

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y
COMPUTACIÓN

ASPECTOS TEÓRICOS DE LENTES GRAVITACIONALES

CRISNEJO GABRIEL
DIRECTOR: DR. GALLO EMANUEL

Marzo 2017



Aspectos teóricos de lentes gravitacionales por Gabriel Crisnejo y Emanuel Gallo;
se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución 2.5 Argentina.

Resumen

En este trabajo analizamos la teoría de lentes gravitacionales débiles sobre un background plano. Obtenemos expresiones concretas para los escalares ópticos a segundo orden en la perturbación de la métrica plana de forma general en el sentido que no hacemos mención ni de la extensión de la lente ni de la forma de la misma. Calculamos explícitamente los escalares ópticos en el gauge generalizado de Poisson. Finalmente, considerando lentes axialmente simétricas en la aproximación de lente delgada obtenemos una expresión para el ángulo de deflexión a segundo orden en la perturbación de la métrica plana.

Abstract

In this work we analyze the theory of gravitational weak lenses on a flat background. We obtain concrete expressions for the optical scalars at the second order in the flat metric perturbation in a general way in the sense that we do not mention neither the extension of the lens nor the shape thereof. We explicitly calculate the optical scalars in the generalized Poisson gauge. Finally, considering axially symmetrical lenses in the approximation of thin lens obtain an expression for the deflection angle at the second order in the flat metric perturbation.

Palabras claves

Lentes gravitacionales, Lentes débiles, Relatividad general, Escalares ópticos, Ángulo de deflexión.

Clasificación

04.20.-q Classical general relativity

04.90.+e Other topics in general relativity and gravitation

95.30.-k Fundamental aspects of astrophysics

Agradecimientos

A mi familia por su apoyo incondicional y por brindarme el privilegio de poder dedicarme plenamente al estudio.

A mis compañeros y amigos de la vida por acompañarme todos estos años.

Y especialmente a Emanuel, mi director, por su paciencia, predisposición y aliento; y por mostrarme un ejemplo a seguir como docente, investigador y persona. Eternamente agradecido.

Índice general

Introducción	9
1. Lentes gravitacionales	11
1.1. La ecuación de desviación de geodésicas	14
1.2. Solución a primer orden	18
2. Solución a segundo orden	21
2.1. Escalares ópticos a segundo orden	21
2.2. Aplicación	33
3. Aproximación de lente delgada	47
3.1. Escalares ópticos a segundo orden	47
3.2. Lentes axialmente simétricas	53
3.2.1. Escalares ópticos	54
3.2.2. Ángulo de deflexión	54
Conclusiones	57
Bibliografía	59

Introducción

El fenómeno de lentes gravitacionales, que consiste en la desviación de la trayectoria de la luz en presencia de un campo gravitacional, fue una de las primeras predicciones de la Relatividad General y sirvió para testear la validez de la misma.

Hasta 1979 el estudio de lentes gravitacionales fue considerado un área de estudio bastante esotérico sin gozar de mucho respeto por parte de la comunidad científica[25]. En 1912, tres años antes de completar su teoría de la Relatividad General, Einstein ya había hecho avances en el estudio de la desviación de la luz en un campo gravitacional, pero no publicó su trabajo sino hasta 1936. A modo de anécdota contamos que ese trabajo fue publicado debido a la insistencia de un joven ingeniero y científico aficionado de nombre Rudi W. Mandl, a quien le interesaba el tema. Finalmente, y rendido ante la insistencia de Mandl, Einstein publica un trabajo titulado *Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field* donde recupera sus resultados de 1912. Pero era tal el nivel de descrédito por parte de Einstein respecto de este tema que en una carta al editor de la revista *Science*, donde se publica el trabajo, escribe[23]: “ *Let me also thank you for your cooperation with the little publication, which Mister Mandl squeezed out of me. It is of little value, but it makes the poor guy happy* ”.

Esta situación cambió con el anuncio de la detección del primer candidato a lente gravitacional (Walsh et al) en 1979. A partir de ese momento las lentes gravitacionales se convirtieron en una poderosa herramienta para la investigación astronómica y astrofísica.

Hoy en día las lentes gravitacionales tienen importancia fundamental, tanto teórica como observacional, a la hora, por ejemplo, de abordar el problema de la materia contenida en el Universo, principalmente para proponer modelos sobre la naturaleza

última de la materia oscura, a partir de analizar el comportamiento de la luz en la vecindad de una distribución de materia.

Otra aplicación de las lentes gravitacionales es que se utilizan técnicas basadas en este efecto para analizar el espectro de potencias del CMB[18]. Y la lista de usos prácticos de las lentes gravitacionales continúa.

El presente trabajo tiene por finalidad ahondar en los resultados obtenidos en [13], donde se obtuvieron expresiones para los escalares ópticos a primer orden en la perturbación de la métrica sobre un background plano, así como también una expresión para el ángulo de deflexión producido por lentes delgadas y axialmente simétricas también a primer orden, siempre dentro del contexto de lentes débiles.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1 damos un introducción general sobre lentes gravitacionales débiles y presentamos los resultados principales obtenidos en [13]. En el Capítulo 2, obtenemos expresiones para los escalares ópticos a segundo orden en la perturbación de la métrica plana de forma general en el sentido que no hacemos mención de la extensión de la lente ni de su forma. Como una aplicación de ello, realizamos el cálculo explícito en el gauge de Poisson considerando no sólo perturbaciones escalares sino también vectoriales y tensoriales. En el Capítulo 3 obtenemos expresiones para los escalares ópticos bajo la aproximación de lente delgada. Dentro de esta aproximación estudiamos el caso de lentes axialmente simétricas y damos una expresión tanto para los escalares ópticos como para el ángulo de deflexión.

Concluimos con un resumen de los principales resultados de este trabajo y una lista de posibles estudios futuros.

Capítulo 1

Lentes gravitacionales

La bibliografía referida a lentes gravitacionales es amplia y extensa [2, 25], por citar algunas. Aquí sólo haremos mención de los conceptos más relevantes y que serán objeto de estudio en este trabajo.

En la Figura 1.1 se considera una situación típica de lente gravitacional débil, donde tenemos una distribución de materia a una distancia d_l , respecto del observador, desviando la luz emitida por una fuente situada a una distancia d_s , respecto del mismo observador. Estas distancias se denominan *distancias diámetro-angular*.

Esta desviación de la luz viene determinada por el ángulo de deflexión α que se muestra en la misma figura. La ecuación para *lentes débiles*, que relaciona la posición de la fuente β con la posición de la imagen θ viene dada por:

$$\beta^a = \theta^a - \frac{d_{ls}}{d_s} \alpha^a, \quad (1.1)$$

y constituye la ecuación fundamental en la teoría de lentes gravitacionales débiles.

Vamos a estudiar los efectos de las lentes gravitacionales en el régimen de lentes débiles sobre un background plano, es decir:

- Los efectos gravitacionales sobre la trayectoria de la luz son débiles. Lo cual nos permitirá abordar un enfoque perturbativo del problema.
- La trayectoria real de la luz puede ser considerada como una trayectoria sin perturbar más una corrección de algún orden. Al trabajar sobre un background plano la trayectoria sin perturbar corresponde a una línea recta desde la fuente

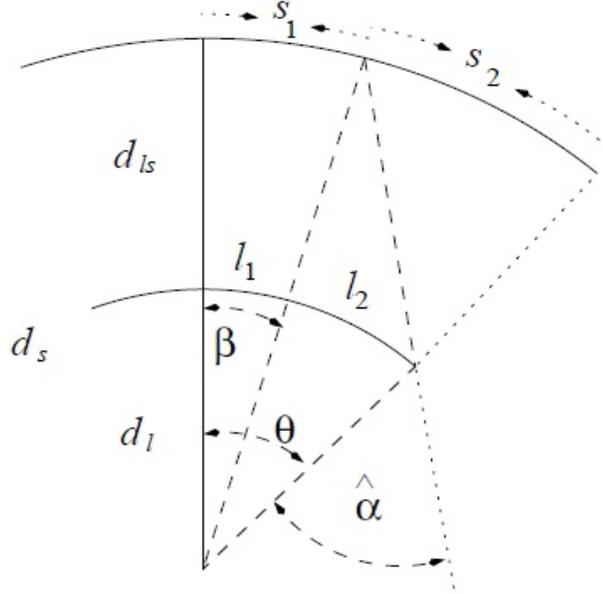


Figura 1.1: Situación típica de lente gravitacional

hasta el observador.

En muchas situaciones astrofísicas de interés suele considerarse que la lente se encuentra muy alejada tanto de la fuente como del observador. Esto nos permite pensar que tanto la fuente como la lente se encuentran cada una colapsada en planos los cuales llamaremos *plano de la fuente* y *plano de la lente*, este último perpendicular a la línea de visión. Esta aproximación se denomina *aproximación de lente delgada*.

En esta aproximación, y despreciando ciertas componentes del tensor energía-momento, la expresión usualmente utilizada para el ángulo de deflexión viene dada por[25]:

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int_{\mathcal{R}^2} d^2\xi' \Sigma(\xi') \frac{\vec{\xi} - \xi'}{|\xi - \xi'|^2}, \quad (1.2)$$

donde $\vec{\xi}$ es el vector de impacto, que indica la posición por la que la luz atraviesa el plano de la lente; $\Sigma(\xi')$ es la densidad de masa superficial que resulta de proyectar la densidad de masa de la lente en el plano de la lente. La integral se realiza sobre el plano de la lente \mathcal{R}^2 . Sin embargo, hay que mencionar que en esta expresión no se consideran las posibles contribuciones espaciales del tensor energía-momento,

restringiendo los posibles modelos de materia oscura que se podrían proponer analizando el comportamiento de la luz en la vecindad de la distribución de materia. Este inconveniente ha sido subsanado en [13] al presentar una expresión para este ángulo en términos tanto de las componentes temporales como espaciales del tensor de energía-momento para un espaciotiempo estacionario y esféricamente simétrico. Recientemente dicha expresión fue generalizada al contexto cosmológico[3].

El diferencial de (1.1) puede ser expresada de la siguiente manera

$$\delta\beta^a = A^a_b \delta\theta^b. \quad (1.3)$$

En [13] se resolvió iterativamente la ecuación de lentes hasta primer orden, donde la *matriz de amplificación* A^a_b resulta ser simétrica[25], pero a fin de considerar los efectos a segundo orden, esta matriz adopta la siguiente forma más general[8]

$$A^a_b = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 - \hat{\omega} \\ -\gamma_2 + \hat{\omega} & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Los escalres ópticos κ , $\gamma \equiv \gamma_1 + i\gamma_2$ y $\hat{\omega}$ se denominan *convergencia*, *shear* y *rotación*, respectivamente. Esta matriz se compone tanto de una parte simétrica, que es la única parte que se tiene en cuenta a primer orden, y otra antisimétrica

$$A^a_b = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \kappa & 0 \\ 0 & 1 - \kappa \end{pmatrix}}_{\text{simétrica con traza}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix}}_{\text{simétrica libre de traza}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\hat{\omega} \\ \hat{\omega} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisimétrica}}. \quad (1.5)$$

El efecto de la convergencia κ , concentrada en la parte simétrica con traza de A^a_b , es la de cambiar el tamaño de la imagen fuente sin modificar su forma (deformación isotrópica de la imagen). La parte de A^a_b simétrica libre de traza, dominada por el shear $\gamma \equiv \gamma_1 + i\gamma_2$ es la responsable de la distorsión de la forma de la imagen (deformación anisotrópica). Por último, la parte antisimétrica de A^a_b , dominada por el escalar $\hat{\omega}$, es la responsable de la rotación de la imagen fuente. Constituye el efecto de rotación para ángulos pequeños. Aclaremos que este efecto no se aprecia en los trabajos sobre lentes a primer orden. Por lo tanto, en esos trabajos no es necesario considerar la parte antisimétrica de A^a_b [13]. En este caso esperamos ver este efecto y por lo tanto sí consideramos esta contribución antisimétrica.

Para poder determinar los elementos de matriz de A^a_b y así obtener información de la imagen fuente a partir de los escalares ópticos procederemos de la siguiente manera.

Consideramos la luz emitida por la fuente como una congruencia de geodésicas nulas moviéndose en el espaciotiempo perturbado (físico) debido a la distribución de materia que está actuando como lente. Vamos a analizar cómo cambia el vector desviación de geodésica desde la fuente hasta el observador y, a partir de esto, obtendremos los escalares ópticos y el ángulo de deflexión que nos darán información acerca de la lente (y la fuente).

1.1. La ecuación de desviación de geodésicas

Consideremos una congruencia de geodésicas nulas desde el punto p_s (fuente) hasta el punto p_0 (observador). Sea $\ell = \frac{\partial}{\partial \lambda}$ el vector tangente a una de las curvas de la congruencia

$$\ell^b \nabla_b \ell^a = 0, \quad (1.6)$$

λ es parámetro afín a todas las geodésicas de la congruencia.

Construimos la congruencia de tal forma que emane perpendicular de una superficie 2-dimensional espacial S , caracterizada por una función $u = u(x^i)$ tal que $u = \text{const}$ a lo largo de la congruencia. Entonces podemos escribir

$$\ell_a = \nabla_a u, \quad (1.7)$$

lo que nos dice que la congruencia tiene twist nulo.

Completamos una tetrad nula $\{\ell^a, n^a, m^a, \bar{m}^a\}$ en este punto considerando dos vectores espaciales ortonormales a ℓ^a , $\{a^a, b^a\}$ en la superficie S , de tal manera que

$$m^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^a + i b^a), \quad (1.8)$$

y realizamos el transporte paralelo de dichos vectores a lo largo de la congruencia. Luego de realizar el transporte paralelo de la tetrad, en particular cuando llegue a p_0 , el vector desviación tendrá componentes en las direcciones $\{m^a, \bar{m}^a, \ell^a\}$.

$$\zeta^a = \zeta \bar{m}^a + \bar{\zeta} m^a + \zeta_\ell \ell^a. \quad (1.9)$$

Sin embargo, la imagen que nosotros percibimos de la fuente es sólo la proyección del vector desviación. Por ello no nos interesaremos en la componente de ζ^a en la dirección de ℓ^a .

A fin de propagar el vector desviación a lo largo de la congruencia, es necesario que su derivada de Lie a lo largo de la misma sea cero[22]

$$\mathcal{L}_\ell \zeta^a = 0, \quad (1.10)$$

lo cual implica que $\ell_a \zeta^a$ es una cantidad conservada a lo largo de ℓ . Explícitamente escribimos la condición (1.10) como

$$\ell^b \nabla_b \zeta^a = \zeta^b \nabla_b \ell^a. \quad (1.11)$$

Como ya dijimos, ζ^a tiene la forma (1.9) a lo largo de la congruencia, entonces reemplazando en (1.11) y contrayendo con m_a cada lado obtenemos

$$\begin{aligned} m_a \ell^b \nabla_b (\zeta \bar{m}^a + \bar{\zeta} m^a + \zeta_\ell \ell^a) &= -\ell^b \nabla_b \zeta + \zeta m_a (\ell^b \nabla_b \bar{m}^a) + \bar{\zeta} m_a (\ell^b \nabla_b m^a) \\ &+ m_a \zeta_\ell (\ell^b \nabla_b \ell^a) + m_a \ell^a \ell^b \nabla_b \zeta_\ell \\ &= -\ell^b \nabla_b \zeta, \end{aligned} \quad (1.12)$$

mientras que en el lado derecho de la ecuación (1.11)

$$\begin{aligned} m_a (\zeta \bar{m}^b + \bar{\zeta} m^b + \zeta_\ell \ell^b) \nabla_b \ell^a &= \zeta (m_a \bar{m}^b \nabla_b \ell^a) + \bar{\zeta} (m_a m^b \nabla_b \ell^a) \\ &+ m_a \zeta_\ell (\ell^b \nabla_b \ell^a) \\ &= \zeta \rho + \bar{\zeta} \sigma, \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde hemos introducido los coeficientes de spin ρ y σ [20].

Obtenemos entonces la siguiente ecuación para el vector desviación de geodésicas en términos de la *expansion* (ρ) y el *shear* (σ) locales de la congruencia.

$$\ell(\zeta) = -\zeta \rho - \bar{\zeta} \sigma. \quad (1.14)$$

La expansión, el shear y el twist de la congruencia están definidos[11] por

$$\theta = \frac{1}{2} \nabla_a \ell^a, \quad (1.15)$$

$$|\sigma| = \left[\frac{1}{2} \nabla_{(b} \ell_{a)} \nabla^b \ell^a - \theta^2 \right]^{1/2}, \quad (1.16)$$

$$\tilde{\omega} = \left[\frac{1}{2} \nabla_{[b} \ell_{a]} \nabla^b \ell^a \right]^{1/2}. \quad (1.17)$$

Su relación con los coeficientes de spin[22] es

$$\theta = -\frac{1}{2}(\rho + \bar{\rho}), \quad (1.18)$$

$$|\sigma|^2 = \sigma \bar{\sigma}, \quad (1.19)$$

$$\omega = \frac{1}{2}|\rho - \bar{\rho}|. \quad (1.20)$$

Además estos escalares satisfacen las siguientes condiciones[20]

$$\ell(\rho) = (\rho^2 + \sigma \bar{\sigma}) + \Phi_{00}, \quad (1.21)$$

$$\ell(\sigma) = (\rho + \bar{\rho})\sigma + \Psi_0, \quad (1.22)$$

donde

$$\Phi_{00} = -\frac{1}{2} R_{ab} \ell^a \ell^b, \quad (1.23)$$

$$\Psi_0 = C_{abcd} \ell^a m^b \ell^c \bar{m}^d. \quad (1.24)$$

Reescribimos estas relaciones como

$$\ell(P) = P^2 + Q, \quad (1.25)$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ \bar{\sigma} & \bar{\rho} \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \Phi_{00} & \Psi_0 \\ \bar{\Psi}_0 & \Phi_{00} \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Entonces podemos escribir (1.14) como

$$\ell(\mathcal{X}) = -P\mathcal{X}, \quad (1.28)$$

donde

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \bar{\zeta} \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

o mejor aún

$$\ell(\ell(\mathcal{X})) = -\ell(P)\mathcal{X} - P\ell(\mathcal{X}) = -P^2\mathcal{X} - Q\mathcal{X} + P^2\mathcal{X} = -Q\mathcal{X}, \quad (1.30)$$

es decir, obtenemos una ecuación para el vector desviación de geodésicas que sólo involucra cantidades de curvatura

$$\boxed{\ell(\ell(\mathcal{X})) = -Q\mathcal{X}}. \quad (1.31)$$

Definiendo

$$\mathcal{V} = \frac{d\mathcal{X}}{d\lambda}, \quad (1.32)$$

$$X = \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \mathcal{V} \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

obtenemos una ecuación de primer grado en X :

$$\boxed{\ell(X) = AX}, \quad (1.34)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -Q & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Esta ecuación puede integrarse numéricamente o bien obtenerse una solución analítica aproximada hasta el orden que deseemos en las componentes de la métrica.

1.2. Solución a primer orden

La solución a primer orden en las componentes de curvatura fue estudiada en detalle en [13]. En ese trabajo, se estudió además lentes axialmente simétricas en la aproximación de lente delgada (donde el eje de simetría coincide con la línea de visión a través de la región central de la distribución de materia y el observador). Se obtuvieron los siguientes resultados invariantes de gauge para el ángulo de deflexión y los escalares ópticos

$$\begin{aligned} \alpha(J) &= J(\hat{\Phi}_{00}(J) + \hat{\psi}_0(J)), \\ \kappa(J) &= \frac{d_{l_s} d_l}{d_s} \hat{\Phi}_{00}(J), \\ \gamma_1(J, \vartheta) &= -\frac{d_{l_s} d_l}{d_s} \hat{\psi}_0(J) \cos(2\vartheta), \\ \gamma_2(J, \vartheta) &= -\frac{d_{l_s} d_l}{d_s} \hat{\psi}_0(J) \sin(2\vartheta), \end{aligned} \quad (1.36)$$

donde J es la coordenada radial en el plano de la lente correspondiente al parámetro de impacto y ϑ es la coordenada angular en el mismo plano. Se define $\hat{\Psi}_0(J) = -e^{2i\vartheta} \hat{\psi}_0(J)$ y las proyecciones sobre la línea de visión como

$$\hat{\Phi}_{00} = \int_0^{d_s} \Phi_{00} d\lambda \quad , \quad \hat{\Psi}_0 = \int_0^{d_s} \Psi_0 d\lambda, \quad (1.37)$$

donde λ es un parámetro afín a la trayectoria.

En particular, en [13] se presenta un estudio detallado de lentes esféricamente simétricas y estacionarias, donde se obtienen expresiones no en términos de las componentes de la métrica sino en términos de las componentes del tensor energía-momento

$$\alpha(J) = J \int_{-d_l}^{d_{ls}} \left[\frac{3J^2}{r^2} \left(\frac{M(r)}{r^3} - \frac{4\pi}{3} \rho(r) \right) + 4\pi(\rho(r) + P_r(r)) \right] dy, \quad (1.38)$$

$$\kappa(J) = \frac{4\pi d_l d_{ls}}{d_s} \int_{-d_l}^{d_{ls}} \left[\rho(r) + P_r(r) + \frac{J^2}{r^2} (P_t(r) - P_r(r)) \right] dy, \quad (1.39)$$

$$\gamma(J) = \frac{d_l d_{ls}}{d_s} \int_{-d_l}^{d_{ls}} \frac{J^2}{r^2} \left[\frac{3M(r)}{r^3} - 4\pi(\rho(r) + P_t(r) - P_r(r)) \right] dy, \quad (1.40)$$

donde $r = \sqrt{J^2 + y^2}$ y hemos definido $\gamma := \gamma_1 + i\gamma_2$.

Hay que resaltar que la expresión (1.38) contempla las componentes espaciales del tensor energía-momento (P_t, P_r) y no sólo la componente temporal (ρ) del mismo, como sucede en la bibliografía estándar[25].

Aplicaciones de estas ecuaciones pueden ser encontradas en [5, 12].

Capítulo 2

Solución a segundo orden

2.1. Escalares ópticos a segundo orden

En este capítulo nos proponemos extender algunos de los resultados hallados en [13] a segundo orden en la perturbación de la métrica plana. Este no es el primer trabajo que hace estudios del fenómeno de lentes a dicho orden. Varios autores han analizado el mismo tanto en situaciones astrofísicas como cosmológicas. Por ejemplo, para situaciones astrofísicas, en [6] se estudia la deflexión de la luz a segundo orden en $G/c^2 = \varepsilon$ para un sistema ligado de dos masas puntuales. En [10] se estudia la ecuación de la lente débil exacta en un espaciotiempo de Schwarzschild y en particular la ecuación de la lente a segundo orden en ε . En [26] se estudia la ecuación de lente débil a segundo orden en ε dentro del formalismo postnewtoniano. Estudios de índole cosmológica que incluyen efectos de lente a segundo orden tanto para analizar el espectro de potencias del CMB o la relación distancia-redshift pueden ser encontradas en [4, 9, 14, 16, 19, 21, 24]

A diferencia del trabajo presentado en [13], no es nuestra intención obtener expresiones similares a (1.38), (1.39) y (1.40) en términos de las componentes del tensor energía-momento a segundo orden. Sino que dejaremos expresado los escalares ópticos a segundo orden en la perturbación de la métrica plana, y finalizaremos el capítulo con el cálculo explícito de estas cantidades en un gauge en particular considerando perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales[4].

Para ello, empezaremos resolviendo la ecuación (1.34) de forma iterativa hasta

quedarnos sólo con cantidades cuadráticas de Q^1 :

$$X_1(\lambda) = X_0 + \int_{\lambda_0}^{\lambda} A(\lambda') X_0 d\lambda', \quad (2.1)$$

$$X_2(\lambda) = X_0 + \int_{\lambda_0}^{\lambda} A(\lambda') X_1 d\lambda', \quad (2.2)$$

reemplazando (2.1) en (2.2)

$$X_2(\lambda) = X_1 + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} A(\lambda') A(\lambda'') X_0 d\lambda'' d\lambda', \quad (2.3)$$

notemos que en el n -ésimo paso iterativo aparece n veces la matriz A entonces:

$$A(\lambda') A(\lambda'') A(\lambda''') A(\lambda^{iv}) = \begin{pmatrix} Q(\lambda'') Q(\lambda^{iv}) & 0 \\ 0 & Q(\lambda') Q(\lambda''') \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$A(\lambda') A(\lambda'') A(\lambda''') A(\lambda^{iv}) A(\lambda^v) = \begin{pmatrix} 0 & Q(\lambda'') Q(\lambda^{iv}) \\ -Q(\lambda') Q(\lambda^{iv}) Q(\lambda^v) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$A(\lambda') A(\lambda'') A(\lambda''') A(\lambda^{iv}) A(\lambda^v) A(\lambda^{vi}) = \begin{pmatrix} -Q(\lambda'') Q(\lambda^{iv}) Q(\lambda^{vi}) & 0 \\ Q(\lambda') Q(\lambda^{iv}) Q(\lambda^v) Q(\lambda^{vi}) & -Q(\lambda') Q(\lambda^{iv}) Q(\lambda^v) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Por lo tanto, basta considerar hasta la 5^{ta} iteración para obtener todos los términos cuadráticos en Q . Despreciando el término cúbico en Q que aparece obtenemos:

¹Asumiendo que Q es pequeño, en algún sentido, uno espera que esta sucesión converja a una solución.

$$\begin{aligned}
X_5(\lambda) = & X_0 + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(\lambda') & 0 \end{pmatrix} d\lambda' X_0 + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} \begin{pmatrix} -Q(\lambda'') & 0 \\ 0 & -Q(\lambda') \end{pmatrix} \\
& d\lambda'' d\lambda' X_0 + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} \int_{\lambda_0}^{\lambda''} \begin{pmatrix} 0 & -Q(\lambda''') \\ Q(\lambda')Q(\lambda''') & 0 \end{pmatrix} d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' X_0 \\
& + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} \int_{\lambda_0}^{\lambda''} \int_{\lambda_0}^{\lambda'''} \begin{pmatrix} Q(\lambda'')Q(\lambda^{iv}) & 0 \\ 0 & Q(\lambda')Q(\lambda''') \end{pmatrix} d\lambda^{iv} d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' X_0 \\
& + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} \int_{\lambda_0}^{\lambda''} \int_{\lambda_0}^{\lambda'''} \int_{\lambda_0}^{\lambda^{iv}} \begin{pmatrix} 0 & Q(\lambda'')Q(\lambda^{iv}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\lambda^{iv} d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' X_0,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

reescribimos de la siguiente manera

$$X_5(\lambda) = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{pmatrix} X_0, \tag{2.8}$$

donde

$$B_{00} = \mathbb{1} - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} Q(\lambda'') d\lambda'' d\lambda' + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} \int_{\lambda_0}^{\lambda''} \int_{\lambda_0}^{\lambda'''} Q(\lambda'') Q(\lambda''') d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' d\lambda', \tag{2.9}$$

$$B_{11} = \mathbb{1} - \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda' - \lambda_0) Q(\lambda') d\lambda' + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} \int_{\lambda_0}^{\lambda''} (\lambda''' - \lambda_0) Q(\lambda') Q(\lambda''') d\lambda''' d\lambda'' d\lambda', \tag{2.10}$$

$$B_{10} = - \int_{\lambda_0}^{\lambda} Q(\lambda') d\lambda' + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} \int_{\lambda_0}^{\lambda''} Q(\lambda') Q(\lambda''') d\lambda''' d\lambda'' d\lambda', \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
B_{01} = & \mathbb{1}(\lambda - \lambda_0) - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} (\lambda'' - \lambda_0) Q(\lambda'') d\lambda'' d\lambda' \\
& + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} \int_{\lambda_0}^{\lambda''} \int_{\lambda_0}^{\lambda'''} (\lambda^{iv} - \lambda_0) Q(\lambda'') Q(\lambda''') d\lambda^{iv} d\lambda''' d\lambda'' d\lambda'.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Notemos que en B_{11} y B_{01} hemos realizado algunas integrales explícitamente, pues Q no depende del parámetro respecto del cual estamos integrando.

Realizamos las integraciones desde la posición del observador en λ_0 . Como el vector desviación de geodésicas debe ser nulo en λ_0 pero no así su derivada respecto del parámetro afín, el dato inicial debe ser

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{V}(\lambda_0) \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Con estas consideraciones obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\lambda) &= B_{01} \mathcal{V}(\lambda_0) \\ \mathcal{V}(\lambda) &= B_{11} \mathcal{V}(\lambda_0), \end{aligned} \quad (2.14)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\lambda) &= \left[\mathbb{1}(\lambda - \lambda_0) - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} (\lambda'' - \lambda_0) Q(\lambda'') d\lambda'' d\lambda' \right. \\ &\quad \left. + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} \int_{\lambda_0}^{\lambda''} \int_{\lambda_0}^{\lambda'''} (\lambda'''' - \lambda_0) Q(\lambda'') Q(\lambda''') d\lambda'''' d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' \right] \mathcal{V}(\lambda_0), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\lambda) &= \left[\mathbb{1} - \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda' - \lambda_0) Q(\lambda') d\lambda' + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} \int_{\lambda_0}^{\lambda''} (\lambda''' - \lambda_0) Q(\lambda') Q(\lambda'') \right. \\ &\quad \left. d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' \right] \mathcal{V}(\lambda_0), \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde (2.16) coincide con la derivada de (2.15) respecto de λ , como tiene que ser. Usando la siguiente relación que se obtiene integrando por partes

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} (\lambda'' - \lambda_0) Q(\lambda'') d\lambda'' d\lambda' = \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda - \lambda') (\lambda' - \lambda_0) Q(\lambda') d\lambda', \quad (2.17)$$

obtenemos de (2.15) lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\lambda) = & \left[\mathbb{1}(\lambda - \lambda_0) - \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda - \lambda')(\lambda' - \lambda_0)Q(\lambda')d\lambda' \right. \\ & \left. + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda'} \int_{\lambda_0}^{\lambda''} (\lambda'' - \lambda''')(\lambda''' - \lambda_0)Q(\lambda'')Q(\lambda''')d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' \right] \mathcal{V}(\lambda_0). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Si la métrica fuera plana ($Q = 0$) el vector desviación en la posición de la fuente $\lambda_s = \lambda_0 + d_s$ sería

$$\mathcal{X}_s \equiv \mathcal{X}(\lambda_s) = (\lambda_s - \lambda_0)\mathcal{V}(\lambda_0) \Rightarrow \mathcal{V}(\lambda_0) = \frac{\mathcal{X}(\lambda_s)}{\lambda_s - \lambda_0} = \frac{\mathcal{X}(\lambda_s)}{d_s}. \quad (2.19)$$

En presencia de una lente gravitacional, si un observador ve una imagen de tamaño \mathcal{X}_0 , que significa $\mathcal{X}_0 = d_s \mathcal{V}_0$, entonces ésta debe ser producida por una lente de tamaño $\mathcal{X}_s = \mathcal{X}(\lambda_s)$ descrita por (2.18). Para simplificar la notación elegimos $\lambda_0 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_s = & \left[\mathbb{1} - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda'(\lambda_s - \lambda')Q(\lambda')d\lambda' + \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda'''(\lambda'' - \lambda''') \right. \\ & \left. Q(\lambda'')Q(\lambda''')d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' \right] \mathcal{X}_0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde el vector desviación en la posición de la fuente \mathcal{X}_s y en la posición del observador \mathcal{X}_0 vienen dados por

$$\mathcal{X}_s = \begin{pmatrix} \zeta_s \\ \bar{\zeta}_s \end{pmatrix} \quad \mathcal{X}_0 = \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \bar{\zeta}_0 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

A fin de dejar expresado (2.20) en término de las cantidades de curvatura Φ_{00} y Ψ_0 debemos considerar el siguiente producto matricial

$$\begin{aligned}
 Q(\lambda'')Q(\lambda''') &= \begin{pmatrix} \Phi_{00}(\lambda'') & \Psi_0(\lambda'') \\ \bar{\Psi}_0(\lambda'') & \Phi_{00}(\lambda'') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{00}(\lambda''') & \Psi_0(\lambda''') \\ \bar{\Psi}_0(\lambda''') & \Phi_{00}(\lambda''') \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \Phi_{00}(\lambda'')\Phi_{00}(\lambda''') + \Psi_0(\lambda'')\bar{\Psi}_0(\lambda''') & \Phi_{00}(\lambda'')\Psi_0(\lambda''') + \Psi_0(\lambda'')\Phi_{00}(\lambda''') \\ \bar{\Psi}_0(\lambda'')\Phi_{00}(\lambda''') + \Phi_{00}(\lambda'')\bar{\Psi}_0(\lambda''') & \bar{\Psi}_0(\lambda'')\Psi_0(\lambda''') + \Phi_{00}(\lambda'')\Phi_{00}(\lambda''') \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Entonces, considerando sólo la primer componente en la relación vectorial (2.20) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \zeta_s &= \left[1 - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda'(\lambda_s - \lambda')\Phi_{00}(\lambda')d\lambda' + \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda'''(\lambda'' - \lambda''') \left(\Phi_{00}(\lambda'') \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \Phi_{00}(\lambda''') + \Psi_0(\lambda'')\bar{\Psi}_0(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' \right] \zeta_o + \left[-\frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda'(\lambda_s - \lambda')\Psi_0(\lambda')d\lambda' \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda'''(\lambda'' - \lambda''') \left(\Phi_{00}(\lambda'')\Psi_0(\lambda''') + \Psi_0(\lambda'')\Phi_{00}(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' \right] \\
 &\quad \bar{\zeta}_o.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Obviamente no es necesario considerar la segunda componente en (2.20) pues es sólo el complejo conjugado de la primera.

Consideremos ahora dos cuestiones

1. A priori nos hace falta considerar los escalares Φ_{00} y Ψ_0 a segundo orden en la perturbación de la métrica, excepto obviamente en aquellos términos donde aparece el producto entre ellos donde sólo basta considerarlos hasta primer orden. Para ello es necesario considerar los tensores R_{ab} y C_{abcd} hasta segundo orden y la tetrad $(\ell^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$ sólo hasta primer orden pues en el background R_{ab} y C_{abcd} son cero. Es decir, sea

$$\begin{aligned}
 C_{abcd} &= \varepsilon C_{abcd}^{(1)} + \varepsilon^2 C_{abcd}^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\
 R_{ab} &= \varepsilon R_{ab}^{(1)} + \varepsilon^2 R_{ab}^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3),
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}\ell^a &= \ell^{(0)a} + \varepsilon \ell^{(1)a} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ m^a &= m^{(0)a} + \varepsilon m^{(1)a} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{2.25}$$

Para los otros dos vectores de la tetraeda hacemos lo mismo pero no los usamos en lo que sigue. Con las expansiones (2.24) y (2.25) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\Phi_{00} &= \varepsilon \Phi_{00}^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi_{00}^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ \Psi_0 &= \varepsilon \Psi_0^{(1)} + \varepsilon^2 \Psi_0^{(2)} + \mathcal{O}(\varepsilon^3),\end{aligned}\tag{2.26}$$

donde

$$\begin{aligned}\Phi_{00}^{(1)} &\equiv -\frac{1}{2}R_{ab}^{(1)}\ell^{(0)a}\ell^{(0)b}, \\ \Phi_{00}^{(2)} &\equiv -R_{ab}^{(1)}(\ell^{(0)a}\ell^{(1)b} + \ell^{(0)b}\ell^{(1)a}) + \frac{1}{2}R_{ab}^{(2)}\ell^{(0)a}\ell^{(0)b}, \\ \Psi_0^{(1)} &\equiv C_{abcd}^{(1)}\ell^{(0)a}m^{(0)b}\ell^{(0)c}m^{(0)d}, \\ \Psi_0^{(2)} &\equiv 2C_{abcd}^{(1)}\ell^{(0)a}m^{(0)b}(\ell^{(0)c}m^{(1)d} + m^{(0)d}\ell^{(1)c}) + C_{abcd}^{(2)}\ell^{(0)a}m^{(0)b}\ell^{(0)c}m^{(0)d}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

2. A priori las integrales en (2.23) son realizadas a lo largo de la trayectoria perturbada, la cual, vía la aproximación de Born, puede ser aproximada de la siguiente manera

$$x_{pert}^a(\lambda) = x^{(0)a}(\lambda) + \varepsilon \delta x^{(1)a}(\lambda) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).\tag{2.28}$$

En el régimen de lentes débiles, suponemos que ésta es una buena aproximación a la trayectoria perturbada.

Expandiendo los escalares Φ_{00} y Ψ_0 alrededor de la trayectoria del background y considerando lo explicado en el punto anterior obtenemos que la contribución a segundo orden de estos escalares es

$$\begin{aligned}
 \Psi_0(x_{pert}^a(\lambda)) &= \Psi_0^{(1)}(x^{(0)a}(\lambda)) + \delta x^{(1)a}(\lambda) \left. \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial x^a} \right|_{x^{(0)a}(\lambda)} + \Psi_0^{(2)}(x^{(0)a}(\lambda)), \\
 \Phi_{00}(x_{pert}^a(\lambda)) &= \Phi_{00}^{(1)}(x^{(0)a}(\lambda)) + \delta x^{(1)a}(\lambda) \left. \frac{\partial \Phi_{00}^{(1)}}{\partial x^a} \right|_{x^{(0)a}(\lambda)} + \Phi_{00}^{(2)}(x^{(0)a}(\lambda)).
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Teniendo en consideración estas cuestiones, las componentes del vector desviación a segundo orden serán las siguientes

$$\begin{aligned}
 \zeta_s &= \left[1 - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda'(\lambda_s - \lambda') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda') d\lambda' - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda'(\lambda_s - \lambda') \Phi_{00}^{(2)}(\lambda') d\lambda' \right. \\
 &\quad - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda'(\lambda_s - \lambda') \delta x^{(1)a}(\lambda') \left. \frac{\partial \Phi_{00}^{(1)}}{\partial x^a} \right|_{\lambda'} d\lambda' + \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda'''(\lambda'' - \lambda''') \\
 &\quad \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda'') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda''') + \Psi_0^{(1)}(\lambda'') \bar{\Psi}_0^{(1)}(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' \Big] \zeta_o + \left[- \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda'(\lambda_s - \lambda') \right. \\
 &\quad \Psi_0^{(1)}(\lambda') d\lambda' - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda'(\lambda_s - \lambda') \Psi_0^{(2)}(\lambda') d\lambda' - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda'(\lambda_s - \lambda') \delta x^{(1)a}(\lambda') \left. \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial x^a} \right|_{\lambda'} \\
 &\quad d\lambda' + \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda'''(\lambda'' - \lambda''') \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda'') \Psi_0^{(1)}(\lambda''') + \Psi_0^{(1)}(\lambda'') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda''') \right) d\lambda''' \\
 &\quad \left. d\lambda'' d\lambda' \right] \bar{\zeta}_o,
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

donde todas las cantidades quedan ahora expresadas en término de la trayectoria sin perturbar de la geodésica nula y las integrales se realizan a lo largo de la misma, y ya no de la trayectoria perturbada.

Separaremos en parte real y parte imaginaria el escalar de Weyl y las componentes del vector desviación en la fuente y en el observador. Sea

$$\begin{aligned}
 \Psi_0 &= \Psi_{0R} + i \Psi_{0I}, \\
 \zeta_s &= \zeta_{sR} + i \zeta_{sI}, \\
 \zeta_o &= \zeta_{oR} + i \zeta_{oI}.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Luego, reemplazando en (2.30) podemos separar la parte real e imaginaria del vector desviación en la fuente de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\zeta_{sR} &= A \zeta_{oR} + B \zeta_{oI}, \\ \zeta_{sI} &= A' \zeta_{oR} + B' \zeta_{oI},\end{aligned}\tag{2.32}$$

donde los coeficientes $\{A, A', B, B'\}$ vienen dados por

$$\begin{aligned}A &= 1 - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda' (\lambda_s - \lambda') \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda') + \Phi_{00}^{(2)}(\lambda') + \delta x^{(1)a}(\lambda') \frac{\partial \Phi_{00}^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{\lambda'} + \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda') \right. \\ &\quad \left. + \Psi_{0R}^{(2)}(\lambda') + \delta x^{(1)a}(\lambda') \frac{\partial \Psi_{0R}^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{\lambda'} \right) d\lambda' + \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \\ &\quad \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda'') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda''') + \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda''') + \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda''') + \Phi_{00}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda''') \right. \\ &\quad \left. + \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda'') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda',\end{aligned}\tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}B &= -\frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda' (\lambda_s - \lambda') \left(\Psi_{0I}^{(1)}(\lambda') + \Psi_{0I}^{(2)}(\lambda') + \delta x^{(1)a}(\lambda') \frac{\partial \Psi_{0I}^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{\lambda'} \right) d\lambda' \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda''') + \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda'') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' \\ &\quad - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \left(\Psi_{0I}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda''') - \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda',\end{aligned}\tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}A' &= -\frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda' (\lambda_s - \lambda') \left(\Psi_{0I}^{(1)}(\lambda') + \Psi_{0I}^{(2)}(\lambda') + \delta x^{(1)a}(\lambda') \frac{\partial \Psi_{0I}^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{\lambda'} \right) d\lambda' \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda''') + \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda'') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \left(\Psi_{0I}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda''') - \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda',\end{aligned}\tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
B' = & 1 - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda' (\lambda_s - \lambda') \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda') + \Phi_{00}^{(2)}(\lambda') + \delta x^{(1)a}(\lambda') \frac{\partial \Phi_{00}^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{\lambda'} \right) d\lambda' \\
& + \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda'') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda''') + \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda''') \right. \\
& \left. + \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' + \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda' (\lambda_s - \lambda') \left(\Psi_{0R}^{(1)}(\lambda') + \Psi_{0R}^{(2)}(\lambda') \right. \\
& \left. + \delta x^{(1)a}(\lambda') \frac{\partial \Psi_{0R}^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{\lambda'} d\lambda' \right) d\lambda' - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda''') \right. \\
& \left. + \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda'') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda'.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Ahora lo que necesitamos es relacionar las componentes del vector desviación en la posición de la fuente y en la posición del observador mediante la *ecuación de lentes* (1.3) para poder expresar los escalares ópticos en términos de las cantidades de curvatura Φ_{00} y Ψ_0 .

La ecuación de lentes (1.3) relaciona las componentes espaciales del vector desviación de geodésicas en la fuente y en el observador por

$$\zeta_s^i = A^i_j \zeta_o^j, \tag{2.37}$$

donde $\{\zeta_s^i, \zeta_o^i\}$ son los vectores espaciales asociados con $\{\zeta_s, \zeta_o\}$.

Como no estamos interesados en la componente de ζ^a en la dirección de ℓ^a , consideraremos únicamente la proyección del vector desviación en la base $\{m^a, \bar{m}^a\}$

$$\zeta^a = \zeta \bar{m}^a + \bar{\zeta} m^a. \tag{2.38}$$

Separando sus componentes en parte real e imaginaria y expresando ζ^a en una base ortonormal $\{a^a, b^a\}$ donde

$$m^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^a + i b^a), \tag{2.39}$$

obtenemos lo siguiente

$$\zeta^a = \frac{2}{\sqrt{2}}(\zeta_R a^a + \zeta_I b^a). \quad (2.40)$$

Entonces en esta base, la relación (2.37) nos queda

$$\begin{pmatrix} \zeta_{sR} \\ \zeta_{sI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 - \hat{\omega} \\ -\gamma_2 + \hat{\omega} & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{oR} \\ \zeta_{oI} \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Explícitamente

$$\begin{aligned} \zeta_{sR} &= (1 - \kappa - \gamma_1) \zeta_{oR} - (\gamma_2 + \hat{\omega}) \zeta_{oI}, \\ \zeta_{sI} &= -(\gamma_2 - \hat{\omega}) \zeta_{oR} + (1 - \kappa + \gamma_1) \zeta_{oI}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Comparando (2.42) con (2.32) obtenemos las siguientes expresiones para los escalares ópticos

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda' (\lambda_s - \lambda') \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda') + \Phi_{00}^{(2)}(\lambda') + \delta x^{(1)a}(\lambda') \frac{\partial \Phi_{00}^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{\lambda'} \right) d\lambda' \\ &\quad - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda'') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda''') + \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda''') \right. \\ &\quad \left. + \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda', \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda' (\lambda_s - \lambda') \left(\Psi_{0R}^{(1)}(\lambda') + \Psi_{0R}^{(2)}(\lambda') + \delta x^{(1)a}(\lambda') \frac{\partial \Psi_{0R}^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{\lambda'} \right) d\lambda' \\ &\quad - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda''') + \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda'') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda', \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda' (\lambda_s - \lambda') \left(\Psi_{0I}^{(1)}(\lambda') + \Psi_{0I}^{(2)}(\lambda') + \delta x^{(1)a}(\lambda') \frac{\partial \Psi_{0I}^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{\lambda'} \right) d\lambda' \\ &\quad - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda''') + \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda'') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda', \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \left(\Psi_{0I}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda''') - \Psi_{0R}^{(1)}(\lambda'') \Psi_{0I}^{(1)}(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda', \quad (2.46)$$

Podemos reescribir todo como

$$\begin{aligned}
 \kappa = & \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda' (\lambda_s - \lambda') \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda') + \Phi_{00}^{(2)}(\lambda') + \delta x^{(1)a}(\lambda') \frac{\partial \Phi_{00}^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{\lambda'} \right) d\lambda' \\
 & - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda'') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda''') + \text{Re}\{\Psi_0^{(1)}(\lambda'') \bar{\Psi}_0^{(1)}(\lambda''')\} \right) \\
 & d\lambda''' d\lambda'' d\lambda',
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 + i \gamma_2 \equiv & \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda' (\lambda_s - \lambda') \left(\Psi_0^{(1)}(\lambda') + \Psi_0^{(2)}(\lambda') + \delta x^{(1)a}(\lambda') \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{\lambda'} \right) d\lambda' \\
 & - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \left(\Phi_{00}^{(1)}(\lambda'') \Psi_0^{(1)}(\lambda''') + \Psi_0^{(1)}(\lambda'') \Phi_{00}^{(1)}(\lambda''') \right) \\
 & d\lambda''' d\lambda'' d\lambda',
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \text{Im}\{\Psi_0^{(1)}(\lambda'') \bar{\Psi}_0^{(1)}(\lambda''')\} d\lambda''' d\lambda'' d\lambda', \tag{2.49}$$

Las expresiones (2.47), (2.48) y (2.49) para los escalares ópticos son las expresiones a segundo orden más generales que podemos obtener sin hacer ninguna suposición acerca de la extensión de la lente ni de su forma y constituyen uno de los resultados principales de este trabajo.

Una cuestión muy importante acerca de estas expresiones es la siguiente. Consideremos primero la convergencia κ . A primer orden podemos decir que la distorsión isotrópica de la imagen tiene su fuente debida únicamente a la presencia de Φ_{00} de forma lineal. Sin embargo, a segundo orden nos aparecen términos de la forma $\Phi_{00}^{(1)} \Phi_{00}^{(1)}$ y $\Psi_0^{(1)} \bar{\Psi}_0^{(1)}$, es decir que ahora κ también tiene contribuciones de Φ_{00} y de Ψ_0 pero de forma cuadrática. Algo similar ocurre con el shear γ . A segundo orden no sólo tenemos contribuciones de Ψ_0 de forma lineal sino que aparecen términos de la forma $\Phi_{00}^{(1)} \Psi_0^{(1)}$. La pregunta es, ¿Tiene sentido que suceda esto?

Si analizamos las ecuaciones (1.21) y (1.22) para la expansión ρ y el shear σ locales de la congruencia

$$\ell(\rho) = (\rho^2 + \sigma\bar{\sigma}) + \Phi_{00}, \quad (2.50)$$

$$\ell(\sigma) = (\rho + \bar{\rho})\sigma + \Psi_0, \quad (2.51)$$

vemos que efectivamente sólo a primer orden ρ está dominado por Φ_{00} y σ por Ψ_0 , pero a segundo orden ρ tendrá tanto contribuciones de Φ_{00} como de Ψ_0 , y lo mismo pasa con σ . Entonces tiene bastante sentido que nos hayan quedado las expresiones para los escalares ópticos de esa forma.

Veamos que sucede con $\hat{\omega}$. Recordemos que habíamos considerado que la congruencia emanaba perpendicularmente de una superficie espacial S , para la cual era condición necesaria y suficiente que la congruencia tuviera twist cero, sin embargo en (2.49) vemos que el escalar óptico asociado a la rotación de la imagen no es cero. Lo que pasa es que si bien el twist vale cero, ésta es una propiedad local de la congruencia y cuando integramos iterativamente la ecuación de desviación de geodésicas, el efecto acumulativo debido al shear en distintos puntos del camino de las geodésicas nulas hace que esta propiedad local de la congruencia no se mantenga globalmente y nos aparezca el escalar $\hat{\omega}$ asociado a la rotación de la imagen. Ver [15] para la discusión de este fenómeno.

Como novedad podemos decir que $\hat{\omega}$ no aparece en trabajos a primer orden [13] y en muchos trabajos a segundo orden lo consideran directamente nulo o despreciable. En particular, en la aproximación de lente delgada que desarrollaremos en el próximo capítulo, veremos que $\hat{\omega}$ es exactamente nulo.

2.2. Aplicación

En esta sección calcularemos explícitamente los escalares ópticos en el llamado gauge generalizado de Poisson donde la métrica puede ser escrita de la siguiente manera[7]

$$ds^2 = -e^{2\phi} dt^2 + 2\omega_i dt dx^i + (e^{-2\psi} \delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j, \quad (2.52)$$

donde se cumplen las siguientes condiciones

$$\partial^i \omega_i = 0 \quad , \quad \partial^i h_{ij} = 0 \quad , \quad h_i^i = 0 \quad , \quad h_{ij} = h_{ji}. \quad (2.53)$$

Los coeficientes de conexión asociados a esta métrica son

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (2.54)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \quad (2.55)$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{\partial \omega^i}{\partial t} + e^{2(\psi+\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}, \quad (2.56)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) - e^{-2(\psi+\phi)} \frac{\partial \psi}{\partial t} \delta_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ij}}{\partial t}, \quad (2.57)$$

$$\Gamma_{0j}^i = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \delta_j^i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega^i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial h_j^i}{\partial t}, \quad (2.58)$$

$$\Gamma_{jk}^i = -\frac{\partial \psi}{\partial x^k} \delta_j^i - \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \delta_k^i + \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \delta_{jk} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_j^i}{\partial x^k} + \frac{\partial h_k^i}{\partial x^j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} \right). \quad (2.59)$$

El motivo de analizar los escalares en este gauge, se debe a que el mismo es muy utilizado en cosmología (donde además, claro está, aparece el factor de expansión), y por otro lado resultados parciales de los escalares ópticos a segundo orden ya se encuentran en la literatura (ver por ejemplo [4], donde se analiza la convergencia a segundo orden en este gauge pero despreciando términos asociados a las perturbaciones vectoriales y tensoriales). De este modo, este gauge se convierte en un candidato a tener en cuenta para calcular explícitamente los escalares ópticos y comparar con aquellos encontrados en [4]. Como dijimos, en el contexto analizado en [4], se considera que tanto las perturbaciones vectoriales ω_i como tensoriales h_{ij} son cantidades a segundo orden, ya que están analizando perturbaciones primordiales de origen cosmológico motivadas en modelos inflacionarios. Una justificación para tal hecho, en

dichos modelos, puede ser encontrada en [1]. Por otro lado, ellos también desprecian todas aquellas derivadas temporales de las componentes de la métrica y en la dirección del movimiento de las geodésicas nulas. En particular, también descartan todo término que contenga menos de cuatro derivadas en la dirección transversal al movimiento. Si bien todas estas suposiciones están bien motivadas en su marco (para mayor detalle referirse a [4]), nosotros no haremos uso de ninguna de tales suposiciones, con la única excepción de que también consideraremos a las componentes vectoriales y tensoriales como de segundo orden, pero esto es tan solo al fin de simplificar los cálculos. Cabe destacar entonces, que si bien nuestros resultados serán más generales que los presentados en [4], estos aún no son lo suficientemente generales como para contener otras potenciales situaciones astrofísicas.

Como vimos anteriormente en (2.29) necesitamos contar explícitamente con una tetraada transportada paralelo hasta primer orden (en realidad sólo necesitamos ℓ^a y m^a), además debemos calcular la corrección δx^a a la trayectoria y los tensores de Ricci y Weyl hasta segundo orden.

Cálculo de la tetraada

A fin de poder comparar nuestras expresiones con otras encontradas en la literatura, en particular en [4], consideraremos el siguiente cambio de coordenadas

$$\chi = t_0 - t, \quad (2.60)$$

donde t_0 es el tiempo de observación actual. Por otro lado, se puede reparametrizar a las geodésicas nulas y utilizar a χ como parámetro. En este sentido, a orden cero, χ coincide con el parámetro afin λ (no así a orden 1 o superior). Entonces, en estas nuevas coordenadas, las geodésicas nulas $x^a(\lambda)$ vendrán reparametrizadas en términos de χ como

$$x^a(\lambda(\chi)) = (\chi, x^i(\chi)) \quad , \quad x^i = x, y, z. \quad (2.61)$$

Consideremos la siguiente tetraada en el background

$$\ell^{(0)a} = (1, \hat{e}_r), \quad n^{(0)a} = \frac{1}{2}(1, -\hat{e}_r), \quad m^{(0)a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \hat{e}_+), \quad \bar{m}^{(0)a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \hat{e}_-), \quad (2.62)$$

donde

$$\hat{e}_- = \hat{e}_\theta - i \hat{e}_\phi, \quad \hat{e}_+ = \hat{e}_\theta + i \hat{e}_\phi. \quad (2.63)$$

Y además

$$\hat{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \quad (2.64)$$

$$\hat{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \quad (2.65)$$

$$\hat{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (2.66)$$

El vector \hat{e}_r indica la dirección de la línea de visión en la esfera celeste y es totalmente arbitrario. La base se completa con los vectores \hat{e}_θ y \hat{e}_ϕ , tangentes a las curvas $\phi = \text{const}$ y $\theta = \text{const}$, respectivamente.

Realizamos entonces el transporte paralelo

$$\ell^b \nabla_b \ell^a = 0 \Rightarrow \frac{d \ell^{(1)a}}{d\lambda} = -\Gamma_{bc}^{(1)a} \ell^{(0)b} \ell^{(0)c}, \quad (2.67)$$

$$\ell^b \nabla_b n^a = 0 \Rightarrow \frac{d n^{(1)a}}{d\lambda} = -\Gamma_{bc}^{(1)a} \ell^{(0)b} n^{(0)c}, \quad (2.68)$$

$$\ell^b \nabla_b m^a = 0 \Rightarrow \frac{d m^{(1)a}}{d\lambda} = -\Gamma_{bc}^{(1)a} \ell^{(0)b} m^{(0)c}, \quad (2.69)$$

$$\ell^b \nabla_b \bar{m}^a = 0 \Rightarrow \frac{d \bar{m}^{(1)a}}{d\lambda} = -\Gamma_{bc}^{(1)a} \ell^{(0)b} \bar{m}^{(0)c}. \quad (2.70)$$

Definamos $\Psi := \frac{\phi + \psi}{2}$ y realizemos el transporte paralelo de la tetraedra quedándonos

sólo con cantidades a primer orden en ε .

$$\begin{aligned}
\frac{d\ell^{(1)0}}{d\lambda} &= -\frac{\partial\phi}{\partial\chi} - 2\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\hat{e}_r^i + e^{2(\psi+\phi)}\frac{\partial\psi}{\partial\chi}\delta_{ij}\hat{e}_r^i\hat{e}_r^j \\
&= -\left(\frac{\partial\phi}{\partial\chi} + \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\hat{e}_r^i\right) - \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\hat{e}_r^i + \frac{\partial\psi}{\partial\chi} \\
&= -\frac{d\phi}{d\chi} + \frac{\partial\psi}{\partial\chi} - \frac{\partial\phi}{\partial x^i}\hat{e}_r^i \\
&= -\frac{d\phi}{d\chi} + \frac{\partial\psi}{\partial\chi} + \frac{\partial\phi}{\partial\chi} - \frac{d\phi}{d\chi} \\
&= -2\frac{d\phi}{d\chi} + 2\frac{\partial\psi}{\partial\chi},
\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\ell^{(1)i}}{d\lambda} &= -\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + 2\frac{\partial\psi}{\partial\chi}\hat{e}_r^i + 2\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\hat{e}_r^k\hat{e}_r^i - \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \\
&= -2\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + 2\frac{d\psi}{d\chi}\hat{e}_r^i,
\end{aligned} \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dm^{(1)0}}{d\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\hat{e}_+^i + e^{-2(\psi+\phi)}\frac{\partial\psi}{\partial\chi}\delta_{ij}\hat{e}_r^i\hat{e}_+^j\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\hat{e}_+^i,
\end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dm^{(1)i}}{d\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\chi}\delta_j^i\hat{e}_+^j + \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\hat{e}_+^k\delta_j^i\hat{e}_r^j + \frac{\partial\psi}{\partial x^j}\hat{e}_+^k\delta_k^i\hat{e}_r^j - \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\hat{e}_+^k\delta_{jk}\hat{e}_r^j\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\chi}\hat{e}_+^i + \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\hat{e}_+^k\hat{e}_r^i + \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\hat{e}_+^i\hat{e}_r^k\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\hat{e}_+^k\hat{e}_r^i + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\chi} + \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\hat{e}_r^k\right)\hat{e}_+^i\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\hat{e}_+^k\hat{e}_r^i + \frac{d\psi}{d\chi}\hat{e}_+^i\right),
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dn^{(1)0}}{d\lambda} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial\chi} + \frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\hat{e}_r^i - \frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\hat{e}_r^i - \frac{1}{2}e^{-2(\psi+\phi)}\frac{\partial\psi}{\partial\chi}\delta_{ij}\hat{e}_r^i\hat{e}_r^j \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial\chi} - \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\chi} = -\frac{\partial\psi}{\partial\chi},
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d n^{(1)i}}{d\lambda} &= -\frac{1}{2}e^{2(\psi+\phi)}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\chi}\hat{e}_r^i - \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\chi}\hat{e}_r^i - \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\delta_j^i\hat{e}_r^k\hat{e}_r^j - \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x^j}\delta_k^i\hat{e}_r^j\hat{e}_r^k - \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \\
 &= -\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi}{\partial x^j}\hat{e}_r^j\hat{e}_r^i - \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} \\
 &= -\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi}{\partial x^j}\hat{e}_r^j\hat{e}_r^i,
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d \bar{m}^{(1)0}}{d\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\hat{e}_-^i + e^{-2(\psi+\phi)}\frac{\partial\psi}{\partial\chi}\delta_{ij}\hat{e}_r^i\hat{e}_-^j\right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\hat{e}_-^i,
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d \bar{m}^{(1)i}}{d\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\chi}\delta_j^i\hat{e}_-^j + \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\hat{e}_-^k\delta_j^i\hat{e}_r^j + \frac{\partial\psi}{\partial x^j}\hat{e}_-^k\delta_k^i\hat{e}_r^j - \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\hat{e}_-^k\delta_{jk}\hat{e}_r^j\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\chi}\hat{e}_-^i + \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\hat{e}_-^k\hat{e}_r^i + \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\hat{e}_-^i\hat{e}_r^k\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\hat{e}_-^k\hat{e}_r^i + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\chi} + \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\hat{e}_r^k\right)\hat{e}_-^i\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\hat{e}_-^k\hat{e}_r^i + \frac{d\psi}{d\chi}\hat{e}_-^i\right).
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

Veamos lo siguiente

$$\ell^0 = \frac{d\chi}{d\lambda} = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{2.79}$$

y por lo tanto, como sólo queremos la tetrad a primer orden

$$\frac{d \ell^{(1)a}}{d\lambda} = \frac{d\chi}{d\lambda} \frac{d \ell^{(1)a}}{d\chi} = \frac{d \ell^{(1)a}}{d\chi} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{2.80}$$

Lo mismo vale para los demás vectores de la base. Entonces, reparametrizando la geodésica por el parámetro χ y considerando sólo cantidades a primer orden obtene-

mos

$$\begin{aligned}
 \ell^{(1)0} &= -2\phi + \int_0^x d\chi' 2\dot{\Psi}, & \ell^{(1)i} &= 2\psi \hat{e}_r^i - \int_0^x d\chi' 2\partial^i \Psi, \\
 n^{(1)0} &= -\int_0^x d\chi' \dot{\Psi}, & n^{(1)i} &= -\int_0^x d\chi' \partial^i \Psi - \hat{e}_r^i \hat{e}_r^j \int_0^x d\chi' \partial_j \psi, \\
 m^{(1)0} &= -\frac{\hat{e}_+^i}{\sqrt{2}} \int_0^x d\chi' \partial_i \phi, & m^{(1)i} &= \frac{\hat{e}_+^i \psi}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{e}_r^i \hat{e}_+^k}{\sqrt{2}} \int_0^x d\chi' \partial_k \psi, \\
 \bar{m}^{(1)0} &= -\frac{\bar{e}_-^i}{\sqrt{2}} \int_0^x d\chi' \partial_i \phi, & \bar{m}^{(1)i} &= \frac{\bar{e}_-^i \psi}{\sqrt{2}} + \frac{\hat{e}_r^i \bar{e}_-^k}{\sqrt{2}} \int_0^x d\chi' \partial_k \psi,
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

donde hemos definido

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} \tag{2.82}$$

Cálculo de la corrección δx^a

Teniendo en cuenta la nueva parametrización, las correcciones a la trayectoria geodésica $\delta x^{(1)i}$, vienen dadas por

$$\delta x^{(1)i}(\chi) = \int_0^x d\chi' \frac{\ell^i}{\ell^0}. \tag{2.83}$$

Para ello debemos considerar ℓ^i/ℓ^0 sólo a primer orden

$$\begin{aligned}
 \frac{\ell^i}{\ell^0} &= \left(\hat{e}_r^i + \varepsilon 2\psi \hat{e}_r^i - \varepsilon \int_0^x d\chi' 2\partial^i \Psi \right) \left(1 - \varepsilon 2\phi + \varepsilon \int_0^x d\chi' 2\dot{\Psi} \right)^{-1} \\
 &\approx \left(\hat{e}_r^i + \varepsilon 2\psi \hat{e}_r^i - \varepsilon \int_0^x d\chi' 2\partial^i \Psi \right) \left(1 + \varepsilon 2\phi - \varepsilon \int_0^x d\chi' 2\dot{\Psi} \right).
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Quedándonos sólo con terminos a primer orden en ε obtenemos lo siguiente

$$\frac{\ell^i}{\ell^0} = 4\Psi \hat{e}_r^i - \hat{e}_r^i \int_0^x d\chi' 2\dot{\Psi} - \int_0^x d\chi' 2\partial^i \Psi, \tag{2.85}$$

expandiendo el gradiente de Ψ en la base $\{\hat{e}_+, \hat{e}_-, \hat{e}_r\}$

$$\partial^i \Psi = \left(\frac{\hat{e}_{-j} \partial^j \Psi}{2} \right) \hat{e}_+^i + \left(\frac{\hat{e}_{+j} \partial^j \Psi}{2} \right) \hat{e}_-^i + (\hat{e}_{rj} \partial^j \Psi) \hat{e}_r^i, \quad (2.86)$$

y escribiendo la derivada parcial de Ψ como

$$\dot{\Psi} = \frac{d\Psi}{d\chi} - \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} \hat{e}_r^i, \quad (2.87)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\ell^i}{\ell^0} &= 4\Psi \hat{e}_r^i - 2\Phi \hat{e}_r^i + \hat{e}_r^i \int_0^\chi d\chi' 2(\hat{e}_{rj} \partial^j \Psi) - \left(\frac{\hat{e}_+^i \hat{e}_-^j + \hat{e}_-^i \hat{e}_+^j}{2} \right) \int_0^\chi d\chi' 2\partial_j \Psi \\ &\quad - \hat{e}_r^i \int_0^\chi d\chi' 2(\hat{e}_r^j \partial_j \Psi). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Entonces, sólo a primer orden en el parámetro ε obtenemos lo siguiente

$$\frac{\ell^i}{\ell^0} = 2\Psi \hat{e}_r^i - \left(\frac{\hat{e}_+^i \hat{e}_-^j + \hat{e}_-^i \hat{e}_+^j}{2} \right) \int_0^\chi d\chi' 2\partial_j \Psi. \quad (2.89)$$

Luego, utilizando (2.83) e integrando por partes obtenemos

$$\delta x^{(1)i}(\chi) = \hat{e}_r^i \int_0^\chi d\chi' 2\Psi - \left(\frac{\hat{e}_+^i \hat{e}_-^j + \hat{e}_-^i \hat{e}_+^j}{2} \right) \int_0^\chi d\chi' (\chi - \chi') 2\partial_j \Psi. \quad (2.90)$$

Cálculo de los escalares Φ_{00} y Ψ_0

Antes de realizar el cálculo de las componentes del tensor de Weyl notemos lo siguiente

$$\Psi_0 = C_{abcd} \ell^a m^b \ell^c m^d = R_{abcd} \ell^a m^b \ell^c m^d. \quad (2.91)$$

Por lo tanto sólo necesitamos calcular las componentes del tensor de Riemann hasta segundo orden

$$\begin{aligned}
R_{0kil} = & \varepsilon[\partial_\chi \partial_i \psi \delta_{lk} - \partial_\chi \partial_l \psi \delta_{ik}] + \varepsilon^2[-2\psi \partial_\chi \partial_i \psi \delta_{lk} + 2\psi \partial_\chi \partial_l \psi \delta_{ik} - \partial_i \phi \partial_\chi \psi \delta_{lk} \\
& + \partial_l \phi \partial_\chi \psi \delta_{ki} - \frac{1}{2}(\partial_k \partial_i \omega_l - \partial_k \partial_l \omega_i) + \frac{1}{2}(\partial_\chi \partial_l h_{ik} - \partial_\chi \partial_i h_{lk})], \tag{2.92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{0k0j} = & \varepsilon[\partial_k \partial_j \phi + \partial_\chi \partial_\chi \psi \delta_{jk}] + \varepsilon^2[\partial_k \psi \partial_j \phi + \partial_k \phi \partial_j \phi + 2\phi \partial_k \partial_j \phi - \partial_\chi \phi \partial_\chi \psi \delta_{jk} \\
& - \partial^m \phi \partial_m \psi \delta_{jk} - (\partial_\chi \psi)^2 \delta_{kj} + \partial_k \phi \partial_j \psi - \frac{1}{2}(\partial_\chi \partial_k \omega_j + \partial_\chi \partial_j \omega_k) - \frac{1}{2} \partial_\chi \partial_\chi h_{jk}], \tag{2.93}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{likim} = & \varepsilon[-\partial_k \partial_i \psi \delta_{lm} + \partial_k \partial_m \psi \delta_{li} + \partial_l \partial_i \psi \delta_{mk} - \partial_l \partial_m \psi \delta_{ki}] + \varepsilon^2[2\psi \partial_k \partial_i \psi \delta_{lm} \\
& - 2\psi \partial_k \partial_m \psi \delta_{li} - 2\psi \partial_l \partial_i \psi \delta_{mk} + 2\psi \partial_l \partial_m \psi \delta_{ki} + (\partial_\chi \psi)^2 \delta_{li} \delta_{mk} \\
& - \partial_i \psi \partial_k \psi \delta_{ml} + \partial_i \psi \partial_l \psi \delta_{mk} - \partial_l \psi \partial_m \psi \delta_{ik} - \partial^j \psi \partial_j \psi \delta_{li} \delta_{mk} \\
& - (\partial_\chi \psi)^2 \delta_{ki} \delta_{ml} + \partial_k \psi \partial_m \psi \delta_{il} + \partial^j \psi \partial_j \psi \delta_{ki} \delta_{ml} + \frac{1}{2}(\partial_k \partial_i h_{ml} \\
& - \partial_k \partial_m h_{li}) + \frac{1}{2}(\partial_l \partial_m h_{ik} - \partial_l \partial_i h_{mk})], \tag{2.94}
\end{aligned}$$

y las componentes del tensor de Ricci a segundo orden

$$\begin{aligned}
R_{00} = & -\varepsilon[\partial_i \partial^i \phi + 3\partial_\chi \partial_\chi \psi] - \varepsilon^2[2\psi \partial_i \partial^i \phi + 2\phi \partial_i \partial^i \phi + \partial_i \phi \partial^i \phi - 3(\partial_\chi \psi)^2 \\
& - 3\partial_\chi \phi \partial_\chi \psi - \partial_i \phi \partial^i \psi], \tag{2.95}
\end{aligned}$$

$$R_{0i} = -\varepsilon[2\partial_\chi \partial_i \psi] + \varepsilon^2[2\partial_i \phi \partial_\chi \psi + \frac{1}{2} \partial_j \partial^j \omega_i], \tag{2.96}$$

$$\begin{aligned}
R_{ij} = & -\varepsilon[\partial_m \partial^m \psi \delta_{ij} + \partial_i \partial_j \psi - \partial_i \partial_j \phi - \partial_\chi \partial_\chi \psi \delta_{ij}] - \varepsilon^2[\partial_m \phi \partial^m \psi \delta_{ij} + 3(\partial_\chi \psi)^2 \delta_{ij} \\
& + \partial_i \psi \partial_j \psi - \partial_m \psi \partial^m \psi \delta_{ij} - \partial_j \phi \partial_i \psi - \partial_i \phi \partial_j \psi - \partial_i \phi \partial_j \phi + 2(\phi + \psi) \partial_\chi \partial_\chi \psi \delta_{ij} \\
& + \partial_\chi \phi \partial_\chi \psi \delta_{ij} + \frac{1}{2}(\partial_\chi \partial_i \omega_j + \partial_\chi \partial_j \omega_i) + \frac{1}{2} \partial_\chi \partial_\chi h_{ij} - \frac{1}{2} \partial_m \partial^m h_{ij}]. \tag{2.97}
\end{aligned}$$

Con estas expresiones y definiendo los operadores

$$\bar{\partial}_o := -\sin^s(\theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \sin^{-s}(\theta), \quad (2.98)$$

$$\bar{\partial}_o := -\sin^{-s}(\theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \sin^s(\theta); \quad (2.99)$$

actuando sobre cantidades con peso de spin s , los escalares Φ_{00} y Ψ_0 a segundo orden en las componentes de la métrica vienen dados por

$$\Phi_{00}^{(1)} = \frac{1}{2}(\Delta\phi + \Delta\psi + \partial_i\partial_j(\psi - \phi)\hat{e}_r^i\hat{e}_r^j + 2\partial_\chi\partial_\chi\psi + 4\partial_\chi\partial_i\psi\hat{e}_r^i), \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{00}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left(2(\psi - \phi)\Delta\phi - 12\phi\partial_\chi\partial_\chi\psi + 2\Delta\phi \int_0^\chi d\chi' 2\dot{\Psi} + 6(\partial_\chi\partial_\chi\psi) \int_0^\chi d\chi' 2\dot{\Psi} \right. \\ & + 8(\psi - \phi)\partial_\chi\partial_i\psi\hat{e}_r^i + 4\partial_\chi\partial_i\psi \left(\hat{e}_r^i \int_0^\chi d\chi' 2\dot{\Psi} - \int_0^\chi d\chi' 2\partial^i\Psi \right) \\ & + 4\psi(\Delta\psi - \partial_\chi\partial_\chi\psi) + 4\psi\partial_i\partial_j(\psi - \phi)\hat{e}_r^i\hat{e}_r^j - 2(\Delta\psi - \partial_\chi\partial_\chi\psi)\hat{e}_r^i \int_0^\chi d\chi' 2\partial_i\Psi \\ & - 2\partial_i\partial_j(\psi - \phi)\hat{e}_r^i \int_0^\chi d\chi' 2\partial^j\Psi + \partial_i\phi\partial^i\phi - \partial_i\psi\partial^i\psi - 2\partial_\chi\phi\partial_\chi\psi - 4\partial_\chi\psi\partial_i\phi\hat{e}_r^i \\ & + (\partial_i\psi\partial_j\psi - \partial_i\phi\partial_j\phi - 2\partial_i\phi\partial_j\psi)\hat{e}_r^i\hat{e}_r^j + 2(\phi + \psi)\partial_\chi\partial_\chi\psi + \Delta\omega_i\hat{e}_r^i + \partial_\chi\partial_i\omega_j\hat{e}_r^i\hat{e}_r^j \\ & \left. - \frac{1}{2}(\Delta h_{ij} - \partial_\chi\partial_\chi h_{ij})\hat{e}_r^i\hat{e}_r^j \right), \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\Psi_0^{(1)} = \frac{1}{\chi^2}\bar{\partial}_o^2\Psi, \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_0^{(2)} = & \frac{\hat{e}_r^i}{2\chi^2} \partial_i \bar{\partial}_o \phi \int_0^\chi d\chi' \bar{\partial}_o \psi + \frac{\hat{e}_r^i}{\chi^2} \partial_i \bar{\partial}_o \phi \int_0^\chi d\chi' \bar{\partial}_o \phi + \frac{1}{\chi^2} \bar{\partial}_o^2 \phi \int_0^\chi d\chi' 2\dot{\Psi} + 2\frac{\psi}{\chi^2} \bar{\partial}_o^2 \psi \\
 & - \frac{2}{\chi^2} \bar{\partial}_o^2 \psi \hat{e}_r^k \int_0^\chi d\chi' \partial_k \Psi + \frac{2}{\chi^2} \hat{e}_r^i \partial_i \bar{\partial}_o \psi \int_0^\chi d\chi' \bar{\partial}_o \Psi + \frac{1}{\chi^2} \bar{\partial}_o \psi \bar{\partial}_o \phi + \frac{1}{2\chi^2} \bar{\partial}_o \phi \bar{\partial}_o \phi \\
 & - \frac{1}{\chi^2} \phi \bar{\partial}_o^2 \phi + \frac{1}{2\chi^2} \bar{\partial}_o \psi \bar{\partial}_o \psi + m^{(0)i} m^{(0)j} (\partial_{(i} \dot{\omega}_{j)}) - \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}) + 2m^{(0)j} m^{(0)l} \hat{e}_r^i (\partial_j \partial_{[i} \omega_{l]} \\
 & + \partial_{[l} \dot{h}_{i]j}) - m^{(0)j} m^{(0)k} \hat{e}_r^i \hat{e}_r^l (\partial_j \partial_{[l} h_{k]i} + \partial_i \partial_{[k} h_{l]j}).
 \end{aligned}
 \tag{2.103}$$

Escalares ópticos

Finalmente llegamos a las siguientes expresiones para los escalares ópticos (2.47), (2.48) y (2.49):

$$\begin{aligned}
 \kappa = & \frac{1}{2\chi_s} \int_0^{\chi_s} d\chi' \chi' (\chi_s - \chi') \left[(2\Delta\Psi + \hat{e}_r^i \hat{e}_r^j \partial_i \partial_j (\psi - \phi) + 2\ddot{\psi} + 4\hat{e}_r^i \partial_i \dot{\psi}) \right. \\
 & + \left(2\hat{e}_r^k \partial_k \Delta\Psi + \hat{e}_r^k \hat{e}_r^i \hat{e}_r^j \partial_k \partial_i \partial_j (\psi - \phi) + 2\hat{e}_r^k \partial_k \ddot{\psi} + 4\hat{e}_r^k \hat{e}_r^i \partial_k \partial_i \dot{\psi} \right) \int_0^{\chi'} d\chi'' 2\Psi \\
 & + \left(2\bar{\partial}_o \Delta\Psi + \bar{\partial}_o (\hat{e}_r^i \hat{e}_r^j \partial_i \partial_j (\psi - \phi)) + 2\bar{\partial}_o \ddot{\psi} + 4\bar{\partial}_o (\hat{e}_r^i \partial_i \dot{\psi}) \right) \int_0^{\chi'} d\chi'' \frac{(\chi' - \chi'')}{\chi' \chi''} 2\bar{\partial}_o \Psi \\
 & + \left(2\bar{\bar{\partial}}_o \Delta\Psi + \bar{\bar{\partial}}_o (\hat{e}_r^i \hat{e}_r^j \partial_i \partial_j (\psi - \phi)) + 2\bar{\bar{\partial}}_o \ddot{\psi} + 4\bar{\bar{\partial}}_o (\hat{e}_r^i \partial_i \dot{\psi}) \right) \int_0^{\chi'} d\chi'' \frac{(\chi' - \chi'')}{\chi' \chi''} 2\bar{\bar{\partial}}_o \Psi \\
 & + 2(\psi - \phi)\Delta\phi - 12\phi\ddot{\psi} + 2\Delta\phi \int_0^{\chi'} d\chi'' 2\dot{\Psi} + 6\ddot{\psi} \int_0^{\chi'} d\chi'' 2\Psi \\
 & + 8(\psi - \phi)\hat{e}_r^i \partial_i \dot{\psi} + 4\partial_i \dot{\psi} \left(\hat{e}_r^i \int_0^{\chi'} d\chi'' 2\dot{\Psi} - \int_0^{\chi'} d\chi'' 2\partial^i \Psi \right) \\
 & + 4\psi(\Delta\psi - \ddot{\psi}) + 4\psi \hat{e}_r^i \hat{e}_r^j \partial_i \partial_j (\psi - \phi) - 2(\Delta\psi - \ddot{\psi})\hat{e}_r^i \int_0^{\chi'} d\chi'' 2\partial_i \Psi \\
 & - 2\partial_i \partial_j (\psi - \phi)\hat{e}_r^i \int_0^{\chi'} d\chi'' 2\partial^j \Psi + \partial_i \phi \partial^i \phi - \partial_i \psi \partial^i \psi - 2\dot{\phi}\dot{\psi} - 4\dot{\psi} \hat{e}_r^i \partial_i \phi \\
 & + \hat{e}_r^i \hat{e}_r^j (\partial_i \psi \partial_j \psi - \partial_i \phi \partial_j \phi - 2\partial_i \phi \partial_j \psi) + 4\Psi\ddot{\psi} + \hat{e}_r^i \Delta\omega_i + \hat{e}_r^i \hat{e}_r^j \partial_i \dot{\omega}_j \\
 & \left. - \frac{1}{2}\hat{e}_r^i \hat{e}_r^j (\Delta h_{ij} - \ddot{h}_{ij}) \right] \\
 & - \frac{1}{\chi_s} \int_0^{\chi_s} d\chi' \int_0^{\chi'} d\chi'' \int_0^{\chi''} d\chi''' \chi''' (\chi'' - \chi''') \left[\frac{1}{4} \left(2\Delta\Psi(\chi'') + \hat{e}_r^i \hat{e}_r^j \partial_i \partial_j (\psi \right. \right. \\
 & \left. \left. - \phi)(\chi'') + 2\ddot{\psi}(\chi'') + 4\hat{e}_r^i \partial_i \dot{\psi}(\chi'') \right) \left(2\Delta\Psi(\chi''') + \hat{e}_r^i \hat{e}_r^j \partial_i \partial_j (\psi - \phi)(\chi''') \right) \right. \\
 & \left. + 2\ddot{\psi}(\chi''') + 4\hat{e}_r^i \partial_i \dot{\psi}(\chi''') \right) + \frac{1}{\chi''^2 \chi'''^2} Re \left\{ \bar{\partial}_o^2 \Psi(\chi'') \bar{\partial}_o^2 \Psi(\chi''') \right\} \left. \right], \tag{2.104}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma = & \frac{1}{\chi_s} \int_0^{\chi_s} d\chi' \chi' (\chi_s - \chi') \left[\frac{1}{\chi'^2} \left(\bar{\partial}_o^2 \Psi + \hat{e}_r^k \partial_k \bar{\partial}_o^2 \Psi \int_0^{\chi'} d\chi'' 2\Psi \right) \right. \\
& - \frac{1}{\chi'^3} \left(2\bar{\partial}_o^3 \Psi \int_0^{\chi'} d\chi'' \frac{(\chi' - \chi'')}{\chi''} 2\bar{\partial}_o \Psi + 2\bar{\partial}_o \bar{\partial}_o^2 \Psi \int_0^{\chi'} d\chi'' \frac{(\chi' - \chi'')}{\chi''} 2\bar{\partial}_o \Psi \right) \\
& + \frac{\hat{e}_r^i}{2\chi'^2} \partial_i \bar{\partial}_o \phi \int_0^{\chi'} d\chi'' \bar{\partial}_o \psi + \frac{\hat{e}_r^i}{\chi'^2} \partial_i \bar{\partial}_o \phi \int_0^{\chi'} d\chi'' \bar{\partial}_o \phi + \frac{1}{\chi'^2} \bar{\partial}_o^2 \phi \int_0^{\chi'} d\chi'' 2\Psi + 2\frac{\psi}{\chi'^2} \bar{\partial}_o^2 \psi \\
& - \frac{2}{\chi'^2} \bar{\partial}_o^2 \psi \hat{e}_r^k \int_0^{\chi'} d\chi'' \partial_k \Psi + \frac{2}{\chi'^2} \hat{e}_r^i \partial_i \bar{\partial}_o \psi \int_0^{\chi'} d\chi'' \bar{\partial}_o \Psi + \frac{1}{\chi'^2} \bar{\partial}_o \psi \bar{\partial}_o \phi + \frac{1}{2\chi'^2} \bar{\partial}_o \phi \bar{\partial}_o \phi \\
& - \frac{1}{\chi'^2} \phi \bar{\partial}_o^2 \phi + \frac{1}{2\chi'^2} \bar{\partial}_o \psi \bar{\partial}_o \psi + m^{(0)i} m^{(0)j} (\partial_{(i} \dot{\omega}_{j)}) - \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}) + 2m^{(0)j} m^{(0)l} \hat{e}_r^i (\partial_j \partial_{[i} \omega_{\eta]} \\
& + \partial_{\eta} \dot{h}_{ij}) - m^{(0)j} m^{(0)k} \hat{e}_r^i \hat{e}_r^l (\partial_j \partial_{[l} h_{k]i} + \partial_i \partial_{[k} h_{\eta]j}) \\
& + \frac{1}{\chi_s} \int_0^{\chi_s} d\chi' \int_0^{\chi'} d\chi'' \int_0^{\chi''} d\chi''' \frac{(\chi'' - \chi''')}{\chi''^2 \chi'''} \left[\bar{\partial}_o^2 \Psi(\chi''') \left(2\Delta \Psi(\chi'') \right) \right. \\
& + \hat{e}_r^i \hat{e}_r^j \partial_i \partial_j (\psi - \phi)(\chi'') + 2\ddot{\psi}(\chi'') + 4\hat{e}_r^i \partial_i \dot{\psi}(\chi'') \left. \right) + \bar{\partial}_o^2 \Psi(\chi'') \left(2\Delta \Psi(\chi''') \right) \\
& \left. + \hat{e}_r^i \hat{e}_r^j \partial_i \partial_j (\psi - \phi)(\chi''') + 2\ddot{\psi}(\chi''') + 4\hat{e}_r^i \partial_i \dot{\psi}(\chi''') \right) \left. \right], \tag{2.105}
\end{aligned}$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\chi_s} \int_0^{\chi_s} d\chi' \int_0^{\chi'} d\chi'' \int_0^{\chi''} d\chi''' \frac{(\chi'' - \chi''')}{\chi''^2 \chi'''} \text{Im} \left\{ \bar{\partial}_o^2 \Psi(\chi'') \bar{\partial}_o^2 \Psi(\chi''') \right\}. \tag{2.106}$$

En [4], donde se explica que no se considerarán ciertos términos debido a la naturaleza del problema que están tratando, se obtienen expresiones para κ y γ a primer orden

$$\kappa^{(1)} = \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{\chi_s - \chi}{\chi \chi_s} \bar{\partial}_o \bar{\partial}_o \Psi(\chi), \tag{2.107}$$

$$\gamma^{(1)} = \int_0^{\chi_s} d\chi \frac{\chi_s - \chi}{\chi \chi_s} \bar{\partial}_o^2 \Psi(\chi). \tag{2.108}$$

Luego de descartar los términos que se sugieren en [4] encontramos que nuestras expresiones reproducen exactamente estos resultados. Por lo tanto, nuestro resultado es bastante más general. Además en [4] se presenta una expresión para κ a segundo orden (no así para γ), aunque la misma sólo considera perturbaciones escalares. Nuestros resultados, luego de despreciar los términos sugeridos, coinciden con la mayoría de los términos, excepto con los nuestros que tienen integrales triples.

Esta diferencia parece provenir del método de integración de la ecuación de desviación de geodésicas. Sin embargo, si bien no hemos podido chequear analíticamente que dichas integrales sean ciertamente equivalentes, para algunos ejemplos simples donde se puede realizar la integral explícitamente hemos obtenido que dan la misma contribución a la convergencia.

Capítulo 3

Aproximación de lente delgada

3.1. Escalares ópticos a segundo orden

Como bien dijimos en el Capítulo 1, la aproximación de lente delgada consiste en suponer que las distancias *lente-observador* y *lente-fuente* son muy grandes comparadas con la extensión de la lente. Esto nos permitía considerar a la fuente y a la lente como distribuidas cada una en un plano: el *plano de la fuente* y el *plano de la lente*, este último perpendicular a la línea de visión.

Hasta el momento hemos llegado a las expresiones (2.47), (2.48) y (2.49) para los escalares ópticos, a partir de expresar el vector desviación (2.30) en términos de cantidades sobre la trayectoria *sin perturbar* haciendo uso de la aproximación (2.29).

Notemos que si hubiéramos dejado el vector desviación en su forma original (2.23) y hubiéramos procedido a obtener las expresiones para los escalares ópticos de la misma manera que lo hicimos, obtendríamos

$$\begin{aligned} \kappa = & \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda' (\lambda_s - \lambda') \Phi_{00}(\lambda') d\lambda' - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \left(\Phi_{00}(\lambda'') \Phi_{00}(\lambda''') \right. \\ & \left. + \text{Re}\{\Psi_0(\lambda'') \bar{\Psi}_0(\lambda''')\} \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda', \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\gamma_1 + i \gamma_2 \equiv \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \lambda' (\lambda_s - \lambda') \Psi_0(\lambda') d\lambda' - \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \left(\Phi_{00}(\lambda'') \Psi_0(\lambda''') + \Psi_0(\lambda'') \Phi_{00}(\lambda''') \right) d\lambda''' d\lambda'' d\lambda', \quad (3.2)$$

$$\hat{\omega} = \frac{1}{\lambda_s} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') \text{Im}\{\Psi_0(\lambda'') \bar{\Psi}_0(\lambda''')\} d\lambda''' d\lambda'' d\lambda', \quad (3.3)$$

donde, si ahora aplicamos la aproximación (2.29) volvemos a obtener las expresiones (2.47), (2.48) y (2.49) para los escalares ópticos.

La diferencia obvia de estas últimas relaciones con las obtenidas originalmente es que tanto los escalares de curvatura como las integrales ahora están calculadas sobre la *trayectoria real*, y la aproximación de lente delgada se debe realizar sobre la trayectoria real. Vamos a aplicar la aproximación de lente delgada sobre estas expresiones y luego implementaremos la aproximación (2.29) a la trayectoria real para obtener el resultado final.

Denotemos por C o D alguno de los escalares $\{\Phi, \Psi\}$ y definamos lo siguiente:

$$\tilde{C}(\lambda') \equiv \int_0^{\lambda'} C(\lambda'') d\lambda'' \quad ; \quad \tilde{D}(\lambda') \equiv \int_0^{\lambda'} D(\lambda'') d\lambda'', \quad (3.4)$$

donde ambas integrales están hechas sobre la trayectoria real.

La idea de la aproximación es que un rayo de luz que parte desde la fuente viaja en una geodésica nula sin percibir la presencia de la lente hasta la posición del plano de la lente. En ese instante la geodésica se desvía “repentinamente” en un ángulo α debido a la presencia de la lente. Por lo tanto, aproximamos los escalares (3.4) de la siguiente forma

$$\tilde{C}(\lambda') \cong \begin{cases} 0 & \forall \lambda'' < \lambda_l - \delta \\ \hat{C} & \forall \lambda'' \geq \lambda_l + \delta \end{cases} \quad (3.5)$$

y lo mismo para $\tilde{D}(\lambda')$, con $\delta \ll \lambda_l$, $\delta \ll \lambda_{ls}$, $\delta \ll \lambda_s$ ($\lambda_{ls} \equiv \lambda_s - \lambda_l$). Donde \hat{C}

es la proyección sobre la línea de visión de C . Esta expresión condensa completamente las suposiciones hechas sobre la extensión de la lente.

Ahora queremos implementar esta aproximación a los escalares ópticos presentados en (3.1), (3.2) y (3.3). Para ello vamos a analizar separadamente los términos que aparecen en estas expresiones.

En (3.1) y (3.2) tenemos términos de la siguiente forma

$$\int_0^{\lambda_s} \lambda'(\lambda_s - \lambda')C(\lambda')d\lambda'; \quad (3.6)$$

integrando por partes y usando (3.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_s} \lambda'(\lambda_s - \lambda')C(\lambda')d\lambda' &= \lambda'(\lambda_s - \lambda')\tilde{C}(\lambda')\Big|_0^{\lambda_s} - \int_0^{\lambda_s} (\lambda_s - 2\lambda')\tilde{C}(\lambda')d\lambda' \\ &= - \int_0^{\lambda_s} (\lambda_s - 2\lambda')\tilde{C}(\lambda')d\lambda' \cong -\hat{C} \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} (\lambda_s - 2\lambda')d\lambda' = -\hat{C} \left[\lambda_s(\lambda_s - \lambda_l) - \lambda_s^2 + \lambda_l^2 \right], \\ &= -\hat{C} \left[-\lambda_l(\lambda_s - \lambda_l) \right] = \hat{C}\lambda_l\lambda_{ls} \end{aligned} \quad (3.7)$$

En (3.1), (3.2) y (3.3) tenemos términos de la siguiente forma

$$\int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda'''(\lambda'' - \lambda''')C(\lambda'')D(\lambda''')d\lambda'''d\lambda''d\lambda'; \quad (3.8)$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda'''(\lambda'' - \lambda''')C(\lambda'')D(\lambda''')d\lambda'''d\lambda''d\lambda' &= \int_0^{\lambda_s} d\lambda' \int_0^{\lambda'} d\lambda'' C(\lambda'') \\ &\left[\lambda'''(\lambda'' - \lambda''')\tilde{D}(\lambda''')\Big|_0^{\lambda''} - \int_0^{\lambda''} (\lambda'' - 2\lambda''')\tilde{D}(\lambda''')d\lambda''' \right] = - \int_0^{\lambda_s} d\lambda' \int_0^{\lambda'} d\lambda'' \\ &C(\lambda'') \underbrace{\int_0^{\lambda''} (\lambda'' - 2\lambda''')\tilde{D}(\lambda''')d\lambda'''}_{\equiv G(\lambda'')} = - \int_0^{\lambda_s} d\lambda' \left[G(\lambda'')\tilde{C}(\lambda'')\Big|_0^{\lambda'} - \int_0^{\lambda'} d\lambda'' \tilde{C}(\lambda'')G'(\lambda'') \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

y distribuyendo el integrando de $G(\lambda'')$ y tomando su derivada respecto de λ'' obtenemos

$$G'(\lambda'') = \int_0^{\lambda''} \tilde{D}(\lambda''') d\lambda''' + \lambda'' \tilde{D}(\lambda'') - 2\lambda'' \tilde{D}(\lambda'') = \int_0^{\lambda''} \tilde{D}(\lambda''') d\lambda''' - \lambda'' \tilde{D}(\lambda''). \quad (3.10)$$

Volviendo a (3.9) nos queda la siguiente relación

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') C(\lambda'') D(\lambda''') d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' &= - \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} (\lambda' - 2\lambda''') \tilde{D}(\lambda''') \\ \tilde{C}(\lambda') d\lambda''' d\lambda' + \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \tilde{D}(\lambda''') \tilde{C}(\lambda'') d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' &- \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \lambda'' \tilde{D}(\lambda'') \tilde{C}(\lambda'') d\lambda'' d\lambda'. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aplicamos la aproximación de lente delgada (3.5) a cada término de (3.11)

$$\begin{aligned} &- \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} (\lambda' - 2\lambda''') \tilde{D}(\lambda''') \tilde{C}(\lambda') d\lambda''' d\lambda' \cong -\hat{C} \hat{D} \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} \int_{\lambda_l}^{\lambda'} (\lambda' - 2\lambda''') d\lambda''' d\lambda' \\ &= -\hat{C} \hat{D} \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} d\lambda' \left[\int_{\lambda_l}^{\lambda'} (\lambda' - 2\lambda''') d\lambda''' \right] = -\hat{C} \hat{D} \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} d\lambda' \left[\lambda' (\lambda' - \lambda_l) - (\lambda')^2 + (\lambda_l)^2 \right] \\ &= -\hat{C} \hat{D} \left[\int_{\lambda_l}^{\lambda_s} (\lambda')^2 d\lambda' - \lambda_l \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} \lambda' d\lambda' - \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} (\lambda')^2 d\lambda' + (\lambda_l)^2 \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} d\lambda' \right] \\ &= -\hat{C} \hat{D} \left[-\frac{\lambda_l}{2} (\lambda_s^2 - \lambda_l^2) + (\lambda_l)^2 (\lambda_s - \lambda_l) \right] = -\hat{C} \hat{D} \left[-\frac{\lambda_l \lambda_s^2}{2} + \frac{\lambda_l^3}{2} + \lambda_l^2 \lambda_s - \lambda_l^3 \right] \\ &= -\hat{C} \hat{D} \left[-\frac{\lambda_l^3}{2} - \frac{\lambda_l \lambda_s^2}{2} + (\lambda_l)^2 \lambda_s \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \tilde{D}(\lambda''') \tilde{C}(\lambda'') d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' \cong \hat{C} \hat{D} \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} \int_{\lambda_l}^{\lambda'} \int_{\lambda_l}^{\lambda''} d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' = \hat{C} \hat{D} \int_0^{\lambda_s} \int_{\lambda_l}^{\lambda'} \\
 & (\lambda'' - \lambda_l) d\lambda'' d\lambda' = \hat{C} \hat{D} \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} d\lambda' \left[\int_{\lambda_l}^{\lambda'} \lambda'' d\lambda'' - \lambda_l \int_{\lambda_l}^{\lambda'} d\lambda'' \right] = \hat{C} \hat{D} \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} d\lambda' \left[\frac{((\lambda')^2 - (\lambda_l)^2)}{2} \right. \\
 & \left. - \lambda_l (\lambda' - \lambda_l) \right] = \hat{C} \hat{D} \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} d\lambda' \left[\frac{(\lambda')^2}{2} - \frac{(\lambda_l)^2}{2} - \lambda_l \lambda' + (\lambda_l)^2 \right] = \hat{C} \hat{D} \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} d\lambda' \left[\frac{(\lambda')^2}{2} - \lambda_l \lambda' \right. \\
 & \left. + \frac{(\lambda_l)^2}{2} \right] = \hat{C} \hat{D} \left[\frac{(\lambda_s)^3}{6} - \frac{(\lambda_l)^3}{6} - \frac{\lambda_l (\lambda_s)^2}{2} + \frac{(\lambda_l)^3}{2} + \frac{(\lambda_l)^2}{2} (\lambda_s - \lambda_l) \right],
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \lambda'' \tilde{D}(\lambda'') \tilde{C}(\lambda'') d\lambda'' d\lambda' \cong -\hat{C} \hat{D} \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} \int_{\lambda_l}^{\lambda'} \lambda'' d\lambda'' d\lambda' = -\hat{C} \hat{D} \int_{\lambda_l}^{\lambda_s} d\lambda' \\
 & \left[\frac{(\lambda')^2}{2} - \frac{(\lambda_l)^2}{2} \right] = -\hat{C} \hat{D} \left[\frac{(\lambda_s)^3}{6} - \frac{(\lambda_l)^3}{6} - \frac{(\lambda_l)^2}{2} (\lambda_s - \lambda_l) \right];
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

sumando (3.12), (3.13) y (3.14) obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\lambda_s} \int_0^{\lambda'} \int_0^{\lambda''} \lambda''' (\lambda'' - \lambda''') C(\lambda'') D(\lambda''') d\lambda''' d\lambda'' d\lambda' \cong -\hat{C} \hat{D} \left[-\frac{\lambda_l^3}{2} - \frac{\lambda_l (\lambda_s)^2}{2} + (\lambda_l)^2 \lambda_s \right. \\
 & \left. - \frac{(\lambda_s)^3}{6} + \frac{(\lambda_l)^3}{6} + \frac{\lambda_l (\lambda_s)^2}{2} - \frac{(\lambda_l)^3}{2} - \frac{(\lambda_l)^2}{2} (\lambda_s - \lambda_l) + \frac{(\lambda_s)^3}{6} - \frac{(\lambda_l)^3}{6} - \frac{(\lambda_l)^2}{2} (\lambda_s - \lambda_l) \right] \\
 & = 0,
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

vemos que los términos de la forma (3.8) no contribuyen a los escalares ópticos en la aproximación de lente delgada.

Ahora lo que nos falta es implementar las aproximación (2.29) a estas expresiones. Es decir, recién ahora realizamos la aproximación a la trayectoria real y consideramos cantidades sólo hasta segundo orden. Para ello expandimos la proyección sobre la línea de visión de los escalares de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \hat{C} &\equiv \int_0^{\lambda_s} C(\lambda) d\lambda \approx \int_0^{\lambda_s} C^{(1)}(\lambda) d\lambda + \int_0^{\lambda_s} \delta x^{(1)a}(\lambda) \frac{\partial C^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{x^{(0)i}(\lambda)} d\lambda + \int_0^{\lambda_s} C^{(2)}(\lambda) d\lambda \\
 &\equiv \hat{C}^{(1)} + \delta \hat{C}^{(1)} + \hat{C}^{(2)}.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Entonces

$$\int_0^{\lambda_s} \lambda' (\lambda_s - \lambda') C(\lambda') d\lambda' = \hat{C} \lambda_l \lambda_{ls} \approx \lambda_l \lambda_{ls} (\hat{C}^{(1)} + \delta \hat{C}^{(1)} + \hat{C}^{(2)}) \quad . \tag{3.17}$$

Por lo tanto en la aproximación de lente delgada los escalares ópticos serán

$$\kappa = \frac{\lambda_l \lambda_{ls}}{\lambda_s} \left(\hat{\Phi}_{00}^{(1)} + \delta \hat{\Phi}_{00}^{(1)} + \hat{\Phi}_{00}^{(2)} \right), \tag{3.18}$$

$$\gamma_1 + i \gamma_2 = \frac{\lambda_l \lambda_{ls}}{\lambda_s} \left(\hat{\Psi}_0^{(1)} + \delta \hat{\Psi}_0^{(1)} + \hat{\Psi}_0^{(2)} \right), \tag{3.19}$$

$$\hat{\omega} = 0, \tag{3.20}$$

donde

$$\hat{\Phi}_{00}^{(j)} = \int_0^{\lambda_s} \Phi_{00}^{(j)} d\lambda \quad ; \quad \hat{\Psi}_0^{(j)} = \int_0^{\lambda_s} \Psi_0^{(j)} d\lambda \quad , \quad j = 1, 2, \tag{3.21}$$

$$\delta \hat{\Phi}_{00}^{(1)} = \int_0^{\lambda_s} \delta x^{(1)a}(\lambda) \frac{\partial \Phi_{00}^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{x^{(0)a}(\lambda)} d\lambda \quad ; \quad \delta \hat{\Psi}_0^{(1)} = \int_0^{\lambda_s} \delta x^{(1)a}(\lambda) \frac{\partial \Psi_0^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{x^{(0)a}(\lambda)} d\lambda. \tag{3.22}$$

Resaltamos que en esta aproximación el escalar óptico correspondiente a la *rotación* $\hat{\omega}$ resulta ser cero.

3.2. Lentes axialmente simétricas

Además de la aproximación de lente delgada, ahora consideremos que la distribución de materia que conforma la lente gravitacional se encuentra simétricamente distribuida alrededor de la línea de visión, sobre el plano de la lente. Consideramos la línea de visión en la dirección del eje y en un sistema de coordenadas cartesianas con origen en la posición del observador. Dada esta simetría conviene ahora trabajar con coordenadas polares (J, ϑ) sobre el plano de la lente en vez de las coordenadas cartesianas (x, z) . El cambio de coordenadas viene dado por

$$\begin{aligned} x &= J \sin(\vartheta), \\ z &= J \cos(\vartheta), \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde J representa el parámetro de impacto y ϑ es el ángulo polar medido desde el eje z . Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial J} + \frac{\cos(\vartheta)}{J} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \cos(\vartheta) \frac{\partial}{\partial J} - \frac{\sin(\vartheta)}{J} \frac{\partial}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Motivado por el hecho que Φ_{00} y Ψ_0 son cantidades con peso de spin 0 y 2, respectivamente, asumimos que en el caso de simetría axial su dependencia funcional será la siguiente[17]

$$\begin{aligned} \Phi_{00} &= \Phi_{00}(y, J), \\ \Psi_0 &= -\psi_0(y, J)e^{2i\vartheta}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

para alguna fase arbitraria en la definición de m^a . Por lo tanto, la proyección sobre la línea de visión de estos escalares tendrá la siguiente dependencia

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{00} &= \hat{\Phi}_{00}(J), \\ \hat{\Psi}_0 &= -\hat{\psi}_0(J)e^{2i\vartheta}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

de donde se puede ver que

$$\hat{\psi}_0(J) = -e^{-2i\vartheta} \int_0^{\lambda_s} \Psi_0(\lambda) d\lambda. \quad (3.27)$$

3.2.1. Escalares ópticos

Los escalares ópticos para una lente axialmente simétrica alrededor de la línea de visión en la aproximación de lente delgada vienen dados por las siguientes expresiones

$$\kappa = \frac{\lambda_l \lambda_{ls}}{\lambda_s} \left(\hat{\Phi}_{00}^{(1)}(J) + \delta \hat{\Phi}_{00}^{(1)}(J) + \hat{\Phi}_{00}^{(2)}(J) \right), \quad (3.28)$$

$$\gamma_1 = -\frac{\lambda_l \lambda_{ls}}{\lambda_s} \left(\hat{\psi}_0^{(1)}(J) + \delta \hat{\psi}_0^{(1)}(J) + \hat{\psi}_0^{(2)}(J) \right) \cos(2\vartheta), \quad (3.29)$$

$$\gamma_2 = -\frac{\lambda_l \lambda_{ls}}{\lambda_s} \left(\hat{\psi}_0^{(1)}(J) + \delta \hat{\psi}_0^{(1)}(J) + \hat{\psi}_0^{(2)}(J) \right) \sin(2\vartheta), \quad (3.30)$$

donde

$$\delta \hat{\psi}_0^{(1)} = \int_0^{\lambda_s} \delta x^{(1)a}(\lambda) \frac{\partial \psi_0^{(1)}}{\partial x^a} \Big|_{x^{(0)a}(\lambda)} d\lambda. \quad (3.31)$$

Recordemos que $\hat{\omega} = 0$ pues seguimos en la aproximación de lente delgada.

3.2.2. Ángulo de deflexión

A partir de la ecuación de lentes (1.3) vemos que

$$A^i_j = \frac{d\beta^i}{d\theta^j} = \delta^i_j - \frac{\lambda_{ls}}{\lambda_s} \frac{d\alpha^i}{d\theta^j} = \delta^i_j - \frac{\lambda_{ls} \lambda_l}{\lambda_s} \frac{d\alpha^i}{dx^j}, \quad (3.32)$$

donde hemos usado que en la aproximación de lente delgada $\frac{d}{d\theta^i} \approx \lambda_l \frac{d}{dx^i}$. Definimos las componentes de $\alpha^i = (\alpha^1, \alpha^2)$ como

$$\alpha^i = \alpha(J) \left(\frac{z}{J}, \frac{x}{J} \right). \quad (3.33)$$

De aquí podemos obtener las relaciones explícitas entre los escalares ópticos y las componentes del ángulo de deflexión. Para esto conviene tener presente las componentes de la matriz A^a_b dadas por (1.4)

$$A_1^1 + A_2^2 = 2 - \frac{\lambda_{ls} \lambda_l}{\lambda_s} \left(\frac{d\alpha^1}{dz} + \frac{d\alpha^2}{dx} \right) = 2 - 2\kappa \Rightarrow \kappa = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{ls} \lambda_l}{\lambda_s} \left(\frac{d\alpha^1}{dz} + \frac{d\alpha^2}{dx} \right), \quad (3.34)$$

$$A_1^1 - A_2^2 = \frac{\lambda_{ls}\lambda_l}{\lambda_s} \left(\frac{d\alpha^2}{dx} - \frac{d\alpha^1}{dz} \right) = -2\gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{ls}\lambda_l}{\lambda_s} \left(\frac{d\alpha^1}{dz} - \frac{d\alpha^2}{dx} \right), \quad (3.35)$$

$$A_2^1 + A_1^2 = -\frac{\lambda_{ls}\lambda_l}{\lambda_s} \left(\frac{d\alpha^1}{dx} + \frac{d\alpha^2}{dz} \right) = -2\gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{ls}\lambda_l}{\lambda_s} \left(\frac{d\alpha^1}{dx} + \frac{d\alpha^2}{dz} \right), \quad (3.36)$$

$$A_2^1 - A_1^2 = \frac{\lambda_{ls}\lambda_l}{\lambda_s} \left(\frac{d\alpha^2}{dz} + \frac{d\alpha^1}{dx} \right) = -2\hat{\omega} \Rightarrow \hat{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{ls}\lambda_l}{\lambda_s} \left(\frac{d\alpha^1}{dx} - \frac{d\alpha^2}{dz} \right). \quad (3.37)$$

Conviene dejar expresado estas derivadas en término de las coordenadas (J, ϑ) dadas por (3.23). Utilizando las expresiones (3.24) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha^1}{\partial z} &= \cos^2(\vartheta) \frac{\partial \alpha}{\partial J}(J) + \sin^2(\vartheta) \frac{\alpha(J)}{J}, \\ \frac{\partial \alpha^2}{\partial x} &= \sin^2(\vartheta) \frac{\partial \alpha}{\partial J}(J) + \cos^2(\vartheta) \frac{\alpha(J)}{J}, \\ \frac{\partial \alpha^1}{\partial x} &= \frac{\partial \alpha^2}{\partial z} = \frac{1}{2} \sin(2\vartheta) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial J}(J) - \frac{\alpha(J)}{J} \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_{ls}\lambda_l}{\lambda_s} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial J}(J) + \frac{\alpha(J)}{J} \right), \\ \gamma_1 &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_{ls}\lambda_l}{\lambda_s} \cos(2\vartheta) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial J}(J) - \frac{\alpha(J)}{J} \right), \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_{ls}\lambda_l}{\lambda_s} \sin(2\vartheta) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial J}(J) - \frac{\alpha(J)}{J} \right), \\ \hat{\omega} &= 0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Resaltemos que estas expresiones valen en la aproximación de lente delgada, por lo tanto el resultado $\hat{\omega} = 0$ es consistente con (3.20). A partir de (3.39) obtenemos la relación

$$\kappa - \gamma_1 \cos(2\vartheta) - \gamma_2 \sin(2\vartheta) = \frac{\lambda_{ls}\lambda_l}{\lambda_s} \frac{\alpha(J)}{J}. \quad (3.40)$$

Luego, utilizando las últimas expresiones obtenidas para los escalares ópticos obtenemos

$$\begin{aligned} \kappa - \gamma_1 \cos(2\vartheta) - \gamma_2 \sin(2\vartheta) = \frac{\lambda_l \lambda_{ls}}{\lambda_s} & \left(\hat{\Phi}_{00}^{(1)}(J) + \delta \hat{\Phi}_{00}^{(1)}(J) + \hat{\Phi}_{00}^{(2)}(J) + \hat{\psi}_0^{(1)}(J) + \delta \hat{\psi}_0^{(1)}(J) \right. \\ & \left. + \hat{\psi}_0^{(2)}(J) \right). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Por lo tanto, combinando (3.40) y (3.41), obtenemos que el ángulo de deflexión para una lente axialmente simétrica alrededor de la línea de visión en la aproximación de lente delgada viene dado por

$$\boxed{\alpha(J) = J \left(\hat{\Phi}_{00}^{(1)}(J) + \hat{\psi}_0^{(1)}(J) + \delta \hat{\Phi}_{00}^{(1)}(J) + \delta \hat{\psi}_0^{(1)}(J) + \hat{\Phi}_{00}^{(2)}(J) + \hat{\psi}_0^{(2)}(J) \right)}. \tag{3.42}$$

De esta forma pudimos extender la expresión encontrada en [13] para el ángulo de deflexión a segundo orden en la perturbación de la métrica plana.

Conclusiones

Resumimos a continuación los resultados del presente trabajo:

- i) Se obtuvieron expresiones a segundo orden en la perturbación de la métrica plana para los escalares ópticos lo más genéricas posibles sin hacer mención ni de la extensión de la lente ni de la forma de la misma (2.47), (2.48), (2.49). Los cuales, y a modo de aplicación, hemos calculado explícitamente en el gauge de Poisson.
- ii) Se obtuvo una expresión a segundo orden para el ángulo de deflexión producido por lentes delgadas y esféricamente simétricas (3.42).
- iii) Se obtuvo la forma general del coeficiente de rotación a segundo orden y se demostró que el mismo es cero en lentes delgadas.
- iv) Se probó que los términos de la forma $\Phi_{00}^{(1)}\Psi_0^{(1)}$, $\bar{\Psi}_0^{(1)}\Psi_0^{(1)}$ y $\Phi_{00}^{(1)}\Phi_{00}^{(1)}$ no contribuyen en la aproximación de lente delgada.

A futuro se podría realizar lo siguiente:

- i) Calcular los escalares ópticos en otros gauges que se adecúen mejor a la geometría de algún problema en particular.
- ii) A fin de testear el ángulo de deflexión (3.42), se puede calcular explícitamente para Schwarzschild y comparar con el resultado ya conocido para el mismo.
- iii) Extender estos resultados al contexto cosmológico.
- iv) Utilizar el formalismo post-Minkowskiano para intentar expresar los escalares ópticos en términos de las componentes del tensor de energía-momento.

- v) Implementar numéricamente nuestros resultados para distintos espaciotiempos.

Bibliografía

- [1] Viviana Acquaviva, Nicola Bartolo, Sabino Matarrese, y Antonio Riotto. Gauge-invariant second-order perturbations and non-gaussianity from inflation. *Nuclear Physics B*, 667(12):119 – 148, 2003. ISSN 0550-3213.
- [2] Matthias Bartelmann y Peter Schneider. Weak gravitational lensing. *Physics Reports*, 340(45):291 – 472, 2001. ISSN 0370-1573.
- [3] E. F. Boero y O. M. Moreschi. Gravitational lens optical scalars in terms of energy-momentum distributions in the cosmological framework. *arXiv:1610.06032 [gr-qc]*.
- [4] Chris; Durrer Ruth; Maartens Roy; Umeh Obinna Bonvin, Camille; Clarkson. Do we care about the distance to the CMB? Clarifying the impact of second-order lensing. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015.
- [5] V. Bozza y A. Postiglione. Alternatives to Schwarzschild in the weak field limit of General Relativity. *JCAP*, 1506(06):036, 2015.
- [6] Michael H. Bruggmann. Light deflection in the post-linear gravitational field of bounded point-like masses. *Phys. Rev.*, D72:024012, 2005.
- [7] Sabino; Mollerach Silvia; Sonogo Sebastiano Bruni, Marco; Matarrese. Perturbations of spacetime: gauge transformations and gauge invariance at second order and beyond. *Classical and Quantum Gravity*, 14, 1997.
- [8] Asantha Cooray y Wayne Hu. Second-order corrections to weak lensing by large-scale structure. *The Astrophysical Journal*, 574(1):19, 2002.

-
- [9] Asantha Cooray y Wayne Hu. Second order corrections to weak lensing by large scale structure. *Astrophys. J.*, 574:19, 2002.
- [10] Simonetta Frittelli, Thomas P. Kling, y Ezra T. Newman. Space-time perspective of Schwarzschild lensing. *Phys. Rev.*, D61:064021, 2000.
- [11] V. P. Frolov. *Problems in the General Theory of Relativity and Theory of Group Representations*, cap. The Newman-Penrose Method in the Theory of General Relativity, págs. 73–185. Springer US, Boston, MA, 1979.
- [12] Emanuel Gallo y Osvaldo Moreschi. Peculiar anisotropic stationary spherically symmetric solution of Einstein equations. *Mod. Phys. Lett.*, A27:1250044, 2012.
- [13] Emanuel Gallo y Osvaldo M. Moreschi. Gravitational lens optical scalars in terms of energy-momentum distributions. *Phys. Rev. D*, 83:083007, 2011.
- [14] Steffen Hagstotz, Björn Malte Schfer, y Philipp M. Merkel. Born-corrections to weak lensing of the cosmic microwave background temperature and polarization anisotropies. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 454(1):831–838, 2015.
- [15] Daniel E. Holz y Robert M. Wald. New method for determining cumulative gravitational lensing effects in inhomogeneous universes. *Physical Review D*, 58, 1998.
- [16] Nick Kaiser y John A. Peacock. On the bias of the distanceredshift relation from gravitational lensing. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 455(4):4518–4547, 2016.
- [17] Thomas P Kling y Brian Keith. The Bianchi identity and weak gravitational lensing. *Classical and Quantum Gravity*, 22(14):2921, 2005.
- [18] Antony Lewis y Anthony Challinor. Weak gravitational lensing of the CMB. *Physics Reports*, 429(1):1 – 65, 2006. ISSN 0370-1573.
- [19] Giovanni Marozzi, Giuseppe Fanizza, Enea Di Dio, y Ruth Durrer. CMB-lensing beyond the Born approximation. *JCAP*, 1609(09):028, 2016.

-
- [20] Ezra Newman y Roger Penrose. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, 3(3):566–578, 1962.
- [21] Andrea Petri, Zoltan Haiman, y Morgan May. On the validity of the Born approximation for beyond-Gaussian weak lensing observables. 2016. ArXiv:1612.00852.
- [22] Felix AE Pirani. Introduction to gravitational radiation theory. *Lectures on general relativity*, 1:249–373, 1964.
- [23] J. Renn. The origin of gravitational lensing: A postscript to Einstein’s 1936 science paper. *Science*, 1997.
- [24] Bjoern Malte Schaefer y Matthias Bartelmann. Weak lensing in the second post-Newtonian approximation: Gravitomagnetic potentials and the integrated Sachs-Wolfe effect. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 369:425–440, 2006.
- [25] Jurgen; Falco Emilio E. Schneider, Peter; Ehlers. [*Astronomy and Astrophysics Library*] *Gravitational Lenses*. 1992.
- [26] R. Ali Vanderveld, Robert R. Caldwell, y Jason Rhodes. Second-order weak lensing from modified gravity. *Phys. Rev.*, D84:123510, 2011.