Metodología y Práctica de la Enseñanza FAMAF – U.N.C.

INFORME FINAL

Título: TRABAJO CON RAZONES, PROPORCIONES Y SEMEJANZA DE FIGURAS EN UNA ESCUELA SECUNDARIA
Autores: González, Fernando; Salvatierra, Esteban.
Profesora Supervisora de Prácticas: Viola, Fernanda.
Carrera: Profesorado en Matemática.
Fecha: 17-02-2017

Clasificación

97 Mathematical Education

Palabras Claves

Proporcionalidad – Proporción – Razón – Semejanza – Triángulos semejantes – Criterios de semejanza

Resumen

El presente informe expone las prácticas que realizamos en un colegio de la ciudad de Córdoba. Estas se desarrollaron en dos divisiones (A y B) de un tercer año, donde trabajamos con semejanza de figuras, proporción aritmética y razones matemáticas. Para abordar estos temas implementamos una actividad práctica inicial en la cual se ampliaron figuras geométricas utilizando los conceptos de proporcionalidad presentes en las figuras semejantes. Luego se realizaron actividades para el trabajo de la proporcionalidad, ubicándola en distintos contextos a través de problemas simples. Para tratar la semejanza y llegar a definirla se propusieron actividades exploratorias que pusieron en evidencia la relación que existe entre la forma de las figuras, sus ángulos y la proporcionalidad entre sus lados.

Índice

1. **INTRODUCCIÓN**……..6
    1.1 La institución…...6
    1.2 Cursos - distribución de los alumnos…7
    1.3 Recursos empleados en la clase de matemática….8
    1.4 Observaciones de clases…..9
        1.4.1 Estilo de trabajo en la clase de matemática…...9
        1.4.2 Desarrollo de actividades de enseñanza en distintos Espacios curriculares…10
2. **ELABORACIÓN DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA E IMPLEMENTACIÓN EN EL AULA**…....11
    2.1 Elaboración de la propuesta de enseñanza…..11
        2.1.1 Objetivos…..11
        2.1.2 Selección, organización y secuenciación de los contenidos…..12
        2.1.3 Tareas y actividades…...14
        2.1.4 Guiones conjeturales de algunas clases…..16
        2.1.5 Evaluación de los aprendizajes…...48
        2.1.6 Cronograma tentativo de actividades…49
    2.2 Implementación de la propuesta de enseñanza…50
        2.2.1 Cronograma efectivo de las prácticas…...50
        2.2.2 Nuestras clases…53
        2.2.3 Instancias de evaluación…...93
            2.2.3.1 Evaluación formativa en Tercero “A”…...95
            2.2.3.2 Evaluación formativa en Tercero “B”…100
            2.2.3.3 Evaluación sumativa en Tercero “A”…105
            2.2.3.4 Evaluación sumativa en Tercero “B”…110
            2.2.3.5 Proceso de puntuación y calificación…114
            2.2.3.6 Resultados de la evaluación sumativa …118
3. **ELECCIÓN Y ANÁLISIS DE UNA PROBLEMÁTICA**
    Resoluciones y utilización del lenguaje en el aprendizaje de la proporcionalidad.…119
4. **REFLEXIONES FINALES**…..127
5. **BIBLIOGRAFÍA**…129
    5.1 Soporte Teórico…..129
    5.2 Manuales que consultamos para la elaboración de algunas actividades…129
6. **ANEXOS** …...130
    6.1 ANEXO I Actividades planificadas…..130
    6.2 ANEXO II Material de estudio que le entregamos a los alumnos…..142
    6.3 ANEXO III Planificación del profesor titular…146

1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo procedemos, en primer lugar, a caracterizar la institución en la cual realizamos nuestras prácticas docentes. Con datos obtenidos de las observaciones previas a nuestras prácticas, expondremos una información general acerca del colegio: entorno, tipo de gestión, infraestructura edilicia, distribución espacial, especialidad del ciclo orientado y algún contexto histórico de la institución.

En la segunda y tercera sección, describimos aquellos aspectos vinculados con los cursos donde trabajamos: cantidad de estudiantes por sexo, distribución del espacio en cuanto a mobiliario y grupos de alumnos, recursos utilizados en el aula por los distintos docentes, empleo del tiempo, y distintas interacciones que se produjeron entre los docentes y los alumnos.

Luego pasaremos al análisis de la forma de trabajar del curso basado en las observaciones del aula que realizamos antes de comenzar a planificar las clases. Procuramos traslucir los hábitos que caracterizan al curso dentro del aula, seleccionando aquello que nos pareció relevante tener en cuenta en nuestra labor.

1.1 La Institución

La escuela nació el 6 de marzo de 1961 por una resolución de la Subsecretaría de Instrucción Pública de la Provincia, que autorizó su funcionamiento. No contaba con edificio propio y solo estaba destinada a recibir alumnos que transitaban la escolaridad primaria, con doble escolaridad común y musical. En el año 1968 se crea el nivel medio, constituyéndose en una institución única en su tipo en Argentina y en Sud América. Le confiere esta característica la modalidad de doble escolaridad, común y musical, ambas obligatorias que abarca desde los 4 hasta los 17 años.

El colegio se ubica en las inmediaciones de la ciudad universitaria. Es mixto, de gestión estatal y en él coexisten los niveles inicial, primario, secundario y superior no universitario.

El Ciclo Orientado se especializa en Arte - Música; así los alumnos que cumplen con la formación obligatoria, egresan con el título de Bachiller Orientado en Humanidades - Especialidad Arte - Música.

El edificio posee dos plantas. En la planta baja niveles inicial y primario. Allí se encuentra un amplio anfiteatro, el comedor, la cantina, baños y un gran patio. En el primer piso se hallan la dirección del nivel secundario, dos preceptorías, sala de profesores (que incluye una pequeña cocina), baños, salas de usos múltiples (utilizada para la proyección de videos), hemeroteca-biblioteca, salas de ensayo musical, laboratorio de ciencias naturales y doce aulas pertenecientes al nivel secundario (hay dos divisiones por año).

Formalmente, el horario de ingreso de los alumnos en el nivel secundario es a las 7:40 hs y los alumnos se retiran entre las 16:00 y las 17:00 hs. El timbre que anuncia la formación inicial suena aproximadamente a las 7:35 hs y puede repetirse a las 7:40hs si es necesario. Los docentes colaboran con los preceptores buscando a los estudiantes por las aulas donde van apenas ingresan y dejan sus útiles en los bancos. Luego de que hayan formado, los alumnos entonan “Saludo a la bandera” mientras dos alumnos de un mismo curso la izan; después, la vicedirectora, si lo hay, procede a dar algún comunicado e invita a los chicos a pasar a las aulas.

Los alumnos, pasada esta instancia, ingresan efectivamente a las aulas alrededor de las 7:55 hs de la mañana.

1.2 Cursos - distribución de los alumnos

Los cursos que nos fueron asignados para el desarrollo de nuestras prácticas docentes son tercero “A” y “B”.

- 3° Año A: este curso tiene 23 alumnos de los cuales 17 son mujeres y 6 son varones.
- 3° Año B: este curso tiene 27 alumnos, de los cuales 19 son mujeres y 8 son varones.

En la siguiente tabla se presentan los horarios de ambos cursos. Las horas cátedra designadas para matemática en
3° “A” se muestran en color Azul, mientras que las de 3° “B” en verde.

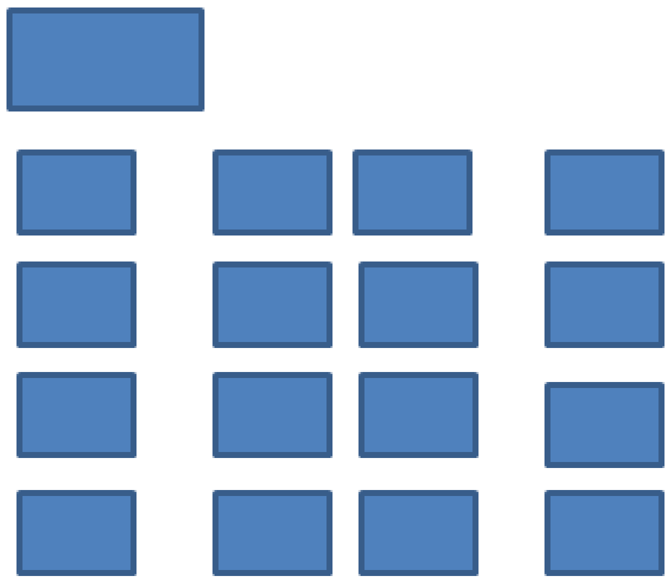
	Lunes	Viernes
7:40 - 8:20	matemática	Matemática
8:20 - 9:00	matemática	Matemática
10 min.	Recreo	
9:10 - 9:50	matemática	Matemática
9:50 - 10:30	matemática	Matemática
10 min.	Recreo	
10:40 - 11:20	matemática	
11:20 - 12:00	matemática	

Las aulas que les corresponden a los cursos donde trabajamos son amplias, con grandes ventanales de vidrio que permiten la entrada de abundante luz. Cada ventana posee una persiana de madera, que se cerraba cuando era necesario proyectar una imagen o cuando el reflejo no dejaba ver el pizarrón. Estas aulas son contiguas.

Cada aula dispone de un gran pizarrón verde para tiza y a un costado, una pizarra blanca pentagramada para escribir con fibrón. Las aulas disponen de estanterías donde el docente y los alumnos pueden depositar bolsos, materiales de trabajo y viandas de comida, entre otras cosas. En cada techo se ubican ventiladores y tubos de luces fluorescentes para la iluminación. El escritorio del profesor está situado de frente a los bancos de los alumnos, que lo observan a su izquierda. Los bancos son individuales; la organización del escenario puede ser flexible y adaptarse al tipo de actividad que se realice. Las aulas resultan espaciosas para la cantidad de bancos y alumnos, por lo que es sencillo recorrer los pasillos que se forman sea cual fuere la distribución de los bancos en la que se desee trabajar.

Durante el periodo de observaciones ambas divisiones mantuvieron algunos de los patrones de agrupamiento más frecuentes, señalados por Gvirtz & Palamidessi (2008).

Durante clases expositivas o centradas en actividades individuales, los bancos se distribuyeron de acuerdo al siguiente gráfico:



En las instancias en las que realizan actividades grupales, los alumnos se organizan en grupos moviendo sus bancos.

1.3 Recursos empleados en la clase de matemática.

En la etapa de observación se pudo contemplar que para introducir un tema nuevo, el profesor utilizó principalmente el lenguaje oral, valiéndose del pizarrón para introducir la simbología y los términos propios de la materia. Él nos comunicó que los alumnos utilizan el manual “Matemática 3/9” de Editorial Kapelusz (2010). Esto se vio plasmado en las clases que presenciamos, donde seleccionó actividades para que los alumnos resolvieran. Durante estas clases no estaba permitido el uso de calculadoras, pues los profesores del área matemática acordaron en autorizar la utilización de las mismas a partir del abordaje de la unidad de razones trigonométricas pensando en el cálculo de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Por otra parte, el docente a cargo del curso complementa su desarrollo teórico de la materia con el libro de texto “Carpeta de Matemática 9“(2007), del que extrajo actividades dándolas en forma de dictado o copiándolas en el pizarrón.

1.4 Observaciones de clases

A continuación, mostraremos una síntesis de las observaciones previas a las prácticas. En un primer momento, hicimos observaciones los días 27 de junio, 1 y 4 de julio. La observación de día completo se realizó ya finalizado el receso de invierno, el martes 2 de agosto.

1.4.1 Estilo de trabajo en la clase de matemática

Al inicio de la jornada, en el primer módulo, ingresó alguno de los preceptores a tomar lista, registrando a quien llegó tarde o permaneció ausente. Además, se encargó de entregar el libro de temas para que pueda llenar el profesor, comunicando alguna eventualidad, si la hubiere.

Durante las observaciones pudimos apreciar que la metodología de trabajo por parte del docente consta de un repaso de temas vistos anteriormente a modo de diagnóstico, cuyo fin es indagar dónde se encuentran los alumnos frente a un contenido relacionado con aquello nuevo que va a enseñar. En esta instancia, el docente entabla un diálogo fluido con sus alumnos en el que repasa temáticas abordadas en anteriores oportunidades. Estos conocimientos previos le dan pie para ir elaborando los nuevos aprendizajes. Una vez concretado este momento interactivo de diálogo grupal, la clase suele pasar a ser más expositiva. El docente dicta las definiciones que correspondan, para luego exponer la resolución de un ejercicio a modo de ejemplo, procurando en todo momento que los alumnos participen activamente en su resolución.

Posteriormente da una actividad para que el curso trabaje, recorriendo el aula para atender las consultas a quienes lo solicitan. Después de haber transcurrido un periodo determinado de tiempo, pregunta a la clase quién ha resuelto la actividad y los invita a pasar al pizarrón a resolverla. Muchas veces los alumnos toman la iniciativa de ofrecerse a pasar al frente.

En la generalidad de las clases, la mayoría de los estudiantes participó activamente; los debates alrededor de algún ejercicio son democráticos y existe una relación de mutuo respeto entre el profesor y sus alumnos.

Sobre el tratamiento del error, se parte de un consenso general entre los alumnos, donde son ellos quienes discuten hasta llegar al resultado correcto. Si la mayoría resulta incapaz de detectar o corregir las fallas que les impiden proseguir en las resoluciones o dar con un resultado correcto, el profesor interviene procurando explicitar el origen de los errores de manera asertiva para que los alumnos comprendan.

Al tratarse de un colegio de jornada extendida, el equipo docente evita darles tareas para resolver en el hogar; particularmente en matemática quedaron de tarea aquellos ejercicios que no se pudieron resolver en clases.

Con respecto a los instrumentos de evaluación, luego de dar comienzo a una unidad didáctica, el profesor evalúa mediante trabajos prácticos que pueden ser resueltos de manera individual o con el compañero de banco. De esta manera establece un seguimiento de sus alumnos a la que le corresponde una “nota de concepto” por trimestre.

Al concluir dicha unidad o tema les toma una evaluación integradora que consiste en responder ítems que admiten una única respuesta correcta. En las respuestas se manifiesta el conocimiento de los alumnos acerca de conceptos y procedimientos vistos durante las clases.

Los alumnos generalmente mantuvieron una disciplina correcta. Si un grupo estaba disperso, el profesor les llamaba la atención y a lo sumo, elevaba el tono de voz, a lo que los alumnos respondían positivamente. En este sentido, los alumnos conocen la forma de trabajar del profesor y este, a su vez, la manera de mantenerlos activos.

Las tareas propuestas por el docente durante nuestras observaciones estuvieron enmarcadas en lo que el investigador Skovsmose denomina “paradigma del ejercicio” y tenían como referencia objetos definidos dentro de la matemática pura, como números, igualdades y desigualdades (Skovsmose 2000). Fueron actividades de tipo “cerradas”, caracterización que utiliza el educador Ponte para llamar aquellas que admiten una sola respuesta correcta (Ponte, 2005).

1.4.2 Desarrollo de actividades de enseñanza en distintos espacios curriculares

De las observaciones que realizamos en otros espacios curriculares (física, química, lengua y educación tecnológica) pudimos atender a distintas formas de desarrollar las clases, características de cada docente y espacio curricular particular.

En la clase de química, la profesora utilizó proyector y computadora portátil que ella misma trajo a la institución. De su clase pudimos tomar el fuerte protagonismo de los alumnos durante la misma; Se desarrollaron exposiciones orales grupales en las que intervinieron también alumnos oyentes, que pedían la palabra para corregir o preguntar si algo no les quedó claro. La profesora también intervenía en las exposiciones para mediar entre los disertantes y el resto de la clase. Pidiendo la palabra, realizaba preguntas al resto del curso: “¿Están de acuerdo con lo que dice el compañero?”;“¿Podemos decir algo más acerca de...?”;“¿Qué pasa si...?”, etc.

Tanto en la materia lengua como en educación tecnológica, los alumnos enriquecían la clase con ejemplos, elaborando caracterizaciones y relacionando conceptos. Esto no sólo sucedía en las clases de repaso o cierre, sino también al incorporar temas nuevos.

2. ELABORACIÓN DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA E IMPLEMENTACION EN EL AULA

2.1 Elaboración de la propuesta de enseñanza

En el comienzo de la elaboración de nuestra propuesta de enseñanza nos propusimos ir generando respuestas a las siguientes preguntas:

- ¿Qué objetivos nos plantearemos concretar una vez finalizada la enseñanza de la unidad?
- ¿Qué contenidos será necesario abordar para concretar esos objetivos?
- ¿Qué actividades seleccionaremos procurando que otorguen sentido a los contenidos?
- ¿Qué recursos pueden enriquecer el desarrollo de las actividades?
- ¿Cómo gestionaremos el trabajo en el aula?
- ¿Qué criterios nos guiarán al momento de evaluar los aprendizajes?

Estas preguntas se corresponden con las variables que Gvirtz y Palamidessi sugieren tener en cuenta al diseñar todo proyecto educativo (1998). Formularnos estos interrogantes constituyó nuestro primer paso para delimitar el marco de nuestra planificación.

2.1.1 Objetivos

La mayoría de los objetivos que nos propusimos alcanzar fueron elaborados en consonancia con los objetivos establecidos en el Diseño Curricular (DC) para tercer año del Ciclo Básico[1] y con los objetivos específicos enunciados por el profesor titular en su planificación anual. De estos, seleccionamos aquellos que consideramos alcanzables en el contexto de nuestras prácticas.

En el transcurso de nuestra práctica profesional, procuraremos que nuestros alumnos desarrollen la capacidad de:

- Utilizar razones y proporciones para resolver problemas extramatemáticos e intramatemáticos.
- Comprender el significado de razón como una herramienta para comparar cantidades.
- Comparar razones y distinguir relaciones de proporcionalidad de aquellas que no lo sean.
- Identificar situaciones de aplicabilidad de la propiedad fundamental de las proporciones.
- Determinar y utilizar la constante de proporcionalidad para la resolución de problemas.
- Aplicar propiedades de las cantidades directamente proporcionales, cuando sea pertinente.
- Construir figuras semejantes a una figura simple dada.

[1] Etapa que comprende 1°, 2° y 3° año de la educación secundaria obligatoria.

- Reconocer figuras semejantes.
- Establecer cuándo dos triángulos son semejantes haciendo uso de los criterios de semejanza.
- Descubrir relaciones de proporcionalidad geométrica y aplicarlas en la resolución de problemas.
- Interpretar circunstancias de aplicabilidad del teorema de Thales.

2.1.2 Selección, organización y secuenciación de los contenidos

Las prácticas tienen una duración de cuatro semanas, mientras que la unidad didáctica a desarrollar fue planeada para ser trabajada durante seis. Por este motivo realizamos un recorte de los contenidos propuestos y conformamos una unidad de contenidos que se pudiera implementar en el tiempo estipulado. La selección de contenidos la hicimos principalmente sobre la unidad n°6 de la planificación anual de ambos cursos “Razones y Proporciones”. A continuación, mostramos la secuenciación de los contenidos de la planificación anual del curso. Los contenidos que formaron parte de nuestra planificación figuran escritos en azul.

> Razones y proporciones aritméticas: reconocimiento de su uso en la vida cotidiana. Identificación de los elementos de una proporción. Propiedad de las proporciones: cálculo de los extremos y los medios. La proporcionalidad en geometría: Teorema de Thales. Consecuencia del teorema de Thales. Uso del Teorema de Thales para interpretar y resolver problemas concretos. División de un segmento en partes iguales y división de un segmento en partes proporcionales, haciendo uso de elementos de geometría. Construcción geométrica del segmento tercero y cuarto proporcional. Propiedad de las bisectrices de los ángulos de un triángulo. Figuras semejantes. Semejanza de triángulos: establecimiento de los criterios de semejanza. Reconocimiento de triángulos semejantes haciendo uso de los criterios de semejanza. Resolución de situaciones problemáticas integrando las herramientas de proporcionalidad aritmética y geométrica.

Algunos contenidos fueron modificados como parte de la adecuación a nuestro contexto particular. Por ejemplo, notamos en el contexto de tercer año, el DC propone trabajar la proporcionalidad en conjunto con funciones lineales. Sin embargo en la planificación anual, funciones pertenece a una unidad posterior, de modo que no era posible abordar los contenidos de esta manera.

Al momento de planificar las actividades concretas que desarrollaríamos durante las clases, consensuamos que la primera con la que inauguraríamos nuestras prácticas sería la ampliación de un Tangram[2] o rompecabezas chino. Se trata de una actividad que involucra la construcción

[2] El Tangram es un juego chino muy antiguo, que consiste en formar siluetas de figuras con siete piezas de un rompecabezas sin solaparlas. Las 7 piezas, llamadas "Tans", son clásicamente cinco triángulos, un cuadrado y un romboide. Para fines prácticos, nosotros modificamos algunas piezas y adicionamos una figura más.

de figuras semejantes a través del uso de la proporcionalidad. El acuerdo en esta elección, se basó principalmente, en un trabajo realizado por Brousseau (1993).

Una vez que esta actividad quedó determinada, efectuamos un análisis bibliográfico a fin de determinar con precisión los contenidos de la unidad didáctica a desarrollar. Luego del mismo, concluimos que la actividad integraría las siguientes temáticas:

- Razones matemáticas: al comparar las medidas de las figuras ampliadas con respecto a las medidas de las figuras originales, siendo posible trabajar sobre su interpretación y significado. De la interpretación de la razón que se forma entre las medidas era posible definir la constante de proporcionalidad, así como la razón de semejanza;
- Proporcionalidad aritmética: como herramienta necesaria para dar con las medidas de las figuras ampliadas de modo que la ampliación resulte fidedigna. Finalizada la actividad, también sería posible estudiar la estructura y propiedades que caracterizan a una proporción aritmética;
- Semejanza: en la construcción de figuras, recordando que en el nivel secundario, figuras semejantes resultan aquellas que, de no ser iguales, se relacionan por medio de una ampliación/reducción.

Para organizar la enseñanza de estas temáticas, optamos por darle continuidad a la primera actividad, contrastando el grupo de contenidos que es posible abordar desde ella, con los que pertenecen a la unidad. Así, notamos que la semejanza de figuras involucra proporcionalidad, y la proporcionalidad puede ser definida en términos de razones. Los contenidos que quedarían fuera del análisis de la actividad serían aquellos que incluyen los criterios de semejanza de triángulos y el teorema de Thales. La secuenciación de contenidos quedó resuelta de esta forma: razón, proporcionalidad aritmética, semejanza de figuras, triángulos semejantes como caso particular de semejanza y luego los criterios de semejanza de triángulos, dejando para el final de la unidad el teorema de Thales.

En esta parte de la planificación nos surgió una duda ¿Era posible abordar el aprendizaje de semejanza de triángulos previo al teorema de Thales? Ante esta incertidumbre recurrimos a manuales de texto (Matemática ES.3-editorial Tinta fresca, Carpeta de Matemática 9-editorial Aique y Matemática 9 – editorial Santillana) en los cuales encontramos ejemplos donde se trabajaba de esta manera, primero semejanza y luego Thales.

La configuración clásica de aplicabilidad del teorema de Thales (tres rectas paralelas y dos transversales) podría ser manipulada de modo tal que, completando triángulos sea posible aplicar los criterios de semejanza (Los libros citados llaman a esta situación "*triángulos en posición de Thales").* Esto nos permitiría introducir Thales mediante aprendizajes previos acerca de proporcionalidad y semejanza.

A continuación, mostramos cómo adaptamos la unidad del programa a nuestra propuesta de enseñanza:

Construcción de figuras semejantes; Razón y su significado; Proporciones aritméticas: reconocimiento y uso en la vida cotidiana; Reconocimiento de la estructura y los elementos de una proporción; Constante de proporcionalidad: uso y significado; Propiedad fundamental de las proporciones: cálculo de extremos y medios; Figuras semejantes; Semejanza de triángulos; Criterios de semejanza de triángulos; Razón de semejanza; Teorema de Thales; Uso del teorema de Thales para interpretar y resolver problemas concretos; Consecuencia del teorema de Thales; División de un segmento en partes iguales.

2.1.3 Tareas y actividades

Para diseñar y/o seleccionar las actividades que incluimos en nuestro portafolio, consideramos principalmente dos autores que se dedicaron a analizar y clasificar la diversidad de las tareas que el profesor de matemática puede proponer a sus alumnos. Esta teoría constituyó uno de los soportes para realizar la gestión curricular, que definimos como aquellas decisiones que debe tomar un docente al momento de implementar actividades que otorguen sentido a los contenidos propuestos por el DC.

En primer lugar, tomamos la clasificación de los ambientes de aprendizaje de Skovsmose (2000). El autor, relacionado con la educación matemática crítica, propone que en una clase de matemática se generan distintos ambientes o escenarios de aprendizaje según la actividad que el profesor proponga y el modo en el que sea gestionada. Desde el enfoque de Skovsmose, el aula de matemática debe simular una micro-sociedad cuyos objetivos son el aprendizaje y la investigación, buscando proponer distintos modos de trabajo que favorezcan la aplicación de los principios democráticos. Para Skovsmose la matemática está inserta en la sociedad de manera tal que es ésta la que le otorga sentido. Por ello, una manera de estudiar y hacer matemática en el aula es a través de la alusión a la realidad. Las actividades podrán tener, a grandes rasgos, tres marcos de referencia: la realidad, la semi-realidad y la matemática pura. Las últimas son las referencias más comunes en las actividades que se plantean tradicionalmente en la enseñanza de la matemática en el nivel secundario. La semi-realidad, si bien posee objetos que existen fuera del aula y más allá de las matemáticas, estos se encuentran sujetos a reglas claras que delimitan una semi-realidad, carente de la ambigüedad que suscita la realidad tomada en todas sus dimensiones.

Por otro lado, según la forma en la que el profesor organiza la actividad, Skovsmose distingue dos tipos de actividades: aquellas que se encuentran en el paradigma del ejercicio y otras que pertenecen a un escenario de investigación. En un escenario de investigación no existe una única respuesta correcta por parte de los alumnos, lo que provoca que el curso de la actividad se torne impredecible para el docente. En una clase que se desarrolla en el paradigma del ejercicio, en cambio, los métodos de resolución y las respuestas correctas están definidos antes de comenzar la actividad.

Skovsmose analiza las actividades en función de su marco de referencia y de la organización del trabajo por parte de los alumnos, enumerando los distintos ambientes de aprendizaje que se generan de acuerdo a la conjugación del marco de referencia y la organización del trabajo. El siguiente cuadro, extraído de bibliografía, muestra la distribución de estos ambientes:

		Formas de organización de la actividad de los estudiantes	
		Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Tipo de referencia	Matemáticas puras	(1)	(2)
	Semirrealidad	(3)	(4)
	Situaciones de la vida real	(5)	(6)

Según esta óptica, un profesor debe procurar moverse por los distintos ambientes de aprendizaje, sin limitarse a trabajar sólo dentro de aquellos ambientes en los que se siente confortable, que generalmente son los ambientes (1) y (3).

Alternativamente, para clasificar las actividades nos guiaremos por dos de los parámetros que propone Ponte (2005). El primer parámetro se refiere a que las tareas responden a cierto grado de estructura, tanto en la información que se da, como en el resultado que se pide y el procedimiento a través del cual se resuelve. Según el grado de estructura, entonces, las actividades se clasifican en cerradas o abiertas. El segundo parámetro es la dificultad que se espera que suponga la resolución de la actividad para un grupo determinado de alumnos. Las actividades, entonces, se podrán clasificar en aquellas cuya dificultad se considera moderada, media o elevada.

Las clasificaciones de ambos autores no pretenden ser exhaustivas y se supone una continuidad entre las distintas categorías, que cumplen un rol como variables de análisis a la hora de diseñar actividades y descriptivo a la hora de presentarlas.

A continuación exponemos la planificación de cinco clases de manera diferenciada, bajo el formato de *guiones conjeturales*, que nos permiten anticipar algunas situaciones que pueden ocurrir en el salón de clases. Al iniciar nuestras prácticas, si bien contábamos con un portafolio de actividades, no habíamos planificado más que para una semana de clases. A medida que fuimos avanzando en las prácticas, procuramos mantener este grado de previsión. Sin embargo existieron casos de actividades cuyo desarrollo requirió mayor tiempo del estipulado inicialmente, lo que nos llevó a efectuar cambios en nuestra planificación y postergar el análisis de las últimas actividades que deberíamos desarrollar. Desde nuestro ingreso a la institución supimos que tendríamos menos días de prácticas por diversos motivos como actos o feriados. Esto nos permitió prever que resultaría imposible ver Thales. En el ANEXO I se podrán apreciar algunas actividades seleccionadas *a priori* para introducir el teorema de Thales. Todos los momentos de la clase representan una actividad, pues buscan promover un aprendizaje activo por parte de los alumnos. En las puestas en común, decidimos plantear interrogantes que promuevan la reflexión de los alumnos y los orienten a elaborar los aprendizajes propuestos. A través del texto de la planificación aparecerán en negrita algunas de las afirmaciones que pretendemos dejar expuestas durante las clases. Las conclusiones que incluiremos en la institucionalización y quedarán asentadas en el pizarrón figurarán dentro de un recuadro.

2.1.4 Guiones conjeturales de algunas clases

Clase N° 1 (08/08)

Estimamos un lapso inicial de 25 minutos. Este tiempo incluye la demora de los estudiantes en el ingreso al curso, las presentaciones formales ante ellos, la comunicación de la actividad, la formación de los grupos, y la entrega de materiales de trabajo. Les explicaremos a los alumnos que el trabajo práctico n°1 se trata de ampliar dos rompecabezas similares. Por este motivo deberán formarse ocho grupos de a lo sumo tres integrantes y a cada grupo le asignaremos dos piezas para ampliar. Se trata de una tarea abierta cuyo grado de dificultad es de medio a elevado, definida en un ambiente de tipo (2) de acuerdo a la clasificación de Skovsmose. Este TP junto con unas actividades adicionales fueron pensados para desarrollarse en una clase de un módulo y medio (120 minutos).

Los objetivos que nos propusimos son:

- Utilizar proporcionalidad para la construcción de figuras semejantes.
- Introducir las razones y proporciones a través de la búsqueda de las regularidades existentes entre los cocientes de las medidas de los lados ampliados con respecto a los lados originales.
- Comprender el significado de razón como una herramienta para comparar cantidades.

Los contenidos que vamos a abordar en esta dirección son:

- Razones y proporciones.
- Constante de proporcionalidad.
- Semejanza.

Los elementos necesarios para trabajar son:

- Para dibujar y escribir: lápiz, lapicera, regla, escuadra, transportador y compás.
- Como lugar de registro necesitaremos hojas donde anotar los procedimientos que se utilizaron para realizar las construcciones. En ellas se detallarán resultados, justificaciones, errores cometidos, etc.
- También se les permitirá utilizar calculadora (o celular).
- Además nosotros proveeremos de cartulina, tijeras para recortar e instrumentos de geometría.

Durante el desarrollo de la clase, esperamos cierta autonomía por parte de los grupos. Nuestra intervención se limitará a ayudar a interpretar consignas o preguntar a los alumnos cómo va su trabajo. También podremos dar consejos tales como dibujar primeramente en lápiz antes de repasar con lapicera, anotar resultados y procedimientos para después no olvidárselos, etc.

Luego de que resolvamos dar por finalizada la actividad, comenzaremos una puesta en común grupal en donde pasaremos al análisis de las respuestas; pediremos que los chicos vayan leyendo las respuestas según se ofrezcan hacerlo voluntariamente. Una vez que un inciso fue respondido y su respuesta fue dialogada, trataremos de indagar por otras que enriquezcan los conocimientos en juego.

En la medida que desarrollemos el debate alrededor de las soluciones que propongan los equipos, irán surgiendo conclusiones que será importante registrar para asentar los aprendizajes. Estas frases deberán quedar registradas en la carpeta de los alumnos. En este informe las vamos a resaltar en **negrita.**

Cada grupo tendrá un número, que se lo transmitiremos oralmente. Lo primero que haremos es pedirle a algún alumno voluntario que lea la primera consigna:

Construiremos un Tangram ampliado. Este grupo se encargará de las piezas número ___ y ___. Deberán construirlas en una cartulina sabiendo que lo que mide 4 cm en la hoja pasará a medir 14 cm en la cartulina. Recorten las dos piezas.

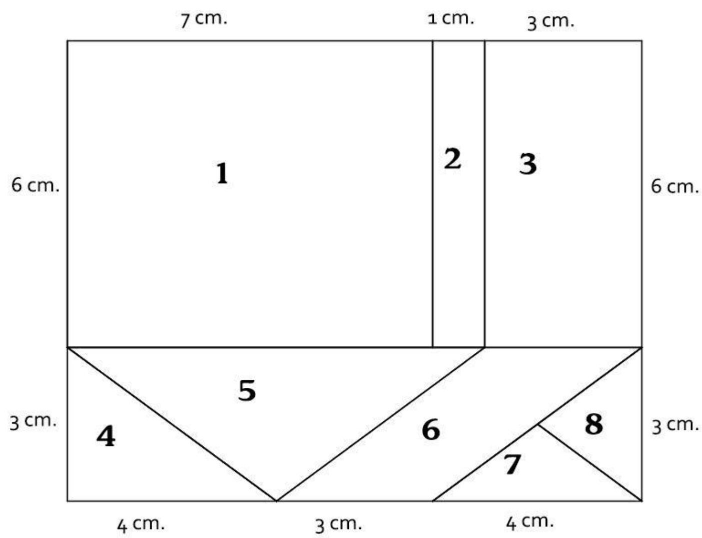
Seguidamente vamos a numerar los grupos y asignarles las figuras correspondientes del siguiente modo para que cada equipo vaya completando los datos que solicitamos (grupo y figuras que les toco):

Escrito a mano, se rellenarán los espacios en blanco con la información correspondiente:

- Grupo 1 ⟶ figuras (1) y (5)
- Grupo 2 ⟶ figuras (2) y (6)
- Grupo 3 ⟶ figuras (3) y (7)
- Grupo 4 ⟶ figuras (4) y (8)
- Grupo 5 ⟶ figuras (1) y (6)
- Grupo 6 ⟶ figuras (2) y (7)
- Grupo 7 ⟶ figuras (3) y (8)
- Grupo 8 ⟶ figuras (4) y (5)

Aclararemos que con los grupos 1, 2, 3 y 4 se puede construir un Tangram y con los grupos 5, 6, 7 y 8 se puede construir otro idéntico.

Esta es una reproducción del Tangram con las piezas que le asignamos a los grupos:



.

Posteriormente anunciaremos que tendrán 30 minutos para recortar las figuras. Si tienen dificultades para comprender el punto 1 se lo explicaremos, pero sin decirles cómo llegar a la solución.

Transcurrido el tiempo estipulado, procederemos a discutir acerca de la segunda consigna, leyéndoles el enunciado:

¿Cómo hicieron para construir las figuras? Redacten los procedimientos y cálculos que hayan usado para construir las figuras.

Los procedimientos de construcción de figuras, aunque no formen parte del temario que nos comprometemos a enseñar, tienen relevancia tanto en los contenidos del DC como en el programa de la asignatura. Por esto, aunque no sea nuestro principal foco de atención desde el punto de vista académico o, más aún, de la institucionalización, merecerá su debida atención y tratamiento. No nos detendremos en el análisis de la construcción de cada una de las 8 figuras, pero sí buscaremos que se expongan los distintos métodos de resolución que se llevaron a cabo procurando que no se repita la explicación de un mismo procedimiento particular (ej.: trazar la perpendicular a una recta por un punto perteneciente a ella con regla y escuadra). Además, procuraremos que se expongan los distintos procedimientos que se utilizaron para obtener un mismo resultado (ej.: obtener dicha perpendicular, o la medida de los segmentos del Tangram ampliado).

Después de que cada grupo exponga sus procedimientos, pasaremos a la consigna siguiente:

Entre los grupos 1, 2, 3 y 4 armen el Tangram ampliado juntando las figuras que construyeron. Los grupos 5, 6, 7 y 8 hagan lo mismo.

Posibles preguntas para hacer a los alumnos

- *¿Algún grupo construyó una figura que luego no encajó en el rompecabezas?*
- *¿Las figuras encajaron correctamente?*

Por último, leemos la cuarta consigna:

Consultando información con los grupos con los que armaron el Tangram, elaboren una tabla con los datos empleados para armar la figura.

Para tratar esta consigna pediremos a miembros de los equipos que pasen al pizarrón a copiar la tabla que elaboraron. Quedarán registradas en el pizarrón dos tablas, una por cada rompecabezas. Si una medida de los lados ampliados no resulta correcta, habrá dos instancias para que los alumnos reflexionen sobre el error sin nuestra mediación:

- Podrán ver que las medidas no son correctas al armar el Tangram y que su pieza no encaje.
- Comparando su figura con otro grupo que haya armado la misma.

Fundamentándonos en esto, esperamos que en las tablas que produzcan los alumnos los valores de la derecha de la tabla sean 3,5 veces sus correspondientes lados de la izquierda. Si de todos modos esto no sucede así y los dos grupos presentan el mismo resultado de manera incorrecta, esperaremos que los mismos alumnos corrijan su error cuando el resto de los equipos que procedió correctamente describan los pasos que siguieron.

Suponemos que aparecerán dos tablas en la que los datos respeten la proporcionalidad, aun sin estar ordenadas o repitiendo filas con los mismos valores. Veamos un modelo estimativo de una de estas tablas:

Medida del lado original	Medida de lado ampliado
6	21
7	24,5
6	21
1	3,5
3	10,5
6	21
4	14
5	17,5
3	10,5
8	28
2,5	8,75

Una vez plasmado el registro de las tablas en el pizarrón, abordaremos cuestiones que impliquen la equivalencia de ambas tablas, la eliminación de datos repetidos, el ordenamiento de los mismos (preferentemente de menor a mayor y de arriba hacia abajo) y la constante de proporcionalidad, mediante simulaciones de diálogo entre *nosotros (cursiva)* y los **alumnos (negrita)**.

Equivalencia de las tablas (brindan la misma información)

- *¿Son iguales las tablas?*
- *¿Qué tienen en común?*
- *¿Hay alguna información que brinde esta tabla y no esta otra?*
- *¿Brindan la misma información?*

Las tablas tienen las mismas filas pero en distinto lugar.

Las tablas brindan la misma información.

A elección de los alumnos, borraremos una de las dos tablas, aclarando que podríamos quedarnos con cualquiera, pero que una sola es suficiente.

Construcción de una tabla equivalente pero mejor organizada

- *¿Si añado otro lado de medida 4, la medida ampliada podrá ser 15?*
- *¿A alguna medida original le pueden corresponder dos medidas ampliadas distintas?*
- *¿Tiene sentido repetir datos o filas?*

A cada valor de las medidas originales, le corresponde un solo valor de las medidas ampliadas.

En la tabla, a cada valor de la primera columna le corresponde un solo valor de la segunda

A su vez, a un valor de la segunda columna le corresponde solo un valor de la primera

En la tabla, no tiene sentido repetir filas con los mismos valores

Ordenamiento de las filas de la tabla

- *¿Existe alguna forma de organizar la tabla para que sea más fácil de leer?*
- *¿Hay alguna otra manera de ordenar la tabla?*

De menor a mayor

De mayor a menor

Ordenar la tabla facilita su lectura. Sin embargo, es posible que al ser una tabla con pocos datos, los alumnos la vean bien organizada aun sin estar ordenada. De todos modos, procuraremos que la tabla quede ordenada en el pizarrón.

Con este primer tratamiento de las consignas daremos por finalizada la puesta en común de la primera actividad.

Luego de la ampliación del Tangram seguiremos con una tarea cuya finalidad es analizar las propiedades de las tablas de proporcionalidad directa. Para este propósito les propondremos a los alumnos realizar un trabajo adicional de manera grupal.

Cuando los alumnos hayan finalizado la tarea, realizaremos una puesta en común para ir registrando conceptos.

Comenzaremos con este problema de la segunda actividad. En **negrita** figuran los valores que en la fotocopia de actividades se deberán completar:

Usando los datos de la tabla, sin calculadora, encuentra la medida de los segmentos ampliados que faltan. Indica cómo obtuviste el valor en cada caso.

1	3,5
2	**7**
3	10,5
4	14
5	17,5
6	21
7	24,5
8	28
9	**31,5**
10	**35**
11	**38,5**
15	**52,5**
16	56

A partir de las distintas estrategias que surjan, ellos podrán llegar a notar (entre otras cosas) que:

En la tabla, a mayor valor le corresponde mayor valor, y a menor valor, le corresponde menor valor

Al doble le corresponde el doble

A la mitad le corresponde la mitad

A la suma le corresponde la suma

Cuando la resta entre dos valores no es negativa, a la resta le corresponde la resta

Constante de proporcionalidad

Para que aparezca la constante de proporcionalidad, trabajaremos sobre los dos problemas que siguen.

El primero dice:

Si tengo valor 4,4 en la primera columna, ¿cómo puedo calcular el valor que le corresponde en la segunda?

Es probable que los alumnos utilicen la regla de tres, porque no es fácil ver si el 4,4 es múltiplo de algún elemento de la columna, realizando la siguiente cuenta:

4 ⟶ 14

4,4 ⟶ x = 4,4 x 14 : 4 = 15,4

En el segundo ítem pretendemos generalizar este resultado, deduciendo una regularidad:

Si tengo un valor cualquiera “x” en la primera columna, ¿cómo puedo hacer para conseguir el valor correspondiente en la segunda columna?

Esperamos que surja la respuesta 3,5.x

A continuación, mostramos las preguntas que nos guiarán en la puesta en común.

- *¿De dónde surgió este número, 3,5?*
- *¿Qué cálculos debo hacer para obtener el 3,5?*

3,5 es el número por el que hay que multiplicar a un lado del Tangram original para obtener la medida del lado en el Tangram ampliado.

Para obtener el 3,5 debo dividir un elemento de la segunda columna por su correspondiente de la primera columna.

El 3,5 es nuestra constante de proporcionalidad. A estos cocientes que nos dan como resultado 3,5 los llamaremos **razones**. Una razón es el cociente entre dos cantidades.

Para contextualizar el uso de las razones en la resolución de problemas, les propondremos un problema de la misma guía, donde trabajaremos en conjunto la comparación entre razones:

> En una verdulería tienen la siguiente oferta: “Compre 3 kilos de naranjas a $25”. En otra verdulería vemos el siguiente cartel “Ricas y jugosas naranjas, 2 kg por $18”. Suponiendo que la calidad de las naranjas es la misma, ¿dónde conviene comprar?

Haciendo las cuentas necesarias, los alumnos concluirán que conviene comprar en la primera verdulería. Entonces acotaremos:

En la vida cotidiana hay números que en términos absolutos no nos dicen nada, pero relacionados con otra cantidad toman sentido.

Veamos, por ejemplo, lo que sucede con el problema de la guía.

Si pago $25 por las naranjas, ¿es caro o barato? Este número no alcanza para decir si es "caro" o "barato". Si, en cambio, sé que por esa plata me dan 3kg de naranjas, entonces puedo comparar el precio de la mercadería con la cantidad utilizando una razón:

razón = precio / cantidad = $25 / 3 kg. = 8,33$ / kg de naranjas.

Con este resultado, sé que estoy pagando $8,33 el kilo de naranjas.

Para saber qué tan caro o barato costaron las naranjas, podemos comparar este precio con el precio de la otra verdulería. En el problema tenemos $18 / 2kg = $9 / kg de naranjas, por lo que las naranjas están más baratas en la primera verdulería.

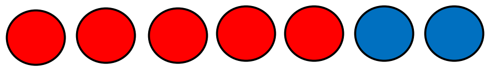
Esto nos permitirá concluir que:

> Una **razón** nos sirve para comparar dos cantidades o medidas

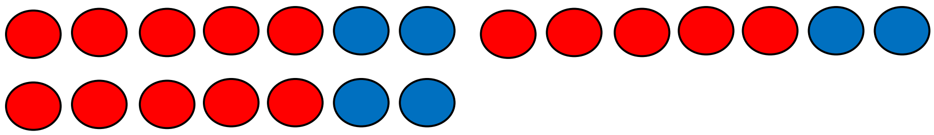
Para diferenciar los conceptos de razón y fracción, trabajaremos sobre el último problema de la guía:

> Martín tiene cinco fichas rojas por cada dos azules. Si tiene 21 fichas en total, entre rojas y azules, ¿Cuántas fichas tiene de cada color?

Los alumnos lo podrán resolver comparando cuántas fichas azules hay en relación a cuántas fichas rojas. La razón entre las fichas rojas y azules es de 5 a 2. Esta relación se puede ver gráficamente de la siguiente manera:



Como hay 21 fichas en total, podrían dibujar tres veces la razón hasta completar las 21 fichas:



Finalmente se contabilizan 6 fichas azules y 15 rojas.

Por otra parte si queremos expresar la fracción de fichas azules, esta se escribe 2/7 (dos séptimos de las fichas son azules), o bien 2 de 7 fichas son azules. Esto es distinto a expresar la razón entre las fichas rojas y azules, ya que la misma es de 5 a 2, y se escribe 5/2 o bien 5÷2 para evitar usar la misma notación de las fracciones. Emplearemos esta nueva terminología con el fin de diferenciar el tratamiento de razones y con el de fracciones, ya que son distintos objetos matemáticos. Mientras que la fracción mide la cantidad de unidades iguales que tomamos con respecto de un total, las razones son comparaciones entre dos números o cantidades usando la división.

Una vez aclarada esta cuestión les diremos oralmente a los alumnos:

- *Ahora tratemos de acordarnos de los cálculos que realizamos para hacer el tangram. ¿El grupo…, cómo hizo para calcular el lado de la figura ampliada? ¿Quieren pasar al frente a mostrarle a sus compañeros?*

Haremos pasar al pizarrón a alguien que realice las operaciones y plantearemos una interacción semejante a la que sigue. Por ejemplo:

4 _____________________ 14
6 ____________________? ? = 6x14/4

- *Ahora bien, si pasamos el 6 dividiendo para el otro lado, nos quedaría así:*
  ? /6 = 14/4

- *¿Qué es 14/4 según lo que estuvimos trabajando?*

Es una razón

- *¿Y el miembro izquierdo de la igualdad, es una razón?*

Si, también es una razón, aunque hay una cantidad que desconocemos

- *Cuál es el cociente entre 14 y 4:*
  ? /6 = 3,5

Lo que nos dice esta igualdad, es que el lado de 6 cm. deberá entrar tres veces y media en su lado amplificado. Es decir que cuando nos dieron como dato que el lado que medía 4 cm. pasó a medir 14 cm., no importaba realmente que había crecido 10 cm., sino cuántas veces entraba en su ampliado o lo que es lo mismo, la razón entre 14 y 4. Aunque sea difícil de pensar al principio, las razones entre los lados ampliados y los originales debían ser iguales.

Llegada esta instancia, vamos a institucionalizar otro concepto: Proporción.

Cuando estamos en frente de dos o más razones iguales, decimos que hay proporcionalidad, y a cada una de estas igualdades entre razones las llamamos **proporción**.

- *En realidad, así lo llama la matemática, y cada vez que hacemos una regla de tres, simple, en realidad estamos aplicando proporcionalidad, es decir, igualamos dos razones porque sabemos que son iguales o porque queremos que así sea.*
- *En nuestro caso sería: 21/6=14/4 Se lee como 21 es a 6 como 14 es a 4*
- *Para distinguirla de una simple igualdad de razones, traducimos en lenguaje coloquial el signo igual, a* "*como*"

Antes de que toque el timbre para el recreo, le entregaremos a los alumnos un juego de fotocopias con un resumen de los contenidos trabajados en clases titulado para leer y estudiar.

Clase N° 2 (12/08)

Los primeros 20 minutos haremos un breve repaso de lo que hicimos la clase pasada, detallado más adelante en el guion de la clase. Luego presentaremos una tercera actividad de dificultad moderada que permita que los estudiantes se desenvuelvan en el uso de la noción de proporcionalidad para la resolución de problemas, la guía de actividades n°1. Los problemas que la integran hacen alusión a una semi-realidad en la que, simplificados otros aspectos, se allana el camino para generar situaciones problemáticas que se resuelven aplicando proporcionalidad y sus propiedades.

Cada problema presenta su resolución y, de considerarlo fructífero, acotaciones con el fin de explicitar algunos procesos de razonamiento que podrían ponerse en juego en su resolución o en la puesta en común.

Buscamos trabajar la proporcionalidad desde distintos aspectos de manera en que cada ejercicio se utilice los conceptos vistos de manera distinta. Se busca familiarizar a los alumnos con el cálculo propio de la proporcionalidad: resolución de ecuaciones con incógnita en el denominador, planteo de igualdad de razones, uso de la constante de proporcionalidad y reconocimiento de magnitudes proporcionales y no proporcionales.

El grado de estructura de este trabajo es el de una tarea cerrada, de dificultad media, enmarcada en ambientes de aprendizaje de tipo (1) y (3) y por su extensión, está pensada ser abordada durante dos clases. La resolución se llevará a cabo de manera grupal. Los objetivos específicos de la actividad consisten en que los alumnos se desempeñen en:

- Utilizar razones y proporciones para resolver problemas en diversos contextos
- Construir fórmulas que expresen la proporcionalidad
- Interpretar el significado de la constante de proporcionalidad
- Determinar y/o utilizar la constante de proporcionalidad para resolución de problemas.
- Aplicar propiedades de las cantidades directamente proporcionales, cuando sea pertinente.
- Comparar razones y distinguir relaciones de proporcionalidad de aquellas que no lo sean.
- Familiarizarse con la estructura de la proporción aritmética e introducir la noción de extremos y medios
- Identificar situaciones de aplicabilidad de la propiedad fundamental de las proporciones.

A lo largo de la guía aparecerán cantidades racionales y ecuaciones, que no resultaran objetos novedosos para los alumnos, dado que en las observaciones vimos que ellos alcanzaron aprendizajes relacionados con estos temas.

Durante los primeros 20 minutos, repasaremos los contenidos que vimos la clase anterior, los cuales fueron distribuidos en una fotocopia y luego indagaremos a los alumnos:

- *¿Quién quiere decir con sus palabras que hicimos durante la última clase?*

Esperamos que los chicos digan cosas como:

- que trabajaron en grupo.
- que construyeron una tabla.
- que amplificaron un tangram, pero que cada grupo se encargó sólo de dos piezas.

Después le vamos a pedir a algún alumno que pase al frente a dibujar la tabla.

A través de preguntas, buscaremos hacer una revisión teórica, debatiendo de un modo parecido al que vamos a mostrar:

- *¿Alguien recuerda qué era una razón?*
- *¿Cuál era la razón entre las medidas ampliadas y las medidas originales?*
- *¿No había alguna razón entre la medida ampliada y la medida original que haya dado diferente?*
- *Si teníamos la medida de un lado original, ¿Cómo era posible averiguar la medida del lado ampliado?*
- *¿Qué significa ese 3,5? ¿Qué nos dice?*

Una razón es el cociente entre dos cantidades.

La razón nos dio 3,5.

Todas las razones daban igual.

Para pasar de una medida original a una ampliada había que multiplicarla por 3,5

3,5 es el número por el que hay que multiplicar a un lado del Tangram original para obtener la medida del lado en el Tangram ampliado.

La constante de proporcionalidad es el valor al que son iguales las razones de magnitudes proporcionales.

- *Entonces cuando estamos en frente de dos o más razones iguales, decimos que hay proporcionalidad, y a una igualdad entre dos razones la llamamos proporción. Cuando la razón entre dos magnitudes es siempre igual, se dice que son magnitudes proporcionales. En nuestro trabajo, las magnitudes proporcionales son la medida de los lados originales y la medida de los lados ampliados. Cada vez que hacemos una regla de tres, simple, en realidad estamos aplicando proporcionalidad, es decir, igualamos dos razones porque sabemos que son iguales o porque queremos que así sea.*

Posteriormente invitaremos al alumnado a formar los mismos grupos de tres integrantes de la clase anterior. Les repartiremos una fotocopia con las nuevas consignas.

Durante la resolución de las actividades, los alumnos que estén terminando la actividad tendrán la oportunidad de adelantar la tarea o explicarle a algún compañero que no sepa cómo resolver una consigna. Procuraremos ayudar a que puedan detectar sus propios errores en la instancia de debate.

Dado que esta segunda clase consta de un módulo (80 min. en total), es probable no lleguemos a resolver todos los problemas. Los que resten se resolverán en la clase que sigue.

Seguidamente expondremos los procesos de resolución que creemos ellos pondrán en juego durante el desarrollo de cada situación problemática.

Analicemos el primer problema.

Para preparar la mermelada se mezclan ½ kg. de azúcar con ¾ kg de mandarinas. Basándose en la información de arriba, completen la tabla.

Cantidad de azúcar (Kg)	2,5		1		6
Cantidad de mandarinas (Kg)		0,5		1	

Hay varias formas de deducir el contenido de cada celda (a cada espacio donde van los datos de la tabla lo llamaremos "celda"). Se puede apelar a usar regla de tres simple o directamente planteando la razón entre kilos de mandarinas y kilos de azúcar, que debe ser siempre igual. Con este razonamiento, se puede igualar cualquier razón a la razón que figura en el enunciado,

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Quien plantee proporciones, es bastante probable que se dé cuenta de ciertas cosas más rápido que quien use regla de tres simple, igualando cualquiera de las razones entre kilos de mandarinas y azúcar a 1,5.

Otra forma de trabajar es calcular la constante de proporcionalidad "3/2" y operar solamente multiplicando o dividiendo por ella.

También, se puede construir la otra constante de proporcionalidad:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} = 0{,}66666...$$

Si los alumnos se cruzan con este número y no saben de qué forma operar con él, diremos que lo mantendremos como fracción, y lo mismo pasará con el resultado de la cantidad de kilos de mandarina. Si no se justifica guiarlos, les dejaremos sesgar el número o tratarlo como gusten.

¿Cómo será nuestra interacción con los alumnos cuando hablemos de este apartado?

Comenzaremos a establecer un contrato didáctico con los alumnos. Un alumno que se ofrezca pasará al frente a copiar la tabla sin los resultados. Sus compañeros se encargarán de dictarle el valor que completa cada celda o casillero. Los estudiantes pueden encontrarse con que han tenido respuestas distintas. Nosotros, ante estas respuestas encontradas, trataremos de que encuentren explicaciones y problematicen sus procedimientos de resolución, y que todos los alumnos entiendan cada una de las afirmaciones. Ante cada respuesta indagaremos:

- *¿Todos entienden lo que dijo su compañero?*
- *¿Podrías explicarle mejor a tus compañeros cómo llegaste a esa conclusión?*

Para profundizar la reflexión sobre este inciso, preguntaremos:

- *¿Qué tienen en común la tabla del tangram con la tabla de la mermelada?*
- *¿Alguien resolvió las incógnitas planteando una proporción?*
- *¿Cuáles serían las magnitudes proporcionales en este caso?*
- *¿Puedo, como en la tabla del tangram, encontrar lo que llamábamos constante de proporcionalidad?"*

Después de abordar estas cuestiones, la tabla resultante será:

Cantidad de azúcar (Kg)	2,5	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	6
Cantidad de mandarinas (Kg)	3,75	0,5	1,5	1	9

Una vez resuelta esta consigna seguimos con la siguiente:

¿Cuántos kilos de mandarinas hay que poner si se quiere hacer la misma mermelada con 5,5 kg de azúcar?

Para este momento creemos que estarán en condiciones de plantear la ecuación, haciendo previamente $5{,}5 = \frac{11}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{x}{\frac{11}{2}} \Rightarrow x =$ 8,25 kg. de mandarina.

Este inciso pone en juego procedimientos y conceptos idénticos al anterior pero cambiando el registro, puesto que la tabla ya no está presente para guiar y controlar los resultados.

- *¿Alguien no hizo este inciso?*
- *¿Alguien obtuvo otro resultado?*
- *¿Le podrías explicar a tus compañeros como razonaste para obtener ese resultado?*

Siguiendo con el problema tenemos el siguiente inciso:

Si ponen 9 kilos de azúcar y 13 de mandarinas, ¿La mermelada que obtienen es más dulce que la anterior? ¿Por qué?

Pedimos comparar las razones de azúcar y mandarinas que veníamos usando con la proporción de 9 kg. de azúcar en 13 kg. de mandarinas. La mezcla que tenga razón de azúcar más alta, será la más dulce. En este caso:

Razón usada entre azúcar y mandarinas = $\frac{9}{13} > \frac{2}{3} =$ razón de la mermelada original.

Como en esta nueva mermelada la razón de azúcar es mayor, se deduce que es más dulce. Pues si efectuamos los cocientes indicados nos queda: 0,69 > 0,66.

En esta parte es importante explorar todos los procesos de resolución.

- *¿Cómo hicieron para resolver este inciso?*
- *¿Alguien hizo un procedimiento diferente?*
- *¿Qué determina si una mermelada es más o menos dulce?*

Después les planteamos una consigna similar pero cambiando las cantidades de kilogramos de azúcar y mandarinas.

¿Y si ponen 7 kg de azúcar y 11 de mandarinas?

Pensamos que procederán como en el inciso anterior, comparando razones. Estas razones son distintas y la mermelada terminará resultando menos dulce que la original. Otra variante de la resolución es que realicen regla de 3:

$\frac{1}{2}$_________ $\frac{3}{4}$

7__________$7 \times \frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = 10{,}5$

De esta manera podrán concluir que 11 kg. de mandarinas resulta demasiada cantidad para 7 kg. de azúcar, por lo que la mermelada será menos dulce.

La consigna siguiente dice:

¿Es correcta la siguiente afirmación? ¿Por qué?: "*Para saber la cantidad de kilos de mandarinas que tengo, hay que multiplicar la cantidad de azúcar por 3/2*"

En la puesta en común de esta consigna buscaremos las distintas respuestas y explicaciones, procurando que los estudiantes aprendan a entender los razonamientos de sus pares. Algunas posibles respuestas para tener en cuenta son:

- **“Es correcta, porque si multiplico los valores de azúcar de la tabla me dan los kilos de mandarina que corresponden.”**
- **“Es correcta, pues si la mezcla es siempre la misma, la cantidad de kilos de mandarinas deberá ser siempre 3/2 de la cantidad de kilos de azúcar. Esto es debido a que la proporción entre kg. de mandarinas y de azúcar es 3/2 y siempre se debe respetar”**

Finalmente, queda analizar el último punto:

Encuentren una fórmula que permita calcular la cantidad de azúcar que hay que poner conociendo la cantidad de kilos de mandarina

Esta consigna utiliza expresiones algebraicas, a conciencia de que el último tema que los alumnos vieron con el profesor titular es planteo de ecuaciones. Procuramos permitir que los estudiantes relacionen los aprendizajes alcanzados en la unidad anterior con los conceptos vistos en nuestras clases. En la elaboración de la fórmula pueden surgir estrategias que desconocemos, porque no observamos a los alumnos realizando un trabajo similar.

Ante este argumento nosotros les volveremos a cuestionar:

- *La fórmula… ¿Debe servir para una sola cantidad de mandarinas o para cualquiera?*
- *¿Cómo podemos llamar a nuestra cantidad de mandarinas si no tiene un valor fijo. Tomaremos cualquier respuesta, como M, A, Y o X.*
- *¿Sabemos nuestra cantidad de azúcar? ¿Es una cantidad fija, en este caso? ¿Cómo le podremos llamar?*
- *¿Cómo podríamos plantear la proporción utilizando esta cantidad indeterminada de mandarinas y azúcar?*

Después de discutir estos interrogantes pasaremos al segundo problema que dice:

Juan, Francisco y Esteban compraron una bolsa de 126 caramelos y les salió $60. Esteban puso $30, Juan $10 y Francisco $20.

¿Cuántos caramelos le corresponden a cada uno?

A modo de guía, exponemos un ejemplo de resolución, en el que se explica una manera de llegar a la solución:

- En este problema, el dinero que aportó cada uno es proporcional a la cantidad de caramelos que le corresponden. La proporción que está en juego nos habla de la cantidad de caramelos que nos dan por el dinero que entregamos. La proporción de caramelos que recibe cada uno según el dinero que aporta se toma de la proporción que tiene la cantidad de caramelos total con el dinero total aportado:

Hay proporcionalidad entre cantidad de caramelos y cantidad de dinero. Por esto, a cada cantidad de caramelos la podemos escribir usando la cantidad de dinero por dicha constante:

Cantidad de caramelos que recibe Juan = 10.k
Cantidad de caramelos que recibe Esteban = 30.k
Cantidad de caramelos que recibe Francisco = 20.k

También sabemos que las cantidades suman los 126 caramelos que tiene la bolsa.

10.k+30.k+20.k = 126 es equivalente a k.(10+30+20) = 126

Por lo que también podemos afirmar que k = 126/60 = 21/10.

Ahora reemplazamos la constante de proporcionalidad k en cada una de las fórmulas:

Cantidad de caramelos que recibe Juan = 10.k = 10.(21/10) = 21
Cantidad de caramelos que recibe Esteban = 30.k = 30.(21/10) = 63
Cantidad de caramelos que recibe Francisco = 20.k = 20.(21/10) = 42

- Otra forma de resolución está relacionada con una de las propiedades de las proporciones: “La suma de proporciones es una proporción”. Si bien para este momento no habremos estudiado esta propiedad, su empleo puede darse de manera intuitiva.

x: cantidad de caramelos que corresponde a Juan (aportó $10)
y: cantidad de caramelos que corresponde a Francisco (aportó $20)
z: cantidad de caramelos que corresponde a Esteban (aportó $30)

Entonces por la propiedad mencionada con anterioridad y operando convenientemente:

$$\frac{X}{10} = \frac{Y}{20} = \frac{Z}{30} = \frac{X+Y+Z}{10+20+30} = \frac{126}{60}$$

$$\Rightarrow \frac{X}{10} = \frac{126}{60} \therefore X = 21$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{20} = \frac{126}{60} \therefore Y = 42$$

$$\Rightarrow \frac{Z}{30} = \frac{126}{60} \therefore Z = 63$$

Se concluye que a Juan le corresponde 21 caramelos, a Francisco 42 y a Esteban 63.

Una vez que los alumnos hayan comprendido el anterior problema, pasaremos a uno que tiene por objetivo discernir entre magnitudes proporcionales y magnitudes no proporcionales.

En la veterinaria observamos la siguiente tabla. La cantidad de alimento que necesita comer un perro, ¿es proporcional a su peso? ¿Por qué?

PESO DEL PERRO	ACTIVO	SEDENTARIO
KG	G/DÍA	G/DÍA
2 kg	40 g	30 g
5 kg	90 g	60 g
10 kg	150 g	120 g
20 kg	240 g	160 g
30 kg	330 g	240 g
40 kg	420 g	280 g
50 kg	480 g	330 g
60 kg	570 g	390 g

Como se nota en la imagen, otros factores como la cantidad de actividad física que realiza la mascota serán determinantes a la hora de decidir la cantidad de alimento que debe ingerir un perro por día.

Si analizamos la tabla, aunque un perro de 10 kg. pesa el doble que un perro de 5 kg., la cantidad de gramos que debe comer por día es menos del doble. Podemos afirmar sin muchos cálculos que el peso de un perro no es directamente proporcional a la cantidad de alimento que necesita ingerir por día.

En la tabla que tenemos como ejemplo, la razón entre la ración diaria de un perro y su peso aumenta a medida que disminuye el peso. Un perro de 2 kg. come 20 gramos por kilo. Mientras tanto, un perro de 50 kg. Deberá comer solo 9,6 gramos de alimento por cada kilo ¡Menos de la mitad!

Esto se podrá formular en la puesta en común con la siguiente pregunta:

- *En función de su peso ¿Comen más los perros pequeños o los grandes?*

Luego que la clase haya llegado a un consenso acerca de por qué no hay proporcionalidad en la tabla, seguiremos con un problema que retoma la comparación de razones:

En el pueblo A hay 120 habitantes, 30 de los cuales leen el diario todos los días. En el pueblo B hay 80 habitantes, 24 de los cuales leen el diario todos los días. ¿Dónde se lee más el diario?

Al igual que en algunos incisos del primer problema, aquí aspiramos a que los estudiantes comparen razones y reflexionen acerca de los resultados. Una forma de resolver el ejercicio puede ser la siguiente:

- *En primer lugar escribimos la razón entre los habitantes que leen el diario respecto del total de habitantes del pueblo A:*

  $\frac{30}{120}$ *= 0,25*

  Realizando el mismo razonamiento para el pueblo B:

  $\frac{24}{80}$ *= 0,3*

  Como la razón entre los habitantes que leen y el total de habitantes del pueblo B es mayor que la del pueblo A, podemos afirmar que en proporción, lee más gente en el pueblo B.

Otra resolución que podría ser comprensible para todos los alumnos sería la siguiente:

- *240 es el mínimo común múltiplo entre 120 y 80, de manera que multiplicando las poblaciones por 2 y 3 respectivamente, podremos comparar los habitantes que leen como si ambos pueblos tuvieran la misma cantidad de habitantes.*

$$\frac{30}{120} = \frac{30x2}{120x2} = \frac{60}{240}$$

$$\frac{24}{80} = \frac{24x3}{80x3} = \frac{72}{240}$$

De esta manera, si las poblaciones se multiplicaran hasta tener 240 habitantes y se respetara la proporción de habitantes que leen, se leería más en el pueblo B.

Como el tiempo de trabajo es de 80 minutos, planeamos llegar hasta aquí. Vamos a hacer pasar al frente a algún alumno a resolver el problema anterior y luego del consenso acerca de la respuesta, nos despediremos del curso hasta la próxima clase.

Clase N° 3 (19/08)

En esta clase se tiene previsto completar el aprendizaje de la guía N°1. Luego del saludo inicial, invitaremos a los alumnos a seguir con la guía.

Comenzarían con un ejercicio en donde se listan series de números y les pedimos ubicarlos de tal manera que formen proporciones. Estas son las series:

8; 2; 16; 4

40; 25; 16; 10

0,5; 1; 2; 4

Y estas son algunas de las respuestas posibles:

$\frac{8}{2} = \frac{16}{4}$ = 4 o bien, $\frac{2}{8} = \frac{4}{16}$ = 0.25

$\frac{40}{25} = \frac{16}{10}$ = 1.6 o bien, $\frac{25}{40} = \frac{10}{16}$ = 0.625

$\frac{0.5}{1} = \frac{2}{4}$ = 0.5 o bien, $\frac{4}{2} = \frac{1}{0.5}$= 2

A continuación solicitaremos a los alumnos que pasen al frente, escriban sus proporciones y luego que tomen asiento. Nosotros elegiremos una de ellas, por ejemplo:

$$\frac{8}{2} = \frac{16}{4}$$

Escribiremos la serie de números que la forman 8, 2, 16 y 4 en este orden, y les diremos que cada uno de esos términos de la proporción recibe un nombre:

*En el contexto de esta proporción, 8 y 4 se llaman **extremos**, y 2 y 16 se llaman **medios**.*

- Les preguntaremos *¿por qué les parece que estos elementos se llaman así?*

Esos nombres se deben a que 8 y 4 son el principio y el final de la serie por eso son extremos y los demás números como están ubicados entre esos dos, reciben el nombre de medios.

Si eso no sale de inmediato cambiaremos la disposición de los números para facilitarles la comprensión.

Después que logren incorporar esta nueva terminología, pasarán al próximo ejercicio, el cual muestra tres proporciones:

$$\frac{3}{7}=\frac{7{,}5}{17{,}5} \qquad \frac{5}{16}=\frac{15}{48} \qquad \frac{15}{7}=\frac{27}{12{,}6}$$

Se les pide que marquen en cada una cuáles son los extremos y los medios para luego completar la siguiente tabla:

EXTREMOS	MEDIOS	EXTREMO X EXTREMO	MEDIO X MEDIO
3 y 17,5	7 y 7,5	3 x17,5 =	7x 7,5 =
y	y		
y	y		

Con cuentas sencillas van a llegar a esta tabla:

EXTREMOS	MEDIOS	EXTREMO X EXTREMO	MEDIO X MEDIO
3 y 17,5	7 y 7,5	3x17,5= 52,5	7x7,5=52,5
5 y 48	16 y 15	5x48 = 240	16x15=240
15 y 12,6	7 y 27	15x12,6=189	7x27= 189

Entonces les preguntaremos:

- *¿Qué pueden notar en la tabla?*

La tercera y cuarta columna dan el mismo resultado

Esto daría lugar a que en la etapa de institucionalización definamos la propiedad fundamental de las proporciones:

> En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios

Una vez que los alumnos registren la propiedad fundamental de las proporciones en sus carpetas, continuaremos con el ejercicio que sigue.

En la proporción $\frac{2x-3}{4} = \frac{x}{3}$, el valor de x es:

A. $\frac{9}{10}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\mathbf{\frac{9}{2}}$

D. $\frac{9}{4}$

En este ejercicio presentamos la típica configuración de una proporción como igualdad entre razones, pero sus elementos ya no son sólo números, sino expresiones algebraicas. Los alumnos podrían resolver la ecuación obteniendo ecuaciones equivalentes hasta determinar el valor de x para el cual se cumple la proporción. Luego, podrán comparar ese valor con los resultados de las opciones A, B, C y D.

Otra manera es sustituir x por cada uno de los valores presentaros en las opciones. Cuando la sustitución termine afirmando algo absurdo, entonces podrán deducir que x no puede tomar ese valor. Cuando la sustitución sea equivalente a algo cierto, entonces para ese valor de x se cumple la proporción.

La guía continúa con un ejercicio en el que se pueden aplicar métodos ya utilizados para resolver ejercicios anteriores.

Un sastre compró 3,5 m de tela y pagó por ella $ 245. Si necesita 8 m de la misma tela, ¿cuánto deberá pagar?

Pensamos que podrán surgir dos maneras de encararlo:

- *Si dividimos los $245 por los 3,5 m de tela, notamos que cada metro de tela cuesta $70. Por lo tanto podemos multiplicar por 70 los 8 m de tela obteniendo un monto total de $560.*

Este primer método que se expone suele llamarse “reducción a la unidad”

- *Otra manera es plantear la regla de tres simple:*

Si 3,5 m de tela $\longrightarrow$ *cuestan $ 245*

8 m de tela $\longrightarrow$ *costaran x* $\therefore x = \frac{8*245}{3,5} = 560$

Luego el sastre deberá pagar 560 pesos.

Por último, proponemos ejercicios en donde resultará imprescindible que los estudiantes apliquen la propiedad fundamental de las proporciones aprendida recientemente.

a) $\dfrac{x}{0{,}60-0{,}4} = \dfrac{(0{,}5-1)^2}{0{,}\overline{2}}$

b) $\dfrac{x-4}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{x+2}{(3+\sqrt{4})^0}$

c) $\dfrac{\frac{2}{3}-1}{1+\frac{1}{9}} = \dfrac{x-\sqrt{\frac{1}{4}}}{3-2x}$

d) $\dfrac{x+\frac{1}{4}}{x} = \dfrac{3^{-1}.0{,}3}{\sqrt[3]{-1}}$

En las ecuaciones a y b, es posible averiguar el valor de la incógnita aplicando la propiedad uniforme. Sin embargo, en las ecuaciones c y d la incógnita “x” aparece en el denominador, y es probable que los alumnos nunca hayan resuelto ecuaciones con esta configuración. Nuestra intención es que le encuentren sentido a la aplicación de la propiedad fundamental de las proporciones, ya que les permitirá “despejar” la incógnita en estas ecuaciones particulares.

Los valores que resuelven cada ecuación son:

a) $x = \frac{9}{40}$ o 0,225 según se haya trabajado con fracciones o decimales.

b) $x = -5$

c) $x = -1$

d) $x = -\frac{5}{22}\ o - 0.2\overline{27}$

Antes de finalizar la clase, les entregaremos una fotocopia con los conceptos y propiedades que se estudiaron luego de resolver la primera y segunda actividad. El contenido de las copias se puede apreciar en el anexo III.

Clase N° 4 (22/08)

La planificación de esta tercera clase de un módulo y medio **(120 min)** consta de 3 momentos:

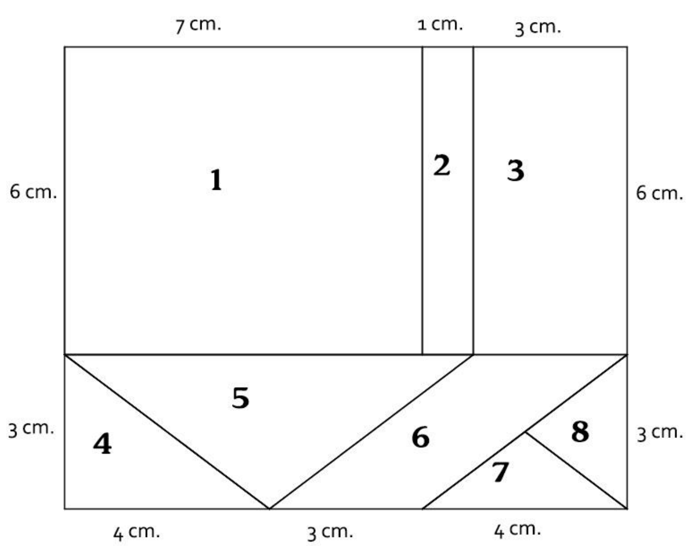
1. Un saludo inicial, continuando con un repaso sobre los temas estudiados la clase anterior y la resolución de los ejercicios que quedaron sin realizar. **(40 min)**
2. Introducción de otro aspecto perteneciente a la temática Razones y Proporciones: la proporcionalidad geométrica a partir de la semejanza entre figuras, que incluye los contenidos relacionados con la proporcionalidad entre segmentos. Para esto, retomaremos el problema del Tangram ampliado a través de una guía que nos permitirá ir construyendo este conocimiento **(60 min)**.
3. Puesta en común: abarca un debate entre todos los integrantes de la clase en el que se exponen las producciones de los alumnos. En esta instancia nos aproximaremos al concepto de semejanza de figuras y a los criterios de semejanza de triángulos. **(20 min)**.

El trabajo práctico pensado para esta clase consiste en una tarea ubicada dentro del contexto de las matemáticas puras; es de carácter abierto, dado que su resolución depende de los procedimientos que lleve a cabo cada grupo.

Los alumnos tendrán que realizar pocas conjeturas, dado que la búsqueda de regularidades se efectuó anteriormente. La actividad, por momentos, puede resultar exploratoria, aunque no esperamos que suponga demasiada dificultad para los grupos.

El objetivo que perseguimos es que los alumnos sean capaces de reconocer relaciones de proporcionalidad entre los lados de las figuras geométricas. Los contenidos que involucra son principalmente figuras semejantes y particularmente, triángulos.

Nuevamente les diremos que formen grupos numerados del 1 al 8, con tres integrantes como máximo.



A continuación mostramos el primer inciso:

Observen las figuras que les tocó ampliar y las figuras ampliadas y respondan ¿Qué características comunes tienen las figuras originales con las correspondientes ampliadas? ¿Qué diferencias? Nómbrenlas a continuación

Veamos una aproximación de las repuestas que podrán surgir en este punto:

DIFERENCIAS	SIMILITUDES
tamaño longitud de los lados perímetro superficie	número de lados formas ángulos

Pasemos al inciso siguiente:

Miren los cuadriláteros graficados en la fotocopia y respondan si existe o no una relación de proporcionalidad entre sus lados, explicando por qué.

Creemos que este inciso puede despertar ciertas dudas, y es bueno que los alumnos se las planteen. En primer lugar, se pone en cuestión lo que es una relación de proporcionalidad y lo que no es, en lo que puede haber distintas opiniones. En segundo lugar, se pregunta por qué, y en esta justificación también esperamos que surjan contrastes enriquecedores entre las distintas respuestas.

Una respuesta que podrían dar sería:

No existe relación de proporcionalidad. Por ejemplo tomando las figuras 1) y 2) y calculando las razones entre sus medidas: $\frac{6}{6} \neq \frac{7}{1}$

En la puesta en común podremos cuestionar:

- *¿Qué quieren decir con forma?*
- *¿El hecho de que posean los mismos ángulos, garantiza que tengan la misma forma?*
- *¿Qué pasa con los triángulos? ¿Por qué?*
- *¿Qué pasa con los cuadriláteros? ¿Por qué?*
- *¿Cómo hacíamos para pasar de un lado a su ampliado?*

- *Decíamos que había proporcionalidad entre las figuras del tangram original con respecto a las del ampliado porque la razón entre estas era 3,5. ¿Se acuerdan? ¿Alguien no entendió lo que dijimos? ¿Alguien puede explicar?*
- *¿La forma tendrá que ver con la proporcionalidad entre los lados?*

Seguidamente les pediremos que observen los triángulos ilustrados en la fotocopia y resuelvan las siguientes actividades:

- Agrupen aquellos triángulos que presentan similitudes. **Justifiquen** su elección.
- De los triángulos que agruparon. ¿Cuáles son los que más se parecen? Expliquen cómo harían para pasar de un triángulo a otro y expliciten las propiedades que los relacionan.

Algunas similitudes que salgan a la luz, podrán ser:

- Los triángulos 7 y 8 tienen dos lados de medida 2,5 cm.
- Los triángulos 7 y 8 “pegados” en su lado en común, forman el triángulo 4.
- Los triángulos 5, 7 y 8 porque son isósceles.

En la puesta en común procuraremos que se traten las siguientes cuestiones:

Los que más se parecen son el 5 y el 7 porque además de ser isósceles tienen los mismos ángulos.

La base del triángulo grande es el doble de la base del triángulo chico y los lados que son iguales en el triángulo grande también son el doble de lo que miden en el triángulo chico.

Para pasar de una figura a la otra haríamos se puede realizar lo siguiente:

X2

TRIANGULO CHICO	TRIÁNGULO GRANDE
4	**8**
2.5	**5**
2.5	**5**

A partir de este trabajo daremos algunas definiciones que institucionalizaremos de forma oral. Estas quedarán expuestas en dos afiches y registradas en fotocopias que les entregaremos a los alumnos.

Si dos figuras tienen todos sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales entonces son **semejantes**.

En particular, dos **triángulos** son **semejantes** si tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales

Además, explicaremos algunos términos figuran en la definición, ya que son términos propios de la matemática.

Lados homólogos son aquellos lados que se oponen a los ángulos iguales.

También podemos decir que **lados homólogos** son aquellos que ocupan el mismo lugar

Seguiremos dialogando con la clase:

- *¿Si dos triángulos tienen sus lados homólogos proporcionales y dos ángulos iguales, serán semejantes? ¿Por qué? (*Cálculo del suplemento*)*
- *En el ejemplo anterior ¿qué pares de lados homólogos hay?*
- *De los triángulos del tangram original… ¿Hay algunos que sean semejantes?*

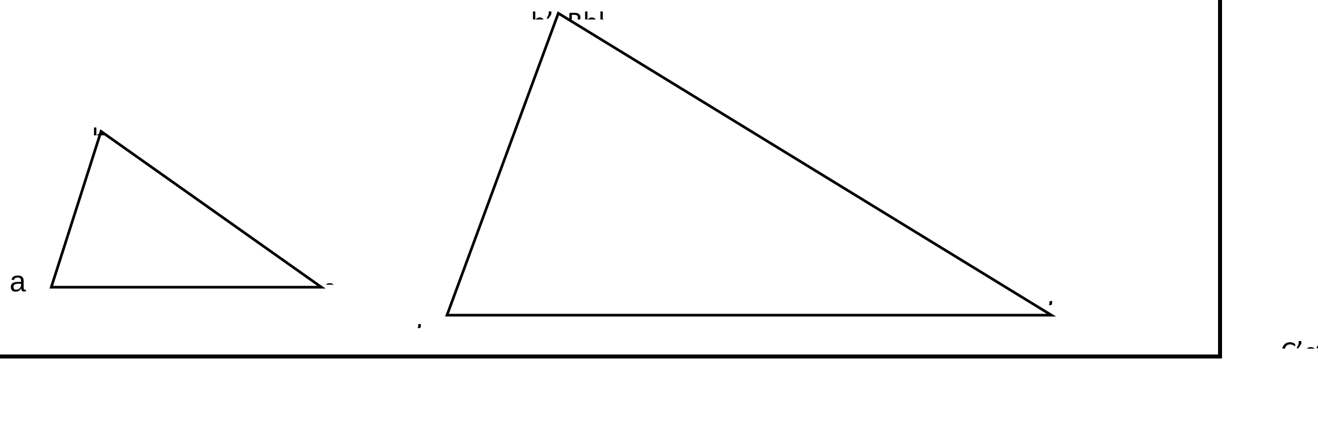
A continuación, el contenido de los afiches y fotocopias:

Dos triángulos son semejantes si tienen:

- Sus ángulos respectivamente iguales;
- Sus lados homólogos proporcionales

En símbolos:

$$\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{a'b'c'} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{a} = \widehat{a'}, \widehat{b} = \widehat{b'}, \widehat{c} = \widehat{c'} \\ \dfrac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{b'c'}} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{a'c'}} \end{cases}$$



Oralmente les comentaremos:

- *En el trabajo práctico el número 2 por el que multiplicábamos los lados se llama* ***<u>Razón de semejanza</u>*** *y es el equivalente a la constante de proporcionalidad que vimos antes*

Más generalmente: $\frac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{b'c'}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{a'c'}} = k$ (esto lo completamos en la pizarra)

Clase N° 5 (26/08)

El objetivo que nos proponemos alcanzar en este tramo de las prácticas es concluir que es posible construir triángulos semejantes con al menos dos datos, sin la necesidad de verificar que los 3 pares de ángulos sean iguales y los 3 pares de lados sean proporcionales. Para esto vamos a abordar los criterios de semejanza de triángulos.

Comenzaremos con una quinta actividad que pone en cuestión cuándo una información es suficiente para asegurar que dos triángulos son semejantes y cuándo no. Se trata de una tarea cerrada, situada en un ambiente de aprendizaje de tipo (2).

La actividad está diseñada para resolverse grupalmente. Cada equipo tendrá las mismas consignas, pero algunos datos cambiados. Los elementos de trabajo para llevarla a cabo son: lápiz, papel A4 o doble oficio (lo veremos en la marcha), regla, escuadra, transportador, compás, tijera, calculadora.

Al inicio, comenzaremos a indagar a la clase preguntando cosas como:

¿Recuerdan algo de lo que estudiamos la clase pasada?

- **Semejanza entre figuras**
- **Triángulos semejantes**
- **Comparación de triángulos**
- **Cómo ampliar triángulos**
- **Razón de semejanza**
- **Proporcionalidad entre lados de figuras semejantes**

Anotaremos los aportes de los alumnos en la pizarra, procurando que cada comentario reciba su debido tratamiento y sea entendido por todos los compañeros presentes. Luego preguntaremos:

- *De acuerdo a esta lista de conceptos: ¿Cuando dos figuras son semejantes?*
- **Cuando tienen los mismos ángulos**
- **Cuando tienen la misma forma**
- **Cuando tienen igual forma pero tamaño diferente, más grande o más chico**
- **Cuando sus lados son proporcionales**

- *¿Alguien que haya venido la clase pasada puede leer la definición que copiamos en la carpeta, por favor?*

La clase de hoy vamos a hacer una actividad en grupos de tres integrantes. Tengan a mano los apuntes que tomaron la clase pasada. Esperamos que una vez que terminemos la actividad, podamos comprender mucho mejor cuándo dos triángulos son semejantes, cuando no y cuando no podemos asegurar ninguna de las dos cosas.

Les entregaremos a cada grupo un ejemplar de las fotocopias de la quinta actividad. El tiempo destinado al trabajo por parte de los grupos será de unos 60 minutos.

¿Qué sucederá en cada consigna?:

El primer punto es igual para para todos los grupos (mismos datos). Al comparar los triángulos, resultarán semejantes, pues tienen dos ángulos iguales. Pretendemos que concluyan el criterio de semejanza de triángulos A-A.

Para cada par de medidas de ángulos, tracen ustedes un triángulo y luego comparen sus cuatro triángulos con los de los otros equipos:

90° y 60°	45° y 45°
120° y 30°	80° y 40°

¿Que pudieron observar al comparar sus triángulos con los de sus compañeros?

Si el inciso anterior nos brindaba información sobre los ángulos, este lo hace sobre los lados. Los datos de las medidas cambian de fotocopia a fotocopia, pero siempre manteniendo la proporcionalidad. Al comparar sus gráficos con lo de sus compañeros podrán ver que son semejantes observando su forma y corroborarlo midiendo sus ángulos.

Para la siguiente terna de medidas de lados: 6 cm, 10 cm y 12 cm, tracen un triángulo y compárenlo con los de los demás grupos.
¿Qué diferencias y similitudes encuentran con los triángulos de los demás grupos?
Si sólo contáramos con las medidas de dos lados en cada triángulo que sean proporcionales ¿Que pueden decir al respecto de los triángulos construidos?
Investiguen en equipo acerca de la cantidad de lados con la que precisamos contar para construir triángulos semejantes si no conocemos los valores de los ángulos de dichos triángulos.

El último de los incisos que se ven en el cuadro anterior invita a los alumnos a que “investiguen” en torno a los requisitos mínimos que se deben dar para que dos triángulos sean semejantes, en este caso, teniendo solo información sobre la medida de sus lados. Esperamos que respondiendo las preguntas puedan concluir el criterio LLL.

El inciso que sigue pretende generar una reflexión en torno al criterio de semejanza LAL, en el que conociendo la medida de un ángulo y dos lados podemos determinar si dos triángulos son semejantes. La medida de los lados será distinta para cada grupo: cambiará el tamaño del dibujo, pero no la forma.

Construyan un triángulo donde dos lados midan 4 cm y 5 cm respectivamente y el ángulo comprendido entre esos lados sea de 60° y digan cómo es ese triángulo con respecto a los de los demás grupos.

Luego pasamos a un inciso que tiene los mismos datos para todos los grupos. Con él buscamos que los alumnos comprueben que sólo con las medidas de un lado y un ángulo no podemos asegurar la semejanza de dos triángulos.

¿Qué pasa si?:

Dado un par de triángulos con las siguientes características:

- En un triángulo, uno de sus lados mide 7 cm y uno de sus ángulos 60°;
- En el otro triángulo, el lado y el ángulo correspondientes miden 3.5 cm y 60° respectivamente.

¿Se trata de triángulos semejantes? Argumenten acerca de la suficiencia o insuficiencia de datos para asegurar la semejanza antes de hacer los trazos. Luego realicen los trazos, recorten las figuras y verifiquen con sus compañeros lo antes argumentado.

En el próximo punto, seguimos experimentando con el cambio de la posición del ángulo en común con respecto a los lados proporcionales. No siempre que dos triángulos poseen un ángulo en común y dos lados proporcionales serán semejantes. Esperamos que surjan resultados distintos y opiniones dispares. Nosotros procuraremos que los alumnos se animen a exponer y discutir sus hipótesis.

Dado un par de triángulos cuyas características son:

- En uno de ellos un lado mide 5.5 cm y el otro mide 7 cm y el ángulo opuesto a uno de los lados mide 40°;
- En el otro un lado mide 11 cm y el otro 14 cm y el ángulo opuesto a uno de esos lados mide 50°. *(en ambos casos tomar el mismo par lado-ángulo opuesto)*
- ¿En cada caso se puede asegurar la existencia de una relación de semejanza entre ambas figuras? De ser necesario recortarlas y cotejen sus respuestas con sus compañeros.

En la última consigna se les pide registrar sus conclusiones y aclararlas de manera que generen aportes valiosos en la puesta en común.

Exploren en equipo qué datos mínimos adicionales sobre los lados se requieren para construir triángulos semejantes **cuando se conoce solamente un ángulo**. Tengan en cuenta los resultados de los incisos anteriores.

Cuando los grupos hayan terminado la actividad invitaremos a que los equipos expongan distintas resoluciones.

Finalmente pegaremos los afiches que llevan escritos los tres criterios:

- *Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales. (**Criterio AA**).*
- *Dos triángulos son semejantes si tienen tres lados proporcionales. (**Criterio LLL**).*
- *Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual. (**Criterio LAL**).*

Clase N° 6 (29/08)

Al inicio de la planificación, para esta clase estaba previsto introducir el teorema de Thales utilizando las conclusiones sobre semejanza. En concreto, pensábamos partir de un problema que tenga una configuración de Thales, continuar las rectas secantes de manera que se formen tres triángulos y resolverla utilizando las proporciones que nos brinda la semejanza de triángulos. Mientras estábamos desarrollando nuestras prácticas y antes de comenzar a planificar esta clase, definimos que sería imposible dedicar una clase a la enseñanza de este teorema.

Por tiempos institucionales solo podríamos desarrollar siete clases en total, por lo que esta clase fue la última clase previa a la evaluación, quedando destinada a un repaso general de los aprendizajes y contenidos.

2.1.5 Evaluación de los aprendizajes

Vamos a establecer dos instancias evaluativas:

- Una evaluación formativa enfocada en las producciones de los alumnos cuya finalidad será obtener información acerca de las dificultades que presenten y en qué posición se encuentran con respecto al conocimiento matemático. En función de los resultados que obtengamos decidiremos si es necesario realizar modificaciones en nuestra planificación, planteando actividades alternativas para reforzar los aprendizajes que esperamos concretar.
- Una evaluación sumativa, que nos informará la manera en que los alumnos lograron cumplir con los objetivos propuestos. Esta evaluación será calificada con una nota que se registre en las libretas de los alumnos.

.

2.1.6 Cronograma tentativo de actividades

A continuación exponemos el cronograma de actividades que realizamos al comienzo de nuestras prácticas. En el momento de su elaboración pensábamos dar ocho clases en total. Las guías de actividades 2 y 3 no fueron totalmente diseñadas, aunque algunos ejercicios pensados para alguna de estas guías fueron incluidos en la clase de repaso.

Fecha	**Contenidos trabajados**	**Actividades desarrolladas**
08/08 (120 min)	Introducción a las razones y proporciones (construcción de figuras semejantes) Definición de razón y su significado.	Ampliación del Tangram; Análisis y comparación de figuras semejantes; Resolución de problemas varios que involucran el uso de razones; Institucionalización de razones y proporciones aritméticas.
12/08 (80 min)	Tabla de proporcionalidad directa; Propiedades de la tabla; Constante de proporcionalidad: uso y significado; reconocimiento de cantidades proporcionales y uso en la vida cotidiana	Guía de actividades n°1
15/08 (120 min)	FERIADO - Paso a la Inmortalidad del General José de San Martín	
19/08 (80 min)	Reconocimiento de la estructura y los elementos de una proporción; Propiedad fundamental de las proporciones: cálculo de extremos y medios;	Guía de actividades n°1
22/08 (120 min)	Figuras semejantes; Semejanza de triángulos; Razón de semejanza;	Trabajo Práctico: Retomamos el análisis del Tangram con otras consignas Institucionalización de figuras semejantes - en particular triángulos semejantes
26/08 (80 min)	Triángulos semejantes Criterios de semejanza de triángulos;	Trabajo Práctico - condiciones mínimas que deben cumplir dos triángulos para ser semejante Institucionalización de los criterios Guía de actividades n°2
29/08 (120 min)	Semejanza de triángulos Criterios de semejanza Teorema de Thales	Guía de actividades n°2 Problema: Relaciones de proporcionalidad entre segmentos correspondientes determinados por tres rectas paralelas cortadas por dos transversales
02/09 (80 min)	Teorema de Thales; Repaso general.	Guía de actividades n°3 Guía de repaso;
05/09 (120 min)	Todos los contenidos desarrollados	Evaluación

2.2 Implementación de la propuesta de enseñanza

2.2.1 Cronograma efectivo de las prácticas

En ambos cursos, el cronograma se adaptó a medida que fueron sucediendo las clases. De 8 clases que se programaron solo se dieron efectivamente 7.

Si bien procuramos seguir siempre los guiones conjeturales que elaborábamos previamente, fueron muchas las circunstancias que se impusieron, produciendo cambios en la organización de nuestras clases y las actividades que teníamos planeadas para cada instancia.

En cada curso se fue concretando la planificación con tiempos diferentes. Por esto, para describir de manera fiel cómo sucedieron las clases, fue necesario separar las clases de 3°A y 3°B. Sin embargo, la mayoría de los momentos de institucionalización, puestas en común o resolución de actividades se tratan con detalle sólo la primera vez que aparecen.

Como se puede suponer, también cada curso posee su propio cronograma de implementación, que describe lo que sucedió en cada una de las clases.

Tercero A

Fecha	Contenidos trabajados	Actividades desarrolladas
22/08 (120 min)	Introducción a las razones y proporciones (construcción de figuras semejantes) Definición de razón y su significado.	Ampliación del Tangram; Análisis y comparación de figuras semejantes, Resolución de problemas varios que involucran el uso de razones Institucionalización de razones.
26/08 (80 min)	Tabla de proporcionalidad directa; Propiedades de la tabla; Constante de proporcionalidad: uso y significado; reconocimiento de cantidades proporcionales y uso en la vida cotidiana	Resolución de problemas varios que involucran el uso de razones; Institucionalización de razones y proporciones aritméticas. Guía de actividades N° 1
29/08 (120 min)	Constante de proporcionalidad: uso y significado; reconocimiento de cantidades proporcionales y uso en la vida cotidiana	Guía de actividades N°1
02/09 (80 min)	Reconocimiento de cantidades proporcionales y uso en la vida cotidiana Propiedad fundamental de las proporciones: cálculo de extremos y medios;	Guía de actividades N°1
05/09 (120 min)	Propiedad fundamental de las proporciones: cálculo de extremos y medios; Figuras semejantes; Semejanza de triángulos; Razón de semejanza;	Finalización de la guía de actividades N°1 Evaluación formativa -Trabajo Práctico: Retomamos el análisis del Tangram con otras consignas.
09/09 (80 min)	Semejanza de triángulos; Razón de semejanza; Repaso general	Institucionalización de figuras y triángulos semejantes Guía de repaso (modificada)
12/09 (120 min)	Acto por el día del maestro	
16/09 (80 min)	Todos los contenidos desarrollados	Evaluación sumativa

Tercero B

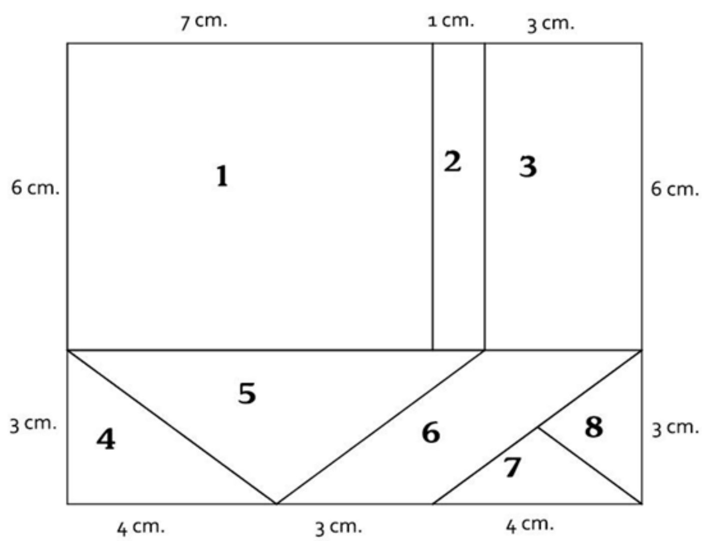
Fecha	Contenidos trabajados	Actividades desarrolladas
22/08 (120 min)	Introducción a las razones y proporciones (construcción de figuras semejantes) Definición de razón y su significado.	Ampliación del Tangram; Análisis y comparación de figuras semejantes, Resolución de problemas varios que involucran el uso de razones Institucionalización de razones y proporciones aritméticas
26/08 (80 min)	Tabla de proporcionalidad directa; Propiedades de la tabla; Constante de proporcionalidad: uso y significado; reconocimiento de cantidades proporcionales y uso en la vida cotidiana	Guía de actividades N°1
29/08 (120 min)	Constante de proporcionalidad: uso y significado; reconocimiento de cantidades proporcionales y uso en la vida cotidiana Propiedad fundamental de las proporciones: cálculo de extremos y medios;	Guía de actividades N°1
02/09 (80 min)	Cálculo de extremos y medios; Figuras semejantes; Semejanza de triángulos; Razón de semejanza;	Trabajo Práctico: Retomamos el análisis del Tangram con otras consignas. Institucionalización de figuras semejantes - en particular triángulos semejantes
05/09 (120 min)	Triángulos semejantes Criterios de semejanza de triángulos;	Evaluación formativa - Trabajo Práctico: condiciones mínimas que deben cumplir dos triángulos para ser semejantes.
09/09 (80 min)	Criterios de semejanza de triángulos Repaso general	Institucionalización de los criterios Guía de repaso (modificada)
12/09 (120 min)	Acto por el día del maestro	
16/09 (80 min)	Todos los contenidos desarrollados	Evaluación sumativa

2.2.2 Nuestras clases

Clase N°1 (22/08)

Tercero A

Luego de saludar a la clase, nos presentamos junto con nuestra profesora supervisora, explicando el rol que cumplía cada uno en nuestro equipo de trabajo. Terminada la presentación realizamos una descripción oral de la primera parte de la actividad (ampliación de un Tangram) y repartimos las fotocopias con las consignas, solicitándole a los alumnos que formaran grupos de a lo sumo tres integrantes. En cada copia aparecían escritos a mano los números de las piezas a ampliar y el número de grupo. A pesar de que hubo ausentismo, se formaron los ocho grupos previstos; cuatro se encargarían de un rompecabezas y los cuatro restantes de otro idéntico.



Luego de aclarar de qué se trataba este primer trabajo práctico, les entregamos a los grupos las cartulinas, las tijeras y los instrumentos de geometría necesarios para realizar las construcciones. Seguidamente anunciamos que sólo intervendríamos para responder dudas acerca de los enunciados, pero no brindaríamos ayuda con los métodos de resolución. Los equipos en general comprendieron estas pautas y se pusieron a trabajar de forma autónoma. La primera consigna decía:

> Construiremos un Tangram ampliado. Este grupo se encargará de las piezas número ___ y ___. Deberán construirlas en una cartulina sabiendo que lo que mide 4 cm en la hoja pasará a medir 14 cm en la cartulina. Recorten las dos piezas.

Las primeras dudas que nos transmitieron los alumnos fueron en torno a la obtención de las medidas ampliadas:

- “*¿Qué significa que lo que mide 4 cm medirá 14 cm?”*
- *“Profe, no entiendo qué hay que hacer con el resto de las medidas, porque acá la hoja solamente muestra una.”*

Ante este tipo de dudas, les expresamos que calcular las medidas ampliadas formaba parte de la matemática que había que poner en uso y estaba a cargo de ellos. También nos sucedió que un grupo de alumnos vino a quejarse, expresando que no habían “visto” nada que les permita resolverlo; la queja tenía sentido para los alumnos porque las prácticas comenzaron con la actividad, sin enseñanza previa. Les argumentamos que los pusimos en grupos de tres integrantes para que al menos uno pueda aportar ideas cuando a los otros dos se les dificultara avanzar y que iban a ser capaces de resolver la actividad sin nuestra ayuda, procurando darles confianza.

Otros planteos de los alumnos, en cambio, fueron hechos una vez que ya habían aplicado un método, o conjeturaban sobre la efectividad de alguna forma de hacer los cálculos:

- “*Acá hay que sumarle diez a todos los lados, ¿Puede ser?”*
- *“Aplicamos regla de tres simple profe, ¿Está bien?”*

Este tipo de preguntas que buscaban seguridad en nuestra aprobación surgió sobre todo en torno a la aplicación de la regla de tres simple y a la suma de 10 cm para ampliar las medidas. Les pedimos que siguieran trabajando sobre la actividad diciéndoles que iban a saber si los cálculos eran válidos una vez que armaran las figuras. Procuramos demostrar que no teníamos capacidad de evaluar de un vistazo si los métodos los llevarían cumplir el objetivo. Algunos debieron realizar más de una vez sus bocetos de las figuras.

Según lo que observamos pasando banco por banco, en el planteo de dudas, y en la posterior puesta en común, los alumnos emplearon estos métodos para la obtención de las medidas:

- Fundamentándose en el cálculo 14=**10**+4, supusieron que para ampliar sus figuras debían sumarle 10 cm a cada lado. Después desistieron de usar este método.
- Otros dedujeron que había que multiplicar los lados de la figura original por 3,5. Cuando les preguntamos de dónde obtuvieron ese resultado, dijeron que provenía de dividir 14 con 4. En este procedimiento, llamado comúnmente “reducción a la unidad”, subyace la correspondencia que caracteriza las relaciones de proporcionalidad.
- A un grupo al que le tocó ampliar la figura (4), una vez que modificaron los catetos del triángulo rectángulo utilizando regla de tres simple, recurrieron al teorema de Pitágoras para obtener el valor de la hipotenusa. Previamente nos preguntaron si “se podía” usar Pitágoras. Les preguntamos por qué no habría de funcionar, si habían aprendido que era un método válido. Nos dieron la razón y les comentamos que aplicado correctamente, cualquier método matemático cumple con su objetivo.
- Otros alumnos usaron la regla de tres simple: “si lo que mide 4, pasa a medir 14, entonces lo que mide A, medirá $A\ x\ 14 \div 4 = 3{,}5\ x\ A$”

En el transcurso de la clase, aquellos que estaban inseguros aplicando la regla de tres simple pudieron comprobar que funcionaba por la observación de sus producciones o por las producciones de otros grupos. Asumieron desde un principio que todas las medidas ampliadas se obtenían utilizando un método general: si una estrategia funcionaba para ampliar las medidas de la figura (4), por ejemplo, también serviría para ampliar las de cualquier otra figura.

Los alumnos que realizaron el cociente entre 14 y 4 dedujeron que por cada centímetro de la figura original correspondían 3,5 cm de la figura ampliada, expresándolo mediante la igualdad **“*1cm = 3,5cm*”** o asignación por medio de una flecha: **“*1 cm* → *3,5 cm*”.**

Todos los grupos concluyeron la construcción de sus figuras. Los equipos lograron armar ambos rompecabezas y en cada caso las piezas encajaban. Los pequeños errores relacionados con la medición o el recorte en ningún caso fueron significativos.

Luego de juntar las piezas de los rompecabezas, los alumnos dieron por concretada la actividad. Les recordamos que todavía quedaba un último punto:

> Consultando información con los grupos con los que armaron el Tangram, elaboren una tabla con los datos empleados para armar la figura.

Luego de interpretar la consigna y agruparse en dos bancos, los alumnos nos expresaron que no comprendían la consigna ya que no sabían cómo confeccionar una tabla comparando los valores. Para que puedan resolver la actividad, les planteamos esta tabla vacía como modelo:

Lado original	Lado ampliado

Una vez que armaron las tablas, les pedimos que las reproduzcan en el pizarrón. Un integrante de cada equipo registró su tabla, quedando 2 tablas en el pizarrón (una por cada tangram).

Cuando los alumnos habían terminado de escribir las tablas les preguntamos si ambas brindaban la misma información, a lo que respondieron afirmativamente.

Tabla 1

Lado original	Lado ampliado
6 cm X 7 cm (1)	21 cm X 24,5 cm (2)
1cm X 6 cm (2)	3,5 cm X 21 cm (2)
6 cm X 3 cm (3)	10,5 cm X 21 cm (3)
4 cm X 3 cm (4)	14 cm X 10,5 cm (4)
6 cm X 7 cm (5)	21 cm X 24,5 cm
8 cm X 4 cm (6)	10,5 cm X 21 cm
4 cm X 3 cm (7)	14 cm X 10,5 cm

Esta tabla fue borrada en diálogo con los alumnos. Luego nos dimos cuenta que esta decisión fue apresurada, y que podríamos haber discutido más sobre cómo estaba organizada, pues no todos llegaron a interpretarla.

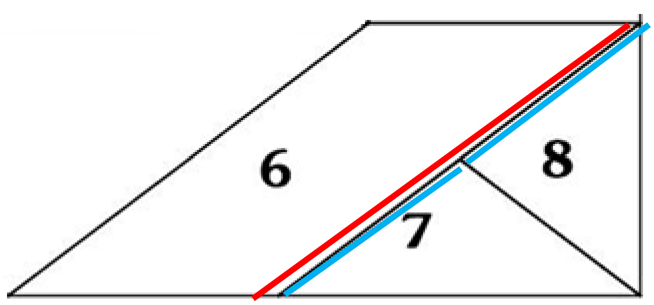
Tabla 2

Lado original	Lado ampliado
4 cm	14 cm
6cm	21 cm
3 cm	10,5 cm
7 cm	24,5 cm
1 cm	3,5 cm
8 cm	28 cm

Les preguntamos a los alumnos si había alguna forma de organizar mejor esta segunda tabla. Nos respondieron que se podía ordenar de menor a mayor, como esperábamos; la tabla fue ordenada y quedó registrada en el pizarrón durante el resto de la clase.

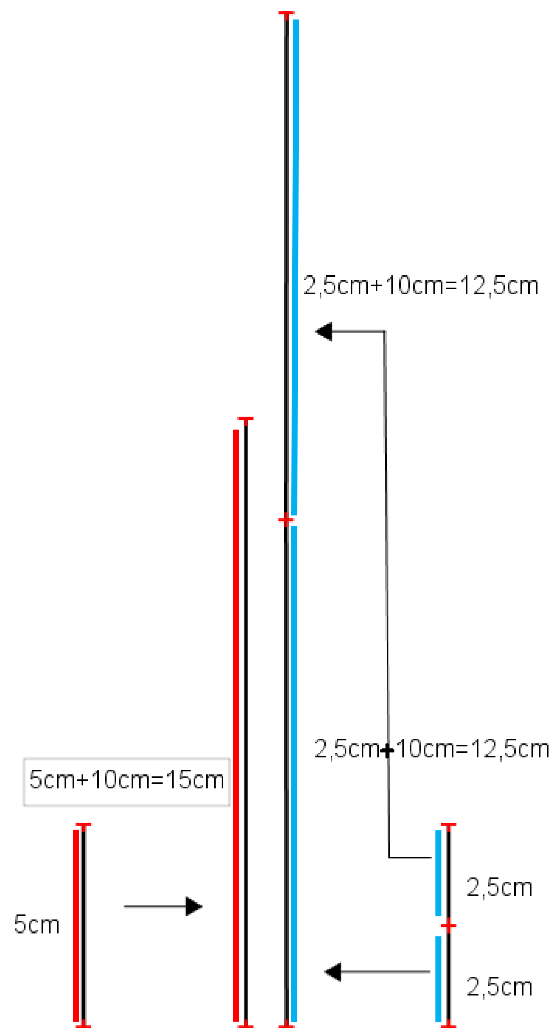
Una vez que los alumnos se reacomodaron sentándose en los bancos y mirando hacia el pizarrón, les preguntamos cómo habían realizado las construcciones. Surgieron distintos métodos, como el uso de la escuadra para trazar los ángulos rectos o la construcción de triángulos usando transportador o compás. No nos detendremos mucho en el análisis de las construcciones geométricas, pues en el contexto de la enseñanza de la unidad significaron un contenido complementario de proporcionalidad y semejanza. Una vez que comentaron qué instrumentos habían usado y cómo habían realizado las construcciones pasamos al cálculo de las medidas, donde se manifestaron algunos de los métodos de resolución que detallamos anteriormente.

Como se habían presentado varios casos en que los alumnos decidieron realizar la estrategia sumativa (sumar 10 cm a cada medida), decidimos tomarnos un tiempo para aclarar por qué no era lo mismo agrandar que ampliar y qué contradicción resultaba de añadir a todos los lados (segmentos) la misma cantidad de centímetros que se le había añadido al lado de 4cm, que eran 10. Para esto, tomamos el ejemplo de un lado que el paralelogramo compartía con dos triángulos. Hablamos de las figuras (6), (7) y (8):



Dialogando con la clase llegamos al siguiente acuerdo, que ahora se enuncia con más formalidad: Si consideramos la suma de segmentos como poner uno a continuación del otro uniéndolos en uno de sus extremos, la suma de dos segmentos ampliados debía ser igual a la ampliación de la suma.

Se procedió entonces a utilizar la “estrategia de la suma” para llegar a un resultado que contradecía esta cuestión que convenimos: sumando primero los segmentos, la ampliación resultaba más pequeña. En la imagen se emula el esquema que realizamos en el pizarrón. Las flechas unen los segmentos originales con los ampliados.



Después de esta instancia expositiva entregamos unas fotocopias con actividades adicionales divididas en 5 incisos. Estas copias llevaban anexa una última hoja titulada “para leer y estudiar”, que contenía una lista de los conceptos que trabajaríamos en esta clase.

Al realizar la primera parte de esta actividad, no precisaron recurrir a nosotros para preguntar cómo resolver los ejercicios hasta que llegaron a la tercera consigna.

> Si tengo un valor cualquiera “x” en la primera columna, ¿cómo puedo hacer para conseguir el valor correspondiente en la segunda columna?

Algunos alumnos pudiendo decir correctamente cómo había que proceder para obtener la medida no sabían cómo expresarlo por escrito. Recibimos preguntas del tipo *“¿qué hay que responder?”*. Ante estas dudas leímos la consigna con cada uno nuevamente y les preguntamos qué harían para conseguir la medida ampliada. Las respuestas fueron del tipo *“multiplicando x por 3,5”*. Con la intención de dejar que los registros queden a su cargo respondimos “*escribilo como te salga”*. De aquellos que consultaron, todos propusieron una respuesta adecuada desde el punto de vista matemático.

Aunque en las carpetas se observaron algunas configuraciones poco claras, entendimos que la consigna fue comprendida por los alumnos, pues reconocían que para obtener la medida ampliada debían multiplicar x por 3,5. A continuación se muestra una producción donde un alumno introdujo una flecha para expresar la correspondencia, pero omitió colocar el factor x en la medida ampliada:

$$1.\ X = 1.X$$

$$X \longrightarrow 3{,}5$$

Cuando quedaban aproximadamente 10 minutos para finalizar la clase, los alumnos habían resuelto este problema. Según lo que habíamos planificado este era el momento para institucionalizar los conceptos de razón y proporción. Le pedimos a un alumno que pasara al frente a copiar la tabla del primer ejercicio completando los valores faltantes. En la ilustración estos valores están puestos en **negrita.**

Usando los datos de la tabla, sin calculadora, encuentra la medida de los segmentos ampliados que faltan. Indica cómo obtuviste el valor en cada caso.

1	3,5
2	**7**
3	10,5
4	14
5	17,5
6	21
7	24,5
8	28
9	**31,5**
10	**35**
11	**38,5**
15	**52,5**
16	56

Luego de que un alumno pasara al frente a completarla, le preguntamos cómo había obtenido los valores. El alumno manifestó que el valor **7** lo había calculado como el doble de 3,5, pues el lado de medida 2 era el doble del de medida 1. El valor **31,5** lo obtuvo sumando 3,5 a 28. Siguió sumando 3,5 para calcular los dos valores siguientes que faltaban, **35** y **38,5**. Luego utilizó regla de tres simple para obtener el **52,5** y el **16**. Aprovechamos esta instancia para institucionalizar oralmente las propiedades de la suma y multiplicación que tiene toda tabla de proporcionalidad, que fueron vistas con más detalle en la clase siguiente.

Preguntamos:

"*¿Está bien lo que hizo el compañero, de sumar 3,5 a 28 para obtener 31,5?"*

Una alumna respondió: *"Sí, porque faltaría un centímetro ampliado, que mide 3,5 cm"*

De esta manera seguimos realizando preguntas a la clase para poner en cuestionamiento las estrategias que había utilizado el compañero que pasó al frente.

Una vez que terminamos de revisar la respuesta de esta consigna, pasamos a la siguiente.

Si tengo valor 4,4 en la primera columna, ¿cómo puedo calcular el valor que le corresponde en la segunda?

Al preguntar cómo lo habían resuelto surgieron dos respuestas. Un alumno había calculado el valor utilizando regla de tres simple, mientras que otro multiplicando 4,4 por la constante 3,5. Luego pasamos al ejercicio 3, que había generado consultas durante la clase. Gracias a este ejercicio todos los alumnos llegaron a la conclusión de que había que multiplicar por 3,5 para ampliar cualquier medida. Luego de que los alumnos nos lo expresaran escribimos esto en el pizarrón:

$$\boxed{\textit{lado ampliado} = 3{,}5 \text{ x } \textit{lado original}}$$

Les preguntamos si podíamos despejar el número 3,5, a lo que respondieron que usando la propiedad uniforme era posible dividir a ambos lados por "lado original", despejando la constante 3,5. En el pizarrón registramos:

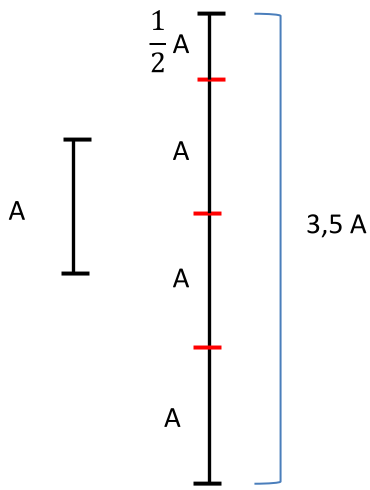
$$\boxed{3{,}5 = \frac{lado\ ampliado}{lado\ original}}$$

¿Están de acuerdo con que al dividir una medida ampliada por la original que le corresponde de 3,5? ***¡Sí!*** Respondió la clase.

¿Esto pasa para algunas de las medidas o para todas? **¡Para todas!** respondieron.

¿Y qué significa que cada medida ampliada dividida por su correspondiente original de 3,5? ¿Qué nos está diciendo este 3,5?

Los alumnos no supieron cómo responder estas preguntas, por lo que continuamos nosotros. Agregamos que en el caso nuestro significa que los segmentos originales entran tres veces y media en los ampliados. En el pizarrón dibujamos un segmento cualquiera llamándolo A, mostrando cómo se lo ampliaba gráficamente.



Aprovechamos la ocasión para introducir el término de razón y su significado, dimos una definición oral de razón, registrándola en el pizarrón:

Este cociente no es inocuo, sino que nos está diciendo algo. Como los cocientes entre dos cantidades tienen un significado, la matemática los llama ***razones****. Una* ***razón*** *es el cociente entre dos cantidades, y sirve para compararlas, nos brinda información de cómo es una con respecto a la otra*.

A partir de lo que definimos como razón, elaboramos la definición de proporción:

En nuestro caso, teníamos una serie de razones iguales, y esta situación es especial.
A una igualdad entre dos o más razones la llamamos ***proporción****,*

Habiendo terminado de escribir los registros le informamos a la clase que estas definiciones estaban en la última hoja de las fotocopias con actividades que les habíamos entregado. Anunciamos que terminaríamos la guía para el viernes siguiente y saludamos cuando tocó el timbre que daba inicio al recreo.

Tercero B

El inicio de la clase lo dedicamos a las presentaciones formales, la comunicación de la actividad y la entrega del material de trabajo. A continuación procedimos con la formación de grupos.

La asignación de figuras por grupos, fue resuelta en el pizarrón de la siguiente manera:

- Grupo 1 → figuras (1) y (5)
- Grupo 2 → figuras (2) y (6)
- Grupo 3 → figuras (3) y (7)
- Grupo 4 → figuras (4) y (8)
- Grupo 5 → figuras (1) y (6)
- Grupo 6 → figuras (2) y (7)
- Grupo 7 → figuras (3) y (8)
- Grupo 8 → figuras (4) y (5)

Apenas comenzó a resolverse la actividad, uno de los grupos que primero se formó planteó la estrategia de sumar 10 cm para obtener las medidas ampliadas: ***"¡Es re fácil profe! Si este pasa a medir 14, entonces el que mide 3 pasa a medir 13 y el otro 15"***

Nosotros les dijimos que no sabíamos, que probaran si estaba bien. El grupo de alumnas del que partió esta afirmación trabajó asiduamente desde un principio y rápidamente descartaron esta hipótesis. Como esta fue la única manifestación del uso de la llamada "estrategia sumativa" por parte de los alumnos, decidimos no dedicar tiempo explicando al frente el error que encerraba esta estrategia.

En general, los métodos de obtención de las medidas fueron similares a los que se dieron en 3°A. En los registros de los alumnos pudimos observar un uso poco ortodoxo del símbolo igual:

"multiplicamos todo por 3,5, porque 1cm = 3,5cm"

Interpretamos que esta afirmación buscaba expresar que 1 cm en las figuras originales equivale a 3,5 cm en las correspondientes ampliadas.

La resolución de la primera parte de la actividad les llevó menos tiempo que a 3° A. Antes de que toque el timbre del recreo gran parte de los grupos estaban a punto de terminar sus figuras y se quedaron pocos minutos del recreo para dejarlas listas.

Terminado el recreo, comenzamos la clase dispuestos a juntar las piezas en los rompecabezas para que los alumnos armaran la tabla; debimos esperar que algunos grupos terminaran con sus figuras.

A diferencia de lo que sucedió en 3° A, nosotros mismos dibujamos la tabla vacía en el pizarrón y le pedimos a los alumnos que nos dicten los valores. Estaban tan dispuestos a colaborar que, discutiendo en voz alta, acordaron entre ellos dictar primero los valores de las medidas más pequeñas y continuar de manera ascendente.

De los ejercicios adicionales, el (1), el (2) y el (3) fueron resueltos de manera similar a como sucedió en 3° A, y realizamos una puesta en común institucionalizando los conceptos de manera análoga a como lo habíamos hecho anteriormente.

Los alumnos continuaron con el problema N°4, que decía lo siguiente:

> En una verdulería tienen la siguiente oferta: “Compre 3 kilos de naranjas a $25”. En otra verdulería vemos el siguiente cartel “Ricas y jugosas naranjas, 2 kg por $18”. Suponiendo que la calidad de las naranjas es la misma, ¿dónde conviene comprar?

Este problema fue resuelto de dos maneras. La primera fue calculando el precio por kilogramo en cada verdulería, realizando una “reducción a la unidad”.

La otra forma fue buscar el múltiplo común menor de la cantidad de kilos, en este caso 6, y comparar los precios en los numeradores, de modo similar a como se comparan fracciones. Comprando dos ofertas de la primera verdulería, se pagan $50 por seis kilos; comprando tres ofertas en la segunda verdulería se compran seis kilogramos pero se pagan $54.

La clase llegó con poco tiempo para resolver el problema N°5 antes de la puesta en común.

> Martín tiene cinco fichas rojas por cada dos azules. Si tiene 21 fichas en total, entre rojas y azules, ¿Cuántas fichas tiene de cada color?

Una alumna pasó al frente a exponer su resolución. Dibujó 21 bolitas: 6 huecas, que representaban las azules, y 15 rellenas que eran las rojas. Cuando le consultamos cómo había procedido, nos contó que fue dibujando cinco bolitas rojas y dos azules sucesivamente, hasta completar las 21 bolitas. A esta estrategia la habíamos previsto en uno de nuestros guiones conjeturales.

Otro grupo observado utilizó un método analítico que se fundamenta en la misma idea que el método grafico usado por la alumna que pasó al frente: primero sumaron 2+5=7. Luego, suponiendo que para que haya 5 bolitas rojas por cada 2 azules tenía que repetirse esta misma cantidad, buscaron múltiplos de 7, llegando a que 7x3=21. Para saber cuántas bolitas rojas y azules había en las 21 bolitas sólo bastaba multiplicar 2 y 5 por 3. Así figuraban los cálculos en los registros:

$$\text{2 azules} = \text{5 rojas}$$
$$2 + 5 = 7 \longrightarrow 7\text{x}\mathbf{3} = 21$$
$$2\text{x}\mathbf{3} = 6$$
$$5\text{x}\mathbf{3} = 15$$

En la configuración, se puede observar un uso particular del símbolo "=" para indicar cantidades correspondientes ("a x le corresponde y" escrito como "x=y"). Observamos esta utilización del igual en varias producciones a lo largo de las prácticas.

Cuando finalizó la clase, la mayoría de los alumnos completaron la guía.

Clase N° 2 (26/08)

Tercero A

Luego de saludar, comenzamos a indagar a los alumnos acerca de lo que se había trabajado durante la primera clase, obteniendo las siguientes respuestas, que anotamos en la pizarra:

- *Ampliamos un rompecabezas.*
- *utilizamos la regla de 3 simple;*
- *no servía sumar 10cm a las medidas;*
- *vimos lo que era una razón;*
- *definimos proporción.*

En diálogo con el curso, hablamos del uso de razones en la vida cotidiana. Habíamos recordado lo que significaba la razón entre las medidas que habían sido ampliadas y las que no. Para ello nos valimos del concepto de los precios, que son una razón entre una cantidad y el dinero que cuesta.

Les preguntamos a los alumnos si les resultaba caro comprar carne para un asado y gastar $300. Algunos alumnos respondieron que era caro y otros que no. Primero un alumno dijo que dependía de la cantidad de personas que comían. Cuestionando sus respuestas, los alumnos se dieron cuenta de que era necesario saber cuántos kilos de carne se habían comprado, e inclusive saber qué cortes de carne se había comprado. Nosotros dijimos que podemos suponer que es un solo corte, por ejemplo, falda. Así y todo, era necesario saber qué cantidad se de carne se había comprado. Para saber el precio por kilogramo, es necesario hacer una división entre el dinero gastado y los kilogramos de carne, y esta división es lo que llamábamos razón.

Después de esta instancia pasamos a introducir formalmente las propiedades de la tabla de proporcionalidad directa.

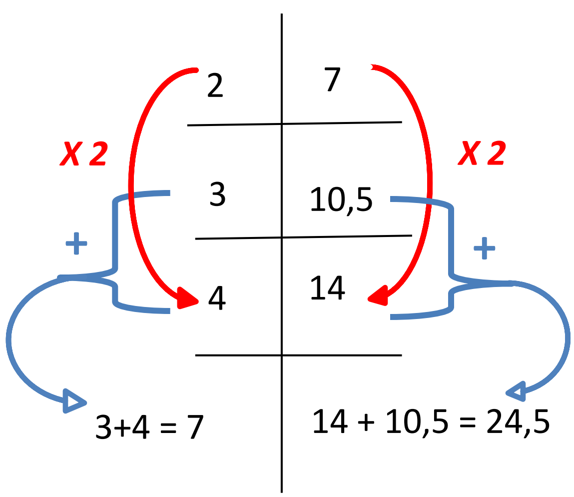
Para ello le pedimos a una alumna que leyera el fragmento de la última hoja de las fotocopias, titulada: "para leer y estudiar".

Para leer y estudiar…

Una tabla de proporcionalidad presenta una relación de correspondencia entre dos magnitudes.
Si tenemos una tabla de proporcionalidad directa, notamos que cumple dos ***propiedades,*** una para la multiplicación y la división, y otra para la suma y la resta:

1. Al multiplicar (o dividir) una de las cantidades por un número, la cantidad correspondiente se multiplica (o divide) por el mismo número y la proporción se mantiene.
2. Al sumar (o restar) dos valores de una de las cantidades se obtiene un número correspondiente con la suma (o resta) de los valores correspondientes de la otra cantidad.

Allí nos detuvimos porque una alumna manifiesto no entender las propiedades y le pedimos a otro alumno que trate de explicarlo, pero manifestó que no sabía cómo hacerlo. Entonces, para facilitar la comprensión de las propiedades (1) y (2) tomamos la misma tabla, agregando una fila para enriquecer:



Con esta ilustración los estudiantes lograron entender las propiedades e incluso fueron capaces de aplicarlas a una situación similar, comunicando oralmente otros ejemplos.

Luego de leer y explicar las propiedades retomamos la actividad complementaria a la ampliación del Tangram. Los últimos dos ejercicios fueron resueltos utilizando las mismas estrategias que en 3° B. Cuando la clase finalizó la actividad realizamos una puesta en común de los últimos dos ejercicios en la que los alumnos pasaron al frente y resolvieron de manera similar a como sucedió en la otra división.

Antes de finalizar la clase los alumnos comenzaron la guía N°1, resolviendo la primera actividad titulada “una mermelada de mandarinas”, cuya primera consigna era:

Para preparar la mermelada se mezclan ½ kg. de azúcar con ¾ kg de mandarinas. Basándose en la información de arriba, completen la tabla.

Cantidad de azúcar (Kg)	2,5		1		6	
Cantidad de mandarinas (Kg)		0,5		1		8,5

Algunos alumnos pasaron al frente a explicar a sus compañeros cómo completaron la tabla. Indicaron que habían utilizado la constante de proporcionalidad, procediendo del siguiente modo:

X 1,5

2,5	**1/ 3**	1	**1/2**	6	**17/3**
3,75	0,5	**3/4**	1	**9/2**	8,5

: 1,5

De todas formas no pudimos profundizar sobre esta puesta en común porque se acabó el tiempo disponible y la discusión de este punto quedó pendiente.

Tercero B

Los primeros 10 minutos realizamos un repaso de los contenidos ya vistos, interrogando a los alumnos acerca de los conceptos de constante de proporcionalidad, proporción y razón.

Luego realizamos una explicación de la presencia de las razones en el precio de las cosas, de manera similar a la realizada en 3° A.

Procedimos a repartir la guía de actividades n°1, la cual buscaba familiarizar a los alumnos con el uso de la proporcionalidad en distintos contextos. Anunciamos que las actividades eran para aplicar los conceptos aprendidos en la clase pasada.

El primer problema titulado “una mermelada de mandarinas” fue presentado en la página anterior. Para rellenar la tabla, varios alumnos utilizaron la regla de tres simple y la propiedad de que *“si se multiplica una cantidad de la tabla por un mismo número, la cantidad correspondiente se multiplica por el mismo número”*, asumiendo que se trata de una tabla de proporcionalidad directa. También utilizaron la constante de proporcionalidad 3/2, y planteos de proporciones.

Al plantear las proporciones o calcular la constante de proporcionalidad algunos alumnos eligieron datos que los llevaron al error, como obtener la constante de proporcionalidad realizando el cociente entre elementos de una misma fila. Una alumna, por ejemplo, recordó que había que dividir elementos de una fila por otra para obtener la constante de proporcionalidad, pero dividió elementos de distintas columnas (hizo el cálculo 2,5÷0,5=5 y a este valor lo tomó como constante de proporcionalidad). A los alumnos que se sentían desorientados a la hora de rellenar la tabla, los invitamos a pensar un poco más, recalcando que se trataba del mismo tema "que veníamos viendo".

El siguiente inciso proponía la comparación entre razones partiendo de que el sabor de la mermelada depende de la proporción entre azúcar y fruta que se utilice en la receta para resultar más o menos dulce.

Si ponen 9 kilos de azúcar y 13 de mandarinas, ¿La mermelada que obtienen es más dulce que la anterior? ¿Por qué?

En este inciso, unos alumnos utilizaron regla de tres para saber cuántos kilos de mandarinas le correspondían a 9 kg de azúcar, resultando 13,5 kg, concluyendo: *"Para preparar la mermelada 9 kg se mezclan con 13,5 kg de mandarinas y no con 13. Por eso la mermelada será más dulce"*.

Los incisos siguientes preguntaban algo similar pero cambiando las cantidades de azúcar y mandarina. Las resoluciones fueron análogas.

Destacamos los dos últimos incisos:

¿Es correcta la siguiente afirmación? ¿Por qué?: *"Para saber la cantidad de kilos de mandarinas que tengo, debo multiplicar la cantidad de azúcar por 3/2"*

Encuentren una fórmula que permita calcular la cantidad de azúcar que hay que poner conociendo la cantidad de kilos de mandarina.

El primero resultó revelador para los alumnos, pues mientras habían usado múltiples procedimientos para completar la tabla, comprobaron que para pasar de la primera fila a la segunda bastaba con multiplicar la cantidad por 3/2, lo que los retrotrajo a la utilidad de la constante de proporcionalidad ya vista, a la vez que les permitió comparar esta nueva tabla con las tablas de proporcionalidad de la medida de los Tangrams. Una alumna que había utilizado propiedades de la tabla y regla de tres simple nos expresó *"Ah, era re fácil al final"*.

Para dar por cierta la afirmación, muchos alumnos procedieron multiplicando cada uno de los valores de azúcar de la tabla por 3/2, dando con que la afirmación efectivamente se cumplía, pues ya tenían la tabla completa.

En el último inciso, los alumnos presentaron un obstáculo con la propuesta de elaborar una fórmula. Durante su resolución nos transmitieron estos interrogantes:

"¿Qué hay que hacer?"; *"¿Cómo hago la fórmula?"*

Ante esta incertidumbre les preguntamos qué habían hecho para calcular las cantidades de azúcar de la tabla. En su resolución de los incisos anteriores muchas veces encontramos una celda en la que habían utilizado regla de tres simple. Entonces les cuestionamos si podían hacer ese mismo procedimiento para calcular cualquier la cantidad de azúcar que lleva la mezcla teniendo una cantidad "x" de kg de mandarina. En otras ocasiones les pedimos que recuerden las fórmulas que habían hecho para calcular una medida ampliada cualquiera del tangram. La elaboración de fórmulas, si bien una vez que se aprende es una actividad de rutina, necesita un tratamiento particular, puesto que implica un cambio de lenguaje: del lenguaje natural, dominado por los alumnos, al simbólico. Durante la puesta en común tomamos los aportes orales de los alumnos, registrando en el pizarrón:

En el inciso (e) concluimos que lo siguiente era verdadero:

- ✓ $cantidad\ mandarinas = \frac{3}{2} \times cantidad\ azucar$
- ✓ Finalmente dividiendo ambos miembros por $\frac{3}{2}$ queda:

$$\boxed{cantidad\ azucar = \frac{2}{3} \times cantidad\ mandarinas}$$

Luego de llegar a esta igualdad dijimos: *"La propiedad uniforme nos dice que si la primera ecuación es válida, entonces la segunda también lo es"*.

Clase N°3 (29/08)

Tercero A

Los alumnos continuaron trabajando sobre el primer ejercicio de la Guía n°1, siguiendo por resolver los incisos faltantes. Como sucedió en el otro curso, el inciso que les trajo más dificultades fue el último, en el que tenían que plantear una fórmula que describa la relación entre la cantidad de mandarinas y la cantidad de azúcar. De todas maneras, procedieron igual que en tercero B y la deducción de la fórmula fue hecha por un grupo de alumnos que pasó al pizarrón.

Luego siguieron resolviendo los siguientes problemas.

> Juan, Francisco y Esteban compraron una bolsa de 126 caramelos y les salió $60. Esteban puso $30, Juan $10 y Francisco $20. ¿Cuántos caramelos le corresponden a cada uno?

Un alumno pasó a explicar al pizarrón cómo resolvió el ejercicio de repartición proporcional. Dividió a los 126 caramelos en seis partes iguales de 21 caramelos. Tres partes (la mitad), serían para Esteban, porque puso la mitad del dinero total. De las tres partes restantes, dos serían para Francisco y una para Juan. El alumno estimó mentalmente por cuánto había que dividir al dinero total, $60 para obtener cada uno de los montos que puso cada chico. Juan puso 1/6 del dinero, y recibirá 1/6 de los caramelos. Esteban puso la mitad del dinero total, y recibirá la mitad de los caramelos. Francisco, por su parte, puso 2/6 del dinero, y le corresponde la misma parte de caramelos. Implícitamente, el alumno utilizó la propiedad de la multiplicación presente en la proporcionalidad. Para llegar a estos valores realizó cálculos en distintas direcciones, elaborando el siguiente registro en el pizarrón:

$126 \div 3 = 42,\ siendo\ 42\ el\ \boldsymbol{doble}\ de\ 21$, después escribió $3x21 = 63, siendo\ 63\ el\ \boldsymbol{triple}\ de\ 21$

Las anotaciones no eran suficientes, por lo que le pedimos que explicara algunos cálculos que había realizado mentalmente. No esperábamos una resolución de este tipo, y fue difícil interpretarla para que todo el curso comprendiera.

El otro método que observamos fue la reducción a la unidad utilizando los totales realizando el cálculo de la razón $\frac{126}{60} = 2{,}1$, interpretando que este número indica la cantidad de caramelos que corresponden por cada peso que se aportó. Luego multiplicaron 2,1 por cada una de las cantidades de dinero aportado: 30, 20 y 10.

El problema N°3 brinda como dato una tabla con distintos pesos de perros y la cantidad de alimento que consume cada uno, de acuerdo a si son activos o sedentarios. Se les pide reconocer si dos cantidades son proporcionales. Para resolverlo utilizaron las propiedades vistas la clase anterior. Observaron que existen casos en los que se duplica o triplica el peso del perro pero no sucede lo mismo con la cantidad de comida que debe consumir.

En la veterinaria observamos la siguiente tabla. La cantidad de alimento que necesita comer un perro, ¿es proporcional a su peso? ¿Por qué?

PESO DEL PERRO	ACTIVO	SEDENTARIO
KG	G/DÍA	G/DÍA
2 kg	40 g	30 g
5 kg	90 g	60 g
10 kg	150 g	120 g
20 kg	240 g	160 g
30 kg	330 g	240 g
40 kg	420 g	280 g
50 kg	480 g	330 g
60 kg	570 g	390 g

Una alumna paso al frente y organizo parte de la información de esta manera para distinguir que no era una relación de proporcionalidad.

Peso del perro	**Activo**	**Sedentario**
2	40	30
5	90	60

Argumentó lo siguiente: "*La cantidad de comida para un perro sedentario se multiplica por 2, pero, su peso no, entonces no hay proporcionalidad".* No se generó debate dado que toda la clase manifestó estar de acuerdo con la respuesta de lo compañera.

Pasamos al siguiente problema.

En el pueblo A hay 120 habitantes, 30 de los cuales leen el diario todos los días. En el pueblo B hay 80 habitantes, 24 de los cuales leen el diario todos los días. ¿Dónde se lee más el diario?

Este ejercicio no supuso dificultades para la mayoría del curso. Una alumna pasó al frente, pero mientras realizaba sus cálculos en el pizarrón otra chica pidió pasar diciendo que el ejercicio de la compañera estaba mal. Le pedimos que también pasara al frente a mostrar su resolución. Ambas habían comparado razones.

La alumna que dio con el resultado esperado había realizado un procedimiento acorde a la comparación de razones que veníamos llevando a cabo:

En el pueblo A 30 de 120 habitantes leen el diario todos los días. $\frac{30}{120}$ *= 0,25*

En el pueblo B 80 de 24 habitantes leen el diario todos los días. $\frac{24}{80}$*= 0,3*

Como la razón entre los habitantes que leen y el total de habitantes del pueblo B es más grande que en el pueblo A, podemos afirmar que en proporción, lee más gente en el pueblo B.

La primera alumna que pasó no dio con el resultado esperado, realizando los cálculos $\frac{120}{30}$ = 4 y $\frac{80}{24}$ = 3,33…, argumentó que se leía menos en el pueblo B pues la razón daba más pequeña. Nosotros nos detuvimos a interpretar las razones.

$\frac{120}{30}$ = 4 significa que en el pueblo A el número de habitantes que leen entra 4 veces en la población total. $\frac{80}{24}$ = 3,33 significa que en el pueblo B el número de habitantes que leen entra 3,3 veces en la población total. Luego de nuestra explicación todo el curso coincidió en que se leía más en el pueblo B. La alumna que pasó nos explicó su razonamiento. Como en el pueblo A había 30 habitantes que leían mientras que en el pueblo B sólo había 24, dedujo que la gente del pueblo A leía más. Sabiendo que el ejercicio se resolvía utilizando razones, las armó de tal manera que "justifiquen" este resultado, pero para llegar a esta conclusión interpretó las razones de manera equivocada.

Cuando finalizó la clase de matemática la mayoría de los alumnos estaban en la resolución de este problema, aunque algunos se habían adelantado hasta el ejercicio 7.

Tercero B

Luego del saludo, invitamos a los alumnos a seguir trabajando con la guía de actividades entregada en la clase anterior. Los alumnos habían resuelto hasta el punto 2 inclusive, utilizando estrategias similares a las que se realizaron en tercero A: regla de tres simple y reducción a la unidad.

En el tercer problema se generó una situación que nos puso en apuros. Una alumna nos preguntó cómo sabía si eran proporcionales el alimento de consumo diario y el peso de un perro. Le respondimos que son proporcionales cuando hay proporcionalidad, pidiéndole que nos leyera la definición. Nos leyó: *"Cuando hay dos o más razones iguales decimos que hay proporcionalidad"*. La alumna nos dijo: *"¿Entonces hay que buscar dos razones iguales para ver si son proporcionales?"* Según la definición dada, el procedimiento que planteaba era acertado; miramos la tabla para calcular cuántas razones debían verificarse, y eran ¡18! Considerando que no valía la pena que perdiera tanto tiempo en el ejercicio, le dijimos que, como en el caso del tangram, cuando dos magnitudes eran proporcionales, todas las razones resultaban iguales, y que bastaba ver que había dos distintas para que no fueran proporcionales.

La clase continuó la resolución del ejercicio 5 en el que era preciso definir al frente lo que eran extremos y medios.

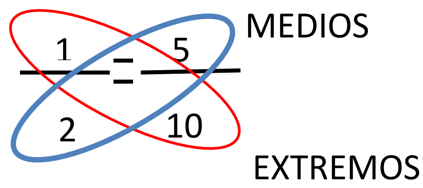
Armar una proporción utilizando los valores de las siguientes series:

a) 8; 2; 16; 4

b) 40; 25; 16; 10

c) 0,5; 1; 2; 4

En este ejercicio se dieron distintas respuestas ya que si las cuatro cantidades forman una proporción, hay al menos una y a veces tres formas más de organizarlos para que se cumpla la igualdad entre las razones. Cuando vimos que los alumnos resolvían esta parte de la guía interrumpimos la clase para exponer la siguiente serie de números en el pizarrón: 1, 2, 5 y 10. Luego armamos la proporción $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ y dijimos que 1 y 10 reciben el nombre de extremos y 2 y 5 el de medios. Les preguntamos a los alumnos a qué pensaban que se debían estos nombres, y una alumna respondió que podía deberse a que *"1 y 10 son primero y último en la serie y 5 y 2* *están entre esos dos".* Posteriormente organizamos estos elementos en la proporción correspondiente, señalándolos y anotando en el pizarrón:



En el ejercicio que sigue, en donde se listan varias proporciones y una tabla

$\frac{3}{7}=\frac{7{,}5}{17{,}5}$, $\frac{5}{16}=\frac{15}{48}$ y $\frac{15}{7}=\frac{27}{12{,}6}$

EXTREMOS	MEDIOS	EXTREMO X EXTREMO	MEDIO X MEDIO
3 y 17,5	7 y 7,5	3.x7,5= **52,5**	7x7,5=**52,5**
5 y **48**	**16** y **15**	**5x48 = 240**	**16x15=240**
15 y **12,6**	**7** y **27**	**15x12,6=189**	**7x27= 189**

La consigna pide realizar operaciones con los extremos y medios, los alumnos realizaron las cuentas solicitadas y conjeturaron la propiedad de que "***el producto de los extremos es igual al producto de los medios"***. Ellos tenían que completar la tabla, donde se ven en **negrita** los resultados correspondientes y recurriendo a ellos, pudieron deducir la propiedad fundamental de las proporciones, que luego nosotros nos encargamos de formalizar.

Finalmente institucionalizamos esta propiedad, que cobró sentido práctico en los ejercicios que había que calcular extremos y/o medios, fundamentalmente cuando la incógnita aparece como denominador. A continuación en la guía venía el primer ejercicio en el cual se planteaban ecuaciones con la configuración de una proporción.

Marcar la opción correcta

En la proporción $\frac{2x-3}{4} = \frac{x}{3}$, el valor de x es

E. $\frac{9}{10}$

F. $\frac{4}{3}$

G. $\mathbf{\frac{9}{2}}$

H. $\frac{9}{4}$

Este ejercicio fue resuelto al frente. El alumno que pasó igualó los denominadores de ambos miembros de la ecuación, procedimiento aprendido anteriormente con el profesor titular:

$$\frac{(2x-3).3}{4.3} = \frac{x.4}{3.4}$$

$$\frac{6x-9}{12} = \frac{4x}{12}$$

$$\frac{12.(6x-9)}{12} = \frac{12.4x}{12}$$

$$6x-9 = 4x$$

$$6x-9+9 = 4x+9$$

$$6x-4x = 4x+9-4x$$

$$2x = 9$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{9}{2}$$

También era posible resolverlo sustituyendo cada valor de los incisos en la ecuación original hasta dar con aquel que verificara la igualdad, pero no observamos ningún caso en el que se aplique esta estrategia. Este ejercicio, como los demás que implicaban resolución de ecuaciones, invirtió un tiempo considerable para resolverse.

Por otra parte, observamos un caso aislado en el que un alumno aplicó la propiedad fundamental de las proporciones que había sido vista recientemente.

El próximo problema podía abordarse utilizando métodos que ya habían sido aplicados anteriormente en la guía y a los alumnos no les fue dificultoso dar con el resultado correcto.

Un sastre compró 3,5 m de tela y pagó por ella $ 245. Si necesita 8 m de la misma tela, ¿cuánto deberá pagar?

Según lo que pudimos observar, la mayoría de los alumnos lo resolvió haciendo el cálculo $\frac{245}{3,5} =$ 70, dando con la cantidad de pesos que salía el metro de tela. Luego multiplicaron esta razón por 8, concluyendo que 8 metros de tela serían pagados con $560.

Otros alumnos aplicaron la regla de tres simple, planteando:

Si 3,5 m de tela $\longrightarrow$ *cuestan $ 245*

8 m de tela $\longrightarrow$ *costaran* $x = \frac{8\ .\ 245}{3,5} = 560$

Los alumnos llegaron al ejercicio n° 9 cuando todavía quedaban más de 20 minutos de clase. Manifestaron que las ecuaciones eran muy difíciles, pidiéndonos que resolvamos alguna al frente para que se guíen sobre cómo proceder. Ante su solicitud, resolvimos al frente la primera consultando a los alumnos a medida que íbamos haciendo los cálculos, de la misma manera que había hecho el profesor titular durante las observaciones.

$$\boxed{\frac{x}{0,60 - 0,4} = \frac{(0,5 - 1)^2}{0,\overline{2}}}$$

Al resolverla aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones, de manera que quede expuesta como herramienta para resolver las ecuaciones que seguían. Luego los alumnos continuaron resolviendo las tres ecuaciones restantes.

$$\frac{x-4}{\sqrt[3]{27}}=\frac{x+2}{(3+\sqrt{4})^0}$$

$$\frac{\frac{2}{3}-1}{1+\frac{1}{9}}=\frac{x-\sqrt{\frac{1}{4}}}{3-2x}$$

$$\frac{x+\frac{1}{4}}{x}=\frac{3^{-|}.\,0{,}3}{\sqrt[3]{-1}}$$

La tercera ecuación generó incertidumbre por la presencia de la incógnita en el denominador. Ante las consultas, les recordamos que podían aplicar la propiedad fundamental de las proporciones tal como habíamos hecho en el pizarrón.

Antes de finalizar la clase, una alumna se ofreció a pasar para mostrar su resolución de la segunda ecuación. Tuvo un solo error de cálculo de signos, y lo resolvió con ayuda de sus compañeros. La alumna dio con el valor de x que satisfacía la igualdad. La resolución de las dos últimas ecuaciones quedó pendiente para la clase siguiente.

Clase N°4 (02/09)

Tercero A

En esta clase continuamos resolviendo la guía n°1, en la que los alumnos habían avanzado de manera dispar.

Institucionalizamos cuestiones que se habían desarrollado con anterioridad en 3° B, como extremos y medios y la propiedad fundamental de las proporciones luego de que los alumnos pasen al frente a resolver los ejercicios 5 y 6, como sucedió en el otro curso.

Armar una proporción utilizando los valores de las siguientes series:

a) 8; 2; 16; 4

b) 40; 25; 16; 10

c) 0,5; 1; 2; 4

Cuando los alumnos pasaron a mostrar cómo habían armado sus proporciones, preguntamos si alguien las había armado de forma distinta, pero ningún alumno lo manifestó. Mostramos que era posible armar una proporción utilizando cada una de las razones inversas a las que ellos habían escrito en el pizarrón. Concluimos que cuando cuatro números forman una proporción, existen al menos dos formas distintas de ordenarlos para que se cumpla la igualdad entre las razones.

EXTREMOS	MEDIOS	EXTREMO X EXTREMO	MEDIO X MEDIO
3 y 17,5	7 y 7,5	3.x7,5= **52,5**	7x7,5=**52,5**
5 y **48**	**16** y **15**	**5x48 = 240**	**16x15=240**
15 y **12,6**	**7** y **27**	**15x12,6=189**	**7x27= 189**

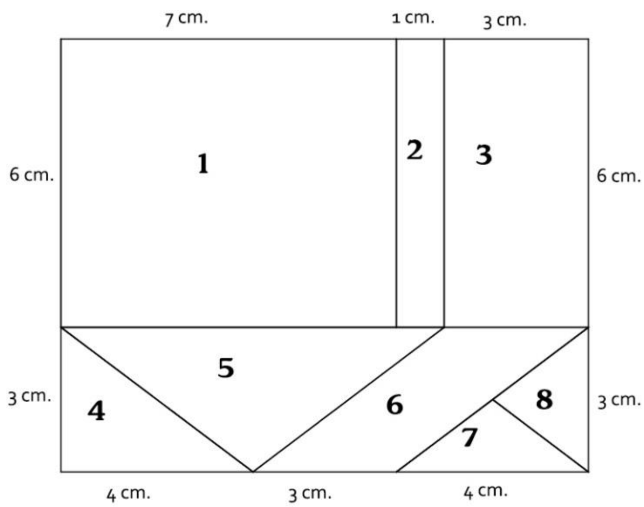
Para el ejercicio 5, hicimos pasar a un alumno a copiar la tabla resuelta en el pizarrón. Al preguntarles a los alumnos qué habían notado respondieron sin dudar que el producto de los extremos y los medios era siempre igual. Dijimos que esto se cumplía en todas las proporciones y le pedimos a una alumna que lea la propiedad fundamental de las proporciones, que figuraba en la fotocopia.

Cuando estaba por finalizar la clase, los alumnos trabajaban en la resolución del ejercicio 7 y 8. El ejercicio 7 fue resuelto al frente por una alumna, que lo realizó aplicando la propiedad fundamental de las proporciones.

Tercero B

Al comenzar esta clase les pedimos a dos alumnos que pasen al pizarrón a resolver las dos ecuaciones que habían quedado pendientes. En el frente, realizaron la primera ecuación y pudieron corregir sus errores a medida que la fueron resolviendo. Para la segunda ecuación este proceso estaba llevando demasiado tiempo, considerando que teníamos pensado abordar el segundo trabajo práctico, en el que se introduce la semejanza de figuras. En una primera instancia hicimos pasar a otro alumno más para que colabore en la resolución de la ecuación, pero luego de que estuvieron algún tiempo intentando seguir con los cálculos, nos hicimos cargo del registro en el pizarrón. Terminamos la resolución tomando los aportes que nos hacían distintos compañeros.

Cuando finalizamos la Guía N°1 dimos inicio al segundo trabajo práctico, que titulamos “La proporcionalidad llega hasta a las figuras”. Su objetivo fue el reconocimiento de figuras semejantes, deducir la razón de semejanza, y focalizarnos en el análisis de triángulos semejantes.



La actividad estaba basada en la imagen del Tangram trabajada en la primera actividad de las prácticas.

Una vez que repartimos las guías, nos percatamos de que quedaban menos de 25 minutos para desarrollarla. Ante esta situación decidimos dar la actividad de una forma diferente. Un alumno comenzó leyendo la primera consigna.

Observen las figuras que les tocó ampliar y las figuras ampliadas y respondan ¿Qué características comunes tienen las figuras originales con las correspondientes ampliadas? ¿Qué diferencias? Nómbrenlas a continuación

En el pizarrón copiamos una tabla que fuimos rellenando según lo que comentaban los alumnos.

Similitudes	Diferencias
Figura **Proporción entre los lados** **Forma** **Ángulos**	**Tamaño** **Superficie** **Perímetro** **medidas de lados**

Otro alumno se encargó de leer el siguiente inciso.

Miren los cuadriláteros graficados en la fotocopia y respondan si existe o no una relación de proporcionalidad entre sus lados, explicando por qué.

Sus compañeros respondieron que no existía proporcionalidad. Una alumna relacionó directamente la proporcionalidad de las medidas de las figuras con la ampliación proporcional, manifestando que *“no hay proporcionalidad porque sólo varían dos lados de la figura”*. Luego otras alumnas dieron el ejemplo del armado de la proporción con las medidas de las figuras (1) y (3)

$$\frac{6}{6} \neq \frac{7}{3}$$

Les preguntamos si no era posible armar la proporción de otra manera, pero hubo acuerdo de que no. Invitamos a que se leyera la siguiente consigna.

- Agrupen aquellos triángulos que presentan similitudes. **Justifiquen** su elección.
- De los triángulos que agruparon. ¿Cuáles son los que más se parecen? Expliquen cómo harían para pasar de un triángulo a otro y expliciten las propiedades que los relacionan.

Los alumnos manifestaron haber encontrado las siguientes similitudes:

- *"El triángulo 4 es la suma de los triángulos 7 y 8";*

Nosotros dijimos que no sabíamos bien lo que era una suma de triángulos, pero que sí podíamos decir que los triángulos 7 y 8 pegados en su lado común formaban el triángulo 5.

- *"Los triángulos 5, 7 y 8 son isósceles";*
- *"Los triángulos 7 y 8 tienen dos lados de 2,5 cm, y comparten un lado";*

Copiamos en el pizarrón las afirmaciones tal cual fueron dichas.

- *"El triángulo 5 es el doble del triángulo 7";*

Acotamos que tampoco sabíamos lo que era duplicar un triángulo, aunque lo que decían tenía cierto sentido. Agregamos que sí podíamos decir que *"los lados del triángulo 5 miden el doble que los lados del triángulo 7"*.

Al tratar el último inciso, todos estuvieron de acuerdo en que los triángulos más parecidos eran el (5) y el (7), pues tienen los mismos ángulos, y los lados de uno miden el doble que los del otro.

Luego copiamos en el pizarrón dos de las similitudes establecidas junto con una tabla comparativa de la medida de los lados homólogos, que nos dictaron los alumnos.

- <u>proporcionalidad entre los lados</u>
- <u>ángulos iguales</u>

Triángulo (5)	Triángulo (7)
2,5 cm **2,5 cm** **4 cm**	**5 cm** **5 cm** **8 cm**

x 2

Notamos que la tabla que se formó era una tabla de proporcionalidad. A estos triángulos los llamamos semejantes porque la medida de sus lados está relacionada por una constante de proporcionalidad, que en este caso es 2. A esta constante de proporcionalidad que existe entre las medidas de los triángulos semejantes la llamamos “razón de semejanza”.

Luego pegamos dos afiches. Uno aclaraba el caso general de figuras semejantes, mientras el otro trataba el caso particular de los triángulos. En los afiches se definían las siguientes cuestiones:

Si dos figuras tienen todos sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales entonces son **semejantes**.

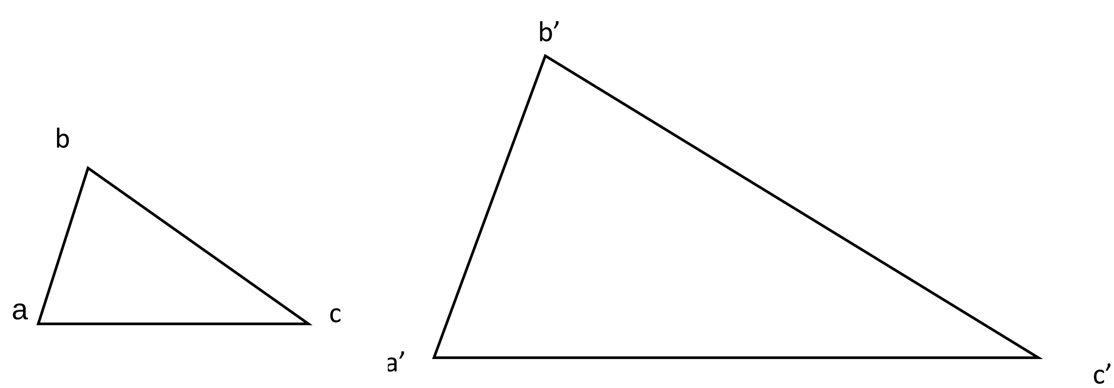
En particular, dos **triángulos** son **semejantes** si tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales

Lados homólogos son aquellos lados que se oponen a los ángulos iguales.

También podemos decir que **lados homólogos** son aquellos que ocupan el mismo lugar

En símbolos:

$$\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{a'b'c'} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{a} = \widehat{a'}, \hat{b} = \widehat{b'}, \hat{c} = \widehat{c'} \\ \dfrac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{b'c'}} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{a'c'}} \end{cases}$$



Valiéndonos de dos triángulos semejantes de cartón explicamos las definiciones y la simbología. En estos triángulos de cartón la razón de semejanza era 2, por lo cual se nos hizo fácil mostrar cómo se respetaba la razón contrastando las medidas de los lados de uno con los del otro.

Clase N°5 (05/09)

Tercero A

Al comienzo propusimos corregir los últimos dos ejercicios de la Guía de actividades N°1, pero los alumnos todavía no los habían resuelto. Dimos 15 minutos para realizar estos ejercicios. Pasado este tiempo convocamos a una puesta en común de los dos últimos incisos.

$$\frac{\frac{2}{3}-1}{1+\frac{1}{9}}=\frac{x-\sqrt{\frac{1}{4}}}{3-2x}$$

$$\frac{x+\frac{1}{4}}{x}=\frac{3^{-1}.0,3}{\sqrt[3]{-1}}$$

En la primera ecuación el alumno que pasó tuvo un error en el final de la resolución, calculando mal el signo del valor de la incógnita:

$$\frac{4}{9}x=-\frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{9}x\div\frac{4}{9}=-\frac{4}{9}\div\frac{4}{9}$$

$$x=1$$

Le preguntamos al curso si estaba bien la resolución del compañero y otro alumno respondió que estaban mal los signos, que x daba (-1), en lo que el curso estuvo de acuerdo.

Una alumna pasó a resolver la siguiente ecuación. Luego de transcribir la ecuación y de aplicar convenientemente la propiedad uniforme añadió una x que no formaba parte de la ecuación original. A causa de esto no pudo avanzar ni explicar cómo proseguir con los cálculos.

$$\frac{x+\frac{1}{4}}{x}=\frac{3^{-|}.0{,}3}{\sqrt[3]{-1}}$$

$$\frac{x+\frac{1}{4}}{x}=\frac{\frac{1}{3}.\frac{3}{10}}{-1}$$

$$\frac{x+\frac{1}{4}}{x}=\frac{\frac{1}{10}}{-1}$$

$$(-1).\left(x+\frac{1}{4}\right)=x.\frac{1}{10}$$

$$-1.x-1.\frac{1}{4}=\ x.\frac{1}{10}$$

$$-1x-\frac{1}{4}=\ x.\frac{1}{10}.x$$

Luego de que le preguntamos porque escribió esa x, reviso ese paso y reflexiono concluyendo que fue un error al copiar. Entonces pudo continuar resolviendo el ejercicio hasta determinar adecuadamente el valor de x, que era igual a $\left(-\frac{5}{22}\right)$. Mientras realizaba su producción en el pizarrón, un alumno expresó que la había resuelto de manera diferente y lo invitamos a pasar.

En esta resolución también algunos alumnos manifestaron que no entendían por qué $\sqrt[3]{-1}$ da (-1) y no 1. Les recordamos que el 1 multiplicado cualquier cantidad de veces por sí mismo siempre daría 1. El menos era por la regla de los signos aplicada en una raíz de índice impar, pues $\sqrt[3]{-1}=-1$ porque $(-1)^3=(-1).(-1).(-1)=1.(-1)=-1$.

Por último, preguntamos a la clase qué pasaba si teníamos la expresión $\sqrt[2]{-1}$, y una alumna dijo que era imposible que un número multiplicado por sí mismo diera negativo, explicando que aunque un número sea negativo, multiplicado por sí mismo siempre daría positivo por regla de signos. Los alumnos dialogaron entre ellos hasta que todos se mostraron satisfechos. Luego nosotros agregamos que en el conjunto de números con los cuales veníamos trabajando, los números reales, esta expresión no tenía sentido por lo que había dicho la alumna. Expresiones como "$\sqrt[2]{-1}$" no tenían sentido en los números que ellos venían viendo.

El alumno que pasó a resolver la misma ecuación, por su lado aplicó correctamente la propiedad uniforme, excepto en el último paso, en el que cometió un error de signos similar al de un alumno que había pasado anteriormente para resolver la primera ecuación. En este caso le quedó:

$$-\frac{11}{10}x=\frac{1}{4}$$

$$x=\frac{1}{4}\div\frac{11}{10}$$

$$x=\ \frac{5}{22}$$

El alumno nos explicó que como el $\frac{11}{10}$ pasaba dividiendo y no restando o sumando no era relevante su signo y no había que ponerlo. En primer lugar preguntamos a todo el curso si era lo mismo que x diera $\frac{5}{22}$ o $(-\frac{5}{22})$, respondiendo que no. Luego les recordamos que siempre estábamos aplicando la propiedad uniforme. Había dos opciones: o dividir a ambos lados por $(-\frac{11}{10})$, de manera que nos llevábamos el signo para el otro lado, o dividir a ambos lados por $\frac{11}{10}$, quedándonos:

$$-x = \frac{5}{22}$$

Luego le pedimos que nos digan cómo resolver esta expresión. Aportaron varias cosas, como que se podía multiplicar o dividir a ambos lados por (-1), de forma que nos quedaría $x = -\frac{5}{22}$

Terminada la resolución grupal de esta guía les dimos a los alumnos un trabajo práctico para introducirlos a la semejanza entre figuras y al reconocimiento de figuras semejantes, “La proporcionalidad llega hasta las figuras”. Esta tarea fue realizada en grupos de tres integrantes. Convenimos con el profesor titular del curso que al terminar la hora les pediríamos a los alumnos sus producciones para realizar una evaluación formativa, que sería parte de una “nota de concepto”. Se lo comunicamos a los alumnos. Esto aumentó su empeño en el trabajo y tuvieron la oportunidad de demostrar su compromiso con la materia.

Tercero B

En esta clase comenzamos realizando un repaso de la clase anterior. Copiamos la tabla con las diferencias y similitudes que habíamos establecido entre las figuras ampliadas y las originales.

Similitudes	Diferencias
Figura **Proporción entre los lados** **Forma** **Ángulos**	**Tamaño** **Superficie** **Perímetro** **medidas de lados**

Luego recordamos que habíamos seleccionado como las más parecidas aquellas que, según sus palabras, “tenían la misma forma” (triángulos 5 y 7). Además de repasar lo que habíamos hecho la clase anterior, releímos las definiciones de los afiches procurando explicarlas cada vez que un alumno manifestó tener dudas.

Seguidamente comenzamos con el tercer trabajo práctico titulado *“¿Cuándo dos triángulos son semejantes?*”. Esta tarea posee un carácter exploratorio, similar a la anterior; guía a los estudiantes en la búsqueda de las relaciones que deben cumplir dos triángulos para ser semejantes sin la necesidad de controlar que todos los ángulos sean iguales y los tres pares de lados sean proporcionales. Cada grupo recibió enunciados similares, pero los datos que contenían eran diferentes. Diseñamos esta actividad con este formato con la finalidad de que los grupos, comparando sus producciones entre sí, sean capaces de establecer conclusiones sobre la generalidad de los resultados.

1) a) Para cada par de medidas de ángulos, tracen ustedes un triángulo y luego comparen sus cuatro triángulos con los de los otros equipos:

90° y 60°	45° y 45°
120° y 30°	80° y 40°

b) ¿Que pudieron observar al comparar sus triángulos con los de sus compañeros?

2) Para la siguiente terna de medidas de lados: 5 cm, 3 cm y 6 cm, tracen un triángulo y compárenlo con los de los demás grupos.

a) ¿Qué diferencias y similitudes encuentran con los triángulos de los demás grupos?

b) Y si sólo contáramos con las medidas de dos lados en cada triángulo que sean proporcionales ¿Que pueden decir al respecto de los triángulos construidos?

c) Investiguen en equipo acerca de la cantidad de lados con la que precisamos contar para construir triángulos semejantes si no conocemos los valores de los ángulos de dichos triángulos.

3) Construyan un triángulo donde dos lados midan 8 cm y 10 cm respectivamente y el ángulo comprendido entre esos lados sea de 60° y digan cómo es ese triángulo con respecto a los de los demás grupos.

4) ¿Qué pasa si?:

a) Dado un par de triángulos con las siguientes características:

- En un triángulo, uno de sus lados mide 7 cm y uno de sus ángulos 60°;
- En el otro triángulo, el lado y el ángulo correspondientes miden 3.5 cm y 60° respectivamente.

¿Se trata de triángulos semejantes? Argumenten acerca de la suficiencia o insuficiencia de datos para asegurar la semejanza antes de hacer los trazos. Luego realicen los trazos, recorten las figuras y verifiquen con sus compañeros lo antes argumentado.

b) Dado un par de triángulos cuyas características son:

- En uno de ellos un lado mide 5.5 cm y el otro mide 7 cm y el ángulo opuesto a uno de los lados mide 40°;
- En el otro un lado mide 11 cm y el otro 14 cm y el ángulo opuesto a uno de esos lados mide 50°. *(en ambos casos tomar el mismo par lado-ángulo opuesto)*

¿En cada caso se puede asegurar la existencia de una relación de semejanza entre ambas figuras? De ser necesario recortarlas y cotejen sus respuestas con sus compañeros.

Llevó más de una hora resolver la tarea y no quedó tiempo para la puesta en común. Recogimos los trabajos y decidimos tomar las conclusiones que los alumnos volcaron en sus producciones para poder exponerlas en la clase siguiente, en la que pretendíamos definir los llamados "criterios de semejanza".

Cuando estaba por tocar el timbre de las 12 hs. retiramos las producciones que se realizaron en este trabajo práctico, que conformaría parte de una evaluación formativa con nota de concepto.

Clase N°6 (09/09)

Tercero A

Entregamos los trabajos prácticos y copiamos una tabla vacía en la pizarra indagando a los alumnos sobre las similitudes y diferencias que habían encontrado en las figuras.

Similitudes	**Diferencias**
Ángulos	Área
Forma	Perímetro
cantidad de lados	proporcionalidad entre los lados

Algunos alumnos expresaron no entender la proporcionalidad entre los lados de las figuras ampliadas y originales que había notado uno de los grupos. Le pedimos que pasara a un integrante para explicar mejor sus deducciones al resto del curso. Pasó un alumno que lo explicó usando de ejemplo el triángulo rectángulo número 4:

$$\frac{lado\ original\ 1}{lado\ original\ 2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\frac{lado\ ampliado\ 1}{lado\ ampliado\ 2} = \frac{10{,}5}{14} = 0{,}75$$

Entonces $\dfrac{lado\ original\ 1}{lado\ original\ 2} = \dfrac{lado\ ampliado\ 1}{lado\ ampliado\ 2}$

Los alumnos entendieron que la afirmación era verdadera, pero para que no quedaran dudas acotamos:

“Tanto en el triángulo pequeño como en el ampliado, la razón entre sus catetos da $\frac{3}{4}$*. La proporción entre los lados de las figuras ampliadas siempre respetará la proporción original. Por eso podemos decir que una ampliación es un aumento de tamaño proporcionado.”*

Se pasó al inciso siguiente, que preguntaba por la proporcionalidad entre los cuadriláteros del tangram, que los alumnos negaron:

- “No es la misma razón”
- “No se puede armar proporción con las medidas de los lados”
- $\frac{6}{6} \neq \frac{7}{3}$

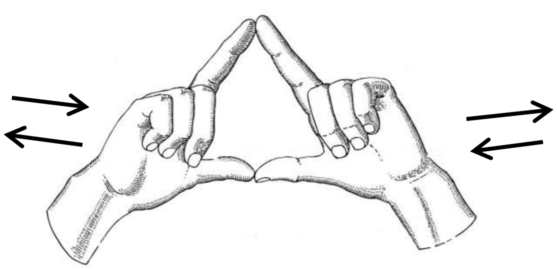
Luego pasamos al análisis del punto de los triángulos (5) y (7). Los alumnos coincidieron en decir que son los que más se parecen porque son isósceles y además *“uno es el doble del otro”*. Otro grupo también dijo que los ángulos eran iguales, ya que los midieron con transportador. Estos triángulos fueron definidos como semejantes, caracterizados por los alumnos por tener la misma forma. Para generalizar, dimos la siguiente definición provisoria de

Semejanza de figuras: Intuitivamente, *figuras semejantes* son aquellas figuras que tienen la misma forma pero que pueden diferir en su tamaño.

Luego hablamos de que toda figura es semejante a sí misma, así como lo son sus ampliaciones o reducciones. Sin embargo, notamos que puede considerarse que dos triángulos cualesquiera tienen la misma forma, “*forma triangular*”, y sin embargo no ser semejantes. Por eso era necesario hablar de la proporcionalidad entre los lados.

Preguntamos: *“¿Cómo podemos caracterizar la forma en términos matemáticos?”.* Entonces una alumna dijo: *“La misma forma, que sea igual pero más grande o más chico (el triángulo)”*

Mientras daba la explicación, con las dos manos hacía la forma de los dos ángulos de un triángulo, juntándolas y separándolas de manera que los pulgares quedaran alineados, de la siguiente forma:



Aprovechando la seña que utilizaba, le preguntamos qué parte de los triángulos estaba dibujando con las manos, y nos respondió que los lados.

“Si, pero los lados los estás agrandando y achicando. ¿Qué es lo que dejas fijo?” - preguntamos

"¿Los ángulos?" – Preguntó la alumna.

"Si, los ángulos. Esto es lo que hace que dos triángulos tengan la misma forma, que sean semejantes" – concluimos nosotros.

"Dos figuras semejantes tendrán los ángulos iguales así como también sus lados van a ser proporcionales como sucedió en el Tangram, porque una figura será la ampliación de la otra".

Para dar lugar a la institucionalización del concepto de semejanza de triángulos le realizamos algunas preguntas a la clase:

- "*Si tengo 2 triángulos con ángulos de 80° y 30° ¿Son semejantes?"*

A lo que respondieron que sí, explicando que el último ángulo podía deducirse pues los tres ángulos siempre suman 180°.

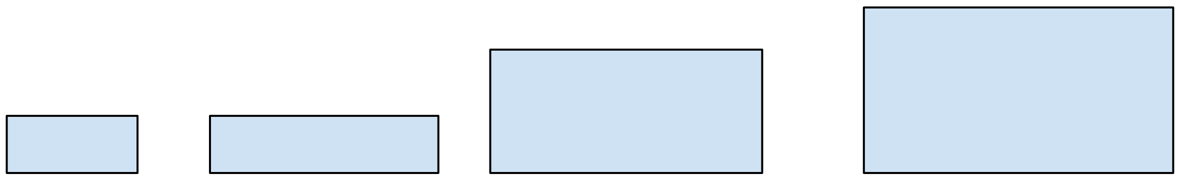
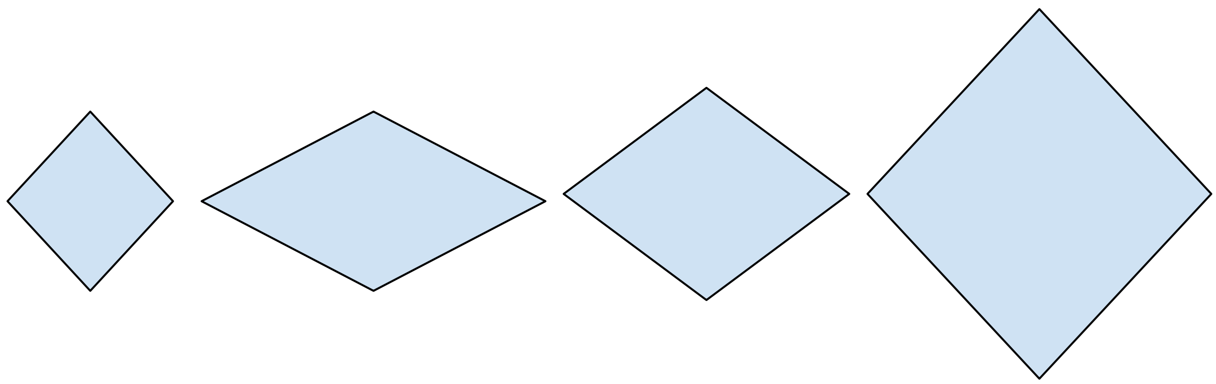
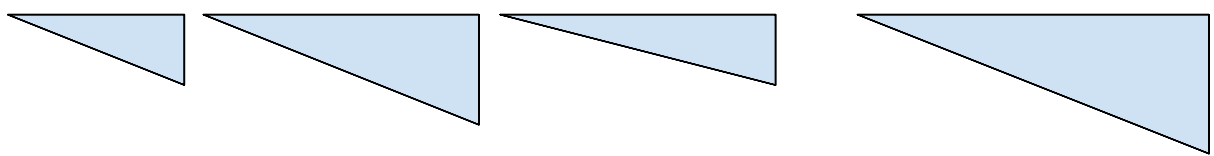
- "*Si ahora tengo un triángulo con lados que miden 3, 4 y 5 y otro con lados que miden 9, 12 y 15, sus lados van a ser proporcionales… pero, ¿Serán triángulos semejantes, sus ángulos serán iguales?"*

Los alumnos dijeron respondieron que sí, aunque no con mucha seguridad. Nosotros les dimos la razón.

Luego aclaramos mejor: *"esto nos viene a decir la semejanza de triángulos: si los ángulos son iguales, entonces los triángulos van a tener la misma forma y sus lados van a ser proporcionales. También, si los lados son proporcionales, los ángulos van a ser iguales y los triángulos van a tener la misma forma. Si encuentro que los lados son proporcionales, entonces van a ser semejantes, pero si no tengo los lados y sé que los ángulos son iguales, también van a ser semejantes y por lo tanto los lados van a cumplir la proporcionalidad"*. Esta ida y vuelta quedó clara para los presentes.

También agregamos que "forma" no es un concepto matemático y que no tiene una definición precisa en la matemática.

Luego terminamos de Institucionalizar semejanza de triángulos empleando un afiche con definiciones e ilustraciones, similar al presentado en 3°B. Indicamos qué significaba cada expresión y cada símbolo matemático involucrado. En particular, el afiche informaba que etimológicamente, *homólogo* significa "mismo lugar". Los lados homólogos están en el mismo lugar porque se enfrentan al mismo ángulo, aunque estén en distintos triángulos. Más adelante pasamos a realizar una actividad de repaso que constaba de tres puntos. Era la última clase anterior a la prueba. La guía comenzaba con el siguiente ejercicio:

> Descubran pares de figuras semejantes entre las siguientes
>
> 
>
> **1 2 3 4**
>
> 
>
> **1 2 3 4**
>
> 
>
> **1 2 3 4**

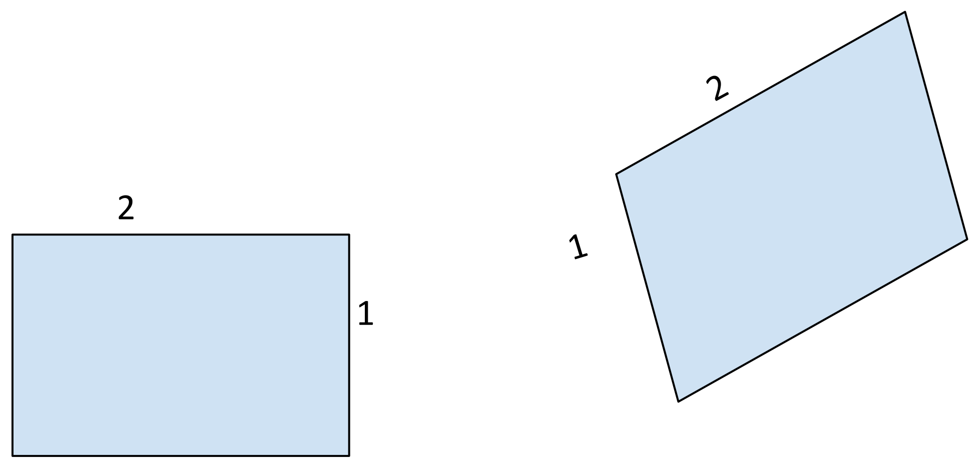
Cuando los alumnos comenzaron la actividad, nos quedaban 15 minutos, pues la institucionalización se había extendido más de lo que habíamos planeado. Algunos alumnos estaban resolviendo dos tablas de proporcionalidad que debían rellenar, similares a las de las medidas del tangram o la mermelada. En este momento decidimos hacer los ejercicios entre todos para que los alumnos que iban más atrasados también pudieran realizar las actividades de repaso para la prueba.

Como ya se habían rellenado varias tablas de proporcionalidad, no hablamos de estos ejercicios, sino de los dos últimos:

> Responda si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta:
>
> - Si las medidas de los lados de un triángulo son 1 cm, 3 cm y 5 cm, y las de otro son 1000 cm, 3000 cm y 5000 cm, entonces son semejantes.
> - Si dos cuadriláteros tienen las medidas de sus lados proporcionales, entonces serán semejantes.

Tratar el inciso de los triángulos semejantes fue rápido y quedó a cargo de los alumnos. Algunos se dieron cuenta de que las medidas del más grande eran las mismas del más pequeño multiplicadas por 1000. Cuando un alumno lo expresó esta idea, no todos lo entendieron. Pero cuando le pedimos que explicara mejor, todo el curso entendió sin problemas.

En el inciso de los cuadriláteros, toda la clase coincidía en que pasaría lo mismo que con los triángulos y resultarían semejantes. Dibujamos en el pizarrón las siguientes figuras cuyas medidas son iguales y por lo tanto, proporcionales:



Aquí les preguntamos si las figuras eran semejantes y todos dijeron que no argumentando que tenían diferentes formas y no poseían los mismos ángulos. Entonces dimos la afirmación del inciso por falsa.

Luego les comunicamos que resuelvan las tablas y anoten el resto de las resoluciones para que puedan estudiar para la prueba.

Cuando tocó el timbre y nos retiramos del aula nos percatamos de que no habíamos dado los temas para la prueba. Volvimos durante el recreo y anotamos en el pizarrón;

Temas para la prueba de matemática

1) *Razones y proporciones*
2) *Proporcionalidad*
3) *Tablas de proporcionalidad*
4) *Constante de proporcionalidad*
5) *Extremos y medios*
6) *Propiedad fundamental de las proporciones*
7) *Semejanza de triángulos*
8) *Razón de semejanza*

En esta clase, los alumnos lograron:

- Comprender que el hecho de “mantener la misma forma” o “tener los mismos ángulos” no es suficiente para afirmar que dos figuras sean semejantes - Solamente en triángulos basta con tener todos los ángulos iguales para asegurar la semejanza, pero con cuadriláteros esto no basta.
- Reflexionar sobre la importancia de la proporcionalidad entre los lados de figuras semejantes
- Aunar pautas que deben darse para que las figuras sean semejantes
- Identificar figuras semejantes y distinguir también aquellas que no lo son

Tercero B

En 3° B la situación era parecida a la que se había dado en la clase de la otra división. Debíamos institucionalizar los criterios de semejanza de triángulos y luego dar una guía de repaso. Una vez que devolvimos los trabajos de los alumnos, decidimos hacer la puesta en común menos dialogada, lo mismo que la institucionalización, priorizando el tiempo de resolución que llevaba la guía de repaso.

En los primeros 20 minutos de la clase institucionalizamos los criterios de semejanza basándonos en las respuestas que elaboraron los distintos grupos en la guía resuelta la clase anterior, de los criterios de semejanza.

Para cada par de medidas de ángulos, tracen ustedes un triángulo y luego comparen sus cuatro triángulos con los de los otros equipos:

90° y 60°	45° y 45°
120° y 30°	80° y 40°

¿Que pudieron observar al comparar sus triángulos con los de sus compañeros?

Este inciso era igual para todos los grupos. La conclusión que sacamos fue:

“Los triángulos que comparten dos ángulos iguales pueden tener distinto tamaño, pero su forma es igual”

“El tercer ángulo también resulta igual, ya que es siempre el suplemento de la suma de los otros dos”

En el pizarrón registramos la siguiente definición:

- *Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales. (**Criterio AA**).*

Para la siguiente terna de medidas de lados: 5 cm, 3 cm y 6 cm, tracen un triángulo y compárenlo con los de los demás grupos.
¿Qué diferencias y similitudes encuentran con los triángulos de los demás grupos?

Y si sólo contáramos con las medidas de dos lados en cada triángulo que sean proporcionales ¿Que pueden decir al respecto de los triángulos construidos?

Investiguen en equipo acerca de la cantidad de lados con la que precisamos contar para construir triángulos semejantes si no conocemos los valores de los ángulos de dichos triángulos.

En este inciso las medidas cambiaban de fotocopia a fotocopia. Concluimos según las producciones:

"Con los tres lados definidos, los triángulos tuvieron la misma forma. Sus lados eran proporcionales y sus ángulos iguales".

"Contando con solamente con dos lados la forma puede cambiar, porque el ángulo que está enfrentado al lado de medida indefinida depende de esta medida, y cambia de una producción a otra".

En el pizarrón registramos el criterio que se seguía de estas conclusiones:

- *Dos triángulos son semejantes si tienen tres lados proporcionales. (**Criterio LLL**).*

3) Construyan un triángulo donde dos lados midan 8 cm y 10 cm respectivamente y el ángulo comprendido entre esos lados sea de 60° y digan cómo es ese triángulo con respecto a los de los demás grupos.

En este inciso también las medidas variaban para que cada grupo realice construcciones distintas. Pudimos establecer lo siguiente:

"Si dos triángulos tienen dos lados proporcionales entre sí y el ángulo comprendido entre ellos igual, entonces podrá variar el tamaño, pero el ángulo entre los lados me determinará el tercer lado, de manera que resultarán semejantes"

Registramos en el pizarrón:

- *Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual. (**Criterio LAL**).*

¿Qué pasa si?:

Dado un par de triángulos con las siguientes características:

- En un triángulo, uno de sus lados mide 7 cm y uno de sus ángulos 60°;
- En el otro triángulo, el lado y el ángulo correspondientes miden 3.5 cm y 60° respectivamente.

¿Se trata de triángulos semejantes? Argumenten acerca de la suficiencia o insuficiencia de datos para asegurar la semejanza antes de hacer los trazos. Luego realicen los trazos, recorten las figuras y verifiquen con sus compañeros lo antes argumentado.

De este punto los alumnos establecieron que estos dos datos eran insuficientes para que los triángulos resultaran semejantes.

Detallamos en un afiche cada criterio con una ilustración. El resto del tiempo lo empleamos en repasar todos los contenidos que abordamos. Convenimos en trabajar primero aquellos que se encuentren más relacionados con la última temática estudiada. Así iniciamos con el reconocimiento de triángulos semejantes aplicando los tres criterios y luego seguimos con problemas y ejercicios de razones y proporciones. Se les entregó a los alumnos una fotocopia con problemas similares a los vistos en la guía n°1.

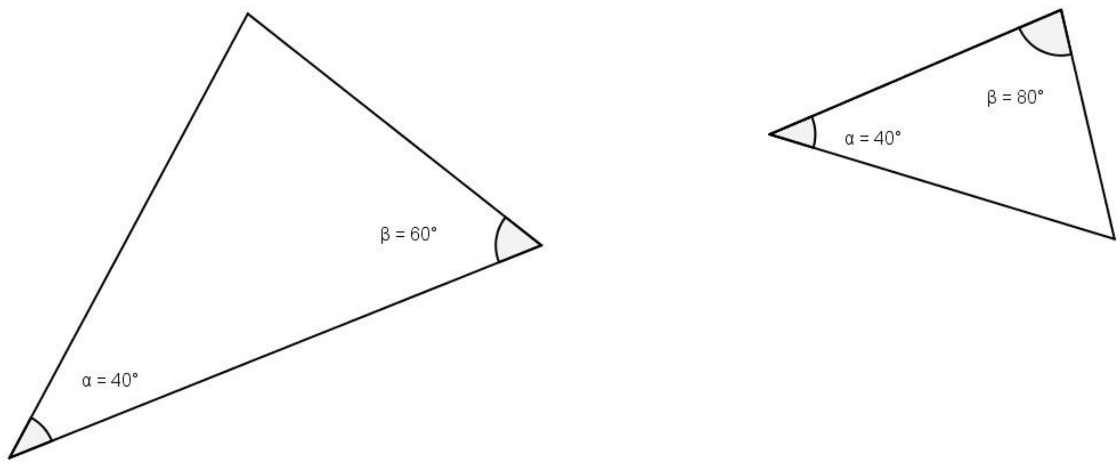
Como quedaba poco tiempo para trabajar en la guía de repaso, se la distribuimos a a los alumnos en fotocopias y comenzaron a trabajar.

En la guía de repaso se daban dos tablas completas. Se pedía que los alumnos evaluaran si cada una era una tabla de proporcionalidad o no. En el caso de que lo fueran, debía calcularse la constante de proporcionalidad e interpretar su significado.

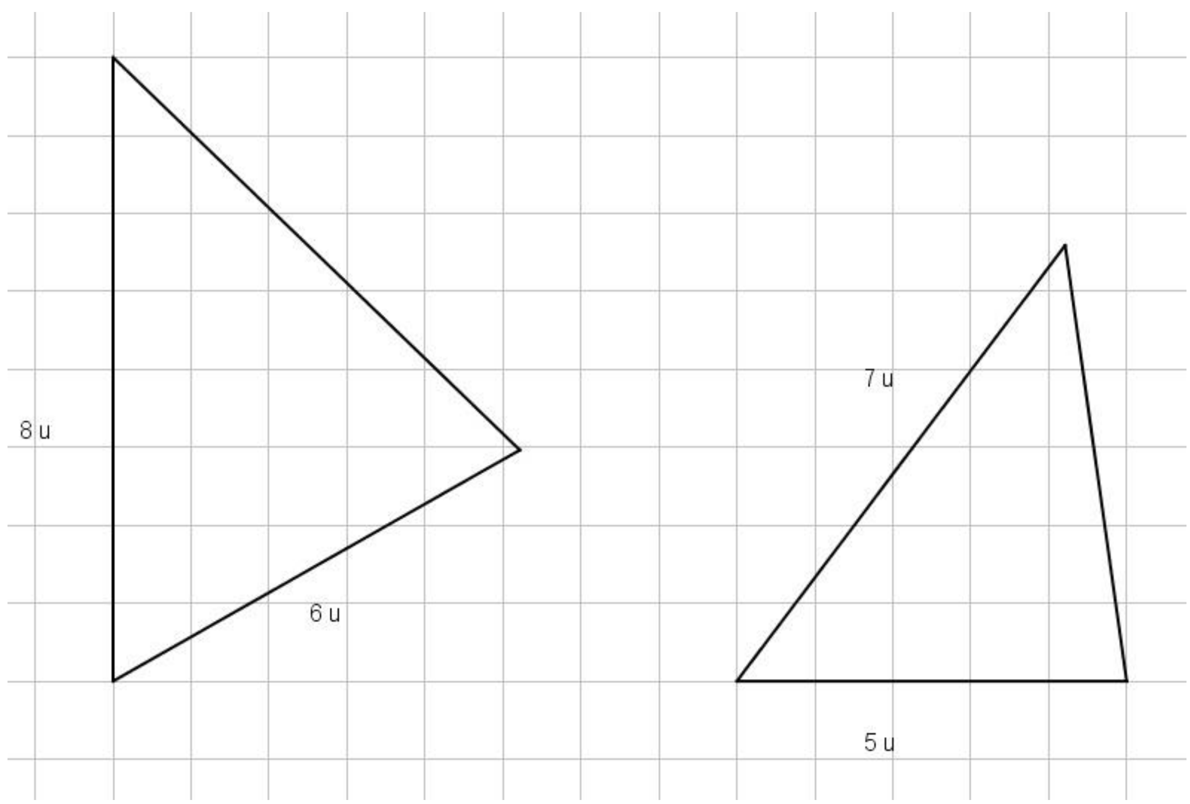
En el ejercicio siguiente había una tabla de proporcionalidad incompleta que debía ser rellenada.

El ejercicio que seguía presentaba una ecuación similar a las del punto 9) de la guía 1, en donde la incógnita estaba ubicada en los denominadores.

Por último, la guía presentaba distintos pares de triángulos en los que se debía evaluar la semejanza. A modo de ejemplo presentamos dos pares.



Este primer par de triángulos son semejantes AA, pues sus tres ángulos resultan iguales si se calcula el suplemento.



En este caso, los datos resultaban insuficientes para establecer que eran semejantes.

Similar a la manera de proceder que tuvimos en 3°A, expusimos al frente la resolución que habían hecho algunos de los alumnos.

2.2.3 Instancias de evaluación

Nuestras prácticas docentes estuvieron marcadas por dos instancias evaluativas que nos posibilitaron obtener información acerca del estado de los alumnos en relación con los contenidos que estábamos enseñando y con los objetivos que nos habíamos propuesto alcanzar. En primer lugar hubo una evaluación formativa durante el desarrollo de la unidad didáctica. En esta los alumnos expusieron los conocimientos previos que disponían para ir acercándose a la noción de semejanza y las ideas subyacentes en torno a dicho concepto. Entre ellas encontramos la asociación entre semejanza de figuras y conservación de sus formas.

En segundo lugar, finalizando el período de prácticas, tomamos una evaluación sumativa buscando poner de manifiesto su desempeño en torno a contenidos conceptuales y procedimentales que habían sido abordados durante otras instancias de aprendizaje.

A continuación describiremos cada una de estas evaluaciones:

- Evaluación formativa y actitudinal: Esta evaluación nos permitió conocer el ideario de los alumnos acerca de algunos conceptos matemáticos, facilitando la introducción de otros temas que pretendíamos desarrollar. Para evaluar las producciones que realizó cada uno de ellos hicimos uso de un instrumento de evaluación abierto[3]. Consistía en una actividad grupal, para ser resuelta en una clase. Recogimos sus producciones, registramos sus respuestas y elaboramos notas particulares sobre su desempeño, resaltando aquello que consideramos fructífero trabajar con particular atención.
  El docente a cargo del curso nos propuso que evaluemos el grado de compromiso de cada alumno, para obtener una fracción de una "nota de concepto" correspondiente al segundo trimestre. Todos los alumnos presentes demostraron cierto grado de interés entregando sus trabajos. El tiempo de duración de esta actividad abarcó 120 minutos en 3° B y 80 minutos en 3°A[4]. En ambos cursos ocupó la quinta clase de nuestras prácticas.

- Evaluación sumativa[5]: La evaluación constaba de cinco consignas entre las que se encontraban situaciones problemáticas y ejercicios que los alumnos debían resolver trabajando de manera individual y sin consultar ninguna bibliografía. Tuvo lugar en la séptima y última clase de nuestras prácticas.

[3] Los instrumentos de evaluación abiertos, son aquellos que requieren que los estudiantes compongan una respuesta (Documento de apoyo curricular, pág. 25)

[4] Convenimos en dedicar la quinta clase a evaluar en ambos cursos. Sin embargo, los tiempos de 3ª A y 3ª B fueron distintos, por lo que en 3ª B se evaluó con una actividad exploratoria y de análisis de criterios de semejanza de triángulos, mientras que 3ª A fue evaluado en la actividad anterior, de introducción de semejanza de figuras y de triángulos en particular.

[5] La semana que realizamos esta evaluación, estuvo afectada por un ausentismo notable; el número de alumnos evaluados por curso no superó los 6 estudiantes. Por esto las primeras pruebas las tomamos nosotros mientras que el resto de los alumnos fueron evaluados por el docente responsable del curso, con los instrumentos de evaluación que nosotros diseñamos.

Una vez concluido este examen, tomamos las producciones de los estudiantes y establecimos criterios claros que permitieran obtener un puntaje de cada respuesta, prestando atención principalmente a que:

- Las categorías sean excluyentes, es decir que ninguna respuesta pertenezca a dos categorías distintas.
- Que las respuestas entren claramente en una categoría.
- Que dos respuestas que entran en la misma categoría sean similares en cuanto expresen el mismo grado de conocimientos pertinentes puestos en juego (acreditar el mismo puntaje).
- Que cada categoría represente en la mayor medida posible cada una de las respuestas que entran en ella.

Ordenamos esa información en una hoja de cálculo para obtener cada calificación. Los puntajes fueron ponderados luego de un análisis previo. Para cada inciso, se estableció un valor nominal según la dificultad que suponían para nuestro criterio. Luego ponderamos más a los ejercicios que tuvieron cerca de un 50% de resultados positivos, mientras que le otorgamos menos relevancia a aquellos incisos en los cuales los alumnos se desempeñaron de manera uniforme, ya sea de manera correcta o incorrecta.

2.2.3.1 Evaluación formativa en Tercero “A”

Actividad: ¡La proporcionalidad llega hasta a las figuras!

Grupo ___

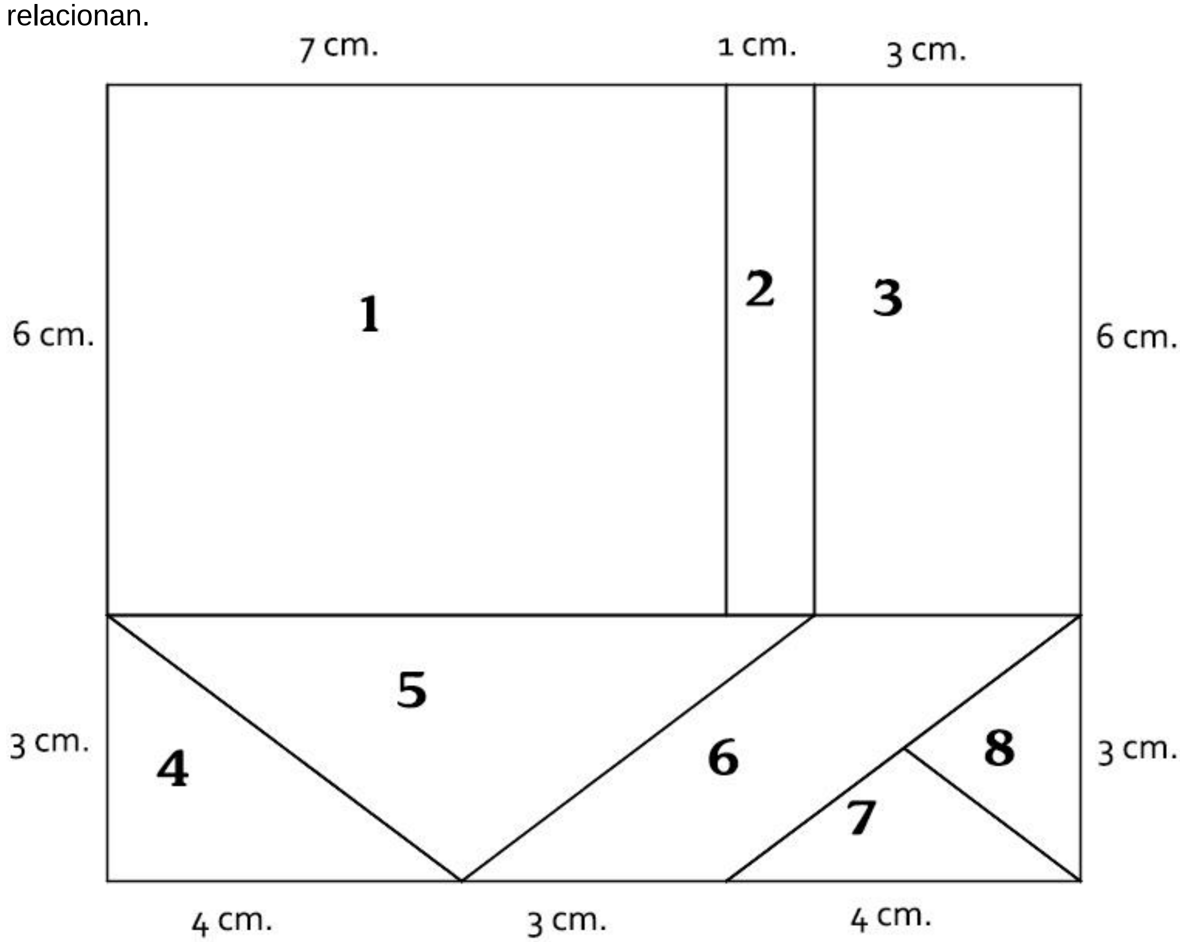
En el trabajo del Tangram vieron que al modificar el tamaño de cada una de las figuras que lo compone, se puede mantener la forma o no. Para nuestro estudio solo resultan interesantes las ampliaciones y reducciones de figuras. O sea los casos en los que las figuras mantienen la misma forma.

1. Observen las figuras que les tocó ampliar y las figuras ampliadas y respondan:
   a) ¿Qué características comunes tienen las figuras originales con las correspondientes ampliadas? ¿Qué diferencias? Nómbrenlas a continuación.
   b) Miren los cuadriláteros graficados en la fotocopia y respondan si existe o no una relación de proporcionalidad entre sus lados, explicando por qué.

2. Observen los triángulos ilustrados en la fotocopia y resuelvan las siguientes actividades:

a) Agrupen aquellos triángulos que presentan similitudes. **Justifiquen** su elección.

b) De los triángulos que agruparon. ¿Cuáles son los que más se parecen? Expliquen cómo harían para pasar de un triángulo a otro y expliciten las propiedades que los relacionan.



Actividad: ¡La proporcionalidad llega hasta las figuras!		
grupo 1		
1.a.	**figuras originales y ampliadas**	
	similitudes	**diferencias**
	ángulos; formas; **lados (proporción)**	perímetro; medidas; tamaño
1.b.	**No existe proporcionalidad entre los cuadriláteros porque…**	
	no se puede hacer una proporción con la medida de los cuadriláteros	
2.a.	**Similitudes entre los triángulos**	
	4 y 5: comparten un lado	
	7 y 8 comparten un lado	
	5 es el doble de 4	
2.b.	**Triángulos más parecidos: Cómo pasar de uno a otro como se relacionan**	
	Son triángulos isósceles, tienen dos ángulos iguales, comparten el mismo número de grados en sus ángulos; Al 7 le multiplico sus lados por 2.	
Comentario 1	*Una integrante tuvo una respuesta diferenciada de la de sus compañeros en el inciso* ***1.a.****. Entre las similitudes entre las formas originales y ampliadas, anotó: "mantienen iguales los lados (proporción)"*	
Comentario 2	*Los tres integrantes del grupo redactaron sus respuestas en el reverso de la hoja de las consignas. El trabajo de una de ellas presenta desprolijidades: un rayón, mucho corrector líquido y tachaduras*	
grupo 2		
	figuras originales y ampliadas	
1.a.	**similitudes**	**diferencias**
	ángulos; formas; lados (proporción) con ejemplo;	perímetro; medidas; tamaño
1.b.	**No existe proporcionalidad entre los cuadriláteros porque…**	
	no se puede armar una proporción con la medida de los cuadriláteros; con ejemplo;	
2.a.	**Similitudes entre los triángulos**	
	5, 7 y 8: son isósceles	
	4 es rectángulo	
	5 es el doble de 4	
2.b.	**Triángulos más parecidos: Cómo pasar de uno a otro como se relacionan**	
	"Los lados del ampliado dividido por los de la hoja dan como resultado 2"	
comentario 1	*En un comienzo, uno de los alumnos trabajaba solo. Le dijimos que era importante que trabajara en grupo para poder debatir las respuestas. Accedió y fue con el* **grupo 3**, pero así y todo, los estudiantes no se pudieron poner de acuerdo para trabajar juntos. Este alumno nos comentó que, aunque trabaja bien en clase, le va mal en las evaluaciones.	
comentario 2	*El alumno que comenzó el trabajo solo anotó como similitud la proporción entre los lados de las figuras: En figuras semejantes las razones entre dos lados es igual a la razón de sus respectivos homólogos.*	

grupo 3		
	figuras originales y ampliadas	
1.a.	**similitudes**	**diferencias**
	todo (son iguales); ángulos; formas	"Lo único que cambian son las medidas"
1.b.	**No existe proporcionalidad entre los cuadriláteros porque…**	
	No hay proporción entre 6 con 6 ni en 7 con 3 (Necesitan repasar el concepto)	
2.a.	**Similitudes entre los triángulos**	
	5, 7 y 8: son isósceles	
	4 es rectángulo	
	5 es el doble de 4	
2.b.	**Triángulos más parecidos: Cómo pasar de uno a otro como se relacionan**	
comentario 1	*Una alumna anotó que, en particular, los ángulos y las formas son iguales mientras que otro integrante no. A ambos les cuesta trabajar con una dedicación y esmero.*	
comentario 2	***Es preciso averiguar si el origen de la respuesta incorrecta del inciso 1.b. se debe a una mala sintaxis o a una falta de comprensión del concepto de proporcionalidad.***	

grupo 4		
	figuras originales y ampliadas	
1.a.	**similitudes**	**diferencias**
	ángulos; forma similar	**Distancias: longitudes distintas**
1.b.	**No existe proporcionalidad entre los cuadriláteros porque…**	
	No hay proporción porque los lados miden una longitud distinta **(es necesario repasar el concepto)**	
2.a.	**Similitudes entre los triángulos**	
	7 y 8: tienen un lado “A” de la misma longitud y comparten un lado "B" **(improvisaron notación)**	
	Si sumo 7 y 8 se hace un triángulo similar al 4	
	5, 7 y 8 sumados forman un triángulo 5	
2.b.	**Triángulos más parecidos: Cómo pasar de uno a otro como se relacionan**	
	“EL triángulo 5 es una ampliación del 7”	
comentario 1	*Se valieron de nombrar A y B a los lados de los triángulos de las figuras.*	
comentario 2	*En el inciso* **1.b.** de los cuadriláteros se utiliza desapropiadamente el concepto de proporción. Probablemente sea solo un error de sintaxis.	
comentario 3	*Sería favorable a su aprendizaje que los integrantes hagan un esfuerzo por mejorar su prolijidad. Uno de ellos presentó dos hojas, una con las respuestas del punto 1 y el punto 2 y otra, dejando un espacio, con el punto 2 pero esta vez más completo.*	

<table>
<tr><th colspan="3">grupo 5</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">figuras originales y ampliadas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.a.</td><td>similitudes</td><td>diferencias</td></tr>
<tr><td>ángulos; “medidas equivalentes”</td><td>medidas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.b.</td><td colspan="2">No existe proporcionalidad entre los cuadriláteros porque…</td></tr>
<tr><td colspan="2">"No har razón de proporcionalidad porque deberían modificarse los cuatro lados, pero solo se podrían cambiar dos"</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2.a.</td><td colspan="2">Similitudes entre los triángulos</td></tr>
<tr><td colspan="2">5, 7 y 8 son isósceles y acutángulos (es necesario repasar este concepto)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si sumo 7 y 8 se hace un triángulo similar al 4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.b.</td><td colspan="2">Triángulos más parecidos: Cómo pasar de uno a otro como se relacionan</td></tr>
<tr><td colspan="2">“Para pasar del triángulo 5 al 7 se dividen sus lados por 2”</td></tr>
<tr><td>comentario 1</td><td colspan="2">Los tres escribieron en el reverso de la hoja. Costó que se pongan a trabajar, pero finalmente se abocaron.</td></tr>
<tr><td>comentario 2</td><td colspan="2">Es importante que se ponga en cuestión la definición de triángulo acutángulo.</td></tr>
<tr><td>comentario 3</td><td colspan="2">Es interesante su tesis en el inciso 1.b.: Asumen la proporcionalidad en las figuras como aquellas que están agrandadas o achicadas. Como los tres cuadriláteros tienen la misma altura, 6 cm., pero distinto ancho, es imposible agrandar o achicar las figuras de manera que tengan el mismo ancho y alto. Si cambio el tamaño, para "ir" de un cuadrilátero a otro, cambia el alto, pero esto es imposible pues los cuadriláteros tienen el mismo alto</td></tr>
<tr><th colspan="3">grupo 6</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">figuras originales y ampliadas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.a.</td><td>similitudes</td><td>diferencias</td></tr>
<tr><td>forma; cantidad de lados; ángulos; medidas x 3,5</td><td>medidas; superficie</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1.b.</td><td colspan="2">No existe proporcionalidad entre los cuadriláteros porque…</td></tr>
<tr><td colspan="2">“Si tomamos las medidas de los cuadriláteros no se puede armar una proporción”</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2.a.</td><td colspan="2">Similitudes entre los triángulos</td></tr>
<tr><td colspan="2">5, 7 y 8 son isósceles</td></tr>
<tr><td colspan="2">4 es escaleno</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.b.</td><td colspan="2">Triángulos más parecidos: Cómo pasar de uno a otro como se relacionan</td></tr>
<tr><td colspan="2">“Tienen los mismos ángulos y forma; p/pasar de uno a otro multiplicaríamos la constante por 2”</td></tr>
<tr><td>comentario 1</td><td colspan="2">En un principio comenzaron a trabajar dos alumnas por un lado y otra sola. Esta última no suele trabajar, pero esta vez se había puesto a pensar los ejercicios. Cuando vimos que había un grupo de 2 integrante, les pedimos con discreción que vayan a trabajar con la compañera- A esto se debe que en la respuesta 1.a. de esta alumna no figure la constante de proporcionalidad.</td></tr>
<tr><td>comentario 2</td><td colspan="2">En el punto 1.a. las alumnas que comenzaron en un grupo de a dos pusieron como similitud que existe una constante de proporcionalidad (sin nombrarla) que relaciona las medidas de las figuras ampliadas con las originales: "todas las medidas de los lados originales se multiplican por 3,5 para obtener las figuras ampliadas". Si bien a simple vista esto no parece ser una similitud, pues las medidas son distintas, si implica la similitud de las proporciones entre los lados de una misma figura. Si tenemos dos medidas "x" e "y" de los lados de una figura pequeña, la razón entre las medidas chicas será igual que la razón entre sus respectivas ampliadas: x/y = 3,5x/3,5y</td></tr>
</table>

grupo 7		
	figuras originales y ampliadas	
1.a.	**similitudes**	**diferencias**
	ángulos; forma; c. de lados; constante de prop. (3,5)	**Distancias: longitudes distintas**
1.b.	**No existe proporcionalidad entre los cuadriláteros porque…**	
	"los cuadriláteros se multiplican por la cte. de prop." (Interp. alternativa de la consigna)	
2.a.	**Similitudes entre los triángulos**	
	5, 7 y 8 son isósceles	
	4 es escaleno y comparte lado con 5	
	la suma de dos lados iguales de los triáng. 7 y 8 dan uno de los iguales del 5	
2.b.	**Triángulos más parecidos: Cómo pasar de uno a otro como se relacionan**	
	misma forma pero ampliada, isósceles, ángulos iguales. Se multiplica por cte. de prop: 2	
comentario	*Este grupo utilizó con propiedad el concepto de la constante de proporcionalidad. Forma parte de las similitudes, al igual que en el grupo 6. Fue el único grupo que relacionó la constante de proporcionalidad con los triángulos 5 y 7, que si bien eran semejantes, no se presentaron uno como ampliación de otro.*	

grupo 8		
	figuras originales y ampliadas	
1.a.	**similitudes**	**diferencias**
	prop. En la figura 3; ángulos; forma	área; perímetro; medidas
1.b.	**No existe proporcionalidad entre los cuadriláteros porque…**	
	"No tienen la misma razón. Si uno de los lados tiene la misma medida, todas deberían ser iguales"	
2.a.	**Similitudes entre los triángulos**	
	5, 7 y 8 son isósceles	
	4 es rectángulo	
2.b.	**Triángulos más parecidos: Cómo pasar de uno a otro como se relacionan**	
	"dejar ángulos iguales y multiplicar medidas por 2"	
comentario	*En el punto* **1.a.,** las alumnas notaron que la figura 3 tiene 6 cm. de alto y 3 cm. de ancho, la mitad. Esta razón se vuelve a repetir en la ampliada. La proporcionalidad entre los lados de la figuras es una similitud esencial en las figuras semejantes.	

2.2.3.2 Evaluación formativa en Tercero “B”

Actividad: ¿CUÁNDO DOS TRIÁNGULOS SON SEMEJANTES?

Grupo ___

1) a) Para cada par de medidas de ángulos, tracen ustedes un triángulo y luego comparen sus cuatro triángulos con los de los otros equipos:

90° y 60°	45° y 45°
120° y 30°	80° y 40°

b) ¿Que pudieron observar al comparar sus triángulos con los de sus compañeros?

2) Para la siguiente terna de medidas de lados: 5 cm, 3 cm y 6 cm, tracen un triángulo y compárenlo con los de los demás grupos.

d) ¿Qué diferencias y similitudes encuentran con los triángulos de los demás grupos?
e) Y si sólo contáramos con las medidas de dos lados en cada triángulo que sean proporcionales ¿Que pueden decir al respecto de los triángulos construidos?
f) Investiguen en equipo acerca de la cantidad de lados con la que precisamos contar para construir triángulos semejantes si no conocemos los valores de los ángulos de dichos triángulos.

3) Construyan un triángulo donde dos lados midan 8 cm y 10 cm respectivamente y el ángulo comprendido entre esos lados sea de 60° y digan cómo es ese triángulo con respecto a los de los demás grupos.

4) ¿Qué pasa si?:

c) Dado un par de triángulos con las siguientes características:

- En un triángulo, uno de sus lados mide 7 cm y uno de sus ángulos 60°;
- En el otro triángulo, el lado y el ángulo correspondientes miden 3.5 cm y 60° respectivamente.

¿Se trata de triángulos semejantes? Argumenten acerca de la suficiencia o insuficiencia de datos para asegurar la semejanza antes de hacer los trazos. Luego realicen los trazos, recorten las figuras y verifiquen con sus compañeros lo antes argumentado.

d) Dado un par de triángulos cuyas características son:

- En uno de ellos un lado mide 5.5 cm y el otro mide 7 cm y el ángulo opuesto a uno de los lados mide 40°;
- En el otro un lado mide 11 cm y el otro 14 cm y el ángulo opuesto a uno de esos lados mide 50°. *(en ambos casos tomar el mismo par lado-ángulo opuesto)*

¿En cada caso se puede asegurar la existencia de una relación de semejanza entre ambas figuras? De ser necesario recortarlas y cotejen sus respuestas con sus compañeros.

5) Exploren en equipo qué datos mínimos adicionales sobre los lados se requieren para construir triángulos semejantes **cuando se conoce solamente un ángulo**. Tengan en cuenta los resultados de los incisos anteriores.

Actividad: ¿Cuándo dos triángulos son semejantes?	
grupo 1	
1.a.	Recortaron triángulos iguales
1.b.	”Solo varían en su tamaño según la recta"
2.i.	"Los triángulos son iguales"
2.h.	"No necesariamente son triángulos semejantes, pueden tener ángulos diferentes"
2.i.	"No hace falta tener la información de los 3 ángulos. Con solo dos basta, porque la suma de los 3 ángulos da siempre 180"
3.	"Son iguales"
4.a.	“no son semejantes porque sus ángulos no son iguales” "si tuviéramos el otro ángulo además de 60° podríamos deducir el valor del tercero y haber creado triángulos semejantes"
4.b.	"No son semejantes"
5.	“Con estos datos, solo si el ángulo que está entre los dos lados, con estos datos es suficiente. O sea un ángulo y dos lados”
Comentario 1	En las **consignas 1 y 2** subyace fuertemente la noción de medida, dado que para construir las figuras utilizaron instrumentos de geometría como regla, compás y transportador.
Comentario 2	En el **inciso 1b** al expresar que los triángulos *" varían su tamaño según la recta"*, es probable hayan querido decir, según el tamaño de sus lados, llamándolos "recta"
Comentario 3	Es importante resaltar el hecho de que en el **punto 5** mencionaron que es suficiente tener de datos el ángulo entre los 2 lados. Esto es central para deducir el criterio L-A-L

grupo 2	
1.a.	Dibujaron triángulos iguales
1.b.	"no ocupan la misma superficie pero tienen la misma forma"
2.a.	son de distinta medida pero proporcionales
2.b.	"puede que sean iguales o no, todo depende en qué posición se coloquen los lados"
2.c.	"Precisamos 2 lados"
3.	no compararon con los demás grupos tal cual se les pidió ni llegaron a ninguna conclusión
4.a.	Sin respuesta
4.b.	Sin respuesta
5.	Sin respuesta
Comentario 1	En el primer inciso de la **consigna 2** se pudo apreciar que este grupo se acercó bastante a la noción de semejanza de triángulos, al decir *" son de distinta medida pero proporcionales "* es claro se refirieron a los lados. Si compararon su figura con la de otros equipos.
Comentario 2	En el inciso 2b, comentan que las figuras semejantes tienen la misma forma pero no la misma superficie.

grupo 3	
1.a.	Dibujaron triángulos distintos
1.b.	"Se puede observar que hay variación de tamaños, pero a pesar de eso los ángulos son los mismos. Cambia el tamaño de los triángulos debido al tamaño de las bases"
2.g.	"mismos ángulos y medidas de lados, ángulos y tamaño. pusimos en distintos lados o lugares los 5 y 6 cm"
2.h.	"Podemos decir que son similares si el lado que falta fuera de la misma medida proporcional que en otro triángulo pero también que podamos decir que son distintos porque en el punto dice que solo dos lados son proporcionales por lo cual si quisiéramos hacer el tercer lado distinto no serían similares"
2.i.	"Se necesitan los 3 lados"
3.	"tienen la misma forma pero distintas medidas. Los ángulos son iguales y las medidas proporcionales"
4.a.	"no son semejantes porque no tienen la misma forma, los ángulos homólogos son iguales y los segmentos no son proporcionales"
4.b.	"Son semejantes porque todos sus lados son proporcionales al igual que sus ángulos. Son parecidos porque todos sus lados son proporcionales al igual que los ángulos"
5.	Sin respuesta
Comentario 1	Se puede observar en el **inciso 1.b** que este grupo tuvo en cuenta que la semejanza está estrechamente relacionada con la conservación de la forma.
Comentario 2	En el **inciso 2.g** mencionan la proporcionalidad de los lados
Comentario 3	En el **punto 2.h** confunden igualdad con semejanza. Eso se debe a una cuestión más bien semántica, que matemática.
Comentario 4	El aporte del **inciso 2.i** resultó esencial para deducir el criterio L-L-L

grupo 4	
1.a.	Dibujaron triángulos distintos
1.b.	"mismos ángulos y medidas de lados, ángulos y tamaño" "pusimos en distintos lados o lugares los 5 y 6 cm"
2.a.	“son proporcionalmente iguales"
2.b.	“Debemos conocer los 3 lados porque si conozco 2 varía el lado opuesto a un ángulo”
2.c.	
3.	"Son iguales"
4.a.	“hay insuficiencia de datos para eso y todos los casos"
4.b.	"tienen algunos lados que pueden formar semejanzas"
5.	Sin respuesta
Comentario	La respuesta al **inciso 1.b,** pudo tomarse para hacer referencia al criterio A-A**.**

grupo 5	
1.a.	Construyen figuras con los mismos ángulos pero con diferentes medidas de lados
1.b.	“Al comparar nuestros triángulos con los de nuestros compañeros pudimos notar que son los mismos pero en diferentes medidas"
2.a.	Organizaron la información en un cuadro de dos columnas agrupando por diferencias (todos son isósceles, misma figura) y similitudes (formas, medidas, ángulo).
2.b.	“Siguen siendo la misma figura pero cambia su forma y tamaño”
2.c.	No respondieron este inciso
3.	Construyen las figuras y concluyen que son triángulos proporcionales con iguales ángulos y afirman que los lados de uno son el doble de los del otro.
4.a.	“Son semejantes debido a que sus ángulos son iguales a pesar de sus lados proporcionales sin tantos datos no se puede ver si son semejantes o no”
4.b.	todos dibujaron las figuras y concluyen que en estos casos no se presenta semejanzas de figuras porque no tienen el mismo ángulo y sus lados no son proporcionales
5.	“hay que dar como dato mínimo un ángulo y dos lados"
Comentario	Aparece con frecuencia el término proporcionalidad.

grupo 6	
1.a.	Construyeron los 4 triángulos, aunque cada integrante les dio distinto tamaño
1.b.	“no ocupan la misma superficie pero tiene la misma forma"
2.d.	Construyen el triángulo, lo comparan y concluyen tienen distinta medida pero la misma forma.
2.e.	"El lado que falta es el necesario para que la suma de los lados de 180°."
2.f.	"se necesitan los 3 lados para que sean semejantes"
3.	Hacen el dibujo pero no comparan
4.c.	"Sí aunque necesito más datos para hacer un triángulo mejor hecho, la medida de los 2 lados"
4.d.	No respondieron este inciso
5.	No respondieron este inciso
Comentario	En el **inciso 2.e.** confunden lados con ángulos
grupo 7	
1.a.	Construyen las figuras con los ángulos pedidos, algunos miembros con diferentes tamaños de los lados
1.b.	"Los ángulos son iguales pero las medidas de los lados cambian"
2.j.	Organizaron la información en un cuadro de dos columnas, agrupando por diferencias (tamaño, medidas, ángulos) y semejanzas (isósceles).
2.k.	"van a ser semejantes, faltan más requisitos"
2.l.	"necesitaríamos las medidas de los 3 lados "
3.	Construyeron el triángulo con regla y compás pero no los compararon
4.g.	"No son semejantes ya que 3.5 cm es la mitad de 7, todos los lados del triángulo deberían ser el doble de medida del triángulo y esto sucede en 2 lados, pero en 1 depende de cómo lo dibujemos"
4.h.	"No son semejantes ya que sus ángulos no se mantienen, además sus medidas no son proporcionales"
5.	"Tendríamos que dar como dato mínimo las medidas de 2 lados y un ángulo"
Comentario	En el **punto 4.g** al hablar del *doble*, retoman el concepto de razón de semejanza.

2.2.3.3. Evaluación Sumativa en Tercero "A"

Evaluación de Matemática

Nombre y apellido:

Ejercicio N° 1

Para preparar pintura gris, Juan mezcla 12 litros de pintura negra con 28 litros de pintura blanca.

a) Si su socio Manuel mezcla 14 litros de pintura negra con 30 litros de pintura blanca. ¿Obtiene la misma tonalidad que la de Juan? ¿Por qué?
b) Si Manuel mezcla 18 litros de pintura negra con 42 litros de pintura blanca, ¿la tonalidad será más clara, más oscura, o igual a la de Juan? ¿Por qué?

Ejercicio N° 2

La siguiente tabla corresponde a una relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de calorías que aportan distintas cantidades de chocolate.

a) Complétala con los números que correspondan e indica qué propiedad aplicas en cada caso.
b) Obtén la constante de proporcionalidad e indica qué significa.

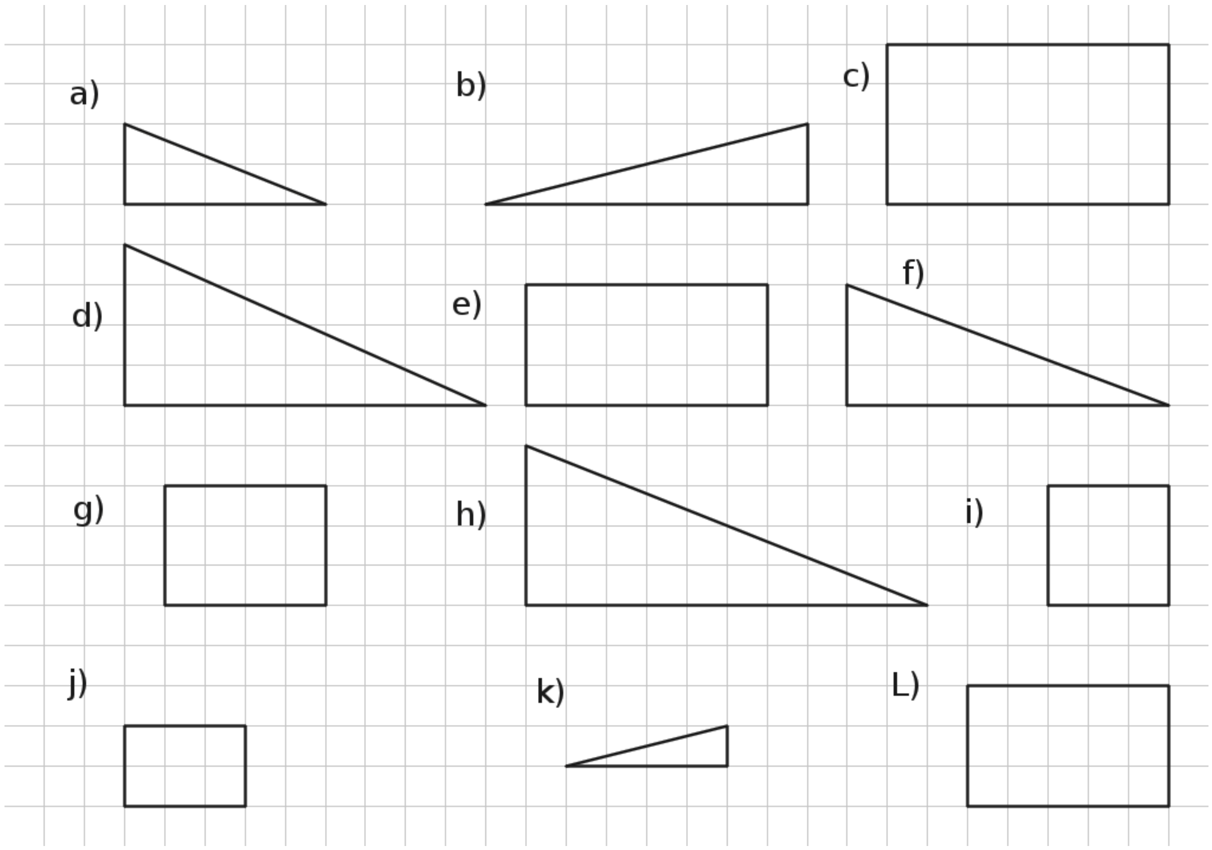
Peso del chocolate (g)	Calor (Calorías)
30	162
60	
	243
15	
	486

Ejercicio N°3

Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas, falsas. **Justifica sólo dos respuestas**.

a) "Dados dos triángulos A y B, sabemos que las medidas de los lados de A son 3 cm., 5 cm. y 6 cm., y las medidas de los lados de B son 9 cm., 15 cm., y 18 cm. Entonces podemos ver que A y B son semejantes. "
b) "Existen dos triángulos semejantes A y B tales que la razón de semejanza entre A y B es 5 y la razón de semejanza entre B y A es 0,25"
c) "Dos cuadriláteros que tienen dos pares lados iguales y las medidas de sus lados forman una proporción siempre serán semejantes."

Ejercicio N°4. Indica cuáles de las siguientes figuras son semejantes y anota la razón de semejanza.



Ejercicio N° 5

En la siguiente ecuación. ¿Cuánto debe valer x para que se cumpla la proporción?

a) $$\frac{x+\frac{1}{4}}{x} = \frac{3^{-1}.0,3}{\sqrt[3]{-1}}$$

Criterios de evaluación – 3° A

Ejercicio N°1 **(2,4 pts.)**

1.a.1) Respondió correctamente, explicitó las razones matemáticas, interpretó, comparó las razones. **(1,2 pto.)**
1.a.2) Respondió correctamente pero el argumento no es válido. **(0,6 pts.)**
1.a.3) Respondió correctamente pero no justificó. **(0,6 pts.)**
1.a.4) Respondió incorrectamente. **(0 pts.)**
1.a.5) No respondió. **(0 pts.)**

1.b.1) Respondió correctamente, explicitó las razones matemáticas, interpretó, comparó las razones. **(1,2 pto.)**
1.b.2) Respondió correctamente pero el argumento no es válido. **(0,6 pts.)**
1.b.3) Respondió correctamente pero no justificó. **(0,6 pts.)**
1.b.4) Respondió incorrectamente. **(0 pts.)**
1.b.5) No respondió. **(0 pts.)**

Ejercicio N°2.a **(3 pts.)**

2.a.i.1) Completó correctamente la fila e indicó la propiedad aplicada, explicitando los cálculos. **(0,75 pts.)**
2.a.i.2) Completó correctamente la fila pero el argumento no es válido. **(0,4 pts.)**
2.a.i.3) Completó incorrectamente la fila. **(0 pts.)**
2.a.i.4) No respondió. **(0 pts.)**

2.a.ii.1) Completó correctamente la fila e indicó la propiedad aplicada, explicitando los cálculos. **(0,75 pts.)**
2.a.ii.2) Completó correctamente la fila pero el argumento no es válido. **(0,4 pts.)**
2.a.ii.3) Completó incorrectamente la fila. **(0 pts.)**
2.a.ii.4) No respondió. **(0 pts.)**

2.a.iii.1) Completó correctamente la fila e indicó la propiedad aplicada, explicitando los cálculos. **(0,75 pts.)**
2.a.iii.2) Completó correctamente la fila pero el argumento no es válido. **(0,4 pts.)**
2.a.iii.3) Completó incorrectamente la fila. **(0 pts.)**
2.a.iii.4) No respondió. **(0 pts.)**

2.a.iv.1) Completó correctamente la fila e indicó la propiedad aplicada, explicitando los cálculos. **(0,75 pts.)**
2.a.iv.2) Completó correctamente la fila pero el argumento no es válido. **(0,4 pts.)**
2.a.iv.3) Completó incorrectamente la fila. **(0 pts.)**
2.a.iv.4) No respondió. **(0 pts.)**

<u>Ejercicio N°2.b: **(1 pto.)**</u>

2.b.1) Dio la constante e indicó su significado. **(1 pto.)**
2.b.2) Dio la constante pero malinterpretó su significado. **(0,8 pts.)**
2.b.3) Dio la constante pero no su significado **(0,75 pts.)**
2.b.4) No respondió. **(0 pts.)**

<u>Ejercicio N°3: **(1,8 pts.)**</u>

3.a.1) Respondió y justificó correctamente, argumentando con cálculos y/o dibujos. **(1 pto.)**
3.a.2) Respondió correctamente y justificó incorrecta o insuficientemente. **(0,5 pts.)**
3.a.3) Respondió correctamente y no justificó. **(0,5 pts.)**
3.a.4) Respondió incorrectamente. **(0 pts.)**
3.a.5) No respondió. **(0 pts.)**

3.b.1) Respondió y justificó correctamente, argumentando con cálculos y/o dibujos. **(0,5 pts.)**
3.b.2) Respondió correctamente y justificó incorrecta o insuficientemente. **(0,25 pts.)**
3.b.3) Respondió correctamente y no justificó. **(0,25 pts.)**
3.b.4) Respondió incorrectamente. **(0 pts.)**
3.b.5) No respondió. **(0 pts.)**

3.c.1) Respondió y justificó correctamente, argumentando con cálculos y/o dibujos. **(0,3 pts.)**
3.c.2) Respondió correctamente y justificó incorrecta o insuficientemente. **(0,15 pts.)**
3.c.3) Respondió correctamente y no justificó. **(0,15 pts.)**
3.c.4) Respondió incorrectamente. **(0 pts.)**
3.c.5) No respondió. **(0 pts.)**

Ejercicio N°4 **(0,8 pts.)**

4.a.1) Reconoció los dos pares de figuras semejantes y dio su razón de semejanza. **(0,8 pts.)**
4.a.2) Reconoció los dos pares de figuras semejantes y no dio su razón de semejanza. **(0,5 pts.)**
4.a.3) Reconoció un solo par de figuras semejantes y dio su razón de semejanza. **(0,4 pts.)**
4.a.4) Reconoció un solo par de figuras semejantes y no dio su razón de semejanza. **(0,25 pts.)**
4.a.5) No reconoció figuras semejantes. **(0 pts.)**
4.a.6) No respondió. **(0 pts.)**

Ejercicio N° 5 **(1 pto.)**

5.1) Respondió correctamente, aplicando correctamente propiedad uniforme y propiedad fundamental de las proporciones. **(1 pto.)**
5.2) El resultado es incorrecto, pero aplicó correctamente propiedad uniforme y propiedad fundamental de las proporciones. Cometió un error de signos. **(0,9 pts.)**
5.3) El resultado es incorrecto, pero aplicó correctamente propiedad uniforme y propiedad fundamental de las proporciones. Cometió un error aritmético. **(0,8 pts.)**
5.5) Respondió incorrectamente, ejercicio incompleto. **(0 pts.)**
5.6) No respondió. **(0 pts.)**

2.2.3.4 Evaluación Sumativa en tercero “B”

Evaluación de Matemática

Nombre y apellido:
Curso y división:

Ejercicio N° 1

Para preparar pintura gris, Juan mezcla 12 litros de pintura negra con 28 litros de pintura blanca.

a) Si su socio Manuel mezcla 14 litros de pintura negra con 30 litros de pintura blanca. ¿Obtiene la misma tonalidad que la de Juan? ¿Por qué?

b) Si Manuel mezcla 18 litros de pintura negra con 42 litros de pintura blanca, ¿la tonalidad será más clara, más oscura, o igual a la de Juan? ¿Por qué?

Ejercicio N° 2

La siguiente tabla corresponde a una relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de calorías que aportan distintas cantidades de chocolate.

a) Complétala con los números que correspondan e indica qué propiedad aplicas en cada caso.

b) Obtén la constante de proporcionalidad e indica qué significa.

Peso del chocolate (g)	Calor (Calorías)
30	162
60	
	243
15	
	486

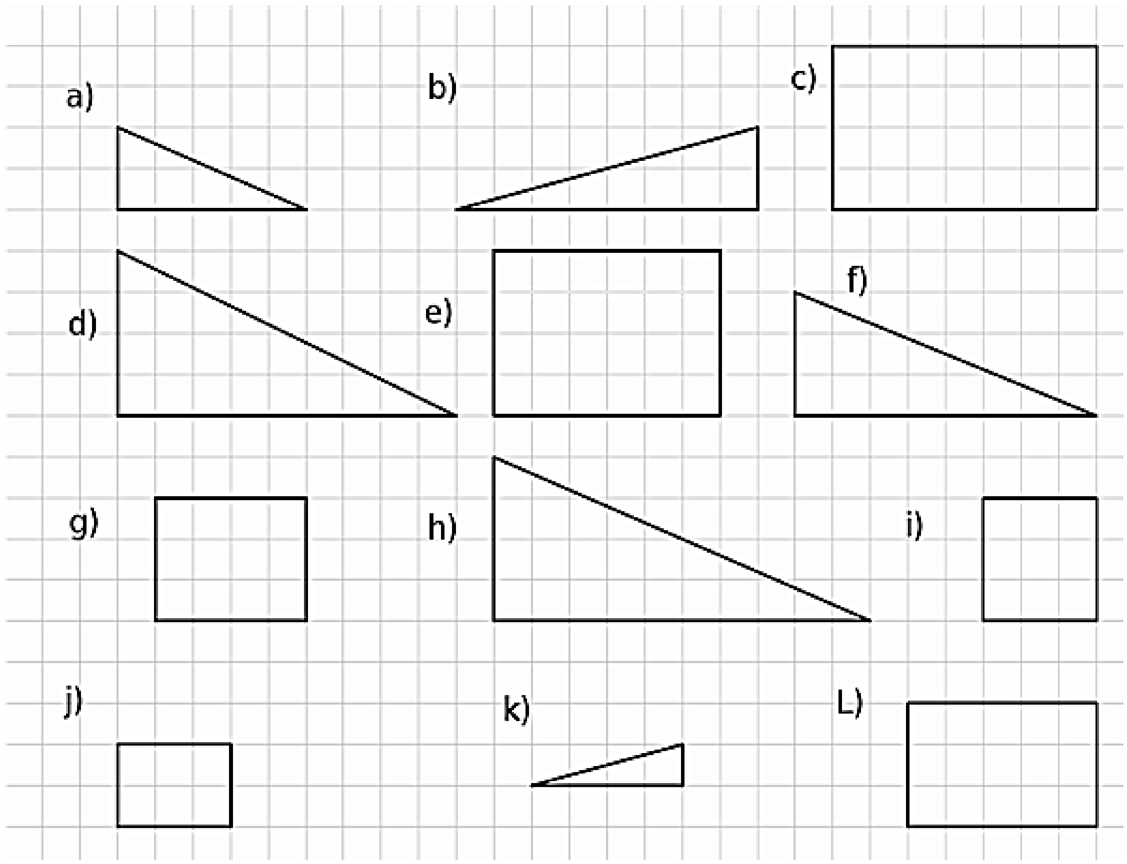
Ejercicio N°3

Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **Justifica tu respuesta en cada caso**.

a) *“ Dos triángulos, cuyas medidas de sus lados son: 3 cm, 5 cm y 6 cm; y en el otro son: 9 cm, 15 cm y 18 cm, son semejantes “*

b) *“ Dos triángulos, cuyas medidas de dos lados son: 12 cm y 10 cm; y en el otro son : 8 cm y 6 cm; y además en ambos triángulos, el ángulo entre los lados mencionados mide 60°, son semejantes”*

Ejercicio N°4. Indica aquellos pares de figuras que sean semejantes y obtiene su correspondiente razón de semejanza.



Ejercicio N° 5

En la siguiente ecuación. ¿Cuánto debe valer *x* para que se cumpla la proporción?

$$\frac{x+\frac{1}{4}}{x} = \frac{3^{-1}.0,3}{\sqrt[3]{-1}}$$

Criterios de evaluación 3° B

Ejercicio N°1**(2 pts.)**

1.a.1) Respondió correctamente, explicito las razones matemáticas, interpretó y comparo las razones. **(1 pto.)**
1.a.2) Respondió correctamente pero el argumento no es válido.**(0,5 pts.)**
1.a.3) Respondió correctamente pero no justificó.**(0,5 pts.)**
1.a.4) Respondió incorrectamente.**(0 pts.)**
1.a.5) No respondió nada.**(0 pts.)**

1.b.1) Respondió correctamente, explicito las razones matemáticas, interpretó y comparo las razones .**(1 pto.)**
1.b.2) Respondió correctamente pero el argumento no es válido.**(0,5 pts.)**
1.b.3) Respondió correctamente pero no justificó.**(0,5 pts.)**
1.b.4) Respondió incorrectamente.**(0 pts.)**
1.b.5) No respondió.**(0 pts.)**

Ejercicio N°2 **(3 pts.)**

2.a.1) Completó correctamente la tabla e indicó qué propiedad aplicó, explícitando los cálculos.**(2 pts.)**
2.a.2) Completó correctamente la tabla pero el argumento no es válido. **(1 pto.)**
2.a.3) Completó correctamente la tabla pero no indicó propiedad alguna. **(1 pto.)**
2.a.4) Completó incorrectamente la tabla y/ o tabla incompleta.**(0,5 pto.)**
2.a.5) No respondió.**(0 pts.)**

2.b.1) Respondió, dio la constante, explícito los cálculos e indicó su significado. **(1 pto.)**
2.b.2) Dio la constante, pero no su significado / indicó qué significa la constante pero no específico o no dio correcto su valor numérico. **(0,75 pts.)**
2.b.3) Respondió incorrectamente.**(0 pts.)**
2.b.4) No contestó.**(0 pts.)**

Ejercicio N°3: **(2,5 pts.)**

3.a.1) Respondió correctamente y justificó correctamente, argumentando con cálculos y/o dibujos. **(1,25 pts.)**
3.a.2) Respondió correctamente y justificó incorrectamente o insuficientemente. **(0,6 pts.)**
3.a.3) Respondió correctamente y no justificó. **(0,5 pts.)**
3.a.4) Respondió incorrectamente.**(0 pts.)**
3.a.5) No respondió.**(0 pts.)**

3.b.1) Respondió correctamente y justificó correctamente, argumentando con cálculos y/o dibujos. **(1,25 pts.)**
3.b.2) Respondió correctamente y justificó incorrectamente o insuficientemente.**(0,6 pts.)**
3.b.3) Respondió correctamente y no justificó.**(0,5 pts.)**
3.b.4) Respondió incorrectamente.**(0 pts.)**
3.b.5) No respondió.**(0 pts.)**

Ejercicio N°4 **(1,5 pts.)**

- **Primera Parte**

4.a.1) Reconoció figuras semejantes. **(0,9 pts.)**
4.a.2) Reconoció figuras semejantes pero faltaron o sobraron pares de figuras semejantes.**(0,45 pto.)**
4.a.3) No reconoció figuras semejantes.**(0 pts.)**
4.a.4) No respondió.**(0 pts.)**

- **Segunda parte**

4.b.1) Anotó e identificó razón de semejanza en todos los casos o solo en algunos. **(0,6 pts.)**
4.b.2) Identificó mal la razón de semejanza.**(0 pts.)**
4.b.3) No respondió.**(0 pts.)**

Ejercicio N° 5 **(1 pto.)**

5.1) Respondió correctamente. **(1 pto.)**
5.2) Respondió incorrectamente, pero aplicó correctamente propiedad uniforme y propiedad fundamental de las proporciones. Cometió errores de cálculos aritméticos y / o en transcribir la respuesta. **(0,8 pts.)**
5.3) Respondió incorrectamente - aplicó mal la propiedad uniforme / aplicó mal propiedad fundamental de las proporciones. **(0,5 pts.)**
5.4) Respondió incorrectamente, ejercicio incompleto, bien el desarrollo anterior pero no concretó el resultado. **(0,3 pts.)**
5.5) Respondió incorrectamente, ejercicio incompleto mal el desarrollo anterior.**(0 pts.)**
5.6) No respondió. **(0 pts.)**

2.2.3.5 Proceso de corrección y calificación

Para determinar el puntaje que atribuiríamos a cada tipo de respuesta utilizamos una hoja de cálculo que nos permitiera resumir la información. Esta planilla nos brindó información precisa sobre la representatividad de cada tipo de respuesta en cada una de las consignas. Una vez que fuimos ingresando cada una de las respuestas, pudimos calcular la nota final que recibiría cada alumno y ver cómo influía el puntaje que otorgábamos a las respuestas que entraban dentro de cada categoría.

A continuación se muestra un recorte de la hoja de cálculo elaborada. Las abreviaturas **1.a.1**, **1.a.2**, etc., simbolizan cada tipo de respuesta. La primera fila que le sigue debajo muestra los puntajes que se le suma a la nota de la evaluación por la respuesta que entre en la categoría correspondiente.

	Ejercicio 1.a					Ejercicio1.b					Ejercicio2.a.i)			
	1.a.1	1.a.2	1.a.3	1.a.4	1.a.5	1.b.1	1.b.2	1.b.3	1.b.4	1.b.5	2.a.i.1	2.a.i.2	2.a.i.3	2.a.i.4
alumno/puntaje	1,2	0,6	0,6	0	0	1,2	0,6	0,6	0	0	0,75	0,4	0	0
[illegible]				0					0					0
[illegible] - AUSENTE														
[illegible]	1,2					1,2						0,4		
[illegible]				0					0			0,4		
[illegible]					0					0				0
[illegible]	1,2					1,2					0,75			
[illegible]	1,2					1,2					0,75			
[illegible]				0					0			0,4		
[illegible]				0					0		0,75			
[illegible]		0,6							0					0
[illegible]	1,2					1,2					0,75			
[illegible]	1,2					1,2					0,75			
[illegible]		0,6					0,6					0,4		
[illegible]	1,2								0		0,75			
[illegible]	1,2					1,2					0,75			
[illegible]					0					0		0,4		
[illegible]	1,2					1,2					0,75			
[illegible]	1,2					1,2					0,75			
[illegible]				0			0,6				0,75			
[illegible]	1,2					1,2					0,75			
[illegible] - AUSENTE														
[illegible]		0,6							0		0,75			
[illegible] - AUSENTE														
Cantidad de respuestas	10	3	0	5	2	9	2	0	7	2	12	5	0	3

Las páginas siguientes mostrarán los porcentajes de respuestas que obtuvimos de cada tipo.

Tercero “A”

Consigna	Tipo de respuesta	porcentaje
1.a	Respondió correctamente, explicitó las razones matemáticas, interpretó, comparó las razones.	50%
	Respondió correctamente pero el argumento no es válido.	15%
	Respondió correctamente pero no justificó.	0%
	Respondió incorrectamente.	25%
	No respondió.	10%
1.b	Respondió correctamente, explicitó las razones matemáticas, interpretó, comparó las razones.	45%
	Respondió correctamente pero el argumento no es válido.	10%
	Respondió correctamente pero no justificó.	0%
	Respondió incorrectamente.	35%
	No respondió.	10%
2.a.i	Completó correctamente la fila e indicó la propiedad aplicada, explicitando los cálculos.	60%
	Completó correctamente la fila pero el argumento no es válido.	25%
	Completó incorrectamente la fila.	0%
	No respondió.	15%
2.a.ii	Completó correctamente la fila e indicó la propiedad aplicada, explicitando los cálculos.	50%
	Completó correctamente la fila pero el argumento no es válido.	20%
	Completó incorrectamente la fila.	5%
	No respondió.	25%
2.a.iii	Completó correctamente la fila e indicó la propiedad aplicada, explicitando los cálculos.	60%
	Completó correctamente la fila pero el argumento no es válido.	20%
	Completó incorrectamente la fila.	0%
	No respondió.	20%
2.a.vi	Completó correctamente la fila e indicó la propiedad aplicada, explicitando los cálculos.	50%
	Completó correctamente la fila pero el argumento no es válido.	20%
	Completó incorrectamente la fila.	0%
	No respondió.	30%
2.b	Dio la constante e indicó su significado.	35%
	Dio la constante pero malinterpretó su significado.	10%
	Dio la constante pero no su significado	10%
	No respondió.	45%

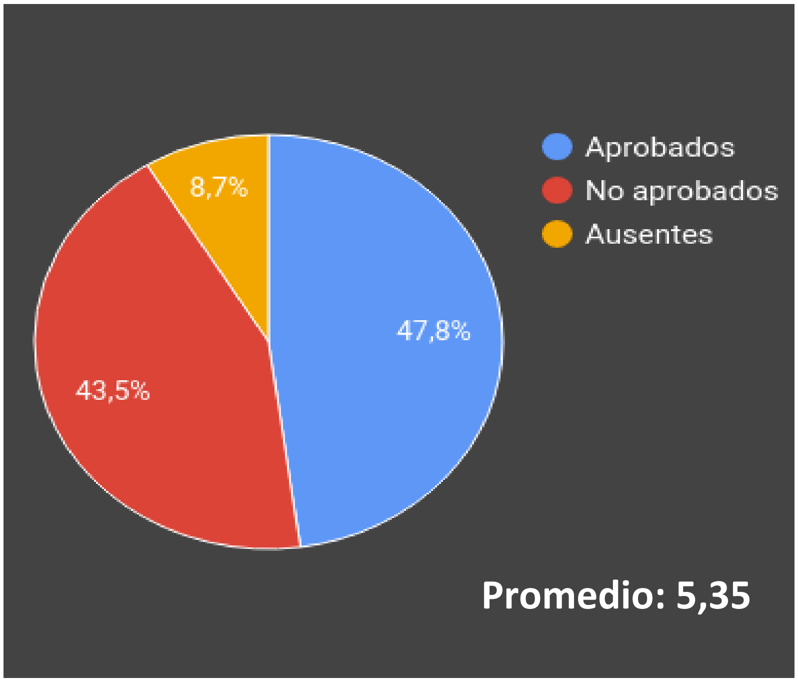
3.a	Respondió y justificó correctamente, argumentando con cálculos y/o dibujos.	70%
	Respondió correctamente y justificó incorrecta o insuficientemente.	10%
	Respondió correctamente y no justificó.	5%
	Respondió incorrectamente.	5%
	No respondió.	10%
3.b	Respondió y justificó correctamente, argumentando con cálculos y/o dibujos.	5%
	Respondió correctamente y justificó incorrecta o insuficientemente.	15%
	Respondió correctamente y no justificó.	35%
	Respondió incorrectamente.	20%
	No respondió.	25%
3.c	Respondió y justificó correctamente, argumentando con cálculos y/o dibujos.	0%
	Respondió correctamente y justificó incorrecta o insuficientemente.	15%
	Respondió correctamente y no justificó.	5%
	Respondió incorrectamente.	60%
	No respondió.	20%
4	Reconoció los dos pares de figuras semejantes y dio su razón de semejanza.	15%
	Reconoció los dos pares de figuras semejantes y no dio su razón de semejanza.	5%
	Reconoció un solo par de figuras semejantes y dio su razón de semejanza.	10%
	Reconoció un solo par de figuras semejantes y no dio su razón de semejanza.	5%
	No reconoció figuras semejantes.	50%
	No respondió.	15%
5	Respondió correctamente, aplicando correctamente propiedad uniforme y propiedad fundamental de las proporciones.	15%
	El resultado es incorrecto, pero aplicó correctamente propiedad uniforme y propiedad fundamental de las proporciones. Cometió un error de signos.	20%
	El resultado es incorrecto, pero aplicó correctamente propiedad uniforme y propiedad fundamental de las proporciones. Cometió un error aritmético.	5%
	Respondió incorrectamente, ejercicio incompleto.	20%
	No respondió.	40%

Tercero "B"

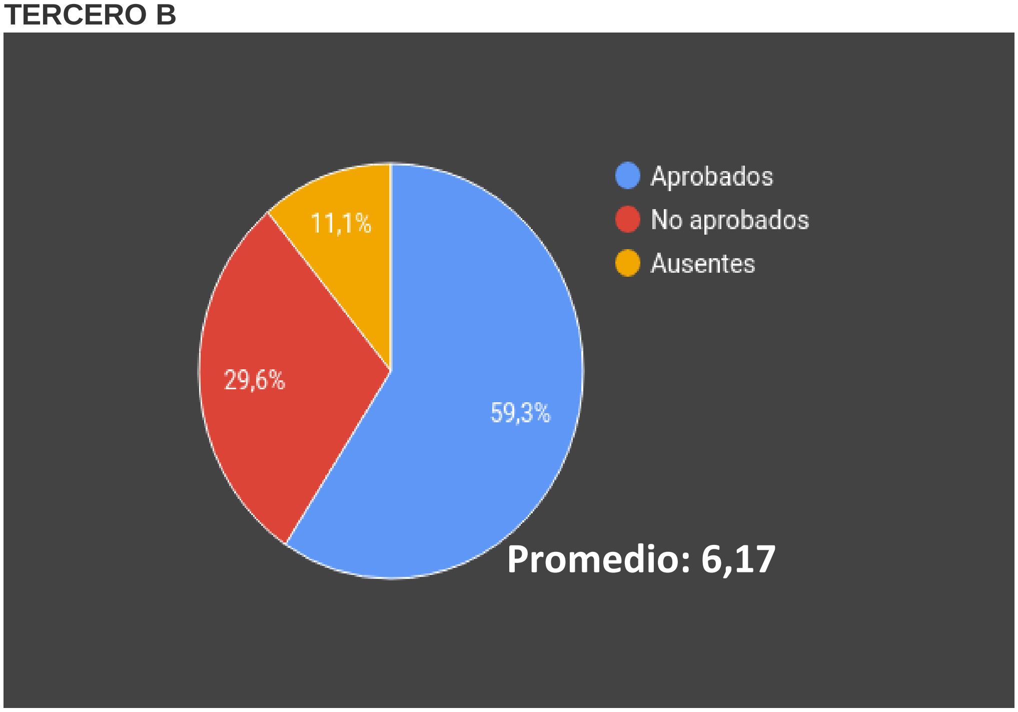
Consigna	Tipo de respuesta	Porcentaje
1.a	Respondió correctamente, explicitó las razones matemáticas, interpretó, comparó las razones.	38%
	Respondió correctamente pero el argumento no es válido.	8%
	Respondió correctamente pero no justificó.	0%
	Respondió incorrectamente.	46%
	No respondió.	8%
1.b	Respondió correctamente, explicitó las razones matemáticas, interpretó, comparó las razones.	46%
	Respondió correctamente pero el argumento no es válido.	0%
	Respondió correctamente pero no justificó.	0%
	Respondió incorrectamente.	42%
	No respondió.	13%
2.a	Completó correctamente la tabla e indicó qué propiedad aplicó, explícitando los cálculos	83%
	Completó correctamente la tabla pero el argumento no es válido.	4%
	Completó correctamente la tabla pero no indicó propiedad alguna.	0%
	Completó incorrectamente la tabla y/ o tabla incompleta.	8%
	No respondió.	4%
2.b	Dio la constante e indicó su significado.	38%
	Dio la constante pero malinterpretó su significado.	25%
	Dio la constante pero no su significado	8%
	No respondió.	29%
3.a	Respondió y justificó correctamente, argumentando con cálculos y/o dibujos.	79%
	Respondió correctamente y justificó incorrecta o insuficientemente.	13%
	Respondió correctamente y no justificó.	0%
	Respondió incorrectamente.	8%
	No respondió.	0%
3.b	Respondió y justificó correctamente, argumentando con cálculos y/o dibujos.	50%
	Respondió correctamente y justificó incorrecta o insuficientemente.	17%
	Respondió correctamente y no justificó.	4%
	Respondió incorrectamente.	17%
	No respondió.	13%
4.a	Reconoció figuras semejantes.	8%
	Reconoció figuras semejantes pero faltaron o sobraron pares de figuras semejantes.	83%
	No reconoció figuras semejantes.	4%
	No respondió.	4%
4.b	Anotó e identificó razón de semejanza en todos los casos o solo en algunos.	25%
	Identificó mal la razón de semejanza.	4%
	No respondió.	71%
5	Respondió correctamente.	21%
	Respondió incorrectamente, pero aplicó correctamente propiedad uniforme y propiedad fundamental de las proporciones. Cometió errores de cálculos aritméticos y / o en transcribir la respuesta.	29%
	Respondió incorrectamente - aplicó mal la propiedad uniforme / aplicó mal propiedad fundamental de las proporciones.	21%
	Respondió incorrectamente, ejercicio incompleto, bien el desarrollo anterior pero no concretó el resultado.	13%
	Respondió incorrectamente, ejercicio incompleto mal el desarrollo anterior.	0%
	No respondió.	17%

2.2.3.6 Resultados de la evaluación sumativa

TERCERO A



TERCERO B



3. ELECCIÓN Y ANALISIS DE UNA PROBLEMÁTICA

Resoluciones y utilización del lenguaje en el aprendizaje de la proporcionalidad.

En este apartado se expondrá un análisis referente a la relación que los alumnos fueron elaborando con el concepto matemático de proporción. Nos centraremos en la riqueza del lenguaje matemático utilizado por los alumnos y en el análisis de los procedimientos puestos en juego al momento de resolver las actividades. A lo largo del capítulo, se irán exponiendo distintos recortes de las producciones de los alumnos, que sirven como ejemplos y representan al resto de los registros. Comencemos analizando las primeras producciones de los estudiantes, que se dieron en torno a los ejercicios 2 y 3 de las actividades complementarias a la ampliación del Tangram.

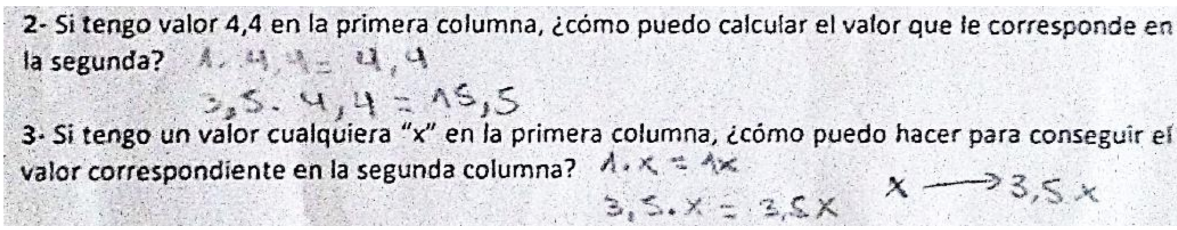

2- Si tengo valor 4,4 en la primera columna, ¿cómo puedo calcular el valor que le corresponde en la segunda? 1. 4,4 = 4,4
3,5 . 4,4 = 15,5
3- Si tengo un valor cualquiera "x" en la primera columna, ¿cómo puedo hacer para conseguir el valor correspondiente en la segunda columna? 1 . x = 1x
3,5 . x = 3,5x x ⟶ 3,5 x

Imagen 1

En la semana anterior a nuestras prácticas los estudiantes habían utilizado la propiedad uniforme para la resolución de ecuaciones en donde debían obtener el valor de x. Por eso en el punto 2 pareciera notarse como la alumna explicita la **propiedad uniforme** en contextos distintos de aquellos donde se estudió por primera vez esta propiedad, aunque en contexto de una igualdad con números de valor constante. Sin embargo, quizás puede aclarar la interpretación recordar la consigna de la actividad que habíamos visto al comienzo de la jornada:

Construiremos un Tangram ampliado. Este grupo se encargará de las piezas número___ y ___. Deberán construirlas en una cartulina sabiendo que lo que mide 4 cm en la hoja pasará a medir 14 cm en la cartulina. Recorten las dos piezas.

La producción ahora parece indicar algo distinto: "Si lo que mide 4 cm pasa a medir 14 cm, lo que en la ecuación valía 1, pasa a valer 3,5". En este razonamiento se puede apreciar en primer lugar, una abstracción de la unidad (cm), como así también la aplicación de una proporcionalidad. De este modo, en la imagen 1, el "1" del primer renglón de la respuesta es intencionalmente explícito, ya que pretende indicar que el 4,4 está en realidad multiplicado por "1", y es "correcto" suplantar ese 1 por 3,5.

En el pto. 3 la alumna elabora un razonamiento similar, en el que enfatiza la diferencia de notación que existe entre "1.x" y "1x"; "*1.x*" es 1 multiplicado por x, mientras que" *1x*" simboliza "una x". De nuevo, el "1" es cambiado por "3,5": "Los valores que están en la columna izquierda, en realidad están multiplicados por "1", aunque implícitamente. Dado que en la columna de la derecha lo que valía 1 pasa a valer 3,5, debemos "cambiar" un 1 multiplicando por un 3,5 multiplicando". Este trabajo matemático es un razonamiento similar al de la **reducción a la unidad**, que se apoya fuertemente en la cualidad del "1" como neutro para la multiplicación. Las medidas de la figura original siempre pueden estar multiplicadas por 1, quedando inalteradas, y este 1 multiplicando puede ser cambiado por el 3,5, que multiplica las medidas ampliadas. En la misma imagen a la derecha podemos ver el registro: "x $\longrightarrow$ 3,5x". Esta notación, característica de la correspondencia y similar a la notación usada para definir funciones, puede haber sido tomada de la **regla de tres simple** (imagen 2), en la cual se evidencia la correspondencia entre dos cantidades con una flecha o un guion bajo, según se puede observar en el siguiente escrito de otro alumno al aplicar la regla de tres simple (no se explicitan los cálculos, que fueron hechos con calculadora):

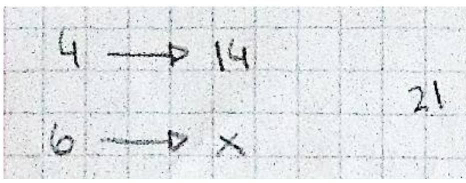


Imagen 2

Abajo se muestra otra producción, correspondiente a la primera actividad del tangram (imagen 3). El alumno respondió acerca del cálculo de las medidas ampliadas:

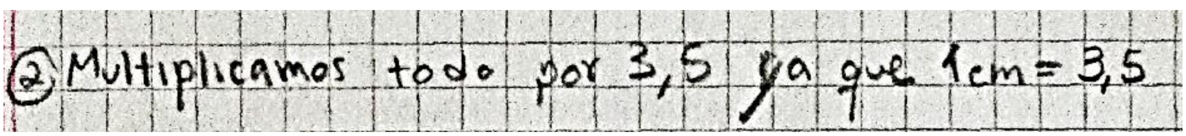


Imagen 3

El manuscrito manifiesta que este grupo también utilizó la estrategia de la **reducción a la unidad**: calculando cuánto le corresponde a la unidad es posible calcular las medidas que nos solicitan multiplicando por ese número. Utilizó el símbolo "=" para dos expresiones matemáticamente distintas (imagen 3).

Comúnmente, en matemática se planteen ecuaciones para suponer que dos expresiones son iguales o pretendiendo que lo sean. En la producción el igual no busca indicar igualdad sino correspondencia, tal cual lo hacía la flecha: lo que mide 1cm pasa a medir 3,5 cm. Se observa la misma utilización del signo "=" en otra producción:

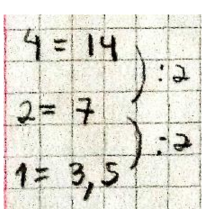


Imagen 4

En la imagen que se muestra a continuación vemos un uso de la palabra diferencia con una acepción distinta a la que se utiliza en matemática usualmente.

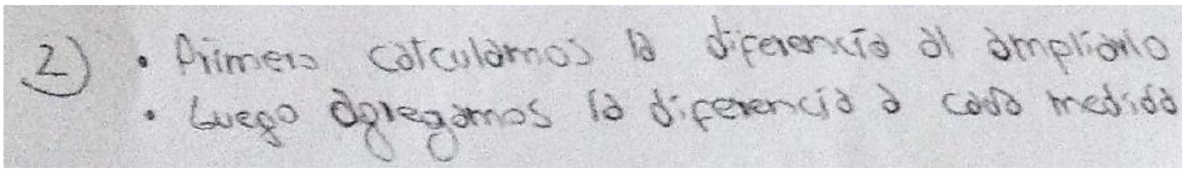


Imagen 5

La rigidez con la que muchas veces se piensa la matemática académica nos puede alertar de un error, pues en ella la diferencia está definida como el resultado de una resta entre dos números. Sin embargo, en este caso se habla "diferencia de un lado al ampliarlo" como aquello que hace que los lados ampliados sean diferentes a los originales. Él efectivamente dio con los valores correctos de las medidas, Calculó "14:4 = 3,5" haciendo una reducción a la unidad y utilizó lo que luego se definiría como **constante de proporcionalidad** para multiplicarla por cada una de las medidas originales obteniendo las ampliadas. Una expresión donde se note esta diferencia podría ser: "las medidas ampliadas se diferencian de las originales, pues están multiplicadas por 3,5".

Cuando el alumno prosigue en el siguiente renglón, explica que la diferencia se "agrega" a cada medida, y de nuevo nos hace caer en el error de pensar en una suma, en un valor fijo que se "agrega", pero esta no fue la manera en la que procedió el alumno. La diferencia se puede agregar, como quedó más arriba, a una fórmula o ecuación. La diferencia que se agrega parece ser, de hecho. el "3,5" como factor multiplicativo.

La regla de tres simple fue el método de resolución más utilizado al inicio de las prácticas cuando sin ninguna institucionalización previa de la proporción, los alumnos recurrieron a ella para resolver problemas de proporcionalidad. Este algoritmo introduce notación valiosa. Todos los alumnos comprendían como utilizarla correctamente en situaciones modélicas tales como el rellenado de tablas de proporcionalidad. Esta confianza y asertividad no se mantuvo al cambiar el formato de los enunciados.

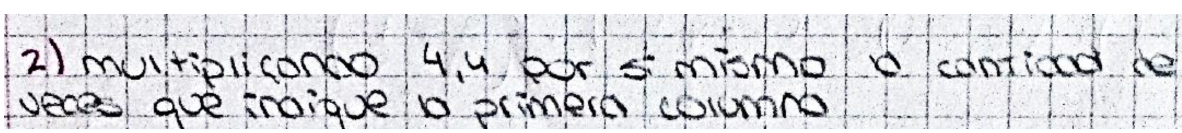


Imagen 6

La alumna que escribió esta respuesta había utilizado anteriormente la regla de tres simple para rellenar la tabla, pero quedó desorientada cuando se le pidió cuál sería la medida ampliada de 4,4 fuera del contexto de la tabla. Probablemente haya aplicado la regla como un procedimiento nemotécnico, sin encontrarle un significado más allá del cálculo "exitoso" de ciertos resultados en la clase de matemática.

Panizza, M. y Sadovsky, P. (1991), hablando de la regla de tres simple plantean que "*el status con que se presenta el método ubica al alumno en la situación de estar aprendiendo un concepto nuevo (el de proporcionalidad), cuando en realidad está aprendiendo un método (que es válido cuando hay proporcionalidad). Todo eso crea una confusión entre el concepto y el método, y tiene como una de sus consecuencias el aprendizaje de un mecanismo ciego, independiente de los problemas que permite resolver*". En concordancia con lo que afirman los autores, los alumnos demostraron que sabían ejecutar el algoritmo cada vez que lo hacían, pero no siempre podían identificar en qué situaciones era válida su aplicación.

En contexto de proporcionalidad, los estudiantes no demostraron un solo método resolutivo, sino que fueron eligiendo distintos caminos. En general, fueron de su preferencia los más intuitivos y simplificadores del esquema de la situación que cada problema planteaba. En un problema, se les pedía calcular la cantidad de bolitas rojas y azules sabiendo que en total había 21 bolitas y por cada 5 rojas había 2 azules. Como el número de bolitas totales era 21, siendo este un múltiplo entero de 7, los alumnos se basaron en este hecho para repetir esta correspondencia (2 azules – 5 rojas) sumando grupos de 7 bolitas uno sobre otro. Mientras algunos tomaron el atajo de la multiplicación (7x3=21), otros se valieron de representaciones gráficas de estas cantidades. A continuación se mostramos los ejemplos los ejemplos que tomamos:

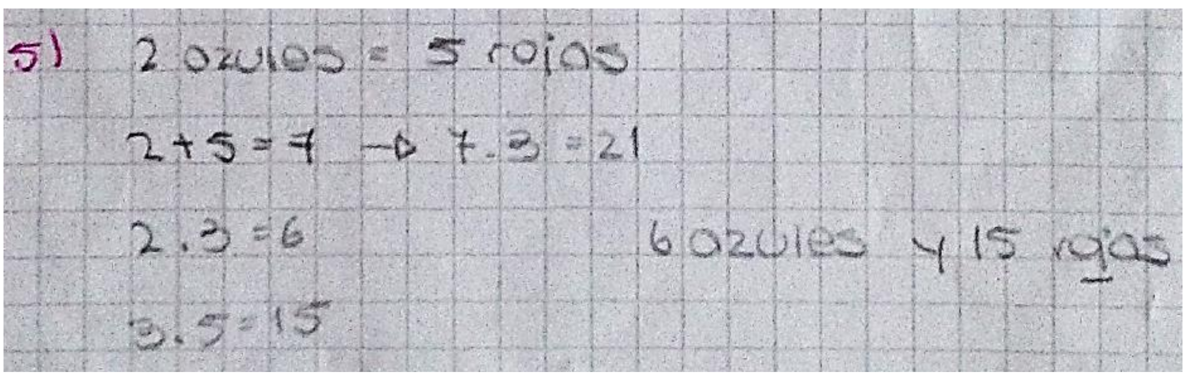


Imagen 7

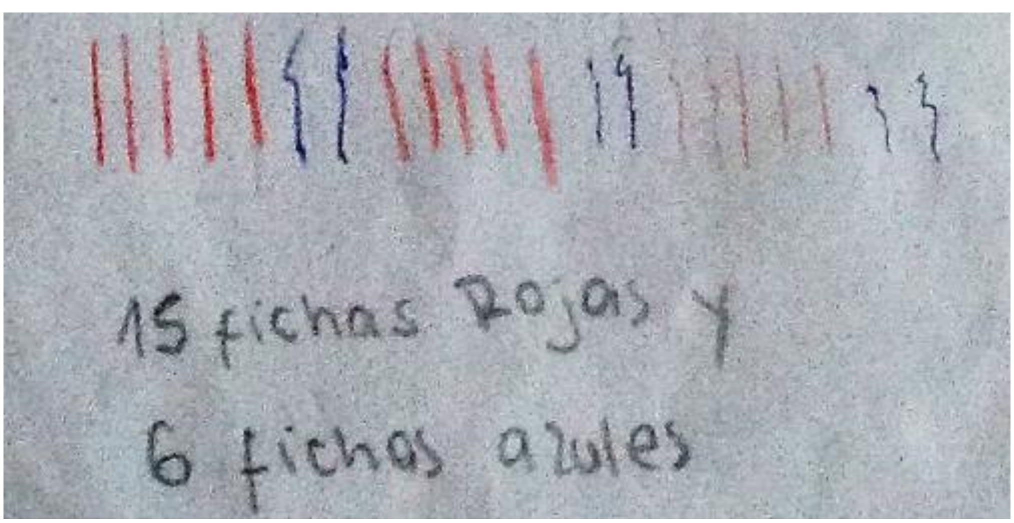
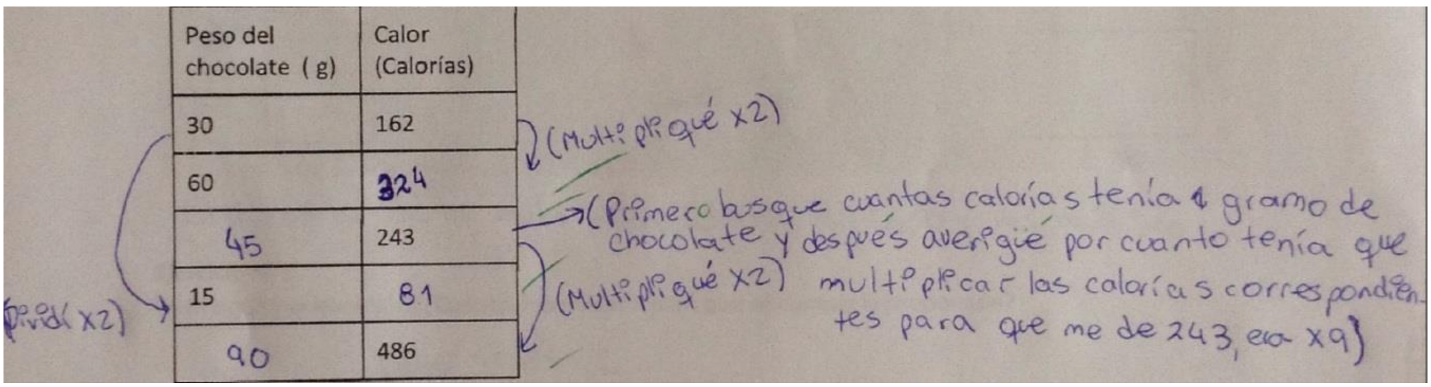


Imagen 8

Estas producciones representan las expresiones escritas de los alumnos en las primeras instancias de las prácticas. En las manifestaciones posteriores el lenguaje de los alumnos sufrió cambios. Como es de esperar, razones y proporciones tomaron un rol protagónico como método resolutivo y como herramienta para interpretar los enunciados que se presentaban. En particular, haremos algunas observaciones en torno a la evaluación sumativa.

Mientras que en las primeras actividades completar la tabla constituía un reto distinto en cada fila, utilizando distintos métodos, a veces fallando en un resultado y acertando en otros, en la evaluación se dio la generalidad de completar la tabla por completo o no hacerlo, con algunas excepciones.

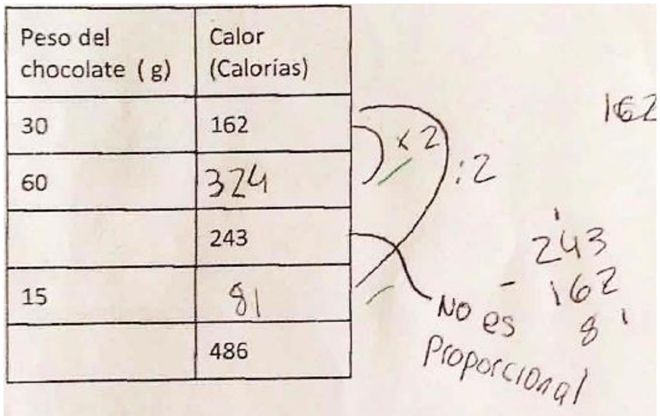


Peso del chocolate (g)	Calor (Calorías)
30	162
60	324
45	243
15	81
90	486

Imagen 9

En la tabla se puede observar cómo una alumna presentó inconvenientes a la hora de rellenar la tercera fila. El procedimiento que describe es incorrecto, pero el resultado es válido. Probablemente completó la tabla haciendo los cálculos y algún tiempo después procuró detallarlos, siendo incapaz de reconstruir su procedimiento. Teniendo el trabajo de la alumna durante las clases el ejercicio se contabilizo como correctamente resuelto.

A continuación tomamos otro ejemplo. Los cálculos que se registraron muestran que el alumno aplicó la propiedad característica de las tablas de proporcionalidad que dice: "Al multiplicar una de las cantidades por un número racional, la cantidad correspondiente se multiplica por el mismo número y la proporción se mantiene". En este caso la alumna multiplica y divide por 2. Para la propiedad, la división por un número no es otra cosa que la multiplicación por su “inverso multiplicativo”.



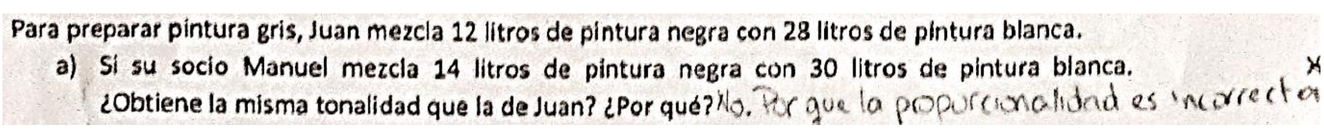
Peso del chocolate (g)	Calor (Calorías)
30	162
60	324
	243
15	81
	486

Imagen 10

En el cálculo del costado se percibe un intento infructuoso de aplicar otra propiedad característica de las relaciones de proporcionalidad: "Al sumar (o restar) dos valores de una de las cantidades se obtiene un número correspondiente con la suma (o resta) de los valores correspondientes de la otra cantidad". En la generalidad de ambos cursos, los alumnos aplicaron la regla de la multiplicación o división, en particular multiplicando o dividiendo a ambos lados de la tabla por números enteros. Este es el único en el que apareció el uso de la resta de filas durante la evaluación.

En otros cálculos que no figuran en la imagen, la alumna da con la constante de proporcionalidad haciendo 162÷30 = 5,4. Sin embargo este resultado nunca fue utilizado y probablemente se haya buscado imitando lo hecho en clases. La leyenda “no es proporcional” probablemente se deba a que ella no encontró un número entero que le dé 243 multiplicándolo por un valor de la columna derecha.

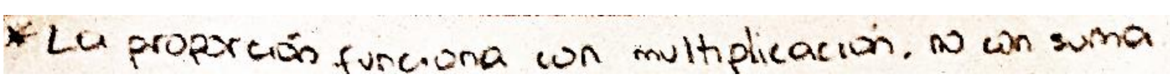
Como anteriormente se dijo, para obtener los valores de la tabla, los alumnos utilizaron la propiedad de la multiplicación. El estrecho lazo que existe entre la multiplicación y las relaciones de proporcionalidad se evidenció en los trabajos de los alumnos. Abajo vemos la producción de una alumna durante la evaluación. Ella justificó primero en la hoja de las consignas, y luego hizo una llamada con un asterisco (*) para completar la respuesta en el reverso de la hoja:



Para preparar pintura gris, Juan mezcla 12 litros de pintura negra con 28 litros de pintura blanca.

a) Si su socio Manuel mezcla 14 litros de pintura negra con 30 litros de pintura blanca. ¿Obtiene la misma tonalidad que la de Juan? ¿Por qué? No. Por que la proporcionalidad es incorrecta *

Imagen 11

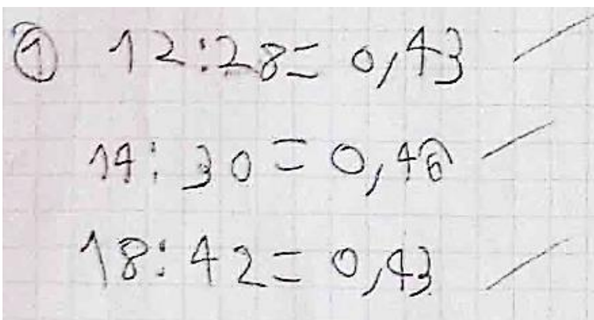


* La proporción funciona con multiplicación. no con suma

Imagen 12

En primer lugar la alumna manifiesta que “la proporcionalidad es incorrecta”, afirmando que para que la tonalidad sea la misma, debe haber proporcionalidad. En la llamada del asterisco, la alumna dice una afirmación que puede tomarse como verdadera o falsa, dado que las proporciones tienen muchas maneras de “funcionar”. Podemos guiarnos en el hecho de que 14=12+2 y 30=28+2; según lo que parece indicar la alumna, las proporciones funcionarían con la suma si sumando la misma cantidad de litros de pintura negra que blanca (2 litros) la mezcla seguiría siento igual; la mezcla cambia pues “la proporción funciona con multiplicación, no con suma”. Es decir que si hubiera un número “N” que cumpla que Nx12=14 y Nx28=30, entonces la mezcla sería la misma. Este N no existe, pues en la primera ecuación N=14/12=1,67 y en la segunda N=30/28= 1,07. No existe un único N que cumpla estas dos propiedades.

En el recorrido de los alumnos, la razón fue adquiriendo significado y relevancia a la hora de evaluar la presencia de proporcionalidad. En los siguientes ejemplos vemos cómo se toman las razones por separado, usando esta información para responder luego correctamente, pero sin necesidad de plantear la proporción:



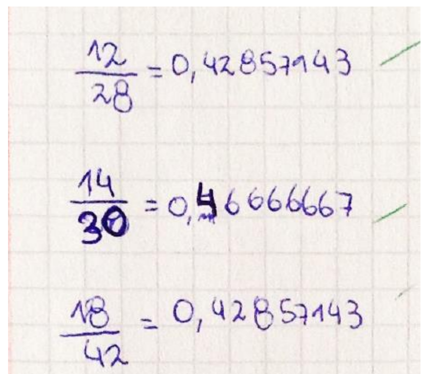


Imagen 13

Imagen 14

El signo “=”, en algunos casos se volvió un elemento constitutivo de la estructura de proporción, aun cuando en el texto enunciado se niegue la igualdad o la proporcionalidad.

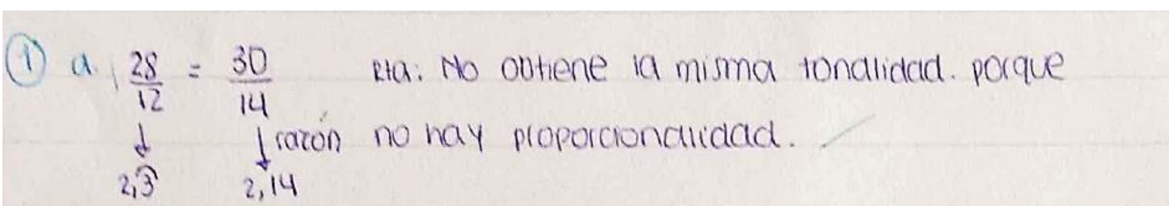


Imagen 15

En otros casos, se procedió utilizando el signo “≠”, acorde a lo que comúnmente se establece.

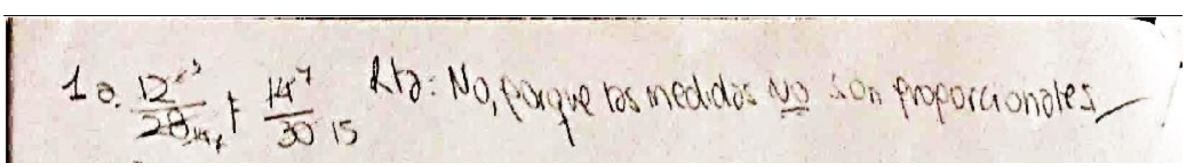


Imagen 16

Los métodos de resolución utilizados en la evaluación nos brindan información acerca del conocimiento que los alumnos van construyendo a medida que realizan aprendizajes. En particular, se expondrán algunos datos estadísticos acerca de la resolución de las tablas y los dos incisos del punto 1).

El 56% de los valores de las celdas de las tablas fueron obtenidos mediante la propiedad de la multiplicación. Aproximadamente en la mitad de los casos, se aplicó la propiedad mediante la división o la multiplicación por un racional.

Si se repasa la tabla, se nota que hay dos constantes de proporcionalidad: 5,4, exacto, y 0,185 periódico. En el inciso b. del punto 2), en el que se pedía la constante, sólo dos alumnos pusieron esta última, mientras que el resto utilizó 5,4.

Para resolver la tabla, también se usó frecuentemente la constante 5,4, representando el 30% de las resoluciones totales. El que utilizó la constante, la usó para calcular los valores de todas las celdas (sólo dos alumnos trabajaron con la constante y también con otros métodos).

Con respecto a la regla de tres simple, la usaron dos alumnos. Uno, complementando la aplicación de propiedades en la tabla, y el otro, como única herramienta de cálculo proporcional a lo largo de la evaluación.

Para el ejercicio 1), fue utilizado unánimemente el planteo de razones y/o proporciones excepto por el alumno antes mencionado. Vale destacar esta particularidad: de aquellos que, para completar la tabla utilizaron la constante de proporcionalidad (para todas las filas), todos lograron resolver el inciso 1.a y 1.b sin problemas. Aquellos que resolvieron correctamente la tabla con otros métodos, en cambio, obtuvieron un rendimiento del 50% en los dos primeros incisos.

4. REFLEXIONES FINALES

Pensar nuestra práctica profesional nos invita a reflexionar acerca de la complejidad de la tarea docente, la cual trasciende ampliamente las cuatro paredes del aula. El trabajo del profesor comienza mucho antes de ingresar al colegio y continúa después de cada clase. Con varias semanas de anticipación habíamos planificado las primeras clases y luego de cada jornada hacíamos un análisis crítico de nuestro trabajo, procurando generar mejorías en nuestra manera de enseñar. El periodo de práctica constituyó una etapa de aprendizaje única por dos razones:

- Fue el único espacio de nuestra formación académica en donde nos incorporamos a una institución educativa, estuvimos frente a un curso e interactuamos con alumnos. Sus producciones siempre enriquecieron nuestras concepciones sobre la matemática y el aprendizaje. En este sentido, nuestras prácticas se constituyeron como las máximas constituidoras de nuestro carácter docente, pues pudimos desempeñarnos concretamente en la tarea que definitivamente nos convoca.
- Trabajamos en equipo, ya sea con nuestro par pedagógico como así también con docentes, quienes desde su vasta experiencia contribuyeron a nuestro aprendizaje, aconsejándonos y guiándonos hasta el último momento de haber concluido esta etapa. Consideramos que esta forma de trabajo es esencial en la tarea docente y requiere también de una gran adaptación por parte de los sujetos que se involucran en la educación y la enseñanza en la micro sociedad de un curso. Aprendimos a complementarnos capitalizando tanto similitudes como diferencias de nuestro desempeño en las tareas docentes que desarrollamos, como diseño y rediseño de las actividades, desarrollo y gestión de las clases, análisis de las producciones de los alumnos y evaluación, entre otras.

Durante las prácticas nos vimos sujetos de limitaciones propias como falta de experiencia para tomar decisiones apropiadas en el momento adecuado. Ejemplo de esto es que nos gustaría haber hecho un trabajo evaluativo todavía más exhaustivo y permanente. También nos enfrentamos a imposibilidades que respondían al sistema educativo, como la poca disponibilidad de tiempo que posee un profesor para generar los aprendizajes que se propone.

En contraposición con esta perspectiva desoladora, presenciamos los cambios profundos que produce el saber en la integridad de los sujetos que lo experimentan, los alumnos. La formación de subjetividades íntegras y capaces de desenvolverse en la sociedad sin sufrir la desigualdad de oportunidades comienza por una confianza en que uno mismo puede comprender a las personas y la cultura que lo rodea. En este sentido, la educación es generadora de identidad. Así, un alumno que se percibe a sí mismo como incapaz de involucrarse en los aprendizajes en el mismo grado que sus compañeros comienza a generar insatisfacciones que constituirán su desarrollo a lo largo de su vida. Cambiar esta realidad con trabajo infatigable, continua invitación a aprender y respeto por el alumno es una tarea diaria de cada docente.

En particular con nuestro enseñar, la matemática, consideramos que para transmitirse por las diferentes sociedades y culturas debió generar un lenguaje académico y universal que sea lo menos ambiguo posible. Sin embargo, este lenguaje que atravesó nuestra propia formación matemática en la facultad no es siempre el que mejor se adecúa para ser transmitido en el contexto de la educación secundaria Argentina y es una labor continua de los docentes seguir reflexionando sobre los contenidos que se imparten junto a la forma y el lenguaje en que son transmitidos.

Tenemos la soberbia de considerar que la educación es una de las prácticas humanas que más generan igualdad de oportunidades, lo que la hace necesaria y sumamente importante como espejo en el que la sociedad debe mirarse y construirse.

Todos los que creemos en la educación debemos mantenernos fuertes para involucrarnos cada vez más en concretar los objetivos ya propuestos por los ministerios e instituciones a los que respondemos. Debemos también luchar por generar nuevas perspectivas que transformen poco a poco a la educación e involucren cada vez más a todos los miembros de la sociedad en nuestra lucha por una mejor educación, porque en el fondo creemos que una mejor educación nos haría mejor a todos. Ser buen docente está muy lejos de ser fácil y mantenerse firme en el desempeño comprometido de la profesión es mucho más complejo que un llamado o vocación.

5. BIBLIOGRAFÍA

5.1 Soporte teórico

- Gvirtz, S. & Palamidessi, M. (2008) El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza. Aique. Buenos Aires.
- Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba (2010) La evaluación de los aprendizajes en secundaria. Documento de apoyo curricular. Disponible en: http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPECCBA/publicaciones/Capac%20Nivel %20Secundario/Documento%20Evaluacio n%20Secundaria%2021-10-11.pdf
- Ministerio de Educación del Gobierno de la Provincia de Córdoba (2011) Diseño Curricular para el Ciclo Básico 2011-2015. Disponible en: http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPECCBA/publicaciones/EducacionSecundaria/LISTO%20PDF/TOMO%202%20Cic lo%20Basico%20de%20la%20Educacion%20Secundaria%20web%208-2- 11.pdf
- Skovmose, O. (2000) Escenarios de investigación. Revista EMA,6(1), p: 3-26.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM
- Documento de apoyo para la capacitación
- Panizza, M. y Sadovsky, P., El papel del problema en la construcción del concepto matemático

5.2 Manuales que consultamos para la elaboración de algunas actividades:

- **Matemática ES.3.** Editorial “tinta fresca” (2008). Autores: Coordinadora Liliana Kurzrofk, Silvia Atman, Mabel Arnejo y Claudia Comparatore.
- **Matemática 9 (Estadística y probabilidad)**. Editorial Puerto de Palos (2006). Autores: Adriana Berio, Carina D’Albano y Miryam Mazzitelli.- p/soporte teórico
- **Pitágoras 9** – Editorial “SM” (2005). Autores: Fernando Chorny, Gustavo krimker y Claudio Salpeter.

- **Carpeta de matemática 9**. Editorial Aique (2005). Autores: Luis Garaventa, Nora Legorburu, Patricia Rodas y Claudio Turano.

6. ANEXOS

6.1 ANEXO I Actividades planificadas

Actividad

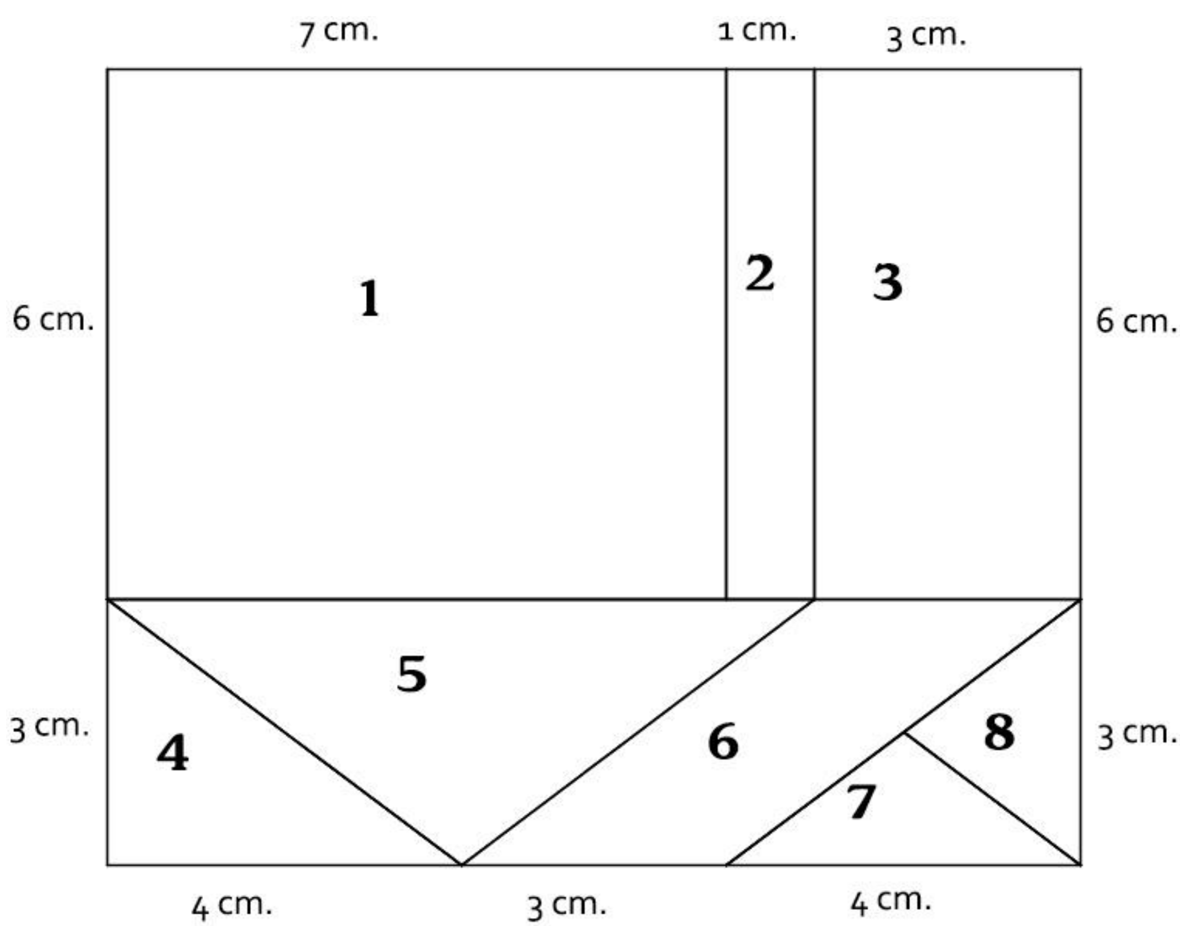
Grupo ___

1. Construiremos un Tangram ampliado. Este grupo se encargará de las piezas número___ y ___. Deberán construirlas en una cartulina sabiendo que lo que mide 4 cm en la hoja pasará a medir 14 cm en la cartulina. Recorten las dos piezas.

2. ¿Cómo hicieron para construir las figuras? Redacten los procedimientos y cálculos que hayan usado para construir las figuras.

3. Entre los grupos 1, 2, 3 y 4 armen el Tangram ampliado juntando las figuras que construyeron. Los grupos 5, 6, 7 y 8, hagan lo mismo.

4. Consultando información con los grupos con los que armaron el Tangram, elaboren una tabla con los datos empleados para armar la figura.



Actividades

1- Usando los datos de la tabla, sin calculadora, encuentra la medida de los segmentos ampliados que faltan. Indica cómo obtuviste el valor en cada caso.

Medida del lado original	Medida de lado ampliado
1	3,5
2	
3	10,5
4	14
5	17,5
6	21
7	24,5
8	28
9	
10	
11	
15	
	16

2- Si tengo valor 4,4 en la primera columna, ¿cómo puedo calcular el valor que le corresponde en la segunda?

3- Si tengo un valor cualquiera “x” en la primera columna, ¿cómo puedo hacer para conseguir el valor correspondiente en la segunda columna?

4- En una verdulería tienen la siguiente oferta: “Compre 3 kilos de naranjas a $25”. En otra verdulería vemos el siguiente cartel “Ricas y jugosas naranjas, 2 kg por $18”. Suponiendo que la calidad de las naranjas es la misma, ¿dónde conviene comprar?

5- Martín tiene cinco fichas rojas por cada dos azules. Si tiene 21 fichas en total, entre rojas y azules, ¿Cuántas fichas tiene de cada color?

Guía de actividades N°1

1- Una mermelada de mandarinas

Para preparar la mermelada se mezclan ½ kg de azúcar con ¾ kg de mandarinas.

a) Basándose en la información de arriba, completen la tabla

Cantidad de azúcar (Kg)	2,5		1		6	
Cantidad de mandarinas (Kg)		0,5		1		8,5

b) ¿Cuántos kilos de mandarinas hay que poner si se quiere hacer la misma mermelada con 5,5 kg de azúcar?

c) Si ponen 9 kilos de azúcar y 13 de mandarinas, ¿La mermelada que obtienen es más dulce que la anterior? ¿Por qué?

d) ¿Y si ponen 7 kg de azúcar y 11 de mandarinas?

e) ¿Es correcta la siguiente afirmación? ¿Por qué?:"*Para saber la cantidad de kilos de mandarinas que tengo que multiplicar la cantidad de azúcar por 3/2*"

f) Encuentren una fórmula que permita calcular la cantidad de azúcar que hay que poner conociendo la cantidad de kilos de mandarina.

2- La bolsa de caramelos

Juan, Francisco y Esteban compraron una bolsa de 126 caramelos y les salió $60. Esteban puso $30, Juan $10 y Francisco $20. ¿Cuántos caramelos le corresponden a cada uno?

3- Alimentando a mi mascota

En la veterinaria observamos la siguiente tabla. La cantidad de alimento que necesita comer un perro, ¿es proporcional a su peso? ¿Por qué?

PESO DEL PERRO	ACTIVO	SEDENTARIO
KG	G/DÍA	G/DÍA
2 kg	40 g	30 g
5 kg	90 g	60 g
10 kg	150 g	120 g
20 kg	240 g	160 g
30 kg	330 g	240 g
40 kg	420 g	280 g
50 kg	480 g	330 g
60 kg	570 g	390 g

4- Comparando razones

En el pueblo A hay 120 habitantes, 30 de los cuales leen el diario todos los días. En el pueblo B hay 80 habitantes, 24 de los cuales leen el diario todos los días. ¿Dónde se lee más el diario?

5- Formando proporciones

Dadas las siguientes series de números, ubícalos de tal manera que formen proporciones:

a) 8; 2; 16; 4
b) 40; 25; 16; 10
c) 0,5; 1; 2; 4

6- Trabajando con proporciones

Observa las siguientes proporciones.

$$\frac{3}{7}=\frac{7{,}5}{17{,}5} \qquad \frac{5}{16}=\frac{15}{48} \qquad \frac{15}{7}=\frac{27}{12{,}6}$$

a) Marca en cada proporción cuáles son los extremos y los medios.
b) Completa la siguiente tabla:

EXTREMOS	MEDIOS	EXTREMO X EXTREMO	MEDIO X MEDIO
3 y 17,5	7 y 7,5	3.17,5 =	7.7,5 =
y	y		
y	y		

¿Qué pueden notar en la tabla?

7- Marcar la opción correcta

En la proporción $\frac{2x-3}{4}=\frac{x}{3}$, el valor de *x* es

I. $\frac{9}{10}$

J. $\frac{4}{3}$

K. $\frac{9}{2}$

L. $\frac{9}{4}$

8- El sastre

Un sastre compró 3,5 m de tela y pagó por ella \$ 245. Si necesita 8 m de la misma tela, ¿cuánto deberá pagar?

9 - Valor faltante

Usando la propiedad fundamental de las proporciones, resuelvan las siguientes ecuaciones. ¿Cuánto debe valer x para que se cumpla la proporción?

e) $\dfrac{x}{0{,}60-0{,}4}=\dfrac{(0{,}5-1)^2}{0{,}\overline{2}}$ $(0,\overline{2}\ es\ un\ decimal\ periódico)$

f) $\dfrac{x-4}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{x+2}{(3+\sqrt{4})^0}$

g) $\dfrac{\frac{2}{3}-1}{1+\frac{1}{9}}=\dfrac{x-\sqrt{\frac{1}{4}}}{3-2x}$

h) $\dfrac{x+\frac{1}{4}}{x}=\dfrac{3^{-1}.0{,}3}{\sqrt[3]{-1}}$

Actividad

¡La proporcionalidad llega hasta a las figuras!

Grupo ___

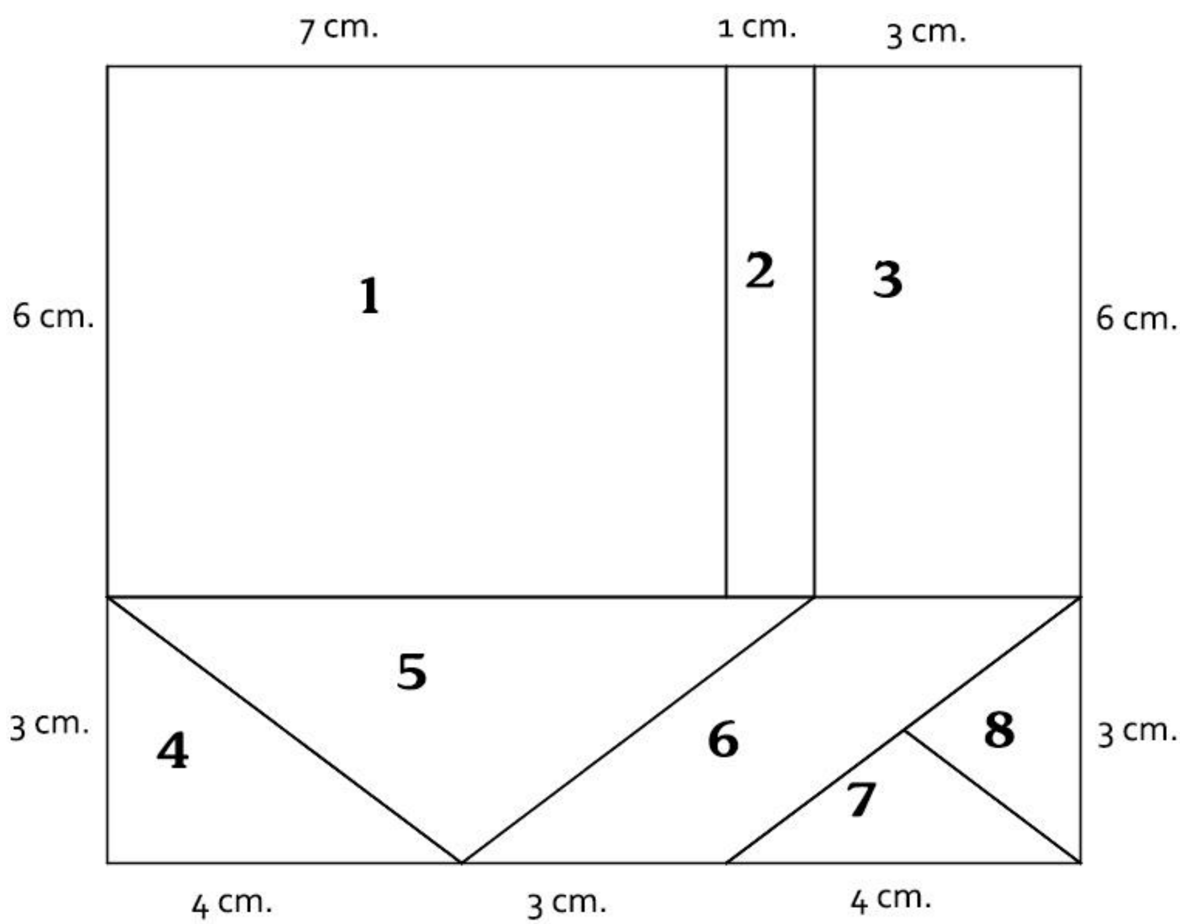
En el trabajo del Tangram vieron que al modificar el tamaño de cada una de las figuras que lo compone, se puede mantener la forma o no. Para nuestro estudio solo resultan interesantes las ampliaciones y reducciones de figuras. O sea los casos en los que las figuras mantienen la misma forma.

1. Observen las figuras que les tocó ampliar y las figuras ampliadas y respondan:
    c) ¿Qué características comunes tienen las figuras originales con las correspondientes ampliadas? ¿Qué diferencias? Nómbrenlas a continuación.
    d) Miren los cuadriláteros graficados en la fotocopia y respondan si existe o no una relación de proporcionalidad entre sus lados, explicando por qué.

2. Observen los triángulos ilustrados en la fotocopia y resuelvan las siguientes actividades:

    a) Agrupen aquellos triángulos que presentan similitudes. **Justifiquen** su elección.

    b) De los triángulos que agruparon. ¿Cuáles son los que más se parecen? Expliquen cómo harían para pasar de un triángulo a otro y expliciten las propiedades que los relacionan.



Actividad

¿CUÁNDO DOS TRIÁNGULOS SON SEMEJANTES?

Grupo ___

1) a) Para cada par de medidas de ángulos, tracen ustedes un triángulo y luego comparen sus cuatro triángulos con los de los otros equipos:

90° y 60°	45° y 45°
120° y 30°	80° y 40°

b) ¿Que pudieron observar al comparar sus triángulos con los de sus compañeros?

2) Para la siguiente terna de medidas de lados: 5 cm, 3 cm y 6 cm, tracen un triángulo y compárenlo con los de los demás grupos.

g) ¿Qué diferencias y similitudes encuentran con los triángulos de los demás grupos?
h) Y si sólo contáramos con las medidas de dos lados en cada triángulo que sean proporcionales ¿Que pueden decir al respecto de los triángulos construidos?
i) Investiguen en equipo acerca de la cantidad de lados con la que precisamos contar para construir triángulos semejantes si no conocemos los valores de los ángulos de dichos triángulos.

3) Construyan un triángulo donde dos lados midan 8 cm y 10 cm respectivamente y el ángulo comprendido entre esos lados sea de 60° y digan cómo es ese triángulo con respecto a los de los demás grupos.

4) ¿Qué pasa si?:

e) Dado un par de triángulos con las siguientes características:

- En un triángulo, uno de sus lados mide 7 cm y uno de sus ángulos 60°;
- En el otro triángulo, el lado y el ángulo correspondientes miden 3.5 cm y 60° respectivamente.

¿Se trata de triángulos semejantes? Argumenten acerca de la suficiencia o insuficiencia de datos para asegurar la semejanza antes de hacer los trazos. Luego realicen los trazos, recorten las figuras y verifiquen con sus compañeros lo antes argumentado.

f) Dado un par de triángulos cuyas características son:

- En uno de ellos un lado mide 5.5 cm y el otro mide 7 cm y el ángulo opuesto a uno de los lados mide 40°;
- En el otro un lado mide 11 cm y el otro 14 cm y el ángulo opuesto a uno de esos lados mide 50°. *(en ambos casos tomar el mismo par lado-ángulo opuesto)*

¿En cada caso se puede asegurar la existencia de una relación de semejanza entre ambas figuras? De ser necesario recortarlas y cotejen sus respuestas con sus compañeros.

5) Exploren en equipo qué datos mínimos adicionales sobre los lados se requieren para construir triángulos semejantes **cuando se conoce solamente un ángulo**. Tengan en cuenta los resultados de los incisos anteriores.

Repasemos lo aprendido

1. Analicen cuál de las dos tablas que se muestran a continuación corresponde a magnitudes proporcionales. En caso de que sean magnitudes proporcionales, hallen la constante de proporcionalidad e indiquen qué significa.

a)

Precio entrada general Cines Hoyts - Nuevocentro - sala 3D (días miércoles)	Cantidad de personas
\$ 210	3
\$ 420	6
\$ 560	8

b)

Distancia aproximada (en m), recorrida por una piedra que se deja caer desde un puente	Tiempo (en seg) Empleado
5	1
20	2
45	3

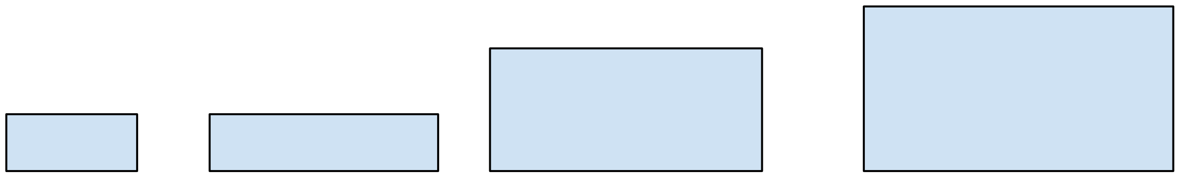
2. La siguiente tabla corresponde a una relación de proporcionalidad directa. Complétala con los números que corresponden e indiquen qué propiedad aplicaron en cada caso.

x	*y*
50	4
25	...
...	6
300	...
...	22

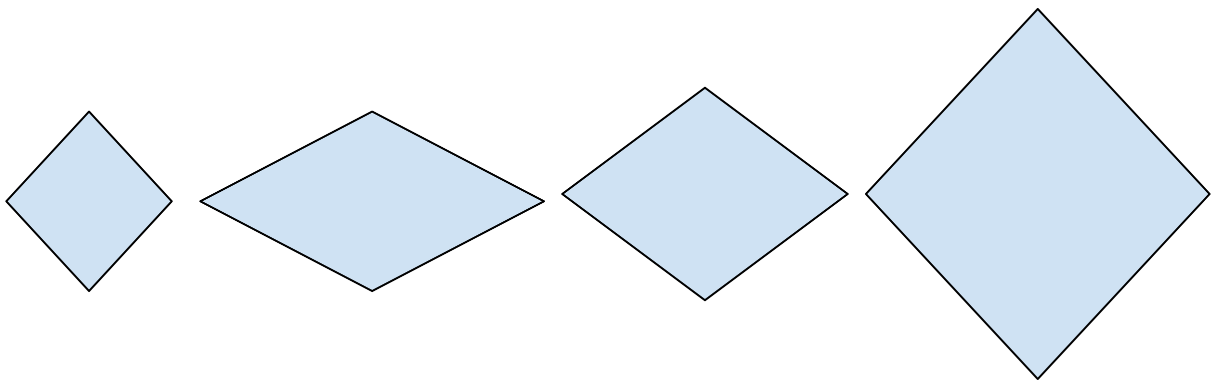
3.Encuentren el valor de la incógnita en la siguiente proporción:

$$\frac{2,\hat{1}}{3,5} = \frac{x + \sqrt[3]{64}}{2x - 1}$$

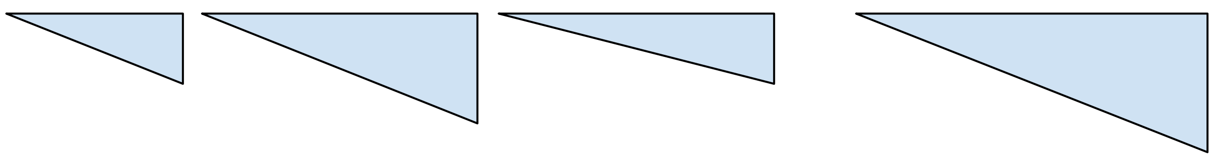
4.Descubran pares de figuras semejantes entre las siguientes



1 **2** **3** **4**



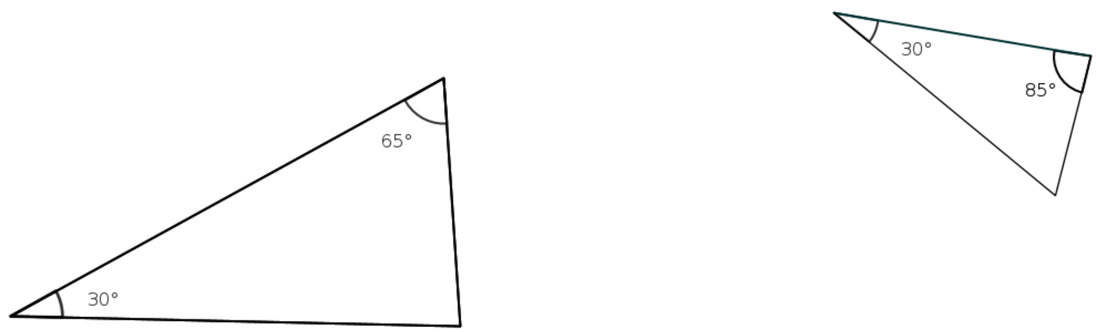
1 **2** **3** **4**



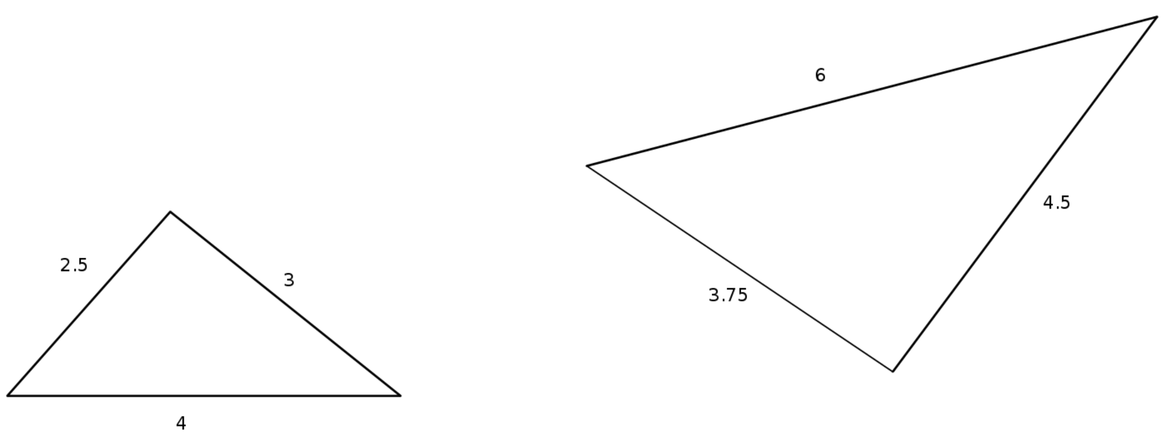
1 **2** **3** **4**

5) Determinen si son semejantes los triángulos que se indican. Justifiquen su respuesta.

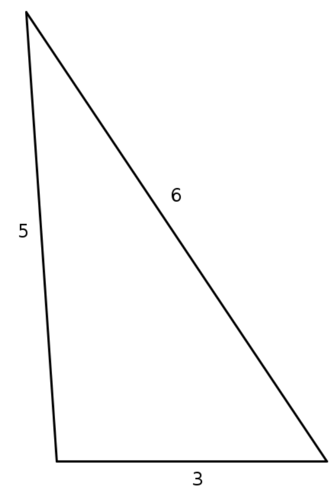
a)

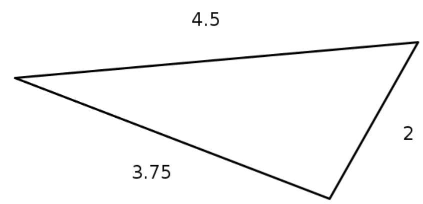


b)

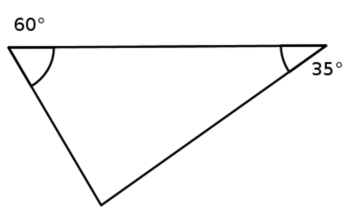


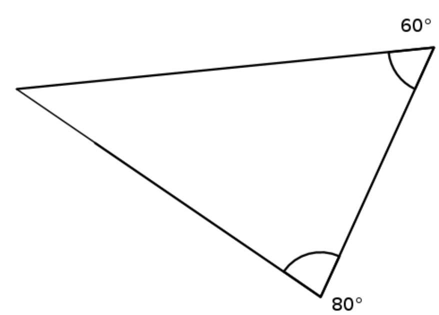
c)





b)





6. Responda si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta:
   - Si las medidas de los lados de un triángulo son 1 cm, 3 cm y 5 cm, y las de otro son 1000 cm, 3000 cm y 5000 cm, entonces son semejantes.
   - Si dos cuadriláteros tienen las medidas de sus lados proporcionales, entonces serán semejantes.

6.2 ANEXO II Material de estudio que les entregamos a los alumnos

Para leer y estudiar…

Una tabla de proporcionalidad presenta una relación de correspondencia entre dos magnitudes.

Si tenemos una tabla de proporcionalidad directa, notamos que cumple dos ***propiedades,*** una para la multiplicación y la división, y otra para la suma y la resta:

1. Al multiplicar (o dividir) una de las cantidades por un número, la cantidad correspondiente se multiplica (o divide) por el mismo número y la proporción se mantiene.
2. Al sumar (o restar) dos valores de una de las cantidades se obtiene un número correspondiente con la suma (o resta) de los valores correspondientes de la otra cantidad.

Veamos un ejemplo:

Medida del lado original	Medida de lado ampliado
2	7
3	10,5
4	14
5	17,5
6	21
7	24,5
8	28
9	31,5

Si a un valor m_1 de la primera magnitud le corresponde un valor m_2 de la segunda magnitud, se puede comprobar que el cociente o razón entre estos dos valores es siempre constante. A esta cantidad se le llama ***constante* o *razón de proporcionalidad***.

En el ejemplo: la constante de proporcionalidad es:

$$r = \frac{7}{2} = \frac{10{,}5}{3} = \frac{14}{4} = \frac{17{,}5}{5} = \frac{21}{6} = \frac{24{,}5}{7} = \frac{28}{8} = \frac{31{,}5}{9} = 3{,}5$$

Una ***razón*** es el cociente indicado entre dos cantidades.

La ***razón*** entre *b* y *c* se indica $\frac{b}{c}$. (Se lee *b* ***es a*** *c*).

Una ***razón*** nos sirve para comparar dos medidas.

Cuando hay dos o más razones iguales, decimos que ***hay proporcionalidad,*** y a las igualdades entre razones, ***proporciones***.

PARA LEER Y ESTUDIAR

Cuatro cantidades a, b, c y d en ese orden forman una ***proporción*** si se cumple que

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (Se lee a **es a** b **como** c **es a** d)

A los números que componen una proporción los llamamos así:

a y d extremos $d \neq 0$
b y c medios $b \neq 0$

Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d=b.c$$

Otras propiedades:

- Al intercambiar las razones se mantiene la igualdad:
  Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, si intercambiamos nos queda $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ que sigue siendo proporción.
- Al invertir las razones se mantiene la igualdad:
  Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, si invertimos las razones nos queda $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ que sigue siendo proporción.
- Al intercambiar los medios y los extremos entre sí, se mantiene la igualdad:
  Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, intercambiando los medios nos queda $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ que sigue siendo proporción.
- Al descomponer las razones, se mantiene la igualdad:
  Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, si restamos $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ sigue siendo proporción.
- La suma de proporciones es proporción:
  $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

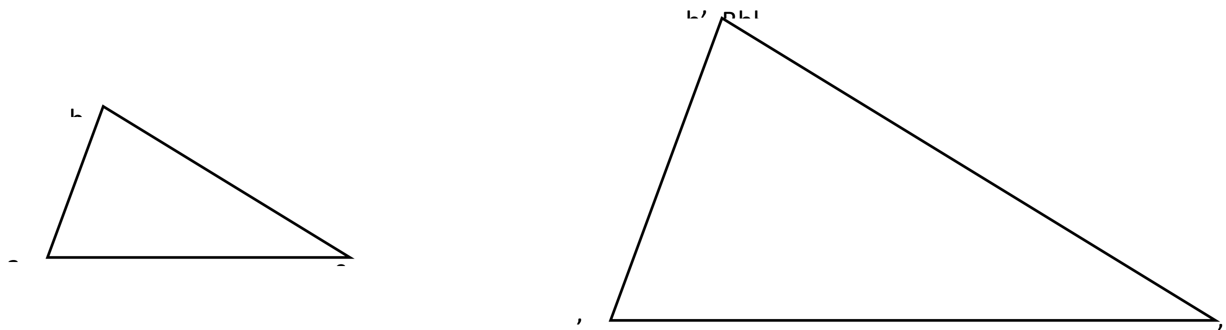
Para leer y estudiar

Dos triángulos son semejantes si tienen:

- Sus ángulos respectivamente iguales;
- Sus lados homólogos proporcionales [(*)]

En símbolos:

$$\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{a'b'c'}^{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{a} = \widehat{a'},\ \hat{b} = \widehat{b'},\ \hat{c} = \widehat{c'} \\ \dfrac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{b'c'}} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{a'c'}} \end{cases}$$



Criterios de semejanza de triángulos

- Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales. (criterio A-A)
- Dos triángulos son semejantes si tienen tres lados proporcionales. (Criterio L-L-L)
- Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual. (Criterio L-A-L)

[(*)] Lados homólogos son aquellos lados que se oponen a ángulos iguales.

[6] *(El símbolo ∼ Se lee como: el triángulo abc es semejante al triángulo a’b’c’)*

6.3 ANEXO III Planificación del profesor titular

FUNDAMENTACIÓN:

La Matemática es un espacio de formación que contempla una manera particular de pensar, de generar ideas. Acordamos con la visión que hacer matemática es crear, producir, "es un trabajo del pensamiento, que construye los conceptos para resolver problemas, que plantea nuevos problemas a partir de conceptos así construidos, que rectifica los conceptos para resolver problemas nuevos, que generaliza" (Charlot, 1986).

La construcción de conocimientos matemáticos se ve ampliamente favorecida por la resolución de variados problemas, en diversos contextos, e involucrando un "hacer" y un "reflexionar sobre el hacer". Para ello es de importancia la incorporación de un lenguaje y forma de pensamiento matemático que permitan el planteo de problemas, la discusión de las posibles resoluciones y la reflexión sobre lo realizado. Tanto la discusión como la reflexión sobre el trabajo realizado resaltan la dimensión social de la actividad matemática, de la cual se deduce que el estudiante no construye el conocimiento solo, sino en interacción con otros.

Con estas ideas directrices se pretende a los largo del ciclo básico que los estudiantes se vayan apropiando progresivamente de una forma de pensamiento que le permite afrontar de manera creativa los problemas que se le presenten, y alcancen recursos argumentativos cada vez más deductivos.

OBJETIVOS GENERALES DE LA ASIGNATURA:

1. Utilización de propiedades de las operaciones en la elaboración e interpretación de cálculos.
2. Aplicar los diferentes significados de una fracción (parte de un todo, operador, relación entre cantidades y expresión decimal) para resolver problemas.
3. Distinguir y operar con números irracionales.
4. Utilizar y analizar funciones - proporcionalidad directa, crecimiento lineal no proporcional -, para resolver problemas extramatemáticos e intramatemáticos.
5. Análisis de variaciones lineales expresadas mediante gráficos y fórmulas e interpretación de sus parámetros.
6. Buscar la expresión algebraica de una función lineal a partir de la ordenada al origen y la pendiente. Graficarla.
7. Resolver sistema de ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas y graficarlas.

8. Descubrir relaciones proporcionales geométricas y aplicarlas en la resolución de problemas.

9. Interpretación de circunstancias de aplicabilidad del Teorema de Thales.

10. Utilización de razones trigonométricas para resolver problemas con triángulos rectángulos.

UNIDADES DIDÁCTICAS

PRIMER TRIMESTRE:

UNIDAD Nº1: REVISIÓN DE SEGUNDO AÑO

Revisión de números enteros y racionales. Aplicación de propiedades a la resolución de ejercicios combinados. Uso de expresiones decimales para representar y calcular porcentajes relacionados a situaciones reales. Revisión sobre casos particulares de potenciación de números racionales. Notación científica: capacidad de expresar cantidades de diversas formas, operar con ellas y definir criterios de aplicabilidad.

TIEMPO: 5 semanas.

UNIDAD Nº2: NÚMEROS IRRACIONALES

Teorema de Pitágoras: enunciación y aplicación a la resolución de triángulos rectángulos como introducción a la problemática de los números irracionales. Los números irracionales: capacidad de reconocer los elementos de este conjunto numérico, capacidad de ubicarlos en la recta numérica usando teorema de Pitágoras y elementos geométricos. Redondeo y truncamiento: su aplicación a los números irracionales. Intervalos reales: uso de distintas formas de expresar un conjunto de números. Propiedades de la radicación: su aplicación para operar con número irracionales. Reconocimiento de radicales semejantes: extracción de factores de un radical. Adición y sustracción de radicales: saber operar con este conjunto numérico.

TIEMPO: 3 semanas.

UNIDAD N º3: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Expresiones algebraicas. Polinomios: reconocimiento de los distintos componentes y características (grado, componente principal, término independiente, orden). Traducción del lenguaje coloquial al simbólico. Operando con expresiones algebraicas: adición, sustracción y multiplicación de polinomios. Casos especiales: Desarrollo de expresiones como cuadrado de un binomio y cubo de un binomio. Demostración de estas expresiones usando elementos de geometría.

TIEMPO: 4 semanas.

SEGUNDO TRIMESTRE:

UNIDAD N º3: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Transformación de una expresión algebraica en un producto de otras dos: factor común, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto. Modelando la vida cotidiana: Planteo y resolución de situaciones concretas haciendo uso de expresiones algebraicas. Planteo y resolución de ecuaciones e inecuaciones con números racionales: saber expresar sus soluciones de diversas formas.

TIEMPO: 4 semanas

UNIDAD Nº 4: POLÍGONOS.

Polígonos: elementos y clasificación. Propiedades de la suma de los ángulos. Relaciones entre figuras: congruencia y semejanza. Congruencia de triángulos: criterios. Cuadriláteros: clasificación. Propiedades de los cuadriláteros y paralelogramos.

TIEMPO: 2,5 semanas

UNIDAD Nº 5: SUPERFICIE Y VOLUMEN DE CUERPOS SENCILLOS.

Magnitudes. Unidades fundamentales: SIMELA. Áreas de polígonos. Área del círculo. Cuerpos: Clasificación. Cuerpos poliedros regulares: prismas y pirámides. Cuerpos redondos: cilindros, conos y esferas. Elementos. Construcción. Cálculo de superficies y volúmenes de distintos cuerpos

TIEMPO: 2,5 semanas

UNIDAD Nº6: RAZONES Y PROPORCIONES

Razones y proporciones aritméticas: reconocimiento de su uso en la vida cotidiana. Identificación de los elementos de una proporción. Propiedad de las proporciones: cálculo de los extremos y los medios. La proporcionalidad en geometría: Teorema de Thales. Consecuencia del teorema de Thales. Uso del Teorema de Thales para interpretar y resolver problemas concretos. División de un segmento en partes iguales y división de un segmento en partes proporcionales, haciendo uso de elementos de geometría. Construcción geométrica del segmento tercero y cuarto proporcional. Propiedad de las bisectrices de los ángulos de un triángulo. Figuras semejantes. Semejanza de triángulos: establecimiento de los criterios de semejanza. Reconocimiento de triángulos semejantes haciendo uso de los criterios de semejanza. Resolución de situaciones problemáticas integrando las herramientas de proporcionalidad aritmética y geométrica.

TIEMPO: 6 semanas.

TERCER TRIMESTRE:

UNIDAD Nº7: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo: planteo de las razones aritméticas entre los lados del triángulo. Cálculo de ángulos y de lados de un triángulo rectángulo usando las razones trigonométricas. Uso de las razones trigonométricas para plantear y resolver situaciones problemáticas. Aprender el manejo de la calculadora para uso trigonométrico.

TIEMPO: 3 semanas.

UNIDAD Nº8: FUNCIONES

Concepto de función: reconocimiento de los criterios de su existencia en distintos contextos de representación. Dominio e imagen de una función; conjunto de raíces, positividad y negatividad. Reconocimiento de intervalos de crecimiento y decrecimiento; función continua y discontinua: análisis y construcción de gráficas. Función afín: clasificación e identificación de parámetros (pendiente y ordenada al origen). Construcción de gráfico de funciones afines usado tabla de valores y parámetros de la función. Rectas paralelas y perpendiculares: su escritura a partir de una recta dada. Determinación de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Función de proporcionalidad directa e inversa: análisis de la función y su gráfica. Construcción de tabla de valores y representación gráfica. Uso de las funciones para modelar situaciones problemáticas y realizar predicciones.

TIEMPO: 7 semanas.

FORMATOS CURRICULARES:

El espacio curricular adopta principalmente un formato de Materia/Asignatura. Los contenidos están organizados según una lógica interna disciplinar y la enseñanza promueve en los estudiantes una visión de los campos de conocimiento implicados y de sus procesos de construcción y legitimación. La estrategia de enseñanza prioritaria la constituyen las conversaciones guiadas por el docente.

Secundariamente, en temas como proporcionalidad geométrica o sistemas de ecuaciones, se plantea un formato de Taller que permita mediante el trabajo colectivo y colaborativo, la reflexión, el intercambio, la toma de decisiones y la elaboración de propuestas en equipos de trabajo, una integración de los saberes disciplinares con contextos diversos.

METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE:

Se tratará de promover el aprendizaje reflexivo, para ello, además de la clásica exposición por parte del docente, se recurrirá al planteo de problemas, el modelado de procedimientos, el análisis de casos, el análisis y discusión de hipótesis. Se promoverá la participación del estudiante mediante la formulación de preguntas, el planteo situaciones dilemáticas que despierten interés y curiosidad. Se buscará generar en el aula situaciones genuinas de diálogo, no pretendiendo únicamente respuestas correctas por parte del estudiante, sino intercambio e interacción, para lo cual es necesario que el estudiante contribuya con el seguimiento de los temas y las actividades desarrolladas.

MODALIDAD E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN:

Los alumnos tendrán como mínimo 3 (tres) calificaciones trimestrales:

- Una calificación serán producto de una evaluación escrita.
- Una calificación será de trabajos prácticos realizados durante el trimestre, o de lecciones orales.
- Una calificación actitudinal.

El motivo de la inasistencia a una evaluación escrita avisada, deberá ser comunicado por el padre, tutor o encargado **antes de la prueba.** Si la falta estuviera motivada por razones de salud, al reintegrarse, deberá presentar en preceptoría el certifico médico correspondiente. Si el motivo fuere de otra índole, al reintegrarse, el alumno deberá traer un comunicado de sus padres, tutor o encargado, con el motivo de la inasistencia y dirigido al docente. En este caso, la evaluación se tomará en cualquier momento y podrán incorporarse como temas para evaluar, todos los desarrollados hasta el momento en que se realice efectivamente la prueba.

Se exigirá la presentación de la carpeta completa y en forma en cualquier instancia, incluso en la mesa de coloquio y de examen.

En caso de tener que rendir coloquio o examen son condiciones indispensables para ingresar al mismo presentarse con: uniforme, libreta del colegio, carpeta completa y programa de la asignatura.

CRITERIOS DE EVALUACION:

Se adopta la evaluación con criterio totalizador, comprensivo y transformador del proceso del aprendizaje. Se evaluarán el proceso de aprendizaje con un seguimiento diario mediante los trabajos prácticos y lecciones orales; también se acreditarán los aprendizajes de los contenidos de cada unidad, generalmente en el cierre de cada una de ellas con un trabajo escrito, previamente avisado.

En los trabajos escritos se tendrá en cuenta el procedimiento como así también el resultado de cada situación problemática.

Algunos indicadores a tener en cuenta al momento de evaluar son:

- Interpreta información contenida en tablas y gráficos.
- Entiende el uso y significado de fórmulas y expresiones coloquiales.
- Usa lenguaje matemático adecuado en forma oral y escrita.
- Conoce y utiliza en forma pertinente las nociones matemáticas que se requieren para resolver problemas.
- Opera numéricamente y obtiene resultado razonables en función de los datos.
- Analiza la razonabilidad de los resultados en las operaciones.
- Produce argumentos matemáticos adecuados para justificar procedimientos.
- Predisposición al trabajo
- Respeta el pensamiento del compañero
- Cumple con los materiales de trabajo
- Presentación de los trabajos y ortografía

BIBLIOGRAFÍA:

Cualquier texto que contenga los contenidos mencionados anteriormente, ejemplo:

- Schaposchnik (coord.), Garaventa, Legorburu, Rodas, Turano. 2007. Carpeta de matemática 9. Ed. Aique
- Effenberg, Pablo. 2010. Matemática 9. Ed. Kapeluz
- Matemática 3. Ed. Puerto de Palos
- Ferraris, Liliana y Tasso, Marcela. 2002. Aprendamos Matemática 9. Ed. Comunicarte
- Diana Buteler. Matemática 9.