

Trabajo Especial de Licenciatura

Momento Angular en Halos de Materia Oscura

Pablo López

Director:

Dr. Manuel Merchán

Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación
Córdoba, Argentina
2017



Momento angular en halos de materia oscura, por Pablo López, se distribuye bajo una
Licencia Creative Commons Atribución 2.5 Argentina.

Resumen

Los halos de materia oscura son las estructuras virializadas más grandes del Universo. Su dinámica interna está ligada a la historia de galaxias, grupos y cúmulos que se forman en sus pozos de potencial, pero también a la distribución de materia del entorno. La comprensión de la adquisición y evolución del momento angular de los halos constituye entonces una pieza clave para construir modelos coherentes de formación de galaxias y de la estructura en gran escala del Universo.

La teoría de torque tidal (TTT) relaciona naturalmente el origen y evolución del momento angular con las propiedades del campo de densidad en que se forma un halo de DM. Aunque es el modelo más aceptado en el paradigma actual, su rango de validez se limita a las primeras etapas de formación de estructuras, y sus predicciones contrastan en muchos aspectos con las mediciones realizadas en simulaciones numéricas cosmológicas.

En este trabajo se estudia el momento angular de halos de materia oscura adoptando una mirada alternativa, complementaria al enfoque TTT, a partir de las desviaciones del modelo y el análisis estadístico de diferentes poblaciones de halos. Estas poblaciones se construyen según la amplitud y dirección de su momento angular, pero también de su historia de formación como producto de fusiones de halos menores en el marco del modelo jerárquico de formación de estructuras en el Universo. Para ello se utilizan tres simulaciones numéricas cosmológicas de distintos tamaños y resoluciones, se identifican halos y árboles de fusión mediante códigos públicos y se analiza la consistencia de las definiciones contrastando los resultados propios con otros resultados con amplio consenso dentro de la literatura.

El resultado más importante en este trabajo es la evidencia estadística, a través de la función de correlación bipuntual, de que los halos se agrupan diferente según su desviación del comportamiento predicho por la TTT. Aquellos que llegan a su estado final con un momento angular mayor al que predice el modelo se encuentran típicamente más aglomerados, mientras que los halos que no alcanzan nunca el valor predicho, o que pierden momento angular por algún mecanismo ajeno a la TTT, presentan un nivel de aglomeración menor. Más aun, el nivel de aglomeración muestra una correlación continua con la magnitud de la desviación. Esto sugiere que existen mecanismos ajenos a la TTT que, en función de la densidad del entorno, aumentan sistemáticamente el momento angular de los halos que se forman allí.

Palabras clave: momento angular, estructura en gran escala, halos, materia oscura

A mi papá
que me mostró el cielo.
Y a mi mamá
que me lo da.

Índice General

Resumen	3
Lista de figuras	7
Lista de tablas	10
1 Introducción	11
1.1 La estructura del Universo en gran escala	11
1.2 Fundamentos del modelo cosmológico	15
1.2.1 Ecuaciones de campo de Einstein	15
1.2.2 Dinámica de los Universos de Friedmann - Robertson - Walker . . .	17
1.3 Formación de estructuras	22
1.3.1 Aproximación de Zeldóvich	24
1.3.2 Modelo del colapso esférico	27
1.4 Descripción estadística del campo de densidad	30
1.4.1 Función de correlación bipuntual	30
1.4.2 Espectro de potencia	33
2 Momento angular en halos de DM	35
2.1 La teoría de torque tidal (TTT)	35
2.1.1 Descripción cualitativa	35
2.1.2 Formulación analítica	38
2.1.3 Aplicaciones	39
2.2 Efectos no lineales y modelos alternativos	43
3 Simulaciones cosmológicas e identificación de halos	46
3.1 Simulaciones numéricas	47
3.1.1 Condiciones Iniciales	51

3.2	Identificación de halos y árboles de fusión	52
3.2.1	ROCKSTAR <i>Halo Finder</i>	56
3.2.2	CONSISTENT TREES	59
3.3	Redefinición de los halos ROCKSTAR	62
4	Momento angular de halos en simulaciones numéricas	66
4.1	Evolución del momento angular	66
4.1.1	Definiciones: partículas del halo raíz e historia de los progenitores .	66
4.1.2	El problema de la pérdida generalizada de momento angular	72
4.1.3	Naturaleza de las partículas <i>emigrantes</i>	78
4.2	Poblaciones según su desviación de la TTT: halos ganadores y perdedores .	80
4.3	Dirección del momento angular	83
4.3.1	Parámetro de forma de una distribución de materia	83
4.3.2	Alineación spin-forma y spin-estructura	84
5	Resultados y discusión	87
5.1	Dirección del momento angular	87
5.1.1	Relación spin-estructura	87
5.1.2	Relación spin-forma	92
5.2	Función de correlación de halos ganadores y perdedores	97
6	Conclusiones y perspectivas futuras	102
	Bibliografía	105

Lista de Figuras

1.1. Galaxias más brillantes que $B \sim 19$ en el catálogo Lick	13
1.2. Distribución espacial de ~ 350000 galaxias en el catálogo SDSS	14
1.3. Curvas de rotación de 21 galaxias y evidencia de la presencia de materia oscura	15
1.4. Diferentes realizaciones de simulaciones Λ CDM	26
1.5. Comportamiento de la función de correlación para diferentes campos de densidad.	31
1.6. Espectro de potencia	33
2.1. Representación esquemática de la TTT.	36
2.2. Evolución del momento angular que se obtiene a partir de la TTT.	37
2.3. Evolución del momento angular en halos simulados (Porciani et al., 2002).	41
2.4. Figuras extraídas de Codis et al. (2015): distribución de masa impuesta en su trabajo y campo cuadrupolar de densidad de spin.	42
2.5. Figura esquemática del mecanismo de torque tidal anisotrópico.	43
2.6. Comparación de distribuciones del parámetro adimensional de spin a $z = 0$ (Vitvitska et al., 2002).	44
3.1. Corte bidimensional de la simulación S_1	48
3.2. Función de masa de los halos en las simulaciones S_1 y S_2	50
3.3. Paso de un arreglo homogéneo de partículas a un sistema perturbado: condiciones iniciales.	51
3.4. Evolución de las partículas de un halo raíz en la simulación S_1	53
3.5. Ejemplo de árbol de fusiones en la simulación Millennium.	55
3.6. Esquema de funcionamiento del programa ROCKSTAR.	58
3.7. Esquema de funcionamiento del programa CONSISTENT TREES.	61
3.8. Comparación entre propiedades ROCKSTAR y propiedades determinadas a partir de códigos propios.	64

4.1.	Esquema de los dos enfoques para estudiar la evolución del momento angular: historia de las partículas del halo raíz e historia de los progenitores. . .	67
4.2.	Evolución del momento angular para cuatro halos de la simulación S_1	68
4.3.	Distribución del momento angular para diferentes pasos temporales en la simulación S_1	70
4.4.	Evolución de la mediana del momento angular normalizado de halos en la simulación S_2	71
4.5.	Esquema de clasificación de partículas según su pertenencia a halos en diferentes pasos temporales.	73
4.6.	Distribución de halos por paso temporal, según la fracción de partículas sólo en el halo raíz, sólo en progenitores o en ambos.	75
4.7.	Momento angular mediano de todos los halos de la simulación S_2 , más la evolución de las partículas <i>emigrantes</i>	77
4.8.	Distribución de las partículas <i>emigrantes</i> de 20000 halos raíz en $z = 0$. . .	78
4.9.	Distribuciones de distancia al centro de masa, en unidades de R_{vir} , de las partículas <i>emigrantes</i> de 20000 halos raíz en $z = 0$	79
4.10.	Evolución de la mediana del momento angular en los 25 bins de masa. . .	81
4.11.	Propiedades de los sextiles ganadores y perdedores de momento angular. .	82
4.12.	Distribución del parámetro de forma P para la forma y el entorno de los halos de la simulación S_1	84
4.13.	Esquema de detección de estructura en gran escala para comparar con la dirección del momento angular.	85
5.1.	Distribución a $z = 0$ del ángulo entre el momento angular y los ejes del tensor de forma del entorno.	89
5.2.	Distribución del ángulo entre el momento angular y los ejes principales de forma de todos los halos de la simulación S_1	93
5.3.	Distribución del ángulo entre el momento angular y los ejes principales de forma de los halos de la simulación S_1 , según su entorno.	93
5.4.	Distribución del ángulo entre el momento angular y los ejes principales de forma de los halos de la simulación S_1 , según su masa.	94
5.5.	Distribución del ángulo entre el momento angular y los ejes principales de forma de los halos pequeños de la simulación S_1 , para diferentes límites superiores de masa.	95

5.6.	Distribución a $z = 0$ del ángulo entre el momento angular y los autovectores del tensor de forma de todos los halos de la simulación S_1 , para poblaciones según su triaxialidad.	96
5.7.	Función de correlación cruzada entre terciles <i>ganadores</i> , <i>medianos</i> y <i>perdedores</i> de momento angular con todos los halos de la simulación S_2	98
5.8.	Función de correlación cruzada entre sextiles <i>ganadores</i> , <i>medianos</i> y <i>perdedores</i> de momento angular con todos los halos de la simulación S_2	99
5.9.	Función de autocorrelación de cada uno de los sextiles <i>ganadores</i> y <i>perdedores</i> en la simulación S_2	101

Lista de Tablas

3.1. Características de las simulaciones S_0 (<i>test</i>), S_1 y S_2	49
---	----

1 Introducción

En el presente capítulo se introducen las bases teóricas que sustentan los estudios de este trabajo. En primer lugar, se presenta una breve reseña histórica del estudio de la estructura del Universo en gran escala, repasando algunos de sus hitos fundacionales y principales resultados. Luego se explica como, a partir de las ecuaciones de campo de Einstein, es posible trazar la evolución del Universo asumiendo las condiciones de isotropía y homogeneidad del Principio Cosmológico. A continuación, se analiza de qué manera se forman estructuras y cómo evolucionan en este Universo, mediante dos enfoques: la aproximación de Zeldóvich y el modelo de colapso esférico. Finalmente, se describen dos de las herramientas estadísticas más utilizadas para caracterizar la distribución de materia y las estructuras en observaciones y en simulaciones numéricas cosmológicas: la función de correlación y el espectro de potencia.

1.1. La estructura del Universo en gran escala

Los primeros datos de objetos extragalácticos y, por lo tanto, los pasos iniciales en el estudio de la estructura del Universo, fueron registrados en el siglo X. El astrónomo persa Abd al-Rahman al-Sufi reportó observaciones de las Nubes de Magallanes y de la galaxia Andrómeda, a la que clasificó como “nube pequeña” sin conocer su naturaleza extragaláctica. En el año 1771, Charles Messier publicó observaciones de 45 objetos difusos, que luego amplió a 103, a los que llamó “nebulosas”. La distancia a algunas de estas nebulosas fue determinada con gran exactitud, lo cual le permitió establecer que se trataba de sistemas que se encontraban dentro de los mismos límites que las estrellas conocidas, es decir, que se trataba de objetos intragalácticos. Otras “nebulosas”, sin embargo, dada la imposibilidad de medir su distancia real, seguían generando dudas alrededor de su verdadera naturaleza. Shapley y Curtis, en la segunda década del siglo XX, mantuvieron un debate acerca de si estos objetos se encontraban dentro de los límites establecidos hasta ese momento para la Vía Láctea o si, por el contrario, se trataba de objetos más lejanos. No fue sino hasta el

año 1924 que se consiguió develar el misterio, cuando Edwin Hubble detectó cefeidas en Andrómeda y pudo calcular su distancia, descubriendo que se encontraban unas ocho veces más alejadas que las estrellas más remotas conocidas. Hubble confirmó que Andrómeda se trataba de un sistema de estrellas como la Vía Láctea, y pudo repetir su análisis para un número cada vez mayor de sistemas similares. Este fue el nacimiento de la astronomía extragaláctica.

Comenzó a estudiarse, entonces, de qué manera estos objetos se encuentran distribuidos en el Universo. En la década del 30, a partir de las observaciones disponibles, logró establecerse que la distribución de galaxias proyectada en el cielo no es azarosa y uniforme, sino que existen regiones de mayor densidad y regiones menos pobladas. Dicho resultado fue confirmado con observaciones más detalladas a lo largo de las siguientes décadas (Seldner et al., 1977), como puede apreciarse en la Figura 1.1.

En la década del 80, con el advenimiento de los grandes catálogos espectroscópicos de galaxias, se pudo realizar un análisis tridimensional de esta distribución, utilizando la ley de Hubble para convertir el corrimiento al rojo de las líneas espectrales (*redshift*) en distancias. Algunos ejemplos de esto son los trabajos de Davis & Peebles (1983), de Lapparent et al. (1986) y Saunders et al. (1991). Actualmente, con la nueva generación de relevamientos de galaxias, tales como el 2dF Galaxy Redshift Survey (2dFRGS, Peacock et al. 2001) y Sloan Digital Sky Survey (SDSS, Blanton et al. 2003) se pueden obtener esquemas como el de la Figura 1.2, en los que se observa la distribución de $\sim 350,000$ objetos en el SDSS en función del redshift. Claramente, la distribución no es aleatoria y muestra una variedad de estructuras: algunas galaxias están localizadas en cúmulos que contienen cientos de ellas o en grupos con menos de diez miembros, pero la mayoría se encuentran distribuidas en filamentos de baja densidad o estructuras aplanadas. Estos sistemas rodean extensas regiones mucho menos densas llamadas vacíos o *voids*, con diámetros superiores a ~ 100 Mpc, que contienen muy pocas o ninguna galaxia (Mo et al., 2010).

Es natural suponer que la distribución de galaxias refleje la distribución de masa a gran escala en el Universo. Sin embargo, las investigaciones de Zwicky (1933) de las velocidades orbitales de galaxias en cúmulos sugirieron la existencia de una componente significativa de materia no luminosa. Años después, Rubin et al. (1980) publicaron el primer estudio robusto que confirmaba esta hipótesis, luego de medir con gran precisión las curvas de rotación de 21 galaxias espirales y obtener resultados como los que se muestran en la Figura 1.3. Las predicciones realizadas a partir de la materia visible o luminosa establecieron que las curvas de rotación deberían comenzar a decaer a una cierta distancia del núcleo de cada

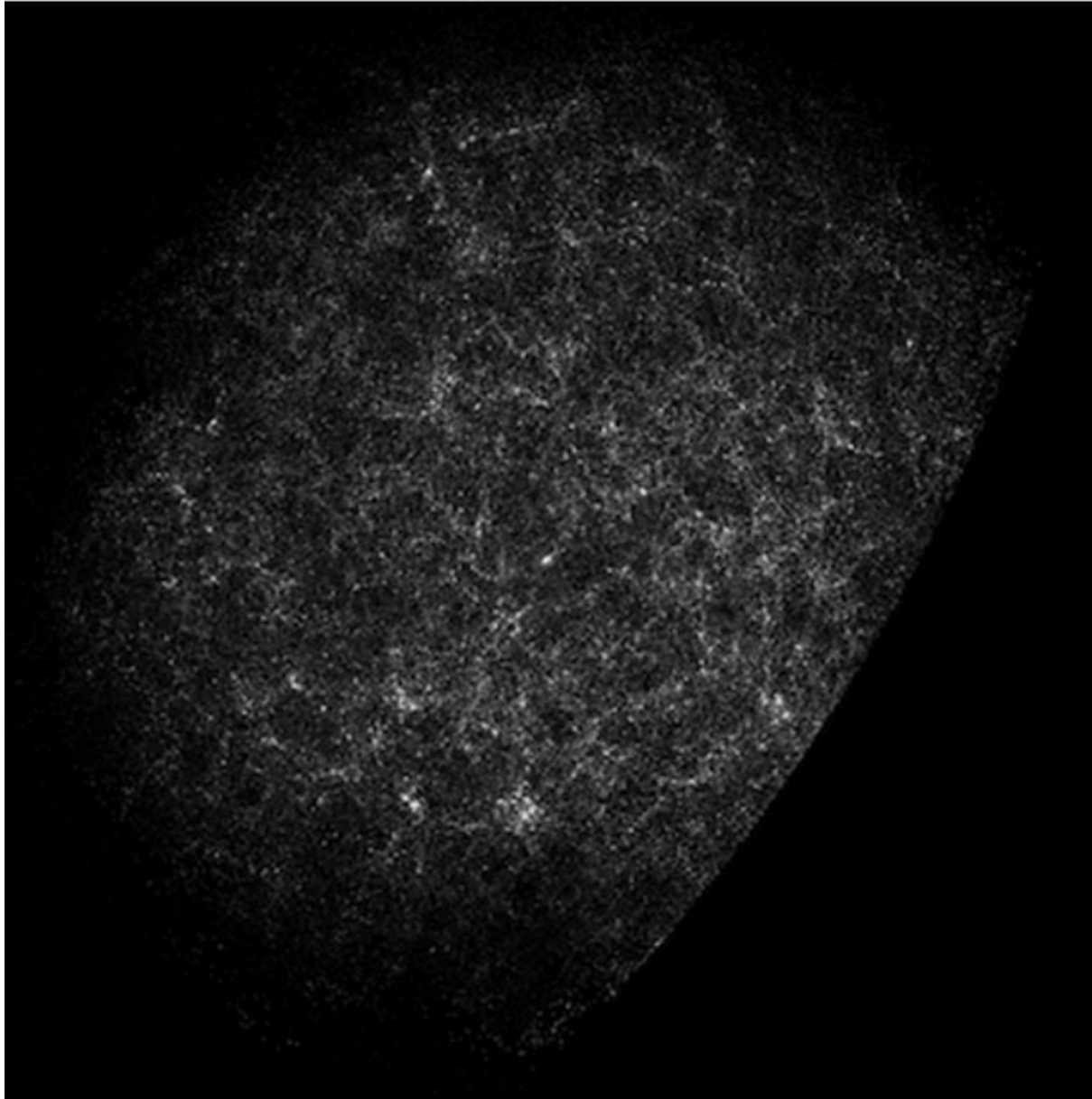


Figura 1.1: Distribución angular de galaxias más brillantes que $B \sim 19$ en el plano del cielo, construida a partir del catálogo de galaxias Lick (Seldner et al., 1977). En esta región de $10' \times 10'$ puede observarse claramente la existencia de estructuras más densas y regiones menos pobladas.

galaxia. Sin embargo, las curvas de Rubin et al. se mantienen prácticamente constantes, indicando que, o bien la ley de la gravedad es incorrecta, o en estas galaxias hay una componente de materia no visible que sostiene las altas velocidades de rotación aún lejos de la región central. En la actualidad, este último es el modelo más aceptado: la componente no visible se conoce como materia oscura (DM, por sus siglas en inglés, *dark matter*).

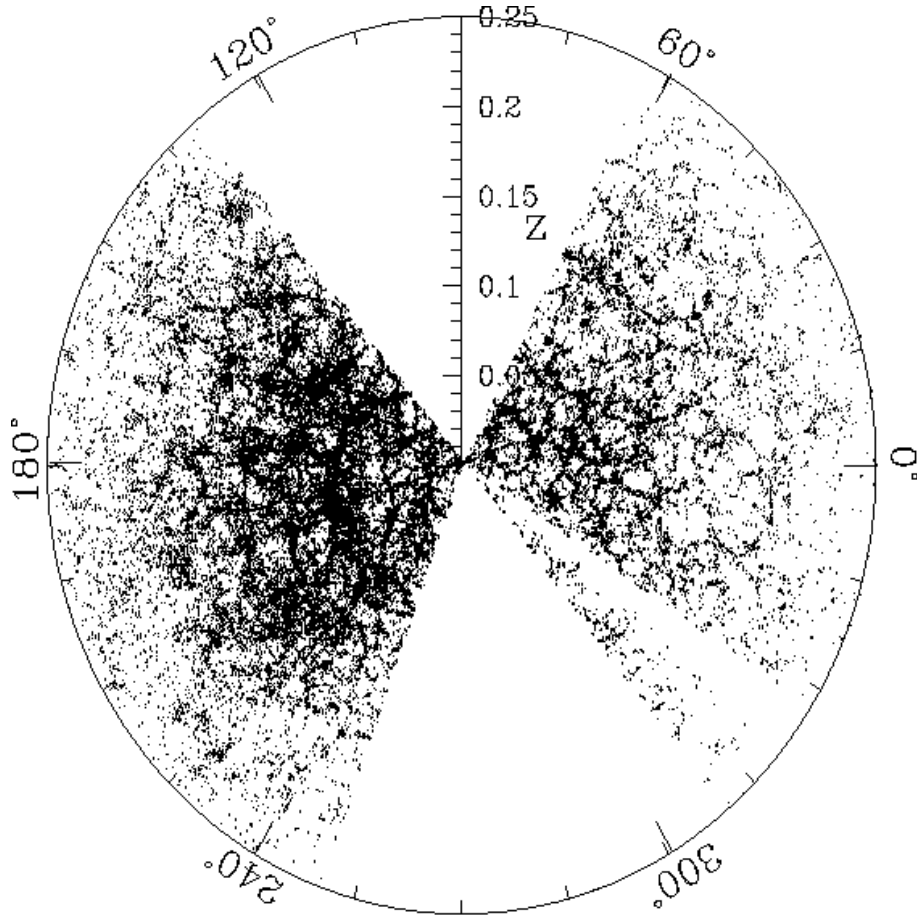


Figura 1.2: Distribución espacial de ~ 350000 galaxias en el SDSS en una rebanada de 6° alrededor del Ecuador (Blanton et al., 2003).

La DM sólo interactúa gravitatoriamente, es decir, no tiene presión, y su presencia ha sido detectada en otras investigaciones, tales como la dispersión de velocidades en galaxias elípticas, las lentes gravitacionales y la historia de formación de estructuras. Actualmente se estima que constituye un 90 % de la materia del universo, de manera que estudiar la estructura del Universo en gran escala requiere, ineludiblemente, conocer y entender la distribución de la DM.

Con las observaciones del fondo cósmico de radiación de microondas (CMB, por sus siglas en inglés, *cosmic microwave background*) se pudo determinar que el Universo se originó aproximadamente hace 13,7 Giga-años (en inglés, *Giga-years* o Gy), y que en los comienzos era extremadamente denso, caliente y casi uniforme, con pequeñísimas fluctuaciones en densidad. Como la DM no tiene presión, las fluctuaciones iniciales crecieron únicamente por inestabilidad gravitacional, formándose así las primeras estructuras. Estas regiones

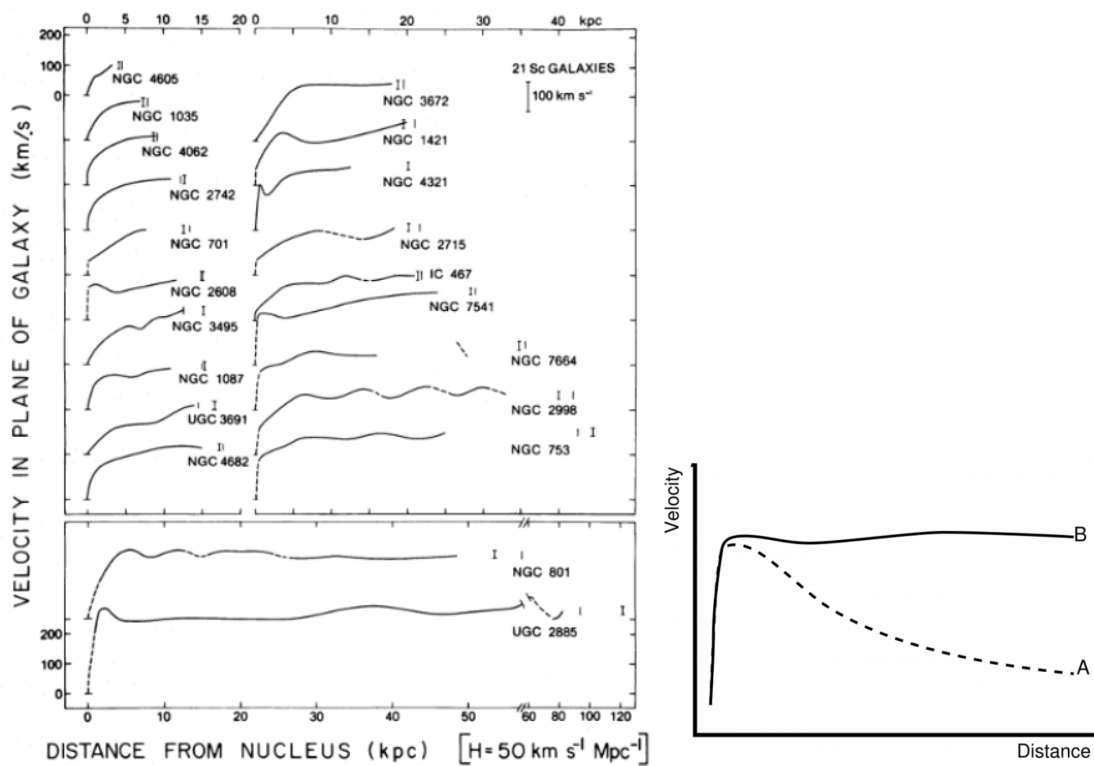


Figura 1.3: Izquierda: curvas de rotación de las 21 galaxias en Rubin et al. (1980). Derecha: esquema que muestra (A) la curva de rotación esperada, determinada a partir de la materia visible, y (B) la curva de rotación que se observa. La diferencia entre ambas puede ser entendida como evidencia de la presencia de materia oscura.

sobredensas generaron pozos de potencial que, a través del enfriamiento radiativo, hicieron colapsar la materia colisional (también llamada bariónica), dando lugar a estrellas y galaxias. De este modo, a pesar de que la inmensa mayoría de la materia no es visible, los sistemas observables de galaxias trazan, con un cierto sesgo, la estructura del Universo, al encontrarse en las mismas regiones en donde se acumula la DM.

1.2. Fundamentos del modelo cosmológico

1.2.1. Ecuaciones de campo de Einstein

Actualmente, se explica el origen de las estructuras del universo mediante la teoría del *Big Bang*, en la cual la dinámica de la materia y su evolución están determinadas por interacciones gravitacionales, descritas en el marco de la Teoría de la Relatividad General

(GR, por sus siglas en inglés *General Relativity*) por las ecuaciones de campo de Einstein¹:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo (ET), $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento, Λ es la constante cosmológica, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci y R es el escalar de curvatura. Tanto el tensor de Ricci ($R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}$) como el escalar de curvatura ($R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$) se obtienen a partir de contracciones del tensor de Riemman (Weinberg, 1972):

$$R^{\rho}_{\mu\kappa\nu} \equiv \partial_{\kappa}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\kappa} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa} \quad (1.2)$$

Aquí, $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ se denomina conexión afín. Sus componentes se definen a partir de la métrica y sus derivadas según la ecuación:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_{\nu}g_{\lambda\mu} + \partial_{\mu}g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}) \quad (1.3)$$

Como la métrica $g_{\mu\nu}$ define una manera de medir distancias y, por lo tanto, una topología, las ecuaciones de campo de Einstein asocian el contenido de materia y energía del espacio-tiempo (lado derecho de la ecuación (1.1)) con su geometría (lado izquierdo).

Para poder resolver las ecuaciones de campo de Einstein (1.1) es necesario adoptar simetrías que las simplifiquen. El Principio Cosmológico (Weinberg, 1972) es una hipótesis según la cual el Universo es espacialmente homogéneo e isotrópico en grandes escalas. Este principio deriva de las observaciones, en donde puede apreciarse que no existen direcciones privilegiadas hacia donde mirar (isotropía), pero también del Principio Copernicano, que establece que no nos encontramos en un lugar especial del Universo, sino en uno tan bueno (para observar) como cualquier otro. Combinando ambos conceptos se puede llegar a la siguiente conclusión: si nuestra posición no es especial, un observador en cualquier otro punto del Universo debería verificar isotropía. Pero un Universo isotrópico en todos sus puntos sólo puede ser homogéneo. Si se asume el Principio Cosmológico, puede demostrarse que la métrica más general que lo satisface es la de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), que en coordenadas esféricas puede escribirse como:

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2 \right] \quad (1.4)$$

¹En esta sección se utiliza el convenio de suma de Einstein, según el cual la repetición de un índice indica una “contracción”, es decir, una sumatoria sobre todos sus posibles valores. En general, las letras griegas son índices que corren entre 0 y 3. Por ejemplo $a_{\mu}b^{\mu} = a_0b^0 + a_1b^1 + a_2b^2 + a_3b^3$.

donde $a(t)$ es el factor de escala (también llamado factor de expansión de Hubble) y K es la constante de curvatura espacial.

Por la manera en que se construye, es decir, a partir del Principio Cosmológico, el Universo de FRW sólo puede expandirse o contraerse. Las observaciones de galaxias distantes que se alejan sistemáticamente demuestran que en nuestro Universo ocurre lo primero: el espacio-tiempo se expande isotrópicamente. La cinemática de esa expansión está dada por el factor de escala $a(t)$, cuyo comportamiento puede determinarse si se conoce el contenido de materia y energía del Universo, a partir de las ecuaciones de campo de Einstein (sección 1.2.2). En cualquier caso, si se sigue la evolución de $a(t)$ hacia atrás se llega indefectiblemente a una singularidad inicial a partir de la cual el espacio-tiempo comenzó su proceso de expansión: el *Big Bang*. Al tratarse de una función del tiempo, el factor de escala $a(t)$ se suele utilizar como parámetro para definir diferentes instantes en la historia del Universo. Así, $a(t_i)=0$ denota el inicio de la expansión, el instante mismo del Big Bang. Una normalización común, que se utilizará más adelante, consiste en establecer $a(t_0) = 1$ para el tiempo presente. Por lo tanto, la historia completa del Universo, desde el *Big Bang* hasta nuestros días, transcurre entre $a(t_i) = 0$ y $a(t_0) = 1$. La constante de curvatura K , por su parte, caracteriza las hipersuperficies del Universo². K es 1 si el Universo es cerrado, 0 si es plano y -1 si es abierto, y su valor está dado por el escalar de curvatura ($R = g^{ij}R_{ij}$):

$$R = \frac{6K}{a^2(t)} \quad (1.5)$$

Es importante tener en cuenta que las ecuaciones de campo de Einstein y las simetrías impuestas por el Principio Cosmológico determinan la geometría del Universo, pero no su topología global.

1.2.2. Dinámica de los Universos de Friedmann - Robertson - Walker

Al introducir la métrica de FRW en las ecuaciones de campo de Einstein se obtienen ecuaciones que describen el comportamiento de $a(t)$ y K . Para poder resolverlas, es necesario proponer un tensor energía momento $T_{\mu\nu}$ en el lado derecho de la ecuación (1.1). La forma más general que puede tomar este tensor de manera que sea compatible con las hipótesis de homogeneidad e isotropía es la de un fluido perfecto:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (1.6)$$

²Esto es, superficies tomadas a un tiempo determinado, $t = \text{constante}$.

donde u_μ es la cuadrivelocidad del fluido y ρ y p son su densidad de energía y presión, respectivamente. De esta manera las ecuaciones de campo (1.1) se reducen a dos ecuaciones independientes conocidas como ecuaciones cosmológicas de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2} \quad (1.7)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.8)$$

donde \dot{a} y \ddot{a} son la primera y segunda derivada temporal de a , respectivamente. En la primera de las expresiones anteriores se puede definir $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$, donde H se conoce como parámetro de Hubble. Además, se pueden simplificar ambas ecuaciones redefiniendo ρ y p de manera que incluyan los términos asociados a la constante cosmológica. Esto es, interpretar la constante cosmológica como parte del tensor energía momento, es decir como una energía de vacío con densidad ρ_Λ y presión p_Λ :

$$\rho \longrightarrow \rho - \rho_\Lambda$$

$$p \longrightarrow p + p_\Lambda,$$

donde $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$. Realizando estas sustituciones se obtiene:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \quad (1.9)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (1.10)$$

Hasta acá, las ecuaciones describen un Universo formado por un fluido ideal, caracterizado por el tensor $T_{\mu\nu}$ y la relación entre sus componentes ρ , p y Λ . Se puede generalizar esta idea y considerar que el fluido ideal está compuesto por N especies diferentes, cada una de las cuales no interactúa con las otras y evoluciona de manera independiente pero, al mismo tiempo, aporta a la densidad y a la presión total. Las ecuaciones de Friedmann quedan, en ese caso:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{K}{a^2} \quad (1.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3p_i), \quad (1.12)$$

donde el subíndice i corre sobre las N especies y la energía de vacío asociada a la constante cosmológica Λ es sólo una de ellas. Cada especie del fluido ideal está caracterizada por

una ecuación de estado que relaciona su presión y su densidad, $f(\rho, p) = 0$. En cosmología se consideran fluidos ideales barotrópicos, es decir, fluidos cuya presión es proporcional a su densidad y no depende de ninguna otra variable de estado como, por ejemplo, la temperatura. De este modo, se tiene que:

$$p = \omega \rho, \quad (1.13)$$

donde ω es una constante. Las especies que constituyen el fluido ideal cosmológico son, además de la energía de vacío, las partículas relativistas, como los fotones o los neutrinos, y las partículas no relativistas, como el polvo y el gas. Las partículas relativistas, o radiación, tienen una ecuación de estado dada por $\omega = \frac{1}{3}$; las no relativistas, como la materia, las estrellas y las galaxias, tienen una presión despreciable, por lo tanto se considera $\omega = 0$; finalmente, la constante cosmológica Λ describe una componente del Universo que ejerce una presión negativa, con $\omega = -1$.

Las ecuaciones de Friedmann relacionan la curvatura del Universo y la manera en la que evoluciona el factor de expansión con la densidad de energía total $\sum \rho_i$, por lo que las expresiones (1.11) y (1.12) son suficientes para determinar K y $a(t)$ si se conocen las componentes ρ_i . Un modo de comprender mejor esta idea es definir la densidad de energía crítica para la cual $K = 0$, es decir, el Universo es plano:

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Luego, se puede definir el parámetro de densidad de cada componente del Universo como

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c},$$

y el parámetro de densidad total como

$$\Omega_{tot} = \sum \Omega_i.$$

El parámetro Ω_{tot} relaciona la densidad total de energía del Universo con su geometría, ya que

$$\Omega_{tot} > 1 \iff K = +1$$

$$\Omega_{tot} = 1 \iff K = 0$$

$$\Omega_{tot} < 1 \iff K = -1,$$

y su determinación constituye uno de los principales problemas en cosmología.

Derivando la expresión (1.11) y combinándola con (1.12) se obtiene:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) = 0 \quad (1.14)$$

que en términos del parámetro de Hubble queda:

$$\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0 \quad (1.15)$$

Esta ecuación también puede ser expresada como:

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p\frac{d}{dt}(a^3) = 0 \quad (1.16)$$

que resulta equivalente a la de conservación de la energía $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$, esto es, la versión relativista de la Primera Ley de la Termodinámica. Es decir que la conservación de la energía en un Universo de FRW se encuentra implícita en las ecuaciones de Friedmann. Es interesante notar que no existe una noción de conservación de la “energía total”, dado que la energía puede ser intercambiada entre la materia y la geometría del ET.

Utilizando la ecuación de conservación (1.16) se encuentra que

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \quad (1.17)$$

El resultado anterior es válido para cada una de las especies que componen el fluido cosmológico por separado, siempre y cuando éstas no interactúen. Si $\rho_{i,0}$ es la densidad actual de cada especie (el subíndice 0 denota, a partir de este punto, el valor de una variable a tiempo presente), entonces la densidad total de energía del universo en la época $a(t)$ es:

$$\rho = \sum_{i=1}^N \frac{\rho_{i,0}}{a^{-3(1+\omega)}} \quad (1.18)$$

donde, por simplicidad, se fija la normalización $a(t_0) = 1$. Entonces, la ecuación de Friedmann (1.11) puede escribirse como:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=1}^N \frac{\rho_{i,0}}{a^{-3(1+\omega)}} - \frac{K}{a^2} \quad (1.19)$$

Evaluando esta ecuación en el presente se obtiene:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_{i=1}^N \rho_{i,0} - K \quad (1.20)$$

Para poder estudiar la curvatura del Universo, se puede reescribir la ecuación anterior de la forma:

$$K = H_0^2 \left(\frac{8\pi G}{3H_0^2} \sum_{i=1}^N \rho_{i,0} - 1 \right), \quad (1.21)$$

de modo que K queda determinada por el contenido de energía del Universo y el valor de la constante cosmológica (que se encuentra en la componente ρ_Λ). El Universo será plano, entonces, cuando la densidad de energía $\sum_{i=1}^n \rho_{i,0}$ sea igual a la densidad crítica:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (1.22)$$

El motivo por el que se evalúan las variables en la actualidad, añadiendo el subíndice 0, es que de ese modo las ecuaciones quedan expresadas en función de cantidades que pueden ser medidas hoy, como por ejemplo H_0 .

En términos de la densidad crítica, es posible definir el parámetro de densidad correspondiente a cada especie del Universo en la actualidad:

$$\Omega_{i,0} = \frac{\rho_{i,0}}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{i,0}. \quad (1.23)$$

Si además se definen

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad (1.24)$$

$$\Omega_K = -\frac{K}{H_0^2}, \quad (1.25)$$

se puede escribir la ecuación (1.21) de una forma más elegante:

$$\sum_{i=1}^N \Omega_{i,0} + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1. \quad (1.26)$$

Así, la ecuación de evolución del factor de escala $a(t)$ puede reescribirse:

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left[\sum_{i=1}^N \Omega_{i,0} (a^{-(1+3\omega)} - 1) + \Omega_\Lambda (a^2 - 1) + 1 \right]. \quad (1.27)$$

A través de esta expresión, conociendo el contenido de energía del Universo es posible determinar su evolución temporal.

Se puede obtener una solución para $a(t)$ integrando las ecuaciones de Friedmann y teniendo en cuenta que $\frac{\dot{a}}{a} = \frac{da/dt}{a} = H(a)$, de manera que $dt = \frac{da}{aH(a)}$ y, por lo tanto:

$$\int_0^t dt = \int_0^a \frac{da'}{a'H(a')}. \quad (1.28)$$

En muchos casos es imposible obtener una solución explícita $a(t)$, y la evolución del factor de expansión se expresa paramétricamente, definiendo una variable τ a partir de la cual se determinan por separado $a(\tau)$ y $t(\tau)$. Una de las soluciones explícitas más conocidas se encuentra para el llamado Universo Einstein-de Sitter: un Universo plano ($K = 0$), dominado por materia ($p = 0$) y con constante cosmológica $\Lambda = 0$. Imponiendo estas condiciones, la ecuación (1.28) queda:

$$\int_0^t dt = \int_0^a \frac{\sqrt{a'} da'}{\sqrt{\frac{8\pi G \rho_0 a_0^3}{3}}}, \quad (1.29)$$

de donde se puede llegar analíticamente a la expresión:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{8\pi G \rho_0}{3} \right)^{1/3} t^{2/3}. \quad (1.30)$$

Es decir que en un Universo Einstein-de Sitter, el factor de expansión evoluciona como

$$a \propto t^{2/3}.$$

El modelo cosmológico más aceptado actualmente es el Λ CDM: un Universo plano, con constante cosmológica $\Lambda \neq 0$, que contiene materia ordinaria y materia oscura fría, es decir, con velocidades no relativistas. Es un modelo simple y que concuerda con las observaciones. Sus parámetros, según Sánchez et al. (2006), son: $\Omega_m = 0,237 \pm 0,020$, $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$, $\Omega_K = 0$ y $H_0 = 74 \pm 2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

1.3. Formación de estructuras

En la sección anterior se presentaron las ecuaciones que describen la expansión de un Universo en donde se verifica el Principio Cosmológico. Este es el escenario más aceptado por la comunidad astronómica en la actualidad. No obstante, si el Universo fuera estrictamente homogéneo e isótropo no existirían estructuras de ningún tipo: no habría cúmulos, filamentos, galaxias, estrellas ni planetas; mucho menos personas para observarlo. La distribución perfectamente homogénea de materia generaría un campo gravitatorio estático que no cambiaría nunca, y el Universo se expandiría o contraería según las ecuaciones de campo de Einstein sin cambiar jamás su estructura. Debe asumirse, entonces, que la hipótesis de homogeneidad e isotropía se cumple a partir de escalas lo suficientemente grandes, y que a escalas menores el Universo no cumple con el Principio Cosmológico.

En este contexto, las estructuras observadas, señaladas en las Figuras 1.1 y 1.2, son entendidas como la amplificación de fluctuaciones primordiales en la densidad de materia de un Universo primitivo cuasi-homogéneo. Por inestabilidad gravitacional, las regiones con excesos en el campo de densidad comenzaron a acretar materia. Por el mismo motivo, las zonas menos densas fueron cediendo masa, lo cual explica la existencia de gigantescas regiones vacías.

Esta idea puede implementarse matemáticamente mediante un tratamiento lineal, tomando la métrica de la ecuación (1.4) e introduciendo pequeñas perturbaciones. Este tratamiento es conocido como “aproximación newtoniana”, y describe la evolución de estructuras considerando fluctuaciones en el campo de densidad del Universo, a partir del contraste adimensional de densidad δ :

$$\delta(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\rho(\mathbf{r}, t) - \rho_b(t)}{\rho_b(t)}, \quad (1.31)$$

donde $\rho(\mathbf{r}, t)$ es la densidad en el punto \mathbf{r} y $\rho_b(t)$ es la densidad media del Universo. El nombre se debe a que, a través de esta implementación, se obtienen ecuaciones de campo similares a las de la gravedad clásica (Bardeen, 1980). Introduciendo pequeñas perturbaciones en la métrica de FRW, y luego estudiando la evolución de ρ a partir de las ecuaciones de campo de Einstein para un fluido ideal en un Universo plano, se puede llegar a que la componente $G_{00} = 8\pi GT_{00}$ es análoga a la ecuación de Poisson de la gravitación newtoniana:

$$G_{00}^0 = \nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 (\rho - \rho_b) = 4\pi G a^2 \rho_b \delta. \quad (1.32)$$

La ecuación (1.32) no expresa exactamente lo mismo que la ecuación de Newton, sino que representa una solución a las ecuaciones de Einstein en el límite de campos débiles, con un término fuente dado por el contraste de densidad δ : lo que “genera” gravedad en cada punto es la diferencia entre la densidad del fluido y la densidad media ρ_b . La ecuación de movimiento que hay que resolver en este caso está dada por:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\nabla \Phi}{a}. \quad (1.33)$$

Esta aproximación sólo resulta válida en regiones acotadas, dado que el límite de campo débil $\Phi \ll c^2$ asegura un fluido con campo de velocidades $v \ll c$. Puede verse (Peebles, 1980) que si se tiene una región con tamaño R y una masa $M \sim \rho R^3$, estas condiciones se satisfacen si $\Phi \sim G \frac{M}{R} \sim G \rho R^2 \ll c^2$, y dado que en un Universo FRW la constante de Hubble $H^2 \sim G \rho$, la aproximación newtoniana sólo es válida si

$$R \ll c H_0^{-1} = 3000 h^{-1} \text{Mpc},$$

es decir, en regiones pequeñas con respecto al horizonte de eventos. Afortunadamente, este límite se encuentra por encima de las escalas en que se observan y estudian, típicamente, las grandes estructuras del Universo: el Grupo Local, que incluye a la Vía Láctea, Andrómeda, M33 y unas 30 galaxias más pequeñas no supera $\sim 1 h^{-1}\text{Mpc}$; el supercúmulo *Laniakea* abarca unos $\sim 160 h^{-1}\text{Mpc}$ (Tully et al., 2014), y se trata de una de las mayores estructuras observadas³.

1.3.1. Aproximación de Zeldóvich

Zel'Dovich (1970) desarrolló un método cinemático para estudiar la formación de estructuras denominado Teoría Lagrangiana de perturbaciones a primer orden o, simplemente, Aproximación de Zeldóvich. Este físico soviético propuso que, para una distribución de materia en donde se cumpla que $\langle \delta^2 \rangle \ll 1$, se puede representar un elemento de fluido mediante una partícula, y calcular el desplazamiento inicial generado por el campo de aceleración circundante. Luego, extrapolar el movimiento en la dirección inicial y expresar la posición de la partícula en función del tiempo, en coordenadas físicas \mathbf{r} , como:

$$\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{q} + b(t)\vec{f}(\mathbf{q}), \quad (1.34)$$

donde \mathbf{q} son las coordenadas comóviles. Estas coordenadas representan la posición de las partículas en un sistema de referencia que se expande junto con el Universo. Es decir, dos partículas con una distancia comóvil $\Delta\mathbf{q}$ constante entre sí, se alejarán a lo largo del tiempo t en el sistema de coordenadas físicas, de manera que su distancia crecerá como $\Delta\mathbf{r} = a(t)\Delta\mathbf{q}$. De este modo, el término $a(t)\mathbf{q}$ representa la expansión general de Hubble, mientras que el factor $b(t)$ es una función del tiempo que modela la evolución temporal del campo de desplazamiento $\vec{f}(\mathbf{q})$ y que se anula para $t \rightarrow 0$, de manera que el segundo término se puede entender como una perturbación en una distribución homogénea de partículas. Se dice que \mathbf{r} representa la posición euleriana y \mathbf{q} la posición lagrangiana. Dividiendo la ecuación (1.34) por $a(t)$ y aproximando a primer orden, la componente i -ésima del desplazamiento lagrangiano puede escribirse como:

$$x_i = \frac{r_i}{a(t)} \approx \mathbb{I}_{ij}q_j + \frac{b(t)}{a(t)} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} q_j \equiv A_{ij}(t)q_j, \quad (1.35)$$

³Existen, no obstante, sistemas que desafían los postulados de homogeneidad del Principio Cosmológico, con tamaños de hasta $\sim 500 h^{-1}\text{Mpc}$, como es el caso del LQG (por sus siglas en inglés, *Large Quasar Group*, Clowes et al. 2013), cuyas características merecen ser estudiadas con mayor detalle.

donde \mathbb{I}_{ij} es la matriz identidad ($\mathbb{I}_{ij} = 1$ si $i = j$; $\mathbb{I}_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

Para estudiar la densidad física es necesario obtener el jacobiano de la transformación de coordenadas lagrangianas a eulerianas, es decir, de \mathbf{q} a \mathbf{r} . Los elementos de volumen satisfacen $d^3r = P(t)d^3q$, donde $P(t) \equiv \det(A_{ij})$. Como $\frac{\partial f_i}{\partial q_j}$ es el tensor de esfuerzos, que es simétrico y por lo tanto diagonalizable, se pueden obtener los autovalores de A_{ij} . Si se denota a estos autovalores en orden creciente como (α, β, γ) , se obtiene:

$$\frac{\rho}{\rho_b} = \left[\left(1 + \frac{b}{a}\alpha\right) \left(1 + \frac{b}{a}\beta\right) \left(1 + \frac{b}{a}\gamma\right) \right]^{-1} \quad (1.36)$$

donde ρ_b es la densidad media del Universo en coordenadas lagrangianas y, por definición, es constante. Estudiando la última ecuación se puede observar que en regiones con autovalores negativos ρ se hace más grande que ρ_b : estas son las zonas en donde se forman estructuras sobredensas. El colapso se da, en primera instancia, en la dirección del autovector correspondiente al autovalor más grande. Es decir que para perturbaciones en forma de elipsoides triaxiales, el colapso se produce primero a lo largo del semieje más corto. De este modo, la gravedad acentúa asfericidades, formando estructuras aplanadas denominadas “panqueques de Zeldóvich”.

Como el tensor de esfuerzos es simétrico, el campo de desplazamiento $\vec{f}(\mathbf{q})$ es irrotacional y puede ser expresado como el gradiente de un potencial escalar ψ :

$$\vec{f}(\mathbf{q}) = \vec{\nabla}\psi(\mathbf{q}) \Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial q_j} \quad (1.37)$$

Así, linealizando la relación (1.36), el contraste de densidad puede escribirse como

$$\delta = -\frac{b}{a}(\alpha + \beta + \gamma) = -\frac{b}{a}\vec{\nabla} \cdot \mathbf{f} \quad (1.38)$$

y a partir de esta ecuación se obtiene una sencilla expresión para describir la evolución de la posición lagrangiana de una partícula:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{q} + \frac{b(t)}{a(t)}\vec{f}(\mathbf{q}) \quad (1.39)$$

Como se supone $\langle \delta^2 \rangle \ll 1$, la evolución del contraste de densidad δ se puede separar en una parte temporal y otra espacial, es decir:

$$\delta(\mathbf{x}, t) = D(t)\delta_0(\mathbf{x}). \quad (1.40)$$

La evolución de $\delta(\mathbf{x}, t)$ se obtiene, entonces, en términos de la componente temporal $D(t)$, cuyo comportamiento depende del tipo de Universo que se imponga para resolver las ecuaciones de campo: dominado por radiación, por materia, con o sin presión, con una constante

cosmológica $\Lambda \neq 0$, etc. En general, las soluciones de $D(t)$ muestran un modo creciente $D^+(t)$ y un modo decreciente $D^-(t)$. Como el modo decreciente se vuelve rápidamente despreciable frente al modo creciente, el término $D^+(t)$ domina la evolución de las perturbaciones. De esta manera, el factor $\frac{b(t)}{a(t)}$ en la ecuación (1.39) es, sencillamente, el modo creciente $D^+(t)$.

La aproximación de Zeldóvich no puede ser utilizada para realizar simulaciones cosmológicas, ya que sólo un costoso tratamiento *full N-body*⁴ (capítulo 3) es capaz de tener en cuenta los efectos no lineales en la evolución de las estructuras (Figura 1.4). Sin embar-

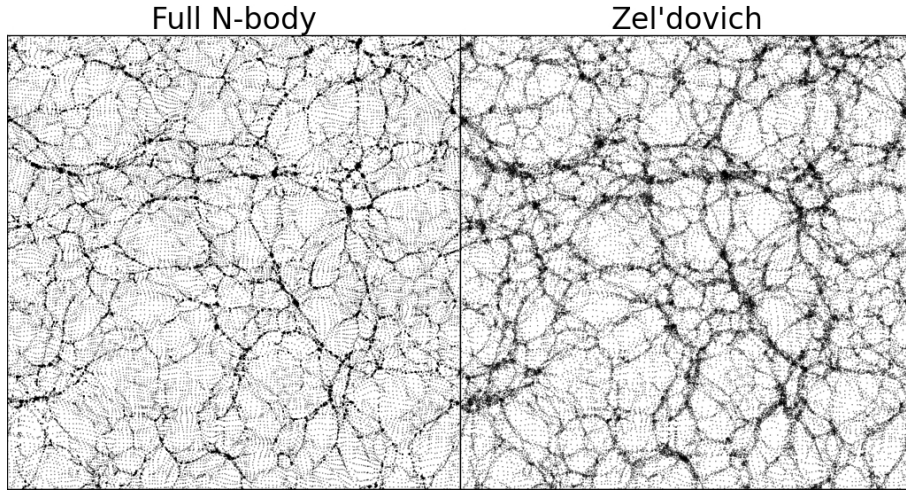


Figura 1.4: Realizaciones de simulaciones Λ CDM (Neyrinck, 2013). Las posiciones de las partículas fueron determinadas a $z = 0$ mediante un método de tipo full N-body (izquierda) y la aproximación de Zeldóvich (derecha). Se puede notar que, aunque a gran escala (donde es válido $\langle \delta^2 \rangle \ll 1$) las estructuras son similares, a pequeña escala los resultados son muy diferentes.

go, es muy útil para establecer condiciones iniciales. Como se llega a una solución mediante ecuaciones linealizadas y, por lo tanto, se puede desarrollar como una suma de modos de Fourier, resulta conveniente para describir estadísticamente el campo de densidad. De este modo, transformando la variable \mathbf{x} se obtiene el modo de Fourier k :

$$\hat{f}_k = -i \frac{\hat{\delta}_k}{k^3} \mathbf{k} \quad (1.41)$$

De acuerdo a la ecuación anterior⁵, si se fija el modo $\hat{\delta}_k$ en las condiciones iniciales, es posible construir el campo de desplazamiento correspondiente en posición y velocidad.

⁴Es decir, resolviendo numéricamente las ecuaciones no lineales de la gravedad para las N partículas

⁵Notar que $\frac{\mathbf{k}}{k^3} \propto k^{-2}$

La aproximación de Zeldóvich también resulta útil para estudiar las etapas tempranas de evolución de los “protohalos”, es decir, las regiones centradas sobre máximos locales del campo de densidad. Como se verá en el siguiente capítulo, este método juega un papel fundamental en el desarrollo del modelo más aceptado para describir la manera en que dichas estructuras obtienen su momento angular, la teoría de torque tidal (TTT).

1.3.2. Modelo del colapso esférico

La aproximación de Zeldóvich sirve para describir el colapso lineal inicial de las perturbaciones, pero si se las quiere conectar con las estructuras no lineales que se observan hoy se puede recurrir al modelo de colapso esférico, desarrollado por Gunn & Gott (1972). Este es un modelo simple, con simetría esférica, que describe el crecimiento, el punto en el que se separan de la expansión general, el colapso y posterior virialización de los halos.

Para explicar la formación de objetos no lineales, es decir aquellos en los que el campo de densidad no puede ser aproximado mediante el régimen lineal, estos autores propusieron una sencilla perturbación inicial de tipo escalón. En este marco, se toma una región comóvil de tamaño R_0 , con un contraste de densidad inicial δ_i . Esto significa que la masa dentro de R_0 es $M_0 = (4\pi R_0^3/3)\bar{\rho}(1 + \delta_i) \simeq (4\pi R_0^3/3)\bar{\rho}$, donde $\bar{\rho}$ denota la densidad comóvil de fondo. Como el Universo evoluciona, el tamaño de la región cambia. Si R denota el tamaño comóvil en algún tiempo posterior al inicial, el contraste de densidad adentro de esa región estará dado por la expresión:

$$(R_0/R)^3 \equiv (1 + \delta).$$

Como el radio de una región sobredensa se comporta de la misma manera que el factor de expansión para un Universo cerrado, se puede modelar el crecimiento de una perturbación esféricamente simétrica a través de las ecuaciones de la cosmología clásica.

En primer lugar, se puede aplicar la ecuación de Friedmann (1.9) para estudiar la evolución del tamaño. Esta ecuación se puede reparametrizar en función de la variable η , definida como $d\eta = c \frac{dt}{R(t)}$. Asumiendo que $\rho(t) = \rho_0(\frac{R_0}{R})$ y realizando la sustitución $\rho \rightarrow \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}$ se encuentra que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{d\eta}\right)^2 &= \frac{8\pi G\rho}{3}R^4 - kR^2 \\ &= \frac{8\pi G\rho_0^3 R_0^3}{3}R^4 - kR^2 \end{aligned} \quad (1.42)$$

Si se define la constante de escala como

$$R_* \equiv \frac{4\pi G \rho_0 R_0^3}{3} \equiv GM \quad (1.43)$$

donde M es la masa inicial encerrada dentro de la esfera sobredensa, podemos reescribir la ecuación (1.42) como:

$$\left[\frac{d}{d\eta} \left(\frac{R}{R_*} \right) \right]^2 = 2 \left(\frac{R}{R_*} \right) - k \left(\frac{R}{R_*} \right)^2 \quad (1.44)$$

Para una región sobredensa $k = 1$, entonces la solución de la ecuación (1.44) es

$$\frac{R}{R_*} = 1 - \cos \eta \quad (1.45)$$

También con η se puede encontrar el tiempo en el que la región alcanza un radio $R(\eta)$:

$$t(\eta) = \int_0^\eta R(\eta') d\eta' \quad (1.46)$$

Luego, la evolución de una sobredensidad esférica puede ser descrita mediante las siguientes ecuaciones:

$$R(\eta) = R_*(1 - \cos \eta) \quad (1.47)$$

$$t(\eta) = R_*(\eta - \sin \eta) \quad (1.48)$$

Para estudiar los primeros momentos de la sobredensidad se toma $\eta \ll 1$, entonces se puede desarrollar la ecuaciones (1.47) y (1.48) en serie de potencias de η alrededor de $\eta = 0$:

$$R(\eta) \simeq R_* \left(\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{24}\eta^4 + \dots \right) \quad (1.49)$$

$$t(\eta) \simeq R_* \left(\frac{1}{6}\eta^3 - \frac{1}{120}\eta^5 + \dots \right) \quad (1.50)$$

Ignorando los términos de orden mayor que η^5 y combinando las dos ecuaciones anteriores se encuentra que:

$$R(t) \simeq \frac{R_*}{2} \left(\frac{6t}{R_*} \right)^{2/3} \left[1 - \frac{1}{20} \left(\frac{6t}{R_*} \right)^{2/3} \right] \quad (1.51)$$

Si se toma el límite cuando $t \rightarrow 0$, entonces el término dominante es:

$$R(t \rightarrow 0) = \frac{R_*}{2} \left(\frac{6t}{R_*} \right)^{2/3} = \left(\frac{9GMt^2}{2} \right)^{1/3} \quad (1.52)$$

siendo la densidad de las primeras etapas:

$$\rho(t \rightarrow 0) = \frac{3M}{4\pi R^3(t \rightarrow 0)} = \frac{1}{6\pi G t^2} = \rho_0(t) \quad (1.53)$$

De esta manera, se obtiene el mismo resultado que para la evolución de la densidad crítica en un Universo Einstein-de Sitter.

La densidad dentro de una esfera es $\rho \propto \frac{1}{R^3}$. Por lo tanto, la sobredensidad fraccional a primer orden es:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -3\frac{\delta R}{R} = \frac{3}{20} \left(\frac{6t}{R_*} \right)^{2/3} \quad (1.54)$$

Teniendo en cuenta que en un universo Einstein-de Sitter $a(t) \propto t^{2/3}$, se obtiene que $\delta \propto a$. La perturbación se expande junto con el Universo hasta que la densidad en el interior se hace lo suficientemente grande como para detener su crecimiento y comenzar la etapa de colapso. De este modo, luego de la evolución lineal la esfera se desacopla de la expansión de Hubble. A esto se lo denomina punto de retorno o, en inglés, *turnaround*. En las ecuaciones (1.47) y (1.48) se observa que el radio alcanza un máximo para $\eta = \pi$, donde $R_{max} = 2R_*$ en el tiempo $t_{max} = \pi R_*$. Para calcular la densidad de esta esfera con respecto de la del fondo cosmológico se utilizan las ecuaciones (1.52) y (1.53), obteniendo:

$$1 + \delta_{max} = \frac{\rho_{max}}{\rho_0(t_{max})} = \frac{(R_*/2)^3 (6t_{max}/R_*)^2}{R_{max}^3} = \frac{9\pi^2}{16} \simeq 5,55 \quad (1.55)$$

Si se utiliza la ecuación (1.54) se puede calcular el contraste de densidad en este tiempo según la teoría lineal, obteniendo que $\delta_{lin} = \frac{3}{20}(6\pi)^{2/3} \simeq 1,08$. Se puede notar que el contraste de densidad lineal es menor que el obtenido mediante el colapso esférico, $\delta_{lin} < \delta_{max}$.

Luego de alcanzar el punto de retorno, la esfera comienza a colapsar hasta formar un objeto autogravitante, que es lo que se denomina halo. Si sólo actuara la gravedad, este halo colapsaría a una densidad infinita para $\eta = 2\pi$ y $t_{col} = 2\pi R_*$. Esto no ocurre, no obstante, debido a pequeñas irregularidades que hacen que la energía cinética de colapso se convierta en movimientos aleatorios. La perturbación alcanzará así un estado de equilibrio ligado. De acuerdo al teorema del virial, la perturbación en estado de equilibrio tendrá una energía cinética total K relacionada con su energía potencial V a través de:

$$V = -2K \quad (1.56)$$

Si se asume que la energía se conserva desde el punto de retorno hasta lograr el equilibrio, la ecuación (1.56) implica que el radio de virialización, o radio virial R_{vir} , está dado por:

$$R_{vir} = \frac{1}{2}R_{max} = R_* \quad (1.57)$$

Utilizando las ecuaciones (1.47) y (1.48) se puede ver que la perturbación alcanza R_{vir} para $\eta = \frac{3\pi}{2}$ en el tiempo $t_{vir} = R_*(3\pi/2 + 1)^6$. Si se calcula el contraste de densidad no lineal para este tiempo, se obtiene:

$$1 + \delta_{vir} = \frac{(R_*/2)^3(6t_{col}/R_*)^2}{R_{vir}^3} = \frac{(6\pi)^2}{2} \simeq 178. \quad (1.58)$$

Si, en cambio, se calcula el contraste de densidad dado por la teoría lineal en t_{col} , el resultado es $\delta_{lin}(t_{col}) \simeq 1,69$. Como en el t_{max} , el contraste de densidad obtenido con la teoría lineal es menor que el del modelo del colapso esférico: $\delta_{lin}(t_{col}) < \delta_{vir}$.

Con estos resultados se puede afirmar que la teoría lineal resulta sumamente útil para predecir en qué regiones del campo de densidades se formarán los halos. Sin embargo, el modelo de colapso esférico es mucho más adecuado para realizar predicciones razonables acerca de qué tan densos llegarán a ser estos halos.

Así como se utilizó el modelo de Einstein-de Sitter para obtener las propiedades del colapso esférico, la discusión es similar si se toman cosmologías con $\Omega_m \leq 1$ u $\Omega_m \geq 0$, pero los valores de δ_{vir} dependerán del modelo cosmológico adoptado.

1.4. Descripción estadística del campo de densidad

Actualmente, se dispone de grandes catálogos en los cuales se encuentran listadas diferentes propiedades de objetos como galaxias, grupos y cúmulos de galaxias. Si consideramos únicamente sus posiciones⁷, se puede pensar la distribución de materia como una colección de objetos puntuales que puede describirse mediante estadísticos robustos como la función de correlación bipuntual y el espectro de potencia.

1.4.1. Función de correlación bipuntual

Se puede definir la función de correlación bipuntual de diferentes maneras (Peebles, 1969). Una de ellas consiste en considerar la probabilidad conjunta dP de que dos objetos se encuentren en dos elementos de volumen dV_1 y dV_2 separados por una distancia r :

$$dP = \eta^2 dV_1 dV_2 [1 + \xi(r)] \quad (1.59)$$

⁶Se asume que el proceso de virialización es alcanzado luego de un tiempo t_{col} .

⁷La posición de un objeto extendido, como una galaxia o un cúmulo de galaxias, debe ser definida de alguna manera

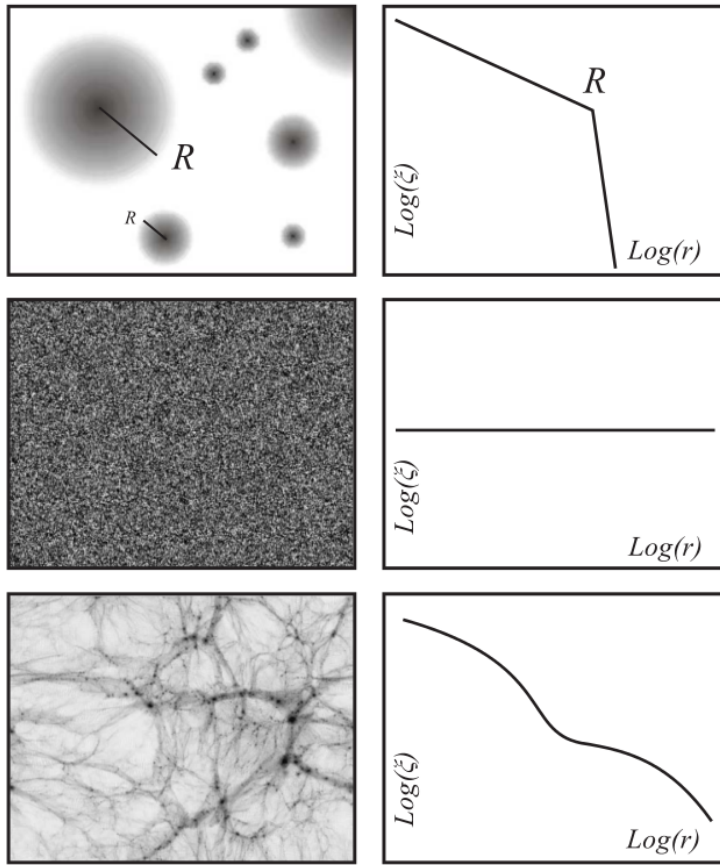


Figura 1.5: Comportamiento de la función de correlación (derecha) para diferentes campos de densidad (izquierda). En escala de grises se muestran regiones subdensas y sobredensas, de blanco a negro, respectivamente. **Arriba:** distribución homogénea de esferas de radio R y perfil idéntico. Centro: distribución de densidad con espectro de ruido blanco. **Abajo:** simulación cosmológica de materia oscura (gentileza de Dante Paz).

Aquí, η es el número medio de elementos por unidad de volumen y $\xi(r)$ representa el exceso de probabilidad respecto de una distribución homogénea. Es decir, si $\xi(r) = 0$ las posiciones de los objetos de la muestra no se encuentran correlacionadas, y la probabilidad $dP = \eta^2 dV_1 dV_2$ es, sencillamente, el producto de dos probabilidades independientes (por ejemplo, en un proceso de Poisson aleatorio uniforme). Si las posiciones de los objetos están correlacionadas, $\xi(r) > 0$ ya que a una dada distancia r es más probable encontrar un par de objetos que en una distribución homogénea. Si, por el contrario, las posiciones están anticorrelacionadas, $-1 < \xi(r) < 0$. Se puede pensar que $\xi(r)$ es, entonces, una estimación del grado de aglomeración (*clustering*, en inglés) de los objetos de la muestra, es decir, del modo en que se acumulan en diferentes escalas dadas por la variable r .

En la Figura 1.5 se muestra el comportamiento de la función de correlación para diferentes distribuciones de densidad. En el primer ejemplo, esferas de radio R con perfiles de densidad idénticos (arriba), $\xi(r)$ muestra un alto grado de aglomeración adentro de la escala característica, que decae suavemente hasta R y luego cae de manera abrupta. La función no se hace nula luego de R debido a la correlación que existe entre elementos de

esferas vecinas, que se encuentran distribuidas de manera independiente. En el segundo ejemplo (medio) se puede ver la función $\xi(r)$ de un campo de densidad construido mediante un proceso de ruido blanco. En este caso, la función de correlación es constante: en cualquier escala existe la misma probabilidad de encontrar objetos vecinos (partículas o halos, por ejemplo) en dos elementos de volumen dV_1 y dV_2 . Dicho de otro modo, en el ruido blanco no hay estructuras, no hay escalas que muestren más o menos *clustering*. El tercer ejemplo presenta, finalmente, una función de correlación característica de observaciones o simulación cosmológicas. En distintas escalas se ven diferentes grados de aglomeración; se encuentra correlación entre elementos que forman estructuras, y correlación entre las propias estructuras a escalas mayores. A medida que $r \rightarrow \infty$, la función $\xi(r) \rightarrow 0$: a escalas lo suficientemente grandes, el Universo se presenta isótropo y homogéneo.

Otro modo de definir la función de correlación bipuntual es considerar la distribución de densidad como una función continua $\rho(r)$ con una media por volumen $\langle \rho(r) \rangle = \eta$, de modo que

$$dP = \langle \rho(x+r)\rho(x) \rangle = \eta^2 dV_1 dV_2 [1 + \xi(r)]. \quad (1.60)$$

Así la función de correlación puede escribirse como:

$$\xi(r) = \frac{\langle [\rho(x+r) - \langle \rho(x) \rangle][\rho(x) - \langle \rho(x) \rangle] \rangle}{\langle \rho(x) \rangle^2} \quad (1.61)$$

Existen diferentes maneras de obtener la función de correlación bipuntual. En primer lugar, se presenta el problema de que algunos catálogos sólo contienen información acerca de las coordenadas angulares (declinación y ascensión recta) de los objetos que listan. En estos casos, $\xi(r)$ sólo puede conocerse a partir de $w(\theta)$, la función de correlación angular, que contiene información de $\xi(r)$ proyectada en el plano del cielo. En catálogos con información acerca del redshift de los objetos y en simulaciones cosmológicas, $\xi(r)$ puede determinarse directamente a partir de estimadores que utilizan el conteo de pares de objetos o el número de vecinos a diferentes distancias.

Al determinar la función de correlación a partir de catálogos de galaxias, diversos autores (Groth & Peebles (1977), Bahcall & Soneira (1983), Maddox et al. (1990)) han coincidido en que su comportamiento más general (así como el de $w(\theta)$) puede ser aproximado razonablemente por una ley de potencias:

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma} \quad (1.62)$$

con valores de $\gamma \simeq 1,7$ y de radio de escala $r_0 \approx 4 h^{-1}\text{Mpc}$ para la correlación entre galaxias, $r_0 \approx 10 h^{-1}\text{Mpc}$ entre grupos y $r_0 \approx 20 h^{-1}\text{Mpc}$ entre cúmulos.

1.4.2. Espectro de potencia

Otro modo de caracterizar la distribución de materia es utilizando el espacio de las fases en lugar del espacio de las distancias (Figura 1.6). Si se asume que el Universo es periódico

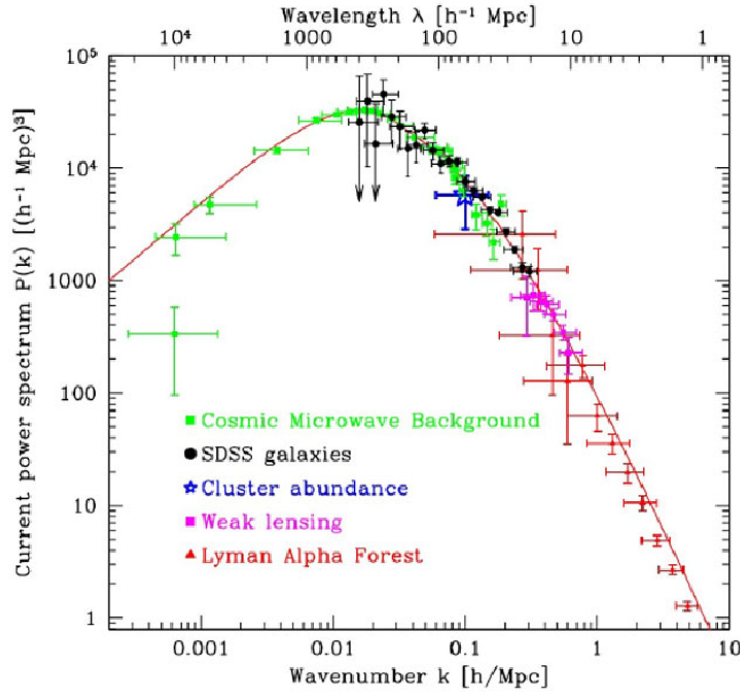


Figura 1.6: Ajuste del espectro de potencia (curva roja) superpuesto con diferentes mediciones: CMB, galaxias del catálogo SDSS, abundancia de cúmulos, lentes débiles y las constricciones dadas por las *Lyman Alpha Forest*. La curva describe estadísticamente la distribución de materia del Universo en diferentes escalas. Extraído de Tegmark et al. (2004).

en un volumen V lo suficientemente grande, el contraste de densidad puede expandirse como suma de ondas planas con fases aleatorias en ese volumen, i.e., una expansión en series de Fourier:

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{(2\pi)^{2/3}}{V^{1/2}} \sum \widehat{\delta}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.63)$$

donde

$$\widehat{\delta}_k = \frac{1}{(2\pi)^{2/3} V^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r. \quad (1.64)$$

Es decir, $\widehat{\delta}_k$ son las amplitudes de las fluctuaciones en densidad.

Dado que $\delta(\mathbf{r})$ es real y tiene media cero, entonces $\langle \widehat{\delta}_k \rangle = 0$. Si se asume además

homogeneidad e isotropía, las fluctuaciones quedan completamente caracterizadas por:

$$P(k) = \langle |\widehat{\delta}_k|^2 \rangle \quad (1.65)$$

$P(k)$ se conoce como espectro de potencia y relaciona la amplitud de las fluctuaciones de densidad en cada longitud de onda $\lambda \equiv \frac{2\pi}{k}$.

De manera complementaria a lo que se vio en la sección anterior, la función de correlación también puede ser definida como:

$$\xi(r) = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\delta}_k|^2 e^{-2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 k \quad (1.66)$$

Se puede observar aquí que la función de correlación no es otra cosa que la transformada de Fourier del espectro de potencia y que, por lo tanto, ambos estadísticos contienen la misma información.

2 Momento angular en halos de DM

En el siguiente capítulo se presenta una primera aproximación a la discusión principal de este trabajo: la manera en que las grandes estructuras del Universo adquieren momento angular. La cuestión acerca de cómo se origina y evoluciona el momento angular en halos de DM no tiene una respuesta sencilla, y de ésta dependen, en buena medida, modelos analíticos y semianalíticos de formación de galaxias. Las simulaciones de N-cuerpos muestran, además, que existe correlación entre el momento angular de los halos y la distribución de materia en su entorno. Esto sugiere que el momento angular juega un papel importante en el proceso de formación de estos sistemas, conectando la dinámica interna de los halos con la estructura en gran escala.

En primer lugar se introduce la Teoría de Torque Tidal (TTT), el modelo más aceptado en la actualidad para describir el fenómeno de adquisición y evolución del momento angular en el régimen lineal y cuasi-lineal de crecimiento de las fluctuaciones de densidad. Se repasan aquí sus fundamentos principales, formulación analítica y aplicaciones más exitosas. Se estudian luego algunas de las cuestiones presentes en la literatura que escapan a la predicciones de la TTT, analizando las probables causas de estas desviaciones y la posibilidad de modelos alternativos.

2.1. La teoría de torque tidal (TTT)

2.1.1. Descripción cualitativa

El primer cálculo detallado sobre el origen de la rotación de las protogalaxias (y de los protohalos de materia oscura) fue realizado por Peebles (1969), quien utilizó la aproximación lineal para describir de qué manera crece el momento angular de la materia contenida en una región esférica comóvil del Universo en expansión. Sus resultados indicaron que la adquisición de momento angular era sólo un efecto de segundo orden, proporcional a $t^{5/3}$ en un Universo Einstein-de Sitter (es decir, un Universo plano, con constante cosmológica nula

y compuesto únicamente por materia). Esto condujo a la idea de que el mismo comportamiento podía esperarse durante la evolución temprana de las protogalaxias. Doroshkevich (1970) demostró, sin embargo, que en general el momento angular de una protogalaxia crece a primer orden (proporcional a t en un Universo plano), y que la conclusión de Peebles era una consecuencia de la simetría que impuso para resolver las ecuaciones. Aunque Doroshkevich dio pocos detalles de sus cálculos, una revisión posterior de White (1984) permite comprender mejor los límites del modelo y verificar sus predicciones con simulaciones numéricas.

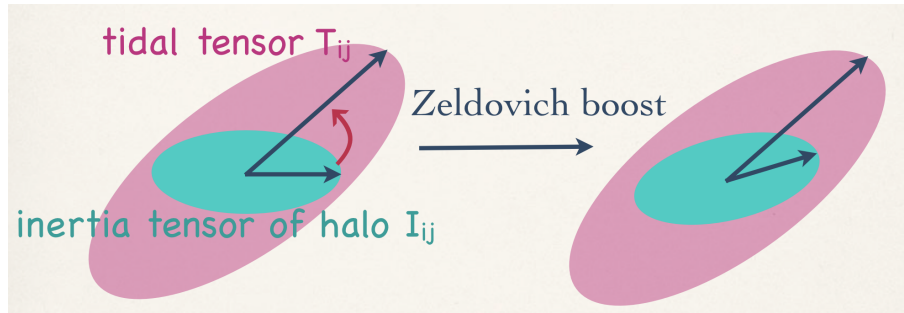


Figura 2.1: Representación esquemática en Codis et al. (2015) de la TTT. En el orden lineal, la desalineación entre el tensor de forma del protohalo (la parte sin traza del tensor de inercia) y el campo tidal a su alrededor produce una acumulación de torques a lo largo de su historia de formación que se traduce, finalmente, en una ganancia neta de momento angular.

La idea detrás de la TTT es la siguiente: utilizando la aproximación de Zeldóvich se puede determinar analíticamente el modo en que la desalineación entre el tensor de forma de un protohalo y el campo tidal a su alrededor, producido por la distribución de materia circundante, genera una acumulación de torques (Figura 2.1). Esto induce, en última instancia, una ganancia neta de momento angular durante la fase de crecimiento lineal de las perturbaciones (régimen de validez de la aproximación de Zeldóvich), ya que en esta etapa el torque se produce al mismo tiempo que el protohalo se expande junto con el Universo. Como se verá más adelante, la TTT predice un crecimiento del momento angular $J \propto a^{3/2}$. Sin embargo, luego del punto de *turnaround*, cuando el halo se desacopla de la expansión general de Hubble, la influencia del campo tidal circundante deja de ser significativa y el mecanismo de torque tidal pierde eficiencia. Es decir que en un escenario ideal, en donde el origen de la rotación de un halo se deba exclusivamente a la TTT, luego del punto de *turnaround* el momento angular debería dejar de crecer y mantenerse constante (Figura 2.2).

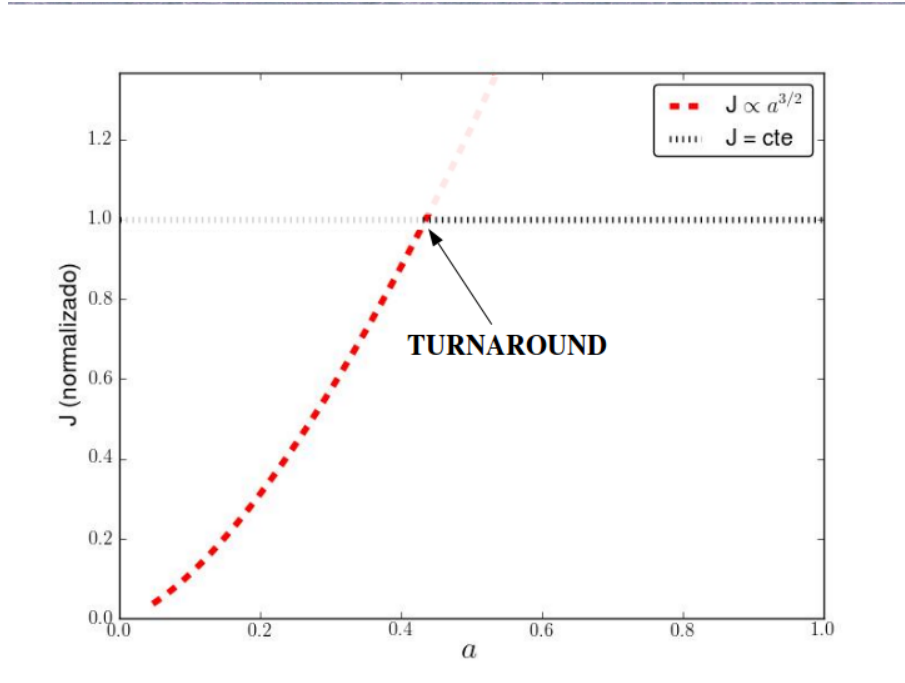


Figura 2.2: El crecimiento del momento angular que predice la TTT: una primera etapa en donde $J \propto a^{3/2}$ (a es el factor de escala) y otra, luego del punto de *turnaround*, en que J se mantiene constante. En la figura el momento angular está normalizado a su valor final.

Como ya se dijo, la aproximación de Zeldóvich propone expresar la posición lagrangiana de una partícula a un tiempo $t > 0$ como:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{q} + D^+(t)\vec{f}(\mathbf{q})$$

en donde \mathbf{q} representa la posición en coordenadas comóviles en $t = 0$ y $D^+(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$ es el modo creciente de la evolución temporal de una perturbación (ecuación 1.39). Como el factor $\vec{f}(\mathbf{q})$ no depende del tiempo sino del gradiente del potencial escalar $\psi(\mathbf{q})$, el movimiento de cada partícula se produce siempre en la misma dirección, lo cual le da al modelo su sencillez y, al mismo tiempo, permite comprender por qué la aproximación no resulta útil para modelar la evolución del campo de densidad en escalas pequeñas (ver Figura 1.4). Sin embargo, si se consideran distribuciones de materia suavizadas en la escala de los protohalos, la condición $\langle \delta^2 \rangle \ll 1$ se satisface durante buena parte del periodo que precede al *turnaround*, de modo que la aproximación puede utilizarse para estudiar la manera en que interactúan estas estructuras con el entorno.

2.1.2. Formulación analítica

El momento angular de un protohalo cuya materia está encerrada en un volumen V_L puede expresarse como:

$$\mathbf{J}(t) = \int_{V_L} [\mathbf{r}(\mathbf{q}, t) - \mathbf{r}_{cm}(t)] \times \mathbf{v}(\mathbf{q}, t) \rho_0 a^3(t) d^3q \quad (2.1)$$

en donde $\mathbf{r}_{cm}(t)$ es la posición del centro de masa al tiempo t y $\mathbf{v}(\mathbf{q}, t)$ es la velocidad de cada partícula con respecto a la del protohalo. En coordenadas comóviles, esta expresión puede escribirse de manera exacta como (ecuación 1.35):

$$\mathbf{J}(t) = a^2(t) \int_{V_L} [\mathbf{x}(\mathbf{q}, t) - \mathbf{x}_{cm}(t)] \times \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{q}, t) \rho_0 a^3(t) d^3q \quad (2.2)$$

Sin embargo, considerando la aproximación de Zeldóvich, $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{q}, t) = \dot{D}^+(t) \vec{f}(\mathbf{q})$ tiene la misma dirección que el desplazamiento $\mathbf{x}(\mathbf{q}, t) - \mathbf{q} = D^+(t) \vec{f}(\mathbf{q})$, por lo que, a primer orden, esa parte del producto vectorial del integrando se anula. Eliminando estos términos y reemplazando $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{q}, t)$ se puede llegar a:

$$\mathbf{J}(t) = a^2(t) \dot{D}^+(t) \int_{V_L} [\mathbf{q} - \mathbf{q}_{cm}] \times \vec{\nabla} \psi(\mathbf{q}) \rho_0 a^3(t) d^3q \quad (2.3)$$

El significado de esta última expresión puede aclararse un poco más si se asume que el potencial escalar ψ puede ser razonablemente aproximado por su desarrollo de Taylor alrededor de \mathbf{q}_{cm} hasta el segundo orden:

$$\psi(\mathbf{q}) = \psi(\mathbf{q}_{cm}) + (q_i - q_i^{cm}) \left. \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right|_{\mathbf{q}_{cm}} + \frac{1}{2} (q_i - q_i^{cm})(q_j - q_j^{cm}) \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\mathbf{q}_{cm}}$$

Reemplazando en (2.3) y quedándose únicamente con los términos hasta segundo orden se obtiene:

$$J_i(t) = a^2(t) \dot{D}^+(t) \epsilon_{ijk} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j \partial q_l} \right|_{\mathbf{q}_{cm}} \int_{V_L} [q_l - q_l^{cm}] [q_k - q_k^{cm}] \rho_0 a^3(t) d^3q \quad (2.4)$$

A pesar de su aspecto poco amigable, la ecuación (2.4) contiene cantidades conocidas. La integral define la componente I_{lk} del tensor de inercia de la materia contenida en V_L , mientras que $T_{jl} = \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j \partial q_l} \right|_{\mathbf{q}_{cm}}$ es el Hessiano del potencial gravitatorio alrededor de su centro de masa. Es decir, el primero, una integral sobre V_L , depende de la distribución de materia en el interior del protohalo; el segundo, construido a partir de derivadas parciales, depende

además de la disposición de las perturbaciones vecinas. Puede verse que sólo aportan al producto vectorial de la ecuación (2.4) las partes detrazadas de \mathbf{I} y \mathbf{T} , el tensor de forma y el tensor tidal, respectivamente. De esta manera se obtiene la expresión básica de la TTT (White, 1984):

$$J_i(t) = a^2(t)\dot{D}^+(t)\epsilon_{ijk}T_{jl}I_{lk} \quad (2.5)$$

La ecuación anterior expresa que el momento angular surge como consecuencia de la desalineación entre los ejes de estos tensores, y Doroshkevich verificó que al imponer que V_L fuera un volumen esférico se obtenía el efecto de segundo orden determinado por Peebles. Por supuesto que los efectos tidales del campo de densidad circundante no sólo afectan al protohalo aumentando su momento angular, sino que además deforman el parche de materia, haciendo que su tratamiento puramente analítico sea en realidad más complicado. Sin embargo, es posible hacer predicciones acerca de la evolución del momento angular de un protohalo de DM si se considera que una gran parte de su proceso de formación se da en un Universo primitivo que se aproxima mucho al modelo de Einstein-de Sitter. En este Universo $a \propto t^{2/3}$, mientras que el modo creciente $D^+ \propto a$. Reemplazando en (2.5) se puede comprobar que $J \propto t$. La TTT, entonces, establece que durante la etapa previa al *turnaround*, para una cosmología plana dominada por materia como la del Universo primitivo donde comenzaron a crecer las perturbaciones, $J \propto a^{3/2}$.

2.1.3. Aplicaciones

Vale la pena remarcar dos cuestiones respecto a la TTT que le dan, en parte, su gran importancia en la descripción del momento angular de halos de DM. Más aún, si se considera su estudio en el marco de la estructura en gran escala del Universo. La primera es el hecho de que aporta una expresión analítica que permite comparar resultados en simulaciones numéricas con predicciones teóricas. Hoffman (1986) calculó la relación que establece la TTT entre el crecimiento del momento angular y la densidad primordial a partir de la cual evoluciona un halo. Determinó que ambas cantidades se encuentran anticorrelacionadas, dado que no existe correlación estadística de los picos de densidad con las estructuras anisotrópicas (que producen los torques), pero sí con el tiempo de colapso: protohalos más densos colapsan antes. De este modo, halos más densos deberían tener menos tiempo de desarrollo y por lo tanto menor momento angular final. Esta predicción no se verifica en simulaciones numéricas, lo que llevó a Heavens & Peacock (1988) a formular el problema analítico de manera diferente y obtener que los picos de densidad más altos sí producen

mayor crecimiento del momento angular, pero que el efecto prácticamente se ve cancelado por el menor tiempo de colapso. Otros autores han señalado que la TTT describe cualitativamente muy bien la evolución del momento angular en simulaciones numéricas, pero sobreestima típicamente el valor final en un factor ~ 3 (Barnes & Efstathiou, 1987; Sugerman et al., 2000). Esta sobrestimación disminuye si se asume que el mecanismo de torque tidal pierde eficiencia antes del instante de *turnaround* t_{ta} . Según Porciani et al. (2002), que proponen “detener” el mecanismo de torque tidal en $\sim 0,56t_{ta}$, la discrepancia se debe a efectos no lineales presentes en las simulaciones de N-cuerpos, que no son tenidos en cuenta en la TTT. Esto puede apreciarse en la Figura 2.3.

La segunda cuestión tiene que ver con la naturaleza misma del modelo. La TTT no requiere un Universo con un campo de vorticidades inicial o primigenio, que induzca a las estructuras que se forman en su interior a rotar en uno u otro sentido. El momento angular, en la TTT, crece por interacción entre las estructuras y la distribución de materia circundante en el seno de un campo conservativo y, por lo tanto, irrotacional. Esta conexión establece un marco natural para entender posibles relaciones entre el momento angular de un halo y su entorno, tanto en su momento de formación como en etapas posteriores, cuando la aproximación de Zeldóvich deja de valer y hay que considerar, además, efectos no lineales, tales como fusiones, encuentros cercanos, halos que atraviesan otros halos, etc.

Efectivamente, a pesar de que la TTT no predice con exactitud la dirección del momento angular final de los halos (Porciani et al. (2002) encuentran un límite de precisión del $\sim 50\%$), en la literatura existen numerosos trabajos que buscan establecer relaciones entre el spin y la estructura circundante a partir de simulaciones numéricas (Bailin & Steinmetz, 2005; Aragón-Calvo et al., 2007; Hahn et al., 2007) e incluyendo observaciones (Paz et al., 2008), y este modelo propone un enfoque que incorpora esta relación de manera natural.

Un trabajo notable es el de Codis et al. (2015), quienes reformulan la TTT para estudiar la evolución de protohalos que crecen en la vecindad de un filamento. Su Teoría de Torque Tidal Anisotrópica (ATTT, por sus siglas en inglés, *Anisotropic Tidal Torque Theory*) utiliza la expresión (2.5), pero impone una distribución de materia que responde a la geometría de un punto de silla. La razón para esta restricción es que en el trabajo se define un filamento como la línea que une dos máximos del campo de densidad a través de, precisamente, un punto de silla. Así, se asocia la geometría “punto de silla” con la estructura “centro de un filamento”. Dada esta imposición, la ATTT predice un campo de densidad de spin cuadrupolar alrededor del punto de silla en el Universo primitivo, en el que los protohalos se forman acumulando momento angular según su posición y su masa

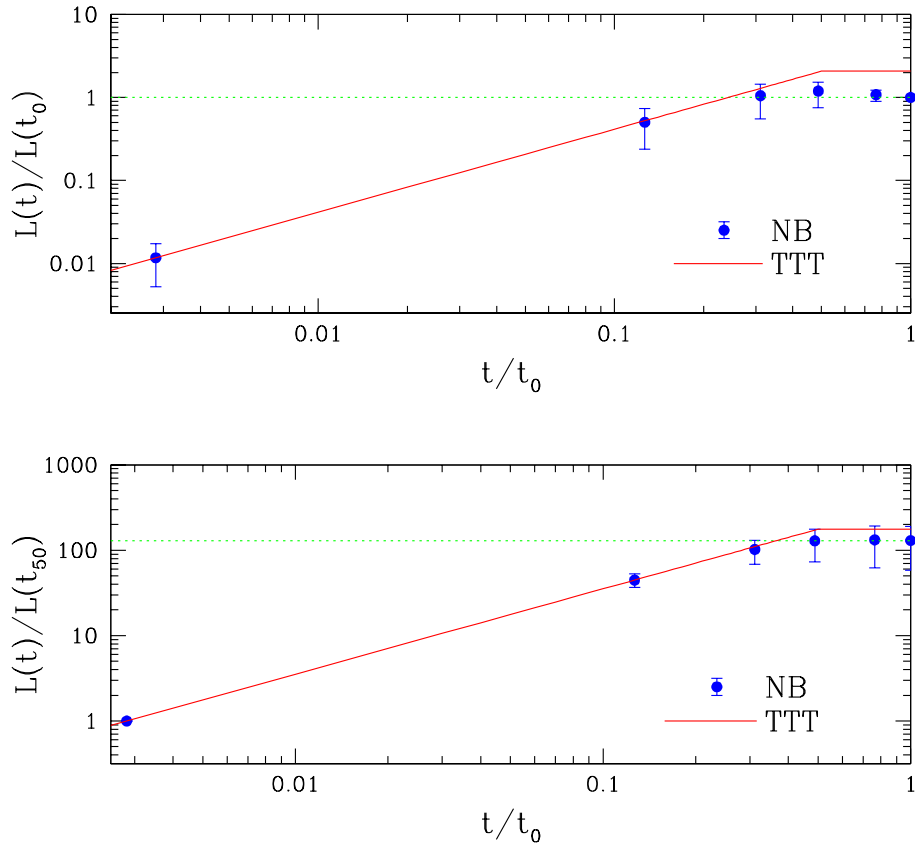


Figura 2.3: Figura en donde se puede ver la evolución real del momento angular en una simulación numérica comparada con las predicciones de la TTT detenida en $t = t_{ta}$ (línea roja continua). El momento angular está normalizado a su valor final (arriba) y a su valor inicial (abajo). Los puntos representan el promedio de todos los halos en cada tiempo, con su intervalo de confianza del 68%; la línea de puntos, el valor medio en $t = t_0$, es decir a $z = 0$. Aunque los halos muestren una gran dispersión se comportan, en promedio, como predice la TTT, excepto por la sobreestimación final. La intersección de la línea de puntos verde y la línea continua roja muestra el instante óptimo para detener el mecanismo de torque tidal (Porciani et al., 2002).

(Figura 2.4). De este modo, la desalineación entre el tensor tidal y el tensor de forma es suficiente para explicar la distribución asimétrica de spines en la vecindad de un filamento a $z = 0$: halos cercanos al punto de silla, con su eje de rotación alineado con la dirección del filamento, y halos más alejados del punto de silla (i.e., cerca de los nodos o máximos de densidad), con su eje de rotación perpendicular al filamento (ver Figura 2.5).

La relación entre la estructura filamentaria y el momento angular de los halos ya había sido sugerida (Sugerman et al., 2000) y medida (Bailin & Steinmetz, 2005; Aragón-Calvo et al., 2007; Hahn et al., 2007; Paz et al., 2008) con anterioridad, pero la ATTT aporta

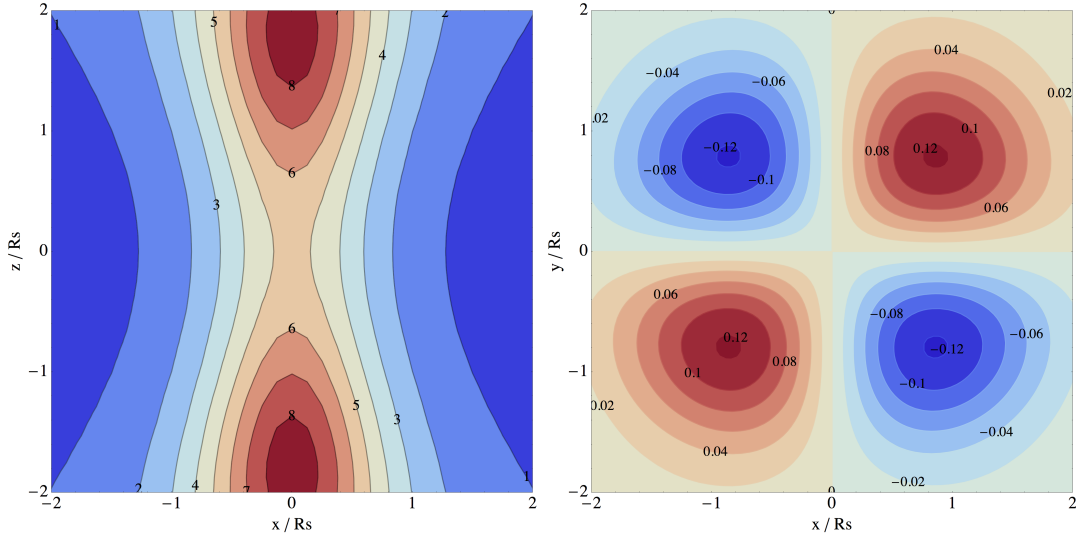


Figura 2.4: **Izquierda:** distribución de masa en dos dimensiones que resulta de la imposición de una geometría de punto de silla. En azul, regiones menos densas; en rojo, regiones más densas (nodos). El filamento, en este caso, se encuentra alineado con el eje z . **Derecha:** corte transversal de un filamento que muestra el campo cuadrupolar de densidad de spin en dos dimensiones. En rojo se ve el spin alineado con el filamento; en azul, el spin antialineado. Los protohalos que se forman en un solo cuadrante de esta región acumulan spin en una única dirección y sentido. Los que ocupan más de un cuadrante pierden coherencia en el sentido, reduciendo la componente del momento angular alineada con el filamento (Codis et al., 2015).

una explicación elegante para entender el fenómeno en el marco de las grandes estructuras. El modelo sugiere, como se dijo, una dependencia de la distribución del momento angular con la masa: halos más masivos están más cerca de los nodos y deberían tener, por lo tanto, mayor componente de spin perpendicular al filamento. Codis et al. encuentran efectivamente, a través de la ATTT, un valor teórico para la masa crítica que separa las poblaciones de halos con spin alineado y no alineado, entendiendo que la masa de un halo corresponde a un volumen lagrangiano en el Universo primitivo, y que al ocupar más de una región de spin en la Figura 2.4 se pierde la coherencia en la acumulación de torques, lo cual disminuye el grado de alineación con el filamento. Este valor es $M_{crit} \sim 5 \times 10^{12} h^{-1} M_{\odot}$, compatible con resultados empíricos hallados en trabajos anteriores (Bailin & Steinmetz, 2005; Aragón-Calvo et al., 2007; Paz et al., 2008).

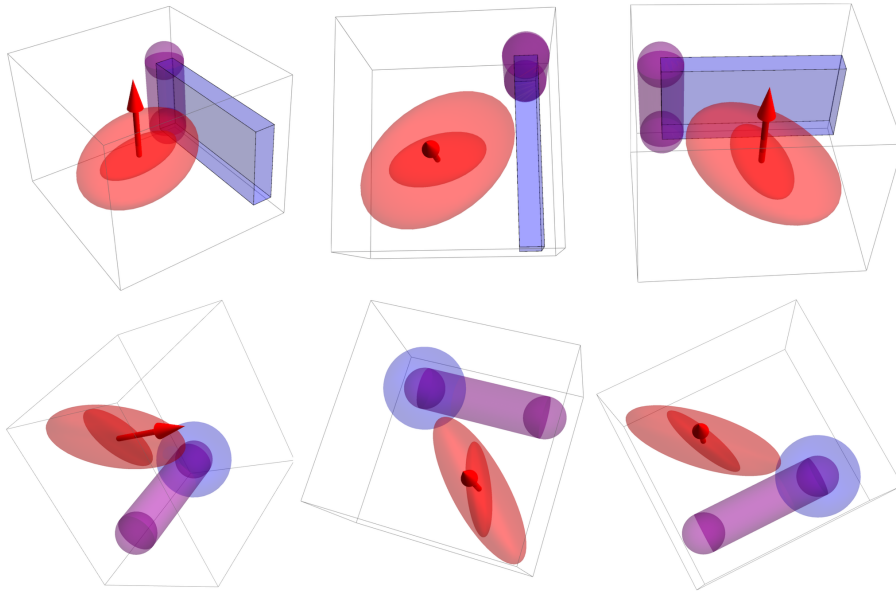


Figura 2.5: Figura esquemática del mecanismo de torque tidal anisotrópico (Codis et al., 2015).

Arriba: un protohalo que se forma en el centro de un filamento siente un mayor tirón por parte de la región más densa (filamento, en violeta) que de la región menos densa (pared, en azul). Su tensor de forma (en rojo oscuro) busca entonces alinearse con el tensor tidal (rojo claro). El resultado es un momento angular paralelo al filamento (flecha roja). **Abajo:** la situación cerca de los nodos (en azul) cambia, ya que el filamento pasa a ser la región menos densa. El tirón busca alinear el eje mayor del tensor de forma con el eje mayor del tensor tidal, que ahora apunta hacia el nodo. Se genera así un momento angular perpendicular al filamento.

2.2. Efectos no lineales y modelos alternativos

Si bien la TTT ha sido de gran importancia en la descripción del origen del momento angular, diversos autores han aportado evidencia de que los efectos no lineales juegan un papel fundamental en su evolución. Estos efectos cobran importancia incluso antes de que los halos de DM alcancen el instante de *turnaround* (Porciani et al., 2002). Para tener en cuenta estos efectos hay que recurrir a simulaciones numéricas (capítulo 3), en las que se resuelven las ecuaciones no lineales que determinan el movimiento de cada partícula. Libeskind et al. (2013) analizan la manera en que se relacionan el comportamiento diferencial local del campo de velocidades (a través de sus componentes simétrica y antisimétrica, el tensor de esfuerzos y la vorticidad, respectivamente) con el momento angular de los halos en esa región. El motivo de esta comparación es que el campo de velocidades evoluciona de manera no lineal en las etapas avanzadas de la formación de estructuras. De este modo, una

correlación sugeriría que la evolución del spin en un halo se ve afectada por el flujo rotacional en su entorno no lineal y, por lo tanto, se alejaría de las predicciones de la TTT. Los autores detectaron un alto grado de correlación, dependiente de la masa, entre la dirección del spin y la dirección de la vorticidad local en escalas $\sim 4R_{vir}$. Además, encontraron que esta alineación depende poco del tipo de estructura en que se forman los halos (filamento, nodo, void), lo cual apoya la idea de que se trata de una tendencia global: todos los halos pasan por una primera etapa lineal y cuasi-lineal, en la que el momento angular crece por torques tidales a partir de un potencial irrotacional (TTT), y una segunda etapa altamente no lineal, en donde se condensan a partir de un flujo rotacional, con vorticidad no nula, y la TTT deja de ser válida. Ambas etapas aportan al momento angular final.

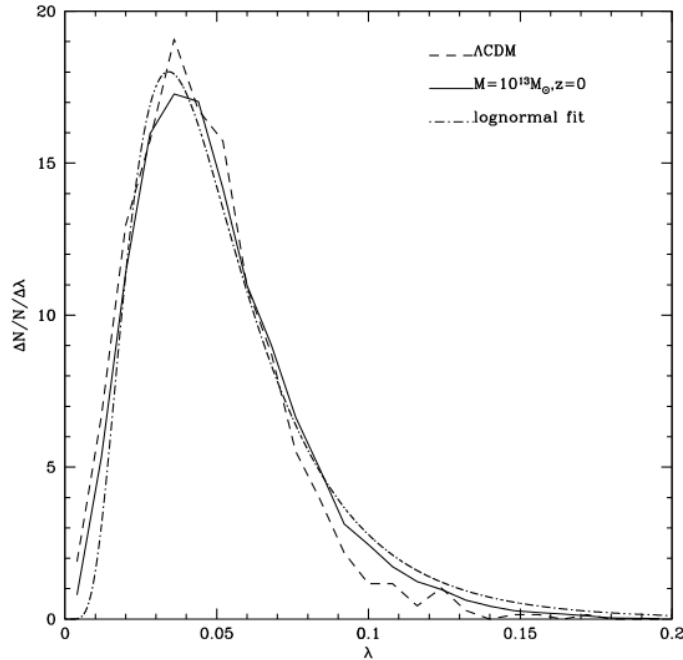


Figura 2.6: Comparación de distribuciones del parámetro adimensional de spin (λ) a $z = 0$. La curva sólida muestra la distribución de λ derivada del modelo de caminata aleatoria de Vitvitska et al. (2002). La curva de trazos muestra la distribución de λ en una simulación numérica Λ CDM. La curva de puntos y rayas muestra un ajuste logarítmico normal.

Otros investigadores han ido más allá con esta idea. Vitvitska et al. (2002) sostienen que el momento angular final de un halo puede entenderse completamente como resultado de la acumulación decorrelacionada de choques a lo largo de su historia de formación. Cada halo rota a $z = 0$ debido a que acumuló momento angular en fusiones con estructuras menores. Mediante una caminata aleatoria, los autores modelan la fusión isótropa de subestructuras

con momento angular aleatorio, y consiguen reproducir la distribución logarítmica normal para el parámetro de spin adimensional¹ que se mide en simulaciones numéricas (Figura 2.6). Esta mirada, explorada también por Maller et al. (2002), incorpora un aspecto fundamental de la formación de estructuras, la formación jerárquica: los halos menores se forman en las etapas primigenias del Universo, a partir de inestabilidades gravitacionales, mientras que los mayores se forman por fusiones entre los primeros en las etapas posteriores. Si bien este modelo no da cuenta de aspectos como la alineación del momento angular con la estructura en gran escala, sí pone de manifiesto la necesidad de reevaluar la TTT sobre modelos realistas de acreción de materia.

Los resultados en la bibliografía muestran que para entender la dinámica de las grandes estructuras del Universo es necesario tener en cuenta, de algún modo, tanto su historia de formación en etapas lineales y cuasi-lineales como su historial de fusiones, así como la manera en que un halo dado se relaciona dinámicamente con su entorno.

¹ $\lambda(t) = \frac{J|E|^{1/2}}{GM^{5/2}}$, que expresa aproximadamente el cociente entre el momento angular de un objeto y aquel que necesitaría para soporte rotacional. En la ecuación anterior J es el spin, E es la energía total y M es la masa del halo.

3 Simulaciones cosmológicas e identificación de halos

El estudio de halos de DM en simulaciones cosmológicas presenta una serie de problemas con múltiples soluciones posibles, que requieren un tratamiento cuidadoso y consistente. En primer lugar, hay que resolver ecuaciones no lineales para determinar la evolución del campo de densidad, lo cual puede resultar computacionalmente muy costoso. Esto se debe a que el fluido es representado mediante un arreglo discreto o grilla de $N \gg 1$ partículas puntuales, que reproducen el comportamiento de una región del espacio de fases de masa equivalente. En segundo lugar, hay que establecer una definición y un límite para los halos, es decir, un criterio que permita identificar estructuras de manera consistente a lo largo de toda la simulación. Esto se vuelve aun más complejo cuando se quiere estudiar la historia de fusiones: hay que decidir qué halos a un tiempo t_{n-1} corresponden al halo a un tiempo t_n .

Existen diversos algoritmos numéricos y códigos abiertos que permiten dar respuesta a estos problemas, tanto para resolver las ecuaciones de movimiento de las partículas de una simulación como para identificar halos y árboles de fusión. Cada método tiene sus ventajas y sus desventajas¹, por lo que los estudios con simulaciones numéricas requieren alguna clase de prueba que permita confiar en la robustez de sus resultados. Es decir, que a la hora de medir propiedades intrínsecas o estadísticas no se obtengan señales espurias, que no se deban a procesos físicos reales sino al modo en que se eligen los halos o a la manera en que se construyen los árboles de fusión.

En el presente capítulo se describen algunos de estos recursos. Para el desarrollo de las simulaciones numéricas se utilizó el código **GADGET-2** (Springel, 2005), mientras que para la identificación de halos y la determinación de árboles de fusión, los códigos **ROCKSTAR Halo Finder** (Behroozi et al., 2013a) y **CONSISTENT TREES** (Behroozi et al., 2013b), res-

¹Ver, por ejemplo, Knebe et al. (2011) y Onions et al. (2012) para comparaciones detalladas de identificadores de halos y subestructuras.

pectivamente.

3.1. Simulaciones numéricas

Las simulaciones cosmológicas suelen requerir, como ya se dijo, un elevado costo computacional, tanto de memoria de almacenamiento como de poder de cálculo. No obstante, su principal característica debe ser la de reproducir correctamente las leyes de la física que se busca simular. Una de las maneras de describir la dinámica del problema de N -cuerpos consiste en recurrir a la aproximación newtoniana, descrita en la sección 1.3. Las ecuaciones de movimiento de cada partícula son no lineales, y dependen del potencial gravitatorio originado por todas las demás. Resolverlas permite determinar el cambio $\Delta \mathbf{r}$ en la posición y el cambio $\Delta \mathbf{v}$ en la velocidad de cada una en un intervalo pequeño de tiempo Δt , avanzar a $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ y $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$ y, finalmente, recalculer el potencial gravitatorio en la nueva distribución para continuar el proceso iterativamente. Los resultados de una simulación cosmológica pueden verse en la Figura 3.1. En las etapas finales aparece la conocida estructura filamentosa que la distribución de materia forma debido a la amplificación de las inestabilidades gravitatorias.

Utilizando unidades comóviles tanto en las longitudes como en las velocidades ($\mathbf{v} = a\mathbf{u}$) la ecuación de movimiento (1.33) queda:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u} + 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} = -\frac{1}{a^2}\vec{\nabla}\Phi \quad (3.1)$$

en donde Φ es el potencial gravitatorio análogo al newtoniano, gobernado por la ecuación de Poisson (1.32):

$$\nabla^2\Phi = 4\pi Ga^2\rho_b\delta \quad (3.2)$$

Conociendo el potencial Φ se puede calcular el gradiente en el lado derecho de la ecuación (3.1), que permite determinar la evolución de la velocidad y la posición de cada partícula. La solución general de la ecuación (3.2) se obtiene mediante la convolución del término fuente (lado derecho de 3.2) con la Función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$:

$$\Phi(\mathbf{r}) = Ga^2\rho_b \int \frac{\delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \delta^3 r' \quad (3.3)$$

Al tratarse en este caso de una distribución discreta de objetos puntuales, la integral del lado derecho puede entenderse como una sumatoria finita sobre los N elementos del arreglo. Este cálculo resulta demasiado costoso para grandes cantidades de partículas, ya que es

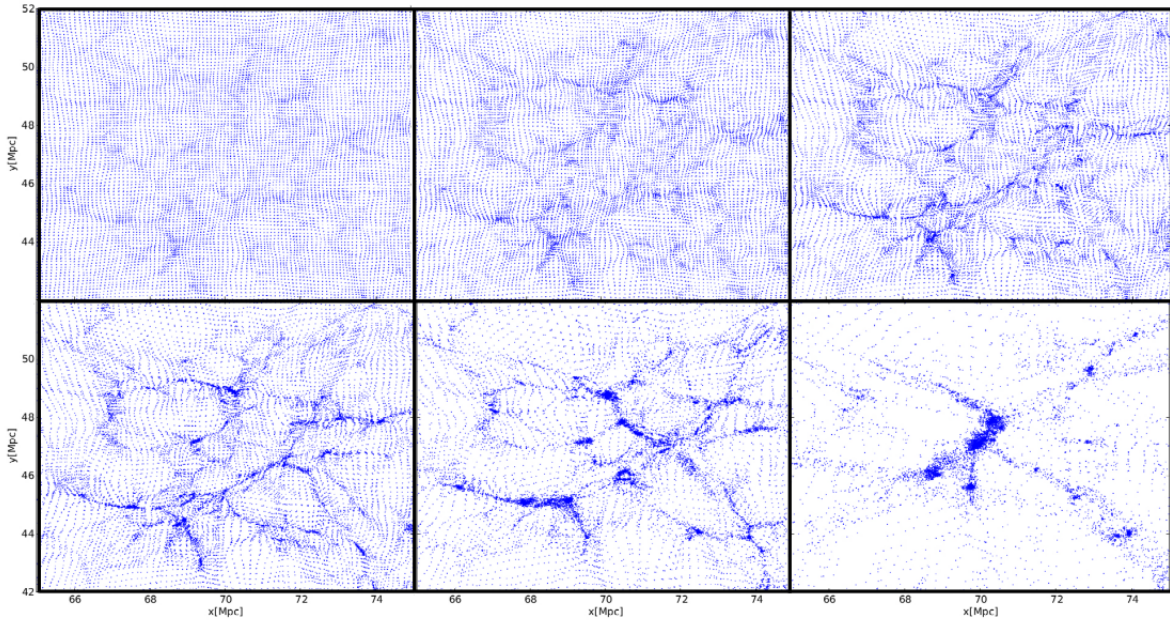


Figura 3.1: Corte bidimensional de $10 h^{-1}\text{Mpc}$ de lado ($0,5 h^{-1}\text{Mpc}$ de profundidad) de una de las simulaciones utilizadas en este trabajo (S_1 , ver Tabla 3.1). Se puede apreciar, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, la evolución de las partículas puntuales a través del tiempo y la manera en que se va formando la estructura filamentosa.

necesario computar la sumatoria para cada una de ellas. Luego, el número de operaciones crece con el cuadrado de N .

Una manera de salvar este problema es utilizar la transformada de Fourier para resolver las ecuaciones en el espacio de las fases k . Utilizando la propiedad de que la transformada de una convolución es el producto de las transformadas, es decir, $F(f * g) = F(f)F(g)$, se puede llevar la ecuación (3.3) al espacio de las fases, realizar sencillamente el producto $\hat{\Phi}(\mathbf{k}) = \hat{G}(\mathbf{k})\hat{\delta}(\mathbf{k})$ y luego antitransformar para obtener el potencial en el espacio real. La razón por la que este método permite acelerar el cálculo radica en que la transformada de Fourier discreta se puede implementar de una manera muy eficiente a través del algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés, *Fast Fourier Transform*), que reduce² el número de operaciones de N^2 a $N\log(N)$.

Se pueden utilizar diferentes métodos para representar la fuente $\delta(\mathbf{r})$. Uno de los más sencillos es el llamado *particle-mesh* (PM), en el cual el sistema de partículas es convertido en una grilla o arreglo de celdas con valores de densidad. Sobre esta grilla se obtiene,

²Para el lector o la lectora interesados en los argumentos numéricos, ver Press et al. (1992)

a continuación, el potencial gravitatorio mediante la FFT. Se derivan luego las fuerzas correspondientes a cada punto (diferenciando de manera finita el potencial con los valores de las celdas adyacentes) y a cada partícula se le aplica una fuerza asociada a la celda a la que pertenece y a su posición dentro de ella. Este método tiene como resolución límite el tamaño de las divisiones en la grilla. Existen, asimismo, alternativas más sofisticadas, como el método de grilla adaptable, que refina el tamaño de las celdas en regiones con sobredensidades altas (Kravtsov et al., 1997), o los *tree codes*, que disminuyen el número de operaciones requeridas para computar la fuerza a través de desarrollos multipolares del potencial gravitatorio (Springel, 2005).

S_i	l [$h^{-1}\text{Mpc}$]	N_p	N_h	$M_{min}-M_{max}$ [$h^{-1}M_\odot$]	Ω_M	H_0 [$\text{kms}^{-1}/\text{Mpc}$]
S_0	100	128^3	731	$5,0 \times 10^{12} - 3,3 \times 10^{14}$	0,276	70,3
S_1	100	1024^3	15680	$1,0 \times 10^{11} - 2,4 \times 10^{14}$	0,272	70,2
S_2	1000	1024^3	86425	$3,6 \times 10^{13} - 3,2 \times 10^{15}$	0,279	70,2

Tabla 3.1: Características de las simulaciones (S_i) utilizadas en el presente trabajo. Para cada una se puede ver el tamaño del lado del box (l), el número de partículas (N_p), número de halos detectados (N_h), rango de masas ($M_{min}-M_{max}$) y la cosmología (Ω_M y H_0).

Los encuentros cercanos entre partículas representan una dificultad particular en la resolución de este tipo de problemas. En una simulación, una partícula no representa una unidad de masa en el Universo real, sino un sistema macroscópico de DM (no colisional), distribuida de manera no necesariamente uniforme en un cierto volumen. Esta diferencia no es importante cuando se estudia la interacción entre partículas a grandes distancias. En estos casos la aproximación es válida: cada sistema siente la influencia del otro como si fueran masas puntuales. Sin embargo, al producirse encuentros cercanos las simulaciones generan interacciones distintas a las que se esperaría entre sistemas macroscópicos de DM de masa equivalente. Se encuentran dispersiones espurias, partículas que salen disparadas con ángulos de deflexión muy grandes, ya que las fuerzas que se ejercen pueden crecer indefinidamente a medida que se acercan. Para prevenir este tipo de colisiones es necesario suavizar la interacción gravitatoria a distancias cortas. Esto se consigue simplemente reemplazando el factor $1/r^2$ por $1/(d^2 + r^2)$ en la expresión de la fuerza gravitatoria, donde d es una longitud de suavizado que impide que la fuerza crezca de manera arbitraria a medida que $r \rightarrow 0$.

Se utilizaron tres simulaciones en el desarrollo de este trabajo: S_0 , S_1 y S_2 (Ver Tabla 3.1).

Todas fueron realizadas con el código *Galaxies with Dark matter and Gas intEract*, mejor conocido como GADGET-2 de Springel (2005). Las tres son periódicas en sus condiciones de contorno y utilizan cosmologías similares. La simulación S_0 , más pequeña y de baja resolución que las otras dos (128^3 partículas en un volumen cúbico de $100 h^{-1}\text{Mpc}$ de lado), sirvió como prueba o *test* para probar los diferentes programas que se escribieron y ejecutaron en la medición y análisis de las propiedades de los halos de DM. La información de las otras dos simulaciones, S_1 y S_2 , fue analizada una vez que los programas habían sido correctamente verificados en S_0 . De otro modo, el tiempo de ejecución se hubiera hecho

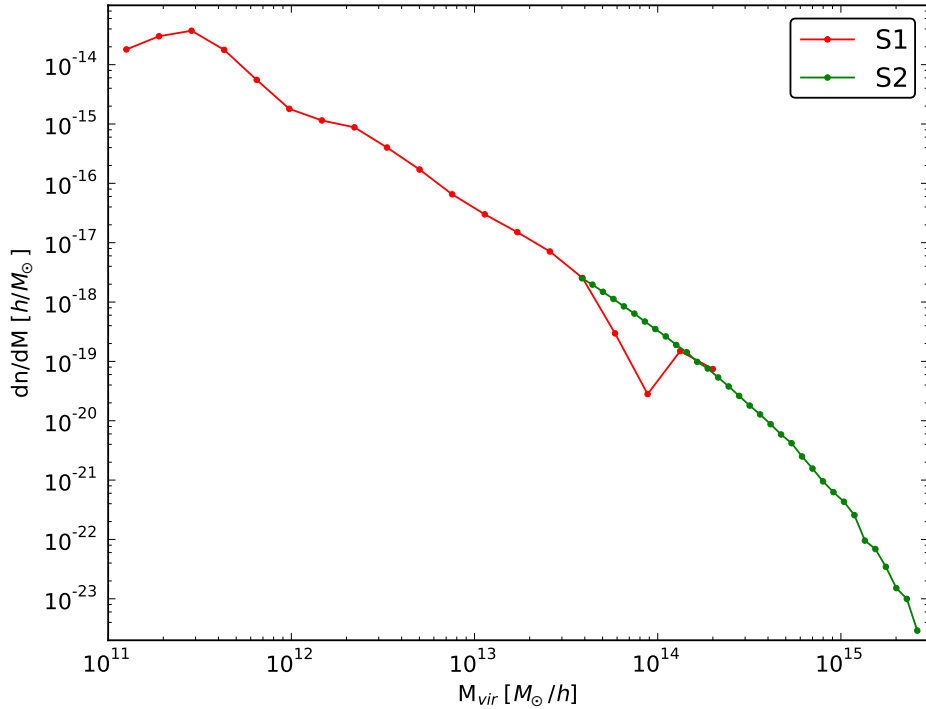


Figura 3.2: Función de masa de los halos en las simulaciones S_1 y S_2 . En la simulación S_1 se alcanzan mejores niveles de resolución, lo cual permite estudiar estructuras menos masivas en detalle. Sin embargo, en la parte superior de su rango de masas parece no contar con suficientes halos. La simulación S_2 tiene una resolución más pobre, pero su mayor tamaño permite cubrir mejor la región en donde S_1 falla, además de contar con halos de hasta $\sim 3 \times 10^{15} h^{-1}M_\odot$.

demasiado grande debido al gran volumen de datos. S_1 , de buena resolución, contiene 1024^3 partículas en un volumen cúbico de $100 h^{-1}\text{Mpc}$. S_2 contiene 1024^3 partículas, pero en un volumen cúbico de $1000 h^{-1}\text{Mpc}$. Su resolución es menor, pero su mayor tamaño permite estudiar sistemas ligados en un rango de masas más alto ($\sim 3 \times 10^{15}M_\odot$ contra

$\sim 2 \times 10^{14} M_{\odot}$). La función de masa de los halos de las simulaciones S_1 y S_2 puede verse en la Figura 3.2.

En la Figura 3.1 se muestran en azul las partículas presentes en un corte bidimensional de $10 h^{-1} \text{Mpc}$ de lado ($0,5 h^{-1} \text{Mpc}$ de profundidad) en S_1 . Las regiones más densas son los lugares donde residen los halos de DM, algunos de los cuales se pueden apreciar adentro de los nodos y los filamentos. Estos sistemas están formados por conjuntos de partículas ligadas gravitatoriamente, y representan las regiones en donde se forman los cúmulos, grupos y galaxias observadas.

3.1.1. Condiciones Iniciales

Una cuestión no trivial en la construcción de una simulación cosmológica es la imposición de condiciones iniciales, que le permitan a las partículas evolucionar según las leyes de la física de un modo realista. Una grilla perfectamente homogénea y con velocidades iniciales nulas no evolucionaría con el tiempo, ya que la influencia de cualquier partícula se vería cancelada siempre por la de otra simétricamente opuesta. Tampoco se puede alterar la

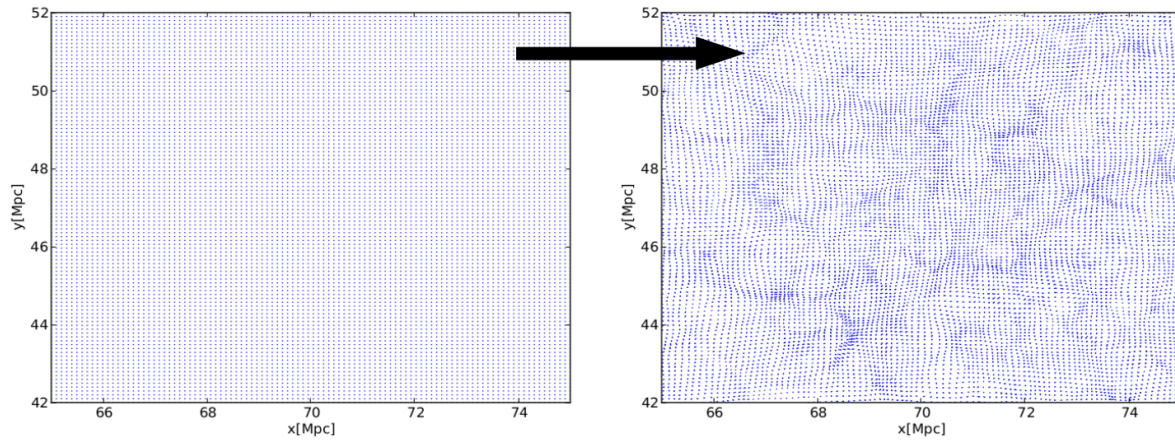


Figura 3.3: Paso de un arreglo homogéneo de partículas a un sistema con contrastes de densidad e inestabilidades gravitatorias, que evolucionará y formará estructuras. La amplitud de las perturbaciones se obtiene a través del espectro de potencia, utilizando la aproximación de Zel'Dovich para determinar los desplazamientos de cada partícula.

posición de las partículas de manera arbitraria, ya que la interacción gravitatoria podría no formar con el tiempo las estructuras que se esperan a $z = 0$, es decir, ahora. Una de las soluciones a este problema se encuentra a partir de la aproximación de Zel'Dovich y del espectro de potencia (sección 1.3.1 y sección 1.4.2, respectivamente).

Según este método, para establecer condiciones iniciales es necesario introducir un espectro de fluctuaciones, o perturbación, en un arreglo de partículas inicialmente homogéneo (Figura 3.3). La amplitud de esta perturbación dependerá de la escala, y estará dada estadísticamente por el espectro de potencia, para el cual se tienen mediciones precisas en escalas muy diferentes (ver Figura 1.6). La forma de implementar esta perturbación, modificando las posiciones y las velocidades iniciales, es a través de la aproximación de Zel'Dovich, perfectamente válida en las etapas evolutivas del Universo ($z \gtrsim 50$) que se utilizan típicamente para comenzar simulaciones cosmológicas: las perturbaciones pequeñas producen contrastes de densidad bajos, es decir, $\langle \delta^2 \rangle \ll 1$.

Para imponer un espectro de fluctuaciones en una distribución de partículas se utiliza el espectro de potencia $P(k)$. A partir de la aproximación de Zel'Dovich se puede alterar la posición lagrangiana de las partículas en la grilla regular mediante:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{q} + D(t)\vec{f}(\mathbf{q}). \quad (3.4)$$

La ecuación (1.41), por otro lado, establece que los modos de Fourier \hat{f}_k asociados a $\vec{f}(\mathbf{q})$ se relacionan con $\hat{\delta}_k$ a través de

$$\hat{f}_k = \hat{\delta}_k \frac{1}{k^2}.$$

Conociendo el espectro de potencias $P(k)$ se puede determinar, a su vez, $\hat{\delta}_k$, utilizando la ecuación (1.65):

$$P(k) = \langle |\hat{\delta}_k|^2 \rangle.$$

En la práctica, combinando el espectro de potencias $P(k)$ (medido con mucha precisión en la actualidad gracias al CMB) con fases A_1 y A_2 (generadas aleatoriamente a partir de una distribución gaussiana con media 0 y varianza 1) se puede determinar:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{k^2} \hat{\delta}_k = \frac{1}{k^2} \sqrt{P(k)} R_{\mathbf{k}} e^{i\varphi_{\mathbf{k}}},$$

donde $R_{\mathbf{k}} e^{i\varphi_{\mathbf{k}}} = A_1 + iA_2$. Así, la perturbación $\vec{f}(\mathbf{q})$ se puede construir antitransformando \hat{f}_k . Luego, la posición y la velocidad de cada partícula se modifican sobre la grilla uniforme según su posición \mathbf{q} , la ecuación (3.4) y una función $D(t)$ que simplemente regula la amplitud de las perturbaciones según el redshift inicial de las simulación.

3.2. Identificación de halos y árboles de fusión

Para estudiar halos de DM en simulaciones cosmológicas es necesario establecer, en primer lugar, un criterio para identificar qué sistemas de partículas son halos y cuáles

no lo son. Cualquier definición implica, inevitablemente, algún grado de ambigüedad (por ejemplo, cuál es el centro de un halo), pero también de imprecisión en la determinación de las propiedades (por ejemplo, en halos con pocas partículas, halos que se superponen, etc). Existen en la actualidad códigos públicos, llamados identificadores o *halo finders*, con algoritmos eficientes que se encargan de detectar halos en simulaciones numéricas y determinar sus propiedades. Sin embargo, ejecutando diferentes identificadores sobre las mismas simulaciones, Knebe et al. (2011) han verificado que gran parte de las incertezas y la variabilidad de las propiedades de los halos se deben aún al proceso de detección.

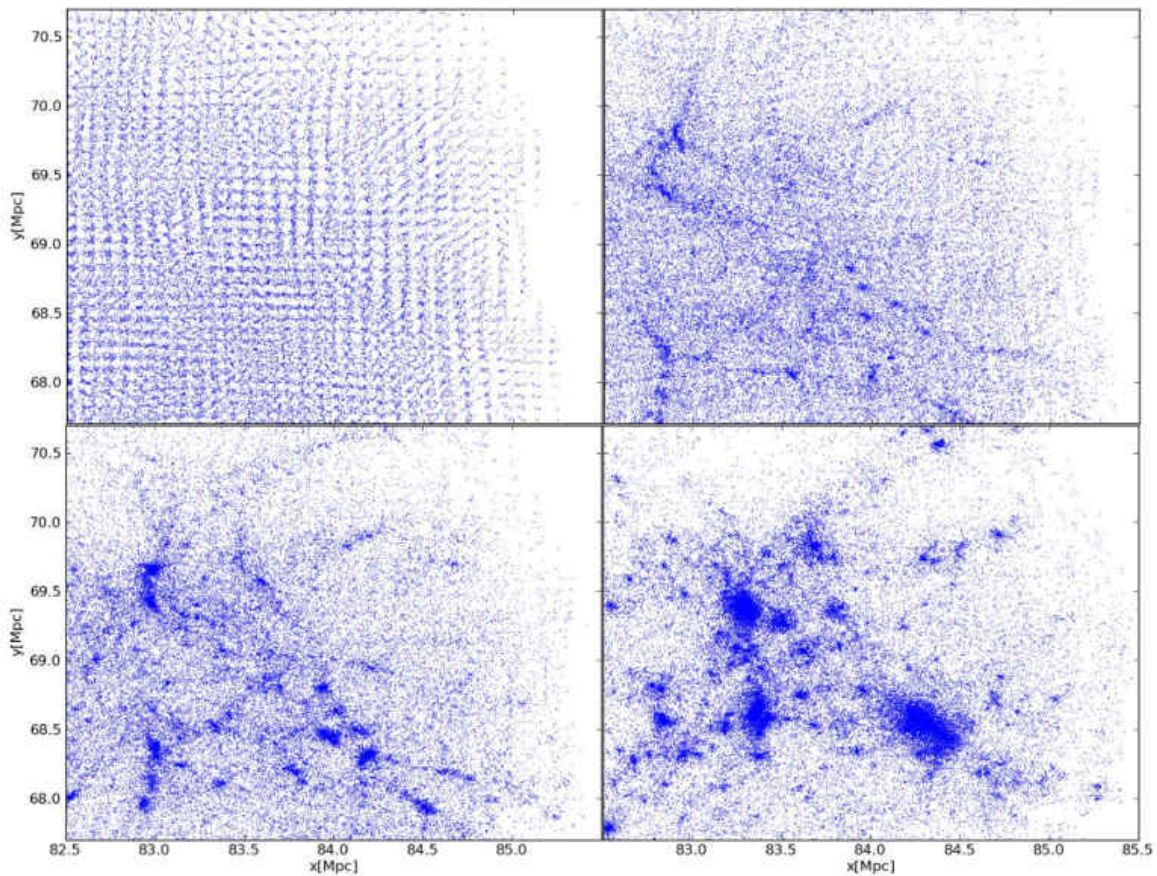


Figura 3.4: Evolución, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, de las partículas de un halo raíz en la simulación S_1 . Se puede apreciar como se van formando subestructuras en el interior del grupo FOF y como, al mismo tiempo, otros subhalos se fusionan para formar sistemas de mayor masa. A $z = 0$ esta región colapsará en un único halo virializado.

Existen diferentes enfoques para este problema, pero se podría clasificar a los identificadores de halos en dos grandes grupos: aquellos que utilizan sobredensidades esféricas (SOF,

spherical overdensity finders) y aquellos que recurren a algoritmos geométricos, como los *friends-of-friends* (FOFs). Los primeros proceden identificando picos en el campo de densidad, alrededor de los cuales generan esferas sucesivas de tamaño creciente que añaden partículas al arreglo, hasta que la densidad encerrada cae por debajo de un determinado límite. Los FOFs, en cambio, implementan un algoritmo que conecta entre sí partículas cuya distancia es menor que alguna fracción de la distancia media inter-partículas (longitud de percolación), de modo que la frontera irregular que delimita la región del halo no es necesariamente una esfera, sino una superficie isodensa. Este método suele ser aplicado en iteraciones sucesivas que permiten identificar subestructuras: un primer recorrido FOF establece una conexión entre partículas que forman parte de una misma sobredensidad; luego, se re-ejecuta el algoritmo en esta región con una nueva longitud de percolación, identificando nuevos halos que pertenecen al mismo grupo FOF (Figura 3.4).

Pueden utilizarse argumentos dinámicos para mejorar la identificación, ya que una de las propiedades que se espera de las partículas de un halo es que se encuentren ligadas al sistema. Es común una limpieza posterior a la definición de cada halo, en la que se compara la energía potencial de cada partícula con su energía cinética para determinar si se encuentra o no ligada al sistema. Los halos limpios sólo conservan partículas ligadas, lo cual, además de ayudar a discriminar la pertenencia de partículas en regiones de halos superpuestos, le da consistencia a la definición.

La construcción de árboles de fusión (*merger trees*) también representa un problema con ambigüedades. La mera definición de historia de un halo requiere un tratamiento cuidadoso. Los identificadores encuentran halos de DM en diferentes pasos temporales de una simulación (*snapshots*), pero no existe un modo unívoco de asociar un halo particular del paso t_{n-1} (progenitor) con un halo del paso t_n (descendiente). La solución más común se encuentra a partir de los árboles de fusión basados en algoritmos de partículas (*particle-based merger trees*): dado un progenitor \mathbf{P} , se asigna como descendiente en el siguiente paso temporal al halo \mathbf{D} que recibe la mayor fracción de partículas de \mathbf{P} . En la práctica, este método es suficiente para predecir correctamente la gran mayoría de descendientes, pero no puede reconocer los casos en que un halo no debería haber existido nunca (cuando el identificador encuentra un halo en un paso temporal pero no vuelve a encontrarlo en los *snapshots* posteriores) ni los casos en que se pierde un halo (cuando el identificador no reconoce en el paso t_n al halo que venía identificando correctamente en los pasos anteriores). Como la evolución de un halo de DM suele estar plagada de fusiones, colisiones y tránsitos con otros halos, un árbol de fusiones que describa de manera realista esta historia debe

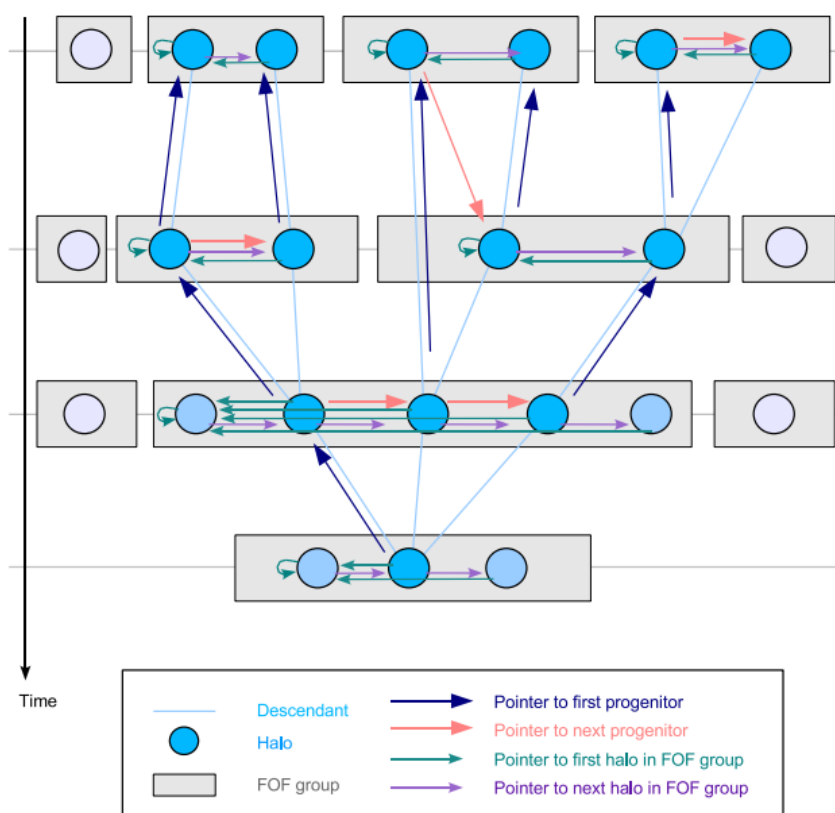


Figura 3.5: Ejemplo de árbol de fusiones en la simulación Millennium (Springel et al., 2005). El eje vertical indica el tiempo, que evoluciona hacia abajo. En celeste se indican halos del mismo grupo FOF. Cada halo conoce su descendiente (líneas celestes), su progenitor más masivo (flechas azules), el halo principal de su grupo FOF (flechas verdes) y tiene punteros hacia sus co-progenitores (flechas rosas) y hacia los otros halos de su grupo FOF (flechas violetas).

poder reconocer y tener en cuenta los casos en que dos o más progenitores pasan a formar parte de un mismo descendiente (fusiones), así como los casos en que un halo desaparece temporalmente y vuelve a aparecer varios pasos más adelante (por ejemplo, al atravesar, pero no fusionarse, con otro halo mayor).

Esta clase de estudios utiliza una nomenclatura más o menos común, que vale la pena repasar dado que se utilizará con frecuencia a lo largo del trabajo. Cuando se tiene una simulación cosmológica, el procedimiento normal es utilizar un código que identifique halos en cada paso temporal (filas en la Figura 3.5), por ejemplo mediante un algoritmo FOF. Luego, otro código construye los *merger trees* generando punteros (direcciones de memoria) entre halos con alguna relación de parentesco (progenitores, co-progenitores, descendientes,

etc). Un halo que no es subestructura de ningún otro en $z = 0$ es identificado como “halo raíz”. Yendo hacia atrás en el tiempo, cada halo puede tener más de un progenitor, dado que dos o más sistemas pueden fusionarse en cada paso. Las flechas azules en la Figura 3.5 indican el “primer progenitor” de cada halo, es decir, el más masivo del paso anterior, mientras que las líneas celestes unen cada descendiente con todos sus progenitores. El primer progenitor es único, y permite construir una cadena de halos principales llamada con frecuencia “rama principal”³. Es común que el árbol de fusión genere, además, punteros entre halos de un mismo grupo FOF (mismo paso temporal) o entre co-progenitores (que pueden o no pertenecer al mismo paso temporal). Estas conexiones ayudan a recorrer el árbol de manera horizontal.

3.2.1. ROCKSTAR Halo Finder

En este trabajo se identificaron halos en cada paso temporal de las simulaciones mediante el código *Robust Overdensity Calculation using K-Space Topologically Adaptive Refinement* o, más comúnmente, ROCKSTAR de Behroozi et al. (2013a). En esta publicación se comparan diferentes identificadores de halos con simulaciones de alta resolución, encontrando que ROCKSTAR resuelve de manera más efectiva la subestructura y las propiedades de los subhalos. Un estudio previo (Knebe et al., 2011) presenta una comparación pormenorizada del desempeño de 18 diferentes identificadores y de sus características. Aquí se concluye que la gran mayoría de los identificadores tienen desempeños aceptables y hasta pueden ser *ajustados* para dar resultados similares, pero que ROCKSTAR (y en general aquellos que utilizan alguna variante del método FOF en el espacio de las fases) consigue los resultados más consistentes cuando se trata de la identificación de subestructura y halos con pocas partículas.

El programa utiliza un algoritmo de tipo FOF jerárquico en el espacio 6-dimensional de las fases: reconoce estructuras y subestructuras según el método descrito en la sección anterior, pero no lo hace comparando distancias tridimensionales clásicas, sino a partir de una distancia definida en el espacio de las posiciones y las velocidades (6 dimensiones), con una métrica dada por:

$$d(p_1, p_2) = \left(\frac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2}{\sigma_x^2} + \frac{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2}{\sigma_v^2} \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

³La rama principal de cada halo raíz, que se construye una vez definidos los halos principales, es única.

Sin embargo, la definición de halo principal no lo es, ya que puede utilizarse como criterio alternativo, por ejemplo, el progenitor del paso t_{n-1} que comparta la mayor fracción de partículas con el halo en t_n

en donde σ_x y σ_v son la dispersión de posiciones y de velocidades de un dado grupo FOF. Esta *distancia* adimensional tiene en cuenta la velocidad de cada partícula en un espacio normalizado a la dispersión de velocidades de su grupo FOF, lo cual incorpora una dimensión dinámica al criterio de pertenencia. La longitud de percolación es escogida adaptativamente de manera que en cada nivel de subestructura una fracción constante f de partículas quede conectada con, al menos, otra partícula. Si esta fracción es muy grande (por ejemplo, $f > 0,9$) el algoritmo podría demorar demasiado tiempo, además de identificar lazos espurios entre partículas que no se encuentran realmente ligadas. Si, por el contrario, la fracción es muy pequeña ($f < 0,5$) el algoritmo puede no encontrar todos los niveles existentes de subestructura. Los autores definen entonces un valor intermedio ($f = 0,7$), junto con un límite inferior de 20 miembros para que un grupo de partículas pueda ser considerado como una estructura independiente, y con estas cantidades encuentran los mejores desempeños del código en pruebas de identificación de subestructuras (Knebe et al., 2011).

Para mejorar la eficiencia en términos computacionales, **ROCKSTAR** realiza previamente una identificación FOF clásica, con longitud de percolación 0,2 en el espacio de las posiciones, y separa de esta manera la simulación en unidades de trabajo más pequeñas. Cada unidad es asignada luego a un hilo diferente (*task*), de modo que una computadora con múltiples núcleos puede trabajar simultáneamente, con cada uno de sus procesadores, sobre las partículas que se encuentran en una única región. Este modo de funcionamiento *en paralelo* resulta fundamental, ya que el enorme volumen de datos con que se cuenta en simulaciones hace imposible realizar cálculos en tiempos razonables si no se aprovecha al máximo la capacidad de cómputo. El proceso de cálculo en paralelo jugó un papel importante en el desarrollo de este trabajo, no sólo porque los programas **GADGET-2**, **ROCKSTAR** y **CONSISTENT TREES** trabajan de esta manera, sino porque los códigos propios, escritos para realizar las tareas de cálculo específicas de esta investigación, fueron diseñados y probados para funcionar correctamente en paralelo.

Una vez que **ROCKSTAR** divide la simulación en grupos FOF 3D e identifica en cada uno estructuras y subestructuras mediante el algoritmo FOF adaptativo en 6D, el siguiente paso es la generación de los halos. El programa coloca *halos semilla* en los niveles inferiores de subestructura, determinando su posición en el espacio de las fases según la métrica (3.5), y luego asigna miembros recursivamente sobre ese nivel y los superiores según un sencillo criterio de proximidad: cada partícula pertenece al halo semilla más cercano según la

distancia:

$$d(h,p) = \left(\frac{|\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_p|^2}{r_{dyn,vir}^2} + \frac{|\mathbf{v}_h - \mathbf{v}_p|^2}{\sigma_v^2} \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

$$r_{dyn,vir} = \frac{v_{max}}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G \rho_{vir}}} \quad (3.7)$$

Aquí, v_{max} es la velocidad circular máxima del halo semilla al momento del cálculo, mientras que ρ_{vir} corresponde a $360\rho_b$ en $z = 0$. Este criterio puede ser modificado cambiando la definición de ρ_{vir} al momento de correr el programa. El paso final es la limpieza de partículas no ligadas dentro de cada halo, luego de lo cual se calculan las propiedades como radio, masa, momento angular, etc. (cada propiedad se encuentra definida en Behroozi et al. 2013a). En la Figura 3.6 se puede ver un esquema que resume el proceso en seis etapas.

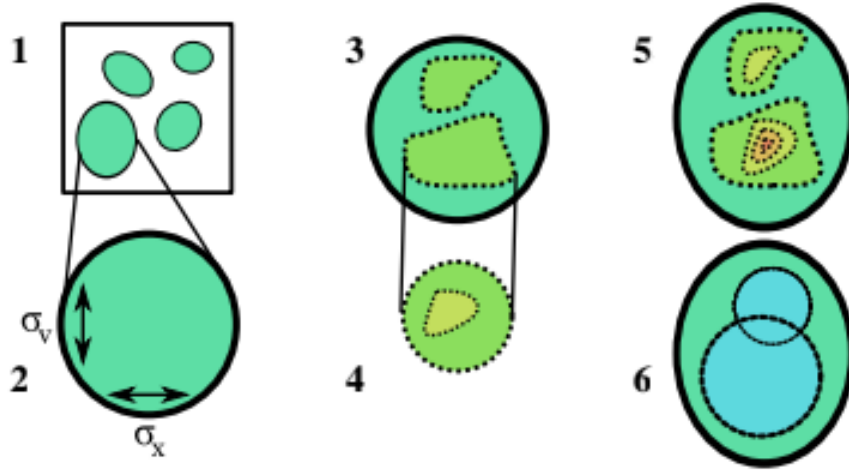


Figura 3.6: Esquema de funcionamiento del programa ROCKSTAR de Behroozi et al. (2013a).

1. La simulación se divide en grupos FOF 3D para facilitar la paralelización. **2.** Para cada uno, las posiciones y velocidades de las partículas son divididas (normalizadas) por la dispersión de posiciones σ_x y la dispersión de velocidades σ_v del grupo. **3.** Se elige una longitud de percolación en el espacio de las fases (6D) de manera que el 70% de las partículas del grupo queden conectadas en subgrupos. **4.** El proceso se repite para cada subgrupo: renormalización, una nueva longitud de linkeo y un nuevo nivel de subestructura. **5.** Una vez que todos los niveles de subestructura han sido hallados, se colocan halos semilla y se les asignan las partículas del grupo según la proximidad con sus centros en el espacio de las fases. **6.** Una vez que las partículas han sido asignadas, se remueven aquellas que no estén ligadas y se determinan las propiedades de cada halo (posiciones, velocidades, radios, masas, etc.).

Uno de los problemas con este código radica en que los autores no ofrecen una manera directa de acceder a las partículas de cada halo luego de la limpieza. Es decir, se cuenta con las propiedades derivadas de las partículas ligadas, pero no se puede saber cuáles son⁴. Muchos de los análisis propuestos para comprender el momento angular en halos de DM requieren esta información. Por otro lado, existen propiedades de los halos que ROCKSTAR no devuelve, y un estudio consistente implica determinar estas cantidades utilizando las mismas variables que el programa usa en sus propios cálculos. Al no tener acceso a estas variables (las partículas), no queda otra alternativa que encontrar una manera común de trabajar con los halos ROCKSTAR y las partículas GADGET-2. Los métodos a los que se recurrió para dar respuesta a este y otros problemas que fueron surgiendo durante el desarrollo del trabajo son discutidos en el siguiente capítulo.

3.2.2. CONSISTENT TREES

Para buscar la menor dependencia posible de los resultados de este trabajo con las posibles incompatibilidades entre códigos, se eligió para construir los árboles de fusión un programa desarrollado por los mismos autores del identificador de halos. CONSISTENT TREES (Behroozi et al., 2013b) basa su desempeño en asegurar explícitamente la consistencia de las propiedades de los halos en el tiempo. Es decir, que esto no sea sólo una consecuencia de su buen funcionamiento, sino parte del método de construcción de los árboles. Existen una serie de problemas de consistencia típicos que el código intenta resolver:

- Un subhalo puede no ser identificado cuando pasa demasiado cerca del centro de un halo mayor. Como resultado, en el *merger tree* puede ser clasificado como *fusionado* con el halo mayor (que, además, recibiría la mayoría de sus partículas). Sin embargo, reaparecería luego y sería identificado como un halo nuevo sin progenitores.
- En un caso menos extremo, en donde el identificador logre diferenciar el subhalo, un gran número de partículas pueden ser erróneamente asociadas al halo mayor. Las propiedades de ambos, determinadas de este modo, serían incorrectas durante esos pasos temporales.

⁴ROCKSTAR ofrece, en cambio, una opción para que el programa devuelva en un archivo de salida los números de identificación (IDs) de las partículas que fueron conectadas durante la identificación FOF 6D. Estas partículas no necesariamente son las mismas que se asignan a los halos semilla ni las que se utilizan para derivar propiedades.

- El efecto opuesto también es posible: las partículas de un halo, cerca de cuyo centro pasa un subhalo, pueden ser erróneamente asignadas a este último.
- Halos en el límite de identificación (por ejemplo, por tener un número muy bajo de partículas) pueden aparecer y desaparecer en *snapshots* sucesivos, lo cual generaría en el *merger tree* efectos espurios: falsas fusiones, halos sin descendientes, o simplemente una distribución sesgada con pocos halos de baja masa.

CONSISTENT TREES utiliza, en primera instancia, un algoritmo *particle-based*: compara las partículas de halos en pasos temporales sucesivos y asigna como descendiente en t_n al sistema que reciba la mayor fracción de partículas de un halo en t_{n-1} . Sin embargo, la base del programa se encuentra en la siguiente idea: para un algoritmo de este tipo es imposible determinar, con la información de un único paso temporal, si los problemas descritos más arriba son errores de identificación o simplemente fluctuaciones estadísticas comunes. De esta manera, CONSISTENT TREES cuenta con una segunda etapa en la que utiliza las posiciones, velocidades y perfiles de masa de los halos en un *snapshot*, junto con las leyes de la gravedad y la inercia, para predecir sus posiciones en pasos temporales adyacentes. Comparando estas predicciones con la distribución de halos *real*, y calculando las desviaciones, el programa puede decidir si al identificador se le han perdido o si ha identificado halos erróneamente.

Un aspecto interesante de este método es que la predicción que permite corregir los árboles de fusión es realizada *hacia atrás*. El motivo es simple: en las simulaciones cosmológicas los halos de masas altas no aparecen espontáneamente, sino que se van formando por acreción suave de partículas o por fusiones violentas entre halos de menor masa. Esto implica que todo halo tiene, al menos, un progenitor en el paso temporal previo (a menos que ese progenitor tenga una masa demasiado baja como para ser identificado). Si se evolucionan las propiedades de un halo *hacia atrás* y no se encuentran coincidencias con el catálogo identificado en el *snapshot* anterior, se puede concluir que dicho catálogo está incompleto. Si se continúa esta involución a lo largo de algunos pasos temporales y finalmente se encuentra una coincidencia, es razonable deducir que el identificador no ha detectado los halos intermedios: las propiedades de estos parientes perdidos pueden ser interpoladas. Sin embargo, si no se logra encontrar coincidencia entre las predicciones y los catálogos luego de un cierto número de *snapshots*, es posible que el halo sea lo suficientemente pequeño como para recién haberse formado, o bien que se trate de una detección espuria y el halo

deba ser removido⁵

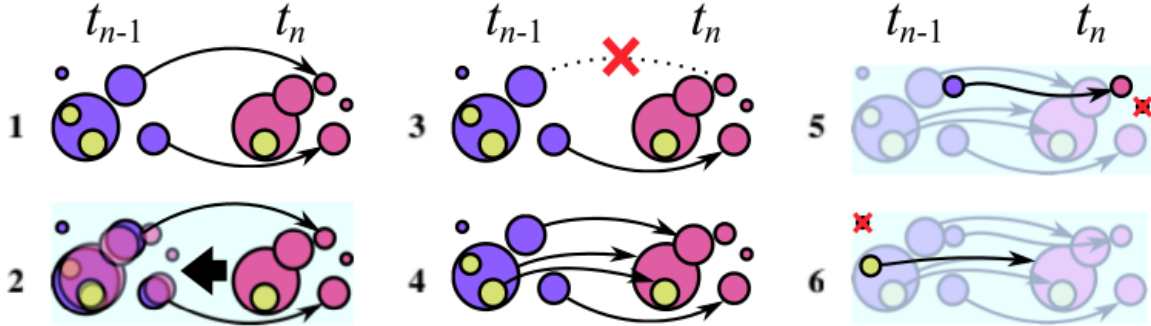


Figura 3.7: Esquema de funcionamiento del programa CONSISTENT TREES de Behroozi et al. (2013b). **1.** Se identifican descendientes utilizando un algoritmo clásico de partículas. **2.** Se evolucionan gravitacionalmente *hacia atrás* las posiciones y velocidades de todos los halos en el paso temporal t_n al paso temporal t_{n-1} . **3.** Basándose en los progenitores predichos en el paso (2), se cortan los lazos con descendientes espurios. **4.** En los casos en que el paso (2) encontró coincidencia se crean nuevos lazos. **5.** Para halos en el paso t_n sin progenitores probables se crea un *halo fantasma*, cuya posición y velocidad está dada por la evolución gravitacional del paso (2). En caso de que la falta de coincidencias con halos reales se extienda un cierto número de *snapshots*, los halos fantasma son removidos. **6.** Para halos en el paso t_{n-1} sin descendientes en t se asume una fusión con el halo que ejerza el campo tidal más fuerte. Si se encuentran demasiado lejos de otros halos como para que ocurra una fusión, se asume que son fluctuaciones estadísticas y se eliminan del árbol y del catálogo.

Cuando el código encuentra una coincidencia entre los progenitores predichos y los halos detectados en pasos temporales previos, establece una conexión progenitor-descendiente. Si una predicción no coincide con el progenitor identificado en la etapa *particle-based*, el programa confirma la predicción de la involución gravitatoria y corta el lazo. Si, en cambio, encuentra coincidencia con un halo que el algoritmo de partículas no había detectado como progenitor, genera un nuevo lazo. Si no hay ningún halo en el catálogo del paso anterior que satisfaga la predicción, CONSISTENT TREES genera un *halo fantasma*, con posición y velocidad dadas por la involución gravitatoria. Si la falta de coincidencias con progenitores reales se extiende por varios pasos temporales, el programa elimina los halos fantasma. Finalmente, para progenitores en t_{n-1} sin descendientes en t_n se asume que ha ocurrido una fusión con el halo que ejerza el mayor campo tidal en t_{n-1} . Si el halo sin descendientes

⁵Este razonamiento no es aplicable en la otra dirección: es común que los halos se fusionen, con lo cual la ausencia de descendientes no es evidencia inmediata de una inconsistencia.

se encuentra demasiado lejos de cualquier posible candidato a fusionarse, el programa lo considera una fluctuación estadística y lo remueve del árbol de fusiones y del catálogo del identificador. En Behroozi et al. (2013b) se resume el código en seis etapas, presentadas aquí en la Figura 3.7.

3.3. Redefinición de los halos ROCKSTAR

Dado un conjunto de $n+1$ partículas que el identificador haya clasificado como miembros de un halo H , la definición del momento angular de H es relativamente simple. Definido el centro de momentos como el centro de masa \mathbf{r}_{cm} del sistema, el momento angular se determina a partir de la sumatoria:

$$\mathbf{J}_H = \sum_{i=0}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm}) \times m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{cm}), \quad (3.8)$$

en donde las posiciones y velocidades son físicas, es decir, afectadas por la expansión del Universo (en oposición a las coordenadas comóviles). Parece sencillo, entonces, definir la evolución del momento angular de H como los valores que la ecuación (3.8) toma, para el mismo conjunto de partículas, a lo largo del tiempo de formación del halo. Este razonamiento que parece trivial admite ciertas sutilezas que, en la práctica, pueden transformarse en problemas.

En primer lugar está la cuestión de cuáles son las partículas que pertenecen al halo. Aunque a primera vista pareciera que este problema queda resuelto por el identificador, como ya se mencionó anteriormente, **ROCKSTAR** devuelve las propiedades de los halos que detecta, pero no devuelve las partículas que utilizó para determinar esas propiedades. Para el análisis de la evolución del momento angular (y de cualquier otra propiedad) estos datos son necesarios, con lo cual se presenta una disyuntiva: o bien se implementa un identificador diferente, que brinde al usuario información acerca de las partículas que pertenecen a cada halo, o bien se redeterminan las propiedades de los halos **ROCKSTAR** a partir de códigos propios para evitar inconsistencias y, al mismo tiempo, aprovechar la probada capacidad del identificador para detectar estructuras y subestructuras en escalas pequeñas. En este trabajo se optó por la segunda opción, quedando la primera como alternativa para investigaciones futuras.

Para redeterminar a partir de partículas conocidas las propiedades de un dado halo **ROCKSTAR**, el método elegido fue utilizar su posición \mathbf{r} y su radio virial R_{vir} para buscar

las partículas que se encuentran adentro del volumen $V_{vir} = \frac{4}{3}\pi R_{vir}^3$ centrado en \mathbf{r} . El radio virial de un halo determina la esfera que encierra la densidad ρ_{vir} , igual a una cierta cantidad de veces la densidad crítica del Universo ρ_c , es decir

$$\rho_{vir} = \Delta_c \rho_c$$

Es común escribir esta relación en términos de la densidad media del Universo $\rho_b = \Omega_m \rho_c$, de modo que

$$\rho_{vir} = \Delta_{vir} \rho_b$$

El valor de Δ_c ha sido estudiado teóricamente y a través de simulaciones numéricas para diferentes cosmologías. El trabajo teórico de Peebles (1980) predijo que una esfera de material colapsará si su densidad sobrepasa $1,686(1+z)$ veces la densidad ρ_b . Luego de que colapse y se virialice, la esfera encerrará una densidad media dada por la expresión (1.58), $\Delta_c \approx 18\pi^2 \approx 178$ veces la densidad crítica $\rho_c(z)$ a ese redshift. Este resultado fue confirmado en simulaciones cosmológicas (Cole & Lacey, 1996). En base a esto, Navarro et al. (1996) adoptaron el número $\Delta_c = 200$, que se difundió y ha sido utilizado ampliamente desde entonces. Sin embargo, el resultado (1.58) fue obtenido utilizando una cosmología Einstein-de Sitter, donde ya se vio que $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$. Para cosmologías más aceptadas actualmente, donde $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) \approx (0,3, 0,7)$, se adopta el valor de $\Delta_c \approx 100$. Estas cantidades han sido generalizadas y estudiadas por diversos autores (Eke et al., 1998; Nakamura & Suto, 1997), pero ROCKSTAR utiliza, por defecto, la definición de Bryan & Norman (1998), con $\rho_{vir} = 360\rho_b$ a $z = 0$.

La importancia de este análisis radica en que el valor del factor Δ_c (o de Δ_{vir}) determina la sobredensidad esperada adentro de una región virializada, es decir, en equilibrio virial. Se espera entonces que las partículas en la región V_{vir} estén ligadas, lo cual justifica su elección como *miembros* del halo y aporta un criterio objetivo para redefinir las propiedades. En efecto, Behroozi et al. (2013) encuentran con simulaciones numéricas que adentro del radio virial, a $z = 0$, típicamente el $\sim 98\%$ de las partículas de halos principales se encuentran ligadas.

En este trabajo se adopta entonces, como redefinición de un halo ROCKSTAR $H_{\mathbf{R}}$, el conjunto de partículas que se encuentran dentro del volumen esférico $V_{vir}^{\mathbf{R}}$ centrado en la posición del halo $\mathbf{r}_{\mathbf{R}}$. Las únicas dos propiedades que se toman del programa son, entonces, la posición y el radio virial de cada halo (además, por supuesto, de la información acerca de *cuáles* son estos halos). El resto de las propiedades se determinan utilizando las nuevas partículas, que en $z = 0$ debería coincidir en un $\sim 98\%$ con las partículas ligadas ROCKSTAR. Como

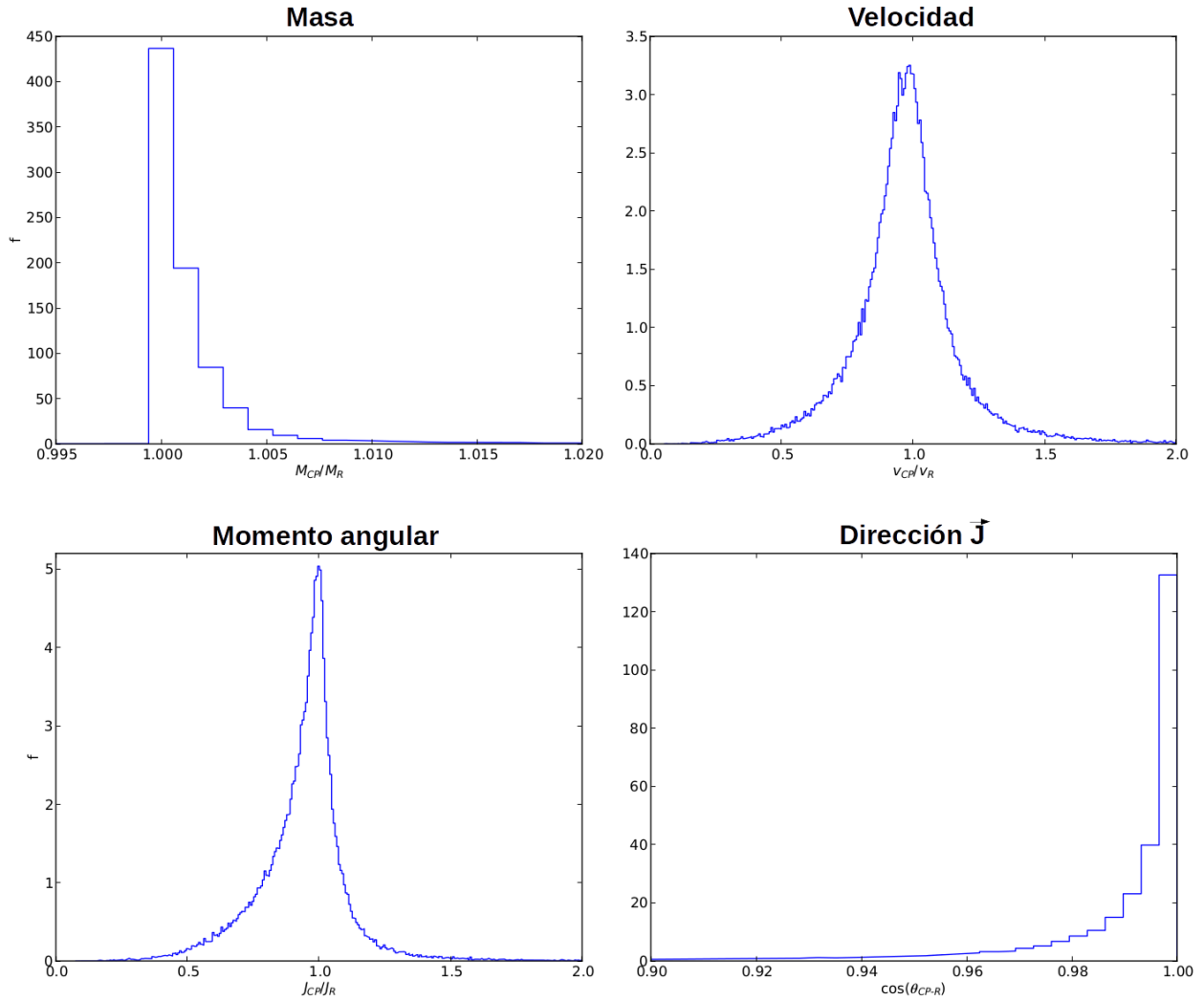


Figura 3.8: Comparación entre propiedades devueltas por el código ROCKSTAR y las mismas propiedades determinadas a partir de las partículas en esferas de radio R_{vir}^R . Para comparar la masa se realizó la distribución del cociente entre M_{CP} y M_R . Para el módulo de la velocidad y del momento angular se hizo lo mismo. Para la dirección del momento angular, en cambio, se graficó la distribución del coseno del ángulo θ entre ambas direcciones. En todos los casos las comparaciones muestran un buen acuerdo entre ambas determinaciones.

no se puede realizar esta comparación, se verificaron diferentes propiedades de los halos determinadas de uno y otro modo (por el programa, P_R , y por los códigos propios, P_{CP}) en todas las simulaciones, para $z = 0$. Los resultados en la simulación S_2 , compatibles con Behroozi et al. (2013), se observan en la Figura 3.8. Se puede ver que las desviaciones

para los ~ 86000 halos son muy pequeñas alrededor de las medianas, tanto en los valores de masa (que no es otra cosa que el número de partículas identificadas) como los de velocidad, así como para el momento angular y su dirección. Los valores típicos de cada distribución son: para la masa, una mediana $med_M = 1,0003$ con una distancia intercuartil $(Q_3 - Q_1)_M = 0,0017$ (el intervalo $[med - Q_1; med + Q_3]$ contiene, por definición, el 50 % de los datos); para el módulo de la velocidad, una media $\bar{v} = 0,98$ con una desviación estándar $\sigma_v = 0,20$; para el módulo del momento angular, una mediana $med_J = 0,96$ con una distancia intercuartil $(Q_3 - Q_1)_J = 0,15$, para el coseno del ángulo entre las direcciones de los momentos angulares, $med_{\cos(\theta)} = 0,99$ con una distancia intercuartil $(Q_3 - Q_1)_{\cos(\theta)} = 0,01$.

4 Momento angular de halos en simulaciones numéricas

Para abordar el tema principal de este trabajo ha sido necesario introducir una serie de herramientas teóricas y prácticas: el Universo FRW y los modelos de formación de estructuras, la TTT, las desviaciones en la etapa de crecimiento no lineal, la influencia de la teoría jerárquica en la evolución del momento angular a través de las fusiones; luego, las simulaciones numéricas, los métodos de identificación de halos de DM y los algoritmos para construir árboles de fusión. En este capítulo se presentan las hipótesis y métodos desarrollados durante el transcurso del presente trabajo, en base a esas herramientas.

4.1. Evolución del momento angular

4.1.1. Definiciones: partículas del halo raíz e historia de los progenitores

La ecuación (3.8) determina el momento angular de un halo de DM a partir de sus partículas. Una manera de estudiar la evolución de esta propiedad consiste en identificar las partículas de un halo a $z = 0$ y seguir su comportamiento hacia *redshifts* más altos (atrás en el tiempo) sin tener en cuenta el árbol de fusión del halo raíz. Esto es, sin considerar la historia de fusiones de los progenitores. Este enfoque es muy apropiado si se quiere analizar el momento angular desde la TTT: las partículas del halo virializado a $z = 0$ comienzan a alejarse en el espacio lagrangiano, de manera que al llegar a los primeros pasos temporales de la simulación éstas forman un volumen irregular de materia cuya densidad se encuentra apenas por encima de la densidad media del volumen total: una perturbación en el Universo FRW, un protohalo de DM. La TTT predice que el momento angular de la perturbación, es decir, del conjunto de partículas identificadas a $z = 0$, crecerá de manera monótona hasta que el protohalo se desacople de la expansión general de Hubble cerca del punto

de *turnaround*, luego de lo cual, al no seguir sufriendo torques significativos, el momento angular se mantendrá constante (ver Figura 2.2).

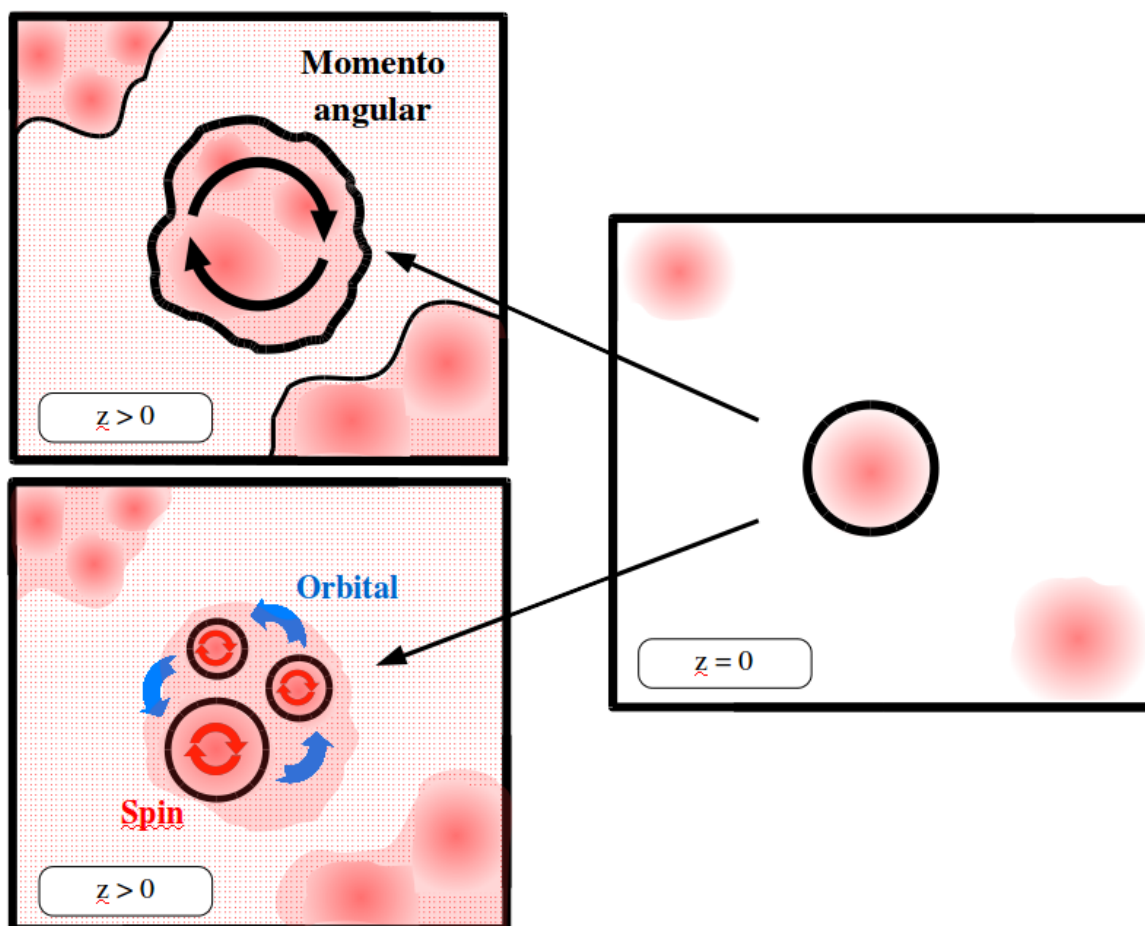


Figura 4.1: Representación esquemática de dos enfoques diferentes para estudiar la evolución del momento angular. Por un lado, a partir de la historia de las partículas de un halo, identificadas a $z = 0$ (arriba). Por el otro, analizando el modo en que se multiplican, crecen y se fusionan los progenitores de un halo raíz, a partir de árbol de fusiones (abajo).

Existe, sin embargo, un aspecto fundamental de los modelos de formación de estructuras que puede afectar seriamente las predicciones de la TTT, y que debe ser tomada en cuenta si se quiere dar una descripción realista del proceso de evolución del momento angular: los halos de DM se forman mediante el choque o fusión de halos de menor masa que se formaron antes. Una manera de tener en cuenta este enfoque es estudiar la historia de los progenitores de cada halo, sus eventos de fusión y el modo en que ha ido evolucionando el momento angular de estas estructuras. Los árboles de fusión establecen la relación entre un

halo raíz y sus progenitores, y luego entre éstos y su ascendencia, hasta llegar a los instantes en que los halos se formaron por primera vez, es decir, el punto en que las perturbaciones alcanzaron el límite de detección del identificador. Un halo raíz a $z = 0$ puede tener más de un progenitor en el paso temporal anterior. Por lo tanto, la historia de su momento angular puede entenderse como la suma de los momentos angulares de rotación, o spin, de cada progenitor, más el momento angular orbital que el sistema de progenitores desarrolla alrededor de un centro de masa común (Figura 4.1).

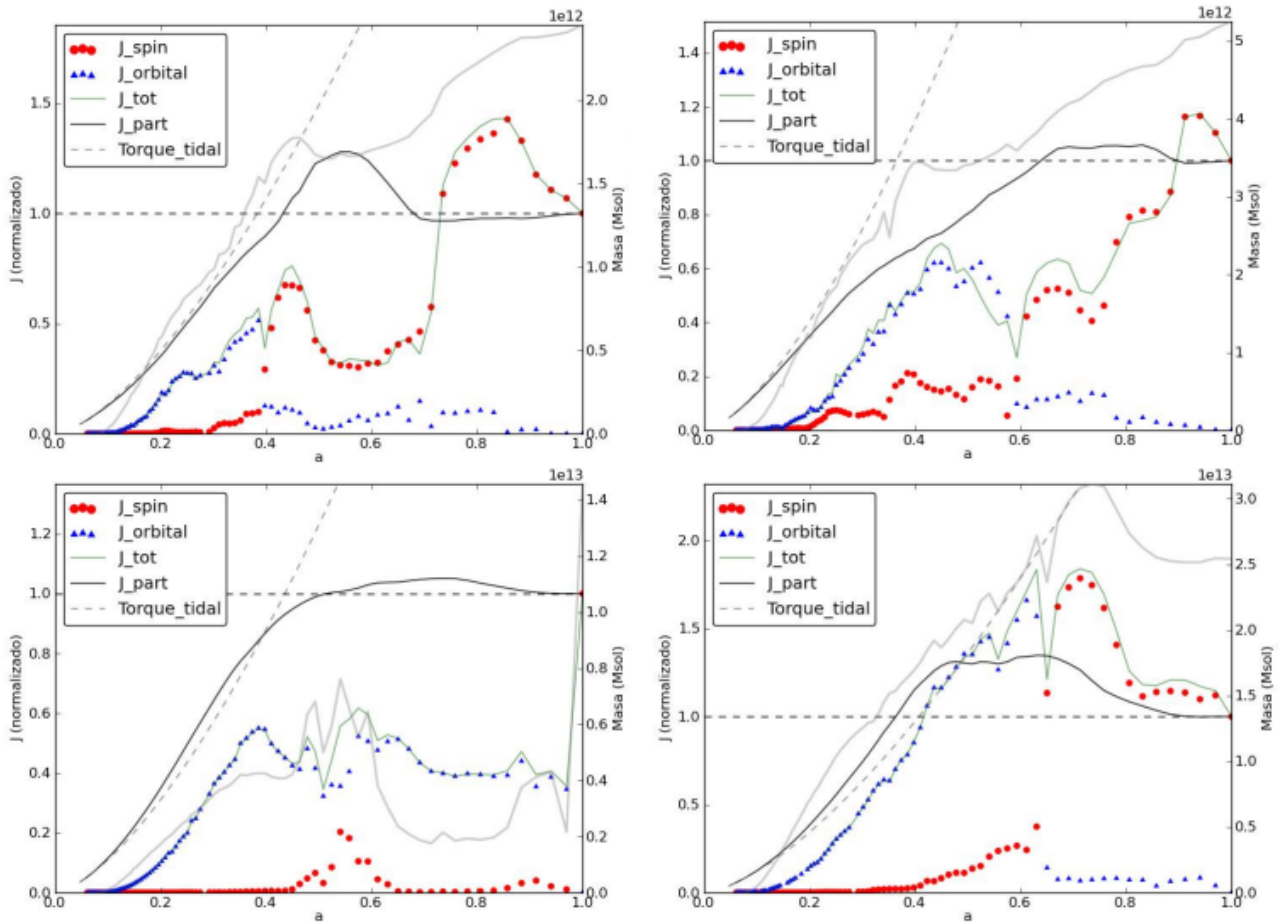


Figura 4.2: Momento angular para diferentes halos de la simulación S_1 en función del factor de escala a . El valor en cada paso temporal está normalizado al momento angular final. Se puede ver la historia de las partículas del halo raíz (curva sólida negra), el orbital (triángulos azules), el spin (círculos rojos) y la suma vectorial de ambos, es decir, el momento angular total de los progenitores (curva sólida verde). Se presenta para comparación la evolución predicha por la TTT (línea de trazos negra): primera etapa con $J \propto a^{3/2}$ y segunda etapa, luego del punto de *turnaround*, con $J = cte$. También se muestra la evolución de la masa de los progenitores.

Con el fin de estudiar la historia de diferentes halos, se analizó la evolución del momento angular considerando cada una de las definiciones anteriores. En la Figura 4.2 se pueden ver algunos casos particulares. En el eje horizontal se muestra el factor de escala a del Universo. La curva sólida de color negro representa la historia del momento angular de las partículas del halo raíz. La curva de triángulos azules muestra el momento angular orbital de los progenitores del halo raíz en cada paso temporal, mientras que la curva de círculos rojos muestra la suma vectorial de sus momentos de spin. La curva verde representa, finalmente, la suma vectorial del orbital y el spin, es decir, el momento angular total de los progenitores. Si la unión de las partículas de halos progenitores fuera igual al conjunto de partículas del halo raíz, la curva verde y la negra serían idénticas. Estas historias, en general, no coinciden. A $z = 0$, sin embargo, el momento angular de las partículas del halo raíz debe ser, por definición, igual al de spin: las partículas identificadas son las mismas y hay un único halo, por lo que el momento angular orbital es nulo. La línea gris sólida muestra la evolución de la masa de los progenitores.

Para analizar esta historia en el marco de la TTT se estudió, además, la evolución que el modelo predice (línea de trazos negra): dado un momento angular inicial J_0 , se espera que su crecimiento siga una ley $J \propto a^{3/2}$ y que, luego del instante de *turnaround*, su valor se mantenga constante hasta el tiempo presente ($z = 0$ o $a = 1$). Se pudo ver que en la gran mayoría de los casos analizados individualmente, la TTT es suficiente para comprender el crecimiento del momento angular en las primeras etapas de formación de los halos. Las partículas a $z = 0$ muestran un buen ajuste con las predicciones, mientras que la historia de los progenitores en estas etapas es, por lo general, paralela a la curva negra. Además de ser compatible con otros resultados encontradas en la literatura, el comportamiento de ambas historias es razonable: la TTT explica el crecimiento del momento angular de una región ligeramente sobredensa a medida que esta sobredensidad aumenta, y este esquema se encuentra bien descrito por la historia de las partículas del halo raíz, que a alto *redshift* forman una región lagrangiana que colapsa (protohalo). La historia de los progenitores, en cambio, comienza cuando el identificador reconoce por primera vez estructuras, y esto no ocurre sino a partir de un dado *redshift*. Una vez que los progenitores aparecen, sin embargo, muestran un comportamiento similar aunque con valores inferiores, dada la existencia de un gran número de partículas en la región colapsante que aun no pertenecen a ningún halo.

A medida que la evolución de los halos se aproxima al punto de *turnaround*, es decir, alrededor de la intersección entre las curvas de trazos negras, la historia cambia. Los efectos no lineales comienzan a jugar un papel importante, ya que las sobredensidades superan

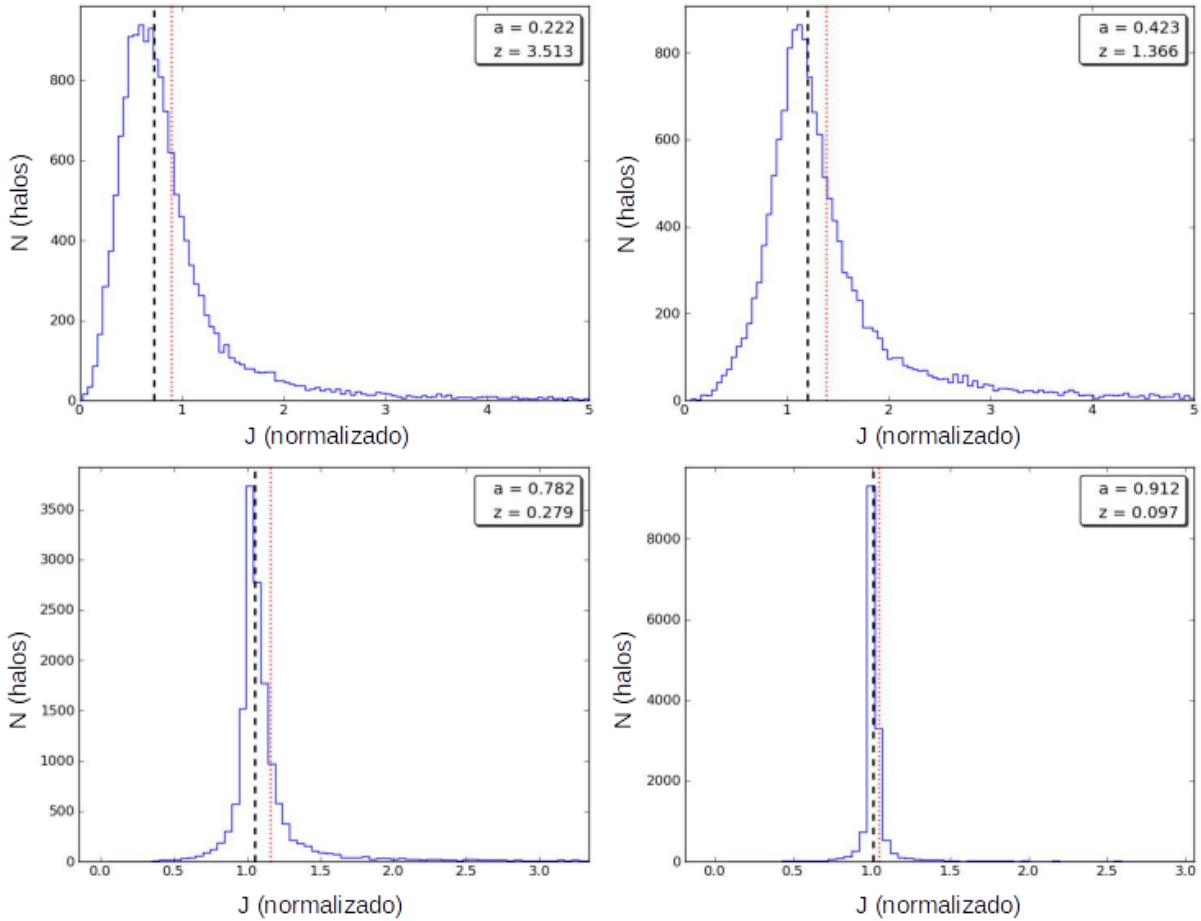


Figura 4.3: Distribución del momento angular para diferentes pasos temporales de los 15680 halos en la simulación S_1 . Cada uno ha sido normalizado a su valor en $z = 0$. La línea de trazos negra muestra la mediana, el estadístico más representativo, mientras que la línea de puntos roja muestra la media.

los límites que la aproximación de Zeldóvich admite. Las fusiones violentas, los tránsitos cercanos y la presencia de estructura en mayor escala se apartan del esquema de la TTT, y comienzan a producirse situaciones diferentes a las que predice el modelo. En la Figura 4.2, sólo un halo (abajo a la izquierda) cumple con la historia que la TTT le tiene asignada. En algunos casos, el momento angular de las partículas del halo raíz crece por encima de su valor final ($J > 1$) y luego cae; en otros, nunca deja de crecer; finalmente, existen halos con historias extrañas, con crecimientos inusuales del momento angular y caídas abruptas, que en ocasiones coinciden con saltos en la historia de acreción de masa de los progenitores, fuerte evidencia de fusiones violentas. En cualquiera de estas situaciones, además, la historia de los progenitores suele dejar de ser paralela a la historia de las partículas del halo raíz, lo

cual indica que las estructuras menores y su proceso de fusiones juegan un papel complejo, que debe ser tenido en cuenta como una dimensión más del problema.

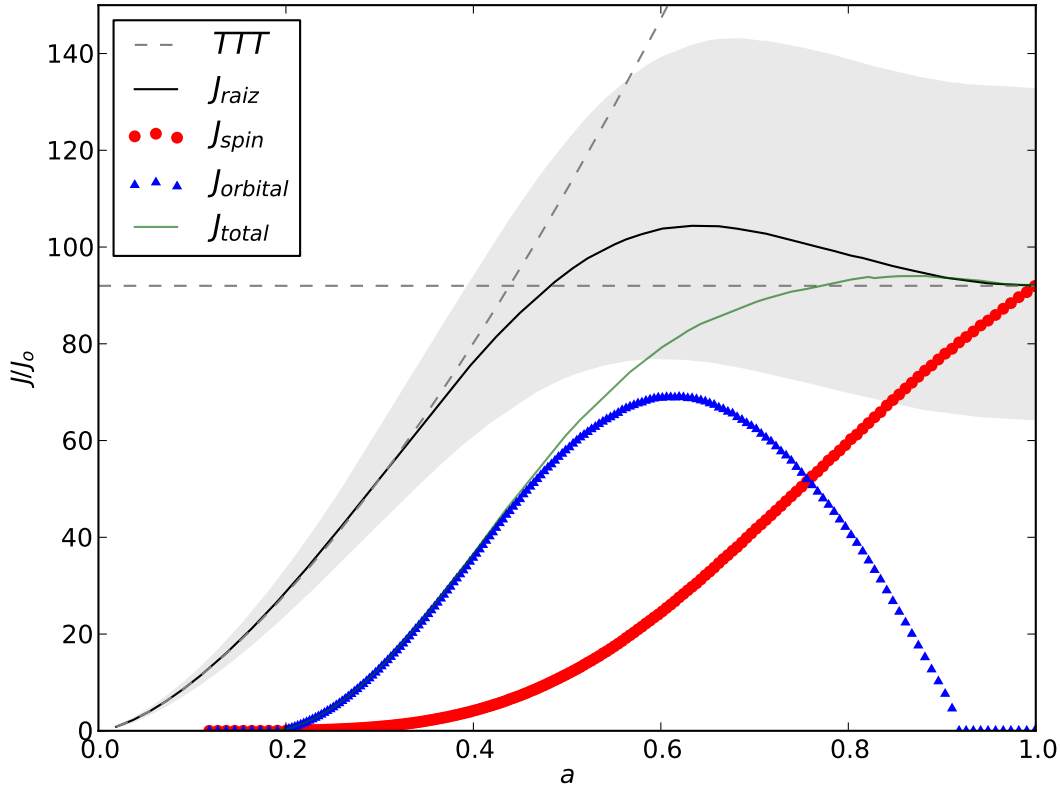


Figura 4.4: Evolución de la mediana del momento angular normalizado de ~ 86000 halos en la simulación S_2 . Los códigos de color y símbolos son los mismos que en la Figura 4.2. Se puede ver que, en mediana, los halos primero ganan momento angular según la TTT y luego pierden alrededor del $\sim 20\%$. La dispersión, determinada a partir de la distancia intercuartil (área gris clara), presenta la misma característica. Además es muy grande, lo cual muestra la necesidad de ajustar el enfoque a medida que se avanza en las etapas de formación de los halos.

Otro enfoque posible, complementario al estudio cualitativo individual, es realizar alguna clase de estadística. Para ello se analizó, en cada paso temporal de la simulación, la distribución del momento angular normalizado de todos los halos. En la Figura 4.3 se puede ver el resultado de este estudio en cuatro pasos temporales diferentes. Los 15680 halos, con masas entre $\sim 1 \times 10^{11} M_\odot$ y $\sim 4 \times 10^{14} M_\odot$, están representados en las gráficas. Los 86425 halos de la simulación S_2 , con masas entre $\sim 3 \times 10^{13} M_\odot$ y $\sim 3 \times 10^{15} M_\odot$, muestran las

mismas características. Se puede notar que la distribución del momento angular de todos los halos muestra una configuración asimétrica, que se vuelve cada vez más ajustada alrededor de $J = 1$ a medida que se aproxima el tiempo presente. Esta clase de distribuciones justificaron la elección de la mediana como estadístico para estimar la historia de un halo típico, ya que constituye un estimador más representativo que la media.

En las simulaciones S_1 y S_2 se determinó, entonces, la mediana del momento angular normalizado de todos los halos, para cada definición representada en la Figura 4.2, y en cada paso temporal. Se obtuvieron, de este modo, las evoluciones medianas de los momentos angulares orbital, de spin y total de los progenitores, y de las partículas del halo raíz. En la Figura 4.4 se muestran las curvas de este comportamiento mediano en la simulación S_2 . La dispersión alrededor de la historia de las partículas del halo raíz no representa un error, sino una medida de la desviación que muestran los halos respecto al comportamiento típico, que ya se podía ver, con más detalle, en la Figura 4.3. Hay una característica notable en el comportamiento mediano de las partículas del halo raíz, con una cierta dependencia con la masa: adquieren momento angular según la TTT, pero a partir de un cierto punto comienzan a perderlo. En halos más masivos se ve una disminución menor al $\sim 5\%$, mientras que para halos menos masivos la diferencia entre el pico y el valor final puede ser de hasta el $\sim 20\%$. Para este aparente problema físico se encontró una respuesta a partir de la definición de los halos.

4.1.2. El problema de la pérdida generalizada de momento angular

Una de las cuestiones que surgen del análisis diferenciado del halo raíz y la historia de sus progenitores es la correspondencia que hay entre partículas. Naturalmente, los progenitores de un halo irán acumulando masa (partículas) de manera individual, y entregarán gran parte de esa masa a un halo mayor cada vez que se produzca una fusión. Con el tiempo, la población de partículas de los halos progenitores irá pareciéndose cada vez más a la población del halo raíz, hasta que a $z = 0$, cuando el único halo del árbol de fusiones que quede sea el halo raíz, ambos conjuntos coincidan por definición. Como es de esperar, la correspondencia entre partículas del halo raíz y partículas de halos progenitores puede depender en gran medida de la definición que se tenga de “halo”: sobredensidades esféricas, criterio de cercanía entre partículas, limpieza por ligadura o no, etc. No necesariamente una de estas definiciones es correcta y las otras están mal, pero es preciso que haya consistencia en la manera de determinar las propiedades de un halo si se quiere comparar la evolución

del momento angular en los dos escenarios ya mencionados, de manera que en las señales obtenidas no se confunda un proceso físico real y relevante con un mero efecto de selección de partículas.

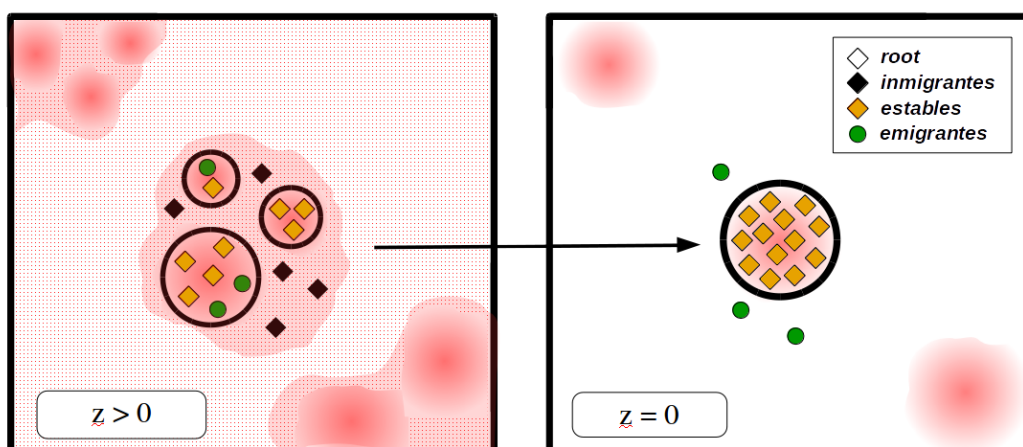


Figura 4.5: Esquema de clasificación de partículas según su pertenencia a halos en diferentes pasos temporales. Los rombos representan partículas del halo raíz: en naranja si ya pertenecen a un progenitor (*estables*) o en negro si aun no (*inmigrantes*). En círculos verdes se representan partículas que pertenecieron a un progenitor en algún momento pero que a $z = 0$ no se encuentran en el halo raíz (*emigrantes*). A medida que caen en el halo, las partículas *inmigrantes* se transforman en miembros *estables*.

Se utilizará a partir de este punto una cierta nomenclatura para referirse a cada una de las poblaciones de partículas que conforman la historia de un halo. A las partículas del halo raíz, identificadas en $z = 0$ y cuya historia se sigue en la Figura 4.2 con la curva continua negra, se les llamará partículas *raíz*. A los miembros de halos progenitores, que se identifican en cada paso temporal y cuyo momento angular se representa en la Figura 4.2 mediante los círculos rojos (spin), triángulos azules (orbital) y la curva verde (momento angular total), se les llamará partículas *prog*. Dado un halo raíz, se puede comparar su población *raíz* (fija) con las diferentes poblaciones *prog* en cada paso temporal, y definir así tres nuevas poblaciones: la intersección de los conjuntos *raíz* y *prog* (es decir, las partículas del halo raíz que en ese instante se encuentran en progenitores) se designará como partículas *estables*; la diferencia de los conjuntos *raíz* – *prog* (es decir, partículas del halo raíz que aún no han entrado en progenitores) se designará con el nombre de *inmigrantes*, ya que eventualmente caerán en el pozo de potencial del halo raíz o de alguno de sus progenitores; finalmente, la diferencia *prog* – *raíz* (es decir, las que están en progenitores pero no son

identificadas en $z = 0$) se llamarán partículas *emigrantes*, ya que en ese paso temporal particular forman parte de la historia del halo, pero eventualmente escaparán del sistema (ver Figura 4.5). La historia de acreción de masa muestra que en muy pocas ocasiones el conjunto de partículas *prog* supera en algún instante al conjunto *raíz*, pero eso no impide que el conjunto de *emigrantes* sea numeroso o, lo que es más importante, dinámicamente significativo.

De la definición para miembros de un halo cualquiera en este trabajo, es decir, partículas adentro del radio virial ROCKSTAR (ver capítulo 3), se espera que la gran mayoría de partículas *raíz* se encuentren, para $z > 0$, o bien en halos progenitores, o bien en un entorno más o menos cercano. En el primer caso, el proceso responsable de que las partículas de un progenitor pasen al halo raíz es conocido como “acreción caliente”, y se produce en las etapas de formación en que los halos crecen por fusiones entre halos menores. En el segundo caso, las partículas pasan al halo raíz por medio de un proceso de “acreción fría” o difusa, que tiene lugar cuando el número de progenitores disminuye, las condiciones del entorno se vuelven menos violentas y las partículas que no pertenecen a ningún progenitor simplemente caen en el pozo de potencial del sistema, quedan ligadas y no vuelven a escapar del radio virial hasta que son identificadas en $z = 0$. Estos dos mecanismos se observan en las simulaciones de este trabajo, pero para analizar con mayor detalle el proceso y su influencia en la historia del momento angular, se compararon en cada snapshot las partículas del halo raíz con las partículas contenidas en progenitores. En la Figura 4.6 se puede ver, para cuatro instantes diferentes de la simulación S_2 , la distribución de halos con diferentes fracciones de partículas *inmigrantes* (en negro), *estables* (en naranja) y *emigrantes* (en verde). Estas últimas configuran la población extraña: si muchas partículas son expulsadas de sistemas ligados, tal vez exista un efecto físico que no está siendo tenido en cuenta. Si, como es de esperar, esta población es pequeña y se encuentra en el entorno inmediato de un halo raíz a $z = 0$, es muy posible que su pertenencia o no a un sistema sea una mera cuestión de definición.

La evolución presenta, en los primeros pasos temporales, una clara preponderancia de población *raíz* que aun no cayó en el pozo de potencial de ningún progenitor, es decir, partículas *inmigrantes* (en negro). Esto simplemente muestra el hecho de que no se han formado muchos halos y que, por lo tanto, las partículas *raíz* no tienen a donde caer. A medida que pasa el tiempo comienzan a aparecer las primeras estructuras menores, las partículas *raíz* quedan ligadas a estos sistemas y son identificadas como miembros de algún progenitor, pasando a formar parte de la población de partículas *estables* (en

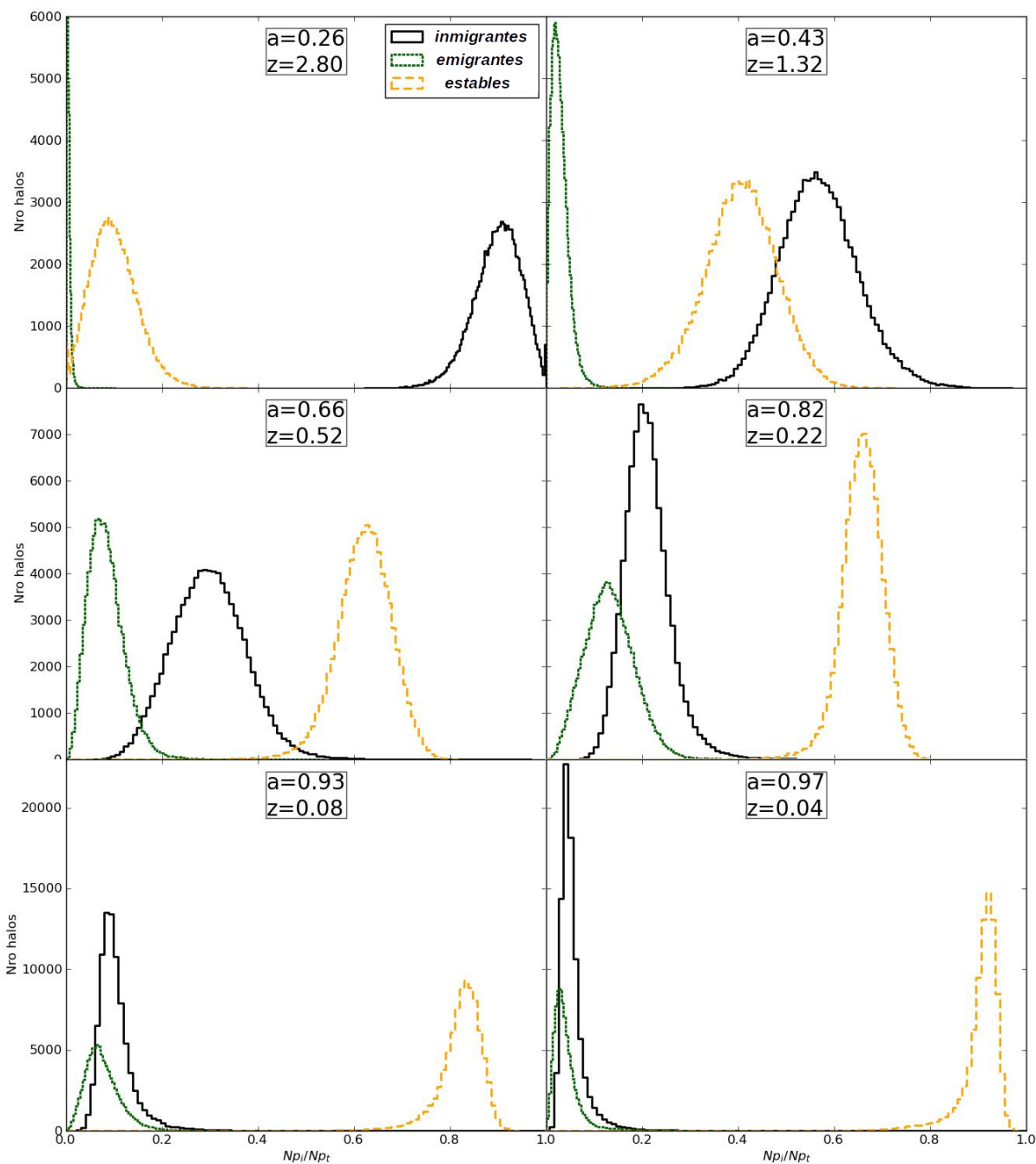


Figura 4.6: Número de halos en la simulación S_2 en función de la fracción de sus partículas que, a un dado paso temporal, se encuentran sólo en progenitores (línea de puntos verde), están sueltas (línea sólida negra) y están en progenitores y en el halo raíz (línea de trazos naranja). A $z = 0,22$ es cuando mayor fracción sobre el total representan las partículas que sólo están en progenitores (alrededor del 10% del total), es decir, que escapan del sistema antes de $z = 0$.

naranja). Esto produce el intercambio entre las dos curvas. Al mismo tiempo, partículas que a $z = 0$ no se encuentran en el halo raíz son temporalmente identificadas en la región delimitada por el radio virial de algún progenitor: son parte de la población de *emigrantes* (en verde), que eventualmente escaparán del sistema. La fracción media de *emigrantes* en halos, a diferencia de la fracción de *estables*, no muestra un crecimiento monótono sino que aumenta hasta un cierto punto y luego disminuye. Esto puede verse en la Figura 4.6 siguiendo el pico de la curva verde, que se corre hacia la derecha hasta $z = 0,22$, cuando alcanza un máximo de $\sim 10\%$. A partir de este paso temporal el pico retrocede, pero esto es en realidad un efecto de selección: a medida que $z \rightarrow 0$ las partículas *prog* \rightarrow *raíz* y, por lo tanto, las *emigrantes* $\rightarrow 0$, porque ya emigraron.

La fracción del $\sim 10\%$ en $z = 0,22$ no es muy significativa en masa, pero su influencia podría ser importante en la historia dinámica de cada halo: en el paso temporal en que son identificadas, las partículas *emigrantes* están aportando momento angular al sistema a través de los progenitores que las contienen temporalmente. No son tenidas en cuenta, sin embargo, cuando se sigue la historia de las partículas *raíz*, de modo que su influencia puede estar faltando en esa historia. Por otro lado, al observar el comportamiento mediano (Figura 4.4) se puede notar que el pico de momento angular *raíz* coincide con el pico de momento angular orbital. Luego de este punto se produce tanto la caída del primero, que se mencionó al final de la sección anterior, como la caída del orbital, que se produce porque los *mergers* entre progenitores transforman orbital en spin. Esto sugiere una correlación: durante una etapa de acreción caliente y de fusiones, la intensa actividad de choques puede calentar determinadas partículas y expulsarlas del sistema o, al menos, incrementar su energía lo suficiente como para que se encuentren, a $z = 0$, fuera del radio virial del halo raíz. Las partículas *emigrantes* podrían ser, entonces, las responsables de “robarse” momento angular de las partículas *raíz*.

Con el fin de verificar esta idea se determinó, para cada halo de la simulación, la evolución del momento angular del conjunto de partículas *emigrantes*, tomando como centro de momentos el centro de masa del conjunto *raíz*. Para poder seguir estas partículas a lo largo del tiempo (cuando en realidad son identificadas en cada paso temporal), y sabiendo que su número, por definición, se aproxima a cero a medida que se acerca el snapshot final de la simulación¹, se asumió que las partículas *emigrantes* en $z = 0,22$ contienen a la mayoría de las partículas *emigrantes* de los pasos anteriores. Con este conjunto se determinó enton-

¹Para entender mejor esto, extrapolar el comportamiento de la curva de puntos verde en los últimos pasos de la Figura 4.6.

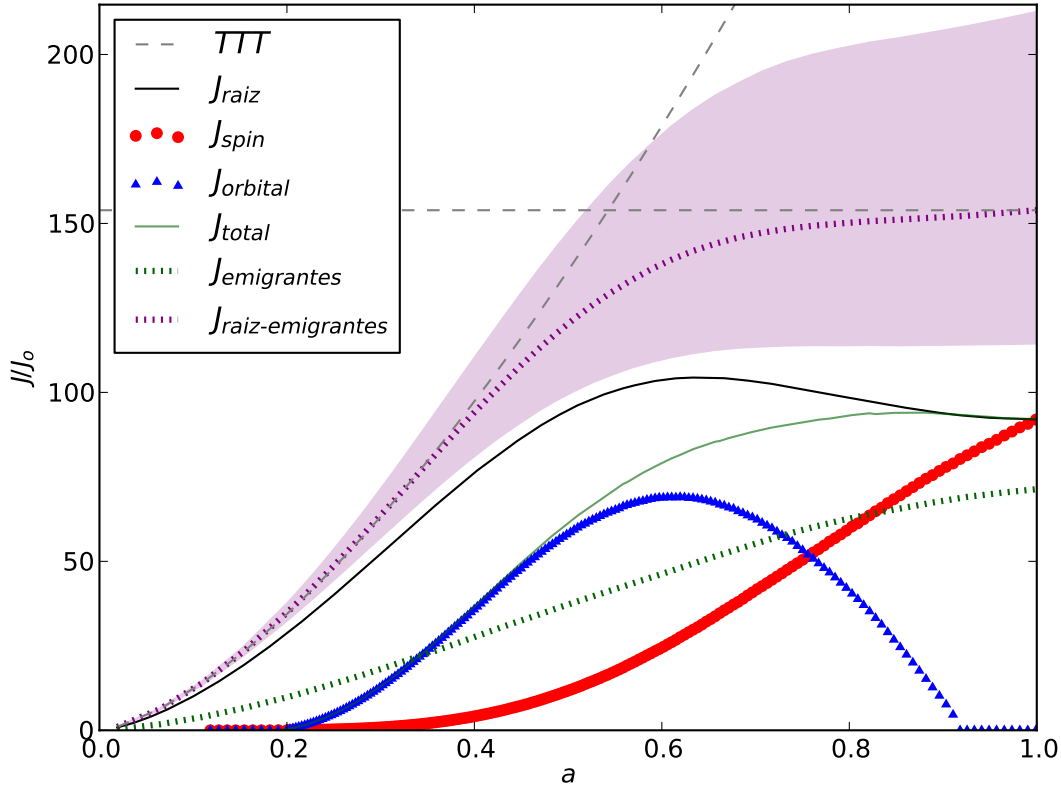


Figura 4.7: Momento angular mediano de los ~ 86000 halos en la simulación S_2 . Los códigos de color y símbolos son los mismos que en la Figura 4.4. Además, se puede ver una curva verde de puntos, que muestra el momento angular mediano de las partículas *emigrantes*, y una curva violeta de puntos, que representa la mediana de la suma vectorial entre los momentos angulares *raíz* y de *emigrantes*. Las predicciones de la TTT se calculan aquí en base al momento angular *raíz* + *emigrantes*, y se puede ver que su evolución se ajusta mucho mejor al modelo que la curva negra. La dispersión de esta suma, no obstante, sigue siendo grande.

ces la evolución del momento angular *emigrado*, que se sumó vectorialmente al momento angular *raíz*. El resultado de análisis puede verse en la Figura 4.7, en donde se presenta el comportamiento mediano para los ~ 86000 halos de la simulación S_2 . Los códigos de color y símbolos son similares a las figuras anteriores, pero ahora se suman la curva verde de puntos, que representa la historia del momento angular de las partículas *emigrantes*, y la curva violeta de puntos, que muestra el valor mediano de la suma vectorial entre el momento angular *raíz* y el momento angular *emigrado* de todos los halos. En esta gráfica, en donde las predicciones de la TTT se calculan tomando en cuenta la historia *raíz* + *emigrantes*, se

puede ver claramente como el nuevo conjunto tiene un comportamiento mediano mucho más ajustado al modelo (comparar con la Figura 4.4). La dispersión, no obstante, sigue siendo muy grande, lo cual vuelve a indicar que la evolución del momento angular halo por halo no está completamente determinada por la TTT. Se volverá sobre este punto más adelante, intentando relacionar características de la evolución del momento angular con la distribución de materia en el entorno.

4.1.3. Naturaleza de las partículas emigrantes

Para responder la pregunta de si existe algún mecanismo físico no trivial que expulsa alrededor del 10% de las partículas de sistemas ligados (Figura 4.6), o si se trata antes de un problema de definición de los halos, se estudió la posición de las partículas *emigrantes* alrededor de los halos raíz en $z = 0$, teniendo en cuenta su distribución interna de masa.

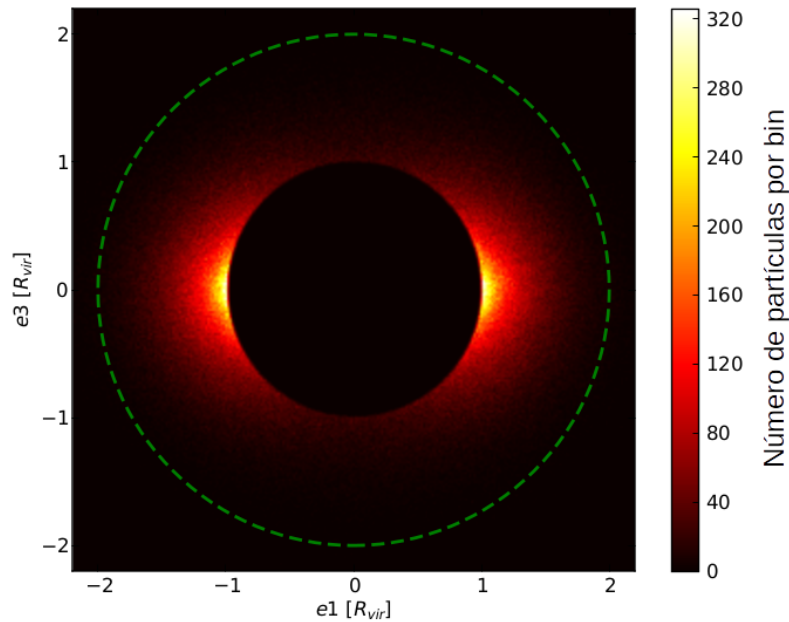


Figura 4.8: Distribución bidimensional de las partículas *emigrantes* de 20000 halos raíz en $z = 0$. Cada conjunto de partículas está normalizado al radio virial de su halo raíz y girado para que sus ejes mayor y menor coincidan con las direcciones de los ejes x e y , respectivamente. El círculo verde de trazos representa $2R_{vir}$. Es evidente que las partículas *emigrantes* se ubican preferentemente alineadas con el eje mayor de su halo raíz.

El motivo de este análisis radica en que, de tratarse de un problema de definición, es de esperar que las partículas *emigrantes* de un halo raíz se acumulen preferentemente en

una región del entorno próxima a su eje mayor, es decir, donde se encuentran la mayoría de las partículas *raíz*. De ser así, una sencilla redefinición de los halos que las considere partículas *raíz* resuelve el problema de la caída general del momento angular, sin necesidad de ninguna explicación física.

En la Figura 4.8 se muestra una superposición de las partículas *emigrantes* de 20000 halos seleccionados de manera aleatoria en la simulación S_2 . Todos los halos están proyectados en dos dimensiones, normalizados a su radio virial y rotados de manera que sus ejes mayor y menor coinciden con la dirección de los ejes x y y de la gráfica, respectivamente. Las partículas *emigrantes* se distribuyen preferentemente sobre la línea del eje mayor de su halo raíz, continuando el perfil de las partículas en el interior del radio virial. El círculo verde de trazos muestra la distancia de $2R_{vir}$, luego de la cual prácticamente no hay partículas *emigrantes*. Este resultado sugiere que las partículas *emigrantes* son, en realidad, un problema de la identificación.

Para completar el análisis se estudió la distribución de distancias de las partículas *emigrantes* alrededor de sus halos raíz, independientemente de la dirección. En la Figura 4.9 se muestra el resultado: el histograma de distancias prácticamente no presenta *emigrantes* más allá de $2R_{vir}$ (menos del $\sim 3\%$).

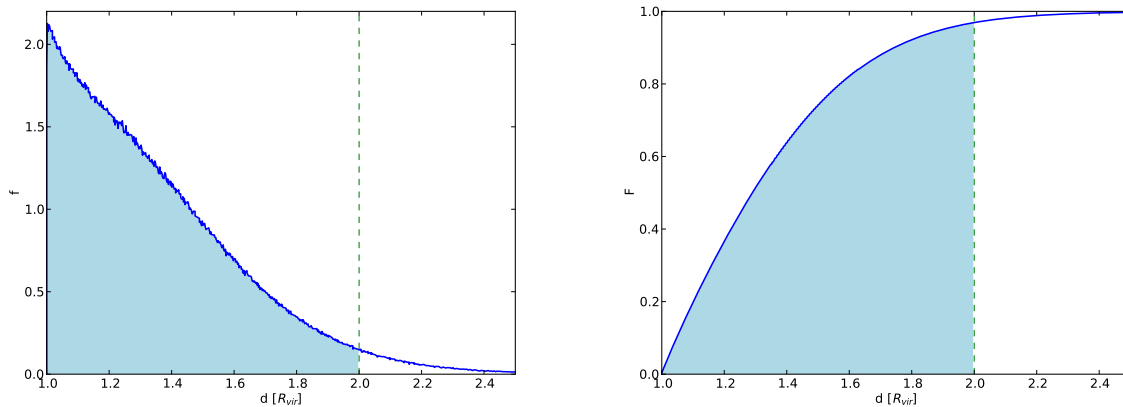


Figura 4.9: Distribución (izquierda) y distribución acumulada (derecha) de distancias al centro de masa, en unidades de R_{vir} , de las partículas *emigrantes* de 20000 halos raíz en $z = 0$. El área celeste representa el porcentaje de esta población que se encuentra a una distancia menor a $2R_{vir}$: alrededor del $\sim 97\%$.

El momento angular *raíz+emigrantes* define, entonces, un conjunto de partículas que, en comportamiento mediano, se ajustan muy bien a las predicciones de la TTT. Como no se

encuentran motivos para pensar que las partículas *emigrantes* escapan de los progenitores a causa de algún mecanismo físico, el problema de la caída general de momento angular se resuelve, sencillamente, redefiniendo los halos a $z = 0$ para que su historia incluya estas partículas. Esta nueva definición permite, en la siguiente sección, clasificar halos en poblaciones según su desviación del modelo, comparando cada historia particular con la curva de momento angular mediana *raíz + emigrantes*.

4.2. Poblaciones según su desviación de la TTT: halos ganadores y perdedores

La evolución del momento angular de los halos fue analizada en la simulación S_2 , con halos en un rango de masas más grandes que S_1 . Se estudió la función de correlación de halos para poblaciones cuyo momento angular *raíz + emigrantes* a $z = 0$ (ver sección 4.1.2) se encuentra por encima o por debajo del valor que le tiene asignado la TTT. El objetivo es determinar de qué modo las desviaciones del comportamiento TTT están relacionadas con el desarrollo de halos en entornos diferentes.

Para construir las poblaciones se desafectó la historia de los halos de las variaciones debidas a su diferente momento angular inicial J_0 y a sus diferentes punto de desacople a_{TTT} , de manera de estar seguros de que cualquier desviación en la evolución sea debida a algún mecanismo ajeno a la TTT. Dos halos con J_0 diferentes (por ejemplo, por formarse en el seno de una distribución de masa cuyo tensor tidal esté particularmente alineado con el tensor de forma del protohalo, en un caso, y particularmente desalineado, en el otro) desarrollarán momentos angulares distintos, cada uno de los cuales crecerá como

$$J = J_0 a^{3/2} \quad (4.1)$$

durante la etapa lineal. Si no existen efectos no lineales ajenos a la TTT, cada protohalo experimentará en algún instante t_{TTT} un desacople de la expansión general del Universo, luego de lo cual mantendrá su momento angular constante hasta $z = 0$. Si t_{TTT} es mayor, el spin del halo crecerá como (4.1) durante más tiempo y su valor final será más grande. En esta sencilla implementación del modelo el valor final del momento angular de cada halo estaría completamente determinado por dos parámetros: su momento angular inicial J_0 y su punto de desacople t_{TTT} .

Para desafectar el análisis de estas dos cantidades y poder estudiar la evolución estadísticamente se normalizó, en primer lugar, la historia del momento angular de cada halo a su

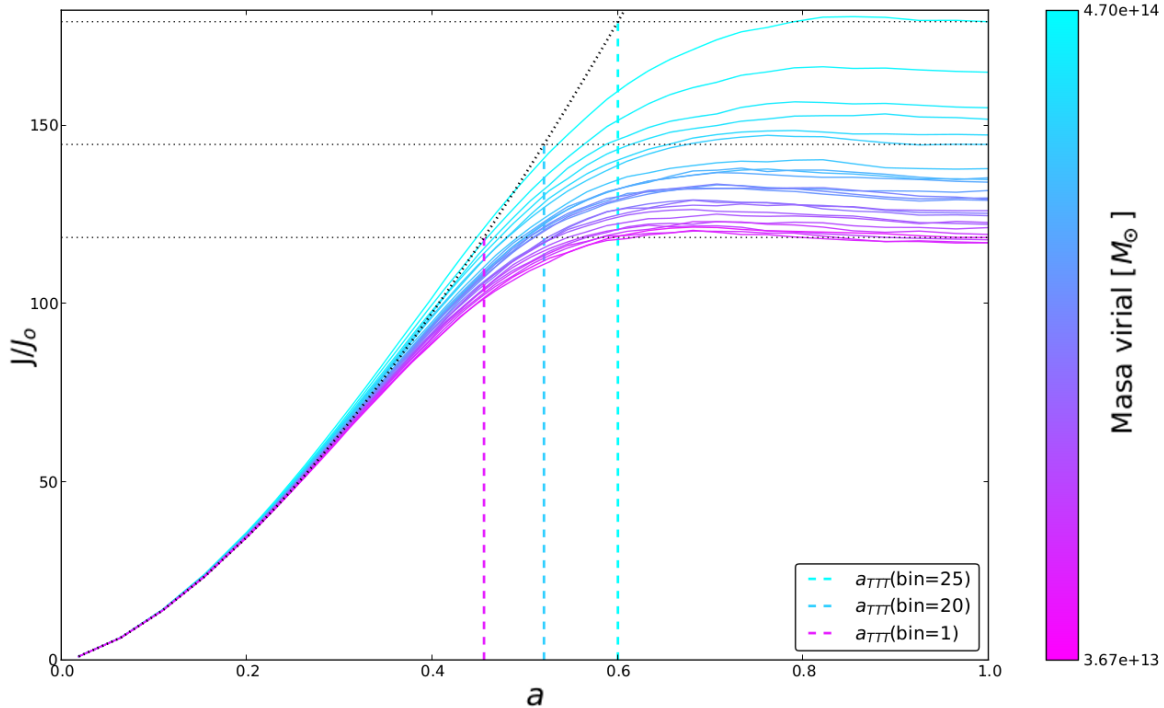


Figura 4.10: Evolución de la mediana del momento angular en los 25 bins de masa. Cada halo está normalizado a su J_0 , por lo que las historias están desafectadas de las diferencias que pueda introducir en la evolución el momento angular inicial. El tiempo de desacople en cada bin correlaciona con su masa: halos más masivos colapsan más tarde (en la gráfica en lugar de t_{TTT} se tiene a_{TTT}). Este punto está representado aquí como la intersección de la curva negra de trazos TTT con el valor final de cada bin, aunque claramente los momentos angulares medianos se separan del modelo un poco antes. La correlación masa- t_{TTT} , no obstante, sigue siendo evidente.

valor inicial J_0 , de modo que todos los protohalos comiencen con momento angular normalizado $J = 1$. En segundo lugar, hay que normalizar la historia al punto de desacople t_{TTT} . Porciani et al. (2002) encontró, como ya se mencionó en el capítulo 2, que este instante no coincide exactamente con el punto de *turnaround* t_{ta} que predice el modelo de colapso esférico. Sin embargo, logró establecer la relación de proporcionalidad $t_{TTT} = 0,56t_{ta}$. Existe, a su vez, una correlación entre t_{ta} y la masa dada por el modelo de colapso esférico: los halos más masivos colapsan más tarde. De esta manera, se separaron los 86425 halos en 25 *bines* de masa *equal-number*, es decir, con el mismo número de miembros por bin: 3457 halos. Esta separación permite asumir que el tiempo de *turnaround* de los halos adentro de cada bin es similar.

Estudiando cada uno de los 25 conjuntos por separado se definió como evolución espe-

rada TTT al comportamiento mediano de cada población. Se clasificó luego a los halos de cada bin en sextiles, según su dispersión alrededor del valor esperado TTT en $z = 0$. Se obtuvieron así halos que ganaron más momento angular del que se esperaba de la TTT y halos que no llegaron al valor que la TTT les tenía asignado. Estos últimos pueden ha-

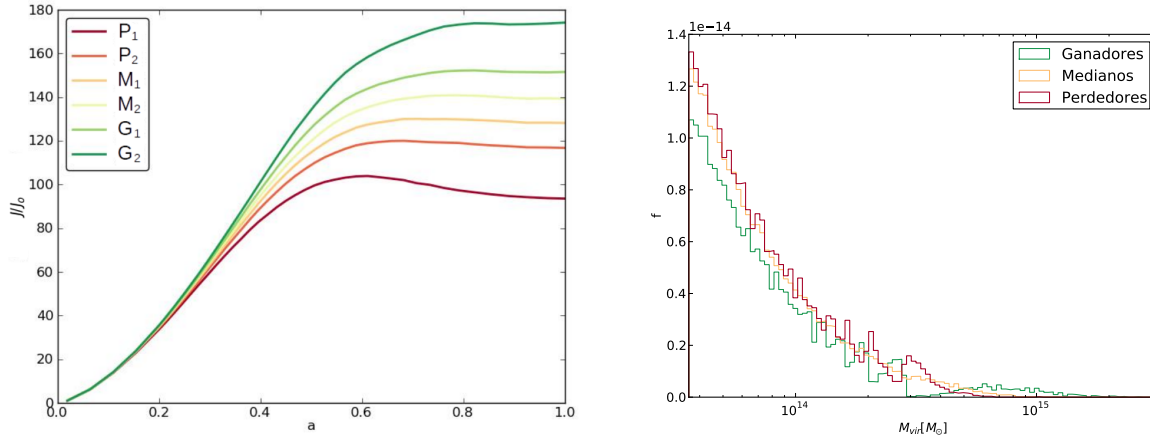


Figura 4.11: **Izquierda:** evolución de la mediana en cada uno de los sextiles de halos *ganadores* (G_i), *medianos* (M_i) y *perdedores* (P_i). Los índices subdividen cada conjunto: 1 es más perdedor y 2 es más ganador. **Derecha:** distribución de masa de *ganadores*, *medianos* y *perdedores*. Se puede ver que las tres distribuciones son muy similares, con un pequeño sesgo del tercil más *ganador* contra halos menos masivos.

ber *perdido* momento angular en algún punto de su historia (por choques, torques tidales secundarios, etc.) o simplemente haber detenido su crecimiento en un valor menor a la predicción. Estas diferencias, por estar desafectadas del momento angular inicial y del tiempo de desacople, sólo pueden deberse a efectos ajenos a la TTT. Finalmente, se construyeron poblaciones de halos *ganadores* G_1 y G_2 , *medianos* M_1 y M_2 y *perdedores* P_1 y P_2 uniendo los correspondientes sextiles de cada bin. Dicho de otro modo, el conjunto G_2 contiene los $\frac{3457}{6} \times 25 \sim 14400$ halos que acabaron en el sextil superior dentro de su bin de masa; el conjunto P_1 , los $\frac{3457}{6} \times 25 \sim 14400$ halos que terminaron en el sextil inferior, etc. La mediana dentro de cada uno de los seis conjuntos está representada en la Figura 4.11, en función del factor de escala a . En algunos análisis se unen los sextiles de a dos y se construyen terciles: G , M y P .

4.3. Dirección del momento angular

4.3.1. Parámetro de forma de una distribución de materia

A partir de la distribución de materia en una región se pueden determinar parámetros que caractericen su forma. En un halo, por ejemplo, la relación entre sus ejes brinda información acerca de su triaxialidad (más esféricos o más elipsoidales). La estructura en gran escala, por otro lado, puede ser clasificada según la manera en que se distribuye la materia en nodos, filamentos, paredes o vacíos. Existen diferentes maneras de determinar parámetros de forma. Una de ellas es a través de los autovalores y autovectores del tensor de forma I , cuya componente ij -ésima se puede definir a partir de la posición de las partículas en la región que se quiere caracterizar (Paz et al., 2006):

$$I_{ij} = \frac{1}{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} X_{ki} X_{kj}. \quad (4.2)$$

Aquí, X_{ki} representa la posición i -ésima, relativa al centro de masa del sistema, de la partícula k -ésima y N_p es el número total de partículas. Los autovalores $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ de esta matriz corresponden al cuadrado de los semiejes del elipsoide que mejor describe la distribución de partículas, es decir, $\lambda_1 = a^2$, $\lambda_2 = b^2$ y $\lambda_3 = c^2$. Un modo común de caracterizar la forma de una estructura es utilizar los cocientes b/a y c/b para conocer la relación entre los ejes. $b/a = c/a = 1$ representa una distribución de materia con simetría perfectamente esférica. Sin embargo, estas relaciones por separado no aportan información inmediata acerca de la triaxialidad del sistema. Si se quiere conocer el grado de proladidad u obladidad, es útil calcular el cociente $\frac{c/b}{b/a} = ca/b^2$: sistemas oblados (“panqueques”) satisfacen $ca/b^2 < 1$, mientras que sistemas prolados (“pelotas de rugby”) satisfacen $ca/b^2 > 1$. Para evitar la asimetría que naturalmente surge del rango de valores que toma este parámetro ($0 < ca/b^2 < 1$ para sistemas oblados y $1 < ca/b^2 < \infty$ para sistemas prolados), se define (Paz et al., 2006):

$$P := \ln(ca/b^2) \quad (4.3)$$

A partir del parámetro P se determinó, en la simulación S_1 , tanto la forma de los halos como la naturaleza de la estructura que los rodea. Para cada halo se hizo una distinción entre formas obladas, esféricas y proladas; mientras que para el entorno en donde se forman y evolucionan se realizó la distinción entre filamentos, nodos y paredes. Esta forma de clasificación puede ser mejorada, pero es suficiente en este trabajo para estudiar el modo en que se acopla el momento angular de los halos con su distribución de materia interna y

con la de su entorno, algo que la TTT predice naturalmente. La determinación del tensor de forma (4.2) sirvió, además, para estudiar la distribución de partículas *emigrantes* alrededor de los halos raíz en $z = 0$: los autovectores determinaron la dirección de los ejes de cada halo raíz (sección 4.1.3).

4.3.2. Alineación spin-forma y spin-estructura

La relación de la dirección del momento angular con la forma de los halos y con la distribución de materia en su entorno es una cuestión presente en muchos estudios dinámicos. Consideraciones teóricas con base en la TTT (White, 1984; Codis et al., 2015) y resultados con simulaciones numéricas (Bailin & Steinmetz, 2005; Paz et al., 2008; Hahn et al., 2007; Aragón-Calvo et al., 2007) muestran que existe una importante correlación entre estas propiedades. Se encuentra en general un alto grado de perpendicularidad entre la dirección del spin y el eje mayor de los halos. Además, aparece una relación dependiente con la masa

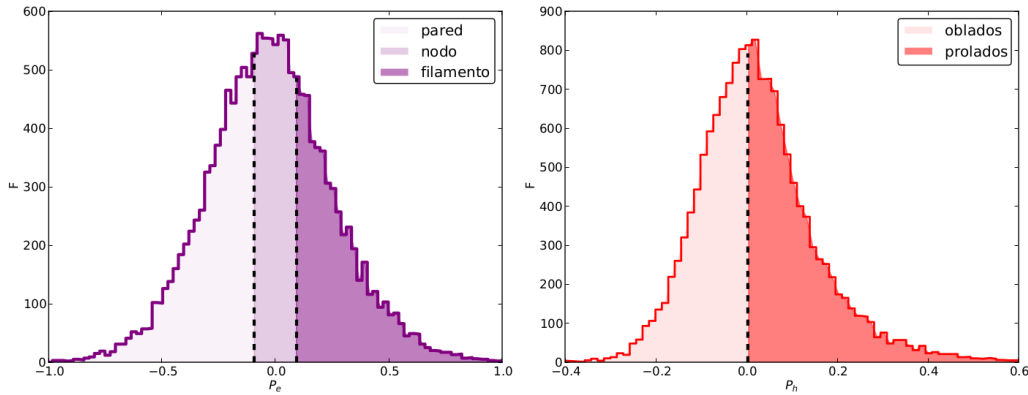


Figura 4.12: Distribución del parámetro P_e del entorno (izquierda) y P_h de la forma (derecha) de los halos de la simulación S_1 . El logaritmo genera distribuciones simétricas. El entorno se clasifica según el tercil de la distribución de P_e al que pertenece: “pared”, “nodo” o “filamento”. Los halos con $P_h < 0$ son más oblatos (“panqueques”), mientras que los halos con $P_h > 0$ son más prolados (“pelotas de rugby”).

entre la dirección del spin de un halo y la dirección del filamento que lo contiene (sección 2.1.3): para halos con masas menores a $\sim 10^{12} M_\odot$, el momento angular está alineado con la dirección del filamento, mientras que para masas mayores a este límite, la dirección del momento angular se vuelve perpendicular. Estas cuestiones pueden servir, entonces, para testear la consistencia de las definiciones en este trabajo.

Para verificar las correlaciones se definió la forma de un halo según los autovalores y autovectores de la matriz (4.2), utilizando para esto las partículas en el interior del radio virial y el parámetro P definido en (4.3). Aunque según esta definición los halos tengan una frontera esférica, la distribución de masa en su interior no lo es, como lo demuestra la Figura 4.12. Los sistemas con $P < 0$ son más oblatos y los que tienen $P > 0$ son más prolados.

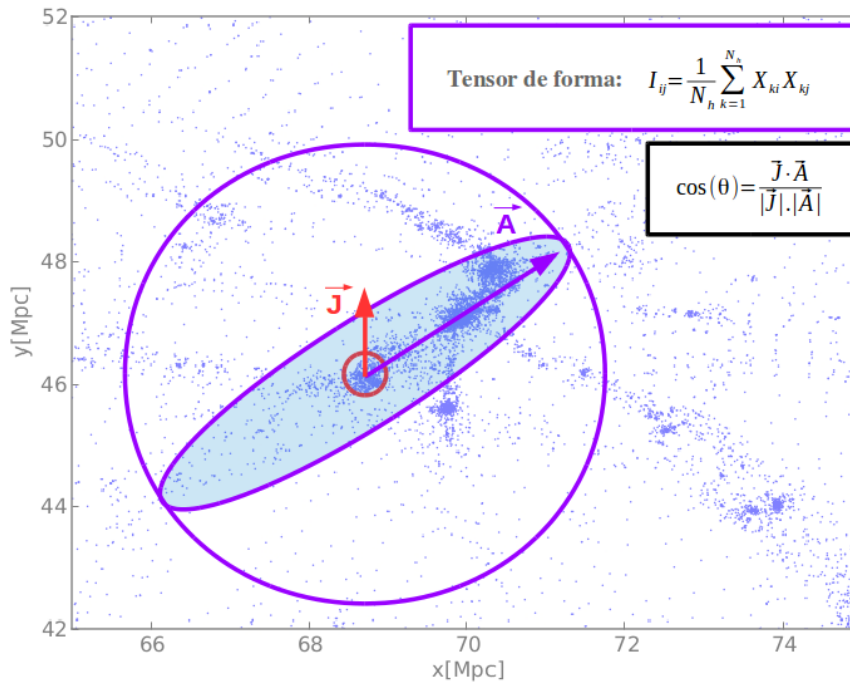


Figura 4.13: Esquema de detección de estructuras para comparar con la dirección del momento angular. El círculo rojo representa, en dos dimensiones, la región esférica que delimita un halo de radio R_{vir} con momento angular \vec{J} . El círculo violeta representa la esfera de $3 h^{-1}\text{Mpc}$ de radio en donde se buscan partículas para determinar el tensor de forma de su entorno. La elipse del mismo color muestra la proyección 2D del elipsoide que mejor ajusta la distribución de materia en ese entorno. El eje mayor del elipsoide está representado como una flecha violeta, cuya dirección queda determinada por la del autovector asociado al mayor autovalor de la matriz (4.2). Como el halo se encuentra embebido en un filamento, la dirección de este autovector determina la dirección del filamento.

Para la estructura que rodea a los halos, es decir, su entorno, se analizó el valor del parámetro P determinado a partir de regiones esféricas de diferentes escalas entre $2 h^{-1}\text{Mpc}$ y $8 h^{-1}\text{Mpc}$. Se clasificó como filamento cualquier región en el tercer tercil de la distribución

de P , y su dirección quedó determinada por la dirección del autovector asociado al mayor autovalor. Por completitud se analizaron también entornos de tipo pared y nodo, es decir, en el primer tercil y segundo tercil de la distribución de formas. Se comparó luego la dirección del momento angular de cada halo embebido en una estructura dada (Figura 4.13) y se realizaron análisis con diferentes poblaciones de masa y forma.

5 Resultados y discusión

En el presente trabajo se han realizado diferentes estudios sobre las simulaciones S_1 y S_2 , con el fin de comprender mejor las propiedades evolutivas del momento angular en halos de DM. En este capítulo se muestran sus resultados. En la primera parte se presenta un análisis de la dirección del momento angular de los halos en la simulación S_1 . Esta dirección es comparada, a $z = 0$, con las direcciones principales de la distribución de masa en la estructura circundante, y con la propia forma de los halos. La buena resolución de la simulación S_1 permite analizar estructuras bien definidas, compuestas por un gran número de partículas ($\gtrsim 1400$). Esta característica es importante cuando se trabaja con propiedades con baja señal como el momento angular de halos de materia oscura. En la segunda parte se muestran los resultados de estudiar la función de correlación de halos de la simulación S_2 , separados por poblaciones según su desviación con respecto a las predicciones de la TTT. El gran número de halos en la simulación S_2 (~ 86000) permite realizar una estadística robusta y confiable. Con esto se intenta comprender mejor el origen de las desviaciones y, con ello, sugerir posibles enfoques para describir correctamente el complejo proceso de adquisición y evolución del momento angular. En este capítulo se utilizan indistintamente los términos *spin* y *momento angular*.

5.1. Dirección del momento angular

5.1.1. Relación spin-estructura

Para analizar la relación entre la dirección del momento angular de los halos y la estructura de su entorno, se estudiaron los ángulos θ_a y θ_c entre la dirección \hat{J} del spin y los ejes mayor y menor de la distribución de masa circundante, \hat{a}_e y \hat{c}_e , respectivamente. Esta estructura fue clasificada en paredes, nodos y filamentos según el método descrito en la sección 4.3.2. Asimismo, se discriminaron poblaciones de halos masivos y poco masivos, según su masa fuera mayor o menor a una masa crítica $M_c = 10^{12}M_\odot$, y poblaciones de

halos más oblatos o más prolados, según su parámetro de forma $P < 0$ o $P > 0$ (sección 4.3.2), respectivamente. La masa crítica se adoptó en base a los estudios, mencionados en la sección 2.1.3, que encuentran alrededor de ese valor un punto de inflexión entre halos con momento angular alineado con la estructura o perpendicular a ella (Bailin & Steinmetz, 2005; Aragón-Calvo et al., 2007; Paz et al., 2008; Codis et al., 2015). La robustez de los resultados frente a diferentes volúmenes utilizados para definir entornos fue probada con esferas de radios de $2 h^{-1}\text{Mpc}$ a $8 h^{-1}\text{Mpc}$. Se encontró que entre $2 h^{-1}\text{Mpc}$ y $5 h^{-1}\text{Mpc}$ se verifica robustez, pero cuando se superan los $\sim 6 h^{-1}\text{Mpc}$ las señales comienzan a diluirse, debido al efecto que produce en la clasificación de estructuras la frecuente superposición de sistemas sobredensos dentro de la misma región. Los mejores resultados (en términos de compatibilidad con la bibliografía) se encontraron para un radio de $4 h^{-1}\text{Mpc}$.

En la Figura 5.1 se presentan las distribuciones $\cos(\theta_a)$ (líneas sólidas) y $\cos(\theta_c)$ (líneas de puntos) de halos embebidos en paredes (columna izquierda) y en filamentos (columna derecha), con estructuras definidas en entornos de $4 h^{-1}\text{Mpc}$. En las diferentes filas se separan los halos según su forma: arriba, todos los halos; al medio, halos oblatos; abajo, halos prolados. En todas las gráficas, las líneas rojas representan halos con masas inferiores a M_c , mientras que las líneas azules muestran la distribución para halos con masas por encima de M_c . Si se siguen las líneas continuas, cerca de $\cos(\theta_a) \sim 1$ se acumulan los halos cuyo momento angular se encuentra alineado con el eje mayor de la distribución de masa de su entorno; en el otro extremo, $\cos(\theta_a) \sim 0$ indica halos con spin perpendicular a \hat{a}_e . En el caso de los filamentos, esta dirección es la *dirección del filamento*. Sin embargo, cuando el entorno es de tipo pared, la dirección del eje mayor no siempre constituye una referencia útil, dado que el momento angular puede estar contenido en el plano de la pared y no estar alineado con \hat{a}_e . Por este motivo, en los entornos de tipo pared se presenta, además, la distribución $\cos(\theta_c)$, que mide el grado de alineación del momento angular con respecto a la dirección normal al plano de la pared \hat{c}_e (línea de puntos).

Se puede ver, en las gráficas del lado derecho, que en entornos filamentosos los halos más masivos tienden a desarrollar un momento angular perpendicular a la dirección del filamento. Esta característica se acentúa si se consideran únicamente los halos más oblatos (notar el cambio de escala en el eje vertical de las gráficas del medio). Los halos menos masivos, por otro lado, muestran poca o ninguna correlación entre la dirección del spin y del filamento, aunque la submuestra de sistemas más oblatos parece seguir débilmente la tendencia de los halos más masivos. Con respecto a las gráficas del lado izquierdo, los halos en entornos de tipo pared muestran una tendencia general, tanto de los sistemas masivos

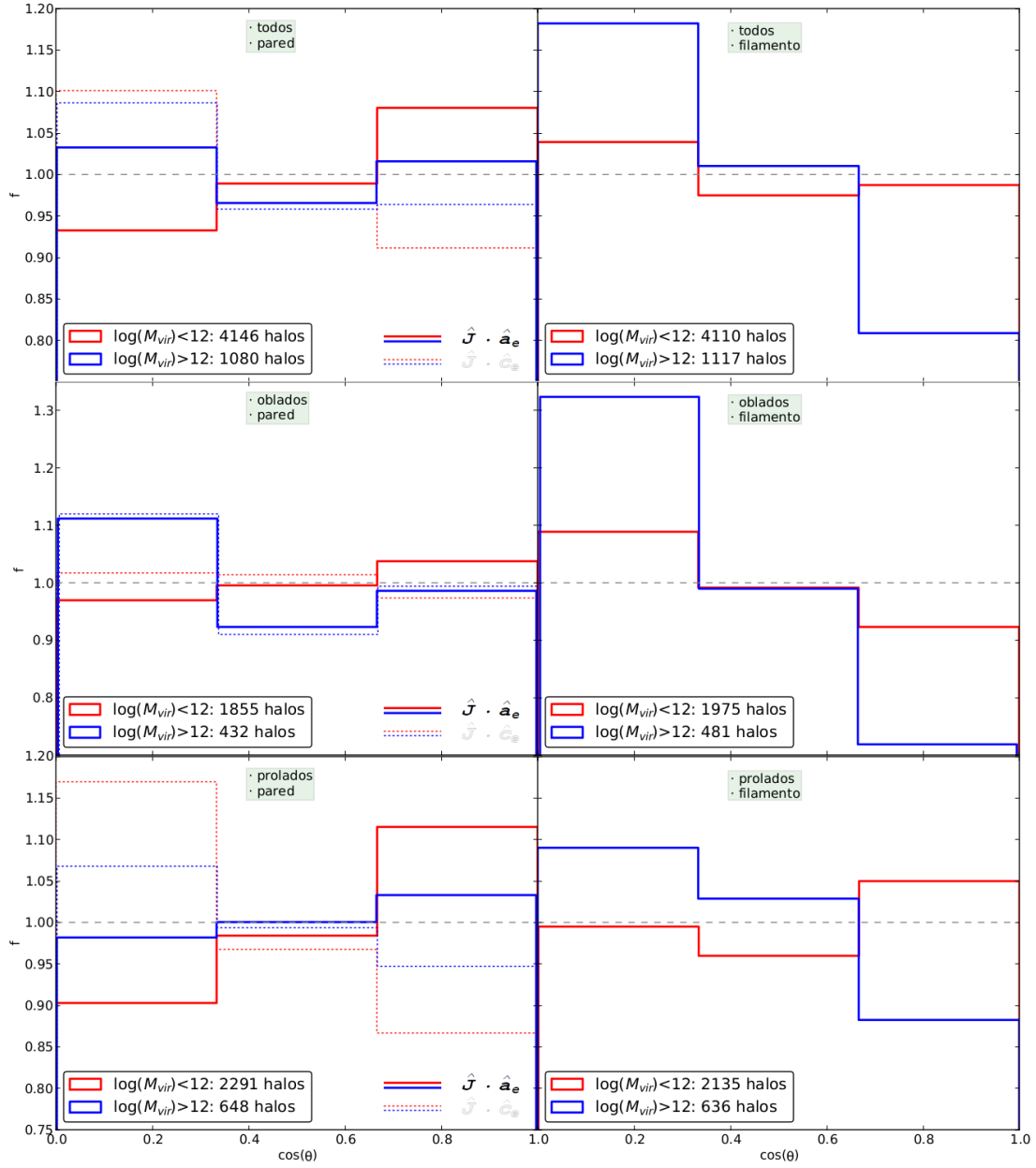


Figura 5.1: Distribución en S_1 , a $z = 0$, de $\cos(\theta_a)$ (líneas continuas) y $\cos(\theta_c)$ (líneas punteadas), los ángulos entre el spin de cada halo y los ejes mayor ($\hat{\mathbf{a}}_e$) y menor ($\hat{\mathbf{c}}_e$) de la estructura circundante, respectivamente. A la izquierda se ven los halos en entornos de tipo pared; a la derecha, en entornos filamentosos. Las filas separan los halos por su forma: arriba, todos los halos; al medio, halos oblados; abajo, halos prolados. En cada gráfica se separan los halos según su masa: en rojo, los halos con $M < 10^{12} M_\odot$; en azul, los halos con $M > 10^{12} M_\odot$. La distribución $\cos(\theta_c)$ sólo se muestra para halos en entornos de tipo pared.

como de los poco masivos, a desarrollar un momento angular paralelo al plano de la pared (i.e., perpendicular a la dirección normal a la pared \hat{c}_e). Hay dos características notables en estas distribuciones. La primera es que la señal de alineación con el plano de la pared es más fuerte en halos prolados que en halos oblados, especialmente para los halos menos masivos. La segunda, que el spin de los halos poco masivos, además de estar contenido en el plano de la pared, se encuentra con frecuencia alineado al eje mayor de la distribución de materia \hat{a}_e . El momento angular de los halos más masivos, en cambio, no muestra ninguna dirección preferencial adentro de ese plano.

El hecho de que los halos más masivos tiendan a desarrollar spin perpendicular a los filamentos es compatible con resultados presentes en la bibliografía (Bailin & Steinmetz, 2005; Aragón-Calvo et al., 2007; Paz et al., 2008). Además, puede ser interpretado consistentemente a partir de los trabajos de Laigle et al. (2015) y Libeskind et al. (2013): en las etapas no lineales de formación de estructuras se desarrolla un flujo de velocidades con *vorticidad no nula*, que en las regiones más densas, es decir, donde habitan los halos más masivos, adquiere una dirección *perpendicular* a la dirección del filamento. Sus conclusiones sugieren que esta vorticidad domina la evolución del momento angular de los halos que crecen en ese entorno. Los mismos autores encuentran que en las zonas filamentosas más alejadas de los nodos (i.e., los centros de los filamentos), la vorticidad muestra una estructura cuadrupolar de *alineación* y *antialineación* con la dirección \hat{a}_h . En estas regiones, típicamente menos densas, se ubican preferentemente halos poco masivos, por lo que el esquema parece sugerir que las curvas rojas en las gráficas de la derecha deberían mostrar un cierto grado de alineación con \hat{a}_e . Si bien esta característica no se observa, el modelo de la *teoría de torque tidal anisotrópica*, de Codis et al. (2015), permite interpretar el resultado de manera consistente: al encontrarse demasiado cerca de un filamento, un halo poco masivo puede formarse en una superposición de cuadrantes de vorticidad (Figura 2.4), generando, en el esquema de la ATTT, una acumulación de torques incoherente que impide la alineación entre el momento angular y la estructura. El hecho de que los sistemas oblados desarrollen spin perpendicular a su filamento con más frecuencia que los sistemas prolados puede interpretarse como una consecuencia de la alineación entre la forma de los halos y la estructura de su entorno: los halos muestran un alto grado de perpendicularidad entre su eje menor \hat{c}_h y la dirección del filamento \hat{a}_e en donde residen (Aragón-Calvo et al., 2007; Bailin & Steinmetz, 2005). Sin embargo, los halos oblados tienen un eje menor mucho mejor definido que los halos prolados¹, por lo que tienden a acoplar su forma con

¹Según la definición a partir del parámetro de forma, $P \ll 0$ (oblado) implica $a \sim b \gg c$, mientras que

la estructura de los filamentos de un modo más estable. Como el spin de un halo es, en general, paralelo a su eje menor (sección 5.1.2), es natural esperar que los halos oblatos muestren momentos angulares perpendiculares a los filamentos con mayor frecuencia que los halos prolados.

En cuanto a los resultados obtenidos en entornos de tipo pared, la gráfica superior del lado izquierdo de la Figura 5.1 puede ser interpretada consistentemente con el esquema de la ATTT. En las paredes, los halos *poco masivos* se encuentran lo suficientemente alejados de los centros de los filamentos como para crecer en un único cuadrante de vorticidad (Figura 2.4); los halos *más masivos*, por otra parte, ocupan una región lagrangiana mayor durante su formación, y es más común que abarquen, de todos modos, más de un cuadrante de vorticidad a lo largo del proceso de adquisición de spin. De esta manera, el momento angular de los halos poco masivos se acopla muy bien al campo de velocidades circundante, crece a partir de torques coherentes, alineados con la dirección del eje mayor \hat{a}_e del entorno, y se producen distribuciones del $\cos(\theta_a)$ con picos en ~ 1 y del $\cos(\theta_c)$ con picos en ~ 0 (i.e., alineación entre el spin y el plano de la pared). Por otro lado, el entorno menos denso evita que efectos no lineales, como choques o grandes fusiones, alteren demasiado el proceso de adquisición de spin. Los halos más masivos que ocupan más de un cuadrante de la Figura 2.4 acumulan torques opuestos, de modo que su momento angular se mantiene alineado con el plano de la pared (línea de puntos azul), pero no necesariamente con el eje mayor del entorno (línea continua azul). La diferencia de las distribuciones $\cos(\theta_c)$ entre halos oblatos (medio) y prolados (abajo) muestra que la perpendicularidad entre \hat{J} y la dirección normal al plano de la pared \hat{c}_e es una característica distintiva de los halos prolados. Un halo oblato, rotando alrededor de su eje menor y acoplado al campo de velocidades circundante, es decir, con su momento angular contenido en el plano de una pared, experimenta torques que tienden a alinear su eje menor de forma \hat{c}_h con el eje menor de la pared \hat{c}_e . Por este motivo, el momento angular de halos oblatos embebidos en estructuras de tipo pared es caótico, y las distribuciones $\cos(\theta_a)$ y $\cos(\theta_c)$ son más uniformes, tanto en halos masivos como poco masivos. Un halo prolado en la misma situación inicial, en cambio, experimenta torques tendientes a alinear su eje mayor \hat{a}_h con el plano de la pared, adquiriendo una rotación coherente con el campo de velocidades circundante y, por lo tanto, conservando la alineación entre el spin y el eje mayor del entorno.

Se puede concluir, en resumen, que los rasgos sobresalientes de la alineación entre el momento angular y la estructura se manifiestan, principalmente, en dos situaciones: los halos

$P \gg 0$ (prolado) implica $a \gg b \sim c$.

por encima de la masa crítica M_c , oblatos y embebidos en filamentos, se acoplan fuertemente a la vorticidad del campo de velocidades de su entorno y desarrollan un momento angular perpendicular al filamento; los halos por debajo de la masa crítica M_c , prolados y en entornos de tipo pared, experimentan una acumulación de torques coherente que alinea su momento angular con el plano de la pared, preferentemente en la dirección del eje mayor del tensor de forma del entorno \hat{a}_e . Estos resultados son compatibles con estudios previos y pueden ser analizados de un modo consistente a partir de modelos presentes en la bibliografía.

5.1.2. Relación spin-forma

Para analizar la dirección del momento angular de los halos con respecto a su forma, se estudiaron los ángulos β_a , β_b y β_c entre la dirección \hat{J} del spin y los ejes principales mayor \hat{a}_h , medio \hat{b}_h y menor \hat{c}_h de la distribución interna de materia, respectivamente. Estos ejes se determinaron a partir de los autovectores del tensor de forma de cada halo, y se ordenaron de mayor a menor de acuerdo a sus autovalores asociados (sección 4.3.2). Con el fin de analizar la dependencia de estas relaciones con propiedades internas y externas de los halos, se separaron muestras por masa, forma y entorno de la misma manera que en la sección anterior.

En la Figura 5.2 se presenta el primer análisis, realizado sobre la población total de halos en la simulación S_1 . Se puede notar el alto grado de alineación del momento angular con el eje menor de cada halo \hat{c}_h (curva azul), y un cierto grado de perpendicularidad, menos frecuente, con el eje mayor \hat{a}_h . La distribución de $\cos(\beta_b)$ (curva verde) es prácticamente uniforme. Los resultados son compatibles con Bailin & Steinmetz (2005) y Aragón-Calvo et al. (2007). Esta relación entre el spin y los ejes es ampliamente conocida y está asociada a la formación de los halos: el momento angular de una estructura establece un límite al colapso, de modo que el plano perpendicular a la dirección de rotación muestra, en general, una distribución de masa más extendida. Esto significa que el momento angular apunta en la dirección del eje que colapsa más rápido, tal como se explicó en la sección 1.3.1.

Cabe preguntarse de qué modo afecta la estructura en gran escala a la tendencia del momento angular a alinearse con el eje \hat{c}_h y, en menor medida, a ser perpendicular al eje mayor \hat{a}_h . Para estudiar esta dependencia, se clasificó el entorno de los halos según el método descrito en la sección 4.3.2, determinando la distribución del parámetro de forma

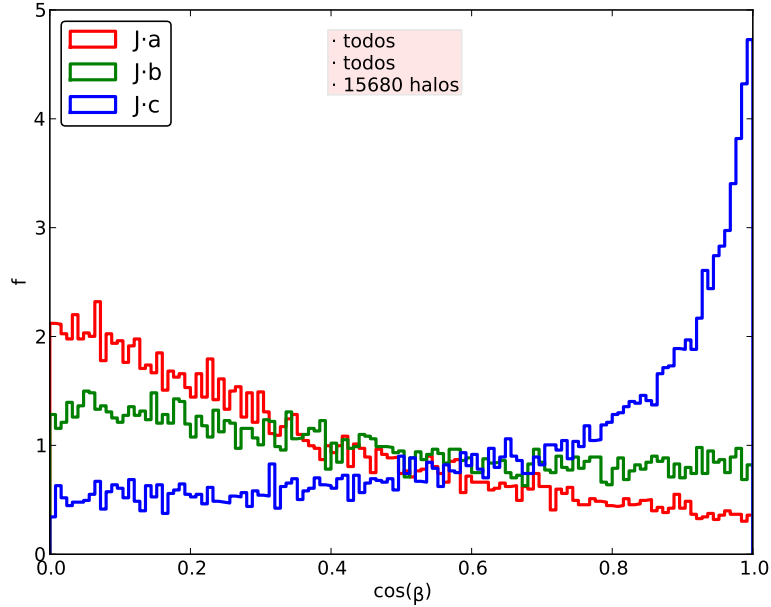


Figura 5.2: Distribución a $z = 0$ del coseno de los ángulos entre el momento angular J y los ejes principales del tensor de forma de los halos en la simulación S_1 . La característica principal de esta distribución es la evidente alineación que muestra el momento angular con el eje menor \hat{c}_h (curva azul). También se observa, con menor frecuencia, perpendicularidad con el eje mayor \hat{a}_h (curva roja).

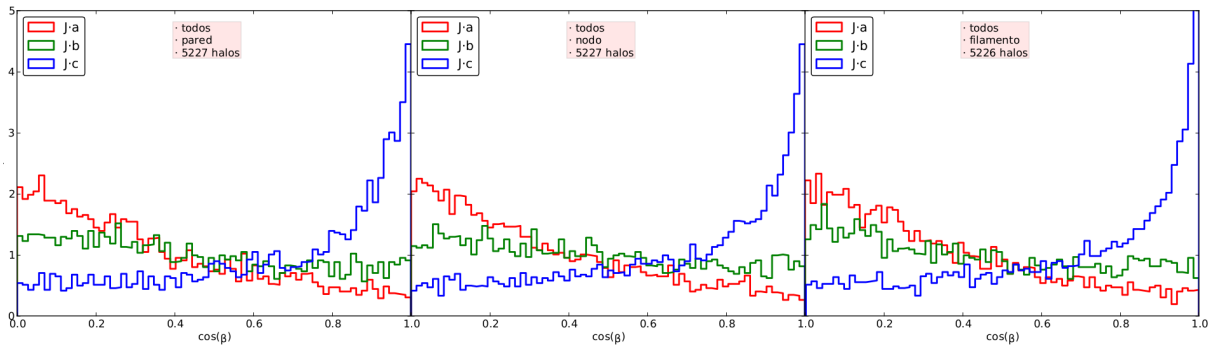


Figura 5.3: Distribución a $z = 0$ del ángulo β entre el momento angular J y los autovectores del tensor de forma de los halos de la simulación S_1 según su entorno. La señal es similar a la de la Figura 5.2, con una débil dependencia con el entorno: los halos en entornos filamentosos muestran un mayor grado de alineación con su eje menor.

P_e de la estructura circundante² y separándolo en terciles: paredes, nodos o filamentos.

²Al igual que en la sección anterior, los parámetros de forma de la estructura circundante fueron deter-

Se presentan, en la Figura 5.3, las distribuciones $\cos(\beta_a)$, $\cos(\beta_b)$ y $\cos(\beta_c)$ de los halos en cada uno de estos entornos. Todas las gráficas repiten la misma tendencia: el momento angular es, con mucha frecuencia, paralelo al eje \hat{c}_h y, en menor medida, perpendicular al eje \hat{a}_h . Se observa, asimismo, una *débil o nula* dependencia de estas señales con el tipo de estructura, con un muy leve aumento de la alineación entre el momento angular y el eje menor de los halos en filamentos. Esto podría sugerir que la estructura filamentosa de alguna manera propicia la alineación entre el spin y la forma de los halos, aunque el test χ^2 no arrojó diferencias estadísticas significativas.

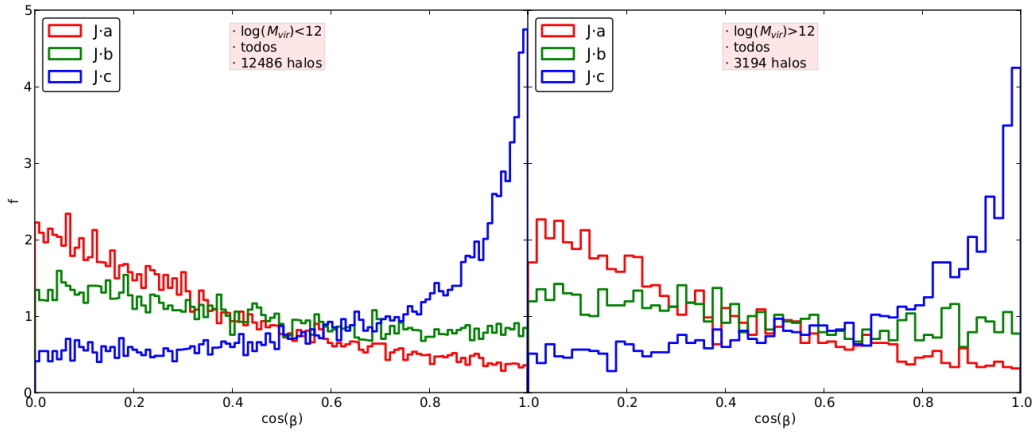


Figura 5.4: Distribución a $z = 0$ del ángulo β entre el momento angular J y los autovectores del tensor de forma de los halos de la simulación S_1 según su masa. La señal es similar a la de la Figura 5.2, y en esta escala muestra una muy débil dependencia con la masa, estando el momento angular de los halos menos masivos ligeramente más alineado con el eje menor.

Para conocer de qué modo las propiedades internas de los halos afectan la dirección de su momento angular respecto a sus ejes principales de forma, se estudiaron las distribuciones $\cos(\beta)$ en poblaciones separadas por masa. A falta de un criterio de referencia en la literatura, se adoptó la masa crítica $M_c = 10^{12}M_\odot$ de la sección anterior para discriminar halos masivos y poco masivos. La Figura 5.4 muestra los resultados de este análisis. La tendencia de los estudios anteriores se mantiene sin modificaciones. La única diferencia apreciable entre las distribuciones de ambas poblaciones es un ligero aumento de la alineación entre el spin y el eje \hat{c}_h en los halos menos masivos. Esto no se reflejó en el test χ^2 , que determinó que los histogramas son estadísticamente iguales. Sin embargo, como esta aparente tendencia entra en contradicción con los resultados de Bailin & Steinmetz (2005),

que encuentran mayor alineación entre el spin y el eje menor de los halos en sistemas más masivos, se estudió el comportamiento de las distribuciones $\cos(\beta)$ para halos con masas inferiores. Se establecieron diferentes límites de masa M_l y se determinaron los ángulos

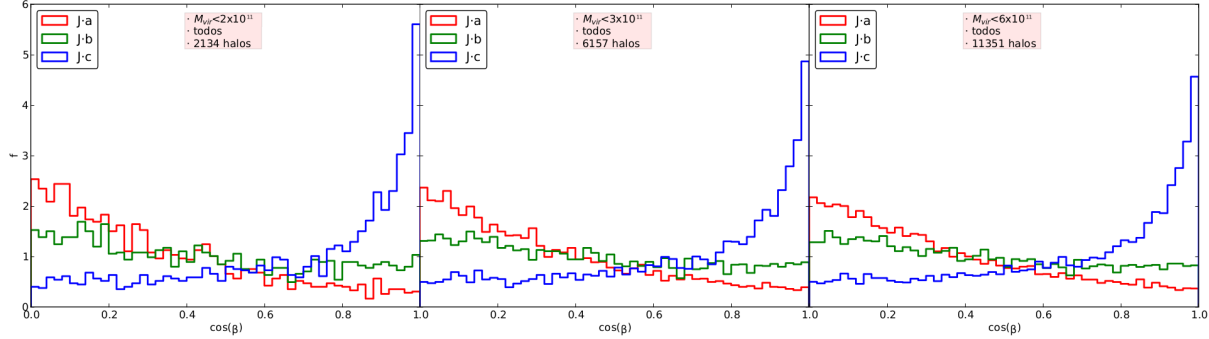


Figura 5.5: Distribución a $z = 0$ del coseno del ángulo entre el momento angular y los ejes principales de forma de los halos de la simulación S_1 . Las diferentes gráficas corresponden a muestras de halos con masas $M < M_l$, para distintos valores de M_l : $2 \times 10^{11} M_\odot$, $3 \times 10^{11} M_\odot$ y $6 \times 10^{11} M_\odot$. Los halos menos masivos muestran un ligero aumento en la alineación entre su momento angular y su eje menor.

entre el spin y los ejes principales de forma de los halos cuya masa M fuera menor a M_l . En la Figura 5.5 se puede observar que los picos cerca de $\cos(\beta_c) \sim 1$ crecen ligeramente si se consideran poblaciones con masas cada vez menores. Esto sugiere que, efectivamente, existe un mayor grado de alineación entre el momento angular y el eje mejor \hat{c}_h en los halos poco masivos. Esto podría estar asociado a la historia de formación: los halos con masas altas son el resultado de grandes fusiones que alteran fuertemente su forma, pero que influyen un poco menos en la dirección de su spin (Bett & Frenk, 2016); los halos poco masivos, en cambio, no son el producto de fusiones sino que adquieren su masa a través de procesos de acreción fría (Laigle et al., 2015). En este escenario, es esperable que las direcciones privilegiadas de acreción modelen, al mismo tiempo, la forma de los halos menos masivos y la dirección de su momento angular, y que este mecanismo no se vea frecuentemente interrumpido y desarticulado por choques y fusiones, como ocurre en los halos masivos.

El último análisis de la dirección del momento angular con respecto a la forma de los halos se realizó estudiando muestras separadas según el parámetro de forma P_h de cada halo (sección 4.3.2). En la Figura 5.6 se presenta el resultado de estudiar las distribuciones $\cos(\beta)$ para halos más oblatos ($P < 0$) y más prolados ($P > 0$). En ambos casos, los histogramas mantienen la tendencia de alineación entre el spin y el eje menor \hat{c}_h , y de

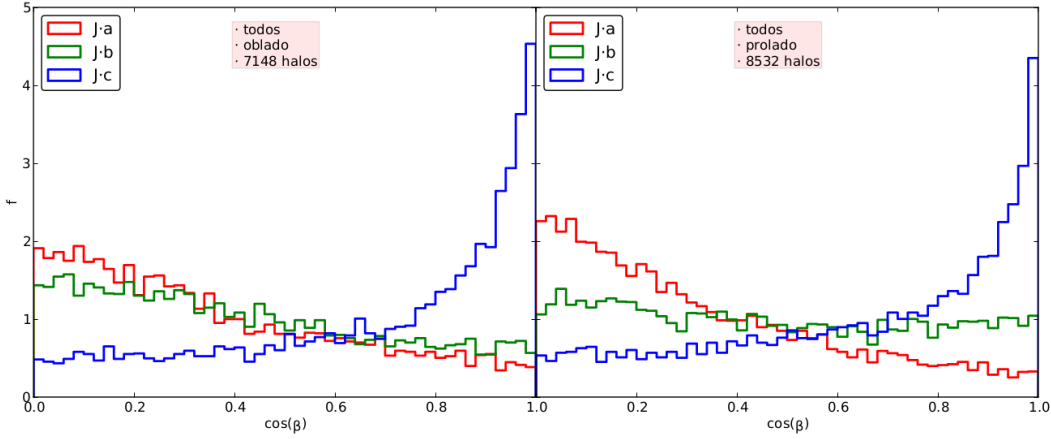


Figura 5.6: Distribución a $z = 0$ del ángulo β entre el momento angular J y los autovectores del tensor de forma de los halos de la simulación S_1 , según su triaxialidad. Ni en esta separación, ni añadiendo una discriminación por masas, se consigue distinguir diferencias cualitativas entre los grados de alineación del spin con el eje menor. Sin embargo, entre ambas poblaciones se ve un intercambio en los picos de perpendicularidad con los ejes a y b .

perpendicularidad entre el spin y el eje mayor \hat{a}_h . No se encontraron diferencias significativas, por otro lado, entre las distribuciones $\cos(\theta_c)$ de ambas muestras: tanto los halos oblatos como los prolados tienen distribuciones similares, no solo cualitativamente sino también de acuerdo al estimador χ^2 . En relación a los histogramas $\cos(\beta_a)$ y $\cos(\beta_b)$ de ambas muestras, hay un *intercambio* en la perpendicularidad del spin: los halos oblatos tienen momento angular perpendicular tanto a \hat{a}_h como \hat{b}_h , mientras que los halos prolados tienen momento angular perpendicular a \hat{a}_h , pero prácticamente decorrelacionado con \hat{b}_h . Hay una explicación sencilla para esta tendencia. Los halos oblatos tienen, en general, una dirección privilegiada (\hat{c}_h) y un plano privilegiado (normal a \hat{c}_h) que contiene los ejes \hat{a}_h y \hat{b}_h . El momento angular es paralelo a la dirección del eje menor y perpendicular al plano, pero los ejes mayor y medio pueden ser muy parecidos. En halos prolados, en cambio, la dirección privilegiada es \hat{a}_h , de modo que el momento angular se hace perpendicular a este eje, mientras que la dirección con respecto al eje medio distribuye uniformemente.

En resumen, la característica sobresaliente de la relación entre el momento angular y la estructura interna de los halos es el alto grado de alineación que se produce entre \hat{J} y \hat{c}_h , i. e., el momento angular tiende a apuntar en la dirección del eje menor del tensor de forma de los halos. Se puede mencionar, en segunda instancia, la perpendicularidad entre la dirección del momento angular y el eje mayor \hat{a}_h . Ambos resultados son compatibles con

la bibliografía y consistentes con los modelos de formación de estructuras presentados en el capítulo 1. Estas relaciones demostraron ser prácticamente independientes del entorno, la masa y la forma de los halos.

5.2. Función de correlación de halos ganadores y perdedores

En la sección 4.2 se construyeron poblaciones de halos *perdedores*, P_1 y P_2 , *ganadores*, G_1 y G_2 , y *medianos*, M_1 y M_2 , según la desviación que cada sistema mostrara con respecto al comportamiento predicho por la TTT. Para determinar estas desviaciones, se desafectó la evolución del momento angular de cada halo de las variaciones que introduce el propio modelo: el momento angular de un protohalo (la región lagrangiana que ocupan a alto redshift las partículas de un halo raíz) crece como $J = J_0 a^{3/2}$ a partir de su valor inicial J_0 ; alrededor del punto de turnaround, este crecimiento se detiene debido al colapso del sistema y consecuente desacople de la expansión general del Universo, y el momento angular se mantiene constante hasta el tiempo presente. Según este sencillo esquema, la evolución y el valor final del momento angular depende de dos parámetros: su valor inicial J_0 y el factor de escala del Universo en el instante en que el protohalo colapsa, a_{TTT} . Normalizando a J_0 la historia del momento angular de cada halo, se desafectó la evolución de las variaciones que introducen los diferentes valores iniciales. Como el instante de colapso depende la masa (los halos más masivos colapsan más tarde), la desafección respecto de las variaciones que introduce a_{TTT} se consiguió realizando una segmentación de la población total según su masa. Para esto, se definieron 25 intervalos de masa tales que cada muestra tuviera el mismo número de miembros. Posteriormente, se identificaron terciles en la distribución del momento angular final de cada muestra. Luego, se construyeron las poblaciones de halos P , M y G uniendo los 25 primeros, segundos y terceros terciles, respectivamente. Finalmente, separando cada tercil en dos (es decir, sextiles), se determinaron P_i , M_i y G_i , donde el índice $i = 1$ o $i = 2$ denota la subdivisión más *perdedora* o más *ganadora*, respectivamente.

Para cada una de las poblaciones P , M y G se determinó la función de correlación cruzada con los 86425 halos de la simulación S_2 . En la Figura 5.7 se presentan los resultados de este análisis. Se puede notar que en el entorno de halos *ganadores* (curva verde) hay una probabilidad de encontrar vecinos *mayor* que la que muestran halos elegidos al azar (curva negra), mientras que los halos *perdedores* (curva roja) muestran una probabilidad

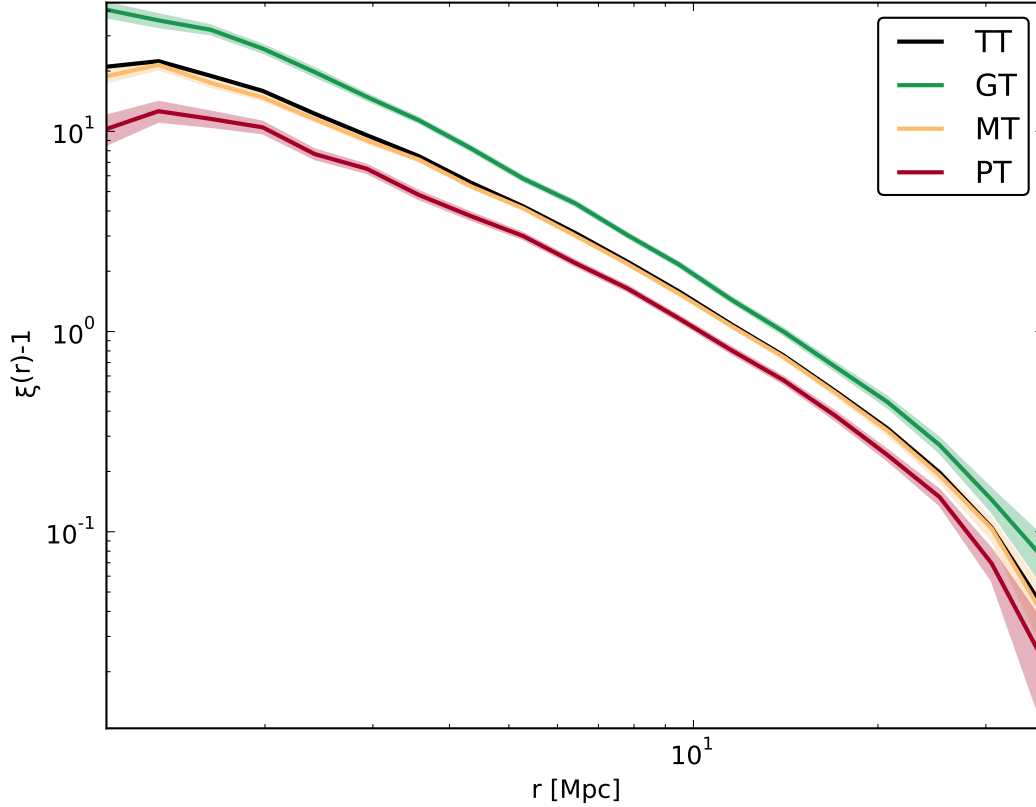


Figura 5.7: Función de correlación cruzada entre terciles *ganadores*, *medianos* y *perdedores* de momento angular con todos los halos de la simulación S_2 (GT, MT y PT, respectivamente). Se muestra además, para comparación, la función de autocorrelación de todos los halos (TT). Los halos *ganadores* muestran un mayor grado de aglomeración, lo cual indica que el momento angular crece por encima de la TTT en regiones más densas. Los halos *perdedores* muestran, por el contrario, menor grado de acumulación. El error, determinado mediante un remuestreo *Jackknife*, aparece en cada curva como el área sombreada.

de encontrar vecinos *menor* que los halos elegidos al azar. Este comportamiento se da en todas las escalas hasta $\sim 30 h^{-1}\text{Mpc}$, y es característico de muestras de halos con diferentes masas: las funciones de correlación de halos masivos son más altas que las de halos de baja masa (Paz et al., 2008). Podría pensarse, entonces, que la Figura 5.7 muestra un comportamiento sesgado, debido a un exceso de halos masivos entre los *ganadores*, y a un exceso de halos de baja masa entre los *perdedores*. Sin embargo, el método utilizado para normalizar el comportamiento de los halos permitió construir poblaciones con distribuciones de masa similares, como puede observarse en la Figura 4.11, descartando esa posibilidad. De este

modo, los resultados que se observan en la Figura 5.7 sólo pueden significar una cosa: los halos *ganadores* habitan en regiones más densamente pobladas y los halos *perdedores* habitan en regiones menos densamente pobladas, independientemente de su masa. Es decir, la desviación respecto del comportamiento predicho por la TTT está asociado a la densidad de la región en que se forman los halos.

Para determinar la incerteza de cada función de correlación se realizaron 100 remuestreos con el método *Jackknife*. Comenzando con una muestra de N mediciones, el método *Jackknife* consiste en construir M remuestreos aleatorios eliminando en cada uno N/M mediciones de la muestra original. El análisis estadístico deseado se repite luego sobre las muestras reducidas, obteniéndose los estimadores \hat{e}_{J_i} , con $i = 1, 2, \dots, M$ (en este caso, las funciones de correlación). Se calcula entonces la desviación *Jackknife* σ_J a partir de las diferencias cuadradas entre los estimadores \hat{e}_{J_i} y el estadístico e_N obtenido con la muestra original, a través de $\sigma_J^2 = \frac{M}{M+1} \sum_i (\hat{e}_{J_i} - e_N)^2$. Como puede apreciarse en la Figura 5.7, las curvas son perfectamente distinguibles aun considerando las incertezas.

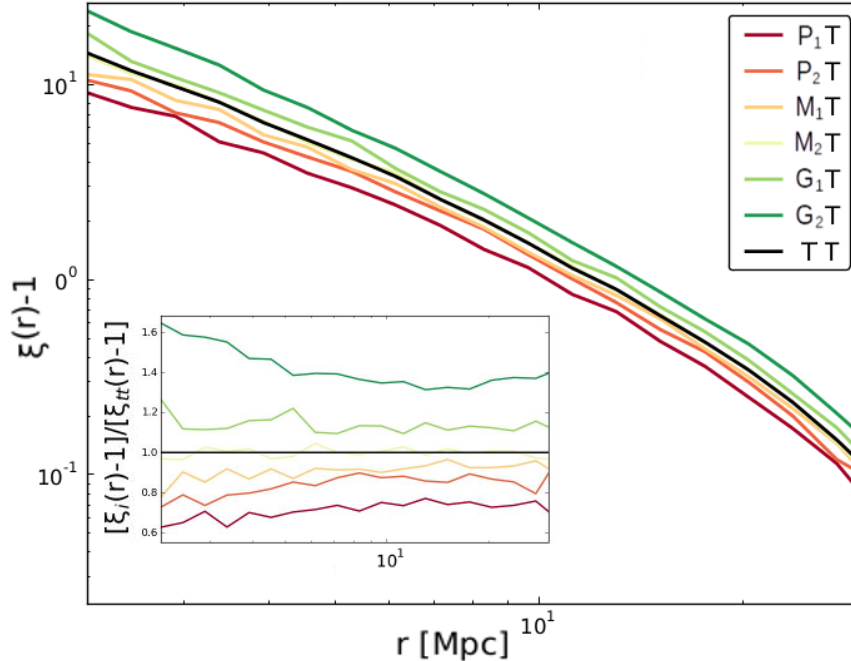


Figura 5.8: Gráfica análoga a la de la Figura 5.7, pero con sextiles en lugar de terciles. La continuidad de la dependencia entre *clustering* y la pertenencia a un sextil es evidente. Se muestra además el cociente entre la función de correlación cruzada de cada sextil y la función de autocorrelación de todos los halos (figura interior). Allí se puede notar mejor la diferencia entre los distintos niveles de acumulación.

Las funciones de correlación indican que los efectos no lineales, que afectan la evolución de los halos y de su momento angular, no son totalmente aleatorios, sino que dependen de la densidad de la región donde se manifiestan: en las zonas más densas se producen efectos no lineales que tienden a aumentar el momento angular de los halos que se forman en su interior, mientras que los fenómenos ajenos a la TTT que aparecen en regiones menos densamente pobladas tienden a disminuirlo. Aquellos halos que se ajustan mejor a las predicciones de la sencilla implementación TTT de esta sección, es decir, los halos *medianos* (curva naranja), muestran una curva indistinguible de la función de correlación total. Esto le da continuidad a la interpretación: los halos que habitan en regiones de densidad media sufren una combinación de los efectos no lineales que modifican la historia de halos *ganadores* y *perdedores*, y el resultado neto es un equilibrio de la evolución del momento angular en favor de las predicciones de la TTT.

Para probar esta tesis de continuidad se analizaron gráficas similares a la Figura 5.7, pero determinando la función de correlación cruzada de los sextiles G_i , M_i y P_i , $i = 1, 2$, en lugar de terciles. En la Figura 5.8 se puede ver el resultado de este estudio, acompañado de un gráfico más pequeño que muestra el cociente entre las funciones de correlación cruzadas ξ_{iT} y la función de autocorrelación ξ_{TT} . En este último se puede notar con mayor claridad tanto la continuidad de la señal como la diferencia entre cada sextil y la población total de halos.

En una última prueba se determinaron las funciones de autocorrelación de los halos de cada sextil. Esto es, el exceso de probabilidad de encontrar halos de un dado sextil en el entorno de halos del mismo sextil. Es de esperar que una propiedad de la distribución de halos como la enunciada se vea acentuada si se elige mirar únicamente las estructuras de cada población: los *ganadores* están *estadísticamente* en regiones más densas, y por lo tanto cerca de un ganador deberían encontrarse con mayor probabilidad otros ganadores que halos al azar. Lo opuesto debería ocurrir con los *perdedores*. La Figura 5.9 muestra claramente esta característica, especialmente para los sextiles más extremos (P_1 y G_2), aunque aumenta el ruido y algunas de las curvas (P_1 , P_2 y M_1) se superponen en escalas por encima de los $\sim 10 h^{-1}\text{Mpc}$. Sin embargo, la característica principal en escalas por debajo de los $10 h^{-1}\text{Mpc}$ se sigue observando, y de hecho se acentúa a medida que se aproximan escalas menores.

En resumen, el estudio de la función de correlación de los halos en la simulación S_2 arrojó como resultado que los sistemas cuyo momento angular final supera los valores medianos que predice la TTT, se forman, en general, en entornos más densamente poblados. Los halos

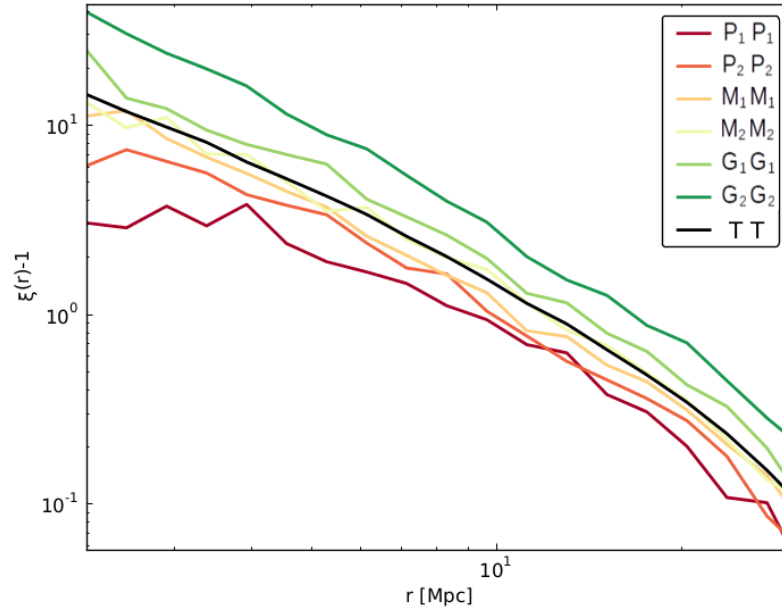


Figura 5.9: Función de autocorrelación de cada uno de los sextiles. Al comparar el nivel de acumulación de cada población contra sí misma, la señal se hace más fuerte.

que no alcanzan esta predicción, por el contrario, habitan en entornos menos densamente poblados. Esto sugiere que los efectos no lineales o torques tidales secundarios que actúan sobre los halos luego del punto de colapso no son caóticos, sino que actúan de un modo coherente de acuerdo a la densidad de la región en que dichos halos se forman.

6 Conclusiones y perspectivas futuras

En este Trabajo Especial de Licenciatura se han presentado los resultados de una investigación en el área de la estructura en gran escala del Universo (LSS). El estudio se centró en el análisis cualitativo y estadístico del momento angular de halos de materia oscura (DM) en simulaciones cosmológicas Λ CDM. En primer lugar se introdujeron fundamentos teóricos, con la intención de dar sustento a los modelos utilizados para analizar e interpretar resultados. Posteriormente se presentaron las herramientas y metodologías. Para esta investigación se realizaron tres simulaciones numéricas cosmológicas mediante el programa GADGET-2 (Springel, 2005). La simulación S_0 , pequeña y de baja resolución (128^3 partículas en $100^3 h^{-3}$ Mpc 3), fue utilizada para probar los códigos con volúmenes de datos manejables, y para verificar la consistencia de algunos resultados sencillos. La simulación S_1 , también pequeña pero con buena resolución (1024^3 partículas en $100^3 h^{-3}$ Mpc 3), se utilizó para analizar la dirección del momento angular en halos bien definidos, es decir, con un gran número de partículas por halo. La simulación S_2 , mucho mayor y con baja resolución (1024^3 partículas en $1000^3 h^{-3}$ Mpc 3), se utilizó para estudiar la evolución del momento angular en un número mucho mayor de halos, con el fin de realizar estadísticas significativas, y en un rango de masas más altas. En todas las simulaciones se corrieron los códigos ROCKSTAR (Behroozi et al., 2013a) y CONSISTENT TREES (Behroozi et al., 2013b) para detectar halos y construir árboles de fusión, respectivamente. Los halos identificados por el código ROCKSTAR fueron redefinidos para poder estudiar el comportamiento de sus partículas. Se verificó que esta redefinición fuera consistente y robusta reproduciendo correctamente resultados de gran acuerdo en la bibliografía, referidos a la dirección del momento angular respecto a la forma de los halos, su masa y a la estructura en gran escala.

A partir de los análisis se vio que los halos de DM muestran, en todas las simulaciones, un crecimiento de su spin notablemente ajustado a las predicciones de la TTT, pero que comienza a desviarse alrededor de su punto de turnaround. Siguiendo la historia de las partículas de cada halo raíz a $z = 0$ y la de las partículas que pertenecen a progenitores pero escapan del radio virial a $z = 0$ (*emigrantes*), se consiguió reproducir, en compor-

tamiento mediano, la evolución predicha por la TTT hasta el tiempo presente, con una gran dispersión halo por halo. Se pudo ver que las partículas *emigrantes* no constituyen una población físicamente diferenciada de las partículas *raíz* de cada halo, sino que su discriminación fue meramente un problema de definición. En trabajos futuros se analizará la dependencia de la evolución del spin con la definición de halos utilizando diferentes identificadores de estructura.

Del estudio acerca de la alineación entre el momento angular de los halos y la estructura en gran escala, considerando aspectos como la masa, forma y clasificación del entorno, se obtuvieron resultados compatibles con trabajos previos. Analizando estos resultados a partir de modelos presentes en la bibliografía se encontraron descripciones consistentes, de las cuales se desprenden dos situaciones características: los halos con masas superiores a $\sim 10^{12}M_{\odot}$, obladados y embebidos en filamentos, se acoplan fuertemente a la vorticidad del campo de velocidades de su entorno y desarrollan un momento angular perpendicular a la dirección del filamento; los halos con masas por debajo de $\sim 10^{12}M_{\odot}$, prolados y en entornos de tipo pared, experimentan una acumulación de torques coherente que alinea su momento angular con el plano de la pared, preferentemente en la dirección del eje mayor del tensor de forma del entorno.

En cuanto al análisis de la dirección del momento angular con respecto a la estructura interna de los halos, se detectó una fuerte señal de alineación entre el spin y el eje menor de los halos, y un grado de perpendicularidad, un poco menor, entre el spin y el eje mayor de los halos. Esta tendencia resultó independiente de la masa, forma y entorno de los halos. Asimismo, los resultados son consistentes con los modelos de formación de estructuras, y compatibles con otros resultados presentes en la bibliografía.

El resultado más significativo de este trabajo se obtuvo analizando el apartamiento del momento angular respecto a las predicciones de la TTT. La magnitud y signo de estas desviaciones fue utilizada para separar poblaciones de halos *ganadores* (G), *medianos* (M) y *perdedores* (P) de momento angular. Los halos que llegan a tiempo presente con un momento angular mayor al que predice la TTT (halos G) mostraron un grado de aglomeración típicamente mayor, como se pudo ver en su función de autocorrelación y en la función de correlación cruzada con el total de halos. Aquellos que no alcanzaron nunca los valores predichos por el modelo, o que perdieron momento angular en algún punto de su historia (halos P), mostraron un grado de acumulación menor al del resto de los sistemas. Esto sugiere que algún mecanismo en el régimen no lineal, ajeno a la TTT, tiende a aumentar el momento angular de las estructuras que se forman en regiones más

densas, y a disminuirlo o inhibirlo en zonas menos densas. En trabajos futuros se analizarán posibles mecanismos capaces de producir este fenómeno.

Bibliografía

- Aragón-Calvo, M. A., van de Weygaert, R., Jones, B. J. T., & van der Hulst, J. M. 2007, ApJL, 655, L5
- Bahcall, N. A. & Soneira, R. M., 1983, ApJ, 270, 20.
- Bailin, J., & Steinmetz, M. 2005, ApJ, 627, 647
- Bardeen, J. M. 1980, PhysRevD, 22, 1882.
- Barnes, J., & Efstathiou, G. 1987, ApJ, 319, 575
- Behroozi, P. S., Loeb, A., & Wechsler, R. H. 2013, JCAP, 6, 019
- Behroozi, P. S., Wechsler, R. H., & Wu, H.-Y. 2013, ApJ, 762, 109
- Behroozi, P. S., Wechsler, R. H., Wu, H.-Y., et al. 2013, ApJ, 763, 18
- Bett, P. E., & Frenk, C. S. 2016, MNRAS, 461, 1338
- Blanton, M. R., Hogg, D. W., Bahcall, N. A., et al. 2003, ApJ, 592, 819
- Bryan, G. L., & Norman, M. L. 1998, ApJ, 495, 80
- Clowes, R. G., Harris, K. A., Raghunathan, S., et al. 2013, MNRAS, 429, 2910
- Codis, S., Pichon, C., & Pogosyan, D. 2015, MNRAS, 452, 3369
- Cole, S., & Lacey, C. 1996, MNRAS, 281, 716
- Davis, M. & Peebles, P. J. E., 1983, ApJ, 267, 465.
- de Lapparent, V., Geller, M. J., & Huchra, J. P. 1986, ApJL, 302, L1
- Doroshkevich, A. G. 1970, Astrofizika, 6, 581

- Eke, V. R., Navarro, J. F., & Frenk, C. S. 1998, *ApJ*, 503, 569
- Groth, E. J. & Peebles, P. J. E., 1977, *ApJ*, 385, 217.
- Gunn, J. E., & Gott, J. R., III 1972, *Apj*, 176, 1.
- Hahn, O., Carollo, C. M., Porciani, C., & Dekel, A. 2007, *MNRAS*, 381, 41
- Heavens, A., & Peacock, J. 1988, *MNRAS*, 232, 339
- Hoffman, Y. 1986, *ApJ*, 301, 65
- Knebe, A., Knollmann, S. R., Muldrew, S. I., et al. 2011, *MNRAS*, 415, 2293
- Kravtsov, A. V., Klypin, A. A., & Khokhlov, A. M. 1997, *ApJS*, 111, 73
- Laigle, C., Pichon, C., Codis, S., et al. 2015, *MNRAS*, 446, 2744
- Libeskind, N. I., Hoffman, Y., Steinmetz, M., et al. 2013, *ApJL*, 766, L15
- Maddox, S. J. ; Efstathiou, G.; Sutherland, W. J. & Loveday J., 1990, *MNRAS* 242,43.
- Maller, A. H., Dekel, A., & Somerville, R. 2002, *MNRAS*, 329, 423
- Mo H.J.; van den Bosch F. & White S.D.M. 2010, *Galaxy Formation and Evolution*.
- Navarro, J. F., Frenk, C. S., & White, S. D. M. 1996, *ApJ*, 462, 563
- Nakamura, T. T., & Suto, Y. 1997, *Progress of Theoretical Physics*, 97,
- Neyrinck, M. C. 2013, *MNRAS*, 428, 141
- Onions, J., Knebe, A., Pearce, F. R., et al. 2012, *MNRAS*, 423, 1200
- Paz, D. J., Lambas, D. G., Padilla, N., & Merchán, M. 2006, *MNRAS*, 366, 1503
- Paz, D. J., Stasyszyn, F., & Padilla, N. D. 2008, *MNRAS*, 389, 1127
- Peacock, J.A.; Cole S.; Norberg P. et al., 2001, *Nature*, 410, 169.
- Peebles, P. J. E. 1969, *ApJ*, 155, 393
- Peebles, P. J. E. 1980, Research supported by the National Science Foundation. Princeton, N.J., Princeton University Press, 1980. 435 p.,

- Porciani, C., Dekel, A., & Hoffman, Y. 2002, MNRAS, 332, 325
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1992, Cambridge: University Press, —c1992, 2nd ed.,
- Rubin, V. C., Ford, W. K. J., & Thonnard, N. 1980, ApJ, 238, 471
- Sánchez, A. G.; Baugh C. M.; Percival W. J.; Peacock J. A.; Padilla N. D.; Cole S.; Frenk C. S.; Norberg P., 2006, MNRAS, 366, 189.
- Saunders, W.; Frenk, C.; Rowan-Robinson, M.; Lawrence, A.; Efstathiou, G., 1991, Nature, 349, 32.
- Seldner, M., Siebers, B., Groth, E. J., & Peebles, P. J. E. 1977, AJ, 82, 249
- Springel, V. 2005, MNRAS, 364, 1105
- Springel, V., White, S. D. M., Jenkins, A., et al. 2005, Nature, 435, 629
- Steinmetz, M., & Bartelmann, M. 1995, MNRAS, 272, 570
- Sugerman, B., Summers, F. J., & Kamionkowski, M. 2000, MNRAS, 311, 762
- Tegmark, M., Strauss, M. A., Blanton, M. R., et al. 2004, PhRvD, 69, 103501
- Tully, R. B., Courtois, H., Hoffman, Y., & Pomarède, D. 2014, Nature, 513, 71
- Vitvitska, M., Klypin, A. A., Kravtsov, A. V., et al. 2002, ApJ, 581, 799
- Weinberg, S., 1972, Gravitation and Cosmology, New York, Wiley.
- White, S. D. M. 1984, ApJ, 286, 38
- Zel'Dovich, Y. B. 1970, A&A, 5,84.
- Zwicky, F. 1933, Helv. Phys. Acta, 6, 110.