Metodología y Práctica de la Enseñanza

Fa.M.A.F. - U.N.C.

INFORME FINAL

Título: Resolución de problemas de optimización a través del uso de TIC

Autores: Guzmán, Juan Gabriel – Lucero, Gabriela

Profesora Supervisora de Práctica: María del Valle Mina

Carrera: Profesorado en Matemática

Fecha: 24 - 11 – 2016

Clasificación:

97 Mathematical Education

Palabras clave:

Optimización de funciones. Resolución de problemas. TIC. Registros de representación. Visualización.

Resumen:

En el presente informe realizamos una descripción y reflexión acerca de nuestra experiencia durante las prácticas profesionales en dos cursos de séptimo año de un colegio de la ciudad de Córdoba, correspondientes al Profesorado en Matemática de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación. El tema desarrollado en las prácticas fue "Optimización de funciones". La resolución de problemas de optimización fue trabajada primero, a través de procesos de modelización dirigidos por nosotros y posteriormente mediante una guía de actividades.

Además, teniendo en consideración la literatura existente sobre el tema, realizamos un análisis de las diferentes representaciones de la noción de función que fueron utilizadas por nuestros alumnos al resolver un problema de optimización en particular, y estudiamos cómo el proceso de traducción entre estas representaciones fue mediado por la tecnología disponible.

Abstract:

In the present report we make a description and reflection on our experience during the professional training in two seventh year classrooms in a school in Córdoba city, corresponding to the degree of Teacher of Mathematics at "Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación". The subject developed in our training was "Optimization of functions". The optimization problem-solving was worked in a first instance through modelling processes directed by us, and subsequently by means of an exercise guide.

Also, taking into account the existing literature on the topic, we make an analysis of the different representations of the notion of function that were used by our students when they solved a particular optimization problem, and we study how the translation process between these representations was mediated by the technology available.

A nuestra familia por todo el tiempo
y espacio que nos brindaron
para elaborar este informe.

A nuestra profesora supervisora y
el profesor a cargo del curso
por su apoyo incondicional
a lo largo de nuestras prácticas.

A nuestros profesores y compañeros de M.O.P.E.
con quienes aprendimos y compartimos
muchos momentos a lo largo de este año.

A nuestros alumnos,
quienes nos dejaron un gran aprendizaje.

"La enseñanza debe ser tal que pueda recibirse
como el mejor regalo y no como una amarga obligación."
(Mi visión del mundo, Albert Einstein)

Índice

Índice de figuras y tablas

Prefacio

En el siguiente informe realizaremos una descripción de nuestras prácticas docentes en un colegio de la ciudad de Córdoba, en el marco de la asignatura Metodología, Observación y Práctica de la Enseñanza (M.O.P.E), correspondiente al último año del Profesorado en Matemática de la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación (Fa.M.A.F.), Universidad Nacional de Córdoba (U.N.C.). Posteriormente escogeremos y analizaremos una problemática que surgió de esta experiencia. Esto será hecho en vistas a destacar aquellos aspectos de nuestro trabajo que puedan resultar útiles a otros colegas docentes para enriquecer su propia práctica profesional.

El Capítulo 1 está destinado a presentar la Institución en la cual tuvieron lugar nuestras prácticas, como así también los cursos en los cuales dimos clases y los recursos con los cuales contábamos para ello.

A lo largo del Capítulo 2 nos abocamos a realizar una descripción de nuestras prácticas, tanto en la etapa de planificación como de implementación de las clases. En las primeras secciones detallamos el tema con el cual nos tocó trabajar (Optimización de funciones) y explicitamos los objetivos que fijamos para su tratamiento, fundamentando la elección de los mismos a partir de la literatura existente sobre el tema, del Diseño curricular de Córdoba (2011-2015) y las planificaciones del docente a cargo del curso. En la Sección 2.3 describimos las actividades implementadas a lo largo de nuestras clases, como así también las evaluaciones que tomamos. Dado que nuestras prácticas estuvieron organizadas en dos grandes etapas, esta sección sigue esa misma estructura. Además, incluimos en ella una reflexión acerca de los procesos de modelización que se llevaron a cabo en la primer etapa, y al finalizar la misma realizamos un breve análisis de las actividades que propusimos, basándonos en la perspectiva de los ambientes de aprendizaje (Skovsmose, 2000). Concluimos este capítulo presentando un cronograma de nuestras prácticas, en el cual se brindan detalles acerca de la implementación de las clases.

El Capítulo 3 comienza con la determinación de una problemática surgida a partir de un episodio de nuestras prácticas, el cual en nuestro caso fue el Trabajo Práctico desarrollado en la primera etapa. A partir de la lectura de algunos autores con perspectivas concernientes a este tema realizamos una revisión presentada en la Sección 3.2, donde pudimos adoptar una perspectiva de trabajo desde la cual analizar las producciones de nuestros alumnos en el marco del Trabajo Práctico mencionado anteriormente, y en la Sección 3.3 incluimos aquellos extractos de los trabajos de los estudiantes que nos resultaron más ricos para el estudio de esta problemática.

Finalmente, en el Capítulo 4 realizaremos una breve reflexión acerca de todo lo que significó para nosotros la experiencia de realizar nuestras prácticas, como así también sobre el aprendizaje que supuso para nosotros la elaboración de este mismo informe.

1. Introducción

1.1 La Institución

El colegio en el cual tuvieron lugar nuestras prácticas se encuentra ubicado en la ciudad de Córdoba, Argentina, en la zona céntrica. Se trata de una institución educativa pública de gestión estatal, que cuenta con nivel Secundario y nivel Superior. Más de 2.200 alumnos recorren sus aulas diariamente, distribuidos en tres turnos.

En su nivel Secundario ofrece una formación de Bachillerato Humanista de siete años, con un plan de estudios que une conocimientos de asignaturas clásicas y contemporáneas de los estudios humanistas. La institución posee ocho divisiones por año durante los primeros cinco años, de las cuales las cuatro primeras cursan en el turno mañana y las cuatro últimas en el turno tarde. A partir de 6º año hay seis divisiones, tres en el turno mañana y tres en el turno tarde.

Por otro lado, en su nivel Superior ofrece tres carreras de Pregrado, con una duración de tres años cada una. Las mismas están estructuradas en base a un sistema de clases teórico-prácticas presenciales de carácter obligatorio, con cursado por la tarde-noche.

Este colegio está situado al lado de una iglesia, por lo cual muchas veces se escuchan sus campanas durante las horas de clase. Su estructura edilicia es antigua, cuenta con planta baja y dos pisos. Al ingresar puede observarse que sus techos son altos, las paredes son de un espesor considerable y las puertas son amplias, de madera y gran altura. Cuenta con largos pasillos en todos sus niveles.

En la planta baja se encuentran el Museo del colegio, el anfiteatro, la Regencia, la sala de profesores, la preceptoría de 6º y 7º año, el Centro de Estudiantes y varias secretarías, como la Secretaría de Asuntos Académicos y la Secretaría de Asuntos Económicos. Este nivel cuenta con dos patios:

- El patio principal está rodeado de aulas, posee una gran fuente en su centro, árboles de importante tamaño, una exposición de placas de diferentes promociones de ex-alumnos de la institución, y es en este patio, en donde se realizan los actos;
- El patio secundario es más pequeño, también cuenta con una fuente (de menor tamaño), está rodeado por los baños, algunas aulas, el centro de estudiantes y algunas secretarías.

La planta baja también cuenta con las aulas que son utilizadas por los alumnos de 6º y 7º año, tanto del turno mañana como del turno tarde.

Es importante destacar que existe una tradición en el colegio según la cual todos los viernes los alumnos de 7º año se reúnen alrededor de la fuente del patio principal, en uno de los recreos, para realizar una actividad denominada comúnmente "el cantito de los viernes", en la cual celebran el último año de su estadía en el colegio a través del canto de múltiples canciones referidas a la institución, con mucha euforia y de manera enérgica. Este rito tuvo bastante influencia en nuestras prácticas, puesto que las clases de los viernes en uno de los cursos tuvieron que ser planificadas teniendo en cuenta que su duración sería menor que lo usual.

Al ingresar al 1º piso, lo primero que se puede apreciar es una gran pintura realizada sobre la pared. En este nivel se ubican la preceptoría de 3º, 4º y 5º año, varios baños, el salón de actos, los laboratorios de física/química, la sala de Audiovisuales, la biblioteca y la sala de computación. Pueden verse algunos bebederos que por su condición, se presume tienen cierta antigüedad. Este piso cuenta con un amplio balcón con vistas al patio secundario.

Por último, en el segundo piso se encuentran las aulas de los cursos de 1º y 2º año junto con su preceptoría correspondiente. También posee baños y varios balcones que dan al patio principal.

1.2 Caracterización de los cursos

La materia en la cual realizamos nuestras prácticas se denomina "Análisis Matemático y Geometría Analítica", y se dicta sólo en el 7º año. Es necesario aclarar que al contrario de lo que ocurre en otras instituciones, en el plan de estudios no hay una materia denominada "Matemática" en cada año. De hecho, en algunos años existen dos materias en las cuales se ven contenidos matemáticos, como puede verse en la tabla de la Tabla 1.

Año	Nombre de la/s asignatura/s con contenidos matemáticos
1º	Matemática I
2º	Matemática II
3º	Matemática III
4º	Matemática IV
5º	"Matemática V - Álgebra" y "Estadística y Probabilidades"
6º	"Matemática VI - Trigonometría" y "Geometría"
7º	"Análisis Matemático y Geometría Analítica"

Tabla 1: Asignaturas con contenidos matemáticos por cada año escolar.

Los cursos que nos fueron asignados para desarrollar nuestras prácticas fueron los siguientes:

- **7º año "D":** Este curso está compuesto por 33 alumnos, 19 mujeres y 14 varones.
- **7º año "F":** En este curso hay 31 alumnos, de los cuales 15 son varones y 16 mujeres.

Ambos cursos asignados para la práctica tienen clases en el turno tarde; cada uno de ellos tiene su propio preceptor. Los horarios de la asignatura se pueden apreciar en la Tabla 2.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
13:30 - 14:10	7º F	7º F			
14:15 - 14:55	7º D	7º F			
15:00 - 15:40					
15:45 - 16:25			7º D		
16:35 - 17:15			7º D		7º D
17:20 - 18:00					
18:05 - 18:45					
18:50 - 19:30				7º F	

Tabla 2: Horarios de Análisis Matemático y Geometría Analítica.

Como puede observarse, los alumnos tienen una carga horaria de ocho horas cátedra por día, separadas cada una de ellas por un recreo de cinco minutos, con excepción del recreo correspondiente a la mitad de la jornada escolar, que dura 10 minutos. Análisis Matemático cuenta con cuatro horas-cátedra semanales, con una duración de 40 minutos cada una. En particular, como el "canto de los viernes" mencionado anteriormente tiene lugar en el recreo largo, la clase de Análisis Matemático correspondiente a los días viernes en 7º D siempre resulta afectada de algún modo por el mismo.

En la Figura 1 presentamos un croquis de las aulas en las que trabajamos, con la distribución de sus elementos identificados con colores distintos.

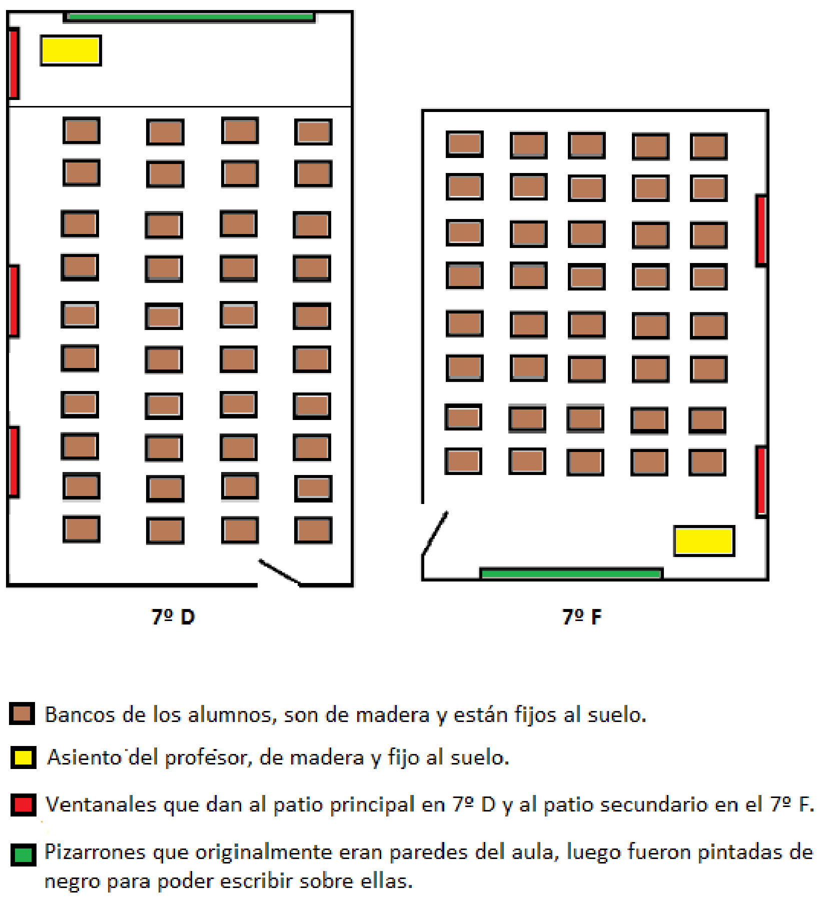


Figura 1: Croquis de las aulas de 7º D y 7º F.

Al ingresar a las aulas de 7º D y 7º F, lo primero que se puede notar es que sus dimensiones son diferentes: mientras que 7º F cuenta con un aula de largo y ancho similares, el aula de 7º D tiene una forma rectangular más pronunciada. No obstante, ambas tienen 40 bancos. En ambas estructuras el techo tiene una altura considerable, típica de la época en que fueron construidas. Particularmente, el aula de 7º D cuenta con una tarima (a la que se accede subiendo un escalón) que divide el aula en dos, dejando en un lado los bancos de los alumnos, y del otro, el escritorio del profesor y el pizarrón del aula.

Ambas aulas disponen de un proyector acoplado al techo, junto con una pantalla blanca que puede desplegarse manualmente sobre el pizarrón.

Como detalles adicionales, mencionamos que las aulas poseen tres ventiladores, varios enchufes distribuidos en el fondo y al lado del pizarrón, y percheros de madera en los cuales los alumnos pueden colgar sus sacos, ya que éstos forman parte del uniforme de la institución.

A continuación se adjuntan algunas fotografías de las aulas (Figuras 2 y 3), en las cuales puede apreciarse lo expresado en los párrafos anteriores.

Figura 2: Fotografía del aula de 7º D.

Figura 3: Fotografía del aula de 7º F.

1.3 Características de la clase de matemática y medios utilizados

En esta institución hay una fuerte presencia de la tecnología, ya que todas las aulas cuentan con señal WiFi y un proyector. Los estudiantes también tienen acceso a las netbooks del programa "Conectar Igualdad"[1] y una sala de informática. Es de importancia mencionar que el profesor a cargo de la materia enfatizaba el uso de tecnología en el aula.

Había profesores de otras disciplinas que usaban el proyector como elemento clave para dictar sus clases, mientras que otros sólo usaban el pizarrón. Pudimos notar en las observaciones que el profesor a cargo de nuestros cursos utilizaba ambos recursos, alternando uno con el otro.

El profesor permitía usar el celular a sus alumnos. Algunas de sus actividades, de hecho, consistían en realizar gráficos con aplicaciones instaladas en sus dispositivos. Esto fue posible gracias a que la gran mayoría de los alumnos poseían smartphones o aparatos electrónicos equivalentes.

Con respecto al uso de material bibliográfico, el programa de la materia recomienda el uso de un libro de texto, sin embargo el profesor a cargo decidió no utilizarlo y preparar material por su cuenta. A través de un grupo de Facebook[2] brindaba acceso a diferentes archivos, entre los cuales se encontraban las guías de ejercicios con las que trabajaba como así también material complementario a sus clases.

---

[1] El Programa Conectar Igualdad fue creado en 2010 durante el mandato de la presidenta Cristina Fernández de Kirchner. Como una política de inclusión digital de alcance federal, Conectar Igualdad recorre el país distribuyendo netbooks a todos los alumnos y docentes de las escuelas secundarias, de educación especial y de los institutos de formación docente de gestión estatal. Para más información, visitar la página http://www.conectarigualdad.gob.ar/.

[2] Red social, de gran difusión en Argentina. Su dirección web es la siguiente: https://www.facebook.com/.

[3]El programa de la materia contempla dos ejes temáticos con tres unidades cada uno: "Geometría Analítica" y "Elementos de Análisis Matemático" (ver Anexo I). Estas unidades fueron reorganizadas por el profesor de la materia en su planificación anual dentro de tres grandes bloques (ver Anexo II). El Bloque 1 corresponde a "Funciones", el Bloque 2 corresponde a "Elementos del Análisis Matemático" y el Bloque 3 a "Geometría Analítica". A su vez, el Bloque 2 se subdivide en tres partes: Introducción al concepto de límite de una función, Derivada de una función e Integración de funciones. Esto será explicado más detalladamente en el Capítulo 2. Habiendo realizado un análisis de su planificación anual, pudimos mentalizarnos en la situación en la cual iba a estar nuestro curso a la hora de comenzar nuestras observaciones.

Las clases que pudimos observar pueden reconocerse como expositivas. En una entre vista con el profesor, éste nos transmitió su preocupación por comenzar inmediatamente con la unidad correspondiente a "Derivadas" puesto que estaba atrasado con su programa anual debido a los paros docentes. Además debemos mencionar que era la última semana de clases antes del receso invernal. Notamos que no se dirigía a los alumnos por sus apellidos y que los trataba de "vos". Algunas de las clases observadas comenzaron con un repaso y a continuación el profesor desarrollaba contenidos teóricos con ayuda del proyector. En otras se resolvieron en el pizarrón algunos ejercicios o problemas de la guía que estaba subida en el grupo de Facebook de la materia.

1.4 Los alumnos y sus actitudes con los distintos docentes

Durante las observaciones los cursos no parecían distinguirse demasiado. Ambos tomaron actitudes muy parecidas en el aula. Si bien cada alumno tenía un número de banco asignado (que se correspondía con su número de lista), no siempre se sentaban todos en el mismo lugar; en el caso de 7º D el profesor de la materia les solía pedir que se sentaran más adelante ya que el aula es larga y todos solían sentarse más al fondo. En cuanto a la asistencia, en ambos cursos se notaba mucho ausentismo (de hasta 10 alumnos en un día) por múltiples razones: en ocasiones era por evaluaciones tanto orales como escritas, en otras tenía que ver con actividades relativas al Centro de Estudiantes (varios alumnos ocupaban puestos importantes en él y solían salir del aula con frecuencia). Si bien la escuela tiene una serie de pautas de orden para los estudiantes tales como ingresar al aula a tiempo, pararse al lado del banco para saludar al profesor, entre otras, en algunos momentos estas actitudes se vieron relajadas.

A veces, los alumnos llegaban más de diez minutos tarde, otras se retiraban del aula sin hacer mucho alboroto; consideramos que esas actitudes son muy parecidas a las que se dan en el ámbito universitario. Si bien a veces se dispersaban, la mayor parte del tiempo eso no sucedía y mantenían el silencio.

En las observaciones de día completo se pudo ver que en 7º D los estudiantes tuvieron actitudes muy similares a las que tenían con el profesor de Análisis Matemático. Sin embargo, no ocurrió esto en la clase de Literatura: esta fue menos expositiva e invitaba la participación de todos

[3] Este documento ha sido publicado con la autorización expresa vía mail por parte del profesor del curso. Tomamos el recaudo de borrar su nombre y el nombre de la institución en las páginas donde apareciesen con el objetivo de resguardar sus identidades.

los alumnos, llegando a explicitar la intención de hacer hablar a los que la profesora consideraba más tímidos. Durante esta hora ella se sentó al último, invitando a sus alumnos a darse vuelta para mirarla. Esa clase fue un debate sobre la lectura de los primeros capítulos de una novela, en la cual los alumnos iban comentando de qué trataban y la profesora iba haciendo algunas intervenciones.

Por otro lado, en la observación de día completo en 7º F pudimos observar que los estudiantes se comportaban de manera bastante diferente de acuerdo a la clase en la cual estaban. En algunas horas se mostraban más relajados, en otras más atentos, dependiendo de la actividad que se estuviera llevando a cabo. En la clase de Psicología sucedió algo parecido a lo que ocurrió en 7º D en la clase de Literatura, en el sentido de que se generó un clima de mucha participación por parte de los estudiantes. La actividad consistió en leer un relato corto y pedir que los alumnos escriban a continuación lo que recordasen acerca del mismo, para posteriormente hacerles leer en voz alta varios de sus escritos.

2. Diseño de la práctica e implementación en aula

2.1 Planificación anual del profesor del curso y vinculación con el tema a desarrollar

El programa anual de la materia Análisis Matemático (común a todos los 7º años) cuenta con seis unidades organizadas en dos ejes temáticos: Geometría Analítica y Elementos de Análisis Matemático.

En su Planificación Anual, el profesor del curso realizó una selección de estos contenidos, organizándolos en tres bloques, con el objetivo de trabajar cada uno por trimestre. El Bloque 1 corresponde a "Funciones", el Bloque 2 corresponde a "Elementos del análisis matemático" y el Bloque 3 a "Geometría Analítica". A su vez, el Bloque 2 se subdivide en 3 partes: Introducción al concepto de límite de una función, Derivada de una función e Integración de funciones.

En nuestras prácticas desarrollamos el tema: "Optimización de funciones". Este contenido se encuentra enmarcado dentro del Bloque 2 (según la planificación del profesor), en la parte dedicada a la Derivada de una función y que corresponde a la Unidad 5 del programa anual de la materia.

Antes de comenzar nuestras observaciones, el profesor había logrado concluir con la Unidad 4 del programa anual. En las observaciones, durante la última semana de clases previa al receso invernal, el profesor introdujo a los alumnos a la noción de derivada, para lo cual utilizó dos enfoques, previamente consignados por el docente en su planificación anual de la materia (Anexo II). Uno de estos enfoques corresponde a la introducción al concepto de derivada "a través de la pendiente de la recta tangente a una curva", y el otro, "a través de la velocidad instantánea de un móvil". Además, presentó algunas de las reglas de derivación para luego resolver ejercicios de modo expositivo.

En este contexto, nos encontramos ante el desafío de lograr que los alumnos comprendan la utilidad de la derivada como herramienta para resolver problemas relacionados con encontrar máximos y mínimos de funciones.

En el momento de la planificación, consideramos que el tema de nuestras prácticas no tenía una vinculación con la geometría analítica del Bloque 3, por lo cual estos contenidos no fueron considerados en nuestras planificaciones. A su vez, el profesor del curso, mediante un diálogo vía mail, nos informó que nuestras prácticas tuvieron cierto impacto en su planificación. Luego de que termináramos de dar optimización de funciones, en lugar de continuar sus clases introduciendo el Bloque 3, el docente decidió continuar con contenidos del Bloque 2. Por ejemplo, desarrolló el criterio de la derivada segunda para encontrar máximos y mínimos de funciones y la regla de la cadena.

2.2 Objetivos para nuestras prácticas

2.2.1 La optimización de funciones como objetivo

Al comenzar las planificaciones de nuestras clases, definimos los objetivos que queríamos alcanzar en el aula teniendo en cuenta aquellos que fueron planteados por el profesor del curso en su planificación (ver Anexo II). El profesor describió los objetivos específicos para la unidad de "Derivadas" de la siguiente manera:

El trabajo deberá crear condiciones para que los alumnos puedan:

- *Comprender las distintas maneras de interpretar el concepto de derivada de una función.*
- *Aplicar las herramientas del análisis matemático a la resolución de diversos problemas propios de la matemática y de otras ramas del conocimiento.*
- *Aplicar las reglas de derivación a distintas funciones.*
- *Comprender el razonamiento utilizado en las demostraciones*

Por otra parte, entre los objetivos generales planteados por el docente se encuentran los siguientes:

- *Promover un tipo de trabajo que lleve a los estudiantes a concebir la modelización como un aspecto fundamental de la actividad matemática.*
- *Que los estudiantes puedan aplicar las herramientas que brinda esta área del conocimiento a otras áreas como por ejemplo: La física, la economía, Biología, Estadística, entre otras* (ver Anexo II).

Teniendo en cuenta lo anterior, planteamos el primer objetivo para nuestras prácticas:

Objetivo 1 *"Que los estudiantes lleven a cabo procesos de modelización matemática a través de actividades que involucren optimización de funciones."*

Consideramos que este objetivo conjuga una temática particular, la optimización de funciones, con un enfoque particular, la modelización matemática, respetando las expectativas declaradas por el profesor en su planificación.

Es importante destacar que este objetivo responde a tendencias actuales de la matemática escolar (Blomhøj, 2004; Villareal & Esteley, 2013). A su vez, esta tendencia es contemplada en los Diseños Curriculares de la Provincia de Córdoba:

> *[El docente] considerará la modelización para resolver problemas tanto externos como internos a la matemática y la comprensión acerca de cómo se utilizan los modelos matemáticos para describir, analizar y predecir fenómenos.* (Diseño Curricular de la Provincia de Córdoba para el Ciclo Orientado de la Educación Secundaria "Economía y Administración", 2012-2015, p. 29).

Con respecto a los problemas de optimización, el tema de nuestras prácticas, encontramos en los Diseños Curriculares que se propone este contenido cuando se propone:

> *[La] determinación de ceros, máximos, mínimos y análisis del crecimiento, decrecimiento de las funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas usando derivadas para resolver problemas extramatemáticos (incluido el cálculo de máximo rendimiento, mínimo costo, entre otros).* (Diseño Curricular de la Provincia de Córdoba para el Ciclo Orientado de la Educación Secundaria "Economía y Administración", 2012-2015, p. 17).

Si bien nuestros objetivos de prácticas no contemplaron la propuesta de demostraciones formales a los estudiantes, no por ello dejamos a un lado la importancia de la elaboración de argumentos para comunicar ideas. Tal como se verá más adelante, propusimos actividades a los alumnos donde el objeto del aprendizaje fue colocado en la escritura de textos explicativos y argumentativos. De esta manera, respetamos en nuestro abordaje las siguientes expectativas del docente del aula:

Que los estudiantes:

- *Puedan comprender la naturaleza del pensamiento matemático, usando el razonamiento para hacer conjeturas, desarrollar argumentos y tomar decisiones, comunicando ideas y manejando procedimientos básicos de esta disciplina en todas sus formas: oral, escrita, gráfica y simbólica.*
- *Aprendan a valorar el intercambio de ideas como fuente de construcción de conocimientos, respetando el pensamiento ajeno y, confiando en sus posibilidades de plantear y resolver problema*s (ver Anexo II).

Por otra parte, los documentos curriculares resaltan, a su vez, la importancia de la reflexión y la comunicación de ideas en el trabajo matemático con el aula:

> *La construcción de conocimientos matemáticos se ve ampliamente favorecida por la resolución de variados problemas, en diversos contextos, e involucrando un "hacer" y un "reflexionar sobre el hacer". Desde el enfoque adoptado en este diseño, se postula el planteo de problemas, la discusión de las posibles resoluciones y la reflexión sobre lo realizado, como también la incorporación de un lenguaje y forma de pensamiento matemáticos.* (Diseño Curricular de la Provincia de Córdoba para el Ciclo Orientado de la Educación Secundaria "Economía y Administración", 2012-2015, pág. 13).

2.2.2 Un objetivo centrado en ejercicios de aplicación

Nuestro segundo objetivo de práctica tuvo el siguiente enunciado:

> Objetivo 2
> *"Que los alumnos puedan adquirir destreza en el proceso de derivación de funciones elementales y encarar situaciones problemáticas de optimización de carácter intramatemático aplicando esas habilidades."*

En la declaración de este objetivo podrá observarse la incorporación de actividades que se alejan de una perspectiva de la derivada como herramienta para resolver problemas de optimización, para constituirse en objeto de aplicación en ejercicios dentro de la matemática misma. Al plantear este segundo objetivo tuvimos en cuenta la necesidad de construir en estos alumnos del último año del nivel secundario las habilidades relacionadas con la aplicación de las reglas de derivación de funciones en vistas a futuros estudios universitarios.

Las actividades de aula que promueven los Objetivos 1 y 2 son de naturaleza distinta. En el primer objetivo, se promueven tareas centradas en la exploración de parte del alumno de contenidos matemáticos que dan solución a situaciones que recuerdan aspectos de la realidad. En el segundo objetivo, reconocemos tareas más rutinarias. Aquí, podemos reconocer un movimiento entre distintos ambientes de aprendizaje (Skovsmose, 2000), cuestión que explicaremos con mayor detalle en la sección 2.4.

2.2.3 Aprender con tecnologías como objetivo

La importancia del uso de las TIC en el aula es analizada por varios autores, tales como Villarreal (1999, 2004, 2012) y Rojano (2014). En particular, Villarreal (2004) presenta el siguiente listado de conclusiones a las cuales diversos trabajos de investigación pudieron arribar con respecto a lo que ocurre en un ambiente computacional de trabajo matemático desarrollado por estudiantes:

- Las respuestas provenientes de la computadora influencian el estilo de construcción matemática de los estudiantes.
- El empleo de nuevas tecnologías reorganiza el pensamiento matemático de los estudiantes y la dinámica del aula.
- Surgen nuevos abordajes para la resolución de problemas basados en la posibilidad de representaciones múltiples y la generación de conjeturas que pueden ser refutadas y reformuladas o validadas.
- La visualización y la experimentación son naturalmente favorecidas como procesos presentes en la construcción del conocimiento matemático.
- La hegemonía de lo algorítmico y lo algebraico que caracteriza a la enseñanza matemática tradicional es desafiada y cuestionada.

Relacionando esto con el tema que debíamos trabajar en nuestras prácticas, estamos de acuerdo con que el aprendizaje de los conceptos relacionados con el análisis matemático puede ser mejorado de forma significativa a través de la utilización de tecnologías digitales, como se expresa a continuación.

> *La docencia debe ser sumamente exploratoria y estar basada en experiencias numéricas y geométricas que aprovechen la tecnología de la calculadora y el ordenador. Las actividades lectivas deben tener como objetivo que los estudiantes asimilen los puntales conceptuales básicos del Análisis, y no la adquisición de técnicas procesuales. (...) La tecnología informática pone al alcance de todos los estudiantes los conceptos y aplicaciones fundamentales del Análisis. (…) los estudiantes pueden utilizar una utilidad gráfica para investigar y resolver problemas de optimización sin calcular derivadas.* (National Council of Teachers of Mathematics, 1989, p. 187).

A partir de las observaciones, notamos que la institución contaba con una variedad de recursos tecnológicos, los cuales fueron descritos en el Capítulo 1. Entre ellos destacamos la presencia del proyector en el aula, que nos permitiría generar una dinámica de clase distinta a la que se daría sólo utilizando el pizarrón. Conjuntamente, otra variable que influyó en nuestras planificaciones fue la posibilidad de que los alumnos contaran con acceso a diferentes aplicaciones graficadoras en sus celulares.

Esta estrategia de trabajo se encuentra en consonancia con la forma de trabajar que observamos por parte del profesor del curso durante el período de observaciones. Esto a su vez se encuentra consignado en su planificación anual, al plantear que "el trabajo deberá crear condiciones para que los alumnos puedan utilizar software como soporte para la producción y el análisis de gráficos de funciones" (ver Anexo II).

Por lo expresado anteriormente, planteamos un objetivo centrado en el uso de las tecnologías como recurso mediador del aprendizaje y de la enseñanza:

Objetivo 3 *"Aprovechar todos los recursos tecnológicos disponibles para el desarrollo de las clases."*

2.3 Diseño e implementación de las clases

Teniendo en cuenta los primeros dos objetivos mencionados en la sección anterior, los cuales hacían referencia a llevar a cabo procesos de modelización para el estudio de la optimización de funciones y a desarrollar actividades que involucraran aplicaciones de la derivada para resolver problemas intramatemáticos, decidimos dividir nuestras prácticas en dos etapas:

- Primer etapa: Problemas de optimización relacionados con la vida real
- Segunda etapa: Trabajo con ejercicios de aplicación

A continuación describiremos las actividades que fueron planificadas para cada etapa, como así también la forma en la cuales fueron implementadas en nuestras clases. Durante el transcurso de nuestras prácticas tomamos decisiones que modificaron la planificación original, por lo cual creemos necesario hacerlas explícitas y darles fundamentos. Asimismo especificaremos los recursos utilizados en cada actividad y mostraremos algunas de las producciones realizadas por los estudiantes. Al concluir cada una de estas etapas plantearemos los instrumentos de evaluación utilizados. A su vez, daremos los criterios de evaluación que usamos y presentaremos estadísticas que reflejan los resultados obtenidos por los estudiantes.

2.3.1 Primera Etapa: Problemas de optimización relacionados con la vida real

En base a la Planificación anual del profesor, asumimos que al inicio nuestras prácticas los alumnos ya habrían estudiado las unidades "Funciones" y "Límites", y que la unidad correspondiente a "Derivadas" estaría en desarrollo. Esto fue comprobado más adelante durante la semana de observaciones, en la cual los alumnos comenzaron a trabajar con esta última unidad.

Bajo esta hipótesis de trabajo, elaboramos un guion conjetural para nuestra primera clase, y buscamos diferentes actividades en las cuales se plantearan problemas de optimización relacionados con situaciones de la vida real. Empleamos este enfoque debido a que se corresponde con nuestro primer objetivo.

Considerando nuestro tercer objetivo (explicado en la sección anterior), y los recursos de los cuales disponíamos en el aula, incorporamos en nuestras clases el uso del proyector y de diversas aplicaciones graficadoras en los celulares de los estudiantes, tales como Grapher[4] y Matemáticas[5]. Además, en concordancia con la forma de trabajo declarada en la planificación, tomamos la decisión de implementar actividades de carácter grupal.

En la primera clase, realizamos una introducción de nuestras prácticas ante los estudiantes mediante una presentación en PowerPoint. En la misma nos presentamos y explicamos el tipo de problemas a tratar, los recursos que emplearíamos y nuestra propuesta de trabajo en grupo (ver Figura 4). Asimismo, explicamos brevemente que trataríamos la resolución de problemas, tanto aquellos provenientes de la vida diaria como aquellos que hacen referencia a la matemática pura.

[4] Esta aplicación puede encontrarse en la siguiente dirección web: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.opticron.grapher&hl=es_419

[5] Dirección web: https://play.google.com/store/apps/details?id=de.daboapps.mathematics&hl=es_419

Explicitamos ante los estudiantes que utilizaríamos la matemática para proponer modelos que representen en cierto modo la situación original. Por último, mencionamos que íbamos a usar fuertemente el concepto de función en los modelos que sean propuestos en clases.

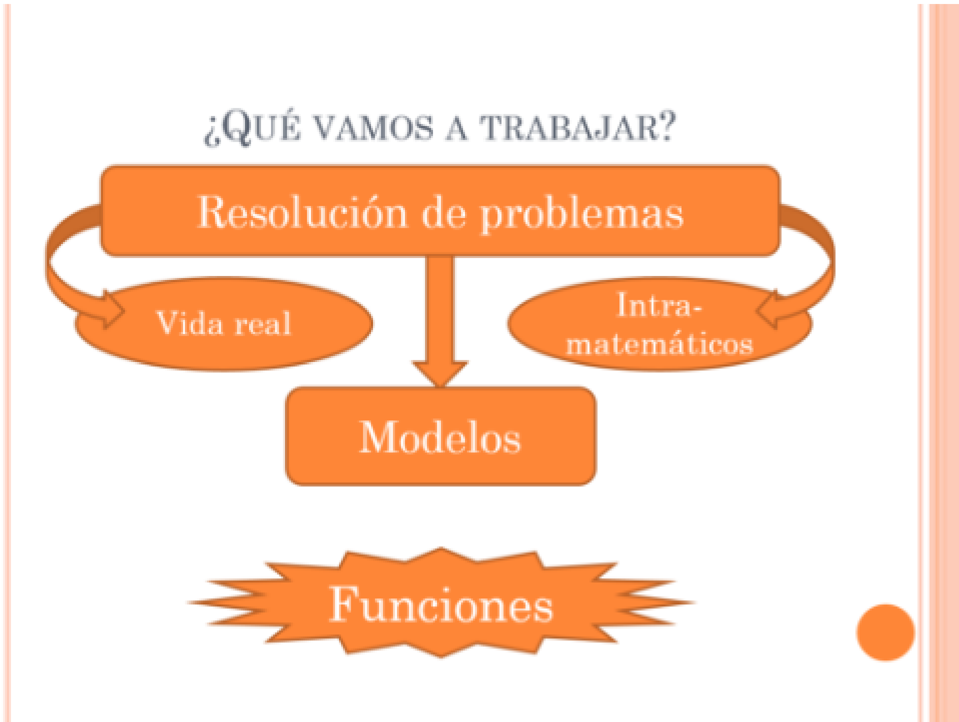


Figura 4: Segunda diapositiva mostrada en la primera clase que presenta a los alumnos los lineamientos de nuestro trabajo.

Finalmente, explicamos nuestras estrategias de enseñanza. Planteamos que la mayoría de las actividades se realizarían de manera grupal, y explicamos que haríamos uso de tecnologías. Les aclaramos que para evaluarlos les daríamos un trabajo práctico la semana siguiente y una evaluación escrita hacia el final del trimestre. Durante la presentación de nuestras prácticas, destacamos el software GeoGebra como la principal herramienta que nosotros usaríamos para analizar gráficos de funciones mediante el proyector. Además, les pedimos que descarguen la aplicación Grapher, disponible en la PlayStore de Android, para realizar gráficos de manera individual[6].

ACTIVIDAD 1

La Actividad 1 correspondiente a esta primera etapa fue presentada a los estudiantes con ayuda de la diapositiva que muestra la Figura 5. Esta actividad había sido trabajada con anterioridad por el docente del curso. En consecuencia, nuestra enseñanza se focalizó en el análisis del modelo

[6] Los alumnos habían utilizado la aplicación Matemáticas con el profesor del curso en la unidad "Funciones", por lo cual les permitimos seguir usándola, pero les sugerimos el uso de Grapher debido a que consideramos que posee herramientas que permiten un análisis gráfico más profundo.

analítico que los estudiantes obtuvieron en esa oportunidad y en el análisis del gráfico de la función obtenida usando el software GeoGebra.

Figura 5: Enunciado de la actividad 1 presentado a los estudiantes.

Propusimos a los estudiantes un tiempo para la lectura y la revisión del problema, durante el cual respondimos sus preguntas. A continuación, realizamos una puesta en común para debatir las diferentes ideas que surgieron en esta tarea. Para complementar la discusión oral, mostramos un archivo *.gif para visualizar el proceso de armado de una caja (ver Figura 6). Con ayuda de GeoGebra mostramos la gráfica de algunos de los modelos propuestos por los estudiantes.

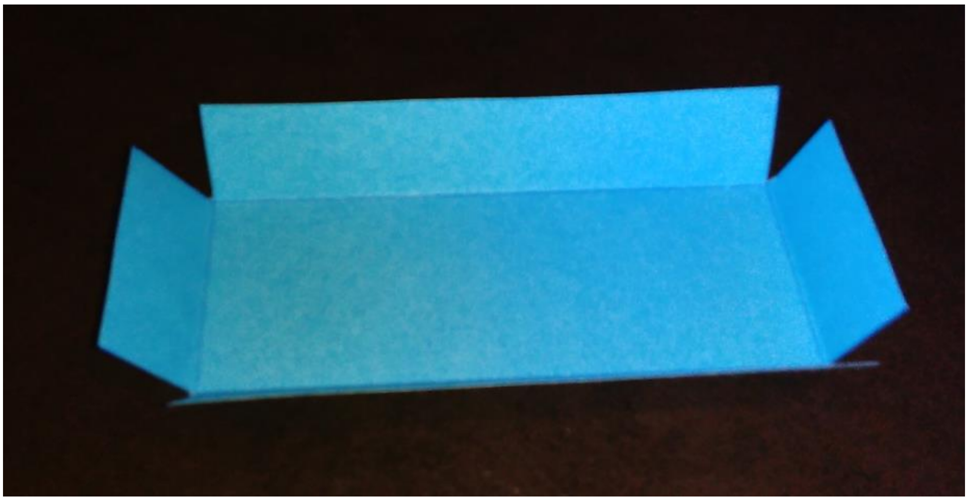


*Figura 6: Imagen del archivo *.gif mostrado a los estudiantes durante la Actividad 1.*

Los alumnos señalaron que la fórmula "$V = (12-2x) . (20-2x) . x$" era una expresión algebraica que representaba la relación entre las variables del problema. Los símbolos x y V en esta expresión fueron identificados como las variables a considerar en el modelo de la Actividad 1, las cuales se constituyeron como objeto de discusión con los estudiantes.

De esta manera se revisaron los conceptos de variable y de función, y llegamos a la conclusión junto con los alumnos de que la expresión algebraica del párrafo anterior representaba una función que relaciona las variables "longitud del lado de la caja" (que denotamos con la letra *x*) con la variable "volumen de la caja" (denotada con la letra *V*). Por lo tanto, la expresión algebraica anterior fue expresada de la forma *f(x)= (12-2x) . (20-2x) . x.*

A continuación, se propuso a los estudiantes el análisis del gráfico de la función mediado por GeoGebra (ver Figura 7). Teníamos conocimiento (gracias al profesor del curso) de que los estudiantes estaban familiarizados con el uso de gráficos de funciones, por lo cual esta actividad estaba destinada a preparar el camino para la introducción del método de resolución de problemas de optimización utilizando derivadas.

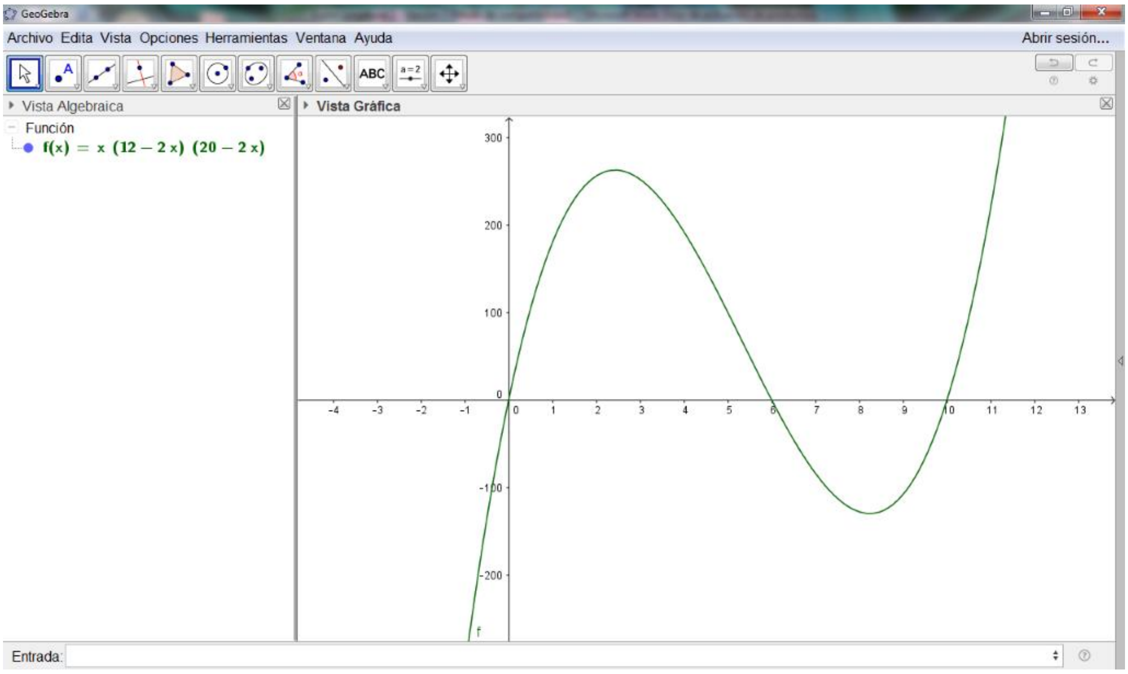


Figura 7: Gráfico de la función f(x)=x (12 – 2x) (20 – 2x).

Dimos comienzo a este análisis a través de un estudio de la condición que debe cumplir un punto del plano para pertenecer al gráfico de una función (es decir, que su segunda coordenada sea la imagen de la primera). Para ello, primero observamos que esto se cumple en el caso particular del punto (6,0), por lo que éste puede escribirse de la forma (6,f(6)), y luego hicimos uso de la herramienta "Barra de Entrada" de GeoGebra para señalar que lo mismo pasaba con otros pares ordenados con este formato, tales como (1,f(1)) y (3,f(3)) (ver Figura 8). Esto permitió conjeturar la siguiente generalización: todos los pares de la forma (a,f(a)) se encuentran en el gráfico de la función. La misma fue verificada visualmente mediante el uso de la herramienta “deslizador” de GeoGebra (ver Figura 8), generando una variable “a” definida para cierto intervalo.

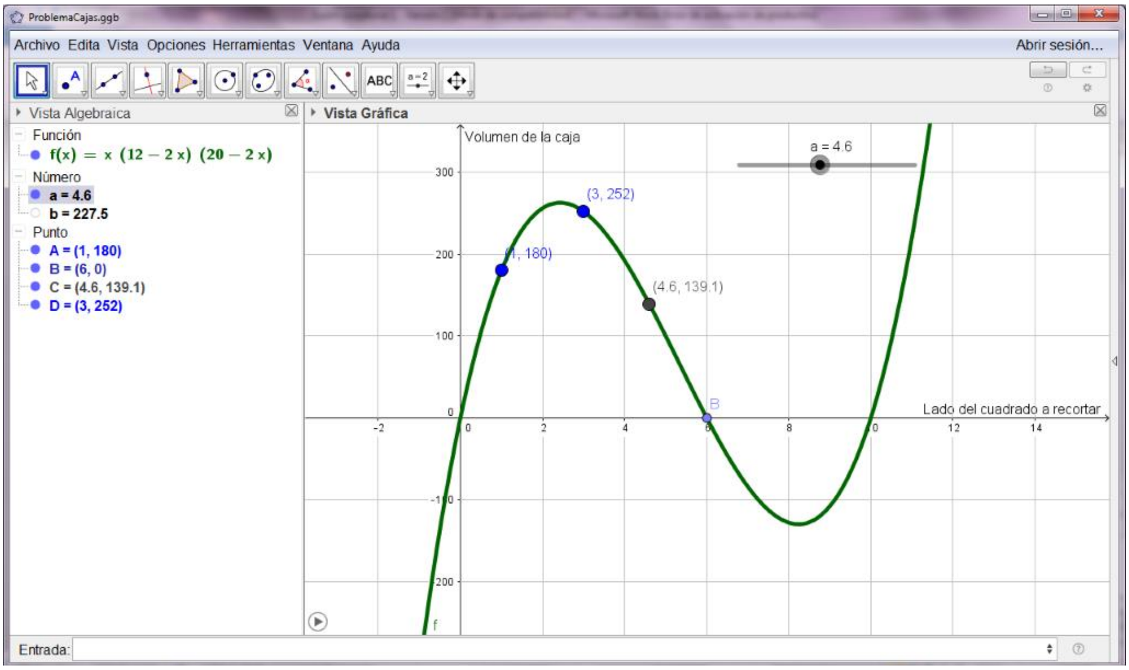


Figura 8: Gráfico de la función f, puntos ingresados y deslizador para la variable "a".

Consideramos importante destacar que el gráfico nos permitió realizar un proceso de validación del modelo con la situación real, el cual pudo verse con claridad a la hora de establecer una discusión con respecto al dominio de la función. En este proceso la tecnología no fue un mero soporte de la actividad, sino resultó un recurso importante para elaborar argumentos y verificar/refutar conjeturas.

Este análisis concluyó con la observación de que a partir del gráfico de la función es posible dar una respuesta aproximada al problema. Como los alumnos comenzaron a ver la noción de derivada de una función con el profesor del curso, consideramos que podía ser provechoso que la reconozcan como una herramienta para dar una solución a este tipo de problemas. Esta observación permitió hacer explícita la necesidad de encontrar otro método para responder a la situación problemática.

Para introducir este nuevo abordaje, utilizamos la herramienta de GeoGebra para graficar diferentes rectas tangentes al gráfico de la función *f* (ver Figura 9).

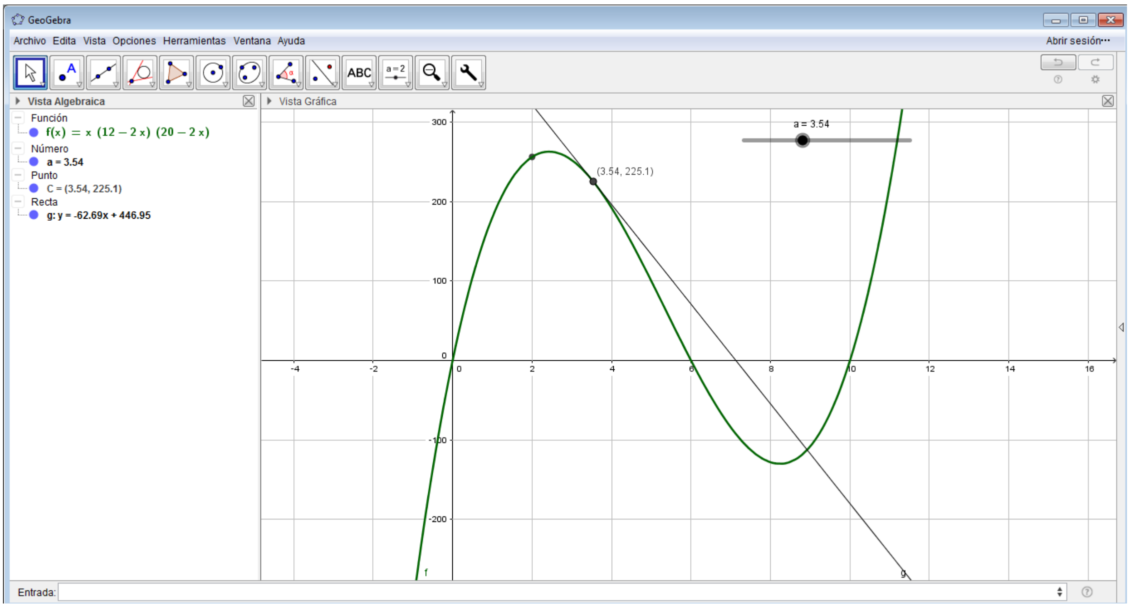


Figura 9: Gráfico de una recta tangente al gráfico de la función utilizando GeoGebra.

Haciendo uso del deslizador introducido anteriormente, los alumnos pudieron observar que la recta tangente al punto donde se da el máximo es paralela al eje x. A partir de esto llegamos a la conclusión de que en ese punto, la pendiente de la recta tangente al gráfico es nula.

Retomando la noción de la derivada como pendiente de la recta tangente, obtuvimos finalmente la siguiente conclusión:

Si la función f alcanza su máximo en el punto x, entonces f'(x)=0

Les indicamos a los alumnos que este resultado constituye una herramienta muy útil para resolver problemas de optimización. Para ilustrar esto, observamos que lo primero que necesitábamos hacer era hallar *f'(x)* para esta función en particular, para poder trabajar con la expresión *f'(x)=0*.

Comenzamos recordando cuál era la expresión algebraica de la función con la cual estábamos tratando:

$$f(x) = (12-2x) \,.\, (20-2x) \,.\, x$$

Con el profesor del curso se habían visto las reglas de derivación de la suma de funciones y del producto de una función por una constante, pero no se había llegado a tratar la derivada del producto de dos funciones. Por lo tanto surgió la necesidad de trabajar con esta expresión algebraica para conseguir otra representación algebraica de la función mediante la cual se la pudiera derivar con las reglas conocidas. Así, por medio de la aplicación de la propiedad distributiva llegamos a la siguiente expresión:

$$f(x) = 4x^3 - 64x^2 + 240x$$

Observamos entonces que esta manera de describir a la función permite pensarla como la suma de tres funciones, cada una de las cuales es el producto de una constante por una potencia de x. De esta forma procedimos a repasar las reglas de derivación involucradas, llegando a encontrar la siguiente expresión algebraica para la derivada de la función f:

$$f'(x) = 12x^2 - 128x + 240$$

Una vez hallada esta derivada, varios alumnos reconocieron que la expresión $f'(x)=0$ se transformaba en este caso en una ecuación cuadrática, y manifestaron que podía resolverse mediante la aplicación de la fórmula de Baskhara. Escribimos en el pizarrón las soluciones aproximadas que habíamos calculado previamente[7]:

$$x_1 = 2{,}4274 \qquad \text{y} \qquad x_2 = 8{,}2393$$

Puesto que estos son los únicos números que cumplen que $f'(x)$ es 0, señalamos que la conclusión a la cual habíamos llegado nos dice entonces que éstos son los únicos valores que podrían ser máximos para esta función. No obstante, al recordar cuál era el dominio en el que estábamos trabajando en nuestro problema, los estudiantes pudieron reconocer que x_2 no podía ser una solución al mismo, y que por lo tanto x_1 debía ser el máximo que estábamos buscando.

Este proceso resultó validado por el recurso gráfico dado por GeoGebra, ya que al ingresar el punto $(x_1,f(x_1))$, siendo $x_1=2{,}4274$, podía observarse que efectivamente era el punto máximo. Aprovechamos esta instancia para hacerles notar a los estudiantes que aunque en el planteo original del problema no tiene sentido considerar el valor x_2 para la variable independiente, es posible considerar a la función con su dominio extendido a todos los números reales (dejando de lado la situación de semirrealidad que le dio origen). Además mencionamos que si hacemos esto, entonces podemos evaluar a f en el valor x_2, y a través del software es posible dar cuenta de que el punto $(x_2,f(x_2))$ se corresponde con un mínimo de la función. El objetivo de esto fue llegar a una generalización de la conclusión obtenida anteriormente para contemplar que los puntos mínimos de la gráfica de la función también deben anular a la derivada.

ACTIVIDAD 2

En esta actividad planteamos una tarea centrada en un problema resuelto anteriormente por los estudiantes (ver Figura 10), donde una de las funciones que habían utilizado los estudiantes para representar la situación viene dada por $f(r) = \frac{2L}{r} + 2\pi r^2$, siendo r el radio de la lata y f(r) el área superficial de la lata para un radio r de la misma. La actividad, si bien ya había sido trabajada por los estudiantes, fue planteada con la intención de generar una dinámica con mayor participación por parte de los alumnos recordando los distintos momentos del proceso de solución del problema, y a su vez como preparación para el trabajo práctico que realizaríamos la semana siguiente.

[7] Las soluciones de esta ecuación son en realidad $(128 \pm \sqrt{4864})/24$, pero decidimos trabajar con sus expresiones decimales redondeadas a 4 cifras decimales.

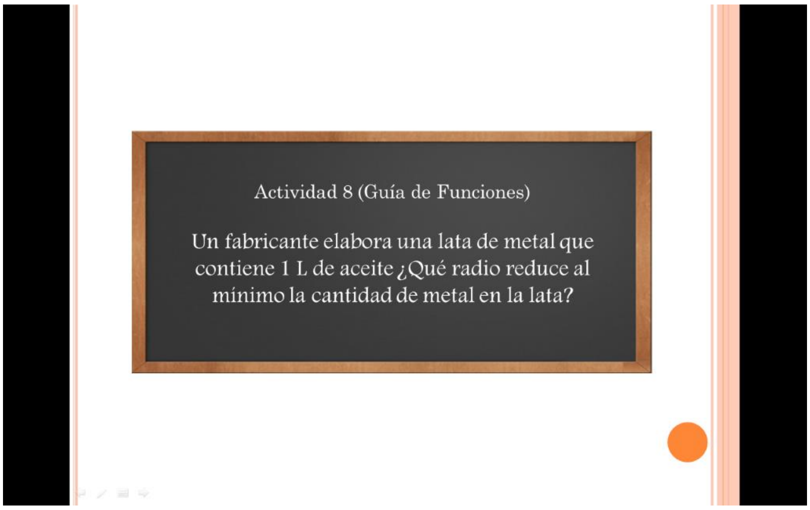


Figura 10: Enunciado de la Actividad 2 tal como fue presentado a los estudiantes.

El enunciado de este problema se ilustró mediante un *applet*[8] que permitía visualizar la forma en la cual un cilindro puede ser construido a partir de su desarrollo plano, como se observa en la Figura 11.

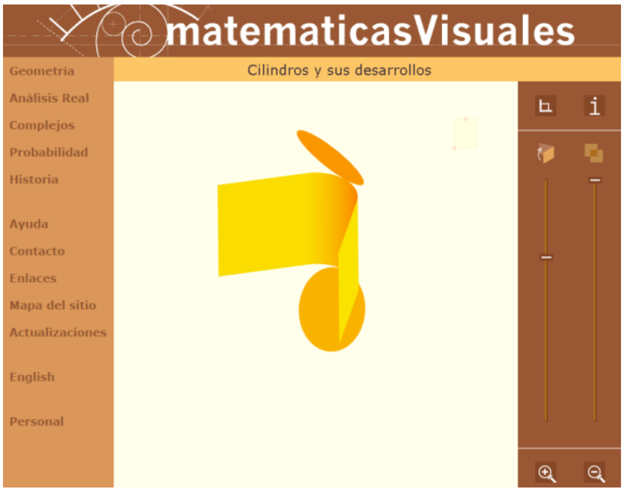


Figura 11: Applet que permite visualizar la relación entre un cilindro y su desarrollo plano.

Organizamos a los alumnos en tres grupos, y haciendo uso de una presentación de PowerPoint (ver Figura 12) dimos a cada uno de los grupos una tarea diferenciada. Cada grupo eligió a dos representantes para que al finalizar esta actividad explicaran al resto de sus compañeros cómo lograron responder a las consignas. Las tareas diferenciadas fueron:

- Grupo A: Planteo del problema

---

[8] Este applet puede ser encontrada en la dirección web siguiente: http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/planenets/cylinder.html

Este grupo debía encargarse de la organización de la información del problema, sus variables y la explicación del proceso de construcción de la expresión analítica f(r) presentada anteriormente.

- Grupo B: Resolución gráfica

Los integrantes de este grupo debían realizar el gráfico de la función *f* y examinarlo para intentar encontrar una solución aproximada al problema en el mismo. A su vez, los estudiantes encargados de esta tarea tendrían que revisar el significado de las variables involucradas en el gráfico de la función y analizar el dominio de la misma teniendo en cuenta el contexto del problema. Indicamos a los estudiantes que debían hacer uso de algún recurso digital para mostrar sus reflexiones.

- Grupo C: Resolución analítica usando la noción de derivada

En este grupo los alumnos estaban encargados de encontrar la solución del problema de forma analítica, por lo que debían hallar la derivada de la función f y resolver la ecuación f'(r)=0. Además, les correspondía reflexionar si los resultados tenían sentido en el problema planteado.

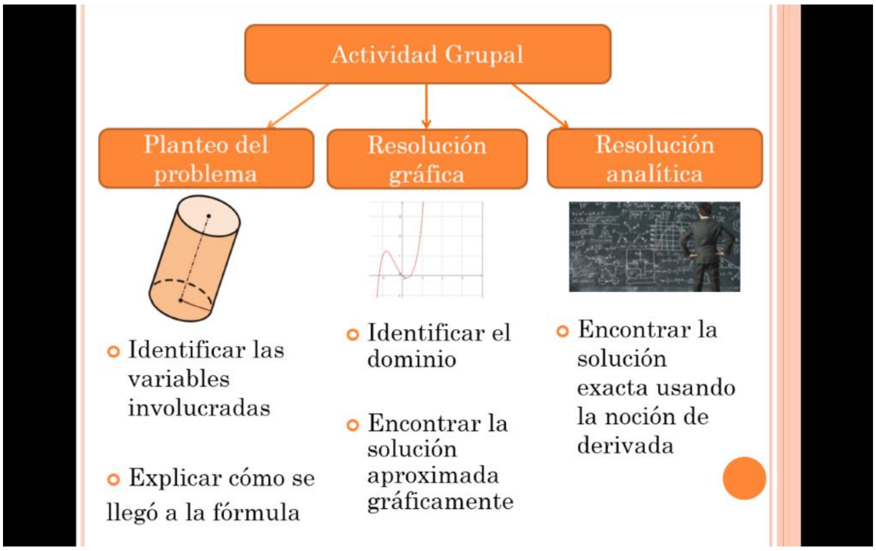


Figura 12: Explicación de la actividad grupal donde se detallan las tareas asignadas a cada uno de los grupos de estudiantes.

Durante la puesta en común, los alumnos escogidos por cada grupo para pasar al frente hicieron uso del pizarrón para exponer ante el resto de la clase lo que se pudo trabajar durante el momento de la actividad grupal. En cada exposición intervenimos en las ocasiones que consideramos pertinentes para hacer aclaraciones y para plantear interrogantes que pudieran promover algún tipo de reflexión acerca del trabajo realizado. Aprovechamos esta instancia para repartir a los estudiantes una fotocopia en la cual se encontraban indicadas las reglas de derivación que íbamos a usar a lo largo de nuestras prácticas, como así también las derivadas de algunas funciones particulares. Este documento consta en el Anexo III.

ACTIVIDAD 3: TRABAJO PRÁCTICO

La actividad 3 consistió en un Trabajo Práctico en calidad de evaluación formativa[9]. Este trabajo fue realizado en grupos de 3 o 4 integrantes y consistió en la resolución de un problema de optimización (ver Figura 13), que deberían abordar aplicando los conocimientos y procesos de las Actividades 1 y 2, anteriores.

Actividad

Una cañería debe ser construida desde el punto R hasta el punto S, como se muestra en el mapa:

El costo de construir la cañería atravesando la manzana es de $37000 por kilómetro, mientras que si se construye a lo largo de la calle cuesta $30000.

Por este motivo, la compañía constructora quiere abaratar los costos construyendo un tramo de la cañería bajo tierra hasta algún punto P en la calle López y Planes, y otro tramo por debajo de esa calle.

¿A qué distancia debería encontrarse el punto P del punto S de manera tal que el costo de la cañería sea mínimo?

Figura 13: Enunciado de la actividad del Trabajo Práctico.

[9] La cual fue realizada a partir de la lectura y reflexión del "Documento de apoyo curricular" del Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba (2010).

Este problema puede encontrarse en el texto "Curriculum and evaluation standards for school mathematics" (National Council of Teachers of Mathematics, 1993, p. 95), aunque el enunciado que presentamos nosotros presenta ciertas adaptaciones. En primera instancia, modificamos los valores numéricos que figuran en el mismo de forma tal que la solución se encuentre efectivamente realizando un tramo en diagonal y otro sobre la calle "López y Planes" (ver Figura 13)[10]. Además, los diagramas explicativos del problema que se incluyen fueron realizados sobre un sector del plano de la ciudad de Córdoba conseguido mediante el uso de la herramienta "Google Maps"[11] provista por Google. Ese sector particular de la ciudad fue escogido debido a que provee un espacio de trabajo de 5x8 cuadras con la suficiente regularidad y la necesaria perpendicularidad entre las calles como para suponer que todas esas cuadras poseen la misma medida.

La consigna de trabajo para el tratamiento de este problema se puede observar en la Figura 14:

Consigna: Resolver la siguiente actividad en grupos de 3 o 4 integrantes, teniendo en cuenta el análisis realizado en los problemas resueltos en clases anteriores (problema de la caja y de la lata). Realizar un informe escrito explicando su proceso de resolución del problema, que contenga los siguientes ítems:

- Planteo del problema: Identificar las variables y elegir el modelo (dar la función).
- Resolución gráfica: Identificar el dominio de la función. Realizar un gráfico de la función (puede ser hecho a mano o puede ser una impresión de una captura de pantalla de algún dispositivo electrónico). Dar una respuesta aproximada al problema utilizando el gráfico. Realizar una interpretación de la solución en el contexto del problema.
- Resolución analítica: Derivar la función y utilizar su derivada para dar una respuesta exacta al problema. Verificar que la respuesta dada tenga sentido en la situación real.

Figura 14: Consigna del Trabajo Práctico.

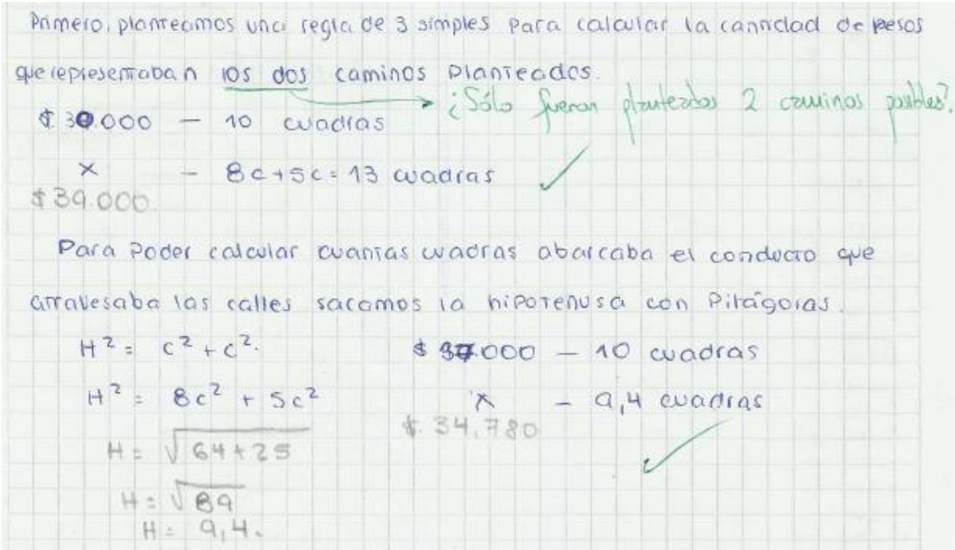
Como puede observarse, la actividad no terminaba en el momento de resolver el problema, sino que también requeríamos la elaboración de un informe en el cual dieran cuenta del proceso por el cual pasaron. Teníamos la intención de generar una reflexión acerca del trabajo realizado, por lo cual consideramos que podía ser provechoso que los estudiantes produjeran una narrativa al respecto. Además, hicimos explícito de forma oral que todas las producciones que realizaran durante el transcurso de la actividad podían ser anexadas a sus informes, y que esto nos daría más herramientas para poder utilizar a la hora de evaluar su trabajo.

A continuación describiremos algunos aspectos del avance de los distintos grupos a lo largo del proceso, ejemplificando a través de algunas producciones de los estudiantes (todas las cuales fueron extraídas de sus informes).

En muchas de las exploraciones iniciales los alumnos se preguntaron qué sucedía en los casos extremos, es decir cuando la cañería es construida completamente a lo largo de la calle, y por

[10] En el enunciado original, el costo mínimo se conseguía construyendo la cañería enteramente a lo largo de la calle, sin realizar ningún tramo en diagonal.
[11] Esta página posee la siguiente dirección web: https://www.google.com.ar/maps

otro lado cuando la cañería se construye tomando el punto P igual al punto S (ver Figura 13), como se observa en la Figura 15.



Primero, planteamos una regla de 3 simples para calcular la cantidad de pesos que representaban los dos caminos planteados. → ¿Sólo fueron planteados 2 caminos posibles?

$ 30.000 — 10 cuadras
x — 8c+5c = 13 cuadras
$39.000

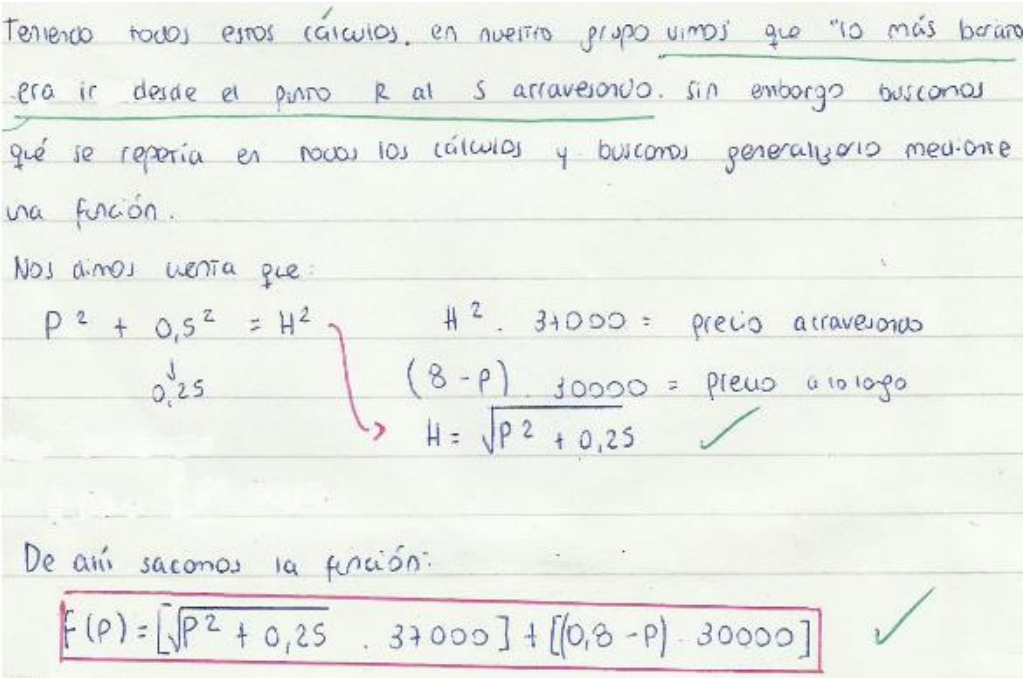
Para poder calcular cuantas cuadras abarcaba el conducto que atravesaba las calles sacamos la hipotenusa con Pitágoras.

H² = c² + c².
H² = 8c² + 5c²
H = √64+25
H = √89
H = 9,4.

$ 37.000 — 10 cuadras
x — 9,4 cuadras
$ 34.780

Figura 15: Relato de la exploración inicial, extraído de uno de los informes.

Varios grupos calcularon el costo obtenido para distintas distancias particulares entre P y S (ver Figura 13). A partir de la comprensión de dicha distancia como una variable que iba adoptando valores particulares en cada situación analizada, pudieron generalizar el proceso que llevaron a cabo para calcular el costo de la cañería para un valor arbitrario de esa variable. Esto puede observarse en la Figura 16.



Teniendo todos estos cálculos, en nuestro grupo vimos que "lo más barato era ir desde el punto R al S atravesando. Sin embargo buscamos qué se repetía en todos los cálculos y buscamos generalizarlo mediante una función.

Nos dimos cuenta que:

P² + 0,5² = H²
0,25
H². 37000 = precio atravesando
(8 - P). 10000 = precio a lo largo
H = √P² + 0,25

De ahí sacamos la función:

F(P) = [√P² + 0,25 . 37000] + [(0,8 - P) . 30000]

Figura 16: Planteo de la función, extraído de uno de los informes.

Para muchos estudiantes estaba claro que la variable dependiente en este problema era el costo de la cañería. Sin embargo, existía incertidumbre respecto de la variable independiente.

De una forma u otra, la totalidad de los grupos logró arribar a una función que permitía calcular el costo de la cañería conociendo la posición del punto P (ver Figura 13). Las funciones planteadas como modelos no fueron las mismas en todos los grupos, debido a dos factores:

- La elección de la unidad de medida, ya sea en kilómetros, metros o cuadras.
- La elección de la variable independiente, ya que hubo grupos que tomaron la distancia entre P y S (ver Figura 13) como su variable independiente, en tanto que otros eligieron que sea la distancia entre P y el punto dado por la intersección de las calles "Soto" y "López y Planes".

Una vez obtenido un modelo de la situación planteada, los grupos procedieron a ingresar las funciones encontradas en distintas aplicaciones graficadoras, y utilizar las herramientas provistas por éstas para encontrar el mínimo de la función. Encontramos d en los informes que los estudiantes habían establecido relaciones entre los resultados obtenidos a través del gráfico y el problema planteado, retomando el significado de las variables relacionadas por la función en el contexto de ese problema. Un ejemplo de esto puede apreciarse en la Figura 17.

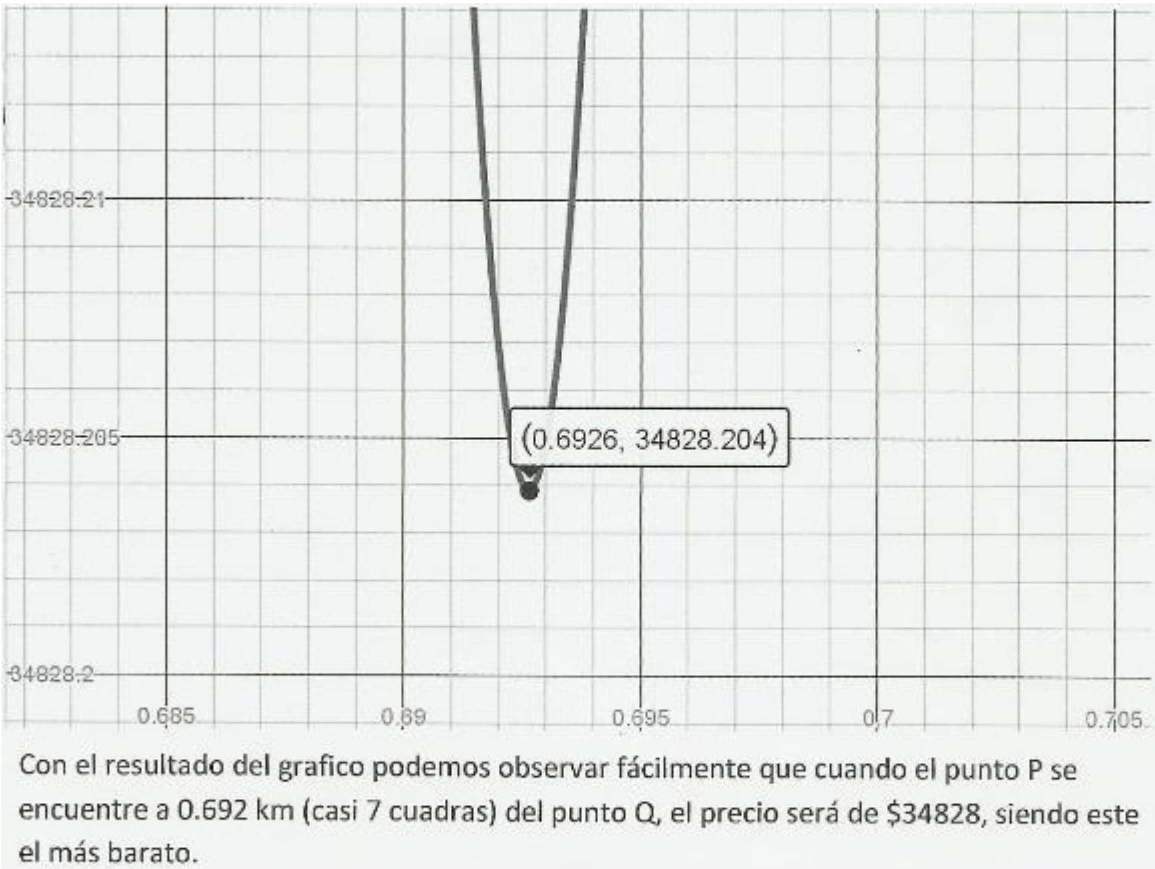


Figura 17: Gráfico realizado con la computadora por uno de los grupos, extraído de uno de los informes.

En relación al desempeño de los grupos con respecto a la resolución analítica del problema, es necesario aclarar que el problema que nosotros escogimos para este Trabajo Práctico presentaba el inconveniente de involucrar una función más sofisticada que las que nuestros estudiantes habían manejado hasta ese momento. De hecho, se planteaba una composición de funciones, por lo que para derivarla deberían hacer uso de la regla de la cadena. Sin embargo, no habíamos seleccionado este contenido para ser trabajado en nuestras prácticas, puesto que juzgamos conveniente hacer hincapié en otras reglas de derivación tales como la de la suma y la del producto.

Por todo lo anterior, al hacer las planificaciones decidimos agregar en la fotocopia de las reglas de derivación una línea que permitiese derivar uno de los posibles modelos a los cuales podían arribar los grupos (ver Figura 18).

$f(x) = \sqrt{a^2 + (b-x)^2} \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \dfrac{-b + x}{\sqrt{a^2 + (b-x)^2}}$

Figura 18: Extracto de la fotocopia de Reglas de derivación.

Los grupos que tomaron como variable independiente de su modelo a la distancia entre P y S (ver Figura 13) no tuvieron mayores inconvenientes en usar la regla que se muestra en la Figura 18, reemplazando los parámetros a y b por valores particulares. No obstante, muchos de los alumnos eligieron tomar como variable independiente a la distancia entre P y la intersección de las calles "Soto" y "López y Planes" (ver Figura 13). En esto casos, les sugerimos otro modo de proceder al momento de derivar, aconsejándoles tomar el parámetro b=0 en esta regla de derivación. Un ejemplo donde se puede observar esta forma de obtener la derivada puede verse en la Figura 19.

$$f(x) = \sqrt{0{,}5^2 + x^2} \cdot 37.000 + (0{,}8 - x)\ 30.000$$

$$f(x) = \sqrt{0{,}5^2 + x^2} \cdot 37000 + 24000 - 30.000x$$

$$f'(x) = \frac{-0 + x}{\sqrt{0{,}5^2 + (0 - x)^2}} \cdot 37000 + 0 - 30.000 \cdot 1$$

Figura 19: Otra manera de derivar la función, extraída de uno de los informes.

Varios grupos llegaron a darse cuenta de que debían resolver la ecuación f'(x) = 0, a partir de lo cual comenzaron a realizar un trabajo algebraico para intentar resolverla. Podemos observar un ejemplo de este tipo de trabajo en la Figura 20.

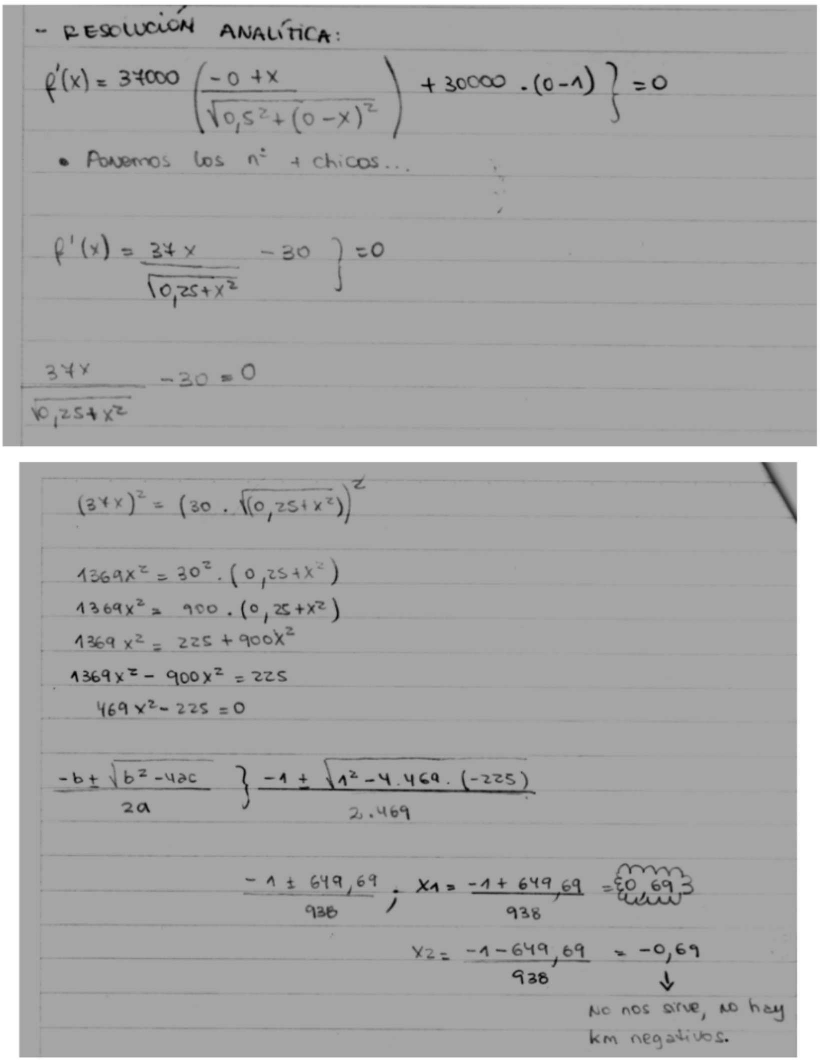


Figura 20: Resolución analítica del problema, extraída de uno de los informes.

En este trabajo podemos observar que se analizó la validez de las soluciones encontradas en el contexto de la situación que se quería modelizar. No obstante, otros grupos no llevaron a cabo este análisis debido a que llegaron a ecuaciones del tipo x^2=constante y olvidaban considerar la solución negativa. En ese caso, la única solución que hallaron era efectivamente el mínimo de la función.

Por otro lado, varios grupos pudieron realizar comparaciones entre los resultados obtenidos mediante el método gráfico con los del método analítico. En la Figura 21 presentamos varios extractos de informes que permiten ejemplificar esto.

El método analitico dió como resultado 693,37m, un número muy próximo al que nos habia dado el gráfico. Y para corroborarlo, introdujimos la ecuación en la app. "Matemáticas" y nos dió como resultado 690,625m, que también es un número muy próximo.

LOS RESULTADOS OBTENIDOS MEDIANTE LOS MÉTODOS GRÁFICO Y ANALÍTICO TIENEN UNA DIFERENCIA DESPRECIABLE.

En una primera instancia creímos que todo el trabajo estaba mal ya que el resultado mostrado en el graficador y luego el de la derivación eran distintos, pero como luego observamos, los resultados estaban muy próximos entre sí, y concluimos que esa pequeña diferencia entre los productos finales se debía simplemente a que nosotros no usamos todos los decimales de los resultados, ya que hicimos las cuentas a mano. Podemos concluir que los resultados son correctos y tienen sentido siendo que el precio final es próximo al calculado al principio del trabajo y que fue usado como referencia para tener una aproximación.

Figura 21: Comparaciones entre los resultados obtenidos por los distintos métodos, extraídos de tres informes diferentes.

En el Capítulo 3 retomaremos el análisis de estos informes, pero estudiando ciertos aspectos particulares del contenido de los mismos.

UNA REFLEXIÓN SOBRE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN ESTA PRIMERA ETAPA

La primera actividad (descrita al comienzo de esta sección) fue utilizada como un organizador para llevar adelante las Actividades 2 y 3. Es decir, retomamos aprendizajes previos de los alumnos respecto de la noción de funciones y su análisis gráfico para luego presentar un procedimiento con el objetivo de que los alumnos tuvieran herramientas para analizar problemas de optimización. Este procedimiento fue utilizado a lo largo de todo el resto de la primera etapa.

En la implementación de las Actividades 2 y 3 estuvieron involucrados procesos de modelización, pero cada uno fue llevado a cabo de diferentes modos y con ciertas particularidades. Éste fue el motivo por el cual consideramos pertinente analizarlas haciendo uso de la clasificación realizada por Barbosa, detallada por Villarreal y Esteley en la siguiente cita:

> *Barbosa (2001a) realiza una clasificación de diferentes "casos de modelización" que pueden ser encontrados en contextos educativos: en el caso 1, el profesor describe una situación-problema con la información necesaria para resolverla y los estudiantes participan en el proceso de resolución de tal problema; en el caso 2, el profesor describe una situación-problema de la realidad no matemática y los estudiantes recogen información necesaria para resolver tal situación y en el caso 3, los estudiantes recogen, formulan y resuelven un problema relacionado con un tema no matemático.* (Villarreal & Esteley, 2013, p. 3).

La Actividad 2 puede ser considerada como un proceso de modelización similar al que habían realizado con el profesor del curso. Este proceso se corresponde con el primero de los casos de modelización según Barbosa, ya que si bien los alumnos asumieron cierto protagonismo durante el desarrollo de este problema, fuimos nosotros quienes elegimos la situación problemática y los impulsamos a desarrollar su resolución organizándolos en tres grupos diferentes.

El caso 2 de modelización propuesto por Barbosa puede reconocerse en la Actividad 3, donde desarrollamos el trabajo práctico descrito anteriormente en este capítulo. Si bien fuimos nosotros quienes propusimos un problema para llevar adelante, fueron los alumnos quienes tomaron las riendas para poder construir su modelo y analizarlo tanto gráfica como analíticamente.

Como se puede apreciar, nuestra intención fue lograr una autonomía progresiva por parte de los alumnos al momento de encontrarse con problemas de optimización, invitando a los estudiantes a que fueran conscientes de que con los conocimientos necesarios, serían capaces de llevar adelante este tipo de actividades por sí mismos. Reconocemos además, la importancia del caso 3 en la formación del alumno, donde de manera autónoma, pueden elegir sus problemas a modelizar y el trabajo se torna un gran desafío para ellos.

RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN EN LA PRIMER ETAPA

La corrección de los Trabajos Prácticos fue realizada a través del uso de una rúbrica, la cual puede encontrarse en el Anexo V. Este instrumento nos sirvió para organizar el análisis de los informes entregados por cada grupo.

Los resultados de la corrección se presentan en las Tablas 3 y 4, en las cuales se puede apreciar de manera pormenorizada el puntaje parcial de cada grupo obtenido en cada ítem evaluado.

Actividades		Puntaje	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1. Planteo del problema	A. Identificación de variables	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
	B. Elección del modelo (planteo de la función)	3	3	3	3	3	3	3	1,5	2	3
2. Resolución gráfica del problema	A. Identificación del dominio de la función	1	0,5	0	1	0	0	0	0	0	0
	B. Uso del gráfico para dar respuesta al problema.	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0
3. Resolución analítica del problema	A. Derivación de la función	1,5	1	1,5	1,5	0,5	1,5	1,5	0	1	1,5
	B. Cálculo de las raíces de la derivada	1,5	0	-	1	0	0	1	0	0,5	1
4. Interpretación de las soluciones en el contexto del problema		1	1		1	0	0	0	1	1	0
Suma de puntos		10	7,5	6	9,5	5,5	6,5	5,5	3,5	6,5	7
CALIFICACIÓN			8	6	10	6	7	7	4	7	7

Tabla 3: Resultados del Trabajo Práctico en 7°D.

Actividades		Puntaje	A	B	C	D	E	F	G	H
1. Planteo del problema	A. Identificación de variables	1	1	1	-	1	1	1	1	1
	B. Elección del modelo (planteo de la función)	3	3	3	-	3	3	3	2	3
2. Resolución gráfica del problema	A. Identificación del dominio de la función	1	1	0	-	1	0,5	0	0	1
	B. Uso del gráfico para dar respuesta al problema.	1	1	1	-	1	1	1	0	1
3. Resolución analítica del problema	A. Derivación de la función	1,5	1,5	1,5	-	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
	B. Cálculo de las raíces de la derivada	1,5	1,5	1,5	-	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
4. Interpretación de las soluciones en el contexto del problema		1	1	1	-	1	1	1	1	1
Suma de puntos		10	10	9		10	9,5	9	7	10
CALIFICACIÓN			10	9	-	10	10	9	7	10

Tabla 4: Resultados del Trabajo Práctico en 7°F.

A partir de estos resultados es posible llegar a algunas conclusiones. Por ejemplo, puede observarse que todos los grupos plantearon algún modelo correcto para la situación en más del 80% de los casos (con respecto al total de ambos cursos). El 76% de los grupos pudo resolver el problema de manera gráfica, mientras que el 65% de los mismos pudo encontrar la solución de forma analítica (en el caso de 7°F, la totalidad de los grupos logró este cometido). Asimismo, podemos ver que sólo el 35% de los grupos explicitó el dominio de la función.

Finalmente, anexamos en las Figuras 22 y 23 los gráficos que permiten observar la distribución de notas en cada uno de los cursos. En esta institución la calificación requerida para aprobar es 7.

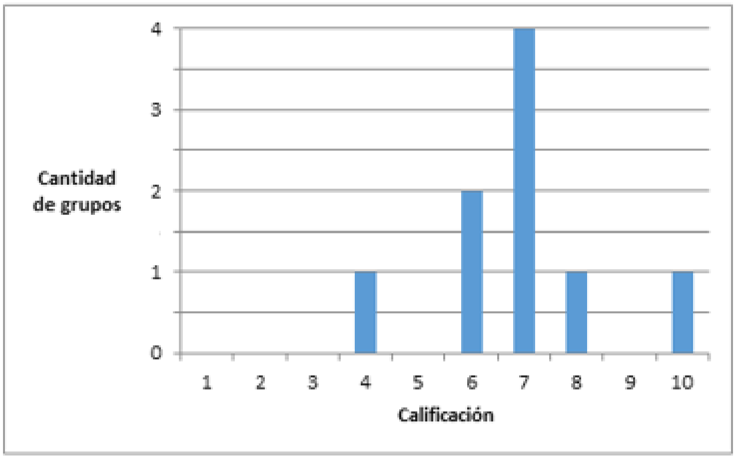


Figura 22: Calificaciones obtenidas por los alumnos de 7°D en el Trabajo Práctico.

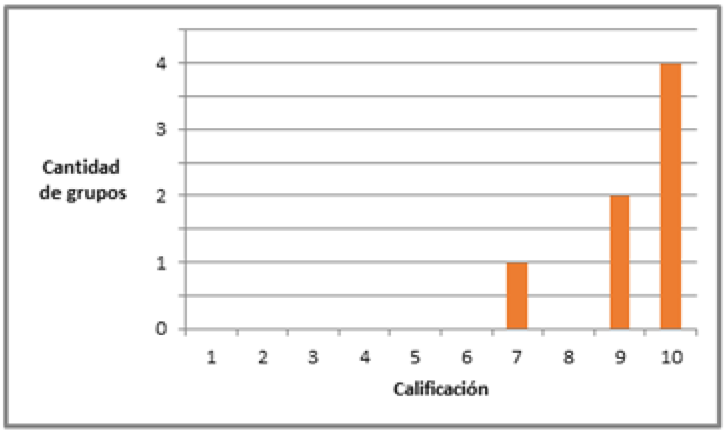


Figura 23: Calificaciones obtenidas por los alumnos de 7°F en el Trabajo Práctico.

Es necesario hacer una aclaración con respecto a uno de los grupos en 7°F, el cual no pudo ser evaluado de la misma forma que el resto de los grupos puesto que su informe era una copia casi exacta de otro[12]. Teniendo en cuenta el trabajo realizado en clases por este grupo, decidimos junto con el profesor del curso otorgarles una nueva oportunidad. Se le tomó una evaluación oral individual a cada integrante del grupo.

2.3.2 Segunda etapa: Trabajo con ejercicios de aplicación

La segunda mitad de nuestras prácticas estuvo dedicada al trabajo con una guía de ejercicios, la cual puede encontrarse en el Anexo VI, respondiendo a nuestro objetivo de desarrollar la destreza de los alumnos en el proceso de derivación de funciones elementales (ver Sección 2.2). Ésta fue acordada junto con el profesor de la asignatura. Las primeras tres clases de la etapa estuvieron centradas en abordar los primeros ejercicios de esta guía, apoyando las explicaciones en el pizarrón con presentaciones en PowerPoint, y también con tiempo destinado al trabajo individual por parte de los alumnos. Durante las instancias de explicación para toda la clase utilizamos GeoGebra para graficar las funciones trabajadas, mientras que en los momentos de resolución individual de ejercicios aconsejamos a los alumnos utilizar aplicaciones tales como Grapher y Malmath[13]. Las últimas tres clases se destinaron a la evaluación (repaso, evaluación propiamente dicha y devolución de la misma). Para esta instancia decidimos implementar una evaluación de carácter sumativo, debido a las características del contenido trabajado durante las 3 primeras clases de esta etapa.

[12] Por este motivo no se les dio una calificación grupal, como puede observarse en la Tabla 4.

[13] Esta aplicación está disponible en dispositivos móviles compatibles con Android. Su dirección web es https://play.google.com/store/apps/details?id=com.malmath.apps.mm

ACTIVIDADES IMPLEMENTADAS EN LA SEGUNDA ETAPA

A lo largo de la segunda etapa trabajamos con las actividades 1 a 4 de la guía de ejercicios[14]. Las dos primeras actividades fueron trabajadas de forma muy similar entre sí, siguiendo un esquema expositivo: los primeros incisos de cada ejercicio eran resueltos por nosotros, los demás incisos eran trabajados por los alumnos en clase de manera individual, y posteriormente llevábamos a cabo una puesta en común para corroborar que estuvieran resueltas de manera correcta.

La respuesta analítica a la cual se llegaba en cada actividad era verificada a través de un análisis del gráfico de la función correspondiente, mediante el uso de algún software (GeoGebra para nuestras explicaciones en el pizarrón, Grapher o aplicaciones similares en la resolución individual de cada estudiante).

La primera actividad de esta segunda etapa consistió en la resolución del primer ejercicio de la guía, que presentamos en la Figura 24:

1) Calcular los máximos y mínimos de las siguientes funciones de forma analítica. Verificar los resultados obtenidos usando el método gráfico.

a) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

c) $f(x) = x^2\left(x^2 + \dfrac{10}{3}x\right) - 3x^2$

d) $f(x) = -\dfrac{1}{2}\,(2x+7) + \dfrac{5x}{2x+3}$

Figura 24: Primer ejercicio de la guía de ejercicios [15]

Al encarar esta actividad mencionamos que si bien en el enunciado no se hace mención de ninguna situación de la vida real, estas funciones podrían aparecer en algún problema que se quisiera modelizar. Por ejemplo, en el contexto de otras asignaturas, o bien en vistas a futuros estudios universitarios, entre otras posibilidades.

Hicimos explícita ante los alumnos nuestra intención de que se ejerciten con distintas funciones para que adquieran mayor manejo del proceso de derivación. Asimismo, al tratar con los distintos incisos de esta actividad queríamos que los alumnos aplicaran cómo utilizar las reglas de derivación del producto y del cociente, las cuales no habían sido vistas en clase pero sí constaban en la fotocopia "Reglas de derivación" (Anexo III). Por lo tanto, durante el tiempo destinado al trabajo individual les aconsejamos utilizar el listado de derivadas mencionado anteriormente ante cualquier duda. A la hora de la puesta en común, generamos una discusión acerca del uso de las nuevas reglas de derivación que debieron emplear.

[14] Para más detalles, consultar el cronograma dado en la sección 2.5.

[15] Los incisos a) y b) son una modificación de ciertos ejercicios del texto de M. de Guzmán (1988, pág. 278). Los incisos c) y d) son de nuestra autoría.

En estas clases adoptamos la estrategia de hacer un breve repaso de los ejercicios que habían sido trabajados anteriormente por los alumnos. En la mayoría de los casos, estos repasos eran realizados a través del uso de presentaciones de PowerPoint. En esta decisión tuvo mucha influencia el modo en que el profesor a cargo relacionaba cada clase con la clase anterior durante las observaciones. A continuación daremos un ejemplo en el cual explicaremos cómo esto fue implementado.

Durante la clase siguiente a aquella en la cual fue resuelto el ejercicio 1)b) por los estudiantes y fue realizada la puesta en común del mismo, mostramos una presentación en PowerPoint donde explicamos las reglas de derivación que fueron usadas para resolverlo. Este inciso en particular involucraba un cociente de funciones, por lo que esta regla fue el contenido principal que se trató en esta explicación.

En la Figura 25 puede observarse una de las diapositivas utilizadas en este repaso.

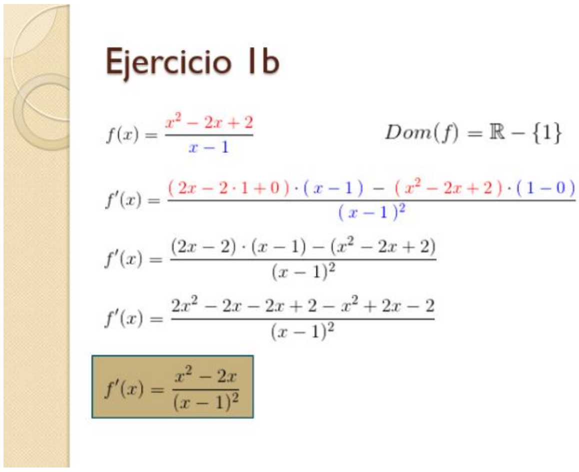


Figura 25: Diapositiva utilizada en la explicación del ejercicio 1.b

No obstante, los distintos elementos que la conforman no fueron mostrados a los estudiantes de manera simultánea, sino que iban apareciendo en el proyector a medida que avanzaba la explicación. En un comienzo, la expresión algebraica de la función f se mostró en su totalidad de color negro, pero cuando vimos que para aplicar la regla de derivación del cociente debíamos identificar cuáles serían las funciones en el numerador y en el denominador, utilizamos distintos colores para señalarlas. Utilizamos entonces esta codificación en colores en el esquema que se presenta en la Figura 26 para explicar el funcionamiento de esta regla de derivación.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{(\qquad\qquad)\cdot(\qquad) - (\qquad\qquad)\cdot(\qquad)}{(\qquad)^2}$$

Figura 26: Uso de la herramienta PowerPoint como soporte dinámico de nuestra explicación del ejercicio 1)b).

Esto es un ejemplo de la forma en la cual intentamos utilizar la tecnología disponible como un elemento esencial en el desarrollo de nuestras clases.

Para calcular las raíces de f' en este inciso se decidió presentar a los estudiantes la aplicación Malmath para poder resolver la expresión f'(x) = 0. Esta decisión se debió a que pudimos constatar durante el Trabajo Práctico que los estudiantes presentaron algunas dificultades al momento de resolver este tipo de ecuaciones[16]. Destinamos algunas diapositivas de la presentación a mostrar capturas de pantalla en las cuales resolvíamos la ecuación a través del uso de esta herramienta, con el objetivo de que se familiaricen con su uso. Finalmente, mediante un gráfico realizado en GeoGebra determinamos cuáles de los puntos eran máximos y cuáles mínimos. En la Figura 27 se adjunta una de estas diapositivas a modo de ejemplo.

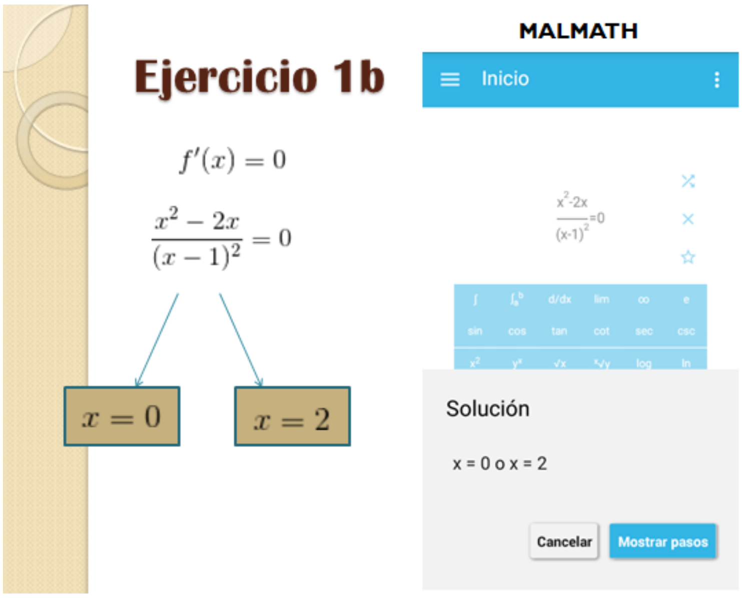


Figura 27: Resolución de la ecuación f'(x) = 0 mediante el uso del software Malmath.

La segunda actividad de la ejercitación (Figura 28) fue pensada para que los alumnos continuaran ejercitándose en el proceso de derivación de funciones.

2) Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \frac{1}{2}\, sen\,(x) + 5$

b. $f(x) = cos\,(x)\,\left(x^3 + 3x^2\right)$

c. $f(x) = x\, e^x$

d. $f(x) = log\,(x) + sen\,(x)\; cos\,(x)$

Figura 28: Segundo ejercicio de la guía[17].

[16] Esto fue detectado en particular en 7°D, mientras que en 7°F no hubo mayores inconvenientes con respecto a este tema. Por lo tanto, decidimos introducir esta herramienta sólo en 7° D, aclarando que podría ser utilizada en la evaluación.

[17] Este ejercicio es de nuestra autoría.

Decidimos incluir esta actividad ya que, pese a no involucrar optimización de funciones, pensamos que es importante invertir tiempo para que los alumnos desarrollen la habilidad de derivar funciones puesto que es una parte central del proceso de resolución de problemas de optimización. Además, esta actividad no implica la resolución de ninguna ecuación, lo cual consideramos como una ventaja en estas circunstancias ya que ése no era el tema principal que queríamos abordar en nuestras prácticas. Además, notamos que muchos estudiantes destinaban más tiempo a resolver la ecuación f'(x)=0 que a hallar la derivada de f cuando resolvían problemas de optimización. De esta forma el cálculo de derivadas quedaba fuera de la atención de los estudiantes en ese tipo de problemas.

Las siguientes dos actividades, que pueden encontrarse en la Figura 29, fueron incluidas en la guía con el objetivo de retomar la noción de la derivada como la pendiente de la recta tangente.

3) Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 3x + 2$ en los puntos donde x = -2, x = -1.5, x = 0.

4) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 5/x^2 + 2x$ en el punto (1,7). Graficar tanto la función como su recta tangente utilizando algún software.

Figura 29: Ejercicios 3) y 4) de la guía[18].

Estas actividades fueron explicadas de forma muy similar entre sí, y para dicha explicación se utilizó tanto el pizarrón como el proyector. Por ejemplo, en la actividad 3) calculamos la derivada de la función f en el pizarrón y como resultado obtuvimos la expresión general de f'(x). Al hacer esto mencionamos que f' es también una función, y que la imagen de x en ésta representa la pendiente de la recta tangente a f en el punto x. Una vez dicho esto, valuamos a la función f' en x=-2, e hicimos explícito que la imagen de f' en x=-2 es la pendiente de la recta tangente a la función f en el punto x=-2.

Notamos que los alumnos se veían confundidos ante la posibilidad de valuar a f' en un valor particular. Conjeturamos que esto podría deberse al hecho de que la conceptualización de f' como una función no fue objeto de enseñanza en nuestras prácticas, por lo cual sería comprensible que muchos estudiantes no entendieran por qué se la puede "valuar" en un número. Cuando se les planteó esta actividad, un alumno hizo el comentario de que podría calcular la pendiente de la recta tangente a f resolviendo la ecuación f'(x)=-2. Observamos que no comprendieron de manera general a f'(x) como la pendiente de la recta tangente a f en el punto x, quizás porque hicimos énfasis en esta relación sólo cuando x era un máximo o un mínimo de f. Esto pudo verse en la instancia de evaluación escrita, donde algunos alumnos calcularon la pendiente de la recta tangente en un x particular valuando a la función f en ese x.

[18] Ambas actividades fueron extraídas de la planificación anual del profesor (Anexo II). No obstante, la actividad 4) fue modificada para incluir un cociente, y para incluir en su enunciado una referencia al uso de las tecnologías.

Para finalizar la actividad, usamos la herramienta "Recta Tangente" de GeoGebra para graficar las rectas tangentes pedidas, y así poder visualizar la relación entre la pendiente de las mismas y la derivada de la función.

RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN EN LA SEGUNDA ETAPA

Como hemos mencionado anteriormente, esta etapa finalizó con una evaluación sumativa de los contenidos trabajados.

Para elaborar esta evaluación, decidimos tener en cuenta en cada curso sólo aquellas actividades que fueron trabajadas en clase hasta la clase previa al repaso de la evaluación[19]. La evaluación tomada en 7°D se adjunta en el Anexo VII, mientras que la de 7°F se puede encontrar en el Anexo VIII. En estos Anexos también pueden encontrarse los criterios en base a los cuales se llevó a cabo la corrección de cada evaluación, en donde se detalla el puntaje que se le asignó a cada ejercicio. Para elaborar estos criterios decidimos no disminuir mucho puntaje por errores en el manejo algebraico, haciendo énfasis en las partes conceptuales de cada actividad.

Por otro lado, dado que en 7ºD se trabajó la resolución de ecuaciones a través del uso de la aplicación Malmath, en ese curso se permitió el uso de la misma durante la evaluación para resolver las ecuaciones a las que llegaran los estudiantes. Sin embargo, posteriormente pudimos comprobar que muchos de los estudiantes no hicieron uso del mismo.

La asistencia a la evaluación fue del 76% en 7ºD, mientras que en 7ºF fue del 74%, lo cual consideramos destacable teniendo en cuenta el perfil de los alumnos que describimos en la sección 1.4. Debido a esto, decidimos diseñar para cada curso una nueva evaluación que le tomaríamos durante la clase siguiente a los alumnos que faltaron. En estas evaluaciones, que pueden encontrarse en los Anexos IX y X junto con sus respectivos criterios de corrección, intentamos evaluar los mismos contenidos que en la primera, adaptándolos para 40 minutos en lugar de 80. Luego de tomarla, el porcentaje de alumnos que pudieron ser evaluados ascendió al 85% en 7ºD y al 97% en 7ºF.

Los resultados de la evaluación en cada curso pueden apreciarse en las Figuras 30 y 31.

[19] Así, en 7°D se elaboró una evaluación que contemplara los contenidos que involucran los ejercicios 1) al 3) de la guía de ejercicios, mientras que en 7°F la evaluación se realizó en base a los ejercicios 1) al 4).

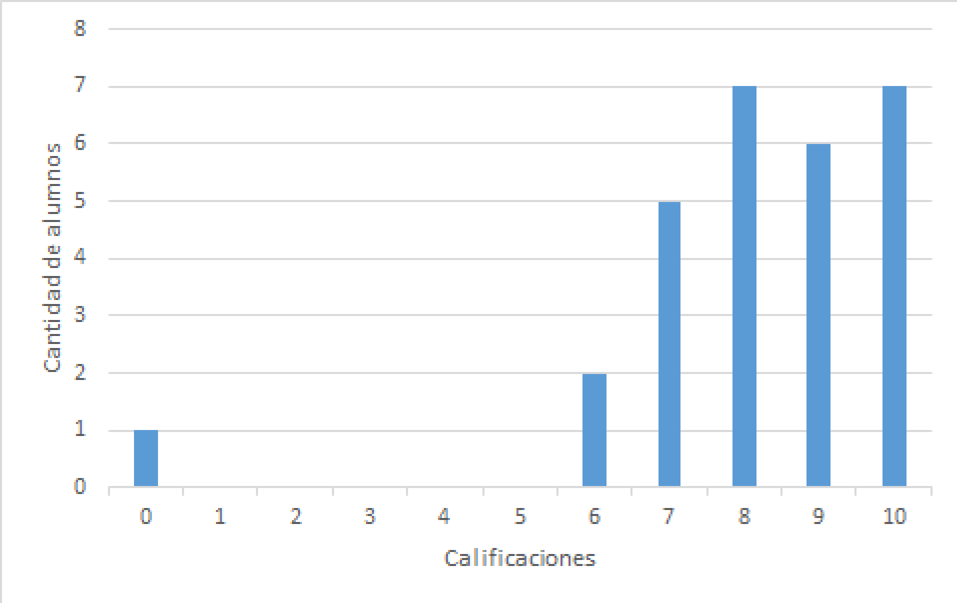


Figura 30: Resultados de las evaluaciones en 7ºD.

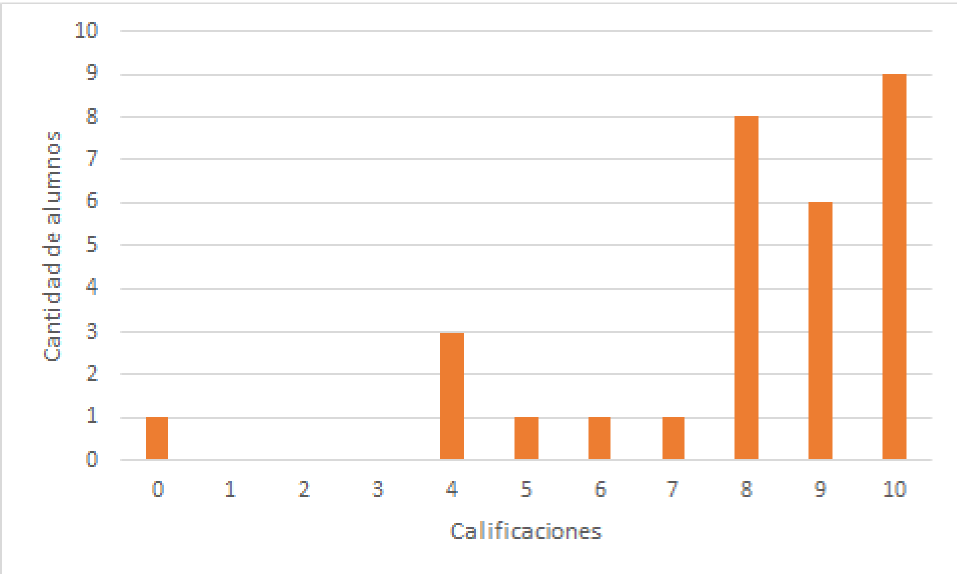


Figura 31: Resultados de las evaluaciones en 7ºF.

Para finalizar, nos parece importante realizar una comparación entre los resultados obtenidos en el Trabajo Práctico de la primera etapa con la evaluación tomada en la segunda etapa. No obstante, cabe aclarar que los tipos de trabajo involucrados en cada evaluación eran muy distintos, por lo cual no tendría por qué existir una correlación directa entre las notas obtenidas por un alumno en un trabajo y en otro. En la Figura 32 mostramos unos gráficos que permiten apreciar en cada curso el porcentaje de alumnos que obtuvo mejor calificación en la segunda instancia evaluativa que en la primera, demostrando así su progreso, comparado con los porcentajes de alumnos que obtuvieron una calificación menor o igual.

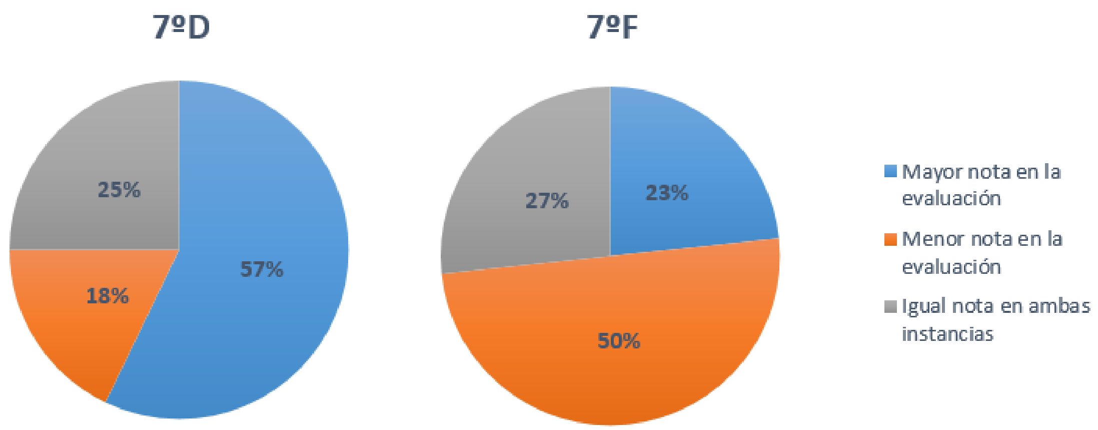


Figura 32: Comparación entre las evaluaciones tomadas en las distintas etapas.

2.4 Análisis de las actividades en relación a los ambientes de aprendizaje de Skovsmose

Haciendo una mirada retrospectiva y reflexiva tanto de la planificación como de la implementación de nuestras clases, consideramos pertinente llevar a cabo un breve análisis de las actividades implementadas (y también de aquellas planificadas pero no implementadas) en base a los ambientes de aprendizaje definidos por Skovsmose (2000) (ver Tabla 5).

		Formas de organización de la actividad de los estudiantes	
		Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Tipo de referencia	Matemáticas puras	(1)	(2)
	Semirrealidad	(3)	(4)
	Situaciones de la vida real	(5)	(6)

Tabla 5: Ambientes de aprendizaje de Skovsmose[20].

Durante el desarrollo de la primera etapa de nuestras prácticas, las actividades que se llevaron a cabo involucraron un incremento gradual de la participación por parte de los alumnos. Fue cuando se llevó adelante el Trabajo Práctico donde los alumnos lograron mayor autonomía al momento de desarrollar la actividad. Las consignas del mismo eran de carácter abierto y permitían establecer un escenario de investigación para que los estudiantes exploren los diferentes caminos por los cuales se podían encarar los problemas (con excepción quizás de la Actividad 1, que fue

[20] Extraído de Skovsmose, 2000, p. 10.

utilizada a modo de guía para organizar el trabajo posterior que habrían de realizar los alumnos). Además, esto se conjugaba con el hecho de que los problemas seleccionados por nosotros hacían alusión a una realidad construida, con algunos aspectos idealizados y/o simplificados, haciendo referencia así a lo que Skovsmose llama semirrealidad. De esta manera, el ambiente de aprendizaje en el cual podemos ubicar a la Actividad 2 (Figura 10) y al problema tratado en el Trabajo Práctico (Figura 13) es el ambiente (4).

Con respecto a la segunda etapa, creemos importante mencionar que hubo muchas diferencias entre lo planificado originalmente y lo que pudimos implementar finalmente. Las actividades de la Guía de Ejercicios (Anexo VI) que pudieron concretarse fueron las primeras cuatro, y podemos reconocer que cuando fueron trabajadas con nuestro alumnos no presentaron muchas diferencias entre sí en cuanto al ambiente de aprendizaje en el cual las situaríamos, como explicaremos más abajo. No obstante, las actividades siguientes sí contemplaban un movimiento entre ambientes, que habría sido interesante de observar.

En relación a la primera actividad de la guía, dado que se plantea una tarea que ya había sido abordada anteriormente (aunque en otro contexto), podemos considerar que está enfocada desde el paradigma del ejercicio. No obstante, con respecto a los incisos posteriores al a), podría argumentarse que el hecho de dejar librado a los alumnos el descubrimiento del uso de ciertas reglas de derivación hace que emerja en cierto sentido un escenario de investigación. De esta manera, puede pensarse que estos incisos estarían ubicados en la "zona intermedia" que plantea Skovsmose en el continuo que conecta el paradigma del ejercicio con los escenarios de investigación. Puesto que la actividad planteada implica un trabajo dentro de la matemática pura, consideramos que puede ser pensada como un ambiente de aprendizaje intermedio entre el tipo (1) y el tipo (2) (aunque quizás más cercano al tipo (1)).

La actividad 2 de la guía se puede clasificar como un ambiente de tipo (1), ya que permitió a los estudiantes reforzar un contenido que ya había sido trabajado varias veces con anterioridad, y está inscripto en la matemática pura. Por otra parte, la forma en la cual encaramos las actividades 3 y 4 no contemplaba mucha participación por parte de los estudiantes en la resolución de las mismas, ya que fueron resueltas casi en su totalidad por nosotros en el pizarrón. Por este motivo, no consideramos pertinente incluirlas en este análisis.

Con respecto al resto de las actividades de la guía[21], queremos resaltar el hecho de que su incorporación en la misma respondió a nuestro interés en complementar las actividades 1) a la 4) con otras que permitiesen quizás transitar otros ambientes de aprendizaje. Estas actividades pueden observarse en la Figura 33.

[21] Estas actividades no pudieron ser implementadas durante nuestras prácticas por falta de tiempo.

5) La posición de una partícula para cada instante de tiempo t está dada por la función

$f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, donde t está expresada en segundos y f(t) en metros.

a. Calcular la velocidad instantánea de la partícula en el instante t.
b. ¿Cuál será la velocidad de la partícula pasados dos y cuatro segundos, respectivamente? ¿En qué posición se encuentra en esos instantes?
c. ¿Cuándo se encuentra en reposo la partícula? ¿En dónde se encuentra la partícula en los instantes en los cuales está en reposo?
d. ¿Cuándo se mueve la partícula en dirección positiva?

6) Descomponer el número 16 en dos sumandos positivos tales que su producto sea máximo.

7) De todos los rectángulos de perímetro 20 cm ¿Cuál es el de área máxima?

8) Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso, como se muestra en la figura. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm de altura cada uno, y los laterales 1 cm. ¿Qué dimensiones debe tener la hoja para que el gasto de papel sea mínimo?

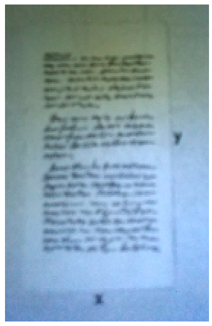


Figura 33. Últimas actividades de la guía[22].

En el ejercicio 5) se introduce una situación de la semirrealidad, la cual podría haber resultado un ejercicio de aplicación para nuestros alumnos si la hubiésemos trabajado, puesto que ya habían visto varios ejercicios similares y dado que la noción de derivada como velocidad instantánea había sido vista con el profesor del curso. Por lo tanto consideramos que se ubicaría dentro del ambiente de aprendizaje (3).

Las actividades 6) y 7) plantean una tarea de tipo intramatemático, pero con un nivel de complejidad que quizás las podría haber convertido en escenarios de investigación. Por este motivo, podrían haber sido incluidas en el ambiente de aprendizaje (2). No obstante, para algunos alumnos podrían haber resultado ejercicios de aplicación, luego de todo el trabajo hecho en la primer etapa de nuestras prácticas, y para ellos sería un ambiente de tipo (1).

Las consideraciones hechas en el párrafo anterior también se aplican a la actividad 8), salvo que en lugar de matemática pura, esta tarea hace referencia a una semirrealidad. Por lo tanto, podría haber resultado un ambiente de tipo (4) o quizás (3).

[22] La actividad 5) fue extraída (con ciertas modificaciones) de la planificación anual del profesor (Anexo II). El resto de las actividades pueden ser encontradas en el libro de M. de Guzmán (año 1988, pág. 273).

2.5 Cronograma de las clases implementadas

En esta sección presentaremos en mayor detalle las actividades que tuvieron lugar en nuestras clases. Decidimos describir las clases correspondientes a la primera etapa de manera unificada para ambos cursos, dado que no hubo diferencias sustanciales entre los mismos. En la Tabla 6 realizamos una breve descripción de lo sucedido en cada una de las clases.

Clase	Actividades implementadas en 7°D y 7°F
1° (80')	-Presentación nuestra y de nuestra Institución. -Explicación general de los temas que trabajaríamos a lo largo de nuestras clases. (Figura 4). -Comienzo del trabajo con la Actividad 1 (Figura 5). Reconstrucción del modelo obtenido para este problema. -Uso de GeoGebra para llegar a la conclusión de que en el punto máximo de la función, la derivada se anula. -Derivación de la función, acompañado de un repaso de las reglas de derivación vistas con el profesor del curso. -Resolución de la ecuación $f'(x)=0$ mediante la fórmula de Baskhara. -Verificación de las soluciones halladas mediante el uso del gráfico. -Extensión de la conclusión hallada anteriormente para incluir también a los puntos mínimos (en 7° D).
2° (40')	-Repaso de la clase anterior[23]. -Comienzo del trabajo con la Actividad 2 (Figura 10).Reconstrucción del modelo obtenido para este problema. -Explicación de la consigna de trabajo grupal mediante PowerPoint (Figura 12). -Comienzo del trabajo grupal.
3° (80')	-Continuación del trabajo grupal con la Actividad 2. -Exposiciones orales delos representantes de cada uno de los grupos formados, con intervenciones por parte nuestra para hacer aclaraciones.
4° (40')	-Comienzo del Trabajo Práctico
5° (80')	-Continuación del Trabajo Práctico
6° (40')	-Continuación del Trabajo Práctico

Tabla 6: Actividades implementadas en cada clase de la primera etapa, en ambos cursos.

Debido a las diferencias que comenzaron a suscitarse entre los cursos, sobre todo a partir del trabajo práctico, las clases de la segunda etapa fueron bastante distintas en cada curso. Por este motivo presentamos de manera separada en la Tabla 7 los detalles de las actividades que pudieron realizarse tanto en 7ºD como en 7ºF.

[23] Este repaso fue más extenso en 7ºF dado que muchos de los alumnos habían estado ausentes en la primera clase.

Clase	Actividades implementadas en 7°D	Actividades implementadas en 7°F
7° (40')	-Finalización del Trabajo Práctico. -Entrega del Trabajo Práctico. -Explicación en el pizarrón del ej. 1.a).	-Entrega del Trabajo Práctico -Explicación en el pizarrón del ej. 1.a). -Trabajo de los alumnos con los ej. 1.b) y 1.c). -Corrección del ej. 1.b).
8° (80')	-Devolución del Trabajo Práctico. -Repaso del ej. 1.a) mediante presentación con PowerPoint. -Trabajo de los alumnos con los ej. 1.b) y 1.c). -Corrección parcial del ej. 1.b).	-Devolución del Trabajo Práctico. -Repaso de los ej. 1.a) y 1.b) mediante presentación con PowerPoint. -Corrección del ej. 1.c). -Trabajo de los alumnos con el ej. 2).[24]
9° (40')	-Finalización de la corrección del ej. 1.b) y explicación del ej. 1.c) mediante presentación de PowerPoint[25]. -Explicación en el pizarrón de los ej. 2.a) y 2.b). -Trabajo de los alumnos con los ej. 2.c) y 2.d). -Corrección en el pizarrón de los ej. 2.c) y 2.d). -Explicación en el pizarrón de parte del ej. 3).	-Corrección de los ej. 2.a) y 2.b) mediante presentación de PowerPoint. -Corrección en el pizarrón de los ej. 2.c) y 2.d). -Explicación en el pizarrón del ej. 4). -Trabajo de los alumnos con el ej. 3).
10° (40')	Repaso para la evaluación: Resolución en el pizarrón de los incisos restantes en los ejercicios 2) y 3).	Repaso para la evaluación: Resolución en el pizarrón del ej. 1.d), de un ejercicio nuevo[26] y del ej. 3).
11° (80')	Evaluación.	Evaluación.
12° (40')	Devolución de la evaluación[27].	Devolución de la evaluación.

Tabla 7: Actividades implementadas en cada clase de la segunda etapa, diferenciadas por curso.

[24] Además se utilizaron los segundos 40 minutos de esta clase para tomar evaluación oral a los alumnos del Grupo C del Trabajo Práctico.
[25] En esta presentación de PowerPoint se realiza la introducción de la aplicación Malmath, aclarando que podrían utilizarla para resolver ecuaciones.
[26] Para esta clase preparamos un ejercicio análogo al 2) de la guía, en el cual la consigna era derivar una función muy similar a las trabajadas en dicha actividad.
[27] En ambos cursos, los alumnos que habían faltado a la evaluación fueron llevados a otra aula para ser evaluados, mientras se realizaba la devolución de la evaluación en el aula del curso.

3. Análisis de las representaciones usadas en un problema de optimización de funciones

3.1 Origen y planteo de la problemática

A lo largo de nuestras prácticas decidimos utilizar distintos registros para tratar con los conceptos relacionados con derivadas y la optimización de funciones, e intentamos que nuestros alumnos utilicen diferentes formas de representar funciones a la hora de resolver las actividades que les planteamos. Entendemos como registros a todas aquellas formas de representar los objetos matemáticos que tenemos a nuestra disposición[28]. Así, una función puede ser representada por medio de un gráfico cartesiano (registro gráfico), a través de una fórmula (registro algebraico), entre otros.

Intentamos establecer una dinámica en nuestras clases que conjugara aspectos algebraicos (por ejemplo, en la resolución de ecuaciones) con elementos visuales (haciendo especial énfasis en el análisis del gráfico de las funciones tratadas). Por otro lado, siempre estuvieron presentes las representaciones verbales de todos los objetos matemáticos involucrados (registro en lenguaje natural).

Por ejemplo, en la Sección 2.3.1, la función que constituye el modelo para la situación analizada fue representada por medio de la fórmula $f(x)=(12-2x)*(20-2x)*x$, pero también a través del gráfico de la Figura 9, y en nuestra explicación de la fórmula podemos reconocer asimismo otra representación de la función mediante el uso del lenguaje. Luego de implementar esta clase reconocemos que la presentación de los conceptos a través de distintos registros sirvió para promover un mayor entendimiento por parte de los alumnos.

Al momento de proponer actividades para que realizaran los estudiantes, tratamos de seguir esta misma línea de trabajo, y los instamos a tener en cuenta no sólo el lenguaje algebraico en la resolución de las actividades, sino también el uso de gráficos obtenidos a través de distintos software para poder tener otra visión de las actividades planteadas. El momento que consideramos que tuvo mayor relevancia en relación a la utilización de distintos registros por parte de los alumnos fue el desarrollo del Trabajo Práctico durante la Primer Etapa de nuestras prácticas (ver Sección 2.3.1), puesto que el análisis de los informes elaborados por ellos nos permitió apreciar una multiplicidad de registros que fueron producidos por los alumnos para la resolución de la actividad. Además, atrajo nuestra atención que algunos de los grupos utilizaron registros que no habíamos considerado en nuestra planificación, y esto fue una de las razones principales por las cuales tomamos la decisión de estudiar estos temas en este capítulo. Otro factor que tuvo una gran influencia en esta decisión fue la consideración de un consejo de nuestra profesora supervisora con respecto a utilizar distintas representaciones de las funciones que mencionábamos en nuestras explicaciones orales, valiéndonos de los recursos disponibles en el aula.

En relación al estudio de las distintas representaciones de un concepto matemático, surgió el interés de explorar de qué manera incidió la tecnología disponible a la hora de optar por una

---

[28] Más adelante veremos con mayor profundidad el significado preciso que estamos asignándole a este término.

representación u otra. Aquí estamos utilizando la palabra "tecnología" en un sentido amplio, incluyendo no sólo a las tecnologías digitales sino también al lápiz y papel, pizarrón, etc.[29]. Por ejemplo, el hecho de contar con el acceso a un proyector en el aula nos permitió utilizar el software GeoGebra para realizar gráficos. De esta manera pudimos llevar a cabo actividades en las cuales se resaltara el empleo de un registro gráfico, el cual es mucho más dinámico y ofrece la posibilidad de trabajar con actividades muy distintas a las que se podrían encarar con lápiz y papel. Además, en el transcurso del Trabajo Práctico quedó en evidencia la importancia que tuvo el uso de las aplicaciones tales como Grapher y Matemáticas en los distintos procesos de resolución que se dieron en cada grupo.

A partir de estas consideraciones, como así también de un breve análisis de la literatura existente en relación a estos temas, decidimos definir la problemática que profundizaremos en este capítulo de la siguiente forma:

Descripción del trabajo con diversas representaciones para lograr una visualización matemática de los problemas de optimización de funciones.
¿Cómo los distintos registros de representación utilizados por nuestros alumnos durante la resolución de un problema de optimización fueron mediados por las tecnologías que tenían a su disposición?

En este enunciado incluimos algunos conceptos sobre los cuales debemos detenernos para aclarar su significado antes de poder dar respuesta a estos interrogantes. Entre ellos, podemos mencionar "visualización matemática", "registros de representación" y "mediación por las tecnologías". En la sección 3.2 nos ocuparemos de revisar algunos aportes que nos brinda la literatura para entender mejor estos términos, mientras que en la sección 3.3 realizaremos un análisis de las producciones elaboradas por nuestros estudiantes durante el desarrollo del Trabajo Práctico, a modo de reflexión de nuestras prácticas.

3.2 Revisión de algunos aportes de la literatura

3.2.1 La visualización matemática y su relación con los registros de representación

Para introducir el concepto de visualización matemática tendremos en cuenta en una primera instancia la siguiente definición:

> *Visualizar un diagrama significa simplemente formar una imagen mental del mismo, pero visualizar un problema significa entenderlo en términos de un diagrama o una imagen visual. La visualización matemática es el proceso de formación de imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología) y el uso de tales imágenes en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento.* (Zimmermann & Cunningham, citado en Hitt, 1998, p. 6)

De esta manera, "visualizar" en matemática trae aparejadas connotaciones que van mucho más allá del mero acto de observar algo. Mediante este concepto destacamos la importancia de la

[29] En la sección 3.2.2 daremos más detalles con respecto a este tópico.

producción de imágenes visuales para llevar a cabo actividades propias de la matemática, tales como producir razonamientos, descubrir relaciones entre diversos objetos, realizar procesos de abstracción, etc. Sin embargo, cabe aclarar que el significado exacto de esta palabra no es el mismo para los distintos autores que se dedican al tema[30].

Para completar la conceptualización de visualización matemática, consideramos que es importante entenderla en relación a los *registros de representación semiótica,* noción que procederemos a explicar a continuación.

Oviedo et al (2012) explican cómo la actividad matemática requiere del uso de distintos sistemas de escritura, conjuntos de signos y notaciones simbólicas para representar los objetos matemáticos. Estas autoras aclaran que "los conceptos matemáticos no son objetos reales, y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio" (Oviedo et al, 2012, p. 30). Entre ellas, se encuentran los símbolos utilizados en el álgebra y la aritmética, como así también las imágenes gráficas tales como gráficos cartesianos, figuras geométricas, esquemas, etc., e incluso las palabras del lenguaje castellano con las cuales se nombran a los objetos matemáticos, entre muchas otras. Las autoras se refieren a cada uno de estos conjuntos de signos utilizados para representar los objetos matemáticos como *sistema semiótico* (Oviedo et al, 2012, p. 30).

Cada sistema semiótico ofrece la posibilidad de llevar a cabo un tratamiento particular de los objetos matemáticos. Por ejemplo, si una función es representada a través de símbolos algebraicos, es posible realizar ciertas operaciones (por ejemplo, cálculo de sus raíces) de una determinada manera, y si ese mismo objeto es concebido a través de una representación gráfica estas operaciones pueden ser resueltas de forma completamente distinta. Por otra parte, dicho tratamiento no puede existir si no es a través de algún sistema semiótico, lo cual es reconocido por Duval cuando afirma que "la utilización de representaciones semióticas es primordial para la actividad matemática" (citado en Oviedo et al, 2012, p. 31). Así, no es posible llevar a cabo una actividad matemática de forma completamente abstracta, puesto que siempre debemos usar signos para representar los objetos matemáticos (aún cuando la representación sea sólo mental).

Cabe destacar que no todos los sistemas semióticos permiten las mismas posibilidades de llevar a cabo ciertos tratamientos de los objetos matemáticos, sino que algunos sistemas presentan mayores ventajas que otros al respecto. Tal es el caso del proceso de cálculo de raíces de polinomios: si tomamos un polinomio de grado mayor a 4, se sabe que no es posible hallar un algoritmo que permita calcular todas las raíces del mismo a partir de sus coeficientes, lo cual muestra que el registro algebraico no permite realizar este tratamiento ("calcular las raíces") de este objeto matemático (polinomio). No obstante, si realizamos una representación gráfica de este objeto, podemos utilizar este registro para dar una buena aproximación de las raíces del polinomio.

Teniendo en cuenta la problemática que planteamos en la Sección 3.1, consideramos que es importante señalar que la habilidad para interpretar un mismo concepto matemático coordinando varios sistemas semióticos puede ser de utilidad para superar obstáculos en el aprendizaje de ese concepto (Oviedo et al, 2012). Este aporte de la literatura nos permite

[30] En la tesis doctoral de Villarreal (1999) puede encontrarse una recopilación de acepciones para este término, algunas de las cuales otorgan un rol más preponderante a la visualización en la actividad matemática que otras.

reflexionar que la estrategia de trabajo que utilizamos en nuestras prácticas, tratando de utilizar y relacionar constantemente diferentes representaciones de las funciones que empleábamos e intentando que los estudiantes también lo hagan, es vista por estas autoras como algo provechoso para el aprendizaje.

Consideramos que la siguiente conceptualización dada de *registro de representación* constituye una síntesis adecuada para ser empleada como instrumento de análisis de las producciones de los alumnos:

> *Un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:*
>
> *1) La presencia de una representación identificable...*
>
> *2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada...*
>
> *3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...* (Duval, 1998, citado en Oviedo et al, 2012, p. 32, puntos suspensivos en el original).

De ahora en adelante, cada vez que hagamos uso de la palabra *registro* estaremos haciendo referencia a un registro de representación semiótica según Duval.

Con esta definición, podemos considerar como registros a todos los sistemas semióticos que permiten representar funciones: registro gráfico, algebraico, nuestro lenguaje natural, etcétera. Esto es así puesto que una representación de una función en cualquiera de estos registros puede ser llevada a otra representación de la misma en otro de estos registros.

Por ejemplo, si consideramos la función trabajada en nuestra primer clase (ver Sección 2.3.1), podemos destacar las siguientes representaciones de la misma que fueron usadas:

- La expresión "La función que asigna a cada longitud posible del lado del cuadrado, el volumen de la caja resultante".
- Los símbolos "f(x) = (12 - 2x) * (20 - 2x) * x".[31]
- La parábola dada por los puntos del plano cartesiano correspondientes al gráfico de la función, visualizada en la pantalla del proyector a través del software GeoGebra.

De esta forma, podemos observar que en estos tres sistemas semióticos existen distintas representaciones de la misma función, y contamos con la posibilidad de convertir una de estas representaciones en otra. Por ejemplo, al ingresar una representación algebraica en una aplicación para obtener una representación gráfica). Además, podemos llevar cualquiera de éstas a otra

[31] En realidad estos signos expresan una igualdad entre números, mientras que la notación simbólica para la representar a la función debería ser "f". No obstante, durante nuestras prácticas nos referimos constantemente a "f(x)" como una función, por lo cual decidimos dejarlo expresado de esta manera en este informe.

representación dentro del mismo registro (por ejemplo, "$f(x)= (12 - 2x) * (20x - 2x^2)$" también es otra representación dentro del registro algebraico de esta función). Así, todos estos sistemas semióticos pueden ser considerados registros según Duval.

A partir de los elementos teóricos presentados en los últimos párrafos, podemos reconsiderar la noción de visualización matemática que habíamos planteado originalmente. Así, tendremos una nueva mirada de este concepto teniendo en cuenta estos aportes, la cual se encuentra expresada en las siguientes frases:

> *"La visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro. (...) La visualización matemática en este contexto tiene que ver con una visión global, integradora, holística, que articule, libre de contradicciones, representaciones de varios sistemas."* (Hitt, 1998, p. 23).

De esta manera, cuando hagamos referencia de aquí en adelante a la visualización matemática estaremos hablando de lo que sucede cuando realizamos conversiones entre diferentes representaciones de un mismo objeto matemático.

En nuestro caso particular, queremos analizar producciones de los estudiantes en relación a contenidos que pertenecen al Análisis Matemático. Villarreal (1999) plantea que la visualización matemática en el contexto del aprendizaje del Cálculo ha sido investigada por varios autores, y menciona múltiples trabajos sobre este tema. Esta síntesis señala la importancia del proceso de visualización en el aprendizaje de los conceptos relacionados con el análisis matemático, y ponderando la riqueza de este territorio para realizar abordajes que otorguen importancia al análisis gráfico. Al reflexionar acerca de nuestras prácticas a la luz de lo que hemos presentado, reconocemos que nuestras decisiones se fundamentan en esta misma perspectiva, puesto que consideramos que hacer hincapié en los aspectos gráficos del análisis matemático, (junto con el tratamiento de carácter algebraico/analítico) promovería el aprendizaje de los conceptos que queríamos trabajar.

En la próxima sección consideraremos algunos aportes teóricos que nos permitirán comprender mejor cuál fue la influencia que tuvieron las tecnologías en nuestras prácticas, y en particular en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

3.2.2 Las tecnologías como mediadoras en la visualización matemática

Es necesario aclarar que existen diferentes posicionamientos sobre la utilidad de las TIC en el desarrollo de actividades en el aula. Algunos autores plantean el uso de ellas en reemplazo de otras tecnologías como el lápiz y papel, mientras que otros las ven como una mera herramienta para realizar tareas, tales como producir una representación gráfica. Villarreal, en cambio, considera a las TIC como un medio esencial para producir conocimientos.

La actividad matemática se determina de manera significativa según el tipo de tecnologías que se utilicen. Este posicionamiento se ve reflejado en la siguiente cita:

> *La matemática hecha con la ayuda de una computadora es cualitativamente diferente de la matemática hecha con papel y lápiz solamente. La computadora no "asiste" simplemente al matemático para hacer su tarea de la manera usual, antes bien cambia la naturaleza de lo que es hecho.* (Devlin, citado en Villarreal, 2012, p.80)

Esto se hace evidente, por ejemplo, en la utilización del lápiz y papel para el tratamiento algebraico de un problema matemático. Esta tecnología permite, entre otras cosas, realizar cambios de representaciones dentro de un mismo registro algebraico, y brinda la posibilidad de dejar expresados los procesos por los cuales pasó el alumno hasta llegar a la expresión buscada.

En el caso de las TIC, en la Sección 2.2.3 presentamos algunos de los aportes de la literatura que sustentan la ponderación que hacemos de su uso en las clases de matemática. En particular, vimos que estas tecnologías permiten un tratamiento de los conceptos relacionados con el análisis matemático distinto al que es posible realizar mediante, por ejemplo, lápiz y papel. A la luz de lo expuesto en la Sección anterior en relación a la visualización matemática, podemos sumar ahora un nuevo argumento a favor de la utilización de las TIC en el aprendizaje del Cálculo, como veremos a continuación.

En primer lugar, debemos mencionar que la conexión entre la visualización y las tecnologías computacionales en relación al aprendizaje de la matemática (y del análisis matemático en particular) no se encuentra ausente en la literatura. Con respecto a esto, Villarreal afirma lo siguiente:

> *Entre las múltiples potencialidades que la computadora ofrece para la Educación Matemática, puede decirse que el proceso de visualización favorecido por ella ocupa un lugar privilegiado. Al mismo tiempo, la importancia de la visualización en la enseñanza, aprendizaje y construcción de los conceptos del Cálculo es indicada como fundamental por muchos autores. Así, la visualización se transforma en un denominador común en las investigaciones que relacionan el Cálculo y las computadoras.* (Villarreal, 1999, p. 43)

Para relacionar este posicionamiento con la concepción de visualización matemática a la cual llegamos en la sección anterior, consideramos importante resaltar que las TIC les permiten observar a los alumnos, una comunicación fluida entre diferentes registros de representación semiótica. Para ejemplificar esto, mostramos en la Figura 34 algunos de los diferentes registros con los cuales se puede trabajar simultáneamente utilizando el software GeoGebra.

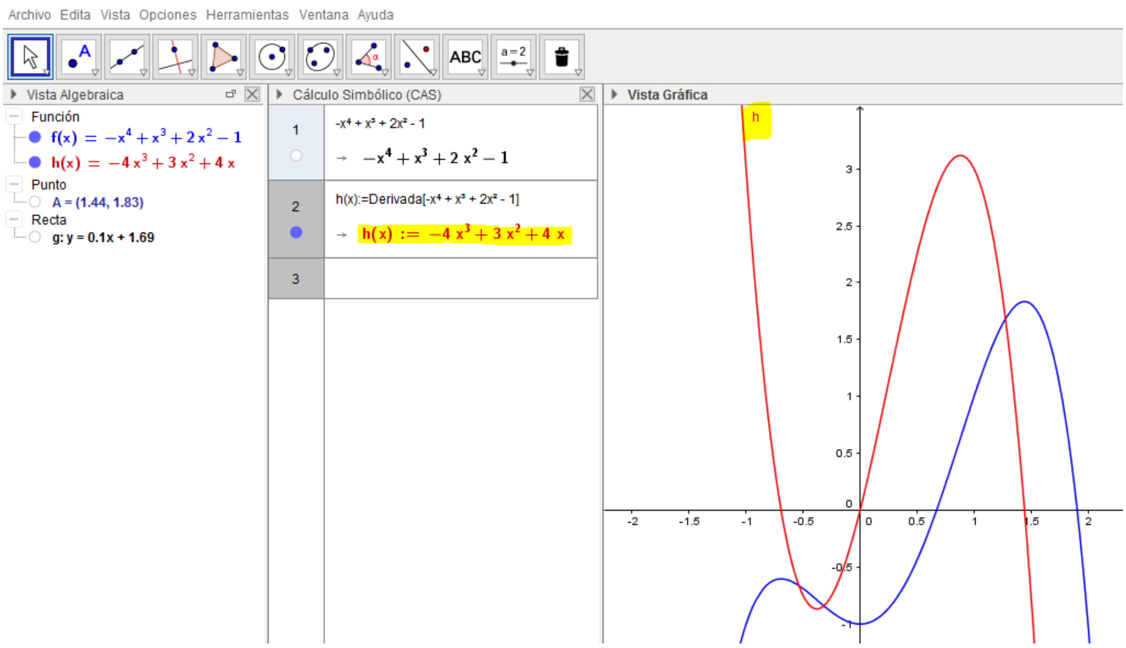


Figura 34: Vista gráfica y vista algebraica de las funciones f y h=f' realizadas con el programa GeoGebra.

Al permitir este tipo de software una traducción entre las distintas representaciones semióticas, podemos concluir que las actividades que promuevan el uso de las TIC y también las tecnologías que usualmente se encuentran en el aula, permiten una mejor visualización matemática al momento de resolver problemas de optimización de funciones. Esto se verá con mayor claridad en la Sección 3.3, donde haremos un análisis descriptivo de algunos de los trabajos prácticos realizados por nuestros alumnos durante la primera etapa de nuestras prácticas.

3.3 Análisis de las producciones de los estudiantes

Como expresamos en la sección 3.2.1, esta sección estará destinada a realizar un análisis de las producciones de nuestros estudiantes durante el Trabajo Práctico desarrollado en la primer etapa de nuestras prácticas, teniendo en cuenta la concepción de "registros de representación semiótica" adoptada por Duval. Es por ello que decidimos dividir esta sección en tres partes, en las cuales se identificarán los registros usados por los alumnos en sus informes y se observarán las diferentes transformaciones entre representaciones, tanto entre aquellas que estén dentro de un mismo registro como aquellas que pertenezcan a diferentes registros. Haremos especial énfasis en señalar la tecnología que medió en cada representación utilizada, y estudiaremos la influencia que tuvo la elección de esa tecnología en el tipo de trabajo matemático que los estudiantes pudieron realizar.

Cabe aclarar que éste no será un análisis exhaustivo de todos los trabajos prácticos, más bien tomamos algunos ejemplos que consideramos relevantes para poder darle sentido a los diferentes conceptos que venimos desarrollando a lo largo de este capítulo.

3.3.1 Identificación de los registros utilizados por los alumnos

En las producciones de los Trabajos Prácticos realizados por los alumnos pudimos notar que hubo diferentes interpretaciones del problema a resolver. Encontramos registros que fueron usados en todos los trabajos y otros que fueron utilizados particularmente por seis grupos de alumnos.

Aquellos registros que aparecen en los informes de los estudiantes fueron los siguientes:

- **Registro en lenguaje natural.** Este registro fue utilizado cada vez que los alumnos hicieron referencia a objetos matemáticos mediante el uso del lenguaje castellano. En la Figura 35 se puede observar una narración de los alumnos donde hacen alusión a algunos objetos matemáticos (hipotenusa, por ejemplo) mientras cuentan cómo llegaron a la expresión algebraica de la función.

> Para comenzar nosotros decidimos calcular los precios en el caso que la cañería atravesara las manzanas, desde el punto R al punto S ($34902). Luego calculamos el resultado si la cañería pasara sobre la calle ($39000).
> Nosotros decidimos usar las medidas en Km para que nos resultara más fácil la resolución del problema.
> Usamos estos datos para conocer cuáles son los valores aproximados que puede tomar el resultado.
> A partir de esto y observando los dibujos entregados junto con las consignas pudimos observar un triángulo rectángulo, al cual se le agregaría el cálculo de otro segmento continuo. La hipotenusa del triángulo (que va desde el punto R al punto P) sería luego una de las variables ya que es parte del precio, y a su vez esta depende directamente de la otra variable que será la ubicación del punto P. La hipotenusa la calcularemos aplicando el Teorema de Pitágoras. En nuestro caso tomamos la distancia desde el punto P hasta la interjección de las calles "Soto" y "López y Planes" (punto Q), para que se formara el triángulo rectángulo correctamente. Esta distancia, entre el punto P y Q será la variable X (la del dominio) y la variable del precio será luego la ~~imagen~~ variable dependiente de la función. Para calcular el tramo restante decidimos restarle al segmento del punto Q y S la distancia de X, de esta forma el resultado lo multiplicaríamos por el precio de cañería por Km y nos daría el resultado final.

Figura 35: Ejemplo de uso del registro en lenguaje natural, extraído de uno de los informes.

- **Registro gráfico.** Pudimos ver que la mayoría de los grupos hicieron uso de algún software para realizar el gráfico de la expresión algebraica de la función[32]. Estos grupos hicieron uso del registro de representación gráfico. Se puede apreciar en la Figura 36, a modo de ejemplo, una representación desde este registro de una de las funciones que se construyeron durante el trabajo práctico

[32] Inclusive aquellos que lo hicieron manualmente, manifestaron haberlo copiado de la pantalla del graficador.

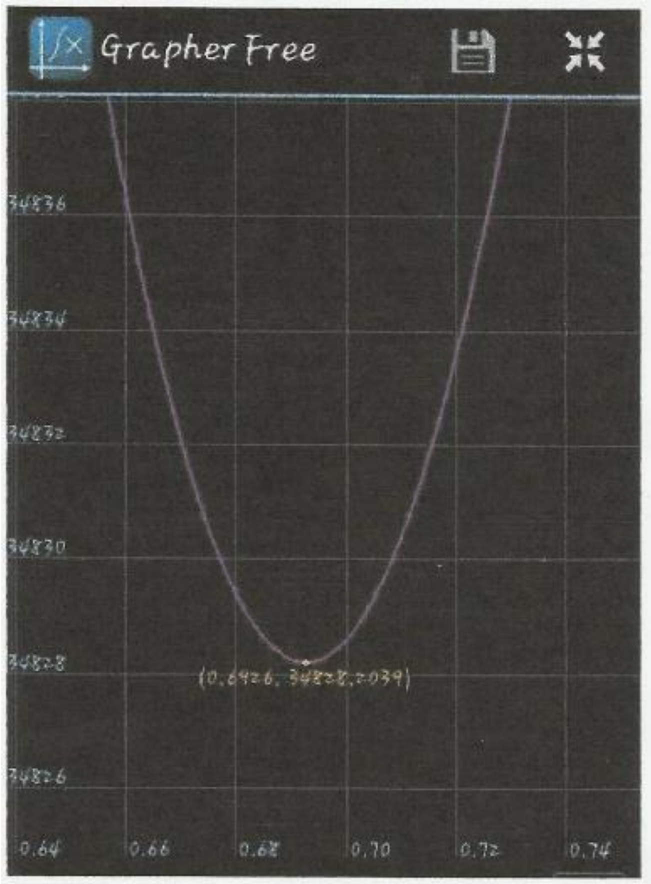


Figura 36: Ejemplo de uso del registro gráfico, extraído de uno de los informes.

- **Registro algebraico**: Este sistema semiótico incluye todos los signos relacionados con el álgebra y la aritmética. De esta manera, las representaciones en el sistema decimal de números, las expresiones algebraicas que representaban funciones, ecuaciones, etc., serán consideradas como parte de este registro. Un ejemplo del uso de este registro en los informes de los alumnos se puede ver en la Figura 37, donde se muestra escrita de modo algebraico la función construida por uno de los grupos de alumnos durante el trabajo práctico.

$$f(x) = \sqrt{500^2 + x^2} \cdot 37 + (800 - x) \cdot 30$$

Figura 37: Ejemplo de uso del registro algebraico, extraído de uno de los informes.

- **Registro figural**[33]: Implica el uso de esquemas o dibujos simplificados de una situación problemática. Un ejemplo de ello se muestra en la Figura 38, donde puede verse un esquema de la situación problemática planteada en el enunciado del Trabajo Práctico.

[33] Este registro fue considerado en forma separada al registro gráfico debido a la lectura de un trabajo de investigación en el cual se hizo uso del mismo (Prieto & Vicente, 2006).

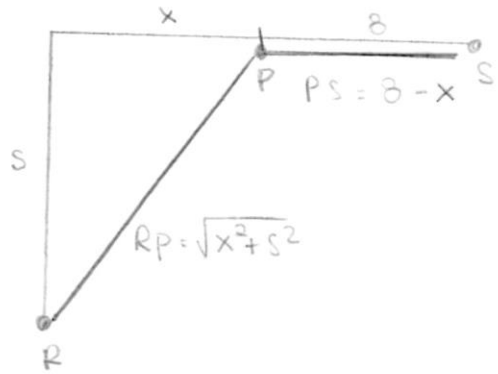


Figura 38: Ejemplo de uso del registro figural, extraído de uno de los informes.

Un solo trabajo (de 17 grupos entre ambos cursos) utilizó tablas para representar una función. Éste será denominado **registro tabular.** Es importante destacar que nosotros no habíamos hecho ninguna mención a la posibilidad de utilizar este registro en nuestras clases, surgió de forma espontánea de parte de los alumnos. Un ejemplo del uso que este grupo hizo de este registro se muestra en la Figura 39.

– x_1 = tramo diagonal (37.000 x km) → Máx x_1 = hipotenusa = 0,943 km

– x_2 = tramo recto (30000 x km) → Máx x_2 = 0,8 km

x2	*x1*	*costo x1*	*Costo x2*	*Total*
0	0,94339811	$ 34.905,73	$ -	$ 34.905,73
0,01	0,93493315	$ 34.592,53	$ 300,00	$ 34.892,53
0,04	0,90972523	$ 33.659,83	$ 1.200,00	$ 34.859,83
0,06	0,89308454	$ 33.044,13	$ 1.800,00	$ 34.844,13
0,08	0,87658428	$ 32.433,62	$ 2.400,00	$ 34.833,62
0,1	0,86023253	$ 31.828,60	$ 3.000,00	$ 34.828,60
0,12	0,84403791	$ 31.229,40	$ 3.600,00	$ 34.829,40
0,14	0,82800966	$ 30.636,36	$ 4.200,00	$ 34.836,36
0,16	0,81215762	$ 30.049,83	$ 4.800,00	$ 34.849,83
0,18	0,79649231	$ 29.470,22	$ 5.400,00	$ 34.870,22
0,2	0,78102497	$ 28.897,92	$ 6.000,00	$ 34.897,92
0,22	0,76576759	$ 28.333,40	$ 6.600,00	$ 34.933,40
0,24	0,75073298	$ 27.777,12	$ 7.200,00	$ 34.977,12
0,26	0,73593478	$ 27.229,59	$ 7.800,00	$ 35.029,59

Figura 39: Extractos de un trabajo práctico, donde se observa un uso del registro tabular.

3.3.2 Transformaciones de una representación en otra dentro de un mismo registro

En varias de las producciones de los estudiantes se puede ver el empleo de más de una representación dentro de un mismo registro semiótico. Por ejemplo, en la Figura 40 hallamos indicios de un cambio de representaciones dentro del registro gráfico. Allí se puede observar que los ejes cartesianos no tienen la misma escala: el eje x está graduado cada 0,2 unidades, mientras que el eje y cada 2, de tal manera que queda incluida en la pantalla la zona del gráfico de la función en la cual es posible explorar la presencia del mínimo. Esto se debe a que los alumnos usaron la herramienta de "Zoom" en cada eje de forma independiente, la cual era una de las opciones incorporadas en la aplicación Grapher. Es decir, originalmente el gráfico tenía otra escala, pero los alumnos decidieron cambiarla para poder utilizarlo en la resolución gráfica del problema. Este cambio de escala realizado por los alumnos puede ser reconocido como una **conversión de representaciones dentro del mismo registro gráfico**, la cual les permitió visualizar mejor la representación gráfica de la función.

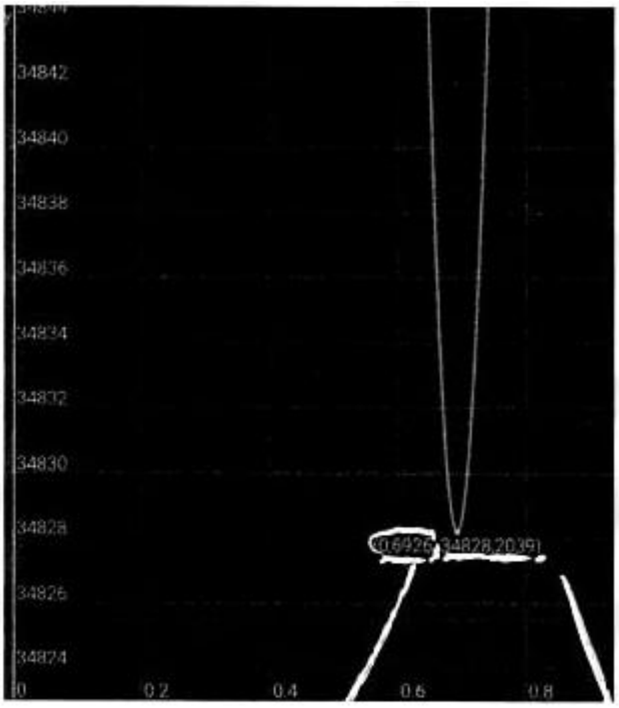
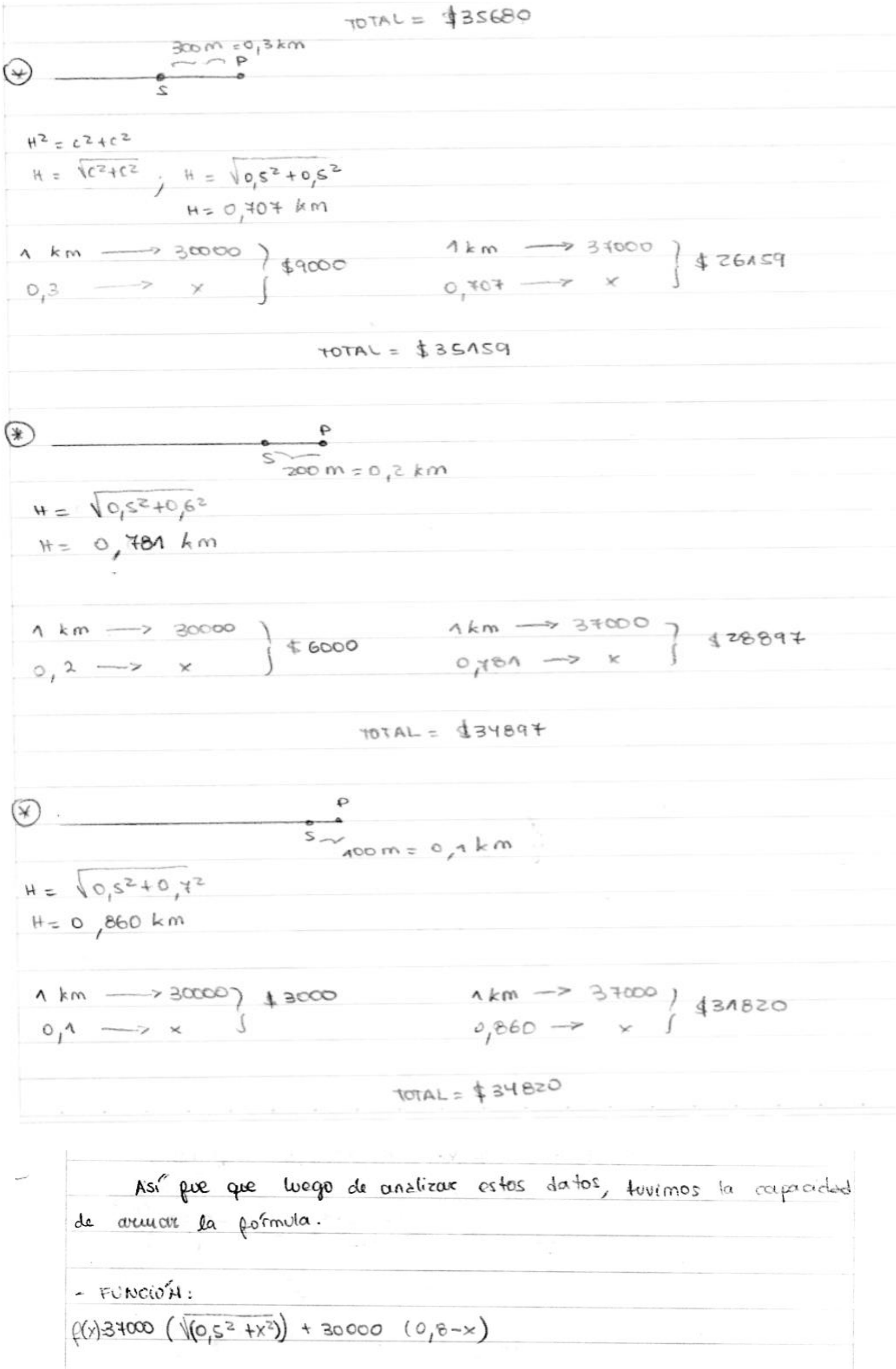


Figura 40: Gráfico de la función hecho con la aplicación Grapher, extraído de uno de los informes.

Este caso es un ejemplo de representación mediada por una TIC (en este caso, la aplicación Grapher), donde se observa que el uso de este software no es un mero reemplazo del lápiz y el papel, sino que posibilita un trabajo dinámico al momento de analizar un gráfico de una función. Esto puede verse en el uso de la herramienta "Zoom", que invita a tener múltiples representaciones gráficas de una misma función, pudiendo así generar diversas perspectivas de la misma.

Una situación particular que se suscitó en algunos de los grupos consistió en un **cambio de representación dentro del registro algebraico motivado por un registro figural**. La mayoría de ellos pudieron elaborar distintos esquemas que representaban en mayor o menor medida al problema original y antes de construir la función, realizaron varios cálculos previos para calcular el costo de la cañería en valores particulares de P, como se muestra en la Figura 41. El uso del registro figural fue una estrategia bastante empleada por los grupos al momento de realizar un planteo inicial de la situación problemática. A partir de su utilización lograron identificar las variables "costo de cañería" y "posición del punto P", lo cual los llevó a generalizar el cálculo del costo para una posición arbitraria y concluir así con la conversión de una representación correspondiente al registro algebraico para calcular costos particulares en otra perteneciente al registro algebraico donde expresaron la función que modeliza la situación para cualquier posición de P.



TOTAL = $35680

(*) 300 m = 0,3 km; S, P

$H^2 = c^2 + c^2$

$H = \sqrt{c^2+c^2}$; $H = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2}$

$H = 0,707$ km

1 km → 30000, 0,3 → x } $9000 | 1 km → 37000, 0,707 → x } $ 26159

TOTAL = $ 35159

(*) S, P; 200 m = 0,2 km

$H = \sqrt{0,5^2 + 0,6^2}$

$H = 0,781$ km

1 km → 30000, 0,2 → x } $ 6000 | 1 km → 37000, 0,781 → x } $ 28897

TOTAL = $34897

(*) S, P; 100 m = 0,1 km

$H = \sqrt{0,5^2 + 0,7^2}$

$H = 0,860$ km

1 km → 30000, 0,1 → x } $ 3000 | 1 km → 37000, 0,860 → x } $31820

TOTAL = $ 34820

Así fue que luego de analizar estos datos, tuvimos la capacidad de armar la fórmula.

- FUNCIÓN:

$f(x) = 37000\left(\sqrt{0,5^2 + x^2}\right) + 30000\,(0,8 - x)$

Figura 41: Cálculo de costos eligiendo valores para la posición de P, junto con el planteo de la fórmula general de la función, extraídos de uno de los informes.

A partir de una reflexión en relación a las intervenciones que podríamos haber realizado para ayudar a los estudiantes en este aspecto, consideramos que podríamos haberle dado un potencial generalizador más poderoso a este esquema aconsejando a los alumnos que lo trataran utilizando como herramienta el programa Geogebra, lo cual habría habilitado otras formas de visualizar la situación problemática.

En particular, podríamos haber hecho uso de la herramienta "deslizador" para visualizar la variación del punto P, y así ayudar a la comprensión de su calidad de variable. Un ejemplo de cómo se podría implementar esto se muestra en la Figura 42. En la vista algebraica pueden verse los diferentes valores para el costo de cañería mientras el deslizador varía los valores de "**d**", lo cual ocasiona que la posición de "**P**" cambie de forma automática.

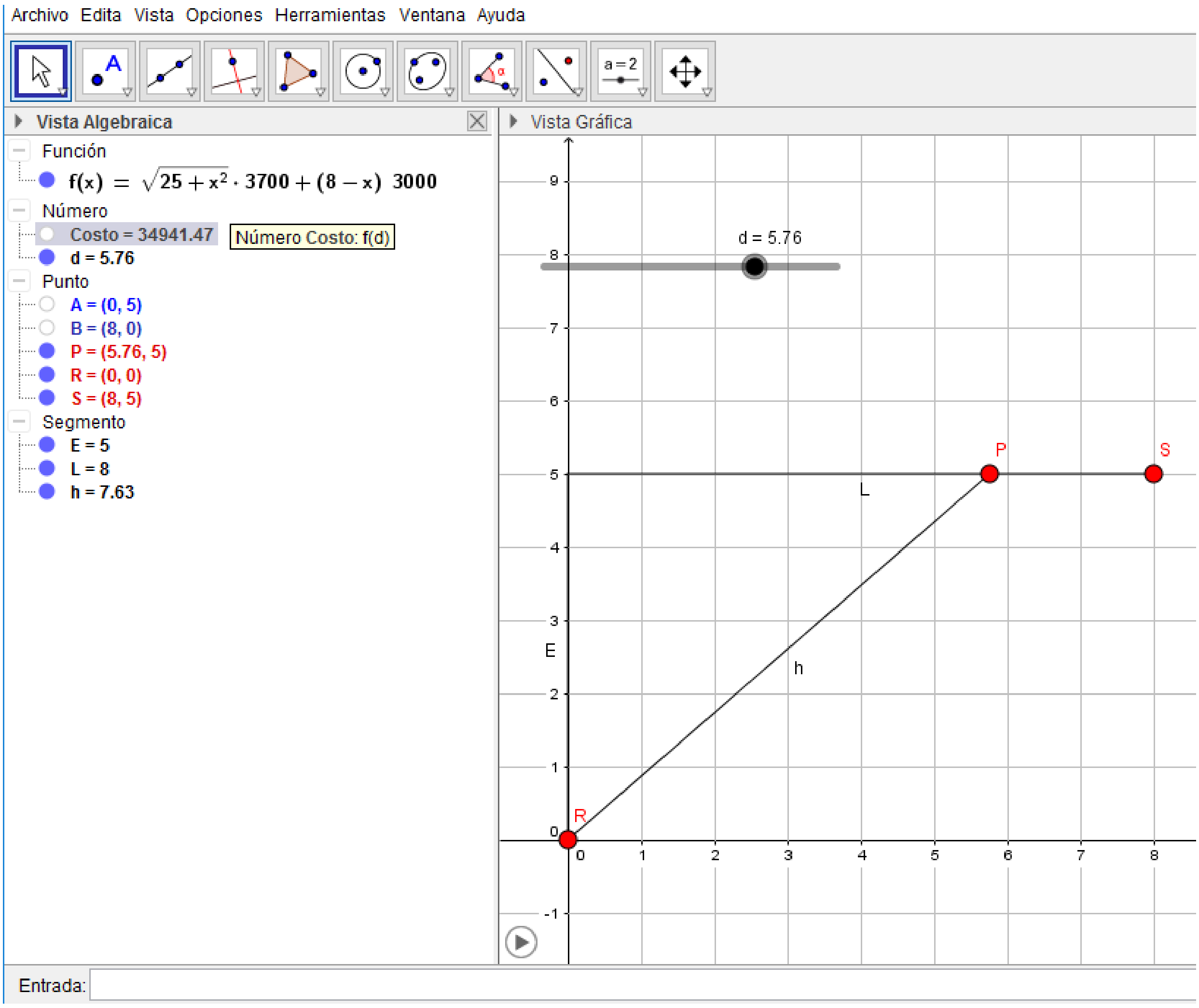
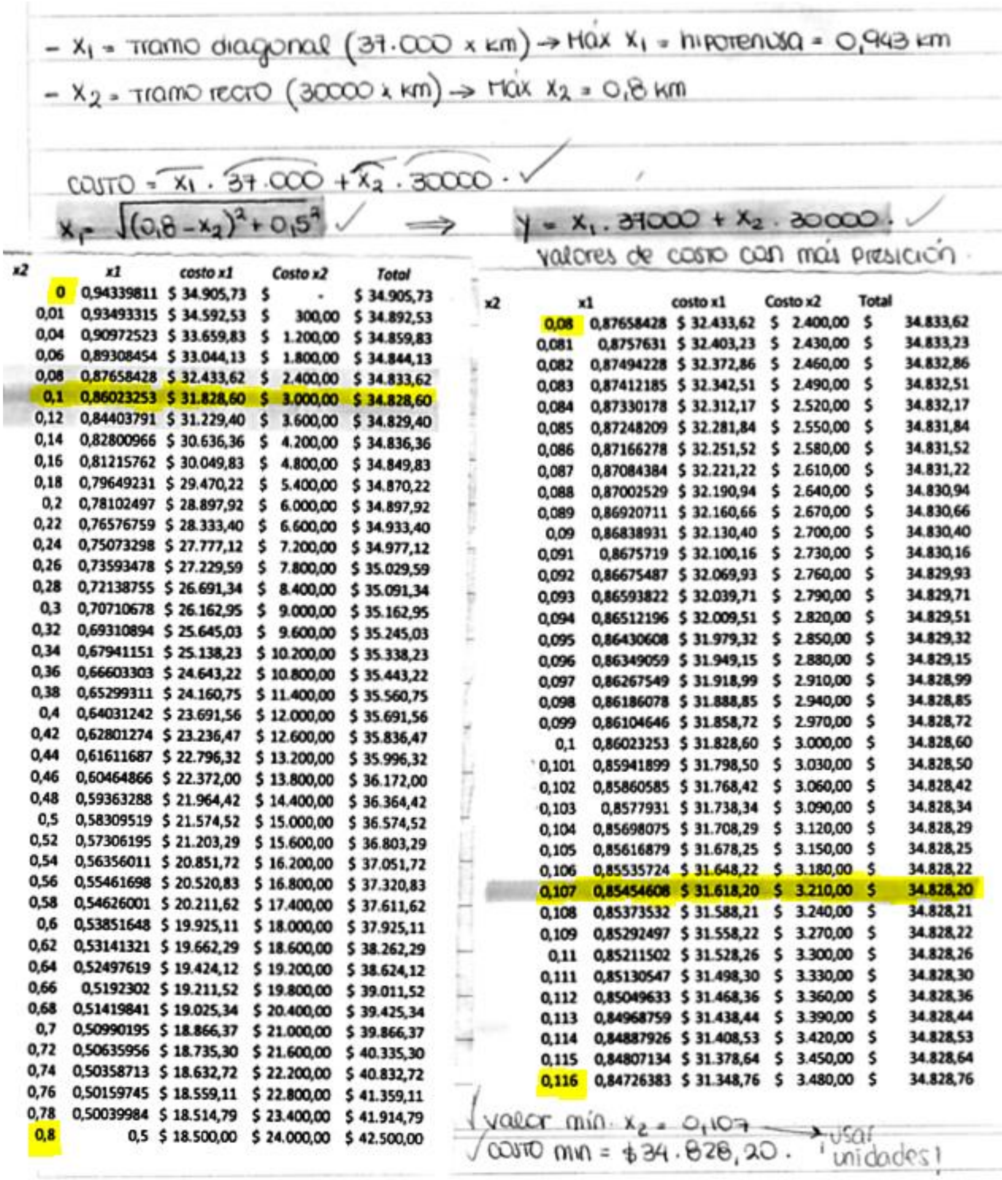


Figura 42: Representación figural de la situación planteada, obtenida por nosotros a través de GeoGebra.

El siguiente ejemplo (Figura 43) muestra el **cambio de representaciones realizado por los estudiantes dentro del registro tabular**.



– x_1 = Tramo diagonal (37.000 x km) → Máx x_1 = hipotenusa = 0,943 km
– x_2 = Tramo recto (30000 x km) → Máx x_2 = 0,8 km

COSTO = $x_1 \cdot 37.000 + x_2 \cdot 30000$ ✓

$x_1 = \sqrt{(0{,}8 - x_2)^2 + 0{,}5^2}$ ✓ ⟹ $y = x_1 \cdot 37000 + x_2 \cdot 30000$ ✓

valores de costo con más presición

x2	x1	costo x1	Costo x2	Total
0	0,94339811	$ 34.905,73	$ -	$ 34.905,73
0,01	0,93493315	$ 34.592,53	$ 300,00	$ 34.892,53
0,04	0,90972523	$ 33.659,83	$ 1.200,00	$ 34.859,83
0,06	0,89308454	$ 33.044,13	$ 1.800,00	$ 34.844,13
0,08	0,87658428	$ 32.433,62	$ 2.400,00	$ 34.833,62
0,1	0,86023253	$ 31.828,60	$ 3.000,00	$ 34.828,60
0,12	0,84403791	$ 31.229,40	$ 3.600,00	$ 34.829,40
0,14	0,82800966	$ 30.636,36	$ 4.200,00	$ 34.836,36
0,16	0,81215762	$ 30.049,83	$ 4.800,00	$ 34.849,83
0,18	0,79649231	$ 29.470,22	$ 5.400,00	$ 34.870,22
0,2	0,78102497	$ 28.897,92	$ 6.000,00	$ 34.897,92
0,22	0,76576759	$ 28.333,40	$ 6.600,00	$ 34.933,40
0,24	0,75073298	$ 27.777,12	$ 7.200,00	$ 34.977,12
0,26	0,73593478	$ 27.229,59	$ 7.800,00	$ 35.029,59
0,28	0,72138755	$ 26.691,34	$ 8.400,00	$ 35.091,34
0,3	0,70710678	$ 26.162,95	$ 9.000,00	$ 35.162,95
0,32	0,69310894	$ 25.645,03	$ 9.600,00	$ 35.245,03
0,34	0,67941151	$ 25.138,23	$ 10.200,00	$ 35.338,23
0,36	0,66603303	$ 24.643,22	$ 10.800,00	$ 35.443,22
0,38	0,65299311	$ 24.160,75	$ 11.400,00	$ 35.560,75
0,4	0,64031242	$ 23.691,56	$ 12.000,00	$ 35.691,56
0,42	0,62801274	$ 23.236,47	$ 12.600,00	$ 35.836,47
0,44	0,61611687	$ 22.796,32	$ 13.200,00	$ 35.996,32
0,46	0,60464866	$ 22.372,00	$ 13.800,00	$ 36.172,00
0,48	0,59363288	$ 21.964,42	$ 14.400,00	$ 36.364,42
0,5	0,58309519	$ 21.574,52	$ 15.000,00	$ 36.574,52
0,52	0,57306195	$ 21.203,29	$ 15.600,00	$ 36.803,29
0,54	0,56356011	$ 20.851,72	$ 16.200,00	$ 37.051,72
0,56	0,55461698	$ 20.520,83	$ 16.800,00	$ 37.320,83
0,58	0,54626001	$ 20.211,62	$ 17.400,00	$ 37.611,62
0,6	0,53851648	$ 19.925,11	$ 18.000,00	$ 37.925,11
0,62	0,53141321	$ 19.662,29	$ 18.600,00	$ 38.262,29
0,64	0,52497619	$ 19.424,12	$ 19.200,00	$ 38.624,12
0,66	0,5192302	$ 19.211,52	$ 19.800,00	$ 39.011,52
0,68	0,51419841	$ 19.025,34	$ 20.400,00	$ 39.425,34
0,7	0,50990195	$ 18.866,37	$ 21.000,00	$ 39.866,37
0,72	0,50635956	$ 18.735,30	$ 21.600,00	$ 40.335,30
0,74	0,50358713	$ 18.632,72	$ 22.200,00	$ 40.832,72
0,76	0,50159745	$ 18.559,11	$ 22.800,00	$ 41.359,11
0,78	0,50039984	$ 18.514,79	$ 23.400,00	$ 41.914,79
0,8	0,5	$ 18.500,00	$ 24.000,00	$ 42.500,00

x2	x1	costo x1	Costo x2	Total
0,08	0,87658428	$ 32.433,62	$ 2.400,00	$ 34.833,62
0,081	0,8757631	$ 32.403,23	$ 2.430,00	$ 34.833,23
0,082	0,87494228	$ 32.372,86	$ 2.460,00	$ 34.832,86
0,083	0,87412185	$ 32.342,51	$ 2.490,00	$ 34.832,51
0,084	0,87330178	$ 32.312,17	$ 2.520,00	$ 34.832,17
0,085	0,87248209	$ 32.281,84	$ 2.550,00	$ 34.831,84
0,086	0,87166278	$ 32.251,52	$ 2.580,00	$ 34.831,52
0,087	0,87084384	$ 32.221,22	$ 2.610,00	$ 34.831,22
0,088	0,87002529	$ 32.190,94	$ 2.640,00	$ 34.830,94
0,089	0,86920711	$ 32.160,66	$ 2.670,00	$ 34.830,66
0,09	0,86838931	$ 32.130,40	$ 2.700,00	$ 34.830,40
0,091	0,8675719	$ 32.100,16	$ 2.730,00	$ 34.830,16
0,092	0,86675487	$ 32.069,93	$ 2.760,00	$ 34.829,93
0,093	0,86593822	$ 32.039,71	$ 2.790,00	$ 34.829,71
0,094	0,86512196	$ 32.009,51	$ 2.820,00	$ 34.829,51
0,095	0,86430608	$ 31.979,32	$ 2.850,00	$ 34.829,32
0,096	0,86349059	$ 31.949,15	$ 2.880,00	$ 34.829,15
0,097	0,86267549	$ 31.918,99	$ 2.910,00	$ 34.828,99
0,098	0,86186078	$ 31.888,85	$ 2.940,00	$ 34.828,85
0,099	0,86104646	$ 31.858,72	$ 2.970,00	$ 34.828,72
0,1	0,86023253	$ 31.828,60	$ 3.000,00	$ 34.828,60
0,101	0,85941899	$ 31.798,50	$ 3.030,00	$ 34.828,50
0,102	0,85860585	$ 31.768,42	$ 3.060,00	$ 34.828,42
0,103	0,8577931	$ 31.738,34	$ 3.090,00	$ 34.828,34
0,104	0,85698075	$ 31.708,29	$ 3.120,00	$ 34.828,29
0,105	0,85616879	$ 31.678,25	$ 3.150,00	$ 34.828,25
0,106	0,85535724	$ 31.648,22	$ 3.180,00	$ 34.828,22
0,107	0,85454608	$ 31.618,20	$ 3.210,00	$ 34.828,20
0,108	0,85373532	$ 31.588,21	$ 3.240,00	$ 34.828,21
0,109	0,85292497	$ 31.558,22	$ 3.270,00	$ 34.828,22
0,11	0,85211502	$ 31.528,26	$ 3.300,00	$ 34.828,26
0,111	0,85130547	$ 31.498,30	$ 3.330,00	$ 34.828,30
0,112	0,85049633	$ 31.468,36	$ 3.360,00	$ 34.828,36
0,113	0,84968759	$ 31.438,44	$ 3.390,00	$ 34.828,44
0,114	0,84887926	$ 31.408,53	$ 3.420,00	$ 34.828,53
0,115	0,84807134	$ 31.378,64	$ 3.450,00	$ 34.828,64
0,116	0,84726383	$ 31.348,76	$ 3.480,00	$ 34.828,76

✓ valor mín. x_2 = 0,107 → ¡usar unidades!
✓ COSTO min = $34.828,20.

Figura 43: Dos representaciones de la función f en el registro tabular junto con la aclaración del significado de las variables involucradas, extraídas de uno de los informes[34].

En la tabla de la izquierda de la Figura 43 se observa que los alumnos usaron las variables x1 y x2 para denotar a las distancias dadas por el tramo recto (por calle) y el tramo diagonal (atravesando las calles) respectivamente, y denominaron costo x1 y Costo x2 a las variables (dependientes de x1 y x2) dadas por los costos por cada tramo. La última variable considerada por los estudiantes consistió en el costo total de la cañería (denotada en la tabla por Total), que corresponde a la suma entre costo x1 y Costo x2.

Los estudiantes utilizaron este registro para conseguir una primera aproximación a la solución, la cual resaltamos en amarillo. La tabla mostrada a la izquierda en la Figura 43 constituye una primera representación de la función en el registro tabular, y a partir del análisis de la información que provee esta representación los estudiantes pudieron deducir que la soluci ón debía

[34] Lo resaltado en amarillo fue realizado por nosotros para que puedan verse con claridad algunos detalles importantes.

hallarse en el intervalo (0,08 ; 0,12). A continuación proceden a construir una segunda representación tabular teniendo en consideración ese nuevo rango de valores, y utilizando una partición más fina, con el objetivo de conseguir mayor precisión en la determinación de la solución. Consideramos que este proceso es muy interesante puesto que muestra un **cambio de representaciones dentro del registro tabular,** en donde se procede a realizar una tabla más detallada a partir de otra.

A su vez, los valores que tomaron los estudiantes de la variable independiente (x2) para elaborar la primer tabla no son arbitrarios, sino que se corresponden con aquellos que se encuentran dentro del dominio de la función, que fue definido teniendo en cuenta el contexto de la situación modelizada. Es decir, tomaron valores que se correspondían con el largo de la cuadra dónde se movía el punto P (entre 0 km y 0,8 km).

Consideramos que el registro tabular es un registro que abre un espacio de reflexión sobre los valores que puede adoptar la variable independiente, mientras que realizar una representación gráfica de f mediante un software graficador no habilita este espacio de una forma tan directa.

A partir de esta reflexión, invitamos a los docentes a tener en cuenta la utilización de los registros tabulares al elaborar actividades con problemas de la vida real para sus clases, a pesar de que no se suele considerar a la tabla de datos como una posible forma de representar una función.

Es preciso tener presente que al estar en una era con gran abundancia de las TIC, existen múltiples aplicaciones para trabajar con tablas en simultáneo con otros registros, y que esto permite variados modos de abordar el trabajo con este tipo de representaciones.

3.3.3 Conversión de representaciones entre distintos registros

El paso de un registro algebraico a un registro gráfico, o bien de un registro tabular a un registro gráfico, son algunos ejemplos que dan cuenta de una mejor visualización matemática del problema planteado, y es posible trabajar contenidos relacionados con el análisis matemático de manera tal que estas transformaciones se hagan presentes.

En la Figura 44 mostramos el trabajo de un grupo de alumnos, donde realizan una **conversión de una representación algebraica de la función a una representación en el registro gráfico mediada por la tecnología.**

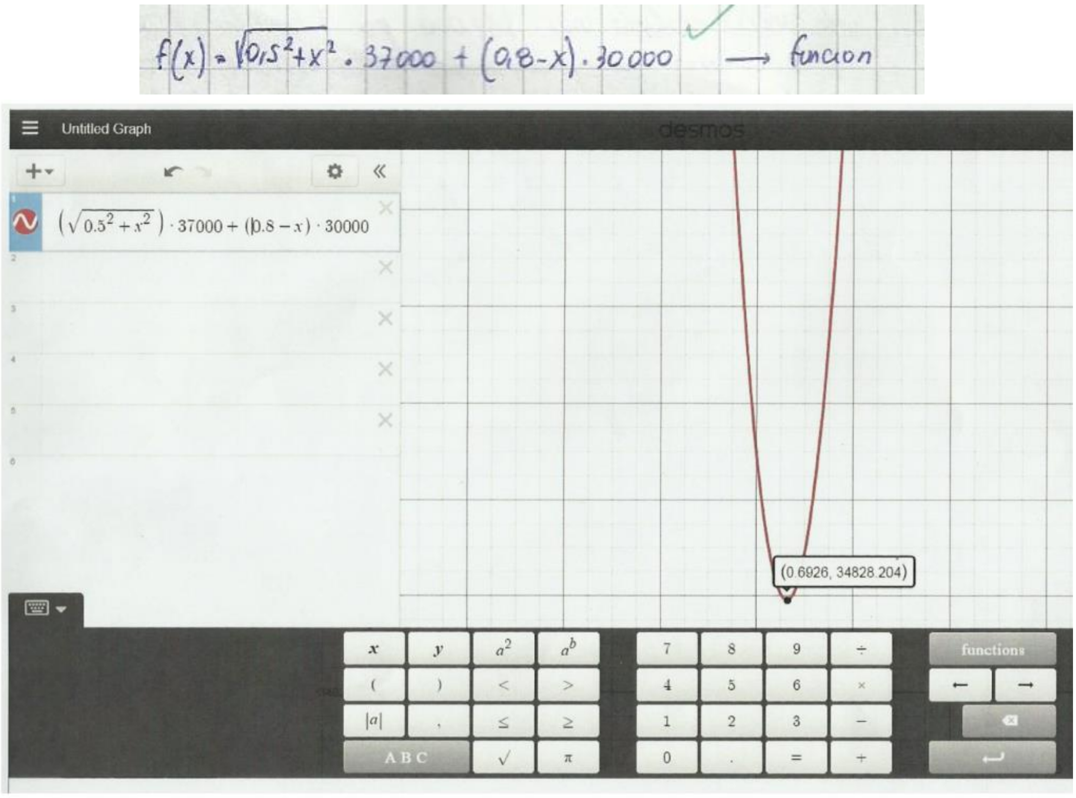


Figura 44: Extractos de un trabajo realizado por un grupo donde puede verse la expresión algebraica de la función construida por ellos y la representación gráfica de ésta realizada con la aplicación graficadora DESMOS[35].

Como puede verse, la **conversión de un registro algebraico en uno gráfico del mismo objeto matemático** es provista por la herramienta digital ingresando la expresión algebraica de la función en la misma, pudiendo además hacer transformaciones dentro del mismo registro gráfico (por ejemplo, haciendo zoom o cambiando la escala de los ejes de un modo independiente). Ésta constituye una de las ventajas más importantes del uso de las tecnologías digitales en relación al aprendizaje de la matemática, puesto que permite dotar a las expresiones algebraicas de un significado completamente nuevo, y brinda la posibilidad de pensar en estos conceptos de forma muy distinta (por ejemplo, muchas cosas pueden decirse de una función cuadrática a partir del hecho de que su representación gráfica adopta la forma de una parábola).

Algo que puede no resultar tan transparente para los alumnos es el empleo de la notación adecuada para ingresar la expresión de la función en el software: esto fue exteriorizado por varios alumnos durante el desarrollo del Trabajo Práctico. Por ejemplo, dado que la aplicación Grapher no contaba con un panel con los símbolos necesarios para ingresar la función, era preciso usar comandos especiales, tales como "sqrt(x)" para ingresar la raíz cuadrada de x.

Para nosotros, que usamos la tecnología de un modo naturalizado, en una primera instancia pasamos desapercibido el cambio de registro en esta etapa de resolución del problema. Aquellos

[35] Esta aplicación está disponible en dispositivos móviles compatibles con Android. Su dirección web es https://play.google.com/store/apps/details?id=com.desmos.calculator&hl=es_419

grupos que usaron Grapher, no sólo realizaron una transformación del registro algebraico al registro gráfico sino que también lograron una **conversión dentro del mismo registro algebraico** que además estuvo **mediada por una TIC**. Es decir, una vez construida la expresión algebraica apropiada para la situación planteada, el paso siguiente era traducirla de modo tal que la aplicación graficadora pudiera procesarla y graficarla. En la Figura 45 puede verse la expresión algebraica de la función expresada en lápiz y papel.

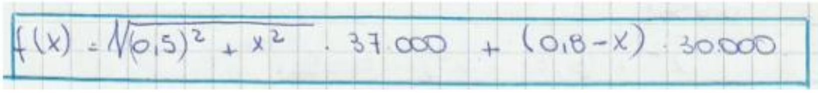


Figura 45: Expresión algebraica de la función realizada con lápiz y papel, extraída de uno de los informes.

Por otro lado, la expresión algebraica escrita con la simbología adecuada para poder ser leída por la aplicación Grapher consiste en

f(x) = sqrt(0.5^2+x^2)*37000+(0.8-x)*30000

En esta fórmula es posible encontrar varias diferencias con aquella que se muestra en la Figura 45. La más clara es la notación diferente para expresar raíces cuadradas, pero existen otras tales como la manera de elevar al cuadrado un número, el símbolo para denotar la multiplicación de dos números, y el uso de un punto en lugar de una coma para los números decimales. Así, es posible considerar a estas dos expresiones distintas como dos representaciones en el registro algebraico de la función, y la propia existencia de la segunda se debe a la tecnología utilizada.

Prosiguiendo con el análisis, queremos destacar que otros de los grupos que consideraron trabajar con el registro figural pudieron calcular una expresión general del costo de cañería sin recurrir al cálculo de costos particulares, logrando construir así la función que modelizaría el problema. Este proceso se encuentra explicado en lenguaje natural en la Figura 46. Es visible aquí la **transformación** que hubo de un **registro figural a un registro algebraico**, dando lugar a una visualización matemática significativa de la situación problemática.

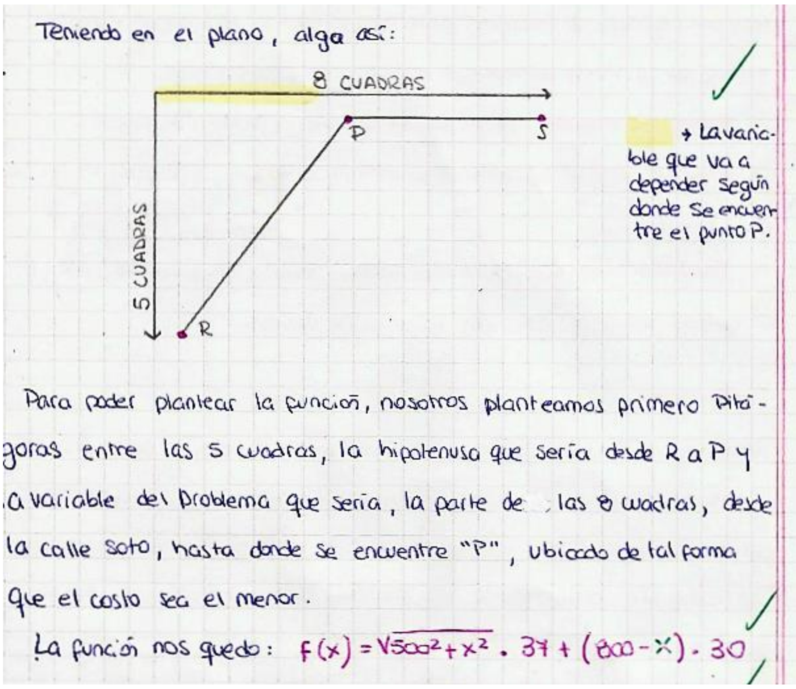


Figura 46: Registros figural, en lenguaje natural y en lenguaje algebraico de la función, extraídos de uno de los informes.

Como mencionamos en la sección anterior, hubo un grupo que hizo uso del registro tabular para representar a la función. Otro detalle importante que pudo notarse consistió en que a partir de la tabla construida los alumnos pudieron realizar un gráfico muy particular, que se observa en la Figura 47. En la misma es posible apreciar no sólo el costo total de la cañería (representado por la curva ubicada en la parte superior del gráfico), sino también los costos parciales de cada tramo de la misma (dados por las otras dos curvas). Creemos importante resaltar que aun teniendo la expresión analítica de la función, fue la **representación tabular la que constituyó la base sobre la cual se realizó la conversión hacia una representación gráfica**. Esto puede ser constatado mirando los valores de la variable independiente en el gráfico mostrado en la figura, junto con el hecho de que la gráfica incluye los valores de las variables costo x1 y Costo x2 calculados en la segunda tabla. Éste es el único entre todos los gráficos presentados que muestra sólo los valores de la variable independiente correspondientes al dominio en el cual se estaba trabajando.

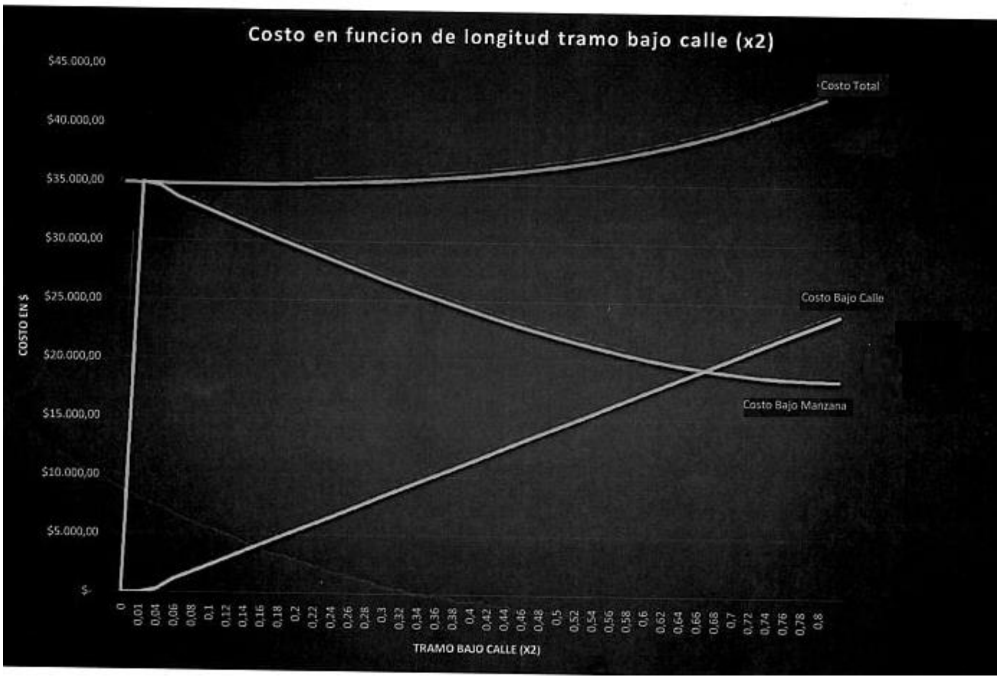


Figura 47: Representación gráfica realizada por un software en base a una representación tabular, extraída de uno de los informes.

4. A modo de conclusión

Luego de haber transitado por esta experiencia, pensamos que es importante detenemos a reflexionar sobre algunas cuestiones que surgieron tanto en el momento mismo de la práctica, como en la propia instancia de elaboración de este informe (que constituye en sí mismo un espacio de reflexión).

Durante el período de prácticas, nos encontramos con muchas dificultades que ahora reconocemos como propias de la tarea docente: entre ellas podríamos nombrar la organización de actividades a través de una dinámica de grupos que contemple la autonomía grupal, el fortalecimiento de las capacidades individuales de cada alumno, la utilización de distintas representaciones como complemento a las explicaciones orales para ayudar a la comprensión de los alumnos, la organización de las tecnologías disponibles en el aula tanto para dar clases expositivas como para ser utilizadas por los alumnos en plena actividad matemática para la construcción de conocimientos.

No obstante, consideramos que esta experiencia fue sumamente gratificante y enriquecedora, y que las instancias en las cuales nos encontramos con obstáculos fueron tan importantes para nuestro crecimiento personal como docentes como aquellas en las cuales todo salió como lo esperábamos. No sólo fue nuestro escalón inicial en la práctica docente sino que también la elaboración del informe nos ayudó a desarrollar un pensamiento crítico sobre la misma; es un espacio único donde nos detenemos a pensar en detalles que habíamos pasado por alto y que podrían reconfigurar nuestros modos de elaborar planificaciones para futuras clases.

Aprender a prever situaciones, a tener presentes con más claridad los tiempos reales de clases, a organizar los contenidos que íbamos a desarrollar, son algunas de las muchas herramientas que nos brindaron los guiones conjeturales y las planificaciones que realizamos. Éstos además permiten moverse con mayor flexibilidad en el aula, porque funcionan como un marco dentro del cual un profesor puede desenvolverse.

¿Cómo puede ser pensada la actividad matemática en nuestra sociedad? ¿Cómo enmarcarla en un sistema educativo, en un diseño curricular, en un aula, en una institución, en el comportamiento colectivo del grupo de alumnos con el que debamos encontrarnos a la hora de dar clases? Venimos estudiando todas estas cuestiones desde un punto de vista teórico desde que comenzamos el segundo año de esta carrera, y sabíamos que sólo la práctica iba a permitirnos darle una representación real en nuestras mentes, por lo que claramente marcaron un antes y un después en nuestra formación.

Nos encontramos asimismo con ciertas situaciones que no habían sido foco de nuestra atención a la hora de elaborar las planificaciones y debieron serlo, pues resultaron ser más relevantes de lo esperado en relación al aprendizaje de los estudiantes, tales como las instancias de discusión grupal en torno al Trabajo Práctico (durante el desarrollo del mismo y en el momento de la devolución), como así también el repaso previo a la evaluación escrita.

Por otro lado, en el proceso de escritura de este informe, encontramos que muchos temas que habíamos dado por supuestos con anterioridad requerían un análisis más profundo y reflexivo. A modo de ejemplo, podemos mencionar las discusiones que surgieron en torno al enfoque que adoptamos en nuestra primera clase, las cuales nos permitieron cuestionar nuestros conceptos previos con respecto a la modelización matemática. A su vez, queremos destacar el análisis que realizamos de las actividades que implementamos en nuestras prácticas, en términos de la teoría de los ambientes de aprendizaje.

Durante el análisis de los trabajos prácticos del Capítulo 3, nos encontramos con otra perspectiva respecto de los registros que emplean los alumnos cuando resuelven un problema. Esto constituyó un antes y un después en nuestra mirada de las producciones elaboradas por nuestros alumnos, porque pudimos apreciarlos teniendo una mirada más reflexiva e informada desde la literatura. Nos dimos cuenta de que muchas de las actividades que habíamos propuesto servían para promover la visualización matemática; hicimos hincapié principalmente en las conversiones entre el registro gráfico y el algebraico, ya que intentamos introducir una visión del análisis matemático que tuviera en cuenta ambos aspectos de forma equitativa. Consideramos que el pensamiento crítico sobre esta actividad nos aportó herramientas muy útiles, que nos sirven tanto para evaluar más profundamente las producciones de los alumnos, como también para revisar y repensar nuestras planificaciones y puestas en escena de actividades relativas al trabajo con funciones en general, y a la optimización de funciones en particular.

Contamos con el agrado de comunicarnos vía mail con el profesor a cargo de los cursos donde hicimos nuestras prácticas, el cual nos comentó que nuestros alumnos se sintieron muy a gusto con el tipo de actividades que realizaron durante nuestras clases. Además nos expresó que, luego de encontrarse con nuestras clases, muchos de los alumnos que no venían trabajando durante su clase comenzaron a hacerlo, lo cual también pudimos notar nosotros con respecto a algunos alumnos a la hora de corregir las evaluaciones escritas. Esto nos hace sentir que, a pesar de ser ésta nuestra primera experiencia en el aula, dio sus frutos.

Para finalizar, queremos reconocer la importancia de realizar instancias de reflexión sobre la práctica docente, no sólo durante nuestra formación inicial sino también a lo largo de nuestra carrera. Durante la elaboración de este informe pudimos comprobar que éstas constituyen un espacio muy importante en el cual poder crecer como profesionales, y dan lugar a aprendizajes sumamente valiosos.

5. Referencias bibliográficas

- Blomhøj, M. (2004) Mathematical modelling - A theory for practice. En: Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education. Suecia, p. 145-159. La traducción de este artículo fue realizada por M. Mina y está publicada en Revista de Educación Matemática, Vol. 23, N° 2, pp. 20-35. Córdoba.
- Hitt Espinoza, F. (1998) Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. Revista Educación Matemática, Vol. 10, N° 2, pp. 23-45.
- Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. Diseño Curricular de la Provincia de Córdoba para el Ciclo Orientado de la Educación Secundaria "Economía y Administración", 2012-2015.
- Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba (2010) La evaluación de los aprendizajes en secundaria. Documento de apoyo curricular.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1993) A core curriculum: making mathematics count for everyone. Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Grades 9-12. Addenda Series. Virginia, EE.UU.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989) Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática. Traducción realizada por J. M. Álvarez Falcón y J. C. Rodrigo. Edición en Castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".
- Oviedo, L. M.; Kanashiro, A. M.; Benzaquen, M. & Gorrochategui, M. (2012) Los registros semióticos de representación en matemática. Revista Aula Universitaria 13, pp. 29-36.
- Rojano, T. (2014) El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. Revista Educación Matemática, 25 años, pp. 11-30.
- Villarreal, M. (2005) Transformaciones que las tecnologías de la información y la comunicación traen para la educación matemática. Yupana. Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral. N°1, pp. 41-55.
- Villarreal, M. (2012) Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. Revista Virtualidad, Educación y Ciencia. Año 3, N° 5, pp. 73-94.
- Villarreal, M. (1999) O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas. Tesis de Doctorado elaborada junto al Curso de post-graduación en Educación Matemática. Área de concentración en Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática y sus Fundamentos Filosófico-Científicos para la obtención del título de Doctora en Educación Matemática. Río Claro, Brasil.
- Villarreal, M. & Esteley, C. (2013). Escenarios de modelización y medios: acciones, actividades y diálogos. En M. Borba & A. Chiari (Ed.), Tecnologias Digitais e Educaçao Matemática (pp. 273-308). São Paulo. Brasil: Livraria da Física.
- Skovsmose, O. (2000) Escenarios de investigación. Revista EMA, Vol. 6, N° 1, pp. 3-26.

ANEXOS

ANEXO I

ANÁLISIS MATEMÁTICO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Plan 2001-Séptimo año- Vigente a partir de 2007

1- EXPECTATIVAS DE LOGRO

- Reconocer la importancia de la Matemática como instrumento que permite resolver situaciones problemáticas cotidianas y/o intelectuales.
- Desarrollar su aptitud deductiva y la facultad de abstracción.
- Despertar la conciencia de orden matemático.
- Definir nuevos elementos matemáticos sobre la base de conceptos anteriores para su adecuada utilización.
- Reconocer y resolver problemas sencillos sobre ecuaciones de geometría analítica elemental.
- Reconocer y resolver problemas sencillos aplicando los conceptos básicos del análisis matemático.
- Estimar y saber interpretar los resultados de cálculos y/o situaciones problemáticas comprobando su razonabilidad.
- Confiar en sus posibilidades personales de plantear y resolver problemas.
- Trabajar cooperativamente asumiendo responsabilidades y respetando las normas acordadas, el esfuerzo, el orden y la perseverancia para el logro de su desarrollo personal integral.
- Aplicar los procedimientos y conceptos ya adquiridos para avanzar en contenidos nuevos en el nivel universitario.

2. CONTENIDOS CONCEPTUALES

EJE TEMÁTICO: GEOMETRÍA ANALÍTICA

UNIDAD 1: RECTA

Distancia entre puntos. Punto equidistante de otros tres. Ecuaciones de la recta. Forma explícita. Forma general o implícita. Forma segmentaria. Ecuación de la familia de rectas que pasan por un punto. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Intersección con los ejes coordenados. Intersección de dos rectas.

UNIDAD 2 : CIRCUNFERENCIA

Definición. Ecuación canónica. Ecuación general. Coordenadas del centro y valor del radio. Casos particulares. Intersección con los ejes coordenados.

UNIDAD 3: CÓNICAS
Definición de elipse. Deducción de la ecuación. Intersección con los ejes coordenados. Construcción. Casos particulares.
Definición de hipérbola. Deducción de la ecuación. Intersección con los ejes coordenados. Construcción. Casos particulares.
Definición de parábola. Deducción de la ecuación. Intersección con los ejes coordenados. Construcción. Casos particulares.

EJE TEMÁTICO: ELEMENTOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

UNIDAD 4: FUNCIONES
Relación entre conjuntos numéricos. Funciones: definición y clasificación. Incrementos. Límites: Límite de una variable y límite de una función. Propiedades de los límites finitos. Infinitésimos: Definición y comparación. Formas indeterminadas. Límites notables. Continuidad de una función.
UNIDAD 5: DERIVACIÓN DE FUNCIONES
Derivada de una función en un punto. Definición. Interpretación geométrica. Propiedades de las derivadas: Derivada de una suma algebraica de funciones. Derivada de un producto de funciones. Derivada de un cociente de funciones.
Derivadas fundamentales: Derivada de la función constante. Derivada de la función identidad. Derivada de la función potencial. Derivada de la función exponencial. Derivada de la función logarítmica. Derivada de las funciones circulares. Aplicaciones de la derivada: Cálculo de máximos y mínimos.
UNIDAD 6: INTEGRACIÓN DE FUNCIONES
Noción de integral. Propiedades de la integral. Reglas para la integración: Integral inmediata. Integración por partes o descomposición. Integración por sustitución. Aplicaciones de la integral: Cálculo de áreas.

3. CONTENIDOS PROCEDIMENTALES.

- Identificación y desarrollo de estrategias para la resolución de ejercicios y problemas.
- Adquisición de habilidad en el manejo de los útiles de graficación.
- Predicción, estimación y verificación de resultados y procedimientos.
- Desarrollo de notaciones y vocabulario adecuado.
- Establecimiento de relaciones entre representaciones simbólicas, analíticas y gráficas.
- Análisis de situaciones problemáticas que se pueden plantear y resolver a través de las herramientas conceptuales.

4. CONTENIDOS ACTITUDINALES.
- Valoración del pensamiento matemático en la formación humanista.
- Desarrollo de confianza en sus posibilidades de plantear y resolver problemas.

- Respeto por el pensamiento ajeno y seguridad en la defensa del propio con la flexibilidad para modificarlo.
- Valoración del trabajo individual y en equipo basado en la responsabilidad y en la cooperación para lograr un objetivo común.
- Sentido crítico, en el análisis de los resultados obtenidos en la resolución de problemas.
- Aprecio y cuidado por los materiales de trabajo.
- Puntualidad, orden y limpieza en la presentación de trabajos.

5. METODOLOGÍA.

En el aula deberá trabajarse en dos áreas. Por un lado en el desarrollo teórico de los contenidos, con cierto nivel de abstracción, y por otro, e inmediatamente relacionado con el anterior, en el planteo y resolución de ejercicios y problemas. Esto promoverá en el alumno:

- La aparición de dudas en la comprensión del planteo teórico.
- La elaboración de preguntas a partir de un conjunto de datos.
- La relación entre el desarrollo teórico y su aplicación a la resolución de ejercicios y problemas.
- La utilización de conocimientos ya adquiridos para la construcción de los nuevos.
- La aplicación conjunta de varias categorías de análisis conceptual, y su aplicación procedimental.

Se propondrán problemas motivadores tanto en la introducción de un nuevo tema como en el desarrollo del mismo. No se dejará de lado la exposición del docente por considerársela indispensable en el proceso de aprendizaje, y por el nivel de abstracción que implican los contenidos.

Además, los alumnos propondrán problemas o situaciones problemáticas relacionadas con la vida diaria, esto logrará despertar sus intereses y familiarizarlos con los procedimientos de resolución y los diferentes conocimientos aritméticos y geométricos correspondientes a esta etapa.

La introducción de recursos audiovisuales para el desarrollo de diferentes temáticas, permite la comunicación de la información a través de las representaciones obtenidas. Esto afianza la percepción de los alumnos constituyéndose también en instrumento de acceso al conocimiento.

El uso de material gráfico (revistas, diarios, etc.) sirve también para mostrar al alumno las distintas aplicaciones de la matemática en el mundo que nos rodea.

6. BIBLIOGRAFIA

- LOPEZ, Antonio Roberto: Matemática VII.

PROGRAMA COMBINADO PARA EXAMEN
Análisis Matemático y Geometría Analítica
Séptimo año
Plan 2001. Vigente a partir de 2012.

Unidad 1
Distancia entre puntos. Ecuación segmentaria de la recta. Forma implícita de la ecuación de la recta. Ecuación canónica de la circunferencia. Parábola: Intersección con los ejes coordenados. Hipérbola: Deducción de la ecuación. Elipse: Construcción, casos particulares. Funciones: Definición y clasificación. Infinitésimos: Definición y comparación. Límites notables. Derivada de un producto de funciones. Derivada de funciones circulares. Integración por sustitución.

Unidad 2
Punto equidistante de otros tres. Forma explícita de la ecuación de la recta. Ecuación de la familia de rectas que pasan por un punto. Elipse: Ubicación de los focos e intersección con los ejes coordenados. Parábola: Construcción, casos particulares. Propiedades de los límites finitos. Límites notables. Derivada de un cociente de funciones. Derivada de funciones circulares. Noción y propiedades de la integral.

Unidad 3
Forma implícita de la ecuación de la recta. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Forma general de la ecuación de la circunferencia y casos particulares. Parábola: Deducción de la ecuación. Límites notables. Continuidad de una función. Derivada de la función constante. Derivada de un producto de funciones. Derivada de una suma algebraica de funciones. Integración por partes o descomposición.

Unidad 4
Ecuación de la familia de rectas que pasan por un punto. Intersección de la recta con los ejes coordenados. Circunferencia: coordenadas del centro y valor del radio. Parábola: Deducción de la ecuación. Elipse: Deducción de la ecuación. Límites notables. Definición e interpretación geométrica de la derivada. Derivada de un cociente de funciones. Derivada de la función potencial. Aplicaciones de la integral: Cálculo de áreas.

ANEXO II

Este documento ha sido publicado con la autorización expresa vía mail por parte del profesor del curso. Tomamos el recaudo de borrar su nombre y el nombre de la institución en las páginas donde apareciesen con el objetivo de resguardar sus identidades.

Planificación Asignatura

Matemática VII

ANÁLISIS MATEMÁTICO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Introducción:

La presente corresponde a la planificación de la asignatura Matemática VII: Análisis matemático y geometría analítica para ser desarrollada durante un ciclo lectivo. Dicho período se extiende habitualmente desde el 5 de Marzo al 14 de noviembre con una carga horaria de cuatro horas cátedras semanales.

Los contenidos se han organizado en tres bloques: Funciones, elementos de análisis matemático y geometría Analítica.

Selección de los contenidos:

Bloque I: Funciones:

- Interpretación de gráficos cartesianos que representan situaciones en distintos contextos.
- Ejes cartesianos. Par ordenado
- Funciones que puedan expresarse mediante una fórmula: Producción e interpretación de fórmulas que modelan situaciones contextualizadas. Función lineal, función cuadrática, función exponencial.
- Definición de función, dominio e imagen.
- Clasificación de las funciones: Función inyectiva y función sobreyectiva.
- Utilización de software específico para la gráfica y análisis de las funciones.
- La función como herramienta para modelar distintos fenómenos.

Bloque II: Elementos de análisis matemático:

Introducción al concepto de límite de una función:

- Límite de una función.
- Propiedades de los límites finitos.
- Formas indeterminadas.
- Límites notables.
- Continuidad de una función.
- Límite de las funciones trigonométricas.

Derivada de una función:

- Derivada de una función. Definición. Interpretación geométrica y en términos de tasa de cambio de la función.
- Propiedades de las derivadas: Derivada de la función constante. Derivada de la función identidad. Derivada de una suma algebraica de funciones. Derivada de un producto de

funciones. Derivada del cociente de funciones. Derivada de la función exponencial y logarítmica. Derivadas de las funciones trigonométricas. Regla de la cadena.
- Aplicación de la derivada en distintas ramas del conocimiento. Optimización.

- Funciones primitivas de funciones elementales.
- Propiedades de las funciones primitivas.
- Calculo de la integral en funciones elementales.
- Área de la región limitada por el gráfico de una función positiva.
- Aplicación de la integral.

Bloque III: Geometría Analítica:

- Distancia entre dos puntos.
- Circunferencia. Definición. Ecuación general. Casos particulares. Intersección con los ejes coordenados.
- Secciones cónicas. Definición y ecuaciones de: elipse, hipérbola y parábola.
- Construcción de las secciones cónicas con software Geogebra.
- Propiedades de las secciones cónicas.

Objetivos Generales:

Que los alumnos:

- Puedan comprender la naturaleza del pensamiento matemático, usando el razonamiento para hacer conjeturas, desarrollar argumentos y tomar decisiones, comunicando ideas y manejando procedimientos básicos de esta disciplina en todas sus formas: oral, escrita, gráfica y simbólica.
- Aprendan a valorar el intercambio de ideas como fuente de construcción de conocimientos, respetando el pensamiento ajeno y, confiando en sus posibilidades de plantear y resolver problemas.
- Trabajen colaborativamente aceptando responsabilidades y respetando las normas escolares. Se comuniquen y vinculen con sus compañeros, docentes, directivos, y personal no docente, de manera cordial y respetuosa.

Además resultaría importante:

- Transmitir a los alumnos la convicción de que el aprendizaje de la matemática es una cuestión de trabajo, estudio y perseverancia y, por lo tanto, accesible a todos.
- Promover un tipo de trabajo que lleve a los estudiantes a concebir la modelización como un aspecto fundamental de la actividad matemática.
- Que los alumnos puedan aplicar las herramientas que brinda esta área del conocimiento a otras áreas como por ejemplo: La física, la economía, Biología, Estadística, entre otras.

- Que los alumnos puedan entender la utilidad de la demostración en matemática.

Objetivos específicos.

Bloque I: Funciones.

El trabajo deberá crear condiciones para que los alumnos puedan:

- Reconocer a las funciones como herramientas valiosas, útiles para modelar distintos fenómenos en diversos campos del conocimiento.
- Estudiar las funciones representadas a través de: Fórmulas, tablas y gráficos.
- Reconocer el dominio y la imagen de una función.
- Valorar la noción de función para analizar la vinculación entre dos variables.
- Utilizar software como soporte para la producción y el análisis de gráficos de funciones.

Bloque II: Elementos de análisis matemático:

Introducción al concepto de límite de una función:

El trabajo deberá crear condiciones para que los alumnos puedan:

- Comprender la noción intuitiva del concepto de límite de una función.
- Calcular límites finitos de funciones, aplicando las reglas desarrolladas.
- Comprender el razonamiento utilizado en las demostraciones.
- Estudiar el caso de funciones que no tienen límite para algún valor de su dominio.
- Utilizar la idea de límite para estudiar la noción de continuidad de funciones.

Derivada de una función:

El trabajo deberá crear condiciones para que los alumnos puedan:

- Comprender las distintas maneras de interpretar el concepto de derivada de una función.
- Aplicar las herramientas del análisis matemático a la resolución de diversos problemas propios de la matemática y de otras ramas del conocimiento.
- Aplicar las reglas de derivación a distintas funciones.
- Comprender el razonamiento utilizado en las demostraciones.

El trabajo deberá crear condiciones para que los alumnos puedan:

- Vincular los conceptos de Derivada e Integral de una función.
- Calcular la Integral de funciones elementales.
- Aplicar la integral en diversos problemas: Cálculo de áreas, velocidad instantánea a partir de la aceleración, Cálculo de probabilidades, entre otras.

Bloque: Geometría Analítica:

El trabajo deberá crear condiciones para que los alumnos puedan:

- Identificar y diferenciar las distintas ecuaciones correspondientes a: elipse, parábola e Hipérbola.
- Trazar las curvas correspondientes a dichas secciones cónicas utilizando el software Geogebra.
- Comprender las propiedades de las secciones cónicas.

Organización y secuenciación de los contenidos

Bloque I: Funciones:

Enfoque del objeto de estudio.

Se propone una aproximación al estudio de funciones sin "pasar" por relaciones entre conjuntos finitos, privilegiando una entrada a partir de los gráficos como soporte para estudiar el comportamiento de las variables en juego. La resolución de problemas vinculados a procesos a partir de las representaciones gráficas precederá cualquier definición formal del concepto de función.

I. Funciones que puedan expresarse mediante una fórmula: Producción e interpretación de fórmulas que modelan situaciones contextualizadas. Funciones como herramientas para modelar distintos fenómenos.

II. Representación gráfica de distinto tipos de funciones a través de software.

III. Definición de función. Imagen y dominio de una función. Función inyectiva y función sobreyectiva.

Actividades. Anexo A: Funciones**.**

Bloque II: Elementos de análisis matemático

Introducción al concepto de límite de una función:

Enfoque del objeto de estudio.

Se propone una introducción al estudio del límite de una función privilegiando una aproximación intuitiva, numérica y gráfica de los mismos. No será objeto de la materia la definición formal de dicho concepto.

I. Límite de una función. Límites laterales. Noción intuitiva.

II. Propiedades de los límites finitos.

III. Formas indeterminadas.

IV. Límite de las funciones trigonométricas.

V. Límites notables.

VI. Continuidad de una función

Actividades. Anexo B: Límite de una función.

Derivada de una función:

Enfoque del objeto de estudio.

Se propone una introducción al concepto de derivada de una función a través del análisis de dos problemas: La ***Velocidad instantánea*** *de un móvil, problema de mecánica, y la* ***pendiente de una recta tangente*** *a una curva, problema geométrico. Dicho análisis precederá a cualquier definición formal del concepto de Derivada.*

I. Problema de la Velocidad instantánea de un móvil y problema de la recta tangente a una curva en un punto. Ejemplos

II. Definición de Derivada de una función. Interpretación en términos de tasa de cambio.

III. Propiedades de las derivadas.

IV. Aplicación de la derivada a distintas ramas del conocimiento. Problemas de optimización.

Actividades. Anexo C. Derivada.

Enfoque del objeto de estudio.

Se propone una introducción al concepto de integral de una función a través del estudio de problemas donde conocida la derivada de la función se pida la función primitiva. I. Problemas donde conocida la función derivada se requiera la función primitiva.

II. Función Primitiva de una función.

III. Propiedades de las funciones primitivas.

IV. Calculo de integrales de funciones element*ales.* V. Aplicación de la integral de una función.

VI. Relación entre el concepto de Derivada e Integral de una función.

Actividades. Anexo D: Integrales.

Bloque III: Geometría analítica:

Enfoque del objeto de estudio.

Se propone para el desarrollo de dicho bloque el estudio de aspectos elementales de la geometría analítica privilegiando la construcción de las secciones cónicas con la utilización del software como soporte, como así también el estudio y análisis de las propiedades más importantes de dichas secciones.

I. Distancia entre dos puntos.

II. Circunferencia. Definición. Ecuación general. Casos particulares. Intersección con los ejes coordenados.

III. Secciones cónicas. Definición de: Elipse, Hipérbola y parábola. Ecuaciones centradas en el origen. Construcción de las secciones cónicas utilizando Geogebra .

IV. Propiedades de las secciones cónicas.

V. Deducción de las ecuaciones de las secciones cónicas.

Actividades. Anexo E: Geometría analítica.

Recursos.

Para el desarrollo de las clases se utilizaran los siguientes recursos:

- Guía de actividades presentadas a los alumnos en diversos formatos: Aula virtual, fotocopias, grupo de facebook.
- Netbooks. Además de las máquinas de cada alumno la escuela consta con dos salas de computación y netbooks para trasladar al aula.

- Software. Se propone la utilización del software Geogebra.
- Teléfonos celulares. Apps: Matemáticas.
- Retroproyector. Cada aula del colegio cuenta con un cañón y sistema de audio. Conexión wifi.
- Bibliografía. La bibliografía sugerida al alumno es seleccionada de distintas fuentes. (Se explicita en bibliografía para el alumno)

Participación de los alumnos.

Se propone a los alumnos resolver actividades trabajando en grupos de 3 o 4 compañeros, buscando favorecer un aprendizaje colaborativo. (Se les permite que ellos mismos decidan coma armar dichos grupos).

Resulta de gran importancia en el desarrolla de los diversos bloques que componen la planificación la participación activa de cada uno de los alumnos tanto en la resolución de las actividades como en la búsqueda de información necesaria para resolverlas. En todo momento pueden usar sus teléfonos celulares a tal fin. Y Se incentivara a la lectura de l material teórico en clases.

Organización del escenario

Se destina un tiempo durante el cual cada grupo resuelve las actividades propuestas. En ese lapso de tiempo el docente interactúa con los alumnos para facilitar las herramientas necesarias para la comprensión y resolución de las actividades. Luego se realiza una puesta en común con todos los grupos donde el docente es el encargado de gestionarla.

Evaluación.

Se propone las siguientes instancias de evaluación:

- Dos evaluaciones por trimestre. Una evaluación Trimestral de carácter acumulativa.
  - Un seguimiento continuo de la evolución de los alumnos.

Criterios de Evaluación.

Se tendrán en cuenta los siguientes criterios:

- Interpretación de consignas.
- Manejo adecuado de la terminología y notación específica del tema.
- Interpretación del contexto de cada actividad.
- Participación Activa de cada alumno en el trabajo grupal.

Una alternativa para la corrección de las evaluaciones es marcar donde se encuentran los errores y luego que sean los alumnos quienes digan cuales son. De esta manera se puede lograr involucrar al alumno en un proceso donde el error es parte del proceso enseñanza-aprendizaje.

Bibliografía recomendada para el alumno:

Altman, Silvia V.; Comparatore, Claudia R.; Kurzrok, Liliana E. (2003). *Matemática polimodal Análisis 1 y 2.* Argentina: longseller.

Altman, Silvia V.; Comparatore, Claudia R.; Kurzrok, Liliana E. (2003). *Matemática polimodal funciones 1.* Argentina: longseller.

Guía de Actividades. Recopilación de ejercicios y problemas.

Solórzano Loaiza, Luis. *Secciones Cónicas. Objetos para aprendizaje.* México: Universidad de

Gualadajara. Recuperado de: http://sitios.usac.edu.gt/seccionesconicas/introduccion.html el 15/03/2015

Las funciones constituyen una poderosa herramienta para analizar y predecir el comportamiento de fenómenos de la naturaleza, fenómenos sociales, etcétera.

Los biólogos, los físicos, los ingenieros, los economistas, las utilizan en sus respectivas disciplinas para resolver las cuestiones más variadas. Mediante ellas es posible determinar la abundancia o la escasez de una especie hasta que envase resulta más económico de fabricar entre varios que tengan la misma capacidad.

Actividad 1:

Dada la función: $r(v) = 0{,}5v.(18 - v)$, donde r es el rendimiento en km/litros y v es la velocidad de un auto en Km/Hs.

a) Obtener el dominio de la función

b) Obtener a qué velocidad se da el rendimiento máximo.

Actividad 2:

Si el litro de nafta cuesta $10 se venden 5000 litros mensuales y si sube el litro a $13 se venden 3800 litros por mes:

a) Determinar la demanda en función del precio que responda a una ***función lineal***

b) Especificar cuál es la ordenada al origen y la pendiente. (analizar)

Actividad 3:

Juan es biólogo y se dedica a estudiar el comportamiento de cierto tipo de células, observa que la cantidad de dichas células aumenta duplicándose cada hora.

a) Encuentre la fórmula que nos permite hallar la cantidad de células en función de "t".

b) ¿Cuántas horas transcurrieron desde el momento inicial si la cantidad de células es igual 5120?

Actividad 4:

Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = x^2$

$g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

$h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$I(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2}$

$J(x) = \cos x$

$K(x) = |x|$

$L(x) = 7^x$

$M(x) = \log(x)$

$N(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

A) Graficar con Geogebra. Luego encontrar el dominio de cada una.

B) Encontrar la imagen para $x = 0; x = 5; x = 10$

C) Encontrar gráfica y analíticamente la ordenada al origen.

D) Hallar gráfica y analíticamente las raíces.

E) Buscar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

F) Determinar los conjuntos de positividad y negatividad

G) Determinar si dichas funciones son pares o impares

F) Clasificarlas.

Actividad 5:

Se conoce que una empresa dedicada a la fabricación de telas plásticas tiene la siguiente estructura de ingreso total en función de las cantidades demandadas $IT = 6q$.

Se sabe además que tiene costos fijos de $4.400 y los costos variables son de $0.5 por unidad.

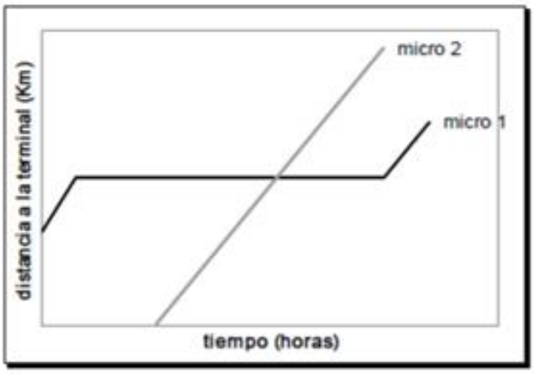
a) Hallar la función de utilidad $UT(q)$ de esta empresa.
b) Analice que sucede cuando la producción es cero.
c) ¿Qué representa la pendiente positiva de la función?
d) Determine el dominio y el recorrido de la función $UT(q)$, suponiendo que el máximo de producción es de 8.000 metros.

Trabajando con las funciones de $IT(q)$ y $CT(q)$ de este ejercicio

e) Obtener el ***punto de equilibrio*** e interpretar su significado.
f) Que sucede a la "izquierda´´ y ´´derecha´´ de dicho punto.

Actividad 6:

El siguiente gráfico representa la distancia a la terminal de dos micros:



a) ¿Salen los dos micros a la misma hora? ¿Y del mismo lugar?
b) ¿Se cruzan en algún momento?
c) ¿Se detuvo alguno de los dos micros en algún momento?

Actividad 7:

En cierta ciudad existen dos empresas de taxis: la empresa "A" y la empresa "B". La primera cobra el viaje según la siguiente función $y = f(x) = 10{,}10 + 0{,}5\,x$ y la empresa "B" según la función $y = f(x) = 10{,}50 + 0{,}46\,x$

a) Identificar en cada función la pendiente. ¿qué representa, en el contexto de este problema, dichas constantes?
b) Graficar la función correspondiente a la empresa "B". ¿Cuál es la ordenada al origen? ¿Qué representa?
c) En el mismo sistema de coordenadas graficar la función lineal correspondiente a la empresa "A". ¿Cuál es la ordenada al origen? ¿Qué representa?
d) Para realizar un viaje de 10 cuadras ¿qué empresa conviene? ¿Y para realizar uno de 27 cuadras? ¿por qué?
e) Si necesitamos viajar 20 cuadras ¿Qué empresa conviene escoger?
f) ¿Cuándo conviene viajar con la empresa A? ¿Y con la B?

Actividad 8:

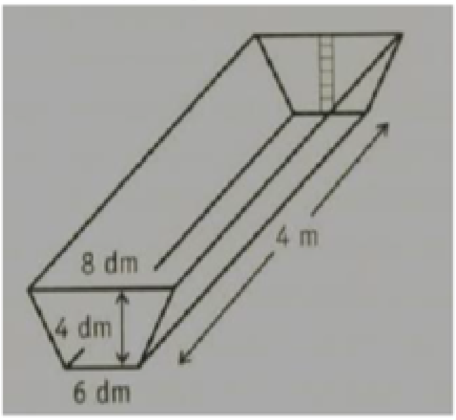
Un fabricante elabora una lata de metal que contiene 1 L de aceite ¿Qué radio reduce al mínimo la cantidad de metal en la lata?

Actividad 9:

Se construirá una caja con una abertura en la parte superior a partir de una pieza rectangular de cartón con dimensiones 12 por 20 pulgadas cortando cuadrados iguales de lado x en cada esquina y luego doblando los lados hacia arriba. Encontrar el volumen más grande que puede tener la caja.

Actividad 10:

En el campo, algunos bebederos para animales tienen una forma como la que se esquematiza



En el dibujo.

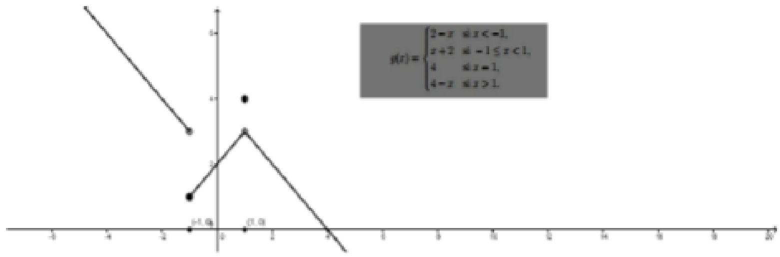
Se necesita graduar una varilla colocada en forma vertical sobre uno de los lados (uno de los trapecios) para precisar el nivel del agua correspondiente a 100, 200, 300, ... litros

Bibliografía:

Altman, Silvia V.; Comparatore, Claudia R.; Kurzrok, Liliana E. (2003). *Matemática polimodal Funciones1.* Argentina: longseller.

Segal, Silvia; Giuliani, D. (2008). *Modelización matemática en el aula*. Posibilidades y necesidades. Argentina: Libros del Zorzal.

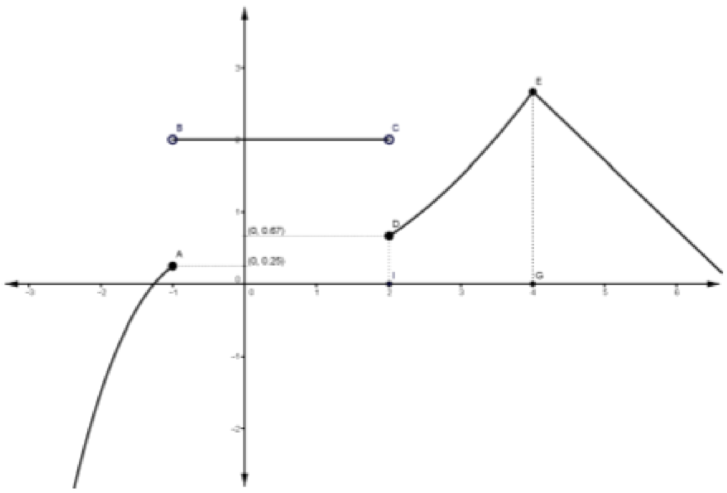
Actividad 1: Dada la siguiente gráfica de una función



Obtener:

1. $\lim_{x\to -1^-}(g(x))$
2. $\lim_{x\to -1^+}(g(x))$
3. $\lim_{x\to -1}\ (g(x))$
4. $\lim_{x\to 1^+}(g(x))$
5. $\lim_{x\to 1^-}\ (g(x))$
6. $\lim_{x\to 1}\ (g(x))$

Actividad 2 : Dada la siguiente función



Obtener:

1. $\lim_{x\to -1} f(x)$	3. $\lim_{x\to 2} f(x)$
2. $\lim_{x\to 0} f(x)$	4. $\lim_{x\to 4} f(x)$

Actividad 3: Calculara los siguientes límites.

1. $\lim_{x\to 3}\ (7x-4)$
2. $\lim_{x\to -1}\ (2x^3-5x)$
3. $\lim_{x\to 0}[(x^2+1)(3x-1)]$
4. $\lim_{x\to 4}[\frac{2x}{3x^3-16}]$
5. $\lim_{x\to -2}[\frac{3x^4-8}{x^3+24}]$
6. $\lim_{x\to 3}\sqrt{3x-5}$
7. $\lim_{x\to -3}\sqrt{5x^2+2x}$
8. $\lim_{x\to -2}(2x^3+15)^{13}$
9. $\lim_{x\to 3}(\frac{4x^3+8x}{x+4})^{\frac{1}{3}}$
10. $\lim_{x\to 5}(2x^4-9x^3+19)^{-\frac{1}{2}}$
11. $\lim_{x\to 3}[\frac{x^4-x^3-2x^2+1}{3x^2-5x+7}]$
12. $\lim_{x\to 4}[\frac{x^2+2x-24}{x-4}]$
13. $\lim_{x\to -2}[\frac{x^2+7x+10}{x+2}]$
14. $\lim_{x\to -1}[\frac{x^2+2x+6}{x^2-4x-5}]$
15. $\lim_{x\to 2}[\frac{x^2-2x}{x^2-4}]$
16. $\lim_{x\to 0}[\frac{x^3+x^2+3x}{x}]$
17. $\lim_{x\to \frac{1}{2}}[\frac{2x^2-x}{2x-1}]$
18. $\lim_{x\to 0}[\frac{2x^3-x^2}{x}]$

Actividad 4: Calcular los siguientes límites (Funciones trigonométricas)

1. $\lim_{x\to 0}[\frac{x}{\sin 4x}]$
2. $\lim_{x\to 0}[\frac{3x}{\sin 5x}]$

3. $\lim_{x\to 0}[\frac{\sin 3x}{\tan 2x}]$

4. $\lim_{x\to 0}[\frac{3x}{\tan 2x}]$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{(\tan 2x)^2}$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{(\tan 5x)^3}{x^3}$

Actividad 5: Dada la función

$$f(x)\begin{cases} x^2 & si\ x \le 1 \\ 2x-1 & si\ x \ge 1 \end{cases}$$

Analizar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$

Actividad 6. Dada la función

$$g(x)\begin{cases} x & si\ x \le 2 \\ 3 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Analizar la continuidad de la función en$x = 2$

Actividad 7. Dada la función

$$h(x)\begin{cases} x & si\ x < 3 \\ 4 & si\ x = 3 \\ -x & si\ x > 3 \end{cases}$$

Analizar la continuidad de la función en$x = 3$

Actividad 8.Dada la función

$$I(x) = \frac{2x^2 - x}{x}$$

Analizar la continuidad de dicha función en $x = 0$

Actividad 1:

Considere la función $f(x) = 4 - x^2$

a) Calcular la pendiente de la recta secante que une los puntos A(-2,0) y B(3,-5)
b) Encuentre la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto A y B.
c) Encontrar la ecuación de la recta tangente a cada uno de los puntos mencionados.
d) Graficar.

Actividad 2:

Consideren la función $d(t) = -t^3 + 8t^2 + 5t$ que relaciona la distancia (d) a la ciudad de San Juan de un camión, medida en metros, con el tiempo de marcha (t), medido en segundos.

a) Calculen la velocidad media entre los 2 y 3 segundos.
b) ¿Habrá algún instante en que el camión estuvo parado? ¿Cuál?
c) ¿Cuánto tiempo después de haber comenzado la marcha el camión alcanza una velocidad instantánea de $10\frac{m}{seg}$?

Actividad 3:

Considere la función $g(x) = x^3 + 1$

a) Calcular la pendiente de la recta secante que une los puntos A(2,9) y B(-1,0)
b) Encuentre la pendiente de la recta tangente a $g(x)$en los puntos A y B.
c) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la función en los puntos A y B.
d) Graficar.

Actividad 4:

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 3x + 2$ en los puntos donde $x = -2, x = 1.5,\ x = 0$

Actividad 5:

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)\frac{1}{x+1}$ en el punto $(1,\frac{1}{2})$.

Actividad 6:

Cierto cultivo de bacterias crece de modo que tiene una masa de $\frac{1}{2}t^2 + 1$ gramos después de t horas.

a) ¿cuánto creció durante el intervalo $2 \leq t \leq 2.01$?
b) ¿Cuál fue el crecimiento medio durante el intervalo $2 \leq t \leq 2.01$?
c) ¿Cuál fue la razón de crecimiento instantáneo cuando $t = 2$?

Actividad 7:

Suponga que la ganancia en dólares de fabricar x libras de un producto está dada por $G(x) = 0{,}5x - 0{,}002x^2$. Encuentre la tasa de cambio instantánea de la ganancia cuando $x = 10$; cuando $x = 100$.

Actividad 8:

El peso de un tumor maligno en el momento t es $W(t) = 0{,}2t^2 - 0{,}09t$, donde t se mide en semanas. Encuentre el índice de crecimiento del tumor cuando $t = 10$.

Actividad 9 : Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3^x . senx$
b) $g(x) = \frac{3x}{x^2-4}$
c) $h(x) = (x+3).(x^3+5)$
d) $I(x) = cos(3x^2 + 5x)$
e) $J(x) = \ln(\frac{1-cosx}{1+cosx})$
f) $k(x) = (2x+3)^{senx}$

Si sabemos que $y = f(x)$, es una función, se puede interpretar entonces que la derivada $\frac{dy}{dx}$ es la rapidez o tasa de cambio instantánea de y respecto de x. Por lo tanto en el estudio del cálculo diferencial es primordial la idea de variación o cambio continuo. En este sentido el concepto de derivada es interdisciplinario, puesto que existen una gran variedad de situaciones donde podemos aplicar el concepto de derivada de una función.

Tengamos presente la idea básica de las tasas de cambio. Si x cambia de x_1 a x_2, ese cambio es:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de las diferencias $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, es la rapidez (o tasa) promedio de cambio de y con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$.

Y $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, siempre que dicho límite exista.

Actividad 1: Aplicación a la Física.

La posición de una partícula se expresa por medio de la función

$$f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

Donde t esta expresada en segundos y $f(t)$ en metros.

a) Calcular la velocidad en el momento t.
b) ¿Cuál es la velocidad pasados dos y cuatro segundos, respectivamente?
c) ¿cuándo se encuentra en reposo la partícula?
d) ¿cuándo se mueva la partícula en dirección positiva?
e) ¿cuál es su aceleración a los cinco segundos?

Actividad2:

A un globo esférico se le bombea aire de forma que su volumen aumenta a razón de $200\frac{cm^3}{s}$. ¿Con qué rapidez crece el radio del globo cuando su diámetro es de 30 cm?

Actividad 3:

Se vierte gasolina en un tanque cilíndrico a razón de $8\frac{m}{s}$. Si el radio es la cuarta parte de la altura ¿A qué velocidad sube el nivel de gasolina cuando $h = 3m$?

Actividad 4:

Supongamos que una empresa ha estimado que el costo de producir x artículos es

$$C(x) = 10000 + 5x + 0{,}01x^2$$

Calcular el costo marginal para un nivel de producción de 500 artículos. ¿Qué representa dicho concepto?

Actividad 5:

En la fabricación y venta de x unidades de cierto bien de consumo, las funciones de precio p y de costo C están dadas por

$$p(x) = 5 - 0{,}002x$$

$$C(x) = 3 + 1{,}1x$$

Determinar el nivel de producción que producirá la máxima utilidad total.

Actividad 6:

La función demanda de un cierto bien, responde a la función: $q = 18 - p^2$ calcular la *elasticidad puntual de la demanda* para un precio de $2.

Actividad 7:

Un campesino cuenta con 2400 pies de cerca y desea encerrar un campo rectangular que bordea un río recto. En la rivera no necesita cercar. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que ocupa el área máxima?

Actividad 8:

Se fabricará una lata cilíndrica que contenga 1 litro de aceite. Calcula las dimensiones que minimicen el costo del metal en la manufactura de la lata.

Actividad 9:

Una caja rectangular se fabrica con una pieza de cartón de 24 pulgadas de largo por 9 de ancho, de la cual se cortan cuadrados idénticos a partir de las cuatro esquinas y se doblan los lados hacia arriba.

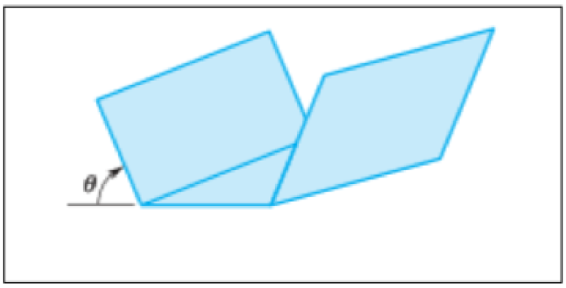
Determinar las dimensiones de la caja de volumen máximo. ¿Cuál es este volumen?

Actividad 10:

Un pasillo de 6 pies de ancho da la vuelta en ángulo recto. ¿Cuál es la longitud de la varilla delgada más larga que puede transportarse alrededor de la esquina? Suponer que la varilla no puede doblarse.

Actividad 11:

Una canaleta metálica para desagote del agua de lluvia tiene 3 pulgadas y un fondo horizontal de 3 pulgadas, los lados forman ángulos iguales θ con el fondo (ver figura). ¿Cuál debe ser dicho ángulo para maximizar las capacidad de desagote de la canaleta?



Actividad 12: Resolver las siguientes ecuaciones

a) $x^3 - 3x = 5$ con siete decimales de precisión.
b) $2 + sen(x) = x \quad (x\ positiva)$

Departamento de Matemática y Física
2016

Asignatura: Análisis Matemático y Geometría Analítica

Curso y Sección: 7º D y F

Profesor:

Texto/s: •

Utiles Celulares, netbooks, tablets y software educativo Geogebra. Retroproyector.

TRIMESTRES	UNIDADES O TEMAS ADESARROLLAR	OBSERVACIONES
PRIMERO	Eje temático: Elementos de análisis matemático Unidad 4: Funciones y límites: 42 clases	***Por el tema de paros vamos a tener aprox. 26clases*)**
SEGUNDO	Eje temático: Elementos de análisis matemático Unidad 5: Derivada de una función. Aplicaciones. Optimización: 35 clases	
TERCERO	Eje temático: Elementos de análisis matemático Unidad 6: Integral de una función: 10 clases. Eje temático: Geometría analítica Unidad 1: 13 clases.	Total de clases estimadas para el ciclo lectivo 2016: 84 clases.

ANEXO III

Reglas básicas de derivación

- Derivada de la suma:

$$h(x) = f(x) + g(x) \qquad\qquad h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

- Derivada del producto por una constante:

$$h(x) = c\, f(x) \qquad\qquad h'(x) = c\, f'(x)$$

- Derivada del producto:

$$h(x) = f(x)\; g(x) \qquad\qquad h'(x) = f'(x)\, g(x) \;+\; f(x)\, g'(x)$$

- Derivada del cociente:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad\qquad h'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) \;-\; f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$$

Derivadas de algunas funciones particulares

Función	**Derivada**
$f(x) = c \quad (constante)$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x \quad (identidad)$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n \quad , \quad n \in \mathbb{R}$	$f'(x) = n\, x^{n-1}$
$f(x) = sen(x)$	$f'(x) = cos(x)$
$f(x) = cos(x)$	$f'(x) = -sen(x)$
$f(x) = tan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{cos(x)^2}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x \quad , \quad a > 0$	$f'(x) = log(a)\, a^x$
$f(x) = log(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt{a^2 + (b-x)^2} \quad , \quad a, b \;\epsilon\; \mathbb{R}$	$f'(x) = \dfrac{-b + x}{\sqrt{a^2 + (b-x)^2}}$

ANEXO IV

Trabajo Práctico - Análisis Matemático y Geometría Analítica

Objetivos:

- Comprender la utilidad de la noción de derivada para resolver problemas de optimización.
- Construir modelos matemáticos para aplicar a situaciones de la vida real.
- Entender las diferentes representaciones de una función y cómo se relacionan entre sí.
- Aplicar las reglas de derivación.

Consigna: Resolver la siguiente actividad en grupos de 3 o 4 integrantes, teniendo en cuenta el análisis realizado en los problemas resueltos en clases anteriores (problema de la caja y de la lata). Realizar un informe escrito explicando su proceso de resolución del problema, que contenga los siguientes ítems:

- Planteo del problema: Identificar las variables y elegir el modelo (dar la función).
- Resolución gráfica: Identificar el dominio de la función. Realizar un gráfico de la función (puede ser hecho a mano o puede ser una impresión de una captura de pantalla de algún dispositivo electrónico). Dar una respuesta aproximada al problema utilizando el gráfico. Realizar una interpretación de la solución en el contexto del problema.
- Resolución analítica: Derivar la función y utilizar su derivada para dar una respuesta exacta al problema. Verificar que la respuesta dada tenga sentido en la situación real.

Fecha de entrega: **Viernes 12 de agosto**

Actividad

Una cañería debe ser construida desde el punto R hasta el punto S, como se muestra en el mapa:

El costo de construir la cañería atravesando la manzana es de \$37000 por kilómetro, mientras que si se construye a lo largo de la calle cuesta \$30000.

Por este motivo, la compañía constructora quiere abaratar los costos construyendo un tramo de la cañería bajo tierra hasta algún punto P en la calle López y Planes, y otro tramo por debajo de esa calle.

¿A qué distancia debería encontrarse el punto P del punto S de manera tal que el costo de la cañería sea mínimo?

ANEXO V

Criterios de Evaluación para el Trabajo Práctico

Integrantes del grupo:	
Curso:	
Calificación:	

Para evaluar sus producciones vamos a tener en cuenta los siguientes criterios de evaluación:

1. PLANTEO DEL PROBLEMA
   A. Identificación de variables

PUNTOS	DESCRIPCIÓN	
0	Identifican mal las variables independiente y dependiente	
1	Identifican bien las variables independiente y dependiente	

   B. Elección del modelo (planteo de la función)

PUNTOS	DESCRIPCIÓN	
0	No plantean ningún modelo	
1	Plantean un modelo que no responde al problema	
2	Plantean correctamente el modelo pero existen errores en la expresión de la función	
3	Plantean correctamente tanto el modelo como la función	

2. RESOLUCIÓN GRÁFICA DEL PROBLEMA
   A. Identificación del dominio de la función

PUNTOS	DESCRIPCIÓN	
0	No explicitan el dominio de la función	
0,5	Plantean un dominio incorrecto de la función, con una justificación	
1	Dan un dominio correcto de la función	

   B. Uso del gráfico para dar respuesta al problema.

PUNTOS	DESCRIPCIÓN	

0	No dan una respuesta al problema a partir del gráfico, o no adjuntan un gráfico.	
0	Dan una respuesta errónea (que no se encuentre cercana a la solución real) al problema a partir del gráfico	
1	Dan una respuesta correcta (que se aproxima a la solución real) al problema a partir del gráfico	

3. RESOLUCIÓN ANALÍTICA DEL PROBLEMA
    A. Derivación de la función

PUNTOS	**DESCRIPCIÓN**	
0	No derivan la función	
0,5	Cometen errores al utilizar las reglas de derivación de la suma y del producto por una constante	
1	Cometen errores al emplear la tabla con las derivadas más frecuentes	
1,5	Derivan correctamente la función	

    B. Cálculo de las raíces de la derivada

PUNTOS	**DESCRIPCIÓN**	
0	No calculan las raíces de la derivada	
0,5	Cometen muchos errores en el cálculo de las raíces (4 o más)	
1	Cometen algunos errores en el cálculo de las raíces (menos de 4)	
1,5	Calculan las raíces correctamente	

4. INTERPRETACIÓN DE LAS SOLUCIONES
    A. Interpretación de las soluciones en el contexto del problema

PUNTOS	**DESCRIPCIÓN**	
0	No llegan a ninguna conclusión a partir de los resultados obtenidos en los métodos gráfico y/o analítico	
1	Relacionan correctamente los resultados numéricos encontrados con la solución del problema	

ANEXO VI

Guía de ejercicios - Análisis Matemático y Geometría Analítica

1) Calcular los máximos y mínimos de las siguientes funciones de forma analítica. Verificar los resultados obtenidos usando el método gráfico.

a) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

c) $f(x) = x^2 \left(x^2 + \dfrac{10}{3}x\right) - 3x^2$

d) $f(x) = -\dfrac{1}{2}\,(2x + 7) + \dfrac{5x}{2x + 3}$

2) Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \dfrac{1}{2}\,sen\,(x) + 5$

b. $f(x) = cos\,(x)\,\left(x^3 + 3x^2\right)$

c. $f(x) = x\,e^x$

d. $f(x) = log\,(x) + sen\,(x)\,cos\,(x)$

3) Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 3x + 2$ en los puntos donde x = -2, x = -1.5, x = 0.

4) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = 5/x^2 + 2x$ en el punto (1,7). Graficar tanto la función como su recta tangente utilizando algún software.

5) La posición de una partícula para cada instante de tiempo t está dada por la función

$f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, donde t está expresada en segundos y f(t) en metros.

a. Calcular la velocidad instantánea de la partícula en el instante t.
b. ¿Cuál será la velocidad de la partícula pasados dos y cuatro segundos, respectivamente? ¿En qué posición se encuentra en esos instantes?
c. ¿Cuándo se encuentra en reposo la partícula? ¿En dónde se encuentra la partícula en los instantes en los cuales está en reposo?
d. ¿Cuándo se mueve la partícula en dirección positiva?

6) Descomponer el número 16 en dos sumandos positivos tales que su producto sea máximo.

7) De todos los rectángulos de perímetro 20 cm ¿Cuál es el de área máxima?

8) Una hoja de papel debe contener 18 cm² de texto impreso, como se muestra en la figura. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm de altura cada uno, y los laterales 1 cm. ¿Qué dimensiones debe tener la hoja para que el gasto de papel sea mínimo?

ANEXO VII

Evaluación - Análisis Matemático y Geometría Analítica

Tema: Derivadas. Optimización de Funciones.

Nombre y Apellido: Curso:

Actividades:

1) Encontrar los máximos y mínimos de las siguientes funciones de forma analítica. Graficar (usando Grapher o Malmath) y decidir si los puntos obtenidos son máximos o mínimos de la función. (5 puntos)

a. $f(x) = x \cdot (3x^2 - 2x) - 2x^3$

b. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$

2) Hallar la derivada de la siguiente función. (3 puntos)

$$f(x) = sen(x)(x^2 - 3x + 7) - 5x$$

3) Encontrar la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = (3x + 1) \cdot (x^2 + 2) + x^3$ en los puntos donde x=2 y x=-1. (2 puntos)

Criterios utilizados para la corrección:

Ejercicio 1. El puntaje total (5 puntos), fue distribuido de la siguiente manera:

- Derivar la función (1,5 puntos)
- Resolución de la ecuación f'(x)=0 (0,5 puntos)
- Determinación del carácter de máximo o mínimo del punto calculado (0,5 punto)

Tanto el inciso 1.a. como el 1.b. tienen un valor de 2,5 puntos.
Del total de puntaje de cada tarea, bajamos entre 0,5 puntos y 1 punto por cada error cometido. Por ejemplo, con respecto a hallar la derivada de la función, se bajó 1 punto por derivar mal el cociente, y 0,5 puntos por cualquier otro tipo de error.

Ejercicio 2. La corrección se realizó de igual manera que en el ejercicio 1, bajando 1 punto por derivar mal el producto, y 0,5 puntos por cualquier otro tipo de error.

Ejercicio 3. El puntaje total (2 puntos) fue distribuido de la siguiente manera:

- Derivar la función (0,5 puntos)
- Encontrar la pendiente valuando la derivada en x=2 y x=-1 (1,5 puntos)

ANEXO VIII

Evaluación - Análisis Matemático y Geometría Analítica

Tema: Derivadas. Optimización de funciones.

Nombre y Apellido: Curso:

Actividades:

1. Encontrar los puntos máximos y mínimos de la siguiente función de manera analítica. Graficar la función utilizando algún software apropiado (por ejemplo Grapher) y decidir si los puntos calculados son máximos o mínimos. (4 puntos)

$$f(x) = (3x-4)\left(\frac{1}{2}x+1\right)+\left(5x-x^3\right)$$

2. Hallar la derivada de las siguientes funciones. (4 puntos)
   a. $f(x) = sen(x)\ \left(x^5+3x^2\right)+4\ log(x)+2$
   b. $f(x) = \dfrac{2x+3}{cos(x)} - 3\ \left(e^x+\sqrt{x}\right)$
3. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2-4x+5$

en el punto (1,2). (2 puntos)

Criterios utilizados para la corrección:

Ejercicio 1. El puntaje total (4 puntos) fue distribuido de la siguiente manera:

- Derivar la función (2 puntos)
- Resolución de la ecuación f'(x)=0 (1,5 puntos)
- Determinación del carácter de máximo o mínimo del punto calculado (0,5 punto)

Del total de puntaje de cada tarea, bajamos entre 0,5 puntos y 1 punto por cada error cometido. Por ejemplo, con respecto a hallar la derivada de la función, se bajó 1 punto por derivar mal el producto, y 0,5 puntos por cualquier otro tipo de error.

Ejercicio 2. Cada inciso sumaba 2 puntos. La corrección se realizó de igual manera que en el ejercicio 1, bajando 1 punto por derivar mal el producto en el inciso a) (o bien el cociente en la parte b)), y 0,5 puntos por cualquier otro tipo de error.

Ejercicio 3. El puntaje total (2 puntos) fue distribuido de la siguiente manera:

- Derivar la función (0,5 puntos)
- Encontrar la pendiente valuando la derivada en x=1 (1 punto)
- Calcular la ordenada al origen (0,5 puntos).

ANEXO IX

Evaluación - Análisis Matemático y Geometría Analítica

Tema: Derivadas. Optimización de Funciones.

Nombre y Apellido: Curso:

Mail:

Actividades:

1) Encontrar los máximos y mínimos de la siguiente función de forma analítica. Graficar (usando Grapher o Malmath) y decidir si los puntos obtenidos son máximos o mínimos de la función. (4 puntos)

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{2x + 5}$$

2) Hallar la derivada de la siguiente función. (3 puntos)

$$f(x) = (x^2 + 5x - 2)log(x) - 7x^2 + 1$$

3) Encontrar la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = (2x + 3) \cdot (x^3 + 1)$ en los puntos donde x=0 y x=-2 (3 puntos)

Criterios utilizados para la corrección:

Ejercicio 1. El puntaje total (4 puntos) fue distribuido de la siguiente manera:

- Derivar la función (2 puntos)
- Resolución de la ecuación f'(x)=0 (1,5 puntos)
- Determinación del carácter de máximo o mínimo del punto calculado (0,5 punto)

Del total de puntaje de cada tarea, bajamos entre 0,5 puntos y 1 punto por cada error cometido. Por ejemplo, con respecto a hallar la derivada de la función, se bajó 1 punto por derivar mal el cociente, y 0,5 puntos por cualquier otro tipo de error.

Ejercicio 2. La corrección se realizó de igual manera que en el ejercicio 1, bajando 1 punto por derivar mal el producto, y 0,5 puntos por cualquier otro tipo de error.

Ejercicio 3. El puntaje total (3 puntos) fue distribuido de la siguiente manera:

- Derivar la función (1,5 puntos)
- Encontrar la pendiente valuando la derivada en x=0 y en x=-2 (1,5 puntos)

<u>ANEXO X</u>

<u>Evaluación - Análisis Matemático y Geometría Analítica</u>

Tema: Derivadas. Optimización de funciones.

<u>Nombre y Apellido</u>: <u>Curso</u>:

<u>Actividades</u>:

1. Encontrar los puntos máximos y mínimos de la siguiente función de manera analítica. Graficar la función utilizando algún software apropiado (por ejemplo Grapher) y decidir si los puntos calculados son máximos o mínimos. (5 puntos)

$$f(x) = \frac{x^2+4}{2x+3}$$

2. Hallar la derivada de la siguiente función. (3 puntos)

$$f(x) = \sqrt{x}\ \left(3x^5 - 7x\right) + \frac{1}{2} - 3\,e^x$$

3. Encontrar la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 5x$

en el punto (1,-1). (2 puntos)

<u>Criterios utilizados para la corrección:</u>

<u>Ejercicio 1</u>. El puntaje total (5 puntos) fue distribuido de la siguiente manera:

- Derivar la función (2 puntos)
- Resolución de la ecuación f'(x)=0 (2 puntos)
- Determinación del carácter de máximo o mínimo del punto calculado (1 punto)

Del total de puntaje de cada tarea, bajamos entre 0,5 puntos y 1 punto por cada error cometido. Por ejemplo, con respecto a hallar la derivada de la función, se bajó 1 punto por derivar mal el producto, y 0,5 puntos por cualquier otro tipo de error.

<u>Ejercicio 2</u>. La corrección se realizó de igual manera que en el ejercicio 1, bajando 1 punto por derivar mal el producto en el inciso a) (o bien el cociente en la parte b)), y 0,5 puntos por cualquier otro tipo de error.

<u>Ejercicio 3</u>. El puntaje total (2 puntos) fue distribuido de la siguiente manera:

- Derivar la función (0,5 puntos)
- Encontrar la pendiente valuando la derivada en x=1 (1,5 puntos)

Los abajo firmantes, docentes de la materia **Metodología y Práctica de la Enseñanza**, damos Fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el Informe Final de Prácticas aprobado.