Universidad Nacional de Córdoba

Tesis de Doctora en Matemáticas

Álgebras de Hopf y Categorías de Fusión

Melisa Gisselle Escañuela González

Córdoba Argentina

2017

Álgebras de Hopf y Categorías de fusión por Melisa Gisselle Escañuela González se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 2.5 Argentina.

Prefacio

Esta Tesis es presentada como parte de los requisitos para optar al grado académico de Doctora en Matemáticas, de la Universidad Nacional de Córdoba, y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta Universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física, durante el período comprendido entre el 1 de abril de 2012 al 22 de Diciembre de 2016, bajo la dirección de la Dra. Sonia V. Natale, Profesora Titular de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física, y el Dr. Nicolás Andruskiewitsch, Profesor Titular de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física.

Melisa Gisselle Escañuela González
escanuela@famaf.unc.edu.ar
Departamento de Matemática
Universidad Nacional de Santiago del Estero
Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Universidad Nacional de Córdoba
Córdoba, 16 de Marzo de 2017.

En memoria de
mi hermano Alejandro y
mi padrino Hugo.

A mi mamá Myrian.
Al amor de mi vida Max y
al fruto de nuestro amor, Ailén Sofía,
quien crece en mi vientre.

Resumen

La tesis trata sobre las reglas de fusión y la resolubilidad de una categoría de fusión.

En la primer parte de esta tesis se aborda el interrogante de si la condición de que una categoría de fusión sea o no resoluble está determinada por sus reglas de fusión, en base a las nociones de resolubilidad y nilpotencia introducidas por P. Etingof, D. Nikshych y V. Ostrik. Probamos que la respuesta es afirmativa para algunas familias de ejemplos no resolubles que surgen de representaciones de álgebras de Hopf semisimples asociadas a factorizaciones exactas de los grupos simétrico y alternante.

La segunda parte está dedicada al caso de las categorías de fusión esféricas. En este contexto también consideramos el invariante provisto por la S-matriz del centro de Drinfeld y mostramos que este invariante sí determina la resolubilidad de una categoría de fusión siempre que ésta sea de tipo grupo.

Palabras claves: Álgebras de Hopf Semisimples, Categorías de fusión, Equivariantización.

2010 Mathematics subject Classification: 16T05, 18D10.

Abstract

The thesis concerns the relations between fusion rules and solvability of a fusion category.

In the first part of this thesis, we address the question whether or not the condition on a fusion category being solvable is determined by its fusion rules, based on the notions of solvability and nilpotency introduced by P. Etingof, D. Nikshych and V. Ostrik. We prove that the answer is affirmative for some families of non-solvable examples arising from representations of semisimple Hopf algebras associated to exact factorizations of the symmetric and alternating groups.

The second part is devoted to the case of spherical fusion categories. In this context, we also consider the invariant provided by the S-matrix of the Drinfeld center and show that this invariant does determine the solvability of the fusion category provided it is group-theoretical

Key words: Semisimple Hopf algebras, Fusion categories, Equivariantization.

2010 Mathematics subject Classification: 16T05, 18D10.

Agradecimientos

Durante estos años son muchas las personas e instituciones que han participado directa o indirectamente en este trabajo y a quienes quiero expresar mi gratitud por el apoyo y la confianza que me han prestado de forma desinteresada. Aunque el hecho de exponer una lista siempre supone un riesgo de olvidar a alguna de esas personas, quisiera hacer una especial mención de agradecimientos.

Antes que a todos quiero agradecer a Dios por darme las fuerzas necesarias en los momentos en que más las necesité y bendecirme con la posibilidad de caminar a su lado durante toda mi vida.

Debo agradecer de manera especial y sincera a mi directora Sonia Natale, quien me guió, acompañó y enseñó durante estos años para emprender el camino de la investigación brindándome las herramientas profesionales y humanas para desempeñarme con éxito. Así, como también por todo el tiempo que me ha dedicado, por sus sugerencias e ideas de las que tanto provecho he sacado.

A Nicolás Andruskiewitsch, mi co-director, por enseñarme tanto, motivarme en el inicio de este camino y prepararme para el futuro.

Al jurado: Juan José Guccione, Fernando Levstein y Martín Mombelli, por leer detalladamente y corregir este trabajo, en busca de mejorar su calidad.

A FaMAF-UNC, CIEM, CONICET, SECyT, y FCEyT-UNSE por brindarme el ambiente propicio y el apoyo económico para el desarrollo y finalización de mi doctorado.

A los profesores de FaMAF de quienes he aprendido mucho: Jorge Vargas, Martín Mombelli, Fernando Fantino, Inés Pacharoni, Juan Pablo Rossetti, Tomás Godoy, Carlos Olmos, Walter Dal Lago y Agustín García.

A Leandro Cagliero y Alejandro Tiraboschi, quienes forman parte de mi Comisión Asesora, por alentarme a seguir.

A mi familia, quienes me han apoyado de manera incondicional en cada decisión a lo largo de mi vida. A mi mamá Myrian, Claudio y mis abuelos Marta y Félix, quienes me acompañaron en esta aventura y quienes me enseñaron la importancia del trabajo y esfuerzo cotidiano y por los valores inculcados. A mi papá Juan por acompañarme y alentarme a seguir. A mis hermanas Jessi, Noe y Anto por el cariño y la alegría brindados. A mis primos Moni y Dante por hacer más amena la estadía en Córdoba.

Quiero agradecer profundamente a Maximiliano: mi esposo, mi compañero de vida y mi amigo, por escucharme, animarme, aconsejarme y motivarme. Quién día a día me ayuda a ser mejor persona. Y a nuestra pequeña Ailén, quien crece en mi vientre por impulsarme y llenarme de fuerzas.

A mis amigos de siempre que, a pesar de la distancia, siempre los siento presentes: Sandra, René, Caro, Josué, Andrea, Bruno y Mariela. A los nuevos amigos que he encontrado en esta facultad, en especial a Adriana brindarme su amistad y confianza. Para mis compañeros de grupo, doctorandos y posdocs, tengo sólo palabras de agradecimiento, por hacerme sentir como en casa dándome apoyo en aquellos momentos de dificultad y compartir una gran cantidad de momentos de alegría: Juli, Monique, Fiore, Iván, Edwin, Sergio, Euge, Javier, Kari, Augusto, Cristian, Romi, Marcos, Meli, Lucía.

Finalmente, quiero agradecer a mi profe Marta Nemiña, a quien aprecio muchísimo, por impulsarme a penetrar en el mundo de la investigación, por su confianza, apoyo y cariño.

A todos y a cada uno de ellos ¡Gracias!.

Melisa Gisselle Escañuela González

Índice general

Introducción **1**

1. Nociones de la teoría de grupos **7**

1.1. Definiciones y propiedades básicas . . . 7

1.2. Representaciones y caracteres de un grupo finito . . . 10

1.2.1. Tabla de caracteres . . . 14

1.2.2. Relaciones de ortogonalidad para los caracteres . . . 15

1.2.3. Aplicaciones de la teoría de caracteres . . . 18

1.2.4. Representaciones Inducidas . . . 19

1.3. Grupos Ext y grupo de cohomología . . . 21

2. Categorías **23**

2.1. Categorías Aditivas . . . 26

2.2. Categorías Abelianas . . . 29

2.3. Producto tensorial de Deligne de categorías abelianas . . . 32

2.4. Categorías Monoidales . . . 33

2.4.1. Dualidad en categorías monoidales . . . 36

2.4.2. Equivariantización de una categoría abeliana $\mathbb{K}$-lineal . . . 39

2.4.3. Álgebras y coálgebras en categorías monoidales . . . 40

2.5. Categorías Tensoriales . . . 42

2.5.1. El anillo de Grothendieck de $\mathcal{C}$ 43

2.5.2. La equivariantización de una categoría tensorial 44

2.6. Categorías trenzadas y el centro de Drinfeld 45

3. Álgebras de Hopf **49**

3.1. Álgebras de Hopf semisimples 52

3.2. Extensiones de álgebras de Hopf 53

3.2.1. Módulos sobre productos cruzados 57

3.3. Álgebras de Hopf cuasi-triangulares 58

4. Categorías de Fusión **61**

4.1. Dimensiones de Frobenius-Perron 64

4.2. Categorías módulo y equivalencia Morita categórica 66

4.2.1. Dualidad de categorías de fusión y equivalencia Morita categórica . 68

4.3. Categorías casi-grupo 70

4.4. Categorías de tipo grupo 71

4.5. Graduación de una categoría de fusión por un grupo finito 74

4.6. Equivariantización y de-equivariantización 75

4.7. Nilpotencia de categorías de fusión 77

4.8. Resolubilidad de categorías de fusión 78

4.9. Categorías de fusión trenzadas 81

4.10. Subcategorías de fusión del doble cuántico de un grupo finito 86

5. Reglas de Fusión y Resolubilidad de una Categoría de fusión **89**

5.1. Equivalencia de Grothendieck entre categorías de fusión 89

5.2. Ejemplos de reglas de fusión no resolubles 93

5.2.1. Extensiones abelianas 93

5.2.2. Ejemplos asociados al grupo simétrico 96

5.2.3. Reglas de Fusión de Rep K_5 101

5.2.4. Las álgebras de Hopf duales J_n^*, K_n^* 103

5.2.5. Otros ejemplos asociados al grupo simétrico 106

5.3. Resolubilidad y reglas de fusión de una categoría de fusión trenzada 111

6. La tabla de caracteres de una categoría de fusión esférica 115

6.1. Categorías de fusión esféricas 115

6.2. Categorías Modulares y S-matrices 116

6.2.1. La fórmula de Verlinde 118

6.3. S-equivalencia de categorías de fusión esféricas 119

Bibliografía 123

Introducción

El objetivo principal de estudio de esta tesis son las reglas de fusión y la resolubilidad de una categoría de fusión sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado y de característica cero. Básicamente, una categoría de fusión es una categoría tensorial semisimple que posee un número finito de clases de isomorfismo de objetos simples. Últimamente, la teoría de categorías tensoriales se ha convertido en un instrumento valioso en el estudio de numerosos problemas de matemática y física.

El concepto de categoría tensorial fue introducido por MacLane y Bénabou [Bén67] en la década de los '60 y engloba varios tipos de estructuras, por ejemplo categoría de representaciones de un grupo finito, de álgebras de Lie, y más generalmente, a la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf. Recordemos que una categoría tensorial sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbb{K}$ es una categoría monoidal, abeliana $\mathbb{K}$-lineal, rígida, cuyo objeto unidad es simple.

Armand Borel (1953) y Cartier (1965) introdujeron las primeras definiciones formales de álgebra de Hopf. Por un lado, Borel en su trabajo [Bor53] denomina algèbre de Hopf a un álgebra munida de un coproducto no necesariamente coasociativo, y utiliza esta noción en el estudio de la homología de espacios homogéneos. Por otra parte, inspirado por los trabajos sobre grupos algebraicos de Jean Dieudonné, Cartier introdujo en [Car57] el concepto de *hiperálgebra*. En la actualidad, a este último concepto se lo conoce como una biálgebra coconmutativa, la cual está dotada de una estructura extra que da lugar a una antípoda. A principios de los '60 estas dos ramas de investigación se mezclan de modo tal que a fines de ésta década la noción de álgebra de Hopf se define como se conoce actualmente. Este hecho tiene lugar en el año 1969, al publicarse el libro de Sweedler [Swe69].

Un hecho esencial para el desarrollo de la teoría de álgebras de Hopf surge en 1986, cuando Drinfeld en [Dri87] presentó una clase particular de álgebras de Hopf, los *grupos cuánticos*. Éstos pueden presentarse como deformaciones en un parámetro de álgebras de funciones regulares de grupos algebraicos afines o de álgebras universales de álgebras de Lie. En la misma época, Jimbo en [Jim85] consideró de modo independiente las deformaciones por un parámetro q del álgebra envolvente universal asociada a un álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ de dimensión finita, es decir, las *álgebras envolventes cuantizadas* $U_q(\mathfrak{g})$.

El estudio de las álgebras de Hopf se divide en dos ramas: álgebras de Hopf semisimples y no semisimples. Como ha de suponerse, para sus correspondientes análisis se emplean técnicas diferentes. Por un lado, las álgebras de Hopf semisimples pueden pensarse como una generalización no conmutativa de los grupos finitos. Por otra parte, el estudio de las álgebras de Hopf no semisimple se ha profundizado especialmente en una subfamilia propia: las álgebras de Hopf punteadas. Ésto último se debe a que la familia de álgebras de Hopf no semisimple es muy amplia. En este último caso, se conoce por unos trabajos de Andruskiewitsch y Schneider [AS10] que, bajo ciertas condiciones, si el corradical es un grupo abeliano, el álgebra de Hopf es fundamentalmente una generalización de un grupo cuántico. En los últimos años, el problema de clasificación de las álgebras de Hopf tomó impulso. Sin embargo, hasta el momento, la mayoría de los resultados de clasificación conocidos se refieren a ciertas clases particulares, como ser: las (quasi-)triangulares [EG03], semisimples o punteadas. Una de las nociones básicas en lo que concierne a las álgebras de Hopf de dimensión finita es la de *extensión*. La cual, junto con la noción de deformación por twisting, da lugar a todos los ejemplos no triviales conocidos en el caso semisimple. Una clase importante de extensiones es la de extensiones abelianas, es decir, extensiones del álgebra de funciones en un grupo finito Γ por el álgebra de un grupo finito F. Éstas son siempre semisimples en característica cero. La reducción al caso de extensiones abelianas ha permitido obtener resultados de clasificación en dimensión pq^2, p^2, p^3, etc., donde p y q son números primos. Un problema importante que se estudia en [ENO05], es la construcción de álgebras de Hopf semisimples complejas cuya categoría de representaciones no fuese de tipo grupo. Nikshych en [Nik08], usando una acción de un grupo finito en la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf semisimple de tipo grupo, presentó ejemplos de álgebras de Hopf semisimples que no son de tipo grupo. Para ello, utilizó un proceso conocido como *equivariantización*.

En el año 1990, Drinfeld introdujo en [Dri89] el concepto de cuasi-álgebra Hopf, donde se debilita la asociatividad del coproducto de modo que la categoría de representaciones siga siendo tensorial. Dando así lugar a una versión más general de álgebra de Hopf. Es importante destacar que, la categoría de representaciones de una cuasi-álgebra de Hopf de dimensión finita es una categoría tensorial finita. Asimismo, las categorías de representaciones de dimensión finita de (cuasi-)álgebras de Hopf de dimensión finita están munidas de un (cuasi-)funtor de fibra en la categoría de espacios vectoriales. Recíprocamente, si una categoría tensorial admite un (cuasi-)funtor de fibra, entonces, mediante una generalización de la teoría de reconstrucción de Tannaka-Krein para (cuasi-)álgebras Hopf, se puede construir un (cuasi-)álgebra de Hopf cuya categoría de comódulos es tensorialmente equivalente a la categoría tensorial inicial.

Un invariante importante de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ son las dimensiones de Frobenius-Perron, y más aún, el anillo de Grothendieck $K_0(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$. El primero, es estudiado en detalle por Etingof, Nikshych y Ostrik en el trabajo [ENO05], donde dicha dimensión generaliza la dimensión de una representación. Hablando brevemente, se trata de un número real positivo que es asignado a cada clase de equivalencia en el anillo de Grothendieck $K_0(\mathcal{C})$ de la categoría de fusión. En dicho trabajo, los autores demostraron que las categorías de fusión cuyas clases de isomorfismo de objetos simples tienen dimensión de Frobenius-Perron un número entero, son exactamente las categorías de representaciones de cuasi-álgebras de Hopf semisimples. Muchas propiedades de estas categorías pueden deducirse a partir del estudio de su anillo de Grothendieck, por ejemplo, éste permite determinar si la categoría es nilpotente [GN08]. También se han generalizado nociones de la teoría de grupos tales como nilpotencia y resolubilidad al contexto de las categorías de fusión. Por ejemplo, Etingof, Nikshych y Ostrik probaron en [ENO11] un análogo al Teorema de Burnside: si $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión cuya dimensión de Frobenius-Perron es $p^r q^s$, con p y q primos distintos, entonces $\mathcal{C}$ es resoluble.

Actualmente, dar una clasificación de las categorías de fusión está fuera de alcance. Una manera de avanzar en su estudio es centrarse en un conjunto más restringido de las mismas, es decir, añadirle alguna condición extra. Por ejemplo, enfocarse en las categorías modulares de rango pequeño, y en categorías de fusión con dimensión de Frobenius-Perron baja o con pocas dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples, buscando nuevos ejemplos.

Una herramienta importante para el estudio de las categorías de fusión, son las categorías módulo. Las categorías módulo sobre una categoría tensorial corresponden a una categorificación de la noción de módulo o representación. Aunque esta noción corresponde a los años sesenta [Bén67], en los últimos años renovó su importancia. Ésto se debe a los trabajos presentados por Etingof y Ostrik en [Ost03a, Ost03b, EO04], tanto en el caso semisimple como en otros más generales. Las categorías módulos brindan información útil acerca de la categoría tensorial asociada. Por ejemplo, un camino alternativo para clasificar las categorías de fusión es hacerlo salvo *equivalencia Morita*. Esta noción involucra la existencia de una categoría módulo indescomponible y categorifica la noción clásica de Morita equivalencia en el contexto de anillos. Una clase de categorías de fusión que se distingue es, la dada por las de *tipo grupo*. Las cuales son, aquellas categóricamente Morita equivalentes a una categoría de fusión punteada. Demostrar que una cierta categoría es de tipo grupo, es uno de los ojetivos para avanzar en el problema de caracterización. Ésto se debe a que, las categorías de fusión punteadas se conocen en detalle.

Principales resultados obtenidos

En esta tesis se presentan los resultados de un trabajo en conjunto con Sonia Natale [EN16]. Los principales conceptos y resultados están organizados con el objetivo de que resulte lo más autocontenida posible. Para ello se la estructuró de la siguiente manera:

En el **Capítulo 1**, recordamos las definiciones y ejemplos básicos de la teoría de grupos finitos que se consideran esenciales a lo largo de este trabajo. Por ejemplo, los de nilpotencia y resolubilidad de grupos, matched pair de grupos, representaciones y caracteres de un grupo finito.

En el **Capítulo 2**, nos enfocamos en las definiciones y nociones sobre categorías. Además se dan definiciones, ejemplos y resultados básicos sobre categorías abelianas, tensoriales y trenzadas.

En el **Capítulo 3**, nos dedicamos a recordar algunas nociones y resultados sobre álgebras de Hopf, profundizando sobre propiedades de las álgebras de Hopf semisimples, las extensiones abelianas y las álgebras de Hopf cuasitriangulares.

En el **Capítulo 4**, recordamos propiedades y definiciones asociadas a una clase particular de categorías tensoriales, las categorías de fusión. Estas categorías junto con las álgebras de Hopf semisimples son uno de los principales objetos de estudio de esta tesis. Además se presentan varios ejemplos conocidos de este tipo de categorías. Asimismo, en las secciones posteriores, se estudian los conceptos fundamentales para los resultados de los capítulos subsiguientes de esta tesis. Por ejemplo, los de de dimensión de Frobenius-Perron, nilpotencia y resolubilidad de categorías de fusión, categorías de tipo grupo, extensiones y equivariantizaciones de categorías de fusión por un grupo finito, entre otros.

El **Capítulo 5**, contiene parte de los resultados obtenidos en el trabajo [EN16]. En el mencionado trabajo, se aborda el cuestionamiento de si la condición de que una categoría de fusión sea resoluble está determianda por sus reglas de fusión. Consideramos ejemplos provenientes de las representaciones de ciertas álgebras de Hopf semisimples no resolubles asociadas al grupo simétrico y alternante: $J_n = \mathbb{K}^{\mathbb{S}_{n-1}} \# \mathbb{K}C_n$, $K_n = \mathbb{K}^{\mathbb{A}_{n-1}} \# \mathbb{K}C_n$, $H_n = J_n^*$, $L_n = K_n^*$ y $B_n = \mathbb{K}^{\mathbb{A}_n} \# \mathbb{K}C_2$ (donde $C_n = \langle (12 \dots n) \rangle$) y demostramos que si $\mathcal{C}$ es una tal categoría, entonces cualquier categoría Grothendieck equivalente a $\mathcal{C}$ tampoco es resoluble. Los principales resultados son los siguientes teoremas:

Teorema 5.1.4 Sea n un número natural y sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión. Supóngase que $\mathcal{C}$ es Grothendieck equivalente a la categoría $\operatorname{Rep} D_n$, donde D_n es el grupo dihedral de orden $2n$. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble.

Teorema 5.2.14 Sea p un número primo mayor o igual a 5 y sea $\tilde{\mathcal{C}}$ una categoría de fusión. Supongamos que $\tilde{\mathcal{C}}$ es Grothendieck equivalente a una de las categorías $\operatorname{Rep} J_p$ o $\operatorname{Rep} K_p$. Entonces $\tilde{\mathcal{C}}$ no es resoluble.

Teorema 5.2.18 Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión y sea $n \geq 5$ un número natural. Entonces se tiene:

(i) Si $\mathcal{C}$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} H_n$, entonces $\mathcal{C}$ no es resoluble.

(ii) Supongamos que n es impar. Si $\mathcal{C}$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} L_n$, entonces $\mathcal{C}$ no es resoluble.

Teorema 5.2.21 Supongamos que $n \geq 5$. Sea $\tilde{\mathcal{C}}$ una categoría de fusión Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} B_n$. Entonces $\tilde{\mathcal{C}}$ no es resoluble.

Teorema 5.2.22 Sea $\tilde{\mathcal{C}}$ una categoría de fusión. Si $\tilde{\mathcal{C}}$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} B_n^*$, con n un número natural mayor o igual que 5, entonces $\tilde{\mathcal{C}}$ no es resoluble.

Teorema 5.3.1 Sean $\mathcal{C}$, $\tilde{\mathcal{C}}$ categorías de fusión trenzadas Grothendieck equivalentes. Supongamos que $\mathcal{C}$ es resoluble. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:

(i) $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{pt}}$ es una categoría de fusión resoluble y además no es trivial si $\tilde{\mathcal{C}}$ no es trivial.

(ii) Si $\tilde{\mathcal{C}}$ no es punteada, entonces contiene una subcategoría Tannakiana no trivial.

En el **Capítulo 6**, presentamos el resto de los resultados del trabajo [EN16]. Para ello nos enfocamos en el estudio de categorías de fusión esféricas. En este contexto, también consideramos el invariante provisto por la S-matriz del centro de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$, $S = (S_{X,Y})_{X,Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})}$, donde $S_{X,Y} = \mathrm{tr}(c_{Y,X}c_{X,Y})$. De acuerdo con una conocida fórmula de Verlinde,

$$N_{YZ}^{W} = \frac{1}{\dim(\mathcal{Z}(\mathcal{C}))} \sum_{X\in \mathrm{Irr}(\mathcal{Z}(\mathcal{C}))} \frac{S_{X,Y}S_{X,Z}S_{X,W^*}}{d_X}, \text{ con } Y, Z, W \in \mathrm{Irr}(\mathcal{Z}(\mathcal{C})),$$

este invariante determina las reglas de fusión de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, por ser ésta una categoría modular. Mostramos que la S-matriz sí determina la resolubilidad de una categoría de fusión siempre que sea de tipo grupo. Los principales resultados del capítulo son los siguientes teoremas:

Teorema 6.3.3 Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías de fusión esféricas S-equivalentes. Entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo si y sólo si también lo es $\mathcal{D}$.

Teorema 6.3.5 Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías de fusión esféricas S-equivalentes y supongamos que $\mathcal{C}$ es de tipo grupo. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble si y sólo si $\mathcal{D}$ es resoluble.

Capítulo 1

Nociones de la teoría de grupos

En este capítulo se presentarán definiciones y ejemplos básicos correspondientes a la teoría de grupos finitos, que serán esenciales a lo largo de este trabajo. La bibliografía recomendada es [Hun03, Isa76, Kas95, Ser77, W$^+$58].

1.1. Definiciones y propiedades básicas

Sea G un grupo. Consideremos los subgrupos de G definidos recursivamente de la siguiente manera:

$$Z_0 = \{e\},\ Z_{i+1} = \langle x \in G : [x, y] \in Z_i, \forall y \in G\rangle, \forall i \geq 0,$$

donde $[x, y]$ representa al conmutador entre los elementos x e y de G.

Observación 1.1.1. Para cada $i \geq 0$ se tiene $Z_i \trianglelefteq G$, y el grupo Z_{i+1}/Z_i se identifica con el centro $Z(G/Z_i)$ de G/Z_i. En particular el centro $Z(G)$ de G es Z_1.

Definición 1.1.2. Se define la *serie central ascendente* del grupo G, como la sucesión ascendente de estos subgrupos:

$$Z_0 = \{e\} \trianglelefteq Z_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq Z_i \trianglelefteq \dots$$

De manera similar se define la *serie central descendente* del grupo G, como la sucesión descendente de subgrupos:

$$\cdots \trianglelefteq G_i \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G,$$

donde, $G_{i+1} = [G_i, G] = \langle [x, y] \in G : x \in G_i, y \in G\rangle$, para cada $i \geq 0$.

Definición 1.1.3. Un grupo G se dice *nilpotente* si su serie central descendente converge al subgrupo trivial, es decir existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $G_n = \{e\}$. Equivalentemente, se dice que G es nilpotente si y sólo si su serie central ascendente converge a G, es decir, si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $Z_n = G$.

Se dice que un grupo nilpotente G tiene *clase de nilpotencia* n si la longitud de su serie central ascendente (o descendente) es n.

Observación 1.1.4. Si G es un grupo abeliano entonces G es nilpotente. Además si p es un número primo, los p-grupos finitos (es decir, los grupos de orden igual a una potencia de p) son nilpotentes. Se sabe además, que todo grupo finito nilpotente es el producto directo de p-grupos. Más aún, un grupo finito G es nilpotente si y sólo si es el producto directo de sus subgrupos de Sylow.

Definición 1.1.5. Se define la *serie derivada* del grupo G, como la serie subnormal descendente:

$$\cdots \trianglelefteq G^{(2)} \trianglelefteq G^{(1)} \trianglelefteq G^{(0)} = G,$$

donde $G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$ para todo $i \geq 1$.

Definición 1.1.6. Un grupo G se dice *resoluble* si su serie derivada converge al subgrupo trivial.

Si G es un grupo resoluble, el menor entero n para el cual $G^{(n)} = \{e\}$ se denomina *la longitud derivada* de G.

Observación 1.1.7. Todo grupo abeliano es resoluble. Más aún, si G es un grupo nilpotente entonces G es resoluble.

Además, toda extensión de grupos finitos resolubles es resoluble. Es decir, si $1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow 1$ es una sucesión exacta entonces el grupo G es resoluble si y sólo si H y K son resolubles. Por lo tanto, el producto semidirecto (y, en particular, el producto directo) de grupos resolubles es resoluble.

Definición 1.1.8. Sea G un grupo finito. El *zócalo* de G es el subgrupo generado por los subgrupos normales minimales de G. El grupo G se dice casi simple si su zócalo es un subgrupo simple no abeliano.

Ejemplo 1.1.9. Los grupos simples no abelianos son grupos casi simples.

Para $n \geq 5$ el grupo simétrico $\mathbb{S}_n$ es casi simple.

Definición 1.1.10. Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G, H se dice *subgrupo de Hall* si su orden e índice son primos relativos, es decir si $(|H|, [G : H]) = 1$.

Proposición 1.1.11. *(P. Hall) Sea G un grupo finito resoluble de orden mn, con $(m, n) = 1$. Entonces:*

(i) G contiene un subgrupo de Hall orden m.

(ii) Cualesquiera dos grupos de Hall de G de orden m son conjugados.

(iii) Todo subgrupo de G de orden l, donde $l|m$, está contenido en un subgrupo de Hall de orden m.

Demostración. Ver [Hun03, Proposition 7.14]. □

Definición 1.1.12. Una *factorización exacta* de un grupo G es un par de subgrupos Γ, F de G tal que la multiplicación en G induce una biyección $m : F \times \Gamma \longrightarrow G$.

Dada una factorización exacta de un grupo G se tiene asociadas una acción a derecha y una acción a izquierda:

$$\triangleleft : \Gamma \times F \longrightarrow \Gamma \text{ y } \triangleright : \Gamma \times F \longrightarrow F,$$

definidas por

$$\sigma x = (\sigma \triangleright x)(\sigma \triangleleft x), \tag{1.1.1}$$

para todo $\sigma \in \Gamma$, $x \in F$. Estas acciones cumplen las siguientes condiciones de compatibilidad:

$$\sigma \triangleright xy = (\sigma \triangleright x)((\sigma \triangleleft x) \triangleright y), \tag{1.1.2}$$

$$\sigma\tau \triangleleft x = (\sigma \triangleleft (\tau \triangleright x))(\tau \triangleleft x), \tag{1.1.3}$$

para todo $\sigma, \tau \in \Gamma$, $x, y \in F$. Se sigue que $\sigma \triangleright 1 = 1$ y $1 \triangleleft x = 1$, para todo $\sigma \in \Gamma, x \in F$.

Definición 1.1.13. Un *matched pair de grupos* $(\Gamma, F, \triangleleft, \triangleright)$, es un par de grupos F y Γ munidos de acciones a derecha y a izquierda $\triangleleft$ y $\triangleright$, respectivamente, definidas por (1.1.1) y que cumplen las condiciones de compatibilidad (1.1.2) y (1.1.3).

Observación 1.1.14. Dado un matched pair de grupos F y Γ, se puede encontrar un grupo G y una factorización exacta $G = F\Gamma$.

Sea (Γ, F) un matched pair de grupos. Denotaremos por $F \bowtie \Gamma$ a la única estructura de grupo en el conjunto $F \times \Gamma$ con unidad $(1,1)$ tal que:

$$(x,\sigma)(y,\tau) = (x(\sigma \triangleright y), (\sigma \triangleleft y)\tau),$$

para todo $x, y \in F$, $\sigma, \tau \in \Gamma$. Este grupo se denomina *producto bicruzado de* F *y* Γ. Además, los grupos F y Γ se indentifican, respectivamente, con los subgrupos $F \times \{1\}$ y $\{1\} \times \Gamma$ de $F \bowtie \Gamma$, y todo elemento (x, σ) de $F \bowtie \Gamma$ se pueden escribir de manera única como producto de un elemento de $F \times \{1\}$ y un elemento de $\{1\} \times \Gamma$ de la siguiente manera:

$$(x, \sigma) = (x, 1)(1, \sigma).$$

Recíprocamente, sean G un grupo y F y Γ una factorización exacta de G, es decir, subgrupos de G para los cuales la aplicación de la multiplicación induce una biyección $m : F \times \Gamma \longrightarrow G$. Entonces el par (Γ, F) es un *matched pair de grupos*, y la biyección anterior induce un isomorfismo de grupos del producto bicruzado $F \bowtie \Gamma$ en G. Ver [Kas95, Proposition IX.1.2].

Teorema 1.1.15. *Si* Γ *y* F *son grupos nilpotentes entonces el grupo* $G \doteq F \bowtie \Gamma$ *es resoluble.*

Demostración. Ver [W$^+$58]. □

1.2. Representaciones y caracteres de un grupo finito

En lo que sigue G representará un grupo finito.

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $\mathrm{GL}(V)$ el grupo de automorfismos $\mathbb{K}$-lineales de V.

Definición 1.2.1. Una *representación lineal* de G en V es un homomorfismo ρ del grupo G en $\mathrm{GL}(V)$. En otras palabras, a cada elemento g de G se le asocia un elemento $\rho(g)$ de $\mathrm{GL}(V)$ de modo que se verifica:

$$\rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h) \tag{1.2.1}$$

para todo $g, h \in G$. El espacio vectorial V se denomina *espacio de representación de* G.

A menudo escribiremos ρ_g en lugar de $\rho(g)$, con $g \in G$.

Observación 1.2.2. La condición (1.2.1) implica que

$$\rho(1) = 1 \text{ y } \rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}.$$

Nos restringiremos al caso en que V tiene dimensión finita.

Definición 1.2.3. Si n es la dimensión del espacio de representación V de G, diremos que n es el *grado* de la representación considerada.

Definición 1.2.4. Sean ρ y ρ' dos representaciones del mismo grupo G en los espacios vectoriales V y V' respectivamente. Se dice que las representaciones son *equivalentes* o *isomorfas* si existe un isomorfismo lineal $\tau : V \to V'$ tal que

$$\tau \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \tau$$

para todo $g \in G$.

Cuando ρ y ρ' están dadas en forma matricial por R_g y R'_g respectivamente, significa que existe una matriz inversible T tal que

$$TR_g = R'_g T,$$

o equivalentemente

$$R'_g = TR_g T^{-1},$$

para todo $g \in G$.

En particular ρ y ρ' tienen el mismo grado.

Definición 1.2.5. Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación lineal y sea W un subespacio vectorial de V. Supongamos que W es *estable* bajo la acción de G (es decir, si $x \in W$ implica que $\rho_g(x) \in W$ para todo $g \in G$). La restricción ρ_g^W de ρ_g para W es entonces un isomorfismo de W en W y se tiene $\rho_{gh}^W = \rho_g^W \cdot \rho_h^W$. Así $\rho^W : G \to \mathrm{GL}(W)$ es una representación lineal de G en W y se denomina una *subrepresentación* de V.

A partir de ahora $\mathbb{K}$ será un cuerpo cuya característica no divida al orden de G.

Teorema 1.2.6. *Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación lineal de G en V y sea W un subespacio vectorial de V estable bajo G. Entonces existe un complemento W^0 de W en V tal que es estable bajo G.*

Demostración. Ver [Ser77, Theorem 1]. □

Definición 1.2.7. Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación lineal de G. Se dice que ρ es *irreducible* o *simple* si V es $\{0\}$ o si no tiene subespacios propios estables bajo G.

Observación 1.2.8. Por el Teorema 1.2.6, la Definición 1.2.7 equivale a decir que V no es suma directa de dos subespacios de representación (excepto claro por la descomposición trivial $V = 0 \oplus V$).

Una representación de grado 1 es claramente irreducible.

Teorema 1.2.9. *Toda representación es suma directa de representaciones irreducibles.*

Demostración. Ver [Ser77, Theorem 2]. □

Definición 1.2.10. El *caracter* asociado a la representación ρ es la función $\chi_\rho : G \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho_g)$, donde Tr es la función traza en $GL(V)$.

Definición 1.2.11. El *grado del caracter* χ_ρ es el valor $\chi_\rho(1)$ de dicho caracter en 1, o sea, es igual al grado $\deg \rho$ de la representación asociada.

Definición 1.2.12. Un caracter χ_ρ se dice *irreducible* si la representación asociada ρ es irreducible. Denotaremos por $\widehat{G}$ al grupo de caracteres de G.

Manteniendo la notación de Isaacs [Isa76, Chapter 12] llamaremos c.d.(G) al conjunto de grados de los caracteres irreducibles del grupo G, es decir

$$\text{c.d.}(G) = \{\chi(e) : \chi \text{ caracter irreducible de } G\}.$$

Nos restringiremos ahora al caso especial en el que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, los números complejos. Destaquemos que de hecho, con pequeñas modificaciones, la mayoría de lo siguiente funciona para cualquier cuerpo algebraicamente cerrado y de característica que no divide al orden de G.

Definición 1.2.13. Si χ es un caracter de G, entonces el *núcleo* de χ, denotado $\mathrm{Ker}\,\chi$, se define como

$$\mathrm{Ker}\,\chi = \{g \in G : \chi(g) = \chi(1)\}.$$

Observación 1.2.14. Es sabido que, si ρ es una representación de G con caracter χ, entonces $\mathrm{Ker}\,\rho = \mathrm{Ker}\,\chi$ (ver [Isa76, Lemma 2.19]). En particular, $\mathrm{Ker}\,\chi \lhd G$.

Definición 1.2.15. Un caracter χ de G se dice *fiel* si $\operatorname{Ker} \chi = \{1\}$.

Proposición 1.2.16. *Si χ es el caracter de una representación ρ de grado n, se tiene:*

(i) $\chi(1) = n$.

(ii) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ *para $g \in G$ (donde con $\overline{\chi(g)}$ se representa al conjugado de $\chi(g)$).*

(iii) $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$ *para $g, h \in G$.*

Demostración. Ver [Ser77, Proposition 1]. □

Observación 1.2.17. Una función f en G que satisface la condición (iii), o equivalentemente $f(uv) = f(vu)$, se denomina *función clase*.

Teorema 1.2.18. *Si $\chi_1, \ldots, \chi_h$ son los caracteres irreducibles de G. Entonces $\{\chi_1, \ldots, \chi_h\}$ es una base ortonormal del espacio $FC(G)$ de funciones clase de G.*

Demostración. Ver [Ser77, Theorem 6]. □

Teorema 1.2.19. *El número de representaciones irreducibles de G (salvo isomorfismo) es igual al número de clases de conjugación de G.*

Demostración. Ver [Ser77, Theorem 7]. □

Junto con la suma directa, hay una "multiplicación": el *producto tensorial*, a veces denominado *producto de Kronecker*. Este se define como sigue:

Definición 1.2.20. Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales. Un espacio W munido de una aplicación $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ de $V_1 \times V_2$ en W se denomina *producto tensorial* de V_1 y V_2 si se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $x_1 \cdot x_2$ es lineal en cada una de las variables x_1 y x_2.

(ii) Si $\{e_{i_1}\}$ es una base de V_1 y $\{e_{i_2}\}$, entonces $\{e_{i_1} \cdot e_{i_2}\}$ es una base de W.

Este espacio existe y es único (salvo isomorfismos) y se denota $V_1 \otimes V_2$.

Observación 1.2.21. La condición (ii) de la Definición 1.2.20 implica que

$$\dim(V_1 \otimes V_2) = \dim(V_1) \cdot \dim(V_2).$$

Definición 1.2.22. Sean $\rho^1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ y $\rho^2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ dos representaciones de un grupo G. Para $g \in G$, se define ρ en $\mathrm{GL}(V_1 \otimes V_2)$ por la condición:

$$\rho_g(x_1 \cdot x_2) = \rho_g^1(x_1) \cdot \rho_g^2(x_2) \text{ para } x_1 \in V_1, x_2 \in V_2.$$

Escribiremos $\rho_g = \rho_g^1 \otimes \rho_g^2$. La aplicación ρ_g define una representación lineal de G en $V_1 \otimes V_2$ que se denomina *producto tensorial* de las representaciones dadas.

Observación 1.2.23. La existencia y unicidad de ρ_g en la Definición 1.2.22 sigue de las condiciones (i) y (ii) de la Definición 1.2.20.

El producto tensorial de dos representaciones irreducibles no es en general irreducible.

Proposición 1.2.24. *Sean $\rho^1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ y $\rho^2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ dos representaciones lineales de G, y sean χ_1 y χ_2 sus caracteres. Entonces:*

(i) El caracter χ de la representación suma directa $\rho^1 \oplus \rho^2$ es igual a $\chi_1 + \chi_2$.

(ii) El caracter ψ de la representación producto tensorial $\rho^1 \otimes \rho^2$ es igual a $\chi_1\chi_2$.

Demostración. Ver [Ser77, Proposition 2]. □

1.2.1. Tabla de caracteres

Definición 1.2.25. Sean $\chi_1, \ldots, \chi_k$ los caracteres irreducibles de G y sean $g_1, \ldots, g_k$ representantes de las clases de conjugación de G. La matriz $k \times k$ cuya entrada ij es $\chi_i(g_j)$ (para todo i, j con $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$), se denomina la *tabla de caracteres* de G.

Observación 1.2.26. Notemos que en la tabla de caracteres, las filas están indexadas por los caracteres irreducibles de G y las columnas por las clases de conjugación (o en la práctica, por representantes de las clases de conjugación).

Proposición 1.2.27. *La tabla de caracteres de G es una matriz inversible.*

Demostración. Es inmediato de los Teoremas 1.2.18 y 1.2.19. □

Ejemplo 1.2.28. La tabla de caracteres de $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$ es la siguiente:

	1	a	b
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
χ_3	2	-1	0

1.2.2. Relaciones de ortogonalidad para los caracteres

En esta subsección nos restringiremos al caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sea G un grupo finito y sea $\mathbb{K}^G$ el espacio de funciones en G a valores en el cuerpo $\mathbb{K}$.

Sean $\phi, \psi \in \mathbb{K}^G$. Definimos la aplicación

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g^{-1})\psi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)\psi(g^{-1}). \tag{1.2.2}$$

Se tiene $\langle \phi, \psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle$. Más aún es lineal en ϕ y en ψ.

Definamos además,

$$(\phi|\psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)\overline{\psi(g)}. \tag{1.2.3}$$

Este es un producto escalar (es lineal en ϕ, semilineal en ψ y $(\phi|\phi) > 0$ para todo $\phi \neq 0$).

Si $\hat{\psi}$ es la función definida por la fórmula $\hat{\psi}(g) = \overline{\psi(g^{-1})}$, se tiene

$$(\phi|\psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)\hat{\psi}(g^{-1}) = \langle \phi, \hat{\psi} \rangle.$$

En particular si χ es el caracter de una representación de G, tenemos por la Proposición 1.2.16 que $\hat{\chi} = \chi$, y por lo tanto $(\phi|\psi) = \langle \phi, \psi \rangle$ para toda función ϕ sobre G. Entonces podemos usar $(\phi|\psi)$ o $\langle \phi, \chi \rangle$.

Observación 1.2.29. Si denotamos por g_i^G a la clase de conjugación de G que contiene a g_i y como los caracteres son constantes sobre las clases de conjugación se tiene que

$$\sum_{g \in g_i^G} \chi_r(g)\overline{\chi_s(g)} = |g_i^G|\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}.$$

Como $G = \bigcup_{i=1}^h g_i^G$ y $|g_i^G| = |G|/|C_G(g_i)|$, se sigue que

$$(\chi_r|\chi_s) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_r(g)\overline{\chi_s(g)} = \sum_{i=1}^h \frac{|g_i^G|}{|G|}\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)} = \sum_{i=1}^h \frac{1}{|C_G(g_i)|}\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}.$$

Teorema 1.2.30. *Sean χ_V y χ'_W dos caracteres irreducibles de G, tales que $V \ncong W$. Se cumplen entonces las siguientes condiciones:*

(i) $(\chi_V|\chi_V) = 1$, *es decir* χ *es de norma 1.*

(ii) $(\chi_V|\chi'_W) = 0$, *es decir* χ_V *y* χ'_W *son ortogonales.*

Demostración. Ver [Ser77, Theorem 3]. □

Las relaciones en el Teorema 1.2.30 pueden resumirse de la siguiente manera, si $\chi_1, \ldots, \chi_h$ son los caracteres irreducibles de G

$$(\chi_r|\chi_s) = \delta_{rs}, \text{ con } r, s \in 1, \ldots, h. \tag{1.2.4}$$

Existen relaciones similares entre las columnas de la tabla de caracteres, y están dadas en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.31. *Sean $\chi_1, \ldots, \chi_k$ los caracteres irreducibles de G y sean $g_1, \ldots, g_k$ representantes de las clases de conjugación de G. Entonces se cumplen las siguientes relaciones para todo $r, s \in \{1, \ldots, k\}$.*

(i) Relaciones de ortogonalidad para las filas:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs}.$$

(ii) Relaciones de ortogonalidad para las columnas:

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = \delta_{rs}|C_G(g_r)|.$$

Demostración. (i) Consecuencia de la Observación 1.2.29 y Teorema 1.2.30.

(ii) Ver [Isa76, Theorem 2.18]. □

Teorema 1.2.32. *Sea V un espacio de representación de G, con caracter ϕ, y supongamos que V se descompone en suma directa en subespacios de representación:*

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

Entonces, si W es un espacio de representación irreducible de G con caracter χ, el número de W_i isomorfos a W es igual al producto escalar $(\phi|\chi) = \langle \phi, \chi \rangle$.

Demostración. Ver [Ser77, Theorem 4]. □

Corolario 1.2.33. *Dos representaciones con el mismo caracter son isomorfas.*

Demostración. Ver [Ser77, Corollary 2]. □

Observación 1.2.34. Si $\chi_1, \dots, \chi_h$ son los caracteres irreducibles distintos de G, y si $W_1, \dots, W_h$ denota los espacios de representación correspondientes, cada espacio de representación V es isomorfo a una suma directa

$$V = m_1 W_1 \oplus \cdots \oplus m_h W_h, \text{ con } m_i \text{ enteros } \geq 0.$$

El caracter ϕ de V es igual a $m_1\chi_1 + \cdots + m_h\chi_h$, y $m_i = (\phi|\chi_i)$.

De modo que si $\rho_1, \dots, \rho_h$ son representantes de las clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de G asociadas a los caracteres irreducibles $\chi_1, \dots, \chi_h$, se tiene que cualquier representación lineal $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ con caracter ϕ, puede expresarse como

$$\rho = \bigoplus_{i=1}^{h} m_i \rho_i \text{ con } m_i = (\phi|\chi_i)$$

Ésto se aplica notablemente al producto tensorial de $\rho_i \otimes \rho_j$ de dos representaciones irreducibles, y muestra que:

(i) El producto $\rho_i \otimes \rho_j = \bigoplus_{k=1}^{h} m_{ij}^k \rho_k$, con $m_{ij}^k = (\chi_i\chi_j|\chi_k)$.

(ii) El producto $\chi_i \otimes \chi_j = \bigoplus_{k=1}^{h} m_{ij}^k \chi_k$, con $m_{ij}^k = (\chi_i\chi_j|\chi_k)$.

De lo anterior se deduce que conocer la tabla de caracteres de un grupo finito G equivale a conocer las reglas de fusión de su categoría de representaciones $\operatorname{Rep} G$ (ver Capítulo 4).

Las relaciones de ortogonalidad entre los χ_i implican además:

$$(\phi|\phi) = \sum_{i=1}^{i=h} m_i^2,$$

y por lo tanto $(\phi|\phi) = 1$ si y sólo si ϕ es irreducible.

1.2.3. Aplicaciones de la teoría de caracteres

Luego de haber desarrollado lo básico de la teoría de caracteres de grupos finitos, nos podemos preguntar, ¿qué información se puede obtener de un grupo finito a partir de sus caracteres? La tabla de caracteres puede ser usada para determinar si un grupo es simple o resoluble.

Proposición 1.2.35. *Si $\chi_1, \ldots, \chi_h$ son los caracteres irreducibles distintos de G. Los subgrupos normales de G son de la forma $\bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker} \chi_i$, para algún $I \subseteq \{1, 2, \ldots, h\}$.*

Demostración. Ver [Isa76, Chapter 2]. □

Observación 1.2.36. La tabla de caracteres de G nos da todos los $\operatorname{Ker} \chi_i$ con $i = 1, \ldots, h$ y la Proposición 1.2.35 nos da todos los subgrupos normales de G y todas las relaciones de inclusión entre ellos, en términos de esos núcleos.

Corolario 1.2.37. *Si $\chi_1, \ldots, \chi_h$ son los caracteres irreducibles distintos de G. El grupo G es simple y sólo si el único caracter irreducible χ_i de G para el cual $\chi_i(g) = \chi_i(1)$, para algún $g \neq 1$ en G, es el caracter trivial χ_1.*

Demostración. Si G es simple y si sucediera que $\chi_i(g) = \chi_i(1)$ para algún $i > 1$ y algún $g \neq 1$, entonces $g \in \operatorname{Ker} \chi_i \lhd G$, lo que es una contradicción. Recíprocamente, si G no fuera simple, entonces existiría un $H \lhd G$ no trivial y propio, es decir, existiría $g \neq 1$ en H. Por la Proposición 1.2.35, $H \subseteq \operatorname{Ker} \chi_i$ para algún $i > 1$ y por lo tanto $\chi_i(g) = \chi_i(1)$, lo que contradice la hipótesis. □

Corolario 1.2.38. *La tabla de caracteres de un grupo finito G determina si G es o no resoluble.*

Demostración. Por la Observación 1.2.36, la tabla de caracteres nos permite determinar todas las series normales de G y los órdenes de los términos involucrados. En particular, nos permite determinar si G tiene o no una serie normal cuyos cocientes sean abelianos. □

También se puede calcular el centro de un grupo a partir de su tabla de caracteres. Para ello introducimos la siguiente definición:

Definición 1.2.39. Dado un caracter χ de G, se define su *centro* como el conjunto

$$Z(\chi) = \{g \in G | \ |\chi(g)| = \chi(1)\}.$$

Proposición 1.2.40. *Si $\chi_1, \ldots, \chi_h$ son los caracteres irreducibles distintos de G. Entonces*

$$Z(G) = \bigcap_{i=1}^{h} Z(\chi_i).$$

Demostración. Ver [Isa76, Corollary 2.28] □

Corolario 1.2.41. *A partir de la tabla de caracteres de G se puede determinar si G es o no nilpotente.*

Demostración. El $Z(G)$ puede ser determinado a partir de la Proposición 1.2.40. Por lo que también puede determinarse si G es o no nilpotente. Para ello luego de encontrar el Z(G), se determina la tabla de caracteres de $G/Z(G)$ y se reitera el proceso. La sucesión resultante de subgrupos de G es la serie central ascendente y G es nilpotente si y sólo si esta sucesión converge a G. □

1.2.4. Representaciones Inducidas

Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación lineal de G, y sea ρ_H su restricción a H. Sea W un subespacio de representación ρ_H, es decir un subespacio vectorial de V estable bajo ρ_h, con $h \in H$. Denotemos por $\theta : H \to \mathrm{GL}(W)$ la representación de H en W así definida. Sea $g \in G$, el espacio vectorial $\rho_g(W)$ depende solamente de las coclases a izquierda gH de g, en efecto, si reemplazamos a g por gh con $h \in H$, tenemos que $\rho_{gh}(W) = \rho_g\rho_h(W) = \rho_g(W)$ ya que $\rho_h(W) = W$. Si σ es una coclase a izquierda de H, podemos definir un subespacio W_σ de V como $\rho_g(W)$ con $g \in \sigma$. Es claro que los W_σ son permutados entre sí por los $\rho_g, g \in G$. Su suma $\sum_{\sigma\in G/H} W_\sigma$ es así un subespacio de representación de V.

Definición 1.2.42. Una representación ρ de G en V es *inducida* por la representación θ de H en W si V es igual a la suma de los W_σ, con $\sigma \in G/H$, y si su suma es directa, es decir si $V = \bigoplus_{\sigma\in G/H} W_\sigma$.

Se puede reformular esta condición de diferentes formas:

(i) Cada $x \in V$ se escribe de manera única como $\sum_{\sigma\in G/H} x_\sigma$, con $x_\sigma \in W_\sigma$ para cada σ.

(ii) Si R es un sistema de representantes de G/H, es espacio vectorial V es la suma directa de los $\rho_r(W)$, con $r \in R$.

En particular, $\dim(V) = \sum_{r\in R} \dim(\rho_r(W)) = [G : H] \cdot \dim(W)$.

Ejemplo 1.2.43. Sea V la representación regular de G, el espacio V tiene una base $\{e_h\}_{h\in G}$ tal que $\rho_g(e_h) = e_{gh}$ para $g \in G, h \in G$. Sea W el subespacio de V con base $\{e_h\}_{h\in H}$. La representación θ de H en W es la representación regular de H, y es claro que ρ es inducida por θ.

Lema 1.2.44. *[Ser77, Lemma 1]. Supongamos que ρ^V es inducida por θ^W. Sea $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$ una representación lineal de G, y sea $f : W \to V'$ una aplicación lineal tal que $f(\theta_h(w)) = \rho'_h(f(w))$ para todo $w \in W$ y $h \in H$. Entonces existe una única aplicación lineal $F : V \to V'$ que extiende f y satisface $F \circ \rho_g = \rho'_g \circ F$ para todo $g \in G$.*

Teorema 1.2.45. *Sea θ^W una representación lineal de H. Existe una representación lineal ρ^V de G la cual es inducida por ρ^W y que es única salvo isomorfismos.*

Demostración. Ver [Ser77, Theorem 11]. □

Supongamos que ρ^V es inducida por θ^W y sean χ_ρ y χ_θ los caracteres correspondientes de G y H. Como θ^W determina ρ^V salvo isomorfismos, podemos computar χ_ρ a partir de χ_θ. En el siguiente teorema veremos como hacerlo:

Teorema 1.2.46. *Sea m el orden de H y sea R un sistema de representantes de G/H. Para cada $g \in G$, se tiene*

$$\chi_\rho(g) = \sum_{r\in R, r^{-1}gr\in H} \chi_\theta(r^{-1}gr) = \frac{1}{m} \sum_{h\in G, h^{-1}gh\in H} \chi_\theta(h^{-1}gh).$$

Demostración. Ver [Ser77, Theorem 12]. □

Proposición 1.2.47. *Sean G un grupo y $H \subset G$ un subgrupo, f una función clase de G y f_H su restricción a H. Se tiene la siguiente fórmula de reciprocidad de Frobenius:*

$$(f_H|\chi_\theta)_H = (f|\chi_\rho)_G,$$

donde los productos escalares se calculan sobre H y G respectivamente.

1.3. Grupos Ext y grupo de cohomología

En esta sección nos basamos en [EGNO15, Section 1.7].

Sea R un anillo, y sean M y N R-módulos a izquierda.

Definición 1.3.1. Una *resolución proyectiva* de M es una sucesión exacta

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

donde P_i son R-módulos proyectivos.

Dada una tal resolución proyectiva, se puede definir una sucesión de módulos y morfismos

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P_0, N) \to \mathrm{Hom}_R(P_1, N) \to \mathrm{Hom}_R(P_2, N) \to \dots$$

la cual es un complejo. Denotaremos por d_i la aplicación $\mathrm{Hom}(P_{i-1}, N) \to \mathrm{Hom}(P_i, N)$ para $i \geq 0$, donde $P_{-1} := 0$. Se tiene entonces

$$d_{i+1} \circ d_i = 0.$$

La cohomología de este complejo, $H^i := \mathrm{Ker}(d_{i+1}) / \mathrm{Im}(d_i)$, es independiente de la resolución tomada salvo isomorfismo canónico. Para $i > 0$, esta cohomología se denota por $\mathrm{Ext}^i(M, N)$ y $\mathrm{Ext}^0(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$.

Sea $0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$ una sucesión exacta corta de R-módulos. Entonces existe una sucesión exacta larga de cohomología

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i(M, N_1) \to \mathrm{Ext}^i(M, N_2) \to \mathrm{Ext}^i(M, N_3) \to \mathrm{Ext}^{i+1}(M, N_1) \to \dots$$

Consideremos ahora un ejemplo. Sea G un grupo, y sea A un grupo abeliano con una acción de G (es decir, un G-módulo). Entonces los grupos $\mathrm{Ext}^i_G(\mathbb{Z}, A)$ en la categoría de G-módulos (donde G actúa sobre $\mathbb{Z}$ trivialmente) son llamados los grupos de cohomología de G con coeficientes en A y se denotan $H^i(G, A)$.

Los grupos $H^i(G, A)$ pueden definirse de una manera más explícita, ya que existe una resolución explícita de $\mathbb{Z}$ en la categoría de G-módulos, llamada la resolución barra. Los términos de la resolución barra tienen la forma $P_i := \mathbb{Z}[G^{i+1}]$, con la acción de grupo por $g(g_0, g_1, \ldots, g_i) = (gg_0, g_1, \ldots, g_i)$, y las aplicaciones $\partial_i : P_i \to P_{i-1}$ se definen por la fórmula

$$\partial_i(g_0, \ldots, g_i) = (g_0 g_1, g_2, \ldots, g_i) - (g_0, g_1 g_2, \ldots, g_i) + \tag{1.3.1}$$

$$\cdots + (-1)^{i-1}(g_0, \ldots, g_{i-1} g_i) + (-1)^i (g_0, \ldots, g_{i-1}). \tag{1.3.2}$$

Se puede ver que ésta es en efecto una resolución. Se tiene un isomorfismo γ_i : $\mathrm{Hom}_G(P_i, A) \cong \mathrm{Fun}(G^i, A)$, dado por

$$\gamma_i(h)(g_1, \ldots, g_i) := h(1, g_1, \ldots, g_i),$$

y las aplicaciones $d_i = \partial_i^* : \mathrm{Hom}_G(P_{i-1}, A) \to \mathrm{Hom}_G(P_i, A)$ por esta identificación toman la forma

$$d_i(f)(g_1, \ldots, g_i) := g_1 f(g_2, \ldots, g_i) - f(g_1 g_2, \ldots, g_i) + \tag{1.3.3}$$

$$\cdots + (-1)^{i-1} f(g_1, \ldots, g_{i-1} g_i) + (-1)^i f(g_1, \ldots, g_{i-1}). \tag{1.3.4}$$

El complejo con términos $C^i = C^i(G, A) := \mathrm{Fun}(G^i, A)$ y diferenciales definidos se este modo se denomina el complejo estándar de G con coeficientes en A. Los cociclos $\mathrm{Ker}(d_{i+1})$ y cobordes $\mathrm{Im}(d_i)$ de este complejo se denotan por $Z^i(G, A)$ y $B^i(G, A)$, respectivamente, y el grupo cohomología $H^i(G, A)$ es la cohomología de este complejo.

Observación 1.3.2. Notemos que si A es un anillo conmutativo y la G-acción preserva la multiplicación en A entonces $H^*(G, A)$ es un anillo conmutativo graduado, con multiplicación inducida por el producto de A sobre grupos Ext.

Capítulo 2

Categorías

En este capítulo recordaremos definiciones y nociones sobre categorías. En capítulos siguientes nos adentraremos en el estudio de una clase particular de categorías, para lo cual es importante este estudio previo. La bibliografía recomendada para este tema es [EGNO15, Mac98]

Definición 2.0.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consiste de:

(i) Una clase $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ de objetos .

(ii) Una clase $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ de morfismos entre los objetos. Cada morfismo tiene un objeto de origen X y un objeto de destino Y en $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Un tal morfismo se denotará $\phi : X \to Y$, y diremos que ϕ es un morfismo de X en Y. Denotaremos por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ a la clase de morfismos de X en Y, y cuando no haya confusión sobre la categoría a la que se hace referencia, simplemente por $\mathrm{Hom}(X, Y)$.
Para cada objeto $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ existe un morfismo distinguido en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ denotado por id_X y denominado la identidad.

(iii) Para cualesquiera tres objetos $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ una operación binaria

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

llamada composición de morfismos, tal que es unitaria (para todo $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\mathrm{id}_Y \circ \phi = \phi = \phi \circ \mathrm{id}_X$) y es asociativa (para todo $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(U, X)$ se cumple que $\psi \circ (\phi \circ \eta) = (\psi \circ \phi) \circ \eta)$.

Definición 2.0.2. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *localmente pequeña* si para todo par de objetos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, la clase de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un conjunto.

Definición 2.0.3. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *pequeña* si tanto la clase $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y las clases de morfimos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para todo par de objetos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ son conjuntos.

Ejemplo 2.0.4. Veamos algunos ejemplos de categorías:

1) La categoría **Set** es la categoría cuyos objetos son conjuntos y los morfimos entre dos conjuntos son las funciones entre dichos conjuntos. Dado un conjunto X el morfismo id_X es la identidad de X y la composición de morfismos es la composición de funciones.

2) La categoría **Grp** es la categoría cuyos objetos son los grupos y los morfimos entre dos grupos son los homomorfismos de grupos.

Definición 2.0.5. Una *subcategoría* $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ es una categoría tal que $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Las composiciones de los morfismos de $\mathcal{D}$ son las composiciones como morfismos en $\mathcal{C}$.

Definición 2.0.6. Una subcategoría $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$, se dice *plena* si $\mathcal{D}$ es una subcategoría tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

Definición 2.0.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, sean además X, X_1, X_2 objetos de $\mathcal{C}$ y sean $i_1 : X_1 \longrightarrow X$, $i_2 : X_2 \longrightarrow X$ monomorfismos (ver [Hun03, Definition 3.1]). Se dice que los monomorfismos i_1, i_2 son *equivalentes* si existe un isomorfismo $u : X_1 \longrightarrow X_2$ que hace que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "i_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "i_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. Un *subobjeto* de X es una clase de equivalencia de monomorfismos a X. Si X, Y son dos objetos de $\mathcal{C}$, se denotará $X \subseteq Y$ si X es un subobjeto de Y.

Definición 2.0.8. Si $\mathcal{C}$ es una categoría, entonces la *categoría opuesta* de $\mathcal{C}$, denotada $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, se define como sigue. Los objetos de $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ son los mismos que los objetos de la categoría $\mathcal{C}$. El conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y)$ de morfimos en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ de X en Y se define como el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ de morfimos en $\mathcal{C}$ de Y en X. Cuando un morfismo $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ es considerado como un morfismo en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X,Y)$, lo denotaremos por ϕ^{op}. La composición de morfismos en $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ se define por

$$\psi^{\mathrm{op}} \circ \phi^{\mathrm{op}} = (\phi \circ \psi)^{\mathrm{op}}.$$

Definición 2.0.9. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías. Un *funtor* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es una regla que asigna

(i) A cada objeto X de $\mathcal{C}$ un objeto $F(X)$ de $\mathcal{D}$.

(ii) A cada morfismo $\phi : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$, un morfismo $F(\phi) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ en $\mathcal{D}$, tal que se verifica

$$F(id_X) = id_{F(X)}, \;\; F(\phi \circ \psi) = F(\phi) \circ F(\psi),$$

para todo objeto $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y todo par de morfismos ϕ, ψ de $\mathcal{C}$ que se puedan componer.

Observación 2.0.10. La Definición 2.0.9 corresponde a un *funtor covariante*. Un funtor *contravariante* es un funtor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$.

Ejemplo 2.0.11. $F : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$ tal que $F(G) = G$ para todo grupo G y $F(\phi) = \phi$ para todo morfismo ϕ es un funtor y se lo llama el *funtor de olvido*, porque se está "olvidando" de la estructura de grupo.

Definición 2.0.12. Si $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ son dos funtores, una *transformación natural* $\mu : F \longrightarrow G$ es una colección de morfismos $\{\mu_X : F(X) \longrightarrow G(X) : X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$ tal que para todo par de objetos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y para cada morfismo $\phi : X \longrightarrow Y$ se verifica que el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "F(\phi)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\phi)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Se dice que una transformación natural $\mu : F \longrightarrow G$ es un *isomorfismo natural* si para todo $X \in Ob(\mathcal{C})$ los morfismos $\mu_X : F(X) \longrightarrow G(X)$ son isomorfismos y en este caso se dice F es naturalmente isomorfo a G y se denota por $F \sim G$.

Observación 2.0.13. Denotaremos por $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ a la categoría cuyos objetos son los funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Dados dos objetos en esta categoría, es decir, dos funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ el espacio de morfismos es el conjunto de transformaciones naturales $\mu : F \to G$ y lo denotaremos por $\mathrm{Nat}(F, G)$, y en particular $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{C}) = \mathrm{End}(\mathcal{C})$.

Definición 2.0.14. Se dice que dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *equivalentes* si existen funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tales que $F \circ G \sim \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ y $G \circ F \sim \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, y se denota $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$.

Definición 2.0.15. Un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ se dice *dominante* si todo objeto $Y \in \mathcal{D}$ es un subobjeto de $F(X)$ para algún $X \in \mathcal{C}$.

Definición 2.0.16. Un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ se dice *fiel*, respectivamente *pleno*, si para todo par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$ la aplicación $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(F(X), F(Y))$, es inyectiva, respectivamente suryectiva.

El funtor F se dice *esencialmente suryectivo* si para todo objeto $Z \in \mathcal{D}$ existe un objeto X de $\mathcal{C}$ tal que $F(X) \simeq Z$.

Teorema 2.0.17. *Dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son equivalentes si y sólo si existe un funtor fiel, pleno y esencialmente suryectivo $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$.*

Demostración. Ver [Mac98, Chapter IV - Section 4 - Theorem 1]. □

2.1. Categorías Aditivas

Definición 2.1.1. Un objeto $Z \in \mathcal{C}$ se denomina *objeto cero o nulo* si para todo objeto $X \in \mathcal{C}$ se tiene $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) = \{\phi_X\}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) = \{\psi_X\}$.

Observación 2.1.2. Si $\mathcal{C}$ posee un objeto cero, éste es único salvo isomorfismo y además $\phi_Z = \psi_Z = \mathrm{id}_Z$.

Definición 2.1.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero Z. Para todo $X, Y \in \mathcal{C}$ se define $0_Y^X : X \to Y$ como el morfismo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\phi_X"'] \arrow[dr, "0_Y^X"] & \\ Z \arrow[rr, "\psi_Y"'] & & Y \end{tikzcd} .$$

El morfismo 0_Y^X se denomina morfismo nulo y cuando no haya lugar a confusión lo denotaremos simplemente por $0 : X \to Y$.

Observación 2.1.4. Toda composición con un morfismo nulo es un morfismo nulo. Es decir, si $\mathcal{C}$ es una categoría con objeto cero y sean $W, X, Y \in \mathcal{C}$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, entonces $f \circ 0_X^W = 0_Y^W$ y $0_W^Y \circ f = 0_W^X$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y sean $X, Y \in \mathcal{C}$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Definición 2.1.5. Un *núcleo* de f es un objeto $\mathrm{Ker}\, f \in \mathcal{C}$ y un morfismo $k : \mathrm{Ker}\, f \to X$ tal que $f \circ k = 0$, de modo que para todo morfismo $k' : K' \to X$ existe un único morfismo $u : K' \to \mathrm{Ker}\, f$ tal que $k \circ u = k'$ si y sólo si $f \circ k' = 0$.

Definición 2.1.6. Un *conúcleo* de f es un objeto $\mathrm{CoKer}\, f \in \mathcal{C}$ y un morfismo $q : Y \to \mathrm{CoKer}\, f$ tal que $q \circ f = 0$, de modo que para todo morfismo $q' : Y \to Q$ existe un único morfismo $u : \mathrm{CoKer}\, f \to Q$ tal que $u \circ q = q'$ si y sólo si $q' \circ f = 0$.

Observación 2.1.7. Si existe un núcleo de un morfismo, éste es único salvo isomorfismo y k es un monomorfismo. Análogamente, si existe un conúcleo de un morfismo, éste es único salvo isomorfismo y q es un epimorfismo (ver [Hun03, Definition 3.1]).

Definición 2.1.8. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *preaditiva* si cumple las siguientes condiciones:

(i) Para cada par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$ el conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un grupo abeliano.

(ii) La composición de morfismos es bilineal, es decir que para todo $\psi, \psi' : X \longrightarrow Y$, $\phi, \phi' : Y \longrightarrow Z$ se tiene que $\phi \circ (\psi + \psi') = \phi \circ \psi + \phi \circ \psi'$, $(\phi + \phi') \circ \psi = \phi \circ \psi + \phi' \circ \psi$.

(iii) Existe un objeto $0 \in \mathcal{C}$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, 0) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, X) = \{0\}$ es el grupo trivial, para todo $X \in \mathcal{C}$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría preaditiva y X_1, X_2 dos objetos de $\mathcal{C}$. Una *suma directa* de X_1 y X_2 es una colección (Y, p_1, p_2, i_1, i_2) tal que:

(i) las aplicaciones $p_j : Y \longrightarrow X_i$, $i_j : X_j \longrightarrow Y$, $j = 1, 2$, son morfismos en $\mathcal{C}$;

(ii) se satisface que:

  a) $p_1 \circ i_1 = id_{X_1}$,

  b) $p_2 \circ i_2 = id_{X_2}$,

  c) $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = id_Y$.

Definición 2.1.9. Una categoría preaditiva $\mathcal{C}$ es *aditiva* si todo par de objetos posee una suma de directa.

Lema 2.1.10. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y sean X_1, X_2, Y objetos de $\mathcal{C}$. Existen isomorfismos naturales de grupos abelianos*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \oplus X_2, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, Y) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, Y),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1 \oplus X_2) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2).$$

Demostración. Definimos los morfismos $f : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \oplus X_2, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, Y) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, Y)$, por $f(\alpha) = (\alpha \circ i_1, \alpha \circ i_2)$, y $g : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, Y) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_2, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1 \oplus X_2, Y)$, por $g(\phi, \phi') = \phi \circ p_1 + \phi' \circ p_2$. Se puede ver fácilmente que ambas funciones son homomorfismos de grupos uno el inverso del otro y que además son morfismos naturales.

Análogamente se puede ver que si definimos los morfismos naturales $f' : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1 \oplus X_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2)$, por $f'(\beta) = (p_1 \circ \beta, p_2 \circ \beta)$, y $g' : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_1 \oplus X_2)$, por $g'(\psi, \psi') = i_1 \circ \psi + i_2 \circ \psi'$, son homomorfismos de grupos uno el inverso del otro. □

Definición 2.1.11. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías aditivas. Un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ se dice *aditivo* si para todo par de morfismos $\phi, \psi : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$ se tiene que $F(\phi + \psi) = F(\phi) + F(\psi)$.

Observación 2.1.12. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías aditivas y un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$. Son equivalentes:

(i) F es aditivo.

(ii) F preserva sumas directas, es decir si (Y, p_1, p_2, i_1, i_2) es la suma directa de X_1 y X_2 entonces $(F(Y), F(p_1), F(p_2), F(i_1), F(i_2))$ es la suma directa de $F(X_1)$ y $F(X_2)$.

Ver [Mac98, Chapter VIII - Section 2 - Proposition 4].

Definición 2.1.13. Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva y sean X, Y, Z objetos de $\mathcal{C}$. Un morfismo $\phi : Y \longrightarrow Z$ se dice *superfluo* si es un epimorfismo y para todo morfismo $\psi : X \longrightarrow Y$ tal que $\phi \circ \psi$ es epimorfismo entonces ψ es epimorfismo.

Un *cubrimiento proyectivo* de un objeto Y de $\mathcal{C}$ es un par (P, ϕ) donde $\phi : P \longrightarrow Y$ es superfluo y P es un objeto proyectivo.

2.2. Categorías Abelianas

Definición 2.2.1. Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *abeliana* si:

(i) $\mathcal{C}$ es una categoría aditiva.

(ii) Todo morfismo $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ posee un núcleo $\mathrm{Ker}\,\phi$ y un conúcleo $\mathrm{CoKer}\,\phi$.

(iii) Todo monomorfismo ϕ es un núcleo de su conúcleo y todo epimorfismo ψ es el conúcleo de su núcleo.

(iv) Todo morfismo puede expresarse como un epimorfismo seguido de un monomorfismo.

Observación 2.2.2. Un morfismo f en una categoría abeliana es un isomorfismo si y sólo si es un monomorfismo y un epimorfismo.

Ejemplo 2.2.3. A continuación veamos algunos ejemplos de categorías abelianas:

1) La categoría Ab de grupos abelianos es abeliana.

2) Sea G un grupo. Las categorías **Rep** G de representaciones de G en $\mathbb{K}$ y $\mathrm{Rep}\,G$ de representaciones de dimensión finita de G en $\mathbb{K}$ son categorías abelianas.

3) Sea A una $\mathbb{K}$-álgebra asociativa unitaria. La categoría $A-\mathrm{Mod}$ ($\mathrm{Mod}-A$) de A-módulos a izquierda (a derecha) es una categoría abeliana.

4) Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña abeliana, entonces la categoría de endofuntores en $\mathcal{C}$, $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ también lo es.

Definición 2.2.4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Un objeto distinto de cero $S \in \mathcal{C}$ se dice *simple* si todo subobjeto de S es isomorfo a 0 o a S. Un objeto se dice *semisimple* si es suma directa de objetos simples. Una categoría abeliana $\mathcal{C}$ se dice *semisimple* si todo objeto de $\mathcal{C}$ es semisimple.

Ejemplo 2.2.5. Veamos algunos ejemplos de categorías semisimples.

1) La categoría $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales es semisimple, para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$.

2) La categoría $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ es semisimple, para cualesquiera $\mathcal{C},\mathcal{D}$ categorías semisimples.

Definición 2.2.6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Un objeto X de $\mathcal{C}$, es de *longitud finita* n si posee una serie de composición

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X,$$

tal que los objetos X_i/X_{i-1} son simples para todo $i = 0, ..., n-1$. Los objetos simples X_i/X_{i-1} se llaman los *factores de composición* de X.

Definición 2.2.7. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Una categoría abeliana $\mathcal{C}$ se dice $\mathbb{K}$-*lineal* si cumple:

(i) Para cada par de objetos X, Y de $\mathcal{C}$ el conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

(ii) Las composiciones $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, $(\phi, \psi) \longrightarrow \phi \circ \psi$ son $\mathbb{K}$-bilineales para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

Una categoría abeliana $\mathbb{K}$-lineal $\mathcal{C}$ se dice *finita* si:

(i) Todo objeto X de $\mathcal{C}$ posee longitud finita.

(ii) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) < \infty$ para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.

(iii) Todo objeto simple de $\mathcal{C}$ posee cubrimiento proyectivo.

(iv) La cantidad de clases de isomorfismo de objetos simples es finita.

Ejemplo 2.2.8. Veamos algunos ejemplos de categorías abelianas $\mathbb{K}$-lineales:

1) Sea G un grupo. La categoría **Rep** G de representaciones de G en $\mathbb{K}$ es una categoría abeliana $\mathbb{K}$-lineal, como así también lo es la categoría $\mathrm{Rep}\, G$ de representaciones de dimensión finita de G en $\mathbb{K}$.

2) Sea A una $\mathbb{K}$-álgebra asociativa unitaria. La categoría $A - \mathrm{Mod}$ ($\mathrm{Mod} - A$) de A-módulos a izquierda (a derecha) es una categoría abeliana $\mathbb{K}$-lineal. También, su subcategoría $A - \mathrm{mod}$ ($\mathrm{mod} - A$) de A-módulos a izquierda (a derecha) de dimensión finita es abeliana $\mathbb{K}$-lineal.

Definición 2.2.9. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y sean $X, Y \in \mathcal{C}$. Dado un morfismo $f : X \to Y$, se define la *imagen de* f como $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(\mathrm{CoKer}\, f)$ y la *coimagen de* f como $\mathrm{CoIm}\, f = \mathrm{CoKer}(\mathrm{Ker}\, f)$.

Definición 2.2.10. Se dice que una sucesión

$$X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} Z$$

es *exacta* en Y si $\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Ker}\psi$, como subobjetos de Y. Una sucesión

$$0 \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\phi_1} X_2 \xrightarrow{\phi_2} X_3 \xrightarrow{\phi_3} \dots \xrightarrow{\phi_{n-1}} X_n \xrightarrow{\phi_n} X_{n+1} \longrightarrow 0$$

es *exacta*, si es exacta en cada X_j, $j = 1, ..., n+1$.

Una sucesión

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} Z \longrightarrow 0 \tag{2.2.1}$$

es una *sucesión exacta corta* si y sólo si es exacta en X, Y y Z.

Se dice que la sucesión (2.2.1) se *escinde* si existe un morfismo $\iota : Z \to Y$ tal que $\psi \circ \iota = \mathrm{id}_Z$.

Observación 2.2.11. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} Z \longrightarrow 0 \tag{2.2.2}$$

en $\mathcal{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) La sucesión exacta corta (2.2.2) se escinde.

(ii) Existe un morfismo $\pi : Y \longrightarrow X$ tal que $\pi \circ \phi = \mathrm{id}_X$.

(iii) Existen morfismos $\pi : Y \longrightarrow X$, $\iota : Z \longrightarrow Y$ tales que $\mathrm{id}_Y = \phi \circ \pi + \iota \circ \psi$.

(iv) Para cualquier $V \in \mathcal{C}$ la aplicación

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(V, Y) \xrightarrow{\psi \circ -} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(V, Z)$$

es sobreyectiva.

Definición 2.2.12. Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos categorías abelianas. Un funtor aditivo $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ se dice *exacto a izquierda* si para todo morfismo $\phi : X \longrightarrow Y$, $\operatorname{Ker}(F(\phi)) = F(\operatorname{Ker}\phi)$. Se dice que F es *exacto a derecha* si para todo morfismo $\phi : X \longrightarrow Y$, $\operatorname{CoKer}(F(\phi)) = F(\operatorname{CoKer}\phi)$. El funtor F se dice *exacto* si es exacto a izquierda y a derecha.

Observación 2.2.13. Si $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son categorías abelianas, denotaremos por $\mathrm{Fun}_{e.d.}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, $\mathrm{Fun}_{e.i}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ y $\mathrm{Fun}_{e.}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ respectivamente, a las subcategorías plenas de $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ que consisten, respectivamente, de funtores exactos a derecha, exactos a izquierda y exactos.

Definición 2.2.14. Una categoría abeliana $\mathbb{K}$-lineal pequeña $\mathcal{C}$ se dice *localmente finita* si todo objeto de $\mathcal{C}$ es de longitud finita y los espacios de morfismos $\mathrm{Hom}_C(X,Y)$ son espacios vectoriales de dimensión finita, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.

2.3. Producto tensorial de Deligne de categorías abelianas

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías abelianas localmente finitas sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición 2.3.1. El *producto tensorial de Deligne* $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ es una categoría abeliana $\mathbb{K}$-lineal la cual es universal para el funtor que asigna a cada categoría abeliana $\mathbb{K}$-lineal $\mathcal{A}$ la categoría de bifuntores bilineales exactos a derecha en ambas variables $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$. Es decir, existe un bifuntor

$$\boxtimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} : (X,Y) \mapsto X \boxtimes Y,$$

que es exacto a derecha en ambas variables y es tal que para cada bifuntor exacto a derecha en ambas variables $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ existe un único funtor exacto a derecha $\overline{F} : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ que satisface $\overline{F} \circ \boxtimes = F$.

Proposición 2.3.2. *(i) EL producto tensorial de Deligne $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ existe y es una categoría abeliana localmente finita.*

(ii) El producto tensorial de Deligne es único salvo equivalencias.

(iii) El bifuntor $\boxtimes$ es exacto en ambas variables y satisface

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, Y_1) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X_2, Y_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{D}}(X_1 \boxtimes X_2, Y_1 \boxtimes Y_2),$$

para $X_1, Y_1 \in \mathcal{C}$ y $X_2, Y_2 \in \mathcal{D}$.

(iv) Todo bifuntor $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ bilineal exacto en ambas variables define un funtor exacto $\overline{F} : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} \to \mathcal{A}$.

Demostración. Ver [EGNO15, Proposition 1.11.2]. □

2.4. Categorías Monoidales

Definición 2.4.1. Una *categoría monoidal* es una colección $(\mathcal{C}, \otimes, a, r, l, \mathbf{1})$, donde:

(i) $\mathcal{C}$ es una categoría,

(ii) $\mathbf{1}$ es un objeto de $\mathcal{C}$, llamado objeto *unidad*.

(iii) $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ es un funtor, llamado *producto tensorial*.

(iv) $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \longrightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$, $r_X : X \otimes \mathbf{1} \longrightarrow X : X \in Obj(\mathcal{C})$, y $l_X : \mathbf{1} \otimes X \longrightarrow X : X \in Obj(C)$ son isomorfismos naturales para $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
 & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "a_{W,X,Y} \otimes id_Z"'] \arrow[dr, "a_{W \otimes X,Y,Z}"] & \\
(W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "a_{W,X \otimes Y,Z}"'] & & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "id_W \otimes a_{X,Y,Z}"] \\
W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[rr, "id_W \otimes a_{X,Y,Z}"'] & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes id_Y"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "id_X \otimes l_Y"] \\
 & X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

Estos diagramas reciben los nombres de *axioma del pentágono* y *axioma del triángulo*, respectivamente.

Definición 2.4.2. Sean $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ y $(\mathcal{C}', \otimes', a', \mathbf{1}', l', r')$ dos categorías monoidales. Un *funtor monoidal* entre dichas categorías es una terna (F, J, u), donde $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ es un funtor, $u : \mathbf{1}' \to F(\mathbf{1})$ es un isomorfismo, y $J : \otimes' \circ (F \times F) \longrightarrow F \circ \otimes$ es un isomorfismo natural, tales que los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) \arrow[r, "a'_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \arrow[d, "J_{X,Y} \otimes' \mathrm{id}_{F(Z)}"'] & F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(X)} \otimes' J_{Y,Z}"] \\
F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) \arrow[d, "J_{X \otimes Y, Z}"'] & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \arrow[d, "J_{X, Y \otimes Z}"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "F(a_{X,Y,Z})"'] & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbf{1}) \otimes' F(X) \arrow[r, "J_{\mathbf{1},X}"] & F(\mathbf{1} \otimes X) \arrow[d, "F(l_X)"] \\
\mathbf{1}' \otimes' F(X) \arrow[u, "u \otimes' \mathrm{id}_{F(X)}"] \arrow[r, "l'_{F(X)}"'] & F(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \otimes' F(\mathbf{1}) \arrow[r, "J_{X,\mathbf{1}}"] & F(X \otimes \mathbf{1}) \arrow[d, "F(r_X)"] \\
F(X) \otimes' \mathbf{1}' \arrow[u, "\mathrm{id}_{F(X)} \otimes' u"] \arrow[r, "r'_{F(X)}"'] & F(X)
\end{tikzcd}$$

conmutan para todos los objetos X, Y, Z de $\mathcal{C}$.

Un funtor monoidal (F, J, u) es una *equivalencia de categorías monoidales* si F es una equivalencia de categorías.

Definición 2.4.3. Se dice que la categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ es *estricta* si los isomorfismos naturales de asociatividad y unidad, a, l y r, son identidades.

Observación 2.4.4. Toda categoría aditiva es monoidal vía el producto tensorial $A \otimes B$ dado por una suma directa $A \oplus B$ y objeto unidad un objeto cero de la categoría. Los isomorfismos naturales de asociatividad y unidad son los canónicos.

Ejemplo 2.4.5. Hay muchos ejemplos de categorías monoidales:

1) La categoría de conjuntos **Set** es monoidal. El producto tensorial $\times : \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$, es el producto cartesiano. El objeto unidad $\mathbf{1} = \{*\}$ es el conjunto con un único elemento. Los morfismos de asociatividad son los canónicos. Para cualquier conjunto X los isomorfismos $l_X : 1 \times X \longrightarrow X$, $r_X : X \times \mathbf{1} \longrightarrow X$ están dados por $l_X(*, x) = x$, $r_X(x, *) = x$, para todo $x \in X$. Esto tambén vale para la subcategoría *Set* de conjuntos finitos.

2) Sea G un grupo. La categoría **Rep** G de representaciones de G sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es una categoría monoidal con el producto tensorial de dos representaciones $\rho_V : G \longrightarrow$

$GL(V)$ y $\rho_W : G \longrightarrow GL(W)$ es la representación en $V \otimes W = V \otimes_{\mathbb{K}} W$ definida por $\rho_{V\otimes W}(g) = \rho_V(g) \otimes \rho_W(g)$, es decir, la representación diagonal. La unidad es $\mathbf{1} = \mathbb{K}$, la representación trivial. De la misma manera, la subcategoría $\operatorname{Rep} G$ de representaciones de dimensión finita del grupo G sobre $\mathbb{K}$ es monoidal.

3) Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. La categoría $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales es monoidal. El producto tensorial $\otimes : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \times \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ es el producto tensorial sobre el cuerpo de base $\otimes_{\mathbb{K}}$. El morfismo de asociatividad es el canónico, es decir que si X, Y, Z son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ entonces $a_{X,Y,Z} : (X \otimes_{\mathbb{K}} Y) \otimes_{\mathbb{K}} Z \longrightarrow X \otimes_{\mathbb{K}} (Y \otimes_{\mathbb{K}} Z)$, $a_{X,Y,Z}((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$. El objeto unidad es el cuerpo $\mathbb{K}$ y los isomorfismos $V \otimes \mathbb{K} \simeq V \simeq \mathbb{K} \otimes V$ son los canónicos. La categoría $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita es monoidal con la misma estructura de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$.

4) Sea G un grupo finito y sea $\omega \in Z^3(G, \mathbb{K}^\times)$ un 3-cociclo, es decir que para todo $a, b, c, d \in G$, $\omega(a, b, c)\omega(a, bc, d)\omega(b, c, d) = \omega(ab, c, d)\omega(a, b, cd)$. Se denotá por $\mathcal{C}(G, \omega)$ a la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita G-graduados, es decir que los objetos son $\mathbb{K}$-espacios vectoriales V de dimensión finita munidos de una G-graduación: $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$ y los morfismos son transformaciones lineales que preservan la graduación. Esta categoría es monoidal de la siguiente manera, si $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$, y $W = \bigoplus_{g\in G} W_g$ son objetos en $\mathcal{C}(G, \omega)$, entonces

$$V \otimes W := \bigoplus_{g\in G} (V \otimes W)_g,$$

donde $(V \otimes W)_g = \bigoplus_{x\in G} V_x \otimes_{\mathbb{K}} W_{x^{-1}g}$ y el objeto unidad se define como $\mathbf{1}_e = \mathbb{K}$ y $\mathbf{1}_g = 0$ si $g \neq e$. El morfismo de asociatividad esta dado por el 3-cociclo ω, es decir $a_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \longrightarrow U \otimes (V \otimes W)$ está definido como

$$a_{U,V,W}((u \otimes v) \otimes w) = \omega(g, h, f) u \otimes (v \otimes w),$$

donde $u \in U_g, v \in V_h, w \in W_f$, $g, h, f \in G$. Los isomorfismos de unidad a derecha e izquierda $l_X : \mathbb{K} \otimes X \longrightarrow X$, $r_X : X \otimes \mathbb{K} \longrightarrow X$ están dados por $l_X(1 \otimes x) = \omega(1, h, h-1)x$, $r_X(x \otimes 1) = \omega(h, 1, 1)x$, para todo $x \in X_h$. Cuando ω es trivial $\mathcal{C}(G, \omega)$ coincide con la categoría de $\mathbb{K}^G$-comódulos.

5) Si $\mathcal{C}$ es una categoría, la categoría de endofuntores $\operatorname{End}(\mathcal{C})$ es monoidal estricta con producto tensorial dado por la composición de funtores. El objeto unidad es el

funtor identidad y los morfismos de asociatividad y de unidad son las identidades (de modo que esta categoría monoidal es estricta). Si $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana, la categoría $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ también lo es.

2.4.1. Dualidad en categorías monoidales

Definición 2.4.6. Sean $\mathcal{C}$ una categoría monoidal y V un objeto en $\mathcal{C}$. Un *dual a derecha* de V es una terna $(V^*, ev_V, coev_V)$, donde $V^* \in \mathcal{C}$, y $ev_V : V^* \otimes V \longrightarrow \mathbf{1}$, $coev_V : \mathbf{1} \longrightarrow V \otimes V^*$ son morfismos (denominados *evaluación* y *coevaluación*) tales que las siguientes composiciones son la identidad de V y de V^*, respectivamente:

$$V \simeq \mathbf{1} \otimes V \xrightarrow{coev_V \otimes \mathrm{id}_V} (V \otimes V^*) \otimes V \xrightarrow{a_{V,V^*,V}} V \otimes (V^* \otimes V) \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes ev_V} V \otimes \mathbf{1} \simeq V,$$

$$V^* \simeq V^* \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id}_{V^*} \otimes coev_V} V^* \otimes (V \otimes V^*) \xrightarrow{a^{-1}_{V^*,V,V^*}} (V^* \otimes V) \otimes V^* \xrightarrow{ev_V \otimes \mathrm{id}_{V^*}} \mathbf{1} \otimes V^* \simeq V^*.$$

Análogamente, un *dual a izquierda* de V en la categoría monoidal $\mathcal{C}$ es una terna $({}^*V, ev'_V, coev'_V)$, donde ${}^*V \in \mathcal{C}$, y $ev'_V : V \otimes {}^*V \longrightarrow \mathbf{1}$, $coev'_V : \mathbf{1} \longrightarrow {}^*V \otimes V$ son morfismos tales que las siguientes composiciones son la identidad de V y de ${}^*V$, respectivamente:

$$V \simeq V \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes coev'_V} V \otimes ({}^*V \otimes V) \xrightarrow{a^{-1}_{V,{}^*V,V}} (V \otimes {}^*V) \otimes V \xrightarrow{ev'_V \otimes \mathrm{id}_V} \mathbf{1} \otimes V \simeq V.$$

$${}^*V \simeq \mathbf{1} \otimes {}^*V \xrightarrow{coev'_V \otimes \mathrm{id}_{{}^*V}} ({}^*V \otimes V) \otimes {}^*V \xrightarrow{a_{{}^*V,V,{}^*V}} {}^*V \otimes (V \otimes {}^*V) \xrightarrow{\mathrm{id}_{{}^*V} \otimes ev'_V} {}^*V \otimes \mathbf{1} \simeq {}^*V,$$

Una categoría monoidal se dice *rígida* si todo objeto admite un dual a izquierda y un dual a derecha.

Si $\mathcal{C}$ es un categoría monoidal rígida diremos que un objeto V en $\mathcal{C}$ es *inversible* si los morfismos evaluación y coevaluación, $ev_V : V^* \otimes V \longrightarrow \mathbf{1}$ y $coev_V : \mathbf{1} \longrightarrow V \otimes V^*$ respectivamente, son isomorfismos. Por ejemplo, en la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ los objetos inversibles son los objetos distinguidos δ_g, $g \in G$ que son simples, no isomorfos dos a dos, y están definidos por $(\delta_g)_x = \mathbb{K}$ si $x = g$ y $(\delta_g)_x = 0$ si $x \neq g$, o sea, δ_g es un espacio vectorial unidimensional concentrado en grado g y para estos objetos, la fórmula del producto tensorial se reduce a $\delta_g \otimes \delta_h = \delta_{gh}$ vía identificación canónica.

Ejemplo 2.4.7. Veamos algunos ejemplos.

1) La categoría $\operatorname{Rep} G$ de representaciones de dimensión finita de G sobre $\mathbb{K}$ es rígida. En efecto, el dual de la representación (V, ρ_V) es la representación (V^*, ρ_{V^*}), donde ρ_{V^*} es la representación contragradiente, es decir, $\rho_{V^*}(g) = (\rho_V(g^{-1}))^*$, $g \in G$.

2) La categoría $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita es rígida: los duales a derecha y a izquierda de un espacio vectorial de dimensión finita V son su espacio dual V^*, con la evaluación $ev_V : V^* \otimes V \longrightarrow \mathbb{K}$ la restricción y la coevaluación $coev_V : \mathbb{K} \longrightarrow V \otimes V^*$ el "embedding" usual.

3) La categoría $\mathcal{C}(G)$ de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita G-graduados es rígida definiendo $(\delta_g)^* = {}^*(\delta_g) = \delta_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$.

   Lo mismo sucede para la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$, que generaliza este ejemplo, para esto asumamos sin pérdida de generalidad que el cociclo ω es normalizado. Si $V \in \mathcal{C}(G, \omega)$ entonces $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ es el espacio vectorial dual con G-graduación $(V^*)_g = (V_{g^{-1}})^*$. La evaluación y coevaluación están determinadas como sigue. Si $h, g \in G$, $f \in (V_h)^*$, $v \in V_g$ entonces

$$ev_V(f \otimes v) = \begin{cases} 0 \text{ si } h \neq g^{-1}, \\ \omega(g, g^{-1}, g)^{-1} f(v) \text{ si } h = g^{-1}, \end{cases}$$

$$coev_V(\mathbf{1}) = \sum_{g \in G} \sum_i v_i^g \otimes f_i^g.$$

   donde $(f_i^g), (v_i^g)$ son bases duales de V_g.

Observación 2.4.8. Al cambiar el orden del producto tensorial se transforman duales a derecha en duales a izquierda. De este modo las propiedades sobre duales a derecha se corresponden naturalmente con propiedades sobre duales a izquierda.

Además si $V \in \mathcal{C}$ es un objeto inversible entonces $V^* \cong {}^*V$ y su dual V^* es inversible. Y, si $W \in \mathcal{C}$ es otro objeto inversible, el producto tensorial $V \otimes W$ es inversible.

Lema 2.4.9. *Los duales a izquierda y a derecha son únicos salvo isomorfismos.*

Demostración. Veamos la demostración para duales a derecha y la demostración para duales a izquierda es análoga. Sean X^*, X' dos duales a derecha de un objeto X. Sea $\phi : X^* \longrightarrow X'$ el morfismo definido por

$$\phi = l_{X'}(ev_X \otimes \mathrm{id}) a^{-1}_{X^*,X,X'} (\mathrm{id} \otimes coev_X) r^{-1}_{X^*}.$$

No es difícil ver que ϕ es un isomorfismo. Luego $X^* \cong X'$. □

Definición 2.4.10. Sean V y W dos objetos de $\mathcal{C}$ con duales a derecha V^* y W^*, respectivamente y sea $f : V \longrightarrow W$ un morfismo. Se define el dual a derecha $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ de f como la composición:

$$W^* \xrightarrow{\mathrm{id}_{W^*} \otimes coev_V} W^* \otimes (V \otimes V^*) \xrightarrow{a^{-1}_{W^*,V,V^*}} (W^* \otimes V) \otimes V^* \xrightarrow{(\mathrm{id}_{W^*} \otimes f) \otimes \mathrm{id}_{V^*}} (W^* \otimes W) \otimes V^* \xrightarrow{ev_W \otimes \mathrm{id}_{V^*}} V^*$$

Si existen duales a izquierda de V y W, el dual a izquierda ${}^*f : {}^*W \longrightarrow {}^*V$ de f se define como una composición similar a la anterior. De esta forma, si $\mathcal{C}$ es rígida, se tienen así dos equivalencias de categorías $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}} : V \longrightarrow V^*$ y $V \longrightarrow {}^*V$.

Proposición 2.4.11. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal rígida. Para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ existen isomorfismos naturales:*

(i) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{C}(X, Z \otimes Y^*)$.

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^* \otimes Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X \otimes Z)$*;*

(iii) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes {}^*Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z \otimes Y)$*,*

(iv) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, {}^*X \otimes Z)$.

Demostración. Veamos que para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ existen isomorfismos naturales $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{C}(X, Z \otimes Y^*)$. En efecto, definamos los morfismos

$$f : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z \otimes Y^*), \text{ tal que } f(\phi) = (\phi \otimes \mathrm{id}_{Y^*})(\mathrm{id}_X \otimes coev_Y) r_X^{-1},$$

$$g : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z \otimes Y^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z), \text{ tal que } g(\psi) = r_Z(id_Z \otimes ev_Y)(\psi \otimes id_Y).$$

Entonces se tiene que

$$f(g(\psi)) = (r_Z \otimes \mathrm{id}_Y^*)(\mathrm{id}_Z \otimes ev_Y \otimes \mathrm{id}_{Y^*}))(\psi \otimes \mathrm{id}_Y \otimes Y^*)(\mathrm{id}_X \otimes coev_Y) r_X^{-1} = \psi.$$

Análogamente se demuestra que $g \circ f = \mathrm{id}$. $\square$

Observación 2.4.12. Si $\mathcal{C}$ una categoría monoidal rígida, se verifica que $1^* \simeq 1 \simeq {}^*1$.

2.4.2. Equivariantización de una categoría abeliana $\mathbb{K}$-lineal

Definición 2.4.13. Una *categoría tensorial* [EGNO15] es una categoría monoidal rígida, localmente finita, tal que el bifuntor $\otimes$ es $\mathbb{K}$-bilineal y el objeto unidad $\mathbf{1}$ es simple y, por lo tanto, $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = \mathbb{K}$ cuando el cuerpo de base $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Denotemos por $\underline{\mathrm{Aut}}_{\otimes}\mathcal{C}$ a la categoría monoidal cuyos objetos son autoequivalencias tensoriales de $\mathcal{C}$ donde los morfismos son transformaciones naturales monoidales, el producto monoidal es la composición $\circ$ de funtores tensoriales y el objeto unidad es el funtor identidad $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.

Si G es un grupo, denotaremos por $\underline{G}$ la categoría monoidal estricta cuyos objetos son los elementos de G, los morfismos son identidades, el producto monoidal es la multiplicación de G.

Definición 2.4.14. Una *acción* de un grupo G en una categoría tensorial (por autoequivalencias) es un funtor monoidal

$$\rho : \underline{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\otimes}\mathcal{C}.$$

Es decir, que se cuenta con los siguientes datos:

(i) Por cada $g \in G$, un endofuntor $\rho^g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$,

(ii) Por cada par $g, h \in G$, un isomorfismo monoidal $\rho_2^{g,h} : \rho^g\rho^h \tilde{\to} \rho^{gh}$,

(iii) Un isomorfismo monoidal $\rho_0 : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \tilde{\to} \rho^1$,

tal que para cualesquiera $g, h, k \in \mathcal{C}$ los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
\rho^g\rho^h\rho^k \arrow[r, "\rho_2^{g,h}\rho^k"] \arrow[d, "\rho^g\rho_2^{h,k}"'] & \rho^{gh}\rho^k \arrow[d, "\rho_2^{gh,k}"] \\
\rho^g\rho^{hk} \arrow[r, "\rho_2^{g,hk}"'] & \rho^{ghk}
\end{tikzcd} \tag{2.4.1}$$

$$\begin{tikzcd} \rho^g \arrow[r, "\rho^g\rho_0"] \arrow[d, "\rho_0\rho^g"'] \arrow[dr, "="] & \rho^g\rho^1 \arrow[d, "\rho_2^{g,1}"] \\ \rho^1\rho^g \arrow[r, "\rho_2^{1,g}"'] & \rho^g \end{tikzcd} . \tag{2.4.2}$$

Un objeto $X \in \mathcal{C}$ se dice *equivariante* si está munido de una familia de isomorfismos $u = \{u^g : \rho^g(X) \longrightarrow X\}_{g\in G}$ tales que $u^1\rho_{0X} = \mathrm{id}_X$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd} \rho^g(\rho^h(X)) \arrow[r, "\rho^g(u^h)"] \arrow[d, "\rho_2^{g,h}"'] & \rho^g(X) \arrow[d, "u^g"] \\ \rho^{gh}(X) \arrow[r, "u^{gh}"'] & X \end{tikzcd} \tag{2.4.3}$$

es conmutativo para todo $g, h \in G$.

Definición 2.4.15. Se define la categoría $\mathcal{C}^G$ como la categoría cuyos objetos son pares (X, u) donde X es un objeto equivariante. Si (X, u), (Y, v) son dos objetos equivariantes, un morfismo $\phi : (X, u) \longrightarrow (Y, v)$ entre ellos es un morfismo $\phi : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$ tal que $\phi \circ u^g = v^g \circ \rho^g(\phi)$ para todo $g \in G$. La categoría $\mathcal{C}^G$ se llama la *equivariantización* de $\mathcal{C}$ por G.

Observación 2.4.16. Si G es un grupo finito y $\mathcal{C}$ una categoría abeliana $\mathbb{K}$-lineal tal que G actúa en $\mathcal{C}$, entonces la categoría $\mathcal{C}^G$ es abeliana $\mathbb{K}$-lineal.

2.4.3. Álgebras y coálgebras en categorías monoidales

Sea $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, r, l)$ una categoría monoidal.

Definición 2.4.17. Un *álgebra* en $\mathcal{C}$ es una colección (A, m, u) donde A es un objeto de $\mathcal{C}$, $m : A \otimes A \longrightarrow A$, $u : \mathbf{1} \longrightarrow A$ son morfismos que satisfacen los axiomas de asociatividad y unidad, es decir:

(i) $m(m \otimes \mathrm{id}_A) = m(id_A \otimes m)a_{A,A,A}$.

(ii) $m(u \otimes \mathrm{id}_A) = l_A$.

(iii) $m(\mathrm{id}_A \otimes u) = r_A$.

Si A es un álgebra en una categoría tensorial $\mathcal{C}$ se denota por $\mathcal{C}_A$, ${}_A\mathcal{C}$, ${}_A\mathcal{C}_A$ a la categoría de A-módulos a derecha, izquierda y bimódulos, respectivamente. Específicamente la categoría $\mathcal{C}_A$ consiste de pares (V, ρ_V) donde $V \in \mathcal{C}$ y $\rho_V : V \otimes A \longrightarrow V$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que

$$\rho_V(\rho_V \otimes \mathrm{id}_A) = \rho_V(\mathrm{id}_V \otimes m)a_{V,A,A},\ \rho_V(\mathrm{id}_A \otimes u) = r_V. \tag{2.4.4}$$

La primera igualdad dice que la acción a derecha es asociativa y la segunda que es unitaria.

Análogamente la categoría ${}_A\mathcal{C}$ consta de pares (W, λ_W) donde W es un objeto de $\mathcal{C}$, $\lambda_W : A \otimes W \longrightarrow W$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que

$$\lambda_W(m \otimes \mathrm{id}_W) = \lambda_W(\mathrm{id}_A \otimes \lambda_W)a_{A,A,W},\ \lambda_W(u \otimes \mathrm{id}_V) = l_V. \tag{2.4.5}$$

La categoría ${}_A\mathcal{C}_A$ consiste de ternas (V, ρ_V, λ_V) donde $(V, \rho_V) \in \mathcal{C}_A$ y $(V, \lambda_V) \in_A \mathcal{C}$, es decir se satisfacen las identidades (2.4.4) y (2.4.5) respectivamente y además

$$\lambda_V(\mathrm{id}_A \otimes \rho_V)a_{A,V,A} = \rho_V(\lambda_V \otimes \mathrm{id}_A).$$

Los morfismos en ${}_A\mathcal{C}_A$ son los morfismos de A-bimódulos, es decir aquellos que son de A-módulos a izquierda y a derecha.

Observación 2.4.18. Si $\mathcal{C}$ es una categoría abeliana y $A \in \mathcal{C}$ es un álgebra entonces las categorías $\mathcal{C}_A$ y ${}_A\mathcal{C}_A$ son abelianas.

Definición 2.4.19. Un *coálgebra* en $\mathcal{C}$ es una colección (C, Δ, ϵ) donde C es un objeto de $\mathcal{C}$, $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$, $\epsilon : C \longrightarrow \mathbf{1}$ son morfismos que satisfacen los axiomas de coasociatividad y counidad, es decir:

(i) $(\mathrm{id}_C \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_C)\Delta$.

(ii) $(\mathrm{id}_C \otimes \epsilon)\Delta = \mathrm{id}_C$.

(iii) $(\epsilon \otimes \mathrm{id}_C) = \mathrm{id}_C$.

Definición 2.4.20. Sea C una coálgebra. C se dice *simple* si no posee subcoálgebras propias y se dice *cosemisimple* si es suma directa de subcoálgebras simples.

Definición 2.4.21. Sea C una coálgebra.

(i) Si un elemento $c \in C \setminus \{0\}$ cumple que $\Delta(c) = c \otimes c$ entonces se dice que c es de *tipo grupo*. Denotaremos por $G(C)$ al conjunto de elementos de tipo grupo de C.

(ii) Sean $a, b \in G(C)$. Se dice que un elemento $c \in C$ es (a,b)-*casi primitivo* si $\Delta(c) = a \otimes c + c \otimes b$. Denotaremos al conjunto de todos los elementos (a,b)-casi primitivos por $\mathcal{P}_{a,b}$. Se tiene que $\mathbb{K}(a-b) \subset \mathcal{P}_{a,b}$. Un elemento casi-primitivo $c \in C$ es trivial si $c \otimes \mathbb{K}[G(C)]$.

Observación 2.4.22. Observemos que $1 \in G(C)$.

Definición 2.4.23. A los elementos $(1,1)$-casi primitivos de C los llamaremos *elementos primitivos* y los denotaremos simplemente por $\mathcal{P}(C)$.

Usaremos la notación *sigma* de Sweedler: si c es un elemento de una coálgebra (C, Δ, ϵ), denotaremos al elemento $\Delta(c) = \sum_i a_i \otimes b_i \in C \otimes C$ de la siguiente forma:

$$\Delta(c) = c_1 \otimes c_2.$$

Definición 2.4.24. Sean (C, Δ, ϵ) una coálgebra y (A, m, u) un álgebra. Se define el *producto de convolución* en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$ mediante la siguiente fórmula: $(f*g)(c) = f(c_1)g(c_2)$, $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$, $c \in C$. Luego $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(C, A)$ tiene estructura de $\mathbb{K}$-álgebra con unidad $u\epsilon$.

2.5. Categorías Tensoriales

Recordemos que una *categoría tensorial* es una categoría monoidal rígida, localmente finita, tal que el bifuntor $\otimes$ es $\mathbb{K}$-bilineal y el objeto unidad $\mathbf{1}$ es simple y, por lo tanto, $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = \mathbb{K}$ cuando el cuerpo de base $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado (Definición 2.4.13).

Ejemplo 2.5.1. Algunos ejemplos son los siguientes:

1) La categoría $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita es una categoría tensorial.

2) La categoría $\mathrm{Rep}\, G$ de representaciones de dimensión finita del grupo G sobre $\mathbb{K}$ es una categoría tensorial.

3) La categoría $\mathcal{C}(G)$ de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita G-graduados es una categoría tensorial. Lo mismo sucede con la generalización de este ejemplo presentada en el ítem 3) del Ejemplo 2.4.7, es decir con la categoría $\mathcal{C}(G,\omega)$ de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita graduados por el grupo G con la asociatividad determinada por un 3-cociclo ω.

Definición 2.5.2. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías tensoriales y $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor fiel y exacto. Se dice que F es un *funtor cuasi-tensorial* si:

(i) $F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$.

(ii) F está munido de un isomorfismo funtorial $J : \otimes_{\mathcal{D}} \circ (F \times F) \longrightarrow F \circ \otimes_{\mathcal{C}}$.

Un funtor cuasi-tensorial (F, J) es un *funtor tensorial* si J es una estructura monoidal, es decir, si J satisface las condiciones de la Definición (2.4.2).

Definición 2.5.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Un *funtor de cuasi-fibra* es un funtor cuasi-tensorial F de $\mathcal{C}$ en la categoría $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Se dice que F es un *funtor de fibra* si además F es un funtor tensorial.

2.5.1. El anillo de Grothendieck de $\mathcal{C}$

Definición 2.5.4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana localmente finita sobre $\mathbb{K}$. Para cada objeto $X \in \mathcal{C}$, se denota por $[X]$ la clase de isomorfismo de X en $\mathcal{C}$. El *grupo de Grothendieck* de $\mathcal{C}$, denotado por $K_0(\mathcal{C})$, es el grupo abeliano generado por las clases de isomorfismo de objetos en $\mathcal{C}$, sujetos a las relaciones: $[X] = [Y] + [Z]$, $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, si existe una sucesión exacta $0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow Z \longrightarrow 0$.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría semisimple, el grupo de Grothendieck $K_0(\mathcal{C})$ es el grupo abeliano libre con base dada por las clases de isomorfismos de objetos simples. Con más generalidad, si todos los objetos de una categoría abeliana $\mathcal{C}$ tienen longitud finita (serie de Jordan-Hölder finita), el grupo de Grothendieck $K_0(\mathcal{C})$ es un grupo abeliano libre generado por las clases de isomorfismos de los objetos simples X_i, $i \in I$ de $\mathcal{C}$. A cada objeto X de $\mathcal{C}$ le podemos asociar canónicamente su clase $[X]$ en $K_0(\mathcal{C})$ dada por la fórmula

$$[X] = \sum_{i \in I} [X : X_i] X_i.$$

Cuando no haya lugar a confusión escribiremos X en lugar de $[X]$, haciendo un abuso de la notación.

Si $\mathcal{C}$ es una categoría tensorial rígida, entonces el grupo de Grothendieck de $\mathcal{C}$ tiene estructura de anillo. En efecto, se puede considerar el siguiente producto asociativo $[X][Y] = [X \otimes Y]$ para $X, Y \in \mathcal{C}$, y el elemento identidad $\mathbf{1} = [\mathbf{1}]$. Denominaremos a este anillo $K_0(\mathcal{C})$ el *anillo de Grothendieck* de $\mathcal{C}$, el cual está munido de una involución $* : K_0(\mathcal{C}) \longrightarrow K_0(\mathcal{C})$, dada por $[X]^* = [X^*]$.

Observación 2.5.5. Un funtor exacto $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ induce un morfismo de grupos abelianos $K_0(\mathcal{C}) \longrightarrow K_0(\mathcal{D})$ entre los anillos de Grothendieck.

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías tensoriales y $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor cuasi-tensorial. Entonces F induce un homomorfismo de anillos unitarios $[F] : K_0(\mathcal{C}) \longrightarrow K_0(\mathcal{D})$, al cual denotaremos F cuando el contexto no de lugar a confusión.

2.5.2. La equivariantización de una categoría tensorial

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial y G un grupo finito. Una *acción* de G en $\mathcal{C}$ es un funtor monoidal $\rho : \underline{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\otimes}(\mathcal{C})$, donde $\underline{\mathrm{Aut}}_{\otimes}(\mathcal{C})$ denota la categoría monoidal de autoequivalencias tensoriales de $\mathcal{C}$ y $\underline{G}$ la categoría monoidal estricta cuyos objetos son los elementos de G, los morfismos son identidades, el producto monoidal es la multiplicación de G. Es decir, una acción de G en $\mathcal{C}$ es una colección de autoequivalencias tensoriales $(\rho^g, J_g) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, $g \in G$ e isomorfismos naturales de funtores monoidales $\rho_2^{g,h} : \rho^g \rho^h \longrightarrow \rho^{gh}$, tales que verifican los axiomas (2.4.1) y (2.4.2), donde $J_g : \otimes \circ (\rho^g \times \rho^g) \to \rho^g \circ \otimes$ es un isomorfismo natural, tal que cumple las condiciones de la Definición 2.4.2.

Si (X, u),(Y, v) son objetos equivariantes en $\mathcal{C}^G$, se define:

$$(X, u) \otimes (Y, v) = (X \otimes Y, t), \tag{2.5.1}$$

donde $t^g = (u^g \otimes v^g)(J_g)^{-1}_{X,Y}$, para todo $g \in G$. El objeto unidad es $(\mathbf{1}, \mathrm{id}_{\mathbf{1}})$.

Teorema 2.5.6. *La equivariantización $\mathcal{C}^G$ con el producto tensorial (2.5.1) es una categoría tensorial.*

Se tiene una inclusión $\mathrm{Rep}\, G \to \mathcal{C}^G$ que da lugar a una sucesión exacta de categorías de fusión (ver [BN11, Corollary 4.22])

$$\mathrm{Rep}\, G \to \mathcal{C}^G \to \mathcal{C}. \tag{2.5.2}$$

Observación 2.5.7. [BN13, Remark 3.1]. Sea $G(\mathcal{C})$ el conjunto de clases de isomorfismos de objetos inversibles de $\mathcal{C}$. Entonces la sucesión exacta (2.5.2) induce una sucesión exacta de grupos

$$1 \to \widehat{G} \to G(\mathcal{C}^G) \to G_0(\mathcal{C}) \to 1,$$

donde $\widehat{G} \cong G/[G,G]$ denota el grupo de caracteres invertibles de G y $G_0(\mathcal{C})$ es el subgrupo de $G(\mathcal{C})$ que consiste de todas las clases de isomorfismo de objetos inversibles que son G-equivariantes.

2.6. Categorías trenzadas y el centro de Drinfeld

Definición 2.6.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría monoidal estricta. Una *trenza* en $\mathcal{C}$ es un isomorfismo natural

$$\sigma_{U,V} : U \otimes V \longrightarrow V \otimes U,$$

tal que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
(U\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"] \arrow[d, "\sigma_{U,V}\otimes \mathrm{id}_W"'] & U\otimes (V\otimes W) \arrow[r, "\sigma_{U,V\otimes W}"] & (V\otimes W)\otimes U \arrow[d, "a_{V,W,U}"] \\
(V\otimes U)\otimes W \arrow[r, "a_{V,U,W}"'] & V\otimes (U\otimes W) \arrow[r, "\mathrm{id}_V\otimes \sigma_{U,W}"'] & V\otimes (W\otimes U)
\end{tikzcd} \tag{2.6.1}$$

$$\begin{tikzcd}
U\otimes (V\otimes W) \arrow[r, "a^{-1}_{U,V,W}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_U\otimes \sigma_{V,W}"'] & (U\otimes V)\otimes W \arrow[r, "\sigma_{U\otimes V,W}"] & W\otimes (U\otimes V) \arrow[d, "a^{-1}_{W,U,V}"] \\
U\otimes (W\otimes V) \arrow[r, "a^{-1}_{U,W,V}"'] & (U\otimes W)\otimes V \arrow[r, "\sigma_{U,W}\otimes \mathrm{id}_V"'] & (W\otimes U)\otimes V
\end{tikzcd} \tag{2.6.2}$$

y $\sigma_{U,\mathbf{1}} = id_U = \sigma_{\mathbf{1},U}$ para todo $U, V, W \in \mathcal{C}$.

Si además la trenza cumple que $\sigma_{V,U}\sigma_{U,V} = \mathrm{id}_{U\otimes V}$ para todo $U, V \in \mathcal{C}$ (es decir, σ es involutiva) entonces se dice que la trenza es *simétrica*.

Definición 2.6.2. Se dice que una categoría monoidal $\mathcal{C}$ es *trenzada* (estricta) si está munida de una trenza σ.

Una *categoría simétrica* $(\mathcal{C},\tau)$, es una categoría monoidal $\mathcal{C}$ con trenza simétrica τ.

Definición 2.6.3. Dadas dos categorías trenzadas $(\mathcal{C},\sigma)$ y $(\mathcal{D},\tau)$, un funtor monoidal $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ se dice *trenzado* si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F(U)\otimes F(V) \arrow[r, "\tau_{F(U),F(V)}"] \arrow[d, "J_{U,V}"'] & F(V)\otimes F(U) \arrow[d, "J_{V,U}"] \\ F(U\otimes V) \arrow[r, "F(\sigma_{U,V})"'] & F(V\otimes U) \end{tikzcd}$$

donde $J:\otimes'\circ(F\times F)\to F\circ\otimes$ es un isomorfismo natural tal que conmutan los diagramas de la Definición 2.4.2, para todo $U,V\in\mathcal{C}$.

Definición 2.6.4. Sea $(\mathcal{C},\otimes,a,\mathbf{1},l,r)$ una categoría monoidal. El *centro de Drinfeld* $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ es la categoría cuyos objetos son pares ordenados $(V,\sigma_{-,V})$, formados por un objeto $V\in\mathcal{C}$ y un isomorfismo natural $\sigma_{-,V}:-\otimes V\longrightarrow V\otimes -$ de modo que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & X\otimes(V\otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X,V,Y}"] & (X\otimes V)\otimes Y \arrow[dr, "\sigma_{X,V}\otimes\mathrm{id}_Y"] & \\ X\otimes(Y\otimes V) \arrow[ur, "\mathrm{id}_X\otimes\sigma_{Y,V}"] \arrow[dr, "a^{-1}_{X,Y,V}"'] & & & (V\otimes X)\otimes Y \\ & (X\otimes Y)\otimes V \arrow[r, "\sigma_{X\otimes Y,V}"'] & V\otimes(X\otimes Y) \arrow[ur, "a^{-1}_{V,X,Y}"'] & \end{tikzcd}$$

para todo $X,Y\in\mathcal{C}$.

Un morfismo $f:(V,\sigma_{-,V})\longrightarrow(W,\sigma_{-,W})$ en $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es un morfismo $f:V\longrightarrow W$ en $\mathcal{C}$ que satisface:

$$\begin{tikzcd} X\otimes V \arrow[r, "\sigma_{X,V}"] \arrow[d, "id_x\otimes f"'] & V\otimes X \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}_X"] \\ X\otimes W \arrow[r, "\sigma_{X,W}"'] & W\otimes X \end{tikzcd}$$

para todo $X\in\mathcal{C}$.

Teorema 2.6.5. *El centro de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ de la categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, a, \mathbf{1}, l, r)$ es una categoría monoidal trenzada, con la siguiente estructura:*

(i) *El producto tensorial está definido por $(V, \sigma_{-,V}) \otimes (W, \sigma_{-,W}) := (V \otimes W, \sigma_{-,V\otimes W})$, tal que $\sigma_{-,V\otimes W} : - \otimes (V \otimes W) \longrightarrow (V \otimes W) \otimes -$ el isomorfismo natural dado por:*

$$\sigma_{X,V\otimes W} := a^{-1}_{V,W,X}(\mathrm{id}_V \otimes \sigma_{X,W})a_{V,X,W}(\sigma_{X,V} \otimes \mathrm{id}_W)a^{-1}_{X,V,W},$$

para cada objeto $X \in \mathcal{C}$.

(ii) *El objeto unidad es $(\mathbf{1}, l^{-1}r)$.*

(iii) *La trenza está definida como $\sigma_{V,W} : (V, \sigma_{-,V}) \otimes (W, \sigma_{-,W}) \longrightarrow (W, \sigma_{-,W}) \otimes (V, \sigma_{-,V})$.*

Además, existe un funtor monoidal $F : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$ dado por $F(V, \sigma_{-,V}) = V$.

Capítulo 3

Álgebras de Hopf

En este capítulo recordaremos conceptos básicos y algunos ejemplos de la teoría de álgebras de Hopf.

Definición 3.0.1. Un *álgebra de Hopf* es una colección $(H, m, u, \Delta, \epsilon)$, donde (H, m, u) es un álgebra asociativa con unidad u, (H, Δ, ϵ) es una coálgebra coasociativa con counidad ϵ, los morfismos Δ y ϵ son morfismos de álgebras y además existe un elemento $\mathcal{S} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(H, H)$ que es inverso de la identidad id_H con respecto al producto de convolución. Esto es, $\mathcal{S}$ satisface las siguientes igualdades:

$$\mathcal{S}(h_1)h_2 = \epsilon(h)1_H = h_1\mathcal{S}(h_2),$$

para todo $h = h_1 \otimes h_2 \in H$. En tal caso, llamaremos a $\mathcal{S}$ la antípoda del álgebra de Hopf H.

Observación 3.0.2. La condición de que Δ y ϵ sean morfismos de álgebras es equivalente a la condición de que m y u sean morfismos de coálgebras.

Definición 3.0.3. Sean H, K dos álgebras de Hopf. Diremos que $f : H \longrightarrow K$ es un morfismo de álgebras de Hopf si es simultáneamente un morfismo de álgebras y un morfismo de coálgebras, y se cumple que $f(\mathcal{S}_H(h)) = \mathcal{S}_K(f(h))$ para todo $h \in H$. Más aún, puede mostrarse que si $f : H \longrightarrow K$ es un morfismo de álgebras y coálgebras entre dos álgebras de Hopf, entonces automáticamente f preserva la antípoda, o sea f es un morfismo de álgebras de Hopf.

Definición 3.0.4. Un *ideal de Hopf* de H es un bi-ideal I de H (es decir, I es un ideal bilátero y un coideal de H) para el cual $S(I) \subseteq I$. Por lo tanto, $I \subseteq H$ es un ideal de Hopf si y sólo si el espacio vectorial cociente H/I es un álgebra de Hopf. Observemos que el coideal $H^+ = \operatorname{Ker}\epsilon$ es un ideal de Hopf de H, al cual llamaremos el *ideal de aumentación de* H. Más generalmente, si R es una subálgebra de H definimos $R^+ \doteq R \cap \operatorname{Ker}\epsilon$.

Observación 3.0.5. Dada una $\mathbb{K}$-álgebra de Hopf H, la categoría $H - \operatorname{Mod}$ y su subcategoría $H - \operatorname{mod}$ son categorías monoidales. En efecto, dados $V, W \in H - \operatorname{Mod}$, se puede definir el producto tensorial a partir de la acción diagonal determinada por la comultiplicación de H, es decir $V \otimes W \in H - \operatorname{Mod}$ con la acción

$$h\cdot (v \otimes w) := h_1\cdot v \otimes h_2\cdot w,$$

para todo $h \in H, v \in V, w \in W$. La unidad es el espacio vetorial unidimensional $\mathbb{K}$ con la acción trivial dada por la counidad de H, es decir, $\mathbf{1} = \mathbb{K}$, donde $h\cdot \mathbf{1} = \epsilon(h)$. Los isomorfismos de asociatividad y unidad son los triviales (al igual que en *Vec*).

Más aún, si la antípoda de H es biyectiva, la categoría $H - \operatorname{mod}$ es rígida. De hecho, el dual a izquierda de V está dada por el espacio vectorial dual con la acción $(h\cdot f)(v) = f(\mathcal{S}^{-1}(h)\cdot v)$, para todo $h \in H, v \in V$ y $f \in {}^*V$. De manera similar, el dual a derecha de V es el espacio vectorial dual con la acción $(h\cdot f)(v) = f(\mathcal{S}(h)\cdot v)$, para todo $h \in H$, $v \in V$ y $f \in V^*$. Por lo tanto, $H - \operatorname{mod}$ es una categoría tensorial.

Si K es otra álgebra de Hopf y $f : H \longrightarrow K$ es un morfismo de álgebras de Hopf, tal morfismo induce canónicamente un funtor tensorial $F : K - \operatorname{Mod} \longrightarrow H - \operatorname{Mod}$, donde para cada $V \in K - \operatorname{Mod}$, $F(V)$ es el mismo espacio vectorial V con la acción $h\cdot_H v = f(h)\cdot_K v$ para todo $h \in H$, $v \in V$.

Todo lo probado anteriormente para las categorías $H - \operatorname{Mod}$ y $H - \operatorname{mod}$ es válido también para sus análogos a derecha, las categorías $\operatorname{Mod} - H$ y $\operatorname{mod} - H$.

Ejemplo 3.0.6. Veamos algunos ejemplos básicos de álgebras de Hopf.

1) Sea G un grupo. Entonces el álgebra de grupo $\mathbb{K}G$ tiene la estructura de álgebra de Hopf dada por la extensión lineal de las aplicaciones

$$\Delta(g) = g \otimes g, \; \epsilon(g) = 1, \; \mathcal{S}(g) = g^{-1},$$

para todo $g \in G$.

Si G es un grupo finito, el álgebra de funciones de G en $\mathbb{K}$, a la cual denotamos $\mathbb{K}^G$, es un álgebra de Hopf. Esta álgebra tiene una base de elementos idempotentes

$(e_g)_{g\in G}$, con

$$e_g(h) = \begin{cases} 0 \text{ si } h \neq g, \\ 1 \text{ si } h = g, \end{cases}$$

de modo que $1 = \sum_{g\in G} e_g$. Así, en términos de esta base, la estructura de coálgebra y la antípoda de $\mathbb{K}^G$ están dadas por las siguientes fórmulas

$$\Delta(e_g) = \sum_{h\in G} e_h \otimes e_{h^{-1}g},\ \epsilon(e_g) = \delta_{1,g},\ \mathcal{S}(e_g) = e_{g^{-1}}.$$

2) El álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Hopf, con la estructura dada para cada $x \in \mathfrak{g}$ por

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x,\ \epsilon(x) = 0,\ \mathcal{S}(x) = -x.$$

De esta forma $x \in \mathcal{P}(U(\mathfrak{g}))$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Más aún, se puede probar que $\mathcal{P}(U(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$.

Definición 3.0.7. Sean H un álgebra de Hopf y M un H-comódulo a derecha. Se define el conjunto de coinvariantes de H en M como el subespacio $M^{\operatorname{co} H} = \{m \in M : \rho(m) = m \otimes 1\}$.

De la misma forma, si M es un H-comódulo a izquierda, el conjunto de coinvariantes de H en M es el subespacio ${}^{\operatorname{co} H}M = \{m \in M : \lambda(m) = 1 \otimes m\}$.

Si A y H son álgebras de Hopf y $\pi : A \longrightarrow H$ un morfismo de álgebras de Hopf, entonces A admite una estructura de H-comódulo a derecha y a izquierda. En este caso, los espacios coinvariantes, que denotaremos por $A^{\operatorname{co} H} = A^{\operatorname{co} \pi}$ y ${}^{\operatorname{co} H}A = {}^{\operatorname{co} \pi}A$, están dados por

$$A^{\operatorname{co} \pi} = \{a \in A : (\operatorname{id} \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\} \text{ y } {}^{\operatorname{co} \pi}A = \{a \in A : (\pi \otimes \operatorname{id})\Delta(a) = 1 \otimes a\}.$$

Notar que estos espacios son subálgebras de A, a las cuales denominaremos subálgebras de coinvariantes de A.

Un álgebra de Hopf H de dimensión finita se dice trivial si es conmutativa o coconmutativa. Entonces H es trivial si y sólo si es isomofa a un álgebra de grupo o al dual de un álgebra de grupo.

3.1. Álgebras de Hopf semisimples

Definición 3.1.1. Se dice que un álgebra de Hopf H es *semisimple* si es semisimple como álgebra sobre $\mathbb{K}$, es decir, si todo H-módulo a izquierda es completamente reducible.

Análogamente, se dice que H es un álgebra de Hopf *cosemisimple* si es cosemisimple como coálgebra sobre $\mathbb{K}$.

Teorema 3.1.2. *Sea H un álgebra de Hopf de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) H *es semisimple.*

(ii) H *es cosemisimple.*

(iii) $\mathcal{S}^2 = \mathrm{id}$.

Observación 3.1.3. Una consecuencia importante del Teorema Fundamental para módulos de Hopf [Mon93, 1.9.4] es que toda álgebra de Hopf semisimple tiene dimensión finita [Swe69].

Sea H un álgebra de Hopf semisimple (y, por lo tanto, de dimensión finita) sobre $\mathbb{K}$. Por el Teorema de Wedderburn, H es isomorfa, como álgebra, a la suma directa de álgebra de matrices

$$H \simeq \mathbb{K}^{(n)} \bigoplus_{i=1}^{r} M_{d_i}(\mathbb{K})^{(n_i)}, \tag{3.1.1}$$

con $n = |G(H^*)|$.

Teorema 3.1.4. *(Teorema de Nichols-Zoeller) Sean H un álgebra de Hopf de dimensión finita y K una subálgebra de Hopf de H. Todo (H,K)-módulo de Hopf es libre como K-módulo. En particular, H es un K-módulo libre y, por lo tanto,* $\dim_{\mathbb{K}} K$ *divide a* $\dim_{\mathbb{K}} H$.

Observación 3.1.5. Una consecuencia del Teorema (3.1.4) es que $n = |G(H^*)|$ divide tanto a $\dim H$ como a $n_i d_i^2$, para todo $i = 1, \ldots, r$.

Definición 3.1.6. Se dice que H es *de tipo* $(1, n; d_1, n_1; \ldots ; d_r, n_r)$ como álgebra si se tiene un isomorfismo como en (3.1.1).

Se dice que H es de *de tipo* $(1, n; d_1, n_1; \ldots ; d_r, n_r)$ como coálgebra si H^* es de tipo $(1, n; d_1, n_1; \ldots ; d_r, n_r)$ como álgebra.

Observación 3.1.7. El grupo de objetos inversibles de la categoría de representaciones de dimensión finita de H es $G(\operatorname{Rep} H) = G(H^*)$. El estabilizador del caracter χ, bajo la multiplicación a izquierda por elementos en $G(H^*)$, se denota por $G[\chi]$. Por el Teorema de Nichols-Zoeller [NZ89], el orden del estabilizador $|G[\chi]|$ divide a $(\deg \chi)^2$.

Siguiendo la notación de [Isa76, Chapter 12], denotaremos por c.d.(H) al conjuto de grados de los caracteres irreducibles de H, es decir,

$$\text{c.d.}(H) = \{\deg \chi : \chi \in \operatorname{Irr}(H)\}.$$

Luego, si H es de tipo $(1, n; d_1, n_1; \dots; d_r, n_r)$ como álgebra entonces c.d.$(H) = \{1, d_1, \dots, d_r\}$.

3.2. Extensiones de álgebras de Hopf

Definición 3.2.1. [Mas02, Definition 1.4] Sean A, B y H álgebras de Hopf de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Y sea

$$(A) = \mathbb{K} \longrightarrow B \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow \mathbb{K};$$

una sucesión de morfismos de álgebras de Hopf tal que ι es inyectivo y π es sobreyectivo. Se dice que A es una *extensión* de H por B si satisface las siguientes condiciones equivalentes:

(i) $\operatorname{Ker} \pi = B^+ A$.

(ii) $\operatorname{Ker} \pi = A B^+$.

(iii) $B = A^{\operatorname{co} \pi}$.

(iv) $B = {}^{\operatorname{co} \pi} A$.

Una sucesión con tales propiedades se dice una *sucesión exacta* de álgebras de Hopf.

Se identifica a B con su imagen en A y, cuando no hay lugar a confusión, se dice simplemente que A es una B-extensión de H.

Se dice que A es una *extensión central* cuando la imagen de B es central en A.

La sucesión se dice *cocentral* si la sucesión exacta dual

$$\mathbb{K} \longrightarrow H^* \xrightarrow{\iota^*} A^* \xrightarrow{\pi^*} B^* \longrightarrow \mathbb{K};$$

es central.

Para dos extensiones (A) y (A') de H por B, una *equivalencia* $(A) \to (A')$ es un morfismo de álgebras de Hopf $f : A \to A'$, el cual induce los morfismos identidad sobre H y B. Si tal morfismo existe, se dice que (A) y (A') son equivalentes.

Observación 3.2.2. Si G es un grupo finito, N un subgrupo normal de G y consideramos el grupo cociente $F = G/N$, entonces la sucesión $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}N \longrightarrow \mathbb{K}G \longrightarrow \mathbb{K}F \longrightarrow \mathbb{K}$ es una sucesión exacta de álgebras de Hopf. Así, la Definición 3.2.1 puede verse como una generalización de la Definición usual de sucesión exacta corta de grupos.

A partir de la noción de matched pair de grupos (Definición 1.1.12) se tiene la de productos bicruzados, construcción debida a G. I. Kac [Kac68].

Dado un matched pair $(\Gamma, F, \triangleleft, \triangleright)$ se define una acción a izquierda de F en $\mathbb{K}^\Gamma$ mediante la fórmula $(x \cdot \alpha)(g) = \alpha(g \triangleleft x)$, $\alpha \in \mathbb{K}^\Gamma$, $g \in \Gamma$, $x \in F$. En particular, $x \cdot e_g = e_{g \triangleleft x^{-1}}$. Similarmente, definimos una acción a derecha de Γ en $\mathbb{K}^F$ por $(\beta \cdot g)(x) = \beta(g \triangleright x)$, $\beta \in \mathbb{K}^F$, $g \in \Gamma$, $x \in F$. Sean $\sigma : F \times F \longrightarrow (\mathbb{K}^\times)^\Gamma$ y $\tau : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow (\mathbb{K}^\times)^F$ 2-cociclos normalizados. Si los escribimos como $\sigma = \sum_{g \in \Gamma} \sigma_g e_g$ y $\tau = \sum_{x \in F} \tau_x e_x$, la condición de cociclo y la normalización se traducen, para σ y τ respectivamente, de la siguiente forma:

$$\sigma_{g \triangleleft x}(y, z)\sigma_g(x, yz) = \sigma_g(xy, z)\sigma_g(x, y), \tag{3.2.1}$$

$$\sigma_g(x, 1) = 1 = \sigma_g(1, x), \text{ y} \tag{3.2.2}$$

$$\tau_x(gh, k)\tau_{k \triangleright x}(g, h) = \tau_x(h, k)\tau_x(g, hk), \tag{3.2.3}$$

$$\tau_x(g, 1) = 1 = \tau_x(1, g) \tag{3.2.4}$$

para $g, h, k \in \Gamma$, $x, y, z \in F$.

El producto bicruzado $\mathbb{K}^\Gamma\, {}^\tau\#_\sigma \mathbb{K}F$ asociado a los datos anteriores es, como espacio vectorial, igual a $\mathbb{K}^\Gamma \otimes \mathbb{K}F$, y la multiplicación y comultiplicación están determinadas por:

$$(e_s\#x)(e_t\#y) = \delta_{s \triangleleft x, t}\sigma_s(x, y)e_s\#xy,$$

$$\Delta(e_s\#x) = \sum_{gh=s} \tau_x(g, h)e_g\#(h \triangleright x) \otimes e_h\#x,$$

para $s, t \in \Gamma, x, y \in F$ y donde $\sigma_s(x, y) = \sigma(x, y)(s)$ y $\tau_x(s, t) = \tau(s, t)(x)$.

Además, cuando la característica del cuerpo $\mathbb{K}$ no divide al orden del grupo F, el producto bicruzado $H = \mathbb{K}^\Gamma\ {}^\tau\#_\sigma \mathbb{K}F$ es un álgebra de Hopf semisimple si y sólo si los cociclos σ y τ cumplen que:

$$\sigma_{ts}(x,y)\tau_{xy}(t,s) = \tau_x(t,s)\tau_y(t \triangleleft (s \triangleright x), s \triangleleft x)\sigma_t(s \triangleright x, (s \triangleleft x) \triangleright y)\sigma_s(x,y), \tag{3.2.5}$$

para $s,t \in \Gamma$, $x,y \in F$ (ver [Mas02, Lemma 1.2]). Notar que esta condición da la siguiente normalización:

$$\sigma_1(g,h) = 1,\ \tau_1(x,y) = 1, \tag{3.2.6}$$

para $g,h \in \Gamma$; $x,y \in F$. En este caso, la antípoda de H está dada por

$$\mathcal{S}(e_g\#x) = \sigma_{(g\triangleleft x)^{-1}}((g \triangleright x)^{-1}, g \triangleright x)^{-1}\tau_x(g^{-1},g)^{-1}e_{(g\triangleleft x)^{-1}}(g \triangleright x)^{-1}, \tag{3.2.7}$$

para todo $g \in \Gamma, x \in F$. Tenemos la siguiente sucesión exacta abeliana asociada al producto bicruzado $\mathbb{K}^\Gamma\ {}^\tau\#_\sigma \mathbb{K}F$

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^\Gamma \longrightarrow \mathbb{K}^\Gamma\ {}^\tau\#_\sigma \mathbb{K}F \longrightarrow \mathbb{K}F \longrightarrow \mathbb{K}, \tag{3.2.8}$$

donde todas las aplicaciones son las canónicas.

Proposición 3.2.3. *[Mas02, Proposition 1.5] Toda suceción (A) de $\mathbb{K}F$ por $\mathbb{K}^\Gamma$ es equivalente a una extensión de la forma (3.2.8).*

Más aún, toda álgebra de Hopf H que admite una extensión abeliana

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^\Gamma \longrightarrow H \longrightarrow \mathbb{K}F \longrightarrow \mathbb{K}, \tag{3.2.9}$$

es necesariamente isomorfa a un producto bicruzado.

El conjunto de clases de equivalencias de extensiones abelianas de la forma (3.2.8) es un grupo abeliano, con el producto Baer de extensiones, al cual denotaremos $\mathrm{Opext}(\mathbb{K}F, \mathbb{K}^\Gamma)$.

La clase de un elemento del grupo $\mathrm{Opext}(\mathbb{K}F, \mathbb{K}^\Gamma)$ puede representarse por un par (τ,σ), donde $\sigma : \Gamma^{\times 2} \times F \longrightarrow \mathbb{K}^\times$ y $\tau : \Gamma \times F^{\times 2} \longrightarrow \mathbb{K}^\times$ son mapas que satisfacen las condiciones (1.2) y (1.6). Además, el grupo $\mathrm{Opext}(\mathbb{K}F, \mathbb{K}^\Gamma)$ puede ser descripto como el primer grupo de cohomología de cierto complejo doble, esto fue hecho por Masuoka en [Mas99, Proposition 5.2].

El lema siguiente describe el grupo de elementos de tipo grupo en una extensión abeliana. Sea $F^\Gamma \subseteq F$ el subgrupo de elementos en F que son invariantes bajo la acción $\triangleright$. Si $x \in F^\Gamma$, entonces $\tau_x : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{K}^\times$ es un 2-cociclo normalizado. Denotaremos por $[\tau_x]$ su clase de cohomología en $H^2(\Gamma, \mathbb{K}^\times)$.

Lema 3.2.4. *La sucesión exacta de álgebras de Hopf* $\mathbb{K} \to \mathbb{K}^\Gamma \to H \to \mathbb{K}F \to \mathbb{K}$ *induce por restricción una sucesión exacta de grupos*

$$1 \to \widehat{\Gamma} \to G(H) \to F_0 \to 1,$$

donde $\widehat{\Gamma}$ *denota el grupo de caracteres de dimensión uno de* Γ *y* $F_0 = \{x \in F^\Gamma : [\tau_x] = 1\}$.

Por lo tanto $G(H)$ *es isomorfo a un producto cruzado* $G(H) \cong \widehat{\Gamma} \rtimes_{\triangleleft,\sigma} F_0$.

Demostración. Ver [Nat10, Lemma 2.2]. □

Definición 3.2.5. Una sucesión exacta de álgebras Hopf $\mathbb{K} \to B \to H \xrightarrow{\pi} T \to \mathbb{K}$ se dice *hendida* si π admite una sección la cual es una convolución inversible y T-colineal.

Proposición 3.2.6. *[Nat10, Proposition 3.5] Sea* $\mathbb{K} \to B \to H \to \mathbb{K}F \to \mathbb{K}$ *una sucesión exacta hendida y cocentral. Entonces el funtor* $\mathcal{F} : (\operatorname{Rep} B)^F \to \operatorname{Rep} H$ *define una equivalencia de categorías tensoriales.*

Lema 3.2.7. *[Nat07, Lemma 1.4.1] Sea* $H \to B$ *un morfismo de álgebras de Hopf. Entonces* $H^{\operatorname{co} B}$ *es un submódulo de Yetter-Drinfeld de* H*, es decir, es un coideal de* H *tal que* $h_1 H^{\operatorname{co} B} \mathcal{S}(h_2) \subseteq H^{\operatorname{co} B}$*, para todo* $h \in H$.

Corolario 3.2.8. *[Nat07, Corollary 1.4.3] Sea* $B \subseteq H$ *una subálgebra de Hopf tal que* $[H : B] = p$ *es el menor número primo que divide a* $\dim H$*. Entonces* B *es una subálgebra de Hopf normal y* H *encaja en una extensión central*

$$1 \to B \to H \to k\mathbb{Z}_p \to 0.$$

Definición 3.2.9. Dada un álgebra de Hopf A y un 2-cociclo $\theta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ para A. La *deformación cociclo* A^θ por tal θ es la coálgebra A munida con el producto torcido $\cdot$ definido por

$$a \cdot b = \sum \theta(a_1, b_1) a_2 b_2 \theta^{-1}(a_3, b_3),$$

donde $a, b \in A$. Ésta es en efecto un álgebra de Hopf con la misma unidad 1 y la antípoda torcida S^θ dada por

$$S^\theta(a) = \sum \theta(a_1, S(a_2)) S(a_3) \theta^{-1}(S(a_4), a_5),$$

donde $a \in A$ (ver [Mas02, Section 3]).

El grupo de clases de equivalencias de extensiones abelianas de H por B se denotará por $\operatorname{Opext}(H, B)$.

Proposición 3.2.10. *Consideremos (A) y (A') clases de equivalencias de extensiones abelianas en* $\operatorname{Opext}(H, B)$*. Entonces existe un 2-cociclo θ de H tal que (A^θ) es equivalente a (A') si y sólo si (A) y (A') son iguales en el conúcleo* $\operatorname{Opext}(H, B)/\operatorname{Im}\delta$ *del morfismo de grupos inducido $\delta : H^2(H, \mathbb{K}) \longrightarrow \operatorname{Opext}(H, B)$.*

Demostración. Ver [Mas02, Proposition 3.1]. □

Lema 3.2.11. *Sea una sucesión exacta abeliana como en (3.2.8). Entonces:*

(i) La sucesión es central si y sólo si la acción $\triangleleft : \Gamma \times F \longrightarrow \Gamma$ es trivial. En este caso, el grupo $G = F \bowtie \Gamma$ es un producto semidirecto $G \simeq F \rtimes \Gamma$, con respecto a la acción $\triangleright : \Gamma \times F \longrightarrow F$.

(ii) La sucesión es cocentral si y sólo si la acción $\triangleright : \Gamma \times F \longrightarrow F$ es trivial. En este caso, el grupo $G = F \bowtie \Gamma$ es un producto semidirecto $G \simeq F \ltimes \Gamma$ con respecto a la acción $\triangleleft : \Gamma \times F \longrightarrow \Gamma$.

3.2.1. Módulos sobre productos cruzados

En esta subsección nos basamos en el trabajo [KMM02].

Asumamos que $H = \mathbb{K}^\Gamma \#_\sigma \mathbb{K}F$. Sea e_g con $g \in \Gamma$ la base usual para $\mathbb{K}^\Gamma$ y asumamos que $s \rightharpoonup e_g = e_{s \rightharpoonup g}$, para todo $s \in F$.

Todos los H-módulos a izquierda simples pueden describirse como módulos inducidos por ciertas álgebras de grupo torcidas de los estabilizadores F_s.

En este trabajo, los autores muestran que las representaciones irreducibles de H están clasificadas por pares (s, U_s), donde s es un representante de las órbitas de la acción de F en Γ, $F_s \doteq F \cap sFs^{-1}$ es el estabilizador de $s \in \Gamma$, y U_s es una representación irreducible del álgebra de grupo torcida $\mathbb{K}_{\sigma_s} F_s$, es decir, una representación proyectiva irreducible de F_s con cociclo σ_s, donde $\sigma_s(x, y) = \sigma(x, y)(s)$, $x, y \in F$, $s \in \Gamma$. Observemos que restringiendo $\sigma_s : F \times F \longrightarrow \mathbb{K}^\times$ al estabilizador F_s obtenemos un 2-cociclo en F_s, para todo $s \in \Gamma$. Dado un par (s, U_s), la representación irreducible correspondiente está dada por

$$W_{(s,U_s)} \doteq \operatorname{Ind}^H_{\mathbb{K}^\Gamma \otimes \mathbb{K}F_s} s \otimes U_s. \tag{3.2.10}$$

La dimensión de la representación irreducible $W_{(s,U_s)}$ correspondiente a un tal par (s, U_s) es

$$\dim W_{(s,U_s)} = [F : F_s] \dim U_s.$$

Para más detalles ver [MW98].

3.3. Álgebras de Hopf cuasi-triangulares

Definición 3.3.1. Una *estructura cuasi-triangular* sobre un álgebra de Hopf H es un elemento inversible $R \in H \otimes H$ tal que para todo $x \in H$,

$$R\Delta(x) = \Delta^{\mathrm{op}}(x)R, \tag{3.3.1}$$

donde Δ^{op} denota la comultiplicación opuesta, y satisface las siguientes relaciones:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = R^{13}R^{23}, \tag{3.3.2}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) = R^{13}R^{12}. \tag{3.3.3}$$

Un álgebra de Hopf H equipada con una estructura cuasi-triangular se denomina *cuasi-álgebra de Hopf*.

Para $R = \sum_i r_i \otimes r_i'$, $R^{12} = \sum_i r_i \otimes r_i' \otimes 1$, $R^{13} = \sum_i r_i \otimes 1 \otimes r_i'$, $R^{23} = \sum_i 1 \otimes r_i \otimes r_i'$ en $H \otimes H \otimes H$.

Teorema 3.3.2. *Sea G un grupo casi simple (ver Definición 1.1.8) y sea $G = F\Gamma$ una factorización exacta apropiada de G. Sea H un álgebra de Hopf que encaja en una sucesión exacta $\mathbb{K} \to \mathbb{K}^\Gamma \to H \to \mathbb{K}F \to \mathbb{K}$. Entonces H no admite una estructura cuasi-triangular.*

Demostración. Ver [Nat11, Theorem 5.2]. □

Definición 3.3.3. Se dice que una (cuasi-)álgebra de Hopf semisimple H es *nilpotente* si su categoría de representaciones $\operatorname{Rep} H$ es nilpotente (ver Definición 4.7.1).

Observación 3.3.4. Dada una cuasiálgebra de Hopf semisimple H, se tiene que $\operatorname{Rep} H$ es una categoría de fusión trenzada (ver Definición 2.6.2) tomando

$$c_{V \otimes W} : V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V \text{ con } v \otimes w \mapsto R^{21}(w \otimes v), \tag{3.3.4}$$

para cualesquiera representaciones V, W de H y $v \in V$, $w \in W$. Notar que el axioma (3.3.1) significa que la aplicación (3.3.4) es un morfismo en $\operatorname{Rep} H$ y los axiomas (3.3.2) y (3.3.3) equivalen a que c satisface los axiomas de los hexágonos (2.6.1) y (2.6.2). Recíprocamente, cualquier trenza sobre $\operatorname{Rep} H$ está determinada por una estructura cuasi-triangular.

Capítulo 4

Categorías de Fusión

En este capítulo recordaremos propiedades y definiciones asociadas a una clase particular de categorías tensoriales, las categorías de fusión, las cuales son uno de los principales objetos de estudio de esta tesis. Para estos temas se recomienda la siguiente bibliografía [Del02, DGNO10, ENO05, ENO11, EO04, GN08, Müg03b, Müg04]. A lo largo del mismo, trabajaremos sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado y de característica 0.

Definición 4.0.1. [ENO05]. Una *categoría de fusión* $\mathcal{C}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una categoría tensorial semisimple que posee una cantidad finita de clases de isomorfismos de objetos simples.

Ejemplo 4.0.2. Los siguientes ejemplos son de categoría de fusión. Sea G un grupo finito.

1) La categoría $\operatorname{Rep} G$ es una categoría de fusión si y sólo si la $\operatorname{char}(\mathbb{K})$ no divide a $|G|$.

2) La categoría $\mathcal{C}(G,\omega)$ es una categoría de fusión para todo 3-cociclo $\omega : G\times G\times G \longrightarrow \mathbb{K}^\times$. En particular, la categoría $\mathcal{C}(G)$ es de fusión.

3) Sea $\mathcal{C}(G,\omega,F,\psi)$ la categoría de $\mathbb{K}_\psi F$-bimódulos en la categoría $\mathcal{C}(G,\omega)$ de espacios vectoriales G-graduados de dimensión finita, donde $\omega \in Z^3(G,\mathbb{K}^\times)$ es un 3-cociclo, $F \subseteq G$ un subgrupo y $\psi : F \times F \to \mathbb{K}^\times$ una 2-cocadena en F que satisface $d\psi = \omega|_{F\times F\times F}$. $\mathcal{C}(G,\omega,F,\psi)$ es una categoría de fusión si ω es un 3-cociclo normalizado y ψ cumple $\psi(g,1) = 1 = \psi(1,g)$ para todo $g \in F$.

4) La categoría $\operatorname{Rep} H$ es una categoría de fusión si y sólo si H es un (cuasi-)álgebra de Hopf semisimple (necesariamente de dimensión finita) sobre $\mathbb{K}$.

Definición 4.0.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre $\mathbb{K}$. Una subcategoría tensorial plena $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, es una *subcategoría de fusión* de $\mathcal{C}$ si para todo objeto X en $\mathcal{C}$ isomorfo a un sumando directo de un objeto en $\mathcal{D}$ se tiene que $X \in \mathcal{D}$.

Observación 4.0.4. [DGNO10, Corollary F.7 (i)] Una subcategoría de fusión es necesariamente rígida, por lo cual es una categoría de fusión en sí misma.

Definición 4.0.5. Sean $\mathcal{C}$ una categoría de fusión y $\mathcal{X}$ una colección de objetos de $\mathcal{C}$. Se define la *subcategoría de fusión generada por* $\mathcal{X}$ como la menor subcategoría de fusión que contiene a $\mathcal{X}$.

Definición 4.0.6. Sea $\mathcal{C}$ una categorá de fusión. Se define la *subcategoría adjunta* $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ de $\mathcal{C}$ como la subcategoría de fusión generada por los objetos $X \otimes X^*$, con X recorriendo los objetos simples de $\mathcal{C}$.

Ejemplo 4.0.7. Veamos algunos ejemplos de categorías de fusión y sus subcategorías adjuntas.

1) Si $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} G$, con G un grupo finito, la subcategoría adjunta es $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} = \operatorname{Rep}(G/Z(G))$, donde $Z(G)$ es el centro de G.

2) Sea $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \omega)$, con G un grupo finito y $\omega : G \times G \times G \longrightarrow \mathbb{K}^\times$ un 3-cociclo, entonces la subcategoría adjunta es $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} = \mathrm{Vect}$, ya que $\delta_g \otimes \delta_{g^*} = \delta_g \otimes \delta_{g^{-1}} = \delta_{gg^{-1}} = \delta_e = \mathbf{1}$.

Definición 4.0.8. Sea $\mathcal{D}$ una subcategoría de fusión de una categoría de fusión $\mathcal{C}$. El *conmutador* de $\mathcal{D}$ es la subcategoría de fusión $\mathcal{D}^{\mathrm{co}} \subset \mathcal{C}$ generada por todos los objetos simples $X \in \mathcal{C}$ tal que $X \otimes X^* \in \mathcal{D}$.

Equivalentemente, $\mathcal{D}^{\mathrm{co}}$ es la mayor subcategoría de fusión $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{B}_{\mathrm{ad}} \subset \mathcal{D}$. Es claro que $(\mathcal{D}^{\mathrm{co}})_{\mathrm{ad}} \subset \mathcal{D} \subset (\mathcal{D}_{\mathrm{ad}})^{\mathrm{co}}$.

Definición 4.0.9. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión. $\mathcal{C}$ se dice *punteada* si todos los objetos simples son inversibles.

Observación 4.0.10. Toda categoría de fusión punteada es equivalente a una categoría de la forma $\mathcal{C}(G, \omega)$ (ver ejemplo 2.4.5, 4)).

El conjunto de clases de isomorfismos de objetos inversibles de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ tiene estructura de grupo, con el producto dado por $\otimes$ y elemento identidad $\mathbf{1}$, y se denota $G(\mathcal{C})$. La subcategoría de fusión $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}$ de $\mathcal{C}$ generada por $G(\mathcal{C})$ es la subcategoría punteada maximal de $\mathcal{C}$.

Se denota $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ al conjunto de clases de isomorfismos de objetos simples de la categoría $\mathcal{C}$, y si X es un objeto simple se dice que $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$, abusando de la notación. El conjunto $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ es una base sobre $\mathbb{Z}$ del anillo de Grothendieck $K_0(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$, introducido en la Subsección 2.5.1. En dicha sección se mencionó que denotaremos a la clase $[X]$ de X en $K_0(\mathcal{C})$ simplemente por X. Notemos que dados $X, Y \in \mathrm{Irr}\,\mathcal{C}$, como consecuencia del Lema de Schur para categorías abelianas, se tiene que

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = \begin{cases} 0 \text{ si } X \neq Y, \\ \mathbb{K}\,\mathrm{id}_X \text{ si } X = Y, \end{cases}$$

De esta forma, todo objeto X en $\mathcal{C}$ está determinado, salvo isomorfismos, por lo espacios de morfismos $\mathrm{Hom}(Y, X)$, con $Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$. De hecho, la clase de X se descompone como $X = \sum_{Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} m(Y,X)Y$, donde $m(Y,X) = \dim \mathrm{Hom}(Y,X)$ es la multiplicidad de Y en X. Se cumplen las siguientes relaciones para todo $X, Y, Z \in \mathcal{C}$:

$$m(X, Y \otimes Z) = m(Y^*, Z \otimes X^*) = m(Y, X \otimes Z^*). \tag{4.0.1}$$

Como la categoría $\mathcal{C}$ es de fusión el conjunto $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ es finito, digamos $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}) = X_i\ i \in I$, con $X_0 = 1$ y $0 \in I$ finito. Se sigue que, con respecto a la base $\mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ de $K_0(\mathcal{C})$, el producto $X_iX_j = \sum_{k\in I} N_{ij}^k X_k$, con $N_{ij}^k = \dim \mathrm{Hom}(X_k, X_i \otimes X_j)$ enteros no negativos. Además, si denotamos por X_{i^*} a la imagen de X_i bajo la involución * inducida por la rigidez de $\mathcal{C}$ (ver Subsección 2.5.1), como consecuencia de (4.0.1) los coeficientes satisfacen que

$$N_{ij}^k = N_{jk^*}^{i^*} = N_{kj^*}^{i} = N_{k^*i}^{j^*} = N_{j^*i^*}^{k^*},\ N_{ij}^0 = \delta_{ij^*}. \tag{4.0.2}$$

Un anillo con estas propiedades es un *anillo de fusión* y las constantes N_{ij}^k se denominan *coeficientes o reglas de fusión*. Es por esto que al anillo de Grothendieck $K_0(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$ suele ser llamado también el anillo de fusión de $\mathcal{C}$.

Definición 4.0.11. [EN16, Section 3] Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías de fusión. Una *equivalencia de Grothendieck* entre $\mathcal{C}$ y $\tilde{\mathcal{C}}$ es una biyección $f : \mathrm{Irr}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Irr}(\tilde{\mathcal{C}})$ tal que

$$f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \text{ y } N_{f(X),f(Y)}^{f(Z)} = N_{X,Y}^{Z}, \tag{4.0.3}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$. Diremos que $\mathcal{C}$ y $\tilde{\mathcal{C}}$ son *Grothendieck equivalentes* si existe una equivalencia de Grothendieck entre ellas.

Dado $X \in \operatorname{Irr}(\mathcal{C})$, se define subgrupo $G[X]$ como el estabilizador de X por multiplicación a izquierda por clases de isomorfismos de objetos inversibles, o sea, objetos en $K_0(\mathcal{C})$, es decir $G[X] = \{g \in K_0(\mathcal{C})/g \otimes X = X\}$ de $G(\mathcal{C})$. De la ecuación (4.0.1) se sigue que

$$G[X] = \{g \in K_0(\mathcal{C}) : m(g, X \otimes X^*) > 0\} = \{g \in K_0(\mathcal{C}) : m(g, X \otimes X^*) = 1\},$$

para todo $X \in \operatorname{Irr}(\mathcal{C})$.

Proposición 4.0.12. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión. Todo objeto simple X en $\mathcal{C}$ es isomorfo a su doble dual X^{**}.*

Demostración. Ver [ENO05, Proposición 2.1]. □

Siguiendo a [Müg03a], para todo objeto simple X de una categoría de fusión $\mathcal{C}$, se define la *norma cuadrada* $|X|^2 \in \mathbb{K}^\times$ de X como sigue. Se fija un isomorfismo $a : X \to X^{**}$, y sea $|X|^2 = \operatorname{Tr}_X(a) \operatorname{Tr}_{X^*}((a^{-1})^*)$. Esto es claramente independiente de la elección de a y es no nulo. Por ejemplo para el objeto neutral $\mathbf{1}$ se tiene $|\mathbf{1}|^2 = 1$.

Definición 4.0.13. ([Müg03a]). La *dimensión global* de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es la suma de las normas cuadradas de su objetos simples y se denota $\dim(\mathcal{C})$.

Teorema 4.0.14. *([Müg03a]) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces para todo $X \in \mathcal{C}$, $|X| \in \mathbb{C}$; por lo tanto* $\dim(\mathcal{C}) \geq 1$ *y es* > 1 *para cualquier $\mathcal{C}$ no trivial.*

4.1. Dimensiones de Frobenius-Perron

Teorema 4.1.1. *(Teorema de Frobenius-Perron) Sea A una matriz cuadrada con coeficientes no negativos.*

(i) A tiene un autovalor real no negativo. El mayor autovalor real no negativo $\lambda(A)$ de A domina los valores absolutos de todos los otros autovalores de A, es decir el radio espectral de A es un autovalor.

(ii) A posee un autovector v de autovalor $\lambda(A)$ tal que $v_i \geq 0$ para todo $i = 1, ..., n$.

(iii) Si A tiene coeficientes estrictamente positivas entonces $\lambda(A)$ es un autovalor positivo simple, y el autovector correspondiente puede ser normalizado para tener coeficientes estrictamente positivos.

(iv) Si A tiene un autovector v con coeficientes estrictamente positivos, entonces el autovalor correspondiente es $\lambda(A)$.

Demostración. La demostración de este resultado puede encontrarse en [EGNO15, Theorem 1.44.1] y [Gan98, XIII.2]. $\square$

Proposición 4.1.2. *(Kronecker) Sea A una matriz con entradas enteras no negativas tal que $\lambda(AA^t) = \lambda(A)^2$. Si $\lambda(A) < 2$ entonces $\lambda(A) = 2cos(\pi/n)$ para algún entero $n \geq 2$.*

Definición 4.1.3. Sea X un objeto de la categoría de fusión $\mathcal{C}$. La *dimensión de Frobenius-Perron* de X, la cual será denotada por $\operatorname{FPdim} X$, es el autovalor real no negativo maximal de la matriz de multiplicación a izquierda por X en $K_0(\mathcal{C})$, el anillo de fusión de $\mathcal{C}$. La *dimensión de Frobenius-Perron*, $\operatorname{FPdim} \mathcal{C}$, de $\mathcal{C}$ se define como la suma de los cuadrados de las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples de C, es decir,

$$\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = \sum_{X \in \operatorname{Irr}(\mathcal{C})} \operatorname{FPdim}(X)^2.$$

Recordemos algunos de los resultados de Etingof, Nikshych y Ostrik, quienes estudiaron esta noción en detalle en [ENO05].

Teorema 4.1.4. *La asignación $X \mapsto \operatorname{FPdim} X$ se extiende a un morfismo de anillos $K_0(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{K}$. Más aún,* FPdim *es el único morfismo de álgebras $K_0(\mathcal{C}) \to \mathbb{K}$ que aplica los objetos simples de la categoría $\mathcal{C}$ en números positivos.*

Corolario 4.1.5. *Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor cuasi-tensorial entre categorías de fusión, entonces* $\operatorname{FPdim}_{\mathcal{D}} F(X) = \operatorname{FPdim}_{\mathcal{C}} X$, *para todo X en $\mathcal{C}$.*

Observación 4.1.6. La dimensión de Frobenius-Perron de una categoría de fusión es un invariante con respecto a equivalencias Morita (ver Subsección 4.2.1). En particular, $\operatorname{FPdim} \mathcal{Z}(\mathcal{C}) = (\operatorname{FPdim} \mathcal{C})^2$, donde $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es el centro de Drinfeld de la categoría de fusión $\mathcal{C}$ (Definición 2.6.4).

Lema 4.1.7. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión sobre $\mathbb{K}$.*

(i) Si $\mathcal{D}$ es una subcategoría tensorial plena de $\mathcal{C}$ entonces el cociente $\operatorname{FPdim} \mathcal{C}/\operatorname{FPdim} \mathcal{D}$ *es un entero algebraico.*

(ii) Si $\mathcal{D}$ es una categoría de fusión para la cual existe un funtor tensorial suryectivo $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entonces el cociente $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} / \operatorname{FPdim} \mathcal{D}$ es un entero algebraico.

Demostración. (i) La afirmación sigue de [ENO05, Proposition 8.15].

(ii) El enunciado es consecuencia de [ENO05, Corollary 8.11].

□

Definición 4.1.8. Diremos que una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es *íntegra* si $\operatorname{FPdim}(X) \in \mathbb{Z}$ para todo objeto X en $\mathcal{C}$, y que es *débilmente íntegra* si $\operatorname{FPdim}(\mathcal{C}) \in \mathbb{Z}$.

Proposición 4.1.9. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión débilmente íntegra. Entonces las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples en $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ son números enteros. Más aún, para todo objeto simple $X \in \mathcal{C}$, se tiene $\operatorname{FPdim} X = \sqrt{N}$, donde N es un número entero.*

Demostración. Ver [ENO05, Proposition 8.27]. □

4.2. Categorías módulo y equivalencia Morita categórica

Sea $\mathcal{A}$ una categoría de fusión.

Definición 4.2.1. Una *categoría módulo izquierda* sobre $\mathcal{A}$ es una categoría $\mathcal{M}$ munida de una acción (o producto módulo) bifuntor $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ junto con isomorfismos naturales de $\mathcal{A}$, es decir de

$$m_{X,Y,M} : (X \otimes Y) \otimes M \xrightarrow{\sim} X \otimes (Y \otimes M), \tag{4.2.1}$$

y

$$u_M : \mathbf{1} \otimes M \xrightarrow{\sim} M \tag{4.2.2}$$

llamados *asociatividad módulo* y *unidad restringida* tal que los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
 & ((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes M \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\otimes \mathrm{id}_M"'] \arrow[dr, "m_{X\otimes Y,Z,M}"] & \\
(X\otimes (Y\otimes Z)\otimes M) \arrow[d, "m_{X,Y\otimes Z,M}"'] & & (X\otimes Y)\otimes (Z\otimes M) \arrow[d, "m_{X,Y,Z\otimes M}"] \\
X\otimes ((Y\otimes Z)\otimes M) \arrow[rr, "id_X\otimes m_{Y,Z,M}"'] & & X\otimes (Y\otimes (Z\otimes M))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes \mathbf{1})\otimes M \arrow[rr, "m_{X,\mathbf{1},M}"] \arrow[dr, "r_X\otimes \mathrm{id}_M"'] & & X\otimes (\mathbf{1}\otimes M) \arrow[dl, "\mathrm{id}_X\otimes u_M"] \\
 & X\otimes M &
\end{tikzcd}$$

conmutan para todo objeto X, Y, Z en $\mathcal{A}$ y M en $\mathcal{M}$.

Definición 4.2.2. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos categorías módulo sobre $\mathcal{A}$ con asociatividad módulo restringida m y n, respectivamente. Un *funtor de $\mathcal{A}$-módulos* de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ es un par (F, s), donde $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es un funtor y

$$s_{X,M} : F(X\otimes M) \to X\otimes F(M),$$

es un isomorfismo natural tal que los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & F((X\otimes Y)\otimes M) \arrow[dl, "F(m_{X,Y,M})"'] \arrow[dr, "s_{X\otimes Y,M}"] & \\
F(X\otimes (Y\otimes M)) \arrow[d, "s_{X,Y\otimes M}"'] & & (X\otimes Y)\otimes F(M) \arrow[d, "n_{X,Y,F(M)}"] \\
X\otimes F(Y\otimes M) \arrow[rr, "id_X\otimes s_{Y,M}"'] & & X\otimes (Y\otimes F(M))
\end{tikzcd} \tag{4.2.3}$$

$$\begin{tikzcd}
F(\mathbf{1}\otimes M) \arrow[rr, "s_{\mathbf{1},M}"] \arrow[dr, "F(l_M)"'] & & \mathbf{1}\otimes F(M) \arrow[dl, "l_{F(M)}"] \\
 & F(M) &
\end{tikzcd} \tag{4.2.4}$$

conmutan para todo $X, Y \in \mathcal{A}$ y $M \in \mathcal{M}$. Una *equivalencia* de categorías $\mathcal{A}$-módulos es un funtor de $\mathcal{A}$-módulos, esto es una equivalencia de categorías.

Definición 4.2.3. Un *morfismo entre funtores $\mathcal{A}$-módulo* (F, s) y (G, t) es una transformación natural ν de F en G tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X \otimes M) \arrow[r, "s_{X,M}"] \arrow[d, "\nu_{X\otimes M}"'] & X \otimes F(M) \arrow[d, "id_X \otimes \nu_M"] \\ G(X \otimes M) \arrow[r, "t_{X,M}"'] & X \otimes G(M) \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $X \in \mathcal{A}$ y $M \in \mathcal{M}$.

Definición 4.2.4. Una categoría $\mathcal{A}$-módulo se dice *indescomponible* si no es equivalente a la suma directa de dos categorías $\mathcal{A}$-módulo no triviales.

Observación 4.2.5. Toda categoría $\mathcal{A}$-módulo es completamente reducible, es decir, si $\mathcal{M}$ es una categoría $\mathcal{A}$-módulo y $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ es una subategoría $\mathcal{A}$-módulo plena entonces existe una subcategoría $\mathcal{A}$-módulo plena $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}'$.

De manera análoga a la Definición 4.2.1 se define una *categoría módulo a derecha* sobre $\mathcal{A}$.

Definición 4.2.6. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías de fusión. Una categoría $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-bimódulo es una categoría $\mathcal{M}$ que es una categoría módulo a izquierda sobre $\mathcal{A}$, una categoría módulo a derecha sobre $\mathcal{B}$ y está munida de isomorfismos naturales $\{\gamma_{X,M,Y} : (X \otimes M) \otimes Y \to X \otimes (M \otimes Y), X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{B}, M \in \mathcal{M}\}$ que satisfacen ciertos axiomas (ver [EGNO15, Definition 7.1.7]).

Ejemplo 4.2.7. Un ejemplo típico de una categoría $\mathcal{A}$-módulo es la categoría $\mathcal{A}_A$ de módulos a derecha sobre un álgebra separable A en $\mathcal{A}$. Ver Definición 2.4.17.

4.2.1. Dualidad de categorías de fusión y equivalencia Morita categórica

Sea $\mathcal{A}$ una categoría de fusión y sea $\mathcal{M}$ una categoría $\mathcal{A}$-módulo a izquierda indescomponible. La categoría $\mathcal{A}^*_{\mathcal{M}}$ de endofuntores $\mathcal{A}$-módulo de $\mathcal{M}$ tiene una estructura de categoría tensorial con un producto tensorial dado por la composición de funtores y el objeto unidad como el funtor identidad. Es también una categoría rígida siendo los duales de un funtor sus adjunciones (gracias a la rigidez de $\mathcal{A}$ una adjunción de funtor $\mathcal{A}$-módulo tiene una estructura natural de funtor $\mathcal{A}$-módulo).

En [ENO05, Theorem 2.18], se puede ver una demostración de que $\mathcal{A}^*_{\mathcal{M}}$ es una categoría de fusión. Ésta categoría se denomina la categoría *dual* de $\mathcal{A}$ con respecto a $\mathcal{M}$. Además, $\mathcal{M}$ tiene una estructura natural de una categoría $\mathcal{A}^*_{\mathcal{M}}$-módulo y exite una equivalencia tensorial canónica

$$(\mathcal{A}^*_{\mathcal{M}})^*_{\mathcal{M}} \cong \mathcal{A}.$$

La dimensión de Frobenius-Perron es invariante bajo la dualidad, es decir

$$\mathrm{FPdim}(\mathcal{A}) = \mathrm{FPdim}(\mathcal{A}^*_{\mathcal{M}}). \tag{4.2.5}$$

Ejemplo 4.2.8. Sea A un álgebra separable en $\mathcal{A}$ y sea $\mathcal{M}$ la categoría de A-módulos a derecha en $\mathcal{A}$. Entonces $(\mathcal{A}^*_{\mathcal{M}})^{\mathrm{op}}$ es tensorialmnete equivalente a la categoría ${}_A\mathcal{A}_A$ de A-bimódulos en $\mathcal{A}$. El producto tensorial de la última categoría es $\otimes_{\mathcal{A}}$ y el objeto unidad el $\mathcal{A}$-módulo regular.

Definición 4.2.9. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías de fusión. Diremos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *categóricamente Morita equivalentes* si existe una categoría $\mathcal{A}$-módulo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{B} \cong (\mathcal{A}^*_{\mathcal{M}})^{\mathrm{op}}$.

Observación 4.2.10. La equivalencia Morita categórica es en efecto una relación de equivalencia. Ver [Müg03b].

Observación 4.2.11. La clase de categorías de fusión íntegras (Definición 4.1.8) es cerrada bajo equivalencias Morita [ENO05, Theorem 8.35].

Dado un par de categorías $\mathcal{A}$-módulo a izquierda, sea $\mathrm{Fun}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ la categoría de funtores $\mathcal{A}$-módulo de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$. En particular, $\mathcal{A}^*_{\mathcal{M}} = \mathrm{Fun}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{M})$. La asignación

$$\mathcal{N} \mapsto \mathrm{Fun}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{N})$$

define una 2-equivalencia entre las 2-categorías de categorías $\mathcal{A}$-módulo a izquierda y de categorías $\mathcal{A}^*_{\mathcal{M}}$-módulo a derecha [EO04], [Müg03a].

Ejemplo 4.2.12. Veamos algunos ejemplos de Morita equivalencia categórica.

1) Cualquier categoría de fusión $\mathcal{A}$ puede ser vista como la categoría regular de módulos a izquierda sobre sí misma. Se puede ver fácilmente que en este caso los funtores $\mathcal{A}$-módulo son precisamente los funtores de la multiplicación a derecha por objetos de $\mathcal{A}$, así $\mathcal{A}^*_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$.

2) Sea G un grupo finito y sea $\mathcal{A} = \mathcal{C}(G)$ la categoría de espacios vectoriales G-graduados. La categoría Vect es una categoría $\mathcal{C}(G)$-módulo con el funtor tensorial de olvido $\mathcal{C}(G) \to \text{Vect}$. Determinemos la categoría dual $(\mathcal{C}(G))^*_{\text{Vect}}$. De la definición de un funtor módulo, podemos ver que un endofuntor $\mathcal{C}(G)$-módulo $F_{\text{Vect}} \to \text{Vect}$ está determinado por un espacio vectorial $V := F(\mathbb{K})$ y una colección de isomorfismos

$$\pi_g \in \text{Hom}_{\text{Vect}}(F(\delta_g \otimes \mathbb{K}), \delta_g \otimes F(\mathbb{K})) = \text{End}_{\mathbb{K}}(V),\ g \in G.$$

Se sigue del axioma (4.2.3) en Definición 4.2.2 de funtor módulo que el mapeo

$$g \mapsto \pi_g : G \to GL(V)$$

es una representación de G en V. Recíprocamente, cualquier tal representación determina un endofuntor $\mathcal{C}(G)$-módulo de Vect. Se puede ver que los homomorfismos de representaciones son precisamente morfismos entre los correspondienter funtores módulo. Así, $(\mathcal{C}(G))^*_{\text{Vect}} \cong \text{Rep}\, G$, es decir, las categorías $\mathcal{C}(G)$ y $\text{Rep}\, G$ son categóricamente Morita equivalentes.

El siguiente toerema fue probado en [ENO11, Theorem 3.1].

Teorema 4.2.13. *Dos categorías de fusión $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son categóricamente Morita equivalentes si y sólo si $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$ son equivalentes como categorías de fusión trenzadas (ver Sección 4.9).*

Así, la clase de equivalencia Morita de una categoría de fusión $\mathcal{A}$ está completamente determinada por su centro $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$.

4.3. Categorías casi-grupo

En esta sección daremos otro ejemplo de categoría de fusión, las llamadas categorías casi-grupo, que fueron estudiadas por Jacob Siehler [Sie03].

Definición 4.3.1. Una categoría *casi-grupo* es una categoría de fusión que posee exactamente un objeto simple no inversible, salvo isomorfismos. Además, si una tal categoría posee estructura trenzada se dirá, simplemente, que es una categoría *casi-grupo trenzada.*

A continuación describiremos las reglas de fusión de una categoría casi-grupo y veremos que están determinadas por un par (G, k), donde G es un grupo finito y k un número entero. Sean $\mathcal{C}$ una categoría casi-grupo y X el objeto no inversible en $\mathcal{C}$. De esta manera, $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}) = G(\mathcal{C}) \cup X$, con $X \notin G(\mathcal{C})$. Recordemos que $G(\mathcal{C})$ es el grupo (con el producto tensorial) de clases de isomorfismo de objetos inversibles de $\mathcal{C}$. Sea $g \in G(\mathcal{C})$. Como g es inversible y X es simple no inversible, $g \otimes X$ es un objeto simple no inversible de $\mathcal{C}$, y por lo tanto $g \otimes X \cong X$, para todo $g \in G(\mathcal{C})$. De la misma forma, dado que X^* es un objeto simple no inversible de $\mathcal{C}$, tenemos $X^* \cong X$. Así,

$$X \otimes X \cong \bigoplus_{g \in G(\mathcal{C})} g \oplus kX, \tag{4.3.1}$$

donde $k = \dim \mathrm{Hom}(X, X \otimes X)$ es un número entero no negativo. Luego, las reglas de fusión de la categoría casi-grupo $\mathcal{C}$ están definidas por el par $(G(\mathcal{C}), k)$.

Observación 4.3.2. Se deduce de (2.6) que la dimensión de Frobenius-Perron de X es solución (positiva) de la ecuación cuadrática $(\mathrm{FPdim}\, X)^2 - k\, \mathrm{FPdim}\, X - |G| = 0$. Por lo tanto, tenemos que $\mathrm{FPdim}\, X = \frac{k+(k^2+4|G|)^{1/2}}{2}$. De este modo, $\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C} = 2|G| + k\, \mathrm{FPdim}\, X$.

Luego, la categoría casi-grupo $\mathcal{C}$ es íntegra si y sólo si $k^2 + 4|G|$ es un cuadrado perfecto, puesto que k y $(k^2 + 4|G|)^{1/2}$ tienen la misma paridad. Recordemos que, en este caso, $\mathcal{C}$ es equivalente a la categoría de representaciones de dimensión finita de una cuasi-álgebra de Hopf.

Observación 4.3.3. *Caso* $k = 0$: Las categorías casi-grupo con regla de fusión del tipo $(G, 0)$ son precisamente las categorías de Tambara-Yamagami. Éstas fueron clasificadas, salvo equivalencia tensoriales, en [TY98].

Teorema 4.3.4. *En el caso* $|G| = k + 1$ *la regla de fusión de casi-grupo* (G, k) *admite una estructura monoidal si y sólo si* G *es el grupo multiplicativo de un cuerpo finito, es decir, cíclico de orden* $p^\alpha - 1$.

Demostración. Ver [Sie03, Theorem 1.2]. □

4.4. Categorías de tipo grupo

Definición 4.4.1. Una categoría de fusión de *tipo grupo* es una categoría de fusión equivalente a la categoría $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ de $\mathbb{K}_\alpha F$-bimódulos en la categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$, donde G

es un grupo finito, $\omega : G^{\times 3} \to \mathbb{K}^\times$ un 3-cociclo, $F \subseteq G$ un subgrupo y $\alpha \in \mathcal{C}^2(F, \mathbb{K}^\times)$ una 2-cocadena en F que satisface $\omega|_F = d\alpha$. Esta última condición hace que el álgebra de grupo torcida $\mathbb{K}_\alpha F$ sea un álgebra asociativa en la categoría $C(G, \omega)$ de espacios vectoriales G-graduados de dimensión finita.

Los objetos simples de una categoría de fusión de tipo grupo $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ están clasificados por pares (s, U_s), con s recorriendo el conjunto de representantes de coclases dobles de F en G, es decir, las órbitas de la acción de F en el espacio F/G de coclases a izquierda de F en G, $F_s = F \cap sFs^{-1}$ el estabilizador de $s \in F/G$, y U_s una representación irreducible del álgebra de grupo torcida $\mathbb{K}_{\sigma_s} F_s$, esto es, una representación proyectiva irreducible de F_s con respecto a cierto 2-cociclo σ_s determinado por ω. Ver [GN09, Theorem 5.1].

La dimensión de la representación irreducible $W_{(s,U_s)}$ correspondiente a un tal par (s, U_s) es

$$\dim W_{(s,U_s)} = [F : F_s] \dim U_s. \tag{4.4.1}$$

Corolario 4.4.2. *Las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples de la categoría $\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ dividen al orden de F.*

Observación 4.4.3. Se sigue del Corolario 4.4.2 que $\operatorname{FPdim} X \in \mathbb{Z}$, para todo $X \in \operatorname{Irr}(\mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha))$. Así, la categoría de tipo grupo $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \omega, F, \alpha)$ es una categoría de fusión íntegra. En particular, $\mathcal{C}$ es equivalente a la categoría de representaciones de dimensión finita de una cuasi-álgebra de Hopf semisimple. Una construcción explícita de una cuasi-álgebra de Hopf H para la cual $\operatorname{Rep} H \simeq \mathcal{C}$ fue dada en [Nat05].

Teorema 4.4.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión tal que:*

(1) $\operatorname{FPdim} X \in \{1, 2\}$*, para todo objeto simple $X \in \mathcal{C}$.*

(2) Para todo objeto $X \in \mathcal{C}$, $X \cong X^*$.

(3) $\mathcal{C} = \mathcal{C}[X_1]$ *con X_1 simple y* $\operatorname{FPdim} X_1 = 2$ *(es decir, todo objeto simple Y es un subobjeto de $X_1^{\otimes n}$ para algún n).*

(4) $K_0(\mathcal{C})$ es conmutativo.

Entonces se tiene.

(i) $\mathcal{C}$ *es Grothendieck equivalente a* $\operatorname{Rep} D_n$*, la categoría de representaciones del grupo dihedral de orden* $2n$*.*

(ii) $\mathcal{C}$ *es de tipo grupo.*

Demostración. Ver [NR11, Theorem 4.2]. □

Veamos la definición de categoría de fusión de tipo grupo en términos de equivalencia Morita categórica.

Observación 4.4.5. Es bien sabido que una categoría de fusión es *de tipo grupo* si y sólo si es categóricamente Morita equivalente a una categoría de fusión punteada $\mathcal{C}(G, \omega)$ (ver [ENO05, Proposition 8.42]).

Ejemplo 4.4.6. Sean F, Γ dos grupos y sea H un álgebra de Hopf semisimple que encaja en una extensión abeliana

$$1 \to \mathbb{K}^{\Gamma} \to H \to \mathbb{K}F \to 1,$$

donde $\mathbb{K}^{\Gamma}$ es el álgebra de Hopf conmutativa de funciones sobre Γ y $\mathbb{K}F$ es el álgebra de Hopf de grupo coconmutativo de F (es decir, H es una extensión de $\mathbb{K}F$ por $\mathbb{K}^{\Gamma}$). $\operatorname{Rep} H$ es una categoría de fusión de tipo grupo, esto puede verse en el siguiente teorema de S. Natale.

Teorema 4.4.7. *[Nat03, Theorem 1.3]. Sea* $G = F\Gamma$ *una factorización exacta de un grupo finito* G*. Sea* H *un álgebra de Hopf que encaja en una extensión abeliana*

$$1 \to \mathbb{K}^{\Gamma} \to H \to \mathbb{K}F \to 1,$$

asociada a dicha factorización. Entonces se tiene:

(i) $\operatorname{Rep} H$ *es de tipo grupo.*

(ii) Sea $[\tau, \sigma]$ *el elemento de* $\operatorname{Opext}(\mathbb{K}F, \mathbb{K}^{\Gamma})$ *correspondiente a la extensión anterior. Entonces* $D(H) \cong D^{\omega}(G)_{\phi}$*, para algún* $\phi \in D^{\omega}(G) \otimes D^{\omega}(G)$ *inversible, donde la clase de* ω *es el 3-cociclo asociado a* $[\tau, \sigma]$ *en la sucesión exacta de Kac [Kac68] y donde* $D^{\omega}(G)$ *es el doble de Drinfeld torcido de* G *[DPR+90].*

4.5. Graduación de una categoría de fusión por un grupo finito

Definición 4.5.1. Sea G un grupo finito y sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión. Una G-*graduación* de $\mathcal{C}$ es una descomposición de $\mathcal{C}$ como suma directa de subcategorías plenas

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{C}_g$$

tal que $\mathcal{C}_g^* = \mathcal{C}_{g^{-1}}$ y el producto tensorial $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es tal que $\mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h \mapsto \mathcal{C}_{gh}$.

Definición 4.5.2. Sea G un grupo finito y sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión. Una G-graduación $\mathcal{C} = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{C}_g$ se dice *fiel* si $\mathcal{C}_g \neq 0$ para todo $g \in G$. En este caso se dice que $\mathcal{C}$ es una G-*extensión* de $\mathcal{C}_e$.

Observación 4.5.3. La *componente trivial* $\mathcal{C}_e$ correspondiente al elemento neutro $e \in G$, es una subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$, y cada $\mathcal{C}_g$ es una categoría bimódulo sobre $\mathcal{C}_e$.

Observación 4.5.4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión que es una G-extensión de $\mathcal{C}_e$. Entonces $\dim \mathcal{C}_g = \dim \mathcal{C}_e$, para todo $g \in G$, y la dimensión de la categoría es $\dim \mathcal{C} = |G| \dim C_e$. Ver [DGNO10, Corollary 4.28]. Además $\operatorname{FPdim} \mathcal{C}_g = \operatorname{FPdim} \mathcal{C}_e$, para todo $g \in G$, y la dimensión de Frobenius-Perron de la categoría es $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = |G| \operatorname{FPdim} C_e$ (Ver [EGNO15, Section 3.5, p. 58] para la definición de $\operatorname{FPdim} \mathcal{C}_g$).

Gelaki y Nikshych probaron, en el trabajo [GN08], que para toda categoría de fusión $\mathcal{C}$ existe una graduación fiel canónica:

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g\in U(\mathcal{C})} \mathcal{C}_g.$$

Esta graduación se denomina la *graduación universal* y el grupo $U(\mathcal{C}) := U(K_0(\mathcal{C}))$ es llamado el *grupo de graduación universal de* $\mathcal{C}$.

La componente trivial de la graduación universal es la subcategoría adjunta de $\mathcal{C}$, es decir, $\mathcal{C}_e = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$.

Cualquier G-graduación fiel de la categoría $\mathcal{C}$ está determinada por un epimorfismo de grupos $\pi : U(\mathcal{C}) \to G$ (ver [GN08, Corollary 3.7]).

Teorema 4.5.5. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple y sea $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} H$. Entonces existe una única subálgebra de Hopf K de H la cual está contenida en el centro de H y es maximal con respecto a esta propiedad. Sea $H_{\mathrm{ad}} := H/HK^+$ el cociente de H por K. Entonces $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} = \operatorname{Rep} H_{\mathrm{ad}}$. Más aún, $K = \operatorname{Fun}(U(\mathcal{C}))$, donde $\operatorname{Fun}(U(\mathcal{C}))$ es el álgebra de funciones en $U(\mathcal{C})$.*

Demostración. Ver [GN08, Theorem 3.8]. □

La siguiente proposición caracteriza las G-extensiones para el caso particular en que $\mathcal{C}$ es la categoría de representaciones de dimensión finita de un álgebra de Hopf semisimple H. Este resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 4.5.5.

Proposición 4.5.6. *Sea H un álgebra de Hopf semisimple. Consideremos la categoría de fusión $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} H$. Entonces una G-graduación fiel de $\mathcal{C}$ correspondonde a una sucesión exacta central de álgebras de Hopf $\mathbb{K} \to \mathbb{K}^G \to H \to K \to \mathbb{K}$, tal que $\operatorname{Rep} H = \mathcal{C}_e$.*

4.6. Equivariantización y de-equivariantización

Recordaremos brevemente el proceso de de-equivariantización, que es una construcción inversa a la de la equivariantización, introducida por Bruguières [Bru00] y Müger [Müg00].

Definición 4.6.1. Una categoría de fusión simétrica $\mathcal{C}$ (ver Definición 4.9.4) se dice *Tannakiana* si existe un grupo finito G y una equivalencia de categorías de fusión trenzadas $\mathcal{C} \simeq \operatorname{Rep} G$ (ver la Definición 2.6.2 o [DGNO10, Definition 2.47]). Sean $\mathcal{C}$ una categoría de fusión y $\mathcal{E} = \operatorname{Rep} G$ una categoría de fusión Tannakiana munida con un funtor tensorial trenzado $\mathcal{E} \to \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ tal que la composición con el funtor de olvido $\mathcal{E} \to \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ es fiel y plena.

Denotaremos por A al álgebra de funciones en G, es decir, $A = \operatorname{Fun}(G)$. Ésta es un álgebra conmutativa en $\mathcal{E}$, por lo cual su imagen es un álgebra conmutativa en $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Así, podemos considerar la categoría $\mathcal{C}_G$ de A-módulos en $\mathcal{C}$, que es una categoría de fusión, y la llamaremos la *de-equivariantización* (o *categoría de fibra*) de $\mathcal{C}$.

El funtor tensorial canónico $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_G$, $X \to A \otimes X$ es dominante (ver Definición 2.0.15). Además, el grupo G actúa por autoequivalencias tensoriales en $\mathcal{C}_G$; esta acción es la inducida por la acción de G en A por traslación a derecha [Müg00], [DGNO10].

Más aún, existe una biyección entre subcategorías de $\mathcal{C}$ que contienen la imagen de $\mathcal{E} = \operatorname{Rep} G$ y subcategorías G-estables de $\mathcal{C}_G$, la cual preserva las subcategorías Tannakianas. Como se mencionó anteriormente, los procesos de equivariantización y de-equivariantización son mutuamente inversos, es decir, existen equivalencias canónicas: $(\mathcal{C}_G)^G \simeq \mathcal{C}$ y $(C^G)_G \simeq \mathcal{C}$. Se sigue que $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = |G| \operatorname{FPdim} \mathcal{C}_G$.

Se puede aplicar la construcción anterior cuando $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión trenzada que contiene una subcategoría Tannakiana $\mathcal{E} = \operatorname{Rep} G$. En este caso, la trenza de $\mathcal{C}$ hace del funtor de de-equivariantización F un funtor central, esto es, F se factoriza por un funtor trenzado $\mathcal{C} \to \mathcal{Z}(\mathcal{C}_G)$.

Sea G un grupo finito y sea $\mathcal{C}$ una G-extensión de una categoría de fusión $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g, \text{ con } \mathcal{C}_e = \mathcal{D}.$$

El centro de $\mathcal{C}$ contiene una subcategoría Tannakiana $\mathcal{E} \cong \operatorname{Rep} G$ cuyos objetos se construyen de la siguiente manera: para toda representación $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ de G consideremos el objeto Y_π en $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, donde $Y_\pi = V \otimes \mathbf{1}$ como un objeto de $\mathcal{C}$ con el isomorfismo permutación

$$\gamma_{Y_\pi} := \pi(g) \otimes \mathrm{id}_X : X \otimes Y_\pi \xrightarrow{\sim} Y_\pi \otimes X, \text{ con } X \in \mathcal{C}_g.$$

Aquí se identifica $X \otimes Y_\pi$ y $Y_\pi \otimes X$ con $V \otimes X$.

Teorema 4.6.2. *[ENO11, Theorem 1.3] Sea G un grupo finito. Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es categóricamente Morita equivalente a una G-extensión de alguna categoría de fusión $\mathcal{D}$ si y sólo si $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ contiene una subcategoría Tannakiana $\mathcal{E} = \operatorname{Rep} G$ tal que la de-equivariantización de $\mathcal{E}'$ por $\mathcal{E}$ es equivalente a $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$ como categorías tensoriales trenzadas. Donde $\mathcal{E}'$ es el centralizador de Müger de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ (ver Definición 4.9.3).*

Observación 4.6.3. En el contexto del Teorema 4.6.2, consideremos la de-equivariantización $\mathcal{E}'_G$ (ver Definición 4.6.1). Entonces $\mathcal{C}$ es categóricamente Morita equivalente a una categoría de fusión G-graduada $\mathcal{B} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{B}_g$ con $\mathcal{Z}(\mathcal{B}_e) \cong \mathcal{E}'_G$. En particular,

$$\operatorname{FPdim}(\mathcal{B}_e) = \frac{\operatorname{FPdim}(\mathcal{C})}{\operatorname{FPdim}(\mathcal{E})}. \tag{4.6.1}$$

Corolario 4.6.4. *Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es de tipo grupo si y sólo si $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ contiene una subcategoría Tannakiana $\mathcal{E}$ tal que* $\operatorname{FPdim}(\mathcal{E}) = \operatorname{FPdim}(\mathcal{C})$.

Demostración. Ver [NSV+13, Corollary 5.5]. □

Observación 4.6.5. La clase de categorías de fusión de tipo grupo no es cerrada bajo equivariantizaciones (Ver [GNN09] y [Nik08]). En particular, la clase de álgebras de Hopf con categorías de representaciones de tipo grupo no es cerrada bajo extensiones de álgebras de Hopf.

El ejemplo más pequeño de un álgebra de Hopf semisimple cuya categoría de representaciones no es de tipo grupo tiene dimensión 36 [Nik08].

Sea G un grupo finito y sea $\mathcal{E} := \operatorname{Rep} G$. Sea $\mathcal{D}$ una categoría de fusión trenzada que contiene a $\mathcal{E}$. Su de-equivariantización $\mathcal{C} := \mathcal{D}_G$ es una categoría de fusión trenzada G-cruzada (ver Definición 4.9.15) y $\mathcal{C}^G = \mathcal{D}$.

Proposición 4.6.6. *$\mathcal{C}_e = \mathcal{E}'_G = \mathcal{E}' \boxtimes_{\mathcal{E}} \mathrm{Vect}$ y $\mathcal{E}' = \mathcal{C}_e^G$.*

Demostración. Ver [DGNO10, Proposition 4.56]. □

4.7. Nilpotencia de categorías de fusión

Definición 4.7.1. [ENO11][GN08] Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es *nilpotente* si existen una sucesión de categorías de fusión $\mathcal{C}_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$, y una sucesión $G_1, \dots, G_n$ de grupos finitos tales que $\mathcal{C}_i$ es una G_i-extensión de C_{i-1}, $i = 1, \dots, n$.

Se dice que $\mathcal{C}$ es *cíclicamente nilpotente* si los grupos pueden elegirse cíclicos (o equivalentemente, cíclicos de orden primo).

Observación 4.7.2. Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es nilpotente si toda subcategoría de fusión no trivial de $\mathcal{C}$ admite una graduación no trivial por un grupo finito.

Definición 4.7.3. La *serie central ascendente de la categoría de fusión* $\mathcal{C}$ se define recursivamente, en términos de la subcategoría adjunta, de la siguiente forma:

$$\mathcal{C}^{(0)} = \mathcal{C},\ \mathcal{C}^{(1)} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}, \dots, \mathcal{C}^{(n)} = (C^{(n-1)})_{\mathrm{ad}}, \tag{4.7.1}$$

para todo entero $n \geq 1$.

Ejemplo 4.7.4. [GN08, Example 4.3]. Sea G un grupo finito y sea $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} G$. Sea

$$\{e\} = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \cdots \subseteq Z_n \subseteq \dots$$

la serie central ascendente de G (ver Definición 1.1.2). Por Observación 1.1.1, Z_n se define por $Z_n/Z_{n-1} = Z(G/Z_{n-1})$. Entonces $\mathcal{C}^{(n)} = \operatorname{Rep}(G/Z_n)$ y por lo tanto la Definición 4.7.3 extiende la definición clásica de serie central ascendente.

S. Gelaki y D. Nikshych en [GN08, Definition 4.4] definen la noción de nilpotencia de una categoría de fusión mediante la serie central ascendente. Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es nilpotente si su serie central ascendente converge a la categoría $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita, es decir, si existe un número entero n para el cual $\mathcal{C}^{(n)} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$. El menor n para el cual esto se cumple se denomina la *clase de nilpotencia* de $\mathcal{C}$.

Ejemplo 4.7.5. Veamos algunos ejemplos.

1) Sea G un grupo finito. La categoría $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} G$ es nilpotente si y sólo si el grupo G es nilpotente (ver Definición 1.1.3).

2) Sean G un grupo finito y $\omega : G \times G \times G \to \mathbb{K}^\times$ un 3-cociclo en G. La categoría $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G, \omega)$ es siempre nilpotente. Esto se debe a que $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} = \mathrm{Vect}$, por (2.1). Más aún, las categorías con clase de nilpotencia 1 son exactamente de esta forma, esto es, categorías de fusión punteadas.

Teorema 4.7.6. *[GN08, Theorem 6.10] Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada. Entonces $\mathcal{C}$ es nilpotente si y sólo su centro de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es nilpotente.*

4.8. Resolubilidad de categorías de fusión

Las siguientes definiciones fueron dadas en [ENO11].

Definición 4.8.1. Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es *débilmente de tipo grupo* si es categóricamente Morita equivalente a una categoría de fusión nilpotente.

Definición 4.8.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión. Si $\mathcal{C}$ es categóricamente Morita equivalente a una categoría de fusión cíclicamente nilpotente diremos que $\mathcal{C}$ es *resoluble*.

Equivalentemente, por [ENO11, Proposition 4.4], la categoría de fusión $\mathcal{C}$ es resoluble si existe una sucesión de categorías de fusión $\mathcal{C}_0 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$, donde cada $\mathcal{C}_i$ se obtiene como una G_i-equivariantización o una G_i-extensión de C_{i-1}, con $G_1, \dots, G_n$ grupos cíclicos de orden primo.

Observación 4.8.3. Toda categoría de fusión de tipo grupo es débilmente de tipo grupo (ver Sección 4.4).

Definición 4.8.4. Diremos que una (cuasi)-álgebra de Hopf semisimple H es *débilmente de tipo grupo* o *resoluble*, si la categoría $\operatorname{Rep} H$ es débilmente de tipo grupo o resoluble, respectivamente.

Proposición 4.8.5. *La clase de categorías de fusión débilmente de tipo grupo es cerrada por extensiones y equivariantizaciones, equivalencia Morita, productos tensoriales, centros de Drinfeld, subcategorías y cocientes de categorías.*

Demostración. Ver [ENO11, Proposition 4.1]. □

Observación 4.8.6. Notemos que una categoría $\mathcal{C}$ sea nilpotente no implica que $\mathcal{C}$ sea resoluble.

Ejemplo 4.8.7. La categoría $\mathcal{C}(G, \omega)$ es nilpotente para todo grupo G y 3-cociclo $\omega : G \times G \times G \to \mathbb{K}^{\times}$, mientras que es resoluble si y sólo si G es un grupo resoluble.

Proposición 4.8.8. *(i) La clase de categorías resolubles es cerrada bajo extensiones y equivariantizaciones por grupos resolubles, categorías Morita equivalentes, productos tensoriales, centro, subcategorías y categorías componentes de categorías cocientes.*

(ii) Las categorías $\mathcal{C}(G, \omega)$ y $\operatorname{Rep} G$ son resolubles si y sólo si G es un grupo resoluble.

(iii) Toda categoría de fusión nilpotente trenzada es resoluble.

(iv) Toda categoría de fusión $\mathcal{C} \neq \operatorname{Vect}$ contiene un objeto inversible no trivial.

Demostración. Ver [ENO11, Proposition 4.5]. □

Lema 4.8.9. *Sea G un grupo finito, sea $\mathcal{A}$ una G-extensión de una categoría de fusión $\mathcal{A}_0$, y sea $\mathcal{B}_0$ una categoría de fusión categóricamente Morita equivalente a $\mathcal{A}_0$. Entonces existe una G-extensión $\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}_0$ que es categóricamente Morita equivalente a $\mathcal{A}$.*

Demostración. [ENO11, Lemma 3.4]. Sea A un álgebra en $\mathcal{A}_0$ tal que $\mathcal{B}_0$ es equivalente a la categoría de A-bimódulos en $\mathcal{A}_0$. Sea $\mathcal{B}$ la categoría de A-bimódulos en $\mathcal{A}$ (como $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ se puede ver a A como un álgebra en $\mathcal{A}$). Por lo tanto $\mathcal{B}$ hereda la G-graduación, gracias a que $\mathcal{A}$ está en la componente trivial de la categoría de fusión G-graduada $\mathcal{A}$. Por construcción, $\mathcal{B}$ es categóricamente Morita equivalente a $\mathcal{A}$. □

Observación 4.8.10. Como la dimensiónde Frobenius-Perron de una categoría de fusión es invariante bajo la equivalencia Morita categórica (ver (4.2.5)), se tiene que $\operatorname{FPdim}(\mathcal{A}) \in \mathbb{Z}$ para toda categoría de fusión débilmente de tipo grupo $\mathcal{A}$.

El siguiente teorema fue establecido en [ENO11, Theorem 1.5].

Teorema 4.8.11. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría de fusión débilmente de tipo grupo. Entonces para todo objeto simple X de $\mathcal{A}$ el cociente $\operatorname{FPdim}(\mathcal{A})/\operatorname{FPdim}(X)$ es un entero algebraico.*

Supongamos que el grupo finito G actúa sobre la categoría de fusión $\mathcal{C}$ por autoequivalencias tensoriales. Sea $Y \in \operatorname{Irr}(\mathcal{C})$. El estabilizador de Y es el subgrupo $G_Y = \{g \in G : \rho^g(Y) \cong Y\}$. Sea $\alpha_Y : G_Y \times G_Y \to k^*$ el 2-cociclo definido por la relación

$$\alpha_Y(g,h)^{-1} \operatorname{id}_Y = c^g \rho^g(c^h)(\rho_{2_Y}^{g,h})^{-1}(c^{gh})^{-1} : Y \to Y, \tag{4.8.1}$$

donde, para todo $g \in G_Y$, $c^g : \rho^g(Y) \to Y$ es un isomorfismo fijo (para el significado de $\rho_2^{g,h}$ ver Definición 2.4.14)[BN13, Subsection 2.3].

Entonces los objetos simples de $\mathcal{C}^G$ están parametrizados por pares (Y, U), donde Y recorre las G-órbitas en $\operatorname{Irr}(\mathcal{C})$ y U es una clase de equivalencia de una representación irreducible α_Y-projectiva de G_Y. Usaremos la notación $S_{Y,U}$ para indicar la clase de isomorfismo de los objetos simples correspondientes al par (Y, U). La dimensión de $S_{Y,U}$ está dada por la fórmula

$$\operatorname{FPdim} S_{Y,U} = [G : G_Y] \dim U \operatorname{FPdim} Y. \tag{4.8.2}$$

Lema 4.8.12. *Sea p un número primo y supongamos que el grupo $\mathbb{Z}_p$ actúa sobre una categoría de fusión por autoequivalencias tensoriales. Si además $G(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_p})$ es de orden p y $G(\mathcal{C}) \neq \mathbf{1}$, entonces $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_p}$ tiene un objeto simple de dimensión de Frobenius-Perron p.*

Demostración. Sea Y un objeto invertible de $\mathcal{C}$ y sea U una representación irreducible α_Y-proyectiva del subgrupo $G_Y \subseteq \mathbb{Z}_p$. Como G_Y es cíclico, entonces se tiene que $\alpha_Y = 1$ en $H^2(G_Y, \mathbb{K}^*)$ y $\dim U = 1$. Entonces la dimensión de Frobenius-Perron del objeto simple $S_{Y,U}$ está dada por

$$\operatorname{FPdim} S_{Y,U} = [G : G_Y] \operatorname{FPdim} Y = [G : G_Y].$$

Más aún, si $Y = \mathbf{1}$, entonces $G_Y = \mathbb{Z}_p$. Por lo tanto, si $U_0 = \epsilon, U_1, \dots, U_{p-1}$ son las representaciones no isomorfas de $\mathbb{Z}_p$, obtenemos que $\mathbf{1} = S_{\mathbf{1},U_0}, S_{\mathbf{1},U_1}, \dots, S_{\mathbf{1},U_{p-1}}$ son todos los objetos invertibles no isomorfos de $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}_p}$. Así para todo objeto invertible $Y \neq \mathbf{1}$ de $\mathcal{C}$, tenemos que $[G : G_Y] = p$ y el objeto simple $S_{Y,U}$ tiene dimensión de Frobenius-Perron p, lo que prueba el lema. $\square$

Proposición 4.8.13. *Sea p un número primo. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión resoluble tal que $G(\mathcal{C}) \cong \mathbb{Z}_p$ y $\mathcal{C}$ no tiene objetos simples de dimensión de Frobenius-Perron p. Entonces $\mathcal{C}$ es cíclicamente nilpotente.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} \geq p$. Si $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} = p$, no hay nada que probar. Supongamos entonces que $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} > p$. Como $\mathcal{C}$ es resoluble, se tiene que para algún número primo q, $\mathcal{C}$ debe ser una $\mathbb{Z}_q$-extensión o una $\mathbb{Z}_q$-equivariantización de una categoría de fusión $\mathcal{D}$. Si ocurre la segunda posibilidad, la suposición de que $G(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{Z}_p$ implica que $p = q$. Más aún, como $\mathcal{D}$ es también resoluble, entonces $\mathcal{D}_{\mathrm{pt}} \neq \mathrm{Vect}$. Por el Lema 4.8.12, $\mathcal{C}$ debe tener un objeto simple de dimensión p, lo que contradice la suposición.

Por lo tanto $\mathcal{C}$ debe ser una $\mathbb{Z}_q$-extensión de una subcategoría de fusión $\mathcal{D}$. En particular, $\mathcal{D}$ no tiene objetos simples de dimensión p y como $\mathcal{D}$ es resoluble, $\mathcal{D}_{\mathrm{pt}} \neq \mathrm{Vect}$, de dónde $G(\mathcal{D}) = G(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{Z}_p$. Por inducción, $\mathcal{D}$ y por lo tanto también $\mathcal{C}$, es cíclicamente nilpotente. Esto finaliza la prueba de la proposición. $\square$

Lema 4.8.14. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión y sea G un grupo finito actuando sobre $\mathcal{C}$ por autoequivalencias tensoriales. Entonces el funtor de olvido $U : \mathcal{Z}(\mathcal{C}^G) \to C^G$ induce un homomorfismo de anillos inyectivo $K_0(G) \to Z(K_0(\mathcal{C}^G))$. En particular, el grupo $\widehat{G}$ es isomorfo a un subgrupo del centro de $G(\mathcal{C}^G)$.*

Demostración. Por Proposición 4.9.13 [ENO11, Proposition 2.10], el centro de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ contiene una subcategoría Tannakiana $\mathcal{E} \simeq \operatorname{Rep} G$ tal que $\mathcal{E}$ cae en $\mathcal{C}$ bajo el funtor de olvido $U : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$. Como consecuencia se obtiene el lema. $\square$

4.9. Categorías de fusión trenzadas

Recordemos que una categoría de fusión trenzada es una categoría de fusión $\mathcal{C}$ munida de una trenza, es decir, un isomorfismo natural $c_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$, con $X, Y \in \mathcal{C}$, tal que satisface los axiomas del hexágono. (Ver Definiciones 2.6.1 y 2.6.2)

Proposición 4.9.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión resoluble trenzada e íntegra. Entonces o bien $\mathcal{C}$ es punteada o contiene una subcategoría Tannakiana no trivial.*

Demostración. Ver [Nat14, Proposition 5.2]. □

Definición 4.9.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada, y sean X, Y objetos de $\mathcal{C}$. X e Y se dicen que *se centralizan uno al otro* si

$$c_{Y,X}c_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}\,.$$

Definición 4.9.3. Sea $\mathcal{D}$ una subcategoría de fusión de una categoría de fusión trenzada $\mathcal{C}$. El *centralizador de Müger* de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{C}$ es la subcategoría de fusión plena generada por los objetos $X \in \mathcal{C}$ tal que $c_{Y,X}c_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$, para todo objeto $Y \in \mathcal{D}$ y se denotará por $\mathcal{D}'$. Es decir que $\mathcal{D}'$ es la subcategoría plena generada por los objetos de $\mathcal{C}$ que se centraliza con cada objeto de $\mathcal{D}$.

El centralizador $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ se denomina el *centro de Müger* (o *simétrico*).

Definición 4.9.4. Una categoría de fusión trenzada $\mathcal{C}$ se dice *simétrica* si $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$.

Observación 4.9.5. Si $\mathcal{C}$ es cualquier categoría de fusión trenzada, su centro de Müger $\mathcal{C}'$ es una subcategoría de fusión simétrica de $\mathcal{C}$.

Observación 4.9.6. Toda categoría de fusión simétrica es equivalente, como una categoría de fusión trenzada, a la categoría $\mathrm{Rep}(G, u)$ de representaciones de un grupo finito G sobre súper-espacios vectoriales, donde $u \in G$ es un elemento central de orden 2 que actúa como el operador de paridad [Del02, Corollaire 0.8]. En particular, si $\mathcal{C}$ es simétrica, entonces es equivalente a la categoría de representaciones de un grupo finito G como una categoría de fusión.

Definición 4.9.7. La categoría $\mathcal{C}$ se denomina *no degenerada* (respectivamente, *ligéramente degenerada*) si $\mathcal{C}' \simeq \mathrm{Vect}$ (respectivamente, si $\mathcal{C}' \simeq \mathrm{sVect}$, donde sVect es la categoría de súper-epacios vectoriales).

Lema 4.9.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada. Supongamos que $\mathcal{C}$ no contiene subcategorías de fusión Tannakianas o no degeneradas no triviales. Entonces $\mathcal{C}$ es ligéramente degenerada y ocurre lo siguiente:*

(i) $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}} = \mathcal{C}' \cong \mathrm{sVect}$,

(ii) $G[X] = \mathbf{1}$, *para todo objeto simple* $X \in \mathcal{C}$.

Demostración. Ver [Nat14, Lemma 7.1]. □

Definición 4.9.9. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada y sean $X, Y \in \mathcal{C}$ objetos simples. Se dice que X e Y se *centralizan proyectivamente* uno al otro si

$$c_{Y,X}c_{X,Y} = \lambda \cdot \mathrm{id}_{X\otimes Y}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{K}^\times$. Si X e Y son objetos arbitrarios de $\mathcal{C}$ se dice que ellos se centralizan proyectivamente uno al otro si toda componente de X centraliza proyectivamente toda componente simple de Y.

Se dice que las subcategorías plenas $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{C}$ se centralizan proyectivamente una a la otra si cada objeto de $\mathcal{D}_1$ centraliza proyectivamente a cada objeto de $\mathcal{D}_2$.

Definición 4.9.10. El *centralizador proyectivo* de un objeto $X \in C$ es la subcategoría plena de objetos de $\mathcal{C}$ que se centralizan proyectivamente con X.

El centralizador proyectivo de una subcategoría plena $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ es la subcategoría plena de objetos de $\mathcal{C}$ que se centralizan proyectivamente con cada objeto de $\mathcal{D}$.

Proposición 4.9.11. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada. Para todo par de objetos simples $X, Y \in \mathcal{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) X *centraliza* $Y \otimes Y^*$;

(ii) $X \otimes X^*$ *centraliza* Y;

(iii) X *e* Y *se centralizan proyectivamente uno al otro.*

Demostración. Ver [DGNO10, Proposition 3.22]. □

En las siguientes proposiciones se da una interpretación de extensiones y equivariantizaciones en términos del centro.

Proposición 4.9.12. *Sean G un grupo finito y $\mathcal{C}$ una categoría de fusión.*

(i) *Si* $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ *contiene una subcategoría Tannakiana* $\operatorname{Rep} G$ *que se aplica en* Vect *bajo el funtor de olvido* $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$, *entonces* $\mathcal{C}$ *es una* G*-extensión de alguna categoría de fusión* $\mathcal{D}$.

(ii) Sea $\mathcal{C}$ una G-extesión de $\mathcal{D}$. Entonces $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ contiene una subategoría Tannakiana $\mathcal{E} = \operatorname{Rep} G$ que se aplica en Vect *bajo el funtor de olvido del ítem (i), tal que la de-equivariantización de $\mathcal{E}'$ por $\mathcal{E}$ es equivalente a $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ como categorías tensoriales trenzadas.*

Demostración. Ver [ENO11, Proposition 2.9]. □

Proposición 4.9.13. *Sean G un grupo finito y $\mathcal{C}$ una categoría de fusión.*

(i) Si $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ contiene una subcategoría Tannakiana $\operatorname{Rep} G$ que se incrusta en $\mathcal{C}$ bajo el funtor de olvido $\mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}$ es una G-equivariantización de alguna categoría de fusión $\mathcal{D}$.

(ii) Sea $\mathcal{C}$ una G-equivariantización de $\mathcal{D}$. Entonces $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ contiene una subategoría Tannakiana $\mathcal{E} = \operatorname{Rep} G$, tal que la de-equivariantización de $\mathcal{E}'$ por $\mathcal{E}$ es equivalente a $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ como categorías tensoriales trenzadas.

Demostración. Ver [ENO11, Proposition 2.10]. □

Teorema 4.9.14. *Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada débilmente íntegra. Entonces, para todo objeto simple $X \in \mathcal{C}$, el cociente $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} / \operatorname{FPdim} X$ es la raíz cuadrada de un entero.

(ii) Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada no degenerada débilmente íntegra. Entonces, para todo objeto simple $X \in \mathcal{C}$, el cociente $\operatorname{FPdim} \mathcal{C} / \operatorname{FPdim} X^2$ es un entero.

Demostración. Ver [ENO11, Theorem 2.11.] □

Definición 4.9.15. Sea G un grupo finito. Una *categoría de fusión trenzada G-cruzada* es una categoría de fusión $\mathcal{D}$ munida con una G-graduación $\mathcal{D} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{D}_g$ y una acción de G por autoequivalencias tensoriales $\rho : \underline{G} \to \underline{\operatorname{Aut}}_{\otimes} \mathcal{D}$, tal que $\rho^g(\mathcal{D}_h) \subseteq \mathcal{D}_{ghg^{-1}}$, para todo $g, h \in G$, y una G-trenza

$$c : X \otimes Y \to \rho^g(Y) \otimes X,\ g \in G,\ X \in \mathcal{D}_g,\ Y \in \mathcal{D},$$

sujetos a condiciones de compatibilidad. La G-trenza c se restringe a una trenza en la componente trivial $\mathcal{D}_e$.

Observación 4.9.16. Si $\mathcal{D}$ es una categoría de fusión trenzada G-cruzada, entonces la equivariantización $\mathcal{D}^G$ bajo la acción de G es una categoría de fusión trenzada que contiene a $\operatorname{Rep} G$ como una sucategoría Tannakiana. Más aún, el grupo G actúa por restricción sobre $\mathcal{D}_e$ por autoequivalencias tensoriales trenzadas. La equivariantización $\mathcal{D}_e^G$ coincide con el centralizador $\mathcal{E}'$ de la subcategoría Tannakiana $\mathcal{E}$ en $\mathcal{D}^G$. Ver [Müg04].

Sea $\mathcal{E}$ una subcategoría Tannakiana de una categoría de fusión trenzada $\mathcal{C}$ y sea G un grupo finito tal que $\mathcal{E} \simeq \operatorname{Rep} G$ como categorías simétricas. Además, sea $A \in \mathcal{C}$ el álgebra correspondiente al álgebra de funciones $\mathbb{K}^G \in \operatorname{Rep} G$ sobre G con la acción regular. La de-equivariantización $\mathcal{C}_G$ de $\mathcal{C}$ con respecto a $\operatorname{Rep} G$ es la categoría de fusión $\mathcal{C}_A$ de A-módulos en $\mathcal{C}$. Es decir, una categoría de fusión trenzada G-cruzada tal que $\mathcal{C} \simeq (\mathcal{C}_G)^G$. La componente trivial de $\mathcal{C}_G$ con respecto a la G-graduación asociada, denotada $\mathcal{C}_G^0$, coincide con la de-equivariantización $\mathcal{E}'_G$ del centralizador de $\mathcal{E}$ por el grupo G.

Observación 4.9.17. Recordemos de [Nat14, Proposition 4.1] que si $\mathcal{E} \cong \operatorname{Rep} G \subseteq \mathcal{C}$ es una subcategoría Tannakiana, entonces $\mathcal{C}$ es débilmente íntegra (respectivamente, débilmente de tipo grupo) si y sólo si $\mathcal{C}_G^0$ es débilmente íntegra (respectivamente, débilmente de tipo grupo). Además, $\mathcal{C}$ es resoluble si y sólo si $\mathcal{C}_G^0$ es resoluble y G es soluble.

Análogamente, si $\mathcal{C}$ es íntegra entonces también lo es $\mathcal{C}_G^0$ pero, la inversa no es cierta en general; algunos ejemplos pueden encontrarse entre las categorías de fusión no degeneradas $\mathcal{E}(q, \pm)$ construídas en [GNN09, Section 5].

Supongamos que el soporte H de $\mathcal{C}_G$ (el cual es un subgrupo normal de G que coincide con G si $\mathcal{C}$ es no-degenerada) no tiene elementos no triviales abelianos 2-grupo cociente, entonces la suposición que $\mathcal{C}_G^0$ es íntegra implica que $\mathcal{C}$ es íntegra también.
En efecto, supongamos que $\mathcal{C}_G^0$ es íntegra, a fin de que $\mathcal{C}_G$ sea débilmente íntegra. Se sigue de [GN08, Theorem 3.10] que existe una subcategoría de fusión íntegra maximal $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{C}_G$ es una E-extensión de $\mathcal{B}$, donde E es un 2-grupo abeliano elemental. En particular, $\mathcal{C}_G^0 \subseteq \mathcal{B}$. Como $\mathcal{C}_G$ es una H-extensión de $\mathcal{C}_G^0$, entonces E es isomorfa al cociente de H. Por suposición, E debe ser trivial y así $\mathcal{C}_G$, y por lo tanto también $\mathcal{C}$, son íntegras, como se afirmó.

Lema 4.9.18. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada. Entonces la subcategoría $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} \cap \mathcal{C}_{\mathrm{pt}}$ es simétrica.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\mathcal{C}$ es no degenerada. Entonces $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} = \mathcal{C}'_{\mathrm{pt}}$, por [DGNO10, Corollary 3.27]. Además $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} \cap \mathcal{C}_{\mathrm{pt}} = \mathcal{C}'_{\mathrm{pt}} \cap \mathcal{C}_{\mathrm{pt}}$ es una subcategoría simétrica.

Luego, para una categoría de fusión trenzada arbitraria $\mathcal{C}$, sea $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ el centro de Drinfeld de $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es no degenerada, entonces la categoría $\mathcal{Z}(\mathcal{C})_{\mathrm{ad}} \cap \mathcal{Z}(\mathcal{C})_{\mathrm{pt}}$ es simétrica. La trenza de $\mathcal{C}$ induce una incrustación canónica de categorías de fusión trenzada $\mathcal{C} \to \mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Por lo tanto podemos identificar $\mathcal{C}$ con una subcategoría de fusión de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Observemos que $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{C})_{\mathrm{ad}}$ y $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{C})_{\mathrm{pt}}$. Así $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} \cap \mathcal{C}_{\mathrm{pt}} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{C})_{\mathrm{ad}} \cap \mathcal{Z}(\mathcal{C})_{\mathrm{pt}}$, y por lo tanto $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} \cap \mathcal{C}_{\mathrm{pt}}$ es simétrica, como se afirmó. □

Lema 4.9.19. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada tal que $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} = \mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}' = \mathcal{C}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ una subcategoría de fusión. Por [DGNO10, Proposition 3.25] tenemos $(\mathcal{B}_{\mathrm{ad}})' = (\mathcal{B}')^{\mathrm{co}} = \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ denota el centralizador proyectivo de $\mathcal{B}$. Tomando $\mathcal{B} = \mathcal{C}_{\mathrm{pt}}$ obtenemos que $\mathcal{C} = (\mathcal{B}_{\mathrm{ad}})'$ es igual al centralizador proyectivo de $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}$. Por [DGNO10, Lemma 3.15], el centralizador proyectivo de una subcategoría de fusión $\mathcal{B}$ es una extensión graduada del centralizador $\mathcal{B}'$. Como $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$, se tiene que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{pt}}'$, y el lema queda probado. □

4.10. Subcategorías de fusión del doble cuántico de un grupo finito

Sea G un grupo finito. Para todo $g \in G$, sea g^G la clase de conjugación de G que contiene a g. Sea R un conjunto completo de representantes de clases de conjugación de G. Sea $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} D(G)$ la categoría de representaciones del doble de Drinfeld del grupo G.

El conjunto de clases de isomorfismos de objetos simples de $\mathcal{C}$ se identifica con el siguiente conjunto

$$\Gamma := \{(a, \chi) | a \in R \text{ y } \chi \text{ es un caracter irreducible de } C_G(a)\}. \tag{4.10.1}$$

La dimensión categórica de un objeto simple (a, χ) es

$$d(a, \chi) = |g^G| \deg \chi = \frac{|G|}{|C_G(a)|} \deg \chi. \tag{4.10.2}$$

Observación 4.10.1. $\mathcal{C}$ es una categoría modular (ver Definición 6.2.7). Su S-matriz S y su estructura ribbon están dadas por las siguientes fórmulas:

$$S((a, \chi), (b, \chi')) = \frac{|G|}{|C_G(a)||C_G(b)|} \sum_{g \in G(a,b)} \overline{\chi}(gbg^{-1}) \overline{\chi'}(g^{-1}ag),$$

$$\theta(a,\chi) = \frac{\chi(a)}{\deg \chi},$$

para todo $(a,\chi),(b,\chi') \in \Gamma$, donde $G(a,b) = \{g \in G | agbg^{-1} = gbg^{-1}a\}$ y $\overline{\chi}$ denota el caracter conjugado de χ. [NNW09].

Capítulo 5

Reglas de Fusión y Resolubilidad de una Categoría de fusión

En este capítulo abordamos la cuestión de si la condición de que una categoría de fusión sea resoluble está determianda por sus reglas de fusión. Probamos que la respuesta es afirmativa para algunas familias de ejemplos no resolubles que surgen de representaciones de álgebras de Hopf semisimples asociadas a factorizaciones exactas de los grupos simétrico y alternante. Estos resultados se encuentran en el trabajo [EN16].

5.1. Equivalencia de Grothendieck entre categorías de fusión

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías de fusión. Recordemos que una *equivalencia de Grothendieck* entre $\mathcal{C}$ y $\tilde{\mathcal{C}}$ es una biyección $f : \operatorname{Irr}\mathcal{C} \longrightarrow \operatorname{Irr}\tilde{\mathcal{C}}$ tal que

$$f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \text{ y } N_{f(X),f(Y)}^{f(Z)} = N_{X,Y}^{Z}, \tag{5.1.1}$$

para todo $X, Y, Z \in \operatorname{Irr}\mathcal{C}$. Diremos que $\mathcal{C}$ y $\tilde{\mathcal{C}}$ son *Grothendieck equivalentes* si existe una equivalencia de Grothendieck entre ellas.

Observación 5.1.1. Sea $f : \operatorname{Irr}\mathcal{C} \longrightarrow \operatorname{Irr}\tilde{\mathcal{C}}$ una equivalencia de Grothendieck. Entonces f se extiende canónicamente a un isomorfismo de anillos $f : K_0(\mathcal{C}) \longrightarrow K_0(\tilde{\mathcal{C}})$.

En particular, f induce una biyección entre el reticulado de subcategorías de fusión de $\mathcal{C}$ y $\tilde{\mathcal{C}}$. Si $\mathcal{D}$ es una subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$, denotaremos por $f(\mathcal{D})$ la correspondiente subcategoría de fusión de $\tilde{\mathcal{C}}$, es decir, $f(\mathcal{D})$ es la subcategoría de fusión cuyos objetos simples son $f(X)$, con $X \in \operatorname{Irr}\mathcal{D}$. Notemos que f se restringe a una equivalencia de Grothendieck $f : \operatorname{Irr}\mathcal{D} \longrightarrow \operatorname{Irr} f(\mathcal{D})$.

Proposición 5.1.2. *Sean $\mathcal{C}$ y $\tilde{\mathcal{C}}$ dos categorías de fusión. Sea además $f : \operatorname{Irr}\mathcal{C} \to \operatorname{Irr}(\tilde{\mathcal{C}})$ una equivalencia de Grothendieck. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) Si $X \in K_0(\mathcal{C})$, entonces $\operatorname{FPdim}(f(X)) = \operatorname{FPdim}(X)$. Así, si $\mathcal{D}$ es una subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$, entonces $\operatorname{FPdim}(f(\mathcal{D})) = \operatorname{FPdim}(\mathcal{D})$.

(ii) $X \in \operatorname{Irr}\mathcal{C}$ es inversible si y sólo si $f(X) \in \operatorname{Irr}\tilde{\mathcal{C}}$ es inversible.

(iii) Si $X \in \operatorname{Irr}\mathcal{C}$, entonces $f(X^*) = f(X)^*$.

(iv) $f(\mathcal{C}^{(n)}) = \tilde{\mathcal{C}}^{(n)}$, para todo $n \geq 0$. En particular, $\mathcal{C}$ es nilpotente si y sólo si $\tilde{\mathcal{C}}$ es nilpotente.

(v) f induce un isomorfismo de grupos $f : U(\mathcal{C}) \to U(\tilde{\mathcal{C}})$ tal que $f(\mathcal{C}_g) = \tilde{\mathcal{C}}_{f(g)}$.

Demostración. (i) Por Observación 5.1.1 sabemos que f se extiende a un isomorfismo de anillos

$$f : K_0(\mathcal{C}) \to K_0(\tilde{\mathcal{C}}).$$

Por el Teorema 4.1.4, $\operatorname{FPdim} : K_0(\mathcal{C}) \to \mathbb{R}$ es el único homomorfismo de anillos tal que $\operatorname{FPdim}(X) > 0$ para todo $0 \neq X \in \mathcal{C}$, entonces $\operatorname{FPdim}(f(X)) = \operatorname{FPdim}(X)$, para todo $X \in \mathcal{C}$. Luego por definición de $\operatorname{FPdim}(f(\mathcal{D}))$ se tiene $\operatorname{FPdim}(f(\mathcal{D})) = \operatorname{FPdim}(\mathcal{D})$.

(ii) Esto sigue de (i), ya que los objetos inversibles de una categoría de fusión son precisamente los objetos con dimensión Frobenius-Perron 1 y por lo tanto $X \in \operatorname{Irr}\mathcal{C}$ es inversible si y sólo si $\operatorname{FPdim} X = 1$, lo que ocurre si y sólo $\operatorname{FPdim} f(X) = 1$, o lo que es lo mismo $f(X)$ es inversible.

(iii) Como $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, tenemos que

$$N^{\mathbf{1}}_{f(X),f(X^*)} = N^{\mathbf{1}}_{X,X^*} = 1.$$

Por lo tanto $f(X^*) = f(X)^*$.

(iv) Es consecuencia de (iii) y del hecho que f preserva las reglas de fusión que

$$f(\mathcal{C}_{\text{ad}}) = \tilde{\mathcal{C}}_{\text{ad}}.$$

Entonces f induce por restricción una equivalencia de Grothendieck $\operatorname{Irr} \mathcal{C}_{\mathrm{ad}} \to \operatorname{Irr} \tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}$. Un agumento inductivo implica que $f(\mathcal{C}^{(n)}) = \tilde{\mathcal{C}}^{(n)}$, para todo $n \geq 0$.

(v) Por definición, $U(\mathcal{C}) = U(K_0(\mathcal{C}))$ (ver Sección 4.5) y $K_0(\mathcal{C})$ se descompone en suma directa de $K_0(\mathcal{C})_{\mathrm{ad}}$-bimódulos indescomponibles

$$K_0(\mathcal{C}) = \bigoplus_{g \in U(\mathcal{C})} K_0(\mathcal{C})_g,$$

con $K_0(\mathcal{C})_e = K_0(\mathcal{C})_{\mathrm{ad}}$. Esta descomposición es única salvo permutación de $U(\mathcal{C})$. Por la observación 5.1.1, f se extiende a un isomorfismo de anillos $f : K_0(\mathcal{C}) \to K_0(\tilde{\mathcal{C}})$ y por (iv) f se restringe a un isomorfismo de anillos

$$K_0(\mathcal{C})_{\mathrm{ad}} = K_0(\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}) \cong K_0(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}) = K_0(\tilde{\mathcal{C}})_{\mathrm{ad}}.$$

Por lo tanto, para todo $g \in U(\mathcal{C})$, $f(K_0(\mathcal{C})_g) = K_0(\tilde{\mathcal{C}})_{\tilde{g}}$, para un único $\tilde{g} \in U(\tilde{\mathcal{C}})$. Tomando $f(g) = \tilde{g}$, obtenemos un isomorfismo de grupos $f : U(\mathcal{C}) \to U(\tilde{\mathcal{C}})$ tal que

$$f(K_0(\mathcal{C}_g)) = K_0(\tilde{\mathcal{C}}_{f(g)}).$$

Esto implica (v). $\square$

Observación 5.1.3. Sea G un grupo finito. Observemos que cualquier G-graduación de una categoría de fusión $\mathcal{C}$ con componente trivial $\mathcal{D}$ está unívocamente determinada por una G-graduación sobre el anillo de Grothendieck $K_0(\mathcal{C})$ con componente trivial $K_0(\mathcal{D})$. En particular, si $\mathcal{C}$ y $\tilde{\mathcal{C}}$ son Grothendieck equivalentes, entonces $\mathcal{C}$ es G-graduada con componente trivial $\mathcal{D}$ si y sólo si $\tilde{\mathcal{C}}$ es G-graduada con componente trivial $\tilde{\mathcal{D}}$, tal que $\tilde{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{D}$ son Grothendieck equivalentes.

Nuestro primer teorema se refiere a las categorías de fusión con reglas de fusión dihedrales.

Teorema 5.1.4. *Sea n un número natural y sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión. Supóngase que $\mathcal{C}$ es Grothendieck equivalente a la categoría $\operatorname{Rep} D_n$, donde D_n es el grupo dihedral de orden $2n$. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble.*

Demostración. Se sigue del Teorema 4.4.4 y la Proposición 5.1.2 que una categoría de fusión Grothendieck equivalente a la categoría de representationes de un grupo dihedral es de tipo grupo. Entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo, es decir, es categóricamente Morita equivalente a una categoría de fusión punteada $\mathcal{C}(\Gamma, \omega)$, donde Γ es un grupo y ω es un 3-cociclo sobre Γ.

Supongamos en primer lugar que n es impar. Entonces el orden de Γ es igual a $2n$ y, como n es impar, Γ es soluble[1]. Por lo tanto $\mathcal{C}$ es también resoluble.

Si n es par, entonces el centro de D_n es de orden 2 y $D_n/Z(D_n) \cong D_{n/2}$. Por lo tanto, la categoría $\operatorname{Rep} D_n$ es una $\mathbb{Z}_2$-extensión de $\operatorname{Rep} D_{n/2}$; ver Ejemplo 4.0.7 1). Como $\mathcal{C}$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} D_n$, es una $\mathbb{Z}_2$-extensión de una subcategoría de fusion $\mathcal{D}_1$, donde $\mathcal{D}_1$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} D_{n/2}$. Continuando este proceso, obtenemos que la categoría $\mathcal{C}$ se obtiene por una sucesión de $\mathbb{Z}_2$-extensiones de una subcategoría de fusion $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D}$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} D_m$, con m un número natural impar. Por lo anterior, $\mathcal{D}$ es resoluble y por lo tanto también lo es $\mathcal{C}$. Esto finaliza la prueba del teorema. $\square$

La siguiente consecuencia de la Proposición 4.8.13 brinda algunas restricciones que garantiza que la resolubilidad de una categoría de fusion es un invariante de Grothendieck.

Proposición 5.1.5. *Sea p un número primo. Supóngase que $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión resoluble tal que $G(\mathcal{C}) \cong \mathbb{Z}_p$ y $\mathcal{C}$ no tiene objetos simples de dimensión Frobenius-Perron p. Si $\mathcal{C}$ es Grothendieck equivalente a una categoría de fusion $\tilde{\mathcal{C}}$, entonces $\tilde{\mathcal{C}}$ es resoluble.*

Demostración. Por la Proposición 4.8.13, $\mathcal{C}$ es cíclicamente nilpotente. Por lo tanto $\tilde{\mathcal{C}}$ es cíclicamente nilpotente, y por consiguiente resoluble. $\square$

Observación 5.1.6. Para todo $n \geq 2$, el grupo alternante $\mathbb{A}_n$ no tiene representaciones irreducibles de grado 2.[2] Además, si $n \geq 5$ ($\operatorname{Rep} \mathbb{S}_4$ es de tipo $(1, 2; 2, 1; 3, 2)$), el grupo simétrico $\mathbb{S}_n$ tampoco tiene representaciones irredubibles de grado 2. En efecto, si V fuera una tal representación, entonces la restricción $V|_{\mathbb{A}_n}$ no sería irreducible. Así, como $\mathbb{A}_n$ no tiene representaciones no triviales de dimensión uno (ya que $n \geq 5$), entonces $V|_{\mathbb{A}_n}$ sería trivial. Esto es imposible, porque el núcleo del funtor restricción $\operatorname{Rep} \mathbb{S}_n \to \operatorname{Rep} \mathbb{A}_n$ es la subcategoría punteada $\operatorname{Rep} \mathbb{Z}_2 \subseteq \operatorname{Rep} \mathbb{S}_n$.

[1] Úsese el Teorema de Feit-Thomson y el hecho de que los elementos de orden impar de Γ forman un subgrupo de Γ.

[2] Esto puede verse, por ejemplo, como una consecuencia del teorema de Nichols-Richmond [NR96, Theorem 11].

Corolario 5.1.7. *Sea $n \geq 5$ un número natural y sea $\mathcal{C}$ una categoría fusion. Supóngase que $\mathcal{C}$ es Grothendieck equivalente a* $\operatorname{Rep} \mathbb{S}_n$*. Entonces $\mathcal{C}$ no es resoluble.*

Demostración. La categoría $\operatorname{Rep} \mathbb{S}_n$ no es resoluble. Por otro lado, el grupo $\mathbb{S}_n$ tiene dos representaciones no equivalentes de grado uno y no tiene representaciones irreducibles de grado dos, en vista de la Observación 5.1.6. Por lo tanto $G(\mathcal{C}) \cong \mathbb{Z}_2$ y $\mathcal{C}$ no tiene objetos simples de dimensión Frobenius-Perron 2. El resultado se obtiene entonces, como consecuencia de la Proposición 5.1.5. $\square$

Observación 5.1.8. Sea G un grupo finito simple no abeliano. Si $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} G$, entonces $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}} = \operatorname{Vect}$ y por lo tanto $\mathcal{C}$ no es resoluble.

5.2. Ejemplos de reglas de fusión no resolubles

5.2.1. Extensiones abelianas

Consideremos una sucesión exacta abeliana de álgebras de Hopf

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^{\Gamma} \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\pi} \mathbb{K}F \longrightarrow \mathbb{K}, \tag{5.2.1}$$

donde Γ y F son grupos finitos. Entonces (5.2.1) da lugar a acciones por permutaciones

$$\Gamma \xleftarrow{\triangleleft} \Gamma \times F \xrightarrow{\triangleright} F$$

tal que (Γ, F) es un matched pair de grupos. Más aún, $H \cong \mathbb{K}^{\Gamma}{}^{\tau}\#_{\sigma}\mathbb{K}F$ es un producto bicruzado con respecto a 2-cociclos invertibles normalizados $\sigma : F \times F \to \mathbb{K}^{\Gamma}$, $\tau : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{K}^{F}$, satisfaciendo condiciones de compatibilidad adecuadas. Ver Sección 3.2.

La multiplicación y la comultiplicación de $\mathbb{K}^{\Gamma}{}^{\tau}\#_{\sigma}\mathbb{K}F$ están determinadas en las bases $\{e_s\#x / s \in \Gamma, x \in F\}$, por las fórmulas

$$(e_s\#x) \otimes (e_t\#y) = \delta_{t, s\triangleleft x}\, \sigma_s(x,y)\, e_s\#xy, \tag{5.2.2}$$

$$\Delta(e_s\#x) = \sum_{gh=s} \tau_x(g,h)\, e_g\#(h \triangleright x) \otimes e_h\#x, \tag{5.2.3}$$

para todo $s, t \in \Gamma$, $x, y \in F$, donde $\sigma_s(x,y) = \sigma(x,y)(s)$ y $\tau_x(s,t) = \tau(s,t)(x)$. Se dice que la sucesión exacta (5.2.1) se *parte* si σ y τ son los 2-cociclos triviales.

Para todo $s \in \Gamma$, la restricción de la aplicación $\sigma_s : F \times F \to \mathbb{K}^\times$ al subgrupo estabilizador $F_s = F \cap sFs^{-1}$ es un 2-cociclo sobre F_s.

Las representaciones irreducibles de $H \cong \mathbb{K}^\Gamma{}^\tau \#_\sigma \mathbb{K}F$ están clasificadas por pares (s, U_s), donde s es un representante de las órbitas de la acción de F en Γ y U_s es una representación irreducible del álgebra de grupo torcida $\mathbb{K}_{\sigma_s} F_s$, es decir, una representación irreducible proyectiva F_s con cociclo σ_s. Dado un par (s, U_s), la representación irreducible correspondiente está dada por

$$W_{(s,U_s)} = \mathrm{Ind}^H_{\mathbb{K}^\Gamma \otimes \mathbb{K}F_s} s \otimes U_s. \tag{5.2.4}$$

Observemos que $\dim W_{(s,U_s)} = [F : F_s] \dim U_s$.

Observación 5.2.1. Recordemos que todo matched pair (Γ, F) da lugar a una estructura de grupo, denotado $F \bowtie \Gamma$, con el producto $F \times \Gamma$ en la forma

$$(x, s)(y, t) = (x(s \triangleright y), (s \triangleleft y)t),$$

$x, y \in F$, $s, t \in \Gamma$, donde $\Gamma \xleftarrow{\triangleleft} \Gamma \times F \xrightarrow{\triangleright} F$ son las acciones compatibles asociadas.

El grupo $F \bowtie \Gamma$ tiene una factorización exacta canónica en sus subgrupos $F = F \times \{e\}$ y $\Gamma = \{e\} \times \Gamma$; es decir, $F \bowtie \Gamma = F\Gamma$ y $F \cap \Gamma = \{e\}$.

Recíprocamente, todo grupo finito G munido de una factorización exacta $G = F\Gamma$ de sus subgrupos F y Γ da lugar a acciones canónicas por permutaciones $\Gamma \xleftarrow{\triangleleft} \Gamma \times F \xrightarrow{\triangleright} F$ haciendo de (Γ, F) un matched pair de grupos.

Supongamos que $H \cong \mathbb{K}^\Gamma{}^\tau \#_\sigma \mathbb{K}F$ es una extensión abeliana de $\mathbb{K}^\Gamma$ por $\mathbb{K}F$. Se sigue del Teorema 4.4.7 que la categoría $\mathrm{Rep}\, H$ es categóricamente Morita equivalente a la categoría de fusión punteada $\mathcal{C}(F \bowtie \Gamma, \omega)$, donde ω es un 3-cociclo sobre $F \bowtie \Gamma$ que surge del par $[\sigma, \tau]$ en una sucesión exacta debido a G. I. Kac. En particular, existen equivalencias de categorías de fusión trenzadas

$$\mathcal{Z}(\mathrm{Rep}\, H) \cong \mathrm{Rep}\, D(H) \cong \mathrm{Rep}\, D^\omega(F \bowtie \Gamma),$$

donde $D^\omega(F \bowtie \Gamma)$ es el doble de Drinfeld torcido de $F \bowtie \Gamma$. Notemos que $\mathrm{Rep}\, H$ es resoluble si y sólo si el grupo $F \bowtie \Gamma$ es resoluble.

Ejemplo 5.2.2. Sea G un grupo finito. Entonces el doble de Drinfeld $D(G)$ encaja en una sucesión exacta abeliana cocentral que se parte

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^G \longrightarrow D(G) \longrightarrow \mathbb{K}G \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Esta sucesión exacta está asociada a la acción adjunta $\triangleleft : G \times G \to G$, $h \triangleleft g = g^{-1}hg$, y a la acción trivial $\triangleright : G \times G \to G$.

El siguiente lema describe el grupo de objetos invertibles de la categoría $\operatorname{Rep} H$, cuando H es una extensión abeliana.

Lema 5.2.3. *Supongamos que H encaja en una sucesión exacta 5.2.1. Entonces existe una sucesión*

$$1 \longrightarrow \widehat{F} \xrightarrow{\pi^*} G(\operatorname{Rep} H) \xrightarrow{i^*} \Gamma_0 \longrightarrow 1,$$

donde $\widehat{F}$ denota el grupo de caracteres de dimensión uno de F y $\Gamma_0 = \{s \in \Gamma^F : [\sigma_s] = 1$ en $H^2(\Gamma, (\mathbb{K}^F)^\times)\}$.

Demostración. El grupo $G(\operatorname{Rep} H)$ puede identificarse con el grupo $G(H^*)$ de elementos de tipo grupo en el álgebra de Hopf dual H^*. Además, H^* encaja en una extensión abeliana

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^F \xrightarrow{i^*} H^* \xrightarrow{\pi^*} \mathbb{K}\Gamma \longrightarrow \mathbb{K}. \tag{5.2.5}$$

Por el Lema 3.2.4 esta sucesión induce por restricción una sucesión exacta de grupos

$$1 \to \widehat{F} \to G(H^*) \to \Gamma_0 \to 1,$$

con lo que se demuestra el lema. □

Observación 5.2.4. Manteniendo la notación del Lemma 5.2.3. Notemos que la sucesión exacta dual (5.2.5) está asociada a las acciones

$$F \xleftarrow{\triangleleft'} F \times \Gamma \xrightarrow{\triangleright'} \Gamma$$

definidas de la forma $x \triangleleft' s = (s^{-1} \triangleright x^{-1})^{-1}$ y $x \triangleright' s = (s^{-1} \triangleleft x^{-1})^{-1}$, para todo $x \in F$, $s \in \Gamma$ [Mas99, Exercise 5.5].

Por lo tanto la sucesión exacta del Lema 5.2.3 induce la transpuesta de la acción $\triangleleft'$ de Γ_0 sobre el grupo abeliano $\widehat{F}$.

Claramente, (5.2.5) se parte si y sólo si (5.2.1) se parte y, si esto ocurre, la sucesión exacta de grupos del Lema 5.2.3 también se parte.

Por consiguiente, en el caso donde H es una extensión abeliana que se parte, el grupo $G(\operatorname{Rep} H)$ es isomorfo al producto semidirecto $\widehat{F} \rtimes \Gamma_0$ con respecto a la acción $\triangleleft'$ de Γ_0 sobre $\widehat{F}$.

Corolario 5.2.5. *Sea G un grupo finito. Entonces el grupo de objetos inversibles de* $\operatorname{Rep} D(G)$ *es isomorfo al producto directo* $G/[G,G] \times Z(G)$.

Demostración. Esto es una consecuencia del Lema 5.2.3, en vista del Ejemplo 5.2.2 y la Observación 5.2.4. En efecto, $\widehat{G} \cong G/[G,G]$ y las acciones $\triangleright' : G \times G \to G$ y $\triangleleft' : G \times G \to G$ en la Observación 5.2.4 están dadas en este caso por $h \triangleright' g = hgh^{-1}$ y $g \triangleleft' h = g$, para todo $g, h \in G$. Entonces

$$G_0 = \{g \in G | h \triangleright' g = g, \forall h \in G\} = Z(G).$$

El Corolario sigue del hecho que la acción $\triangleleft'$ es la trivial. □

5.2.2. Ejemplos asociados al grupo simétrico

Sea $n \geq 2$ un número natural. El grupo simétrico $\mathbb{S}_n$ tiene una factorización exacta $\mathbb{S}_n = \langle z \rangle \Gamma$, donde $\Gamma = \{\sigma \in \mathbb{S}_n : \sigma(n) = n\} \cong \mathbb{S}_{n-1}$ y $z = (12 \dots n)$, por lo que $\langle z \rangle \cong C_n$. Esta factorización exacta induce acciones mutuas por permutaciones

$$\mathbb{S}_{n-1} \xleftarrow{\triangleleft} \mathbb{S}_{n-1} \times C_n \xrightarrow{\triangleright} C_n$$

que convierte a $(\mathbb{S}_{n-1}, C_n)$ en un matched pair de grupos. Las acciones $\triangleleft, \triangleright$ están determinadas por las relaciones

$$\sigma c = (\sigma \triangleright c)(\sigma \triangleleft c), \tag{5.2.6}$$

para todo $\sigma \in \Gamma$, $c \in \langle z \rangle$.

Supongamos que n es impar, entonces $\langle z \rangle \subseteq \mathbb{A}_n$. Las relaciones (5.2.6) implican que el subgrupo $\Gamma_+ = \Gamma \cap \mathbb{A}_n \cong \mathbb{A}_{n-1}$ es estable bajo la acción $\triangleleft$ de $\langle z \rangle$. Por lo tanto las acciones $\triangleleft, \triangleright$ inducen por restricciones un matched pair $(\mathbb{A}_{n-1}, C_n)$.

Observación 5.2.6. Sea $\sigma \in \Gamma$. Se sigue de (5.2.6) que $\sigma z = z^r(\sigma \triangleleft z)$, para algún $0 \leq r \leq n-1$. Como $\sigma \triangleleft z \in \Gamma$ entonces $(\sigma \triangleleft z)(n) = n$, lo que implica que $r = b(n)$, donde $b = \sigma z$.

Supongamos que $n \geq 4$ es par y $\sigma \in \Gamma \cap \mathbb{A}_n$. Como z es una permutación impar y $\sigma \triangleleft z = z^{-r}\sigma z$, entonces $\sigma \triangleleft z$ es par si y sólo si r es impar. Tomando $\sigma = (12 \dots (n-1)) \in \Gamma \cap \mathbb{A}_n$, obtenemos que $r = b(n) = \sigma z(n) = 2$; por lo que $\sigma \triangleleft z$ es una permutación impar. Esto muestra que el subgrupo $\Gamma_+ = \Gamma \cap \mathbb{A}_n \cong \mathbb{A}_{n-1}$ en este caso no es estable bajo la acción $\triangleleft$ de $\langle z \rangle$.

Consideremos las álgebras de Hopf asociadas $J_n = \mathbb{K}^{\mathbb{S}_{n-1}} \# \mathbb{K}C_n$ y $K_n = \mathbb{K}^{\mathbb{A}_{n-1}} \# \mathbb{K}C_n$.

Las categorías $\operatorname{Rep} J_n$, $\operatorname{Rep} K_n$ son categóricamente Morita equivalentes a las categorias $\operatorname{Rep} \mathbb{S}_n$ y $\operatorname{Rep} \mathbb{A}_n$, respectivamente; ver Observación 5.2.1. En particular, $\operatorname{Rep} J_n$ y $\operatorname{Rep} K_n$ no son resolubles, para $n \geq 5$.

Observemos que J_n^* es una extensión abeliana que se parte de $\mathbb{K}^{C_n}$ por $\mathbb{K}\mathbb{S}_{n-1}$ asociada a las acciones $\triangleleft'$ y $\triangleright'$ en la Observación 5.2.4.

Observación 5.2.7. Supongamos $n \geq 5$. Se sigue del Teorema 3.3.2, que las álgebras de Hopf J_n, K_n, J_n^*, K_n^* no admiten estructuras cuasitriangular. En particular, las categorías de fusión $\operatorname{Rep} J_n$, $\operatorname{Rep} K_n$, $\operatorname{Rep} J_n^*$ y $\operatorname{Rep} K_n^*$ no admiten trenzas.

Además, existen equivalencias de categorías de fusión trenzadas

$$\operatorname{Rep} D(J_n) \cong \operatorname{Rep} D(\mathbb{S}_n), \quad \operatorname{Rep} D(K_n) \cong \operatorname{Rep} D(\mathbb{A}_n). \tag{5.2.7}$$

Se sigue del Corolario 5.2.5 que existen isomorfismos de grupo $G(D(\mathbb{S}_n)^*) \cong \mathbb{S}_n/[\mathbb{S}_n, \mathbb{S}_n] \times Z(\mathbb{S}_n) \cong \mathbb{Z}_2$, para todo $n \geq 3$, y similarmente, $G(D(\mathbb{A}_n)^*) = 1$, para todo $n \geq 5$.

Lema 5.2.8. *La subcategoría punteada* $\operatorname{Rep} D(\mathbb{S}_n)_{\mathrm{pt}} \cong \operatorname{Rep} \mathbb{Z}_2$ *es una subcategoría Tannakiana de* $\operatorname{Rep} D(\mathbb{S}_n)$.

Demostración. Se sigue de la descripción de las representaciones irreducibles en (5.2.4), que las representaciones de dimensión uno de $D(\mathbb{S}_n)$ están parametrizadas por pares (s, U_s), donde $s \in \mathbb{S}_n$ es un elemento central y U_s es una representación de dimensión uno de $\mathbb{S}_n$. Como $Z(\mathbb{S}_n) = \{e\}$ y $\mathbb{S}_n$ tiene dos representaciones no isomorfas de dimensión uno, la representación trivial y la representación signo Sg, entonces $\operatorname{Rep} D(\mathbb{S}_n)_{\mathrm{pt}} \cong \operatorname{Rep} \mathbb{Z}_2$. Más aún, el único elemento no trivial de $\operatorname{Rep} D(\mathbb{S}_n)_{\mathrm{pt}}$ corresponde al par (e, Sg). Se tiene entonces que la S-matriz $(S_{X,Y})_{X,Y \in \operatorname{Irr}(\operatorname{Rep} D(\mathbb{S}_n))}$ y la estructura *ribbon* θ de $\operatorname{Rep} D(\mathbb{S}_n)$, están dadas por

$$S_{(e,\mathrm{Sg}),(e,\mathrm{Sg})} = \frac{|\mathbb{S}_n|}{|\mathbb{S}_n|^2} \sum_{g \in \mathbb{S}_n} \mathrm{Sg}(e)\, \mathrm{Sg}(e) = \frac{|\mathbb{S}_n|}{|\mathbb{S}_n|} = 1,$$

y

$$\theta_{(e,\mathrm{Sg})} = \frac{\mathrm{Sg}(e)}{\deg \mathrm{Sg}} = 1,$$

respectivamente (ver Sección 4.10). Esto muestra que $\operatorname{Rep} D(\mathbb{S}_n)_{\mathrm{pt}}$ es una subcategoría Tannakiana. $\square$

Lema 5.2.9. *Sea n un número natural impar. Entonces existe una sucesión exacta central de álgebras de Hopf*

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{Z}_2} \longrightarrow J_n \xrightarrow{\pi} K_n \longrightarrow \mathbb{K}, \tag{5.2.8}$$

donde la aplicación $\pi : J_n \to K_n$ está inducida por la inclusión $\mathbb{A}_{n-1} \subseteq \mathbb{S}_{n-1}$.

Demostración. La aplicación π está definida en la forma $\pi = j \otimes \mathrm{id} : J_n = \mathbb{K}^{\mathbb{S}_{n-1}} \# \mathbb{K}C_n \to K_n = \mathbb{K}^{\mathbb{A}_{n-1}} \# \mathbb{K}C_n$, donde $j : \mathbb{K}^{\mathbb{S}_{n-1}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{A}_{n-1}}$ es el mapeo canónico de álgebra de Hopf. Entonces π es una aplicación sobreyectiva de álgebra de Hopf.

Como el índice de K_n en J_n es 2, entonces $J_n^{\operatorname{co}\pi} \cong \mathbb{K}\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{K}^{\mathbb{Z}_2}$ es necesariamente, una subálgebra de Hopf central; ver Corolario 3.2.8. □

Proposición 5.2.10. *(i)* $\operatorname{Rep} J_n$ *es una $\mathbb{Z}_2$-extensión de* $\operatorname{Rep} K_n$*, para todo número natural impar $n \geq 1$.*

(ii) $\operatorname{Rep} J_n$ *es una $\mathbb{Z}_2$-equivariantización de una categoría de fusión $\mathcal{D}$, para todo número natural par $n \geq 4$.*

Demostración. (i) Esto es una consecuencia inmediata del Lema 5.2.9. Es decir, como la sucesión (5.2.8) es una sucesión exacta central de álgebras de Hopf, entonces por Proposición 4.5.6, $\operatorname{Rep} J_n$ es una categoría de fusión $\mathbb{Z}_2$-graduada con componente trivial $(\operatorname{Rep} J_n)_0 = \operatorname{Rep} K_n$. Por lo tanto $\operatorname{Rep} J_n$ es una $\mathbb{Z}_2$-extensión de $\operatorname{Rep} K_n$.

(ii) Supongamos que $n \geq 4$ es par. Primero afirmamos que $\operatorname{Rep} J_n$ no es una $\mathbb{Z}_2$-extensión de ninguna categoría de fusión. Para ver esto, primero notemos que se sigue de [JM09, Lemma 3.4] que $G(J_n) = G(\mathbb{K}^{\mathbb{S}_{n-1}}) \cong \mathbb{Z}_2$, para todo $n \geq 2$. Supongamos que K es una subálgebra de Hopf central de J_n tal que $K \cong \mathbb{K}^{\mathbb{Z}_2}$, entonces K debe coincidir necesariamente con $\mathbb{K}G(J_n)$. Observemos que la acción $\triangleleft : \mathbb{S}_{n-1} \times C_n \to \mathbb{S}_{n-1}$ da lugar a una acción por automorfismos de álgebras

$$\rightharpoonup : C_n \times \mathbb{K}^{\mathbb{S}_{n-1}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{S}_{n-1}} \quad \text{tal que} \quad x \rightharpoonup e_\sigma = e_{\sigma \triangleleft x^{-1}},$$

para todo $x \in C_n$ y $\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}$. Si $\epsilon \neq \varphi \in G(J_n) = G(\mathbb{K}^{\mathbb{S}_{n-1}})$, se tiene $\varphi(\sigma) = \operatorname{Sg}(\sigma)$, para todo $\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}$ y $\varphi = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-1}} \operatorname{Sg}(\sigma) e_\sigma$.

Por lo tanto $G(J_n) \subseteq Z(J_n)$ si y sólo si $z \rightharpoonup \varphi = \varphi$, si y sólo si $\mathbb{A}_{n-1}$ es estable bajo la acción $\triangleleft$ de $\langle z \rangle$. Esto contradice la Observación 5.2.6. Así $\operatorname{Rep} J_n$ no es una $\mathbb{Z}_2$-extensión de ninguna categoría de fusión, como afirmamos.

Sea $\mathcal{E} = \operatorname{Rep} D(\mathbb{S}_n)_{\mathrm{pt}}$. Por Lema 5.2.8, $\mathcal{E} \cong \operatorname{Rep} \mathbb{Z}_2$ es una subcategoría Tannakiana de $\operatorname{Rep} D(\mathbb{S}_n)$. Como $\operatorname{Rep} J_n$ no es una $\mathbb{Z}_2$-extensión de ninguna categoría de fusión, se sigue de las Proposiciones 4.9.12 y 4.9.13 que $\operatorname{Rep} J_n$ debe ser una $\mathbb{Z}_2$-equivariantización de una categoría de fusión $\mathcal{D}$. Así obtenemos (ii). $\square$

Lema 5.2.11. *Sea $n \geq 5$ un número natural impar y sea q un número primo. Entonces se verican las siguientes afirmaciones:*

(i) La categoría $\operatorname{Rep} J_n$ no es una $\mathbb{Z}_q$-equivariantización de ninguna categoría de fusión.

(ii) Supongamos que $\operatorname{Rep} J_n$ es una $\mathbb{Z}_q$-extensión de una categoría de fusión $\tilde{\mathcal{D}}$. Entonces $q = 2$ y $\tilde{\mathcal{D}} = \operatorname{Rep} K_n$.

(iii) La categoría $\operatorname{Rep} K_n$ no es ni una $\mathbb{Z}_q$-equivariantización ni una $\mathbb{Z}_q$-extensión de ninguna categoría de fusión.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una de las categorías $\operatorname{Rep} J_n$ o $\operatorname{Rep} K_n$. Si $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}_q$-extensión de una categoría de fusión $\tilde{\mathcal{D}}$, entonces el centro de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ debe contener una subcategoría Tannakiana equivalente a $\operatorname{Rep} \mathbb{Z}_q$ que asigna a la subcategoría de fusión trivial $\mathrm{Vect} \subseteq \mathcal{C}$ bajo el funtor de olvido $U : \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$. En este caso, la categoría $\tilde{\mathcal{D}}$ está canónicamente determinada por la correspondiente subcategoría Tannakiana. Dualmente, si $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}_q$-equivariantización, entonces $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ debe contener una subcategoría Tannakiana equivalente a $\operatorname{Rep} \mathbb{Z}_q$ que se incrusta en $\mathcal{C}$ bajo el funtor de olvido. Ver Proposiciones 4.9.12 y 4.9.13.

Como $n \geq 5$, entonces el grupo de objetos invertibles del centro de Drinfeld de $\mathcal{C}$ coincide con $\mathbb{Z}_2$ si $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} J_n$, y es trivial si $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} K_n$. Como $\operatorname{Rep} \mathbb{Z}_q$ es una categoría de fusión punteada, obtenemos (iii).

Supongamos que $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} J_n$. Entonces $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}_2$-extensión de $\operatorname{Rep} K_n$. Esto implica que la subcategoría de fusión punteada de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es una subcategoría Tannakiana que asigna a la subcategoría trivial de $\mathcal{C}$ bajo el funtor de olvido. Así, para todo número primo q, $\mathcal{C}$ no es una $\mathbb{Z}_q$-equivariantización de ninguna categoría de fusión y obtenemos (i). Por otro lado, si fuera una $\mathbb{Z}_q$-extensión, entonces $q = 2$ y la correspondiente subcategoría Tannakiana de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ coincide con la subcategoría punteada $\mathcal{Z}(\mathcal{C})_{\mathrm{pt}}$. Así obtenemos (ii). Esto finaliza la prueba del Lema. $\square$

Lema 5.2.12. *Sea p sea un número primo impar. Entonces el grupo* $G(J_p^*)$ *es un producto semidirecto* $\widehat{C_p} \rtimes \langle\sigma\rangle$ *donde* $\sigma \in \mathbb{S}_{p-1}$ *es un* $(p-1)$*-ciclo y la acción de* $\langle\sigma\rangle$ *sobre* $\widehat{C_p}$ *está inducida por la acción* $\lhd' : C_p \times \mathbb{S}_{p-1} \to C_p$*. Más aún, si p es un número primo mayor o igual a 5, el subgrupo* $G(K_p^*) \subseteq G(J_p^*)$ *es el producto semidirecto* $\widehat{C_p} \rtimes \langle\sigma^2\rangle$*.*

Demostración. El subgrupo $\mathbb{S}_{p-1}^{C_p}$ de invariantes de $\mathbb{S}_{p-1}$ bajo la acción $\rhd'$ de C_p coincide con el subgrupo de invariantes bajo la acción $\lhd$. Se sigue de [JM09, Corollary 5.2] que $\mathbb{S}_{p-1}^{C_p}$ es cíclico generado por un $(p-1)$-ciclo σ, es decir $\mathbb{S}_{p-1}^{C_p} = \langle\sigma\rangle$ y por lo tanto $G(J_p^*) \cong \widehat{C_p} \rtimes \langle\sigma\rangle$. Si además $p \geq 5$, se sigue que el subgrupo invariante $\mathbb{A}_{p-1}^{C_p}$ es también cíclico generado por σ^2. Esto implica el lema, en vista de la Observación 5.2.4. □

Proposición 5.2.13. *Sea p un número primo impar. Entonces las álgebras de Hopf* J_p*,* K_p *satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) $\mathrm{c.d.}(J_p) = \mathrm{c.d.}(K_p) = \{1, p\}$.

(ii) Si p es mayor o igual a 5, los subgrupos $G(J_p^*)$ *y* $G(K_p^*)$ *tienen centros triviales.*

Demostración. (i) Sigue de la descripción de representaciones irreducibles de productos cruzados en [MW98].

(ii) Por Lema 5.2.12, $G(J_p^*) = \widehat{C_p} \rtimes \langle\sigma\rangle$ es un producto semidirecto con respecto a la acción inducida por $\lhd'$, donde σ es un $(p-1)$-ciclo en $\mathbb{S}_{p-1}$. Entonces el centro de $G(J_p^*)$ consiste de todos los pares $(1, x)$, donde $x \in \langle\sigma\rangle$ actúa trivialmente sobre C_p bajo la acción $\lhd'$.

Similarmente, $G(K_p^*) = \widehat{C_p} \rtimes \langle\sigma^2\rangle$ es un producto semidirecto con respecto a la acción inducida por $\lhd'$ y el centro de $G(K_p^*)$ consiste de todos los pares $(1, x)$, donde $x \in \langle\sigma^2\rangle$ actúa trivialmente sobre C_p bajo la acción $\lhd'$.

Recordemos que $C_p = \langle z\rangle$, donde $z = (12 \dots p)$ y las acciones $\lhd$, $\rhd$ están determinadas por la relación $sc = (s \rhd c)(s \lhd c)$ en $\mathbb{S}_p$. Por lo que las acciones $\lhd'$, $\rhd'$ están determinadas por $cs = (c \rhd' s)(c \lhd' s)$ en $\mathbb{S}_p$, para todo $s \in \mathbb{S}_{p-1}$, $c \in C_p$.

Se sigue del [JM09, Lemma 3.2] que $z \lhd' a_i = z^i$, para todo $i = 1, \dots, p-1$, donde $a_i = (p-1, p-i)$. Además, el estabilizador de z bajo la acción $\lhd'$ coincide con el subgrupo $F_z = \{a \in \mathbb{S}_{p-1} : a(p-1) = p-1\} \cong \mathbb{S}_{p-2}$. Esto implica que, para todo $i = 1, \dots, p-1$, el estabilizador de z^i coincide con el subgrupo $F_{z^i} = \{a \in \mathbb{S}_{p-1} : a(p-i) = p-i\}$.

Por otro lado, las potencias no triviales del $(p-1)$-ciclo $\sigma \in \mathbb{S}_{p-1}$ no tienen puntos fijos en $\{1, \ldots, p-1\}$. Así las potencias no triviales de σ actúan trivialmente sobre C_p bajo la acción $\lhd'$. Esto muestra que los centros de los grupos $G(J_p^*)$ and $G(K_p^*)$ son ambos triviales.

□

Teorema 5.2.14. *Sea p un número primo mayor o igual a 5 y sea $\tilde{\mathcal{C}}$ una categoría de fusión. Supongamos que $\tilde{\mathcal{C}}$ es Grothendieck equivalente a una de las categorías* $\operatorname{Rep} J_p$ *o* $\operatorname{Rep} K_p$*. Entonces $\tilde{\mathcal{C}}$ no es resoluble.*

Demostración. Supongamos por el contrario que $\tilde{\mathcal{C}}$ es resoluble y Grothendieck equivalente a $\mathcal{C}$, donde $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} J_p$ o $\operatorname{Rep} K_p$. Se sigue de la Proposición 5.1.2, que $G(\tilde{\mathcal{C}}) \cong G(\mathcal{C})$. Por Proposición 5.2.13, los grupos de objetos invertibles de $\operatorname{Rep} J_p$ y $\operatorname{Rep} K_p$ tienen centros triviales. Entonces el centro de $G(\tilde{\mathcal{C}})$ es también trivial. Se sigue del Lema 4.8.14 que, para todo número primo q, la categoría $\tilde{\mathcal{C}}$ no es una $\mathbb{Z}_q$-equivariantización de ninguna categoría de fusión. Por lo tanto $\tilde{\mathcal{C}}$ debe ser una $\mathbb{Z}_q$-extensión de una subcategoría de fusión $\tilde{\mathcal{D}}$, y $\tilde{\mathcal{D}}$ es también una categoría de fusión resoluble. Así $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}_q$-extensión de una subcategoría de fusión $\mathcal{D}$ tal que $\tilde{\mathcal{D}}$ es Grothendieck equivalente a $\mathcal{D}$. Se sigue de la Proposición 5.2.10 y el Lema 5.2.11 que $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} J_p$, $q = 2$ y $\mathcal{D} = \operatorname{Rep} K_p$. Aplicando el mismo argumento a la categoría de fusión resoluble $\tilde{\mathcal{D}}$ obtenemos una contradicción. Esto muestra que $\tilde{\mathcal{C}}$ no puede ser resoluble y finaliza la prueba del teorema. □

5.2.3. Reglas de Fusión de $\operatorname{Rep} K_5$

En esta subsección determinaremos explícitamente las reglas de fusión de la categoría $\operatorname{Rep} K_p$ en el caso $p = 5$. Se sigue de [MW98] que los objetos simples de la categoría $\operatorname{Rep} K_5$ están parametrizadas por pares (s, ρ), donde s recorre el conjunto de representantes de las órbitas de C_5 sobre $\mathbb{A}_4$ y ρ es una representación irreducible del estabilizador $F_s \subseteq C_5$. La dimensión del objeto simple $S_{s,\rho}$ correspondiente al par (s, ρ) está dado por la fórmula $\dim S_{s,\rho} = [C_5 : F_s]$.

La C_5-acción sobre $\mathbb{S}_4$ está explícitamente determinada en:

$\triangleleft$	1	(12345)	(13524)	(14253)	(15432)	F_x
$x = 1$	1	1	1	1	1	C_5
$x = (14)(23)$	(14)(23)	(14)(23)	(14)(23)	(14)(23)	(14)(23)	C_5
$x = (1243)$	(1243)	(1243)	(1243)	(1243)	(1243)	C_5
$x = (1342)$	(1342)	(1342)	(1342)	(1342)	(1342)	C_5
$x = (12)$	(12)	(1432)	(1234)	(34)	(23)	$\{1\}$
$x = (13)$	(13)	(1423)	(14)	(1324)	(24)	$\{1\}$
$x = (123)$	(123)	(243)	(132)	(13)(24)	(234)	$\{1\}$
$x = (124)$	(124)	(12)(34)	(143)	(134)	(142)	$\{1\}$

Tabla 5.1: [JM09, Table 1]

Se tiene en este caso que existen 10 puntos fijos y las 2 órbitas restantes consisten de 5 elementos distintos cada una. Además, existen exactamente 4 puntos fijos distintos σ tal que $\sigma = \sigma^{-1}$ y ambas órbitas no triviales contienen elementos de orden 2. En vista de [JM09, Theorem 4.8], $\operatorname{Rep} K_5$ tiene 5 objetos invertibles de orden 2 y los objetos simples de dimensión 5 son auto-dual.

Denotaremos por Y, Y' los objetos simples correspondientes a las órbitas no triviales $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$, respectivamente. Por Tabla 5.1, tenemos

$$\mathcal{O} = \{(123), (243), (132), (13)(24), (234)\},$$
$$\mathcal{O}' = \{(124), (143), (134), (12)(34), (142)\}.$$

Por Lema 5.2.12, el grupo $G(\operatorname{Rep} K_5)$ es isomorfo al grupo dihedral D_5 de orden 10. El único subgrupo R de orden 5 de $G(\operatorname{Rep} K_5)$ coincide por lo tanto con el estabilizador de Y y Y' bajo la multiplicación a izquierda (o a derecha). Como todo elemento s fuera de R es de orden 2, entonces $s \otimes Y \cong Y \otimes s \cong Y'$. Por lo tanto se tiene una descomposición

$$Y \otimes Y^* \cong Y \otimes Y \cong \bigoplus_{r \in R} r \oplus aY \oplus bY', \tag{5.2.9}$$

donde $a, b \geq 0$ y $a + b = 4$. Tomando $F : \operatorname{Rep} K_5 \to \mathcal{C}(\mathbb{A}_4) = \operatorname{Rep} \mathbb{K}^{\mathbb{A}_4}$ como el funtor restringido, se obtiene

$$F(Y) = V_{(123)} \oplus V_{(243)} \oplus V_{(132)} \oplus V_{(13)(24)} \oplus V_{(234)},$$
$$F(Y') = V_{(124)} \oplus V_{(143)} \oplus V_{(134)} \oplus V_{(12)(34)} \oplus V_{(142)},$$

donde, para cada $s \in \mathbb{A}_4$, V_s denota el $\mathbb{K}^{\mathbb{A}_4}$-módulo simple de dimensión uno correspondiente a s. Comparando estas relaciones con (5.2.9), oservamos que $a = b = 2$. Así las reglas de fusión de $\operatorname{Rep} K_5$ están determinadas por la condición $G = G(\operatorname{Rep} K_5) \cong D_5$, $g \otimes Y = Y \otimes g = Y'$, para todo elemento de orden 2 de G, y

$$Y \otimes Y \cong \bigoplus_{r \in R} r \oplus 2Y \oplus 2Y' \cong Y' \otimes Y',$$

donde R es el único subgrupo de orden 5 de G.

5.2.4. Las álgebras de Hopf duales J_n^*, K_n^*

Sea $n \geq 2$ un número natural y sea $H_n = J_n^*$. Recordemos que existe una sucesión exacta que se parte de álgebras de Hopf

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^{C_n} \longrightarrow H_n \longrightarrow \mathbb{K}\mathbb{S}_{n-1} \longrightarrow \mathbb{K}. \tag{5.2.10}$$

Supongamos que n es impar. Sea $L_n = K_n^*$, de modo que existe una sucesión exacta que se parte de álgebras de Hopf

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^{C_n} \longrightarrow L_n \longrightarrow \mathbb{K}\mathbb{A}_{n-1} \longrightarrow \mathbb{K}. \tag{5.2.11}$$

Más aún, por Lema 5.2.9 existe una sucesión exacta cocentral

$$\mathbb{K} \longrightarrow L_n \longrightarrow H_n \longrightarrow \mathbb{K}\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{K}. \tag{5.2.12}$$

Observación 5.2.15. Supongamos que $n \geq 5$. Como $D(H_n) \cong D(J_n)$, entonces $G(\operatorname{Rep} D(H_n)) \cong \mathbb{Z}_2$. Sea q un número primo. Si la categoría $\operatorname{Rep} H_n$ es una $\mathbb{Z}_q$-extensión o una $\mathbb{Z}_q$-equivariantización de una categoría de fusión, entonces $q = 2$.

Supongamos que n es impar. En vista de 3.2.6, $\operatorname{Rep} H_n$ es una $\mathbb{Z}_2$-equivariantización de $\operatorname{Rep} L_n$. Como en la prueba del Lema 5.2.11, obtenemos que si $n \geq 5$, la categoría $\operatorname{Rep} H_n$ no es una $\mathbb{Z}_q$-extensión de ninguna categoría de fusión. Análogamente, $\operatorname{Rep} L_n$ no es una $\mathbb{Z}_q$-extensión ni una $\mathbb{Z}_q$-equivariantización de ninguna categoría de fusión.

Lema 5.2.16. *Sea $n \geq 5$ un número natural. Entonces se cumplen las siguientes condiciones.*

(i) $G(\operatorname{Rep} H_n) \cong \mathbb{Z}_2$.

(ii) $\operatorname{Rep} H_5$ *es de tipo* $(1,2;2,1;3,2;4,2;8,1)$ *y* H_n *no tiene representaciones irreducibles de dimensión 2, para todo* $n > 5$.

Asumamos además que n *es impar. Entonces*

(iii) $G(\operatorname{Rep} L_n) = \mathbf{1}$*, si* $n > 5$.

(iv) $\operatorname{Rep} L_5$ *es de tipo* $(1,3;3,1;4,3)$ *y* L_n *no tiene representaciones irreducibles de dimensión 2.*

Demostración. Consideremos las sucesiones exactas (5.2.10) y (5.2.11). Los subgrupos invariantes respectivos $C_n^{\mathbb{S}_{n-1}}$ y $C_n^{\mathbb{A}_{n-1}}$ son ambos triviales. Las partes (i) y (iii) siguen del Lema 5.2.3.

Notemos que el grupo alternante $\mathbb{A}_{n-1}$ no tiene representaciones irredubibles de grado 2.[3] Además, excepto en el caso $n = 5$ ($\operatorname{Rep} \mathbb{S}_4$ es de tipo $(1,2;2,1;3,2)$), el grupo simétrico $\mathbb{S}_{n-1}$ tampoco tiene representaciones irreducibles de grado 2. En efecto, si V fuera una tal representación, entonces la restricción $V|_{\mathbb{A}_{n-1}}$ no sería irreducible. Así, como $\mathbb{A}_{n-1}$ no tiene representaciones no triviales de dimensión uno (ya que $n \geq 5$), entonces $V|_{\mathbb{A}_{n-1}}$ sería trivial. Ésto es imposible, porque el núcleo del funtor restringido $\operatorname{Rep} \mathbb{S}_{n-1} \to \operatorname{Rep} \mathbb{A}_{n-1}$ es la subcategoría punteada $\operatorname{Rep} \mathbb{Z}_2 \subseteq \operatorname{Rep} \mathbb{S}_{n-1}$.

Como H_n es una extensión abeliana que se parte de $\mathbb{K}^{C_n}$ por $\mathbb{K}\mathbb{S}_{n-1}$ y la acción de $\mathbb{S}_{n-1}$ tiene dos órbitas $\{e\}$ y $\{z, \dots, z^{n-1}\}$, entonces los H_n-módulos simples están clasificados por pares (t, ρ), donde o bien $t = e$ y ρ es una representación irreducible de $F_e = \mathbb{S}_{n-1}$, ó $t = z$ y ρ es una representación irreducible de $F_z = \{a \in \mathbb{S}_{n-1} : a(n-1) = n-1\} \cong \mathbb{S}_{n-2}$. Ver [JM09, Lemma 3.2]. Si $S_{t,\rho}$ es el módulo simple correspondiente al par (t, ρ), tenemos además $\dim S_{e,\rho} = \dim \rho$, y $\dim S_{z,\rho} = [\mathbb{A}_{n-1} : F_z] \dim \rho = (n-1) \dim \rho$. Esto implica la afirmación para H_5 en el ítem (ii).

Supongamos que $n > 5$. Entonces $\dim S_{z,\rho} > 2$, para todo ρ. Por lo anterior, el grupo simétrico $\mathbb{S}_{n-1}$ no tiene representaciones irreducibles de grado 2. Por lo tanto también tenemos que $\dim S_{e,\rho} \neq 2$, para todo ρ. En conclusión H_n no tiene representaciones irreducibles de dimensión 2, y obtenemos (ii).

[3] Esto puede verse, por ejemplo, como una consecuencia del teorema de Nichols-Richmond [NR96, Theorem 11]

Supongamos que n is impar. Análogamente, L_n es una extensión abeliana que se parte de $\mathbb{K}^{C_n}$ por $\mathbb{K}\mathbb{A}_{n-1}$ y la acción de $\mathbb{A}_{n-1}$ tiene dos órbitas $\{e\}$ y $\{z, \dots, z^{n-1}\}$. Así los L_n-módulos simples están clasificados por pares (t, ρ), donde o bien $t = e$ y ρ es una representación irreducible de $F_e \cap \mathbb{A}_{n-1} = \mathbb{A}_{n-1}$, ó $t = z$ y ρ es una representación irreducible de $F_z \cap \mathbb{A}_{n-1} \cong \mathbb{A}_{n-2}$. Esto implica que $\operatorname{Rep} L_5$ es del tipo prescrito. Como antes, $\dim S_{z,\rho} > 2$, para todo ρ, y como el grupo alternante $\mathbb{A}_{n-1}$ no tiene representaciones irredubibles de grado 2, entonces también $\dim S_{e,\rho} \neq 2$, para todo ρ. Por lo que L_n no tiene representaciones irreducibles de dimensión 2. Esto prueba el ítem (iv) y finaliza la prueba del Lema. □

Lema 5.2.17. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión de tipo* $(1, 3; 3, 1; 4, 3)$. *Entonces $\mathcal{C}$ no es resoluble.*

Demostración. El supuesto sobre el tipo de $\mathcal{C}$ implica que los objetos simples de dimensiones 1 y 3 generan una subcategoría de fusion $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ de tipo $(1, 3; 3, 1)$ y más aún, toda subcategoría de fusión propia de $\mathcal{C}$ está contenida en $\mathcal{B}$.

Supongamos primero que $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}_q$-extensión de una subcategoría de fusión $\mathcal{C}_0$, para algún número primo q. Entonces necesariamente $\mathcal{C}_0 = \mathcal{B}$ y $q = 5$. Así tenemos una $\mathbb{Z}_5$-graduación fiel $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}_4$, con componente trivial $\mathcal{C}_0 = \mathcal{B}$. Pero $\mathcal{C}$ tiene solamente 3 clases de objetos simples fuera de $\mathcal{B}$, lo que implica que tal decomposición es imposible.

Por lo tanto $\mathcal{C}$ debe ser una $\mathbb{Z}_q$-equivariantizacion de categoría de fusión $\mathcal{D}$, para algún número primo q, donde $\mathcal{D}$ es también una categoría de fusión resoluble. Así $q = 3$ y $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}^{\mathbb{Z}_3}$. La descripción de objetos simples de $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}_3}$ junto con la hipótesis sobre el tipo de $\mathcal{C}$ implican que $\mathcal{D}$ debe ser del tipo $(1, 4; 4, 1)$; compárese con Fórmula (4.8.2). Más aún, la acción (por automorfismos de grupo) de $\mathbb{Z}_3$ sobre el conjunto de objetos inversibles no triviales de $\mathcal{D}$ debe ser transitivo, así $G(\mathcal{D}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Por otro lado, si X el único objeto simple no trivial de $\mathcal{D}$, se tiene

$$X^{\otimes 2} \cong \bigoplus_{Y \in G(\mathcal{D})} Y \oplus 3X.$$

Esto significa que $\mathcal{D}$ es una categoría de fusión casi-grupo de tipo $(G, 3)$, donde $G = G(\mathcal{D})$. Por lo tanto se sigue del Teorema 4.3.4 que el grupo $G(\mathcal{D})$ es cíclico, lo que lleva a una contradicción. Luego $\mathcal{C}$ no puede ser resoluble. Esto culmina la demostración del lema. □

Teorema 5.2.18. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión y sea $n \geq 5$ un número natural. Entonces se tiene:*

(i) Si $\mathcal{C}$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} H_n$*, entonces $\mathcal{C}$ no es resoluble.*

(ii) Supongamos que n es impar. Si $\mathcal{C}$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} L_n$*, entonces $\mathcal{C}$ no es resoluble.*

Demostración. (i) Supongamos primero que $n > 5$. Por el Lema 5.2.16, $G(\operatorname{Rep} H_n) \cong \mathbb{Z}_2$ y $\operatorname{Rep} H_n$ no tiene objetos simples de dimensión 2. La afirmación sigue en este caso de la Proposición 5.1.5.

Consideremos ahora el caso $n = 5$. Supongamos por el contrario que $\mathcal{C}$ is Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} H_5$ y $\mathcal{C}$ es resoluble. Entonces $\mathcal{C}$ es de tipo $(1, 2; 2, 1; 3, 2; 4, 2; 8, 1)$ y, para algún número primo q, $\mathcal{C}$ no es una $\mathbb{Z}_q$-extensión de ninguna subcategoría de fusión, en vista de la Observación 5.2.15. Por lo tanto $\mathcal{C}$ debe ser una $\mathbb{Z}_2$-equivariantización de una categoría de fusión resoluble $\mathcal{D}$ de dimensión 60. La descripción de los objetos simples de $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}_2}$ junto con la suposición sobre el tipo de $\mathcal{C}$ implican que $\mathcal{D}$ debe ser de tipo $(1, 3; 3, 1; 4, 3)$. El Lema 5.2.17 implica que $\mathcal{D}$ no es resoluble, lo que es una contradicción. Así obtenemos (i).

(ii) Si $n = 5$, el resultado sigue del Lema 5.2.17. Supongamos luego que $n > 5$. Como una categoría de fusión resoluble contiene objetos invertibles no triviales, entonces el ítem (ii) sigue del Lema 5.2.16 (iii).

□

5.2.5. Otros ejemplos asociados al grupo simétrico

Sea $n \geq 2$ un número natural. Consideremos el matched pair $(\mathbb{A}_n, C_2)$, donde $C_2 = \langle (12) \rangle \subseteq \mathbb{S}_n$, la acción $\triangleleft : \mathbb{A}_n \times C_2 \to \mathbb{A}_n$ está dada por conjugación en $\mathbb{S}_n$ y la acción $\triangleright : \mathbb{A}_n \times C_2 \to C_2$ es trivial. El grupo asociado $\mathbb{A}_n \bowtie C_2$ es isomorfo al grupo simétrico $\mathbb{S}_n$.

Sea $B_n = \mathbb{K}^{\mathbb{A}_n} \# \mathbb{K} C_2$ la extensión abeliana partida asociada a este matched pair. Se tiene $\text{c.d.}(B_n) = \{1, 2\}$. La categoría de fusión $\operatorname{Rep} B_n$ es categóricamente Morita equivalente a $\mathbb{S}_n$ y por lo tanto no es resoluble si $n \geq 5$.

Observación 5.2.19. Como la acción $\triangleright$ es la trivial y $C_2 \cong \mathbb{Z}_2$, existe una sucesión exacta cocentral

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{A}_n} \longrightarrow B_n \longrightarrow \mathbb{K}\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{K}. \tag{5.2.13}$$

En vista de Proposición 3.2.6, $\operatorname{Rep} B_n$ es una $\mathbb{Z}_2$-equivariantización de $\operatorname{Rep} \mathbb{K}_n^{\mathbb{A}} = \mathcal{C}(\mathbb{A}_n)$.

Además, como $\operatorname{Rep} B_n$ es categóricamente Morita equivalente a $\mathbb{S}_n$ y el grupo de objetos invesibles de $\mathcal{Z}(\operatorname{Rep} \mathbb{S}_n)$ es cíclico de orden 2, entonces para todo número primo q, $\operatorname{Rep} B_n$ no es una $\mathbb{Z}_q$-extensión de ninguna categoría de fusión y si fuera una $\mathbb{Z}_q$-equivariantización, entonces $q = 2$ (compárese con Proposición 5.2.10). En particular, al no ser una $\mathbb{Z}_q$-extention, B_n no tiene elementos de tipo grupo centrales no triviales; esto es, $Z(B_n) \cap G(B_n) = \{1\}$.

Lema 5.2.20. *El grupo $G(\operatorname{Rep} B_n)$ de objetos invertibles de la categoría $\operatorname{Rep} B_n$ es isomorfo al producto directo $\widehat{C_2} \times C_{\mathbb{A}_n}(12)$, donde $C_{\mathbb{A}_n}(12)$ denota el centralizador en $\mathbb{A}_n$ de la transposición (12).*

Demostración. Existe un isomorfismo de grupos $G(\operatorname{Rep} B_n) \cong G(B_n^*)$. Por otro lado, B_n^* es una extensión abeliana partida $B_n^* \cong \mathbb{K}^{C_2} \# \mathbb{K}\mathbb{A}_n$, asociada a la acción adjunta $\triangleright' : C_2 \times \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ y la acción trivial $\triangleleft' : C_2 \times \mathbb{A}_n \to C_2$. El resultado sigue del Lema 5.2.3. $\square$

Teorema 5.2.21. *Supongamos que $n \geq 5$. Sea $\tilde{\mathcal{C}}$ una categoría de fusión Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} B_n$. Entonces $\tilde{\mathcal{C}}$ no es resoluble.*

Demostración. Supongamos primero que $n \geq 7$. Por Lema 5.2.20, $G(\operatorname{Rep} B_n) \cong \widehat{C_2} \times C_{\mathbb{A}_n}(12)$. Notar que $C_{\mathbb{A}_n}(12)$ contiene el subgrupo $\{\sigma \in \mathbb{A}_n : \sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2\} \cong \mathbb{A}_{n-2}$. Como $n \geq 7$, el grupo $\mathbb{A}_{n-2}$ no es resoluble. Por lo tanto $G(\tilde{\mathcal{C}})$ tampoco es resoluble y luego $\tilde{\mathcal{C}}$ no es resoluble.

Resta considerar los casos $n = 5$ y 6. Se sigue del Lema 5.2.20 que $G(\operatorname{Rep} B_5) \cong \widehat{C_2} \times \mathbb{S}_3$ es no-abeliano de orden 12. Así $\operatorname{Rep} B_5$ es de tipo $(1, 12; 2, 27)$. Análogamente, $G(\operatorname{Rep} B_6) \cong \widehat{C_2} \times \mathbb{S}_4$ es no-abeliano de orden 48 y $\operatorname{Rep} B_6$ es de tipo $(1, 48; 2, 168)$.

Supongamos que existe una categoría de fusión resoluble $\tilde{\mathcal{C}}$ que es Grothendieck equivalente a $\mathcal{C}$, donde $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} B_5$ o $\operatorname{Rep} B_6$. Por la Proposición 5.1.2, $G(\tilde{\mathcal{C}}) \cong G(\mathcal{C})$. Como, para todo número primo q, $\mathcal{C}$ no es una $\mathbb{Z}_q$-extensión de ninguna categoría de fusión, tenemos que $\tilde{\mathcal{C}}$ debe ser una $\mathbb{Z}_q$-equivariantización de una subcategoría de fusión $\mathcal{D}$, y

$\mathcal{D}$ es también una categoría de fusión resoluble. Además, $q = 2$ ya que $\mathbb{Z}_q \subseteq Z(G(\tilde{\mathcal{C}}))$ y $\operatorname{FPdim} \mathcal{D} = 60$ o $\operatorname{FPdim} \mathcal{D} = 360$, respectivamente. Por lo tanto existe una sucesión exacta de categorías de fusión

$$\operatorname{Rep} \mathbb{Z}_2 \to \tilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{D}.$$

Como c.d.$(\tilde{\mathcal{C}}) = \{1, 2\}$, se sigue que c.d.$(\mathcal{D}) = \{1, 2\}$. La sucesión exacta anterior induce una sucesión exacta de grupos

$$1 \to \widehat{\mathbb{Z}}_2 \to G(\tilde{\mathcal{C}}) \to G_0(\mathcal{D}) \to 1,$$

donde $\widehat{\mathbb{Z}}_2$ denota el grupo de caracteres inversibles de $\mathbb{Z}_2$ y $G_0(\mathcal{D})$ es el subgrupo de $G(\mathcal{D})$ que consiste de clases de isomorfismos de objetos inversibles que son $\mathbb{Z}_2$-equivariantes (ver Observación 2.5.7). Como $\mathbb{Z}_2$ es un grupo cíclico, tenemos que $G_0(\mathcal{D})$ coincide con el subgrupo de puntos fijos de la acción inducida de $\mathbb{Z}_2$ sobre el grupo de objetos invertibles de $\mathcal{D}$.

Observemos que, como $\mathcal{C}$ es también una $\mathbb{Z}_2$-equivariantización de $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_2} \cong \mathcal{C}(\mathbb{A}_5)$ o $\mathcal{C}(\mathbb{A}_6)$, respectivamente, entonces el grupo $G(\mathcal{C}) \cong G(\tilde{\mathcal{C}})$ también encaja en una sucesión exacta

$$1 \to \widehat{\mathbb{Z}}_2 \to G(\mathcal{C}) \to G_0(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_2}) \to 1.$$

En este caso, el subgrupo $G_0(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_2})$ es isomorfo a $C_{\mathbb{A}_5}(12)$ o $C_{\mathbb{A}_6}(12)$, respectivamente. Además, el grupo $G(\mathcal{C})$ contiene un único subgrupo normal de orden 2. Por lo tanto, $G_0(\mathcal{D}) \cong G_0(\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_2})$ es un subgrupo no-abeliano de $G(\mathcal{D})$.

Supongamos primero que $n = 5$. En este caso $\mathcal{C} = \operatorname{Rep} B_5 \cong \mathcal{C}(\mathbb{A}_5)^{\mathbb{Z}_2}$. En particular, $G_0(\mathcal{D})$ es un subgrupo de orden 6 de $G(\mathcal{D})$. Un argumento de conteo muestra que $G(\mathcal{D})$ puede ser de tipo $(1, 12; 2, 12)$ o bien $\mathcal{D}$ ser punteada. Supongamos que $\mathcal{D}$ es de tipo $(1, 12; 2, 12)$. Entonces $\mathcal{D}_{\mathrm{pt}}^{\mathbb{Z}_2} \subseteq \tilde{\mathcal{C}}$ es una subcategoría de fusión de dimensión 24 y tipo $(1, 12; 2, 3)$, que contiene la subcategoría central $\operatorname{Rep} \mathbb{Z}_2$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ tiene una subcategoría de fusión $\mathcal{B}$ de tipo $(1, 12; 2, 3)$ que contiene la subcategoría central $\operatorname{Rep} \mathbb{Z}_2$. (De hecho, como se observó anteriormente, $G(\mathcal{C})$ contiene un único subgrupo normal de orden 2; ver Lema 4.8.14.)

Consideremos la de-equivariantización $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}_2} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{A}_5)$. Tenemos que $\dim \mathcal{B}_{\mathbb{Z}_2} = 12$ y así $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}_2} = \mathcal{C}(H)$, donde H es un subgrupo de $\mathbb{A}_5$ ($\mathbb{Z}_2$-estable) de orden 12. Como $G(\operatorname{Rep} B_5) \subseteq \mathcal{B}$, entonces el subgrupo H contiene el subgrupo invariante $\mathbb{A}_5^{\mathbb{Z}_2} = C_{\mathbb{A}_5}(12) \cong \mathbb{S}_3$. Por otro lado, todo subgrupo de orden 12 de $\mathbb{A}_5$ es isomorfo a $\mathbb{A}_4$, entonces $H \cong \mathbb{A}_4$.

Esto lleva a una contradicción, ya que $\mathbb{A}_4$ no tiene subgrupos de orden 6. Esto prueba que $\mathcal{D}$ no puede ser de tipo $(1, 12; 2, 12)$.

Por lo tanto $\mathcal{D}$ debe ser una categoría de fusión punteada. En este caso $\mathcal{D} = \mathcal{C}(\Gamma, \omega)$, donde $\omega : \Gamma \times \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{K}^*$ es un 3-cociclo y Γ es un subgrupo resoluble no-abeliano de orden 60. Además $\mathbb{Z}_2$ actúa sobre Γ por automorfismos de grupo y $\Gamma^{\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{S}_3$. Como $\Gamma \neq \mathbb{A}_5$, Γ puede ser isomorfo a $\mathbb{A}_4 \times \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_{15} \rtimes \mathbb{Z}_4$ o $\mathbb{Z}_{15} \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$. Si $\Gamma \cong \mathbb{A}_4 \times \mathbb{Z}_5$, la acción de $\mathbb{Z}_2$ debe fijar $\mathbb{A}_4$ y $\mathbb{Z}_5$. Como $|\Gamma^{\mathbb{Z}_2}| = 6$ entonces $\Gamma^{\mathbb{Z}_2} \subseteq \mathbb{A}_4$, y llegamos a una contradicción. Por consiguiente $\Gamma \cong \mathbb{Z}_{15} \rtimes \mathbb{Z}_4$ o $\mathbb{Z}_{15} \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$. En este caso Γ tiene un único subgrupo L de orden 15, y entonces L es $\mathbb{Z}_2$-estable y $\mathcal{C}(L)^{\mathbb{Z}_2}$ es una subcategoría de fusión de $\tilde{\mathcal{C}}$ de dimensión 30. Esto implica que $\mathcal{C}$ tiene una subcategoría de fusión de dimensión 30. Tal subcategoría de fusión debe corresponder a una álgebra de Hopf cociente de B_5 de dimensión 30, lo que es una contradicción, porque $Z(B_5) \cap G(B_5) = \{1\}$. Ver Corolario 3.2.8. Así $\mathcal{D}$ no puede ser punteada. Esto prueba que si $\tilde{\mathcal{C}}$ es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep} B_5$ entonces $\tilde{\mathcal{C}}$ no es resoluble.

Finalmente, consideremos el caso $n = 6$. En este caso tenemos $\mathcal{C} := \operatorname{Rep} B_6 \cong \mathcal{C}(\mathbb{A}_6)^{\mathbb{Z}_2}$. Por otro lado, $G_0(\mathcal{D})$ es un subgrupo de orden 24 de $G(\mathcal{D})$. Como antes, podemos ver que $\mathcal{D}$ debe ser de tipo $(1, 24; 2, 84)$, $(1, 72; 2, 72)$, $(1, 120; 2, 60)$, o bien $\mathcal{D}$ ser punteada.

Supongamos que $\mathcal{D}$ es de tipo $(1, 72; 2, 72)$ o $(1, 120; 2, 60)$. En estos casos $\mathcal{D}_{\mathrm{pt}}^{\mathbb{Z}_2} \subseteq \tilde{\mathcal{C}}$ es una sucategoría de fusión de dimensión 144 o 240, respectivamente, que contiene la subcategoría central $\operatorname{Rep} \mathbb{Z}_2$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ tiene una subcategoría de fusión $\mathcal{B}$ de dimensión 144 o 240, respectivamente, que contiene la subcategoría central $\operatorname{Rep} \mathbb{Z}_2$. La de-equivariantización $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}_2} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{A}_6)$ es de dimensión $\dim \mathcal{B}_{\mathbb{Z}_2} = 72$ o 120, respectivamente. Entonces $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}_2} = \mathcal{C}(H)$, donde H es un subgrupo $\mathbb{Z}_2$-estable de $\mathbb{A}_6$ de orden 72 o 120, respectivamente. Como $\mathbb{A}_6$ no tiene subgrupos de orden 72 ni tampoco de orden 120, se sigue que estos tipos no son posibles para $\mathcal{D}$.

Supongamos luego que $\mathcal{D}$ es de tipo $(1, 24; 2, 84)$. Se sigue de la descripción de los objetos simples de $\mathcal{D}^G$ y del hecho que $\mathrm{c.d.}(\mathcal{D}) = \mathrm{c.d.}(\mathcal{C}) = \{1, 2\}$, que $\mathbb{Z}_2$ actúa trivialmente sobre el conjunto $\operatorname{Irr}(\mathcal{D})$; ver (4.8.2). En particular, $G(\mathcal{D}) = G_0(\mathcal{D}) \cong C_{\mathbb{A}_6}(12) \cong \mathbb{S}_4$.

Como $\mathcal{D}$ es resoluble, entonces es una $\mathbb{Z}_p$-extensión o una $\mathbb{Z}_p$-equivariantización, donde p es un número primo que divide la dimensión de $\mathcal{D}$, la cual es 360. Si $\mathcal{D}$ fuera una $\mathbb{Z}_p$-equivariantización entonces, por Lema 4.8.14, $\mathbb{Z}_p \subseteq Z(G(\mathcal{D}))$, lo cual es una contradicción porque $G(\mathcal{D}) \cong \mathbb{S}_4$. Por lo tanto $\mathcal{D}$ debe ser una $\mathbb{Z}_p$-extensión de una subcategoría de fusión $\mathcal{D}_e$. La subcategoría de fusión $\mathcal{D}_e$ es de dimensión 72, 120 o 180. Más aún $\mathcal{D}_e$ debe ser estable bajo la acción de $\mathbb{Z}_2$, ya que esta acción es trivial sobre $\operatorname{Irr}(\mathcal{D})$. Como antes, esto implica que $\mathcal{C}$ contiene una subcategoría de fusión $\mathcal{B}$ de dimensión 144, 240 o 360, respectivamente, que contiene la subcategoría central $\operatorname{Rep}\mathbb{Z}_2$. Así $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}_2} = \mathcal{C}(H)$, donde H es un subgrupo $\mathbb{Z}_2$-estable de $\mathbb{A}_6$ con orden 72, 120 o 180, respectivamente. Pero $\mathbb{A}_6$ no tiene subgrupos de orden 72, 120 ni 180, por lo tanto el tipo $(1,24;2,84)$ también es imposible para $\mathcal{D}$.

Supongamos finalmente que $\mathcal{D}$ es una categoría de fusión punteada. Tenemos que $\mathcal{D} = \mathcal{C}(\Gamma,\omega)$, donde $\omega : \Gamma\times\Gamma\times\Gamma \to \mathbb{K}^*$ es un 3-cociclo y Γ es un subgrupo resoluble no-abeliano de orden 360. Además $\mathbb{Z}_2$ actúa sobre Γ por automorfismos de grupo y el subgrupo Γ_0 de puntos fijos de Γ bajo esta $\mathbb{Z}_2$-acción es de orden 24. Sea S un subgrupo 5-Sylow de Γ. Como Γ es resoluble, existe H, un subgrupo $\{2,5\}$-Hall de Γ, y K, un subgrupo $\{3,5\}$-Hall de Γ, tales que $S \subseteq H$ y $S \subseteq K$. Un argumento de conteo muestra que $S \trianglelefteq H$ y $S \trianglelefteq K$ y por consiguiente $S \trianglelefteq \langle H, K\rangle = \Gamma$. Así S es el único subgrupo 5-Sylow de Γ y entonces S es $\mathbb{Z}_2$-estable. En este caso $\mathcal{C}(S,\omega|_S)^{\mathbb{Z}_2}$ es una subcategoría de fusión de $\tilde{\mathcal{C}}$ de dimensión 10, que contiene la subcategoría central $\operatorname{Rep}\mathbb{Z}_2$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ tiene una subcategoría de fusión $\mathcal{B}$ con dimensión 10, que contiene la subcategoría central $\operatorname{Rep}\mathbb{Z}_2$. La de-equivariantización $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}_2} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{A}_6)$ es de dimensión 5. Entonces $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}_2} = \mathcal{C}(T)$, donde T es un subgrupo $\mathbb{Z}_2$-estable de $\mathbb{A}_6$ de orden 5. Tenemos que $T = \{\mathrm{id}, (abcde), (acebd), (adbec), (aedcb)\}$, y sin pérdida de generalidad podemos asumir $a = 1$ y $b = 2$. Llegamos a una contradicción, ya que $(12)(12cde)(12) = (21cde) \neq (1ce2d)$. Esto prueba que $\widetilde{\mathcal{C}}$ no puede ser resoluble y finaliza la prueba del teorema. □

Teorema 5.2.22. *Sea $\tilde{\mathcal{C}}$ una categoría de fusión. Si $\tilde{\mathcal{C}}$ es Grothendieck equivalente a* $\operatorname{Rep} B_n^*$*, con n un número natural mayor o igual que 5, entonces $\tilde{\mathcal{C}}$ no es resoluble.*

Demostración. El álgebra de Hopf dual B_n^* encaja en una sucesión exacta central

$$\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{Z}_2} \longrightarrow B_n^* \longrightarrow \mathbb{K}\mathbb{A}_n \longrightarrow \mathbb{K}. \tag{5.2.14}$$

Por lo tanto $\operatorname{Rep} B_n^*$ es una $\mathbb{Z}_2$-extensión de $\operatorname{Rep}\mathbb{A}_n$. Así $\tilde{\mathcal{C}}$ es una $\mathbb{Z}_2$-extensión de una categoría de fusión $\mathcal{D}$, la cual es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep}\mathbb{A}_n$.

Supongamos que, por el contrario, $\tilde{\mathcal{C}}$ es resoluble. Por consiguiente también lo es $\mathcal{D}$ y por lo tanto $\mathcal{D}_{\mathrm{pt}} \neq \mathrm{Vect}$. Esto implica que $\mathbb{A}_n$ tiene representaciones de dimensión uno no triviales, lo cual es una contradicción. Luego $\tilde{\mathcal{C}}$ no puede ser resoluble, como enuncia el teorema. □

5.3. Resolubilidad y reglas de fusión de una categoría de fusión trenzada

Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión. Supongamos que $\operatorname{FPdim}\mathcal{C}$ es un entero (que es siempre el caso si $\mathcal{C}$ es resoluble). Por lo tanto la subcategoría adjunta $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ es íntegra, por Proposición 4.1.9.

Asumamos que $\mathcal{C}$ es trenzada. Recordemos que si $\mathcal{C}$ es resoluble e íntegra, entonces por Proposición 4.9.1 o bien ésta es punteada o bien contiene una subcategoría Tannakiana no trivial.

Teorema 5.3.1. *Sean $\mathcal{C}$, $\tilde{\mathcal{C}}$ categorías de fusión trenzadas Grothendieck equivalentes. Supongamos que $\mathcal{C}$ es resoluble. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(i) $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{pt}}$ es una categoría de fusión resoluble y además no es trivial si $\tilde{\mathcal{C}}$ no es trivial.

(ii) Si $\tilde{\mathcal{C}}$ no es punteada, entonces contiene una subcategoría Tannakiana no trivial.

Demostración. Como $\mathcal{C}$ es resoluble, el ítem (iv) de la Proposición 4.8.8 implica que $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}} \neq \mathrm{Vect}$. Además $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}$ es una categoría de fusión resoluble. Así $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{pt}} \neq \mathrm{Vect}$. Se tiene $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}} \cong \mathcal{C}(G(\mathcal{C}), \omega)$ para algún 3-cociclo inversible ω sobre $G(\mathcal{C})$. Por hipótesis $\mathcal{C}$ es resoluble, entonces el grupo $G(\mathcal{C})$ es resoluble.

Más aún, $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{pt}}$ es Grothendieck equivalente a $\mathcal{C}_{\mathrm{pt}}$ y por lo tanto existe un isomorfismo de grupos $G(\mathcal{C}) \cong G(\tilde{\mathcal{C}})$. Así $G(\tilde{\mathcal{C}})$, y *con más razón* $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{pt}}$, también son resolubles. Esto muestra (i).

Supongamos que $\tilde{\mathcal{C}}$ no es punteada, por lo que $\mathcal{C}$ tampoco es punteada. Notemos que $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ es Grothendieck equivalente a $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}$. Si $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}}$ es una subcategoría de fusión propia, entonces un argumento inductivo implica que $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}$ es resoluble y por lo tanto también lo es $\tilde{\mathcal{C}}$, ya que es una $U(\tilde{\mathcal{C}})$-extensión de $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}}$ y el grupo graduado universal $U(\tilde{\mathcal{C}})$ es abeliano. Así podemos asumir que $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}} = \tilde{\mathcal{C}}$ (en particular, lo mismo es cierto para $\mathcal{C}$). Como $\mathcal{C}$ es resoluble, entonces su dimensión Frobenius-Perron es un entero y por consiguiente $\mathcal{C}$ es en efecto íntegra. Por lo tanto $\tilde{\mathcal{C}}$ es también íntegra. Para demostrar la parte (ii) debemos asumir que $\tilde{\mathcal{C}}$ no es resoluble, en vista de la Proposición 4.9.1.

Por parte (i), $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{pt}}$ es resoluble y no trivial. Notemos que $\tilde{\mathcal{C}}$ no puede contener ninguna subcategoría de fusión no trivial no-degenerada. En efecto, si $\mathcal{C}$ fuera no-degenerada, entonces $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}} = \tilde{\mathcal{C}}'_{\mathrm{pt}} \subsetneq \tilde{\mathcal{C}}$, contradiciendo la suposición. Si, por otro lado, $\tilde{\mathcal{D}} \subseteq \tilde{\mathcal{C}}$ fuera una subcategoría propia no-degenerada, entonces $\tilde{\mathcal{C}} \cong \tilde{\mathcal{D}} \boxtimes \tilde{\mathcal{D}}'$, y ambas $\tilde{\mathcal{D}}$ y $\tilde{\mathcal{D}}'$ son Grothendieck equivalentes a subcategorías de fusión de $\mathcal{C}$. Un argumento inductivo implica que $\tilde{\mathcal{D}}$ y $\tilde{\mathcal{D}}'$ son resolubles y por lo tanto, también lo es $\tilde{\mathcal{C}}$.

Supongamos que $\tilde{\mathcal{C}}$ no contiene subcategorías Tannakianas no-triviales. Se sigue del Lema 4.9.8 que $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{pt}} = \tilde{\mathcal{C}}' \cong \mathrm{sVect}$ y $G[\tilde{X}] = \mathbf{1}$, para todo objeto simple $\tilde{X}$ de $\tilde{\mathcal{C}}$. Esto implica que $\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}_{\mathrm{pt}} = 2$ y $G[X] = \mathbf{1}$, para todo objecto simple X de $\mathcal{C}$.

Por otro lado, como $\mathcal{C}$ es resoluble y $\mathcal{C}_{\mathrm{ad}} = \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}$ debe ser una $\mathbb{Z}_p$-equivariantización de una categoría de fusión $\mathcal{D}$ para algún número primo p. En particular $\mathcal{C}$ contiene una subcategoría de fusión (punteada) de dimensión 2, y por lo tanto $p = 2$. Se sigue del Lema 4.8.12 que $\mathcal{C}$ tiene un objeto simple X de dimensión Frobenius-Perron 2. Además, para todo tal objeto simple X, se tiene $G[X] = \mathbf{1}$.

El teorema de Nichols-Richmond implica que $\mathcal{C}$ contiene una subcategoría de fusión $\overline{\mathcal{C}}$ de tipo $(1, 2; 2, 1; 3, 2)$, $(1, 3; 3, 1)$ o $(1, 1; 3, 2; 4, 1; 5, 1)$; ver [NR96, Theorem 11], [DNV15, Theorem 3.4]. La primera posibilidad no puede ocurrir en este caso, ya que el único objeto simple de dimensión 2 de $\overline{\mathcal{C}}$ es necesariamente estable bajo la acción de $G(\overline{\mathcal{C}}) \cong \mathbb{Z}_2$. La segunda posibilidad contradice la suposición de que $\mathrm{FPdim}\, \mathcal{C}_{\mathrm{pt}} = 2$. La última posibilidad también se descarta ya que $\overline{\mathcal{C}}$ debe ser una categoría de fusión resoluble, por lo cual $\overline{\mathcal{C}}_{\mathrm{pt}} \neq \mathrm{Vect}$. Esta contradicción muestra que $\tilde{\mathcal{C}}$ debe contener una subcategoría Tannakiana, y así (ii) se cumple. □

Proposición 5.3.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada. Supongamos que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$ es una subcategoría Tannakiana. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble si y sólo si $\mathcal{E}'$ es resoluble.*

Demostración. Si $\mathcal{C}$ es resoluble, entonces toda subcategoría de fusión de $\mathcal{C}$ es resoluble. En particular, $\mathcal{E}'$ es resoluble, que muestra la dirección "sólo si". Inversamente, supongamos que $\mathcal{E}'$ es resoluble. Como $\mathcal{E}$ es una subcategoría Tannakiana, es simétrica, y por lo tanto $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$. Entonces $\mathcal{E}$ es resoluble. Sea G un grupo finito tal que $\mathcal{E} \cong \mathrm{Rep}\, G$ como categorías de fusión trenzadas. Por consiguiente el grupo G es resoluble, por ítem (ii) de la Proposición 4.8.8.

Consideremos la categoría de fusión trenzada G-cruzada $\mathcal{C}_G$, por lo que $\mathcal{C} \cong (\mathcal{C}_G)^G$ es una equivariantización. Además, la categoría $\mathcal{C}_G$ es una categoría de fusión G-graduada, y la componente trivial $\mathcal{C}_G^0$ de esta graduación satisface $(\mathcal{C}_G^0)^G \cong \mathcal{E}'$ (ver Proposición 4.6.6).

Por lo tanto $\mathcal{C}_G^0$ es resoluble. Como G es resoluble, entonces también lo es $\mathcal{C}_G$ y $\mathcal{C} \cong (\mathcal{C}_G)^G$. Esto prueba la dirección "si" y finaliza la prueba de la proposición. □

Observación 5.3.3. Sea $\tilde{\mathcal{C}}$ una categoría de trenzada. Supongamos que $\tilde{\mathcal{C}}$ es Grothendieck equivalente a una categoría de fusión trenzada resoluble $\mathcal{C}$ y $\tilde{\mathcal{C}}$ no es resoluble. Asumamos además que $\operatorname{FPdim} \tilde{\mathcal{C}}$ es mínima con respecto a estas propiedades.

Entonces $\tilde{\mathcal{C}}$ debe satisfacer las siguientes condiciones:

(i) $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{ad}} = \tilde{\mathcal{C}}$.

(ii) $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{pt}} \neq \mathrm{Vect}$ es una subcategoría de fusión resoluble y $(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathrm{pt}})' = \tilde{\mathcal{C}}$.

(iii) $\tilde{\mathcal{C}}$ contiene una subcategoría Tannakiana no trivial y para toda subcategoría Tannakiana $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{\mathcal{E}}' = \tilde{\mathcal{C}}$.

(iv) $\tilde{\mathcal{C}}$ no contiene subcategorías de fusión no-degeneradas propias.

En efecto, (i) y (iv) pueden verse como en la prueba del Teorema 5.3.1, (ii) sigue de (i) y el Lema 4.9.19, y (iii) sigue del Teorema 5.3.1 y la Proposición 5.3.2.

Capítulo 6

La tabla de caracteres de una categoría de fusión esférica

En este capítulo recordaremos definiciones y propiedades asociadas a una clase particular de categorías de fusión, las categorías esféricas. Para estos temas se recomienda la siguiente bibliografía [BK01, Müg03c, DGNO07, DGNO10].

En el contexto de categorías de fusión esféricas, también consideramos el invariante provisto por la S-matriz del centro de Drinfeld y mostramos que este invariante si determina la resolubilidad de una categoría de fusión siempre que sea de tipo grupo. Estos resultados se encuentran en el trabajo [EN16].

6.1. Categorías de fusión esféricas

Definición 6.1.1. Una *estructura esférica* sobre una categoría de fusión $\mathcal{C}$ es un isomorfismo natural de funtores tensoriales $\psi : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to (\ )^{**}$ tal que

$$d_+(X) = d_-(X),$$

para todo objeto X de $\mathcal{C}$, donde $d_\pm(X) = \mathrm{Tr}_\pm(\mathrm{id}_X)$, donde para todo endomorfismo $f : X \to X$, $\mathrm{Tr}_\pm(f) \in \mathbb{K}$ están definidos como las composiciones

$$\mathrm{Tr}_+(f) : \mathbf{1} \longrightarrow X \otimes X^* \xrightarrow{\psi_X f \otimes \mathrm{id}} X^{**} \otimes X^* \longrightarrow \mathbf{1},$$

$$\mathrm{Tr}_-(f) : \mathbf{1} \longrightarrow X^* \otimes X^{**} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f \psi_X^{-1}} X^* \otimes X \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Definición 6.1.2. Una categoría de fusión $\mathcal{C}$ se dice *esférica*, si está munida de una estructura esférica.

Definición 6.1.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión esférica. La *dimensión cuántica* o *categórica* de $X \in \mathcal{C}$ se denota por

$$d_X := d_+(X) = d_-(X),$$

y la *dimensión categórica* o *global* de $\mathcal{C}$ se define como

$$\dim \mathcal{C} = \sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} d_X^2.$$

La *traza cuántica* de un endomorfismo $f : X \to X$ se denota por $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}_+(f) = \mathrm{Tr}_-(f)$. Ver [DGNO10, Subsection 2.4.3], [ENO05, Subsection 2.2].

Definición 6.1.4. Una categoría de fusión se denomina *pseudo-unitaria* si su dimensión global coincide con su dimensión de Frobenius-Perron.

Proposición 6.1.5. *Toda categoría de fusión pseudo-unitaria $\mathcal{C}$ admite una única estructura esférica con respecto a la cual las dimensiones cuánticas de los objetos simples son positivos y coinciden con sus dimensiones de Frobenius-Perron.*

Demostración. Ver [ENO05, Proposition 8.23]. □

Proposición 6.1.6. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión débilmente íntegra. Entonces $\mathcal{C}$ es pseudo-unitaria. En particular, la categoría de representaciones de una cuasi-álgebra de Hopf semisimple de dimensión finita es pseudo-unitaria.*

Demostración. Ver [ENO05, Proposition 8.24]. □

6.2. Categorías Modulares y S-matrices

Definición 6.2.1. Una categoría *premodular* es una categoría de fusión trenzada munida con una estructura esférica.

Equivalentemente, una categoría premodular $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión trenzada munida de una *estrucura ribbon*, es decir, un automorfismo natural $\theta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ que satisface

$$\theta_{X\otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y) c_{Y,X} c_{X,Y}, \quad \theta_X^* = \theta_{X^*}, \tag{6.2.1}$$

para todo objeto X, Y de $\mathcal{C}$ [Bru00] (ver también [DGNO10, Subsection 2.8.2]).

Definición 6.2.2. Sea $\mathcal{C}$ una categoría premodular. La *central charge* de $\mathcal{C}$ es el radio

$$\xi(\mathcal{C}) = \frac{\tau^+(\mathcal{C})}{\sqrt{\dim \mathcal{C}}},$$

donde $\sqrt{\dim \mathcal{C}}$ es la raíz cuadrada positiva y $\tau^+(\mathcal{C}) = \sum_{X\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} \theta_X d_X^2$. Ver [DGNO10, Subsection 6.2].

Definición 6.2.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría premodular. La S-matriz de $\mathcal{C}$ se define de la forma $S = (S_{XY})_{X,Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})}$, donde para todo $X, Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$,

$$S_{X,Y} = \mathrm{Tr}(c_{Y,X}c_{X,Y}) \in \mathbb{K}$$

es la traza cuántica de la trenza cuadrada $c_{Y,X}c_{X,Y} : X \otimes Y \to X \otimes Y$.

Observación 6.2.4. La S-matriz de $\mathcal{C}$ es una matriz simétrica $n \times n$, donde $n = |\,\mathrm{Irr}(\mathcal{C})|$ es el número de objetos simples de $\mathcal{C}$, y satisface $S_{X^*Y^*} = S_{XY}$ para todo $X, Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$. Además $S_{X\mathbf{1}} = S_{\mathbf{1}X} = d_X$.

Definición 6.2.5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de fusión trenzada. Se define la matriz $\tilde{S} = (\tilde{S}_{X,Y})_{X,Y\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})}$ por

$$\tilde{S}_{X,Y} := \frac{\mathrm{Tr}_- \otimes \mathrm{Tr}_+(c_{Y,X}c_{X,Y})}{d_-(X)d_+(Y)}.$$

Definición 6.2.6. Una categoría de fusión trenzada $\mathcal{C}$ se dice *no degenerada* si la $\tilde{S}$-matriz correspondiente es no degenerada.

Definición 6.2.7. Una categoría premodular $\mathcal{C}$ se denomina *modular* si la S-matriz es no-degenerada [Tur94] o, equivalentemente, si ella es no-degenerada [DGNO10, Proposition 3.7].

Observación 6.2.8. Si $\mathcal{C}$ es una categoría de fusión esférica, entonces su centro de Drinfeld $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es una categoría modular de dimensión global $\dim \mathcal{Z}(\mathcal{C}) = (\dim \mathcal{C})^2$ y central charge $\xi(\mathcal{Z}(\mathcal{C})) = 1$ [Müg03a], [DGNO10, Example 6.9].

Proposición 6.2.9. *Se verifica*

$$S_{XY} = \theta_X^{-1}\theta_Y^{-1} \sum_{Z\in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} N_{XY}^Z \theta_Z d_Z. \tag{6.2.2}$$

para todo $X, Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$.

Demostración. Ver [NSV+13, Proposition 4.19]. □

Teorema 6.2.10. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría modular tal que $\dim(\mathcal{C}) = n^2$, $n \in \mathbb{Z}^+$, y tal que $\xi(\mathcal{C}) = 1$. Asumamos que $\mathcal{C}$ contiene una subcategoría simétrica $\mathcal{L}$ tal que $dim(\mathcal{L}) = n$. Entonces o bien $\mathcal{C}$ es el centro de una categoría punteada ó bien contiene un objeto con dimensión no entera.*

Demostración. Ver [DGNO07, Theorem 4.8]. □

Corolario 6.2.11. *[DGNO07, Corollary 4.14] Una categoría modular $\mathcal{C}$ es de tipo grupo si y sólo si los objetos simples de $\mathcal{C}$ tienen dimensión entera y existe una subcategoría simétrica $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}$ tal que $(\mathcal{L}')_{\mathrm{ad}} \subseteq \mathcal{L}$.*

6.2.1. La fórmula de Verlinde

Supongamos que $\mathcal{C}$ es una categoría modular. Entonces para todo $X, Y, Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$, la multiplicidad N_{XY}^Z de Z en el producto tensorial $X \otimes Y$ está dada por la *fórmula de Verlinde*:

$$N_{XY}^Z = \frac{1}{\dim \mathcal{C}} \sum_{T \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} \frac{S_{XT}\, S_{YT}\, S_{Z^*T}}{d_T}, \tag{6.2.3}$$

donde d_T denota la dimensión cuántica del objeto T y $\dim \mathcal{C}$ es la dimensión global de $\mathcal{C}$. Ver [BK01, Theorem 3.1.13].

Los elementos de la S-matriz satisfacen la siguiente fórmula (para una prueba ver [Müg03c, Lemma 2.4 (iii)]):

$$S_{XY} S_{XZ} = d_X \sum_{W \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} N_{YZ}^W S_{XW}, \text{ con } X, Y, Z \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}). \tag{6.2.4}$$

Observación 6.2.12. La condición (6.2.4) puede verse como: para cualquier $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$ fijo, la aplicación

$$h_X : Y \mapsto \frac{S_{XY}}{d_X}, \text{ con } Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}) \tag{6.2.5}$$

da lugar a un homomorfismo h_X de anillos $K_0(\mathcal{C}) \to \mathbb{K}$. Es decir, los objetos simples de $\mathcal{C}$ dan lugar a los caracteres del anillo de Grothendieck $K_0(\mathcal{C})$. Se tiene $h_{\mathbf{1}}(Y) = d_Y$.

Los caracteres satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\sum_{X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})} h_Y(X) h_Z(X^*) = 0 \text{ para } Y \ncong Z.$$

Teorema 6.2.13. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría premodular. Sea θ una estructura ribbon de $\mathcal{C}$ (es decir un automorfismo natural $\theta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ que satisface (6.2.1)). Entonces θ_X es una raíz de la unidad para todo $X \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Este resultado se debe a Anderson, Moore y Vafa [AM88] y [Vaf88] □

6.3. S-equivalencia de categorías de fusión esféricas

Definición 6.3.1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías de fusión esféricas. Diremos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *S-equivalentes* si existe una biyección $f : \mathrm{Irr}(\mathcal{Z}(\mathcal{C})) \to \mathrm{Irr}(\mathcal{Z}(\mathcal{D}))$ tal que

$$f(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \text{ y } S_{f(X),f(Y)} = S_{X,Y}, \text{ para todo } X, Y \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C}).$$

El siguiente lema resume algunas de las propiedades principales de la S-equivalencia.

Lema 6.3.2. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías de fusión esféricas y supongamos que $f : \mathrm{Irr}(\mathcal{Z}(\mathcal{C})) \to \mathrm{Irr}(\mathcal{Z}(\mathcal{D}))$ es una S-equivalencia. Entonces se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $d_{f(X)} = d_X$, *para todo* $X \in \mathrm{Irr}(\mathcal{C})$. *En particular,* $\dim \mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \dim \mathcal{Z}(\mathcal{D})$.

(ii) $f : \mathrm{Irr}(\mathcal{Z}(\mathcal{C})) \to \mathrm{Irr}(\mathcal{Z}(\mathcal{D}))$ *es una equivalencia de Grothendieck.*

(iii) Para toda subcategoría de fusión $\mathcal{E}$ de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ se tiene $f(\mathcal{E}') = f(\mathcal{E})'$. En particular, $f(\mathcal{E})$ es simétrica (respectivamente, no-degenerada) si y sólo si también lo es $\mathcal{E}$.

(iv) Para toda subcategoría de fusión $\mathcal{E}$ de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, f mapea el centralizador proyectivo de $\mathcal{E}$ al centralizador proyectivo de $f(\mathcal{E})$.

Demostración. (i) Para todo objeto simple X de $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ se tiene

$$d_X = d_{\mathbf{1}} d_X = S_{\mathbf{1},X} = S_{\mathbf{1},f(X)} = d_{\mathbf{1}} d_{f(X)} = d_{f(X)},$$

y por lo tanto $\dim \mathcal{Z}(\mathcal{C}) = \dim \mathcal{Z}(\mathcal{D})$.

(ii) Sigue de (i) y la fórmula de Verlinde (6.2.3).

(iii) Es consecuencia del hecho de que dos objetos simples X y Y se centralizan uno al otro si y sólo si $S_{X,Y} = d_X d_Y$.

(iv) Sean X y Y objetos simples de $\mathcal{C}$. Se sigue de la Proposición 4.9.11 que X pertenece al centralizador proyectivo de Y si y sólo si X pertenece al centralizador de $Y \otimes Y^*$. En vista de la parte (iii) esto ocurre si y sólo si $f(X)$ centraliza a $f(Z)$, para todo $Z \in \operatorname{Irr}(\mathcal{C})$ tal que $N_{Y\otimes Y^*}^{Z} \neq 0$. Como, por (ii), f es una equivalencia de Grothendieck, entonces $f(Y)^* = f(Y^*)$ (Proposición 5.1.2 (iii)), y se sigue que la última condición es equivalente a la condición de que $f(X)$ centraliza a $f(Y) \otimes f(Y)^*$, es decir, $f(X)$ pertenece al centralizador proyectivo de $f(Y)$.

$\square$

Teorema 6.3.3. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías de fusión esféricas S-equivalentes. Entonces $\mathcal{C}$ es de tipo grupo si y sólo si también lo es $\mathcal{D}$.*

Demostración. Se tiene que $\mathcal{C}$ es de tipo grupo si y sólo si $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es de tipo grupo. Supongamos que este es el caso. En particular $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, y por lo tanto también $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$, son íntegras. Como $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es una categoría modular, El Corolario 6.2.11 implica que contiene una subcategoría simétrica $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E}'_{\mathrm{ad}} \subseteq \mathcal{E}$. Como toda S-equivalencia preserva centralizadores, subcategorías simétricas y es una equivalencia de Grothendieck entre $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ y $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$, implica que $f(\mathcal{E})$ es una subcategoría simétrica de $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$ y $f(\mathcal{E})'_{\mathrm{ad}} = f(\mathcal{E}'_{\mathrm{ad}}) \subseteq f(\mathcal{E})$ (ver Proposición 5.1.2 (iv)). Así $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$ y por lo tanto también $\mathcal{D}$ son de tipo grupo. Esto implica el teorema. $\square$

Lema 6.3.4. *Sean G y Γ grupos finitos y sean $\omega : G \times G \times G \to \mathbb{K}^*$, $\omega' : \Gamma \times \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{K}^*$ 3-cociclos sobre G y Γ, respectivamente. Supongamos que las categorías $\mathcal{C}(G, \omega)$ y $\mathcal{C}(\Gamma, \omega')$ son S-equivalentes y G es resoluble. Entonces Γ es resoluble.*

Demostración. Sea $f : \operatorname{Irr}(\mathcal{Z}(\mathcal{C}(\Gamma, \omega'))) \to \operatorname{Irr}(\mathcal{Z}(\mathcal{C}(G, \omega)))$ una S-equivalencia. El centro de la categoría $\mathcal{C}(\Gamma, \omega')$ contiene una subcategoría Tannakiana $\mathcal{E}$ equivalente a $\operatorname{Rep}\Gamma$ como categorías de fusión trenzadas. En vista del Lema 6.3.2, $f(\mathcal{E})$ es una subcategoría de fusión simétrica de $\mathcal{Z}(\mathcal{C}(G, \omega))$ la cual es Grothendieck equivalente a $\operatorname{Rep}\Gamma$. Al ser simétrica, $f(\mathcal{E})$ es equivalente como una categoría de fusión a la categoría $\operatorname{Rep} F$ para algún grupo finito F. Por lo tanto F es resoluble, ya que $\mathcal{Z}(\mathcal{C}(G, \omega))$ es resoluble, por Proposición 4.8.8. Como las categorías $\operatorname{Rep}\Gamma$ y $\operatorname{Rep} F$ son Grothendieck equivalentes, entonces los grupos Γ y F tienen la misma tabla de caracteres, esto implica que Γ es resoluble. Así $\mathcal{C}(\Gamma, \omega')$ es resoluble, como afirmamos. $\square$

Teorema 6.3.5. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías de fusión esféricas S-equivalentes y supongamos que $\mathcal{C}$ es de tipo grupo. Entonces $\mathcal{C}$ es resoluble si y sólo si $\mathcal{D}$ es resoluble.*

Demostración. Como $\mathcal{C}$ es de tipo grupo, $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es equivalente al centro de una categoría de fusión punteada $\mathcal{Z}(\mathcal{C}(G,\omega))$, para algún grupo finito G y 3-cociclo ω sobre G. Así $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ contiene una subcategoría Tannakiana $\mathcal{E}$ equivalente a $\operatorname{Rep} G$ como categorías de fusión trenzadas, tal que $(\dim \mathcal{E})^2 = \dim \mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

Al ser Grothendieck equivalente a $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$ es también de tipo grupo, en vista del Teorema 6.3.3. Así $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ es una categoría modular íntegra de dimensión $(\dim \mathcal{D})^2$ y central charge 1. Notemos además que si f es una S-equivalencia, entonces $f(\mathcal{E})$ es una subcategoría simétrica de $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$ tal que $\dim \mathcal{Z}(\mathcal{D}) = (\dim f(\mathcal{E}))^2$. El Teorema 6.2.10 implica que $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$ es equivalente al centro de una categoría de fusión punteada, es decir, $\mathcal{Z}(\mathcal{D}) \cong \mathcal{Z}(\mathcal{C}(\Gamma,\omega'))$, para algún grupo finito Γ y 3-cociclo ω' sobre Γ. El teorema sigue del Lema 6.3.4. $\square$

Bibliografía

[AM88] G. Anderson and G. Moore. Rationality in conformal field theory. *Communications in mathematical physics*, 117(3):441–450, 1988.

[AS09] N. Andruskiewitsch and W. F. Santos. The beginnings of the theory of hopf algebras. *Acta applicandae mathematicae*, 108(1):3–17, 2009.

[AS10] N. Andruskiewitsch and H. Schneider. On the classification of finite-dimensional pointed hopf algebras. *Annals of mathematics*, pages 375–417, 2010.

[Bén67] J. Bénabou. Introduction to bicategories. In *Reports of the Midwest Category Seminar*, pages 1–77. Springer, 1967.

[BK01] B. Bakalov and A. Kirillov. *Lectures on tensor categories and modular functors*, volume 21. American Mathematical Soc., 2001.

[BN11] A. Bruguières and S. Natale. Exact sequences of tensor categories. *International Mathematics Research Notices*, 2011(24):5644–5705, 2011.

[BN13] S. Burciu and S. Natale. Fusion rules of equivariantizations of fusion categories. *Journal of Mathematical Physics*, 54(1):3511, 2013.

[Bor53] A. Borel. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogenes de groupes de lie compacts. *Annals of Mathematics*, pages 115–207, 1953.

[Bru00] A. Bruguières. Catégories prémodulaires, modularisations et invariants des variétés de dimension 3. *Mathematische Annalen*, 316(2):215–236, 2000.

[Car57] P. Cartier. Hyperalgebres et groupes de lie formels. *Seminaire Sophus Lie*, page 2e annee: 1955/56, 1957.

[Del02] P. Deligne. Catégories tensorielles. *Mosc. Math. J*, 2(2):227–248, 2002.

[DGNO07] V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik. Group-theoretical properties of nilpotent modular categories. *arXiv preprint arXiv:0704.0195*, 2007.

[DGNO10] V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik. On braided fusion categories i. *Selecta Mathematica*, 16(1):1–119, 2010.

[DNV15] J. Dong, S. Natale, and L. Vendramin. Frobenius property for fusion categories of small integral dimension. *Journal of Algebra and Its Applications*, 14(02):1550011, 2015.

[DPR+90] R. Dijkgraaf, V. Pasquier, P. Roche, et al. Quasi-quantum groups related to orbifold models. 1990.

[Dri87] V. Drinfeld. Quantum groups. *Proc. Int. Congr. Math.*, 1:798–820, 1987.

[Dri89] V. Drinfeld. Quasi-hopf algebras. *(Russian) Algebra Anal.*, 1(6):114–148, 1989.

[EG03] P. Etingof and S. Gelaki. The classification of finite-dimensional triangular hopf algebras over an algebraically closed field of characteristic 0. *Mosc. Math. J*, 3(1):37–43, 2003.

[EGNO15] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik. *Tensor categories*, volume 205. American Mathematical Soc., 2015.

[EN16] M. G. Escañuela and S. Natale. On fusion rules and solvability of a fusion category. *Journal of Group Theory*, 2016.

[ENO05] P. Etingof, D. Nikshych, and V. Ostrik. On fusion categories. *Annals of Mathematics*, pages 581–642, 2005.

[ENO11] P. Etingof, D. Nikshych, and V. Ostrik. Weakly group-theoretical and solvable fusion categories. *Advances in Mathematics*, 226(1):176–205, 2011.

[EO04] P. Etingof and V. Ostrik. Finite tensor categories. *Mosc. Math. J*, 4(3):627–654, 2004.

[Gab03] M. R. Gaberdiel. An algebraic approach to logarithmic conformal field theory. *International Journal of Modern Physics A*, 18(25):4593–4638, 2003.

[Gan98] F. R. Gantmacher. The theory of matrices. *A.M.S. Chelsea Publishing*, 1998.

[GN08] S. Gelaki and D. Nikshych. Nilpotent fusion categories. *Advances in Mathematics*, 217(3):1053–1071, 2008.

[GN09] S. Gelaki and D. Naidu. Some properties of group-theoretical categories. *Journal of Algebra*, 322(8):2631–2641, 2009.

[GNN09] S. Gelaki, D. Naidu, and D. Nikshych. Centers of graded fusion categories. *Algebra & Number Theory*, 3(8):959–990, 2009.

[Hun03] T. W. Hungerford. *Algebra. New York*. 2003.

[IK02] M. Izumi and H. Kosaki. *Kac Algebras Arising from Composition of Subfactors: General Theory and Classification: General Theory and Classification*. Number 750. American Mathematical Soc., 2002.

[Isa76] I. M. Isaacs. Character theory of finite groups. *Pure and Applied Mathematics*, 69, 1976.

[Jim85] M. Jimbo. Aq-difference analogue of u (g) and the yang-baxter equation. *Letters in Mathematical Physics*, 10(1):63–69, 1985.

[JM09] A. Jedwab and S. Montgomery. Representations of some hopf algebras associated to the symmetric group s n. *Algebras and representation theory*, 12(1):1–17, 2009.

[Kac68] G. I. Kac. Extensions of groups to ring groups. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 5(3):451, 1968.

[Kas95] C. Kassel. Quantum groups. *Graduate Texts in Mathematics*, 155, 1995.

[KMM02] Y. Kashina, G. Mason, and S. Montgomery. Computing the frobenius–schur indicator for abelian extensions of hopf algebras. *Journal of Algebra*, 251(2):888–913, 2002.

[Mac98] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998.

[Mas96] A. Masuoka. The p^n theorem for semisimple hopf algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(3):735–737, 1996.

[Mas99] A. Masuoka. Extensions of hopf algebras. *Trabajos de Matemática*, 41:99, 1999.

[Mas02] A. Masuoka. Hopf algebra extensions and cohomology. (43), 2002.

[Mon93] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*. Number 82. American Mathematical Soc., 1993.

[Müg00] M. Müger. Galois theory for braided tensor categories and the modular closure. *Advances in Mathematics*, 150(2):151–201, 2000.

[Müg03a] M. Müger. From subfactors to categories and topology i: Frobenius algebras in and morita equivalence of tensor categories. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 180(1):81–157, 2003.

[Müg03b] M. Müger. From subfactors to categories and topology ii: The quantum double of tensor categories and subfactors. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 180(1):159–219, 2003.

[Müg03c] M. Müger. On the structure of modular categories. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 87(02):291–308, 2003.

[Müg04] M. Müger. Galois extensions of braided tensor categories and braided crossed g-categories. *Journal of Algebra*, 277(1):256–281, 2004.

[MW98] S. Montgomery and S. Witherspoon. Irreducible representations of crossed products. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 129(3):315–326, 1998.

[Nat03] S. Natale. On group theoretical hopf algebras and exact factorizations of finite groups. *Journal of Algebra*, 270(1):199–211, 2003.

[Nat05] S. Natale. Frobenius–schur indicators for a class of fusion categories. *Pacific journal of mathematics*, 221(2):353–377, 2005.

[Nat06] S. Natale. R-matrices and hopf algebra quotients. *International Mathematics Research Notices*, 2006:47182, 2006.

[Nat07] S. Natale. Semisolvability of semisimple hopf algebras of low dimension, no. 186. *Mem. Am. Math. Soc., Am. Math. Soc., Providence, RI*, 2007.

[Nat10] S. Natale. Hopf algebra extensions of group algebras and tambara-yamagami categories. *Algebras and representation theory*, 13(6):673–691, 2010.

[Nat11] S. Natale. On quasitriangular structures in hopf algebras arising from exact group factorizations. *Communications in Algebra*, 39(12):4763–4775, 2011.

[Nat14] S. Natale. On weakly group-theoretical non-degenerate braided fusion categories. *Journal of Noncommutative Geometry*, 8(4):1043–1060, 2014.

[Nik08] D. Nikshych. Non-group-theoretical semisimple hopf algebras from group actions on fusion categories. *Selecta Mathematica*, 14(1):145–161, 2008.

[NNW09] D. Naidu, D. Nikshych, and S. Witherspoon. Fusion subcategories of representation categories of twisted quantum doubles of finite groups. *International Mathematics Research Notices*, page rnp084, 2009.

[NP12] S. Natale and J. Y. Plavnik. On fusion categories with few irreducible degrees. *Algebra Number Theory*, 6(6):1171–1197, 2012.

[NR96] W. D. Nichols and M. B. Richmond. The grothendieck group of a hopf algebra. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 106(3):297–306, 1996.

[NR11] D. Naidu and E. C. Rowell. A finiteness property for braided fusion categories. *Algebras and representation theory*, 14(5):837–855, 2011.

[NR16] S. Natale and E. Pacheco Rodríguez. Graphs attached to simple frobenius-perron dimensions of an integral fusion category. *Monatshefte für Mathematik*, 179(4):615–649, 2016.

[NSV+13] D. Nikshych, A. Sever, P. Vieira, T. Wang, E. S. Wolf, D. F. Anderson, E. Chen, D. Tseng, H. Emerson, B. Nica, et al. Morita equivalence methods in classification of fusion categories. *Hopf Algebras and Tensor Categories. Contemp. Math*, 585:289–325, 2013.

[NZ89] W. Nichols and M. Zoeller. A hopf algebra freeness theorem. *American Journal of Mathematics*, 111(2):381–385, 1989.

[Ost03a] V. Ostrik. Module categories over the drinfeld double of a finite group. *International Mathematics Research Notices*, 2003(27):1507–1520, 2003.

[Ost03b] V. Ostrik. Module categories, weak hopf algebras and modular invariants. *Transformation Groups*, 8(2):177–206, 2003.

[Ser77] J. P. Serre. Linear representations of finite groups, translated from the second french edition by leonard l. scott. *Graduate Texts in Mathematics*, 42, 1977.

[Shi15] K. Shimizu. The monoidal center and the character algebra. *arXiv preprint arXiv:1504.01178*, 2015.

[Sie03] J. Siehler. Near-group categories. *Algebraic & Geometric Topology*, 3(2):719–775, 2003.

[Swe69] M. Sweedler. Hopf algebras. 1969.

[Tur94] V. Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, volume 18. Walter de Gruyter, 1994.

[TY98] D. Tambara and S. Yamagami. Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups. *Journal of Algebra*, 209(2):692–707, 1998.

[Vaf88] C. Vafa. Toward classification of conformal theories. *Physics Letters B*, 206(3):421–426, 1988.

[W+58] H. Wielandt et al. Über produkte von nilpotenten gruppen. *Illinois Journal of Mathematics*, 2(4B):611–618, 1958.