FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

INFORME FINAL

Metodología y Práctica de la Enseñanza

Titulo: Proporcionalidad Directa como caso particular de relación entre dos variables en un marco de Modelación Matemática

Autora: Nievas Lio, Estefanía

Profesores de MOPE: Esteley, Cristina B.; Coirini, Araceli; Dipierri, Iris C.; Gerez Cuevas, Nicolás; Mina, María; Smith, Silvina.

Profesora Supervisora de Prácticas: Dipierri, Iris Carolina

Carrera: Profesorado en Matemática

Fecha: 22 - 12 -2017

RESUMEN

El presente escrito narra la planificación, implementación y análisis de la experiencia de práctica profesional desarrollada por una estudiante en el marco de la materia Metodología y Práctica de la Enseñanza (MyPE), correspondiente al cuarto año de la carrera de Profesorado en Matemática de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FaMAF), en un segundo año de un colegio de la ciudad de Córdoba.

El eje de esta práctica fue la modelización matemática. Se comenzó con un estudio de relaciones entre variables y sus diferentes representaciones, luego se trabajó con modelos matemáticos de análisis de regresión entre dos variables por medio del uso del software *GeoGebra,* se trabajó con actividades experimentales, y en este marco, se estudió la relación de proporcionalidad directa como un caso particular de relación entre dos variables.

Para finalizar la práctica los estudiantes realizaron un proyecto de modelización matemática abierto.

PALABRAS CLAVES

Variables, Relaciones entre variables, Relación de proporcionalidad directa, Registros de relaciones entre variables, Modelización matemática.

ABSTRACT

The present work summary a pre-service teacher's planning, implementation and analysis of the classes developed for an 8th secondary school grade from Córdoba city. The work presented is part of the requirement for a professional training activity frameworked of the subject Methodology and Teaching Practice (MyPE, by its acronym in Spanish). The subject belongs to the fourth year of the Professor in Mathematics degree of the Faculty of Mathematics, Astronomy, Physics and Computer science (FaMAF) of the National University of Córdoba.

The core idea of the activity was the mathematical modeling as process and as pedagogical approach. Those activities started with the study of relationship between variables and their different representations. Then the mathematical models of regression analysis between two variables was addressed through the use of the *GeoGebra* software. By the develop of experimental activities, the second course students analyzed and learned about the direct proportionality ratio as a particular case of relationship between variables.

By the end of the classes the secondary school students, organized in groups, developed an open mathematical modelling project.

KEY WORDS

Variable, Relationships between variables, Direct proportional relationships, Representation of relationships between variables, Mathematical Modeling.Variables, Relaciones entre variables, Relación de proporcionalidad directa, Registros de relaciones entre variables, Modelización matemática.

Índice

1. Introducción

Este capítulo pretende dar cuenta de las condiciones dentro de las cuales se desarrollaron las prácticas profesionales en el marco de la materia Metodología y Práctica de la Enseñanza (MyPE), correspondiente al cuarto año de la carrera de Profesorado en Matemática de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FaMAF) de la Universidad Nacional de Córdoba (UNC). A tal fin, se presentará al grupo de estudiantes con el que se trabajó y se describirán las características de la institución a la cual pertenecen, como así también, los recursos materiales y didácticos que ésta brinda. Asimismo, se intentará explicar el estilo de trabajo de la docente de matemática. Para completar esta descripción, buscaremos dar sucinta cuenta de los vínculos que los alumnos desarrollan entre sí, con el docente y con el conocimiento en los diferentes espacios curriculares.

1.1. Características de la institución

1.1.1. Características generales y oferta educativa

La institución es pública de gestión privada; mixta y confesional. Ofrece educación en los tres niveles educativos: inicial, primario y secundario. Está situada a 2 km. de la plaza central de la ciudad con orientación sudeste. Se ubica en un predio de 18.000 m^2 donado por el gobierno provincial , y tiene una superficie cubierta de 12.000 m^2 aproximadamente. Además de esta instalación, al sur de la ciudad, fuera del anillo de la circunvalación, se encuentra un campo de deportes donde se realiza el grueso de las actividades deportivas.

El nivel secundario cuenta con cuatro divisiones por año. La institución ofrece para los estudiantes del ciclo orientado la especialidad en Humanidades con orientación a Ciencias Sociales. El título otorgado tiene validez nacional (decreto 1276/96) y es el de *Bachiller en Humanidades con orientación en Ciencias Sociales*.

Existe una particularidad con respecto a la asignatura de Lengua Extranjera, Ingles, la cual se divide en cinco niveles de distinta graduación por año. Los estudiantes son distribuidos dependiendo del dominio que tengan de la lengua, rompiendo la distribución original por divisiones. Además, una vez finalizado el secundario, los alumnos rinden un examen de suficiencia idiomática de carácter internacional.

La institución ofrece una gran variedad de actividades extracurriculares, por ejemplo: talleres de técnicas de estudio, deportes, olimpiadas de matemática, ingles, entre otras. Los alumnos optan por asistir a estas actividades de manera voluntaria de acuerdo a sus intereses. Entre ellas se destaca la sede del Instituto British dentro de la misma institución.

Por las distintas actividades curriculares o extracurriculares, los estudiantes suelen tener jornadas escolares extendidas, por lo cual el comedor cobra una gran importancia. Éste brinda la posibilidad de abonar diaria o mensualmente, y ofrece en la página web de la institución el listado de menú mensual, el cual se compone de un menú general y cuatro opciones para dietas con prescripción médica.

1.1.2. Descripción de la estructura edilicia

La estructura edilicia está constituida por cuatro pabellones principales de dos y tres plantas comunicados entre sí y rodeados por jardines, patios y playas de estacionamiento. De estos cuatro pabellones, un pabellón se destina al nivel inicial, uno al nivel primario y dos al nivel secundario. Con esta distribución, la institución dispone de un total de seis salas para el nivel inicial, doce para el nivel primario y dieciocho aulas para el nivel secundario.

Además, la escuela cuenta en su infraestructura con dirección general, oficina de administración, mesa de entrada, gabinetes de informática, laboratorio, biblioteca, natatorio cubierto y climatizado, campo de deportes, capilla, salón polifuncional, sala de plástica librería, cantina y comedor. Cada nivel tiene también dirección, vicedirección y secretaría, sala de profesores y amplios baños diferenciados por sexo en cada piso.

Los recursos disponibles en la institución son:

- Tablet: cada alumno cuenta con una tablet que es adquirida por su familia. El empleo de ésta varía dependiendo de la materia. A nivel general, se utiliza para la organización de materiales digitales de las materias por medio de carpetas con sus nombres, acceso al sistema de alumnos, descarga de materiales varios y entrega de tareas a través del aula virtual. Además, los estudiantes la usan para responder consignas o realizar informes en procesadores de texto, realizar presentaciones multimedia, infografías, buscar información, o para el empleo de softwares específicos de alguna asignatura, por ejemplo *GeoGebra* en las horas de matemática.

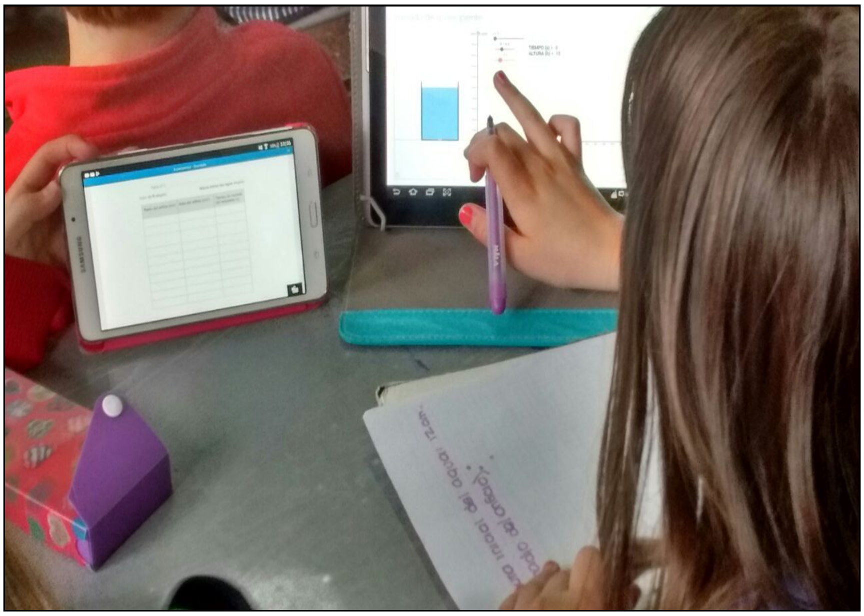


Imagen 1 - Uso simultáneo de tablets para lectura de actividad y visualización de un applet con el software *GeoGebra.*

- Pizarra digital: se encuentra disponible para su uso en cada asignatura en todas las aulas y está conectada a un proyector y a un equipo de CPU. Puede usarse de

manera interactiva por medio de un lápiz óptico. Cuenta con el software *ActivInspire* que permite, por ejemplo, abrir hojas para texto, modificar e insertar cuadrículas, copiar imágenes, realizar figuras, escribir sobre otros programas, usar herramientas matemáticas como calculadora, dados, regla, compás, transportador, entre otras.
Casi todas las materias utilizan la pizarra digital en mayor o menor medida. En algunos momentos como una pizarra más, sólo para escribir, pero en otros se observó un uso más provechoso. Por ejemplo: el empleo de mapas o líneas de tiempo, la manipulación de softwares particulares, el desarrollo de construcciones por medio de los instrumentos de geometría que ofrece el ActivInspire, la lectura de actividades o la reproducción de videos.
La pizarra permite realizar marcas y cambios durante las explicaciones o resolución de actividades, moviendo los objetos, escribiendo encima o realizando cambios en éstos, con un gran dinamismo, lo cual sería imposible de realizarse en la pizarra común.
Muchos docentes combinan este recurso con la pizarra tradicional, por ejemplo, exponen con la pizarra digital y registrar en la pizarra de tiza los aportes de los estudiantes.

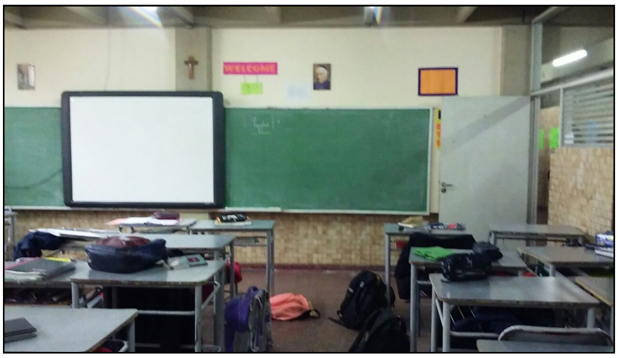


Imagen 2 - Vista de pizarras electrónica y de tiza en el aula donde se llevaron a cabo las prácticas.

- Internet: la institución cuenta con acceso a internet en todo el edificio. Dispone de módems para distribución de internet Wi-Fi en todas las aulas, biblioteca, laboratorio, etc. Esta distribución permite un acceso eficiente a internet a todos los sujetos que desarrollan actividades en la institución: personal docente y no docente y estudiantes.

- Laboratorio: está destinado a la realización de actividades experimentales, cuenta con mesas amplias para un mejor desenvolvimiento grupal y comodidades distintas al aula de cursado. Está equipado con una gran cantidad de materiales para realizar actividades de orden experimental. Existe una docente encargada del laboratorio, quien tiene como función la organización de horarios y la administración de los materiales.

- Aula virtual: la institución cuenta con una plataforma digital, *Moodle*, organizada en asignaturas. Esta plataforma tiene variados recursos como el foro de novedades, la opción de creación de grupos de trabajos, el foro de discusión, etc. Funciona como una extensión del aula y es una alternativa para la presentación de trabajos prácticos por parte de los alumnos o la entrega de material didáctico por parte de los docentes. Los documento que pueden cargarse al aula van desde documentos de texto, a presentaciones multimedia y audiovisuales.

Otros recursos utilizados son libros o compendios de fotocopias, carpetas, pizarrón de tiza, útiles de geometría, etc.

1.2. Características del curso

El curso en el cual se llevó a cabo la práctica profesional fue un segundo año del ciclo básico. Éste cuenta con treinta y seis alumnos, de los cuales catorce son mujeres y veintidós son varones. En el aula los alumnos se ubican en bancos individuales, en seis filas agrupadas de a dos, como se muestra en el siguiente esquema.

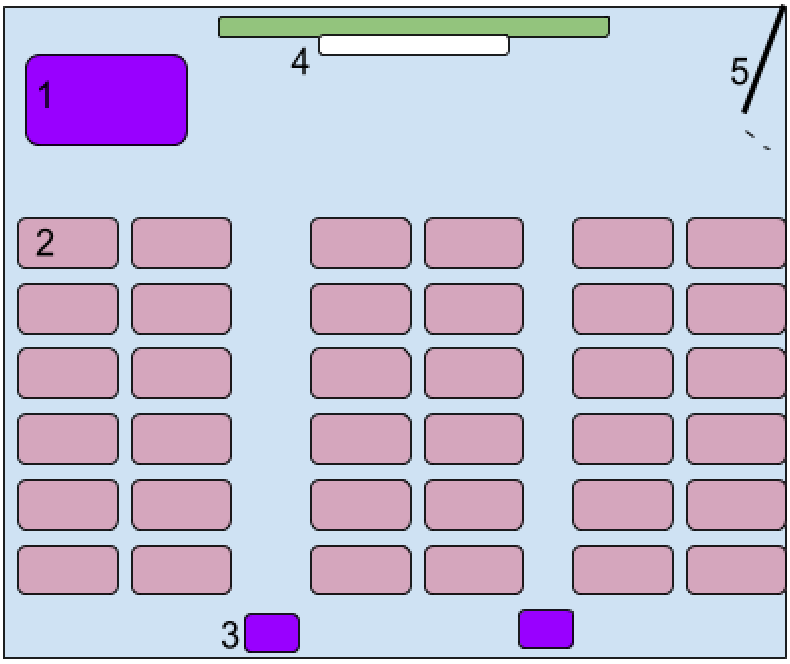


Imagen 3- Esquema del aula. Se representa (1) el escritorio de la docente, (2) los asientos de los estudiantes, (3) las sillas para las observadoras, (4) la pizarra común y digital, y (5) la puerta de acceso.

Imagen 4 - Fotografía del aula. Un grupo de estudiantes está por exponer y busca un archivo en la computadora que se conecta a la pizarra.

El aula con la que se trabajó está ubicada en un subsuelo. Como característica se puede mencionar que disponen de aire acondicionado frío-calor, sistema de audio y cañón. Por estar en el subsuelo, el aula cuenta con ventanas de menor tamaño que las aulas de los pisos superiores, por lo que su iluminación es principalmente artificial. Además, por la acústica de este piso, los ruidos del exterior se escuchan más intensamente.

Este curso, como todos los del ciclo básico en la provincia de Córdoba, destina cinco horas cátedras semanales[1] a la asignatura Matemática. A continuación se explicitan los horarios de la materia Matemática para el curso en cuestión:

	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	
1					2C	7:30 a 8:10
2					2C	8:10 a 8:50
3				2C		8:50 a 9:25
4						9:40 a 10:20
5						10:20 a 11:00
6						11:15 a 11:55
7			2C			11:55 a 12:35
8			2C			13:00 a 13:40

A partir de las clases observadas y de diversos intercambios con los profesores del curso, puede inferirse que los estudiantes acostumbran realizan trabajos bajo la modalidad grupal. Por lo general, estos grupos se conforman por afinidad entre los estudiantes, y no por una decisión del docente como metodología de trabajo.

Los estudiantes del curso mantienen, en general, una actitud activa en las materias. Son participativos y les gusta ser escuchados. Se observó que siempre ofrecían diversas respuestas a las preguntas que alguien les realizaba, viniendo las voces desde distintos sectores del curso, aunque tienden a ser siempre las mismas.

Se observó, además, un ritmo disparejo de avances entre los estudiantes, lo cual invitaba a marcar con mayor claridad los momentos de la clase por parte de los docente. Los estudiantes se mostraron más inquietos y menos productivos cuando las consignas no eran claras o si no todos disponían del material a trabajar, por ejemplo, cuando se entregaba una única fotocopia por grupo o cuando no todos contaban con el libro.

Se observó así, un curso altamente participativo, demandante y crítico, disparejo y con diferentes niveles de compromiso. Pero que, en todos los casos, varía la actitud hacia la propuesta áulica dependiendo de las actividades, preguntas realizadas, atención del docente para con el que responde no activamente y el ritmo que se establece.

1.3. Características de las clases de Matemática

De acuerdo a lo observado podemos decir que las clases de matemática se caracterizan por tener una activa voz por parte de los alumnos, los cuales son motivados mediante preguntas y donde su participación, correcta o no, es altamente valorada siempre que sea pertinente al tema en discusión. Por otro lado, no se sanciona el error, los llamados de atención de la

[1] Cada hora cátedra corresponde a cuarenta minutos de trabajo en aula.

docente se dirigen a aquellas participaciones o interrupciones de la clases por cuestiones ajenas a los temas que se están trabajando.

Con respecto a los contenidos, para presentarlos, la docentes crea un contexto en el cual el nuevo tema da respuesta a una necesidad presentada. Para ello, recurre a contextos intra y extra matemáticos. Además, invita a los estudiantes a reflexionar sobre estas nuevas ideas haciendo particular énfasis en porqué resulta importante, en la actualidad, su estudio.

En las clases de Matemática, la docente utiliza mucho el recurso de las preguntas para inquietar a los alumnos y mantenerlos activos. Realiza desplazamientos por los diferentes ambientes de aprendizaje propuestos por Skovsmose (2000), trabajando tanto en ambientes del paradigma del ejercicio como de investigación. Una particularidad que posee la docente cuando trabaja en escenarios de investigación, es la utilización del juego de roles para posicionar a sus estudiantes en el lugar de profesionales que se enfrentan a un problema propio de su área de experticia (científicos, arquitectos, diseñadores, etc). De este modo busca que se involucren y tengan mayor protagonismo en sus clases, recibiendo en el mayor de los casos como respuesta un compromiso hacia el estudio, el conocimiento y a las actividades propuestas.

En esta asignatura la docente usa el aula virtual, organizándola por unidades con sus respectivos títulos. En ella, pone a disposición de los estudiantes el material trabajado, tanto teórico como práctico. Sube también, presentaciones de PowerPoint que haya mostrado en el aula y videos breves que explican, a modo de repaso, algunos métodos de construcción geométrica (partición de un segmento en partes iguales, trazado de mediatrices). Además comunica, mediante el aula virtual, a sus estudiantes las calificaciones obtenidas en diferentes instancias evaluativas. Los alumnos trabajan con sus tablets para descargar el material y para hacer uso de *GeoGebra*. La pizarra digital y el pizarrón de tiza son usados, tanto por la profesora como por los estudiantes, durante la apertura y cierre de cada clase.

Las clases comienzan siempre con un repaso guiado por la docente pero con respuestas de los estudiantes, los cuales suelen ser invitados a pasar al frente para hablar del tema trabajado o utilizar la pizarra para repasar la actividad. Se escucha a los alumnos que participan, y la docente promueve la participación de los estudiantes que se mantienen inactivos mediante preguntas dirigidas. Los repasos rondan entre los 10 y 15 minutos, con excepción del día que tienen sólo una hora cátedra, la cual suele utilizarse como continuidad del trabajo de la clase anterior. Posteriormente, la profesora les presenta la actividad prevista para esa clase y los alumnos trabajan en ella.
Al momento de cierre, 5 o 10 minutos antes que termine la clase, se lleva a cabo la misma metodología participativa del repaso. En esta instancia la docente se encarga de repasar lo trabajado, destacando sus aspectos más relevantes. La docente revisa que los alumnos realicen una síntesis teniendo en claro el propósito de la clase. Para llevar adelante el cierre, la docente elige entre las actividades trabajadas en la clase aquella/s más potente/s, para que entre todos las resuelvan en la pizarra. Al momento de realizar esta actividad se preocupa por preguntar en cada circunstancia que hay que hacer y porqué, repasa cada detalle del trabajo, y resuelve la actividad de manera completa sin pasar por alto aquellos aspectos que podrían pensarse y resolverse como "obvios". Le da así un gran peso a la comprensión de los procedimiento con su respectiva justificación. Para finalizar pide que

repasen lo trabajado para la clase siguiente y señala los materiales que necesitarán para que los estudiantes los descarguen del aula virtual. En caso de tener programada una evaluación la siguiente clase, lo señala en esta instancia y recuerda los contenidos que serán evaluados.

2. Diseño de la práctica e implementación en el aula

2.1. La unidad asignada y los contenidos

La unidad asignada para llevar a cabo las prácticas profesionales se corresponde en el programa de la docente con la Unidad N° 3: "Estudio de relaciones entre variables, relación de proporcionalidad directa, relación de proporcionalidad inversa". De acuerdo a este programa la unidad consta de los siguientes contenidos:

> Unidad 3: Estudio de relaciones entre variables. relación de proporcionalidad directa. relación de proporcionalidad inversa.
> Noción de variable. Relaciones entre variables. Establecer relaciones entre variables como resultado de un proceso de modelización matemática. Pequeños proyectos de modelización matemática. Representación de una relación entre variables en forma coloquial, en tablas, en una fórmula, o en gráfico cartesiano. Estudios de fenómenos cuyo comportamiento sea el de una relación de proporcionalidad directa. La constante de proporcionalidad (velocidad, porcentaje, densidad, etc.). Propiedades de la relación de proporcionalidad directa. Justificación de la "regla de tres". Estudios de fenómenos cuyo comportamiento sea el de una relación de proporcionalidad inversa. La constante de proporcionalidad inversa. Propiedades de la relación de proporcionalidad inversa. Problemas que sostienen modelos de proporcionalidad directa (o inversa)[2].

Si bien originalmente, estaba previsto abordar la unidad en su totalidad, durante el transcurso de las prácticas, se decidió, junto a la profesora del curso, no trabajar la justificación de la "regla de tres" ni proporcionalidad inversa. La razón de este recorte se debió a la decisión de dedicar mayor tiempo al desarrollo de proyectos de modelización matemática.

2.2. La Planificación Anual del curso

La práctica se llevó a cabo en las primeras siete semanas luego del receso invernal. Durante el primer cuatrimestre se llevó adelante la Unidad N° 1 del programa, la cual se denomina "Conjuntos numéricos" y consta de dos partes: conjunto de números enteros y racionales. El período de observación previo a las prácticas nos permitió ver cómo la docente trabajaba en el desarrollo de está unidad en lo referente al conjunto de números racionales.

Con respecto a la Unidad N° 2, la cual se denomina "Lenguaje Algebraico", la docente decidió desarrollarla a lo largo de todo el año, trabajando las habilidades en ella propuestas a medida que éstas emergen como necesidad del trabajo matemático de las otras unidades. Teniendo presente esta decisión, los momentos de tener la necesidad de usar un lenguaje algebraico preciso, son intencionalmente buscados y trabajados.

[2] Extraído del programa de la docente.

El trabajo realizado con antelación a nuestras prácticas por la docente, donde amplió el campo numérico, del conjunto de números naturales al conjunto de números enteros y racionales, nos permitió trabajar relaciones continuas a lo largo de los reales. Si bien no se había abordado aún el conjunto de los números irracionales, la presencia de los racionales brindó una noción de continuidad necesaria para, por ejemplo, la interpretación de gráficos en el plano cartesiano.

El tratamiento que se hizo previamente del lenguaje algebraico, permitió a su vez apelar a las expresiones simbólicas para representar variables y relaciones entre variables. Como así también, para estudiar las propiedades de estas relaciones.

Cabe destacar que las prácticas comenzaron con un repaso acerca de la noción de relación entre variables y su representación por medio de diferentes registros: tablas, gráficos, expresión simbólica. Estos temas fueron trabajados durante el primer año con la misma docente por medio de resolución de situaciones problemáticas propias de escenarios de investigación con referencia a la semi-realidad (Skovsmose, 2000).

Según los comentarios de la docente del curso, lo que aportó el trabajo realizado durante las prácticas al estudio de los temas siguientes fue: la habilidad de detectar una relación entre variables y preguntarse si dicha relación es o no de proporcionalidad directa. Por ejemplo, en la *Unidad N°4: Relaciones geométricas* comenzaron a trabajar las relaciones geométricas y, al presentar la noción de ángulos complementarios, los alumnos se preguntaron si la relación entre un ángulo y su complementario sería de proporcionalidad directa.

2.3. Estructura de la práctica

La implementación de la práctica constó de tres partes:

- <u>Primera parte:</u> Repaso.
  Se introdujo la unidad con un repaso preparado por la docente tutora acerca de las diferentes representaciones de una relación entre variables. El repaso se llevó a cabo principalmente por medio de la resolución de un problema. A continuación se comenzó a trabajar con la guía de ejercicios *"Estudiamos algunas relaciones entre variables"* (Ver Anexo A1), la cual consistía en una serie de problemas que involucraban diferentes relaciones entre variables en contextos de semi-realidad y su representación mediante distintos registros.
  El objetivo de la guía fue que los estudiantes pudieran reconocer variables y relaciones entre variables, recurrir a diferentes representaciones para la lectura y comprensión de estas relaciones; y en una segunda instancia, calcular o estimar valores de la relación que no conocían. Durante el desarrollo de la guía, se presentó la herramienta *Análisis Regresión Dos Variables* de *GeoGebra*. El repaso se cerró con una discusión sobre ejercicios de la guía. Se desarrollará detalladamente sobre esta primera parte de las prácticas en la sección 2.4.

- <u>Segunda parte:</u> Laboratorios y proporcionalidad directa.
  Esta etapa, constó de dos laboratorios y la institucionalización de la noción de relación de proporcionalidad directa. A continuación se trabajó sobre una guía que

presentaba una serie de problemas dentro del paradigma del ejercicio y abordaba aspectos discutidos en la institucionalización.

- Laboratorio 1: *“Estiramiento vs Masa” (Ver pág. 27-28)*
  Se trabajó en el estudio de la relación que existe entre el estiramiento de un resorte con respecto a la masa que se coloca en su extremo inferior. Se invitó a los alumnos a estudiar esta relación como lo habían hecho con las relaciones de la Guía “*Estudiamos algunas relaciones entre variables*”, con un añadido, ya que la recolección de datos experimentales en el laboratorio formaba parte de este estudio. Para el desarrollo de este laboratorio se puso a disposición de los estudiantes una guía práctica que trabajaron en grupo de tres. En esta guía se daban las indicaciones para la confección de un informe que debían entregar.
  Como cierre del Laboratorio N° 1 se discutió con el grupo de clase acerca de la validez de distintos modelos para representar esta relación.

- Laboratorio 2: *“Vaciado de un recipiente”* (Ver anexo A2)
  Se trabajó en el aula con las tablets sobre un laboratorio virtual que simulaba el vaciado de un recipiente[3]. Este laboratorio también contó con una guía de actividades que orientaban el trabajo en los grupos.
  Este simulador presenta varias variables, por lo que uno de los objetivos fue reconocerlas y comprender que para el estudio de una relación entre dos de ellas, se debían controlar las demás. Se estudiaron en particular tres relaciones, de las cuales una era de proporcionalidad inversa (tiempo de vaciado del recipiente vs. radio del orificio) y las otras no eran de proporcionalidad directa ni inversa, pero tenían características comunes. La idea era que los alumnos trabajen con relaciones crecientes y decrecientes pero que no sean de proporcionalidad directa ni inversa.
  Al igual que con el Laboratorio N°1, los alumnos realizaron un informe de acuerdo a ciertas pautas que se explicitaron en la guía.

- Institucionalización y ejercitación de proporcionalidad directa:
  Se realizó la institucionalización de la noción de relación de proporcionalidad directa por medio del análisis de las características de las relaciones estudiadas hasta el momento. Para ello se identificaron ciertas propiedades y se clasificaron las relaciones estudiadas de acuerdo a estas propiedades. Se define así una relación es de proporcionalidad directa como aquella relación que cumple todas las propiedades identificadas en la relación estudiada en el Laboratorio N° 1. Se brindó un apunte (Ver Anexo A3), y se trabajó con la guía de ejercicios “*Proporcionalidad Directa*” (Ver Anexo A4) cuyos objetivos fueron reconocer si una relación es o no de proporcionalidad directa, calcular la constante de proporcionalidad y recurrir a diferentes registros para representar estas relaciones. Luego del trabajo con esta guía se tomó una evaluación escrita e individual de este tema.

[3] El laboratorio es una aplicación de *GeoGebra* disponible en https://www.geogebra.org/m/gTcQ9STn

- Tercera parte: Proyectos de modelización.

  El desarrollo de proyectos de modelización se organizó de la siguiente manera:
  - ➢ Presentación del esquema de modelización: Se construyó un esquema del proceso de modelización matemática, el cual fue una variación del esquema propuesto por Blomhøj (2004), a partir de analizar las diferentes tareas realizadas por los alumnos para estudiar las relaciones entre variables de los laboratorios 1 y 2. Además, se destacó el carácter cíclico del proceso de modelización y la capacidad predictiva de los modelos.
  - ➢ Elección del tema y problema: Los alumnos siguieron trabajando con los mismos grupos, salvo excepciones. Cada grupo eligió un tema y problema con el que trabajar en su proyecto de modelización.
  - ➢ Presentación del tema y problema elegido: Cada grupo expuso brevemente su/s propuesta/s, los compañeros y docentes realizaron sugerencias.
  - ➢ Búsqueda de información, recolección de datos, redefinición de la problemática, sistematización de la información, construcción de un modelo, respuesta al problema planteado, elaboración de una infografía. Con el grupo de clase se trabajó qué es una infografía, qué características debía tener, se mostraron ejemplos y se pautaron y explicitaron los requisitos que sus infografías debían cumplir.
  - ➢ Presentación de los procesos de modelización matemática y sus infografías: Los grupos presentaron oralmente al resto de la clase los procesos de modelización desarrollados con sus respectivas infografías. Cotaron el trabajo realizado, dejando un espacio abierto a preguntas de la clase.

En la siguiente tabla se explicitan los tiempos destinados a las diferentes actividades previstas en la planificación a lo largo del período de prácticas.

Semana	**Dia - Horas**	**Hora**	**Tema**
1	Miércoles 26/07	2 hs.	Repaso de representaciones de relaciones entre variables (60 minutos). Presentación de y trabajo en la guía de actividades "*Estudiamos algunas relaciones entre variables*" (20 minutos).
	Jueves 27/07	1 hs.	Desarrollo de la Guía de actividades "Estudiamos algunas relaciones entre variables".
	Viernes 28/07	2 hs.	Idem.
2	Miércoles 02/08	2 hs	Laboratorio N° 1. Recolección de datos experimentales en el laboratorio.
	Jueves 03/08	1 hs.	Laboratorio N° 1. Desarrollo de la guía.
	Viernes	2 hs.	Discusión sobre la validez de diferentes modelos

	04/08		para representar la relación estiramiento vs. masa (1 hs.). Presentación del Laboratorio N° 2. Los estudiantes comienzan a trabajar en el Laboratorio N°2 (1 hs.).
3	Miércoles 09/08	2 hs.	Desarrollo del Laboratorio N° 2.
	Jueves 10/08	1 hs.	Idem.
	Viernes 11/08	2 hs.	Desarrollo del Laboratorio N° 2 (1 hs.). Inicio de la institucionalización (1 hs.).
4	Miércoles 16/08	2 hs.	Continuación de la institucionalización.
	Jueves 17/08	1 hs	Cambio de actividades: Acto en conmemoración al fallecimiento del General San Martín.
	Viernes 18/08	2 hs.	Desarrollo de la Guía "*Proporcionalidad Directa*" (1 hs.). Presentación del esquema del proceso de modelización (1 hs.).
5	Miércoles 23/08	2 hs.	Elección de tema y problema del proyecto de modelización (1 hs). Breves presentaciones de los temas y problemas elegidos (1 hs).
	Jueves 24/08	1 hs	Evaluación de Prop. Directa, relaciones entre variables y sus diferentes representaciones.
	Viernes 25/08	2 hs.	Continuación de las presentaciones de los temas y problemas elegidos (1 hs). Búsqueda de información. Se trabaja en el laboratorio (1 hs).
6	Miércoles 30/08	2 hs.	Elaboración de modelos y de conclusiones en el proyecto de modelización.
	Jueves 31/08	1 hs.	Presentación del formato de una infografía. Se presentan los requisitos y criterios de evaluación para las entregas de sus trabajos.
	Viernes 01/09	2 hs	Elaboración infografías que sinteticen los proyectos de modelización.
7	Miércoles 06/09	2 hs.	Exposición de los Proyectos de modelización y sus respectivas infografías por parte de los grupos.
	Jueves 07/09	1 hs.	Exposición de los Proyectos de modelización y sus respectivas infografías por parte de los grupos.

2.4. Primera Parte: Repaso

2.4.1. Repaso de relaciones entre variables

Se darán detalles de la primera clase, ya que fue de gran importancia para establecer las bases de esta unidad. Luego las actividades se contarán de manera más resumida, pudiendo ver las demás actividades en el anexo.

Como se mencionó anteriormente, la primer semana tuvo como objetivo repasar la noción de variable y relación entre variables, así como también sus diferentes representaciones (esquemas, tablas, fórmulas y expresiones coloquiales), revisando sus respectivas convenciones.

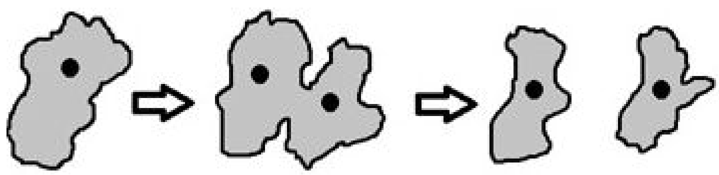
Con este objetivo la docente del curso preparó una clase ya que en primer año los estudiantes trabajaron este tema con ella. Luego de este repasó, estaba previsto que se dé comienzo a la práctica. Se observó en otras divisiones a la profesora presentando esta clase, por lo que la docente tutora consideró oportuno que fuera la practicante quien iniciara con este repaso empleando el material que ella había organizado en una presentación multimedia.

Se comenzó así presentando a los estudiantes, bajo el título de relaciones entre variables, el siguiente problema:

En un experimento biológico se encuentra que cierto tipo de ameba tiene la capacidad de duplicarse, dividiéndose en dos una sola vez, en un minuto. ¿Cuántas amebas habrá al cabo de diez minutos?

Imagen 5 - Problema planteado en la apertura a la unidad. Extraído de una de las diapositivas de la presentación multimedia confeccionada por la profesora tutora.

El problema plantea la relación que existe entre la cantidad de amebas y el tiempo transcurrido. Se señaló que el dato que indica que la ameba se reproduce cada un minuto fue un supuesto y que éste se realizó para poder estudiar matemáticamente la relación. Debajo del problema se encontraba una esquema de esta relación (ver *Imagen 6*), el cual se interpretó junto con los alumnos, y se entendió como tiempo cero el instante inicial donde hay una sola ameba.



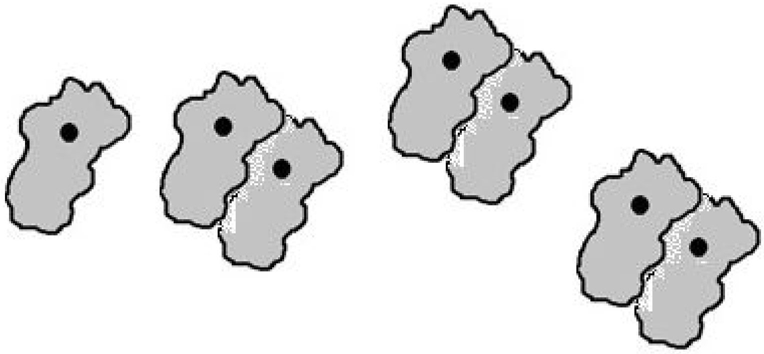


Imagen 6 - Esquema de la relación cantidad de amebas vs. tiempo. Extraído de una de las diapositivas de la presentación multimedia confeccionada por la profesora tutora.

Se trabajó al frente con las ideas de los estudiantes en torno a cómo resolver el problema. Varios estudiantes pasaron al frente y escribieron en el pizarrón de tiza sus ideas. Se anotó, a medida que avanza el tiempo, cuántas amebas se iban generando. Luego se organizó en forma de tabla la información (ver *Tabla 1*) y se consensuó cuáles eran los nombres de las variables, cuál era la variable independiente, cuál la dependiente y porqué. En esta instancia se recordaron algunas convenciones en torno a la construcción de tablas, tales como la que establece que las unidades van solo en los encabezados y entre paréntesis.

Tiempo (min)	**Cantidad de amebas**
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024

Tabla 1 - Reproducción de la tabla para representar la relación cantidad de amebas vs. tiempo producida por los estudiantes en la pizarra.

De este modo los estudiantes arribaron a la solución mediante la confección de la tabla que fueron completando recursivamente. Para promover el trabajo hacia la generalización, mediante la construcción de una expresión simbólica para esta relación, se realizó a los estudiantes la siguiente pregunta:

¿Y si queremos saber la cantidad de amebas para un tiempo cualquiera?

Se observó entonces la relación que había entre la cantidad de amebas en el tiempo 1 y en el tiempo 2, y se preguntó cómo se encuentra ese valor, luego, se escribió al lado del 4 en la tabla esta operación, quedando 4=2.2. De igual forma, se vió que 8=2.2.2 y así se siguió avanzando. Los alumnos habían trabajado en la unidad anterior la *potenciación,* y un alumno propuso recurrir a ella para comprimir la escritura. Así, se llegó a que para el tiempo 10 la cantidad de amebas era 2^{10}.

Destacamos que este arribo no fue tan directo, ya que los estudiantes querían completar la tabla identificando regularidades y proponían utilizar propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa, sumando los valores de la variable independiente para hacerlos corresponder con la suma de los respectivos valores de la variable dependiente. Esto se tuvo en cuenta para la propuesta del Laboratorio N°1 y al momento de institucionalizar Relaciones de Proporcionalidad Directa.

Luego de que se logró concluir que la cantidad de amebas a los 10 segundos era 2^{10}, se preguntó, *¿Y a los 15 minutos? ¿Y a los 30 minutos? ¿Y a los X minutos?* (se agregaron estos valores en la primera columna) logrando así como respuesta a la última pregunta 2^x. Anotamos en el pizarrón en un lugar aparte de la tabla esto, *y si X era el tiempo, ¿Qué es* 2^x *? ¿Qué símbolo le asignamos?* Así, quedó en el pizarrón, la siguiente **expresión simbólica**:

$$y = 2^x$$

x es el tiempo transcurrido en minutos
y es la cantidad de amebas

En un intento de síntesis se revisaron los diferentes registros para una relación entre dos variables. Se remarcó que la expresión en palabras, se denomina representación coloquial, y se recordó que, aunque en este caso no lo habíamos visto, ellos habían trabajado con gráficos el año pasado. Durante esta discusión los estudiantes reconocieron el esquema como otro tipo de representación de relación entre variables. Se destacó, además, que la tabla sirvió para *organizar* los datos, y la expresión simbólica para *generalizar* y *predecir* nuevos valores. Esto fue escrito en el pizarrón, y copiado por los alumnos en sus carpetas.

Se estableció así una base para el trabajo con modelización matemática, ya que en esta instancia los estudiantes generaron un modelo exponencial para describir una situación y predecir nuevos valores.

Se mostró luego un problema similar, que ellos ya habían discutido en primer año y que todos tenían muy presente, con la intención de concretar una metodología de trabajo: interpretar la relación entre variables presente y trabajar con la representación esquemática, en tabla y gráfica (ver *Imagen 7*).

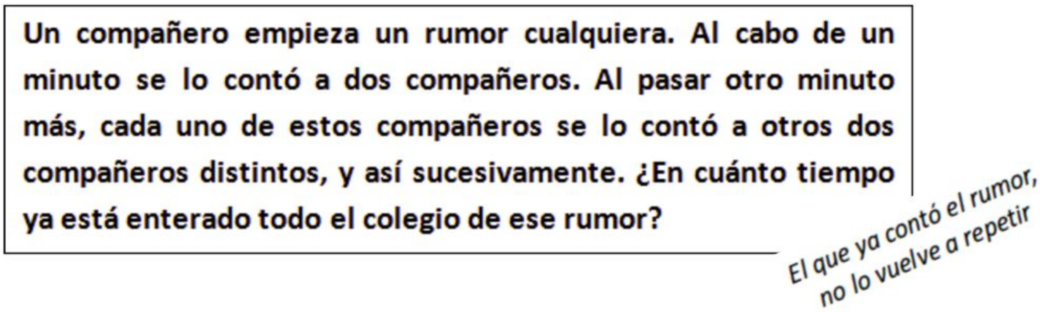


Imagen 7 - Segundo problema propuesto en la clase de apertura. Extraído de una de las diapositivas de la presentación multimedia confeccionada por la profesora tutora.

La diapositiva también presentaba un esquema para esta relación que interpretamos entre todos, se solicitó a los estudiantes que analizaran cuáles eran las variables que intervienen en este problema, reconociendo las variables independiente y dependiente, y explicando el porqué de esta dependencia. Como en el estudio de la relación anterior organizaron los datos en una tabla e intentaron encontrar una expresión simbólica, aunque en este caso es más complicada de hallar, si bien la habían encontrado el año anterior, no se escribió en esta ocasión. Se retomó también el tema de los supuestos y simplificaciones de la realidad para poder realizar un estudio matemático de esta situación. Por último, para cerrar esta parte de la clase, se quiso remarcar la importancia del estudio matemático en temas de la realidad, y se utilizó el modelo exponencial nuevamente, en este caso, para estudiar el contagio de una enfermedad: el Ébola. Primero se mostró un GIF que ilustraba la propagación de la enfermedad. En un mapa de África se observaba la relación cantidad de contagiados, geolocalizados por país, en función del tiempo. Se discutió luego que si el contagio tuviera las mismas características que la reproducción de las amebas, luego de diez pasos de tiempo, el número de contagiados subiría de 1 a 1024. Así, logramos entender el recaudo que se tomó para trasladar al enfermo de ébola que se muestran en la *Imagen 8*.

Imagen 8 - Imagen extraída de la presentación preparada por la profesora del curso. La imagen estaba acompañada del siguiente texto: Ébola en África. Diciembre de 2013 – Enero 2016
De aproximadamente 28000 casos, murieron 11000.

Los alumnos agregaron además que un mismo enfermo puede contagiar a más de una persona (no como en el caso del chisme) y que luego de contagiar no desaparece enfermo (como en el caso de las amebas), por lo que el número de contagiados sería aún el mayor a 1024 personas.

Como cierre de esta sección es interesante destacar el bagaje de conocimientos previos que poseen los alumnos, y la capacidad de trabajar con pequeños problemas de modelización. Este punto inicial es fundamental para comprender el alcance realizado en la unidad asignada.

2.4.2. Guía de actividades sobre relaciones entre variables

Se introdujo la guía de actividades "*Estudiamos algunas relaciones entre variables*", la cual se encontraba a disposición de los estudiantes en el aula virtual. Los estudiantes trabajaron en grupos de a dos estudiantes, con el compañero de banco y se incentivó al trabajo en colaboración.

Se invitó a los alumnos a estudiar algunas relaciones entre variables en diferentes situaciones y contextos. Las actividades de la guía buscaban promover la interpretación de diferentes registros y la conversión de unos a otros, así como también, la predicción, por medio del uso de modelos de nuevos valores de la variable dependiente para determinados valores de la variable independiente. Cabe aclarar que en esta guía se trabajaron distintos tipos de relaciones. Es decir, si bien se incluyeron ejemplos de relaciones de proporcionalidad directa e inversa, en general no se trató un modelo de relación particular.

Las actividades de esta guía pueden ser ubicadas en diferentes ambientes de aprendizaje según los definidos por Skovsmose (2000), ya que varía el tipo de referencia, ubicándose todas dentro del paradigma del ejercicio. Las primeras cuatro actividades hacen referencia la realidad, las dos siguientes a la semi-realidad y la última a la matemática pura.

Por cuestiones de tiempo, se trabajó sólo hasta la tercera actividad. Se decidió avanzar en la planificación ya que, junto la profesora tutora, consideramos que los estudiantes habían alcanzado el objetivo propuesto en esta instancia, teniendo un claro manejo de las nociones de variable, relación, variable dependiente e independiente y siendo capaces de interpretar y confeccionar gráficos y tablas. La expresión simbólica no fue tan trabajada en esta actividad, pero el manejo de ésta por parte de los estudiantes en el repaso realizado se consideró suficiente.

A continuación se presenta, a modo de ejemplo, el ejercicio número 2 de la guía, el cual fue trabajado en instancia de debate luego de la resolución de los alumnos.

2. Economía: Ley de demanda.

La demanda es la cantidad de bienes o servicios que los compradores intentan adquirir en el mercado.

Por medio de la ley de la demanda, se determina que al subir el precio de un bien o servicio, la demanda de éste disminuye. Y viceversa, al disminuir el precio de un bien o servicio, la demanda de éste aumenta.

a) ¿Cuáles son las variables que intervienen?
b) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
c) ¿Qué ocurre con la variable dependiente cuando la variable independiente aumenta?

Pensemos en un caso particular: la siguiente tabla muestra la cantidad de zanahorias demandada por una familia dependiendo el precio del kg.

Precio ($ por kg)	Cantidad demandada (Kg al mes)
4.50	14
9	10.25
13.5	7.5
18	5.25
22.50	3.5
27	2.5

d) En este ejemplo específico, ¿Cuáles son las variables que intervienen?
e) Realice un gráfico con la información de la tabla
f) Dentro de la sección *Análisis Regresión Dos Variables* de *GeoGebra*, hay varias opciones de modelos matemáticos que ajustan estos puntos. Pruebenlos y decidan cuál es el más adecuado.

Nota: Pase los datos de la tabla a una hoja de cálculo de *GeoGebra*. Vista -> Hoja de cálculo.
Luego, seleccionarlos y buscar en la barra de herramientas la opción *análisis de regresión de dos variables.*

g) A partir del gráfico, predigan cuántos Kg. de zanahoria demandará una familia en un mes si el Kg. cuesta $16

De la implementación de esa actividad en el aula se destaca:

- Reconocer en ejemplos de la realidad una relación entre variables descrita de de manera coloquial
  Los alumnos partieron de una descripción general de la ley de oferta y demanda. Luego, considerando el caso particular de la demanda de zanahoria en función de su precio, pudieron reconocer varios ejemplos de la realidad en lo que les parecía trivial pensar que si aumenta el precio dejarían de comprar, o comprarían menos.

- <u>Manejo de tecnologías: papel vs. tablet</u>
  El punto e) pide realizar un gráfico con la información de la tabla. Pese a que los estudiantes tenían a su disposición las tablets y la consigna indicaba trabajar con *GeoGebra*, varios estudiantes varios usaron hojas de la carpeta (cuadriculadas, rayadas e incluso lisas) para representar los puntos en sistemas cartesianos, sin que ello representara una dificultad. Se observó un buen manejo de ejes y escalas, y pudieron transcribir la información a este registro de manera exitosa.

- <u>Modelos matemáticos mediados por la tecnología</u>
  El trabajo con la herramienta *Análisis Regresión Dos Variables* de *GeoGebra* (ver *Imagen 9*) fue planteado con la intención de visualizar posibles modelos matemáticos que describan el fenómeno en estudio, y elegir el más representativo para este fenómeno, la elección no necesariamente se centró en los valores sino también en el comportamiento de la función en relación con la situación estudiada.
  Aquí cabe destacar que incluso los estudiantes que habían elegido el papel, no sólo marcaron los seis puntos, sino que además crearon un modelo general interpolando de manera lineal y extrapolando[4] de maneras diferentes. Esto trajo al aula modelos no paramétricos[5], algo que no había sido previsto ya que *GeoGebra* no ofrece esta posibilidad con la herramienta que se presentó.

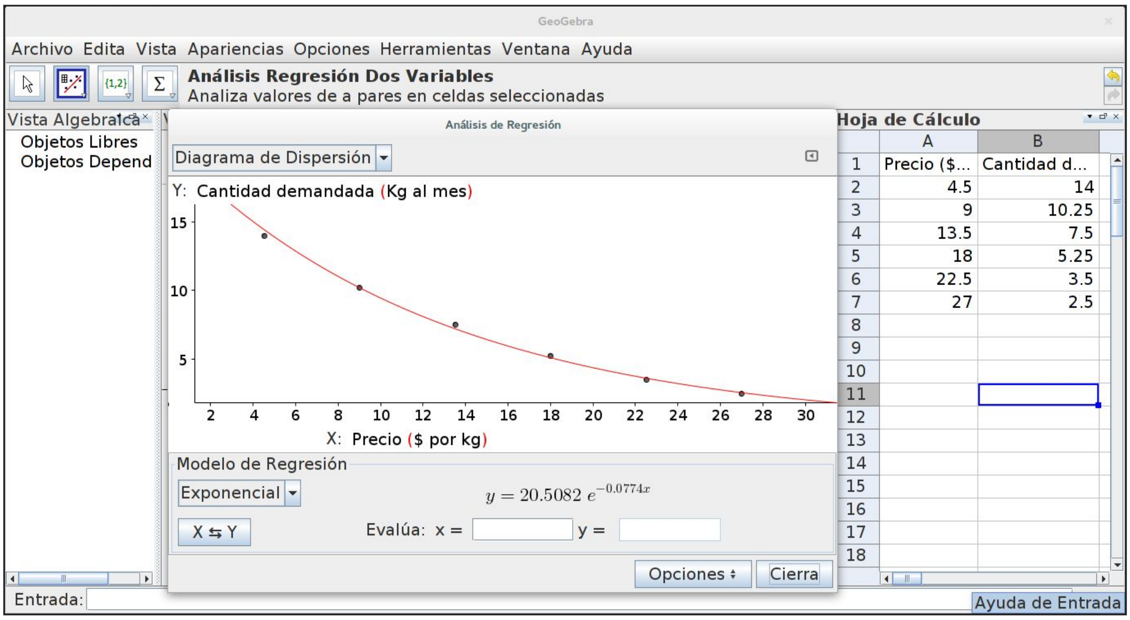


Imagen 9 - Captura de pantalla de la herramienta *Análisis Regresión Dos Variables* de *GeoGebra*. Modelo Exponencial para los datos de la actividad 2.

- <u>Validez de modelos matemáticos</u>
  El trabajo con la herramienta *Análisis Regresión Dos Variables* pedía probar modelos y elegir el más adecuado. Se esperaba, en primera instancia, trabajar el tema del error que se comete al elegir un modelo, y que el adecuado debía disminuir ese

[4] En matemáticas, extrapolación es el proceso de estimar más allá del intervalo de observación original.
[5] Si bien, las representaciones gráficas obtenidas podrían ser representadas con una expresión simbólica con ciertos parámetros, los estudiantes no encontraron estos modelos optimizando en los parámetros.

error. Así, los alumnos comenzaron a discernir entre un modelo y otro, eligiendo algunos el modelo polinómico (ver *Imagen 10*).

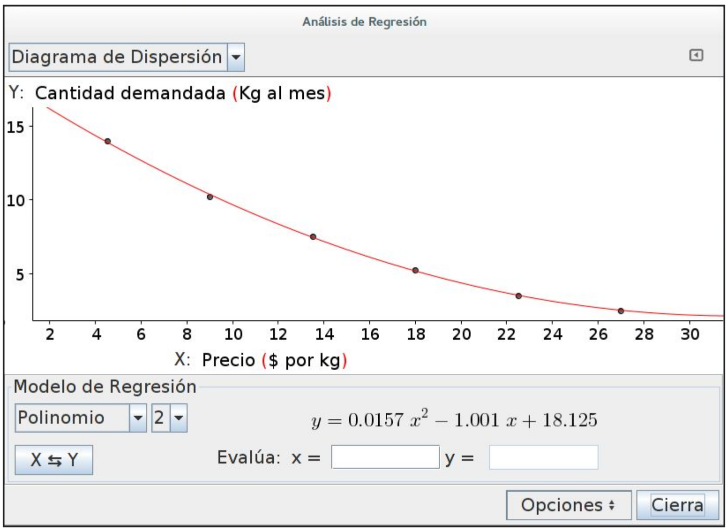


Imagen 10 - Herramienta *Análisis de Regresión Dos Variables* de *GeoGebra*. Modelo Polinómico para los datos de la actividad 2.

Cabe aclarar que el grado del polinomio es elegido automáticamente por la herramienta, tomando el que genere menor error, pero, uno puede cambiarlo si se desea.

En la siguiente imagen se amplía el modelo de la *Imagen 10*. Un estudiante explicó que lo elegía porque pasaba por todos los puntos. Sin embargo, notó y explicó al curso que, a partir de cierto punto, este gráfico dejaba de tener sentido para el problema, ya que significa que la gente compra más si el precio aumenta.

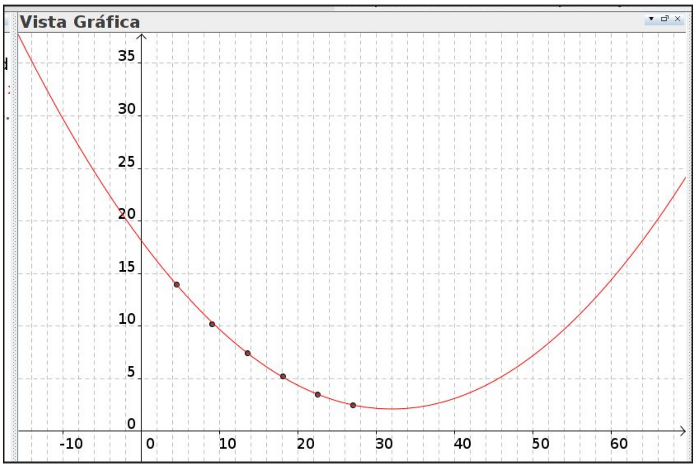


Imagen 11 - Modelo de la *Imagen 10* exportado a la vista gráfica de *GeoGebra.*

Este fue otro ítem tratado con los alumnos como criterio de selección de un modelo: además de pasar cerca de los valores observados debe representar el fenómeno a estudiar.

2.5. Segunda parte: Laboratorios y proporcionalidad directa

2.5.1. Laboratorio 1: Estiramiento vs Masa

2.5.1.1. Presentación de la actividad

Partiendo de un breve repaso de lo estudiado hasta el momento en torno a las relaciones entre variables y sus registros de representación se introdujo el Laboratorio N° 1 presentando a los estudiantes la diapositiva de la *Imagen 12*.

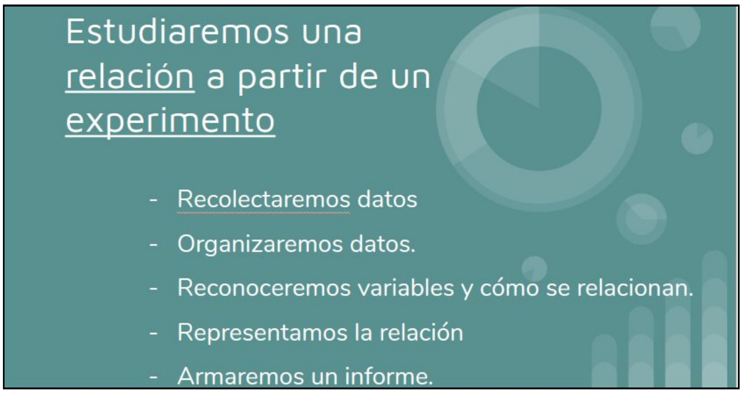


Imagen 12 - Presentación del Laboratorio N° 1.

Se explicó que la relación que iban a estudiar es la que existe entre el estiramiento de un resorte con respecto a la masa que se coloca en su extremo inferior. Se comentó que para este estudio se necesitaría utilizar determinados materiales y se mostró, con la ayuda de una imagen en la pizarra electrónica, cuáles eran dando cuenta de su finalidad e indicando cómo y en qué orden montar las diferentes piezas. Esta imagen también se encontraba en la guía de Laboratorio N°1. Así, una vez establecido el objetivo del laboratorio y habiendo puesto en conocimiento a los estudiantes de los materiales que debían manipular, se pidió que se organicen en grupos de tres alumnos y nos trasladamos al laboratorio.

2.5.1.2. Objetivos y motivación

La motivación de esta actividad fue que los alumnos trabajen experimentalmente sobre un fenómeno físico para estudiar una relación de proporcionalidad directa. El estudio de la relación involucraba desde la recolección de datos a la elección de un modelo y su validación. Así, esta actividad, se pensó desde un principio como base tanto del estudio de relaciones de proporcionalidad directa, como del trabajo con modelización matemática que realizaríamos posteriormente.

Se detallan a continuación los objetivos generales de la práctica sobre los que se avanzó al plantear esta actividad y, a continuación, los objetivos específicos propios del Laboratorio N° 1.

- Objetivos generales con los que se avanzó:
    - Reconocer variables y relaciones entre variables en contextos de realidad.

- Usar diferentes representaciones para la interpretación y comprensión de las relaciones, y en una segunda instancia, para calcular o estimar valores de la relación no conocidos.

- Objetivos específicos del Laboratorio N°1:
  - Introducir a los estudiantes, de manera implícita, en el desarrollo de un proceso de modelización guiada mediante un diseño experimental.
  - Estudiar cómo se relaciona el estiramiento de un resorte con la masa colocada en su extremo inferior.
  - Recolectar datos experimentales y formular hipótesis para la relación estiramiento-masa.
  - Representar la relación estiramiento-masa en diferentes registros.
  - Utilizar los diferentes registros para predecir valores de la relación no conocidos previamente.
  - Validar la hipótesis a partir del análisis de los diferentes registros y la recolección de nuevos datos.

2.5.1.3. La actividad

Se presenta a continuación la guía del Laboratorio N° 1 con la que trabajaron los estudiantes.

Experimento 1: Estiramiento vs Masa

Nombre del grupo:

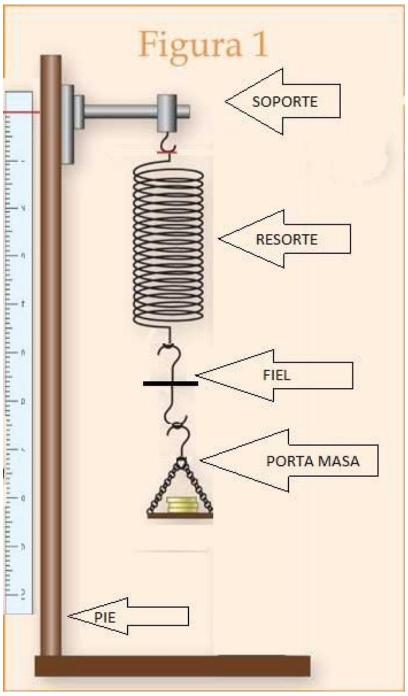
Integrantes:

Objetivo: Estudiar la relación entre el estiramiento de un resorte y la masa colocada en su extremo inferior. Dicho estudio se llevará a cabo mediante la exploración, la recopilación y el análisis de datos experimentales.

Materiales:

- Resorte
- Soporte y Pie con regla
- Porta masa y fiel
- 5 pesas.
- Lápiz y papel, o tablet para registrar los datos.

Nota: Leer todo antes de comenzar.



Procedimiento:

a. Colocar el resorte en el soporte, luego el fiel en el extremo inferior del resorte, y por último el porta masa debajo del fiel.
b. Elegir una pesa, registrar la masa, luego colocarla en el porta masa.
c. Medir cuánto se extiende la longitud del resorte luego de haber colocado la pesa. Registrar esta longitud.
d. Repetir este procedimiento para cada una de las pesas y para 4 masas más combinando en cada caso dos o más pesas. En todos los casos registra los datos correspondientes.
e. Asegurarse de que todos los datos queden registrados en un archivo, hoja o ambos.

Desarrollen, en grupo, las siguientes actividades:

1) Realicen la experiencia de recolección de datos, organizandolos en una tabla construida por ustedes.

2) Formulen hipótesis relacionando el estiramiento del resorte con la masa que produce este estiramiento.

3) a) Pasen los datos de la tabla a una hoja de cálculo de *GeoGebra*.
b) Ajusten los puntos de su experimento apelando a la sección *Análisis Regresión Dos Variables* de *GeoGebra*. Prueben los diferentes modelos, decidan con el grupo cuál es mejor y expliquen porqué. ¿Qué críticas le harían a la curva de ajuste elegida? Exporten la imagen en formato .png, luego la usarán en la redacción del informe.
c) Copien la expresión simbólica vinculada al ajuste de curva que realizaron. ¿Qué representa la variable *x*? ¿Y la variable *y*?

4) Usen la herramienta *Valor exacto (simbólico)* para predecir el estiramiento de una masa no medida, luego realicen esta medición y compárenla con el valor obtenido ¿Qué pueden concluir a partir de esta comparación?

5) ¿Para qué valores de x este ajuste tiene sentido en relación a su experiencia de laboratorio?

6) A partir de los datos recolectados y el gráfico obtenido elaboren una conclusión de acuerdo a la hipótesis planteada, considere las siguientes cuestiones:
- A medida que aumenta la masa, ¿qué ocurre con el estiramiento?
- ¿Qué ocurre con el estiramiento del resorte, cuando la masa resulta de la suma de las masas de dos o más pesas?

7) Suban al aula virtual un documento de texto que se denomine InformeExperimento1NombreDelGrupo donde se encuentre el desarrollo de todas las actividades. En las actividades que utilizó gráficos o tablas de *GeoGebra,* incluya las imágenes exportadas o capturas de pantalla. Tienen tiempo hasta el Martes 08/08 a las 22:00.

[1] Para la elección de esta masa, tenga en cuenta que tiene que poder luego medirse con las pesas de las que su grupo dispone.

2.5.1.4. Materiales

Para llevar adelante esta actividad , se trabajó con materiales prestados por el laboratorio de FaMAF. Mediante una gestión institucional se consiguió que a facultad facilitara: 7 pies, 13 resortes de distinta elasticidad, 65 pesas, 12 portamasas, 12 fieles y 11 reglas de 40 cm.

Para organizar el trabajo en los grupos, se hicieron agrupamientos de cinco pesas asociadas a un resorte particular teniendo en cuenta su elasticidad, de modo de garantizar que el estiramiento no superase los 40 cm para que pudiera medirse con las reglas de las que disponíamos. De este modo el material se organizó de forma que cada grupo se encuentre con pesas de diferentes masas y que todas generasen un estiramiento notable en el resorte.

El material se encontraba a disposición de los grupos, organizado y distribuido previamente en las mesas del laboratorio. Se distribuyeron dos grupos por mesa. Cada grupo disponía de un folio set con 5 pesas, un resorte ,un porta masa y un fie; el pie con la regla adherida con cinta transparente, y la guía de laboratorio impresa (ver *Imagen 12*).

Imagen 12- Organización de los materiales para un grupo en una de las mesas del laboratorio. Se observa el pie con la regla, el folio con el set de materiales, y la fotocopia de actividades.

2.5.1.5. Medición experimental: dificultades y estrategias

Uno de las motivaciones para la realización de esta actividad era la de enfrentar a los estudiantes a los problemas de mediciones experimentales. El tratamiento de estos problemas que involucran técnicas e instrumentos de medición así como el factor humano era uno de los temas previstos a tratar con los estudiantes posteriormente.

Para comenzar se introdujo el fiel como herramienta, remarcando que su finalidad era aumentar la precisión al momento de decidir con qué valor de la regla se corresponde la longitud del resorte. Se mencionó que observar el fiel de manera perpendicular a la regla era lo óptimo, ya que una lectura de la medición desde otro ángulo arrojaría un valor equivocado de longitud. Luego se pasó a la fase experimental, donde los estudiantes teniendo en cuenta estas sugerencias desarrollaron varias técnicas para el mejor aprovechamiento del fiel, como muestran las *Imágenes 13 a*, *b* y *c*.

(a) (b) (c)

Imagen 13- Estrategias utilizadas por los alumnos para disminuir el error de medición durante la recolección de datos del Laboratorio N° 1.

Estas imágenes muestran la utilización de diferentes elementos (reglas, estuche de tablet) como herramienta auxiliar para mejorar la precisión de la lectura. Resultó interesante notar que la escuadra no fue elegida por ningún grupo como instrumento para determinar esta proyección perpendicular. Estas técnicas fueron compartidas en el debate de cierre por los estudiantes explicitando su propósito.

Cabe destacar la aclaración en algunos grupos de porqué el fiel no influencia en el estiramiento del resorte. La discusión se basa en el interés de estudiar la variación del estiramiento del resorte en función de la masa colocado. La razón por la que esta variación es independiente de la longitud inicial del resorte es que la relación a estudiar es de proporcionalidad directa, por ende, la variación de la variable dependiente en un intervalo de la variable independiente depende sólo de la longitud del intervalo.

La manera en que se trabajó esto con los estudiantes fue planteando la necesidad de tener un lugar en donde colocar la masa, sin deformar el resorte. En base a esto, se sugirió considerar el resorte y el portamasa como “un solo combo” con el fin de resaltar que tomaran ambas elementos como una unidad.

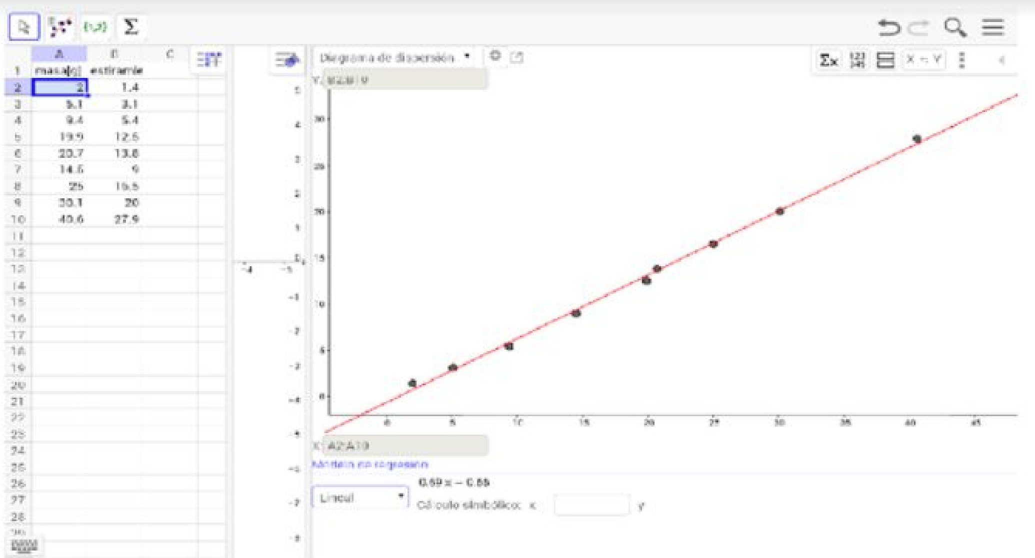
2.5.1.6. Elección del modelo

Se tuvo en cuenta la existencia del error experimental al elegir el modelo, ya que los estudiantes se incomodaban al ver que los modelos no pasaban por todos los puntos, por lo que se preguntó: *“¿A qué se puede deber que el gráfico no pase exactamente por los puntos?”.* Esto fue discutido en cada grupo, y en los cierres de las clases, con el curso en general. Se trabajó la idea que una pequeña diferencia es aceptable ya que puede deberse a los errores de medición, es decir, a la diferencia que existe entre el valor real y el valor observado.

Este criterio fue tenido en cuenta por los estudiantes tanto al momento de elegir un modelo dentro de las opciones que brinda la herramienta *Análisis Regresión Dos Variables* de *GeoGebra*. Los estudiantes buscaban el modelo que pase lo más cerca posible por los puntos, pero seguían esperando que pase exactamente por ellos, como se observa en la *Imagen 14*. Por eso, una vez elegido el modelo, seguían reconociendo y criticando la diferencia existente entre el modelo y los datos experimentales. Por ejemplo, un grupo que eligió el modelo lineal crítica que "No pasa exactamente por todos los puntos" y atribuye esta diferencia a los errores de medición (ver *Imagen 15*).

No hay ningún modelo que sea exacto ya que ninguna línea pasa por encima de los puntos. Elegimos esta porque es la línea donde los puntos están más cercanos a ella.

Imagen 14 - Recorte de un informe del Laboratorio N° 1. Crítica al modelo lineal escogido por el grupo.



3b)Podemos criticar que en el gráfico la curva no pasa por exactamente por todos los puntos, sino que en algunos puntos pasa por un costado o directamente no lo toca, porque nuestros cálculos fueron a ojo e imprecisos.

Imagen 15 - Recorte de un informe del Laboratorio N°1. Modelo elegido por el grupo y su justificación.

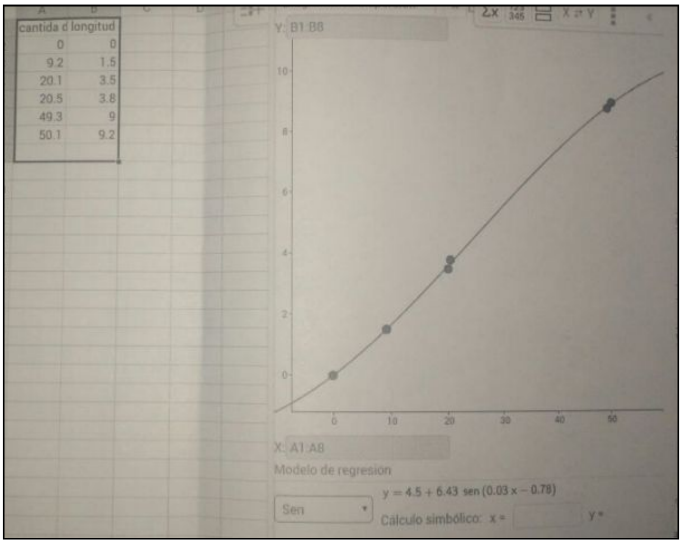
Resulta interesante destacar en la producción de estos grupo cómo se refieren a los puntos atribuyéndoles características que no les pertenecen. En intervenciones en clase esto también se hizo evidente cuando un estudiante hizo referencia a pasar por el medio de los puntos. Esto da cuenta de cómo la visualización icónica de un objeto matemático, en este caso el punto, interfiere con su interpretación conceptual, ya que conceptualmente el punto no tiene medio ni costado.

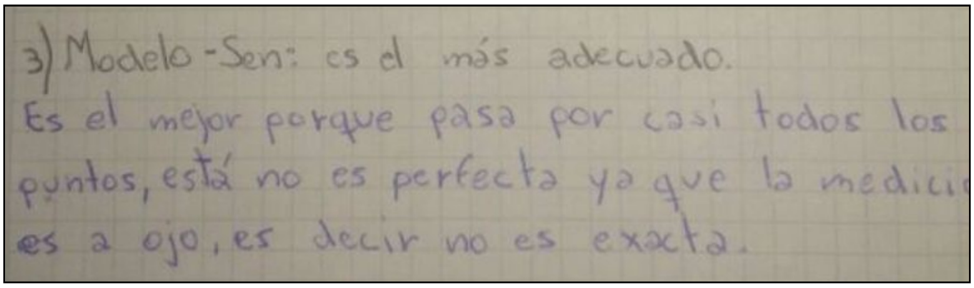
En la *Imagen 16* se observa la enumeración de los "pros y contras" de la elección del modelo lineal. Plantean criterios de selección, en los que incluyen que el gráfico del modelo debe pasar cerca de los puntos, pero además que debe tener sentido y que la fórmula debe ser simple.

3) b. Elegimos el modelo de regresión LINEAL
Pros: El gráfico tiene sentido
La fórmula es más simple que la de otros modelos
Contras: La línea no pasa exactamente por todos los puntos (porque la medición no es exacta)

Imagen 16 - Recorte de un informe del Laboratorio N° 1. "Pros y contras" , según un grupo, del modelo lineal que escogieron.

En la *Imagen 17 a y b*, se observa nuevamente el criterio que se centra en la cercanía de la curva del modelo a los puntos y el tema del error de medición, con la mención especial al modelo sinusoidal elegido en este caso.

a)


b)

3) Modelo - Sen: es el más adecuado.
Es el mejor porque pasa por casi todos los puntos, está no es perfecta ya que la medici
es a ojo, es decir no es exacta.

17 a y b - Fotografías de un informe del Laboratorio N°1. Ajuste de los datos experimentales con el Modelo Sinusoidal elegido por un grupo de estudiantes.

La diversa elección de modelos y la variedad de criterios de selección llevó a planificar una clase de 35 minutos en la que exclusivamente se discutió cuál es el modelo adecuado para representar la relación que existe entre el estiramiento de un resorte y la masa que se coloca en su extremo.

2.5.1.7. Validez de los modelos elegidos

La elección de los modelos y la producción de críticas a estos, así como también las respuestas que los grupos formularon a la pregunta *¿Para qué valores de x este ajuste tiene sentido en relación a su experiencia de laboratorio?* no fueron uniformes. Los diferentes grupos hicieron distintos tipos de aportes con respecto a la validación de los modelos, los cuales fueron rescatados en una discusión grupal que se realizó posteriormente.

Algunos grupos de estudiantes, reconocieron a partir de la experiencia del laboratorio que si no se colocan pesas en el porta masa no hay estiramiento y que por lo tanto el ajuste de curva del modelo seleccionado debería pasar por el origen (ver *Imagen 18*).

> 3) Nos gustó el modelo lineal porque su línea pasa por todos los puntos , es recta y es mas fácil de comprender aunque no pase por el cero .

Imagen 18 - Recorte de un informe del Laboratorio N°1. Crítica al modelo elegido.

Además de destacar la singularidad del origen, otros grupos también aportaron críticas a la porción del gráfico en el tercer cuadrante (ver *Imagen 19*).

> B)Para a mi el mas correcto es el lineal porque pasa por el cero y te permite identificar mas puntos porque es una línea recta entonces podes marcar mayores estiramientos pero lo malo es que representa números negativos ya que es imposible ya que no se puede medir estiramiento negativo,ademas no pasa por todos los puntos porque los cálculos no son exactos

Imagen 19 - Recorte de un informe del Laboratorio N° 1. Crítica al modelo elegido.

En relación al límite superior del dominio para el cual es válido el modelo, un grupo de estudiantes consideró que éste está dado por el máximo valor posible que ellos pueden medir experimentalmente, atribuyendo esta restricción a la capacidad del instrumento de medición, en este caso, la regla (ver *Imagen 20*).

> 5)Para los valores de x,la masa, que den un estiramiento menores a 30 centímetros que es lo que máximo que podíamos medir en el laboratorio(el limite del ajuste)

Imagen 20 - Recorte de un informe del Laboratorio n°1. Valores del dominio para los cuales tiene sentido el modelo elegido.

2.5.1.8. Errores de predicción en función de errores de medición

El ítem 4 invitaba a los estudiantes a que utilicen el modelo elegido para predecir cuánto se estirara su resorte para un valor de masa que no habían registrado, y luego, verificarlo experimentalmente. Al realizar esto observaron diferencias entre el valor predicho y el observado.

¿A que se debe esta diferencia? El dato observado, como ya se mencionó, tiene incorporado el error de medición. Pero, por otro lado, el dato predicho tiene incorporado el error del modelo, el cual surge de haber sido elegido en función a datos que incorporan un error.

En el análisis de los estudiantes se observa sólo el manejo del primer error. Es decir, ellos consideraron que el estiramiento debía ser el predicho por *GeoGebra*, atribuyendo al software cualidades como exactitud y precisión; y asumiendo que cualquier diferencia entre el valor que arroja *GeoGebra* y el dato experimental se debía a que estaban midiendo mal (*Imagen 21* y *22*).

4) La conclusión es que hemos tenido pequeños problemas de medición a lo largo del trabajo . Que suponemos que todos los grupos han tenido . Es decir que Geogebra da el estiramiento del resorte precisamente .

Imagen 21 - Recorte de un informe del Laboratorio N°1. Validación.

4) Llegamos a la conclusión que la predicción de geogebra fue exacta porque al hacerlo nosotros manualmente obtuvimos un resultado casi igual.

Imagen 22 - Recorte de un informe del Laboratorio N°1. Validación.

Cabe aclarar que la herramienta de *GeoGebra* que valúa el modelo en el valor de la variable independiente que se le pida, se denomina *Valor exacto (simbólico).* Esta denominación obstruyó cualquier posibilidad de intuir que el modelo podía arrojar datos con error.

2.5.1.9. Propiedades de la relación de Proporcionalidad Directa

La motivación de esta actividad fue que los alumnos trabajen con una relación de proporcionalidad directa para que, al momento de definirla, tengan una un ejemplo concreto como referencia.

Por tal motivo, como parte de la guía de laboratorio, se pidió analizar para la relación masa-estiramiento lo siguiente:

A partir de los datos recolectados y el gráfico obtenido elaboren una conclusión de acuerdo a la hipótesis planteada, considere las siguientes cuestiones:

- *A medida que aumenta la masa, ¿qué ocurre con el estiramiento?*
- *¿Qué ocurre con el estiramiento del resorte, cuando la masa resulta de la suma de las masas de dos o más pesas?* [6]

Se quiso arribar así a la proporcionalidad directa como aquella relación creciente que cumple que la suma de dos valores de la variable independiente se corresponde con la suma de los respectivos valores de la variable dependiente.

Los resultados obtenidos en los informes cumplieron las expectativas y sirvieron de base para la institucionalización (ver *Imagen 23*).

6- a. A medida que aumenta la masa, el estiramiento aumenta en proporción a la masa.
b. Cuando la masa resulta de la suma de dos o más masas, el estiramiento es el resultado de la suma de los estiramientos de todas las masas involucradas.

Imagen 23 - Recorte de un informe del Laboratorio N°1. Conclusiones.

Si bien todos los grupos consiguieron reconocer que la relación era creciente, no todos pudieron identificar la propiedad de la suma (ver Imagen 24).

[6] Extraído de la guía de Laboratorio N°1

6)A medida que incrementamos masa el estiramiento aumenta según la elasticidad del resorte , un ejemplo es al añadir dos pesas por ejemplo no cambia el sentido según la cantidad de pesas si no lo que en realidad cambia son los gramos que tienen cada pesa entonces lo que hace esto es añadir más peso al resorte y por lo tanto el estiramiento aumenta en mayor cantidad cuando se le va añadiendo más masa.

Imagen 24 - Recorte de un informe del Laboratorio N°1. Conclusiones

Todas estas producciones fueron tenidas en cuenta en la clase en la que se debatieron los diferentes modelos involucrados. Cabe aclarar que la propiedad de la suma fue debatida en el cierre de la primera clase en el laboratorio, ya que surgió rápidamente como idea en los estudiantes.

2.5.1.10. Discusión sobre los modelos elegidos: preparando el terreno para la Proporcionalidad Directa

A partir de la variedad de producciones de los estudiantes, y principalmente, de los diferentes modelos elegidos para un mismo fenómeno, se decidió trabajar sobre la discusión de los modelos elegidos, a la cual se dedicó una hora cátedra. Esta discusión se inició indagando *¿No les llama la atención que para el mismo fenómeno todos tengamos modelos distintos?*

El propósito fue arribar al modelo lineal, discutir el dominio en el que es válido, y observar en el modelo la propiedad creciente y la de la suma.

Se trabajó en base a datos (Ver *Imagen 25*) y gráficos previamente preparados para analizar la pertinencia de los diferentes modelos como representaciones del fenómeno.

Hoja de Cálculo

	A	B
1	Masa(gr)	Longitud del estiramiento(cm)
2	9.9	3.1
3	10.6	3.2
4	15.1	4.4
5	22.4	6.6
6	28.7	8.8
7	20.5	6
8	25	7.5
9	25.7	7.8
10	32.3	9.8
11		

Imagen 25 - Datos que se utilizaron para la discusión grupal sobre el modelo adecuado para la relación estiramiento vs. masa.

Al momento de presentar diferentes modelos, se retomó la discusión en torno a los errores de medición experimental para reconocer porqué el ajuste no necesariamente pasaría por todos los puntos.

Con la intención de hacer notar a los estudiantes que para la elección del modelo es necesario tener en cuenta que éste represente al fenómeno, se trabajó con las nociones de crecimiento y decrecimientos. De este modo, mediante preguntas se condujo a los estudiantes a notar que si aumenta la masa, el estiramiento debía aumentar, y se indagó si el gráfico seleccionado por los diferentes grupos representaba o no este comportamiento. Para esto se mostró en el aula un modelo polinómico de grado 7 y se analizó la no representación del fenómeno en la zona de decrecimiento, intentando así ampliar la visión crítica de los estudiantes desde lo discreto a lo continuo (ver *Imagen 26*).

Luego se eligió el modelo logístico. Éste ajustaba considerablemente bien los datos (Ver *Imagen 27*), pero, al colocar un nuevo dato correspondiente a un valor de masa notablemente mayor a los datos observados, se señaló que el modelo no lo ajustaba bien (Ver *Imagen 28*). El dato agregado fue el par (50, 15.1).

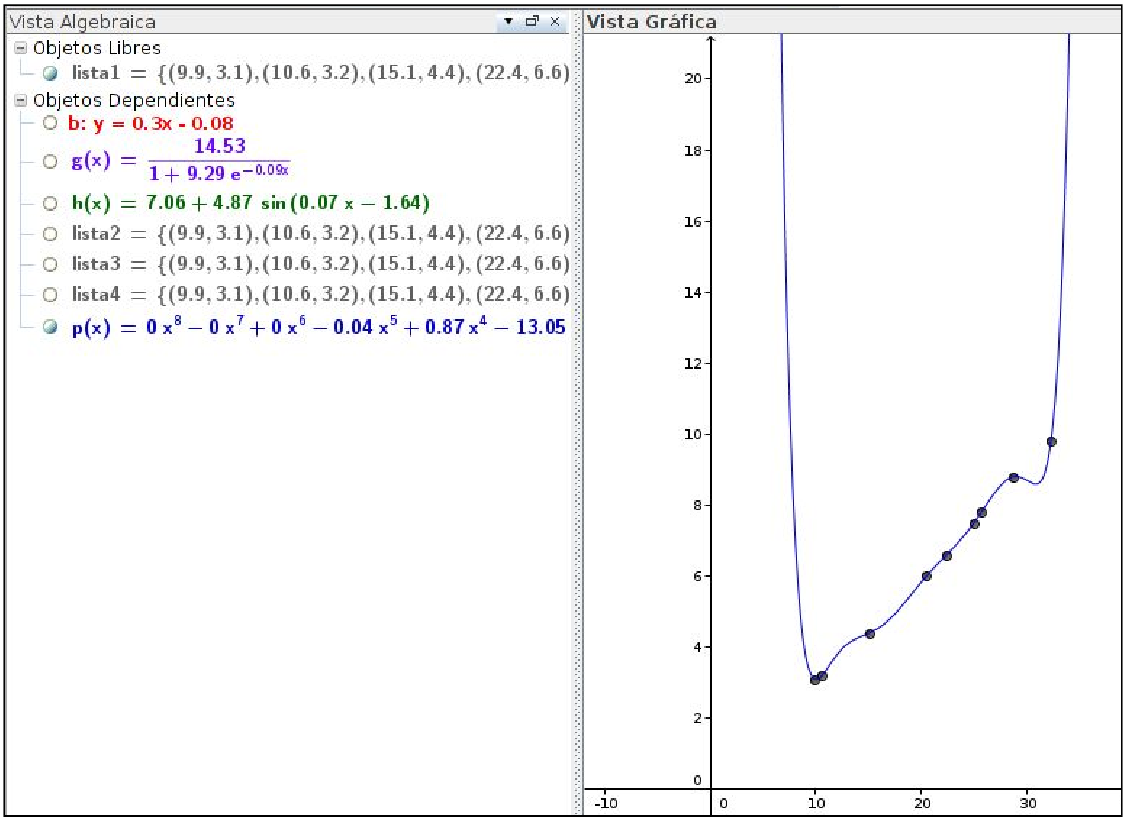


Imagen 26 - Ejemplo de ajuste polinómico, con un polinomio de grado 7, para datos experimentales del Laboratorio N° 1. Este ajuste ofrece intervalos decrecientes.

Con respecto al dominio se indagó si el modelo debía o no pasar por el origen, qué significado tiene el modelo para los valores negativos del eje de las abscisas, y hasta qué valor positivos este modelo tiene sentido teniendo en cuenta el fenómeno que representa. Se discutió la falta de sentido de los valores negativos, y se relacionó el límite superior de validez con el punto en el que el resorte se rompe.

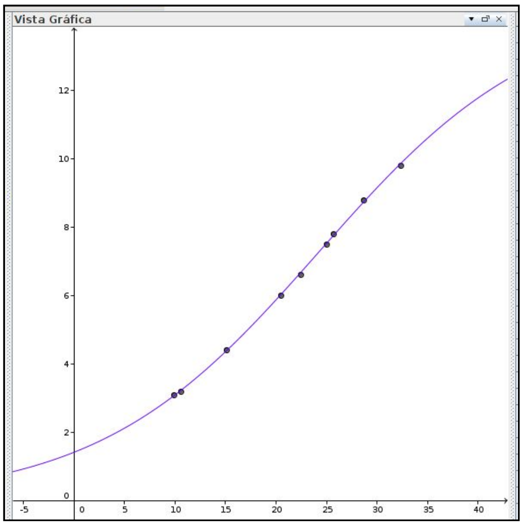


Imagen 27 - Ajuste logístico para los datos de la *Imagen 25.*

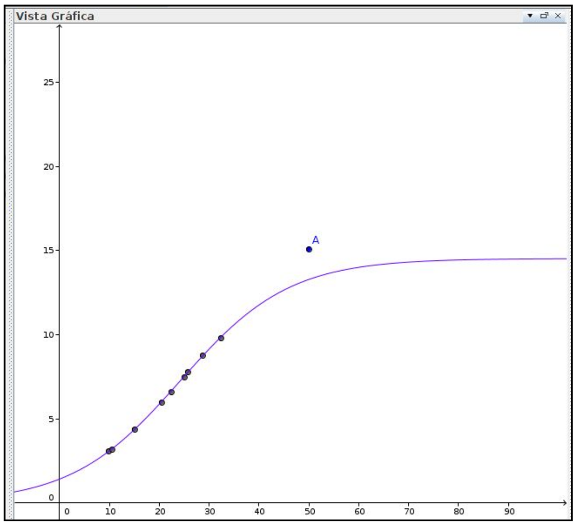


Imagen 28 - Ajuste logístico a los datos de la *Imagen 25*, más, el par (50, 15.1).

Se observó así que el modelo pierde validez para valores más grandes de masa. *¿Cómo debería haber sido el modelo para que pase por el punto que se agregó?* Se dedujo que debería haber "seguido derecho" , por ende, se tomó el modelo lineal, y se obtuvo la *Imagen 28*.

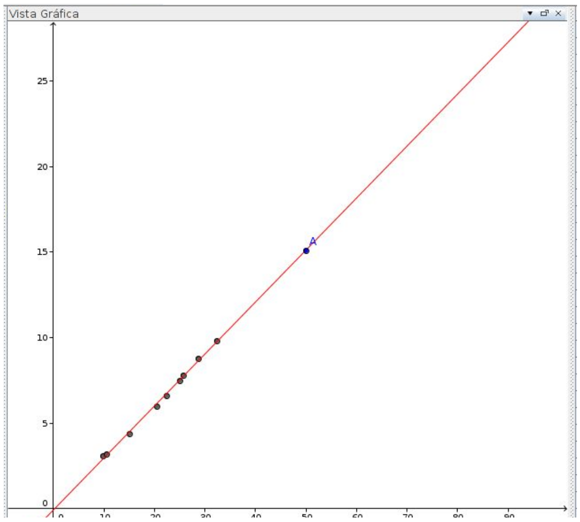


Imagen 28 - Ajuste lineal a los datos de la *Imagen 25*, más el par (50, 15.1)

Por lo que se concluyó que el modelo debía ser lineal. Luego, se trabajó si debía pasar o no por el origen. Se interpretó que el valor cero de masa corresponde a no poner ninguna masa en el portamasa y, por ende, el resorte no debería estirarse, por lo que el modelo debía pasar por el origen.

Se concluyó que el modelo que mejor representaba a la relación masa-estiramiento era una recta que pasaba por el origen.

Luego se discutió que no todos teníamos los mismos resortes, por ende, no todas las rectas serán iguales. A continuación, se dibujó en el pizarrón dos rectas de diferentes pendientes, recurriendo a dos sistemas de ejes cartesianos distintos, uno al lado del otro, y se preguntó: *¿Cuál gráfico representa un resorte blando y cuál un resorte duro?* Marcando el mismo valor para el eje x, y sus correspondientes valor para el eje y, se dedujo que la recta de menor pendiente es un resorte más duro.

Con esto ya se contaba con suficientes elementos para caracterizar una relación de proporcionalidad directa, lo cual se realizó luego del Laboratorio N°2, y se explica en la sección 2.5.3.

2.5.2. Laboratorio N° 2: Vaciado de un recipiente

2.5.2.1. Presentación de la actividad

Se presentó este laboratorio diciendo que seguiríamos estudiando relaciones entre variables y que volveríamos a recolectar datos pero esta vez con por medio de un laboratorio virtual.

Se trabajó con el simulador de vaciado de un recipiente de *GeoGebra,* el cual se encontró entre los recursos que la página de *GeoGebra* ofrece, y se puede dercargar de ella para trabajar offline[7]. Fue subido al aula virtual con antelación junto con la guía *Laboratorio N°2: Vaciado de un recipiente* (Ver Anexo A2), la cual se diseñó para trabajar con el simulador y se pidió a los alumnos que descargen ambas cosas para la clase correspondiente.

Este simulador representa el vaciado de un recipiente cilíndrico, con un orificio circular en la base. Cuenta con varios deslizadores para fijar las variables que intervienen, entre ellos, los respectivos radios. Se tuvo que observar el protocolo de construcción del simulador para poder entender esto y poder diagramar la guía del Laboratorio N°2.

Con la intensión de explorar este laboratorio y reconocer las variables involucradas, se abrió el simulador en la pizarra electrónica, se puso play, y se preguntó *¿Qué es esto?*

Se muestra en las *Imágenes 29*, *30* y *31* una secuencia de capturas de pantalla para diferentes tiempos que ilustra el funcionamiento de este simulador.

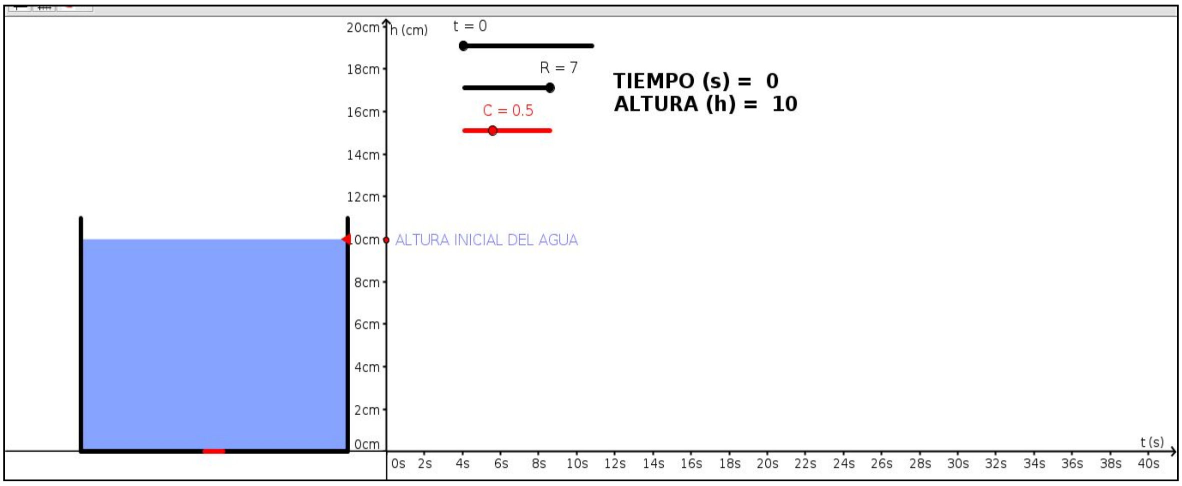


Imagen 29 - Simulador "Vaciado de un recipiente" de *GeoGebra* antes de poner play.

[7] "Vaciado De Un Recipiente." *GeoGebra*, www.geogebra.org/m/gTcQ9STn.

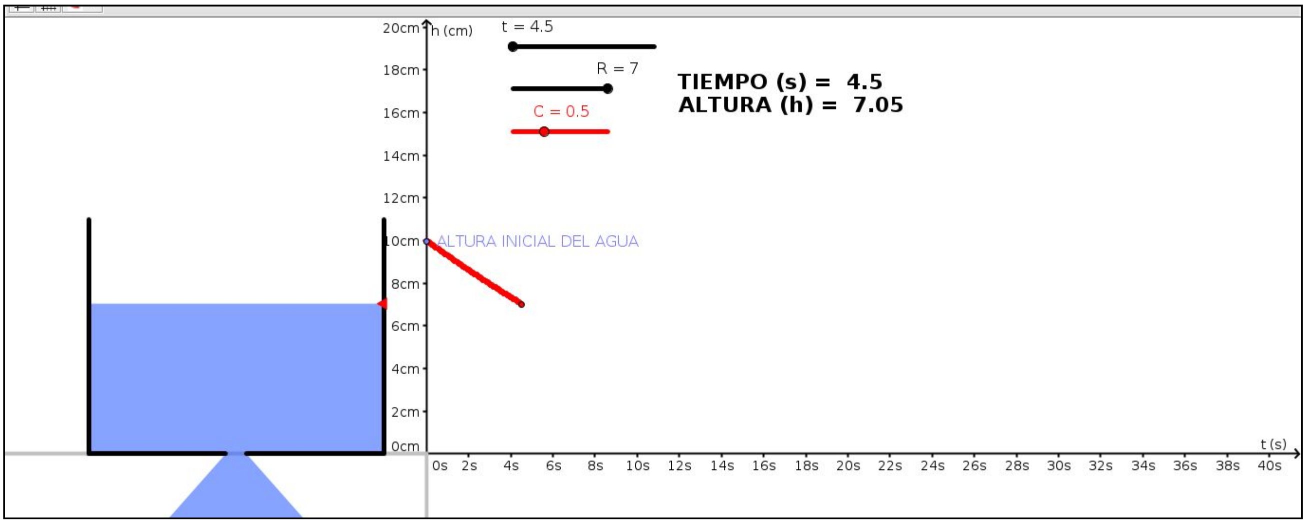


Imagen 30 - Simulador “Vaciado de un recipiente” de *GeoGebra* a los 4.5 sg. luego de poner play.

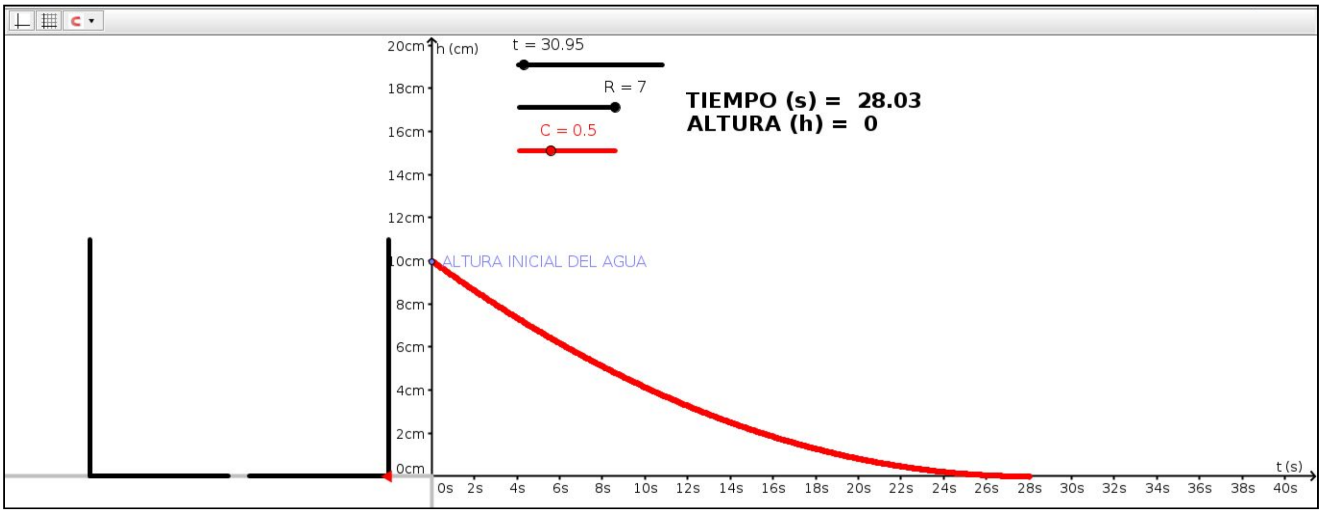


Imagen 31 - Simulador “Vaciado de un recipiente” de *GeoGebra* a los 28.03 sg. luego de poner play.

Los alumnos dedujeron que era un recipiente que se vaciaba. Se preguntó *¿Qué relación se está representando en el gráfico?* Y los estudiantes leyeron el nombre de los ejes y pudieron decir que era la altura inicial a medida que pasa el tiempo.

Luego, se movieron los deslizadores para observar los cambios que se generaban en el simulador al manipularlos y entender mejor qué variables intervenían.

Se explicó que el simulador estaba hecho para un tanque con forma cilíndrica y con un orificio circular, y que la variable que modificaba los anchos de la base y del orificio eran los respectivos radios.

Se preguntó luego qué variables intervenían y se anotaron en el pizarrón de tiza las respuestas de los estudiantes, que se enumeran a continuación:

- Tiempo en segundos de cuánto tarda en vaciarse
- Cantidad de agua
- Tamaño del orificio
- Ancho del recipiente

➢ Altura del nivel del agua

Se preguntó, *¿Qué relaciones se podrían estudiar?* Los estudiantes mencionaban varias, y se fueron uniendo con flechas las variables de las relaciones mencionadas. Al tratarse de un orificio circular, a partir de conocer su radio podíamos también determinar y registrar su diámetro y/o su área. Se indicó que las relaciones a estudiar iban a ser:

➢ Área del orificio vs. radio del orificio
➢ Tiempo de vaciado vs. radio del orificio
➢ Tiempo de vaciado vs. área del orificio

Se informó que seguirían trabajando en los mismos grupos, que este trabajo práctico de laboratorio, al igual que el anterior, sería evaluable y que por lo tanto también deberían presentar informe. En esta clase se establecieron además las pautas del informe y el plazo y modalidad de entrega.

2.5.2.2. Objetivos y motivación

En este simulador se presentan varias variables, por lo que uno de los objetivos fue que los estudiantes pudieran reconocerlas y comprender que para el estudio de una relación de dos de ellas, se deben controlar las demás. Se estudiaron en particular tres relaciones, de las cuales una era de proporcionalidad inversa (tiempo de vaciado vs. radio del orificio). Para la elección de estas otras dos relaciones se buscó intencionalmente una relación creciente y otra decreciente con el objetivo de posteriormente establecer que estas nos son condiciones suficientes para que la relación sea de proporcionalidad directa o inversa respectivamente.

Se detallan a continuación los objetivos generales de la práctica sobre los que se pretendió avanzar al plantear esta actividad y, a continuación, los objetivos específicos propios del Laboratorio N°2.

- A partir de las actividades del Laboratorio N°2, los estudiantes avanzaron sobre los siguientes objetivos generales:
    - Reconocer variables y relaciones entre variables en contextos de semi-realidad.
    - Recurrir a diferentes representaciones para la interpretación y comprensión de las relaciones, y en una segunda instancia, para calcular o estimar valores de la relación que no conocían.
- Objetivos específicos de la actividad:
    - Reconocer las variables involucradas en la simulación.
    - Simplificar el problema al controlar algunas variables.
    - Registrar datos de las variables.
    - Formular una hipótesis para las relaciones.
    - Representar las relaciones por medio de diferentes registros.
    - Validar la hipótesis a partir del análisis de diferentes registros.

2.5.2.3. La actividad

A continuación se muestra la primera parte de la guía *Laboratorio N°2: Vaciado de un recipiente,* preparada para orientar a los estudiantes en el trabajo con este simulador.

Mediante las actividades en ella propuestas se pretendía que los estudiantes se familiaricen con el simulador y comprendan su funcionamiento y que estudien tres relaciones entre variables (solo se muestra una de ellas, puede consultarse la guía completa en el Anexo A2), las pautas para la redacción del informe así como los plazos y medios para su entrega.

Experimento 2: Vaciado de un recipiente

Nombre del grupo:

Integrantes:

Objetivo: Estudiar la relación entre el tiempo de vaciado de un recipiente y el tamaño del orificio por el cual se vierte el líquido mediante un simulador en línea de *GeoGebra.*

Materiales:
-Tablet
-Simulador de *GeoGebra*, que se puede encontrar en la página https://www.geogebra.org/m/gTcQ9STn. Se recomienda descargar este simulador para poder trabajar offline.
-Lápiz y papel.

Simulador: Simula el vaciado de un recipiente de base circular por un orificio de salida circular, como el que se ve en la siguiente imagen.

Nota: Leer todos los pasos del procedimiento antes de comenzar.

Procedimiento:

1) Abrir el link del simulador de vaciado "https://www.geogebra.org/m/gTcQ9STn". Explorar el simulador, antes de continuar asegurarse de comprender su funcionamiento y reconocer qué variables intervienen y cómo se controlan.
2) Actualizar la página para reiniciar el simulador. Elegir valores para ***R*** y la ***altura inicial del agua.*** Registrarlos y dejarlos fijos durante el transcurso del resto del experimento.
3) Elegir un valor para ***C***. Registrar este valor en la Tabla N° 1. Luego, a partir del valor elegido para ***C***, calcular el área del orificio. Registrar esta área en la Tabla N° 1.

4) Iniciar el simulador con el botón Play que está en el margen inferior izquierdo. Una vez vaciado completamente el recipiente, detener con el mismo botón.
5) Registrar en la Tabla N° 1 el tiempo en el que se vació el recipiente y regresar el deslizador ***t*** a 0.
6) Repetir los incisos 3), 4) y 5) para 9 valores distintos de ***C***.
7) Asegúrense que todos los datos queden registrados en una tabla, pueden usar papel, la tablet o ambos para llevar estos registros. Recuerden establecer los encabezados y consignar sus respectivas unidades de medida entre paréntesis.

Teniendo en cuenta el procedimiento desarrollen las siguientes actividades:

1) Realicen la experiencia de recolección de datos organizándolos en la siguiente tabla. Elijan un título para la tabla que indique el contexto en el que los datos fueron recogidos.

Tabla N°1: …………………………………………………

Valor de **R** elegido: **Altura inicial del agua** elegida:

Radio del orificio (cm)	Área del orificio (cm^2)	Tiempo de vaciado del recipiente (s)

2) ¿Qué variables intervienen en este simulador? Describirlas y explicar cómo se controla cada una de ellas.

3) A Continuación estudiarán algunas relaciones que pueden establecerse entre las variables que intervienen en el simulador:

i) Relación Área - Radio (del orificio)

a) A partir de los datos recolectados en la Tabla N°1, formulen hipótesis acerca de la relación entre estas variables (área del orificio y radio del orificio). Indique cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.
b) Grafiquen en el plano cartesiano los pares de datos registrados en la Tabla N°1 para estas variables.

c) Ajusten estos datos con alguno de los modelos propuestos por la herramienta *análisis de regresión de dos variables* de *GeoGebra*. Para ello prueben los diferentes modelos, decidan con el grupo cuál es mejor y expliquen porqué. ¿Tienen alguna crítica para hacer al modelo elegido por su grupo? Exporten la imagen en formato .png, luego la usarán en la redacción del informe.

d) ¿Qué vínculos encuentra entre la expresión simbólica asociada al ajuste de curva elegido con los procedimientos que utilizaron para obtener los datos correspondientes al área del orificio? A partir de los respuestas anteriores verifiquen o refuten la hipótesis planteada en a).

ii) <u>Relación Tiempo - Área</u>

(Idem relación i). Ver Anexo A2)

iii) <u>Relación Tiempo - Radio</u>

(Idem relación i). Ver Anexo A2)

4) Realicen un informe que contenga:

- Una carátula (la carátula debe consignar título del laboratorio, nombre del grupo, integrantes, curso, división y nombre del colegio).
- Una introducción que explique el experimento realizado.
- La Tabla N°1 con los datos recolectados y el título elegido.
- Los valores fijados para ***R*** y la ***altura inicial del nivel del agua***.
- Para cada relación estudiada:
    - la hipótesis;
    - la gráfica de la curva de ajuste, acompañada de las críticas realizadas por el grupo a dicha curva;
    - la expresión simbólica asociada a la curva de ajuste elegida, indicando qué representan en esta expresión las variables x e y;
    - una conclusión donde se indique si la hipótesis se validó o se refutó y porqué.

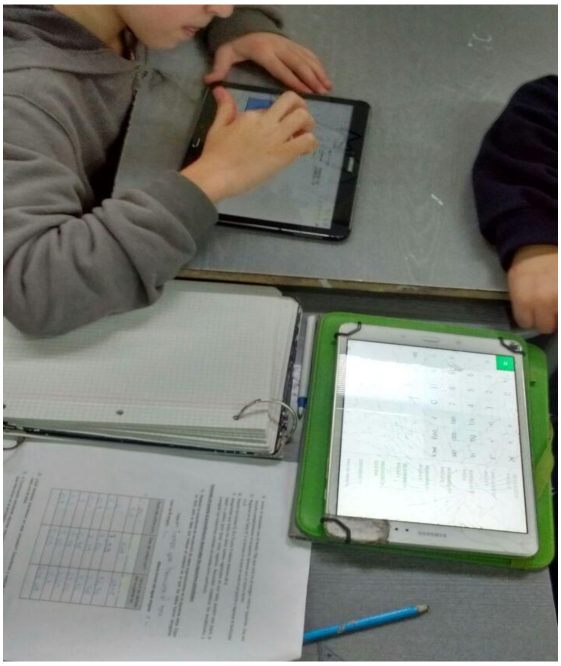
Subir al aula virtual dicho informe con la denominación InformeExperimento2NombreDelGrupo. Tienen tiempo para realizar este envío hasta el Jueves 10/8 a las 18:00 hs.

Cabe destacar que, a partir de observar las producciones de los grupos en relación a la redacción del informe del Laboratorio N°1, notamos la necesidad de precisar y explicitar pautas para la confección de este nuevo informe que los ayudarán a organizar la información. Se corroboró con docentes de otras materias que la estructura del informe sea similar a la utilizada en las otras áreas. Además, se itemnizaron los puntos en base al proceso de modelización, con la idea que al realizar éste, lo único distinto sea la elección del tema y el problema.

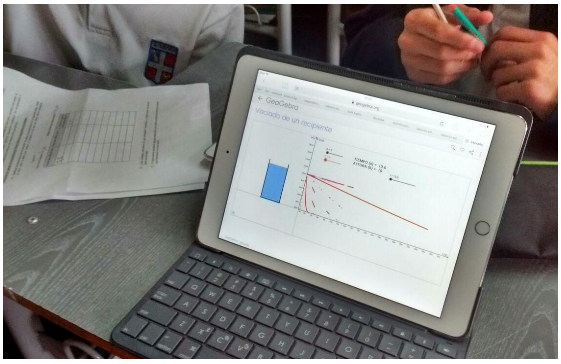
Se debe notar que en lo referente a la validación de los modelos, si bien esta fue trabajada en clase mientras se desarrollaban las actividades de la guía, por error se omitió solicitarla entre las pautas de redacción del informe. Por ende, grupos que habían trabajado en esto, no volcaron sus ideas en torno a la validez de los modelos en el informe, por lo que no fue factible retomar sus análisis para trabajarlos luego en clase. Quedó así la validación de los modelos tratada con poca profundidad.

Como ya se mencionó, se dedicó una hora para la recolección de datos, una hora para el estudio de cada relación y una para un cierre de la actividad. En las *Imágenes 32 a*, *b* y *c*, se ilustra la etapa de recolección de datos.

a)



b)



c)

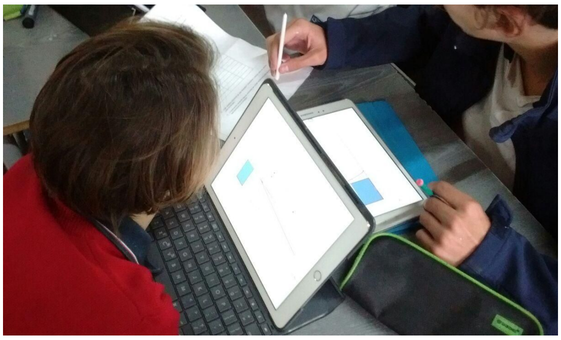


Imagen 32 a, b y c- Recolección de datos para el Laboratorio N°2 por medio del uso de las tablets, tablas en papel y calculadora.

2.5.2.3. Hipótesis planteadas

Las hipótesis formuladas por los estudiantes acerca de las relaciones se basaron, en términos generales, en si éstas eran crecientes o decrecientes, y en la identificación de las variables independiente y dependiente. Solicitar a los estudiantes que formulen hipótesis tenía por objetivo que estos establecieran conjeturas para las diferentes relaciones a partir de observar su comportamiento en la simulación del fenómeno y que las expresen de forma coloquial.

Se trabajó la noción de hipótesis como una suposición que debe confirmarse o refutarse después de algún análisis. Los estudiantes ya conocían este término y su significado.

Podemos criticar a esta parte de la práctica que pedimos a los estudiantes hipotetizar después de la recolección de datos, por lo que trabajar con los datos experimentales para confirmar estas suposiciones no pudo darse. Por otro lado, tampoco podían confirmarse las hipótesis después de la elección del modelo, ya que para elegir el modelo las hipótesis de crecimiento o decrecimiento se tomaron como verdad basándose en la experiencia. Por ende, el momento de validar o refutar la hipótesis quedó desdibujado en estos trabajos.

Sin embargo, el objetivo de trabajar coloquialmente la descripción de una relación entre variables fue cumplido positivamente. Los alumnos, si bien se había observado que ya manejaban con soltura el vocabulario matemático, lo mejoraron notablemente expresándose con precisión. No mostraron dificultad en reconocer roles de dependencia o independencia de las variables ni justificar estas dependencias en base al fenómeno.

Las *Imágenes 33* y *34* son hipótesis planteadas para la relación Tiempo de vaciado vs. Área del orificio. En la primera los estudiantes justifican fuertemente en torno a lo fenomenológico pero se desdibuja qué se plantea como hipótesis y qué se afirma. En la segunda se despega un poco del fenómeno y está más estructurada. En ambas las ideas son similares.

a) La variable independiente es el área del agujeró y la dependiente el agua porque mientras más grandes es el agujero mas rápido se acabe el agua

Imagen 33 - Recorte de un informe del Laboratorio N°2. Hipótesis para la relación Tiempo de vaciado vs. Área.

iii)
a)Hipótesis:
•Mientras más grande el radio del orificio,más rápido el tiempo de vaciado
•Mientras más chico el radio del orificio,más lento el tiempo del vaciado
◆Variable independiente:radio
◆Variable dependiente:Tiempo de vaciado

Imagen 34 - Recorte de un informe del Laboratorio n°2. Hipótesis para la relación Tiempo de vaciado vs. Área.

En esta instancia, surgieron conceptos de límite que son de importancia destacar. Se muestra en la *Imagen 35* cómo surge la noción que el tiempo tiende a infinito si el área del orificio de vaciado tiende a cero. Esta idea se observó en más de un grupo.

i) Relación Área - Radio (del orificio)

a- Hipotesis:

-Al aumentar el Radio del Orificio tambien aumenta el Area del Orificio.

- Cuando el Radio del Orificio es 0 (El Area tambien va ser 0) El Tiempo de Vaciado del agua será infinito ya que el tanque nunca se podra vacia.

Imagen 35 - Recorte de un informe del Laboratorio N°2. Hipótesis para la relación Tiempo de vaciado vs. Área y radio. Inclusión de la noción de infinito.

2.5.2.4. Críticas a los modelos elegidos

- Pasa por todos los puntos y debería pasar por el cero

En este apartado, se debe tener en cuenta que en Laboratorio N°2 al trabajar con un simulador virtual no se cometen errores de medición. Por lo que es de esperar, que, si el fenómeno en estudio se puede describir con un modelo de los que ofrece *GeoGebra* (como en este caso), se observarán gráficos que pasen exactamente por los puntos dados.

Para determinar el modelo más adecuado para representar una relación entre variables, durante el desarrollo del Laboratorio N° 1, se trabajaron diferentes criterios. Entre ellos que el gráfico del modelo pasará por los puntos o en su defecto cerca de ellos. Si bien se discutió que este no era único criterio a tener en cuenta, fue el que más tomaron los alumnos al momento de justificar la elección de los modelos del Laboratorio N° 2.

Lo llamativo es que, el hecho que el gráfico pase por el origen, fue un criterio incorporado erróneamente como una característica común a todas las relaciones entre variables por algunos grupos (Ver *Imágenes 36* y *37*).

> C) No tenemos ninguna critica porque pasa por todos los puntos y tambien pasa por el cero

Imagen 36 - Recorte de un informe del Laboratorio N°2. Crítica al modelo elegido.

> C) tenesmos una critica que es que no pasa por el cero pero pasa por todos los puntos.

Imagen 37 - Recorte de un informe del Laboratorio N°2. Crítica al modelo elegido.

Los grupos que a partir de analizar el fenómeno simulado pudieron comprender que para un radio o área de orificio cero no se corresponde un tiempo de vaciado nulo, pudieron superar el obstáculo de tender a incluir este criterio como necesario y reconocer sin dificultades a la hipérbola como el modelo que mejor representaba a la relación en cuestión (Ver Imagen 38).

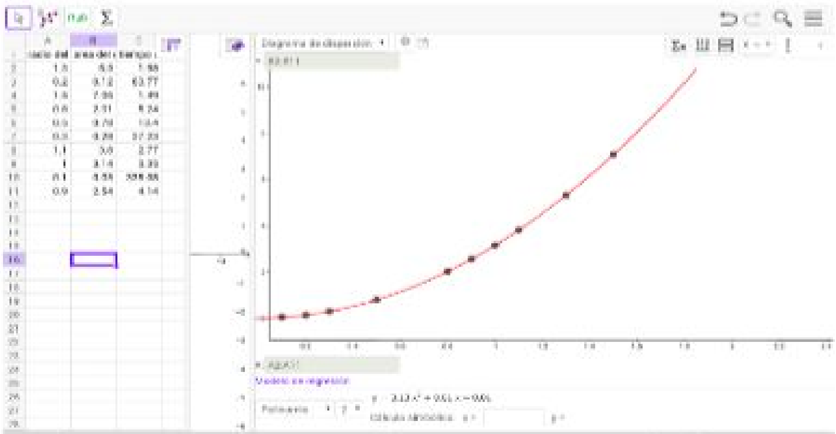
> Elegimos el modelo,POLINOMIO porque es el más adecuado y exacto para la tabla aunque no es exacta porque no pasa por todos los puntos y por logica no va a pasar por el 0 porque sería infinito de tiempo si no hay ningún agujero

Imagen 38 - Recorte de un informe del Laboratorio N°2. Justificación de la elección del modelo.

Quizás haber incorporado un ejemplo con ordenada al origen real y distinta de cero hubiese ayudado a romper la creencia que es necesario que pase por el origen, o simplemente, haber destacado este punto en un debate, y haber traído algún ejemplo de la primera guía con ordenada al origen positiva, por ejemplo.

- <u>Crítica en torno al dominio</u>

Los estudiantes realizaron algunas críticas con respecto al dominio en el cual es válido el modelo elegido (Ver *Imagen 39*), pero en general, no se observó en los informes que profundizaran mucho en este aspecto. Probablemente el hecho que no haya sido una pregunta puntual en el práctico hizo que no se tenga en cuenta.

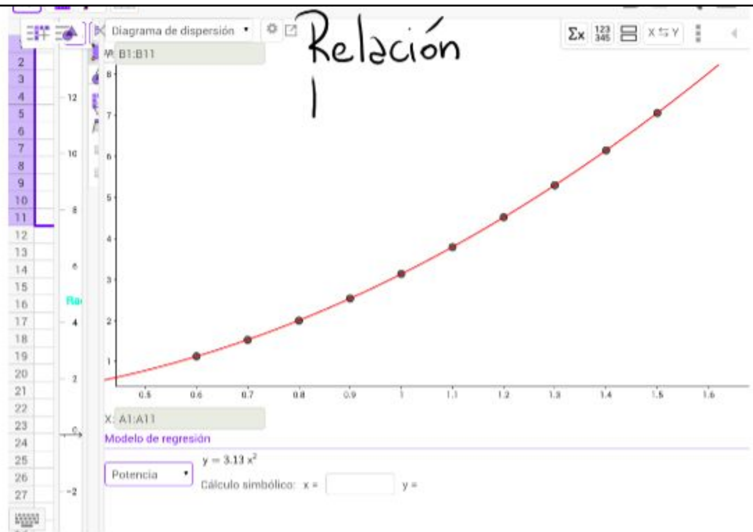


C) La crítica para este gráfico es que solo funcionaria para los valores positivos y para los negativos no. Lo bueno es que la recta pasa exactamente por todos los puntos. La recta que usamos es polinomio grado 2.

Imagen 39 - Recorte de un informe del Laboratorio N°2. Crítica al modelo elegido.

- <u>Búsqueda de “sentido”</u>

Algo a destacar es la referencia al término “sentido” para justificar la elección a un modelo. Podría relacionarse esto con la discusión durante la puesta en común del Laboratorio N°1 en torno a que los modelos deben tener sentido en relación al fenómeno que se estudia. Si bien los estudiantes no realizaron en este caso la justificación de manera explícita en términos del fenómeno, sí es interesante destacar que existe la pregunta *¿Tiene sentido el modelo como construcción matemática?*, lo que demuestra un acercamiento de la matemática a la realidad (ver *Imágenes 40* y *41*)



Elegimos el modelo POTENCIA debido a que pasa por todos los puntos, tiene sentido y una fórmula más sencilla que la de los demás. Lo único malo de este modelo es que no pasa por el cero.

Imagen 40 - Recorte de un informe del Laboratorio N°2. Justificación de la elección del modelo.

Elegimos el modelo POTENCIA ya que pasa por todos los puntos y tiene sentido. No le encontramos ningun error

Imagen 41 - Recorte de un informe del Laboratorio N°2. Justificación de la elección del modelo.

2.5.2.5. Expresiones simbólicas asociadas a los modelos elegidos

Con respecto a las expresiones simbólicas los estudiantes copiaron la expresión simbólica dada por la herramienta, y reconocieron que variables representaba *x* e *y* en cada relación (Ver *Imagen 46*).

D)La expresión simbólica es la siguiente:
Y en este caso y= tiempo de vaciado y x= radio del orificio.

$$y = 3.35\, x^{-2}$$

Imagen 42 - Recorte de un informe del Laboratorio N°2.
Expresión simbólica del modelo elegido y reconocimiento de las variables.

Hubo grupos que al no saber cómo ingresar algunos símbolos, utilizaron palabras como “elevado a la” para describir las operaciones involucradas (Ver *Imágenes 43* y *44*).

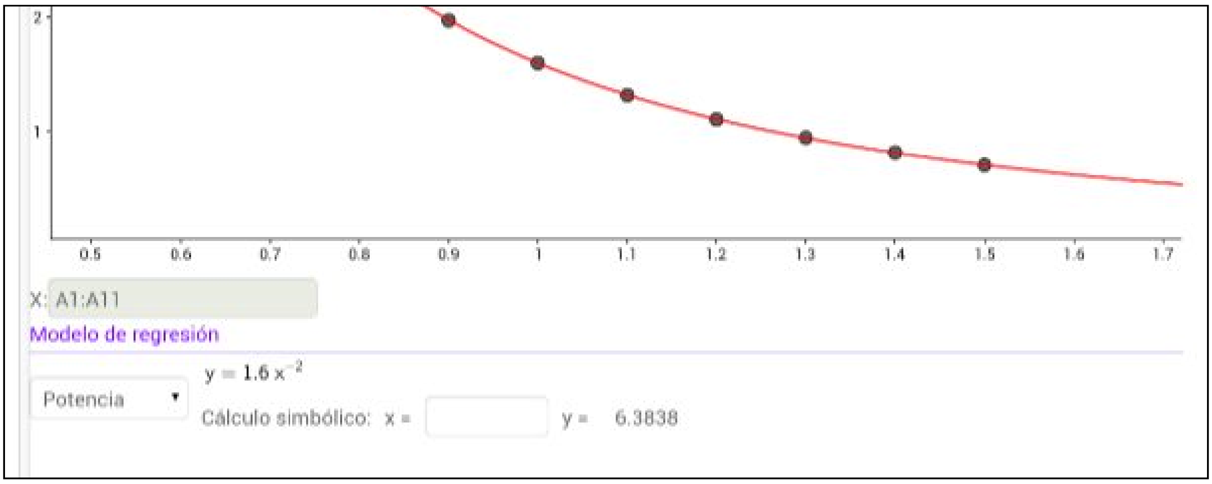


Imagen 43 - Recorte de un informe del Laboratorio N°2.
Modelo elegido por uno de los grupos para la relación Tiempo de vaciado vs. Radio.

Y= 1.6 x elevado a la -2.

Imagen 44 - Recorte de un informe del Laboratorio N°2. Expresión simbólica del modelo elegido para la relación Tiempo de vaciado vs. Radio que se muestra en la Imagen 43.

No realizaron interpretaciones en torno al álgebra involucrada, por ejemplo, qué significa un exponente negativo.

Los modelos se usaron para predecir valores nuevos mediante la herramienta *Valor exacto simbólico* ó *Cálculo simbólico* (según la versión de *GeoGebra*) (ver *Imagen 45*) que brinda el *Análisis Regresión Dos Variables*, el cual, evalúa la expresión para un valor determinado de la variable independiente que puede ser ingresado por el usuario, arrojando como resultado el respectivo valor de la variable dependiente. Esto permite predecir valores sin manejar del todo las expresiones algebraicas involucradas.

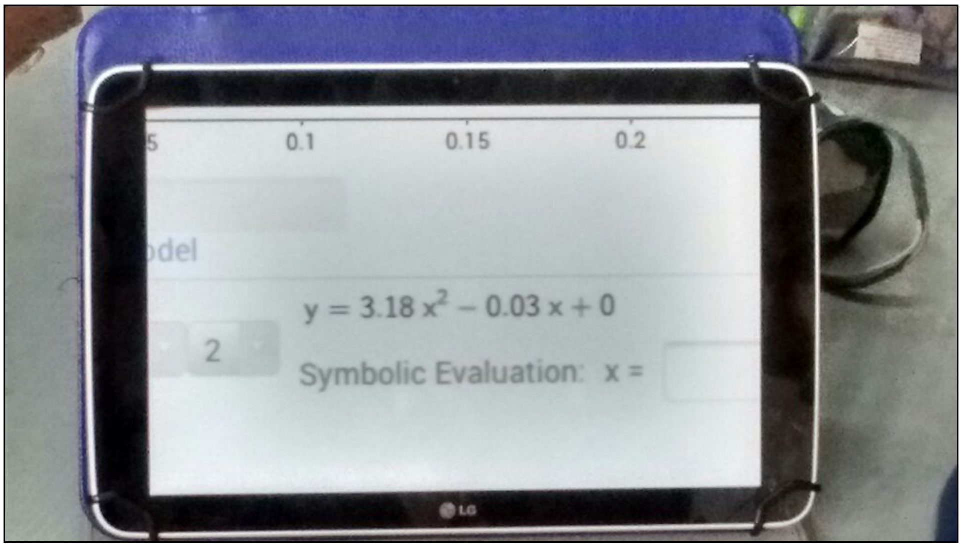


Imagen 45- Uso de la herramienta *Valor exacto (simbólico)* en el Laboratorio N°2 para evaluar la expresión simbólica vinculada al modelo elegido para la relación Área vs. Radio.

2.5.2.6. Conclusiones obtenidas

Debido a las dificultades antes mencionadas en torno a la validación de las hipótesis planteadas, en las conclusiones producidas por los estudiantes notamos que confirman la hipótesis planteada originalmente sin acudir al trabajo matemático realizado para argumentar el porqué de su validez.

No obstante algunos grupos aludían al gráfico como evidencia para refutar o confirmar la hipótesis (Ver *Imagen 46*).

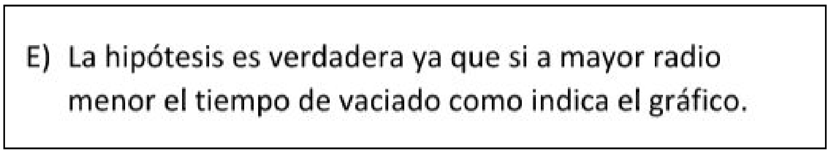

E) La hipótesis es verdadera ya que si a mayor radio menor el tiempo de vaciado como indica el gráfico.

Imagen 46 - Recorte de un informe del Laboratorio N°2. Conclusión obtenida.

2.5.3. Proporcionalidad directa

A partir del estudio de las relaciones realizado durante el repaso y los laboratorios, se contó con las herramientas suficientes para caracterizar las relaciones de proporcionalidad directa e inversa; y, a partir de esta caracterización, reconocer aquellas relaciones que a pesar de ser crecientes o decrecientes no eran linealmente proporcionales. Debido al tiempo que había insumido el desarrollo de los laboratorios y dado que se pretendía trabajar con modelización, se prefirió sólo por cuestiones de tiempo trabajar con proporcionalidad directa. Se acordó con la profesora tutora que luego ella trabajaría la institucionalización de relaciones de proporcionalidad inversa, recuperando el trabajo con el Laboratorio N° 2.

2.5.3.1. Institucionalización

- <u>Presentación y definición</u>

La institucionalización de la relación de proporcionalidad directa se basó en la idea de establecer una posible clasificación para las relaciones entre variables. Durante el desarrollo de las guía "*Estudiamos algunas relaciones entre variables*" y los laboratorios, los estudiantes habían trabajado con diferentes tipos de relaciones, pudiendo reconocer como característica de éstas el ser crecientes o decrecientes. Se presentó la relación de proporcionalidad directa como una relación creciente que cumple que la suma de dos valores de la variable independiente se corresponde con la suma de los respectivos valores de la variable dependiente.

Se contaba con un PowerPoint previamente preparado, sobre la que se trabajó a medida que se iba discutiendo con la clase su contenido. En la primera filmina se clasificaron las relaciones estudiadas en los laboratorios bajo las categorías creciente y decreciente (Ver *Imagen 47*).

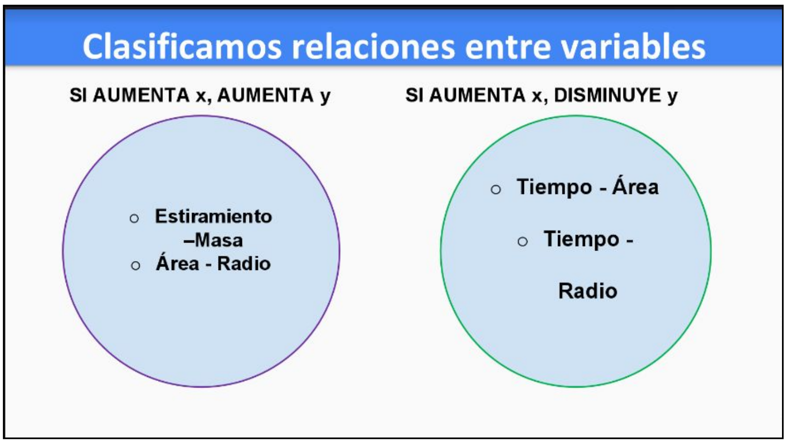
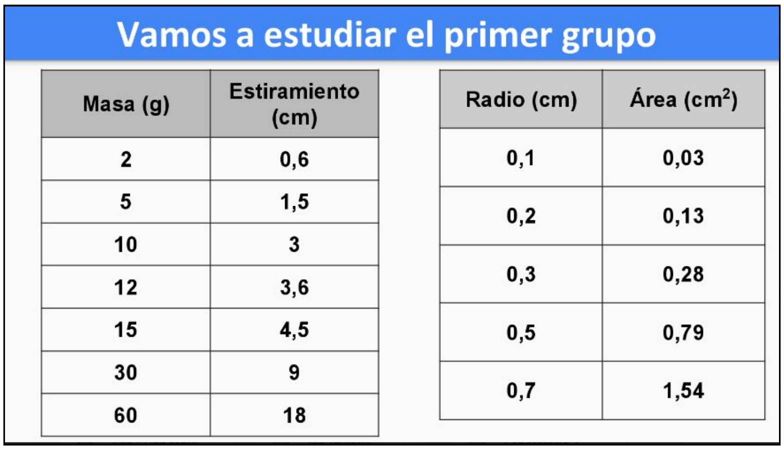


Imagen 47 - Institucionalización proporcionalidad directa: clasificación de relaciones en crecientes y decrecientes.

Se señaló, en base a las hipótesis que se trabajaron en los laboratorios, que se podría pensar en dos grandes grupos de relaciones: por un lado aquellas relaciones en las que cuando aumenta *x,* aumenta *y*; y por otro aquellas relaciones en las que cuando aumenta *x,* disminuye *y.* Se preguntó *De las relaciones que estudiamos en los laboratorios, ¿Cuáles están en un grupo y cuáles están en el otro?* Lo cual lograron responder sin dificultades.

Se indicó que estudiarían el primer grupo (relaciones crecientes), y que el segundo grupo (relaciones decrecientes) lo estudiarían posteriormente con la profesora tutora.

A continuación se exhibieron dos tablas de datos como las estudiadas por los alumnos (ver *Imagen 48*) y se preguntó por las regularidades que podrían hallarse en la primera tabla. De este análisis volvió a surgir la propiedad de la suma (retomando las conclusiones de los estudiantes durante el desarrollo del Laboratorio N°1).



Vamos a estudiar el primer grupo

Masa (g)	Estiramiento (cm)
2	0,6
5	1,5
10	3
12	3,6
15	4,5
30	9
60	18

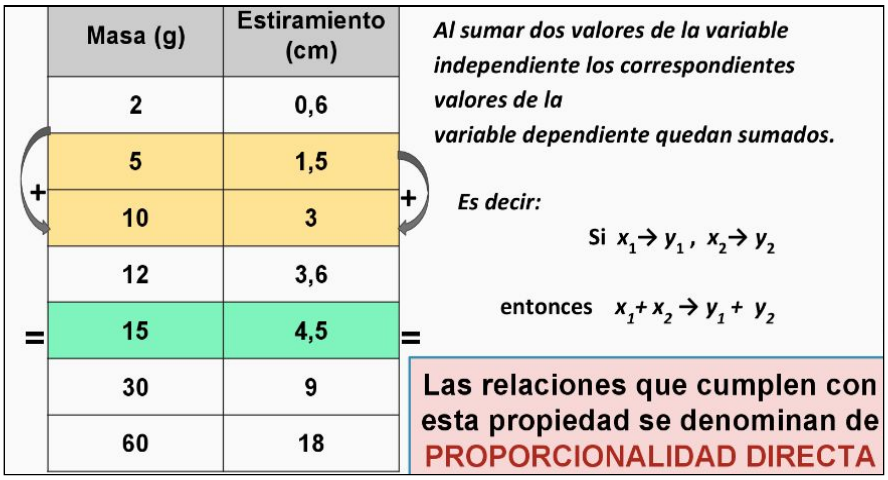
Radio (cm)	Área (cm^2)
0,1	0,03
0,2	0,13
0,3	0,28
0,5	0,79
0,7	1,54

Imagen 48 - Institucionalización. Ejemplos propuestos para búsqueda de regularidades en tabla a partir de las cuales establecer las propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa.

Los estudiantes pasaron a la pizarra y mostraron, en la tabla de la derecha, ejemplos en los que se cumple esta propiedad, y que pueden constatarse con valores consignados en otras celdas de la tabla. Luego, se preguntó si la otra tabla también cumplía esta propiedad, los estudiantes contestaron que no e ilustraron con contraejemplos.

Para esto fue muy útil el software ActivInspire, ya que en base a las tablas presentadas los estudiantes realizaban flechas encima con el lápiz óptico para denotar en la primer tabla que al sumar dos valores de masa, por ejemplo, 5 g + 10 g = 15 g se obtenía una nueva masa cuyo estiramiento coincidía con la suma de los correspondientes valores de estiramiento de las masas sumadas 1,5 cm + 3 cm = 4,5 cm. En cambio en la segunda tabla esto no ocurría ya que, por ejemplo, 0,1 cm + 0,2 cm = 0,3 cm; pero 0,03 cm^2 + 0,13 cm^2 no es igual a 0,28 cm^2. Los estudiantes pasaron a la pizarra y realizaron ellos mismos varias de estas cuentas. Cabe destacar que los estudiantes para mostrar estos ejemplos, tenían que encontrar en la tabla pares de datos de una variable, tal que la suma de ellos también esté en la tabla.

Luego se definió relación de proporcionalidad directa como aquellas relaciones que cumplen con esta propiedad (ver *Imagen 49*).



Masa (g)	Estiramiento (cm)
2	0,6
5	1,5
10	3
12	3,6
15	4,5
30	9
60	18

Imagen 49 - Institucionalización. Caracterización de la relación de proporcionalidad directa. Propiedad de la suma.

La notación fue trabajada a partir del ejemplo, a fin de escribir de manera simbólica esta propiedad. Fue de gran utilidad también aquí el lápiz óptico, para introducir en la tabla esta notación escribiendo X al lado del encabezado correspondiente a la Masa e Y en el correspondiente al Estiramiento, y luego, x_1 al lado de 5 g, x_2 al lado de 10 g, $x_1 + x_2$ al lado de 15 g y lo mismo con los correspondientes valores de la variable dependiente.

A partir de las expresiones de algunos estudiantes que coloquialmente explicaron que 15 era igual a 3cm + 1,5 cm, se señaló que 15 g no es igual a 4,5 cm pero que al valor de masa 15 g *le correspondía* el valor 4,5 cm de estiramiento, y que esta correspondencia se denotaba con una flecha.

Se identificaron luego otras regularidades en la tabla, a partir de las cuales, se establecieron otras propiedades de la proporcionalidad directa. Se trabajaron en el siguiente orden: recuperando la generalización obtenida para la suma se dedujo la propiedad del producto, ya que el doble de un valor de *x* equivale a sumar dos veces este valor y por lo tanto el valor de la variable dependiente asociado es el doble del valor correspondiente a x, del mismo modo se cumple que el triple de un valor de la variable independiente corresponde al triple del correspondiente valor de la variable dependiente, y se generalizó para la multiplicación por un número *n* (Ver *Imagen 50*).

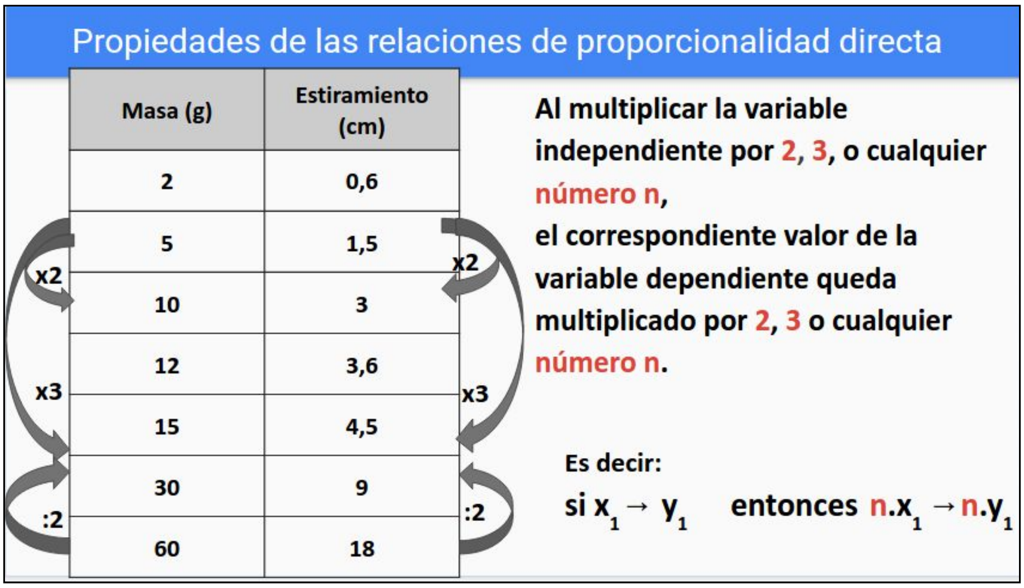
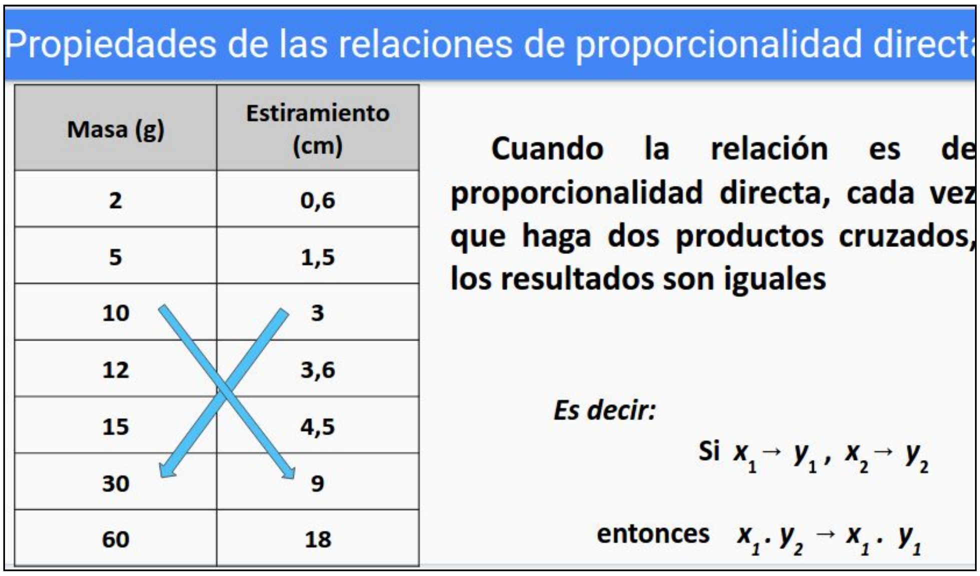


Imagen 50 - Institucionalización. Caracterización de la relación de proporcionalidad directa. Propiedad del producto.

Junto con la multiplicación se presentó la propiedad de la división, como la recíproca a ésta. Por último se presentó la propiedad del producto cruzado como otra regularidad. Está fue propuesta por los mismo estudiantes como respuesta a la pregunta *¿Que otras regularidades observan?*. Como con las anteriores propiedades, se invitó a los estudiantes a mostrar ejemplos en la pizarra, y se escribió la propiedad de manera simbólica (Ver *Imagen 51*).



Masa (g)	Estiramiento (cm)
2	0,6
5	1,5
10	3
12	3,6
15	4,5
30	9
60	18

Imagen 51 - Institucionalización. Caracterización de la relación de proporcionalidad directa. Propiedad del producto cruzado.

Luego se notó que estas propiedades no la cumplía la relación Área vs. Radio, y que por ende, no es de proporcionalidad directa.

- <u>Constante de proporcionalidad</u>

Se siguió trabajando con la primera tabla y se introdujo la constante de proporcionalidad por medio de la búsqueda del valor de la variable dependiente, cuando la variable independiente toma el valor 1.

Por medio de las propiedades trabajadas se dedujo fácilmente qué estiramiento producía 1 g de masa en el resorte al que le corresponden esos datos, por medio de las preguntas: *¿Cuál será el estiramiento para este resorte si la masa es de 1g? Qué propiedades de las que vimos recién nos pueden servir para calcular el estiramiento correspondiente para la masa de 1g?* Uno de los estudiantes propuso usar la propiedad de la división aplicada al primer par de datos, y dedujo que para una masa de 1g, ese resorte se estiraría 0.3 cm. Esto se completó en la diapositiva de la Imagen 52.

Masa (g)	Estiramiento (cm)
2	0,6
5	1,5
10	3
12	3,6
15	4,5

Imagen 52 - Tabla con líneas en blanco que se fueron completando con los valores de masa 1, 50 y 0.

Por sugerencia de la docente del curso se dió una importancia especial a este punto. Las preguntas que condujeron esta sección de la clase fueron: *¿Qué significa que 1g. de masa produzca un estiramiento de 0.3 cm?,* los estudiantes explicaron en términos del fenómeno la situación; *¿Cómo puedo escribir eso de manera simbólica?*, un estudiante oralmente propuso 1 cm por gramo, y se introdujo la notación 1cm/g. *¿Qué significa entonces 1 cm/g? ¿Qué ejemplos conocen donde se realice un cociente de unidades?*

Se listó en el pizarrón de tiza los ejemplos que los estudiantes iban mencionando, discutiendo en cada caso cuál es la variable independiente y cuál la dependiente, y qué quería decir e*se valor constante* en la relación entre esas variables.

Se trabajó con constantes de resortes más duros y más blandos, para un resorte más duro se pensó en el amortiguador de un auto, *¿Cuantos cm se estirara un amortiguador por cada gramo?* y se colocó, por sugerencia de un estudiante, 0.0001 cm/g en el pizarrón. De igual modo, se escribió una constante para el resorte blando.

Para cada ejemplo se trabajo que, conociendo ese valor constante, se podría deducir el valor de la variable dependiente para cualquier valor de la variable dependiente dado y viceversa. Se mencionó luego que, este valor constante que caracteriza la relación de proporcionalidad directa, se denomina constante de proporcionalidad, y se la denotó con la letra *k.*

- <u>Expresión simbólica.</u>

Luego de trabajar con la constante de proporcionalidad, se pasó por cada uno de los ejemplos, se retomó que en base a conocer la constante, que es el valor de la variable dependiente cuando la variable independiente vale 1, *¿Que valor toma la variable dependiente cuando la variable independiente vale 2? ¿3? ¿50? ¿x?* Este trabajó se realizó con cada constante de proporcionalidad listada en el pizarrón, escribiendo la expresión simbólica correspondiente a la relación entre las variables que señalaban las unidades de estas constantes: y=0.3 cm/g . x ; y=0.0001 cm/g . x ; etc.

Un estudiante escribió sólo 0.3 cm/g . x, ante lo que se preguntó *¿Qué significa 0.3 cm/g . x?.* Cuando respondieron que para x gramos se estira 0.3 . x cm, se interpretó que la expresión estaba incompleta y faltaba colocar una variable que represente el estiramiento.

Se observaron luego todas las expresiones simbólicas y se recordó que a la constante de proporcionalidad se la llama con la letra *k. ¿Cómo podemos generalizar estas expresiones entonces?* Se observó que es *y igual a la constante por x,* por lo que se llegó a la expresión *y=k.x. donde k era la constante de proporcionalidad.* Se mostró el resumen de esto con la filmina completa (Ver *Imagen 53*).

Masa (g)	Estiramiento (cm)
2	0,6
5	1,5
10	3
12	3,6
15	4,5

$$y = 0{,}3.\ x$$

x: Masa
y: Estiramiento

Este valor 0.3 se denomina **constante de proporcionalidad**, en general se representa con la letra **k .**

$$\mathbf{y = k.x}$$

Con k un número positivo.

Imagen 53 - Institucionalización proporcionalidad directa. Se resume lo trabajado acerca de la expresión simbólica en la pizarra electrónica.

Una vez trabajada la expresión simbólica general para las relación de proporcionalidad directa se preguntó a la clase , *¿Con qué valor de la variable dependiente se corresponde el valor cero de la variable independiente?* Se recordó la experiencia del resorte dónde, al valor cero de masa le correspondía el valor cero del estiramiento. *¿En general pasaría esto en toda relación de proporcionalidad directa?* Los estudiantes dedujeron que sí, argumentando que si *x* vale cero, como todo número multiplicado por cero es cero, por la propiedad absorbente del producto, entonces *y* valdría cero. Los espacios en blanco que se observan de la tabla de la Imagen 59 se completaron con los valores correspondientes a los estiramientos para los valores de masa 1 g., 50 g., y 0g.

- <u>Cómo encontrar la constante de proporcionalidad en la tabla</u>

El valor de la constante de proporcionalidad es el valor del estiramiento para la masa de 1g, y este, fue encontrado utilizando la propiedad de la división, dividiendo el estiramiento para 2g en 2. La pregunta que guió esta diapositiva fue: *¿Cómo se podría haber encontrado el estiramiento para 1g partiendo ahora desde el estiramiento para 5g? ¿Y partiendo desde el estiramiento producido por una masa de 10g?*

Se realizaron las cuentas para cada par de datos, llegando a la conclusión que cada valor que toma la variable dependiente dividido su correspondiente valor de la variable independiente da como resultado la constante de proporcionalidad. A continuación, se generalizó cómo obtener la constante de proporcionalidad con la notación que se había introducido previamente. Se verificó con el lápiz óptico que para todas las filas de la tabla el cociente entre el valor de la variable dependiente y el de la independiente era constante.

x	y	y : x
2	0,6	0,6 : 2 = 0,3
5	1,5	1,5 : 5 = 0,3
10	3	3 : 10 = 0,3
12	3,6	3,6 : 12 = 0,3
15	4,5	4,5 : 15 = 0,3
30	9	9 : 30 = 0,3
60	18	18 : 60 = 0,3
1	0.3	0.3 : 1 = 0.3
50	15	15 : 50 = 0.3
0	0	No es posible

Al dividir valores de la variable dependiente por sus correspondientes valores de la variable independientes (y siempre que esto sea posible) obtenemos el mismo número k, al que llamamos constante de proporcionalidad directa.

Es decir, si $x_1 \rightarrow y_1$, $x_2 \rightarrow y_2$, $x_3 \rightarrow y_3$,etc.

Entonces:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = k$$

Imagen 54 - Institucionalización proporcionalidad directa. ¿Cómo encontramos la constante de prop. en la tabla?

- Gráfico

Se había trabajado al finalizar el *Laboratorio N°1* que el gráfico de la relación estiramiento del resorte vs. la masa colocada en su extremo inferior debía ser una recta creciente que pasa por el origen. Aunque no se emplearon términos como *relación creciente* , se observó que "a medida que aumentan los valores de x, aumentan los valores de y". Recuperando estas reflexiones, se constató que esto es algo que cumple toda relación de proporcionalidad directa. Es decir, se estableció que siempre que estemos en presencia de una relación de proporcionalidad directa, ésta será creciente.

A continuación, se realizó el gráfico para los datos de la tabla presentada, primero los puntos y luego la recta que ajustaba estos datos empleando la herramienta *Análisis Regresión Dos Variables*. Haciendo zoom en los valores próximos al origen del sistema cartesiano y con la escala adecuada para visualizar los saltos unidad en el eje x y de 0,3 en el eje y, se preguntó, *¿Cómo observo en el gráfico la información dada por la constante de proporcionalidad? ¿Cómo observo que por cada gramo de masa se estira 0.3 cm el resorte?* Se marcó así que para 1g el valor de la variable dependiente era 0,3 cm, y que si iba aumentando el valor de la masa en 1g, los correspondientes valores del estiramiento iban aumentando 0,3 cm.

Luego, se mostraron tres rectas (ver *Imagen 55*), correspondientes a tres resortes distintos, y se preguntó, *¿Cuál es la constante de proporcionalidad para cada resorte? ¿Y la expresión simbólica?* Para deducir las constantes de proporcionalidad algunos estudiantes observaron el valor del estiramiento para la masa de 1 g, otros, el cambio que había en los estiramientos de la masa de 1g a 2g, y de 2g a 3g.

Pasó un estudiante al frente para trabajar en cada resorte. Escribieron la constante de proporcionalidad y la expresión simbólica en la pizarra de tiza. Luego, se mostró un resumen en la pizarra electrónica (ver *Imagen 56*).

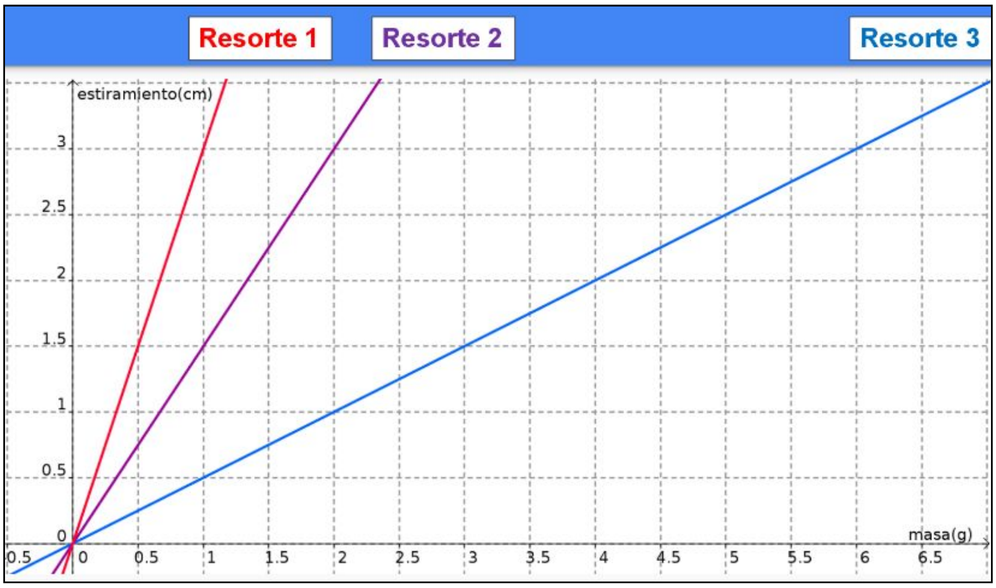


Imagen 55 - Institucionalización proporcionalidad directa. Comparación de tres gráficos correspondientes a la relación estiramiento vs masa de tres resortes distintos.

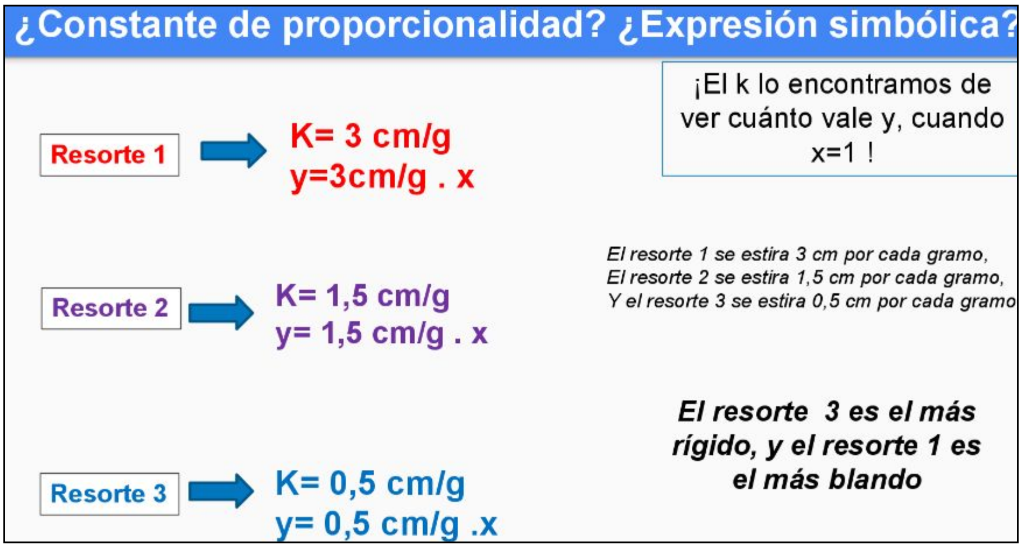


Imagen 56 - Institucionalización proporcionalidad directa. Expresiones simbólicas asociadas a los gráficos de la *Imagen 55*.

Se coloca en el **Anexo A3** el apunte dado a los estudiantes luego de la clase de institucionalización. Éste apunte junto con la presentación de PowerPoint utilizada fueron subidos al aula virtual para que estuvieran a disposición de los estudiantes.

2.5.3.2. Ejercitación

Luego de la institucionalización se pidió a los estudiantes que encuentren las constantes de proporcionalidad directa y las expresiones simbólicas para sus resortes, teniendo en cuenta que, por los errores experimentales probablemente no les daría exactamente el mismo valor en todos los pares de datos. Se consensuó entonces que se tomarían los primeros decimales y se establecería como constante de proporcionalidad el valor más frecuente.

Se presentó la guía de ejercitación *"Proporcionalidad Directa"* (Ver Anexo A4). Las actividades de esta guía pertenecen al paradigma del ejercicio y con un marco de referencia a la matemática pura en el caso de las actividades 2, 3 y 4, y a la semi-realidad en el caso de las actividades 1, 5 y 6 (Skovsmose, 2000).

La actividad comentada, donde se proponía a los estudiantes buscar la constante de proporcionalidad de sus resortes, fue incluída como ejercicio 1 dentro de la guía de ejercitación. En otros ejercicios se trabajó el reconocer si una relación es o no de proporcionalidad directa, a partir de distintos tipos de representación (tabla y gráfico). Luego, se colocaron ejercicios de situaciones problemáticas para resolver, y por último, se propuso reconocer en la guía "*Estudiamos algunas relaciones entre variables*", si las relaciones presentadas en cada ítem eran o no de proporcionalidad directa.

En las clases que se dedicaron a la guía, por razones de tiempo, se trabajó sobre las tres primeras actividades. Probablemente más tiempo de ejercitación hubiese fortalecido la habilidad del reconocimiento de una relación de proporcionalidad directa, por ejemplo, con la última actividad.

Luego del trabajo con esta guía se tomó una evaluación. Se detalla más sobre esto en la sección 2.7.

2.6. Tercera parte: Proceso de modelización matemática (PMM)

2.6.1. Presentación

En la primera clase destinada a este tema el objetivo era presentar el esquema del proceso de modelización matemática. Para esto, se planteó a los alumnos la pregunta *¿Qué procedimiento realizamos para estudiar relaciones entre variables?.* La idea era reflexionar sobre la metodología utilizada hasta el momento en las actividades de repaso y laboratorios, y en base a esto, plantear el proceso de modelización agregando sólo que todo este proceso partía de un tema general, con la intención de responder una pregunta particular, a la que llamamos problema.

Los estudiantes mencionaron varias acciones que fueron realizando en el estudio de las relaciones entre variables abordadas anteriores. Las acciones que los estudiantes iban mencionando se listaron en el pizarrón de tiza, tratando de establecer un orden cronológico en términos de qué se hizo primero y qué después.

Luego de realizar las anotaciones de las acciones nombradas por los estudiantes, se comenzó a mostrar en la pizarra digital algunos etapas del proceso de modelización (Blomhoj, 2004), que coincidían con las actividades reconocidas por los estudiantes. La presentación se basó en el proceso llevado a cabo durante el desarrollo del *Laboratorio N°2*, pero se ejemplificaron estas etapas con producciones realizadas a partir de ambos laboratorios. La presentación tuvo como intención recuperar el trabajo de los estudiantes desde las reflexiones en torno al proceso producido, hasta la ilustración de estas etapas a partir de sus propias producciones en las diapositivas (Ver *Imágenes 60 a-g*).

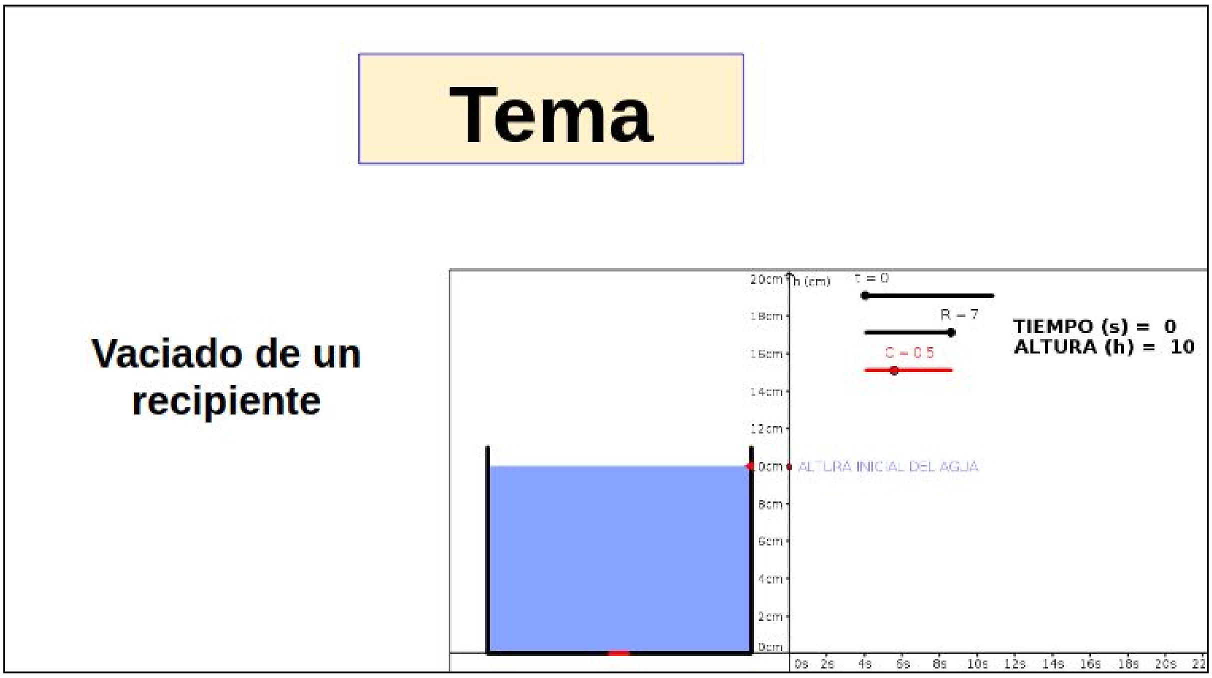


Imagen 60 a- Presentación del proceso de modelización matemática. Tema.

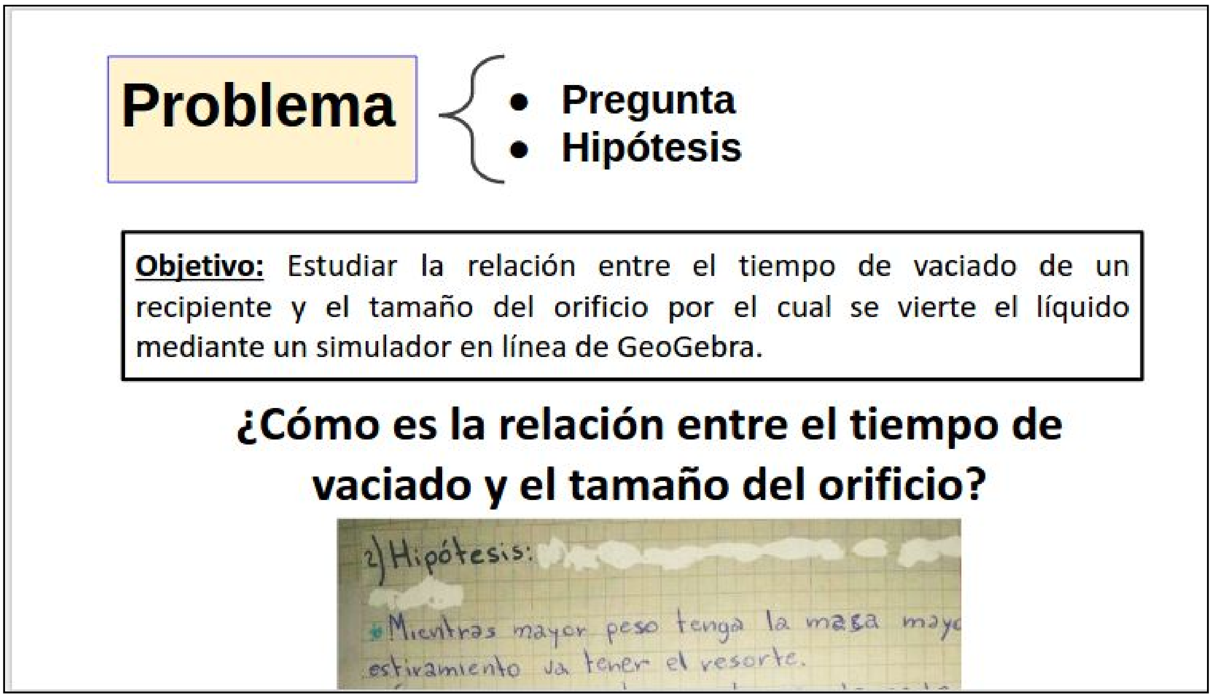


Imagen 60 b- Presentación del proceso de modelización matemática. Problema.

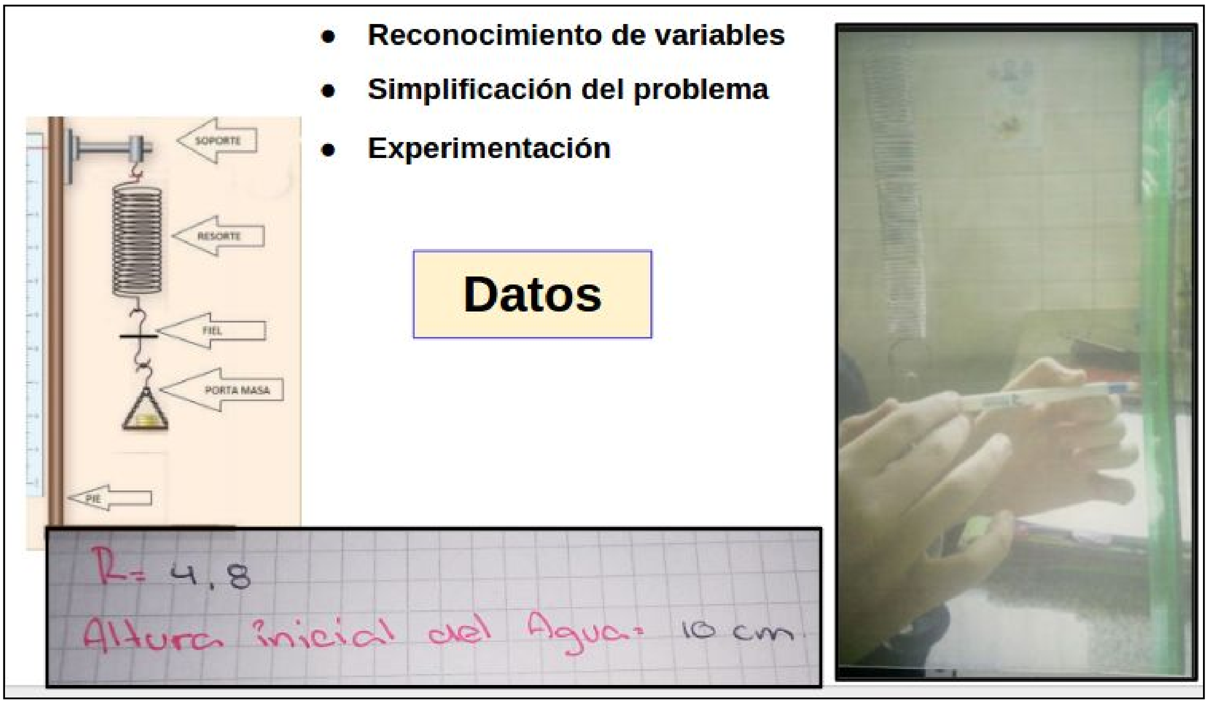


Imagen 60 c- Presentación del proceso de modelización matemática. Datos.

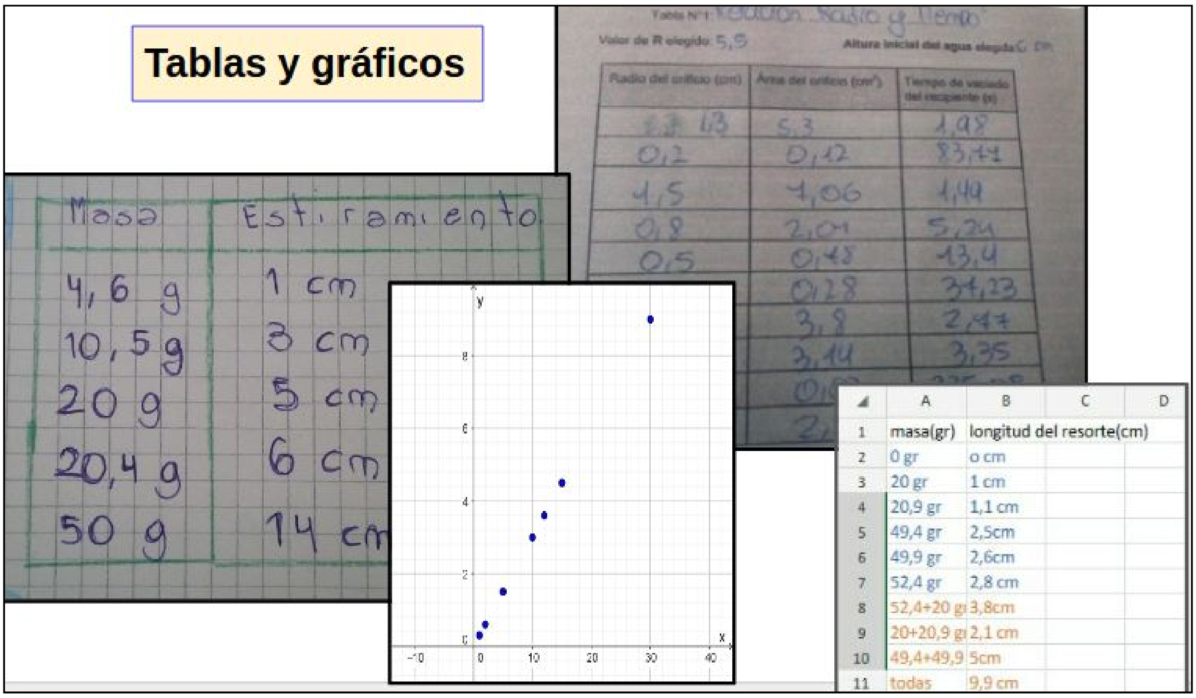


Imagen 60 d- Presentación del proceso de modelización matemática. Tablas y gráficos.

La validación había sido un punto poco trabajado, por eso al plantear las etapas del proceso de modelización se dejó un espacio para discutir sobre el tema. *¿Qué es validar?* fue una pregunta planteada a los estudiantes. *¿Quiero ver que sea válido para qué? ¿Para qué me va a servir tener un modelo? ¿Tengo información que antes no tenía? ¿Qué pasa con los valores que no había registrado?* (ver Imagen 60 f). A partir de estas preguntas guías, se discutió que el modelo representa un fenómeno y que por ende debe mantener una coherencia con éste. Asimismo, el modelo debía servir para conocer valores que antes no se conocían.

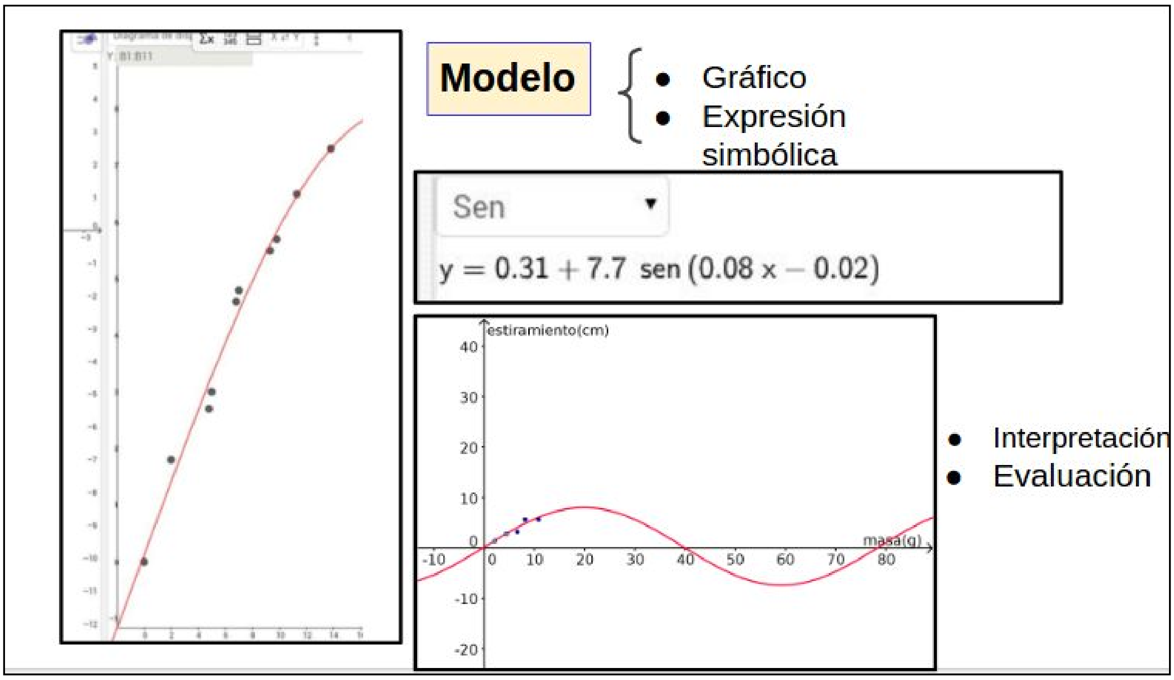


Imagen 60 e- Presentación del proceso de modelización matemática. Modelo.

- **Encuentran nuevos valores**
- **Validar o refutar la hipótesis**
- **Responde a la pregunta**

Imagen 60 f- Presentación del proceso de modelización matemática.

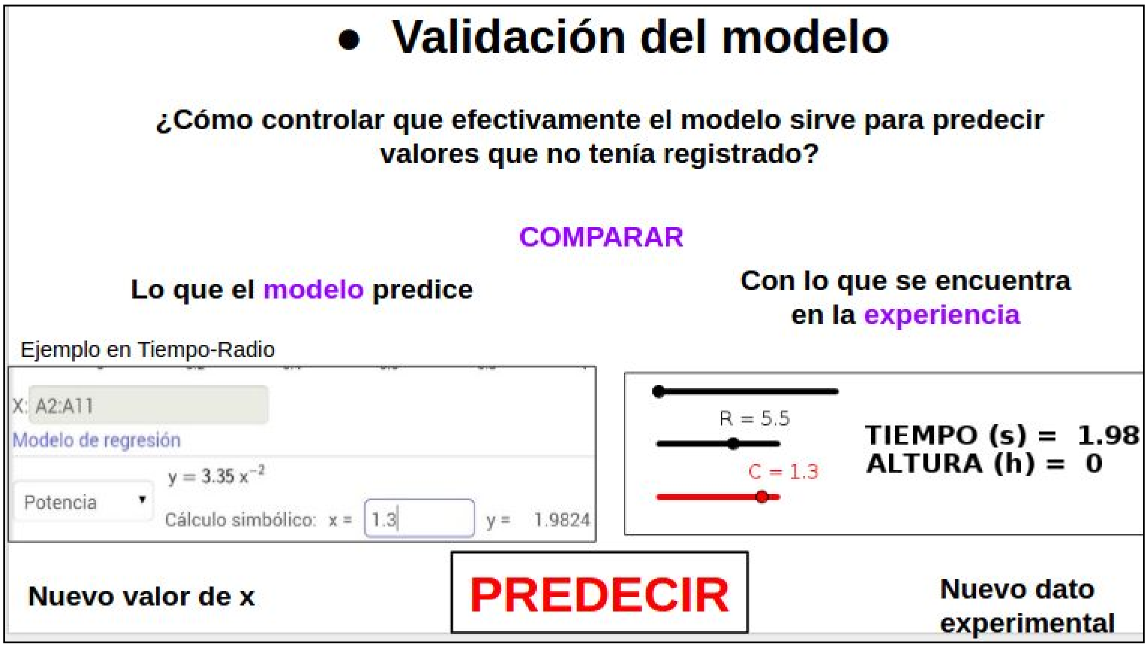


Imagen 60 g- Presentación del proceso de modelización matemática. Validación.

Se mostró un modelo elegido por uno de los grupos para la relación tiempo de vaciado del recipiente vs. radio del orificio del *Laboratorio N° 2*. Los estudiantes habían colocado en el informe una captura de pantalla del modelo elegido, junto con su expresión simbólica y el uso de la herramienta *cálculo simbólico* para un valor de radio 1.3 cm., estimando que, el tiempo de vaciado sería de 1.9824 segundos.

Este no era un valor registrado en la tabla originalmente por los estudiantes. Se aclaró que, como los estudiantes habían colocado los valores de las variables controladas, se pudo reproducir el experimento, y al realizarlo, con el valor de radio 1.3 cm., se obtuvo la imagen de la derecha, donde se muestra que el tiempo de vaciado es 1.98 sgs., según el simulador. Los estudiantes notaron que los números eran prácticamente iguales, y se discutió que entonces el modelo era válido para la predicción de valores que no se tenían registrados.

Cabe aclarar que este era el objetivo con respecto a la validación, se consideró que la comparación de un valor era suficiente para tomar el modelo como válido, ya que el objetivo estaba en poder notar la diferencia entre valores experimentales y valores predichos, y que estos deberían ser cercanos si el modelo es *bueno*, es decir, si representa *suficientemente bien* al fenómeno en cuestión.

Se discutió luego sobre la utilización del modelo para validar o refutar la hipótesis, y sobre su utilidad para responder la pregunta planteada originalmente, como problema a resolver mediante el proceso de modelización. Luego, se mostró un esquema cíclico, el cual es una variación del esquema de Blomhoj (2004), donde se relacionan todas estas etapas (ver *Imagen 60* h). A este proceso se lo denominó *Proceso de Modelización Matemática;* definiéndolo como aquel proceso que *consiste en encontrar un modelo matemática que sirva para explicar algún problema o fenómeno de la realidad.*

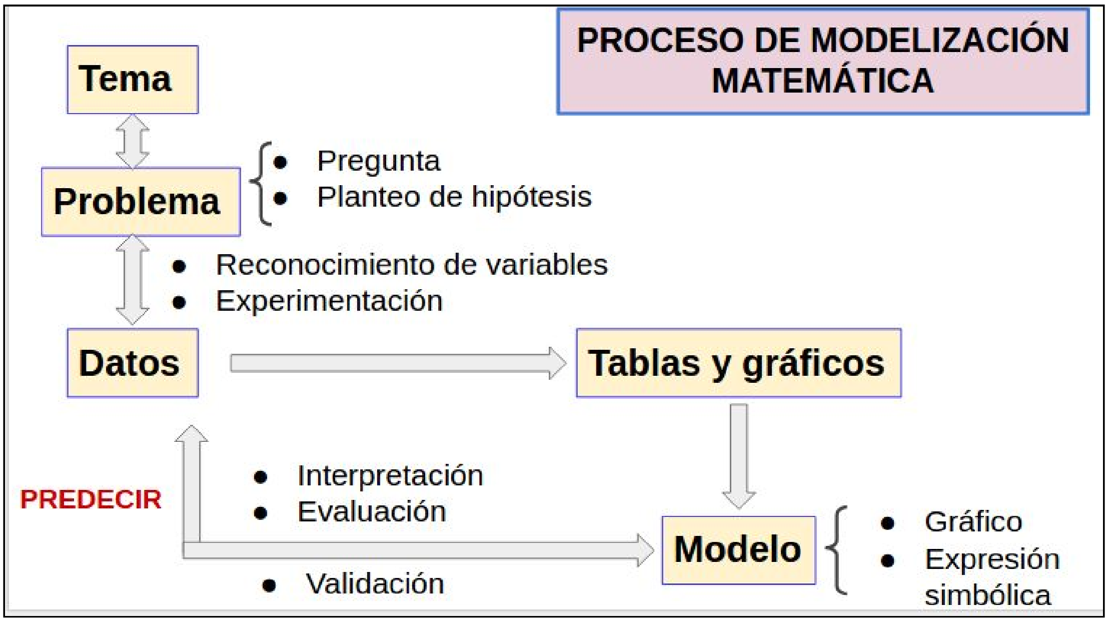


Imagen 60 h - Presentación del Proceso de Modelización Matemática. Proceso completo.

Luego se discutió que en las actividades de la guía "*Estudiamos algunas relaciones entre variables*", se trabajó desde Tablas y gráficos, es decir, los datos ya estaban dados, se buscó un modelo y se utilizó para predecir valores nuevos. En el caso de los laboratorios, desarrollaron también la etapa de recolección de datos experimentales. Se preguntó entonces a los estudiantes *¿Cuál creen que será la próxima actividad a realizar?* Y dijeron que ellos deberían elegir el tema y el problema, y realizar el proceso de modelización completo.

2.6.2. Organización general para los Procesos de Modelización Matemática

En esta instancia se trabajó con once grupos y no con doce. Un grupo se disolvió, del cual: una alumna viajó, otra fue sólo una clase durante el proceso de modelización por lo cual no se la evaluó y la tercera se incorporó a otro grupo, quedando éste con cuatro integrantes. El resto de las configuraciones de grupos se mantuvieron como se habían conformado para las actividades de los laboratorios.

Cada clase en la que se trabajó con el proceso de modelización, los estudiantes entregaron sus avances o se registraron fotos de ellos. En base a estos avances se les llevaba sugerencias para la clase siguiente.

La supervisora, la docente del curso y la practicante trabajaron en equipo para poder orientar a todos los grupos. Para la realización de sugerencias se escribió un documento con las ideas para cada grupo, y se compartió con la docente del curso y la supervisora, así, todas podríamos manejar las mismas ideas para realizar sugerencias no contradictorias.

A partir de la segunda clase con el PMM, para mejorar la implementación de esta actividad se llevó a cabo una metodología distinta. Se siguieron haciendo sugerencias por grupo, con las cuales contaba tanto la docente como la supervisora, pero también se les entregó a los alumnos una versión impresa del documento. De este modo, ellos clase a clase, tuvieron una devolución escrita que les permitió seguir avanzando con más independencia y así, se pudo trabajar con todos los grupos.

El beneficio de este cambio fue que al momento de recorrer los grupos en clase no era necesario dedicar tanto tiempo a cada uno de ellos ya que las consultas eran mucho más puntuales y ajustadas por haberse evacuado algunas de sus dudas con las devoluciones recibidas.

Si bien cada grupo tenía su propio ritmo, se intentó marcar el sentido de la producción de cada clase en términos del trabajo sobre las etapas del Proceso de Modelización Matemática.

2.6.3. Tema y Problema

Se dedicó medio módulo a la elección del tema y a la definición del problema por grupo. Al finalizar la clase, cada grupo debía entregar una hoja donde se consignara el tema elegido y posibles aproximaciones al problema, formuladas en forma de preguntas. En la misma clase se dedicó el otro medio módulo a la exposición de grupos, los cuales contaron los temas y problemas elegidos, con la intención que el resto de los estudiantes, mediante comentarios o preguntas, colaboraran en su formulación. La siguiente clase, se dedicó medio módulo más para finalizar las exposiciones.

La elección del tema y del problema fue conflictivo para la mayoría de los grupos:

- ➢ En cuanto al tipo de referencia: Les costó salir del marco de la semi-realidad para trabajar con un problema de la realidad.
- ➢ En cuanto al modelo utilizado: Querían que el tema a abordar se pudiera modelizar mediante una relación de proporcionalidad directa entre las variables intervinientes.
- ➢ En cuanto a la redacción: Les costaba despegar la redacción de los problemas matemáticos escolares clásicos. La escritura de sus problemas tendía a seguir este tipo de estructura.
- ➢ En cuanto al formato: Les costaba formular sus problemas en forma de una pregunta abierta.
- ➢ En cuanto al contenido: Muchos grupos incluyeron la metodología que iban a utilizar dentro del problema.

Se explica con más detalle estos ítem y se ilustran con producciones de los estudiantes en la sección 3.5.2.1.

A continuación, se muestran los temas trabajados por los diferentes grupos de estudiantes. Hubo grupos que mantuvieron el mismo problema sin modificaciones a lo largo de todos los encuentros, otros realizaron leves ajustes a lo largo del proceso, también hubo casos en que si bien tenían una idea para trabajar clara, no terminaban de definir su objetivo, o bien, les costó plasmar su objetivo como pregunta a responder. Por último, un grupo cambió el tema y redefinió el problema por completo durante el proceso de modelización. Se reproduce a continuación la formulación de los problemas en términos de las expresiones que los propios estudiantes emplearon para definirlos.

Grupo	**Tema**	**Problema**
Amigas	Construcción[8]	Si quiero construir una habitación más de 4x4 mts, ¿Cuántos kg. de cemento voy a utilizar?
PAM	El problema de la bicicleta	Queremos saber cuántas vueltas dan las ruedas de la bicicleta dependiendo de los dientes del piñón y del plato.
Los anónimos	Viaje hasta Buenos Aires	Hay una familia que quiere viajar a Buenos Aires y tiene que recorrer 695.5 km. Tienen tres autos y quieren el que los ayude a llegar más rápido y economizar gastos del viaje.
Trío Dinámico	Paperas	A cuántas personas podría afectar una persona con paperas. Supongamos que un chico tiene paperas y no se dió cuenta y hace su rutina diaria.

[8] Este grupo en su primer entrega colocó como tema “Proporcionalidad Directa” y en su infografía colocó como título “Matemática. Variables.” Se colocó aquí construcción para facilitar la referencia a este grupo.

Combo Dinamíta	La basura en el mundo	Calcular cuánta basura se produce en una semana, un mes y un año en base al resultado obtenido de calcular un promedio de la cantidad de basura producida por las tres familias (de los integrantes).
Grupo Bomba	Aumento de agua en comparación al peso de canicas	¿Cómo varía la altura del agua en función al peso de una canica? ¿Cómo varía la altura del agua en función al volumen de una canica?
El trío de oro	El papel y su consumo	¿Cuánto papel utiliza cada país? ¿Cuánto porcentaje de árboles utiliza cada país? ¿Cómo disminuir esa cantidad?
Amigazu	Tiempo de construcción	¿Cuánto tarda un albañil en construir un aula?
JJR	Velocidad que puede alcanzar un Lamborghini veneno	Lamborghini veneno puede avanzar de 0 a 100 km/h en 2,9 segundos y tiene una velocidad máxima de 355 km/h. ¿Cuántos km hará en 1.9, 1, 1.5, 1.2 y 0.5?
AGL	Cohete de la NASA	El cohete más pesado, ¿Va más rápido o más lento?
Los genios de las relaciones entre variables	Fútbol[9]	Los dueños del Manchester City quieren comprar una serie de jugadores, sabiendo lo que recibe por año. Los dueños quieren saber en cuánto tiempo podrá fichar estos 5 jugadores sabiendo lo que vale cada jugador y lo que cobra por mes. ¿En cuánto tiempo va a poder comprar a cada jugador sólo? ¿Cuántos meses se tardará en comprar a Pogba y Suarez? ¿Y a Messi y Bonucci? ¿Y a los 5 juntos? Los fichajes que quieren son: Luis Suarez, Paul Pogba, Lionel Messi, Leonardo Bonucci, Wayne Rooney.

[9] En las entregas escritas los estudiantes no escribieron un tema. La infografía presentaron sólo la versión impresa y esta quedó en las paredes del aula, por lo que no se cuenta con un registro exacto de lo que definieron como tema.

En esta instancia las primeras devoluciones a los grupos rondaron en torno a la delimitación del problema, intentando ayudarlos a acotarlo y precisarlo; y en relación a la referencia del problema en cuestión, tratando de alejar a los estudiantes de la semi realidad (característica común en los primeros planteos) para centrar la mirada en un problema que aluda a la realidad.

Se coloca a continuación el primer problema planteado por dos grupo de estudiantes la primera clase con las respectivas sugerencias elaboradas, con la intención de ilustrar este tipo de interacciones entre los grupos y la docente practicante en el aula.

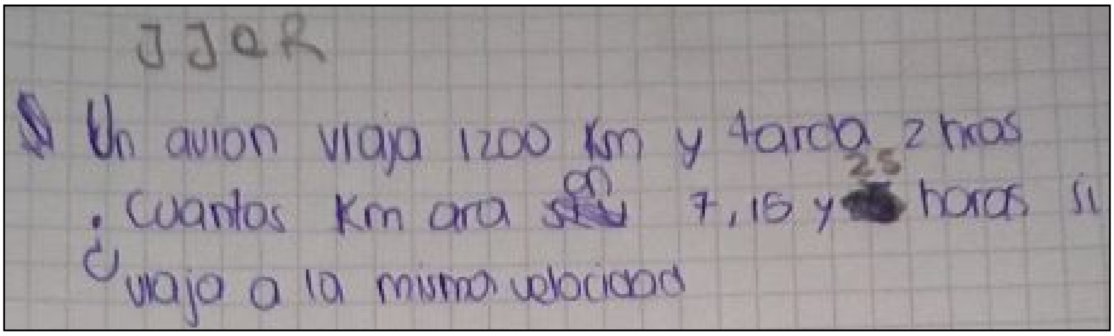


Imagen 61 - Primera versión del problema planteado por el grupo “JJR”

JJR
Problema: Avión Distancia-Tiempo
Sugerencia:
Se están basando en suposiciones ficticias. En esta página:
https://www.flightradar24.com
tienen información de los vuelos que están realizándose en este momento, que ya se realizaron, rutas de vuelos desde un aeropuerto determinado (podrían ver desde Córdoba), km y tiempos de cada opción de vuelo hasta esos lugares, etc.
Tienen muchísima información en esta página como para replantear el problema a un problema real y responder con la información que en ella pueden encontrar.
(Para ver las rutas desde Córdoba ir a Data/History -> Airports -> (buscar Córdoba) -> Routes)
O en el siguiente link: https://www.flightradar24.com/data/airports/cor/routes

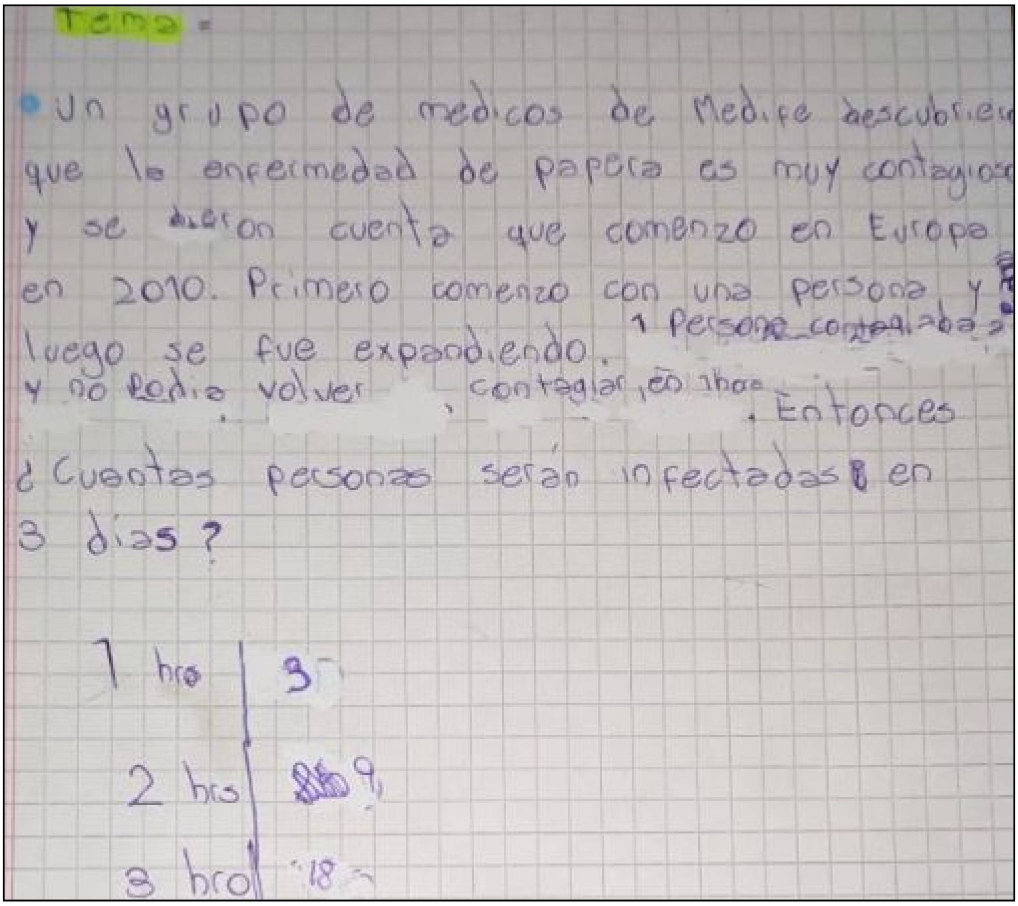
Este grupo luego cambió de problema, como se puede observar en el cuadro de la sección 2.6.2. Cabe aclarar que, junto con este problema, plantearon una solución a él, ya que bajo el planteo realizado, contaban con toda la información para hacerlo. Se desarrollará más sobre las características de los problemas planteados en la sección 3.5.2.1.

La sugerencia en este caso tuvo la intención de romper el planteo de semi-realidad propuesto brindándoles una página web repleta de datos reales históricos y actuales con respecto al tema de los vuelos de los aviones. Se esperaba que a partir de la información disponible les surgieran nuevos interrogantes respectos a los vuelos, y que a partir de estas preguntas pudieran reformular su proyecto de modelización en términos de un problema de vida real.

Si bien en el caso de este grupo, se terminó cambiando el tema y problema por un conflicto de interés entre los integrantes, por lo general las devoluciones realizadas a los grupos promovieron el trabajo en el sentido previstos; otorgando, a su vez, mayor autonomía a los grupos en el desarrollo de su proceso de modelización.

Una crítica a la práctica es que esta sugerencia fue demasiado abierta en cuanto a la idea del problema a plantearse en sí. Esto resultó un conflicto para el grupo de estudiantes, ya que en la página había demasiada información que no les interesaba, y por ende, la sugerencia no cumplió el rol de inspirarlos como se esperaba. Otra crítica es que la página, si bien es muy completa, estaba en ingles. Con lo que generó aún más la sensación de rechazo. Es esta una de las razones por las que el grupo de estudiantes decidió cambiar de tema.

Otra ejemplo bien diferente es el del grupo "Trío Dinámico". En la *Imagen 62* se plasma el problema propuesto por los estudiantes. En este caso, las sugerencias fueron pensadas en formato de preguntas, las cuales pudieron servir más como guía. Si bien el tipo de formulación orientaba positivamente el trabajo, se plantea nuevos conflictos en términos de en qué medida orienta el trabajo de los estudiantes a la visión del docente, obturando la finalidad del trabajo con modelización matemática abierta.


Tema:

• Un grupo de medicos de Medife descubrie
que la enfermedad de papera es muy contagios
y se dieron cuenta que comenzo en Europa
en 2010. Primero comenzo con una persona y
luego se fue expandiendo. 1 persona contagiaba 3
y no podia volver contagiar, en 1hora . Entonces
¿Cuantas personas seran infectadas en
3 dias?

1 hra	3
2 hrs	9
3 hrs	18

Imagen 62 - Primera versión del problema planteado por el grupo "Trío dinámico".

Trio dinámico
Problema: Contagio de paperas
Sugerencia:
¿Cuántos días podés tener paperas sin sentir síntomas? ¿Cuántos de estos días contagias? ¿Cómo se contagia? ¿Qué actividades realizan en sus días cotidianos que podrían causar contagio? ¿Qué pasa si uno se enferma entonces? ¿Cuántas personas podrían haber contagiado? ¿Cómo sigue el brote?
Algunas páginas de ayuda:
https://www.health.ny.gov/es/diseases/communicable/mumps/fact_sheet.htm

https://www.clinicalascondes.cl/CENTROS-Y-ESPECIALIDADES/Especialidades/Departamento-de-Medicina-Interna/Unidad-de-Infectologia/Noticias/Te-puede-interesar/Las-paperas-y-sus-mitos

A lo largo de las clases, si bien hubo estudiantes que quedaron todavía con un pie en la semi-realidad, todos los grupos mostraron significativos progresos en comparación con la formulación inicial.

2.6.4. La recolección de información

Luego de la exposición de los problemas los estudiantes comenzaron a buscar información acerca del problema planteado, excepto el “Grupo bomba” que realizó una actividad experimental y “Amigazu” que tomaron las medidas de las dimensiones del aula.

La etapa de recolección de información fue planificada en el Laboratorio para una mejor distribución de los grupos y contemplando la posibilidad que algún grupo quisiera hacer una recolección experimental de los datos.

Algo a destacar es que a pesar que se intentó realizar una organización para avanzar maś productivamente, no se avanzó tanto como se esperaba en cuanto a la recolección concreta de información en los grupos. Esto se debió a que, la búsqueda de información de un proceso de modelización presenta diversas dificultades, y estuvieron presentes en los trabajos: puede no existe información sobre el tema seleccionado, existe información pero esta requiere de un proceso de interpretación que lleva mucho tiempo, existe abundante información y hay que ponderar con cuál se trabajará, la información hallada en diferentes fuentes presenta inconsistencias, etc. Por lo que al tratarse de una tarea compleja resulta lógico que, en solo media hora cátedra, no se logre concluir.

Para la búsqueda de información la mayoría se manejó cómodamente con internet, desde sus tablets, y con el wifi del colegio. Se le dedicó a esta actividad un módulo más para concretar la búsqueda de información necesaria. Algunos grupos, siguieron necesitando más tiempo.

2.6.5. Respondiendo las preguntas planteadas. Diseño de Infografías.

Luego de una serie de ponderaciones en torno a los posibles formatos de presentación para los PMM con los que trabajarían los estudiantes, se optó por trabajar con infografías. La elección de esto se basó en que invita a los estudiantes a realizar una síntesis de su trabajo; permite comunicar resultados matemáticos a una comunidad no necesariamente matemática; es un formato en el que pueden incorporarse tanto formulaciones matemáticas como explicaciones breves. El formato de informe fue descartado ya que los dos laboratorios precedentes se entregaron en dicho formato.

Se dedicó una hora cátedra a la discusión de qué es una infografía y se mostraron algunos ejemplos de ellas -*Imágenes 63* y *64*-. Los alumnos ya habían realizado algunas para la materia Biología. Se reflexionó sobre la capacidad de las infografías de presentar de manera sintética y visual grandes cantidades de información sin recurrir exclusivamente al texto. Se sugirió trabajar con las plantillas para infografías de *Piktocharts*[10] y los alumnos propusieron trabajar con *Picolash*, que es una aplicación disponible en el PlayStore de Android. Ambas fueron aceptadas dejando a elección del grupo el recurso a usar.

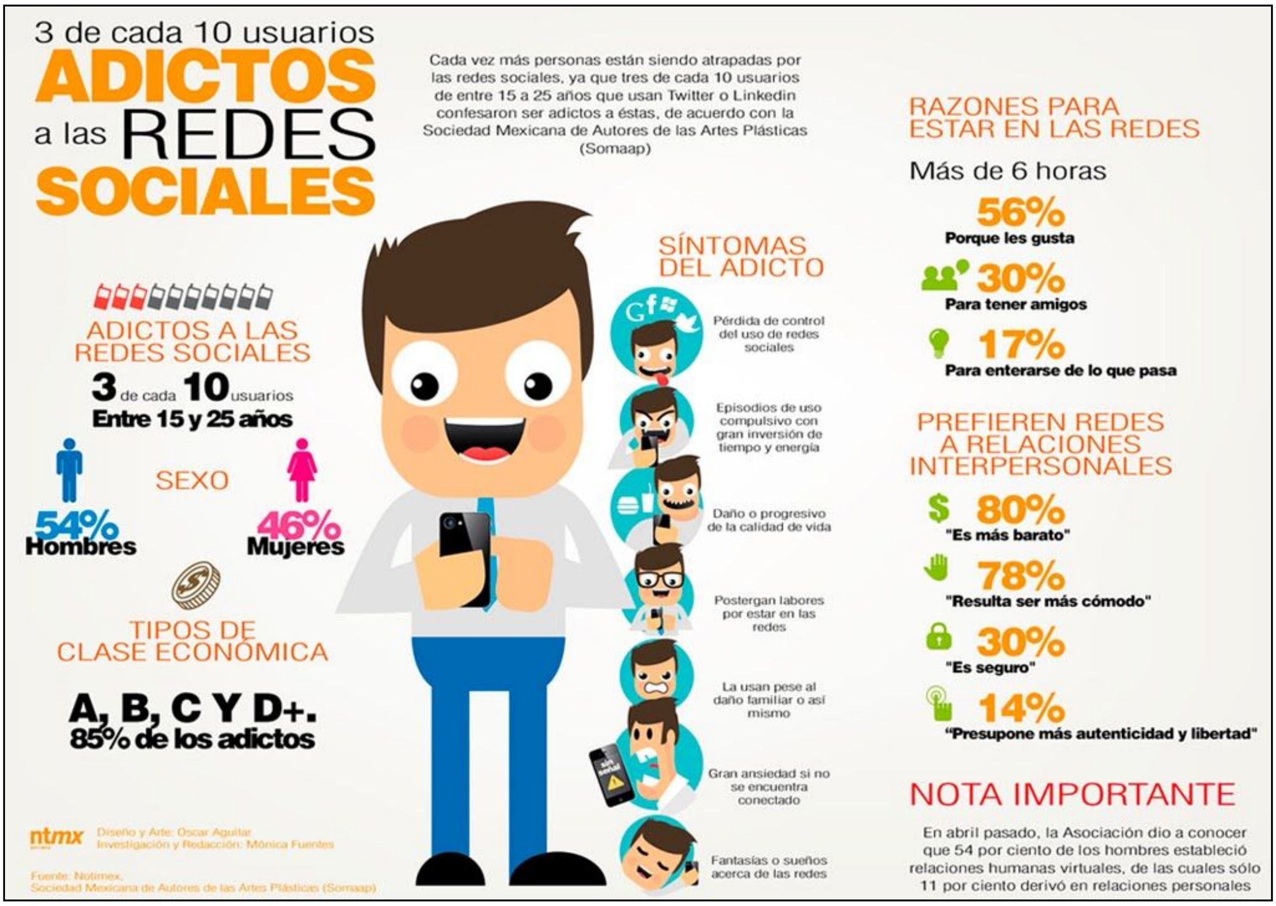
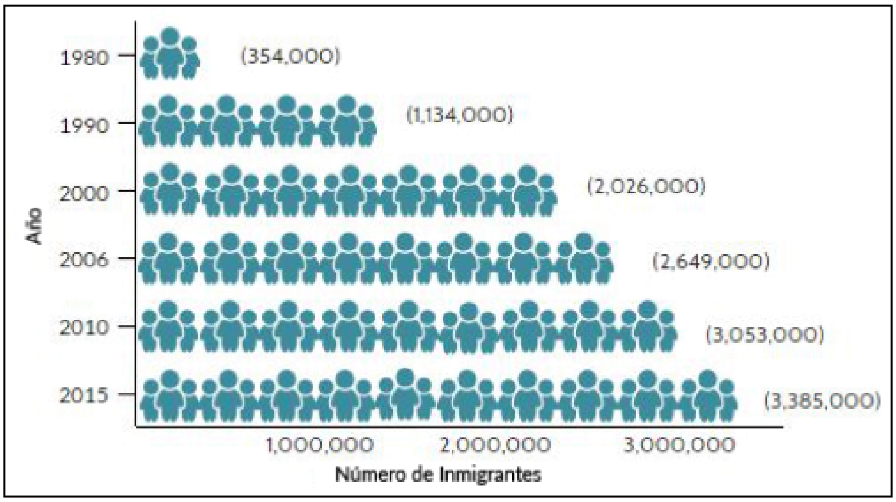
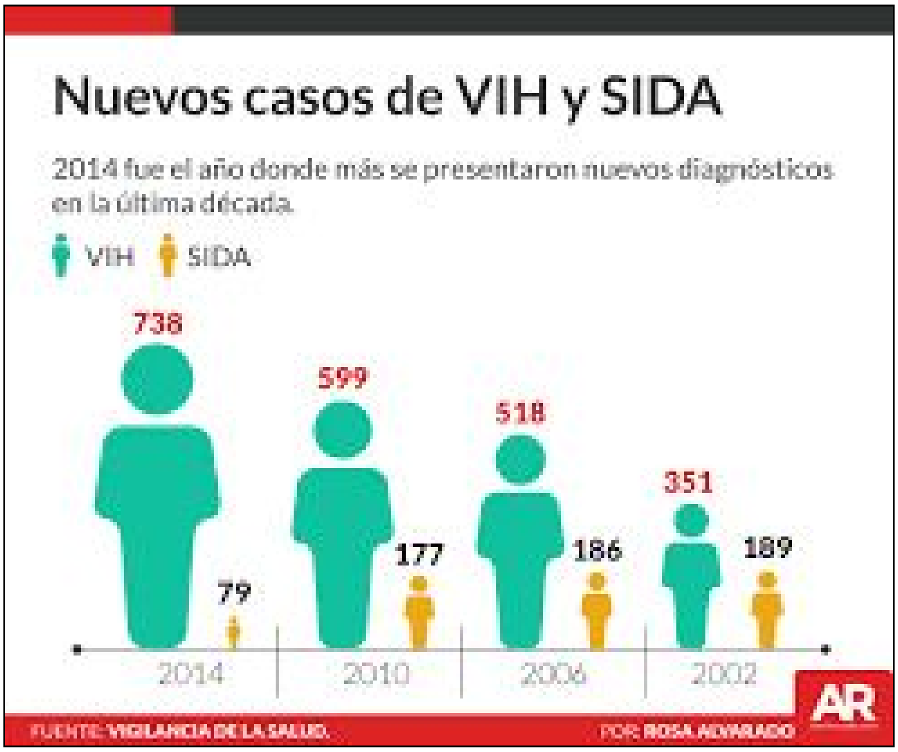


Imagen 63 - Ejemplo de Infografía llevado al aula.

10 Piktochart."*Piktochart Infographics*, www.piktochart.com/



(a)



(b)

Imagen 64 a y b - Ejemplos de transmisión de datos numéricos por medio de figuras icónicas presentadas en el aula.

Para el diseño de las infografías se plantearon algunas pautas que fueron explicitadas mediante una plantilla modelo de infografía desarrollada previamente con la página de *Picktochart* (Ver *Imagen 65*).

Imagen 65 - Infografía realizada en *Piktochart* con las consignas para los estudiantes.

A continuación se destinó la clase al diseño de las infografías. Algunos grupos no habían aún concluido el proceso y se encontraban todavía desarrollando el modelo matemático para representar el tema estudiado. En esos casos los estudiantes continuaron trabajando sobre el proceso, quedándoles como tarea pendiente diseñar la infografía. En algunos casos, los grupos se dividieron en dos subgrupos y mientras unos terminaban el PMM los otros iban avanzando en el diseño de la infografía.

2.6.5. Presentaciones orales

Se dedicaron tres horas cátedras a las presentaciones finales de los grupos, los cuales mostraron sus infografías en la pizarra digital y comentaban al resto de los estudiantes el proceso realizado.

Esta instancia fue muy rica en cuanto a los aportes de los compañeros del curso, ya que, se notó en las intervenciones que habían avanzado en romper la barrera de la semi-realidad y plantear cuestionamientos en torno a la veracidad de los planteos de los compañeros, el sentido de realizar determinada simplificación, y a los supuestos realizados.

Se desarrolla más este punto en el siguiente capítulo.

2.7. Evaluación

A lo largo de las prácticas la docente tutora requería que se establezcan dos notas para completar el trimestre. Una de las notas se constituyó por el trabajo grupal realizado en los laboratorios (cada laboratorio conformaba un 30% de la nota) y durante el proceso de modelización (40% de la nota). La segunda nota se obtuvo de una prueba escrita e individual que realizaron los estudiantes luego de la institucionalización y ejercitación de proporcionalidad directa.

2.7.1. Relaciones entre variables y proporcionalidad directa

Se tomó una evaluación sumativa luego de institucionalizar proporcionalidad directa y de realizar ejercitación al respecto. Los temas a evaluar fueron:

- ➢ Relaciones entre variables
- ➢ Distintos tipos de representación de relaciones entre variables
- ➢ Relación de Proporcionalidad Directa

La evaluación se tomó un jueves, por lo cual se contó con 35 minutos. Salvo tres estudiantes que pidieron quedarse en el recreo, el resto pudo concluir la evaluación en el tiempo estimado.

A continuación se muestra la evaluación, la cual incluye los temas y habilidades a evaluar:

<u>Evaluación de Matemática</u>

<u>Temas:</u>

- Relaciones entre variables
- Representaciones de relaciones entre variables
- Proporcionalidad directa

<u>Se evalúa la habilidad del estudiante para:</u>

- Reconocer relaciones de proporcionalidad directa y relaciones que no son de proporcionalidad directa.
- Determinar la constante de proporcionalidad y la expresión simbólica correspondiente para relaciones presentadas en tablas.

1) Decidir si las siguientes relaciones son de proporcionalidad directa o no, en ambos casos justificar su respuesta. Cuando se trate de una relación de proporcionalidad directa, encontrar la constante de proporcionalidad y la expresión simbólica.

a)

x	y
0	2
1	4
2	6
3	8
4	10
5	12

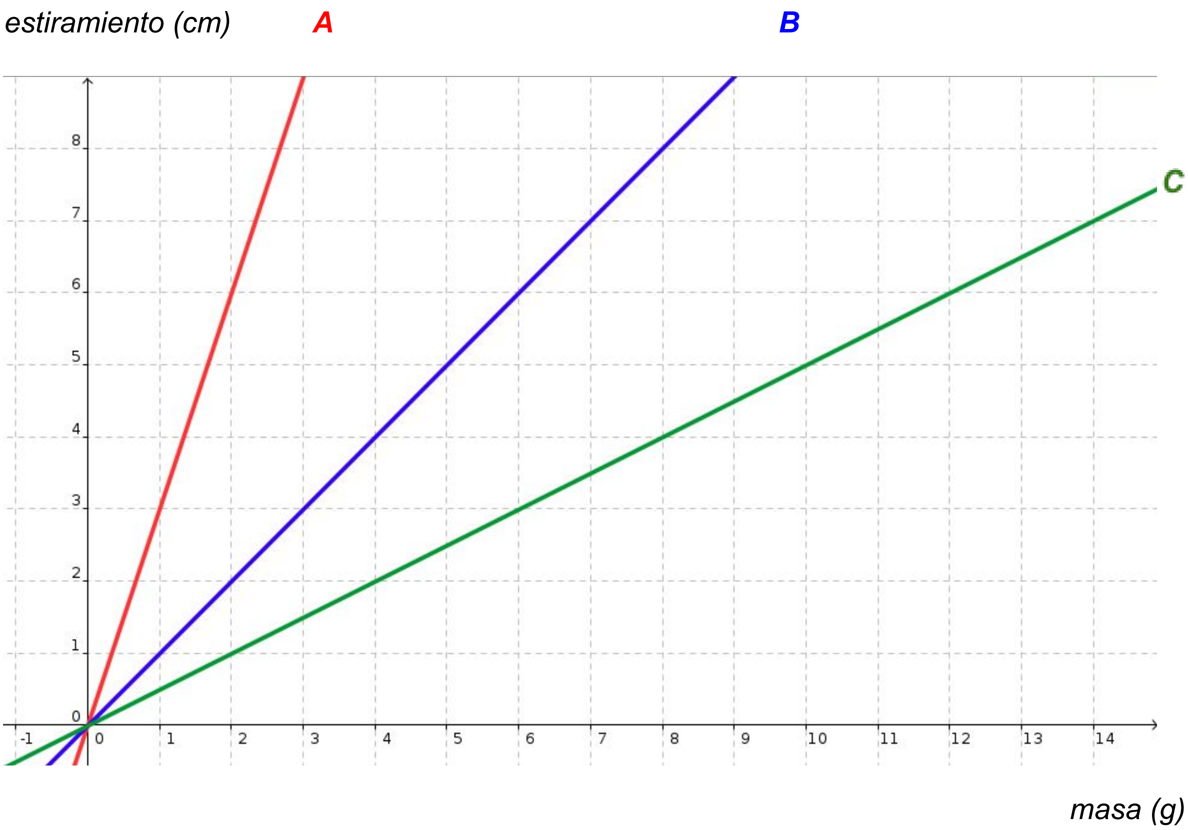
b)

x	y
1.5	7.5
3	15
4.5	22.5
6	30
9	45
12	60

2) A continuación se encuentran tres gráficos de la relación estiramiento-masa para tres resortes distintos.

a) Para cada gráfico encontrar la constante de proporcionalidad y la expresión simbólica correspondiente.
b) ¿Cuál es el resorte más blando? ¿Y el más rígido? Justifiquen

c) ¿Cuál es el estiramiento del resorte A cuando la masa es de 5g?



Ambos tipos de actividades habían sido discutidas y trabajadas en clase, por lo que se esperaba que la evaluación sea de mediana o baja dificultad.

Para la corrección de estas evaluaciones se desarrollaron los criterios que a continuación se muestran.

Criterios para la Evaluación

1.a

- **Reconocer que no es de prop. directa. 1.25p.**
  - Dice que es de prop. directa. 0p.
  - Dice que no es de prop. directa mencionando alguna de las propiedades. 1 p.
  - Dice que no es de prop. directa utilizando alguna de las propiedades y escribe la cuenta que lo justifica, o explica que al 0 no le corresponde el 0. 1.25 p.

1.b

- **Reconocer que es de porp. directa. 1.25p.**

- Dice que no es de prop. directa. 0p.
- Dice que es de prop. directa mencionando alguna de las propiedades que involucra solo a un par/algunos pares de pares de datos. 0.6 p.
- Dice que es de prop. directa utilizando alguna de las propiedades que involucra solo a un par/algunos pares de pares de datos y escribe la/s cuenta que lo justifica. 0.75 p.
- Dice que es de prop. directa mencionando la propiedad y/x=k pero no da la constante ni presenta las cuentas, o no justifica pero da la constante. 1p.
- Dice que es de prop. directa mencionando la propiedad y/x=k y da la constante y/o hace las cuentas para cada fila. 1.25 p.

- **Encontrar la constante de proporcionalidad. 1p.**
  - Encuentra la constante 1/k. 0.3p.
  - Encuentra k sin justificación 0.6 p.
  - Encuentra k y explica cómo la encuentra y/o presenta las cuentas correspondientes 1p.
- **Dar una expresión simbólica de la relación. 1p.**
  - No da una expresión simbólica o da una expresión simbólica errónea. 0 p.
  - Da la expresión x.k , pero le falta poner = y, o pone k=5.x. 0.7 p
  - Da una expresión simbólica para la relación y/x=k, y=k.x, x=(1/k)*y. 1p.

2.a

- **Encontrar la constante de proporcionalidad. 1.5 p.**
  - Encuentra 1/k para cada resorte y justifica (de alguna forma) o a partir de una tabla que arma desde el gráfico. 0.5 p.
  - Encuentra 1/k con la unidad correspondiente para cada resorte y justifica (de alguna forma) o a partir de una tabla que arma desde el gráfico. 0.4 p.
  - Encuentra k para cada resorte sin justificar 1p.
  - Encuentra correctamente k para dos de los tres resortes. 1.3 p.
  - Encuentra k para cada resorte y justifica (de alguna forma) o a partir de una tabla que arma desde el gráfico 1.4p.
  - Encuentra k con la unidad correspondiente para cada resorte y justifica (de alguna forma) o a partir de una tabla que arma desde el gráfico. 1.5 p.
- **Dar una expresión simbólica para cada resorte. 1.5 p.**
  - No da una expresión simbólica, da una expresión simbólica errónea (Ej. y=x+k) o da una expresión simbólica correcta pero sin reemplazar el valor de k. 0p.
  - Encontró 1/k y da la expresión simbólica y=(1/k)*x. (con el valor de k reemplazado) 0.5p.
  - Da una expresión simbólica pero coloca la letra k en lugar de y, cuando ya llamó k a la constante. 1p.
  - Da una expresión simbólica para cada relación pero en lugar de colocar x e y, o masa y estiramiento, coloca las unidades. 1.4 p.
  - Da una expresión simbólica para la relación y/x=k, y=k.x, x=(1/k)*y. (con el valor de k reemplazado) 1.5p.

2.b

- **Decir cuál es el resorte más rígido y cuál el más blando. 1.5 p.**

- Dice que el más rígido es el A y el más blando es el C sin justificar. 0p.
- Dice que el más rígido es el A y el más blando es el C reconociendo que la diferencia está en los cambios de pendientes o constantes distintas pero concluyó mal. 0.3p.
- Dice que el más rígido es el C y el más blando es el A sin justificar. 0.6p.
- Justifica en términos del fenómeno pero responde uno bien y otro mal. 1p.
- Dice que el más rígido es el C y el más blando es el A reconociendo que la diferencia está en los cambios de pendientes o constantes distintas pero sin explicar 1.3p.
- Dice que el más rígido es el C y el más blando es el A reconociendo que la diferencia está en los cambios de pendientes o constantes distintas justificando qué significan en términos del fenómeno. 1.5p.

- **Calcular el estiramiento del resorte A para una masa de 5g. 1 p.**
  - No responde. 0p.
  - Responde mal sin justificar. 0p.
  - Responde mal realizando una justificación que tiene una idea correcta, por error de cuentas, porque se basó en un resultado erróneo o porque hizo una estimación errónea a partir del gráfico 0.4 p.
  - Responde 15cm sin justificar. 0.8 p.
  - Responde 15cm justificando, con la expresión simbólica o usando alguna regularidad. 1p.

Se presenta los resultados obtenidos, en histograma y tabla de frecuencias. Estos resultados son similares al desempeño general de los estudiantes a lo largo del año, según la profesora tutora.

Nota	Cantidad
1	2
2	2
3	3
4	4
5	1
6	6
7	5
8	4
9	7
10	1

Tabla 2 - Tabla de frecuencia de los resultados de la evaluación.

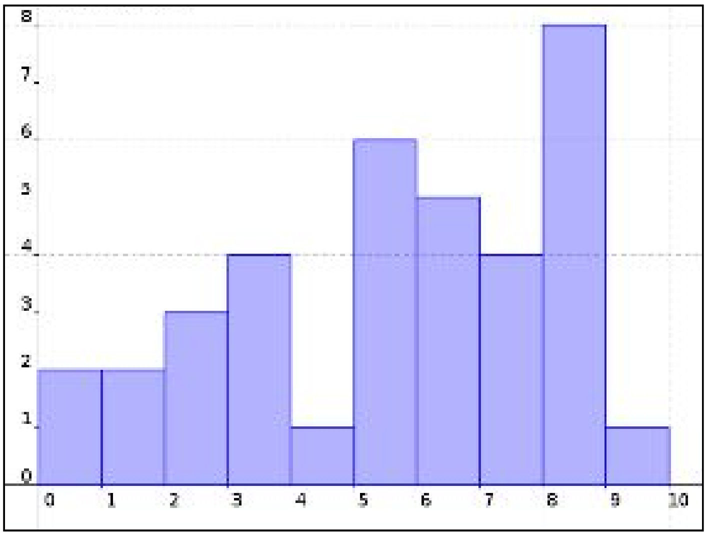


Imagen 66 - Histograma de los resultados de la evaluación.

2.7.2. Laboratorios y proyecto de modelización matemática

Se realizó una evaluación formativa en torno a la realización de los laboratorios y el proyecto de modelización matemática. Se evaluó el progreso del alumno durante el proceso de aprendizaje, y dio devoluciones en cada instancia con la intención de que sean implementadas en las instancias siguientes.

Esta nota constó de tres partes:

- Informe del Laboratorio N° 1: 3 puntos
- Informe del Laboratorio N° 2: 3 puntos
- Proyecto de Modelización Matemática:
    - Trabajo en clase: 2 puntos
    - Infografía: 2 puntos.

Se describe a continuación los criterios de corrección tomados para cada instancia y se coloca las rúbricas completas en los anexos indicados.

2.7.2.1. Criterios para la corrección del Laboratorio N°1

Los tres puntos se dividen entre los diferentes ítems de la guía *"Experimento 1: Estiramiento vs Masa"* . Se coloca a continuación el puntaje que tiene cada ejercicio y lo que se espera de los estudiantes. La rúbrica de corrección con los puntajes intermedios por consigna se encuentra en el **Anexo A5**.

1) **Recolección de datos: 0.5 p.** Entregan la tabla con los 9 o más pares de valores y las variables con sus respectivas unidades en el encabezado.

2) **Formulación de Hipótesis: 0.4 p.** Formulan hipótesis con vocabulario adecuado.

3) b) **Elección y crítica del ajuste: 0.6 p.** Eligen un ajuste, justifican y dan una crítica referida al error de medición o el origen.
   c) **Expresión simbólica: 0.1 p.** Copian la expresión simbólica y responden con vocabulario adecuado qué variables representan x e y.

4) **Validación del modelo (comparación entre valor predicho y observado): 0.4p.** Realizan una conclusión en la que incluyen una justificación correcta para la diferencia entre los valores (hablar por ejemplo del error de medición y que a eso se debe la diferencia entre los valores). No se exige que escriban cuáles fueron los valores que comparan, ni se penaliza que afirmen que "*GeoGebra* da el valor del estiramiento exacto" o "la fórmula es correcta" aunque sea incorrecto.

5) **Crítica al dominio: 0.4 p.** Consideran los valores de x negativos y los grandes como valores que no ajustan y el cero en el caso que la ordenada sea notablemente mayor a la dada por el error de medición

6) **Conclusión respecto a la propiedad creciente y de suma: 0.6 p.** Reconocen el carácter creciente de la relación. Reconocen que el estiramiento producido por la suma de dos pesas se corresponde con la suma de los estiramientos producidos por

la masa de cada una de ellas a partir de la tabla, el gráfico y/o el modelo de ajuste de curva elegido.

2.7.2.2. Criterios para la corrección Laboratorio N°2

Debido a que los estudiantes requirieron de más tiempo para terminar el Laboratorio N°2, se comunicó que se corregiría por habilidad. Por lo cual, no era necesario que tengan terminadas las tres relaciones que el laboratorio proponía estudiar. Se evaluaría una sola relación. Los grupos que llegaran a analizar dos o tres relaciones, obtendrían medio o un punto extra respecticamente.

Cabe destacar que durante la realización del Laboratorio N° 2 se escribió en el pizarrón los ítems que debería tener la introducción, para así poderlos usar como criterios.

Se omite la descripción del puntaje máximo al ser este del mismo estilo que el del Laboratorio N° 1. La grilla de corrección completa se encuentra en el **Anexo A6.**

Los tres puntos se distribuyeron de la siguiente manera:

1) Introducción: 0.4 p.
2) Recolección de datos: 0.5 p.
3) Manejo de habilidades: 2.1 p.
    a) Hipótesis: 0.6 p.
    b) Gráfica de la curva de ajuste: 0.8 p.
    c) Expresión simbólica: 0.1 p.
    d) Conclusión: 0.6 p.

2.7.2.3. Criterios para la corrección el Proyecto de Modelización Matemática

Al finalizar el proyecto de modelización se evaluó el trabajo en clase con 2 pts. y el contenido de la infografía con otros 2 pts. Se encuentra el detalle de los puntajes intermedios el **Anexo A7.**

Para el trabajo en clase se tuvo en cuenta:

1) Tener avances significativos durante las clases y entregarlos a la docente practicante al final de cada la clase: 1 p.
2) Haber tenido la capacidad de trabajar en equipo: 0.5 p.
3) Tomar las sugerencias de las docentes como disparadoras para un avance significativo: 0.5 p.

Para la corrección de la infografía, debido a las diferencias entre los grupos de trabajo, se tuvo en cuenta un puntaje base, puntajes intermedios, y puntaje extra, para cada ítem. Es decir, a la corrección estándar que sería dividir los 2p totales entre los ítem, y a partir de allí, establecer criterios para los puntajes intermedios, se le agregó a cada ítem un puntaje extra que se le asignaría al grupo si su labor fue destacada.

Se describe a continuación los ítems de corrección, con los puntajes base que suman 2 p., y el puntaje extra correspondiente.

1) **Tema y Problema: 0.3 p.** Presenta con claridad el tema seleccionado y una pregunta como problema bien formulada y acorde a lo estudiado.
2) **Introducción: 0.3p.** Mencionan las variables que intervienen.
   +0.2 p. Mencionan las variables que intervienen, el método de recolección de datos, y una breve explicación del tema elegido.
3) **Gráficos: 1p.** Presenta gráfico de información/datos recolectados y gráfico de transmisión de resultados.[11]
   +0.2 p: Presenta además gráficos de transmisión de resultados y ocupan una parte central de la infografía.
4) **Expresión simbólica: +0.5 p.** Presenta expresión simbólica del modelo matemático construido.
5) **Conclusión: 0.3 p.** Responde a la pregunta planteada.
   + 0.1 p: además plantea alguna reflexión extra sobre el tema, posterior a la resolución del problema.
6) **Fuentes: 0.1 p.** Incluye fuentes.

2.7.2.4. Devoluciones realizadas

Se realizaron las devoluciones de los laboratorios a los grupos por escrito de manera detallada, con la intención que sirvan como base para el PMM.

De manera más sintética se realizó un detalle de la corrección del proyecto de modelización, junto con la nota final obtenida. Luego, ambas correcciones fueron subida al aula virtual también junto a la nota final.

Se coloca a continuación la devolución realizada a uno de los grupos del PMM, y se coloca las devoluciones del mismo grupo para los laboratorios en el **Anexo A8** para completar la ejemplificación de esta sección de la implementación de las prácticas.

Grupo		**AGL**
Integrantes		*(Aquí iban los nombres de los estudiantes)*
Laboratorios	**(max. 6p.)**	4.95 p.
Trabajo en clase	**Puntaje (max. 2 p.)**	2 p.
	Comentarios	Realizan un excelente trabajo clase a clase, a pesar de las dificultades para conseguir información lograron replantear

[11] Entendiendo la diferencia entre estos gráficos como: por un lado, gráficos de la información recolectada, por otro, gráfico del tratamiento de esta información y comunicación de las conclusiones obtenidas.

		el problema y reorganizar la búsqueda de datos de manera exitosa. Trabajan muy bien en equipo.
Infografía	**Puntaje (max. 2 p.)**	1.7 p.
	Comentarios	La infografía presenta un buen poder de síntesis, faltó incorporar imágenes para transmitir los datos recolectados y los resultados obtenidos.
Total	**(max. 10 p)**	**9**

2.7.2.5. Resultados

Se presentan las notas obtenidas por los once grupos en gráfico de barra y tabla de frecuencia.

Cabe aclarar que para los laboratorios fueron doce grupos, pero por problemas en las relaciones interpersonales en uno de ellos, éste se disolvió sumándose dos alumnas a otros dos grupos, y una alumna no fue calificada en el proceso de modelización por haberse ausentado en la mayoría de los encuentros debido a la realización de un viaje familiar. Esta última se la calificó solo con las notas obtenidas en los laboratorios, llevando el puntaje máximo de seis a diez puntos de manera lineal.

Se presenta entonces el puntaje de once grupos, tomando en cuenta el puntaje de laboratorios que los grupos originalmente tenían, dejando estas excepciones fuera del análisis de resultados.

Nota	Cantidad
5	2
7	4
8	2
9	3

Tabla 3 - Tabla de frecuencia de la segunda nota, conformada por las notas de los laboratorios y el proyecto de modelización.

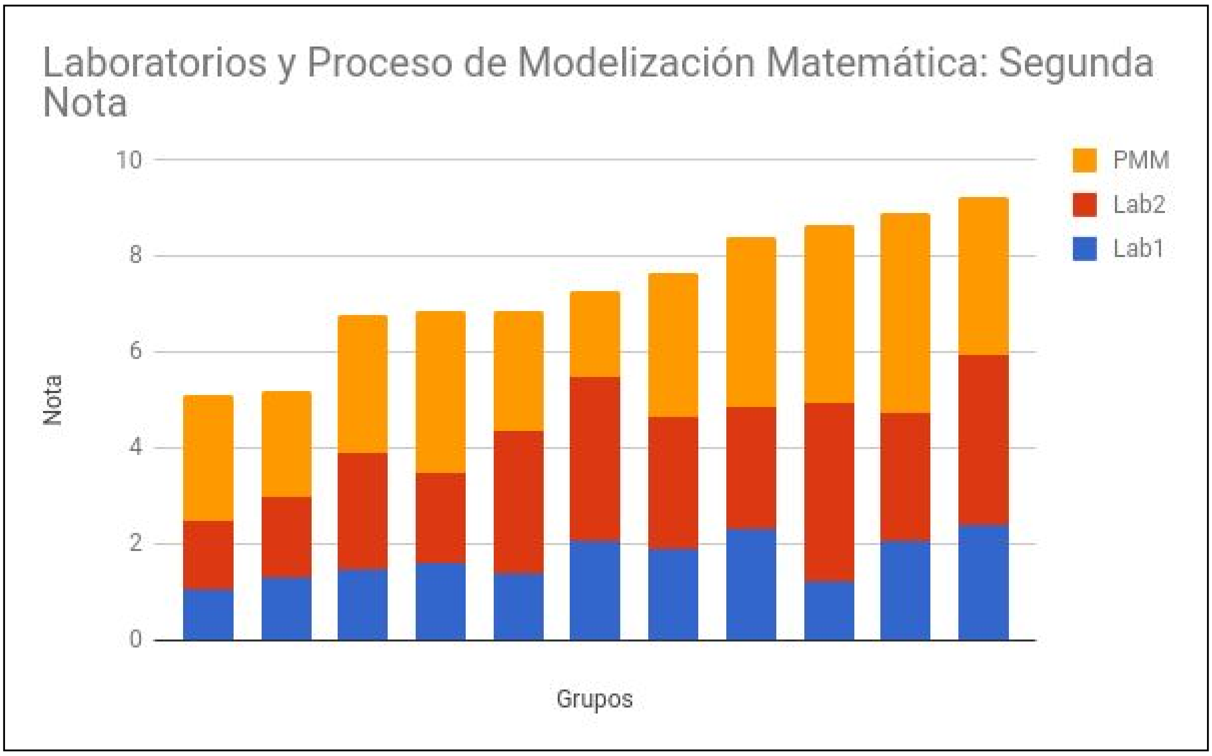


Imagen 67-
Gráfico de barra de la segunda nota, conformada por las notas de los laboratorios y el proyecto de modelización.

3. Promoviendo las capacidades fundamentales por medio de un proyecto de modelización matemática abierta

En este capítulo se analizará el trabajo realizado con los PMM tratando de responder, en base a la experiencia vivida, la siguiente cuestión:

- ¿Cómo el trabajo con proyecto de modelización matemática abierta en el aula es capaz de promover las capacidades fundamentales que plantean las prioridades pedagógicas 2014-2019 señaladas por la Subsecretaría de Promoción de Calidad e Igualdad Educativa de la provincia de Córdoba?

Para ello, primero se presentará cuáles son estas capacidades, y qué tipo de actividades son potentes para su desarrollo e, inmediatamente después, porqué la propuesta didáctica de trabajar con proyectos de modelización matemática cumple con estos requisitos.

Luego se desarrollará cada capacidad en su especificidad, haciendo foco particularmente en la capacidad "Oralidad, lectura y escritura" por tener esta el estigma de ser considerada exclusiva del área de Lengua y Literatura, y en la capacidad "Desarrollo de pensamiento crítico y creativo" por creer que ésta es la principal capacidad que se desarrolla cuando se promueve el trabajo con proyectos de modelización matemática. Para analizar con más detalle el desarrollo de esta última capacidad, se trabajará como las producciones de los estudiantes como insumo para ofrecer evidencia de su presencia durante la experiencia de práctica.

3.1. Proyecto de modelización: situación potente para el desarrollo de las capacidades fundamentales

La modelización como propuesta para la resolución de problemas tanto intra como extra matemáticos está presente en el Diseño Curricular de la Educación Secundaria 2016-2020[12]. Dentro de las orientaciones metodológicas para la enseñanza este documento presenta la modelización de la siguiente manera:

> […] propiciará el estudio de límites del modelo matemático para explicar un problema o fenómeno que se intenta resolver o explicar. Para que el estudiante pueda describir, analizar o predecir el fenómeno de la realidad modelado [...] mediante la matemática puesta en juego, se requiere que los estudiantes observen la realidad; la describen en forma simplificada; construyan un modelo; trabajen matemáticamente con él para arribar a resultados y conclusiones matemáticas; interpreten los resultados; evalúen la validez del modelo para poder explicar esa realidad. (pág. 48)

Se pretende analizar la propuesta didáctica llevada adelante en las prácticas, y su resultado, con el objetivo de promover la modelización matemática en los contextos áulicos, lo cual

[12] Diseño Curricular de la Educación Secundaria 2016-2020. Tomo 1 Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. Disponible en http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL003226.pdf

sigue los lineamientos propuestos por el diseño curricular, y se hipotetiza que también los de las prioridades pedagógicas.

Para realizar un análisis objetivo de los alcances de esta propuesta en los estudiantes, se propone como referencia pensar estos alcances en términos del desarrollo de las capacidades fundamentales que plantean las prioridades pedagógicas 2014-2019 delineadas por la Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa (SPIyCE) de la provincia de Córdoba.

La SPIyCE dispone de una página web[13] en donde pueden encontrarse las de políticas educativas que lleva adelante. En esta página se establecen también las prioridades pedagógicas 2014-2019 y se exhiben una serie de materiales y documentación al respecto.

Dentro de la solapa *Prioridades Pedagógicas 1: Mejora en los aprendizajes de Lengua, Matemática y Ciencias,* se puede encontrar veintidós s y siete infografías que fueron usados para la redacción de esta sección. principalmente los siguientes:

- Infografía N°2
- Fascículo 1: Conceptos claves
- Fascículo 2: Estrategias de enseñanza e intervención
- Fascículo 4: Matemática Educación Inicial, Primaria y Secundaria.
- Fascículo 8: Aportes para la planificación de la enseñanza en Educación Primaria y Secundaria
- Fascículo 10: Resolver problemas para aprender: producciones con información matemática

Entre las prioridades pedagógicas se propone *"fortalecer las propuestas formativas, re-orientándolas hacia la adquisición y desarrollo de capacidades"* (Infografía 2).

Se entiende por *capacidad "a potencialidades de los sujetos, cuyo desarrollo les permite enfrentar la realidad en condiciones más favorables"* (Fascículo 1. Conceptos claves, pág.3), y se establecen como capacidades fundamentales la *oralidad, lectura y escritura;* el *abordaje y resolución de situaciones problemáticas;* el *trabajo en colaboración para aprender a relacionarse e interactuar* y el desarrollo del *pensamiento crítico y creativo.*

El Fascículo 1 plantea además que son fundamentales *"aquellas capacidades que están estrechamente relacionadas con las grandes intencionalidades formativas del currículum [...], resultan más potentes para la apropiación de conocimientos y tienen incidencia directa, relevante y positiva en los itinerarios escolares de los alumnos"* (p. 3).

Con respecto a la planificación de actividades, se señala que hay que elegir *situaciones* potentes para el desarrollo de estas capacidades, entendiendo por situación la noción propuesta por Roegiers y Peyser (s/f), según la cual "una situación es un conjunto contextualizado de informaciones, que un estudiante o grupo de estudiantes tiene que articular a fin de resolver una tarea determinada" (como se cita en el Fascículo 8, p. 5).

En el *Fascículo 8, Aportes para la planificación de la enseñanza en Educación Primaria y Secundaria*, se analiza esta definición con la finalidad de aclarar el término, y así, definir un

[13] Disponible en: www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/Prioridades/PrioridadesPedagogicas.php

marco de referencia al que deberían ajustarse las actividades propuestas a los estudiantes para considerarse verdaderas situaciones.

> ➢ Por un lado, las informaciones están **contextualizadas**, es decir que hacen referencia al acontecer [...].
>
> ➢ En segundo lugar, hay una **tarea a resolver**: no se trata de un uso mecánico de la información disponible, sino que los estudiantes se enfrentan a un conflicto entre lo que saben y lo que tienen que hacer, el cual hace posible y necesaria la construcción de nuevos conocimientos. (p.5)

En función de lo anterior, podemos decir que en el desarrollo de PMM abierta la información está *contextualizada* a un marco de referencia de la realidad, más aún, son los propios estudiantes quienes proponen ese marco al elegir el tema y el definir el problema con el que trabajarán. En este sentido, fueron guiados para que estas formulaciones se generarán ajustándose de la mejor manera posible a la realidad del tema elegido.

Con respecto a las *tareas a resolver*, entendemos que los estudiantes contaban con un importante bagaje de información: realizaron previamente trabajos de laboratorios y estudiaron relaciones entre variables en diferentes contextos además manejaban la noción de modelo matemático desde primer año (ver sección 2.4). No obstante, no emplearon esta información de manera mecánica, sino que tuvieron que utilizarla de manera crítica y creativa para responder un nuevo problema que presentaba nuevas dificultades a causa de haber sido propuestos por ellos.

Esto implica que el trabajo con PMM, por cómo fue planteado, constituye una situación bajo la noción de Roegiers y Peyser (s/f). Asimismo, en el *Fascículo 8* se realiza una caracterización de aquellas situaciones que promueven el desarrollo de las capacidades fundamentales y establece que, a tal fin, estas situaciones debieran contar con las siguientes cualidades:

1. ***No son conjuntos de instrucciones***
2. ***No se restringen a dominar un gesto o una tarea elemental***
3. ***Se pide una producción esperada***
4. ***Son desafiantes pero no imposibles*** (p. 6)

Al momento de elegir el tema, plantear el problema y recolectar los datos, los estudiantes se manejaron en un terreno incierto plagado de incertidumbres. Tenían experiencia previa de cómo estudiar relaciones entre variables, por lo cual muchos grupos querían llegar rápidamente a la matematización para sentirse seguros en el terreno de la resolución del problema elegido (se retomará esto en la sección 3.2). Sin embargo, el desarrollo de un PMM no se restringe a la construcción de tablas o gráficos ni a la búsqueda de regularidades en una tabla. Si bien moviliza y pone en juego conocimientos previos en torno a la matemática y a la situación de la realidad que se pretende estudiar, también es necesaria la incorporación de nuevos conocimientos.

Los alumnos, entonces, entendían la consigna, pero no les parecía rápida la solución. Tuvieron que debatir entre ellos diferentes opciones, que los obligó a detenerse y pensar en los diferentes momentos de toma de decisiones, a utilizar diversos conocimientos adquiridos previamente, y además necesitaron incorporar conocimientos nuevos.

Por último, se esperaba de los estudiantes cierto tipo de producción, la infografía, en la que debían dar cuenta de su tránsito por las diferentes etapas del PMM, la cual, todos los grupos lograron presentar.

En este sentido, observando por un lado la incertidumbre por parte de los estudiantes en la primer clase y, la lograda producción de infografías por otro, se puede inferir que la actividad fue *desafiante pero no imposible.*

Observando entonces que el trabajo con PMM se constituye en una *situación potente para el desarrollo de las capacidades fundamentales*, analizamos a continuación cada capacidad en su especificidad: cómo se la define, qué características debe tener una actividad para promover en particular esa capacidad fundamental y porqué se considera que el trabajo con PMM implementado posee estas características.

3.2. Oralidad, lectura y escritura

Para identificar qué acciones requeridas a los estudiantes en una actividad desarrollan la capacidad de *oralidad, lectura y escritura*, se puede observar el siguiente fragmento:

> Colaboramos con el desarrollo de la oralidad, la lectura y la escritura cuando en el marco de trabajo de una situación proponemos actividades para que los estudiantes
> - identifiquen el significado de una palabra en su contexto, expandiendo su vocabulario;
> - lean -con ayuda del docente- textos difíciles, es decir, con conceptos e ideas que no les resultan familiares, o con una redacción compleja;
> - definan un concepto luego de identificar situaciones donde éste se aplica y donde no;
> - aprendan buscando información en textos (incluyendo la web) o a través de informantes clave;
> - escriban resúmenes de lo que han encontrado; entre otras. (Fascículo 8, p. 7)

Ahora bien, esta capacidad no resulta exclusiva del área Lengua y Literatura, como suele asumirse, y el término texto no alude únicamente a textos en prosa, "*pues los modos de expresarse en cada disciplina son específicos, y deben enseñarse en su contexto*". (Fascículo 8, p. 10). Por ejemplo en Ciencias Naturales, es propio escribir buenos informes y descripciones, en Ciencias Sociales, es preciso generar narrativas, etc.

Cabe preguntarse entonces, ¿Qué es texto en el espacio curricular de Matemática? ¿Qué se lee y escribe en este espacio? Para luego poder plantearse cómo desarrollar la capacidad de *oralidad, lectura y escritura* atendiendo a la especificidad del texto matemático. Luego, en un paso siguiente, analizar si una situación determinada propuesta a los estudiantes desarrolla estas habilidades.

Dentro del *Documento de Acompañamiento n°5: Desarrollo de la comprensión lectora en Ciencias Naturales, Matemática y Tecnología, Lenguajes y Comunicación y Ciencias*

Sociales y Humanidades[14], podemos encontrar una sección dedicada al desarrollo de la comprensión lectora en Matemática y Educación Tecnológica, de la cual se extrajo información para responder a esta pregunta.

Se plantea que en matemática se debe comprender diferentes tipos de textos: "*consignas, enunciados de problemas, información matemática contenida en diferentes portadores (calendarios, tickets, boletos, envases, boletas, publicidades, slogan publicitarios, etc.)*" (p.14). Además, se debe enseñar a leer tablas y gráficos.

Tenemos entonces diferentes tipos de textos y portadores de información matemática, grupo dentro del cual podemos incluir las infografías, tablas y gráficos. Se tienen así, textos con lenguajes *verbales y no verbales* (Fascículo 2, p. 3), donde podríamos relacionar, hasta aquí, lo no verbal con lo icónico.

Sin embargo, al ampliar los portadores de información e incluir las TIC, éstas le exigen a los estudiantes "*un amplio dominio de las estrategias de lectura y escritura y, sobre todo, flexibilidad para adaptarse a los nuevos medios. Los nuevos lenguajes por los que transitan nuestros estudiantes, lejos de divorciarse del conocimiento de la palabra, la necesitan como soporte primario en el contexto multilingüístico del mundo actual*" (Fascículo 2, p.3). Por ende, en la escuela deben ser considerados objetos de enseñanza.

Ampliamos así la noción de texto, y con ello, el campo en donde es necesario ejercitar la capacidad de lectura y escritura en la asignatura matemática. En esta disciplina se debe enseñar al estudiante a expresarse, por medio de la *oralidad, lectura y escritura*, apelando a los recursos discursivos propios de la matemática, es decir, promoviendo el manejo del texto de la asignatura.

Por ende, según lo planteado por la SPIyCE, se puede concluir que se promueve en el aula la escritura mediante la producción de gráficos, tablas, infografías e informe y se fomenta la lectura de textos matemáticos mediante la interpretación de estos tipos de registros, adicionando además la interpretación de información matemática contenida en otros formatos no matemáticos tales como calendarios, tickets, boletos, envases, boletas, publicidades, slogan publicitarios, etc. Por último, se promueve la oralidad mediante la comunicación de ideas matemáticas de manera oral, por ejemplo, con la presentación de trabajos a través de respuestas a preguntas acerca de la asignatura o del trabajo realizado en ella de orden matemático, y, mediante la promoción de uso correcto de vocabulario y concepto en estas ideas.

Así, se puede considerar que efectivamente los estudiantes trabajaron en el desarrollo de la capacidad de la *oralidad, lectura y escritura* durante el desarrollo del proyecto de modelización matemática, ya que:

- ➢ redactaron problemas;
- ➢ comunicaron los problemas elegidos al resto del curso;
- ➢ buscaron información en internet;

[14] Disponible en: http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/PNFP/Asesoramiento/Acompanamiento.php

- ➢ interpretaron datos en distintos formatos en su búsqueda;
- ➢ para la organización de datos produjeron tablas con la información;
- ➢ leyeron diversos modelos, los interpretaron y tomaron la decisión de elegir uno, usando la herramienta *Análisis de Regresión dos Variables;*
- ➢ produjeron modelos propios, los que expresaron coloquial y/o simbólicamente;
- ➢ sintetizaron la información y produjeron infografías;
- ➢ comunicaron al resto del curso el trabajo producido y expusieron lo sintetizado en la infografía;
- ➢ respondieron preguntas de sus compañeros o las docentes acercas de las ideas matemáticas trabajadas.

3.3. Abordaje y resolución de situaciones problemáticas

En diferencia con la capacidad trabajada anteriormente, ésta suele ser considerada exclusiva del espacio curricular Matemática y se suele considerar que se basa en la resolución de ejercicios (Fascículo 8, p.11). Por lo cual, es más factible aceptar en primera instancia que esta capacidad es desarrollada mediante el PMM, ya que se basó en dar respuesta a un problema que los mismos estudiantes se plantearon.

Cabe aclarar que los problemas “se presentan en todas las áreas de conocimiento cuando enfrentamos a nuestros estudiantes a situaciones amplias, mal definidas, que requieren investigación previa y sobre las que no se sabe de antemano qué información o datos hay que conseguir” (Fascículo 8, p.11).

En este sentido, cabe preguntarse si efectivamente la actividad del PMM para los estudiantes fue una situación problemática. Sin embargo, si tenemos en cuenta que el PMM fue con temática abierta, la cual los mismos estudiantes definieron, fue desarrollado en un escenario de investigación, y requirió el uso de un modelo matemático para dar respuesta a la pregunta planteada, se puede decir que efectivamente fue una situación problemática y es una actividad que promueve el desarrollo de esta capacidad.

Algunos grupos no lograron dar respuesta a la pregunta planteada en sus PMM, otros si, pero no lograron producir un modelo. Cabe preguntarse entonces si efectivamente la actividad del PMM promovió en estos estudiantes el desarrollo de la capacidad de abordaje y resolución de problemas.

En este sentido, se debe pensar que no es estrictamente necesario que los grupos terminen de resolver el problema en forma completa para que se promueva el desarrollo de esta capacidad. Aún cuando no hayan sido capaces de sortear los obstáculos impuestos, el hecho de cómo sus compañeros llevaron adelantes sus procesos, promueve la discusión de ideas matemáticas que pueden resultar como alternativas útiles para enfrentarse a nuevas situaciones problemáticas en el futuro (Fascículo 2, p.9).

Por lo tanto, se puede extender la afirmación hacia todos los grupos bajo la justificación de los debates producidos al realizar las presentaciones de los grupos.

3.4. Trabajo en colaboración para aprender a relacionarse e interactuar

Si bien podría pensarse, en una primera instancia que la configuración grupal en la que se desarrollaron los PMM promueve el desarrollo de esta capacidad, se debe tener en cuenta que el trabajo en colaboración no se circunscribe al mero trabajo grupal, sino que además. *"Se trata de enseñar a negociar, a coordinar, a liderar, a tomar decisiones democráticas, a aprovechar las fortalezas de cada uno cuando el desafío tiene una magnitud que requiere ser abordado en equipo" (*Fascículo 11, p. 11*).*
Se afirma que se colabora con el desarrollo de ésta capacidad si se le propone a los estudiantes actividades para que:

- aprendan a negociar una postura compartida;
- creen y acepten reglas de colaboración;
- desarrollen su capacidad de enfrentar un conflicto y argumentar su posición; entre otras. (Fascículo 8, p.9)

Para comprender el trabajo en colaboración en la disciplina de matemática, es necesario pensar a la actividad matemática como actividad social, ya que "el estudiante no construye el conocimiento solo, sino en interacción con otros" (Fascículo 4, p.4).

Desde este punto de vista "es fundamental el trabajo grupal, el análisis de las producciones de los compañeros y además escuchar las objeciones de los demás y del docente" (Fascículo 4, p.4). Por ende, el trabajo colaborativo en clase de matemática no se reduce a la interacción entre pares sino que también involucra atender y recuperar observaciones del docente.

Teniendo en cuenta entonces la producción matemática con el otro como actividad que colabora con esta capacidad, es de interés remitirse al momento de la presentaciones orales de los problemas planteados, ya que en ellas se produjeron debates entre los estudiantes de los diferentes grupos que llevaron, en la mayoría de los casos a modificar la propuesta realizada en función de las sugerencias recibidas o las conclusiones obtenidas.

Además, es interesante destacar:

- las negociaciones intra grupo que se realizaron para llegar a acuerdos a la hora de tomar decisiones en relación a diferentes aspectos del trabajo;
- la distribución de tareas entre los miembros del grupo sin que esto sea equivalente a desligarse del entendimiento global del problema que están tratando;
- la incorporación de las sugerencias realizadas por las docentes a sus producciones;
- la necesidad de construir argumentos para sostener una idea o defender una postura tanto en el intercambio con otros miembros del grupo, de la clase o con la docente, etc.

Teniendo en cuenta todas estas acciones, se puede afirmar entonces, que el trabajo con el proyecto de modelización fomentó el desarrollo del aprendizaje del trabajo en colaboración para aprender a relacionarse e interactuar.

3.5. Desarrollo del pensamiento crítico y creativo

3.5.1. Desde la enseñanza

Con respecto al rol como docente para el desarrollo de esta capacidad es indispensable tener en cuenta que el pensamiento crítico y creativo es una capacidad presente potencialmente en todos los estudiantes, y que necesita ayuda para convertirse en acto, por lo que requiere una tarea intensa por parte de la escuela y docentes (Fascículo 2, p.10). ¿Qué implica esto en la tarea docente?

> "(...) implica replantearse el modo de transmitir conocimientos, de presentar los problemas, de dar acceso a las fuentes de información y opinión, de ofrecer espacios para la pregunta y el diálogo, de propiciar el pensar en voz alta y la producción escrita." (Fascículo 2, p.10)

Para poder llevar a cabo esta línea como docente, es necesario llevar adelante una gestiones de clases y una práctica docente con determinadas características. Se establece como necesario:

- ➢ Abandonar las prácticas tradicionales donde el docente ejerce el control sobre los tiempos y los contenidos, como así también sobre las palabras del estudiantes, generando en ellos la capacidad de decir lo que se supone que el docente espera que se diga (Fascículo 2, p. 10).
- ➢ Habilitar la palabra a los estudiantes incentivándolos a hacerse cargo de la resolución, lo que involucra que estos controlen su producción para asegurarse que tanto su respuesta como el procedimiento utilizado para obtenerla son válidos (Fascículo 4, p. 3).
- ➢ Exigir que los estudiantes fundamenten los procedimientos utilizados. Poner en práctica la validación matemática (Fascículo 10, p. 6).
- ➢ Fomentar el intercambio entre los estudiantes invitándolos a que reflexionen sobre y realicen observaciones sobre las producciones de sus compañeros en lugar de quedarse a la espera de la palabra del docente que le comente si lo que ha producido está bien o mal (Fascículo 4, p. 3).
- ➢ Dar lugar a la confrontación de afirmaciones presentadas por los estudiantes o la docente, defendiendo los puntos de vista propios, considerando los de otros y aceptando los errores como parte del aprendizaje (Fascículo 4, p. 3).

Con respecto a las características que tiene que tener una propuesta áulica para fomentar el desarrollo de esta capacidad en nuestras planificaciones debemos prever:

- ➢ "oportunidades para que elijan actividades, haciendo elecciones apropiadas dentro de un amplio espectro, (...) oportunidades para que imaginen lo que quieren hacer, para jugar con sus ideas, compartirlas y reflexionar con otros sobre ellas;
- ➢ situaciones de aprendizaje que susciten la necesidad de encontrar respuestas y que no demanden soluciones únicas o estereotipadas;
- ➢ estrategias para generar un clima de trabajo saludable, (...) que promuevan la espontaneidad, el pensamiento divergente y la originalidad;
- ➢ actividades que los motiven a expresar su propia individualidad, a salirse de la homogeneidad y las rutinas, a inventar y crear" (Fascículo 2, p. 10-11).

Repensando la propuesta didáctica de llevar a cabo PMM bajo estos ítems como categorías de análisis, se puede considerar que:

- ➢ se les dió a los estudiantes la oportunidad de elegir la actividad al proponerles que elijan el tema y el problema a tratar;
- ➢ el problema que debían resolver no tenía respuesta única ni estereotipada, tanto el problema de plantearse una pregunta, como el problema de la resolución de dicha pregunta en sí;
- ➢ se cree que el clima de trabajo era ameno ya que se desarrollaron las clases de este proyecto en el laboratorio donde las mesas de trabajo son propicias para el trabajo grupal, donde se habilitó el uso libre de tablets y celulares para la búsqueda de información y se permitió el intercambio entre los grupos.

Analizando la gestión de clase bajo los ítems planteados, se puede considerar que:

- ➢ los estudiantes tuvieron una voz activa ya que además de poder elegir el tema y el problema, pudieron avanzar con el proyecto clase a clase de manera autónoma y creativa. Si bien se realizaron sugerencias, que los grupos debían considerar, el avance de los PMM se ajustó a las preferencias y propuestas de los estudiantes, siendo ellos los responsables de decidir cómo debían seguir sus producciones.
- ➢ Durante las exposiciones de los problemas planteados y de las infografías producidas, se fomentó el intercambio entre estudiantes con respecto al trabajo matemática realizado en cada uno de los grupos y se dio lugar a las confrontaciones y a la defensa de los diferentes puntos de vistas. En esta instancia, se motivó también la consideración y/o aceptación de sugerencias recibidas de los pares las docentes.
- ➢ Durante el proceso del PMM, y en particular, en las exposiciones orales, se realizaron intervenciones tanto por los pares como por las docentes a los estudiantes expositores requiriendo la fundamentación de los procedimientos.

Por ende, analizando el recorte bibliográfico y la práctica realizada, se puede afirmar que, la propuesta áulica y las decisiones tomadas acerca de la gestión de clase, generaron un ambiente propicio para el desarrollo del pensamiento crítico y creativo de los estudiantes.

3.5.2. Desde el aprendizaje

En esta instancia se pretende mostrar evidencia de la presencia y desarrollo de pensamiento crítico y creativo en las producciones de los estudiantes. Se analizará en estas producciones que entienden los estudiantes por “problema de la realidad” en el contexto de la asignatura matemática, y cómo cambia esto a lo largo del desarrollo del PMM. Además se analizará la capacidad que generaron, luego del desarrollo del PMM, de criticar o consultar acerca del desarrollos de proyectos de modelización de los compañeros.

Las producciones que se analizarán serán las formulaciones iniciales de los problemas planteados por los diferentes grupos, los cambios en dichas formulaciones, y las presentaciones orales realizadas una vez concluidos los PMM.

3.5.2.1. Formulación de problemas

Como se mencionó en la sección 2.6.2, el planteo de los problemas de modelización realizado por los grupos presentó varias dificultades con respecto a diferentes aspectos. Se retoma a continuación la caracterización realizada, ilustrando con el trabajo de los estudiantes, en las cuales se trata de analizar, bajo la evidencia presentada, qué entienden los estudiantes por problema.

- <u>En cuanto al tipo de referencia</u>: Les costó salir del marco de la semi-realidad para trabajar con un problema de la realidad. En la *Imagen 74* se puede observar el problema planteado por el grupo AGL, el cual, si bien proponen un mecanismo que podría construirse de manera real, es un problema que no tiene un interés basado en la realidad.

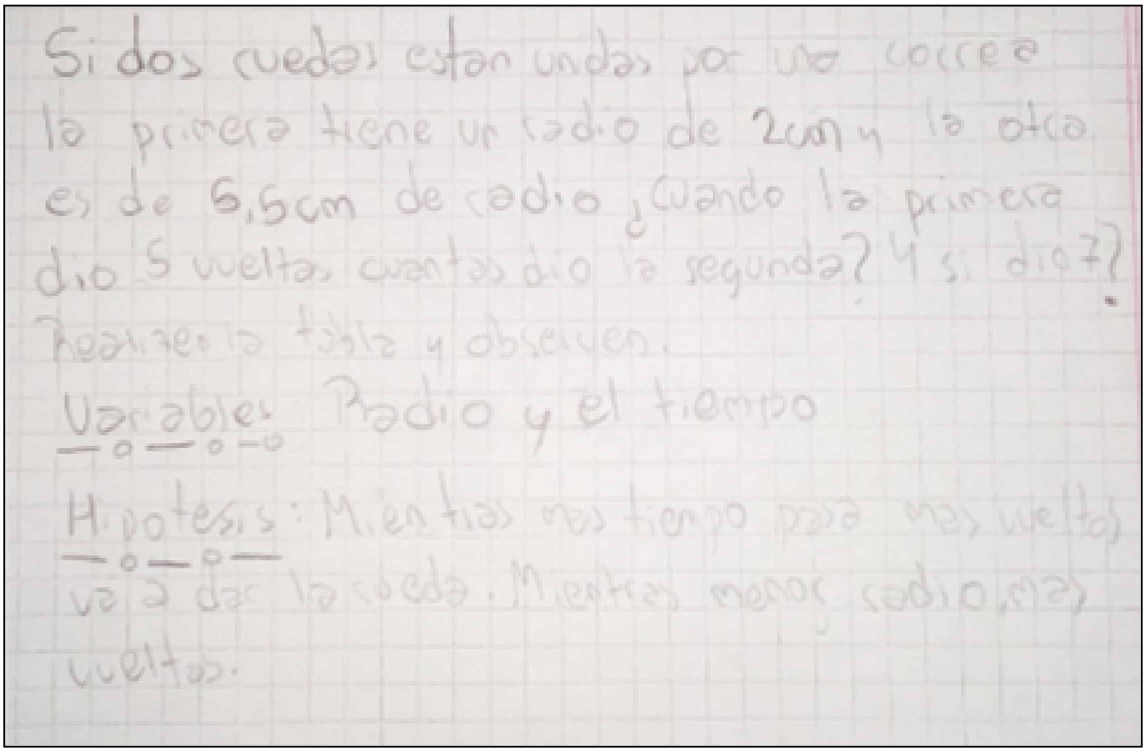

Si dos ruedas estan unidas por una correa la primera tiene un radio de 2cm y la otra es de 5,5cm de radio ¿Cuando la primera dio 5 vueltas cuantas dio la segunda? Y si dio 7? Realizen la tabla y observen.
Variables: Radio y el tiempo
Hipotesis: Mientras mas tiempo pasa mas vueltas va a dar la rueda. Mientras menor radio, mas vueltas.

Imagen 74 - Primer problema planteado por el grupo PAM.

- <u>En cuanto a la resolución:</u> En una clase que estaba destinada exclusivamente a la formulación de los problemas, se observa que varios grupos lo resuelve rápidamente utilizando la metodología trabajada en los laboratorios: identificando primero las variables y luego planteando una hipótesis acerca del crecimiento o decrecimiento de la relación. Se observa esto en las *Imágenes 74*, *75* y *76.* Esto da pie a pensar que, para ellos, un problema debe tener un único abordaje de resolución, debe aplicarse directamente a partir de los datos del enunciado, y debe relacionarse con lo visto en clase.

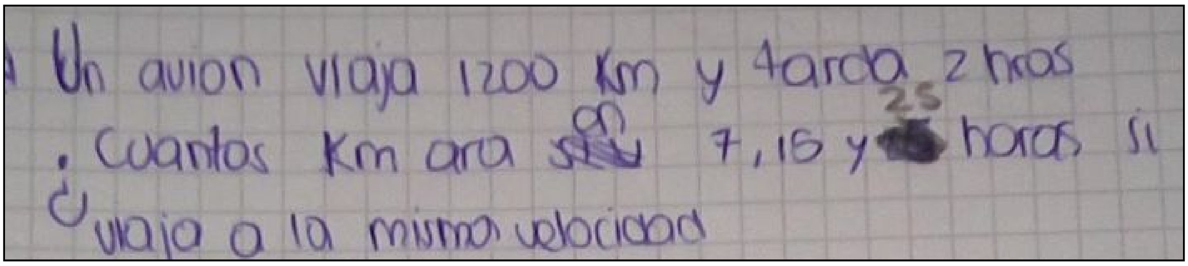


Imagen 75 - Primer problema planteado por el grupo JJR.

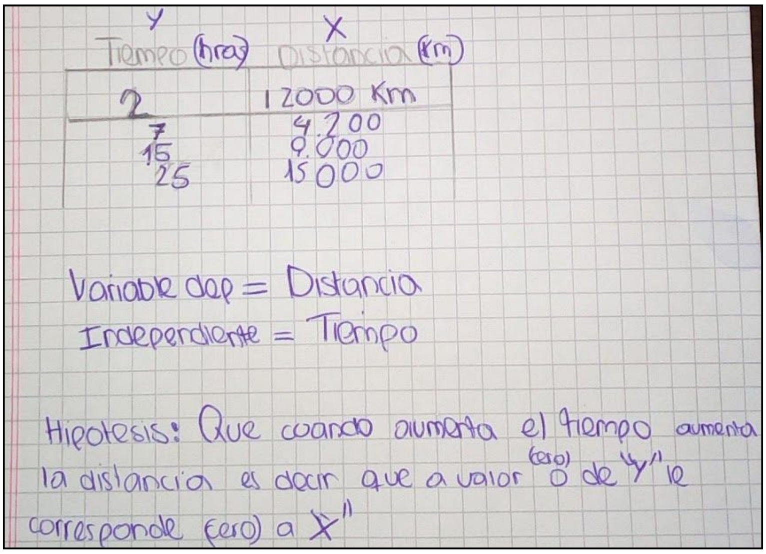


Imagen 76 - Comienzo de resolución del primer problema planteado por el grupo JJR.

➢ <u>En cuanto al modelo utilizado:</u> Algunos grupos querían que el tema a abordar se pudiera modelizar con un modelo de proporcionalidad directa. Observamos un ejemplo de esto en la *Imagen 75*, además de ser un ejemplo también del apego a la semi-realidad. Particularmente cuando se sugirió a este grupo buscar un problema más real, plantearon que si lo hacía no podrían encontrar la constante y “hacer lo de proporcionalidad directa”. Creemos que como era lo último que habían estudiado, ellos consideraban que debía ser usado.
Se observa además en la *Imagen 76* la solución de este problema, realizada inmediatamente después del planteo del mismo, lo cual se corresponde con lo planteado en la característica anterior.
Otros ejemplos en los que los estudiantes se apegaron a algo que ya habían estudiado son: por un lado, el grupo “Amigazu” que querían utilizar un modelo de proporcionalidad inversa analizando el tiempo que lleva la construcción de una pared en función de la cantidad de albañiles que participan; por otro, el “Grupo Bomba” que plantearon un problema experimental, imitando lo trabajado con el resorte; por último, el grupo “Trío Dinámico” el cual trabajó con una temática relacionada con enfermedades, siguiendo el caso del ébola planteado en la clase de repaso (ejemplo de esto último en *Imagen 77*).

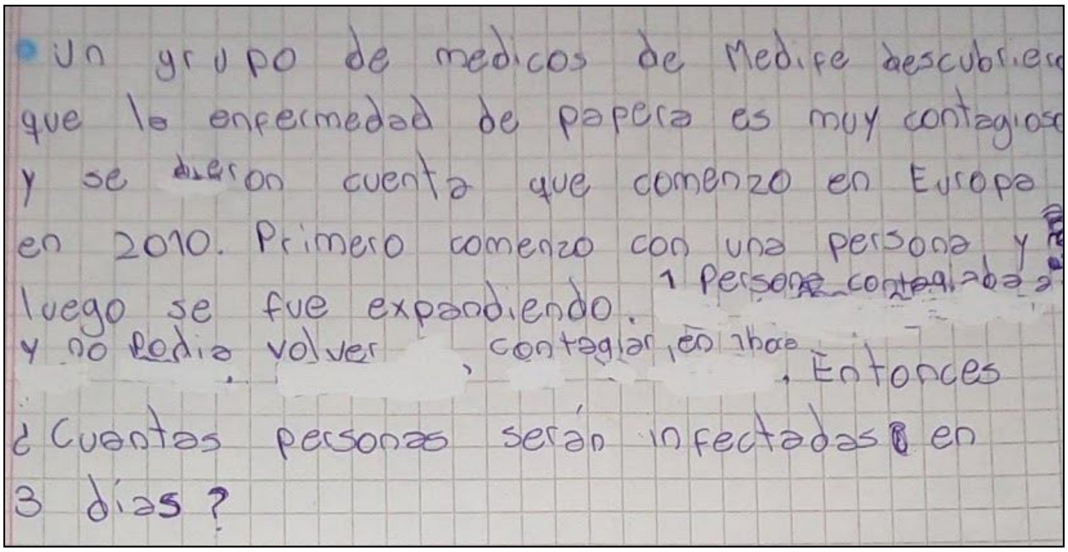

Un grupo de medicos de Medife descubrie
que la enfermedad de papera es muy contagiosa
y se dieron cuenta que comenzo en Europa
en 2010. Primero comenzo con una persona y
luego se fue expandiendo. 1 persona contagiaba a
y no podia volver , contagiar, en 1hora
. Entonces
¿Cuantas personas serán infectadas en
3 días?

Imagen 77- Problema planteado por el grupo Trío Dinámico en la primera clase

- <u>En cuanto a la redacción:</u>

  Algunas formulaciones tomaban la estructura de ejercicios. Notamos por ejemplo en la *Imagen 74* un segundo interrogante el cual repite la pregunta del primer interrogante pero cambiando el valor numérico, por lo que no brinda una respuesta de interés, sino un desempeño en la capacidad de encontrar una solución algorítmica que permita dar varias respuesta para la misma pregunta pero con distintos valores. Lo mismo se puede observar en la Imagen 75 donde se pide un mismo tipo respuesta para tres valores distintos.

  Se puede observar la tercera entrega del grupo AGL donde, si bien modificaron la referencia a un caso concreto de la realidad, el modo de redacción persiste con la estructura de ejercicios. Se evidencia también una repetición de la misma pregunta pero variando el valor numérico, y además, se plantean como parte del problema *"Realizen una tabla y un gráfico".* Esto último muestra que para ellos, un problema es alguna instrucción formulada por un tercero, simulando las actividades tradicionales en las que el docente indica a los estudiantes la tarea a realizar (Ver *Imagen 78*).

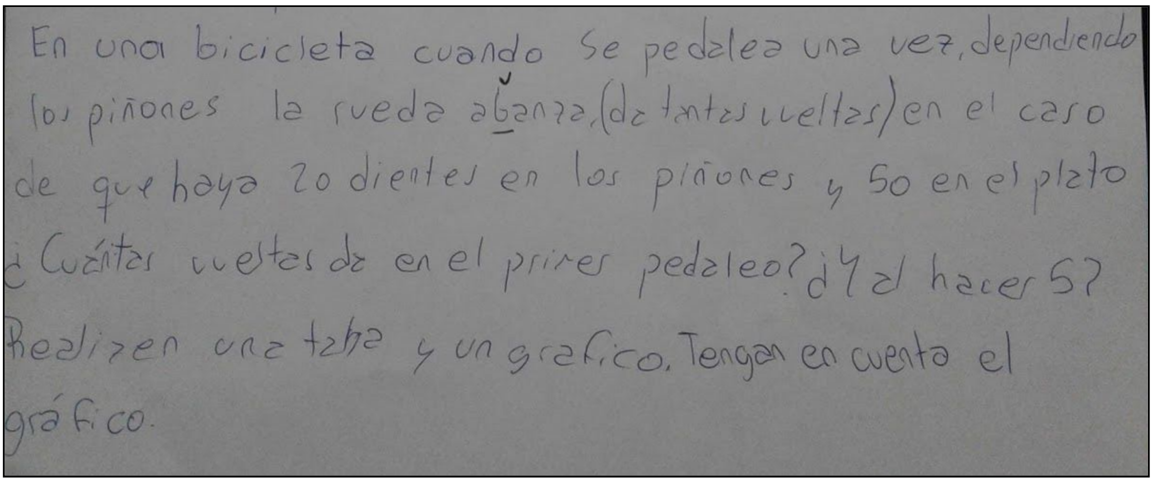
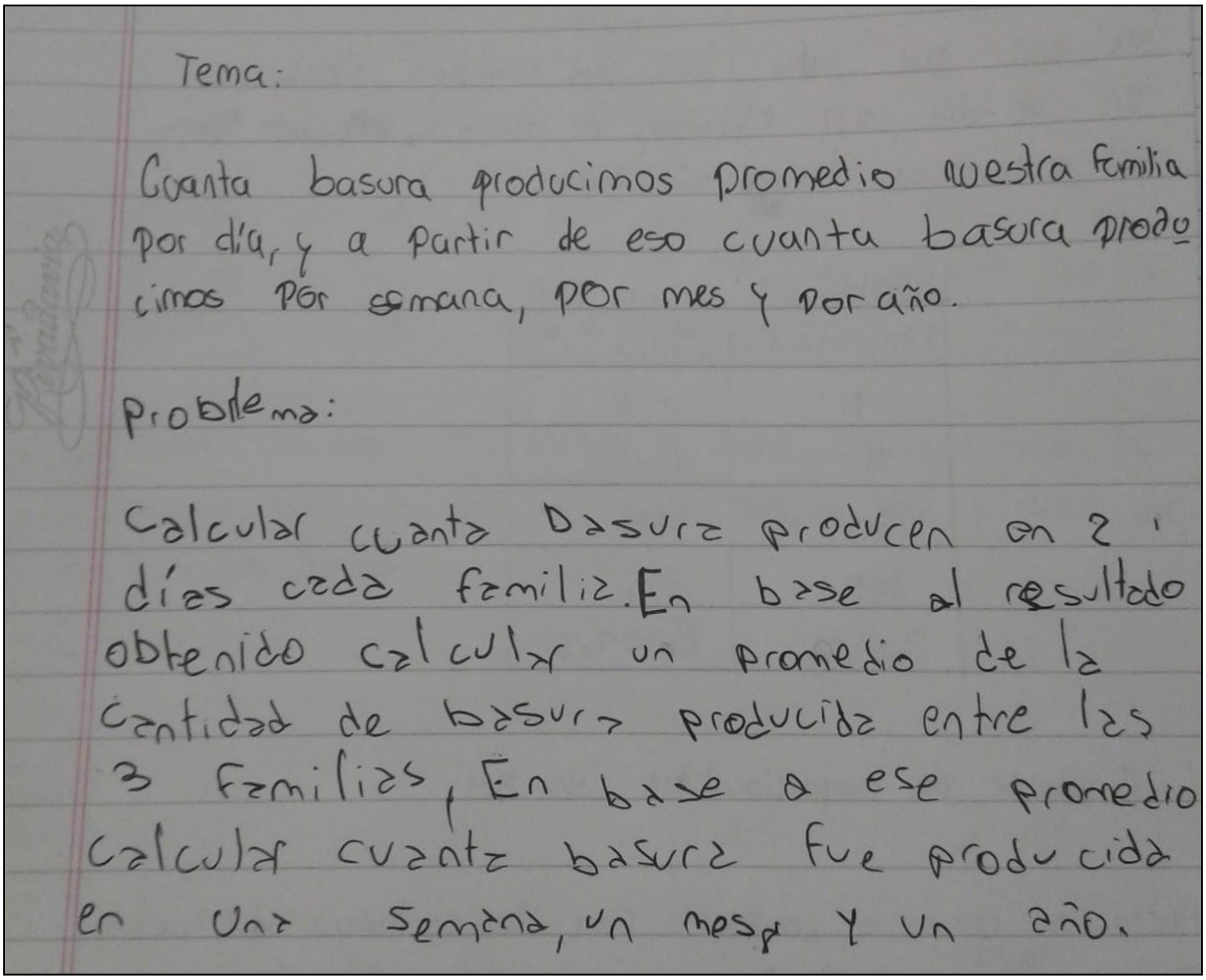

En una bicicleta cuando se pedalea una vez, dependiendo
los piñones la rueda abanza, (da tantas vueltas) en el caso
de que haya 20 dientes en los piñones y 50 en el plato
¿Cuántas vueltas da en el primer pedaleo? ¿Y al hacer 5?
Realizen una tabla y un grafico. Tengan en cuenta el
gráfico.

Imagen 78 - Problema planteado por el grupo PAM en la tercer clase.

El grupo "El Combo Dinamita" presenta ciertas dificultades para identificar y distinguir tema y problema. El problema aparece bajo el título "Tema" (Ver *Imagen 79*). Y cuando deben redactar el problema, lo plantean de manera instructiva, cambiando la pregunta de “¿Cuánta basura producimos … ?” por “Calcular cuánta basura fue producida ...”. Se evidencia, además del carácter instructivo, la noción de que un problema debe ser algo que se debe poder calcular y resolver de manera directa y única a partir del enunciado, no dando lugar a que un problema sea una pregunta de investigación abierta como la que se planteó en el tema.

Es interesante recordar que el estilo de clases de matemática a la que estos estudiantes están acostumbrados está lejos de ser un abordaje tradicional. Sin embargo, es posible que durante sus trayectos escolares en otros espacios curriculares y en otros años con otros docentes haya operado esta lógica más clásica. Por lo tanto, parte de la tarea de enseñanza durante el desarrollo de los PMM se centró en desmontar sus mecanismos.


Tema:

Cuanta basura producimos promedio nuestra familia por día, y a partir de eso cuanta basura producimos por semana, por mes y por año.

Problema:

Calcular cuanta basura producen en 2 días cada familia. En base al resultado obtenido calcular un promedio de la cantidad de basura producida entre las 3 familias, En base a ese promedio calcular cuanta basura fue producida en una semana, un mes, y un año.

Imagen 79 - Problema planteado por el grupo Trío Dinamita.

- <u>En</u> <u>cuanto</u> <u>al</u> <u>contenido:</u> Muchos grupos incluyeron la metodología que iban a utilizar dentro del problema. Una hipótesis para esto sería que ellos necesitan que todos los supuestos e información necesaria para la resolución esté incluída en el enunciado para poder resolver un problema. Un ejemplo claro de esto es lo planteado por el grupo Trío Dinamita en la *Imagen 79*.

  El grupo Trío dinámico que se proponía estudiar el contagio de paperas (ver *Imagen*

77) formuló inicialmente un problema que incluía todas las condiciones necesarias que se deben conocer para dar respuesta al problema.

La sugerencia realizada a este grupo fue dirigida a evitar hacer supuestos, averiguar sobre la enfermedad y sus modos de contagios. A partir de estos datos, podrían pensar, si ellos tuvieran paperas, cuáles de las acciones que realizan en la cotidianidad contagiarían a otras personas, y a partir de esto, estimar a cuántas contagiarían.

En respuesta a esto, en la tercera clase, realizaron una entrega en la que se observa que, si bien hay avances con respecto a la información sobre los modos de contagios y realizan supuestos sobre su vida cotidiana, estos datos se incorporan en la formulación del problema (Ver *Imagen 80*). Por lo que persiste la lógica de incluir toda la información necesaria para resolverlo.

Además, creemos que está producción podrían estar ofreciendo evidencia en torno a lo que para ellos significa la respuesta a un problema. Esta producción muestra que la respuesta debe ser una resolución algorítmica que surja a partir de la información del enunciado, y, que la búsqueda de información y realización de supuestos no forman parte de la resolución de un problema.

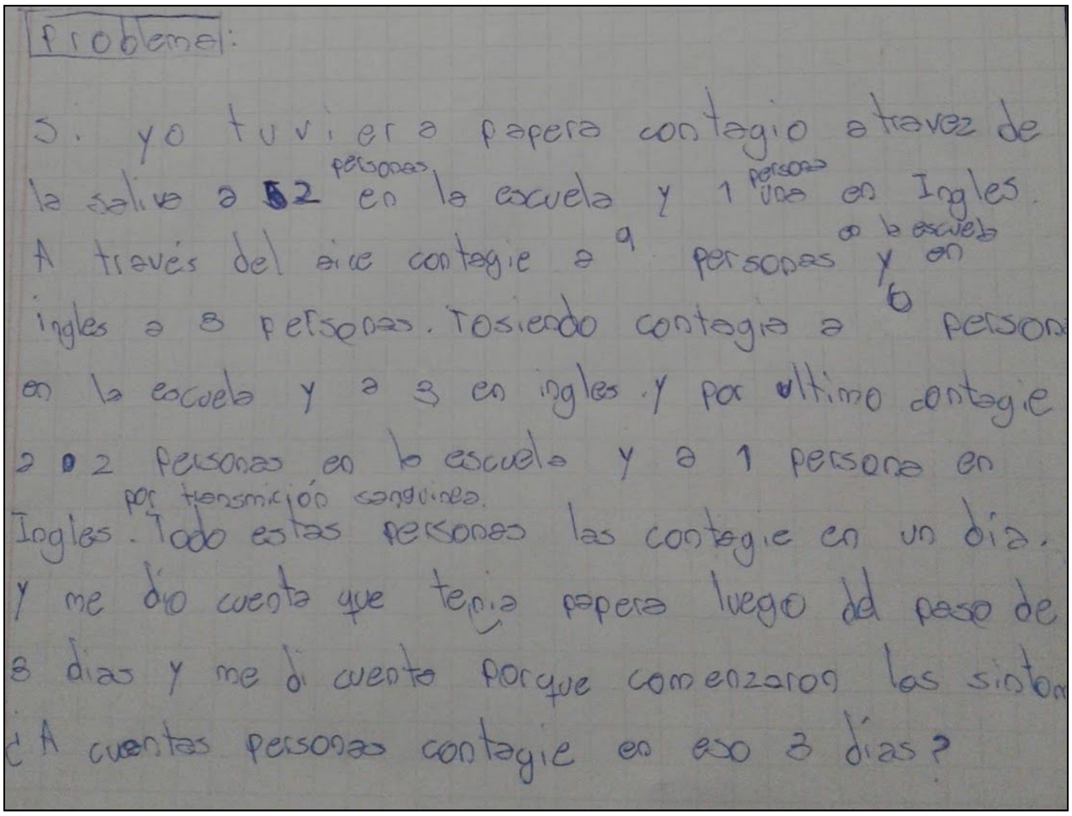

Problema:
Si yo tuviera papera contagio a traves de la saliva a 2 personas en la escuela y 1 persona una en Ingles. A través del aire contagie a 9 personas en la escuela y en ingles a 8 personas. Tosiendo contagia a 6 personas en la escuela y a 3 en ingles. y por ultimo contagie a 2 personas en la escuela y a 1 persona en Ingles por transmición sanguinea. Todo estas personas las contagie en un dia. y me dio cuenta que tenia papera luego del paso de 3 dias y me di cuenta porque comenzaron los sintom
¿A cuentas personas contagie en eso 3 dias?

Imagen 80 - Problema planteado por el grupo Trío Dinámico en la tercera clase.

A partir de este primer análisis, donde se consideran las producciones escritas de los estudiantes correspondientes a diferentes momentos y estados de avance de los PMM, creemos que en las formulaciones iniciales los alumnos tienden a considerar que un problema matemático dentro de la asignatura matemática tiene que:

- ser de semi-realidad;
- tener toda la información necesaria dentro del enunciado;

- ➔ relacionarse con un tema tratado recientemente;
- ➔ ser instructivo, con pregunta cerrada;
- ➔ resolverse de manera única, con un mecanismo que se aplique de manera directa sobre la información dada;
- ➔ si hay más de una pregunta, las nuevas preguntas no constituyen necesariamente nuevas indagaciones en términos investigativos, sino que se puede resolver de la misma forma, aplicando los mismos mecanismos, pero cambiando el valor numérico;
- ➔ tener resolución fácil, directa y algorítmica a partir de la información disponible en el enunciado. No se considera la realización de supuestos ni la búsqueda de información como parte de una solución.

Se puede ver que esta caracterización se relaciona con la descripción de problema dentro de las prácticas tradicionales en matemática, realizada por García Hipólito (2011), ya que plantea en cuanto al contenido y conocimientos involucrados, que:

> Los problemas se han utilizado en la escuela para que los alumnos apliquen los conocimientos que se les han enseñado previamente.
> (...)los contenidos se han trabajado de manera aislada, es decir, fuera de un contexto que le permita al alumno descubrir su significado, sentido y funcionalidad. (p. 57)

Y en cuanto al modo de resolución de los problemas en las prácticas tradicionales, plantea que:

> Se les dice cómo resolverlos o se les propone problemas modelos en los que deben aplicar conocimiento que se le ha enseñado previamente. Es decir, no se estimula la búsqueda personal y la creación de procedimientos propios. (p. 57)

Considerar que un problema debe tener estas características limita la capacidad de poder estudiar y analizar de manera crítica un problema de la vida real mediante la construcción de un modelo matemático.

3.5.2.2. Avances en la concepción de problema y resolución

Si bien a lo largo de las clases los grupos avanzaron en sus trabajos, las dificultades en la concepción de cómo es el enunciado, y por ende, cómo se formula y resuelve un problema, se mantuvieron.

Un ejemplo de evidencia de avance en la resolución fue el caso del grupo PAM. Este grupo pasó de un problema que trabaja con dos ruedas abstractas (*Imagen 74*) a trabajar con las ruedas de la bicicleta (*Imagen 78*), en donde dejaron el contexto de semi-realidad y el trabajo con un ente genérico, para pasar a uno de realidad y de un objeto específico, para el cual tiene sentido buscar una respuesta. Concluyen al final del trabajo con un nivel de especificidad alto para dar una respuesta concreta (una rueda de rodado 26). Estos cambios de la semi-realidad a la realidad, y de lo genérico a lo específico se observaron también en otro grupos.

Al igual que se observó con el grupo “Trío Dinámico” con el estudio de las paperas, en otros grupos, también se notó que a medida que los grupos avanzaban con la matematización, la selección de variables, y construcción de supuestos, en sus PMM, fueron incorporando esta información dentro de los enunciados (Trío dinámico: *Imagen 80*).

El grupo AGL estudió sobre las naves Apolo que envió EEUU a la luna. El grupo realizó reformulaciones del problema en base a la información disponible. En su primer planteo de problema tenían muchas variables en juego, conocían poco del tema y no estaba completamente claras las preguntas a responder (*Imagen 81*). Luego, en la búsqueda de información, conocieron más sobre el tema, notaron que no había datos de todas las variables para todas las naves, por lo que reformularon el problema en términos de los datos hallados (*Imagen 82*). Este grupo en particular si pudo readaptar el enunciado del problema en base a la investigación, sin cambiar la estructura propia de un problema, de hecho, mejorando su primera versión.

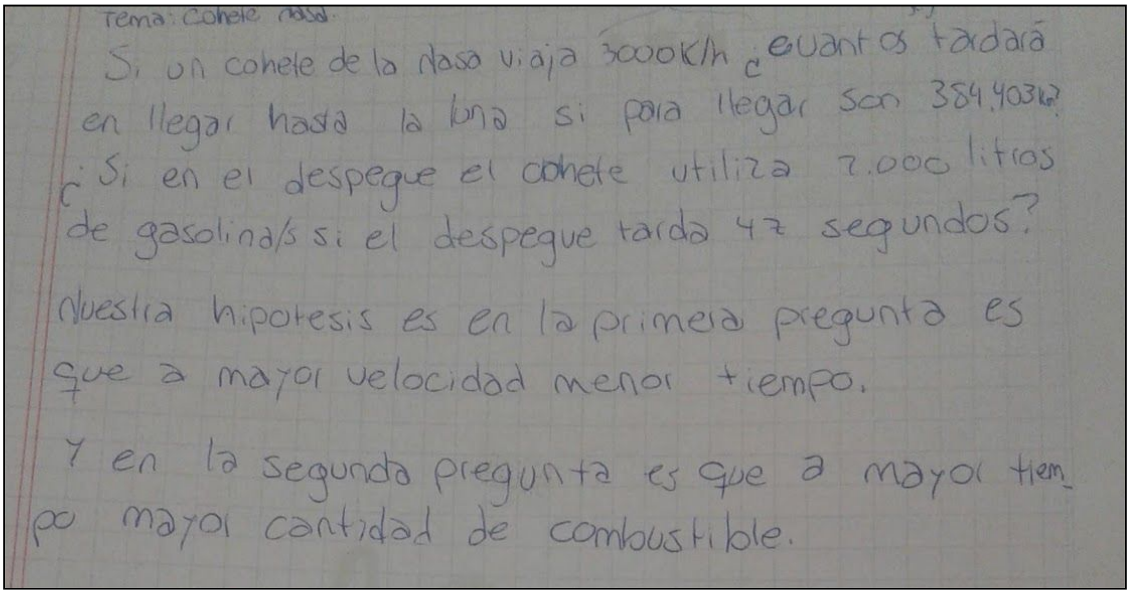

Tema: Cohete nasa.
Si un cohete de la Nasa viaja 3000K/h ¿cuantos tardará en llegar hasta la luna si para llegar son 384.403km?
¿Si en el despegue el cohete utiliza 7.000 litros de gasolina/s si el despegue tarda 47 segundos?
Nuestra hipotesis es en la primera pregunta es que a mayor velocidad menor tiempo.
Y en la segunda pregunta es que a mayor tiempo mayor cantidad de combustible.

Imagen 81 - Primer problema planteado por el grupo AGL.

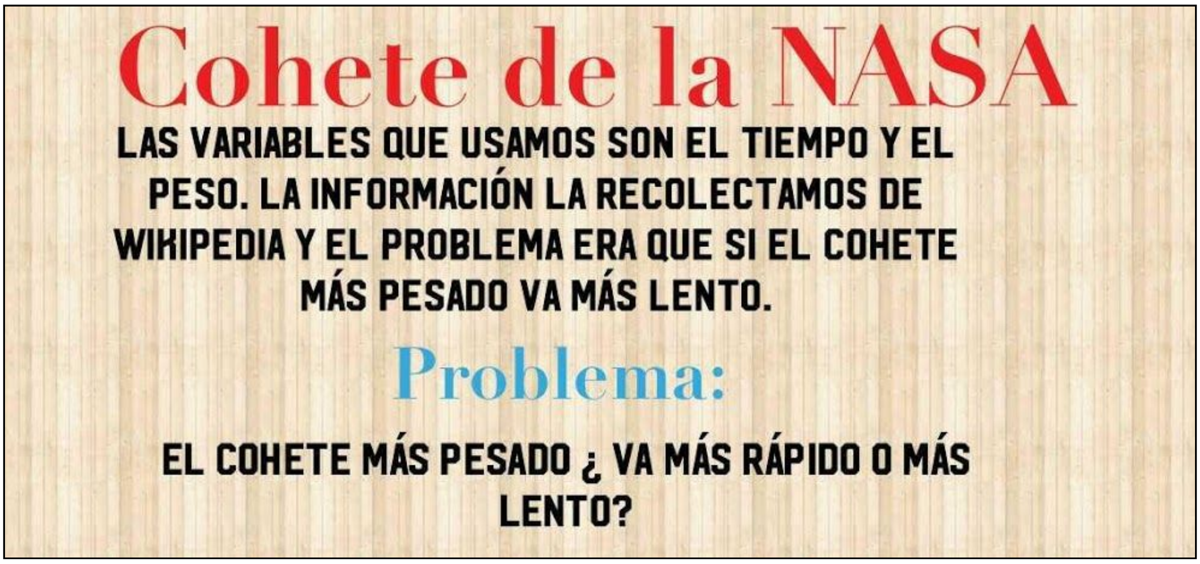


Imagen 82 - Problema planteado por el grupo AGL en la infografía.

Por último, otro cambio realizado fue el del grupo JJR. Este grupo abandonó la temática de los aviones (*Imagen 75*) para pasar a estudiar el auto de carreras Lamborgini Veneno (*Imagen 83*). Al realizarles sugerencias de moverse a un terreno real, por medio de información histórica y a tiempo real de vuelos aéreos, tuvieron dificultades para la simplificación de información, por lo cual decidieron cambiar la problemática. Estos obstáculos los llevó a perder el interés por la temática y a que surjan dificultades en ponerse de acuerdo entre los mismos integrantes, lo cual afectó al PMM ya que el interés en el tema a tratar en fundamental para el éxito del proyecto. Cabe destacar que la índole del problema nuevo, es similar al anterior, si bien aumenta en grado de realismo, incorporando datos extraídos de internet, se quiere mantener el modelo de proporcionalidad directa de fondo, y la posterior solución mecánica.

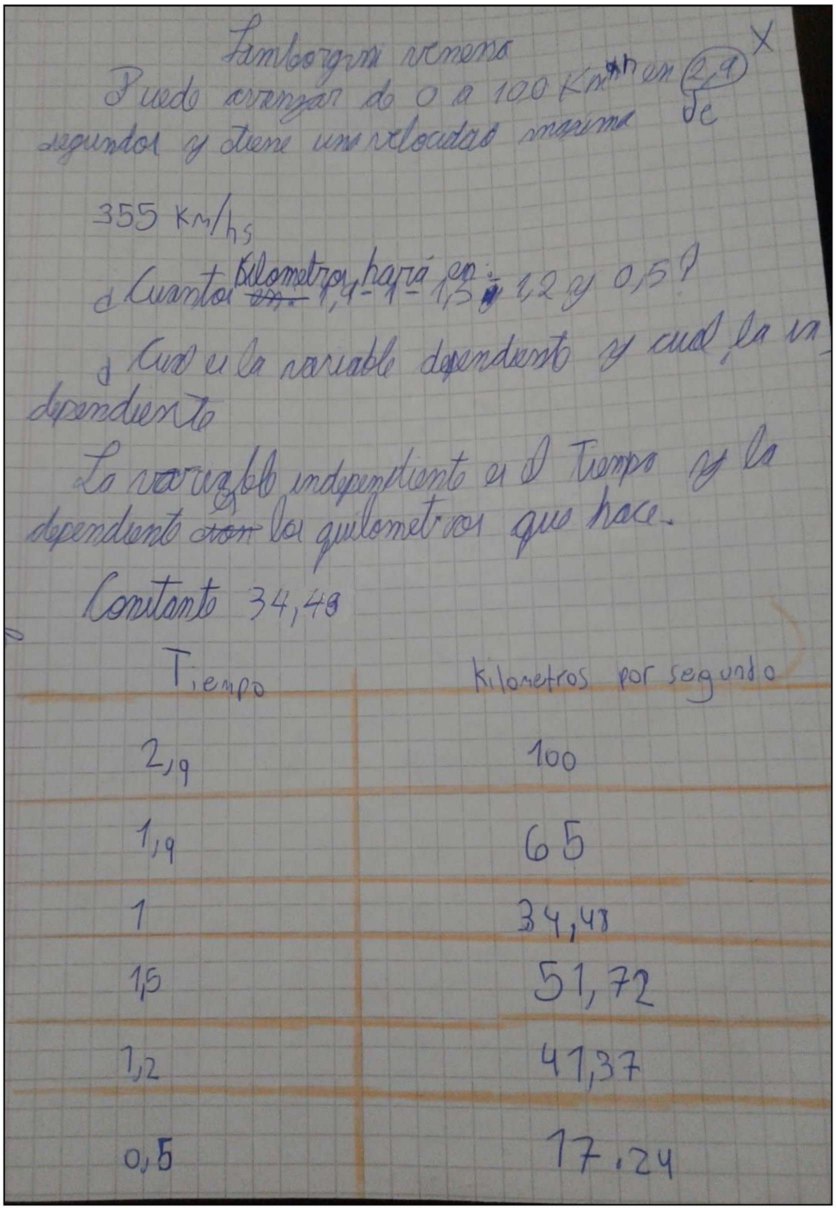


Imagen 83 - Cambio en el problema elegido del grupo JJR.

Resumiendo, se evidenciaron cambios en las ideas de los problemas planteados, aunque no se hayan visto siempre reflejados en la formulación escrita de la pregunta planteada como problema de investigación. Estos cambios fueron:

- ➔ reformular el problema en base a la información disponible (AGL);
- ➔ pasar de lo genérico a lo específico (PAM y Amigazu);
- ➔ pasar de la semi-realidad a la realidad (PAM, JJR y Trío de oro);
- ➔ realizar de supuestos (Trío dinámico, Los genios de las relaciones entre variables, Los anónimos);
- ➔ cambiar por completo la temática por dificultad en la simplificación de la información disponible (JJR).

3.5.2.3. Presentación de infografías y exposiciones orales

En la presentación de las infografías se evidenciaron de manera más contundente los avances de los diferentes grupos con respecto al corrimiento de la semi-realidad a la realidad, mencionados anteriormente cuando aludimos a los cambios progresivos que fueron realizando en torno a la formulación del problema y su abordaje.

En las presentaciones orales se observó una actitud activa por parte del grupo de clase, el cual realizó críticas o consultas a los grupos expositores en relación a la matematización de la realidad para su estudio y los recortes que esta simplificación del problema involucró. En estas intervenciones los estudiantes cuestionaron la verosimilitud de los supuestos realizados, indagaron cuáles eran estos supuestos, consultaron acerca de las decisiones tomadas en torno a la elección de variables, etc.

Citamos a continuación intervenciones de este tipo, las cuales son extraídas de desgrabaciones de las clases:

1) El grupo “Amigas” presentó un presupuesto de construcción para una habitación, pero no quedó claro en la exposición cómo era dicha habitación y el costo de qué parte habían estimado. Los compañeros preguntaron:
    a) “El cuarto, ¿Tiene puerta?”
    b) “¿Ustedes no calcularon el presupuesto para cuatro paredes? ¿Sólo calcularon para una?”
2) El grupo “JJR” presentó un trabajo basado en el auto de carrera Lamborghini Veneno. Estimaron cuánto tiempo tardaría en realizar una vuelta en una determinada pista de carrera. Los compañeros preguntaron:
    a) “Una pregunta, la velocidad que uds. tienen es cuando corre solo, sin otros competidores, y con competidores, ¿Disminuiría la velocidad?”
    b) “Pero ustedes están suponiendo que va siempre a la misma velocidad”
    c) “Pero en las curvas debería reducir la velocidad”
    d) “¿La marcha no influye?”
    e) “¿Es un auto de carrera o un auto común?” “La marcha no es automática entonces”
    f) “Ustedes están pensando que de la nada el auto arranca y ya va a esa velocidad, en cambio, para calcular eso deberíamos hacer que el auto ya va andando y pasa una línea y ahí empieza a andar con toda”

3) El grupo “Trío Dinamita” presentó el problema sobre la recolección de basura, y dijeron “Calculamos el promedio de basura que producimos en nuestra familia y nos dio 2,3”. Los compañeros consultaron:
    a) “¿2,3 qué?”
    b) “¿Todas las familias?”
4) El grupo “PAM” presentó el problema de la bicicleta. Los compañeros consultaron:
    a) “¿Qué son los piñones?”
    b) “ Pero profe, ¿Y los cambios?”
    c) “¿Y cuánto avanza?”
    d) “¿Ahí estás suponiendo que apenas terminas de hacer la pedaleada frenas, o das una vuelta y ves cuánto avanzas en la pedaleada?”
    e) “Y hay que ver también del viento en contra o viento a favor. No si vas en bajada o subida, pero si vas recto, y hay viento, te cuesta hacer la vuelta”
5) El grupo “Trío de Oro” presentó un estudio acerca del consumo del papel:
    a) Cuando presentaron un dato, le consultaron: “¿De dónde sacaron la cantidad de papel?”
    b) Cuando propusieron aumentar el reciclado de papel como solución a la gran magnitud de consumo, un compañero no conocía el proceso de reciclado, y preguntó: “Osea, que en vez de utilizar lapicera, ¿Utilizaríamos lápiz, y borramos? ¿Y lo volvemos a utilizar?”
    c) Cuando terminó la presentación, un estudiante se planteó el rol de las papeleras: “Profe, yo sé que no es el caso, pero ponele que sea un empresa que vende papeles, ¿Cómo sería?”
6) El grupo Trío dinámico presentó un estudio acerca del contagio de las paperas:
    a) Cuando dieron una estimación de a cuántas personas ellos contagiaron si tuvieran paperas y realizan su rutina normalmente en el período de incubación, los compañeros les preguntaron: “¿Y esas personas cuánto contagiaron a las otras personas?”
    b) Luego de la presentación, los compañeros le consultaron acerca de la enfermedad: “¿Qué hace la papera?”

A partir de esta evidencia se puede afirmar que al momento de las exposiciones, el grupo de estudiantes comprendía que, para estudiar un pobre de la realidad, ellos debían:

- ➔ conocer el tema. (4.a, 6.b);
- ➔ buscar información para usar datos reales (3.a, 3.b, 5.a);
- ➔ tener en claro qué simplificaciones fueron realizadas, es decir, qué aspectos de esta realidad se tuvieron en cuenta y cuáles no (1.b, 2.c, 2.d, 4.b, 4.e, 6.a);
- ➔ tener claro cuáles eran los supuestos asumidos (1.b, 2.d);
- ➔ dar una respuesta (4.c);
- ➔ analizar las conclusiones alcanzadas y contemplar que el problema puede continuar trabajándose (5.c).

Los ejemplos citados son sólo las intervenciones realizadas espontáneamente por los estudiantes, no se tuvieron en cuenta las conclusiones a las que arribaron los mismos expositores, ni las conclusiones inducidas por las docentes. Sin embargo, es notable que, en resumen, para estudiar un problema de la realidad debieron realizar un proceso de modelización matemática. Esto último se puede observar en el párrafo anterior, ya que cada ítem destacado, es un paso del proceso del PMM.

Cabe aclarar que, como se puede ver, no se realizaron preguntas espontáneas en cuanto a los modelos, estás más bien fueron guiadas por las docentes, para ser discutidas con el grupo de clase. De la misma forma que las conclusiones finales acerca, por ejemplo, del impacto social de la basura, del reciclado del papel, o la utilidad de contar con un presupuesto. Los grupos expositores presentaron algunas conclusiones, las cuales se profundizaron y precisaron en la discusión a partir del aporte de nuevos argumentos. Los compañeros y las docentes apuntalaron el trabajo ofreciendo nuevas perspectivas y proyecciones de análisis.

Algo a destacar es que estos avances no se observan en igual medida en todos los grupos, y menos aún analizando sólo las entregas por escrito. Una hipótesis sobre la causa del desfase entre las comunicaciones orales y las producciones escritas, podría ser que la expresión oral, y la interacción con otros permite procesos dialécticos entre la realidad y su análisis crítico mediante modelos matemáticos. Se podría pensar también que el formato escrito, ya sea en versión papel o digital, está más ligado a las entregas formales que se realizan en la institución educativa, por lo que tiene otros permisos posibles por parte de los alumnos, y podrían sentirse más acotados en este sentido.

Vemos entonces que los estudiantes han logrado formular y resolver un problema, interpretando en esta instancia a la noción de problema que se plantea por las prioridades pedagógicas:

> Un problema debe plantearse a partir de una situación nueva o sorprendente para los estudiantes, de la cual deben conocer el punto de partida y a dónde deben llegar, pero desconocen un procedimiento directo para lograrlo. Es importante definir claramente cuál es el problema a investigar, por lo que se requerirá un planteo claro, y que los estudiantes sean guiados para su correcta definición y resolución; por ejemplo, a través de cuestionamientos, la realización de una experiencia o la lectura de materiales adecuados.
> Los problemas no necesariamente serán cuantitativos; de hecho, en este Ciclo (básico), en general, resultarán más adecuados los cualitativos. Tampoco debe esperarse una respuesta única a la situación; por el contrario, resultará enriquecedora la discusión sobre distintos puntos de vista que se plasmarán en diferentes respuestas y propuestas.
> Un buen problema debería no sólo posibilitar trabajar los contenidos propuestos, sino también generar nuevas preguntas que permitan continuar con el desarrollo de otros conocimientos. (Fascículo 6, p. 15)[15]

Se logró así, de manera grupal y por medio de debates, ampliar la noción de problema matemático de un tema real. Entendiendo problema de la realidad, en tanto pregunta que involucra el estudio de diferentes aspectos de esta realidad, la recolección de datos, la selección de variables y la construcción de un modelo matemático; y también un proceso de validación, al menos en término de interpretar el sentido de este modelo en relación a la situación de la realidad que lo originó.

Para lograr este avance tuvieron que realizar un proceso de modelización, el cual, los estudiantes incorporaron como proceso necesario y válido para estudiar un problema

[15] El subrayado es propio de la producción de este informe.

matemático de la vida real. Esto se observó en las exposiciones orales, en las cuales el grupo de clase solicitó a los grupos que exponían los diferentes pasos de este proceso.

3.5.2.4. Visión crítica en temáticas sociales

Para cerrar con el análisis de las producciones de los estudiantes, en el trabajo con PMM en las prácticas, es de interés notar los análisis críticos realizados acerca de los temas sociales que se trabajaron: producción de basura y consumo de papel. Análisis crítico tanto por parte de los grupos que eligieron los temas, como, por parte de la clase que prestó especial atención en estas problemáticas, realizando preguntas, analizando impactos y dejándose sorprender y movilizar con las discusiones.

Con respecto a la producción de basura

El grupo "Trío Dinamita" comparó la producción de basura de Córdoba a partir de datos de sus familias, con la producción de países desarrollado y subdesarrollado. Tanto en la infografía como en la presentación oral realizaron apreciaciones personales acerca de "la increíble" cantidad de basura que produce EEUU por mes (*Imagen 84*), la "mínima cantidad" que produce por día Ghana, y concluyen que "El mundo debería ser como Ghana" (*Imagen 85*). Esto dió pie a un debate con el grupo de clase en el que se expresó que EEUU está muy desarrollado, y se observó la influencia de las industrias y el consumismo en la producción de basura.

Se estableció que una familia de Ghana en un mes produce tanta basura como lo que genera una familia de Córdoba en un día. Los demás estudiantes, en general, se vieron muy atraídos por el tema.

Imagen 84 - Parte de la infografía del grupo "Trío Dinamita".

Imagen 85 - Parte de la infografía del grupo "Trío Dinamita".

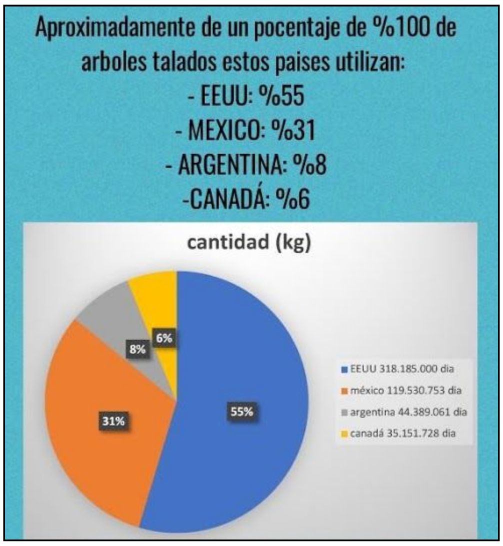
Con respecto al consumo de papel

El grupo "Trío de Oro" trabajó este tema. Compararon el consumo entre varios países, donde volvió aparecer EEUU, pero ahora junto con Argentina, Canadá y México. Tanto en la infografía como en la presentación oral enunciaron que uno de cada cinco árboles talados son utilizados para fabricar papel, lo que llamó la atención al resto del curso, que estuvieron muy atentos en esta presentación.

Se destacó la diferencia entre los consumos de los países por medio de un gráfico de torta (ver *Imagen 86*).

Luego, presentaron el reciclado de papel como opción para disminuir la tala de árboles, sobre todo para empresas y oficinas que consumen cuatro toneladas de papel por año. Esto llevó a la pregunta de qué es reciclar y en qué consiste este proceso, pregunta que fue respondida entre los mismos compañeros. Analizando posteriormente cuántos árboles menos se talarían si se realizara esto (ver *Imagen 87*).

Por último, este PMM dio lugar a discutir acerca de las empresas que producen papel, y a la responsabilidad social que tienen estas empresas con respecto al impacto ambiental.



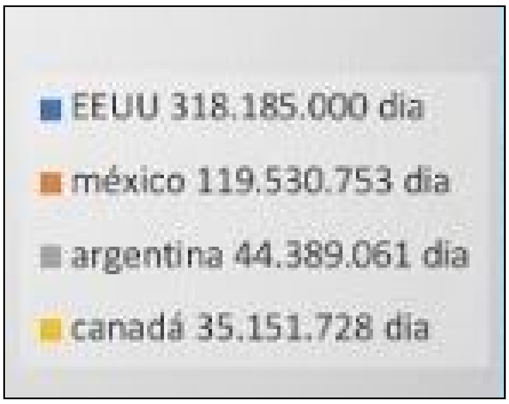


Imagen 86.a - Parte de la infografía del grupo "Trío de Oro". Imagen 86.b - Zoom leyenda *Imagen 86.a.*

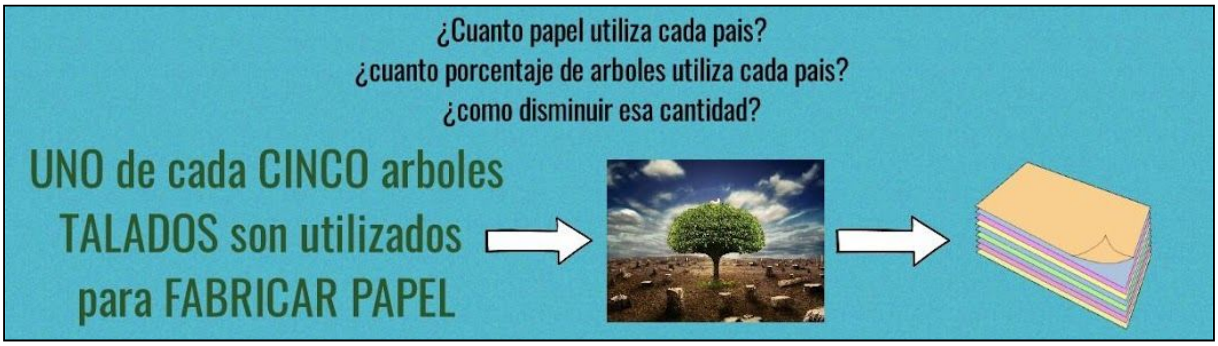


Imagen 87 - Parte de la infografía del grupo “Trío de Oro”

Se observa bajo estas evidencias el desarrollo del pensamiento crítico en temas de la sociedad actual, lo cual, sigue la línea planteada por Skovsmose (1999) en relación a la educación matemática crítica:

> “(...) si las prácticas y la investigación educativas son críticas, deben abordar los conflictos y las crisis en la sociedad. La educación crítica debe revelar las desigualdades y la represión de cualquier tipo” (p. 23-24)

Entonces, bajo las evidencias presentadas en esta subsección, se puede afirmar que el PMM fomentó el desarrollo del pensamiento crítico.

Además, lo observado en esta sección, brinda una justificación para desarrollar este tipo de proyectos en matemática. Podrían ser planteados con el objetivo específico de realizar debates de en temas sociales en esta asignatura, por medio de un análisis matemático de la información disponible.

3.5.2.5. Conclusión acerca de las evidencias del desarrollo en el pensamiento crítico y creativo

La descripción de la última subsección da cuenta por sí sola el alcance del pensamiento crítico desarrollado y demostrado por los estudiantes.

Analizamos además el desplazamiento que realizaron los estudiantes desde la semi-realidad a la realidad en los problemas planteados, y las dificultades que esto trajo, y se cree que *“Los estudiantes adquieran las competencias para solucionar problemas matemáticos reales, incluyendo los de la vida cotidiana, el entorno y de las demás ciencias” (Kaiser & Schwarz, 2006).*

Lograron además criticar los estudios realizados por los compañeros. Estas opiniones crearon un clima de debate en el que se intercambiaron ideas, fundamentando los puntos de vista y se construyeron conclusiones parciales sobre diferentes temas de la realidad.

La pregunta es si estas evidencias dan cuenta de avances en cuanto al desarrollo de la capacidad de pensamiento crítico y creativo. Para esto, acudimos a las “Claves para pensar la evaluación del desarrollo de capacidades en Matemática”. Plantea:

> “Pensamiento crítico y creativo en el marco de la resolución de situaciones problemáticas ¿Cómo pueden dar cuenta los estudiantes de esta capacidad?

- ➢ Analizan el alcance de las afirmaciones que se hacen en la clase al defender sus propios puntos de vista, considerar ideas de otros y elaboran conclusiones.
- ➢ Aceptan el intercambio de ideas y la necesidad de llegar a un acuerdo que puede dar lugar a modificación de ideas iniciales.
- ➢ Elaboran conclusiones y argumentan sobre su validez.” (Fascículo 10, p. 35)

Por lo que, considerando los cambios que realizaron en sus problemáticas en base a las sugerencias de la docente y los intercambios realizados, se puede considerar que el segundo ítem fue alcanzado. Por otro lado, en la mayoría de los grupos en la elaboración de las infografías y las presentaciones orales estuvieron presentes las elaboraciones de conclusiones y argumentaciones, por lo que se puede considerar que el tercer ítem fue logrado. Por último, considerando los momentos de debates, se puede considerar que el primer ítem fue conseguido exitosamente.

Por ende, como los intercambios de opiniones, debates, modificaciones en cuanto a las ideas iniciales, y elaboraciones de conclusiones, se realizaron en torno a la realización del proyecto de modelización matemática, podemos afirmar, que éste, creó un ambiente adecuado que colaboró con el desarrollo del pensamiento crítico.

Más aún, la presencia de esta capacidad no se circunscribe al tema abordado en la propia producción. Los estudiantes fueron capaces de realizar interesantes observaciones y críticas en torno al uso de la matemática para el estudio de otros temas y problemas de la realidad sobre los que no habían tenido mucho tiempo para reflexionar. Todo esto da cuenta que el proyecto brindó herramientas a los alumnos para el desarrollo de esta capacidad.

3.6. Conclusión del análisis

Podemos afirmar, luego del análisis, que el Proyecto de Modelización Matemática abierta es una situación potente para cada una de las capacidades fundamentales. Además, se generó un espacio propicio para el desarrollo de cada una de ellas, espacio compuesto por: la actividad propuesta, la gestión de clase que se llevó a cabo, los momentos de debates que se realizaron y las exposiciones de los distintos momentos del proceso.

4. Reflexiones finales

Luego de haber transitado esta experiencia, creo que es importante detenerse a reflexionar sobre el aporte que brindó este camino a mi formación personal como docente.

Siguiendo con el enfoque de las capacidades fundamentales creo que esta materia, la experiencia de práctica y, particularmente, su posterior análisis promovió en mí el desarrollo del pensamiento crítico en torno a la práctica docente.

Comparando las prácticas que realicé en este marco con prácticas de años anteriores, puedo ver con distancia y de manera crítica las decisiones que tomé en cuanto a organización de tiempos, tipo de actividades propuestas, gestión de clase, desarrollo de instrumentos y criterios de evaluación, etc. Creo que MyPE me brindó eso: capacidad crítica para analizar mi propia práctica docente.

También favoreció al desarrollo de la capacidad del trabajo en colaboración, ya que este material es producto de intercambios entre compañeros y con los docentes, lo cual no es una tarea trivial, y, aprender a manejarse en términos de futuros colegas fue necesario para la culminación del curso. De la misma forma, fue necesario desarrollar capacidades en cuanto a la oralidad, en el aula, y a la escritura para desarrollar este informe.

Por último, en base a la experiencia vivida, estoy de acuerdo con las siguientes afirmaciones:

Con respecto al modo de aprender de los estudiantes: “Pensamos que los alumnos aprenden matemática haciendo matemática” (Segal & Giuliani, 2008, p. 119)

Y en este sentido creo que el trabajo con modelización lleva al aula una simulación de la comunidad de práctica de los matemáticos, sobre todo de los matemáticos aplicados, por lo cual los estudiantes se encuentran durante la realización del proyecto haciendo matemática, y por lo tanto, aprendiendo matemática.

Luego, con respecto al desafío que implicó llevar adelante un Proyecto de Modelización Matemática:

> “Entre los principales desafíos que fueron enfrentados por las profesoras durante la experiencia podemos mencionar: superar las restricciones institucionales y curriculares; lidiar con las reacciones de los estudiantes frente a la nueva propuesta; conseguir administrar y compatibilizar un trabajo de alta demanda en tiempo, simultáneamente con el resto de sus actividades como profesoras de dedicación exclusiva; enseñar a estudiantes del nivel medio qué es un modelo y cuáles son las etapas de un proceso de modelización.” (Villarreal, Esteley & Smith, 2011, p 5)

En este sentido estoy de acuerdo con lo planteado por las investigadoras. Con respecto a las dificultades curriculares e institucionales, hay un programa que cumplir, al cual es difícil respetar. En está práctica se tuvo que optar entre trabajar proporcionalidad inversa o dar tiempo a las exposiciones de los grupos de los PMM. No obstante, se hipotiza que la experiencia docente brindará herramientas para desarrollar más rápidamente las propuestas áulicas sin perder la calidad.

Por otro lado, coincido con la alta demanda de tiempo extra áulico que conlleva esta actividad para el docente. Si bien en el marco de esta práctica no se trabajó como docente de dedicación exclusiva, sino como docente practicante, el tiempo requerido llevó a no poder ejercer otras labores de manera completa.

Sin embargo, apuesto a esta modalidad de trabajo, teniendo en cuenta que se puede trabajar también con proyectos semi-abiertos o cerrados, o con fuerte énfasis en la resolución de problemas. Todas estas prácticas apuntan a la misma línea, que es la que se espera desde el ministerio de educación de la provincia de nosotros como docentes.

Para finalizar, mis consideraciones con respecto a la matemática y su tratamiento en el ámbito escolar, las cuales se afianzaron con la experiencia de prácticas:

> "No importan tanto los cálculos ni los algoritmos en sí mismos, sino lo que la gente puede llegar a hacer con ellos en su vida cotidiana para estar mejor. Se necesita una matemática que ayude a la gente a pensar y actuar" (Yves Chevallard, 2013)

Referencias Bibliográficas

Chevallard, Y. (8 de diciembre de 2013). Los alumnos andan mal en matemática porque los contenidos son para una élite. Diario Clarín. Recuperado el 20 de Marzo de 2014 de http://www.clarin.com/sociedad/alumnos-andan-matematica-contenidos-elite_0_1043895705.html

Diseño Curricular Educación Secundaria. 2016. Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba

García Hipólito M. (2011). La enseñanza tradicional de la Matemática y su influencia en el aprovechamiento escolar de los alumnos de nivel primaria.

García Hipólito M. (2011). La enseñanza tradicional de la Matemática y su influencia en el aprovechamiento escolar de los alumnos de nivel primaria.

GeoGebra, 3 Aug. 2016. "Vaciado De Un Recipiente." www.geogebra.org/m/gTcQ9STn.

Giuliani, D., Segal, S., 2008. Modelización Matemática en el aula. Posibilidades y necesidades. Libros del Zorzal Bs. As.

Piktochart Infographics. Create Easy Infographics, Reports, Presentations. www.piktochart.com/.

Prioridades pedagógicas 2014-2019, 2014. *Prioridad Pedagógica 1: Mejora en los aprendizajes de Lengua, Matemática y Ciencias.* Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, 2014.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. Revista EMA. Vol. 6, N° 1, p.3-26

Villarreal, M., Esteley, C., y Smith, S. (2011). Desafíos y decisiones de profesores de matemática en escenarios de modelización: el diseño de un proyecto para el aula.

Anexo

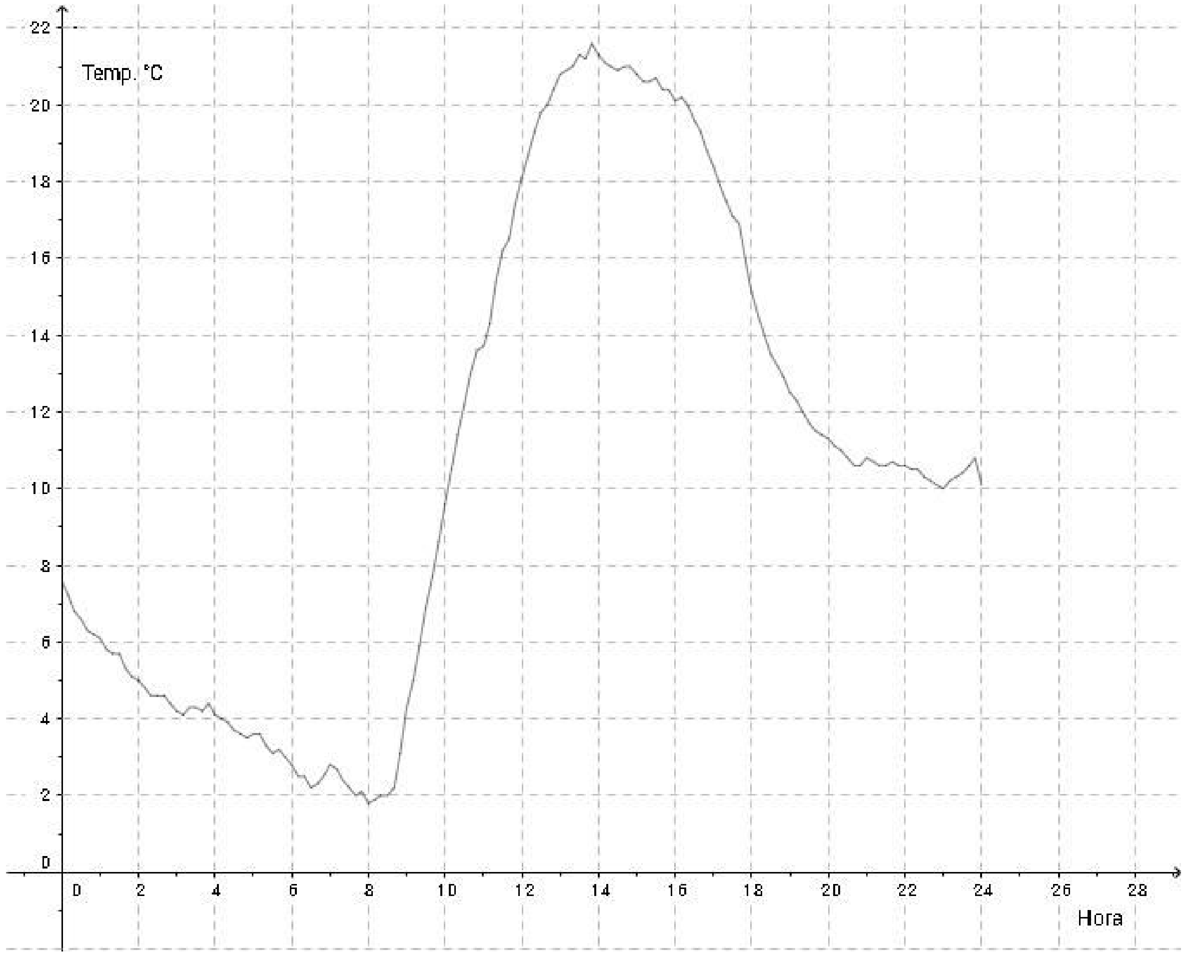
A1. Guía de actividades repaso

Estudiamos algunas relaciones entre variables

1) La temperatura en la Ciudad de Córdoba.

La siguiente tabla junto al gráfico muestran las temperaturas medidas a lo largo del 01 de Julio de 2017.

Hora	00:00	02:00	04:10	5:50	09:10	10:40	12:40	13:20	16:20	17:50	20:20	24:00
Temp.(ºC)	7.6	5	4	3	5	13	20	21	20	16	11	10.09



a) ¿Cuáles son las variables involucradas?

b) ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente?
c) Señalen en el gráfico los pares de datos recolectados en la tabla.
d) ¿Qué temperatura hizo a las 08:30 hs? ¿Y a las 23:00 hs?
e) ¿A qué hora se alcanzó la temperatura mínima? ¿Cuál fue esa temperatura?
f) ¿A qué hora se alcanzó la temperatura máxima? ¿Cuál fue esa temperatura?
g) ¿A qué hora hizo 18°C?

2. <u>Economía: Ley de demanda.</u>

La demanda es la cantidad de bienes o servicios que los compradores intentan adquirir en el mercado.

Por medio de la ley de la demanda, se determina que al subir el precio de un bien o servicio, la demanda de éste disminuye. Y viceversa, al disminuir el precio de un bien o servicio, la demanda de éste aumenta.

a) ¿Cuáles son las variables que intervienen?
b) ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
c) ¿Qué ocurre con la variable dependiente cuando la variable independiente aumenta?

Pensemos en un caso particular: la siguiente tabla muestra la cantidad de zanahorias demandada por una familia dependiendo el precio del kg.

Precio ($ por kg)	Cantidad demandada (Kg al mes)
4.50	14
9	10.25
13.5	7.5
18	5.25
22.50	3.5
27	2.5

d) En este ejemplo específico, ¿Cuáles son las variables que intervienen?

e) Realice un gráfico con la información de la tabla

f) Dentro de la sección *análisis de regresión de dos variables* de *GeoGebra*, hay varias opciones de modelos matemáticos que ajustan estos puntos. Pruebenlos y decidan cuál es el más adecuado.

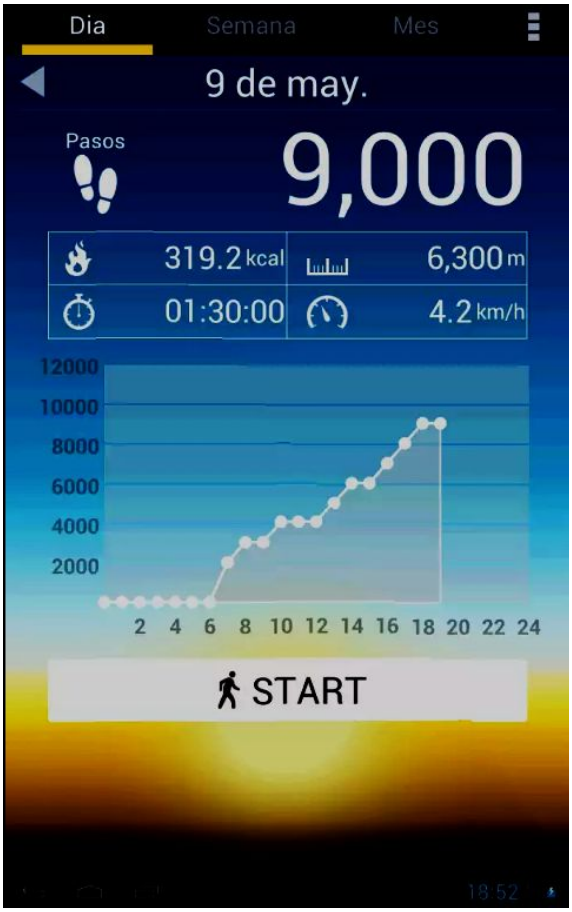
<u>Nota:</u> Pase los datos de la tabla a una hoja de cálculo de *GeoGebra*. Vista -> Hoja de cálculo.
Luego, seleccionarlos y buscar en la barra de herramientas la opción *Análisis Regresión Dos Variables.*

g) A partir del gráfico, predigan cuántos Kg. de zanahoria demandará una familia en un mes si el Kg. cuesta $16

3) <u>Podómetro.</u>

Un podómetro es un aparato en forma de reloj de bolsillo que sirve para contar el número de pasos que da la persona que lo lleva y medir la distancia que ha recorrido.

La siguiente imagen es una captura de pantalla de una aplicación para celulares que simula este aparato llamada *Podómetro*. Si lo desean pueden descargar la aplicación a sus celulares.



a. ¿Con qué variables trabaja esta aplicación?
b. ¿Cuáles son las variables involucradas en la relación representada en el gráfico?
c. En esta relación, ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
d. ¿Durante cuántas horas se usó esta aplicación?
e. Usen la información del gráfico para imaginar y describir cómo fue el día de la persona que usó la aplicación.
f. A partir del gráfico complete la siguiente tabla (incluyendo el encabezado):

	2000
10	
12	
14	
15	

	8000
19	

4) Tarifa del taxi.

La siguiente página permite calcular el costo de un viaje en taxi en diferentes ciudades de la Argentina: http://m.taxistavirtual.com.ar/

a) Elijan una ciudad, origen y destino, y calculen el costo del viaje ¿Qué información ofrece la página? ¿Cuáles son las variables que intervienen? ¿Cómo se relacionan?
b) Para la ciudad de Córdoba, calculen el costo del viaje desde el Colegio Gabriel Taborin hasta los siguiente lugares:
   - Tu casa
   - Patio Olmos
   - Plaza España
   - Terminal de Ómnibus
   - Plaza San Martín
   - Mujer Urbana
   - Estadio Mario Alberto Kempes
   - Arco de Córdoba
   - Pabellón Argentina
   - Shopping de Villa Cabrera

   Registren para cada viaje la distancia y la tarifa. Organicen estos datos datos en una tabla.

c) A partir de los datos recogidos construyan un gráfico que represente la relación.
d) A partir del gráfico, ¿Podrían predecir cuál es la Tarifa para un viaje de 14 km?

5) Organizando el tambo

En un tambo tienen que despachar 120 litros de leche. Los dueños ofrecen distintas formas de envasarlos, variando la cantidad de los envases y la capacidad de ellos, con la condición de que todos los envases que el cliente se lleve tienen que tener la misma capacidad. Tenemos las siguientes opciones:

Cantidad de envases	**Capacidad de cada envase (litros)**
1	120
2	60
3	
	30
5	
	20

a) Identifique la variable independiente y dependiente
b) Explique qué información brinda las primeras dos filas de la tabla
c) Complete los datos faltantes en la tabla, teniendo en cuenta las condiciones del enunciado.

6) Nos vamos de viaje

Un vehículo viaja a velocidad constante. La siguiente tabla representa la relación entre el tiempo transcurrido y la distancia recorrida:

Tiempo (hs)	Distancia (Km)
3	135
4	180
7	
8	
11	495
	585

a) ¿A qué velocidad viaja el auto?
b) ¿Qué significa que viaje a esa velocidad?
c) Identifique la variable independiente y dependiente
d) Complete los datos faltantes

7) Expresión simbólica

La relación entre dos variables está dada por la siguiente fórmula:

$$y = \frac{4}{x}$$

a) Identifique la variable independiente y la variable dependiente.
b) Elija 10 valores distintos para la variable independiente. Para cada uno de estos valores determine el valor de la variable dependiente. Organice estos datos en una tabla.
c) Grafique los pares de datos obtenidos en un plano cartesiano de *GeoGebra*
d) Dentro de la sección *análisis de regresión de dos variables* de *GeoGebra*, hay varias opciones de modelos matemáticos que ajustan estos puntos. Pruébenlos y decidan cuál es el más adecuado.
e) En el ajuste, debajo de la gráfica, dice *Valor exacto (simbólico)*. ¿Qué hace esta herramienta?

A2. Laboratorio n°2: Vaciado de un recipiente

Experimento 2: Vaciado de un recipiente

Nombre del grupo:

Integrantes:

Objetivo: Estudiar la relación entre el tiempo de vaciado de un recipiente y el tamaño del orificio por el cual se vierte el líquido mediante un simulador en línea de *GeoGebra.*

Materiales:
-Tablet
-Simulador de *GeoGebra*, que se puede encontrar en la página https://www.geogebra.org/m/gTcQ9STn. Se recomienda descargar este simulador para poder trabajar offline.
-Lápiz y papel.

Simulador: Simula el vaciado de un recipiente de base circular por un orificio de salida circular, como el que se ve en la siguiente imagen.

Nota: Leer todos los pasos del procedimiento antes de comenzar.

Procedimiento:

1) Abrir el link del simulador de vaciado "https://www.geogebra.org/m/gTcQ9STn". Explorar el simulador, antes de continuar asegurarse de comprender su funcionamiento y reconocer qué variables intervienen y cómo se controlan.
2) Actualizar la página para reiniciar el simulador. Elegir valores para ***R*** y la ***altura inicial del agua.*** Registrarlos y dejarlos fijos durante el transcurso del resto del experimento.
3) Elegir un valor para ***C***. Registrar este valor en la Tabla N° 1. Luego, a partir del valor elegido para ***C***, calcular el área del orificio. Registrar esta área en la Tabla N° 1.

4) Iniciar el simulador con el botón Play que está en el margen inferior izquierdo. Una vez vaciado completamente el recipiente, detener con el mismo botón.
5) Registrar en la Tabla N° 1 el tiempo en el que se vació el recipiente y regresar el deslizador ***t*** a 0.
6) Repetir los incisos 3), 4) y 5) para 9 valores distintos de ***C***.
7) Asegúrense que todos los datos queden registrados en una tabla, pueden usar papel, la tablet o ambos para llevar estos registros. Recuerden establecer los encabezados y consignar sus respectivas unidades de medida entre paréntesis.

Teniendo en cuenta el procedimiento desarrollen las siguientes actividades:

1) Realicen la experiencia de recolección de datos organizándolos en la siguiente tabla. Elijan un título para la tabla que indique el contexto en el que los datos fueron recogidos.

Tabla N°1: ……………………………………………………

Valor de **R** elegido: **Altura inicial del agua** elegida:

Radio del orificio (cm)	Área del orificio (cm^2)	Tiempo de vaciado del recipiente (s)

2) ¿Qué variables intervienen en este simulador? Describirlas y explicar cómo se controla cada una de ellas.

3) A Continuación estudiarán algunas relaciones que pueden establecerse entre las variables que intervienen en el simulador:

i) Relación Área - Radio (del orificio)

a) A partir de los datos recolectados en la Tabla N°1, formulen hipótesis acerca de la relación entre estas variables (área del orificio y radio del orificio). Indique cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.
b) Grafiquen en el plano cartesiano los pares de datos registrados en la Tabla N°1 para estas variables.

c) Ajusten estos datos con alguno de los modelos propuestos por la herramienta *Análisis Regresión Dos Variables* de *GeoGebra*. Para ello prueben los diferentes modelos, decidan con el grupo cuál es mejor y expliquen porqué. ¿Tienen alguna crítica para hacer al modelo elegido por su grupo? Exporten la imagen en formato .png, luego la usarán en la redacción del informe.
d) ¿Qué vínculos encuentra entre la expresión simbólica asociada al ajuste de curva elegido con los procedimientos que utilizaron para obtener los datos correspondientes al área del orificio? A partir de los respuestas anteriores verifiquen o refuten la hipótesis planteada en a).

ii) <u>Relación Tiempo - Área</u>

a) A partir de los datos recolectados en la Tabla N°1, formulen hipótesis acerca de la relación entre estas variables (tiempo de vaciado del recipiente y área del orificio). Indique cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.
b) Grafiquen en el plano cartesiano los pares de datos registrados en la Tabla N°1 para estas variables.
c) Ajusten estos datos de su experimento con alguno de los modelos propuestos por la herramienta *Análisis Regresión Dos Variables* de *GeoGebra*. Para ello prueben los diferentes modelos, decidan con el grupo cuál es mejor y expliquen porqué. ¿Tienen alguna crítica para hacer al modelo elegido por su grupo? Exporten la imagen en formato .png, luego la usarán en la redacción del informe.
d) Copien la expresión simbólica vinculada al ajuste de curva que realizaron. En esta expresión ¿Qué representa la variable *x*? ¿Y la variable *y*?
e) Validen el modelo elegido con el simulador utilizando algún valor de ***C*** no registrado durante la recolección de datos.
<u>Nota:</u> Utilice en este punto los valores de ***R*** y ***altura inicial del agua*** elegidos para la recolección de datos (punto 2 del procedimiento).
f) A partir de las respuestas anteriores verifiquen o refuten la hipótesis planteada en a).

iii) <u>Relación Tiempo - Radio</u>

a) A partir de los datos recolectados en la Tabla N°1, formulen hipótesis acerca de la relación entre estas variables (tiempo de vaciado del recipiente y radio del orificio). Indique cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.
b) Grafiquen en el plano cartesiano los pares de datos registrados en la Tabla N°1 para estas variables.
c) Ajusten estos datos de su experimento con alguno de los modelos propuestos por la herramienta *Análisis Regresión Dos Variables* de *GeoGebra*. Para ello prueben los diferentes modelos, decidan con el grupo cuál es mejor y expliquen porqué. ¿Reconocen algún error o problema en el gráfico obtenido? ¿Cómo lo reconocen? Exporten la imagen en formato .png, luego la usarán en la redacción del informe.
d) Copien la expresión simbólica vinculada al ajuste de curva que realizaron. En esta expresión ¿Qué representa la variable *x*? ¿Y la variable *y*?
e) Validen el modelo elegido con el simulador utilizando algún valor de ***C*** no registrado durante la recolección de datos.
<u>Nota:</u> Utilice en este punto los valores de ***R*** y ***altura inicial del agua*** elegidos para la recolección de datos (punto 2 del procedimiento).
f) A partir de las respuestas anteriores verifiquen o refuten la hipótesis planteada en a).

4) Realicen un informe que contenga:

- Una carátula (la carátula debe consignar título del laboratorio, nombre del grupo, integrantes, curso, división y nombre del colegio).
- Una introducción que explique el experimento realizado.
- La Tabla N°1 con los datos recolectados y el título elegido.
- Los valores fijados para ***R*** y la ***altura inicial del nivel del agua***.
- Para cada relación estudiada:
    - la hipótesis;
    - la gráfica de la curva de ajuste, acompañada de las críticas realizadas por el grupo a dicha curva;
    - la expresión simbólica asociada a la curva de ajuste elegida, indicando qué representan en esta expresión las variables x e y;
    - una conclusión donde se indique si la hipótesis se validó o se refutó y porqué.

Subir al aula virtual dicho informe con la denominación InformeExperimento2NombreDelGrupo. Tienen tiempo para realizar este envío hasta el Jueves 10/8 a las 18:00 hs.

A3. Apunte de Proporcionalidad Directa

Relación de Proporcionalidad Directa

Estudiaron en la experiencia de laboratorio cómo varía el estiramiento de un resorte según la masa aplicada en su extremo inferior. A continuación mostramos una tabla de dicha relación para un resorte ideal. Los datos fueron recolectados a través de un simulador de este fenómeno y, por lo tanto, no presentan errores de medición. Pueden encontrar un simulador del experimento en el siguiente link:
https://phet.colorado.edu/sims/mass-spring-lab/mass-spring-lab_es.html

Masa (g)	Estiramiento (cm)
0	0
2	0,6
5	1,5
10	3
12	3,6
15	4,5
30	9
60	18

Tabla N°1

En esta relación, la masa es la **variable independiente** y el estiramiento la **variable dependiente** y se cumple la propiedad de que si sumo los valores de dos masas, los correspondientes valores del estiramiento también se suman. Las relaciones que cumplen con esta propiedad se denominan de **proporcionalidad directa**.

- Dos variables son **directamente proporcionales** cuando al sumar dos valores de la variable independiente sus correspondientes valores de la variable dependiente quedan sumados. Es decir:

$$\textbf{Si } x_1 \rightarrow y_1 \ , \ x_2 \rightarrow y_2 \ \textbf{ entonces } \ x_1 + x_2 \rightarrow y_1 + y_2$$

A partir de los datos presentados en la tabla 1 podemos interpretar que si aplicamos al resorte una masa de 5 g, el resorte se estira 1,5 cm y que si la masa es de 10 g el estiramiento correspondiente es de 3 cm Si además le aplicamos al resorte ambas masas simultáneamente, sumando así 15 g, el estiramiento del resorte será la suma de los estiramientos correspondientes a cada una de estas masas, esto es 1,5 cm + 3 cm = 4,5 cm. Podemos observar esto en la tabla.

Masa (g)	Estiramiento (cm)
0	0
2	0,6
5	1,5
10	3
12	3,6
15	4,5
30	9
60	18

A partir del análisis de la tabla se pueden deducir otras propiedades:

- Por ejemplo, si al resorte le colocamos dos masas de 5g, teniendo así una masa de 10g, el resorte se estirará 1,5 cm + 1,5 cm = 3 cm. Es decir, si duplicamos la masa aplicada, el correspondiente valor del estiramiento se duplicará. Lo mismo ocurre si multiplicamos la masa por 3, 4, o cualquier número n, su respectivo estiramiento también se multiplicará por 3, 4 o por cualquier número n.

  De manera análoga ocurre con la división, al ser la división la operación inversa de la multiplicación, lo mismo tienen que suceder con esta operación. Es decir, si dividimos la masa aplicada por 2, 3, 4 o por cualquier número n , el correspondiente valor del estiramiento también se divide por 2, 3,4 o por cualquier número n respectivamente. Podemos observar en la tabla:

Masa (g)	Estiramiento (cm)
0	0
2	0,6
5	1,5
10	3
12	3,6
15	4,5
30	9
60	18

Decimos entonces que:

Al multiplicar o dividir la variable independiente por un número n, el correspondiente valor de la variable dependiente queda multiplicado o dividido por el mismo número n es decir:

Si $x_1 \rightarrow y_1$ entonces $n \cdot x_1 \rightarrow n \cdot y_1$
y $x_1 : n \rightarrow y_1 : n$

- Observemos ahora dos pares de datos, por ejemplo, para una masa de 10g el estiramiento es de 3cm y para una de 60 g es de 18cm. Si realizamos los productos cruzados, obtenemos por un lado que 10g . 18 cm= 180g.cm, y por otro que 3cm . 60g = 180g.cm. Es decir, los resultados de ambos productos son iguales. Esto ocurrirá con cualquier dos pares de datos que tome, veamos esto en la tabla.

Masa (g)	Estiramiento (cm)
0	0
2	0,6
5	1,5
10	3
12	3,6
15	4,5
30	9
60	18

Decimos entonces que:

Al realizar un producto cruzado tenemos dos resultados los cuales son iguales entre sí, es decir:

Si $x_1 \to y_1$, $x_2 \to y_2$ entonces $x_1 . y_2 = y_1 . x_2$

- Finalmente observemos que, siempre que sea posible realizar la división, al dividir un valor de la variable dependiente por su correspondiente valor de la variable independiente, se obtiene el mismo número. En el caso de nuestra tabla, siempre obtenemos 0.6cm : 2g= 0.3 cm/g

x	y	y : x
0	0	No es posible
2	0,6	0,6 : 2 = 0,3
5	1,5	1,5 : 5 = 0,3
10	3	3 : 10 = 0,3
12	3,6	3,6 : 12 = 0,3
15	4,5	4,5 : 15 = 0,3
30	9	9 : 30 = 0,3
60	18	18 : 60 = 0,3

Decimos entonces que:

Al dividir los valores de la variable dependiente por sus correspondientes valores de la variable independientes (y siempre que esto sea posible) obtenemos el mismo valor k, al que llamamos constante de proporcionalidad directa. Es decir:

Si $x_1 \rightarrow y_1;\ x_2 \rightarrow y_2;\ x_3 \rightarrow y_3;$ **etc.**

Entonces:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = k$$

A partir de esta propiedad puede observarse en nuestra tabla que cada valor de la variable dependiente (y) se puede obtener multiplicando el valor de la variable independiente (x) por k=0,3. Es decir

y = 0,3 . x

Esta expresión representa una relación de proporcionalidad directa entre las variables x e y.

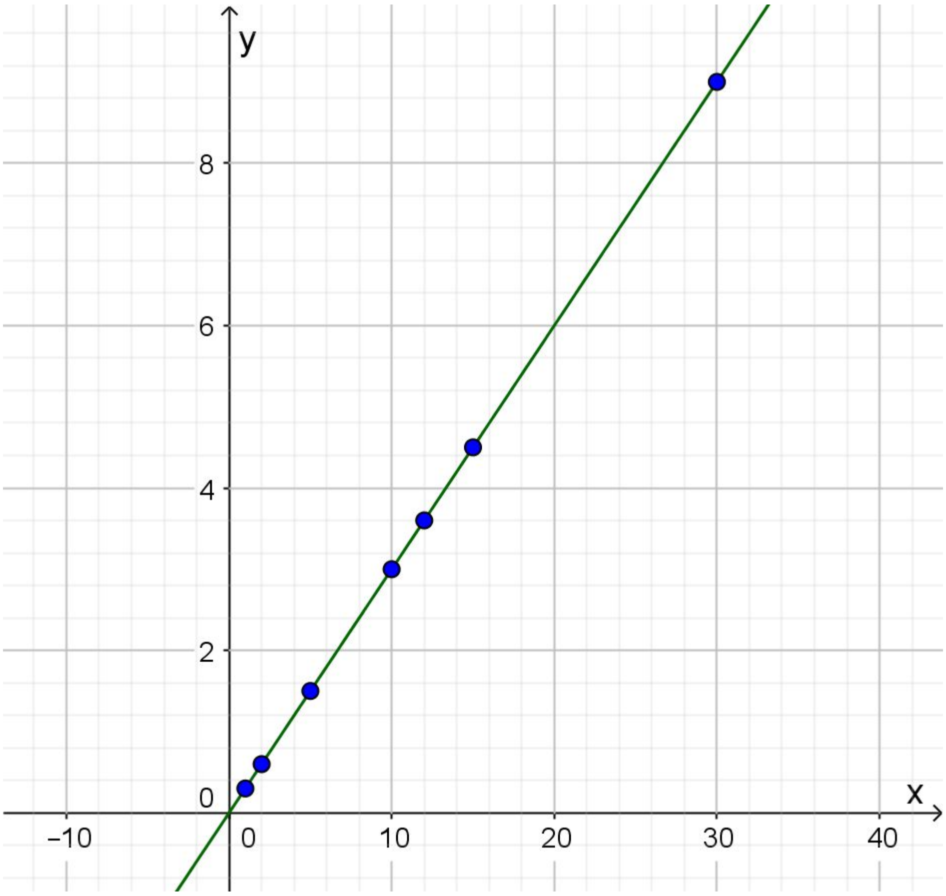
Expresión simbólica:

En general, podemos decir que una **Relación de Proporcionalidad Directa** se representa simbólicamente a través de la siguiente expresión

y = k . x

donde **k** es un número positivo y se denomina ***constante de proporcionalidad directa***.

- Otra manera de representar una relación de proporcionalidad directa es a través de su gráfica en el plano cartesiano. A continuación se graficaron los pares de datos dados en la tabla y el gráfico de la expresión simbólica que los representa y=0,3 . x



En general, el gráfico correspondiente a una relación de proporcionalidad directa posee las siguientes características:
- Es una recta.
- Pasa por el origen de coordenadas, es decir pasa por el punto (0,0) del plano cartesiano.
- Se puede ver que cuando el valor de la variable independiente aumenta, el correspondiente valor de la variable dependiente también aumenta.

Observación:
No toda relación es de proporcionalidad directa, y por ende, no en toda relación es válido aplicar las propiedades vistas.
Analizemos por ejemplo el problema de las amebas, para este problema, teníamos la siguiente tabla:

Tiempo (min)	Cantidad de amebas
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024

¿Se cumple en esta relación la propiedad de que cuando sumo dos valores de la variable independiente, los respectivos valores de la variable dependiente se suman?
¿Se cumple en esta relación la propiedad de que cuando multiplico un valor de la variable independiente por un número, el correspondiente de la variable dependiente se multiplica por el mismo número?
¿Se cumple en esta relación la propiedad del producto cruzado?
¿Es la relación cantidad de amebas - tiempo, una relación de proporcionalidad directa?
Observando sólo las primeras filas de la tabla, podremos contestar que no se cumplen ninguna de las tres propiedades, y por lo tanto esta relación no es de proporcionalidad directa.

- Tenemos que en 1 minuto, hay 1 ameba, en 2 minutos hay dos amebas, luego, en 3 minutos, ¿Hay 1+2=3 amebas? No, sino que hay 4 amebas.
- Si a 1 minuto lo multiplico por 3 para llegar a 3 minutos, en la cantidad de amebas, multiplico 2 amebas que hay en 1 minuto por 3, ¿Encuentro la cantidad de amebas para 3 minutos? No, 1x3=3, y en 3 minutos no hay 3 amebas, sino 8.
- Mirando las filas 3 y 4, si realizo ambos productos cruzados, ¿Obtengo los mismos valores?. En una diagonal obtengo 2x8=16, y en la otra obtengo 3x4=12. Luego, 12 es distinto que 16, por lo que no se cumple la propiedad del producto cruzado.

Por lo tanto, la relación que existe entre la cantidad de amebas con respecto al tiempo que transcurre, no es una relación directamente proporcional.

A4. Actividades de Institucionalización de Proporcionalidad Directa

<u>Guía de actividades:</u> <u>Proporcionalidad Directa</u>

I) Sabiendo que la relación entre el estiramiento de un resorte y la masa que provoca dicho estiramiento es de proporcionalidad directa:

a) Calcular, a partir de los datos que obtuvieron en el Laboratorio 1, la constante de proporcionalidad de esta relación para el resorte con el que su grupo trabajó.
b) Dar la expresión simbólica que representa dicha relación para este resorte.

II) Decidir si las relaciones presentadas en las siguientes tablas son de proporcionalidad directa o no, en ambos casos justificar su/s respuesta/s. Cuando se trate de una relación de proporcionalidad directa, encontrar la constante de proporcionalidad y la expresión simbólica, y construir el gráfico que representa la relación.

a)

x	y
2	56
5	140
15	420
30	840
45	1220

b)

x	y
0.5	10
2	2,5
4	1,25
10	0.5
20	0.25

c)

x	y
1	1
2	1.5
3	2
4	2.5
5	3

d)

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

e)

x	y
5	3
7	4,2
14	8,4
28	16,8
51	30,6

f)

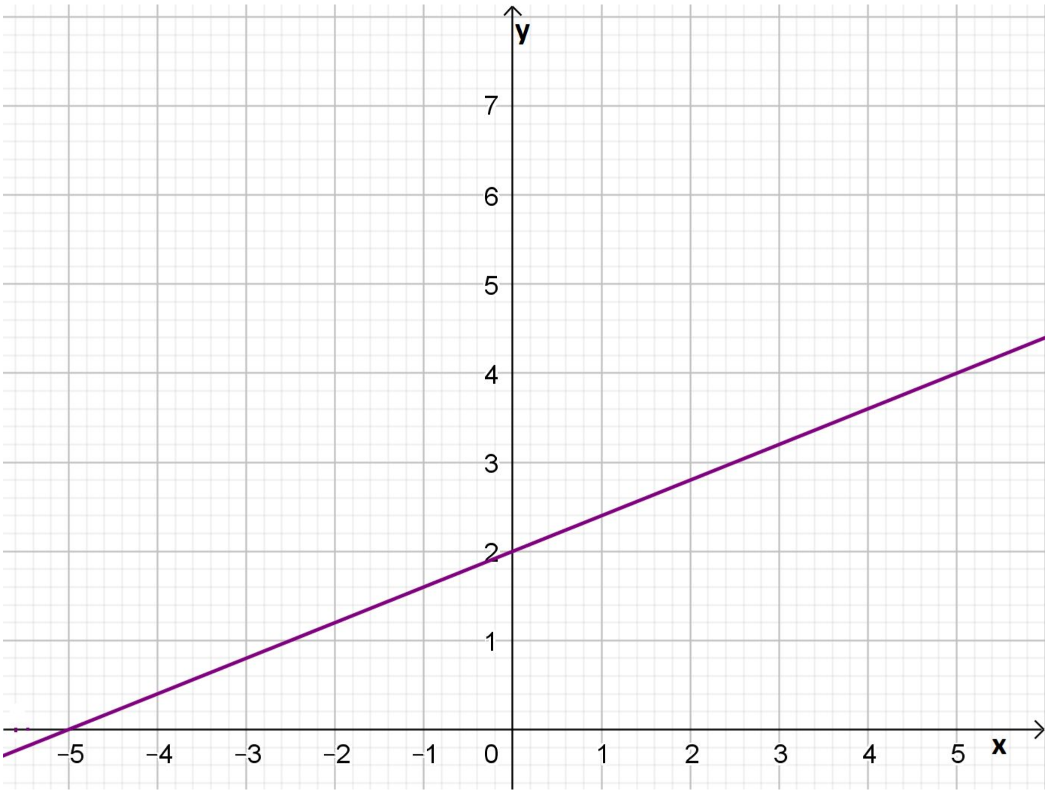
x	y
0	2
2	4
3	6
4	8
5	10

III) Sabiendo que la relación representada abajo es directamente proporcional, completar la siguiente tabla.

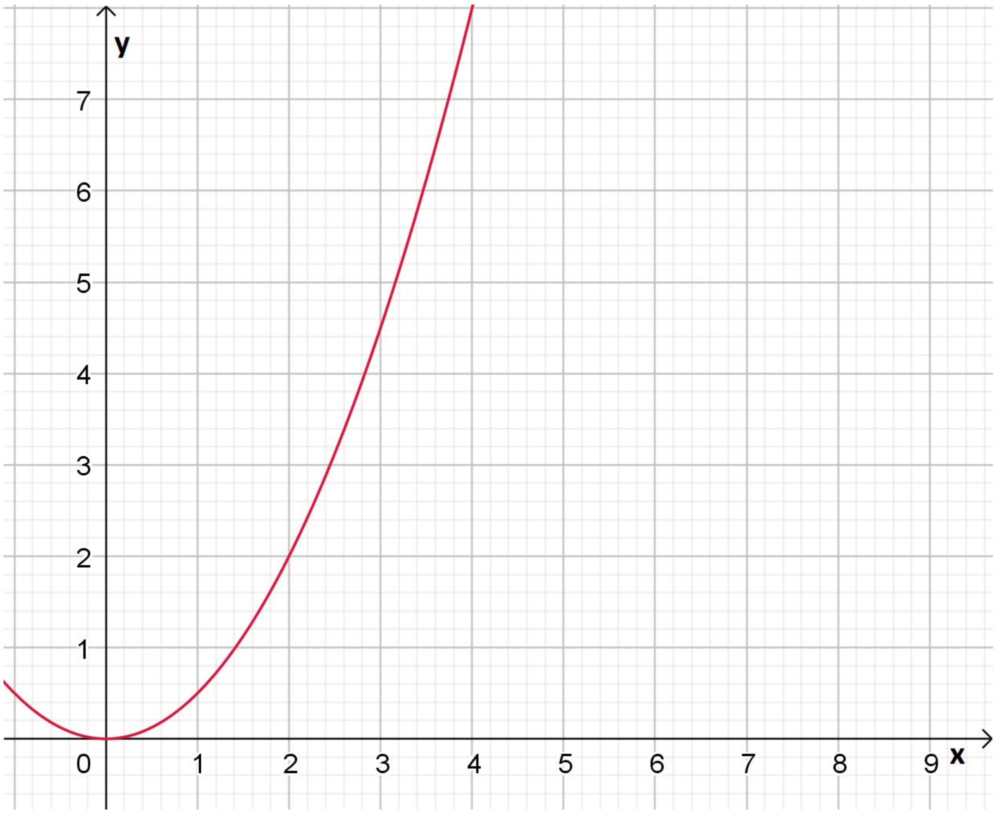
x	y
0	
	0.5
4	1
6	
	2.25
12	

IV) Para cada uno de los siguientes gráficos determinar si representa o no una relación de proporcionalidad directa. En cada caso justifiquen sus respuestas, encuentre la constante de proporcionalidad y la expresión simbólica correspondiente.

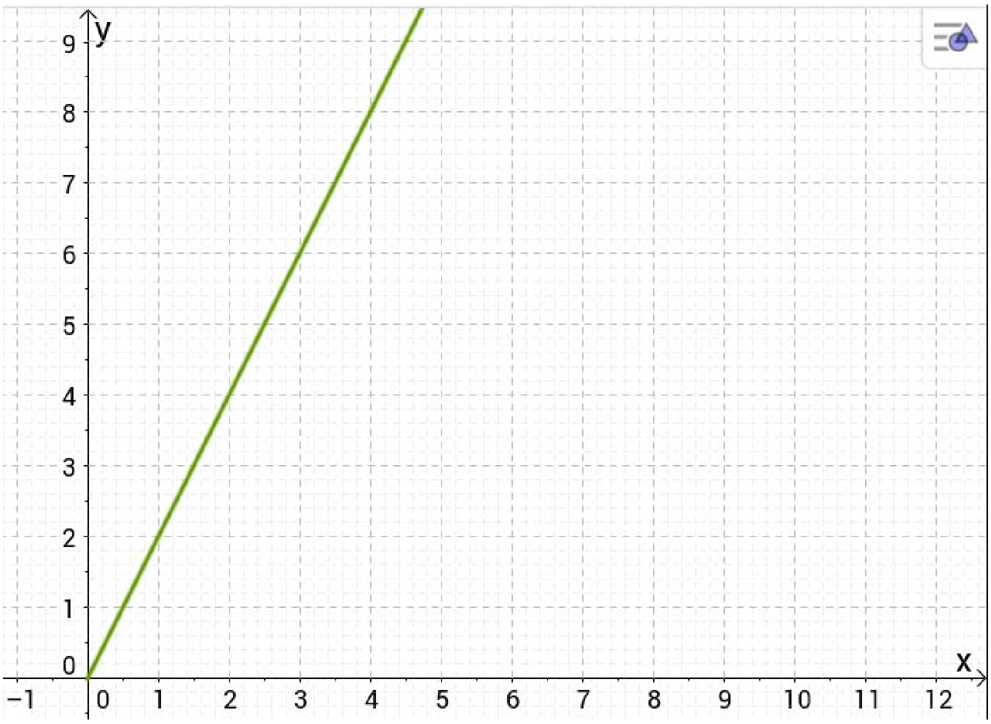
a)



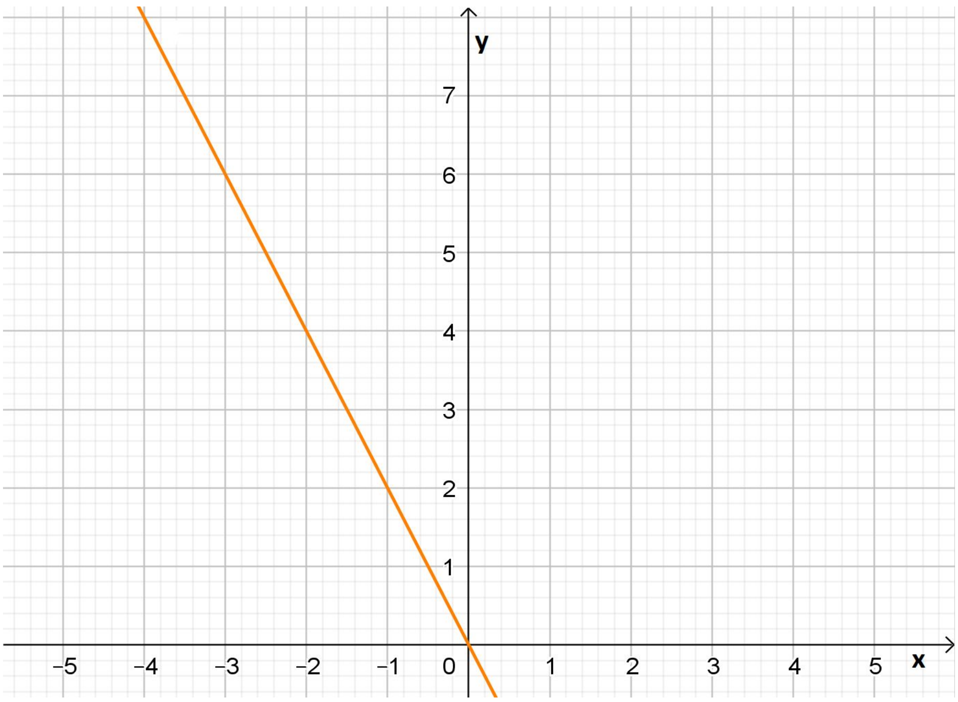
b)



c)



d)



e)

V) Resuelva los siguientes situaciones:

1) Compré 3,5 kg de manzanas y me cobraron \$63. ¿Cuánto costarán 7 kg, 8 kg y 15 kg? Confeccione una tabla con los datos calculados y de una expresión simbólica de esta relación.
2) En una fábrica automovilística una máquina pone en total 15.000 tornillos en las 8 horas de jornada laboral funcionando de forma ininterrumpida. ¿Cuántos tornillos pondrá en 1, 3 y 5 horas? Confeccione una tabla de esta relación.
   ¿Cuantos tornillos pone la máquina en 20 días de uso, con 8 horas de funcionamiento ininterrumpido? ¿Y en 5, 10 y 15 días? Confeccione una tabla de esta relación.
   Dar en ambas relaciones las expresiones simbólicas.

VI) Para cada ítem de la guía de actividades *Estudiamos algunas relaciones entre variables,* determinar si la relación es de proporcionalidad directa o no, en ambos casos justificar su respuesta.

A5. Rúbrica de corrección completa para el Laboratorio N°1

1		Entregan la tabla con los 9 o más pares de valores y las variables con sus respectivas unidades en el encabezado **(0,5 p.)**	-Entregan la tabla con los 9 pares de valores pero indican mal las variables o las unidades en el encabezado -Bien las unidades y nombre de las variables pero tienen entre 6 y 8 pares de datos **(0,3 p.)**	-Bien las unidades y nombre de las variables pero entregan la tabla incompleta (con 5 pares de valores registrados) -Entregan entre 6 y 8 datos pero tienen un error en los nombre de las variables o unidades -Tienen la tabla completa pero tienen mal el nombre de las variables y/o unidades, y además colocan algun igual entre masas y estiramientos (ej. 40.4g = 12cm) **(0,2 p.)**	-Entregan la tabla incompleta (con 5 pares de valores registrados) y con algún error con las unidades o con los nombres de las variables **(0,1 p)**
2		Formulan hipótesis con vocabulario adecuado **(0,4 p.)**	Realizan afirmaciones en lugar de plantear hipótesis. Utilizan vocabulario adecuado. **(0,3 p)**	-Formulan hipótesis pero con vocabulario poco preciso -Formulan varias hipótesis de las cuales al menos alguna es correcta y al menos alguna no **(0,2 p.)**	No escriben la hipótesis para la relaciòn en general, sino que describen el exp. para casos particulares **(0 p.)**
3 (No se coloca puntaje por este	a				

ítem)					
	b	Eligen un ajuste, justifican y dan una crítica referida al error de medición o el origen. **(0,6 p.)**	Realizan un ajuste con crítica y justificación pero con sólo los primeros 5 datos o con algunos datos por mal uso de *GeoGebra* (ej. Ponen números decimales con coma en vez de punto por lo que no se toman estos valores) **(0,5 p.)**	Eligen un ajuste, justifican pero no dan ninguna crítica. O critican el ajuste pero no lo justifican **(0,3 p.)**	Muestran un ajuste sin ninguna justificación **(0,1 p.)**
	c	Copian la expresión simbólica y responden con vocabulario adecuado qué variables representa x e y **(0,10 p)**	Explican bien pero no copian la expresión simbólica o copian la expresión pero no indican que representan las variables **(0,05)**	Copian la expresión simbólica pero indican mal qué representa cada variable **(0 p.)**	
4		Realizan una conclusión en la que incluye una justificación correcta para la diferencia entre los valores (hablar por ejemplo del error de medición y que a eso se debe la diferencia entre los valores) **(0,4 p.)**	No concluyen a que se debe la diferencia entre los datos registrados y los valores que les devuelve *GeoGebra* o tienen errores en la explicación **(0,2 p.)**	- No usan la herramienta valor exacto para predecir el estiramiento del resorte solo registran el dato experimental o a la inversa -No realizan comparación entre lo predicho por el modelo y lo medido, sino que realizan una afirmación acerca de la relación entre las variables **(0 p.)**	*Obs: En este punto no se exige que escriban cuáles fueron los valores que compararon, ni se penaliza que afirmen que "GeoGebra da el valor del estiramiento exacto" "la fórmula es correcta"aunque sea incorrecto ya que en la expresión simbólica del modelo está incorporado el error de*

					medición.
5		Consideran los valores de x negativos y los grandes como valores que no ajustan y el cero en el caso que la ordenada sea notablemente mayor a la dada por el error de medición **(0,4 p.)**	Justifican correctamente pero de manera incompleta (referimos a que dan solo una de las cotas) **(0,2 p.)**	No reconocen valores de x para los cuales el ajuste pierda sentido en relación a la experiencia de laboratorio **(0 p.)**	
6		Reconocen el carácter creciente de la relación Reconocen que el estiramiento producido por la suma de dos pesas se corresponde con la suma de los estiramientos producidos por la masa de cada una de ellas a partir de la tabla, el gráfico y/o el modelo de ajuste de curva elegido. **(0,6 p.)**	Realizan afirmaciones sin justificarlas con la tabla o el gráfico del modelo elegido **(0,3 p.)**	-Responden un sólo item justificadamente **(0,3 p.)** -Responden un sólo item pero sin justificar **(0,1 p.)**	

A6. Rúbrica de corrección completa para el informe del Laboratorio N°2

Introducción: Total 0,4 p.		Explican de qué se trata el simulador, cuáles son las variables que están en juego, cómo se controlan y cómo realizaron la recolección de datos **(0,4 p.)**	Explican bien pero falta uno o dos ítems de incluir **(0,2 p.)**	Explican sólo un ítem O dos pero sin estructura de introducción **(0,1 p.)**	No se presenta una introducción **(0 p)**
Recolección de datos: 0.5 p.		a-No cometen error en las unidades b-no cometen error en los cálculos c-no toman el valor de C como el diámetro d-mantienen fijo los valores R y altura del nivel del agua **(0.5 p.)**	-Hacen mal a, pero bien el resto -hacen mal b pero bien el resto -hacen mal c pero bien el resto **(0.4 p.)**	-De a,b,c, hacen mal dos, pero bien d -Calculan mal todos los valores del área (aparente error en la fórmula) pero bien todo el resto **(0,3 p.)**	-De a,b,c, hacen mal dos y d mal **(0,2 p.)** -hacen mal los 4 ítems **(0,1 p.)**
Manejo de habilidades: 2,1 p. por cada una	**Hipótesis**	Formulan hipótesis con vocabulario adecuado **(0,6 p.)**	Formulan hipótesis pero con vocabulario poco preciso **(0,3 p.)**	No escriben la hipótesis para la relaciòn en general, sino que describen el exp. para casos particulares **(0 p.)**	

	Gráfica de la curva de ajuste	Eligen un ajuste,lo justifican y dan una crítica completa(al origen, a los valores negativos, valores grandes) **(0,8 p.)**	-Eligen un ajuste, realizan al menos alguna crítica en relación al dominio,pero está incompleto o eligen un ajuste y lo critican pero no dan una justificación de su elección. **(0,6 p.)**	-Eligen un ajuste, lo justifican y dan una crítica pero ninguna crítica es del dominio **(0,4 p.)** -Eligen un ajuste, lo justifican, no dan ninguna crítica **(0,3 p.)**	Muestran un ajuste sin ninguna justificación **(0,1 p.)**
	Expresión simbólica	Copian la expresión simbólica de Ggb.e indican qué representan las variables **(0,1 p.)**	Explican bien pero no copian la expresión simbólica o copian la expresión pero no indican que representan las variables **(0,05)**	Copian la expresión simbólica pero indican mal qué representa cada variable **(0 p.)**	
	Conclusión	Validan o refutan las hipótesis teniendo en cuenta la tabla y/o el gráfico del modelo de ajuste de curva elegido **(0,6 p.)**	Realizan afirmaciones sin justificar con la tabla o el gráfico del modelo elegido **(0,3 p.)**	No formulan una conclusión **(0 p.)**	

A7. Criterio de evaluación para el Proyecto de Modelización Matemática

Al finalizar el proyecto de modelización se evaluó trabajo en clase con 2 pts. y el contenido de la infografía con otros 2 pts.

Se tendrá en cuenta:

- *Tener avances significativos durante las clases y entregas de ellos al final de las mismas*
- *Haber tenido la capacidad de trabajar en equipo*
- *Tomar las sugerencias de las docentes como disparadoras para un avance significativo*

-Sugerencias: 0.5p.

- Aceptan y avanzan en las sugerencias: 0.5 p
- Tienen en cuenta poco las sugerencias pero avanzan igual. 0.5 p.
- Aceptan algunas sugerencias, sin buscar otras formas de avanzar: 0.3 p.
- Aceptan pocas sugerencias, sin tener en cuenta las más básicas sobre el tema: 0.2 p
- No aceptan sugerencias: 0p

- Avances 1p:

- Desarrollan avances significativo todas las clases 1p
- Desarrollan avances todas las clases, pero algunos poco sustanciosos 0.8 p
- No desarrollan avances todas las clases, pero en las que avanzan, lo realizan de manera significativa 0.6 p
- Desarrollan avances en todas las clases, pero todos son poco sustanciosos 0.4 p.
- No desarrollan avances todas las clases, y en las que avanzan es poco sustancioso 0.2 p
- No desarrollan avances en ninguna clase salvo avances poco significativos. 0p.

- Trabajo en grupo 0.5p:

- Trabajan de respetuosa todo el grupo 0.5 p
- Trabajan de manera respetuosa todo el grupo pero con más énfasis un compañero 0.4p
- Trabajan de manera respetuosa pero se divide el grupo y/o algunos compañeros no conocen los avances de otros. 0.3 p
- Trabajan de manera poco respetuosa. 0p

● Criterios de corrección para la infografía:

Tema y Problema 0.3 p.

- Presenta un nombre de tema claro y una pregunta como problema claro y acorde a lo estudiado 0.3 p.

- Presenta un nombre de tema y una pregunta como problema acorde a lo estudiado pero le cuesta ser claro 0.25 p.
- Presenta un nombre de tema claro y problema claro pero no en formato de pregunta acorde a lo estudiado 0.2 p.
- Presenta un nombre de tema y problema pero no en formato de pregunta acorde a lo estudiado y le cuesta ser claro 0.15 p.
- Presenta un nombre de tema y problema que está en formato de pregunta que no responde a lo estudiado 0.1 p.
- Presenta un nombre de tema y problema que no está en formato de pregunta que no responde a lo estudiado, o no presenta problema 0.05 p.
- Presenta un nombre de tema y problema que no está en formato de pregunta que no responde a lo estudiado, y es extenso. 0 p.

- Presenta Tema y problema claro pero no en forma de pregunta, e ingresa resolución dentro del problema 0.15 p.
- Presenta Problema claro pero el tema no responde a lo estudiado 0.2 p.
- No presenta tema y presenta varios problemas en formato de pregunta, que podría haberse resumido(poco claro) 0.2

Introducción 0.3 p.

- Menciona las variables que intervienen, método de recolección de datos, y expl. del tema 0.3 p. + 0.2p.
- Menciona las variables que intervienen 0.3 p.
- Menciona algunas de las variables que intervienen 0.2 p.
- Menciona sólo una explicación del tema. 0.1 p.
- No realiza introducción 0p.

Gráficos 1p.

- Presenta gráfico de información/datos recolectados y gráfico de transmisión de resultados y ocupan una parte central de la infografía 1p. + 0.2 p.
- Presenta gráfico de información/datos recolectados y gráfico de transmisión de resultados 1p.
- Presenta una tabla y gráfico de transmisión de resultados ó presentan gráficas de información/datos recolectados y presentan en texto los resultados o sólo gráfico de resultados matemáticos 0.8 p.
- Presenta gráfico del modelo, y tabla, pero no de transmisión de resultados. 0.6 p. (Amigas: presentan diseño de la pieza, algunas imágenes de los materiales, tablas aparte y un gráfico de torta sin sentido. No tiene coherencia, pero se da por aprobada la parte visual)
- Presenta solo una tabla 0.4 p.
- Presentan sólo imágenes del tema que no es sobre los datos ni transmiten los resultados 0.2 p.

Expresión simbólica 0.5 puntos extra.

- Presenta alguna matematización 0.5 puntos extra.

Conclusión 0.3 p.

- Responde a la pregunta planteada y plantea alguna reflexión extra sobre el tema o posterior a la resolución del problema 0.3 p.+0.1 p.
- Responde a la pregunta planteada 0.3 p.
- Presenta conclusión pero no responde la pregunta planteada 0.2 p.
- No presenta conclusión 0p.

Fuentes 0.1 p.

- Incluyen 0.1p.
- Dicen internet sin especificar ninguna pagina 0.05 p.
- No la incluyen 0p.

A8. Devolución realizada de los informes de laboratorio

Se muestra la devolución de uno de los grupos, a modo de ilustración de este trabajo.

<table>
<tr><td>Grupo</td><td></td><td>AGL</td></tr>
<tr><td>Integrantes</td><td></td><td>(Aquí iban los nombres de los estudiantes)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Laboratorio 1</td><td>Puntaje (max. 3 p.)</td><td>1.25 p.</td></tr>
<tr><td>Comentarios</td><td>● Para futuras entregas es importante que respeten los formatos de entrega establecidos para el trabajo: archivo con nombre del grupo, y que dentro del mismo se detallen el nombre de los integrantes y el nombre del grupo, que tenga un título coherente, etc.
● Faltó presentar la tabla con los datos recolectados
● Critican correctamente el ajuste elegido pero se olvidaron de justificar porqué eligen ese y no otro.
● X representa la masa e Y el estiramiento, sin embargo observar que cuando expresan, decir X=0.69 e Y=0.66 , ya que así están diciendo que el valor de masa siempre es 0.69g y el de estiramiento para esta masa es 0.66cm lo cual no es correcto.
● En el punto 4, ¿A qué se debe la diferencia entre el valor medido y la predicción de GeoGebra?
● En el punto 5 sólo faltó aclarar que tampoco tiene sentido para los valores de x negativos.
● Tengan en cuenta para el próximo trabajo que para validar las hipótesis es necesario hacerlo utilizando la tabla o el modelo elegido, para que así deje de ser una suposición y pase a ser una afirmación justificada. Por último, presentan una afirmación correcta sólo para el primer ítem del punto 6, observar que la afirmación para el segundo ítem no es correcta.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Laboratorio 2</td><td>Puntaje (max. 3 p.)</td><td>2.7</td></tr>
<tr><td>Comentarios</td><td>● <u>Introducción:</u> Si bien mencionan que variables intervienen, no realizan una introducción al trabajo. Como título de la tabla colocan "relación radio y tiempo" siendo que también están representadas en la tabla las relaciones área-radio, tiempo-área.
● <u>Gráfico:</u> Muy bien las críticas pero no se entiende en la relación área-tiempo cuando dicen "y no empieza por el cero" ¿Con cero se refieren al origen? ¿Qué no empieza por el origen? ¿El gráfico? ¿A qué se refieren con esto? ¿Por qué debería "empezar por el origen"?
● <u>Conclusión:</u> Se les consideró el puntaje completo ya que hacen referencia a validar o refutar las hipótesis a partir de lo observado en el gráfico o expresión</td></tr>
</table>

		simbólica. (podría haber sido en la misma tabla también) Para los próximos trabajos desarrollen más este punto, ¿Cómo observan en el gráfico que la hipótesis es verdadera? ¿Cómo lo observan en la expresión simbólica? ¿Y en la tabla? (podrían usar la herramienta cálculo simbólica también).
Puntaje extra	**(max.: 1p.)**	1 p.
Total	**(max.: 6p.)**	**4.95 p.**