Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

INFORME FINAL
Metodología y Práctica de la Enseñanza

Título: EL NÚMERO DE ORO Y SUS REPRESENTACIONES.
Autores: Pacher, Pablo Exequiel; Villada, Flavia Elizabeth
Equipo responsable de MyPE: Esteley, Cristina B.; Coirini Carreras, Araceli; Dipierri, Iris C.; Gerez Cuevas, Nicolás; Mina, María; Smith, Silvina.
Profesora responsable de Prácticas: Smith, Silvina**.**
Carrera: Profesorado en Matemática.
Fecha: 21 de noviembre de 2017.

Clasificación

97 Mathematical Education

Palabras Claves

Números irracionales - Número de Oro -Representación - Rectángulo áureo
Espiral áurea rectangular - Extrema y media razón - Triángulos compañeros

Resumen

El presente informe describe la experiencia de práctica profesional docente realizada por dos estudiantes de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF), UNC, en dos divisiones de quinto año de una institución de carácter confesional de la ciudad de Córdoba. El tema abordado durante las mismas fue "Φ : el número de oro". En el trabajo detallamos aspectos de la institución, de la clase de matemática y de la planificación de las prácticas.

Por último, basados en diversos aportes teóricos, analizamos una problemática evidenciada durante el desarrollo de las prácticas, la que describimos como *Dificultades en la aprehensión de las diversas representaciones de "Φ : el número de oro".*

Abstract

This report describes the experience of professional teaching practice carried out by two students of the Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (FAMAF), UNC, in two divisions of the fifth secondary school year of a confessional institution in the city of Córdoba. The theme addressed during the practises was "Φ : the golden number". We detail characteristics of the institution, the style of the mathematics class of the course teacher and the planning of the proposed classes for the teaching practice.

Finally, based on various theoretical contributions, we analyze a problem evidenced during the development of the practices, which we describe as *Difficulties in the apprehension of the various representations of "Φ : the golden number"*.

Índice.

“La Educación es el arma más poderosa
para cambiar el mundo”

Nelson Mandela

Prefacio

El presente informe tiene por objeto describir y comunicar la experiencia de práctica profesional docente realizada en dos divisiones de quinto año de una institución de carácter confesional de la ciudad de Córdoba. Las mismas tuvieron una duración de 20 horas cátedra y el tema abordado fue "Φ: el número de oro".

Además, pretendemos no sólo compartir nuestras experiencias vividas sino también analizar dichas prácticas mediante el estudio de una problemática surgida en ese periodo, como así también rescatar aportes que puedan ser de utilidad para docentes y futuros docentes.

Este trabajo se estructura en cuatro secciones. En la primera de ellas realizamos una descripción general de la institución, su infraestructura y la dinámica dentro de la misma. Además, describimos el trabajo que realiza la docente en sus clases y el trabajo de docentes de otras áreas como así también el comportamiento que tienen las alumnas en la clase de matemática y fuera de ella.

En la segunda sección detallamos las actividades llevadas a cabo durante el periodo de prácticas, su planificación, implementación y modificación, como así también el tipo de evaluación implementado.

En la tercera sección, realizamos un análisis de un aspecto relevante de nuestras prácticas que delimitamos como problemática. La misma está centrada en las dificultades que se presentaron durante el proceso de selección de contenidos para abordar el tema a enseñar, la cual es estudiada desde diversos aportes teóricos.

Finalmente, en la cuarta sección, realizamos reflexiones finales en torno a la problemática presentada y también sobre nuestras prácticas profesionales en general.

1. Introducción

En el presente capítulo realizaremos la descripción de la institución en la cual llevamos a cabo nuestras prácticas profesionales. Para ello, enunciaremos características institucionales, edilicias y de los cursos con los que trabajamos, las cuales influyeron directamente en el desarrollo de las actividades. Por último, realizaremos una síntesis de las observaciones realizadas previo a las prácticas, donde mencionaremos los estilos de trabajo y recursos utilizados por los distintos docentes en el desarrollo de sus clases.

1.1. La institución

La institución en la cual realizamos nuestras prácticas profesionales se ubica en el casco céntrico de la ciudad capital de la provincia de Córdoba, Argentina; posee carácter confesional y educación no mixta destinada a mujeres.

Consta de tres niveles educativos: nivel inicial, primario y secundario. En cuanto a este último, el campo de formación específica, de acuerdo a la Resolución n° 84/09 (art. 6) del Consejo Federal de Educación, cuenta con dos orientaciones:

- Ciencias Sociales y Humanidades;
- Ciencias Naturales.

Cada año del ciclo orientado posee con dos cursos, uno para cada especialidad.

El colegio dispone de una amplia infraestructura edilicia distribuida en tres pisos. En la planta baja se encuentra la recepción, a cargo de la portera, quien controla el ingreso y egreso a la institución; también la fotocopiadora, la cantina y el patio interno, donde realizan la formación las alumnas. Cuenta con una pequeña capilla y además, se encuentran las aulas del nivel inicial.

En el primer piso, se ubican las aulas del nivel primario, sala de maestros, sala de lectura, aula de catequesis, biblioteca, gimnasio y dirección del primario. Además, se encuentra la sala de la asesora pedagógica del nivel primario, gabinetes de psicopedagogía y el único baño para hombres de todo el establecimiento.

En el segundo piso se localiza el laboratorio de informática, que cuenta con veintidós computadoras, dos impresoras a color, pizarra y, una sala auxiliar de informática con trece computadoras y una impresora. Estas salas están a cargo de un docente que soluciona los problemas que surgen durante la clase y además, es profesor de la materia de computación de los años inferiores. Aquí también se hallan las aulas de primero a tercer año, la preceptoría de estos cursos, la vice-dirección y las salas de laboratorio de física, química y biología.

En el tercer piso se encuentran los cursos de años superiores, de cuarto a sexto año, la preceptoría de los cursos mencionados, la dirección del secundario, sala de plástica, sala de reuniones de docentes, la oficina de la asesora pedagógica y la sala de música que cuenta con órganos, guitarras y otros instrumentos.

Debido a la cantidad de pisos, el colegio cuenta con ascensores para uso del personal y amplias escaleras internas y externas. Los recreos de los años inferiores se realizan en el patio de la planta baja, mientras que en los años superiores, suelen realizarse en los pasillos de cada uno de los pisos.

1.2. Cursos

Las prácticas se desarrollaron en 5° "A" y 5° "B", ambos a cargo de la misma docente. El primero con orientación en Ciencias Naturales mientras que el segundo con orientación en Ciencias Sociales y Humanidades. Ambos contaban con cuatro horas semanales distribuidas en dos días (ver Figura 1) según lo establecido en el diseño curricular de la provincia de Córdoba.

Horarios	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
07:30 a 08:10	5° A				
08:10 a 08:50	5° A				
08:50 a 09:30					
09:50 a 10:30					
10:30 a 11:10					
11:10 a 11:50					5° A
12:05 a 12:45					5° A
12:45 a 13:25					5° B
13:35 a 14:15	5 ° B				5° B
14:15 a 14:55	5° B				

Figura 1: Horarios de cursado de Matemática.

El quinto año "A" contaba con 31 alumnas. Sus clases se desarrollaron los días lunes de 07:30 a 08:50 h y los días viernes de 11:10 a 12:45 h con un recreo de 15 minutos a las 11:50 h.

El quinto año "B" posee con 38 alumnas. Sus clases se desarrollaron los días lunes de 13:35 a 14:55 h y los días viernes de 12:45 a 14:15 h con un recreo de 10 minutos a las 13:25 h.

Ambas aulas, ubicadas en el tercer piso, poseían características similares. Disponen de una tarima, en donde se hallaba el escritorio de la docente y un pizarrón blanco. Los bancos de las alumnas eran individuales y se ubicaban en el aula en filas de dos bancos. En el fondo del aula y debajo de las ventanas que dan al exterior de la institución se encontraban armarios donde las alumnas guardaban útiles, libros y objetos personales. Además, disponían de dos ventiladores con rejas de protección y ventanales vidriados que daban tanto a los pasillos como al exterior de la institución. Poseían reloj de pared, cestos de basura, una repisa detrás del escritorio del docente y esteras donde se colocaban los horarios, dibujos de las alumnas y trabajos realizados.

En las Figuras 2 y 3 presentamos un croquis de las aulas en las que trabajamos, con la distribución de sus elementos.

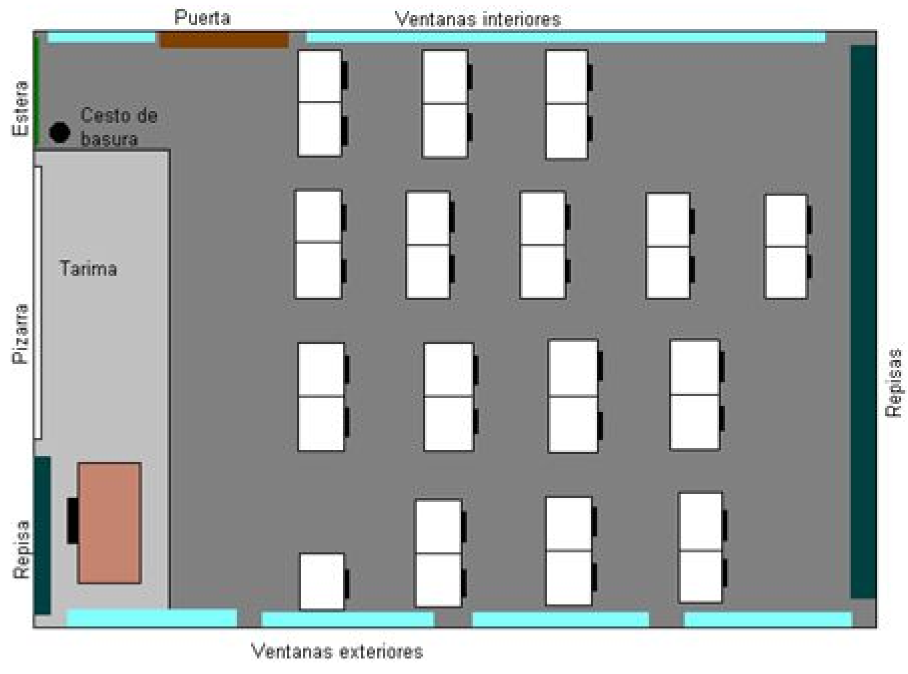


Figura 2: Aula correspondiente a 5º año "A".

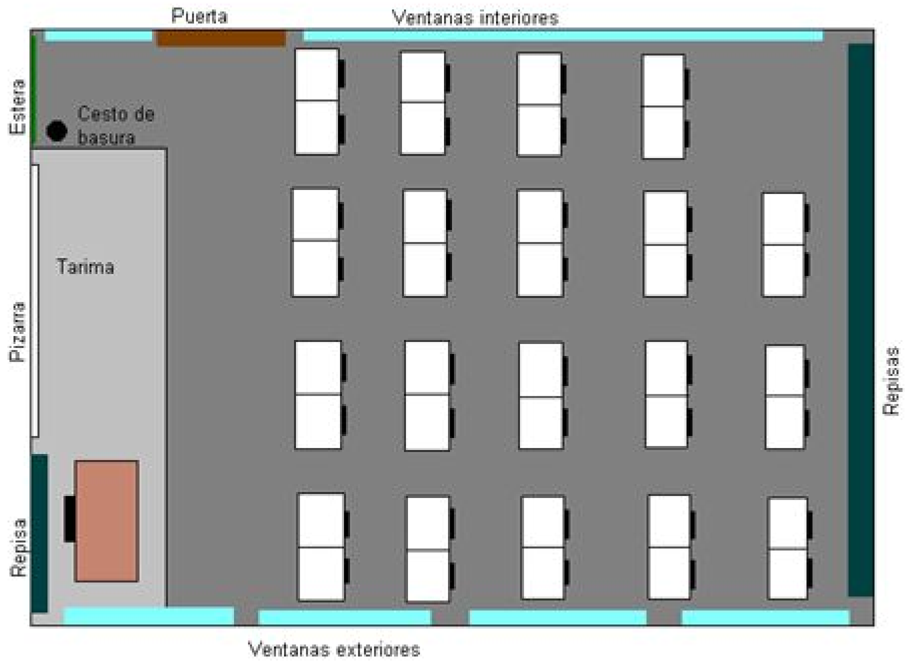


Figura 3: Aula correspondiente a 5º año "B".

1.3. Observaciones de clases

Previo al inicio de nuestras prácticas, realizamos observaciones de los cursos con los cuales trabajamos. Las mismas tuvieron lugar los días 22, 26 y 29 de mayo. Los días lunes 22 y viernes 26 observamos exclusivamente las clases de matemática mientras que el día lunes 29 de mayo desarrollamos una observación de día completo.

En cuanto las alumnas ingresaban al colegio, se llevaba a cabo el saludo con los directivos en el patio de la planta baja (si el clima así lo permitía), realizaban una oración, y de este modo se daba por iniciada la jornada escolar. Luego las alumnas acudían a sus aulas para comenzar el cursado. Esta actividad era supervisada por las preceptoras, y no contaba con la participación de los docentes, realizándose en los primeros diez minutos a partir del ingreso.

Una vez en el curso, la preceptora tomaba asistencia previo al toque de timbre de inicio de actividades, dejando el parte oficial con las inasistencias y escribiendo en el pizarrón los apellidos de las alumnas ausentes.

Luego la docente saludaba a las alumnas para comenzar la clase, la misma procuraba estar al mismo nivel que sus alumnas, por lo que no se paraba en la tarima del aula, requiriendo que las alumnas estén de pie.

En general, el ambiente de clase era muy armónico y las alumnas resultaban muy participativas. Eran curiosas, solidarias y muy respetuosas en la mayor parte del tiempo de cursado. Además, colaboraban en la realización de actividades, como así también reflexionaban y criticaban sobre aspectos de la materia.

En cuanto a la relación entre la docente y sus alumnas, cabe destacar que la primera reconocía a la mayoría por sus nombres, como también advertía las capacidades individuales de cada una en relación con la materia. El trato entre ellas era cordial; sabía imponer el respeto en la clase, distinguiendo aquellos momentos que eran para realizar actividades matemáticas de aquellos que no. Muy pocas veces la docente se disgustó con las alumnas por faltas de respeto o por encontrarse conversando entre ellas, sobre todo cuando la clase era en las últimas horas de la jornada.

1.4. Los recursos empleados.

Los recursos de los que disponían las aulas eran el pizarrón de acrílico blanco y borrador, cada docente debía llevar sus fibrones. Además, disponían de un televisor LCD con vídeo. La bibliografía con que trabajaban las alumnas variaba dependiendo la materia: en algunos casos solían ser libros, en otros apuntes realizados por el docente.

En la clase de matemática trabajaban con guías teórico-prácticas elaboradas por la docente quien le hacía entrega, días antes de comenzar con el nuevo tema, a una alumna que era la encargada de las fotocopias para que todas dispongan del material al momento de la clase. Cabe destacar que las alumnas no sólo contaban con estas guías sino que otro recurso importante era su carpeta donde resolvían las actividades planteadas, como así también tomaban nota de todo lo que se escribía en la pizarra y que, eventualmente, podía no estar en el apunte.

Otro de los recursos utilizados por la docente de matemática eran los software *Graphmatica* y *GeoGebra*, es por ello que el desarrollo de sus clases no siempre fue en el aula sino que a veces las mismas se dictaban en el laboratorio de computación.

1.5. Las alumnas y sus actitudes con los docentes.

Durante la observación de día completo, no sólo advertimos el comportamiento de las alumnas en cada espacio curricular distinto del área matemática sino también el desarrollo de las clases de los diversos profesores.

En cuanto a lo primero, vivenciamos actitudes similares de ambos cursos con los docentes, como también escenarios diferentes, dado que las alumnas tuvieron evaluación, repaso para evaluación, lecciones orales, clase diaria de algunas materias y clase de matemática. En la Figura 4 mostramos las asignaturas observadas en ambos cursos.

5° A	5° B
Física	Gestión
Historia	Historia
Matemática	Lengua
Música	Matemática
Química	Música

Figura 4: Materias presenciadas en observación de día completo.

Durante el proceso de evaluación, las alumnas disponían los bancos de manera individual, uno detrás de otro, quedando algunos sobre la tarima donde se encontraba la pizarra. Durante el desarrollo de la misma, el clima fue silencioso, siendo interrumpido el mismo solamente para realizar consultas a la docente o pedir algún útil escolar a una compañera. Posterior a finalizar el examen, las alumnas se retiraban de la clase al pasillo donde, en varias ocasiones, se producía barullo que molestaba a las compañeras, por lo que los docentes debían solicitar silencio.

Durante el repaso para la evaluación, las alumnas interrogaban a la docente sobre los temas, preguntaban sobre conceptos que no se comprendieron y se trabajaba en un clima de colaboración, donde se ponían en común los conceptos e información.

En el desarrollo de las lecciones orales, si bien la docente evaluaba de manera individual, haciendo pasar a la pizarra, el resto de la clase debía estar atento a las preguntas que se realizaban, ya que no estaban dirigidas sólo a la alumna evaluada, sino que cualquiera podía llegar a responder.

En las restantes clases observadas hubieron algunas donde predominaba el ruido y la charla, en las que fue casi imposible escuchar el discurso de la docente, como también clases donde la profesora a cargo se encontraba en el banco y preguntaba desde allí, en un ambiente de silencio y cordialidad.

En cuanto al desarrollo de las clases, notamos que todos los docentes apelaban, en mayor o menor medida, a la participación de las alumnas. Dada la individualidad de cada profesor y del espacio curricular, notamos diferencias en los modos de dar la clase. Hubo quienes requirieron de más tiempo para organizar a las alumnas para comenzar con la actividad, algunos identificaban a las alumnas por sus nombres y otros por sus apellidos. Con los cambios de asignatura vislumbramos que el comportamiento del grupo variaba de acuerdo a la persona a cargo, por lo que hubieron clases más organizadas que otras.

Otra diferencia observada tiene que ver con la utilización de los recursos. En la mayoría de los casos el recurso más empleado era el pizarrón, pero en otras áreas como música, por ejemplo, contaban con instrumentos para trabajar, mientras que en historia y química disponían de libros de texto.

Por último, cabe destacar que durante el transcurso de la mañana comenzaba a evidenciarse el cansancio por parte de las alumnas, lo que daba lugar a conversación constante, no respondían a las preguntas de los docentes y participaban poco en clase. Sin embargo, más allá de lo mencionado, la clase de matemáticas conservaba un ambiente de trabajo constante.

2. Elaboración de la propuesta de enseñanza e implementación en el aula

2.1. Planificación de la docente

Para comenzar con nuestra planificación, previamente realizaremos un análisis del programa de contenidos del espacio curricular matemática para quinto año correspondiente al ciclo lectivo 2017. El programa completo se encuentra en el Anexo y contiene las siguientes unidades:

- Unidad Nº 1: Modelos funcionales cuadráticos. Los números complejos para interpretar las raíces no reales de las funciones polinómicas.
- Unidad Nº 2: Funciones polinómicas de grado mayor que 2.
- Unidad Nº 3: Números Irracionales especiales: Φ y π. (Seminario)
- Unidad Nº 4: La estadística como herramienta para el estudio de problemáticas no deterministas.

Para la selección del contenido de dicho programa se tiene en cuenta lo estipulado en el Diseño Curricular de la Provincia de Córdoba. La unidad Nº 1 está comprendida en el eje álgebra y funciones de cuarto y quinto año, la cual inicialmente retoma aspectos del eje números y operaciones, a fin de poder reconocer la insuficiencia de los números reales para resolver ecuaciones cuadráticas cuyo discriminante es menor que cero. De este modo se introducen los números complejos.

En relación a la unidad Nº 2, se halla en el eje álgebra y funciones de cuarto y quinto año donde se analiza el comportamiento de funciones polinómicas de tercer y cuarto grado desde sus representaciones gráficas y sus fórmulas. Para ello es de utilización el software *Graphmatica*.

En lo que respecta a la Unidad Nº 3 se encuentra dentro del eje geometría y medida de quinto año con orientación en ciencias naturales en tanto no aparece en el diseño de la orientación ciencias sociales y humanidades. Aquí se prevé trabajar con el software *GeoGebra.* El número irracional Φ es abordado desde su significado geométrico como media y extrema razón mientras que π como cociente entre la longitud de la circunferencia y el diámetro.

2.2. Planificación para las prácticas

El tema a abordar en nuestras prácticas lo podemos ubicar en la Unidad Nº 3: números irracionales especiales: Φ y π de la planificación anual de la docente a cargo del curso, centrándonos en el número irracional Φ. Para realizar nuestra planificación recurrimos a las categorías presentadas por Gvirtz y Palamidessi (2008) en las que proponen un conjunto de variables a considerarse en la planificación de la enseñanza.

2.2.1. Metas y objetivos.

Para comenzar con nuestra planificación, en primer lugar, definimos cuáles serían nuestras intenciones en el desarrollo de nuestras prácticas. Para ello nos basamos en el programa de la docente y en el diseño curricular de la Provincia de Córdoba destinado a las orientaciones de ciencias sociales y humanidades (Tomo 3) y ciencias naturales (Tomo 4), procurando a la vez entrelazar los objetivos específicos que, como futuros docentes, queríamos alcanzar. Las metas y objetivos que enunciamos, son:

- caracterizar al conjunto de los números irracionales;
- hacer generalizaciones y realizar demostraciones formales;
- utilizar tecnologías digitales para conjeturar y validar mediante el uso reflexivo de las mismas;
- generar estrategias de cálculo, donde puedan validar los razonamientos y procedimientos;
- incorporar el lenguaje matemático de modo de poder interpretar, comunicar y reproducir información matemática de forma oral y escrita para resolver problemas;
- fomentar el trabajo en equipo, donde la participación de cada uno de los integrantes enriquezca la producción;
- trabajar en un proyecto matemático como actividad de producción, donde las alumnas desarrollen las capacidades de conjeturar, discriminar la información pertinente, encontrar una solución y poder dar respuesta a una problemática;
- definir Φ dentro del contexto geométrico y realizar algunos aportes desde el aspecto numérico;
- identificar la presencia de Φ en diversos contextos como el arte, la música, la arquitectura, y no sólo como un objeto matemático.

2.2.2. Selección de contenidos.

Para llevar a cabo la selección de contenidos, tuvimos en cuenta algunos aspectos importantes:

- el tema a desarrollar no era común en las planificaciones institucionales;
- la diversidad de abordajes existentes para definir Φ (geométrica y numéricamente);
- la gran variedad de conceptos nuevos que requeridos para abordarlo desde las perspectivas antes mencionadas.

Por otro lado, acudimos a las observaciones de clase realizadas en la materia "Didáctica especial y taller de matemática" en las cuales evidenciamos la temática a abordar en las prácticas, donde la docente presentaba el tema desde un aspecto numérico (Sucesiones numéricas. Caracterización de una sucesión numérica a partir de sus regularidades. Definición por recurrencia o mediante su término general. Estudio de un caso particular: la sucesión de Fibonacci. Un número Irracional especial: Φ, como cociente entre términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci, y desde su significado geométrico como media y extrema razón). A fin de evitar realizar una reproducción de los contenidos observados en la misma, decidimos desarrollar nuestras prácticas priorizando el aspecto geométrico y aludir a lo numérico en menor grado.

Finalmente, los contenidos seleccionados fueron:

- números irracionales en la recta real;
- triángulos compañeros: construcción y partición que divide a uno de sus lados en proporción áurea;
- Φ definido como la partición de un segmento en extrema y media razón. Verificación;
- rectángulo áureo: construcción y verificación, aproximación a la espiral logarítmica mediante la espiral rectangular;
- el pentágono regular inscrito en una circunferencia; Φ como cociente entre la diagonal y un lado del pentágono;
- el decágono regular inscrito en una circunferencia; aproximación a Φ mediante el cociente entre el radio de la circunferencia y el lado del decágono;
- aproximación a Φ mediante el cociente de medidas del cuerpo humano;
- identificación de los objetos estudiados en la naturaleza, el arte y la arquitectura.
- Sucesión de Fibonacci como solución a un problema de modelización. Φ como cociente de los términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci.

2.2.3. Organización y secuenciación de los contenidos.

En nuestras prácticas distinguimos tres etapas bien diferenciadas:

- en la primera desarrollamos actividades de exploración donde las alumnas, mediante la utilización del software *GeoGebra*, obtuvieron valores aproximados a Φ en diferentes figuras geométricas;
- en una segunda etapa institucionalizamos conceptos relacionados con la primera etapa, definimos Φ como proporción de un segmento en extrema y media razón y trabajamos con triángulos compañeros, rectángulo áureo, espiral áurea rectangular, relacionando estos conceptos con el arte, la arquitectura y la naturaleza; y
- en la tercera etapa realizamos una actividad de modelización, donde las alumnas trabajaron de manera independiente con un problema, cuya solución eran los valores correspondientes a la sucesión de Fibonacci, la cual posteriormente institucionalizamos a fin de aproximarse a Φ mediante el cociente de los términos sucesivos de la misma.

2.2.4. Las tareas y actividades.

Para la selección de tareas y actividades consideramos la clasificación que propone Ponte (2005), que tienen en cuenta el grado de dificultad (desafío elevado o reducido) y su estructura (de carácter cerrado o abierto).

Las actividades fueron presentadas en fotocopias a fin de agilizar el desarrollo de la clase, eran leídas en voz alta aclarando dudas que pudiesen surgir, para luego trabajar en en aquellas. Brindamos un tiempo para que las alumnas resolvieran las mismas, alentando a que trabajasen de manera conjunta con la compañera de banco. Finalmente, seleccionamos alumnas para que presentaran las resoluciones en la pizarra, poniendo en común las ideas y conceptos que atravesaron la actividad .

2.2.5. Selección de materiales y recursos.

En cuanto a los recursos utilizados en nuestras prácticas, podríamos mencionar:

- elementos tecnológicos: calculadora para agilizar los cálculos y centrarse más en lo conceptual; software *GeoGebra*, el cual permitió que las alumnas pudieran interactuar con los objetos matemáticos; teléfonos celulares, donde buscaban información que pudiese requerirse durante el desarrollo de la clase;

- guía teórico-práctica: que presentaba definiciones y espacios para completar con demostraciones, actividades e imágenes pertinentes a la temática;
- carpeta, donde las alumnas tomaban registro de la información adicional que brindábamos;
- elementos de geometría: compás, regla, escuadra, transportador, importantes para las construcciones de las figuras geométricas.

2.2.6. La organización del escenario y la participación de las alumnas.

El modo de trabajar que determinamos para nuestras prácticas, remite a lo observado en relación a cómo la docente desarrollaba sus clases.

Dada la participación percibida en las observaciones, decidimos que durante las clases teóricas presentaríamos los conceptos y llegaríamos a fundamentarlos con la colaboración de las alumnas, generando así debates e intercambios de ideas. También contemplamos una colaboración constante entre ellas al momento de resolver los ejercicios que posteriormente presentaban en la pizarra.

Para las actividades grupales, pretendíamos generar escenarios de debate e intercambio de ideas, donde nuestra participación consistiría en regular las discusiones y generar aportes que guiaran a las alumnas.

Dada la cantidad de alumnas por curso, durante los debates, el docente practicante debería estar atento al fondo del curso, ya que era donde generalmente se distraían o no escuchaban los aportes de sus compañeras.

Las clases se desarrollarían en un clima de colaboración constante, donde las alumnas expondrían sus ideas y participarían en la solución de las actividades y, en ciertas ocasiones, podrían trabajar con la compañera de banco a fin de evacuar dudas y discutir sobre la resolución de las mismas.

2.3. Prácticas

En el presente apartado relataremos cómo llevamos a cabo nuestra planificación en el desarrollo de las prácticas. En primer lugar contrastamos la planificación inicial con lo realmente sucedido y luego realizamos un relato de lo ocurrido con la propuesta presentada a las alumnas.

2.3.1. Planificación.

A continuación presentamos dos tablas, la primera de ellas contiene la planificación previa al inicio de las prácticas mientras que la segunda contiene el cronograma real de las clases dictadas.

Fecha	Planificación
04/08 Clase 1	Presentación de la metodología de trabajo. Repaso de números irracionales. Construcción de triángulos compañeros.
07/08 Clase 2	Guía Práctica N°1: extrema y media razón, rectángulo áureo, triángulos compañeros, pentágono regular y estrella pentagonal (Laboratorio de Informática-Software *GeoGebra*).
11/08 Clase 3	Proporción áurea como extrema y media razón y obtención del valor de Φ a partir de la ecuación cuadrática x^2-x-1=0. Generalización a todo segmento. Rectángulo áureo y espiral Logarítmica.
14/08 Clase 4	Relación de lo trabajado en la Guía Práctica N°1 con Φ. Espiral áurea triangular. Presentación y trabajo en la Guía Práctica N°2.
18/08 Clase 5	Trabajo con la guía práctica N°2.
21/08	Feriado del 17 de Agosto: Paso a la inmortalidad del General José de San Martín.
25/08 Clase 6	Actividad Medida estándar del cuerpo humano. Relación de Φ con el arte y la arquitectura (Le Corbusier).
28/08 Clase 7	Exposición por parte de las alumnas de la resolución de la Guía práctica N°2.
01/09 Clase 8	Sucesiones. Problema de los conejos. Sucesión de Fibonacci. Búsqueda del término general de la sucesión de Fibonacci. Aproximación a Φ como cociente de los términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci.
04/09 Clase 9	Repaso.
08/09 Clase 10	Evaluación.
11/09	Feriado: Día del maestro.
15/09	Devolución de evaluaciones.

Figura 5: Cronograma de las clases planificadas.

Fecha	Efectivamente desarrollado
04/08 Clase 1	Presentación de la metodología de trabajo. Repaso de números irracionales. Construcción de triángulos compañeros.
07/08 Clase 2	Guía Práctica N°1: extrema y media razón, rectángulo áureo, triángulos compañeros, pentágono regular y estrella pentagonal (Laboratorio de Informática-Software *GeoGebra*).
11/08 Clase 3	Guía Práctica Nº 1. (Laboratorio de Informática-Software *GeoGebra*).
14/08 Clase 4	Proporción áurea como extrema y media razón y obtención del valor de Φ a partir de la ecuación cuadrática x^2-x-1=0. Generalización a todo segmento. Relación de lo trabajado en la Guía Práctica N°1 con Φ. Rectángulo áureo: definición.
18/08 Clase 5	Rectángulo áureo: construcción y propiedades. Espiral áurea triangular. Presentación y trabajo en la Guía Práctica N°2.
21/08	Feriado del 17 de Agosto: Paso a la inmortalidad del General José de San Martín.
25/08 Clase 6	Guía Práctica Nº 2.
28/08 Clase 7	Guía Práctica Nº 2. Actividad Medida estándar del cuerpo humano.
01/09 Clase 8	Exposición por parte de las alumnas de la resolución de la Guía práctica N°2. Sucesiones. Problema de los conejos. Sucesión de Fibonacci. Aproximación a Φ como cociente de los términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci.
04/09 Clase 9	Repaso.
08/09 Clase 10	Evaluación.
11/09	Feriado: Día del maestro.
15/09	Devolución de evaluaciones.

Figura 6: Cronograma de clases efectivas.

Como podemos observar hubieron cambios en relación a lo planificado y lo que realmente sucedió. Uno de estos cambios tuvo que ver con la decisión de trabajar dos días, por pedido de la docente, en la actividad de *GeoGebra* que originalmente había sido pensada para uno solo; lo cual implicó un corrimiento y eventual recorte de contenidos en las clases posteriores.

2.3.2. Nuestras clases.

En este apartado realizaremos un breve relato de lo acontecido en las clases durante el periodo de prácticas y presentaremos los conceptos trabajados y las actividades realizadas, detallando los objetivos deseados para cada una.

Para cada una de las clases, redactamos un guión conjetural, el que Bombini (2002) define como:

> *Relato de anticipación, de género de "didáctica-ficción" que permite predecir prácticas a la vez que libera al sujeto en sus posibilidades de imaginarse una práctica maleable, dúctil, permeable a las condiciones de su producción, de frente a los sujetos que en ella participan.* (p. 5)

2.3.2.1. Clase 1

El primer día de clases realizamos una presentación de cómo serían las actividades que desarrollaríamos durante las prácticas e informamos acerca de la modalidad en que se llevaría a cabo la evaluación.

Comenzamos la clase repasando el origen de los números irracionales en la historia apelando a los conocimientos previos de las alumnas sobre conjuntos numéricos, lo cuales habían sido trabajados previamente, culminando con la definición de números irracionales.

Posterior a esto, trabajamos en la pizarra con la siguiente actividad:

<u>*Actividad*</u> <u>*1:*</u> *uno de los problemas que da origen a los números irracionales es establecer el valor de la diagonal de un cuadrado de lado uno. Realice dicho cálculo.*

Dicha actividad se trabajó mediante la aplicación del teorema de Pitágoras. En ambos cursos la construcción surgió naturalmente y algunas alumnas se ofrecieron a pasar para resolverlo en la pizarra.

Posteriormente, procedimos a dar una caracterización de los números irracionales, para continuar trabajando con la compañera de banco en las actividades 2 y 3.

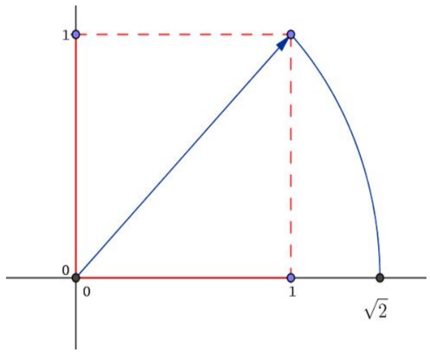


Figura 7: $\sqrt{2}$ en la recta real.

Actividad 2: Represente los siguientes números en la recta real, utilizando regla y compás.

a. $\sqrt{3}$ *b.* $\sqrt{5}$ *c.* $\sqrt{10}$

En la actividad 2, ítem (a) debían ubicar $\sqrt{3}$ en la recta real. Este resultó ser el caso más complicado para uno de los cursos, dado que uno de los catetos era $\sqrt{2}$, por lo que resolvimos entre todos en la pizarra. Para eso analizamos el siguiente problema:

Actividad 2 bis: calcular la longitud de la diagonal de un cubo cuyas aristas tienen longitud igual a 1.

Apelando a la actividad 1, resultó natural identificar que la medida de la diagonal de la base del cubo es $\sqrt{2}$. Finalmente, $\sqrt{3}$ pudo pensarse como la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son una arista del cubo y la diagonal de la base, es decir, un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y $\sqrt{2}$.

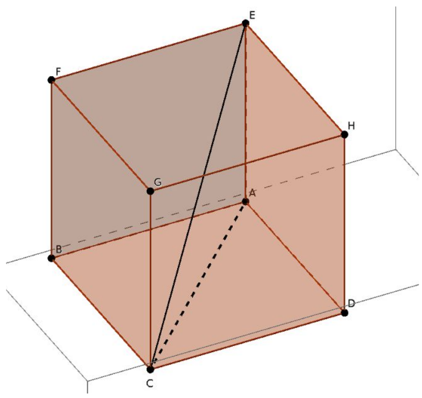


Figura 8: $\sqrt{3}$ como diagonal de un cubo de lado 1.

En el otro curso surgió el siguiente razonamiento: se tomó la construcción de $\sqrt{2}$, se trazó la perpendicular al eje x que pasa por $\sqrt{2}$, formando un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{2}$ y 1. Realizaron este procedimiento nuevamente para obtener $\sqrt{3}$ y así fueron construyendo los sucesivos números racionales, como puede verse en la Figura 9.

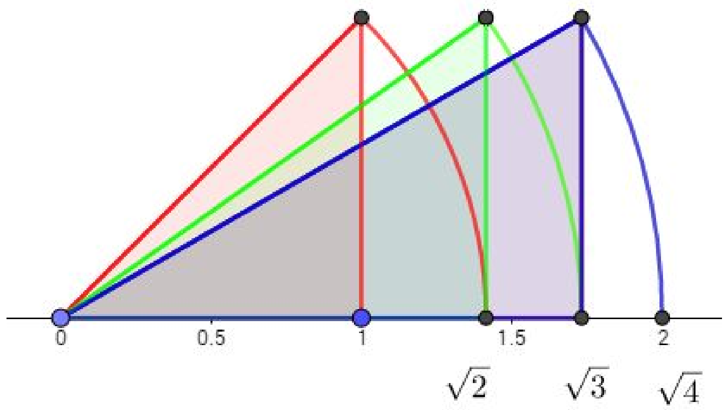


Figura 9: Construcción de raíces cuadradas a partir del gráfico de $\sqrt{2}$.

Para la actividad 1, ítem (b), debían ubicar $\sqrt{5}$ en la recta real. Algunas alumnas consideraron un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 2, mientras que otras tomaron catetos de longitud $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

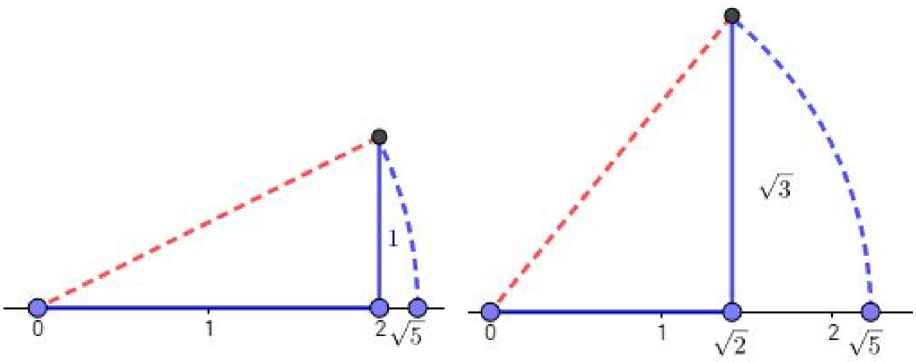


Figura 10: $\sqrt{5}$ como hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos: 1 y 2, o $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

Para ubicar $\sqrt{10}$ algunos de los catetos identificados fueron 1 y 3, o ambos $\sqrt{5}$.

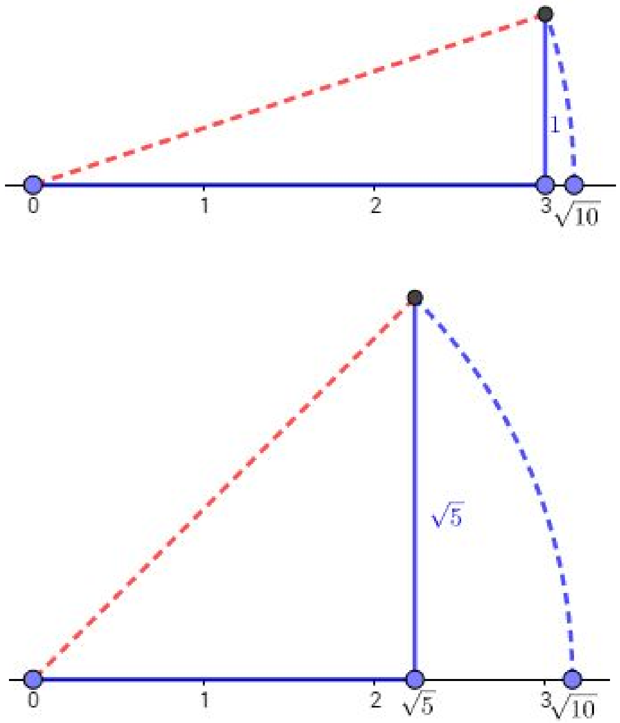
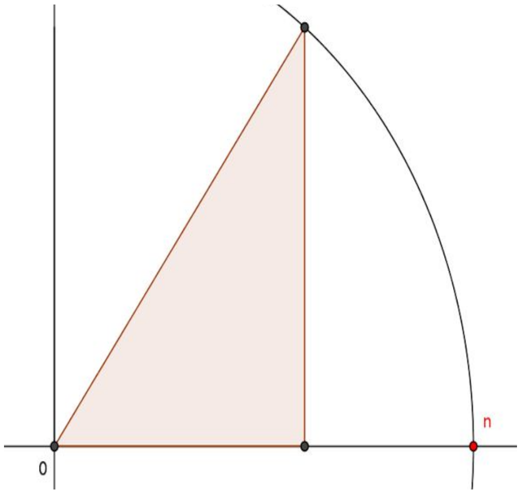


Figura 11: $\sqrt{10}$ como hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 y 3, o ambos $\sqrt{5}$.

Actividad 3: Sobre una recta numérica se dibujó un triángulo rectángulo, como se muestra a continuación. Si se sabe que el segmento que va desde 0 hasta n mide $\sqrt{14}$ *y uno de los catetos mide 3, ¿cuál es la medida del otro cateto?*



En la actividad 3 se trabajó de manera análoga, pero en este caso, los datos fueron las medidas de la hipotenusa y uno de los catetos. Aquí las alumnas utilizaron el teorema de Pitágoras para despejar el valor del cateto restante obteniendo como resultado $\sqrt{5}$.

Una vez finalizadas las actividades de los números irracionales abordamos el tema “Triángulos compañeros”, siendo estos aquellos cuyos ángulos miden 36º, 72º y 72º, o bien 108º, 36º y 36º. En clases posteriores se evidenciará que en estos triángulos también está presente la proporción áurea, dado que partiendo cada uno de ellos se da origen no sólo a dos nuevos triángulos compañeros sino que además uno de sus lados queda dividido en extrema y media razón. La construcción de los mismos los realizamos en la pizarra repasando cada uno de los pasos.

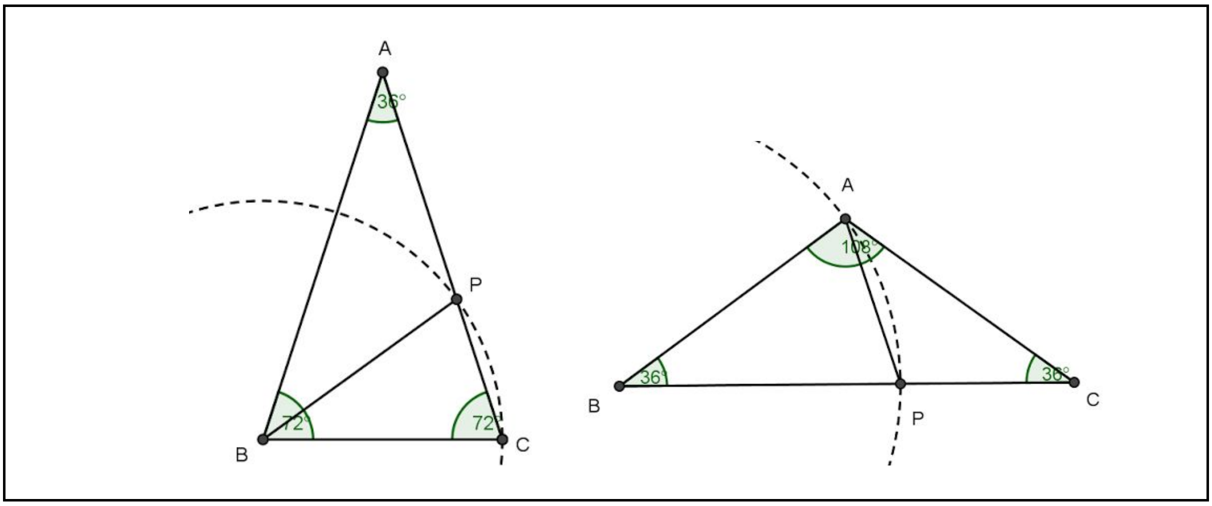


Figura 12: Partición de triángulos compañeros..

Se solicitó a las alumnas que verificaran que los triángulos obtenidos tras la partición fueran compañeros, es decir que cada uno poseyera ángulos con las medidas correspondientes.

Con esto finalizamos la clase.

2.3.2.2. Clase 2.

Esta clase tuvo lugar en la sala de Informática del colegio. La intención fue que las alumnas trabajaran en *GeoGebra* con diferentes figuras y sus propiedades, para que de esta manera fueran aproximándose al valor del número de oro. Cabe destacar que en ningún momento nombramos a este último, sino que apuntamos a su descubrimiento a partir de estas actividades, para luego institucionalizarlo en el aula.

Una vez en el aula de informática, saludamos a las alumnas y entregamos la guía, la cual desarrollarían de manera grupal.

La guía evaluable, que mostramos a continuación, constó de dos partes; una orientada a trabajar con segmentos en extrema y media razón, rectángulos áureos y sus propiedades; y la otra basada en construcciones geométricas.

Guía práctica N°1.

Criterios de evaluación:

- interpretación de las conjeturas solicitadas y de los gráficos presentados;
- relación entre los conceptos teóricos y el protocolo de construcción en las figuras geométricas;
- trabajo grupal;
- presentación en tiempo y forma de la guía y de las actividades.

Esta guía se desarrollará en el laboratorio de informática mediante la utilización del software *GeoGebra*, en grupos de 2 o 3 alumnas. Serán requerimientos la utilización de calculadora y una hoja donde presentarán los resultados obtenidos y los cálculos auxiliares realizados durante la actividad.

<u>Actividad 1:</u>

1) Ingrese al archivo “Segmento y figuras” y realice las siguientes actividades:

se encontrará con un segmento $\overline{AB}$ que tiene un punto C sobre éste. Seleccione la herramienta “Elige y mueve”, toque sobre el punto C y muévalo e identifique cada uno de los segmentos en relación con su medida.

Describa qué es lo que sucede con los cocientes $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{c}$ representados en la pantalla a medida que mueve el punto. Verifique si es posible que los cocientes $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{c}$ se aproximen al mismo valor.

Nota: no es necesario que el valor sea exacto, busque un intervalo en el cual éstos se aproximen lo suficiente.

2) Presione el botón “Figura 1” que se encuentra sobre la pantalla de *GeoGebra* y responda:

a. ¿Qué tipo de figura es la que apareció?
b. Fije el punto C en el intervalo que se obtuvo en el ítem (1), realice el cociente entre el lado mayor y el lado menor de la figura y relaciónelo con el intervalo obtenido en el ítem mencionado.
c. Mueva el punto C y verificará que el tamaño de los lados de la figura se modifica. Ponga el punto en tres lugares diferentes y calcule el cociente entre los lados que poseen diferentes medidas.
d. Relacione los datos obtenidos en los incisos (b) y (c) con el intervalo obtenido en 1

3) Presione el botón “Figura 2” que se encuentra sobre la pantalla de *GeoGebra* y responda:

a. ¿Qué representa la semirrecta AG en la figura? Mueva el punto C y describa qué sucede con la semirrecta.
b. Mueva el punto C hasta lograr que la semirrecta AG se interseque con el punto J. ¿Cuál es la posición que ocupa el punto C cuando esto sucede?

<u>Actividad 2:</u>

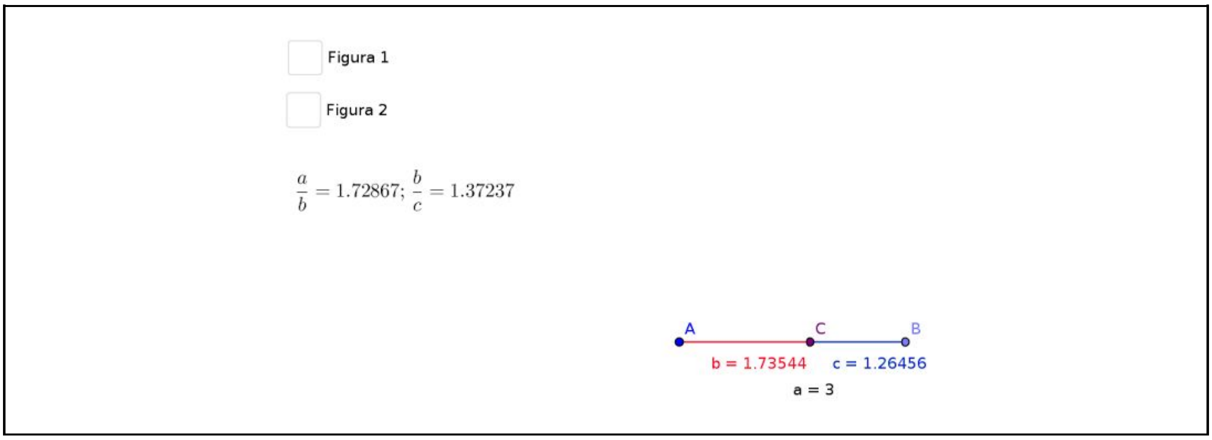
a. Realice la construcción de los triángulos compañeros (cuyas formas angulares son 36º,72º,72º y 108º,36º,36º) con sus respectivas particiones.
b. Tome, en cada caso, los dos triángulos en que quedó partido el triángulo original y realice la división entre el lado mayor y el lado menor de cada uno de ellos. ¿Qué observa?

<u>Actividad 3:</u>

a. Construya una circunferencia e inscriba dentro de ella un *pentágono regular*. Tome un vértice y trace los segmentos que unen a este con los vértices no consecutivos Estos segmentos se denominan *diagonales*. Si realiza el cociente entre una de las diagonales obtenidas y un lado del pentágono, ¿qué obtiene como resultado?
b. Construya la *estrella pentagonal* uniendo cada uno de los vértices del pentágono con los vértices no consecutivos. ¿Puede identificar dentro de la estrella, a partir de los ángulos, alguna de las figuras trabajadas anteriormente en la guía?

La actividad 1 se dividió en tres partes:

En la primera parte solicitamos que ingresaran al archivo “segmento y figuras”; en éste se presentaba un segmento $\overline{AB}$ que tenía un punto C sobre él, que al moverlo modificaba la longitud de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$. El segmento que presentamos a cada grupo tenía diferentes longitudes, permitiendo que las alumnas realizaran diferentes conjeturas sobre un mismo problema, las cuales resultaron similares.



<u>Figura 13:</u> Actividad 1 (a): en el margen izquierdo los botones que habilitan las figuras trabajadas en los ítems (b) y (c), y los cocientes entre los segmentos a y b (AB/AC) y los segmentos b y c (AC/CB); en el margen inferior derecho el segmento AB .

Para el siguiente ítem, debían presionar sobre el recuadro “Figura 1”. Al hacer esto, aparecía un rectángulo con base en el segmento $\overline{AB}$, como puede observarse en la figura 14, cuyo tamaño variaba cuando se modificaba la posición del punto C. Si el segmento $\overline{AB}$ se encontraba partido en extrema y media razón, el rectángulo era áureo, lo que las alumnas verificaron al realizar el cociente entre el lado mayor y el lado menor del mismo, perteneciendo este valor al intervalo que obtuvieron en el ítem (a). Sucedió también que al no encontrarse el punto C ubicado de manera que el segmento estuviera en extrema y media razón, el valor del cociente entre los lados mayor y menor no pertenecía al intervalo obtenido en el ítem (a).

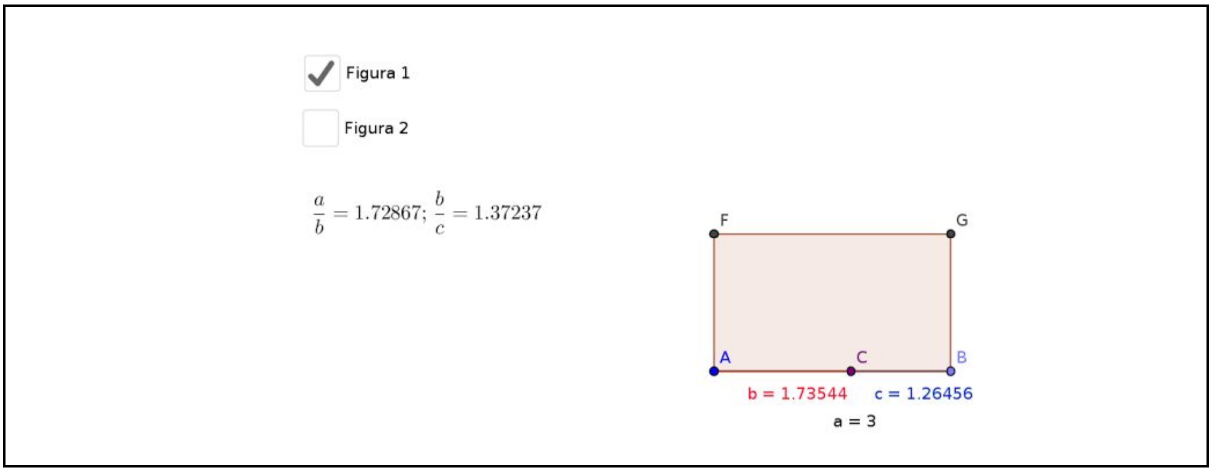


Figura 14: Pantalla que se obtiene al presionar el botón "Figura 1".

En la última parte de esta primera actividad las alumnas trabajaron con una propiedad de rectángulo áureo. Presionando el botón "Figura 2", aparecía un segundo rectángulo, semejante al primero, ubicado junto a él y rotado 90º, como puede observarse en la Figura 15. También aparecía la prolongación de la diagonal AG del primer rectángulo. Dicha prolongación debía pasar por el punto J, lo cual sucedía solo cuando los rectángulos eran áureos.

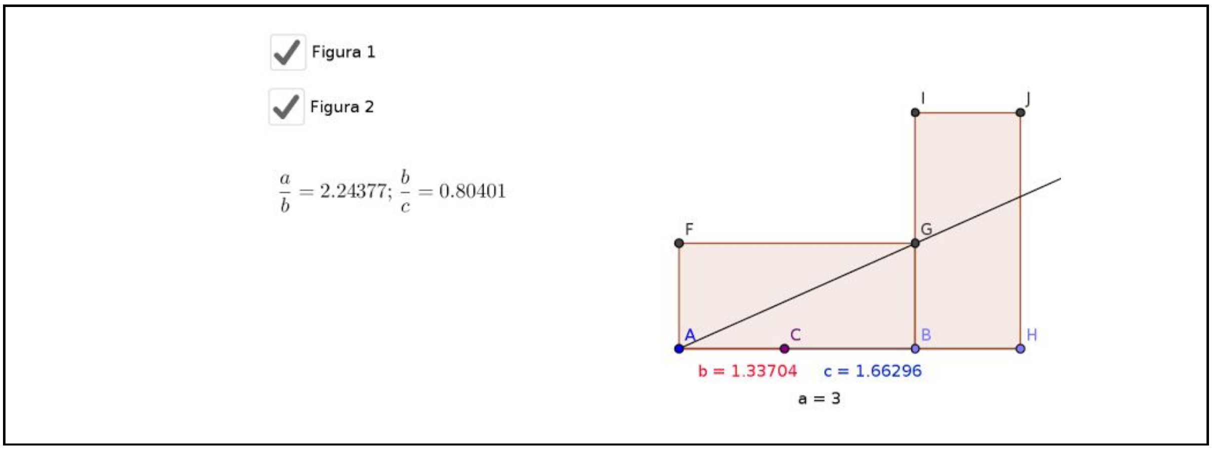


Figura 15: Rectángulos semejantes que se obtienen al presionar el botón "Figura 2".

Para la actividad 2 las alumnas reprodujeron en *GeoGebra* la construcción de los triángulos compañeros realizada en la pizarra en la clase 1.

Una vez que construyeron los triángulos compañeros, inciso (a), en el punto (b) hicieron uso de la herramienta "Distancia o longitud", que en muchos casos desconocían, para tomar las medidas de los lados de cada uno de los triángulos en que quedó partido el triángulo original. Calcularon el cociente entre los lados mayor y menor, concluyendo que el valor obtenido era una aproximación del valor obtenido en la Actividad 1.

Luego resolvieron la actividad 3:

En el inciso (a) las alumnas graficaron una circunferencia cualquiera; luego, algunas realizaron el cociente $360°/5$ para calcular la medida de cada ángulo central y trazar finalmente los vértices del pentágono regular. En otros casos, utilizaron directamente la herramienta que les permitía trazar polígonos regulares.

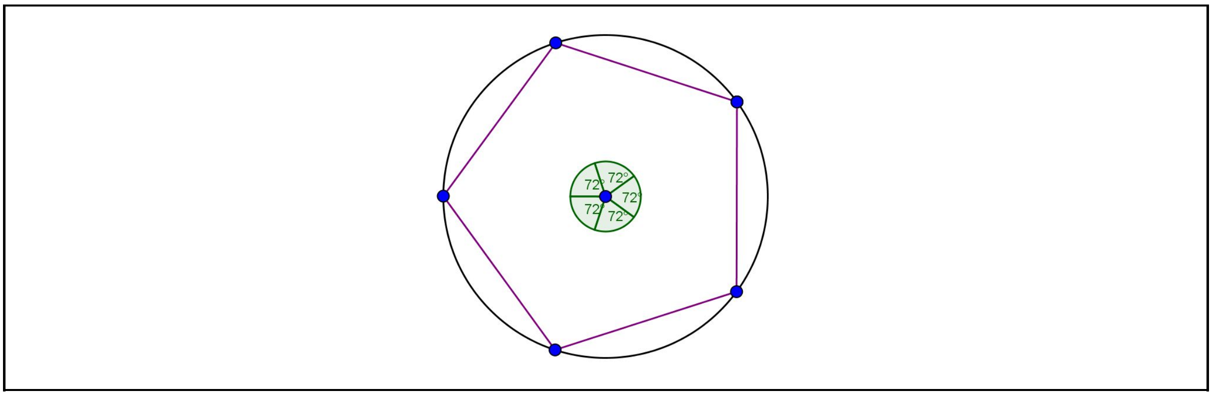


Figura 16: Pentágono regular.

Luego trazaron las diagonales desde un vértice y tomaron la medida de una de ellas y de uno de los lados del pentágono, para realizar el cociente entre ambos.

En el ítem (b) trazaron todas las diagonales del polígono y de esta forma les quedó constituida la estrella pentagonal. Las alumnas identificaron los triángulos compañeros dentro de la estrella pentagonal; además, notaron que aparecía el pentágono dentro de ella, tal como ilustramos en la Figura 17. También identificaron triángulos compañeros que estaban dentro del pentágono, pero fuera de la estrella pentagonal.

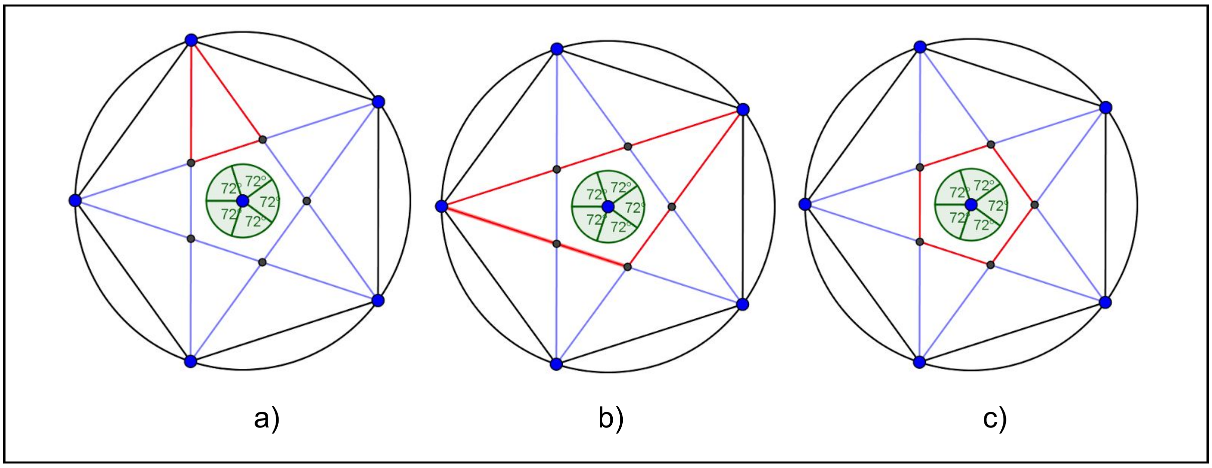


Figura 17: a) Triángulo de la forma 36º, 72º y 72º dentro de la estrella pentagonal; b) Triángulo de la forma 108º, 36º y 36º dentro de la estrella pentagonal; c) Pentágono regular dentro de la estrella pentagonal.

Durante el desarrollo de las actividades, estuvimos pasando por las computadoras, verificando que los enunciados fueran entendidos de manera clara y observando el desenvolvimiento de las alumnas.

2.3.2.3. Clase 3.

Esta clase se llevó a cabo en el laboratorio puesto que las alumnas continuaran trabajando sobre la Guía Práctica Nº 1.

Previendo que existía la posibilidad de que algunas de las alumnas finalizaran antes con la guía de actividades, ideamos la actividad 4 e hicimos entrega de la misma a los grupos que iban culminando. Cabe mencionar que el proceso de construcción resultó análogo al del pentágono regular.

Actividad 4 (Continuación de la Guía Práctica Nº 1):
Construya una circunferencia e inscriba en ella un *decágono regular*. Tome el centro de la circunferencia y trace los segmentos que unen a este con los vértices.

a) Si realiza el cociente entre la medida del radio de la circunferencia circunscripta y la del lado del decágono regular. ¿Qué valor obtiene?
b) Trazando algunas diagonales del decágono, ¿puede identificar dentro del mismo alguna de las figuras trabajadas?

Finalmente realizamos una puesta en común en la que discutimos sobre las actividades trabajadas y los resultados obtenidos en cada una de ellas. Esto con la finalidad de hacerles notar a las alumnas que dichos valores estaban relacionados entre sí.

Con esto finalizamos la clase.

2.3.2.4. Clase 4

Como introducción a la clase interrogamos a las alumnas acerca de los conceptos que veníamos trabajando y posteriormente utilizamos una pequeña reseña histórica de Euclides, comentando que uno de sus libros, “Los elementos”, brindaba la definición de segmento partido en extrema y media razón. Analizando la definición, realizamos una representación gráfica:

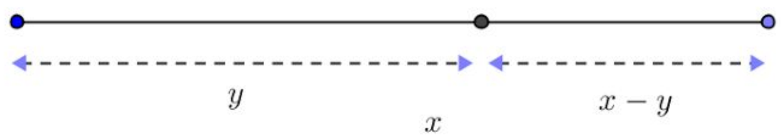


Figura 18: Segmento de longitud x dividido en los segmentos de longitud y y $x-y$.

Según la definición, un segmento se encuentra dividido en extrema y media razón si se verifica que $\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}$ y operando obtenemos $x^2 - xy - y^2 = 0$. Dividiendo ambos miembros por y^2, obtenemos $\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} - 1 = 0$. Aquí surgió la siguiente pregunta:

Alumna: ¿ por qué divide por y^2 y no por x^2 ?

Practicante: observemos que queremos encontrar solución a la siguiente igualdad: $\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}$, por lo que necesitamos conocer el valor de $\frac{x}{y}$, no el de $\frac{y}{x}$ que es lo que obtendremos si dividimos por x^2. Notemos que si llamamos $z = \frac{x}{y}$, tendremos la relación entre la longitud del segmento total y la del segmento mayor.

Realizando este cambio de variable, obtuvimos $z^2 - z - 1 = 0$, ecuación de segundo grado que las alumnas resolvieron, utilizando conceptos de la unidad N° 1. . Las soluciones encontradas fueron $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ y ambas representan los valores para los cuales se satisface que $\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}$. Aquí fue necesario recordar que tanto x como y representan medidas, por lo que solo tiene sentido considerar la solución positiva: $z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, es decir, $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Después de arribar a este resultado, las alumnas calcularon el valor de este cociente, advirtiendo que era el número obtenido en las actividades de la guía práctica N°1. Es aquí donde definimos el número áureo:

<u>Definición</u>: llamaremos Φ *(phi) al número irracional cuyo valor es* $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618033...$

El número Φ *se conoce también como número áureo, número de oro, proporción áurea, divina proporción, razón áurea, razón dorada, razón extrema y media.*

Posteriormente realizamos la siguiente pregunta, ¿cómo determinar el punto que divide a un segmento en extrema y media razón?. Para esto, introdujimos la Teoría de la Construcción que explica Corbalán (2010) y realizamos la demostración algebraica en la pizarra. Dicha construcción permite dividir a cualquier segmento en extrema y media razón.

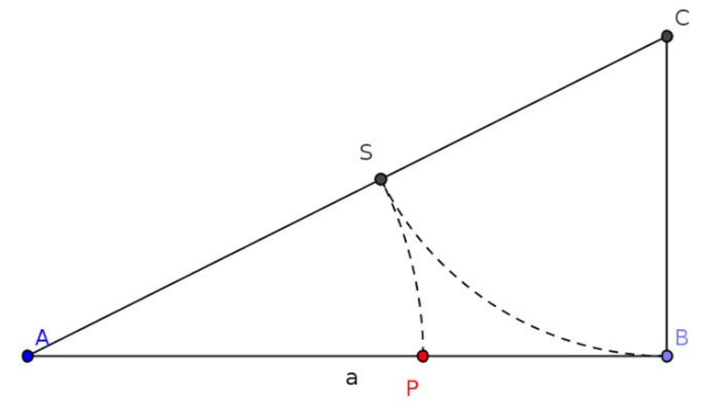
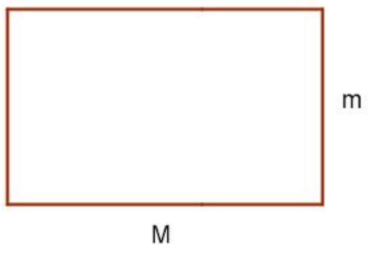


Figura 19: Segmento $\overline{AB}$ dividido en extrema y media razón: $\overline{AP}/\overline{PB} = \Phi$.

Una vez culminado esto, introdujimos el concepto de rectángulo áureo y lo relacionamos con lo trabajado en la guía práctica N°1:

Definición: *Se dice que un rectángulo es áureo cuando la relación entre sus lados mayor y menor (en este orden) es Φ. Es decir, si tenemos un rectángulo cuyos lados mayor y menor son M y m respectivamente, realizando el cociente entre ellos obtenemos el número de oro:*

$$\frac{M}{m} = \Phi$$



Con esto finalizamos la clase.

2.3.2.5. Clase 5.

Ingresamos al aula y reanudamos lo trabajado en las clases previas, entre otras cosas, la definición de Φ (retomando el concepto de segmento en extrema y media razón) y de rectángulo áureo. Posterior a esto, realizamos la construcción de este último en la pizarra y demostramos algebraicamente que efectivamente era áureo.

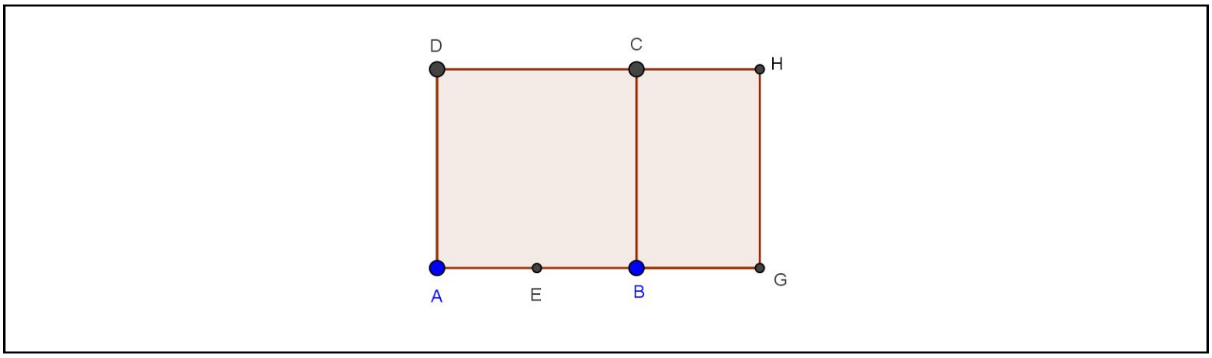


Figura 20: Rectángulo áureo.

Luego presentamos algunas propiedades de estos rectángulos, las cuales estaban enunciadas en la guía de actividades y fueron verificadas sobre la figura trazada en la pizarra.

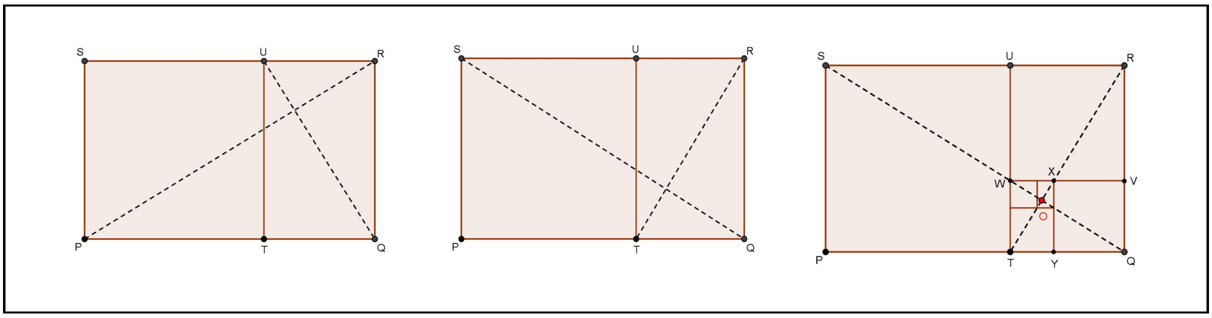


Figura 21: Diagonales de los rectángulos áureos que se cortan en ángulo recto; diagonales de los sucesivos rectángulos áureos.

Finalmente realizamos las particiones que permiten obtener los infinitos rectángulos áureos, a fin de culminar con el trazado de la espiral áurea rectangular, como puede observarse en la Figura 22.

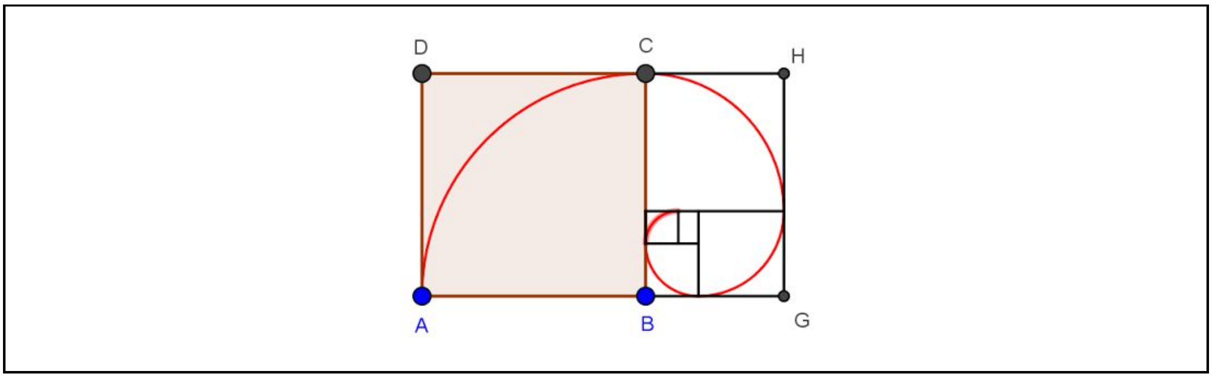


Figura 22: Espiral áurea rectangular.

Por último, mencionamos que la espiral áurea rectangular está presente en la naturaleza y en el cuerpo humano, acudiendo a las imágenes presentadas en la guía teórico práctica y que pueden observarse en la Figura 23.

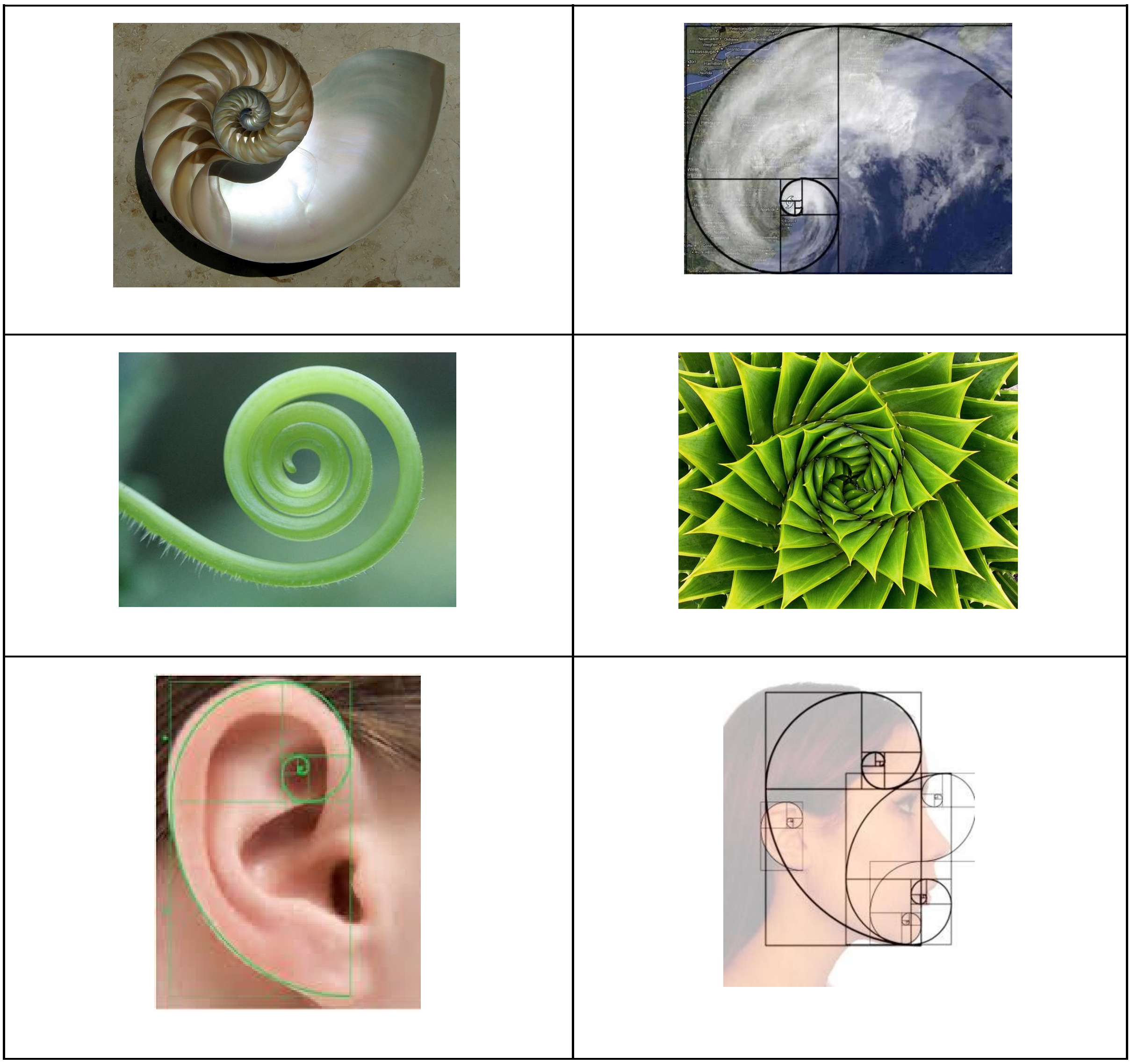


Figura 23: Corte del caparazón de un nautilo; Huracán; Variedad de plantas; El cuerpo humano.

Posteriormente, presentamos la guía práctica N° 2. Este trabajo fue pensado para ser realizado en el aula, lo cual hizo posible observar los avances y disipar las dudas que les fueron surgiendo a las alumnas. Además, es una actividad enmarcada en un proceso de modelización intramatemática cuya modalidad es generalmente grupal.

Lo primero que realizamos fue informarles que se trataría de un trabajo práctico evaluable y les notificamos el día estipulado para la entrega del mismo. Luego, leímos de manera conjunta el problema para disipar dudas de compresión y realizamos aclaraciones respecto de los criterios que tendríamos en cuenta al momento de la corrección.

A continuación presentamos la guía.

Guía Práctica N°2.

Criterios de evaluación:

- ideas presentadas en la resolución del problema;
- vocabulario adecuado;
- comprensión;
- trabajo grupal;
- presentación en tiempo y forma del trabajo.

Leer el siguiente problema y responder las consignas:

En una ciudad de 1600 habitantes se encuentra uno de los laboratorios más importantes del mundo, el cual cuenta con tecnología de última generación y donde se trabaja con diferentes microorganismos para la obtención de medicamentos para prevenir y tratar diferentes enfermedades.

En un control llevado a cabo por la empresa, se descubre que un biólogo, el Doctor Lisardo Funes, estaba trabajando con una cepa de un microorganismo que provoca dolores de cabeza intensos, la cual había sido erradicada hace mucho tiempo. Por este motivo, se le pide que abandone tal investigación. Funes ignora en reiteradas oportunidades esta orden, por lo que el director del laboratorio decide desvincularlo. El doctor, no conforme con esta situación, sustrae una muestra para continuar con su trabajo en un laboratorio clandestino que tenía en su vivienda. Debido a la precariedad de este lugar, tiene un accidente, durante el cual el microorganismo se escapa, quedando el doctor expuesto al mismo.

Dadas las condiciones óptimas de temperatura y humedad presentes en el cuerpo humano, este microorganismo tiene una proliferación peculiar: una vez que ingresa en una persona, tarda una hora en adecuarse al medio y proliferar por el sistema sanguíneo. Al cabo de la hora siguiente ya se ha reproducido. A partir de este momento se reproduce una vez por hora. El contagio se realiza cada vez que el microorganismo se reproduce, es decir, dos horas después de ingresar en una persona y luego cada hora. Por la naturaleza del microorganismo, solo puede contagiarse a una persona por vez. Los síntomas comienzan a presentarse luego de transcurridas seis horas de la exposición al microorganismo.

La insensatez del doctor Funes hace que este reste importancia a lo sucedido y continúe con su vida de manera normal. Seis horas después del accidente, Funes comienza a padecer los síntomas. Tras una hora de intenso dolor, recurre a la guardia del sanatorio en busca de alivio. Allí le colocan un analgésico y le indican una serie de estudios. Una hora más tarde, dada la imposibilidad de realizar los estudios en el momento, le aconsejan que se quede en la clínica. Funes desoye la sugerencia y se retira.

Una hora después que Funes se retira del sanatorio, comienzan a presentarse nuevos casos, despertando la alarma del sistema sanitario. Lamentablemente, el sanatorio no cuenta con infraestructura suficiente para poner en cuarentena a las personas que se presentan con los síntomas. Preocupado por el origen de la situación, el director del sanatorio se comunica inmediatamente con el laboratorio, que cuenta con la tecnología necesaria, a fin de solicitar ayuda para clarificar lo que está sucediendo.

Apenas recibida la llamada del director del sanatorio, el personal del laboratorio comienza a estudiar cuál puede llegar a ser el número total de posibles infectados, a los fines de plantear los procedimientos a seguir. Debido al evento sucedido con el Dr. Funes, enseguida presuponen (y luego confirman) el origen del problema. Transcurridas dos horas desde el llamado telefónico, el laboratorio cuenta con las cifras relativas a la cantidad de posibles infectados. Además, al haber identificado el microorganismo, puede comenzar a producir el medicamento necesario para el tratamiento de los pacientes. La capacidad instalada del laboratorio permite producir 57 dosis por vez, proceso que demanda treinta minutos.

Consignas:

1) Siendo ustedes parte del departamento de infectología del laboratorio, estimen con la mayor exactitud posible el número de infectados, a los fines de determinar las políticas a seguir. Utilicen los elementos que consideren necesarios. Anoten los diferentes procedimientos utilizados.
2) Teniendo en cuenta el tiempo necesario para producir el medicamento, determinen la cantidad de dosis que deben producirse para asegurar el corte de la cadena de contagios.
3) Estimen el tiempo que tardará en infectarse con el microorganismo la población total de la ciudad en caso de no ser tratada a tiempo con la cura.

Una vez que las alumnas comenzaron trabajar, tuvieron libertad para establecer los supuestos que ellas consideraran necesarios, es por ello que las respuestas obtenidas resultaron variadas; sin embargo, no se alejaron demasiado de la respuesta esperada.

Los valores que las alumnas fueron obteniendo, correspondían con los términos de la sucesión de Fibonacci, eventualmente faltándoles el primero de dicha sucesión.

Durante el desarrollo de esta actividad, estuvimos pasando por los bancos, respondiendo dudas, ayudando, pero permitiendo que las alumnas fueran quienes desarrollaban la actividad.

Con esto finalizamos la clase.

2.3.2.6. Clase 6.

Ingresamos al aula, realizamos el saludo correspondiente a las alumnas y continuamos trabajando durante toda la clase con la Guía Práctica Nº 2.

2.3.2.7. Clase 7.

En esta clase (en la que estaba prevista la entrega de la resolución de la Guía Práctica N° 2), dado que algunas alumnas manifestaron no haber concluido con el problema, decidimos destinar parte del tiempo para dicho fin. Previendo esta posible situación, preparamos otra actividad para las alumnas que habían finalizado y que eventualmente finalizarían durante los primeros minutos de la clase, a fin de evitar que molestaran a aquellas que aún continuaban trabajando. Esta actividad, que figura a continuación, la proporcionamos a los grupos a medida que hacían entrega de la guía resuelta.

Actividad 4: Las medidas del cuerpo humano estándar.

Realizar las siguientes mediciones en cada uno de los integrantes del grupo:

- ❏ Altura total (**h**)
- ❏ Distancia entre las puntas de los dedos mayores de cada mano, con los brazos abiertos (**b**)
- ❏ Distancia entre los pies y el ombligo (**n**)

Completar la siguiente Tabla:

Integrante	**h**	**b**	**n**
1º			
2º			
3º			
4º			
5º			
Promedio			

Calcular, utilizando los promedios obtenidos en la tabla, los siguientes cocientes:
(i) h/n (ii) h/b (iii) b/n

Las alumnas debían medirse con la ayuda de cintas métricas que habíamos puesto a su disposición y, obteniendo el promedio de las mismas, realizar los cocientes que figuraban en la actividad. Estos cocientes se encontraban directamente relacionados con la siguiente ecuación:

Altura total / altura ombligo = brazada / altura ombligo $\approx$ *1.618* $\approx \Phi$

Solo en uno de los cursos logramos realizar una corrección de los mismos en la pizarra, donde una vez presentada la fórmula, indagamos sobre los resultados obtenidos y verificamos que los mismos satisfacían la ecuación. Por cuestiones de tiempo, no alcanzamos a relacionar estos conceptos con el hombre de Vitruvio, la Arquitectura y el Modulor de Le Corbusier, lo cual habíamos previsto en nuestra planificación.

Con esto finalizamos la clase.

2.3.2.8. Clase 8.

Ingresamos al aula y seleccionamos cuatro grupos en cada curso para que presentaran oralmente las resoluciones de la guía práctica N°2. La finalidad era que las alumnas dieran cuenta de los supuestos sobre los cuales habían trabajado y la metodología empleada. Durante la exposición oral, surgió el aparente inconveniente de que los resultados de los diversos grupos no coincidían. Aquí se problematizó la finalidad de la actividad, por lo que hicimos énfasis en que lo importante era el procedimiento utilizado y no tanto así el resultado alcanzado (si los supuestos tomados eran los que diferían, el resultado sería distinto).

Una vez finalizadas las exposiciones, dedicamos el restante medio módulo de la clase para trabajar con el resultado obtenido de esta problemática. Tomando los valores obtenidos por las alumnas, definimos el concepto sucesión de manera oral:

> *Definición: una **sucesión** es un conjunto ordenado de números que puede ser finito o infinito. Cada número de la sucesión se llama término y se denota* a_1 *al primer término,* a_2 *al segundo término y* a_n *al n-ésimo término.*

En base a ésto, nombramos los siguientes modos de definir a las sucesiones:

> *Para cada conjunto de números en una sucesión es posible observar alguna regularidad, pues conociéndose algunos de ellos se puede dar cuenta de cuáles pueden ser los siguientes. Para definir una sucesión debemos dar una fórmula general de la misma, la cual puede ser:*
>
> - ***por término general:*** *cuando se puede calcular un término cualquiera según la posición que ocupa en la sucesión. Esta se designa por* a_n.
> - ***por recurrencia:*** *cuando se pueden hallar los términos a partir de los anteriores.*

Una vez reconocida la lista ordenada de valores resultantes de la Guía Práctica Nº 2 cómo sucesión, realizamos una pequeña reseña histórica de quién era Fibonacci y finalmente enunciamos el famoso problema de los conejos, que dice lo siguiente:

¿Cuántas parejas de conejos tendremos a fin de año si comenzamos con una pareja de recién nacidos, la cual procrea a partir de los dos meses de vida, y luego produce cada mes otra pareja?

Analizamos el enunciado del problema con las alumnas y presentamos las siguientes actividades:

<u>*Actividad 5:*</u>

a. *Completa la tabla con las parejas de conejos que habrá en cada mes.*

Meses transcurridos	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Cant. de parejas de conejos												

b. *Los valores que has obtenido son los primeros 12 términos de la sucesión de Fibonacci. Lista nuevamente estos valores, utilizando la notación introducida en la definición de sucesión (es decir, escribe:* $a_1 = \dots$, $a_2 = \dots$, *etcétera, hasta el término 12). Encuentra una fórmula para esta sucesión.*
c. *Usando la fórmula que obtuviste en el ítem (b), completa la sucesión de Fibonacci hasta el término 18.*
d. *Realiza el cociente entre cada término de la sucesión de Fibonacci y su anterior, es decir* $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ *, para todos los valores obtenidos en los ítems (a) y (c) y escribe el resultado tomando seis cifras significativas después de la coma.*

Dicha actividad fue trabajada en la pizarra, donde inmediatamente las alumnas reconocieron que la solución de este famoso problema era análoga a la obtenida con el problema de la guía práctica N° 2. La tabla obtenida fue la siguiente:

Meses transcurridos	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Cant. de parejas de conejos	*1*	*1*	*2*	*3*	*5*	*8*	*13*	*21*	*34*	*55*	*89*	*144*

Figura 24: Tabla de resolución del problema de los conejos.

Lo más complejo resultó introducir la notación. En uno de los cursos presentamos la definición por recurrencia y posteriormente procuramos hallar cada uno de los valores de la tabla, lo que provocó dificultades y confusiones en las alumnas. En el otro curso, trabajamos primero con casos particulares y finalmente presentamos el caso general, lo que permitió que las alumnas comprendieran más rápidamente. La notación correspondiente al problema fue la siguiente:

$$a_1 = 1; a_2 = 1; a_3 = 2; a_4 = 3; a_5 = 5; a_6 = 8; a_7 = 13; a_8 = 21; a_9 = 34$$
$$a_{10} = 55; a_{11} = 89; a_{12} = 144$$

donde el subíndice indicaba el mes transcurrido, concluyendo con la siguiente definición por recurrencia:

$$a_n = a_{(n-1)} + a_{(n-2)} \text{ con } n \geq 3$$

la condición $n \geq 3$ indica que $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$ son las condiciones iniciales de la sucesión.

En el ítem (c), las alumnas calcularon dos términos de la sucesión, utilizando la fórmula obtenida en el ítem (b). La decisión de calcular hasta el 18 respondió a lo obtenido en el problema del doctor Funes.

En el ítem (d) realizaron los cocientes entre dos términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci, para los primeros 18 términos, a fin de concluir conjuntamente que dichos cocientes son una buena aproximación al número del oro (cada vez mejor, a medida que se avanza en la sucesión).

Con esto finalizó la clase.

2.3.2.9. Clase 9.

Esta clase estuvo destinada a realizar un repaso con actividades similares a las que realizarían en la evaluación. Para eso, dictamos la primera de ellas y dejamos las restantes escritas en la pizarra, para que cuando alguna alumna finalizara, continuara trabajando. Dichas actividades son presentadas a continuación.

<u>Actividad 6:</u>

a. Trazar un segmento de longitud 3 y partirlo en extrema y media razón, utilizando el procedimiento explicado en clase.
b. Demostrar algebraicamente que la construcción realizada en el ítem anterior se encuentra en proporción áurea.

<u>Actividad 7:</u>

a. Partiendo de un cuadrado de longitud 2 trazar un rectángulo áureo.
b. Demostrar algebraicamente que el rectángulo construido es, efectivamente, un rectángulo áureo.
c. Trazar la espiral áurea rectangular en el rectángulo realizado.

<u>Actividad</u> <u>8:</u> ubicar los siguientes números irracionales en la recta real utilizando regla y compás.

a. $\frac{\sqrt{3}}{4}$
b. $\frac{\sqrt{10}}{2} + 3$
c. $\frac{\sqrt{10}+3}{2}$
d. $2\sqrt{5}$

En la actividad 6 las alumnas tuvieron que remitirse al teórico en busca de la construcción realizada en la clase 4, que había sido trabajada con un segmento genérico, para aplicarla a un segmento de longitud 3 y demostrar algebraicamente que dicha construcción satisfacía la propiedad de dividirlo en extrema y media razón. En ambos cursos, pasar de lo general a lo particular resultó bastante dificultoso para las alumnas, por lo que fue necesario destinar mucho tiempo de la clase para ello.

En la actividad 7 debían realizar un rectángulo áureo partiendo de un cuadrado cuyos lados medían 2 unidades y finalmente demostrar algebraicamente que ese rectángulo era efectivamente áureo. Esta actividad fue bastante más sencilla que la actividad 7, debido a que cuando realizamos la construcción en clase trabajamos sobre segmentos de longitudes 1 y 4. No tanto así la construcción de la espiral áurea, por lo que en uno de los cursos la realizamos entre todos en la pizarra.

Debido al tiempo demandado por las actividades 6 y 7, no pudimos realizar un repaso profundo de la actividad 8, sino que fueron comentarios en la pizarra que no permitieron que las alumnas lograran adquirir todas las herramientas que buscábamos que surgieran durante el desarrollo de las mismas.

Con esto finalizamos la clase.

2.3.3. Clasificación de las actividades.

Teniendo en cuenta la clasificación de Ponte (2005), en la que se considera el grado de dificultad (desafío elevado o reducido) y su estructura (de carácter cerrado o abierto), presentamos un esquema como el que propone el autor (p. 8), en el que disponemos las actividades realizadas durante las prácticas (ver Figura 25). En particular, dichas actividades se centraron en:

- actividades de exploración, con desafío reducido y carácter abierto;
- problemas, con desafío elevado y carácter cerrado (debido a que las alumnas no disponían de procesos inmediatos para resolverlos) y
- ejercicios, con desafío reducido y carácter cerrado, que sirvieron para poner en práctica conocimientos ya adquiridos.

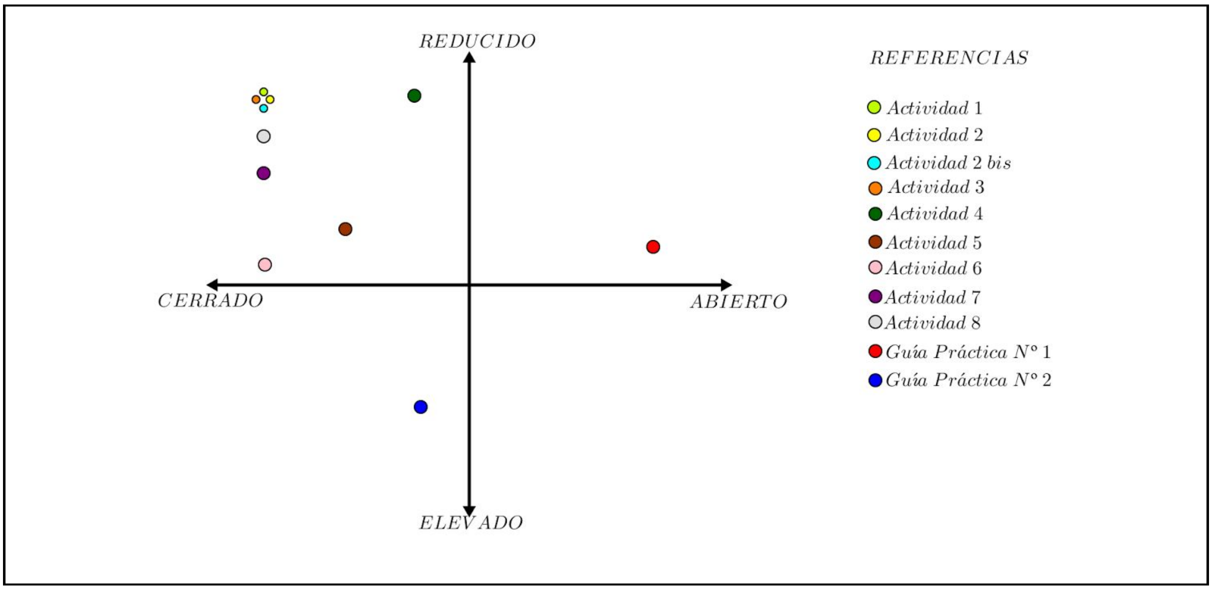


Figura 25: Clasificación de las actividades según Ponte.

2.4. Evaluación

Durante el desarrollo de nuestras prácticas profesionales hubieron dos instancias evaluativas; la primera de ellas fue la Guía Práctica Nº 1 que dimos en las clases 2 y 3, seguida de la Guía Práctica Nº 2 que tuvo lugar al final de la clase 5, la totalidad de la clase 6 y parte de la 7. Ambas guías fueron contempladas como parte de la evaluación escrita que desarrollamos al final de las prácticas.

La evaluación escrita se desarrolló en la clase 10 y la duración fue de 80 minutos. La misma constó de seis actividades y un ejercicio opcional. Las alumnas solo debieron resolver de la actividad 3 en adelante, puesto que las dos primeras consistieron en las guías trabajas previamente, como indicamos más arriba. El ejercicio opcional, el cual es un requerimiento de la institución, permite a las alumnas mejorar su promedio: cada tres ejercicios resueltos correctamente, obtienen como calificación un diez.

Diseñamos dos modelos de evaluaciones distintos (Tema 1 y Tema 2), para de esta manera garantizar el trabajo individual de las alumnas. En ambos quintos años las evaluaciones fueron idénticas, difiriendo solamente en el ejercicio opcional, ya que las mismas fueron tomadas simultáneamente en ambos cursos. A continuación mostraremos modelos de evaluaciones y posteriormente explicitaremos los criterios que fueron utilizados para la corrección.

EVALUACIÓN DE MATEMÁTICA

NÚMEROS IRRACIONALES ESPECIALES: Φ

Alumna:.. **1**

Para evaluar a la alumna se tendrá en cuenta si:

- Aplica correctamente los conocimientos teóricos, evaluando la pertinencia de las soluciones encontradas.
- Explicita los pasos seguidos en las construcciones.
- Muestra prolijidad en la escritura.
- Deja registrados los cálculos necesarios en la hoja de la evaluación.

Ej. 1 (1 punto)	Ej. 2 (2 puntos)	Ej. 3 (1 punto)	Ej. 4 (3,5 puntos)	Ej. 5 (1,5 puntos)	Ej. 6 (1 punto)	TOTAL

Ejercicio 1. Guía práctica N° 1 (*GeoGebra*).

Ejercicio 2. Guía práctica N° 2 (Dr. Funes).

Ejercicio 3. Ubicar el número $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en la recta real, utilizando regla y compás.

Ejercicio 4.

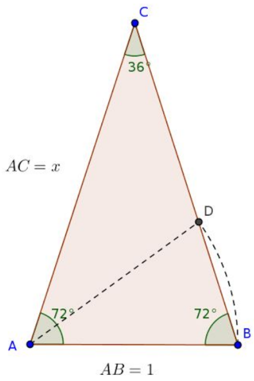
a. (1 punto) Partiendo de un cuadrado de longitud 6 trazar un rectángulo áureo.
b. (1 punto) Demostrar algebraicamente que el rectángulo construido es, efectivamente, un rectángulo áureo.
c. (1,5 puntos) Trazar la espiral áurea rectangular en el rectángulo realizado.

Ejercicio 5. Trazar un segmento de longitud 5 y partirlo en extrema y media razón, utilizando el procedimiento explicado en clase.

Ejercicio 6. Es posible realizar la partición de un segmento en extrema y media razón usando triángulos compañeros. Para ello, basta con dibujar uno de estos triángulos de manera tal que uno de sus lados (adecuadamente elegido) sea el segmento que se desea partir.
Llevar a cabo este procedimiento con un segmento de longitud 7.

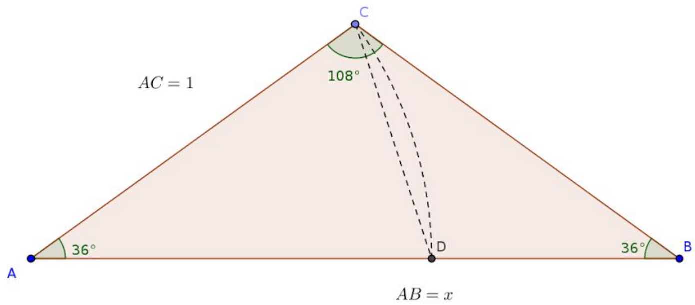
Ejercicio opcional 5º año "A":

Usando semejanza de triángulos, probar que el segmento $\overline{BC}$ se encuentra dividido en extrema y media razón.



Ejercicio opcional 5º año "B":

Usando semejanza de triángulos, probar que el segmento $\overline{AB}$ se encuentra dividido en extrema y media razón.



EVALUACIÓN DE MATEMÁTICA

NÚMEROS IRRACIONALES ESPECIALES: Φ

Alumna:.. **2**

Para evaluar a la alumna se tendrá en cuenta si:

- Aplica correctamente los conocimientos teóricos, evaluando la pertinencia de las soluciones encontradas.
- Explicita los pasos seguidos en las construcciones.
- Muestra prolijidad en la escritura.
- Deja registrados los cálculos necesarios en la hoja de la evaluación.

Ej. 1 (1 punto)	Ej. 2 (2 puntos)	Ej. 3 (1 punto)	Ej. 4 (3,5 puntos)	Ej. 5 (1,5 puntos)	Ej. 6 (1 punto)	TOTAL

Ejercicio 1. Guía práctica N° 1 (*GeoGebra*).

Ejercicio 2. Guía práctica N° 2 (Dr. Funes).

Ejercicio 3. Ubicar el número $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ en la recta real, utilizando regla y compás.

Ejercicio 4.

a. (1 punto) Partiendo de un cuadrado de longitud 8 trazar un rectángulo áureo.
b. (1 punto) Demostrar algebraicamente que el rectángulo construido es, efectivamente, un rectángulo áureo.
c. (1,5 puntos) Trazar la espiral áurea rectangular en el rectángulo realizado.

Ejercicio 5. Trazar un segmento de longitud 7 y partirlo en extrema y media razón, utilizando el procedimiento explicado en clase.

Ejercicio 6. Es posible realizar la partición de un segmento en extrema y media razón usando triángulos compañeros. Para ello, basta con dibujar uno de estos triángulos de manera tal que uno de sus lados (adecuadamente elegido) sea el segmento que se desea partir.
Llevar a cabo este procedimiento con un segmento de longitud 5.

Ejercicio opcional (Ver Tema 1)

En primer lugar, daremos cuenta de los criterios utilizados y resultados obtenidos en la Guía Práctica Nº 1 (Ejercicio 1).

Las grillas de criterios empleadas en la corrección de dicha guía práctica fueron las siguientes:

Actividad 1:

1)	Identificar segmento	0,25
	Describir los cocientes a/b y b/c	0,5
	Verificar el intervalo	0,75
2) a.	Identificar la figura	0,25
2) b.	Realizar el cociente entre lados	0,25
	Relación con el intervalo obtenido	0,5
2) c.	Cálculo de los cocientes	0,25
2) d.	Relación de los datos obtenidos	0,25
3) a.	Identificar la diagonal	0,25
	Describir lo que sucede	0,25
3) b.	Identificar la posición del punto C	0,5

Actividad 2:

a.	Construcción del triángulo 36º, 72º, 72º	0,75
	Partición del triángulo	0,5
	Construcción del triángulo 108º, 36º, 36º	0,75
	Partición del triángulo	0,5
b.	Cociente del triángulo 36º, 72º, 72º	0,5
	Cociente del triángulo 108º, 36º, 36º	0,5
	Observaciones	0,5

Actividad 3:

a.	Construcción del pentágono (Si se realiza la construcción con la herramienta “Polígono”, se considera la mitad del puntaje)	1
	Cociente entre la diagonal y un lado	0,5
	Relación con el intervalo obtenido en la Actividad 1	0,5
b.	Construcción de la estrella pentagonal	0,5
	Identificar figuras trabajadas	0,5

Estos valores representan un total de 10 puntos con lo cual, luego de obtener los puntajes de cada alumna, realizamos la conversión a la otra escala donde consideramos como 1 al total (valor asignado a dicha guía en la evaluación).

A continuación mostramos de manera gráfica los resultados obtenidos en ambos cursos.

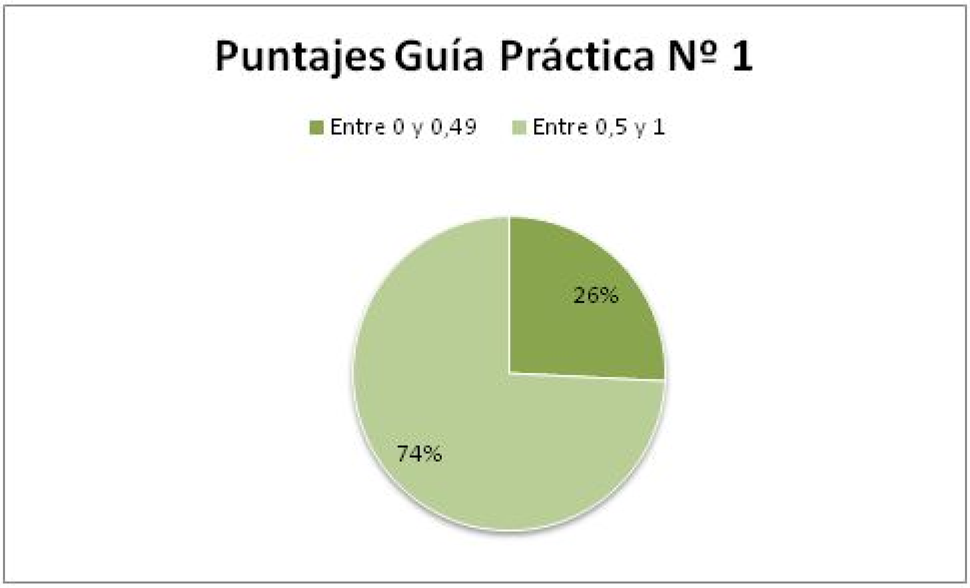


Figura 26: Resultados obtenidos en 5º año “A”.

Figura 27: Resultados obtenidos en 5º año “B”.

En segundo lugar, teniendo en cuenta la Guía Práctica Nº 2 (Ejercicio 2), mostramos los criterios que empleamos en la corrección y los resultados obtenidos.

Para la corrección de esta actividad tuvimos en cuenta la siguiente grilla de criterios:

Interpreta el problema	0,25
Aplica un método de resolución y llega al resultado correcto. (En caso que aplica un método de resolución y no llega al resultado correcto le corresponde 0,35)	0,5

Explica el procedimiento utilizado	0,25
Responde las preguntas (explícitamente)	0,2
Utiliza el vocabulario adecuado	0,2
Implementa las ideas presentadas (diversidad de métodos)	0,5
Presenta en tiempo y forma	0,1

En el caso de esta guía, el valor asignado dentro de la evaluación escrita fue de 2 puntos. A continuación mostramos gráficamente los resultados obtenidos.

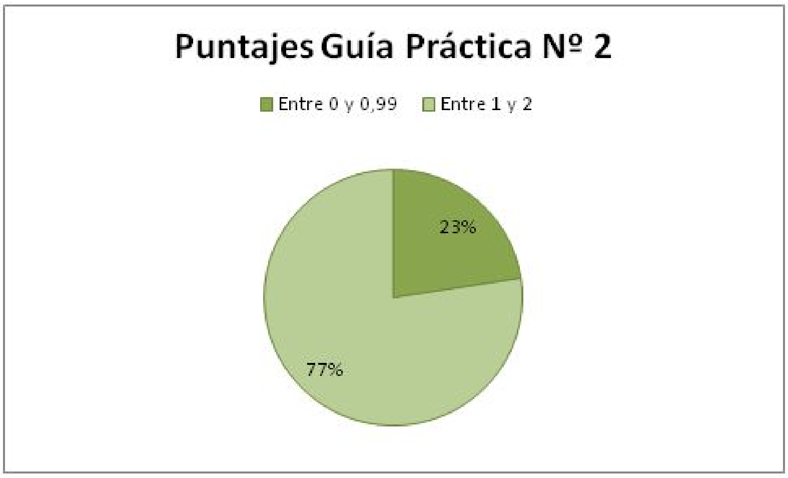


Figura 28: Resultados obtenidos en 5º año "A".

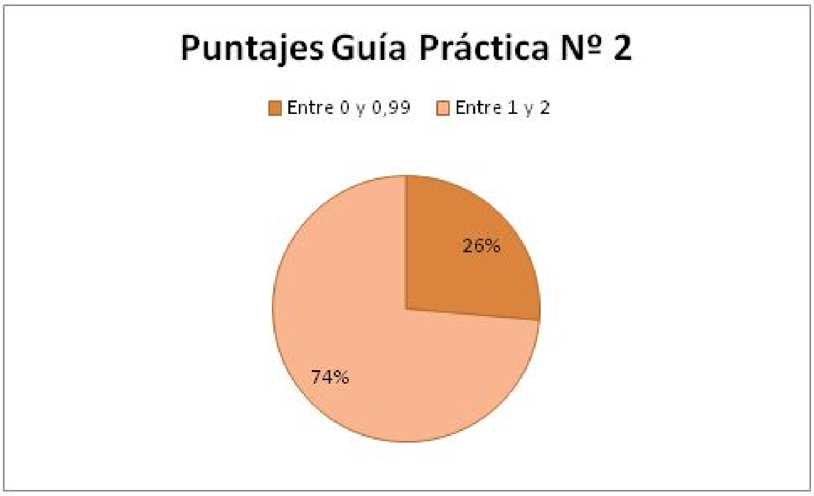


Figura 29: Resultados obtenidos en 5º año "B".

En tercer lugar, haremos mención de los criterios empleados en la corrección de los ejercicios 3, 4, 5 y 6 de la prueba, que son aquellos que les quedaban por resolver a las alumnas el día de la evaluación, además del ejercicio opcional.

La grilla de criterios empleada, de acuerdo a cada ejercicio, fue la siguiente:

<table>
<tr><td rowspan="3">EJERCICIO 3</td><td colspan="2">Construcción del triángulo rectángulo</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Corrimiento respecto del cero</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ubicar correctamente a Φ</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="7">EJERCICIO 4</td><td rowspan="3">(a)</td><td>Trazar el rectángulo áureo</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td>Procedimiento para la construcción</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Cociente entre el lado mayor y el lado menor</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>(b)</td><td>Cálculo del lado mayor</td><td>0,4</td></tr>
<tr><td></td><td>Cálculo de la hipotenusa del triángulo rectángulo</td><td>0,4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(c)</td><td>Trazar la espiral áurea</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Procedimiento para la construcción</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">EJERCICIO 5</td><td colspan="2">Realizar la partición del segmento</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Procedimiento para la construcción</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">EJERCICIO 6*</td><td colspan="2">Construcción del triángulo compañero</td><td>0,75</td></tr>
<tr><td colspan="2">Procedimiento para la construcción</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td colspan="4">* si construye el triángulo compañero seleccionando un lado distinto al solicitado y realiza la partición consideramos 0,5 puntos.</td></tr>
</table>

En cuanto al ejercicio opcional, no hubo criterios tan específicos, sino que la corrección fue global. Consideramos las categorías bien, regular o mal, a las cuales les correspondieron los puntajes 1, 0.5 y 0, respectivamente.

Por último, luego de haber mencionado detalladamente los criterios empleados, mostramos en diagramas de barras el promedio de puntajes correspondiente a cada ejercicio de la evaluación y en diagramas de torta el porcentaje de las notas finales, ambas representaciones para cada uno de los cursos.

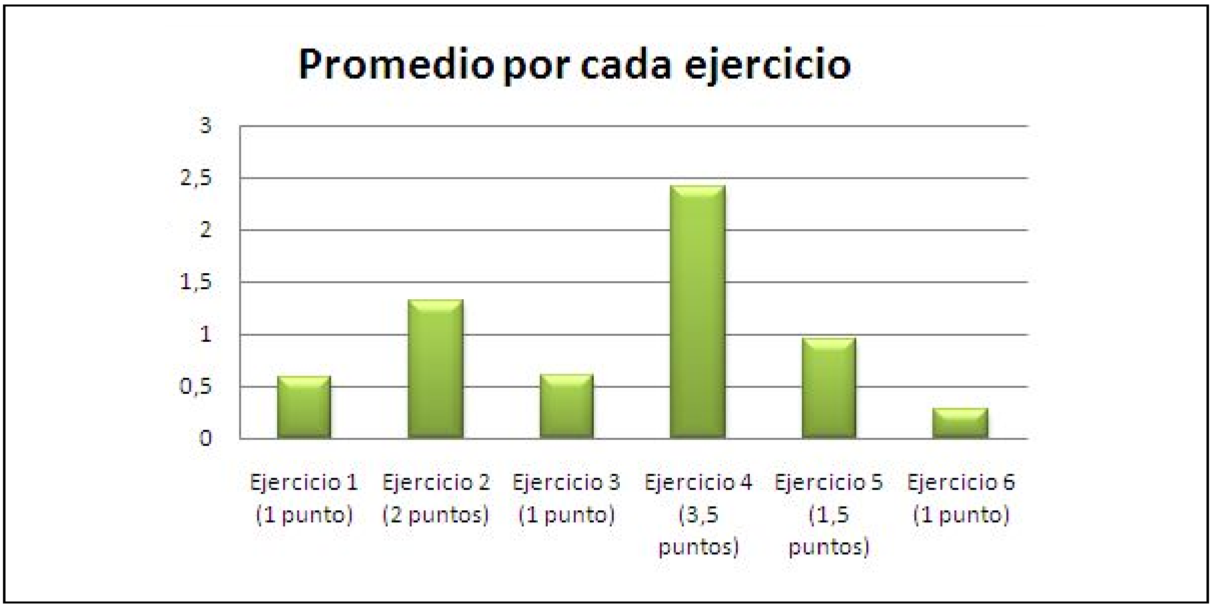


Figura 30: Promedio de puntajes para cada ejercicio 5º año "A".

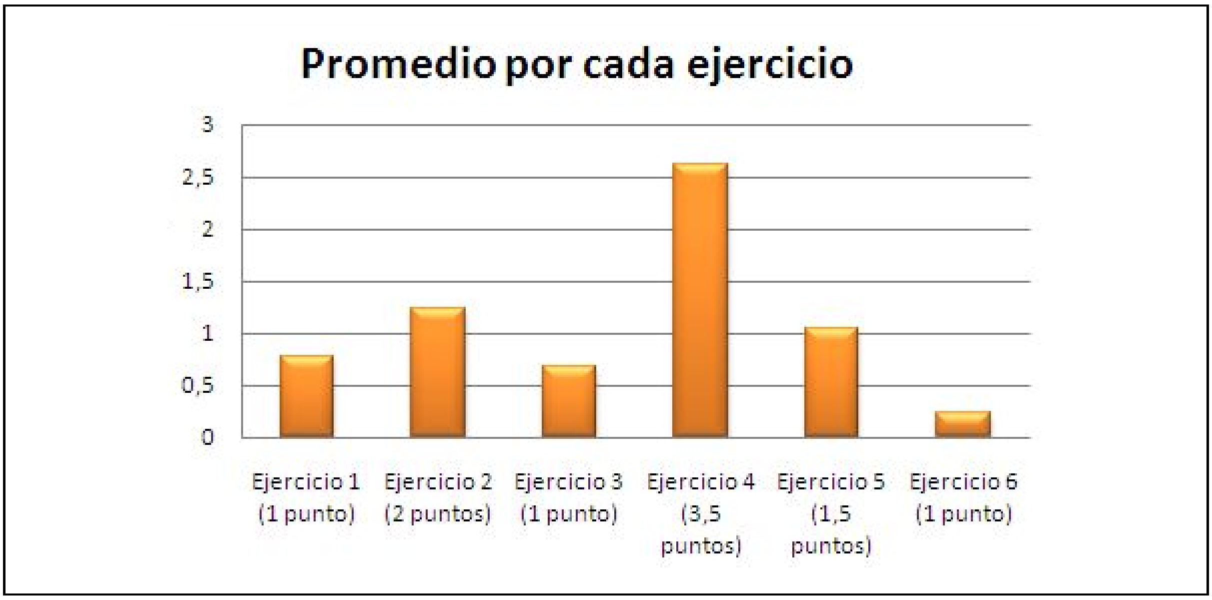


Figura 31: Promedio de puntajes para cada ejercicio 5º año "B".

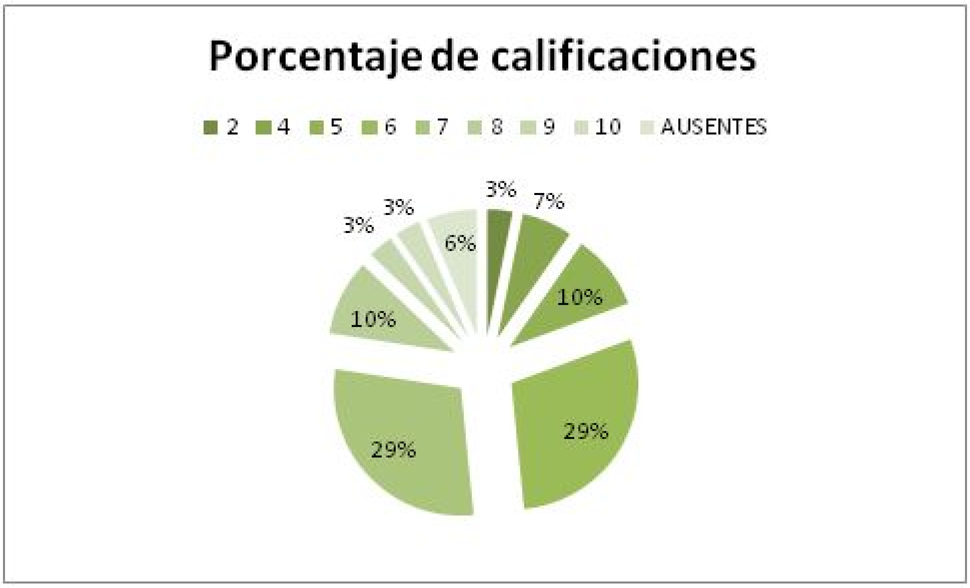


Figura 32: Calificaciones de 5º año "A".

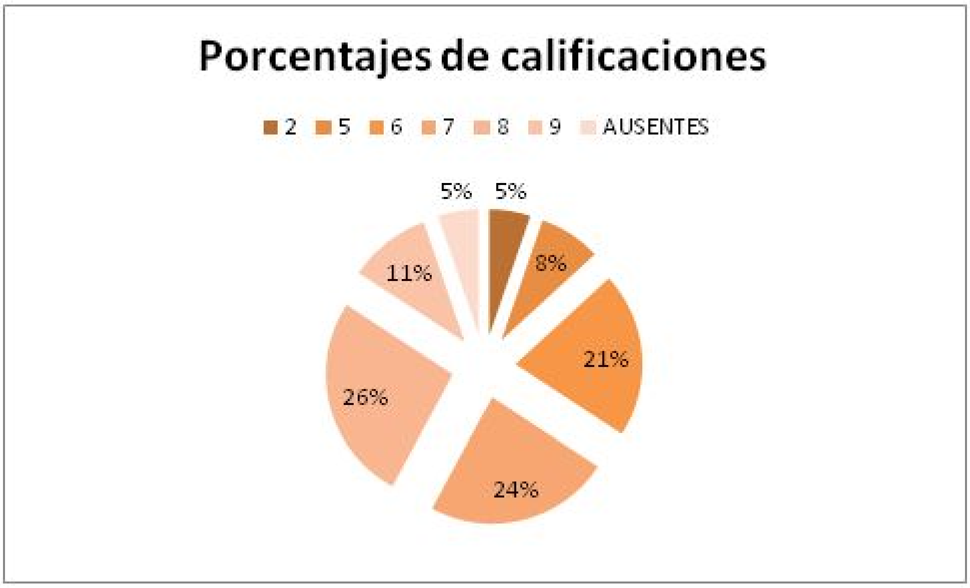


Figura 33: Calificaciones de 5º año "B"

3. Análisis de una problemática

3.1. Introducción.

Como mencionamos en capítulos anteriores, el tema trabajado fue “el número de oro”, en coincidencia con la temática abordada por la profesora de los cursos durante las observaciones de clases que realizamos el año anterior como alumnos de la materia “Didáctica Especial y Taller de Matemática”. En esa oportunidad, pudimos advertir una secuencia didáctica organizada desde un enfoque numérico. Esta secuencia estaba fundamentada en el diseño curricular del ciclo orientado de la Provincia de Córdoba correspondiente a la orientación Ciencias Naturales (Tomo 4), en el eje número y operaciones:

- Producción de términos generales de sucesiones para representar regularidades (4° año; p. 16);
- Reconocimiento de la sucesión de Fibonacci como patrón de modelos de crecimiento de fenómenos de la naturaleza (4° año, p. 16);
- Reconocimiento de espiral logarítmica o espiral áurea en formas naturales, como conchas de algunos moluscos, los cuernos de algunos animales, las hileras de piñones en la piña, las semillas de una flor de girasol (5° año, p. 15).

Dichos aprendizajes y contenidos no están totalmente contemplados en el diseño curricular de Ciencias sociales y humanidades (Tomo 3).

En base a las observaciones realizadas, y con el ánimo de ofrecer una propuesta diferente, decidimos encarar la temática desde una perspectiva geométrica. Para ello fue necesario comenzar a recopilar información sobre el número de oro y contrastar diversas metodologías de enseñanza, lo cual nos resultó muy dificultoso, puesto que no es un tema que se aborda comúnmente en las instituciones de nivel medio.

Debido a esta situación, comenzamos a recolectar información acudiendo en primer lugar a la docente y a la coordinadora de matemática de la institución donde realizaríamos nuestras prácticas quienes nos recomendaron bibliografía pertinente para la temática. Cabe acotar que tanto la coordinadora como la profesora apoyaron la propuesta de presentar el tema desde un enfoque geométrico.

Una vez que contamos con la información suficiente, fue necesario comenzar a seleccionar aquellos temas que considerábamos más relevantes y establecer un orden de prioridades, actividades que permitieran utilizar TIC´s y realizar un trabajo de modelización intramatematica.

El modo de organizar los contenidos intentaba presentar a las alumnas diferentes ámbitos donde el número de oro emergiera, pero que no se considerasen aislados entre sí, sino que fuesen objetos atravesados por un mismo concepto. Además, debía poder relacionarse con diferentes áreas de aplicación tales como la música, arquitectura, pintura, etc. Como resultado obtuvimos lo propuesto en el capítulo 2 de este trabajo.

Todo lo narrado recientemente nos llevó a preguntarnos sobre las complejidades que surgen en situaciones como ésta, en las que un concepto posee diversos abordajes, definiciones, aplicaciones a diferentes ramas. Por lo que en un primer momento, decidimos trabajar con la siguiente problemática:

Dificultad que representa la diversidad en el abordaje para la enseñanza del concepto matemático "Φ: el número de oro".

Para discutirla a la luz de la teoría, era necesario encontrar bibliografía que nos permitiera tratar el tema, lo que resultó una tarea ardua debido a que la mayoría de los trabajos encontrados sobre el número de oro se enfocaban en presentar propuestas pedagógicas para trabajar con los alumnos. Por esta razón decidimos reformular la problemática a analizar, de modo tal que fuese posible abordarla con una base teórica que la sustentara, pero a la vez contemplara de algún modo nuestras inquietudes iniciales. Si bien no analizaremos la problemática planteada más arriba, consideramos importante destacarla, puesto que la misma surgió genuinamente durante la planificación y el desarrollo de las clases.

3.2. La problemática.

Debido a lo presentado en la introducción de este capítulo, decidimos trabajar con el número de oro en un contexto más amplio. Analizaremos la comprensión alcanzada, por parte de las alumnas, de los conceptos trabajados, dentro del contexto de los números irracionales, como así también cuestiones que tienen que ver con el desarrollo de nuestras prácticas. Así, nuestra problemática quedó finalmente formulada de la siguiente manera:

Dificultades en la aprehensión de las diversas representaciones de "Φ: el número de oro".

Dentro del campo de los números irracionales, consideramos pertinente comenzar a analizar el desarrollo de este conjunto numérico en la historia de la matemática, a fin de conocer los principios o hechos que dieron origen a los mismos. Para ello, realizaremos un breve relato basándonos en el texto de Boyer (2003).

Remontándonos a la prehistoria, podemos considerar que el concepto de número surgió hace millones de años en las civilizaciones prehistóricas que utilizaban sus dedos u otros objetos para enumerar cosas. También, con los descubrimientos arqueológicos, se encontraron signos de que en aquellas épocas ya se realizaban medidas de los objetos. En este origen, ya surgían las nociones primitivas de número, magnitud o forma, que eran utilizadas para referirse a diferencias y contrastes, más que a semejanzas: *[...] la diferencia entre un lobo y muchos, la desigualdad de tamaño entre un pececillo y una ballena, el contraste entre la redondez de la luna y la derechura de un pino [...]* (Boyer, 2003, p. 20).

Para referirnos al origen de la geometría también debemos remontarnos a millones de años atrás; excavaciones arqueológicas permitieron encontrar figuras geométricas que revelaban el interés en las relaciones espaciales que prepararon el camino a la geometría . Posteriormente, el desarrollo de esta área puede haber sido estimulada por las necesidades prácticas para la construcción y la agrimensura.

Dada la ausencia de registros previos a la Edad Antigua que permitan analizar los diferentes periodos históricos, y a fin de considerar la idea de números irracionales, debemos remontarnos a esta última, donde las culturas egipcia, mesopotámica, china y griega reflejan el estudio temprano de segmentos inconmensurables con los racionales.

En el antiguo Egipto, se hallaron papiros que lograron sobrevivir los estragos del tiempo y uno de los más extensos, de 30 cm de alto y 6 m de largo, el cual se denomina Papiro de Ahmes, en honor del escriba que lo copió hacia el 1650 a.C., contiene información matemática. Este papiro fue originalmente redactado por un legendario arquitecto y médico del faraón Zoser. En este papiro aparece un problema en el que se utiliza una aproximación de π de 3,16 ó $3\frac{1}{6}$ .En la cultura china se intentó encontrar valores cada vez más exactos de π .

En la cultura griega el máximo referente de la época era Pitágoras de Mileto que fundó una sociedad secreta con bases matemáticas y filosóficas, donde se comienza a relacionar a la matemática con el amor por la sabiduría más que con cuestiones prácticas. Aquí, la estrella de cinco puntas aparece como un símbolo de la escuela pitagórica, aunque ya había aparecido previamente en el arte babilónico, lo que presupone una relación estrecha entre ambas culturas (Boyer, 2003). En el pentágono regular trazando las diagonales, constituyendo la estrella de cinco puntas, queda cada una de ellas dividida en sección áurea, pero este nombre no se utilizó hasta un par de milenios más tarde cuando Kepler escribió:

> *La Geometría tiene dos grandes tesoros: uno de ellos es el Teorema de Pitágoras; el otro, la división de un segmento en media y extrema razón. El primero lo podemos comparar a una medida de Oro; el segundo lo podríamos considerar como una preciosa joya.* (Boyer, 2003, p. 81)

En la cultura griega se llevó a cabo el descubrimiento de los segmentos inconmensurables, lo cual se atribuye a Hipaso de Metaponto (450 a.C.) que logra resolver la sección áurea, lo cual devasta la filosofía pitagórica que afirmaba que la esencia de todas las cosas, tanto en la geometría como en los asuntos teóricos y prácticos del hombre, era explicable en términos de propiedades intrínsecas de los números naturales y de sus razones. Esto demolió las bases de la fe pitagórica en los números enteros.

Otros aportes importantes sobre segmentos inconmensurables fueron hechos por: Teodoro de Cirene, que *demostró la irracionalidad de las raíces cuadradas de los números naturales que no son cuadrados perfectos, desde el 3 al 17, ambos incluidos* (Boyer, 2003, p. 123), Eudoxo de Cnido (335 a.C.), quien presentó una *teoría general de proporciones que permitió resolver uno de los aspectos más preocupantes de la crisis provocada por el descubrimiento de los segmentos inconmensurables* (Boyer, 2003, p. 127) y Arquímedes de Siracusa (287 a.C.) quien mediante el cálculo de perímetros inscriptos en una circunferencia, obtuvo una aproximación de π. Euclides escribió alrededor del 300 a.C. "Los Elementos" que contenía toda la matemática elemental. En su libro VI aparece una de las definiciones de Φ la cual dice: *Dize ser dividida una línea recta con razón extrema y media quando fuere como se ha toda a la mayor parte, así la mayor a la menor* (Corbalán, 2010, p. 23). Además, en el libro X trabaja con segmentos inconmensurables, donde describe el algoritmo de Euclides aplicado a segmentos.

En la Edad Media se determinan valores más exactos de π y Φ y se comienza a caminar hacia el reconocimiento del irracional como número. En la cultura hindú se introducen nuevas reglas para operar con números enteros, racionales e irracionales. Leonardo de Pisa (1180-1250 d.C.), más conocido como Fibonacci, mostró una de las aproximaciones más precisas de una raíz irracional y su mayor contribución fue la sucesión que lleva su nombre que define la sección áurea.

Leonardo da Vinci (1452-1519 d.C.) es uno de los máximos ejemplos en la historia de la idea del genio. Sus aportaciones no se limitan a unos pocos campos del conocimiento, sino que abarcan áreas muy alejadas entre sí: matemáticas, física y química ingeniería, tecnología, pintura, arquitectura, etc. Leonardo aplicó el conocimiento científico de las proporciones humanas a los estudios de Pacioli y Vitruvio acerca de la belleza. Siguiendo el ideal Renacentista, El hombre ideal o El hombre de Vitruvio, pone al hombre en el centro del universo, puesto que está inscrito en un círculo y un cuadrado (Corbalán, 2010)

En las edades Moderna y Contemporánea, el irracional se consideraba un número a través de contribuciones realizadas por Méray, Dedekind y Cantor. Méray (1836-1911) *[…] consideraba que una sucesión convergente determinaba o bien un número racional o un* *número ficticio y estos son esencialmente los que conocemos como número irracional* (Boyer, 2003, p. 694); Dedekind (1831-1916) *[...] define la construcción de un sistema numérico completo (conjunto de los números reales) a través del concepto de cortadura que permite definir formalmente el número irracional* (Boyer, 2003, p. 695); Cantor (1845-1918) presenta una construcción de los números reales mediante el estudio de sucesiones regulares, lo cual permitió definir el número irracional (Boyer, 2003)

Como podemos observar en los acontecimientos históricos que dieron origen a los números irracionales, el proceso se dio desde un aspecto geométrico y posteriormente fueron reconocidos como números. Este mismo proceso puede observarse en el desarrollo de nuestras prácticas. En la Guía Práctica N°1, las alumnas comenzaron trabajando con proporciones de segmentos, cuando utilizaron el concepto de extrema y media razón; verificaron que el rectángulo trazado es áureo.

La guía antes mencionada, se basa en diferentes representaciones de un mismo objeto matemático. Para analizar qué son las representaciones, acudimos a palabras de Penalva y Torregrosa:

> *La palabra representación, según Duval (1993) tiene un doble valor en matemáticas, es a la vez importante y marginal, además es un término difícil de definir (Llinares, 1994). Una escritura, una notación, un símbolo representando un objeto matemático, las figuras geométricas,... son ejemplos de representaciones (Kaput, 1987)*. (p. 3)

Además, citando a Duval, identifican una actividad ligada a la producción de representaciones llamada *semiosis* .

Las representaciones de Φ utilizadas en la actividad planteada en la Guía Práctica N°1 son figuras geométricas, en las que determinados segmentos de las mismas son inconmensurables, aproximándose su medida al número áureo. A continuación presentamos algunas de estas figuras:

- Segmento en extrema y media razón: un segmento partido de tal manera que el cociente entre la longitud del segmento total y la parte mayor es igual al cociente entre la parte mayor y la parte menor, el cual es Φ.

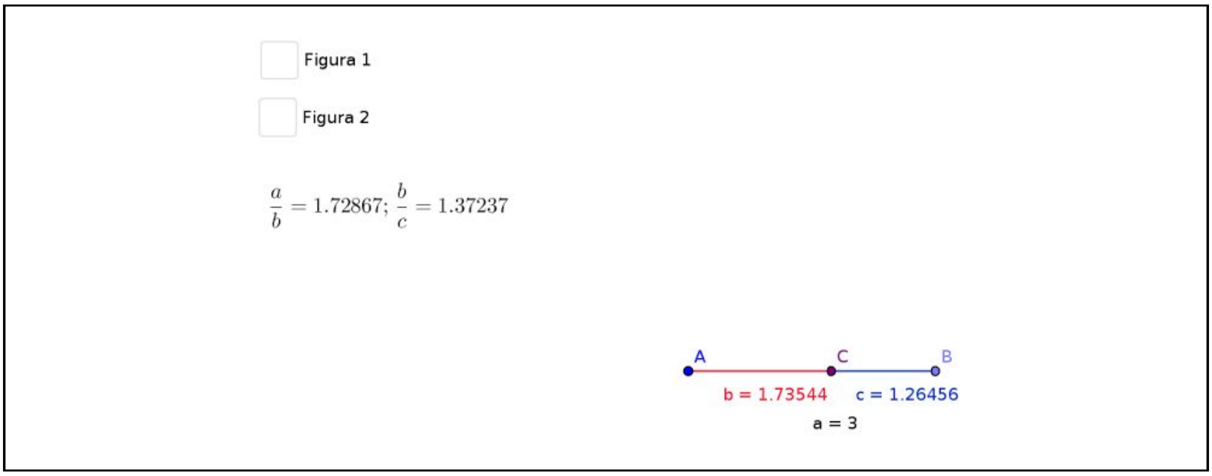


Figura 34: Segmento trabajado en *GeoGebra*.

- Rectángulo áureo: este tiene la particularidad de que si realizamos el cociente entre el lado mayor y el lado menor, en ese orden, se obtiene como resultado el número de oro.

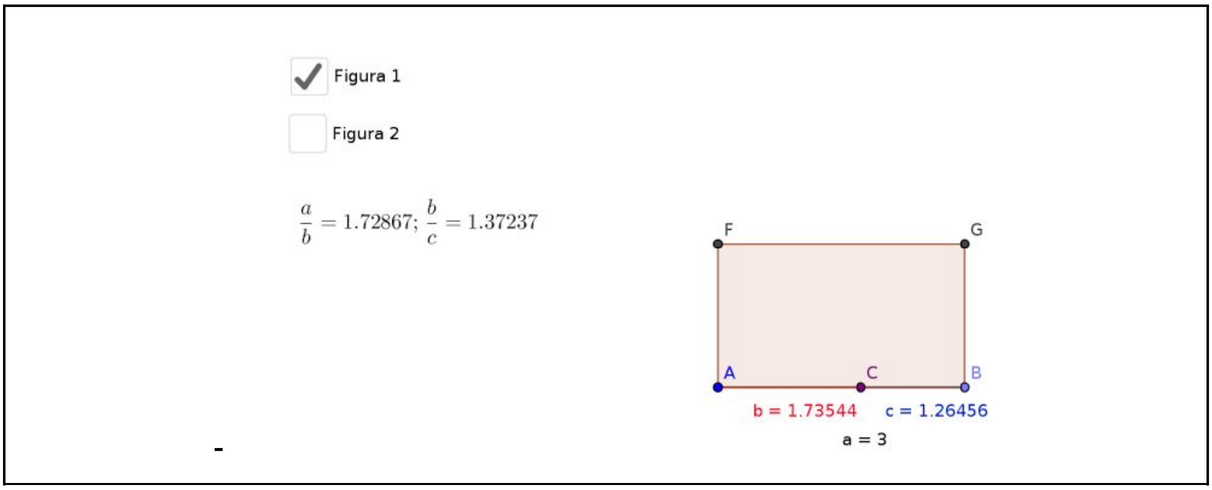


Figura 35: Rectángulo áureo trabajado en *GeoGebra*.

- Triángulos compañeros: si se realiza el cociente entre el lado mayor y el lado menor de cada triángulo, y a su vez, mirando los triángulos obtenidos al partir el triángulo original, realizamos el cociente entre el segmento de mayor longitud con el de menor longitud obtenemos una aproximación a Φ. La Figura 36 muestra la producción de un grupo de alumnas.

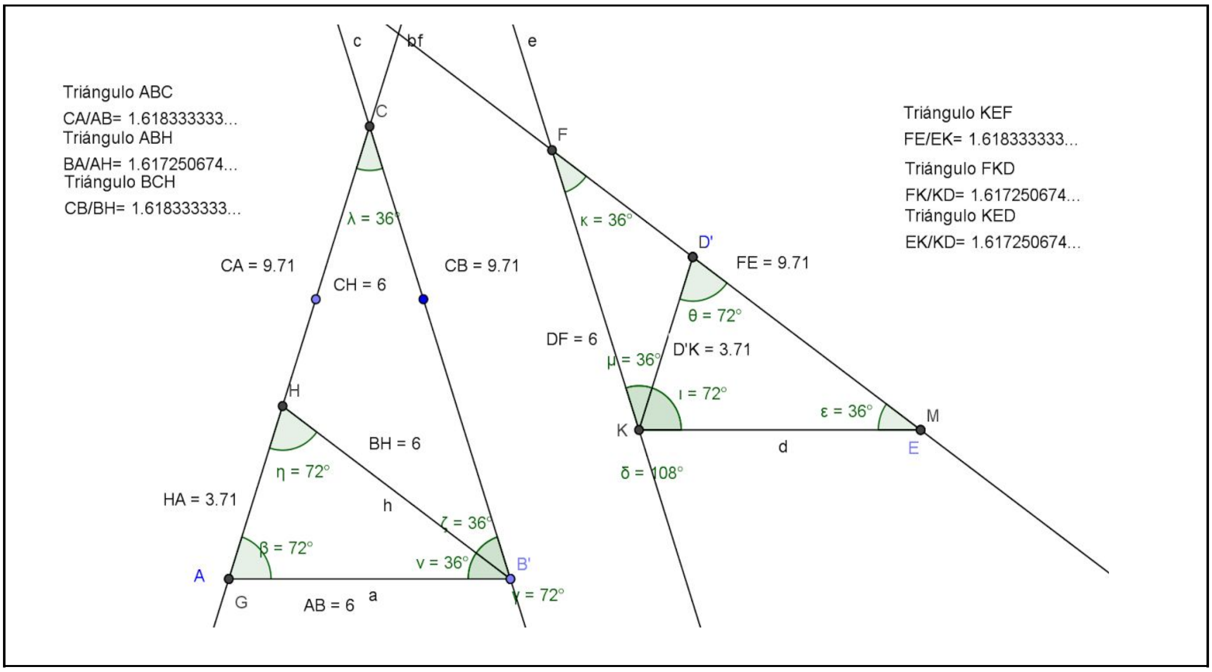
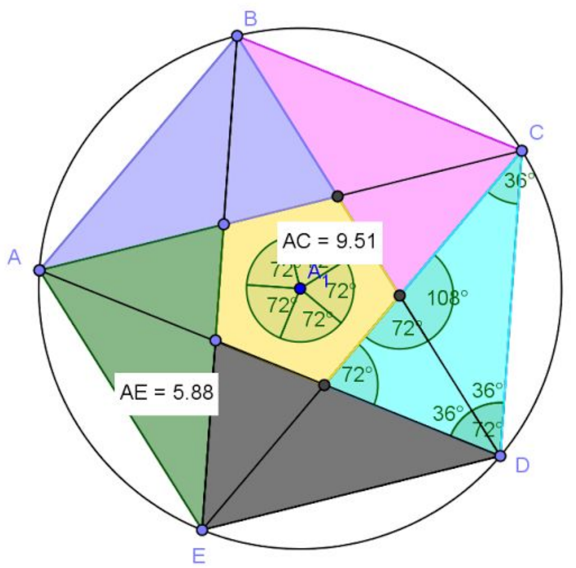


Figura 36: Triángulos compañeros realizado en *GeoGebra* por las alumnas.

- Pentágono regular: el cociente entre una diagonal y un lado del pentágono regular es aproximadamente Φ. En la Figura 37 puede observarse la construcción realizada por un grupo de alumnas.



$$\frac{AC}{AE} = 1,617346939 \cong \Phi$$

Figura 37: Pentágono regular trabajado en *GeoGebra por las alumnas*.

Durante el desarrollo de la actividad, las alumnas trabajaron con un objeto matemático desconocido, debido a que el número de oro no había sido institucionalizado en clase, por lo que esta actividad puede considerarse tanto una actividad de exploración, por el trabajo manipulativo con las figuras geométricas, como también un trabajo de modelización. El problema fue definido por nosotros y a partir de las pautas de la guía de actividades las alumnas elaboraron sus propias conjeturas, trabajando dentro del campo propio de la matemática. De este modo, identificamos la actividad como un trabajo de modelización intramatemática.

Dado que para nosotros estas representaciones constituyen sistemas semióticos, nos remitimos a Penalva y Torregrosa, quienes citando a Duval establecen que para que estos sistemas semióticos sean sistemas de representación, deben permitir la realización de las tres actividades siguientes:

1. La *identificación* de la presencia de una representación. Implica una selección de rasgos en el contenido a representar.

2. El *tratamiento* de una representación. Es la transformación de una representación en otra del mismo sistema. Es una transformación interna a un sistema.

3. La *conversión* de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro sistema conservando la totalidad o sólo una parte del contenido de la representación inicial.

Teniendo en cuenta lo anterior y analizando las actividades con *GeoGebra* desde el punto de vista de las alumnas, podemos decir que la característica de identificación no puede considerarse, debido a que desconocían el objeto matemático con el cual se estaba trabajando, por lo que no les fue posible identificar los rasgos de dicho contenido en las representaciones.

En cuanto al tratamiento, podemos distinguir, entre otras, la analogía que encontraron las alumnas al trabajar con el segmento partido en media y extrema razón y el rectángulo áureo, la cual les permitió darse cuenta de que la parte mayor del segmento partido tenía la misma longitud que el lado menor del rectángulo, como se advierte en la Figura 38.

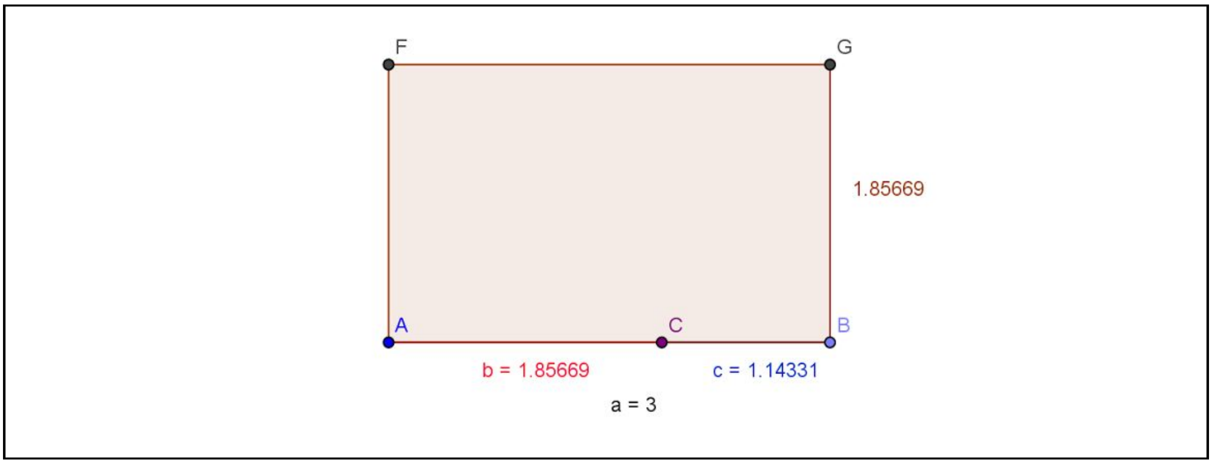


Figura 38: Analogía encontrada por las alumnas al trabajar con el rectángulo áureo.

En cuanto a la conversión, esperábamos que se diera cuando las alumnas hicieran el traspaso de un sistema de representación geométrico a un sistema de representación numérico, vinculando ambos una vez desarrollados los conceptos en clases, lo cual no sucedió.

Centrando la mirada en la Guía Práctica Nº 2 podemos decir que allí también estuvieron presentes las representaciones semióticas, dado que las alumnas para hacer un tratamiento del problema planteado debieron esquematizar la información de modo que les permitiera una mejor visualización y, de esta manera, dar una solución. Esto se puede verificar, analizando algunas de las producciones realizadas por las alumnas.

En la producción 1 (Figura 39), se muestran dos representaciones distintas del problema.En la primera realizaron un diagrama en el que por cada hora transcurrida las personas infectadas estaban representadas por un símbolo. En la misma hoja, las alumnas cambiaron a otro modo de representación, en el cual a cada una de las personas infectadas con el microorganismo le asignaron una letra. Así, contando la cantidad de letras por cada hora, obtenían la cantidad de infectados. Cuando las letras fueron insuficientes, sumaron la cantidad faltante. No contamos con registros de cómo realizaron esas sumas.

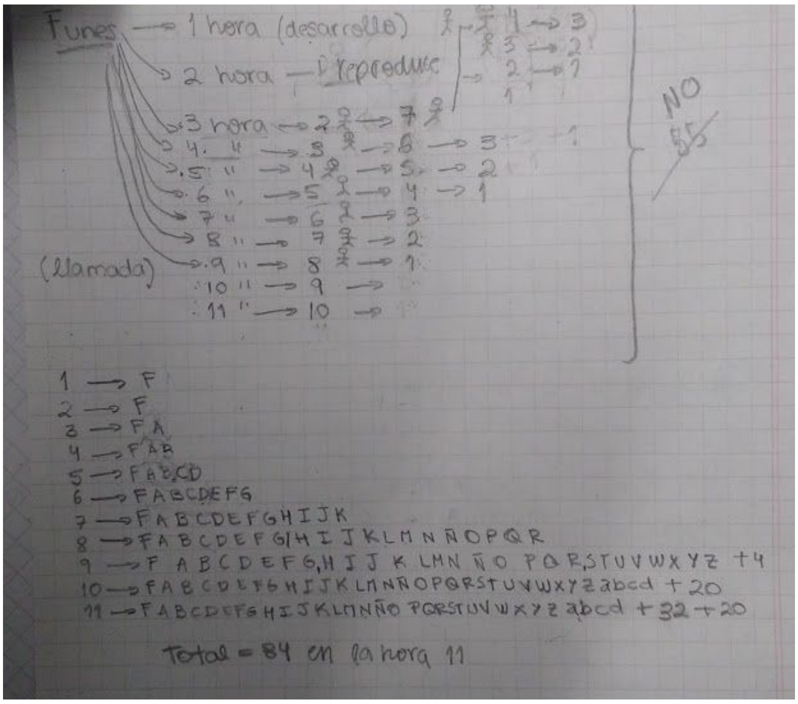


Figura 39: Producción 1 - Guía Práctica N° 2.

En las producciones 2.1 y 2.2 (Figuras 40 y 41) correspondientes a un mismo grupo, las alumnas realizaron varios diagramas hasta llegar al que les daría la respuesta adecuada de acuerdo a los supuestos que habían considerado. Como puede apreciarse lo que hacen es ir representando a cada nuevo infectado conforme pasan las horas lo cual les permite luego, posicionándose en una hora determinada, calcular la cantidad de personas infectadas sumando todos los símbolos de personas hasta ese momento.

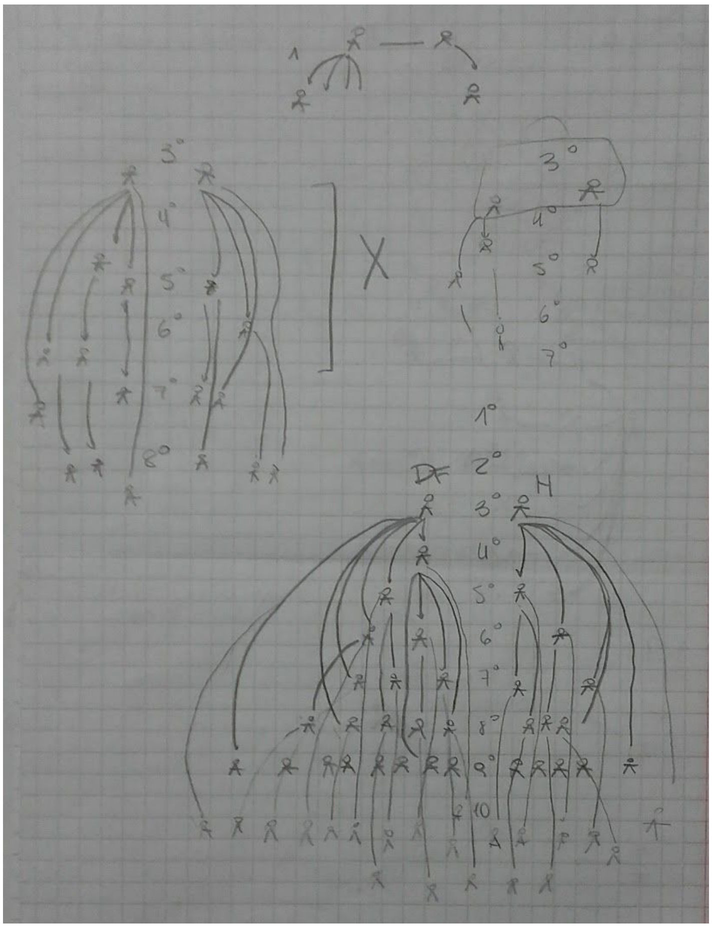


Figura 40: Producción 2.1. - Guía Práctica N° 2.

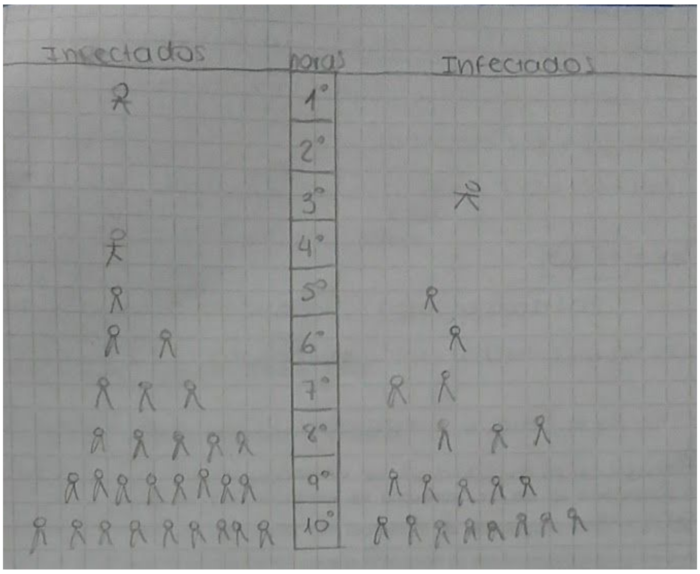


Figura 41: Producción 2.2. - Guía Práctica N° 2.

En la producción 3 (Figura 42) las alumnas representan a cada uno de los infectados con un número natural, para esto posicionan juntos el número correspondiente a la nueva persona infectada con aquel correspondiente a aquella que lo contagió; por ejemplo en la hora 6 el 311 representa al infectado 11 contagiado por 3. Este procedimiento les facilita el cálculo total de infectados en una determinada hora puesto que el último número empleado resulta ser la cantidad de infectados (a modo de ejemplo, en la hora 6 el 13 es el último número empleado).

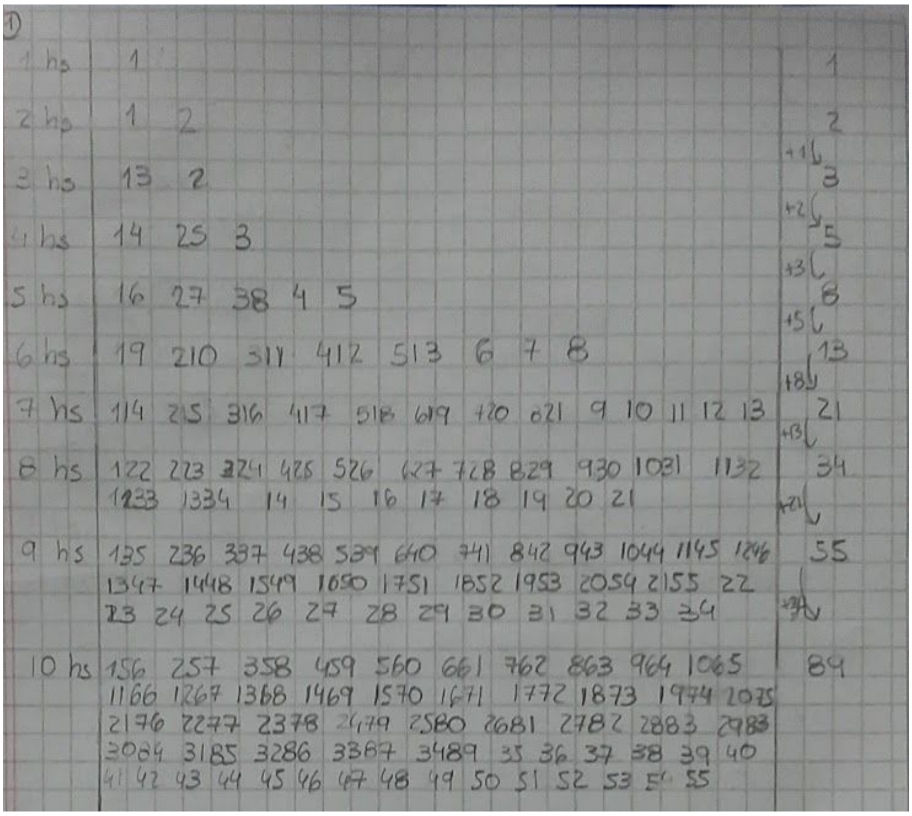


Figura 42: Producción 3 - Guía Práctica Nº 2.

En la producción 4 (Figura 43) las alumnas calcularon la cantidad de personas que un infectado contagiaría en función de las horas. Así, como puede verse en la parte superior de la imagen, consideran que el primer infectado tiene once horas de contagio hasta la hora que ellas tienen que contabilizar. Para que esta persona contagie, deben transcurrir dos horas más, por lo que el tiempo restante son nueve horas. Con estos datos, arman el diagrama de árbol de las nueve horas en las que el primer infectado contagia a otras personas. Una vez esto, hicieron lo mismo para una persona que se contagió a la tercera hora, a la cual le restan 8 horas de contagio. Luego de esto, las alumnas utilizarían los primeros diagramas como auxiliares para contar los infectados de las horas restantes. Este procedimiento resulta interesante, pero las alumnas decidieron no continuar con el mismo y recomenzar el cálculo con otra estrategia.

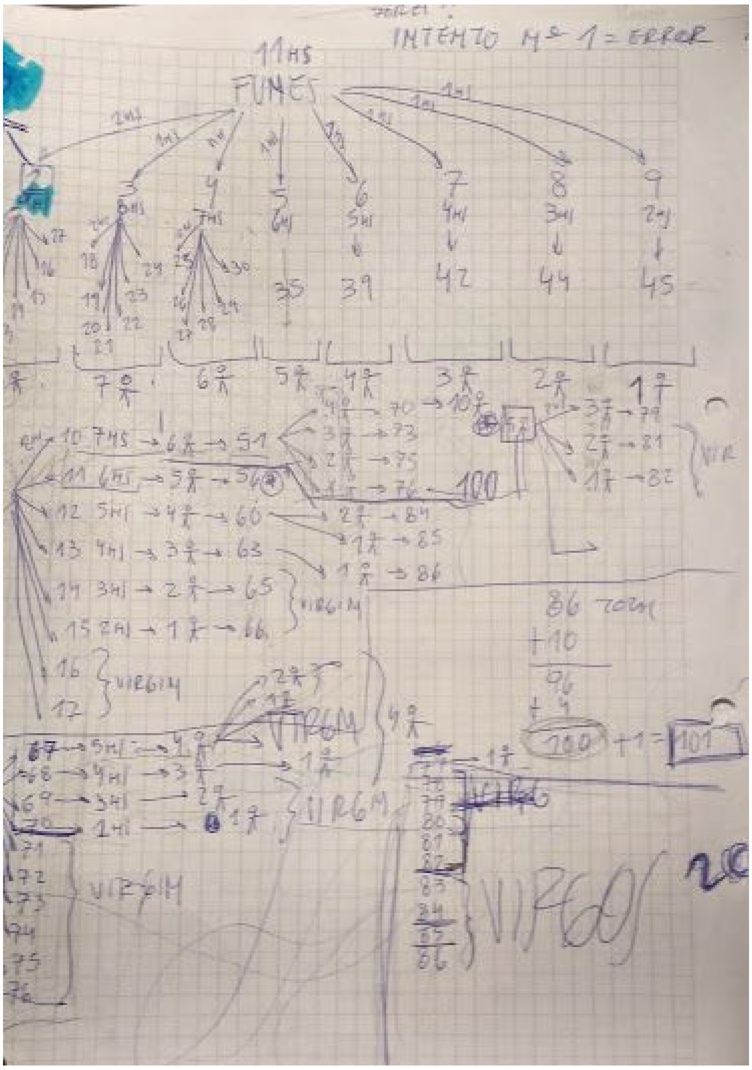
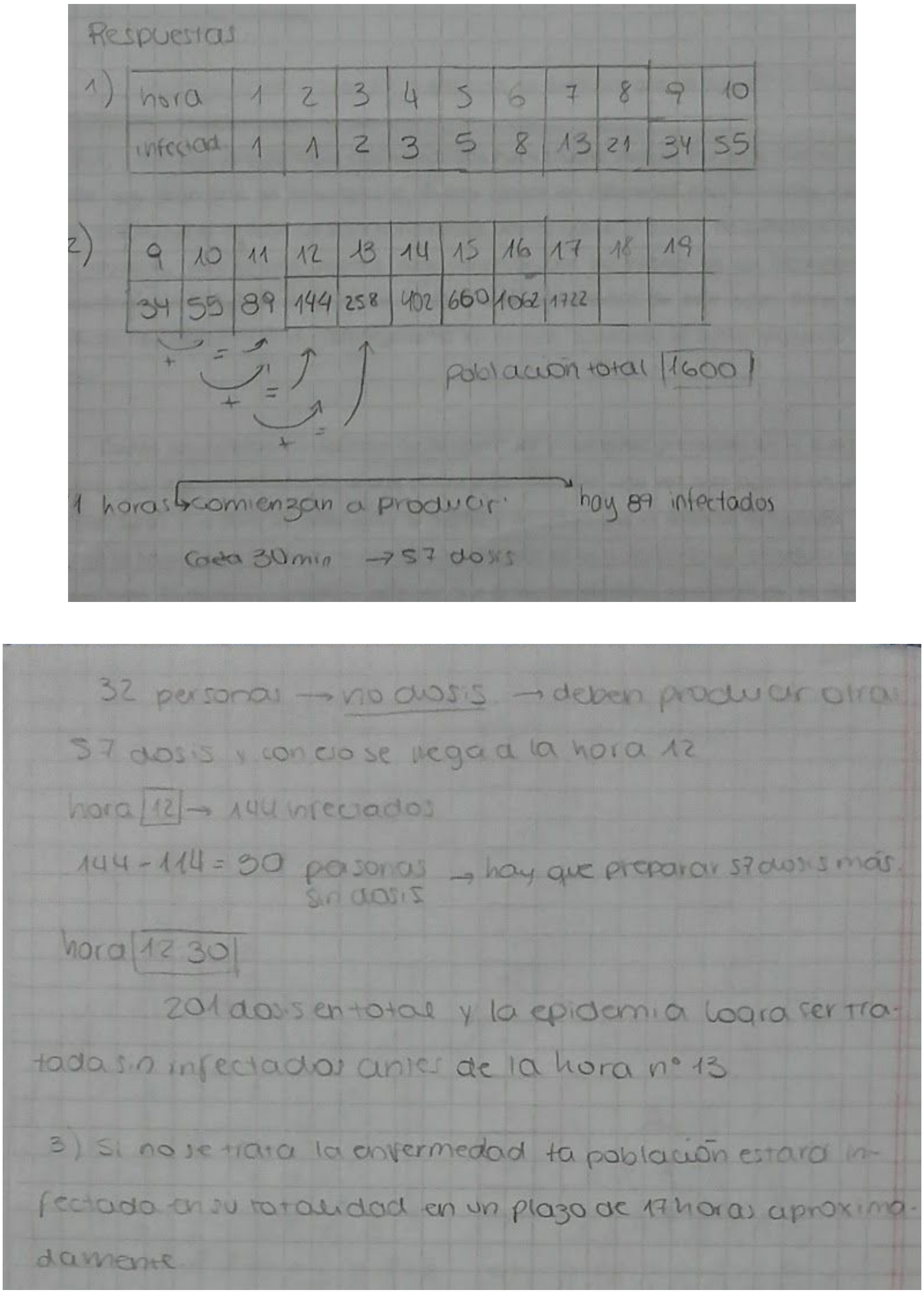


Figura 43: Producción 4 - Guía Práctica Nº 2.

Analizando las producciones anteriores y en función de la clasificación de Duval citada anteriormente (Penalva y Torregrosa), podemos ver que se ha producido la *identificación* de las variables que influyen en el desarrollo del problema. Estas son *conversiones* de representaciones de una situación problemática de semirrealidad a otra, la cual se presenta en modo de cuadros, símbolos (numéricos o alfabéticos), diagramas de árbol, etc. En algunos de los ejemplos, podemos identificar que las alumnas pasan de una situación a otra, por lo que se observa que está presente la característica de *tratamiento*.

A continuación presentamos una de las soluciones a la cual arribaron las alumnas. La misma corresponde a la producción 2:



Respuestas

1)

hora	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
infectad.	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2)

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
34	55	89	144	258	402	660	1062	1722		

población total $\boxed{1600}$

11 horas → comienzan a producir → hay 89 infectados

cada 30 min → 57 dosis

32 personas → no dosis → deben producir otras 57 dosis y con eso se llega a la hora 12

hora $\boxed{12}$ → 144 infectados

144 - 114 = 30 personas sin dosis → hay que preparar 57 dosis más

hora $\boxed{12\ 30}$

201 dosis en total y la epidemia logra ser tratada sin infectados antes de la hora n° 13

3) Si no se trata la enfermedad la población estará infectada en su totalidad en un plazo de 17 horas aproximadamente

Figura 44: Solución provista por las alumnas que elaboraron las Producciones 2.1 y 2.1.

En la Figura 44, se puede observar cómo las alumnas transforman la representación icónica, mostrada en las Figuras 40 y 41, a una representación algebraica (solución de la situación problemática) que traduce lo expuesto en dicha imagen conservando la totalidad de la misma.

En el texto de Penalva y Torregrosa se menciona que Duval identifica a su vez otro tipo de actividad ligada a la aprehensión conceptual de los objetos, a la cual llama *noesis.* Además, Oviedo y Kanashiro (2012) mencionan que:

> *[...] no hay noética sin semiótica, es la semiótica la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noética. Es decir no habrá aprendizaje sin el recurso de varios sistemas semióticos de representación lo que implica la coordinación entre los mismos por parte de los alumnos*. (p.31)

Es aquí donde radica el meollo de la cuestión, puesto que luego de finalizadas nuestras prácticas, y tras ver las respuestas brindadas por las alumnas no sólo en las guías prácticas sino también en la evaluación tomada al final de las mismas, pudimos notar que se habían generado ciertas confusiones en cuanto a las diferentes representaciones a partir de las cuales se obtenía el número de oro. Es decir, lo que a nuestro criterio facilitaría la comprensión de la temática, quizás no resultó ser tan así.Es por ello que consideramos que hubo una ausencia de noética, cuyos factores intentaremos dilucidar.

A continuación se muestran algunos ejemplos extraídos de las evaluaciones. En la Figura 45 se muestra un rectángulo áureo. En este caso, la dificultad radica en propiedades de la figura trazada, dado que cuando se realizan las sucesivas particiones, la figura restante corresponde a un rectángulo áureo. Posteriormente, al trazar la espiral áurea rectangular, donde se puede constatar que el rectángulo está mal trazado, la alumna continúa sin advertir que la construcción no se asemeja a la figura trabajada en clase.

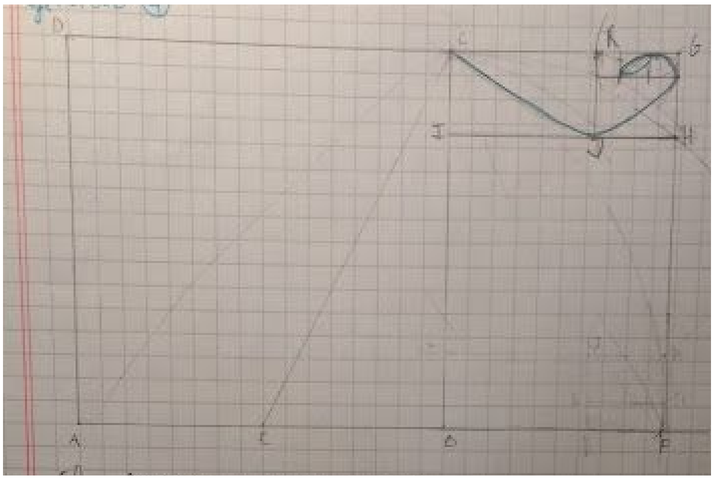


Figura 45: Resolución del ejercicio 4 de la evaluación.

En la Figura 46 se muestran dos producciones de las alumnas, en las cuales se observa claramente la confusión respecto de dos procedimientos distintos en los que aparece representado el número áureo: para realizar la partición de un triángulo compañero y luego dar cuenta de cuál es el segmento que se encuentra en proporción áurea, las alumnas reproducen la construcción que se emplea para partir a cualquier segmento en media y extrema razón.

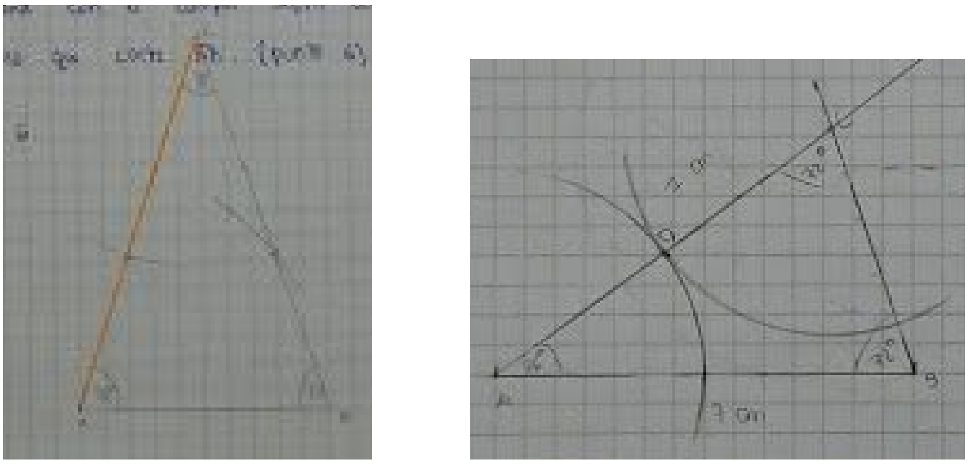


Figura 46: Resolución del ejercicio 6 de la evaluación.

En la Figura 47 se muestra cómo las alumnas realizan la partición de un segmento en extrema y media razón utilizando el procedimiento de la "Teoría de la Construcción" visto en clase, que brinda la ubicación del punto que divide al mismo en proporción áurea. En la Figura 48 se muestra la partición de un segmento en extrema y media razón utilizando triángulos compañeros. En ambos casos, las alumnas posicionan a Φ como el punto que parte al segmento en proporción áurea, en lugar de reconocerlo como el cociente entre las medidas de los segmentos correspondientes.

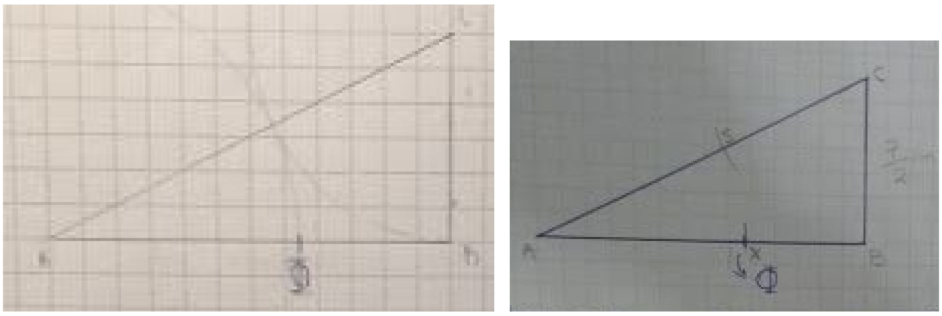


Figura 47: Resolución del ejercicio 5 de la evaluación.

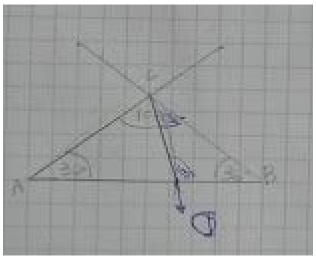


Figura 48: Resolución del ejercicio 6 de la evaluación.

En la Figura 49 se puede observar que las alumnas no se han apropiado del concepto de triángulos compañeros, puesto que utilizan medidas para los ángulos marcados que no se corresponden con las definidas para un triángulo compañero

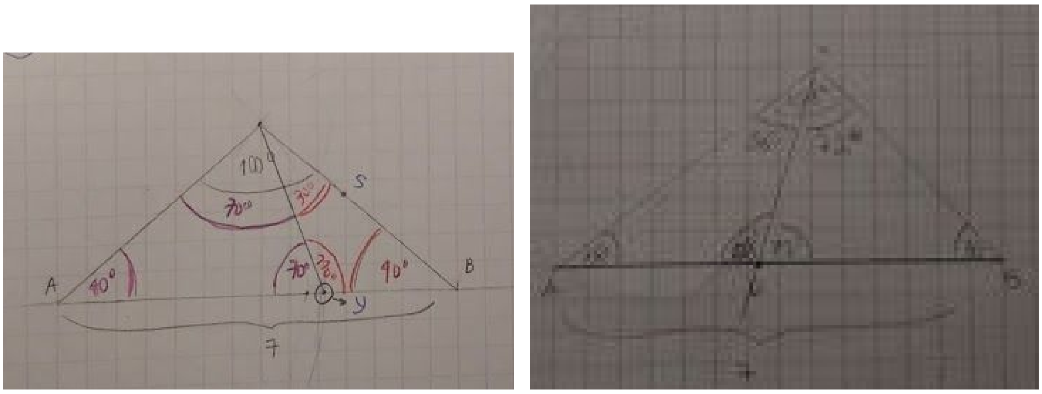


Figura 49: Resolución del ejercicio 6 de la evaluación.

A modo de cierre, en el capítulo 4 realizaremos una conclusión respecto de todo lo analizado en esta sección.

4. Reflexiones finales.

En función de lo analizado en el capítulo anterior, e intentando dar respuesta a la problemática, a continuación elaboraremos algunas hipótesis respecto de los factores que pudieron haber influido en la aprehensión por parte de las alumnas del concepto abordado.

En palabras de Duval, el pasaje de un sistema de representación a otro o la puesta en juego simultánea de varios sistemas de representación en el desarrollo de una clase no resultó para nada, evidente o espontáneo para nuestras alumnas. En general, les costó reconocer el mismo objeto a través de sus representaciones en distintos registros semióticos. Es decir que uno de los factores claramente influyentes, a nuestro juicio, fue el dominio que tenían las alumnas de cada sistema de representación trabajado.

Consideramos que otro de los factores que pudo haber influido en esta ausencia de noesis es el tiempo disponible para trabajar con la temática. Dado que este fue limitado, no tuvimos oportunidad de hacer un buen cierre, interrelacionando cada uno de los sistemas de representaciones con los que se había trabajado, para que de esta manera las alumnas lograran la aprehensión del objeto matemático en cuestión. También consideramos, en relación con este factor, que las actividades propuestas no resultaron suficientes para que las alumnas pudieran apropiarse del concepto matemático abordado.

Analizando los acontecimientos surgidos a lo largo de la historia, y considerando lo complejo que resultó en otras épocas la comprensión de los números irracionales, nos preguntamos si esto que sucedió hace miles de años no se asemeja a lo ocurrido en nuestras prácticas; es decir, que pudo ser otro de los factores influyentes al momento que las alumnas pudieran realizar el paso de una representación geométrica, como la trabajada en la primer guía, a una aritmética. Consideramos que la secuencia didáctica propuesta en el curso se asemeja a lo sucedido históricamente y este puede ser un importante motivo por el cual las alumnas no lograron asimilar los diversos conceptos.

Todas estas cuestiones mencionadas pudieron haber influido en mayor o menor medida en la aprehensión del concepto matemático con el cual trabajamos, como así también la ausencia de una conexión entre cada uno de los sistemas de representación. Puesto que Φ es tratado como un número irracional especial, y el conjunto numérico de los irracionales ha puesto en evidencia ciertas dificultades a la hora de su enseñanza, consideramos que resultaría de vital importancia realizar esa interconexión entre las diversas representaciones, para de esta manera facilitar la comprensión y la apropiación del conocimiento por parte de las alumnas.

Finalmente, queremos destacar ciertas cuestiones que surgieron durante el proceso de planificación de la temática y de nuestras prácticas, como así también algunos de los aprendizajes adquiridos.

El momento de planificar fue un momento arduo, lleno de expectativas, pero sobre todo de muchos miedos, incertidumbres e intenso trabajo. Queríamos que la propuesta que íbamos a presentar permitiera que todos los conceptos rondaran bajo un mismo eje. Esta tarea no fue fácil ni mecánica, sino que fue un completo desafío, para lo cual resultó necesario llegar a acuerdos, en primera instancia entre nosotros como par pedagógico, y luego con la coordinadora del área y la docente a cargo. La propuesta tenía que expresar claramente los objetivos que perseguíamos y cómo lograrlos de manera eficiente. Pretendíamos también que las actividades resultaran interesantes, pero a su vez debían tener como foco a las alumnas, induciéndolas a que produjeran el conocimiento, situándose así en un rol crítico y reflexivo sobre el quehacer matemático, concentrándose de esta forma en el trabajo colaborativo.

Cabe destacar la importancia que tuvo el uso de las tecnologías en el desarrollo de la guía práctica N°1, puesto que permitió que las alumnas pudieran visualizar los objetos matemáticos e interactuar con ellos. Fue una actividad que al comienzo nos generó muchas inseguridades, debido a que no sabíamos cuál sería la actitud tomada por las alumnas, pero reflexionando a posteriori sobre esto podemos dar cuenta que resulta gratificante saber que este trabajo fue reconocido por parte de las docentes como una actividad genuina de construcción del saber.

La Guía Práctica N°2, de modelización, fue una actividad que demandó un gran esfuerzo de nuestra parte, ya que las producciones de las alumnas nos dejaban en una zona de incertidumbre. Al no ser única la respuesta al problema planteado, como suelen ser las propuestas tradicionales, daba lugar a distintos modos de argumentar, los supuestos eran variados y se generaban debates interesantes entre las estudiantes.

Resaltamos lo gratificante que nos resultó la experiencia de realizar nuestras prácticas docentes en esta institución. En primer lugar, porque la docente a cargo del curso se involucró en nuestra actividad en todo momento, transmitiéndonos no sólo su pasión por la profesión sino también brindándonos consejos en base a la experiencia adquirida. Y en segundo lugar, porque los cursos con los que trabajamos, al caracterizarse por ser aplicados y demostrativos respecto de su interés hacia la matemática, no tardaron en hacer evidente su aceptación hacia nosotros, lo cual nos permitió una rápida adaptación. Cabe destacar que las alumnas eran capaces de resolver ejercicios de manera autónoma y participaban de manera espontánea en las clases, dando lugar a debates respecto de conceptos y actividades. Por todo esto, es que queremos agradecer a la institución por abrirnos las puertas debido a que nos permitió crecer de la manera que lo hicimos dentro del quehacer docente.

Para finalizar, creemos que es muy acertada la siguiente cita que, en nuestra humilde opinión, consideramos un fiel reflejo de lo que implicó para nosotros el desarrollo de nuestras prácticas profesionales:

> *El momento de formación es un momento privilegiado, porque aunque se corre con la desventaja de la falta de experiencia, constituye una etapa en la que hay tiempo para la reflexión sobre la enseñanza (Sadovsky, 2005, p. 17).*

5. Referencias

- Bombini, G. (2002) Prácticas docentes y escritura: hipótesis y experiencias en torno a una relación productiva. Ponencia presentada en las primeras Jornadas de Práctica y residencia en la formación docente, Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba.
  Disponible en:
  http://tecnologia.ffyh.unc.edu.ar/resources/Residencias1/indexpractica.htm.
- Boyer, C. (1986) *Historia de las Matemáticas*. Editorial Alianza Universidad. Madrid, España.
- Corbalán, F. (2010) *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza*. EDITEC. Villatuerta, España.
- Gvirtz, S., Palamidessi, M. (2008). *El ABC de la tarea docente: Curriculum y enseñanza*. Aique. Buenos Aires, Argentina.
- Oviedo, L., Kanashiro, A. (2012) Los registros semióticos de representación en matemática. Revista Aula Universitaria 13, pp. 29-36. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe, Argentina.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34) APM. Lisboa, Portugal.
- Villarreal, M. (2013) Humanos-con-medios- un marco para comprender la producción matemática y repensar prácticas educativas. *Formación de profesores, currículum, Sujetos y prácticas educativas.* Editorial Filosofía y humanidades, Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba, Argentina.

Sitios Web consultados:

- Penalva, M., Torregrosa, G. Representación y aprendizaje de las matemáticas, http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/aprendizaje/Representaci%C3%B3n%20y%20aprendizaje%20de%20las%20matem%C3%A1ticas*Penalva,%20C%3B%20Torrregrosa,%20G.%20*Penalva,%20C_%20Torrregrosa,%20G.%20Representaci%C3%B3n%20y%20aprendizaje%20de%20.pdf, consultado 13 de Octubre de 2017.
- Diseño curricular de educación secundaria. Ciclo básico de la educación secundaria. Encuadre general (2011-2015). Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba.

Secretaria de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Dirección General de Planeamiento e Información Educativa. http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/DiseniosCurricSec-v2.php

- Diseño curricular de educación secundaria. Orientación ciencias naturales. Tomo 4 (2011-2015). Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. Secretaria de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Dirección General de Planeamiento e Información Educativa. http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/DiseniosCurricSec-v2.php
- Diseño curricular de educación secundaria. Orientación ciencias sociales y humanidades. Tomo 3 (2011-2015). Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. Secretaria de Educación. Subsecretaría de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Dirección General de Planeamiento e Información Educativa. http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/DiseniosCurricSec-v2.php

6. Anexo

Programa de la materia.

ESPACIO CURRICULAR: Matemática
CURSOS Y SECCIÓN: Quinto año A (Ciencias Naturales) y B (Ciencias Sociales)
HORAS SEMANALES: 4

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DE LA DISCIPLINA:

- Caracterizar los diferentes conjuntos numéricos: Irracionales, Reales y Complejos, reconociendo sus propiedades y utilizándolas para operar.
- Analizar el comportamiento de las funciones polinómicas desde sus diferentes formas de expresión analítica, interpretando gráficamente sus parámetros y la naturaleza de sus raíces, recurriendo, cuando sea posible, al uso reflexivo de recursos tecnológicos.
- Explorar regularidades, hacer generalizaciones y realizar demostraciones formales.
- Organizar e interpretar datos estadísticos mediante tablas y gráficos, eligiendo la forma más adecuada, y utilizando reflexivamente -cuando sea posible- recursos tecnológicos.
- Utilizar los soft Graphmatica y GeoGebra para graficar, aproximar funciones, representar figuras geométricas, explorar regularidades y validar conjeturas.
- Incorporar lenguaje matemático para comunicar resultados al interpretar y producir textos con información matemática.
- Generar diferentes estrategias de cálculo, evaluando la razonabilidad y validez de procedimientos y resultados obtenidos.
- Producir argumentaciones matemáticas pertinentes de acuerdo al problema.

APRENDIZAJES Y CONTENIDOS:

Unidad N° 1: Modelos funcionales cuadráticos. Los números Complejos para interpretar las raíces no reales de las funciones polinómicas.

Revisión de las formas polinómica, factorizada y canónica de la función cuadrática. Análisis de la información suministrada por cada una de las formas. Revisión de la construcción de la gráfica de una función cuadrática. Extensión de la representación gráfica a las funciones cuadráticas con un discriminante menor que cero. Pasaje entre las formas factorizada, polinómica y canónica de la función cuadrática a partir del manejo de la operatoria con números reales y complejos. Representación gráfica en el plano Complejo. Operatoria básica en los números Complejos (C): suma analítica y vectorial, resta, multiplicación y división de números complejos. Potencias de la unidad imaginaria. Ejercicios combinados de números complejos.

Unidad N° 2: Funciones polinómicas de grado mayor que 2.

La Función Polinómica como generalización de la función lineal y cuadrática. Definición formal de Polinomios. Estudio de las operaciones con polinomios como herramienta para llegar a la forma factorizada de una función polinómica. Operaciones: multiplicación, productos notables, división y regla de Ruffini. Factorización de la Función polinómica de grado mayor que 2. Enunciado del Teorema fundamental del álgebra en C. Enunciado del Teorema de Gauss para raíces enteras. Cálculo de las raíces de una ecuación polinómica de grado n. Factorización por las raíces. Representación gráfica mediante el soft Graphmatica. Características gráficas de las funciones polinómicas de tercer y cuarto grado. Generalización a funciones polinómicas de grado n. Análisis de la multiplicidad de las raíces y su significado gráfico. Pasaje de la forma polinómica a la forma factorizada y viceversa. Representación gráfica aproximada considerando el significado algebraico y gráfico de los parámetros y la naturaleza y multiplicidad de sus raíces.

Unidad N° 3 : Números irracionales especiales: Φ y π. (Seminario)

Sucesiones numéricas. Caracterización de una sucesión numérica a partir de sus regularidades. Definición por recurrencia o mediante su término general. Estudio de un caso particular: la sucesión de Fibonacci. Un número irracional especial: Φ, como cociente entre términos sucesivos de la sucesión de Fibonacci, y desde su significado geométrico como media y extrema razón. Exploración mediante el soft GeoGebra en la relación lado/radio de un decágono regular y en la relación lado/diagonal de un pentágono regular. Demostración de que las relaciones anteriores son el número Φ. Demostración de las propiedades de Φ. Otro ejemplo de definición por recurrencia: la sucesión de Tribonacci. Relación entre el triángulo de Pascal y la sucesión de Fibonacci. Las ternas pitagóricas y la Sucesión de Fibonacci. El rectángulo áureo y la construcción aproximada de la espiral logarítmica. Reconocimiento de espiral logarítmica o espiral áurea en formas de la naturaleza. Otro número irracional especial: π. Deducción de las fórmulas para calcular la longitud de la circunferencia y la superficie del círculo. Resolución de problemas de cálculo de áreas y perímetros en figuras con al menos un lado redondo.

Unidad N° 4: La estadística como herramienta para el estudio de problemáticas no deterministas. Organización de datos en distribuciones de frecuencias para variables discretas. Representación gráfica: Diagrama de barras. Organización de datos de variables continuas. Confección de tablas de frecuencias agrupadas y cálculo de la marca de clase. Representación gráfica: histograma y el polígono de frecuencia. Cálculo de parámetros estadísticos de posición: media aritmética mediana y moda. Cálculo de parámetros estadísticos de dispersión: varianza y desviación típica. Uso de la calculadora científica para el cálculo de media y desviación típica. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. Reconocimiento gráfico. Análisis de pirámides poblacionales.

Evaluación:
En cada calificación se tendrá en cuenta los objetivos expuestos en la presente planificación y los criterios de evaluación que se van a explicitar en cada evaluación y que se trabajarán previamente con las alumnas.
Éstas tendrán carácter de oral o escritas, según en la parte del proceso de enseñanza-aprendizaje en que nos encontremos.

En las evaluaciones orales las alumnas deberán presentar la carpeta completa (que debe incluir los trabajos prácticos, guías de estudio en curso, las evaluaciones escritas de todo el año).
La carpeta, la realización de las tareas indicadas y la exposición oral incidirán en la nota obtenida.
En instancias de coloquios y de exámenes, la alumna deberá presentar su carpeta de clases completa y los materiales de trabajo necesarios.

Bibliografía para el alumno:
Apuntes de clase.
Guías de Estudio y guías de actividades.
Bibliografía de consulta:
- "Matemática 4 y Matemática 5" Serie de Plata. Editorial A-Z, Buenos Aires (Argentina).
- "Bachillerato 1, 2 y 3". De Guzmán, M., Colera, J., Salvador, A. Edit. Grupo Anaya, Madrid (España).
- "Matemática1 C.O.U." De Guzmán, M., Colera, J. Edit. Grupo Anaya, Madrid (España).
-"Carpeta de Matemática Polimodal 1". Abdala, C., Real, M., Turano, C., Aique grupo editor, Buenos
Aires (Argentina).

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de Evaluación del Informe Final de Prácticas de *Metodología y Práctica de la Enseñanza*, damos Fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por el Tribunal.