como X_1 toma valores en $\mathbb{R}$ entonces $\Sigma(X_1)^H = \Sigma(X_1)$. Luego, utilizando la parte 1 resulta que

$$\Sigma(Z) = 2\Sigma(X_1) = (2\Sigma(X_1))^H = \Sigma(Z)^H.\ \blacksquare$$

Proposición 3.3.11
Sean $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{Y}_1$ y $\mathbf{Y}_2$ en $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^n)$. Sean $\mathbf{Z}_1 \doteq \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2$, $\mathbf{Z}_2 \doteq \mathbf{Y}_1 + i\mathbf{Y}_2$, $\mathbf{X} \doteq \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_2\end{bmatrix}$, $\mathbf{Y} \doteq \begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\end{bmatrix}$, $\underline{\mathbf{Z}_1} \doteq T_n\mathbf{X} = \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1\\ \mathbf{Z}_1^*\end{bmatrix}$, $\underline{\mathbf{Z}_2} \doteq T_n\mathbf{Y} = \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_2\\ \mathbf{Z}_2^*\end{bmatrix}$. Además sean $\Sigma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) \doteq E\left[(\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))\,(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^H\right]$, $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) \doteq E\left[(\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))\,(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^\top\right]$ y $\Sigma(\underline{\mathbf{Z}_1}, \underline{\mathbf{Z}_2}) \doteq E\left[\left(\underline{\mathbf{Z}_1} - E(\underline{\mathbf{Z}_1})\right)\left(\underline{\mathbf{Z}_2} - E(\underline{\mathbf{Z}_2})\right)^H\right]$. Entonces

1. $\Sigma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1) + \Sigma(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2) + i\,[\Sigma(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1) - \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_2)]$
2. $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1) - \Sigma(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2) + i\,[\Sigma(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1) + \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_2)]$
3. $\Sigma(\underline{\mathbf{Z}_1}, \underline{\mathbf{Z}_2}) = \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) \\ \left(\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)\right)^* & (\Sigma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2))^* \end{bmatrix}$. Luego $\Sigma(\underline{\mathbf{Z}_1}, \underline{\mathbf{Z}_2}) \in \mathcal{W}^{n\times n}$.

Demostración:
1. Notemos que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))\,(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^H &= [\mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2 - E\,(\mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2)]\,[\mathbf{Y}_1 + i\mathbf{Y}_2 - E\,(\mathbf{Y}_1 + i\mathbf{Y}_2)]^H \\
&= [\mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2 - E\,(\mathbf{X}_1) - iE(\mathbf{X}_2)]\,[\mathbf{Y}_1 + i\mathbf{Y}_2 - E\,(\mathbf{Y}_1) - iE(\mathbf{Y}_2)]^H \\
&= [\mathbf{X}_1 - E(\mathbf{X}_1) + i\,(\mathbf{X}_2 - E(\mathbf{X}_2))]\,[\mathbf{Y}_1 - E(\mathbf{Y}_1) + i\,(\mathbf{Y}_2 - E(\mathbf{Y}_2))]^H \\
&= [\mathbf{X}_1 - E(\mathbf{X}_1) + i\,(\mathbf{X}_2 - E(\mathbf{X}_2))]\,[\mathbf{Y}_1 - E(\mathbf{Y}_1) - i\,(\mathbf{Y}_2 - E(\mathbf{Y}_2))]^\top \\
&= [\mathbf{X}_1 - E(\mathbf{X}_1) + i\,(\mathbf{X}_2 - E(\mathbf{X}_2))]\left[(\mathbf{Y}_1 - E(\mathbf{Y}_1))^\top - i\,(\mathbf{Y}_2 - E(\mathbf{Y}_2))^\top\right] \\
&= (\mathbf{X}_1 - E(\mathbf{X}_1))\,(\mathbf{Y}_1 - E(\mathbf{Y}_1))^\top + (\mathbf{X}_2 - E(\mathbf{X}_2))\,(\mathbf{Y}_2 - E(\mathbf{Y}_2))^\top \\
&\quad + i\,(\mathbf{X}_2 - E(\mathbf{X}_2))\,(\mathbf{Y}_1 - E(\mathbf{Y}_1))^\top - i\,(\mathbf{X}_1 - E(\mathbf{X}_1))\,(\mathbf{Y}_2 - E(\mathbf{Y}_2))^\top,
\end{aligned}$$

entonces $\Sigma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1) + \Sigma(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2) + i\Sigma(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1) - i\Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_2)$.
2. Se obtiene por un razonamiento análogo al desarrollado en 1.
3. Puesto que

$$\begin{aligned}
\left(\underline{\mathbf{Z}_1} - E(\underline{\mathbf{Z}_1})\right)\left(\underline{\mathbf{Z}_2} - E(\underline{\mathbf{Z}_2})\right)^H &= \left(\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_1^*\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}E(\mathbf{Z}_1) \\ E(\mathbf{Z}_1^*)\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_2^*\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}E(\mathbf{Z}_2) \\ E(\mathbf{Z}_2^*)\end{bmatrix}\right)^H \\
&= \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1) \\ \mathbf{Z}_1^* - E(\mathbf{Z}_1^*)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2) \\ \mathbf{Z}_2^* - E(\mathbf{Z}_2^*)\end{bmatrix}^H \\
&= \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1) \\ \mathbf{Z}_1^* - E(\mathbf{Z}_1^*)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^H & (\mathbf{Z}_2^* - E(\mathbf{Z}_2^*))^H\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1) \\ \mathbf{Z}_1^* - E(\mathbf{Z}_1^*)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^H & (\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^\top\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}(\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))\,(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^H & (\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))\,(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^\top \\ (\mathbf{Z}_1^* - E(\mathbf{Z}_1^*))\,(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^H & (\mathbf{Z}_1^* - E(\mathbf{Z}_1^*))\,(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^\top\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}, \underline{\mathbf{Z}_2}\right) &= E\left[\left(\underline{\mathbf{Z}_1} - E(\underline{\mathbf{Z}_1})\right)\left(\underline{\mathbf{Z}_2} - E(\underline{\mathbf{Z}_2})\right)^H\right] \\
&= E\left(\begin{bmatrix}(\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))\,(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^H & (\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))\,(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^\top \\ (\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))^*\,(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^H & (\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))^*\,(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^\top\end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix}\Sigma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) \\ \left(\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)\right)^* & (\Sigma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2))^*\end{bmatrix}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Corolario 3.3.12 (Continuación de la Proposición anterior)
Se cumplen:
1. $\Sigma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = 0 \iff \begin{cases} \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1) + \Sigma(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2) = 0 \\ \Sigma(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1) - \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_2) = 0 \end{cases}$

2. $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = 0 \iff \begin{cases} \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1) - \Sigma(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2) = 0 \\ \Sigma(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1) + \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_2) = 0 \end{cases}$

3. $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = 0 = \Sigma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) \iff \begin{cases} \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1) = 0 \\ \Sigma(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2) = 0 \\ \Sigma(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1) = 0 \\ \Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_2) = 0 \end{cases}$

4. $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = 0 = \Sigma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) \iff \Sigma(\underline{\mathbf{Z}_1}, \underline{\mathbf{Z}_2}) = 0$

Demostración:
Sigue inmediatamente de la Proposición anterior. ■

Nota 3.3.13
Si $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ están en $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^n)$ entonces definimos "$\mathbf{U}$ *y* $\mathbf{V}$ *están no − correlacionados si* $\Sigma(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = 0$". De allí que se estaría tentado de definir "$\mathbf{Z}_1$ *y* $\mathbf{Z}_2$ *están no − correlacionados si* $\Sigma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = 0$"; pero por el inciso 1 del Corolario anterior podría suceder que en tal caso $\Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1)$, $\Sigma(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_2)$, $\Sigma(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1)$ y $\Sigma(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_2)$ fuesen no nulas, lo que diría que la parte real de $\mathbf{Z}_1$ puede estar correlacionada tanto con la parte real como con la parte imaginaria de $\mathbf{Z}_2$; análogamente la parte imaginaria de $\mathbf{Z}_1$ puede estar correlacionada tanto con la parte real como con la parte imaginaria de $\mathbf{Z}_2$. Este resultado indica que no sería adecuada la definición de $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$ no-correlacionados sólo pidiendo que $\Sigma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = 0$. De aquí y por la parte 3 del Corolario 3.3.12 parece más adecuada la siguiente definición.

Definición 3.3.14
Sean $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$ en $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^n)$. Decimos que "$\mathbf{Z}_1$ *y* $\mathbf{Z}_2$ *están no − correlacionados*" si $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = 0 = \Sigma(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)$ (o, lo que es lo mismo, por la parte 4 del Corolario 3.3.12, si $\Sigma(\underline{\mathbf{Z}_1}, \underline{\mathbf{Z}_2}) = 0$).

Caracterización de las matrices de covarianza aumentadas.

Proposición 3.3.15
Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\underline{H} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$. Son equivalentes:

1. $\underline{H} \in \mathcal{W}^{n \times n}$ y es semidefinida positiva.
2. Existen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e.p.* y $\mathbf{Z} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^n)$ tal que $\underline{H} = \Sigma(\underline{\mathbf{Z}})$, donde $\underline{\mathbf{Z}} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^* \end{bmatrix}$.

Demostración:
($1 \implies 2$) Con una demostración análoga a la de la Proposición 3.1.13 podemos ver que si

$$M \doteq \frac{1}{4} T_n^H \underline{H} T_n,$$

entonces $M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ es simétrica y semidefinida positiva. Por lo que sabemos de Estadística para vectores aleatorios reales $\exists$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e.p.* y $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ vector aleatorio tal que $M = \Sigma(\mathbf{X})$. Escribamos $\mathbf{X} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$, con $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ en $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{R}^n)$, y sea $\underline{\mathbf{Z}} \doteq T_n \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_1 - i\mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$. Luego, si $\mathbf{Z} \doteq \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2$, entonces $\mathbf{Z} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^n)$.

Además por las Proposiciones 3.3.3 y 3.1.3 tenemos que

$$\Sigma(\underline{\mathbf{Z}}) = T_n \Sigma(\mathbf{X}) T_n^H = T_n M T_n^H = T_n \left(\frac{1}{4} T_n^H \underline{H} T_n \right) T_n^H = \underline{H}.$$

($2 \implies 1$) Por la Proposición 3.3.3 sabemos que $\underline{H} \in \mathcal{W}^{n \times n}$ y $\underline{H} = \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}) \\ \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})^* & \Sigma(\mathbf{Z})^* \end{bmatrix}$, con lo cual

$$\underline{H}^H = \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}) \\ \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})^* & \Sigma(\mathbf{Z})^* \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z})^H & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})^\top \\ \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})^H & \Sigma(\mathbf{Z})^\top \end{bmatrix}.$$

Ahora, por la Observación 3.3.5, tenemos que

$$\Sigma(\mathbf{Z})^{\top} = \Sigma(\mathbf{Z})^{*} \text{ y } \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})^{H} = \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})^{*}.$$

Por lo tanto $\underline{H}^H = \underline{H}$. Sea ahora $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2n}$arbitrario. Debido a que

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}^H \underline{H} \mathbf{z} &= \mathbf{z}^H \Sigma(\underline{\mathbf{Z}})\mathbf{z} \\
&= \mathbf{z}^H E\left[(\underline{\mathbf{Z}} - E(\underline{\mathbf{Z}}))(\underline{\mathbf{Z}} - E(\underline{\mathbf{Z}}))^H\right]\mathbf{z} \\
&= E\left[\mathbf{z}^H(\underline{\mathbf{Z}} - E(\underline{\mathbf{Z}}))(\underline{\mathbf{Z}} - E(\underline{\mathbf{Z}}))^H \mathbf{z}\right] \\
&= E\left[\mathbf{z}^H(\underline{\mathbf{Z}} - E(\underline{\mathbf{Z}}))\left(\mathbf{z}^H(\underline{\mathbf{Z}} - E(\underline{\mathbf{Z}}))\right)^H\right] \\
&= E\left[\left|\mathbf{z}^H(\underline{\mathbf{Z}} - E(\underline{\mathbf{Z}}))\right|^2\right] \geq 0
\end{aligned}$$

resulta que $\underline{H}$ es semidefinida positiva. ■

Proposición 3.3.16
Sean A, B, C y D en $\mathbb{C}^{n\times n}$ tales que A y D son inversibles. Entonces

1. $$\mathbb{A} \doteq \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & BD^{-1} \\ O_n & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & O_n \\ O_n & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & O_n \\ D^{-1}C & I_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} I_n & O_n \\ CA^{-1} & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O_n \\ O_n & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & A^{-1}B \\ O_n & I_n \end{bmatrix}$$

2. $\det(\mathbb{A}) = \det\left(A - BD^{-1}C\right)\det(D) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$.

Demostración:
1. Se obtiene directamente haciendo multiplicación de matrices bloque.
2. Por la parte 1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{A}) &= \det\left(\begin{bmatrix} I_n & BD^{-1} \\ O_n & I_n \end{bmatrix}\right)\det\left(\begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & O_n \\ O_n & D \end{bmatrix}\right)\det\left(\begin{bmatrix} I_n & O_n \\ D^{-1}C & I_n \end{bmatrix}\right) \\
&= \det(I_n)^2 \det\left(A - BD^{-1}C\right)\det(D)\det(I_n)^2 \\
&= \det\left(A - BD^{-1}C\right)\det(D)
\end{aligned}$$

y, de la misma manera,

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{A}) &= \det\left(\begin{bmatrix} I_n & O_n \\ CA^{-1} & I_n \end{bmatrix}\right)\det\left(\begin{bmatrix} A & O_n \\ O_n & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}\right)\det\left(\begin{bmatrix} I_n & A^{-1}B \\ O_n & I_n \end{bmatrix}\right) \\
&= \det(I_n)^2 \det(A)\det\left(D - CA^{-1}B\right)\det(I_n)^2 \\
&= \det(A)\det\left(D - CA^{-1}B\right). \ ■
\end{aligned}$$

Definición 3.3.17 (Continuación de la Proposición anterior)
A la matriz $A - BD^{-1}C$ la llamamos "*complemento de Schur de D en $\mathbb{A}$*". Análogamente, a la matriz $D - CA^{-1}B$ la llamamos "*complemento de Schur de A en $\mathbb{A}$* ".

Lema 3.3.18
1. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible y hermitiana entonces A^{-1} es hermitiana y $\left(A^H\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^H$.
2. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible y semidefinida positiva entonces A^{-1} es semidefinida positiva.
3. Si A, B, C , $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ es semidefinida positiva entonces A y B son semidefinidas positivas.

4. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es semidefinida positiva entonces A^* es semidefinida positiva.

5. Si A y B están en $\mathbb{C}^{n\times n}$ y son semidefinidas positivas entonces $\begin{bmatrix} A & O_n \\ O_n & B \end{bmatrix}$ es semidefinida positiva.

6. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es semidefinida positiva entonces $B^H AB$ es semidefinida positiva, $\forall\ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Demostración:
1. Como $A = A^H$ entonces $A^{-1}A^H = I_n = A^H A^{-1}$ y, por la unicidad de la inversa, resulta que $\left(A^H\right)^{-1} = A^{-1}$. Además

$$I_n = I_n^H = \left(AA^{-1}\right)^H = \left(A^{-1}\right)^H A^H = \left(A^{-1}\right)^H A \text{ y } I_n = I_n^H = \left(A^{-1}A\right)^H = A^H \left(A^{-1}\right)^H = A\left(A^{-1}\right)^H,$$

lo cual implica que $\left(A^{-1}\right)^H = A^{-1}$. Por lo tanto A^{-1} es hermitiana y $\left(A^H\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^H$.

2. Por el punto 1 sabemos que A^{-1} es hermitiana. Sea $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ arbitrario. Por hipótesis tenemos que $\mathbf{z}^H A\mathbf{z} \geq 0$, $\forall$ $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. En particular

$$0 \leq \left(A^{-1}\mathbf{w}\right)^H A\left(A^{-1}\mathbf{w}\right) = \mathbf{w}^H \left(A^{-1}\right)^H AA^{-1}\mathbf{w} = \mathbf{w}^H A^{-1} I_n \mathbf{w} = \mathbf{w}^H A^{-1}\mathbf{w},$$

y por ende A^{-1} es semidefinida positiva.

3. Por ser $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ es hermitiana tenemos que $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} A^H & C^* \\ B^* & D^H \end{bmatrix}$, con lo cual $A = A^H$ y $D = D^H$. Además, dado $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tenemos que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \geq 0 \text{ y } \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \geq 0,$$

es decir $\mathbf{x}^H A\mathbf{x} \geq 0$ y $\mathbf{x}^H D\mathbf{x} \geq 0$.

4. Como $A = A^H$ entonces $A^* = A^\top$, con lo cual $(A^*)^H = \left(A^\top\right)^H = A^*$. Ahora sea $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ arbitrario. Para cada $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ se cumple que $0 \leq \mathbf{z}^H A\mathbf{z}$, entonces $0 \leq \left(\mathbf{z}^H A\mathbf{z}\right)^* = \mathbf{z}^\top A^*\mathbf{z}^*$. Tomando $\mathbf{z} \doteq \mathbf{w}^*$ en esta última desigualdad obtenemos que $\mathbf{w}^H A^*\mathbf{w} \geq 0$.

5. Sea $\mathbf{z} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}$ arbitrario, luego

$$\mathbf{z}^H \begin{bmatrix} A & O_n \\ O_n & B \end{bmatrix} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^H & \mathbf{y}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O_n \\ O_n & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^H A & \mathbf{y}^H B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{x}^H A\mathbf{x} + \mathbf{y}^H B\mathbf{y} \geq 0.$$

6. Como A es hermitiana entonces $\left(B^H AB\right)^H = B^H A^H \left(B^H\right)^H = B^H AB$, es decir $B^H AB$ es hermitiana. Además, para cada $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, tenemos que $\mathbf{w}^H \left(B^H AB\right)\mathbf{w} = (B\mathbf{w})^H A(B\mathbf{w}) \geq 0$. Por lo tanto vale 6. ■

Teorema 3.3.19
Sean H_1 y H_2 en $\mathbb{C}^{n\times n}$ con H_1 invertible y sea $\underline{H} \doteq \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix}$. Son equivalentes:

1. Existen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e.p.* y $\mathbf{Z} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{C}^n)$ tales que $H_1 = \Sigma(\mathbf{Z})$ y $H_2 = \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})$.
2. Se cumplen
   2.1. H_1 es semidefinida positiva
   2.2. H_2 es simétrica
   2.3. La matriz complemento de Schur de H_1^* en $\underline{H}$ es semidefinida positiva.

Demostración:
(1 $\implies$ 2) Debido a que

$$\begin{aligned} H_1^H &= \Sigma(\mathbf{Z})^H = \left\{E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^H\right]\right\}^H = E\left\{\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^H\right]^H\right\} \\ &= E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^H\right] = \Sigma(\mathbf{Z}) = H_1 \end{aligned}$$

resulta H_1 hermitiana. Ahora sea $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ arbitrario,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^H H_1 \mathbf{z} &= \mathbf{z}^H E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^H\right]\mathbf{z} \\ &= E\left[\mathbf{z}^H(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^H\mathbf{z}\right] \\ &= E\left\{\left[\mathbf{z}^H(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))\right]\left[\mathbf{z}^H(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))\right]^H\right\} \\ &= E\left[\left|\mathbf{z}^H(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))\right|^2\right] \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto H_1 es semidefinida positiva. También

$$\begin{aligned} H_2^\top &= \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})^\top = \left\{E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^\top\right]\right\}^\top \\ &= E\left\{\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^\top\right]^\top\right\} \\ &= E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^\top\right] = \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}) = H_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto valen 2.1 y 2.2. Finalmente probemos 2.3. Por hipótesis existen $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e.p.* y $\mathbf{Z} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^n)$ tales que

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}) \\ \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})^* & \Sigma(\mathbf{Z})^* \end{bmatrix} = \Sigma(\underline{\mathbf{Z}}).$$

Luego, por las Proposiciones 3.3.15 y 3.1.9, tenemos que $\underline{H} \in \mathcal{W}^{n\times n}$ es semidefinida positiva y además

$$\underline{H}^{-1} = \begin{bmatrix} \left[H_1 - H_2(H_1^*)^{-1}H_2^*\right]^{-1} & -\left[H_1 - H_2(H_1^*)^{-1}H_2^*\right]^{-1} H_2(H_1^*)^{-1} \\ -\left(H_1^* - H_2^* H_1^{-1} H_2\right)^{-1} H_2^* H_1^{-1} & \left(H_1^* - H_2^* H_1^{-1} H_2\right)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Se sigue por los incisos 2 y 3 del Lema anterior que $H_1 - H_2(H_1^*)^{-1}H_2^*$ es semidefinida positiva.

($2 \implies 1$) Por la Proposición 3.3.15 es suficiente probar que $\underline{H} \in \mathcal{W}^{n\times n}$ y que es semidefinida positiva. Como $\underline{H} \doteq \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix}$ claramente vale que $\underline{H} \in \mathcal{W}^{n\times n}$. Notemos que las hipótesis 2.1 y 2.2 implican que

$$H_1^* = H_1^\top \text{ y } H_2^* = H_2^H.$$

Luego

$$\underline{H}^H = \begin{bmatrix} H_1^H & (H_2^*)^H \\ H_2^H & (H_1^*)^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2^\top \\ H_2^H & H_1^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix} = \underline{H},$$

o sea $\underline{H}$ es hermitiana. Ahora, según la Proposición 3.3.16, tenemos que

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & H_2(H_1^*)^{-1} \\ O_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 - H_2(H_1^*)^{-1}H_2^* & O_n \\ O_n & H_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & O_n \\ (H_1^*)^{-1} H_2^* & I_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.3.19.1)}$$

Sean $X \doteq (H_1^*)^{-1} H_2^*$ y $B \doteq \begin{bmatrix} I_n & O_n \\ X & I_n \end{bmatrix}$, luego

$$X^H = \left[(H_1^*)^{-1} H_2^*\right]^H = (H_2^*)^H \left[(H_1^*)^{-1}\right]^H = H_2^\top (H_1^*)^{-1} = H_2 (H_1^*)^{-1}$$

y, por **(3.3.19.1)**, obtenemos que

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & X^H \\ O_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 - H_2(H_1^*)^{-1}H_2^* & O_n \\ O_n & H_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & O_n \\ X & I_n \end{bmatrix} = B^H \begin{bmatrix} H_1 - H_2(H_1^*)^{-1}H_2^* & O_n \\ O_n & H_1^* \end{bmatrix} B.$$

Utilizando la hipótesis 2.3 y los incisos 4, 5 y 6 del Lema concluimos que $\underline{H}$ es semidefinida positiva. ■

Nuestro objetivo ahora será obtener un resultado similar al del Teorema anterior pero en el caso que H_1 sea singular. Para ello necesitamos conceptos y resultados del Álgebra de matrices de interés en sí mismo.

Teorema 3.3.20
Sea $H \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $m \le n$ y $rg(H) = r \le m$. Entonces existen $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices unitarias y $\Sigma \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tales que:
1. $H = V\Sigma W^H$.
2. $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$ con $\Sigma_1 \doteq \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r \end{bmatrix}$ y $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_r > 0$.
3. $\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_r^2\}$ es el conjunto de los autovalores de HH^H.
4. Para cada $j \in \{1, ..., r\}$, $V_{\cdot,\,j}$ (columna $j-$ésima de V) es autovector de σ_j^2.
5. Para cada $j \in \{1, ..., n\}$, $W_{\cdot,\,j}$ (columna $j-$ésima de W) es autovector de σ_j^2.
Decimos que "(V, Σ, W^H) *es una descomposición SVD de H*".

Demostración:
Esta prueba se puede encontrar en la pág. 415 del libro [5].

Definición 3.3.21
Sea $\Sigma \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $m \le n$ una matriz de la forma:

$\Sigma \doteq \begin{bmatrix} \Sigma_1 & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$ con $\Sigma_1 \doteq \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r \end{bmatrix}$ y $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_r > 0$.

Llamamos "*pseudoinversa de Moore − Penrose de* Σ" a:

$$\Sigma^\dagger \doteq \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & O_{r\times(m-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times m}.$$

Definición 3.3.22
Sean $H \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $rg(H) = r \le m \le n$ y (V, Σ, W^H) una descomposición SVD de H. Llamamos "*pseudoinversa de Moore − Penrose de H definida por* (V, Σ, W^H)" a

$$H^\dagger \doteq W\Sigma^\dagger V^H,$$

donde $\Sigma^\dagger$ es la pseudoinversa de Moore-Penrose de Σ.

Proposición 3.3.23 (Continuación de la Definición 3.3.22)
Se cumplen:
1. $H^\dagger H = \left(H^\dagger H\right)^H$
2. $HH^\dagger = \left(HH^\dagger\right)^H$
3. $H^\dagger HH^\dagger = H^\dagger$
4. $HH^\dagger H = H$

Demostración:

Afirmación 1: $\Sigma^\top\left(\Sigma^\dagger\right)^\top = \begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} = \Sigma^\dagger\Sigma$

Demostración Afirmación 1:

$$\begin{aligned}
\Sigma^\top\left(\Sigma^\dagger\right)^\top &= \begin{bmatrix} \Sigma_1 & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & O_{r\times(m-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix}^\top \\
&= \begin{bmatrix} \Sigma_1^\top & O_{r\times(m-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\Sigma_1^{-1}\right)^\top & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma^\dagger\Sigma &= \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & O_{r\times(m-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Afirmación 2: $\Sigma\Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(m-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} = \left(\Sigma^\dagger\right)^\top\Sigma^\top$

Demostración Afirmación 1:

$$\begin{aligned}
\left(\Sigma^\dagger\right)^\top\Sigma^\top &= \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & O_{r\times(m-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \Sigma_1 & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}^\top \\
&= \begin{bmatrix} \left(\Sigma_1^{-1}\right)^\top & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1^\top & O_{r\times(m-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(m-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(m-r)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma\Sigma^\dagger &= \begin{bmatrix} \Sigma_1 & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} & O_{r\times(m-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(m-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(m-r)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para facilitar la notación, sea $P \doteq H^\dagger$.

1. Por la Definición 3.3.22 y la Afirmación 1 tenemos que

$$\begin{aligned}
(PH)^H &= H^H P^H = \left(V\Sigma W^H\right)^H \left(W\Sigma^\dagger V^H\right)^H = W\Sigma^\top V^H V\left(\Sigma^\dagger\right)^\top W^H \\
&= W\Sigma^\top\left(\Sigma^\dagger\right)^\top W^H = W\Sigma^\top\Sigma W^H = \left(W\Sigma^\top V^H\right)\left(V\Sigma W^H\right) = PH.
\end{aligned}$$

2. Por Definición 3.3.22 y la Afirmación 2 tenemos que

$$\begin{aligned}
(HP)^H &= P^H H^H = \left(W\Sigma^\dagger V^H\right)^H \left(V\Sigma W^H\right)^H = V\left(\Sigma^\dagger\right)^\top W^H W\Sigma^\top V^H \\
&= V\left(\Sigma^\dagger\right)^\top\Sigma^\top V^H = V\Sigma\Sigma^\dagger V^H = \left(V\Sigma W^H\right)\left(W\Sigma^\dagger V^H\right) = HP.
\end{aligned}$$

3. Por la Afirmación 2 resulta que

$$\Sigma^\dagger\left(\Sigma^\dagger\right)^\top\Sigma^\top = \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(m-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} = \Sigma^\dagger,$$

con lo cual

$$PHP = \left(W\Sigma^{\dagger}V^{H}\right)\left(V\Sigma W^{H}\right)\left(W\Sigma^{\dagger}V^{H}\right) = W\Sigma^{\dagger}\Sigma\Sigma^{\dagger}V^{H} = W\Sigma^{\dagger}\left(\Sigma^{\dagger}\right)^{\top}\Sigma^{\top}V^{H} = W\Sigma^{\dagger}V^{H} = P.$$

4. Por la Afirmación 1 resulta que

$$\Sigma\Sigma^{\dagger}\Sigma = \Sigma\begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} = \Sigma,$$

lo que implica que

$$HPH = \left(V\Sigma W^{H}\right)\left(W\Sigma^{\dagger}V^{H}\right)\left(V\Sigma W^{H}\right) = V\Sigma\Sigma^{\dagger}\Sigma W^{H} = V\Sigma W^{H} = H.$$

Queda entonces finalizada de demostración. ■

Proposición 3.3.24 (Unicidad de la inversa de Moore-Penrose)
Sea $H \in \mathbb{C}^{m\times n}$ con $rg(H) = r \leq m \leq n$. Sean P_1 y P_2 que satisfacen para $j = 1, 2$:
1. $P_jH = (P_jH)^H$
2. $HP_j = (HP_j)^H$
3. $P_jHP_j = P_j$
4. $HP_jH = H$.
Entonces $P_1 = P_2$.

Demostración:
Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1HP_1 = P_1\left(HP_1\right)^H = P_1P_1^HH^H = P_1P_1^H\left(HP_2H\right)^H \\ &= P_1P_1^HH^HP_2^HH^H = P_1\left(HP_1\right)^H\left(HP_2\right)^H = P_1HP_1HP_2 = P_1HP_2 \end{aligned}$$

y, por otro lado

$$\begin{aligned} P_2 &= P_2HP_2 = \left(P_2H\right)^HP_2 = H^HP_2^HP_2 = \left(HP_1H\right)^HP_2^HP_2 \\ &= H^HP_1^HH^HP_2^HP_2 = \left(P_1H\right)^H\left(P_2H\right)^HP_2 = P_1HP_2HP_2 = P_1HP_2. \end{aligned}$$

Luego $P_1 = P_2$. ■

Nota 3.3.25 (Continuación del Teorema 3.3.19)
En el caso que H_1 no sea invertible, 2.3 debe reemplazarse por:
a. La matriz $H_1 - H_2\left(H_1^*\right)^{\dagger}H_2^*$ es semidefinida positiva.
b. $H_1\mathbf{z} = 0 \implies H_2^*\mathbf{z} = 0, \forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$.

Definición 3.3.26
Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e.p.* y $n \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \{1, ..., n\}$ sean $X_1(j)$, $X_2(j)$ en $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$; $Z(j) \doteq X_1(j) + iX_2(j)$;

$$\mathbf{X}_1 \doteq \begin{bmatrix} X_1(1) \\ \vdots \\ X_1(n) \end{bmatrix};\ \mathbf{X}_2 \doteq \begin{bmatrix} X_2(1) \\ \vdots \\ X_2(n) \end{bmatrix};\ \mathbf{X} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix};\ \mathbf{Z} \doteq \begin{bmatrix} Z(1) \\ \vdots \\ Z(n) \end{bmatrix} \text{ y } \underline{\mathbf{Z}} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^* \end{bmatrix}.$$

Llamamos "*potencia promedio de* $\mathbf{Z}$" a

$$prP_{\mathbf{Z}} \doteq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E\left(|Z(j)|^2\right).$$

Proposición 3.3.27 (Continuación de la Definición 3.3.26)
Si $E(\mathbf{Z}) = \mathbf{0}$ entonces $prP_{\mathbf{Z}} = \frac{1}{n}tr\left(\Sigma(\mathbf{Z})\right) = \frac{1}{2n}tr\left(\Sigma(\underline{\mathbf{Z}})\right) = \frac{1}{n}tr\left(\Sigma(\mathbf{X})\right)$.

Demostración:
Como

$$\begin{aligned}
\Sigma(\mathbf{Z}) &= E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))\,(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^H\right] = E(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H) = E\left(\begin{bmatrix} Z(1)\\ \vdots \\ Z(n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z(1)^* & \cdots & Z(n)^*\end{bmatrix}\right) \\
&= E\left(\begin{bmatrix} |Z(1)|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |Z(n)|^2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} E\left(|Z(1)|^2\right) & & \\ & \ddots & \\ & & E\left(|Z(n)|^2\right)\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

entonces $tr\left(\Sigma(\mathbf{Z})\right) = \sum_{j=1}^{n} E\left(|Z(j)|^2\right)$, es decir $prP_{\mathbf{Z}} = \frac{1}{n} tr\left(\Sigma(\mathbf{Z})\right)$. Para la segunda igualdad notemos que

$$\Sigma(\mathbf{Z})^* = \begin{bmatrix} E\left(|Z(1)|^2\right)^* & & \\ & \ddots & \\ & & E\left(|Z(n)|^2\right)^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\left(|Z(1)|^2\right) & & \\ & \ddots & \\ & & E\left(|Z(n)|^2\right)\end{bmatrix} = \Sigma(\mathbf{Z})$$

y, como $\Sigma(\underline{\mathbf{Z}}) = \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}) \\ \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})^* & \Sigma(\mathbf{Z})^* \end{bmatrix}$, entonces $tr\left(\Sigma(\underline{\mathbf{Z}})\right) = tr\left(\Sigma(\mathbf{Z})\right) + tr\left(\Sigma(\mathbf{Z})^*\right) = 2tr\left(\Sigma(\mathbf{Z})\right)$.

Finalmente demostremos la última igualdad. Debido a que $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i\ \mathbf{X}_2$ y $E(\mathbf{Z}) = \mathbf{0}$ resulta que $E(\mathbf{X}_1) = \mathbf{0} = E(\mathbf{X}_2)$, luego

$$\Sigma(\mathbf{X}_1) = E(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^H) = E\left(\begin{bmatrix} X_1(1)\\ \vdots \\ X_1(n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1(1) & \cdots & X_1(n)\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} E\left(|X_1(1)|^2\right) & & \\ & \ddots & \\ & & E\left(|X_1(n)|^2\right)\end{bmatrix},$$

con lo cual $tr\left(\Sigma(\mathbf{X}_1)\right) = \sum_{j=1}^{n} E\left(|X_1(j)|^2\right)$. Análogamente obtenemos que

$$tr\left(\Sigma(\mathbf{X}_2)\right) = \sum_{j=1}^{n} E\left(|X_2(j)|^2\right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
tr\left(\Sigma(\mathbf{X})\right) &= tr\left(\begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{X}_1) & \Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2) \\ \Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)^\top & \Sigma(\mathbf{X}_2)\end{bmatrix}\right) \\
&= tr\left(\Sigma(\mathbf{X}_1)\right) + tr\left(\Sigma(\mathbf{X}_2)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[E\left(|X_1(j)|^2\right) + E\left(|X_2(j)|^2\right)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} E\left(X_1(j)^2 + X_2(j)^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} E\left(|Z(j)|^2\right),
\end{aligned}$$

es decir $prP_{\mathbf{Z}} = \frac{1}{n} tr\left(\Sigma(\mathbf{X})\right)$. ■

3.4 Distribución Gaussiana compleja

En esta sección estudiamos una importante distribución: *la distribución Gaussiana compleja*. Para ello partimos de la función de densidad de probabilidad del vector aleatorio real Gaussiano compuesto por las partes real e imaginaria del vector aleatorio complejo $\mathbf{Z}$. Derivamos la función de densidad de $\mathbf{Z}$ en términos del vector media y la matriz de covarianza aumentada, junto con un importante caso especial.

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e.p.* y $n \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \{1, ..., n\}$ sean $X_1(j)$ y $X_2(j)$ en $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$ y $Z(j) \doteq X_1(j) + iX_2(j)$. Además sean

$$\mathbf{X}_1 \doteq \begin{bmatrix} X_1(1) \\ \vdots \\ X_1(n) \end{bmatrix}, \mathbf{X}_2 \doteq \begin{bmatrix} X_2(1) \\ \vdots \\ X_2(n) \end{bmatrix}, \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z(1) \\ \vdots \\ Z(n) \end{bmatrix}, \mathbf{X} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \text{ y } \underline{\mathbf{Z}} = T_n \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^* \end{bmatrix}.$$

Nota 3.4.1
Por lo que suponemos conocido de la Estadística para vectores reales, decimos que "$\mathbf{X}$ *es un vector aleatorio* (*real*) *Gaussiano de media* $\mu(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{2n}$ *y matriz de covarianza* $\Sigma(\mathbf{X})$" si $P_{\mathbf{X}}$ admite una $\lambda_{2n}-$densidad $f_{\mathbf{X}}$ dada por

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \doteq (2\pi)^{-n} (\det(\Sigma(\mathbf{X})))^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu(\mathbf{X}))^\top \Sigma(\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{x} - \mu(\mathbf{X}))\right].$$

En símbolos, $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{2n}(\mu(\mathbf{X}), \Sigma(\mathbf{X}))$. Sabemos también que $\Sigma(\mathbf{X})$ es simétrica y definida positiva.

Proposición 3.4.2
Si $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{2n}(\mu(\mathbf{X}), \Sigma(\mathbf{X}))$ entonces $P_{\mathbf{Z}}$ admite una $\lambda_{2n}(I_{c,n})-$densidad dada por $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \doteq f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{z} = I_{c,n}(\mathbf{x})$.

Demostración:
Se obtiene directamente por la Nota 3.4.1 y la Proposición 3.2.5. ■

Proposición 3.4.3
Si $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{2n}(\mu(\mathbf{X}), \Sigma(\mathbf{X}))$ entonces

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \pi^{-n} (\det(\Sigma(\underline{\mathbf{Z}})))^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{\mathbf{z}} - E(\underline{\mathbf{Z}}))^H \Sigma(\underline{\mathbf{Z}})^{-1} (\underline{\mathbf{z}} - E(\underline{\mathbf{Z}}))\right]$$

donde $\underline{\mathbf{z}} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* \end{bmatrix}$ y $\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^* \end{bmatrix}$.

Demostración:
Por la Proposición 3.3.3 tenemos que $\Sigma(\underline{\mathbf{Z}}) = T_n \Sigma(\mathbf{X}) T_n^H$, entonces $\Sigma(\mathbf{X})^{-1} = T_n^H \Sigma(\underline{\mathbf{Z}})^{-1} T_n$. Además, por Proposición 3.3.16

$$\begin{aligned} \det(T_n) &= \det \begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ I_n & -iI_n \end{bmatrix} = \det(I_n - iI_n(-iI_n) I_n) \det(-iI_n) = \det(2I_n)(-i)^n = (-2i)^n \\ \det\left(T_n^H\right) &= \det \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ -iI_n & iI_n \end{bmatrix} = \det\left(I_n + I_n (iI_n)^{-1} iI_n\right) \det(iI_n) = \det(2I_n) i^n = (2i)^n. \end{aligned}$$

Luego $\det(\Sigma(\underline{\mathbf{Z}})) = \det(T_n) \det(\Sigma(\mathbf{X})) \det\left(T_n^H\right) = (-2i)^n \det(\Sigma(\mathbf{X}))(2i)^n = 2^{2n} \det(\Sigma(\mathbf{X}))$, lo cual implica que

$$(\det(\Sigma(\mathbf{X})))^{-1/2} = 2^n (\det(\Sigma(\underline{\mathbf{Z}})))^{-1/2}.$$

Ahora, si $\mathbf{z} = I_{c,n}(\mathbf{x})$, entonces

$$T_n(\mathbf{x} - \mu(\mathbf{X})) = T_n \mathbf{x} - T_n \mu(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E(\mathbf{Z}) \\ E(\mathbf{Z}^*) \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{z}} - E(\underline{\mathbf{Z}}).$$

Por último, por la Proposición 3.4.2, tenemos que

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) &= (2\pi)^{-n}\left(\det\left(\Sigma\left(\mathbf{X}\right)\right)\right)^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}-\mu\left(\mathbf{X}\right)\right)^{\top}\Sigma\left(\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\mathbf{x}-\mu\left(\mathbf{X}\right)\right)\right] \\ &= (2\pi)^{-n}\,2^{n}\left(\det\left(\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)\right)\right)^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}-\mu\left(\mathbf{X}\right)\right)^{\top}T_n^H\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)^{-1}T_n\left(\mathbf{x}-\mu\left(\mathbf{X}\right)\right)\right] \\ &= \pi^{-n}\left(\det\left(\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)\right)\right)^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{z}-E(\underline{\mathbf{Z}})\right)^{H}\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)^{-1}\left(\underline{z}-E(\underline{\mathbf{Z}})\right)\right].\ \blacksquare \end{aligned}$$

Definición 3.4.4
Decimos que " $\mathbf{Z}$ *es un* $\mathbb{C}-$*vector aleatorio Gaussiano impropio de media* $E\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)$ *y matriz de covarianza* $\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)$", y denotamos

$$\mathbf{Z}\sim\mathcal{N}\mathbb{C}_{n,I}\left(E\left(\underline{\mathbf{Z}}\right),\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)\right),$$

si $\mathbf{Z}$ tiene densidad con respecto a $\lambda_{2n}(I_{c,n})$ como $f_{\mathbf{Z}}$ de la Proposición 3.4.3.

Observación 3.4.5
Si $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible entonces A^* también y $\left(A^*\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^*$.

Demostración:
Por hipótesis $A^{-1}A=I_n=AA^{-1}$ entonces $I_n=I_n^*=\left(AA^{-1}\right)^*=\left(A^{-1}\right)^*A^*$ y $I_n=I_n^*=\left(A^{-1}A\right)^*=A^*\left(A^{-1}\right)^*$. Luego, por la unicidad de la inversa resulta lo que queríamos probar. $\blacksquare$

Proposición 3.4.6
Si $\mathbf{X}\sim\mathcal{N}_{2n}\left(\mu\left(\mathbf{X}\right),\Sigma\left(\mathbf{X}\right)\right)$ y $\mathbf{Z}$ es propio entonces

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})=\pi^{-n}\left|\det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)\right)\right|^{-1}\exp\left[-\left(\mathbf{z}-E\left(\mathbf{Z}\right)\right)^{H}\Sigma(\mathbf{Z})^{-1}\left(\mathbf{z}-E\left(\mathbf{Z}\right)\right)\right],$$

donde $\underline{\mathbf{z}}\doteq\begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{z}^*\end{bmatrix}$ y $\underline{\mathbf{Z}}=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}\\ \mathbf{Z}^*\end{bmatrix}$.

Demostración:
Por la Proposición 3.3.3 tenemos que $\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)=\begin{bmatrix}\Sigma(\mathbf{Z}) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})\\ \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})^* & \Sigma(\mathbf{Z})^*\end{bmatrix}$, y, como $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})=O_n$ resulta que

$$\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)=\begin{bmatrix}\Sigma(\mathbf{Z}) & O_n\\ O_n & \Sigma(\mathbf{Z})^*\end{bmatrix}.$$

Entonces $\det\left(\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)\right)=\det\left(\Sigma(\mathbf{Z})\right)\det\left(\Sigma(\mathbf{Z})^*\right)=\det\left(\Sigma(\mathbf{Z})\right)\det\left(\Sigma(\mathbf{Z})^{\top}\right)=\left[\det\left(\Sigma(\mathbf{Z})\right)\right]^2$, con lo cual

$$\left[\det\left(\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)\right)\right]^{-1/2}=\left|\det\left(\Sigma(\mathbf{Z})\right)\right|^{-1}.\quad\textbf{(3.4.6.1)}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\underline{\mathbf{z}}-E(\underline{\mathbf{Z}})\right)^{H}\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)^{-1}\left(\underline{\mathbf{z}}-E(\underline{\mathbf{Z}})\right) &= \left(\begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{z}^*\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}E(\mathbf{Z})\\ E(\mathbf{Z}^*)\end{bmatrix}\right)^{H}\begin{bmatrix}\Sigma(\mathbf{Z}) & O_n\\ O_n & \Sigma(\mathbf{Z})^*\end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{z}^*\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}E(\mathbf{Z})\\ E(\mathbf{Z}^*)\end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix}\left(\mathbf{z}-E(\mathbf{Z})\right)^{H} & \left(\mathbf{z}^*-E(\mathbf{Z}^*)\right)^{H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma(\mathbf{Z})^{-1} & O_n\\ O_n & \left(\Sigma(\mathbf{Z})^*\right)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{z}-E(\mathbf{Z})\\ \mathbf{z}^*-E(\mathbf{Z}^*)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\left(\mathbf{z}-E(\mathbf{Z})\right)^{H} & \left(\mathbf{z}^*-E(\mathbf{Z}^*)\right)^{H}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma(\mathbf{Z})^{-1}\left(\mathbf{z}-E(\mathbf{Z})\right)\\ \left(\Sigma(\mathbf{Z})^*\right)^{-1}\left(\mathbf{z}^*-E(\mathbf{Z}^*)\right)\end{bmatrix} \\ &= \left(\mathbf{z}-E(\mathbf{Z})\right)^{H}\Sigma(\mathbf{Z})^{-1}\left(\mathbf{z}-E(\mathbf{Z})\right)+\left(\mathbf{z}^*-E(\mathbf{Z}^*)\right)^{H}\left(\Sigma(\mathbf{Z})^*\right)^{-1}\left(\mathbf{z}^*-E(\mathbf{Z}^*)\right). \end{aligned}$$

Afirmación: $(\mathbf{z}^* - E(\mathbf{Z}^*))^H (\Sigma(\mathbf{Z})^*)^{-1} (\mathbf{z}^* - E(\mathbf{Z}^*)) = (\mathbf{z} - E(\mathbf{Z}))^H \Sigma(\mathbf{Z})^{-1} (\mathbf{z} - E(\mathbf{Z}))$.

Demostración Afirmación:
Basta suponer que $E(\mathbf{Z}) = \mathbf{0}$. Luego

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}^H \Sigma(\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{z} &= \mathbf{z}^H \left[E\left(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H\right)\right]^{-1}\mathbf{z} = \left[E\left(|\mathbf{Z}|^2\right)\right]^{-1}\mathbf{z}^H\mathbf{z} = \left[E\left(|\mathbf{Z}|^2\right)\right]^{-1}\begin{bmatrix} z_1^* & \cdots & z_n^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \\
&= \left[E\left(|\mathbf{Z}|^2\right)\right]^{-1}\sum_{j=1}^{n}|z_j|^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

lo cual implica que $\mathbf{z}^H \Sigma(\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{z} \in \mathbb{R}$ y, por tanto,

$$\mathbf{z}^H \Sigma(\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{z} = \left(\mathbf{z}^H \Sigma(\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{z}\right)^* = \mathbf{z}^\top \left(\Sigma(\mathbf{Z})^{-1}\right)^* \mathbf{z}^*.$$

Ahora, usando la Observación anterior obtenemos que

$$\mathbf{z}^H \Sigma(\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{z} = \mathbf{z}^\top \left(\Sigma(\mathbf{Z})^*\right)^{-1} \mathbf{z}^*$$

Por lo tanto la Afirmación es cierta y, en consecuencia,

$$\frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{z}} - E(\underline{\mathbf{Z}})\right)^H \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)^{-1}\left(\underline{\mathbf{z}} - E(\underline{\mathbf{Z}})\right) = \left(\mathbf{z} - E(\mathbf{Z})\right)^H \Sigma(\mathbf{Z})^{-1}\left(\mathbf{z} - E(\mathbf{Z})\right). \quad \mathbf{(3.4.6.2)}$$

Finalmente, reemplazando en la fórmula de la Proposición 3.4.3 las igualdades **(3.4.6.1)** y **(3.4.6.2)**, resulta que

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \pi^{-n}\left|\det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)\right)\right|^{-1}\exp\left[-\left(\mathbf{z} - E\left(\mathbf{Z}\right)\right)^H \Sigma\left(\mathbf{Z}\right)^{-1}\left(\mathbf{z} - E\left(\mathbf{Z}\right)\right)\right]. \ \blacksquare$$

3.5 Distribución condicional Gaussiana compleja

En esta sección mostramos como se puede generalizar la distribución Gaussiana condicional real al caso complejo. Derivamos una expresión general para la función de densidad de probabilidad y estudiamos el caso particular en que el vector aleatorio complejo $\mathbf{Z}$ sea *Gaussiano propio*.

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e.p.*, n y m naturales, $\mathbf{X}_{1,1}$ y $\mathbf{X}_{1,2}$ en $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^n)$, $\mathbf{X}_{2,1}$ y $\mathbf{X}_{2,2}$ en $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^m)$. Además sean:
$\mathbf{Z}_1 \doteq \mathbf{X}_{1,1} + i\mathbf{X}_{1,2}\left(\in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^n)\right)$, $\mathbf{Z}_2 \doteq \mathbf{X}_{2,1} + i\mathbf{X}_{2,2}\left(\in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^m)\right)$, $\mathbf{X}_1 \doteq \begin{bmatrix}\mathbf{X}_{1,1} \\ \mathbf{X}_{1,2}\end{bmatrix}\left(\in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^{2n})\right)$,
$\mathbf{X}_2 \doteq \begin{bmatrix}\mathbf{X}_{2,1} \\ \mathbf{X}_{2,2}\end{bmatrix}\left(\in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^{2m})\right)$, $\underline{\mathbf{Z}_1} \doteq T_n\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_1^*\end{bmatrix}$, $\underline{\mathbf{Z}_2} \doteq T_n\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_2^*\end{bmatrix}$, $\mathbf{X}_R \doteq \begin{bmatrix}\mathbf{X}_{1,1} \\ \mathbf{X}_{2,1}\end{bmatrix}\left(\in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^{n+m})\right)$,
$\mathbf{X}_I \doteq \begin{bmatrix}\mathbf{X}_{1,2} \\ \mathbf{X}_{2,2}\end{bmatrix}\left(\in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^{n+m})\right)$, $\widehat{\mathbf{X}} \doteq \begin{bmatrix}\mathbf{X}_R \\ \mathbf{X}_I\end{bmatrix}$, $\mathbf{Z} \doteq \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2\end{bmatrix}$ y $\underline{\mathbf{Z}} \doteq \begin{bmatrix}\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^*\end{bmatrix} = T_{(n+m)}\widehat{\mathbf{X}}$.

Notemos que $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix}\mathbf{X}_{1,1} \\ \mathbf{X}_{2,1}\end{bmatrix} + i\begin{bmatrix}\mathbf{X}_{1,2} \\ \mathbf{X}_{2,2}\end{bmatrix} = \mathbf{X}_R + i\mathbf{X}_I$ y $\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_1^* \\ \mathbf{Z}_2^*\end{bmatrix} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^{2(n+m)})$.

Proposición 3.5.1

1. $E\left(\underline{\mathbf{Z}}\right) = \begin{bmatrix} E\left(\mathbf{Z}_1\right) \\ E\left(\mathbf{Z}_2\right) \\ E\left(\mathbf{Z}_1\right)^* \\ E\left(\mathbf{Z}_2\right)^* \end{bmatrix}$

2. $\Sigma(\underline{\mathbf{Z}}) = \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}_1) & \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2) \\ \Sigma(\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_1) & \Sigma(\mathbf{Z}_2) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_1) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_2) \\ \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1)^* & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^* & \Sigma(\mathbf{Z}_1)^* & \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^* \\ \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_1)^* & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_2)^* & \Sigma(\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_1)^* & \Sigma(\mathbf{Z}_2)^* \end{bmatrix}$.

Demostración:

1. Como $\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \mathbf{Z}_1^* \\ \mathbf{Z}_2^* \end{bmatrix}$ entonces $E(\underline{\mathbf{Z}}) = \begin{bmatrix} E(\mathbf{Z}_1) \\ E(\mathbf{Z}_2) \\ E(\mathbf{Z}_1^*) \\ E(\mathbf{Z}_2^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\mathbf{Z}_1) \\ E(\mathbf{Z}_2) \\ E(\mathbf{Z}_1)^* \\ E(\mathbf{Z}_2)^* \end{bmatrix}$.

2. Por la Proposición 3.3.3 tenemos que $\Sigma(\underline{\mathbf{Z}}) = \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}) \\ \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})^* & \Sigma(\mathbf{Z})^* \end{bmatrix}$.

Basta ver entonces que $\Sigma(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}_1) & \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2) \\ \Sigma(\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_1) & \Sigma(\mathbf{Z}_2) \end{bmatrix}$ y $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2) \\ \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_1) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_2) \end{bmatrix}$. Pero

$$\begin{aligned}
\Sigma(\mathbf{Z}) &= E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^H\right] \\
&= E\left[\left(\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1\\ \mathbf{Z}_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}E(\mathbf{Z}_1)\\ E(\mathbf{Z}_2)\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1\\ \mathbf{Z}_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}E(\mathbf{Z}_1)\\ E(\mathbf{Z}_2)\end{bmatrix}\right)^H\right] \\
&= E\left(\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1)\\ \mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))^H & (\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^H\end{bmatrix}\right) \\
&= E\begin{bmatrix}(\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))(\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))^H & (\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^H \\ (\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))(\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))^H & (\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^H\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}_1) & \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2) \\ \Sigma(\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_1) & \Sigma(\mathbf{Z}_2) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

y, similarmente,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}) &= E\left[(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))(\mathbf{Z}-E(\mathbf{Z}))^\top\right] \\
&= E\left[\left(\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1\\ \mathbf{Z}_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}E(\mathbf{Z}_1)\\ E(\mathbf{Z}_2)\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1\\ \mathbf{Z}_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}E(\mathbf{Z}_1)\\ E(\mathbf{Z}_2)\end{bmatrix}\right)^\top\right] \\
&= E\left(\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1)\\ \mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))^\top & (\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^\top\end{bmatrix}\right) \\
&= E\begin{bmatrix}(\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))(\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))^\top & (\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^\top \\ (\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))(\mathbf{Z}_1 - E(\mathbf{Z}_1))^\top & (\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))(\mathbf{Z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^\top\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2) \\ \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_1) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_2) \end{bmatrix}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Nota 3.5.2
Supongamos que $\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_2\end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_{2(n+m)}\left(\begin{bmatrix}E(\mathbf{X}_1)\\ E(\mathbf{X}_2)\end{bmatrix}, \Sigma\left(\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_2\end{bmatrix}\right)\right)$. Por lo que suponemos conocido de Probabilidad y Estadística para vectores aleatorios reales tenemos que

$$\mathbf{X}_1 \sim \mathcal{N}_{2n}(E(\mathbf{X}_1), \Sigma(\mathbf{X}_1)) \text{ y } \mathbf{X}_2 \sim \mathcal{N}_{2m}(E(\mathbf{X}_2), \Sigma(\mathbf{X}_2)).$$

Si para $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{2m}$ tenemos que $\mathbf{X}_{1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2}$ es el vector aleatorio con distribución $P(\mathbf{X}_1 \mid \mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2)$, entonces

$$\mathbf{X}_{1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2} \sim \mathcal{N}_{2n}\left(E\left(\mathbf{X}_{1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2}\right), \Sigma\left(\mathbf{X}_{1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2}\right)\right)$$

donde

$$\begin{aligned}
E\left(\mathbf{X}_{1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2}\right) &= E\left(\mathbf{X}_1\right) + \Sigma\left(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\right)\Sigma\left(\mathbf{X}_2\right)^{-1}\left(\mathbf{x}_2 - E\left(\mathbf{X}_2\right)\right) \text{ y} \\
\Sigma\left(\mathbf{X}_{1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2}\right) &= \Sigma\left(\mathbf{X}_1\right) - \Sigma\left(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\right)\Sigma\left(\mathbf{X}_2\right)^{-1}\Sigma\left(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1\right).
\end{aligned}$$

Nota 3.5.3
Veamos ahora la extensión del resultado de la Nota anterior al caso de Gaussianos complejos. Basamos esta extensión en dos resultados de carácter más general, pero de interés en sí mismo.

Definición 3.5.4
Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e.p.*; $(\mathcal{X},\sigma(\mathcal{X}))$ y $(\mathcal{T},\sigma(\mathcal{T}))$ dos espacios medibles; $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{X}$ $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{X}))-$medible y $T : \Omega \longrightarrow \mathcal{T}$ $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{T}))-$medible. Decimos que "$\Phi_{X|T} : \sigma(\mathcal{X}) \times \mathcal{T} \longrightarrow [0, 1]$ *es una distribución condicional regular de X dada T con respecto a* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$" si
1. Para cada $\tau \in \mathcal{T}$, $\Phi_{X|T}(\cdot \mid \tau)$ es una probabilidad sobre $(\mathcal{X},\sigma(\mathcal{X}))$.
2. Para cada $B \in \sigma(\mathcal{X})$, $\Phi_{X|T}(B \mid \cdot)$ es $\sigma(\mathcal{T})-$medible.
3. Para cada $B \in \sigma(\mathcal{X})$ y cada $C \in \sigma(\mathcal{T})$ se cumple que

$$\int_C \Phi_{X|T}(B \mid \tau)\, P_T(d\tau) = P\left(X^{-1}(B) \cap T^{-1}(C)\right),$$

donde P_T es la probabilidad sobre $(\mathcal{T},\sigma(\mathcal{T}))$ definida por $P_T(C) \doteq P\left(T^{-1}(C)\right)$, $C \in \sigma(\mathcal{T})$.

Lema 3.5.5
Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e.p.*; $(\mathcal{X},\mathcal{B})$, $(\mathcal{T},\mathcal{C})$, $(\mathcal{X}_1, \mathcal{B}_1)$ y $(\mathcal{T}_1,\mathcal{C}_1)$ espacios medibles; $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{X}$; $T : \Omega \longrightarrow \mathcal{T}$; $X_1 : \Omega \longrightarrow \mathcal{X}_1$ y $T_1 : \Omega \longrightarrow \mathcal{T}_1$ funciones medibles; $S : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}_1$ medible; $S_1 : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}_1$ biyectiva y bimedible; $\Phi : \mathcal{B} \times \mathcal{T} \longrightarrow [0, 1]$ una distribución condicional regular de X dada T con respecto a $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Supongamos que $S \circ X = X_1$ y $S_1 \circ T = T_1$. Sea $\Psi : \mathcal{B}_1 \times \mathcal{T}_1 \longrightarrow [0, 1]$ definida por

$$\Psi(B_1 \mid \tau_1) \doteq \Phi\left(S^{-1}(B_1) \mid S_1^{-1}(\tau_1)\right),\ (B_1, \tau_1) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{T}_1.$$

Entonces Ψ es una distribución condicional regular de X_1 dada T_1 con respecto a $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Demostración:
Veamos que se cumplen para Ψ, 1, 2 y 3 de la Definición anterior. Sea $\tau_1 \in \mathcal{T}_1$ y probemos que $\Psi(\cdot \mid \tau_1)$ es una probabilidad sobre $(\mathcal{X}_1, \mathcal{B}_1)$. Por hipótesis sabemos que $\Phi\left(\cdot \mid S_1^{-1}(\tau_1)\right)$ es una probabilidad sobre $(\mathcal{X},\mathcal{B})$. Luego

$$\begin{aligned}
\Psi(B_1 \mid \tau_1) &= \Phi\left(S^{-1}(B_1) \mid S_1^{-1}(\tau_1)\right) \geq 0, \forall\ B_1 \in \mathcal{B}_1 \text{ y} \\
\Psi(\mathcal{X}_1 \mid \tau_1) &= \Phi\left(S^{-1}(\mathcal{X}_1) \mid S_1^{-1}(\tau_1)\right) = \Phi\left(\mathcal{X} \mid S_1^{-1}(\tau_1)\right) = 1.
\end{aligned}$$

Además, dada una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en $\mathcal{B}_1$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall\ i \neq j$, resulta que

$$\begin{aligned}
\Psi(\cup_n A_n \mid \tau_1) &= \Phi\left(S^{-1}(\cup_n A_n) \mid S_1^{-1}(\tau_1)\right) \\
&= \Phi\left(\cup_n S^{-1}(A_n) \mid S_1^{-1}(\tau_1)\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \Phi\left(S^{-1}(A_n) \mid S_1^{-1}(\tau_1)\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \Psi(A_n \mid \tau_1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple 1. Sean $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y $c \in (0, 1)$, entonces $\{\tau_1 \in \mathcal{T}_1 : \Psi(B_1 \mid \tau_1) > c\} =$ $\left\{\tau_1 \in \mathcal{T}_1 : \Phi\left(S^{-1}(B_1) \mid S_1^{-1}(\tau_1)\right) > c\right\}$. Luego $\{\tau_1 \in \mathcal{T}_1 : \Psi(B_1 \mid \tau_1) > c\} \in \mathcal{C}_1$, pues Φ cumple 2 de la Definición anterior y S_1^{-1} es medible. Finalmente probemos que si $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y $C_1 \in \mathcal{C}_1$, entonces

$$\int_{\mathcal{C}_1} \Psi(B_1 \mid \tau_1)\, P_{T_1}(d\tau_1) = P\left(X_1^{-1}(B_1) \cap T_1^{-1}(C_1)\right),$$

donde P_{T_1} es la probabilidad sobre $(\mathcal{T}_1, \mathcal{C}_1)$ definida por $P_{T_1}(C_1) \doteq P(T_1^{-1}(C_1))$, $C_1 \in \mathcal{C}_1$.

Afirmación: $P_{T_1}(C_1) = P_T(S_1^{-1}(C_1))$, $C_1 \in \mathcal{C}_1$.

Demostración Afirmación:
Sea $C_1 \in \mathcal{C}_1$ arbitrario. Como $S_1 \circ T = T_1$ entonces

$$\begin{aligned} T_1^{-1}(C_1) &= \{\omega \in \Omega : T_1(\omega) \in C_1\} = \{\omega \in \Omega : (S_1 \circ T)(\omega) \in C_1\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : T(\omega) \in S_1^{-1}(C_1)\right\} = T^{-1}(S_1^{-1}(C_1)). \end{aligned}$$

Así

$$P_{T_1}(C_1) = P(T_1^{-1}(C_1)) = P\left(T^{-1}(S_1^{-1}(C_1))\right) = P_T(S_1^{-1}(C_1)),$$

con lo cual queda demostrada la Afirmación. De aquí y por resultados de Teoría de la Medida tenemos que si $h : \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible no negativa o $\int_{\mathcal{T}_1} |h|\, dP_{T_1} < \infty$, entonces

$$\int_{\mathcal{T}_1} h dP_{T_1} = \int_{\mathcal{T}} (h \circ S_1)\, dP_T. \quad \textbf{(3.5.5.1)}$$

Luego, si $B_1 \in \mathcal{B}_1$ y $C_1 \in \mathcal{C}_1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} \Psi(B_1 \mid \tau_1)\, P_{T_1}(d\tau_1) &= \int_{\mathcal{T}_1} \mathcal{X}_{C_1}(\tau_1)\, \Psi(B_1 \mid \tau_1)\, P_{T_1}(d\tau_1) \\ &= \int_{\mathcal{T}_1} \mathcal{X}_{C_1}(\tau_1)\, \Phi\left(S^{-1}(B_1) \mid S_1^{-1}(\tau_1)\right) P_{T_1}(d\tau_1) \\ &= \int_{\mathcal{T}} (\mathcal{X}_{C_1} \circ S_1)(\tau)\, \Phi\left(S^{-1}(B_1) \mid S_1^{-1}(S_1(\tau_1))\right) P_T(d\tau) \\ &= \int_{\mathcal{T}} (\mathcal{X}_{C_1} \circ S_1)(\tau)\, \Phi\left(S^{-1}(B_1) \mid \tau_1\right) P_T(d\tau) \\ &= \int_{\mathcal{T}} \mathcal{X}_{S_1^{-1}(C_1)}(\tau)\, \Phi\left(S^{-1}(B_1) \mid \tau_1\right) P_T(d\tau) \\ &= \int_{S_1^{-1}(C_1)} \Phi\left(S^{-1}(B_1) \mid \tau_1\right) P_T(d\tau) \\ &= P\left(X^{-1}\left(S^{-1}(B_1)\right) \cap T^{-1}\left(S_1^{-1}(C_1)\right)\right) \\ &= P\left(X_1^{-1}(B_1) \cap T_1^{-1}(C_1)\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto 3 está probado. ■

Corolario 3.5.6 (Continuación del Lema 3.5.5)
Además de los supuestos del Lema anterior supongamos que
1. μ es una medida $\sigma-$finita sobre $(\mathcal{X},\mathcal{B})$.
2. μ_1 es una medida $\sigma-$finita sobre $(\mathcal{X}_1,\mathcal{B}_1)$.
3. Se cumple que

$$\mu_1(B_1) = \mu\left(S^{-1}(B_1)\right),\ \forall\ B_1 \in \mathcal{B}_1$$

(o equivalentemente

$$\int_{\mathcal{X}_1} h d\mu_1 = \int_{\mathcal{X}} (h \circ S)\, d\mu, \quad \textbf{(3.5.6.1)}$$

$\forall\ h : \mathcal{X}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ medible no negativa o μ_1-integrable).
4. $S : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}_1$ es biyectiva y bimedible.
5. Para cada $\tau \in \mathcal{T}$, $\Phi(\cdot \mid \tau)$ está dada por una densidad $\phi_\tau : \mathcal{X} \longrightarrow [0, \infty]$ con respecto a μ. Es decir

$$\Phi(B \mid \tau) = \int_B \phi_\tau d\mu,\ \forall\ B \in \mathcal{B}.$$

Para cada $\tau_1 \in \mathcal{T}_1$ sea $\psi_{\tau_1} : \mathcal{X}_1 \longrightarrow [0, \infty]$ definida por

$$\psi_{\tau_1}(x_1) \doteq \phi_{S_1^{-1}(\tau_1)}\left(S^{-1}(x_1)\right), \; \forall\, x_1 \in \mathcal{X}_1.$$

Entonces ψ_{τ_1} es una densidad de $\Psi(\cdot \mid \tau_1)$ con respecto a μ. Es decir

$$\Psi(B_1 \mid \tau_1) = \int_{B_1} \psi_{\tau_1} d\mu_1, \; \forall\, B_1 \in \mathcal{B}_1.$$

Demostración:
Sea $\tau_1 \in \mathcal{T}_1$ y definimos $\tau \doteq S_1^{-1}(\tau_1)$. Usando la definición de Ψ, 4 de las hipótesis, la definición de ψ_{τ_1} y **(3.5.6.1)** respectivamente, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Psi(B_1 \mid \tau_1) &= \Phi\left(S^{-1}(B_1) \mid S_1^{-1}(\tau_1)\right) = \int_{S^{-1}(B_1)} \phi_\tau d\mu = \int_{S^{-1}(B_1)} \phi_{S_1^{-1}(\tau_1)} d\mu \\
&= \int_{S^{-1}(B_1)} \left[\left(\phi_{S_1^{-1}(\tau_1)} \circ S^{-1}\right) \circ S\right] d\mu = \int_{S^{-1}(B_1)} \left(\psi_{\tau_1} \circ S\right) d\mu \\
&= \int_{\mathcal{X}} \mathcal{X}_{S^{-1}(B_1)} \left(\psi_{\tau_1} \circ S\right) d\mu = \int_{\mathcal{X}} \left(\mathcal{X}_{B_1} \circ S\right)\left(\psi_{\tau_1} \circ S\right) d\mu \\
&= \int_{\mathcal{X}} \left[(\mathcal{X}_{B_1}.\psi_{\tau_1}) \circ S\right] d\mu = \int_{\mathcal{X}_1} \mathcal{X}_{B_1}.\psi_{\tau_1} d\mu_1 = \int_{\mathcal{B}_1} \psi_{\tau_1} d\mu_1. \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 3.5.7 (Continuación de la Nota 3.5.2)
Si $\mathbf{Z} \sim \mathcal{NC}_{(n+m),I}\left(E(\underline{\mathbf{Z}}), \Sigma(\underline{\mathbf{Z}})\right)$ entonces
1. $\mathbf{Z}_1 \sim \mathcal{NC}_{n,I}\left(E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right), \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right)\right)$
2. $\mathbf{Z}_2 \sim \mathcal{NC}_{m,I}\left(E\left(\underline{\mathbf{Z}_2}\right), \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_2}\right)\right)$
3. Para cada $\mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^m$ se tiene que

$$\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2} \sim \mathcal{NC}_{n,I}\left(E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right), \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right),$$

donde $\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=z_2}$ es el vector aleatorio con distribución $P(\mathbf{Z}_1 \mid \mathbf{Z}_2 = \mathbf{z}_2)$,

$$\begin{aligned}
E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right) &= E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right) + \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}, \underline{\mathbf{Z}_2}\right)\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_2}\right)^{-1}\left(\underline{\mathbf{z}_2} - E(\underline{\mathbf{Z}_2})\right) \text{ y} \\
\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right) &= \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right) - \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}, \underline{\mathbf{Z}_2}\right)\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_2}\right)^{-1}\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}, \underline{\mathbf{Z}_2}\right)^H.
\end{aligned}$$

Es decir, la densidad de $\mathbf{Z}_{1|Z_2=\mathbf{z}_2}$ con respecto a $\lambda_{2n}(I_{c,n})$ esta dada por

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}}(\mathbf{z}_1) &= \pi^{-n}\left[\det\left(\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)\right]^{-1/2} \times \\
&\times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{z}_1} - E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)^H \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^{-1}\left(\underline{\mathbf{z}_1} - E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

Demostración:
Decir que $\mathbf{Z} \sim \mathcal{NC}_{(n+m),I}\left(E(\underline{\mathbf{Z}}), \Sigma(\underline{\mathbf{Z}})\right)$ es equivalente (por definición) a decir que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_{2(n+m)}\left(\begin{bmatrix} E(\mathbf{X}_1) \\ E(\mathbf{X}_2) \end{bmatrix}, \Sigma\left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}\right)\right).$$

Luego

$$\mathbf{X}_1 \sim \mathcal{N}_{2n}\left(E(\mathbf{X}_1), \Sigma(\mathbf{X}_1)\right) \text{ y } \mathbf{X}_2 \sim \mathcal{N}_{2m}\left(E(\mathbf{X}_2), \Sigma(\mathbf{X}_2)\right).$$

Ahora $\underline{\mathbf{Z}_1} = T_n\mathbf{X}_1$ y $\underline{\mathbf{Z}_2} = T_m\mathbf{X}_2$. Por lo tanto 1 y 2 son consecuencias directas de la Definición 3.4.4 y de la

Proposición 3.4.3. Sean $\mathcal{X} \doteq \mathbb{R}^{2n}$, $\mathcal{T} \doteq \mathbb{R}^{2m}$, $\mathcal{X}_1 \doteq \mathbb{C}^n$, $\mathcal{T}_1 \doteq \mathbb{C}^m$, $X \doteq \mathbf{X}_1$, $T \doteq \mathbf{X}_2$, $X_1 \doteq \mathbf{Z}_1$, $T_1 \doteq Z_2$, $S \doteq I_{c,n}$ y $S_1 \doteq I_{c,m}$. Para cada $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{2m}$, sea $\phi_{\mathbf{x}_2}$ la densidad de $\mathbf{X}_{1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2}$. Además, para cada $\mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^m$ definimos $\psi_{\mathbf{z}_2} : \mathbb{C}^n \longrightarrow [0,\infty)$ dada por

$$\psi_{\mathbf{z}_2}(\mathbf{z}_1) \doteq \phi_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1),$$

donde $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{2n}$ y $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{2m}$ son únicos que satisfacen que $I_{c,n}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{z}_1$ y $I_{c,m}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{z}_2$. Notemos que también se cumplen $\underline{\mathbf{z}_1} = T_n \mathbf{x}_1$ y $\underline{\mathbf{z}_2} = T_n \mathbf{x}_2$. Entonces, $\psi_{\mathbf{z}_2}$ es la densidad de $\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}$. Ahora, por la Nota 3.5.2, tenemos que

$$\phi_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1) = (2\pi)^{-n}\left[\det\left(\Sigma\left(\mathbf{X}_{1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2}\right)\right)\right]^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_1 - E\left(\mathbf{X}_{1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2}\right)\right)^\top \Sigma\left(\mathbf{X}_{1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2}\right)^{-1}\left(\mathbf{x}_1 - E\left(\mathbf{X}_{1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2}\right)\right)\right].$$

Por el Corolario anterior, si para simplificar la notación ponemos $V \doteq I_{c,n}(\mathbf{U})$ con $\mathbf{U} \doteq \mathbf{X}_{1|\mathbf{X}_2=\mathbf{x}_2}$, resulta que $V = \mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}$ y tiene densidad $\psi_{\mathbf{z}_2}$. También notemos que, si $\underline{V} = \begin{bmatrix} V \\ V^* \end{bmatrix}$, entonces $\underline{V} = T_n\mathbf{U}$. Luego, como en la demostración de la Proposición 3.4.3, tenemos que

$$\begin{aligned}
E(\underline{V}) &= T_n E(\mathbf{U}) = T_n\left[E(\mathbf{X}_1) + \Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)\Sigma(\mathbf{X}_2)^{-1}(\mathbf{x}_2 - E(\mathbf{X}_2))\right] \\
&= T_n E(\mathbf{X}_1) + T_n\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)\Sigma(\mathbf{X}_2)^{-1}(\mathbf{x}_2 - E(\mathbf{X}_2)) \\
&= T_n E(\mathbf{X}_1) + \left[T_n\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)T_m^H\right]\left[\left(T_m^H\right)^{-1}\Sigma(\mathbf{X}_2)^{-1}T_m^{-1}\right]\left[T_m\mathbf{x}_2 - T_m E(\mathbf{X}_2)\right] \\
&= E(T_n\mathbf{X}_1) + \Sigma(T_n\mathbf{X}_1, T_m\mathbf{X}_2)\left[\Sigma(T_m\mathbf{X}_2)\right]^{-1}\left[T_m\mathbf{x}_2 - E(T_m\mathbf{X}_2)\right] \\
&= E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right) + \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1},\underline{\mathbf{Z}_2}\right)\left[\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_2}\right)\right]^{-1}\left[\underline{\mathbf{z}_2} - E\left(\underline{\mathbf{Z}_2}\right)\right]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\Sigma(\underline{V}) &= T_n\Sigma(\mathbf{U})T_n^H \\
&= T_n\left[\Sigma(\mathbf{X}_1) - \Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)\Sigma(\mathbf{X}_2)^{-1}\Sigma(\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_1)\right]T_n^H \\
&= T_n\Sigma(\mathbf{X}_1)T_n^H - T_n\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)\Sigma(\mathbf{X}_2)^{-1}\Sigma(\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_1)T_n^H \\
&= T_n\Sigma(\mathbf{X}_1)T_n^H - \left[T_n\Sigma(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)T_m^H\right]\left[\left(T_m^H\right)^{-1}\Sigma(\mathbf{X}_2)^{-1}T_m^{-1}\right]\left[T_m\Sigma(\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_1)T_n^H\right] \\
&= \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right) - \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1},\underline{\mathbf{Z}_2}\right)\left[\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_2}\right)\right]^{-1}\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_2},\underline{\mathbf{Z}_1}\right) \\
&= \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right) - \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1},\underline{\mathbf{Z}_2}\right)\left[\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_2}\right)\right]^{-1}\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1},\underline{\mathbf{Z}_2}\right)^H.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la Proposición queda demostrada. ■

Definición 3.5.8
Sean $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *e.p.*; $n,m \in \mathbb{N}$; $\mathbf{Z}_1 \in \mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbb{C}^n)$; $\mathbf{Z}_2 \in \mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbb{C}^m)$. Decimos que "$\mathbf{Z}_1$ *y* $\mathbf{Z}_2$ *son conjuntamente propios*" si $\mathbf{Z} \doteq \begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2\end{bmatrix}$ es propio.

Proposición 3.5.9 (Continuación de la Definición 3.5.8)
Si $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$ son conjuntamente propios entonces

$$\Sigma(\underline{\mathbf{Z}}) = \begin{bmatrix}
\Sigma(\mathbf{Z}_1) & \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2) & O & O \\
\Sigma(\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_1) & \Sigma(\mathbf{Z}_2) & O & O \\
O & O & \Sigma(\mathbf{Z}_1)^* & \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^* \\
O & O & \Sigma(\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_1)^* & \Sigma(\mathbf{Z}_2)^*
\end{bmatrix}.$$

Demostración:
Es una consecuencia inmediata de la Proposición 3.5.1. ■

Proposición 3.5.10

Sean $\mathbf{Z}_1 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^n)$ y $\mathbf{Z}_2 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^m)$ tales que $\mathbf{Z} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix}$ es Gaussiano propio. Entonces para cada $\mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^m$ se cumple que

$$f_{\mathbf{Z}_1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}(\mathbf{z}_1) = \pi^{-n}\left[\det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)\right]^{-1}\exp\left[-\left(\mathbf{z}_1 - E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)^H \Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^{-1}\left(\mathbf{z}_1 - E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)\right],$$

donde

$$\begin{aligned} E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right) &\doteq E(\mathbf{Z}_1) + \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)\Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1}(\mathbf{z}_2 - E(\mathbf{Z}_2)) \text{ y} \\ \Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right) &\doteq \Sigma(\mathbf{Z}_1) - \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)\Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1}\Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^H. \end{aligned}$$

Demostración:

Como $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$ son conjuntamente propios tenemos que $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1) = \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_2) = \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2) = \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}_2,\mathbf{Z}_1) = \mathbf{0}$, entonces

$$\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right) = \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma(\mathbf{Z}_1)^* \end{bmatrix}, \ \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_2}\right) = \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma(\mathbf{Z}_2)^* \end{bmatrix} \text{ y } \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1},\underline{\mathbf{Z}_2}\right) = \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^* \end{bmatrix}.$$

Como $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}\mathbb{C}_{(n+m),I}\left(E\left(\underline{\mathbf{Z}}\right), \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)\right)$, por la Proposición 3.5.7 sabemos que la densidad de $\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}$ con respecto a $\lambda_{2n}(I_{c,n})$ esta dada por

$$f_{\mathbf{Z}_1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}(\mathbf{z}_1) = \pi^{-n}\left[\det\left(\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)\right]^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{z}_1} - E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)^H \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^{-1}\left(\underline{\mathbf{z}_1} - E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)\right],$$

donde

$$\begin{aligned} E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right) &= E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right) + \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1},\underline{\mathbf{Z}_2}\right)\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_2}\right)^{-1}\left(\underline{\mathbf{z}_2} - E(\underline{\mathbf{Z}_2})\right) \text{ y} \\ \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right) &= \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right) - \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1},\underline{\mathbf{Z}_2}\right)\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_2}\right)^{-1}\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1},\underline{\mathbf{Z}_2}\right)^H. \end{aligned}$$

Luego, basta ver que $\left[\det\left(\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=z_2}\right)\right)\right]^{1/2} = \det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=z_2}\right)\right)$ y que

$$\begin{aligned} & \left(\underline{\mathbf{z}_1} - E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)^H \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^{-1}\left(\underline{z_1} - E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right) \\ = \ & 2\left(z_1 - E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)^H \Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^{-1}\left(z_1 - E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right). \end{aligned}$$

Para la primera igualdad notemos que

$$\begin{aligned} \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right) &= \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right) - \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1},\underline{\mathbf{Z}_2}\right)\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_2}\right)^{-1}\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1},\underline{\mathbf{Z}_2}\right)^H \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma(\mathbf{Z}_1)^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left[\Sigma(\mathbf{Z}_2)^*\right]^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^\top \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma(\mathbf{Z}_1)^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)\Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1}\Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^*\left[\Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1}\right]^*\Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^\top \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}_1) - \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)\Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1}\Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^H & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left[\Sigma(\mathbf{Z}_1) - \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)\Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1}\Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^H\right]^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Además, por ser $\Sigma(\mathbf{Z}_1)$ y $\Sigma(\mathbf{Z}_2)$ hermitianas, resulta que

$$\begin{aligned}
\Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^H &= \left[\Sigma(\mathbf{Z}_1) - \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)\,\Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1}\,\Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^H\right]^H \\
&= \Sigma(\mathbf{Z}_1)^H - \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)\left[\Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1}\right]^H \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^H \\
&= \Sigma(\mathbf{Z}_1) - \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)\,\Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1}\,\Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^H \\
&= \Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\det\left(\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right) &= \det\begin{bmatrix}\Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^*\end{bmatrix} \\
&= \det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)\det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^*\right) \\
&= \det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)\det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^\top\right) \\
&= \left[\det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)\right]^2.
\end{aligned}$$

Ahora probemos la segunda igualdad.

$$\begin{aligned}
E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right) &= E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right) + \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1},\underline{\mathbf{Z}_2}\right)\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_2}\right)^{-1}\left(\underline{\mathbf{z}_2} - E(\underline{\mathbf{Z}_2})\right) \\
&= \begin{bmatrix}E(\mathbf{Z}_1) \\ E(\mathbf{Z}_1)^*\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left[\Sigma(\mathbf{Z}_2)^*\right]^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{z}_2 - E(\mathbf{Z}_2) \\ \mathbf{z}_2^* - E(\mathbf{Z}_2)^*\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}E(\mathbf{Z}_1) \\ E(\mathbf{Z}_1)^*\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)\,\Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1}(\mathbf{z}_2 - E(\mathbf{Z}_2)) \\ \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2^*)\left(\Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1}\right)^*(\mathbf{z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^*\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}E(\mathbf{Z}_1) + \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)\,\Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1}(\mathbf{z}_2 - E(\mathbf{Z}_2)) \\ E(\mathbf{Z}_1)^* + \Sigma(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)^*\left(\Sigma(\mathbf{Z}_2)^{-1}\right)^*(\mathbf{z}_2 - E(\mathbf{Z}_2))^*\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right) \\ E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^*\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
&\left(\underline{\mathbf{z}_1} - E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)^H \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^{-1}\left(\underline{\mathbf{z}_1} - E\left(\underline{\mathbf{Z}_1}_{|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right) \\
={}& \begin{bmatrix}\mathbf{z}_1 - E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right) \\ \mathbf{z}_1^* - E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^*\end{bmatrix}^H \begin{bmatrix}\Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(\Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=z_2}\right)^{-1}\right)^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{z}_1 - E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right) \\ \mathbf{z}_1^* - E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^*\end{bmatrix} \\
={}& \left[\left(\mathbf{z}_1 - E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)^H \Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^{-1}\left(\mathbf{z}_1 - E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)\right] + \\
&+\left[\left(\mathbf{z}_1 - E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)^H \Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^{-1}\left(\mathbf{z}_1 - E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)\right]^* \\
={}& 2\left(\mathbf{z}_1 - E\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right)^H \Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)^{-1}\left(\mathbf{z}_1 - E\left(\mathbf{z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)\right),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe al hecho de que $\Sigma\left(\mathbf{Z}_{1|\mathbf{Z}_2=\mathbf{z}_2}\right)$ es definida positiva. ■

3.6 Entropía diferencial para vectores aleatorios complejos

En esta sección definimos la *entropía diferencial* de un vector aleatorio complejo y, a modo de ejemplo, calculamos la entropía para el caso Gaussiano complejo. Además introducimos las *transformaciones débilmente unitarias* y concluimos la sección con un resultado en torno a dicho concepto.

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e.p.*; $n \in \mathbb{N}$; $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio real; $F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ la $P-$distribución acumulada de $\mathbf{X}$, esto es:

$$F_{\mathbf{X}}\left((x_1, ..., x_n)^\top\right) = P_{\mathbf{X}}\left(R^n_{\leq}\left((x_1, ..., x_n)^\top\right)\right) = P\left(\mathbf{X} \in R^n_{\leq}\left((x_1, ..., x_n)^\top\right)\right),$$

$\forall\ (x_1, ..., x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que $\mathbf{X}$ admite una densidad (con respecto a la medida de Lebesgue sobre $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$), digamos $f_{\mathbf{X}}$.

Definición 3.6.1
Llamamos "*soporte de* $\mathbf{X}$", y denotamos $Sop(\mathbf{X})$, al conjunto $\left\{(x_1, ..., x_n)^\top \in \mathbb{R}^n : f_{\mathbf{X}}\left((x_1, ..., x_n)^\top\right) > 0\right\}$.

Definición 3.6.2
Supongamos que $\ln(f_{\mathbf{X}}) \in \mathcal{L}^1(Sop(\mathbf{X}), P_{\mathbf{X}}, \mathbb{R})$. Llamamos "*entropía diferencial de* $\mathbf{X}$" a

$$H(\mathbf{X}) \doteq -\int_{Sop(\mathbf{X})} \ln(f_{\mathbf{X}}) dP_{\mathbf{X}} = -\int_{Sop(\mathbf{X})} \ln(f_{\mathbf{X}}) f_{\mathbf{X}} d\lambda_n.$$

Ejemplo 3.6.3
Si $a > 0$ y $X \sim \mathcal{U}(0, a)$ entonces $H(X)$ está definida y $H(X) = \ln(a)$.

Demostración:
Como $X \sim \mathcal{U}(0, a)$ entonces $f_X(x) = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a} \text{ si } x \in (0,a) \\ 0 \text{ si } x \notin (0,a) \end{array}\right.$. Además

$$Sop(X) = \{y \in \mathbb{R} : f_X(y)) > 0\} = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y < a\}.$$

Luego, para cada $y \in Sop(X)$ resulta que

$$\ln(f_X(y)) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln(1) - \ln(a) = -\ln(a).$$

Así

$$H(X) = -\int_{Sop(X)} \ln(f_X(y)) f_X(y) dy = -\int_{Sop(X)} -\frac{\ln(a)}{a} \mathcal{X}_{(0,a)}(y)\, dy = \ln(a) \int_0^a \frac{1}{a} dy = \ln(a). \blacksquare$$

Ejemplo 3.6.4 (La entropía diferencial en el caso Gaussiano real)
Si $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma(\mathbf{X}))$ entonces $H(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \ln\left[(2\pi e)^n \det(\Sigma(\mathbf{X}))\right]$.

Demostración:
Como $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma(\mathbf{X}))$ entonces

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-n/2} (\det \Sigma(\mathbf{X}))^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \Sigma(\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}\right) \\ &= \left[(2\pi)^n (\det \Sigma(\mathbf{X}))\right]^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \Sigma(\mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}\right), \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\ln\left(f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\right) &= \ln\left\{\left[(2\pi)^n\left(\det\Sigma\left(\mathbf{X}\right)\right)\right]^{-1/2}\right\}+\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\Sigma\left(\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{x}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\ln\left[(2\pi)^n\left(\det\Sigma\left(\mathbf{X}\right)\right)\right]+\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\Sigma\left(\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{x}\right)
\end{aligned}$$

y, por tanto

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{X}) &= -\int_{Sop(\mathbf{X})}\ln(f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}))f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\lambda_n(\mathbf{x})\\
&= \int_{Sop(\mathbf{X})}\left\{\frac{1}{2}\ln\left[(2\pi)^n\left(\det\Sigma\left(\mathbf{X}\right)\right)\right]+\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top\Sigma\left(\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{x}\right)\right\}f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\lambda_n(\mathbf{x})\\
&= \frac{1}{2}\ln\left[(2\pi)^n\left(\det\Sigma\left(\mathbf{X}\right)\right)\right]\int_{Sop(\mathbf{X})}f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\lambda_n(\mathbf{x})+\frac{1}{2}\int_{Sop(\mathbf{X})}\mathbf{x}^\top\Sigma\left(\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{x}f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\lambda_n(\mathbf{x})\\
&= \frac{1}{2}\ln\left[(2\pi)^n\left(\det\Sigma\left(\mathbf{X}\right)\right)\right]+\frac{1}{2}\int_{Sop(\mathbf{X})}\left(\mathbf{x}^\top\Sigma\left(\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{x}\right)f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\lambda_n(\mathbf{x}).\\
&= \frac{1}{2}\ln\left[(2\pi)^n\left(\det\Sigma\left(\mathbf{X}\right)\right)\right]+\frac{1}{2}E_P\left(\mathbf{X}^\top\Sigma\left(\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}\right).
\end{aligned}$$

<u>Afirmación</u>: $E_P\left(\mathbf{X}^\top\Sigma\left(\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}\right)=n$.

<u>Demostración Afirmación:</u>

Escribamos $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix}$, $\Sigma\left(\mathbf{X}\right)=\begin{bmatrix}| & & |\\ a_1 & \cdots & a_n\\ | & & |\end{bmatrix}$ y $\Sigma\left(\mathbf{X}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}- & b_1^\top & -\\ & \vdots & \\ - & b_n^\top & -\end{bmatrix}$. Luego $a_i=E_P\left(X_i\mathbf{X}\right)$ y $b_i^\top a_j=\delta_{i,j}$ $\forall\ i,\ j\in\{1,...,n\}$. Pero

$$\mathbf{X}^\top\Sigma\left(\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix}^\top\begin{bmatrix}- & b_1^\top & -\\ & \vdots & \\ - & b_n^\top & -\end{bmatrix}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}X_1 & \cdots & X_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1^\top\mathbf{X}\\ \vdots\\ b_n^\top\mathbf{X}\end{bmatrix}=X_1b_1^\top\mathbf{X}+\cdots+X_nb_n^\top\mathbf{x},$$

con lo cual

$$E_P\left(\mathbf{X}^\top\Sigma\left(\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}\right)=b_1^\top E_P(X_1\mathbf{X})+\cdots+b_n^\top E_P(X_n\mathbf{X})=b_1^\top a_1+\cdots+b_n^\top a_n=n$$

y por lo tanto la Afirmación queda probada. Se sigue ahora que

$$\begin{aligned}
H(\mathbf{X}) &= \frac{1}{2}\ln\left[(2\pi)^n\left(\det\Sigma\left(\mathbf{X}\right)\right)\right]+\frac{n}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\ln\left[(2\pi)^n\left(\det\Sigma\left(\mathbf{X}\right)\right)\right]+n\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\ln\left[(2\pi)^n\left(\det\Sigma\left(\mathbf{X}\right)\right)\right]+\ln\left(\exp\left(n\right)\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\ln\left[(2\pi)^n\left(\det\Sigma\left(\mathbf{X}\right)\right)\exp\left(n\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)^n\det\left(\Sigma(\mathbf{X})\right)\right].
\end{aligned}$$

Luego, el Ejemplo 3.6.4 queda desarrollado. ■

Consideremos ahora el $\mathbb{C}-$vector aleatorio $\mathbf{Z}:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}^n$ y sea $\mathbf{X}\doteq\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(\mathbf{Z})\\ \mathrm{Im}(\mathbf{Z})\end{bmatrix}$. Supongamos que $P_{\mathbf{X}}$ admite una $\lambda_{2n}-$densidad $f_{\mathbf{X}}$ tal que está definida $H\left(\mathbf{X}\right)=-\int_{Sop(\mathbf{X})}\ln(f_{\mathbf{X}})f_{\mathbf{X}}d\lambda_{2n}$. Sea $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})=f_{\mathbf{X}}\left((\mathbf{x},\mathbf{y})^\top\right)$, $\forall\ \mathbf{z}=\mathbf{x}+i\mathbf{y}\in\mathbb{C}^n$.

Definición 3.6.5
Llamamos "*entropía diferencial de* $\mathbf{Z}$" a $H(\mathbf{Z}) \doteq H(\mathbf{X})$.

Ejemplo 3.6.6 (La entropía diferencial en el caso Gaussiano complejo)
Si $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}\mathbb{C}_{n,I}(\mathbf{0}, \Sigma(\underline{\mathbf{Z}}))$, donde $\underline{\mathbf{Z}} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^* \end{bmatrix}$ entonces $H(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} \ln \left[(\pi e)^{2n} \det(\Sigma(\underline{\mathbf{Z}})) \right]$.

Demostración:
Como $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}\mathbb{C}_{n,I}(\mathbf{0}, \Sigma(\underline{\mathbf{Z}}))$ entonces $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{2n}(\mathbf{0}, \Sigma(\mathbf{X}))$. Luego, por el Ejemplo 3.6.4 (para este caso $2n$ en lugar de n) tenemos que

$$H(\mathbf{Z}) = H(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \ln \left[(2\pi e)^{2n} \det(\Sigma(\mathbf{X})) \right].$$

Ahora, por lo visto en la demostración de la Proposición 3.4.3, resulta que $\det(\Sigma(\underline{\mathbf{Z}})) = 2^{2n} \det(\Sigma(\mathbf{X}))$. Finalmente,

$$H(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} \ln \left[(2\pi e)^{2n} \det(\Sigma(\underline{\mathbf{Z}})) \frac{1}{2^{2n}} \right] = \frac{1}{2} \ln \left[(\pi e)^{2n} \det(\Sigma(\underline{\mathbf{Z}})) \right].$$

Definición 3.6.7
Sea $\underline{U} \in \mathcal{W}^{n \times n}$. Decimos que "$\underline{U}$ *es débilmente unitaria*" si $\underline{U} \cdot \underline{U}^H = \underline{U}^H \cdot \underline{U} = I_{2n}$.

Proposición 3.6.8
Sea $\underline{U} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_2^* & U_1^* \end{bmatrix} \in \mathcal{W}^{n \times n}$ débilmente unitaria y $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}\mathbb{C}_{n,I}(\mathbf{0}, \Sigma(\underline{\mathbf{Z}}))$, donde $\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^* \end{bmatrix}$. Si $\mathbf{Z}_1 = U_1 \mathbf{Z} + U_2 \mathbf{Z}^*$ entonces $H(\mathbf{Z}) = H(\mathbf{Z}_1)$.

Demostración:
Escribamos $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z(1) \\ \vdots \\ Z(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(1) + iX_2(1) \\ \vdots \\ X_1(n) + iX_2(n) \end{bmatrix} = X_1 + iX_2$, con $X_1 \doteq \begin{bmatrix} X_1(1) \\ \vdots \\ X_1(n) \end{bmatrix}$ y $X_2 \doteq \begin{bmatrix} X_2(1) \\ \vdots \\ X_2(n) \end{bmatrix}$. Entonces

$$\mathbf{Z}_1 = U_1 \mathbf{Z} + U_2 \mathbf{Z}^* = U_1(X_1 + iX_2) + U_2(X_1 - iX_2) = (U_1 + U_2) X_1 + i(U_1 - U_2) X_2.$$

Sean $\mathbf{X} \doteq \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{X}_1 \doteq \begin{bmatrix} (U_1 + U_2) X_1 \\ (U_1 - U_2) X_2 \end{bmatrix}$. Como $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}\mathbb{C}_{n,I}(\mathbf{0}, \Sigma(\underline{\mathbf{Z}}))$ entonces $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{2n}(\mathbf{0}, \Sigma(\mathbf{X}))$.

Además $\mathbf{X}_1 = A\mathbf{X}$, donde $A = \begin{bmatrix} U_1 + U_2 & O_n \\ O_n & U_1 - U_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$. Luego $\mathbf{X}_1 \sim \mathcal{N}_{2n}(E(\mathbf{X}_1), \Sigma(\mathbf{X}_1))$, donde $\begin{cases} E(\mathbf{X}_1) = AE(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \\ \Sigma(\mathbf{X}_1) = A\Sigma(\mathbf{X}) A^H \end{cases}$. Por lo tanto $\mathbf{Z}_1 \sim \mathcal{N}\mathbb{C}_{n,I}\left(\mathbf{0}, \Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right)\right)$.

Ahora, como $\underline{\mathbf{Z}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \mathbf{Z} + U_2 \mathbf{Z}^* \\ U_2^* \mathbf{Z} + U_1^* \mathbf{Z}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_2^* & U_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^* \end{bmatrix} = \underline{U} \cdot \underline{\mathbf{Z}}$ entonces

$$\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right) = \Sigma(\underline{U} \cdot \underline{\mathbf{Z}}) = E\left(\underline{U} \cdot \underline{\mathbf{Z}} \cdot (\underline{U} \cdot \underline{\mathbf{Z}})^H\right) = E\left(\underline{U} \cdot \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{Z}}^H \cdot \underline{U}^H\right) = \underline{U} \cdot E\left(\underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{Z}}^H\right) \cdot \underline{U}^H = \underline{U} \cdot \Sigma(\underline{\mathbf{Z}}) \cdot \underline{U}^H,$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \det\left(\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}_1}\right)\right) &= \det\left(\underline{U} \Sigma(\underline{\mathbf{Z}}) \underline{U}^H\right) = \det(\underline{U}) \det(\Sigma(\underline{\mathbf{Z}})) \det\left(\underline{U}^H\right) \\ &= \det\left(\underline{U} \cdot \underline{U}^H\right) \det(\Sigma(\underline{\mathbf{Z}})) = \det(I_{2n}) \det(\Sigma(\underline{\mathbf{Z}})) = \det(\Sigma(\underline{\mathbf{Z}})). \end{aligned}$$

Se sigue el resultado por el Ejemplo 3.6.6. ■

3.7 La distribución Gaussiana compleja unidimensional

La *distribución Gaussiana compleja unidimensional* es lo suficientemente importante para revisarla en detalle.

Sean X_1 y X_2 con valores en $\mathbb{R}$ y sea $\mathbf{X} \doteq \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \Sigma(\mathbf{X}))$. Luego, por definición $Z \doteq X_1 + iX_2 \sim \mathcal{N}\mathbb{C}_{1,I}(0, \Sigma(\underline{Z}))$, con $\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z \\ Z^* \end{bmatrix}$. Como ya sabemos $\Sigma(\underline{Z}) = \begin{bmatrix} \Sigma(Z) & \widetilde{\Sigma}(Z) \\ \widetilde{\Sigma}(Z)^* & \Sigma(Z)^* \end{bmatrix}$, donde $\Sigma(Z) = E(ZZ^*) = E\left(|Z|^2\right) > 0$ y $\widetilde{\Sigma}(Z) = E\left(Z^2\right)$.

Proposición 3.7.1
Existe $\rho_Z \in \mathbb{C}$ tal que $\widetilde{\Sigma}(Z) = \rho_Z \Sigma(Z)$ con $|\rho_Z| \leq 1$.

Demostración:
Puesto que $Z^2 = (X_1 + iX_2)^2 = X_1^2 - X_2^2 + 2iX_1X_2$ entonces

$$\widetilde{\Sigma}(Z) = E\left(Z^2\right) = E\left(X_1^2\right) - E(X_2^2) + 2iE(X_1X_2) = \Sigma(X_1) - \Sigma(X_2) + 2iE(X_1X_2).$$

Sea $Corr(X_1, X_2)$ el coeficiente de correlación entre X_1 y X_2, esto es

$$Corr(X_1, X_2) = \frac{E(X_1X_2)}{\sqrt{\Sigma(X_1)}\sqrt{\Sigma(X_2)}}.$$

Luego $\widetilde{\Sigma}(Z) = \Sigma(X_1) - \Sigma(X_2) + 2iCorr(X_1, X_2)\sqrt{\Sigma(X_1)}\sqrt{\Sigma(X_2)}$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{\Sigma}(Z)\right|^2 &= (\Sigma(X_1) - \Sigma(X_2))^2 + 4\left(Corr(X_1, X_2)\sqrt{\Sigma(X_1)}\sqrt{\Sigma(X_2)}\right)^2 \\ &= \Sigma(X_1)^2 + \Sigma(X_2)^2 - 2\Sigma(X_1)\Sigma(X_2) + 4Corr(X_1, X_2)^2\Sigma(X_1)\Sigma(X_2). \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \Sigma(Z)^2 &= E\left(|Z|^2\right)^2 = E\left(X_1^2 + X_2^2\right)^2 = \left(E\left(X_1^2\right) + E(X_2^2)\right)^2 \\ &= (\Sigma(X_1) + \Sigma(X_2))^2 = \Sigma(X_1)^2 + \Sigma(X_2)^2 + 2\Sigma(X_1)\Sigma(X_2), \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{\Sigma}(Z)\right|^2 &= \Sigma(Z)^2 - 4\Sigma(X_1)\Sigma(X_2) + 4Corr(X_1, X_2)^2\Sigma(X_1)\Sigma(X_2) \\ &= \Sigma(Z)^2 + 4\Sigma(X_1)\Sigma(X_2)\left(Corr(X_1, X_2)^2 - 1\right). \end{aligned}$$

Como $Corr(X_1, X_2)^2 \leq 1$ entonces $\left|\widetilde{\Sigma}(Z)\right|^2 \leq \Sigma(Z)^2$. Finalmente, tomando

$$\rho_Z \doteq \frac{\widetilde{\Sigma}(Z)}{\Sigma(Z)},$$

tenemos que $|\rho_Z|^2 = \frac{|\widetilde{\Sigma}(Z)|^2}{\Sigma(Z)^2} \leq 1$. Por lo tanto $|\rho_Z| \leq 1$. ■

Proposición 3.7.2
Si $|\rho_Z| = 1$ entonces $\exists\ R \subset \mathbb{C}$, recta en el plano complejo, tal que $Z(\Omega) = R$.

Demostración:
<u>Afirmación:</u> $\left(1-|\rho_Z|^2\right)\Sigma(Z)^2 = 4\Sigma(X_1)\Sigma(X_2)\left(1-Corr(X_1,X_2)^2\right)$.

<u>Demostración Afirmación:</u>
Por definición tenemos que $\left|\widetilde{\Sigma}(Z)\right|^2 = |\rho_Z|^2\Sigma(Z)^2$ y, por demostración de la Proposición anterior, sabemos que

$$\left|\widetilde{\Sigma}(Z)\right|^2 = \Sigma(Z)^2 + 4\Sigma(X_1)\Sigma(X_2)\left(Corr(X_1,X_2)^2-1\right).$$

Entonces

$$\left(1-|\rho_Z|^2\right)\Sigma(Z)^2 = 4\Sigma(X_1)\Sigma(X_2)\left(1-Corr(X_1,X_2)^2\right).$$

De aquí deducimos que

$$\Sigma(X_1)\Sigma(X_2)\left(1-Corr(X_1,X_2)^2\right)=0.$$

Luego, sucede al menos una de las siguientes situaciones:
1. $\Sigma(X_1)=0$
2. $\Sigma(X_2)=0$
3. $Corr(X_1,X_2)=\pm 1$.

Si ocurre 1 entonces X_1 es constante, lo cual implica que $Z = c+iX_2$ con $c\in\mathbb{R}$ y, por lo tanto $Z(\Omega) = \{c+iy : y\in\mathbb{R}\}$. Si ocurre 2 entonces X_2 es constante, con lo cual $Z = X_1+ic$ con $c\in\mathbb{R}$ y, por lo tanto $Z(\Omega)=\{x+ic : x\in\mathbb{R}\}$. Por último, si ocurre 3 entonces, por el Teorema de Cauchy-Schwartz, tenemos que $\exists$ $c\in\mathbb{R}$ tal que $c\neq 0$ y $X_2 = cX_1$. Luego $Z(\Omega)=\{x+icx : x\in\mathbb{R}\}$. Por lo tanto la Proposición 3.7.2 está probada. ■

Proposición 3.7.3
Si $Z\sim\mathcal{N}\mathbb{C}_{1,I}(0,\Sigma(\underline{Z}))$ entonces

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi\Sigma(Z)\sqrt{1-|\rho_Z|^2}}\exp\left(-\frac{|z|^2-\operatorname{Re}\left(\rho_Z(z^*)^2\right)}{\Sigma(Z)\left(1-|\rho_Z|^2\right)}\right),\ z\in\mathbb{C}.$$

Demostración:
Por la definición de ρ_Z tenemos que

$$\Sigma(\underline{Z}) = \begin{bmatrix}\Sigma(Z) & \rho_Z\Sigma(Z)\\ \rho_Z^*(\Sigma(Z))^* & \Sigma(Z)^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Sigma(Z) & \rho_Z\Sigma(Z)\\ \rho_Z^*(\Sigma(Z)) & \Sigma(Z)\end{bmatrix} = \Sigma(Z)\begin{bmatrix}1 & \rho_Z\\ \rho_Z^* & 1\end{bmatrix}.$$

Sea $\mathbf{A}\doteq\det(\Sigma(\underline{Z}))$ luego $\mathbf{A}=\Sigma(Z)^2\left(1-|\rho_Z|^2\right)$ y $\Sigma(\underline{Z})^{-1} = \frac{\Sigma(Z)}{\mathbf{A}}\begin{bmatrix}1 & -\rho_Z\\ -\rho_Z^* & 1\end{bmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\underline{z}^H\Sigma(\underline{Z})^{-1}\underline{z} &= \frac{\Sigma(Z)}{\mathbf{A}}\begin{bmatrix}z^* & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\rho_Z\\ -\rho_Z^* & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\ z^*\end{bmatrix} = \frac{\Sigma(Z)}{\mathbf{A}}\begin{bmatrix}z^* & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z-\rho_Z z^*\\ -\rho_Z^* z + z^*\end{bmatrix}\\
&= \frac{\Sigma(Z)}{\mathbf{A}}\left[z^*(z-\rho_Z z^*) + z(-\rho_Z^* z + z^*)\right] = \frac{\Sigma(Z)}{\mathbf{A}}\left[|z|^2-\rho_Z(z^*)^2-\rho_Z^* z^2+|z|^2\right]\\
&= \frac{\Sigma(Z)}{\mathbf{A}}\left[2|z|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\rho_Z(z^*)^2\right)\right] = 2\frac{|z|^2-\operatorname{Re}\left(\rho_Z(z^*)^2\right)}{\Sigma(Z)\left(1-|\rho_Z|^2\right)}.
\end{aligned}$$

Por la Proposición 3.4.3 tenemos que $f_Z(z) = \pi^{-n}\left(\det(\Sigma(\underline{Z}))\right)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\underline{z}^H\Sigma(\underline{Z})^{-1}\underline{z}\right)$. Reemplazando obtenemos que $f_Z(z) = \frac{1}{\pi\Sigma(Z)\sqrt{1-|\rho_Z|^2}}\exp\left(-\frac{|z|^2-\operatorname{Re}\left(\rho_Z(z^*)^2\right)}{\Sigma(Z)\left(1-|\rho_Z|^2\right)}\right)$, lo cual demuestra la Proposición. ■

Nota 3.7.4
Según probamos en la Proposición 3.7.1

$$\rho_Z \Sigma(Z) = \widetilde{\Sigma}(Z) = \Sigma(X_1) - \Sigma(X_2) + 2iCorr(X_1, X_2)\sqrt{\Sigma(X_1)}\sqrt{\Sigma(X_2)}.$$

Luego, podemos distinguir las siguientes situaciones:
1. $\Sigma(X_1) - \Sigma(X_2) = 0$ y $Corr(X_1, X_2) = 0$;
2. $\Sigma(X_1) - \Sigma(X_2) \neq 0$ y $Corr(X_1, X_2) = 0$;
3. $\Sigma(X_1) - \Sigma(X_2) \neq 0$ y $Corr(X_1, X_2) \neq 0$.

Si ocurre 1 entonces Z es propio y $\rho_Z = 0$. Si ocurre 2 entonces Z es impropio y, como $\Sigma(Z)$ es real, ρ_Z es real. Si ocurre 3 entonces Z es impropio y ρ_Z es imaginario puro.

3.8 Distribuciones elípticas

Esta sección se puede considerar como una continuación de lo visto en la Nota 2.2.19. Comenzamos definiendo los vectores aleatorios reales con *distribución elíptica*, obtenemos una expresión para su función característica y presentamos dos ejemplos ilustrativos: la *distribución Gaussiana multivariada* y la *distribución $t-$multivariada*. A continuación discutimos algunas propiedades de la distribución esférica, concentrándonos en las distribuciones marginales, los momentos y la densidad.

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e.p.*; $n \geq 2$ entero; $1 \leq k \leq n$ entero y $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio real.

Notación 3.8.1
Si $\mathbf{Y} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es un vector aleatorio y $\phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$, denotamos

$$\mathbf{Y} \sim S_k(\phi),$$

si la función característica de $\mathbf{Y}$ es $c_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = \phi\left(\mathbf{t}^\top \mathbf{t}\right)$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$. Por el Teorema 2.2.19.13, $\mathbf{Y} \sim S_k(\phi)$ es equivalente a decir que $\mathbf{Y}$ tiene distribución esférica. A ϕ la llamamos "*función característica generadora de la distribución esférica*".

Definición 3.8.2
Sean $\mu \in \mathbb{R}^n$; $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, semidefinida positiva con $rg(\Sigma) = k$; $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ tal que $A^\top A = \Sigma$ y $\phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$. Decimos que "$\mathbf{X}$ *tiene distribución elípticamente simétrica* (*o simplemente distribución elíptica*) *de parámetros* μ *y* Σ (*o más precisamente de parámetros* μ, Σ, A, k *y* ϕ)" si

$$\mathbf{X} \overset{\circ}{=} \mu + A^\top \mathbf{Y} \text{ con } \mathbf{Y} \sim S_k(\phi).$$

En este caso escribimos $\mathbf{X} \sim EC_n(\mu, \Sigma, A, k, \phi)$, o simplemente $\mathbf{X} \sim EC_n(\mu, \Sigma, \phi)$ si no hay lugar a confusión.

Proposición 3.8.3
Sean μ, Σ, A, k y ϕ como en la Definición anterior. Si $\mathbf{X} \sim EC_n(\mu, \Sigma, A, k, \phi)$ entonces

$$c_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp\left(i\mathbf{t}^\top \mu\right) \phi\left(\mathbf{t}^\top \Sigma \mathbf{t}\right), \ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración:
Por la Definición 2.2.19.12 tenemos que

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= E_P\left(\exp\left(i\mathbf{t}^\top \mathbf{X}\right)\right) = E_P\left(\exp\left(i\mathbf{t}^\top\left(\mu + A^\top \mathbf{Y}\right)\right)\right) = E_P\left(\exp\left(i\mathbf{t}^\top \mu\right) \exp\left(i\mathbf{t}^\top A^\top \mathbf{Y}\right)\right) \\ &= \exp\left(i\mathbf{t}^\top \mu\right) E_P\left(\exp\left(i\left(A\mathbf{t}\right)^\top \mathbf{Y}\right)\right) = \exp\left(i\mathbf{t}^\top \mu\right) c_{\mathbf{Y}}(A\mathbf{t}) = \exp\left(i\mathbf{t}^\top \mu\right) \phi\left(\left(A\mathbf{t}\right)^\top A\mathbf{t}\right) \\ &= \exp\left(i\mathbf{t}^\top \mu\right) \phi\left(\mathbf{t}^\top A^\top A\mathbf{t}\right) = \exp\left(i\mathbf{t}^\top \mu\right) \phi\left(\mathbf{t}^\top \Sigma \mathbf{t}\right). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 3.8.4
Sean μ, Σ, A, k y ϕ como en la Definición 3.8.2. Son equivalentes:
1. $\mathbf{X} \sim EC_n(\mu, \Sigma, A, k, \phi)$.
2. $\mathbf{X} \overset{\circ}{=} \mu + RA^\top U^{(k)}$, donde:
    2.1. $R : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ es una variable aleatoria, F_R su $f.d.a.$
    2.2. $U^{(k)} \sim \mathcal{U}\left(\mathbb{S}^k\right)$.
    2.3. R y $U^{(k)}$ son independientes.
    2.4. $\phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ está dada por

$$\phi\left(t\right) = \int_0^\infty \psi_k\left(tr^2\right) G(dr), \; \forall \; t \in [0, \infty)$$

con $\psi_k : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ y $G : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen

$$c_{U^{(k)}}\left(\mathbf{t}\right) = \psi_k\left(\mathbf{t}^\top\mathbf{t}\right), \; \mathbf{t} \in \mathbb{R}^k \text{ y } G(u) = F_R(u), \; u \in [0, \infty).$$

Demostración:
Es una consecuencia inmediata de la Definición 3.8.2 y el Corolario 2.2.19.23. ■

Definición 3.8.5
Sea $S^2 : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ tal que $S^2 \sim \mathcal{X}_k^2$, entonces, decimos que "$S \doteq \sqrt{S^2}$ *tiene distribución chi con k grados de libertad*" y denotamos $S \sim \mathcal{X}_k$.
También, si $S_1^2 \sim \mathcal{X}_m^2$ y $S_2^2 \sim \mathcal{X}_n^2$, entonces decimos que "$\frac{mS_1^2}{nS_2^2}$ *tiene distribución F con* $(n, m)-$*grados de libertad*" y denotamos $\frac{mS_1^2}{nS_2^2} \sim F(n, m)$.

Ejemplo 3.8.6 (La distribución Gaussiana multivariada)
Sea $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{bmatrix}$ un vector aleatorio real tal que $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_k(\mathbf{0}, I_k)$, entonces la función característica de $\mathbf{Y}$ satisface que $c_{\mathbf{Y}}\left(\mathbf{t}\right) = \phi\left(\mathbf{t}^\top\mathbf{t}\right)$ para cada $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$, siendo $\phi \in \Phi_k$ dada por

$$\phi\left(u\right) = \exp\left(-\frac{u}{2}\right), \; u \geq 0.$$

Por la Notación 3.8.1 tenemos que $\mathbf{Y} \sim S_k(\phi)$. Ahora sean $\mu \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ tal que $k = rg(A) \leq n$ y $A^\top A$ es definida positiva. También sabemos que si

$$\mathbf{X} \overset{\circ}{=} \mu + A^\top\mathbf{Y},$$

entonces $\mathbf{X} \overset{\circ}{=} \mathcal{N}_n\left(\mu, \Sigma\right)$, siendo $\Sigma \doteq A^\top A$. Luego, por la Definición 3.8.2, tenemos que

$$\mathbf{X} \sim EC_n(\mu, \Sigma, A, k, \phi)$$

y, por la Proposición 3.8.4, esto es equivalente a

$$\mathbf{X} \overset{\circ}{=} \mu + RA^\top U^{(k)},$$

donde $R \geq 0$ es independiente de $U^{(k)} \sim \mathcal{U}\left(\mathbb{S}^k\right)$. Entonces

$$R = R\left\|U^{(k)}\right\| = \left\|RU^{(k)}\right\| \overset{\circ}{=} \left\|\mathbf{Y}\right\|.$$

Además, como $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_k(0, I_k)$, entonces $Y_1, ..., Y_k$ son independientes e $Y_j \sim N(0, 1) \; \forall \; j = 1, ..., k$. Luego $Y_j^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \; \forall \; j = 1, ..., k$, por lo cual

$$\left\|\mathbf{Y}\right\|^2 = \sum_{j=1}^k Y_j^2 \sim \Gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Por lo tanto $R \sim \mathcal{X}_k$.

Ejemplo 3.8.7 (La distribución $t-$multivariada.)

Definición 3.8.7.1
Sean $m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ entero, $\mathbf{V} \sim \mathcal{N}_n(0, I_k)$, $S \sim \mathcal{X}_m$, $\mathbf{V}$ y S independientes e $\mathbf{Y} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{Y} \stackrel{\circ}{=} \frac{\sqrt{m}\mathbf{V}}{S}.$$

En esta situación decimos que "$\mathbf{Y}$ *tiene la distribución $t-$multivariada $n-$dimensional con m grados de libertad*" y denotamos $\mathbf{Y} \sim Mt_n\left(m, 0, I_n\right)$.

Proposición 3.8.7.2
Sean $m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ entero e $\mathbf{Y} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Son equivalentes:

1. $\mathbf{Y} \sim Mt_n\left(m, 0, I_n\right)$
2. $\mathbf{Y} \stackrel{\circ}{=} \sqrt{m} \cdot R \cdot \frac{U^{(n)}}{S}$, donde
    - 2.1. $R : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ es una variable aleatoria
    - 2.2. R, $U^{(n)}$ y S son independientes
    - 2.3. $R \sim \mathcal{X}_m$
    - 2.4. $U^{(n)} \sim \mathcal{U}(\mathbb{S}^n)$
    - 2.5. $S \sim \mathcal{X}_m$.

Demostración:
Es inmediata por la Definición y el Ejemplo anterior. ■

Nota 3.8.7.3 (Continuación de la Proposición 3.8.7.2)
Sea

$$R^* \doteq \frac{\sqrt{m}R}{S}.$$

Por la Definición 3.8.5 tenemos que $\frac{(R^*)^2}{n} = \frac{mR^2}{nS^2} \sim F(n, m)$. Luego $\mathbf{Y} \stackrel{\circ}{=} R^* U^{(n)}$ con R^* y $U^{(n)}$ independientes tales que $\frac{(R^*)^2}{n} \sim F(n, m)$ y $U^{(n)} \sim \mathcal{U}(\mathbb{S}^n)$. Por lo tanto $\mathbf{Y} \in S_P(n, R^*)$ (ver la Notación 2.2.19.24), lo cual implica, por el Corolario 2.2.19.22 que $\mathbf{Y}$ tiene distribución esféricamente simétrica.

Definición 3.8.7.4
Sean $\mu \in \mathbb{R}^n$; $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $A^\top A = \Sigma$; $m \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Decimos que "$\mathbf{X}$ *tiene distribución t multivariada $n-$dimensional de parámetros μ, Σ y m grados de libertad*" si

$$\mathbf{X} \stackrel{\circ}{=} \mu + A^\top \mathbf{Y} \text{ con } \mathbf{Y} \sim Mt_n\left(m, 0, I_n\right).$$

En símbolos $\mathbf{X} \sim Mt_n\left(m, \mu, \Sigma\right)$.

La siguiente Proposición muestra que si $\mathbf{X} \sim S_n\left(\phi\right)$, entonces todas las distribuciones marginales de $\mathbf{X}$ son esféricas y todas las funciones características marginales tienen el mismo generador.

Proposición 3.8.8
Sean $\phi \in \Phi_n$, $\mathbf{X} \sim S_n\left(\phi\right)$, $m \in \{1, ..., n-1\}$, $\mathbf{X}_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{X}_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ tales que $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$. Entonces $\mathbf{X}_1 \sim S_m\left(\phi\right)$.

Demostración:

Como $\mathbf{X} \sim S_n(\phi)$ entonces $c_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \phi\left(\mathbf{t}^\top \mathbf{t}\right)$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. Ahora, para cada $\mathbf{t}_1 \in \mathbb{R}^m$, sea $\mathbf{t} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0}_{n-m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Luego

$$\exp\left(i\mathbf{t}^\top \mathbf{X}\right) = \exp\left(i \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top & \mathbf{0}_{m-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}\right) = \exp\left(i\mathbf{t}_1^\top \mathbf{X}_1\right),$$

con lo cual

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{t}_1) &= E_P\left[\exp\left(i\mathbf{t}_1^\top \mathbf{X}_1\right)\right] = E_P\left[\exp\left(i\mathbf{t}^\top \mathbf{X}\right)\right] = c_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) \\ &= \phi\left(\mathbf{t}^\top \mathbf{t}\right) = \phi\left(\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\top & \mathbf{0}_{m-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{0}_{n-m} \end{bmatrix}\right) \\ &= \phi\left(\mathbf{t}_1^\top \mathbf{t}_1\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{X}_1 \sim S_m(\phi)$. ■

Teorema 3.8.9
Si $U^{(n)} \sim \mathcal{U}(\mathbb{S}^n)$ con $n \geq 2$ entonces $E\left(U^{(n)}\right) = \mathbf{0}$ y $\Sigma\left(U^{(n)}\right) = \frac{1}{n} I_n$.

Demostración:
Sea $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, I_n)$. Por el Ejemplo 3.8.6, tenemos que $\mathbf{X} \triangleq \|\mathbf{X}\| U^{(n)}$ con $\|\mathbf{X}\|^2 \sim \mathcal{X}_m^2$ y $\|\mathbf{X}\|$ y $U^{(n)}$ independientes. Entonces $\mathbf{0} = E(\mathbf{X}) = E\left(\|\mathbf{X}\| U^{(n)}\right) = E(\|\mathbf{X}\|) E\left(U^{(n)}\right)$ y, como $E(\|\mathbf{X}\|) > 0$, resulta que $E\left(U^{(n)}\right) = \mathbf{0}$. Además

$$\begin{aligned} I_n &= \Sigma(\mathbf{X}) = E\left(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top\right) = E\left(\|\mathbf{X}\|^2 U^{(n)} \left(U^{(n)}\right)^\top\right) = E\left(\|\mathbf{X}\|^2\right) E\left(U^{(n)} \left(U^{(n)}\right)^\top\right) \\ &= E\left(\|\mathbf{X}\|^2\right) \Sigma\left(U^{(n)}\right) = E\left(\sum_{j=1}^n X_j^2\right) \Sigma\left(U^{(n)}\right) = \sum_{j=1}^n E\left(X_j^2\right) \Sigma\left(U^{(n)}\right). \end{aligned}$$

Pero, como $X_j \sim N(0,1)$ entonces $E(X_j^2) = 1$ para cada $j = 1, ..., n$. Luego $I_n = n\Sigma\left(U^{(n)}\right)$, es decir $\Sigma\left(U^{(n)}\right) = \frac{1}{n} I_n$. ■

Corolario 3.8.10
Sean $R \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; [0,\infty))$; $U^{(n)} \sim \mathcal{U}(\mathbb{S}^n)$; $n \geq 2$; R y $U^{(n)}$ independientes; $\phi \in \Phi_n$; $\mathbf{X} \triangleq RU^{(n)}$ y $\mathbf{X} \sim S_n(\phi)$. Entonces $E(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ y $\Sigma(\mathbf{X}) = \frac{E(R^2)}{n} I_n$.

Demostración:
Aplicando el Teorema anterior tenemos que $E(\mathbf{X}) = E\left(RU^{(n)}\right) = E(R)E(U^{(n)}) = \mathbf{0}$ y

$$\Sigma(\mathbf{X}) = E\left(\mathbf{X}\mathbf{X}^\top\right) = E\left(R^2 U^{(n)} \left(U^{(n)}\right)^\top\right) = E(R^2) E\left(U^{(n)} \left(U^{(n)}\right)^\top\right) = E(R^2)\Sigma\left(U^{(n)}\right) = \frac{E(R^2)}{n} I_n. \blacksquare$$

Definición 3.8.11
Sean $X_1, ..., X_{m+1}$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, 1)$, $\forall\, i = 1, ..., m+1$ donde $\alpha_i > 0$. Para cada $j = 1, ..., m+1$ sean

$$Y_j \doteq \frac{X_j}{\sum_{i=1}^{m+1} X_i}.$$

Entonces decimos que "$(Y_1, ..., Y_m)$ *tiene distribución de Dirichlet con parámetros* $\alpha_1, ..., \alpha_{m+1}$" y denotamos $(Y_1, ..., Y_m) \sim D_m(\alpha_1, ..., \alpha_{m+1})$.

Teorema 3.8.12
Sean $n \geq 2$; $m \in \{1, ..., n\}$; $n_1, ..., n_m \in \mathbb{N}_0$ tales que $\sum_{j=1}^{m} n_j = n$; $\phi \in \Phi_n$; $\mathbf{X} \sim S_n(\phi)$; $R : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ una variable aleatoria tal que $\mathbf{X} = RU^{(n)}$ y para cada $j \in \{1, ..., m\}$ sean $\mathbf{X}^{(n_j)} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n_j}$ tales que $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(n_1)} \\ \vdots \\ \mathbf{X}^{(n_m)} \end{bmatrix}$.
Entonces

$$\mathbf{X} \doteqdot \begin{bmatrix} Rd_1 U^{(n_1)} \\ \vdots \\ Rd_m U^{(n_m)} \end{bmatrix}, \text{ donde}$$

1. $d_j : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ es una variable aleatoria, $\forall\ j = 1, ..., m$
2. $\left(d_1^2, ..., d_m^2\right) \sim D_m\left(\frac{n_1}{2}, ..., \frac{n_m}{2}\right)$
3. $U^{(n_j)} \sim \mathcal{U}\left(\mathbb{S}^{n_j}\right)$, $\forall\ j = 1, ..., m$
4. $(d_1, ..., d_m)$ y $\left(U^{(n_1)}, ..., U^{(n_m)}\right)$ son independientes.

Demostración:
Sea $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, I_n)$. Entonces $\mathbf{Y} \doteqdot \|\mathbf{Y}\| U^{(n)}$, con $\|\mathbf{Y}\|^2 \sim \mathcal{X}_n^2$ y $\|\mathbf{Y}\|$ y $U^{(n)}$ independientes, según vimos en el Ejemplo 3.8.6. Sabemos que $\mathbf{Y} \doteqdot \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{(n_1)} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^{(n_m)} \end{bmatrix}$, con $\mathbf{Y}^{(n_j)} \sim \mathcal{N}_{n_j}(\mathbf{0}, I_{n_j})$, $\forall\ j = 1, ..., m$. Luego, por el Ejemplo 3.8.6 $\mathbf{Y}^{(n_j)} \doteqdot \left\|\mathbf{Y}^{(n_j)}\right\| U^{(n_j)}$ con $\left\|\mathbf{Y}^{(n_j)}\right\|^2 \sim \mathcal{X}_{n_j}^2$, $U^{(n_j)} \sim \mathcal{U}\left(\mathbb{S}^{n_j}\right)$ y $\left\|\mathbf{Y}^{(n_j)}\right\|$ y $U^{(n_j)}$ independientes. Luego

$$U^{(n)} \doteqdot \frac{\mathbf{Y}}{\|\mathbf{Y}\|} \doteqdot \frac{1}{\|\mathbf{Y}\|} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{(n_1)} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^{(n_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{Y}^{(n_1)}}{\|\mathbf{Y}\|} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{Y}^{(n_m)}}{\|\mathbf{Y}\|} \end{bmatrix} \doteqdot \begin{bmatrix} \frac{\left\|\mathbf{Y}^{(n_1)}\right\| U^{(n_1)}}{\|\mathbf{Y}\|} \\ \vdots \\ \frac{\left\|\mathbf{Y}^{(n_m)}\right\| U^{(n_m)}}{\|\mathbf{Y}\|} \end{bmatrix}$$

y si para cada $j = 1, ..., m$ definimos $d_j \doteq \frac{\left\|\mathbf{Y}^{(n_j)}\right\|}{\|\mathbf{Y}\|}$ entonces se cumple 1 de la Proposición. Ahora pongamos $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$ con $Y_1, ..., Y_n$ *v.a.i.i.d.* $N(0, 1)$. Entonces $\mathbf{Y}^{(n_1)} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n_1} \end{bmatrix}$, $\mathbf{Y}^{(n_2)} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n_2} \end{bmatrix}$, ..., $\mathbf{Y}^{(n_m)} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n_m} \end{bmatrix}$.
Definimos

$$S_1 \doteq \sum_{k=1}^{n_1} Y_k^2,\ S_2 \doteq \sum_{k=n_1+1}^{n_2} Y_k^2,\ ...,\ S_m \doteq \sum_{k=n_1+\cdots+n_{m-1}+1}^{n} Y_k^2.$$

Luego, $S_1, ..., S_m$ son independientes y $S_j \sim \mathcal{X}_{n_j}^2$, $\forall\ j = 1, ..., m$. Entonces

$$d_j^2 = \frac{\left\|\mathbf{Y}^{(n_j)}\right\|^2}{\|\mathbf{Y}\|^2} = \frac{S_j}{\sum_{k=1}^{m} S_k} = \frac{S_j/2}{\sum_{k=1}^{m} (S_k/2)},$$

con $\frac{S_j}{2} \sim \Gamma\left(\frac{n_j}{2}, 1\right)$, $\forall\ j = 1, ..., m$ y $\frac{S_1}{2}, ..., \frac{S_m}{2}$ independientes.

Por la Definición anterior resulta que $\left(d_1^2, ..., d_m^2\right) \sim D_m\left(\frac{n_1}{2}, ..., \frac{n_m}{2}\right)$. Además $U^{(n)} \doteqdot \begin{bmatrix} d_1 U^{(n_1)} \\ \vdots \\ d_j U^{(n_j)} \end{bmatrix}$ y, como $\mathbf{X} = RU^{(n)}$, se sigue que $\mathbf{X} \doteqdot \begin{bmatrix} Rd_1 U^{(n_1)} \\ \vdots \\ Rd_m U^{(n_m)} \end{bmatrix}$. ■

Notación 3.8.13
Denotamos

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_+^n &\doteq \{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i\geq 0,\ \forall\ i=1,...,n\ \},\\
D(x_1,...,x_n) &\doteq \left\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i<1\right\} \text{ y}\\
B_n(\boldsymbol{\alpha}) &\doteq \frac{\prod_{i=1}^{n+1}\Gamma(\alpha_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\right)},\text{ donde } \boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_n)^\top.
\end{aligned}$$

Además para cada función medible no negativa f, sea

$$I_n(f\mid\boldsymbol{\alpha})\doteq\int_{\mathbb{R}_+^n} f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i-1}dx_i\right),\text{ donde } \boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_n)^\top. \quad \textbf{(3.8.13.1)}$$

Lema 3.8.14
Se cumple que $I_n(f\mid\boldsymbol{\alpha})=B_{n-1}(\boldsymbol{\alpha})\cdot I_1(f\mid\sum_{i=1}^n\alpha_i)$, siempre que cada integral exista.

Demostración:
Transformando $\left\{\begin{array}{c} y_i=x_i,\ i=1,...,n-1\\ y_n=x_1+\cdots+x_n\end{array}\right.$ en **(3.8.13.1)** y notando que el Jacobiano de la transformación es 1, tenemos que

$$I_n(f\mid\boldsymbol{\alpha})=\int_D f(y_n)\left(y_n-\sum_{i=1}^{n-1}y_i\right)^{\alpha_n-1}\left(\prod_{i=1}^{n-1}y_i^{\alpha_i-1}dy_i\right)dy_n,$$

donde $D\doteq\left\{(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}_+^n:\sum_{i=1}^{n-1}y_i<y_n\right\}$. Consideremos ahora otra transformación $\left\{\begin{array}{c} u_i=\frac{y_i}{y_n},\ i=1,...,n-1\\ y=y_n\end{array}\right.$.
Su Jacobiano es y^{n-1}, entonces

$$\begin{aligned}
I_n(f\mid\boldsymbol{\alpha}) &= \int_{D(u_1,...,u_{n-1})}\left(1-\sum_{i=1}^{n-1}u_i\right)^{\alpha_n-1}\left(\prod_{i=1}^{n-1}u_i^{\alpha_i-1}du_i\right)\times\int_0^\infty f(y)y^{\sum_{i=1}^n\alpha_i-1}dy\\
&= B_{n-1}(\boldsymbol{\alpha})\cdot I_1\left(f\mid\sum_{i=1}^n\alpha_i\right).\ \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 3.8.15
Para $\alpha_i>0$, $i=1,...,n$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\prod_{i=1}^n |x_i|^{2\alpha_i-1}dx_i\right)=I_n(f\mid\boldsymbol{\alpha}).$$

Demostración:
Por la simetría de $x_1,...,x_n$ alrededor del origen tenemos que

$$I=\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\prod_{i=1}^n |x_i|^{2\alpha_i-1}dx_i\right)=2^n\int_{\mathbb{R}_+^n} f\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\prod_{i=1}^n x_i^{2\alpha_i-1}dx_i\right).$$

Sea $u_i=x_i^2$, $i=1,...,n$, entonces el Jacobiano de esta transformación es $\left(2^n\prod_{i=1}^n u_i^{1/2}\right)^{-1}$. Luego

$$I=\int_{\mathbb{R}_+^n} f\left(\sum_{i=1}^n u_i\right)\left(\prod_{i=1}^n u_i^{\alpha_i-1}du_i\right)=I_n(f\mid\boldsymbol{\alpha}).\ \blacksquare$$

Corolario 3.8.16
Sea $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ medible y $n \geq 2$ entero. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\left(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1} g(y) dy.$$

Demostración:
Aplicando los Lemas anteriores con $\alpha_i = \frac{1}{2}$ $\forall$ $i = 1, ..., n$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g\left(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) dx_1 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\sum_{i=1}^n u_i\right)\left(\prod_{i=1}^n u_i^{-1/2} du_i\right) \\
&= I_n\left(g \mid \boldsymbol{\alpha}\right) = B_{n-1}\left(\boldsymbol{\alpha}\right) \cdot I_1\left(g \mid \frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(1/2\right)^n}{\Gamma\left(n/2\right)} \int_{\mathbb{R}_+^1} g(y) y^{\frac{n}{2}-1} dy \\
&= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(n/2\right)} \int_0^\infty g(y) y^{\frac{n}{2}-1} dy.
\end{aligned}$$

Por lo tanto queda demostrado el Corolario. ■

Definición 3.8.17
Sea $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ medible y $n \geq 2$ entero. Decimos que "*g es una función generatriz de densidad de dimensión n*" si

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\left(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} = 1.$$

Definición 3.8.18
Sea $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un vector aleatorio. Decimos que "$\mathbf{X}$ *admite una generatriz de densidad dada por* $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ *medible*" si se cumplen:
1. g es una función generatriz de densidad de dimensión n
2. $P\left(\mathbf{X} \in B\right) = \int_B g\left(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}\right) d\mathbf{x}$, $\forall$ $B \in \mathcal{B}_n$.

Nota 3.8.19
Sea $\mathbf{X} \in S_P(n)$ tal que $\mathbf{X}$ admite una densidad con respecto a la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$, digamos $f_{\mathbf{X}}$. Por el Teorema del cambio de variable tenemos que $f_{\mathbf{X}}\left(\Gamma \mathbf{y}\right) = f_{\Gamma^\top \mathbf{X}}\left(\mathbf{y}\right)$, para cada $\Gamma \in O(n)$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Pero, dado que

$$\Gamma^\top \mathbf{X} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{X} \ \forall \ \Gamma \in O(n),$$

resulta que $f_{\Gamma^\top \mathbf{X}}\left(\mathbf{y}\right) = f_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{y}\right)$, para cada $\Gamma \in O(n)$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Luego $f_{\mathbf{X}}\left(\Gamma \mathbf{y}\right) = f_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{y}\right)$, para cada $\Gamma \in O(n)$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, es decir $f_{\mathbf{X}}$ es $\mathbb{O}\left(n\right)-$invariante. Se sigue por el Lema 2.2.19.11 y el Teorema 2.2.19.7 que existe $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ tal que

$$f_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{x}\right) = g\left(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}\right), \ \forall \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto, son equivalentes:
1. $\mathbf{X}$ admite una densidad.
2. $\mathbf{X}$ admite una generatriz de densidad de dimensión n.

En este caso, por el Corolario anterior, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\left(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1} g(y) dy = 1.$$

Por lo tanto, una función medible $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ puede ser usada para definir una densidad $cg\left(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}\right)$ para alguna distribución esférica si y sólo si

$$\int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1} g(y) dy < \infty.$$

En este caso, escribimos $\mathbf{X} \sim S_n(g)$.

Teorema 3.8.20
Sean $R : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ medible; $n \geq 2$ entero; $U^{(n)} \sim \mathcal{U}(\mathbb{S}^n)$; R y $U^{(n)}$ independientes; $\phi \in \Phi_n$; $\mathbf{X} \sim S_n(\phi)$; $\mathbf{X} \stackrel{\circ}{=} RU^{(n)}$ y $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ una generatriz de densidad de dimensión n. Si $\mathbf{X}$ admite a g como generatriz de densidad entonces R tiene densidad f_R dada por

$$f_R(t) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{n-1} g(t^2),\, t \in [0, \infty)\,.$$

Demostración:

Notemos que $\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \stackrel{\circ}{=} \left(RU^{(n)}\right)^\top \left(RU^{(n)}\right) = R^2 \left(U^{(n)}\right)^\top \left(U^{(n)}\right) = R^2$, pues si $U^{(n)}(\omega) = \begin{bmatrix} U_1^{(n)}(\omega) \\ \vdots \\ U_n^{(n)}(\omega) \end{bmatrix}$, entonces $\left(U^{(n)}(\omega)\right)^\top \left(U^{(n)}(\omega)\right) = \sum_{j=1}^n \left(U_j^{(n)}(\omega)\right)^2 = 1$ para cada $\omega \in \Omega$. Sea $h : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ medible. Por definición y por el Corolario 3.8.16 tenemos que

$$\begin{aligned} E_P\left(h(R)\right) &= E_P\left(h\left(\sqrt{\mathbf{X}^\top \mathbf{X}}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^n} h\left(\sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}\right) f_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{x}\right) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} h\left(\sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}\right) g\left(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1} h\left(\sqrt{y}\right) g(y) dy. \quad \mathbf{(3.8.20.1)} \end{aligned}$$

Sea $s \doteq \sqrt{y} \iff ds = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \iff dy = 2sds$. Por **(3.8.20.1)** resulta que

$$E_P\left(h(R)\right) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty s^{n-1} h\left(s\right) g(s^2) ds. \quad \mathbf{(3.8.20.2)}$$

Sea $f_R : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ dada por $f_R(t) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{n-1} g(t^2)$, $t \in [0, \infty)$. Por ser g una generatriz de densidad de dimensión n y por Corolario 3.8.16 obtenemos que

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}\right) d\mathbf{x} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1} g(y) dy = \int_0^\infty \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} s^{n-1} g(s^2) ds = \int_0^\infty f_R(s) ds,$$

lo cual implica que f_R es una densidad de probabilidad. Sea ahora $C \in \mathcal{B}_1 \cap [0, \infty)$ y $h \doteq \mathcal{X}_C$. Según **(3.8.20.1)**

$$P_R(C) = E_P(\mathcal{X}_C(R)) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty s^{n-1} \mathcal{X}_C\left(s\right) g(s^2) ds = \int_C f_R(s) ds.$$

Por lo tanto f_R es una densidad de R. ■

Corolario 3.8.21
Si $\mathbf{X} \sim S_n(g)$ entonces $h : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ definida por

$$h(t) \doteq \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{n}{2}-1} g(t),\, \forall\, t \in [0, \infty)$$

es una densidad de la variable aleatoria $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$.

Demostración:

Por el Teorema anterior sabemos que la densidad de f_R está dada por

$$f_R(t) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{n-1} g(t^2) \mathcal{X}_{[0,\infty)}(t).$$

Sea h la función densidad de la variable $\mathbf{X}^\top \mathbf{X} = R^2$ y definamos $F : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ dada por $F(t) \doteq t^2$, $t \in [0,\infty)$. Por el Teorema del cambio de variable tenemos que

$$h(t) = f_R\left(F^{-1}(t)\right) \left| \frac{d}{dt}\left(F^{-1}(t)\right) \right| = f_R\left(\sqrt{t}\right) \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{n-1}{2}} g(t) \mathcal{X}_{[0,\infty)}(t) \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} t^{\frac{n}{2}-1} g(t) \mathcal{X}_{[0,\infty)}(t). \blacksquare$$

3.9 Distribuciones elípticas complejas

En esta sección presentamos una generalización de la distribución Gaussiana compleja: la *distribución elíptica compleja*.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $F : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}_*^{2n}$ dada por $F(\mathbf{x}) \doteq T_n \mathbf{x}$ una biyección, donde $T_n = \begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ I_n & -iI_n \end{bmatrix}$. Para cada $B \in \mathcal{B}_{2n}$, escribimos $F(B) \doteq \{T_n \mathbf{x} : \mathbf{x} \in B\}$.

Definición 3.9.1
Llamamos "*$\sigma -$ álgebra de Borel sobre* $\mathbb{C}_*^{2n}$", y denotamos $\sigma\left(\mathbb{C}_*^{2n}\right)$, al conjunto $\{F(B) : B \in \mathcal{B}_{2n}\}$.

Definición 3.9.2
Sea λ_{2n} la medida de Lebesgue sobre $\left(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{B}_{2n}\right)$. Llamamos "*medida de Lebesgue sobre* $\left(\mathbb{C}_*^{2n}, \sigma\left(\mathbb{C}_*^{2n}\right)\right)$" a

$$\lambda_{2n}^*(C) \doteq \lambda_{2n}(F)(C) = \lambda_{2n}(F^{-1}(C)),\ C \in \sigma\left(\mathbb{C}_*^{2n}\right).$$

Recordemos que, por la Proposición 3.1.3, $T_n^{-1} = \frac{1}{2} T_n^H$. Luego $F^{-1}(C) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\mathbf{z}) \\ \mathrm{Im}(\mathbf{z}) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_*^{2n} \right\}$.

Nota 3.9.3
En la Sección 3.2 definimos sobre $(\mathbb{C}^n, \sigma(\mathbb{C}^n))$ una medida que denotamos $\lambda_{2n}(I_{cn})$, donde λ_{2n} es la medida de Lebesgue sobre $\left(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{B}_{2n}\right)$ e I_{cn} es la biyección de $\mathbb{R}^{2n}$ sobre $\mathbb{C}^n$ dada por

$$I_{cn}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 + ix_2,\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Ahora, si definimos $\mathcal{I}_n : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}_*^{2n}$ por

$$\mathcal{I}_n(\mathbf{z}) \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z}^* \end{bmatrix}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$$

tenemos que $\mathcal{I}_n$ es biyectiva. Así, a partir de $\sigma(\mathbb{C}^n)$ (que definimos como $\sigma(\mathbb{C}^n) = I_{cn}(\mathcal{B}_{2n})$) y de $\mathcal{I}_n$ podemos definir la $\sigma-$álgebra de $\mathbb{C}_*^{2n}$ como

$$\mathcal{C} \doteq \mathcal{I}_n(\sigma(\mathbb{C}^n)) = \mathcal{I}_n(I_{cn}(\mathcal{B}_{2n})).$$

También, a partir de la medida $\lambda_{2n}(I_{cn})$ y de $\mathcal{I}_n$ podemos definir la medida $\lambda_{2n}(I_{cn})(\mathcal{I}_n)$ sobre $\left(\mathbb{C}_*^{2n}, \mathcal{C}\right)$. Es natural entonces preguntarnos las relaciones entre $\sigma\left(\mathbb{C}_*^{2n}\right)$ de la Definición 3.9.1 y $\mathcal{C}$, y las relaciones entre λ_{2n}^* de la Definición 3.9.2 y $\lambda_{2n}(I_{cn})(\mathcal{I}_n)$.

Afirmación: $\mathcal{C} = \sigma\left(\mathbb{C}_*^{2n}\right)$ y $\lambda_{2n}^* = \lambda_{2n}(I_{cn})(\mathcal{I}_n)$.

Demostración Afirmación:
Notemos que $F = \mathcal{I}_n \circ I_{cn}$, entonces $\mathcal{C} = \mathcal{I}_n\left(I_{cn}\left(\mathcal{B}_{2n}\right)\right) = F\left(\mathcal{B}_{2n}\right) = \sigma\left(\mathbb{C}_*^{2n}\right)$ y

$$\begin{aligned}
\lambda_{2n}^*(C) &= \lambda_{2n}(F^{-1}(C)) \\
&= \lambda_{2n}((\mathcal{I}_n \circ I_{cn})^{-1}(C)) \\
&= \lambda_{2n}(I_{cn}^{-1}\left(\mathcal{I}_n^{-1}(C)\right)) \\
&= \lambda_{2n}(I_{cn})\left(\mathcal{I}_n^{-1}(C)\right) \\
&= \lambda_{2n}(I_{cn})(\mathcal{I}_n)(C), \forall\, C \in \sigma\left(\mathbb{C}_*^{2n}\right). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 3.9.4
1. Sea $f : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow [0, \infty)$ una $\lambda_{2n}-$densidad de probabilidad. Entonces $\widetilde{f} : \mathbb{C}_*^{2n} \longrightarrow [0, \infty)$ dada por $\widetilde{f} \doteq f \circ F^{-1}$ es una λ_{2n}^*-densidad de probabilidad.

2. Recíprocamente, sea $\widetilde{f} : \mathbb{C}_*^{2n} \longrightarrow [0, \infty)$ una λ_{2n}^*-densidad de probabilidad, entonces $f : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow [0, \infty)$ dada por $f = \widetilde{f} \circ F$ es una $\lambda_{2n}-$densidad de probabilidad.

Demostración:
Bastaría probar 1 pues la parte 2 es análoga. Por la Definición anterior tenemos que, para cada $C \in \sigma\left(\mathbb{C}_*^{2n}\right)$

$$\int_{\mathbb{C}_*^{2n}} \mathcal{X}_C d\lambda_{2n}^* = \lambda_{2n}^*(C) = \lambda_{2n}\left(F^{-1}(C)\right) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathcal{X}_{F^{-1}(C)} d\lambda_{2n} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(\mathcal{X}_C \circ F\right) d\lambda_{2n}.$$

Luego, para toda $\widetilde{h} : \mathbb{C}_*^{2n} \longrightarrow [0, \infty)$ $\sigma\left(\mathbb{C}_*^{2n}\right) -$ medible vale que

$$\int_{\mathbb{C}_*^{2n}} \widetilde{h} d\lambda_{2n}^* = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(\widetilde{h} \circ F\right) d\lambda_{2n}.$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{C}_*^{2n}} \widetilde{f} d\lambda_{2n}^* = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(\widetilde{f} \circ F\right) d\lambda_{2n} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(f \circ F^{-1} \circ F\right) d\lambda_{2n} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f d\lambda_{2n} = 1.$$

Por lo tanto queda demostrada la Proposición. $\blacksquare$

Proposición 3.9.5
Sean $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ medible tal que $0 < \int_0^\infty t^{n-1} g(t) dt < \infty$, $\mathbf{X} \in \mathcal{L}^2\left(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^{2n}\right)$, $\boldsymbol{\mu} \doteq E(\mathbf{X})$, $\Sigma \doteq \Sigma(\mathbf{X})$ y $p : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow [0, \infty)$ dada por

$$p(\mathbf{x}) \doteq \frac{c_n(g)}{\sqrt{\det(\Sigma)}} g\left((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right), \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n},$$

donde $c_n(g) \doteq \frac{(n-1)!}{\pi^n \int_0^\infty t^{n-1} g(t) dt}$. Entonces p es una $\lambda_{2n}-$densidad de probabilidad.

Demostración:
Como Σ es simétrica y definida positiva, existe $L \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ matriz triangular inferior invertible tal que $\Sigma = LL^\top$. Luego $\Sigma^{-1} = \left(L^{-1}\right)^\top L^{-1}$ y $\det(L) = \sqrt{\det(\Sigma)}$, con lo cual

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}) &= \frac{c_n(g)}{\det(L)} g\left((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \left(L^{-1}\right)^\top L^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \\
&= \frac{c_n(g)}{\det(L)} g\left(\left[L^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right]^\top \left[L^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right]\right).
\end{aligned}$$

Sea $\mathbf{y} \doteq L^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$ entonces $d\mathbf{y} = (\det(L))^{-1} d\mathbf{x}$. Se sigue por el Teorema del cambio de variable y por el Corolario 3.8.16 que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2n}} p d\lambda_{2n} &= \frac{c_n(g)}{\det(L)} \int_{\mathbb{R}^{2n}} g\left(\left[L^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right]^\top \left[L^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right]\right) d\mathbf{x} \\
&= c_n(g) \int_{\mathbb{R}^{2n}} g\left(\mathbf{y}^\top \mathbf{y}\right) d\mathbf{y} \\
&= c_n(g) \frac{\pi^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty y^{n-1} g(y) dy \\
&= \frac{(n-1)!}{\pi^n \int_0^\infty t^{n-1} g(t) dt} \frac{\pi^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty y^{n-1} g(y) dy \\
&= 1. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Notemos que, si tomamos a p como la densidad de $\mathbf{X}$ resulta que $\mathbf{X} \sim S_{2n}(c_n(g) \cdot g)$.

Proposición 3.9.6 (Continuación de la Proposición 3.9.5)
Sea $\underline{\mathbf{Z}} = T_n \mathbf{X}$. Entonces $\underline{\mathbf{Z}}$ tiene una λ_{2n}^*−densidad dada por

$$p_{\underline{\mathbf{Z}}}(\underline{\mathbf{z}}) = \frac{2^n c_n(g)}{\sqrt{\det(\underline{H})}} g\left(\left(\underline{\mathbf{z}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}\right)^H \underline{H}^{-1} \left(\underline{\mathbf{z}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}\right)\right),$$

donde $\underline{\boldsymbol{\mu}} \doteq T_n \boldsymbol{\mu}$ y $\underline{H} \doteq T_n \Sigma T_n^H$.

Demostración:
Por la Proposición 3.3.3 sabemos que $\underline{H} = \Sigma(\underline{\mathbf{Z}})$. Además, como $\mathbf{X} \in \mathcal{L}^2\left(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^{2n}\right)$ entonces $\mathbf{Z} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^n)$. Luego se sigue por la Proposición 3.3.15 que $\underline{H}$ es semidefinida positiva, con lo cual

$$\left(\underline{\mathbf{z}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}\right)^H \underline{H}^{-1} \left(\underline{\mathbf{z}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}\right) \geq 0, \ \forall\ \underline{z} \in \mathbb{C}_*^{2n}.$$

Notemos que, por la Proposición 3.9.4, es suficiente ver que $p_{\underline{\mathbf{Z}}} = p \circ F^{-1}$. Sean $\underline{\mathbf{z}} \in \mathbb{C}_*^{2n}$ y $\mathbf{x} = \frac{1}{2} T_n^H \underline{\mathbf{z}}$ arbitrarios. Puesto que

$$\Sigma^{-1} = T_n^H \underline{H}^{-1} T_n,\ \boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} T_n^H \underline{\boldsymbol{\mu}},\ I_n = \frac{1}{2} T_n T_n^H \text{ y } \det(\Sigma) = 2^{-2n} \det(\underline{H})$$

entonces

$$\begin{aligned}
p\left(F^{-1}(\underline{\mathbf{z}})\right) &= p(\mathbf{x}) \\
&= \frac{c_n(g)}{\sqrt{\det(\Sigma)}} g\left((\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^H \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right) \\
&= \frac{c_n(g)}{\sqrt{\det(\Sigma)}} g\left(\left(\frac{1}{2} T_n^H \underline{\mathbf{z}} - \frac{1}{2} T_n^H \underline{\boldsymbol{\mu}}\right)^H \left(T_n^H \underline{H}^{-1} T_n\right) \left(\frac{1}{2} T_n^H \underline{\mathbf{z}} - \frac{1}{2} T_n^H \underline{\boldsymbol{\mu}}\right)\right) \\
&= \frac{c_n(g)}{\sqrt{\det(\Sigma)}} g\left(\left(\underline{\mathbf{z}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}\right)^H \frac{1}{2} T_n T_n^H \underline{H}^{-1} T_n \frac{1}{2} T_n^H \left(\underline{\mathbf{z}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}\right)\right) \\
&= \frac{c_n(g)}{\sqrt{\det(\Sigma)}} g\left(\left(\underline{\mathbf{z}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}\right)^H \underline{H}^{-1} \left(\underline{\mathbf{z}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}\right)\right) \\
&= \frac{2^n c_n(g)}{\sqrt{\det(\underline{H})}} g\left(\left(\underline{\mathbf{z}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}\right)^H \underline{H}^{-1} \left(\underline{\mathbf{z}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}\right)\right) = p_{\underline{\mathbf{Z}}}(\underline{\mathbf{z}}). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Definición 3.9.7
En el caso de la Proposición anterior decimos que "$\mathbf{Z}$, *tal que* $\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^* \end{bmatrix}$, *tiene densidad elíptica compleja bajo* P, *con parámetros* $\underline{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{C}_*^{2n}$, $\underline{H} \in \mathcal{W}^{n\times n}$ *y* $g : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$". En símbolos $\mathbf{Z} \sim \mathcal{EC}\left(n,\ \underline{\boldsymbol{\mu}},\ \underline{H},\ g\right)$.

Proposición 3.9.8
Si $\mathbf{Z} \sim \mathcal{EC}\left(n,\ \underline{\boldsymbol{\mu}},\ \underline{H},\ g\right)$ y $\mathbf{Z}$ es propio entonces

$$p_{\underline{\mathbf{Z}}}\left(\underline{\mathbf{z}}\right) = \frac{2^n c_n(g)}{\det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)\right)} g\left(2\left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)^H \left(\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)\right)^{-1}\left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)\right)$$

con $\underline{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{z}^*\end{bmatrix}$ y $\underline{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}\\ \boldsymbol{\mu}^*\end{bmatrix}$.

Demostración:
Por la Proposición 3.3.3 y por ser $\mathbf{Z}$ propio tenemos que $\underline{H} = \begin{bmatrix}\Sigma\left(\mathbf{Z}\right) & 0\\ 0 & \Sigma\left(\mathbf{Z}\right)^*\end{bmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left(\underline{\mathbf{z}}-\underline{\boldsymbol{\mu}}\right)^H \underline{H}^{-1}\left(\underline{\mathbf{z}}-\underline{\boldsymbol{\mu}}\right) &= \begin{bmatrix}\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\\ \left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)^*\end{bmatrix}^H \begin{bmatrix}\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)^{-1} & 0\\ 0 & \left(\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)^*\right)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\\ \left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)^*\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)^H & \left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)^{-1}\left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)\\ \left(\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)^*\right)^{-1}\left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)^*\end{bmatrix}\\
&= \left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)^H \Sigma\left(\mathbf{Z}\right)^{-1}\left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right) + \left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)^\top \left(\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)^*\right)^{-1}\left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}^*\right).
\end{aligned}$$

Como vimos en la demostración de la Proposición 3.3.15, $\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)$ es semidefinida positiva y hermitiana, lo cual implica que

$$\left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)^H \Sigma\left(\mathbf{Z}\right)^{-1}\left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right) + \left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)^\top \left(\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)^*\right)^{-1}\left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)^* = 2\left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)^H \Sigma\left(\mathbf{Z}\right)^{-1}\left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right) \text{ y}$$

$$\det\left(\underline{H}\right) = \det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)\right)\det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)^*\right) = \det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)\right)\det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)^\top\right) = \left[\det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)\right)\right]^2.$$

Ahora, por la Proposición 3.9.6, tenemos que

$$p_{\underline{\mathbf{Z}}}\left(\underline{\mathbf{z}}\right) = \frac{2^n c_n(g)}{\sqrt{\det\left(\underline{H}\right)}} g\left(\left(\underline{\mathbf{z}}-\underline{\boldsymbol{\mu}}\right)^H \underline{H}^{-1}\left(\underline{\mathbf{z}}-\underline{\boldsymbol{\mu}}\right)\right) = \frac{2^n c_n(g)}{\left|\det\left(\Sigma\left(\mathbf{Z}\right)\right)\right|} g\left(2\left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)^H \Sigma\left(\mathbf{Z}\right)^{-1}\left(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}\right)\right).$$

Queda entonces culminada de prueba. ■

Podemos generalizar el concepto dado en la Definición 3.9.7 trabajando con $\underline{H} \in \mathcal{W}^{n\times n}$ no necesariamente igual a $\Sigma\left(\underline{\mathbf{Z}}\right)$ para $\mathbf{Z} \in \mathcal{L}^2\left(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^n\right)$.

Definición 3.9.9
Sean $g : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ medible, $\underline{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbb{C}_*^{2n}$, $\underline{H} \in \mathcal{W}^{n\times n}$ definida positiva, $c_n(g) > 0$ tal que

$$\frac{c_n(g)}{\sqrt{\det\left(\underline{H}\right)}} \int_{\mathbb{C}_*^{2n}} g\left(\left(\underline{\mathbf{z}}-\underline{\boldsymbol{\mu}}\right)^H \underline{H}^{-1}\left(\underline{\mathbf{z}}-\underline{\boldsymbol{\mu}}\right)\right)\lambda_{2n}^*\left(d\underline{\mathbf{z}}\right) = 1.$$

Entonces decimos que "$p : \mathbb{C}_*^{2n} \longrightarrow [0,\infty)$ *dada por*

$$p\left(\underline{\mathbf{z}}\right) \doteq \frac{c_n(g)}{\sqrt{\det\left(\underline{H}\right)}} g\left(\left(\underline{\mathbf{z}}-\underline{\boldsymbol{\mu}}\right)^H \underline{H}^{-1}\left(\underline{\mathbf{z}}-\underline{\boldsymbol{\mu}}\right)\right)$$

es una densidad elíptica generalizada compleja de parámetros : n, $\underline{\boldsymbol{\mu}}$, $\underline{H}$ *y* g". En símbolos $\mathbf{Z} \sim \mathcal{EGC}\left(n,\ \underline{\boldsymbol{\mu}},\ \underline{H},\ g\right)$.

Ejemplo 3.9.10 (Elíptica generalizada compleja Gaussiana)
Como en la Definición 3.9.9 con g dada por

$$g(t) \doteq \exp\left(\frac{-t}{2}\right),\ t \in [0,\infty).$$

Ejemplo 3.9.11 (Elíptica generalizada compleja $t-$multivariada con $m-$grados de libertad)
Como en la Definición 3.9.9 con g dada por

$$g(t) \doteq \left(1+\frac{t}{m}\right)^{-n-\frac{m}{2}}, \, t \in [0,\infty)\,.$$

Si $m=1$ será el ejemplo de *Elíptica generalizada compleja Cauchy*.
Veamos el siguiente caso particular de una Cauchy. Sean $n=1$, $\underline{\boldsymbol{\mu}} \doteq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{H} \doteq \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho^* & 1 \end{bmatrix}$ con $\rho \in \mathbb{C}$ tal que $|\rho|<1$, y $g:[0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ dada por $g(t) \doteq (1+t)^{-\frac{3}{2}}$, $t>0$. Entonces

$$p\left(\underline{z}\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-|\rho|^2}} \left[1+\frac{2\,|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\rho\,(z^*)^2\right)}{1-|\rho|^2}\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Demostración:
Notemos que $\det\left(\underline{H}\right) = 1-|\rho|^2$ entonces $\underline{H}^{-1} = \frac{1}{1-|\rho|^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho^* & 1 \end{bmatrix}$. Luego, para cada $\underline{z} = \begin{bmatrix} z \\ z^* \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2_*$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\underline{z}^H \underline{H}^{-1} \underline{z} &= \frac{1}{1-|\rho|^2}\begin{bmatrix} z \\ z^* \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ z^* \end{bmatrix} = \frac{1}{1-|\rho|^2}\begin{bmatrix} z^* & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-\rho z^* \\ -\rho^* z + z^* \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{1-|\rho|^2}\left[z^*\left(z-\rho z^*\right) + z\left(-\rho^* z + z^*\right)\right] = \frac{1}{1-|\rho|^2}\left[2\,|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\rho\,(z^*)^2\right)\right] \\
&= \frac{2\,|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\rho\,(z^*)^2\right)}{1-|\rho|^2}.
\end{aligned}$$

Además $c_1(g) = \frac{1}{\pi\int_0^\infty (1+t)^{-\frac{3}{2}}\,dt}$ y, como $\int_0^\infty (1+t)^{-\frac{3}{2}}\,dt = \int_0^\infty u^{-\frac{3}{2}} du = 2$, resulta que $c_1(g) = \frac{1}{2\pi}$. Ahora, por la Definición 3.9.9, obtenemos que

$$\begin{aligned}
p\left(\underline{z}\right) &= \frac{c_1(g)}{\sqrt{\det\left(\underline{H}\right)}}\, g\left(\underline{z}^H \underline{H}^{-1} \underline{z}\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-|\rho|^2}}\, g\left(\frac{2\,|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\rho\,(z^*)^2\right)}{1-|\rho|^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-|\rho|^2}}\left[1+\frac{2\,|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\rho\,(z^*)^2\right)}{1-|\rho|^2}\right]^{-\frac{3}{2}}. \;\blacksquare
\end{aligned}$$

3.10 Estadísticas suficientes para $\mathbb{C}-$matrices de covarianza: la distribución de Wishart compleja

En esta sección, establecemos que la *matriz de covarianza muestral aumentada* y el *vector medio muestral aumentado* son un par de estadísticos suficientes para estimar la matriz de covarianza y el vector medio aumentado de un vector aleatorio complejo $\mathbf{Z}$ con distribución Gaussiana compleja. Además, presentamos la *distribución de Wishart compleja*.

Lema 3.10.1
Sean $n \geq 2$ entero, $A \doteq \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $\mathbf{v} \doteq \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$. Entonces $\mathbf{v}^H A \mathbf{v} = tr\left(A\mathbf{v}^H\mathbf{v}\right)$.

Demostración:
Por un lado tenemos que

$$A\mathbf{v}^H\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 v_1^* & \cdots & v_1 v_n^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n v_1^* & \cdots & v_n v_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} v_j v_1^* & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1j} v_j v_n^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} v_j v_1^* & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{nj} v_j v_n^* \end{bmatrix},$$

por lo que $tr\left(A\mathbf{v}^H\mathbf{v}\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} v_j v_k^*$. Por otra parte

$$\mathbf{v}^H A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1^* & \cdots & v_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^* & \cdots & v_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} v_j \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj} v_j v_k^*.$$

Por lo tanto $\mathbf{v}^H A\mathbf{v} = tr\left(A\mathbf{v}^H\mathbf{v}\right)$. ■

Ejemplo 3.10.2 (Una forma de interés de expresar la densidad conjunta de una muestra aleatoria de una Gaussiana)

Sean $M \geq 2$ entero, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, $\mathbf{X} \doteq \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_M \end{bmatrix}$ una muestra aleatoria de tamaño M de X y $p_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^M \longrightarrow [0, \infty)$ la densidad de $\mathbf{X}$. Entonces

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{M}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{m=1}^M (x_m - \overline{\mathbf{x}})^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(\overline{\mathbf{x}} - \mu)^2}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{M}}\right)^2}\right], \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^M;$$

donde $\overline{\mathbf{x}} \doteq \frac{1}{M}\sum_{m=1}^M x_m$.

Demostración:
Ya sabemos que

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{M}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^M \frac{(x_m - \mu)^2}{\sigma^2}\right]. \quad \textbf{(3.10.2.1)}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\sum_{m=1}^M (x_m - \overline{\mathbf{x}})(\overline{\mathbf{x}} - \mu) = 0$, resulta que

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^M \frac{(x_m - \mu)^2}{\sigma^2} &= \sum_{m=1}^M \frac{\left[(x_m - \overline{\mathbf{x}}) + (\overline{\mathbf{x}} - \mu)\right]^2}{\sigma^2} \\
&= \sum_{m=1}^M \frac{(x_m - \overline{\mathbf{x}})^2 + 2(x_m - \overline{\mathbf{x}})(\overline{\mathbf{x}} - \mu) + (\overline{\mathbf{x}} - \mu)^2}{\sigma^2} \\
&= \sum_{m=1}^M \frac{(x_m - \overline{\mathbf{x}})^2}{\sigma^2} + \frac{2}{\sigma^2}\sum_{m=1}^M (x_m - \overline{\mathbf{x}})(\overline{\mathbf{x}} - \mu) + \sum_{m=1}^M \frac{(\overline{\mathbf{x}} - \mu)^2}{\sigma^2} \\
&= \sum_{m=1}^M \frac{(x_m - \overline{\mathbf{x}})^2}{\sigma^2} + \frac{M(\overline{\mathbf{x}} - \mu)^2}{\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en **(3.10.2.1)**, obtenemos que

$$\begin{aligned}
p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{M}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^M \frac{(x_m - \overline{\mathbf{x}})^2}{\sigma^2}\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{M(\overline{\mathbf{x}} - \mu)^2}{\sigma^2}\right] \\
&= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{M}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{m=1}^M (x_m - \overline{\mathbf{x}})^2\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(\overline{\mathbf{x}} - \mu)^2}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{M}}\right)^2}\right],
\end{aligned}$$

lo que prueba la igualdad propuesta en el ejemplo. ■

Ahora extendemos el resultado del Ejemplo anterior al caso en que $Z \sim \mathcal{N}\mathbb{C}_{n,I}\left(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}\right)$, siendo

$$\underline{\mu} \doteq E\left(\underline{Z}\right) = E\left(\begin{bmatrix} Z \\ Z^{*} \end{bmatrix}\right) \text{ y } \underline{\Sigma} \doteq \Sigma\left(\underline{Z}\right) = \begin{bmatrix} \Sigma\left(Z\right) & \widetilde{\Sigma}\left(Z\right) \\ \widetilde{\Sigma}\left(Z\right)^{*} & \Sigma\left(Z\right)^{*} \end{bmatrix}.$$

Sean $M \geq 2$ entero y $\mathbf{Z} \doteq \left(Z_1, ..., Z_M\right)^{\top}$ una muestra aleatoria de tamaño M de Z (es decir $Z_1, ..., Z_M$ son $\mathbb{C}-$vectores aleatorios independientes y todos con distribución $\mathcal{N}\mathbb{C}_{n,I}\left(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}\right)$).

Proposición 3.10.3
$\mathbf{Z}$ es un $\mathbb{C}-$vector aleatorio de dimensión nM con una densidad (con respecto a la medida $\lambda_{2Mn}\left(I_{c,Mn}\right)$) dada por

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Z}}\left(\left(z_1, ..., z_M\right)^{\top}\right) &= \pi^{-nM}\left[\det\left(\underline{\Sigma}\right)\right]^{-\frac{M}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)^{H} \underline{\Sigma}^{-1}\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)\right] \\ &= \pi^{-nM}\left[\det\left(\underline{\Sigma}\right)\right]^{-\frac{M}{2}} \exp\left[-\frac{M}{2} tr\left(\underline{\Sigma}^{-1} S\left(\underline{\mathbf{z}}\right)\right)\right] \exp\left[-\frac{M}{2}\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}} - \underline{\mu}\right)^{H} \underline{\Sigma}^{-1}\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}} - \underline{\mu}\right)\right], \end{aligned}$$

donde

$$\underline{\mathbf{z}} \doteq \left(\underline{z_1}, ..., \underline{z_M}\right)^{\top} \in \mathbb{C}_{*}^{2nM}, \ \overline{\underline{\mathbf{z}}} \doteq \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} \underline{z_m} \text{ y } S\left(\underline{\mathbf{z}}\right) \doteq \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\underline{z_m} - \overline{\underline{\mathbf{z}}}\right)\left(\underline{z_m} - \overline{\underline{\mathbf{z}}}\right)^{H}.$$

Demostración:
Aplicando el Lema 3.10.1 para cada $m = 1, ..., M$ tenemos que

$$\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)^{H} \underline{\Sigma}^{-1}\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right) = tr\left[\underline{\Sigma}^{-1}\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)^{H}\right].$$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M}\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)^{H} \underline{\Sigma}^{-1}\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right) &= \sum_{m=1}^{M} tr\left[\underline{\Sigma}^{-1}\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)^{H}\right] \\ &= tr\left\{\sum_{m=1}^{M}\left[\underline{\Sigma}^{-1}\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)^{H}\right]\right\} \\ &= tr\left\{\underline{\Sigma}^{-1}\sum_{m=1}^{M}\left[\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)^{H}\right]\right\} \\ &= M tr\left\{\underline{\Sigma}^{-1}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left[\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)^{H}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{z_m} - \underline{\mu}\right)^{H} &= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left[\left(\underline{z_m} - \overline{\underline{\mathbf{z}}}\right) + \left(\overline{\underline{\mathbf{z}}} - \underline{\mu}\right)\right]\left[\left(\underline{z_m} - \overline{\underline{\mathbf{z}}}\right) + \left(\overline{\underline{\mathbf{z}}} - \underline{\mu}\right)\right]^{H} \\ &= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\underline{z_m} - \overline{\underline{\mathbf{z}}}\right)\left(\underline{z_m} - \overline{\underline{\mathbf{z}}}\right)^{H} + \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\underline{z_m} - \overline{\underline{\mathbf{z}}}\right)\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}} - \underline{\mu}\right)^{H} \\ &\quad + \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}} - \underline{\mu}\right)\left(\underline{z_m} - \overline{\underline{\mathbf{z}}}\right)^{H} + \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}} - \underline{\mu}\right)\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}} - \underline{\mu}\right)^{H} \\ &= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\underline{z_m} - \overline{\underline{\mathbf{z}}}\right)\left(\underline{z_m} - \overline{\underline{\mathbf{z}}}\right)^{H} + \left(\overline{\underline{\mathbf{z}}} - \underline{\mu}\right)\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}} - \underline{\mu}\right)^{H} \\ &= S\left(\underline{\mathbf{z}}\right) + \left(\overline{\underline{\mathbf{z}}} - \underline{\mu}\right)\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}} - \underline{\mu}\right)^{H}, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{M}\left(\underline{z_m}-\underline{\mu}\right)^{H}\underline{\Sigma}^{-1}\left(\underline{z_m}-\underline{\mu}\right) &= Mtr\left[\underline{\Sigma}^{-1}S\left(\underline{\mathbf{z}}\right)+\underline{\Sigma}^{-1}\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}}-\underline{\mu}\right)\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}}-\underline{\mu}\right)^{H}\right]\\
&= Mtr\left[\underline{\Sigma}^{-1}S\left(\underline{\mathbf{z}}\right)\right]+Mtr\left[\underline{\Sigma}^{-1}\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}}-\underline{\mu}\right)\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}}-\underline{\mu}\right)^{H}\right]\\
&= Mtr\left[\underline{\Sigma}^{-1}S\left(\underline{\mathbf{z}}\right)\right]+M\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}}-\underline{\mu}\right)^{H}\underline{\Sigma}^{-1}\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}}-\underline{\mu}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente se sigue que

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\left(\underline{z_m}-\underline{\mu}\right)^{H}\underline{\Sigma}^{-1}\left(\underline{z_m}-\underline{\mu}\right)\right]=\exp\left[-\frac{M}{2}tr\left(\underline{\Sigma}^{-1}S\left(\underline{\mathbf{z}}\right)\right)\right]\exp\left[-\frac{M}{2}\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}}-\underline{\mu}\right)^{H}\underline{\Sigma}^{-1}\left(\overline{\underline{\mathbf{z}}}-\underline{\mu}\right)\right]$$

y, por ende, queda demostrada la Proposición. ■

Observación 3.10.4

$$S\left(\underline{\mathbf{z}}\right)=\begin{bmatrix} S\left(\mathbf{z}\right) & \widetilde{S}\left(\mathbf{z}\right)\\ \widetilde{S}\left(\mathbf{z}\right)^{*} & S\left(\mathbf{z}\right)^{*}\end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}
S\left(\mathbf{z}\right) &\doteq \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{H},\ \widetilde{S}\left(\mathbf{z}\right)\doteq\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{\top},\\
\mathbf{z} &= \left(z_1,...,z_M\right)^{\top},\ \overline{\mathbf{z}}=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}z_m \text{ y } \overline{\underline{\mathbf{z}}}=\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{z}}\\ \overline{\mathbf{z}}^{*}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

A la matriz $S\left(\underline{\mathbf{z}}\right)$ la llamamos "*matriz de covarianza muestral aumentada*" y a las matrices $S\left(\mathbf{z}\right)$ y $\widetilde{S}\left(\mathbf{z}\right)$ las llamamos "*matriz de covarianza muestral*" y "*matriz de pseudocovarianza muestral*", respectivamente.

Demostración:
Para cada $m=1,...,M$ tenemos que

$$\underline{z_m}-\overline{\underline{\mathbf{z}}}=\begin{bmatrix} z_m\\ \left(z_m\right)^{*}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{z}}\\ \left(\overline{\mathbf{z}}\right)^{*}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z_m-\overline{\mathbf{z}}\\ \left(z_m\right)^{*}-\left(\overline{\mathbf{z}}\right)^{*}\end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left(\underline{z_m}-\overline{\underline{\mathbf{z}}}\right)\left(\underline{z_m}-\overline{\underline{\mathbf{z}}}\right)^{H} &= \begin{bmatrix} z_m-\overline{\mathbf{z}}\\ \left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{H} & \left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{\top}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{H} & \left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{\top}\\ \left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{*}\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{H} & \left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{*}\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{\top}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{H} & \left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{\top}\\ \left(\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{\top}\right)^{*} & \left(\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{H}\right)^{*}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
S\left(\underline{\mathbf{z}}\right) &= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\underline{z_m}-\overline{\underline{\mathbf{z}}}\right)\left(\underline{z_m}-\overline{\underline{\mathbf{z}}}\right)^{H}\\
&= \begin{bmatrix}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{H} & \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{\top}\\ \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{\top}\right)^{*} & \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)\left(z_m-\overline{\mathbf{z}}\right)^{H}\right)^{*}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} S\left(\mathbf{z}\right) & \widetilde{S}\left(\mathbf{z}\right)\\ \widetilde{S}\left(\mathbf{z}\right)^{*} & S\left(\mathbf{z}\right)^{*}\end{bmatrix}.\ ■
\end{aligned}$$

Notación 3.10.5
Sea $n \geq 2$ entero. Denotamos por

$$Cov\,(n \times n) = \left\{ \underline{\Sigma} \in \mathcal{W}^{n \times n} : existen\ \ (\Omega, \mathcal{F}, P)\ \ e.p.\ y\ Z \in \mathcal{L}^2\,(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}^n)\ \ tales\ que\ \underline{\Sigma} = \Sigma\,(\underline{Z}) \right\}.$$

Nota 3.10.6:
Apelando al Teorema de factorización de Fisher-Neyman podemos deducir, por la Proposición 3.10.3, que la función definida por

$$(z_1, ..., z_M)^\top \longrightarrow (\overline{\mathbf{z}}, S\,(\mathbf{z}))^\top,\ \forall\ (z_1, ..., z_M)^\top \in \mathbb{C}^M,$$

es una estadística suficiente para estimar los parámetros en la familia $\left\{ \mathcal{N}\mathbb{C}_{n,I}\left(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}\right) : \underline{\mu} \in \mathbb{C}_*^{2n} \text{ y } \underline{\Sigma} \in Cov\,(n \times n) \right\}$.

Distribución de Wishart compleja.

Supongamos ahora que $E(Z) = 0$ entonces $\underline{\mu} = E\,(\underline{Z}) = 0$. Sean $X_1 \doteq \operatorname{Re}(Z)$ y $X_2 \doteq \operatorname{Im}(Z)$. Para cada $m = 1, ..., M$ sean $X_{1,m} \doteq \operatorname{Re}(Z_m)$ y $X_{2,m} \doteq \operatorname{Im}(Z_m)$. Consideremos también $\mathbf{X} \doteq \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{X}_m \doteq \begin{bmatrix} X_{1,m} \\ X_{2,m} \end{bmatrix}$. Por lo estudiado en la Sección 3.4 sabemos que $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{2n}\,(\mathbf{0}, \Sigma\,(\mathbf{X}))$ con

$$\Sigma\,(\mathbf{X}) = T_n^{-1} \Sigma\,(\underline{Z}) \left(T_n^H\right)^{-1} = \frac{1}{4} T_n^H \Sigma\,(\underline{Z})\, T_n.$$

Sea $\mathbb{X}$ la matriz aleatoria $2n \times M$ cuya $m-$ésima columna es el vector aleatorio $\mathbf{X}_m$. Es decir $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{X}_M \end{bmatrix}$. Entonces $W_{2n} \doteq \mathbb{X}\,(\mathbb{X})^\top$ es una matriz aleatoria $2n \times 2n$ cuya distribución llamamos "*Wishart de dimensión* $2n$ *con* M *grados de libertad y parámetro* $\Sigma\,(\mathbf{X})$". En símbolos $W_{2n} \sim W_{2n}\,(\Sigma\,(\mathbf{X}), M)$.

Extendemos ahora la distribución de Wishart a los complejos. Para ello procedemos de manera similar a la realizada en la Sección 3.4. Notemos que $\underline{Z_m} = \begin{bmatrix} Z_m \\ (Z_m)^* \end{bmatrix} = T_n \mathbf{X}_m$, $\forall\ m = 1, ..., M$. Por lo tanto $\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \underline{Z_1} \\ \vdots \\ \underline{Z_M} \end{bmatrix} = T_n \mathbb{X}$. Luego

$$\underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{Z}}^H = T_n \mathbb{X}\,(T_n \mathbb{X})^H = T_n \mathbb{X}\,(\mathbb{X})^\top T_n^H = T_n W_{2n} T_n^H.$$

Sea $\underline{W}_{2n} \doteq \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{Z}}^H$. Es natural entonces llamar "*distribución de Wishart compleja de dimensión* $2n$ *con* M *grados de libertad y parámetro* $\Sigma\,(\underline{Z})$", a la distribución de $\underline{W}_{2n}$. En símbolos $\underline{W}_{2n} \sim W\mathbb{C}_{2n}\,(\Sigma\,(\underline{Z}), M)$.

3.11 Funciones características de $\mathbb{C} - v.a.$

La función característica es una caracterización equivalente de la función de densidad de probabilidad de un vector aleatorio y trabajar con ella puede ser más conveniente. En esta sección nos concentramos en estudiar esta función. En particular analizamos la función característica de un $\mathbb{C}-$vector aleatorio con *distribución elíptica compleja*, obteniendo dos expresiones para la misma. Definimos los vectores aleatorios complejos con *distribución elíptica generalizada compleja* y, finalmente, establecemos una simple conexión entre la matriz de covarianza aumentada y el parámetro $\underline{H}$.

Sean $(\Omega, \sigma\,(\Omega), P)$ *e.p.*, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vectores aleatorios, $\mathbf{Z} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definido por

$\mathbf{Z}(\omega) \doteq \mathbf{X}_1(\omega) + i\mathbf{X}_2(\omega)$, $\forall\ \omega \in \Omega$, $\mathbf{X} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$ y $\underline{\mathbf{Z}} \doteq T_n\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^* \end{bmatrix}$.

Definición 3.11.1
Llamamos "*función característica del vector* $\mathbf{Z}$" a $c_{\mathbf{Z}} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$c_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \doteq c_{(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = E_P\left\{\exp\left[i\left(\mathbf{x}^\top\mathbf{X}_1 + \mathbf{y}^\top\mathbf{X}_2\right)\right]\right\}, \forall\ \mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n.$$

Proposición 3.11.2
Se cumple $c_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = E_P\left\{\exp\left[i\,\mathrm{Re}\left(\mathbf{z}^H\mathbf{Z}\right)\right]\right\} = E_P\left[\exp\left(\frac{i}{2}\underline{\mathbf{z}}^H\underline{\mathbf{Z}}\right)\right]$, $\forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$.

Demostración:
Sea $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ arbitrario. Como $\mathbf{z}^H\mathbf{Z} = \left(\mathbf{x}^\top - i\mathbf{y}^\top\right)(\mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2) = \left(\mathbf{x}^\top\mathbf{X}_1 + \mathbf{y}^\top\mathbf{X}_2\right) + i\left(\mathbf{x}^\top\mathbf{X}_2 - \mathbf{y}^\top\mathbf{X}_1\right)$ entonces

$$\mathrm{Re}\left(\mathbf{z}^H\mathbf{Z}\right) = \mathbf{x}^\top\mathbf{X}_1 + \mathbf{y}^\top\mathbf{X}_2.$$

Además

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{z}}^H\underline{\mathbf{Z}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{z}^H & \mathbf{z}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^* \end{bmatrix} = \mathbf{z}^H\mathbf{Z} + \mathbf{z}^\top\mathbf{Z}^* \\ &= \left(\mathbf{x}^\top - i\mathbf{y}^\top\right)(\mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2) + \left(\mathbf{x}^\top + i\mathbf{y}^\top\right)(\mathbf{X}_1 - i\mathbf{X}_2) \\ &= 2\left(\mathbf{x}^\top\mathbf{X}_1 + \mathbf{y}^\top\mathbf{X}_2\right), \end{aligned}$$

con lo cual $\frac{\underline{\mathbf{z}}^H\underline{\mathbf{Z}}}{2} = \mathbf{x}^\top\mathbf{X}_1 + \mathbf{y}^\top\mathbf{X}_2$. ■

Función característica de un $\mathbb{C}-$vector aleatorio con distribución elíptica.

Sean $1 \leq k \leq 2n$; μ_1 y μ_2 en $\mathbb{R}^n$; $\boldsymbol{\mu} \doteq \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$; $\Sigma \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ matriz simétrica semidefinida positiva tal que $rg(\Sigma) = k$; $A \in \mathbb{R}^{k\times 2n}$ tal que $A^\top A = \Sigma$ y $\phi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$.

Lema 3.11.3
Sean H_1 y H_2 en $\mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1 \end{bmatrix} = \underline{H} \doteq T_n\Sigma T_n^H$. Entonces
1. $\underline{H}$ es hermitiana
2. H_1 es hermitiana
3. $\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z} \in \mathbb{R}$, $\forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$

Demostración:
1. Como $\underline{H} = T_n\Sigma T_n^H$ entonces

$$\underline{H}^H = \left(T_n\Sigma T_n^H\right)^H = T_n\Sigma^H T_n^H = T_n\Sigma T_n^H = \underline{H}.$$

2. Puesto que $\underline{H}^H = \underline{H}$ y

$$\underline{H}^H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} H_1^H & H_2^{*H} \\ H_2^H & H_1^{*H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^H & H_2^\top \\ H_2^H & H_1^\top \end{bmatrix}$$

resulta que $H_1^H = H_1$.

3. Sea $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ arbitrario con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Pongamos $H_1 = A_1 + iB_1$ con A_1 y B_1 en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Como H_1 es hermitiana, por la Proposición 3.1.11, se sigue que $A_1 = A_1^\top$ y $B_1 = -B_1^\top$; con lo cual

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}^H H_1 \mathbf{z} &= \left(\mathbf{x}^\top - i\mathbf{y}^\top\right)(A_1 + iB_1)(\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \\
&= \left(\mathbf{x}^\top - i\mathbf{y}^\top\right)(A_1\mathbf{x} - B_1\mathbf{y} + iA_1\mathbf{y} + iB_1\mathbf{x}) \\
&= \mathbf{x}^\top A_1\mathbf{x} - \mathbf{x}^\top B_1\mathbf{y} + \mathbf{y}^\top A_1\mathbf{y} + \mathbf{y}^\top B_1\mathbf{x} + i\left(\mathbf{x}^\top A_1\mathbf{y} + \mathbf{x}^\top B_1\mathbf{x} - \mathbf{y}^\top A_1\mathbf{x} + \mathbf{y}^\top B_1\mathbf{y}\right).
\end{aligned}$$

Ahora, como $\mathbf{x}^\top A_1\mathbf{y} \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathbf{x}^\top A_1\mathbf{y} = \left(\mathbf{x}^\top A_1\mathbf{y}\right)^\top = \mathbf{y}^\top A_1^\top\mathbf{x} = \mathbf{y}^\top A_1\mathbf{x},$$

lo cual implica que $\mathbf{x}^\top A_1\mathbf{y} - \mathbf{y}^\top A_1\mathbf{x} = 0$. También, como $\mathbf{y}^\top B_1\mathbf{y} + \mathbf{x}^\top B_1\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^\top B_1\mathbf{y} + \mathbf{x}^\top B_1\mathbf{x} &= \left(\mathbf{y}^\top B_1\mathbf{y} + \mathbf{x}^\top B_1\mathbf{x}\right)^\top \\
&= \mathbf{y}^\top B_1^\top\mathbf{y} + \mathbf{x}^\top B_1^\top\mathbf{x} \\
&= -\left(\mathbf{y}^\top B_1\mathbf{y} + \mathbf{x}^\top B_1\mathbf{x}\right),
\end{aligned}$$

es decir $\mathbf{y}^\top B_1\mathbf{y} + \mathbf{x}^\top B_1\mathbf{x} = 0$. Por lo tanto $\operatorname{Im}\left(\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z}\right) = 0$. Queda entonces terminada la prueba del Lema. ■

Supongamos ahora que

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2\end{bmatrix} \sim EC_{2n}\left(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, A, k, \phi\right)$$

(recordar la Definición 3.8.2). Por la Proposición 3.8.3, sabemos que la función característica de $\mathbf{X}$ es $c_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$c_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp\left(i\mathbf{t}^\top\boldsymbol{\mu}\right)\phi\left(\mathbf{t}^\top\Sigma\mathbf{t}\right),\ \forall\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{2n}\ (*)$$

Sea $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2$.

Definición 3.11.4 (Extensión de la Definición 3.9.7)
Decimos que "$\mathbf{Z}$ *tiene distribución elíptica compleja con parámetros* $\underline{\boldsymbol{\mu}} \doteq T_n\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}_*^{2n}$, $\underline{H} \doteq T_n\Sigma T_n^H \in \mathcal{W}^{n\times n}$ *y* $\phi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$". En símbolos

$$\mathbf{Z} \sim \mathcal{E}\mathbb{C}\left(n, \underline{\boldsymbol{\mu}}, \underline{H}, \phi\right).$$

Proposición 3.11.5
La función característica de $\mathbf{Z}$ es $c_{\mathbf{Z}} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\begin{aligned}
c_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) &= \exp\left(\frac{i}{2}\cdot\underline{\mathbf{z}}^H\cdot\underline{\boldsymbol{\mu}}\right)\phi\left(\frac{1}{4}\cdot\underline{\mathbf{z}}^H\cdot\underline{H}\cdot\underline{\mathbf{z}}\right) \\
&= \exp\left\{i\operatorname{Re}\left[\mathbf{z}^H(\mu_1 + i\mu_2)\right]\right\}\phi\left(\frac{1}{2}\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\mathbf{z}^H H_2\mathbf{z}^*\right)\right),\ \forall\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n,
\end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{bmatrix}$.

Demostración:
Sea $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ arbitrario con $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Comprobemos la primera igualdad. Por la Definición 3.11.1 y por $(*)$ tenemos que

$$c_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = E_P\left\{\exp\left[i\left(\mathbf{x}^\top\mathbf{X}_1 + \mathbf{y}^\top\mathbf{X}_2\right)\right]\right\} = c_{\mathbf{X}}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x} \\ \mathbf{y}\end{bmatrix}\right) = \exp\left(i\begin{bmatrix}\mathbf{x}^\top & \mathbf{y}^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{bmatrix}\right)\phi\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}^\top & \mathbf{y}^\top\end{bmatrix}\Sigma\begin{bmatrix}\mathbf{x} \\ \mathbf{y}\end{bmatrix}\right). \quad \textbf{(3.11.5.1)}$$

Sea $\underline{\mathbf{z}} = T_n\begin{bmatrix}\mathbf{x} \\ \mathbf{y}\end{bmatrix}$ entonces $\begin{bmatrix}\mathbf{x} \\ \mathbf{y}\end{bmatrix} = T_n^{-1}\underline{\mathbf{z}} = \frac{1}{2}T_n^H\underline{\mathbf{z}}$, por lo que

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}^\top & \mathbf{y}^\top\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{x} \\ \mathbf{y}\end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix}\mathbf{x} \\ \mathbf{y}\end{bmatrix}^H = \left(\frac{1}{2}T_n^H\underline{\mathbf{z}}\right)^H = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{z}}^H T_n.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\exp\left(i\begin{bmatrix}\mathbf{x}^\top & \mathbf{y}^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix}\right) &= \exp\left(i\frac{1}{2}\underline{\mathbf{z}}^H T_n\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix}\right) = \exp\left(i\frac{1}{2}\underline{\mathbf{z}}^H\underline{\boldsymbol{\mu}}\right) \text{ y}\\
\begin{bmatrix}\mathbf{x}^\top & \mathbf{y}^\top\end{bmatrix}\Sigma\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix} &= \frac{1}{4}\underline{\mathbf{z}}^H T_n\Sigma T_n^H\underline{\mathbf{z}} = \frac{1}{4}\cdot\underline{\mathbf{z}}^H\cdot\underline{H}\cdot\underline{\mathbf{z}}.
\end{aligned}$$

Reemplazando en **(3.11.5.1)** concluimos que

$$c_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \exp\left(\frac{i}{2}\cdot\underline{\mathbf{z}}^H\cdot\underline{\boldsymbol{\mu}}\right)\phi\left(\frac{1}{4}\cdot\underline{\mathbf{z}}^H\cdot\underline{H}\cdot\underline{\mathbf{z}}\right).$$

Ahora verifiquemos la segunda igualdad. Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{z}}^H\underline{\boldsymbol{\mu}} &= \begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{z}^*\end{bmatrix}^H\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}\\ \boldsymbol{\mu}^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}^\top - i\mathbf{y}^\top & \mathbf{x}^\top + i\mathbf{y}^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1 + i\mu_2\\ \mu_1 - i\mu_2\end{bmatrix}\\
&= \left(\mathbf{x}^\top - i\mathbf{y}^\top\right)(\mu_1 + i\mu_2) + \left(\mathbf{x}^\top + i\mathbf{y}^\top\right)(\mu_1 - i\mu_2) = 2\left(\mathbf{x}^\top\mu_1 + \mathbf{y}^\top\mu_2\right),
\end{aligned}$$

mientras que, por otro lado

$$\mathbf{z}^H(\mu_1 + i\mu_2) = \left(\mathbf{x}^\top - i\mathbf{y}^\top\right)(\mu_1 + i\mu_2) = \left(\mathbf{x}^\top\mu_1 + \mathbf{y}^\top\mu_2\right) + i\left(\mathbf{x}^\top\mu_2 - \mathbf{y}^\top\mu_1\right).$$

Así

$$\underline{\mathbf{z}}^H\underline{\boldsymbol{\mu}} = 2\,\mathrm{Re}\left[\mathbf{z}^H(\mu_1 + i\mu_2)\right],$$

lo cual implica que

$$\exp\left(\frac{i}{2}\underline{\mathbf{z}}^H\underline{\boldsymbol{\mu}}\right) = \exp\left\{i\,\mathrm{Re}\left[\mathbf{z}^H(\mu_1 + i\mu_2)\right]\right\}. \quad \mathbf{(3.11.5.2)}$$

Teniendo en cuenta que, por el Lema anterior, $\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z} \in \mathbb{R}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\cdot\underline{\mathbf{z}}^H\cdot\underline{H}\cdot\underline{\mathbf{z}} &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\mathbf{z}^H & \mathbf{z}^\top\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_1 & H_2\\ H_2^* & H_1^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{z}\\ \mathbf{z}^*\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z} + \mathbf{z}^\top H_2^*\mathbf{z} + \mathbf{z}^H H_2\mathbf{z}^* + \mathbf{z}^\top H_1^*\mathbf{z}^*\right)\\
&= \frac{1}{4}\left[\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z} + \left(\mathbf{z}^H H_2\mathbf{z}^*\right)^* + \mathbf{z}^H H_2\mathbf{z}^* + \left(\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z}\right)^*\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z}\right) + \mathrm{Re}\left(\mathbf{z}^H H_2\mathbf{z}^*\right)\right].
\end{aligned}$$

Luego

$$\phi\left(\frac{1}{4}\cdot\underline{\mathbf{z}}^H\cdot\underline{H}\cdot\underline{\mathbf{z}}\right) = \phi\left(\frac{1}{2}\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\mathbf{z}^H H_2\mathbf{z}^*\right)\right). \quad \mathbf{(3.11.5.3)}$$

De **(3.11.5.2)** y **(3.11.5.3)** obtenemos que

$$c_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \exp\left\{i\,\mathrm{Re}\left[z^H(\mu_1 + i\mu_2)\right]\right\}\phi\left(\frac{1}{2}\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\mathbf{z}^H H_2\mathbf{z}^*\right)\right).$$

Por lo tanto queda finalizada la demostración. ■

Ejemplo 3.11.6
Sea $\mathbf{X}$ como en el Ejemplo 3.8.6. Esto es $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{2n}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ y $\phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\phi(u) \doteq \exp\left(-\frac{u}{2}\right), \ \forall\, u \geq 0.$$

En este caso $\underline{H} = \Sigma(\underline{\mathbf{Z}}) = \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{Z}) & \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z}) \\ \widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})^* & \Sigma(\mathbf{Z})^* \end{bmatrix}$, con $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2$ y $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$. Luego, por la Proposición anterior,

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) &= \exp\left\{i \operatorname{Re}\left[\mathbf{z}^H(\mu_1 + i\mu_2)\right]\right\} \phi\left(\frac{1}{2}\mathbf{z}^H\Sigma(\mathbf{Z})\mathbf{z} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\mathbf{z}^H\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})\mathbf{z}\right)\right) \\ &= \exp\left\{i \operatorname{Re}\left[\mathbf{z}^H(\mu_1 + i\mu_2)\right]\right\} \exp\left(-\frac{1}{4}\mathbf{z}^H\Sigma(\mathbf{Z})\mathbf{z} - \frac{1}{4}\operatorname{Re}\left(\mathbf{z}^H\widetilde{\Sigma}(\mathbf{Z})\mathbf{z}\right)\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\mathbf{Z}$ es propio, entonces

$$c_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \exp\left\{i \operatorname{Re}\left[\mathbf{z}^H(\mu_1 + i\mu_2)\right]\right\} \exp\left(-\frac{1}{4}\mathbf{z}^H\Sigma(\mathbf{Z})\mathbf{z}\right).$$

Definición 3.11.7 (Extensión de la Definición 3.11.4)
Decimos que "**Z** *tiene distribución elíptica generalizada compleja con parámetros* $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{C}^n$ *y* $\underline{H} \doteq \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix} \in \mathcal{W}^{n\times n}$ *semidefinida positiva*" si la función característica de $\mathbf{Z}$ es $c_{\mathbf{Z}} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$c_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \exp\left(\frac{i}{2}\cdot\underline{\mathbf{z}}^H\cdot\underline{\boldsymbol{\mu}}\right)\phi\left(\frac{1}{4}\cdot\underline{\mathbf{z}}^H\cdot\underline{H}\cdot\underline{\mathbf{z}}\right),\ \forall\ \mathbf{z}\in\mathbb{C}^n.$$

En símbolos $\mathbf{Z} \sim \mathcal{EGC}\left(n, \underline{\boldsymbol{\mu}}, \underline{H}, \phi\right)$.

Proposición 3.11.8
Si $\mathbf{Z} \sim \mathcal{EGC}\left(n, \underline{\boldsymbol{\mu}}, \underline{H}, \phi\right)$ entonces

$$c_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \exp\left\{i \operatorname{Re}\left[\mathbf{z}^H(\mu_1 + i\mu_2)\right]\right\} \phi\left(\frac{1}{2}\mathbf{z}^H H_1\mathbf{z} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\mathbf{z}^H H_2\mathbf{z}^*\right)\right),\ \forall\ \mathbf{z}\in\mathbb{C}^n.$$

Demostración:
Es una consecuencia directa de la Definición anterior y de la Proposición 3.11.5. ■

Proposición 3.11.9
Sea $Z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \sigma(\Omega), P; \mathbb{C})$ tal que $Z \sim \mathcal{EGC}(1, \underline{0}, \underline{H}, \phi)$ con $\underline{H}$ definida positiva. Entonces

$$\Sigma(\underline{Z}) = \begin{bmatrix} E_P\left(|Z|^2\right) & E_P\left(Z^2\right) \\ E_P\left(Z^2\right)^* & E_P\left(|Z|^2\right) \end{bmatrix} = c\underline{H},$$

donde $c = -2\phi^{'}(0)$.

Demostración:
Por la Definición 3.11.7, tenemos que $c_Z(z) = \phi\left(\frac{1}{4}\cdot\underline{z}^H\cdot\underline{H}\cdot\underline{z}\right)$, $\forall\ z\in\mathbb{C}$. Como $Z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \sigma(\Omega), P; \mathbb{C})$ sabemos, por el Teorema 2.2.10, que $c_Z \in C_r^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. **(3.11.9.1)**

<u>Afirmación 1</u>: $\phi \in C_r^2((0,\infty), \mathbb{C})$

<u>Demostración Afirmación 1</u>:

Como $\underline{H}$ es definida positiva, en particular tenemos que $\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} > 0$, para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$. Pero

$$\begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 z \\ H_2^* z \end{bmatrix} = z^* H_1 z = |z|^2 H_1,$$

lo cual nos dice que $H_1 > 0$. Nuevamente, usando que $\underline{H}$ es definida positiva, sabemos que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} > 0,$$

pero

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = H_1 + H_2^* + H_2 + H_1 = 2\left[H_1 + \mathrm{Re}\left(H_2\right)\right],$$

entonces $H_1 + \mathrm{Re}\left(H_2\right) > 0$. Ahora, sea $t > 0$ y definimos $z \doteq \sqrt{\frac{2t}{H_1+\mathrm{Re}(H_2)}} \in \mathbb{R}$. Luego

$$c_Z(z) = \phi\left(\frac{1}{4} \cdot \underline{z}^H \cdot \underline{H} \cdot \underline{z}\right) = \phi\left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^* & H_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix}\right) = \phi\left(t\right),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. De aquí sigue la Afirmación, por **(3.11.9.1)**. Ahora, por el Corolario 2.2.11, tenemos que

$$E_P\left(Z^2\right) = -4\frac{\partial^2}{\left(\partial\xi^*\right)^2}(c_Z)(0) \text{ y } E_P\left(\left|Z\right|^2\right) = -4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\xi^*}(c_Z)(0).$$

Afirmación 2: Se cumplen

1. $\frac{\partial^2}{\left(\partial\xi^*\right)^2}(c_Z)(0) = \frac{1}{2}H_2^*\phi^{'}\left(0\right)$
2. $\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\xi^*}(c_Z)(0) = \frac{1}{2}H_2\phi^{'}\left(0\right)$

Demostración Afirmación 2:
Por la Definición 1.5.6 tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\left(\partial\xi^*\right)^2}(c_Z)(0) &= \frac{1}{4}\left[D_r^2(c_Z)(0)(1,1) + 2iD_r^2(c_Z)(0)(1,i) - D_r^2(c_Z)(0)(i,i)\right] \text{ y} \\ \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\xi^*}(c_Z)(0) &= \frac{1}{4}\left[D_r^2(c_Z)(0)(1,1) + D_r^2(c_Z)(0)(i,i)\right]. \quad \mathbf{(3.11.9.2)} \end{aligned}$$

Sean ahora $u,\, v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $u(x,y) \doteq \mathrm{Re}\left(c_Z(x+iy)\right)$ y $v(x,y) \doteq \mathrm{Im}\left(c_Z(x+iy)\right)$, $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Por la Proposición 1.4.22 tenemos que

$D_r^2(c_Z)(0)(1,1) = D_1^2(u)(0,0) + iD_1^2(v)(0,0)$,

$D_r^2(c_Z)(0)(i,i) = D_2^2(u)(0,0) + iD_2^2(v)(0,0)$ y

$D_r^2(c_Z)(0)(1,i) = D_2D_1(u)(0,0) + iD_2D_1(v)(0,0)$. **(3.11.9.3)**

Por otra parte, por la Proposición anterior sabemos que

$$\begin{aligned} c_Z(z) &= \phi\left(\frac{1}{2}z^*H_1z + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(z^*H_2z^*\right)\right) = \phi\left(\frac{1}{2}\left|z\right|^2 H_1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\left(z^*H_2z^*\right)^*\right)\right) \\ &= \phi\left(\frac{1}{2}\left|z\right|^2 H_1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(z^2H_2\right)\right) = \phi\left(\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)H_1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\left(x+iy\right)^2 H_2\right)\right), \forall\ z = x+iy. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \mathrm{Re}\left\{\phi\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)H_1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\left(x+iy\right)^2 H_2\right)\right]\right\} \text{ y} \\ v(x,y) &= \mathrm{Im}\left\{\phi\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)H_1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\left(x+iy\right)^2 H_2\right)\right]\right\}. \end{aligned}$$

De aquí, no es difícil probar que

$$
\begin{aligned}
D_1(u)(x,y) &= \operatorname{Re}\left\{\phi^{'}\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)H_1+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left((x+iy)^2 H_2\right)\right]\right\}\left\{xH_1+\operatorname{Re}\left[(x+iy)H_2^*\right]\right\},\\
D_1(v)(x,y) &= \operatorname{Im}\left\{\phi^{'}\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)H_1+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left((x+iy)^2 H_2\right)\right]\right\}\left\{xH_1+\operatorname{Re}\left[(x+iy)H_2^*\right]\right\},\\
D_2(u)(x,y) &= \operatorname{Re}\left\{\phi^{'}\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)H_1+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left((x+iy)^2 H_2\right)\right]\right\}\left\{yH_1+\operatorname{Re}\left[(x+iy)H_2^* i\right]\right\} \text{ y}\\
D_2(v)(x,y) &= \operatorname{Im}\left\{\phi^{'}\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)H_1+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left((x+iy)^2 H_2\right)\right]\right\}\left\{yH_1+\operatorname{Re}\left[(x+iy)H_2^* i\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

De estas igualdades es directo obtener que

$D_1^2(u)(0,0) = \left[H_1+\operatorname{Re}\left(H_2^*\right)\right]\operatorname{Re}\left(\phi^{'}(0)\right)$,

$D_1^2(v)(0,0) = \left[H_1+\operatorname{Re}\left(H_2^*\right)\right]\operatorname{Im}\left(\phi^{'}(0)\right)$,

$D_2^2(u)(0,0) = \left[H_1-\operatorname{Re}\left(H_2^*\right)\right]\operatorname{Re}\left(\phi^{'}(0)\right)$,

$D_2^2(v)(0,0) = \left[H_1-\operatorname{Re}\left(H_2^*\right)\right]\operatorname{Im}\left(\phi^{'}(0)\right)$,

$D_2D_1(u)(0,0) = \operatorname{Im}\left(H_2\right)\operatorname{Re}\left(\phi^{'}(0)\right)$ y

$D_2D_1(v)(0,0) = \operatorname{Im}(H_2)\operatorname{Im}\left(\phi^{'}(0)\right)$. **(3.11.9.4)**

Finalmente, reemplazando en **(3.11.9.3)** las correspondientes fórmulas de **(3.11.9.4)** y luego por las fórmulas de **(3.11.9.2)** se prueba la Afirmación 2. Ahora, usando la Afirmación 2, obtenemos que

$$E_P\left(Z^2\right) = -2H_2^*\phi^{'}(0) \text{ y } E_P\left(|Z|^2\right) = -2H_2\phi^{'}(0).$$

Por lo tanto $\Sigma\left(\underline{Z}\right) = \begin{bmatrix} E_P\left(|Z|^2\right) & E_P\left(Z^2\right) \\ E_P\left(Z^2\right)^* & E_P\left(|Z|^2\right)\end{bmatrix} = c\underline{H}$ con $c = -2\phi^{'}(0)$. ■

3.12 $\mathbb{C}-$invariancia por rotación

Hemos llegado finalmente a la última sección de este capítulo, en donde definimos los $\mathbb{C}-$ *vectores aleatorios invariantes por rotación*. Analizamos la esperanza, covarianza y pseudocovarianza de estos vectores y obtenemos un resultado que caracteriza fácilmente a las variables aleatorias con distribución elíptica generalizada compleja e invariantes por rotación.

Sean $(\Omega,\sigma(\Omega),P)$ *e.p.* y $\mathbf{Z}:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}^n$ un $\mathbb{C}-$vector aleatorio de dimensión n.

Definición 3.12.1
Decimos que "$\mathbf{Z}$ *es* $\mathbb{C}-$ *invariante por rotación* (*o simplemente* $\mathbb{C}-IR$)" si $P_{\mathbf{Z}} = P_{\exp(i\alpha)\mathbf{Z}}$, $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}$.

Proposición 3.12.2
Sea $\mathbf{Z}\in\mathcal{L}^1\left(\Omega,\sigma(\Omega),P;\mathbb{C}^n\right)$. Si $\mathbf{Z}$ es $\mathbb{C}-IR$ entonces $E_P(\mathbf{Z}) = \mathbf{0}$.

Demostración:

Como $|\exp(i\alpha)\mathbf{Z}| = |\mathbf{Z}|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{Z} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \sigma(\Omega), P; \mathbb{C}^n)$ entonces $\exp(i\alpha)\mathbf{Z} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \sigma(\Omega), P; \mathbb{C}^n)$, $\forall$ $\alpha \in \mathbb{R}$. Ahora, como $\mathbf{Z}$ es $\mathbb{C} - IR$ entonces $E_P(\mathbf{Z}) = E_P[\exp(i\alpha)\mathbf{Z}] = \exp(i\alpha) E_P(\mathbf{Z})$, $\forall$ $\alpha \in \mathbb{R}$. En particular, tomando $\alpha = \pi$, resulta que $E_P(\mathbf{Z}) = \exp(i\pi) E_P(\mathbf{Z}) = -E_P(\mathbf{Z})$. Por lo tanto $E_P(\mathbf{Z}) = \mathbf{0}$. ■

Notación 3.12.2
Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{Z} : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^n$ medible, denotamos $\mathbf{Z}_\alpha \doteq \exp(i\alpha)\mathbf{Z}$.

Proposición 3.12.3
Sea $\mathbf{Z} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \sigma(\Omega), P; \mathbb{C}^n)$. Si $\mathbf{Z}$ es $\mathbb{C} - IR$ entonces $\Sigma_P(\mathbf{Z}_\alpha) = \Sigma_P(\mathbf{Z})$, $\forall$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración:
Por la Proposición anterior $E_P(\mathbf{Z}) = \mathbf{0}$, lo cual implica que $E_P(\mathbf{Z}_\alpha) = \mathbf{0}$ $\forall$ $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego

$$\begin{aligned}
\Sigma_P(\mathbf{Z}_\alpha) &= E_P\left(\mathbf{Z}_\alpha \mathbf{Z}_\alpha^H\right) = E_P\left\{[\exp(i\alpha)\mathbf{Z}][\exp(i\alpha)\mathbf{Z}]^H\right\} = E_P\left[\exp(i\alpha)\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H \exp(-i\alpha)\right] \\
&= \exp(i\alpha) E_P\left(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H\right)\exp(-i\alpha) = E_P\left(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H\right) = \Sigma_P(\mathbf{Z}), \forall\ \alpha \in \mathbb{R}.\ ■
\end{aligned}$$

Proposición 3.12.4
Sea $\mathbf{Z} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \sigma(\Omega), P; \mathbb{C}^n)$. Si $\mathbf{Z}$ es $\mathbb{C} - IR$ entonces $\widetilde{\Sigma}_P(\mathbf{Z}) = \mathbf{0}$.

Demostración:
Por la Proposición 3.12.1 $E_P(\mathbf{Z}) = \mathbf{0}$, con lo cual $E_P(\mathbf{Z}_\alpha) = \mathbf{0}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego

$$\widetilde{\Sigma}_P(\mathbf{Z}_\alpha) = E_P\left(\mathbf{Z}_\alpha \mathbf{Z}_\alpha^\top\right) = E_P\left[\exp(i\alpha)\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\top \exp(i\alpha)\right] = \exp(2i\alpha) E_P(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^\top) = \exp(2i\alpha)\widetilde{\Sigma}_P(\mathbf{Z}), \forall\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Además, como $\mathbf{Z} \overset{\circ}{=} \mathbf{Z}_\alpha$ $\forall$ $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\widetilde{\Sigma}_P(\mathbf{Z}) = \widetilde{\Sigma}_P(\mathbf{Z}_\alpha)$ $\forall$ $\alpha \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$\widetilde{\Sigma}_P(\mathbf{Z}) = \exp(2i\alpha)\widetilde{\Sigma}_P(\mathbf{Z})\ \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ y},$$

tomando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, obtenemos que $\widetilde{\Sigma}_P(\mathbf{Z}) = \mathbf{0}$. ■

Lema 3.12.5
Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $A \subset \mathbb{R}$ abierto, $f : U \longrightarrow A$ $\mathbb{R}-$diferenciable en $z \in U$ y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $f(z)$. Entonces $g \circ f$ es $\mathbb{R}-$diferenciable en z y se cumplen

1. $D_r(g \circ f)(z) = D(g)(f(z)) \circ D_r(f)(z)$
2. $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \xi}(z) = D(g)(f(z))\frac{\partial}{\partial \xi}(f)(z)$
3. $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \xi^*}(z) = D(g)(f(z))\frac{\partial}{\partial \xi^*}(f)(z)$.

Demostración:
Análoga a la demostración de la Proposición 1.2.12. ■

Definición 3.12.6
Sean $\phi_1 : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$; $\phi_2 : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$; $\phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\phi(t) \doteq \phi_1(t) + i\phi_2(t),\ t \in [0, \infty)$$

y $p \in \mathbb{N}$. Decimos que "ϕ *es* $p-$ *veces diferenciable en* $[0, \infty)$" si ϕ_1 y ϕ_2 son $p-$veces diferenciables en $(0, \infty)$ y $p-$veces diferenciables a derecha en 0. Escribimos

$$D^p(\phi)(t) \doteq D^p(\phi_1)(t) + iD^p(\phi_2)(t),\ \forall\ t \in [0, \infty)$$

donde $D^p(\phi_1)(t)$ y $D^p(\phi_2)(t)$ son las derivadas de orden p de ϕ_1 y ϕ_2 en t, respectivamente. A $D^p(\phi)(t)$ la llamamos "*derivada de orden* p *de* ϕ *en* t".

Nota 3.12.7
Sean ϕ como en la Definición anterior, $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : U \longrightarrow (0, \infty)$ $\mathbb{R}-$diferenciable en $z \in U$. Entonces $\phi \circ f$ es $\mathbb{R}-$diferenciable en z y se cumplen

1. $D_r (\phi \circ f)(z) = D(\phi)(f(z)) \circ D_r(f)(z)$,
2. $\frac{\partial(\phi\circ f)}{\partial \xi}(z) = D(\phi)(f(z)) \frac{\partial}{\partial \xi}(f)(z)$,
3. $\frac{\partial(\phi\circ f)}{\partial \xi^*}(z) = D(\phi)(f(z)) \frac{\partial}{\partial \xi^*}(f)(z)$,

con $D(\phi) \doteq D^1(\phi)$ según definimos anteriormente.

Demostración:
Sigue por el Lema 3.12.5. ■

Proposición 3.12.8
Sea $Z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \sigma(\Omega), P; \mathbb{C})$ tal que $Z \sim \mathcal{EGC}\left(1, \underline{\mu}, \underline{H}, \phi\right)$ con $\underline{H}$ definida positiva. Supongamos que $\phi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ es 2−veces diferenciable en $[0, \infty)$ y $D(\phi)(0) \neq 0$ ($D(\phi)(0)$ entendida como derivada de ϕ en 0 a la derecha). Entonces
$$Z \text{ es } \mathbb{C} - IR \iff \mu = 0 \text{ y } H_2 = 0.$$

Demostración:
($\Longrightarrow$) Como $Z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \sigma(\Omega), P; \mathbb{C})$ existen $E(Z)$, $E(Z^*)$, $E\left(|Z|^2\right)$, $E(Z^2)$ y $E\left((Z^*)^2\right)$. Por el Corolario 2.2.11 tenemos que

$E(Z) = \alpha_{P,1,0}(Z) = \frac{2}{i}\frac{\partial}{\partial \xi^*}(c_Z)(0)$,

$E(Z^*) = \alpha_{P,0,1}(Z) = \frac{2}{i}\frac{\partial}{\partial \xi}(c_Z)(0)$,

$E\left(|Z|^2\right) = \alpha_{P,1,1}(Z) = -4\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\xi^*}(c_Z)(0)$,

$E\left(Z^2\right) = \alpha_{P,2,0}(Z) = -4\frac{\partial^2}{(\partial\xi^*)^2}(c_Z)(0)$ y

$E\left((Z^*)^2\right) = \alpha_{P,0,2}(Z) = -4\frac{\partial^2}{(\partial\xi)^2}(c_Z)(0)$. **(3.12.8.1)**

Como $Z \sim \mathcal{EGC}\left(1, \underline{\mu}, \underline{H}, \phi\right)$ se sigue por la Proposición 3.11.8 que

$$\begin{aligned} c_Z(z) &= \exp\left[i \operatorname{Re}(z^*\mu)\right]\phi\left[\frac{1}{2}z^*H_1z + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(z^*H_2z^*)\right] \\ &= \exp\left[\frac{i}{2}(z^*\mu + z\mu^*)\right]\phi\left\{\frac{1}{2}z^*zH_1 + \frac{1}{4}\left[(z^*)^2 H_2 + z^2H_2^*\right]\right\}. \end{aligned}$$

para cada $z \in \mathbb{C}$. Ahora definimos f_1, $f_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$f_1(z) \doteq \exp\left[\frac{i}{2}(z^*\mu + z\mu^*)\right] \text{ y } f_2(z) \doteq \phi\left\{\frac{1}{2}|z|^2 H_1 + \frac{1}{4}\left[(z^*)^2 H_2 + z^2H_2^*\right]\right\}, \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Notemos que $c_Z(z) = f_1(z) \cdot f_2(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Luego se sigue por la Proposición 1.6.6 que

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(c_Z)(z) = f_1(z)\frac{\partial}{\partial \xi}(f_2)(z) + f_2(z)\frac{\partial}{\partial \xi}(f_1)(z), \forall\, z \in \mathbb{C}. \quad \textbf{(3.12.8.2)}$$

Cuentas directas muestran que

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(f_1)(z) = \exp\left[\frac{i}{2}(z^*\mu + z\mu^*)\right]\frac{i}{2}\mu^*. \quad \textbf{(3.12.8.3)}$$

Ahora consideremos $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) \doteq \frac{1}{4} \cdot \underline{z}^H \cdot \underline{H} \cdot \underline{z}$, $z \in \mathbb{C}$. Notemos que $f(z) > 0$ para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ (pues $\underline{H}$ es definida positiva) y $f(0) = 0$. Como fue probado en la Proposición 3.11.5

$$f(z) = \frac{1}{2}|z|^2 H_1 + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(z^* H_2 z^*) = \frac{1}{2}|z|^2 H_1 + \frac{1}{4}\left[(z^*)^2 H_2 + z^2 H_2^*\right], \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Así

$$f_2(z) = \phi(f(z)), \forall\, z \in \mathbb{C}. \quad \textbf{(3.12.8.4)}$$

Teniendo en cuenta la Nota anterior (extendida a las derivadas laterales de ϕ en 0), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}(\phi \circ f)(z) &= D(\phi)(f(z))\frac{\partial}{\partial \xi}(f)(z) \text{ y} \\ \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\phi \circ f)(z) &= D(\phi)(f(z))\frac{\partial}{\partial \xi^*}(f)(z), \forall\, z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Luego, para cada $z \in \mathbb{C}$, se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}(\phi \circ f)(z) &= D(\phi)(f(z))\left(\frac{1}{2}z^* H_1 + \frac{1}{2}z H_2^*\right) \text{ y} \\ \frac{\partial}{\partial \xi^*}(\phi \circ f)(z) &= D(\phi)(f(z))\left(\frac{1}{2}z H_1 + \frac{1}{2}z^* H_2\right). \quad \textbf{(3.12.8.5)} \end{aligned}$$

Ahora, como Z es $\mathbb{C} - IR$, se sigue por la Proposición 3.12.2 y la Proposición 3.12.4 que $E(Z) = 0 = E(Z^2)$; con lo cual $E(Z^*) = 0 = E\left((Z^*)^2\right)$. Pero, por **(3.12.8.1)**, **(3.12.8.2)** y **(3.12.8.3)** respectivamente, obtenemos que

$$E(Z^*) = \frac{2}{i}\frac{\partial}{\partial \xi}(c_Z)(0) = \frac{2}{i}f_1(0)\frac{\partial}{\partial \xi}(f_2)(0) + f_2(0)\frac{\partial}{\partial \xi}(f_1)(0) = \phi(0)\frac{i}{2}\mu^* = c_Z(0)\frac{i}{2}\mu^* = \frac{i}{2}\mu^*.$$

Por lo tanto $\mu = 0$. Faltaría ver que $H_2 = 0$. Por **(3.12.8.4)** y **(3.12.8.5)** tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(f_2)(z) = D(\phi)(f(z))g_1(z),$$

donde $g_1(z) \doteq \frac{1}{2}z^* H_1 + \frac{1}{2}z H_2^*$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{(\partial \xi)^2}(f_2)(z) &= D^2(\phi)(f(z)) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(f)(z) \cdot g_1(z) + D(\phi)(f(z)) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(g_1)(z) \\ &= D^2(\phi)(f(z)) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(f)(z) \cdot g_1(z) + D(\phi)(f(z)) \cdot \frac{1}{2}H_2^*, \forall\, z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta que $g_1(0) = 0$ y que $f(0) = 0$, resulta que

$$\frac{\partial^2}{(\partial \xi)^2}(f_2)(0) = D(\phi)(0) \cdot \frac{1}{2} \cdot H_2^*.$$

Por otra parte, por **(3.12.8.2)**, obtenemos que

$$\frac{\partial^2}{(\partial \xi)^2}(c_Z)(z) = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(f_1)(z) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(f_2)(z) + f_1(z) \cdot \frac{\partial^2}{(\partial \xi)^2}(f_2)(z) + f_2(z) \cdot \frac{\partial^2}{(\partial \xi)^2}(f_1)(z)$$

Y, como $\frac{\partial}{\partial \xi}(f_1)(0) = 0$, $f_1(0) = 1$ y $f_2(0) = 0$, resulta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{(\partial \xi)^2}(c_Z)(0) &= 2 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(f_1)(0) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(f_2)(0) + f_1(0) \cdot \frac{\partial^2}{(\partial \xi)^2}(f_2)(0) + f_2(0) \cdot \frac{\partial^2}{(\partial \xi)^2}(f_1)(0) \\ &= D(\phi)(0) \cdot \frac{1}{2}H_2^*. \end{aligned}$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta **(3.12.8.1)**, deducimos que

$$0 = E\left((Z^*)^2\right) = -4\frac{\partial^2}{(\partial\xi)^2}(c_Z)(0) = -2D(\phi)(0)H_2^*$$

y, como $D(\phi)(0) \neq 0$, entonces $H_2 = 0$.

($\Longleftarrow$) Como $\mu = 0$ y $H_2 = 0$ se sigue por la Proposición 3.11.8 que

$$c_Z(z) = \phi\left(\frac{1}{2}|z|^2 H_1\right), \ \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

Luego, usando la Proposición 3.11.2, resulta que para cada $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} c_{Z_\alpha}(z) &= E\left\{\exp\left[i\,\mathrm{Re}\left(z^* Z_\alpha\right)\right]\right\} = E\left\{\exp\left[i\,\mathrm{Re}\left(z^* e^{i\alpha} Z\right)\right]\right\} \\ &= E\left\{\exp\left[i\,\mathrm{Re}\left(\left(ze^{-i\alpha}\right)^* Z\right)\right]\right\} = c_Z\left(ze^{-i\alpha}\right) \\ &= \phi\left(\frac{1}{2}\left|ze^{-i\alpha}\right|^2 H_1\right) = \phi\left(\frac{1}{2}|z|^2 H_1\right) \\ &= c_Z(z). \end{aligned}$$

Lo cual implica que $Z \doteq Z_\alpha$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$. Esto es, Z es $\mathbb{C} - IR$. Más aún, como

$$\begin{aligned} c_{Z^*}(z) &= E\left[\exp\left(i\,\mathrm{Re}\left(z^* Z^*\right)\right)\right] = E\left[\exp\left(i\,\mathrm{Re}\left(zZ\right)\right)\right] = E\left[\exp\left(i\,\mathrm{Re}\left(\left(z^*\right)^* Z\right)\right)\right] \\ &= c_Z(z^*) = \phi\left(\frac{1}{2}|z^*|^2 H_1\right) = \phi\left(\frac{1}{2}|z|^2 H_1\right) = c_Z(z)\ \forall\ z \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

entonces $Z^* \doteq Z$ y, por la Proposición 2.2.19, resulta que Z es $P-$circular. ■

Conclusión

A lo largo del presente trabajo, introducimos al lector en el cálculo diferencial conocido como Cálculo de Wirtinger y proporcionamos un tratamiento riguroso de las propiedades de los vectores aleatorios complejos. Incluimos la definición de $\mathbb{R}-$diferenciabilidad de una función y postulamos teoremas en torno a dicho concepto los cuales fueron debidamente probados. Así mismo logramos establecer conexiones entre objetos aparentemente no relacionados, tales como los momentos, las funciones características y la circularidad de las variables aleatorias complejas. Además relacionamos descripciones de vectores aleatorios complejos con las descripciones correspondientes en términos de sus partes real e imaginaria. Un hallazgo clave es que la información en la matriz de covarianza estándar debe ser complementada por una segunda matriz de covarianza, la matriz de pseudocovarianza. Más adelante, caracterizamos las matrices de covarianza aumentada y mostramos qué papel juegan en la potencia y en la entropía. Finalmente presentamos dos distribuciones complejas: la distribución Gaussiana y la distribución elíptica. Obtenemos sus funciones características y expresamos sus funciones de densidad de probabilidad en términos de matrices de covarianza y pseudocovarianza.

Con el fin de continuar con este trabajo sugerimos estudiar los procesos estocásticos complejos y para ello recomendamos el análisis del libro [6], el cual recorre muchos conceptos ajenos a este trabajo.

Anexo
Funciones R-diferenciables de orden 2

Definición A.1
Sea $L : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que "L *es* $\mathbb{R} - bilineal$" si se cumplen
1. $L(au + bv, w) = aL(u, w) + bL(v, w)$, $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$ y $\forall\ u,\ v,\ w \in \mathbb{C}$.
2. $L(w, au + bv) = aL(w, u) + bL(w, v)$, $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$ y $\forall\ u,\ v,\ w \in \mathbb{C}$.

Notación A.2
Denotamos $\mathcal{L}\mathbb{R}_2(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \doteq \left\{ L : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C} : L \text{ es } \mathbb{R} - \text{bilineal} \right\}$ y $\mathbb{V} \doteq \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \doteq \{ L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : L \text{ es } \mathbb{R} - \text{lineal} \}$.

Definición A.3
Sea $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{V}$ una función. Decimos que "L *es* $\mathbb{R} - lineal$" si $L(az + w) = aL(z) + L(w)$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$ y $\forall\ z,\ w \in \mathbb{C}$.

Notación A.4
Denotamos $\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V}) \doteq \{ L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{V} : L \text{ es } \mathbb{R} - \text{lineal} \}$.
Para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, L, L_1 y L_2 en $\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V})$ definimos

$$\begin{aligned} (\alpha \odot L)(z) &\doteq \alpha L(z),\ \forall\ z \in \mathbb{C} \\ (L_1 \oplus L_2)(z) &\doteq L_1(z) + L_2(z),\ \forall\ z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

También para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, L, L_1 y L_2 en $\mathcal{L}\mathbb{R}_2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ definimos

$$\begin{aligned} (\alpha \boxdot L)(z, w) &\doteq \alpha L(z, w),\ \forall\ (z, w) \in \mathbb{C}^2 \\ (L_1 \boxplus L_2)(z, w) &\doteq L_1(z, w) + L_2(z, w),\ \forall\ (z, w) \in \mathbb{C}^2. \end{aligned}$$

No es difícil comprobar que $(\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V}), \oplus, \odot)$ y $(\mathcal{L}\mathbb{R}_2(\mathbb{C}, \mathbb{C}), \boxplus, \boxdot)$ son $\mathbb{C}-$espacios vectoriales.

Proposición A.5
Sea $\Im : \mathcal{L}\mathbb{R}_2(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V})$ dada por $\Im(L)(z)(w) \doteq L(z, w)$, $\forall\ z, w \in \mathbb{C}$. Entonces $\Im$ es un isomorfismo.

Demostración:
Supongamos que $\Im(L_1) = \Im(L_2)$ con L_1 y L_2 en $\mathcal{L}\mathbb{R}_2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, luego

$$\Im(L_1)(z)(w) = \Im(L_2)(z)(w), \text{ para todos } z \text{ y } w \text{ en } \mathbb{C}.$$

Es decir $L_1(z, w) = L_2(z, w)$, para todos z y w en $\mathbb{C}$. Con lo cual $L_1 = L_2$ y por lo tanto $\Im$ resulta inyectiva. Ahora tomemos $L_1 \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{V})$ arbitrario y sea $L_2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$L_2(z, w) \doteq (L_1(z))(w),\ \forall\ (z, w) \in \mathbb{C}^2.$$

L_2 es $\mathbb{R}-$bilinial pues

$$\begin{aligned} L_2(au + bv, h) &= (L_1(au + bv))(h) \\ &= (aL_1(u) + bL_1(v))(h) \\ &= a(L_1(u))(h) + b(L_1(v))(h) \\ &= aL_2(u, h) + bL_2(v, h) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L_2(h, au + bv) &= (L_1(h))(au + bv) \\ &= a(L_1(h))(u) + b(L_1(h))(v) \\ &= aL_2(h, u) + bL_2(h, v), \end{aligned}$$

para cada a, b en $\mathbb{R}$ y para cada u, v, h en $\mathbb{C}$. Además

$$\Im\left(L_2\right)(z)(w) = L_2(z,w) = \left(L_1\left(z\right)\right)(w) \ \forall\ z,\, w \in \mathbb{C},$$

lo cual implica que $\Im\left(L_2\right) = L_1$, es decir $\Im$ es sobreyectiva. Sólo nos queda probar la linealidad, es decir que se cumplen:

$$\begin{aligned}\Im\left(\alpha \boxdot L\right) &= \alpha \odot \Im\left(L\right),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{C} \text{ y } \forall\ L \in \mathcal{L}\mathbb{R}_2(\mathbb{C},\mathbb{C})\\ \Im\left(L_1 \boxplus L_2\right) &= \Im\left(L_1\right) \oplus \Im\left(L_2\right),\ \forall\ \alpha \in \mathbb{C} \text{ y } \forall\ L,\, L_1,\, L_2 \in \mathcal{L}\mathbb{R}_2(\mathbb{C},\mathbb{C}).\end{aligned}$$

Sean z, $w \in \mathbb{C}$ arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned}\Im\left(\alpha \boxdot L\right)(z)(w) &= \left(\alpha \boxdot L\right)(z,w) = \alpha L(z,w) = \alpha \Im\left(L\right)(z)(w) \text{ y}\\ \Im\left(L_1 \boxplus L_2\right)(z)(w) &= \left(L_1 \boxplus L_2\right)(z,w) = L_1(z,w) + L_2(z,w) = \Im\left(L_1\right)(z)(w) + \Im\left(L_2\right)(z)(w).\end{aligned}$$

Queda entonces demostrado que $\Im$ es un isomorfismo. ■

Nota A.6
Recordemos que, por las Proposiciones 1.4.8 y 1.4.9, $\dim\left(\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C})\right) = 2$ y $\dim\left(\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{V})\right) = 4$.

Proposición A.7
Sea $\|\cdot\| : \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \longrightarrow [0,\infty)$ dada por $\|L\| \doteq \sup\left\{|L(z)| : |z| \leq 1\right\}$, $L \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Entonces
1. $\|L\| = 0 \iff L = 0$
2. $\|\alpha L\| = |\alpha|\,\|L\|$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall\ L \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C})$
3. $\|L_1 + L_2\| \leq \|L_1\| + \|L_2\|$, $\forall\ L_1,\ L_2 \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Demostración:
1. ($\Longrightarrow$) Por hipótesis $0 = \sup_{|z|\leq 1}|L(z)|$, entonces $L(z) = 0$ para cada $|z| \leq 1$. Sea ahora $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| > 1$, entonces

$$\frac{1}{|w^*|} = \frac{1}{|w|} < 1$$

y, por lo anterior, resulta que $L\left(\frac{1}{w^*}\right) = 0$. Luego

$$L(w) = L\left(\frac{ww^*}{w^*}\right) = L\left(\frac{|w|^2}{w^*}\right) = |w|^2\, L\left(\frac{1}{w^*}\right) = 0.$$

Por lo tanto obtenemos que $L(z) = 0$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$.
($\Longleftarrow$) Es inmediato.

2. $\|\alpha L\| = \sup_{|z|\leq 1}|(\alpha L)(z)| = \sup_{|z|\leq 1}|\alpha L(z)| = |\alpha|\sup_{|z|\leq 1}|L(z)| = |\alpha|\,\|L\|$.

3. $\|L_1 + L_2\| = \sup_{|z|\leq 1}|(L_1 + L_2)(z)| = \sup_{|z|\leq 1}|L_1(z) + L_2(z)| \leq \sup_{|z|\leq 1}\left(|L_1(z)| + |L_2(z)|\right) = \|L_1\| + \|L_2\|$.

Queda entonces finalizada la prueba. ■

Definición A.8
Sean U un abierto en $\mathbb{C}$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Decimos que "*$f$ es dos veces $\mathbb{R}-$diferenciable en $z \in U$*" si existe $V \subset U$ abierto con $z \in V$ tal que
1. f es $\mathbb{R}-$diferenciable en V.
2. Existe $L_2(z) \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{V})$ tal que

$$\lim_{|h|\longrightarrow 0}\frac{\|D_r(f)(z+h) - D_r(f)(z) - L_2(z)(h)\|}{|h|} = 0.$$

No es difícil probar que $L_2(z) \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{V})$ con la propiedad anterior es único, por ello a un tal $L_2(z)$ lo llamamos "$\mathbb{R}-$ *derivada segunda (o* $\mathbb{R}-$ *derivada) de* f *en* z" y la denotamos por $D_r^2(f)(z)$. Esto es

$$\lim_{|h|\longrightarrow 0} \frac{\left\|D_r(f)(z+h) - D_r(f)(z) - D_r^2(f)(z)(h)\right\|}{|h|} = 0.$$

Proposición A.9
Sean U un abierto en $\mathbb{C}$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Son equivalentes:
1. f es dos veces $\mathbb{R}-$diferenciable en $z \in U$
2. Existe $V \subset U$ abierto con $z \in V$ tal que:
    2.1. f es $\mathbb{R}-$diferenciable en V
    2.2. Existe $M_2(z) \in \mathcal{L}\mathbb{R}_2(\mathbb{C},\mathbb{C})$ tal que dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ que cumple:
        2.2.1. $B(z,\delta) \subset V$
        2.2.2. para todo $h \in \mathbb{C}$ con $|h| < \delta$ se satisface que

$$\sup_{|u|\leq 1} |D_r(f)(z+h)(u) - D_r(f)(z)(u) - M_2(z)(u,h)| \leq |h|\,\varepsilon.$$

Demostración:
($1 \implies 2$) Por hipótesis existe $V \subset U$ abierto con $z \in V$ tal que:
1.1. f es $\mathbb{R}-$diferenciable en V.
1.2. Existe $D_r^2(f)(z) \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{V})$ tal que

$$\lim_{|h|\longrightarrow 0} \frac{\left\|D_r(f)(z+h) - D_r(f)(z) - D_r^2(f)(z)(h)\right\|}{|h|} = 0.$$

Definimos $M_2(z) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$M_2(z)(u,h) \doteq D_r^2(f)(z)(h)(u),\ \forall\ (u,h) \in \mathbb{C}^2.$$

Probemos en primer lugar que $M_2(z) \in \mathcal{L}\mathbb{R}_2(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Sean $a \in \mathbb{R}$ y u, v en $\mathbb{C}$ arbitrarios, luego

$$\begin{aligned} M_2(z)(au+v,h) &= D_r^2(f)(z)(h)(au+v) \\ &= aD_r^2(f)(z)(h)(u) + D_r^2(f)(z)(h)(v) \\ &= aM_2(z)(u,h) + M_2(z)(v,h) \end{aligned}$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned} M_2(z)(h,au+v) &= D_r^2(f)(z)(au+v)(h) \\ &= \left(aD_r^2(f)(z)\,(u) + D_r^2(f)(z)\,(v)\right)(h) \\ &= aD_r^2(f)(z)\,(u)\,(h) + D_r^2(f)(z)\,(v)\,(h) \\ &= aM_2(z)(h,u) + M_2(z)(h,v). \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, por 1.2 sabemos que $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que si $h \in B(0,\delta_1)$ entonces

$$\sup_{|u|\leq 1} |D_r(f)(z+h)(u) - D_r(f)(z)(u) - M_2(z)(u,h)| < |h|\,\varepsilon.$$

Por otro lado, puesto que V es un entorno de z, tenemos que $\exists\ \delta_2 > 0$ tal que $B(z,\delta_2) \subset V$. Finalmente, tomando $\delta \doteq \min\{\delta_1,\delta_2\}$, resulta 2.2.

($2 \implies 1$) Definimos $L_2(z) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ por $L_2(z)\,(h)\,(u) \doteq M_2(z)(u,h)$, $\forall\ u,\ h \in \mathbb{C}$.

Veamos que, en efecto, $L_2(z)\,(h) \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, $\forall\ h \in \mathbb{C}$. Para cada $a \in \mathbb{R}$ y cada u, v, $h \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\begin{aligned} L_2(z)\,(h)\,(au+v) &= M_2(z)(au+v,h) \\ &= aM_2(z)(u,h) + M_2(z)(v,h) \\ &= aL_2(z)\,(h)\,(u) + L_2(z)\,(h)\,(v)\,, \end{aligned}$$

además $L_2(z) \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{V})$ pues

$$\begin{aligned} L_2(z)\,(au+v)\,(h) &= M_2(z)(h,au+v) \\ &= aM_2(z)(h,u) + M_2(z)(h,v) \\ &= aL_2(z)(u)(h) + L_2(z)(v)(h) \\ &= (aL_2(z)(u) + L_2(z)(v))\,(h). \end{aligned}$$

Faltaría entonces demostrar que

$$\lim_{|h|\longrightarrow 0} \frac{\|D_r(f)(z+h) - D_r(f)(z) - L_2(z)(h)\|}{|h|} = 0. \quad \textbf{(A.9.1)}$$

Pero, por 2.2, dado $\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que si $h \in B(0,\delta)$ entonces

$$\sup_{|u|\leq 1} |D_r(f)(z+h)(u) - D_r(f)(z)(u) - M_2(z)(u,h)| < |h|\,\varepsilon.$$

Y como

$$\|D_r(f)(z+h) - D_r(f)(z) - L_2(z)(h)\| = \sup_{|u|\leq 1} |D_r(f)(z+h)(u) - D_r(f)(z)(u) - M_2(z)(u,h)|$$

entonces vale **(A.9.1)**. ■

Proposición A.10
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ dos veces $\mathbb{R}-$diferenciable en $z \in U$. Entonces

$$D_r^2(f)(z)(h_1,h_2) = D_r^2(f)(z)(h_2,h_1),\ \forall\ (h_1,h_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Demostración:
Se puede encontrar en la pág. 181 de [2]. ■

Proposición A.11
Sean $V \subset U \subset \mathbb{C}$ abiertos; $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una función $\mathbb{R}-$diferenciable en V y dos veces $\mathbb{R}-$diferenciable en $z_0 \in V$; $w_0 \in \mathbb{C}$ y $g : V \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(v) \doteq D_r(f)(v)(w_0)$, $\forall\ v \in V$. Entonces g es $\mathbb{R}-$diferenciable en z_0 y $D_r(g)(z_0)(h) = D_r^2(f)(z_0)(w_0,h)$, $\forall\ h \in \mathbb{C}$.

Demostración:
Sea $h \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $z_0 + h \in V$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\left|g(z_0+h) - g(z_0) - D_r^2(f)(z_0)(w_0,h)\right|}{|h|} &= \frac{\left|D_r(f)(z_0+h)(w_0) - D_r(f)(z_0)(w_0) - D_r^2(f)(z_0)(w_0,h)\right|}{|h|} \\ &= |w_0|\,\frac{\left|D_r(f)(z_0+h)\left(\frac{w_0}{|w_0|}\right) - D_r(f)(z_0)\left(\frac{w_0}{|w_0|}\right) - D_r^2(f)(z_0)\left(\frac{w_0}{|w_0|},h\right)\right|}{|h|} \\ &\leq \frac{|w_0|}{|h|} \sup_{|u|\leq 1} \left|D_r(f)(z_0+h)\,(u) - D_r(f)(z_0)\,(u) - D_r^2(f)(z_0)\,(u,h)\right| \end{aligned}$$

Por la Proposición A.10 tenemos que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\sup_{|u|\leq 1}\left|D_r(f)(z_0+h)\,(u) - D_r(f)(z_0)\,(u) - D_r^2(f)(z_0)\,(u,h)\right|}{|h|} = 0.$$

Luego, por la desigualdad anterior, resulta que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\left|g(z_0+h) - g(z_0) - D_r^2(f)(z_0)(w_0,h)\right|}{|h|} = 0.$$

Además la función $h \longmapsto D_r^2(f)(z_0)(w_0,h)$ es $\mathbb{R}-$lineal. Finalmente, por la Definición 1.2.3, concluimos que g es $\mathbb{R}-$diferenciable en z_0 y que $D_r(g)(z_0)(h) = D_r^2(f)(z_0)(w_0,h)$, $\forall\ h \in \mathbb{C}$. Queda entonces culminada la prueba. ■

Proposición A.12
Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, $A \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+iy \in U\right\}$, $(x_0,y_0) \in A$, $u_f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $v_f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $u_f\,(x,y) \doteq \mathrm{Re}\,(f\,(x+iy))$ y $v_f\,(x,y) \doteq \mathrm{Im}\,(f\,(x+iy))$ $\forall\ (x,y) \in A$.

1. Si f es $\mathbb{R}-$diferenciable en $z_0 \doteq x_0+iy_0$, entonces existen $D_1(u_f)(x_0,y_0)$, $D_1(v_f)(x_0,y_0)$, $D_2(u_f)(x_0,y_0)$ y $D_2(v_f)(x_0,y_0)$ y además

$$\begin{aligned}
D_1(u_f)(x_0,y_0) &= \mathrm{Re}\,(D_r(f)(z_0)(1))\,,\\
D_1(v_f)(x_0,y_0) &= \mathrm{Im}\,(D_r(f)(z_0)(1))\,,\\
D_2(u_f)(x_0,y_0) &= \mathrm{Re}\,(D_r(f)(z_0)(i))\ \text{ y}\\
D_2(v_f)(x_0,y_0) &= \mathrm{Im}\,(D_r(f)(z_0)(i))\,.
\end{aligned}$$

2. Si f es dos veces $\mathbb{R}-$diferenciable en z_0 entonces

$$\begin{aligned}
D_r^2(f)(z_0)(1,1) &= D_1^2(u_f)(x_0,y_0) + iD_1^2(v_f)(x_0,y_0),\\
D_r^2(f)(z_0)(i,i) &= D_2^2(u_f)(x_0,y_0) + iD_2^2(v_f)(x_0,y_0)\ \text{y}\\
D_r^2(f)(z_0)(1,i) &= D_1D_2(u_f)(x_0,y_0) + iD_1D_2(v_f)(x_0,y_0).
\end{aligned}$$

Demostración:
Aplicación directa de la Proposición 1.4.22. ■

Proposición A.13
Sea $p \in \{1,2\}$, $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in C_r^p(U,\mathbb{C})$. Entonces u_f, $v_f \in C_r^p(A,\mathbb{R})$ y además

1. Para $p=1$ se cumplen

$$\begin{aligned}
D(u_f)(x,y)(t,s)^\top &= D_1(u_f)(x,y)t + D_2(u_f)(x,y)s\ \text{y}\\
D(v_f)(x,y)(t,s)^\top &= D_1(v_f)(x,y)t + D_2(v_f)(x,y)s
\end{aligned}$$

   para todo t, $s \in \mathbb{R}$ y para todo $(x,y) \in A$.

2. Para $p=2$ se cumplen

$$\begin{aligned}
D^2(u_f)(x,y)\,(\mathbf{t},\mathbf{s}) &= D_1^2(u_f)(x,y)t_1s_1 + D_1D_2(u_f)(x,y)t_1s_2 + D_2D_1(u_f)((x,y))t_2s_1 + D_2^2(u_f)(x,y)t_2s_2\\
D^2(v_f)(x,y)\,(\mathbf{t},\mathbf{s}) &= D_1^2(v_f)(x,y)t_1s_1 + D_1D_2(v_f)(x,y)t_1s_2 + D_2D_1(v_f)(x,y)t_2s_1 + D_2^2(v_f)(x,y)t_2s_2
\end{aligned}$$

   para todo $\mathbf{t} = (t_1,t_2)^\top$y $\mathbf{s} = (s_1,s_2)^\top$ en $\mathbb{R}^2$ y para todo $(x,y) \in A$.

Demostración:
Aplicación directa de las Proposiciones 1.4.23 y 1.4.24. ■

Proposición A.14
1. $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{R}-$lineal $\iff \exists!\ \alpha$ y β en $\mathbb{C}$ tales que $L(z) = \alpha z + \beta z^*$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$.

2. $L : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{R}-$bilineal $\iff \exists!\ \alpha_L$, β_L, γ_L y δ_L en $\mathbb{C}$ tales que

$$L(z,w) = \alpha_L\,(zw) + \beta_L\,(zw^*) + \gamma_L\,(z^*w) + \delta_L\,(z^*w^*)\,,\ \forall\ (z,w) \in \mathbb{C}^2.$$

Demostración:
1. Ya la hicimos en la Proposición 1.1.5.
2. ($\Longrightarrow$) *Existencia:*
Sea $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ arbitrario y consideremos

$$\begin{bmatrix} \alpha_L \\ \beta_L \\ \gamma_L \\ \delta_L \end{bmatrix} \doteq \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -i & -i & -1 \\ 1 & i & -i & 1 \\ 1 & -i & i & 1 \\ 1 & i & i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L(1,1) \\ L(1,i) \\ L(i,1) \\ L(i,i) \end{bmatrix},$$

haciendo las cuentas se puede ver que $L(z,w) = \alpha_L\,(zw) + \beta_L\,(zw^*) + \gamma_L\,(z^*w) + \delta_L\,(z^*w^*)$.
Unicidad:
Supongamos que

$$0 = \alpha_L\,(zw) + \beta_L\,(zw^*) + \gamma_L\,(z^*w) + \delta_L\,(z^*w^*)\,,\ \forall\ (z,w) \in \mathbb{C}^2. \quad \textbf{(A.14.1)}$$

En particular vale para $(1,1)$, (i,i) y $(1,i)$. Es decir se cumplen

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_L + \beta_L + \gamma_L + \delta_L, \quad \textbf{(A.14.2)} \\ 0 &= -\alpha_L + \beta_L + \gamma_L - \delta_L, \quad \textbf{(A.14.3)} \\ 0 &= \alpha_L - \beta_L + \gamma_L - \delta_L. \quad \textbf{(A.14.4)} \end{aligned}$$

Ahora, sumando **(A.14.2)** con **(A.14.3)** obtenemos que $\beta_L + \gamma_L = 0$ y sumando **(A.14.2)** con **(A.14.4)** resulta que

$$\alpha_L + \gamma_L = 0. \quad \textbf{(A.14.5)}$$

Restando estas últimas dos igualdades obtenemos que

$$\alpha_L = \beta_L. \quad \textbf{(A.14.6)}$$

También sumando **(A.14.3)** con **(A.14.4)** tenemos que

$$\delta_L = \gamma_L. \quad \textbf{(A.14.7)}$$

Si ahora reemplazamos **(A.14.6)** y **(A.14.7)** en **(A.14.1)** resulta que

$$0 = \alpha_L(zw + zw^*) + \gamma_L(z^*w + z^*w^*) = \alpha_L(zw + zw^*) + \gamma_L(zw + zw^*)^*,\ \forall\ (z,w) \in \mathbb{C}^2.$$

En particular, si tomamos $(i,1)$, tenemos que

$$\alpha_L = \gamma_L. \quad \textbf{(A.14.8)}$$

Se sigue entonces por **(A.14.5)** y **(A.14.8)** que $\alpha_L = \gamma_L = 0$, lo cual implica que $\beta_L = \delta_L = 0$.
($\Longleftarrow$) Inmediata. ■

Corolario A.15
1. Sean $\pi_0 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\pi_* : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas por $\pi_0(z) \doteq z$, $\pi_*(z) \doteq z^*$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Entonces $\{\pi_0, \pi_*\}$ es una base de $\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ como $\mathbb{C}-$espacio vectorial. Además (usando la notación de la Proposición anterior)

$$L = \alpha\pi_0 + \beta\pi_*,\ \forall\ L \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C}).$$

2. Sean $\pi_{0,0} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\pi_{0,*} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\pi_{*,0} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\pi_{*,*} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$\begin{aligned}
\pi_{0,0}(z,w) &\doteq zw, \\
\pi_{0,*}(z,w) &\doteq zw^*, \\
\pi_{*,0}(z,w) &\doteq z^*w\ , \\
\pi_{*,*}(z,w) &\doteq z^*w^*, \ \forall\ (z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Entonces $\{\pi_{0,0}, \pi_{0,*}, \pi_{*,0}, \pi_{*,*}\}$ es una base de $\mathcal{L}\mathbb{R}_2(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Además (usando la notación de la Proposición anterior)

$$L = \alpha_L \pi_{0,0} + \beta_L \pi_{0,*} + \gamma_L \pi_{*,0} + \delta_L \pi_{*,*}, \ \forall\ L \in \mathcal{L}\mathbb{R}_2(\mathbb{C},\mathbb{C}).$$

Demostración:
1. Por la Proposición anterior es suficiente probar que π_0 y π_* están en $\mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $u,\, v \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned}
\pi_0(au+v) &= au+v = a\pi_0(u) + \pi_0(v) \text{ y} \\
\pi_*(au+v) &= (au+v)^* = au^* + v^* = a\pi_0(u) + \pi_0(v).
\end{aligned}$$

2. Como en el inciso anterior, basta demostrar que las funciones $\pi_{0,0}$, $\pi_{0,*}$, $\pi_{*,0}$ y $\pi_{*,*}$ pertenecen a $\mathcal{L}\mathbb{R}_2(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Pero

$$\begin{aligned}
\pi_{0,0}(au+v,h) &= (au+v)h = auh + vh = a\pi_{0,0}(u,h) + \pi_{0,0}(v,h), \\
\pi_{0,0}(h,au+v) &= h(au+v) = ahu + hv = a\pi_{0,0}(h,u) + \pi_{0,0}(h,v), \\
\pi_{0,*}(au+v,h) &= (au+v)h^* = auh^* + vh^* = a\pi_{0,*}(u,h) + \pi_{0,*}(v,h), \\
\pi_{0,*}(h,au+v) &= h(au+v)^* = ahu^* + hv^* = a\pi_{0,*}(h,u) + \pi_{0,*}(h,v), \\
\pi_{*,0}(au+v,h) &= (au+v)^*h = au^*h + v^*h = a\pi_{*,0}(u,h) + \pi_{*,0}(v,h), \\
\pi_{*,0}(h,au+v) &= h^*(au+v) = ah^*u + h^*v = a\pi_{*,0}(h,u) + \pi_{*,0}(h,v), \\
\pi_{*,*}(au+v,h) &= (au+v)^*h^* = au^*h^* + v^*h^* = a\pi_{*,*}(u,h) + \pi_{*,*}(v,h), \\
\pi_{*,*}(h,au+v) &= h^*(au+v)^* = ah^*u^* + h^*v^* = a\pi_{*,*}(h,u) + \pi_{*,*}(h,v).
\end{aligned}$$

Por lo tanto queda finalizada la prueba. ■

Nota A.16:
Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ y $z \in U$.
1. Si f es $\mathbb{R}-$diferenciable en z, entonces $D_r(f)(z) \in \mathcal{L}\mathbb{R}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Luego, por la Proposición A.14, tenemos que

$$D_r(f)(z)(h) = \alpha h + \beta h^*,$$

donde

$$\alpha \doteq \frac{D_r(f)(z)(1) - iD_r(f)(z)(i)}{2} \text{ y } \beta \doteq \frac{D_r(f)(z)(1) + iD_r(f)(z)(i)}{2}.$$

Pero el Corolario 1.2.8 implica que $D_r(f)(z)(h) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(z)h + \frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z)h^*$, $h \in \mathbb{C}$. Con lo cual concluimos que

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(z) = \frac{D_r(f)(z)(1) - iD_r(f)(z)(i)}{2} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial \xi^*}(z) = \frac{D_r(f)(z)(1) + iD_r(f)(z)(i)}{2}.$$

2. Si f es dos veces $\mathbb{R}-$diferenciable en z, entonces $D_r^2(f)(z) \in \mathcal{L}\mathbb{R}_2(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Luego, por la Proposición A.14, tenemos que

$$D_r^2(f)(z)(u,v) = \alpha_L\,(uv) + \beta_L\,(uv^*) + \gamma_L\,(u^*v) + \delta_L\,(u^*v^*)\,,\ \forall\ (u,v) \in \mathbb{C}^2.$$

Por extensión del Corolario 1.2.8 definimos

$$\frac{\partial^2}{(\partial \xi)^2}(f)(z) = \alpha_L,\ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(f)(z) = \beta_L,\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^* \partial \xi}(f)(z) = \gamma_L \text{ y } \frac{\partial^2}{(\partial \xi^*)^2}(f)(z) = \delta_L.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{(\partial\xi)^2}(f)(z) &= \frac{1}{4}\left[D_r^2(f)(z)(1,1) - iD_r^2(f)(z)(1,i) - iD_r^2(f)(z)(i,1) - D_r^2(f)(z)(i,i)\right], \\
\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\xi^*}(f)(z) &= \frac{1}{4}\left[D_r^2(f)(z)(1,1) + iD_r^2(f)(z)(1,i) - iD_r^2(f)(z)(i,1) + D_r^2(f)(z)(i,i)\right], \\
\frac{\partial^2}{\partial\xi^*\partial\xi}(f)(z) &= \frac{1}{4}\left[D_r^2(f)(z)(1,1) - iD_r^2(f)(z)(1,i) + iD_r^2(f)(z)(i,1) + D_r^2(f)(z)(i,i)\right] \text{ y} \\
\frac{\partial^2}{(\partial\xi^*)^2}(f)(z) &= \frac{1}{4}\left[D_r^2(f)(z)(1,1) + iD_r^2(f)(z)(1,i) + iD_r^2(f)(z)(i,1) - D_r^2(f)(z)(i,i)\right].
\end{aligned}$$

Luego, por la parte 2 de la Proposición anterior, obtenemos que

$$D_r^2(f)(z)(u,v) = \frac{\partial^2}{(\partial\xi)^2}(f)(z)uv + \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\xi^*}(f)(z)uv^* + \frac{\partial^2}{\partial\xi^*\partial\xi}(f)(z)u^*v + \frac{\partial^2}{(\partial\xi^*)^2}(f)(z)u^*v^*.$$

Teorema A.17. Fórmula de Taylor para funciones 2 −veces continuamente $\mathbb{R}$−diferenciables.
Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $f \in C_r^2(U,\mathbb{C})$ y $z \in U$. Entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ r > 0$ tal que $B(z,r) \subset U$ y

$$f(z+h) - f(z) = \frac{\partial}{\partial\xi}(f)(z)h + \frac{\partial}{\partial\xi^*}(f)(z)h^* + \frac{\partial^2}{(\partial\xi)^2}(f)(z)\frac{h^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\xi^*}(f)(z)\left|h\right|^2 + \frac{\partial^2}{(\partial\xi^*)^2}(f)(z)\frac{(h^*)^2}{2} + \left|h\right|^2\varepsilon(h)$$

con $h \in B(0,r)$ y $0 \leq \varepsilon(h) \leq \varepsilon$.

Demostración:
Aplicación directa del Teorema 1.6.4. ■

Lema A.18
Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Se cumplen:

1. $A \doteq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+iy \in U\right\}$ es un abierto en $\mathbb{R}^2$.
2. $M-\{0\}$ es un abierto en $\mathbb{R}$, donde $M \doteq \left\{|z|^2 : z \in U\right\}$.

Demostración:
1. Como U es un abierto en $\mathbb{C}$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x,y) \doteq x+iy$ es continua, entonces $f^{-1}(U)$ es un abierto en $\mathbb{R}^2$. Pero $f^{-1}(U) = A$, con lo cual vale 1.
2. Sea $z_0 \in U$ tal que $z_0 \neq 0$, es decir $|z_0|^2 \in M-\{0\}$. Escribimos $z_0 = r_0\exp(i\theta_0)$, con $r_0 > 0$ y $\theta_0 \in [0,2\pi)$. Por ser U un abierto en $\mathbb{C}$ que contiene a z_0, sabemos que $\exists\ \delta > 0$ tal que $B(z_0,\delta) \subset U$. Denotemos, para cada $t \in (-\delta,\delta)$, $z(t) \doteq (r_0+t)\exp(i\theta_0)$. Puesto que

$$|z(t) - z_0| = |(r_0+t)\exp(i\theta_0) - r_0\exp(i\theta_0)| = |t\exp(i\theta_0)| = |t|\,|\exp(i\theta_0)| < \delta$$

y $B(z_0,\delta) \subset U$, entonces $z(t) \in U$, $\forall\ t \in (-\delta,\delta)$. Ahora definimos $a \doteq (r_0-\delta)^2$ y $b \doteq (r_0+\delta)^2$. Es claro que $|z_0|^2 = r_0^2 \in (a,b)$, además $(a,b) \subset M-\{0\}$, pues si $x \in (a,b)$ entonces $\exists\ t \in (-\delta,\delta)$ tal que $x = (r_0+t)^2$, con lo cual $x = |z(t)|^2$. ■

Lema A.19
Sean $h_0 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $h_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$h_0(z) \doteq |z|^2,\ h_1(z) \doteq z \text{ y } h_2(z) \doteq z^*,\ \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

Además sean $g \in C_r^1(M,\mathbb{R})$ y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f = g \circ h_0$. Entonces $f \in C_r^1(U,\mathbb{R})$ y se cumplen

1. $\frac{\partial}{\partial \xi}(f) = (D(g) \circ h_0) \cdot h_2,$

2. $\frac{\partial}{\partial \xi^*}(f) = (D(g) \circ h_0) \cdot h_1.$

Demostración:
Como f es composición de dos funciones continuamente diferenciables entonces $f \in C_r^1(U, \mathbb{R})$. Además, por la Proposición 1.2.12 y el Corolario 1.6.7, tenemos que

$$\begin{aligned} D_r(f)(z)(h) &= D(g)(h_0(z)) \cdot D_r(h_0)(z)(h) \\ &= D(g)(h_0(z)) \cdot (zh^* + z^*h) \\ &= D(g)(h_0(z)) \cdot (zh^*) + D(g)(h_0(z)) \cdot (z^*h),\ \forall\ z,\ h \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Luego, por el Corolario 1.2.8, resulta que

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(f)(z) = D(g)(h_0(z))z^* = D(g)(h_0(z))h_2(z) \text{ y } \frac{\partial}{\partial \xi^*}(f) = D(g)(h_0(z))z = D(g)(h_0(z))h_1(z). \ \blacksquare$$

Notación A.20

$$C^2_{r,|.|}(U, \mathbb{R}) \doteq \left\{ f : U \longrightarrow \mathbb{C} : \exists\ g \in C_r^2(M, \mathbb{R}) \text{ tal que } f(z) = g\left(|z|^2\right)\ \forall\ z \in U \right\}$$

Corolario A.21
Sean h_0, h_1 y h_2 como en el Lema anterior. Sean $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dos veces continuamente diferenciable y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f = g \circ h_0$. Entonces

1. $f \in C^2_{r,|.|}(U, \mathbb{R})$
2. Existen g_1, g_2 y g_3 funciones con dominio en M y rango en $\mathbb{R}$ que son continuas y que cumplen:

2.1. $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(f) = (g_1 \circ h_0) \cdot h_2^2,$

2.2. $\frac{\partial^2}{(\partial \xi^*)^2}(f) = (g_2 \circ h_0) \cdot h_1^2,$

2.3. $\frac{\partial^2}{\partial \xi^* \partial \xi}(f) = g_3.$

Demostración:
1. Se deduce por el hecho de que f es composición de dos funciones dos veces continuamente $\mathbb{R}-$diferenciables.
2. Denotemos $F_1 \doteq \frac{\partial}{\partial \xi}(f)$ entonces $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(f) = \frac{\partial}{\partial \xi}(F_1)$. Por la parte 1 del Lema anterior sabemos que

$$F_1 = (D_r(g) \circ h_0) \cdot h_2.$$

Luego, por la Proposición 1.6.6 y el Corolario 1.6.7, obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(F_1) = (D_r(g) \circ h_0) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(h_0) + h_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(D_r(g) \circ h_0) = h_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}(D_r(g) \circ h_0).$$

Aplicando una vez más el Lema anterior tenemos que $\exists\ g_1 : M \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(D_r(g) \circ h_0) = (g_1 \circ h_0) \cdot h_2.$$

Por lo tanto $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(f) = (g_1 \circ h_0) \cdot h_2^2$, lo que prueba 2.1.
Como 2.2 se demuestra de forma análoga al inciso 2.1 entonces probemos 2.3. Puesto que

$$F_1 = (D_r(g) \circ h_0) \cdot h_2,$$

la Proposición 1.6.6 y el Corolario 1.6.7 implican que

$$\frac{\partial}{\partial \xi^*}(F_1) = (D_r(g)\circ h_0)\cdot \frac{\partial}{\partial \xi^*}(h_0) + \frac{\partial}{\partial \xi^*}\left(D_r(g)\circ h_0\right)\cdot h_2 = (D_r(g)\circ h_0) + \frac{\partial}{\partial \xi^*}\left(D_r(g)\circ h_0\right)\cdot h_2.$$

Ahora, aplicando el Lema anterior, sabemos que $\exists\ h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

$$\frac{\partial}{\partial \xi^*}\left(D_r(g)\circ h_0\right) = (h\circ h_0)\cdot h_1.$$

Reemplazando obtenemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^* \partial \xi}(f) = \frac{\partial}{\partial \xi^*}(F_1) = (D_r(g)\circ h_0) + (h\circ h_0)\cdot h_1 \cdot h_2 = (D_r(g)\circ h_0) + (h\circ h_0)\cdot h_0 \doteq g_3. \ \blacksquare$$

Corolario A.22
Sea $f \in C^2_{r,|\cdot|}(U,\mathbb{C})$. Entonces

1. $\frac{\partial}{\partial \xi}(f)(0) = \frac{\partial}{\partial \xi^*}(f)(0) = 0$
2. $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(f)(0) = \frac{\partial}{(\partial \xi^*)^2}(f)(0) = 0$

Demostración:
Se obtiene aplicando el Lema A.20, el Corolario anterior y teniendo en cuenta que $h_1(0) = h_2(0) = 0$. $\blacksquare$

Corolario A.23
Sea $f \in C^2_{r,|\cdot|}(U,\mathbb{C})$ con $0 \in U$. Entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $B(0,r) \subset U$ y además

$$f(h) = \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(f)(0)\, |h|^2 + |h|^2\, \varepsilon(h),$$

para todo $h \in B(0,r)$ con $0 \leq \varepsilon(h) \leq \varepsilon$.

Demostración:
Es una consecuencia directa del Teorema A.17 y del Corolario anterior. $\blacksquare$

Proposición A.24
Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto, $A \doteq \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+iy \in U\right\}$, $f \in C^2_r(U,\mathbb{C})$, $u_f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $v_f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} u_f(x,y) &= \mathrm{Re}\left(f(x+iy)\right),\ (x,y)\in A \\ v_f(x,y) &= \mathrm{Im}\left(f(x+iy)\right),\ (x,y)\in A. \end{aligned}$$

Entonces u_f y v_f está en $C^2(A,\mathbb{R})$ y valen

1. $\frac{\partial}{\partial \xi}(f)(z) = \frac{1}{2}\left[D_1(u_f)(x,y) + D_2(v_f)(x,y)\right] + \frac{i}{2}\left[D_1(v_f)(x,y) - D_2(u_f)(x,y)\right]$
2. $\frac{\partial}{\partial \xi^*}(f)(z) = \frac{1}{2}\left[D_1(u_f)(x,y) - D_2(v_f)(x,y)\right] + \frac{i}{2}\left[D_1(v_f)(x,y) + D_2(u_f)(x,y)\right]$
3. $\frac{\partial^2}{(\partial \xi)^2}(f)(z) = \frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} \left[D_1^2(u_f)(x,y) - D_2^2(u_f)(x,y) + 2D_1D_2(v_f)(x,y)\right] + \\ +i\left[D_1^2(v_f)(x,y) - D_2^2(v_f)(x,y) - 2D_1D_2(u_f)(x,y)\right] \end{array}\right\}$
4. $\frac{\partial^2}{(\partial \xi^*)^2}(f)(z) = \frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} \left[D_1^2(u_f)(x,y) - D_2^2(u_f)(x,y) - 2D_1D_2(v_f)(x,y)\right] + \\ +i\left[D_1^2(v_f)(x,y) - D_2^2(v_f)(x,y) + 2D_1D_2(u_f)(x,y)\right] \end{array}\right\}$
5. $\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \xi^*}(f)(z) = \frac{1}{4}\left\{\left[D_1^2(u_f)(x,y) + D_2^2(u_f)(x,y)\right] + i\left[D_1^2(v_f)(x,y) + D_2^2(v_f)(x,y)\right]\right\}$

para todo $z = x + iy \in U$.

Demostración:
1 y 2 siguen por la definición dada en el Corolario 1.2.8.Además 3, 4 y 5 siguen por la Nota A.16 y la Proposición A.12. ■

Referencias

[1] Chung, K.L. (2001). *A course in probability theory* (3rd. ed.). San Diego, USA: Academic Press.

[2] Dieudonné, J. (1969). *Foundations of modern analysis* (3rd. ed.). New York, USA: Academic Press. Vol. 10.

[3] Eriksson, J., Ollila, E., and Koivunen, V. (2009). *Statistics for complex random variables revisited.* In: Proceedings of the 34th IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP 2009).

[4] Fang, K., Kotz, K., and Ng, K. (1990). *Symmetric Multivariate and Related Distributions.* Springer-Science+Business Media, B.V.

[5] Horn, R.A., and Johnson, C.R. (1990). *Matrix Analysis.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

[6] Schreier, P.J., and Scharf, L.L. (2010). *Statistical Signal Processing of Complex-Valued Data*; *The Theory of Improper and Noncircular Signals.* New York, USA: Cambridge University Press.

[7] Van den Bos, A. (1994). *Complex gradient and Hessian.* IEE Proc.-Vis. Image Signal Processing. Vol. 141, no. 6, pp. 380–382.

Índice alfabético