Trabajo Especial de la Licenciatura en Matemática

Biespectralidad: del caso escalar al matricial

Un trabajo de

Eduardo Gabriel Andreozzi,

bajo la dirección de la Dra.

María Inés Pacharoni

Grupo de Teoría de Lie

Marzo de 2024

Resumen

Empezamos estableciendo las bases de la teoría de los polinomios ortogonales matriciales. Con esto nos referimos al estudio de la sucesión de polinomios que resultan del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a partir de un producto interno matricial particular definido por un peso matricial positivo W soportado en un intervalo real determinado. Además, estudiamos en detalle el álgebra $\mathcal{D}(W)$ de los operadores lineales diferenciales que tienen a esta familia de polinomios como autofunciones, definiendo en el proceso la noción de operador diferencial simétrico. También daremos una vista rápida pero detallada del Problema Biespectral, en una versión escalar y bastante general. Por último, abordaremos el Problema de Time-Band-Limiting Matricial, cuyo ingrediente clave es la propiedad biespectral que satisfacen algunos de sus agentes principales. En general, daremos una presentación basada en las publicaciones [8, 2, 7].

Abstract

We begin by establishing the foundations of the theory of matrix-valued orthogonal polynomials. By this we refer to the analysis of the sequence of polynomials arising from the Gram-Schmidt orthogonalization process built upon a specific matrix-valued inner product, in turn defined by a matrix-valued weight density function W supported on some real interval. We also review in detail the algebra $\mathcal{D}(W)$ of linear ordinary differential operators possessing the aforementioned polynomials as eigenfunctions, defining in the process the notion of a symmetric differential operator. Next we give a quick but thorough overview of the Bispectral Problem, in a scalar and mostly general version. Lastly, we tackle the matrix version of the Time-Band-Limiting Problem, whose crucial ingredient is the bispectral property satisfied by some of its main agents. The publications [8, 2, 7] are our main sources for the present work.

Clasificación (MSC 2020): 33C45, 34L10, 42C05, 47L80, 94A11

Palabras claves: pesos matriciales, polinomios ortogonales matriciales, álgebra de operadores diferenciales, biespectralidad, ad-conditions, time-band-limiting.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo empieza estableciendo un marco teórico sólido sobre los polinomios ortogonales matriciales que surgen a partir de un peso matricial positivo definido en un intervalo de la recta real; las principales referencias son [8, 9]. Más específicamente, dado un número natural d fijo, un peso matricial positivo de tamaño $d \times d$ soportado en un intervalo real (a, b) (no necesariamente finito) es una función Lebesgue-medible W definida en (a, b) y que toma valores en las matrices complejas $d \times d$, tal que $W(x)$ es una matriz autoadjunta y definida positiva para casi todo $x \in (a, b)$. A partir de esto, es posible definir un producto interno matricial en el espacio de polinomios matriciales:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{(a,b)} P(x)W(x)Q(x)^* \, dx, \qquad P, Q \text{ polinomios matriciales},$$

en donde A^* denota a la matriz transpuesta conjugada de una matriz A.

Mediante un proceso de ortogonalización análogo al de Gram-Schmidt, y asumiendo que W tiene todos sus momentos finitos, es posible generar una sucesión de polinomios ortogonales $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ($\mathbb{N}_0$ denota a $\mathbb{N} \cup \{0\}$) respecto del producto definido arriba, de manera que el grado de P_n sea n.

Una de las propiedades importantes de la sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es que esta familia de polinomios satisface una relación de recurrencia de tres términos, o dicho en palabras más vinculadas al Problema Biespectral que se presentará más adelante, satisface una ecuación en diferencia de segundo orden de la forma

$$LP_n = xP_n,$$

con L un operador lineal en diferencia de segundo orden actuando *por izquierda* en la variable discreta n.

La segunda propiedad importante de la sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una hipótesis clave de este trabajo: la existencia de un operador lineal diferencial $\mathfrak{D}$ de segundo orden actuando *por derecha* en la variable continua x, que es a su vez simétrico en (a, b) respecto del producto interno mencionado al principio, y que tiene a la ya mencionada familia de polinomios ortogonales matriciales como autofunciones:

$$P_n\mathfrak{D} = \Lambda_n P_n.$$

En este caso, los autovalores $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ tienen carácter matricial, y como siempre que se trabaja con productos no conmutativos, es vital respetar a qué lado actúan estos operadores matriciales. En general, vamos a escribir a los operadores diferenciales como

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{m} \partial^i F_i(x), \qquad \partial^i = \left(\frac{d}{dx}\right)^i,$$

para ciertas funciones matriciales F_i, $i = 0, \dots, m$, y su acción sobre un polinomio matricial P es la siguiente:

$$P\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{m} \partial^i(P)F_i(x) = \sum_{i=0}^{m} P^{(i)}(x)F_i(x).$$

Este par de operadores actuando sobre las distintas variables de una familia de funciones $\{P(x,n) = P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ da lugar a una de las más famosas versiones del Problema Biespectral, y que va a tener suma relevancia en el desarrollo del Problema de Time-Band-Limiting que se presentará en los últimos dos capítulos de este trabajo.

Dejando de lado los polinomios matriciales específicamente, el trabajo continua con una vista rápida de una versión bastante general del Problema Biespectral. La principal inspiración para este capítulo es [2]. Este problema, en su versión escalar, puede introducirse así: sea $\psi(x,y)$ una función de dos variables y sean M_x y Z_y un par de operadores actuando sobre las variables x e y respectivamente, y para los cuales la función $\psi(x,y)$ constituye una familia de autofunciones:

$$M_x\psi(x,y) = \mu(y)\psi(x,y) \qquad \text{y} \qquad Z_y\psi(x,y) = \xi(x)\psi(x,y).$$

La función $\mu(y)$ juega el rol de autovalor de M_x asociado a la autofunción $\psi(x,y)$ vista como función de x para y fijo, y la función $\xi(x)$ juega el rol de autovalor de Z_y asociado a la autofunción $\psi(x,y)$ vista como función de y para x fijo. Un ejemplo históricamente muy relevante de una situación así es la función

$$\psi(x,y) = e^{ixy},$$

con los operadores diferenciales

$$M_x = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \qquad \text{y} \qquad Z_y = -\left(\frac{d}{dy}\right)^2,$$

y los respectivos autovalores

$$\mu(y) = y^2 \qquad \text{y} \qquad \xi(x) = x^2.$$

El Problema Biespectral trata de encontrar todas las situaciones como la ya descrita, en general con operadores lineales M_x y Z_y de tipo diferencial y con una función $\psi(x,y)$ suficientemente diferenciable según corresponda.

Otro ejemplo famoso y muy importante de una situación biespectral que se vincula con ciertos polinomios igual de importantes es el siguiente: si consideramos las variables $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}_0$, los operadores

$$M_x f(x,n) = (1-x^2)\frac{d^2 f}{dx^2}(x,n) + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x)\frac{df}{dx}(x,n)$$

y

$$Z_n f(x,n) = a_n f(x,n+1) + b_n f(x,n) + c_n f(x,n-1),$$

con

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}, \\ b_n &= \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}, \\ c_n &= \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}, \end{aligned}$$

son "operadores biespectrales" para la familia $P^{(\alpha,\beta)}(x,n) := P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ de los *polinomios de Jacobi*:

$$M_x P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \qquad \text{y} \qquad Z_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = xP_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Por último, este trabajo finaliza con una importante aplicación del fenómeno biespectral: el Problema de Time-Band-Limiting. Las principales referencias son [7, 10]. Este problema tuvo motivación en una pregunta de C. Shannon que sentó las bases de la Teoría de la Información: conociendo parcialmente la transformada de Fourier sobre una banda limitada de frecuencias de una señal desconocida con una duración temporal finita, ¿cómo podemos usar esta información "ruidosa" para recuperar lo más fielmente posible la señal original?

La respuesta a esta pregunta, en términos matemáticamente precisos, es que debemos recuperar la proyección de la señal desconocida sobre el subespacio del espacio de Hilbert generado por un número finito de autofunciones de un determinado operador integral. Cualquier alternativa sufrirá problemas de estabilidad numérica.

Esto trae a discusión el problema de calcular estas autofunciones de forma precisa y económica para asegurar la calidad del esquema de reconstrucción de la señal. Si resulta que este conjunto de autofunciones no genera un subespacio suficientemente grande para asegurar la resolución deseada, deberemos medir la transformada de Fourier sobre una banda de frecuencias más ancha. Esto a su vez obliga a modificar el operador integral del cual queremos calcular sus autofunciones para consolidar la mejora causada por el conjunto más grande de mediciones.

La necesidad de calcular estas autofunciones numéricamente es verdaderamente un obstáculo serio, para el cual D. Slepian, H. Landau y H. Pollak encontraron una solución revolucionaria: ellos pudieron construir explícitamente un operador diferencial de segundo orden cuyas autofunciones son automáticamente autofunciones del operador integral ya aludido anteriormente [13, 11, 12, 15, 16, 17]. El cálculo numérico de las autofunciones de este operador diferencial reduce el problema que originalmente era global a uno local. Todavía más importante, los autovalores del operador diferencial están más separados entre sí, lo que simplifica la labor numérica. Desde este punto de vista, es difícil imaginar una situación mejor al que se encontraron estos científicos de Bell Labs.

Capítulo 2

Polinomios ortogonales matriciales

2.1. Notación y convenciones

A lo largo de este trabajo vamos a usar las letras mayúsculas de imprenta como A, B, C, X, Y, Z, ..., para denotar a matrices o funciones a valores matriciales. En esta práctica también englobamos a los operadores actuando entre espacios de funciones matriciales, siendo las funciones polinomiales las protagonistas del trabajo. Algunas excepciones corresponden a la notación de ciertos conjuntos, como por ejemplo E, G o K, que serán aclaradas cuando aparezcan. También, ciertos parámetros especiales del tema tratado en el momento irán en mayúsculas, como por ejemplo un número natural fijo N.

Vamos a usar las letras minúsculas de imprenta como a, b, c, d, p, q, x, y, z, ..., para denotar constantes complejas, variables continuas, y en general parámetros numéricos que pueden tomar valores en los números complejos. Se reservan letras como i, j, k, ℓ, m, n, ..., para denotar números enteros. También se reservan letras como f, g, h, ..., para denotar funciones de todo tipo según la necesidad.

Con respecto a la letras griegas, tanto minúsculas como mayúsculas, su uso es variado. En general se usarán las minúsculas para números complejos o funciones de todo tipo, mientras que las mayúsculas en general se reservan para matrices, funciones matriciales u operadores actuando entre espacios de funciones matriciales. En algunas pocas ocasiones habrán excepciones que se aclararán cuando aparezcan.

Adoptaremos las siguientes convenciones para todo este trabajo. Si en algún capítulo alguna de ellas deja de aplicar, se avisará explícitamente.

- Se denota a $\mathbb{N} \cup \{0\}$ como $\mathbb{N}_0$. En particular, se considera que el conjunto $\mathbb{N}$ empieza a partir de 1.
- Si z es un número complejo, su conjugado se denota como $\overline{z}$.
- Todas las matrices, salvo mención explícita de lo contrario, tienen entradas complejas, son cuadradas y de tamaño $d \times d$ con d un número natural fijo.
- $\mathcal{A}$ denota a la $*$-álgebra compleja de las matrices $d \times d$ sobre $\mathbb{C}$, en donde I denota a la matriz identidad y A^* denota a la matriz transpuesta conjugada de la matriz A.

- Aquellas matrices que satisfagan $A = A^*$ serán denominadas *simétricas* o *autoadjuntas* indistintamente, prefiriendo la segunda denominación. Para el caso de operadores, el término *operador simétrico* tendrá un significado preciso que se indicará oportunamente. Nunca se usará el término *operador autoadjunto*.

- En todo momento, P y Q se usarán para denotar polinomios matriciales. Se denotará como $\mathcal{A}[x]$ al anillo de polinomios sobre $\mathcal{A}$. Este anillo es también una $*$-álgebra compleja, con la involución $*$ definida como sigue:

$$\text{si} \qquad P = \sum_{i=0}^{n} P_i x^i, \qquad P_i \in \mathcal{A}, \qquad \text{entonces} \qquad P^* = \sum_{i=0}^{n} P_i^* x^i.$$

- Se usará la letra $\mathfrak{D}$ para denotar a los varios operadores lineales diferenciales matriciales que aparecerán a lo largo de este trabajo. Estos operadores actuarán principalmente sobre polinomios matriciales *por la derecha*, razón por la cual estos operadores se escribirán como sigue:

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{m} \partial^i F_i(x), \qquad \partial^i = \left(\frac{d}{dx}\right)^i,$$

  con F_i funciones matriciales, $i = 0, \ldots, m$. Esta convención sirve para recordar cómo actúa $\mathfrak{D}$ sobre polinomios: si P es un polinomio matricial entonces $\mathfrak{D}$ actuando sobre P se denota como $P\mathfrak{D}$ y significa

$$P\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{m} \partial^i(P) F_i(x) = \sum_{i=0}^{m} P^{(i)}(x) F_i(x).$$

- Si P es un polinomio (matricial o no), su *grado* se denotará como $\operatorname{gr} P$. Si $\mathfrak{D}$ es un operador lineal diferencial, su *orden* se denotará como $\operatorname{ord} \mathfrak{D}$. Por último, si T es un operador lineal cualquiera, su *núcleo* se denotará como $\operatorname{Nu} T$.

2.2. Pesos y productos internos matriciales

Esta sección, y el resto de este capítulo, se basa en [8].

Comenzamos con una definición básica.

Definición 2.2.1. Un *peso matricial positivo soportado en el intervalo real* (a, b) es una función Lebesgue-integrable $W : (a, b) \to \mathcal{A}$ tal que $W(x)$ es autoadjunta y definida positiva para casi todo $x \in (a, b)$, y tal que todos sus momentos matriciales $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ son finitos:

$$\mu_n = \int_{(a,b)} x^n W(x)\, dx \; < \infty \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dado un peso matricial positivo W soportado en el intervalo real (a, b), definimos la siguiente forma sesquilineal hermitiana en $\mathcal{A}[x]$ a valores matriciales:

$$\langle P, Q \rangle = \langle P, Q \rangle_W = \int_{(a,b)} P(x) W(x) Q(x)^*\, dx;$$

denotaremos a $\langle \cdot,\cdot\rangle_W$ simplemente como $\langle \cdot,\cdot\rangle$ cuando W esté sobreentendido.

La siguiente proposición establece las propiedades básicas de esta forma sesquilineal hermitiana.

Proposición 2.2.2. *Para $\alpha \in \mathbb{C}$, $P, Q, R \in \mathcal{A}[x]$ y $A \in \mathcal{A}$, se cumple que:*

(i) $\langle \alpha P + Q, R\rangle = \alpha\langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle$*;*

(ii) $\langle AP, Q\rangle = A\langle P, Q\rangle$*;*

(iii) $\langle P, Q\rangle^* = \langle Q, P\rangle$*;*

(iv) $\langle P, P\rangle$ *es una matriz semidefinida positiva. Además, si* $\langle P, P\rangle = 0$*, entonces* $P = 0$*.*

Demostración. Las afirmaciones (i), (ii), (iii) y la primera parte de (iv) se pueden verificar fácilmente de la definición. Para la segunda parte de la afirmación (iv), ver la Proposición 2.2.6. □

Definición 2.2.3. Una aplicación $\langle \cdot,\cdot\rangle : \mathcal{A}[x] \times \mathcal{A}[x] \to \mathcal{A}$ que satisface las propiedades (i), (ii), (iii) y la primera parte de (iv) de la proposición anterior se denomina *producto interno matricial en* $\mathcal{A}[x]$. Si cumple además la segunda parte de la propiedad (iv) (como es el caso de $\langle \cdot,\cdot\rangle_W$), se dice que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ es *no degenerado.*

Los siguientes dos lemas nos ayudan a probar que nuestro producto interno matricial es no degenerado.

Lema 2.2.4. *Sean X e Y espacios métricos separables y completos, y sea K un subconjunto cerrado y σ-compacto de $X \times Y$. Si $\pi_1 : X \times Y \to X$ es la proyección en la primera coordenada, entonces $\pi_1(K)$ es un subconjunto boreliano de X y existe una función boreliana $f : \pi_1(K) \to Y$ cuyo gráfico está contenido en K.*

Demostración. Para ver que $\pi_1(K)$ es un subconjunto boreliano de X basta con notar que la proyección π_1 es continua, y por lo tanto $\pi_1(K)$ es un subconjunto σ-compacto de X.

Para construir una función boreliana f como la enunciada, fijamos un subconjunto denso $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Y, y para cada $x \in \pi_1(K)$ y $j \in \mathbb{N}$ definimos inductivamente $f_j(x)$ como el primer elemento y_n que satisfaga las siguientes dos condiciones:

1. El conjunto $\{x\} \times \bar{B}(y_n, 2^{-j})$ interseca a K;

2. Si $j > 1$ entonces la distancia entre y_n y $f_{j-1}(x)$ es menor o igual a $2^{-(j-2)}$.

Con un argumento inductivo sencillo podemos verificar que todas las funciones $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son borelianas, y su límite uniforme f satisface lo deseado. □

Lema 2.2.5. *Sean $\mathcal{H}_d$, $\mathcal{U}_d$ y $\mathcal{D}_d$, respectivamente, el espacio vectorial real de las matrices $d \times d$ hermitianas, el grupo unitario de las matrices $d \times d$ y el espacio vectorial real de las matrices $d \times d$ diagonales. Entonces existe una función boreliana $g : \mathcal{H}_d \to \mathcal{U}_d$ que asocia a cada matriz hermitiana H una matriz unitaria $g(H)$ tal que la matriz $g(H)^* H g(H)$ es real y diagonal.*

Demostración. Sea $K = \{(H, U, D) \in \mathcal{H}_d \times \mathcal{U}_d \times \mathcal{D}_d \mid U^* H U = D\}$. Es claro que K es un subconjunto cerrado de $\mathcal{H}_d \times \mathcal{U}_d \times \mathcal{D}_d$, y como también se cumple que $K = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$, con $K_j = \{(H, U, D) \in K \mid \|H\| = \|D\| \leq j\}$, K es también σ-compacto.

Como toda matriz hermitiana es unitariamente equivalente a una matriz real y diagonal, tenemos que $\pi_1(K) = \mathcal{H}_d$. Entonces podemos usar el lema anterior para $X = \mathcal{H}_d$ e $Y = \mathcal{U}_d \times \mathcal{D}_d$ y obtener una función boreliana $f : \mathcal{H}_d \to \mathcal{U}_d \times \mathcal{D}_d$ cuyo gráfico está contenido en K. La prueba se completa definiendo $g = \pi_1 \circ f$. □

Proposición 2.2.6. *Sea $P = \sum_{0 \leq j \leq n} P_j x^j$ un polinomio matricial de grado $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces $\operatorname{Nu} \langle P, P \rangle = \bigcap_{0 \leq j \leq n} \operatorname{Nu} P_j^*$. En particular, $\langle P, P \rangle$ es no singular si algún P_j también lo es. Finalmente, si $\langle P, P \rangle = 0$ entonces $P = 0$.*

Demostración. Para cada $x \in (a, b)$ sea $\{e_i(x)\}_{i=1}^d$ una base ortonormal de $\mathbb{C}^d$ tal que $W(x) e_i(x) = \alpha_i(x) e_i(x)$. Usando el lema anterior, podemos asumir que las funciones $e_i(x)$ y $\alpha_i(x)$ son borelianas.

Si ahora $e \in \mathbb{C}^d$, escribimos

$$P(x)^* e = \sum_{i=1}^{d} a_i(x) e_i(x),$$

y entonces se cumple que

$$W(x) P(x)^* e = \sum_{i=1}^{d} a_i(x) \alpha_i(x) e_i(x)$$

y

$$\langle W(x) P(x)^* e, P(x)^* e \rangle_{\mathbb{C}^d} = \sum_{i=1}^{d} |a_i(x)|^2 \alpha_i(x).$$

Notando de lo anterior que la función boreliana $x \mapsto \langle W(x) P(x)^* e, P(x)^* e \rangle_{\mathbb{C}^d}$ es no negativa para casi todo $x \in (a, b)$, si $\langle P, P \rangle e = 0$ vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \langle P, P \rangle e, e \rangle_{\mathbb{C}^d} \\ &= \int_{(a,b)} \langle P(x) W(x) P(x)^* e, e \rangle_{\mathbb{C}^d} \, dx \\ &= \int_{(a,b)} \langle W(x) P(x)^* e, P(x)^* e \rangle_{\mathbb{C}^d} \, dx, \end{aligned}$$

lo que implica que $a_i(x) = 0$ para casi todo $x \in (a, b)$. Esto a su vez implica que $P(x)^* e = 0$ para casi todo $x \in (a, b)$, lo que finalmente prueba que $P_j^* e = 0$ para todo $0 \leq j \leq n$. □

2.3. Sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos

En esta sección veremos que para todo peso matricial positivo W podemos asociar una sucesión de polinomios ortogonales matriciales. Más aún, veremos que existe una *única* sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos asociada a W.

Proposición 2.3.1. *Sea $V_n = \{F \in \mathcal{A}[x] \mid \operatorname{gr} F \leq n\}$, para $n \in \mathbb{N}_0$, $V_{-1} = 0$ y $V_{n-1}^{\perp} = \{H \in V_n \mid \langle H, F\rangle = 0$ para todo $F \in V_{n-1}\}$. Entonces $V_{n-1}^{\perp}$ es un $\mathcal{A}$-módulo a izquierda y se cumplen las siguientes tres afirmaciones:*

(i) $V_n = V_{n-1} \oplus V_{n-1}^{\perp}$ *para* $n \in \mathbb{N}_0$*;*

(ii) $\dim_{\mathbb{C}} V_{n-1}^{\perp} = d^2$ *para* $n \in \mathbb{N}_0$*;*

(iii) Existe un único polinomio matricial mónico P_n en $V_{n-1}^{\perp}$ de grado n para $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. La prueba se hace por inducción en $n \geq 0$. Para $n = 0$ es claro que todas las afirmaciones enunciadas se cumplen. Para $n = 1$ tenemos que $V_1 = x\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$ y $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = 2d^2$. Nos interesa encontrar $P_1 = xI + C_0 \in V_1$ ortogonal a $P_0 = I$:

$$\langle P_1, P_0\rangle = \langle xI, P_0\rangle + C_0\langle P_0, P_0\rangle.$$

Entonces debemos tomar $C_0 = -\langle xI, P_0\rangle\langle P_0, P_0\rangle^{-1}$, y esto nos asegura que $P_1 \in V_0^{\perp}$, ya que $\langle P_1, Q\rangle = \langle P_1, P_0\rangle Q^* = 0$ para cualquier $Q \in V_0$.

Por otro lado, si $P \in V_1$ entonces $P = xB_1 + B_0$ y $P - B_1P_1 \in V_0$, por lo que $V_1 = V_0 + V_0^{\perp}$. Además, si $P \in V_0 \cap V_0^{\perp}$, se cumple que $\langle P, P\rangle = 0$ y en particular $P = 0$ por la Proposición 2.2.6. Por último, como $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = 2d^2$ y $\dim_{\mathbb{C}} V_0 = d^2$, es inmediato que $\dim_{\mathbb{C}} V_0^{\perp} = d^2$. Esto completa la demostración para $n = 1$.

Sea ahora $n > 1$ y supongamos que la proposición es cierta para todo $m \leq n-1$. Nos interesa encontrar $P_n = x^nI + B_{n-1}P_{n-1} + \cdots + B_0P_0 \in V_{n-1}^{\perp}$:

$$\langle P_n, P_m\rangle = \langle x^nI, P_m\rangle + B_m\langle P_m, P_m\rangle.$$

Entonces debemos tomar $A_m = -\langle x^nI, P_m\rangle\langle P_m, P_m\rangle^{-1}$, para $0 \leq m \leq n-1$. A partir de esto es fácil verificar que $P_n \in V_{n-1}^{\perp}$. El resto de la demostración es análogo al caso $n = 1$. $\square$

Corolario 2.3.2. *Sea W un peso matricial positivo. Entonces la sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ dada por la proposición anterior es la única sucesión de polinomios ortogonales mónicos en $\mathcal{A}[x]$. Más aún, cualquier sucesión $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de polinomios ortogonales en $\mathcal{A}[x]$ es de la forma $Q_n = A_nP_n$ para ciertos $A_n \in GL(d, \mathbb{C})$.*

Una propiedad muy importante sobre la sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de polinomios ortogonales matriciales mónicos es que estos satisfacen una *relación de recurrencia de tres términos.*

Proposición 2.3.3. *La sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de polinomios ortogonales matriciales mónicos asociados a W satisface una relación de recurrencia de tres términos:*

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_nP_n(x) + C_nP_{n-1}(x), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

con $B_n, C_n \in \mathcal{A}$ y $P_{-1}(x) = 0$.

Demostración. Usando la Proposición 2.3.1 podemos escribir

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + B_nP_n(x) + C_nP_{n-1}(x) + V_{n-2}P_{n-2}(x) + \cdots + V_0P_0(x).$$

Para todo $0 \leq j \leq n-2$ tenemos que

$$0 = \langle P_n, xP_j\rangle = \langle xP_n, P_j\rangle = V_j\langle P_j, P_j\rangle,$$

lo que implica que $V_j = 0$ para todo $0 \leq j \leq n-2$. □

2.4. El álgebra $\mathcal{D}(W)$ de operadores diferenciales

Empezamos definiendo los operadores diferenciales con coeficientes matriciales actuando sobre los polinomios matriciales.

Definición 2.4.1. Un *operador lineal diferencial matricial de orden s actuando a derecha*, con $s \in \mathbb{N}_0$, es un operador $\mathfrak{D}$ de la forma

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i F_i(x), \qquad \partial^i = \left(\frac{d}{dx}\right)^i,$$

con $F_i : (a,b) \to \mathcal{A}$, $i = 0, \ldots, s$, que actúa sobre polinomios en $\mathcal{A}[x]$ de la siguiente forma:

$$P\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i(P)F_i(x) = \sum_{i=0}^{s} P^{(i)}(x)F_i(x).$$

Observación 2.4.2. La notación $P\mathfrak{D}$ para la acción de $\mathfrak{D}$ sobre P, aparte de recordarnos desde qué lado corresponde la acción, nos permite respetar la asociatividad natural de estos operadores: si $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ son operadores diferenciales como antes tenemos que $P(\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2) = (P\mathfrak{D}_1)\mathfrak{D}_2$. Entonces los polinomios matriciales con la acción de estos operadores constituyen un módulo a derecha.

Proposición 2.4.3. *Sea W un peso matricial positivo y $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos asociada a W. Si*

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i F_i(x)$$

es un operador lineal diferencial matricial de orden s actuando a derecha tal que

$$P_n\mathfrak{D} = \Lambda_n P_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.1}$$

con $\Lambda_n \in \mathcal{A}$, entonces $F_i \in \mathcal{A}[x]$ y $\operatorname{gr} F_i \leq i$. Más aún, $\mathfrak{D}$ está unívocamente determinado por la sucesión $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Demostración. Considerando $n = 0$ en (2.1) obtenemos $F_0 = \Lambda_0$. Considerando ahora $n = j \geq 1$ en (2.1) obtenemos

$$\Lambda_j P_j = P_j \mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{j} \partial^i (P_j) F_i = j!\, F_j + \sum_{i=0}^{j-1} \partial^i (P_j) F_i,$$

lo que implica que

$$j!\, F_j = \Lambda_j P_j - \sum_{i=0}^{j-1} \partial^i (P_j) F_i.$$

Razonando inductivamente en $j \geq 0$ verificamos que F_j es un polinomio matricial de grado menor o igual a j. De la ecuación anterior también es claro que la sucesión $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ determina unívocamente al operador $\mathfrak{D}$. $\square$

Antes de seguir, recordamos una definición útil para el resto de este trabajo. Si $z \in \mathbb{C}$ definimos

$$[z]_i = z(z-1)\dots(z-i+1), \qquad [z]_0 = 1.$$

Proposición 2.4.4. *Supongamos que* $\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i F_i(x)$ *satisface* (2.1), *con*

$$F_i = \sum_{j=0}^{i} F_j^i x^j, \qquad F_j^i \in \mathcal{A}.$$

Entonces

$$\Lambda_n = \sum_{i=0}^{s} [n]_i F_i^i, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

En particular, la función $n \mapsto \Lambda_n$ *es un polinomio matricial en la variable* n *de grado menor o igual a* s.

Demostración. Reescribiendo (2.1) tenemos que

$$\sum_{i=0}^{s} \partial^i (P_n) F_i = \Lambda_n P_n.$$

Comparando los coeficientes de grado n en la ecuación anterior obtenemos

$$\sum_{i=0}^{s} [n]_i F_i^i = \Lambda_n.$$

$\square$

Definición 2.4.5. Sea W un peso matricial positivo y $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de polinomios ortogonales matriciales. Definimos a $\mathcal{D}(W)$ como el álgebra de todos los operadores lineales diferenciales con coeficientes matriciales actuando a derecha y que tienen a los polinomios Q_n como autofunciones.

Notemos que si $Q_n\mathfrak{D} = \Gamma_n Q_n$ para ciertas matrices $\Gamma_n \in \mathcal{A}$, cada Γ_n está unívocamente determinada por $\mathfrak{D}$; esto es consecuencia inmediata de la Proposición 2.4.4. En este caso escribimos $\Gamma_n = \Gamma_n(\mathfrak{D})$. Entonces

$$\mathcal{D}(W) = \{\mathfrak{D} \mid Q_n\mathfrak{D} = \Gamma_n(\mathfrak{D})Q_n,\ \Gamma_n(\mathfrak{D}) \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Observación 2.4.6. Notemos que la definición de $\mathcal{D}(W)$ sólo depende del peso W y no de la sucesión $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Esto es consecuencia inmediata del Corolario 2.3.2.

Proposición 2.4.7. *Con la notación anterior, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ se cumple que la función $\mathfrak{D} \mapsto \Gamma_n(\mathfrak{D})$ es una representación de álgebras de $\mathcal{D}(W)$ en $\mathcal{A}$. Más aún, la sucesión de representaciones $\{\Gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ separa elementos en $\mathcal{D}(W)$.*

Demostración. Es claro que $\mathfrak{D} \mapsto \Gamma_n(\mathfrak{D})$ es una función lineal de $\mathcal{D}(W)$ en $\mathcal{A}$, y es no nula porque $\Gamma_n(I) = I$.

Si ahora $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ son operadores en $\mathcal{D}(W)$, tenemos que

$$P_n(\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2) = (\Gamma_n(\mathfrak{D}_1)P_n)\mathfrak{D}_2 = \Gamma_n(\mathfrak{D}_1)(P_n\mathfrak{D}_2) = \Gamma_n(\mathfrak{D}_1)\Gamma_n(\mathfrak{D}_2)P_n,$$

y esto implica que $\Gamma_n(\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2) = \Gamma_n(\mathfrak{D}_1)\Gamma_n(\mathfrak{D}_2)$.

Finalmente, escribiendo $Q_n = A_nP_n$, es fácil verificar que $\Gamma_n(\mathfrak{D}) = A_n\Lambda_n(\mathfrak{D})A_n^{-1}$. A partir de esto, la última afirmación del enunciado se sigue de la Proposición 2.4.3. □

Resulta importante observar que cada álgebra $\mathcal{D}(W)$ es una subálgebra del *álgebra de Weyl* $\mathscr{D}$ sobre $\mathcal{A}$ de todos los operadores lineales diferenciales actuando a derecha con coeficientes en $\mathcal{A}[x]$:

$$\mathscr{D} = \left\{ \mathfrak{D} = \sum_i \partial^i F_i(x) \;\middle|\; F_i \in \mathcal{A}[x] \right\}.$$

Es también importante introducir la subálgebra $\mathcal{D}$ del álgebra de Weyl definida como

$$\mathcal{D} = \left\{ \mathfrak{D} = \sum_i \partial^i F_i(x) \in \mathscr{D} \;\middle|\; \operatorname{gr} F_i \le i \right\}.$$

Entonces por la Proposición 2.4.7 sabemos que $\mathcal{D}(W) \subseteq \mathcal{D}$ para cualquier peso matricial W. Esta álgebra $\mathcal{D}$ también viene con su familia $\{\Lambda_\nu\}_{\nu\in\mathbb{C}}$ de representaciones definidas como

$$\Lambda_\nu(\mathfrak{D}) = \sum_i [\nu]_i F_i^i,$$

como lo asegura la siguiente proposición.

Proposición 2.4.8. *Si $\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^s \partial^i F_i(x) \in \mathcal{D}$, con $F_i = \sum_{j=0}^i F_j^i x^j$, entonces*

$$\Lambda_\nu(\mathfrak{D}) = \sum_{i=0}^s [\nu]_i F_i^i$$

define una representación Λ_ν de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{A}$, para cada $\nu \in \mathbb{C}$.

Demostración. Es claro que Λ_ν es un mapa lineal de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{A}$. Entonces para probar esta proposición es suficiente con establecer que

$$\Lambda_\nu\left((\partial^s F_s)(\partial^r G_r)\right) = \Lambda_\nu(\partial^s F_s)\Lambda_\nu(\partial^r G_r),$$

para $s, r \geq 0$. La regla de Leibniz asegura que

$$(\partial^s F_s)(\partial^r G_r) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \partial^{s+i} F_s^{(r-i)} G_r.$$

Esto implica que

$$\Lambda_\nu\left((\partial^s F_s)(\partial^r G_r)\right) = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} [\nu]_{s+i} \left(F_s^{r-i} G_r\right)_{s+i} = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} [\nu]_{s+i}[s]_{r-i} F_s^s G_r^r.$$

Entonces, para terminar la prueba, es suficiente con verificar que

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} [\nu]_{s+i}[s]_{r-i} = [\nu]_s[\nu]_r.$$

Esto puede ser verificado derivando r veces la siguiente identidad:

$$(x^\nu)^{(s)} x^s = [\nu]_s x^\nu, \qquad x \geq 0.$$

En el lado izquierdo obtenemos

$$\begin{aligned}
\left((x^\nu)^{(s)} x^s\right)^{(r)} &= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (x^\nu)^{(s+i)} (x^s)^{(r-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} [\nu]_{s+i} x^{\nu-s-i} [s]_{r-i} x^{s-r+i} \\
&= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} [\nu]_{s+i}[s]_{r-i} x^{\nu-r},
\end{aligned}$$

y en el lado derecho obtenemos

$$([\nu]_s x^\nu)^{(r)} = [\nu]_s[\nu]_r x^{\nu-r}.$$

□

Para terminar esta sección, definimos la noción de operadores diferenciales simétricos y damos un resultado clave para más adelante.

Definición 2.4.9. Un operador lineal diferencial $\mathfrak{D}$ actuando a derecha sobre polinomios matriciales se dice *simétrico* si $\langle P\mathfrak{D}, Q\rangle = \langle P, Q\mathfrak{D}\rangle$ para todo par de polinomios P, Q en $\mathcal{A}[x]$.

El siguiente resultado, sin dejarnos engañar por su demostración sencilla, es verdaderamente importante a la hora de hallar elementos en el álgebra $\mathcal{D}(W)$. Este muestra la importancia de que los operadores diferenciales del álgebra de Weyl $\mathscr{D}$ tengan los "grados correctos".

Proposición 2.4.10. *Si $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}$ es un operador diferencial simétrico entonces $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$.*

Demostración. Recordemos las definiciones de V_n y $V_{n-1}^{\perp}$ vistas en la Proposición 2.3.1:

$$V_n = \{F \in \mathcal{A}[x] \mid \operatorname{gr} F \leq n\}, \quad V_{n-1}^{\perp} = \{H \in V_n \mid \langle H, F\rangle = 0 \text{ para todo } F \in V_{n-1}\}.$$

Como $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}$, es claro que $\mathfrak{D}(V_n) \subseteq V_n$, y por la hipótesis de simetría, también se cumple que $\mathfrak{D}(V_{n-1}^{\perp}) \subseteq V_{n-1}^{\perp}$. Entonces, por la Proposición 2.3.1, tenemos que $P_n\mathfrak{D} = \Lambda_n P_n$ para ciertas matrices $\Lambda_n \in \mathcal{A}$. □

Observación 2.4.11. Notemos que el operador diferencial $\mathfrak{D} = xI$ satisface la condición de simetría pero ningún polinomio matricial puede ser una autofunción del mismo por cuestiones de grado.

2.5. El adjunto de un operador diferencial

Comenzamos esta sección con unos comentarios sobre el adjunto de un operador diferencial usual, para mostrar las complicaciones y los detalles a tener en cuenta para una correcta definición. De cualquier forma, en este trabajo sólo nos interesa definir adjuntos de operadores diferenciales en $\mathcal{D}(W)$ actuando sobre polinomios matriciales, lo que nos permitirá evitar problemas de dominio entre otras cosas.

Sea

$$\mathfrak{d} = \sum_{i=0}^{s} f_i(x)\partial^i$$

un operador lineal diferencial en el intervalo $[0,1]$ con coeficientes $f_i \in C^{\infty}([0,1])$. Consideremos el producto interno dado por

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx, \qquad f,g \in C^{\infty}([0,1]).$$

Entonces un operador diferencial $\mathfrak{d}^*$ se dice *adjunto formal de* $\mathfrak{d}$ si $(\mathfrak{d}f, g) = (f, \mathfrak{d}^* g)$ para todo par de funciones $f, g \in C^{\infty}([0,1])$ que se anulan en los extremos del intervalo, o equivalentemente

$$\int_0^1 \mathfrak{d}f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_0^1 f\overline{\mathfrak{d}^* g(x)}\,dx, \qquad f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0.$$

La existencia y unicidad de $\mathfrak{d}^*$ puede verificarse fácilmente usando el método de integración por partes.

Una situación muy distinta ocurre cuando no pedimos que las funciones en consideración se anulen en los extremos. Como ejemplo ilustrador, veamos que el operador diferencial $\partial = d/dx$ no tiene adjunto en $[0,1]$. Para empezar, consideremos el funcional lineal complejo en $\mathbb{C}[x]$ dado por $L(f) = c_1 f(z_1) + \cdots + c_n f(z_n)$, para ciertos $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Vamos a probar que este funcional no puede ser representado por ninguna función $g \in C^\infty([0,1])$. Razonando por absurdo, supongamos que existe $g \in C^\infty([0,1])$ tal que $L(f) = (f, g)$ para todo $f \in \mathbb{C}[x]$, o equivalentemente

$$c_1 f(z_1) + \cdots + c_n f(z_n) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Considerando el polinomio $h(x) := (x - z_1) \ldots (x - z_n)$ tenemos que

$$\int_0^1 h(x) f(x) \overline{g(x)}\, dx = c_1 (hf)(z_1) + \cdots + c_n (hf)(z_n) = 0$$

para todo $f \in \mathbb{C}[x]$, por lo que tomando $f = \overline{h} g$ obtenemos

$$\int_0^1 |h(x)|^2 |g(x)|^2\, dx = 0,$$

lo que implica que $g = 0$, un absurdo.

Con lo anterior, si el operador ∂ tuviera un adjunto $\tilde{\partial}$, se cumpliría que

$$\int_0^1 f(x)\overline{\tilde{\partial} g(x)}\, dx = \int_0^1 \partial f(x)\overline{g(x)}\, dx = f(1)\overline{g(1)} - f(0)\overline{g(0)} - \int_0^1 f(x)\overline{\partial g(x)}\, dx$$

para todo $f, g \in \mathbb{C}[x]$. Esto implicaría que el funcional $L(f) = \overline{g(1)} f(1) - \overline{g(0)} f(0)$, para g fija, estaría representado por $\partial g + \tilde{\partial} g$, lo que contradice lo probado anteriormente.

Pero en el caso de este capítulo, algo distinto ocurre con los operadores diferenciales en el álgebra $\mathcal{D}(W)$: más adelante se establecerá que para cada $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ existe un único $\mathfrak{D}^* \in \mathcal{D}(W)$ tal que $\langle P\mathfrak{D}, Q\rangle = \langle P, Q\mathfrak{D}^*\rangle$ para todo $P, Q \in \mathcal{A}[x]$.

Comencemos con algunos resultados previos.

Proposición 2.5.1. *Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos asociada a W. Dados $\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^s \partial^i F_i(x) \in \mathcal{D}(W)$ y $\tilde{\mathfrak{D}} = \sum_{i=0}^s \partial^i G_i(x) \in \mathcal{D}$, para todo $n, m \geq 0$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\langle P\mathfrak{D}, Q\rangle = \langle P, Q\tilde{\mathfrak{D}}\rangle$ *para todo* $P, Q \in \mathcal{A}[x]$ *con* $\operatorname{gr} P \leq n$ *y* $\operatorname{gr} Q \leq m$*;*

(ii) $\sum_{0\leq j\leq i\leq s} [u]_i F_j^i \mu_{u+v+j-i} = \sum_{0\leq j\leq i\leq s} [v]_i \mu_{u+v+j-i} (G_j^i)^*$, *para todo* $0 \leq u \leq n$ *y* $0 \leq v \leq m$*;*

(iii) $\langle P_u\mathfrak{D}, P_v\rangle = \langle P_u, P_v\tilde{\mathfrak{D}}\rangle$ *para todo* $0 \leq u \leq n$ *y* $0 \leq v \leq m$*.*

Demostración. Si (i) vale, en particular tenemos que $\langle (x^u I)\mathfrak{D}, x^v I\rangle = \langle x^u I, (x^v I)\tilde{\mathfrak{D}}\rangle$ para todo $0 \leq u \leq n$ y $0 \leq v \leq m$. Entonces

$$\int_{(a,b)} x^v \left(\sum_{i=0}^s [u]_i x^{u-i} F_i(x)\right) W(x)\, dx = \int_{(a,b)} x^u W(x) \left(\sum_{i=0}^s [v]_i x^{v-i} G_i(x)\right)^* dx,$$

lo que es equivalente a

$$\sum_{0\leq j\leq i\leq s}[u]_i\int_{(a,b)}x^{u+v+j-i}F_j^iW(x)\,dx=\sum_{0\leq j\leq i\leq s}[v]_i\int_{(a,b)}x^{u+v+j-i}W(x)(G_j^i)^*\,dx.$$

Esto prueba (ii).

Para ver que (ii) implica (iii), simplemente escribimos

$$\begin{aligned}\langle P_u\mathfrak{D},P_v\rangle&=\left\langle\left(\sum_p x^pP_p^u\right)\mathfrak{D},\sum_q x^qP_q^v\right\rangle\\&=\sum_{p,q}P_p^u\langle(x^pI)\mathfrak{D},x^qI\rangle(P_q^v)^*\\&=\sum_{p,q}P_p^u\langle x^pI,(x^qI)\tilde{\mathfrak{D}}\rangle(P_q^v)^*\\&=\left\langle\sum_p x^pP_p^u,\left(\sum_q x^qP_q^v\right)\tilde{\mathfrak{D}}\right\rangle\\&=\langle P_u,P_v\tilde{\mathfrak{D}}\rangle.\end{aligned}$$

Finalmente, para probar que (iii) implica (i) escribimos $P=\sum_{0\leq u\leq n}B_uP_u$ y $Q=\sum_{0\leq v\leq m}C_vP_v$, con $B_u,C_v\in\mathcal{A}$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle P\mathfrak{D},Q\rangle&=\left\langle\left(\sum_u B_uP_u\right)\mathfrak{D},\sum_v C_vP_v\right\rangle\\&=\sum_{u,v}B_u\langle P_u\mathfrak{D},P_v\rangle C_v^*\\&=\sum_{u,v}B_u\langle P_u,P_v\tilde{\mathfrak{D}}\rangle C_v^*\\&=\left\langle\sum_u B_uP_u,\left(\sum_v C_vP_v\right)\tilde{\mathfrak{D}}\right\rangle\\&=\langle P_u,P_v\tilde{\mathfrak{D}}\rangle.\end{aligned}$$

□

Lema 2.5.2. *Para todo $b,c,d\in\mathbb{N}$ se cumple que*

$$\sum_{0\leq j\leq d}(-1)^j\binom{c+d}{j}\binom{b+d-j}{b}=\binom{b-c}{d}.$$

Demostración. Una prueba de este lema se basa en la identidad

$$\binom{m}{n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}\frac{(1+w)^m}{w^{m+1}}\,dw,$$

válida para todo $m,n\in\mathbb{N}_0$, y que se puede llevar a cabo usando técnicas descritas en [4]. □

Teorema 2.5.3. *Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos asociada a W. Dado $\mathfrak{D} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i F_i(x) \in \mathcal{D}(W)$, sea $\tilde{\mathfrak{D}} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i G_i(x) \in \mathcal{D}$, con los coeficientes G_i definidos inductivamente por*

(i) $G_0 = \langle P_0, P_0\rangle \Lambda_0(\mathfrak{D})^* \langle P_0, P_0\rangle^{-1}$;

(ii) $j!\, G_j = \langle P_j, P_j\rangle \Lambda_j(\mathfrak{D})^* \langle P_j, P_j\rangle^{-1} P_j - \sum_{i=0}^{j-1} \partial^i(P_j) G_i$ *para* $1 \le j \le s$.

Entonces $\langle P\mathfrak{D}, Q\rangle = \langle P, Q\tilde{\mathfrak{D}}\rangle$ *para todo* $P, Q \in \mathcal{A}[x]$.

Demostración. Primero observemos que si $0 \le m \le s$ entonces

$$P_m\tilde{\mathfrak{D}} = \sum_{i=0}^{s} \partial^i(P_m)G_i = m!\, G_m + \sum_{i=0}^{m-1} \partial^i(P_m)G_i = \langle P_m, P_m\rangle \Lambda(\mathfrak{D})^* \langle P_m, P_m\rangle^{-1} P_m.$$

Sea $0 \le m \le s$ y $n \ge 0$. Entonces

$$\langle P_n\mathfrak{D}, P_m\rangle = \Lambda_n(\mathfrak{D})\langle P_n, P_m\rangle = \delta_{n,m}\Lambda_m(\mathfrak{D})\langle P_m, P_m\rangle,$$

y también

$$\langle P_n, P_m\tilde{\mathfrak{D}}\rangle = \langle P_n, P_m\rangle \left(\langle P_m, P_m\rangle \Lambda_m(\mathfrak{D})^* \langle P_m, P_m\rangle^{-1}\right)^* = \delta_{n,m}\Lambda_m(\mathfrak{D})\langle P_m, P_m\rangle.$$

Con esto hemos probado que

$$\langle P_n\mathfrak{D}, P_m\rangle = \langle P_n, P_m\tilde{\mathfrak{D}}\rangle$$

para todo $0 \le m \le s$ y $n \ge 0$.

Con lo anterior, y junto a la Proposición 2.5.1, tenemos que para todo $0 \le m \le s$ y $n \ge 0$ se cumple la siguiente ecuación, denotada como $E_{n,m}$:

$$\sum_{0\le j\le i\le s} [n]_i F_j^i \mu_{n+m+j-i} = \sum_{0\le j\le i\le s} [m]_i \mu_{n+m+j-i} (G_j^i)^*.$$

En lo que sigue vamos a probar que las ecuaciones $E_{n,m}$, para $n \ge 0$, se cumplen para todo $m > s$, probando que cada una de estas ecuaciones son combinaciones lineales de $E_{n,r}$ con $0 \le r \le s$.

Empezamos buscando una solución para el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$a_0[0]_i + a_1[1]_i + \cdots + a_s[s]_i = [m]_i, \qquad 0 \le i \le s.$$

Este sistema es equivalente a

$$a_0\binom{0}{i} + a_1\binom{1}{i} + \cdots + a_s\binom{s}{i} = \binom{m}{i}, \qquad 0 \le i \le s,$$

cuya matriz asociada es la *matriz de Pascal* con coeficientes $p_{i,j} = \binom{j}{i}$ para $0 \le i, j \le s$. La inversa de la matriz de Pascal está dada por los coeficientes $q_{i,j} = (-1)^{i+j}\binom{j}{i}$, por lo que la única solución a nuestro sistema es

$$a_i = \sum_{j=i}^{s} (-1)^{i+j} \binom{j}{i}\binom{m}{j}, \qquad 0 \le i \le s.$$

Los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_s$ fueron elegidos para que el lado derecho de la combinación lineal $a_0 E_{n+m,0} + a_1 E_{n+m-1,1} + \cdots + a_s E_{n+m-s,s}$ sea igual al lado derecho de la ecuación $E_{n,m}$:

$$\begin{aligned}\sum_{0\le r\le s} a_r \sum_{0\le j\le i\le s} [r]_i \mu_{n+m+j-i}(G_j^i)^* &= \sum_{0\le j\le i\le s} \left(\sum_{0\le r\le s} a_r [r]_i\right) \mu_{n+m+j-i}(G_j^i)^* \\ &= \sum_{0\le j\le i\le s} [m]_i \mu_{n+m+j-i}(G_j^i)^*.\end{aligned}$$

Ahora debemos verificar que lo mismo ocurre para los lados izquierdos de las ecuaciones anteriores. Debemos probar la última igualdad en

$$\begin{aligned}\sum_{0\le r\le s} a_r \sum_{0\le j\le i\le s} [n+m-r]_i F_j^i \mu_{n+m+j-i} &= \sum_{0\le j\le i\le s} \left(\sum_{0\le r\le s} a_r [n+m-r]_i\right) F_j^i \mu_{n+m+j-i} \\ &= \sum_{0\le j\le i\le s} [n]_i F_j^i \mu_{n+m+j-i}.\end{aligned}$$

Para esto, vamos a probar que

$$\sum_{0\le r\le s} a_r [n+m-r]_i = [n]_i.$$

Si dividimos a ambos lados por $i!$ obtenemos la identidad equivalente

$$\sum_{0\le r\le s} a_r \binom{n+m-r}{i} = \binom{n}{i}.$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned}\sum_{0\le r\le s} a_r \binom{n+m-r}{i} &= \sum_{r=0}^{s}\sum_{j=r}^{s} (-1)^{r+j} \binom{j}{r}\binom{m}{j}\binom{n+m-r}{i} \\ &= \sum_{j=0}^{s}\sum_{r=0}^{j} (-1)^{r+j} \binom{j}{r}\binom{m}{j}\binom{n+m-r}{i}.\end{aligned}$$

Usando el lema anterior con $b = i$, $c = i - n - m$ y $d = n + m - i$ obtenemos

$$\sum_{r=0}^{j} (-1)^r \binom{j}{r}\binom{n+m-r}{i} = \binom{n+m-j}{i-j},$$

y si volvemos a usar el mismo lema con $b = n + m - i$, $c = m - i$ y $d = i$ obtenemos finalmente

$$\sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{m}{j}\binom{n+m-j}{i-j} = \binom{n}{i},$$

lo que completa la prueba de este teorema. □

Corolario 2.5.4. *Para cada* $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ *existe un único operador diferencial* $\mathfrak{D}^* \in \mathcal{D}(W)$ *tal que* $\langle P\mathfrak{D}, Q\rangle = \langle P, Q\mathfrak{D}^*\rangle$ *para todo* $P, Q \in \mathcal{A}[x]$. *Decimos que* $\mathfrak{D}^*$ *es el adjunto de* $\mathfrak{D}$. *La aplicación* $\mathfrak{D} \mapsto \mathfrak{D}^*$ *es una operación* $*$ *en el álgebra* $\mathcal{D}(W)$*, y los órdenes de* $\mathfrak{D}$ *y* $\mathfrak{D}^*$ *coinciden. Además, el conjunto* $\mathcal{S}(W)$ *de todos los operadores lineales diferenciales simétricos en* $\mathcal{D}(W)$ *es un espacio vectorial real que satisface*

$$\mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus i\mathcal{S}(W)$$

como espacios vectoriales reales.

Si $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *es una sucesión de polinomios ortogonales matriciales y* $\{\Gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *es la correspondiente sucesión de representaciones de* $\mathcal{D}(W)$ *(ver la Proposición 2.4.7), entonces*

$$\Gamma_n(\mathfrak{D}^*) = \langle Q_n, Q_n\rangle \Gamma_n(\mathfrak{D})^* \langle Q_n, Q_n\rangle^{-1}$$

para todo $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$. *En particular, si* $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *es una sucesión ortonormal entonces* $\mathfrak{D}$ *es simétrico si y sólo si* $\Gamma_n(\mathfrak{D})$ *es una matriz autoadjunta para todo* $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. La existencia de $\mathfrak{D}^*$ fue establecida en el teorema anterior. La unicidad de $\mathfrak{D}^*$ y el hecho de que la aplicación $\mathfrak{D} \mapsto \mathfrak{D}^*$ es una operación $*$ en el álgebra $\mathcal{D}(W)$ se sigue rápidamente de la Proposición 2.2.6.

Por el teorema anterior sabemos que $\operatorname{ord}\mathfrak{D}^* \leq \operatorname{ord}\mathfrak{D}$, y como $(\mathfrak{D}^*)^* = \mathfrak{D}$ tenemos que $\operatorname{ord}\mathfrak{D} \leq \operatorname{ord}\mathfrak{D}^* \leq \operatorname{ord}\mathfrak{D}$, lo que implica que $\operatorname{ord}\mathfrak{D}^* = \operatorname{ord}\mathfrak{D}$.

El hecho de que $\mathcal{D}(W) = \mathcal{S}(W) \oplus i\mathcal{S}(W)$ es consecuencia de que la aplicación $\mathfrak{D} \mapsto \mathfrak{D}^*$ es una involución lineal sobre $\mathbb{R}$ tal que $(i\mathfrak{D})^* = -i\mathfrak{D}^*$.

La cuarta afirmación es una consecuencia inmediata del siguiente cálculo:

$$\Gamma_n(\mathfrak{D})\langle Q_n, Q_n\rangle = \langle Q_n\mathfrak{D}, Q_n\rangle = \langle Q_n, Q_n\mathfrak{D}^*\rangle = \langle Q_n, Q_n\rangle\Gamma_n(\mathfrak{D}^*)^*.$$

Finalmente, si $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una sucesión ortonormal entonces $\Gamma_n(\mathfrak{D}^*) = \Gamma_n(\mathfrak{D})^*$. Esto implica que si $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^*$ entonces $\Gamma_n(\mathfrak{D}) = \Gamma_n(\mathfrak{D}^*) = \Gamma_n(\mathfrak{D})^*$. Y si $\Gamma_n(\mathfrak{D}) = \Gamma_n(\mathfrak{D})^*$ entonces $\Gamma_n(\mathfrak{D}) = \Gamma_n(\mathfrak{D})^* = \Gamma_n(\mathfrak{D}^*)$, implicando que $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^*$ por la Proposición 2.4.7. □

Corolario 2.5.5. *Si* $\mathfrak{D} \in \mathcal{S}(W)$ *entonces existe una sucesión* $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *de polinomios ortonormales matriciales tal que* $\Gamma_n(\mathfrak{D})$ *es una matriz diagonal para cada* $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Si R_n es ortonormal, por el corolario anterior tenemos que $\Gamma_n(\mathfrak{D})$ es autoadjunta y entonces existe una sucesión de matrices unitarias U_n tal que $U_n\Gamma_n(\mathfrak{D})U_n^{-1} = \Delta_n(\mathfrak{D})$ es una matriz diagonal para todo $n \geq 0$. Ahora notamos que $\{U_nR_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una nueva sucesión de polinomios ortonormales matriciales tal que

$$(U_nR_n)\mathfrak{D} = U_n\Gamma_n(\mathfrak{D})R_n = U_n\Gamma_n(\mathfrak{D})U_n^{-1}(U_nR_n) = \Delta_n(\mathfrak{D})(U_nR_n).$$

Entonces $\{Q_n = U_nR_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es la sucesión buscada. □

2.6. Ejemplo: Los polinomios matriciales de Gegenbauer

Para ejemplificar toda la maquinaria vista en este capítulo, presentamos una familia especial de polinomios ortogonales matriciales. En [9], la referencia para esta sección, se puede leer un tratamiento extenso del tema. Para una mejor y más rápida lectura, no se presentarán demostraciones de las propiedades de estos polinomios.

Vale la pena dar un poco de contexto sobre estos polinomios. En la esfera 2-dimensional $S^2 = SO(3)/SO(2)$, el análisis armónico con respecto a la acción del grupo ortogonal es abarcado por la teoría clásica de los *armónicos esféricos*. En coordenadas esféricas, las funciones esféricas sobre S^2 son los polinomios de Legendre. Más generalmente, las funciones esféricas sobre S^n están dadas en términos de los *polinomios de Gegenbauer (o ultraesféricos)* con parámetro $(n-1)/2$.

Esta interesante conexión entre los polinomios ortogonales y la teoría de representaciones de grupos de Lie compactos también se establece en el caso matricial: las funciones esféricas a valores matriciales de cualquier K-tipo están íntimamente relacionadas con los polinomios ortogonales matriciales. De esta manera, muchos ejemplos de polinomios ortogonales matriciales que son autofunciones de un operador diferencial simétrico fueron obtenidos enfocándose en técnicas de representaciones de grupos.

El ejemplo de los polinomios ortogonales matriciales dado en esta sección está motivado por las funciones esféricas de K-tipos fundamentales asociados a la esfera n-dimensional $S^n \simeq G/K$, en donde $(G, K) = (SO(n+1), SO(n))$. Los "parámetros de grupo" de los K-tipos fundamentales son $p, q \in \mathbb{N}$ con $0 < p < [q/2]$, y dan lugar a polinomios ortogonales matriciales de tamaño 2×2, aunque en esta sección se extienden continuamente estos parámetros para generalizar el ejemplo.

Para $0 < p < q$ arbitrarios y $n \in \mathbb{N}_0$, definimos el n-ésimo *polinomio matricial de Gegenbauer* como

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n^{q,p}(x) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{q+1} C_n^{(q+1)/2}(x) + \frac{1}{p+n} C_{n-2}^{(q+3)/2}(x) & \frac{1}{p+n} C_{n-1}^{(q+3)/2}(x) \\ \frac{1}{q-p+n} C_{n-1}^{(q+3)/2}(x) & \frac{1}{q+1} C_n^{(q+1)/2}(x) + \frac{1}{q-p+n} C_{n-2}^{(q+3)/2}(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

en donde $C_n^\lambda(x)$ es el n-ésimo *polinomio (escalar) de Gegenbauer*

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, \quad n + 2\lambda \\ \lambda + 1/2 \end{matrix} \,\middle|\, \frac{1-x}{2} \right), \qquad x \in [-1, 1],$$

con ${}_2F_1$ la *función (o serie) hipergeométrica* y $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$ el *n-ésimo símbolo de Pochhammer de $a \in \mathbb{C}$*. Como es usual, asumimos que $C_n^\lambda(x) = 0$ si $n < 0$. No es difícil verificar que C_n^λ es un polinomio de grado n con coeficiente principal $2^n(\lambda)_n/n!$. A partir de esto, tampoco es difícil comprobar que P_n es un polinomio matricial de grado n con coeficiente principal no singular igual a

$$\frac{2^n \left(\frac{q+1}{2} \right)_n}{(q+1)\, n!} I_{2\times 2} = \frac{2^{n-1}}{n!} \left(\frac{q+3}{2} \right)_n I_{2\times 2}.$$

Presentamos rápidamente el operador diferencial que tiene a la sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ como familia de autofunciones.

Teorema 2.6.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, el polinomio matricial P_n es una autofunción del operador diferencial de segundo orden*

$$\mathfrak{D} = \partial^2(1-x^2)I - \partial\left((q+2)xI + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q-p \end{pmatrix},$$

con autovalor matricial

$$\Lambda_n(\mathfrak{D}) = \begin{pmatrix} -n(n+q+1)-p & 0 \\ 0 & -n(n+q+1)-q+p \end{pmatrix}.$$

Ahora presentamos un peso matricial positivo respecto del cual los polinomios matriciales de Gegenbauer son ortogonales entre sí.

Teorema 2.6.2. *Para $0 < p < q$, el peso matricial positivo*

$$W(x) = W_{q,p}(x) := (1-x^2)^{q/2-1}\begin{pmatrix} px^2+q-p & -qx \\ -qx & (q-p)x^2+p \end{pmatrix}, \qquad x \in [-1,1]$$

satisface las siguientes propiedades:

(i) Para $q \neq 2p$, el peso W es irreducible, lo que quiere decir que no existe una matriz V no singular e independiente de x tal que $VW(x)V^*$ es un peso matricial positivo diagonal;

(ii) El operador diferencial $\mathfrak{D}$ introducido en el Teorema 2.6.1 es simétrico en $[-1,1]$ respecto de W;

(iii) Para $q \neq 2p$, todos los polinomios matriciales de la sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ son ortogonales respecto del producto interno matricial

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)W(x)Q(x)^*\,dx.$$

(iv) La sucesión $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de polinomios ortogonales matriciales mónicos asociada a W está dada entonces por

$$Q_n(x) = \frac{n!\,(q+1)}{2^n\left(\frac{q+1}{2}\right)_n}P_n(x).$$

Comentario 2.6.3. Para $q = 2p$ el peso W es reducible, ya que si tomamos

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$VW(x)V^* = 2p(1-x^2)^{p-1}\begin{pmatrix}(1-x)^2 & 0\\ 0 & (1+x)^2\end{pmatrix}.$$

Los correspondientes polinomios escalares asociados a cada peso diagonal son los *polinomios de Jacobi* $P_n^{(\alpha,\beta)}$ con $(\alpha,\beta)=(p+1,p-1)$ y $(\alpha,\beta)=(p-1,p+1)$ respectivamente.

Por completitud, también presentamos la relación de recurrencia de tres términos que satisfacen estos polinomios.

Teorema 2.6.4. *La sucesión de polinomios ortogonales matriciales $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ satisfacen la siguiente relación de recurrencia de tres términos:*

$$xP_n(x) = A_nP_{n+1}(x) + B_nP_n(x) + C_nP_{n-1}(x),$$

con coeficientes matriciales dados por

$$A_n = \frac{n+1}{2n+q+1}I, \qquad B_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-p}{(p+n)(p+n+1)} \\ \frac{-(q-p)}{(q-p+n)(q-p+n+1)} & 0\end{pmatrix},$$

$$C_n = \begin{pmatrix} \frac{(q+n)(p+n-1)(q-p+n+1)}{(p+n)(q-p+n)(2n+q+1)} & 0 \\ 0 & \frac{(q+n)(p+n+1)(q-p+n-1)}{(p+n)(q-p+n)(2n+q+1)}\end{pmatrix}.$$

Para terminar esta sección, estudiamos en detalle el álgebra $\mathcal{D}(W)$ en el caso $q\neq 2p$, ya que en el caso $q=2p$ el peso W es equivalente a una suma directa de pesos escalares, tal como se dijo en el Comentario 2.6.3, y la correspondiente álgebra $\mathcal{D}(W)$ es "trivial", en el sentido de que es un álgebra de polinomios en el operador diferencial de Jacobi.

Para empezar, afirmamos que el espacio de los operadores diferenciales en $\mathcal{D}(W)$ de orden cero consiste en múltiplos escalares de la identidad. Para ver esto, consideramos un operador diferencial $\mathfrak{L}$ en $\mathcal{D}(W)$ de orden cero y partimos de la ecuación

$$Q_n\mathfrak{L} = \Lambda_n(\mathfrak{L})Q_n$$

para deducir, usando la Proposición 2.4.4, que $\mathfrak{L}=\Lambda_n$ para todo $n\in\mathbb{N}_0$. Tomando $n=1$ obtenemos las condiciones $\mathfrak{L}_{1,1}=\mathfrak{L}_{2,2}$ y $(p+1)\mathfrak{L}_{1,2}=(q-p+1)\mathfrak{L}_{2,1}$, y luego tomando $n=2$ obtenemos la condición $(q-2p)\mathfrak{L}_{1,2}=0$. Juntando todo, es claro que $\mathfrak{L}$ es un múltiplo escalar de la identidad.

Ahora, y hasta el final de esta sección, nos dedicamos a estudiar los operadores diferenciales en $\mathcal{D}(W)$ de orden a lo sumo dos. A partir de la Proposición 2.4.4, si $\mathfrak{D}$ es un operador diferencial en $\mathcal{D}(W)$ de orden a lo sumo dos tenemos que

$$\mathfrak{D} = \partial^2(A_2x^2+A_1x+A_0) + \partial(B_1x+B_0) + C$$

si y sólo si

$$Q_n\mathfrak{D} = \left(n(n-1)A_2 + nB_1 + C\right)Q_n, \qquad \text{para todo } n\in\mathbb{N}_0.$$

En lo anterior A_2, A_1, A_0, B_1, B_0 y C son matrices complejas 2×2. Denotando como $Q_{n,j}$ al j-ésimo coeficiente de Q_n, es decir $Q_n = \sum_{j=0}^{n} Q_{n,j} x^j$, con $Q_{n,n} = I$, tenemos que $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ si y sólo si

$$\begin{aligned} j(j-1)Q_{n,j}A_2 + j(j+1)Q_{n,j+1}A_1 + (j+1)(j+2)Q_{n,j+2}A_0 + jQ_{n,j}B_1 \\ + (j+1)Q_{n,j+1}B_0 + Q_{n,j}C - \left(n(n-1)A_2 + nB_1 + C\right) Q_{n,j} = 0 \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $j = 0, \ldots, n$. Tomando $j = n-1$ y $j = 0$ obtenemos respectivamente

$$\begin{aligned} (n-1)(n-2)Q_{n,n-1}A_2 + n(n-1)A_1 + (n-1)Q_{n,n-1}B_1 + nB_0 + Q_{n,n-1}C \\ - \left(n(n-1)A_2 + nB_1 + C\right) Q_{n,n-1} = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

y

$$2Q_{n,2}A_0 + Q_{n,1}B_0 + Q_{n,0}C - \left(n(n-1)A_2 + nB_1 + C\right) Q_{n,0} = 0. \tag{2.3}$$

Ahora considerando (2.2) para $n = 1$ y $n = 2$, y también (2.3) para $n = 2$, obtenemos respectivamente

$$B_0 = (B_1 + C)Q_{1,0} - Q_{1,0}C,$$

$$2A_1 = (2A_2 + 2B_1 + C)Q_{2,1} - Q_{2,1}B_1 - 2B_0 - Q_{2,1}C$$

y

$$2A_0 = (2A_2 + 2B_1 + C)Q_{2,0} - Q_{2,1}B_0 - Q_{2,0}C.$$

A partir de las definiciones de Q_n y P_n, no es difícil verificar que los primeros cuatro polinomios matriciales mónicos de Gegenbauer son

$$Q_0(x) = I, \qquad Q_1(x) = \begin{pmatrix} x & \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{q-p+1} & x \end{pmatrix},$$

$$Q_2(x) = \begin{pmatrix} x^2 - \frac{p}{(q+3)(p+2)} & \frac{2}{p+2}x \\ \frac{2}{q-p+2}x & x^2 - \frac{q-p}{(q+3)(q-p+2)} \end{pmatrix},$$

$$Q_3(x) = \begin{pmatrix} x^3 - \frac{3(p+1)}{(q+5)(p+3)}x & \frac{3}{p+3}x^2 - \frac{3}{(q+5)(p+3)} \\ \frac{3}{q-p+3}x^2 - \frac{3}{(q+5)(q-p+3)} & x^3 - \frac{3(q-p+1)}{(q+5)(q-p+3)}x \end{pmatrix},$$

de donde podemos sacar los siguientes coeficientes:

$$Q_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{q-p+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{p+2} \\ \frac{2}{q-p+2} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{2,0} = -\frac{p}{q+3}\begin{pmatrix} \frac{1}{p+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{q-p+2} \end{pmatrix}.$$

Además, también podemos deducir el siguiente coeficiente general:

$$Q_{n,n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{n}{p+n} \\ \frac{n}{q-p+n} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para determinar las matrices $A_2 = (a_{i,j})$, $B_1 = (b_{i,j})$ y $C = (c_{i,j})$, primero usamos las ecuaciones anteriores y los coeficientes presentados para analizar los elementos diagonales en (2.2) y obtener respectivamente

$$2(q+2)a_{2,1} = \frac{(q+p+2)b_{2,1} - 2c_{2,1}}{p+1} + \frac{(p+2)(p+n)(2c_{1,2} - (q-p)b_{1,2})}{(q-p+1)(q-p+2)(q-p+n)}$$

y

$$2(q+2)a_{1,2} = \frac{(2q-p+2)b_{1,2} - 2c_{1,2}}{q-p+1} + \frac{(q-p+2)(q-p+n)(2c_{2,1} - pb_{2,1})}{(p+1)(p+2)(p+n)}.$$

Como estas identidades valen para $n \geq 3$ concluimos que si $q \neq 2p$ entonces $2c_{1,2} = (q-p)b_{1,2}$ y $2c_{2,1} = pb_{2,1}$. Por lo tanto $b_{2,1} = 2(p+1)a_{2,1}$ y $b_{1,2} = 2(q-p+1)a_{1,2}$.

Repitiendo el proceso anterior, esta vez analizando los elementos no diagonales en (2.2), obtenemos respectivamente

$$(q-2p+1)((q+2)a_{1,1} - b_{1,1}) = (q-2p-1)((q+2)a_{2,2} - b_{2,2})$$

y

$$c_{1,1} - c_{2,2} = (p+1)(p+2)a_{2,2} - p(p+1)a_{1,1} + pb_{1,1} - (p+1)b_{2,2}.$$

Además, la ecuación (2.3) para $n = 3$ nos dice que

$$2Q_{3,2}A_0 + Q_{3,1}B_0 + Q_{3,0}C - (6A_2 + 3B_1 + C)\, Q_{3,0} = 0,$$

por lo que usando la expresión de Q_3 escrita más arriba llegamos a que $b_{1,1} = (q+2)a_{1,1}$. Entonces, a partir de las identidades anteriores, deducimos que $b_{2,2} = (q+2)a_{2,2}$ y $c_{1,1} - c_{2,2} = p(q-p+1)a_{1,1} - (p+1)(q-p)a_{2,2}$. Esto implica que las matrices A_2, A_1, A_0, B_1, B_0 y C están determinadas por las entradas de A_2 y el coeficiente $c_{1,1}$, tal como se expresa en el siguiente resultado.

Teorema 2.6.5. *Los operadores diferenciales en $\mathcal{D}(W)$ de orden a lo sumo dos son de la forma*

$$\mathfrak{D} = \partial^2 F_2(x) + \partial F_1(x) + F_0,$$

en donde

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= x^2 \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} a_{1,2} - a_{2,1} & a_{1,1} - a_{2,2} \\ a_{2,2} - a_{1,1} & a_{2,1} - a_{1,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{1,1} \end{pmatrix}, \\
F_1(x) &= x \begin{pmatrix} (q+2)a_{1,1} & 2(q-p+1)a_{1,2} \\ 2(p+1)a_{2,1} & (q+2)a_{2,2} \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} -pa_{2,1} + (q-p+2)a_{1,2} & (q-p+2)a_{1,1} - (q-p)a_{2,2} \\ -pa_{1,1} + (p+2)a_{2,2} & (p+2)a_{2,1} - (q-p)a_{1,2} \end{pmatrix}, \\
F_0 &= \begin{pmatrix} p(q-p+1)a_{1,1} + c & (q-p)(q-p+1)a_{1,2} \\ p(p+1)a_{2,1} & (p+1)(q-p)a_{2,2} + c \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

con $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $a_{2,2}$ y c números complejos arbitrarios.

Demostración. Todo el desarrollo anterior prueba que cualquier operador diferencial $\mathfrak{D}$ en $\mathcal{D}(W)$ de orden a lo sumo dos es de la forma enunciada. Sea $\mathcal{D}_2$ el espacio vectorial complejo de los operadores diferenciales en $\mathcal{D}(W)$ de orden a lo sumo dos. Entonces deducimos inmediatamente que $\dim \mathcal{D}_2 \leq 5$.

En la Sección 4 del Capítulo 4 de este trabajo se explica que un operador lineal diferencial $\mathfrak{D}$ de la forma enunciada en este teorema es simétrico respecto de un peso W si y sólo si se satisfacen las *ecuaciones de simetría* (4.6) junto con las *condiciones de borde* (4.7), que en este caso se reducen a las condiciones

$$a_{1,1}, a_{2,2}, c \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad p a_{2,1} = (q-p)\overline{a_{1,2}}.$$

Usando la Proposición 2.4.10 sabemos que todo operador simétrico $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}$ pertenece al álgebra $\mathcal{D}(W)$. Deducimos entonces que existen (al menos) cinco operadores simétricos $\mathbb{R}$-linealmente independientes en $\mathcal{D}_2$. Finalmente concluimos que $\dim \mathcal{D}_2 = 5$. □

Corolario 2.6.6. *No existen operadores diferenciales en $\mathcal{D}(W)$ de orden uno.*

Usando la Proposición 2.4.4 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.6.7. *Sea $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ dado por el teorema anterior. Los polinomios matriciales mónicos $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ satisfacen*

$$Q_n\mathfrak{D} = \Lambda_n(\mathfrak{D})Q_n,$$

en donde los autovalores $\{\Lambda_n(\mathfrak{D})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ están dados por

$$\Lambda_n(\mathfrak{D}) = \begin{pmatrix} (n+p)(n+q-p+1)a_{1,1} + c & (n+q-p)(n+q-p+1)a_{1,2} \\ (n+p)(n+p+1)a_{2,1} & (n+q-p)(n+p+1)a_{2,2} + c \end{pmatrix}.$$

Ahora introducimos una base útil para el espacio $\mathcal{D}_2$: la identidad I y los operadores

$$\mathfrak{D}_1 = \partial^2 \begin{pmatrix} x^2 & x \\ -x & -1 \end{pmatrix} + \partial \begin{pmatrix} (q+2)x & q-p+2 \\ -p & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(q-p+1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathfrak{D}_2 = \partial^2 \begin{pmatrix} -1 & -x \\ x & x^2 \end{pmatrix} + \partial \begin{pmatrix} 0 & p-q \\ p+2 & (q+2)x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (p+1)(q-p) \end{pmatrix},$$
$$\mathfrak{D}_3 = \partial^2 \begin{pmatrix} -x & -1 \\ x^2 & x \end{pmatrix} + \partial \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 2(p+1)x & p+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p(p+1) & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathfrak{D}_4 = \partial^2 \begin{pmatrix} x & x^2 \\ -1 & -x \end{pmatrix} + \partial \begin{pmatrix} q-p+2 & 2(q-p+1)x \\ 0 & p-q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & (q-p)(q-p+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los correspondientes autovalores son

$$\Lambda_n(\mathfrak{D}_1) = \begin{pmatrix} (n+p)(n+q-p+1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_n(\mathfrak{D}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (n+p+1)(n+q-p) \end{pmatrix},$$
$$\Lambda_n(\mathfrak{D}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (n+p)(n+p+1) & 0 \end{pmatrix},$$
$$\Lambda_n(\mathfrak{D}_4) = \begin{pmatrix} 0 & (n+q-p)(n+q-p+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 2.6.8. El operador diferencial que aparece en el Teorema 2.6.1 es

$$\mathfrak{D} = -\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2 + p(q-p)I.$$

Podemos observar también que, por ejemplo,

$$\Lambda_n(\mathfrak{D}_1)\Lambda_n(\mathfrak{D}_3) \neq \Lambda_n(\mathfrak{D}_3)\Lambda_n(\mathfrak{D}_1), \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Usando la Proposición 2.4.7 deducimos que $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3 \neq \mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_1$, lo que implica el siguiente corolario.

Corolario 2.6.9. *El álgebra $\mathcal{D}(W)$ no es conmutativa.*

Siguiendo argumentos muy similares, a través de los autovalores, podemos obtener las siguientes relaciones entre los operadores $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ y $\mathfrak{D}_4$:

$$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 = 0, \qquad \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1 = 0, \qquad \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3 = 0, \qquad \mathfrak{D}_4\mathfrak{D}_1 = 0, \qquad \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_4 = 0,$$
$$\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_2 = 0, \qquad \mathfrak{D}_3^2 = 0, \qquad \mathfrak{D}_4^2 = 0, \qquad \mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3 - (q-2p)\mathfrak{D}_3,$$
$$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_4 = \mathfrak{D}_4\mathfrak{D}_2 - (q-2p)\mathfrak{D}_4, \qquad \mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4 = \mathfrak{D}_2^2 - (q-2p)\mathfrak{D}_2,$$
$$\mathfrak{D}_4\mathfrak{D}_3 = \mathfrak{D}_1^2 + (q-2p)\mathfrak{D}_1.$$

Conjetura 2.6.10. *(i) No hay operadores diferenciales en $\mathcal{D}(W)$ de orden impar.*

(ii) Los operadores diferenciales en $\mathcal{D}(W)$ de orden a lo sumo dos generan el álgebra $\mathcal{D}(W)$, es decir, $\mathcal{D}(W) = \mathcal{D}_2$.

Mediante cálculos directos pero tediosos, es posible verificar que

$$\mathfrak{D}_1^* = \mathfrak{D}_1, \qquad \mathfrak{D}_2^* = \mathfrak{D}_2, \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{D}_3^* = \frac{p}{q-p}\mathfrak{D}_4,$$

lo que implica que podemos constituir una base de operadores diferenciales simétricos para $\mathcal{D}_2$ tomando la identidad I, los operadores $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ y el par

$$\mathfrak{E}_3 := (q-p)\mathfrak{D}_3 + p\mathfrak{D}_4 \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{E}_4 := i\left((q-p)\mathfrak{D}_3 - p\mathfrak{D}_4\right).$$

Más explícitamente, tenemos que

$$\mathfrak{E}_3 = \partial^2 \begin{pmatrix} -(q-2p)x & px^2 - q + p \\ (q-p)x^2 - p & (q-2p)x \end{pmatrix} + \partial \begin{pmatrix} 2p & 2p(q-p+1)x \\ 2(p+1)(q-p)x & 2(q-p) \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \begin{pmatrix} 0 & p(q-p)(q-p+1) \\ p(p+1)(q-p) & 0 \end{pmatrix}, \\
-i\mathfrak{E}_4 = \partial^2 &\begin{pmatrix} -qx & -px^2-q+p \\ (q-p)x^2+p & qx \end{pmatrix} \\
&+ \partial \begin{pmatrix} 2p(q-p+1) & -2p(q-p+1)x \\ 2(p+1)(q-p)x & 2(q-p)(p+1) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & -p(q-p)(q-p+1) \\ p(p+1)(q-p) & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

y los autovalores correspondientes son

$$
\begin{aligned}
\Lambda_n(\mathfrak{E}_3) &= \begin{pmatrix} 0 & p(q-p+n)(q-p+n+1) \\ (q-p)(p+n)(p+n+1) & 0 \end{pmatrix}, \\
\Lambda_n(-i\mathfrak{E}_4) &= \begin{pmatrix} 0 & -p(q-p+n)(q-p+n+1) \\ (q-p)(p+n)(p+n+1) & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Capítulo 3

Biespectralidad: una primera vista

Este capítulo se basa en [2], y presenta el Problema Biespectral en un contexto escalar, que es la versión más estudiada y tratada en sumo detalle.

3.1. Introducción

Presentamos una primera vista hacia el estudio de la siguiente pregunta, que es un caso bastante general e interesante de lo que históricamente se bautizó como *Biespectralidad* o *Problema Biespectral*: ¿Para cuáles operadores lineales diferenciales de la forma

$$\mathfrak{L} = \sum_{j=0}^{\ell} \mathfrak{L}_j(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^j$$

hay una familia no nula de autofunciones $\phi(x, \lambda)$, con

$$(\mathfrak{L}\phi)(x, \lambda) = \lambda \phi(x, \lambda), \tag{3.1}$$

diferenciable con respecto al *parámetro espectral* λ, que también es una familia de autofunciones de un operador lineal diferencial de la forma

$$\mathfrak{A} = \sum_{r=0}^{m} \mathfrak{A}_r(\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^r,$$

con

$$(\mathfrak{A}\phi)(x, \lambda) = \Theta(x)\phi(x, \lambda), \tag{3.2}$$

para un autovalor Θ que es función de la variable x?

Una motivación que desembocó en esta pregunta es lo que se bautizó como *Problema de Time-Band-Limiting*, y que se presenta en mucho más detalle en los siguientes capítulos. Este problema, que encontró algunas aplicaciones en problemas de tomografía (*limited-angle tomography*) por ejemplo, se basa en el estudio cuantitativo de la relación entre “la cantidad de información recopilada” y “la calidad de la imagen reconstruida”, y se apoya en la posibilidad de un análisis detallado de las propiedades espectrales de un operador integral específico. Esto es posible, en casos muy simples, por la milagrosa existencia de un operador lineal diferencial de segundo orden que conmuta con el anterior operador integral.

Tanto por razones prácticas como por razones puramente matemáticas es deseable mirar el mismo operador integral en situaciones más complicadas, más allá de la recta real, o en el caso equivalente en el que el análisis de Fourier es reemplazado por la descomposición en término de autofunciones de un operador diferencial general de segundo orden definido en la recta real.

Otra motivación es que frecuentemente se encuentran familias de autofunciones $\phi(x,\lambda)$ para las cuales su comportamiento asintótico $\lambda \to \infty$ tiene una similitud formal con el comportamiento asintótico $x \to \infty$. Este último se determina por la ecuación diferencial $(\mathfrak{L}\phi)(x,\lambda) = \lambda\phi(x,\lambda)$ en la variable x. La ecuación diferencial $(\mathfrak{A}\phi)(x,\lambda) = \Theta(x)\phi(x,\lambda)$ en el parámetro espectral λ podría ser la explicación de esta similitud entre los comportamientos asintóticos.

Volviendo a la pregunta del principio, vamos a analizar en detalle el caso en el que $\mathfrak{L}$ tiene orden dos, cuando puede ser escrito en la forma estándar de Schrödinger

$$\mathfrak{L} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + V(x),$$

para cierto *potencial* $V(x)$.

Para este análisis, podemos factorizar

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}, \qquad \text{con} \qquad \mathfrak{a} = -\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\phi_0'(x)}{\phi_0(x)} \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{b} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\phi_0'(x)}{\phi_0(x)},$$

en donde ϕ_0 es una autofunción de $\mathfrak{L}$ asociada al autovalor 0:

$$\mathfrak{L}\phi_0 = 0.$$

Intercambiando los factores de $\mathfrak{L}$ obtenemos otro operador de Schrödinger:

$$\tilde{\mathfrak{L}} = \mathfrak{b} \circ \mathfrak{a} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \tilde{V}(x),$$

en donde

$$\tilde{V}(x) = V(x) - 2\left(\frac{\phi_0'(x)}{\phi_0(x)}\right)'$$

es el nuevo potencial. El punto de esta construcción es el siguiente: si $\mathfrak{L}\phi = \lambda\phi$ entonces

$$\tilde{\mathfrak{L}}(\mathfrak{b}\phi) = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\phi) = \mathfrak{b}(\mathfrak{L}\phi) = \lambda(\mathfrak{b}\phi),$$

lo que significa que si conocemos las autofunciones de $\mathfrak{L}$, podemos obtener las autofunciones de $\tilde{\mathfrak{L}}$ aplicando $\mathfrak{b}$ a las anteriores.

A partir de la construcción anterior, llamamos a la aplicación $V \mapsto \tilde{V}$ la *Transformación Racional de Darboux* de V si $\phi_0'(x)/\phi_0(x)$ es una función racional. Esta transformación mapea un potencial V racional en otro potencial $\tilde{V}$ racional. La respuesta a la pregunta del principio entonces puede ser enunciada como sigue.

Teorema 3.1.1. *Los potenciales V para los cuales las ecuaciones (3.1) y (3.2) valen, para ϕ no nula y $\mathfrak{A}$ de orden positivo, son*

$$V(x) = \alpha x + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0 \qquad y \qquad V(x) = \frac{c}{(x-a)^2} + b, \quad a, b, c \in \mathbb{C},\ c \neq 0,$$

y, vía traslaciones en la variable x y adición de constantes a V, aquellos potenciales que pueden ser obtenidos a partir de

$$V(x) = 0 \qquad y \qquad V(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}$$

a través de una cantidad finita de transformaciones racionales de Darboux.

La demostración de este resultado no será dada en este trabajo, pero en la siguiente sección se presentarán los primeros pasos, que son observaciones muy importantes: la función Θ en la ecuación (3.2) debe ser polinomial y el potencial V debe ser una función racional.

3.2. Las "ad-conditions": $(\operatorname{ad}\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta) = 0$

Consideremos un operador lineal diferencial de orden ℓ de la forma

$$\mathfrak{L} = \sum_{j=0}^{\ell} \mathfrak{L}_j(x)\partial_x^j, \qquad \partial_x^j = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j,$$

con coeficientes a valores complejos $\mathfrak{L}_j(x)$ diferenciables con respecto a la variable x. Sea $\phi = \phi(x, \lambda)$ una familia no nula de autofunciones de $\mathfrak{L}$, satisfaciendo

$$(\mathfrak{L}\phi)(x, \lambda) = \lambda\phi(x, \lambda), \tag{3.3}$$

diferenciable con respecto a la variable x y al parámetro espectral λ, y que a su vez satisface satisface la ecuación diferencial

$$(\mathfrak{A}\phi)(x, \lambda) = (\Theta\phi)(x, \lambda). \tag{3.4}$$

En la ecuación anterior $\mathfrak{A}$ es el operador lineal diferencial de orden m con respecto a λ

$$\mathfrak{A} = \sum_{r=0}^{m} \mathfrak{A}_r(\lambda)\partial_\lambda^r, \qquad \partial_\lambda^r = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^r,$$

con coeficientes a valores complejos $\mathfrak{A}_r(\lambda)$, y Θ es el operador lineal diferencial

$$\Theta = \sum_{s=0}^{m} \Theta_s(x)\partial_x^s,$$

con coeficientes a valores complejos diferenciables con respecto a la variable x.

Las hipótesis sobre las funciones involucradas se asumen sólo localmente, es decir en entornos abiertos de x o λ según corresponda. Las hipótesis de diferenciabilidad significan la posibilidad de derivar todas las veces necesarias en los siguientes cálculos. Determinar las condiciones mínimas de diferenciabilidad para ϕ y los coeficientes de $\mathfrak{L}$ y Θ, para que las conclusiones sigan valiendo, es un juego totalmente aparte y todavía incierto.

Por el resto de este trabajo, escribimos

$$(\mathrm{ad}\, A)(B) = [A, B] = AB - BA,$$

para A y B operadores lineales. A partir de (3.3) y (3.4) obtenemos

$$[\mathfrak{L}, \Theta]\phi = [-\lambda, \mathfrak{A}]\phi,$$

usando que $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\lambda, \partial_\lambda)$ y $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(x, \partial_x)$, al igual que λ y $\Theta = \Theta(x, \partial_x)$, conmutan entre sí; en este contexto usamos la notación λ para significar el operador de multiplicación por el parámetro espectral λ. Reemplazando Θ, respectivamente $\mathfrak{A}$, en la ecuación anterior por $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{r-1}(\Theta)$, respectivamente $(-\mathrm{ad}\,\lambda)^{r-1}(\mathfrak{A})$, obtenemos por inducción en $r \in \mathbb{N}$ que

$$(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^r(\Theta)\phi = (-\mathrm{ad}\,\lambda)^r(\mathfrak{A})\phi.$$

Como cada aplicación de $\mathrm{ad}\,\lambda$ decrece el orden de cualquier operador lineal diferencial respecto de λ, usamos la ecuación anterior con $r = m+1$ para obtener

$$(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta)\phi = 0. \tag{3.5}$$

Por otro lado, cada aplicación de $\mathrm{ad}\,\mathfrak{L}$ incrementa el orden de cualquier operador lineal diferencial respecto de x a lo sumo en $\ell - 1$, por lo que $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta)$ es un operador lineal diferencial respecto de x, con coeficientes dependiendo sólo de x, de orden a lo sumo $a = \mathrm{ord}\,\Theta + (m+1)(\ell-1)$.

Ahora supongamos que $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta) \neq 0$, y denotemos $\mathrm{ord}\,(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta) = \tilde{a} \leq a$. En un entorno de un punto x_0 en donde el coeficiente de mayor orden de $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta)$ no se anula, el núcleo de este operador es un espacio vectorial de funciones de x de dimensión *finita*, igual a $\tilde{a}$. Sin embargo, las autofunciones de $\mathfrak{L}$ correspondientes a distintos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ son linealmente independientes. Esto implica que tomando $t > \tilde{a}$, $\phi = \phi(\cdot, \lambda_s)$, $s = 1, \ldots, t$ en (3.5), llegamos a una contradicción a la hipótesis $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta) \neq 0$. Entonces hemos probado que necesariamente

$$(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta) = 0. \tag{3.6}$$

La ecuación anterior puede ser reformulada como sigue.

Lema 3.2.1. *Sea* $\{\phi_j(\cdot, \lambda)\}_{j=1}^{\ell}$ *una base de* $\mathrm{Nu}(\mathfrak{L} - \lambda I)$*, con cada* $\phi_j(\cdot, \lambda)$ *diferenciable con respecto a* λ*. Entonces*

$$\{(\partial_\lambda^p \phi_j)(\cdot, \lambda) \mid j = 1, \ldots, \ell,\, p = 0, \ldots, m\} \tag{3.7}$$

constituye una base de $\mathrm{Nu}(\mathfrak{L} - \lambda I)^{m+1}$*.*

Demostración. Para cualquier $\phi(x, \lambda)$ diferenciable con respecto a x y λ se cumple que

$$(\mathfrak{L} - \lambda I)\partial_\lambda^p \phi = p\partial_\lambda^{p-1}\phi.$$

La prueba de este lema se hace por inducción en p, y el paso inductivo se hace derivando la ecuación anterior con respecto a λ. Aplicando potencias de $\mathfrak{L} - \lambda I$ a la ecuación anterior obtenemos

$$(\mathfrak{L} - \lambda I)^q \partial_\lambda^p \phi = \frac{p!}{(p-q)!}\partial_\lambda^{p-q}\phi, \qquad \text{para } p \geq q, \tag{3.8}$$

$$(\mathfrak{L} - \lambda I)^{p+1} \partial_\lambda^p \phi = 0, \qquad \text{si } \phi \in \mathrm{Nu}(\mathfrak{L} - \lambda I). \tag{3.9}$$

Entonces todos los elementos en (3.7) pertenecen al espacio $\mathrm{Nu}(\mathfrak{L} - \lambda I)^{m+1}$. Si ahora proponemos constantes $\{c_{j,p}\}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\ell} \sum_{p=0}^{m} c_{j,p} \partial_\lambda^p \phi_j = 0,$$

aplicando $(\mathfrak{L} - \lambda I)^m$ y usando (3.8) y (3.9), obtenemos

$$\sum_{j=1}^{\ell} c_{j,m} \phi_j = 0,$$

lo que implica, en vista de la independencia lineal de los elementos ϕ_j, que $c_{j,m} = 0$ para todo j. Por inducción en m deducimos que $c_{j,p} = 0$ para todo j y p. Hemos probado entonces que todos los elementos $\partial_\lambda^p \phi_j$ son linealmente independientes. Y por último, como

$$\dim \mathrm{Nu}(\mathfrak{L} - \lambda I)^{m+1} = \mathrm{ord}(\mathfrak{L} - \lambda I)^{m+1} = (m+1)\ell,$$

los elementos $\partial_\lambda^p \phi_j$ constituyen una base de $\mathrm{Nu}(\mathfrak{L} - \lambda I)^{m+1}$. □

Proposición 3.2.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Existe una familia no nula $\phi(\cdot, \lambda) \in \mathrm{Nu}(\mathfrak{L} - \lambda I)$, diferenciable con respecto a λ, tal que $(\Theta\phi)(\cdot, \lambda) \in \mathrm{Nu}(\mathfrak{L} - \lambda I)^{m+1}$ para todo λ;

(ii) $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta) = 0$;

(iii) Θ mapea $\mathrm{Nu}(\mathfrak{L} - \lambda I)$ en $\mathrm{Nu}(\mathfrak{L} - \lambda I)^{m+1}$ para todo λ.

Demostración. Si $\phi \in \mathrm{Nu}(\mathfrak{L} - \lambda I)$ entonces, por inducción en m, tenemos que

$$(\mathfrak{L} - \lambda I)^{m+1}(\Theta)\phi = (\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta)\phi. \tag{3.10}$$

Entonces, si ϕ es como en (i), tenemos que $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta)\phi(\cdot, \lambda) = 0$ para todo λ. Pero entonces el argumento dado anteriormente sobre cómo (3.5) implica (3.6) prueba que (i) implica (ii). La implicación (ii) $\Rightarrow$ (iii) es directa de (3.10), y la implicación (iii) $\Rightarrow$ (i) es obvia. □

Estos últimos dos resultados se aplican de la siguiente forma. Sea $\mathscr{L}$ un subespacio vectorial del espacio de funciones de x, caracterizado por cierto comportamiento asintótico, como por ejemplo

$$\dim(\mathscr{L} \cap \mathrm{Nu}(\mathfrak{L} - \lambda I)^{m+1}) \leq m + 1. \tag{3.11}$$

Sea $\hat{\phi}(\cdot,\lambda)$ una familia no nula de funciones de x, diferenciable con respecto a λ, tal que

$$\hat{\phi}(\cdot,\lambda) \in \mathscr{L} \cap \mathrm{Nu}(\mathfrak{L}-\lambda I),\ (\Theta\hat{\phi})(\cdot,\lambda) \in \mathscr{L}\ \text{ y }\ \partial_\lambda^p \hat{\phi}(\cdot,\lambda) \in \mathscr{L} \quad \text{para todo } 0 \le p \le m. \tag{3.12}$$

La desigualdad (3.11) y la última condición en (3.12) implican, junto con el Lema 3.2.1, que los elementos $\partial_\lambda^p \hat{\phi}(\cdot,\lambda)$, $0 \le p \le m$, constituyen una base de $\mathscr{L} \cap \mathrm{Nu}(\mathfrak{L} - \lambda I)^{m+1}$, y además vale la igualdad en (3.11). Entonces, usando la Proposición 3.2.2 tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.2.3. *Si* $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta) = 0$ *y las condiciones* (3.11) *y* (3.12) *valen, entonces* $(\Theta\hat{\phi})(\cdot,\lambda)$ *es una combinación lineal de los elementos* $\partial_\lambda^p \hat{\phi}(\cdot,\lambda)$, $0 \le p \le m$, *con coeficientes dependientes sólo de* λ. *Esto significa que* $\hat{\phi}$ *satisface una ecuación de la forma* (3.4), *reemplazando* $\mathfrak{A}$ *por un apropiado operador* $\hat{\mathfrak{A}} = \hat{\mathfrak{A}}(\lambda, \partial_\lambda)$.

Este lema establece una equivalencia entre la ecuación $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta) = 0$ y la existencia de una familia no nula $\phi = \phi(x,\lambda)$ y un operador $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\lambda,\partial_\lambda)$ que satisfacen (3.3) y (3.4).

Para seguir, a partir de ahora vamos a asumir que

$$\Theta = \Theta(x),$$

es decir, vamos asumir que el operador Θ es de orden cero, por lo que cumple el rol de un autovalor dependiente de x para el operador $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\lambda,\partial_\lambda)$ en (3.4).

Asumiendo también que $\mathfrak{L}_\ell(x)$ (el coeficiente de $\mathfrak{L}$ de mayor orden) es real, o que $\mathfrak{L}$ tiene coeficientes analíticos, podemos realizar un cambio de variable de x para obtener que $\mathfrak{L}_\ell(x)$ es una constante no nula. Entonces el coeficiente de $\partial_x^{(m+1)(\ell-1)}$ en $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta)$ es ahora igual a $(-\ell\mathfrak{L}_\ell)^{m+1}\partial_x^{m+1}\Theta$, por lo que la ecuación $(\mathrm{ad}\,\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta) = 0$ implica que

$$\Theta(x) \text{ es un polinomio en la variable } x \text{ de grado a lo sumo } m.$$

Conjugando $\mathfrak{L}$ con una función apropiada de x podemos obtener también que $\mathfrak{L}_{\ell-1}(x) = 0$. Si nos restringimos a operadores $\mathfrak{L}$ de segundo orden, como será a partir de ahora, podemos entonces asumir que $\mathfrak{L}$ toma la forma de Schrödinger

$$\mathfrak{L} = -\partial_x^2 + V(x),$$

en donde el término de orden cero $V(x)$ es llamado *potencial*. Escribiendo

$$(\mathrm{ad}(\partial_x^2 - V))^{m+1}(\Theta) = \sum_{\substack{\ell_1,\dots,\ell_p \\ \sum \ell_j = m+1}} \cdots \circ (\mathrm{ad}\,\partial_x^2)^{\ell_3} \circ (-\mathrm{ad}\,V)^{\ell_2} \circ (\mathrm{ad}\,\partial_x^2)^{\ell_1}(\Theta),$$

la parte que es homogénea en V de grado t es igual a la suma del lado derecho sobre todos los índices $\ell_1,\dots,\ell_p$ tal que $\sum \ell_{par} = t$. Como $\mathrm{ad}\,V$ decrece el orden de cualquier operador lineal diferencial en x y $\mathrm{ad}\,\partial_x^2$ lo incrementa a lo sumo en uno, esta parte en cuestión tiene orden a lo sumo igual a $\sum \ell_{impar} - \sum \ell_{par} =$

$\sum_j \ell_j - 2\sum \ell_{par} = m+1-2t$. En particular, observamos que el coeficiente de ∂_x^m en $(\operatorname{ad}\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta)$ aún no involucra a V.

Usando que

$$[\partial_x^2, c(x)] = 2c'(x)\partial_x + c''(x), \qquad c(x) \text{ alguna función diferenciable de } x,$$

deducimos por inducción en j que

$$(\operatorname{ad}\partial_x^2)^j\left(\sum_{q=0}^{p} c_q(x)\partial_x^q\right) = \sum_{r=0}^{p+j} \sum_{\substack{s=0\\ s\geq j-r}} 2^{j-s}\binom{j}{s} c_{r-j+s}^{(j+s)}(x)\partial_x^r.$$

La parte de $(-\operatorname{ad}\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta)$ que no involucra a V se obtiene tomando $j=m+1$, $c_0(x)=\Theta(x)$, $c_1(x)=\cdots=c_p(x)=0$ y $s=j-r=m+1-r$. Entonces $j+s=2(m+1)-r\geq m+1$ en la igualdad de arriba, por lo que la parte en cuestión es nula ya que todas las derivadas de Θ de orden $m+1$ en adelante son nulas. En particular, $(\operatorname{ad}\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta)$ ya es de orden a lo sumo $m-1$ debido a esto.

El coeficiente de ∂_x^{m-1} en $(-\operatorname{ad}\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta)$ es ahora lineal en V, e igual al coeficiente de mayor orden en

$$\sum_{j=1}^{m}(\operatorname{ad}\partial_x^2)^{m-j}\circ(-\operatorname{ad}V)\circ(\operatorname{ad}\partial_x^2)^j(\Theta).$$

Usando ahora que

$$(-\operatorname{ad}V)\partial_x^q = \sum_{r=1}^{q}\binom{q}{r}V^{(r)}(x)\partial_x^{q-r} = qV'(x)\partial_x^{q-1}+\cdots,$$

y denotando como $\tilde{V}$ a una primitiva de V, el coeficiente de ∂_x^{m-1} en $(-\operatorname{ad}\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta)$ resulta

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} 2^{m-j}\left(jV'2^j\Theta^{(j)}\right)^{(m-j)}\\
&= 2^m\sum_{j=1}^{m} j\sum_{\ell=0}^{m-j}\binom{m-j}{\ell}V^{(\ell+1)}\Theta^{(m-\ell)}\\
&= 2^m\sum_{\ell=0}^{m-1}\binom{m+1}{\ell+2}V^{(\ell+1)}\Theta^{(m-\ell)}\\
&= 2^m\sum_{\ell=0}^{m-1}\binom{m+1}{\ell+2}\tilde{V}^{(\ell+2)}(\Theta')^{((m+1)-(\ell-2))}\\
&= 2^m\left(\left(\tilde{V}\Theta'\right)^{(m+1)} - (m+1)V\Theta^{(m+1)} - \tilde{V}\Theta^{(m+2)}\right)\\
&= 2^m\left(\tilde{V}\Theta'\right)^{(m+1)};
\end{aligned}$$

en la segunda igualdad hemos usado la identidad binomial

$$\sum_{j=1}^{m-\ell} j\binom{m-j}{\ell} = \binom{m+1}{\ell+2},$$

que se puede probar por inducción en m. Entonces $(\operatorname{ad}\mathfrak{L})^{m+1}(\Theta)$ es de orden menor a $m-1$ si y sólo si $\tilde{V}\Theta'$ es un polinomio de grado a lo sumo m, o equivalentemente, si

$$V = \left(\frac{P}{\Theta'}\right)', \qquad \text{para algún polinomio } P \text{ de grado a lo sumo } m.$$

Esto en particular implica que V es una función racional, con a lo sumo $m-1$ polos en las raíces de Θ'. En cada polo $\alpha \in \mathbb{C}$ el coeficiente de $(x-\alpha)^{-1}$ en la expansión de Laurent debe anularse, y lo mismo debe pasar para el coeficiente x^{-1} en la expansión de Laurent de V. Estas propiedades expresan el hecho de que la primitiva $\tilde{V}$ de V también es una función racional.

La racionalidad de V hace que (3.3) sea una ecuación analítica en toda la esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, teniendo sólo una cantidad finita de puntos singulares, cada uno de orden finito. A partir de todo lo visto hasta ahora, para determinar aún más al potencial V es necesario estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones de (3.3) en los puntos singulares.

Capítulo 4

Biespectralidad y Time-Band-Limiting: Polinomios matriciales

4.1. Introducción

El tópico de *Time-Band-Limiting*, cuyo origen se remonta al Análisis de Señales, se basa en el "milagroso" hecho de que un operador integral que aparece naturalmente en el análisis admite un operador diferencial que conmuta con este, permitiendo realizar un análisis espectral eficiente desde el punto de vista numérico. En la búsqueda de explicar el por qué de este "milagro" aparece el fenómeno de la *Biespectralidad*, y en este trabajo estudiamos una versión matricial de la misma.

El problema de la "doble concentración", es decir, localizar una función (o señal) tanto en el espacio físico como en el de frecuencias hace contacto con varias áreas de matemática, física e ingeniería, como por ejemplo el análisis armónico, la mecánica cuántica y el análisis (o procesamiento) de señales.

En algunas instancias, este problema desemboca en una pregunta concreta propuesta (al menos implícitamente) por C. Shannon [14]: conociendo el espectro de frecuencias sobre una banda específica de frecuencias $[-W, W]$ de una señal desconocida con soporte temporal fijo $[-T, T]$, ¿cómo podemos recuperar esta señal con la mayor fidelidad a partir de esta información parcial? Naturalmente podríamos empezar por encontrar los coeficientes en la expansión de la señal en términos de las funciones singulares del problema, es decir, descomponer la señal sobre el espectro de frecuencias conocido a partir de las correspondientes amplitudes. Sin embargo, esto rápidamente lleva a un problema computacional: las funciones singulares en cuestión resultan ser autofunciones de un operador integral con un espectro muy apiñado.

En una muy interesante serie de publicaciones proveniente de Bell Labs alrededor del año 1960, nació el fenómeno ya mencionado anteriormente y bautizado como *Time-Band-Limiting*, y que en la búsqueda de una explicación se dió a luz al llamado *Problema Biespectral*. En el caso de D. Slepian, H. Landau y H. Pollak, el operador integral mencionado anteriormente tiene como núcleo el denominado "núcleo sinc"

$$\frac{\operatorname{sen}(W(x-y))}{x-y} = \int_{-W}^{W} e^{ik(x-y)}\, dk,$$

que se obtiene integrando el producto $e^{ikx}e^{-iky}$ sobre todos los valores k en el rango $[-W, W]$. Notemos que la función e^{ikx} admite una situación biespectral "trivial," siendo las derivadas segundas respecto de x y k el par de operadores correspondientes (incluso las derivadas primeras funcionan en este caso).

El objetivo de este capítulo es presentar, en el contexto matricial, un resultado general sobre la relación entre la propiedad biespectral para polinomios ortogonales matriciales y la existencia de un operador diferencial simétrico que conmuta con los operadores *Time-Band-Limiting* naturalmente asociados a esta familia de polinomios ortogonales.

En este capítulo vamos a recopilar los resultados de [7], en el cual se muestra de manera explícita la existencia de un operador diferencial simétrico de segundo orden $\mathfrak{T}$ y un operador en diferencia simétrico y tridigonal L que conmutan simultáneamente con los operadores *time-limiting* y *band-limiting*.

4.2. Preliminares

Sea W un peso matricial positivo en el intervalo (a, b), y sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de polinomios ortonormales matriciales asociada a W.

Consideramos los espacios de Hilbert $\ell^2(\mathcal{A})$ y $L^2(W)$ dados respectivamente por las sucesiones $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de matrices $d \times d$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tr}(C_n C_n^*) < \infty$$

y las funciones Lebesgue-medibles definidas en (a, b) a valores matriciales que satisfacen

$$\int_{(a,b)} \operatorname{tr}(f(x)W(x)f(x)^*)\, dx < \infty.$$

Una aplicación análoga a la Transformada de Fourier es la isometría $\mathcal{F} : \ell^2(\mathcal{A}) \to L^2(W)$ dada por

$$\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \overset{\mathcal{F}}{\mapsto} \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x).$$

En el caso de que los polinomios matriciales sean densos en $L^2(W)$, esta aplicación es además unitaria con inversa $\mathcal{F}^{-1} : L^2(W) \to \ell^2(\mathcal{A})$ dada por

$$f \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\mapsto} \left\{ C_n = \int_{(a,b)} f(x)W(x)P_n(x)^*\, dx \right\}_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Consideramos el problema de determinar una función $f : \mathbb{N}_0 \to \mathcal{A}$ a partir de la siguiente información: f tiene soporte compacto en el intervalo $[0, N]$, con $N \in \mathbb{N}$ fijo, y su transformada $\mathcal{F}(f)$ es conocida en el intervalo $(a, \Omega]$, con $a < \Omega < b$.

Para esto, concluimos que es necesario analizar los vectores y valores singulares del operador $E : \ell^2(\mathcal{A}) \to L^2(W)$ dado por

$$E(f) = \chi_\Omega \mathcal{F} \tilde{\chi}_N f,$$

en donde $\tilde{\chi}_N$ es el *operador time-limiting* en $\ell^2(\mathcal{A})$ y χ_Ω es el *operador band-limiting* en $L^2(W)$. Estos actúan de la siguiente forma: $\tilde{\chi}_N$ iguala a 0 todas las componentes con índice mayor a N, y χ_Ω multiplica por la función característica del intervalo $(a, \Omega]$.

Teniendo en cuenta lo anterior, nos interesa estudiar los autovalores y autofunciones de los operadores

$$E^*E = \tilde{\chi}_N \mathcal{F}^{-1} \chi_\Omega \mathcal{F} \tilde{\chi}_N \qquad \text{y} \qquad EE^* = \chi_\Omega \mathcal{F} \tilde{\chi}_N \mathcal{F}^{-1} \chi_\Omega.$$

El operador E^*E, actuando en $\ell^2(\mathcal{A})$, no es más que una matriz $(N+1) \times (N+1)$ en bloques $d \times d$ dados por los elementos

$$(E^*E)_{m,n} = \int_{(a,\Omega]} P_m(x) W(x) P_n(x)^* \, dx, \qquad 0 \leq m, n \leq N,$$

y el operador EE^* actúa en $L^2(W)$ a través del núcleo integral

$$k(x, y) = \sum_{n=0}^{N} P_n(x)^* P_n(y),$$

con la consideración de que el operador integral $S = EE^*$ con este núcleo k actúa por derecha:

$$(fS)(x) = \int_{(a,\Omega]} f(y) W(y) k(x, y)^* \, dy.$$

En general, para N y Ω arbitrarios no hay mucha esperanza de encontrar analíticamente las autofunciones de EE^* y E^*E. Por suerte, hay una estrategia simple para este "problema de inversión": encontrar un operador con espectro simple que tenga las mismas autofunciones que los operadores EE^* y E^*E. En este trabajo, consideramos el caso *continuo-discreto* del Problema Biespectral, construyendo explícitamente un operador simétrico $\mathfrak{T}$ que conmute con EE^* y E^*E, bajo ciertas hipótesis que se cumplen automáticamente en el caso escalar.

En el presente caso, la simetría de un operador $\mathfrak{T}$ actuando en funciones definidas en el intervalo $(a, \Omega]$ significa que

$$\langle P\mathfrak{T}, Q \rangle_\Omega = \langle P, Q\mathfrak{T} \rangle_\Omega$$

para todo P, Q en un determinado conjunto denso de funciones de $L^2(W)$, en donde

$$\langle P, Q \rangle_\Omega = \int_{(a,\Omega]} P(x) W(x) Q(x)^* \, dx.$$

De [6] sabemos que dado $\mathfrak{T}$ operador diferencial y S operador integral con núcleo k, se cumple que

$$\mathfrak{T}S = S\mathfrak{T} \qquad \text{si y sólo si} \qquad k(x, y)^* \mathfrak{T}_x = \left(k(x, y) \mathfrak{T}_y\right)^*;$$

usamos la notación $\mathfrak{T}_x$ para remarcar que $\mathfrak{T}$ actúa en la variable x.

Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos asociada al peso W, y sea $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de polinomios ortonormales definidos por $Q_n = \Sigma_n P_n$, con $\Sigma_n = \|P_n\|^{-1} = \langle P_n, P_n\rangle^{-1/2}$.

Fijamos un número natural N y un número real $\Omega \in (a,b)$, y consideramos los siguientes operadores χ_Ω y χ_N actuando en $L^2(W)$: χ_Ω multiplica por la función característica del intervalo $(a,\Omega]$ y $\chi_N = \mathcal{F}\tilde{\chi}_N\mathcal{F}^{-1}$ es la proyección en el $\mathcal{A}$-módulo a izquierda generado por $(Q_0,\ldots,Q_N)$. Explícitamente tenemos que

$$\chi_N(f) = \sum_{n=0}^{N}\langle f, Q_n\rangle Q_n.$$

Entonces el operador EE^* puede ser reescrito como $EE^* = \chi_\Omega\chi_N\chi_\Omega$, el cual es un operador integral actuando a derecha vía el núcleo

$$k(x,y) = \sum_{n=0}^{N} Q_n^*(x)Q_n(y).$$

Por otro lado, el operador E^*E es la matriz en bloques cuyos elementos ya escribimos anteriormente. Además, tenemos que la acción del operador $\mathcal{F}E^*E\mathcal{F}^{-1} = \chi_N\chi_\Omega\chi_N$ está dada por

$$\chi_N\chi_\Omega\chi_N(f) = \sum_{i=0}^{N}\left(\int_{(a,\Omega]} f(x)W(x)Q_i(x)^*\,dx\right)Q_i, \qquad f\in L^2(W).$$

El principal resultado de esta sección es el enunciado de la existencia de un operador simétrico que conmuta con los operadores EE^* y $\mathcal{F}E^*E\mathcal{F}^{-1}$. Para esto, vamos a construir un operador $\mathfrak{T}$ que conmute con los operadores χ_N y χ_Ω.

Partimos de un operador diferencial de segundo orden $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(W)$ simétrico respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ de la forma

$$\mathfrak{D} = \partial^2 F_2(x) + \partial F_1(x) + F_0,$$

con F_j un polinomio matricial de orden menor o igual a j, para $j = 0,1,2$.

Sabemos que los polinomios $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ y $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ son autofunciones de $\mathfrak{D}$:

$$P_n\mathfrak{D} = \Lambda_n P_n, \qquad Q_n\mathfrak{D} = \tilde{\Lambda}_n Q_n, \tag{4.1}$$

con $\tilde{\Lambda}_n = \Sigma_n\Lambda_n\Sigma_n^{-1}$. Estos polinomios también satisfacen una relación de recurrencia de tres términos:

$$\begin{aligned} xP_n(x) &= P_{n+1}(x) + B_nP_n(x) + C_nP_{n-1}(x), \\ xQ_n(x) &= \bar{A}_{n+1}^*Q_{n+1}(x) + \bar{B}_nQ_n(x) + \bar{A}_nQ_{n-1}(x), \end{aligned} \tag{4.2}$$

en donde

$$A_n = \|P_n\|^2\|P_{n-1}\|^{-2}, \qquad B_n\Sigma_n = (B_n\Sigma_n)^*,$$
$$\bar{A}_n = \Sigma_nA_n\Sigma_{n-1}^{-1} = \|P_n\|\|P_{n-1}\|^{-1}, \qquad \bar{B}_n = \Sigma_nB_n\Sigma_n^{-1},$$

y en donde también adoptamos la convención $P_{-1} = Q_{-1} = 0$.

Teorema 4.2.1. *Sea* $\{\Lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *la sucesión de autovalores de* $\mathfrak{D}$ *tal como aparecen en* (4.1)*. Supongamos que existe una matriz* M*, independiente de las variables* x*,* n *y el parámetro* Ω*, aunque capaz dependiente de* N*, tal que*

$$(M - x(\Lambda_N + \Lambda_{N+1}))\, W(x) = W(x)\, (M - x(\Lambda_N + \Lambda_{N+1}))^* . \tag{4.3}$$

Entonces el operador diferencial de segundo orden actuando a derecha

$$\mathfrak{T} = x\mathfrak{D} + \mathfrak{D}x - 2\Omega\mathfrak{D} - (\Lambda_N + \Lambda_{N+1})x + M \tag{4.4}$$

es simétrico y conmuta con los operadores χ_N *y* χ_Ω*.*

En la siguiente sección se presenta una prueba "sencilla", pero no corta, de este resultado.

En la condición (4.3) del Teorema 4.2.1, la dependencia de M con el operador diferencial $\mathfrak{D}$ está escondida en los autovalores Λ_N y Λ_{N+1}. Explícitamente, recordando la Proposición 2.4.4, si el operador $\mathfrak{D}$ es de la forma $\mathfrak{D} = \partial^2 F_2(x) + \partial F_1(x) + F_0$ y los coeficientes F_2 y F_1 son de la forma $F_2 = F_{2,2}x^2 + F_{2,1}x + F_{2,0}$ y $F_1 = F_{1,1}x + F_{1,0}$, tenemos que

$$\Lambda_n = n(n-1)F_{2,2} + nF_{1,1} + F_0.$$

A partir del operador simétrico $\mathfrak{D}$, los autovalores de los polinomios ortogonales matriciales mónicos de W y la matriz anterior M, construimos el operador diferencial

$$\mathfrak{T} = x\mathfrak{D} + \mathfrak{D}x - 2\Omega\mathfrak{D} - (\Lambda_N + \Lambda_{N+1})x + M,$$

y observamos que si $\mathfrak{D} = \partial^2 F_2(x) + \partial F_1(x) + F_0$, entonces $x\mathfrak{D} = \mathfrak{D}x + 2\partial F_2(x) + F_1(x)$. Con esto podemos escribir

$$\frac{1}{2}\mathfrak{T} = \mathfrak{D}(x-\Omega) + \partial F_2(x) + \frac{1}{2}\left(F_1(x) - x(\Lambda_N + \Lambda_{N+1}) + M\right). \tag{4.5}$$

4.3. El operador diferencial $\mathfrak{T}$ y sus propiedades

Esta sección comprende una prueba del Teorema 4.2.1 de la sección anterior.

Proposición 4.3.1. *El operador diferencial* $\mathfrak{T}$ *es simétrico con respecto a* $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ *en* (a,b) *y también en* $(a,\Omega]$*.*

Demostración. Como $\mathfrak{D}$ es simétrico en (a,b), claramente $x\mathfrak{D} + \mathfrak{D}x$ y $2\Omega\mathfrak{D}$ también son simétricos en (a,b). Entonces, usando la definición (4.4) de $\mathfrak{T}$, para todo par de funciones $f, g \in L^2(W)$ suficientemente suaves tenemos que

$$\begin{aligned}\langle f\mathfrak{T}, g\rangle &- \langle f, g\mathfrak{T}\rangle \\ &= \int_{(a,b)} f(x)\left((M - x(\Lambda_N + \Lambda_{N+1}))W(x) - W(x)(M - x(\Lambda_N + \Lambda_{N+1}))^*\right) dx.\end{aligned}$$

Entonces deducimos que $\mathfrak{T}$ es simétrico en (a,b) si y sólo si se cumple la condición (4.3).

Ahora resta probar que T también es simétrico en $(a,\Omega]$. En [5] se establece que un operador diferencial $\mathfrak{D} = \partial^2 F_2(x) + \partial F_1(x) + F_0(x)$ es simétrico con respecto a un peso W definido en (a,b) si y sólo si satisface, para todo $x \in (a,b)$, las ecuaciones

$$\begin{aligned} F_2(x)W(x) &= W(x)F_2(x)^* \\ 2(F_2W)'(x) - F_1(x)W(x) &= W(x)F_1(x)^* \\ (F_2W)''(x) - (F_1W)'(x) + F_0(x)W(x) &= W(x)F_0(x)^*, \end{aligned} \tag{4.6}$$

junto con las condiciones de borde

$$\lim_{x\to a,b} F_2(x)W(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a,b} (F_1(x)W(x) - W(x)F_1^*(x)) = 0, \tag{4.7}$$

en donde $\lim_{x\to a,b}$ es una notación simplificada que engloba a ambos límites $\lim_{x\to a^+}$ y $\lim_{x\to b^-}$.

Escribiendo $\mathfrak{D} = \partial^2 F_2(x) + \partial F_1(x) + F_0$, y usando (4.5), tenemos la siguiente relación con los coeficientes de $\mathfrak{T} = \partial^2 \tilde{F}_2(x) + \partial \tilde{F}_1(x) + \tilde{F}_0(x)$:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2 &= (x-\Omega)F_2, \\ \tilde{F}_1 &= (x-\Omega)F_1 + F_2, \\ \tilde{F}_0 &= (x-\Omega)F_0 + \frac{1}{2}\left(F_1(x) - x(\Lambda_N + \Lambda_{N+1}) + M\right). \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{T}$ es simétrico respecto de W en el intervalo (a,b), tenemos que $\{\tilde{F}_0, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2\}$ satisfacen las ecuaciones (4.6) y (4.7). Entonces, para probar que $\mathfrak{T}$ también es simétrico respecto de W en el intervalo $(a,\Omega]$, es suficiente con probar que

$$\lim_{x\to\Omega} \tilde{F}_2(x)W(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\Omega} \left(\tilde{F}_1(x)W(x) - W(x)\tilde{F}_1^*\right) = 0.$$

Para esto, como $\mathfrak{D}$ es simétrico respecto de W en el intervalo (a,b), tenemos que $\{F_0, F_1, F_2\}$ también satisfacen (4.6), lo que implica que

$$\lim_{x\to\Omega} \tilde{F}_2(x)W(x) = \lim_{x\to\Omega} (x-\Omega)F_2(x)W(x) = 0,$$

y también implica que

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\Omega} \left(\tilde{F}_1(x)W(x) - W(x)\tilde{F}_1^*(x)\right) \\ &\qquad = \lim_{x\to\Omega} \left((x-\Omega)(F_1(x)W(x) - W(x)F_1^*(x)) + F_2(x)W(x) - W(x)F_2^*(x)\right) = 0, \end{aligned}$$

completando la prueba. □

Proposición 4.3.2. *El operador diferencial $\mathfrak{T}$ conmuta con el operador "band-limiting" χ_Ω.*

Demostración. Observemos que $\mathfrak{T}\chi_\Omega = \chi_\Omega\mathfrak{T}$ si y sólo si $(f\mathfrak{T})\chi_\Omega = (f\chi_\Omega)\mathfrak{T}$ para toda $f \in L^2(W)$ suficientemente suave. Como el operador $\mathfrak{T}$ es simétrico respecto de W en los intervalos (a,b) y $(a,\Omega]$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle(\chi_\Omega f)\mathfrak{T}, g\rangle &= \langle\chi_\Omega f, g\mathfrak{T}\rangle \\
&= \int_{(a,b)} \chi_\Omega(x) f(x) W(x) (g\mathfrak{T})^*(x)\, dx \\
&= \int_{(a,\Omega]} f(x) W(x) (g\mathfrak{T})^*(x)\, dx \\
&= \langle f, g\mathfrak{T}\rangle_\Omega \\
&= \langle f\mathfrak{T}, g\rangle_\Omega \\
&= \int_{(a,\Omega]} (f\mathfrak{T})(x) W(x) g^*(x)\, dx \\
&= \int_{(a,b)} (f\mathfrak{T})(x) \chi_\Omega(x) W(x) g^*(x)\, dx \\
&= \langle f\mathfrak{T}\chi_\Omega, g\rangle,
\end{aligned}$$

para todo par de funciones $f, g \in L^2(W)$ suficientemente suaves. Concluimos que $\mathfrak{T}$ conmuta con χ_Ω. □

Comentario 4.3.3. Es muy interesante observar que si el operador $\mathfrak{T}$ es simétrico respecto de W en (a,b), entonces $\mathfrak{T}$ conmuta con χ_Ω si y sólo si $\mathfrak{T}$ es simétrico respecto de W en $(a,\Omega]$.

Proposición 4.3.4. *Para todo $n \geq 0$, existen matrices X_n, Y_n y Z_n tal que*

$$Q_n\mathfrak{T} = X_n Q_{n+1} + Y_n Q_n + Z_n Q_{n-1}.$$

Más aún, se cumple que $X_n^* = Z_{n+1}$ y $Y_n = Y_n^*$, con la convención $Q_{-1} = 0$.

Demostración. Para cada $n \geq 0$, $Q_n\mathfrak{T}$ es un polinomio matricial de grado a lo sumo $n+1$. Entonces tenemos que $Q_n\mathfrak{T} = \sum_{j=0}^{n+1} K_{n,j}Q_j$, para ciertas matrices $\{K_{n,j}\}$.

Como $\mathfrak{T}$ es simétrico, no es difícil verificar que

$$\langle Q_n\mathfrak{T}, Q_j\rangle = \langle Q_n, Q_j\mathfrak{T}\rangle = 0, \qquad \text{para todo } j < n-1.$$

Con esto deducimos que

$$Q_n\mathfrak{T} = \sum_{j=n-1}^{n+1} K_{n,j}Q_j = X_n Q_{n+1} + Y_n Q_n + Z_n Q_{n-1}.$$

Por último, observemos que $X_n = \langle Q_n\mathfrak{T}, Q_{n+1}\rangle = \langle Q_n, Q_{n+1}\mathfrak{T}\rangle = Z_{n+1}^*$ y que $Y_n = \langle Q_n T, Q_n\rangle = \langle Q_n, Q_n T\rangle = Y_n^*$. Esto termina la prueba. □

Corolario 4.3.5. *Se cumple que*

$$X_n = \|P_n\|^{-1}(\Lambda_n + \Lambda_{n+1} - \Lambda_N - \Lambda_{N+1})\|P_{n+1}\|,$$

en donde $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *es la sucesión de polinomios ortogonales matriciales mónicos asociada a* W*.*

En particular, vale que $X_N = Z_{N+1} = 0$*.*

Demostración. A partir de la definición (4.4) de $\mathfrak{T}$, junto con las ecuaciones (4.1) y (4.2) de autovalores de $\mathfrak{D}$ y las relaciones de recurrencia de tres términos, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle P_n\mathfrak{T}, P_{n+1}\rangle &= \langle P_n(x\mathfrak{D} + \mathfrak{D}x - 2\Omega\mathfrak{D} - (\Lambda_N + \Lambda_{N+1})x + M), P_{n+1}\rangle \\
&= \langle P_n(x\mathfrak{D} + \mathfrak{D}x - (\Lambda_N + \Lambda_{N+1})x), P_{n+1}\rangle \\
&= \langle P_{n+1}\mathfrak{D} + P_n\Lambda_n x - P_{n+1}(\Lambda_N + \Lambda_{N+1}), P_{n+1}\rangle \\
&= \langle P_{n+1}\Lambda_{n+1} + P_{n+1}\Lambda_n - (\Lambda_N + \Lambda_{N+1})P_{n+1}, P_{n+1}\rangle \\
&= (\Lambda_n + \Lambda_{n+1} - \Lambda_N - \Lambda_{N+1})\langle P_{n+1}, P_{n+1}\rangle.
\end{aligned}$$

Entonces, usando el hecho de que $Q_n = \|P_n\|^{-1}P_n$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\langle Q_n\mathfrak{T}, Q_{n+1}\rangle &= \|P_n\|^{-1}(\Lambda_n + \Lambda_{n+1} - \Lambda_N - \Lambda_{N+1})\langle P_{n+1}, P_{n+1}\rangle\|P_{n+1}\|^{-1} \\
&= \|P_n\|^{-1}(\Lambda_n + \Lambda_{n+1} - \Lambda_N - \Lambda_{N+1})\|P_{n+1}\|.
\end{aligned}$$

Para terminar, usando la Proposición 4.3.4 sabemos que

$$\langle Q_n\mathfrak{T}, Q_{n+1}\rangle = \langle X_nQ_{n+1}, Q_{n+1}\rangle = X_n.$$

□

Proposición 4.3.6. *El operador diferencial* $\mathfrak{T}$ *conmuta con el operador "time-limiting"* χ_N*.*

Demostración. Sea $f \in L^2(W)$ una función suficientemente suave. Usando la Proposición 4.3.4, junto con el hecho de que $\mathfrak{T}$ es simétrico, tenemos que

$$f\mathfrak{T}\chi_N = \sum_{n=0}^{N}\langle f\mathfrak{T}, Q_n\rangle Q_n = \sum_{n=0}^{N}\left(\langle f, Q_{n+1}\rangle X_n^* + \langle f, Q_n\rangle Y_n^* + \langle f, Q_{n-1}\rangle Z_n^*\right)Q_n.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
(f\chi_N)\mathfrak{T} &= \sum_{n=0}^{N}\langle f, Q_n\rangle Q_n\mathfrak{T} \\
&= \sum_{n=0}^{N}\langle f, Q_n\rangle(X_nQ_{n+1} + Y_nQ_n + Z_nQ_{n-1}) \\
&= \sum_{n=1}^{N+1}\langle f, Q_{n-1}\rangle X_{n-1}Q_n + \sum_{n=0}^{N}\langle f, Q_n\rangle Y_nQ_n + \sum_{n=0}^{N-1}\langle f, Q_{n+1}\rangle Z_{n+1}Q_n.
\end{aligned}$$

Usando el corolario anterior sabemos que $X_N = Z_{N+1} = 0$, y entonces

$$(f\chi_N)\mathfrak{T} = \sum_{n=0}^{N} \left(\langle f, Q_{n-1}\rangle X_{n-1} + \langle f, Q_n\rangle Y_n + \langle f, Q_{n+1}\rangle Z_{n+1}\right) Q_n.$$

Con lo anterior, el resultado de esta proposición se sigue nuevamente por el corolario anterior, usando que $X_n^* = Z_{n+1}$ y $Y_n^* = Y_n$. □

Teorema 4.3.7. *El operador diferencial de segundo orden $\mathfrak{T}$ es simétrico respecto de W y conmuta con los operadores "time-band-limiting" EE^* y $\mathcal{F}E^*E\mathcal{F}^{-1}$.*

Demostración. La simetría de $\mathfrak{T}$ ya fue establecida en la Proposición 4.3.1. Recordando de la sección anterior que $EE^* = \chi_\Omega\chi_N\chi_\Omega$ y $\mathcal{F}E^*E\mathcal{F}^{-1} = \chi_N\chi_\Omega\chi_N$, la prueba de este teorema se sigue de las Proposiciones 4.3.2 y 4.3.6. □

Hasta ahora, los operadores $\mathfrak{T}$, $S = EE^*$ y $\mathfrak{T}$ actúan a derecha sobre funciones en $L^2(W)$. Conjugando con la aplicación $\mathcal{F}$ es posible obtener operadores actuando a derecha sobre funciones en $\ell^2(\mathcal{A})$. Si definimos

$$L = \mathcal{F}^{-1}\mathfrak{T}\mathcal{F},$$

el siguiente resultado es inmediato.

Corolario 4.3.8. *El operador lineal en diferencia de segundo orden L está dado por una matriz tridiagonal autoadjunta semi-infinita en bloques $d \times d$, y conmuta con los operadores "time-band-limiting" $\mathcal{F}^{-1}EE^*\mathcal{F}$ y E^*E. El operador L, en la base estándar de $\ell^2(\mathcal{A})$, está dado explícitamente por*

$$L = \begin{pmatrix} Y_0 & X_0^* & 0 & 0 & 0 & \dots \\ X_0 & Y_1 & X_1^* & 0 & 0 & \dots \\ 0 & X_1 & Y_2 & X_2^* & 0 & \dots \\ 0 & 0 & X_2 & Y_3 & X_3^* & \dots \\ 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

en donde las matrices X_j e Y_j, con $j \in \mathbb{N}_0$, fueron dadas en la Proposición 4.3.4.

Comentario 4.3.9. Del Corolario 4.3.5 es fácil verificar que la matriz L anterior está conformada por dos grandes bloques diagonales: un bloque superior de tamaño $(N+1) \times (N+1)$ y otro bloque inferior semi-infinito.

4.4. Ejemplos

En esta sección se presentan ejemplos concretos de operadores diferenciales $\mathfrak{T}$ a partir de pesos matriciales importantes, exhibiendo las correspondientes matrices M para cada caso.

4.4.1. Primer ejemplo: Peso matricial de Gegenbauer

El primer ejemplo corresponde al siguiente peso matricial, dependiente de dos parámetros $0 < p < q$, con $q \neq 2p$:

$$W(x) = (1-x^2)^{q/2-1} \begin{pmatrix} px^2 + q - p & -qx \\ -qx & (q-p)x^2 + p \end{pmatrix}, \qquad x \in [-1,1].$$

Este ejemplo ya fue presentado y estudiado en la última sección del Capítulo 2 de este trabajo. Vimos que existen cuatro operadores diferenciales en $\mathcal{D}(W)$ linealmente independientes y de orden dos, que denotamos como $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{E}_3$ y $\mathfrak{E}_4$. Ver la última parte del Capítulo 2 para un recordatorio y más detalles.

Vimos que los correspondientes autovalores de $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ son

$$\Lambda_n(\mathfrak{D}_1) = \begin{pmatrix} (n+p)(n+q-p+1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \Lambda_n(\mathfrak{D}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (n+p+1)(n+q-p) \end{pmatrix}.$$

Para los operadores $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$, las matrices

$$M_1 = \frac{(-2N(N+p+1)(N+q-p+1)+q-2p)}{q-2p} \begin{pmatrix} 0 & q-p \\ p & 0 \end{pmatrix},$$
$$M_2 = \frac{(2N(N+p+1)(N+q-p+1)+q-2p)}{q-2p} \begin{pmatrix} 0 & q-p \\ p & 0 \end{pmatrix}$$

satisfacen la condición (4.3), es decir

$$(M_1 - x(\Lambda_N(D_1) + \Lambda_{N+1}(D_1)))\, W(x) \quad \text{y} \quad (M_2 - x(\Lambda_N(D_2) + \Lambda_{N+1}(D_2)))\, W(x)$$

son matrices simétricas. Por lo desarrollado en la sección anterior, existen respectivos operadores diferenciales $\mathfrak{T}_1$ y $\mathfrak{T}_2$ que conmutan con los operadores *time-band-limiting* χ_Ω y χ_N.

Es importante observar que para los operadores simétricos $\mathfrak{E}_3$ y $\mathfrak{E}_4$ no es posible encontrar respectivas matrices M_3 y M_4 que satisfagan (4.3). Esto muestra que, en general, dado un peso W es necesario buscar en todo el álgebra $\mathcal{D}(W)$ operadores simétricos que cumplan la condición (4.3).

4.4.2. Segundo ejemplo

En [1] se estudian los polinomios matriciales que resultan ortogonales entre sí en el intervalo $[0,1]$ con respecto al peso

$$W(x) = (1-x)^\alpha x^\beta \begin{pmatrix} \beta+1-kx & (\beta+1-k)x \\ (\beta+1-k)x & (\beta+1-k)x^2 \end{pmatrix}.$$

La sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de polinomios ortogonales matriciales mónicos asociada a W son autofunciones del operador diferencial simétrico

$$\mathfrak{D} = \partial^2 x(1-x)I + \partial\,(C - xU) - V,$$

con

$$C = \begin{pmatrix} \beta+1 & 1 \\ 0 & \beta+3 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} \alpha+\beta+3 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+4 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k-\beta-1 & \alpha+\beta+2-k \end{pmatrix}.$$

La correspondiente sucesión de autovalores $\{\Lambda_n(\mathfrak{D})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ está dada por

$$\Lambda_n(\mathfrak{D}) = \begin{pmatrix} -n(\alpha+\beta+n+2) & 0 \\ 1+\beta-k & -(n+1)(\alpha+\beta+n+2)+k \end{pmatrix}.$$

Un cálculo directo muestra que la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1+\beta & 2(\alpha+\beta)+2N+5 \\ 0 & 3(1+\beta) \end{pmatrix}$$

satisface la condición (4.3). Entonces existe un operador diferencial $\mathfrak{T}$ que conmuta con los operadores *time-band-limiting* χ_Ω y χ_N, y que puede ser escrito como

$$\mathfrak{T} = (x-\Omega)\mathfrak{D} - \partial x(1-x)I + \mathcal{R}_N(x),$$

con

$$\mathcal{R}_n(x) = \begin{pmatrix} x\left(N^2+(\alpha+\beta+3)(N+1)\right) & \alpha+\beta+N+2 \\ x(k-\beta-1) & x\left(N^2+(\alpha+\beta+4)N+2\alpha+2\beta-k+6\right)+\beta \end{pmatrix}.$$

4.4.3. Tercer ejemplo

Consideremos los polinomios matriciales que son ortogonales entre sí en el intervalo $[0,1]$ respecto del peso originado en [3] (Sección 3.3), con parámetros $\alpha=\beta=0$, $\kappa=1/2$, $t_0=0$, y dado por

$$W(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 1-x \\ 1-x & (1-x)^2 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$\mathfrak{D}_+ = \partial^2 \begin{pmatrix} 2x(x-1) & 2x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \partial \begin{pmatrix} 8x-7 & 7-x \\ x-1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es un operador simétrico respecto de W, y sus correspondientes autovalores están dados por

$$\Lambda_n(\mathfrak{D}_+) = \begin{pmatrix} 2n^2+6n+3/2 & -n-5/2 \\ n+1/2 & -3/2 \end{pmatrix}.$$

No es difícil verificar que no se satisface la condición (4.3).

Por otro lado, W admite otro operador diferencial simétrico:

$$\mathfrak{D}_- = \partial^2 \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 0 & 2x(1-x) \end{pmatrix} + \partial \begin{pmatrix} -1 & 3-x \\ x-1 & -8x+3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Pero nuevamente, para los correspondientes autovalores $\Lambda_n(\mathfrak{D}_-)$, la condición (4.3) no es satisfecha.

A pesar de lo anterior, considerando el operador simétrico

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{D}_+ - \mathfrak{D}_-) = \partial^2 x(x-1)I + \partial \begin{pmatrix} 4x-3 & 2 \\ 0 & 4x+1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

con autovalores dados por

$$\Lambda_n = n(n+3)I + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

resulta que la condición (4.3) sí se cumple, tomando

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

No es difícil verificar que el operador dado por

$$\mathfrak{T} = \partial^2 x(x-1)(x-\Omega) + \partial X + Y,$$

con

$$X = \begin{pmatrix} 5x^2 - 4\Omega x - 4x + 3\Omega & 2(x-\Omega) \\ 0 & 5x^2 - 4\Omega x - 2x + \Omega \end{pmatrix},$$
$$Y = \begin{pmatrix} \Omega/2 - 3 - N(N+4)x & (\Omega+5)/2 \\ (\Omega-1)/2 & -N(N+4)x - \Omega/2 \end{pmatrix},$$

es el correspondiente operador simétrico proveniente de $(\mathfrak{D}_+ - \mathfrak{D}_-)/2$ que conmuta con los operadores *time-band-limiting* χ_Ω y χ_N.

Al final del primer ejemplo ya aludimos a este fenómeno: el método desarrollado en la sección anterior puede ser aplicado a algunos operadores en el álgebra $\mathcal{D}(W)$, pero no necesariamente a todos. Si el álgebra $\mathcal{D}(W)$ tiene varios generadores, las chances de obtener éxito en nuestra construcción aumentan considerablemente.

Capítulo 5

Biespectralidad y Time-Band-Limiting: Funciones discretas

5.1. Introducción

Sea $\{p_i(x)\}$, con $i, x \in \{0, \dots, N\}$, N un número natural fijo, una colección de funciones discretas linealmente independientes a valores complejos y ortogonales con respecto a un peso positivo $w : \{0, \dots, N\} \to (0, \infty)$. Esto último significa que

$$\sum_{x=0}^{N} p_i(x)w(x)\overline{p_j(x)} = 0 \qquad \text{si } i \neq j.$$

Bajo este contexto, vamos a considerar el análogo al problema de *Time-Band-Limiting* de la sección anterior, esta vez con funciones escalares de variable discreta. La referencia para este capítulo es [10]. Sea $f(x)$ una función discreta cualquiera. Denotamos como M_K al operador *time-limiting*, que multiplica a f por la función característica del conjunto $\{0, \dots, K\}$. Similarmente, denotamos como P_L al operador *band-limiting*, que proyecta a f sobre el espacio generado por las funciones $\{p_0, \dots, p_L\}$. Estos dos operadores son claramente simétricos respecto del producto interno

$$\langle f, g\rangle = \langle f, g\rangle_w = \sum_{x=0}^{N} f(x)w(x)\overline{g(x)},$$

como también lo es el famoso operador *time-band limiting* $M_K P_L M_K$.

En la próxima sección se presentará una prueba análoga al Teorema 4.2.1 del capítulo anterior: se probará la existencia de una matriz tridiagonal simétrica T que conmuta con $M_K P_L M_K$. Y al igual que en el ya mencionado resultado anterior, una pieza esencial de la demostración es la condición de *biespectralidad*, que se resume en las siguientes dos hipótesis:

(i) Las funciones $\{p_i\}_{i=0}^{N}$ son autofunciones de un operador lineal en diferencia de segundo orden simétrico;

(ii) Las funciones $\{p_i\}_{i=0}^{N}$ satisfacen una relación de recurrencia de tres términos.

5.2. Existencia del operador en diferencia T

Primero empezamos estableciendo la notación y las hipótesis necesarias para el problema. Como se dijo en la sección anterior, tenemos una colección de funciones discretas $\{p_i\}_{i=0}^N$ linealmente independientes y ortogonales con respecto a un peso positivo w. Vamos a asumir las siguientes dos hipótesis:

(i) Existe un operador en diferencia D de segundo orden simétrico respecto de w tal que $D(p_i) = \lambda_i p_i$, para $0 \leq i \leq N$ y ciertos números complejos λ_i;

(ii) Existe una función discreta $\Theta(x)$ que satisface una relación de recurrencia de tres términos respecto de las funciones $\{p_i\}_{i=0}^N$, es decir

$$\Theta(x)p_i(x) = a_i p_{i+1}(x) + b_i p_i(x) + c_i p_{i-1}(x),$$

para ciertos coeficientes complejos a_i, b_i y c_i. Además se imponen las condiciones $a_N = c_0 = 0$ por la finitud del rango del índice i.

Ejemplo 5.2.1. Un ejemplo en donde se cumplen las hipótesis anteriores está dado por los *polinomios de Hahn* $h_i(x)$, definidos como

$$h_i(x) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} -i, & -x, & i+\alpha+\beta+1 \\ & -N, & \alpha+1 \end{matrix} \;\middle|\; 1\right)$$

en donde ${}_3F_2$ es la *función (o serie) hipergeométrica.* Usando $C(n,k)$ para denotar al coeficiente binomial estándar, el peso w asociado a esta familia de polinomios $\{h_i\}_{i=0}^N$ está dado por

$$w(x) = \frac{C(\alpha+x,x)C(\beta+N-x,N-x)}{C(N+\alpha+\beta+1,N)}.$$

Los polinomios de Hahn satisfacen

(i) Una ecuación en diferencia de segundo orden

$$\frac{1}{w(x)}\Delta_+[-w(x-1)(\alpha+x)(N-x+1)\Delta_- h_i(x)] = i(i+\alpha+\beta+1)h_i(x),$$

en donde

$$\Delta_+ f(x) := f(x+1) - f(x) \qquad \text{y} \qquad \Delta_- f(x) := f(x) - f(x-1);$$

(ii) Una relación de recurrencia de tres términos: si $p_i = h_i/\|h_i\|$, las funciones normalizadas $\{p_i\}_{i=0}^N$ satisfacen

$$xp_i(x) = a_i p_{i+1}(x) + b_i p_i(x) + c_i p_{i-1}(x),$$

en donde $a_{i-1} = c_i$, $b_i \in \mathbb{R}$ y

$$a_i = \sqrt{\frac{(i+1)(i+\alpha+1)(i+\beta+1)(i+\alpha+\beta+1)(i+\alpha+\beta+N+2)(N-i)}{(2i+\alpha+\beta+1)(2i+\alpha+\beta+2)^2(2i+\alpha+\beta+3)}}.$$

Volviendo al tema principal, reemplazando las funciones $p_i(x)$ por $p_i(x)\sqrt{w(x)}$ y el operador D por $\sqrt{w(x)}\,D\,(1/\sqrt{w(x)})$ (una conjugación del operador D con el operador de multiplicación por $\sqrt{w(x)}$), podemos asumir sin pérdida de generalidad que $w(x) = 1$ para todo $x \in \{0, \dots, N\}$. Es también conveniente asumir que las funciones $\{p_i\}_{i=0}^N$ están normalizadas, de manera de formar un conjunto ortonormal. Con estas condiciones, es fácil verificar que $c_i = a_{i-1}$ (como en el ejemplo anterior).

Ahora introducimos una segunda base ortogonal $\{d_i(x)\}$, dada por

$$d_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = i \\ 0 & \text{si } x \neq i. \end{cases}$$

Notemos que, para cualquier función discreta f, tenemos que

$$f = \sum_{i=0}^{N} \langle f, d_i \rangle d_i = \sum_{i=0}^{N} f(i) d_i.$$

Con lo anterior, podemos reformular las dos hipótesis anteriores como sigue:

(i) La transformación lineal D es simétrica y tridiagonal respecto de la base $B_d = \{d_0, \dots, d_N\}$, y es diagonal respecto de la base $B_p = \{p_0, \dots, p_N\}$;

(ii) La transformación lineal Θ que multiplica por la función $\Theta(x)$ es diagonal respecto de la base B_d, y es simétrica y tridiagonal respecto de la base B_p.

Como en la introducción, denotamos como M_K a la proyección sobre el espacio generado por $\{d_0, \dots, d_K\}$ y como P_L a la proyección sobre el espacio generado por $\{p_0, \dots, p_L\}$.

Teorema 5.2.2. *Existe una matriz simétrica T, tridiagonal en las bases B_d y B_p, que conmuta con $M_K P_L M_K$.*

Demostración. Consideremos el operador

$$T = \Theta D + D\Theta - (\Theta(K) + \Theta(K+1))D - (\lambda_L + \lambda_{L+1})\Theta = T_1 - T_2 - T_3,$$

en donde denotamos

$$T_1 = \Theta D + D\Theta, \qquad T_2 = (\Theta(K) + \Theta(K+1))D, \qquad T_3 = (\lambda_L + \lambda_{L+1})\Theta.$$

Afirmamos que la representación matricial de T en la base B_p es simétrica y tridiagonal. De hecho, esta representación matricial luce así:

$$[T]_{B_p} = \left(\begin{array}{cccccc|cccc}
* & * & & & & & & & & \\
* & * & * & & & & & & & \\
 & * & * & * & & & & & & \\
 & & * & * & * & & & & & \\
 & & & * & * & * & & & & \\
 & & & & * & * & 0 & & & \\
\hline
 & & & & & 0 & * & * & & \\
 & & & & & & * & * & * & \\
 & & & & & & & * & * & * \\
 & & & & & & & & * & *
\end{array}\right),$$

en donde el cero explícito del lado izquierdo está en la entrada $(L+1, L)$ y el cero explícito del lado derecho está en la entrada $(L, L+1)$. Para verificar esto, primero notamos que tanto T_1, T_2 como T_3 son todos simétricos y tridiagonales en la base B_p, por lo que claramente T también. Más aún, T_2 es diagonal en la base B_p. Ahora consideramos la diferencia $T_1 - T_3$. Es directo comprobar que la entrada $(L, L+1)$ de T_1 es simplemente $(\lambda_L + \lambda_{L+1})\Theta_{L,L+1}$, lo que implica que la entrada $(L, L+1)$ de $T_1 - T_3$ es nula. Junto con la simetría de T, su matriz resultante es como la mostrada arriba.

Similarmente, la representación matricial de T en la base B_d es simétrica y tridiagonal, y luce así:

$$[T]_{B_d} = \left(\begin{array}{cccccc|cccc}
* & * & & & & & & & & \\
* & * & * & & & & & & & \\
 & * & * & * & & & & & & \\
 & & * & * & * & & & & & \\
 & & & * & * & * & & & & \\
 & & & & * & * & 0 & & & \\
\hline
 & & & & & 0 & * & * & & \\
 & & & & & & * & * & * & \\
 & & & & & & & * & * & * \\
 & & & & & & & & * & *
\end{array}\right),$$

en donde el cero explícito del lado izquierdo está en la entrada $(K+1, K)$ y el cero explícito del lado derecho está en la entrada $(K, K+1)$. Esto se puede verificar igual que antes.

Para ver que T conmuta con P_L basta con observar las representaciones matriciales de T y P_L en la base B_p. La primera ya fue mostrada, y la segunda es

$$[P_L]_{B_p} = \left(\begin{array}{cccccc|cccc}
1 & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & & & 0
\end{array}\right),$$

en donde el último número 1 está en la entrada (L, L).

Similarmente, se puede ver que T conmuta con M_K observando sus representaciones matriciales en la base B_d, obteniendo algo muy parecido a lo anterior. Todo esto implica que T conmuta con $M_K P_L M_K$, y también con $P_L M_K P_L$. $\square$

Bibliografía

[1] M. Castro y F. A. Grünbaum: *Time-and-band limiting for matrix orthogonal polynomials of Jacobi type*. Random Matrices: Theory and Applications, 06(04):1740001, 2017. https://doi.org/10.1142/S2010326317400019.

[2] J. Duistermaat y F. A. Grünbaum: *Differential equations in the spectral parameter*. Communications in Mathematical Physics, 103, Junio 1986.

[3] A. Durán y M. De la Iglesia: *Second-Order Differential Operators Having Several Families of Orthogonal Matrix Polynomials as Eigenfunctions*. International Mathematics Research Notices, 2008, Enero 2008.

[4] G. P. Egorychev: *Integral representation and the computation of combinatorial sums*. 1984.

[5] F. A. Grünbaum, I. Pacharoni y J. Tirao: *Matrix valued orthogonal polynomials of Jacobi type: the role of group representation theory*. Annales de l'Institut Fourier, 55(6):2051–2068, 2005. http://www.numdam.org/articles/10.5802/aif.2151/.

[6] F. A. Grünbaum, I. Pacharoni y I. Zurrián: *Time and band limiting for matrix valued functions: an integral and a commuting differential operator*. Inverse Problems, 33(2):025005, Febrero 2017.

[7] F. A. Grünbaum, I. Pacharoni y I. Zurrián: *Bispectrality and Time–Band Limiting: Matrix-valued Polynomials*. International Mathematics Research Notices, 2020(13):4016–4036, Junio 2018, ISSN 1073-7928. https://doi.org/10.1093/imrn/rny140.

[8] F. A. Grünbaum y J. Tirao: *The Algebra of Differential Operators Associated to a Weight Matrix*. Integral Equations and Operator Theory, 58:449–475, Agosto 2007.

[9] I. Pacharoni y I. Zurrián: *Matrix Gegenbauer Polynomials: The 2×2 Fundamental Cases*. Constructive Approximation, 43(2):253–271, Agosto 2015, ISSN 1432-0940. http://dx.doi.org/10.1007/s00365-015-9301-7.

[10] R. K. Perline: *Discrete Time-Band Limiting Operators and Commuting Tridiagonal Matrices*. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 8(2):192–195, 1987. https://doi.org/10.1137/0608016.

[11] H. O. Pollak y H. J. Landau: *Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty — II*. Bell System Technical Journal, 40(1):65–84, 1961. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/j.1538-7305.1961.tb03977.x.

[12] H. O. Pollak y H. J. Landau: *Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty—III: The Dimension of the Space of Essentially Time- and Band-Limited Signals*. Bell System Technical Journal, 41(4):1295–1336, 1962. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/j.1538-7305.1962.tb03279.x.

[13] H. O. Pollak y D. Slepian: *Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty — I*. Bell System Technical Journal, 40(1):43–63, 1961. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/j.1538-7305.1961.tb03976.x.

[14] C. E. Shannon: *A Mathematical Theory of Communication*. Bell System Technical Journal, 27(3):379–423, 1948. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x.

[15] D. Slepian: *Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty — IV: Extensions to Many Dimensions; Generalized Prolate Spheroidal Functions*. Bell System Technical Journal, 43(6):3009–3057, 1964. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/j.1538-7305.1964.tb01037.x.

[16] D. Slepian: *Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis, and Uncertainty—V: The Discrete Case*. Bell System Technical Journal, 57(5):1371–1430, 1978. https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/j.1538-7305.1978.tb02104.x.

[17] D. Slepian: *Some Comments on Fourier Analysis, Uncertainty and Modeling*. SIAM Review, 25(3):379–393, 1983, ISSN 00361445. http://www.jstor.org/stable/2029386.