Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

INFORME FINAL
Metodología y Práctica de la Enseñanza

Título: Enseñanza de ecuaciones a través de diferentes representaciones

Autores: Fatalini, Azul Lihuen; Raviolo, Sofía
Equipo responsable de MyPE: Esteley, Cristina B.; Coirini, Carreras, Araceli; Dipierri, Iris C.; Gerez Cuevas, Nicolás; Mina, María; Smith, Silvina.
Profesora Supervisora de Prácticas: Smith, Silvina.

Carrera: Profesorado en Matemática.
Fecha: 23/11/17

Este trabajo está bajo una Attribution-NonComercial-NoDerivatives 4.0 International (CCBY-NC-ND 4.0)

Resumen

El presente escrito narra nuestra experiencia durante las prácticas de Matemática en un primer año de una institución privada de la provincia de Córdoba. El tema que se trabajó fue ecuaciones lineales de una incógnita en el conjunto de los números enteros. Para esto utilizamos distintas formas de representación moviéndonos desde lo tangible hacia lo abstracto: realizamos actividades con balanzas de platillos para introducirlas como representación de las ecuaciones y desde allí comenzamos a trabajar con lápiz y papel, continuando con un trabajo con tablas, realizadas en hojas de cálculo en computadora. En este informe presentamos la información recabada en el período de observaciones (Capítulo 1), la planificación y las actividades que efectivamente se pusieron en práctica (Capítulo 2), el análisis teórico de una problemática que surgió durante la etapa de prácticas (Capítulo 3), y reflexiones finales (Capítulo 4).

Palabras clave

Ecuaciones, representaciones, números enteros, balanzas, tablas para resolver ecuaciones, secuenciación.

Abstract

The present writing summarizes our experience during the professional training in the first-year classroom of a private school in Córdoba. The topic developed was the problem of solving one variable linear equations over integersz. For this, we worked on different forms of representation, going from the more tangible ones to the more abstract: we organized activities with pan balances to introduce them as a representation of the equations, and taking that as a starting point we continued working with pencil and paper, and then with spreadsheets on the computer. In this report we present the results obtained during the observations period (Chapter 1), the planning and the activities that were put on practice (Chapter 2), the theoretical analysis of a problem that arised during the training (Chapter 3), and some conclusions (Chapter 4).

Key words

Equations, representation, integers, pan balance, tables for solving equations, sequencing.

Clasificación: 97 Mathematical Education

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. La institución

La escuela en la cual se realizaron las prácticas profesionales se encuentra ubicada en un barrio de clase media, en la zona noroeste de la Ciudad de Córdoba. Es de gestión privada, confesional, de doble escolaridad y comprende:

- Los tres niveles educativos principales: inicial, primario y secundario;
- Jardín maternal: dividida en: de nueve a veintiún meses, de dos años y de tres años;
- Un nivel terciario relacionado con la enseñanza de la religión.

El estado edilicio general es muy bueno, está dividido en un predio de deportes (separado del resto de la estructura) y dos módulos edilicios, en uno de los cuales funcionan el nivel inicial y el jardín maternal y, en el otro, la primaria, secundaria y terciario. En este segundo módulo, se encuentran también: el laboratorio de ciencias, la biblioteca, un patio interno, la dirección, la secretaría, la preceptoría, el comedor (al ser de doble escolaridad, los alumnos almuerzan en la institución) y las salas de informática. Estas últimas, están comprendidas por dos salas con computadoras de escritorio que, además, cuentan con pizarra y proyector, una sala de video que contiene proyector y equipo de audio, y una sala con proyector y pizarra en la cual se pueden utilizar las netbooks (29 unidades) o notebooks (20 unidades) con las que cuenta la escuela. Tanto en el laboratorio de ciencias como las salas de informática, hay internet y deben ser reservadas con anticipación por medio de sus encargados.

Todas las aulas cuentan con pizarra blanca o de tiza y una puerta de acceso de doble hoja. Las paredes laterales contienen ventanas que, en uno de los lados, dan al exterior y, en el otro, al interior del pasillo de salida del aula. Los bancos son rectangulares, individuales y móviles.

El nivel secundario cuenta con dos divisiones por curso, salvo en las horas de idiomas en las cuales ambas divisiones se reagrupan en tres. A partir de 4° año cada división corresponde a una orientación: el "A" a Cs. Naturales y el "B" a Economía y Administración. Los alumnos pueden elegir libremente la orientación que deseen sin importar el número de integrantes resultante o el promedio.

Los alumnos asisten a la escuela con chomba o remera blanca, jogging o jean azul y un buzo del mismo color. En cuanto al calzado, pueden utilizar zapatos o zapatillas negras, blancas o azules y se permiten Crocs solamente azul o negro, con medias azules.

1.2. Los cursos

Las prácticas se llevaron a cabo en los cursos de primer año de la institución en sus dos divisiones: “A” y “B”. Los cursos estaban formados por veintitrés y veintidós estudiantes respectivamente. En 1° A, había un alumno integrado que asistía a clases con su ayudante terapéutica. Después de la primera semana de prácticas, un alumno de 1° B con algunas dificultades de aprendizaje e integración fue trasladado a 1° A. Luego de esto, la distribución de los estudiantes fue:

	Mujeres	Varones	Total
1° A	11	13	24
1° B	11	10	21

Figura 1.1: *Tabla con composición de los cursos*

Los estudiantes se sientan en bancos y sillas individuales, agrupados de a dos, con frente hacia la pizarra (de tiza en 1° B y pizarra blanca en 1° A). La distribución en el aula era a elección de los alumnos, la mayoría de los grupos de a dos eran del mismo sexo. En 1° A, las columnas de bancos no estaban tan definidas y los estudiantes de la primera fila se encontraban muy cerca de la pizarra.

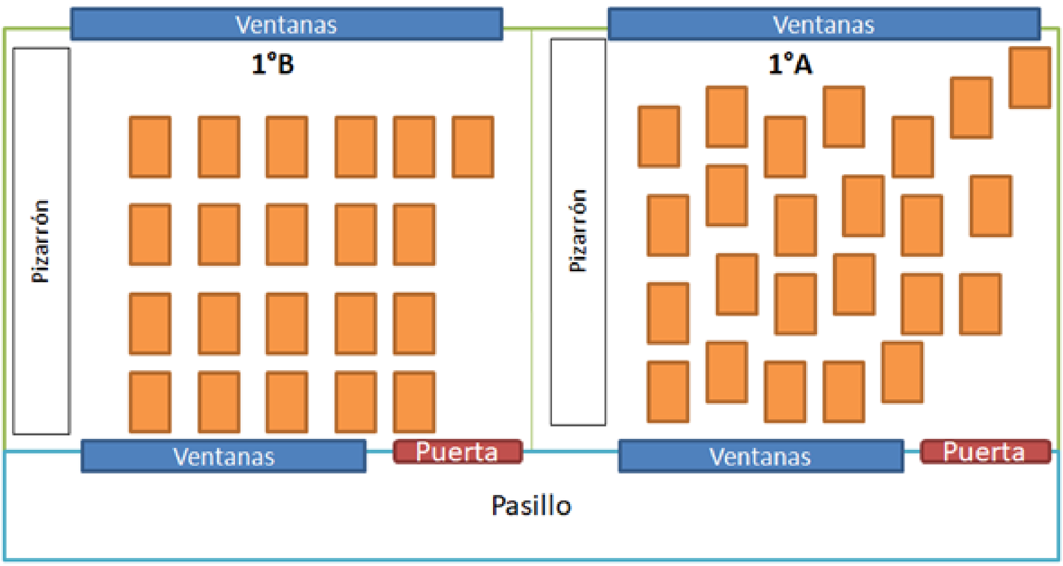


Figura 1.2: *En esta figura se esquematiza la estructura edilicia y organización de los cursos.*

Los estudiantes entran al colegio a las 7:45h de lunes a viernes y salen entre las 13:40h y las 16:10h, dependiendo del día. El horario de matemática de ambos cursos se muestra en la siguiente tabla:

		Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
	7:45-7:50	Izado de bandera				
1	7:50-8:30				1° A	
2	8:30-9:10				1° A	
	9:10-9:20	Recreo				
3	9:20-10:00					
4	10:00-10:40					
	10:40-10:50	Recreo				
5	10:50-11:30		1° A*	1°B		
6	11:30-12:10		1°B	1°B		
	12:10-12:20	Recreo				
7	12:20-13:00		1°B	1°A		
8	13:00-13:30**		1°B	1°A		
	13:40-14:10	Recreo				
9	14:10-14:50					
10	14:50-15:30					
11	15:30-16:10					

Figura 1.3: **En la segunda mitad de las prácticas, esta hora se modificó, trasladándose a la 4° hora del día Miércoles. **En el primer cuatrimestre, el colegio permite a los estudiantes de primer año salir a las 13:20 en su 8° hora para tener más tiempo para hacer fila en el comedor o calentar la comida que trajeron de sus casas, y comer.*

Durante el periodo de prácticas, la asistencia en 1° B fue buena y en 1° A fue regular. Las inasistencias se debieron en su mayoría a viajes que realizaban con su familia. El preceptor es el encargado de tomar asistencia al comienzo de la primera hora. También, llama al orden a los estudiantes después de todos los recreos y cambios de hora, y los acompaña a los laboratorios de informática o de ciencias en caso de ser solicitado por el docente. Él es el encargado de dictar las tutorías de acompañamiento en ambos cursos y tiene una relación cordial y cercana con los estudiantes.

1.3. Descripción del trabajo de los cursos

En general, los recursos más utilizados eran el pizarrón y libros o cuadernillos de acuerdo a la asignatura. La excepción era informática, asignatura en la que los alumnos trabajaban en el laboratorio utilizando computadoras (todas con internet). En esta clase, también se empleaban el proyector de la sala, el pizarrón y el aula virtual, en donde los estudiantes subían sus trabajos y descargaban material. Fue la única asignatura en la cual se observó un fuerte uso de este último recurso.

Los alumnos, en general, no presentaban problemas de disciplina, aceptaban las consignas que los docentes proponían y manifestaban un alto grado de participación. Sin embargo, se observó que, durante las clases de matemática, los mismos tenían una mejor predisposición para la realización de las actividades y la participación se daba de manera más organizada.

Los docentes preferían no dar tareas a los alumnos para que las realizaran en sus hogares, debido al gran tiempo que pasaban dentro de la institución por ser, el colegio, de doble escolaridad.

1.4. Estilo de trabajo en clases de matemática

En las clases de matemática, se observó un fuerte uso del cuadernillo de esta asignatura confeccionado por la docente a principios del ciclo lectivo. El mismo, estaba dividido en cinco unidades de acuerdo al programa de la materia y contenía, por cada tema, ejercicios, problemas, y una parte de teoría. Otro de los recursos utilizados por la docente era el pizarrón. No monopolizaba su uso, ya que los estudiantes eran continuamente invitados a utilizarlo durante las puestas en común. En el período de observaciones, no se registró que se emplearan los laboratorios de informática o el de ciencias, ni el aula virtual de la materia. La mayoría de las clases iniciaban con un oral, utilizado como herramienta de evaluación y, también, como repaso de la clase anterior. En él, participaban dos estudiantes que, en la mayoría de las ocasiones, eran voluntarios. Se observó que los alumnos consideraban esta instancia como una oportunidad para autoevaluarse. En general, las notas de los estudiantes eran altas. Los alumnos mostraban un marcado interés por las calificaciones.

Las horas de clase estaban distribuidas en:

- El oral, de aproximadamente diez minutos;
- Una gran parte del tiempo para resolver las actividades del cuadernillo por parte de los estudiantes;
- Y el tiempo restante, para realizar la puesta en común y corrección de los mismos.

Durante la realización de las actividades, los alumnos podían agruparse de a dos según su preferencia. Se notó que, en 1° B, los estudiantes preferían resolver las actividades de forma individual, a pesar de que la profesora los invitaba a unirse con un compañero. Para la puesta en común, los alumnos se ofrecían voluntariamente a pasar a resolver las actividades en el pizarrón. En general, los estudiantes manifestaron una fuerte participación en todas las actividades propuestas por la docente del curso. Se notó una relación muy cordial entre la profesora y los alumnos, que amenizaba el trabajo en clase.

Capítulo 2

Diseño de la práctica e implementación en el aula

2.1. Programa y contenidos a tratar

El programa de los cursos en los cuales se desarrollaron las prácticas educativas estaba organizado en dos ejes (uno por cuatrimestre) y cinco unidades dispuestas de la siguiente manera:

Distribución de los contenidos según cuatrimestres y unidades

1° Cuatrimestre- Eje organizador: Números y operaciones - Geometría y medida

- Unidad I: Números Naturales
- Unidad II: Estimaciones y cálculos de medidas
- Unidad III: Números enteros

2° Cuatrimestre- Eje organizador: Geometría y medida - Álgebra y funciones

- Unidad IV: Ecuaciones en N: introducción al Álgebra. Igualdad numérica. Términos y miembros de una igualdad. Propiedad uniforme. Lenguaje simbólico. Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Tanteo y confección de tablas para plantear una ecuación. Planteo y resolución de ecuaciones: problemas de aplicación. Reflexión sobre las soluciones a las ecuaciones de la forma $ax + b = c$ con a,b y c en $\mathbb{N}$ y $a \neq 0$. Práctica de cálculo mental.
- Unidad V: Rectas y ángulos: trazados

La unidad que se encuentra detallada es la que se debía desarrollar en las prácticas (citando textualmente el programa[1] presentado por la docente titular). En este marco, y, teniendo en cuenta que la duración de las prácticas estaba acotada a un mes, se decidió considerar los siguientes contenidos[2] del programa:

Ecuaciones en $\mathbb{Z}$:

- Igualdad numérica;
- Propiedad uniforme: de la suma, resta, multiplicación y división, representadas en una balanza de platillos;

[1]El programa completo se muestra en el anexo
[2]La justificación de la selección, secuenciación y objetivos se muestra a lo largo de la sección 2.2

- Lenguaje simbólico;
- Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita;
- Tanteo y confección de tablas para plantear una ecuación utilizando el programa Microsoft Excel;
- Planteo y resolución de ecuaciones: problemas de aplicación (mediante modelización matemática).

Las actividades que se propusieron fueron realizadas teniendo en cuenta que los alumnos ya habían cursado las unidades II y III, sobre magnitudes y números enteros, respectivamente. En este contexto, algunas de las actividades planteadas utilizaban el cálculo de volumen, área y perímetro, las magnitudes masa y tiempo.

Se incluyeron ecuaciones que requerían trabajar con números enteros. Si bien la soluciones siempre fueron positivas, en la resolución de las ecuaciones estaba presente y era necesario el trabajo con números enteros.

2.2. La planificación inicial

Después de haberse establecido el tema a tratar en las prácticas, se procedió a comenzar la planificación de la unidad didáctica. Para hacer esto, se tuvieron en cuenta las ocho cuestiones o variables básicas que proponen Gvirtz y Palamidessi (2006) [4]:

- las metas, objetivos o expectativas de logro;
- la selección del/de los contenido/s;
- la organización y secuenciación del/de los contenido/s;
- las tareas y actividades;
- la selección de materiales y recursos;
- la participación de los alumnos;
- la organización del escenario;
- la evaluación de los aprendizajes.

La organización de los contenidos planificados se realizó en cuatro etapas:

1. **Trabajo con balanzas de platillos:** En esta etapa, se propondría la utilización de balanzas de platillos como instrumento concreto de representación de una ecuación, al relacionar el equilibrio de la balanza con la igualdad de la suma de las masas de cada platillo (se colocarían algunas masas cuyo peso es desconocido).

2. **Ecuaciones de primer grado sobre números enteros:** En esta instancia, se procuraría que los estudiantes (luego de una transición) pudieran desprenderse del objeto concreto que los ayudaba a resolver las ecuaciones, para acercarse ya a un tratamiento más abstracto de las mismas mediante su resolución con lápiz y papel.

3. **Tablas en Microsoft Excel:** Esta etapa implementaría la utilización de las tablas que dicho programa provee para el planteo y la resolución de problemas usando ecuaciones;

4. **Modelización Matemática:** Este apartado se utilizaría a modo de cierre integrador e incluiría una evaluación sumativa.Fue concebida como instancia en la que los alumnos deberían poner en juego los contenido aprendidos e implementarlos en la realización de pequeños proyectos de investigación.

La secuenciación de los contenidos atendió a lo que Gvirtz y Palamidessi (2006) [4] llaman la:

> *"(...) lógica del aprendizaje: la secuencia del contenido se realiza en función de alcanzar aprendizajes cada vez más complejos, dejando de lado la lógica propia de las disciplinas. Se toman en cuenta los problemas relacionados con el grado de dificultad del contenido, la internalización del contenido, los saberes previos que son necesarios, la experiencia anterior, etcétera."*(p.195, [4]).

Se la clasifica de esta manera, puesto que:

- en la primera etapa, se pondría en juego la experiencia de los estudiantes apelando a su intuición en la utilización de objetos concretos (balanzas y masas);
- en la segunda, se tendría en cuenta lo experimentado por los estudiantes en el desarrollo de la etapa anterior, haciéndolos avanzar hacia la formalización matemática del conocimiento, lo que supone un grado de dificultad mayor;
- en la tercera, se tendría como conocimiento previo las ecuaciones, para aplicarlas en el contexto del planteo y la resolución de problemas utilizando como soporte la herramienta de Microsoft Excel; y
- finalmente, en la cuarta, se pondrían en juego todos los conocimientos adquiridos en las etapas anteriores y se incluirían además, los saberes de los estudiantes sobre el mundo real para aplicarlos en un contexto de Modelización Matemática.

Por otro lado, esta organización sigue, en parte, lo propuesto por Bruner (1984) [2] en cuanto a los tres sistemas de representación:

- Activo, en donde se aprende actuando, imitando y manipulando objetos;
- Icónico, que implica el uso de imágenes o dibujos; y
- Simbólico, que hace uso de la palabra escrita y hablada.

En este sentido, las actividades planificadas se plantearon siguiendo un recorrido desde la utilización de materiales concretos/tangibles, pasando por el uso de dibujos y representaciones gráficas en distintos soportes, para llegar a la utilización del lenguaje simbólico matemático, que luego se complementaría, utilizándolo en distintos contextos y teniendo en cuenta diferentes representaciones.

Los recursos utilizados durante las prácticas fueron diversos. Además del uso del lenguaje, que según Gvirtz y Palamidessi (2006), *"(...) es el medio principal a través del cual el conocimiento y la sensibilidad se construyen, almacenan y expresan."*(p.199 [4]) , se emplearon: el pizarrón, papel y lápiz, afiches, fotocopias, balanzas de platillos y masas, computadoras, cañón.

En cuanto a la organización del escenario (Gvirtz y Palamidessi, 2006), se planificó utilizar diferentes espacios y formas de agrupamiento de los estudiantes para fomentar la adaptación de los alumnos a distintos contextos de trabajo. Los espacios fueron: el aula, el laboratorio de ciencias y las distintas salas de informática, que demandarían diferentes organizaciones del mobiliario. Además, se pensaron formas variadas de trabajo para las actividades propuestas: las puestas en común con el grupo clase, grupos de a cuatro o cinco estudiantes, grupos de a dos y, también, individual. Esta diversidad se decidió en compatibilidad con lo dicho por Gvirtz y Palamidessi (2006):

> *"Así como el trabajo en pequeños grupos favorece la discusión y la generación de consenso entre los alumnos y el trabajo con el grupo-clase permite la exposición de los temas de un modo más general, el trabajo individual permite la apropiación y evaluación de las capacidades personales, con todos los matices y variaciones posibles."* (p.202 [4])

A la hora de planificar las actividades que se querían proponer a los alumnos, se tuvo en cuenta lo que postulan Gvitz y Palamidessi (2006) en cuanto a:

- *"Considerar la motivación que la actividad puede despertar y el significado que puede adquirir para los alumnos"* (p.198 [4]). Por esto se pensaron propuestas motivadoras para los estudiantes y que potenciaran el desarrollo de los contenidos de las clases sucesivas.
- *"Tratar de anticipar la globalidad de efectos posibles, buscados y no buscados que la misma actividad generará".*(p.198 [4]) En este sentido, se pensaron y repensaron las consignas planificadas, para intentar que apuntaran en la dirección hacia la que nos queríamos dirigir. También, se tuvieron en cuenta las eventuales respuestas de los estudiantes, para intentar guiarlos de la mejor manera posible.

Asimismo, se tuvieron en cuenta las características de las actividades que Gvitz y Palamidessi (2006), citando a Raths, plantean para el desarrollo de tareas valiosas. Por esto se propusieron actividades que:

- Promovieran *"el desempeño de un papel activo por parte del alumno"*(p.197 [4]), planteando consignas en las cuales los alumnos se sintieran involucrados y participaran explorando y discutiendo con sus pares.
- Implicaran *"al alumno en una relación amplia y diversificada de contacto con las realidades-tocar, manipular, aplicar, examinar, explorar construir"*(p.197 [4]).
- Permitieran al alumno *"controlar lo que va haciendo,-como forma de autorregulación"* y que dieran *"al alumno la oportunidad de planificar y participar con otros en el desarrollo y los resultados de la tarea misma"* (p.198 [4]), utilizando actividades de modelización matemática.

Todos los aspectos mencionados anteriormente se evidencian en la planificación inicial, realizada a principios del mes de julio. Una de las pautas dadas desde la materia Metodología y Práctica de la Enseñanza fue que las prácticas debían durar veinte horas cátedra. Dado que la distribución horaria de las clases de matemática no era la misma en 1°A y 1°B, pero la propuesta de enseñanza sí lo era, para estructurar los guiones conjeturales que se presentan en las siguientes secciones tomamos como referencia el horario de uno de los cursos, 1°B. El cuadro que se muestra a continuación contiene las fechas de las clases en este curso previstas en esta instancia.

2.2.1. Primera etapa: Trabajo con balanzas de platillos

Esta etapa de la planificación prevé un trabajo con balanzas de platillos y, luego, actividades con referencia a las mismas por medio de dibujos. El objetivo de la propuesta es preparar el terreno para que las balanzas se puedan usar como referente en el trabajo posterior con ecuaciones con lápiz y papel. Se pretende que las actividades de esta etapa sirvan como soporte para:

- entender la igualdad, en este caso, de masas, relacionando el concepto con el equilibrio en la balanza;
- internalizar la noción de que, para conocer el valor de una masa desconocida (incógnita), conviene dejarla sola en un platillo (en un lado de la igualdad) y colocar masas conocidas en el otro;
- explicar la propiedad uniforme de las distintas operaciones, relacionando, por ejemplo, la de la suma con la acción de agregar masas equivalentes en ambos platillos.

Como plantea Bombini (2002), un "guión conjetural" es:

> *"una suerte de relato de anticipación, de género de "didáctica- ficción" que permite predecir prácticas(...) De este modo vamos acercándonos a cierta especificidad del género "guión conjetural" como la presencia de la narración como la secuencia dominante, combinada con otras secuencias como la descripción, la argumentación y hasta diálogo. A través de estas características discursivas se ponen en juego un diagnóstico previo, se puede dar cuenta de los propósitos, se justifican ciertas decisiones, entran a jugar los sujetos, la institución y la escena donde ocurrirán los hechos, se proponen actividades y, fundamentalmente, se predice acerca del impacto posible de esas tareas en el aula."* (pp. 5-6 [1])

A continuación se muestran los guiones conjeturales realizados en la etapa previa a la práctica de los cuales se han suprimido o modificado algunos detalles que no son relevantes para el presente trabajo. Luego de presentar los guiones, se realizará una comparación entre el diseño previsto para las clases y lo que realmente sucedió en las mismas[3].

2.2.1.1. Guion conjetural para la primera clase (105 minutos)

A-Presentación

[3]El tiempo verbal utilizado en los guiones es futuro por tratarse de un escrito realizado con anterioridad a la clase efectiva y se decidió conservarlos de esta forma para que sea el fiel reflejo de lo que se elaboró en la etapa pre-activa.

Daremos inicio a la clase presentándonos nuevamente[4] a los alumnos.

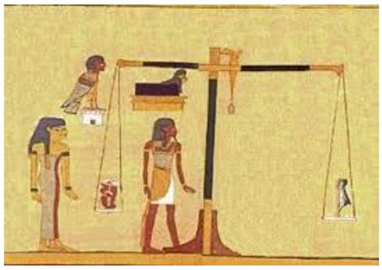
B-Introducción al tema: Historia de la balanza de platillos

Luego de responder las inquietudes de los alumnos se comenzará con la primera actividad introductoria del tema. Para esto se repartirán fotocopias a cada estudiante con el texto que se muestra en la figura A.1 y se invitará a los alumnos a leerlo.

Historia de las balanzas de platillos

Aproximadamente en el 3.500 a.C., Adio, un mercader muy próspero, vivía en el antiguo egipto. Había iniciado sus labores como comerciante junto a su padre, el gran Abasi, de quien había heredado la empresa familiar de compra y venta de pescado seco. En ese momento, el sistema de comercio se basaba en el trueque, es decir, en el intercambio de un producto por otro. Los comerciantes de pescado generalmente intercambiaban este comestible por otro como cereal o leche de cabra .

Adio, que era un hombre justo y honesto, se preocupaba mucho en no cobrar a sus clientes más de lo que correspondía. Es decir, si él entregaba una cierta cantidad de pescado, quería obtener la misma de leche o cereal. Pero este asunto no era tarea fácil, por esto Adio experimentó con distintos métodos. Primero, probó vender 3 pescados a cambio de una jarra de leche o de un cuenco mediano de cereal. Pero, a veces, los peces eran pequeños y este trato perjudicaba a sus clientes. Probó, entonces, colocando los pescados en un cuenco hasta llenarlo pero, a veces, cuando su mujer y su hijo lo ayudaban a atender el negocio, llenaban de más o de menos el jarro y por esto la cantidad nunca era exacta y Adio seguía muy preocupado pensando la solución de aquel problema que lo aquejaba.



Hasta que, en una noche de verano, paseando por las dunas a la orilla del Nilo, tuvo una magnífica idea: si sujetaba una varilla larga desde el medio, permitiendo que esta se incline, colgaba de un lado de la varilla una cierta cantidad de pescado y del otro, una cierta cantidad de leche o cereal, la varilla debería mantenerse horizontal cuando estas cantidades pesaran lo mismo. Así fue como diseñó y, luego, construyó su invento, al que bautizó: "balanza". Esta idea se pasó de boca en boca y muchos otros vendedores lo adoptaron también, permitiendo que el comercio egipcio se expandiera enormemente. Con el transcurso de los años, este artefacto se fue perfeccionando y modificando hasta llegar a las balanzas que utilizamos hoy cotidianamente.

El juego de buscar, mantener, o volver al equilibrio perdido, es en realidad un juego sutil que jugamos todo el tiempo. En estas clases, practicaremos este juego poniendo en equilibrio en nuestra fiel balanza, cantidades conocidas y desconocidas, de modo que las primeras nos ilustren sobre las segundas.

Figura 2.1: *Actividad introductoria: Historia de balanzas de platillos*

1. Actividad exploratoria sobre igualdad numérica usando balanzas : concepto de equilibrio

[4] Ya habíamos conocido a los alumnos durante la etapa de observación, pero esta vez nos presentamos ante ellos como sus profesoras

Se pedirá a los estudiantes que se organicen en grupos de a cuatro personas para realizar una actividad y se repartirá a cada uno una fotocopia con la consigna que aparece en la figura 2.2.

Actividad 1

Utilizando las diferentes masas, coloquen algunas en los platillos de la balanza. Realicen sucesivos experimentos con otras masas hasta conseguir que la balanza esté en equilibrio. Anoten en las balanzas siguientes tres ejemplos distintos que hayan encontrado de balanzas en equilibrio:

Figura 2.2: *Actividad 1: igualdad numérica usando balanzas. (La fotocopia entregada a los estudiantes incluía el dibujo de otras dos balanzas vacías que por cuestiones de espacio no se colocan en este trabajo)*

Una vez repartidas las copias, se pedirá un voluntario para leer en voz alta la consigna y se entregará una balanza con un conjunto de masas por grupo. Se dará aproximadamente 25 minutos para la realización de la actividad, que incluyen 10 minutos para la conformación de los grupos, la lectura de la consigna, y la distribución las balanzas, las masas y las copias. Mientras los estudiantes trabajan, nos acercaremos a sus asientos respondiendo las dudas que puedan surgir.

Cada grupo de estudiantes tendrá a su disposición las siguientes masas: 10g, 20g, 50g, 100g, 200g, 25g, 45g, 45g, 65g y 80g. Además de las masas incógnitas que serán entregadas en las actividades correspondientes.

Se esperan muchas respuestas diferentes de los estudiantes, dado que se hizo un tanteo de las posibilidades de resolución de la actividad, como se muestra a continuación.

1. $45 = 45$
2. $20 + 25 = 45$
3. $25 + 45 = 20 + 50$
4. $20 + 50 + 10 = 80$
5. $25 + 80 = 45 + 50 + 10$
6. $45 + 80 = 25 + 100$
7. $20 + 80 + 100 = 200$
8. $25 + 45 + 80 = 50 + 100$
9. $20 + 45 = 65$

10. $65 + 10 = 50 + 25$

11. $65 + 20 = 25 + 50 + 10$

12. $25 + 65 = 80 + 10$

13. $45 + 65 = 100 + 10$

14. $65 + 50 = 25 + 80 + 10$

15. $65 + 100 = 25 + 80 + 50 + 10$

16. $65 + 80 = 25 + 100 + 20$

17. $65 + 80 = 45 + 100$

18. $65 + 200 = 100 + 80 + 25 + 10 + 50$

19. $25 + 45 + 10 + 20 = 100$

20. $45 + 65 + 10 = 100 + 20$

21. $80 + 50 = 100 + 20 + 10$

22. $65 + 50 + 20 = 45 + 80 + 10$

Puesta en común para la actividad 1:

Una vez finalizado el tiempo estimado, se procederá a hacer una puesta en común de la actividad 1. Con el fin de recolectar todas las resoluciones de los distintos grupos, se preguntará a cada grupo en voz alta: *¿qué ejemplos de balanzas escribieron?*, y anotar todos en una planilla con dibujos de balanzas vacías que se tendrá preparada en la computadora conectada al proyector del laboratorio. Es posible que algunas resoluciones sean incorrectas. En este caso, se preguntará luego de anotar todos: *¿están de acuerdo en que las balanzas están equilibradas en todos los casos?* Si no lo están, preguntaremos *¿por qué?*

Después, se preguntará a la clase: *¿por qué colocaron estos números? ¿qué tienen en común todas estas balanzas? ¿qué relación hay entre estos números (señalando)?* El objetivo es llegar a que los estudiantes afirmen que *la balanza está equilibrada cuando la suma de masas de cada platillo es la misma o que el equilibrio de la balanza representa la igualdad entre las masas totales(suma de masas) de cada platillo.* Si no se llega a ninguna afirmación parecida a esta, como última instancia se les preguntará: *¿cuál es la suma de las masas en este platillo (señalando alguna balanza dibujada)? ¿y la suma de masas en este platillo (el otro de esa misma balanza)?* para llegar finalmente a la afirmación esperada. En este momento, se escribirá en la pizarra la afirmación a la que llegaremos entre todos. Se instará a los estudiantes a escribir esa oración en sus carpetas. El tiempo estimado para la puesta en común de la Actividad 1 es de 15 minutos.

2. Actividad exploratoria para encontrar una masa desconocida: introducción de incógnitas

Se anunciará la realización de actividad que consistirá en usar la balanza para pesar objetos. Se aclarará que continuarán los mismos grupos que en la actividad anterior. Se escribirá en la pizarra la siguiente consigna:

Actividad 2

Usen la balanza y las masas para descubrir la masa del objeto señalado con una letra. Expliquen en sus carpetas cómo lo hicieron.

Figura 2.3: *Actividad 2:introducción de incógnitas.*

A continuación, se entregará a cada grupo una masa desconocida (todas diferentes). Conjunto de masas desconocidas: A=70g, B=105g, C=125g, D=75g, E=90g, F=110g, G=145g, Z=140g, Y=160g, X=155g, W=170g, V=205g, U=260g, T=185g.

Se destinarán 15 minutos aproximadamente para esta actividad.

Puesta en común para la actividad 2:

Se preguntará a los grupos sus resultados y los escribiremos en la pizarra debajo de la consigna. Algunas respuestas posibles son:

- *X pesa 120g* (en este caso, escribiremos en la pizarra X=120g)
- *Pusimos el objeto X de un lado y las masas de 45, 65,10 gramos del otro entonces X vale 120 gramos.* Ante este tipo de respuestas podríamos hacer énfasis en la igualdad de masas entre los platillos recordando la actividad anterior y escribiendo en la pizarra: X=45g+65g+10g.

Luego, se preguntará a la clase: *¿cómo hicieron para obtener el valor de A, X,...?* a algunos grupos (podrían ser los que menos estuvieron trabajando o los que no participaron en la discusión anterior para hacerlos participar, o a los que dijeron un valor erróneo para alguna de las incógnitas). La respuesta esperada es: *hay que poner una de las masas desconocidas de un lado y masas conocidas del otro hasta que la balanza esté en equilibrio.* Puede haber variantes de esto, como por ejemplo: *ponía una masa y si se desequilibraba para el otro lado entonces me pasé y ponía una de menos masa; si el platillo de la incógnita estaba más abajo entonces me falta peso del otro y ponía una masa; si el platillo de la incógnita está más arriba entonces tengo que sacar una de las masas que puse; etc.* Todas estas afirmaciones serán tomadas como correctas y a partir de estas se puede llegar a la respuesta esperada, preguntándoles *¿cómo están seguros de que ése es el valor de la masa del objeto?* para así dejar explícito que la balanza debe estar en equilibrio para dar información sobre la masa de la incógnita.

Para cerrar esta parte de la clase, haremos énfasis en que *lo importante fue dejar el objeto desconocido solo en un platillo de la balanza para poder compararlo con masas conocidas.*

El tiempo estimado de la puesta en común es de 10 a 15 minutos.

3. Actividad con balanzas: Introducción a la propiedad uniforme de la suma y de la resta

Se comunicará a los alumnos que se realizará otra actividad manteniendo los grupos. Se le entregará a cada grupo un nuevo conjunto de masas y una fotocopia a cada uno de los estudiantes.

Los equipos tendrán actividades diferentes pero similares entre sí.

Actividad 3 - Grupo 1

Para iniciar, cargá en la balanza las pesas como indica la figura.

1. ¿Qué crees que pasaría si quitamos la pesa de 50g del lado derecho de la balanza?
2. ¿Qué harías para volver a equilibrar la balanza sin volver a poner el peso que sacaste?
3. Ahora que ya está equilibrada, ¿qué pasaría si agrego del lado izquierdo una pesa de 45g? ¿Qué harías para volver a equilibrar la balanza sin quitar ese peso?

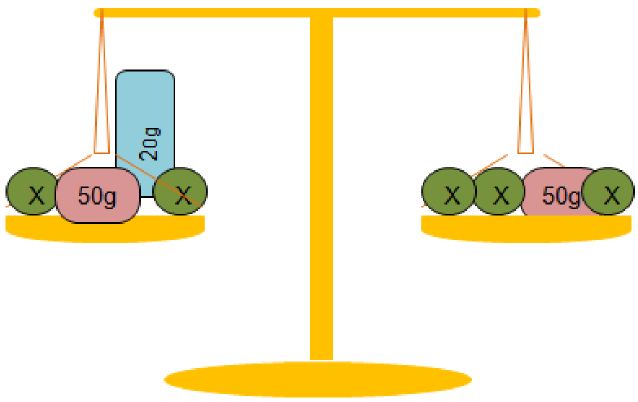


Figura 2.4: *Actividad 3:introducción a la propiedad uniforme de la suma y de la resta. La actividad aquí presente es la correspondiente al grupo 1, los otros grupos tenían consignas análogas pero el dibujo de la balanza representaba las siguientes ecuaciones: grupo 2* $y+y+y+20g = y+y+50g+20g$, *grupo 3* $z + z + z + 10g = z + z + 20g + 10g$, *grupo 4* $w + w + 10g + 50g = w + w + w + 10g$, *grupo 5* $q + q + 25g + 10g = q + q + q + 25g$, *grupo 6* $t + t + 10g + 80g = t + t + t + 10g$ *y grupo 7* $v + v + v + 20g = v + v + 10g + 20g$

Para la pregunta 1), se espera que los alumnos respondan que *la balanza se inclinará/desequilibrará*. Para la pregunta 2), se espera que los alumnos quiten la masa equivalente del platillo izquierdo. Sin embargo, otra respuesta posible es que *intercambien la masa que quitaron por dos que sumen lo mismo*. En este caso, también se considerará correcta. Para la pregunta 3), se espera que respondan que *agregarían una pesa de 35g del otro lado de la balanza para volver a equilibrarla.*

El tiempo destinado a esta actividad será de aproximadamente 15 minutos. En este tiempo, nos acercaremos a cada grupo en el caso en que tengan dudas sobre la consigna.

Puesta en común de la actividad 3:

Indicaremos a algún grupo que lea su respuesta 1). Se esperan respuestas como: se inclina; se desequilibra. Se tratará de llegar a una respuesta común, preguntando: *¿están de acuerdo? ¿ustedes respondieron algo diferente?* Luego, se pedirá a otro grupo que lea su respuesta 2). Se tratará de relacionar las diferentes situaciones de la balanza en cada grupo, preguntándoles: *¿los demás hicieron algo parecido?¿se tiene que sacar la pesa del mismo peso que antes? ¿por qué?* Después, un tercer grupo leerá su respuesta 3). Se intentará llegar a una conclusión más general sobre las acciones que mantienen en equilibrio la balanza. Esperamos que ya hayan sido expuestas afirmaciones del tipo *si sacamos o ponemos dos masas equivalentes a ambos lados de una balanza equilibrada, ésta seguirá en equilibrio* y si no, las diremos y preguntaremos a los estudiantes si están de acuerdo. Aclararemos que *dos masas se considerarán equivalentes si pesan lo mismo.* Se destinarán 10 minutos aproximadamente a la puesta en común de la actividad 3).

C-Cierre de la clase

Para cerrar la clase, se escribirá en la pizarra lo que se haya acordado en la última puesta en común para retomarlo la clase la siguiente, bajo el título “propiedad uniforme”.

Se destinarán 5 minutos al cierre de la clase.

2.2.1.2. Guion conjetural para la segunda clase (80 minutos)

A-Saludo

Se pedirá nuevamente al preceptor que avise previamente a los alumnos para que se dirijan al laboratorio de ciencias, por lo que la clase iniciará en ese lugar.

Al comienzo de la clase, se saludará a los estudiantes y se anunciará que se tomará oral a dos personas. Se preguntará *¿alguien quiere pasar?* Se espera que haya voluntarios. En caso contrario, se llamará a dos personas previamente seleccionadas a partir de su comportamiento en la clase anterior y considerando la cantidad de veces que pasaron los alumnos durante el año.

El tiempo estimado para el saludo es de 5 minutos.

B-Evaluación Oral y repaso de contenidos de la clase anterior

El oral será utilizado como forma de repaso de lo que se vio la clase anterior y como evaluación formativa, para averiguar si los temas y conceptos que se trabajaron fueron interiorizados por los alumnos y para resolver dudas o corregir errores. Si se observa que alguna de las cuestiones abordadas presentan grandes dificultades se realizará un ajuste del guion o se retomará durante las actividades del día los conceptos trabajados para evitar el “arrastre” de dudas.

A los alumnos que pasaron al oral se les hará preguntas como las siguientes:

1. *¿Qué vimos la clase pasada?*
2. *¿Cuándo la balanza está equilibrada? ¿Podrían dar un ejemplo?*
3. *¿Cómo hacíamos para pesar una masa desconocida?*
4. *Observando la balanza que dibujé en el pizarrón (en la cual está representada la ecuación* $y+y+30+20 = y+y+y+30$*): ¿Qué acción o acciones podrían realizar en la balanza para que ésta siga equilibrada?*
5. *¿Recuerdan cómo se llamaba eso?*
6. *¿Se les ocurre cómo escribir de otra forma lo que está dibujado en la balanza (sin el dibujo)?*

Si en alguna pregunta, a ninguno de los dos alumnos que está al frente se le ocurre qué responder, devolveremos el interrogante al grupo clase para que ayude a sus compañeros. Si aún así no surge ninguna idea al respecto, realizaremos preguntas guías para recordar lo que se vio.

En la primera pregunta, se pretende que los alumnos den alguna/s de las siguientes respuestas: *trabajando con balanzas, encontramos el peso de algo desconocido, vimos que si sacábamos una masa de un lado y otra igual del otro la balanza seguía en equilibrio.*

Con la segunda pregunta, pretendemos recuperar la idea de que la balanza se encuentra en equilibrio cuando la suma de las masas de cada platillo es igual. Puede que esta idea no surja espontáneamente, por eso es que se pide que den un ejemplo, para intentar de esta forma recordar lo que se vio en la Actividad 1. Si aún así ninguno de los alumnos de la clase recuerda esta idea, se utilizará una balanza para realizar una breve experiencia ilustrativa de esta noción.

La tercera pregunta apunta a que los alumnos recuerden lo visto en la segunda actividad, en donde ellos hallaban el valor de una masa desconocida colocándola de un lado de la balanza y poniendo del otro masas conocidas. Podría ocurrir que no recuerden la experiencia o que sólo la recuerden parcialmente. Por ejemplo, podría pasar que digan que *se colocaba la masa desconocida en la balanza*, pero que no recuerden que debían colocar del otro lado masas conocidas. Si esto ocurre y ninguno de los otros compañeros puede ayudarlos, se realizarán preguntas del estilo: *Y luego de colocar la masa en la balanza, ¿qué hacíamos?; ¿La situábamos en uno de los platillos?; Y con el otro platillo, ¿qué hacíamos?*

Con el cuarto inciso, se pretende que los alumnos recuerden la propiedad uniforme de la resta quitando de ambos lados de la balanza la masa de 30g. Creemos que no será difícil que esta cuestión surja ya que, con los cuestionamientos anteriores, se fueron recordando las distintas acciones que se podían realizar sobre las balanzas.

En la quinta pregunta, se pretende retomar el nombre de propiedad uniforme, para dar paso a la primera actividad de la clase. Es bastante probable que esto no surja de los alumnos, ya que fue expuesto en los últimos minutos de la clase anterior. De ser así, lo diremos nosotras y lo escribiremos en el pizarrón.

Con el sexto interrogante, ya no se pretende repasar lo de la clase anterior sino avanzar sobre eso, dando pie a lo que se quiere trabajar durante este día, que es el paso del lenguaje coloquial al simbólico. Lo que sería ideal es que los alumnos escriban la ecuación: $y+y+30+20 = y+y+y+30$ o $2y+50 = 3y+30$. Pero si esto no se da, diremos que volveremos sobre esta cuestión hacia el final de la clase. Cabe aclarar que estas preguntas estarán sujetas a lo que se haya visto la clase anterior. Por ejemplo, si el tiempo fue insuficiente para realizar la última actividad, los interrogantes no serán los mismos o, en todo caso, no apuntarán a un repaso sino a un avance o continuación de lo que se haya llegado a ver.

Se prevén 10 minutos para esta parte de la clase.

4. Propiedad uniforme: de la suma, resta, multiplicación y división, representadas en una balanza de platillos

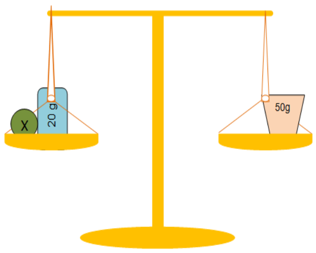
Se anunciará que continuaremos con la propiedad uniforme de la suma y de la resta y que se les dará una fotocopia con el "teórico" de ese tema para que la peguen en sus carpetas. Se comunicará que tienen que reunirse con el mismo grupo con el que trabajaron la clase anterior.

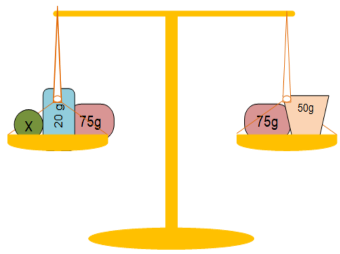
Actividad 4

Lean y discutan en grupo las siguientes propiedades. ¿Están de acuerdo? En caso afirmativo, den otro ejemplo para ilustrar cada una de ellas. Si no están de acuerdo, ¿por qué?

Propiedad uniforme de la suma

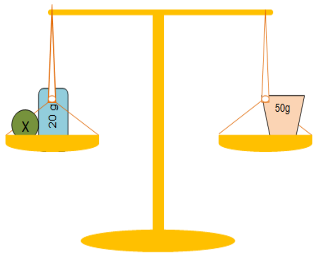
En una balanza equilibrada, se pueden agregar dos masas equivalentes, una en cada platillo, y seguirá en equilibrio (es decir, la igualdad entre la suma de masas de cada platillo se mantiene).

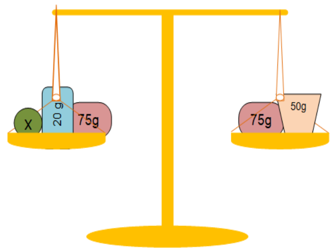




Propiedad uniforme de la resta

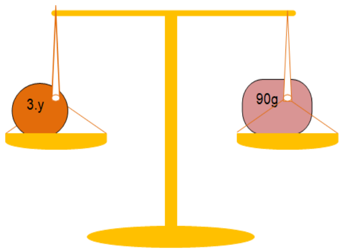
En una balanza equilibrada, se pueden sacar dos masas equivalentes, una de cada platillo, y seguirá en equilibrio.

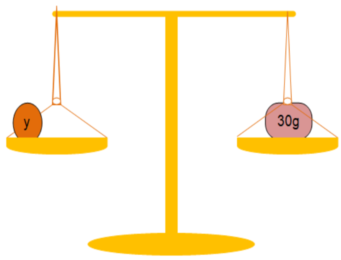




Propiedad uniforme de la multiplicación

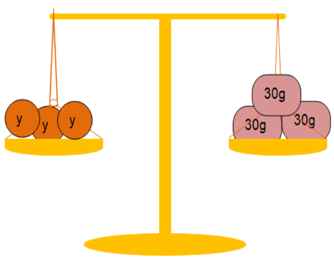
En una balanza equilibrada, se pueden duplicar, triplicar, cuadruplicar, etc, las masas de cada uno de los platillos y seguirá en equilibrio.





Propiedad uniforme de la división

En una balanza equilibrada, se puede dejar la mitad, la tercera parte, la cuarta parte, etc, de las masas en cada platillo y seguirá en equilibrio.



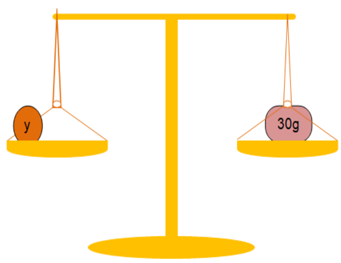


Figura 2.5: *Actividad 4. Sobre la propiedad uniforme: de la suma, resta, multiplicación y división, representadas en una balanza de platillos.*

Se destinarán 5 minutos para esta actividad.

Puesta en común para la Actividad 4:

En esta instancia, se leerán una por una las propiedades, anotando un ejemplo más de cada una de ellas dictados por grupos diferentes de alumnos. Se preguntará *¿están de acuerdo con el ejemplo dado por sus compañeros?* Creemos que, dada las experiencias de los estudiantes con balanzas en la clase anterior, esta actividad no generará demasiada discusión. Lo que podría producir dificultades es la propiedad uniforme de la multiplicación y la de la división. En este caso, se tomará un tiempo extra para dar más ejemplos y, si fuera necesario, se las justificará relacionándolas con las propiedades correspondientes a la suma y la resta.

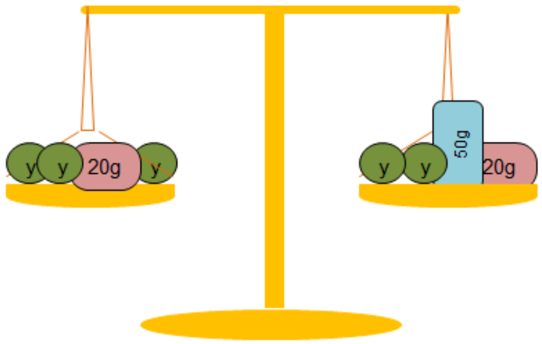
La duración estimada de la puesta en común de la Actividad 4 es de 5 minutos.

5. Actividad introductoria para la escritura de ecuaciones a partir del dibujo de una balanza.

Se comunicará que les daremos otra actividad para que realicen en los mismos grupos. Se les entregará una balanza por grupo con un conjunto de masas correspondientes a la actividad que les tocó y fotocopias con la consigna para cada alumno. Las ecuaciones serán las mismas que las trabajadas la clase anterior pero se permutarán entre los grupos.

Actividad 5 - Grupo 1

Ésta es la balanza que obtuvieron sus compañeros luego de la Actividad 3.



1. ¿Qué relación hay entre las masas de ambos platillos?
2. Utilizando lo visto en la **Actividad 3**, hallen el valor de la masa desconocida.

Figura 2.6: *Actividad 5, introductoria para la escritura de ecuaciones a partir del dibujo de una balanza*

Se destinarán alrededor de 15 minutos para que los estudiantes realicen esta actividad.

Puesta en común para la Actividad 5:

Se preguntará a algún grupo cuál es su respuesta a la pregunta 1) y se anotará en la pizarra. Se prevén estas respuestas posibles:

- $2x + 100 = 3x$
- $x + x + 100 = x + x + x$
- *Suma de las masas del platillo derecho=suma de las masas del platillo izquierdo;*

- *Las sumas de masas de los platillos es la misma;*
- *Iguales.*

Todas estas respuestas serán consideradas correctas, salvo la última. Frente a ésta, señalaremos que las masas individuales de cada platillo no son iguales y se invitará a los alumnos a pensar cuál es la relación entre ambos conjuntos de masas hasta llegar a una de las otras posibilidades. Ante la tercera posibilidad para la respuesta de la pregunta 1), se les preguntará *¿cómo escribirías la suma de las masas del platillo derecho?* con el objetivo de llegar a una de las dos primeras posibilidades. Una vez escrita alguna de estas, vamos a decir que ese tipo de expresiones tiene un nombre. Preguntaremos a los estudiantes *¿cómo piensan que se llama esto?* Es posible que, como ya vieron la palabra ecuación en uno de los últimos ejercicios de la unidad III y esta palabra aparece en el nombre de la unidad IV, pueda surgir pero, si no, la diremos. Luego, se preguntará a la clase *¿qué les parece que es una ecuación?* Se guiará el debate alrededor de esta pregunta, tratando de llevar a los estudiantes cerca de una definición correcta de ecuación, hasta llegar a un consenso. La definición acordada se escribirá en la pizarra y se les indicará a los estudiantes que la copien en sus carpetas. Se espera llegar a una definición como las siguientes:

- *Una ecuación es una igualdad con números y letras;*
- *Una ecuación es una igualdad donde hay por lo menos un elemento desconocido al que llamamos incógnita;*
- *Una ecuación es una igualdad en la que se desconoce un valor.*

Se tratará de completar la definición indicando también a qué se le llama incógnita, como en la segunda opción.

Para la pregunta 2), se prevé que los alumnos encuentren el valor de la incógnita. Algunas respuestas posibles son:

1. *Probar valores para la masa desconocida hasta encontrar uno que cumpla la igualdad de masas;*

2. *Sacar todas las masas y pesar la masa desconocida como en la Actividad 2;*

3. *Usar la propiedad uniforme de la resta para sacar de cada platillo una misma cantidad de masas desconocidas.*

Ante las primeras dos respuestas, se insistirá a los alumnos con la parte de la consigna que dice “utilizando lo visto en la Actividad 3” pero no serán tomadas como incorrectas. La tercera respuesta posible es la que usaríamos para resaltar que lo visto en la Actividad 3 también se puede aplicar a masas desconocidas. En este caso, se dibujarían los pasos que se utilizaron para hallar el valor de la incógnita sobre afiches con dibujos de balanzas realizados previamente.

Se destinarán aproximadamente 10 minutos para la puesta en común.

6. Escritura y resolución de ecuaciones paso a paso a partir del dibujo de balanzas

Manteniendo los grupos, se repartirá la siguiente fotocopia a cada integrante, para que la resuelvan y discutan con sus compañeros. Se les pedirá que no utilicen las balanzas.

<table>
<tr><td colspan="2">

Actividad 6

Dibujen, en las balanzas vacías, los pasos que necesitan realizar para encontrar el valor de la incógnita haciendo uso de la propiedad uniforme. Luego, en la segunda columna de la tabla, escriban la ecuación correspondiente a cada paso, explicando qué propiedad utilizaron y qué acción realizaron en la balanza.

Aclaración: No es necesario utilizar todos los dibujos.

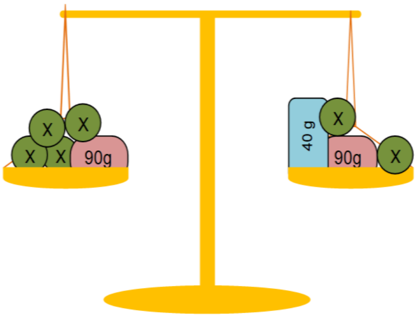
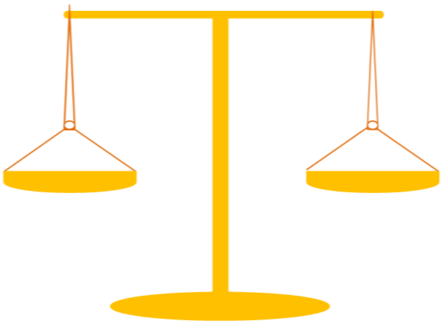
</td></tr>
<tr><td>Balanza</td><td>Matemáticamente</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Figura 2.7: *Actividad 6, de escritura y resolución de ecuaciones paso a paso a partir del dibujo de balanzas*

Se destinarán 10 minutos para completar esta actividad.

Puesta en común actividad 6:

En esta actividad se pretende avanzar hacia el lenguaje simbólico para poder desprenderse de las balanzas y profundizar, luego, en la resolución de ecuaciones.

Para realizar esta puesta en común, se proyectará en el aula una tabla donde nosotras iremos rellenando las balanzas con lo que los alumnos digan (se seleccionará algún voluntario para que lea lo que su grupo hizo). Ante cada respuesta, correcta o incorrecta, se preguntará a los demás miembros de la clase *si están de acuerdo o no y por qué.*

Para trabajar sobre lo que escribieron en la otra columna se llamará a otro voluntario o se seleccionará a algún grupo que no haya participado aún. Se pedirá a este alumno que pase al pizarrón a escribir lo que su grupo puso en la segunda columna y leer la justificación.

Lo que esperamos que los alumnos escriban es lo siguiente:

$$\begin{aligned} x+x+x+x+90 &= 40+90+x+x \\ x+x+x+x+90-90 &= 40+90+x+x-90 \\ x+x+x+x &= 40+x+x \\ x+x+x+x-x-x &= 40+x+x-x-x \\ x+x &= 40 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Puede ocurrir que no coloquen los pasos intermedios, es decir el 2) y 4). Si esto ocurre preguntaremos a los alumnos señalando: *¿Qué hicimos de este paso a este paso (haciendo alusión si no lo recuerdan a las acciones realizadas sobre la balanza)? ¿Cómo escribirían eso en lenguaje simbólico o matemático?* Lo que se pretende es que los alumnos relacionen el sacar de la balanza con restar para luego en el cierre generalizar esto a las demás operaciones.

También puede pasar que los alumnos realicen esto en más pasos, por ejemplo, quitando las x de a una. Esto será considerado como correcto, pero se les remarcará que es posible acortar el proceso. Nos interesa que vean que, del quinto al sexto paso, dividen, para recordar y remarcar la propiedad uniforme de la división.

Se utilizará una balanza y un conjunto de masas para realizar la actividad en caso que presente demasiadas dificultades.

Finalmente, se comentará que *el valor de la incógnita que cumple la igualdad recibe el nombre de solución de la ecuación.*

Para esta puesta en común, se prevén 10 minutos.

C- Cierre

Para finalizar esta clase, se realizará una tabla que relacione las acciones efectuadas en la balanza con operaciones y con la escritura de estas en lenguaje simbólico. Para esto, se dibujará una tabla en el pizarrón y se irá completando con lo que los alumnos digan. Se pretende llegar a algo como lo que se muestra en la figura 2.8.

La primera y segunda fila, son para cerrar lo que se vio en la primera actividad. En la tercera y cuarta fila, se reflexionará sobre el uso del paréntesis (se agregará al ejemplo que presenten los alumnos, el que se muesta en la tabla en estos casos).

Para finalizar, se retomará la escritura de la ecuación que se había pedido durante el oral y que se había previsto que quizás no saliera. En esta instancia, con las herramientas vistas durante la clase, esta pregunta debería ser resuelta con rapidez y naturalidad. Para esto se preguntará al grupo clase *¿Recuerdan la actividad del oral en que debían escribir en lenguaje simbólico o matemático lo que representaba la balanza? ¿Cómo lo harían ahora?*

Para el cierre se prevén 10 minutos.

Lenguaje coloquial o Acción en la balanza	Operación	Lenguaje simbólico	Ejemplo
Agregar una masa	Suma	+	x+10=20 x+10+5=20+5
Quitar una masa La diferencia entre..	Resta	-	x+10=20 x+10-5=20-5
El doble de.. El triple de.. El cuádruple de.. ...	Multiplicación	.2 .3 .4	x+10=20 (x+10).5=20.5
La mitad La tercera parte La cuarta parte ...	División	:2 :3 :4	x+10=20 (x+10):5=20:5

Figura 2.8: *Tabla de lenguaje coloquial vs. lenguaje simbólico*

2.2.2. Segunda etapa

Esta etapa prevé un trabajo con resolución de ecuaciones con lápiz y papel y con problemas para solucionar por medio de las mismas. El objetivo de la propuesta es entender cómo se resuelven las ecuaciones de primer grado con una incógnita utilizando la propiedad uniforme de las distintas operaciones. Además, presentar situaciones problemáticas a los estudiantes con el fin de usar las ecuaciones en diferentes contextos de semirrealidad.

2.2.2.1. Guion conjetural para la tercera clase (parte I) (40 minutos)

A- Saludo

Los primeros 40 minutos de esta clase se desarrollarán en el aula y el tiempo restante en la sala de computación.

Para comenzar, saludaremos a los estudiantes y se seguirá la misma metodología para seleccionar a los alumnos que pasarán al oral.

El tiempo estimado para el saludo es de 5 minutos.

B- Evaluación Oral y repaso de contenidos de la clase anterior

A los alumnos que pasarán al oral se les hará preguntas como las siguientes:

1. *¿Qué vimos la clase pasada?*

2. *Observando la balanza que dibujé en el pizarrón:* $y+y+60+40 = y+y+y+y+40$ *escriban la ecuación que la representa y los pasos matemáticos que realizarían para resolverla (sin dibujar las balanzas). Expliquen las propiedades que utilizaron en cada uno.*

3. *En el afiche (figura 2.9) se muestran distintas expresiones en lenguaje coloquial y simbólico. Unan con flechas según corresponda.*

Lenguaje coloquial	***Lenguaje simbólico***
El cuádruple de un número	x-8
La cuarta parte de un número	4.x
El siguiente de un número	x+5
Un número aumentado en 5	x:4
La diferencia entre un número y 8	x+1

Figura 2.9: *Tabla de lenguaje coloquial vs. lenguaje simbólico*

En la pregunta 1) se espera que respondan alguna de las siguientes afirmaciones: *seguimos trabajando con balanzas, vimos qué era la propiedad uniforme, qué era una ecuación, cómo encontrar el valor de una incógnita despejando la ecuación, cómo representar las operaciones en lenguaje coloquial y simbólico.* Si ninguna de estas cuestiones surgen espontáneamente de los estudiantes, entonces se preguntará al grupo clase, y si aún así no hay ideas, iremos recordando los enunciados de las actividades y preguntaremos *¿y que hicimos en esta actividad?* o se los invitará a que lean los enunciados en sus carpetas para recordar. Una vez que hayan dicho alguna de estas cuestiones, se irá profundizando con preguntas como: *¿y qué decía la propiedad uniforme? ¿podrían dar algún ejemplo? ¿recuerdan la definición de ecuación? ¿qué es una incógnita?*

Con la pregunta 2), se pretende recordar lo realizado en la Actividad 6, pero ya desprendiéndose del dibujo de la balanza. Si surge alguna dificultad, los ayudaremos con preguntas del tipo: *¿Alguna de las propiedades que vimos nos ayudarían a despejar la incógnita? ¿Puedo usar también estas propiedades para quitar algunas de las "y¿* Si algún alumno no comprende por qué hay que "despejar" la incógnita, recordaremos la Actividad 2.

Con el inciso 3), se pretende recordar y avanzar en el pasaje de lenguaje coloquial al simbólico. Algunas operaciones, como "el siguiente de un número" o "un número aumentado en 5", no se vieron la clase anterior. En esos casos, si se presentan dificultades se ayudará a los alumnos poniendo ejemplos concretos, como: *¿cuál es el siguiente del número 2?; ¿Y el siguiente de tres?; ¿Qué relación hay entre el 3 y el 2?; ahora, ¿cómo escribirían eso si en lugar de un 2 fuera un número desconocido? En el caso de "un número aumentado en 5", se preguntará ¿cómo podrían, con una operación, representar la palabra aumentar?*

El tiempo estimado para el oral es de 10 minutos.

7. Resolución de ecuaciones con lápiz y papel

Se escribirán en el pizarrón tres ecuaciones y se pedirá a los alumnos que las resuelvan individualmente en sus carpetas. Si alguno de los estudiantes termina mucho antes que el resto de sus compañeros, entonces se le entregará alguna ecuación extra (es decir, la 4, 5 o 6 de la figura 2.10).

Actividad 7
Encuentra en cada una de las siguientes expresiones el valor de la incógnita.
1. 3.z+20=2.z+90
2. 2.x-20=100
3. 4.y-5+10=3.y+6+10

Ecuaciones extras
4. 4+16:2-1=13-2.t+6
5. q+15=q+4.q-1
6. 2+7.w=w+14

Figura 2.10: *Actividad 7, de resolución de ecuaciones con lápiz y papel.*

Los resultados de estas ecuaciones son:

1. $z = 70$
2. $x = 60$
3. $y = 11$
4. $t = 4$
5. $q = 4$
6. $w = 2$

Con esta actividad, se pretende ejercitar por primera vez la resolución de ecuaciones en un contexto meramente matemático y haciendo uso del lenguaje simbólico y la propiedad uniforme.

El tiempo estimado para esta actividad es de 10 minutos.

Puesta común de la Actividad 7:

Para la puesta en común, sólo se corregirán los tres ejercicios que fueron obligatorios. Para esto, se pedirá a tres alumnos (que se ofrezcan voluntariamente o de acuerdo a su comportamiento y participación durante la clase) que pasen al pizarrón (que habrá sido dividido en tres espacios previamente) y que copien todos, al mismo tiempo, la resolución de una de las ecuaciones (una diferente cada uno), a fin de ahorrar tiempo. Luego, se les pedirá que uno a uno expliquen qué pasos siguieron para hallar el valor de la incógnita y que digan explícitamente qué propiedad utilizaron para ir de un paso al otro.

Los errores que surjan serán devueltos al grupo clase para intentar que se corrijan y ayuden entre pares. Puede ocurrir que los alumnos hayan tenido problemas en la aplicación de la propiedad uniforme de la resta, ya que ahora no tienen de ambos lados de la igualdad la misma cantidad, para poder quitarla. En ese caso, se volverá a la puesta en común de la Actividad 6, en donde se pidió explícitamente que escribieran los pasos intermedios, y se dirá que no es necesario tener de ambos lados el mismo número para poder restarlo. Puede ocurrir también que los estudiantes que hayan hecho el ejercicio extra número 4), al despejar "t", hayan olvidado tener en cuenta el signo "-" del 2 o que al dividir no hayan aplicado correctamente la regla de los signos. En estos casos, y de acuerdo al tiempo disponible, se evaluará si este ejercicio se corregirá al frente o se retomará durante la clase 5, en la cual volveremos a resolver ecuaciones con lápiz y papel.

El tiempo estimado para la puesta en común de la Actividad 7 es de 5 minutos.

8. Primer problema para plantear una ecuación

Se anunciará que les daremos una actividad para seguir resolviendo individualmente y escribiremos en el pizarrón la consigna que aparece en la figura 2.11.

Actividad 8
En un platillo de una balanza hay un ladrillo y, en el otro, medio ladrillo y una masa de 1 kg. La balanza está en equilibrio. Escriban y resuelvan una ecuación que permita hallar la masa del ladrillo entero.

Figura 2.11: *Actividad 8, el problema del ladrillo.*

El tiempo estimado para esta actividad es de 5 minutos.

Ayuda durante el tiempo de la actividad

Trataremos de ayudar a los alumnos que lo necesiten teniendo en cuenta la siguiente sucesión de indicaciones:

- Si tienen dificultades al leer la consigna: *podrías hacer el dibujo de la balanza de la que habla el problema.*
- Si les cuesta definir cuál es la incógnita: *¿qué valores de masas no conocés?* Puede ser que asignen X a la masa de la mitad del ladrillo o a la de todo el ladrillo. Ambas serán consideradas correctas.
- Una vez realizado todo lo anterior, el problema se reduce a resolver una ecuación al estilo de la Actividad 6, por lo que si los estudiantes presentan dificultades en este punto, se les indicará que se fijen en ella.

Puesta común de la Actividad 8:

Se preguntará al grupo cómo resolvieron la actividad y se irá desarrollando en la pizarra, consensuando con los estudiantes. Lo que se pretende hacer es: dibujar la balanza, definir la incógnita, plantear la ecuación, usar la propiedad uniforme de la resta y, finalmente, hallar el valor de la incógnita para obtener la masa del ladrillo entero.

No se hará pasar al frente a los estudiantes en esta puesta en común. El objetivo de esta parte de la clase es mostrar un ejemplo de problema en el cual haya que plantear una ecuación y determinar cuál es la incógnita, para que lo tengan como referencia al resolver los problemas de la Actividad 8.

9. Otros problemas para plantear una ecuación

Se pedirá nuevamente al preceptor que avise previamente a los alumnos para que se dirijan al laboratorio de informática, por lo que la clase continuará en ese lugar luego del recreo. Se les entregará a los alumnos una fotocopia con dos problemas y se les pedirá que los resuelvan de forma individual en hoja aparte para entregarlos y, así, corregirlos para hacerles una devolución la clase siguiente.

Actividad 9

Resuelve en hoja aparte los siguientes problemas, planteando la ecuación que creas que represente la situación planteada y hallando el valor de la incógnita.

1. Don Evaristo usó 1170m de alambre para cercar con tres vueltas su campo rectangular, que mide 120m de largo. ¿Cuál es el ancho del campo de don Evaristo?
2. Con tres piezas de madera: una cuadrada (A) de 48cm de perímetro y dos rectangulares (B y C), se armó un cuadrado como muestra la figura. El perímetro del cuadrado formado con las tres piezas es de 76cm. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo C?

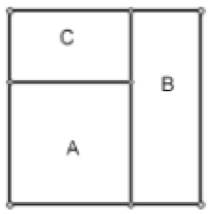


Figura 2.12: *Actividad 9, más problemas para plantear una ecuación.*

Uno de los planteos posibles del problema 1) es: $3.(2.x + 2{,}120m) = 1170m$ y la solución es $x = 75m$.

El problema 2) tiene varios planteos posibles, uno de los cuales es: $4.(L + x) = 76cm$ donde L es el lado del cuadrado (A) y x es el lado corto del rectángulo C. L puede calcularse ya que conocemos el perímetro de (A), por lo tanto, $L = 48cm/4 = 12cm$. Resolviendo la ecuación, encontramos que $x = 7cm$. Como el lado largo del rectángulo C es igual a uno de los lados del cuadrado A, entonces, el perímetro de C$= 12cm{,}2 + 7cm{,}2 = 38cm$.

Podría ocurrir que al principio les cueste plantear la ecuación, de ser así se los guiará de alguna de las siguientes maneras: *¿Podrías dibujar un esquema de la situación planteada? ¿cuáles son los datos que da el problema? ¿qué es lo que te pide calcular? ¿qué es lo que podés calcular (para el caso del problema 2)?*

Como última alternativa, si algún alumno no consigue plantear alguno de los problemas, se lo invitará a juntarse con un compañero para intentar continuar en grupo. De todas maneras, este tema se revisará y profundizará en las sucesivas clases.

La puesta en común de esta actividad se realizará durante la próxima clase y, para ella, se tendrán en cuenta las correcciones que eventualmente realizaremos en las resoluciones que entreguen los alumnos.

El tiempo estimado para esta actividad es de 10 minutos.

2.2.3. Tercera etapa: Tablas en Microsoft Excel

Esta etapa prevé trabajar con tablas en una hoja de cálculo como herramienta para resolver situaciones problemáticas. El objetivo de la propuesta es:

- entender relaciones entre variables que aparecen en un problema, explicitándolas en una tabla;
- profundizar en el uso del lenguaje simbólico, al utilizarlo en otro contexto (el de las celdas de una tabla de Microsoft Excel);
- poder usar las tablas como instrumento para plantear ecuaciones.

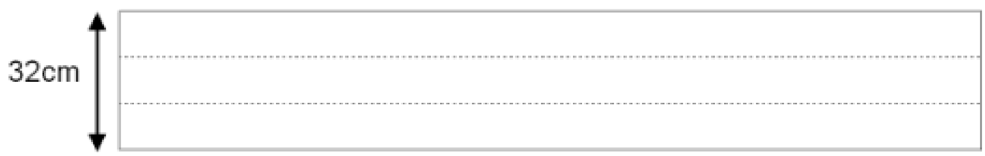
2.2.3.1. Guion conjetural de la tercera clase (parte II) (105 minutos)

10. Planteo de problemas con tablas en Microsoft Excel

Se les indicará a los estudiantes que se ubiquen de a dos para realizar la actividad que aparece en la figura 2.13.

Actividad 10

Tenemos una chapa lisa rectangular de 32cm de ancho y queremos construir una canaleta para desaguar la lluvia. Para esto, doblamos hacia arriba los lados de manera que queden perpendiculares a la hoja (como se muestra con líneas punteadas en el esquema que se presenta a continuación). Los dos bordes laterales de la canaleta tienen el mismo ancho.



¿Cuántos centímetros deben doblarse para que la canaleta tenga capacidad máxima?

Figura 2.13: *Actividad 10, el problema de la canaleta.*

Se destinarán 35 minutos para que los alumnos resuelvan la actividad.

Ayuda durante el tiempo de la actividad

Se espera que una de las primeras dudas que pueden surgir es: *¿cuál es la longitud de la canaleta?* El problema se puede resolver sin ese dato, pero creemos que darse cuenta de esto no es sencillo. Entonces, para contestar esta pregunta, se volverá a preguntar al grupo clase *¿cuánto creen que puede ser la longitud de una canaleta (en cm)?* Se anotarán las posibilidades en el pizarrón y se elegirá alguna para sugerir, por ejemplo: *pueden suponer por ahora que la longitud de la canaleta es de 200cm.*

Puede ocurrir que los estudiantes no recuerden la fórmula de volumen, en ese caso se les recordará: *ya la vieron con la profesora del curso, pueden fijarse en el cuadernillo si lo tienen* y si no, se las daremos nosotras.

Como los estudiantes ya habrán realizado tres problemas que involucran el planteo de una ecuación, creemos que es probable que muchos determinen como incógnita a la cantidad de centímetros que deben doblarse. Si esto no surge, se les preguntará: *¿cuáles son los valores que no* *conocen?* Se espera llegar a que la mayoría de los grupos coloquen x (u otra letra) como la cantidad de cm a doblar y $32 - 2x$ al ancho de la canaleta.

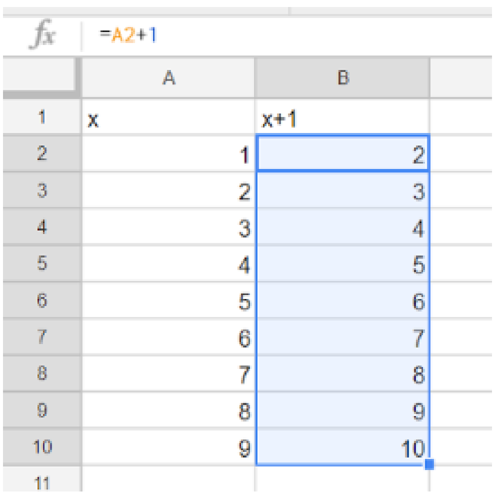
Se pretende que los estudiantes se den cuenta que x tiene que ser algún valor menor a 16cm, aunque esto no es determinante para resolver el problema, puesto que si prueban con valores mayores, el volumen correspondiente será menor que 0.

Si algún grupo de alumnos propone que la chapa se debería cortar en tres partes iguales (de 10,66cm), les sugeriremos que *prueben calcular el volumen considerando que doblan la chapa, por un lado, en tres partes iguales y, por el otro, doblando 10cm de cada lado* para que, al realizar el cálculo, noten que el volumen, en el segundo caso, es mayor.

A partir de la experiencia de probar dos valores y compararlos, es posible que los estudiantes traten de probar varios números para los posibles centímetros en los que se va a doblar la canaleta y comparen los volúmenes en esos casos. Se los alentará a esto. Una vez que varios grupos estén en este punto, se dirá al grupo clase: *dado que varios de ustedes quieren probar muchos valores para los centímetros en que se va a doblar la canaleta, podrían hacer una tabla de Excel para realizarlo ordenadamente y para que el programa los ayude a hacer las cuentas.*

Llegado a este momento de la clase, el armado de la tabla dependerá en gran medida del conocimiento que los estudiantes tengan del programa Microsoft Excel. Sin embargo, la elección de las columnas de la tabla es independiente de su manejo. Algunas posibles elecciones son: | *cm a doblar* |, | *ancho canaleta* |, | *volumen canaleta* | o | x |, | $30 - 2x$ |, | x*$(30 - 2x)$*200 |, donde la segunda columna puede aparecer o no.

Todas las tablas cuyos números sean adecuados serán consideradas correctas, pero se alentará a los estudiantes a usar las funciones del programa, principalmente la de "arrastre", que permite "arrastrar" celdas sobre otras de modo tal que las fórmulas de las primeras se copian en las últimas, como se indica en la figura 2.14. Si los estudiantes no la conocen, se la explicará brevemente al grupo clase con un ejemplo sencillo, por ejemplo, con un número y su siguiente (se puede arrastrar la primera y la segunda columna):


fx =A2+1

	A	B
1	x	x+1
2	1	2
3	2	3
4	3	4
5	4	5
6	5	6
7	6	7
8	7	8
9	8	9
10	9	10
11		

Figura 2.14: *Ejemplo de "arrastre"de fórmulas.*

Una vez que los estudiantes "arrastren" las fórmulas de las primeras celdas a las siguientes, se puede comprobar que los valores nuevos son correctos (efectuando la cuenta para algunos casos particulares) y, haciendo click en alguna celda sobre la que se llevó a cabo el "arrastre", se puede ver el cálculo que realizó el programa. La figura 2.15 muestra un ejemplo. Se sugerirá a los estudiantes que *verifiquen con algunas celdas que lo que hace el programa es efectivamente lo que hubieran calculado a mano.*

fx =32-2*A5

	A	B
1	x	32-2x
2	1	30
3	2	28
4	3	26
5	4	24
6	5	22
7	6	20
8	7	18
9	8	16
10	9	14
11	10	12

Figura 2.15: *Primer paso para la resolución de la Actividad 10: La celda de la fila 5, columna B, corresponde a 32 menos 2 veces el valor de la celda de la fila 5, columna A (es decir, de la celda a la izquierda de la seleccionada.*

Si la longitud de la canaleta que se propone es de, por ejemplo, 200cm, el volumen de la canaleta se podría escribir de dos maneras:

- 200 multiplicado por los dos valores de la columna que se ubica dos lugares a la izquierda (correspondientes a los cm que se doblan y al ancho de la canaleta)
- x*$(30 - 2x)$*200

La figura 2.16 muestra un ejemplo de cómo podría realizarse la tabla en Microsoft Excel.

fx =B2*A2*200

	A	B	C
1	cm a doblar	ancho canaleta	volumen canaleta
2	1	30	6000
3	2	28	11200
4	3	26	15600
5	4	24	19200
6	5	22	22000
7	6	20	24000
8	7	18	25200
9	8	16	25600
10	9	14	25200
11	10	12	24000
12	11	10	22000
13	12	8	19200
14	13	6	15600
15	14	4	11200
16	15	2	6000
17	16	0	0

(a) *Elección 1 de columnas.*

fx =A2*(32-2*A2)*200

	A	B
1	x	x*(32-2x)*200
2	1	6000
3	2	11200
4	3	15600
5	4	19200
6	5	22000
7	6	24000
8	7	25200
9	8	25600
10	9	25200
11	10	24000
12	11	22000
13	12	19200
14	13	15600
15	14	11200
16	15	6000
17	16	0
18		

(b) *Elección 2 de columnas.*

Figura 2.16: *Segundo paso para la resolución de la Actividad 10: Se señala el valor máximo del volumen, que se obtiene al doblar la chapa 8cm de cada lado.*

A los estudiantes que terminen antes del tiempo destinado, se los invitará a resolver el problema asumiendo que la canaleta tiene otra longitud. Un posible enfoque del problema es: cambiar el número 200 de la fórmula de la primera celda y volver a "copiar" esta fórmula mediante la función de "arrastre" del programa. Con 250, se obtendrá una tabla como la que se muestra en la figura 2.17.

fx =A2*(32-2*A2)*250

	A	B
1	x	x*(32-2x)*250
2	1	7500
3	2	14000
4	3	19500
5	4	24000
6	5	27500
7	6	30000
8	7	31500
9	8	32000
10	9	31500
11	10	30000
12	11	27500
13	12	24000
14	13	19500
15	14	14000
16	15	7500
17	16	0
18		

Figura 2.17: *Tercer paso para la resolución de la Actividad 10: Se vuelve a obtener que el valor máximo del volumen se consigue al doblar la chapa 8cm de cada lado.*

Se pedirá a los estudiantes que nos envíen sus archivos Excel por mail o los suban al aula virtual.

Puesta en común de la Actividad 10

Se expondrá la solución de alguno de los grupos, se pedirá que la expliquen. Se preguntará a los demás si hicieron algo distinto y se elegirá a otro grupo para que explique su solución.

En caso que los grupos que pasen a explicar no hayan probado con otra longitud para la canaleta, se utilizará una de las tablas para cambiar el valor que usaron, obteniendo al instante los nuevos valores de la tabla. Se hará notar que el máximo valor de volumen se encuentra siempre en la misma fila.

Se destinarán alrededor de 10 minutos para la puesta en común.

C- Cierre

El cierre se aprovechará para enfatizar algunas cuestiones:

- En cuanto a la forma de resolver el problema: Destacar la importancia de la utilización de tablas y, en particular, de la hoja de cálculo, ya que no utilizar la herramienta informática para realizar los cálculos automáticamente hubiera demandado mucho tiempo.
- En cuanto al problema en sí: Reflexionar sobre el dato de la longitud de la canaleta, que parecía faltar en una primera instancia, pero que, sin embargo, no era necesario para la resolución del problema. Además, resaltar lo útil que fue suponer, en un primer momento, que la longitud era 200cm, porque nos permitió avanzar.

2.2.3.2. Guion conjetural para la cuarta clase (80 minutos)

A-Saludo

Se pedirá nuevamente al preceptor que avise previamente a los alumnos para que se dirijan al laboratorio de informática, por lo que la clase se iniciará en ese lugar.

Para comenzar, saludaremos a los estudiantes y se seguirá la misma metodología para seleccionar a los alumnos que pasarán al oral.

El tiempo estimado para el saludo es de 5 minutos.

B- Oral y repaso

A los alumnos que pasarán al oral se les harán las siguientes preguntas:

1. ¿Qué vimos la clase pasada?

2. Planteen entre los dos la ecuación que representa el siguiente problema y resuélvanla diciendo que pr0piedad utilizan para pasar de un paso al otro.

En la primera pregunta, se espera que los alumnos respondan: *trabajamos con una tabla para resolver un problema de una canaleta y resolvimos ecuaciones*. Sobre el último tema, se repasará en el inciso 2). Para el primero, con el objetivo de recordar lo que se hizo, se realizarán preguntas del estilo de las siguientes: *¿Te acordás cómo era el enunciado del problema? ¿Qué habíamos acordado al principio sobre la longitud de la canaleta? ¿A qué te conviene designar como incógnita? ¿Cómo armaron la tabla (elección de columnas)? ¿Qué relación hay entre la cantidad de cm a doblar y el volumen de la canaleta? ¿Para qué sirvió el programa Microsoft Excel? ¿Dónde buscaron la respuesta al problema en la tabla? ¿Qué pasó cuando cambiamos el valor de la longitud de la canaleta?*

En la segunda parte del oral, se usará un afiche previamente realizado, con la siguiente consigna:

Un estanque rectangular tiene un perímetro de 784m. Calculen el área de la superficie, sabiendo que la base mide 104m más que la altura.

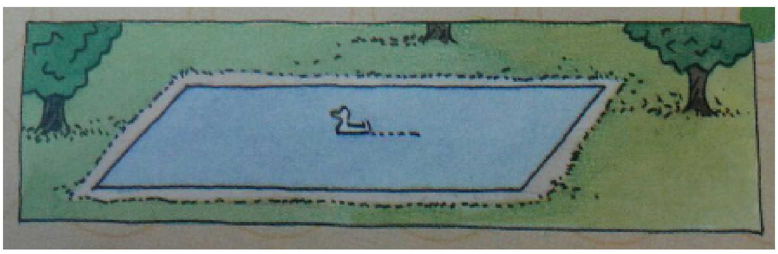


Figura 2.18: *Consigna del problema a trabajar durante la lección oral*

La idea es que los dos alumnos vayan explicando en voz alta y escribiendo en el afiche lo que se les ocurra acerca del problema. Es posible que ninguno de los dos recuerde cómo se calcula el área de un rectángulo. En ese caso, le preguntaremos al grupo clase y si ninguno lo dice, se explicitará.

También puede ocurrir que tengan dificultades con la elección de la incógnita o con el planteo y resolución de la ecuación, en ese caso se les preguntará: *¿cuáles son los datos que da el problema? ¿qué es lo que les pide calcular? ¿qué relación hay entre el perímetro y los lados del estanque? ¿y entre estos y el área del rectángulo? ¿cómo se resolvía este tipo de ecuaciones? ¿recuerdan qué decía la propiedad uniforme? ¿les ayuda eso a resolver esta ecuación?*

Se espera que los estudiantes planteen la siguiente ecuación:

$2.x + 2.(x + 104m) = 784m$

El tiempo estimado para el oral es de 15 minutos.

11. Problema de la escuela: Uso de tablas para plantear una ecuación

Actividad 11
Javier y Diego son vecinos, amigos y compañeros de escuela desde hace muchos años. Ellos viven a media cuadra de diferencia sobre la misma vereda. Todas las mañanas, a la misma hora, se asoman a las puertas de sus respectivas casas y compiten para ver quién llega primero al colegio. Diego es el que vive más lejos pero corre un poco más rápido y las carreras siempre son parejas.
Javier corre a 4m/s y Diego a 5m/s. Si siempre llegan juntos, ¿a qué distancia de la casa de Diego se encuentra la escuela?

Figura 2.19: *Consigna del problema correspondiente a la actividad 11*

El tiempo destinado para esta actividad será de 20 minutos

Ayuda durante el tiempo de la actividad

En este problema la dificultad radica en el planteo de la ecuación, ya que los alumnos probablemente no cuenten con los conocimientos necesarios de movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U), abordado normalmente en la materia física en 3° o 4° año. Es por esto que no se pretenderá que los alumnos comiencen planteando la ecuación sino que, aprovechando la herramienta de Microsoft Excel, se realice el camino inverso al que se hizo la clase anterior con la Actividad 10. Es decir, se espera que los alumnos, probando valores con el programa, logren llegar a la generalización de la fórmula y así poder despejar la ecuación (aunque ya tendrán el resultado en la tabla). Para esto, primero invitaremos a los alumnos a que realicen un dibujo de la situación planteada para ponerse en contexto. Un posible dibujo de esto se muestra en la figura 2.20

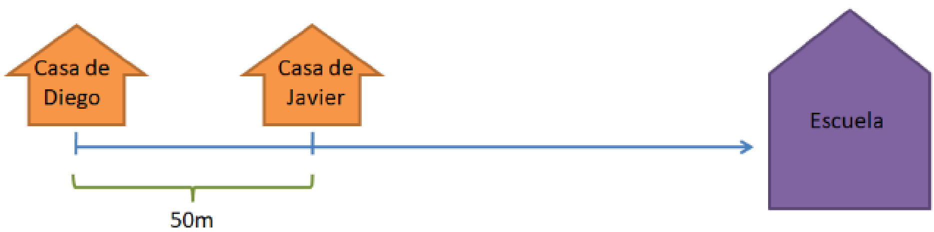
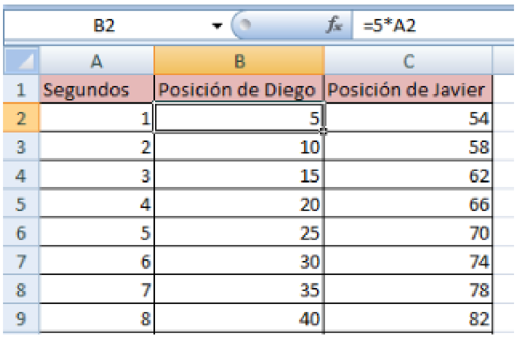


Figura 2.20: *Esquema esperado en la resolución de la actividad 11*

Luego, invitaremos a los alumnos a realizar algunos cálculos con sus compañeros en lápiz y papel. Si bien ellos no han visto nunca problemas de encuentro con M.R.U., se espera que noten que *cuando pasa un segundo, Javier avanza 4m y Diego 5m. Sin embargo, como Javier tiene 50m de ventaja, su posición será 50m+4m. Al cabo de dos segundos, Javier habrá avanzado 8m y Diego 10m, pero la posición de Javier será 8m+ 50m. Al cabo de tres segundos, Javier habrá avanzado 12m y Diego 15m, pero la posición de Javier será 12m+ 50m y así sucesivamente.* Si los alumnos manifiestan problemas en esta instancia, se harán, para guiarlos, preguntas como: *¿qué datos da el problema?; ¿qué pide que calculen?; ¿qué significa que lleguen juntos a la entrada de la escuela?; con los datos que tienen, ¿cuánto avanza cada uno en un segundo? ¿y en dos segundos?*

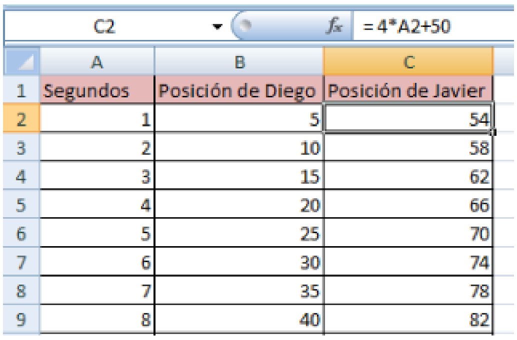
Se espera que, con esto, los alumnos tiendan a "probar" con varios números para ver cuándo las posiciones son iguales. En esta instancia, se los invitará a realizar nuevamente una tabla en Excel para poder dar solución al problema de forma más ágil. Pretendemos que, utilizando los conocimientos del programa que ya vieron la clase anterior, realicen una tabla como la que se muestra en la figura 2.21:



B2 =5*A2

	A	B	C
1	Segundos	Posición de Diego	Posición de Javier
2	1	5	54
3	2	10	58
4	3	15	62
5	4	20	66
6	5	25	70
7	6	30	74
8	7	35	78
9	8	40	82

(a) *Fórmula correspondiente a la posición de Diego.*



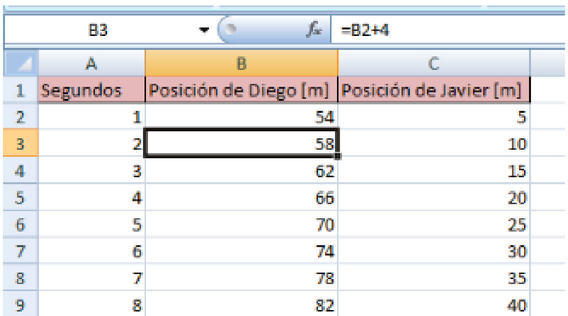
C2 = 4*A2+50

	A	B	C
1	Segundos	Posición de Diego	Posición de Javier
2	1	5	54
3	2	10	58
4	3	15	62
5	4	20	66
6	5	25	70
7	6	30	74
8	7	35	78
9	8	40	82

(b) *Fórmula correspondiente a la posición de Javier.*

Figura 2.21: *Confección de tabla para la resolución de la Actividad 11.*

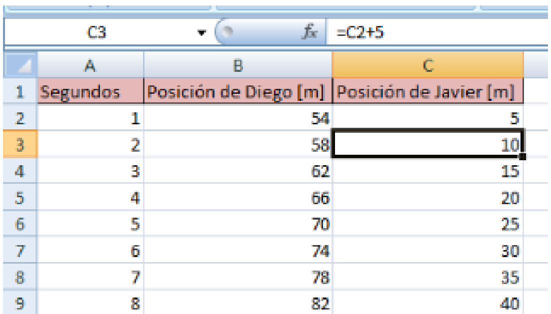
Sin embargo, se prevé también una segunda manera de armar la tabla, como se indica en la figura 2.22:



B3 =B2+4

	A	B	C
1	Segundos	Posición de Diego [m]	Posición de Javier [m]
2	1	54	5
3	2	58	10
4	3	62	15
5	4	66	20
6	5	70	25
7	6	74	30
8	7	78	35
9	8	82	40

(a) *Fórmula correspondiente a la posición de Diego.*



C3 =C2+5

	A	B	C
1	Segundos	Posición de Diego [m]	Posición de Javier [m]
2	1	54	5
3	2	58	10
4	3	62	15
5	4	66	20
6	5	70	25
7	6	74	30
8	7	78	35
9	8	82	40

(b) *Fórmula correspondiente a la posición de Javier.*

Figura 2.22: *Confección alternativa de tabla para la resolución de la Actividad 11.*

Usando la función de "arrastre" del programa, se espera que los estudiantes, en ambos casos, observen la solución en la fila 51 (es decir, en el segundo 50) de la tabla: en esta, las posiciones de Javier y Diego coinciden. De aquí, se deduce que la escuela se encuentra a 250m.

	A	B	C
1	Segundos	Posición de Diego [m]	Posición de Javier [m]
33	32	160	178
34	33	165	182
35	34	170	186
36	35	175	190
37	36	180	194
38	37	185	198
39	38	190	202
40	39	195	206
41	40	200	210
42	41	205	214
43	42	210	218
44	43	215	222
45	44	220	226
46	45	225	230
47	46	230	234
48	47	235	238
49	48	240	242
50	49	245	246
51	50	250	250
52	51	255	254
53	52	260	258
54	53	265	262
55	54	270	266
56	55	275	270

Hoja1 Hoja2 Hoja3

Listo

Figura 2.23: *Tabla para la resolución de la Actividad 11 con las celdas que contienen la solución resaltadas*

Puesta en común de la Actividad 11:

Para la puesta en común, utilizaremos el proyector, con el cual se irá mostrando la imagen de una planilla de Excel, la cual será completada de acuerdo a lo que los diferentes grupos expongan sobre lo que hicieron.

Se prevé que, dado que la clase anterior se trabajó utilizando este programa, el manejo del mismo no haya resultado novedoso ni dificultoso. Por esto, se espera que los estudiantes puedan obtener el resultado.

Dada la gran cantidad de grupos, es probable que ambas soluciones estén presentes en la puesta en común. Se tratará de reunirlas en dos grandes grupos, de acuerdo a la forma usada para completar la tabla.

Se tomará como punto de partida la segunda manera. A partir de ella, se tratará de llegar a la primera, relacionándolas. Para esto, se tomarán dos ejemplos. Primero, se preguntará *¿cómo calcularon en el programa la posición de Diego en 3 s?* Esperamos que los estudiantes respondan quee*s 5m más que la posición de Diego a los 2s, que a su vez es 5m más que la posición de Diego en el primer segundo*. Luego, se dirá *entonces, la posición de Diego a los 3s es* $(((5)+5)+5) = 3{,}5$. Se repetirá el proceso para la posición de Javier a los 3s, llegando a que es $(((50+4)+4)+4) = 50+3{,}4$. Luego, calcularemos de la misma manera las posiciones a los 5s. Se pretende que con esto los estudiantes puedan reconocer la regularidad (*siempre la posición de Javier es 50 más 4 por el* *número de fila en el que estoy en la tabla*), si no, se harán más ejemplos. Llegado este punto, retomaremos la primera manera prevista de llenado de la tabla para observar que la forma de cálculo de las posiciones es la misma y continuaremos con su análisis.

En esta forma, los alumnos ya habrán utilizado las ecuaciones de los movimientos de Diego y Javier en el llenado de la tabla. Sin embargo, lo más probable es que no tengan conciencia plena de ello. Por eso es que, luego de recoger soluciones de varios grupos diferentes en la puesta en común, se los invitará a observar la tabla construida de la primera manera e intentar plantear una ecuación generalizada de la situación problemática planteada. Luego de esto, se les pedirá que resuelvan la ecuación y que verifiquen que lo obtenido con el Excel es correcto.

El tiempo estimado para la puesta en común es de 35 minutos.

C-Cierre

Para finalizar la clase, se preguntará al grupo clase *¿para qué sirvió el programa Microsoft Excel en esta clase?* Es posible que respondan para encontrar la distancia de la escuela, para resolver el problema, para hacer las cuentas más rápido y sin equivocarnos. Todas estas respuestas serán consideradas correctas. Sin embargo, se enfatizará en que, *en este caso, si bien nos sirvió para hacer cálculos rápidamente y sin errores, al igual que en la clase anterior, esta vez nos permitió, también, plantear una ecuación que represente el problema.*

Para el cierre de la clase se prevén 5 minutos.

2.2.4. Cuarta etapa: Modelización Matemática

Esta etapa prevé un trabajo con problemas reales mediante un proceso de modelización matemática. El objetivo de esta propuesta es presentar problemas extramatemáticos para que los estudiantes transiten por un proceso de modelización matemática a través de: la selección de variables, la construcción de un modelo que represente adecuadamente la situación, la solución matemática del modelo mediante la resolución de una ecuación y la interpretación de resultados.

2.2.4.1. Guion conjetural para la quinta, sexta, séptima y octava clase

A- Saludo

Para comenzar, saludaremos a los estudiantes y se seguirá la misma metodología para seleccionar a los alumnos que pasarán al oral.

El tiempo estimado para el saludo es de 5 minutos.

B-Evaluación Oral y repaso de contenidos de la clase anterior

A los alumnos que pasarán al oral se les hará las siguientes preguntas:

1. ¿Qué vimos la clase pasada?
2. ¿Cúal era el problema que queríamos resolver?
3. ¿De qué forma nos ayudó la tabla?

12. Trabajo con problemas desde un proceso de Modelización Matemática

Para trabajar los problemas de modelización, se pedirá a los alumnos que se dividan en cuatro grupos (de cinco o seis integrantes) y se les aclarará que, durante esta clase y la siguiente, se espera que den alguna solución o forma de abordar el problema que les plantearemos, utilizando los elementos vistos durante el desarrollo de la unidad. En la penúltima clase, se dedicará tiempo para la preparación de la presentación oral que tendrá lugar durante la última clase con carácter de trabajo práctico expositivo. De dicha exposición, más el trabajo que se ha observado de cada uno, resultará la nota de este mes.

A cada grupo se le dará una de las siguientes actividades:

Actividad 12
A continuación se propone una situación problemática que deberán plantear e intentar resolver trabajando en grupo y poniendo en práctica una o más de las herramientas utilizadas durante el transcurso de esta unidad.

Grupo 1: Corriendo bajo la lluvia
Si me encuentro en la ciudad de Córdoba y comienza a llover, *¿qué me conviene para mojarme menos? ¿caminar o correr hacia un refugio?*

Grupo 2: Carrera contra el hombre más veloz de todos los tiempos
El famoso corredor Usain Bolt se enfrenta en una carrera contra dos animales, uno más rápido que él y otro más lento. Para que la carrera sea más pareja, acordaron que: Bolt partiría desde la línea de salida, el animal lento 2km después de la línea y el animal rápido 2km antes de la misma. *¿En qué momento Bolt está en primer lugar de la carrera? ¿Y en segundo lugar? ¿Y en último lugar?*
Nota: Los animales son a elección de ustedes.

Grupo 3: Juntando gotas para llenar el dique
Es el año 1995. El dique San Roque registra su más bajo nivel de agua. En Córdoba, hay muchas canillas que gotean y desperdician agua. *¿En cuanto tiempo el agua desperdiciada por el goteo de canillas hubiera llenado el dique San Roque?*

Grupo 4: Ahorrando plata para comprar gomas
Existen muchas marcas de goma de borrar y se quiere saber cuál es la que conviene comprar. *¿Qué goma de borrar puedo usar más veces?*

Figura 2.24: *Consigna correspondiente a la Actividad 12*

A continuación, presentaremos una breve descripción de posibles abordajes de cada problema, utilizando lo trabajado en las clases anteriores.

MM 1: Corriendo bajo la lluvia

En primer lugar, se podría buscar información acerca de los mm/s que llueven en promedio en la ciudad de Córdoba. Este valor se calcula en $1m^2$, es decir, es la cantidad de mm por segundo que caen dentro de un metro cuadrado. Entonces, hay que pasar este dato a la cantidad de mm/s que caen en un cuadrado del tamaño de mi cabeza haciendo regla de tres o una tabla.

	A	B	C
1	velocidad	t=d/v	mm de agua en mi cabeza
2	1	100	50
3	2	50	25
4	3	33.3333333	16.66666667
5	4	25	12.5
6	5	20	10
7	6	16.6666667	8.333333333
8	7	14.2857143	7.142857143
9	8	12.5	6.25
10	9	11.1111111	5.555555556
11	10	10	5
12	11	9.09090909	4.545454545
13			

Figura 2.25: *Tabla para la resolución del problema de modelización 1*

Si se supone que la distancia al refugio es conocida, puedo calcular el tiempo t, durante el cual voy a estar expuesto a la lluvia. Multiplicando este tiempo por los mm/s de agua que caen sobre mi cabeza, puedo conocer qué cantidad de agua cae sobre mí en ese tiempo, por lo tanto, puedo saber cuánto me voy a mojar.

MM2: Carrera contra el hombre más veloz de todos los tiempos

En primer lugar, se deben elegir los animales que correrán contra Bolt. Luego, deben averiguarse las velocidades promedio a las que corren cada uno. Aquí presentamos un ejemplo:

- Bolt: 43,9km/h.
- Guepardo: 110km/h
- Tortuga: 4,8km/h

Luego de esto, puede construirse una tabla como la que se realizó en la Actividad 11 (de encuentro entre Diego y Javier) para calcular las posiciones de cada uno hora por hora (o segundo por segundo, de acuerdo a las unidades que hayan elegido para la velocidad).

La confección de la tabla puede servir de ayuda para escribir las ecuaciones de encuentro entre cada uno, obteniendo algo como lo siguiente:

- Ecuación del encuentro guepardo-Bolt:

$$t{,}43,9km/h = t{,}110km/h - 2km$$
$$t = 0,03h$$

- Ecuación del encuentro tortuga-Bolt:

$$t{,}43,9km/h = t{,}4,8km/h + 2km$$
$$t = 0,05h$$

<u>Respuesta</u>: Bolt comienza siendo el segundo de la carrera y empieza a ser último a las 0,03h=1,82s. Vuelve a ser segundo luego de pasar a la tortuga a las 0,05h=30s.

MM3: Juntando gotas para llenar el dique

Para dar respuesta a este problema, puede realizarse un pequeño experimento en el cual se medirá cuánto volumen de agua se pierde en una canilla que gotea en un tiempo determinado. Por ejemplo, se puede ver que, en 10 minutos, se desperdician $110cm^3$ de agua en una canilla que gotea.

- En un minuto, se desperdician $11cm^3$.
- En una hora, $660cm^3$.
- En un dia, $15840cm^3$.

Ahora, debemos estimar la cantidad de canillas que hay en la ciudad de Córdoba. Si decimos que hay aproximadamente una por habitante, y que de ellas la décima parte gotea, entonces se tiene que:

- 2.766.683 habitantes en la provincia de Córdoba según el censo de 1991.
- Por lo tanto,supondremos que hay 276.668 canillas que gotean.

Entonces, en un día en Córdoba se desperdicia:

$$276{,}668 \cdot 15840 = 4{,}382{,}421{,}120cm^3 = 4382,42m^3. \tag{2.1}$$

Ahora debemos comparar este número con el volumen del dique San Roque, cuya superficie es de $16km^2 = 16{,}000{,}000m^2$. En 1995, bajó 24 metros y si asumimos que tiene forma de prisma (para simplificar), entonces, bajó $24 \cdot 16{,}000{,}000 = 384{,}000{,}000m^3$.

Ecuación:

$$\begin{aligned} t \cdot 4382,42 &= 384{,}000{,}000 \\ t &= 87622,82\text{días} \\ t &= 240\text{años} \end{aligned}$$

Respuesta: En 240 años, el agua desperdiciada por goteo de canillas hubiera llenado el dique. Podría modificarse la fracción de canillas que gotean y ver cómo este número se modifica.

MM 4: Ahorrando plata para comprar gomas

Para comenzar, se les dará a los alumnos tres gomas de borrar de diferentes marcas y características y también se les facilitará una balanza de precisión. Se espera que ellos puedan comparar el peso inicial de la goma (antes de utilizarla) con el peso luego de borrar (deberán borrar con cada goma la misma cantidad, por ejemplo una página completa. Así, se pretende que puedan armar una ecuación que les permita conocer la cantidad de veces que es posible utilizar cada una de las gomas, del estilo:

$$masa_{inicial} = masa_{final} \cdot veces + masa_{desperdiciada} \tag{2.2}$$

Donde la masa desperdiciada es la que corresponde al último trozo de goma que no puede utilizarse debido a su tamaño pequeño.

Se espera que los estudiantes trabajen en grupos con estos problemas durante la quinta y sexta clase y apliquen, para resolverlos, alguna o varias de las herramientas trabajadas en el transcurso de esta unidad. Durante la séptima clase, se pretende que se dediquen a preparar el material necesario para la exposición oral del trabajo que se realizará durante la octava clase. Para esto podrán utilizar afiches, PowerPoint, Prezi o cualquier otro soporte o elemento que acompañe su presentación.

En la última clase, cada grupo expondrá el problema que le fue asignado y explicará a sus compañeros la forma en la que lo resolvió. Los otros estudiantes podrán realizar preguntas luego de cada exposición para favorecer la dinámica de la clase. A cada alumno se le asignará una nota acorde al trabajo individual que se haya observado, al desarrollo de su proyecto de modelización y a la exposición oral.

2.3. Actividades efectivamente realizadas

En esta etapa se presentan varios cuadros que sintetizan las clases efectivamente dictadas durante las prácticas profesionales docentes (las cuales no coinciden exactamente con las clases planificadas). Después de los cuadros, se amplía brevemente lo que se llevó a cabo en cada una de dichas clases.

Estas son algunas referencias necesarias para la interpretación de los cuadros:

- **HC 1**: Primera hora cátedra del curso correspondiente (del mismo modo, HC 2 hace referencia a la segunda hora cátedra y así sucesivamente).
- **Act 1**: Actividad 1 (relativa a 1°A o a 1°B).
- **PC 1**: Puesta en común de la Actividad 1.

Aclaración: 1°A y 1°B tienen numeraciones de horas cátedra y de actividades independientes una de la otra.

1° semana

Nº de horas cátedra	Martes 25/07	Miércoles 26/07	Jueves 27/07
2			**1° A HC 4 y 5:** Act 4, PC4, Act 5
	Recreo		
2			
	Recreo		
1	**1° A HC 1:** Historia, Act 1, PC1	**1° B HC 4 y 5:** Act 4, PC4, Act 5	
1	**1° B HC 1:** Historia, Act 1, PC1		
	Recreo		
2	**1° B HC 2 y 3:** Act 2, PC2, Act 3, PC3	**1° A HC 2 y 3:** Act 2, PC2, Act 3, PC3	

Figura 2.26: *Cronograma para la primera semana de clases*

2° semana

Nº de horas cátedra	Martes 01/08	Miércoles 02/08	Jueves 03/08
2			**1° A HC 8 y 9:** Cuadro lenguaje simbólico, Act 7
	Recreo		
2			
	Recreo		
1	**Taller docente**	**1° B HC 6 y 7:** PC5, Act 6, PC6	
1	**Taller docente**		
	Recreo		
2	**Taller docente**	**1° A HC 6 y 7:** PC5, Act 6, PC6	

Figura 2.27: *Cronograma para la segunda semana de clases*

3° semana

Nº de horas cátedra	Martes 08/08	Miércoles 09/08	Jueves 10/08
2			**1° A HC 13 y 14:** PC9, Act 10, Act 11
	Recreo		
2			
	Recreo		
1	**1° A HC 10:** Ejemplo 1, Act 8	**1° B HC 11 y 12:** Act 8, PC8, cuadro lenguaje simbólico, Act 9	
1	**1° B HC 8:** Ejemplo 1		
	Recreo		
2	**1° B HC 9 y 10:** Act 7, PC7, Ejemplo 2	**1° A HC 11 y 12:** PC8, Ejemplo 2, Act 9	

Figura 2.28: *Cronograma para la tercera semana de clases*

4° semana

Nº de horas cátedra	Martes 15/08	Miércoles 16/08	Jueves 17/08
2			**1° A HC 18 y19:** Act 13
	Recreo		
1			
1		**1° A HC 15:** PC10, PC11	
	Recreo		
1		**1° B HC 16 Y 17:** Act 11	
1	**1° B HC 13:** PC9		
	Recreo		
2	**1° B HC 14 y 15:** Act 10, Act 11	**1° A HC 16 y 17:** Act 12	

Figura 2.29: *Cronograma para la cuarta semana de clases*

5° semana

N° de horas cátedra	Martes 22/08	Miércoles 23/08	Jueves 24/08
2			
	Recreo		
1			
1		**1° A HC 20:** Evaluación: ecuaciones	
	Recreo		
1			
1	**1° B HC 18:** Evaluación: ecuaciones		
	Recreo		
2	**1° B HC 19 y 20:** Evaluación: Excel y balanza	**1° A HC 21 y 22:** Evaluación: Excel y balanza	

Figura 2.30: *Cronograma para la quinta semana de clases*

A continuación, se muestra una breve descripción de lo realizado en el periodo de prácticas.

Horas cátedra 1, 2 y 3 de 1°A y 1°B

Se desarrolló tal cual se había planificado en el primer guion conjetural, que consistía en: Historia de la balanza de platillos, Actividad 1 (sobre igualdad numérica usando balanzas), Actividad 2 (sobre encontrar el valor de una masa desconocida), y Actividad 3 (de introducción a la propiedad uniforme de la suma y de la resta usando balanzas).

El único cambio respecto a esta clase fue que para la puesta en común de la Actividad 1 se decidió utilizar el pizarrón en vez del proyector.

Horas cátedra 4 y 5 de 1°A y 1°B

Transcurrieron de acuerdo a lo previsto en el segundo guion conjetural, que consistía en: Actividad 4 (sobre la propiedad uniforme: de la suma, resta, multiplicación y división, representadas en una balanza de platillos), Actividad 5 (introductoria para la escritura de ecuaciones a partir del dibujo de una balanza) y Actividad 6 (escritura y resolución de ecuaciones paso a paso a partir del dibujo de balanzas). Sin embargo, por cuestiones de tiempo, se dejó la puesta en común de la Actividad 5 y el desarrollo de la Actividad 6 para la siguiente clase.

Horas cátedra 6 y 7 de 1°A y 1°B

La instancia de evaluación oral se modificó respecto a lo planificado y, en su lugar, las preguntas que se hicieron fueron orientadas a recuperar la propiedad uniforme, abordada en la Actividad 4. La consigna fue:

Dibujen en el pizarrón balanzas que ilustren una propiedad uniforme.

Luego, se continuó con las actividades planificadas en el guion conjetural para la segunda clase, es decir, se retomó la Actividad 5 realizando su puesta en común y se realizó la Actividad 6 (escritura y resolución de ecuaciones paso a paso a partir del dibujo de balanzas) con su respectiva corrección en forma de exposición dialogada.

Horas cátedra 8 y 9 de 1°A

En la exposición oral, se construyó, junto con los alumnos que estaban al frente, el cuadro que relaciona el lenguaje simbólico con el coloquial que aparece en el cierre del segundo guion conjetural. Luego, se prosiguió a dar las consignas de la Actividad 7 (de resolución de ecuaciones con lápiz y papel), que figura en el guion conjetural de la tercera clase, modificando la forma de trabajo de individual a en grupos de a dos.

Durante el transcurso de esta actividad, los estudiantes manifestaron serias dificultades para comenzar con la resolución de la primera ecuación. Ante esta situación, después de alrededor de quince minutos, se decidió resolver la primera ecuación en el pizarrón, a modo de ejemplo. Esto se hizo mediante una exposición dialogada en la cual se hacía referencia a las propiedades uniformes en el contexto de una balanza de platillos. En el pizarrón, quedó escrito lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
3.z + 20 &= 2.z + 90 & \\
3.z + 20 - 20 &= 2.z + 90 - 20 & \text{Propiedad uniforme de la resta} \\
3.z &= 2.z + 70 & \\
3.z - z &= 2.z + 70 - z & \text{Propiedad uniforme de la resta} \\
2.z &= 1.z + 70 & \\
2.z - z &= 1.z + 70 - z & \text{Propiedad uniforme de la resta} \\
z &= 70 &
\end{aligned}
$$

Al finalizar el módulo, se les pidió a los estudiantes que copiaran la resolución en sus carpetas y entregaran las hojas de lo trabajado en la Actividad 7, aclarando que no se les pondría nota. Por falta de tiempo, no se pudo dar espacio para que los alumnos trataran de rever la actividad luego de la exposición.

Cuando se revisó lo entregado por los estudiantes, se pudo notar que muchos de ellos no habían podido resolver las ecuaciones propuestas y sólo habían intentado hacerlo con la primera. A partir de esto, se decidió rediseñar la clase 4 de 1°B, realizando una reformulación de la presentación del tema, para evitar las mismas dificultades y lograr una transición más paulatina hacia la resolución de ecuaciones con lápiz y papel. Se decidió hacer exposiciones dialogadas sobre ejemplos de resolución de ecuaciones, antes de pedirles a los estudiantes que lo hagan de forma independiente. También se optó por desplegar la resolución de ecuaciones en dos etapas: primero, con todos los términos positivos y, después, con algunos negativos. Se realizó en este orden porque la relación entre la referencia a la balanza y la resolución de una ecuación con términos todos positivos era más directa.

Para mejor comprensión del lector, se presentarán las clases restantes correspondientes a 1°B y, luego, las de 1°A.

1°B

Horas cátedra 8, 9 y 10 de 1°B

En la exposición oral, se tomaron los primeros dos puntos planificados en el tercer guion conjetural, que consitían en resolver una ecuación planteada con el dibujo de una balanza. Durante esta instancia, se esbozaron las balanzas y se escribieron las ecuaciones correspondientes a los pasos para resolver la actividad propuesta. Se ayudó a las alumnas que estaban al frente a que escriban los “pasos intermedios” de la resolución, quedando escrito en el pizarrón lo siguiente[5]:

$$
\begin{aligned}
y + y + 60g + 40g &= y + y + y + 40g \\
60g + 40g + y + y - y - y &= 40g + y + y + y - y - y \\
60g + 40g &= 40g + y + y \\
60g + 40g - 40g &= y + y + 40g - 40g \\
60g &= y + y \\
60g : 2 &= (y + y) : 2 \\
30g &= y
\end{aligned}
$$

Luego, se explicó, en forma de exposición dialogada, un ejemplo de resolución de una ecuación en la cual todos los términos eran positivos. Esto se realizó en el pizarrón bajo el título:

Ejemplo 1: resolución de una ecuación

$$
\begin{aligned}
4.z + 20 &= 2.z + 96 \\
4.z + 20 - 2.z &= 2.z + 96 - 2.z \qquad \text{Propiedad uniforme de la resta} \\
2.z + 20 &= 96 \\
2.z + 20 - 20 &= 96 - 20 \qquad \text{Propiedad uniforme de la resta} \\
2.z &= 76 \\
2.z : 2 &= 76 : 2 \qquad \text{Propiedad uniforme de la división} \\
z &= 38
\end{aligned}
$$

En todo momento se hizo referencia a las actividades realizadas con balanzas para explicar las operaciones efectuadas al despejar la incógnita. Se observó que, antes estas alusiones, los alumnos respondían positivamente. Se les dijo a los estudiantes que copiaran el ejemplo en sus carpetas y se les dio la consigna de la Actividad 7 (reformulada), que aparece en la figura A.8, indicándoles que se agruparan de a dos.

Actividad 7

Resuelvan las siguientes ecuaciones

a) 3.x+64=106

b) 35.y+52+13=33.y+95

Figura 2.31: *Actividad 7, de resolución de ecuaciones.*

Después, se procedió a realizar la puesta en común. Se les pidió a dos alumnas que pasaran al pizarrón a escribir lo que habían hecho en sus carpetas y explicarlo. Se dividió el pizarrón en dos partes para que pudieran escribir en simultáneo ambas resoluciones. Estas fueron acordes a

[5] por cuestiones de espacio, no se transcribieron los dibujos

las resoluciones esperadas.

Luego de la puesta en común, se continuó la clase con otro ejemplo de resolución de una ecuación. Esta vez, uno de sus términos era negativo. Esto se realizó en el pizarrón bajo el título:

Ejemplo 2: resolución de una ecuación

$$\begin{aligned}
2x-73&=115 \\
2x-73+73&=115+73 && \text{Propiedad uniforme de la suma} \\
2x&=188 \\
2x:2&=188:2 && \text{Propiedad uniforme de la división} \\
x&=94
\end{aligned}$$

En el primer paso, se preguntó a los alumnos qué operación debía realizarse para "quitar" el -73. Una de las alumnas respondió restar 73 y otra, sumar 73. Ante esto, se realizó la siguiente cuenta auxiliar en el lado derecho de la pizarra junto con los estudiantes:

$$\begin{aligned}
-73-73&=-146 \\
-73+73&=0
\end{aligned}$$

Se les pidió a los alumnos que entregaran lo realizado en la Actividad 7. Se observó que las resoluciones eran, en su mayoría, correctas.

<u>Horas cátedra 11 y 12 de 1°B</u>

Se comenzó repitiendo el ejemplo 2 de resolución de una ecuación, escribiéndolo en el pizarrón en forma de exposición dialogada. Luego de esto, se dio la consigna de la Actividad 8 (de 1°B), correspondiente a resolución de ecuaciones con términos negativos.

Actividad 8
Resuelve las siguientes ecuaciones
a) 11=4.x-33
b) 6.y-24=2.y
c) 3.z-13=71-z

Figura 2.32: *Actividad 8, de resolución de ecuaciones.*

Se dio tiempo para que los alumnos la resolvieran de forma individual o de a dos. Luego, se realizó la puesta en común, dividiendo el pizarrón en tres partes e invitando a tres estudiantes a explicar lo que hicieron.

Las primeras dos ecuaciones las resolvieron acorde a lo esperado. En la tercera, la alumna escribió:

$$3.z - 13 = 71 - z$$
$$3.z - 13 + 13 = 71 - z + 13$$
$$3.z = 84 - z$$
$$3.z - z = 84 - z + z$$
$$2.z = 84$$
$$2.z : 2 = 84 : 2$$
$$z = 42$$

Durante la explicación de esta estudiante, al llegar al cuarto renglón, se recuperó la propiedad uniforme de la suma en una balanza preguntándole al grupo clase sobre esto. De esta forma, la alumna notó que se había equivocado y lo corrigió.

Después de esta puesta en común, se trabajó con la tabla referente a la relación entre lenguaje coloquial y simbólico, levemente modificada, a partir de lo que se observó durante el trabajo con la misma en 1°A. Esta se escribió en el pizarrón pidiendo a los estudiantes que no la copiaran y preguntándoles sobre cómo completarla. En el pizarrón, quedó escrito lo que se muestra a continuación (a excepción de la columna gris) y se procedió a entregar a los alumnos una fotocopia con esta tabla pero con la cuarta columna vacía. Se les indicó que la completaran con lo que se había escrito en la pizarra.

Acción en la balanza	**Operación**	**Lenguaje simbólico**	**Ejemplo**	**Lenguaje coloquial**
Agregar masas equivalentes en ambos platillos	Suma	+		Un número aumentado en…
Quitar masas equivalentes en ambos platillos	Resta	-		Un número disminuido en… La diferencia entre…
Duplicar... Triplicar... Cuadriplicar… ...las masas de cada platillo	Multiplicación	.2 .3 .4		El doble de... El triple de... El cuádruple de... ...
La mitad... La tercera parte... La cuarta parte... ...de las masas de cada platillo	División	:2 :3 :4		La mitad de... La tercera parte de... La cuarta parte de... ...

Figura 2.33: *Tabla de relación entre acción en la balanza, lenguaje simbólico y lenguaje coloquial*

Finalmente, se dictó una nueva actividad:

Actividad 9
Cuatro amigos fueron al cine, entregaron en boletería dos billetes de $500 y recibieron $300 de vuelto. ¿Cuánto costaba la entrada?

Figura 2.34

Se indicó a los estudiantes que pensaran el problema para la clase siguiente.

En este momento de las prácticas, al ver que el trabajo en la resolución de ecuaciones con lápiz y papel había llevado mucho más tiempo que lo previsto en la planificación inicial, se decidió quitar la última etapa (Modelización Matemática) y reformular la etapa 3 (Tablas en Microsoft Excel). Esta modificación consistió en: agregar una actividad de introducción al uso del programa mediante un problema enmarcado en un contexto de semirrealidad, sacar el problema de la canaleta (Actividad 10 del tercer guion conjetural) y reorganizar las demás actividades. Al no trabajar con Modelización Matemática, se debió cambiar la forma de evaluación planificada, pasando a ser una evaluación escrita con tres partes: una sobre las propiedades uniformes ejemplificadas con balanzas, otra de resolución de ecuaciones con lápiz y papel y otra de confección de tablas en Microsoft Excel para el planteo de una ecuación.[6]

Horas cátedra 13, 14 y 15 de 1°B

Se comenzó por tomar el oral a dos estudiantes que pasaron al frente. Se les pidió que resolvieran la siguiente ecuación conjuntamente: $8.t - 16 = 3.t + 89$. Luego, se realizó la puesta en común del problema del cine (Actividad 9). Una alumna pasó a la pizarra y escribió la siguiente ecuación: $700 = 4.x$

Después, se comenzó con el trabajo con la Actividad 10. Para esto, se dictó a los estudiantes la siguiente consigna:

Actividad 10
Ismael tiene que sacar fotocopias de un libro y no sabe si los $138,25 le alcanzan para hacerlo completo. Si el anillado tiene un costo de $17 pesos y cada hoja fotocopiada cuesta $1,8 ¿cuántas hojas puede sacar Ismael?

Figura 2.35

Se dio un tiempo para que los alumnos pensaran el problema.

Se pidió a los estudiantes que, luego del recreo, se dirigieran al Laboratorio de ciencias, en donde se les entregó una computadora a cada grupo de dos alumnos. Luego, se comenzó con una exposición dialogada utilizando el proyector conectado a una computadora, con el fin de explicar las herramientas del programa Microsoft Excel y, a la vez, resolver la actividad. Para esto, se realizaron los siguientes pasos:

Aclaraciones de Excel

- Paso 0: Vamos a hacer una tabla para resolver el problema: *¿cómo la podemos hacer? ¿qué datos tenemos? ¿qué información desconocemos? ¿cuál es la incógnita?*

[6]Para más información sobre la evaluación, ver capítulo 2, sección 2.4

- Paso 1: Se deslizaron las celdas para completar la primera columna: 1,2,3, ...
- Paso 2: Se construyó la segunda columna como se puede ver en la figura 2.36 . Se aclaró que para que el programa haga una cuenta/operación, hay que poner el signo igual (=) antes y que el símbolo de la multiplicación se escribe *.

fx =A2*1.8

	A	B
1	cantidad de hojas	costo hojas fotocopiadas
2	1	1.8
3	2	3.6
4	3	5.4
5	4	7.2
6	5	9
7	6	10.8
8	7	12.6
9	8	14.4
10	9	16.2
11	10	18
12	11	19.8

Figura 2.36: *Paso 2: Tabla en Microsoft Excel para la resolución de la Actividad 10*

- Paso 3: Se construyó la tercera columna:

fx =B2+17

	A	B	C
1	cantidad de hojas	costo hojas fotocopiadas	costo total (con el anillado)
2	1	1.8	18.8
3	2	3.6	20.6
4	3	5.4	22.4
5	4	7.2	24.2
6	5	9	26
7	6	10.8	27.8
8	7	12.6	29.6
9	8	14.4	31.4
10	9	16.2	33.2
11	10	18	35

Figura 2.37: *Paso 3: Tabla en Microsoft Excel para la resolución de la Actividad 10*

- Paso 4: Se buscó el resultado en la tabla:

fx =B68+17

	A	B	C
54	53	95.4	112.4
55	54	97.2	114.2
56	55	99	116
57	56	100.8	117.8
58	57	102.6	119.6
59	58	104.4	121.4
60	59	106.2	123.2
61	60	108	125
62	61	109.8	126.8
63	62	111.6	128.6
64	63	113.4	130.4
65	64	115.2	132.2
66	65	117	134
67	66	118.8	135.8
68	67	120.6	137.6
69	68	122.4	139.4
70	69	124.2	141.2
71	70	126	143

Figura 2.38: *Paso 4: Tabla en Microsoft Excel para la resolución de la Actividad 10*

- Paso 5: Se construyó la quinta columna:

fx =A2*1.8+17

	A	B	C	D	E
1	cantidad de hojas	costo hojas fotocopiadas	costo total (con el anillado)		costo total (con el anillado)
2	1	1.8	18.8		18.8
3	2	3.6	20.6		20.6
4	3	5.4	22.4		22.4
5	4	7.2	24.2		24.2
6	5	9	26		26
7	6	10.8	27.8		27.8
8	7	12.6	29.6		29.6
9	8	14.4	31.4		31.4
10	9	16.2	33.2		33.2
11	10	18	35		35
12	11	19.8	36.8		36.8
13	12	21.6	38.6		38.6
14	13	23.4	40.4		40.4
15	14	25.2	42.2		42.2
16	15	27	44		44
17	16	28.8	45.8		45.8
18	17	30.6	47.6		47.6

Figura 2.39: *Paso 5: Tabla en Microsoft Excel para la resolución de la Actividad 10*

- Paso 6: Se escribió, debajo de cada columna, lo que cada una representaba en lenguaje simbólico:

	A	B	C
62	61	109.8	126.8
63	62	111.6	128.6
64	63	113.4	130.4
65	64	115.2	132.2
66	65	117	134
67	66	118.8	135.8
68	67	120.6	137.6
69	68	122.4	139.4
70	69	124.2	141.2
71	70	126	143
72			
73	h	1,8.h	1,8.h+17
74			
75			

Figura 2.40: *Paso 6: Tabla en Microsoft Excel para la resolución de la Actividad 10*

Se fue alternando el trabajo de los alumnos con las computadoras y la exposición dialogada con el proyector.

Luego de que los estudiantes terminaron la actividad, se procedió a entregar la fotocopia de la siguiente, cuyo enunciado era:

Actividad 11

Lean la siguiente situación problemática:

El famoso corredor Usain Bolt se enfrenta en una carrera contra dos animales: el caballo, más rápido que él y el hipopótamo, más lento. Para que la carrera sea más pareja, acordaron que: Bolt partiría de la línea de salida, el hipopótamo tendría 50m de ventaja y el caballo partiría 50m por detrás de Bolt.

¿En qué momento Bolt está en primer lugar de la carrera? ¿Y en segundo lugar? ¿Y en último lugar?

Velocidad caballo: 19m/s
Velocidad Bolt: 10m/s
Velocidad hipopótamo: 8m/s

a) Realicen un dibujo esquemático de la situación
b) ¿Se les ocurre una forma de resolver el problema usando Microsoft Excel?

Figura 2.41

Esta actividad se resolvió junto a los estudiantes de la misma manera que la anterior, alternando exposición dialogada con el trabajo en grupos de a dos con la computadora, realizando los siguientes pasos:

- Paso 1: Se definieron las columnas

- Paso 2: Se construyó la primera columna, deslizando las celdas.
- Paso 3: Se completó la columna correspondiente a Bolt.
- Paso 4: Se rellenó la columna correspondiente al hipopótamo.
- Paso 5: Se buscó el punto de encuentro entre el hipopótamo y Bolt en la tabla, como se muestra en la figura 2.42.

fx =A26*8+50

	A	B	C	D
10	9	121	90	122
11	10	140	100	130
12	11	159	110	138
13	12	178	120	146
14	13	197	130	154
15	14	216	140	162
16	15	235	150	170
17	16	254	160	178
18	17	273	170	186
19	18	292	180	194
20	19	311	190	202
21	20	330	200	210
22	21	349	210	218
23	22	368	220	226
24	23	387	230	234
25	24	406	240	242
26	25	425	250	250
27	26	444	260	258

Figura 2.42: *Tabla en Microsoft Excel para la resolución de la Actividad 11*

Horas cátedra 16 y 17 de 1°B

Esta clase se desarrolló en una de las salas de computación. Al inicio, se repasó lo realizado en la clase anterior, armando nuevamente la tabla en Microsoft Excel haciendo uso de un proyector conectado a una computadora. En función del trabajo y el comportamiento de los estudiantes durante la clase anterior, se armaron previamente los grupos de a dos personas (es decir, no se eligieron libremente). Además, se cambió la metodología de trabajo: primero se realizó la exposición dialogada y luego se les dio tiempo a los estudiantes para que trabajaran con las computadoras.

La exposición dialogada consistió en:

- Armar un dibujo esquemático de la situación;
- Reconstruir la tabla realizada la clase anterior;
- Completar la columna correspondiente al caballo;
- Buscar en la tabla el momento en el cual el caballo pasa a Bolt, como se muestra en la figura 2.43.
- Plantear ecuación de encuentro entre Bolt y el hipopótamo y resolverla:
  $10.t = 50 + 8.t$

fx =A7*19-50

	A	B	C	D
1	tiempo	caballo	bolt	hipopotamo
2	1	-31	10	58
3	2	-12	20	66
4	3	7	30	74
5	4	26	40	82
6	5	45	50	90
7	6	64	60	98
8	7	83	70	106
9	8	102	80	114
10	9	121	90	122

Figura 2.43: *Tabla en Microsoft Excel para la resolución de la Actividad 11*

- Plantear ecuación de encuentro entre Bolt y el caballo y resolverla:
  $10.m = -50 + 19.m$

Luego de dar tiempo a los alumnos para que realizaran ellos mismos la tabla, se recuperó de las computadoras el archivo correspondiente a cada grupo, para su posterior corrección.

Se pudo ver en los documentos que todos los estudiantes habían logrado realizar la actividad exitosamente.

Horas cátedra 18, 19 y 20 de 1°B

Se tomó la evaluación escrita.

1°A

Hora cátedra 10 de 1° A

Se comenzó entregando las hojas que se les había pedido a los alumnos la clase anterior. Luego, se procedió a explicar, en forma de exposición dialogada, un ejemplo de resolución de una ecuación en la cual todos los términos eran positivos. Esto se realizó en el pizarrón bajo el título:

Ejemplo 1: resolución de una ecuación

$$
\begin{aligned}
4.z + 44 &= 96 \\
4.z + 44 - 44 &= 96 - 44 \quad \text{Propiedad uniforme de la resta} \\
4.z &= 52 \\
4.z : 4 &= 52 : 4 \quad \text{Propiedad uniforme de la división} \\
z &= 13
\end{aligned}
$$

En este caso, también se hizo referencia a las actividades realizadas con balanzas en clases anteriores. Se les indicó a los estudiantes que copiaran el ejemplo en sus carpetas y se les dio la consigna de la Actividad 8 (que no es la misma que en la planificación inicial), señalándoles que se agruparan de a dos. Esta consigna es la misma que la de la Actividad 7 de 1°B (resolución de ecuaciones con todos sus términos positivos).

Hacia el final de la clase, después de haberles dado un tiempo para que resolvieran las ecuaciones, se pidió a los estudiantes que entegaran las hojas con lo que habían realizado.

Se observó que la mayoría de los alumnos había realizado correctamente el primer apartado y, en cuanto al segundo, muy pocos habían tenido el tiempo suficiente para realizarlo. Además, se notó que tres estudiantes resolvieron las ecuaciones hallando el valor de la incógnita mentalmente.

Horas cátedra 11 y 12 de 1°A

A partir de lo observado en las hojas que los alumnos entregaron la clase anterior, se decidió dividir a los estudiantes en grupos de cuatro organizados previamente por las practicantes. Uno de estos estaba compuesto por tres estudiantes que realizaban las ecuaciones mentalmente y otro que las resolvía utilizando los pasos enseñados en clase. A este grupo se le dieron ecuaciones diferentes a las del resto de la clase, con más términos y números mayores. El objetivo fue que los estudiantes, al notar las limitaciones del cálculo mental, pudieran dar sentido al proceso de realizar todos los pasos para resolver una ecuación.

Se comenzó la clase entregando las hojas pedidas a los alumnos la clase anterior. Luego, se realizó la puesta en común de la Actividad 8 sobre resolución de ecuaciones con todos sus términos positivos.

Después de esto, se explicó un ejemplo de resolución de una ecuación con un término negativo. Este fue el mismo que se dio en 1°B.

Se continuó la clase copiando en el pizarrón la consigna de la Actividad 9, que se muestra en la figura 2.44.

Actividad 9
Resuelve las siguientes ecuaciones escribiendo los pasos intermedios.

a) 3.z+20=2.z+90
b) 2.x-20=100
c) 6.y-24=2.y

Figura 2.44: *Actividad 9, de resolución de ecuaciones.*

Se les pidió a los alumnos que se reunieran en grupos de a cuatro de la forma que se había determinado previamente. Al grupo que realizaba los cálculos mentalmente se le dio la consigna que aparece en la figura 2.45

Actividad 9 (tipo 2)

a) 1238.x+14.x+925=1244.x-643
b) 1107.w-1115-316.w=784.w+1132

Figura 2.45: *Actividad 9, de resolución de ecuaciones, para el grupo que encontraba el valor de la incógnita mentalmente.*

Después del tiempo asignado para resolver la actividad, se les pidió a los estudiantes que entregaran las hojas con el trabajo realizado.

La mayoría había resuelto correctamente las ecuaciones, aunque dos grupos no tuvieron el tiempo suficiente para terminar la tercera. El grupo que trabajó con la Actividad 9 (tipo 2) utilizó todo el tiempo asignado para resolver la primera ecuación y lo hizo correctamente.

Horas cátedra 13 y 14 de 1°A

Se realizó la puesta en común de la Actividad 9, deteniéndose más en la tercera ecuación, por ser la que la mayoría de los grupos había dejado incompleta. Luego, se escribió la consigna de la Actividad 10 en el pizarrón, que se muestra en la figura 2.46.

Actividad 10
Resuelve las siguientes ecuaciones realizando los pasos intermedios

a) 12.z+35=8.z+287
b) 3.z-13=71-z
c) 3.y+6+10=4.y-5+10

Figura 2.46: *Actividad 10, de resolución de ecuaciones.*

Se decidió, por cuestiones de tiempo, no realizar la puesta en común de esta actividad y proseguir con la siguiente.

Se dictó, entonces el "problema del cine" (la Actividad 9 de 1°B) bajo el título de Actividad 11. Se le agregó, al principio de la consigna, lo siguiente:

Resuelve el siguiente problema planteando la ecuación que creas que represente la situación dada y hallando el valor de la incógnita.

Se les dio a los estudiantes alrededor de diez minutos para realizar la actividad y, luego, se llevó a cabo la puesta en común de la misma. La gran mayoría de los estudiantes había llegado al resultado correcto, pero muy pocos habían planteado una ecuación. Por esto, se pidió a un alumno que sí lo había hecho, que pasara al frente a explicar su resolución. Escribió lo siguiente:

$E{,}4 = 500{,}2 - 300$

Se explicó que E representaba el valor de la entrada y para explicitarlo se escribió en el pizarrón:

Valor de la entrada: E

Horas cátedra 15, 16 y 17 de 1°A

Se realizó la puesta en común de la Actividad 10 (resolución de ecuaciones) y se retomó la de la Actividad 11 (el problema del cine).

También se trabajó con el problema de las fotocopias (Actividad 10 de 1°B), que en este curso se llamó Actividad 12. El desarrollo de esta parte se realizó de manera análoga a la de 1°B.

Horas cátedra 18 y 19 de 1°A

Se trabajó con el problema de Bolt (Actividad 11 de 1°B), que en este curso se llamó Actividad 13. El desarrollo de la clase se realizó de manera análoga a la de 1°B. La diferencia consistió en que, en este curso, por cuestiones de tiempo, no logró plantearse la ecuación de encuentro entre Bolt y el caballo y no todos los grupos de estudiantes llegaron a completar la columna correspondiente a este animal.

Horas cátedra 20, 21 y 22 de 1°A

Se tomó la evaluación escrita que se describirá en la siguiente sección.

2.4. La evaluación

Antes de detallar el proceso de evaluación que se realizó, es preciso mencionar la forma de evaluar particular de la institución en la que se desarrollaron las prácticas, la cual estaba dividida en cuatro tipos:

- Evaluaciones sumativas
- Trabajos prácticos
- Evaluaciones cuatrimestrales integradoras
- Evaluación actitudinal

Las del primer, segundo y tercer tipo constan de calificaciones numéricas. Las evaluaciones sumativas y los trabajos prácticos son varios durante el trimestre (a elección del profesor del curso) y, con estas calificaciones, se realiza un promedio, el cual es a su vez promediado con el examen cuatrimestral. Este último es un examen integrador que los estudiantes realizan dos veces por año (uno en al finalizar el primer cuatrimestre y otro en el segundo) y, en cada uno, se integran los contenidos dictados durante esa mitad del año.

La evaluación actitudinal es mensual y se divide en cinco categorías: excelente, muy bueno, bueno, satisfactorio y no satisfactorio. Las tres notas actitudinales mensuales de un trimestre se promedian, conformando la nota actitudinal trimestral. Esta tiene incidencia sobre el promedio del trimestre de la siguiente forma:

- Si el "promedio" actitudinal es un excelente, entonces, se suma un punto al promedio del trimestre;
- Si es un muy bueno, se suma medio punto;
- Si es bueno, no se modifica la calificación;
- Si es satisfactorio, se resta medio punto;
- Si es no satisfactorio, se resta un punto.

Como las prácticas docentes se desarrollaron durante el mes de agosto, al final de las mismas se realizó una evaluación escrita cuya calificación se sugería a la profesora del curso como la nota de ese mes. Además, se registró con signos "más" y "menos" la predisposición de los estudiantes para realizar las actividades propuestas. De este registro, se conformaron las notas actitudinales propuestas para el mes.

Además, durante las prácticas, se realizaron evaluaciones formativas. Estas consistieron en pedir a los estudiantes sus hojas con lo trabajado durante la clase. Dichas hojas se corregían marcando los aciertos y errores de cada actividad pero no se les asignaba a los alumnos una nota por ello. Estas evaluaciones fueron realizadas para que los estudiantes tuvieran en sus carpetas las actividades corregidas, pudiendo ellos mismos corroborar su desempeño. Además, sirvieron para tener un seguimiento de lo que realizaban los alumnos, y de ese modo, teniendo en cuenta los errores recurrentes, hacer las modificaciones correspondientes en la planificación de las clases siguientes.

Cada clase, a pedido de la profesora titular, se tomaba a dos alumnos una evaluación oral, que se aprovechaba como repaso de la clase anterior. Estas evaluaciones eran calificadas con una nota del 0 al 2. De acuerdo al sistema de la profesora del curso, cada alumno es evaluado oralmente cinco veces por cuatrimestre. Estas notas se suman y se obtiene así una calificación que cuenta como una evaluación sumativa en la libreta.

Las evaluaciones escritas se tomaron los días 22 y 23 de agosto, en 1°B y 1°A respectivamente. Se dispuso de quince minutos de consultas inmediatamente anteriores a la prueba y cien minutos para que los estudiantes la realizaran. Consistió en tres actividades que se dieron en periodos de tiempo diferentes. Se otorgaron aproximadamente veinticinco minutos para la Actividad 1 (correspondiente a la etapa 2 de la planificación, de resolución de ecuaciones con lápiz y papel), veinte minutos para la Actividad 2 (relativa a la etapa 1, de trabajo con balanzas de platillos) y cincuenta y cinco minutos para la Actividad 3 (sobre lo trabajado en la etapa 3, tablas en Microsoft Excel). Las primeras dos eran individuales y la última era en grupos de a dos. La distribución de grupos fue la misma que la clase anterior, en la cual también se había trabajado con el programa Microsoft Excel. Se presenta la evaluación tomada en 1°B (la de la otra división es análoga)en las figuras 2.47, 2.48, 2.49 y 2.50.

Evaluación 1°B

Criterios de evaluación de matemática

- Trabajo en grupo (organización colaborativa para el desempeño de las tareas)
- Interpretación correcta de las consignas presentadas, demostrando capacidad para resolver situaciones problemáticas.
- Construcción e interpretación de tablas.
- Planteo y resolución de ecuaciones (aplicación correcta de las ecuaciones, justificación adecuada de los pasos ejecutados, obtención de resultados correctos)
- Interpretación de resultados.
- Presentación clara y coherente del trabajo.

Figura 2.47: *Criterios de evaluación.*

Nombre: ____

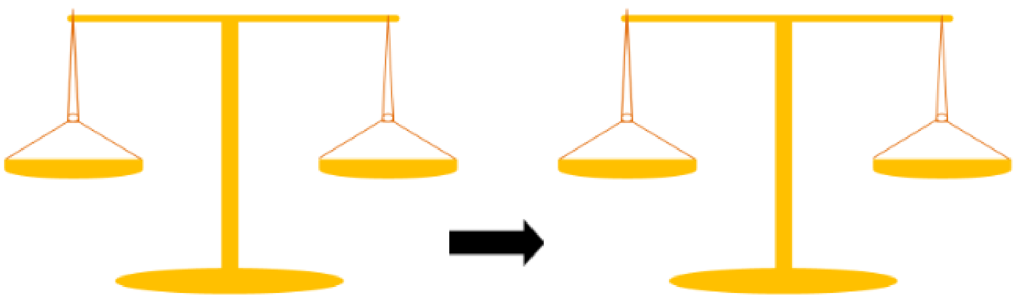
Actividad 1 (4 puntos)
Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando los pasos vistos en clase.

a) 22.z+46=26.z-18 **(2 puntos)**
b) 32+17.x-16=11.x+124 **(2 puntos)**

Figura 2.48: *Primera actividad de la evaluación.*

Nombre: ____

Actividad 2 (2 puntos)
En las siguientes balanzas, ilustra un ejemplo de la propiedad uniforme de la **resta**.



Balanza inicial **Balanza final**

Figura 2.49: *Segunda actividad de la evaluación.*

Nombres: ____

____

Actividad 3: Situación problemática (4 puntos)
Pablo y Ricardo son vecinos, amigos y compañeros de club desde hace muchos años. Ellos viven sobre la misma vereda, a 70 metros uno del otro. Todas las tardes, a la misma hora, se asoman a las puertas de sus respectivas casas y compiten para ver quién llega primero al club. Ricardo es el que vive más lejos pero corre un poco más rápido.
Pablo corre a 4m/s y Ricardo a 5m/s. Si siempre llegan juntos, ¿a qué distancia de la casa de Ricardo se encuentra el club?

Guías para su resolución:

a) Realizar un dibujo esquemático de la situación. **(0,25 puntos)**
b) Armar una tabla en Excel que represente las posiciones de Pablo y Ricardo en cada segundo, indicando lo que cada columna representa. **(1,25 puntos)**
c) Resaltar en la tabla la solución del problema. Expliquen con sus palabras por qué consideran que ésa es la respuesta. **(0,75 puntos)**
d) Escribir una ecuación que represente la situación planteada. **(0,75 puntos)**
e) Resolver dicha ecuación utilizando los pasos vistos en clase e indicando qué propiedad usan en cada uno de ellos. **(0,75 puntos)**
f) Comparar los resultados obtenidos en los incisos c) y e). **(0,25 puntos)**

Indicaciones para enviar el trabajo:

- Enviar los archivos con los que se trabajó al e-mail **a---------@gmail.com** con el siguiente asunto:

  "EVALUACIÓN 1ro B - Nombres y apellidos de los integrantes del grupo"

- Si se utilizaron hojas, entregarlas con el nombre completo de los integrantes del grupo y la división.

Figura 2.50: *Tercera actividad de la evaluación.*

Sobre los resultados de las evaluaciones, se puede observar en los gráficos de las figuras 2.51 y 2.52 que la distribución de notas en cada curso fue dispar.

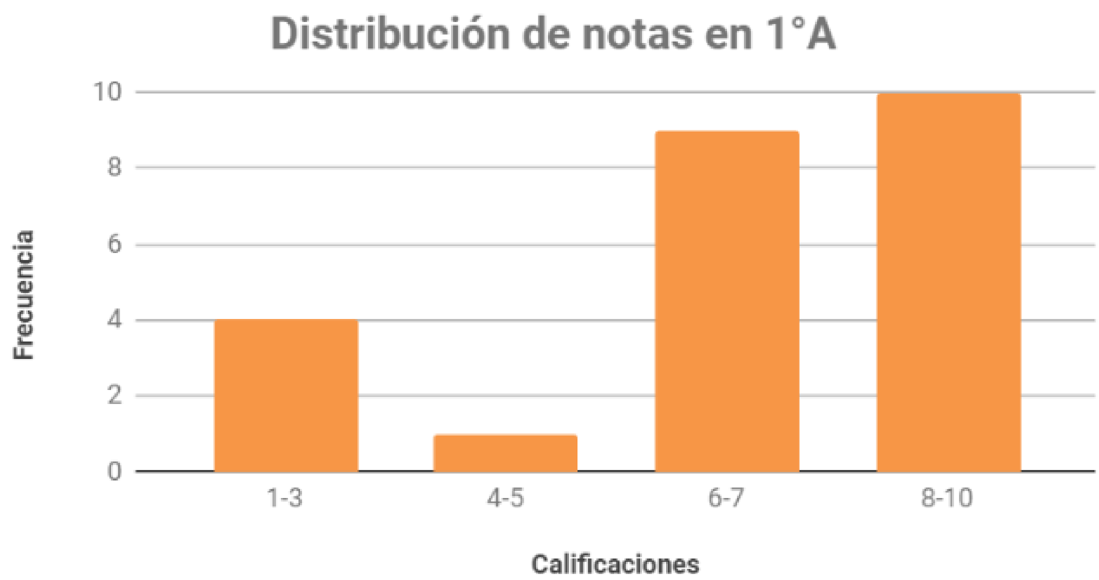


Figura 2.51: *Notas de 1°A.*

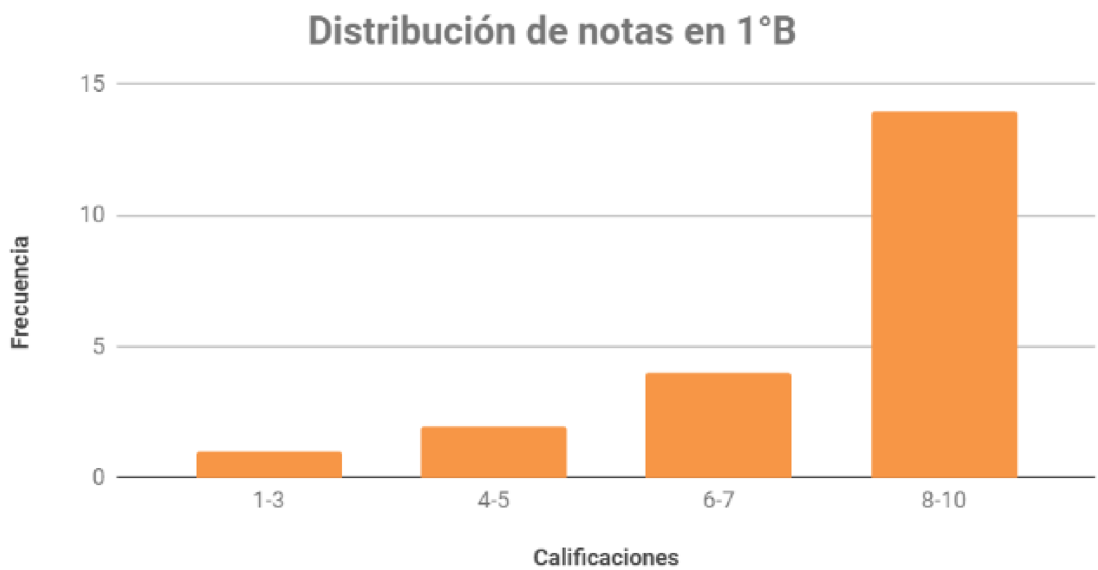


Figura 2.52: *Notas de 1°B.*

Además, se puede ver en las figuras que, en ambos cursos, hubo un gran porcentaje de aprobados, sin notables diferencias entre las divisiones.

Figura 2.53: *Aprobados de 1°A.*

Figura 2.54: *Aprobados de 1°B.*

Las evaluaciones corregidas se entregaron una semana después de su realización. Se dispuso de un tiempo para que los estudiantes consultaran sus dudas sobre la corrección. Para finalizar, se hicieron comentarios generales sobre el mes de clases como cierre de las prácticas y despedida.

Capítulo 3

Planteo y análisis de una la problemática

En este capítulo, se reflexionará sobre una parte de las prácticas profesionales que nos interesa destacar por ser novedosa en relación a lo que suele aparecer en libros de texto, pero, también, porque lo sucedido en nuestras prácticas profesionales se distanció en gran medida de lo esperado en el momento de la planificación. En este sentido, se pondrán en contraposición distintos aspectos positivos y negativos, y se hará una análisis de los mismos desde literatura especializada.

3.1. Presentación de la problemática

En primera instancia, se presentará brevemente el contexto en el cual se enmarca la problemática a analizar. En las prácticas, se distinguieron tres momentos que se describen a continuación:

- uno en donde se trabajó con balanzas de platillos, utilizándolas como instrumento concreto de representación de una ecuación, al relacionar el equilibrio de la balanza con la igualdad de la suma de las masas de cada platillo;
- un segundo momento, referido a la resolución de ecuaciones con lápiz y papel, en donde se pretendió que los estudiantes (luego de una transición) pudieran desprenderse del objeto concreto que los ayudaba a resolver las ecuaciones; y
- el tercero, que consistió en el planteo y la resolución de problemas utilizando como soporte la herramienta de Microsoft Excel.

En este capítulo nos centraremos en el análisis de los primeros dos momentos.

Cuando hablamos de la balanza de platillos como una representación de las ecuaciones, tomamos el sentido que otorga Bruner (1984) a esta palabra: *"(...) conjunto de reglas mediante las cuales se puede conservar aquello experimentado en diferentes acontecimientos"* (p.122 [2]). En este sentido, consideramos que las actividades planteadas durante esta unidad atravesaron todos los tipos de sistemas de representación que el autor plantea, los cuales son: *"(...) la representación enactiva, la representación icónica y la representación simbólica: conocer algo por medio de la acción, a través de un dibujo o una imagen y mediante formas simbólicas como el lenguaje"* (Bruner, 1984, p.122 [2]). Estos tipos de representación se vieron reflejados en nuestras prácticas en la instancia de trabajo exploratorio con balanzas de platillos, seguidas por las actividades con dibujos de las mismas y, por último, en la resolución de ecuaciones con lápiz y papel, respectivamente.

Es en este contexto donde nos preguntamos qué aspectos de la representación utilizada en las prácticas fueron acertados y cuáles deberían revisarse para una eventual futura implementación.

Para indagar sobre esta cuestión, decidimos analizar con literatura especializada **las ventajas y desventajas de la utilización de balanzas de platillo como representación de las ecuaciones para su aprendizaje**.

3.2. Ventajas de la utilización de balanzas de platillo como representación

En el primer momento, se observó un muy buen desempeño de los alumnos a la hora de realizar las actividades. Las mismas eran resueltas en tiempo y forma tal cual se habían planificado. También se observó que, en el segundo momento, resultaba muy fructífero hacer referencia al trabajo con balanzas para explicar ciertos procedimientos y avanzar con el contenido. Cabe aclarar que estas referencias no eran realizadas solo por la practicante a cargo, sino que los mismos estudiantes espontáneamente recuperaban lo trabajado con balanzas para expresarse o para explicar una idea a sus compañeros.

A continuación, realizaremos un análisis de las que, consideramos, fueron las ventajas más destacables del trabajo con balanzas de platillos.

3.2.1. Accesible de trabajar para los alumnos

Más allá de ser usadas como representación, creemos que las balanzas fueron un elemento sencillo de emplear por los alumnos. Además, generaron en ellos una buena predisposición, una actitud expectante y exploratoria, y un interés en las actividades que se les presentaban. Consideramos que esta disposición podría haberse debido a lo novedoso que resultaba para los estudiantes trabajar con esta dinámica en la clase de matemática. En este sentido, también destacamos lo expuesto por Villareal (2013), que plantea que:

> *"En contextos educacionales, el uso de materiales manipulativos ha sido una recomendación frecuente para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en diferentes épocas. (...) La cognición incluye herramientas, medios con los cuales se produce conocimiento y este componente del sujeto epistémico no es auxiliar ni suplementario si no esencial, tan esencial que ese medio es constitutivo del conocimiento, de suerte que, si estuviera ausente, el conocimiento construido sería otro."* (p. 92 [9])

En las actividades propuestas, si bien había desafío, el mismo no se encontraba en aprender a utilizar el artefacto, sino en cómo resolver el problema planteado. Esta "facilidad" del trabajo con balanzas es acorde con lo expuesto por Ponte (2005) [6], quien plantea que las tareas de naturaleza más accesible (exploraciones, ejercicios) posibilitan a todos los alumnos un alto grado de éxito, contribuyendo al desarrollo de su auto-confianza.

3.2.2. Buena representación

Consideramos que las balanzas constituyen una buena representación de las ecuaciones, ya que permitieron establecer variadas relaciones entre las acciones que se pueden realizar en la misma y propiedades de las ecuaciones. Detallaremos a continuación cada uno de estos aspectos:

- **Noción de igualdad**

En las actividades de igualdad numérica, encontrar el valor de una masa desconocida y de introducción a la propiedad uniforme usando balanzas (actividades 1, 2 y 3, respectivamente) se relacionó el equilibrio entre los platillos de las mismas con la igualdad entre la suma de las masas de cada uno. A partir de este trabajo y de lo observado en el transcurso de las clases, consideramos que la experimentación con balanzas de platillos posibilitó una correcta interpretación del signo igual, entendiéndolo como una relación de equivalencia.

A continuación se transcriben algunos breves diálogos relacionados con la noción de igualdad, que ilustran lo expuesto anteriormente:

Situación 1: Hora cátedra 10 de 1°A

Durante la explicación, en forma de exposición dialogada, del Ejemplo 1 de resolución de ecuaciones. En donde se pretendía resolver la ecuación, 4.z+44=96, un alumno expuso: *si fuera una balanza* $4.z + 44$ *es un lado y* 96 *es el otro.*

Situación 2: Hora cátedra 1 y 2 de 1°B

Durante la puesta en común de la Actividad 1, en donde se pedía a los alumnos que dieran tres ejemplos de balanzas equilibradas, surgió la siguiente conversación:

Practicante: *Para resumir ¿qué necesito para que la balanza esté equilibrada?*

Estudiante: *Una balanza está en equilibrio cuando tiene el mismo peso de cada lado*

Situación 3: Hora cátedra 8 de 1°B

Durante la lección oral se pidió a las alumnas que estaban siendo evaluadas que resolvieran una ecuación en el pizarrón, quedando escrito lo que se muestra a continuación:

$$y + y + 60g + 40g = y + y + y + y + 40g$$
$$60g + 40g + y + y - y - y = 40g + y + y + y + y - y - y$$
$$60g + 40g = 40g + y + y$$
$$60g + 40g - 40g = y + y + 40g - 40g$$
$$60g = y + y$$
$$60g : 2 = (y + y) : 2$$
$$30g = y$$

En este contexto se dio la siguiente conversación entre la practicante y un estudiante:

Estudiante: *¿Se puede dar vuelta? (refiriéndose a* $30g = y$*)*

Practicante: *¿Cómo es en la balanza?*

Estudiante: *¡Ahhhhh!* (dando muestras de haber entendido)

Esta cuestión es de suma importancia y se convierte en un error frecuente en instancias de introducción al álgebra, en donde se observa que *"En la escuela elemental, el signo igual es usado* *más para anunciar un resultado que para expresar una relación simétrica y transitiva".* (Kieran,1994, p.5 [5]). Este mismo autor plantea que *"Uno de los requisitos primordiales para generalizar e interpretar adecuadamente las representaciones estructurales tales como las ecuaciones es la concepción del carácter simétrico y transitivo de la igualdad –a veces nominado equivalencia izquierda-derecha."* (Kieran,1994, p.13 [5])

- **Idea de incógnita**

Lo trabajado en la Actividad 2, en la que se pedía encontrar el valor de una masa incógnita usando una balanza de platillos, posibilitó la interpretación de este concepto (incógnita) como número desconocido. Esta interpretación es una de las que Kücherman, citado por Kieran (1994), considera posibles:

> *"...Kücherman categorizó cada ítem según seis niveles de interpretación de las letras, de acuerdo a los requerimientos mínimos para tener un desempeño exitoso:*
>
> (a) *la letra es evaluada: se asigna a una letra un valor numérico desde el principio;*
> (b) *la letra es ignorada: se ignora o se reconoce su existencia sin darle significado;*
> (c) *la letra es considerada como un objeto concreto: la letra es mirada como una taquigrafía de un objeto concreto o como un objeto concreto por derecho propio;*
> (d) *la letra es considerada como una incógnita: la letra es mirada como un número específico pero desconocido;*
> (e) *la letra es considerada como un número generalizado: la letra es vista como representando, o al menos como capaz de representar, varios valores y no solamente uno;*
> (f) *la letra es considerada como una variable: la letra es vista como representando un rango de valores no especificados y donde existe una sistemática relación entre dos de tales conjuntos de valores".*(p.10 [5])

Esta noción se evidencia, por ejemplo, en una situación ocurrida en nuestras prácticas que se transcribe a continuación:

<u>Situación 1:</u> Horas cátedra 6 y 7 de 1°A

Durante la discusión sobre el concepto de ecuación, se dio el siguiente diálogo: Practicante: *Nicolás, ¿podrías resumirme qué es una ecuación?* Estudiante: *En una ecuación vos tenés que descubrir cuál es el peso o el número de la incógnita.*

Por otro lado, durante la etapa de planificación, se diseñó la Actividad 2 con el propósito de ilustrar la necesidad de dejar de un lado de la igualdad solo una incógnita para conocer su valor. Esto se vio reflejado en la siguiente situación:

<u>Situación 2:</u> Horas cátedra 2 y 3 de 1°B

Durante la puesta en común de la Actividad 2, se dio la siguiente conversación:

Practicante: *¿cómo hicieron en tu grupo para resolver la actividad?* (en referencia a la Actividad 2)

Estudiante: *De un lado puse la masa que no sabíamos y del otro puse las masas conocidas.*

Consideramos que este objetivo se alcanzó, no sólo durante esta actividad, sino que, luego, durante el trabajo de ecuaciones con lápiz y papel, los alumnos entendían que para resolver una ecuación debían despejar la incógnita.

- **Propiedad uniforme**

Se comenzó a trabajar con esta noción mediante una actividad de introducción a la propiedad uniforme de la suma y de la resta usando balanzas de platillos que se muestra en la figura 3.1

Actividad 3 - Grupo 1

Para iniciar, cargá en la balanza las pesas como indica la figura.

1. ¿Qué crees que pasaría si quitamos la pesa de 50g del lado derecho de la balanza?
2. ¿Qué harías para volver a equilibrar la balanza sin volver a poner el peso que sacaste?
3. Ahora que ya está equilibrada, ¿qué pasaría si agrego del lado izquierdo una pesa de 45g? ¿Qué harías para volver a equilibrar la balanza sin quitar ese peso?

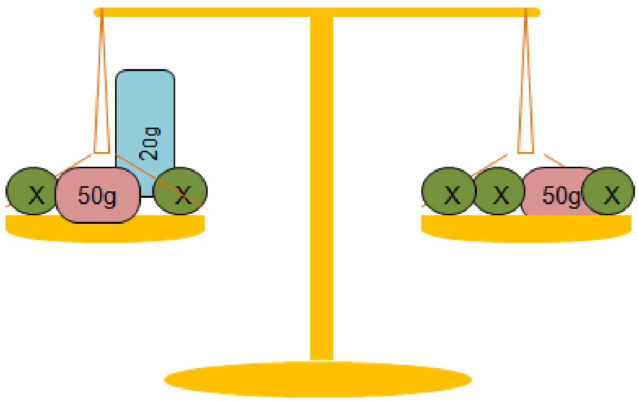


Figura 3.1: *Actividad 3:introducción a la propiedad uniforme de la suma y de la resta.*

En la puesta en común de esta actividad, luego de una discusión con los estudiantes, se enunció la propiedad uniforme de la suma y de la resta (representadas en una balanza). Luego, se realizó una actividad que consistió en ejemplificar la propiedad uniforme de la suma, resta, multiplicación y división, representadas en dibujos de balanzas (Actividad 4). Se continuó trabajando con esta idea en las Actividades 5 y 6, pero esta vez utilizándola como herramienta para la resolución de ecuaciones usando dibujos de balanzas.

Consideramos que los alumnos pudieron interiorizar estas propiedades a partir de su propia experimentación con balanzas de platillos y esta referencia les sirvió para el trabajo posterior con ecuaciones en lápiz y papel. Damos a continuación ejemplos de situaciones en las que se evidenció esto.

Situación 1: Hora cátedra 3 de 1°B

Durante la puesta en común de la Actividad 3, tuvo lugar el siguiente diálogo:

Estudiante: *Si saco una masa de un platillo, la balanza se desequilibra.*

Practicante: *Entonces, ¿cómo hago si quiero que quede equilibrada?*

Estudiante: *Tengo que sacar dos masas del mismo peso de cada lado.*

<u>Situación 2:</u> Hora cátedra 6 de 1°A

Durante el repaso de la clase anterior, un estudiante expuso que *En una balanza equilibrada, toda resta, suma, multiplicación, división o cálculo que hagas de un lado y lo mismo del otro da una balanza equilibrada.*

<u>Situación 3:</u> Hora cátedra 11 de 1°A

Durante la puesta en común de la Actividad 8 a), que consistía en resolver una ecuación, se escribió en el pizarrón:

$$3.x + 64 = 106$$
$$3.x + 64 - 64 = 106 - 64$$
$$3.x = 42$$
$$3.x : 3 = 42 : 3$$

Luego de la escritura de la ecuación y realizando un análisis sobre lo realizado, se produjo la siguiente conversación:

Practicante: *¿Puedo dividir este lado por tres y el otro por cinco?*

Muchos estudiantes: *No, ¡tiene que quedar equilibrada!*

Teniendo en cuenta la clasificación de Kieran (1994), la forma de resolver ecuaciones que tuvo lugar en nuestras clases es la que consiste en efectuar operaciones a ambos lados de la igualdad:

> *"Los diferentes métodos usados para resolver ecuaciones por los estudiantes de álgebra se clasifican según los siguientes tipos:*
> (a) *usar números*
> (b) *usar técnicas de conteo*
> (c) *des-cubrir [cover-up]*
> (d) *des-hacer (o resolución hacia atrás)*
> (e) *sustituciones por ensayo y error*
> (f) *transposición (cambiar de lado-cambiar de signo)*
> (g) *efectuar la misma operación a ambos lados"* (p.15 [5])

Como afirma el autor, *"operar a ambos lados enfatiza la simetría de la ecuación, énfasis que no se tiene cuando se usa la transposición"* [Kieran, 1994, p.16 [5]] y, como se dijo anteriormente, esta simetría se puede ver en la representación de una ecuación mediante una balanza de platillos. Se trató que los estudiantes le den sentido a la propiedad uniforme en las ecuaciones a partir del trabajo sobre este tema con balanzas, en contraposición al método de transposición, sobre el que se afirma que los estudiantes que lo usan *"no están considerando la ecuación como un objeto matemático sino más bien aplicando ciegamente la regla cambia de lado – cambia de signo".* (Kieran, 1994, p.16 [5])

Además, sobre el método de efectuar la misma operación a ambos lados para resolver una ecuación, el autor afirma:

> *"La secuencia de enseñanza tiene un impacto mayor sobre los estudiantes que han manejado las sustituciones por ensayo y error, y que reconocen que se requiere un balance entre los dos lados de la ecuación. Esta observación sugiere que la enseñanza de efectuar la misma operación a ambos lados puede ser más fácil para estudiantes que ya han trabajado con ecuaciones como entidades con un balance simétrico."* (Kieran, 1994, p.16 [5])

En relación a esto, si bien no se trabajó con resolución de ecuaciones a través de sustituciones por ensayo y error, sí lo hicimos con la idea de balance entre los dos lados de la ecuación a través de la referencia a la balanza de platillos.

- **Sintaxis Algebraica**

En lo que refiere a la sintaxis algebraica, podemos mencionar que hubo distintos "niveles de acercamiento" a la estructura de la sintaxis de las ecuaciones. En el siguiente ejemplo, que cita una situación que se dio en las prácticas, se puede ver un primer intento de representación escrita de lo que hay en una balanza:

Situación 1: Hora Cátedra 2 de 1° A

En la Actividad 2, se pedía a los alumnos que encuentren el valor de una masa desconocida y que expliquen el procedimiento que habían realizado para hacerlo. En la puesta en común, un grupo explicó que había colocado en un platillo de la balanza la masa incógnita B y una masa de 20g, y, en el otro, tres bolsitas de 45g y una de 40g. Una alumna de este grupo, pasó al frente y expuso: *para hacerlo, sumamos las bolsitas de un lado y restamos la del otro.* Y escribió en el pizarrón:

$B =$la suma del lado contrario a la masa B le restamos $20g$

$B = 115g$

Aquí se notó una primera aproximación a la escritura algebraica, donde, si bien el signo igual fue tomado para expresar un resultado, lo que se escribió del otro lado del "=" fue el procedimiento de lo que debe realizarse para conocer el valor de la incógnita. Es decir, los estudiantes realizaron un proceso de representación aunque todavía no era acorde a la escritura algebraica convencional. Con el transcurso de las actividades, se observó una evolución de la interpretación de la sintaxis algebraica, llegando en la puesta en común de la Actividad 5 a escribir una ecuación correctamente. Esta cuestión fue reforzada en las sucesivas actividades. A continuación transcribimos una situación en la que esto se explicita:

Situación 2: Hora Cátedra 6 de 1° A

Durante la puesta en común de la Actividad 5, que servía como introducción para la escritura de ecuaciones a partir del dibujo de una balanza, se escribió en el pizarrón $z+z+z+10 = z+z+20+10$, dando lugar al siguiente diálogo:

Practicante:*¿Por qué pusimos estos símbolos?* Estudiante: *Es lo que tenemos de un lado de la balanza y del otro.*

En esta situación, se vio que los estudiantes pudieron relacionar los símbolos que aparecen en una ecuación con los elementos de una balanza.

Uno de los tipos de errores que suele presentarse frecuentemente durante la enseñanza y aprendizaje de la resolución de ecuaciones es evidenciado por Filloy y Rojano (1989): *"La automatización (...) permite que los estudiantes cometan después errores típicamente asociados con la sintaxis algebraica, como intentar sumar y restar coeficientes de distintos grados."* (p.24 [3]). Respecto a esto, Kieran (1994), citando a Carry et al, escribe *"Otros estudios documentaron errores de los estudiantes cuando analizan expresiones algebraicas. Un ejemplo de error frecuente es simplificar, digamos 39x - 4 como 35x ó 2yz - 2y como z. Este tipo de errores no se restringe a los estudiantes novatos (Carry, Lewis, Bernard, 1980)"* (Kieran, 1994, p.12 [5]). Pudimos observar que, durante el trabajo con balanzas, este error no tenía lugar. Los estudiantes manipulaban las masas y sabían que no podían, por ejemplo, sumar la cantidad de masas incógnita con los demás valores presentes en la balanza, porque se evidenciaba que eran de distinta naturaleza. Luego, a la hora de trabajar con ecuaciones en lápiz y papel se vio que esta experiencia previa daba una base para sustentar el trabajo algebraico. Así, este tipo de errores no se produjeron. A continuación se transcribe un diálogo que ejemplifica lo expuesto anteriormente.

<u>Situación 3:</u> Horas Cátedra 8 y 9 de 1° A

Durante la exposición de un ejemplo de ecuación (por parte de la practicante) en el pizarrón, se escribió:

$$3z + 20 = 2z + 90$$
$$3z + 20 - 20 = 2z + 90 - 20$$
$$3z = 2z + 70$$
$$3z - z = 2z + 70 - z$$
$$2z = 1z + 70$$

Luego, haciendo una reflexión sobre lo que se había escrito, se produjo el siguiente diálogo:

Practicante:*¿Por qué no puedo restar z con el 70?*

Estudiantes: *Porque no sabés cuánto vale z.*

Una segunda cuestión que suele surgir durante el trabajo con ecuaciones es la referente a la "prioridad" de las operaciones. Kieran (1994) escribe:

> *"Otro aspecto del aprendizaje de la estructura de las expresiones algebraicas involucra la conciencia de las convenciones de la sintaxis algebraica. Bell, Malone, Taylor, (1987) informaron que al comienzo los estudiantes de álgebra quedan perplejos porque se permite combinar 2a + a + 15 como 3a + 15, en tanto que a + a + a x 2, no es 3a x 2. (...) Kieran (1979) encontró que estudiantes que inician sus estudios de álgebra, tienden a leer las expresiones de izquierda a derecha (...). Un problema relacionado es la puntuación en ál-*

> *gebra. Según Freudenthal, el medio más antiguo de la estructura sintáctica de las expresiones algebraicas es la fuerza de conexión entre ciertas operaciones algebraicas. Elevar a una potencia se hace antes que una multiplicación, y ésta es prioritaria a una adición, esto ha sido según Freudenthal una característica visual de la forma en que las expresiones fueron puntuadas durante varios siglos."* (p.13 [5])

Si bien durante la resolución de ecuaciones con lápiz y papel se trabajó con ecuaciones con pocos términos, se vio que los estudiantes manifestaban señales de comprensión de la prioridad de las operaciones que realizaban. Además, "optimizaban" la cantidad de operaciones a realizar para resolverlas. Un ejemplo de esto se muestra en el siguiente diálogo:

<u>Situación 4:</u> Horas Cátedra 11 y 12 de 1° A

Durante la puesta en común de la Actividad 8, un estudiante había pasado al pizarrón y había resuelto la siguiente ecuación:

$$3.x + 64 = 106$$
$$3.x + 64 - 64 = 106 - 64$$
$$3.x = 42$$
$$3.x : 3 = 42 : 3$$
$$x = 14$$

Luego de la escritura, y realizando un análisis sobre la resolución, se dio el siguiente diálogo:

Practicante: *¿Por qué restamos 64? ¿no podemos restar, por ejemplo, 15?*

Estudiante: *Vos podés restar 15 pero tenés que hacer més pasos. Si restás 64, te quedan menos masas.*

Aquí, se ve que los estudiantes, aunque ya estaban en un contexto de resolución de ecuaciones con lápiz y papel, seguían llamando "masas" a los números y haciendo referencias al trabajo realizado con las balanzas para explicar las operaciones que efectuaban para resolver la ecuación.

En un artículo titulado "Resolviendo ecuaciones: la transición de la aritmética al álgebra", Filloy y Rojano(1989) plantean: *"En el caso del modelo de la balanza, asignar valores a las pesas desconocidas puede ser un obstáculo para el desarrollo de las estrategias "naturales" de cancelar pares de pesas idénticas"* (p.24 [3]). Esta dificultad se observó solo en contadas situaciones y con ciertos alumnos y, cuando se manifestó, fueron los mismos compañeros los que explicaron cómo resolver la ecuación. Un ejemplo de esto se muestra a continuación:

<u>Situación 5:</u> Horas Cátedra 8 y 9 de 1° A

Durante la misma exposición que se describió en la situación 3, se dio también el siguiente diálogo:

Estudiante A: *No entiendo lo de 2z. ¿Para qué sacás z si es lo que querés sacar*[1]*?*

Estudiante B: *Para que puedas averiguar z y no 3z.*

[1] Creemos que quiso decir ¿para qué sacás z si es lo que querés obtener?

Una tercera cuestión, que también surge frecuentemente, es la que describe Kieran (1994) en el siguiente párrafo:

> *"Otra investigación (Wagner, Rachlin, Jensen, 1984) muestra las dificultades de los estudiantes para distinguir los rasgos estructurales de las ecuaciones. Muchas tareas en ese estudio fueron diseñadas para poner a prueba la conciencia de los estudiantes de que la solución de una ecuación depende de su estructura y no de las letras que se usan para representar la variable. A la pregunta: "En las ecuaciones 7 * W + 22 = 109 y 7 * N + 22 = 109, ¿cuál es mayor, W o N?", un 38 % de los encuestados da la respuesta correcta (en una muestra de 29 estudiantes, de escuela media y superior)"* (p. 18 [5]).

Este error no se notó durante las prácticas, quizás porque, desde un primer momento, en el trabajo con balanzas utilizando incógnitas, éstas fueron nombradas con letras diferentes.

3.3. Desventajas de la utilización de balanzas de platillo como representación

La mayor dificultad que notamos al utilizar balanzas de platillos como representación de ecuaciones fue la de secuenciar correctamente las actividades, de tal forma que la transición hacia las ecuaciones con lápiz y papel fuera gradual.

Por otro lado, nuestro objetivo final era enseñar ecuaciones en $\mathbb{Z}$ y la balanza solo puede modelar ecuaciones sobre $\mathbb{N}$. Entonces, nos preguntamos: ¿es esto un obstáculo para utilizarlas como representación?.

Tras estos problemas, se encuentra una cuestión subyacente, que va más allá del uso de balanzas como representación o de nuestra propia dificultad para secuenciar las actividades: ¿es pertinente el uso de ecuaciones como medio para iniciar a los estudiantes en el álgebra?.

En esta sección, trataremos de analizar con más detalles estas cuestiones.

3.3.1. Secuenciación de lo concreto a lo abstracto

En en el marco de las desventajas, notamos una dificultad para secuenciar las actividades de tal modo que la transición entre lo concreto (balanzas) y lo abstracto (ecuaciones con lápiz y papel) fuera paulatina. En particular, se notó que en 1°A, usando la secuencia didáctica que habíamos planificado, los alumnos tuvieron problemas a la hora de enfrentarse ellos solos, y por primera vez, ante una ecuación para ser resuelta con lápiz y papel. Esta ruptura se dio durante el transcurso de la Actividad 7, que consistía en resolver tres ecuaciones. En este momento, se produjo un quiebre entre lo planificado y lo que sucedió, ya que en esta actividad los estudiantes no pudieron realizar lo que habíamos pensado, a diferencia de lo sucedido en las clases anteriores. A partir de esto, decidimos ajustar la planificación de las clases futuras, para evitar las mismas dificultades en el otro curso. Los cambios sustanciales que realizamos en la planificación original se describen a continuación:

- Decidimos exponer ejemplos de resolución de ecuaciones, ya que los estudiantes, por ellos mismos, no habían podido relacionar el trabajo anterior usando balanzas de platillos con las ecuaciones en lápiz y papel.
- Abordamos primero ecuaciones con todos los términos positivos . Luego incorporamos ecuaciones con algunos términos negativos.

Durante el desarrollo de nuestras prácticas, la estrategia de enseñanza con la que nos sentimos identificadas, según la clasificación de Ponte (2005), es la de enseñanza-aprendizaje exploratorio, que refiere a que el docente no explica todo, sino que una gran parte del trabajo lo hacen los alumnos, que descubren y construyen el conocimiento. Esta estrategia se contrapone a la enseñanza directa, en donde el profesor asume un papel fundamental: el de brindar información de manera lo más clara posible, asumiendo que el alumno aprende oyendo lo que le dicen.

La decisión de cambiar la planificación a la que referimos anteriormente está en coherencia y se podría explicar con lo expuesto por este autor, que afirma que un proceso de enseñanza-aprendizaje exploratorio no implica que todo deba realizarse por medio de la exploración de los alumnos, sino que, también, se pueden (y, a veces, se deben) realizar momentos de exposición por parte del profesor.

Por otro lado, al realizar la primera planificación, cometimos el error de suponer que con el trabajo realizado con dibujos de balanzas y escritura de ecuaciones que las representaban (Actividad 4, 5 y 6), era suficiente para establecer las relaciones necesarias para "traducir" estos mismos procesos de resolución a una ecuación en lápiz y papel. En este sentido, es que, quizás, no hayamos tenido en cuenta lo que plantean Filloy y Rojano (1989). Ellos afirman que la traducción debe ser un proceso bidireccional, para que sea posible identificar operaciones en el nivel abstracto con operaciones en el nivel concreto. Lo justifican diciendo que, a partir de nuestro conocimiento de cómo se resuelven los problemas en el nivel concreto, presentamos operaciones que tienen análogos en el nivel más abstracto y que también conducirán a una resolución allí. Al modificar la secuenciación incluyendo los ejemplos expositivos que hacen referencia a las balanzas, es que, de algún modo, realizamos la "vuelta" en este camino de dos direcciones, del cual sólo habíamos tenido en cuenta una.

Es importante destacar que el hecho de ya haber empezado "con el pie izquierdo" a trabajar con ecuaciones en lápiz y papel en 1°A generó una resistencia por parte de los alumnos ante estas actividades y la forma propuesta para resolverlas. Sin embargo, este rechazo fue disminuyendo paulatinamente con el transcurso de las clases.

Finalmente, podemos decir que la balanza, vista como representación, cumple lo que señalan Filloy y Rojano (1989) como el primer concepto fundamental, que es el de traducir objetos y operaciones abstractas y dotarlas de significados y sentidos al recibir representaciones más concretas. El segundo componente que estos autores proponen es el de la separación de los nuevos objetos y operaciones de los detalles y los significados propios del contexto concreto. Creemos que, para lograr esta separación, la secuenciación debe, en primera instancia, establecer un vínculo fuerte entre la representación y el objeto representado. Sin embargo, consideramos que este vínculo debe ser tal que, con el transcurso de las actividades, los alumnos puedan transitar por las ecuaciones sin la necesidad de recurrir frecuentemente a la balanza. Porque, como estos autores señalan, la fijación con el modelo puede retrasar la construcción de una sintaxis algebraica, ya que esto requiere una ruptura con la semántica del modelo concreto.

3.3.2. Ecuaciones en $\mathbb{Z}$

Recordamos que, en nuestras prácticas, se trabajó exclusivamente con ecuaciones cuyas soluciones eran enteros positivos, pero se incluyeron ecuaciones para cuya resolución era necesario operar con números negativos, por ejemplo: $6.y - 24 = 2.y$; $3.z - 13 = 71 - z$. Estos casos no pueden ser representados en una balanza, puesto que no existen masas negativas. Filloy y Rojano (1989) también observan esta cuestión. Ellos afirman que, en el caso de ecuaciones con soluciones negativas, no hay manera de, con un modelo concreto, producir una representación significativa. Esta imposibilidad de representación no sería, entonces, una desventaja propia de las balanzas, sino que estaría presente en cualquier modelo concreto utilizado para trabajar las ecuaciones.

Sin embargo, consideramos que no es necesario que, al usar una representación de las ecuaciones, ésta pueda modelar cada aspecto de ellas, ya que:

> *"En la construcción del modelo de algo no se incluye todo aquello que tiene que ver con él. El principio de la selectividad suele estar determinado por el propio objetivo de la representación, es decir, aquello que nos proponemos hacer al representar algo".* [Bruner, 1984, p.122 [2]]

Si se propone usar la balanza para representar ecuaciones sobre los números naturales, entonces este problema no aparece. Esto es lo que hicimos. Luego del trabajo con balanzas y sus dibujos, se dieron actividades de resolución de ecuaciones: primero, con todos los términos positivos y luego, con algunos términos negativos [2]. La referencia a la balanza se usó fuertemente en el primer tipo (ecuaciones en $\mathbb{N}$) y, a partir de esto, se trabajó sobre el segundo. No se observó resistencia de los alumnos en la transición del primer al segundo tipo.

3.3.3. Entrada al álgebra desde las ecuaciones

Una cuestión subyacente y muy criticada por algunos autores es la de la entrada al álgebra a partir de las ecuaciones. Este era nuestro caso, dado que los estudiantes no habían trabajado previamente en un contexto algebraico. Al respecto, Sessa (2005) expone:

> *"Nos encontramos con una gran variedad de respuestas a la pregunta de cómo se introduce el álgebra en la escuela (...) Hay quienes ubican ese punto en el tratamiento de las ecuaciones, que en general conlleva el considerar las letras para designar números desconocidos (la letra como incógnita). Los alumnos se ven entonces enfrentados a las tareas de "poner en ecuación" un problema y "despejar la incógnita" (con todas sus reglas asignadas) como las prime-*

[2] En 1°A esto no fue exactamente así, puesto que les dimos ecuaciones de los dos tipos en la primera actividad de resolución de ecuaciones con lápiz y papel. Como esta estrategia no dio resultado, se desplegó en dos, como se mencionó al principio de esta sección.

> *ras experiencias en el terreno del álgebra. Es la posición mayoritariamente adoptada en nuestro país.*
> *Para muchos alumnos, las ecuaciones son "cosas que se despejan", y dominar las reglas de esta técnica suele ser una fuente inagotable de dificultades para ellos.*
> *Ahora bien, las ecuaciones son objetos complejos y sus tratamiento muy temprano suele llevar a una simplificación que oculta su naturaleza y las "descarga" de sentido"* (p.67 [7])

En contraposición, la autora propone una entrada al álgebra a partir de la idea de generalización o a través de la construcción de relaciones de dependencia entre dos magnitudes o cantidades.

En conclusión, más allá del uso de la balanza como representación de las ecuaciones, se podría cuestionar la presencia de las mismas en el currículo de matemática de primer año o su abordaje sin haber trabajado previamente con otras nociones algebraicas. Las ecuaciones son en sí mismas objetos complejos y parece ser que en este momento de la trayectoria escolar podrían acarrear numerosas dificultades.

Capítulo 4

Conclusiones

En este capítulo, se reflexionará sobre las prácticas, especialmente sobre lo analizado en el Capítulo 3. La discusión realizada en este capítulo nos permite rescatar algunas características importantes de la utilización de balanzas de platillos como representación de las ecuaciones para su aprendizaje. En primer lugar, el trabajo con balanzas provee una herramienta de representación de las ecuaciones que es concreta y de fácil manipulación, ya que la balanza es un instrumento sencillo y su funcionamiento es conocido por los alumnos. Además, consideramos que es una buena representación, en el sentido que muchos aspectos de las ecuaciones en $\mathbb{N}$ se pueden traducir en características del trabajo con balanzas y que esta traducción es casi directa. La utilización de balanzas de platillos permitió, en nuestras prácticas, reflexionar sobre la propiedad uniforme y las nociones de igualdad como relación de equivalencia y de incógnita como valor numérico desconocido. Asimismo, posibilitó un acercamiento progresivo a la sintaxis de las ecuaciones. Consideramos que el entendimiento de todas estas ideas fue fundamental para la comprensión de las ecuaciones por parte de los estudiantes.

Sobre el final del Capítulo 3 se planteó la inquietud de que "ecuaciones" pueda no ser el tema más adecuado para introducir a los alumnos al estudio del álgebra, porque la necesaria simplificación del concepto que impone su abordaje prematuro podría conducir a que los alumnos las despojen de sentido. No obstante, pensamos que, en nuestras prácticas, la representación mediante balanzas y la posterior resolución de las ecuaciones por analogía con dicha representación, a través de operaciones realizadas a ambos lados de la ecuación, dieron sentido a este proceso, que en la enseñanza tradicional se realiza, muchas veces, de forma mecánica, *"...aplicando ciegamente la regla cambia de lado – cambia de signo"* [Kieran, 1994, p.16 [5]].

Se analizó el hecho de que las balanzas no son adecuadas para la representación de ecuaciones con enteros negativos. Sin embargo, consideramos que esto no necesariamente representa un obstáculo, ya que, como mencionamos anteriormente, es una buena representación de las ecuaciones en $\mathbb{N}$ y por lo tanto se podrían usar para modelizar estas y, a partir de ellas, entender las ecuaciones en $\mathbb{Z}$, tal como lo hicimos en nuestras prácticas.

La elección de una adecuada secuenciación se evidenció como una dificultad en la planificación de las prácticas. Este es un proceso complejo y se deben tener en cuenta muchos elementos. En nuestro caso, observamos que un cambio aparentemente sutil (no estructural) de la secuencia didáctica puede producir efectos muy diferentes en la apropiación de los saberes por parte de los estudiantes.

Finalmente, concluimos que la utilización de balanzas como representación de las ecuaciones tiene múltiples ventajas, pero que estas se evidencian solo con una secuenciación cuidadosa. Consideramos que la elección y organización de las actividades debe tener en cuenta dos cuestiones:

- la transición entre el trabajo con el elemento concreto (balanzas) y lo abstracto (ecuaciones en lápiz y papel) tiene que ser lo más progresiva posible; y
- es importante explicitar la "vuelta" en esta traducción, es decir, hacer evidente la manera de resolver ecuaciones usando la balanza como medio para pensar.

Respecto a las experiencia de prácticas, es importante destacar que este informe es el producto final de una serie de esfuerzos durante este año, enmarcados en la materia Metodología y Práctica de la Enseñanza: desde los primeros trabajos de análisis de bibliografía, pasando por la planificación de las clases, la práctica docente propiamente dicha y la elaboración del presente escrito. Todas estas instancias produjeron experiencias de aprendizaje que valoramos y de las cuales damos cuenta brevemente a continuación.

El trabajo arduo que fue planificar (por primera vez) un mes de clases de matemática se vio reflejado a la hora de dar clases. Nos sirvió para anticiparnos a posibles respuestas de los estudiantes para cada actividad y para tener consciencia de cuáles eran los objetivos que queríamos cumplir en cada clase. Sin embargo, como el proceso de enseñanza-aprendizaje es dinámico e impredecible, esta planificación tuvo que ser modificada continuamente para adaptarse a las necesidades de los estudiantes. Esta experiencia de re-planificación nos pareció muy fructífera, ya que, al ser el aula un entorno dinámico, creemos que la elección y organización de las actividades no puede ni debe permanecer estática durante las clases.

Además, queremos destacar que consideramos que fueron acertadas las decisiones que tomamos respecto a la dinámica de la clase. Se trabajó en distintas instancias de forma individual, de a pares, en pequeños grupos o en el grupo clase. Creemos que esto dotó a las clases de un espíritu de cambio y adaptación. A su vez, consideramos que esto fue provechoso para los estudiantes, ya que tuvieron que adecuarse a distintos contextos y aprender a trabajar colaborativamente con compañeros con los que, quizás, no estaban habituados a interactuar. Por otro lado, creemos valorable el hecho de haber trabajado con actividades variadas, que nos permitieron movernos por diferentes espacios (el laboratorio de ciencias, el aula, la sala de informática) y mostrar a los alumnos diferentes soportes (balanzas, lápiz y papel, tablas en Microsoft Excel) útiles para la construcción del conocimiento matemático. En este sentido, consideramos que nuestras prácticas estuvieron en concordancia con lo propuesto por Skovsmose (2000):

> *"Mi propuesta es apoyar una educación matemática que se mueva por los distintos ambientes presentados en la matriz, (...) es importante que los estudiantes y el profesor juntos encuentren un camino entre los diferentes ambientes de aprendizaje. La ruta "óptima" no puede determinarse de antemano, sino que tiene que decidirse en la interacción entre profesor y estudiantes."* (p.17 [8])

1

[1] La palabra matriz hace referencia a una tabla que construye el autor clasificando los ambientes de aprendizaje,

Por otro lado, ahora que podemos ver las prácticas en perspectiva, notamos que quizás el tiempo destinado para cada etapa de las clases no fue suficiente para consolidar ciertos contenidos. Pudimos distinguir ésta y otras cuestiones a partir de las escritura de este informe, que nos permitió analizar lo sucedido y decidido en el periodo de prácticas.

Queremos destacar lo provechoso que fue el trabajo colaborativo entre nosotras, que nos permitió aunar esfuerzos y motivaciones, aprender una de la otra sus fortalezas y debilidades, y tener un punto de apoyo a la hora de afrontar las tareas que se nos presentaban. Creemos que esta cuestión es fundamental no sólo para nuestra formación docente si no para la vida en sociedad.

En conclusión, creemos que todas las experiencias recabadas nos sirven para ir aumentando nuestro bagaje de conocimiento profesional y forman parte del cierre de esta etapa de nuestro proceso de formación académica.

teniendo en cuenta dos dimensiones: la forma de organización de actividad de los estudiantes (paradigma del ejercicio o escenario de investigación) y el tipo de referencia (matemática pura, semirrealidad y situaciones de la vida real).

Apéndices

Apéndice A

Anexo

A.1. Programa 1° año

DISTRIBUCIÓN DE LOS CONTENIDOS SEGÚN TRIMESTRES Y UNIDADES

<u>1° Cuatrimestre</u>

Eje organizador: Números y operaciones / Geometría y medida

- **Unidad I:** Números Naturales
  Formación de los distintos conjuntos numéricos. Los Números Naturales y sus operaciones. Propiedades. Potenciación y radicación. Uso de paréntesis. Resolución de problemas apelando a distintas estrategias. Practica de cálculo mental.
- **Unidad II:** Estimaciones y cálculos de medidas
  Unidad, magnitud, cantidad, medida: conceptos. Reconocimiento de la inexactitud de las medidas y su relación con los números racionales positivos. Estudio del S.I.M.E.L.A.: unidades de longitud masa y tiempo; selección y uso de unidades para realizar mediciones de perímetros, áreas y volúmenes. Practica de cálculo mental.
- **Unidad III:** Números enteros
  Números enteros: concepto. Necesidad de su creación. Ubicación en la recta numérica. Valor absoluto. Operaciones: suma, resta, multiplicación y división. Propiedades de las distintas operaciones. Regla de los signos. Potenciación y radicación de enteros y sus propiedades. Resolución de problemas. Practica de cálculo mental.

<u>2° Cuatrimestre</u>

Eje organizador: Geometría y medida / Algebra y funciones

- **Unidad IV:** Ecuaciones en N: introducción al Álgebra.
  Igualdad numérica. Términos y miembros de una igualdad. Propiedad uniforme. Lenguaje simbólico. Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Tanteo y confección de tablas para plantear una ecuación. Planteo y resolución de ecuaciones: problemas de aplicación. Reflexión sobre las soluciones a las ecuaciones de la forma $a.x + b = c$ con a,b y c en $\mathbb{N}$ y $a \sqsupset 0$. Practica de cálculo mental.
- **Unidad V:** Rectas y ángulos: trazados Elementos geométricos Básicos: Puntos y rectas en el plano. Segmento. Semirrecta. Ángulos. Ángulos cóncavos y convexos. Posiciones relativas

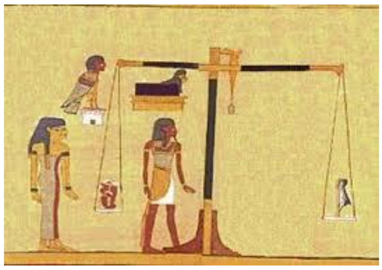
entre recta: rectas paralelas, secantes y perpendiculares Relaciones entre dos ángulos según la posición de sus lados: consecutivos, opuestos por el vértice y adyacentes. Relaciones entre dos ángulos según la suma de sus medidas: complementarios y suplementarios Operaciones con ángulos: suma y resta de ángulos. Definición y construcción de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo. Trazados de paralelas, perpendiculares y ángulos utilizando los diversos útiles geométricos. Justificación de los procedimientos realizados. Practica de cálculo mental.

A.2. Actividades completas

Historia de las balanzas de platillos

Aproximadamente en el 3.500 a.C., Adio, un mercader muy próspero, vivía en el antiguo egipto. Había iniciado sus labores como comerciante junto a su padre, el gran Abasi, de quien había heredado la empresa familiar de compra y venta de pescado seco. En ese momento, el sistema de comercio se basaba en el trueque, es decir, en el intercambio de un producto por otro. Los comerciantes de pescado generalmente intercambiaban este comestible por otro como cereal o leche de cabra .

Adio, que era un hombre justo y honesto, se preocupaba mucho en no cobrar a sus clientes más de lo que correspondía. Es decir, si él entregaba una cierta cantidad de pescado, quería obtener la misma de leche o cereal. Pero este asunto no era tarea fácil, por esto Adio experimentó con distintos métodos. Primero, probó vender 3 pescados a cambio de una jarra de leche o de un cuenco mediano de cereal. Pero, a veces, los peces eran pequeños y este trato perjudicaba a sus clientes. Probó, entonces, colocando los pescados en un cuenco hasta llenarlo pero, a veces, cuando su mujer y su hijo lo ayudaban a atender el negocio, llenaban de más o de menos el jarro y por esto la cantidad nunca era exacta y Adio seguía muy preocupado pensando la solución de aquel problema que lo aquejaba.



Hasta que, en una noche de verano, paseando por las dunas a la orilla del Nilo, tuvo una magnífica idea: si sujetaba una varilla larga desde el medio, permitiendo que esta se incline, colgaba de un lado de la varilla una cierta cantidad de pescado y del otro, una cierta cantidad de leche o cereal, la varilla debería mantenerse horizontal cuando estas cantidades pesaran lo mismo. Así fue como diseñó y, luego, construyó su invento, al que bautizó: "balanza". Esta idea se pasó de boca en boca y muchos otros vendedores lo adoptaron también, permitiendo que el comercio egipcio se expandiera enormemente. Con el transcurso de los años, este artefacto se fue perfeccionando y modificando hasta llegar a las balanzas que utilizamos hoy cotidianamente.

El juego de buscar, mantener, o volver al equilibrio perdido, es en realidad un juego sutil que jugamos todo el tiempo. En estas clases, practicaremos este juego poniendo en equilibrio en nuestra fiel balanza, cantidades conocidas y desconocidas, de modo que las primeras nos ilustren sobre las segundas.

Figura A.1: *Actividad introductoria: Historia de balanzas de platillos*

Actividad 1

Utilizando las diferentes masas, coloquen algunas en los platillos de la balanza. Realicen sucesivos experimentos con otras masas hasta conseguir que la balanza esté en equilibrio. Anoten en las balanzas siguientes tres ejemplos distintos que hayan encontrado de balanzas en equilibrio:

Figura A.2: *Actividad 1:igualdad numérica usando balanzas. (La fotocopia entregada a los estudiantes incluía el dibujo de otras dos balanzas vacías)*

Actividad 2

Usen la balanza y las masas para descubrir la masa del objeto señalado con una letra. Expliquen en sus carpetas cómo lo hicieron.

Figura A.3: *Actividad 2:introducción de incógnitas.*

Actividad 3 - Grupo 1

Para iniciar, cargá en la balanza las pesas como indica la figura.

1. ¿Qué crees que pasaría si quitamos la pesa de 50g del lado derecho de la balanza?
2. ¿Qué harías para volver a equilibrar la balanza sin volver a poner el peso que sacaste?
3. Ahora que ya está equilibrada, ¿qué pasaría si agrego del lado izquierdo una pesa de 45g? ¿Qué harías para volver a equilibrar la balanza sin quitar ese peso?

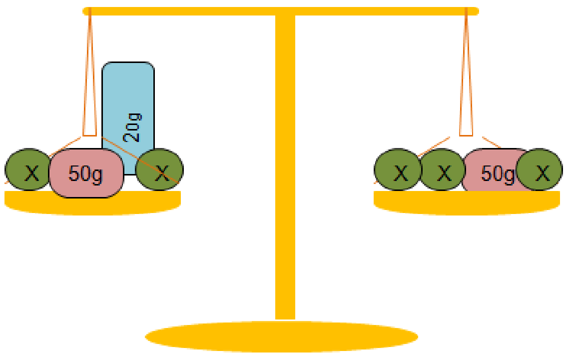


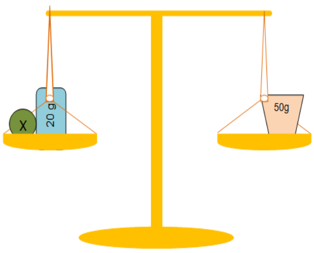
Figura A.4: *Actividad 3:introducción a la propiedad uniforme de la suma y de la resta. La actividad aquí presente es la correspondiente al grupo 1, los otros grupos tenían consignas análogas pero el dibujo de la balanza representaba las siguientes ecuaciones: grupo 2* $y+y+y+20g = y+y+50g+20g$*, grupo 3* $z+z+z+10g = z+z+20g+10g$*, grupo 4* $w+w+10g+50g = w+w+w+10g$*, grupo 5* $q+q+25g+10g = q+q+q+25g$ *y grupo 6* $t+t+10g+80g = t+t+t+10g$

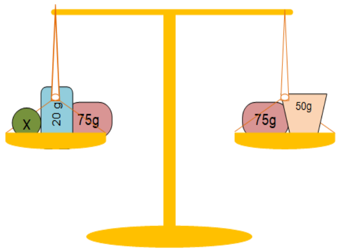
Actividad 4

Lean y discutan en grupo las siguientes propiedades. ¿Están de acuerdo? En caso afirmativo, den otro ejemplo para ilustrar cada una de ellas. Si no están de acuerdo, ¿por qué?

Propiedad uniforme de la suma

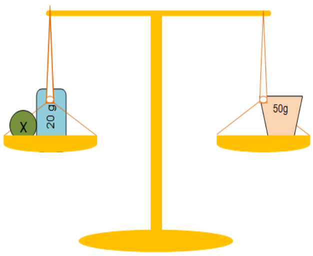
En una balanza equilibrada, se pueden agregar dos masas equivalentes, una en cada platillo, y seguirá en equilibrio (es decir, la igualdad entre la suma de masas de cada platillo se mantiene).

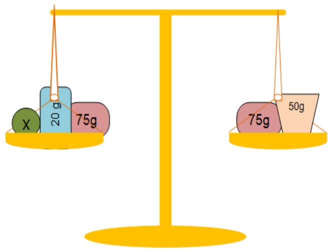




Propiedad uniforme de la resta

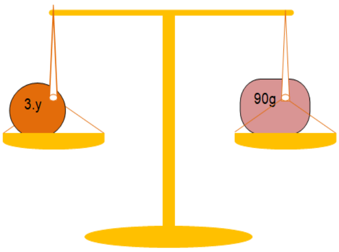
En una balanza equilibrada, se pueden sacar dos masas equivalentes, una de cada platillo, y seguirá en equilibrio.

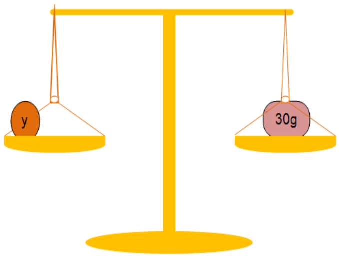




Propiedad uniforme de la multiplicación

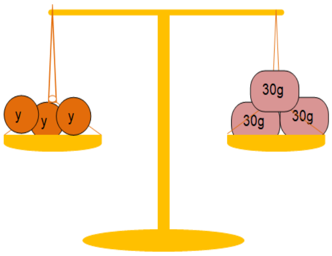
En una balanza equilibrada, se pueden duplicar, triplicar, cuadruplicar, etc, las masas de cada uno de los platillos y seguirá en equilibrio.





Propiedad uniforme de la división

En una balanza equilibrada, se puede dejar la mitad, la tercera parte, la cuarta parte, etc, de las masas en cada platillo y seguirá en equilibrio.



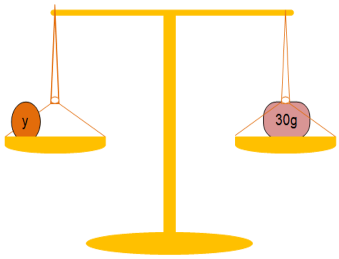
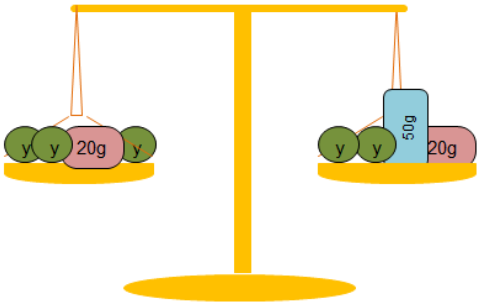


Figura A.5: *Actividad 4. Sobre la propiedad uniforme: de la suma, resta, multiplicación y división, representadas en una balanza de platillos.*

Actividad 5 - Grupo 1

Ésta es la balanza que obtuvieron sus compañeros luego de la Actividad 3.



1. ¿Qué relación hay entre las masas de ambos platillos?
2. Utilizando lo visto en la **Actividad 3**, hallen el valor de la masa desconocida.

Figura A.6: *Actividad 5, introductoria para la escritura de ecuaciones a partir del dibujo de una balanza*

Actividad 6

Dibujen, en las balanzas vacías, los pasos que necesitan realizar para encontrar el valor de la incógnita haciendo uso de la propiedad uniforme. Luego, en la segunda columna de la tabla, escriban la ecuación correspondiente a cada paso, explicando qué propiedad utilizaron y qué acción realizaron en la balanza.

Aclaración: No es necesario utilizar todos los dibujos.

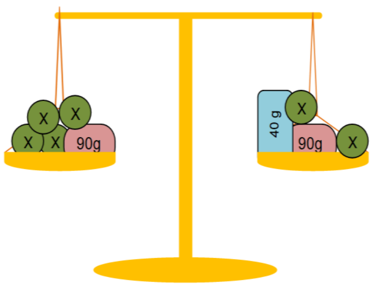
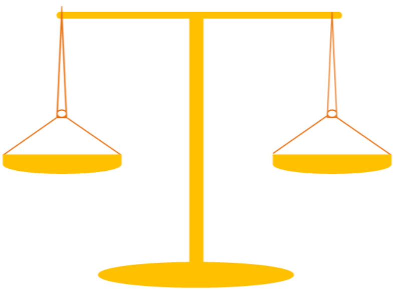
Balanza	Matemáticamente
	
	

Figura A.7: *Actividad 6, de escritura y resolución de ecuaciones paso a paso a partir del dibujo de balanzas*

Ejemplo 1: resolución de una ecuación

$$\begin{aligned} 4.z + 20 &= 2.z + 96 && \text{Propiedad uniforme de la resta} \\ 4.z + 20 - 2.z &= 2.z + 96 - 2.z \\ 2.z + 20 &= 96 && \text{Propiedad uniforme de la resta} \\ 2.z + 20 - 20 &= 96 - 20 \\ 2.z &= 76 && \text{Propiedad uniforme de la división} \\ 2.z : 2 &= 76 : 2 \\ z &= 38 \end{aligned}$$

Actividad 7
Resuelvan las siguientes ecuaciones
a) 3.x+64=106
b) 35.y+52+13=33.y+95

Figura A.8: *Actividad 7, de resolución de ecuaciones.*

Ejemplo 2: resolución de una ecuación

$$\begin{aligned} 2x - 73 &= 115 && \text{Propiedad uniforme de la suma} \\ 2x - 73 + 73 &= 115 + 73 \\ 2x &= 188 && \text{Propiedad uniforme de la división} \\ 2x : 2 &= 188 : 2 \\ x &= 94 \end{aligned}$$

Actividad 8
Resuelve las siguientes ecuaciones
a) 11=4.x-33
b) 6.y-24=2.y
c) 3.z-13=71-z

Figura A.9: *Actividad 8, de resolución de ecuaciones.*

Acción en la balanza	Operación	Lenguaje simbólico	Ejemplo	Lenguaje coloquial
Agregar masas equivalentes en ambos platillos	Suma	+		Un número aumentado en…
Quitar masas equivalentes en ambos platillos	Resta	-		Un número disminuido en… La diferencia entre…
Duplicar... Triplicar... Cuadriplicar… ...las masas de cada platillo	Multiplicación	.2 .3 .4		El doble de... El triple de... El cuádruple de... ...
La mitad... La tercera parte... La cuarta parte... ...de las masas de cada platillo	División	:2 :3 :4		La mitad de... La tercera parte de... La cuarta parte de... ...

Figura A.10: *Tabla de relación entre acción en la balanza, lenguaje simbólico y lenguaje coloquial*

Actividad 9
Cuatro amigos fueron al cine, entregaron en boletería dos billetes de $500 y recibieron $300 de vuelto. ¿Cuánto costaba la entrada?

Actividad 10
Ismael tiene que sacar fotocopias de un libro y no sabe si los $138,25 le alcanzan para hacerlo completo. Si el anillado tiene un costo de $17 pesos y cada hoja fotocopiada cuesta $1,8 ¿cuántas hojas puede sacar Ismael?

Actividad 11
Lean la siguiente situación problemática:

El famoso corredor Usain Bolt se enfrenta en una carrera contra dos animales: el caballo, más rápido que él y el hipopótamo, más lento. Para que la carrera sea más pareja, acordaron que: Bolt partiría de la línea de salida, el hipopótamo tendría 50m de ventaja y el caballo partiría 50m por detrás de Bolt.
¿En qué momento Bolt está en primer lugar de la carrera? ¿Y en segundo lugar? ¿Y en último lugar?

Velocidad caballo: 19m/s
Velocidad Bolt: 10m/s
Velocidad hipopótamo: 8m/s

a) Realicen un dibujo esquemático de la situación
b) ¿Se les ocurre una forma de resolver el problema usando Microsoft Excel?

Apéndice B

Referencias

[1] Bombini, G. (2002). *Prácticas docentes y escritura: hipótesis y experiencias en torno a una relación productiva.* Ponencia presentada en las primeras Jornadas de Práctica y residencia en la formación docente, Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba. Disponible en: http://tecnologia.ffyh.unc.edu.ar/resources/Residencias1/indexpractica.htm

[2] Bruner, J. S. (1984). *Acción, pensamiento y lenguaje.* Alianza Editorial. Madrid, España.

[3] Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics 9.2* (pp. 19-25). Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/267568576_Solving_equations_The_transition_from_arithmetic_to_algebra

[4] Gvirtz, S. & Palamidessi, M. (2008). El ABC de la tarea docente: Curriculum y enseñanza. AIQUE. Buenos Aires, Argentina. Disponible en: http://www.unter.org.ar/imagenes/10062.pdf

[5] Kieran, C. (1992). *El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar* (Vilma María Mesa trad.). Una empresa docente. www.ued.uniandes.edu.com

[6] Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. En GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM. Disponible en: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/Ponte%2005_GTI-tarefas-gestao2.pdf

[7] Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra: Orígenes y perspectivas,* Libros del Zorzal. Argentina.

[8] Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA, Vol. 6, Nº1,* pp. 3-26. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/1122/1/70_Skovsmose2000Escenarios_RevEMA.pdf

[9] Villarreal, M. (2013). Humanos-con-medios: un marco para comprender la producción matemática y repensar prácticas educativas. En Edelstein, G.; Miranda, E. & Bryan, N. (Comp.); *Formación de profesores, curriculum, sujetos y prácticas educativas. La perspectiva de la investigación en Argentina y Brasil.* E-Book (pp. 85-122). Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/263654532_Humanos-con-medios-un_marco_para_comprender_la_produccion_matematica_y_repensar_practicas_educativas

Agradecimientos

“La ida” por Azul Fatalini

Agradezco al universo por haberme llevado a tener la experiencia, que concluye con este informe, de estudiar profesorado en matemática en FaMAF:

A Luis, por la compañía y por haberme insistido en que me inscriba;

A So, por entrar a la aventura conmigo;

A Juan, por ser mi referente de estudiante de profesorado;

A mis compañeros en varios trabajos grupales, Paula, Vero, Pablo, Gastón, por las ideas que intercambiamos, su paciencia y su solidaridad para conmigo;

A Sofi, por caer del cielo para hacer equipo conmigo;

A los profesores que tuve a lo largo de la carrera, de los cuales pude aprender (a veces no sobre lo que ellos trataban de enseñarme);

A Ignacio y María José, por facilitarnos la vida burocrática a tantos estudiantes;

A la universidad pública;

A mi familia, por confiar en mí;

A Clara, Pablo, Agna, Mauri, Jero y Nico, por los abrazos con hilitos de vida;

A mí misma, por el esfuerzo y la voluntad;

Y, finalmente, al resto del universo, que se confabuló para combinar todo lo anterior, para construir esta experiencia, y no otra.

“La vuelta” por Sofía Raviolo

Como una amante eterna de Peter Pan y, por lo tanto, como una persona que detesta que las cosas se terminen, me he encargado de cargarme de tareas para poder no terminar nunca. Espero que esta vez no sea así y que este sí sea el final de esta etapa. Es por esto que ya no puedo escaparme de agradecer (quizás ya no haya otra oportunidad para hacerlo). Por eso, ahora sí, agradezco a:

Mi familia, por haber sido siempre un pilar en donde apoyarme, en donde llorar, en donde crecer, y a quienes recurrir cuando ya el estrés me superaba y me faltaban las fuerzas;

A Diego, por decidir (por voluntad propia, no como los de arriba a los que no les quedaba otra opción) acompañarme en este laaaargooo recorrido, espero que siempre haya codos en el camino para recorrer juntos;

A las .ªstrólogas"(Manu y Pacha están incluidas acá), por estar desde el principio de mis carreras, bancandome aunque esté en "modo Sofi". Les agradezco por las risas, los mates, los viajes, las siestas leyendo Liniers y todos los momentos compartidos;

A los "físicos"(aunque ya podría sacar las comillas, ¿no?), por ser un grupo de personas increíbles del que siempre me voy a sentir orgullosa de formar parte;

A Azul, por salvarme en MOPE y mostrarme una vez más lo hermoso que es trabajar en equipo;

A los profes, que en cada clase trataron de transmitirme que no estaba todo hecho, como yo creía;

A Ignacio y María José, por aguantar todos mis cambios de carrera, pedidos de equivalencias, y preguntas redundantes y repetitivas;

A la primera ley de la termodinámica;

A Conicet, porque gracias a que no me dio la beca puedo terminar esta carrera;

Y a Peter Pan, por mostrarme lo inmaduro que es no querer crecer, ojalá que la tercera sea la vencida.

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación del Informe Final de Prácticas de *Metodología y Práctica de la Enseñanza*, damos Fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por el Tribunal.